

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE
LILLE

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES DE LA
MATIÈRE ET DU RAYONNEMENT



THÈSE

présentée par

Christophe SZWAJ

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Lille I

DANS LA SPÉCIALITÉ : LASERS, MOLÉCULES,
RAYONNEMENT ATMOSPHÉRIQUE

PROPAGATION D'ONDES DANS LE SPECTRE D'UN LASER MULTIMODE

Soutenue le 16 Juillet 1997 devant le jury composé de :

Pierre Glorieux	Président
Martine Le Berre	Rapporteur
Stéphan Fauve	Rapporteur
Thierry Debuisschert	Examineur
Jorge Tredicce	Examineur
Dominique Derozier	Directeur de thèse
Serge Bielawski	Codirecteur de thèse

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Université des Sciences et Technologies de Lille. Je suis extrêmement reconnaissant à M. le Professeur Pierre Glorieux, directeur du laboratoire, de m'y avoir accueilli et de m'avoir fait l'honneur de bien vouloir présider le jury de cette thèse.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Mme Martine Le Berre, Directeur de Recherche C.N.R.S. au L.P.P.M. d'Orsay, à M. Stéphan Fauve, Professeur à l'E.N.S. de Lyon, pour avoir bien voulu rapporter sur ce travail.

Je tiens à remercier très fortement MM. Thierry Debuisschert du L.C.R. Thomson CSF d'Orsay, et Jorge Tredicce de l'I.N.L.N. de Sophia Antipolis pour avoir bien voulu se joindre au jury.

Les mots me manquent pour exprimer ma gratitude à Dominique Dezozier, mon directeur, et à Serge Bielawski, mon codirecteur de thèse. Leur aide, leurs conseils avisés et leur soutien m'ont été très précieux pour mener ce travail à son terme. Tout au long de ces trois ans, j'ai pu apprécier leurs qualités scientifiques mais aussi leur disponibilité, leur bonne humeur et leur amitié. C'est une chance de travailler dans une telle ambiance.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à MM. Yakov Khanin, vice-directeur de l'Institut de Physique Appliquée de Nizhny-Novgorod (Russie), et Thomas Erneux, chercheur qualifié F.N.R.S. à l'Université Libre de Bruxelles (Belgique), pour les discussions stimulantes que nous avons eues, et les conseils pertinents qu'ils m'ont prodigués. Les visites de M. Kenju Otsuka, Professeur à l'Université de Tokai (Japon), au laboratoire se sont révélées décisives, je l'en remercie très fortement.

Je suis très reconnaissant au C.N.E.T. Lannion d'avoir contribué à la réussite des expériences en nous fournissant de la fibre dopée très performante.

Tout comme pour Dominique et Serge, une mention spéciale pour Marc Lefranc, qui outre des qualités scientifiques exceptionnelles, s'est toujours montré disponible et dévoué, et m'a beaucoup stimulé et soutenu. J'ai largement mis ses compétences informatiques à contribution, je le remercie pour toute son aide.

Je suis très reconnaissant à Monsieur Jean-Marc Lapauw et toute l'équipe de l'atelier de l'électronique. Ils ont beaucoup contribué à la réussite des expériences, et m'ont toujours montré de la bonne humeur malgré mes nombreuses sollicitations. Je remercie également Daniel Lesage et son équipe de l'atelier de mécanique, ainsi que Serge Fauquemberg à la photocopie.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Frédéric Han et Claire

Bornais pour leur assistance mathématique et leur profond soutien, à Marc Douay, Jean François Henninot et Vincent Havard pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans les expériences.

Je remercie tous les membres du laboratoire, en particulier : Guillaume Boulant et Jérôme Plumecoq, pour le soutien, les discussions stimulantes et la bonne humeur qu'ils ont fait régner dans l'équipe, David Leroy pour l'aide apportée dans les expériences. Mohamed Benatsou, Jean Yves Gadat et Vincent Lecoche avec qui j'ai partagé le bureau 339 avec beaucoup de plaisir; mais également Mohamed Bouazaoui, Stéphane Randoux, Jaouad Zemmouri, ainsi que Abdu Babay, Emmanuel Bailleul, Arnaud Boulnois, Jean Christophe Celet, Nour-Edine Fetthoui, Hélène Fichoux, Fahd Kaghat, Eric Louvergneaux, Ramon Herrero, Fabrice Raynaud, Eric Rusinek, Sébastien Tranchard, David Wilkowski, Assia Zellagui.

Je tiens à remercier MM. Dr. Gian Luca Oppo, Pr. Steve Barnett et Pr. Willie Firth de m'avoir accueilli dans leur équipe à l'Université de Strathclyde et d'avoir facilité ma phase finale de rédaction. Je remercie également Graeme Harkness pour son aide précieuse en informatique, Angus Lord pour avoir facilité mon intégration au sein de l'équipe, ainsi que tous mes nouveaux collègues.

Je suis très reconnaissant à tous mes amis pour leur soutien.

Enfin, je tiens à remercier toute ma famille pour la confiance, l'aide et le soutien qu'elle m'a apporté tout au long de ma scolarité et durant cette thèse.

A ma famille

Table des matières

Introduction	5
1 Position du problème	11
1.1 Quelques rappels	14
1.1.1 Classification des lasers	14
1.1.2 Effets homogènes et inhomogènes	15
1.1.2.1 Effets homogènes	15
1.1.2.2 Effets inhomogènes	18
1.1.3 Dynamique des lasers classe B	21
1.1.3.1 Laser monomode	21
1.1.3.2 Laser multimode à élargissement homogène	25
1.1.3.3 Laser multimode à élargissement inhomogène	30
1.2 Modélisation	31
1.2.1 Propriétés du laser à fibre	31
1.2.1.1 Propriétés liées au milieu amplificateur	31
1.2.1.2 Propriétés liées à la cavité	33
1.2.2 Modèles	33
1.2.2.1 Modèle de laser multimode à élargissement inhomogène	34
1.2.2.2 Projection sur les modes longitudinaux	35
1.2.2.3 Prise en compte de la polarisation	36
2 Le laser à fibre: une chaîne d'oscillateurs couplés	39
2.1 Etude expérimentale et numérique	42
2.1.1 Dispositif expérimental	42
2.1.2 Intégration numérique: principes et paramètres	54
2.1.2.1 Principes de l'intégration	54
2.1.2.2 Détermination des paramètres	57

2.1.3	Réponse à une modulation locale du spectre	57
2.1.4	Réponse à une impulsion localisée dans le spectre	61
2.1.5	Courbe de dispersion.	64
2.2	Interprétation au moyen d'un modèle simple	67
2.2.1	Le modèle	67
2.2.2	Relation de dispersion	70
2.2.3	Calcul des réponses à différentes perturbations au moyen de la courbe de dispersion	76
2.2.3.1	Principe du calcul de la réponse	76
2.2.3.2	Perturbation sinusoïdale du spectre	78
2.2.3.3	Impulsion localisée	78
2.2.4	Estimation de la largeur homogène	81
2.2.5	Prise en compte des inhomogénéités et des effets de bords	85
2.3	Influence de la polarisation	93
2.3.1	Expérience résolue en polarisation	93
2.3.2	Modèle	93
3	Morphogénèse dans le spectre du laser	105
3.1	Rappel sur les excitations paramétriques d'ondes	109
3.1.1	Excitation paramétrique d'un système à un degré de liberté	109
3.1.2	Instabilité de Faraday	110
3.2	Méthodes expérimentales et numériques	113
3.2.1	Modifications du dispositif expérimental	113
3.2.2	Simulations numériques	116
3.3	Excitation paramétrique d'ondes dans le spectre	119
3.3.1	Mise en évidence expérimentale et numérique d'une ex- citation paramétrique	119
3.3.2	Mise en évidence théorique de l'excitation paramétrique	124
3.3.3	Variations spatiales des paramètres de contrôle	129
3.3.3.1	Dépendance spatiale du nombre d'onde	129
3.3.3.2	Apparition d'ondes progressives	130
3.3.3.3	Coexistence de différents regimes	131
3.3.3.4	Défauts	133
3.4	Instabilités secondaires	138
3.4.1	Instabilité de phase	138
3.4.2	Création-annihilation de cellules	139
3.4.3	Apparition d'une sous-structure	145

3.4.4 Prévisions numériques à faible amplitude de modulation 153

Conclusion 157

A Annexe: Disparition et réapparition des fréquences propres 161

A.1 Disparition des fréquences propres en l'absence d'émission spontanée 162

A.2 Influence de l'émission spontanée 163

A.3 Estimation du nombre de fréquences propres 164

Bibliographie 167

Introduction

Depuis les travaux de Poincaré à la fin du siècle dernier, il est connu qu'un système à trois degrés de liberté, gouverné par des équations déterministes non linéaires, peut avoir un comportement imprédictible. Pourtant, ce n'est que depuis le début des années soixante dix, que la dynamique non linéaire connaît une expansion importante. Une multitude de travaux aussi bien théoriques qu'expérimentaux, sur les systèmes à faible nombre de degrés de liberté (typiquement 3), ont été menés en hydrodynamique [1] en chimie [2], en optique [3, 4], et en électronique [5]. Ils ont montré le caractère universel de la dynamique non linéaire [6] et ont permis de développer des outils puissants d'interprétation [7, 8] (bifurcations, "routes" vers le chaos ...) et de caractérisation des régimes chaotiques [9] (section de Poincaré, exposants de Lyapunov, analyse topologique [10]...). Ces outils permettent une meilleure compréhension des phénomènes observés, mais également certaines applications comme le contrôle du chaos [11, 12] ou la communication par le chaos [13].

Toutefois, les systèmes à peu de degrés de liberté ne représentent qu'une faible partie des systèmes dynamiques, et n'existent que pour des conditions expérimentales précises et particulières. En règle générale, les systèmes physiques possèdent un grand nombre voire une infinité de degrés de liberté. Bien que leur dynamique puisse parfois se ramener à celle d'un système à 3 degrés de liberté, cela n'est pas toujours le cas et il est donc indispensable d'étudier la dynamique de ces systèmes.

Les systèmes spatialement étendus représentent une catégorie particulière. La formation des structures spatiotemporelles a fait l'objet de recherches actives aussi bien théoriquement qu'expérimentalement, dans des domaines aussi différents que l'hydrodynamique (convection de Rayleigh-Bénard [14, 15], de Taylor-Couette [15]), la chimie (réaction de Belousov-Zhabotinski [16, 17]), les cristaux liquides (convection électrodynamique dans les nématiques) [18, 7]), ou l'optique [19, 20, 21].

Tout comme pour l'hydrodynamique, les relations entre optique et dynamique non linéaire sont privilégiées [22]. En effet, non seulement la dynamique non linéaire permet d'expliquer certaines propriétés et régimes de fonctionnement des lasers (comme le chaos [23] et les états d'antiphase [24, 25]), mais de plus, bon nombre de systèmes optiques s'avèrent d'excellents outils d'investigation de la dynamique non linéaire. Les raisons sont, d'un point de vue expérimental, des échelles de temps caractéristiques compatibles avec l'acquisition d'un grand nombre de données; d'un point de vue théorique, la possibilité d'associer un type de laser à une classe entière de systèmes dy-

namiques. Ainsi, un laser monomode peut être assimilé à un oscillateur non linéaire, ce qui s'est révélé décisif pour les études sur le chaos dans les lasers [3, 23]. En ce qui concerne les systèmes à grand nombre de degré de liberté, les lasers multimodes transverses [26, 27, 20, 28, 29], les oscillateurs à gain photoréfractif [30], les milieux Kerr avec contre-réaction [31, 32] ou encore les lasers couplés [33] ont suscité un vif intérêt ces derniers temps pour étudier la dynamique des systèmes spatiotemporels.

Toutefois, les variables d'espace ne sont pas forcément adaptées pour interpréter la dynamique des systèmes à grand nombre de degré de liberté. C'est le cas par exemple des lasers multimodes à élargissement homogène. Ces derniers peuvent être considérés comme des systèmes d'oscillateurs non linéaires globalement couplés, et la variable d'espace n'est pas pertinente puisque la permutation de deux oscillateurs ne change pas le système. L'étude de leur dynamique s'est avérée très fructueuse (états d'antiphase [24], clustering [34]) bien que leur dimension d'espace n'ait pas été prise en compte.

Nous allons montrer dans cette thèse, que pour certains lasers multimodes longitudinaux (lasers de classe B à élargissement inhomogène), la variable adaptée pour interpréter la dynamique n'est plus la variable associée à l'espace usuel, mais celle associée au spectre du laser. Nous allons pour cela, effectuer une analogie entre un laser multimode et un système d'oscillateurs localement couplés. La variable "d'espace" sera l'indice des modes longitudinaux. Cette approche, si elle s'avère valide, mettra à notre disposition les outils propres à la physique des ondes [35] pour interpréter les résultats expérimentaux et numériques.

Le premier chapitre sera consacré à positionner le sujet. Nous rappellerons, tout d'abord, certaines notions relatives aux effets homogènes et inhomogènes intervenant dans les lasers et leur influence sur la dynamique de ces derniers. Ceci permettra de passer en revue l'état des connaissances dans ce domaine, de situer notre sujet et de motiver l'approche que nous utiliserons. Nous établirons alors les modèles qui nous serviront dans la suite.

Le second chapitre aura pour objet de montrer qu'un laser multimode à élargissement inhomogène peut être considéré comme une chaîne d'oscillateurs couplés, ou un système spatiotemporel à une dimension selon le point de vue adopté. Après avoir mis en évidence, expérimentalement et numériquement, la propagation d'ondes dans le spectre du laser, nous interpréterons les résultats obtenus au moyen d'un modèle simple de laser multimode. Nous remarquerons que la dynamique en régime linéaire est entièrement déterminée par une simple relation de dispersion. Des études complémentaires prendront

en compte les effets dus aux inhomogénéités du spectre ainsi que ceux dus à la polarisation.

La dynamique en régime non linéaire (lors d'une forte modulation de la pompe) sera abordée au dernier chapitre. Nous mettrons tout d'abord en évidence expérimentalement et théoriquement que la modulation de la pompe induit une excitation paramétrique d'ondes dans le spectre du laser, phénomène comparable à l'instabilité de Faraday dans un fluide soumis à une oscillation verticale [36, 15]. Nous étudierons en particulier l'influence des variations spatiales des paramètres de contrôle pour cette excitation paramétrique, et montrerons qu'elles conduisent à des changements qualitatifs importants. Nous verrons enfin les différents types d'instabilités secondaires observables dans ce système, ce qui nous permettra d'avoir un aperçu de la richesse des comportements observables qui motivent de nombreuses investigations ultérieures.

Chapitre 1

Position du problème

La dynamique des lasers est étudiée depuis l'invention de ces derniers, il y a plus de trois décennies. Dans les années 60, les principales motivations furent de comprendre l'origine physique de certains phénomènes observés, comme les régimes impulsionnels (*spiking* [37]), et de maîtriser certains types de fonctionnement, comme le blocage de modes [38] et le *Q-switching* [39].

Depuis les années 80, l'étude de la dynamique des lasers a pris une orientation plus fondamentale. Les lasers se révèlent en effet d'excellents outils d'investigation de la dynamique non linéaire. De nombreux travaux ont été effectués dans ce sens : observation [3] et analyse du chaos [10, 40], dynamique des systèmes globalement couplés [24, 34], ou encore des systèmes spatiotemporels [41].

Le système que nous étudions (laser à fibre dopée) est un système à grand nombre de degrés de liberté se trouvant à l'interface entre les systèmes globalement couplés et les systèmes localement couplés (systèmes spatiotemporels).

Dans un premier temps, nous allons rappeler un certain nombre de notions relatives à la dynamique des lasers. En particulier, après avoir défini une classification des lasers d'un point de vue dynamique, nous décrirons les principaux effets homogènes et inhomogènes influençant la dynamique de ces derniers. Nous passerons alors en revue les principaux phénomènes dynamiques caractéristiques des lasers. Nous nous apercevrons que l'identification d'une classe de lasers (lasers multimodes à élargissement homogène) à une classe plus générale de systèmes dynamiques (systèmes globalement couplés) offre de nombreux outils permettant l'interprétation des phénomènes observés. Nous pouvons alors espérer la même richesse d'interprétation en comparant dans ce travail les lasers multimodes à élargissement inhomogène (lasers à fibre dopée) et les systèmes localement couplés. La seconde partie de ce chapitre sera consacrée à établir les modèles de lasers que nous utiliserons dans la suite de ce travail. Après avoir précisé des propriétés caractéristiques du laser à fibre, nous établirons un modèle de laser multimode à élargissement inhomogène qui servira de référence pour les simulations. Un autre modèle sera également introduit permettant de prendre en compte les effets dus à la polarisation.

1.1 Quelques rappels

1.1.1 Classification des lasers

Etant donné la diversité des lasers existants, un certain nombre de classifications ont été introduites. Elles peuvent porter sur la longueur d'onde du rayonnement émis, le type de matériau utilisé (solide, liquide, gaz), le type de pompage... Parmi toutes ces classifications, l'une d'entre elles porte directement sur les propriétés dynamiques.

L'état d'un système quantique peut changer sous l'effet d'un rayonnement électromagnétique, mais également grâce aux processus de relaxation (émission spontanée, transitions non radiatives...). Ces processus de relaxation ont une influence importante sur les propriétés dynamiques du système. En effet, ils définissent la façon dont les différents degrés de liberté du système vont réagir à un changement d'état quelconque et rejoindre leur état d'équilibre. Si on considère un milieu à deux niveaux d'énergie, il peut être décrit par deux paramètres de relaxation : le taux de relaxation de l'inversion de population γ_{\parallel} , et le taux de relaxation de la polarisation γ_{\perp} . Dans le cas d'un laser, en plus des équations pour le milieu, il faut introduire une équation pour le champ et par conséquent tenir compte du temps de vie τ_c des photons dans la cavité. Nous introduisons à cet effet le paramètre κ avec $\kappa = \frac{1}{\tau_c}$.

Les rapports entre les différents paramètres γ_{\parallel} , γ_{\perp} et κ influencent fortement la dynamique des lasers. Quatre cas peuvent être distingués et une classe est associée à chacun de ces cas [42, 43].

Classe A : $\kappa \ll \gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp}$

Le milieu actif suit sans délai les variations du champ. Les variables associées au milieu sont éliminées adiabatiquement des équations du laser. La dynamique du laser est décrite par la (les) variable(s) associée(s) au champ.

Classe B : $\gamma_{\perp} \gg \kappa$ et $\gamma_{\perp} \gg \gamma_{\parallel}$

Seule la polarisation suit le champ sans délai et c'est par conséquent la seule variable éliminée adiabatiquement. Il reste donc un ensemble de variables associées au champ et à l'inversion de population.

Classe C : $\kappa \approx \gamma_{\perp}$

Aucune des variables ne peut être éliminée adiabatiquement.

Classe D : $\kappa \gg \gamma_{\perp}, \gamma_{\parallel}$

Ce cas est un peu plus "exotique", le champ doit être éliminé, et il ne reste que les variables associées au milieu.

Dans le cas d'un laser monomode, l'appartenance à la classe A signifie que l'espace des phases possède une dimension et les attracteurs sont représentés uniquement par des points fixes, les transitoires sont aperiodiques [44]. Pour la classe B, l'espace des phases possède deux dimensions, les attracteurs peuvent être des points fixes ou des cycles limites [45]. Les transitoires peuvent être oscillatoires. Pour la classe C, aucune des variables ne peut être éliminée adiabatiquement. L'espace des phases a plus de deux dimensions, ce qui permet l'existence d'attracteur chaotique [46].

La classe B, celle qui nous intéresse, est la plus représentative. Elle comprend les lasers solides (YAG), à semi-conducteur, les lasers à gaz moléculaire à basse pression (CO_2). La classe A comprend les lasers à colorant et la plupart des lasers à gaz atomique (HeNe). La classe C comprend essentiellement les lasers à gaz dans l'infrarouge lointain. La classe D est la moins représentative, elle inclut seulement certains types de masers [42].

1.1.2 Effets homogènes et inhomogènes

L'interaction entre les atomes du milieu actif et le champ est modifiée par un certain nombre de mécanismes. Ces derniers sont dit homogènes lorsque leur action est la même sur tout les atomes, inhomogène lorsqu'elle diffère selon les atomes [47]. Ces mécanismes sont relatifs aussi bien aux fréquences de transition (élargissement), qu'à la structure spatiale du milieu actif (*spatial hole burning*) ou à la distribution de l'orientation des dipôles. Le caractère homogène ou inhomogène de ces effets influence le fonctionnement monomode ou multimode du laser mais aussi sa dynamique.

1.1.2.1 Effets homogènes

a/ Elargissement homogène

La réponse d'une collection d'atomes soumis à une excitation électromagnétique se caractérise par une raie spectrale de largeur finie. La largeur de cette raie est le résultat des phénomènes d'élargissement, qui sont de deux types : homogène et inhomogène.

Les mécanismes d'élargissement homogène agissent sur les atomes d'une

collection de manière identique. Les principales causes sont [47]:

Les mécanismes de pertes d'énergie (liés à la désexcitation du niveau supérieur de la transition et auxquels est associé γ_{\parallel}):

- désexcitations radiatives vers d'autres niveaux (émission spontanée).
- désexcitations non radiatives (dans les gaz, collisions inélastiques avec d'autres atomes, collisions avec les parois; dans les solides, interaction avec le milieu (phonons)).

Les mécanismes de déphasage (auxquels est associé γ_{\perp}):

- collisions élastiques (gaz)
- élargissement par phonons (dans les solides). Les fréquences exactes des transitions atomiques sont affectées par le voisinage des atomes du réseau (en particulier par la distance exacte à ces atomes). Les vibrations thermiques du milieu vont moduler aléatoirement ces distances et par conséquent moduler aléatoirement les fréquences de transitions. Le résultat peut être une modulation aléatoire de la phase du moment dipolaire. Cet élargissement est, par conséquent étroitement relié à la température du milieu.
- élargissement dipolaire (dans les matériaux où la densité d'atomes est importante).

La forme de raie résultant des mécanismes d'élargissement homogène est généralement décrit par une lorentzienne:

$$\mathcal{L}(\nu) = \frac{1}{\pi\Delta} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta}\right)^2} \quad (1.1)$$

où ν est la fréquence, ν_0 la fréquence centrale de la raie, Δ la largeur homogène.

b/ Comportement en l'absence d'inhomogénéités

Dans le cas où le champ dans la cavité est uniforme, son action est la même sur tous les atomes, c'est à dire homogène. Cette uniformité est la plus aisément accessible dans un résonateur en anneau unidirectionnel. De même, les effets inhomogènes liés à la polarisation du champ, seront évités en utilisant des éléments sélectifs en polarisation, afin qu'il ne subsiste qu'une seule polarisation.

Dans le cas où l'élargissement homogène est dominant, le champ uniforme, et les effets de polarisations négligeables, un laser ne peut fonctionner de manière stable que sur un seul mode [48]. En effet, la forme de raie est identique pour tous les atomes (élargissement homogène). L'amplitude de la courbe de gain peut changer suivant les variations de l'inversion de population, mais sa forme reste inchangée. Supposons qu'un certain nombre de modes de la cavité soient compris dans la courbe de gain, figure 1.1. Lorsque le pompage augmente, l'amplitude de la courbe de gain augmente. Une fois le seuil atteint pour un des modes (mode q), ce mode *sature* les populations et le gain ne peut plus augmenter pour les autres modes. Ainsi, seul le mode atteignant le seuil le premier (mode q) pourra entrer en oscillation laser de façon permanente, les autres modes ne pourront pas atteindre la condition de seuil.

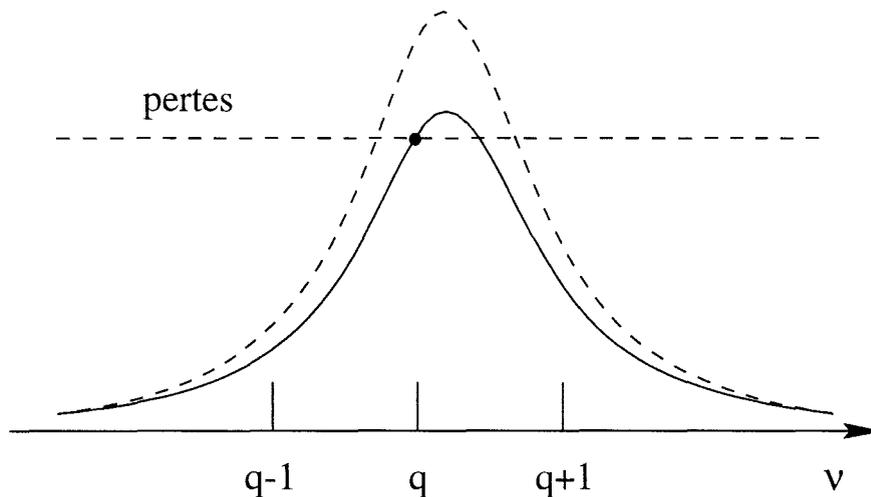


FIG. 1.1 – Cas homogène : La courbe en pointillés correspond au gain non saturé, la courbe en trait plein au gain saturé, le trait horizontal en pointillés aux pertes. Seul le mode q va entrer en oscillation laser.

Le fonctionnement d'un laser en régime monomode, bien qu'étant le plus simple, n'est pas facile à obtenir. De nombreux mécanismes contribuent à rendre l'interaction entre le champ et les atomes inhomogène et par conséquent le fonctionnement du laser multimode.

1.1.2.2 Effets inhomogènes

Les effets inhomogènes sont essentiellement de 3 types: les effets relatifs à la fréquence centrale de la transition (élargissement inhomogène), ceux relatifs à la structure spatiale du milieu actif et enfin ceux concernant l'orientation des dipôles.

a/ Elargissement inhomogène

Les mécanismes d'élargissement inhomogène [47], contrairement à ceux d'élargissement homogène, n'ont pas les mêmes effets sur tous les atomes de l'ensemble sur lequel ils agissent. Ces atomes, pris dans un état identique, vont voir leur fréquence de transition distribuée aléatoirement sous l'action des mécanismes d'élargissement inhomogène.

Dans les gaz, l'élargissement inhomogène est dû principalement à l'effet Doppler. En ce qui concerne les solides, l'élargissement inhomogène a un effet important essentiellement dans les matériaux amorphes (cas des fibres dopées).

Dans les matrices vitreuses, les atomes formateurs de ces dernières sont disposés de façon aléatoire. Les ions se trouvent alors dans des sites (ou environnement) très différents, et sont, de ce fait, soumis à des champs locaux très différents [49]. Cela se traduit par une répartition aléatoire des niveaux d'énergies. La fréquence centrale d'une transition est alors considérée comme une variable aléatoire. La loi de distribution de cette variable est caractérisée par une demi-largeur à mi-hauteur appelée largeur inhomogène. Cette largeur inhomogène est de l'ordre de plusieurs dizaines d'Angström (40 Å pour l'ion Nd^{3+} dans la silice [50]). Elle est indépendante de la température.

Dans les matrices cristallines, l'élargissement inhomogène est induit par les défauts et les impuretés. Toutefois, cet élargissement est généralement très faible (quelques dixièmes d'Angström [47]) et n'est observable qu'à très basse température.

A ces effets d'élargissement inhomogène viennent se greffer ceux d'élargissement homogène. Les atomes associés à une fréquence ν_a vont interagir avec les modes du champ de fréquences différentes, avec une portée de l'ordre de la largeur homogène, figure 1.2.

L'élargissement inhomogène influence fortement le fonctionnement du laser. Contrairement au cas homogène, l'effet laser s'opère grâce à la contribution de différents sites. Le laser peut osciller sur plusieurs modes à la fois,

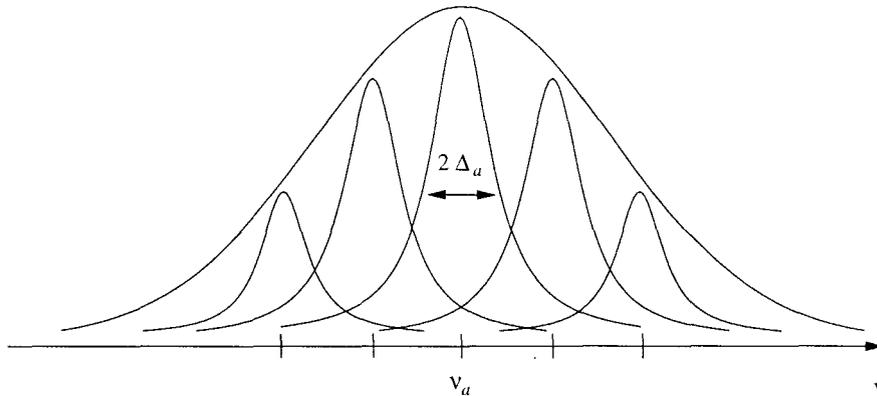


FIG. 1.2 – Les atomes associés à la fréquence ν_a interagissent avec les modes du champ de fréquences voisines sur une portée de l'ordre de la largeur homogène Δ_a .

pourvu que le gain excède les pertes pour ces modes. Cela se traduit par une saturation des populations dont les fréquences sont en résonance avec celles des modes de la cavité. Le profil de la courbe de gain, présente des trous aux fréquences correspondant aux différents modes, c'est le *hole burning* spectral [47], figure 1.3.

b/ Autres effets inhomogènes

Structure spatiale du champ :

Dans un résonateur de type Fabry-Pérot, des ondes stationnaires s'établissent, ce qui confère au champ une structure spatiale, et par conséquent, inhomogène. Cette inhomogénéité permet le fonctionnement en régime multimode d'un laser à élargissement homogène. Considérons un laser de ce type opérant sur un mode q . L'amplitude du champ dans la cavité aura un profil d'onde stationnaire correspondant au mode oscillant. L'inversion de population sera saturée spatialement également de façon périodique, figure 1.4, un réseau est ainsi constitué. Les compétitions entre modes par saturation croisée seront affaiblies par ce processus. Par exemple, au centre de la cavité, l'onde stationnaire correspondant au mode $q+1$ aura un ventre correspondant à un ventre de l'inversion de population, ce qui rendra possible l'oscillation de ce mode, c'est le *hole burning* spatial [37].

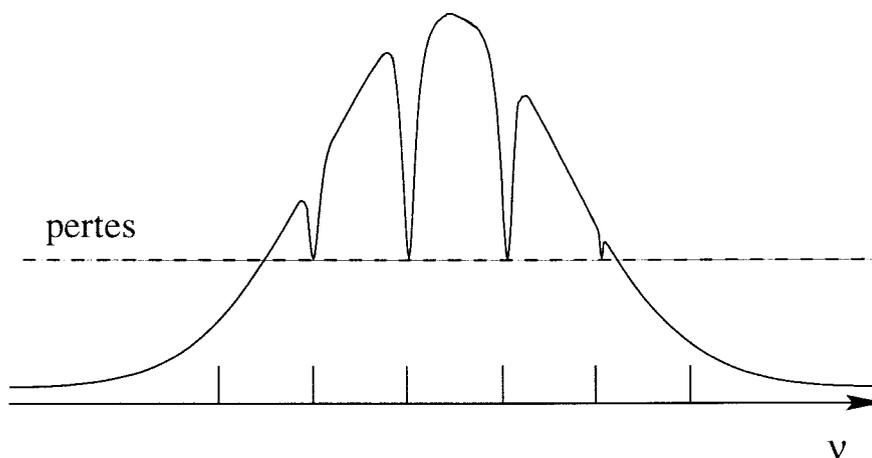


FIG. 1.3 – Dans le cas de l'élargissement inhomogène, la courbe de gain présente des trous correspondants à la saturation des classes de populations associées aux modes sur lesquels fonctionne le laser.

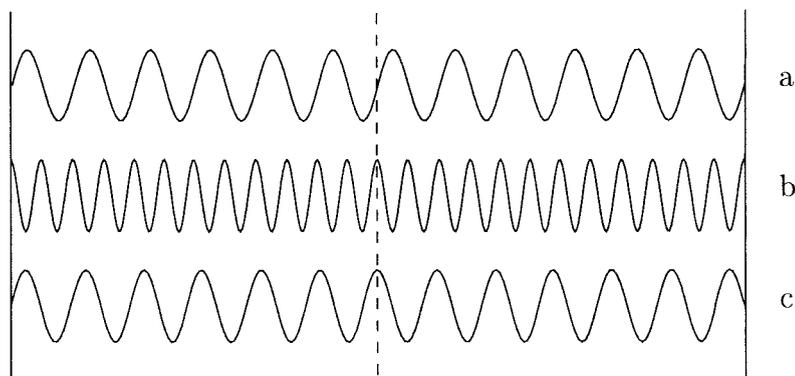


FIG. 1.4 – a: onde stationnaire pour le mode q , b: réseau créé par le mode q dans l'inversion de population, c: onde stationnaire pour le mode $q+1$. Au centre de la cavité, le champ pour le mode $q+1$ et l'inversion de population sont à leur valeur maximum autorisant le fonctionnement du laser sur le mode $q+1$

Effets dus à la polarisation :

Une autre source d'inhomogénéité est due à l'orientation aléatoire des sites de faible symétrie [51]. Les ions vont interagir plus fortement avec certaines directions du champ. Dans une cavité, en règle générale, il existe, dans un domaine de longueur d'onde donné, deux états propres de polarisation [52], c'est à dire deux états de polarisation (en général elliptiques) qui sont conservés après un aller-retour dans la cavité. La conséquence est un fonctionnement possible du laser sur deux modes, chacun des modes étant associé à un état propre de polarisation.

Bien que les sites soient répartis de façon aléatoire, cette propriété se manifeste à l'échelle macroscopique par le phénomène de *hole burning* de polarisation [53].

Ce type de fonctionnement a été observé dans différents lasers, lasers à fibre [54, 25, 55], dans les lasers à colorants [56], dans les lasers à gaz [57, 58] ou encore dans les lasers LNP (Lithium-Niobate-Phosphate) [59].

Nous avons passé en revue les principaux effets homogènes et inhomogènes intervenant dans les lasers. Ces mécanismes, d'une manière générale, déterminent le fonctionnement du laser sur un ou plusieurs modes. Leur influence sur la dynamique fait l'objet de la section suivante.

1.1.3 Dynamique des lasers classe B

Nous focalisons notre étude sur la dynamique des lasers classe B, cette dernière regroupant la plupart des lasers (voir 1.1.1). Les autres classes de lasers présentent des phénomènes tout aussi dignes d'intérêt, mais nous risquerions de nous éloigner de notre propos en les décrivant. Nous allons rappeler un certain nombre de résultats relatifs à la dynamique des lasers monomodes, et à celle des lasers multimodes.

1.1.3.1 Laser monomode

Un laser monomode classe B est un système à deux degrés de liberté. Il ne peut avoir un comportement chaotique de façon autonome, sans l'adjonction d'un troisième degré de liberté (par exemple en modulant un des paramètres de contrôle [3, 4, 23]). Nous allons, dans un premier temps, rappeler l'analogie classique entre laser monomode autonome et oscillateur amorti. Pour cela, nous allons montrer la présence d'oscillations de relaxation en régime linéaire

[60, 42], nous verrons ensuite l'effet de l'émission spontanée sur ces oscillations, et comment le caractère non linéaire de cet oscillateur peut être mis en évidence. Dans un second temps, nous considérerons l'application d'une modulation à ce laser.

a/ Laser autonome

Considérons un laser ne présentant qu'un mode de cavité et dont le milieu laser est homogène aussi bien d'un point de vue spatial que spectral (élargissement homogène dominant). Les équations d'évolution sont les suivantes (en variables adimensionnées) [45]:

$$\dot{m} = m(d - 1) + a d \quad (1.2a)$$

$$\dot{d} = \gamma[A - d(1 + m)] \quad (1.2b)$$

m représente l'intensité, d l'inversion de population, A le paramètre de pompage, le temps est rapporté au temps de vie du photon dans la cavité τ_c , $\gamma = \gamma_{\parallel} \tau_c$ avec γ_{\parallel} le taux de relaxation des populations. a représente le coefficient d'émission spontanée [61, 62]. Dans un premier temps nous allons négliger a (ceci est justifié car généralement a est très faible). Le système 1.2 possède deux états stationnaires correspondant au laser éteint ($\bar{m} = 0, \bar{d} = A$) et au laser en fonctionnement ($\bar{m} = A - 1, \bar{d} = 1$). Nous posons $m = \bar{m} + \mu$, où μ est la déviation par rapport à l'état stationnaire \bar{m} . Le système linéarisé pour la seconde solution s'écrit :

$$\ddot{\mu} + \gamma A \dot{\mu} + \gamma(A - 1)\mu = 0 \quad (1.3)$$

L'équation caractéristique correspondant à l'équation 1.3 possède deux racines :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma A}{2} \pm i \sqrt{\gamma(A - 1) - \left(\frac{\gamma A}{2}\right)^2} \quad (1.4)$$

Lorsque $A > 1$, le point fixe ($\bar{m} = A - 1, \bar{d} = 1$) est un foyer stable si le terme sous la racine est strictement positif. Cette condition est pratiquement toujours remplie (dès que $A > 1$) car, pour un laser classe B, γ est très faible ($10^{-3} - 10^{-5}$). L'équation 1.3 décrit par conséquent les oscillations amorties

de l'intensité du laser au voisinage de l'état stationnaire avec une fréquence de relaxation $\omega_r = \sqrt{\gamma(A-1)}$ et un amortissement $\alpha = -\frac{\gamma A}{2}$. Pour les lasers à solides, ω_r est typiquement de l'ordre de la dizaine de kHz à quelques MHz. Pour les lasers à semiconducteurs, ω_r est dans la bande des GHz.

Ces oscillations de relaxation ont donc des fréquences sans commune mesure avec les fréquences optiques. Nous insistons sur le fait que lorsque nous assimilons un laser à un oscillateur, nous considérons une oscillation dynamique et non une oscillation optique.

Si nous prenons en compte l'émission spontanée, les états stationnaires sont modifiés de la façon suivante [25] :

$$\bar{m}_{\pm} = \frac{A-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A-1}{2}\right)^2 + Aa} \quad (1.5a)$$

$$\bar{d}_{\pm} = 1 + \frac{1}{2(1-a)} [A-1 + 2a \mp \sqrt{(A-1)^2 + 4Aa}] \quad (1.5b)$$

si a tend vers 0, nous retrouvons les solutions précédentes. Lorsque $(A-1)^2 \gg a$, c'est à dire dès qu'on est légèrement au dessus du seuil ($a \ll 1$) :

$$\bar{m}_{+} = A-1 + \frac{Aa}{A-1} + o(a^2/(A-1)^4) \quad (1.6a)$$

$$\bar{d}_{+} = 1 - \frac{a}{A-1} + o(a^2/(A-1)^4) \quad (1.6b)$$

Les valeurs propres sont également modifiées par le terme d'émission spontanée, qui augmente la dissipation. Le point fixe défini par l'équation 1.6 est toujours un foyer stable mais le coefficient d'amortissement vaut maintenant:

$$\alpha = -\frac{1}{2}\left(\gamma A + \frac{a}{A-1}\right) + o(a^2/(A-1)^4) \quad (1.7)$$

L'émission spontanée à donc pour effet d'augmenter sensiblement l'amortissement près du seuil. Nous utiliserons cette propriété par la suite pour déterminer expérimentalement l'émission spontanée dans notre laser. La fréquence de relaxation, quant à elle, n'est pas affectée significativement par l'émission spontanée.

Afin de mettre en évidence le fait que le laser est un oscillateur non linéaire, nous négligeons l'émission spontanée et nous introduisons le changement de variable suivant [63, 64, 65]:

$$s = \log\left(\frac{m}{\bar{m}}\right) \quad (1.8)$$

où \bar{m} représente l'intensité à l'état stationnaire ($\bar{m} = A - 1$). Le système 1.2, après élimination de l'inversion de population, s'écrit sous la forme :

$$\ddot{s} + \gamma((A - 1)e^s + 1)\dot{s} + \gamma(A - 1)(e^s - 1) = 0 \quad (1.9)$$

Cette équation décrit le mouvement d'une particule dans un potentiel de Toda [66], figure 1.5. Cette représentation permet d'expliquer en particulier que la fréquence de relaxation en fonction de l'amplitude des oscillations ω_r décroît lorsque l'amplitude augmente [64].

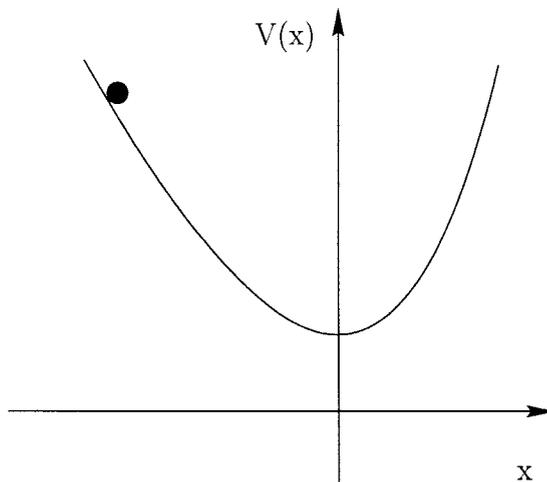


FIG. 1.5 – Analogie avec le mouvement d'une particule dans un potentiel de Toda , $V(x) = e^x - x$

L'analogie entre un laser classe B et un oscillateur sera largement exploitée par la suite.

b/ Laser modulé

L'application d'une modulation périodique à un des paramètres d'un laser monomode fournit un troisième degré de liberté, ce qui permet au laser d'exhiber des comportements dynamiques très riches.

La modulation extérieure peut être appliquée par exemple, aux pertes [67] ou encore à la pompe [68]. Pour de très faibles amplitudes de modulation sinusoidale, le laser peut être considéré comme un système linéaire du second ordre. Sa courbe de résonance est typique de celles de ces systèmes et la réponse à la modulation reste harmonique. Lorsque l'amplitude de modulation augmente, la réponse non linéaire du laser doit être prise en compte. Ces non-linéarités entraînent une déformation de la courbe de réponse et un déplacement vers les basses fréquences de la fréquence de résonance [69, 42]. Lorsque l'amplitude de modulation devient suffisante, la courbe de résonance présente une discontinuité associée à de l'hystérésis [4].

De nombreuses expériences [4, 3, 70] ont montré qu'un laser soumis à une modulation d'un de ses paramètres peut exhiber des cascades de doublement de période menant au chaos.

Les lasers monomodes sont d'excellents outils d'investigation de la dynamique non linéaire des systèmes à faible degré de liberté. Les régimes chaotiques font l'objet de nombreuses études. Ces dernières peuvent porter par exemple sur la caractérisation d'attracteurs étranges à l'aide de l'analyse topologique [10] ou le contrôle du chaos [71].

L'analogie entre laser et oscillateur peut être étendue aux lasers multimodes. Pour des raisons de comportements dynamiques différents, nous distinguons les lasers à élargissement homogène de ceux à élargissement inhomogène.

1.1.3.2 Laser multimode à élargissement homogène

Un laser multimode à élargissement homogène peut être considéré comme un système d'oscillateurs globalement couplés [24]. Dans le cas de l'élargissement homogène, un seul type de site est en jeu. La variation d'intensité d'un seul mode, se traduit par une variation immédiate du gain pour tous les autres modes (saturation croisée). Le couplage entre les oscillateurs est donc global, figure 1.6. Lorsque les paramètres associés aux différents modes sont identiques, le système reste invariant lorsque ces modes sont permutés. Cette invariance est à l'origine d'un ensemble de comportements génériques.

Ce caractère global du couplage influence la dynamique du laser aussi bien

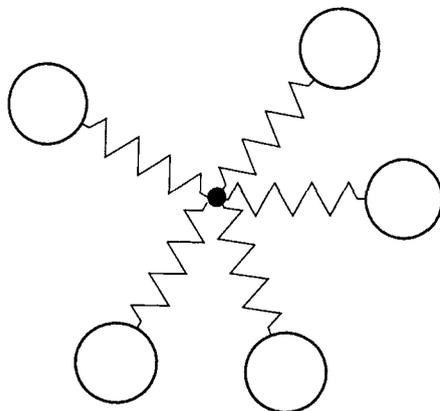


FIG. 1.6 – *Oscillateurs globalement couplés: le système reste invariant par permutation de deux oscillateurs.*

en régime linéaire qu'en régime non linéaire. Dans un premier temps nous allons introduire un modèle de laser multimode à élargissement homogène classiquement utilisé. Nous passerons alors en revue les principaux comportements caractéristiques de ce type de laser, en régime linéaire puis en régime non linéaire.

a/ **Modèle de Tang Statz et DeMars [37]**

Le fonctionnement du laser sur plusieurs modes, lorsque l'élargissement homogène est dominant, est rendu possible grâce aux inhomogénéités de l'inversion de population (cf section 1.1.2). Ces inhomogénéités sont dues essentiellement à la présence d'ondes stationnaires dans la cavité. Nous présentons un modèle prenant en compte la structure spatiale de l'inversion de population, introduit par C. L. Tang, H. Statz et G. DeMars dans les années 60

[37], qui peut être dérivé à partir des équations suivantes [42]:

$$\dot{m}_j = m_j \left(-1 + g_j \frac{1}{V} \int_0^V \psi_j(\mathbf{r}) d(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) \quad (1.10a)$$

$$\dot{d}(\mathbf{r}) = \gamma [A - d(\mathbf{r}) (1 + \sum_{l=1}^N \psi_l(\mathbf{r}) g_l m_l)] \quad (1.10b)$$

m_j désigne l'intensité du mode j , $d(\mathbf{r})$ l'inversion de population (dépendance spatiale), A le paramètre de pompe, le temps est rapporté au temps de vie τ_c du photon dans la cavité, $\gamma = \gamma_{\parallel} \tau_c$, ψ_j décrit la structure spatiale du champ pour le mode j , g_j le gain du mode j , N le nombre de modes, V le volume de la cavité.

Nous considérons ici un laser multimode longitudinal et monomode transverse, dans lequel des ondes stationnaires sont établies, ce qui entraîne la formation d'un réseau pour l'inversion de population :

$$\psi_j(\mathbf{r}) = \psi_j(z) = (1 - \cos(\frac{2\pi n_j}{L} z)) \quad (1.11)$$

L est la longueur de la cavité, n_j le nombre de demi-longueurs d'onde dans la cavité correspondant au mode j . Pour décrire les variations spatiales de l'inversion de population créées par le champ, nous décomposons $d(z)$ en série de Fourier spatiale. Les coefficients ont pour expression:

$$d_0 = \frac{1}{L} \int_0^L d(z) dz \quad (1.12a)$$

$$d_j = \frac{2}{L} \int_0^L d(z) \cos(\frac{2\pi n_j}{L} z) dz \quad (1.12b)$$

Avec ces variables le système peut se mettre sous la forme du modèle de

Tang Statz et DeMars [37] :

$$\dot{m}_j = m_j(-1 + g_j(d_0 - \frac{1}{2}d_j)) \quad (1.13a)$$

$$\dot{d}_0 = \gamma[A - d_0(1 + \sum_{l=1}^N g_l m_l) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N g_l d_l m_l] \quad (1.13b)$$

$$\dot{d}_j = \gamma[d_0 g_j m_j - d_j(1 + \sum_{l=1}^N g_l m_l)] \quad (1.13c)$$

b/ Régime linéaire

L'analyse de stabilité linéaire d'un tel modèle montre qu'il possède un certain nombre de fréquences propres. En règle générale, un laser fonctionnant sur n modes peut posséder jusqu'à n fréquences propres¹ [73, 74, 75]. La plus élevée est la *fréquence de relaxation*, ω_r , associée à l'oscillation en phase de tous les modes. Sa valeur précise est identique à celle d'un laser monomode [74]. Les fréquences restantes sont appelées fréquences *basses*. Dans le cas où le gain est égal pour tous les modes, elles sont dégénérées en une seule fréquence [75]. Cette dégénérescence peut être levée si les modes présentent des gains différents [75]. Le point remarquable est que, quel que soit le nombre de fréquences propres pouvant exister, la dynamique de l'intensité totale n'est caractérisée que par une seule fréquence (la plus élevée) [25, 76]. Ces oscillations de relaxations ont une signature dans le spectre du bruit [60, 77]. Ainsi, en plus de la fréquence haute de relaxation, il existe une série de composantes à basse fréquence dans le spectre de bruit de chaque mode. Ces composantes se compensent dans le spectre de bruit de l'intensité totale et seule la fréquence haute est visible [78]. Cette compensation des composantes fréquentielles [25, 78] est un précurseur du phénomène d'antiphase, typique des systèmes globalement couplés.

c/ Régime non linéaire: état d'antiphase

Un état d'antiphase est un état dynamique pouvant s'observer dans les systèmes d'oscillateurs non linéaires globalement couplés. Il a été prévu par

1. Lorsque le nombre de modes est faible, on observe précisément n fréquences propres. Par contre pour des nombres de modes élevés, certaines de ces fréquences peuvent disparaître [72].

P. Hadley et M. R. Beasley [79] et observés par K. Y. Tsang dans les jonctions Josephson [80], ainsi que dans les lasers multimodes [25, 24, 34, 81, 82]. Cet état d'antiphase est un état périodique dans le temps. Les N oscillateurs composant le système ont la même évolution temporelle, mais ils sont déphasés de $1/N$ période les uns par rapport aux autres. $U_k(t) = U_0(t + Tk/N)$ avec $k = 1, \dots, N$, T étant la période d'évolution de U_0 . Les N oscillateurs étant indiscernables, ils peuvent être permutés, il y a par conséquent $(N-1)!$ états d'antiphase équivalents possibles. Le choix du système entre états d'antiphase résulte de compétition entre les oscillateurs, dynamique de *winner-takes-all* [34], cette compétition est basée sur la saturation croisée dans le cas des lasers. L'évolution temporelle de la variable correspondant à la somme des évolutions des amplitudes des oscillateurs est alors également périodique est de période T/N .

Le fait qu'il y ait $(N-1)!$ états d'antiphase implique la coexistence de $(N-1)!$ attracteurs dans l'espace des phases. Lorsque le nombre d'oscillateurs est relativement important, les états d'antiphases peuvent coexister avec des régimes chaotiques mais aussi des états *cluster* [34].² Pour une condition initiale quelconque, le système se place rarement sur un état d'antiphase. K. Otsuka a montré [34] qu'il était possible d'assigner le système à un état d'antiphase désiré par l'injection d'un signal approprié sur chaque mode. Ce phénomène, en plus d'illustrer le mécanisme de *winner-takes-all*, pourrait avoir des applications en tant que mémoire de grande capacité [34, 76].

Lorsque N augmente, le nombre d'attracteurs augmente de façon explosive, et la distance entre ces attracteurs devient très faible. Cet "entassement" d'attracteurs (*attractor crowding*) [24], fait que le système peut changer d'attracteur sous l'action de très faibles fluctuations, il est par conséquent extrêmement sensible au bruit.

De nombreuses propriétés des lasers multimodes à élargissement homogène ont été étudiées, comme la répartition d'énergie entre les modes [84], la synchronisation [85], l'itinérance chaotique [86]...

Ce nombre important de résultats est dû essentiellement au fait que les lasers à élargissement homogène ont pu être identifiés à une classe précise de systèmes dynamiques, les systèmes globalement couplés [83, 87, 88, 89, 90]. Ainsi les comportements de ces lasers ont pu être interprétés à l'aide de

2. Dans un état *p-cluster*, les modes sont divisés en p groupes. A l'intérieur de chaque groupe, les oscillateurs sont synchronisés entre eux, mais leur régime est différent de ceux des autres groupes [83].

concepts puissants de la dynamique non linéaire.

1.1.3.3 Laser multimode à élargissement inhomogène

Contrairement au cas précédent, relativement peu de résultats ont été obtenus concernant les lasers multimodes à élargissement inhomogène. Ces lasers ne peuvent plus être identifiés aux systèmes globalement couplés, car l'effet laser provient de la contribution de nombreux sites différents. La dynamique sera donc *a priori* différente de celle des lasers à élargissement homogène. Les principaux résultats concernent le démarrage du laser. Les premiers travaux ont concerné l'apparition successive des modes dans le spectre, ils ont essentiellement été menés par V. S. Mashkevich [91, 92, 93, 94]. Des études expérimentales sur la dynamique du démarrage ont été effectuées par S. E. Potapov dans les verres dopés [95] et plus récemment par M. Le Flohic dans les fibres dopées [96].

D'un point de vue théorique, un certain nombre de modèles ont été proposés [97, 98, 42, 99, 96]. La prise en compte de l'élargissement inhomogène conduit à des modèles complexes et difficiles à utiliser. Ainsi les études théoriques à partir de ces modèles ont été faites essentiellement à l'état stationnaire [94, 42]. La dynamique, à notre connaissance, n'a pas été abordée d'un point de vue théorique. Les simulations numériques, étant donné la taille des systèmes à résoudre n'ont pu être envisagées que depuis quelque années seulement [96].

D'une manière générale, il n'y a pas eu vraiment d'interprétation des phénomènes observés. Cela est certainement dû au fait que ces lasers n'ont pas encore été identifiés à une classe de systèmes dynamiques, contrairement aux lasers à élargissement homogène.

Pourtant les lasers à élargissement inhomogène possèdent tous les ingrédients pour être identifiés à une autre classe de systèmes dynamiques, les systèmes localement couplés. En effet, pour ce type d'élargissement, nous savons qu'une classe d'atome interagit avec les modes du champs de fréquence voisine sur une portée de l'ordre de la largeur homogène, figure 1.2. Dans la mesure où la largeur inhomogène est beaucoup plus grande que la largeur homogène, nous pouvons considérer que les modes sont localement couplés.

Notre étude va donc être motivée par l'analogie entre les lasers à élargissement inhomogène et les systèmes localement couplés. Cette analogie va mettre à notre disposition l'éventail des concepts propres à la dynamique des systèmes localement couplés [83] et des systèmes spatiotemporels [15, 7],

pour interpréter la dynamique de ces lasers.

Cette étude nécessite un modèle décrivant les lasers multimodes à élargissement inhomogène, modèle que nous allons présenter dans la section suivante.

1.2 Modélisation d'un laser multimode à élargissement inhomogène: le laser à fibre

Notre étude sera fortement appuyée sur des expériences effectuées sur un laser à fibre dopée, qui est un exemple type de laser à élargissement inhomogène. Afin de pouvoir simuler au mieux les résultats expérimentaux, nous avons besoin de tenir compte de certaines caractéristiques du laser à fibre, mais cela n'enlève rien à la généralité de l'étude.

Dans un premier temps nous allons préciser un certain nombre de caractéristiques du laser à fibre, puis nous décrirons les modèles utilisés.

1.2.1 Propriétés du laser à fibre

Le laser à fibre servant à notre étude utilise une fibre optique dopée au néodyme. La longueur d'onde de pompe est de 810 nm, la longueur d'onde laser est comprise entre 1.06 μm et 1.1 μm [68]. Les caractéristiques géométriques de la fibre sont telles que le laser est monomode transverse mais fortement multimode d'un point de vue longitudinal (nous décrirons plus loin le dispositif expérimental). Certaines propriétés sont liées à la nature intrinsèque du milieu amplificateur (élargissement inhomogène, élargissement homogène, paires d'ions) d'autres sont liées aux caractéristiques optogéométriques de la cavité.

1.2.1.1 Propriétés liées au milieu amplificateur

a/ Elargissement inhomogène

L'ion néodyme étant intégré dans une matrice amorphe (SiO_2 , silice), les effets d'élargissement inhomogène sont prédominants. La largeur inhomogène dans ce type de fibre est de l'ordre de plusieurs dizaines d'Angström (60 Å[96]). Rappelons que la largeur inhomogène est quasiment indépendante de la température.

b/ Elargissement homogène

Les contributions à l'élargissement homogène proviennent essentiellement des desexcitations radiatives τ_R et non radiatives τ_{NR} et des collisions élastiques avec pertes de phase γ_{\perp} . Dans le cas de la fibre dopée au néodyme $\tau_R \approx 460 \mu s$ [100], $\tau_{NR} > 10 ns$ [47], $\gamma_{\perp} \approx ps$ (de l'ordre de l'Å à la dizaine d'Å). Le phénomène dominant provient des collisions élastiques. Elles sont dues aux vibrations du réseau (phonons), ce qui explique une dépendance quasiquadratique de la largeur homogène Δ en fonction de la température ($\Delta \propto T^{\alpha}$ avec $\alpha = 1.7 - 2.3$ [101, 102]). Le domaine relativement large de valeurs répertoriées de α et de Δ provient du fait que ce coefficient est lié à la composition de la fibre [103] (nature et concentration des dopants et codopants). Nous ne disposons pas de données spectroscopiques précises concernant la fibre que nous utilisons. Nous ne connaissons pas en particulier la loi d'évolution précise de la largeur homogène en fonction de la température. Toutefois, les données disponibles concernant des fibres dopées néodyme permettent d'estimer que la largeur homogène est de l'ordre de l'Angström à 77 K et de la dizaine d'Angström à 300 K [96, 101, 50].

La largeur homogène dépendant de la température, nous allons utiliser cette dernière comme paramètre de contrôle dans les expériences. En effet, en diminuant la température de la fibre, nous diminuons la largeur homogène et par conséquent la portée du couplage entre les modes.

c/ Paires d'ions

Nous utilisons une fibre fortement codopée à l'aluminium (14% d'ions), pour éviter la présence de paires d'ions. Ces paires d'ions ont pour effet une diminution du rendement du laser et seraient à l'origine d'instabilités dynamiques (oscillations spontanées) [104, 105, 106]. Elles apparaissent lors de la fabrication de la fibre, deux ou plusieurs ions peuvent se rapprocher jusqu'à former un agrégat. En particulier, les ions peuvent se regrouper par paires. Plus le dopage en terre rare sera important, plus la probabilité de formation de tels agrégats sera importante. Le codopage de la fibre à l'aide d'aluminium permet de se prémunir contre ces effets [107, 104, 108].

1.2.1.2 Propriétés liées à la cavité

a/ Emission spontanée

Malgré l'ouverture numérique faible de la fibre, les photons émis par émission spontanée ont une probabilité importante d'être guidés dans la fibre. Ces photons vont influencer la dynamique du laser de façon sensible en augmentant la dissipation. Nous savons en particulier que l'émission spontanée a une action en régime linéaire sur l'amortissement près du seuil [25], ce qui permettra d'évaluer ce coefficient.

b/ Polarisation

La fibre étant biréfringente, il convient de considérer deux états propres de polarisation. La présence de ces deux états, associée à une distribution de l'orientation des sites dans la fibre, induit des inhomogénéités (cf section 1.1.2.2) qui modifient la dynamique du laser [25, 106, 54]. Il faut noter, qu'en général, ces effets sont visibles uniquement lors d'une observation résolue en polarisation, et se compensent si l'on observe la somme des états propres de polarisation [25, 81].

1.2.2 Modèles

Nous allons introduire deux modèles permettant de décrire les lasers multimodes à élargissement inhomogène. Le premier est un modèle prenant en compte les différentes caractéristiques propres au laser, exceptée la polarisation. Cela est justifié car nous allons commencer l'étude du système en faisant l'observation suivant la somme des états propres de polarisation (intensité totale), afin de se concentrer uniquement sur les propriétés liées à l'élargissement inhomogène.

Dans un premier temps, nous allons rappeler un modèle existant introduit par Ya. Khanin [42]. La complexité de ce modèle (dépendance en z et ν de l'inversion de population) nous amènera à projeter ce modèle sur les modes de la cavité par une démarche analogue à celle utilisée par Tang, Statz et DeMars (cf section 1.1.3.2). Nous introduirons, en fin de partie, un modèle prenant en compte la polarisation.

1.2.2.1 Modèle de laser multimode à élargissement inhomogène

Pour établir notre modèle, nous allons partir d'un modèle élaboré par Ya. Khanin. Ce modèle prend en compte les effets d'élargissement inhomogène, de *hole burning* spatial et de relaxation croisée [42]:

$$\dot{m}_j = -m_j + m_j \int_v \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(\nu - \nu_j) \psi_j(\mathbf{r}) d(\mathbf{r}, \nu) d\nu \quad (1.14a)$$

$$\dot{d}(\mathbf{r}, \nu) = \gamma \left[A\mathcal{H}(\nu) - d(\mathbf{r}, \nu) \left(1 + \sum_{l=1}^N \mathcal{L}(\nu - \nu_l) \psi_l(\mathbf{r}) m_l \right) \right. \quad (1.14b)$$

$$\left. - \gamma_{RC} \left(d(\mathbf{r}, \nu) - \mathcal{H}(\nu) \int_{-\infty}^{+\infty} d(\mathbf{r}, \nu') d\nu' \right) \right] \quad (1.14c)$$

où m_j désigne l'intensité du mode j , $d(\mathbf{r}, \nu)$ l'inversion de population (dépendance spatiale et spectrale), A le paramètre de pompe, le temps est rapporté au temps de vie τ_c du photon dans la cavité, $\gamma = \gamma_{\parallel} \tau_c$, $\psi_j(\mathbf{r})$ décrit la variation spatiale de l'inversion de population, γ_{RC} le coefficient de relaxation croisée, v le volume de la cavité, N le nombre de modes.

$$\mathcal{L}(\nu - \nu_l) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta} \frac{1}{1 + \frac{(\nu - \nu_l)^2}{\Delta^2}} \quad (1.15)$$

est une lorentzienne décrivant la forme de la raie résultant de l'élargissement homogène (Δ largeur homogène). $\mathcal{H}(\nu)$ est une fonction décrivant l'effet de l'élargissement inhomogène.

Dans le cas du laser à fibre dopée, il n'est pas nécessaire de tenir compte de l'effet de la relaxation croisée. En effet, d'une part la concentration en dopant est relativement faible (330 ppm poids), d'autre part il n'y a pas de paires d'ions étant donné le codopage à l'aluminium. Il résulte donc que les interactions entre les ions sont négligeables.

Par contre l'émission spontanée influence notablement la dynamique du laser à fibre [25]. Nous devons par conséquent en tenir compte dans le modèle.

Avec ces quelques transformations, le modèle 1.14 devient:

$$\dot{m}_j = -m_j + (m_j + a) \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{L} \int_0^{L+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(\nu - \nu_j) \psi_j(z) d(z, \nu) dz d\nu \quad (1.16a)$$

$$\dot{d}(z, \nu) = \gamma \left[A\mathcal{G}(\nu) - d(z, \nu) \left(1 + \sum_{l=1}^N \mathcal{L}(\nu - \nu_l) \psi_l(z) m_l \right) \right] \quad (1.16b)$$

Les définitions des variables sont les mêmes que précédemment, auxquelles il faut ajouter a le coefficient d'émission spontanée. Le laser étant monomode transverse, nous ne considérons que des variations longitudinales de l'inversion de population (en z) $\psi_j(z) = (1 - \cos(2\pi n_j z/L))$, L étant la longueur de la cavité, la fonction:

$$\mathcal{G}(\nu) = e^{-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{2(\sigma)^2}} \quad (1.17)$$

est une gaussienne centrée en ν_0 (fréquence centrale de la courbe de gain) permettant de décrire les variations aléatoires de cette fréquence liées, entre autre, à l'élargissement inhomogène. Nous attirons l'attention sur le fait que σ n'est pas la largeur inhomogène ainsi qu'elle est définie conventionnellement, mais prend en compte d'autres contributions. En effet, pour modéliser correctement le laser, il faut tenir compte par exemple de la courbe de réflexion du miroir en fonction de la longueur d'onde ou encore de la sélectivité du pompage. Plutôt que de modéliser un par un tous ces différents effets, ce qui alourdirait considérablement le modèle et nuirait à son utilisation, nous préférons inclure ces contributions dans une largeur inhomogène *équivalente* σ . Dans notre cas, cette largeur inhomogène équivalente est estimée à 25 Å (60Å pour la largeur inhomogène). Nous avons ajouté un terme de normalisation afin que le seuil corresponde à un taux de pompage unité:

$$\mathcal{S} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(\nu - \nu_0) \mathcal{G}(\nu) d\nu \quad (1.18)$$

1.2.2.2 Projection sur les modes longitudinaux

En adoptant une démarche analogue à celle de Tang, Statz et DeMars [37], nous projetons le modèle sur les modes longitudinaux. Nous décomposons

donc $d(z, \nu)$ en serie de Fourier spatiale et ne retenons que les $N + 1$ premiers termes:

$$d(z, \nu) = d_0(\nu) + \sum_{j=1}^N d_j(\nu) \cos\left(\frac{2\pi n_j}{L} z\right) dz \quad (1.19)$$

nous posons

$$d_0(\nu) = \frac{1}{L} \int_0^L d(z, \nu) dz \quad (1.20a)$$

$$d_j(\nu) = \frac{2}{L} \int_0^L d(z, \nu) \cos\left(\frac{2\pi n_j}{L} z\right) dz \quad (1.20b)$$

Avec ces variables le modèle 1.16 s'écrit:

$$\dot{m}_j = -m_j + (m_j + a) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(\nu - \nu_j) (d_0(\nu) - \frac{1}{2} d_j(\nu)) d\nu \quad (1.21a)$$

$$\dot{d}_0(\nu) = \gamma \left[Ag(\nu) - d_0(\nu) \left(1 + \sum_{l=1}^N \mathcal{L}(\nu - \nu_l) m_l\right) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \mathcal{L}(\nu - \nu_l) d_l(\nu) m_l \right] \quad (1.21b)$$

$$\dot{d}_j(\nu) = \gamma \left[d_0(\nu) m_j \mathcal{L}(\nu - \nu_j) - d_j(\nu) \left(1 + \sum_{l=1}^N \mathcal{L}(\nu - \nu_l) m_l\right) \right] \quad (1.21c)$$

Ce modèle est adapté au laser à fibre mais peut s'appliquer de façon générale aux lasers multimodes longitudinaux à élargissement inhomogène, il servira dans le chapitre suivant de modèle de référence pour les simulations numériques. Lorsque des approximations seront effectuées dans la suite, elle seront validées à l'aide de ce modèle.

1.2.2.3 Prise en compte de la polarisation

Nous avons vu que dans une fibre, différents sites doivent être considérés du fait de l'élargissement inhomogène. En plus de ces sites, appelés sites absolus, on distingue les sites secondaires. Les sites secondaires se déduisent des sites absolus par une rotation autour de l'ion. Ils sont caractérisés par

des niveaux de même énergie que les sites absolus considérés. Les fonctions d'ondes se déduisent de celles des sites absolus par simple changement de coordonnées. Cependant un champ électromagnétique ayant une polarisation macroscopique donnée, n'aura pas la même polarisation pour tous les sites secondaires. Les différents sites sont excités de manière sélective.

Nous nous inspirons des travaux de R. Leners [54, 109, 110] pour établir un modèle tenant compte de la polarisation, un ellipsoïde de sections efficaces est associé à chaque site. Les ellipsoïdes associés aux sites secondaires se déduisent par simple rotation autour de l'ion. Seule la rotation d'angle α dans le plan perpendiculaire à l'axe de propagation de la fibre est considérée. En suivant une démarche analogue à celle de R. Leners à partir du modèle 1.16 nous pouvons écrire:

$$\dot{m}_j^x + m_j^x = \tag{1.22a}$$

$$(m_j^x + a) \frac{1}{L} \frac{1}{S} \frac{1}{\pi} \int_0^{L+\infty} \int_{-\infty}^{\pi} \mathcal{L}(\nu - \nu_j^x) \psi_j(z) (1 + \eta \cos(2\alpha)) d(z, \nu, \alpha) dz d\nu d\alpha$$

$$\dot{m}_j^y + m_j^y = \tag{1.22b}$$

$$(m_j^y + a) \frac{1}{L} \frac{1}{S} \frac{1}{\pi} \int_0^{L+\infty} \int_{-\infty}^{\pi} \mathcal{L}(\nu - \nu_j^y) \psi_j(z) (1 - \eta \cos(2\alpha)) d(z, \nu, \alpha) dz d\nu d\alpha$$

$$\dot{d}(z, \nu, \alpha) = \tag{1.22c}$$

$$\gamma \left[\mathcal{AG}(\nu) - d(z, \nu, \alpha) \left(1 + \sum_{l=1}^{+N} \mathcal{L}(\nu - \nu_l) \psi_l(z) [(m_l^x + m_l^y) + \eta \cos 2\alpha (m_l^x - m_l^y)] \right) \right]$$

x et y correspondent aux états propres de polarisation. η tient compte de l'anisotropie des sections efficaces, α est l'orientation du site considéré. L'inversion de population d est fonction de z, ν, α .

La complexité des équations des modèles 1.21 et 1.22, rend particulièrement difficile une interprétation de la dynamique du laser. Les travaux sur ce type de laser, qu'ils soient théoriques ou expérimentaux, ont concerné essentiellement le démarrage du laser. Bien qu'il y ait accord entre théorie et expérience, aucune interprétation à l'aide de concepts simples n'a été proposée.

Pourtant, nous avons vu que la dynamique des lasers classe B pouvait être interprétée au moyen d'une analogie, avec un oscillateur non linéaire (pour un laser monomode), avec un système d'oscillateurs non linéaires globalement couplés (pour un laser multimode à élargissement homogène). Ces analogies se sont révélées particulièrement fructueuses. Nous allons adopter une approche semblable et considérer un laser multimode comme une chaîne d'oscillateurs couplés.

Chapitre 2

Le laser à fibre: une chaîne d'oscillateurs couplés

Le type de couplage influence considérablement la dynamique des systèmes d'oscillateurs couplés. Deux cas extrêmes peuvent être distingués [83] : le cas du couplage global, chaque oscillateur est couplé identiquement à tous les autres ; le cas du couplage local, le couplage se fait uniquement avec quelques voisins. Pour chacun de ces deux cas, de puissants concepts de dynamique non linéaire sont disponibles. Nous avons vu au chapitre précédent, que les lasers multimodes à élargissement homogène sont caractérisés par un couplage global. Nous allons montrer qu'un laser multimode à élargissement inhomogène peut être assimilé à un système d'oscillateurs localement couplés, dans la mesure où la largeur homogène est beaucoup plus petite que la largeur inhomogène. Suivant le point de vue adopté, nous pouvons alors considérer le spectre de ce type de laser comme un milieu de propagation, une chaîne d'oscillateurs ou un système spatiotemporel à une dimension. Nous précisons ici que la variable d'espace est discrète, il s'agit de l'indice j de chaque mode. L'information qui se propage est la déviation de l'intensité des modes par rapport à leur valeur à l'état stationnaire.

Non seulement cette approche, si elle est valide, nous permettra d'interpréter la dynamique des lasers multimodes à élargissement inhomogène, mais surtout d'aborder la dynamique des systèmes spatiotemporels [41, 15].

Le but de ce chapitre est de valider numériquement et expérimentalement cette approche dans le cas du laser à fibre dopée. A cette fin, le laser étant stable naturellement, nous allons perturber ce dernier et observer si une onde se propage dans le spectre. La perturbation à utiliser doit remplir au moins deux conditions, elle doit permettre une interprétation claire et être réalisable expérimentalement.

La commutation brutale de la pompe (démarrage du laser) bien qu'aisément réalisable expérimentalement, engendre une réponse complexe du système [95, 96] ne permettant pas une interprétation simple et sans ambiguïté. Nous préférons perturber localement et faiblement le spectre afin de pouvoir considérer une réponse linéaire du laser.

Dans un premier temps, nous exposerons l'étude expérimentale et numérique. Nous interpréterons ensuite les résultats obtenus au moyen d'un modèle simple de laser multimode, et nous remarquerons que toute la dynamique est entièrement déterminée par une simple relation de dispersion. Finalement, nous traiterons l'influence de la polarisation sur la propagation des ondes.

2.1 Etude expérimentale et numérique

Afin de tester si des ondes peuvent se propager dans le spectre d'un laser multimode, nous avons choisi de perturber localement le spectre. Expérimentalement, cette perturbation peut être réalisée en "brûlant un trou" (*hole burning*) dans la population associée à une partie localisée du spectre. Ce trou [47] (cf chap.1) correspond à la saturation d'une classe homogène par un rayonnement intense. Pour brûler un trou, nous sélectionnons (spectralement) et réinjectons dans le laser, une partie de son propre rayonnement et ce, au moyen d'un réseau placé en configuration Littrow, cela revient à diminuer les pertes pour les modes sélectionnés. Cette perturbation locale du spectre peut être appliquée ou supprimée à volonté au moyen d'un modulateur acousto-optique. Rappelons que la portée du couplage entre les modes dépend de la largeur homogène. Cette dernière évoluant avec la température (suivant une loi quadratique), celle-ci est donc un paramètre de contrôle des expériences. Numériquement, la perturbation peut être simulée en intégrant les équations du laser avec des pertes plus faibles pour un petit groupe de modes. La perturbation sera supprimée en assignant les pertes à leur état original.

Nous décrirons tout d'abord le dispositif expérimental et le principe de l'intégration numérique. Deux expériences seront alors présentées, la première est une modulation périodique de la perturbation locale permettant de mettre en évidence la propagation d'ondes dans le spectre. La seconde est l'application durant un temps bref de la perturbation (impulsion), soulignant le caractère dispersif du milieu. Nous déterminerons alors une courbe de dispersion de ce milieu de propagation à partir des résultats précédents.

2.1.1 Dispositif expérimental

La figure 2.1 représente le dispositif expérimental utilisé. Nous pouvons décomposer ce dernier en un certain nombre de parties afin de clarifier la présentation. Ces parties sont : a/ le laser à fibre, b/ le système de détection et d'analyse du rayonnement, c/ le dispositif permettant la réalisation de la perturbation, d/ le système de contrôle et d'acquisition.

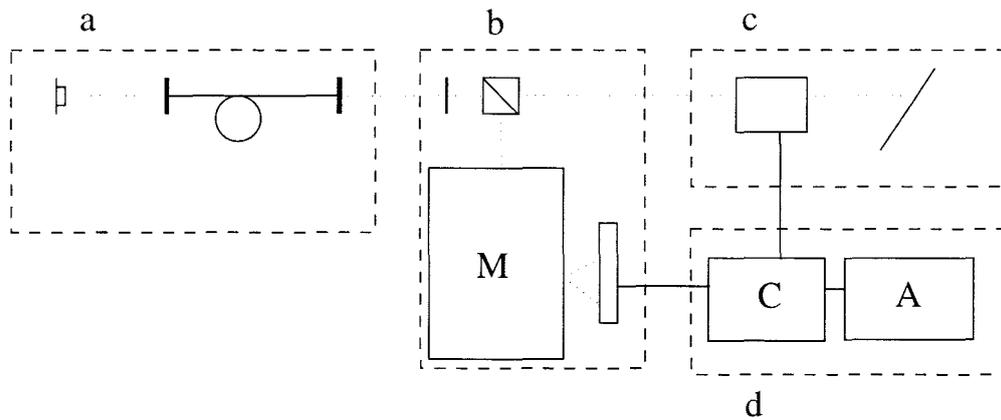


FIG. 2.1 – Dispositif expérimental: a/ laser à fibre; b/ détection et analyse du rayonnement; c/ réalisation de la perturbation; d/ contrôle et acquisition.

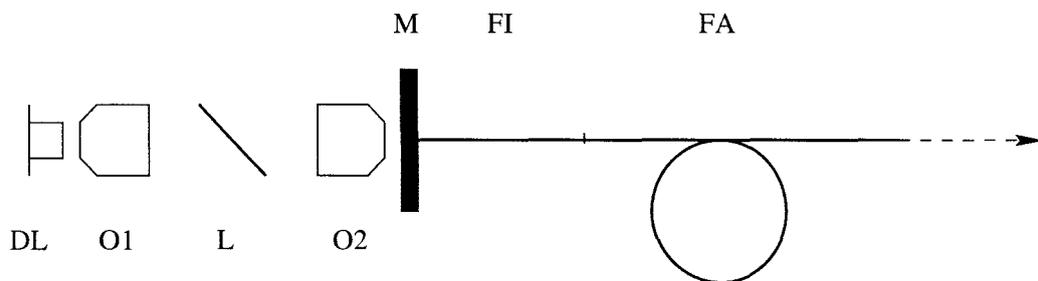


FIG. 2.2 – Laser à fibre: DL diode laser, O1 objectif de collimation, L lame R_{max} à $1.08 \mu m$, O2 objectif de focalisation, M miroir R_{max} à $1.08 \mu m$ et T_{max} à $810 nm$, FI fibre inactive, FA fibre active.

a/ Le laser à fibre

Le laser à fibre, figure 2.2 utilisé dans les expériences est d'une conception semblable à celui utilisé par S. Bielawski *et al.* [25, 55]. Les différences portent essentiellement sur la fibre optique utilisée.

Le milieu actif du laser est constitué par une fibre optique en silice dopée au néodyme (330 ppm poids) fournie par le CNET Lannion (FPGA 519Nd). Cette fibre, codopée à l'aluminium (14 % d'ions) contient une concentration négligeable en paires d'ions (ces paires d'ions pourraient rendre le laser instable, cf chap.1). Sa longueur est de 3.5 m, son diamètre de coeur est de $2.2 \mu\text{m}$ conduisant à une longueur d'onde de coupure de 790 nm. Par conséquent, elle est monomode transverse aussi bien à la longueur d'onde de pompe (810nm) qu'à la longueur d'onde laser ($1.08 \mu\text{m}$).

Afin de pouvoir placer la partie pompée de la fibre dans l'azote liquide (la température est un paramètre de contrôle des expériences), une fibre blanche, de longueur 2.5 m, est soudée devant la fibre dopée au néodyme (cette fibre blanche est en fait une fibre dopée au praséodyme, inactive aux longueurs d'onde de la pompe et du laser. Nous avons choisi cette fibre car elle avait des caractéristiques géométrique proche de la fibre dopée). Cette configuration permet de séparer le miroir d'entrée du début de la fibre dopée plongée dans l'azote liquide. La partie finale de la fibre bien qu'étant active n'est pas immergée dans l'azote. Ceci ne porte pas à conséquence car la majeure partie de la puissance de pompe est déjà absorbée par les ions néodyme de la partie immergée de la fibre. De plus le système étant à quatre niveaux, le laser n'interagit pas avec les ions non pompés.

La cavité laser de type Fabry-Pérot est constituée de deux miroirs. Le premier miroir (M) est un miroir dichroïque transparent à la longueur d'onde de pompe et totalement réfléchissant à la longueur d'onde laser. Ce miroir est en contact avec l'extrémité de la fibre inactive. Le second miroir est formé par l'interface verre-air (4 % de réflexion) à l'extrémité de la fibre dopée. Ce faible coefficient de réflexion permet de diminuer la dissipation du système. L'intervalle spectral libre est d'environ 16MHz.

La puissance de pompe nécessaire au milieu actif est fourni par une diode laser à semiconducteur (SDL 5400), émettant un rayonnement linéairement polarisé à 810 nm de puissance 100 mW. Le faisceau émis est collimaté et injecté dans le coeur de la fibre au moyen de deux objectifs de microscope (NG $\times 10$, ON 0.25). Une lame R_{max} à 45° à la longueur d'onde laser est placée entre les deux objectifs afin d'éviter une contre réaction du laser à

fibre sur lui-même après réflexion sur la diode laser.

La puissance injectée dans la fibre est d'environ 40 mW, ce qui est suffisant pour les expériences. La puissance obtenue à la sortie du laser est de l'ordre de quelques milliwatts, à 2 fois le seuil (le paramètre de pompe maximum A_{max} est de 5 fois le seuil). Il convient de noter qu'en l'absence de modulation le laser ne présente pas d'instabilité.

b/ Dispositif d'analyse du rayonnement

La figure 2.3 représente le dispositif d'analyse du rayonnement. Les travaux menés précédemment sur le laser à fibre ont montré que les effets de polarisation dus à la biréfringence de la fibre devaient être pris en compte [25, 55, 54]. A cette fin, le rayonnement émis par le laser est séparé au moyen d'un cube polariseur en deux composantes polarisées orthogonalement (états propres de polarisation [52]). Une lame demi-onde placée devant le cube polariseur permet, suivant son orientation, de choisir la direction d'analyse. Les expériences ont été menées, dans un premier temps, en observant la somme des états propres de polarisation, ce qui permet d'être insensible aux effets dus à la polarisation et de se concentrer sur les effets de propagation. Dans un second temps, une étude résolue en polarisation sera présentée (sect. 2.3), une fois la propagation d'onde démontrée et interprétée.

Une partie du rayonnement issu du cube polariseur sert à la réalisation de la perturbation. Nous verrons ce dispositif par la suite. L'autre partie du rayonnement sert à l'étude de la dynamique du laser. Une lame séparatrice permet de prélever une partie de ce rayonnement en vue d'un contrôle de l'intensité totale. Un détecteur InGaAs est utilisé à cette fin (le domaine de sensibilité est de $1 \mu\text{m}$ à $1.7 \mu\text{m}$).

Le rayonnement restant sert à l'analyse du spectre du laser. L'analyseur de spectre est composé d'un monochromateur (Jobin Yvon HR640) et d'une matrice CCD linéaire au silicium (EG&G RETICON RL0256D). Le monochromateur a une résolution en longueur d'onde de 0.1 \AA .

Le spectre issu du monochromateur est visualisé à l'aide d'une matrice CCD linéaire de 256 photodiodes. Cette matrice CCD est insérée sur une carte pilote (EG&G RETICON RC7030) qui permet l'amplification et le multiplexage des deux canaux sortant de la matrice CCD. Dans des conditions normales d'utilisation, la carte CCD délivre un signal vidéo permettant de visualiser un spectre toutes les $30 \mu\text{s}$. La résolution de la chaîne d'analyse du rayonnement (monochromateur et matrice CCD) est estimée à 0.5 \AA .

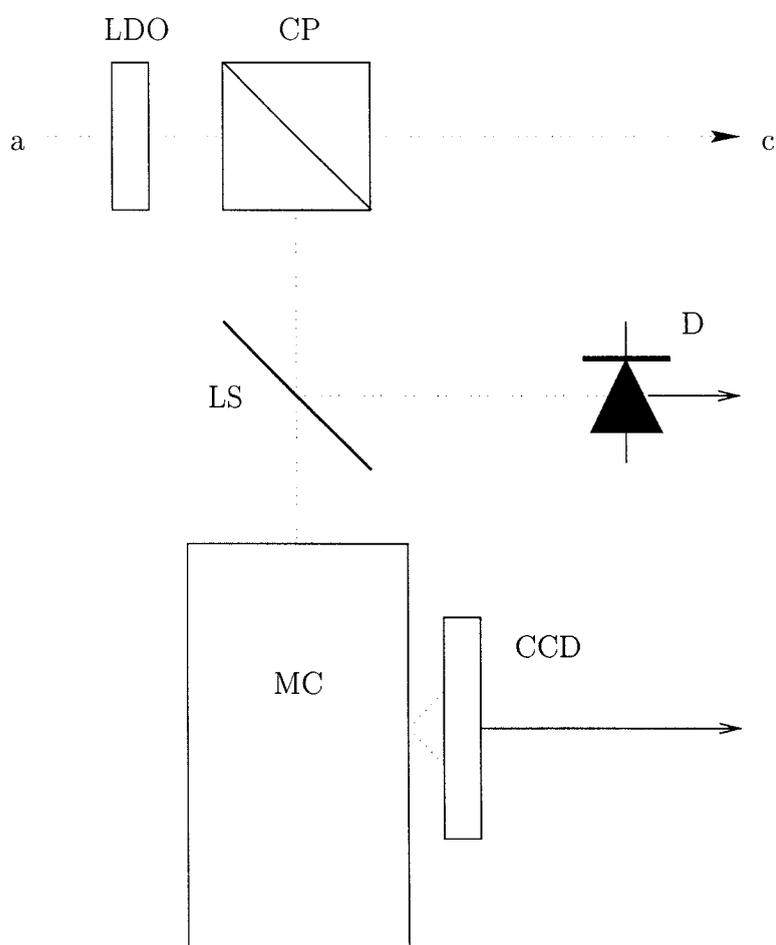


FIG. 2.3 – Dispositif d'analyse du rayonnement: LDO lame demi-onde, CP cube polariseur, LS lame séparatrice, D détecteur InGaAs, MC monochromateur, CCD matrice CCD.

Fonctionnement de la matrice CCD

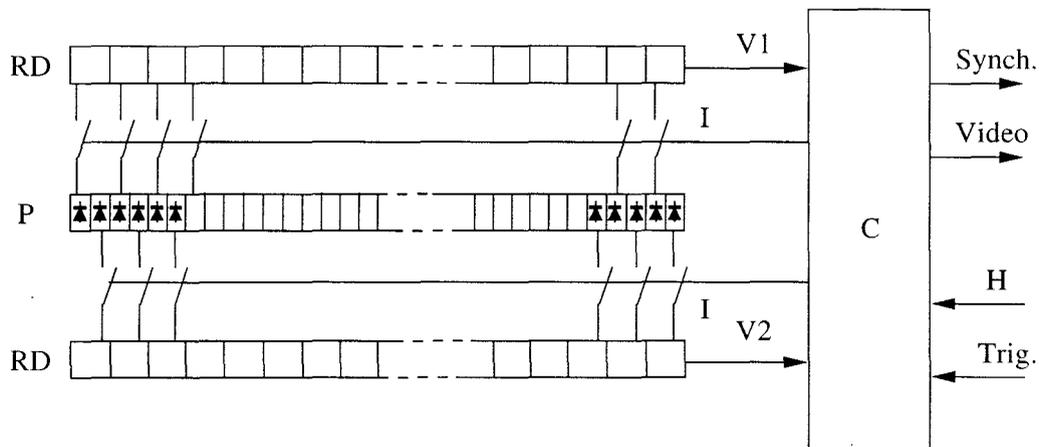


FIG. 2.4 – Constitution de la matrice CCD. RD : registre à décalage, P : photodiodes, I : interrupteurs, V1 et V2 : sorties série des registres, C : électronique de commande, Video : signal vidéo de sortie, Synch. : signal synchrone au début de chaque transfert, H : horloge, Trig. : signal de déclenchement.

Sans entrer dans des détails trop techniques, il est important de connaître le fonctionnement de la matrice CCD. Elle comporte, figure 2.4 :

- une série de 256 photodiodes
- 2 registres à décalage
- 2 série d'interrupteurs
- une électronique de commande

Un certain nombre de signaux digitaux sont nécessaires à la commande de la matrice CCD :

- une horloge interne ou externe (fréquence maximum 20 MHz)
- un signal de déclenchement (trigger) indiquant le début de l'acquisition.

Le principe de fonctionnement est le suivant :

Les photodiodes sont actives pendant un temps d'intégration T_i , puis les interrupteurs sont ouverts pendant un temps de transfert T_t , ce qui permet de transmettre la charge de chaque photodiode à une cellule du registre à décalage de charge. Le transfert se fait sur deux registres de 128 cellules (un registre pair et un registre impair).

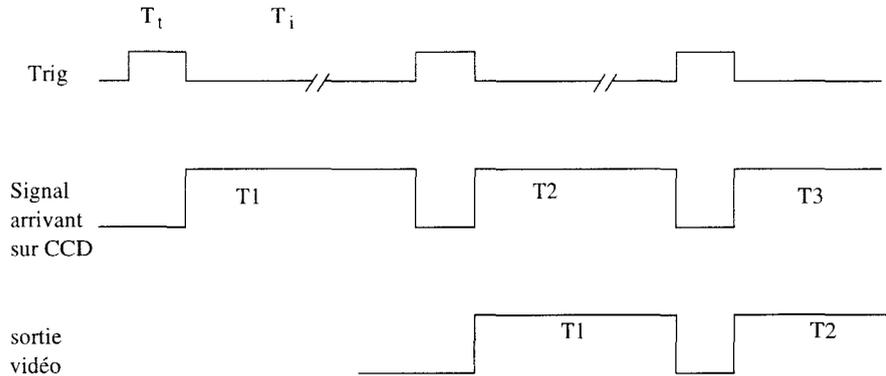


FIG. 2.5 – Chronogramme des principaux signaux de la matrice CCD : T_t et T_i désignent la période de transfert et d'intégration.

Une fois le transfert terminé, une nouvelle intégration peut commencer, les charges sont décalées d'une cellule à l'autre du registre à raison d'un décalage par impulsion d'horloge. Il faut donc au minimum $T_{min} = 256 \times T$, où T est la période de l'horloge, pour vider le registre à décalage. Ce temps T_{min} est le temps minimum entre deux intégrations. Pratiquement il faut au moins rajouter 15 périodes d'horloge en plus entre deux intégrations successives (ces 15 périodes permettent d'avoir une référence du niveau correspondant à l'absence d'éclairement - *dark reference*). Le chronogramme de la figure 2.5 montre la synchronisation des différents signaux. Ce chronogramme laisse apparaître un retard d'une période d'intégration entre le début d'apparition d'un événement et son arrivée sur la sortie vidéo de la carte pilote de la matrice CCD.

La durée de l'intégration peut être définie, soit par un signal interne, soit par un signal externe de déclenchement (trigger).

c/ Dispositif de réalisation de la perturbation.

La perturbation est réalisée à l'aide du dispositif de la figure 2.6. Le rayonnement issu du cube polariseur est injecté dans un monochromateur dont le réseau est placé en configuration Littrow. Ceci permet de sélectionner un paquet de modes et de le réinjecter dans le laser. Ce groupe de modes voit donc ses pertes diminuées, ce qui a pour conséquence de créer une perturbation. Cette dernière doit pouvoir être appliquée ou supprimée à volonté. Nous uti-

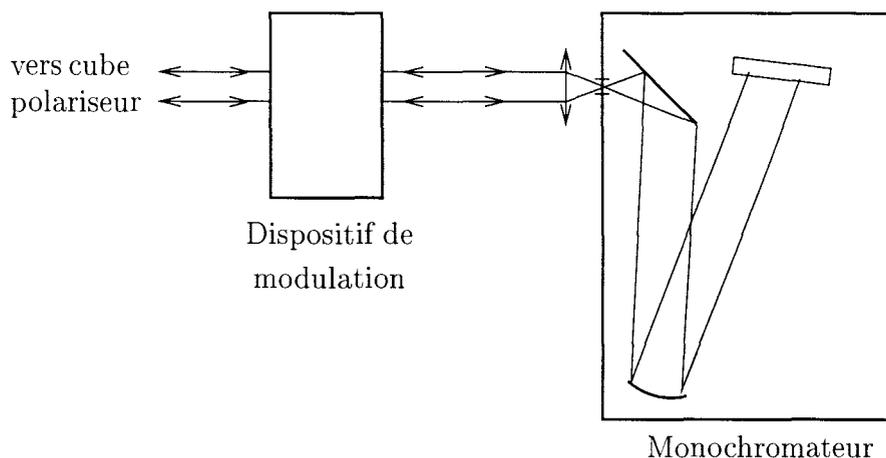


FIG. 2.6 – Dispositif de réalisation de la perturbation. Le réseau est placé en configuration Littrow.

lisons à cet effet un modulateur acousto-optique (nous ne disposons pas d'un modulateur électro-optique traité à cette longueur d'onde). Nous pouvons remarquer que, étant donné la configuration du dispositif expérimental, la perturbation est symétrique sur les 2 états propres de polarisation du laser.

Un modulateur acousto-optique est constitué d'un cristal et d'un transducteur piezoélectrique. Le transducteur modulé par un signal à 24 MHz crée une onde acoustique et par conséquent un réseau d'indice. Un faisceau arrivant sur le réseau avec une incidence de Bragg se trouve en partie défléchi, figure 2.7. Deux faisceaux émergent alors du cristal, un faisceau principal suivant le même axe que le faisceau incident (que nous définissons comme axe optique), un faisceau défléchi faisant un angle $2\theta_B$ (où θ_B est l'angle de Bragg). Le faisceau défléchi a pour propriété d'avoir sa longueur d'onde décalée, par effet Döppler, d'une quantité égale à la fréquence de l'onde acoustique [111], c'est à dire la fréquence de modulation du transducteur (24 MHz dans notre cas). De plus, dans le meilleur des cas, sa puissance est la moitié de celle du faisceau incident. Lors d'une modulation tout ou rien de la porteuse à 24 MHz, la puissance du faisceau principale varie de 50% à 100% et celle du faisceau défléchi de 50% à 0%. Seul ce dernier peut donc être complètement éteint. Or nous devons réinjecter dans le laser un signal rigoureusement à la même fréquence et pouvoir l'éteindre complètement. Pour satisfaire à ces

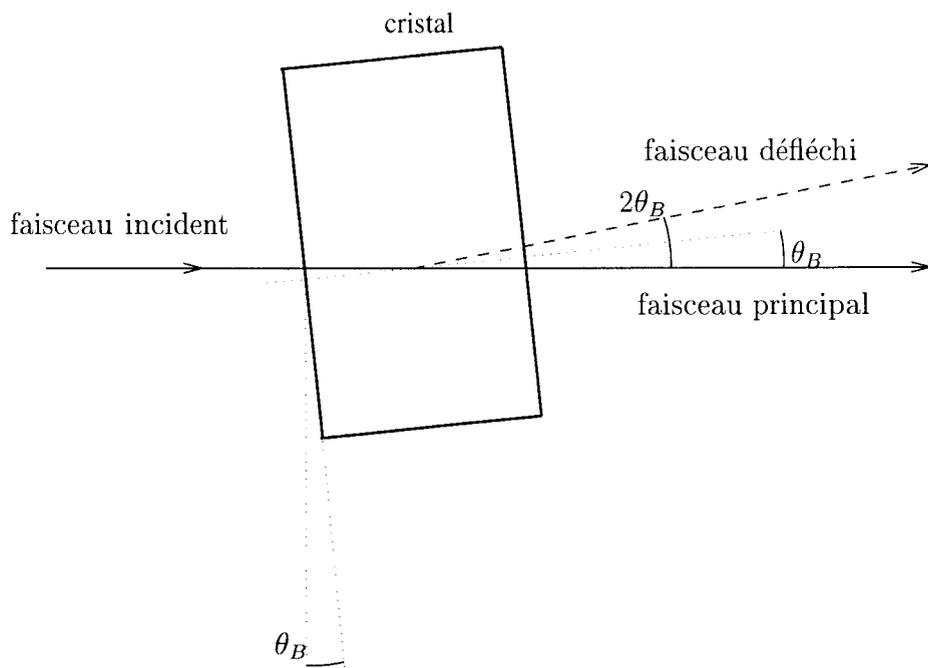


FIG. 2.7 – Déflexion d'un faisceau par un modulateur acousto-optique. L'onde défléchie est décalée en fréquence d'une quantité égale à la fréquence de l'onde acoustique (24 MHz).

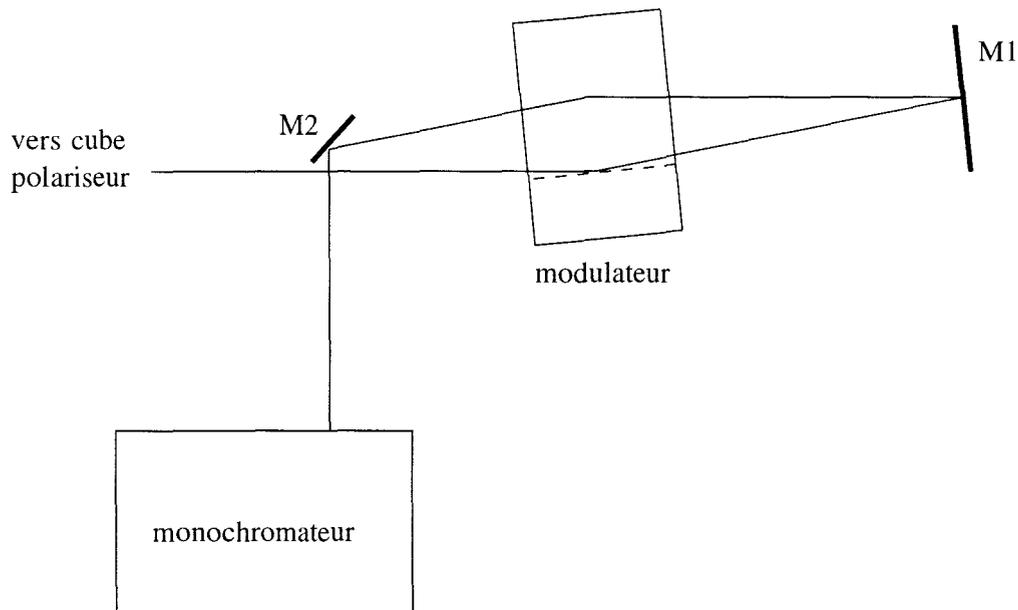


FIG. 2.8 – Disposition du modulateur acousto-optique : Le faisceau passe deux fois à travers le cristal afin que les décalages en fréquence se compensent. M1 et M2 : miroirs R_{max}

impératifs, nous plaçons le modulateur dans la configuration de la figure 2.8. Le faisceau défléchi est réfléchi à l'aide d'un miroir de façon à être parallèle au faisceau principal, il sera alors à nouveau défléchi par le cristal, mais cette fois avec un décalage en fréquence de signe opposé au précédent. Le décalage en fréquence du faisceau défléchi est alors compensé. Cette configuration nécessite l'emploi d'un cristal relativement large (le notre possède une face d'entrée de 1.5 cm). La perturbation, bien qu'atténuée fortement par les multiples passages dans le modulateur (deux avant réflexion sur le réseau et deux au retour), reste suffisamment importante pour être efficace.

d/ Système de contrôle et d'acquisition

Nous avons vu que les spectres pouvaient être acquis au maximum à une fréquence de 30 kHz (60 kHz si l'on utilise une seule voie de la matrice CCD et une horloge de 20 MHz). La fréquence de relaxation du laser est un fonc-

tion croissante du taux de pompage A (elle est proportionnelle à $(A - 1)$, cf chap.1) et est typiquement comprise entre 30 et 100 kHz. Dans le meilleur des cas il n'est possible que d'enregistrer un à deux spectres par période de relaxation du laser, ce qui est peu si l'on désire avoir une bonne définition du transitoire de retour à l'équilibre. La réponse à une petite perturbation étant un phénomène linéaire (nous nous plaçons dans ce cas) et reproductible, afin d'augmenter la résolution temporelle de l'enregistrement, nous allons répéter plusieurs fois l'expérience et effectuer les enregistrements à des instants décalés par rapport à l'instant initial de la perturbation. Nous prenons un décalage sous multiple de la période d'intégration (1/10). Le chronogramme de la figure 2.9 explique la méthode utilisée. A $t = 0$ la perturbation est supprimée, l'enregistrement du transitoire de retour à l'équilibre commence, les spectres sont acquis les uns après les autres ($30 \mu\text{s}$ séparent chaque spectre). Une fois l'enregistrement terminé (la durée de l'enregistrement dépend du système d'acquisition), un nouvel enregistrement est effectué, mais cette fois il est décalé d'un dixième de période par rapport au précédent. Cette opération est reproduite dix fois de façon à couvrir entièrement la période d'intégration. Les enregistrements peuvent également être répétés pour les mêmes instants de décalage, afin d'obtenir un moyennage des signaux et d'augmenter le rapport signal sur bruit.

Afin d'augmenter la dynamique des signaux enregistrés, le spectre moyen est soustrait analogiquement avant enregistrement. Ce spectre moyen est obtenu en enregistrant et en moyennant des spectres stationnaires (laser non perturbé). Il est ensuite délivré, périodiquement et de façon synchrone au signal vidéo issu de la carte CCD, par un générateur de fonction arbitraire (Stanford DS345), figure 2.10, un sommateur passif permet de soustraire le spectre moyen au signal vidéo.

Le système d'acquisition utilisé pour ces expériences est composé d'un oscilloscope numérique-analogique (Philips PM3335 20MS/s) et d'un microordinateur (HP9300). La liaison entre les instruments est parallèle (HPIB). L'horloge maître du système est celle de l'oscilloscope, les autres horloges utilisées (carte CCD, générateur de fonction arbitraire) sont esclaves. Ceci permet une parfaite synchronisation de l'échantillonnage.

Une visualisation en temps réel des spectrochronogrammes permet d'effectuer l'optimisation immédiate de tous les réglages aussi bien optiques qu'électroniques. A cette fin nous utilisons un oscilloscope analogique, une rampe périodique, synchrone au signal vidéo, est envoyée sur l'une des voies de l'oscilloscope. L'intensité du spot (entrée Z de l'oscilloscope) est modulée par le

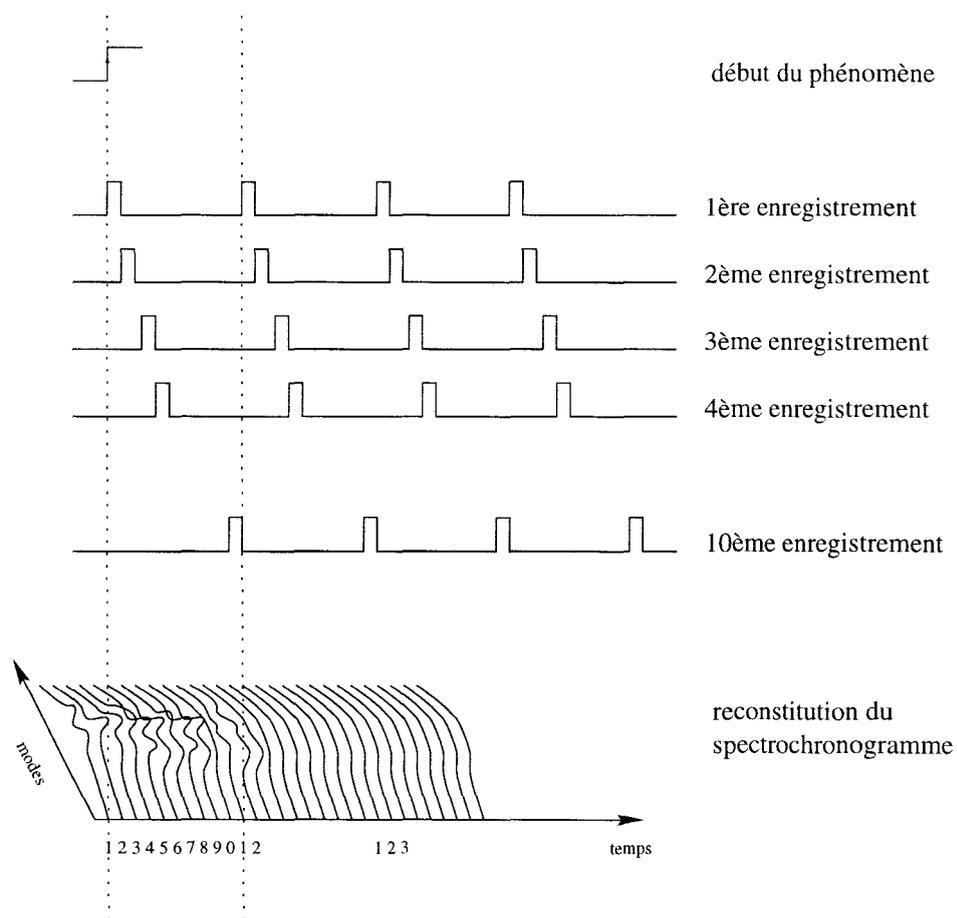


FIG. 2.9 – Principe de décalage des enregistrements.

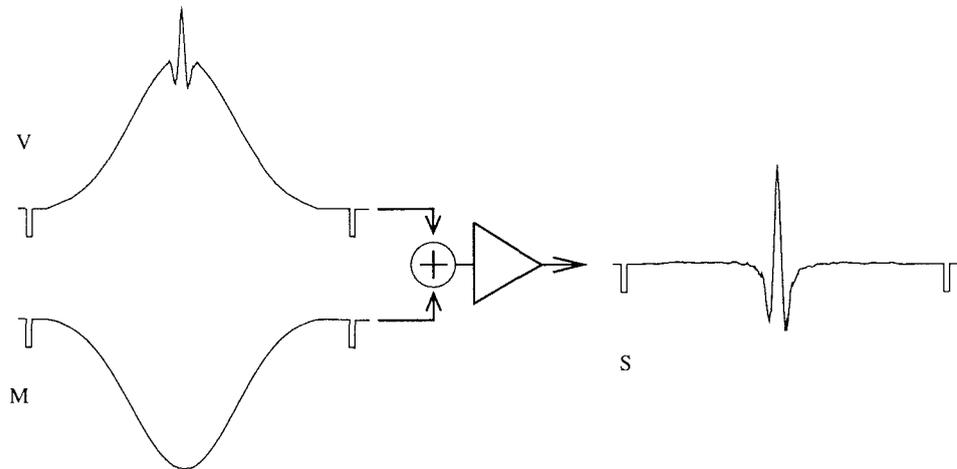


FIG. 2.10 – Le signal vidéo V et le signal M (spectre stationnaire inversé) sont sommés et amplifiés. Le signal résultant S possède l'information utile sur toute la dynamique de l'oscilloscope numérique.

signal vidéo adéquatement amplifié et décalé en tension. Cette visualisation en temps réel des spectrochronogrammes permet de faciliter considérablement l'utilisation de l'ensemble du dispositif expérimental.

2.1.2 Intégration numérique : principes et paramètres

2.1.2.1 Principes de l'intégration

Dans le modèle 1.21, l'intensité est définie sur un ensemble discret de N modes, et l'inversion de population sur un ensemble continu de fréquence ν . Ce modèle, bien qu'adapté à une description de la physique du laser, nécessite certaines transformations afin d'être exploité numériquement. En particulier, l'inversion de population doit être définie sur un ensemble discret et fini de fréquences ξ_j . Nous considérons que l'unité de fréquence dans le spectre est l'intervalle spectral libre séparant deux modes consécutifs. Nous posons :

$$\xi_j = \xi_1 + (j - 1)p \quad (2.1)$$

où ξ_j est la variable discrète associé à ν , ξ_1 la fréquence correspondant au

premier mode, l'indice j est un entier ($j = 1 \dots N$), p le pas de la décomposition de ν , $p = 1/N_p$ avec N_p le nombre de pas entre deux modes consécutifs. Nous désignons par ν_l la position d'un mode d'indice l dans l'ensemble des ξ (figure 2.11) :

$$\nu_l = \xi_1 + l - 1 \quad (2.2)$$

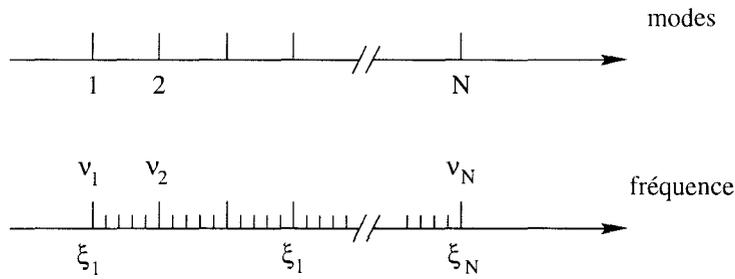


FIG. 2.11 – Discretisation de la fréquence ν , ξ_l désigne la fréquence discrétisée, la fréquence du mode d'indice j est notée ν_j , N_p désigne le nombre de pas entre deux modes consécutifs.

Le système discrétisé devient :

$$\dot{m}_j = -m_j + (m_j + a) \int_{\xi_1}^{\xi_{N_t}} \mathcal{L}(\xi - \nu_j) (d_0(\xi) - \frac{1}{2}d_j(\xi)) d\xi \quad (2.3a)$$

$$\dot{d}_0(\xi_k) = \gamma [Ag(\xi_k) - d_0(\xi_k) (1 + \sum_{l=1}^N \mathcal{L}(\xi_k - \nu_l) m_l) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \mathcal{L}(\xi_k - l) d_l(\xi_k) m_l] \quad (2.3b)$$

$$\dot{d}_j(\xi_k) = \gamma [d_0(\xi_k) m_j \mathcal{L}(\xi_k - \nu_j) - d_j(\xi_k) (1 + \sum_{l=1}^N \mathcal{L}(\xi_k - \nu_l) m_l)] \quad (2.3c)$$

avec $j = 1, \dots, N$ où N est le nombre de modes, $k = 1, \dots, N_t$ où $N_t = NN_p$ est le nombre total de points sur lesquels est discrétisé ν , l'intégrale est calculée de la façon suivante :

$\int_{\xi_1}^{\xi_{N_t}} f(\xi) d\xi = p[\frac{1}{2}(f(\xi_1) + f(\xi_N)) + \sum_{l=2}^{N_t-1} f(\xi_l)]$
où p est le pas de la discrétisation.

$$\mathcal{L}(\xi_k - \nu_j) = \frac{1}{\pi\Delta} \frac{1}{1 + (\frac{\xi_k - \nu_j}{\Delta})^2} \quad (2.4)$$

$$g(\xi_k) = e^{-\frac{(\xi_k - \nu_c)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.5)$$

où ν_c est la fréquence centrale de la courbe de gain.

Les largeurs homogène Δ et inhomogène équivalente σ sont définies en unité d'intervalle spectral libre.

Le nombre de pas N_p nécessaires pour la discrétisation de ν dépend des paramètres du modèle, et en particulier de la largeur homogène. Moins il y a de modes par largeur homogène, plus N_p devra être élevé. Le nombre d'équations du modèle 2.3 est donc de $N + (N+1)N N_p$ qui est proportionnel à N^2 (pour N grand).

Le laser à fibre que nous utilisons possède un très grand nombre de modes ($> 10^5$). La simulation à l'aide du modèle 2.3 d'un tel laser nécessite un temps de calcul et une capacité mémoire importants, ce qui rend difficilement envisageable une étude de la dynamique en régime non linéaire. Nous sommes donc amenés à effectuer les simulations sur un nombre réduit de modes afin que le temps de calcul reste raisonnable. Nous pouvons également considérer des modèles simplifiés permettant de conserver l'essentiel de la physique, tout en diminuant le nombre d'équations. Cette approche a déjà été adoptée par Le Flohic *et al.*[96]. De plus l'intégration du modèle 2.3 révèle que de nombreuses variables se comportent de manière relativement simple. C'est le cas en particulier des composantes $d_j(\xi_k)$. A l'état stationnaire, le profil de $d_j(\xi_k)$ en fonction de k peut être assimilé à une lorentzienne de largeur Δ (la largeur homogène) et centrée en ν_j , ainsi que nous pouvons le déduire de la relation 2.3c.

$$d_j(\xi_k) = \frac{d_0(\xi_k)m_j\mathcal{L}(\nu_j - \xi_k)}{1 + \sum_l \mathcal{L}(\xi_k - \nu_l)m_l} \quad (2.6)$$

Au cours d'un transitoire, les composantes d_j prennent des valeurs très faibles lorsque $|\nu_l - \xi_k| \gg \Delta$. Pratiquement, il est suffisant de restreindre le calcul des composantes $d_j(\xi_k)$ pour $|\nu_l - \xi_k| < 5\Delta$

2.1.2.2 Détermination des paramètres

Le modèle comprend un certain nombre de paramètres : largeur homogène Δ , inhomogène équivalente σ , taux de relaxation γ , coefficient d'émission spontanée a . Certains de ces paramètres sont estimés d'après l'expérience (a , γ , σ), d'autres (Δ) d'après la littérature. La largeur homogène Δ dépend précisément de la composition de la fibre utilisée. Nous ne disposons pas de données spectroscopiques précises concernant notre fibre. Les mesures effectuées sur d'autres fibres dopées au néodyme donnent une largeur homogène de l'ordre de l'Angström à 77 K [102, 96]. Le coefficient σ est estimé d'après la largeur du spectre, nous considérons que σ est de l'ordre de 25 Å (la relation d'évolution de la largeur du spectre en fonction de σ peut être déterminée de façon empirique ou d'après la relation 2.63). Les coefficients γ et a sont estimés de l'ordre de 10^{-4} (ce qui est comparable aux valeurs expérimentales utilisées dans le chapitre suivant).

Les simulations sont effectuées avec les paramètres suivants :

N	200
Δ	2
σ	50
a	10^{-4}
γ	10^{-4}
A	2

Nous choisissons le nombre de pas entre 2 modes consécutifs $N_p = 5$.

L'intégration du système 2.3 est effectuée à l'aide de la procédure ODEX [112] (algorithme d'extrapolation à pas et ordre variables basé sur la méthode du *midpoint*). Les simulations sont effectuées sur des stations de travail HP735 et HP715.

2.1.3 Réponse à une modulation locale du spectre

Pour créer une perturbation au sein des modes du laser, nous renvoyons une partie du rayonnement à l'aide d'un réseau placé en configuration Littrow (contre-réaction). Le réseau permet de sélectionner un paquet de modes, l'effet de la réinjection est de diminuer les pertes sur ce paquet de modes et par conséquent d'augmenter l'intensité de ce dernier. Ce pic d'intensité sature la population de la classe homogène associée, ce qui se traduit par l'apparition d'un trou dans le spectre du laser. La largeur de ce trou semble expérimentalement de l'ordre de la largeur homogène .

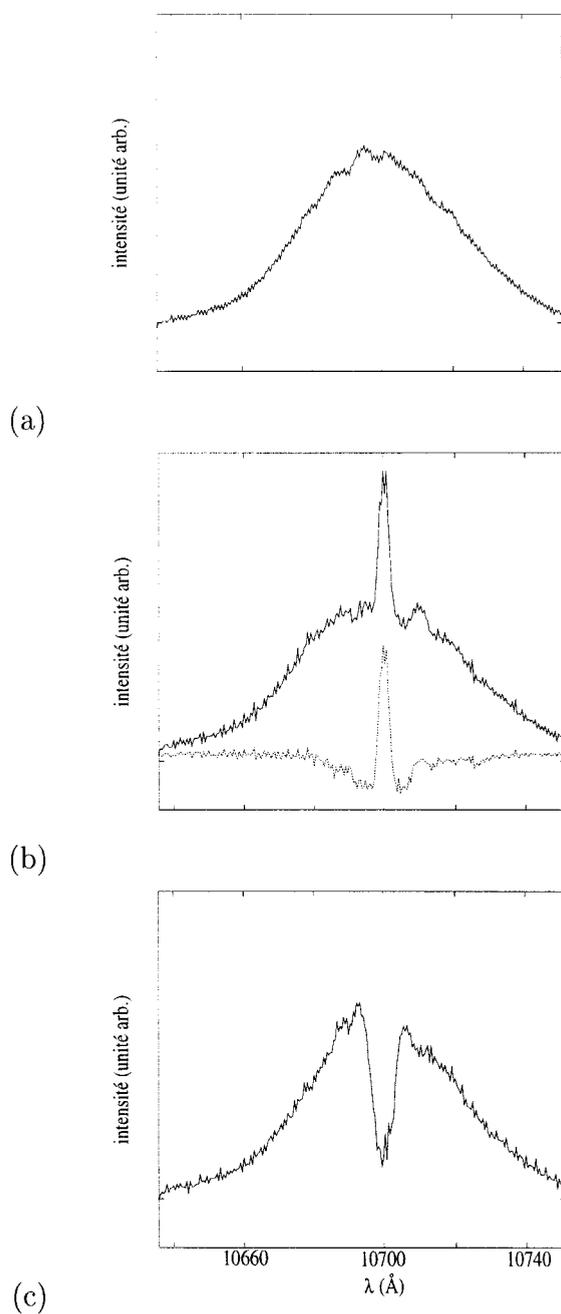


FIG. 2.12 – *Effet de la contre-réaction sur le spectre du laser. a: spectre à l'état stationnaire; b: la contre-réaction est appliquée, un pic apparaît dans le spectre (l'état stationnaire a été soustrait sur la courbe du bas pour souligner la formation du trou); c: début du transitoire de retour à l'état stationnaire.*

Il semble donc difficile de créer une perturbation de largeur très fine.

Pour simuler la perturbation numériquement, les pertes sont diminuées faiblement selon un profil lorentzien centré à l'endroit de la perturbation. L'équation pour l'intensité est modifiée de la façon suivante :

$$\dot{m}_j = -m_j (1 + \kappa_j(t)) + (m_j + a) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(\nu - \nu_j) (d_0(\nu) - \frac{1}{2}d_j(\nu)) d\nu \quad (2.7)$$

où $\kappa_j(t)$ désigne les pertes additionnelles pour le mode d'indice j .

$$\kappa_j(t) = -\alpha(t) \frac{1}{1 + (\frac{j-j_c}{\Delta'})^2} \quad (2.8)$$

$\Delta' \approx \Delta$ et j_c est le centre de la perturbation.

Pour moduler la perturbation nous appliquons des trains de signaux carrés périodiques au modulateur acousto-optique, ce qui a pour effet de moduler sa transmission en tout ou rien. L'intégration de la matrice CCD de même que l'acquisition du signal vidéo sont déclenchées au début de chaque train. Nous utilisons des signaux carrés car ce sont les seuls acceptés par le modulateur dont nous disposons.

Numériquement, le terme de perte $\kappa_j(t)$ dans l'équation 2.7 est une fonction du temps carrée et périodique ($\kappa_j = 0$ ou 5.10^{-3}).

Les résultats expérimentaux et numériques sont présentés sur les spectrochronogrammes de 2.13 pour différentes valeurs de la fréquence de modulation ω_m . Nous constatons un bon accord entre spectrochronogrammes numériques et expérimentaux. La modulation périodique de la perturbation engendre une onde amortie se propageant dans le spectre. Le nombre d'onde k dépend de la fréquence ainsi que nous pouvons le voir sur les différents spectrochronogrammes de la figure 2.13, plus la fréquence augmente plus le nombre d'onde devient petit.

Le sens de propagation des ondes peut sembler inhabituel, car la modulation est appliquée au centre du spectre et se propage rapidement sur les bords alors que les maxima (zones claires) se dirigent vers le centre. Ceci signifie que les vitesses de phase et de groupe sont de signes opposés (l'origine physique de signe sera interprété dans la suite (cf figure 2.19)).

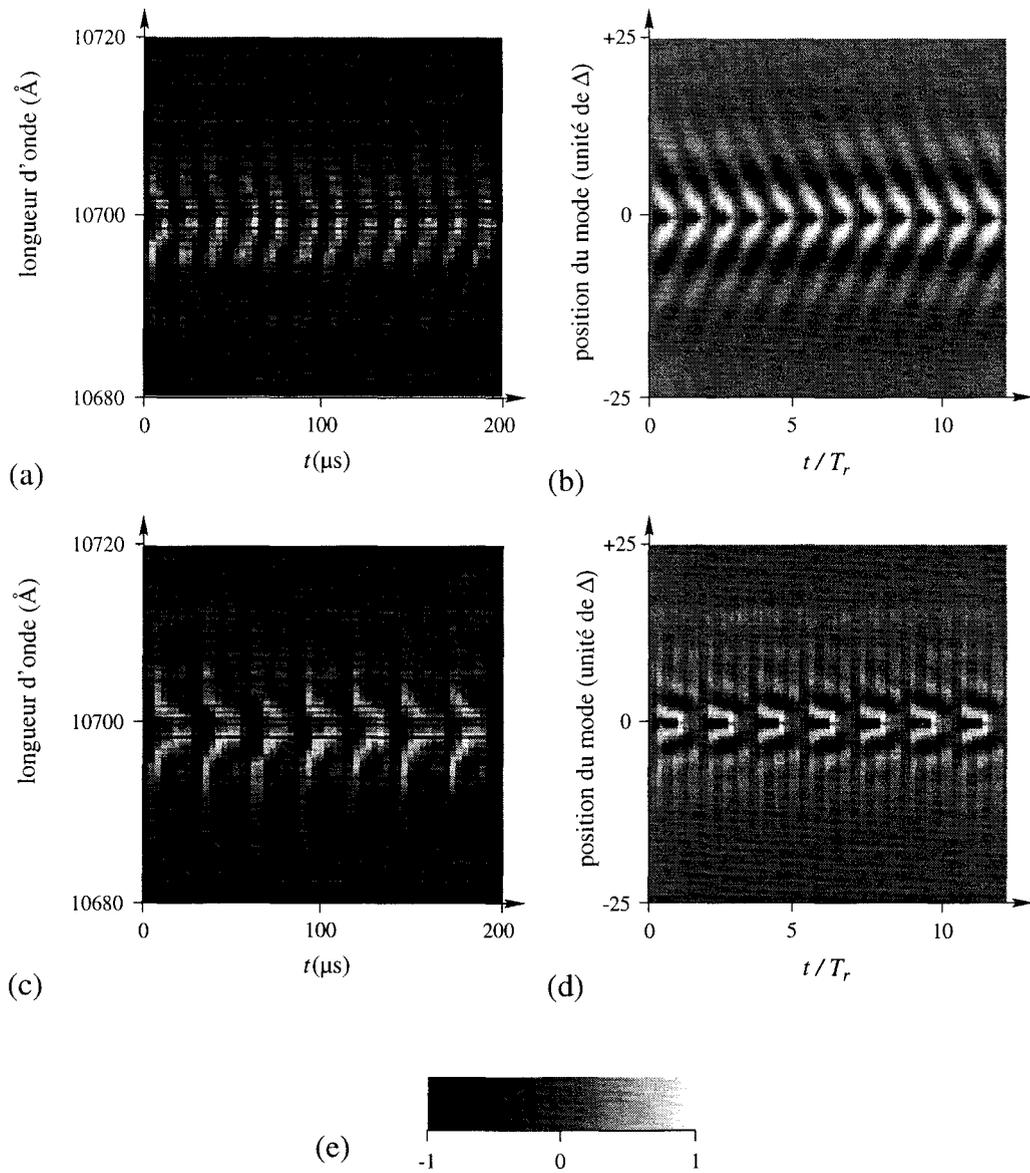


FIG. 2.13 – Spectrochronogrammes obtenus lors de la modulation d'une perturbation, de largeur 2Δ , appliquée au centre du spectre (10700 \AA). a : expérimental, $\omega_m = \omega_r/2$; b : numérique, $\omega_m = \omega_r/2$; c : expérimental, $\omega_m = \omega_r/3$; d : numérique $\omega_m = \omega_r/3$; e : échelle de gris avec laquelle sont représentées les intensités, les zones claires correspondent aux plus fortes. ω_m et ω_r désignent respectivement les fréquences de modulation et de relaxation du système, $T_r = 2\pi/\omega_r$. Les positions relatives des modes sont définies en unité de largeur homogène Δ .

2.1.4 Réponse à une impulsion localisée dans le spectre

L'expérience précédente a mis en évidence la propagation d'ondes dans le spectre du laser. La modulation est une excitation à un ω donné engendrant une réponse à un k donné. Une percussion est une excitation sur un ensemble continu de fréquences temporelles. Quelle sera la réponse du système à une telle excitation ?

Expérimentalement, nous appliquons la perturbation pendant $10 \mu\text{s}$, en déclenchant l'intégration de la matrice CCD ainsi que l'enregistrement du signal vidéo fourni par la carte CCD.

Numériquement, nous intégrons les équations du laser en prenant les pertes κ_j non nulles pendant $2/10$ de période (ce qui équivaut aux $10 \mu\text{s}$ d'application de la perturbation), puis continuons l'intégration avec κ_j nul.

Les résultats numériques et expérimentaux sont représentés figure 2.14. Nous constatons la présence d'ondes. Les enveloppes sont dirigées vers les bords du spectre. Les maxima sont placés sur des lignes incurvées et non plus sur des lignes droites comme dans le cas de la modulation, ce qui indique la présence de différentes fréquences spatiales et temporelles et le caractère dispersif du milieu. Ces courbes sont comme dans le cas précédent dirigées vers le centre du spectre (là où est créée la perturbation). Nous constatons également une forte atténuation de ces ondes, ce qui les rend rapidement invisibles. Ces expériences ont été faites à la température de 77 K , nous les avons également effectuées à température ambiante, le comportement est semblable (présence d'ondes), mais la largeur de la perturbation est beaucoup plus grande et l'atténuation beaucoup plus forte, ce qui rend l'observation des ondes beaucoup plus délicate.

Nous avons mis en évidence la propagation d'ondes dans le spectre du laser. Il faut noter que le couplage *local*, nécessaire à cette propagation est assuré par l'élargissement inhomogène dominant. Dans le cas contraire d'un élargissement homogène, donc d'un couplage *global*, la perturbation engendre un effet totalement différent. Sur la figure 2.15 est représentée la réponse obtenue à partir du modèle de Tang, Statz et DeMars (équation 1.13a), pour des valeurs identiques des paramètres. La perturbation se transmet instantanément à tout le spectre.

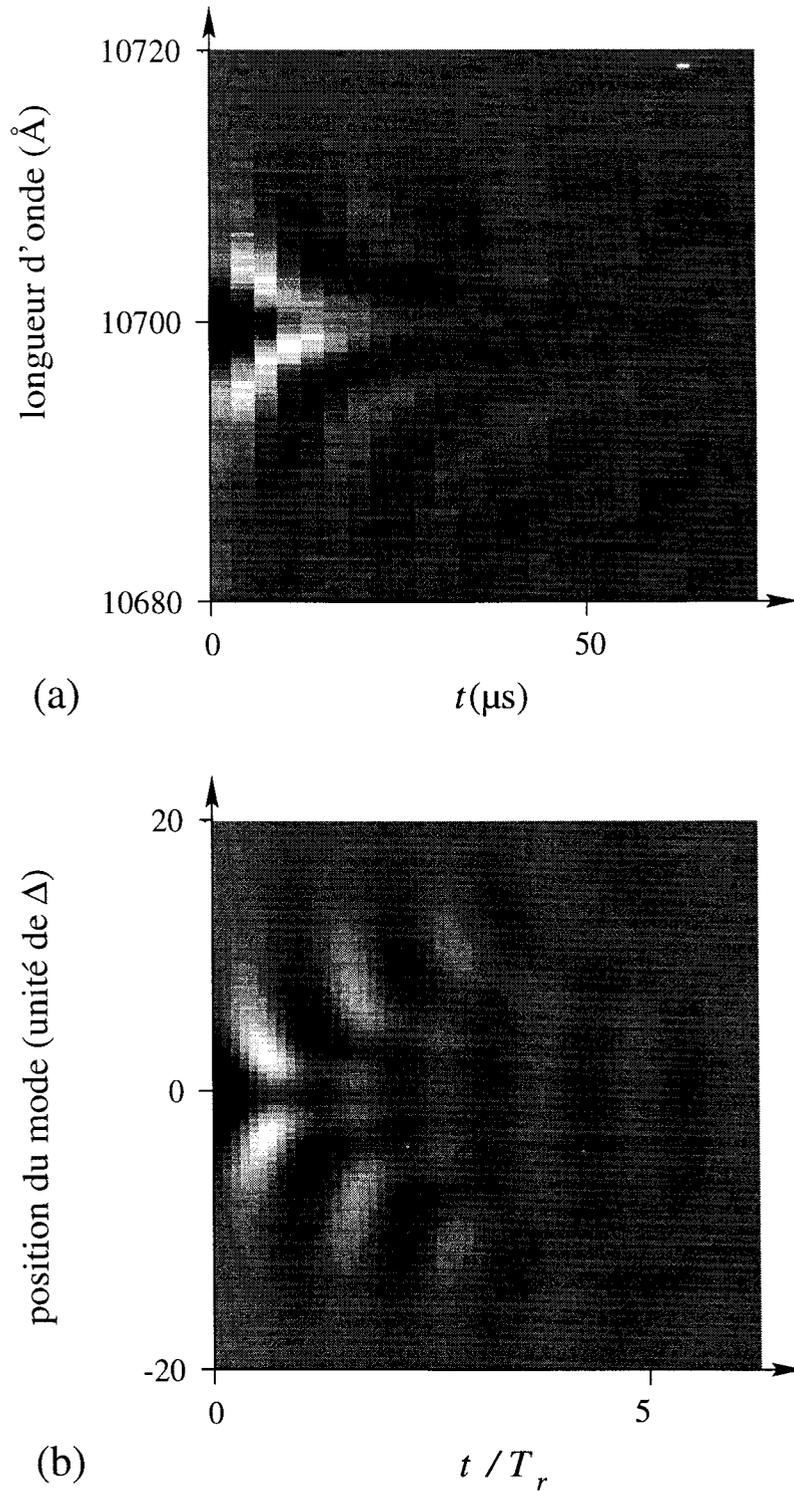


FIG. 2.14 – Réponse du laser à une impulsion localisée, de largeur 2Δ dans le spectre (à 10700 \AA). a : expérimentale, b : numérique. T_r désigne la période de relaxation. Les positions relatives des modes sont définies en unité de largeur homogène, Δ est estimée à 1 \AA (L'échelle de gris est celle de la figure 2.13).

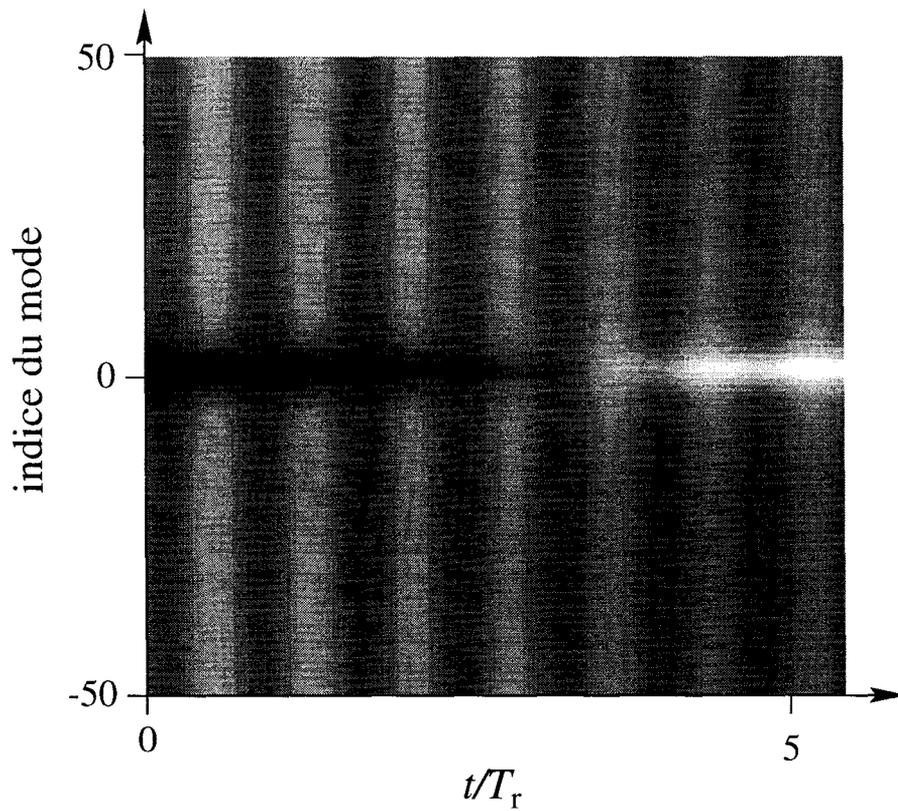


FIG. 2.15 – Réponse d'un laser à élargissement homogène (pour lequel le couplage est global) à une perturbation localisée. La perturbation est transmise instantanément à tout le spectre. T_r est la période de relaxation (l'échelle de gris est celle de la figure 2.13).

2.1.5 Courbe de dispersion.

Les expériences précédentes ont montré que le milieu de propagation était dispersif, nous désirons naturellement en déterminer la courbe de dispersion. Plusieurs méthodes sont possibles :

La première consiste à effectuer une transformée de Fourier bidimensionnelle des spectrochronogrammes expérimentaux et numériques des transitoires obtenus lors de l'application d'une perturbation localisée dans le spectre, figure 2.14. La transformée de Fourier permet de passer des variables du spectrochronogramme (temps t et position j des modes) aux variables de l'espace de Fourier associé (pulsation ω et nombre d'onde k). Les résultats sont présentés figure 2.16. Nous constatons que la réponse du système pour un k donné ne se fait pas à un seul ω , mais sur un ensemble de ω possédant un maximum (point le plus sombre), car les oscillations sont amorties. Le profil de la réponse en fonction de ω est définie par l'équation 2.55.

La seconde méthode consiste à utiliser les résultats de la modulation de la perturbation. Pour chaque valeur de la modulation ω , deux ondes progressives sont créées, figure 2.13. La transformée de Fourier de ces spectrochronogrammes permet de mettre en évidence un nombre d'onde k associé à chaque ω de modulation. La courbe de dispersion (figure 2.17) est alors obtenue point par point en variant la valeur de ω . Cette méthode permet de concentrer l'énergie apportée par la modulation sur le nombre d'onde recherché [113].

Par les deux méthodes, les courbes de dispersion sont d'aspects semblables. Pour $k = 0$, $\omega = \omega_r$ (ω_r est la fréquence de relaxation). La pente de la courbe de dispersion est décroissante (figure 2.17), ce qui indique que les vitesses de phase et de groupe sont de signes opposés, ainsi que nous l'avions remarqué sur les spectrochronogrammes.

Les résultats précédents nous ont permis de mettre en évidence la propagation d'ondes dans le spectre d'un laser multimode. Ces ondes ont pour particularité des vitesses de groupe et de phase de signe opposés. Nous sommes donc tout naturellement amenés à considérer le laser comme une chaîne d'oscillateurs non linéaires couplés.

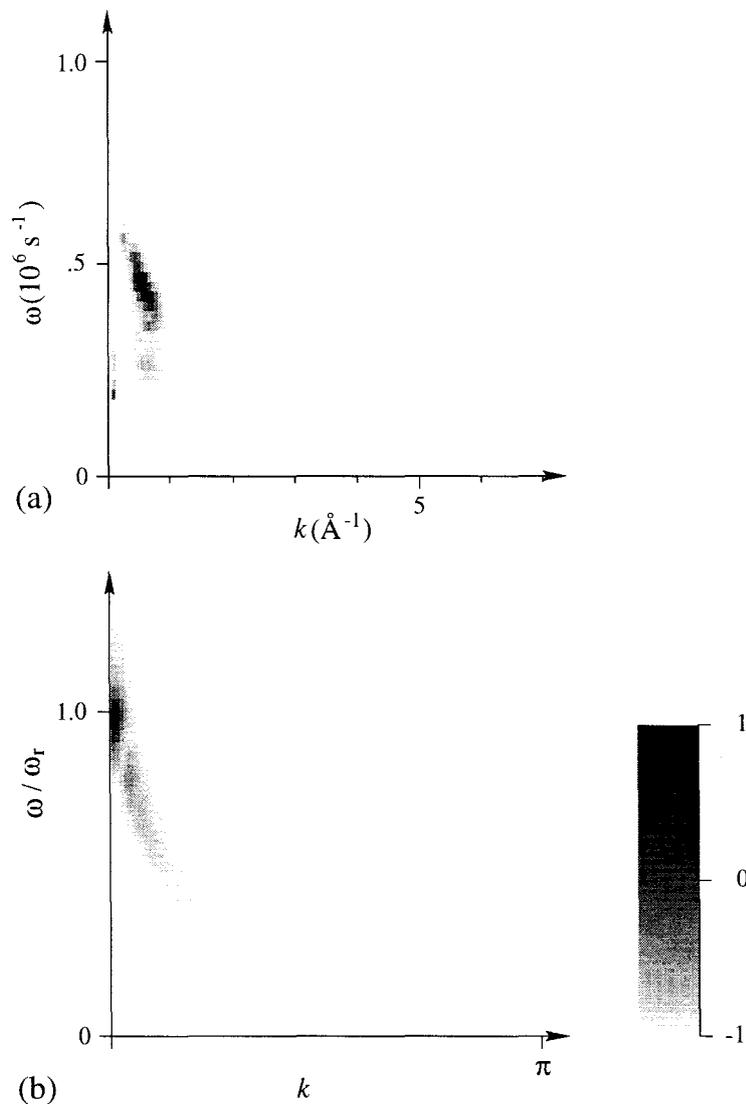


FIG. 2.16 – Densité spectrale de puissance des spectrochronogrammes de la figure 2.14. a : expérimental (la fréquence de relaxation est de $0.7 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$), b : numérique. La représentation est faite en échelle de gris inversée, les zones sombres correspondent aux densités spectrales de puissance les plus élevées.

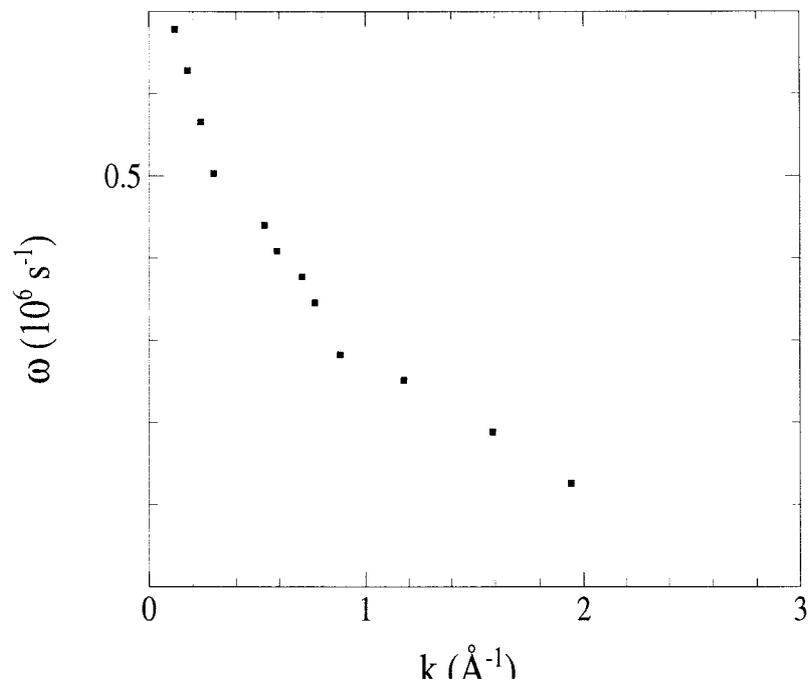


FIG. 2.17 – Courbe de dispersion expérimentale obtenue en modulant périodiquement un paquet de modes. Pour chaque fréquence de modulation, on a reporté la valeur de k de l'onde créée.

2.2 Interprétation au moyen d'un modèle simple

Nous allons essayer d'interpréter les résultats obtenus précédemment à l'aide d'un modèle simple de laser multimode. Ce modèle permet d'effectuer des calculs analytiques et de mettre en relief les phénomènes physiques principaux, dans notre cas le couplage par saturation croisée. Dans un premier temps, nous verrons les approximations effectuées sur le modèle complet 1.16 permettant d'aboutir au modèle simple. Nous nous placerons ensuite dans un cas limite (extension infinie du spectre) afin d'étudier les propriétés intrinsèques du milieu de propagation et en particulier les relations de dispersion, c'est en fait une démarche analogue à celle utilisée en physique des solides [35]. Nous utiliserons alors ces relations de dispersion pour déterminer, d'une part la réponse du système à différents types de perturbations sans intégrer les équations du laser, ce qui permettra de tester la validité de notre approche, d'autre part la largeur homogène d'après les résultats expérimentaux. Finalement nous prendrons en compte les inhomogénéités et les effets de bords afin de nous rapprocher des conditions réelles.

2.2.1 Le modèle

La principale source de simplification dans le modèle provient du fait que le laser émet son rayonnement sur un très grand nombre de modes. Les principales conséquences sont les suivantes :

(i) les variations spatiales (le long de la fibre) de l'inversion de population sont pratiquement négligeables [42]. Les variations spatiales de l'inversion de population sont dues à la présence d'ondes stationnaires dans la cavité Fabry-Perot. Ces ondes stationnaires correspondent aux modes de la cavité. Dans notre cas, le nombre de ces modes est important et nous pouvons considérer que l'inversion de population est quasiment constante sur la longueur de la cavité. Nous remplaçons donc $d(z, \nu)$ par $d(\nu)$ dans le système 1.16 et nous obtenons :

$$\dot{m}_j = -m_j + (m_j + a) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(\nu - \nu_j) d(\nu) d\nu \quad (2.9a)$$

$$\dot{d}(\nu) = \gamma \left[A g(\nu) - d(\nu) \left(1 + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(\nu - \nu_l) m_l \right) \right] \quad (2.9b)$$

Ce type de modèle s'appliquerait rigoureusement à un laser en anneaux unidirectionnel. Nous prendrons en compte dans la suite qu'il s'agit d'un laser à ondes stationnaires en faisant la distinction entre termes de saturation propres et termes de saturation croisée [114].

(ii) Les variations en fréquences de l'inversion de population sont négligeables sur un domaine spectral de l'ordre de l'intervalle spectral libre. En effet, la largeur homogène est beaucoup plus grande que l'intervalle spectral libre (le rapport est de 10^3), et le nombre de modes étant important, les variations en fréquence de l'inversion de population sont lentes. Cette approximation nous permet de transformer l'intégrale présente dans l'équation d'évolution de l'intensité en une somme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(\nu) d\nu = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{\nu_l-1/2}^{\nu_l+1/2} d(\nu) d\nu \quad (2.10)$$

Nous introduisons par conséquent le changement de variable :

$$\int_{\nu_l-1/2}^{\nu_l+1/2} d(\nu) d\nu \approx d(\nu_l) = d_l \quad (2.11)$$

$d(\nu_l)$ étant pratiquement constant sur l'intervalle spectral libre.

En utilisant le changement de variable 2.10 et 2.11 et en supposant que $\mathcal{L}(\nu_l - \nu_j)$ est pratiquement constant sur l'intervalle spectral libre (ce qui est justifié par le fait que $\Delta \gg 1$), nous obtenons le système :

$$\dot{m}_j = -m_j + (m_j + a) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(\nu_l - \nu_j) d_l \quad (2.12a)$$

$$\dot{d}_j = \gamma \left[Ag_j - d_j \left(1 + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(\nu_j - \nu_l) m_l \right) \right] \quad (2.12b)$$

où $g_j = g(\nu_j)$.

Le modèle 2.12 s'appliquerait parfaitement à la description d'un laser en anneau unidirectionnel. Pour prendre en compte, de manière phénoménologique le fait que notre laser possède une cavité Fabry-Pérot (ondes stationnaires), nous devons faire la distinction entre saturation propre et saturation

croisée. Pour cela, nous introduisons un coefficient b égal au rapport entre saturation croisée et saturation propre [114, 25]. Nous prenons $b \approx \frac{1}{2}$ dans le cas d'un laser possédant un cavité Pérot-Fabry, et évidemment $b = 1$ pour un laser en anneau. Il convient de noter que le choix de cette valeur n'est pas critique. En effet, des résultats comparables sont obtenus en prenant $b = 0.5$ ou $b = 1$ dans les simulations numériques.

Les équations deviennent alors :

$$\dot{m}_j = -m_j + (m_j + a) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} d_l \quad (2.13a)$$

$$\dot{d}_j = \gamma [Ag_j - d_j (1 + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} m_l)] \quad (2.13b)$$

avec

$$\begin{aligned} \beta_{l-j} &= \beta_0 \text{ pour } l = j \\ \beta_{l-j} &= b\beta_0 \frac{1}{1 + (\frac{l-j}{\Delta})^2} \text{ pour } l \neq j \end{aligned} \quad (2.14)$$

où β_0 est choisi tel que $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_l = 1$:

$$\beta_0 = \frac{1}{1-b} \frac{1}{1 + \frac{b\Delta\pi}{1-b} \coth \Delta\pi} \quad (2.15)$$

Le problème des conditions aux limites et de l'inhomogénéité du spectre est délicat à traiter. Pour se rapprocher des conditions réelles, il faut considérer un spectre inhomogène (de type gaussien) et des conditions aux limites fixes. Le problème requiert alors une résolution numérique. Toutefois, nous désirons étudier les propriétés intrinsèques au milieu, c'est à dire celles ne provenant pas de conditions limites ou d'inhomogénéité du milieu, mais résultant de mécanismes internes. Nous considérons, pour cela, le système invariant par translation, ainsi qu'il est fait habituellement en physique du solide [35]. A cette effet, nous supposons que le spectre est uniforme et infini, la fonction g est prise égale à l'unité sur tout le spectre.

Ces conditions ne sont pas si irréalistes qu'on peut le soupçonner à première vue. En effet, à basse température (77 K), la largeur homogène est beaucoup plus petite que la largeur inhomogène équivalente ($\sigma/\Delta = 25$) et la condition d'invariance par translation est approchée, tout au moins sur

une petite zone centrale du spectre. L'étude numérique et expérimentale de la perturbation du spectre a montré que l'atténuation des ondes créées était forte, de sorte que l'onde générée par une percussion appliquée au centre du spectre n'atteignait pas les bords. Le fait de ne pas tenir compte de l'inhomogénéité du spectre est donc acceptable pour étudier la propagation résultant d'une perturbation effectuée au centre.

Le modèle utilisé dans les calculs analytiques est donc finalement, en négligeant l'émission spontanée :

$$\dot{m}_j = m_j \left(-1 + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} d_l \right) \quad (2.16a)$$

$$\dot{d}_j = \gamma \left[A - d_j \left(1 + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} m_l \right) \right] \quad (2.16b)$$

Nous sommes donc en présence d'un modèle relativement simple de laser multimode où chaque mode est décrit par une variable d'intensité m_j et une variable d_j d'inversion de population. Le couplage entre les modes se fait uniquement par le terme de saturation croisée $\beta_{l-j} d_j m_l$ présent dans les deux équations. Ce modèle permet de mettre en évidence l'analogie avec un système d'oscillateurs couplés. Nous allons maintenant passer à l'étude de ce modèle en utilisant les mêmes outils que ceux utilisés pour les chaînes d'oscillateurs et les milieux de propagation.

2.2.2 Relation de dispersion

Pour déterminer la relation de dispersion du système 2.16, nous calculons les états stationnaires de ce système et effectuons une analyse de stabilité linéaire. Nous cherchons alors une solution sous forme d'ondes progressives et en déduisons la relation de dispersion du milieu.

Le nombre de modes étant infini et le profil de pompage étant constant, nous supposons que les m_j et d_j sont constants suivant j . Les deux états stationnaires avec cette supposition sont :

$$\bar{m}_j = 0 \text{ et } \bar{d}_j = A \quad (2.17)$$

Cette solution est stable pour $A < 1$ et correspond au laser éteint.

$$\bar{m}_j = \bar{m} = A - 1 \text{ et } \bar{d}_j = \bar{d} = 1 \quad (2.18)$$

Cette solution est stable pour $A > 1$ et correspond au laser en fonctionnement.

Nous remarquons que ces solutions sont identiques à celles du laser monomode (cf sect. 1.1.3.1).

En introduisant le changement de variable habituel (cf sect. 1.1.3.1) :

$$u_j = \ln \left(\frac{m_j}{\bar{m}} \right) \quad (2.19)$$

le système 2.16 devient alors :

$$\dot{u}_j = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} d_l - 1 \quad (2.20a)$$

$$\dot{d}_j = \gamma \left[A - d_j \left(1 + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} \bar{m} e^{u_l} \right) \right] \quad (2.20b)$$

Le changement de variable a pour effet de supprimer le terme de couplage dans l'équation d'évolution de l'intensité, ce qui simplifie notablement les calculs. La forme 2.20 est particulièrement adaptée au calcul numérique des solutions. Cependant, l'interprétation de la forme du modèle est beaucoup plus claire, si l'on réécrit ce dernier sous la forme d'une équation du second ordre de la seule variable u_j .

$$\begin{aligned} \ddot{u}_j = & -\gamma A \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_{p-j} (d_p - 1) - \gamma(A - 1) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-p} \beta_{p-j} (e^{u_l} - 1) \\ & - \gamma(A - 1) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-p} \beta_{p-j} (d_p - 1) (e^{u_l} - 1) \end{aligned} \quad (2.21)$$

nous posons

$$\xi_l = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-p} \beta_l \quad (2.22)$$

qui est un produit de convolution. En utilisant 2.20a, nous écrivons :

$$d_p - 1 = \sum_q \alpha_{q,p} \dot{u}_q \quad (2.23)$$

La matrice correspondant aux coefficients β étant inversible¹.

L'équation 2.21 devient alors :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_j + \gamma A \dot{u}_j + \gamma(A-1) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-p} \beta_{p-j} (e^{u_l} - 1) \sum_q \alpha_{p,q} \dot{u}_q \\ + \gamma(A-1) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \xi_{l-j} (e^{u_l} - 1) = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nous reconnaissons l'équation d'une chaîne d'oscillateurs non linéaires. L'interaction entre ces oscillateurs dérive d'un potentiel de Toda $V(x) = e^x - x$ [66] (cf chap.1 sec.1.1.3.1).

Le système 2.24 linéarisé (e^{u_j} est développé au voisinage de 0 car $m_j = \bar{m}e^{u_j}$) s'écrit :

$$\ddot{u}_j + \gamma A \dot{u}_j + \gamma(A-1) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \xi_{l-j} u_l = 0 \quad (2.25)$$

Cette équation décrit une chaîne classique d'oscillateurs couplés et amortis. Nous sommes donc en présence d'un milieu de propagation. La solution de cette équation prend la forme d'une onde progressive amortie. Nous posons à cette effet :

$$u_j = u e^{\alpha t} e^{i(\omega t - k j)} \quad (2.26)$$

pour $u \neq 0$ nous obtenons en insérant (2.26) dans (2.25) :

$$(\alpha^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega) + \gamma A(\alpha + i\omega) + \gamma(A-1) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \xi_l e^{-ikl} = 0 \quad (2.27)$$

Nous séparons les parties réelle et imaginaire ($\sum_l \xi_l \sin(kl) = 0$):

$$\alpha^2 - \omega^2 + \gamma A \alpha + \gamma(A-1) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \xi_l e^{-ikl} = 0 \quad (2.28)$$

$$2\alpha\omega + \gamma A \omega = 0 \quad (2.29)$$

1. Cette matrice peut être décomposée en une matrice unité et une matrice dont la norme est inférieure à un.

Nous obtenons, pour $\omega \neq 0$, $\alpha = -\frac{\gamma A}{2}$ ce qui correspond à l'amortissement du laser monomode, nous remarquons que α est indépendant de k . De la partie réelle nous déduisons la relation de dispersion pour ω .

$$\omega^2 = \gamma(A-1) \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \xi_l e^{-ikl} - \frac{\gamma A^2}{4(A-1)} \right) \quad (2.30)$$

Dans le cas d'un laser à solide, $\gamma \ll 1$, nous développons 2.30 en série de $\gamma^{1/2}$ et ne tenons compte que du premier terme²:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \xi_l e^{-ikl} + o(\gamma) \right) \quad (2.31)$$

avec $\omega_r = \sqrt{\gamma(A-1)} + o(\gamma^{3/2})$, la fréquence correspondant à $k=0$, c'est à dire à une oscillation en phase de tous les modes. La valeur $\sqrt{\gamma(A-1)}$ est précisément celle de la fréquence de relaxation classique d'un laser monomode classe B.

En utilisant 2.22, nous avons :

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \xi_l e^{-ikl} = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_l e^{-ikl} \right)^2 \quad (2.32)$$

qui est la transformée de Fourier d'un produit de convolution. La relation de dispersion peut donc s'écrire :

$$\frac{\omega}{\omega_r} = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_l e^{-ikl} + o(\gamma) \right) \quad (2.33)$$

Calculons $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_l e^{-ikl}$, β_l est défini par 2.14

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_l e^{-ikl} = \beta_0 \left(1 + 2b \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\cos(kl)}{1 + (\frac{l}{\Delta})^2} \right) \quad (2.34)$$

$$= \beta_0 \left(1 - b + b \frac{\Delta \pi \cosh \Delta(\pi - k)}{\sinh \Delta \pi} \right) \quad (2.35)$$

2. Pour des valeurs élevées de k , le second membre de l'équation 2.30 peut devenir négatif, ce qui correspond à une disparition de la fréquence de relaxation. Un phénomène analogue a été montré dans les lasers multimodes à élargissement homogène par P. Khankhin *et al.* [72]. Nous traiterons ce cas en annexe.

Nous avons pris comme condition de normalisation $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_l = 1$, nous en déduisons donc β_0 .

$$\beta_0 = \frac{1}{1 - b + b\Delta\pi \coth \Delta\pi} \quad (2.36)$$

nous posons :

$$\epsilon = (1 - b)\beta_0 \quad (2.37)$$

$\epsilon \ll 1$ quand la largeur homogène $\Delta \gg 1$, c'est à dire lorsqu'il y a un grand nombre de modes par largeur homogène, ce qui est le cas du laser à fibre.

En introduisant la valeur de ϵ dans l'équation (2.35), nous obtenons la relation de dispersion du milieu :

$$\frac{\omega}{\omega_r} = \epsilon + (1 - \epsilon)S(k) + o(\gamma) \quad (2.38)$$

où

$$S(k) = \frac{\cosh \Delta(\pi - k)}{\cosh \Delta\pi} \quad (2.39)$$

Cette fonction est décroissante comme le sont les courbes de dispersion expérimentales et numériques. Nous développons $S(k)$ afin d'en déduire une approximation de la relation de dispersion lorsque $\Delta \gg 1$.

$$S(k) = \frac{\cosh \Delta(\pi - k)}{\cosh \Delta\pi} \quad (2.40)$$

$$= \frac{e^{-k\Delta} + e^{-\Delta(2\pi - k)}}{1 + e^{-2\pi\Delta}} \quad (2.41)$$

Nous avons $k \leq \pi$, donc $2\pi - k \geq \pi$. Si k n'est pas trop proche de π , c'est à dire $\pi - k \gg \frac{1}{\Delta}$:

$$S(k) = e^{-k\Delta} + o\left(\frac{1}{\Delta}\right) \quad (2.42)$$

soit

$$\frac{\omega}{\omega_r} = e^{-k\Delta} + o\left(\gamma, \frac{1}{\Delta}\right) \quad (2.43)$$

Nous remarquons que la relation de dispersion devient indépendante de b .

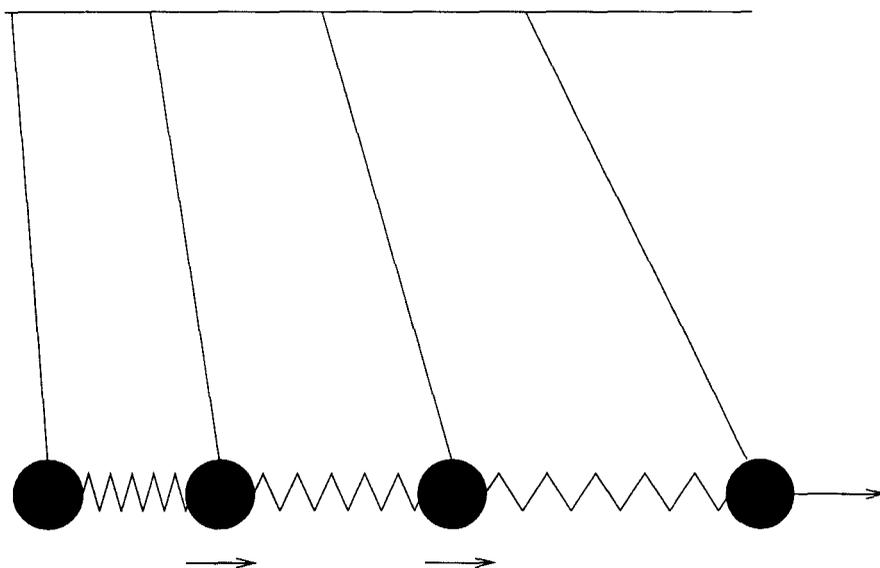


FIG. 2.18 – Chaîne de pendules couplés : Une traction sur un des pendule induit un mouvement dans le sens de la traction pour tous les autres pendules.

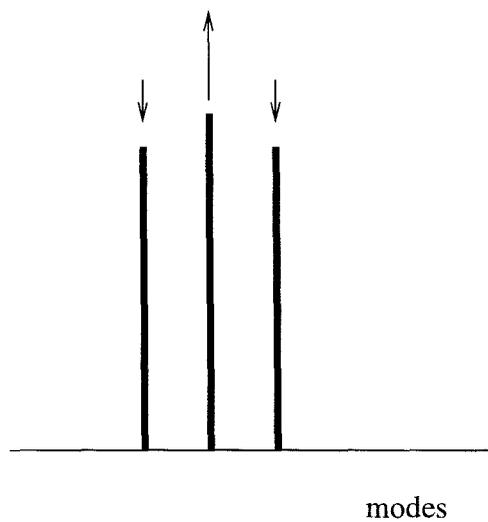


FIG. 2.19 – Modes du laser : l'augmentation de l'intensité d'un mode a pour conséquence de saturer les modes voisins.

La pente de la courbe de dispersion provient de la nature inhabituelle du couplage entre les modes. Dans des systèmes tels que des chaînes de pendules couplés par des ressorts, figure 2.18, une traction sur un des ressorts a pour effet de mettre les pendules voisins en mouvement dans la même direction. Au contraire, dans le laser l'augmentation de l'intensité d'un mode provoque une saturation locale de l'inversion de population et par conséquent la diminution de l'intensité des modes voisins figure 2.19 (couplage par saturation croisée).

Ce type de couplage se trouve dans d'autres systèmes physique : Un ensemble de boussoles alignées les unes à côtés des autres et placées dans un champ magnétique [115], mais aussi en mécanique des fluides [116].

Nous avons calculé analytiquement la relation de dispersion du milieu de propagation à partir des équations du laser. Cette relation va s'avérer fondamentale, car elle détermine entièrement la dynamique en régime linéaire.

2.2.3 Calcul des réponses à différentes perturbations au moyen de la courbe de dispersion

La propagation d'une faible perturbation au voisinage de l'état stationnaire dans un milieu dispersif est complètement déterminée par la relation de dispersion et la condition initiale. Connaissant la relation de dispersion analytique du laser, nous devons être capables de reproduire les résultats expérimentaux. Dans un premier temps nous allons présenter la méthode permettant de calculer les solutions en régime linéaire correspondant à une condition initiale donnée. Nous étudierons alors la réponse à une perturbation sinusoidale du spectre, ce qui permettra de mettre clairement en évidence les effets liés aux vitesses de phase et de groupe. Enfin, nous étudierons la réponse à une perturbation comparable à celle des expériences, ce qui validera notre approche.

2.2.3.1 Principe du calcul de la réponse

Nous utilisons une méthode classique [117], consistant à calculer la transformée de Fourier de la condition initiale en tenant compte de la relation de dispersion.

Considérons une condition initiale $u_n(t = 0)$. La transformée de Fourier

dans l'espace des k est notée $\hat{u}(k, t = 0)$ avec

$$\hat{u}(k, t = 0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(0) e^{-ikn} \quad (2.44)$$

et

$$u_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{u}(k, t) e^{ikn} dk \quad (2.45)$$

la transformée de Fourier inverse indiquant l'évolution temporelle des composantes u_n en fonction des composantes dans l'espace des k . Nous exprimons $\hat{u}(k, t)$ sous la forme $A(k)e^{p(k)t} + B(k)e^{p^*(k)t}$ où $p(k) = \alpha + i\omega(k)$ avec $\omega(k)$ satisfaisant la relation de dispersion 2.43. Nous cherchons donc une solution sous forme de deux ondes progressives contrapropagatives et amorties. Nous avons donc :

$$u_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (A(k)e^{p(k)t} + B(k)e^{p^*(k)t}) e^{ikn} dk \quad (2.46)$$

En prenant comme condition initiale $\dot{u}_n(t)_{t=0} = 0$, nous obtenons

$$B(k) = -\frac{p(k)}{p^*(k)} A(k) \quad (2.47)$$

Dans un laser classe B, $\gamma \ll 1$, nous savons que l'amortissement évolue en $o(\gamma)$ et la fréquence de relaxation en $o(\gamma^{1/2})$. Nous pouvons donc séparer l'action de $e^{\alpha t}$ de celle de $e^{i\omega t}$. Nous avons alors :

$$A = B \quad (2.48)$$

comme $\hat{u}(k, 0) = A(k) + B(k)$, $\hat{u}(k, 0) = \frac{A(k)}{2}$ et 2.46 devient :

$$u_n(t) = e^{\alpha t} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{u}(k, 0) \cos(\omega t) \cos(kn) dk \quad (2.49)$$

Cette méthode permet d'obtenir de façon aisée sans intégration du modèle 2.16 le transitoire d'une réponse à une perturbation du laser. Le calcul étant mené dans l'espace réciproque (espace des k), les résultats obtenus correspondent à ceux obtenus en intégrant les équations du laser avec un très grand nombre de modes. Il s'agit donc d'un outil très puissant pour étudier la réponse du laser à différentes perturbations.

2.2.3.2 Perturbation sinusoidale du spectre

Nous avons déduit, d'après la relation de dispersion que les vitesses de groupe et de phase étaient de signes opposés. Afin de visualiser clairement cette propriété, nous pouvons calculer la réponse à une perturbation dont le spectre est localisé au voisinage d'un nombre d'onde donné k_0 et dont l'enveloppe est bien déterminée. A cette fin, nous prenons comme condition initiale une sinusoïde tronquée de nombre d'onde k_0 :

$$u_n(0) = u_0 \Pi_n \sin(k_0 n) \quad (2.50)$$

où Π_n désigne l'enveloppe de la sinusoïde.

L'allure des transitoires obtenus dépend fortement des valeurs relatives de k_0 et $1/\Delta$. Si k_0 est nettement inférieur à $1/\Delta$, nous observons (figure 2.20a) , une propagation de l'enveloppe vers l'extérieur du spectre et des maxima vers l'intérieur, comme attendu d'après la pente de la courbe de dispersion. La vitesse de propagation est perceptible car le spectre de la perturbation est localisé dans la partie fortement décroissante de la courbe de dispersion, figures 2.20b.

Par contre, si $k_0 \gg 1/\Delta$, la propagation de l'enveloppe n'est plus perceptible, figure 2.21a. En effet, dans ce cas, le spectre de la perturbation est localisé dans la partie quasiment constante de la courbe de dispersion. Les vitesses de groupe et de phase sont alors extrêmement faibles (figure 2.21b).

Expérimentalement, bien que délicate à mettre en oeuvre, une perturbation sinusoidale du spectre pourrait être appliquée en utilisant un interféromètre de Fabry-Pérot ayant une petite finesse, (ou de Michelson) à la place du réseau en configuration Littrow.

2.2.3.3 Impulsion localisée

La validité de l'approche peut être testée en considérant une perturbation semblable à celle réalisée expérimentalement. De plus, bien que le spectre de la perturbation soit beaucoup plus large que dans le cas précédent (sinusoïde tronquée), il doit être encore possible d'interpréter le transitoire comme précédemment au moyen de la courbe de dispersion 2.42. En particulier, nous allons voir si la valeur relative de $1/\Delta$ et des composantes du spectre de la perturbation ont encore des effets observables.

Nous choisissons une perturbation semblable à celle appliquée dans les

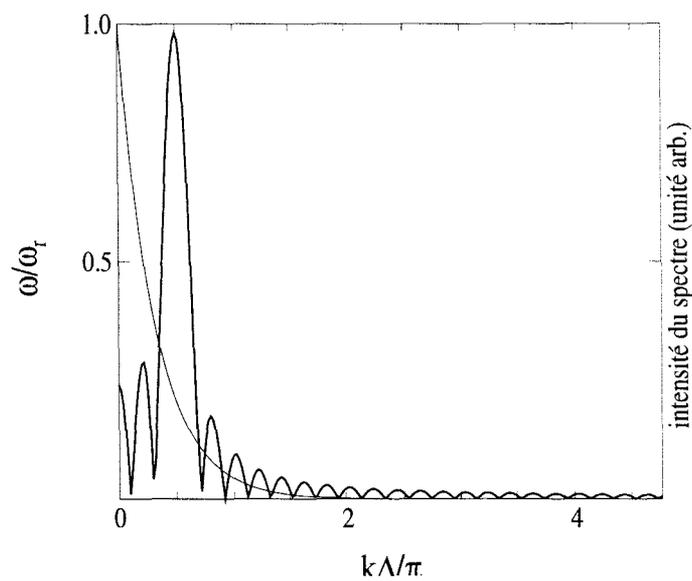
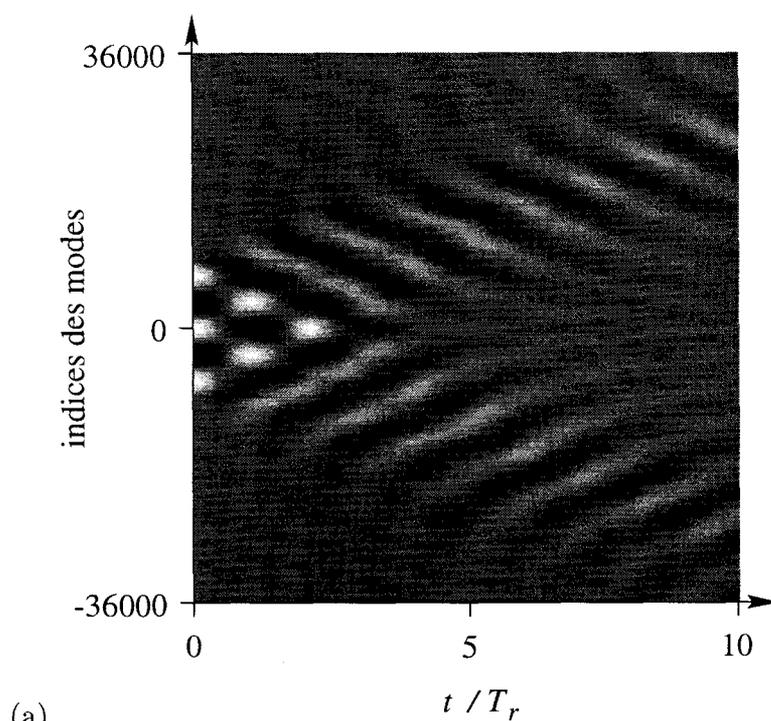


FIG. 2.20 – a : Propagation d'une perturbation sinusoidale de nombre d'onde $k_0 = \pi/2\Delta$, b : Spectre de la perturbation, la courbe de dispersion est superposée (trait fin). L'intégration étant effectuée dans l'espace réciproque (espace des k), nous pouvons utiliser une valeur réaliste de Δ ($\Delta = 1800$). T_r désigne la période de relaxation du laser (l'échelle de gris est celle de la figure 2.13).

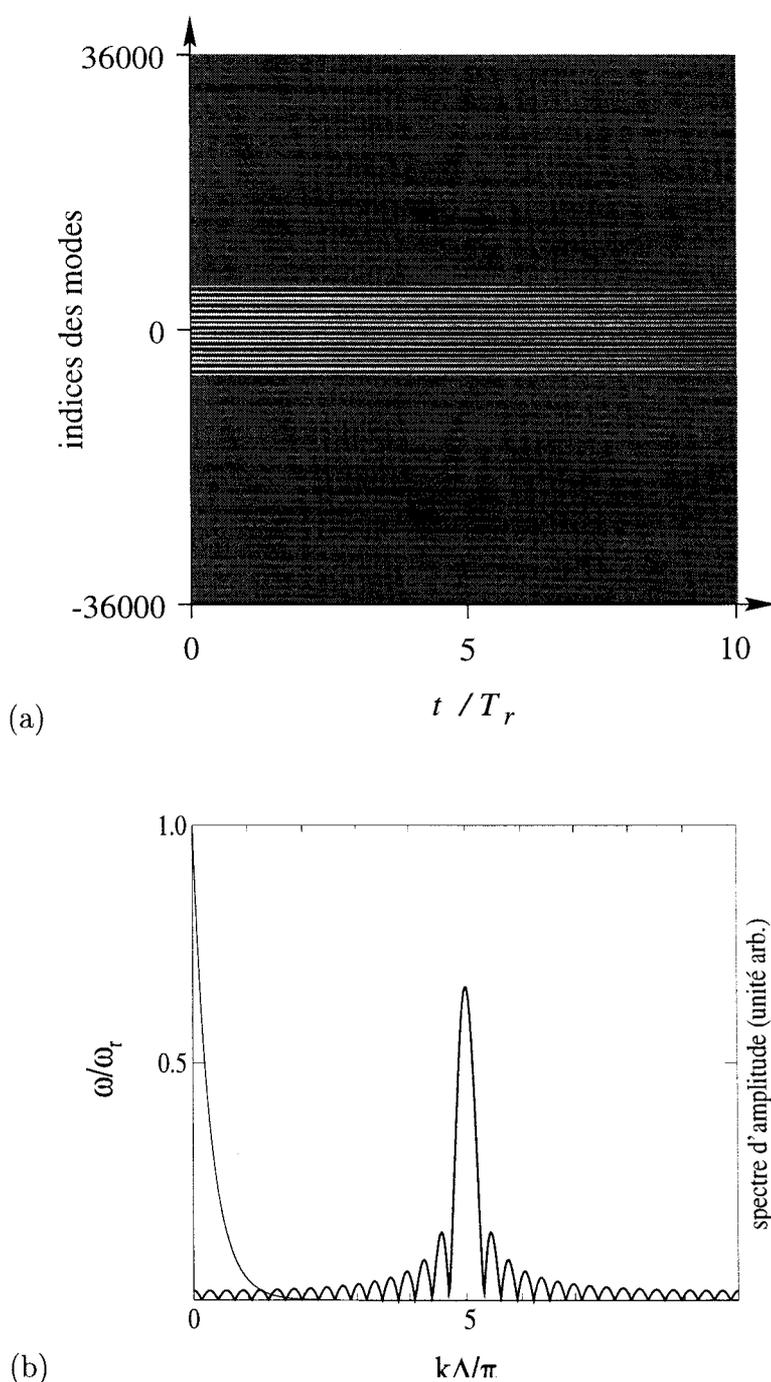


FIG. 2.21 – a : Propagation d'une perturbation sinusoidale de nombre d'onde $k_0 = 5\pi/\Delta$, b : Spectre de la perturbation, la courbe de dispersion est superposée (trait fin). L'intégration étant effectuée dans l'espace réciproque (espace des k), nous pouvons utiliser une valeur réaliste de Δ ($\Delta = 1800$). T_r désigne la période de relaxation du laser (l'échelle de gris est celle de la figure 2.13).

expériences :

$$u_n(0) = -u_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{n-n_0}{\Delta'}\right)^2} \quad (2.51)$$

Pour une perturbation dont les composantes principales ont un nombre d'onde inférieur à $1/\Delta$ (ce qui correspond dans notre cas à $\Delta' > \Delta$ car $\hat{u}(k, 0) = e^{-k\Delta'}$), nous obtenons une réponse semblable aux résultats expérimentaux, figure 2.22a. Ceci s'explique car les composantes du spectre sont situées dans la zone fortement décroissante de la courbe de dispersion, figure 2.22b.

Dans le cas où des nombres d'ondes k supérieurs à $1/\Delta$ sont excités, ce qui correspond dans notre cas à $\Delta' < \Delta$, nous constatons une réponse semblable à celle du cas précédent ainsi qu'une quasi-absence de propagation pour certaines composantes de la perturbation (trait sombre dans le prolongement de la perturbation), figure 2.23.

En reproduisant les résultats expérimentaux uniquement à l'aide de la relation de dispersion obtenue analytiquement et d'une condition initiale appropriée, nous avons montré que cette relation portait en elle les propriétés intrinsèques du laser. Son importance est donc fondamentale car elle détermine entièrement la dynamique du spectre en régime linéaire.

2.2.4 Estimation de la largeur homogène

En déterminant la relation de dispersion à partir des résultats expérimentaux, nous avons accès à certaines grandeurs caractéristiques du laser. En particulier, la relation de dispersion 2.43 exprime la pulsation ω en fonction de la largeur homogène Δ et du nombre d'onde k . En ajustant cette relation aux courbes expérimentales, il est donc possible de déterminer la largeur homogène du laser. Afin de tester la validité de cette méthode, nous pouvons l'appliquer aux courbes de dispersions, obtenues à partir du modèle complet 2.16b.

La transformée de Fourier bidimensionnelle utilisée précédemment exprime la densité de puissance des différentes fréquences spatiales et temporelles présentes dans les transitoire résultant d'une perturbation du spectre. La position des différents maxima donne un aperçu qualitatif de la courbe de dispersion. Afin de déterminer plus précisément la courbe de dispersion à partir de la transformée de Fourier, nous devons connaître la relation exacte liant la courbe de dispersion est la densité de puissance en k et ω . Nous

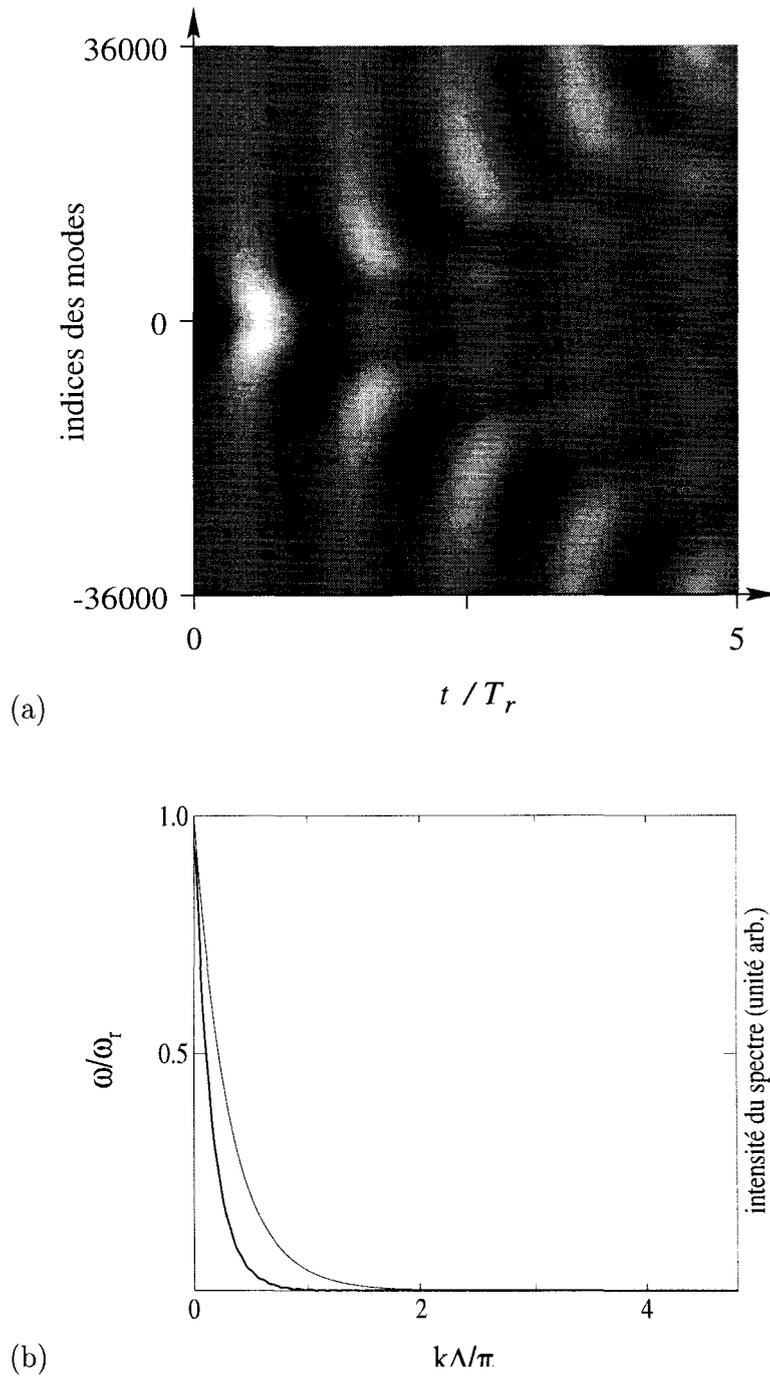


FIG. 2.22 – a : Propagation d'une perturbation comparable à celle de l'expérience, b : Spectre de la perturbation, la courbe de dispersion est superposée (trait fin). L'intégration étant effectuée dans l'espace réciproque (espace des k), nous pouvons utiliser une valeur réaliste de Δ ($\Delta = 1800$). T_r désigne la période de relaxation du laser (l'échelle de gris est celle de la figure 2.13).

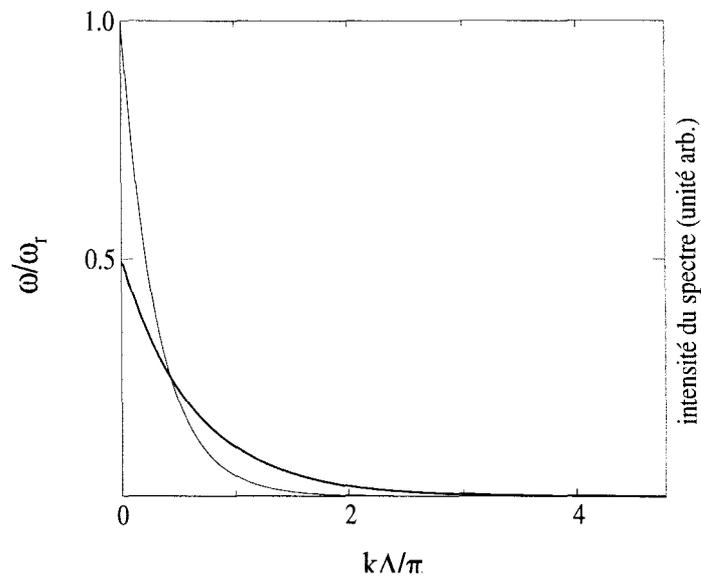
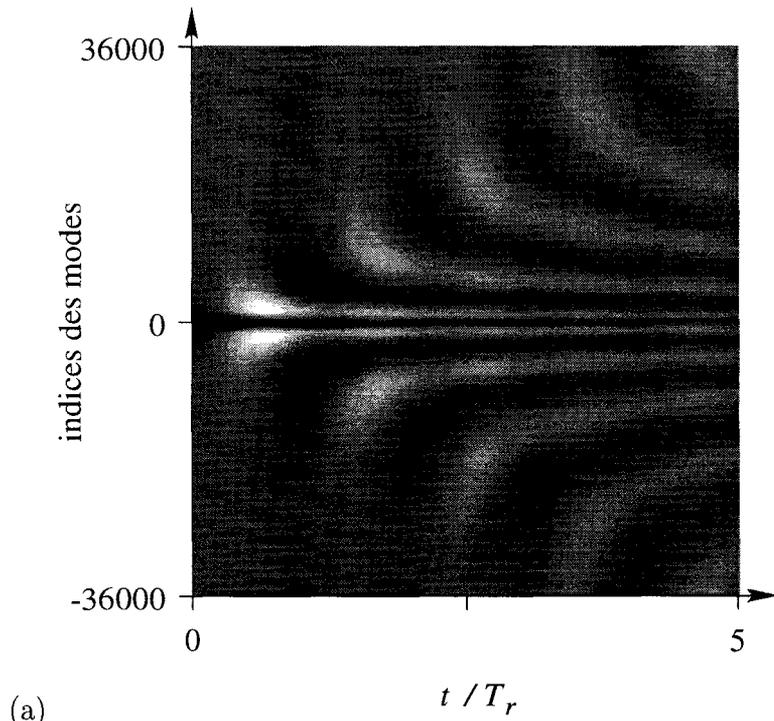


FIG. 2.23 – a : Propagation d'une perturbation plus fine que dans l'expérience, b : Spectre de la perturbation, la courbe de dispersion est superposée (trait fin). L'intégration étant effectuée dans l'espace réciproque (espace des k), nous pouvons utiliser une valeur réaliste de Δ ($\Delta = 1800$). T_r désigne la période de relaxation du laser (l'échelle de gris est celle de la figure 2.13).

partons du modèle 2.16 que nous linéarisons en tenant compte d'une faible perturbation :

$$\dot{\mu}_j = (A - 1)(-\kappa_j + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} \zeta_l) \quad (2.52a)$$

$$\dot{\zeta}_j = -\gamma \left[\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} \mu_l + A \zeta_j \right] \quad (2.52b)$$

où μ_j , ζ_j , κ_j sont les variations au premier ordre de m_j , d_j et des pertes. En calculant la transformée de fourier bidimensionnelle nous passons de l'espace (t, j) à l'espace (ω, k) :

$$i\omega \hat{\mu}(\omega, k) = (A - 1) \left(-\hat{\kappa}(\omega, k) + \hat{\beta}(k) \hat{\zeta}(\omega, k) \right) \quad (2.53a)$$

$$i\omega \hat{\zeta}(\omega, k) = -\gamma \left[\hat{\beta}(k) \hat{\mu}(\omega, k) + A \hat{\zeta}(\omega, k) \right] \quad (2.53b)$$

où $\hat{\mu}$, $\hat{\zeta}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\kappa}$ désignent respectivement les transformées de Fourier de μ_j , ζ_j , $\sum \beta$ et κ_j (les $\sum \beta$ sont des produits de convolution, leur transformée de Fourier est donc un produit simple). Nous déduisons μ de 2.53 :

$$\hat{\mu}(\omega, k) = -(A - 1) \frac{\hat{\kappa}(\omega, k)(i\omega + \gamma A)}{(\omega_0^2(k) - \omega^2) + i\omega\gamma A} \quad (2.54)$$

ce qui donne pour le module au carré :

$$|\hat{\mu}|^2 = (A - 1)^2 \frac{|\hat{\kappa}|^2 (\omega^2 + (\gamma A)^2)}{(\omega_0^2(k) - \omega^2)^2 + (\omega\gamma A)^2} \quad (2.55)$$

avec $\omega_0^2(k) = \gamma(A - 1)\hat{\beta}^2$ qui n'est rien d'autre que la relation de dispersion du milieu. $\hat{\kappa}$ est déterminé par la perturbation initiale. Pour une perturbation du spectre localisée dans le temps et dans l'espace :

$$\kappa_j = \kappa_0 \delta_{j0} \delta(t_0) \quad (2.56)$$

nous avons

$$\hat{\kappa} = \kappa_0 \quad (2.57)$$

La perturbation expérimentale est suffisamment brève et localisée pour pouvoir être modélisée par 2.56. A k fixé nous avons une relation de la forme :

$$|\hat{\mu}|^2(\omega) = a_1 \frac{a_2^2 + \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + a_2^2 \omega^2} \quad (2.58)$$

en ajustant cette fonction à la densité spectrale de puissance du transitoire pour une valeur de k donnée, nous obtenons la valeur de ω_0 . En effectuant cette opération pour les différentes valeurs de k nous pouvons alors tracer la relation $\omega_0(k) = f(k)$ et ajuster cette dernière à la relation de dispersion 2.43, nous trouvons alors la valeur de Δ . Nous avons appliqué cette méthode à la courbe de dispersion numérique, et obtenons pour Δ approximativement (à 10% près) la valeur introduite dans le modèle, (figure 2.24), ce qui prouve la validité de la méthode. En faisant de même avec les courbes de dispersion expérimentales obtenues lors de diverses expériences, nous constatons que la courbe théorique s'ajuste très bien aux résultats expérimentaux, et nous trouvons une largeur homogène de l'ordre de 0.8 Å, figure 2.25

Des mesures de la largeur homogène obtenues par d'autres méthodes (Fluorescence Line Narrowing [102], Echo de photon [118]) permettraient de valider notre mesure. Malheureusement, nous ne disposons pas de ces mesures pour notre fibre. La largeur homogène dépend de la composition de la fibre (en particulier de la concentration en aluminium). Des mesures effectuées sur d'autres fibres dopées au néodyme donnent une largeur homogène de l'ordre de l'Angström (2 Å dans [96]).

Nous avons également effectué les expériences de perturbation de spectre à température ambiante. Nous avons mesuré une valeur de largeur homogène de 12 Å. En faisant le rapport $\Delta(T_2)/\Delta(T_1) = (T_2/T_1)^\alpha$ avec $T_2=300$ K et $T_1=77$ K, nous trouvons $\alpha=1.8$ ce qui est de l'ordre de la valeur habituellement trouvée dans les fibres néodymes (α varie entre 1.7 et 2.3 cf chap1 section 1.2.1).

2.2.5 Prise en compte des inhomogénéités et des effets de bords

Ayant considéré le spectre comme un milieu homogène et infini pour en étudier les propriétés intrinsèques, nous allons revenir à un modèle se rapprochant plus de la réalité et examiner l'influence des inhomogénéités et des

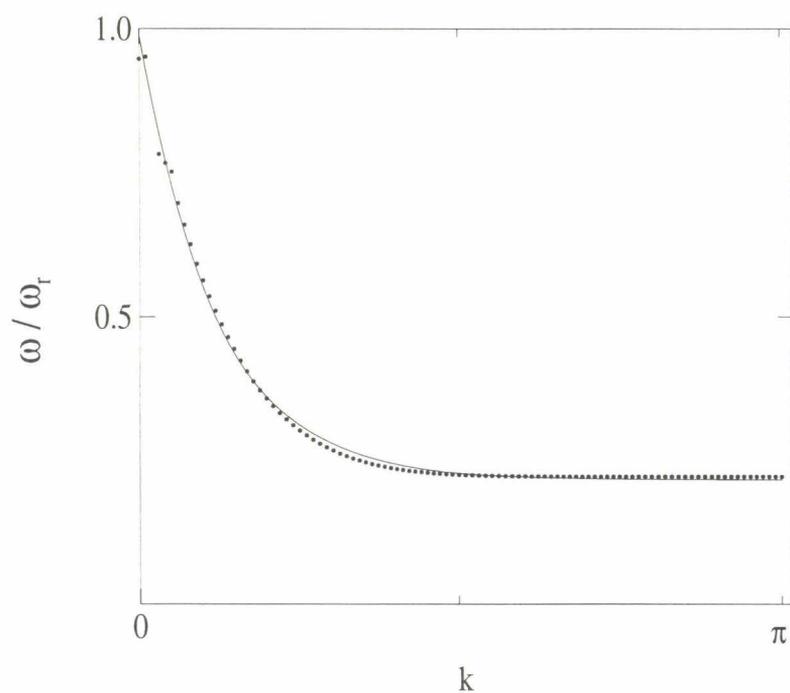


FIG. 2.24 – Courbe de dispersion obtenue à partir des résultats numériques présentés sur la figure 2.16b. Chaque point correspond à la valeur de $\omega_0(k)$ obtenue par ajustement de 2.58 sur la densité spectrale de puissance, pour une valeur de k donnée. La courbe en trait plein correspond à l'ajustement de la relation 2.38 sur ces points par une méthode de moindres carrés.

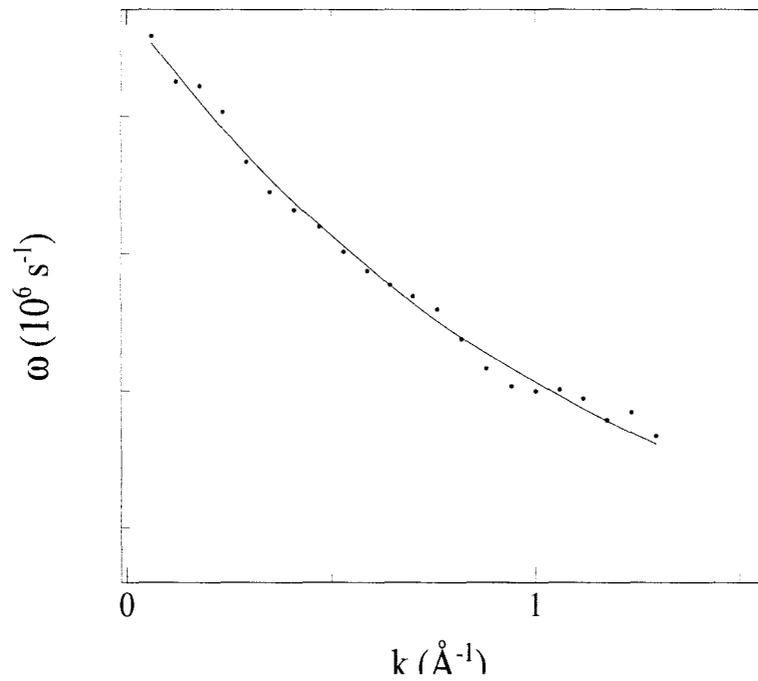


FIG. 2.25 – Courbe de dispersion obtenue à partir des résultats expérimentaux présentés sur la figure 2.16a. Chaque point correspond à la valeur de $\omega_0(k)$ obtenue par ajustement de 2.58 sur la densité spectrale de puissance, pour une valeur de k donnée. La courbe en trait plein correspond à l'ajustement de la relation 2.43 sur ces points par une méthode de moindres carrés. La valeur de Δ ainsi déterminée est de 0.8 \AA .

bords du spectre sur la propagation. Dans un premier temps, nous calculerons de façon approchée les états stationnaires du laser en tenant compte de la forme du spectre. Ceci nous permettra de calculer, de façon approchée, l'équation de propagation dans le milieu non homogène, et d'en déduire une relation de dispersion locale (valable lorsque le profil du spectre est lentement variable spatialement en j). Nous déterminerons ensuite numériquement les fréquences propres de vibration du spectre du laser, ainsi que les modes propres associés. Ceci nous permettra de juger de la pertinence de la relation de dispersion 2.43 dans le cas réel.

Nous utilisons le modèle 2.13 dans lequel nous négligeons le terme d'émission spontanée. Les états stationnaires sont définis par :

$$m_j \left(-1 + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} d_l \right) = 0 \quad (2.59a)$$

$$d_j \left(1 + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} m_l \right) = A g_j \quad (2.59b)$$

Dans le cas où la largeur inhomogène équivalente est grande devant la largeur homogène (cas de notre laser à fibre à basse température), certaines approximations sont applicables. En particulier, nous considérons que le couplage dû à l'élargissement homogène est de faible portée.

Pour les modes en dessous du seuil ($m_j = 0$), nous déduisons de 2.59b que $d_j \approx A g_j$. Nous avons pour cela négligé le terme $\sum \beta_{l-j} m_l$, car il comprend d'une part les modes d'intensité nulle et les modes situés aux extrémités du spectre et dont l'intensité est faible, d'autre part les modes situés au centre du spectre (dont les intensités sont les plus importantes) mais dont le poids est négligeable du fait de la faible portée du couplage.

Pour ce qui est des modes au dessus du seuil ($m_j \neq 0$), l'inversion de population vérifie $\sum \beta_{l-j} d_l = 1$, d'après 2.59a. Le fait que cette relation soit définie pour tous les indices j des modes au dessus du seuil implique que $d_l \approx 1$ ($\sum \beta_l = 1$). Le couplage étant de faible portée, les composantes $d_j = A g_l < 1$ ont une faible influence sur la valeur de d . Connaissant l'inversion de population, pour les modes au dessus du seuil, nous pouvons en déduire la relation :

$$A g_j - 1 = \sum \beta_{l-j} m_l \quad (2.60)$$

Comme la largeur inhomogène équivalente est grande devant la largeur homogène, $m_l = Ag_l - 1$ est une solution approchée de 2.60 (les variations de g_l sont faible devant celle de β_l).

En résumé, pour les modes sous le seuil :

$$m_j = 0, \text{ et } d_j = Ag_j \tag{2.61}$$

pour les modes au dessus du seuil :

$$m_j = Ag_j - 1, \text{ et } d_j = 1 \tag{2.62}$$

Ces solutions ont la même forme que celles du laser monomode, Ag_j est remplacé par A . Elles constituent une approximation convenable de l'état stationnaire du laser.

Nous pouvons également obtenir un ordre de grandeur de la largeur du spectre en fonction du taux de pompage. En effet aux extrémités du spectre nous avons $Ag_j = 1$, pour une forme gaussienne du spectre $g_j = \exp(-\frac{(j-\nu_C)^2}{2\sigma^2})$, (ν_C centre de la courbe de gain) nous en déduisons la largeur du spectre Δ_S :

$$\Delta_S = 2\sigma\sqrt{2 \ln A} \tag{2.63}$$

Ce résultat concorde avec celui établi par Ya. Khanin [119].

Le fait que le spectre soit non constant va influencer la propagation des ondes. Nous adoptons une démarche analogue à celle utilisé pour étudier la propagation dans les milieux inhomogènes. Nous considérons que les variations spatiales du spectre sont lentes sur une longueur de l'ordre de la largeur homogène (ce qui est effectivement le cas). Afin d'étudier ce phénomène nous pouvons reprendre l'équation linéarisée 2.25 et tenir compte du profil de l'intensité à l'état stationnaire, nous avons alors :

$$\ddot{u}_j + \gamma(Ag_j)\dot{u}_j + \gamma(Ag_j - 1) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \xi_{l-j}u_l = 0 \tag{2.64}$$

Cette équation est celle d'une chaîne d'oscillateurs dont les fréquences de relaxation ainsi que l'amortissement dépendent de la position dans la chaîne. Les variations de l'intensité à l'état stationnaire étant lentes sur une longueur de l'ordre de la largeur homogène, nous pouvons définir une relation de dispersion locale :

$$\omega_j = \omega_{rj}e^{-k\Delta} \tag{2.65}$$

avec $\omega_{rj} = \sqrt{\gamma(Ag_j - 1)}$

Nous avons procédé au calcul numérique (à l'aide de la librairie d'algèbre linéaire LAPACK) des valeurs propres et des vecteurs propres (modes propres de vibrations) du système linéaire obtenu à partir du modèle 2.13. La figure 2.26 représente quelques modes propres d'ordre faible et des modes d'ordre plus élevé. Bien que ces modes ne soient pas sinusoidaux, ils s'en rapprochent, surtout dans le centre du spectre (pour les ordres les plus faibles). Pour un mode propre de vibration donné, le nombre d'onde n'est pas unique, il varie suivant la position. Cette dépendance spatiale du nombre d'onde, n'a pas d'influence prépondérante en régime linéaire, elle aura par contre des répercussions fondamentales en régime non linéaire, ainsi que nous le verrons dans le chapitre suivant. Les parties réelles (amortissement) et imaginaires (fréquences de relaxation) des vecteurs propres sont représentées sur la figure 2.27. Ces valeurs propres sont classées en fonction du nombre croissant de zéros des modes propres correspondants (ce qui correspond à un k croissant). Nous constatons que le début de la courbe relative à l'amortissement est pratiquement constante, ce qui est semblable au résultat obtenu pour le modèle infini.

La nature locale du couplage entre les modes du laser à élargissement inhomogène, nous a amené à considérer ce dernier comme une chaîne d'oscillateurs couplés. En utilisant cette approche, et au moyen d'un modèle simple, nous avons pu interpréter les résultats expérimentaux obtenus dans la première partie (propagation d'ondes). Nous avons, en particulier, déterminé analytiquement la relation de dispersion de ce milieu. Cette relation nous a permis d'expliquer le signe opposé entre vitesse de phase et de groupe, propriété qui est due uniquement à la nature du couplage entre les modes (saturation croisée). Une étude incluant l'inhomogénéité du spectre, a montré que le concept de relation de dispersion restait valable localement si les variations spatiales sont lentes.

Toute l'étude précédente a été menée en ne tenant pas compte des effets de polarisation pourtant présents dans ce type de lasers. Cela a été justifié par le fait que ces effets peuvent être ignorés si l'on observe la somme des états propres de polarisation. Ayant montré la validité de notre approche dans ce cas, nous allons étudier l'influence de la polarisation sur la propagation.

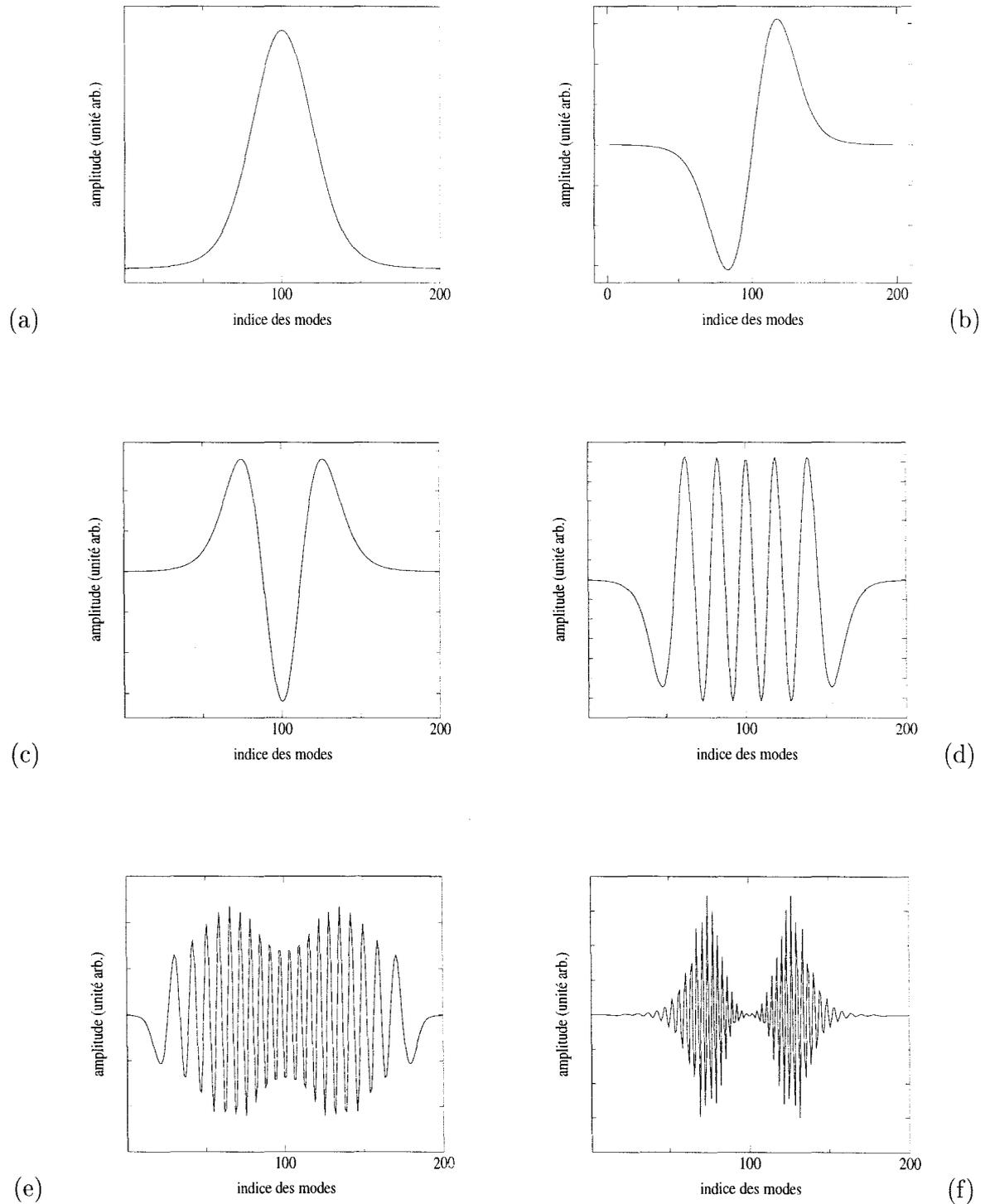


FIG. 2.26 – Modes propres de vibration du spectre (partie réelle du vecteur propre). a : mode d'ordre 0 ($\omega = \omega_r$), b : 1 ($\omega = 0.91\omega_r$), c : 2 ($\omega = 0.85\omega_r$), d : 10 ($\omega = 0.58\omega_r$), e : 40 ($\omega = 0.25\omega_r$), f : 80 ($\omega = 0.14\omega_m$).

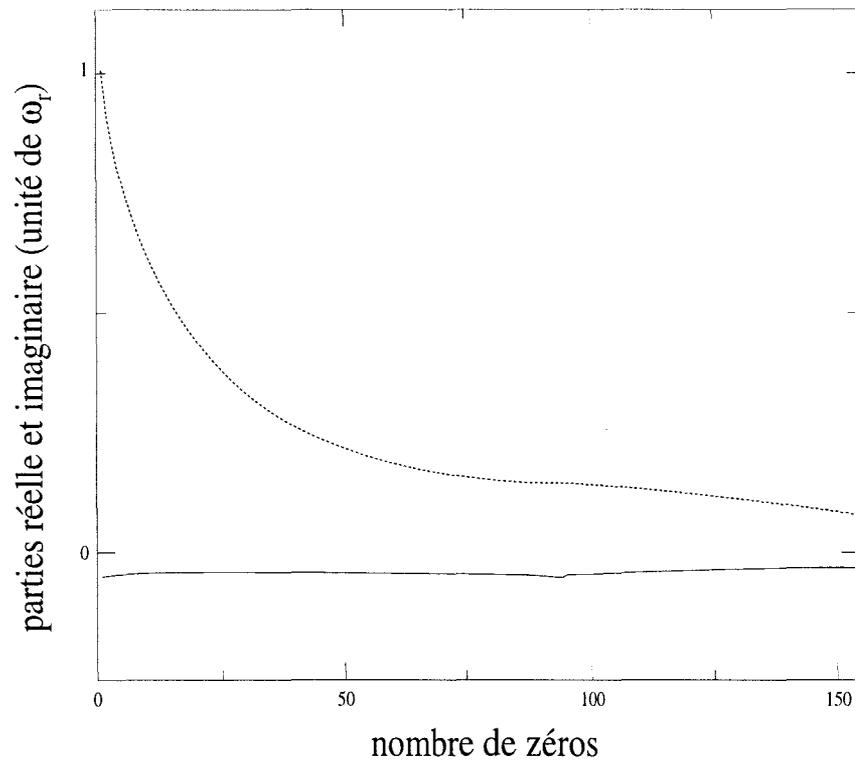


FIG. 2.27 – Partie réelle (trait plein) et imaginaire (tirets) des valeurs propres des équations 2.13 linéarisées.

2.3 Influence de la polarisation

L'analogie entre notre laser et une chaîne d'oscillateurs couplés nous a amenés, pour interpréter nos résultats, à utiliser certains outils de la physique des solides (en particulier ceux concernant les chaînes monoatomiques). Nous allons pousser le parallèle plus loin, et montrer que les effets de polarisation et de couplage local, conduisent à l'existence de l'analogie des *branches acoustiques* et *optiques* dans les cristaux diatomiques à une dimension. Dans un premier temps, nous allons présenter les résultats des expériences de perturbation locale du spectre, mais cette fois résolue en polarisation. Nous dériverons ensuite, du modèle 1.22, des modèles permettant des simulations numériques et des calculs analytiques. Les simulations de la réponse à une perturbation seront présentées et finalement nous établirons les relations de dispersion.

2.3.1 Expérience résolue en polarisation

Le dispositif expérimental est le même que dans les expériences précédentes, mais cette fois la lame demi-onde est orientée de façon à observer l'un ou l'autre des états propres de polarisation. La réponse à une impulsion appliquée sur une polarisation localement dans le spectre est représentée sur la figure 2.28a. Le spectrochronogramme est semblable à celui obtenu lors de l'étude précédente. Son observation met juste en évidence une légère modulation des ondes. Par contre la transformée de Fourier $(j, t) \rightarrow (k, \omega)$ révèle deux courbes de dispersion, figure 2.28b. La branche supérieure correspond à la courbe de dispersion déjà obtenue en observant la somme des états propres. Nous vérifions que pour $k = 0$, la fréquence de la branche basse correspond à la fréquence basse ω_{lf} qui est rencontrée dans les lasers à deux polarisations [25]. Elle correspond à une oscillation en antiphase des modes associés aux deux états de polarisation.

2.3.2 Modèle

Pour expliquer la présence des deux branches sur la courbe de dispersion, nous allons utiliser le modèle 1.22. Afin de se focaliser sur l'interaction entre l'élargissement inhomogène et la polarisation, nous nous placerons dans les conditions suivantes :

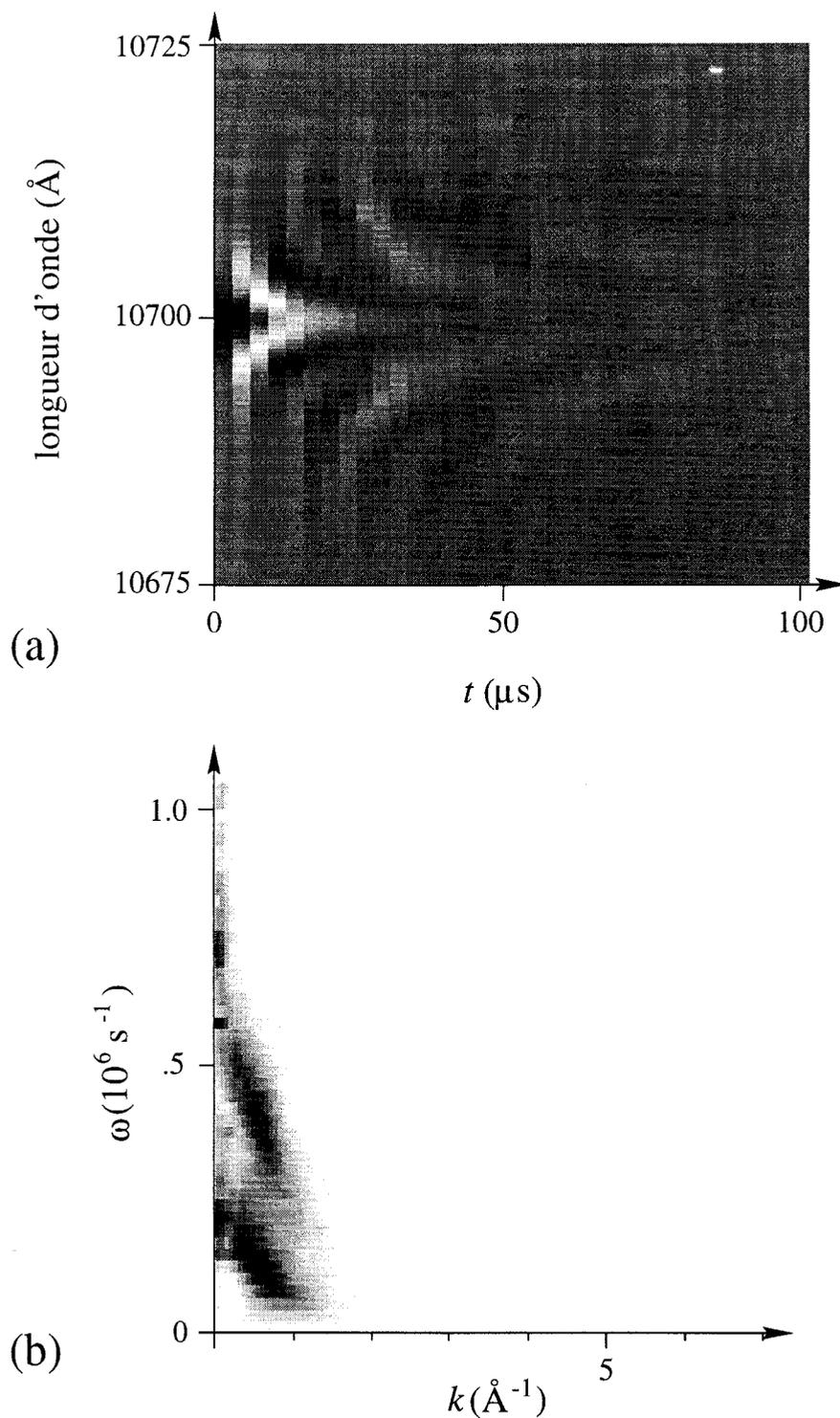


FIG. 2.28 – Perturbation locale du spectre, observation selon un des états propres de polarisation. a : spectrochronogramme, b : Densité spectrale de puissance. Les intensités sont représentées selon l'échelle de gris de la figure 2.13 pour la figure a et selon celle de la figure 2.16 pour la figure b.

(i) Le nombre de modes étant important, nous négligeons les variations spatiales (selon z) de l'inversion de population.

(ii) Nous supposons un état de polarisation uniforme, c'est à dire que le coefficient η , décrivant l'ellipticité des états propres, ne dépend pas de l'espace. Cette approximation est faite dans un souci de simplicité, car la prise en compte de la variation spatiale de η est un problème délicat à traiter [120].

(iii) Nous supposons que $\nu_j^x \approx \nu_j^y = \nu_j$ (c'est à dire que $|\nu_j^x - \nu_j^y| \ll \Delta$).

Sous ces conditions, le modèle 1.22 devient :

$$\dot{m}_j^x = -m_j^x + (m_j^x + a) \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi \mathcal{L}(\nu - \nu_j) d(\nu, \alpha) (1 + \eta \cos(2\alpha)) d\nu d\alpha \quad (2.66a)$$

$$\dot{m}_j^y = -m_j^y + (m_j^y + a) \frac{1}{\mathcal{S}} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi \mathcal{L}(\nu - \nu_j) d(\nu, \alpha) (1 - \eta \cos(2\alpha)) d\nu d\alpha \quad (2.66b)$$

$$\dot{d}(\nu, \alpha) = \gamma \left[A\mathcal{G}(\nu) - d(\nu, \alpha) \left(1 + \sum_{l=1}^N \mathcal{L}(\nu - \nu_l) [(m_l^x + m_l^y) + \eta \cos 2\alpha (m_l^x - m_l^y)] \right) \right] \quad (2.66c)$$

où $c(\alpha)$ est l'anisotropie de pompage.

Nous allons traiter la distribution d'orientation de l'inversion de population par une méthode tout à fait semblable à la décomposition modale que nous avons utilisée précédemment. Nous décomposons $d(\nu, \alpha)$ en série de Fourier de la variable α :

$$d(\nu, \alpha) = d^0(\nu) + \frac{2}{\eta} d^c(\nu) \cos(2\alpha) + \frac{2}{\eta} d^s(\nu) \sin(2\alpha) + \dots \quad (2.67)$$

et limitons le développement aux premières harmoniques. Nous posons :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d(\nu, \alpha) d\alpha = d^0(\nu) \text{ et } \frac{\eta}{\pi} \int_0^\pi d(\nu, \alpha) \cos 2\alpha d\alpha = d^c(\nu) \quad (2.68a)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi c(\alpha) d\alpha = 1 \text{ et } \frac{\eta}{\pi} \int_0^\pi c(\alpha) \cos 2\alpha d\alpha = c \quad (2.68b)$$

Le système 2.66 devient alors :

$$\dot{m}_j^x = -m_j^x + (m_j^x + a) \frac{1}{S} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(\nu - \nu_j) (d^0(\nu) + d^c(\nu)) d\nu \quad (2.69a)$$

$$\dot{m}_j^y = -m_j^y + (m_j^y + a) \frac{1}{S} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(\nu - \nu_j) (d^0(\nu) - d^c(\nu)) d\nu \quad (2.69b)$$

$$\begin{aligned} \dot{d}^0(\nu) = & \gamma [AG(\nu) - d^0(\nu) \\ & - \sum_{l=1}^N \mathcal{L}(\nu - \nu_l) [d^0(\nu)(m_l^x + m_l^y) + d^c(\nu)(m_l^x - m_l^y)]] \end{aligned} \quad (2.69c)$$

$$\begin{aligned} \dot{d}^c(\nu) = & \gamma [AG(\nu)c - d^c(\nu) \\ & - \sum_{l=1}^N \mathcal{L}(\nu - \nu_l) [d^c(\nu)(m_l^x + m_l^y) + \frac{\eta^2}{2} d^0(\nu)(m_l^x - m_l^y)]] \end{aligned} \quad (2.69d)$$

Comme dans la partie précédente (section 2.2.1), nous allons discrétiser les variations en fréquences de l'inversion de population de façon à transformer les intégrales en sommes. Si le nombre de modes par largeur homogène est important, il est possible d'associer un terme d'inversion de population par intervalle spectral libre, équation (2.11). Le modèle devient :

$$\dot{m}_j^x = -m_j^x + (m_j^x + a) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} (d_l^0 + d_l^c) \quad (2.70a)$$

$$\dot{m}_j^y = -m_j^y + (m_j^y + a) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} (d_l^0 - d_l^c) \quad (2.70b)$$

$$\dot{d}_j^0 = \gamma [Ag_j - d_j^0 - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} [d_j^0(m_l^x + m_l^y) + d_j^c(m_l^x - m_l^y)]] \quad (2.70c)$$

$$\dot{d}_j^c = \gamma [Acg_j - d_j^c - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} [d_j^c(m_l^x + m_l^y) + \frac{\eta^2}{2} d_j^0(m_l^x - m_l^y)]] \quad (2.70d)$$

Pour étudier les propriétés intrinsèques du milieu, nous considérons un milieu infini et homogène. A cet effet, nous prenons $g_j = 1$ sur tout le spectre.

De plus, nous ne tenons pas compte de l'émission spontanée et de l'anisotropie de pompage : $c = 0$. Avec ces conditions, les états stationnaires stables s'écrivent :

$$m_j^x = m_j^y = 0 \text{ et } d_j^0 = A, \quad d_j^c = 0 \quad (2.71)$$

ce qui correspond à l'état éteint du laser (stable pour $A < 1$), et :

$$m_j^x = m_j^y = \frac{A-1}{2} \text{ et } d_j^0 = 1, \quad d_j^c = 0 \quad (2.72)$$

état symétrique du laser (stable pour $A > 1$). La somme des intensités est donc $A - 1$ (intensité d'un laser monomode).

La symétrie du modèle suggère le changement de variable suivant :

$$M_j^+ = m_j^x + m_j^y \quad (2.73a)$$

$$M_j^- = m_j^x - m_j^y \quad (2.73b)$$

Le système 2.70 s'écrit alors :

$$\dot{M}_j^+ = M_j^+ \left(-1 + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} d_l^0 \right) + M_j^- \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} d_l^c \quad (2.74a)$$

$$\dot{M}_j^- = M_j^- \left(-1 + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} d_l^0 \right) + M_j^+ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} d_l^c \quad (2.74b)$$

$$\dot{d}_j^0 = \gamma \left[Ag_j - d_j^0 - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} [d_j^0 M_j^+ + d_j^c M_j^-] \right] \quad (2.74c)$$

$$\dot{d}_j^c = \gamma \left[Acg_j - d_j^c - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} [d_j^c M_j^+ + \frac{\eta^2}{2} d_j^0 M_j^-] \right] \quad (2.74d)$$

Afin de linéariser le système nous posons :

$$M_j^+ = \bar{M}_j^+ + v_j \quad (2.75a)$$

$$M_j^- = \bar{M}_j^- + w_j \quad (2.75b)$$

Les états stationnaires étant $\bar{M}_j^+ = A - 1$, $\bar{M}_j^- = 0$, $\bar{d}^0 = 1$, $\bar{d}^c = 0$. Nous avons alors deux équations linéarisées, semblables à l'équation 2.25 :

$$\ddot{v}_j + \gamma A \dot{v}_j + \omega_r^2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \xi_{l-j} v_l = 0 \quad (2.76a)$$

$$\ddot{w}_j + \gamma A \dot{w}_j + \frac{\eta^2}{2} \omega_r^2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \xi_{l-j} w_l = 0 \quad (2.76b)$$

Nous avons introduit, en plus de la fréquence de relaxation classique $\omega_r = \sqrt{\gamma(A-1)}$ la fréquence basse $\omega_{lf} = \frac{\eta}{\sqrt{2}} \omega_r$, associée à une oscillation en *antiphase* des modes correspondant aux 2 états propres de polarisation. En adoptant la même démarche que dans le paragraphe 2.2.2, nous considérons (simultanément) la propagation de deux ondes progressives, et cherchons une solution sous la forme $v_j = v e^{\alpha_a t} e^{i(\omega_a t - k j)}$ et $w_j = w e^{\alpha_o t} e^{i(\omega_o t - k j)}$. Nous obtenons les relations de dispersion :

$$\omega_a = \omega_r S(k) + o(\gamma^{3/2}) \quad (2.77a)$$

$$\omega_o = \omega_{lf} S(k) + o(\gamma^{3/2}) \quad (2.77b)$$

$$\alpha_a = \alpha_o = -\frac{\gamma A}{2} \quad (2.77c)$$

avec

$$S(k) = \frac{\cosh \Delta(\pi - k)}{\cosh \Delta\pi} \quad (2.78)$$

Nous rappelons que ces relations de dispersion sont valides dans la mesure où $\pi - k \gg 1/\Delta$. Lorsque le nombre de modes par largeur homogène est important ($\Delta \gg 1$), les relations de dispersion prennent la forme suivante :

$$\omega_a = \omega_r e^{-k\Delta} \quad (2.79a)$$

$$\omega_o = \omega_{lf} e^{-k\Delta} \quad (2.79b)$$

La relation de dispersion correspondant à la fréquence basse ω_{lf} est l'analogue de la *branche optique* des chaînes diatomiques. En effet, elle correspond à une oscillation en *antiphase* des deux ensembles de modes correspondant à chaque état propre de polarisation. La courbe de dispersion habituelle (2.79a) correspondant à une oscillation en *phase*, est l'analogue de la *branche acoustique*. Il est important de noter que les oscillations associées à la branche

optique sont complètement masquées, si on réalise une observation non résolue en polarisation. Seule la branche acoustique se manifestera, comme dans la section 2.1.4. Ce résultat est une extension de ceux obtenus pour le laser à deux modes de polarisations différentes [25]. L'accord entre les résultats théoriques (2.79) et expérimentaux est particulièrement satisfaisant. Sur la figure 2.29 sont superposés la courbe de dispersion expérimentale (obtenue à partir des transformées de Fourier des transitoires de la figure 2.28), et l'ajustement des expressions (2.79) par moindres carrés. De ces ajustements, on obtient $\omega_r = 0.68 \cdot 10^6 s^{-1}$, $\omega_{lf} = 0.26 \cdot 10^6 s^{-1}$, et une estimation de la largeur homogène ($\Delta = 0.8 \text{ \AA}$) compatible avec les estimations précédentes (sect.2.2.4).

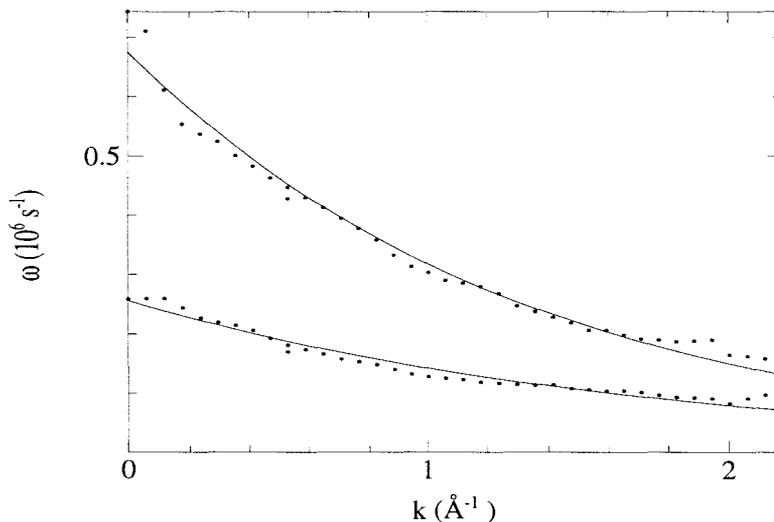


FIG. 2.29 – Courbes de dispersion expérimentales obtenues à partir des régimes transitoires (figure 2.28), et ajustement des expressions (2.79). Les courbes supérieure et inférieure sont respectivement les analogues des branches acoustiques et optiques des cristaux diatomiques.

Des simulations numériques ont été accomplies à partir du modèle 2.70, et en particulier la réponse à la perturbation d'un paquet de modes, figure 2.30a. Nous obtenons bien les comportements observés expérimentalement, à savoir une surmodulation des ondes se propageant dans le spectre. Une transformée

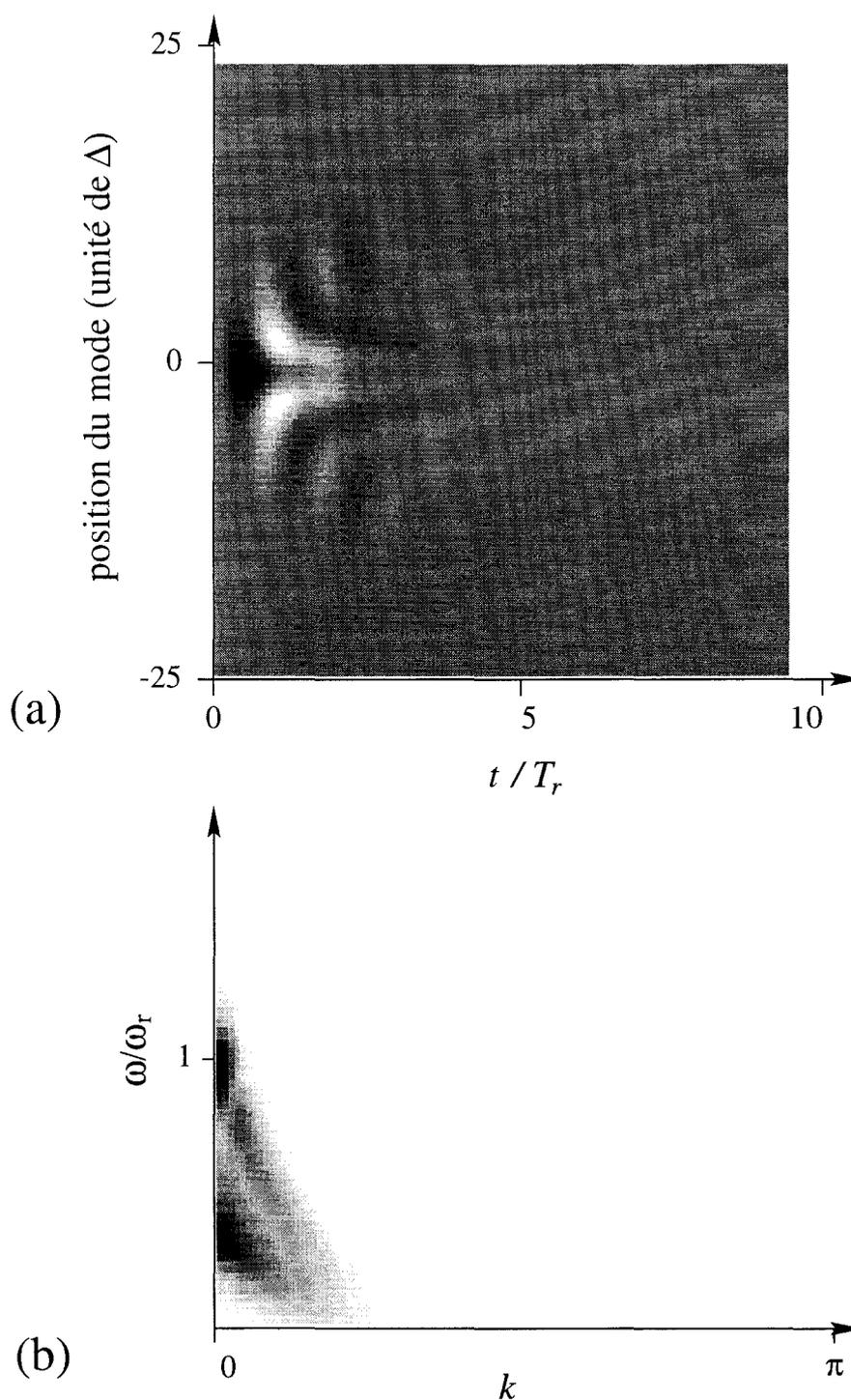


FIG. 2.30 – Simulation numérique de la réponse à une perturbation, l'observation est faite suivant un des états propres. a: spectrochronogramme, b: Densité spectrale de puissance. Les intensités sont représentées selon l'échelle de gris de la figure 2.13 pour la figure a et selon celle de la figure 2.16 pour la figure. T_r est la période de relaxation.

de Fourier bidimensionnelle de ces spectrochronogrammes révèle la présence de ces deux courbes de dispersion, figure 2.30b. Le spectrochronogramme correspondant à l'observation de la somme des deux états propres de polarisation est tout à fait semblable à celui obtenu avec le modèle ne tenant pas compte des polarisations, figure 2.31a. Nous obtenons une seule courbe de dispersion correspondant à la branche haute, figure 2.31b.

Nous pouvons également analyser l'évolution de l'intensité totale correspondant à la somme des intensités d'un état propre de polarisation, lors de la réponse à une impulsion. Si une seule des deux polarisations est observée, l'intensité totale montre une oscillation amortie possédant au moins deux fréquences, figure 2.32a et 2.32b. Pour l'intensité somme des deux états de polarisation, l'oscillation amortie ne possède qu'une seule fréquence, la fréquence de relaxation ω_r , figure 2.32c. L'intensité résultant de la différence des deux états de polarisation exhibe également une seule fréquence, mais il s'agit de la fréquence basse, figure 2.32d. L'évolution de l'intensité totale est comparable à celle d'un laser bipolarisation.

Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons montré expérimentalement et théoriquement, qu'un laser multimode classe B à élargissement inhomogène pouvait être considéré comme une chaîne d'oscillateurs couplés, dans la mesure où la largeur inhomogène (liée à la longueur de la chaîne) est beaucoup plus grande que la largeur homogène (liée à la portée du couplage). Pour cela, expérimentalement et numériquement, nous avons perturbé localement le spectre du laser et observé la propagation d'ondes dans le spectre. Ces ondes se caractérisent par une vitesse de phase et de groupe de signes opposés. Nous avons montré, en utilisant un modèle simple que cette propriété est une conséquence directe de la nature du couplage entre les modes (saturation croisée). Ce modèle nous a permis en effet d'établir la relation de dispersion du milieu de propagation. Celle-ci détermine entièrement la dynamique du système en régime linéaire. De plus, une étude résolue en polarisation a révélé l'existence de l'analogie des *branches acoustiques* et *optiques* dans les cristaux diatomique à une dimension, ces deux branches correspondant respectivement à l'oscillation en *phase* et en *antiphase* des modes associés aux deux états propres de polarisation.

Tout ceci montre que le laser multimode classe B à élargissement inhomogène peut être considéré comme un système spatiotemporel. La richesse,

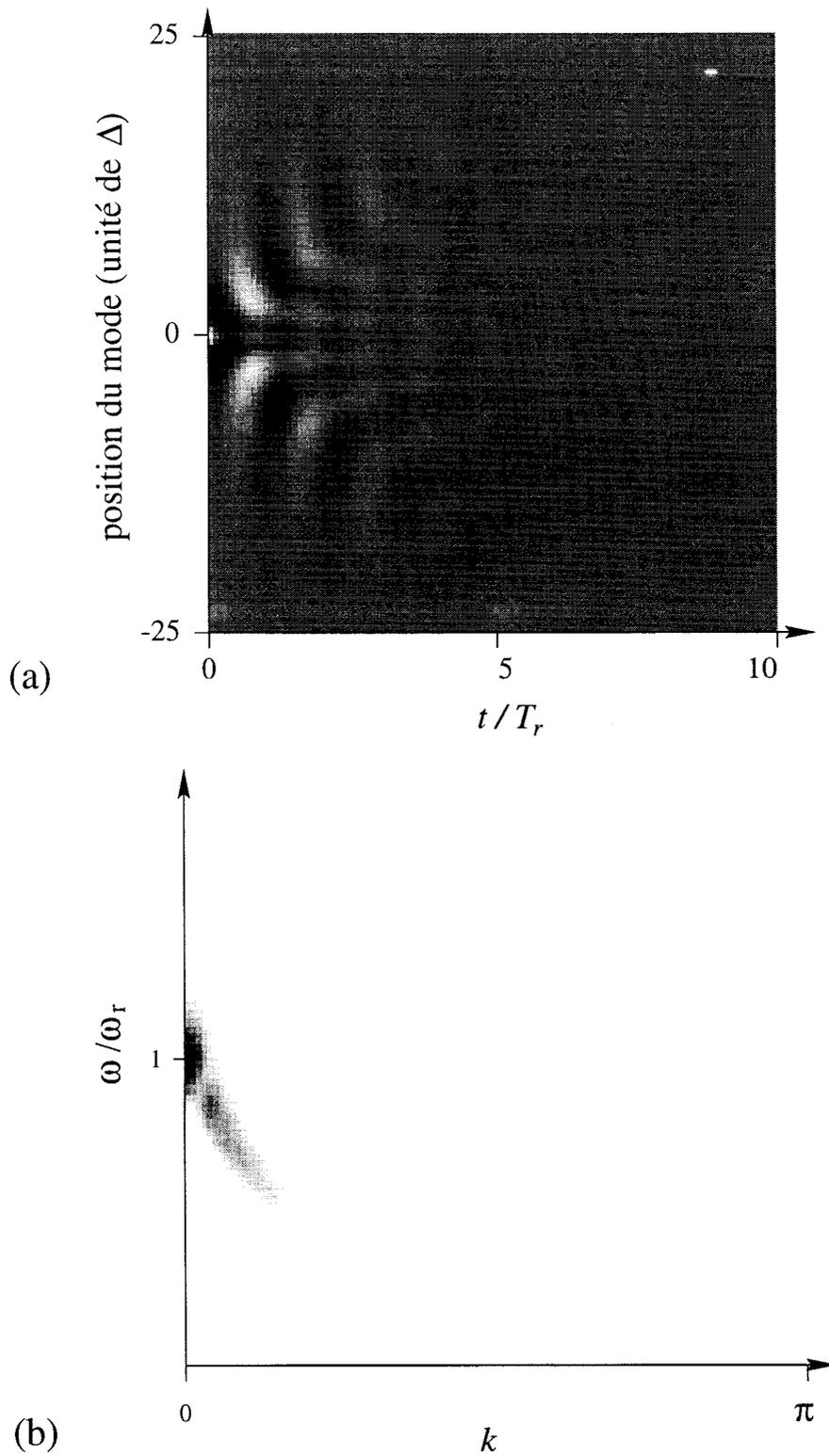


FIG. 2.31 – Observation selon la somme des états propres de polarisation. a : transitoire, b : densité spectrale de puissance du transitoire. T_r est la période de relaxation (les intensités sont représentées selon l'échelle de gris de la figure 2.13).

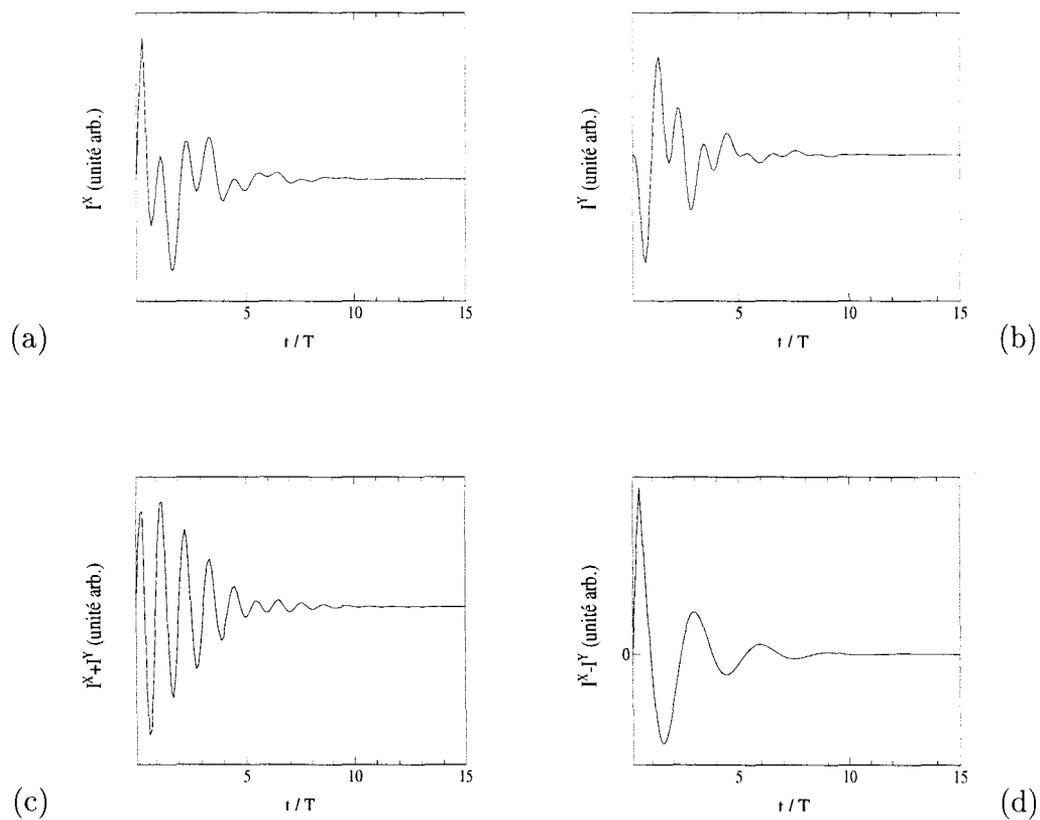


FIG. 2.32 – Somme des intensités des différents modes du laser au cours du transitoire de la figure 2.31, a : intensité totale I^x selon l'état propre x , b : intensité totale I^y selon l'état propre y , c : somme des deux intensités (oscillation amortie à la fréquence ω_r), d : différence des deux intensités (oscillation amortie à la fréquence ω_{lf}).

la variété des phénomènes observés dans les systèmes spatiotemporels (défauts [121], intermittence [122], chaos [123],...) motivent par conséquent une étude de notre système en régime non linéaire, c'est à dire dans notre cas lors d'une modulation du paramètre de pompe. La fiabilité des différents modèles ayant été prouvée en régime linéaire, nous disposons d'outils pour étudier les régimes non linéaires et interpréter les résultats expérimentaux.

Chapitre 3

Morphogénèse dans le spectre du laser

La formation des structures spatiales (*patterns*) a fait l'objet de recherches intensives ces deux dernières décennies aussi bien expérimentalement que théoriquement [15]. Une des motivations de ces nombreux travaux est l'universalité de ces phénomènes. En effet, ces structures spatiales sont observées en hydrodynamique [14, 15], dans les cristaux liquides [18, 7], en optique [21, 19] mais également en chimie [16, 17] ou encore en biologie [124]. En règle générale, les structures spatiales apparaissent à la suite d'une brisure de symétrie. Considérons, par exemple, un système spatialement infini et uniforme, au voisinage de l'état d'équilibre, dont l'état est défini par un paramètre de contrôle R . Pour une valeur critique R_c du paramètre de contrôle, le système peut devenir instable à des perturbations infinitésimales, et une structure spatiale et/ou temporelle apparaît alors, avec un vecteur d'onde \mathbf{k}_0 et une fréquence ω_0 (l'un ou l'autre pouvant être éventuellement nuls). L'invariance par translation (dans l'espace ou le temps) est donc brisée.

L'un des exemples les plus connus de formation de structure spatiale est la convection de Rayleigh Bénard [14]. Un fluide, placé entre deux plaques horizontales, est soumis à un gradient de température. Pour une valeur critique R_c du paramètre de contrôle (proportionnel à l'écart en température entre les deux plaques), apparaît une structure périodique de rouleaux dans le fluide. Dans ce cas, la taille des rouleaux est liée à la géométrie du système (espace entre les plaques). Cette sélection de longueur d'onde par les caractéristiques géométriques du système est commune à d'autres systèmes: convection de Taylor-Couette [125, 126, 15], convection électrodynamique dans les nématiques [18, 7], en optique dans les lasers multimodes transverses [20, 29].

Il existe des mécanismes de sélection de longueur d'onde qui ne sont pas liés aux propriétés extrinsèques du système (géométrie) mais aux propriétés intrinsèques. Ces mécanismes, prédits par Turing [127], ont été observés relativement récemment [128, 129] dans la réaction de Belousov-Zhabotinski [16], mais aussi en optique dans les oscillateurs à gain photoréfractif à grand nombre de Fresnel [30] ou encore dans les systèmes passifs sans cavité [130].

Nous allons nous intéresser plus particulièrement à un troisième mécanisme de formation de structures spatiales. Ce mécanisme est relatif à l'excitation paramétrique d'ondes dans un système, et la sélection de longueur d'onde, dans ce cas, est liée à la fréquence d'excitation. Il a été mis en évidence par Faraday en 1831 [36]. Un récipient contenant un fluide est déplacé verticalement de façon périodique. Pour une valeur critique de l'amplitude et de la fréquence de modulation, une onde stationnaire apparaît à la surface du liquide. Cette onde a une fréquence temporelle moitié de celle de l'excitation,

et sa fréquence spatiale est reliée à la fréquence de modulation via la relation de dispersion du milieu. Ce type d'instabilité paramétrique a été observé dans d'autres systèmes : chaîne d'oscillateurs [131], ondes de spin [132, 133], ondes de cristallisation [134]. D'une manière générale, l'instabilité paramétrique nécessite un système continu ou discret d'oscillateurs couplés ainsi qu'une excitation paramétrique d'un mode propre du système [135]. Cette dernière condition ne nécessite pas forcément l'excitation paramétrique de l'ensemble du système, elle peut provenir d'un forçage du système, dans la mesure où ce dernier est uniforme.

Nous avons montré, au chapitre précédent, qu'un laser multimode classe B à élargissement inhomogène pouvait être considéré comme une chaîne d'oscillateurs couplés. Ce système, s'il est soumis à une excitation uniforme (modulation périodique de la pompe) est donc un candidat potentiel pour l'observation d'instabilités paramétriques analogues à celles de Faraday.

Dans un premier temps, nous allons rappeler les principes de base du mécanisme d'instabilité paramétrique. Nous nous appuyerons largement sur l'exemple de l'instabilité de Faraday, pour laquelle un grand nombre de données est disponible, ce qui nous aidera à interpréter nos résultats. Nous décrirons ensuite le dispositif expérimental et les modèles utilisés pour les simulations numériques. Nous présenterons alors les résultats expérimentaux et numériques obtenus lors de la modulation périodique de la pompe du laser. Ces résultats mettent en évidence des instabilités paramétriques primaires dans le spectre du laser (ondes stationnaires, ondes progressives), mais aussi des instabilités secondaires (ondes de dérive [136], dislocations spatiotemporelles [137]) conduisant à des régimes irréguliers aussi bien temporellement que spatialement. Notre étude prendra en compte l'influence des variations spatiales des paramètres de contrôle, au sujet duquel peu d'informations sont disponibles. Dans le cas du laser, contrairement à d'autres systèmes excités paramétriquement, le milieu n'est pas spatialement uniforme, ce qui induit de fortes variations spatiales des paramètres de contrôle. Nous nous attacherons à distinguer les comportements résultant de ces variations de ceux résultant des propriétés intrinsèques du milieu.

3.1 Rappel sur les excitations paramétriques d'ondes

Un système est excité paramétriquement lorsque l'excitation apparaît comme un coefficient (ou paramètre) dans l'équation différentielle décrivant l'évolution du mode critique, et non comme un forçage. Une des caractéristiques principales de ces systèmes paramétriques est qu'une faible excitation peut engendrer une forte réponse, généralement à une fréquence moitié de celle de l'excitation. Nous allons tout d'abord rappeler quelques notions relatives à l'excitation paramétrique d'un système à un degré de liberté. Nous nous intéresserons ensuite à l'excitation paramétrique de systèmes étendus spatialement et en particulier à l'instabilité de Faraday, qui est l'objet de nombreuses études de part la généralité et la richesse des résultats qu'elle engendre.

3.1.1 Excitation paramétrique d'un système à un degré de liberté

L'un des exemple les plus simple de système excité paramétriquement est un pendule dont l'altitude du point d'attache peut osciller périodiquement. Dans le repère lié au pendule, l'évolution du système peut être décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + \omega_0^2(1 + f \cos \omega_m t) \sin \theta = 0 \quad (3.1)$$

où θ désigne l'écart par rapport à l'équilibre, μ l'amortissement, ω_0 la fréquence naturelle de l'oscillateur, f l'amplitude de modulation réduite. Nous remarquons que le terme $f \cos \omega_m t$ intervient comme un coefficient de la variable $\sin \theta$ (θ au premier ordre), et non comme un forçage de l'équation.

Une étude basée sur la théorie de Floquet [138], permet de montrer que l'équation linéarisée admet différentes solutions suivant les valeurs relatives de f et de ω/ω_0 . Le plan $(f, \omega/\omega_0)$ est composé de plusieurs "langues" correspondant aux rapports $\omega_m/\omega_0 = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

En dehors de ces langues, le système possède une solution stable uniforme. Sur le contour des langues, la solution est périodique de période $2T$ (où T est la période de l'excitation $T = 2\pi/\omega_m$). A l'intérieur des langues, la solution est instable et diverge de façon oscillante ou non, l'amplitude des oscillations peut croître infiniment, ce qui correspond à une destruction du système.

D'une manière générale, la plupart des systèmes possèdent des termes non linéaires (θ^3 provenant du développement de $\sin \theta$ dans le cas du pendule) qui deviennent non négligeables lorsque l'amplitude des oscillations augmente. Dans le cas du pendule, ces termes non linéaires ont pour effet de limiter l'accroissement des oscillations. Ainsi, la solution sera périodique de période $2T$ (ou T) à l'intérieur des langues.

L'excitation paramétrique d'un système à un degré de liberté se traduit donc par une réponse de ce système à la fréquence moitié (généralement) de celle d'excitation. Un système étendu spatialement peut également être excité paramétriquement.

3.1.2 Instabilité de Faraday

Pour étudier les principales propriétés de l'excitation paramétrique d'ondes, nous allons nous intéresser à l'exemple de l'instabilité de Faraday [36]. Elle concerne la surface d'un fluide soumis à une accélération périodique et verticale. L'instabilité de Faraday [15, 139, 140] a connu un regain d'intérêt ces dernières années car c'est un moyen pratique pour étudier et comprendre la formation de structures spatiales diverses (carrés [141, 142], hexagones [140, 143], ou encore quasicristaux [144, 143]), l'apparition de régime d'intermittence [145] ou de chaos spatiotemporels [146, 147, 148, 149, 150, 140], et aussi la dynamique des défauts [151, 152]. Le caractère générique et la richesse des résultats disponibles nous donnerons un cadre conceptuel pour interpréter les observations obtenues dans le cas du laser.

Le principe de l'expérience est très simple, il s'agit d'un fluide contenu dans un récipient soumis à une oscillation verticale. Les deux paramètres principaux de contrôle sont l'amplitude et la fréquence de l'oscillation appliquée au récipient. D'autres paramètres interviennent également comme la viscosité du fluide (qui fixe la dissipation) et la dimension du récipient (qui fixe le rapport d'aspect).

Pour une fréquence donnée, jusqu'à une amplitude critique A_c , le fluide suit uniformément la modulation appliquée. A l'amplitude A_c^+ , une structure spatiotemporelle apparaît à la surface du fluide. La fréquence temporelle de cette structure est la moitié de la fréquence de modulation ω_m . Le vecteur d'onde \mathbf{k} est sélectionné par la relation de dispersion du fluide.

Ainsi pour un système à une dimension (récipient en anneau) [153, 154], une onde stationnaire apparaît au seuil d'instabilité [153]. S. Douady et S. Fauve [153] ont observé que cette onde stationnaire existait dans un

domaine fini de fréquence et d'amplitude au voisinage du seuil. Si la fréquence augmente (respectivement diminue), le système bifurque vers une autre onde stationnaire par nucléation (respectivement annihilation) d'une longueur d'onde. Ce type d'instabilité correspond à l'instabilité d'Eckhaus [155, 15]. Lorsque l'amplitude de modulation augmente, une instabilité oscillatoire peut apparaître (oscillation temporelle de la structure à une fréquence plus faible que celle de modulation), ainsi qu'une instabilité de dérive (déplacement de l'ensemble de la structure à vitesse lente et constante) [136].

D'un point de vue théorique, T. B. Benjamin et F. Ursell [156] ont été les premiers à effectuer une analyse de stabilité linéaire de la surface libre d'un fluide.

$$h(\mathbf{x}, t) = a_k(t) \cos(\mathbf{k}\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

où $h(\mathbf{x}, t)$ désigne la hauteur d'un point de la surface par rapport au repère liée à cette surface et a_k l'amplitude du mode k . Ils ont montré que la dynamique linéaire de l'amplitude des modes de la surface du fluide est gouvernée par l'équation de Mathieu [15].

$$\ddot{a}_k + \mu \dot{a}_k + \omega_s^2(k)(1 + 2f \cos \omega_m t) a_k = 0 \quad (3.3)$$

avec $\omega_s^2(k) = k \tanh(kh_m)(g + \Sigma k^2/\rho)$ la relation de dispersion linéaire des ondes de surfaces, g étant l'accélération de la pesanteur, Σ la tension superficielle, ρ la densité, h_m la hauteur moyenne de la surface par rapport au fond du récipient, μ la dissipation, f est proportionnel à l'amplitude de la modulation et ω_m est la fréquence de la modulation appliquée au récipient.

Dans le cas d'un système à une dimension, la structure spatiale apparaissant au seuil peut être décomposée en deux ondes contrapropagatives :

$$h(x, t) = A_1 e^{i(\omega_1 t + k_1 x)} + A_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} \quad (3.4)$$

Les deux équations 3.3 et 3.4 peuvent faire l'objet d'un certain nombre de remarques.

La première équation décrit l'excitation paramétrique d'un mode du système. D'une manière générale, l'excitation paramétrique d'une onde dans un système *nécessite l'excitation paramétrique d'un mode, mais pas forcément de l'ensemble du système*. Nous pouvons tout à fait concevoir, qu'un *forçage* global et périodique de ce système induise l'excitation paramétrique d'un mode de ce système.

En ce qui concerne la structure apparaissant au seuil, l'application des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion permet de prévoir certaines propriétés.

Deux conditions doivent être vérifiées:

Conservation du moment : $-k_1 + k_2 = -k_m$

Conservation de l'énergie : $\omega_1 + \omega_2 = n\omega_m$

où k_m est le vecteur d'onde et ω_m la fréquence de l'excitation, n un entier.

Le fait qu'une onde stationnaire s'installe dans le système (c'est à dire que $\omega_1 = \omega_2 = \omega_m/2$ et $k_1 = k_2$) est une conséquence de l'excitation uniforme du système, c'est à dire avec un vecteur d'onde $k_m = 0$. Il s'agit en fait d'une condition particulière, avec laquelle s'effectuent la plupart des expériences d'instabilité de Faraday.

Si l'excitation possède des composantes à $k_m \neq 0$, il est possible d'obtenir une structure différente de l'onde stationnaire (onde progressive). Cela a été observé expérimentalement dans une expérience d'instabilité de Faraday par Kiyashko *et al.* [157] (spirales et cibles). L'origine du $k_m \neq 0$ est une onde apparaissant à la surface du fluide quand le récipient n'est pas rempli complètement (onde due à l'oscillation du ménisque [158, 139]). La présence de cette onde rend l'excitation non uniforme et entraîne la formation d'une onde de dérive (ce qui donne une spirale à deux dimension).

Il y a peu d'exemples d'instabilité de Faraday réalisées dans ces conditions ($k_m \neq 0$). D'une manière générale l'influence des effets dus aux bords ou à la variation spatiale des paramètres (qui peut induire un $k_m \neq 0$) a été peu abordée dans les études sur l'instabilité de Faraday.

Dans d'autre domaines, comme celui des oscillateurs paramétriques optiques, l'excitation avec un nombre d'onde $k_m \neq 0$ est par contre tout à fait classique [159].

L'instabilité de Faraday apparaît dans un milieu de propagation soumis à une excitation paramétrique. Elle se caractérise, lorsque $k_m = 0$, par l'apparition d'une structure spatiotemporelle dont la fréquence temporelle est moitié de celle d'excitation et dont le nombre d'onde est déterminé par le relation de dispersion. Il ne dépend donc pas de la géométrie du système. En général, on considère une *excitation paramétrique du système*, toutefois des résultats semblables sont attendus dans le cas d'un *forçage du système* dans la mesure où ce dernier est *uniforme*. Ce point est, nous le verrons, primordial dans notre cas. A l'aide de ces notions, nous allons essayer d'interpréter la réponse du spectre du laser lors d'une modulation de la pompe. Un des points clés dans la suite de notre étude sera l'influence des variations spatiales des para-

mètres de contrôle, domaine pour lequel il y a peu de données et de résultats disponibles.

3.2 Méthodes expérimentales et numériques

Nous étudions, expérimentalement et numériquement, la réponse du laser à une modulation périodique de la pompe. Contrairement aux expériences présentées dans le chapitre précédent, aucune perturbation n'est appliquée dans le spectre du laser, ce qui a pour conséquence une simplification notable du dispositif expérimental. En ce qui concerne les simulations numériques, outre le fait de confronter les modèles de lasers aux expériences, elles vont nous permettre de faire la distinction entre les effets liés aux propriétés intrinsèques du système et les effets liés aux variations spatiales des paramètres de contrôle (profil non constant du spectre selon j). En effet, nous allons utiliser deux modèles pour les simulations, un modèle prenant en compte la forme du spectre et un modèle pour lequel le spectre est constant à l'état stationnaire ($g_j=1$) et les conditions aux limites périodiques. Nous allons tout d'abord décrire les modifications apportées au dispositif expérimental, et ensuite présenter les deux modèles utilisés dans les simulations.

3.2.1 Modifications du dispositif expérimental

Le dispositif expérimental comporte trois parties principales : le laser à fibre, le système d'analyse du rayonnement et le système d'acquisition, figure 3.1.

a/ Le laser à fibre est le même que celui utilisé dans les expériences exposées précédemment. Toutefois, afin de pouvoir augmenter l'intensité des signaux (ce qui est indispensable pour la détection), tout en conservant une fréquence compatible avec celle du système d'acquisition, nous avons placé un miroir $R = 80 \%$ à l'extrémité de la fibre dopée (nous rappelons que dans les expériences précédentes, les 4% de réflexion de l'interface verre-air tenaient lieu de miroir). En effet, dans cette configuration, la fréquence de relaxation et le seuil sont diminués. Le paramètre de pompe A peut ainsi atteindre 12 fois le seuil ($A_{max} = 12$). La diode laser est pilotée par un générateur de fonctions permettant de moduler sinusoidalement la puissance de pompe.

b/ Le dispositif d'analyse du rayonnement est constitué d'un monochromateur et d'une matrice CCD. Par rapport aux expériences en régime li-

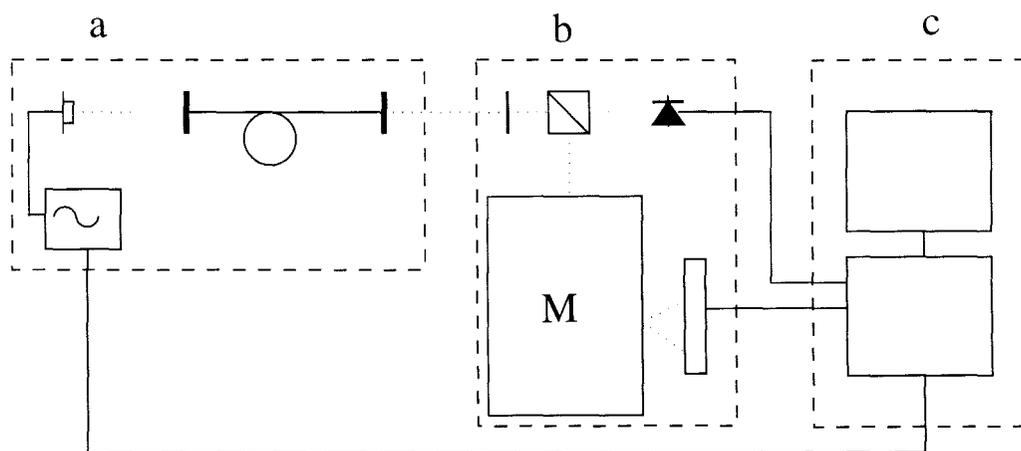


FIG. 3.1 – *Dispositif expérimental. a : laser à fibre, b : système d'analyse du rayonnement, c : système d'acquisition.*

néaire, la différence réside dans les signaux de contrôle de la matrice CCD. En effet, nous pouvons difficilement acquérir plus d'un ou deux spectres par période de modulation. En effectuant l'acquisition à raison d'un spectre par période, nous réalisons une section de Poincaré, qui permet d'étudier les écarts du système par rapport à la solution périodique à la fréquence de modulation. D'un point de vue technique, l'intégration de la matrice CCD est déclenchée par un signal externe synchrone à la modulation de la diode. La période d'intégration est choisie égale à la période de modulation du laser, et un spectre peut être visualisé durant cette période. Afin d'augmenter la fréquence d'acquisition des spectres, la fréquence d'horloge de la matrice CCD est fixée à 20 MHz, cela permet d'acquérir les spectres à la fréquence maximum de 67 kHz.

c/ Le système d'acquisition des spectres présenté dans le chapitre 2 s'avère insuffisant quant à la profondeur mémoire (8000 échantillons) pour enregistrer les résultats expérimentaux (l'étude de régimes de chaotiques nécessite l'enregistrement d'un grand nombre de spectres). Nous avons donc amélioré le système d'acquisition, il se compose d'une carte d'acquisition analogique-digitale (DATEL PC416) et d'un micro-ordinateur. La carte A/D permet l'acquisition de signaux sur 12 bits et avec une fréquence de 10 MHz. Les informations sont transférées directement dans la mémoire vive de l'ordinateur puis sont sauvegardées sur le disque dur. La taille de la mémoire vive

est de 32 MO ce qui nous permet d'acquérir près de 50000 spectres consécutivement. La fréquence d'échantillonnage de la carte A/D étant de 10 MHz, le signal vidéo issu de la matrice CCD (dont la fréquence est de 20 MHz) est enregistré à raison d'un point sur deux. Les spectres comportent donc 128 points (alors que la matrice CCD possède 256 pixels).

Afin de pouvoir observer, en temps réel, les différentes structures spatiales apparaissant selon les valeurs des paramètres (fréquence et amplitude de modulation), nous utilisons le même dispositif de visualisation des spectrochronogrammes que celui utilisé dans les expériences précédentes. Un exemple de spectrochronogramme observé en temps réel est représenté sur la figure 3.2. Le choix des paramètres de modulation est déterminé en partie par la

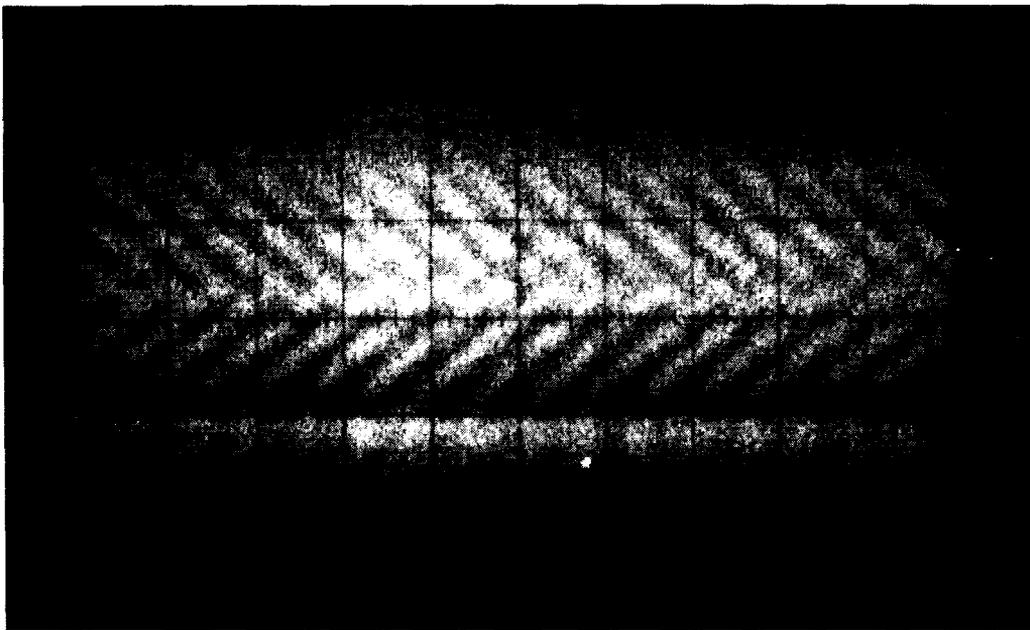


FIG. 3.2 – Photographie de l'oscilloscope affichant les spectrochronogrammes en temps réel. L'axe vertical représente les longueurs d'ondes ($10\text{\AA}/\text{div.}$), et l'axe horizontal le temps ($2\text{ms}/\text{div.}$). L'intensité du spot est proportionnelle à l'intensité des composantes spectrales.

sensibilité et la rapidité du dispositif d'analyse. Les intensités des composantes spectrales sont relativement faibles. C'est pourquoi, afin d'obtenir des

signaux vidéo d'amplitude suffisamment importante, il est nécessaire de choisir une puissance de pompe relativement élevée. De plus pour obtenir un bon contraste l'amplitude de modulation doit être également élevée. Les expériences sont effectuées avec un paramètre de pompe moyen $A = 6$ (la valeur maximale possible est $A_{max} = 12$) et une amplitude de modulation relative $r = 1$ (r est définie par $A(t) = A(1 + r \sin \omega t)$). Dans ces conditions, la fréquence de relaxation ω_r est de l'ordre de 90 à 100 KHz. L'intégration étant effectuée à une fréquence de 67 kHz au maximum, la fréquence de modulation ne peut être augmentée au delà de 0.7 à 0.8 ω_r . Bien que tout l'espace des paramètres de contrôle, défini par l'amplitude r et la fréquence ω_m/ω_r de modulation, n'ait pas été exploré expérimentalement, les domaines explorés révèlent déjà une grande richesse de comportements.

3.2.2 Simulations numériques

Les simulations numériques sont effectuées au moyen de deux modèles. Le premier est un modèle de laser que nous avons établi au chapitre 2. Il permet de tester si les résultats expérimentaux sont reproductibles numériquement. Le second modèle possède un spectre uniforme et des conditions aux limites périodiques. Bien que non réalistes, ces conditions permettent d'étudier les propriétés intrinsèques du laser indépendamment des variations spatiales des paramètres.

Lorsque le paramètre de pompe est modulé le modèle 2.13 devient :

$$\dot{m}_j = -m_j + (m_j + a) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} d_l \quad (3.5a)$$

$$\dot{d}_j = \gamma \left[Ag_j(1 + r \sin \omega_m t) - d_j \left(1 + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_{l-j} m_l \right) \right] \quad (3.5b)$$

nous rappelons que m_j désigne l'intensité du mode j , d_j l'inversion de population associée à ce mode, A le paramètre de pompe, a le coefficient d'émission spontanée, le temps est rapporté au temps de vie du photon dans la cavité τ_c , $\gamma = \gamma_{||}\tau_c$ le taux de relaxation des populations, r l'amplitude et ω_m la

fréquence de la modulation. Nous avons également :

$$\begin{aligned}\beta_{l-j} &= \beta_0 \text{ pour } l = j \\ \beta_{l-j} &= b\beta_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{l-j}{\Delta}\right)^2} \text{ pour } l \neq j\end{aligned}\quad (3.6)$$

b est le coefficient définissant le rapport entre saturation croisée et saturation propre ($b = 1/2$). Le coefficient β_0 est choisi tel que $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_l = 1$, c'est-à-dire:

$$\beta_0 = \frac{1}{1-b} \frac{1}{1 + \frac{b\Delta\pi}{1-b} \coth \Delta\pi}\quad (3.7)$$

La fonction g_j est définie par :

$$g_j = e^{-\frac{(j-j_c)^2}{2\sigma^2}}\quad (3.8)$$

où j_c est le mode au centre de la courbe de gain, σ est la largeur inhomogène équivalente qui permet de prendre en compte les effets dus à l'élargissement inhomogène et à la sélectivité du pompage. La fonction g_j définit la forme du spectre.

Ce modèle relativement simple permet une intégration beaucoup plus rapide que celle du modèle 2.3. Ceci est un point important, car nous intégrons ces équations sur un grand nombre de période et allons procéder à un balayage de l'espace des paramètres de contrôle ($r, \omega_m/\omega_r$).

Afin qu'il y ait bon accord avec les résultats expérimentaux, il est nécessaire que les différents paramètres intervenant dans le modèle soient connus précisément. En particulier, nous avons déterminé les valeurs des coefficients d'émission spontanée a et de relaxation des populations γ . Nous avons mesuré l'amortissement et la fréquence de relaxation du laser en régime linéaire pour différents taux de pompage, et avons ajusté un modèle théorique (semblable à celui de l'équation 1.7) sur ces données ce qui nous a permis de déterminer a et γ . La largeur homogène Δ est estimé à 0.8 \AA d'après les résultats du chapitre 2. La largeur du spectre est de l'ordre de 100 \AA à 6 fois le seuil ce qui permet de d'estimer la largeur inhomogène équivalente à 25 \AA .

Les simulations numériques sont effectuées avec les paramètres suivants :

N	200
Δ	2
σ	50
γ	$1.24 \cdot 10^{-3}$
a	$2 \cdot 10^{-3}$
A	6

N désigne le nombre de modes.

Le nombre de mode par largeur homogène est nettement inférieur à la réalité (1800 modes/ largeur homogène). Toutefois cela n'affecte pas sensiblement les résultats. Le point essentiel est de conserver dans les simulations le rapport entre largeur homogène et largeur du spectre (rapport d'aspect du système) existant dans la réalité.

Le second modèle est utilisé pour étudier les propriétés intrinsèques du milieu, en s'affranchissant des effets dus à l'inhomogénéité du spectre. Pour cela, nous choisissons une fonction g uniforme ($g_j = 1$). Ne pouvant simuler une infinité de modes, nous utilisons des conditions aux limites périodiques. Ce modèle ne prétend évidemment pas reproduire la réalité, il sert à faire la distinction entre les phénomènes liés aux propriétés intrinsèques du milieu de propagation et ceux provenant des variations spatiales des paramètres de contrôle.

3.3 Excitation paramétrique d'ondes dans le spectre

Nous allons montrer dans cette section, que la modulation de la pompe induit une excitation paramétrique d'ondes dans le spectre du laser, ce qui se traduit par des comportements comparables à ceux observés dans le cas de l'instabilité de Faraday dans les fluides. Après avoir mis en évidence expérimentalement et numériquement cette excitation paramétrique, nous introduirons des éléments de justification théorique. Nous étudierons alors l'influence des variations spatiales des paramètres de contrôle, qui ne peuvent être négligées dans le cas du laser, et conduisent à des modifications des structures excitées paramétriquement.

3.3.1 Mise en évidence expérimentale et numérique d'une excitation paramétrique

Nous présentons, figure 3.3, le spectrochronogramme expérimental obtenu pour une modulation de la pompe à une fréquence $\omega_m = 0.8\omega_r$ et une amplitude $r = 1$, ainsi que la simulation numérique présentant un résultat comparable ($\omega_m = 0.7\omega_r$ et $r = 1$). Nous constatons la présence d'une onde stationnaire. Une observation plus attentive permet de remarquer que pour une longueur d'onde donnée, il y a alternance dans le temps de maxima (traits clairs) et de minima (traits sombres), ce qui indique que la période temporelle de cette onde est double de la période d'excitation (nous rappelons que les spectres sont intégrés sur une période de modulation). Afin de déterminer plus précisément le nombre d'onde de la structure spatiale observée, nous effectuons une transformée de Fourier bidimensionnelle de l'espace (x, t) vers l'espace (k, ω) , les résultats sont présentés figure 3.4. Nous avons superposé la courbe de dispersion obtenue à partir de la relation 2.43 pour la figure expérimentale 3.4a et à partir de la relation 2.38 pour la figure numérique 3.4b. Nous constatons, dans les deux cas, que les composantes notables (trait sombre horizontal) se trouvent à proximité de la courbe de dispersion pour une fréquence moitié de celle d'excitation. Ceci suggère que la modulation uniforme de l'ensemble des modes du laser par la pompe, provoque l'excitation paramétrique d'une onde stationnaire dans le spectre du laser. Cependant, pour une instabilité paramétrique du type de celle de Faraday, la fréquence et le nombre d'onde doivent être reliés par la relation de disper-

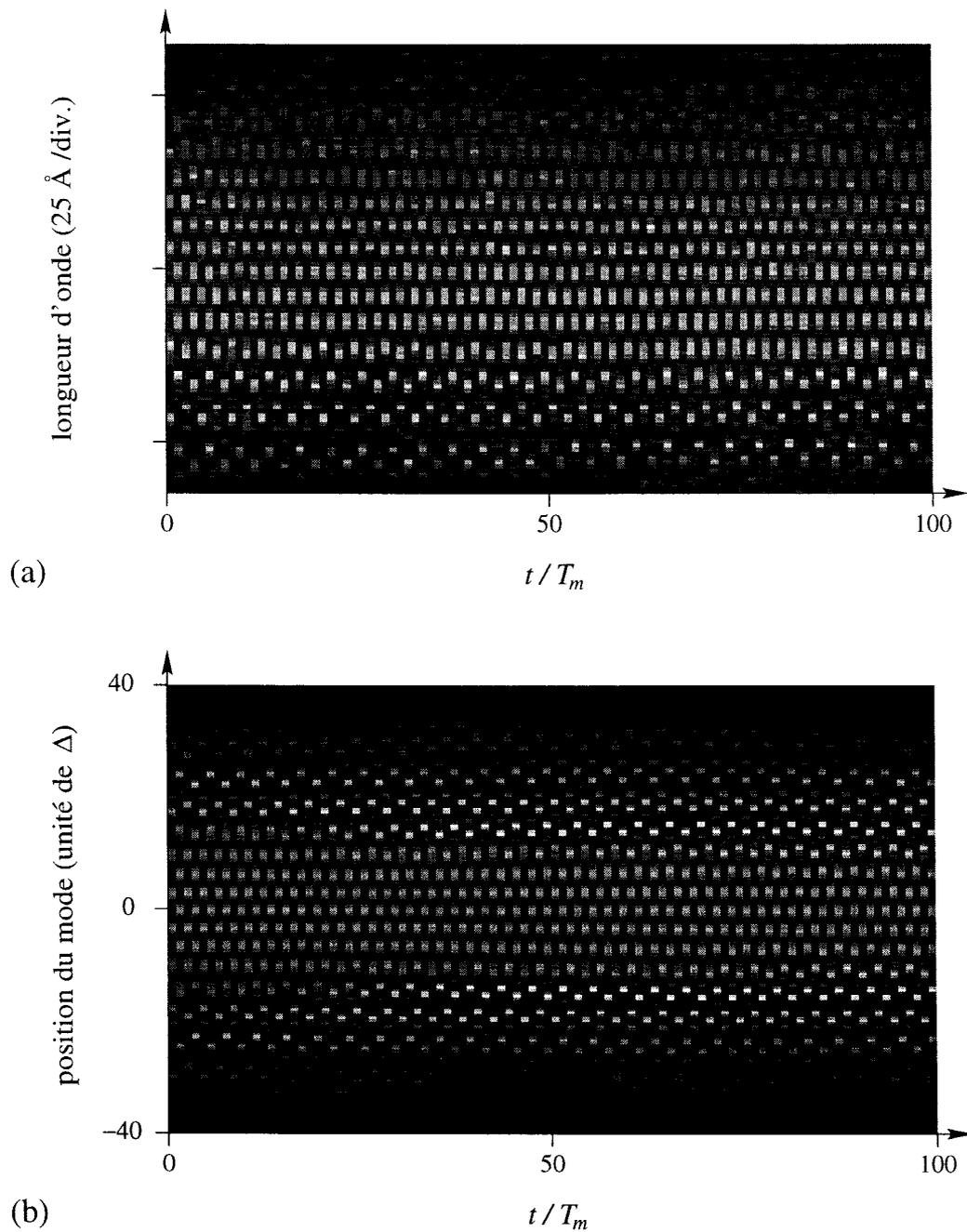


FIG. 3.3 – Spectrochronogrammes obtenus lors de la modulation de la pompe. *a*: expérience ($\omega = 0.8\omega_r$, $r = 1$), *b*: simulation numérique ($\omega = 0.7\omega_r$, $r = 1$). T_m désigne la période de modulation, le centre du spectre est situé à une longueur d'onde d'environ 10700 \AA . Les intensités sont représentées en échelle de gris (zones claires pour les fortes intensités).

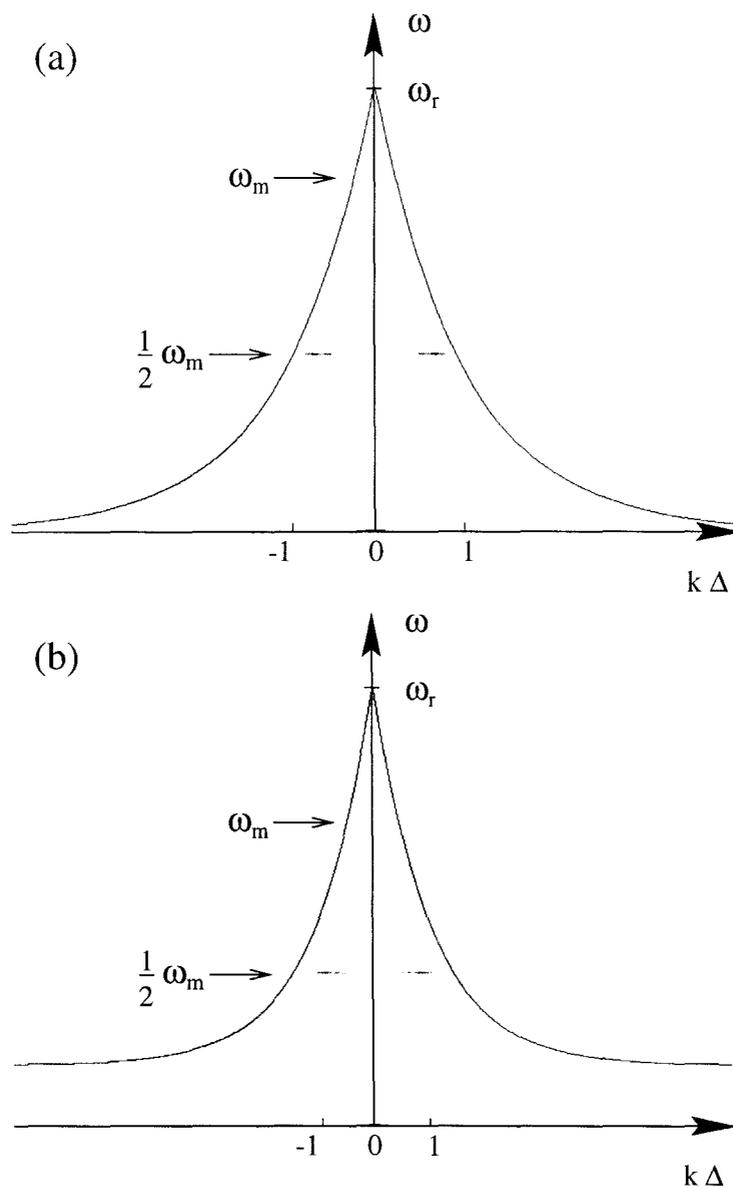


FIG. 3.4 – Transformée de Fourier des spectrogrammes de la figure 3.3 dans l'espace (k, ω) , les courbes de dispersion correspondantes sont superposées. a: expérience ($\omega_m = 0.8\omega_r$, $r = 1$), relation de dispersion 2.43 avec $\Delta = 0.8\text{\AA}$, la fréquence de Shannon est égale à $\omega_m/2$, c'est pourquoi la composante à $(\omega_m, k = 0)$ n'apparaît pas; b: simulation numérique ($\omega_m = 0.7\omega_r$, $r = 1$), relation de dispersion 2.38 avec $\Delta = 2$. L'échelle de gris est inversée, les zones sombres correspondent aux maxima de la densité spectrale de puissance.

sion. Ici, cette condition n'est réalisée qu'approximativement. Toutefois, le désaccord peut parfaitement s'expliquer. Nous savons en effet que de fortes amplitudes de modulation (ici $r = 1$) placent le système en régime non linéaire. Ce régime non linéaire se manifeste par un décalage de la fréquence de relaxation vers les basses fréquences (cf chap.1 [69, 42]), ce qui explique le fait que l'onde stationnaire apparaisse à $\omega_m = 0.8\omega_r$ et non à ω_r . (Nous verrons dans la suite pourquoi c'est au voisinage de $\omega_m = \omega_r$ que cette onde stationnaire apparaît). Il conviendrait d'autre part d'utiliser une relation de dispersion non linéaire pour effectuer une comparaison.

Dans l'état actuel du dispositif expérimental, nous ne pouvons réduire l'amplitude de modulation sans rendre les effets inobservables par manque de contraste. Toutefois, la fiabilité du modèle 3.5 ayant été prouvée par la figure 3.3 et par les résultats en régime linéaire du chapitre 2, nous pouvons explorer numériquement les régimes existant pour une faible amplitude de modulation. En particulier, nous allons étudier numériquement la transition entre l'état uniforme (spectre à l'état stationnaire) et l'onde stationnaire.

A cette fin, nous simulons la réponse du laser à une modulation de la pompe, de fréquence $\omega_m = \omega_r$ et pour des amplitudes croissantes de modulation ($r = 0$ à 0.1). Pour $r < 0.06$, le spectre est uniforme, pour $r = 0.06$ figure 3.5a une onde stationnaire apparaît avec une fréquence moitié de celle d'excitation. La transformée de Fourier, figure 3.5b indique que le nombre d'onde de la structure spatiale, se trouve pour une fréquence de $\omega_m/2$ sur la courbe de dispersion. Nous avons mis en évidence numériquement la présence d'un seuil d'instabilité pour lequel une onde stationnaire apparaît dans le spectre du laser. La fréquence temporelle de cette onde est moitié de celle de modulation et son nombre d'onde est sélectionné par la relation de dispersion en régime linéaire. Ce phénomène est tout à fait comparable à l'instabilité de Faraday. Nous avons donc montré que les comportements observés lors de la modulation de la pompe ont les caractéristiques d'une excitation paramétrique. Cela va être démontré d'un point de vue théorique dans la section suivante.

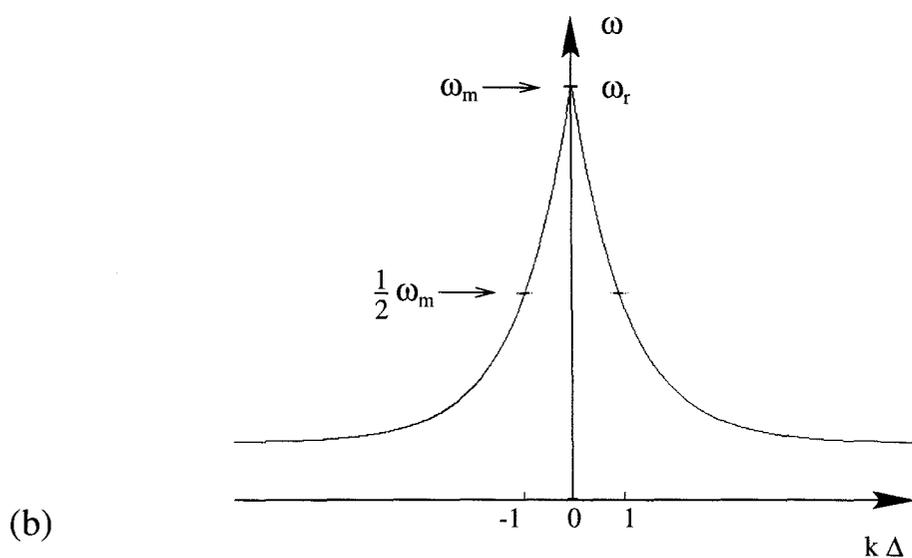
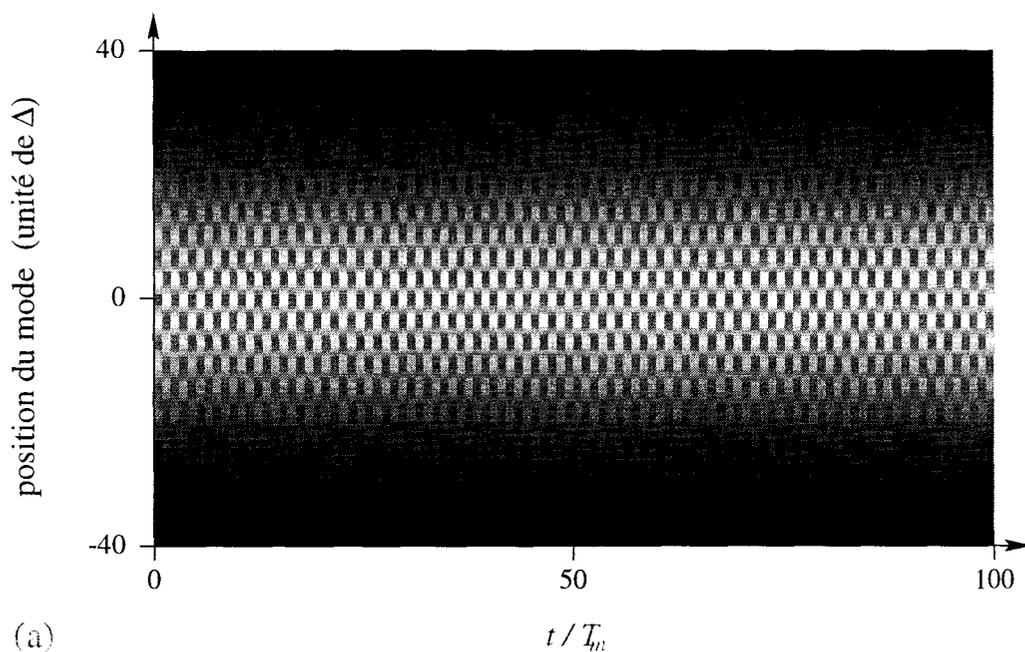


FIG. 3.5 – Seuil de l'instabilité. a: spectrochronogramme obtenu à partir d'une simulation numérique ($\omega_m = \omega_r$, $r = 0.06$), b: transformée de Fourier. T_m période de modulation. La courbe correspondant à la relation de dispersion 2.38 avec $\Delta = 2$ est superposée.

3.3.2 Mise en évidence théorique de l'excitation paramétrique

Au regard des équations 3.5 il n'est pas évident que l'excitation soit paramétrique. En effet, le terme de modulation apparaît comme un forçage dans l'équation, différentielle 3.5b et non comme un coefficient d'une des variables. Dans le cas du laser, la modulation extérieure entraîne une réponse uniforme du laser à cette fréquence de modulation et c'est l'oscillation uniforme des modes qui excite paramétriquement une onde dans le spectre du laser. Nous pouvons mettre en évidence le caractère paramétrique de l'excitation au niveau des équations, en utilisant le modèle 3.5 et en imposant le spectre à l'état stationnaire uniforme et infini ($g_j = 1$). Nous écrivons les solutions sous la forme:

$$m_j = M + \mu_j \quad (3.9a)$$

$$d_j = D + \delta_j \quad (3.9b)$$

où $M = \langle m_j \rangle$ et $D = \langle d_j \rangle$ représentent les moyennes spatiales (le spectre étant considéré comme l'espace de propagation il s'agit d'une moyenne sur tous les modes) de l'intensité et de l'inversion de population. M et D sont des solutions uniformes et périodiques (à la période de l'excitation), μ_j et δ_j sont les écarts par rapport à ces solutions. En exprimant les équations 3.5 (avec $g_j = 1$) à l'aide de ces variables, nous pouvons séparer les solutions uniformes des écarts et obtenir deux systèmes d'équations couplées:

$$\begin{cases} \dot{M} = -M + (M + a)D + \langle \mu_j \sum_l \beta_{l-j} \delta_l \rangle \\ \dot{D} = \gamma [A(1 + r \cos \omega_m t) - D(1 + M) - \langle \delta_j \sum_l \beta_{l-j} \mu_l \rangle] \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} \dot{\mu}_j + \mu_j - (\mu_j + a) \sum_l \beta_{l-j} \delta_l + \langle \mu_j \sum_l \beta_{l-j} \delta_l \rangle = M \sum_l \beta_{l-j} \delta_l + D \mu_j \\ \frac{\dot{\delta}_j}{\gamma} + \delta_j (1 + \sum_l \beta_{l-j} \mu_l) - \langle \delta_j \sum_l \beta_{l-j} \mu_l \rangle = M \delta_j + D \sum_l \beta_{l-j} \mu_l \end{cases} \quad (3.11)$$

Les équations du système 3.10, si l'on excepte les derniers termes (moyennes spatiales), correspondent aux équations d'un laser monomode modulé et définissent une oscillation en phase de tous les modes (cf section 1.1.3.1). Les

équations 3.11 relatives à μ_j et δ_j décrivent l'évolution des écarts de l'intensité et de l'inversion de population par rapport à la solution périodique. Il apparaît donc que la solution uniforme, définie par $\mu_j = \delta_j = 0$ reste une solution du problème, même après la bifurcation considérée dans la section précédente. Dans ces équations M et D interviennent comme coefficients des variables μ_j et δ_j et induisent donc une excitation paramétrique. Nous voyons donc que la modulation de la pompe du laser, qui est *a priori* un forçage du laser, peut entraîner l'excitation paramétrique d'une onde par l'intermédiaire de la solution uniforme. L'interaction entre les deux systèmes (M, D) et (μ_j, δ_j) ne se fait pas dans un seul sens (excitation paramétrique de (μ_j, δ_j) par (M, D)). Il y a également un effet de réaction de (μ_j, δ_j) sur (M, D) par l'intermédiaire des termes de moyenne dans les équations du système 3.10, figure 3.6. Cette réaction semble avoir pour effet une stabilisation de la so-

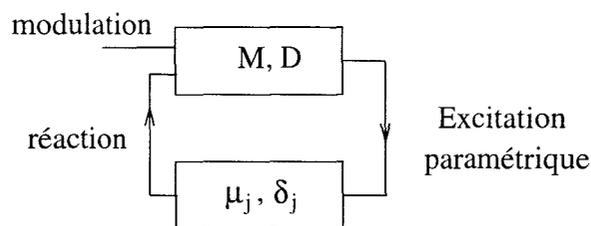


FIG. 3.6 – Interaction entre (M, D) et (μ_j, δ_j) .

lution monomode, cela permet d'expliquer pourquoi malgré un fort taux de modulation, le comportement du système ne soit pas plus désordonné.

Il convient de noter que les solutions M et D bien que périodiques ne sont pas forcément purement sinusoidales, elles possèdent au contraire des harmoniques $n\omega_m$ ($n \neq 1$). Il se peut que ces harmoniques excitent paramétriquement une onde de fréquence temporelle $n\omega_m/2$. Ceci apparaît en particulier lorsque ω_m se trouve dans la langue de résonance à $\omega_r/2$, l'intensité M dans ce cas, présente deux oscillations par période de modulation [160], figure 3.7, et possède donc une forte composante à l'harmonique $2\omega_m$. Cette harmonique peut exciter paramétriquement une onde à la fréquence ω_m . Une illustration de ce phénomène est présentée sur les spectrochronogrammes de la figure 3.8 obtenus pour $r = 1$ et $\omega_m = 0.37\omega_r$ (paramètres dans la langue correspondant à $\omega_r/2$). Nous pouvons observer sur la partie centrale de ces spectrochronogrammes une onde stationnaire (les ondes pro-

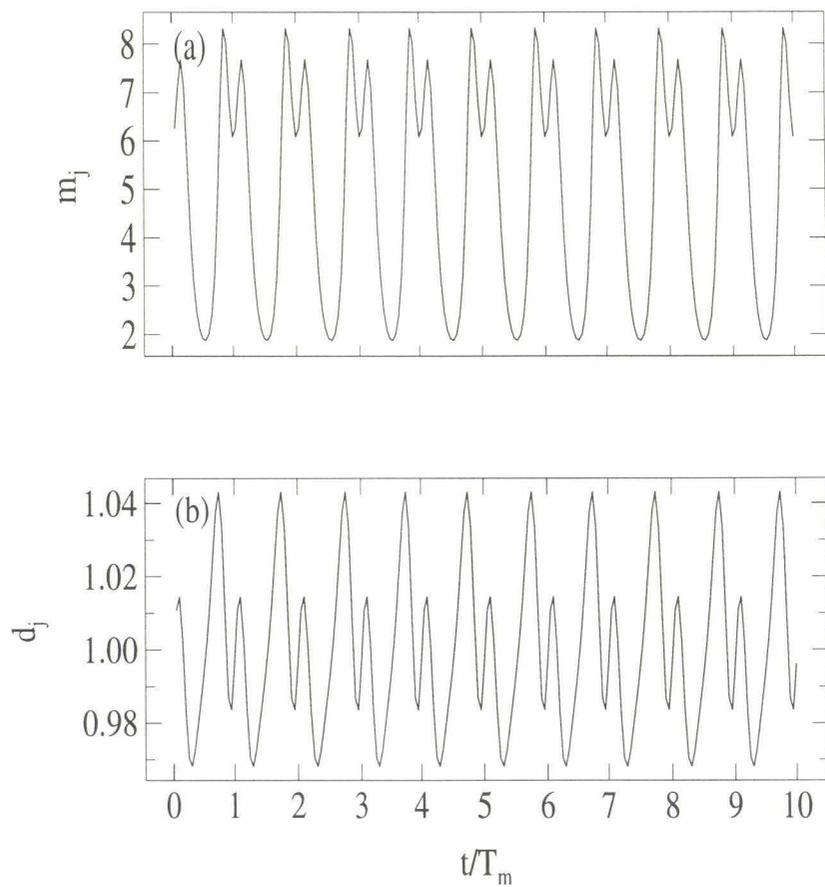


FIG. 3.7 – Evolution d'un mode (a) et de l'inversion de population associée (b) pour $\omega_m = 0.38\omega_r$, sous le seuil d'instabilité ($r = 0.4$). Intégration avec les conditions aux limites périodiques. T_m est la période de modulation.

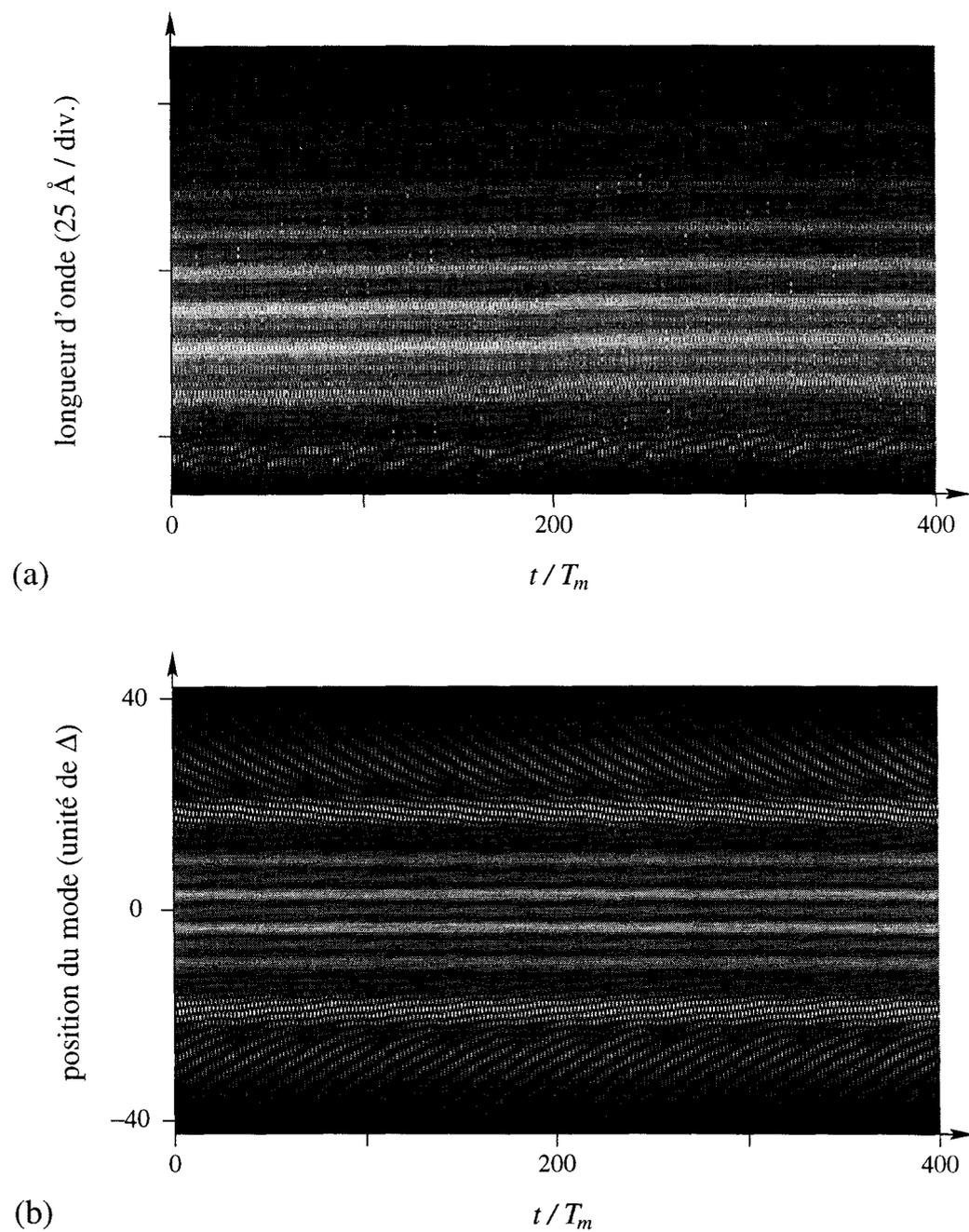


FIG. 3.8 – Spectrochronogrammes *a*: expérience ($\omega_m = 0.38\omega_r$, $r = 1$), *b*: simulation numérique ($\omega_m = 0.37\omega_r$, $r = 1$). T_m est la période de modulation, le centre du spectre est situé approximativement à 10700 \AA

gressives sur les cotés du spectre seront commentées dans la suite). Pour une longueur d'onde donnée, nous ne constatons pas une alternance de maxima et de minima comme sur la figure 3.3, ce qui indique que l'onde possède une fréquence ω_m . Nous avons effectué une transformée de Fourier à partir d'un spectrochronogramme obtenu numériquement pour les mêmes valeurs de paramètres ($\omega_m = 0.37\omega_r$, $r = 1$, l'intégration étant faite avec 10 points par période de modulation), figure 3.9. Nous observons des composantes maximales pour ω_m et $2\omega_m$, ce qui montre l'action de la seconde harmonique. Les résultats numériques et expérimentaux obtenus pour $\omega_m = 0.38\omega_r$ et

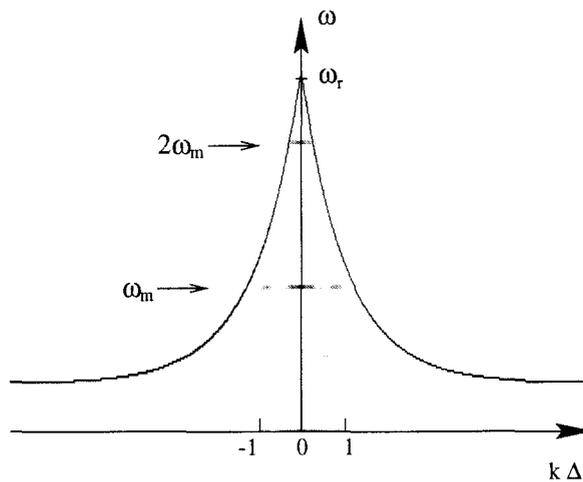


FIG. 3.9 – Transformée de Fourier du spectrochronogramme de la figure 3.8b. La courbe correspondant à la relation de dispersion 2.38 avec $\Delta = 2$ est superposée.

$\omega_m = 0.8\omega_r$ (ondes stationnaires) ont pu être interprétés en considérant l'excitation paramétrique d'ondes dans le spectre du laser. Nous avons montré numériquement qu'au seuil de l'instabilité le nombre d'onde était sélectionné par la relation de dispersion linéaire, ce qui est caractéristique d'une excitation paramétrique. Toutefois, certains éléments restent encore inexplicables comme la présence d'ondes progressives sur les cotés du spectre de la figure 3.8, et cela suggère la prise en compte d'autres phénomènes, en particulier les variations spatiales des paramètres de contrôle provenant des inhomogénéités du spectre.

3.3.3 Variations spatiales des paramètres de contrôle

Nous avons jusqu'ici interprété les résultats expérimentaux et numériques obtenus sans tenir compte des inhomogénéités du spectre (le profil du spectre n'est pas uniforme à l'état stationnaire). Nous avons vu au chapitre précédent que ces inhomogénéités influencent la propagation d'ondes. En particulier, les modes propres de vibrations du spectre du laser ne sont pas purement sinusoïdaux (cf section 2.2.5). Ils peuvent être considérés comme des oscillations dont la fréquence spatiale (nombre d'onde k) varie selon la position dans le mode. Il s'en suit que nous ne pouvons plus associer un nombre d'onde unique à une fréquence temporelle donnée mais qu'il faut considérer une distribution de nombres d'onde (correspondant au mode propre de vibration considéré). Ces variations spatiales des paramètres de contrôle doivent être prises en compte car elles ont non seulement des effets quantitatifs sur les structures excitées paramétriquement (dépendance spatiale du nombre d'onde), mais elles ont surtout des effets qualitatifs (apparition d'ondes progressives à la place des ondes stationnaires, coexistence de différents régimes, présence de défauts).

3.3.3.1 Dépendance spatiale du nombre d'onde

Une des manifestations les plus simples de l'influence de la variation spatiale des paramètres de contrôle était déjà présente sur la figure 3.5. Nous remarquons que la période spatiale de l'onde stationnaire varie selon la position dans le spectre. La structure de cette onde stationnaire est directement liée à la forme du mode propre de vibration correspondant à la fréquence moitié de celle de la modulation. Lorsque l'on s'éloigne du centre, la période spatiale de l'onde stationnaire augmente, comme celle du mode propre correspondant. La transformée de Fourier de cette onde se caractérise par une distribution de nombres d'onde, et non par un seul nombre d'onde (petit trait horizontal à la fréquence $\omega_m/2$ sur la figure 3.5b). Une simulation effectuée à l'aide d'un modèle pour lequel $g_j = 1$ (spectre uniforme) et possédant des conditions aux limites périodiques, pour les mêmes valeurs d'amplitude et de fréquence, révèle une onde stationnaire avec une période spatiale constante et égale à celle obtenue au centre du spectre pour des conditions réelles.

3.3.3.2 Apparition d'ondes progressives

Pour une fréquence de modulation ω_m différente de ω_r , les variations spatiales des paramètres conduisent à l'apparition d'ondes progressives au seuil d'instabilité à la place des ondes stationnaires. La figure 3.10 représente, par exemple, le spectrochronogramme obtenu d'après une simulation numérique du modèle 3.5 au voisinage du seuil pour une fréquence $\omega_m = 0.7\omega_r$. Nous

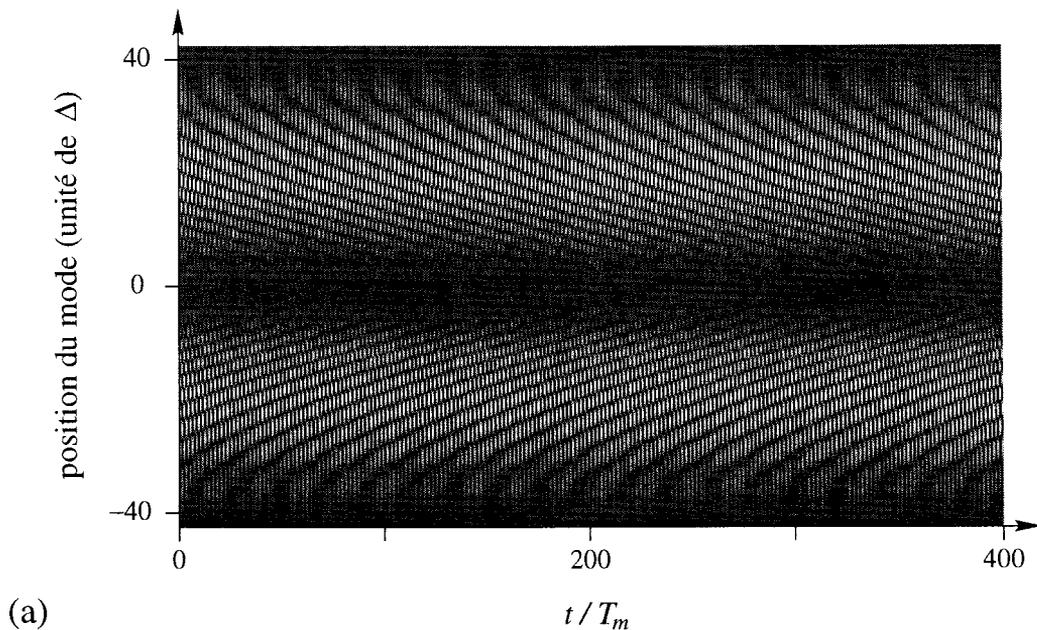


FIG. 3.10 – Spectrochronogramme obtenu à partir de simulations numériques ($\omega_m = 0.7\omega_r$, $r = 0.1$), le spectre moyen est soustrait. T_m est la période de modulation

observons la présence sur les bords du spectre de deux ondes progressives se dirigeant vers le centre.

A titre de comparaison, nous avons effectué des simulations numériques à l'aide du modèle pour lequel $g_j = 1$ et les conditions aux limites périodiques. Pour différentes fréquences de modulation, la structure spatiale observée au seuil d'instabilité est une onde stationnaire. La présence d'ondes progressives est donc intimement liée aux variations spatiales des paramètres de contrôle. En effet, lorsque le spectre est non uniforme (spectre gaussien à l'état station-

naire), la modulation entraîne l'excitation d'un ensemble de nombres d'onde k non nuls, en plus du nombre d'onde $k = 0$.

Dans le cas où la fréquence de modulation $\omega_m = \omega_r$, seul le nombre d'onde $k = 0$ est compatible avec la relation de dispersion. Une étude numérique en régime linéaire (c'est à dire en dessous du seuil d'instabilité) montre une réponse approximativement uniforme du spectre du laser à la fréquence de modulation (phases relatives des modes identiques), figure 3.11a.

Dans le cas où $\omega_m < \omega_r$, des nombres d'ondes différents de 0 sont alors compatibles avec la relation de dispersion. En régime linéaire, les phases relatives des modes sont différentes, figure 3.11b, ce qui est la signature d'une excitation fortement non uniforme ($k_m \neq 0$). Ainsi que nous l'avons vu dans la section 3.1.2, la structure apparaissant au seuil d'instabilité peut être décomposée en deux ondes contrapropagatives: $A_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + A_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)}$. L'application des lois de conservations de l'énergie ($\omega_1 + \omega_2 = n\omega_m$) et de l'impulsion ($k_1 - k_2 = k_m$) impose, dans le cas où $k_m \neq 0$ que $k_1 \neq k_2$ et $\omega_1 \neq \omega_2$. Ce qui se traduit par la combinaison des 2 ondes contrapropagatives en une onde résultante progressive. Ce phénomène est tout à fait comparable à celui rapporté par Kiyashko *et al.* dans une expérience de Faraday (cf. sect.3.1.2).

3.3.3.3 Coexistence de différents régimes

Une autre conséquence de la variation spatiale des paramètres de contrôle est la possibilité d'avoir des régimes différents selon l'endroit du spectre considéré. Ainsi la figure 3.8 est composée d'une onde stationnaire dans la partie centrale du spectre et d'ondes progressives sur les cotés du spectre. Les modes du laser situés sur les bords du spectre ont une intensité plus faible. Lorsque les variations spatiales de g_j sont lentes, il est possible de définir une relation de dispersion dépendant de l'espace (j). Le paramètre pertinent est donc le rapport entre la fréquence de modulation ω_m et la fréquence de relaxation "locale" ω_{rj} (cf section 2.2.5). Rappelons que cette fréquence est une fonction croissante de l'intensité \bar{m}_j ($\omega_{rj} = \sqrt{\gamma \bar{m}_j}$). Pour $\omega_m = \omega_r/2$, le rapport ω_m/ω_{rj} est de l'ordre de 1/2 pour les modes situés dans le centre du spectre, et prend des valeurs plus élevées sur les bords. Les régimes apparaissant sur les bords du spectre correspondent à ceux déjà observés sur l'ensemble du spectre pour ω_m l'ordre de 0.7 à 0.8 ω_r (figure 3.10). Dans le centre, nous rappelons que la structure d'onde stationnaire provient d'une excitation paramétrique par la seconde harmonique de ω_m proche de ω_r .

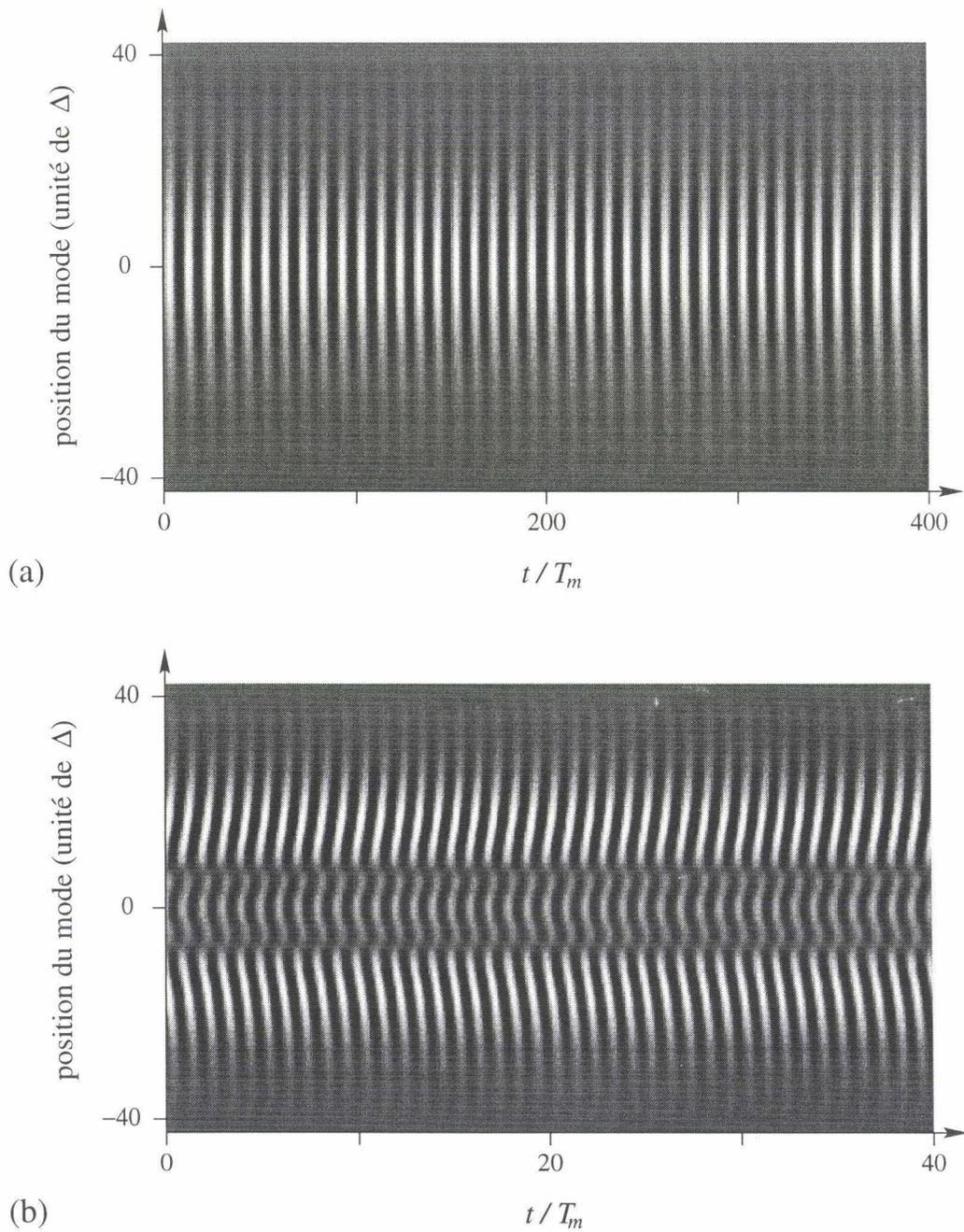


FIG. 3.11 – Spectrochronogrammes obtenu à partir de simulations numériques correspondant à un régime linéaire. *a*: ($\omega_m = 1.0\omega_r$, $r = 0.02$), *b*: ($\omega_m = 0.7\omega_r$, $r = 0.02$). T_m est la période de modulation.

3.3.3.4 Défauts

Nous avons montré précédemment que des ondes progressives pouvaient apparaître dans le spectre du laser, dans le cas où la fréquence de modulation est inférieure à ω_r . Les deux ondes étant contrapropagatives, il est possible qu'elles se rejoignent. Quelle sera alors la nature de la structure obtenue? Ce cas est justement observable pour une fréquence de modulation de l'ordre de $0.3\omega_r$ et une amplitude $r = 1$, figure 3.12.

Nous pouvons distinguer deux zones dans le spectrochronogramme. Une zone située, sur les bords du spectre, est composée d'ondes progressives dirigées vers le centre et correspondant à une oscillation à la fréquence moitié de celle de l'excitation. La zone centrale est constituée de deux ondes progressives séparées par un défaut. Cette structure fait penser aux défauts topologiques prédits par P. Coulet *et al.* [161] et observés par exemple, dans des expériences de convection à une dimension [162] ou certaines réactions chimiques [163]. A deux dimensions, ce type de défaut correspond à une spirale et a fait l'objet de nombreuses études. Cependant des spirales apparemment semblables peuvent être de natures fondamentalement différentes. C'est ce qui différencie en particulier les spirales de nature topologique, de celles dont l'origine est liée à la géométrie du système (spirales observées par Kiyashko *et al.* [157]). Il convient donc d'être prudent dans l'interprétation de la nature du défaut que nous observons sur la figure 3.12. En particulier, afin de vérifier, si ce défaut est d'origine intrinsèque, ou au contraire lié aux variations spatiales des paramètres de contrôle, nous simulons numériquement ce régime (ondes progressives séparées par un défaut) en passant progressivement d'une situation réelle (spectre gaussien à l'état stationnaire) à une situation où le pompage est uniforme ($g_j = 1$). Cela peut être fait en augmentant progressivement la largeur inhomogène équivalente σ et en utilisant des conditions aux limites périodiques. Les simulations numériques ont été effectuées pour deux valeurs voisines de la fréquence de modulation : $\omega_m = 0.35\omega_r$ (colonne de gauche de la figure 3.13), et $\omega_m = 0.298\omega_r$ (colonne de droite de la figure 3.13). Nous constatons, pour $\omega_m = 0.35\omega_r$, que la diminution de l'inhomogénéité spatiale du spectre s'accompagne d'une disparition des ondes progressives au profit d'une onde stationnaire. Un phénomène analogue, avec une étape intermédiaire plus complexe, s'observe sur la colonne de droite. D'autre part, dans le premier cas ($\omega_m = 0.35\omega_r$), la fréquence de l'onde stationnaire est ω_m (excitation paramétrique par la seconde harmonique), dans le second cas ($\omega_m = 0.298\omega_r$), l'onde stationnaire possède une

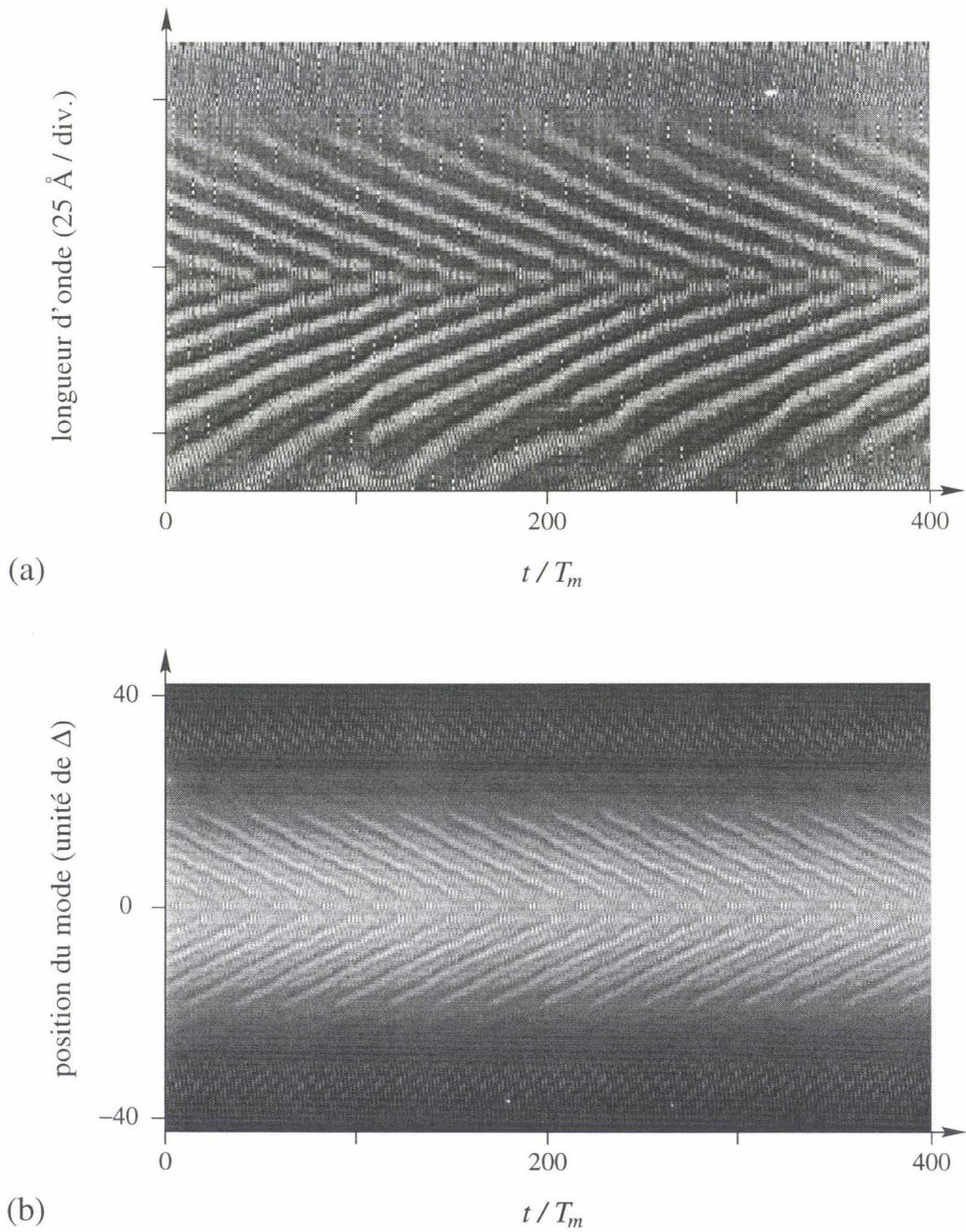


FIG. 3.12 – Spectrochronogrammes *a* : expérience ($\omega_m = 0.31\omega_r$, $r = 1$), *b* : simulation numérique ($\omega_m = 0.298\omega_r$, $r = 1$). T_m est la période de modulation, le centre du spectre est situé approximativement à 10700 \AA .

fréquence de l'ordre de $\omega_m/2$. Il semble donc que la nature progressive des ondes présentes dans le centre du spectre ait son origine dans le profil non uniforme du spectre et soit due à la variation spatiale des paramètres de contrôle.

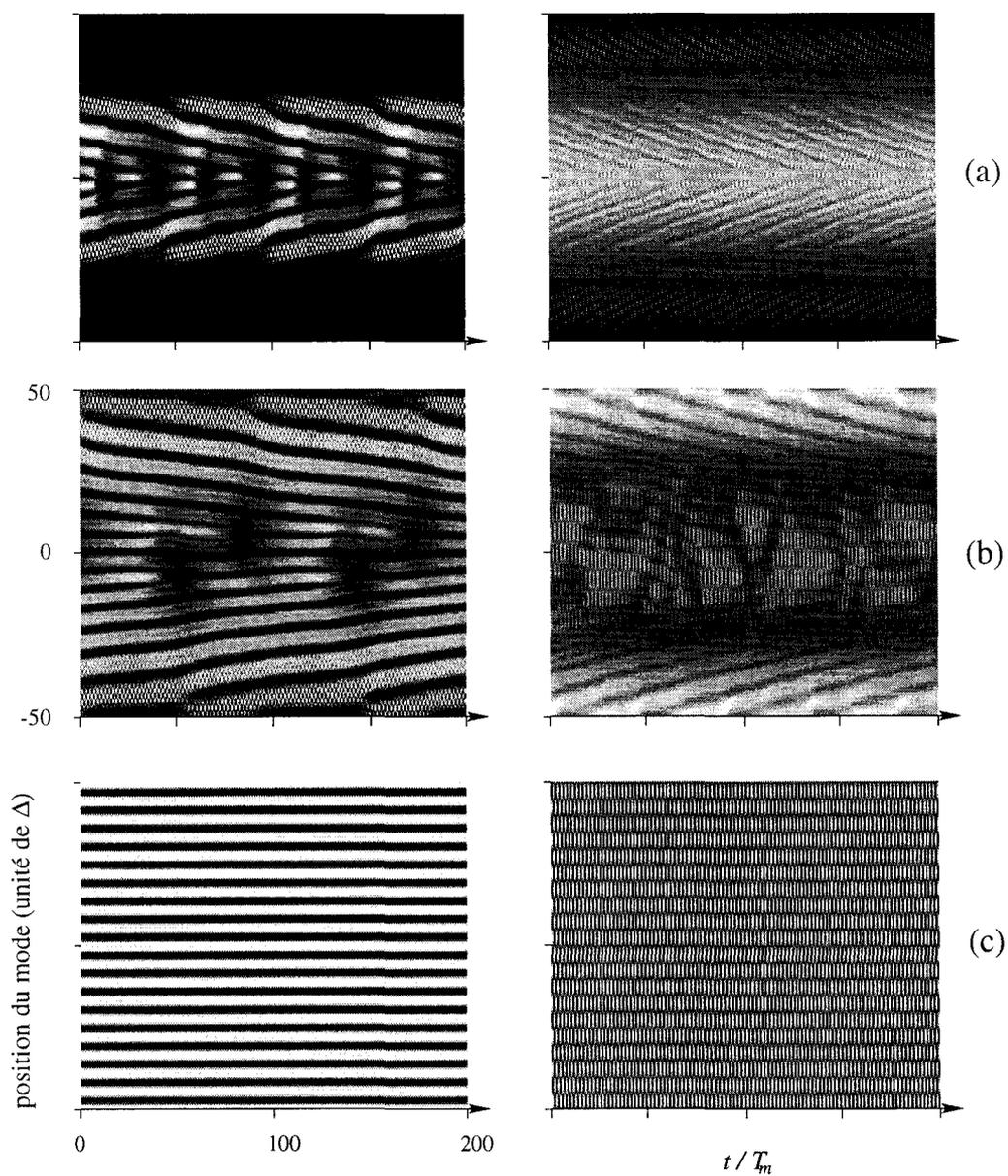


FIG. 3.13 – Simulations numériques effectuées en utilisant le modèle aux conditions aux limites périodiques et en augmentant la largeur inhomogène équivalente σ . Colonne de gauche : $\omega_m = 0.35\omega_r$, colonne de droite : $\omega_m = 0.298\omega_r$, a : $1/\sigma = 2.10^{-2}$, b : $1/\sigma = 10^{-1}$, c : $1/\sigma = 0$.

Nous avons mis en évidence expérimentalement et numériquement que des ondes étaient excitées paramétriquement lors de la modulation de la pompe du laser, et ce phénomène est comparable à l'instabilité de Faraday dans les fluides. Nous avons montré également l'influence fondamentale des variations spatiales des paramètres de contrôle sur la formation des structures spatiotemporelles issues de l'excitation paramétrique. En effet, ces variations spatiales des paramètres peuvent avoir pour effet une dépendance spatiale du nombre d'onde des ondes stationnaires, ou de façon plus étonnante être à l'origine de l'apparition d'ondes progressives (ces ondes pouvant être séparées par un défaut) et de la coexistence dans le spectre de régimes correspondants à des fréquences de modulations différentes. Cette étude sur les influences des variations spatiales des paramètres de contrôle doit être approfondie, car il existe peu d'études similaires dans d'autres systèmes (à notre connaissance, le seul résultat décrivant un phénomène comparable a été rapporté par Kiyashko *et al.* [157] dans le cas de l'instabilité de Faraday). Bien que les résultats expérimentaux présentés soient obtenus pour des amplitudes de modulation très importantes, ils ont pu être décomposés en régimes relativement simples (ondes stationnaires et ondes progressives). Les domaines de stabilité de ces structures sont limités et ces dernières se déstabilisent selon différents processus que nous allons décrire dans la section suivante.

3.4 Instabilités secondaires

Les structures présentées précédemment (ondes stationnaires, ondes progressives obtenues pour $r = 1$) peuvent se déstabiliser, lorsque la fréquence de modulation varie. Les résultats expérimentaux et numériques obtenus pour $r = 1$ et pour une fréquence de modulation variant de 0.3 à 0.8 ω_r sont résumés schématiquement sur le diagramme de la figure 3.14. La dé-

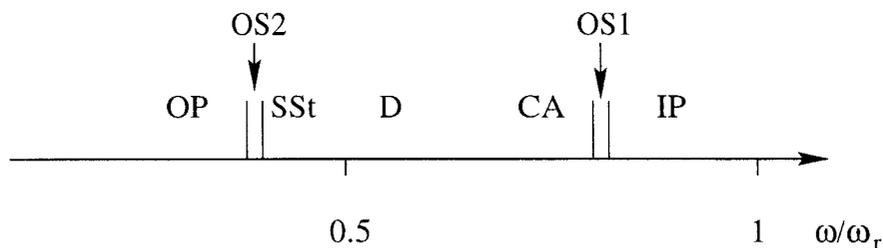


FIG. 3.14 – Diagramme des différents régimes observables lorsque la fréquence de modulation varie de 0.3 à 0.8 ω_r et pour $r = 1$. *OP* : onde progressive, *OS1* et *OS2* : ondes stationnaires, *SSt* : sous-structure, *D* : déstabilisation de la sous-structure, *CA* : création-annihilation, *IP* : instabilité de phase.

stabilisation des ondes stationnaires obtenues pour $\omega_m = 0.8\omega_r$ (*OS1*) et $\omega_m = 0.38\omega_r$ (*OS2*) peut s'opérer selon différents processus : instabilités de phase, annihilations-crétions de cellules, propagation de structures localisées, apparition de sous-structures, ondes de dérive. Nous allons donc décrire les mécanismes de chaque instabilité. Pour les différents cas, nous comparerons les résultats des simulations numériques effectuées avec $g_j = 1$ et des conditions aux limites périodiques (spectre uniforme à l'état stationnaire) et celles effectuées avec des conditions réelles. Cela permettra de distinguer les phénomènes liés aux variations spatiales des paramètres de contrôle de ceux d'origine intrinsèque au milieu de propagation.

3.4.1 Instabilité de phase

L'onde stationnaire (*OS1*) de la figure 3.3 possède un domaine de stabilité très réduit. Pour une fréquence de modulation supérieure, elle se transforme en une structure spatiotemporelle de fréquence temporelle plus faible ($\omega_m/4$), et qui possède des composantes spatiales de nombre d'onde plus élevé. Pour

$\omega_m = 0.82\omega_r$, la phase de la structure précédente devient complètement instable, figure 3.15. Une étude plus approfondie devrait permettre de savoir si nous sommes en présence de turbulence de phase.

La simulation à l'aide du modèle de laser, pour lequel $g_j = 1$ et les conditions aux limites périodiques, montre un comportement similaire, figure 3.16, ce qui prouve que ce régime est d'origine intrinsèque et indépendant des variations spatiales des paramètres de contrôle.

3.4.2 Création-annihilation de cellules

Lorsque la fréquence de modulation diminue, les ondes stationnaires OS1 et OS2 se déstabilisent par l'annihilation d'une ou deux cellules au centre de la structure spatiale et la création de cellules sur les bords. Ces phénomènes peuvent être vus comme des dislocations spatiotemporelles. Pour une fréquence de modulation $\omega_m = 0.79\omega_r$ légèrement inférieure à celle correspondant à l'onde stationnaire OS1, figure 3.17, ces dislocations spatiotemporelles apparaissent de façon intermittente. Pour une fréquence plus faible de modulation ($\omega_m = 0.64\omega_r$, $r = 1$), elles apparaissent beaucoup plus fréquemment, figure 3.18. L'annihilation dans le centre du spectre (ou la création sur les bords) de cellules entraîne, d'une part la dérive de l'ensemble des cellules voisines, d'autre part l'émission d'une onde se propageant dans le spectre. Cette onde se caractérise par une période temporelle double et une cellule de base déformée (possédant des composantes k plus élevées).

Ces phénomènes sont à priori d'origine intrinsèque, car ils sont encore présents lorsque qu'il n'y a pas de variation spatiale des paramètres de contrôle, figure 3.19. Nous remarquons que l'onde émise après chaque annihilation correspond à une onde solitaire. Il y existe cependant certaines différences, et il ressort que les variations spatiales des paramètres ont pour effet de localiser l'annihilation des cellules dans le centre du spectre, et la création de cellules sur les bords.

Des phénomènes comparables à ceux que nous venons de décrire (création-annihilation de cellules, propagation d'ondes solitaires) ont été observés dans d'autres expériences sur des systèmes spatiotemporels à une dimension : convection de Rayleigh-Bénard [164], solidification directionnelle [165, 166, 167], *viscous fingering* [168, 169]. Dans ces différents cas, une structure solitaire apparaît. Elle est caractérisée par une cellule déformée asymétriquement (brisure de parité) par rapport à la cellule de la structure apparaissant au seuil. Cette structure déformée se déplace dans une direction dépendant du

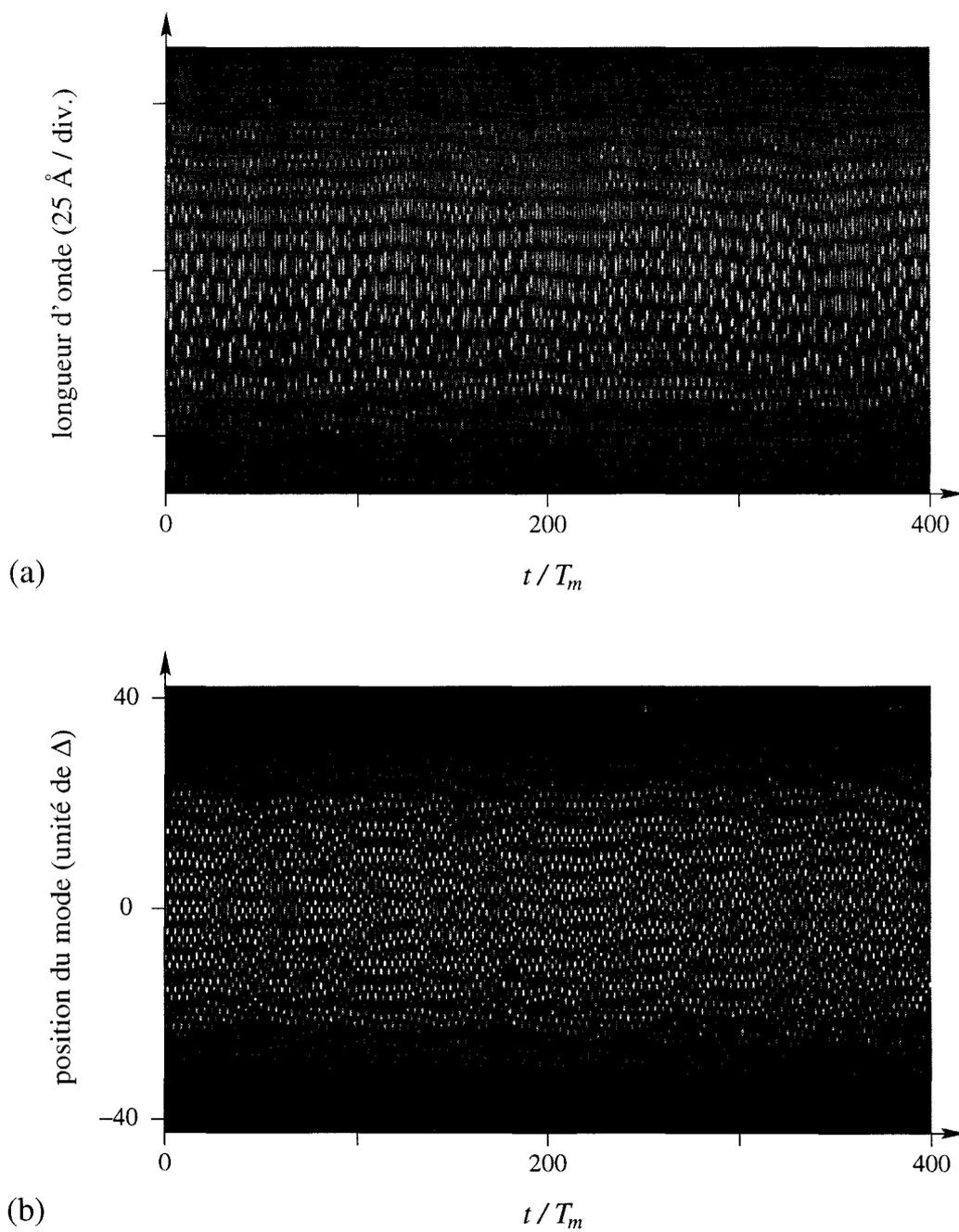


FIG. 3.15 - Spectrochronogrammes a: expérience ($\omega_m = 0.82\omega_r$, $r = 1$), b: simulation numérique ($\omega_m = 0.84\omega_r$, $r = 1$). T_m est la période de modulation

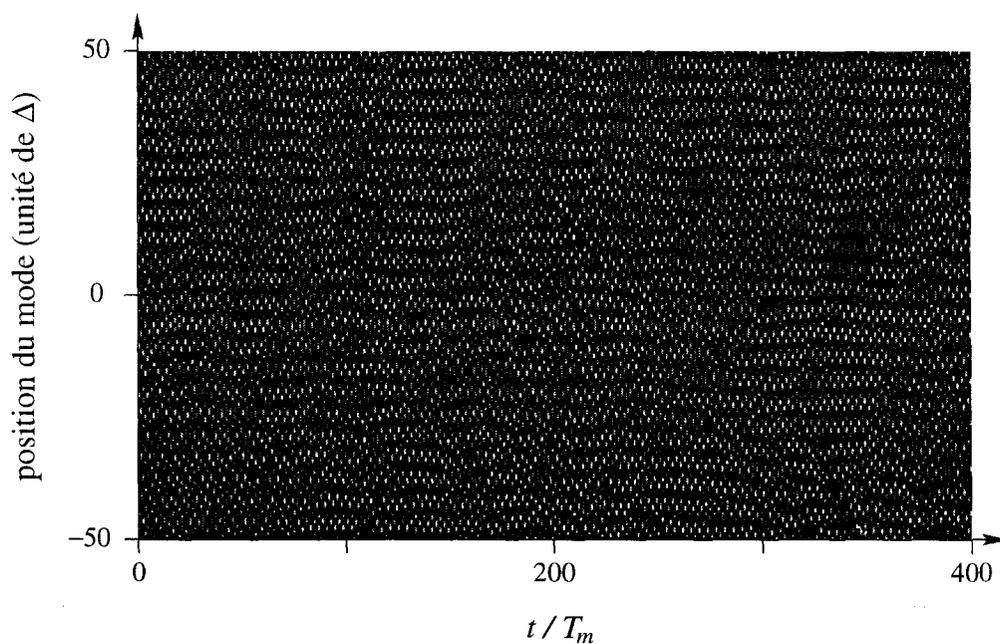


FIG. 3.16 - Spectrochronogramme obtenu à partir d'une simulation numérique. Le spectre est constant à l'état stationnaire ($g_j = 1$) et les conditions aux limites périodiques ($\omega_m = 0.82\omega_r$, $r = 1$). T_m est la période de modulation.

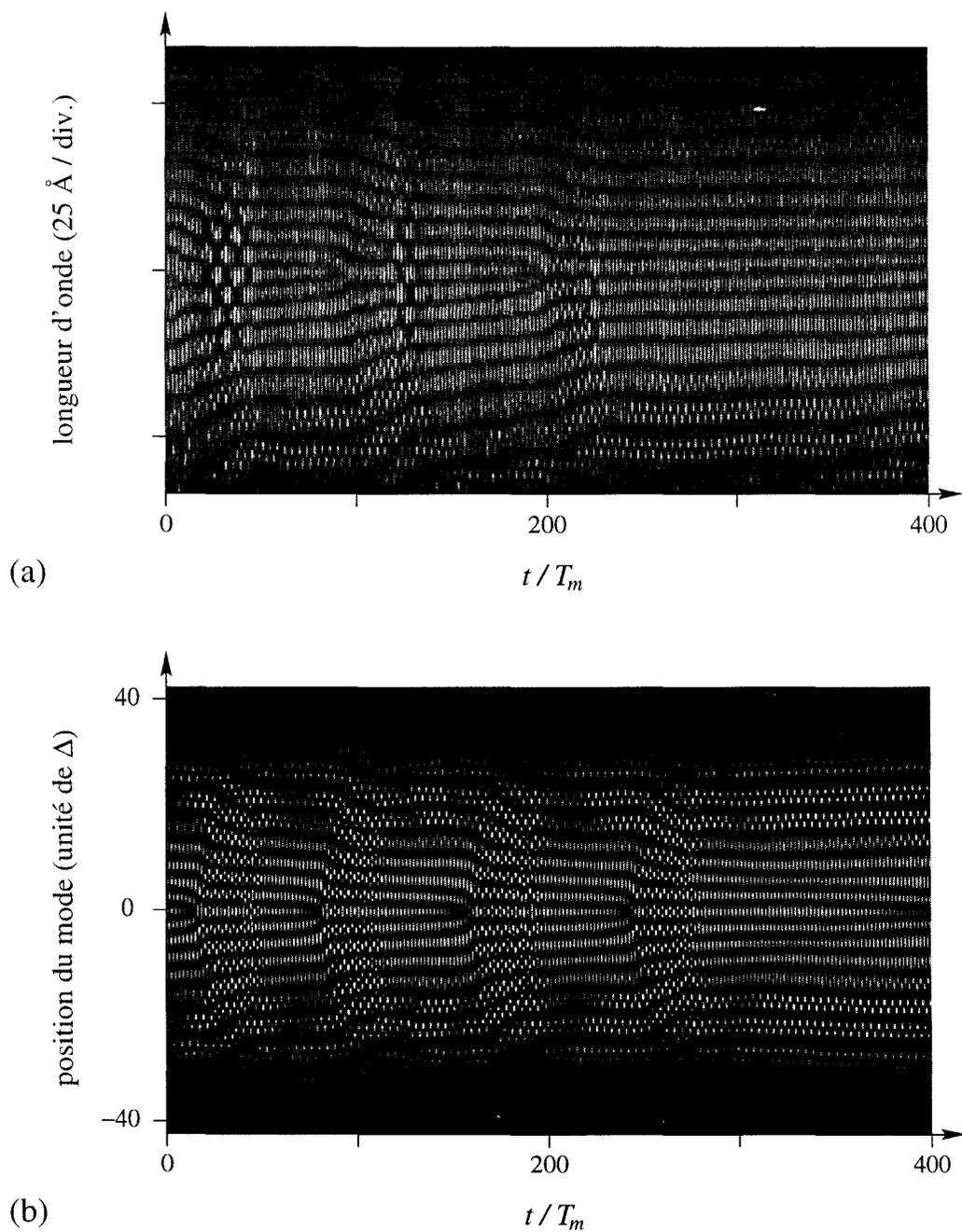


FIG. 3.17 - Spectrochronogrammes a : expérience ($\omega_m = 0.79\omega_r$, $r = 1$), le centre du spectre est situé approximativement à 10700 \AA ; b : simulation numérique ($\omega_m = 0.69\omega_r$, $r = 1$). T_m est la période de modulation.

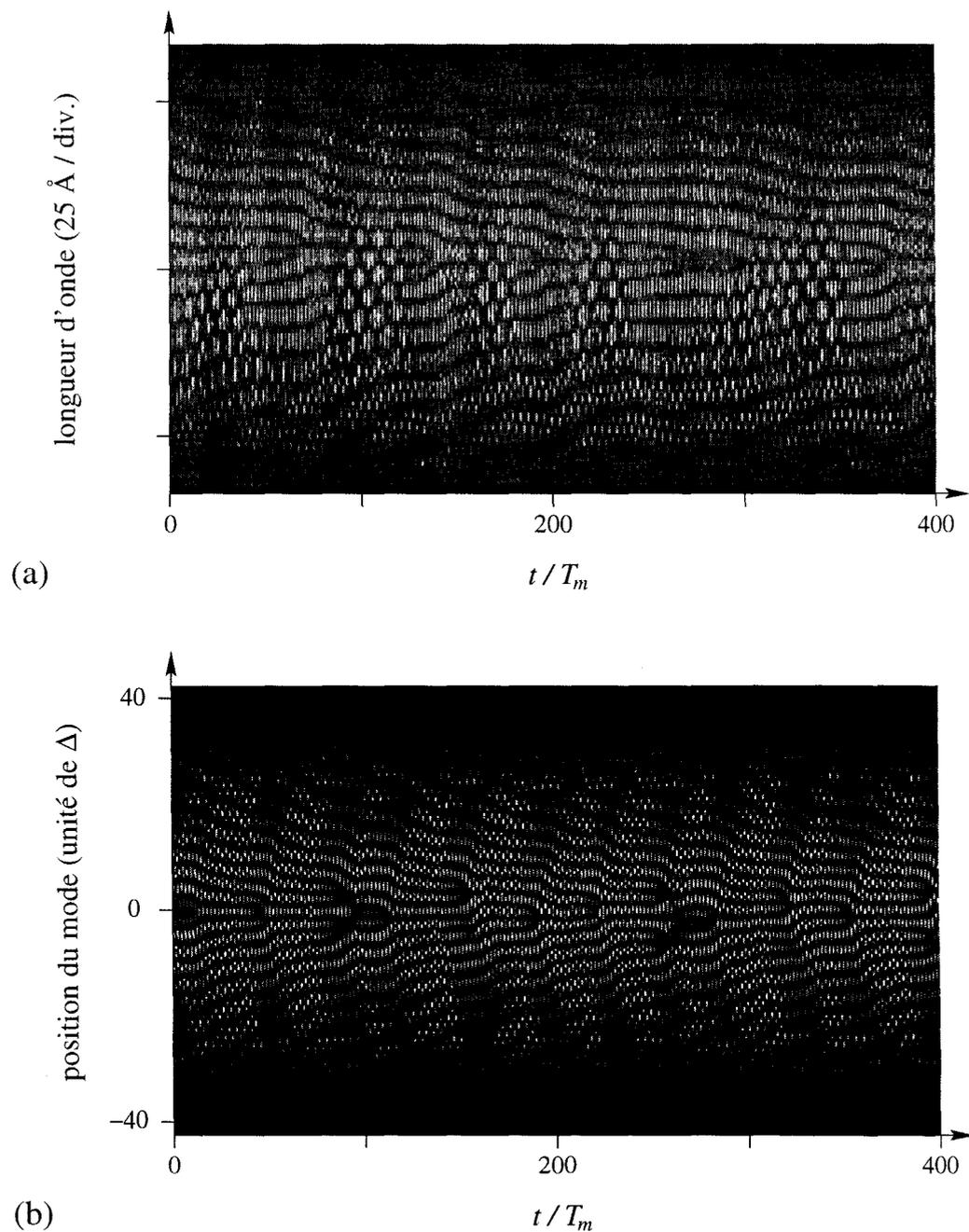


FIG. 3.18 - Spectrochronogrammes *a*: expérience ($\omega_m = 0.67\omega_r$, $r = 1$), le centre du spectre est situé approximativement à 10700 \AA ; *b*: simulation numérique ($\omega_m = 0.64\omega_r$, $r = 1$). T_m est la période de modulation

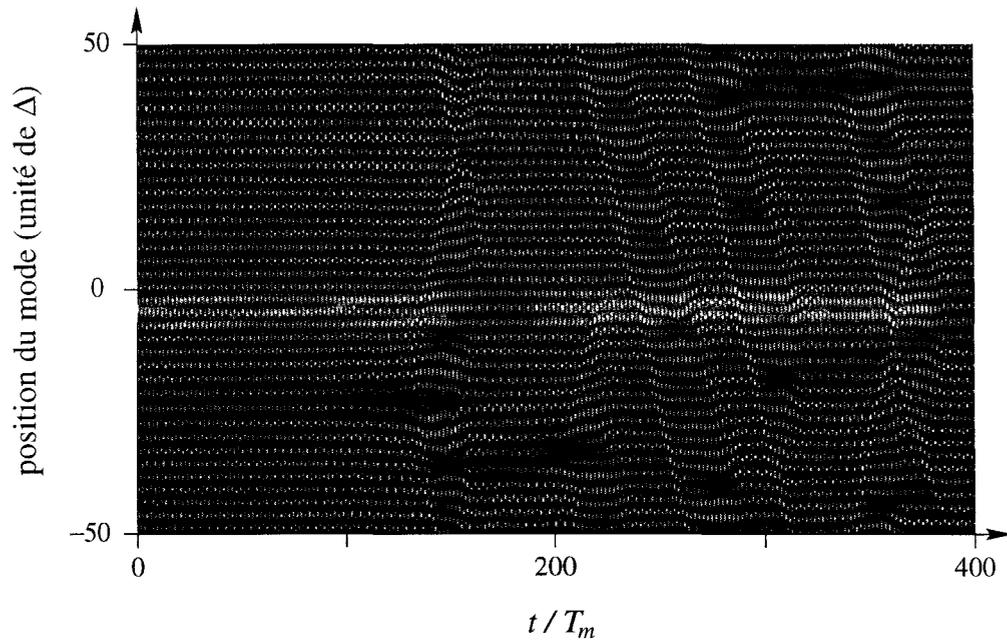


FIG. 3.19 – Spectrochronogramme obtenue à partir d’une simulation numérique. Le pompage est uniforme ($g_j = 1$) et les conditions aux limites périodiques ($\omega_m = 0.64\omega_r$, $r = 1$). T_m est la période de modulation

sens de l'asymétrie et son passage modifie la longueur d'onde de la structure apparaissant au seuil. La rencontre de deux de ces ondes solitaires peut provoquer l'annihilation d'une cellule. Il a été montré [170, 137], que la seconde harmonique $2k$ du mode apparaissant à l'instabilité jouait un rôle important dans l'origine de cette structure déformée. Dans notre cas, le rôle de la seconde harmonique pourrait être joué par des composantes spatiales k (supérieures au nombre d'onde de la structure primaire) provenant d'une instabilité paramétrique secondaire ($\approx \omega_m/4$), mais des études sont encore nécessaires pour pouvoir être plus affirmatif.

En ce qui concerne l'onde stationnaire OS2 (ω_m voisin de $0.35\omega_r$), la déstabilisation s'opère également par l'apparition intermittente de dislocations, figure 3.20.

Lorsque la fréquence diminue, on passe continuellement, figure 3.21, vers la structure de la figure 3.12 (ondes progressives séparées par un défaut).

Comme dans le cas précédent, l'annihilation d'une cellule a lieu dans la partie centrale du spectre et la création sur les bords. L'annihilation d'une cellule s'accompagne d'une dérive de l'ensemble des cellules. Toutefois, la simulation à l'aide d'un modèle utilisant un pompage uniforme et des conditions aux limites périodiques montre une onde stationnaire, (comme c'est le cas pour la figure 3.13), ce qui prouve que ces phénomènes sont liés aux variations spatiales des paramètres de contrôle.

3.4.3 Apparition d'une sous-structure

L'onde stationnaire OS2 observée pour $\omega_m = 0.37\omega_r$ et $r = 1$, figure 3.8 se déstabilise lorsque la fréquence ω_m augmente. Cette déstabilisation peut être décomposée en plusieurs étapes. La première de ces étapes se caractérise par l'émergence d'une sous-structure dans les différentes cellules de l'onde stationnaire, figure 3.22. Cette sous structure possède une fréquence temporelle moitié de celle de la modulation, et une fréquence spatiale en relation avec le mode propre associé à $\omega_m/2$. Nous pouvons interpréter la présence de cette sous structure comme le résultat de deux instabilités paramétriques, une correspondant à l'onde excitée à $\omega_m/2$ (par la fondamentale) et l'autre correspondant à une excitation à ω_m (par la seconde harmonique).

Pour une fréquence $\omega_m = 0.44\omega_r$, une instabilité de dérive apparaît, figure 3.23. Cette dérive est très lente et concerne l'ensemble de la structure.

Lorsque la fréquence de modulation atteint $0.5\omega_r$, la structure en cellules se déstabilise complètement, figure 3.24. Des processus de création-

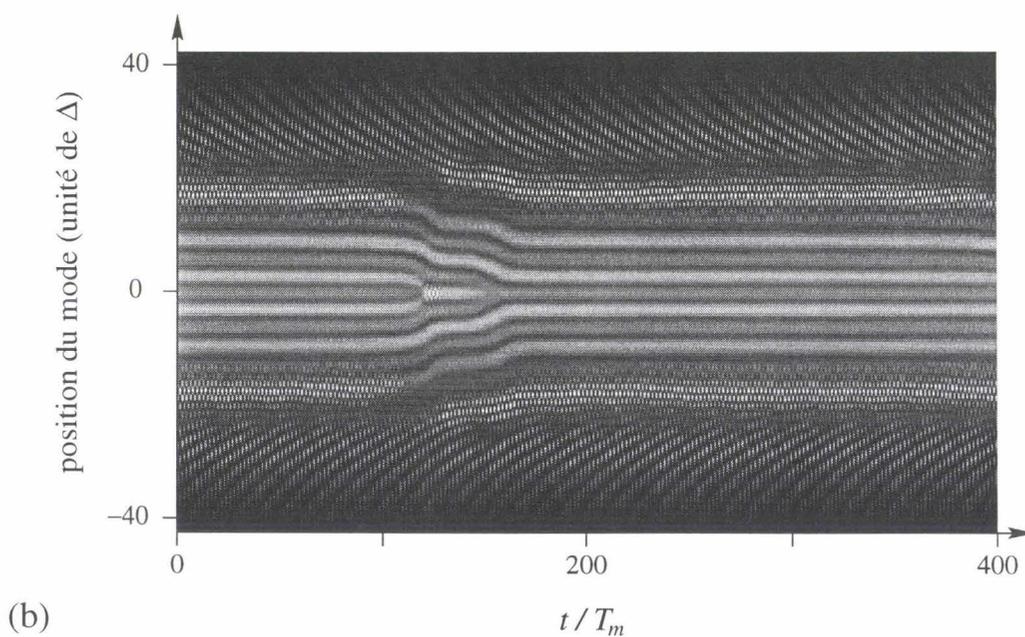
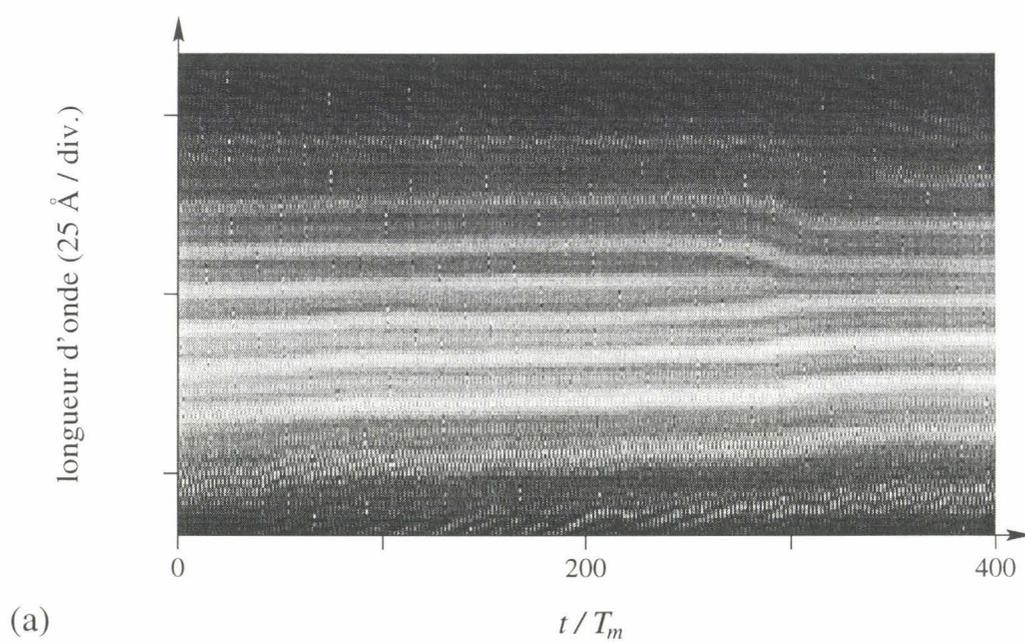


FIG. 3.20 – Spectrochronogrammes a : expérience ($\omega_m = 0.37\omega_r$, $r = 1$), le centre du spectre se situe approximativement à 10700 \AA ; b : simulation numérique ($\omega_m = 0.3648\omega_r$, $r = 1$). T_m est la période de modulation

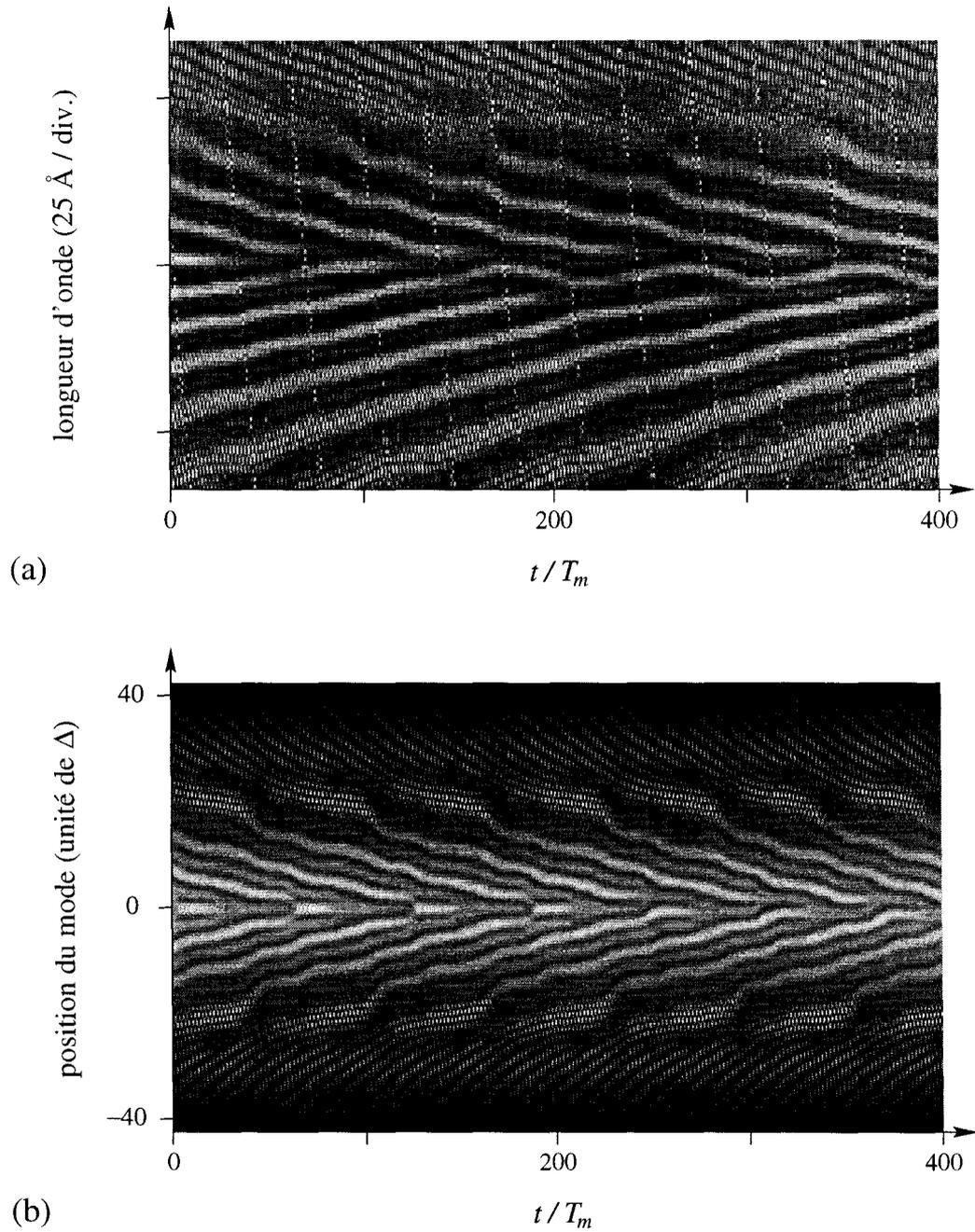


FIG. 3.21 - Spectrochronogrammes a : expérience ($\omega_m = 0.35\omega_r$, $r = 1$), le centre du spectre se situe approximativement à 10700 \AA ; b : simulation numérique ($\omega_m = 0.35\omega_r$, $r = 1$). T_m est la période de modulation

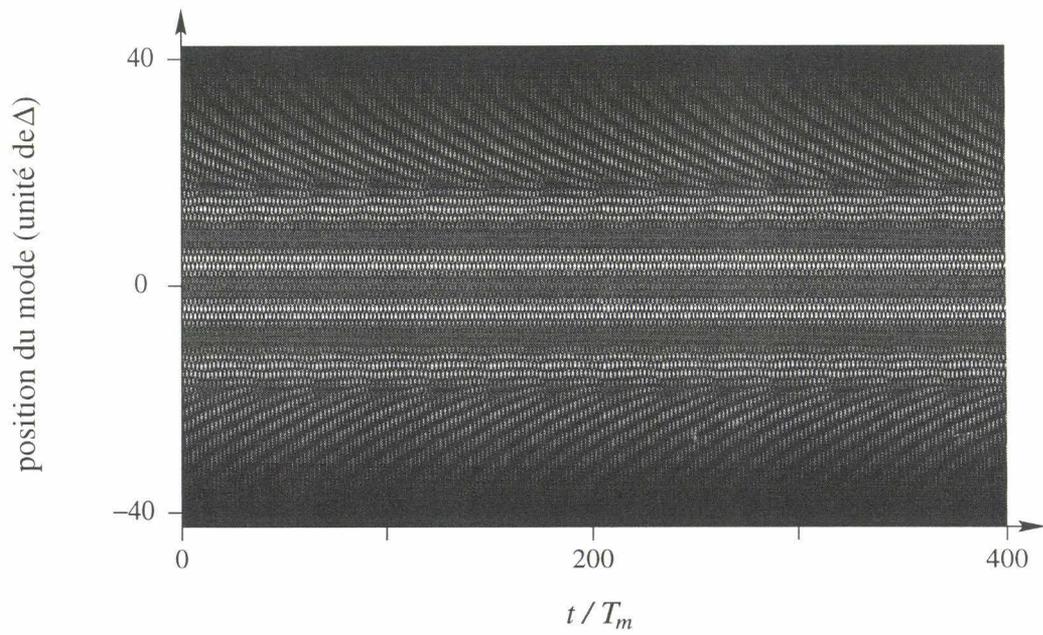


FIG. 3.22 – Spectrochronogramme obtenu à partir d'une simulation numérique ($\omega_m = 0.42\omega_r$, $r = 1$). T_m est la période de modulation

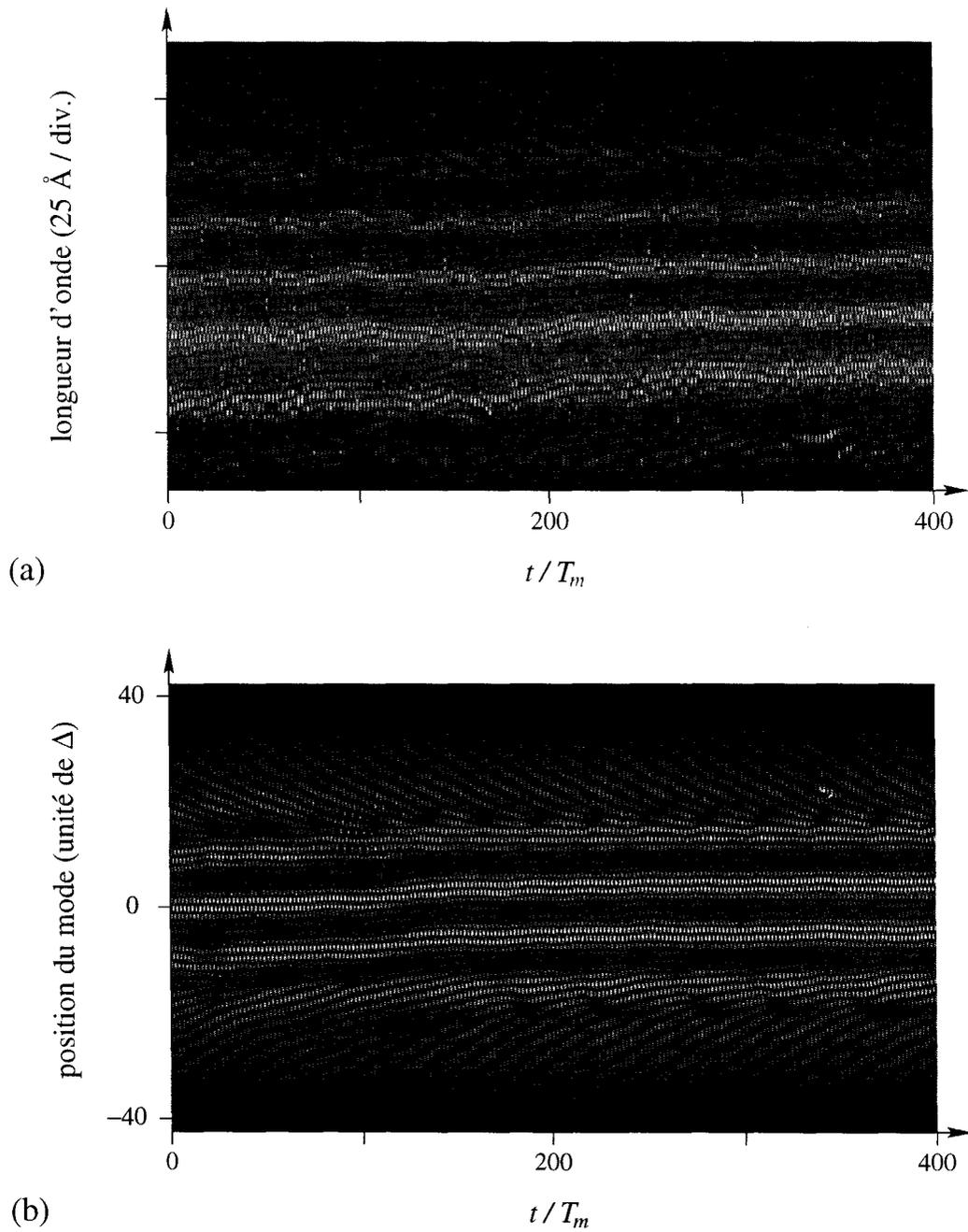


FIG. 3.23 – Spectrochronogrammes *a*: expérience ($\omega_m = 0.44\omega_r$, $r = 1$), le centre du spectre se situe à 10700 \AA ; *b*: simulation numérique ($\omega_m = 0.45\omega_r$, $r = 1$). T_m est la période de modulation

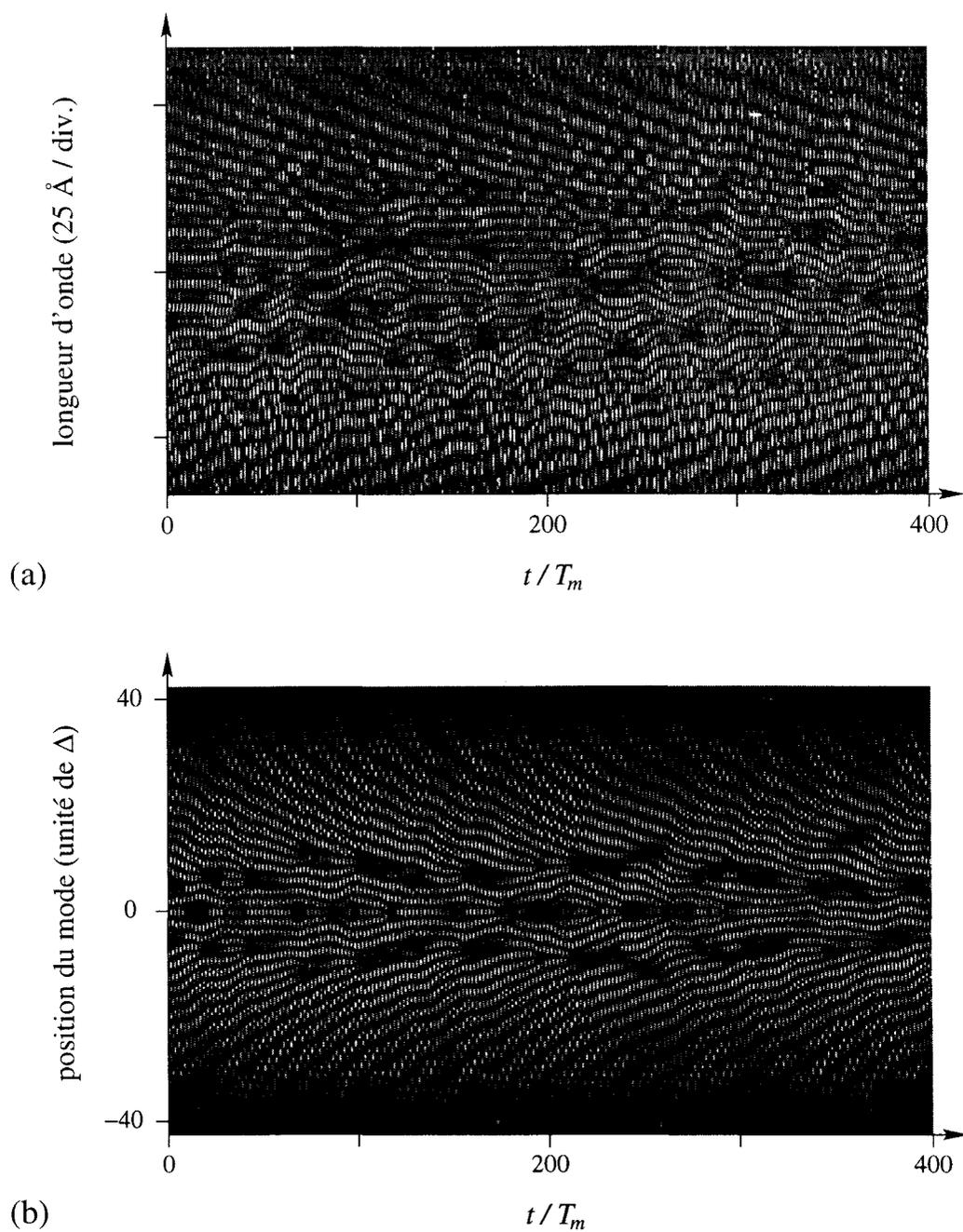


FIG. 3.24 – Spectrochronogrammes a: expérience ($\omega_m = 0.55 \omega_r$, $r = 1$), le centre du spectre se situe approximativement à 10700 Å; b: simulation numérique ($\omega_m = 0.54 \omega_r$, $r = 1$). T_m est la période de modulation

annihilation s'opèrent dans la partie centrale du spectre. Ce régime est également de nature intrinsèque, puisqu'il est reproduit par le modèle pour lequel le spectre est uniforme à l'état stationnaire et les conditions aux limites périodiques, figure 3.25. Plusieurs séries d'expériences ont été réalisées. Pour

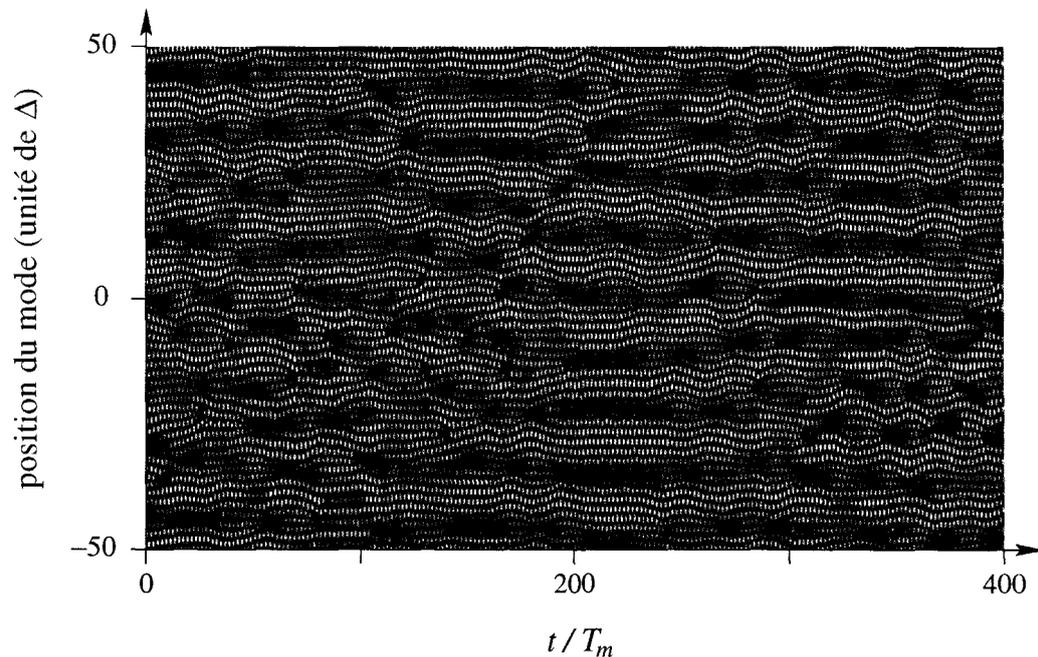


FIG. 3.25 – Spectrochronogramme obtenu à partir d'une simulation numérique. Le pompage est uniforme ($g_j = 1$) et les conditions aux limites périodiques ($\omega_m = 0.54\omega_r$, $r = 1$). T_m est la période de modulation

certaines d'entre elle, le régime précédent, figure 3.24, est remplacé par celui de la figure 3.26. Nous n'avons pas retrouvé ce dernier régime numériquement, une des explications possibles est qu'il soit dû à un effet de polarisation (des études numériques utilisant le modèle 2.74 sont en cours).

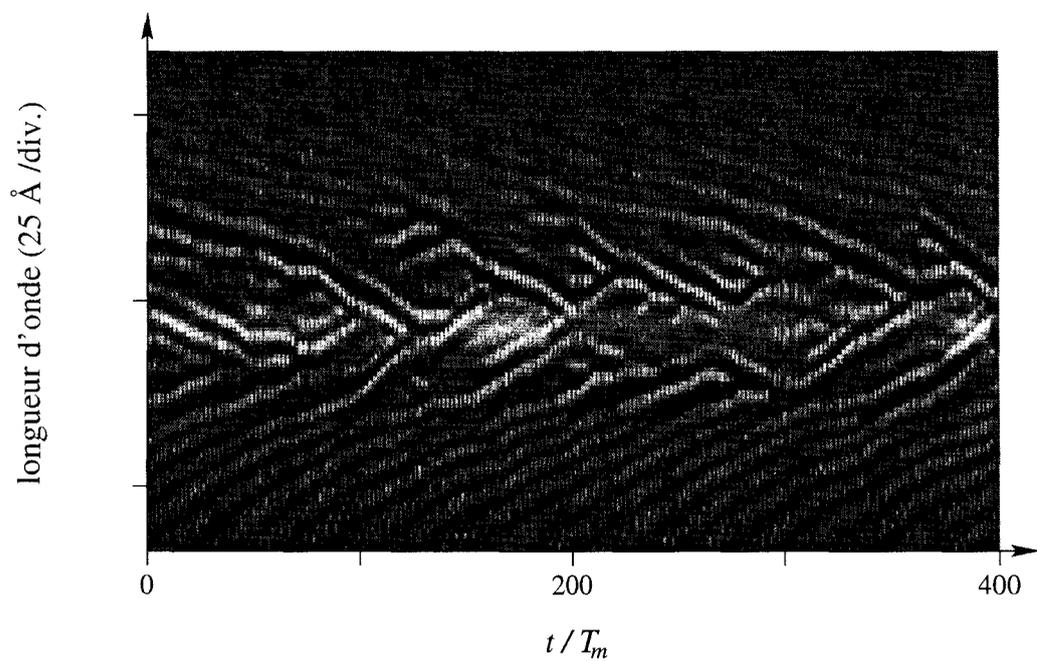


FIG. 3.26 – Spectrochronogramme expérimental ($\omega_m = 0.6\omega_\tau$, $r = 1$), le centre du spectre se situe à 10700 Å. T_m est la période de modulation

3.4.4 Prévisions numériques à faible amplitude de modulation

Numériquement, nous avons pu explorer l'ensemble de l'espace des paramètres de contrôle (ω_m, r) . Bien que nous nous attachons ici à présenter principalement des résultats obtenus pour des valeurs de paramètre accessibles expérimentalement, nous pouvons donner un aperçu de certains régimes simulés numériquement et qui motivent une étude expérimentale à plus faible amplitude. C'est le cas en particulier des régimes obtenus pour $\omega_m = \omega_r$ et $r > 0.3$. Nous observons des ondes de dérive, figure 3.27a, le sens de la dérive dépend de la condition initiale et il y a bistabilité entre ces ondes.

Nous pouvons interpréter la présence de cette onde de dérive comme le résultat d'une instabilité paramétrique secondaire. L'onde stationnaire provenant de l'instabilité primaire sert de "pompe" à un second processus d'instabilité paramétrique. Pour ce second processus, l'excitation n'est évidemment plus uniforme. Les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion n'imposent donc plus une onde stationnaire, mais deux ondes contrapropagatives de nombres d'onde k_1 et k_2 et de fréquence ω_1 et ω_2 différentes, qui sont déterminées par $k_1 + k_2 = k_0$ et $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ (tracé des vecteurs sur la figure 3.27b). La résultante est donc une onde de dérive. Nous remarquons, sur la transformée de Fourier, figure 3.27b, la présence d'une composante plus importante à $\omega \approx \omega_0$ et $k \approx -k_0$ que celle à ω_0 et k_0 . Ces deux composantes proviennent de l'instabilité primaire, figure 3.5b, mais lors de l'instabilité secondaire, seule la composante (ω_0, k_0) sert de pompe et son amplitude est par conséquent diminuée. La présence de cette onde de dérive peut être rapprochée des observations de Douady *et al.* [153] dans le cas de l'instabilité de Faraday.

Des simulations numériques effectuées avec le modèle pour lequel le spectre est constant à l'état stationnaire ($g_j = 1$) et les conditions aux limites périodiques montrent également l'apparition d'ondes de dérive dont le sens dépend de la condition initiale (bistabilité). Ceci montre que ce phénomène est d'origine intrinsèque, ce qui permet d'espérer l'observation de défauts topologiques, tels ceux prédits par P. Coulet [161], qui n'ont pas, à notre connaissance, été observés dans un système optique.

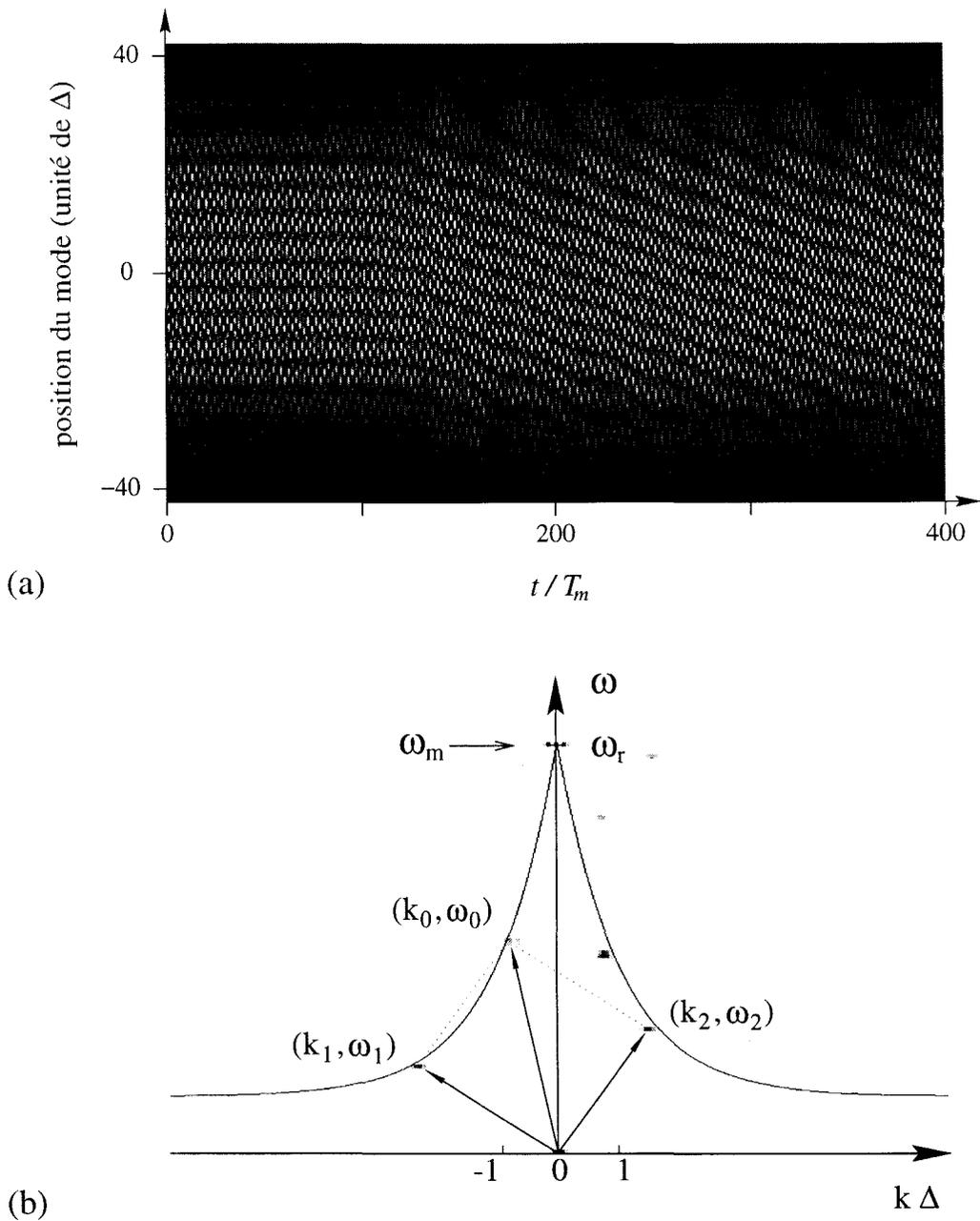


FIG. 3.27 - a: spectrochronogramme obtenu à partir d'une simulation numérique ($\omega_m = \omega_r$, $r = 0.35$); b: transformée de Fourier correspondant au spectrochronogramme. La courbe correspondant à la relation de dispersion 2.38 avec $\Delta = 2$ est superposée. T_m est la période de modulation.

Dans ce chapitre, nous avons abordé l'étude de la dynamique d'un laser multimode à élargissement inhomogène lors de la modulation de la pompe. Notre approche a été de montrer que, le laser pouvant être considéré comme une chaîne d'oscillateurs couplés (cf chapitre 2), la modulation globale de cette chaîne par l'intermédiaire de la pompe conduisait à l'excitation paramétrique d'ondes dans le spectre du laser. Après avoir rappelé un certain nombre de notions relatives à l'excitation paramétrique d'ondes dans le cas d'un fluide (instabilité de Faraday), nous avons présenté la mise en évidence expérimentale et numérique de cette excitation paramétrique dans le cas du laser, c'est à dire l'apparition d'une onde stationnaire dont la fréquence temporelle est moitié de celle de la modulation. Une étude numérique au seuil d'instabilité nous a permis de vérifier que le nombre d'onde de l'onde stationnaire était sélectionné par la relation de dispersion linéaire. Dans le cas du laser, les variations spatiales des paramètres de contrôle sont importantes (spectre gaussien à l'état stationnaire) et leur influence doit être prise en compte. Nous avons montré qu'elles étaient à l'origine de phénomènes prévisibles comme la dépendance spatiale du nombre d'onde de l'onde stationnaire, mais également d'effets plus inattendus à caractère qualitatif comme l'apparition d'ondes progressives à la place des ondes stationnaires où la coexistence dans le spectre de régimes correspondant à des fréquences de modulation différentes. Cette étude concernant l'influence des variations spatiales des paramètres de contrôle mérite un approfondissement et une extension à d'autres systèmes (instabilité de Faraday par exemple). En effet, bien que les systèmes réels possèdent en général des inhomogénéités spatiales, la plupart des études sont réalisées en s'affranchissant de ces inhomogénéités. Peu de résultats sont par conséquent disponibles. De plus, il est fondamental de savoir, si les résultats obtenus dans le cas du laser (transformation d'ondes stationnaires en ondes progressives) sont génériques et sont reproductibles dans d'autres systèmes. Un résultat récent concernant l'instabilité de Faraday [157] semble confirmer cette hypothèse.

Les structures simples que nous avons obtenues expérimentalement (ondes progressives et ondes stationnaires) peuvent se déstabiliser lorsque la fréquence de modulation varie. Cette déstabilisation peut s'opérer selon différents processus : Instabilité de phase, création-annihilation de cellules, apparition de sous-structures, dérive. Ces processus peuvent être d'origine intrinsèque (ce qui est le cas lorsque $\omega_m > \omega_r/2$) ou résulter des variations spatiales des paramètres de contrôle.

L'accord entre résultats numériques et expérimentaux est non seulement

qualitatif (reproduction des régimes observés), mais également quantitatif (chaque régime est observé expérimentalement et numériquement pour des valeurs voisines des paramètres de contrôle). Le modèle s'avère donc également valide en régime non linéaire. Il permet donc d'explorer des zones de paramètres non accessibles dans l'état actuel du dispositif expérimental. Ainsi certaines simulations numériques laissent espérer l'observation de défauts topologiques.

Conclusion

Cette thèse a permis de mettre en évidence et d'étudier théoriquement et expérimentalement un nouveau type de système spatiotemporel. Nous avons montré en effet qu'un laser multimode classe B pouvait être considéré comme une chaîne d'oscillateurs couplés, dans la mesure où la largeur inhomogène (qui est liée à la longueur de la chaîne) est beaucoup plus grande que la largeur homogène (qui est liée à la portée du couplage entre les modes). En régime linéaire, la dynamique de ce milieu de propagation est entièrement déterminée par une simple relation de dispersion. Les vitesses de groupe et de phase des ondes qui se propagent dans le spectre sont de signes opposés. Cette propriété est une conséquence directe de la nature du couplage par saturation croisée. Une étude résolue en polarisation révèle une courbe de dispersion possédant deux branches, analogues des branches acoustiques et optiques des cristaux diatomiques à une dimension. Ces deux branches correspondent, respectivement, à l'oscillation en phase et en antiphase des modes associés aux deux états propres de polarisation.

L'approche utilisée, c'est à dire considérer le laser comme une chaîne d'oscillateurs couplés, s'est révélée également efficace dans l'interprétation des régimes non linéaires obtenus lors d'une forte modulation de la pompe. En effet nous avons pu mettre en évidence expérimentalement et numériquement que la modulation globale des modes du laser par l'intermédiaire de la pompe conduisait à l'excitation paramétrique d'ondes dans le spectre du laser. Pour certaines valeurs des paramètres de contrôle, une onde stationnaire apparaît dont la fréquence temporelle est moitié de celle de la modulation. Ce phénomène est comparable à l'instabilité de Faraday observable dans un fluide soumis à une oscillation verticale. Ces expériences sont donc un nouvel exemple de l'analogie entre hydrodynamique et optique non linéaire.

Contrairement à ce qui se passe en régime linéaire, les variations des paramètres de contrôle, provenant des inhomogénéités du spectre (profil non

constant à l'état stationnaire) ont une influence capitale en régime non linéaire. Leurs effets sont non seulement quantitatifs (dépendance spatiale du nombre d'onde de l'onde stationnaire), mais également qualitatifs. En effet, ces variations sont à l'origine de la transformation de l'onde stationnaire apparaissant au seuil d'instabilité en ondes progressives, ainsi que de la coexistence dans le spectre de régimes correspondant à des fréquences de modulation différentes.

Ces structures simples (ondes stationnaires et progressives) peuvent se déstabiliser selon différents processus : instabilité de phase, création-annihilation de cellules, apparition de sous-structures, dérives. Ce qui donne lieu à une grande richesse de comportements observables.

Les résultats concernant l'excitation paramétrique d'ondes motivent de nombreuses études complémentaires.

D'un point de vue expérimental, une amélioration de la détection devrait permettre une étude pour de faible amplitude de modulation (en cours), ce qui nous permettra de confirmer les simulations numériques effectuées au seuil d'instabilité; mais aussi l'observation expérimentale de l'ensemble des régimes prédits numériquement comme par exemple la présence de défauts topologiques.

Des études analytiques, en particulier afin de déterminer le seuil de l'instabilité, sont également en cours.

Les régimes instables que nous avons présentés (instabilité de phase) appellent une approche plus quantitative, afin de déterminer si nous sommes en présence de turbulence de phase. Des études numériques de caractérisation des régimes instables vont être entreprises (évolution des exposants de Lyapunov en fonction de la taille du système par exemple). Les simulations numériques nécessaires peuvent être effectuées en intégrant les équations du laser dans l'espace réciproque (k, ω) . Cette méthode a pour avantage de pouvoir utiliser directement la relation de dispersion dans les calculs.

Les perspectives sont plutôt nombreuses, par exemple, des expériences à très basse température sont envisageables. La conséquence est une augmentation du rapport d'aspect. Ainsi à 4 K, la largeur homogène est de l'ordre de l'intervalle spectral libre, ce qui donne un rapport d'aspect de 10^5 .

L'influence de la portée du couplage sur la dynamique des systèmes couplés est un vaste sujet. Ainsi Kuramoto et Nakao [171] se sont intéressés, d'un point de vue théorique, à la dynamique des systèmes à couplage *non local* par opposition au couplage local (avec les premiers voisins). Ce type de couplage correspond précisément à celui de notre laser (nous l'avons qualifié

de *local* par opposition aux nombreux travaux effectués dans les lasers globalement couplés). En variant la température de la fibre nous pouvons passer continument d'un couplage global à un couplage local.

Annexe A

Disparition et réapparition des fréquences propres

Récemment, P. Khandokhin *et al.* ont montré [72], que le nombre de fréquences propres d'un laser multimode à élargissement homogène pouvait être plus faible que le nombre de modes. Cette "disparition" de fréquences peut apparaître lorsque le nombre de modes devient très important, ou lorsque le paramètre de pompe augmente au delà d'une valeur critique. Un effet similaire peut avoir lieu également dans un laser à élargissement inhomogène. Toutefois la prise en compte de l'émission spontanée modifie fondamentalement le résultat : nous allons montrer qu'elle s'oppose à ce phénomène en faisant "réapparaître" les fréquences propres. Dans un premier temps, nous allons reprendre le calcul de la relation de dispersion effectué au chapitre 2 (section 2.2.2). Nous allons montrer en particulier, qu'il existe une valeur k_c du nombre d'onde, au delà de laquelle la partie imaginaire de la valeur propre s'annule, ce qui correspond à une disparition de la fréquence propre. Dans un second temps, nous prendrons en compte l'émission spontanée et remarquerons que cela modifie qualitativement les résultats. Finalement, nous ferons une estimation de l'évolution du nombre de fréquences propres en fonction du taux de pompage.

A.1 Disparition des fréquences propres en l'absence d'émission spontanée

Nous allons tout d'abord déterminer l'expression des fréquences propres du laser afin de déterminer leur domaine d'existence. A cette fin, nous reprenons le calcul de la relation de dispersion effectué au chapitre 2. En régime linéaire, la dynamique du laser est décrite par une équation différentielle du second ordre :

$$\ddot{\mu}_j - \gamma A \dot{\mu}_j + \gamma(A-1) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \xi_{l-j} \mu_l = 0 \quad (\text{A.1})$$

Pour déterminer la relation de dispersion, nous cherchons une solution sous la forme d'une onde progressive amortie $\mu_j = \mu e^{\alpha t} e^{i(\omega t - k j)}$. En insérant cette solution dans l'équation A.1, nous déterminons α et ω :

$$\alpha = -\frac{\gamma A}{2} \quad (\text{A.2})$$

$$\omega^2 = \gamma(A-1) \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \xi_l e^{-ikl} - \frac{\gamma A^2}{4(A-1)} \right) \quad (\text{A.3})$$

Dans le calcul initial du chapitre 2, nous avons négligé le second terme car $\gamma \ll 1$. Cette approximation n'est pas toujours valide car étant donné l'expression du premier terme ($\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_l e^{-ikl} \rightarrow e^{-k\Delta}$), celui ci peut prendre des valeurs très faible et être du même ordre de grandeur que $\frac{\gamma A^2}{4(A-1)}$. Il peut donc exister une valeur de k pour laquelle la valeur ω s'annule, ce qui correspond à une disparition de la fréquence de relaxation. Un phénomène comparable a été étudié par P. Khandokhin *et al.* dans les lasers multimodes à élargissement homogène [72]. La valeur de k pour laquelle la fréquence ω s'annule vérifie l'équation :

$$\frac{\gamma A^2}{4(A-1)} = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_l e^{-ikl} \right)^2 \quad (\text{A.4})$$

Nous obtenons, en utilisant la relation 2.35 :

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \beta_l e^{-ikl} = \epsilon + (1-\epsilon)S(k) \quad (\text{A.5})$$

ϵ et $S(k)$ étant définis par les relations 2.37, 2.39 et 2.36.

Nous en déduisons que le nombre d'onde critique k_c vérifie la condition (A.4) :

$$k_c = \pi - \frac{1}{\Delta} \arg \cosh \left(\frac{\cosh(\Delta\pi)}{1 - \epsilon} \left(\frac{\sqrt{\gamma}A}{2\sqrt{A-1}} - \epsilon \right) \right) \quad (\text{A.6})$$

Dans le cas où $\Delta \gg 1$ $S(k) \rightarrow e^{-k\Delta}$ et $\epsilon \rightarrow 0$ Nous avons alors :

$$k_c \Delta = \ln \frac{2\sqrt{A-1}}{\sqrt{\gamma}A} \quad (\text{A.7})$$

Il n'y a pas de mode propre de vibration dont le nombre d'onde est supérieur à k_c (qui est fini) et par conséquent pas de fréquence propre associée.

A.2 Influence de l'émission spontanée

La prise en compte de l'émission spontanée modifie profondément les résultats précédents. Nous adoptons une démarche identique à celle utilisée précédemment. Nous partons de l'équation A.8, obtenue après linéarisation du modèle 2.16 auquel est adjoint l'émission spontanée.

$$\ddot{\mu}_j + (-1 + \bar{d} - \gamma(1 + \bar{m}))\dot{\mu}_j + \gamma\bar{d}(\bar{m} + a) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \xi_{l-j} \mu_l - \gamma(1 + \bar{m})(-1 + \bar{d})\mu_j = 0 \quad (\text{A.8})$$

μ_j désigne l'intensité linéarisée et \bar{m} et \bar{d} sont respectivement les valeurs de l'intensité et de l'inversion de population à l'état stationnaire, définies par :

$$\bar{m} = A - 1 + \frac{aA}{A-1} + o(a^2) \quad (\text{A.9a})$$

$$\bar{d} = 1 - \frac{a}{A-1} + o(a^2) \quad (\text{A.9b})$$

Ces solutions sont identiques à celles obtenues pour un laser monomode en présence d'émission spontanée, équation (1.6). Nous cherchons la solution sous la forme d'une onde progressive :

$$\mu_j = \mu e^{\alpha t} e^{i(\omega t - k j)} \quad (\text{A.10})$$

Nous en déduisons α et ω :

$$\alpha = \frac{1}{2}(-1 + \bar{d} - \gamma(1 + \bar{m})) = \frac{1}{2}(-\gamma A + \frac{a}{A-1}) \quad (\text{A.11})$$

$$\omega^2 = \gamma \bar{m} \left[\sum_l \xi_l e^{-ikl} - \frac{1}{4\gamma \bar{m}} (-1 + \bar{d} + \gamma(1 + \bar{m}))^2 \right] \quad (\text{A.12})$$

La valeur de k pour laquelle la fréquence de relaxation disparaît vérifie la relation :

$$\sum_l \beta_l e^{-ikl} = \frac{\gamma A}{2\sqrt{\gamma(A-1)}} \left| 1 - \frac{a}{\gamma A(A-1)} - \frac{a}{(A-1)^2} \right| + o(a^2) \quad (\text{A.13})$$

a et γ étant du même ordre de grandeur, le dernier terme de cette expression est négligeable.

Dans le cas où $\Delta \gg 1$, $\sum_l \beta_l e^{-ikl} \rightarrow e^{-k\Delta}$ nous avons :

$$e^{-k\Delta} = \frac{\gamma A}{2\sqrt{\gamma(A-1)}} \left| 1 - \frac{a}{\gamma A(A-1)} \right| \quad (\text{A.14})$$

Nous constatons que contrairement au cas précédent, le second membre peut s'annuler, ce qui signifie que k_c devient infini. Cela se produit pour $A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a/\gamma})$.

Nous avons :

$$k\Delta = \ln \frac{2\sqrt{A-1}}{\sqrt{\gamma}A} - \ln \left| 1 - \frac{a}{\gamma A(A-1)} \right| \quad (\text{A.15})$$

La prise en compte de l'émission spontanée modifie donc profondément les résultats précédents. Dans certains cas ($A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a/\gamma})$), il n'y a plus de disparition des fréquences propres.

A.3 Estimation du nombre de fréquences propres

Nous pouvons facilement estimer l'ordre de grandeur du nombre de fréquence de relaxation du laser en fonction du taux de pompage. Nous considérons un laser dont le spectre est uniforme à l'état stationnaire, et de largeur

L . Les différents modes propres de vibration du spectre vérifient la relation :

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (\text{A.16})$$

où n est l'indice d'un mode. Nous avons :

$$n = \frac{\Delta k_n L}{\pi \Delta} \quad (\text{A.17})$$

D'après ce qui précède, les fréquences de relaxation existent pour les modes de vibration du spectre vérifiant :

$$\Delta k_n < \ln \frac{2\sqrt{A-1}}{\sqrt{\gamma A}} \quad (\text{A.18})$$

Le nombre de fréquences de relaxation N_r est donc :

$$N_r = \frac{L}{\Delta\pi} \ln \frac{2\sqrt{A-1}}{\sqrt{\gamma A}} \quad (\text{A.19})$$

L/Δ rapport entre la largeur du spectre et la largeur homogène peut être considéré comme le rapport d'aspect du système.

Si nous prenons en compte l'émission spontanée, nous avons :

$$N_r = \frac{L}{\Delta\pi} \left(\ln \frac{2\sqrt{A-1}}{\sqrt{\gamma A}} - \ln \left| 1 - \frac{a}{\gamma A(A-1)} \right| \right) \quad (\text{A.20})$$

L'évolution du nombre de fréquences de relaxations en fonction du taux de pompage est représenté sur la figure A.1.

Nous avons mis en évidence que les fréquences propres d'un laser multimode à élargissement inhomogène peuvent disparaître dans certains cas. Toutefois, la prise en compte de l'émission spontanée modifie qualitativement ce résultat, car elle a pour effet de limiter voire de supprimer la disparition des fréquences propres. Cela motive donc une étude semblable (effet de l'émission spontanée) pour les lasers à élargissement homogène.

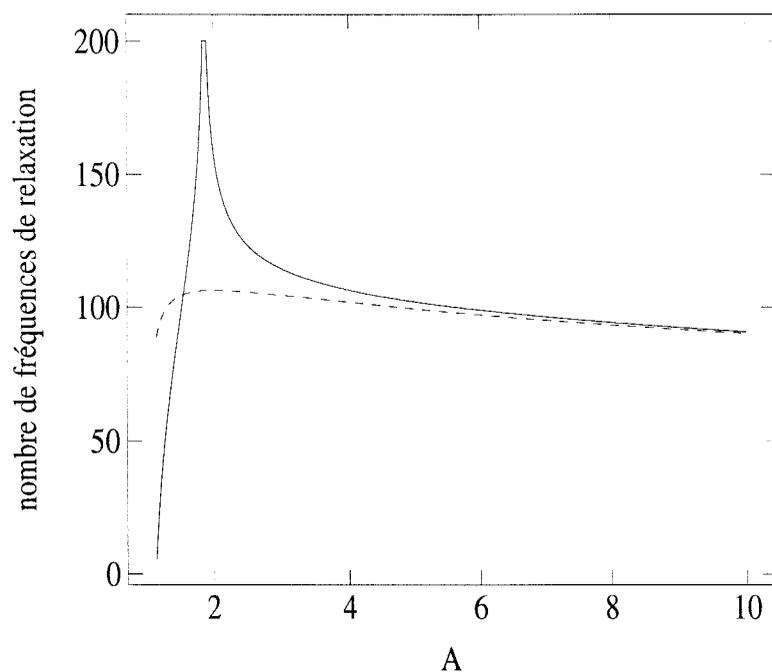


FIG. A.1 – Evolution du nombre de fréquences de relaxation en fonction du taux de pompage A , avec (trait plein) et sans (tirets) prise en compte de l'émission spontanée.

Bibliographie

- [1] J. P. Gollub and S. V. Benson, *J. of Fluid Mech.* **100**, 449 (1980).
- [2] R. H. Simoyi, A. Wolf, and H. L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 245 (1982).
- [3] F. T. Arecchi, R. Meucci, P. Puccioni, and J. Tredicce, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1217 (1982).
- [4] P. A. Khandokhin and Y. I. Khanin, *Sov. J. Quantum Electron.* **14**, 1004 (1984).
- [5] P. S. Linsay, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1349 (1981).
- [6] P. Cvitanovic, *Universality in chaos* (Adam Hilger, New York, 1989).
- [7] P. Manneville, *Structures dissipatives et turbulence* (Aléa, Saclay, 1991).
- [8] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, Berlin, 1983).
- [9] N. Tuffillaro, T. Abott, and J. Reilly, *An experimental approach to nonlinear dynamics and chaos* (Addison-Wesley, New York, 1992).
- [10] M. Lefranc *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1364 (1994).
- [11] E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196 (1990).
- [12] S. Bielawski, D. Derozier, and P. Glorieux, *Phys. Rev. A* **47**, 2492 (1993).
- [13] S. Hayes, C. Grebogi, and M. Andrea, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1781 (1994).
- [14] H. Bénard, *Ann. Chim. Phys.* **7**, 62 (1900).

- [15] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
- [16] A. Zhabotinski, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **157**, 701 (1964).
- [17] G. Nicolis, *Introduction to Nonlinear Science* (University Press, Cambridge, 1995).
- [18] E. Dubois-Violette *et al.*, *Solid States Phys. Suppl.* **14**, 174 (1978).
- [19] F. T. Arecchi, *Physica D* **86**, 297 (1995).
- [20] D. Dangoisse *et al.*, *Phys. Rev. A* **46**, 5955 (1992).
- [21] *Nonlinear Optical Structures, Patterns and Chaos*, edited by L. A. Lugiato, special issue of *Chaos Solitons and Fractal*, **4**, 1251, (1994).
- [22] *Nonlinear Dynamics of Lasers*, edited by D. K. Bandy, A. N. Oraevsky and J. R. Tredicce, special issue of *J. Opt. Soc. Am. B*, **5**, 873, (1988).
- [23] D. Dangoisse, P. Glorieux, and D. Hennequin, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2657 (1986).
- [24] K. Wiesenfeld, C. Bracikowski, G. James, and R. Roy, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1749 (1990).
- [25] S. Bielawski, D. Derozier, and P. Glorieux, *Phys. Rev. A* **46**, 2811 (1992).
- [26] J. R. Tredicce *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1274 (1989).
- [27] L. A. Lugiato *et al.*, *J. Opt. Soc. Am. B* **7**, 1019 (1990).
- [28] M. Brambilla *et al.*, *Phys. Rev. A* **49**, 1427 (1994).
- [29] A. Coates *et al.*, *Phys. Rev. A* **49**, 1452 (1994).
- [30] F. T. Arecchi, S. Boccaletti, P. L. Ramazza, and S. Residori, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2277 (1993).
- [31] G. D'Alessandro and W. J. Firth, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2597 (1991).
- [32] D. Leduc, M. L. Berre, E. Ressayre, and A. Tallet, *Phys. Rev. A* **53**, 1072 (1996).

- [33] H. G. Winful and L. Rahman, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1575 (1990).
- [34] K. Otsuka, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1090 (1991).
- [35] C. Kittel, *Introduction to solid-state physics* (Wiley, New York, 1971).
- [36] M. Faraday, *Phys. Trans. R. Soc. London* **121**, 299 (1831).
- [37] C. L. Tang, H. Statz, and G. DeMars, *J. Appl. Phys.* **34**, 2289 (1963).
- [38] H. Statz and C. L. Tang, *J. Appl. Phys.* **36**, 3923 (1965).
- [39] F. J. McClung and R. W. Hellwarth, *J. Appl. Phys.* **33**, 828 (1962).
- [40] M. Lefranc and P. Glorieux, *Int. J. of Bifurcation and Chaos* **3**, 643 (1993).
- [41] F. T. Arecchi *et al.*, *Physica D* **61**, 25 (1992).
- [42] Y. I. Khanin, *Principles of Laser Dynamics* (Elsevier, Amsterdam, 1995).
- [43] F. T. Arecchi, in *Instabilities and Chaos in Quantum Optics*, edited by F. T. Arecchi and R. G. Harrison (Springer, Berlin, 1987).
- [44] A. Bambini and P. Burlamacchi, *Appl. Phys. Lett.* **10**, 189 (1963).
- [45] H. Statz and G. DeMars, in *Quantum Electronics*, edited by C. H. Townes (Columbia Univ. Press, New York, 1960).
- [46] C. O. Weiss, W. Klische, P. S. Ering, and M. Cooper, *Opt. Commun.* **52**, 405 (1985).
- [47] A. E. Siegman, *Lasers* (University Science Book, Mill Valley, CA, 1986).
- [48] O. Svelto, *Principles of lasers* (Plenum Press, New York, 1980).
- [49] R. M. Macfarlane, *J. Lumin.* **45**, 1 (1990).
- [50] D. W. Hall, M. J. Weber, and R. T. Brundage, *J. Appl. Phys.* **55**, 2642 (1984).
- [51] K. C. Reyzer and L. W. Casperson, *J. Appl. Phys.* **51**, 6083 (1980).

- [52] R. C. Jones, *J. Opt. Soc. Am.* **31**, 488 (1941).
- [53] D. Hall, R. Haas, W. Krupke, and M. Weber, *I.E.E.E. J. Quant. Electron.* **19**, 1704 (1983).
- [54] R. Leners, *Propriétés de polarisation du laser à fibre dopée au néodyme*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1 (1994).
- [55] S. Bielawski, *Instabilités et chaos dans un laser à fibre dopée Nd^{3+}* , Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille (1993).
- [56] L. W. Casperson *et al.*, *J. Appl. Phys.* **69**, 8005 (1991).
- [57] H. Lang, *Philips Res. Rep. Suppl* **8**, (1967).
- [58] D. Lenstra, *Phys. Rep.* **59**, 299 (1980).
- [59] D. Lenstra, *Phys. Rep.* **59**, 398 (1977).
- [60] D. E. McCumber, *Phys. Rev.* **141**, 306 (1966).
- [61] M. Schneiderova and P. Maly, *Phys. Rev. A* **41**, 6522 (1990).
- [62] Y. I. Chen, H. G. Winful, and J. M. Liu, *Appl. Phys. Lett.* **47**, 208 (1985).
- [63] D. A. Kleinmann, *Syst. Tech. J.* **37**, 2203 (1964).
- [64] G. L. Oppo and A. Politi, *Z. Phys. B* **59**, 111 (1985).
- [65] T. Erneux, S. M. Baer, and P. Mandel, *Phys. Rev. A* **35**, 1165 (1987).
- [66] M. Toda, *Phys. Rep.* **18**, 1 (1975).
- [67] D. Dangoisse, P. Glorieux, and D. Hennequin, *Phys. Rev. A* **35**, 4775 (1987).
- [68] D. Derozier, S. Bielawski, and P. Glorieux, *Phys. Rev. A* **83**, 97 (1991).
- [69] I. I. Matorin, A. S. Pikovskii, and Y. I. Khanin, *Sov. J. Quantum Electron.* **14**, 1401 (1984).

- [70] J. R. Tredicce *et al.*, Phys. Rev. A **34**, 2073 (1986).
- [71] S. Bielawski, M. Bouazaoui, D. Derozier, and P. Glorieux, Phys. Rev. A **47**, 3276 (1993).
- [72] P. Khandokhin *et al.*, Izv. Vyss. Uchebn. Zaved. Radiofiz. **40**, 161 (1997).
- [73] Y. D. Golyaev and S. V. Lantratov, Sov. J. Quantum Electron. **9**, 1390 (1979).
- [74] O. N. Evdokimova and L. N. Kaptsov, Sov. J. Quantum Electron. **19**, 1001 (1989).
- [75] D. Pieroux and P. Mandel, Opt. Commun. **107**, 245 (1994).
- [76] K. Otsuka, M. Georgiou, and P. Mandel, Jpn. J. Appl. Phys. **31**, 1250 (1992).
- [77] V. V. Azarova *et al.*, Sov. J. Quantum Electron. **9**, 1378 (1980).
- [78] P. Khandokhin *et al.*, Opt. Commun. **123**, 372 (1996).
- [79] P. Hadley and M. R. Beasley, Appl. Phys. Lett. **50**, 621 (1987).
- [80] K. Y. Tsang and K. Wiesenfeld, Appl. Phys. Lett. **56**, 495 (1990).
- [81] K. Otsuka *et al.*, Phys. Rev. A **46**, 1692 (1992).
- [82] K. Otsuka, P. Mandel, M. Georgiou, and C. Etric, Jpn. J. Appl. Phys. **32**, 318 (1993).
- [83] K. Kaneko, Physica D **41**, 137 (1990).
- [84] C. Bracikowski and R. Roy, Phys. Rev. A. **43**, 6455 (1991).
- [85] K. Otsuka and J.-L. Chern, Phys. Rev. A **45**, 8288 (1992).
- [86] K. Otsuka, Phys. Rev. Lett. **65**, 329 (1990).
- [87] K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **65**, 1391 (1990).
- [88] J. W. Swift, S. H. Strogatz, and K. Wiesenfeld, Physica D **55**, 239 (1992).

- [89] S. Watanabe and S. H. Strogatz, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2391 (1993).
- [90] D. Golomb, D. Hansel, B. Shraiman, and H. Sompolinsky, *Phys. Rev. A* **45**, 3516 (1992).
- [91] W. H. Keen and J. A. Weiss, *Appl. Optics* **3**, 545 (1963).
- [92] V. S. Mashkevich, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **53**, 1003 (1967).
- [93] V. S. Mashkevich, *Ukr. Fiz. Zh.* **53**, 1731 (1967).
- [94] V. S. Mashkevich, *Kinetic Theory of Lasers* (Nauka, Moscow, 1971).
- [95] S. E. Potapov, Ph.D. thesis, Leningrad, 1973.
- [96] M. L. Flohic *et al.*, *IEEE J. Quantum Electron.* **27**, 1910 (1991).
- [97] V. S. Mashkevich, *Laser Kinetics* (Elsevier, New York, 1967).
- [98] Y. I. Khanin, *Dynamics of Quantum Oscillators* (Sovetskoye Radio, Moscow, 1975).
- [99] L. W. Casperson, *Phys. Rev. A* **23**, 248 (1981).
- [100] W. L. Barnes, P. R. Morkel, and J. E. Townsend, *Opt. Commun.* **82**, 282 (1991).
- [101] R. M. Macfarlane and R. M. Shelby, *J. Lumin.* **36**, 179 (1987).
- [102] W. M. Yen and R. T. Brundage, *J. Lumin.* **36**, 209 (1987).
- [103] J. M. Pellegrino, W. M. Yen, and M. J. Weber, *J. Appl. Phys.* **51**, 6332 (1980).
- [104] P. Leboudec, *Propriétés statiques et dynamiques des lasers à fibre dopée erbium et néodyme*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1 (1993).
- [105] F. Sanchez, P. L. Boudec, P. L. François, and G. Stephan, *Phys. Rev. A* **48**, 2220 (1993).
- [106] E. Lacot, F. Stoeckel, and M. Chenevier, *Phys. Rev. A* **49**, 3997 (1994).

- [107] E. Delevaque, *Contribution à l'étude des composants à fibre de silice dopée aux ions de terre rare*, Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille (1993).
- [108] E. Desurvire, *Erbium doped fiber amplifier: principles and applications* (Wiley-Interscience, New York, 1993).
- [109] R. Leners and T. Georges, *J. Opt. Soc. Am. B* **12**, 1942 (1995).
- [110] R. Leners and G. Stephan, *Quantum Semiclass. Opt* **7**, 757 (1995).
- [111] L. Tarassov, *Physique des processus dans les générateurs de rayonnement optique cohérent* (M.I.R, Moscou, 1985).
- [112] E. Hairer, S. P. Norsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations: I. Non Stiff Problems* (Springer, Berlin, 1987).
- [113] C. Sz waj, S. Bielawski, and D. Derozier, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4540 (1996).
- [114] T. Baer, *J. Opt. Soc. Am. B* **3**, 1175 (1986).
- [115] M. I. Rabinovitch and D. Trubetskov, *Oscillations and waves in linear and nonlinear systems* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989).
- [116] L. M. Brekhovskikh and V. Goncharov, *Mechanics of continua and waves dynamics* (Springer-Verlag, New York, 1994).
- [117] G. Whitham, *Linear and nonlinear waves* (Wiley, New York, 1974).
- [118] R. M. Shelby, *Opt. Lett.* **8**, 88 (1983).
- [119] Y. I. Khanin, in *Principles of Laser Dynamics* (Elsevier, Amsterdam, 1995), Chap. 4.
- [120] Y. I. Khanin, in *Proc. of the European Quantum Electronics Conference, Hambourg, 1996* (EQEC, Hambourg, 1996).
- [121] P. Coullet, L. Gil, and J. Lega, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1619 (1989).
- [122] H. Chaté and P. Manneville, *Physica D* **32**, 409 (1988).
- [123] P. C. Hohenberg and B. I. Shraiman, *Physica D* **37**, 109 (1989).

- [124] J. D. Murray, *Mathematical biology* (Springer, New York, 1989).
- [125] R. C. DiPrima and H. L. Swinney, in *Hydrodynamics Instabilities and the Transition to Turbulence* (Springer-Verlag, New York, 1981), Chap. Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinder.
- [126] R. Tagg, *Ordered and Turbulent Patterns in Taylor-Couette Flow* (Plenum, New York, 1992).
- [127] A. M. Turing, Phil. Trans. R. Soc. London B **237**, 37 (1952).
- [128] P. de Kepper, V. Castets, E. Dulos, and J. Boissonade, Physica D **49**, 131 (1991).
- [129] Q. Ouyang and H. L. Swinney, Chaos **1**, 411 (1991).
- [130] G. Grynberg *et al.*, Opt. Commun. **67**, 363 (1988).
- [131] B. Denardo *et al.*, Phys. Rev. Lett. **68**, 1730 (1992).
- [132] N. Bloembergen and R. Damon, Phys. Rev. **85**, 699 (1952).
- [133] G. Wiese and H. Benner, Z. Phys. B **79**, 119 (1990).
- [134] W. van Saarloos and J. D. Weeks, Phys. Rev. Lett. **74**, 290 (1995).
- [135] P. Couillet, T. Frisch, and G. Sonnino, Phys. Rev. E **49**, 2087 (1994).
- [136] S. Fauve, S. Douady, and O. Thual, J. Phys. II **1**, 311 (1991).
- [137] R. E. Goldstein, G. H. Gunaratne, L. Gil, and P. Couillet, Phys. Rev. A **43**, 6700 (1991).
- [138] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations* (Wiley, New York, 1995).
- [139] J. Miles and D. Henderson, Annu. Rev. Fluid. Mech. **22**, 143 (1990).
- [140] A. Kudrolli and J. P. Gollub, Physica D **97**, 133 (1996).
- [141] S. Douady and S. Fauve, Europhys. Lett. **6**, 221 (1988).
- [142] S. T. Milner, J. Fluid. Mech. **225**, 81 (1991).

- [143] B. Christiansen, P. Alstrøm, and M. T. Levinsen, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2157 (1992).
- [144] W. S. Edwards and S. Fauve, *Phys. Rev. E* **47**, R788 (1993).
- [145] E. Bosch and W. van de Watter, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3420 (1993).
- [146] S. Ciliberto and J. P. Gollub, *J. Fluid. Mech.* **158**, 381 (1985).
- [147] A. B. Ezersky, M. I. Rabinovich, V. P. Reutov, and I. M. Starobinets, *Sov. Phys. JETP* **64**, 1228 (1986).
- [148] E. Meron and I. Procaccia, *Phys. Rev. A* **34**, 3221 (1986).
- [149] S. Ciliberto, S. Douady, and S. Fauve, *Europhys. Lett.* **15**, 23 (1991).
- [150] B. J. Gluckman, P. Marcq, J. Bridger, and J. P. Gollub, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2034 (1993).
- [151] M. I. Rabinovich, V. P. Reutov, and A. V. Rogals'kii, *Phys. Lett. A* **144**, 259 (1990).
- [152] A. B. Ezersky, D. A. Ermoshin, and S. V. Kiyashko, *Phys. Rev. E* **51**, 4411 (1995).
- [153] S. Douady, S. Fauve, and O. Thual, *Europhys. Lett.* **10**, 309 (1989).
- [154] R. Keolian, L. A. Turkevich, S. J. Puttermann, and I. Rudnick, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1133 (1981).
- [155] V. Eckhaus, *Studies in nonlinear stability theory* (Springer-Verlag, New York, 1965).
- [156] T. B. Benjamin and F. Ursell, *Proc. R. Soc. London A* **225**, 505 (1954).
- [157] S. V. Kiyashko, L. N. Korzinov, M. I. Rabinovich, and L. S. Tsimring, *Phys. Rev. E* **54**, 5037 (1996).
- [158] S. Douady, *J. Fluid. Mech.* **221**, 383 (1990).
- [159] A. Yariv, *Quantum Electronics* (Wiley, New York, 1989).
- [160] G. Boulant, S. Bielawski, D. Derozier, and M. Lefranc, *Phys. Rev. E* **55**, 5082 (1997).

- [161] P. Coullet, C. Elphick, L. Gil, and J. Lega, Phys. Rev. Lett. **59**, 884 (1987).
- [162] M. Dubois, F. Daviaud, and O. Ronsin, Physica D **61**, 140 (1992).
- [163] J. J. Perraud *et al.*, Phys. Rev. Lett. **71**, 1272 (1993).
- [164] F. Daviaud, M. Bonetti, and M. Dubois, Phys. Rev. A **42**, 4338 (1990).
- [165] A. J. Simon, J. Bechhoefer, and A. Libchaber, Phys. Rev. Lett. **61**, 2574 (1988).
- [166] G. Faivre, S. D. Cheveigne, C. Guthmann, and P. Kurowski, Europhys. Lett. **9**, 779 (1989).
- [167] P. Oswald, J. Bechhoefer, and A. Libchaber, Phys. Rev. Lett. **58**, 2318 (1987).
- [168] M. Rabaud, S. Michalland, and Y. Couder, Phys. Rev. Lett. **64**, 184 (1990).
- [169] S. Michalland and M. Rabaud, Physica D **61**, 197 (1992).
- [170] P. Coullet and G. Iooss, Phys. Rev. Lett. **64**, 1990 (1990).
- [171] Y. Kuramoto and H. Nakao, Phys. Rev. Lett. **76**, 4352 (1996).

