50376
1997
305

N° d'ordre : 2036

Année 1997

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LILLE I

Spécialité :

MECANIQUE

présentée par

Emmanuel VASSEUR

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE l'UNIVERSITE DE LILLE I

Sujet de thèse :

« APPLICATION DE L'APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE A L'ETUDE DU COMPORTEMENT A LA FATIGUE DES STRUCTURES »

Soutenue en juillet 1997 devant le jury composé de :

Monsieur	K. DANG VAN	
Monsieur	J.F. FLAVENOT	
Monsieur	F. GALLERNEAU	
Monsieur	S. HARIRI	
Madame	G. INGLEBERT	Rapporteur
Monsieur	A. NAÏT	
Monsieur	P. NAVIDI	
Mademoiselle	C. ROBIN	
Monsieur	D. WEICHERT	Rapporteur

SCD LILLE 1
D 030 258764 6

REMERCIEMENTS

Je remercie Mademoiselle Robin de m'avoir accueilli au sein du département qu'elle dirige, et de m'avoir fait suffisamment confiance pour me laisser mener cette étude avec toute l'autonomie désirée.

Monsieur Dang Van m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je lui adresse mes vifs remerciements.

Je ne saurais trop remercier Madame Inglebert ainsi que Monsieur Weichert, d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, et cela malgré leur importante charge de travail.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur P. Navidi qui a suivi de près cette étude. C'est grâce à son aide précieuse, ses nombreux conseils ainsi que ses encouragements, que ce travail a pu être mené à bien.

J'adresse mes sincères remerciements à Messieurs D. Zakrzewski et S. Hariri. Ils m'ont très chaleureusement accueilli dans leur service respectif, m'ont largement fait profiter de leurs connaissances et m'ont constamment soutenu dans ce travail.

Je remercie également Messieurs Robert et Flavenot, d'avoir bien voulu me communiquer les résultats et analyses de la vaste campagne d'essais menée par le groupe GT4. C'est en effet grâce à ceux-ci qu'il m'a été possible de concrétiser ce travail.

Je tiens à rappeler que ce mémoire n'est pas seulement l'aboutissement d'un peu plus de trois années de travail. Il est surtout le fruit de toute une scolarité : j'ai eu la chance de rencontrer des enseignants qui ont su me donner le goût des études et de la recherche. Je citerai tout particulièrement le professeur D. Weichert, qui m'a enseigné toutes les bases de la mécanique, et le professeur J. Zarka, qui m'a ouvert les yeux sur de nouveaux horizons.

Ce sont ces personnes qui, en attisant ma curiosité, m'ont incité à me lancer dans la préparation d'un doctorat, et ont contribué à l'orientation de ce travail.

Je ne saurais oublier l'ensemble de mes collègues et amis du département matériaux métalliques qui ont contribué à faire de mon travail un plaisir. Je pense

S.U. LILLE 1
D 030 128569

tout particulièrement à Messieurs Y. Hamitouche, D. Eyzop, D. Gambier et J.C. Dépret. Qu'ils reçoivent ici le témoignage de ma sincère sympathie.

Enfin, et c'est de loin le plus important à mes yeux, je tiens à remercier ma famille et mes proches pour leur soutien constant sans lequel jamais cette thèse n'aurait pu être menée à son terme. J'ai à ce propos une pensée toute particulière pour mon épouse et mes enfants. A tous trois, mille excuses pour vous avoir fait souffrir de mes absences répétées, mes sautes d'humeur et mon manque de disponibilité. C'est à vous que je dédie ce travail, vous qui en avez le plus souffert.

A toi Nanou,

A mes enfants, Mélanie et Pierre.

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS 3

INTRODUCTION 13

PARTIE I : Critères de fatigue - Durée de vie 21

Nécessité des études en fatigue 23

1 - Les critères de fatigue 23

1.1 - Hypothèses et notations 24

1.2 - Les critères basés sur la détermination d'un plan critique 25

1.2.1 - Critère de Dang-Van 26

1.2.2 - Critère de Deperrois 33

1.2.3 - Critère de Galtier 35

1.2.4 - Critère de Robert-Bahuaud 37

1.3 - Les critères basés sur une approche globale 39

1.3.1 - Critère de Sines 39

1.3.2 - Critère de Crossland 41

1.3.3 - Critère de Froustey-Lasserre 42

1.3.4 - Critère de Fogué-Bahuaud 44

1.3.5 - Critère de Papadopoulos 46

1.3.6 - Critère d'Ellyin 48

1.4 - Prise en compte des contraintes résiduelles 51

1.5 - Synthèse 53

2 - Les prévisions de durée de vie 56

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE

2.1 - L'endommagement 56
2.2 - Les lois d'endommagement de fatigue 56
2.2.1 - Les lois uniaxiales 57
2.2.1.1 - Loi de Miner 57
2.2.1.2 - Loi de Lemaître-Chaboche 59
2.2.2 - Les lois multiaxiales 63
2.2.2.1 - Par couplage 64
2.2.2.2 - Par choix d'une variable 65
2.2.2.2.1 - Loi de Papadopoulos 65
2.2.2.2.2 - Loi d'Ellyin 70
2.2.2.2.3 - Critère énergétique 72
2.3 - Synthèse 76

PARTIE II : Base de données 77

1 - Situation de l'étude 80

2 - Les procédures d'essais 80
2.1 - Les matériaux testés 80
2.2 - Les éprouvettes 81
2.3 - Les séquences de chargement 83
2.3.1 - Chargements à amplitude constante 83
2.3.2 - Chargements à amplitude variable simplifiée 83
2.3.3 - Chargements complexes 84
2.4 - Les moyens de mesure mis en oeuvre 86

3 - Les prévisions de durée de vie 86
3.1 - Modèle du CETIM 86
3.2 - Modèle de Glinka 90
3.3 - Modèle de l'ONERA 92
3.4 - Comparaison des modèles 94

4 - Comparaison entre les essais et les prévisions 97

4.1 - Séquence de chargement à amplitude variable simplifiée 99

4.2 - Séquence de chargement complexe 103

5 - Conclusion 109

PARTIE III : Analyse inélastique 111

1 - Principes de la MASSI 113

1.1 - Lois de comportement 113

1.2 - Contraintes locales 117

1.3 - Evolution des mécanismes inélastiques locaux 118

1.4 - Evolution globale d'une structure 119

1.4.1 - Réponse élastique 120

1.4.2 - Réponse réelle 121

1.4.2.1 - Partition des déformations 121

1.4.2.2 - Fonction de charge - Règle d'écoulement 122

1.4.2.3 - Décomposition de la réponse réelle 124

1.4.2.4 - Nouvelle formulation du problème 125

1.4.3 - Cas des chargements cycliques 128

1.4.3.1 - Nature de l'état limite 131

1.4.3.2 - Caractéristiques de l'état limite 132

1.4.3.3 - Matériau à écrouissage cinématique sous chargement cyclique radial 137

2 - Extrapolation au cas des chargements de service 139

2.1 - Chargement uniaxial à amplitude variable 139

2.1.1 - Principes généraux 139

2.1.2 - Procédure d'analyse 142

2.1.2.1 - Décomposition du chargement 142

2.1.2.2 - Analyse de la réponse de la structure 144

2.1.3 - Réalisation du code de calcul REPCSU 151

2.1.3.1 - Principes de la MEF 151

2.1.3.2 - Le code de calcul REPCSU 154

2.2 - Chargement quelconque 161

PARTIE IV : Apprentissage automatique 163

1 - Apprentissage automatique - Choix des descripteurs 165

1.1 - Principes de l'apprentissage 165

1.2 - Les descripteurs 166

1.2.1 - Propriétés d'une description 167

1.2.1.1 - Suffisance 167

1.2.1.2 - Coût 167

1.2.1.3 - Sens physique 168

1.2.1.4 - Indépendance de l'observateur 168

1.2.2 - Types de descripteurs 168

1.3 - Description de la géométrie d'un objet 169

1.3.1 - Domaine V dans R^n 169

1.3.2 - Champ ∅ scalaire défini sur V 169

1.3.3 - Champ ∅ vectoriel ou tensoriel 169

1.3.4 - Champ ∅ évoluant dans le temps 169

1.3.4.1 - Cas du temps réel 169

1.3.4.2 - Cas du paramètre d'évolution 170

1.4 - Caractéristiques d'un objet 170

1.4.1 - Description de la taille d'un objet 170

1.4.2 - Description de la position d'un objet 171

1.4.3 - Description de la forme d'un objet 171

1.4.3.1 - Descripteurs proposés par divers auteurs 171

1.4.3.2 - Moyennes et moments en statistique 172

1.5 - Cas d'un champ ∅ défini sur un domaine V_0 172

1.5.1 - Extrema du champ ∅ 172

1.5.2 - Répartition de ∅ sur V_0 173

1.5.3 - Répartition dans un maillage 173

1.5.4 - Coefficient de remplissage 174

1.6 - Description de formes élémentaires 174
1.6.1 - Codage d'une surface plane 174
1.6.2 - Codage d'un volume 174
1.6.3 - Codage d'une surface $\varnothing = f(x,y)$ 175
2 - Description d'un problème mécanique... 176
2.1 - Caractéristiques intrinsèques 176
2.1.1 - La géométrie 176
2.1.2 - Le matériau 176
2.1.3 - Le chargement 177
2.2 - Caractéristiques non intrinsèques 177
2.2.1 - Le maillage 178
2.2.1 - Le pas de temps 178
2.3 - Conclusions 178
3 - Durée de vie d'une structure... 178
3.1 - Position du problème 179
3.2 - Etat limite d'une structure 180
3.3 - Caractéristiques à décrire 181
3.3.1 - Analyse des critères de fatigue 181
3.3.2 - Analyse des lois d'endommagement 182
3.3.3 - Caractéristiques retenues 182
3.4 - Descripteurs associés aux caractéristiques retenues 188
3.4.1 - Principe général 188
3.4.2 - Les descripteurs 189
3.5 - Composition de la base d'essais de fatigue 193
3.6 - Apprentissage par régression multiple non-linéaire (SEA) 195
3.6.1 - Principe général 195
3.6.2 - Règles obtenues 196
3.6.3 - Fiabilité des règles 200
3.7 - Apprentissage par réseaux neuronaux (NEUROSHELL) 204

3.7.1 - Principe général 204
3.7.2 - Règles obtenues 205
3.7.3 - Fiabilité des règles 214
3.8 - Conclusion 218

CONCLUSION 221

ANNEXES 225

BIBLIOGRAPHIE 235

INTRODUCTION

INTRODUCTION

1 - POSITION DU PROBLEME

L'estimation de la durée de vie des composants mécaniques est un des facteurs majeurs de dimensionnement.

Divers critères de fatigue, basés sur l'état de contrainte dans la structure, ont été proposés. Ils permettent de déterminer le comportement différé d'une structure soumise à un chargement cyclique (c'est à dire, savoir si, suite aux conditions de sollicitation imposées, l'état de ruine sera ou non obtenu).

D'autre part, des lois d'endommagement permettent d'estimer le nombre de cycles conduisant à la ruine. Ces lois nécessitent généralement de substituer au chargement réel, un chargement fictif supposé équivalent. La méthode dite Rainflow, basée sur un comptage de cycles, est ainsi largement utilisée dans l'industrie.

Le phénomène de fatigue est lié aux états de contraintes et de déformations qui règnent dans la structure, ainsi qu'à leurs évolutions au cours du temps. Il se traduit d'abord par l'apparition de fissures, c'est la phase dite d'amorçage, puis par leur propagation jusqu'à la rupture.

Considérons une structure de volume V soumise à un chargement de période T, et intéressons-nous à sa réponse.

Des théorèmes (voir [49]) permettent généralement d'assurer la convergence du champ de contraintes, $\underline{\Sigma}(t)$, vers une solution périodique. Cependant, rien ne peut être affirmé en ce qui concerne le champ de déformations plastiques, $\underline{E}^p(t)$. On peut ainsi avoir :

- Ruine par déformation excessive : charges limites.

- Rochet élasto-plastique : il existe au moins un point M de la structure où la déformation plastique s'accroît de manière incrémentale, et cela jusqu'à en obtenir la ruine.

$$\exists M \in V \text{ tq}: \quad E^p(M,t) \rightarrow \infty$$

- Accommodation : en tout point de la structure, la déformation plastique atteint un état stabilisé périodique. Le volume V peut alors se décomposer en deux parties complémentaires V_p et V_c. En tout point M de V_p la déformation plastique au cycle stabilisé varie périodiquement alors que sur V_c cette même déformation plastique est constante.

$$\left\{ \begin{array}{l} V = V_p + V_c \quad ; \quad V_p \cap V_c = \{\varnothing\} \quad ; \quad V_p \neq \{\varnothing\} \\ \forall M \in V_p : \; E^p(M, t+T) = E^p(M, t) \\ \forall M \in V_c : \; E^p(M, t) = E^p(M) \end{array} \right\} \text{ au cycle stabilisé}$$

- Adaptation : en tout point M de la structure, la déformation plastique atteint un état stabilisé constant.

$$\forall M \in V : \; E^p(M, t) = E^p_{adapté}(M) \quad \text{au cycle stabilisé}$$

Finalement, on aura ruine de la structure par endommagement progressif après un certain temps (ou un certain nombre de cycles). Ce temps est appelé **durée de vie**.

L'estimation de la durée de vie d'une structure nécessite de s'interroger sur les points suivants :

- La réponse de la structure atteindra-t-elle un état périodique ?
  (les contraintes et les déformations variant périodiquement en tout point de la structure).

- Dans le cas où un état limite existe :

  - Combien de cycles seront nécessaires pour l'atteindre ?

  - Quelle sera l'amplitude des champs de contraintes et de déformations pour cet état d'équilibre ?

  - L'état initial de la structure aura-t-il une influence sur l'état limite ?

La réponse à ces questions implique la détermination :

- De la nature du comportement asymptotique de la structure (s'il existe).

- Des champs de déformations et de contraintes qui lui sont associés.

Les concepteurs ont aujourd'hui souvent recours à l'utilisation d'outils de calcul très évolués (éléments finis + post-traitement de fatigue...), de manière à prendre en compte plus finement l'ensemble des mécanismes qui sont liés au phénomène de fatigue.

L'utilisation de ces outils ne permet cependant pas toujours de résoudre totalement les problèmes rencontrés dans les bureaux d'étude : la complexité des mécanismes moteurs intervenant dans le phénomène de fatigue ne permet pas d'en établir une solution complète. Certaines données peuvent être :

- Entachées d'erreurs (modélisation du comportement des matériaux...)
- Manquantes (état initial de la structure...)
- Qualitatives (représentativité des essais de fatigue : à un état limite adapté est associé un nombre de cycles à rupture « élevé ». Dans le cas d'un état limite accommodé ou d'un phénomène de rochet, le nombre de cycles à rupture est « faible »...)

2 - METHODE DE RESOLUTION

L'estimation du nombre de cycles à rupture passe souvent par l'utilisation d'une méthode de comptage de cycles. Nous proposerons ici une toute autre méthode : elle est basée sur le suivi de la réponse de la structure, au cours de l'historique réel de chargement.

De plus, nous tenterons de pallier aux difficultés mentionnées précédemment, (complexité des mécanismes moteurs, bruitage des données), en ayant recours à l'utilisation d'outils tels que l'apprentissage automatique. Cette approche est utilisable dans le cas de problèmes pouvant se poser de la manière suivante :

$$F\,(\text{caractéristiques}) = \text{Conclusion (exemple : la durée de vie)}$$

Son but est de construire des règles, (l'opérateur F), capables de prévoir la durée de vie d'une structure en fonction de caractéristiques considérées comme représentatives, et que nous mettrons en évidence dans ce travail. Cette approche requiert de disposer d'une base d'exemples dont les caractéristiques et les conclusions sont connues.

Le choix des caractéristiques à retenir est extrêmement important. De sa qualité et de celles des exemples disponibles dépend en effet la fiabilité des règles construites. Un choix judicieux ne peut bien évidemment être réalisé qu'à partir d'une excellente compréhension des mécanismes physiques mis en oeuvre. L'emploi d'une méthode d'apprentissage automatique permettra ensuite de mettre en évidence les caractéristiques les plus représentatives du phénomène de fatigue, et cela de manière significative.

Le plan que nous nous proposons de suivre se décompose selon les étapes suivantes :

Une première phase consiste à mettre en évidence les paramètres prépondérants intervenant dans le phénomène de fatigue. Cette étape s'appuie sur l'analyse des recherches et des développements qui ont été entrepris jusqu'à aujourd'hui dans ce domaine :

- Les principales constatations expérimentales :

  Influence d'une contrainte moyenne, d'un champ de contraintes résiduelles...

- Les mécanismes physiques mis en jeu :

  Notion de plan critique pour les critères de fatigue à « grand » nombre de cycles (endurance limitée ou illimitée), détérioration d'une structure suite au cumul de l'énergie qui y est bloquée lors du processus de fatigue (domaine oligocyclique)...

- La revue des modèles existants qui permettent de rendre compte des mécanismes mis en oeuvre :
  - Les critères de fatigue (locaux et globaux)
  - Les lois d'endommagement (uniaxiales et multiaxiales)

Dans une seconde phase, un recueil de données d'essais de fatigue est constitué. Celui-ci se compose d'essais réalisés sur deux alliages d'aluminium, dans le but de valider certains modèles de prévision de durée de vie dans le domaine aéronautique :

- Tests sous chargements à amplitude variable simplifiée (amplitudes constantes, surcharges, petits cycles et effets combinés).

- Tests représentatifs de spectres de chargements aéronautiques (chargements de service relevés sur la surface inférieure de l'aile d'un appareil de transport aérien).

Ce recueil contient donc l'ensemble des paramètres relatifs à chacun des essais (matériau, géométrie et chargement imposé), ainsi que la durée de vie correspondante des structures. Une analyse de ces données (résultats expérimentaux - prévisions données par les modèles), permet de mettre en évidence certaines constatations expérimentales ainsi que les points forts et les lacunes des modèles utilisés.

La troisième phase est relative à la proposition d'une méthode d'analyse de la réponse inélastique d'une structure. Le chargement est supposé complexe (chargement de service), et toute détérioration du matériau est négligée.

Cette partie s'appuie sur la Méthode d'Analyse Simplifiée des Structures Inélastiques (MASSI), mise au point par le professeur J. ZARKA et son équipe. Son intérêt réside dans sa simplicité de mise en oeuvre ainsi que dans la réduction

importante des temps de calcul par rapport aux méthodes « traditionnelles ». Elle permet, moyennant certaines hypothèses, d'estimer le comportement inélastique d'une structure à partir de l'utilisation d'outils relatifs au calcul élastique : l'évaluation de la solution est obtenue sans avoir recours à une méthode de calcul de type incrémental, mais simplement à partir de quelques calculs élastiques et quelques projections locales.

La phase ultime consiste à exploiter l'ensemble des données qui ont été préalablement rassemblées :

* Réalisation d'une étude bibliographique relative au phénomène de fatigue.
* Constitution d'un recueil de données d'essais de fatigue.
* Proposition d'un outil de calcul permettant d'estimer la réponse inélastique d'une structure soumise à un chargement quelconque.

Une base de données décrivant les essais est tout d'abord constituée : chacun d'entre eux est alors caractérisé par un nombre fini de descripteurs. Il est nécessaire d'utiliser une représentation permettant de passer d'une description passive (géométrie, matériau, chargement et durée de vie correspondante), à une description active évoluée. Les résultats qui sont tirés d'un ensemble d'essais particuliers peuvent ainsi être appliqués à tout autre nouveau cas de figure.

Le choix des descripteurs retenus doit bien évidemment être guidé par l'étude bibliographique. Ils sont de nature intrinsèque et proviennent aussi bien de l'expérimentation (durée de vie), que de simulations numériques (énergie accumulée dans une structure...). Ces dernières sont réalisées à partir de l'outil de calcul proposé précédemment. Il est à noter que la description d'un essai de fatigue peut être incomplète, bruitée ou encore qualitative (le comportement inélastique d'une structure n'est qu'évalué, son état initial n'est pas toujours connu...).

Le traitement de cette base de données par des techniques d'Analyse de Données ou d'Intelligence Artificielle (comme l'apprentissage automatique), permet ensuite de déterminer les paramètres prépondérants, et de générer des règles visant à estimer la durée de vie d'une structure soumise à un chargement donné. Les résultats obtenus (base de règles), devront être validés empiriquement sur des données témoins afin de s'assurer de leur fiabilité. Leur sens physique sera également étudié.

PARTIE I

Critères de fatigue - Durée de vie

CRITERES DE FATIGUE - DUREE DE VIE

NECESSITE DES ETUDES EN FATIGUE

Une pièce sollicitée de manière répétitive peut se rompre après un nombre plus ou moins important de cycles, sans pour autant que son aspect extérieur ou encore son comportement ne soient grandement modifiés ; on parle alors de rupture par fatigue.

De nos jours, même si l'analyse de la rupture par fatigue a considérablement progressé, la complexité des phénomènes intervenant dans ce problème le rend toujours insoluble dans sa généralité.

Les marges de sécurité qui étaient autrefois tolérées lors de la phase de conception des systèmes mécaniques tendent aujourd'hui, pour des raisons économiques, à diminuer. Ceci a pour effet d'accroître les niveaux de contraintes en service, admis par les constructeurs. Une conséquence directe est la nécessité de la prise en compte du phénomène de fatigue dès la conception des pièces. Pour cette raison, de nombreux critères de fatigue ont été proposés afin de permettre une caractérisation rapide de la tenue en fatigue des pièces. Ils viennent bien souvent en post-traitement des résultats de calcul par éléments finis.

Pour des raisons de sécurité ou encore économiques, il est également essentiel de pouvoir assurer la fiabilité des systèmes mécaniques (automobile, aéronautique ou production industrielle). Ceci permet par exemple d'éviter les arrêts de production pouvant survenir dans une chaîne de production, suite à une défaillance mécanique. Sachant que le bon fonctionnement d'un système dépend directement de celui de chacun de ses constituants, il est nécessaire de pouvoir apprécier la durée de vie de chacun des éléments qui le composent. Il est bien évident que cette durée de vie dépend des conditions de sollicitation auxquelles est soumise la structure considérée. De cette manière, il est ainsi possible de planifier le remplacement d'une pièce au moment le plus opportun. Il ne suffit plus alors d'empêcher la ruine d'un élément mécanique soumis à des sollicitations imposées par le cahier des charges, mais d'en prédire la durée de vie.

1 - LES CRITERES DE FATIGUE

Un critère de fatigue fournit une information binaire sur la tenue en fatigue d'une structure. Il permet de savoir si, suite aux conditions de sollicitation imposées, l'état de ruine sera ou non obtenu pour la structure. Ceci se traduit mathématiquement par une inégalité :

- Dans un premier temps, on détermine une quantité dépendant de paramètres relatifs au chargement appliqué sur la structure au cours du cycle de sollicitation, ainsi que de caractéristiques de fatigue du matériau. Cette quantité est appelée :

  * indicateur d'endommagement dans le cas où elle est spécifique à une facette particulière. On la note alors $I_{E(n)}$, n représentant le vecteur unitaire normal à la facette considérée.

  * fonction de fatigue ou fonction d'endommagement lorsqu'elle prend en compte les indicateurs d'endommagement relatifs à tous les plans passant par le point de la structure où est effectué le calcul. On la note alors I_{Eg}.

- Dans un second temps, on compare cette quantité, notée I_E ($I_E = I_{E(n)}$ ou I_{Eg}), à la valeur critique I_{Ec} ($I_{Ec} = I^c_{E(n)}$ ou I^c_{Eg}) qui lui est associée dans le cas où on a ruine de la structure.

$$\begin{cases} I_E \geq I_{Ec} \rightarrow \text{rupture} \\ I_E < I_{Ec} \rightarrow \text{non-rupture} \end{cases}$$

Dans la plupart des cas, les éléments mécaniques sont soumis à des sollicitations de service générant des états de contraintes multiaxiaux. Ceci rend donc impossible l'application de critères unidimensionnels. Reste alors à savoir quel critère appliquer. Nous présenterons dans ce qui suit les principaux critères utilisés ayant « résisté » aux analyses critiques (voir [1] et [2]), en insistant sur leur domaine d'application ainsi que sur les paramètres qui interviennent dans leur formulation.

Devant l'importance de leur nombre, il est nécessaire d'en effectuer un classement. Nous distinguerons deux grandes familles de critères : la première regroupe l'ensemble de ceux qui s'intéressent à la recherche d'une facette particulière (plan critique), et la seconde, les critères qui sont basés sur une approche globale (aspect global du phénomène).

Avant tout, introduisons quelques hypothèses et notations utiles.

1.1 - HYPOTHESES ET NOTATIONS

- Le chargement est périodique, de période T. Dans l'espace des contraintes, le trajet de chargement peut donc être représenté par une courbe fermée Φ.
- On se place dans l'hypothèse des petites déformations.
- Le tenseur des contraintes est noté $\underline{\Sigma}(t)$ avec $t \in [0,T]$. Les premier, second et troisième invariants de $\underline{\Sigma}(t)$ sont respectivement notés I1(t), I2(t) et I3(t).
- La pression hydrostatique est notée :

$$P(t) = \frac{1}{3} \cdot tr\underline{\Sigma}(t) = \frac{I1(t)}{3} \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

P_m et P_a représentent respectivement la valeur moyenne et l'amplitude de la pression hydrostatique.

$$\begin{cases} P_m = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \max_{t \in [0,T]} P(t) + \min_{t \in [0,T]} P(t) \right\} \\ P_a = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \max_{t \in [0,T]} P(t) - \min_{t \in [0,T]} P(t) \right\} \end{cases} \quad \textbf{(1.1.2)}$$

P_{max} est la pression maximale et est définie par la relation :

$$P_{max} = P_a + P_m \quad \textbf{(1.1.3)}$$

- Le déviateur des contraintes est noté $\underline{S}(t)$, son second invariant J2(t) est défini par l'expression:

$$J2(t) = \frac{1}{2} \cdot \underline{S}(t) : \underline{S}(t) \quad \textbf{(1.1.4)}$$

- L'amplitude de $\sqrt{J2(t)}$ est notée C_a et est définie par [1] :

$$C_a = \frac{1}{2} \cdot \max_{t \in [0,T]} \left\{ \max_{t_0 \in [0,T]} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\underline{S}(t) - \underline{S}(t_0)\right) : \left(\underline{S}(t) - \underline{S}(t_0)\right) \right]^{1/2} \right\} \quad \textbf{(1.1.5)}$$

Dans le cas d'un chargement radial (selon Mandel [36], le chargement d'une structure est dit radial si, au cours du chargement et en tout point de cette structure, les directions principales de $\underline{\Sigma}(t)$ ne changent pas et si les valeurs principales de $\underline{S}(t)$ restent dans des rapports fixes), le tenseur $\underline{S}(t)$ varie entre deux valeurs extrêmes $\underline{S}_A$ et $\underline{S}_B$. On peut alors définir un tenseur variation du déviateur des contraintes :

$$\Delta\underline{S} = \underline{S}_A - \underline{S}_B \quad \textbf{(1.1.6)}$$

Dans ce cas, l'expression de C_a se simplifie :

$$C_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \Delta\underline{S}(t) : \Delta\underline{S}(t)} \quad \textbf{(1.1.7)}$$

Sollicitation	$\underline{\Sigma}(t)$	C_a	P_m	P_{max}
torsion alternée	$\Sigma_{xy}(t) = t \cdot \sin(\omega \cdot t)$	t	0	0
flexion alternée	$\Sigma_{xx}(t) = f \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$f/\sqrt{3}$	0	$f/3$
flexion répétée	$\Sigma_{xx}(t) = f_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) + f_0$	$f_0/\sqrt{3}$	$f_0/3$	$2 \cdot f_0/3$

1.2 - LES CRITERES BASES SUR LA DETERMINATION D'UN PLAN CRITIQUE

Ces critères ont un caractère local, ils sont basés sur la détermination de la facette pour laquelle l'indicateur d'endommagement est maximal (cet indicateur est défini par la formulation même du critère).

Cette facette correspond au plan critique. Parmi les critères utilisant ce concept, on peut citer ceux de Dang-Van, Deperrois, Galtier, Robert-Bahuaud.

1.2.1 - CRITERE DE DANG-VAN

Selon son auteur [3], l'amorçage des fissures de fatigue est un phénomène microscopique qui se produit à l'échelle du grain ou de quelques grains. Ce critère doit donc faire intervenir dans sa formulation les champs microscopiques. Ceux-ci s'expriment en fonction des grandeurs macroscopiques, à partir d'un passage micro-macro effectué avec les hypothèses de macro-homogénéité de Hill et de Mandel (voir [3] et [1]), en introduisant un tenseur $\underline{A}$ d'ordre quatre, appelé tenseur de localisation des contraintes.

Approche microscopique :

Les champs de contraintes, de déformations totales et de déformations plastiques macroscopiques sont respectivement notés $\underline{\Sigma}(t)$, $\underline{E}(t)$ et $\underline{E}^p(t)$ $(t \in [0,T])$. Ces grandeurs sont considérées comme étant uniformes sur un petit volume (v) correspondant à un point matériel de la structure. Ce volume est en fait constitué par de nombreux grains formant une partition de (v). A l'échelle du grain, les champs de contraintes, de déformations totales et de déformations plastiques sont qualifiés de microscopiques et sont respectivement désignés par $\underline{\sigma}(t)$, $\underline{\varepsilon}(t)$ et $\underline{\varepsilon}^p(t)$.

Le tenseur des contraintes microscopiques $\underline{\sigma}(t)$ peut être décomposé de la manière suivante :

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{\sigma}^{el}(t) + \underline{\rho}(t) \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

Dans cette expression, $\underline{\sigma}^{el}(t)$ désigne le champ de contraintes microscopiques qui existerait si le milieu était purement élastique et $\underline{\rho}(t)$ est un champ de contraintes auto-équilibré dans (v), appelé champ de contraintes résiduelles microscopiques.

Le tenseur de localisation des contraintes, $\underline{A}$, permet d'associer à la contrainte macroscopique $\underline{\Sigma}$, la contrainte microscopique $(\underline{A} : \underline{\Sigma})$ qui existerait si le milieu était purement élastique. On a la relation :

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{A} : \underline{\Sigma}(t) + \underline{\rho}(t) \qquad \textbf{(1.2.2)}$$

Dans le cas d'un chargement cyclique situé au voisinage de la limite d'endurance, on peut alors considérer que le grain tend vers un état limite adapté (déformation plastique constante). D'après le théorème d'adaptation de Melan (voir [4], [5]), il existe donc un champ de contraintes auto-équilibré $\underline{\rho}^*$ indépendant du temps, pour lequel le critère de plasticité local à l'état adapté est vérifié.

Selon Dang-Van, les quantités qui gouvernent la tenue en fatigue des structures sont :

- le cisaillement local $\tau(t)$, car l'amorçage des fissures se produit généralement dans les bandes de glissement intergranulaires,
- la pression hydrostatique p(t), afin de tenir compte de l'effet bénéfique des pressions hydrostatiques de compression qui tendent à maintenir fermées les fissures.

Le critère s'énonce alors simplement en combinant les quantités $\tau(t)$ et p(t) à l'état adapté (qui sont respectivement notées $\tau'(t)$ et p'(t)) :

$$\tau'(t) + a_{DV} \cdot p'(t) \leq b_{DV} \quad \forall t \in [0, T] \tag{1.2.3}$$

Dans cette expression, a_{DV} et b_{DV} désignent des caractéristiques du matériau.

Il reste à présent à exprimer ces quantités locales en fonction des quantités globales à l'état adapté du grain, celles-ci étant accessibles à l'ingénieur.

a) Expression de p'(t) :

A l'état stabilisé, seuls quelques grains sont soumis à une déformation plastique. Ces grains peuvent être représentés par une inclusion dans une matrice élastique, celle-ci leurs imposant sa déformation :

$$\underline{\underline{E}}(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{E}}^e(t) + \underline{\underline{E}}^p(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}^e(t) + \underline{\underline{\varepsilon}}^p(t) \tag{1.2.4}$$

Le terme $\underline{\underline{E}}^p(t)$ peut être négligé car les niveaux de sollicitation imposés conduisent à une déformation plastique macroscopique négligeable. On a donc :

$$\underline{\underline{E}}^e(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}^e(t) + \underline{\underline{\varepsilon}}^p(t) \tag{1.2.5}$$

Si on suppose que l'inclusion et la matrice élastique sont isotropes et possèdent les mêmes coefficients élastiques, on en déduit alors l'égalité entre les tenseurs d'élasticité macroscopique et microscopique :

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{\ell}} \tag{1.2.6}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\Sigma}}(t) = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{E}}^e(t) = \underline{\underline{L}} \cdot \left(\underline{\underline{\varepsilon}}^e(t) + \underline{\underline{\varepsilon}}^p(t) \right) = \underline{\underline{\sigma}}(t) + \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^p(t) \tag{1.2.7}$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}^p(t)$ étant déviatorique, cette expression se réduit à :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \underline{\underline{\sigma}}(t) + 2 \cdot \mu \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^p(t) \tag{1.2.8}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}(t) - 2 \cdot \mu \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^p(t) \tag{1.2.9}$$

Par identification avec l'expression (1.2.2), on obtient :

$$\rightarrow \quad \underline{A} = \underline{1} \quad \text{(tenseur identité)} \Rightarrow \underline{\sigma}^{el}(t) = \underline{\Sigma}(t) \quad \text{(d'après (1.2.1))} \qquad \textbf{(1.2.10)}$$

$$\rightarrow \quad \underline{\rho}(t) = -2 \cdot \mu \cdot \underline{\varepsilon}^{p}(t) \qquad \textbf{(1.2.11)}$$

$\underline{\varepsilon}^{p}(t)$ étant déviatorique, $\underline{\rho}(t)$ l'est également. La pression hydrostatique microscopique p(t) est donc égale à la pression hydrostatique macroscopique P(t).

$$p(t) = \frac{1}{3} \cdot tr(\underline{\sigma}(t)) = \frac{1}{3} \cdot tr(\underline{\Sigma}(t)) = P(t) \qquad \textbf{(1.2.12)}$$

De plus, on a $\underline{s}(t) = \underline{S}(t) + \underline{\rho}(t)$, où $\underline{s}(t)$ et $\underline{S}(t)$ représentent les parties déviatoriques de $\underline{\sigma}(t)$ et $\underline{\Sigma}(t)$.

L'égalité entre les quantités p(t) et P(t) est encore bien évidemment vérifiée lorsque le grain atteint un état stabilisé adapté. On a alors p(t) =p'(t).

b) Expression de τ'(t) :

Dang-Van suppose que le critère de plasticité adopté pour le grain découle de la loi de Schmid. Ce critère s'écrit alors :

$$\tau(t) - \tau_y \leq 0 \ , \qquad \textbf{(1.2.13)}$$

où τ_y désigne la cission microscopique critique (limite d'élasticité en cisaillement du grain) et $\tau(t)$, la cission microscopique s'exerçant sur le plan de glissement. Le grain est supposé obéir à une loi d'écrouissage isotrope.

De plus, l'auteur suppose qu'*à chaque grain correspond un seul système de glissement pouvant être activé*. Ce dernier est défini par la normale, $\vec{n}$, au plan de glissement ainsi que par la direction de glissement, $\vec{m}$, du grain considéré ($\vec{n}$ et $\vec{m}$ sont deux vecteurs normés et orthogonaux). A ce système de glissement est associé une matrice d'orientation définie par :

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (n_i \cdot m_j + m_i \cdot n_j) \qquad \textbf{(1.2.14)}$$

Les quantités $\varepsilon_{ij}^{p}(t)$ et $\sigma_{ij}(t)$ sont alors respectivement reliées au glissement plastique, $\gamma^{p}(t)$, et à la cission, $\tau(t)$, agissant sur le plan de glissement, par les relations :

$$\tau(t) = a_{ij} \cdot \sigma_{ij}(t) \qquad \textbf{(1.2.15)}$$

$$\varepsilon_{ij}^{p}(t) = \gamma^{p}(t) \cdot a_{ij} \qquad \textbf{(1.2.16)}$$

Dang-Van a tout d'abord étudié le cas d'un chargement périodique proportionnel [3], puis a généralisé le calcul de τ'(t) au cas d'un chargement quelconque.

b1) Cas d'un chargement périodique proportionnel :

Etant donné que le volume (v) contient un grand nombre de cristaux d'orientations différentes, il est raisonnable de supposer qu'il existe au moins un cristal dont le plan et la direction de glissement facile coïncident avec le plan et la direction de la cission macroscopique maximale. Puisque ces derniers sont fixes dans le cas d'un chargement périodique proportionnel, la matrice a_{ij} est donc connue (elle correspond au système de glissement actif du cristal).

Les relations (1.2.9), (1.2.13), (1.2.14), (1.2.15) et (1.2.16) permettent d'exprimer le cisaillement microscopique, $\tau(t)$, sous la forme :

$$\tau(t) = a_{ij} \cdot \Sigma_{ij}(t) - \mu \cdot \gamma^{p}(t) \quad , \tag{1.2.17}$$

où la quantité $(a_{ij} \cdot \Sigma_{ij}(t))$ représente la cission macroscopique C(t).

Etant donné que le matériau impose sa déformation au cristal, la déformation de cisaillement macroscopique, $\Gamma(t)$, est égale à la déformation de cisaillement microscopique, $\gamma(t)$.

A l'état adapté, le cycle microscopique de chargement $\left(\tau(t) = f(\gamma(t)) \right)$ est symétrique (voir [3]). Cette « symétrisation » des contraintes de cisaillement traduit le fait que le matériau s'est adapté de manière à supporter le chargement auquel il est soumis. On peut alors déterminer les valeurs stabilisées du glissement plastique, γ_p^*, et de la cission résiduelle microscopique, τ^* :

$$\gamma_p^* = (\Gamma_{max} + \Gamma_{min})/2 = \Gamma_m \quad , \tag{1.2.18}$$

où Γ_m représente la déformation de cisaillement macroscopique moyen.

$$\left.\begin{aligned} &\tau'(t) = C(t) - \mu \cdot \gamma_p^* = \tau^{el}(t) + \tau^* \\ &\Rightarrow \quad \tau^* = -\mu \cdot \gamma_p^* = -\mu \cdot \Gamma_m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \tau'(t) = C(t) - \mu \cdot \Gamma_m \tag{1.2.19}$$

La quantité $(\mu \cdot \Gamma_m)$ représente la cission macroscopique moyenne que l'on note encore C_m. On a donc finalement (voir [6]) :

$$\tau'(t) = C(t) - C_m \tag{1.2.20}$$

REMARQUE : Dans le cas d'un chargement radial alterné on a $C_m = 0$

* Torsion alternée : $\tau'(t) = \Sigma_{xy}(t) = t \cdot \sin(\omega \cdot t)$; $p(t) = 0$

* Flexion alternée : $\tau'(t) = \dfrac{\Sigma_{xx}(t)}{2} = \dfrac{f}{2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$; $p(t) = \dfrac{\Sigma_{xx}(t)}{3} = \dfrac{f}{3} \cdot \sin(\omega \cdot t)$

On peut alors identifier les constantes a_{DV} et b_{DV} de l'expression (1.2.3) :

$$a_{DV} = \left(t - \frac{f}{2}\right) \Big/ \left(\frac{f}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad b_{DV} = t \tag{1.2.21}$$

b2) Cas d'un chargement quelconque :

Les directions principales de $\underline{\Sigma}(t)$ n'étant plus fixes, a_{ij} est donc inconnue à l'avance. Considérons un plan critique P_n de normale $\vec{n}$. Le critère de plasticité du grain est choisi de la forme :

$$\|\vec{\tau}\| - \tau_y \leq 0 \tag{1.2.22}$$

$\vec{\tau}$ représente la cission microscopique s'exerçant dans le plan P_n et $\|\vec{\tau}\|$ désigne sa norme. Dans ce plan, le critère de plasticité est représenté par un cercle de rayon τ_y. La cission $\vec{\tau}$ est définie par :

$$\vec{\tau} = \underline{\sigma} \cdot \vec{n} - (\vec{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} = \left(\underline{\Sigma} + \underline{\rho}\right) \cdot \vec{n} - \left(\vec{n} \cdot \left(\underline{\Sigma} + \underline{\rho}\right) \cdot \vec{n}\right) \cdot \vec{n} \tag{1.2.23}$$

Un point O du plan P_n (voir figure 1.2.1) est soumis à une contrainte $\underline{\Sigma} \cdot \vec{n}$, de composante normale $\vec{N}(t)$ et tangentielle $\vec{C}(t)$ définies par :

$$\vec{N}(t) = (\vec{n} \cdot \underline{\Sigma}(t) \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \tag{1.2.24}$$

$$\vec{C}(t) = \underline{\Sigma}(t) \cdot \vec{n} - \vec{N}(t) \tag{1.2.25}$$

$\vec{C}(t)$ décrit dans le plan P_n une courbe fermée Ψ, au cours d'un cycle de chargement.

Nous recherchons le champ de contraintes résiduelles microscopiques à l'état stabilisé, c'est à dire le champ $\underline{\rho}^*$, tel que le critère de plasticité dans cet état soit vérifié ; le champ de contraintes microscopiques ayant alors pour expression :

$$\underline{\sigma}'(t) = \underline{\Sigma}(t) + \underline{\rho}^* \tag{1.2.26}$$

Dang-Van suppose alors qu'à l'état stabilisé, le critère de plasticité est représenté dans le plan P_n par un cercle centré à l'origine O et de rayon τ_y^* égal au rayon du plus petit cercle circonscrit au trajet Ψ. De cette manière, la quantité τ_y est minimisée.

Ce choix implique de prendre pour cission résiduelle microscopique à l'état stabilisé le vecteur $\vec{MO}$, où M représente le centre du cercle circonscrit à Ψ. On a alors :

$$\vec{\tau}'(t) = \vec{C}(t) + \vec{\tau}^* \text{ , avec } \vec{\tau}^* = \vec{MO} = \underline{\rho}^* \cdot \vec{n} \tag{1.2.27}$$

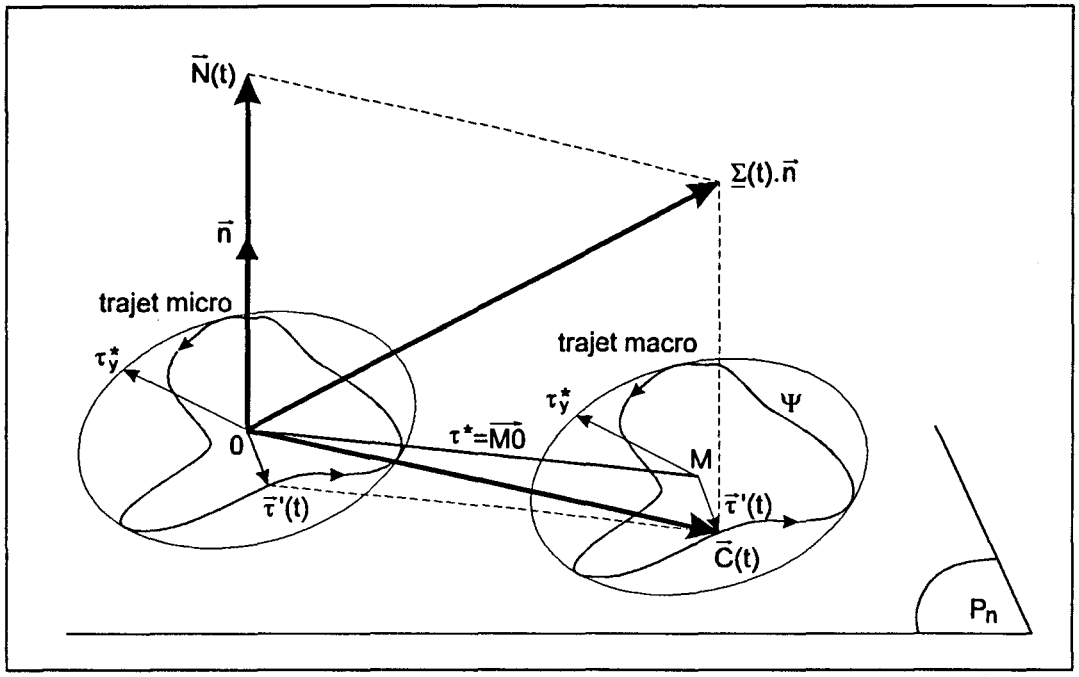


Figure 1.2.1 « Trajet de chargement sur une facette de normale $\vec{n}$ »

La connaissance des contraintes macroscopiques permet donc d'appliquer le critère microscopique. Une telle construction de $\underline{\rho}^*$ ainsi que le choix de τ_y^* assurent la vérification du critère de plasticité du grain à l'état adapté. Le trajet de $\vec{\tau}'(t)$ a en quelque sorte été «centré» sur l'origine O.

L'expression de $\vec{\tau}(t)$ à l'état adapté a été établie en supposant connu le plan critique P_n de normale $\vec{n}$. En pratique, il est nécessaire de balayer l'ensemble des normales afin de déterminer la plus critique. Ceci impose au critère une double maximisation par rapport à $\vec{n}$ et par rapport à t :

$$I_{Ec} = 1 \text{ à la limite d'endurance} \tag{1.2.28}$$

$$I_E = \max_{\vec{n}}\left(\max_t\left\{I_{E(n)}(t)\right\}\right) = \max_{\vec{n}}\left(\max_t\left\{\frac{X2(t) + a_{DV}\cdot X1(t)}{b_{DV}}\right\}\right) \tag{1.2.29}$$

avec
$$\begin{cases} X1(t) = P(t) = \dfrac{1}{3}\cdot \mathrm{tr}\left(\underline{\Sigma}(t)\right) \\ X2(t) = \tau'(t) = \left\|\vec{\tau}'(t)\right\| ; \quad \vec{\tau}'(t) = \vec{C}(t) + \vec{MO} = \vec{C}_{alt}(t) \end{cases} \tag{1.2.30}$$

$\vec{C}_{alt}(t)$ représente la partie alternée de la contrainte tangentielle macroscopique.

Ce calcul nécessite donc de déterminer pour chaque normale $\vec{n}$, le rayon du plus petit cercle circonscrit au trajet de $\vec{C}(t)$.

$$\text{si :} \quad \begin{cases} I_E \geq I_{Ec} \rightarrow \text{rupture} \\ I_E < I_{Ec} \rightarrow \text{non-rupture} \end{cases} \qquad \textbf{(1.2.31)}$$

Le domaine de non-rupture a donc pour frontière dans l'espace (X1, X2) (avec X2 ≥ 0), la droite définie par $I_E = I_{Ec} = 1$.

Dang-Van montre ainsi que les quantités macroscopiques qui gouvernent la tenue en fatigue d'une structure sont le cisaillement alterné $\vec{C}_{alt}(t)$, et la pression hydrostatique P(t).

Les constantes a_{DV} et b_{DV} intervenant dans l'expression du critère sont quant à elles définies pour chaque acier à partir de la connaissance des limites d'endurance en torsion et flexion alternées, respectivement notées *t* et *f* (voir relation (1.2.21)).

La limitation d'utilisation du critère, issue de la condition $a_{DV} > 0$ (qui traduit l'effet bénéfique d'une compression), implique le respect de l'inégalité suivante :

$$t / f > 1/2 \qquad \textbf{(1.2.32)}$$

Ce critère à été appliqué avec succès dans de nombreux cas industriels [6]. Les hypothèses sur lesquelles repose sa formulation (obtention pour la structure, d'un état stabilisé adapté), restreignent son application au cas de l'endurance illimitée. Il peut être utilisé quel que soit le type de chargement auquel est soumise la structure.

Toutefois, ce critère ne permet pas de différencier le cas de trajets de chargement différents, pour lesquels la quantité $\left\{\max_{\vec{n}}\left(\max_{t}\left[\left\|\vec{\tau}'(t)\right\| + a_{DV}\cdot p'(t)\right]\right)\right\}$ est identique. L'expérience dans un tel cas de figure peut alors conduire à des comportements en fatigue totalement différents pour ces chargements. Ceci est illustré par la figure 1.2.2 ci-dessous :

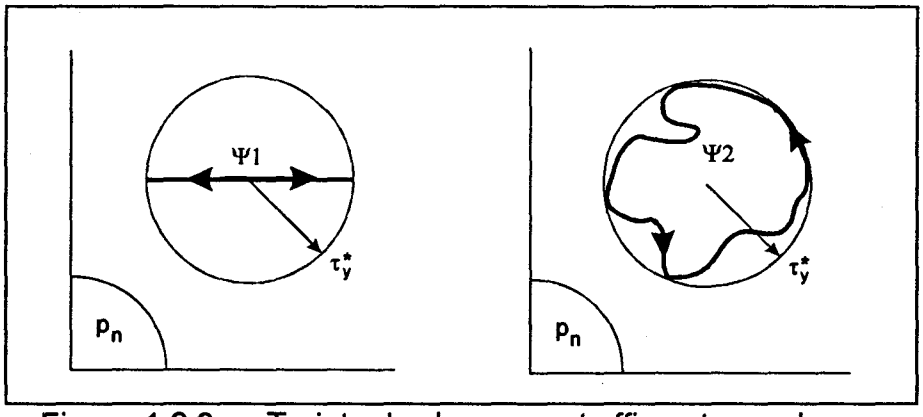


Figure 1.2.2 : « Trajets de chargement affine et complexe »

Les valeurs de τ_y^* sont les mêmes pour les trajets Ψ_1 et Ψ_2. Or, l'expérience montre que le second trajet est beaucoup plus endommageant que le premier.

Pour tenter de remédier à cette faiblesse, Deperrois et Galtier ont chacun formulé un nouveau critère de fatigue.

1.2.2 - CRITERE DE DEPERROIS

Deperrois reprend les hypothèses d'adaptation et de passage micro-macro utilisées par Dang-Van.

Les sollicitations de services auxquelles sont soumis les systèmes mécaniques industriels, sont le plus souvent multiaxiales déphasées. Pour ces cas de charge, plusieurs systèmes de glissement sont activés et l'endommagement est alors lié à l'amplitude de la sollicitation agissant sur ces derniers.

Deperrois considère que généralement, la prise en compte de deux systèmes de glissement est suffisante pour caractériser la fatigue multiaxiale. Ceux-ci correspondent aux deux cisaillements maximums rencontrés au cours du temps. L'auteur montre alors [7] que *l'évaluation des variations de la cission macroscopique au cours d'un cycle de chargement sur les deux facettes les plus sollicitées, revient à évaluer l'amplitude de variation de* $\underline{S}(t)$ *sur deux vecteurs orthogonaux de l'espace du déviateur des contraintes.* Dans cet espace (voir figure 1.2.3), le tenseur $\underline{S}(t)$ décrit une courbe fermée Ψ. Soit C_1 la plus grande corde inscrite dans Ψ et C_2 celle inscrite dans la projection de Ψ sur l'hyperplan normal à la direction de C_1.

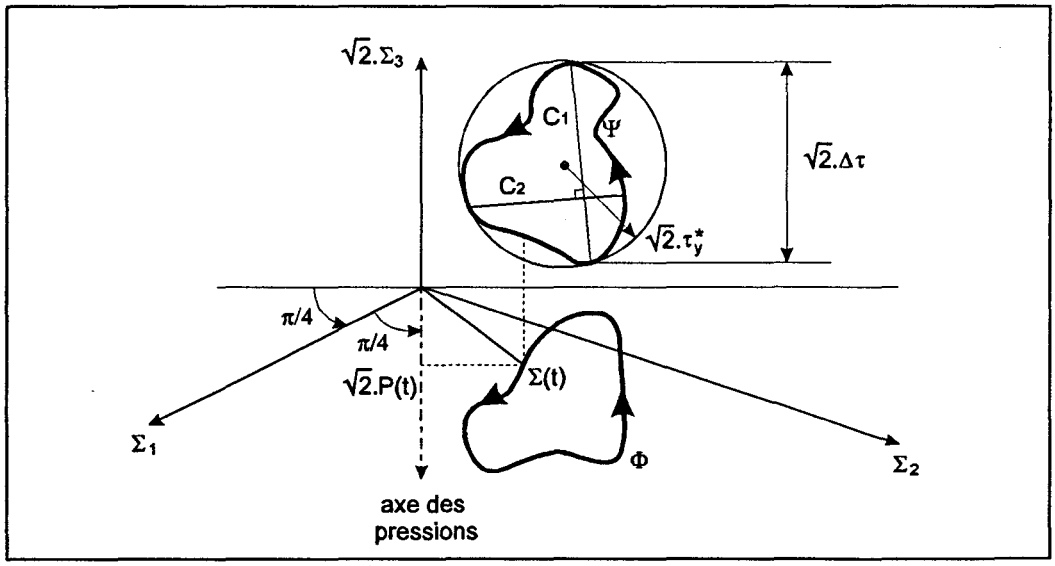


Figure 1.2.3 : « Décomposition d'un trajet de chargement »

L'auteur propose alors de prendre comme paramètres influant sur la tenue en fatigue des structures :

- Une mesure $A(\Psi)$ de la courbe Ψ définie par :

$$A(\Psi) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\left(C_1^2+C_2^2\right)^{1/2} \qquad \textbf{(1.2.33)}$$

$A(\Psi)$ représente une moyenne quadratique des cordes C_1 et C_2.

- La pression hydrostatique maximale P_{max}, atteinte au cours du cycle.

Le critère s'énonce alors :

$$I_{Ec} = 1 \text{ à la limite d'endurance} \tag{1.2.34}$$

$$I_E = \frac{X2 + a_D \cdot X1}{b_D} \tag{1.2.35}$$

avec
$$\begin{cases} X1 = P_{max} = \max_t(P(t)) \\ X2(t) = A(\Psi) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2}} \cdot \left(C_1^2 + C_2^2\right)^{1/2} \end{cases} \tag{1.2.36}$$

si :
$$\begin{cases} I_E \geq I_{Ec} \rightarrow \text{rupture} \\ I_E < I_{Ec} \rightarrow \text{non-rupture} \end{cases} \tag{1.2.37}$$

Le domaine de non-rupture a pour frontière dans l'espace (X1,X2), la droite définie par $I_E = I_{Ec} = 1$ (voir figure 1.2.4).

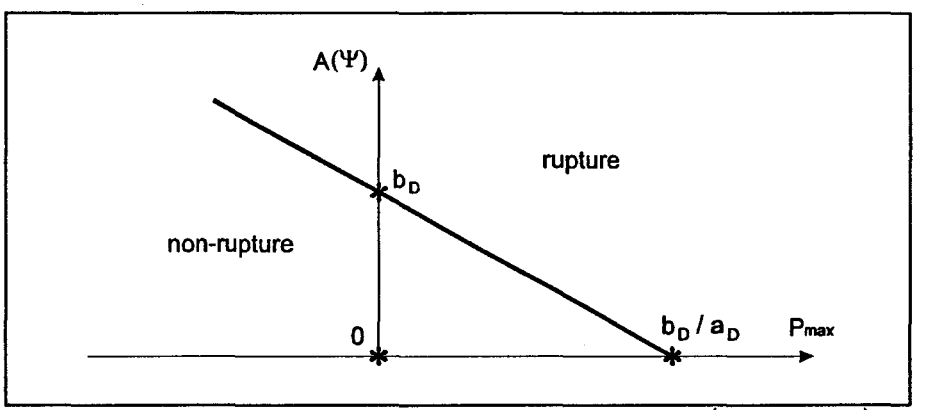


Figure 1.2.4 : « Représentation dans l'espace $(P_{max}, A(\Psi))$ du critère de Deperrois »

Les constantes a_D et b_D dépendent du matériau considéré. On a :

$$a_D = \left(t - \frac{f}{3}\right) \Big/ \left(\frac{f}{\sqrt{3}}\right) \qquad \text{et} \qquad b_D = t \ , \tag{1.2.38}$$

où t et f représentent respectivement les limites d'endurance en torsion et flexion alternées. La condition $a_D > 0$ se traduit par :

$$(t / f) > 1/3 \tag{1.2.39}$$

Le domaine d'application du critère de Deperrois est restreint au cas de l'endurance illimitée. Il permet de rendre compte de l'influence de sollicitations déphasées.

1.2.3 - CRITERE DE GALTIER

Tout comme le critère de Deperrois, le critère de Galtier cherche à différencier (du point de vue du comportement en fatigue), des trajets de chargement tels que ceux présentés sur la figure 1.2.2. Encore une fois, la notion de facette critique est utilisée. La formulation de ce critère repose sur deux idées principales [2] :

• Suivre le trajet, Ψ, de la cission dans le plan d'une facette au cours du cycle de chargement :

* Lorsque les sollicitations sont sinusoïdales de même fréquence, l'extrémité du vecteur cission décrit alors une ellipse que Galtier caractérise par son périmètre P_E.

* Lorsque les sollicitations évoluent à des fréquences différentes mais dont le rapport reste rationnel, l'extrémité du vecteur cission décrit une boucle fermée (de type Lissajous). Ce trajet est alors caractérisé par la moyenne qui est faite entre le périmètre P_1 de la plus petite ellipse circonscrite à Ψ et le périmètre P_2 de la plus grande ellipse inscrite dans le plus petit rectangle circonscrit à Ψ (voir figure 1.2.5). Cette moyenne est notée P_E.

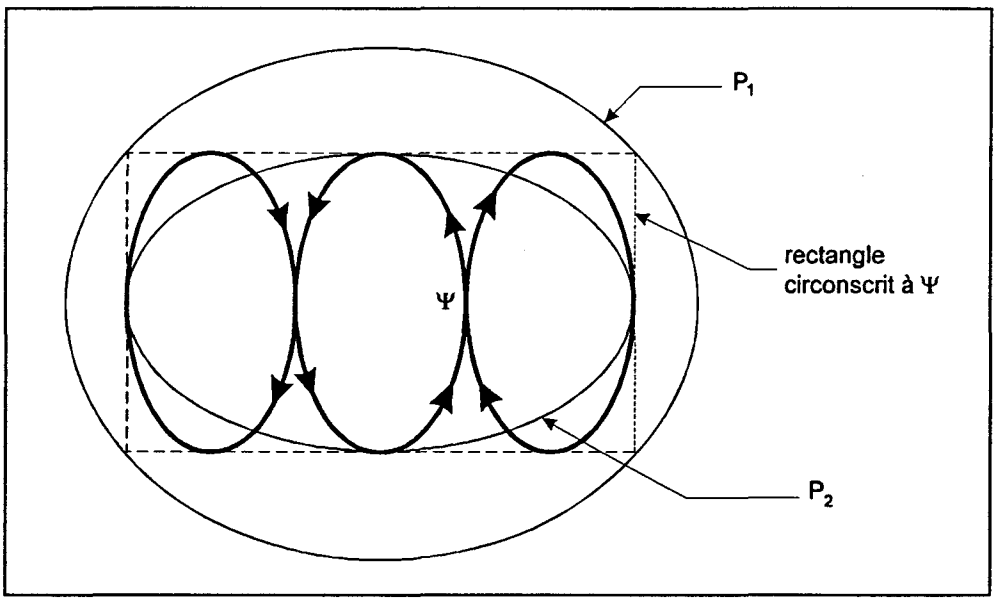


Figure 1.2.5 : « Trajet du vecteur cission relatif à des sollicitations sinusoïdales de fréquence différentes »

• Prendre en compte le degré de triaxialité défini par De Leiris et qui s'exprime par le rapport de l'énergie de changement de volume sur l'énergie totale (changement de volume et changement de forme) :

$$d^{\circ}T(t) = \frac{I1^2(t)}{I1^2(t) + J2(t) \cdot \frac{6 \cdot (1+\nu)}{1-2 \cdot \nu}} \quad , \qquad \textbf{(1.2.40)}$$

où ν est le coefficient de poisson du matériau qui est supposé rester constant car l'auteur se restreint au cas de la fatigue polycyclique (grand nombre de cycles). L'introduction de ce degré de triaxialité a pour objet de rendre compte des sollicitations multiaxiales auxquelles est soumise la structure (déphasage).

Le critère de fatigue s'écrit alors sous la forme suivante :

$$I_{Ec} = 1 \text{ à la limite d'endurance à N cycles} \tag{1.2.41}$$

$$I_E = \frac{\left(X1 - a_G(N)\right)^2}{b_G^{\,2}(N)} + \frac{X2^2}{c_G^{\,2}(N)} \tag{1.2.42}$$

avec
$$\begin{cases} X1 = \max_t\left[\dfrac{I1(t)}{3}\right] \cdot \left\{1 - \alpha \cdot \left(d^\circ T_{traction} - \max_t\left[d^\circ T(t)\right]\right)\right\} \\ X2 = \max_{\vec{n}}\left[P_E\right] \end{cases} \tag{1.2.43}$$

$$* \quad d^\circ T_{traction} = \frac{\Sigma_{11}^2}{\Sigma_{11}^2 + \dfrac{\Sigma_{11}^2}{3} \cdot \dfrac{6 \cdot (1+\nu)}{1-2\cdot\nu}} = \frac{1}{1 + \dfrac{2\cdot(1+\nu)}{1-2\cdot\nu}} \tag{1.2.44}$$

* La constante α est déterminée à partir d'un essai de calage pour lequel le degré de triaxialité, $d^\circ T(t)$, est suffisamment différent de $d^\circ T_{traction}$.

si :
$$\begin{cases} I_E \geq I_{Ec} \rightarrow \text{rupture} \\ I_E < I_{Ec} \rightarrow \text{non - rupture} \end{cases} \tag{1.2.45}$$

Le domaine de non-rupture à N cycles a pour frontière dans l'espace (X1,X2), la demi-ellipse définie par $I_E = I_{Ec} = 1$ (voir figure 1.2.6).

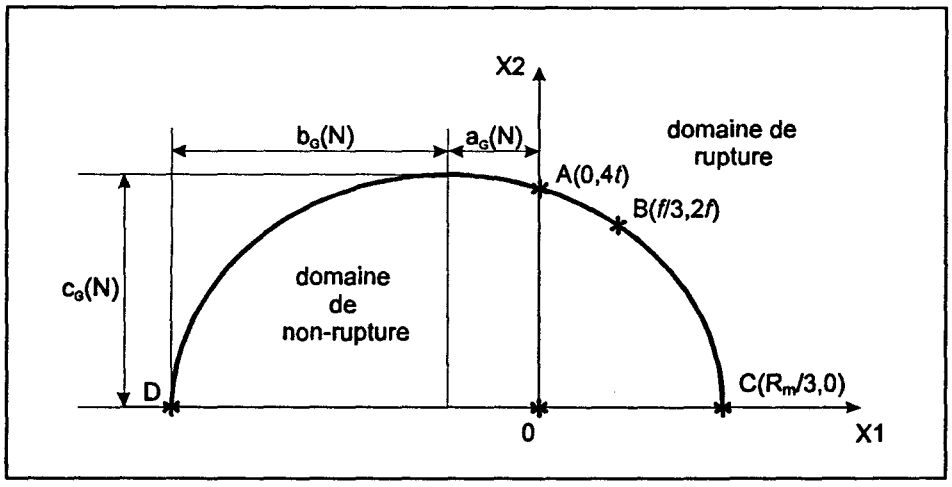


Figure 1.2.6 : « Représentation dans l'espace (X1,X2) du critère de Galtier »

Le calcul des constantes $a_G(N)$, $b_G(N)$ et $c_G(N)$ intervenant dans l'expression du critère, s'effectue à partir de la connaissance de $f(N)$, $t(N)$ et R_m. Ces quantités représentent respectivement les limites d'endurance à N cycles en traction et torsion alternées symétriques, et la résistance maximale en traction monotone [8]. On a :

$$a_G(N) = \frac{4 \cdot t^2(N) \cdot \left(R_m^2 - f^2(N)\right) - R_m^2 \cdot f^2(N)}{6 \cdot \left[-R_m \cdot f^2(N) - 4 \cdot t^2(N) \cdot \left(f(N) - R_m\right)\right]} \qquad \textbf{(1.2.46)}$$

$$b_G(N) = \frac{R_m}{3} - a_G(N) \qquad \textbf{(1.2.47)}$$

$$c_G(N) = 16 \cdot t^2(N) \Big/ \sqrt{1 - \frac{a_G{}^2(N)}{\left(\frac{R_m}{3} - a_G(N)\right)^2}} \qquad \textbf{(1.2.48)}$$

Des limitations d'utilisation du critère apparaissent lors de la détermination des constantes $a_G(N)$, $b_G(N)$ et $c_G(N)$:

→ Axe horizontal de l'ellipse non nul :

$$a_G(N) \neq \frac{R_m}{3} \qquad \textbf{(1.2.49)}$$

→ Possibilité de calcul de $c_G(N)$:

$$a_G(N) < \frac{R_m}{6} \qquad \textbf{(1.2.50)}$$

→ Existence de $b_G(N)$ et de $a_G(N)$:

$$4 \cdot t^2(N) \cdot f(N) \neq R_m \cdot \left(4 \cdot t^2(N) - f^2(N)\right) \qquad \textbf{(1.2.51)}$$

Ce critère est utilisable dans le cas de l'endurance limitée et illimitée. Tout comme celui de Deperrois, il ambitionne de pouvoir s'appliquer à tous cas de sollicitation. A la différence de ce dernier, le domaine de non-rupture est fermé. Ceci rend compte du fait qu'une compression favorise la tenue en fatigue d'une structure, mais cela jusqu'à un certain seuil au-delà duquel sa ruine est inévitable.

Alors que le critère de Galtier nécessite la recherche d'une facette critique (facette pour laquelle P_E est maximum), le critère de Deperrois conduit à une analyse dans l'espace des déviateurs des contraintes macroscopiques. Cette seconde approche est extrêmement plus rapide en terme de temps de calcul.

1.2.4 - CRITERE DE ROBERT-BAHUAUD

Cette formulation est issue du critère de Dang-Van. Elle repose sur les idées suivantes [9] :

- Une fissure s'amorce dans un plan particulier de normale $\vec{n}$, appelé plan critique. Les composantes normale, $\vec{N}(t)$, et tangentielle, $\vec{C}(t)$, de la contrainte macroscopique $\underline{\Sigma}\cdot\vec{n}$ agissant sur ce plan, influencent toutes deux la tenue en fatigue de la structure.

- Les contraintes normales moyennes $\vec{N}_m$ et alternées $\vec{N}_{alt}(t)$ qui sont associées au plan critique, ont un rôle différent du point de vue de la fatigue. Leurs influences respectives sont donc dissociées.

- De manière à traduire l'influence négligeable de la contrainte tangentielle moyenne $\vec{C}_m$ en torsion, seule la partie alternée $\vec{C}_{alt}(t)$ de la contrainte tangentielle intervient dans la formulation du critère.

Son expression est la suivante :

$$I_{Ec} = 1 \text{ à la limite d'endurance à N cycles} \tag{1.2.52}$$

$$I_E = \max_{\vec{n}}\left(\max_{t}\left\{ \frac{X1(t) + a_{RB}(N)\cdot X2(t) + b_{RB}(N)\cdot X3}{c_{RB}(N)} \right\} \right) \tag{1.2.53}$$

$$\text{avec} \begin{cases} X1(t) = C_{alt}(t) = \left\| \vec{C}_{alt}(t) \right\| \\ X2(t) = N_{alt}(t) \\ X3 = N_m \end{cases} \tag{1.2.54}$$

$$\text{si :} \begin{cases} I_E \geq I_{Ec} \rightarrow \text{rupture} \\ I_E < I_{Ec} \rightarrow \text{non-rupture} \end{cases} \tag{1.2.55}$$

Le domaine de non-rupture a donc pour frontière dans l'espace (X1,X2,X3), le plan défini par $I_E = I_{Ec} = 1$.

Les constantes $a_{RB}(N)$, $b_{RB}(N)$ et $c_{RB}(N)$ sont déterminées lors du calage du critère :

$$a_{RB}(N) = \frac{\dfrac{t(N)}{f(N)} - \dfrac{1}{2}}{\sqrt{\dfrac{t(N)}{f(N)}\cdot\left(1 - \dfrac{t(N)}{f(N)}\right)}} \tag{1.2.56}$$

$$c_{RB}(N) = t(N)\cdot\sqrt{a_{RB}{}^2(N) + 1} \tag{1.2.57}$$

$$b_{RB}(N) = \frac{2\cdot c_{RB}(N)}{f_0(N)} - \frac{f_0(N)}{8\cdot c_{RB}(N)} - a_{RB}(N) \tag{1.2.58}$$

$f(N)$ et $t(N)$ représentent respectivement les limites d'endurance à N cycles en traction et torsion alternées. $f_0(N)$ correspond à la limite d'endurance à N cycles en traction répétée.

Le domaine de définition du critère est donné par :

$$\frac{1}{2} < \frac{t(N)}{f(N)} < 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2} < \frac{f(N)}{f_0(N)} < 1 \tag{1.2.59}$$

C'est un critère d'endurance à N cycles.

1.3 - LES CRITERES BASES SUR UNE APPROCHE GLOBALE

Ces critères ont une formulation qui est qualifiée de globale car elle prend en compte les indicateurs d'endommagement relatifs à toutes les facettes contenant le point où est effectué le calcul, pour établir la fonction de fatigue du critère. Par rapport aux critères locaux, ils permettent une réduction importante des calculs car ils ne nécessitent pas la recherche d'un plan critique.

Ils rendent compte des cas de figure où plusieurs plans de glissement sont activés au cours d'un cycle. Ceci peut-être observé expérimentalement lorsque les directions principales du chargement auquel est soumise une structure, sont mobiles.

Novozhilov (voir [10]), a montré que la moyenne quadratique de la scission, étendue à tous les plans matériels passant par un point donné d'un corps chargé, est définie par :

$$\frac{1}{S} \cdot \int_s \left\| \vec{C}(\vec{n}) \right\|^2 \cdot dS = \frac{2}{5} \cdot J2 \ , \tag{1.3.1}$$

où S représente l'aire de la sphère s de rayon unité ($S = 4 \cdot \pi$), et $\vec{n}$ est la normale unitaire au plan considéré. L'aspect global des critères est donc souvent obtenu en faisant intervenir J2 dans leur formulation.

Parmi les critères liés à une approche globale, on peut citer ceux de Sines, Crossland, Froustey-Lasserre, Fogué-Bahuaud, Papadopoulos, Ellyin.

1.3.1 - CRITERE DE SINES

Sa facilité d'application en fait le critère de fatigue le plus couramment utilisé. Son auteur définit une contrainte équivalente Σ_{eq}, sous la forme d'une combinaison linéaire entre C_a (amplitude de $\sqrt{J2(t)}$), et la valeur moyenne de la pression hydrostatique P_m :

$$\Sigma_{eq} = C_a + a_s \cdot P_m \tag{1.3.2}$$

Il lui reste alors à comparer Σ_{eq} à une valeur critique b_s :

$$C_a + a_s \cdot P_m \leq b_s \qquad \textbf{(1.3.3)}$$

Le critère de Sines peut donc s'écrire :

$$I_{Ec} = 1 \text{ à la limite d'endurance} \qquad \textbf{(1.3.4)}$$

$$I_E = \frac{X2 + a_s \cdot X1}{b_s} \qquad \textbf{(1.3.5)}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} X1 = P_m \\ X2 = C_a \end{cases} \qquad \textbf{(1.3.6)}$$

Les constantes a_s et b_s dépendent du matériau, elles sont définies par :

$$a_s = \left(t - \frac{f_0}{\sqrt{3}}\right) \Big/ \left(\frac{f_0}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad b_s = t \ , \qquad \textbf{(1.3.7)}$$

où f_0 et t représentent respectivement les limites d'endurance en flexion répétée et en torsion alternée.

Dans le cas d'un essai de flexion alternée, on obtient $b_s = f/\sqrt{3}$ car $C_a = f/\sqrt{3}$ et $P_m = 0$. D'après la relation (1.3.7), on doit donc avoir :

$$(f/t) = \sqrt{3} \qquad \textbf{(1.3.8)}$$

Le critère de Sines n'est donc utilisable que dans le cas de matériaux pour lesquels le rapport des limites d'endurance en flexion, f, et en torsion, t, est égal à $\sqrt{3}$. Ceci n'est généralement respecté que par les métaux ductiles [11].

$$\text{si :} \quad \begin{cases} I_E \geq I_{Ec} \rightarrow \text{rupture} \\ I_E < I_{Ec} \rightarrow \text{non-rupture} \end{cases} \qquad \textbf{(1.3.9)}$$

Le domaine de non-rupture a pour frontière dans l'espace (X1,X2), la droite définie par $I_E = I_{Ec} = 1$ (voir figure 1.3.1).

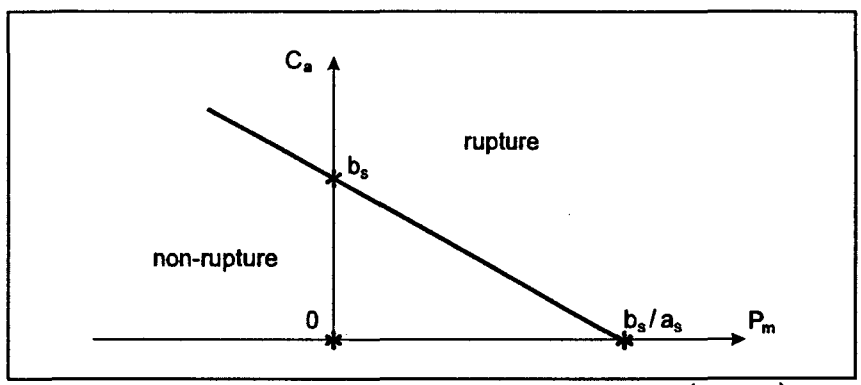


Figure 1.3.1 : « Représentation dans l'espace (P_m, C_a) du critère de Sines »

Ce critère est utilisable dans le cas de matériaux ductiles en endurance illimitée. Tout comme le critère de Dang-Van, il ne fait pas de distinction entre les trajets Ψ_1 et Ψ_2 présentés sur la figure 1.2.2, vis à vis du phénomène de fatigue.

1.3.2 - CRITERE DE CROSSLAND

Suite à un vaste programme expérimental [12], Crossland propose pour la contrainte équivalente, l'expression suivante :

$$\Sigma_{eq} = C_a + a_c \cdot P_{max} \quad \text{avec :} \quad P_{max} = \max_t(P(t)) \tag{1.3.10}$$

Le critère peut alors s'écrire :

$$I_{Ec} = 1 \text{ à la limite d'endurance} \tag{1.3.11}$$

$$I_E = \frac{X2 + a_c \cdot X1}{b_c} \tag{1.3.12}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} X1 = P_{max} \\ X2 = C_a \end{cases} \tag{1.3.13}$$

les constantes a_c et b_c sont définies par :

$$a_c = \left(t - \frac{f}{\sqrt{3}}\right) \Big/ \left(\frac{f}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad b_c = t \ , \tag{1.3.14}$$

où f et t représentent respectivement les limites d'endurance en flexion et torsion alternées.

$$\text{si :} \quad \begin{cases} I_E \geq I_{Ec} \rightarrow \text{rupture} \\ I_E < I_{Ec} \rightarrow \text{non} - \text{rupture} \end{cases} \tag{1.3.15}$$

Le domaine de non-rupture a pour frontière dans l'espace (X1, X2), la droite définie par $I_E = I_{Ec} = 1$ (voir figure 1.3.2).

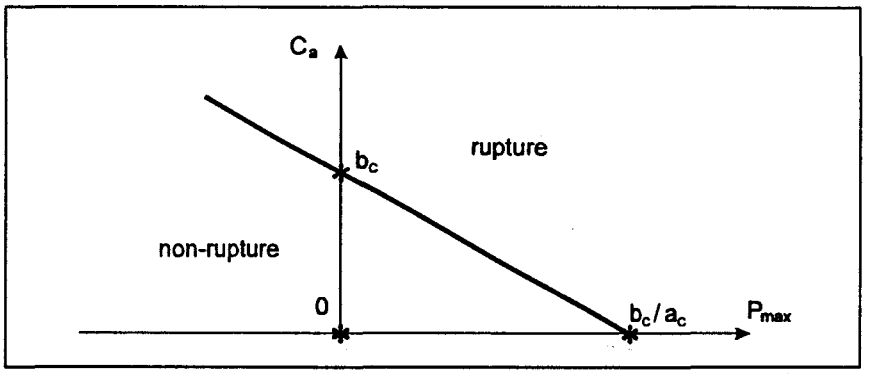


Figure 1.3.2 : « Représentation dans l'espace (P_{max}, C_a), du critère de Crossland »

De manière à tenir compte de l'effet bénéfique d'une pression hydrostatique négative, la constante a_c doit être strictement positive, ce qui impose la condition :

$$(f/t) < \sqrt{3} \qquad \textbf{(1.3.16)}$$

Le critère de Crossland reproduit correctement les tendances générales des résultats expérimentaux, et cela pour une gamme de matériaux beaucoup plus large que celui de Sines. Tous comme celui-ci, il est utilisable en endurance illimitée et ne permet pas de distinguer les trajets Ψ_1 et Ψ_2 donnés sur la figure 1.2.2.

1.3.3 - CRITERE DE FROUSTEY-LASSERRE

Cette formulation postule que dans le domaine de la fatigue polycyclique, le dommage est essentiellement lié à l'énergie élastique (voir [13], [14]).

Le tenseur des contraintes est décomposé en la somme d'un tenseur moyen et d'un tenseur alterné :

$$\Sigma_{ij}(t) = \Sigma_{m,ij} + \Sigma_{alt,ij}(t) \qquad \textbf{(1.3.17)}$$

Dans le domaine élastique, trois énergies statiques ainsi que trois énergies dynamiques sont définies :

* pour le chargement moyen :

- l'énergie élastique sphérique

$$W_{1,m} = \frac{1-2\cdot\nu}{6\cdot E}\cdot I1_m^2 \qquad \textbf{(1.3.18)}$$

- l'énergie élastique déviatorique

$$W_{2,m} = \frac{1+\nu}{E}\cdot J2_m \qquad \textbf{(1.3.19)}$$

- l'énergie élastique totale

$$W_m = W_{1,m} + W_{2,m} \qquad \textbf{(1.3.20)}$$

* pour le chargement dynamique : seules sont retenues les valeurs moyennes des énergies au cours d'un cycle.

- l'énergie élastique sphérique

$$W_{1,alt} = \frac{1-2\cdot\nu}{6\cdot E}\cdot\frac{1}{T}\cdot\int_0^T I1_{alt}^2(t)\cdot dt \qquad \textbf{(1.3.21)}$$

- l'énergie élastique déviatorique

$$W_{2,alt} = \frac{1+\nu}{E}\cdot\frac{1}{T}\cdot\int_0^T J2_{alt}(t)\cdot dt \qquad \textbf{(1.3.22)}$$

- l'énergie élastique totale

$$W_{alt} = W_{1,alt} + W_{2,alt} \qquad \textbf{(1.3.23)}$$

→ E et ν sont le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau.

→ $I1_m$ et $I1_{alt}$ sont les 1ers invariants des tenseurs de contrainte moyen et alterné.

→ $J2_m$ et $J2_{alt}$ sont les 2èmes invariants des tenseurs du déviateur moyen et alterné.

Ce critère repose sur deux idées principales :

* La prise en compte de la triaxialité du chargement (moyen et dynamique). Les degrés de triaxialité $d^\circ T_m$ et $d^\circ T_{alt}$ correspondent respectivement aux chargements moyen et dynamique. Ils sont définis par :

$$d^\circ T_m = \frac{W_{1,m}}{W_m} \qquad \text{et} \qquad d^\circ T_{alt} = \frac{W_{1,alt}}{W_{alt}} \qquad \textbf{(1.3.24)}$$

* La dissociation des influences des énergies élastiques statiques et dynamiques.

Après avoir observé expérimentalement l'évolution des différentes énergies conduisant à la rupture par fatigue, en fonction des degrés de triaxialité, et cela pour différents matériaux (acier doux, acier traité, fonte), les auteurs ont proposé un critère pouvant s'écrire sous la forme :

$$I_{Ec} = 1 \text{ à la limite d'endurance à N cycles} \qquad \textbf{(1.3.25)}$$

$$\begin{cases} I_E = \dfrac{a_{FL} \cdot X1^2 + X2^2}{b_{FL}} & \text{si} \quad X1 \geq 0 \\ I_E = \dfrac{-a_{FL} \cdot X1^2 + X2^2}{b_{FL}} & \text{si} \quad X1 < 0 \end{cases} \qquad \textbf{(1.3.26)}$$

avec

$$\begin{cases} X1 = \sqrt{\dfrac{2 \cdot E \cdot \left|1 - \varepsilon^{-\alpha}\right| \cdot (1 - d^\circ T_m) \cdot W_m}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \left[\alpha - \ln\left(1 + d^\circ T_m \cdot (\varepsilon^\alpha - 1)\right)\right]}} \cdot \text{sgn}(I1_m) \\ \text{sgn}(I1_m) = \begin{cases} +1 \text{ si } I1_m \geq 0 \\ -1 \text{ si } I1_m < 0 \end{cases} \\ X2 = \sqrt{\dfrac{2 \cdot E \cdot \alpha \cdot (1 - d^\circ T_{alt}) \cdot W_{alt}}{(1 + \nu) \cdot \left[\alpha - \ln\left(1 + d^\circ T_{alt} \cdot (\varepsilon^\alpha - 1)\right)\right]}} \end{cases} \qquad \textbf{(1.3.27)}$$

α est un paramètre caractérisant la sensibilité du matériau à la triaxialité.

$$\text{si :} \quad \begin{cases} I_E \geq I_{Ec} \rightarrow \text{rupture} \\ I_E < I_{Ec} \rightarrow \text{non-rupture} \end{cases} \qquad \textbf{(1.3.28)}$$

Le domaine de non-rupture n'est pas fermé.

1.3.4 - CRITERE DE FOGUE-BAHUAUD

Cette formulation est basée sur un travail de Simbürger [15], dans lequel un certain nombre d'hypothèses retenues conduisaient à une formulation restrictive (critère utilisable dans le cas de matériaux pour lesquels on a $(f/t) = \sqrt{3}$). De plus, ce critère était en désaccord avec un certain nombre de résultats expérimentaux (il prévoyait en effet l'influence d'une cission moyenne sur la limite d'endurance en torsion ...). Le lecteur trouvera en [1] et [16], les développements relatifs à ces remarques.

Considérons une facette de normale $\vec{n}$ sur laquelle est appliquée en O, la contrainte macroscopique $\underline{\Sigma}(t)\cdot\vec{n}$. Celle-ci a pour composante normale $\vec{N}(t)$ et pour composante tangentielle $\vec{C}(t)$. Fogué et Bahuaud définissent alors l'indicateur d'endommagement relatif à cette facette par :

$$I_{E(n)} = \frac{a_{FB}(N)\cdot \max_t\left(C_{alt}(t)\right) + b_{FB}(N)\cdot \max_t\left(N_{alt}(t)\right) + c_{FB}(N)\cdot N_m}{f(N)} \quad , \textbf{(1.3.29)}$$

où :

* $\max_t\left(C_{alt}(t)\right)$ représente l'amplitude de la scission macroscopique s'exerçant sur la facette au cours du cycle. Elle est définie par le rayon R du cercle circonscrit au trajet de charge, décrit par l'extrémité du vecteur $\vec{C}(t)$ au cours d'un cycle (voir figure 1.3.3).

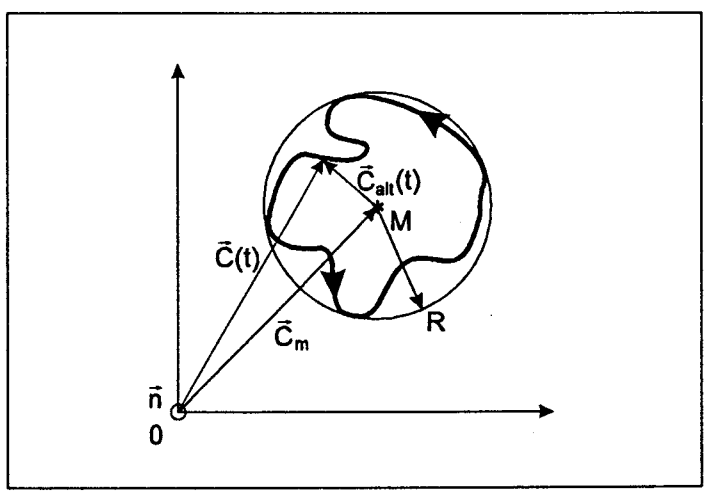


Figure 1.3.3 : « Cercle circonscrit au trajet de charge imposé sur une facette de normale $\vec{n}$ »

* $\vec{C}_m$ est la scission macroscopique moyenne, définie par $\vec{OM}$ ou M correspond au centre du cercle circonscrit au trajet de charge. Elle n'intervient pas dans la formulation de l'indicateur d'endommagement afin de traduire son influence négligeable en torsion.

* $\max_t(N_{alt}(t))$ est l'amplitude de la contrainte normale à la facette au cours du cycle. Elle est définie par :

$$\max_t(N_{alt}(t)) = \frac{1}{2}\cdot(N_{max} - N_{min}) \quad , \tag{1.3.30}$$

où N_{max} et N_{min} représentent respectivement les contraintes macroscopiques normales maximale et minimale sur l'ensemble du cycle.

* N_m est la contrainte normale moyenne à la facette au cours du cycle :

$$N_m = \frac{1}{2}\cdot(N_{max} + N_{min}) \tag{1.3.31}$$

La fonction de fatigue du critère est définie par :

$$I_E = \frac{1}{S}\cdot\int_S\left(I_{E(n)}\right)^2\cdot dS \quad , \tag{1.3.32}$$

où S représente l'aire de la sphère s de rayon unité ($S = 4\cdot\pi$). Elle correspond donc à une moyenne quadratique de tous les indicateurs d'endommagement sur l'ensemble des facettes passant par le point considéré.

A la limite d'endurance à N cycles, le critère s'écrit $I_E = I_{Ec} = 1$. Les paramètres $a_{FB}(N)$, $b_{FB}(N)$ et $c_{FB}(N)$ sont déterminés à partir d'essais d'endurance à N cycles :

$$a_{FB}(N) = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(12\cdot\frac{f^2(N)}{t^2(N)} - 21 + b_{FB}{}^2(N)\right)} \tag{1.3.33}$$

$$b_{FB}(N) = \sqrt{\frac{15-\sqrt{\Delta}}{2}} \quad \text{avec} \quad \Delta = 15^2\cdot\left[1 - \frac{8\cdot\left(\frac{f^2(N)}{t^2(N)} - 3\right)^2}{25}\right] \tag{1.3.34}$$

$$c_{FB}(N) = \frac{-\left(2\cdot a_{FB}(N) + 3\cdot b_{FB}(N)\right) + \sqrt{\left(2\cdot a_{FB}(N) + 3\cdot b_{FB}(N)\right)^2 + 3\cdot\left(60\cdot\frac{f^2(N)}{f_0^2(N)} - 15\right)}}{3} \tag{1.3.35}$$

$f(N)$, $t(N)$ et $f_0(N)$ sont respectivement les limites d'endurance à N cycles en traction alternée symétrique, torsion alternée symétrique et traction répétée.

Les conditions d'existence de ces paramètres ainsi que la traduction des constatations expérimentales, impliquent d'avoir :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{t(N)}{f(N)} < \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2} < \frac{f(N)}{f_0(N)} < 1 \tag{1.3.36}$$

Le critère de Fogué-Bahuaud est donc un critère d'endurance limitée à N cycles. Il a été confronté à différents résultats d'essais tirés de la littérature [9]. Ceux-ci ont permis de constater que ses prédictions sont plus correctes dans le cas où les directions principales des contraintes sont mobiles au cours du cycle, que dans le cas où ces mêmes directions sont fixes.

1.3.5 - CRITERE DE PAPADOPOULOS

Papadopoulos reprend les mêmes hypothèses que celles de Dang-Van exposées précédemment, à savoir un grain élastoplastique plongé dans une matrice élastique qui impose sa déformation. L'auteur considère que le grain subit un écrouissage cinématique et isotrope ce qui se traduit à l'échelle microscopique, en utilisant le critère de plasticité de Von-Mises, par :

$$\frac{1}{2}\cdot(\underline{s}(t)-\underline{a}(t)):(\underline{s}(t)-\underline{a}(t)) \le k^2(b) \ , \tag{1.3.37}$$

où :

* Le sigle (:) désigne le produit doublement contracté,
* $\underline{s}(t)$ est le déviateur des contraintes microscopiques,
* k est la limite d'élasticité en cisaillement du grain,
* $\underline{a}(t)$ et b sont respectivement des paramètres d'écrouissage cinématique et isotrope :

$$\underline{a}(t) = c\cdot\underline{\varepsilon}^{p}(t) \quad \text{avec} \quad c>0 \tag{1.3.38}$$

$$b = \int\left\|\varepsilon^{p}(t)\right\|\cdot dt = \int\sqrt{\underline{\dot{\varepsilon}}^{p}(t):\underline{\dot{\varepsilon}}^{p}(t)}\cdot dt \tag{1.3.39}$$

Compte tenu des relations de passage entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique (voir critère de Dang-Van), le critère de plasticité du grain s'écrit encore :

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\underline{S}(t)+\underline{\rho}(t)-\underline{a}(t)\right):\left(\underline{S}(t)+\underline{\rho}(t)-\underline{a}(t)\right) \le k^2(b) \ , \tag{1.3.40}$$

où :

* $\underline{S}(t)$ est le déviateur des contraintes macroscopiques, qui est égal au déviateur des contraintes élastiques microscopiques :

$$\underline{S}(t) = \underline{s}^{el}(t) \tag{1.3.41}$$

* $\underline{\rho}(t)$ est le tenseur des contraintes résiduelles microscopiques.

Comme Dang-Van, Papadopoulos associe l'endurance illimitée à l'état adapté du grain. Il s'agit donc d'évaluer cet état. Le théorème d'adaptation de Mandel et al. donne une condition nécessaire à l'adaptation qui s'énonce ainsi [1] :

S'il existe un instant t_0, *ainsi qu'un tenseur* $\underline{z}^*$ *fixe et une valeur* k^* *de la limite d'élasticité en cisaillement du grain, indépendante du temps, tels que :*

$$\forall t > 0, \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\underline{S}(t) - \underline{z}^*\right) : \left(\underline{S}(t) - \underline{z}^*\right) \leq \left(k^*\right)^2 \quad , \qquad \textbf{(1.3.42)}$$

alors le cristal s'adapte pourvu que $\underline{z}^*$ *soit suffisamment petit et que* k^* *soit suffisamment proche de la valeur initiale* k_0 *(correspondant à l'état vierge).*

La détermination de $\underline{z}^*$ et k^* peut se faire par une analyse élastoplastique incrémentale, mais Papadopoulos propose une méthode simple d'évaluation de ces quantités [1], de manière à ce qu'elles vérifient le théorème d'adaptation. Cette procédure permet d'obtenir la solution exacte dans le cas d'un chargement radial. Pour un chargement périodique général, l'état adapté est alors approximé.

La détermination de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet du déviateur des contraintes macroscopiques $\underline{S}(t)$ permet d'obtenir $\underline{z}^*$ et k^* : Le centre de cette hypersphère est défini par $\underline{z}^*$ et son rayon par $\sqrt{2} \cdot k^*$ (voir figure 1.3.4).

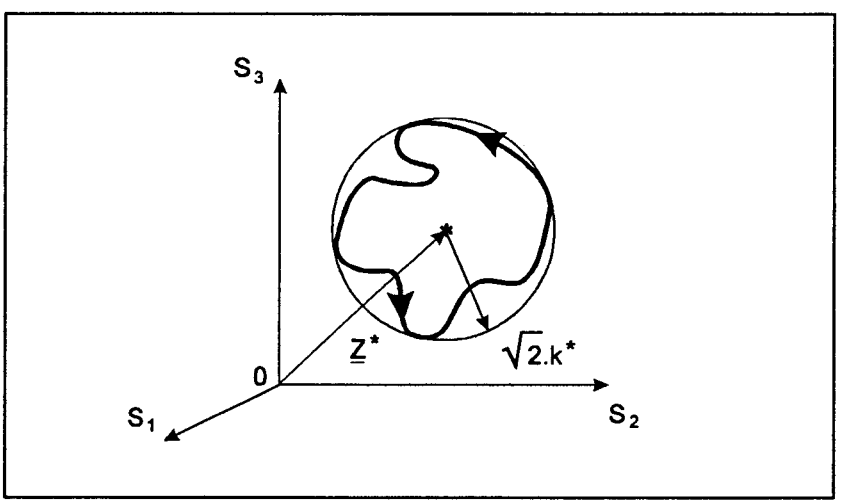


Figure 1.3.4 : « Construction de la plus petite hypersphère permettant la détermination des quantités $\underline{z}^*$ et k^* »

Papadopoulos propose alors le critère de non nucléation suivant :

$$k^* + a_P \cdot P_{max} \leq b_P \quad , \qquad \textbf{(1.3.43)}$$

où P_{max} représente la pression hydrostatique macroscopique maximale atteinte au cours du cycle. Les constantes a_P et b_P dépendent quant à elles du matériau :

$$a_P = \left(t - \frac{f}{\sqrt{3}}\right) \Big/ \left(\frac{f}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad b_P = t \tag{1.3.44}$$

t et *f* représentent respectivement les limites d'endurance en torsion et flexion alternées.

La condition $a_P > 0$ implique d'avoir :

$$(f/t) < \sqrt{3} \tag{1.3.45}$$

Ce critère peut encore s'écrire :

$$I_{Ec} = 1 \text{ à la limite d'endurance} \tag{1.3.46}$$

$$I_E = \frac{X2 + a_P \cdot X1}{b_P} \tag{1.3.47}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} X1 = \max_t(P(t)) = P_{max} \\ X2 = k^* \end{cases} \tag{1.3.48}$$

$$\text{si :} \quad \begin{cases} I_E \geq I_{Ec} \rightarrow \text{rupture} \\ I_E < I_{Ec} \rightarrow \text{non-rupture} \end{cases} \tag{1.3.49}$$

REMARQUE : Dans le cas d'un trajet affine, on a $k^* = \sqrt{J2}/2$, on retrouve alors le critère de Crossland.

Contrairement au critère de Dang-Van, celui de Papadopoulos ne nous informe pas sur la direction éventuelle d'amorçage d'une fissure, dans le cas où elle se produit. Par ailleurs, il est plus conservatif que celui de Dang-Van et permet un traitement numérique plus simple. Son domaine d'utilisation est restreint au cas de l'endurance illimitée ; il peut alors être appliqué à tout type de chargement. Les résultats auxquels il conduit sont excellents, hormis dans le cas de sollicitations fortement déphasées.

1.3.6 - CRITERE D' ELLYIN

Ellyin [17], suppose que la durée de vie d'une structure peut se décomposer en deux parties : la phase de nucléation de microfissures et la phase de propagation. Pour rendre compte de ces étapes, Ellyin propose de prendre comme paramètre, dans l'expression du critère de fatigue, la densité d'énergie de déformation par cycle.

Nous présenterons la procédure dans le cas d'un état uniaxial de contraintes, et nous donnerons son extension dans le cas des états multiaxiaux.

- Cas de contraintes uniaxiales :

La densité d'énergie de déformation par cycle est donnée par :

$$\Delta W^T = \Delta W^e + \Delta W^p \quad , \tag{1.3.50}$$

où ΔW^e et ΔW^p sont respectivement l'énergie élastique et plastique par cycle. La figure 1.3.5 illustre cette partition dans le cas d'un chargement uniaxial cyclique à déformations imposées :

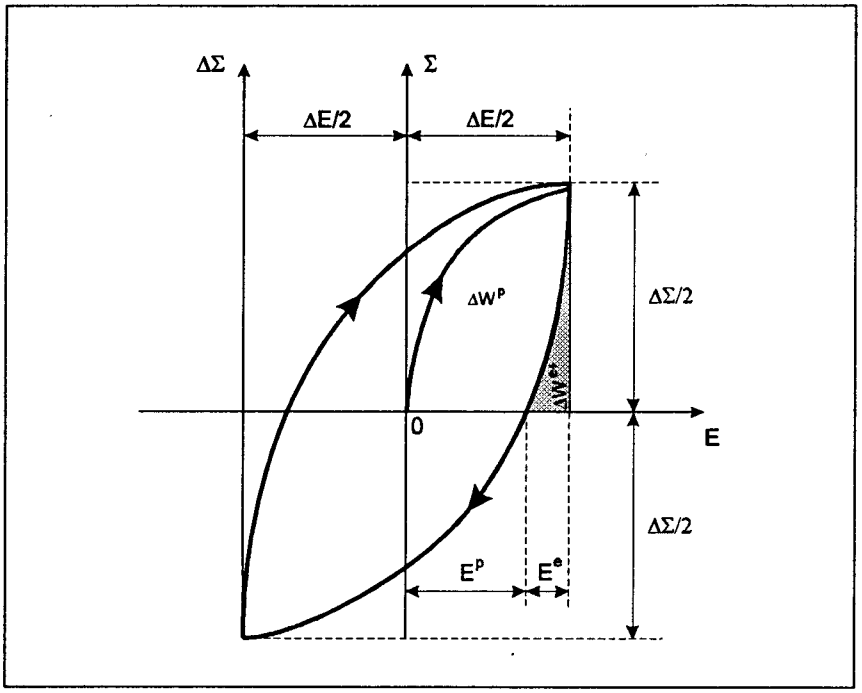


Figure 1.3.5 : « Décomposition énergétique selon Ellyin »

Lefebvre et Ellyin ont proposé une méthode permettant de calculer de manière simple les énergies mises en jeu. Cette méthode requiert la construction d'une « courbe maîtresse », obtenue en faisant coïncider les parties supérieures des boucles contrainte-déformation stabilisées [18].

→ ΔW^e s'obtient facilement à partir de la connaissance du module de Young, E, et de l'amplitude de contrainte :

$$\Delta W^e = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left(\frac{\Delta \Sigma}{2} + \Sigma_m \right)^2 \tag{1.3.51}$$

→ ΔW^p s'exprime quant à elle sous la forme :

$$\Delta W^p = A \cdot (\Delta \Sigma - \delta \Sigma_0) \cdot \Delta E^p + \delta \Sigma_0 \cdot \Delta E^p \tag{1.3.52}$$

* ΔE^p correspond à l'amplitude de déformation plastique.
* $\Delta \Sigma$ correspond à l'amplitude de contrainte.
* $\delta \Sigma_0$ caractérise un adoucissement ou un durcissement relatif.

L'énergie totale est ensuite reliée au nombre de cycles à rupture, N_R, par :

$$\Delta W^T = K_u \cdot N_R^{\alpha} + C_u \quad \text{avec} \quad \alpha < 0 \qquad \textbf{(1.3.53)}$$

En endurance illimitée, N_R devient infini et, α étant négatif, l'énergie plastique s'annule. L'énergie totale se réduit alors à l'énergie élastique correspondant à la limite d'endurance (C_u). Les paramètres K_u et α dépendent du matériau.

• Cas de contraintes multiaxiales :

Une extension de la courbe maîtresse au cas des états multiaxiaux de contraintes a été proposée [19]. Elle permet comme précédemment d'évaluer les quantités ΔW^e et ΔW^p.

→ ΔW^e est exprimée à l'aide de la loi de Hooke généralisée. De manière à ce que le critère soit sensible à l'effet d'une pression hydrostatique sur l'amorçage des fissures de fatigue (seule une pression positive facilite l'amorçage des fissures), les auteurs proposent de ne retenir de l'énergie élastique, que la partie relative aux contraintes de tension. Celle-ci est notée ΔW^{e+}.

→ ΔW^p a pour expression :

$$\Delta W^p = \int_{cycle} \Sigma_{ij} \cdot dE_{ij}^p \qquad \textbf{(1.3.54)}$$

L'incrément de déformation plastique est obtenu à partir de la relation :

$$E_{ij}^p = \frac{3}{2} \cdot \frac{S_{ij}}{E_t} \qquad \textbf{(1.3.55)}$$

* S_{ij} représente le déviateur des contraintes.
* E_t est le module tangent de la courbe contrainte équivalente - déformation équivalente.

Avec ces hypothèses, l'évaluation de ΔW^p n'est correcte que dans le cas d'un trajet radial ou « peu complexe ». L'expression utilisée pour le calcul de ΔW^p est similaire au cas uniaxial, exprimé à l'aide des grandeurs équivalentes.

De même que pour les chargements uniaxiaux, l'énergie totale calculée est ensuite reliée au nombre de cycles à rupture par la relation :

$$\Delta W^T = \Delta W^{e+} + \Delta W^p = K \cdot N_R^{\alpha} + C \ , \qquad \textbf{(1.3.56)}$$

où les paramètres K et α dépendent du matériau.

Ce critère a surtout été validé dans le domaine de la fatigue oligocyclique. Il présente des difficultés lors de sa généralisation aux grands nombres de cycles car les paramètres intervenant dans sa formulation sont difficilement mesurables.

1.4 - PRISE EN COMPTE DES CONTRAINTES RESIDUELLES

Les contraintes résiduelles sont les contraintes qui règnent dans une structure alors que celle-ci n'est soumise à aucun chargement extérieur. Elles sont donc auto-équilibrées.

Si, au moyen d'un chargement extérieur, on introduit dans un milieu continu un champ de déformation compatible (c'est à dire défini, dans le cas des petites déformations, par la partie symétrique du gradient du champ de déplacement), alors lors de la décharge aucune contrainte résiduelle ne sera créée. Si par contre ce champ de déformation n'est pas compatible alors des efforts intérieurs vont apparaître lors de la décharge, de manière à ce que le champ de déformation totale (défini par la somme du champ de déformation généré par ces efforts internes, et du champ de déformation initialement introduit), soit géométriquement compatible.

Des campagnes d'essais ont mis en évidence le rôle bénéfique que peuvent avoir des contraintes résiduelles de compression sur la tenue en fatigue des structures (voir [20] et [21]). Même si le rôle exact des contraintes résiduelles est encore mal connu, on peut cependant dire qu'elles ne sont pas étrangères aux observations expérimentales suivantes :

- La limite d'endurance d'une pièce comportant des contraintes résiduelles de compression est beaucoup plus importante que celle d'une pièce vierge.

- Les contraintes résiduelles de compression s'opposent à la propagation des fissures de fatigue.

- La prise en compte des contraintes résiduelles dans un critère de fatigue permet une meilleure adéquation avec les résultats expérimentaux observés.

Ces remarques mettent en évidence le rôle prépondérant des contraintes résiduelles sur la tenue en fatigue des structures. Il est donc nécessaire de pouvoir les déterminer, aussi bien par l'expérimentation que par la modélisation.

De nombreuses méthodes de mesures ont été développées. On peut citer : La diffraction X (voir [22] et [23]), qui offre l'avantage d'être non destructive mais qui se limite à des mesures locales en surface. Les ondes ultrasonores, qui sont également non destructives, permettent sous certaines conditions (homogénéité du matériau, faible anisotropie), la détermination de la contrainte résiduelle moyenne dans le domaine où elles se propagent [24]. Les méthodes destructives offrent la possibilité de mesures en profondeur : le gradient de contraintes est mesuré de proche en proche après enlèvement de matière. La fiabilité des résultats obtenus par cette procédure nécessite bien évidemment de ne pas générer de nouvelles contraintes résiduelles lors de l'enlèvement de matière. La méthode de dissolution présente cet avantage et sa mise en oeuvre ne nécessite que peu de frais. Cependant, son domaine d'application est restreint (états plans de contraintes, voir [25] et [26]).

Différents types de modélisation permettant le calcul des contraintes résiduelles ont été proposés. Celles-ci peuvent être analytique (cas du grenaillage [27]) ou numérique (analyse élastoplastique incrémentale [28]; analyse simplifiée des structures inélastiques [27]).

Dans la suite de ce travail, nous présenterons une méthode d'analyse de la réponse inélastique d'une structure, soumise à un chargement de service. Cette procédure, basée sur l'analyse simplifiée des structures, permet d'obtenir rapidement les champs inélastiques inconnus.

Skalli et Flavenot [29], ont montré que les critères de fatigue faisant intervenir dans leur formulation, la pression hydrostatique ainsi que le cisaillement maximum ou octaédrique, permettent de rendre compte correctement de l'influence des contraintes résiduelles. Voyons, sur un exemple simple, comment ceci est réalisé.

Considérons une structure dans laquelle règne un champ de contraintes résiduelles $\underline{R}$ constant. Cette structure est soumise à un chargement de service $\underline{\Sigma}^s(t)$ radial et périodique de période T. L'état de contraintes dans la structure est donc défini par :

$$\underline{\Sigma}(t) = \underline{\Sigma}^s(t) + \underline{R} \qquad \textbf{(1.4.1)}$$

$$\underline{S}(t) = \left(\underline{\Sigma}^s(t) + \underline{R}\right) - \frac{1}{3}\cdot \mathrm{tr}\left(\underline{\Sigma}^s(t) + \underline{R}\right)\cdot \underline{1} \qquad \textbf{(1.4.2)}$$

Supposons que le critère multiaxial retenu pour caractériser la tenue en fatigue de la pièce soit celui de Crossland :

$$I_E = \frac{C_a + a_c \cdot P_{max}}{b_c} \ , \qquad \textbf{(1.4.3)}$$

avec :

$$* \ C_a = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot \Delta\underline{S} : \Delta\underline{S}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\max_t \underline{S}(t) - \min_t \underline{S}(t)\right) : \left(\max_t \underline{S}(t) - \min_t \underline{S}(t)\right)} \ , \qquad \textbf{(1.4.4)}$$

* P_{max} est la pression hydrostatique maximale au cours du cycle,

* a_C et b_C sont deux caractéristiques du matériau.

Le champ $\underline{R}$ étant constant, il n'a donc aucune influence sur la valeur de C_a. Par contre, P_{max} dépend directement de $\underline{R}$. Si P^s_{max} désigne la pression hydrostatique maximale relative au chargement de service, on a alors :

$$P_{max} = P^s_{max} + \frac{1}{3}\cdot \mathrm{tr}(\underline{R}) \qquad \textbf{(1.4.5)}$$

La présence de ce champ de contraintes résiduelles $\underline{R}$ dans la pièce se traduit dans le repère (P_{max}, C_a), par une translation de la quantité $(tr(\underline{R})/3)$, parallèlement à l'axe des pressions (figure 1.4.1).

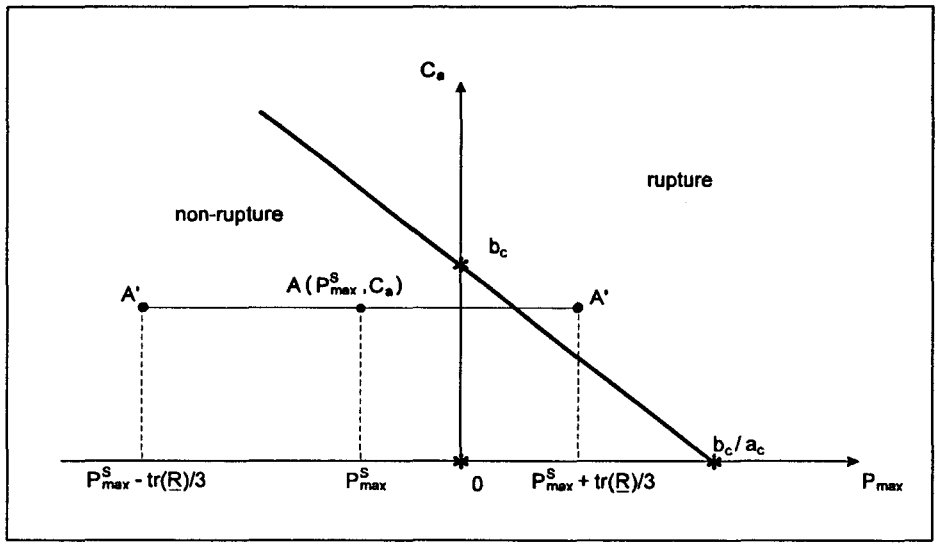


Figure 1.4.1 : « Influence des contraintes résiduelles sur la tenue en fatigue des structures »

Les contraintes résiduelles de compression tendent donc à déplacer le chargement vers le domaine de non-rupture (sécurité croissante). Alors qu'en traction elles le déplacent vers le domaine de rupture (sécurité décroissante).

1.5 - SYNTHESE

Le tableau 1.5.1 reprend l'ensemble des critères qui ont été présentés. Il indique pour chacun d'eux :

- Le type d'approche retenue.
- Le domaine de validité.
- Les variables intervenant dans sa formulation.
- Les données nécessaires à son utilisation.
- La nature du domaine de non-rupture.
- La capacité à rendre compte du peu d'influence sur la tenue en fatigue :
  - * D'une contrainte moyenne de torsion τ_m.
  - * D'un déphasage φ entre les sollicitations, dans le cas d'une flexion-torsion combinée [2].

Critère	Approche	Domaine de validité	Variables	Données nécessaires	Domaine de non-rupture	Représentatif de la non influence de :	
						τ_m	φ
Dang Van	locale	endurance illimitée	$P(t)$ $C_{alt}(t)$	t f	non-fermé	oui	non
Deperrois	locale	endurance illimitée	P_{max} $A(\Psi)$	t f	non-fermé	oui	oui
Galtier	locale	endurance limitée et illimitée	P_E $d^*T(t)$ P_{max}	$t(N)$ $f(N)$ R_m α	fermé	oui	oui
Robert Bahuaud	locale	endurance limitée et illimitée	$C_{alt}(t)$ $N_{alt}(t)$ N_m	$t(N)$ $f(N)$ $f_o(N)$	non-fermé	oui	oui
Sines	globale	endurance illimitée matériaux ductiles	P_m C_a	t f_o	non-fermé	oui	non
Crossland	globale	endurance illimitée	P_{max} C_a	t f	non-fermé	oui	non
Froustey Lasserre	globale	endurance limitée et illimitée	d^*T_m d^*T_{alt} W_m W_{alt}	t f R_m	non-fermé	non	oui
Fogué Bahuaud	globale	endurance limitée et illimitée	$C_{alt}(t)$ $N_{alt}(t)$ N_m	$t(N)$ $f(N)$ $f_o(N)$	non-fermé	oui	non
Papadopoulos	globale	endurance illimitée	P_{max} k^*	t f	non-fermé	oui	non
Ellyin	globale	fatigue oligocyclique endurance limitée et illimitée	ΔWe ΔWp	équation de la courbe maîtresse		non	

Tableau 1.5.1 : « Caractéristiques des critères de fatigue »

Avec :

$A(\Psi)$ et P_E : Mesures des courbes décrites respectivement par le tenseur déviateur des contraintes et le vecteur scission agissant sur une facette de normale $\vec{n}$

C_a : Amplitude du cisaillement octaédrique défini par $\sqrt{J2(t)}$

$C_{alt}(t)$: Norme de la partie alternée de la contrainte tangentielle macroscopique agissant sur une facette de normale $\vec{n}$

$d°T(t)$: Degré de triaxialité

$d°T_{alt}$: Degré de triaxialité relatif à un chargement alterné

$d°T_m$: Degré de triaxialité relatif à un chargement moyen

k^* : Limite d'élasticité en cisaillement défini à partir du rayon R de la plus petite hypersphère circonscrite au trajet du déviateur des contraintes macroscopiques

$N_{alt}(t)$: Norme de la partie alternée de la contrainte normale macroscopique agissant sur une facette de normale $\vec{n}$

N_m : Norme de la partie moyenne de la contrainte normale macroscopique agissant sur une facette de normale $\vec{n}$

$P(t)$: Pression hydrostatique

P_{max} : Pression hydrostatique maximale

P_m : Pression hydrostatique moyenne

W_m : Energie élastique relative à un chargement moyen

W_{alt} : Energie élastique relative à un chargement alterné

ΔWe : Energie élastique par cycle de chargement

ΔWp : Energie plastique par cycle de chargement

2 - LES PREVISIONS DE DUREE DE VIE

2.1 - L'ENDOMMAGEMENT

La théorie de l'endommagement [30], a pour objet de décrire l'évolution des phénomènes entre l'état vierge (matériau dépourvu de fissures ou de cavités à l'échelle microscopique) et l'amorçage de la fissure macroscopique. Le stade final de l'endommagement correspond à la rupture de l'élément, c'est à dire à l'existence d'une fissure macroscopique de la taille de cet élément (de 0,1 à 1 mm pour les métaux). Au-delà, c'est le domaine de la fissuration.

Seul l'endommagement de fatigue, c'est à dire l'endommagement dû à la répétition des sollicitations, sera abordé dans ce travail.

Les modifications des caractéristiques mécaniques d'un élément peuvent être interprétées en terme de variable d'endommagement. Les paramètres de dommage sont nombreux et leur choix est souvent lié au domaine dans lequel s'effectue l'étude en fatigue. On peut citer :

- La mesure de la plasticité dans le cas de la fatigue à faible nombre de cycles (fatigue oligocyclique), qui correspond à un nombre de cycles à rupture (N_R) inférieur à 50 000. Les déformations plastiques interviennent alors de manière prépondérante.

- La variation de la limite d'endurance pour les grands nombres de cycles $(N_R > 50\,000)$. Les déformations sont alors quasi-élastiques. Lorsque N_R est supérieur à 10^7, on considère que la durée de vie est illimitée, c'est à dire que les sollicitations sont inférieures à la limite d'endurance.

Les paramètres de dommage les plus fréquemment rencontrés dans la bibliographie sont :

- La fraction de vie (utilisée par exemple dans la loi linéaire d'endommagement de Miner).
- La surface effective (Lemaître - Chaboche).
- La déformation plastique cumulée (Papadopoulos).
- L'énergie de déformation (Ellyin).

2.2 - LES LOIS D'ENDOMMAGEMENT DE FATIGUE

Le cas le plus général de sollicitations pouvant être imposées à un système mécanique est un chargement multiaxial aléatoire. Les sollicitations uniaxiales

aléatoires forment un cas particulier de ce cas général. Les lois d'endommagement peuvent être classées suivant deux catégories :

– La première regroupe les lois d'endommagement ne pouvant être utilisées que dans le cas de sollicitations uniaxiales. Elles sont appelées lois d'endommagement uniaxiales.

– La seconde englobe l'ensemble des lois d'endommagement applicables dans le cas de sollicitations multiaxiales. Elles sont appelées lois d'endommagement multiaxiales.

2.2.1 - LES LOIS UNIAXIALES

2.2.1.1 - loi de Miner

Cette loi est sans aucun doute la plus connue et la plus utilisée en bureau d'étude, du fait de sa simplicité. Elle suppose que le dommage se cumule de manière linéaire. Le paramètre de dommage retenu dans cette formulation est la fraction de vie définie par :

$$D_i = N_i / N_{R_i} \quad , \tag{2.2.1}$$

où N_i est le nombre de cycles effectués avec un chargement donné pour lequel le nombre de cycles à rupture serait N_{R_i}. La condition de rupture s'écrit [31] :

$$\sum_i D_i = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_i \frac{N_i}{N_{R_i}} = 1 \tag{2.2.2}$$

Cette loi rend bien compte du fait que les niveaux de contraintes inférieurs à la limite d'endurance sont supposés non endommageants.

Le dommage induit par un cycle de sollicitation est donc fonction de la durée de vie N_{R_i} du matériau pour le cycle en question. Une évaluation de cette quantité peut être obtenue à partir de la connaissance de la courbe de Wöhler relative aux conditions de chargement.

Cette courbe représente la contrainte dynamique Σ_a (contrainte maximale, contrainte minimale ou encore amplitude de contrainte), en fonction du nombre de cycles N à rupture (reporté sur une échelle logarithmique), pour une contrainte moyenne Σ_m fixée (figure 2.2.1).

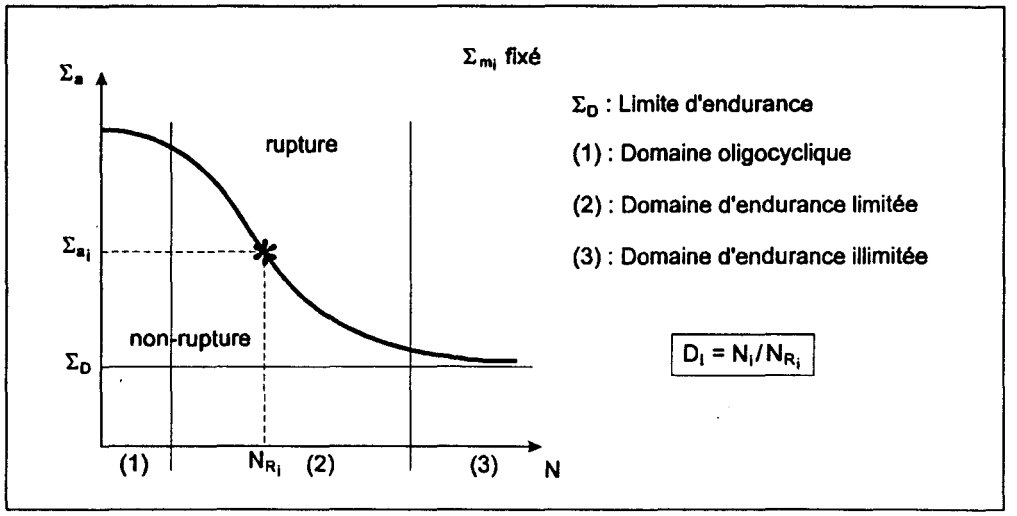


Figure 2.2.1 : « Allure de la courbe de Wöhler »

Dans le cas où la courbe de Wöhler dont on dispose n'est pas relative à la contrainte moyenne appliquée Σ_{ma} (c'est à dire $\Sigma_{ma} \neq \Sigma_{mi}$), il est alors nécessaire d'utiliser un diagramme de Haigh, de manière à pouvoir se ramener au cas précédent. Ce diagramme permet de rendre compte de l'influence d'une contrainte moyenne sur la tenue en fatigue du matériau. Il représente la contrainte dynamique Σ_a, en fonction de la contrainte moyenne Σ_m, pour un nombre de cycles à rupture N, fixé (figure 2.2.2).

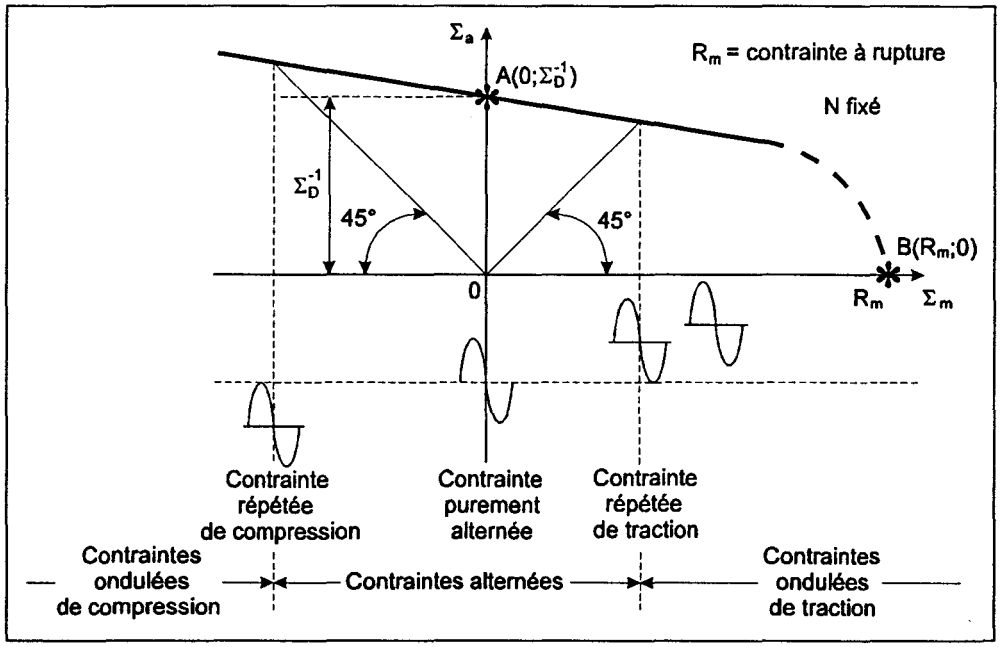


Figure 2.2.2 : « Diagramme de Haigh »

Le diagramme de Haigh permet ainsi de déterminer le cycle de chargement de contrainte moyenne Σ_{mi}, qui soit équivalent du point de vue de la durée de vie, au cycle imposé de contrainte moyenne Σ_{ma}.

De nombreuses modélisations de ces courbes ont été proposées. On a ainsi :

- Pour la courbe de Wöhler :
    * Le Modèle de Wöhler
    * Le modèle de Basquin
    * Le modèle de Bastenaire ...
- Pour le diagramme de Haigh :
    * La droite de Goodman
    * La parabole de gerber
    * Le modèle bilinéaire du CETIM [32].

On trouvera en [8] une présentation de ces différents modèles ainsi que l'incidence de leur choix sur l'estimation de la durée de vie en fatigue. L'auteur a ainsi montré à partir de résultats d'essais de fatigue fournis par l'IRSID sur l'acier HR55, que le choix des modèles retenus conduisait à des prévisions de durée de vie variant dans un rapport de un à soixante !

2.2.1.2 - Loi de Lemaître-Chaboche

Cette loi repose sur les notions de fraction de vie (N_i/N_{Ri}) et de contrainte effective $(\tilde{\Sigma})$ introduite par Rabotnov [30].

S : aire d'une section d'un élément de volume endommagé de normale $\vec{n}$.

S_D : aire totale des traces des défauts (cavités, fissures).

Par définition (voir figure 2.2.3) :

$$D_n = (S_D/S) \qquad \textbf{(2.2.3)}$$

D_n correspond à la mesure mécanique de l'endommagement local relatif à la direction $\vec{n}$. Il permet de caractériser l'état d'endommagement.

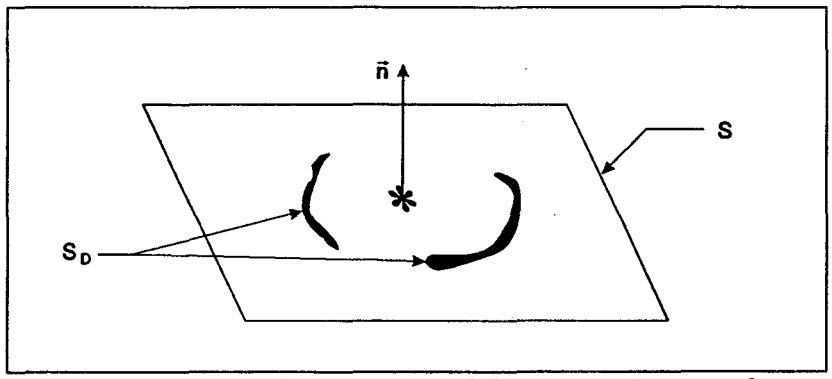


Figure 2.2.3 : « Section d'un élément endommagé »

La contrainte effective représente la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux efforts. Dans le cas d'un endommagement isotrope (c'est à dire : $D_n = D \quad \forall \vec{n}$), Elle est définie par :

$$\tilde{\Sigma} = \frac{\Sigma}{1-D} \tag{2.2.4}$$

L'expérience montre que les courbes d'évolution du dommage en fonction de la fraction de vie (N_i/N_{Ri}), peuvent dépendre du niveau de sollicitation imposé. Il n'y a donc pas de cumul linéaire du dommage. La figure 2.2.4 permet d'illustrer ces propos. Elle est relative à un essai de fatigue à deux niveaux de contrainte.

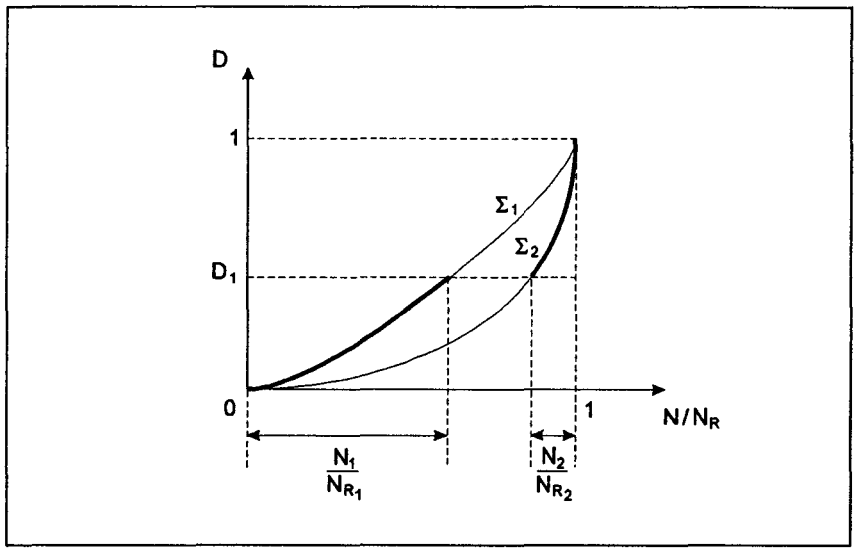


Figure 2.2.4 : « Loi de cumul non linéaire du dommage »

On constate à la vue de cette courbe que le cumul du dommage n'est pas linéaire, en effet on a :

$$\sum_i \frac{N_i}{N_{Ri}} = \frac{N_1}{N_{R_1}} + \frac{N_2}{N_{R_2}} \neq 1 \tag{2.2.5}$$

Une façon simple de rendre compte de cette remarque dans la formulation de l'évolution du dommage consiste à rendre non séparables les variables de chargement et la variable de dommage. Les auteurs ont proposé l'expression suivante :

$$\partial D = \left[1-(1-D)^{\beta+1}\right]^{\alpha} \cdot \left[\frac{\Sigma_a}{M_0 \cdot (1-b \cdot \Sigma_m) \cdot (1-D)}\right]^{\beta} \cdot \partial N \ , \tag{2.2.6}$$

où :

* D est le dommage représentant l'état actuel du matériau
* ∂D est l'accroissement de dommage dû à ∂N

* Σ_a est l'amplitude de contrainte du cycle

* Σ_m est la contrainte moyenne du cycle

* β, M_0 et b sont des constantes liées au matériau

* α est un paramètre dépendant des caractéristiques de chargement ainsi que du matériau :

$$\alpha = 1 - a \cdot \frac{\left\langle \Sigma_a - \Sigma_D^{-1} \cdot (1 - b \cdot \Sigma_m) \right\rangle}{R_m - (\Sigma_a + \Sigma_m)} \qquad \textbf{(2.2.7)}$$

$$\langle X \rangle = \begin{cases} X \text{ si } X > 0 \\ 0 \text{ si } X \leq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2.2.8)}$$

* R_m est la contrainte de rupture statique

* Σ_D^{-1} est la limite d'endurance purement alternée :

$$\Sigma_a = \Sigma_D^{-1} \cdot (1 - b \cdot \Sigma_m) \qquad \textbf{(2.2.9)}$$

Cette expression correspond à une modélisation linéaire du diagramme de Haigh.

* a est une constante identifiée à partir de mesures de dommage.

L'évolution du dommage est donc non seulement fonction de l'état de contrainte appliqué, mais aussi de l'état de dommage de la structure étudiée. **Ceci permet de rendre compte de l'historique de chargement.**

La loi différentielle d'endommagement peut encore s'écrire sous la forme :

$$\partial N = \left[\frac{M_0 \cdot (1 - b \cdot \Sigma_m)}{\Sigma_a} \right]^{\beta} \cdot \frac{(1-D)^{\beta}}{\left[1 - (1-D)^{\beta+1} \right]^{\alpha}} \cdot \partial D \qquad \textbf{(2.2.10)}$$

Le cumul du dommage est obtenu en intégrant cette relation pour chaque cycle successif de chargement. Deux cas sont à distinguer, suivant l'expression de α.

Premier cas :

Le cycle de chargement, caractérisé par les quantités Σ_m et Σ_a, est tel que :

$$\Sigma_a \leq \Sigma_D^{-1} \cdot (1 - b \cdot \Sigma_m) , \qquad \textbf{(2.2.11)}$$

c'est à dire que l'amplitude de contrainte Σ_a est inférieure à la limite d'endurance Σ_D relative à Σ_m. On a alors :

$$\alpha = 1 \Rightarrow \partial N = \left[\frac{M_0 \cdot (1 - b \cdot \Sigma_m)}{\Sigma_a} \right]^{\beta} \cdot \frac{(1-D)^{\beta}}{1 - (1-D)^{\beta+1}} \cdot \partial D \qquad \textbf{(2.2.12)}$$

En posant :

$$X = 1-(1-D)^{\beta+1} \tag{2.2.13}$$

il vient :

$$\partial X = (\beta+1)\cdot(1-D)^{\beta}\cdot\partial D \tag{2.2.14}$$

d'où :

$$\partial N = K\cdot\frac{\partial X}{X} \quad \text{avec} \quad K=\left[\frac{M_0\cdot(1-b\cdot\Sigma_m)}{\Sigma_a}\right]^{\beta}\cdot\frac{1}{\beta+1} \tag{2.2.15}$$

Le cycle (Σ_m, Σ_a) fait donc passer la variable X de la valeur X_i à la valeur X_j suivant la relation :

$$X_j = X_i\cdot e^{\gamma K}, \tag{2.2.16}$$

c'est à dire, en terme d'endommagement :

$$1-\left(1-D_j\right)^{\beta+1} = \left[1-\left(1-D_i\right)^{\beta+1}\right]\cdot e^{(\beta+1)\cdot\left[\frac{\Sigma_a}{M_0\cdot(1-b\cdot\Sigma_m)}\right]^{\beta}} \tag{2.2.17}$$

Il est à noter que dans le cas où le dommage à l'état (i) est nul ($D_i = 0$), l'application d'un cycle de chargement de ce type ($\Sigma_a < \Sigma_D$) ne modifie en rien l'état d'endommagement de la structure ($D_j = 0$). **Ces cycles n'endommagent le matériau qu'une fois le dommage initié** ($D_i \neq 0$).

Second cas :

Le cycle (Σ_m, Σ_a) est tel que :

$$\Sigma_a > \Sigma_D^{-1}\cdot\left(1-b\cdot\Sigma_m\right) \tag{2.2.18}$$

On a alors :

$$\alpha \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \partial N = \left[\frac{M_0\cdot(1-b\cdot\Sigma_m)}{\Sigma_a}\right]^{\beta}\cdot\frac{(1-D)^{\beta}}{\left[1-(1-D)^{\beta+1}\right]^{\alpha}}\cdot\partial D \tag{2.2.19}$$

En posant :

$$Y = \left[1-(1-D)^{\beta+1}\right]^{1-\alpha}, \tag{2.2.20}$$

il vient :

$$\partial Y = (1-\alpha)\cdot(\beta+1)\cdot\frac{(1-D)^{\beta}}{\left[1-(1-D)^{\beta+1}\right]^{\alpha}}\cdot\partial D \tag{2.2.21}$$

d'où :

$$\partial N = K \cdot \partial Y \quad \text{avec} \quad K = \frac{1}{(1-\alpha)\cdot(\beta+1)} \cdot \left[\frac{M_0 \cdot (1-b\cdot\Sigma_m)}{\Sigma_a}\right]^{\beta} \qquad \textbf{(2.2.22)}$$

Le cycle (Σ_m, Σ_a) fait donc passer la variable Y de la valeur Y_i à la valeur Y_j suivant la relation :

$$Y_j - Y_i = \frac{1}{K} \ , \qquad \textbf{(2.2.23)}$$

c'est à dire en terme d'endommagement :

$$\left[1-\left(1-D_j\right)^{\beta+1}\right]^{1-\alpha} - \left[1-\left(1-D_i\right)^{\beta+1}\right]^{1-\alpha} = (1-\alpha)\cdot(\beta+1)\cdot\left[\frac{\Sigma_a}{M_0\cdot(1-b\cdot\Sigma_m)}\right]^{\beta} \qquad \textbf{(2.2.24)}$$

L'intégration de la loi d'endommagement pour D variant de 0 (matériau vierge) à 1 (amorçage d'une fissure), permet d'obtenir la durée de vie N_R relative au chargement cyclique caractérisé par Σ_m et Σ_a. On obtient :

$$N_R = \frac{1}{(1-\alpha)\cdot(\beta+1)} \cdot \left[\frac{M_0 \cdot (1-b\cdot\Sigma_m)}{\Sigma_a}\right]^{\beta} = K \qquad \textbf{(2.2.25)}$$

$$\Rightarrow \quad \partial N = N_R \cdot \partial Y \qquad \textbf{(2.2.26)}$$

L'expression du dommage après N cycles de sollicitation est obtenue en intégrant la loi d'endommagement, le dommage variant entre 0 et D. on obtient :

$$D = 1 - \left[1 - \left(\frac{N}{N_R}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]^{\frac{1}{\beta+1}} \qquad \textbf{(2.2.27)}$$

La loi d 'endommagement de Lemaître-Chaboche permet de rendre compte du comportement réel d'un matériau d'une manière plus correcte que la loi de Miner.

2.2.2 - LES LOIS MULTIAXIALES

On peut distinguer deux approches :

- La première consiste à coupler une loi d'endommagement uniaxiale et un critère de fatigue multiaxial.

- La seconde, comme pour les lois d'endommagement uniaxiales, repose sur le choix d'un ou plusieurs paramètres de dommage dont il faut suivre l'évolution au cours du chargement.

Voyons à présent ces deux approches :

2.2.2.1 - Par couplage

De nombreux travaux dans ce domaine ont été mené par l'équipe de chercheurs de l'INSA de Lyon [9], [33]. Ces auteurs ont proposé une méthode implicite de calcul de la durée de vie dans le cas d'une structure soumise à un chargement multiaxial d'amplitude variable. Cette méthode est basée sur le couplage d'une loi d'endommagement uniaxiale (loi de Miner ou de Lemaître-Chaboche) et d'un critère de fatigue multiaxial (critère de Robert-Bahuaud ou de Fogué-Bahuaud).

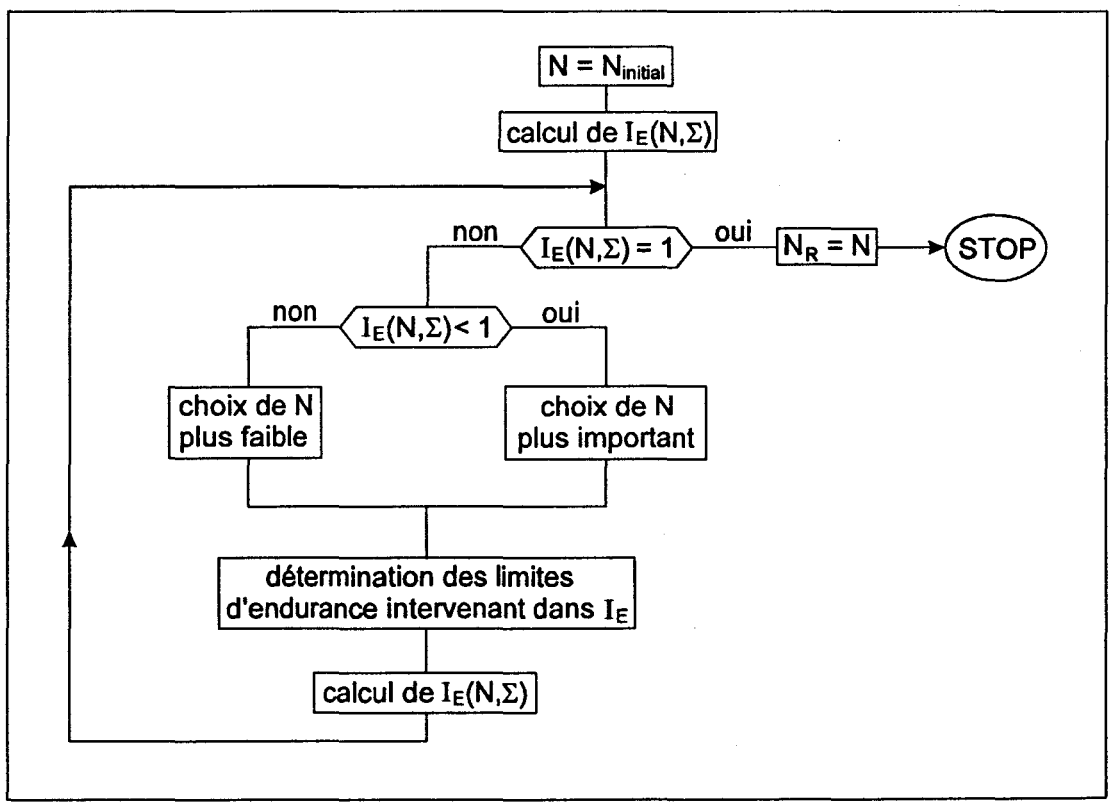
Son principe est le suivant :

Pour chaque cycle successif de sollicitation, le critère de fatigue multiaxial permet de calculer la contrainte équivalente et la durée de vie correspondante, grâce aux caractéristiques du matériau. La fonction d'endommagement I_E dépend en effet de limites d'endurance à N cycles du matériau ainsi que du chargement Σ. La durée de vie N_R est solution du critère :

$$I_E(N,\Sigma) = 1 \qquad \textbf{(2.2.28)}$$

$$\begin{cases} N < N_R \rightarrow I_E < 1 \\ N > N_R \rightarrow I_E > 1 \end{cases} \quad \text{(car on suppose avoir } \frac{\partial I_E}{\partial N} > 0\text{)} \qquad \textbf{(2.2.29)}$$

Ceci peut être résumé à l'aide de l'organigramme suivant :



Le dommage induit par le cycle de sollicitation considéré est ensuite déterminé à partir de la loi d'endommagement uniaxiale. Cette procédure est ensuite réitérée pour le cycle de chargement suivant, et cela jusqu'à ce qu'il y ait amorçage d'une fissure, c'est à dire jusqu'à ce que le dommage D atteigne la valeur 1.

2.2.2.2 - Par choix d'une variable

Parmi les lois utilisant ce concept, on peut citer les approches adoptées par Papadopoulos ou encore Ellyin.

2.2.2.2.1 - Loi de Papadopoulos

Alors que la loi d'endommagement de Lemaître-Chaboche s'attache à décrire la phase de formation d'une fissure macroscopique par coalescence de microfissures, la loi de Papadopoulos s'intéresse quant à elle à la détermination du nombre de cycles de chargement conduisant à la nucléation d'une microfissure de fatigue, c'est à dire à la rupture du cristal (voir [1]). L'auteur attribue en fait cette rupture à l'accumulation de la microdéformation plastique.

En endurance illimitée, la condition de non nucléation s'écrit :

$$k^* \leq k_{lim} \quad , \tag{2.2.30}$$

* k^* est la limite d'élasticité en cisaillement du cristal dans son état adapté. Sa définition est donnée au paragraphe 1.3.5.

* k_{lim} représente le seuil de non nucléation d'une microfissure de fatigue. Cette variable est encore appelée limite d'endurance généralisée : elle correspond à la limite d'endurance du matériau relative aux conditions de chargement.

Dans le cas de chargements « similaires », la valeur seuil, k_{lim}, est unique.

REMARQUE :

Selon Papadopoulos, des chargements sont dits « similaires » (voir [1]), s'ils admettent la même pression moyenne, P_m, et le même rapport $\left(k^*/P_a\right)$, où P_a représente l'amplitude de la pression hydrostatique.

k_{lim} est définie à partir de l'expression suivante (voir figure 2.2.5) :

$$k_{lim} = \frac{-a_p \cdot P_m + b_p}{a_p + \dfrac{k^*}{P_a}} \cdot \frac{k^*}{P_a} \tag{2.2.31}$$

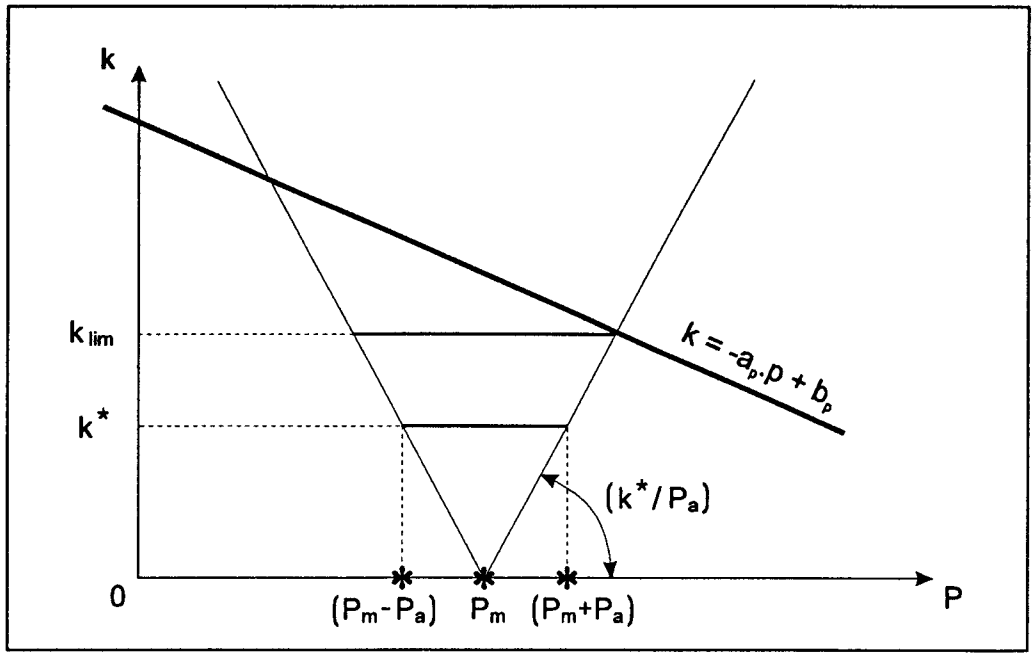


Figure 2.2.5 : « Définition de la limite d'endurance généralisée k_{lim} »

Le comportement à l'écrouissage du cristal est modélisé à l'aide des trois phases suivantes : durcissement, saturation et enfin adoucissement. L'auteur admet de plus que le cristal se rompt dès l'instant où sa limite d'élasticité en cisaillement k, qui est fonction de l'état d'endommagement donc du nombre de cycles, atteint la valeur k = 0.

La fonction de charge retenue est définie à l'aide du critère de Von Mises :

$$f(\underline{\sigma}) = \frac{1}{2}\cdot\left(\underline{s}(t)-\underline{a}(t)\right):\left(\underline{s}(t)-\underline{a}(t)\right)-k^2 \leq 0 \quad , \qquad \textbf{(2.2.32)}$$

Les règles d'écrouissage isotrope et cinématique sont supposées linéaires.

L'analyse des travaux menés par Winter [34], a conduit Papadopoulos à supposer que la limite d'élasticité en cisaillement du cristal, atteinte dans la phase de saturation (notée k_S), est égale à la limite d'endurance généralisée, k_{lim}, associée au type de chargement appliqué.

La limite d'élasticité en cisaillement du cristal évolue donc de la valeur initiale k_0 à la valeur k_S (phase de saturation), pour ensuite décroître et finalement atteindre la valeur $k(N_R) = 0$.

Dans le cas d'un chargement cyclique proportionnel, Papadopoulos a déterminé analytiquement l'expression de la microdéformation plastique cumulée, $\in^p$, en fonction du nombre de cycles appliqués et des caractéristiques du chargement macroscopique. L'auteur considère que la rupture d'un cristal est essentiellement induit par l'accumulation des microdéformations plastiques. Le paramètre de dommage retenu est donc tout naturellement identifié à la microdéformation plastique cumulée, $\in^p$.

La loi d'évolution de cette variable d'endommagement est donnée par :

$$\dot{D} = \sqrt{\underline{\dot{\varepsilon}}^p : \underline{\dot{\varepsilon}}^p} = \dot{\in}^p \qquad \textbf{(2.2.33)}$$

On a :

$$D(N) = \in^p(N), \qquad \textbf{(2.2.34)}$$

où D(N) désigne la valeur de D après N cycles de sollicitation.

La valeur du dommage atteinte à la nucléation d'une fissure est donc égale à la microdéformation plastique cumulée à la rupture du cristal $\in_R^p$.

La figure 2.2.6 indique l'évolution de la limite d'élasticité en cisaillement du cristal , k, en fonction de la microdéformation plastique cumulée, $\in^p$, pour un cristal dont le comportement à l'écrouissage est modélisé à l'aide de trois phases (durcissement, saturation et adoucissement).

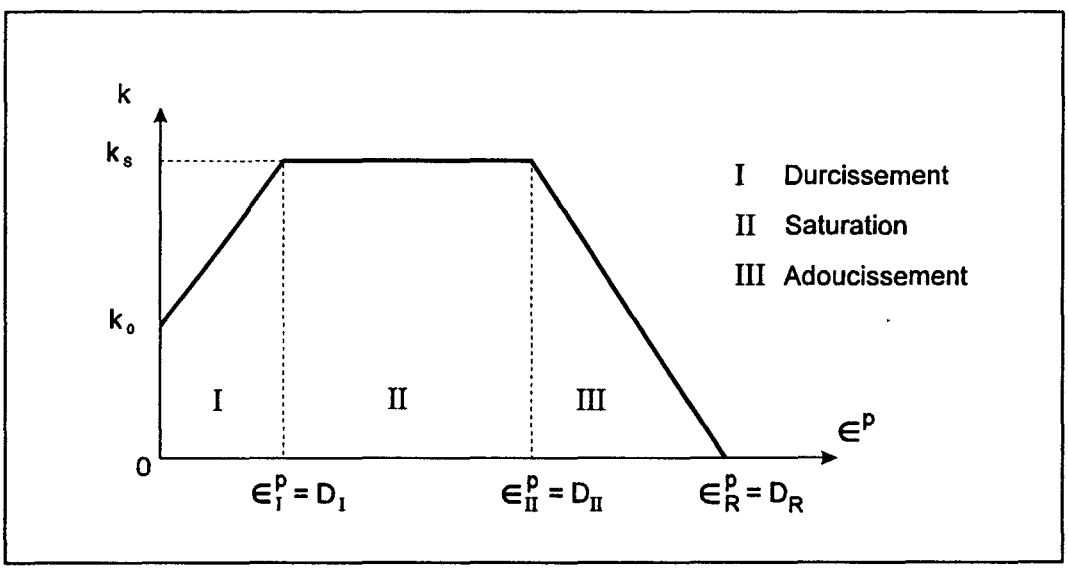


Figure 2.2.6 : « Evolution de k en fonction de $\in^p$ pour un cristal à trois phases de comportement »

Cette variable d'endommagement peut être normalisée en choisissant :

$$D_n(N) = \frac{D(N)}{D_R} = \frac{\in^p(N)}{\in_R^p} \qquad \textbf{(2.2.35)}$$

La microdéformation plastique cumulée à rupture, $\in_R^p$, dépend du chargement imposé et n'est donc pas une constante du matériau. Son utilisation peut donc conduire, dans le cas d'un chargement constitué par une succession de cycles de sollicitation différents, à des sauts de discontinuité pour $D_n(N)$. Toutefois, Papadopoulos montre que dans le cas de chargements « similaires », la quantité

$\in_R^p$ reste inchangée. La variable d'endommagement normalisée, $D_n(N)$, peut alors être utilisée. La figure 2.2.7 représente son évolution en fonction du rapport (N/N_R), pour un cristal dont le comportement à l'écrouissage est modélisé à l'aide de trois phases.

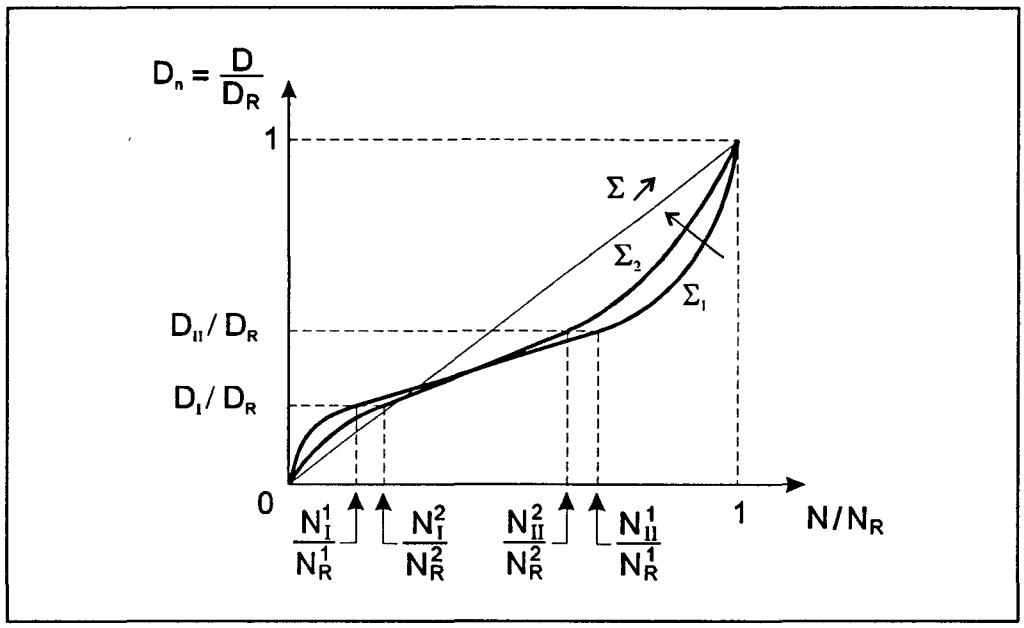


Figure 2.2.7 : « Courbes de dommage normalisé »

REMARQUE :

Dans le cas d'un chargement proportionnel respectant la condition de non nucléation d'une fissure de fatigue ($k^* \leq k_{lim}$), Papadopoulos montre alors que le dommage, D, est tel que :

$$\lim_{N\to\infty} D(N) = \frac{1}{g}\cdot\left(\frac{\|\Delta \underline{S}\|}{2\sqrt{2}} - k_0\right) \leq \frac{k_{lim} - k_0}{g} = D_I \qquad \textbf{(2.2.36)}$$

* g est le module d'écrouissage isotrope (phase de durcissement).

* $\|\Delta \underline{S}\|$ est le tenseur variation du déviateur des contraintes macroscopiques.

Inversement, le respect de la relation (2.2.36) implique que le cristal demeure en phase de durcissement et donc, sa limite d'élasticité, lorsque le nombre de cycles tend vers l'infini, reste inférieur à k_{lim}.

$$k^* \leq k_{lim} \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} D(N) \leq D_I \qquad \textbf{(2.2.37)}$$

Un point faible du modèle proposé en [1] est lié au concept de cristal « moyen » obéissant au critère de Von Mises. Pour remédier à ce problème, Papadopoulos a utilisé pour le cristal, un critère de plasticité découlant de la loi de Schmid (voir [35]).

La loi d'écoulement, supposée isotrope et cinématique, est donnée par la relation :

$$f(\underline{\tau},\underline{b},\tau_y) = (\underline{\tau}-\underline{b})\cdot(\underline{\tau}-\underline{b}) - \tau_y^2 \leq 0 \ , \qquad \textbf{(2.2.38)}$$

* Les règles d'écrouissage isotrope et cinématique sont supposées linéaires.
* $\underline{\tau}$ est la cission microscopique associée au système de glissement considéré, $(\vec{n},\vec{m})$.
* $\underline{b}$ est un paramètre d'écrouissage cinématique.
* τ_y est la limite d'écoulement du cristal, associée à la direction étudiée.

L'auteur s'est intéressé au problème de la limite d'endurance des métaux sous des conditions de chargement multiaxial. Lorsque les charges appliquées sur un composant sont de l'ordre de la limite d'endurance (donc relativement faibles), Papadopoulos suppose que pour chaque grain se déformant plastiquement, un seul système de glissement peut être activé.

Soit un cristal dont le système de glissement est défini par la normale, $\vec{n}$, au plan P_n de glissement ainsi que par sa direction, $\vec{m}$, de glissement. La contrainte $\underline{\Sigma}(t)\cdot\vec{n}$ agissant sur ce plan P_n a pour composantes $\underline{N}(t)$ (contrainte normale) et $\underline{C}(t)$ (contrainte tangentielle). Dans le cas d'un chargement périodique complexe, l'extrémité de $\underline{C}(t)$ décrit dans P_n une courbe fermée Ψ. Soit $\underline{T}(t)$ la projection de $\underline{C}(t)$ sur $\vec{m}$. $\underline{T}(t)$ représente la cission macroscopique associée au système de glissement $(\vec{n},\vec{m})$.

$$\underline{T}(t) = (\underline{C}(t)\cdot\vec{m})\cdot\vec{m} \qquad \textbf{(2.2.39)}$$

Comme le montre la figure 2.2.8, $\underline{T}(t)$ oscille entre les valeurs $\underline{T}^A$ et $\underline{T}^B$.

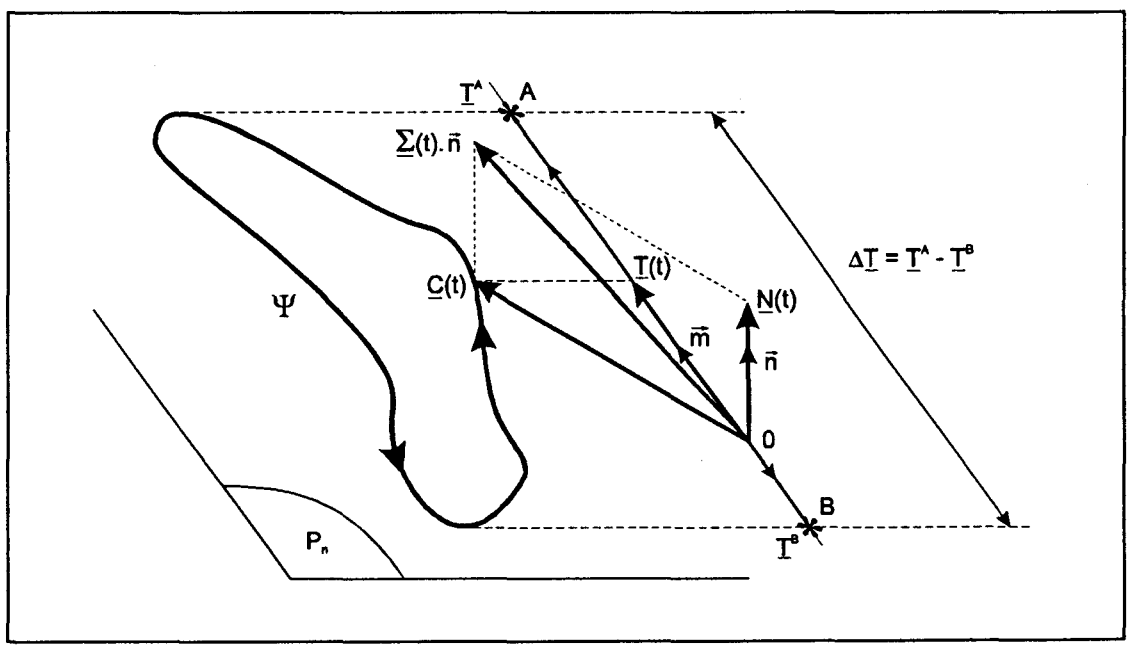


Figure 2.2.8 : « Trajet de chargement sur une facette »

La déformation plastique accumulée dans le grain est notée Γ. Sa loi d'évolution est donnée par :

$$\dot{\Gamma} = \sqrt{\dot{\underline{\gamma}}^p \cdot \dot{\underline{\gamma}}^p} \quad , \tag{2.2.40}$$

où $\dot{\underline{\gamma}}^p$ représente la vitesse de glissement plastique (voir critère de Dang Van).

Papadopoulos montre alors que, dans le cas où le cristal atteint un état adapté, la déformation plastique, Γ_∞, accumulée dans ce cristal après un nombre infini de cycles de chargement, est telle que :

$$\Gamma_\infty = \frac{1}{g} \cdot \left(T_a - \tau_y^{(0)} \right) \leq \Gamma_C \quad , \tag{2.2.41}$$

où :

* g représente le module d'écrouissage isotrope relatif à la phase de durcissement du cristal.

* $\tau_y^{(0)}$ est la limite d'écoulement initiale du cristal.

* T_A est l'amplitude de la contrainte macroscopique de cisaillement associée au système de glissement $(\vec{n}, \vec{m})$. Son expression est donnée par :

$$T_a = \frac{\|\Delta \underline{T}\|}{2} \quad \text{avec} \quad \Delta \underline{T} = \underline{T}^A - \underline{T}^B \tag{2.2.42}$$

* Γ_C correspond à une valeur critique de déformation plastique cumulée, à partir de laquelle le cristal ne peut rester dans un état limite adapté.

Alors que l'écrouissage des grains est supposé isotrope et cinématique, seulement deux paramètres de la microstructure apparaissent dans l'expression de la déformation plastique accumulée dans le cristal après un nombre infini de cycles de chargement : les quantités g et $\tau_y^{(0)}$.

REMARQUE :

Il est à noter que le critère de fatigue, obtenu en utilisant pour le cristal la loi de schmid, conduit à d'excellentes prévisions dans le cas de sollicitations fortement déphasées (voir [35]).

2.2.2.2.2 - Loi d'Ellyin

Selon Golos et Ellyin (voir [36]), la durée de vie d'une structure peut être décomposée en une phase d'initiation de fissure et une phase de propagation. Les auteurs proposent de prendre comme paramètre d'endommagement en fatigue, l'énergie de déformation plastique dissipée. L'énergie dissipée à rupture, W_R, est ainsi reliée au nombre de cycles à rupture, N_R, par la relation :

$$W_R = k \cdot N_R^{\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha < 0 \tag{2.2.43}$$

* Pour la phase d'amorçage, la limite d'endurance du matériau est associée à une énergie de déformation plastique notée ΔW_{end} , et une durée de vie notée N_{end} .

* Pour la phase de propagation, une limite d'endurance réduite est définie à partir de la quantité ΔW^* et de la durée de vie N^*.

REMARQUE :

Dans l'espace $(\text{Log}(\Delta W), \text{Log}(N))$, les courbes d'iso-dommage sont supposées linéaires et passent toutes par le point $(\text{Log}(\Delta W^*), \text{Log}(N^*))$.

La figure 2.2.9 illustre ces propos :

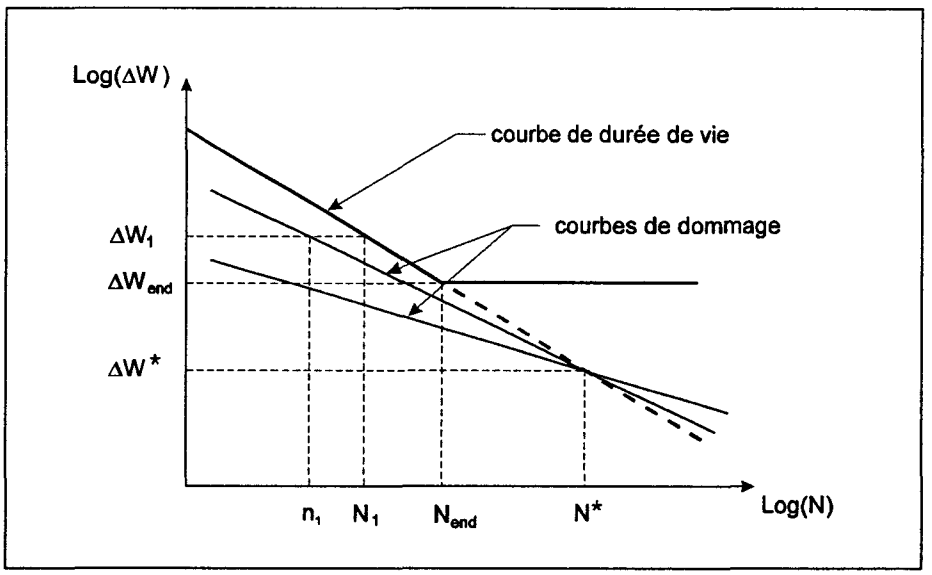


Figure 2.2.9 : « Courbes de dommage selon Ellyin »

Dans le cas d'un chargement constitué de n_1 cycles et auquel est associée la valeur ΔW_1 , on a :

$$\frac{\Delta W_1}{\Delta W^*} = \left(\frac{n_1}{N^*}\right)^{\left[\text{Log}\left(\frac{\Delta W_1}{\Delta W^*}\right)/\text{Log}\left(\frac{n_1}{N^*}\right)\right]} \tag{2.2.44}$$

On peut alors déduire le nombre de cycles de chargements correspondant au niveau ΔW_2 , qui conduit à la rupture de la structure :

$$n_2 = N^* \cdot \left(\frac{n_1}{N^*}\right)^{\left[\text{Log}\left(\frac{\Delta W_2}{\Delta W^*}\right)/\text{Log}\left(\frac{\Delta W_1}{\Delta W^*}\right)\right]} \tag{2.2.45}$$

2.2.2.2.3 - Critère énergétique

Il est souvent admis que lors d'un écoulement plastique, le travail des contraintes par unité de volume, qui est défini par l'expression :

$$W^p = \Sigma_{ij} \cdot dE^p_{ij} \quad , \qquad \textbf{(2.2.46)}$$

est égal au travail dissipé (transformé en chaleur) noté $\varnothing 1$ (voir [37]). Des expériences, réalisées par G.I. Taylor (1925), ont montré que cela n'est pas exact dans le cas de matériaux écrouissables. Une partie du travail ci-dessus correspond en général à une augmentation de l'énergie élastique « bloquée », c'est à dire de l'énergie élastique qui, à cause des frottements internes, n'est pas récupérée à la décharge. Ces propos sont illustrés sur l'exemple exposé en figure 2.2.10.

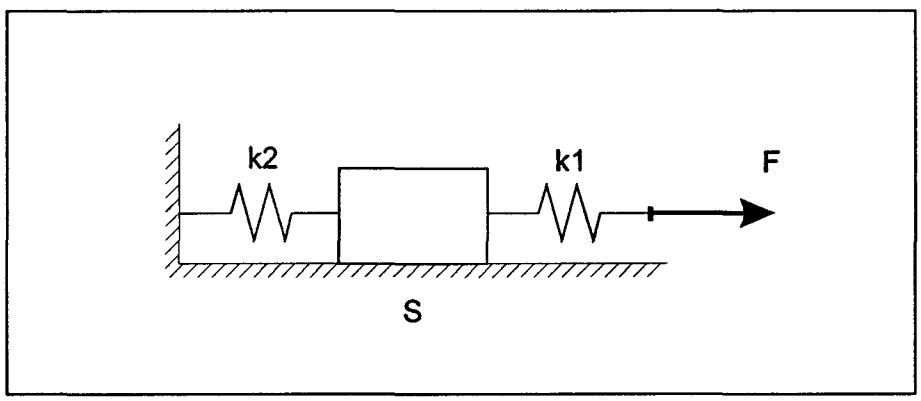


Figure 2.2.10 : « Energie bloquée dans un matériau écrouissable lors d'un écoulement plastique »

Le modèle rhéologique présenté est constitué de :

- Deux ressorts de raideur k1 et k2 qui schématisent l'élasticité linéaire,
- un patin qui schématise un seuil de contrainte (plasticité parfaite).

S représente le seuil de glissement du patin et T1 et T2 sont les tensions relatives aux ressorts de raideur k1 et k2.

à t = 0 : Etat initial, F = 0 → T2 = 0.

t1 : Charge, S < F < 2.S → le patin glisse, le ressort de raideur k2 se tend.

t2 : Décharge, F = 0 → le patin reste bloqué, l'énergie élastique accumulée dans le ressort de raideur k2 n'est pas libérée.

Le travail plastique lors de la charge est donc supérieur au travail dissipé.

D'après Crussard (voir [38]), dans le domaine de la fatigue oligocyclique, l'énergie bloquée dans une structure lors du processus de fatigue est responsable de la détérioration du matériau. Pour un cycle de chargement, cette énergie est définie par :

$$\Delta W^* = \Delta W^p - \Delta \varnothing 1 \qquad \textbf{(2.2.47)}$$

Cette quantité étant cumulative d'un cycle à l'autre, il est donc possible de retenir son cumul comme variable d'endommagement. Voyons à présent comment déterminer cette énergie, qui sera notée W^*.

Dans le cadre des petites perturbations et de la plasticité indépendante du temps, le second principe de la thermodynamique conduit à l'inégalité de Clausius-Duhem [30] :

$$\varnothing = \underbrace{\underline{\Sigma}:\dot{\underline{E}}^p - \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \cdot \dot{V}_k}_{\varnothing 1} \underbrace{- \frac{\vec{q}}{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T)}_{\varnothing 2} \geq 0 \ , \qquad \textbf{(2.2.48)}$$

où :

T = température,

$\vec{q}$ = vecteur courant de chaleur,

$\underline{E}^p$ = tenseur des déformations plastiques,

$\underline{\Sigma}$ = tenseur des contraintes,

V_k = variables internes (scalaires ou tensorielles), ces dernières rendent compte de l'état actuel de la matière, c'est à dire l'état d'écrouissage :

* Ecrouissage isotrope :

On utilise une variable scalaire,

- la déformation plastique cumulée :

$$p = \int_0^t \left[\frac{2}{3} \cdot \dot{\underline{E}}^p(\tau) : \dot{\underline{E}}^p(\tau) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot d\tau \qquad \textbf{(2.2.49)}$$

- le travail plastique dissipé :

$$W^p = \int_0^t \underline{\Sigma}(\tau) : \dot{\underline{E}}^p(\tau) \cdot d\tau \qquad \textbf{(2.2.50)}$$

* Ecrouissage cinématique :

On le définit classiquement à l'aide de l'évolution d'une variable tensorielle notée $\underline{\alpha}(t)$. Dans le cas des modèles d'écrouissage de Prager (voir [30]), la variable cinématique utilisée est la déformation plastique, $\underline{E}^p(t)$. Pour l'écrouissage cinématique linéaire, la variable $\underline{\alpha}(t)$ est alors définie par la relation suivante :

$$\underline{\alpha}(t) = C \cdot \underline{\underline{E}}^p(t) \qquad \textbf{(2.2.51)}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\underline{\alpha}}(t) = C \cdot \dot{\underline{\underline{E}}}^p(t) \ , \qquad \textbf{(2.2.52)}$$

où C représente le module d'écrouissage cinématique en cisaillement

ψ = énergie libre spécifique dépendant des variables d'état (observables et internes) :

$$\psi = \psi(E^e, T, V_k) \qquad \textbf{(2.2.53)}$$

ρ = masse volumique.

La dissipation totale $\varnothing$ peut être décomposée en une dissipation intrinsèque (ou dissipation mécanique) notée $\varnothing 1$, et une dissipation thermique, $\varnothing 2$, par conduction.

$$\varnothing 1 = \underline{\underline{\Sigma}} : \dot{\underline{\underline{E}}}^p - \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \cdot \dot{V}_k \geq 0 \qquad \textbf{(2.2.54)}$$

$$\varnothing 2 = -\frac{\vec{q}}{T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \geq 0 \qquad \textbf{(2.2.55)}$$

Dans le cas d'un matériau à écrouissage cinématique et isotrope, les variables forces thermodynamiques $\rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial V_k}$ associées aux variables internes V_k sont alors définies par :

* pour la variable d'écrouissage isotrope p

$$R = \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p} \qquad \textbf{(2.2.56)}$$

* pour la variable d'écrouissage cinématique $\underline{\underline{E}}^p$

$$\underline{X} = \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}} \qquad \textbf{(2.2.57)}$$

Ces deux variables décrivent l'état d'écrouissage par l'évolution du domaine d'élasticité :

- La taille du domaine élastique dépend de R,

- le centre du domaine élastique est repéré par $\underline{X}$.

On a :

$$\varnothing 1 = \underline{\underline{\Sigma}} : \dot{\underline{\underline{E}}}^p - (R \cdot \dot{p} + \underline{X} : \dot{\underline{\alpha}}) \geq 0 \qquad \textbf{(2.2.58)}$$

La dissipation intrinsèque correspond à la différence entre l'énergie dissipée plastiquement $\left(\underline{\Sigma}:\dot{\underline{E}}^p\right)$ et les énergies bloquées dans l'élément de volume $\left(R\cdot\dot{p}+\underline{X}:\dot{\underline{\alpha}}\right)$, c'est à dire dans les réseaux de dislocation.

La fonction de charge, f, définissant le domaine d'élasticité actuel de la structure a alors pour expression :

$$f = J(\underline{\Sigma}-\underline{X})-R-k \quad , \tag{2.2.59}$$

avec :

$J(\underline{\Sigma}-\underline{X})$ = second invariant du déviateur de $(\underline{\Sigma}-\underline{X})$,

k = seuil initial d'écoulement plastique.

d'où :

$$\varnothing 1 = \dot{p}\cdot\left[J(\underline{\Sigma}-\underline{X})-R\right] = \dot{p}\cdot(f+k) \tag{2.2.60}$$

* Pas d'écoulement plastique : $\dot{p}=0 \rightarrow \varnothing 1=0$

* Ecoulement plastique : $f=0 \rightarrow \varnothing 1 = k\cdot\dot{p} = k\cdot\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\dot{\underline{E}}^p:\dot{\underline{E}}^p}$

$$\Rightarrow \quad \varnothing 1 = k\cdot\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\dot{\underline{E}}^p:\dot{\underline{E}}^p} \tag{2.2.61}$$

Au cours du chargement, l'énergie bloquée dans un élément de volume V_e est donc définie par :

$$W^* = \int_{V_e}\left[\int_0^t W^*(\tau)\cdot d\tau\right]\cdot dV = \int_{V_e}\left[\int_0^t \left(R(\tau)\cdot\dot{p}(\tau)+\underline{X}(\tau):\dot{\underline{\alpha}}(\tau)\right)\cdot d\tau\right]\cdot dV \tag{2.2.62}$$

$$= \int_{V_e}\left[\int_0^t \left(\underline{\Sigma}(\tau):\dot{\underline{E}}^p(\tau)-k\cdot\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\dot{\underline{E}}^p(\tau):\dot{\underline{E}}^p(\tau)}\right)\cdot d\tau\right]\cdot dV \tag{2.2.63}$$

Dans le cas des matériaux métalliques, cette énergie est celle des champs de micro-contraintes résiduelles accompagnant l'augmentation de la densité des dislocations. Elle ne représente que cinq à dix pour cent du terme $\left(\underline{\Sigma}:\dot{\underline{E}}^p\right)$, s'est pourquoi elle est souvent négligée.

Alors que l'énergie dissipée plastiquement jusqu'à rupture dépend du nombre, N_R, de cycles à rupture (généralement en puissance), l'accumulation, W^*, de l'énergie bloquée jusqu'à la rupture en est approximativement indépendante. L'énergie W^* peut donc être considérée comme intrinsèque au matériau (voir figure 2.2.11).

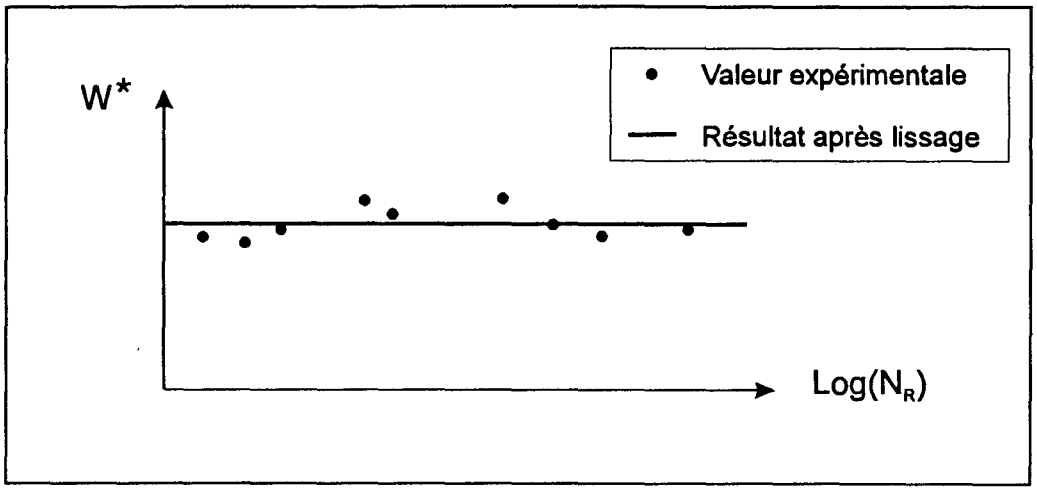


Figure 2.2.11 : « Allure de W^* en fonction de N_R pour un acier courant »

2.3 - SYNTHESE

Parmi les lois d'endommagement uniaxiales, la loi de Lemaître-Chaboche est la plus intéressante. Elle permet de rendre compte :

- De l'historique de chargement.
- D'un cumul non-linéaire du dommage.
- De l'endommagement créé par des petits cycles lorsque la structure considérée est déjà détériorée.

Dans le cas des lois multiaxiales, l'approche consistant à suivre l'évolution d'une variable d'endommagement est « physiquement » plus acceptable que la solution consistant à coupler une loi uniaxiale et un critère de fatigue multiaxial. Il est bien évident que la variable retenue doit rendre compte du caractère multiaxial du chargement considéré.

Dans le domaine de l'endurance illimitée la loi de dommage proposée par Papadopoulos permet, a priori, de traiter tous les types de sollicitation pouvant être rencontrés. Son modèle, basé sur des concepts physiques, permet de rendre compte d'un mécanisme microscopique d'endommagement et cela de manière rigoureuse.

Dans le domaine de la fatigue oligocyclique, le concept d'énergie bloquée dans la structure lors des mécanismes d'écrouissage semble être parfaitement bien adapté pour décrire les phénomènes physiques mis en jeu. Nous nous y intéresserons plus particulièrement dans la suite de ce travail.

PARTIE II

Base de données

BASE DE DONNEES

Les différentes étapes aboutissant à l'estimation de la durée de vie en fatigue d'une structure soumise à un chargement complexe (détermination d'une séquence de chargement équivalente au chargement complexe, évaluation de la contrainte et de la déformation dans les zones sensibles, évaluation de l'état d'endommagement, choix de la loi de cumul du dommage), sont entachées d'imprécisions pouvant conduire à des résultats en total désaccord avec l'expérimentation.

A l'inverse, l'utilisation d'un modèle erroné peut, dans un tel cas de figure, conduire à une prévision de durée de vie en accord avec les résultats d'essais : il est en effet tout à fait possible qu'une accumulation d'erreurs à différents niveaux « compense » les défauts du modèle considéré.

La validation d'un modèle passe donc par sa confrontation avec l'expérience dans des cas relativement simples (chargement à amplitude constante, surcharges, petits cycles; éprouvettes lisse ou entaillée). Un certain nombre d'étapes dans les méthodes d'estimation de durée de vie sont alors éliminées (méthode de comptage de cycle, effet d'entaille dans le cas où $K_t = 1$, loi de cumul du dommage dans le cas d'essais à amplitude constante), ce qui réduit grandement les imprécisions.

Les méthodes de prévision de durée de vie à l'amorçage d'une fissure nécessitent généralement deux types d'analyse :

* Une analyse de la réponse en contraintes et en déformations dans les zones sensibles de la structure. Celle-ci est bien évidemment de type élasto-plastique lorsque la limite d'élasticité du matériau est dépassée. Un tel cas de figure peut survenir localement, suite à une concentration de contraintes ; une estimation de la contrainte et de la déformation relatives à cet écoulement plastique peut, sous certaines conditions, être obtenue par la méthode de Neuber [39] ou de Glinka [40], dont les principes sont exposés dans l'annexe 1.

* Une analyse de l'état d'endommagement de la structure ainsi que son évolution en fonction de l'historique de chargement. Ce dernier point fait référence au choix de la règle de cumul de dommage (cumul linéaire de Miner, cumul non linéaire de Lemaître-Chaboche...). Ce choix a bien évidemment énormément d'influence sur l'estimation de la durée de vie en fatigue : une règle de cumul linéaire du dommage ne peut tenir compte de l'ordre d'apparition des cycles, ni de l'effet des chargements inférieurs à la limite de fatigue.

1 - SITUATION DE L'ETUDE

Dans le cadre de la commission de fatigue des métaux dirigée par la Société Française de Métallurgie et de Matériaux (SF2M), le groupe de travail G.T.4 (« Fatigue sous chargement à amplitude variable »), a réalisé une étude ayant pour but la validation de certains modèles de prévision de durée de vie en fatigue, dans le domaine aéronautique. Cette étude, étalée sur plus de dix années, a nécessité la réalisation :

- D'essais afin de déterminer les caractéristiques des matériaux intervenant dans la formulation de ces modèles.

- D'essais de fatigue relatifs à des séquences de chargement à amplitude variable simplifiée (surcharge, petits cycles) afin de pouvoir contrôler rapidement la capacité de ces modèles à rendre compte de certains mécanismes simples sans trop d'incertitudes.

- D'essais de fatigue relatifs à des spectres de chargements aéronautiques qui soient représentatifs (vols, atterrissages), de manière à pouvoir établir une corrélation avec les prévisions des modèles.

L'étude, réalisée sur deux alliages d'aluminium ayant des lois de comportement élasto-plastique différentes, a permis de tester la validité de trois méthodes de prédiction de durée de vie en fatigue, dans le cas de spectres de chargement relatifs au domaine aéronautique.

2 - LES PROCEDURES D'ESSAIS

2.1 - LES MATERIAUX TESTES

Les alliages d'aluminium suivants ont été étudiés :

* L'alliage d'aluminium 2024 T351 en tôle laminée d'épaisseur 25 mm, fourni par Cégédur-Péchiney.

* L'alliage d'aluminium 7010 T73651 en tôle laminée d'épaisseur 120 mm, fourni par Alcan.

La composition chimique de ces deux alliages, ainsi que leurs caractéristiques mécaniques (suivant le sens travers-long), sont indiquées dans les tableaux 2.1.1 et 2.1.2 respectivement.

	Cu	Mg	Mn	Cr	Si	Fe	Ti	Zn	Zr
2024 T351	4.23	1.35	0.58	0.01	0.08	0.19	0.03	0.07	0.01
7010 T3651	1.62	2.43	-	-	0.05	0.07	0.04	6.14	0.13

Tableau 2.1.1 : « Composition chimique des alliages d'aluminium »

	R_m (MPa) contrainte à rupture	$R_{e0.2}$ (Mpa) limite d'élasticité à 0.2% de déformation	A (%) allongement à rupture	K1C (MPa$\sqrt{m}$)
2024 T351	464	365	17	-
7010 T3651	500	443	11.4	27.7

Tableau 2.1.2 : « Caractéristiques mécaniques des alliages d'aluminium suivant le sens T.L. »

2.2 - LES EPROUVETTES

Deux types d'éprouvettes ont été utilisés :

* Des éprouvettes cylindriques lisses ($K_t = 1$) (voir figure 2.2.1).

* Des éprouvettes planes entaillées (une analyse par éléments finis réalisée par le CETIM donne $K_t = 2.75$) (voir figure 2.2.2).

Ces éprouvettes ont été prélevées à coeur, suivant le sens T.L., la fissure se propageant suivant le sens long.

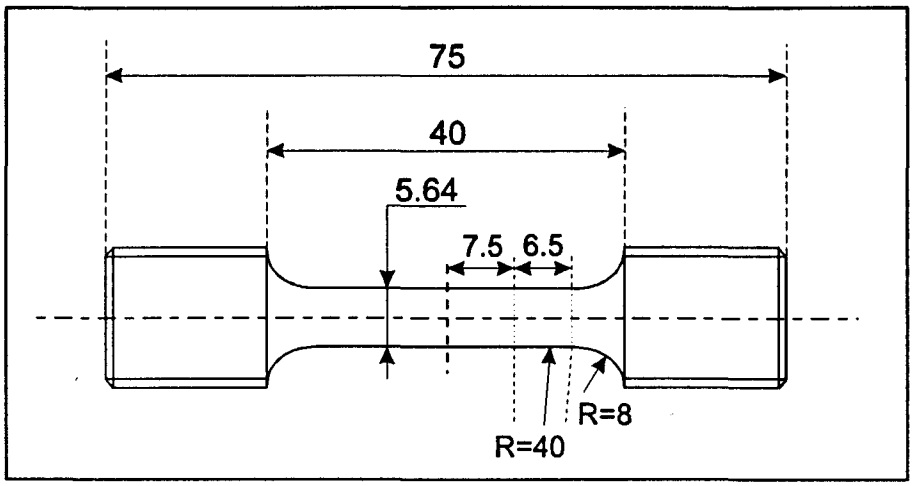


Figure 2.2.1 : « Eprouvette cylindrique lisse »

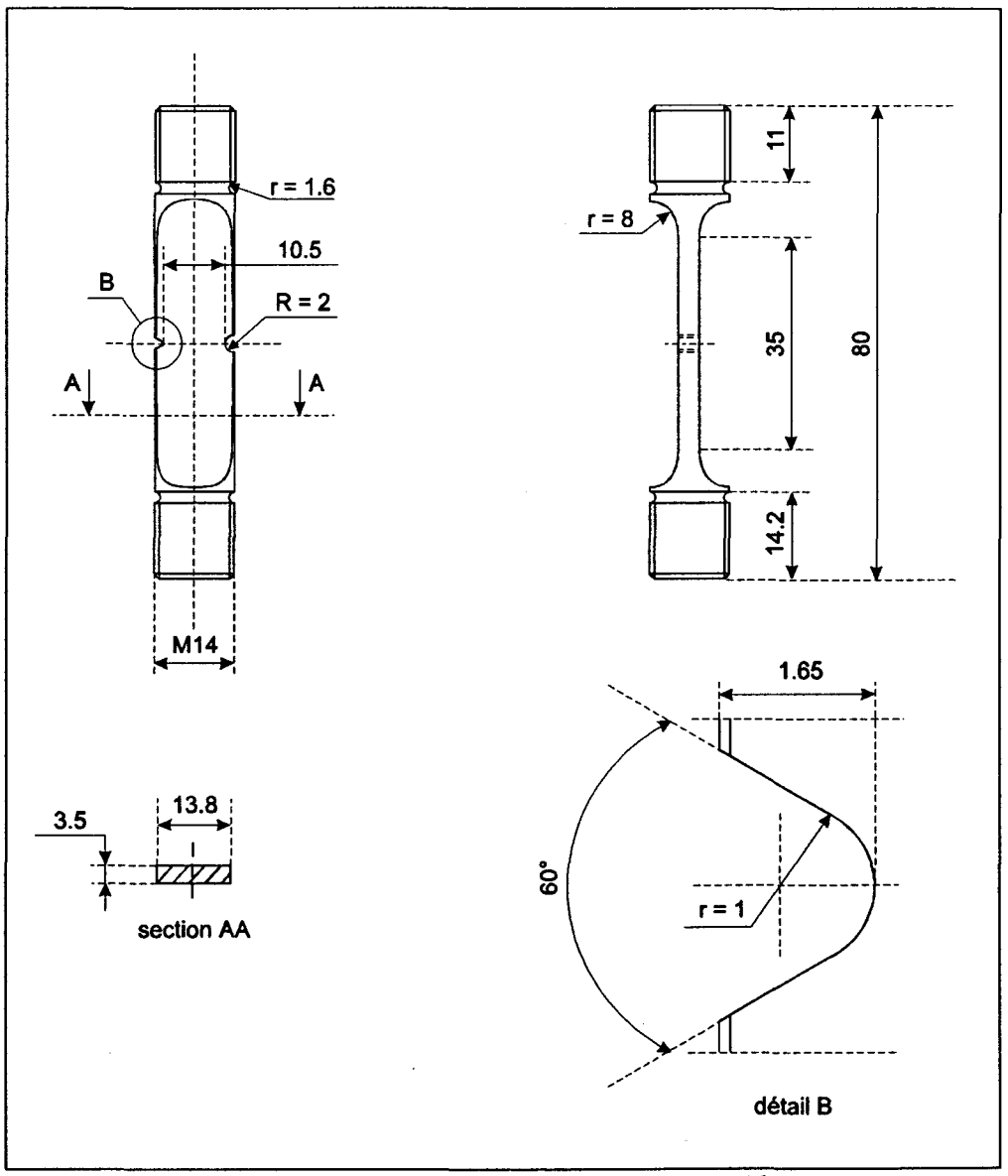


Figure 2.2.2 : « Eprouvette plane entaillée »

2.3 - LES SEQUENCES DE CHARGEMENT

Elles peuvent être regroupées selon trois catégories :

2.3.1 - CHARGEMENTS A AMPLITUDE CONSTANTE

Ils sont utilisés de manière à déterminer les caractéristiques des matériaux intervenant des les modèles. Ces séquences sont définies par le rapport :

- $R_\Sigma = \frac{\Sigma_{min}}{\Sigma_{max}}$ en contraintes imposées
- $R_E = \frac{E_{min}}{E_{max}}$ en déformations imposées

2.3.2 - CHARGEMENTS A AMPLITUDE VARIABLE SIMPLIFIEE

Ces séquences consistent en une juxtaposition simple et ordonnée de cycles dont le nombre de niveaux différents est limité à trois ou quatre au maximum. Leur intérêt réside dans la mise en jeu de phénomènes facilement identifiables (surcharges périodiques, petits cycles en nombre fixe, ...), qui permettent de mettre en évidence certains mécanismes simples, tout en rendant assez bien compte des situations de chargement rencontrées dans la réalité.

Quatre types de spectres ont été utilisé (voir figure 2.3.1) :

Spectre 1 : Il s'agit d'un chargement d'amplitude constante de type (P - 0,1.P). Son rôle est de servir de référence.

Spectre 2 : C'est un chargement comportant une surcharge (1,7.P pour les éprouvettes entaillées et 1,2.P pour les éprouvettes lisses), tous les 1000 cycles.

Spectre 3 : Il s'agit d'un chargement comprenant des cycles de type (P - 0,1.P), chaque cycle étant lui-même composé de dix petits cycles de types (P - 0,7.P).

Spectre 4 : Il est obtenu à partir de la superposition des spectres deux et trois.

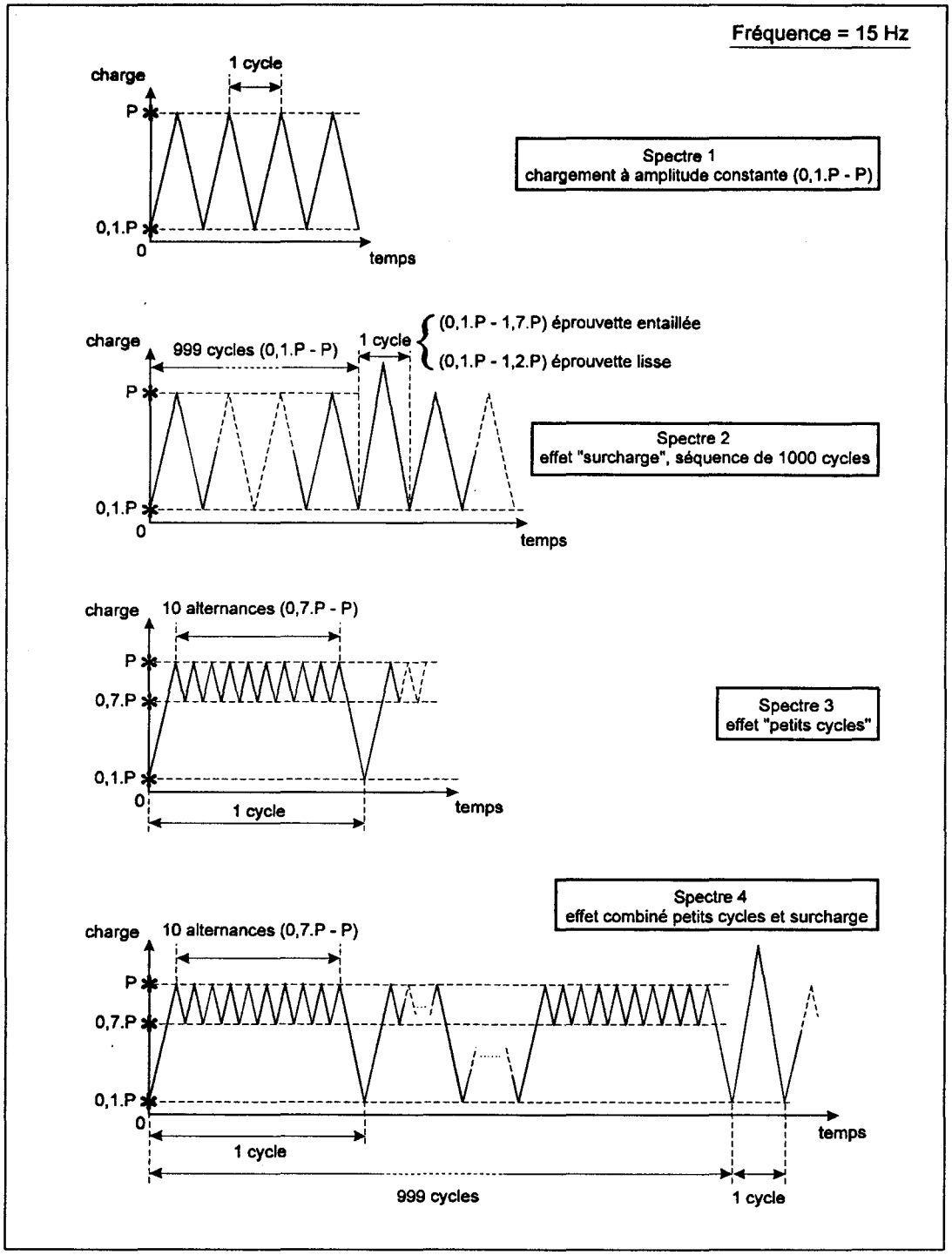


Figure 2.3.1 : « Chargements à amplitude variable simplifiée »

2.3.3 - CHARGEMENTS COMPLEXES

Il sont représentatifs d'historiques de chargement imposés sur des structures aéronautiques. Dans le cas de l'alliage d'aluminium 2024 T351, les éprouvettes sont ainsi soumises à un spectre aéronautique relatif au chargement imposé sur la surface inférieure de l'aile d'un appareil de transport aérien. L'alliage d'aluminium 7010 T3651 est quant à lui soumis à un spectre de chargement relatif à un train d'atterrissage.

Ne disposant pas des séquences de chargement imposées sur ce dernier alliage, nous n'étudierons ici que l'alliage d'aluminium 2024 T351 pour lequel les séquences ont été relevées et fournies par l'Aérospatiale de Toulouse. Elles sont constituées de 1000 vols différents, chacun ayant la forme indiquée en figure 2.3.2.

Le nombre de cycles de chargement dans la séquence est réduit en utilisant une technique de filtrage modulé proposée par le CETIM. Cette méthode est basée sur l'élimination des petits cycles : les cycles de contraintes $\left(\Sigma_{a_i}, \Sigma_{m_i}\right)$, situés à l'intérieure de l'aire grisée (voir figure 2.3.3) indiquée dans le diagramme de Haigh, sont supprimés. Cette surface est définie à partir d'un paramètre ω exprimé en fonction du chargement $\left(\Sigma_a \text{ et } \Sigma_m\right)$ et des caractéristiques du matériau (la contrainte à rupture, R_m, et la limite d'endurance relative à $\Sigma_m = 0$, notée Σ_D^{-1}). L'expression de ω est donnée sur le figure 2.3.3.

En utilisant la séquence initiale relative à $\omega = 0$ (c'est à dire aucune suppression de petits cycles dans la séquence de chargement relevée), trois autres séquences sont alors créées :

AC1 / 00 → $\omega = 0$; séquence composée de 1 412 836 extremums

AC1 / 10 → $\omega = 0{,}1$; séquence composée de 788 720 extremums

AC1 / 20 → $\omega = 0{,}2$; séquence composée de 532 036 extremums

AC1 / 30 → $\omega = 0{,}3$; séquence composée de 45 094 extremums

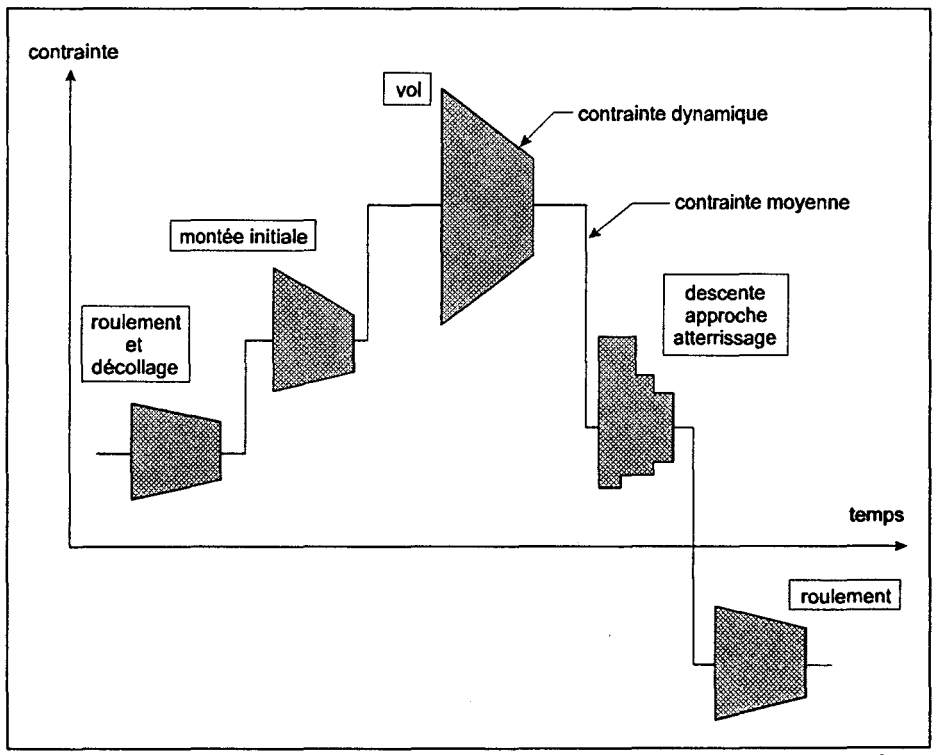


Figure 2.3.2 : « Allure de la séquence de chargement relevée en service sur la surface inférieure d'une aile d'avion »

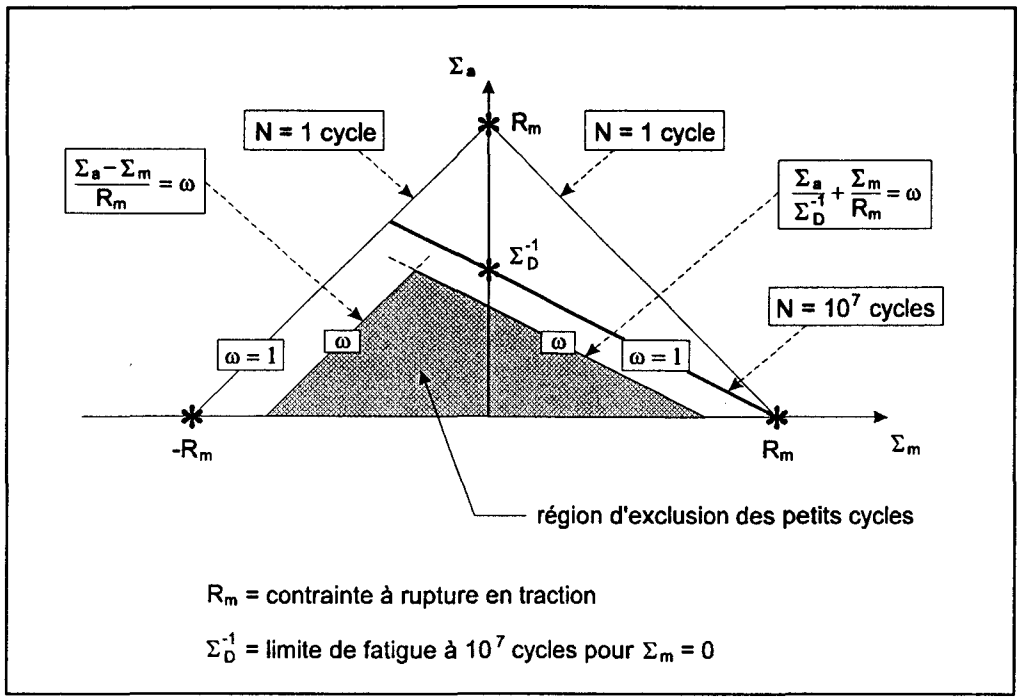


Figure 2.3.3 : « Utilisation du diagramme de Haigh pour le filtrage des petits cycles »

2.4 - LES MOYENS DE MESURE MIS EN OEUVRE

La détection de l'amorçage d'une fissure de fatigue ainsi que le suivi de sa propagation ont été effectués à l'aide d'une méthode de mesure de potentiel électrique développée par l'ONERA.

A titre de corrélation, un marquage du front de fissure par une technique d'encrage a été réalisé pour des longueurs de fissures supposées de 0.4, 0.8 et 1.2 mm environ.

Les tailles de défaut à l'amorçage, qui correspondent à une déviation mesurable du signal électrique, s'échelonnent entre 0.2 et 0.6 mm par cette technique. Ces valeurs ont été mesurées après rupture, au moyen des marquages à l'encre.

3 - LES PREVISIONS DE DUREE DE VIE

Ce paragraphe décrit succinctement les trois modèles d'endommagement utilisés dans cette étude afin d'estimer la durée de vie en fatigue à l'amorçage d'une fissure. Les deux premiers modèles sont basés sur une approche en déformation locale, alors que le troisième intègre une équation d'évolution du dommage.

3.1 - MODELE DU CETIM

Les estimations de durée de vie en fatigue sont calculées par le CETIM en utilisant le modèle « FATIMAS » développé par N'code International Ltd.

Ce module permet l'analyse en fatigue d'une structure soumise à un chargement de service. Il est basé sur le concept d'approche locale via l'analyse en fatigue au point critique : La réponse locale en fatigue d'un matériau en un point critique (par exemple le point d'amorçage d'une fissure, situé en fond d'entaille), est supposée similaire à celle d'une éprouvette lisse soumise aux mêmes cycles de déformation.

Le principe de ce modèle est le suivant :

→ Historique de chargement

La déformation nominale E_N est mesurée dans les conditions de service (pour une séquence).

→ Procédure Rainflow

Les cycles de chargement sont identifiés en appliquant la méthode de comptage Rainflow [41], [42], à la séquence entière de chargement $E_N(t)$ (son principe général est rappelé en annexe 2)

→ Analyse locale

L'utilisation de la règle de Neuber permet d'estimer localement, pour chaque cycle extrait, la réponse élasto-plastique de la structure (voir annexe 1) :

a) L'amplitude de la déformation nominale ΔE_N, permet tout d'abord de déterminer l'amplitude de la contrainte nominale $\Delta\Sigma_N$.

- $\Delta E_N \rightarrow \Delta\Sigma_N = E \cdot \Delta E_N$ (loi d'élasticité linéaire) **(3.1.1)**

b) La connaissance du coefficient de concentration de contraintes, Kt, permet ensuite de déterminer les amplitudes de contrainte et de déformation élastiques dans la zone sensible de l'éprouvette.

- $$\begin{cases} \Delta\Sigma_N \rightarrow \Delta\Sigma^{el} = K_t \cdot \Delta\Sigma_N \\ \Delta E_N \rightarrow \Delta E^{el} = K_t \cdot \Delta E_N \end{cases} \quad \textbf{(3.1.2)}$$

c) L'utilisation de la règle de Neuber, connaissant la loi de comportement cyclique du matériau, permet enfin d'estimer localement l'amplitude de la réponse élasto-plastique de la structure.

- $$\begin{cases} \text{loi de comportement cyclique :} \quad \dfrac{\Delta E}{2} = \dfrac{\Delta\Sigma}{2 \cdot E} + \left(\dfrac{\Delta\Sigma}{2 \cdot K'}\right)^{\frac{1}{n'}} \\ \text{règle de Neuber :} \quad \Delta\Sigma \cdot \Delta E = \Delta\Sigma^{el} \cdot \Delta E^{el} = C1 \end{cases} \quad \textbf{(3.1.3)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta\Sigma^2}{E} + 2\cdot\Delta\Sigma\cdot\left(\frac{\Delta\Sigma}{2\cdot K'}\right)^{\frac{1}{n'}} = C1 \qquad \textbf{(3.1.4)}$$

La résolution de cette dernière équation par une méthode itérative permet d'obtenir $\Delta\Sigma$.

- $\Delta\Sigma \rightarrow \Delta E = C1/\Delta\Sigma$ **(3.1.5)**

→ Etude en fatigue

Pour chaque niveau de déformation E_i, la durée de vie en fatigue, N_{Ri}, jusqu'à l'amorçage d'une fissure macroscopique est déterminée à partir de la loi de Manson-Coffin (voir figure 2.3.4). Cette loi permet d'exprimer la durée de vie d'une structure en fonction de l'amplitude de déformation totale imposée, ΔE, et de paramètres dépendant du matériau (dans le cas d'un essai à contrainte moyenne nulle).

$$\frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta E^e}{2} + \frac{\Delta E^p}{2} = \left(\frac{\Sigma'_R}{E}\right)\cdot(2\cdot N_R)^b + E'_R\cdot(2\cdot N_R)^c \qquad \textbf{(3.1.6)}$$

La correction de Smith-Topper-Watson permet quant à elle de rendre compte de l'influence d'une contrainte moyenne non nulle. Elle s'exprime sous le forme :

$$\frac{\Sigma_{max}\cdot\Delta E}{2} = \left(\frac{(\Sigma'_R)^2}{E}\right)\cdot(2\cdot N_R)^{2\cdot b} + \Sigma'_R\cdot E'_R\cdot(2\cdot N_R)^{b+c}, \qquad \textbf{(3.1.7)}$$

où Σ_{max} représente la contrainte maximale relevée au cours du cycle.

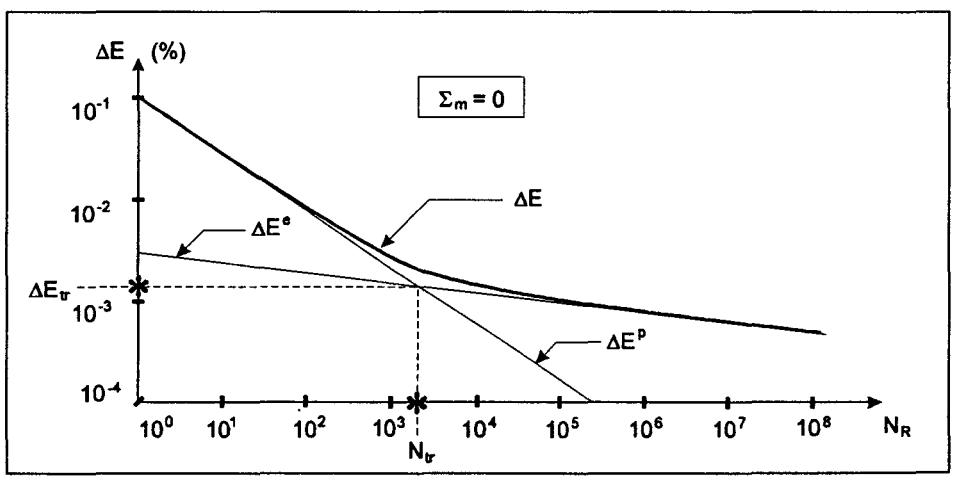


Figure 2.3.4 : « Représentation de la loi de Manson-Coffin »

→ Règle de Miner

L'endommagement de fatigue D, qui est généré par la séquence de chargement, est estimé à partir de la loi de cumul linéaire de Miner :

$$D = \sum_i D_i = \sum_i \left(n_i/N_{Ri}\right) \qquad \textbf{(3.1.8)}$$

→ Durée de vie

L'amorçage d'une fissure macroscopique se produit lorsque le dommage cumulé atteint la valeur critique 1. Une séquence de chargement occasionnant un dommage D, le nombre de séquences conduisant à l'amorçage d'une fissure macroscopique est donc égal au rapport (1/D) puisque la règle de cumul utilisée est linéaire.

Le tableau 3.1.1 donne les valeurs des paramètres intervenant dans la caractérisation des différentes courbes utilisées dans ce modèle, et cela pour les deux alliages d'aluminium étudiés :

	2024	7010
Courbe monotone contrainte - déformation $E^e = \Sigma / E$ $E^p = (\Sigma / K)^{1/n}$	E = 74 000 MPa K = 506 MPa n = 0,052 R_{em} = 365 MPa	E = 71 000 MPa K = 632 MPa n = 0,057 R_{em} = 443 MPa
Courbe cyclique contrainte - déformation $\Delta E/2 = \Delta E^e/2 + \Delta E^p/2$ $\Delta E^e/2 = \Delta\Sigma/(2 \cdot E)$ $\Delta E^p/2 = (\Delta\Sigma/(2 \cdot K'))^{1/n'}$	E = 74 000 MPa K' = 618 MPa n' = 0,051 R_{ec} = 450 MPa	E = 71 000 MPa K' = 831 MPa n' = 0,110 R_{ec} = 420 MPa
Courbe de Manson-Coffin $\Delta E/2 = \Delta E^e/2 + \Delta E^p/2$ $\Delta E^e/2 = (\Sigma_R'/E) \cdot (2 \cdot N_R)^b$ $\Delta E^p/2 = E_R' \cdot (2 \cdot N_R)^c$	E = 74 000 MPa Σ_R' = 842 MPa b = -0,103 E_R' = 12,12 % c = -0,564	E = 71 000 MPa Σ_R' = 880 MPa b = -0,105 E_R' = 3,63 % c = -1,08

Tableau 3.1.1 : « Paramètres de caractérisation des courbes pour les deux alliages d'aluminium »

3.2 - MODELE DE GLINKA

Les estimations de durée de vie en fatigue sont calculées par l'ENSMA de Poitiers en utilisant le module développé par le professeur G. Glinka. Le principe général de cette analyse est similaire au cas précédemment étudié.

Les étapes principales de cette analyse sont les suivantes :

→ Historique de chargement

La déformation nominale E_N est mesurée dans les conditions de service.

→ Procédure Rainflow

Le chargement $E_N(t)$ est analysé à partir d'une méthode Rainflow, de manière à déterminer les cycles qui le composent (les boucles d'hystérésis fermées).

→ Analyse locale

l'utilisation de la méthode de Glinka permet d'estimer localement, pour chaque cycle extrait à partir de la procédure Rainflow, la réponse élasto-plastique de la structure (voir annexe 1) :

- $\Delta E_N \rightarrow \Delta\Sigma_N = E \cdot \Delta E_N$ (loi d'élasticité linéaire) **(3.2.1)**

- $$\begin{cases} \Delta\Sigma_N \rightarrow \Delta\Sigma^{el} = K_t \cdot \Delta\Sigma_N \\ \Delta E_N \rightarrow \Delta E^{el} = K_t \cdot \Delta E_N \end{cases} \quad \textbf{(3.2.2)}$$

- $$\begin{cases} \text{loi de comportement cyclique : } \dfrac{\Delta E}{2} = \dfrac{\Delta\Sigma}{2 \cdot E} + \left(\dfrac{\Delta\Sigma}{2 \cdot K'}\right)^{\frac{1}{n'}} \\ \text{règle de Glinka : } \int \Delta\Sigma \cdot d(\Delta E) = \int \Delta\Sigma^{el} \cdot d(\Delta E^{el}) = \dfrac{\Delta\Sigma^{el} \cdot \Delta E^{el}}{2} = C2 \end{cases} \quad \textbf{(3.2.3)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta\Sigma^2}{2 \cdot E} + \frac{2 \cdot \Delta\Sigma}{n'+1} \cdot \left(\frac{\Delta\Sigma}{2 \cdot K'}\right)^{\frac{1}{n'}} = C2 \qquad \textbf{(3.2.4)}$$

La résolution de cette équation par une méthode itérative permet d'obtenir $\Delta\Sigma$.

- $\Delta\Sigma \rightarrow \Delta E = \dfrac{\Delta\Sigma}{E} + 2 \cdot \left(\dfrac{\Delta\Sigma}{2 \cdot K'}\right)^{1/n'}$ **(3.2.5)**

→ Etude en fatigue

Pour chaque niveau de déformation E_i, la durée de vie en fatigue N_{Ri} jusqu'à l'amorçage d'une fissure macroscopique est déterminée à partir de la loi de Manson-Coffin. La prise en compte de la contrainte moyenne est effectuée en utilisant la correction de Morrow. Celle-ci est basée sur l'observation suivante : l'influence d'une contrainte moyenne n'apparaît essentiellement que dans le cas où le nombre de cycles nécessaires à l'initiation d'une fissure macroscopique est élevé. Cette remarque se traduit par les faits suivants :

- Si l'amplitude de déformation locale ΔE est supérieure à ΔE_{tr} (amplitude de déformation locale à la transition entre les comportements élastique et élasto-plastique, voir figure 2.3.4), alors aucune prise en compte de la contrainte moyenne n'est effectuée.

- Si ΔE est inférieure à ΔE_{tr}, la prise en compte de la contrainte moyenne locale Σ_m dans le phénomène de fatigue est alors effectuée, ce qui se traduit par la relation :

$$\frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta E^e}{2} + \frac{\Delta E^p}{2} = \left(\frac{\Sigma_R' - \Sigma_m}{E}\right)\cdot(2\cdot N_R)^b + E_R'\cdot(2\cdot N_R)^c \qquad \textbf{(3.2.6)}$$

→ Règle de Miner

L'endommagement de fatigue D, qui est généré par la séquence de chargement, est estimé à partir de la loi de cumul linéaire de Miner :

$$D = \sum_i D_i = \sum_i \left(\frac{n_i}{N_{Ri}}\right) \qquad \textbf{(3.2.7)}$$

→ Durée de vie

Tout comme pour le modèle du CETIM, le nombre de séquences conduisant à l'amorçage d'une fissure macroscopique est définit par le rapport (1/D).

REMARQUE :

Dans le cas des chargements complexes qui sont constitués par une succession de vols différents, les auteurs ont constaté une meilleure corrélation entre les résultats d'essais de fatigue et les calculs d'estimation de durée de vie lorsque l'analyse Rainflow est effectuée vol après vol plutôt que sur la séquence entière de chargement :

Durée de vie obtenue par une analyse vol après vol	< Résultats expérimentaux	Durée de vie obtenue par une analyse sur la séquence entière de chargement

3.3 - MODELE DE L'ONERA

Les estimations de durée de vie en fatigue sont calculées par l'ONERA en utilisant un modèle basé sur la loi de Lemaître - Chaboche (confère partie I, paragraphe 2.2.1.2).

Ce modèle permet de rendre compte :

* De l'effet d'une contrainte moyenne.
* D'une accumulation non-linéaire du dommage.
* De l'endommagement créé par des petits cycles situés en dessous de la limite d'endurance lorsque la structure considérée est déjà endommagée.

- Dans le cas d'une éprouvette entaillée, la théorie de Neuber permet d'estimer la réponse élasto-plastique en fond d'entaille, à partir de la réponse nominale. Une loi de comportement élasto-plastique avec écrouissage cinématique $(\underline{X})$ et isotrope (R) est utilisée ; les coefficients de cette loi sont déterminés à partir des courbes de traction monotone et des courbes cycliques.

- L'équation d'endommagement utilisée est définie par :

$$\partial D = D^{\alpha} \cdot \left[\frac{\Sigma_a}{M_0 \cdot (1 - b_2 \cdot \Sigma_m)} \right]^{\beta} \cdot \partial N \quad \text{avec} \quad \alpha = 1 - a \cdot \frac{\langle \Sigma_a - \Sigma_D(\Sigma_m) \rangle}{\langle R_m - \Sigma_{max} \rangle}, \quad \textbf{(3.3.1)}$$

où :

* D est le dommage représentant l'état actuel du matériau
* ∂D est l'accroissement de dommage dû à ∂N
* Σ_a est l'amplitude de contrainte du cycle
* Σ_m est la contrainte moyenne du cycle
* Σ_{max} est la contrainte maximale du cycle
* α est un paramètre dépendant du chargement ainsi que du matériau
* R_m est la contrainte de rupture statique

* $\Sigma_D(\Sigma_m)$ est la limite d'endurance relative à la contrainte moyenne Σ_m :

$$\Sigma_D(\Sigma_m) = \Sigma_D^{-1} \cdot (1 - b_1 \cdot \Sigma_m) \qquad \textbf{(3.3.2)}$$

* Σ_D^{-1} est la limite d'endurance purement alternée

* β, M_0, b_1 et b_2 sont des constantes liées au matériau

* a est une constante identifiée à partir de mesures de dommage.

L'intégration de cette équation d'endommagement entre D=0 et D=1 permet d'obtenir le nombre de cycles conduisant à l'amorçage d'une fissure. Dans le cas d'un chargement à amplitude constante, on a alors :

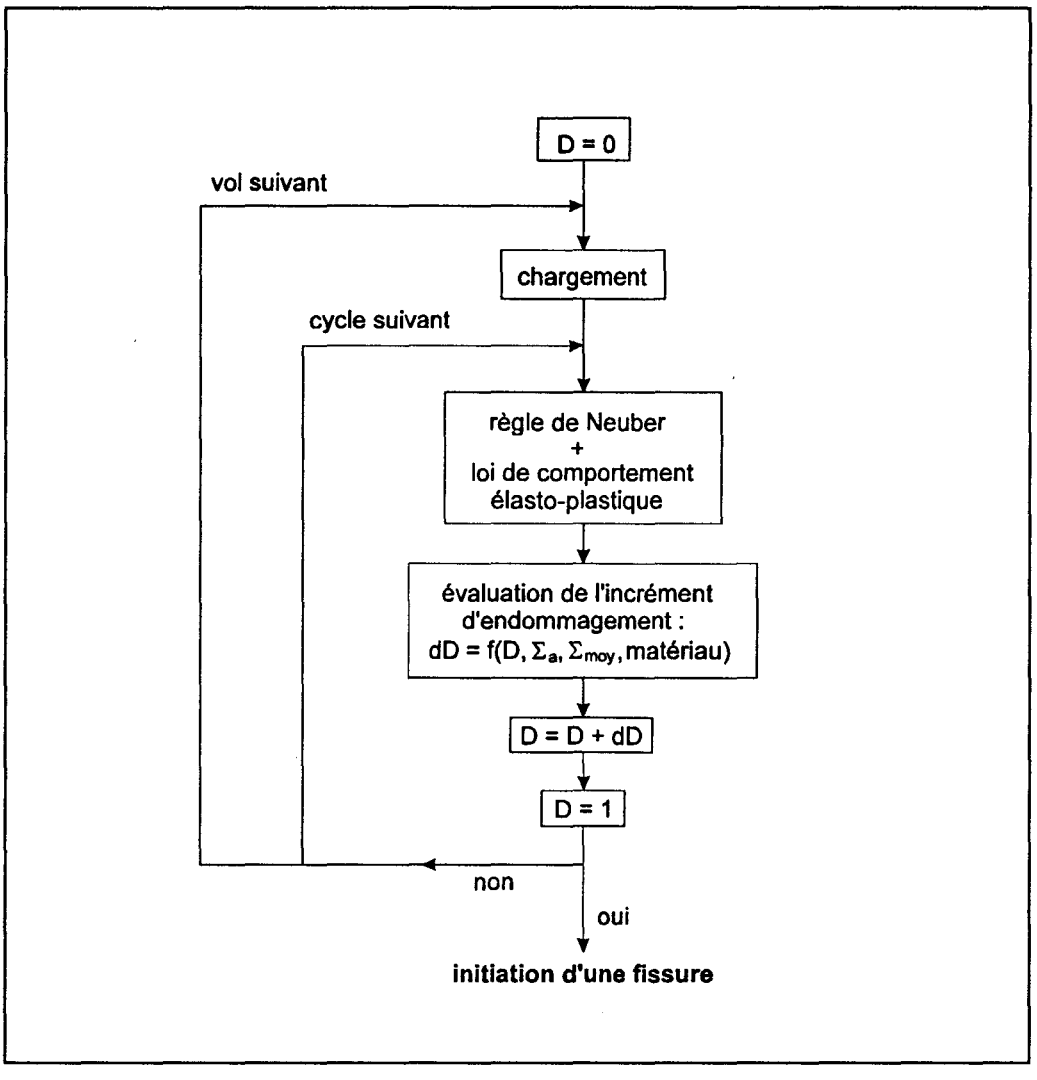
$$N_R = \frac{1}{(\beta+1) \cdot a \cdot M_0^{\beta}} \cdot \frac{R_m - \Sigma_{max}}{\Sigma_a - \Sigma_D(\Sigma_m)} \cdot \left[\frac{1 - b_2 \cdot \Sigma_m}{\Sigma_a}\right]^{\beta} \qquad \textbf{(3.3.3)}$$

Les valeurs des différentes constantes intervenant dans la formulation de la loi d'endommagement sont indiquées dans le tableau 3.3.1 ci-dessous :

	R_m (MPa)	Σ_D^{-1} (MPa)	β	$a \cdot M_0^{\beta}$	b_1	b_2
2024	570	170	2,2	$1{,}5 \cdot 10^{-10}$	$0{,}2 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2 \cdot 10^{-2}$
7010	530	164	5,25	$2{,}73 \cdot 10^{-18}$	$2{,}86 \cdot 10^{-3}$	$9{,}52 \cdot 10^{-4}$

Tableau 3.3.1 : « Paramètres de la loi de dommage de l'ONERA »

Le principe de la méthode d'estimation de durée de vie en fatigue est résumé à l'aide de l'organigramme suivant :



3.4 - COMPARAISON DES MODELES

Comme on a pu le constater, les logiciels de prédiction de durée de vie en fatigue nécessitent l'analyse de différentes étapes :

* La plasticité,
* le chargement,
* l'endommagement.

Différents modèles peuvent bien évidemment être utilisés à chacune de ces étapes.

L'ONERA [43], a étudié l'influence de certains d'entre eux sur l'estimation de la durée de vie, de manière à essayer de définir leurs avantages et limites respectifs.

* L'analyse plastique :

Son but ne doit pas seulement être de déterminer la bonne amplitude de chargement au point de la structure où la concentration de contrainte apparaît. Elle doit également permettre de rendre compte correctement du phénomène de relaxation de contrainte, afin de pouvoir tenir compte de la contrainte moyenne réelle qui existe au point critique. Cette dernière a en effet énormément d'influence sur l'analyse du dommage.

Cette remarque implique de tenir compte de l'ordre d'apparition des cycles (valeurs nominales) avant de passer à l'analyse élasto-plastique. Cette procédure qui est respectée par l'ONERA, ne l'est pas par le CETIM et l'ENSMA (voir point suivant).

* L'analyse du chargement :

La méthode de comptage Rainflow a pour objet d'identifier les cycles composant un chargement complexe.

Son principe, qui est basé sur une analyse plastique, consiste à extraire successivement les cycles de chargement conduisant à des boucles (Σ, E) fermées. Ceci implique donc d'appliquer la décomposition Rainflow à l'historique de contraintes relevé au point critique (fond d'entaille). Cet historique est déduit à partir d'une analyse élasto-plastique, si bien que les étapes successives à résoudre sont :

Chargement nominal

⇓

Analyse plastique locale

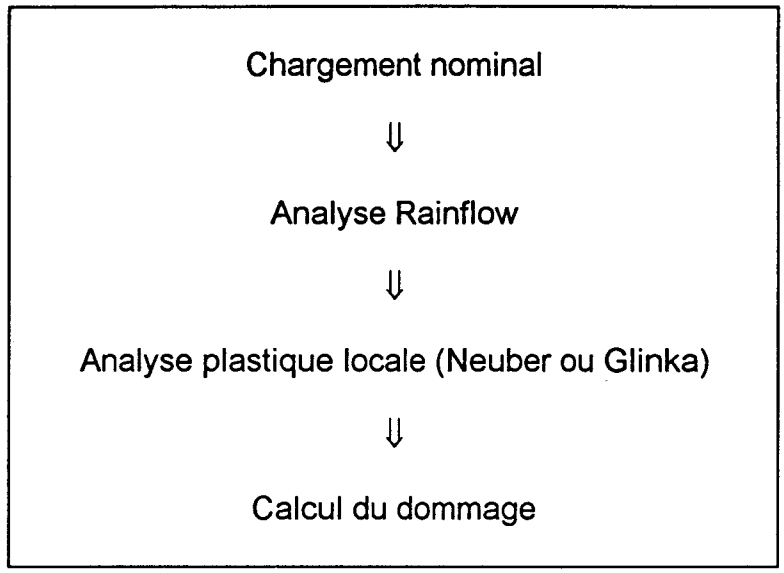
⇓

Analyse Rainflow

⇓

Calcul du dommage

Dans le cas des modèles développés par le CETIM et l'ENSMA, cet ordonnancement a été modifié selon la manière suivante :



Pour ces deux modèles, la loi de comportement utilisée lors de l'analyse plastique est obtenue à partir de l'équation de Ramberg-Osgood.

Cette analyse plastique est tout d'abord exécutée sur le cycle principal (amplitude maximale) en utilisant l'équation de Ramberg-Osgood dans le cas d'un chargement monotone :

$$E^P = \left(\frac{\Sigma}{K}\right)^{1/n} \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

Elle est ensuite appliquée aux autres cycles en utilisant l'équation de Ramberg-Osgood dans le cas d'un chargement cyclique :

$$\frac{\Delta E^P}{2} = \left(\frac{\Delta\Sigma}{2\cdot K'}\right)^{1/n'} \qquad \textbf{(3.4.2)}$$

Les cycles sont considérés comme étant indépendant les uns des autres ; On ne se soucie pas de la reconstitution du chargement au point critique de la structure.

Cette procédure n'est pas physiquement acceptable dès lors où l'on cherche à déterminer l'historique de contraintes en fond d'entaille.

Pour tenir compte d'un cumul non-linéaire du dommage, il est nécessaire que les boucles fermées (Σ, E) soient analysées (détermination de leur incidence sur le phénomène d'endommagement) suivant leur ordre d'apparition.

D'après l'ONERA [43], dans le cas des chargements complexes, une accumulation non-linéaire du dommage est particulièrement importante lors de la succession des séquences, mais les arrangements des cycles à l'intérieur d'une séquence donnée n'influencent pas vraiment la durée de vie calculée.

* L'endommagement :

Comme il l'est rappelé dans la partie I (voir paragraphe 2.2.1), la prise en compte d'un cumul non-linéaire du dommage est très importante. Là encore, on peut noter la faiblesse des modèles utilisés par le CETIM et l'ENSMA au cours de cette étude.

Voyons à présent l'incidence du choix de ces modèles sur les estimations de durée de vie en fatigue dans le cas de spectres de chargements aéronautiques.

4 - COMPARAISON ENTRE LES ESSAIS ET LES PREVISIONS

Le tableau 4.1 donne les résultats des essais et des prévisions de durée de vie pour les trois modèles étudiés, et cela pour chaque type de séquence.

Les résultats des essais réalisés sur les éprouvettes entaillées sont exprimées en fonction de deux critères :

* La durée de vie à l'amorçage d'une fissure, en prenant comme critère la présence d'une fissure ayant une profondeur moyenne de 0,4 ou 0,04 mm (en fonction du degré de précision de la méthode de mesure de la longueur de fissure qui est utilisée).

* La durée de vie à rupture.

Suivant la méthode de détermination des résultats expérimentaux (essais à contrainte constante ou d'après une courbe de type Wöhler), les valeurs indiquées dans le tableau 4.1 correspondent à :

* La valeur moyenne du résultat.

* Une estimation obtenue à partir d'un lissage de la courbe expérimentale.

Cette seconde méthode semble être plus adaptée à l'estimation de la valeur moyenne la plus probable, à cause de la dispersion importante des résultats et du faible nombre d'éprouvettes utilisées pour chaque type d'essais.

			PREVISIONS						ESSAIS			
			ONERA		CETIM		ENSMA					
			2024	7010	2024	7010	2024	7010	2024	7010	2024	7010
		contrainte nominale maximale (Mpa)	amorçage		amorçage		amorçage		amorçage		rupture	
éprouvette lisse (Kt = 1)	monotone	320	105700	71400	364500	89130	/	/	/	/	89550	86350
	avec surcharges	(2024)	98900	68500	361700	88520	/	/	/	/	56480	25230
	avec petits cycles	350	61260	69700	346700	86280	/	/	/	/	66530	24800
	effets combinés	(7010)	50650	61020	344400	85750	/	/	/	/	33617	14550
éprouvette entaillée (Kt = 2,75)	monotone	200	41500	4630	7240	12090	/	/	65863	19147	82790	30640
	avec surcharges	(2024)	55200	36000	362450	209160	/	/	210657	87973	241830	139700
	avec petits cycles	180	22640	4400	6700	11430	/	/	21376	7265	27330	15630
	effets combinés	(7010)	22940	30900	355130	201800	/	/	84818	16985	98715	37240
	chargement monotone R = 0,1	235	19070	/	3387	/	/	/	19030	/	32552	/
		200	46970	/	7111	/	/	/	51669	/	76086	/
		180	93160	/	12295	/	/	/	135684	/	172866	/
	AC1-00	220	38460	/	33000	/	18439	/	12707	/	16286	/
		210	59780	/	39000	/	26641	/	45345	/	51828	/
		200	91900	/	47000	/	40422	/	177746	/	179655	/
	AC1-10	200	72430	/	47000	/	40422	/	22313	/	28044	/
		190	115090	/	58000	/	64710	/	49854	/	58755	/
		185	145210	/	65000	/	/	/	78378	/	89087	/
		180	182580	/	74000	/	108617	/	129615	/	141514	/
	AC1-20	220	30180	/	33000	/	18439	/	11940	/	17855	/
		200	79490	/	47000	/	40422	/	25967	/	33502	/
		190	128720	/	58000	/	64710	/	42749	/	50170	/
		180	209300	/	74000	/	108617	/	81741	/	84814	/
	AC1-30	280	5540	/	11000	/	4517	/	4797	/	9417	/
		250	10390	/	20000	/	8175	/	8155	/	14785	/
		200	78100	/	47000	/	40426	/	28492	/	42816	/
		180	204510	/	71000	/	108625	/	72233	/	94411	/

Tableau 4.1 : « Résultats essais-prévisions »

L'analyse de ces résultats a conduit le groupe de travail GT4 à formuler les remarques suivantes (confère [44] ainsi que les différents comptes rendus du groupe GT4) :

4.1 - SEQUENCES DE CHARGEMENT A AMPLITUDE VARIABLE SIMPLIFIEE

Les résultats de ces essais ainsi que les prévisions données par les modèles sont représentés sur les figures 4.1.1 (alliage 2024, Kt = 1), 4.1.2 (alliage 2024, Kt = 2.75) et 4.1.3 (alliage 7010, Kt = 1), 4.1.4 (alliage 7010, Kt = 2.75).

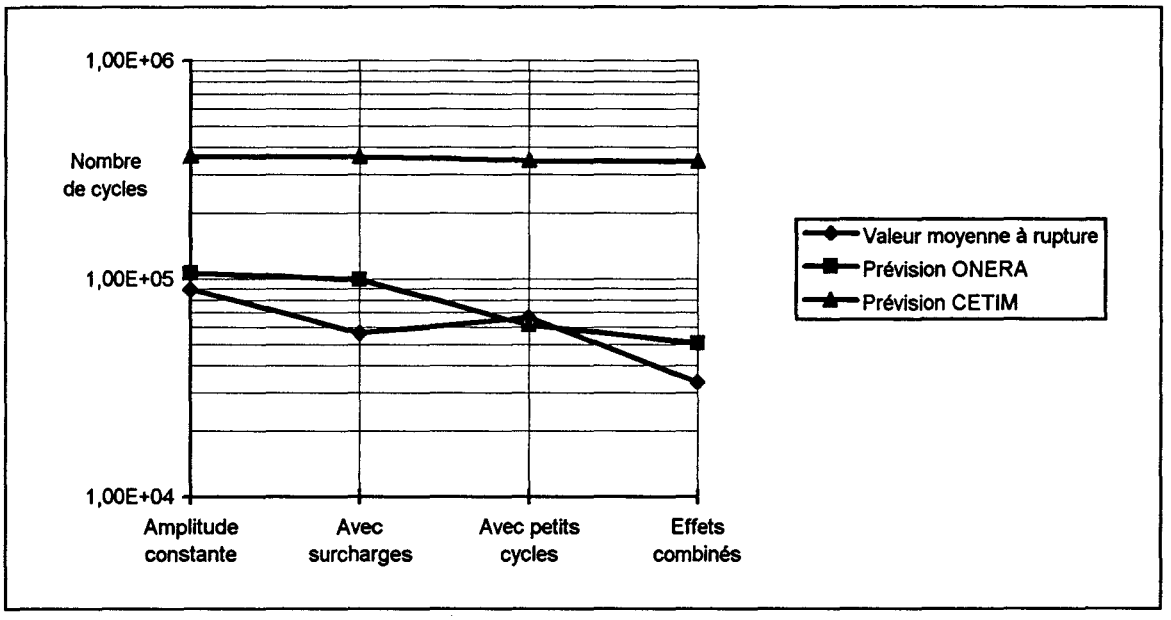


Figure 4.1.1 : « Alliage 2024 T351 - Kt = 1 - Σ_{max} = 320 MPa »

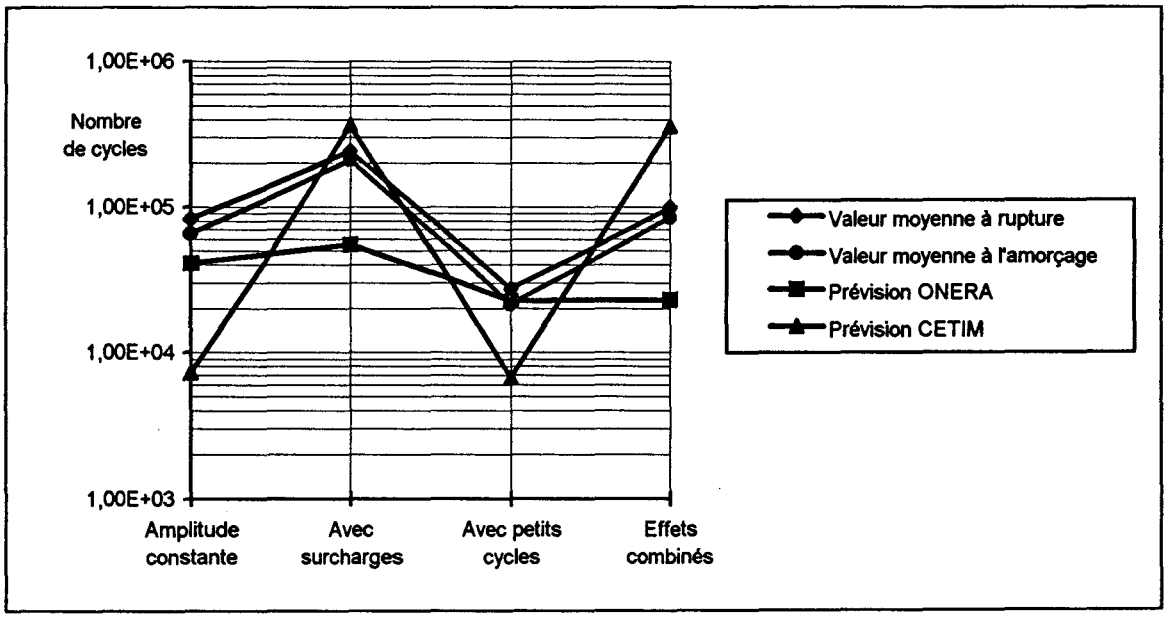


Figure 4.1.2 : « Alliage 2024 T351 - Kt = 2,75 - Σ_{max} = 200 MPa »

BU LILLE I

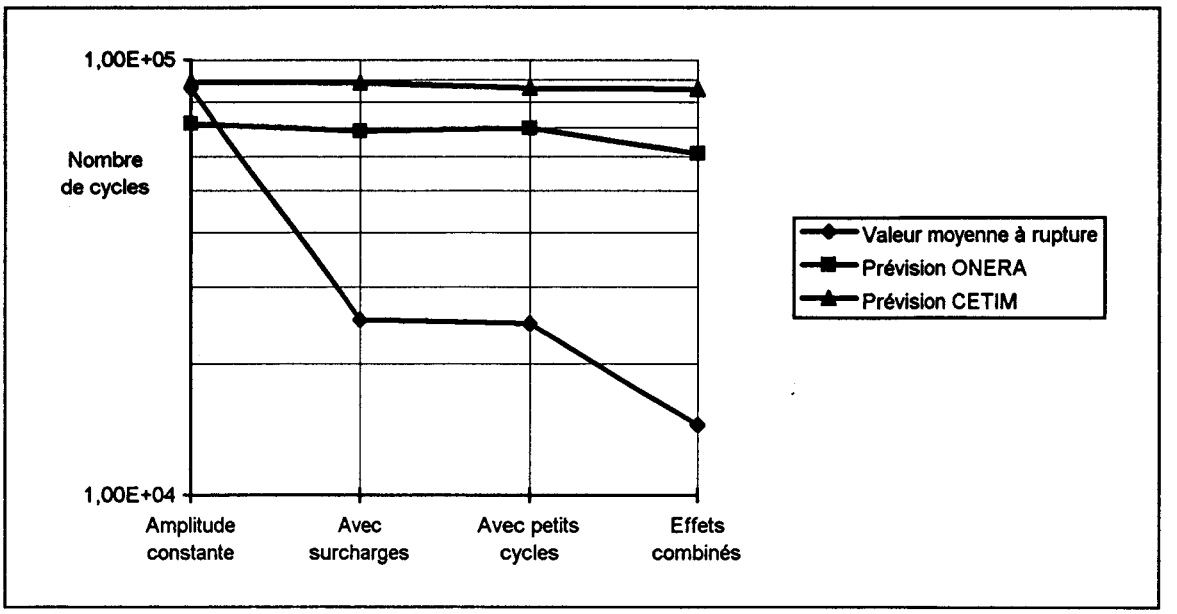


Figure 4.1.3 : « Alliage 7010 T73651 - Kt = 1 - Σ_{max} = 350 MPa »

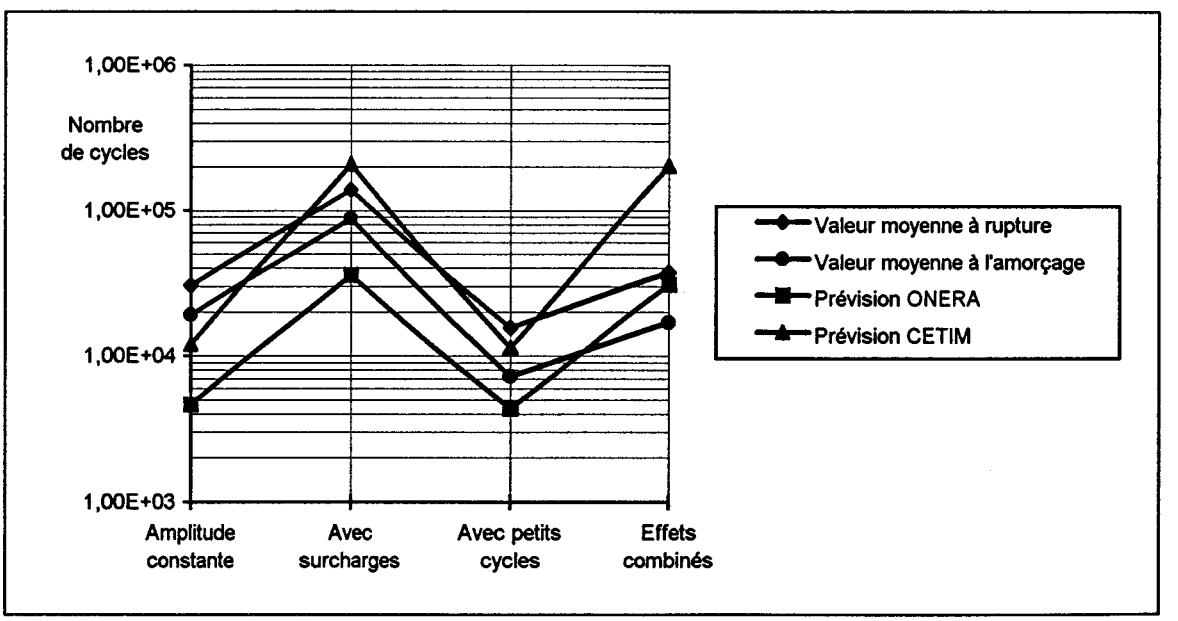


Figure 4.1.4 : « Alliage 7010 T73651 - Kt = 2,75 - Σ_{max} = 180 MPa »

D'après ces graphes, les effets de ces chargements sont les mêmes d'un point de vue expérimental, indépendemment de l'alliage considéré :

- L'application de surcharges périodiques entraine une augmentation de la durée de vie en fatigue des éprouvettes entaillées (voir partie I, paragraphe 1.4) et une réduction importante de cette même durée de vie dans le cas d'éprouvettes lisses.

- Les petits cycles, qui ne causent pas de dommage lorsqu'ils sont appliqués seuls, commencent à le faire lorsqu'ils sont combinés avec des cycles endommageants.

- L'effet pénalisant des petits cycles s'additionne aux effets pénalisant (Kt = 1) ou bénéfiques (Kt = 2.75) des surcharges, dans le cas des chargements combinés.

Une comparaison entre les résultats d'essais et de calcul conduit aux remarques suivantes :

A) Cas des éprouvettes lisses :

A1) Alliage 2024 (figure 4.1.1) :

* Le modèle de l'ONERA fournit des résultats relativement satisfaisant bien que l'effet des surcharges soit sous-estimé et que ses prévisions soient légérement non-conservatives (les durées de vie calculées à l'amorçage d'une fissure sont en effet supérieures aux durées de vie moyennes à rupture relevées expérimentalement).

* Le modèle utilisé par le CETIM conduit à des estimations de durée de vie fortement non-conservatives. De plus, il est totalement indifférent à la présence de surcharges ou de petits cycles dans la séquence de chargement.

Etant donné que le modèle de Smith-Topper-Watson rend compte correctement de l'effet d'une contrainte moyenne, cette différence entre les résultats d'essais et de calcul peut être attribuée à une mauvaise évaluation du cumul de dommage (la règle de Miner ne peut prendre en compte l'effet endommageant de cycles situés en dessous de la limite de fatigue) ou encore une mauvaise évaluation des variables ΔE et Σ_{max} (voir le paragraphe 3.4).

A2) Alliage 7010 (figure 4.1.3) :

Tous les modèles donnent des prédictions relativement similaires : en dehors du cas des chargements à amplitude constante, elles ne rendent pas compte des observations expérimentales (influence des surcharges, des petits cycles et des chargements combinés).

B) Cas des éprouvettes entaillées :

Les figures 4.1.2 et 4.1.4 mettent en évidence la similitude certaine qui existe entre les courbes expérimentales à rupture et à l'amorçage d'une fissure : les tendances générales observées expérimentalement sont en effet identiques.

L'examen des résultats donnés dans le tableau 4.1 indique que la durée de vie à l'amorçage d'une fissure représente, pour ces types et valeurs de chargement, entre 78 et 88% de la durée de vie à rupture dans le cas de l'alliage 2024, et entre 45 et 63% dans le cas de l'alliage 7010.

Les observations expérimentales sont de plus assez bien décrites par les modèles du CETIM et de l'ONERA. Ce constat peut toutefois être nuancé à la vue des remarques suivantes :

B1) Alliage 2024 (figure 4.1.2) :

* Le modèle de l'ONERA a parfois tendance à être trop conservatif, essentiellement parce qu'il sous-estime l'effet des surcharges.

* Le modèle du CETIM est quant à lui beaucoup trop conservatif dans le cas d'un chargement à amplitude constante. Il a de plus tendance à sur-estimer l'influence des surcharges (mauvaise estimation de la contrainte intervenant dans la loi de Smith-Topper-Watson, qui permet de rendre compte de l'influence d'une contrainte moyenne non nulle lors du calcul du dommage) et être indifférent à la présence de petits cycles dans la séquence de chargement (problème lié à l'utilisation d'une loi de cumul linéaire du dommage).

B2) Alliage 7010 (figure 4.1.4) :

* Le modèle de l'ONERA est trop conservatif dans le cas des chargements à amplitude constante. Il sous-estime l'effet des surcharges et des petits cycles.

* Le modèle du CETIM sur-estime l'effet des surcharges et sous-estime l'effet des petits cycles.

Suite à cette partie de l'étude relative à une séquence de chargement à amplitude variable simplifiée, il semble que la première exigence d'un modèle est qu'il prenne en compte le comportement en fatigue sous chargement à amplitude

constante avec autant de précision que possible, et cela quelque soit la durée de vie considérée.

4.2 - SEQUENCES DE CHARGEMENT COMPLEXE

Ces essais réalisés sur des éprouvettes entaillées en alliage d'aluminium 2024 ont été effectué par le CEAT. Ils ont permis d'élaborer les courbes (contrainte nominale maximale - durée de vie) pour les séquences à amplitude constante $(R_\Sigma = 0{,}1)$ ainsi que les séquences AC1-00, AC1-10, AC1-20 et AC1-30.

Les résultats obtenus à partir de ces séquences sont représentés sur les figures 4.2.1 (contrainte nominale maximale - durée de vie à rupture) et 4.2.2 (contrainte nominale maximale - durée de vie à l'amorçage d'une fissure).

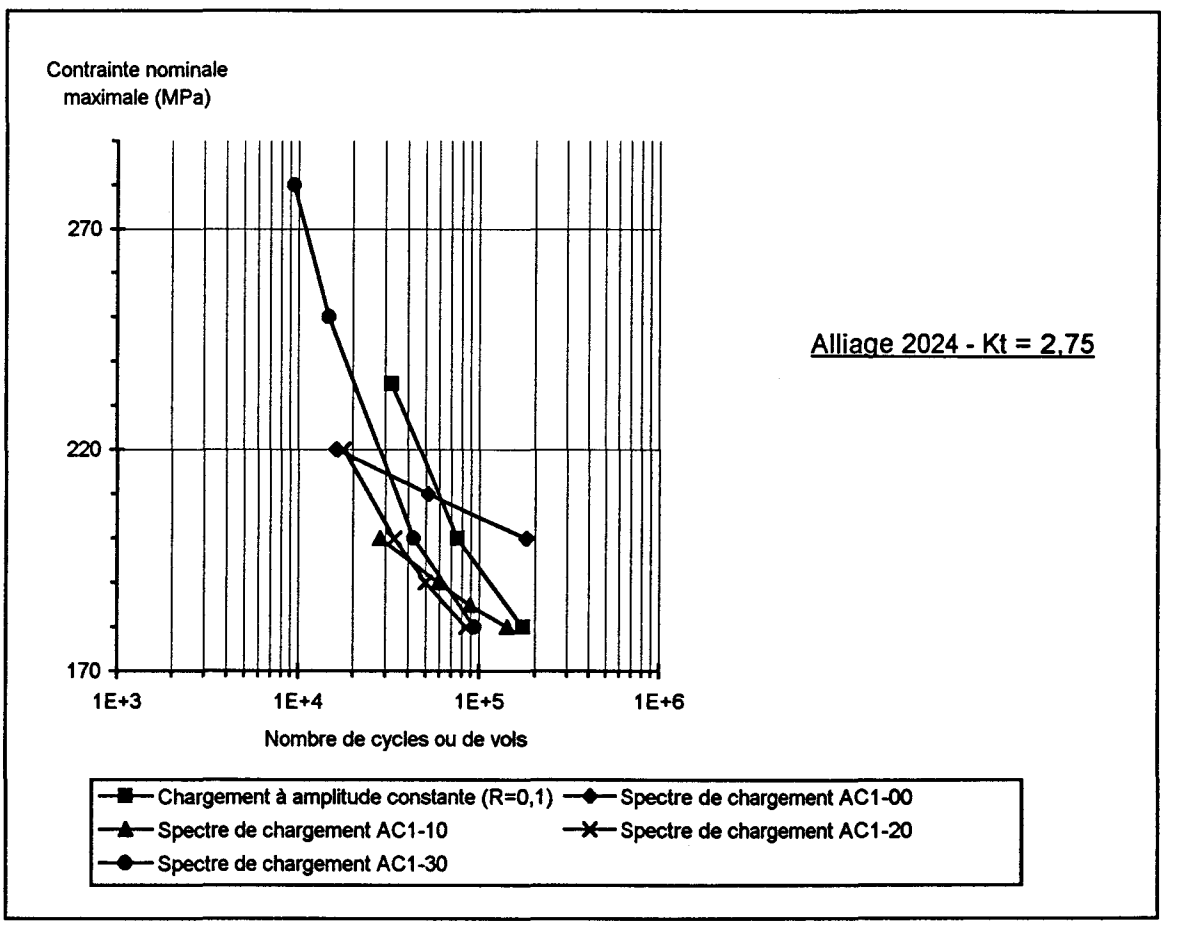


Figure 4.2.1 : « Contrainte nominale maximale - Durée de vie à rupture »

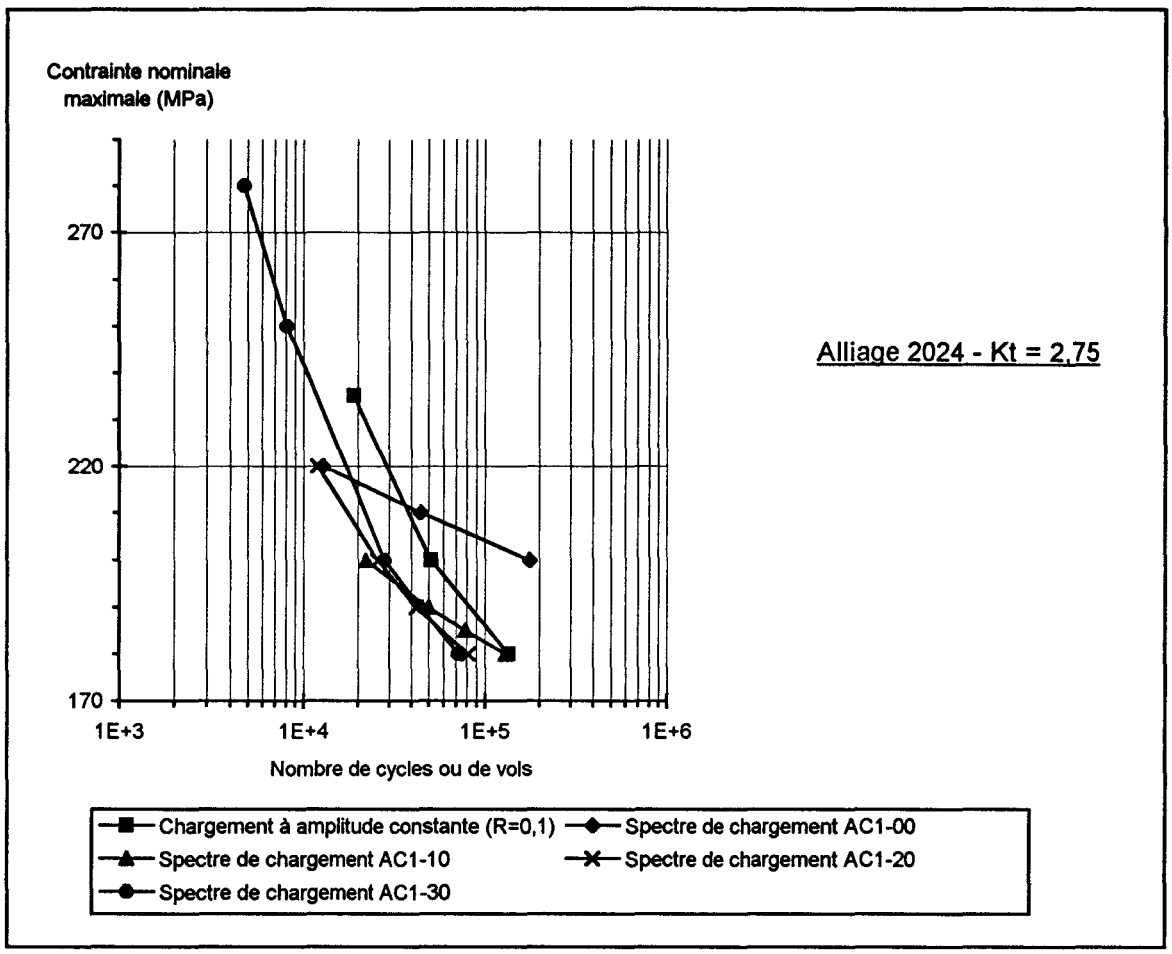


Figure 4.2.2 : « Contrainte nominale maximale - Durée de vie à l'amorçage d'une fissure »

Les formes générales de ces courbes sont indépendantes du critère retenu (durée de vie à l'initiation d'une fissure ou à rupture).

Dans le cas des essais à différents niveaux de contrainte, le tableau 4.1 indique que, indépendamment du type de chargement considéré, plus la contrainte nominale maximale imposée est faible et plus la durée de vie à l'amorçage d'une fissure est importante par rapport à la durée de vie à rupture.

L'analyse des figures 4.2.1 et 4.2.2 conduit aux remarques suivantes :

- La tendance des courbes n'est pas la même dans les cas simples (R_Σ= 0,1; AC1-30 et AC1-20) et les cas plus complexes (AC1-10; AC1-00) qui incluent les cycles de faible amplitude.

- Une extrapolation de ces courbes dans le domaine des contraintes nominales maximales élevées semble indiquer que plus la séquence

initiale AC1-00 est filtrée et plus la durée de vie correspondante de la structure (nombre de séquences conduisant à la rupture) est importante. Il est à noter que la séquence définie par $R_\Sigma = 0,1$ représente un cas extrême de simplification.

Inversement, une extrapolation de ces mêmes courbes dans le domaine des faibles contraintes nominales maximales (de l'ordre de la limite d'endurance, c'est à dire 170 MPa dans le cas présent), semble indiquer que plus la séquence AC1-00 est filtrée et plus la durée de vie correspondante de la structure est faible.

Les petits cycles ont donc apparemment, sur la durée de vie en fatigue, un effet qui peut être qualifié de :

* Bénéfique lorsque le chargement nominal maximum est proche de la limite de fatigue.
* Néfaste lorsque le chargement nominal maximum est élevé.

L'origine de ce comportement peut être attribuée à une micro-déformation plastique accompagnée d'un durcissement, ou encore à une meilleure adaptation en fond d'entaille.

Une comparaison entre les résultats d'essais et les prévisions données par les modèles peut être établie à partir de l'examen des figures 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5, 4.2.6 et 4.2.7.

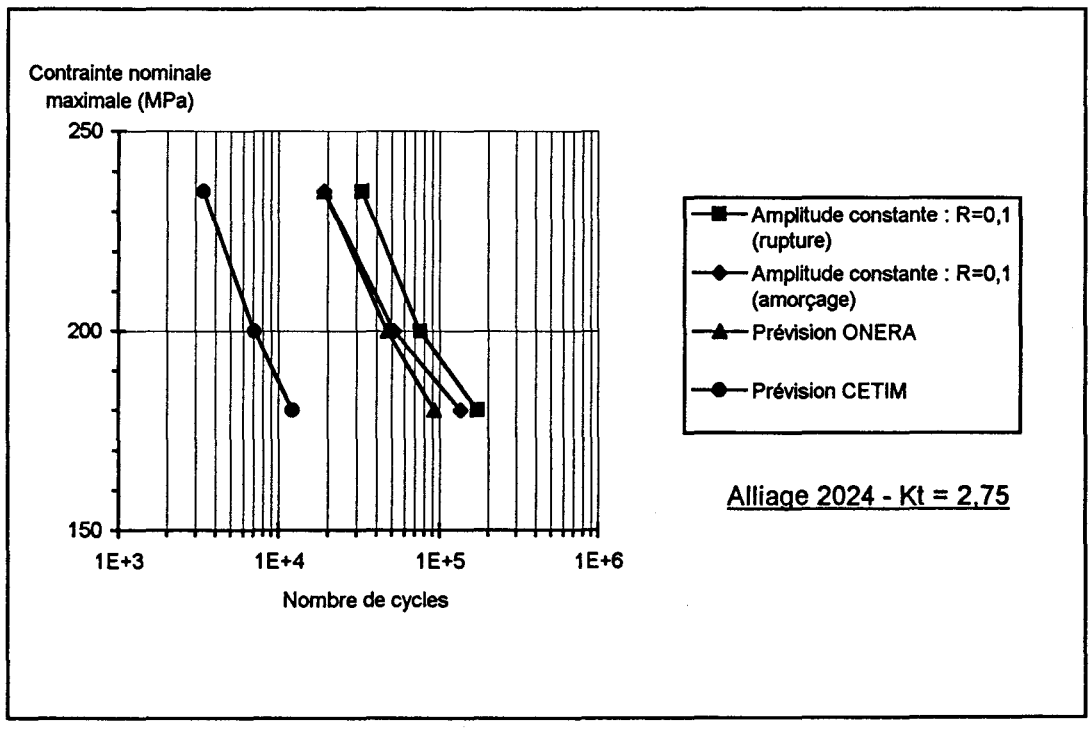


Figure 4.2.3 : « Amplitude de chargement constante (R=0,1) »

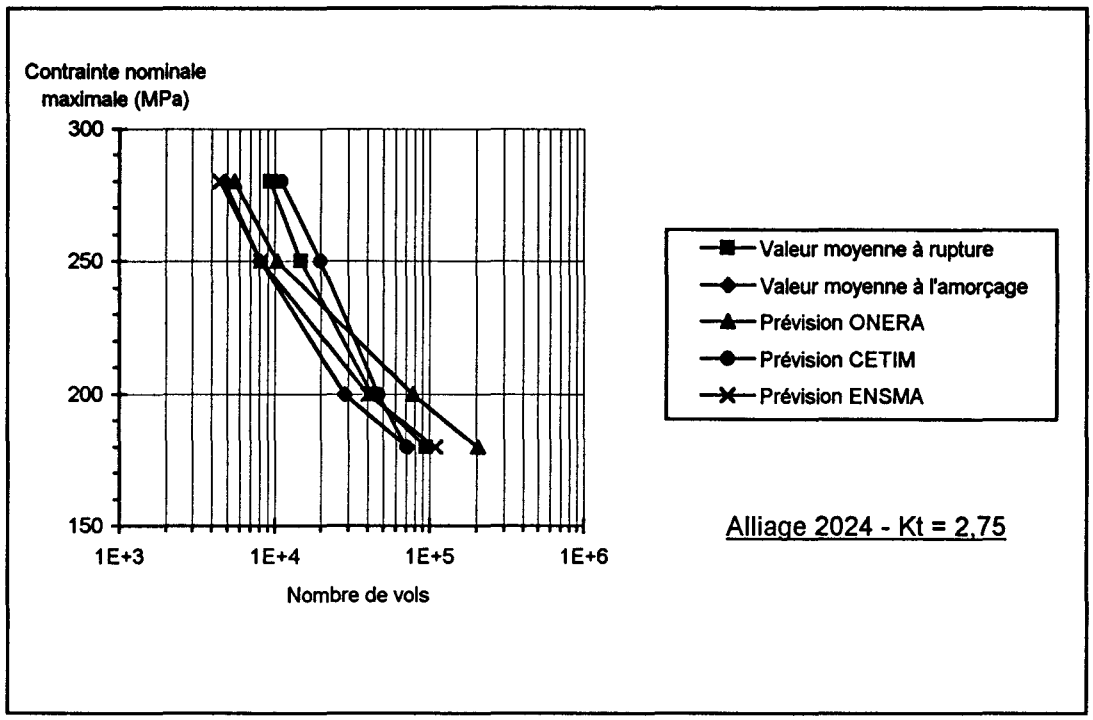


Figure 4.2.4 : « Séquence de chargement AC1-30 »

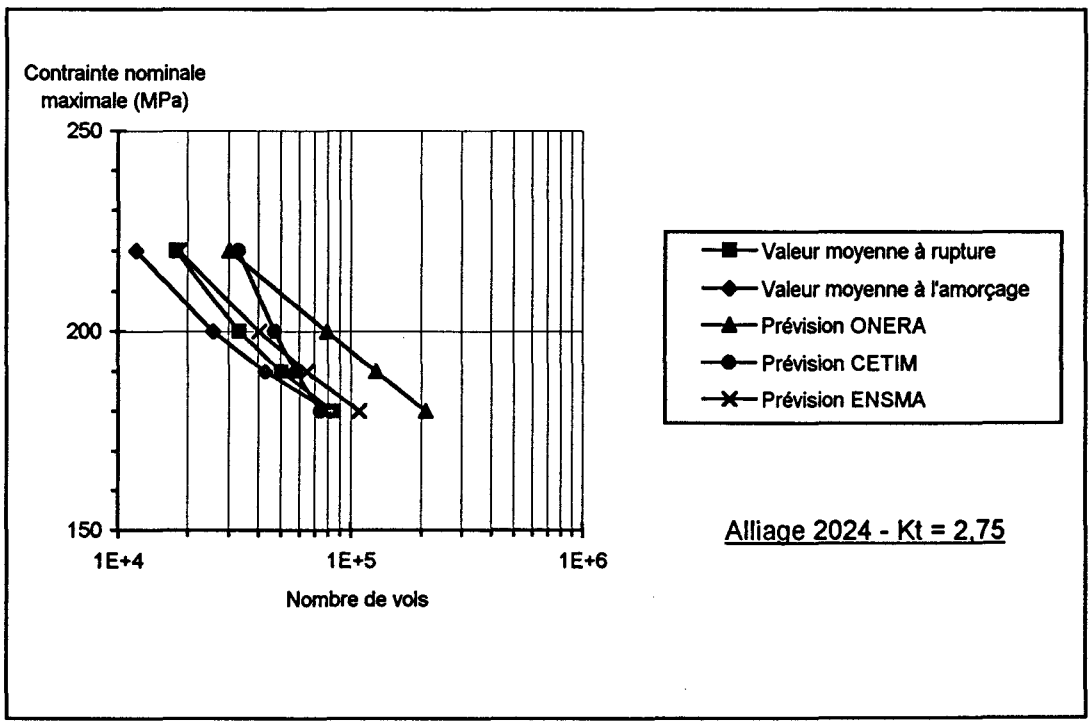


Figure 4.2.5 : « Séquence de chargement AC1-20 »

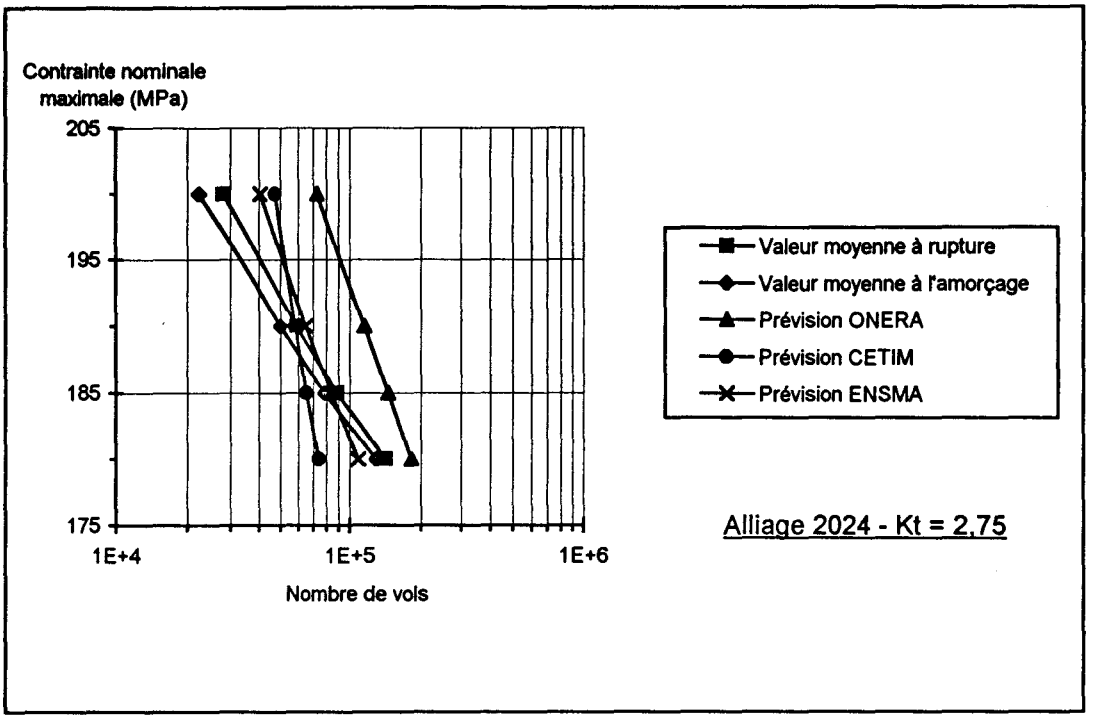


Figure 4.2.6 : « Séquence de chargement AC1-10»

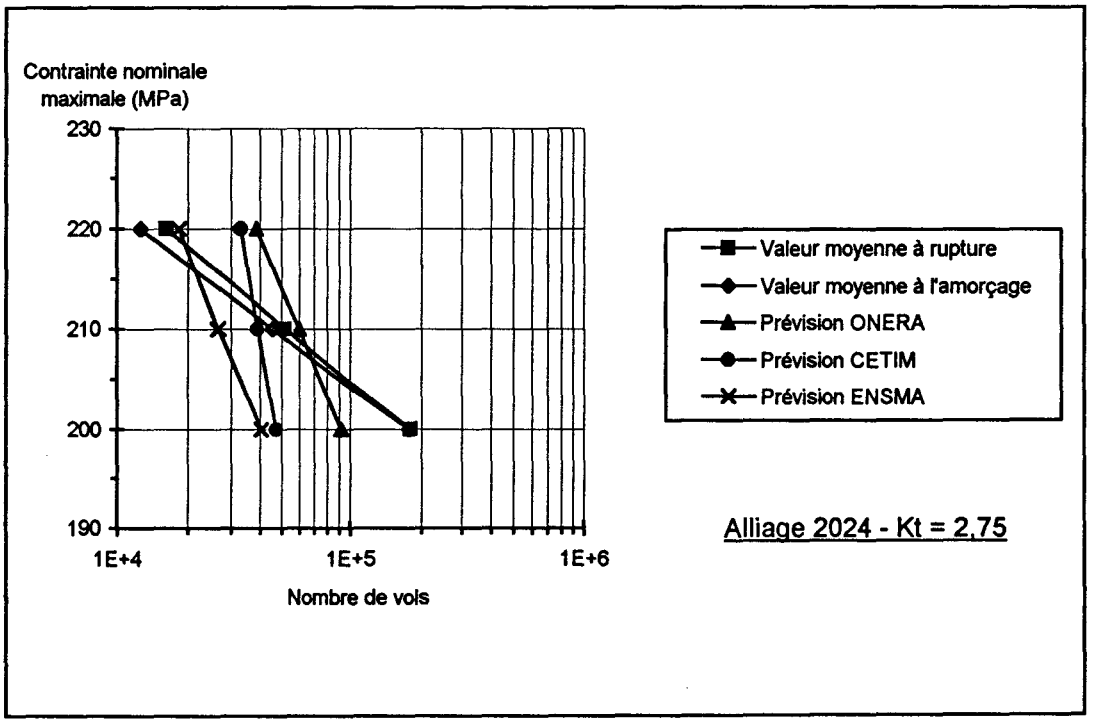


Figure 4.2.7 : « Séquence de chargement AC1-00»

D'après l'analyse de ces figures, les remarques suivantes peuvent être tirées :

* Le modèle du CETIM, qui utilise une règle de cumul linéaire du dommage, s'avère être beaucoup trop conservatif dans le cas des chargements à amplitude constante.

Un doute est donc permis quant à la validité de son utilisation dans le cas de spectres de chargements complexes, et cela même si une meilleure corrélation est alors observée entre ses prévisions et les résultats d'essais (dans le cadre de cette étude).

* Le modèle de l'ENSMA n'a été utilisé que dans le cas des spectres de chargements aéronautiques. Il donne des prévisions de durée de vie en accord avec les résultats expérimentaux . Celles-ci sont meilleures que les estimations de l'ONERA lorsqu'il y a peu de petits cycles dans la séquence de chargement (la loi de cumul linéaire du dommage ne peut en tenir compte).

Il serait intéressant d'analyser les prévisions de ce modèle dans le cas de chargements à amplitude variable simplifiée, de manière à pouvoir vérifier s'il est apte à rendre compte de mécanismes simples d'endommagement.

La différence majeure entre les estimations de ce modèle et celles du CETIM provient essentiellement de la manière suivant laquelle est réalisée l'analyse Rainflow (sur l'ensemble des spectres ou vol à vol). Dans le cas où le nombre de cycles à rupture est important (peu de plasticité), on observe alors peu de différence entre les résultats obtenus après un calcul vol à vol et ceux obtenus après un calcul sur le spectre.

* Le modèle de l'ONERA donne des prévisions très correctes dans le cas d'essais à amplitude constante.

Sa loi de cumul non-linéaire du dommage lui permet de prendre en compte l'effet des petits cycles, mais avec une précision apparemment insuffisante (voir figures 4.2.6 et 4.2.7) : Les effets bénéfiques $\left(\Sigma_{max}^{nominal} \cong \Sigma_D^{-1}\right)$ ou néfastes $\left(\Sigma_{max}^{nominal} > \Sigma_D^{-1}\right)$ des petits cycles semblent trop atténués.

Ses prévisions sont bien souvent non-conservatives dans le cas des spectres de chargements aéronautiques. L'ONERA attribue cela, à une mauvaise prise en compte du comportement élasto-plastique qui conduit à une relaxation trop importante des contraintes, d'où un cycle endommageant trop faible.

5 - CONCLUSION

Cette étude a conduit le groupe de travail GT4 à formuler les remarques suivantes :

- La précision des estimations de durée de vie en fatigue est avant tout basée sur une bonne évaluation du comportement du matériau (traction monotone, traction cyclique, fatigue). Ceci suggère qu'un intervalle de confiance soit associé à chaque prévision fournie par un modèle (à partir de la prise en compte de la dispersion des résultats d'essais utilisés lors de l'identification du modèle). Cet intervalle pourrait ainsi être comparé à la dispersion des résultats expérimentaux.

- Le calcul de l'endommagement à partir des approches locales classiques (modèles du CETIM et de l'ENSMA), est basé sur l'utilisation de modèles de comportement en fatigue à amplitude constante (Smith-Topper-Watson, Morrow). Ceux-ci sont plus adaptés aux domaines des faibles durées de vie qu'aux longues. Ces modèles peuvent donc être insuffisants pour rendre compte de l'endommagement en endurance illimitée.

Il serait de plus intéressant d'appliquer la procédure Rainflow après l'analyse plastique, ce qui devrait conduire à de nouvelles prévisions de durée de vie en fatigue (liée à une modification de l'évaluation de la contrainte moyenne).

- Parmi les modèles étudiés, celui de l'ONERA, par son principe, semble être le plus adapté au calcul de prévision de durée de vie en fatigue dans le cas des chargements complexes : c'est le seul qui utilise la notion d'évolution du dommage, ce qui lui permet de prendre en compte des phénomènes tels que l'accumulation non-linéaire du dommage, ou encore les effets endommageant des petits cycles.

PARTIE III

Analyse inélastique

ANALYSE INELASTIQUE

Les modèles d'endommagement présentés dans le chapitre précédent font appel, d'une manière générale, à une analyse locale, couplée à une méthode de comptage de cycle : au point critique de la structure (par exemple en fond d'entaille), le trajet de chargement dans l'espace contrainte-déformation est décomposé en cycles dont l'incidence est évaluée en termes d'endommagement. L'emploi d'une règle de cumul (linéaire ou non), conduit à une estimation de la durée de vie de la structure.

Nous proposons dans ce travail une toute autre méthode. Elle est basée sur le suivi de l'évolution de la réponse de la structure, au cours de l'historique réel de chargement (et non pas simplement une analyse ponctuelle).

La détermination de l'évolution globale d'une structure élasto-plastique nécessite, dans le cas d'une résolution de type numérique, l'emploi d'un schéma itératif. Le problème implicite ainsi créé implique souvent l'utilisation d'algorithmes coûteux en temps de calcul, et qui posent de plus des difficultés de convergence.

Etant donné que les séquences de chargement à traiter peuvent être composées d'un nombre très important d'extremums (1 412 836 extremums dans le cas de la séquence AC1/00), l'emploi d'une méthode de calcul incrémental est à proscrire car elle conduirait à des temps de calcul a priori beaucoup trop importants. Pour remédier à ce problème, nous proposons l'emploi d'une procédure basée sur la Méthode d'Analyse Simplifiée des Structures Inélastiques (MASSI), mise au point par le professeur J. Zarka et al [27].

Après avoir brièvement rappelé les principes de la MASSI, nous en proposerons une extrapolation de manière à pouvoir estimer la réponse inélastique d'une structure, dans le cas où elle est soumise à un chargement complexe.

1 - PRINCIPES DE LA MASSI

1.1 - LOIS DE COMPORTEMENT

Les phénomènes physiques mis en oeuvre dans le cas d'un comportement non-linéaire sont à la fois nombreux et complexes [27], [45], [46]. Des modèles rhéologiques simples permettent d'en rendre compte.

Considérons un élément de volume représentatif de la structure (suffisamment grand par rapport à la microstructure, de manière à ce que l'hypothèse de macro-homogénéité soit vérifiée). Ce volume élémentaire de référence est en fait composé d'éléments variés. Son comportement global est lié à la présence de mécanismes inélastiques locaux élémentaires ainsi qu'à leur distribution. Des campagnes d'essais permettent de caractériser ces derniers, et cela aussi bien quantitativement que qualitativement. On dispose pour cela d'essais sous chargements :

- Monotones ou cycliques.
- Uniaxiaux ou multiaxiaux.
- A vitesses variables...

Un Volume Elémentaire de Référence (VER), peut en fait être représenté sous la forme d'un ensemble de mécanismes inélastiques imbriqués dans une matrice élastique. Cet élément peut donc être modélisé à l'aide d'une microstructure fictive composée de sous-éléments ayant des propriétés mécaniques simples : des sous-éléments élastiques (linéaires) assurent les liaisons entre l'ensemble des sous-éléments inélastiques (non-linéaires).

Des modèles rhéologiques uniaxiaux simples permettent de schématiser ces sous-éléments. On a ainsi :

* Pour l'élasticité linéaire :

Le ressort

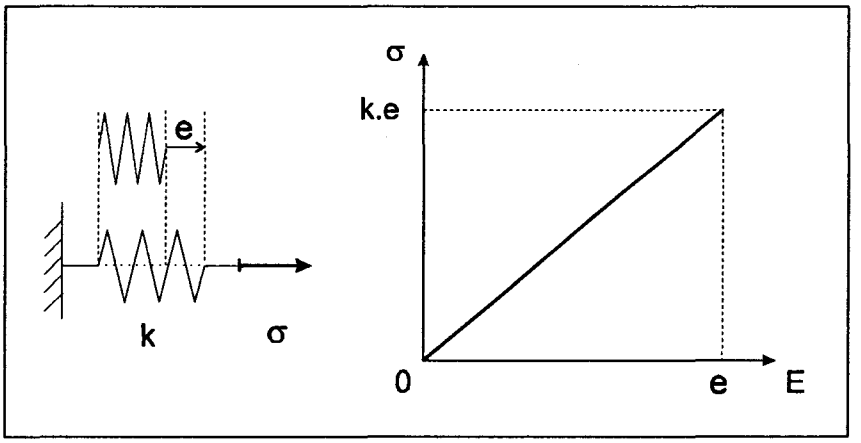


Figure 1.1.1 : « Le ressort »

La charge uniaxiale σ est liée à l'élongation e du ressort de raideur k, suivant la relation :

$$\sigma = k \cdot e \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

* Pour la plasticité parfaite :

Le patin

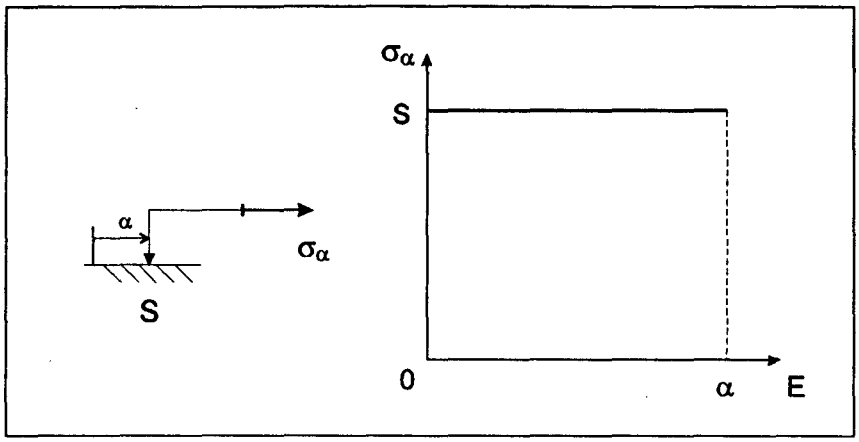


Figure 1.1.2 : « Le patin »

$$\begin{cases} -S \le \sigma_\alpha \le +S \\ E = E^P = \alpha \end{cases} \qquad \textbf{(1.1.2)}$$

où :

* α caractérise le déplacement du patin
* S correspond au seuil de glissement du patin

Ce modèle rhéologique est noté mécanisme α et permet de modéliser une déformation inélastique instantanée avec seuil (qui rend compte de phénomènes de glissement sec, de dislocations...).

* Pour la viscoélasticité :

L'amortissement

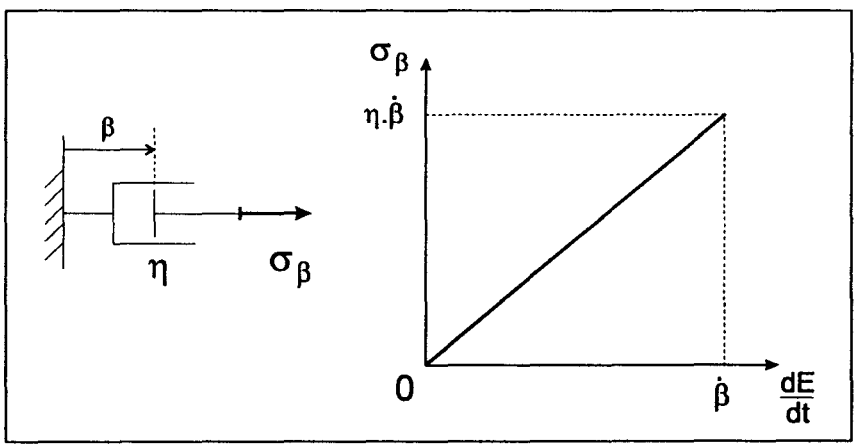


Figure 1.1.3 : « L'amortissement »

$$\sigma_\beta = \eta \cdot \dot{\beta} \qquad \textbf{(1.1.3)}$$

où :

* β caractérise le déplacement de l'amortisseur

* η représente le facteur d'amortissement

Ce modèle rhéologique est noté mécanisme β et permet de modéliser une déformation inélastique différée sans seuil (qui rend compte de phénomènes de diffusion).

* Pour la viscoplasticité :

L'assemblage en parallèle d'un patin et d'un amortissement

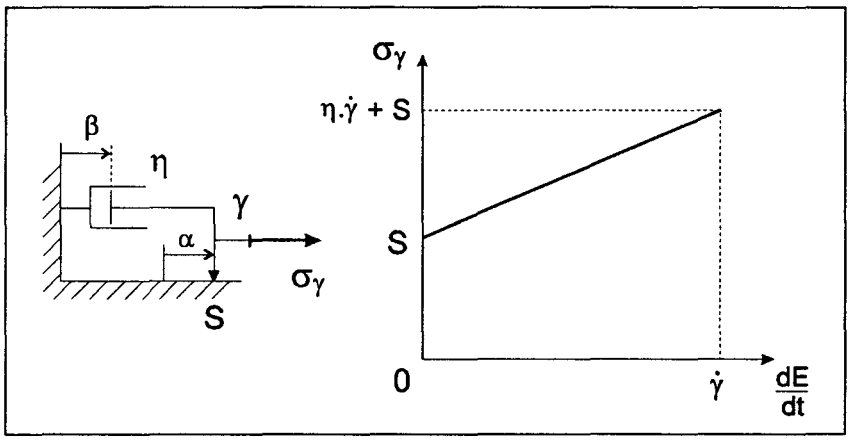


Figure 1.1.4 : « Patin et amortissement en parallèle »

Les déplacements α pour le patin et β pour l'amortissement sont constamment identiques et sont notés γ.

σ_γ représente la charge appliquée sur le système, σ_α et σ_β représentent les contraintes existant respectivement au niveau du patin et de l'amortissement.

$$\begin{cases} \sigma_\gamma = \sigma_\alpha + \sigma_\beta \\ \sigma_\alpha \in [-S, S] \\ \sigma_\beta = \eta \cdot \dot{\beta} = \eta \cdot \dot{\gamma} \end{cases} \quad \textbf{(1.1.4)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_\gamma = \sigma_\alpha + \eta \cdot \dot{\gamma} \\ \sigma_\alpha \in [-S, S] \end{cases} \quad \textbf{(1.1.5)}$$

Ce modèle rhéologique est noté mécanisme γ et permet de modéliser une déformation inélastique différée avec seuil (qui rend compte de phénomènes activés thermiquement).

Les tests de laboratoire permettent de déterminer le modèle le plus simple qui soit capable de rendre compte du comportement observé. Les déplacements relatifs

aux mécanismes inélastiques, inclus dans le VER, sont notés X. Ils sont considérés comme étant des paramètres internes permettant de caractériser le matériau considéré (ce sont des quantités tensorielles).

$$X = [\alpha \ \beta \ \gamma]^T \qquad \textbf{(1.1.6)}$$

1.2 - CONTRAINTES LOCALES

Soit Σ le vecteur contrainte appliqué sur le VER. Les contraintes locales au niveau de chaque mécanisme inélastique peuvent s'écrire sous la forme :

$$\sigma = [\sigma_\alpha \ \sigma_\beta \ \sigma_\gamma]^T = A \cdot \Sigma - b \cdot X \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

Cette expression peut encore s'écrire :

$$\sigma = A \cdot \Sigma - y \qquad \textbf{(1.2.2)}$$

avec:

$$y = [y_\alpha \ y_\beta \ y_\gamma]^T = b \cdot X \qquad \textbf{(1.2.3)}$$

- $(\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma)$ sont les contraintes locales qui sont associées à chacunes des déformations inélastiques locales.

- $A = [A_\alpha \ A_\beta \ A_\gamma]^T$ est appelée matrice de localisation.

- b est la matrice de couplage des mécanismes inélastiques. Elle est définie positive et, dans le cadre des petites déformations, elle est symétrique.

- $(y_\alpha, y_\beta, y_\gamma)$ sont appelés paramètres internes transformés. Deux cas sont à distinguer :

  * b est régulière

    La relation liant les quantités y et X est alors bijective ; l'évolution de X (ou de y) permet donc de déterminer l'évolution de y (ou de X).

  * b est singulière

    Il est alors nécessaire de suivre simultanément l'évolution de X et de y.

- E^P est la déformation plastique relevée sur le VER. Cette quantité est définie par la relation :

$$E^P = A^T \cdot X \qquad \textbf{(1.2.4)}$$

ou encore, dans le cas où b est régulière :

$$E^P = A^T \cdot b^{-1} \cdot y \qquad \textbf{(1.2.5)}$$

1.3 - EVOLUTION DES MECANISMES INELASTIQUES LOCAUX

Il est nécessaire de connaître pour chaque mécanisme inélastique, la loi d'évolution du paramètre interne qui lui est associé. Ceci permet de savoir quand et comment s'effectuent les déplacements relatifs aux mécanismes inélastiques.

* Mécanisme α :

La contrainte locale σ_α exercée au niveau du patin doit être plastiquement admissible :

→ Critère de plasticité :

$$\sigma_\alpha \in [-S, S] = c_0 \qquad \textbf{(1.3.1)}$$

c_0 est un domaine convexe fixe, centré sur l'origine et de longueur $2 \cdot S$.

→ Règle d'écoulement :

$$\left.\begin{array}{lll} \sigma_\alpha = +S & \rightarrow & \dot{\alpha} \geq 0 \\ \sigma_\alpha = -S & \rightarrow & \dot{\alpha} \leq 0 \\ -S < \sigma_\alpha < S & \rightarrow & \dot{\alpha} = 0 \end{array}\right\} \quad \dot{\alpha} \in \partial \psi_{C_0}(\sigma_\alpha) \,, \qquad \textbf{(1.3.2)}$$

c'est à dire que $\dot{\alpha}$ est dirigé suivant la normale extérieure au domaine convexe c_0 en σ_α, ou encore que $\dot{\alpha}$ appartient à la subdifférentielle de la fonction ψ (fonction indicatrice du convexe c_0), en σ_α (voir figure 1.3.1).

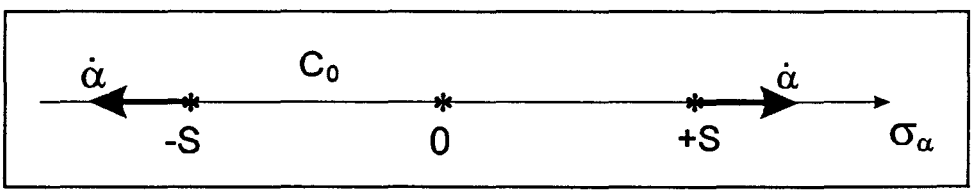


Figure 1.3.1 : « Règle d'écoulement relative à un mécanisme α »

* Mécanisme β :

Pour ces mécanismes, on admet dans le cas le plus simple la forme :

$$\dot{\beta} = \frac{\sigma_\beta}{\eta} = \frac{A_\beta \cdot \Sigma - y_\beta}{\eta} \qquad \textbf{(1.3.3)}$$

avec :

$$\dot{\beta} = 0 \quad \text{ssi} \quad \sigma_\beta = 0$$

* Mécanisme γ :

Pour ces mécanismes, il existe un domaine convexe D_0 centré sur l'origine et qui est tel qu'on ait :

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \omega}{\partial \sigma_\gamma} \quad , \tag{1.3.4}$$

où ω représente le potentiel viscoplastique du mécanisme γ, définit sur D_0.

1.4 - EVOLUTION GLOBALE D'UNE STRUCTURE

Considérons à présent une structure de volume V réalisée à partir d'un matériau donné et soumise à un chargement arbitraire (figure 1.4.1). Le matériau a été préalablement caractérisé : des essais de laboratoire ont permis d'identifier :

- La nature des paramètres internes X.
- Les matrices A et b.
- Les paramètres internes transformés y.
- Les lois d'évolution locales associées à chacun des mécanismes inélastiques.

Dans ce qui suit, nous nous limiterons au cas des petites déformations et des chargements quasi-statiques. De plus, nous supposerons que la décomposition de la frontière de la structure reste constante durant l'historique de chargement ($\partial_F V$ et $\partial_U V$ sont complémentaires et représentent respectivement les parties de la frontière où des forces de surface et des déplacements sont imposés).

Cette structure est soumise au chargement suivant :

- Sur le volume V :
  * Les forces de volume $\underline{\vec{X}}^d(t)$
  * Les déformations initiales $\underline{\underline{E}}^I(t)$
- Sur la frontière $\partial_F V$:
  * Les forces de surface $\underline{F}^d(t)$
- Sur la frontière $\partial_U V$:
  * Les déplacements imposés $\underline{U}^d(t)$

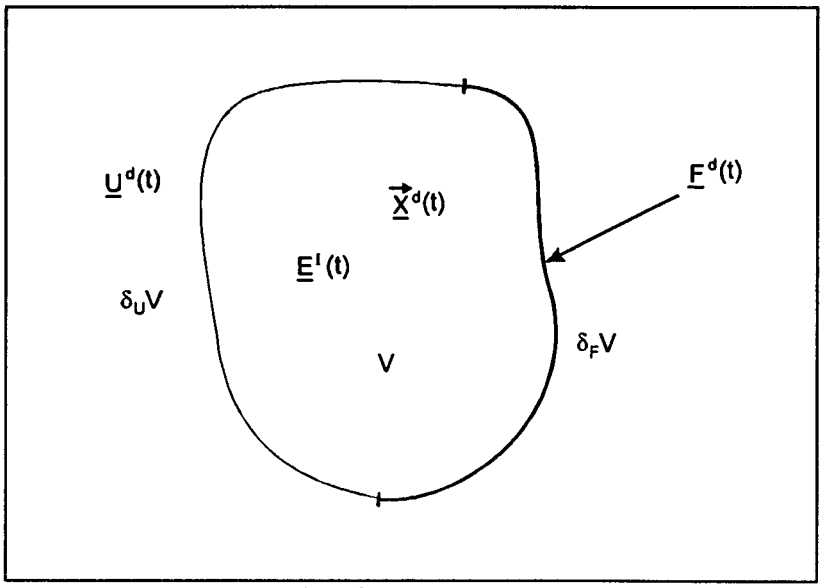


Figure 1.4.1 : « Schématisation de la structure »

1.4.1 - REPONSE ELASTIQUE

On note $\vec{\underline{U}}^{el}(t)$, $\underline{\underline{E}}^{el}(t)$ et $\underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t)$, la réponse en déplacement, déformation et contrainte de la structure, dans l'hypothèse où son comportement est purement élastique.

* Le champ de déplacement $\vec{\underline{U}}^{el}(t)$ est cinématiquement admissible (CA) avec les déplacements imposés $\underline{U}^d(t)$ sur $\partial_U V$:

$$\vec{\underline{U}}^{el}(t) = \underline{U}^d(t) \text{ sur } \partial_U V \qquad \textbf{(1.4.1)}$$

* Le champ de déformation $\underline{\underline{E}}^{el}(t)$ est également CA avec $\underline{U}^d(t)$ sur $\partial_U V$. Il est défini par la relation :

$$\underline{\underline{E}}^{el}(t) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\text{grad}\left[\vec{\underline{U}}^{el}(t)\right] \right) + \left(\text{grad}\left[\vec{\underline{U}}^{el}(t)\right] \right)^T \right\} \qquad \textbf{(1.4.2)}$$

* Le champ de contrainte $\underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t)$ est statiquement admissible (SA) avec les forces de volume $\vec{\underline{X}}^d(t)$ sur V et les forces de surface $\underline{F}^d(t)$ sur $\partial_F V$. On notera ρ la masse volumique du matériau considéré. On doit donc avoir :

$$\text{div}\underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) + \rho \cdot \vec{\underline{X}}^d(t) = \vec{\underline{0}} \qquad \textbf{(1.4.3)}$$

$$\Sigma_{ij}^{el}(t) \cdot n_j = \underline{F}_i^d(t) \qquad \textbf{(1.4.4)}$$

On a la relation :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) = \underline{\underline{L}} \cdot (\underline{\underline{E}}^{el}(t) - \underline{\underline{E}}^{I}(t)) \ , \qquad \textbf{(1.4.5)}$$

ou encore :

$$\underline{\underline{E}}^{el}(t) = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) + \underline{\underline{E}}^{I}(t) \ , \qquad \textbf{(1.4.6)}$$

où $\underline{\underline{L}}$ et $\underline{\underline{M}}$ représentent respectivement les matrices de rigidité et de souplesse élastiques (linéaires, symétriques, définies positives et supposées constantes).

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{L}}^{-1} \qquad \textbf{(1.4.7)}$$

La détermination de la réponse élastique d'une structure nécessite donc d'en connaître :

* La géométrie (le volume V ainsi que les frontières $\partial_F V$ et $\partial_U V$)
* Le chargement ($\underline{\vec{X}}^d(t)$ et $\underline{\underline{E}}^I(t)$ sur V, $\underline{\underline{F}}^d(t)$ sur $\partial_F V$ et $\underline{U}^d(t)$ sur $\partial_U V$)
* La loi de comportement élastique (définie par la matrice $\underline{\underline{M}}$)

Soit ELAS, un opérateur permettant d'obtenir les champs élastiques solution du problème. On a symboliquement :

$$\text{ELAS}\left(V, \partial_F V, \partial_U V \,\|\, \underline{\vec{X}}^d(t), \underline{\underline{E}}^I(t), \underline{\underline{F}}^d(t), \underline{U}^d(t) \,\|\, \underline{\underline{M}}\right) \Rightarrow \underline{\vec{U}}^{el}(t) \rightarrow \underline{\underline{E}}^{el}(t) \rightarrow \underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) \qquad \textbf{(1.4.8)}$$

avec :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) = \underline{\underline{M}}^{-1} \cdot (\underline{\underline{E}}^{el}(t) - \underline{\underline{E}}^{I}(t)) \qquad \textbf{(1.4.9)}$$

1.4.2 - REPONSE REELLE

$\underline{\vec{U}}(t)$, $\underline{\underline{E}}(t)$ et $\underline{\underline{\Sigma}}(t)$ représentent la réponse réelle de la structure.

1.4.2.1 - Partition des déformations

En petites déformations, le champ $\underline{\underline{E}}(t)$ se décompose en une partie initiale $\underline{\underline{E}}^I(t)$, une partie élastique $\underline{\underline{E}}^e(t)$ et une partie plastique $\underline{\underline{E}}^p(t)$:

$$\underline{\underline{E}}(t) = \underline{\underline{E}}^{I}(t) + \underline{\underline{E}}^{e}(t) + \underline{\underline{E}}^{p}(t) \qquad \textbf{(1.4.10)}$$

avec :

$$\underline{\underline{E}}^{e}(t) = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}(t) \qquad \textbf{(1.4.11)}$$

$$\underline{\underline{E}}^{p}(t) = \underline{\underline{E}}(t) - (\underline{\underline{E}}^{e}(t) + \underline{\underline{E}}^{I}(t)) \qquad \textbf{(1.4.12)}$$

La figure 1.4.2 illustre cette partition dans le cas d'un chargement uniaxial.

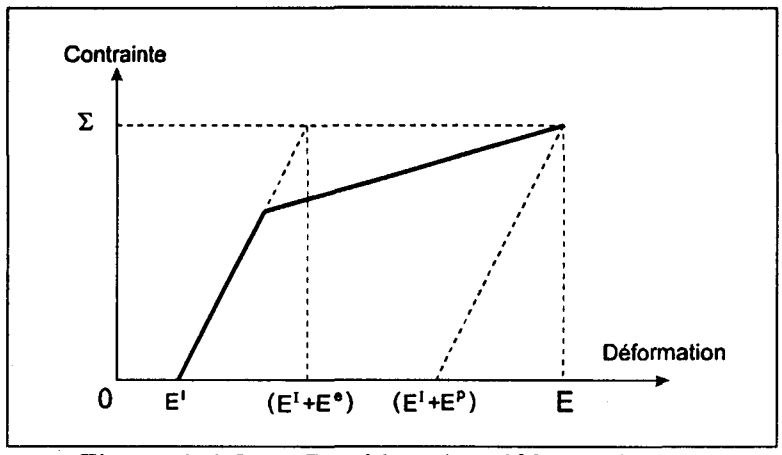


Figure 1.4.2 : « Partition des déformations »

1.4.2.2 - Fonction de charge - Règle d'écoulement [47]

Le critère de plasticité définit le domaine, dans l'espace des contraintes, à l'intérieur duquel toute variation de contrainte n'engendre que des variations de déformation élastique. Lorsque la charge imposée est poursuivie au-delà du domaine d'élasticité initial, il y a apparition de déformations permanentes. On définit alors en chaque point du trajet de chargement, un domaine d'élasticité actuel (voir figure 1.4.3).

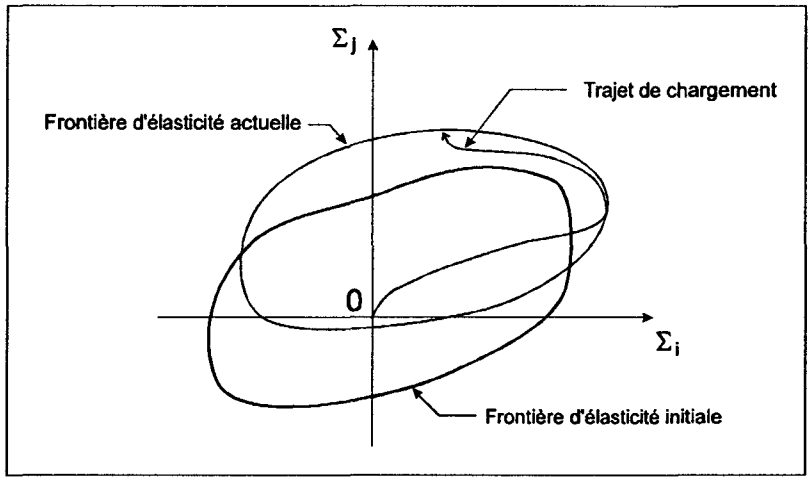


Figure 1.4.3 : « Domaine d'élasticité initial et actuel »

Dans le cas d'un matériau écrouissable, le domaine d'élasticité actuel dépend non seulement du point de charge, mais également du trajet de chargement suivi pour y aboutir. On dira qu'il dépend de l'état d'écrouissage du matériau, représenté par la variable E_c.

Afin de définir le domaine d'élasticité (initial ou actuel) d'une structure soumise à une sollicitation, une fonction scalaire f est introduite. Elle dépend des variables $\underline{\Sigma}$ et E_c, et est appelée fonction de charge du matériau.

$$\begin{cases} f(\underline{\Sigma}, E_c) < 0 \rightarrow \text{intérieur du domaine d'élasticité (critère d'élasticité)} \\ f(\underline{\Sigma}, E_c) = 0 \rightarrow \text{frontière du domaine d'élasticité (critère de plasticité)} \\ f(\underline{\Sigma}, E_c) > 0 \rightarrow \text{extérieur du domaine d'élasticité} \end{cases} \quad \textbf{(1.4.13)}$$

Le domaine d'élasticité actuel est noté $C(E_c)$ et la variable E_c, représentative de l'état d'écrouissage, n'évolue que lorsqu'il y a évolution de la déformation plastique.

Dès que la frontière d'élasticité actuelle est franchie, au cours du trajet de chargement, il y a apparition de déformations permanentes. La donnée de $\underline{\Sigma}$ ne suffit plus à définir $\underline{E}$ (et réciproquement). Par contre, connaissant $\underline{\Sigma}$ ainsi que le trajet de chargement imposé pour atteindre cette valeur (donc connaissant $\underline{\Sigma}$ et $\underline{E}$), la donnée d'une variation de charge $d\underline{\Sigma}$ suffit à définir la variation de déformation correspondante $d\underline{E}$ (loi incrémentale).

Dans cette étude, nous nous limiterons au cas de matériaux standards, c'est à dire des matériaux qui obéissent au Principe du Travail Plastique Maximal (PTPM).

Dans ce cas, la fonction de charge du matériau est convexe et sa règle d'écoulement plastique est obtenue à partir de la règle de normalité. Le PTPM peut s'énoncer de la manière suivante :

Soit une structure soumise à un champ de contrainte noté $\underline{\Sigma}$. $C(E_c)$ est le domaine convexe représentant le domaine d'élasticité actuel de cette structure. Le PTPM de Hill impose le respect de l'inégalité :

$$(\underline{\Sigma} - \underline{\Sigma}^*) : d\underline{E}^p \geq 0 \quad \forall \underline{\Sigma}^* \in C(E_c) \qquad \textbf{(1.4.14)}$$

L'état de contrainte $\underline{\Sigma}$ est dit plastiquement admissible. Ceci peut encore s'écrire, suivant la notation de Moreau (voir [48]), sous la forme :

$$d\underline{E}^p \in \partial \psi_{C(E_c)}(\underline{\Sigma}) \,, \qquad \textbf{(1.4.15)}$$

c'est à dire que $d\underline{E}^p$ est dirigé suivant la normale extérieure au domaine $C(E_c)$ en $\underline{\Sigma}$, ou encore que $d\underline{E}^p$ appartient à la subdifférentielle de la fonction ψ (fonction indicatrice du convexe $C(E_c)$), en $\underline{\Sigma}$.

1.4.2.3 - Décomposition de la réponse réelle

La réponse de la structure peut être décomposée en une partie élastique et une partie inélastique :

$$\begin{cases} \vec{\underline{U}}(t) = \vec{\underline{U}}^{el}(t) + \vec{\underline{U}}^{ine}(t) \\ \underline{\underline{E}}(t) = \underline{\underline{E}}^{el}(t) + \underline{\underline{E}}^{ine}(t) \\ \underline{\underline{\Sigma}}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) + \underline{\underline{R}}(t) \end{cases} \qquad \textbf{(1.4.16)}$$

- Les champs $\vec{\underline{U}}(t)$ et $\vec{\underline{U}}^{el}(t)$ étant CA avec $\underline{U}^{d}(t)$ sur $\partial_U V$, le champ $\vec{\underline{U}}^{ine}(t)$ est donc quant à lui CA avec $\underline{0}$ sur $\partial_U V$. Il en va de même pour le champ $\underline{\underline{E}}^{ine}(t)$ défini par :

$$\underline{\underline{E}}^{ine}(t) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\text{grad}\left[\vec{\underline{U}}^{ine}(t) \right] \right) + \left(\text{grad}\left[\vec{\underline{U}}^{ine}(t) \right] \right)^{T} \right\} \qquad \textbf{(1.4.17)}$$

On a :

$\underline{\underline{\Sigma}}(t) = \underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) + \underline{\underline{R}}(t)$ relation (1.4.16)

$\underline{\underline{E}}^{e}(t) = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}(t)$ relation (1.4.11)

$\underline{\underline{E}}(t) = \underline{\underline{E}}^{I}(t) + \underline{\underline{E}}^{e}(t) + \underline{\underline{E}}^{p}(t)$ relation (1.4.10)

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{E}}(t) = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) + \underline{\underline{E}}^{I}(t) + \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{R}}(t) + \underline{\underline{E}}^{p}(t) \,, \qquad \textbf{(1.4.18)}$$

or :

$\underline{\underline{E}}(t) = \underline{\underline{E}}^{el}(t) + \underline{\underline{E}}^{ine}(t)$ relation (1.4.16)

$\underline{\underline{E}}^{el}(t) = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}}^{el}(t) + \underline{\underline{E}}^{I}(t)$ relation (1.4.6)

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{E}}^{ine}(t) = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{R}}(t) + \underline{\underline{E}}^{p}(t) \qquad \textbf{(1.4.19)}$$

La figure 1.4.4 illustre cette décomposition dans le cas d'un chargement uniaxial (charge et décharge), pour lequel on suppose qu'il y a création de contraintes résiduelles, R, dans la structure.

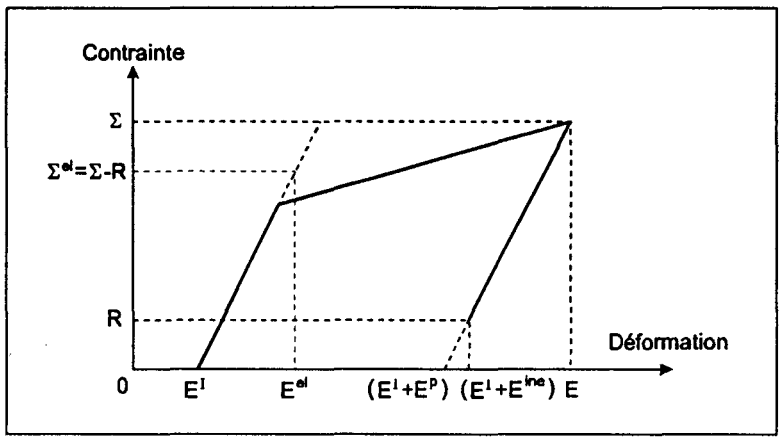


Figure 1.4.4 : « Décomposition de la réponse réelle de la structure »

- Les champs $\underline{\Sigma}(t)$ et $\underline{\Sigma}^{el}(t)$ étant SA avec $\vec{\underline{X}}^{d}(t)$ sur V et $\underline{F}^{d}(t)$ sur $\partial_F V$, le champ $\underline{R}(t)$ est donc quant à lui SA avec $\vec{\underline{0}}$ sur V et $\underline{0}$ sur $\partial_F V$.

La partie inélastique de la réponse de la structure ($\vec{\underline{U}}^{ine}(t)$, $\underline{E}^{ine}(t)$ et $\underline{R}(t)$) est donc auto-équilibrée.

La relation (1.4.19) implique d'avoir à résoudre un problème linéaire, ce dernier pouvant s'exprimer sous la forme :

$$\underline{R}(t) = \underline{Z}_0 \cdot \underline{E}^{p}(t) \ , \qquad \textbf{(1.4.20)}$$

où $\underline{Z}_0$ représente un opérateur linéaire ayant la propriété d'être symétrique, positif et généralement singulier (la connaissance de $\underline{E}^{p}(t)$ permet de déterminer le champ $\underline{R}(t)$ alors que l'inverse n'est pas vrai).

Par similitude avec la détermination de la réponse élastique de la structure (voir paragraphe 1.4.1), la réponse inélastique peut être obtenue en utilisant l'opérateur ELAS :

$$\text{ELAS}\left(V, \partial_F V, \partial_U V \,\middle\|\, \vec{\underline{0}}, \underline{E}^{p}(t), \underline{0}, \underline{0} \,\middle\|\, \underline{M}\right) \Rightarrow \vec{\underline{U}}^{ine}(t) \rightarrow \underline{E}^{ine}(t) \rightarrow \underline{R}(t) \qquad \textbf{(1.4.21)}$$

avec :

$$\underline{R}(t) = \underline{M}^{-1} \cdot \left(\underline{E}^{ine}(t) - \underline{E}^{p}(t)\right) \qquad \textbf{(1.4.22)}$$

Par conséquence, la réponse inélastique de la structure est obtenue en résolvant un calcul élastique homogène (données aux limites nulles), avec comme déformation initiale, le champ $\underline{E}^{p}(t)$.

1.4.2.4 - Nouvelle formulation du problème

Nous allons à présent utiliser une astuce mathématique (un simple changement de variable), de manière à se ramener à la résolution d'un problème simple. On a, d'après les relations (1.2.2) et (1.4.16) :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}(t) = \underline{A} \cdot \underline{\Sigma}(t) - \underline{y}(t) \\ \\ \underline{\Sigma}(t) = \underline{\Sigma}^{el}(t) + \underline{R}(t) \end{cases} \tag{1.4.23}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \underline{\sigma}(t) = \underline{A} \cdot \underline{\Sigma}^{el}(t) - \underline{Y}(t) \\ \\ \underline{Y}(t) = \underline{y}(t) - \underline{A} \cdot \underline{R}(t) \end{cases} \tag{1.4.24}$$

Les relations (1.2.3), (1.4.20) et (1.2.4) conduisent à :

$$\underline{Y}(t) = \underline{y}(t) - \underline{A} \cdot \underline{R}(t) = \underline{b} \cdot \underline{X}(t) - \underline{A} \cdot \underline{Z}_0 \cdot \underline{A}^T \cdot \underline{X}(t) = \underline{B} \cdot \underline{X}(t) \tag{1.4.25}$$

La matrice $\underline{B}$ dépend de l'ensemble des données relatives au problème. En conséquence, il en est de même pour $\underline{Y}(t)$. Le champ $\underline{Y}(t)$ est un nouveau champ de paramètres transformés pour la structure et $\underline{B}$ est un opérateur à la fois symétrique et positif.

Dans le cas où $\underline{B}$ est régulier, la connaissance des champs $\underline{\Sigma}^{el}(t)$ et $\underline{Y}(t)$ est alors suffisante pour définir l'évolution globale de la structure :

* L'inversion de $\underline{B}$ permet de déterminer le champ $\underline{X}(t)$:

$$\underline{X}(t) = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{Y}(t) \tag{1.4.26}$$

* La connaissance de $\underline{X}(t)$ permet de calculer le champ de déformation plastique $\underline{E}^p(t)$:

$$\underline{E}^p(t) = \underline{A}^T \cdot \underline{X}(t) \tag{1.4.27}$$

* La connaissance de $\underline{E}^p(t)$ permet alors de déduire le champ d'auto-contrainte, $\underline{R}(t)$, régnant dans la structure :

$$\underline{R}(t) = \underline{Z}_0 \cdot \underline{E}^p(t) \tag{1.4.28}$$

* Les réponses élastique et inélastique permettent enfin la détermination du champ de contrainte totale, $\underline{\Sigma}(t)$, régnant dans la structure :

$$\underline{\Sigma}(t) = \underline{\Sigma}^{el}(t) + \underline{R}(t) \tag{1.4.29}$$

Dans le cas où les matrices locales b sont toutes régulières, $\underline{B}$ l'est également. Ceci implique alors qu'il suffit de déterminer le champ $\underline{Y}(t)$ de manière à obtenir l'évolution globale de la structure (le calcul de $\underline{\Sigma}^{el}(t)$ étant quant à lui considéré comme immédiat). Dans un tel cas de figure, les relations (1.2.5), (1.4.25) et (1.4.19) conduisent à l'écriture du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \underline{\underline{E}}^p(t) = \underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \underline{y}(t) \\ \underline{y}(t) = \underline{Y}(t) + \underline{A} \cdot \underline{R}(t) \\ \underline{\underline{E}}^{ine}(t) = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{R}(t) + \underline{\underline{E}}^p(t) \end{cases}$$

d'où :

$$\underline{\underline{E}}^p(t) = \underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \left(\underline{Y}(t) + \underline{A} \cdot \underline{R}(t)\right) \quad \textbf{(1.4.30)}$$

$$\underline{\underline{E}}^{ine}(t) = \left(\underline{\underline{M}} + \underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \underline{A}\right) \cdot \underline{R}(t) + \underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \underline{Y}(t) \quad \textbf{(1.4.31)}$$

soit encore :

$$\underline{\underline{E}}^{ine}(t) = \underline{\underline{\hat{M}}} \cdot \underline{R}(t) + \underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \underline{Y}(t) \quad \textbf{(1.4.32)}$$

avec :

$$\underline{\underline{\hat{M}}} = \underline{\underline{M}} + \underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \underline{A} \quad \textbf{(1.4.33)}$$

L'expression (1.4.32) du champ de déformation inélastique rappelle celle obtenue en fonction du champ de déformation plastique (1.4.19). Le champ d'auto-contrainte, $\underline{R}(t)$, était obtenu à partir d'un calcul élastique homogène ($\underline{\underline{M}}$ étant la matrice d'élasticité), à déformation initiale $\underline{\underline{E}}^p(t)$ (relation (1.4.21)).

Par analogie, la connaissance du champ $\underline{Y}(t)$ permet, en utilisant l'opérateur ELAS, de déterminer la réponse inélastique de la structure. Le champ de déformation initial et la matrice d'élasticité sont alors respectivement pris égal à $\left(\underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \underline{Y}(t)\right)$ et $\underline{\underline{\hat{M}}} = \left(\underline{\underline{M}} + \underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \underline{A}\right)$:

$$\text{ELAS}\left(V, \partial_F V, \partial_U V \,\|\, \underline{0}, \left(\underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \underline{Y}(t)\right), \underline{0}, \underline{0} \,\|\, \underline{\underline{\hat{M}}}\right) \Rightarrow \underline{U}^{ine}(t) \rightarrow \underline{\underline{E}}^{ine}(t) \rightarrow \underline{R}(t) \quad \textbf{(1.4.34)}$$

avec :

$$\underline{R}(t) = \underline{\underline{\hat{M}}}^{-1} \cdot \left(\underline{\underline{E}}^{ine}(t) - \underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \underline{Y}(t)\right) \quad \textbf{(1.4.35)}$$

Le champ de déformation plastique peut ensuite être déterminé à partir de l'expression (1.4.30) :

$$\underline{\underline{E}}^p(t) = \underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \left(\underline{Y}(t) + \underline{A} \cdot \underline{R}(t)\right)$$

La réponse réelle de la structure peut donc être déterminée dès lors que le champ de paramètres transformés est connu : le problème réside dans l'obtention de ce dernier. Zarka et al. [27] ont proposé des règles pratiques permettant son évaluation à l'état asymptotique, dans le cas de chargements monotones radiaux, cycliques ou dynamiques, sans avoir à réaliser une analyse pas à pas très coûteuse en temps de calcul. Cette méthode d'analyse, comme nous allons le mettre en évidence, ne nécessite que des traitements locaux et des résolutions élastiques.

1.4.3 - CAS DES CHARGEMENTS CYCLIQUES

Nous allons à présent nous intéresser à une application particulière de la MASSI : la détermination du comportement asymptotique d'une structure soumise à un chargement cyclique. Nous nous limiterons au cas où la loi de comportement du VER peut être schématisée par un modèle rhéologique uniaxial ne comportant que des mécanismes inélastiques de type α (c'est à dire ayant un comportement parfaitement plastique).

Le chargement étant périodique de période T, la réponse élastique de la structure est donc périodique, de même période.

$$\underline{\Sigma}^{el}(t+T) = \underline{\Sigma}^{el}(t) \qquad \textbf{(1.4.36)}$$

B. Halphen (voir [49]), a montré que dans le cas où :

* Le champ de contrainte $\underline{\Sigma}(t)$ est à la fois statiquement et plastiquement admissible $\left(\underline{\Sigma}(t) \in \mathcal{S}(t) \cap \mathcal{C}_0\right)$

* Les domaines convexes, qui définissent les domaines d'élasticité de chaque mécanisme inélastique, sont de dimension finie et symétriques par rapport à l'origine

alors, quel que soit l'état initial de la structure, la convergence du champ de contrainte, $\underline{\Sigma}(t)$, vers une solution périodique est assurée.

Cependant, rien ne peut être affirmé en ce qui concerne le champ de déformation plastique, $\underline{E}^p(t)$, car il n'existe pas de relation bijective entre $\underline{\Sigma}(t)$ et $\dot{\underline{E}}^p(t)$. On peut ainsi avoir (confère figure 1.4.5) :

- Adaptation : après un certain nombre de cycles, la réponse de la structure devient purement élastique. Les champs d'auto-contrainte, $\underline{R}(t)$, et de déformation plastique, $\underline{E}^p(t)$, tendent alors vers des champs constants qui dépendent de l'état initial de la structure.

- Accommodation : après un certain nombre de cycles, la réponse de la structure devient purement périodique. Les champs $\underline{R}(t)$ et $\underline{E}^p(t)$ tendent alors vers des champs périodiques qui peuvent dépendre de l'état initial de la structure.

- Rochet élasto-plastique : la réponse de la structure n'atteint pas un état périodique. Le champ de déformation plastique, $\underline{E}^p(t)$, augmente de manière incrémentale jusqu'à obtenir la ruine de la structure.

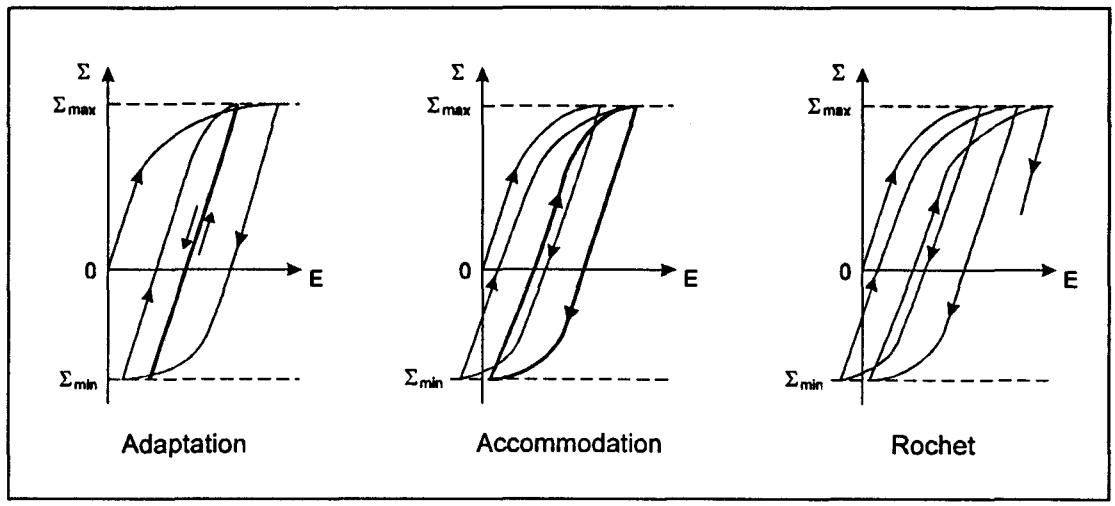


Figure 1.4.5 : « Etats limites d'une structure sous chargement cyclique »

Dans le cas où les matrices locales b sont toutes régulières, la relation entre le champ de contrainte locale et le champ de déformation implique alors la périodicité de l'ensemble des champs de contrainte et de déformation (c'est à dire que **seuls des comportements asymptotiques de type adaptation ou accommodation peuvent se produire)**.

* L'adaptation est obtenue lorsque le cycle asymptotique stabilisé est élastique. Les champs $\underline{Y}(t)$ et $\underline{\alpha}(t)$ tendent alors vers des champs constants.

* L'accommodation est obtenue lorsque le cycle asymptotique stabilisé est périodique. Les champs $\underline{Y}(t)$ et $\underline{\alpha}(t)$ tendent alors vers des champs périodiques.

Nous nous limiterons dans la suite de ce travail au cas où les matrices locales b sont toutes régulières. Voyons alors comment il est possible de déterminer la nature et les caractéristiques de l'état limite, en fonction de l'état interne initial de la structure $\left(\underline{Y}_{init} \text{ et } \underline{\underline{E}}^{p}_{init}\right)$ ainsi que sa réponse élastique ($\underline{\Sigma}^{el}(t)$ sur une période T).

Etant donné que le matériau n'est supposé contenir que des mécanismes inélastiques de type α (patins), on peut écrire pour chacun de ceux qui interviennent dans la modélisation du comportement d'un VER :

- Le critère de plasticité (relation 1.3.1) :

$$\sigma_i(t) \in [-S_i, S_i] = c_i \ , \qquad \textbf{(1.4.37)}$$

où :

* $\sigma_i(t)$ est la contrainte locale appliquée sur un patin d'indice (i)

* S_i représente le seuil de glissement d'un patin d'indice (i)

La relation (1.4.24), associée au fait que le modèle rhéologique schématisant le comportement du VER est uniaxial, permet d'écrire pour chacun des patins :

$$Y_i(t) = A_i \cdot \Sigma^{el}(t) - \sigma_i(t) \ , \qquad \textbf{(1.4.38)}$$

ce qui implique :

$$Y_i(t) \in \left(c_i + A_i \cdot \Sigma^{el}(t)\right) = c_i\left(A_i \cdot \Sigma^{el}(t)\right) \qquad \textbf{(1.4.39)}$$

$Y_i(t)$ doit donc appartenir au domaine convexe $c_i\left(A_i \cdot \Sigma^{el}(t)\right)$ qui est obtenu en translatant le domaine fixe c_i, centré sur l'origine, de la quantité $A_i \cdot \Sigma^{el}(t)$. Etant donné que $\Sigma^{el}(t)$ est périodique, le domaine $c_i\left(A_i \cdot \Sigma^{el}(t)\right)$ peut donc être construit dès lors que la réponse élastique de la structure a été calculée sur un cycle.

- La règle d'écoulement plastique (relation 1.3.2) :

$$\dot{\alpha}_i(t) \in \partial\psi_{C_i}(\sigma_i(t)) \qquad \textbf{(1.4.40)}$$

La relation (1.4.38) implique (voir figure 1.4.6) :

$$\begin{cases} \sigma_i(t) = +S_i & \rightarrow Y_i(t) = A_i \cdot \Sigma^{el}(t) - S_i \ \text{ et } \ \dot{\alpha}_i(t) \geq 0 \\ \sigma_i(t) = -S_i & \rightarrow Y_i(t) = A_i \cdot \Sigma^{el}(t) + S_i \ \text{ et } \ \dot{\alpha}_i(t) \leq 0 \\ -S_i < \sigma_i(t) < S_i & \rightarrow \left(A_i \cdot \Sigma^{el}(t) - S_i\right) < Y_i(t) < \left(A_i \cdot \Sigma^{el}(t) + S_i\right) \ \text{ et } \ \dot{\alpha}_i(t) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(1.4.41)}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\dot{\alpha}_i(t) \in -\partial\psi_{C_i\left(A_i \cdot \Sigma^{el}(t)\right)}\left(Y_i(t)\right) \ , \qquad \textbf{(1.4.42)}$$

c'est à dire que $\dot{\alpha}_i(t)$ est dirigé suivant la normale intérieure au domaine $c_i\left(A_i \cdot \Sigma^{el}(t)\right)$ en $Y_i(t)$.

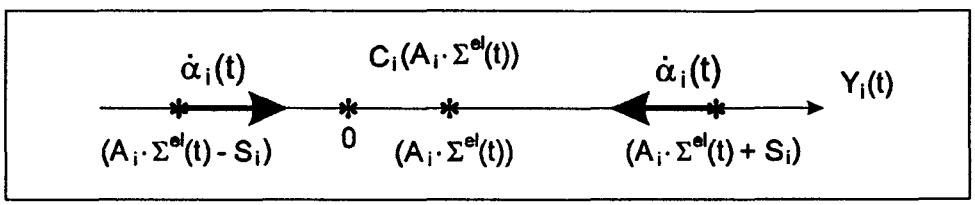


Figure 1.4.6 : « Représentation dans l'espace des paramètres transformés, de la règle d'écoulement relative à un mécanisme α »

A l'échelle du VER, les relations (1.4.37), (1.4.39) et (1.4.42) conduisent aux formulations suivantes :

* $\sigma(t) \in C_0 = \bigcup_{(i)}(c_i)$ **(1.4.43)**

  C_0 représente un domaine convexe fixe, symétrique par rapport à l'origine.

* $Y(t) \in C_0 + A \cdot \Sigma^{el}(t) = C\left(A \cdot \Sigma^{el}(t)\right)$ **(1.4.44)**

  $Y(t)$ doit donc appartenir au convexe $C\left(A \cdot \Sigma^{el}(t)\right)$ centré sur $A \cdot \Sigma^{el}(t)$.

* $\dot{\alpha}(t) \in -\partial\psi_{C(A\cdot\Sigma^{el}(t))}\left(Y(t)\right)$ **(1.4.45)**

  $\dot{\alpha}(t)$ est dirigé suivant la normale intérieure au convexe $C\left(A \cdot \Sigma^{el}(t)\right)$ en $Y(t)$.

A l'échelle de la structure, les relations (1.4.43), (1.4.44) et (1.4.45) conduisent aux formulations suivantes :

* $\underline{\sigma}(t) \in \mathcal{C}_0$ **(1.4.46)**

* $\underline{Y}(t) \in \mathcal{C}_0 + \underline{A} \cdot \underline{\Sigma}^{el}(t) = \mathcal{C}\left(\underline{A} \cdot \underline{\Sigma}^{el}(t)\right)$ **(1.4.47)**

* $\dot{\underline{\alpha}}(t) \in -\partial\psi_{\mathcal{C}\left(\underline{A}\cdot\underline{\Sigma}^{el}(t)\right)}\left(\underline{Y}(t)\right)$ **(1.4.48)**

Dans l'espace des paramètres transformés $\underline{Y}(t)$, le critère de plasticité est donc représenté par un convexe centré sur $\underline{A} \cdot \underline{\Sigma}^{el}(t)$.

Comme il l'a été mis en évidence, le domaine convexe $\mathcal{C}\left(\underline{A} \cdot \underline{\Sigma}^{el}(t)\right)$ peut être construit localement pour chaque mécanisme inélastique. Il suffit pour cela de déterminer la réponse élastique de la structure, $\underline{\Sigma}^{el}(t)$, sur une période T.

De plus, l'expression (1.4.25) qui se réduit alors à :

$$\underline{Y}(t) = \underline{B} \cdot \underline{\alpha}(t) \,, \qquad \textbf{(1.4.49)}$$

implique d'avoir :

$$\dot{\underline{Y}}(t) = \underline{B} \cdot \dot{\underline{\alpha}}(t) \qquad \textbf{(1.4.50)}$$

1.4.3.1 - Nature de l'état limite

Etant donné que les matrices locales b sont supposées être toutes régulières, dans le cas où la structure plastifie, son état limite est alors de nature adaptée ou accommodée (le rochet est impossible).

Plaçons nous à présent dans l'espace des paramètres transformés. Dans cet espace, on désigne par C_I l'intersection des convexes définissant l'évolution du domaine d'élasticité d'un VER, au cours d'un cycle [0,T] (voir figure 1.4.7) :

$$C_I = \bigcap_{t\in[0,T]} \left\{ C\left(A \cdot \Sigma^{el}(t)\right) \right\} \qquad \textbf{(1.4.51)}$$

Si, pour chaque VER composant la structure, le domaine C_I est non-vide, le respect du critère de plasticité et de la règle de normalité imposent alors pour la valeur asymptotique de $\alpha(t)$ d'être constante. Ceci implique que le champ $\underline{\alpha}(t)$ tend vers un champ constant. Il en va donc de même pour le champ de déformation plastique $\underline{E}^p(t)$, celui-ci étant alors défini par l'expression :

$$\underline{E}^p(t) = \underline{A}^T \cdot \underline{\alpha}(t) \qquad \textbf{(1.4.52)}$$

L'état limite est donc adapté.

Dans le cas contraire, c'est à dire s'il existe au moins un VER pour lequel le domaine C_I est vide, l'accommodation se produira.

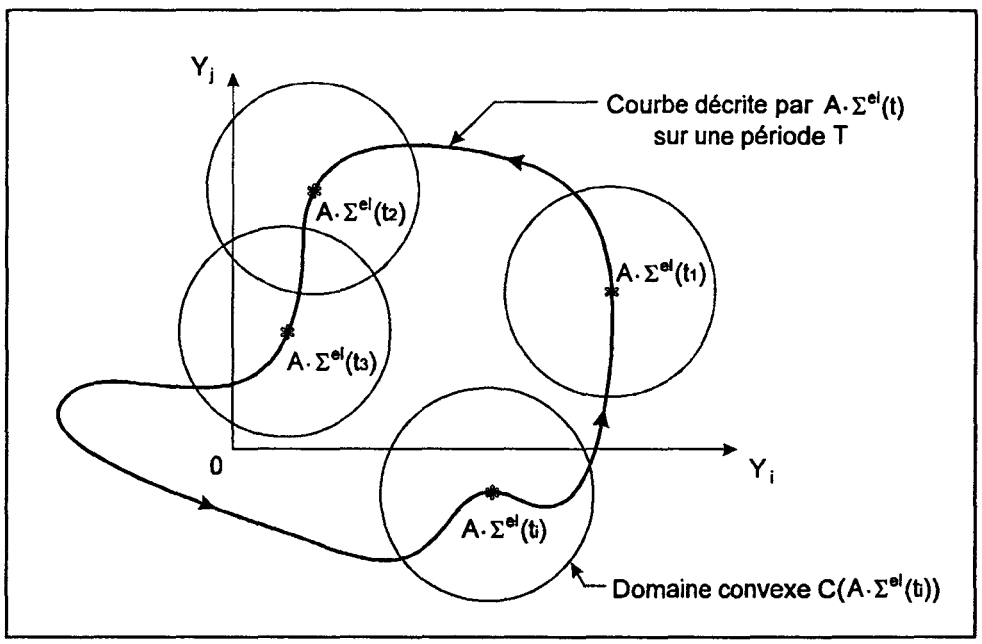


Figure 1.4.7 : « Evolution, dans l'espace des paramètres transformés, du domaine d'élasticité relatif à un VER »

Maintenant que la nature de l'état limite est déterminée, voyons comment il est possible d'en déterminer les caractéristiques.

1.4.3.2 - Caractéristiques de l'état limite

Comme on l'a mis en évidence dans le paragraphe 1.4.2.4, dans le cas où les matrices b sont toutes régulières, la connaissance du champ de paramètre transformé permet alors de caractériser l'état de la structure.

Dans le cas d'un chargement cyclique, la réponse stabilisée de la structure est obtenue à partir d'un calcul itératif, en évaluant localement les valeurs asymptotiques du champ de paramètres transformés $\underline{Y}(t)$. Ceci est rendu possible par les relations (1.4.47) à (1.4.50).

Sur chaque VER composant la structure, la relation (1.4.44) indique que Y(t) doit appartenir au convexe $C(A \cdot \Sigma^{el}(t))$.

* Si l'état limite de la structure est adapté : pour chaque VER, la valeur asymptotique de Y(t) est alors constante et incluse dans le domaine C_I défini précédemment.

* Si l'état limite de la structure est accommodé : il existe alors au moins un VER pour lequel Y(t) varie périodiquement.

→ Cas d'un comportement adapté

Les champs $\underline{\alpha}(t)$ et $\underline{Y}(t)$ tendent alors vers des champs constants $\underline{\alpha}_{ad}$ et $\underline{Y}_{ad}$.

Le volume V de la structure est tout d'abord décomposé en deux parties complémentaires V_α et V_Y.

Si la valeur initiale, Y_{init}, d'un paramètre transformé est située à l'intérieur du domaine C_I, l'élément de volume considéré est dit inactif et est inclus dans V_α. Dans le cas contraire ($Y_{init} \notin C_I$),l'élément de volume est dit actif et est inclus dans V_Y.

* Dans le cas des éléments inactifs (sur V_α), α_{ad} est choisi égal à sa valeur initiale α_{init} (pas d'évolution plastique de l'élément).

* Dans le cas des éléments actifs (sur V_Y), puisque Y_{ad} doit appartenir au domaine C_I, la quantité Y_{ad} est choisie égale à la projection de Y_{init} sur C_I.

Les champs inélastiques à l'état stabilisé sont ensuite évalués à partir d'un simple calcul élastique réalisé en utilisant l'opérateur ELAS, muni des arguments respectifs à V_α et V_Y (relations 1.4.21, 1.4.22, 1.4.52, 1.4.34 et 1.4.35) :

$$\text{ELAS}\left(V, \partial_F V, \partial_U V \,\middle\|\, \underline{0}, \begin{cases} \left(\underline{A}^T \cdot \underline{\alpha}_{ad}\right) \text{ sur } V_\alpha \\ \left(\underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \underline{Y}_{ad}\right) \text{ sur } V_Y \end{cases}, \underline{0}, \underline{0} \,\middle\|\, \begin{cases} \underline{M} \text{ sur } V_\alpha \\ \hat{\underline{M}} \text{ sur } V_Y \end{cases} \right) \Rightarrow \underline{\tilde{U}}^{ine}_{ad} \rightarrow \underline{E}^{ine}_{ad} \rightarrow \underline{R}_{ad}$$

sur V_α :

$$\underline{R}_{ad} = \underline{M}^{-1} \cdot \left(\underline{E}^{ine}_{ad} - \underline{A}^T \cdot \underline{\alpha}_{ad} \right)$$

sur V_Y :

$$\underline{R}_{ad} = \hat{\underline{M}}^{-1} \cdot \left(\underline{E}^{ine}_{ad} - \underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \underline{Y}_{ad} \right)$$

relation (1.4.53)

A partir des résultats de ce calcul, les quantités, $Y_{ad,i}$ pour les éléments inactifs et $\alpha_{ad,i}$ pour les éléments actifs, peuvent alors être déterminées en utilisant l'expression (1.4.25) :

$$\begin{cases} \text{sur } V_\alpha : \quad Y_{ad,i} = b \cdot \alpha_{ad} - A \cdot R_{ad} \\ \\ \text{sur } V_Y : \quad \alpha_{ad,i} = b^{-1} \cdot (Y_{ad} + A \cdot R_{ad}) \end{cases} \qquad \textbf{(1.4.54)}$$

Pour chacun des éléments inactifs (sur V_α), la position de $Y_{ad,i}$ par rapport au domaine C_l est ensuite examinée. Si $Y_{ad,i}$ est situé à l'intérieur du domaine C_l alors l'élément reste dans V_α. Dans le cas contraire, il est déplacé dans V_Y et une nouvelle valeur de Y_{ad} est obtenue en projetant $Y_{ad,i}$ sur le domaine C_l.

Dans le cas où au moins une projection a été réalisée, la partition de V (en V_α et V_Y) est alors réactualisée et conduit à une nouvelle itération du calcul. Ceci implique :

* L'exécution d'une analyse élastique sur la structure à partir de l'opérateur ELAS (afin d'estimer les champs inélastiques associés à cette nouvelle partition).

* La détermination des quantités $Y_{ad,i}$ sur V_α et $\alpha_{ad,i}$ sur V_Y, ainsi que le contrôle relatif à l'appartenance de $Y_{ad,i}$ au domaine C_l.

Lorsque plus aucune projection de $Y_{ad,i}$ sur C_l n'est à réaliser, la solution à l'état stabilisé est alors obtenue et on a :

$$\begin{cases} Y_{ad} = Y_{ad,i} \\ \\ \alpha_{ad} = \alpha_{ad,i} \end{cases} \qquad \textbf{(1.4.55)}$$

→ Cas d'un comportement accommodé

Les champs inélastiques tendent alors vers des champs périodiques. Etudions tout d'abord le cas d'un chargement cyclique radial.

a) Chargement cyclique radial

Selon Zarka [27], un chargement cyclique peut être qualifié de radial si le champ de contrainte calculé dans la structure, en supposant son comportement élastique, peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{\Sigma}^{el}(t) = (1 - \Lambda(t)) \cdot \underline{\Sigma}^{el}_{min} + \Lambda(t) \cdot \underline{\Sigma}^{el}_{max} = \underline{\Sigma}^{el}_{moy} \pm \frac{2 \cdot \Lambda(t) - 1}{2} \cdot \Delta \underline{\Sigma}^{el} \ , \qquad \textbf{(1.4.56)}$$

où :

* $\underline{\Sigma}^{el}_{max}$ et $\underline{\Sigma}^{el}_{min}$ sont deux états de contrainte donnés.

* $\Lambda(t)$ est une fonction scalaire périodique qui croît et décroît de façon monotone entre les valeurs 0 et 1.

* $\Delta\underline{\Sigma}^{el}$ (défini par $\underline{\Sigma}^{el}_{max} - \underline{\Sigma}^{el}_{min}$) représente l'amplitude du champ de contrainte élastique régnant dans la structure, et indique la direction de chargement.

* $\underline{\Sigma}^{el}_{moy}$ (défini par $\frac{1}{2}\cdot\left(\underline{\Sigma}^{el}_{max} + \underline{\Sigma}^{el}_{min}\right)$) représente l'état de contrainte élastique moyen régnant dans la structure.

Les champs $\underline{\alpha}(t)$ et $\underline{Y}(t)$ tendent vers des champs périodiques pouvant être définis par leur valeur moyenne $\left(\underline{\alpha}_{moy}\text{ et }\underline{Y}_{moy}\right)$ et leur amplitude $\left(\Delta\underline{\alpha}\text{ et }\Delta\underline{Y}\right)$.

Pour chaque VER composant la structure, un encadrement immédiat de la quantité ΔY peut alors être obtenu, simplement à partir de considérations géométriques (voir figure 1.4.8).

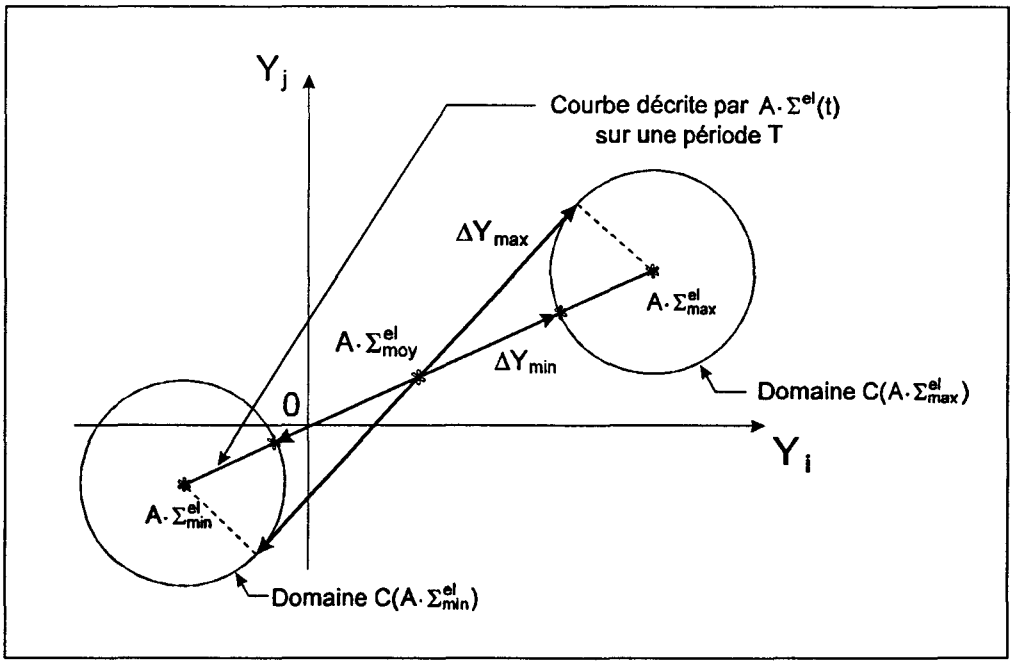


Figure 1.4.8 : « Encadrement de ΔY dans le cas d'un chargement cyclique radial conduisant à un état limite accommodé »

* Limite inférieure :

  ΔY_{min} correspond à la distance minimale entre les domaines d'élasticité extrêmes centrés sur $\left(A\cdot\Sigma^{el}_{max}\right)$ et $\left(A\cdot\Sigma^{el}_{min}\right)$.

* Limite supérieure :

  ΔY_{max} correspond à la distance maximale entre les domaines d'élasticité extrêmes centrés sur $\left(A\cdot\Sigma^{el}_{max}\right)$ et $\left(A\cdot\Sigma^{el}_{min}\right)$.

Ces bornes inférieures et supérieures de ΔY permettront d'obtenir un encadrement de la quantité ΔE^p relatif à un état limite accommodé.

La procédure itérative conduisant à l'encadrement de la réponse inélastique de la structure est la suivante :

Comme précédemment, les éléments de volume fondamentaux composant la structure sont répartis suivant deux catégories :

- Les éléments inactifs où α reste constant.
- Les éléments actifs où Y et ΔY sont évalués.

L'initiation du calcul suit la règle énoncée ci-dessous :

Lorsque le domaine C_l est vide, la quantité Y_{moy} est choisie égale à $\left(A \cdot \Sigma^{el}_{moy}\right)$. Les quantités ΔY_{min} et ΔY_{max} sont quant à elles déterminées suivant la méthode indiquée précédemment (figure 1.4.8). Ces éléments sont considérés comme étant actifs, et les autres $(C_l \neq \varnothing)$, des éléments inactifs, c'est à dire avec α constant et $\Delta\alpha$ nul.

L'analyse élastique à partir de l'opérateur ELAS est ensuite exécutée en utilisant les arguments relatifs aux valeurs moyennes et aux limites inférieures et supérieures de α sur V_α et Y sur V_Y :

$$\text{ELAS}\left(V, \partial_F V, \partial_U V \,\middle\|\, \vec{0}, \begin{cases} \left(\underline{A}^T \cdot \underline{\alpha}_{moy}\right) \text{ sur } V_\alpha \\ \left(\underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \underline{Y}_{moy}\right) \text{ sur } V_Y \end{cases}, \underline{0}, \underline{0} \,\middle\|\, \begin{cases} \underline{M} \text{ sur } V_\alpha \\ \hat{\underline{M}} \text{ sur } V_Y \end{cases}\right) \Rightarrow \vec{\underline{U}}^{ine}_{moy} \rightarrow \underline{E}^{ine}_{moy} \rightarrow \underline{R}_{moy}$$

$$\text{ELAS}\left(V, \partial_F V, \partial_U V \,\middle\|\, \vec{0}, \begin{cases} \underline{0} \text{ sur } V_\alpha \\ \left(\underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \Delta\underline{Y}_{min}\right) \text{ sur } V_Y \end{cases}, \underline{0}, \underline{0} \,\middle\|\, \begin{cases} \underline{M} \text{ sur } V_\alpha \\ \hat{\underline{M}} \text{ sur } V_Y \end{cases}\right) \Rightarrow \Delta\vec{\underline{U}}^{ine}_{min} \rightarrow \Delta\underline{E}^{ine}_{min} \rightarrow \Delta\underline{R}_{min}$$

$$\text{ELAS}\left(V, \partial_F V, \partial_U V \,\middle\|\, \vec{0}, \begin{cases} \underline{0} \text{ sur } V_\alpha \\ \left(\underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \Delta\underline{Y}_{max}\right) \text{ sur } V_Y \end{cases}, \underline{0}, \underline{0} \,\middle\|\, \begin{cases} \underline{M} \text{ sur } V_\alpha \\ \hat{\underline{M}} \text{ sur } V_Y \end{cases}\right) \Rightarrow \Delta\vec{\underline{U}}^{ine}_{max} \rightarrow \Delta\underline{E}^{ine}_{max} \rightarrow \Delta\underline{R}_{max}$$

relations (1.4.57)

A partir des résultats de ce calcul, les quantités suivantes sont déterminées :

- $Y_{moy,j}$, $\Delta Y_{min,j}$ et $\Delta Y_{max,j}$ sur V_α
- $\alpha_{moy,j}$, $\Delta\alpha_{min,j}$ et $\Delta\alpha_{max,j}$ sur V_Y

Il reste alors à effectuer les tests locaux sur V_α :

- Si les quantités $\left(Y_{moy,i} \pm \frac{1}{2} \cdot \Delta Y_{min,i}\right)$ et $\left(Y_{moy,i} \pm \frac{1}{2} \cdot \Delta Y_{max,i}\right)$ sont situées à l'intérieur des domaines plastiques centrés sur $\left(A \cdot \left(\Sigma^{el}_{moy} \pm \frac{1}{2} \cdot \Delta\Sigma^{el}\right)\right)$ alors l'élément considéré reste dans V_α.
- Dans le cas contraire, l'élément est déplacé dans V_Y. Il faut alors de nouveau évaluer Y_{moy}, ΔY_{min} et ΔY_{max} , et procéder à une nouvelle itération du calcul. Cette procédure est répétée jusqu'à ce que tous les tests réalisés sur le volume V_α soient satisfaits.

Lorsque les tests locaux sont tous vérifiés, les relations données en (1.4.57) conduisent alors à un encadrement de la réponse inélastique de la structure, à l'état stabilisé.

b) Chargement cyclique non radial

Une extension simple du chargement cyclique radial peut être proposée :

Dans le cas d'un chargement cyclique non radial, le trajet de chargement est alors discrétisé en segments linéaires entre les temps t1, t2, ... Pour chaque segment du cycle linéarisé, les limites supérieures et inférieures de Y(t) sont ensuite évaluées et permettent d'obtenir un encadrement du cycle fermé stabilisé.

1.4.3.3 - Matériau à écrouissage cinématique sous chargement cyclique radial

L'étude de ce cas particulier et intéressante car elle permet de traiter, simplement des problèmes concrets rencontrés dans l'industrie. On peut citer par exemple l'estimation, à l'état stabilisé, du champ de contrainte résiduelle régnant dans une structure [50] ; celui-ci pouvant être obtenu à partir d'un procédé de grenaillage [51], ou de galetage [52].

Le critère de Von Mises est généralement associé à ce type de matériau :

$$f\left(\underline{S}(t), \underline{E}^p(t)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\underline{S}(t) - \underline{y}(t)\right) : \left(\underline{S}(t) - \underline{y}(t)\right) - k_0^{\,2} \leq 0 \quad , \qquad \textbf{(1.4.58)}$$

où :

* k_0 est la limite d'élasticité en cisaillement du matériau
* $\underline{S}(t)$ est le tenseur déviateur des contraintes
* $\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot \underline{E}^p(t)$ est le champ des paramètres internes d'écrouissage
* $\underline{C}$ est le tenseur d'écrouissage cinématique, défini positif et sphérique. Il est donc souvent confondu avec le module d'écrouissage cinématique C. Ses propriétés impliquent pour les matrices b d'être régulières (⇒ rochet impossible).

Par identification avec le cas général, on a :

$$\begin{cases} \underline{A} = \text{dev} \\ \underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} = \underline{C}^{-1} \end{cases} \qquad \textbf{(1.4.59)}$$

Dans l'espace du déviateur des contraintes, le critère de Von Mises est représenté par un domaine convexe sphérique centré sur $\underline{y}(t)$, et la loi d'écoulement plastique est définie par la règle de normalité.

Supposons que, dans le domaine élastique, le matériau soit isotrope. Sa loi de comportement élastique, caractérisée par le tenseur $\underline{M}$, est donc définie par :

- Le module de Young E
- Le coefficient de Poisson ν

La loi de comportement $\hat{\underline{M}}$ est donc quant à elle définie par :

$$\hat{\underline{M}} = \left(\underline{M} + \underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot \underline{A}\right) = \left(\underline{M} + \underline{C}^{-1} \cdot \text{dev}\right) \qquad \textbf{(1.4.60)}$$

On a:

$$\rightarrow \ \underline{M} \cdot \underline{\Sigma} \ \Leftrightarrow \ -\frac{\nu}{E} \cdot \Sigma_{ij} \cdot \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \cdot \Sigma_{ij}$$

$$\rightarrow \ \hat{\underline{M}} \cdot \underline{R} = \left(\underline{M} + \underline{C}^{-1} \cdot \text{dev}\right) \cdot \underline{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{M} \cdot \underline{R} \Leftrightarrow -\dfrac{\nu}{E} \cdot R_{ij} \cdot \delta_{ij} + \dfrac{1+\nu}{E} \cdot R_{ij} \\ \underline{C}^{-1} \cdot \text{dev}(\underline{R}) \Leftrightarrow \dfrac{1}{c} \cdot \left(R_{ij} - \dfrac{1}{3} \cdot R_{ij} \cdot \delta_{ij}\right) \end{array}\right\} \rightarrow \hat{\underline{M}} \cdot \underline{R} \Leftrightarrow -\left(\frac{\nu}{E} + \frac{1}{3 \cdot c}\right) \cdot R_{ij} \cdot \delta_{ij} + \left(\frac{1+\nu}{E} + \frac{1}{c}\right) \cdot R_{ij}$$

Ainsi, tout comme le tenseur $\underline{M}$, le tenseur $\hat{\underline{M}}$ est isotrope. Il est obtenu en remplaçant dans $\underline{M}$ les quantités E et ν par les quantités $\hat{E}$ et $\hat{\nu}$. Ces dernières sont définies par :

$$\begin{cases} \hat{E} = \dfrac{3 \cdot E \cdot C}{2 \cdot E + 3 \cdot C} \\ \hat{\nu} = \dfrac{3 \cdot \nu \cdot C + E}{2 \cdot E + 3 \cdot C} \end{cases} \qquad \textbf{(1.4.61)}$$

L'application de la MASSI à ce cas particulier permet donc un traitement numérique très simple.

Il est à noter que les nombreuses validations de cette méthode d'analyse ont conduit à ce qu'elle soit retenue dans le règlement de construction des centrales nucléaires françaises et européennes (voir [53]).

2 - EXTRAPOLATION AU CAS DES CHARGEMENTS DE SERVICE

Après avoir rappelé les principes de la MASSI, nous allons à présent en proposer une extrapolation de manière à pouvoir évaluer la réponse d'une structure soumise à un chargement de service.

Nous supposerons que la structure à étudier est constituée d'un matériau à écrouissage cinématique, isotrope dans le domaine élastique.

Avant d'aborder le cas d'un chargement complexe, traitons en détail celui d'un chargement uniaxial à amplitude variable.

2.1 - CHARGEMENT UNIAXIAL A AMPLITUDE VARIABLE

Il correspond au cas où (figure 2.1.1) :

- La direction, $\vec{N}$, de chargement reste constante au cours du temps.
- L'amplitude de chargement varie au cours du temps.

F(t) représente l'évolution au cours du temps de la mesure algébrique du chargement $\vec{F}(t)$.

$$\vec{F}(t) = \vec{N} \cdot F(t) \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

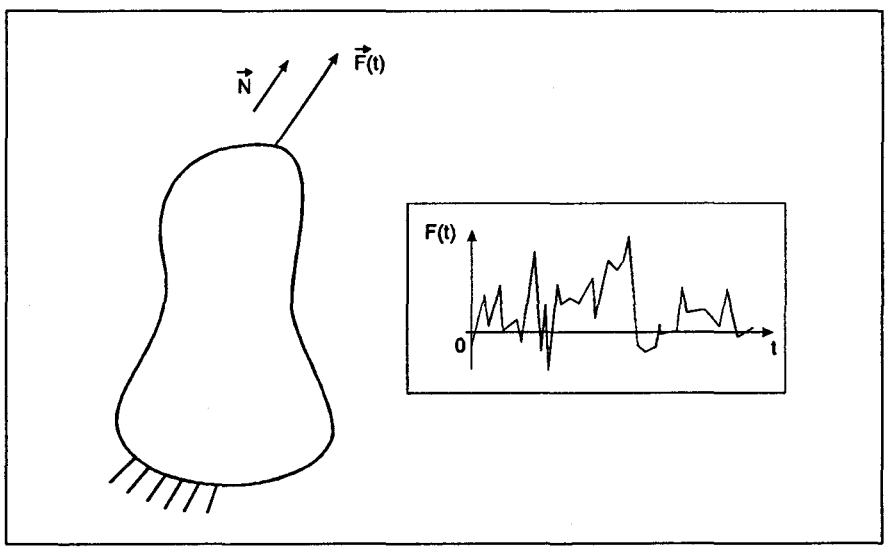


Figure 2.1.1 : « Chargement uniaxial à amplitude variable »

2.1.1 - PRINCIPES GENERAUX

Le but de cette méthode d'analyse n'est en aucun cas de chercher à déterminer avec exactitude l'évolution de la réponse d'une structure, au cours du trajet de chargement.

Elle doit permettre une évaluation, rapide et suffisamment correcte, de la réponse réelle d'une structure, ainsi que son évolution au cours du temps.

Comme nous l'avons vu précédemment, la MASSI permet de déterminer la réponse réelle d'une structure, dès lors que le champ de paramètre transformé $\underline{Y}(t)$ est connu. Le problème réside dans le fait que la détermination de l'évolution de ce champ est complexe.

Toutefois, dans certains cas particuliers, il est tout à fait possible de proposer à priori une évaluation de ce champ à l'état asymptotique (confère le cas des chargements cycliques radiaux).

Cette évaluation est basée sur le fait que les mécanismes inélastiques locaux composant la structure ont à vérifier :

- Le critère de plasticité.

- La loi d'écoulement plastique (règle de normalité).

* La première condition se traduit dans notre cas par le fait que le champ de paramètre transformé, $\underline{Y}(t)$, doit appartenir au domaine convexe $\mathscr{C}\left(\underline{S}^{el}(t)\right)$, ce dernier étant défini par (confère relations (1.4.47) et (1.4.59)) :

$$\mathscr{C}\left(\underline{S}^{el}(t)\right) = \mathscr{C}_0 + \underline{S}^{el}(t) \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

le critère de plasticité est donc représenté dans l'espace $\underline{Y}(t)$ par l'hypersphère $\mathscr{C}\left(\underline{S}^{el}(t)\right)$ centrée sur $\underline{S}^{el}(t)$.

* La seconde condition permet, dans le cas où on a plastification au niveau du mécanisme inélastique local considéré, d'évaluer ou encore de proposer un encadrement de la position de Y(t), situé à l'intérieur du domaine convexe $C\left(\underline{S}^{el}(t)\right)$ (à l'état asymptotique et en fonction de l'état initial de la structure). Cette évaluation est concrètement rendue possible, dans le cas où on a rafle par le convexe $C\left(\underline{S}^{el}(t)\right)$, à partir des relations (1.4.48), (1.4.59) et (1.4.50), à savoir :

$$\dot{\underline{\alpha}}(t) \in -\partial\psi_{\mathscr{C}\left(\underline{S}^{el}(t)\right)}\left(\underline{Y}(t)\right) \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

$$\dot{\underline{Y}}(t) = \underline{B} \cdot \dot{\underline{\alpha}}(t) \qquad \textbf{(2.1.4)}$$

Les figures 2.1.2a et 2.1.2b illustrent ces propos dans le cas d'une structure soumise à un chargement cyclique radial, celui-ci conduisant respectivement à un état limite adapté (cas a) et accommodé (cas b).

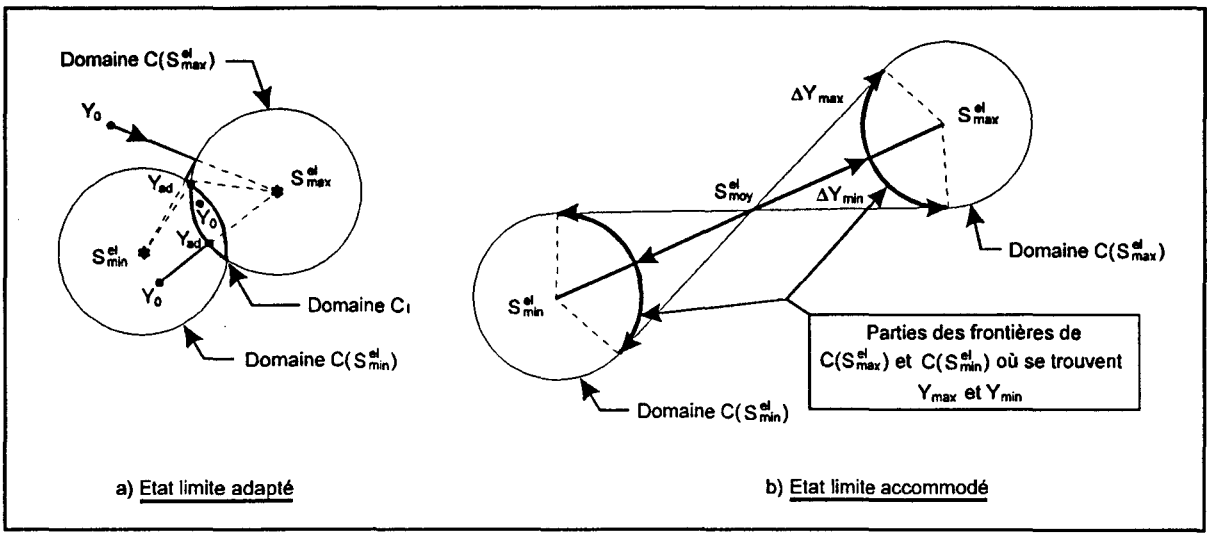


Figure 2.1.2 : « Evaluation de Y_{lim} en fonction de la position de Y_0 et de la nature de l'état limite »

L'opérateur ELAS permet enfin :

* De déterminer la réponse élastique de la structure (relation (1.4.8)).

* D'estimer, à partir des conditions mentionnées précédemment, la réponse inélastique de la structure à l'état asymptotique (relations (1.4.21) et (1.4.34)).

La réponse de la structure à l'état asymptotique $\left(\underline{\vec{U}}_{asympt}, \underline{\underline{E}}_{asympt}, \underline{\underline{\Sigma}}_{asympt}\right)$, obtenue par cette méthode, a donc les propriétés suivantes :

* Les champs $\underline{\vec{U}}_{asympt}$ et $\underline{\underline{E}}_{asympt}$ sont CA avec les conditions aux limites en déplacement imposé.

* Le champ $\underline{\underline{\Sigma}}_{asympt}$ est SA (Statiquement Admissible) avec les forces de volume et les forces de surface imposées sur la structure

* Le champ $\underline{\underline{\Sigma}}_{asympt}$ n'est pas PA (Plastiquement Admissible) car le PTPM (Principe du Travail Plastique Maximum) n'est pas vérifié : en tout point de la structure, le critère de plasticité est respecté mais pas la règle de normalité (elle n'est qu'approchée).

Dans le cas d'un chargement de service uniaxial, la méthode d'analyse, que nous nous proposons de suivre, est similaire. La différence tient dans le fait qu'il est alors nécessaire d'estimer l'évolution du champ $\underline{Y}(t)$ au cours du trajet de mise en charge.

Pour y parvenir, le chargement est tout d'abord décomposé en une succession de chargements monotones radiaux.

Remarque :

Selon la définition proposée par Zarka (voir [27]), un chargement peut être qualifié de radial dans la direction $\Delta\underline{\Sigma}^{el}$, lorsque la réponse élastique de la structure peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{\Sigma}^{el}(t) = \underline{\Sigma}_0^{el} + \Lambda(t) \cdot \Delta\underline{\Sigma}^{el} \quad , \tag{2.1.5}$$

où :

* $\underline{\Sigma}_0^{el}$ et $\Delta\underline{\Sigma}^{el}$ sont deux états de contrainte donnés

* $\Lambda(t)$ est une fonction scalaire positive, croissant monotoniquement en fonction du temps à partir de la valeur zéro.

La réponse inélastique de la structure est ensuite évaluée sur chaque intervalle successif de chargement. On tient ainsi compte de l'historique de chargement.

La procédure à suivre, en ce qui concerne l'évaluation de $\underline{Y}(t)$ sur un intervalle de chargement, doit conduire à une estimation à la fois rapide et suffisamment juste de ce champ. La rapidité de la MASSI n'étant plus aujourd'hui à démontrer, intéressons nous à la justification de la méthode d'analyse que nous proposons, dans le cas des chargements uniaxiaux.

Nous justifierons cette procédure d'analyse par le fait que, dans le cas d'un chargement cyclique radial, la solution obtenue est alors identique à celle donnée par la MASSI.

2.1.2 - PROCEDURE D'ANALYSE

Cette procédure se décompose en deux parties :

- La première consiste à décomposer le chargement imposé.

- La seconde consiste à analyser, sur chaque intervalle de chargement, la réponse réelle de la structure.

2.1.2.1 - Décomposition du chargement

La figure 2.1.3 illustre la procédure de décomposition d'un chargement de service uniaxial.

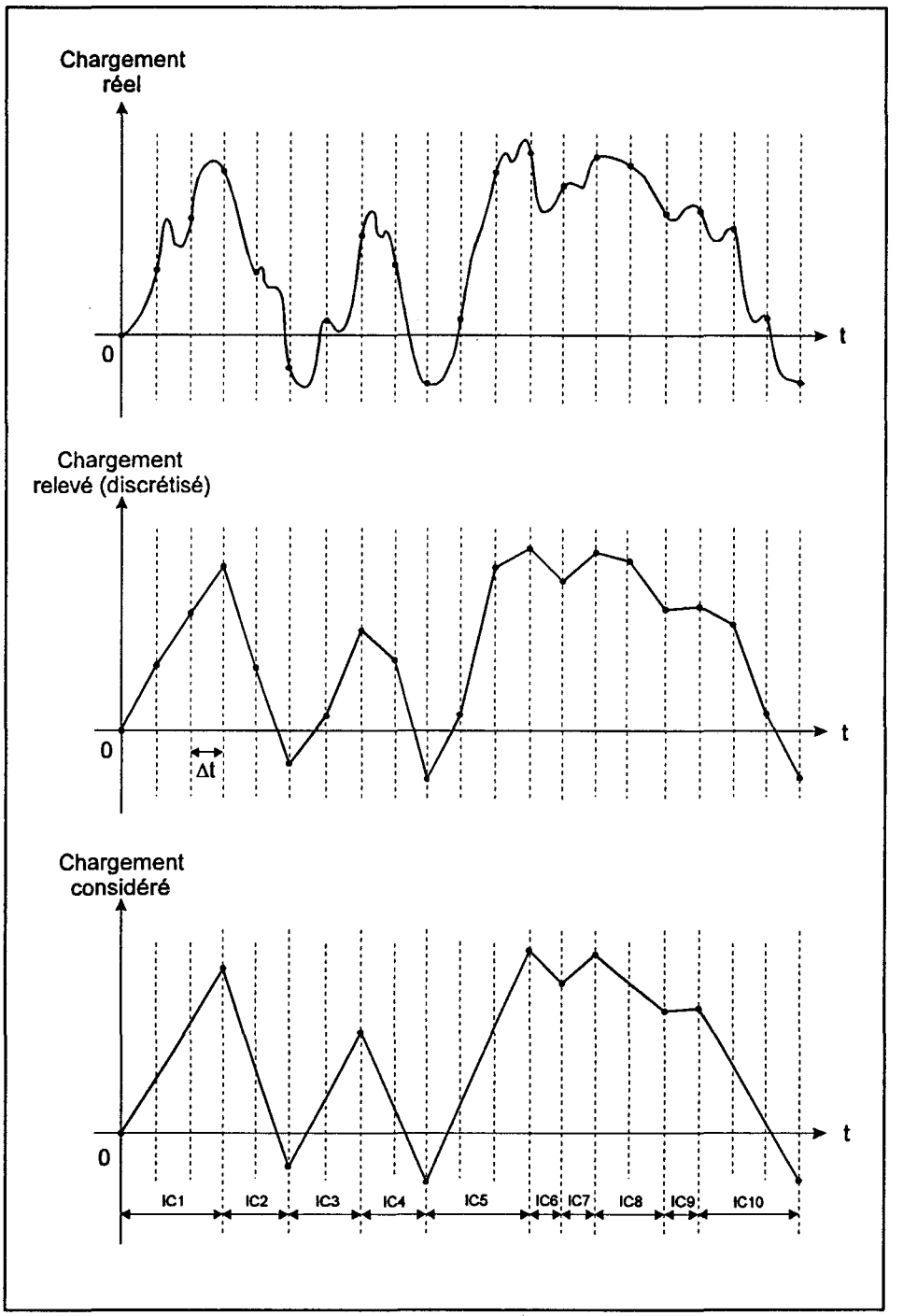


Figure 2.1.3 : « Décomposition du chargement »

Le chargement réel est tout d'abord relevé en service au moyen d'une méthode d'échantillonnage (une mesure de la charge imposée est effectuée après chaque intervalle, Δt, de temps).

Le signal obtenu (chargement discrétisé) est ensuite simplifié : seuls les extremums locaux qui le composent sont gardés. L'ensemble de ces points constitue le chargement que nous considérerons être imposé sur la structure.

2.1.2.2 - Analyse de la réponse de la structure

Cette analyse peut se décomposer en quatre étapes principales :

(1) - Détermination de l'intervalle initial de chargement, [BI,BS], pour lequel la réponse de la structure est purement élastique

(2) - Détermination du premier extremum local appartenant au trajet de chargement imposé sur la structure, et qui conduit à sa plastification (c'est à dire le premier extremum n'appartenant pas à l'intervalle [BI,BS]).

(3) - Evaluation de la réponse inélastique de la structure soumise à ce chargement.

(4) - Réactualisation de l'intervalle de chargement, [BI,BS], pour lequel la réponse de la structure est purement élastique. Retour en (2).

La figure 2.1.4 illustre cette méthodologie :

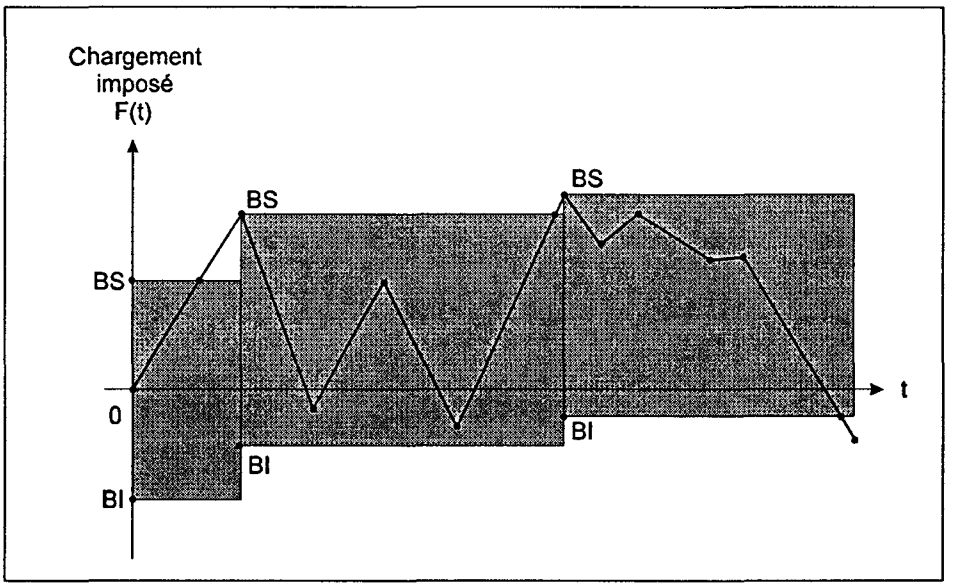


Figure 2.1.4 : « Chargement uniaxial - Analyse de la réponse de la structure »

Examinons plus en détail le contenu de ces étapes.

Remarque :

On supposera que l'état initial de la structure est vierge :

$$\underline{\alpha}_{init} = \underline{Y}_{init} = \underline{E}^{I} = \underline{0} \qquad \textbf{(2.1.6)}$$

- Etape 1 → Détermination de l'intervalle initial de chargement, [BI,BS], pour lequel la réponse de la structure est purement élastique.

* Calcul de la réponse élastique de la structure pour F = 1 :

$$\text{ELAS}\left(\begin{array}{c|c|c} \text{Géométrie} & \text{Chargement} & \text{Loi élastique de} \\ (V, \partial_F V, \partial_U V) & (F = 1) & \text{comportement} \\ & & (\underline{M}) \end{array}\right) \Rightarrow \vec{U}_1^{el} \rightarrow \underline{E}_1^{el} \rightarrow \underline{\Sigma}_1^{el} = \underline{M}^{-1} \cdot \underline{E}_1^{el}$$

Expression **(2.1.7)**

* Détermination du champ déviateur des contraintes relatif à ce chargement :

$$\underline{S}_1^{el} = \text{dev}\left(\underline{\Sigma}_1^{el}\right) \qquad \textbf{(2.1.8)}$$

* Détermination du champ, VDN, définissant dans l'espace Y la direction de chargement :

$$\underline{VDN} = \underline{S}_1^{el} \Big/ \left| \underline{S}_1^{el} \right| , \qquad \textbf{(2.1.9)}$$

où le champ $\left| \underline{S}_1^{el} \right|$ représente la norme (au sens de Von Mises) du champ $\underline{S}_1^{el}$ (voir figure 2.1.5).

Le chargement étant uniaxial, le champ VDN est donc **constant**.

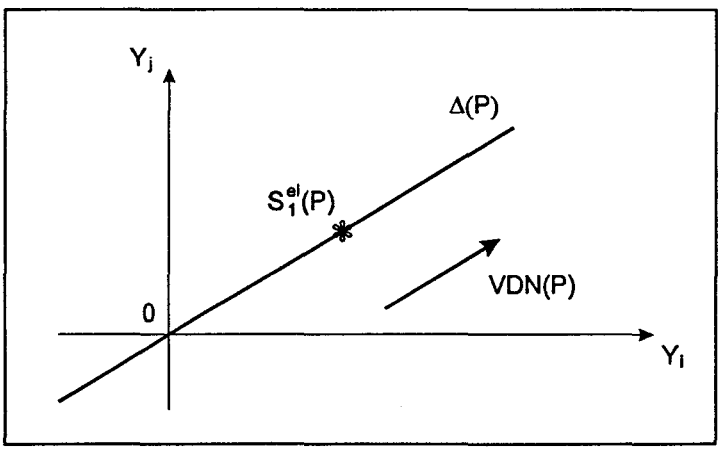


Figure 2.1.5 : « Direction de chargement en un point P d'une structure »

* Détermination du domaine de chargement initial pour lequel la réponse de la structure est strictement élastique. On a, d'après les relations (1.4.24) et (1.4.59) :

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{S}^{el}(t) - \underline{Y}(t) \qquad \textbf{(2.1.10)}$$

Soit R_e la limite d'élasticité en traction du matériau. Selon le critère de Von Mises, la condition de plastification initiale s'écrit en un point P de la structure :

$$\frac{3}{2}\cdot\sigma_{ij}(P)\cdot\sigma_{ij}(P)=R_e(P)\ \Leftrightarrow\ \frac{3}{2}\cdot S_{ij}^{el}(P)\cdot S_{ij}^{el}(P)=R_e(P)\quad\left(\underline{Y}_{init}=\underline{0}\right)\qquad\textbf{(2.1.11)}$$

On a donc :

$$\left.\begin{array}{l} F=1\ \rightarrow\ S_1^{el}(P)=VDN(P)\cdot\left|\,S_1^{el}(P)\,\right| \\ \\ F(P)\ \rightarrow\ R_e\cdot VDN(P) \end{array}\right\}\ F(P)=R_e\,/\,\left|\,S_1^{el}(P)\,\right|\qquad\textbf{(2.1.12)}$$

Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} BS=\underset{P}{Min}\left[F(P)\right] \\ \\ BI=-BS \end{array}\right.\qquad\textbf{(2.1.13)}$$

(car état initial vierge $\Rightarrow$ limite de traction = limite de compression)

- Etape 2 $\rightarrow$ Détermination du premier extremum local de chargement pour lequel on a écoulement plastique de la structure.

* Le premier extremum local de chargement, situé en dehors de l'intervalle [BI,BS], conduit à l'initiation du phénomène de plasticité au sein de la structure. Il est à présent nécessaire d'estimer la réponse inélastique de cette structure, relative à cette valeur de chargement.

- Etape 3 $\rightarrow$ Evaluation de la réponse inélastique de la structure soumise à un chargement uniaxial dont la mesure algébrique est notée F^d. L'état initial, (I), de la structure étant supposé connu, on se propose d'en estimer l'état final, (F).

* Le champ $\underline{S}_1^{el}$ ayant été préalablement déterminé, la direction de chargement en tout point P de la structure, notée $\Delta(P)$ (voir figure 2.1.5), est donc connue.

* La détermination du champ déviateur des contraintes à l'état final, $\underline{S}_F^{el}$, est donc immédiate :

$$\underline{S}_F^{el}=F^d\cdot\underline{S}_1^{el}\qquad\textbf{(2.1.14)}$$

* Comme pour la MASSI dans le cas des chargements cycliques, le volume V de la structure est décomposé en deux parties complémentaires, V_α et V_Y. La procédure conduisant à cette partition suit la règle suivante : si en un point P de la structure on a rafle du paramètre transformé à l'état initial, $Y_I(P)$, par le convexe $C(S_F^{el}(P))$, alors le point P est considéré comme étant actif et appartient au domaine V_Y. Dans le cas contraire, P est supposé inactif et est inclus dans V_α.

a) <u>Pas de rafle en P :</u> $Y_I(P) \in C_I(P)$ (voir figure 2.1.6)

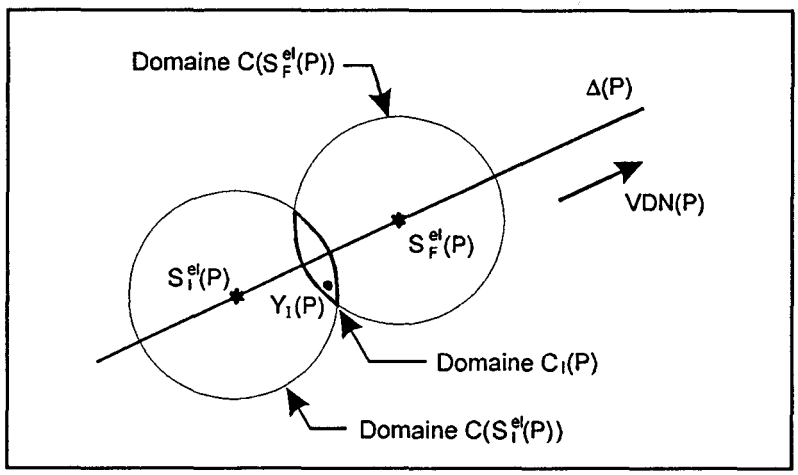


Figure 2.1.6 : « Analyse inélastique - Elément inactif »

Cet élément est considéré comme étant inactif $(\Rightarrow \in V_\alpha)$. Le paramètre interne à l'état final, $\alpha_F(P)$, est alors supposé égal à sa valeur à l'état initial, $\alpha_I(P)$:

$$\alpha_F(P)=\alpha_I(P) \qquad \textbf{(2.1.15)}$$

b) <u>Rafle en P :</u> $Y_I(P) \notin C_I(P)$ (voir figure 2.1.7)

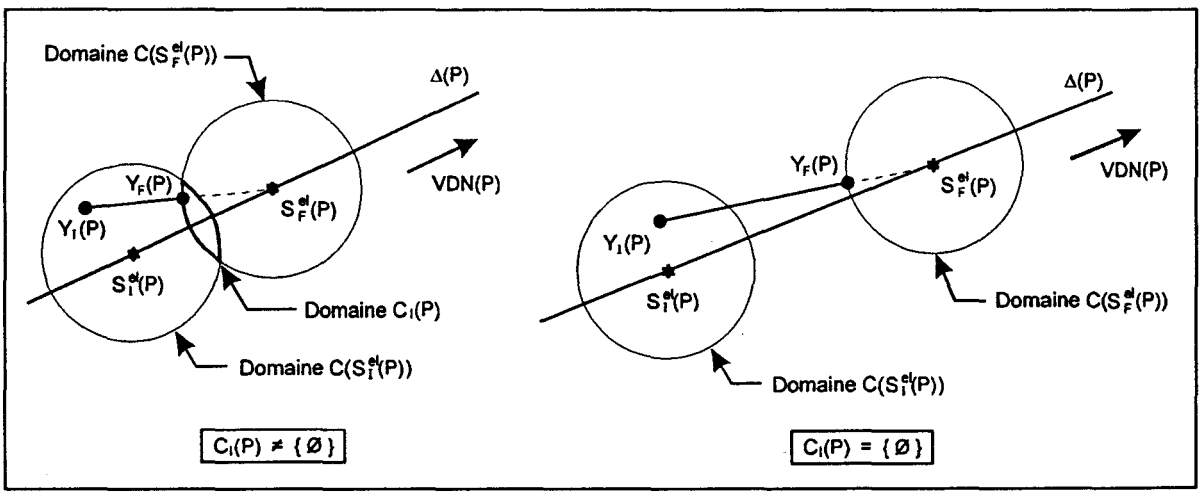


Figure 2.1.7 : « Analyse inélastique - Elément actif »

Cet élément est considéré comme étant actif $(\Rightarrow \in V_Y)$. $Y_F(P)$ est obtenu en projetant $Y_I(P)$ sur le domaine convexe sphérique $C(S_F^{el}(P))$.

$$Y_F(P) = \underset{C(S_F^{el}(P))}{\text{Proj}}\left[Y_I(P)\right] \qquad \textbf{(2.1.16)}$$

Rappel :

Dans le cas où l'état initial, (I), de la structure correspond à l'état vierge, on a alors :

$$\begin{cases} \underline{\alpha}_I = \underline{\alpha}_{init} = \underline{0} \\ \\ \underline{Y}_I = \underline{Y}_{init} = \underline{0} \end{cases} \qquad \textbf{(2.1.17)}$$

* Ayant initialisé la partition (V_α-V_Y), l'opérateur ELAS permet alors, au moyen d'une méthode itérative, une évaluation de la réponse de la structure, relative au passage de l'état (I) à l'état (F) :

$$\text{ELAS}\left(V, \partial_F V, \partial_U V \,\middle\|\, \underline{0}, \begin{Bmatrix} \left(\underline{\alpha}_F - \underline{\alpha}_I\right) = \underline{0} \text{ sur } V_\alpha \\ \left(\underline{C}^{-1}\cdot\left(\underline{Y}_F - \underline{Y}_I\right)\right) \text{ sur } V_Y \end{Bmatrix}, \underline{0}, \underline{0} \,\middle\|\, \begin{Bmatrix} \underline{M} \text{ sur } V_\alpha \\ \hat{\underline{M}} \text{ sur } V_Y \end{Bmatrix} \right) \Rightarrow d\vec{U}^{ine} \rightarrow d\underline{E}^{ine} \rightarrow d\underline{R}$$

avec :

$$\begin{cases} \text{sur } V_\alpha : \quad d\underline{R} = \underline{M}^{-1}\cdot d\underline{E}^{ine} \\ \\ \text{sur } V_Y : \quad d\underline{R} = \hat{\underline{M}}^{-1}\cdot\left(d\underline{E}^{ine} - \left[\underline{C}^{-1}\cdot\left(\underline{Y}_F - \underline{Y}_I\right)\right]\right) \end{cases}$$

Expression **(2.1.18)**

* A partir des résultats de ce calcul, les quantités, dY_i pour les éléments inactifs et $d\alpha_i$ pour les éléments actifs, peuvent alors être déterminées (relations (1.4.54), (1.4.59) et (2.1.15)) :

$$\begin{cases} \text{sur } V_\alpha : \quad d\underline{Y}_i = -\text{dev}(d\underline{R}) \\ \\ \text{sur } V_Y : \quad d\underline{\alpha}_i = \underline{C}^{-1}\cdot\left[\left(\underline{Y}_F - \underline{Y}_I\right) + \text{dev}(d\underline{R})\right] \end{cases} \qquad \textbf{(2.1.19)}$$

* Il reste alors à vérifier qu'en tout point P du domaine V_α, le critère de plasticité à l'état final est bien vérifié :

  - Si la quantité $Y_{F,i}(P)$, définie par la relation :

$$Y_{F,i}(P) = Y_I(P) + dY_i(P) \ , \qquad \textbf{(2.1.20)}$$

est située à l'intérieur du domaine $C\left(S_F^{el}(P)\right)$, alors le critère de plasticité est vérifié et l'élément reste dans V_α.

- Dans le cas contraire, il est déplacé dans V_Y et une nouvelle valeur de Y_F est obtenue en projetant $Y_{F,i}(P)$ sur le domaine $C\left(S_F^{el}(P)\right)$.

Dans le cas où au moins une projection a été réalisée, la partition de V (en V_α et V_Y) est alors réactualisée et conduit à une nouvelle itération du calcul. Ceci implique :

- L'exécution d'une analyse élastique sur la structure à partir de l'opérateur ELAS (afin d'estimer les champs inélastiques associés à cette nouvelle partition).

- La détermination des quantités $Y_{F,i}$ sur V_α et $\alpha_{F,i}$ sur V_Y, ainsi que la vérification du respect du critère de plasticité sur le domaine V_α.

Lorsque plus aucune projection de $Y_{F,i}(P)$ sur $C\left(S_F^{el}(P)\right)$ n'est à réaliser, la solution à l'état final est alors obtenue :

$$\begin{cases} \underline{Y}_F = \underline{Y}_I + d\underline{Y} \\ \underline{\underline{E}}_F^P = \underline{\underline{E}}_I^P + d\underline{\underline{E}}^P \\ \underline{\underline{U}}_F^{ine} = \underline{\underline{U}}_I^{ine} + d\underline{\underline{U}}^{ine} \\ \underline{\underline{E}}_F^{ine} = \underline{\underline{E}}_I^{ine} + d\underline{\underline{E}}^{ine} \\ \underline{R}_F = \underline{R}_I + d\underline{R} \end{cases} \qquad \textbf{(2.1.21)}$$

- Etape 4 → Réactualisation de l'intervalle de chargement, [BI,BS], pour lequel la réponse de la structure est purement élastique. Retour à l'étape 2.

* L'état de la structure relatif à $F = F^d$ ayant été évalué lors de l'étape précédente, il faut à présent déterminer l'intervalle de chargement pour lequel son comportement est purement élastique.

* La condition de plastification en un point P de la structure s'écrit :

$$\left| \sigma(P) \right| = \frac{3}{2} \cdot \sigma_{ij}(P) \cdot \sigma_{ij}(P) = R_e(P) \ , \qquad \textbf{(2.1.22)}$$

soit encore (d'après la relation (2.1.10)) :

$$\left| S^{el}(P) - Y(P) \right| = \frac{3}{2} \cdot \left(S_{ij}^{el}(P) - Y_{ij}(P)\right) \cdot \left(S_{ij}^{el}(P) - Y_{ij}(P)\right) = R_e(P) \qquad \textbf{(2.1.23)}$$

Le chargement étant radial, il est alors aisé de déterminer la valeur de la charge à appliquer, de manière à ce qu'il y ait écoulement plastique de la structure en P :

- $S_F^{el}(P)$ et $Y_F(P)$ sont connus.
- Au cours du chargement, $S^{el}(P)$ se déplace le long de l'axe $\Delta(P)$.

$\Rightarrow$ La condition de plastification en P est satisfaite dans le cas où on a rafle de la quantité $Y_F(P)$ par le domaine convexe $C(S^{el}(P))$, celui-ci étant centré sur $S^{el}(P)$ (voir figure 2.1.8).

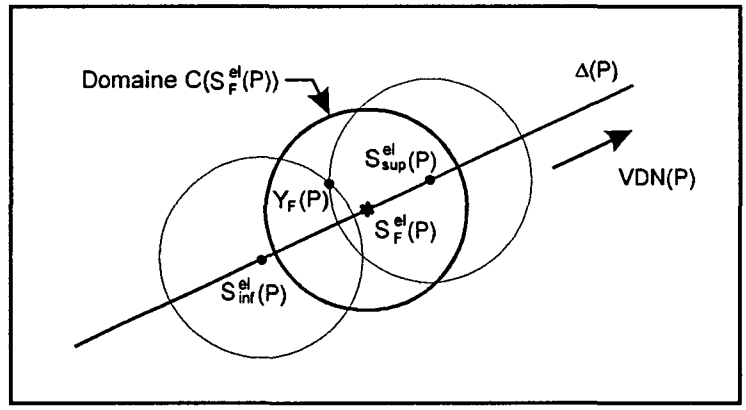


Figure 2.1.8 : « Rafle de $Y_F(P)$ par $C(S^{el}(P))$ »

On déduit ainsi, en chaque point P de la structure, les positions extrêmes de $S^{el}(P)$ (notées $S_{inf}^{el}(P)$ et $S_{sup}^{el}(P)$), qui conduisent au rafle de $Y_F(P)$, et donc les valeurs de la charge à appliquer qui y sont associées :

$$\left.\begin{array}{l} F = 1 \quad \rightarrow \quad S_1^{el}(P) \\ F_{BI}(P) \quad \rightarrow \quad S_{inf}^{el}(P) \\ F_{BS}(P) \quad \rightarrow \quad S_{sup}^{el}(P) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_{BI}(P) = S_{inf}^{el}(P)/S_1^{el}(P) \\ F_{BS}(P) = S_{sup}^{el}(P)/S_1^{el}(P) \end{array}\right. \qquad \textbf{(2.1.24)}$$

Finalement, l'intervalle de chargement, [BI,BS], pour lequel la réponse de la structure est purement élastique, est déterminé :

$$\left\{\begin{array}{l} BI = \underset{P}{Max}\left[F_{BI}(P)\right] \\ BS = \underset{P}{Min}\left[F_{BS}(P)\right] \end{array}\right. \qquad \textbf{(2.1.25)}$$

* Il reste alors à réinitialiser l'état initial de la structure (Etat(F) → Etat(I)), et reprendre l'analyse de la réponse de la structure (retour à l'étape 2).

2.1.3 - REALISATION DU CODE DE CALCUL REPCSU

La procédure d'analyse décrite dans le paragraphe précédent a conduit à la réalisation d'un outil informatique (code de calcul par éléments finis) appelé REPCSU (Réponse Elasto-Plastique sous Chargement de Service Uniaxial).

Pour des raisons de temps, son développement a été limité au cas des problèmes plans (contraintes planes, déformations planes et problèmes axisymétriques).

Sans trop entrer dans les détails, nous allons brièvement rappeler les principes de la méthode de calcul par éléments finis dans le cas des problèmes stationnaires en élasticité, et donner les principaux algorithmes associés à ce code.

2.1.3.1 - Principes de la MEF [28], [54], [55] (Méthode des Eléments Finis)

D'une manière générale, les méthodes numériques approchées de calcul des structures consistent à déterminer :

1) Un champ de déplacement cinématiquement admissible qui minimise l'énergie potentielle du système étudié.

2) Un champ de contrainte statiquement admissible qui maximise l'énergie potentielle complémentaire du système étudié.

Dans ce travail, nous ne développerons que les problèmes de type 1).

Principe du minimum de l'énergie potentielle :

Le champ de déplacement solution du problème est, parmi les champs cinématiquement admissibles, celui qui minimise l'énergie potentielle totale ; la solution étant unique.

Reprenons le cas de la structure présentée sur la figure 1.4.1, et supposons que son comportement soit purement élastique.

L'énergie potentielle totale du système, U_P, peut être exprimée sous la forme matricielle suivante :

$$U_P = \frac{1}{2}\cdot\int_V \left([E^{el}]^T\cdot[\Sigma^{el}]\right)\cdot dV - \int_V \left([U^{el}]^T\cdot[X^d]\right)\cdot dV - \int_{\partial_F V}\left([U^{el}]^T\cdot[F^d]\right)\cdot d(\partial V) \quad \textbf{(2.1.26)}$$

Le premier terme représente l'énergie potentielle interne de déformation, les suivants l'énergie potentielle des forces extérieures.

En utilisant les relations entre les déplacements et les déformations, ainsi que la loi de Hooke, on peut alors exprimer l'énergie potentielle totale en fonction des seuls déplacements.

Le champ de déplacement solution du problème sera donc celui qui minimisera cette fonctionnelle en respectant les conditions aux limites relatives aux déplacements imposés. Cette formulation est parfaitement bien adaptée à une méthode de résolution par approximation de type éléments finis.

Le domaine (V) à étudier est divisé en un nombre fini d'éléments (Ve). Ces éléments ont une géométrie simple qui couvrent au mieux le domaine (V). Dans le cas où la frontière du domaine (V) est complexe, il est nécessaire d'avoir recours à un grand nombre d'éléments, ou encore d'utiliser des éléments à côtés curvilignes, de manière à représenter au mieux le domaine étudié.

Chaque élément supporte un ensemble de noeuds positionnés à l'intérieur ou sur la frontière de l'élément. Ceux qui sont situés sur les frontières permettent d'assurer la compatibilité inter-éléments.

Cette discrétisation, qui conduit au maillage de la structure, est dictée par les deux idées suivantes qui caractérisent la méthode de calcul par éléments finis :

- Se ramener à l'étude du comportement d'éléments standards de forme simple ; ceux-ci étant de dimension finie, par opposition aux éléments infinitésimaux utilisés dans l'approche analytique.

- Rechercher une solution approchée aussi bonne que possible des déplacements aux noeuds du maillage et non une description continue du champ de déplacement.

Par interpolation, les composantes du déplacement en un point M d'un élément (Ve) inclus dans (V), sont en fait exprimées en fonction des déplacements aux noeuds de cet élément. Par ce moyen, on remplace ainsi un problème ayant un nombre infini d'inconnues (le champ de déplacement sur le domaine (V)), par la résolution d'un système de dimension finie (les déplacements aux noeuds de la structure).

Voyons maintenant comment déterminer, à partir du principe du minimum de l'énergie potentielle, les déplacements nodaux sur le domaine (V).

La structure ayant été discrétisée, l'énergie potentielle totale du système, U_P, peut alors être exprimée en fonction des seuls déplacements nodaux, $[U_V^{el}]$:

$$U_P = U_P([U_V^{el}]) \qquad \textbf{(2.1.27)}$$

Le vecteur $[U_V^{el}]$, permettant d'obtenir le champ de déplacement solution du problème, est celui qui minimise l'énergie potentielle totale du système, tout en assurant le respect des conditions aux limites relatives aux déplacements imposés.

• La condition « $[U_V^{el}]$ minimise l'énergie potentielle du système », se traduit par la relation suivante :

$$\frac{\partial U_p([U_V^{el}])}{\partial [U_V^{el}]} = [R_V] \cdot [U_V^{el}] - [F_V] = 0 \ , \qquad \textbf{(2.1.28)}$$

où :

* $[R_V]$ représente la matrice globale de rigidité de la structure

* $[F_V]$ représente le vecteur global des forces

Cette expression, qui est appelée « Relation de rigidité globale », peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$[R_V] \cdot [U_V^{el}] = [F_V] \qquad \textbf{(2.1.29)}$$

• En plus de satisfaire la relation (2.1.29), le vecteur $[U_V^{el}]$ doit assurer le respect des conditions aux limites relatives aux déplacements imposés. Ces dernières peuvent être introduites dans l'expression (2.1.29) de différentes manières. Dans ce qui suit, seule la méthode la plus simple à mettre en oeuvre sera présentée.

Méthode de pénalisation :

Sous forme discrétisée, les conditions aux limites relatives aux déplacements imposés s'écrivent :

$$\left[U^{el}_{noeud(i)}\right] = \left[U^{d}_{noeud(i)}\right] \quad \forall \ noeud(i) \in \partial_U V \qquad \textbf{(2.1.30)}$$

Supposons que la $k^{ième}$ composante du vecteur $[U_V^{el}]$ soit imposée. On la note :

$$U^{el}_{V_k} = U^{d}_{k} \qquad \textbf{(2.1.31)}$$

Cette relation peut être introduite dans le système d'équations (2.1.29), de la manière suivante :

* Soit un nombre Q tel que : $Q >> R_{V_{s;t}}, \quad \forall (s;t)$

* Le terme $R_{V_{k;k}}$ de la matrice $[R_V]$ est remplacé par $(R_{V_{k;k}} + Q)$

* Le terme F_{V_k} du vecteur $[F_V]$ est remplacé par $(Q \cdot U_k^d)$

Le système (2.1.29) devient alors :

$$\begin{bmatrix} R_{V_{1;1}} & \cdots & R_{V_{1;k}} & \cdots & R_{V_{1;n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{V_{k;1}} & \cdots & \left(R_{V_{k;k}}+Q\right) & \cdots & R_{V_{k;n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{V_{n;1}} & \cdots & R_{V_{n;k}} & \cdots & R_{V_{n;n}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{V_1}^{el} \\ \vdots \\ U_{V_k}^{el} \\ \vdots \\ U_{V_n}^{el} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{V_1} \\ \vdots \\ Q \cdot U_k^d \\ \vdots \\ F_{V_n} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.1.32)}$$

Seule la $k^{ième}$ équation du système a été modifiée. Elle s'écrit à présent :

$$\left(R_{V_{k;1}} \cdot U_{V_1}^{el}\right) + \cdots + \left(\left(R_{V_{k;k}}+Q\right) \cdot U_{V_k}^{el}\right) + \cdots + \left(R_{V_{k;n}} \cdot U_{V_n}^{el}\right) = Q \cdot U_k^d \quad , \qquad \textbf{(2.1.33)}$$

ou encore :

$$Q \cdot U_{V_k}^{el} + \left(\sum_{j=1}^{n}\left(R_{V_{k;j}} \cdot U_{V_j}^{el}\right)\right) = Q \cdot U_k^d \qquad \textbf{(2.1.34)}$$

Elle admet comme solution approchée :

$$U_{V_k}^{el} = U_k^d \quad \text{si} \quad \left(Q \cdot U_{V_k}^{el}\right) >> \left(\sum_{j=1}^{n}\left(R_{V_{k;j}} \cdot U_{V_j}^{el}\right)\right) \qquad \textbf{(2.1.35)}$$

• Après avoir introduit dans la relation (2.1.29) l'ensemble des équations relatives aux déplacements imposés sur la frontière $\partial_U V$, on obtient un système d'équations de la forme :

$$[R] \cdot \left[U_V^{el}\right] = [F] \qquad \textbf{(2.1.36)}$$

La résolution de ce système permet d'obtenir le vecteur $\left[U_V^{el}\right]$ solution du problème. Le connaissant, il est alors aisé de déterminer l'ensemble des champs inconnus sur chacun des éléments (Ve).

Le lecteur trouvera en [56] et [57] la plupart des informations conduisant à l'élaboration complète d'un code de calcul par éléments finis (conception d'un outil de maillage optimisé, résolution des problèmes d'intégration numérique ...), dans le cas des problèmes stationnaires plans en élasticité.

2.1.3.2 - Le code de calcul REPCSU

Le développement de ce code a nécessité la réalisation :

- D'un pré-traitement, de manière à saisir les données du problème (géométrie, chargement, matériau) et procéder à sa discrétisation.

- D'un traitement, de manière à évaluer la réponse réelle de la structure.

- D'un post-traitement, de manière à stocker les résultats de calcul et pouvoir par la suite les visualiser ou encore les « combiner ».

Le pré-traitement

- La géométrie : elle est définie par V, $\partial_F V$ et $\partial_U V$.

- Le chargement : - l'état initial de la structure est supposé vierge
  - le chargement étant uniaxial, il est défini par la donnée de F(t) et $\vec{N}$ (relation (2.1.1)).

- Le matériau : Il est défini par la connaissance de E, ν, C et R_e.

- Le maillage :

dans le cas des problèmes plans, le champ de déplacement élastique est parfaitement décrit avec deux composantes. Les éléments de maillage retenus pour ce type d'étude sont donc plans.

Afin d'obtenir une discrétisation satisfaisante des domaines à étudier, des éléments triangulaires isoparamétriques à six noeuds sont utilisés : un noeud à chaque sommet de l'élément et un noeud au milieu de chacun de ses côtés.

Ce type d'élément présente l'avantage de posséder des côtés curvilignes. On peut donc couvrir correctement un domaine dont la frontière est complexe, sans avoir recours à un trop grand nombre de ces éléments. Son emploi conduit ainsi, pour une précision donnée, à des systèmes d'équations $[R]\cdot[U_V^{el}] = [F]$, de taille acceptable pour un micro-ordinateur actuel.

La matrice globale de rigidité de la structure, notée $[R_V]$, possède les propriétés suivantes :

- Elle est symétrique et définie positive.

- Elle est creuse : deux noeuds sont connectés s'ils appartiennent tous deux, au moins à un même élément. Seuls les noeuds connectés engendrent des blocs non nuls dans la matrice de rigidité globale.

- Elle est déterminable dans sa structure : la façon de numéroter les noeuds constituant le maillage, donc de déterminer les connexions nodales, permet de localiser les termes non nuls de la matrice. On s'efforce donc de rapprocher ces termes non nuls autant que possible de la diagonale de la matrice $[R_V]$. De la sorte on crée une matrice bande, c'est à dire dont tous les termes situés au-delà d'une diagonale secondaire sont nuls. Pour cela, il suffit de minimiser la plus grande différence de numéros entre noeuds connectés.

En conséquence, il est inutile de stocker la matrice $[R_V]$ dans sa totalité. Il suffit de stocker la demi-matrice bande associée à $[R_V]$. D'autres méthodes

plus performantes de stockage existent mais elles n'ont pas été développées ici.

Le traitement

• Il nécessite dans un premier temps la réalisation d'un outil de calcul élastique (l'opérateur ELAS).

La résolution du système d'équations linéaires donné en (2.1.36) permet d'obtenir les déplacements nodaux élastiques (notés $[U_V^{el}]$). La matrice [R] étant symétrique et définie positive, la méthode de Choleski peut donc être utilisée :

* La matrice [R] peut être factorisée sous la forme :

$$[R] = [S]^T \cdot [S] \quad , \qquad \textbf{(2.1.37)}$$

où [S] est une matrice triangulaire supérieure.

* En posant :

$$[Z] = [S] \cdot [U_V^{el}] \quad , \qquad \textbf{(2.1.38)}$$

la relation (2.1.36) peut alors s'écrire sous la forme :

$$[S]^T \cdot [Z] = [F] \qquad \textbf{(2.1.39)}$$

* Les relations (2.1.38) et (2.1.39) constituent deux systèmes triangulaires très rapides à résoudre :

- La résolution de (2.1.39) permet d'obtenir [Z].
- La résolution de (2.1.38) permet ensuite d'obtenir $[U_V^{el}]$.

Pour des raisons numériques, les valeurs du champ élastique de déformation et de contrainte sont ensuite déterminées aux points d'intégration numérique (points de Gauss) de chaque élément (Ve).

Il est à noter que le champ de déplacement est continu sur le domaine (V), alors que le champ de contrainte n'est pas continu sur les frontières entre éléments :

* Les valeurs des contraintes sont optimales aux points de Gauss.

* Les valeurs des contraintes aux noeuds des éléments sont déterminées par extrapolation, à partir des valeurs calculées aux points de Gauss.

* Des valeurs continues (mais non exactes) du champ de contrainte aux noeuds du domaine (V), sont obtenues en effectuant une moyenne

arithmétique ou pondérée aux noeuds qui sont situés sur les frontières entre les éléments.

• L'opérateur ELAS ayant été élaboré, voyons à présent comment est articulé l'algorithme associé au code de calcul REPCSU.

Cet algorithme, présenté ci-dessous, reprend la procédure exposée au paragraphe 2.1.2.2.

Notations :

* NEXL représente le nombre d'extremums locaux composant le chargement.

* N représente un noeud du maillage

* P représente un point de Gauss inclus dans le domaine (V).

→ Entrées du programme

* La géométrie (V, $\partial_F V$ et $\partial_U V$)

* Le matériau ($M(E, \nu)$, C ou h (C = 2h/3), k_0 ou R_e ($k_0 = R_e/\sqrt{3}$))

* Le chargement

  - F(I) représente la valeur algébrique de l'extremum local numéro I composant le chargement ($1 \leq I \leq NEXL$).

  - $\vec{N}$ représente la direction de chargement

→ Initialisation

* L'état initial de la structure est supposé vierge

  ⇒ - $U_I^{ine}(N) = 0 \quad \forall N \in V$

  - $E_I^{ine}(P) = E_I^P(P) = E^I(P) = 0 \quad \forall P \in V$

  - $R_I(P) = Y_I(P) = S_I^{el}(P) = 0 \quad \forall P \in V$

→ Analyse de la réponse élastique de la structure pour F = 1

* $ELAS(V, \partial_F V, \partial_U V \| F = 1 \| \underline{M}) \Rightarrow \vec{U}_1^{el}(N) \rightarrow E_1^{el}(P) \rightarrow \Sigma_1^{el}(P)$
  $(\forall N \text{ et } P \in V)$

* $S_1^{el}(P) = dev\left(\Sigma_1^{el}(P)\right) \quad (\forall P \in V)$

* Détermination de l'intervalle initial de chargement, [BI,BS], pour lequel la réponse de la structure est purement élastique.

→ Réponse inélastique de la structure relative au chargement, F, imposé

- I = 1
- tq (I ≤ NEXL) alors
  * si (F(I) ∉ [BI,BS]) alors
    - Détermination de $S_F^{el}(P) \quad \left(S_F^{el}(P) = F(I) \cdot S_1^{el}(P) \quad \forall P \in V\right)$
    - Initialisation de la partition V_α - V_Y
    - Détermination de $dE^P(P)$ sur V_α et $dY(P)/C$ sur V_Y
      - Sur V_α : $dE^P(P) = E_F^P(P) - E_I^P(P) = 0$
      - Sur V_Y : $\dfrac{dY(P)}{C} = \dfrac{Y_F(P) - Y_I(P)}{C}$ et $Y_F(P) = \underset{C(S_F^{el}(P))}{Proj}\left[Y_I(P)\right]$
    - TEST = 1
    - tq (TEST = 1) alors
      - Calcul élastique homogène avec :
        ◊ Pour déformation initiale :
        • $dE^P(P)$ sur V_α
        • $dY(P)/C$ sur V_Y
        ◊ Pour loi de comportement élastique :
        • M sur V_α
        • $\hat{M}$ sur V_Y.

        ⇒ Obtention sur V de $dU^{ine}(N)$, $dE^{ine}(P)$ et dR(P)
      - Détermination de dY(P) et $dE^P(P)$
        ◊ Sur V_α : $dY(P) = -dev(dR(P))$
        ◊ Sur V_Y : $dE^P(P) = \left[dY(P) + dev(dR(P))\right]/C$
      - Test de convergence
        ◊ Si, $\forall P \in V_\alpha$, $\left(\left(Y_I(P) + dY(P)\right) \in C(S_F^{el}(P)) \right)$ alors
        • TEST = 0

Sinon

- Re-partition V_α - V_Y
- Ré-évaluation de $dE^P(P)$ sur V_α et $\frac{dY(P)}{C}$ sur V_Y

Fin si

Retour tq

- Ré-initialisation
  - $Y_I(P) = Y_I(P) + dY(P) \quad \forall P \in V$
  - $E_I^P(P) = E_I^P(P) + dE^P(P) \quad \forall P \in V$
  - $S_I^{el}(P) = S_F^{el}(P) \quad \forall P \in V$
  - $U_I^{ine}(N) = U_I^{ine}(N) + dU^{ine} \quad \forall N \in V$
  - $E_I^{ine}(P) = E_I^{ine}(P) + dE^{ine}(P) \quad \forall P \in V$
  - $R_I(P) = R_I(P) + dR(P) \quad \forall P \in V$
- Re-détermination de l'intervalle [BI,BS]

Fin si

* $I = I + 1$

Retour tq

Le post-traitement

Une interface a été réalisée avec les logiciels de calcul de structure Mef-Mosaic et Algor. Elles permettent de stocker et visualiser les résultats de calcul.

Validation du code REPCSU

Ce code de calcul a fait l'objet de nombreuses validations :

→ Dans le domaine élastique :

- Les réactions d'appuis sont données par les équations relatives aux degrés de liberté imposés sur la structure considérée. Leur calcul permet de vérifier l'équilibre global des forces extérieures.

- La validité et la précision du code peuvent être évaluées par comparaison avec des solutions exactes connues ou par étude de convergence en utilisant des maillages de finesse croissante.

Voici par exemple deux cas très intéressant à étudier :

* Champ de contrainte uniforme :

  Dans le cas où un champ de contrainte uniforme est solution exacte du problème, alors quel que soit le maillage utilisé, la solution obtenue par la méthode des éléments finis doit parfaitement coïncider avec la solution exacte. Ceci permet donc une première vérification du programme.

* Concentration de contrainte :

  De nombreux exemples de problèmes de concentration de contrainte, dont la solution élastique exacte est connue, sont développés dans la littérature. On peut citer le cas de la répartition des contraintes autour d'un trou circulaire dans un milieu isotrope, pour des conditions de contraintes uniformes aux limites.

→ Dans le domaine inélastique :

• Un moyen simple, permettant de valider la bonne écriture du programme, consiste à procéder au test suivant :

* Imposer sur une structure donnée, un champ de déformation plastique déviatorique, $\underline{E}^p$, non uniforme.

* Déterminer les champs inélastiques qui lui sont associés (relations (1.4.21) et (1.4.22)) :

$$ELAS\left(V, \partial_F V, \partial_U V \,\|\, \underline{\vec{0}}, \underline{E}^p, \underline{0}, 0 \,\|\, \underline{M}\right) \Rightarrow \underline{\vec{U}}^{ine} \rightarrow \underline{E}^{ine} \rightarrow \underline{R}$$

$$\underline{R} = \underline{M}^{-1} \cdot (\underline{E}^{ine} - \underline{E}^p)$$

* Déduire le champ de paramètre transformé, $\underline{Y}$, à partir des relations (1.4.30) et (1.4.59) :

$$\left.\begin{array}{l} \underline{E}^p = \underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} \cdot (\underline{Y} + \underline{A} \cdot \underline{R}) \\ \underline{A} = \text{dev} \\ \underline{A}^T \cdot \underline{b}^{-1} = \underline{C}^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Y} = \underline{C} \cdot \underline{E}^p - \text{dev}\underline{R} \qquad \textbf{(2.1.40)}$$

* Déterminer les champs inélastiques associés à $\underline{Y}$, à partir des relations (1.4.34), (1.4.35) et (1.4.59) :

$$ELAS\left(V, \partial_F V, \partial_U V \,\|\, \underline{\vec{0}}, \underline{C}^{-1} \cdot \underline{Y}, \underline{0}, 0 \,\|\, \underline{\hat{M}}\right) \Rightarrow \underline{\vec{U}}^{ine} \rightarrow \underline{E}^{ine} \rightarrow \underline{R}$$

$$\underline{R} = \hat{\underline{M}}^{-1} \cdot (\underline{E}^{ine} - \underline{C}^{-1} \cdot \underline{Y})$$

* Déduire le champ de déformation plastique, $\underline{E}^P$, à partir de la relation (2.1.40),

$$\underline{E}^P = \underline{C}^{-1} \cdot (\underline{Y} + \text{dev}\underline{R}) \ ,$$

et vérifier qu'il est bien identique au champ de déformation plastique initialement introduit dans la structure.

• En ce qui concerne la validation de la méthode d'analyse proposée, elle tient dans le fait que comme pour la MASSI :

* Les champs $\vec{\underline{U}}$ et $\underline{E}$ sont CA avec les conditions aux limites en déplacement imposé.

* Le champ $\underline{\Sigma}$ est SA avec les forces de volume et les forces de surface imposées sur la structure

* Le champ $\underline{\Sigma}$ n'est pas PA : le critère de plasticité est respecté mais pas la règle de normalité. Cependant, l'approximation qui en est faite peut sembler acceptable. En effet, dans le cas d'un chargement cyclique radial, elle conduit alors à une solution :

  - Identique à celle donnée par la MASSI dans le cas d'un état limite adapté.

  - Qui tend vers la borne inférieure de la solution donnée par la MASSI dans le cas d'un état limite accommodé.

Ceci a été vérifié sur l'exemple présenté en [46].

2.2 - CHARGEMENT QUELCONQUE

Il correspond au cas où :

- La direction, $\vec{N}$, de chargement évolue au cours du temps.

- L'amplitude de chargement varie au cours du temps.

Si F(t) représente l'évolution au cours du temps de la mesure algébrique du chargement $\vec{F}(t)$, on a alors :

$$\vec{F}(t) = \vec{N}(t) \cdot F(t) \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

Une extension simple du chargement uniaxial peut être proposée :

Dans le cas d'un chargement quelconque, le trajet de chargement est alors discrétisé en segments linéaires entre les temps t1, t2, ...

Le principe général d'analyse, utilisé dans le cas des chargements uniaxiaux, peut alors être utilisé. La grande différence tient dans la détermination du domaine de chargement pour lequel le comportement de la structure est purement élastique :

* Dans le cas des chargements uniaxiaux, la direction de chargement n'évolue pas au cours du temps (en chaque point P de la structure, l'axe $\Delta(P)$ défini sur la figure 2.1.5 reste constant au cours de l'historique de chargement). Le domaine de chargement pour lequel la structure a un comportement purement élastique est alors défini, dans l'espace des paramètres transformés, par un segment.

* Dans le cas des chargements quelconques, la direction de chargement évolue au cours du temps (en chaque point P de la structure, l'axe $\Delta(P)$ varie au cours de l'historique de chargement). Le domaine de chargement pour lequel la structure a un comportement purement élastique est alors défini, dans l'espace des paramètres transformés, par une hypersphère. La figure 2.2.1 illustre ces propos.

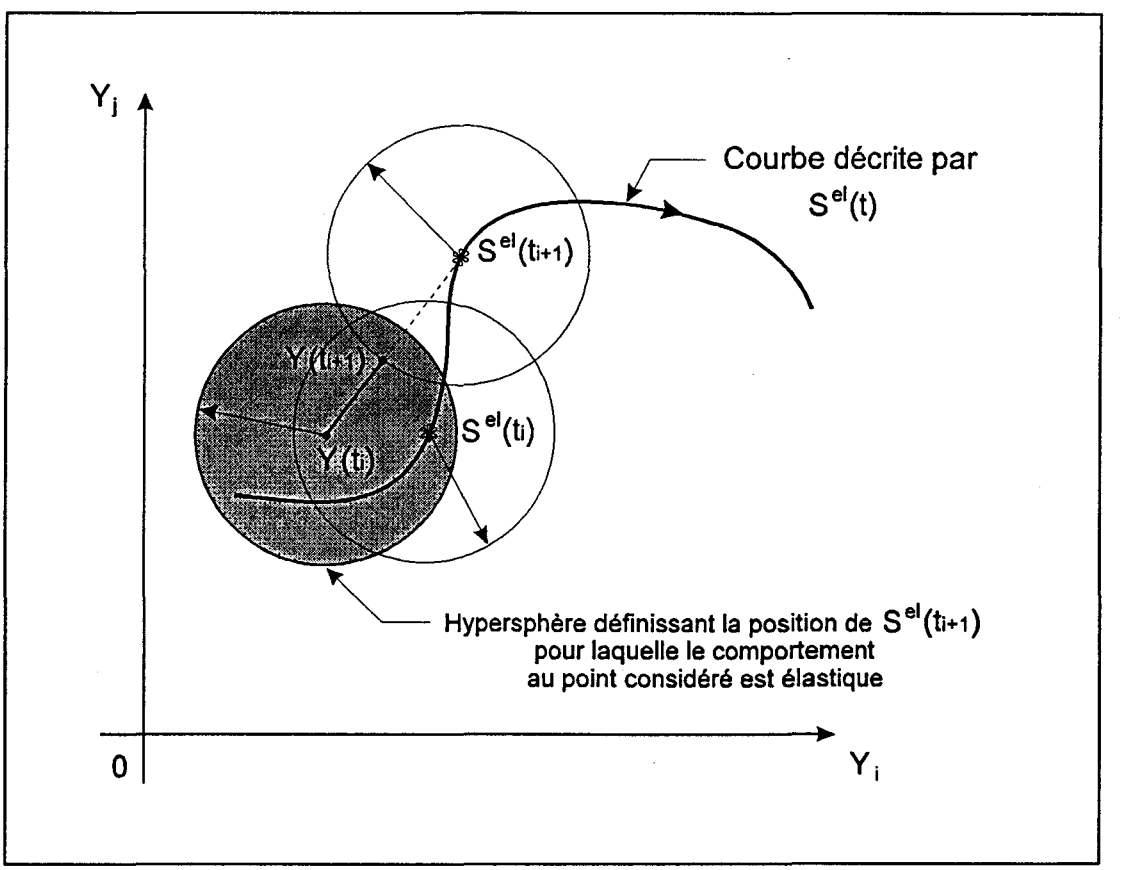


Figure 2.2.1 : « Hypersphère définissant le domaine d'élasticité en un point de la structure »

PARTIE IV

Apprentissage automatique

APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE

L'approche apprentissage automatique nécessite la description des essais de fatigue dont on dispose. Cette description, obtenue selon des moyens automatiques, fiables et reproductibles, se doit d'être représentative du phénomène de fatigue.

Après avoir rappelé les principes de l'apprentissage automatique (principes de la méthode, paramètrage...), nous nous intéresserons au choix des descripteurs retenus dans cette étude, ainsi qu'à leur traitement.

1 - APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE - CHOIX DES DESCRIPTEURS

Cette partie s'appuie très largement sur les travaux de Hablot [58].

1.1 - PRINCIPES DE L'APPRENTISSAGE

L'approche « apprentissage automatique » est utilisable dans le cas de problèmes pouvant s'exprimer sous la forme :

caractéristiques $\rightarrow$ conclusions

Le but de l'apprentissage est de construire des règles permettant de prédire les conclusions en fonction des caractéristiques. Il est donc nécessaire de disposer d'une base d'exemples dont les caractéristiques et les conclusions sont connues. Cette base d'exemples est ensuite décomposée en deux parties :

- Une base d'apprentissage, sur laquelle les règles sont construites.
- Une base de test, sur laquelle les règles sont validées.

Les règles générées doivent être suffisamment générales pour être valables non seulement sur les exemples de la base d'apprentissage, mais également sur la base de test ou encore pour tout cas inconnu (inclus dans le domaine défini par la base d'exemple). Ces propos sont symboliquement illustrés sur la figure 1.1.1.

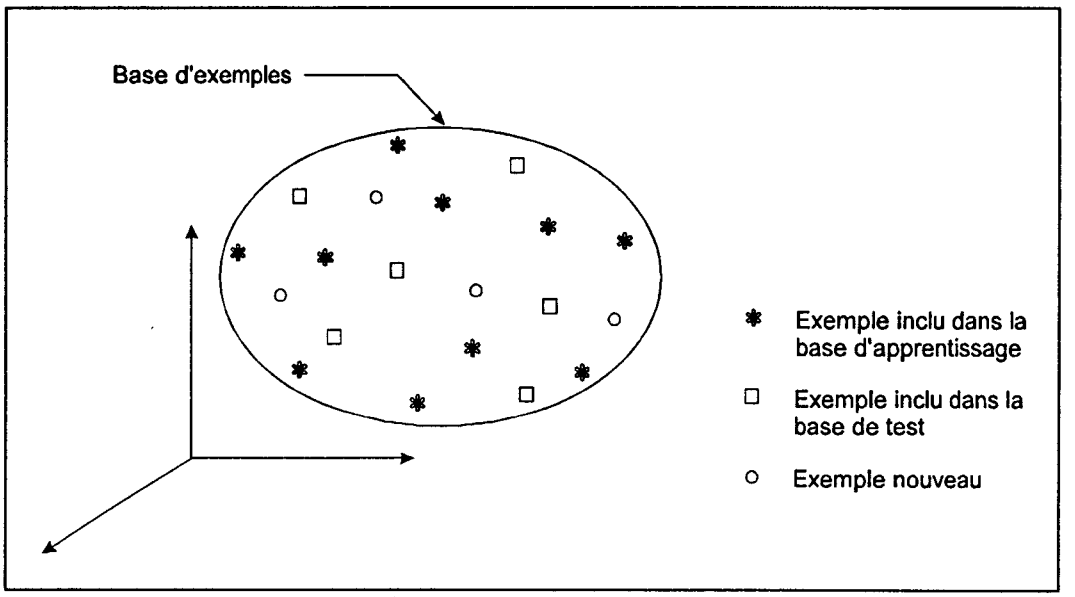


Figure 1.1.1 : « Décomposition de la base d'exemples »

L'apprentissage automatique nécessite le choix d'une description judicieuse. La fiabilité des règles construites dépend en effet de la qualité des exemples disponibles et de la description qui en est faite. Ainsi, certains descripteurs peuvent être inutiles ou non pertinents, ou alors manquants pour certains exemples de la base.

Les méthodes d'apprentissage permettent de générer une loi reliant le vecteur des descripteurs à m composantes au vecteur des conclusions à p composantes.

1.2 - LES DESCRIPTEURS

La description d'un objet quelconque peut être vue à deux niveaux :

- On retient tout d'abord les caractéristiques de l'objet qui semblent significatives (on les appelle Descripteurs Primitifs).

- On cherche ensuite à représenter ces caractéristiques par des Descripteurs Evolués. C'est au travers de ceux-ci que s'exprime toute la compréhension des mécanismes moteurs, relatifs au problème à traiter.

Il est important d'utiliser une représentation permettant de passer d'une description passive du problème à traiter, à une description active évoluée. Les résultats (base de règles) tirés d'exemples particuliers peuvent être ainsi appliqués à tout nouveau cas.

La description d'un objet ne peut être exhaustive. Seules les caractéristiques nécessaires au problème d'apprentissage donné doivent être retenues. A ce stade, une excellente compréhension des mécanismes mis en oeuvre est indispensable. Elle permet de séparer, dans les caractéristiques de l'objet à décrire, ce qui est utile de ce qui est superflu. Il est important de n'éliminer a priori que ce qui est réellement

inutile. Les méthodes d'apprentissage permettent ensuite de rejeter les descripteurs non significatifs.

1.2.1 - PROPRIETES D'UNE DESCRIPTION

Hablot [58] indique les propriétés qu'ont à vérifier les descripteurs d'un objet :

1.2.1.1 - Suffisance

Un système de descripteurs doit d'abord être fixe : tous les objets sont décrits dans le même système de descripteurs. Rien ne peut être appris si chaque exemple possède son propre système de description.

Un tel système est suffisant si on vérifie :

$$\text{Conclusion}(E_1) \neq \text{Conclusion}(E_2) \Rightarrow \text{Description}(E_1) \neq \text{Description}(E_2)$$

pour tout couple d'exemples (E_1) et (E_2) non contradictoires

Deux exemples sont contradictoires si leurs descriptions sont identiques et leurs conclusions incompatibles. Cela se produit dans deux cas de figure :

- L'un au moins des deux exemples est erroné ; la base est dite bruitée.
- Des descripteurs discriminants sont manquants, la description ne peut donc différencier ces exemples ; la base est dite inconsistante.

Les méthodes d'apprentissage doivent être suffisamment robustes pour supporter le bruit et l'inconsistance de la base d'exemples.

La description d'un objet n'est généralement ni injective ni surjective. Cela implique :

- Qu'à partir de la description, on ne peut généralement pas retrouver l'objet.
- Que deux exemples différents peuvent être décrits de façon identique. Ce fait est sans conséquence si les conclusions sont elles aussi identiques ou voisines.

1.2.1.2 - Coût

Le coût propre de la description d'un exemple doit être raisonnable (en termes de temps de calcul). De plus, les descripteurs ne doivent pas être trop nombreux : le coût de la recherche des règles augmente légèrement avec le nombre d'exemples, mais énormément avec le nombre de descripteurs.

Il est donc nécessaire de trouver un compromis raisonnable entre la suffisance des descripteurs, le coût de leur obtention et le coût de leur traitement.

1.2.1.3 - Sens physique

Les descripteurs doivent être indépendants de tout ce qui n'est pas significatif. En calcul des structures, les caractéristiques non significatives sont notamment les unités du calcul, les systèmes d'axes de coordonnées, ...

Deux méthodes permettent la description d'un paramètre dimensionné :

- Un système d'unité est imposé et le paramètre est exprimé dans ce système, pour tous les exemples de la base.

- Le paramètre est rendu adimensionnel en le divisant par une quantité « de référence ».

1.2.1.4 - Indépendance de l'observateur

La base d'exemples conduira à des règles d'autant meilleures que les descripteurs retenus (obtenus ou non par un calcul) seront indépendants de l'« expert » qui les a formulés.

1.2.2 - TYPES DE DESCRIPTEURS

Les descripteurs peuvent être de plusieurs types :

- Les réels : un descripteur a une valeur réelle, qui peut a priori varier dans l'intervalle $]-\infty,+\infty[$, mais qui généralement varie entre deux bornes a et b non forcément connues. La variation du descripteur est supposée continue : si deux exemples sont proches, leur description est voisine, inversement, deux descripteurs proches décrivent deux réalités voisines.

- Les entiers : le descripteur est un nombre entier, quelconque ou compris dans un intervalle. Comme pour les réels, l'ordre des valeurs intervient.

- Les booléens : un descripteur vaut 0 ou 1, vrai ou faux, ...

- Les multivalués : un descripteur peut prendre une valeur dans un ensemble fini. Ces valeurs peuvent être représentées par les éléments de $\{0,1,2,\cdots,n\}$. Les numéros donnés à des objets (comme les départements Français), les chaînes de caractères (noms de couleurs...), ... sont à classer dans les multivalués. Ce codage ne prend pas en compte l'ordre des valeurs ; deux valeurs successives d'un même descripteur peuvent n'avoir aucun rapport entre elles.

1.3 - DESCRIPTION DE LA GEOMETRIE D'UN OBJET

Plusieurs des caractéristiques d'une structure se ramènent à des domaines de R^n dont la forme doit être décrite. Différentes techniques de description de formes sont indiquées en [58].

1.3.1 - DOMAINE V DANS R^n

Un tel domaine V de frontière ∂V est supposé connu et fixe. La frontière ∂V peut contenir des informations complémentaires. Par exemple, en mécanique des structures, on sépare ∂V en deux parties complémentaires $\partial_U V$ et $\partial_F V$. Cette décomposition est une caractéristique de la structure et doit être décrite.

1.3.2 - CHAMP $\varnothing$ SCALAIRE DEFINI SUR V

Certaines données à décrire sont constituées de champs scalaires pouvant s'exprimer sous la forme $\varnothing = f(X)$ (où X représente les coordonnées d'espace du domaine V sur lequel s'appuient les champs $\varnothing$). Etant donné que le domaine V est fixe pour un exemple donné, il est judicieux pour décrire un champ $\varnothing$ de le considérer comme un volume à « densité variable ». Ceci revient à remplacer, dans les calculs d'intégrales sur le domaine V, le terme dV par le terme $\varnothing(X) \cdot dV$.

1.3.3 - CHAMP $\varnothing$ VECTORIEL OU TENSORIEL

La quantité $\varnothing$, connue en tout point du domaine $V \subset R^n$, peut être de nature vectorielle ou tensorielle à p composantes.

La plus simple façon de décrire $\varnothing$ est d'en calculer un équivalent scalaire et de le traiter comme un champ scalaire sur V.

Il est également possible d'associer à chacune des composantes de $\varnothing$, un champ scalaire sur V. Cela n'a d'intérêt que si un changement de repère ne modifie pas ces champs, ce qui implique de décrire les invariants du tenseur et d'y ajouter les « directions » par rapport à un repère de référence qu'il reste à définir.

1.3.4 - CHAMP $\varnothing$ EVOLUANT DANS LE TEMPS

Les champs $\varnothing = f(X)$ sont définis sur V et sur l'intervalle $[\, t_1, t_2 \,]$. Il convient de distinguer le temps physique réel d'un temps descriptif ou paramètre d'évolution.

1.3.4.1 - Cas du temps réel

Lorsque la dépendance en temps est réelle, il n'y a pas d'ambiguïté et les valeurs connues à un temps donné ne peuvent être déplacées à un autre temps

sans fausser la description du phénomène réel. Le champ $\varnothing$ s'écrit alors $\varnothing(X,t)$ et est décrit comme une fonction définie sur $V \times [\, t_1, t_2 \,]$.

Une autre possibilité consiste à chercher au cours du temps une ou plusieurs bornes de $\varnothing(X)$. Il n'y a que quelques champs à décrire, avec une dimension en temps de moins et donc moins de descripteurs. L'inconvénient est que ces bornes (le sup., l'inf. ou la moyenne sur l'intervalle d'étude) ne représentent pas la totalité de l'évolution. Suivant la nature du problème physique, cette approche peut être suffisante.

1.3.4.2 - Cas du paramètre d'évolution

Contrairement à un temps réel, un paramètre d'évolution ne fait que décrire l'ordre du processus d'évolution. Seul le signe des dérivées du phénomène par rapport au temps a un sens physique.

Ce fait interdit de considérer le temps comme une dimension supplémentaire du problème. De même, des quantités comme la moyenne de $\varnothing$ sur l'intervalle d'étude ne sont pas significatives et ne peuvent être retenues. Il est toujours possible de décrire des bornes comme le sup. ou l'inf. du champ au cours de l'évolution.

1.4 - CARACTERISTIQUES D'UN OBJET

Il est nécessaire de séparer les caractéristiques d'un objet géométrique en trois familles de paramètres :

- Des paramètres de taille, rattachés à la dimension de l'objet à décrire.
- Des paramètres de position, qui décrivent l'emplacement de l'objet par rapport à un repère de référence qu'il reste à définir.
- Des paramètres de forme, qui décrivent l'aspect de l'objet, en dehors de toute considération de taille.

1.4.1 - DESCRIPTION DE LA TAILLE D'UN OBJET

La taille d'un objet (sa surface ou son volume) ne doit être décrite que si elle est significative pour le problème d'apprentissage. Deux cas sont à distinguer pour l'objet :

- Soit ce dernier est l'objet principal V_0 (la structure entière).
- Soit l'objet V est rattaché à l'objet principal V_0. Il s'agit par exemple d'un sous-ensemble de V_0, ou d'un volume appuyé sur V_0.

Pour un champ scalaire $\varnothing(x,y)$ défini sur V_0 bidimensionnel d'aire S_0, le volume contenu sous la surface $\varnothing = f(x,y)$ a pour valeur :

$$V_{total} = \int_{V_0} \varnothing(x,y) \cdot dx \cdot dy \qquad \textbf{(1.4.1)}$$

Il est possible de retenir comme paramètre de taille la valeur moyenne $\varnothing_{moy}$ définie par :

$$\varnothing_{moy} = \frac{V_{total}}{S_0} \qquad \textbf{(1.4.2)}$$

1.4.2 - DESCRIPTION DE LA POSITION D'UN OBJET

La position d'un objet quelconque, si elle est considérée comme significative, doit être décrite par rapport à un système d'axes de référence qu'il reste à définir mais qui doit être fixe et déterminable de manière unique. Les paramètres de position sont exprimés dans ce système d'axes. Il est naturel de penser aux axes principaux d'inertie de l'objet.

1.4.3 - DESCRIPTION DE LA FORME D'UN OBJET

Différents critères permettent de classer les méthodes d'analyse des formes. On distingue les méthodes qui travaillent sur le contour des objets de celles qui considèrent tous ses points constitutifs. On distingue également les transformations selon qu'elles décrivent une forme par des scalaires, ou de façon plus complexe, par exemple par une autre forme plus simple [58].

1.4.3.1 - Descripteurs proposés par divers auteurs

Il est possible de retenir différents types de descripteurs numériques, de manière à rendre compte d'une forme géométrique donnée :

- Pour les signaux monodimensionnels, trois classes de paramètres peuvent être définies :
  - Les paramètres temporels : minimum, maximum, moyenne, écart-type, nombre de passages par zéro.
  - Les paramètres spectraux : ils correspondent aux paramètres temporels du spectre du signal (obtenu par transformée de Fourier).
  - Les paramètres autorégressifs : ils sont tirés de la modélisation du signal.
- Pour les images, des paramètres géométriques peuvent être utilisés (périmètre P, surface S, épaisseur, compacité, dispersion, moments invariants, courbure moyenne).

1.4.3.2 - Moyennes et moments en statistique

L'analyse statistique des données discrètes ou continues est une technique très répandue dans la plupart des domaines scientifiques.

Considérons une variable X prenant les n valeurs discrètes $X_1, X_2, \cdots, X_n$, ou alors une distribution continue X(x). La moyenne arithmétique X_{moy} est définie par :

$$X_{moy} = \frac{\sum X_i}{n} \qquad \textbf{(1.4.3)}$$

Les moments centrés d'ordre p sont quant à eux définis par :

$$m_p = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - X_{moy} \right)^p \qquad \textbf{(1.4.4)}$$

Ces moments sont rendus adimensionnels en posant :

$$a_p = \frac{m_p}{m_2^{p/2}}, \qquad \textbf{(1.4.5)}$$

où m_2 représente le moment d'ordre p = 2.

Le moment d'ordre un n'est autre que la moyenne, le moment d'ordre deux est la variance. Le moment, a_3, d'ordre trois définit la « skewness » et permet d'évaluer la dissymétrie de la distribution. Le moment réduit d'ordre quatre, a_4, est la « kurtosis » et décrit l'aplatissement de la distribution. Sa valeur pour une courbe de Gauss étant de trois, l'aplatissement est parfois mesuré par $(a_4 - 3)$.

Ces coefficients permettent de décrire la forme d'une distribution par rapport à une référence, la distribution de Gauss.

On trouvera en [58], la généralisation de ce concept au cas multidimensionnel (la forme d'un domaine plan quelconque V d'aire S peut alors être représentée par les invariants adimensionnels de « tenseurs de forme »).

D'autres paramètres permettent de décrire la géométrie d'un objet. Par exemple, dans le cas d'une surface plane, le rapport périmètrique, r_p, peut être utilisé :

$$r_p = \frac{\text{périmètre de V}}{\text{périmètre d'un cercle de même aire que V}} \qquad \textbf{(1.4.6)}$$

1.5 - CAS D'UN CHAMP ∅ DEFINI SUR UN DOMAINE V_0

1.5.1 - EXTREMA DU CHAMP ∅

Les valeurs minimale $\varnothing_{min}$ et maximale $\varnothing_{max}$ sont liées à la forme de la variation

de $\varnothing$ sur V_0 et sont donc des paramètres de forme. La moyenne sur V_0 est par contre un paramètre de taille.

1.5.2 - REPARTITION DE $\varnothing$ SUR V_0

Une statistique portant sur la répartition spatiale de $\varnothing$ sur le domaine V_0 d'aire S_0 peut être réalisée :

- L'intervalle $[\varnothing_{min}, \varnothing_{max}]$ est découpé en « tranches » disjointes $[\varnothing_i, \varnothing_{i+1}[$.
- Pour chacune de ces tranches, une zone V_i d'aire S_i lui correspond. Cette zone est définie par l'ensemble des points M de V_0 pour lesquels on a :

$$\varnothing_i \leq \varnothing(M) < \varnothing_{i+1} \qquad \textbf{(1.5.1)}$$

- La répartition de $\varnothing$ sur V_0 est finalement décrite par les rapports S_i/S_0.

Il est bon de rappeler que l'analyse du gradient de $\varnothing$ permet de rendre compte de l'évolution du champ $\varnothing$ sur le domaine V_0. En particulier, la valeur du gradient de $\varnothing$ en un point P de V_0 permet d'évaluer la forme du champ $\varnothing$ au voisinage de P.

1.5.3 - REPARTITION DANS UN MAILLAGE

Dans le cas où le champ $\varnothing$ se rapporte étroitement à un maillage, une statistique arithmétique peut être effectuée et on peut alors retenir :

- La moyenne géométrique des valeurs de $\varnothing$ sur les éléments.
- L'écart-type.
- La répartition de $\varnothing$ (en nombre d'éléments et non plus en surface) dans des tranches divisant l'intervalle $[\varnothing_{min}, \varnothing_{max}]$.

La moyenne arithmétique des valeurs de $\varnothing$ sur les éléments s'apparente à un paramètre de taille.

Ces statistiques n'auraient aucun sens si on cherchait à décrire une quantité intrinsèque au problème, par la moyenne qui en est faite sur chaque élément. C'est par exemple le cas d'un champ de contrainte car sa distribution réelle est totalement indépendante du maillage utilisé. Ce dernier permet d'obtenir une évaluation numérique du champ de contrainte réelle et non sa description.

Les statistiques arithmétiques ne peuvent décrire que des quantités relatives à un maillage et supposées constantes sur chaque élément (par exemple, si $\varnothing$ représente le champ des tailles des éléments ...).

1.5.4 - COEFFICIENT DE REMPLISSAGE

Le volume V_{total} contenu sous la surface $\varnothing = f(x,y)$ peut être décrit par le « coefficient de remplissage » définit par :

$$C_r = V_{total}/(\varnothing_{max} \cdot S_0) \qquad \textbf{(1.5.2)}$$

La valeur de ce coefficient peut être très mal définie, notamment si $\varnothing_{max}$ est obtenu à partir d'un calcul approché. Il est alors préférable de ne pas utiliser ce paramètre.

1.6 - DESCRIPTION DE FORMES ELEMENTAIRES

1.6.1 - CODAGE D'UNE SURFACE PLANE

Cette surface peut correspondre au domaine V_0 sur lequel sont définis les axes de référence, ou encore à un domaine plan quelconque, V, inclus dans V_0.

* Paramètres de taille

Si le domaine considéré correspond à V_0, alors sa surface peut être mesurée dans un système d'unités commun à tous les exemples. Dans le cas contraire, sa surface S est décrite par le rapport (S/S_0).

* Paramètres de forme

La forme du domaine peut être décrite au moyen des quantités définies en 1.4.3.

* Paramètres de position

La position d'une surface V de centre G_V par rapport aux axes de référence n'est décrite que s'il ne s'agit pas de la base V_0. L'angle entre le repère de référence de la base V_0 et les axes principaux de V est noté θ. Les paramètres de position retenus sont :

$$\frac{X_{G_V}}{r_r}, \quad \frac{Y_{G_V}}{r_r}, \quad \cos\theta, \quad \sin\theta \qquad \textbf{(1.6.1)}$$

1.6.2 - CODAGE D'UN VOLUME

Le volume considéré est compris entre un domaine plan V_0 et une surface gauche $\varnothing = f(x,y)$ appuyée sur ce domaine plan.

* Paramètres de taille

La valeur moyenne $\varnothing_{moy}$ du champ (et éventuellement la moyenne sur les éléments) peut être utilisée. Elle doit être rendue adimensionnelle ou exprimée dans une unité commune à tous les exemples.

* Paramètres de forme

La répartition de $\varnothing$ sur V_0 peut utiliser les descripteurs présentés dans le paragraphe 1.5 : $\varnothing_{min}, \varnothing_{max}, (S_i/S_0), C_r$
La forme du volume peut être également décrite par des quantités analogues à celles utilisées dans le cas d'une surface plane (paragraphe 1.4.3).

* Paramètres de position

Les paramètres de position sont identiques à ceux utilisés dans le cas du codage d'une surface plane.

1.6.3 - CODAGE D'UNE SURFACE $\varnothing = f(x,y)$

Cette surface s'appuie sur un domaine plan V_0. Dans le cas où la fonction $\varnothing$ est à valeurs positives, il est possible de la coder à partir de volumes et de surfaces planes qui en sont déduits. On peut par exemple utiliser au choix :

- Le volume contenu entre cette surface gauche et la base (paragraphe 1.6.2).
- Le volume de l'écart e(x,y), défini par :

$$e(x,y) = \left| \varnothing(x,y) - \varnothing_{moy} \right| , \qquad \textbf{(1.6.2)}$$

où $\varnothing_{moy}$ représente la valeur moyenne de $\varnothing$ sur V_0.

- Un nombre donné NSV de sous-volumes.

Un sous-volume est défini par un champ s(x,y) tel que le volume contenu sous ce champ est égal à k fois V_{total}, k prenant des valeurs fixées une fois pour toutes et généralement comprises entre 0.4 et 0.9. Les valeurs de k inférieures à 0.4 ne sont pas retenues car la forme du sous-volume correspondant est en général très voisine de celle de la base. Il faut donc déterminer une altitude $\varnothing_k$ telle que :

$$\begin{cases} s(x,y) = \mathrm{Min}[\varnothing(x,y), \varnothing_k] \\ \int_{V_0} s(x,y) \cdot dx \cdot dy = k \cdot V_{total} \end{cases} \qquad \textbf{(1.6.3)}$$

- Un nombre donné NTR de tranches.

Une tranche ou couche est l'intersection de la surface gauche $\varnothing = f(x,y)$ par un plan horizontal situé à une altitude $\varnothing_i$ donnée. Ces tranches sont de nouvelles surfaces planes incluses dans V_0 et chacune incluse dans la précédente lorsque $\varnothing_i$ croît. Le contour de ces tranches est analogue aux courbes de niveau que l'on peut trouver par exemple sur les cartes topographiques.

2 - DESCRIPTION D'UN PROBLEME MECANIQUE

Dans le cas d'un problème mécanique, les quantités à décrire peuvent être regroupées en plusieurs familles :

* Les caractéristiques intrinsèques, qui sont indépendantes de toute discrétisation : la géométrie, le matériau et le chargement.

* Les caractéristiques non intrinsèques, qui sont liées à la discrétisation spatiale (maillage) ou temporelle (pas de temps).

* Les conclusions, qui sont propres au problème à traiter. Dans le cas de l'étude du comportement à la fatigue des structures, la conclusion correspond alors à la durée de vie de la structure considérée.

Toutes ces quantités sont supposées connues et définies sans ambiguïté. Elles peuvent être de nature numérique ou expérimentale (cas de la durée de vie).

2.1 - CARACTERISTIQUES INTRINSEQUES

Dans le cadre des problèmes élasto-plastiques quasi-statiques bi - ou tridimensionnels, la description suivante peut être retenue :

2.1.1 - POUR LA GEOMETRIE

La taille et la position de la structure V_0 n'ont pas à être décrites (il n'existe pas d'effet d'échelle en plasticité classique). Seule la forme du domaine V_0 est à décrire, au moyen des techniques exposées en 1.4.3.

Il est possible d'avoir à décrire les dimensions de sous-ensembles de la structure (par exemple la taille de la zone plastifiée). Ces dimensions peuvent être rendues adimensionnelles par division par la longueur de référence de la structure.

Le domaine V_0 peut présenter des singularités géométriques qui contribuent à modifier l'aspect des champs calculés sur la structure (déplacement, déformation et contrainte). La description de ces champs permet de rendre compte de ces singularités.

2.1.2 - POUR LE MATERIAU

Pour une structure homogène et isotrope, dans le cas où le matériau constitutif vérifie le critère de Von Mises avec écrouissage cinématique linéaire, les quatre coefficients suivants sont alors suffisants pour le décrire :

* ν qui est le coefficient de Poisson.

* Σ_0 qui est la limite d'élasticité en traction.

* (Σ_0/E), où E représente le module de Young.

* $(\hat{E}/E)$, où $\hat{E}$ représente le module tangent défini dans la partie III par l'expression (1.4.61).

Un solide hétérogène nécessite en plus la description de la répartition des différents matériaux sur le domaine V_0. Ceci se ramène à plusieurs champs scalaires définis sur le domaine V_0.

Il est à noter que :

- L'analyse dynamique nécessite en plus la masse volumique ρ du matériau.

- La prise en compte de dilatations thermiques nécessite le coefficient de dilatation α.

2.1.3 - POUR LE CHARGEMENT

Aussi bien la répartition du chargement dans l'espace, que l'évolution de cette répartition au cours du trajet de chargement, doivent être décrites. Un chargement est difficilement descriptible. Il se compose de :

- Forces de surface sur $\partial_F V$.

- Forces de volume dans V.

- Forces ponctuelles sur $\partial_F V$.

- Déplacements imposés sur $\partial_U V$.

- Déformations initiales dans V, etc.

Une synthèse de toutes ces quantités est réalisée en décrivant les effets du chargement par l'intermédiaire de plusieurs champs d'isovaleurs obtenus à partir d'un calcul numérique élastique ou élasto-plastique (déplacements, déformations et contraintes). Les techniques présentées précédemment permettent de décrire ces quantités.

Une fois que les champs approchés de contrainte et de déformation sont numériquement évalués sur le domaine V, des équivalents adimensionnels peuvent alors être déterminés.

2.2 - CARACTERISTIQUES NON INTRINSEQUES

Suivant la nature du problème à traiter, il peut être intéressant de décrire ces quantités. La description suivante peut être retenue :

2.2.1 - POUR LE MAILLAGE

Dans le cas où des éléments de degré différent composent un même maillage, il est alors nécessaire de décrire les différents types d'éléments utilisés.

Le maillage peut, quant à lui, être décrit par son nombre d'éléments et de degrés de liberté, les tailles minimale, maximale et moyenne des éléments, ainsi que le champ adimensionnel des tailles des éléments. La répartition spatiale, les statistiques arithmétiques et le coefficient de remplissage sont également utilisables.

2.2.2 - POUR LE PAS DE TEMPS

En élasto-plasticité quasi-statique, le pas de temps se ramène à un paramètre d'évolution et n'a pas de signification en lui-même. Il peut être décrit par l'incrément de contrainte qu'il produit dans la structure supposée élastique.

En dynamique, le temps physique est significatif et doit obligatoirement être ajouté à la description.

2.3 - CONCLUSIONS

Dans le cas de l'étude du comportement à la fatigue des structures, la conclusion correspond alors à la durée de vie de la structure considérée. Il est possible de retenir la durée de vie à l'initiation d'une fissure de longueur donnée ou encore la durée de vie à rupture. Ces quantités sont obtenues à partir d'une analyse statistique des résultats tirés de campagnes d'essais expérimentaux.

Il est à noter qu'un bon nombre des descripteurs présentés dans ce paragraphe sont obtenus à partir des résultats d'un calcul numérique. Ils sont généralement sensibles à la « qualité » du maillage retenu (d'une manière plus ou moins importante).

Il convient d'utiliser une discrètisation spatiale et temporelle suffisamment fine, et d'éliminer les descripteurs trop dépendants de ces discrètisations.

3 - DUREE DE VIE D'UNE STRUCTURE

Intéressons-nous à présent à la prévision de la durée de vie d'une structure de forme générale et soumise à un chargement complexe général.

Comme on l'a rappelé précédemment (partie III, paragraphe 1.4.3), lorsqu'il n'y a pas ruine par déformation excessive, après un certain temps (ou un certain nombre de cycles), on peut observer une adaptation élastique, une accommodation plastique ou encore un rochet élasto-plastique incrémental de la structure soumise à ce chargement.

De plus, la ruine sera finalement obtenue par un processus d'endommagement progressif. On parle alors de ruine de la structure par fatigue-rupture après un certain temps appelé durée de vie.

Nous disposons d'une base d'essais de fatigue réalisés sur des éprouvettes lisses ou entaillées, et soumises à des chargements de type traction-compression.

Le but de cette étude est, à partir de l'analyse du comportement à la fatigue de ces éprouvettes, de mettre en évidence des règles permettant d'en prédire la durée de vie et pouvant également s'appliquer au cas des structures complexes. Ces règles doivent donc faire intervenir dans leur formulation, des paramètres intrinsèques à la structure.

Nous avons vu précédemment que la réponse d'une structure est représentative de son comportement à la fatigue. Cette réponse est caractérisée par des champs de nature scalaire ou tensorielle, dont il faut rendre compte.

L'emploi du code de calcul REPCSU permet, dans le cas des essais de fatigue inclus dans la base d'exemples, d'obtenir une estimation rapide de ces champs. Il s'agit donc de parvenir à exhiber des descripteurs significatifs à partir de ces champs. Ceci est réalisé au moyen des différentes techniques présentées en IV.1.

3.1 - POSITION DU PROBLEME

La complexité des mécanismes moteurs intervenant dans le phénomène de fatigue ne permet pas d'en établir une solution complète (confère partie I).

Il est bon de rappeler que les données relatives aux problèmes de fatigue peuvent être :

* Qualitatives : pour une structure et un chargement fixés, la durée de vie associée est estimée à partir d'une analyse statistique des résultats expérimentaux (exemple de la construction d'une courbe de Wöhler) ...

* Entachées d'erreurs : la loi de comportement du matériau constitutif est bien souvent simplement approchée...

* Manquantes : l'état initial de la structure est rarement connu ou même estimé et pris en compte...

Nous nous proposons d'exprimer la durée de vie d'une structure en fonction des caractéristiques prépondérantes intervenant dans le phénomène de fatigue.

L'approche apprentissage automatique devrait permettre à la fois une meilleure compréhension du problème (mise en évidence des descripteurs véritablement significatifs en fatigue), et l'obtention d'une solution pratique à l'estimation de la durée de vie des structures en fatigue.

Pour parvenir à cela, nous nous proposons de résoudre les étapes suivantes :

* La première est relative à la détermination de l'état stationnaire éventuel de la structure.

* La seconde repose sur la caractérisation, d'un point de vue de la fatigue, de la réponse de la structure durant la phase transitoire ainsi qu'à l'état stabilisé.

3.2 - ETAT LIMITE D'UNE STRUCTURE

Nous supposerons dans cette étude que les structures considérées sont constituées d'un matériau à écrouissage cinématique linéaire. Dans le cas d'un chargement cyclique, l'état limite d'une structure ne peut alors être que de nature élastique, adaptée ou accommodée ; le rochet est impossible (voir III.1.4.3).

Le problème consiste à présent à déterminer le cycle de chargement pour lequel la réponse de la structure est stabilisée. Ceci est obtenu lorsque, pour deux séquences de chargement consécutives, le champ de déformation plastique ne varie pas.

* Dans le cas d'un chargement cyclique radial, l'emploi de la MASSI permet de résoudre extrêmement rapidement ce problème. En effet, la nature et les caractéristiques de l'état limite sont alors directement déterminées, sans avoir à évaluer cycle après cycle la réponse de la structure (voir III.1.4.3).

* Dans le cas d'un chargement cyclique complexe, l'obtention des caractéristiques liées à l'état stabilisé de la structure nécessite une analyse beaucoup plus « lourde ». Il est alors nécessaire de déterminer cycle après cycle la réponse de la structure, et cela jusqu'à ce que l'état stabilisé soit atteint.

Dans le cas d'un chargement cyclique uniaxial à amplitude variable, la procédure utilisée dans le code de calcul REPCSU est la suivante :

1) Détermination de la nature de l'état limite :

   La méthode est identique à celle employée dans le cas des chargements cycliques radiaux.

2) Détermination des caractéristiques de l'état limite :

   Si le comportement de la structure est purement élastique, il n'y a alors aucun problème. Dans le cas contraire (état limite adapté ou accommodé), il est nécessaire de suivre la démarche suivante :

   Pour deux séquences successives de chargement :

   - Déterminer la réponse élasto-plastique de la structure.

   Si :

   - Pour ces deux séquences, les mêmes extremums induisent de la plasticité dans la structure.

- Pour ces extremums, le champ de déformation plastique équivalente, $\underline{E}^p_{eq}$, reste approximativement constant (variation relative, définie en tout point de la structure par $\left(\Delta E^p_{eq} / \mathrm{Max} E^p_{eq}\right)$, inférieure à 0.001).

Alors :

- L'état stabilisé est atteint

Sinon

- Recommencer

Finsi

Rappel : $$\underline{E}^p_{eq} = \left(\frac{2}{3} \cdot \underline{E}^p : \underline{E}^p\right)^{1/2} \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

3.3 - CARACTERISTIQUES A DECRIRE

Ces dernières ont pu être mises en évidence dans la première partie de cette étude :

3.3.1 - ANALYSE DES CRITERES DE FATIGUE

Ils permettent de savoir si, suite aux conditions de sollicitation imposées, l'état de ruine est, oui ou non, obtenu pour la structure.

Une quantité I_E (dépendant de la réponse de la structure et des caractéristiques du matériau en fatigue) est déterminée puis comparée à la valeur critique I_{Ec} qui lui est associée dans le cas où on a ruine de la structure.

$$\begin{cases} I_E \geq I_{Ec} \rightarrow \text{rupture} \\ I_E < I_{Ec} \rightarrow \text{non - rupture} \end{cases} \qquad \textbf{(3.3.1)}$$

* Les variables intervenant dans l'expression de I_E sont d'une manière générale liées (voir partie I, tableau 1.5.1) :
  - A l'état de contrainte régnant dans la structure.
  - A l'énergie de déformation.
  - Au degré de triaxialité.
* Les données nécessaires à l'application d'un critère de fatigue dépendent directement de son domaine de validité. Par exemple, dans le cas du critère de

Dang Van, dont le domaine de validité est restreint à l'endurance illimitée, elles correspondent aux limites d'endurance en torsion et flexion alternées.

3.3.2 - ANALYSE DES LOIS D'ENDOMMAGEMENT

Elles permettent d'estimer le nombre de cycles de chargement conduisant à la ruine d'une structure, c'est à dire à l'amorçage d'une fissure macroscopique.

Dans le cas des lois multiaxiales, l'approche consistant à suivre l'évolution d'une variable d'endommagement le long du trajet de chargement nous semble intéressante. Nous retiendrons plus particulièrement :

* L'énergie de déformation, obtenue en supposant que la structure a un comportement purement élastique.

* L'énergie bloquée dans la structure, lors du processus d'écrouissage. Il est raisonnable de considérer que, dans le cas de la fatigue oligocyclique, cette quantité est représentative de la détérioration du matériau.

3.3.3 - CARACTERISTIQUES RETENUES

Les quantités que nous nous proposons de retenir pour caractériser le phénomène de fatigue sont :

→ L'évolution de l'état de contrainte dans la structure

De manière à rendre compte du rôle différent qu'ont les composantes du tenseur des contraintes du point de vue de la fatigue, nous nous intéresserons à l'évolution de $\sqrt{J2(t)}$ et de la pression hydrostatique, P(t), sur la structure (J2(t) représente le second invariant du déviateur des contraintes).

$$\sqrt{J2(t)} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot \underline{S}(t):\underline{S}(t)} \quad \left(\text{avec : } S(t) = \underline{\Sigma}(t) - \frac{1}{3}\cdot \mathrm{tr}\left(\underline{\Sigma}(t)\right)\cdot \underline{1}\right) \qquad \textbf{(3.3.2)}$$

$$P(t) = \frac{1}{3}\cdot \mathrm{tr}\left(\underline{\Sigma}(t)\right) \qquad \textbf{(3.3.3)}$$

Ce choix est justifié par l'analyse des critères de fatigue (partie I). Il présente de plus l'avantage de conduire à des temps de calcul que nous qualifierons de raisonnable dans le sens où il ne nécessite pas la recherche d'un plan critique.

→ L'énergie de déformation élastique, notée W^e

Dans le domaine de la fatigue polycyclique, cette quantité peut être représentative de la détérioration du matériau.

De manière à rendre compte du rôle différent qu'ont l'énergie de cisaillement et l'énergie de déformation volumique (les croissances des cavités et des fissures sont

des mécanismes très sensibles à la contrainte hydrostatique, confère le critère de Froustey-Lasserre) , nous nous intéresserons à l'évolution de ces deux quantités.

L'énergie de déformation élastique totale est donc décomposée en une énergie de distorsion et une énergie de déformation volumique :

$$W^e = W_d^e + W_H^e \tag{3.3.4}$$

$$W^e = \int_0^{E^{el}} \underline{\Sigma}^{el} : d\underline{E}^{el} = \int_0^{E^{el'}} \underline{S}^{el} : d\underline{E}^{el'} + 3 \cdot \int_0^{E_H^{el}} \Sigma_H^{el} \cdot dE_H^{el} \ , \tag{3.3.5}$$

où :

* $\underline{S}^{el}$ et $\underline{E}^{el'}$ sont les déviateurs de $\underline{\Sigma}^{el}$ et $\underline{E}^{el}$
* Σ_H^{el} et E_H^{el} sont la contrainte et la déformation hydrostatiques élastiques

La loi d'élasticité linéaire conduit à :

$$\underline{E}^{el'} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \underline{S}^{el} \tag{3.3.6}$$

$$E_H^{el} = \frac{1-2\cdot\nu}{E} \cdot \Sigma_H^{el} \tag{3.3.7}$$

D'où :

$$W^e = W_d^e + W_H^e = \frac{1+\nu}{2\cdot E} \cdot \left(\underline{S}^{el} : \underline{S}^{el}\right) + 3 \cdot \frac{1-2\cdot\nu}{2\cdot E} \cdot \left(\Sigma_H^{el}\right)^2 \tag{3.3.8}$$

En utilisant la contrainte équivalente de Von Mises, la relation (3.3.8) s'écrit :

$$W^e = W_d^e + W_H^e = \frac{1+\nu}{3\cdot E} \cdot \left(\Sigma_{eq}^{el}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1-2\cdot\nu}{2\cdot E} \cdot \left(\Sigma_H^{el}\right)^2 \tag{3.3.9}$$

→ Le degré de triaxialité

Celui-ci est classiquement défini par le rapport entre l'énergie de changement de volume et l'énergie totale :

$$d°T(t) = \frac{W_H^e}{W_d^e + W_H^e} \geq 0 \tag{3.3.10}$$

Une autre quantité peut être utilisée, afin de rendre compte du degré de triaxialité régnant dans une structure, ainsi que de son évolution. Il s'agit de la variable définie, en tout point de la structure, par le rapport $\left(P(t)/\sqrt{J2(t)}\right)$.

On peut ainsi noter que la quantité $Max_t\left(P(t)/\sqrt{J2(t)}\right)$ est parfois introduite dans différents modèles empiriques de comportement à la fatigue (voir [59]).

→ L'énergie bloquée dans la structure

Dans le cas de la traction, le modèle rhéologique uniaxial associé à un comportement élasto-plastique à écrouissage cinématique linéaire est le suivant :

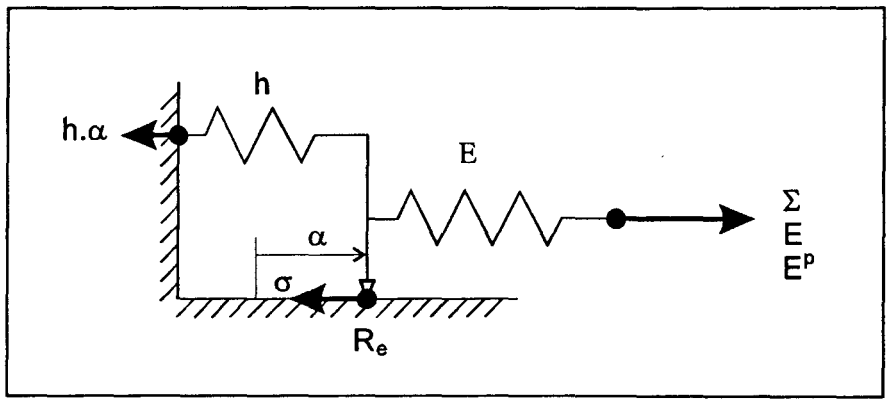


Figure 3.3.1 : « Ecrouissage cinématique linéaire - modèle rhéologique uniaxial en traction »

* h et E sont les raideurs des ressorts
* α est la variable caractérisant le déplacement du patin
* σ est la contrainte locale associée au patin
* R_e correspond au seuil de glissement du patin
* Σ représente la contrainte exercée sur le système
* E représente la déformation globale du système
* E^p représente la déformation inélastique du système

L'étude de ce système permet d'établir la relation entre Σ et E, en fonction des différents paramètres composant le modèle. On a ainsi :

* Equilibre des forces :

$$\sigma = \Sigma - h.\alpha \qquad \textbf{(3.3.11)}$$

* Partition des déformations :

$$E = E^e + E^p \qquad \textbf{(3.3.12)}$$

* Relation $\Sigma - E$:

$$\Sigma = E \cdot (E - \alpha) \quad \Rightarrow \quad \alpha = (E \cdot E - \Sigma) / E \qquad \textbf{(3.3.13)}$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma = \left(\frac{E}{E + h}\right) \cdot (\sigma + h \cdot E) \qquad \textbf{(3.3.14)}$$

En supposant que l'état initial est vierge, c'est à dire $\alpha(t=0)=0$, et que la charge Σ est monotone croissante, on a alors :

$$\text{a) } \Sigma < R_e : \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \Sigma = \sigma = E \cdot E \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad E = \Sigma / E \tag{3.3.15}$$

$$\text{b) } \Sigma = R_e : \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \Sigma = \sigma = R_e = E \cdot E \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad E = R_e / E \tag{3.3.16}$$

$$\text{c) } \Sigma > R_e : \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \Sigma = R_e + \Delta\Sigma \\ \sigma = R_e \end{array} \right\} \quad \rightarrow \quad E = \frac{R_e}{E} + \left(\frac{E+h}{E \cdot h} \right) \cdot \Delta\Sigma \tag{3.3.17}$$

Or :

$$E = E^e + E^p$$

$$E^e = \frac{\Sigma}{E} = \frac{R_e + \Delta\Sigma}{E}$$

$$\Rightarrow \quad E^p = \frac{\Delta\Sigma}{h} = \alpha \tag{3.3.18}$$

Tout ceci est représenté sur la figure 3.3.2 :

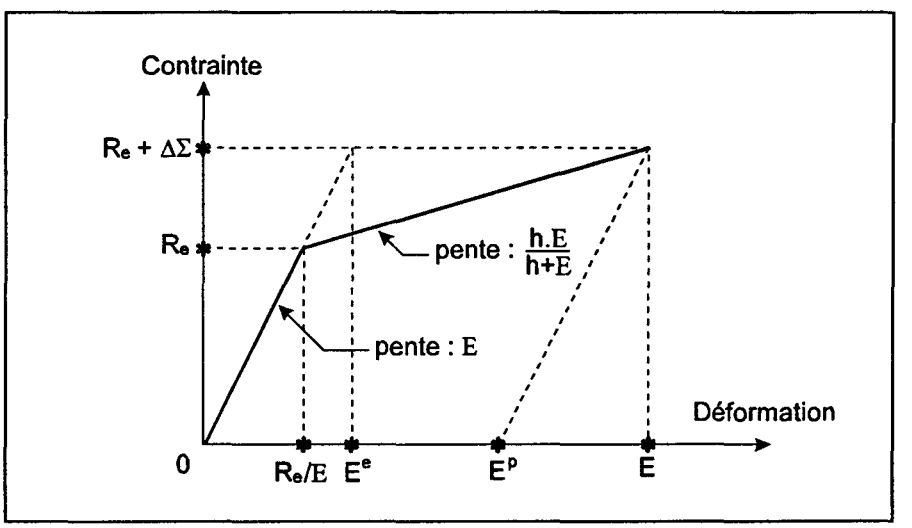


Figure 3.3.2 : « Ecrouissage cinématique linéaire, relation Σ - E en traction »

* E représente le module de Young
* h représente le module d'écrouissage en traction
* R_e représente la limite d'élasticité en traction

Nous associerons au matériau à écrouissage cinématique, le critère de Von Mises :

$$f\left(\underline{S}(t),\underline{E}^p(t)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\underline{S}(t) - C\cdot\underline{E}^p(t)\right):\left(\underline{S}(t) - C\cdot\underline{E}^p(t)\right) - k_0{}^2 \le 0 \ , \qquad \textbf{(3.3.19)}$$

où :

* k_0 est la limite d'élasticité en cisaillement du matériau $\left(k_0 = R_e / \sqrt{3}\right)$
* $\underline{S}(t)$ est le tenseur déviateur des contraintes
* $\underline{E}^p(t)$ est le champ de déformation plastique
* C est le module d'écrouissage en cisaillement $(C = 2\cdot h / 3)$

La quantité $C\cdot\underline{E}^p(t)$ représente le champ des paramètres internes d'écrouissage. Dans le cas d'un chargement strictement monotone sur l'intervalle $[0,t]$, le travail des paramètres internes d'écrouissage en un point M de la structure est alors défini par :

$$W^*(M) = \int_0^t C\cdot E^p(M,\tau):\dot{E}^p(M,\tau)\cdot d\tau \qquad \textbf{(3.3.20)}$$

Soit encore, en supposant qu'à $t = 0$ on a $E^p_{eq}(M) = 0$:

$$W^*(M) = \frac{3\cdot C}{2}\cdot\int_0^{E^p_{eq}(M,t)} E^p_{eq}(M)\cdot dE^p_{eq} = \frac{h}{2}\cdot\left[E^p_{eq}(M,t)\right]^2 \qquad \textbf{(3.3.21)}$$

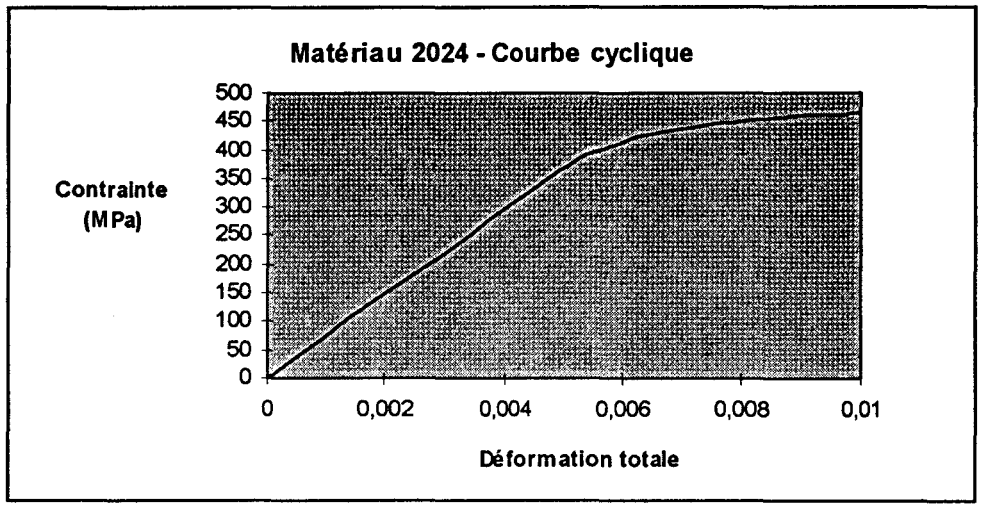
→ Les caractéristiques du matériau considéré

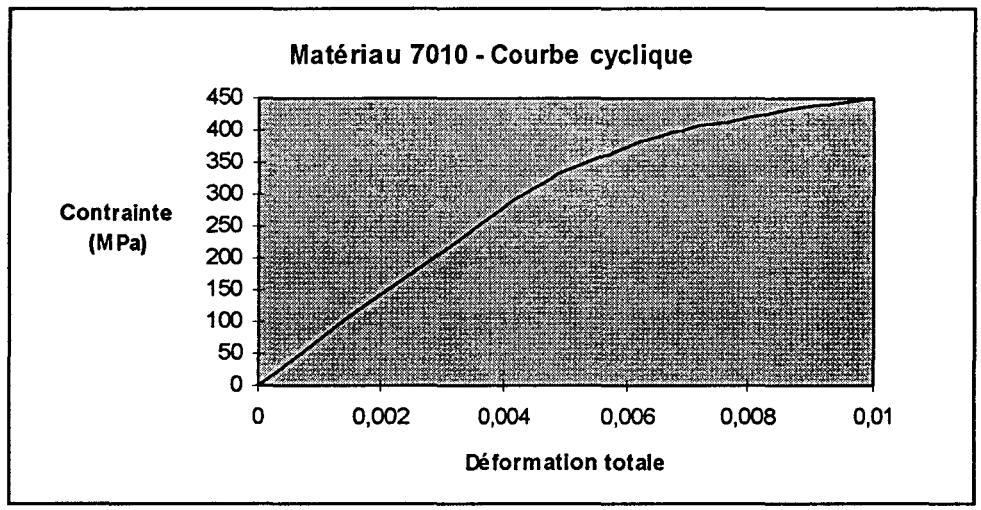
Ces matériaux sont supposés être à écrouissage cinématique linéaire. La loi de comportement est donc entièrement définie à partir de la connaissance :

* Des constantes élastiques : E et ν
* Des constantes plastiques : R_e et h

Dans cette étude, les chargements imposés étant cycliques, la loi de comportement utilisée sera donc identifiée à partir de la courbe cyclique à 1% de déformation totale. Cette dernière sera donc schématisée par deux lignes droites.

Pour les deux alliages d'aluminium qui nous intéressent, les caractéristiques des courbes cycliques sont données dans le tableau 3.1.1 de la partie II.





Après avoir arbitrairement choisi d'identifier R_e à la valeur R_{e_c} relative à une déformation permanente de 0.02%, les différents paramètres caractérisant l'écrouissage cinématique linéaire peuvent alors être déterminés pour chaque alliage (voir figure 3.3.2). Les résultats sont regroupés dans le tableau 3.3.1.

	E (MPa)	ν	R_e (MPa)	h (MPa)
2024 T351	74 000	0.34	405	17 200
7010 T3651	71 000	0.34	320	37 000

Tableau 3.3.1 : « Caractéristiques associées à l'écrouissage cinématique linéaire »

3.4 - DESCRIPTEURS ASSOCIES AUX CARACTERISTIQUES RETENUES

3.4.1 - PRINCIPE GENERAL

Il s'agit d'appliquer les procédures d'identification intrinsèques décrites au début de cette partie, aux caractéristiques qui ont été retenues. Afin dans un premier temps de simplifier cette identification, le domaine d'analyse sera restreint à un volume caractéristique qu'il reste à définir.

De manière générale, on peut noter que les études en fatigue reposent sur une analyse locale.

Dans le cas des essais de fatigue en traction-compression réalisés sur des éprouvettes lisses ou entaillées, l'observation montre que l'amorçage de fissure s'initie à la surface de l'éprouvette, là où sa section est la plus faible. Ceci permet de définir le point critique de la structure, où l'analyse en fatigue est ensuite réalisée (confère les lois d'endommagement présentées dans la partie II).

La restriction du domaine d'analyse au voisinage d'un point critique va donc dans le sens des critères usuels. Néanmoins, il est difficile au niveau d'une structure complexe de généraliser le concept de point critique sans, a priori, se fixer un critère de sélection. Or, le choix d'un tel critère rend subjectif le caractère intrinsèque des descripteurs. Il est donc nécessaire de s'assurer que les zones ainsi déterminées correspondent bien à des zones pouvant s'avérer critiques.

Dans le cas de nos éprouvettes, nous avons restreint le domaine d'analyse à celui d'un volume caractéristique défini autour d'un point critique. Comme l'indique le critère de fatigue de Papadopoulos, le point critique est alors situé à la surface de l'éprouvette, là où sa section est la plus faible. Il reste à définir la taille du volume à considérer autour de ce point.

Ce problème est très délicat car il est difficile de justifier l'emploi d'une règle précise. On peut par exemple proposer de retenir le volume contenant le point critique, et sur lequel la contrainte équivalente de Von Mises est supérieure à $(k \cdot R_e)$ (où k représente un réel compris dans l'intervalle $[0,1[$). Une autre solution peut consister à retenir le volume de la structure, situé dans un rayon $(m \cdot T)$ autour du point critique (où m et T représentent respectivement un entier supérieur à 1, et la taille d'un grain représentatif du matériau considéré).

Plutôt que de choisir arbitrairement l'une ou l'autre de ces solutions, nous nous contenterons dans cette étude de déterminer les valeurs, au point critique, des différents champs qui ont été retenus pour caractériser le phénomène de fatigue, ainsi que celles de leurs gradients.

Ce choix nous permet :

- De nous affranchir du problème lié à la taille du volume caractéristique à étudier.
- De tenir compte de la réponse de la structure au voisinage du point critique.

3.4.2 - LES DESCRIPTEURS

Passons maintenant en revue la liste des descripteurs associés aux caractéristiques retenues.

→ Descripteurs associés à l'état de contrainte

L'état de contrainte est caractérisé au cycle stabilisé : pour tout point M de la structure, le trajet de chargement dans l'espace $\left(P,\sqrt{J2}\right)$ est alors défini par un cycle fermé. Les descripteurs retenus ont donc à rendre compte de la taille, de la position et de la forme de ce cycle au point critique de la structure ainsi qu'en son voisinage. Parmi les solutions possibles, la suivante a été retenue (figure 3.4.1) :

- La taille du cycle stabilisé, obtenu en un point M de la structure, est caractérisée par la dimension du plus petit rectangle qui lui est circonscrit : DP(M) et DRJ2(M).

- La position de ce cycle est caractérisée par le centre du rectangle précédemment défini : PMOY(M) et RJ2MOY(M).

- La forme du cycle stabilisé permet quant à elle de rendre compte du fait que le chargement est plus ou moins « chahuté ». Pour cela, trois descripteurs sont utilisés :

  * Le trajet parcouru, dans l'espace $\left(P,\sqrt{J2}\right)$, par le point représentatif de l'état de chargement au cours du cycle stabilisé : D(M).

  * Le trajet parcouru par le point représentatif de l'état de pression hydrostatique, (P), au cours du cycle stabilisé : DX(M).

  * Le trajet parcouru par le point représentatif de l'état de cisaillement octaédrique, $\left(\sqrt{J2}\right)$, au cours du cycle stabilisé : DY(M).

Si NP représente le nombre de points composant le cycle stabilisé, obtenu en un point M de la structure, on définit alors :

- d_i (i variant de 1 à (NP-1)), qui représente la distance, dans l'espace $\left(P,\sqrt{J2}\right)$, entre les points (i) et (i+1).

$$d_i = \left[\left(P(i+1) - P(i)\right)^2 + \left(RJ2(i+1) - RJ2(i)\right)^2\right]^{1/2} \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

- d_{NP}, qui représente la distance entre les points (NP) et (1).

$$d_{NP} = \left[\left(P(NP) - P(1)\right)^2 + \left(RJ2(NP) - RJ2(1)\right)^2\right]^{1/2}, \qquad \textbf{(3.4.2)}$$

et donc :

$$D(M) = \sum_{i=1}^{(NP-1)} (d_i) + d_{NP} \qquad \textbf{(3.4.3)}$$

De la même manière :

$$DX(M) = \sum_{i=1}^{(NP-1)} \left(|P(i+1) - P(i)| \right) + |P(NP) - P(1)| \qquad \textbf{(3.4.4)}$$

$$DY(M) = \sum_{i=1}^{(NP-1)} \left(|RJ2(i+1) - RJ2(i)| \right) + |RJ2(NP) - RJ2(1)| \qquad \textbf{(3.4.5)}$$

Ces sept quantités, déterminées en tout point de la structure, forment donc un ensemble de sept champs scalaires qu'il nous reste à décrire en suivant la méthode proposée en IV. 3.4.1.

Ils sont donc caractérisés au point critique de la structure par :

- Leur valeur.

- La valeur de leur gradient.

Remarque :

Soit Φ un champ scalaire défini sur un domaine plan (x,y). Le gradient de Φ (noté $\nabla\Phi$) est alors défini par :

$$\nabla\Phi(x,y) = \sqrt{\left(\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}\right)^2} \qquad \textbf{(3.4.6)}$$

Dans la cadre d'une résolution numérique de type éléments finis, les différents champs Φ sont alors déterminés aux points de Gauss de chacun des éléments composant le maillage de la structure (nous utilisons ici des éléments triangulaires isoparamétriques à six noeuds et trois points de Gauss).

L'utilisation de fonctions d'interpolation permet ensuite d'exprimer la valeur de Φ en un point quelconque M(x,y) d'un élément (Ve), en fonction de la valeur de ce même champ aux points de Gauss de l'élément (Ve) considéré.

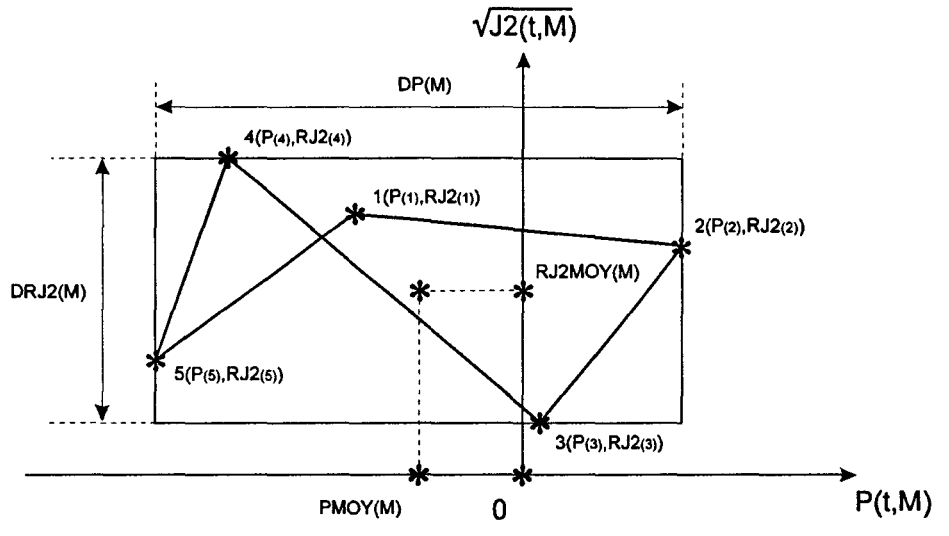
Si PG1, PG2 et PG3 représentent respectivement les trois points de Gauss d'un élément (Ve), on a alors :

$$\Phi(M(x,y)) = N1(x,y)\cdot\Phi(PG1) + N2(x,y)\cdot\Phi(PG2) + N3(x,y)\cdot\Phi(PG3) \qquad \textbf{(3.4.7)}$$

L'emploi de ces fonctions d'interpolation permet également de déterminer les valeurs du champ scalaire $\nabla\Phi$ en M(x,y). On a en effet :

$$\frac{\partial \Phi(M(x,y))}{\partial x} = \frac{\partial N1(x,y)}{\partial x} \cdot \Phi(PG1) + \frac{\partial N2(x,y)}{\partial x} \cdot \Phi(PG2) + \frac{\partial N3(x,y)}{\partial x} \cdot \Phi(PG3) \qquad \textbf{(3.4.8)}$$

$$\frac{\partial \Phi(M(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial N1(x,y)}{\partial y} \cdot \Phi(PG1) + \frac{\partial N2(x,y)}{\partial y} \cdot \Phi(PG2) + \frac{\partial N3(x,y)}{\partial y} \cdot \Phi(PG3) \qquad \textbf{(3.4.9)}$$



NP = 5

$d_i = [\ (P_{(i+1)} - P_{(i)})^2 + (RJ2_{(i+1)} - RJ2_{(i)})^2\ ]^{1/2}$ (i variant de 1 à 4)

$d_5 = [\ (P_{(5)} - P_{(1)})^2 + (RJ2_{(5)} - RJ2_{(1)})^2\ ]^{1/2}$

$$D(M) = \sum_{i=1}^{5} d_i$$

$$DX(M) = \sum_{i=1}^{4} \left(|P_{(i+1)} - P_{(i)}| \right) + |P_{(5)} - P_{(1)}|$$

$$DY(M) = \sum_{i=1}^{4} \left(|RJ2_{(i+1)} - RJ2_{(i)}| \right) + |RJ2_{(5)} - RJ2_{(1)}|$$

Figure 3.4.1 : « Caractérisation de l'état de contrainte en un point M de la structure »

→ Descripteurs associés à l'énergie de déformation élastique

Tout comme pour l'état de contrainte, les énergies de déformation élastique volumique et de distorsion sont évaluées au cycle stabilisé. Les descripteurs retenus sont, sur le cycle stabilisé, les valeurs au point critique de la structure :

- Des champs scalaires W_d^e et W_H^e (relation 3.3.9),

- Des gradients de ces champs.

→ Descripteurs associés au degré de triaxialité

Ces descripteurs sont déterminés au point critique de la stucture considérée, et sur le cycle stabilisé. Ils correspondent à la valeur donnée :

- Par la relation 3.3.10 (en supposant un comportement élastique).
- Par la quantité $\mathrm{Max}_t\left(P(t) / \sqrt{J2(t)} \right)$ (en considérant la réponse élasto-plastique de la structure).

→ Descripteurs associés à l'énergie bloquée dans le structure

Cette énergie est évaluée durant la phase transitoire (c'est à dire sur l'ensemble des cycles précédant l'état stabilisé), ainsi qu'au cycle stabilisé. Elle permet ainsi de discriminer les différents types d'état limite pouvant être obtenus pour une structure :

* Comportement purement élastique

$$\forall M \in V : \quad W^*_{\text{transitoire}}(M) = W^*_{\text{stabilisé}}(M) = 0 \qquad \textbf{(3.4.10)}$$

* Etat limite adapté

$$\begin{cases} \exists M \in V \text{ tq} : \quad W^*_{\text{transitoire}}(M) \neq 0 \\ \\ \forall M \in V : \quad W^*_{\text{stabilisé}}(M) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(3.4.11)}$$

* Etat limite accommodé

$$\begin{cases} \exists M \in V \text{ tq} : \quad W^*_{\text{transitoire}}(M) \neq 0 \\ \\ \exists M \in V \text{ tq} : \quad W^*_{\text{stabilisé}}(M) \neq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(3.4.12)}$$

Tout comme pour l'énergie de déformation élastique, les descripteurs retenus sont les valeurs au point critique de la structure :

- Des champs scalaires $W^*_{\text{transitoire}}$ et $W^*_{\text{stabilisé}}$,
- Des gradients de ces champs.

→ Descripteurs associés aux caractéristiques du matériau

Les matériaux considérés étant supposés être à écrouissage cinématique linéaire, Ils sont donc caractérisés au moyen de 4 descripteurs :

- Les constantes élastiques E et ν.
- Les constantes plastique Re et h.

En résumé, chaque essai de fatigue est donc caractérisé au moyen de 28 descripteurs de type numérique. Il nous reste à présent à déterminer si, pour les essais de fatigue constituant notre base de donnée, une relation peut être mise en évidence entre d'une part les valeurs de ces descripteurs, et d'autre part la durée de vie à l'amorçage d'une fissure.

3.5 - COMPOSITION DE LA BASE D'ESSAIS DE FATIGUE

Les essais de fatigue dont nous disposons ont été présentés dans la partie II (géométrie, matériau, chargement et durée de vie à l'amorçage d'une fissure, ou à la rupture). Le tableau 4.1 (partie II) rassemble les résultats de ces essais, ainsi que les prévisions de durée de vie obtenues à partir de l'utilisation de différents modèles.

Nous ne considérerons bien évidemment que les résultats relatifs à la durée de vie à l'initiation d'une fissure (les descripteurs utilisés ne sont pas, a priori, représentatifs du phénomène de propagation de fissure).

Les résultats expérimentaux, présentés dans le tableau 4.1, correspondent :

- Dans le cas d'essais à contrainte constante :

  A la valeur moyenne du résultat.

- Dans le cas d'essais à différents niveaux de contrainte (courbe de type Wöhler) :

  A une estimation obtenue à partir d'un lissage de la courbe expérimentale.

Ces propos sont illustrés sur la figure 3.5.1 :

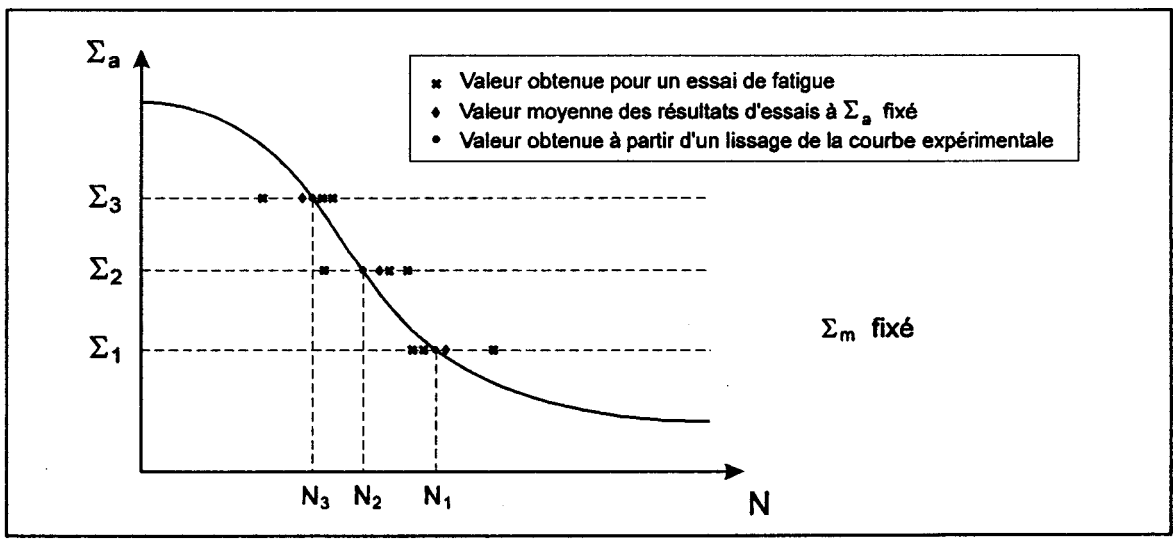


Figure 3.5.1 : « Représentation des résultats d'essais de fatigue »

A cause de la dispersion importante des résultats et du faible nombre d'éprouvettes utilisées pour chaque type d'essais, seuls ceux qui appartiennent à la seconde catégorie seront inclus dans la base d'exemples. De cette manière, le système de descripteurs qui a été retenu devrait être suffisant (voir IV.1.2.1.1).

Cette base est constituée de 18 essais de fatigue (voir tableau 3.5.1).

Elle devrait permettre d'estimer la valeur moyenne, la plus probable, du nombre de cycles à l'initiation d'une fissure. Les essais ont été réalisés sur des éprouvettes planes entaillées, en alliage d'aluminium 2024 T351 et soumises à un chargement de type traction-compression. Un calcul par éléments finis donne, pour le maillage utilisé dans cette étude, une valeur de Kt égale à 2,78.

	Type de chargement	contrainte nominale maximale (MPa)	Matériau 2024 amorçage
éprouvette entaillée (Kt = 2,78)	chargement monotone R = 0,1	235 200 180	19 030 cycles 51 669 cycles 135 684 cycles
	AC1-00	220 210 200	12 707 vols 45 345 vols 177 746 vols
	AC1-10	200 190 185 180	22 313 vols 49 854 vols 78 378 vols 129 615 vols
	AC1-20	220 200 190 180	11 940 vols 25 967 vols 42 749 vols 81 741 vols
	AC1-30	280 250 200 180	4 797 vols 8 155 vols 28 492 vols 72 233 vols

Tableau 3.5.1 : « Base d'exemples retenue »

La séquence AC1-00 correspond au spectre de chargement relevé sur la surface inférieure d'une aile d'avion durant 1000 vols successifs.

Les séquences AC1-10, AC1-20 et AC1-30 sont obtenues au moyen d'une technique de filtrage modulé qui permet d'éliminer les petits cycles composant la séquence initiale AC1-00 (voir II.2.3.3).

Il est à noter que le chargement monotone défini par R=0,1 représente un cas extrême de simplification. Il n'y a alors aucun petit cycle dans la séquence de chargement : un cycle est alors équivalent à un vol.

Dans le cas des essais de fatigue relatifs aux spectres aéronautiques, la période correspondant au chargement imposé est égale à une séquence (c'est à dire 1000 vols). De manière à ce que, indépendamment du chargement considéré, l'évaluation des descripteurs soit homogène, nous choisissons de prendre pour période de chargement :

- 1 séquence (1000 vols) dans le cas des spectres aéronautiques.
- 1000 cycles dans le cas des chargements à amplitude variable simplifiée.

Les essais de fatigue étant parfaitement définis (géométrie, matériau, chargement et durée de vie à l'amorçage d'une fissure), la base de données peut donc être constituée.

La conclusion associée à chaque essai de fatigue sera prise égale au logarithme du nombre de cycles (ou de vols), conduisant à l'amorçage d'une fissure. L'emploi du code de calcul REPCSU permet de déterminer, pour chacun des 18 exemples dont nous disposons, la liste des 28 descripteurs intrinsèques qui leur sont associés. Le résultat de ces calculs permet ainsi de constituer la base de données qu'il reste à exploiter.

La relation, si elle existe, entre d'une part la durée de vie d'une structure, et d'autre part les différents descripteurs retenus, est a priori non linéaire. Ce fait justifie donc l'emploi d'un outil de type apprentissage automatique. La répartition de la base de données, entre apprentissage et test, est obtenue par un tirage aléatoire (méthode de bootstrap). La prédiction est fiable si un changement aléatoire des exemples de chacune des bases (à répartition identique) modifie peu les règles obtenues.

3.6 - APPRENTISSAGE PAR REGRESSION MULTIPLE NON-LINEAIRE (SEA)

3.6.1 - PRINCIPE GENERAL

L'apprentissage par régression non-linéaire s'applique aux données codées sous forme de nombres réels. Il consiste en la recherche des expressions analytiques et l'ajustement des coefficients de ces expressions de manière à ce qu'elles donnent les valeurs les plus proches des conclusions (la durée de vie à l'amorçage d'une fissure) [60].

Le logiciel SEA, que nous avons utilisé, possède une version numérique de ce type. Il a été développé au LMS par M. Sebag, M. Schoenauer, M. Terrien et P. Navidi.

SEA permet de rechercher des expressions analytiques sous forme de polynômes de degré inférieur ou égal à six plus éventuellement des termes de degré - 1. Des termes croisés peuvent aussi être analysés. L'algorithme procède par itérations : à l'étape numéro n il génère une expression (sous forme de somme de n monômes) qui approche le mieux les conclusions. L'algorithme continue tant qu'une amélioration d'approximation est possible.

Dans la situation où les descripteurs les plus importants sont a priori inconnus et leur nombre dépasse celui d'exemples, il ne faut pas juger l'expression obtenue seulement sur sa précision. Dans le cas où il y a N descripteurs et n exemples, avec N > n, il existe alors une multitude de façon de choisir n descripteurs permettant de déterminer exactement les n conclusions. Il est alors nécessaire d'imposer une restriction supplémentaire aux expressions analytiques pour juger de leur qualité. Celle-ci consiste en l'exigence que le nombre de descripteurs dont dépend l'expression analytique doit être inférieur au nombre d'exemples.

3.6.2 - REGLES OBTENUES

- Nous avons tout d'abord recherché le meilleur polynôme d'ordre 1, qui ne fait intervenir dans sa formulation que 5 termes au maximum. La solution obtenue est la suivante (SEA1) :

Termes du polynôme	Ecart-type des coefficients
6.796352356939801e+00 +	1.446010e+00
1.852099282988947e-07 * ∇DX +	2.474776e-07
-7.142512385942566e-08 * ∇DY +	9.844721e-08
-1.420501515148082e-02 * DRJ2 +	6.000686e-03
3.356211498256515e-03 * ∇DRJ2 +	4.943025e-04

Valeurs prévues pour les observations en test lors du bootstrap

\# Moyenne de la somme des carrés des écarts pour les tirages du bootstrap : 0.129247
\#
\# Ecart-type : 1.05819
\# Skewness : 9.73954
\# Kurtosis : 96.5104
\#

1	Polynôme	3.693	Valeur réelle	3.6807	Ecart	0.012322
2	Polynôme	3.904	Valeur réelle	3.9114	Ecart	-0.0074317
3	Polynôme	4.5562	Valeur réelle	4.4547	Ecart	0.10149
4	Polynôme	4.8327	Valeur réelle	4.8587	Ecart	-0.026015
5	Polynôme	4.0542	Valeur réelle	4.077	Ecart	-0.022816
6	Polynôme	4.4121	Valeur réelle	4.4144	Ecart	-0.0023541
7	Polynôme	4.5763	Valeur réelle	4.6309	Ecart	-0.054668
8	Polynôme	4.8224	Valeur réelle	4.9124	Ecart	-0.090055
9	Polynôme	4.2821	Valeur réelle	4.3486	Ecart	-0.066475
10	Polynôme	4.7033	Valeur réelle	4.6977	Ecart	0.0056274
11	Polynôme	4.95	Valeur réelle	4.8942	Ecart	0.055779

12	Polynôme	5.2761	Valeur réelle	5.1127	Ecart	0.16343
13	Polynôme	4.1361	Valeur réelle	4.104	Ecart	0.032015
14	Polynôme	4.4521	Valeur réelle	4.6565	Ecart	-0.20441
15	Polynôme	5.1292	Valeur réelle	5.2498	Ecart	-0.12061
16	Polynôme	4.225	Valeur réelle	4.2794	Ecart	-0.054435
17	Polynôme	4.6026	Valeur réelle	4.7132	Ecart	-0.1106
18	Polynôme	5.2204	Valeur réelle	5.1325	Ecart	0.087913

La figure 3.6.1 illustre ces résultats. Elle représente le nombre de cycles à l'amorçage d'une fissure prédit par la règle, en fonction de ce même nombre de cycles obtenu expérimentalement (plus d'échelle logarithmique).

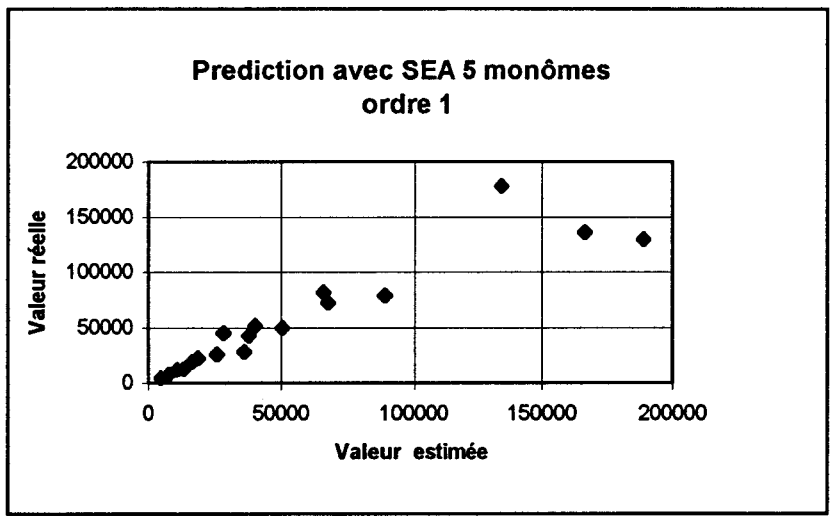


Figure 3.6.1 : « Prédiction obtenue »

- Nous avons ensuite recherché le meilleur polynôme faisant intervenir les descripteurs et leurs inverses. Encore une fois, le polynôme est restreint à 5 termes au maximum. La solution obtenue est la suivante (SEA2) :

Termes du polynôme	Ecart-type des coefficients
7.936892392349667e+02 * DRJ2 **-1 +	2.928583e+01
1.491497688312294e-03 * ∇RJ2MOY +	6.904257e-04
1.661066543029115e-07 * ∇DX +	5.443876e-08
-6.462157028727464e-08 * ∇DY +	2.159171e-08
3.059583487200014e-03 * ∇DRJ2 +	3.924152e-04

Valeurs prévues pour les observations en test lors du bootstrap

\# Moyenne de la somme des carrés des écarts pour les tirages du bootstrap : 0.0122321
\#
\# Ecart-type : 0.0347522
\# Skewness : 6.56578
\# Kurtosis : 45.5263
\#

1	Polynôme	3.6171	Valeur réelle	3.6807	Ecart	-0.063646
2	Polynôme	3.9233	Valeur réelle	3.9114	Ecart	0.011909
3	Polynôme	4.5271	Valeur réelle	4.4547	Ecart	0.072407
4	Polynôme	4.7856	Valeur réelle	4.8587	Ecart	-0.07318

5	Polynôme	4.0612	Valeur réelle	4.077	Ecart	-0.015785
6	Polynôme	4.4048	Valeur réelle	4.4144	Ecart	-0.0096715
7	Polynôme	4.5486	Valeur réelle	4.6309	Ecart	-0.082317
8	Polynôme	4.8146	Valeur réelle	4.9124	Ecart	-0.097847
9	Polynôme	4.2793	Valeur réelle	4.3486	Ecart	-0.069239
10	Polynôme	4.6808	Valeur réelle	4.6977	Ecart	-0.016919
11	Polynôme	4.9424	Valeur réelle	4.8942	Ecart	0.048197
12	Polynôme	5.2534	Valeur réelle	5.1127	Ecart	0.14079
13	Polynôme	4.1558	Valeur réelle	4.104	Ecart	0.051799
14	Polynôme	4.5308	Valeur réelle	4.6565	Ecart	-0.1257
15	Polynôme	5.2267	Valeur réelle	5.2498	Ecart	-0.023093
16	Polynôme	4.2901	Valeur réelle	4.2794	Ecart	0.010672
17	Polynôme	4.7301	Valeur réelle	4.7132	Ecart	0.016875
18	Polynôme	5.1797	Valeur réelle	5.1325	Ecart	0.047203

La figure 3.6.2 illustre ces résultats :

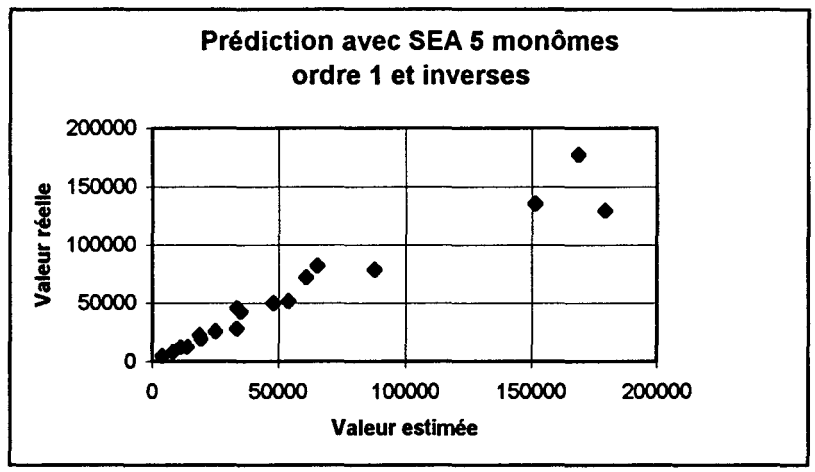


Figure 3.6.2 : « Prédiction obtenue »

- Nous avons finalement recherché le meilleur polynôme faisant intervenir les descripteurs, leurs inverses et les termes croisés. Cette fois, aucune restriction n'a été imposée quant au nombre de termes composant le polynôme. La solution obtenue est la suivante (SEA3) :

Termes du polynome	Ecart-type des coefficients
5.232641211150578e+01 * ∇DRJ2 **-1 * [MAX(P/RJ2)] **-1 +	6.143793e+01
7.258879130022351e+02 * DRJ2 **-1 +	1.557374e+02
5.122857297457047e-01 * ∇RJ2MOY * ∇DP **-1 +	1.959072e-01
8.617878668420785e-15 * ∇DX **2 +	8.828830e-15
-3.239773845104390e-15 * ∇DX * ∇DY +	3.541727e-15
1.262838399684423e-05 * DRJ2 * ∇DRJ2 +	3.813529e-06
-1.075770739868585e-10 * ∇PMOY * ∇DX +	7.143913e-11

Valeurs prévues pour les observations en test lors du bootstrap

\# Moyenne de la somme des carrés des écarts pour les tirages du bootstrap : 0.0909874

\#

\# Ecart-type : 0.585005

```
#    Skewness : 9.41307
#    Kurtosis : 92.1286
#
```

1	Polynôme	3.6259	Valeur réelle	3.6807	Ecart	-0.05483
2	Polynôme	3.99	Valeur réelle	3.9114	Ecart	0.078551
3	Polynôme	4.5376	Valeur réelle	4.4547	Ecart	0.082922
4	Polynôme	4.8405	Valeur réelle	4.8587	Ecart	-0.018189
5	Polynôme	4.0944	Valeur réelle	4.077	Ecart	0.017432
6	Polynôme	4.4252	Valeur réelle	4.4144	Ecart	0.010768
7	Polynôme	4.5574	Valeur réelle	4.6309	Ecart	-0.073495
8	Polynôme	4.8503	Valeur réelle	4.9124	Ecart	-0.062152
9	Polynôme	4.2775	Valeur réelle	4.3486	Ecart	-0.071063
10	Polynôme	4.6592	Valeur réelle	4.6977	Ecart	-0.038474
11	Polynôme	4.8926	Valeur réelle	4.8942	Ecart	-0.0015799
12	Polynôme	5.247	Valeur réelle	5.1127	Ecart	0.13435
13	Polynôme	4.1448	Valeur réelle	4.104	Ecart	0.040722
14	Polynôme	4.4525	Valeur réelle	4.6565	Ecart	-0.204
15	Polynôme	5.047	Valeur réelle	5.2498	Ecart	-0.20276
16	Polynôme	4.2681	Valeur réelle	4.2794	Ecart	-0.011294
17	Polynôme	4.7302	Valeur réelle	4.7132	Ecart	0.016955
18	Polynôme	5.1408	Valeur réelle	5.1325	Ecart	0.0083198

La figure 3.6.3 illustre ces résultats :

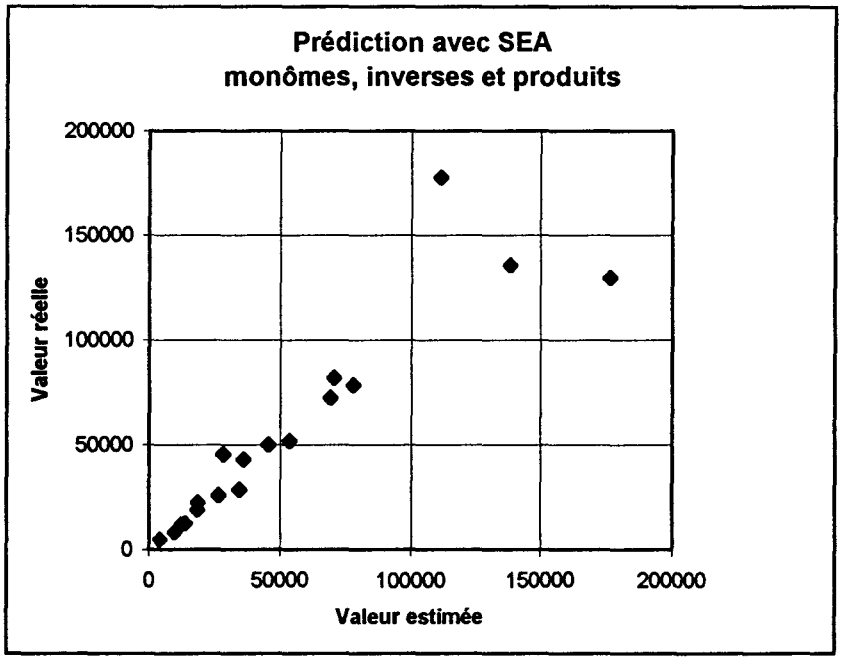


Figure 3.6.3 : « Prédiction obtenue »

L'analyse de ces 3 cas de figure conduit aux remarques suivantes :

* Les seules quantités qui interviennent dans l'expression des différentes règles sont représentatives de l'état de contrainte régnant dans la structure au cycle stabilisé. Ceci nous semble naturel puisque, pour tous les exemples de la base, un état limite adapté est obtenu. Le champ de déformation plastique à l'état asymptotique étant constant, le cycle stabilisé peut donc être caractérisé par la simple connaissance du champ de

BU LILLE I

contrainte. Dans le cas d'un état limite accommodé, ceci n'est plus respecté. Il est alors naturel de penser que des quantités telles que la déformation ou l'énergie interviennent dans la formulation d'une règle de prévision de durée de vie.

* Les valeurs des gradients (calculés au point critique de la structure), ont apparemment beaucoup d'influence sur l'estimation de la durée de vie à l'amorçage d'une fissure.

* On observe une stabilité de la solution obtenue par apprentissage automatique : quel que soit le degré du polynôme recherché, les descripteurs significatifs, ∇DX, ∇DY, DRJ2 et ∇DRJ2, apparaissent dans sa formulation.

* Le polynôme, faisant intervenir dans son expression les descripteurs et leurs inverses (SEA2), conduit aux meilleures prévisions de durée de vie.

Sur la base de données dont nous disposons, l'utilisation de SEA a mis en évidence l'existence d'une corrélation entre l'état de contrainte régnant au voisinage du point critique de la structure, et la durée de vie à l'amorçage d'une fissure.

3.6.3 - FIABILITE DES REGLES

Un problème important est lié au fait que la base de données que nous exploitons est très restreinte (voir tableau 3.5.1). Elle ne comporte que des essais de fatigue réalisés sur des éprouvettes entaillées, pour lesquelles l'état limite est de nature adaptée (cet état limite est évalué en supposant que le matériau constitutif a un comportement élasto-plastique à écrouissage cinématique linéaire).

Comme nous l'avons rappelé dans la partie II, la validation d'un modèle nécessite sa confrontation avec l'expérience dans des cas relativement simples, de manière à réduire les imprécisions liées aux essais. Il serait donc bon de procéder à un contrôle de ce type sur les règles obtenues à partir de SEA.

Les règles polynomiales, obtenues sur la base de données considérée, ont mis en évidence le rôle a priori prépondérant que jouent les gradients de fluctuation de chargement. Il est donc également nécessaire de s'assurer de la fiabilité de ces règles dans le cas d'éprouvettes lisses.

Tout ceci nécessite de disposer de résultats d'essais de fatigue relatifs à des séquences de chargement simplifiées, réalisés sur des éprouvettes lisses et entaillées, en alliage d'aluminium 2024, et pour lesquelles l'état limite est de nature adaptée. Nous utiliserons pour cela les résultats d'essais présentés dans le tableau 4.1 de la partie II, jusqu'à lors inexploités.

Remarque :

Dans le cas des essais réalisés sur des éprouvettes lisses, seul le nombre de cycles conduisant à la rupture a été expérimentalement relevé. D'après l'analyse

des résultats d'essais (voir II.4.1.B), il semble correct de considérer que, pour l'alliage 2024, le nombre de cycles nécessaire à l'initiation d'une fissure représente environ 80% de la durée de vie totale.

Le tableau 3.6.1 regroupe les essais susceptibles d'être utilisés afin de procéder à la validation des règles polynomiales générées par SEA.

Kt	Type de chargement	contrainte nominale maximale (MPa)	nature de l'état limite	Matériau 2024 amorçage (cycles)
1	monotone avec surcharges avec petits cycles effets combinés	320	élastique élastique élastique élastique	71 640 45 184 53 224 26 894
2,78	monotone avec surcharges avec petits cycles effets combinés	200	adapté → accommodé adapté → accommodé	65 863 210 657 21 376 84 818

Tableau 3.6.1 : « Base d'essais de fatigue »

Pour chaque cas de figure répertorié dans ce tableau, la nature de l'état limite a été déterminée au moyen du code de calcul REPSCU. Il apparaît ainsi que pour deux essais, l'état limite est de nature accommodée. Ceci implique donc la restriction de cette base à seulement six exemples.

Alors que pour les essais utilisés lors de l'apprentissage, la durée de vie est obtenue à partir d'un lissage de la courbe expérimentale, les durées de vie indiquées dans le tableau 3.6.1 correspondent quant à elles à la valeur moyenne des résultats obtenus pour chaque niveau de contrainte nominale étudié (voir IV.3.5). On notera ainsi une différence de près de 27,5% entre les valeurs indiquées dans les tableaux 3.5.1 et 3.6.1, dans le cas d'un essai sous chargement monotone pour lequel la contrainte nominale maximale appliquée est égale à 200 MPa.

Il est donc clair qu'à partir de cette base d'essais, le contrôle des règles est essentiellement d'ordre qualitatif. Nous pouvons vérifier si, oui ou non, ces règles sont capables de rendre compte des différentes tendances observées expérimentalement (voir II.4.1 et II.4.2), à savoir :

1. Dans le cas de chargements à amplitude variable simplifiée

- L'application de surcharges périodiques entraîne une augmentation de la durée de vie en fatigue des éprouvettes entaillées et une réduction importante de cette même durée de vie dans le cas d'éprouvettes lisses.

- Les petits cycles, qui ne causent pas de dommage lorsqu'ils sont appliqués seuls, commencent à le faire lorsqu'ils sont combinés avec des cycles endommageants.

- L'effet pénalisant des petits cycles s'additionne aux effets pénalisant (Kt = 1) ou bénéfiques (Kt = 2.78) des surcharges, dans le cas des chargements combinés.

2. Dans le cas de chargements complexes

- Les petits cycles ont, sur la durée de vie en fatigue, un effet qui peut être qualifié de :

  * bénéfique lorsque le chargement nominal maximum se situe au voisinage de la limite de fatigue,

  * néfaste lorsque le chargement nominal maximum est élevé.

Le tableau 3.6.2 regroupe les données relatives aux six essais de fatigue que nous utiliserons afin de procéder à la validation des règles polynomiales générées par SEA.

Cas de figure	Kt	Type de chargement	contrainte nominale maximale (MPa)	nature de l'état limite	Matériau 2024 amorçage (nbre de cycles)
1	1	monotone	320	élastique	71 640
2		avec surcharges		élastique	45 184
3		avec petits cycles		élastique	53 224
4		effets combinés		élastique	26 894
5	2,78	monotone	200	adapté	65 863
6		avec petits cycles		adapté	21 376

Tableau 3.6.2 : « Base permettant de contrôler la fiabilité des règles »

L'application des trois règles polynomiales obtenues par SEA, à cette base de test, à conduit aux prédictions indiquées dans le tableau 3.6.3 (les valeurs données correspondent au logarithme à base 10 du nombre de cycles conduisant à l'amorçage d'une fissure de fatigue) :

Cas de figure	ESSAI	SEA1	SEA2	SEA3
1	4,85515558	4,4341	4,7726	41544,5872
2	4,65498468	3,9100	3,9060	33989,7184
3	4,72610751	4,4341	4,7726	41544,5872
4	4,4296554	3,9100	3,9060	33989,7184
5	4,81864151	4,8312	4,7033	4,7000
6	4,32992644	4,8380	4,7075	4,6938

Tableau 3.6.3 : « Prédictions obtenues à partir de SEA sur la base de test »

L'analyse des tableaux 3.6.2 et 3.6.3 indique que :

- La règle référencée par SEA3 donne des résultats extrêmement mauvais dans le cas d'éprouvettes lisses. Elle ne peut donc pas être considérée comme valable.

- Les règles référencées par SEA1 et SEA2 conduisent à des résultats pour lesquels l'ordre de grandeur est correct. On constate que ces règles ont tendance :

  * Dans le cas des éprouvettes entaillées,

    → à donner des résultats très corrects dans le cas de chargements à amplitude constante,

    → à rester insensible à la présence de petits cycles dans la séquence de chargement.

  * Dans le cas des éprouvettes lisses,

    → à donner des résultats corrects dans le cas de chargements à amplitude constante (surtout SEA2),

    → à surestimer l'effet néfaste des surcharges,

    → à rester totalement insensible à la présence de petits cycles dans la séquence de chargement.

D'une manière générale, les problèmes liés à l'emploi de ce type de règles ont deux origines :

1. Les règles polynomiales utilisées sont établies sur une base d'apprentissage en imposant, a priori, des restrictions sévères quant à la forme du polynôme recherché (alors que la forme du polynôme solution est inconnue). Ces

restrictions ne permettent, a priori, d'obtenir une solution correcte que sur le domaine défini par la base d'apprentissage. En dehors de ce domaine, on est alors confronté au problème de l'extrapolation.

2. Une règle polynomiale peut se révéler insensible à certains types de phénomènes alors que ces derniers sont significatifs par rapport au problème à traiter. Deux causes peuvent être à l'origine de ce problème :

   - La base d'exemples, à partir de laquelle s'effectue l'apprentissage, est trop restreinte et ne rend pas compte du phénomène en question.

   - La base d'exemples est complète (c'est à dire qu'elle contient bien des cas pour lesquels le phénomène est présent), mais la description qui en est faite est incomplète et ne permet donc pas de rendre compte du phénomène en question.

   Dans le cas qui nous intéresse, il apparaît ainsi que la base d'essais de fatigue sur laquelle est réalisé l'apprentissage (voir tableau 3.5.1), ne contient pas de cas mettant en évidence l'influence néfaste des petits cycles. C'est la raison pour laquelle les règles générées ne peuvent rendre compte de ce phénomène.

De manière à tout au moins essayer de s'affranchir du problème numéro 1 (à savoir celui de l'extrapolation dans le cas de règles polynomiales), nous allons à présent utiliser une autre méthode de prédiction non-linéaire, basée sur l'utilisation des réseaux neuronaux.

3.7 - APPRENTISSAGE PAR RESEAUX NEURONAUX (NEUROSHELL)

3.7.1 - PRINCIPE GENERAL

Les réseaux neuronaux ou connexionnistes [61], [62], sont construits à base d'automates quasi-linéaires, définis par :

* Leurs connexions.

* Les pondérations attachées à ces connexions.

* Leur seuil de déclenchement.

L'état d'un neurone de la couche k se déduit de la somme pondérée des connexions avec la couche k-1, par une fonction de transition :

$$u_{i,k} = f\left(\sum_j \alpha_{j,k-1} \cdot u_{j,k-1} - \text{seuil}\, u_{i,k}\right), \qquad \textbf{(3.7.1)}$$

où f désigne une fonction discontinue du type seuil ou Heaviside, soit une fonction continue linéaire par morceaux ou dérivable de même comportement général.

La topologie du réseau étant définie, les coefficients α_{ij} sont optimisés en considérant tour à tour les exemples de la base d'apprentissage, par la méthode dite de rétro-propagation du gradient (back-propagation). Il est nécessaire que les fonctions f soient dérivables.

L'inconvénient de l'approche est que la topologie du réseau est supposée connue. Une autre topologie peut donner un meilleur résultat. On ne peut le savoir qu'en l'essayant à son tour. Les réseaux sont plus efficaces s'ils disposent de plus de neurones et de couches intermédiaires entre l'entrée et la sortie, mais le coût de la recherche des coefficients augmente avec le carré du nombre de connexions.

Les coefficients sont optimisés globalement, des itérations sont effectuées sur l'ensemble des exemples de la base d'apprentissage, jusqu'à stabilisation de leur valeur.

Nous utiliserons dans cette étude le logiciel NEUROSHELL, disponible dans le commerce. La topologie retenue consiste en un réseau à 3 couches avec back-propagation.

La technique générale d'apprentissage s'apparente à celle utilisée pour SEA : la base de données est partitionnée en une base d'apprentissage et une base de test (technique de bootstrap). Ce type de méthode présente l'avantage d'améliorer la qualité des prédictions des modèles obtenus.

3.7.2 - REGLES OBTENUES

L'utilisation de SEA a montré que dans le cas de structures pour lesquelles l'état limite est adapté (en supposant que le matériau est à écrouissage cinématique linéaire), une relation existe entre d'une part l'état de contrainte au voisinage du point critique et d'autre part la durée de vie à l'initiation d'une fissure.

Les descripteurs les plus discriminants vis à vis du phénomène de fatigue sont liés à l'état de contrainte obtenu au cycle stabilisé. Seuls ces derniers seront donc retenus dans la suite de ce travail.

La base de données sur laquelle s'effectue l'apprentissage et le test des règles est identique au cas précédent (elle regroupe les 18 essais présentés dans le tableau 3.5.1). La partition, base d'apprentissage/base de test, est réalisée de manière aléatoire avec une fréquence réglable par l'utilisateur. Nous avons choisi d'effectuer un test après 100 itérations successives pour l'optimisation des α_{ij}.

Les réseaux de neurones classiques permettent un apprentissage fiable lorsque le nombre d'exemples est sensiblement supérieur au nombre de descripteurs. Dans notre cas, le nombre d'exemples étant très faible, nous devons donc éviter de faire intervenir dans le modèle un trop grand nombre de descripteurs car ceci contribuerait à réduire son caractère prédictif. A cette fin nous avons testé

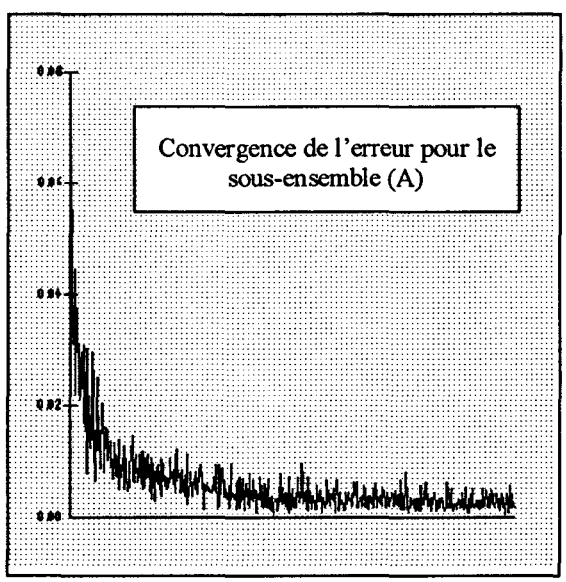
un grand nombre de sous-ensembles de descripteurs, en vérifiant leur efficacité (en termes de prévision de durée de vie) sur les 18 exemples initiaux.

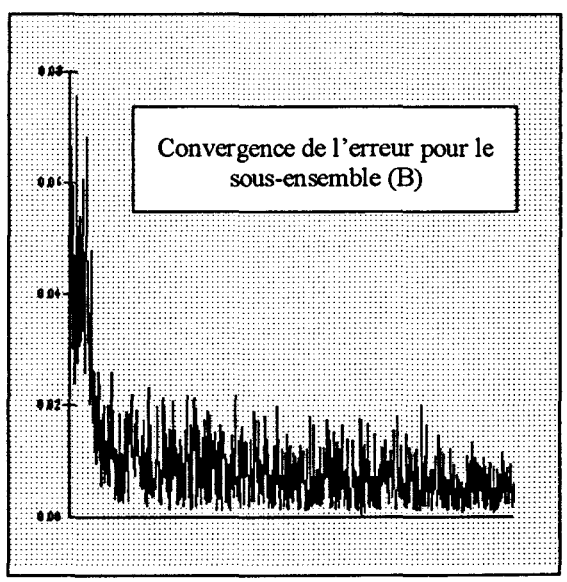
Dans ce qui suit, seuls sont indiqués les résultats obtenus avec d'une part le sous-ensemble optimal de descripteurs, et d'autre part ce même sous-ensemble duquel ont été supprimés les descripteurs relatifs à des gradients. Ces deux sous-ensembles de descripteur sont respectivement notés (A) et (B).

→ Le sous-ensemble (A) regroupe les 10 descripteurs suivants :
PMOY, RJ2MOY, ∇DX, ∇DY, D, DP, ∇DP, DRJ2, ∇DRJ2 et MAX(P/RJ2)

→ Le sous-ensemble (B) regroupe les 6 descripteurs suivants :
PMOY, RJ2MOY, D, DP, DRJ2 et MAX(P/RJ2)

Les deux graphes ci-dessous représentent pour (A) et (B), la convergence de l'erreur sur la base de test au cours de l'apprentissage (répartition aléatoire : 14 exemples en apprentissage et 4 en test).





Les « règles » générées par un réseau de neurones peuvent être présentées sous la forme de programmes informatiques. Dans le cas des « règles » obtenues à partir des sous-ensembles (A) et (B) (notées respectivement RN[A] et RN[B]), leur écriture en langage Visual Basic et les résultats auxquels elles conduisent sont les suivants :

- Pour le sous-ensemble (A), RN[A] s'écrit :

```
Sub Fire_FAT0 (inarray(), outarray())

Dim netsum as double
Static feature2(2) as double
Static feature3(2) as double
```

```
Static feature4(2) as double

' outarray(1) is logamorc
' inarray(1) is PMOY
' inarray(2) is RJ2MOY
' inarray(3) is GDX
' inarray(4) is GDY
' inarray(5) is D
' inarray(6) is DP
' inarray(7) is GDP
' inarray(8) is DRJ2
' inarray(9) is GDRJ2
' inarray(10) is MAXPRJ2

if (inarray(1)< 41.08) then inarray(1) =  41.08
if (inarray(1)> 80.46) then inarray(1) =  80.46
inarray(1) =  2 * (inarray(1) -  41.08) / 39.38 -1

if (inarray(2)< 101.6) then inarray(2) =  101.6
if (inarray(2)> 149.9) then inarray(2) =  149.9
inarray(2) =  2 * (inarray(2) -  101.6) / 48.3 -1

if (inarray(3)< 1.047) then inarray(3) =  1.047
if (inarray(3)> 2.504E+07) then inarray(3) =  2.504E+07
inarray(3) =  2 * (inarray(3) -  1.047) / 2.504E+07 -1

if (inarray(4)< 2.425) then inarray(4) =  2.425
if (inarray(4)> 6.249E+07) then inarray(4) =  6.249E+07
inarray(4) =  2 * (inarray(4) -  2.425) / 6.249E+07 -1

if (inarray(5)< 213300) then inarray(5) =  213300
if (inarray(5)> 3.768E+07) then inarray(5) =  3.768E+07
inarray(5) =  2 * (inarray(5) -  213300) / 3.74667E+07 -1

if (inarray(6)< 96) then inarray(6) =  96
if (inarray(6)> 278.9) then inarray(6) =  278.9
inarray(6) =  2 * (inarray(6) -  96) / 182.9 -1

if (inarray(7)< .0009423) then inarray(7) =  .0009423
if (inarray(7)> 349) then inarray(7) =  349
inarray(7) =  2 * (inarray(7) -  .0009423) / 348.9991 -1

if (inarray(8)< 166.3) then inarray(8) =  166.3
if (inarray(8)> 280.8) then inarray(8) =  280.8
inarray(8) =  2 * (inarray(8) -  166.3) / 114.5 -1

if (inarray(9)< .002182) then inarray(9) =  .002182
if (inarray(9)> 464.1) then inarray(9) =  464.1
inarray(9) =  2 * (inarray(9) -  .002182) / 464.0978 -1

if (inarray(10)< .5773) then inarray(10) =  .5773
if (inarray(10)> .858) then inarray(10) =  .858
inarray(10) =  2 * (inarray(10) -  .5773) / .2807 -1

netsum = -.3405173
netsum = netsum + inarray(1) * -.1818099
netsum = netsum + inarray(2) *  .1112351
netsum = netsum + inarray(3) * -.1855995
netsum = netsum + inarray(4) *  .1369444
netsum = netsum + inarray(5) * -.2831426
netsum = netsum + inarray(6) *  .1542776
netsum = netsum + inarray(7) * -.1138556
```

```
netsum = netsum + inarray(8) * -.2363036
netsum = netsum + inarray(9) * -.3062525
netsum = netsum + inarray(10) *  .1937434
feature2(1) = exp(-netsum * netsum)

netsum = -3.651274E-02
netsum = netsum + inarray(1) *  .2105841
netsum = netsum + inarray(2) * -6.148273E-02
netsum = netsum + inarray(3) *  .2326049
netsum = netsum + inarray(4) *  .1547874
netsum = netsum + inarray(5) *  .212643
netsum = netsum + inarray(6) * -3.330321E-02
netsum = netsum + inarray(7) * -.3451048
netsum = netsum + inarray(8) * -.1415822
netsum = netsum + inarray(9) * -.1883979
netsum = netsum + inarray(10) *  5.852178E-02
feature2(2) = exp(-netsum * netsum)

netsum = -3.302063E-02
netsum = netsum + inarray(1) *  .1632893
netsum = netsum + inarray(2) * -.2729975
netsum = netsum + inarray(3) *  .3005479
netsum = netsum + inarray(4) *  1.918121E-02
netsum = netsum + inarray(5) *  .2487781
netsum = netsum + inarray(6) * -8.321037E-02
netsum = netsum + inarray(7) * -.3266584
netsum = netsum + inarray(8) * -7.260873E-02
netsum = netsum + inarray(9) *  .4981459
netsum = netsum + inarray(10) *  5.004726E-02
feature3(1) = tanh(netsum)

netsum = -.1568829
netsum = netsum + inarray(1) * -4.272103E-02
netsum = netsum + inarray(2) *  .1180602
netsum = netsum + inarray(3) * -.2015308
netsum = netsum + inarray(4) * -.3205631
netsum = netsum + inarray(5) *  2.212063E-02
netsum = netsum + inarray(6) *  .2722564
netsum = netsum + inarray(7) *  .4075854
netsum = netsum + inarray(8) *  .4431297
netsum = netsum + inarray(9) * -.2143898
netsum = netsum + inarray(10) * -.2342013
feature3(2) = tanh(netsum)

netsum = -.0383108
netsum = netsum + inarray(1) *  .4589778
netsum = netsum + inarray(2) * -3.368969E-02
netsum = netsum + inarray(3) * -3.394167E-02
netsum = netsum + inarray(4) *  .282976
netsum = netsum + inarray(5) *  2.741295E-02
netsum = netsum + inarray(6) * -1.942955E-02
netsum = netsum + inarray(7) * -.4333685
netsum = netsum + inarray(8) * -.2733954
netsum = netsum + inarray(9) *  .1019492
netsum = netsum + inarray(10) *  .149209
feature4(1) = 1 - exp(-netsum * netsum)

netsum =  .2747526
netsum = netsum + inarray(1) *  .2806889
netsum = netsum + inarray(2) * -.1679981
netsum = netsum + inarray(3) * -.1862258
netsum = netsum + inarray(4) * -.30871
```

```
netsum = netsum + inarray(5) * -.3002167
netsum = netsum + inarray(6) * -.337336
netsum = netsum + inarray(7) * .1905637
netsum = netsum + inarray(8) * -.2004387
netsum = netsum + inarray(9) * .1373674
netsum = netsum + inarray(10) * .3217761
feature4(2) = 1 - exp(-netsum * netsum)

netsum = 5.096846E-03
netsum = netsum + feature2(1) * -.2702062
netsum = netsum + feature2(2) * .2321265
netsum = netsum + 7.484378E-02
netsum = netsum + feature3(1) * .7351967
netsum = netsum + feature3(2) * -.78622
netsum = netsum + .2246106
netsum = netsum + feature4(1) * -.4854988
netsum = netsum + feature4(2) * .4663542
outarray(1) = 1 / (1 + exp(-netsum))


outarray(1) = 1.569102 * (outarray(1) - .1) / .8 + 3.680698
if (outarray(1)< 3.680698) then outarray(1) = 3.680698
if (outarray(1)> 5.2498) then outarray(1) = 5.2498

End Sub
```

L'utilisation de cette règle conduit, sur les 18 exemples de la base d'apprentissage et de test, aux résultats suivant :

X=log(réel)	Y=log(prédit)	X - Y	réel (r)	prédit (p)	100*(p-r)/r
3,68069792	3,70145345	-0,02075553	4793,99877	5028,6736	4,89517924
3,91142392	3,82951164	0,08191228	8154,99918	6753,23158	-17,1890588
4,45472288	4,39193916	0,06278372	28491,9964	24656,9391	-13,4601213
4,85873556	4,83819389	0,02054167	72232,9848	68895,9818	-4,61977731
4,07700443	3,99426174	0,08274269	11940,0029	9868,74078	-17,3472498
4,41442156	4,40769911	0,00672245	25966,9869	25568,1384	-1,53598296
4,63092613	4,65660238	-0,02567625	42749,0169	45352,6202	6,09043996
4,91243982	4,98298645	-0,07054663	81740,9768	96158,2277	17,6377277
4,34855795	4,43574429	-0,08718634	22312,9992	27273,7142	22,2323993
4,69770002	4,70140839	-0,00370836	49854,0016	50281,5187	0,85753801
4,89419413	4,84112072	0,05307341	78377,9908	69361,8583	-11,5033983
5,11265516	4,99875069	0,11390448	129614,97	99712,7483	-23,070037
4,10404301	4,08800888	0,01603413	12706,9993	12246,4124	-3,62467098
4,65652943	4,68117476	-0,02464533	45345,0021	47992,6527	5,83890268
5,24979973	5,00157166	0,24822807	177745,956	100362,543	-43,5359628
4,27943897	4,29121065	-0,01177168	19030,0081	19552,8762	2,74759825
4,71323013	4,8292079	-0,11597776	51669,0091	67485,1002	30,6104014
5,13252878	4,98192215	0,15060663	135684,045	95922,8668	-29,30424

Tableau 3.7.1 : « Résultats obtenus à partir de RN[A] »

La figure 3.7.1 illustre ces résultats :

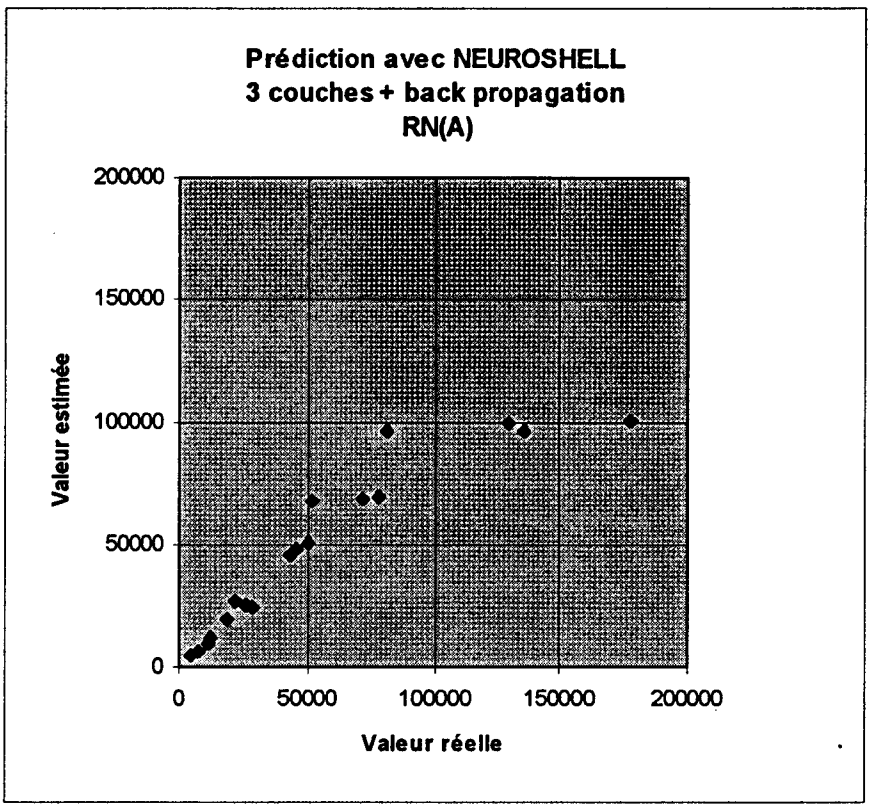


Figure 3.7.1 : « prédiction obtenue à partir de RN[A] »

- Pour le sous-ensemble (B), RN[B] s'écrit :

```
Sub Fire_FAT0 (inarray(), outarray())

 Dim netsum as double
 Static feature2(2) as double
 Static feature3(2) as double
 Static feature4(2) as double

' outarray(1) is logamorc
' inarray(1) is PMOY
' inarray(2) is RJ2MOY
' inarray(3) is D
' inarray(4) is DP
' inarray(5) is DRJ2
' inarray(6) is MAXPRJ2

if (inarray(1)< 41.08) then inarray(1) =  41.08
if (inarray(1)> 80.46) then inarray(1) =  80.46
inarray(1) =  2 * (inarray(1) -  41.08) / 39.38 -1

if (inarray(2)< 101.6) then inarray(2) =  101.6
if (inarray(2)> 149.9) then inarray(2) =  149.9
inarray(2) =  2 * (inarray(2) -  101.6) / 48.3 -1

if (inarray(3)< 213300) then inarray(3) =  213300
```

```
if (inarray(3)> 3.768E+07) then inarray(3) =  3.768E+07
inarray(3) =  2 * (inarray(3) -  213300) / 3.74667E+07 -1

if (inarray(4)< 96) then inarray(4) =  96
if (inarray(4)> 278.9) then inarray(4) =  278.9
inarray(4) =  2 * (inarray(4) -  96) / 182.9 -1

if (inarray(5)< 166.3) then inarray(5) =  166.3
if (inarray(5)> 280.8) then inarray(5) =  280.8
inarray(5) =  2 * (inarray(5) -  166.3) / 114.5 -1

if (inarray(6)< .5773) then inarray(6) =  .5773
if (inarray(6)> .858) then inarray(6) =  .858
inarray(6) =  2 * (inarray(6) -  .5773) / .2807 -1

netsum = -.6896816
netsum = netsum + inarray(1) * -.3770513
netsum = netsum + inarray(2) *  .2765084
netsum = netsum + inarray(3) * -5.539285E-02
netsum = netsum + inarray(4) *  .3862235
netsum = netsum + inarray(5) * -.2407652
netsum = netsum + inarray(6) * -.2494114
feature2(1) = exp(-netsum * netsum)

netsum =  4.470786E-02
netsum = netsum + inarray(1) *  .2022599
netsum = netsum + inarray(2) * -2.908434E-02
netsum = netsum + inarray(3) *  .2399951
netsum = netsum + inarray(4) *  .1313748
netsum = netsum + inarray(5) *  .2081671
netsum = netsum + inarray(6) *  2.988345E-02
feature2(2) = exp(-netsum * netsum)

netsum = -.2240222
netsum = netsum + inarray(1) * -.5981393
netsum = netsum + inarray(2) *  .4176593
netsum = netsum + inarray(3) * -.377598
netsum = netsum + inarray(4) *  .3389118
netsum = netsum + inarray(5) *  .2254686
netsum = netsum + inarray(6) * -.3455425
feature3(1) = tanh(netsum)

netsum = -.1467696
netsum = netsum + inarray(1) *  .4381557
netsum = netsum + inarray(2) * -.4199812
netsum = netsum + inarray(3) * -.214772
netsum = netsum + inarray(4) * -.1439178
netsum = netsum + inarray(5) * -9.899008E-03
netsum = netsum + inarray(6) * -2.692139E-02
feature3(2) = tanh(netsum)

netsum = -.3590949
netsum = netsum + inarray(1) *  .4165416
netsum = netsum + inarray(2) * -.248474
netsum = netsum + inarray(3) *  .2938706
netsum = netsum + inarray(4) *  2.193331E-02
netsum = netsum + inarray(5) * -.1566667
netsum = netsum + inarray(6) *  .1153228
feature4(1) = 1 - exp(-netsum * netsum)

netsum =  4.406352E-02
netsum = netsum + inarray(1) *  .1214542
```

```
netsum = netsum + inarray(2) * -6.859966E-02
netsum = netsum + inarray(3) *  .1154279
netsum = netsum + inarray(4) *  .3134956
netsum = netsum + inarray(5) * -.1826203
netsum = netsum + inarray(6) * -.2241851
feature4(2) = 1 - exp(-netsum * netsum)

netsum =  9.213957E-02
netsum = netsum + feature2(1) * -.7122113
netsum = netsum + feature2(2) * -5.084593E-02
netsum = netsum +  .3075702
netsum = netsum + feature3(1) * -1.042471
netsum = netsum + feature3(2) *  .4716027
netsum = netsum +  .427087
netsum = netsum + feature4(1) * -.4832387
netsum = netsum + feature4(2) *  .1821141
outarray(1) = 1 / (1 + exp(-netsum))


outarray(1) =  1.569102 *  (outarray(1) - .1) / .8  +  3.680698
if (outarray(1)< 3.680698) then outarray(1) =  3.680698
if (outarray(1)> 5.2498) then outarray(1) =  5.2498


End Sub
```

L'utilisation de cette règle conduit, sur les 18 exemples de la base d'apprentissage et de test, aux résultats suivant :

X=log(réel)	Y=log(prédit)	X - Y	réel (r)	prédit (p)	100*(p-r)/r
3,68069792	3,80487108	-0,12417316	4793,99877	6380,7405	33,098501
3,91142392	3,91991234	-0,00848842	8154,99918	8315,95898	1,97375617
4,45472288	4,27219629	0,18252659	28491,9964	18715,2784	-34,3139099
4,85873556	4,84875536	0,0099802	72232,9848	70591,9794	-2,27182285
4,07700443	4,18848467	-0,11148024	11940,0029	15434,2194	29,2647873
4,41442156	4,44878483	-0,03436327	25966,9869	28105,0802	8,23389056
4,63092613	4,62600088	0,00492525	42749,0169	42266,9472	-1,1276745
4,91243982	4,94871235	-0,03627253	81740,9768	88861,2358	8,71075847
4,34855795	4,50615311	-0,15759516	22312,9992	32073,9987	43,7457978
4,69770002	4,67499638	0,02270365	49854,0016	47314,7311	-5,09341373
4,89419413	4,69240808	0,20178604	78377,9908	49250,2098	-37,1632147
5,11265516	4,96963596	0,1430192	129614,97	93247,2351	-28,0582827
4,10404301	4,37038851	-0,2663455	12706,9993	23463,2684	84,6483797
4,65652943	4,73652887	-0,07999945	45345,0021	54516,6139	20,2262903
5,24979973	4,59374762	0,65605211	177745,956	39241,6822	-77,922602
4,27943897	4,27751875	0,00192022	19030,0081	18946,0531	-0,44117171
4,71323013	4,82555866	-0,11232853	51669,0091	66920,4207	29,5175228
5,13252878	4,9832859	0,14924288	135684,045	96224,5534	-29,081895

Tableau 3.7.2 : « Résultats obtenus à partir de RN[B] »

La figure 3.7.2 illustre ces résultats :

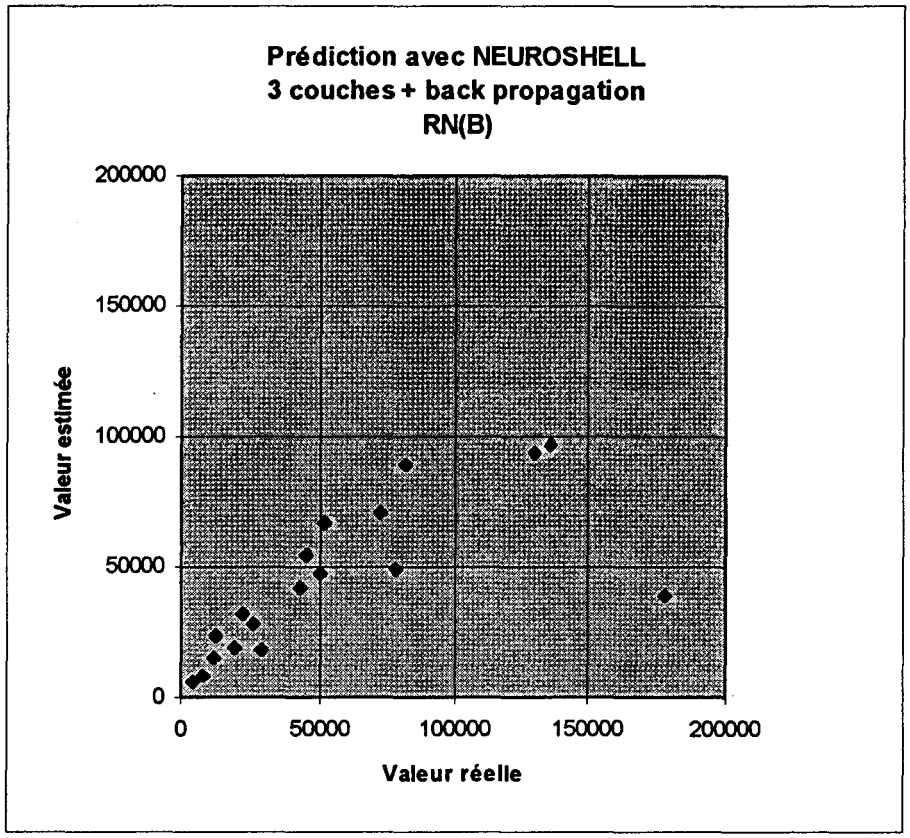


Figure 3.7.2 : « prédiction obtenue à partir de RN[B] »

Rappelons que le sous-ensemble (A) correspond, pour la base d'essais de fatigue que nous exploitons (apprentissage + test) et pour la topologie du réseau de neurone que nous avons utilisé (3 couches avec back-propagation), au optimal optimum de descripteurs. Il a permis d'obtenir, par rapport à ces conditions, la règle de prévision de durée de vie la plus correcte.

L'analyse des résultats présentés dans le tableau 3.7.1, et qui sont illustrés par la figure 3.7.1, montre ainsi que :

* Dans le cas d'une durée de vie inférieure à 100 000 cycles, les prévisions obtenues sont excellentes.

* Dans le cas d'une durée de vie supérieure à 100 000 cycles, la qualité de la prédiction décroît mais le résultat obtenu est conservatif.

* L'erreur relative maximale de prévision de durée de vie est de 43,5 % et l'erreur moyenne est de 14,2 %. Ceci est très correct par rapport aux résultats obtenus à partir des modèles classiques d'endommagement (voir partie II).

La règle RN[A] fait intervenir dans sa formulation 10 descripteurs dont 4 sont liés à des gradients. Parmi ces 10 descripteurs, on retrouve les quantités ∇DX, ∇DY, DRJ2 et ∇DRJ2, dont SEA avait mis en évidence le rôle significatif. Les poids respectifs des différents descripteurs retenus dans (A) sont les suivants :

DESCRIPTEUR	POIDS	DESCRIPTEUR	POIDS
PMOY	0.06896	DP	0.07009
RJ2MOY	0.05893	∇DP	0.10660
∇DX	0.17292	DRJ2	0.09771
∇DY	0.20178	∇DRJ2	0.08803
D	0.07552	MAX(P/RJ2)	0.05945

Il apparaît donc encore une fois que les valeurs des gradients (calculés au point critique de la structure), ont apparemment beaucoup d'influence sur l'estimation de la durée de vie à l'amorçage d'une fissure.

Les résultats présentés dans le tableau 3.7.2, et qui sont illustrés par la figure 3.7.2, permettent de conforter cette dernière remarque. Ils sont relatifs à un apprentissage réalisé en utilisant le sous-ensemble (B) de descripteurs, et avec les mêmes conditions que précédemment (même base d'essais de fatigue, même répartition apprentissage/test et même topologie de réseau). Rappelons que (B) est un sous-ensemble de (A) : il ne contient que les descripteurs de (A) qui ne sont pas liés à des gradients. La règle obtenue, RN[B], se révèle ainsi bien moins précise : l'erreur relative maximale obtenue sur la base d'essais est de 84,6 % et l'erreur moyenne est de 26,4 %.

3.7.3 - FIABILITE DES REGLES

Pour les mêmes raisons que précédemment (voir IV.3.6.3), il est nécessaire de procéder à une validation de la règle, RN[A], obtenue à partir de NEUROSHELL. Ce contrôle doit permettre de s'assurer de sa fiabilité :

* Dans des cas de figure relativement simples (de façon à rendre compte des tendances observées expérimentalement).

* Dans le cas de l'extrapolation (validité des prévisions dans le cas d'éprouvettes lisses).

Le tableau 3.6.2 regroupe les données relatives aux six essais de fatigue que nous utiliserons afin de procéder à la validation de la « règle » générée par NEUROSHELL.

L'application de la règle RN[A], à cette base de test, à conduit aux prédictions indiquées dans le tableau 3.7.3 :

Cas de figure	X=log(réel)	Y=log(prédit)	X - Y	réel (r)	prédit (p)	100*(p-r)/r
1	4,85515547	5,00266027	-0,14750481	71640	100614,43	40,44
2	4,65498447	4,8003068	-0,14532232	45184	63140,32	39,74
3	4,7261076	5,01798105	-0,29187346	53224	104227,20	95,83
4	4,42965555	4,81997871	-0,39032316	26894	66066,11	145,65
5	4,81864166	4,8292079	-0,01056623	65863	67485,10	2,46
6	4,32992649	4,84790802	-0,51798153	21376	70454,38	229,60

Tableau 3.7.3 : « Prédictions obtenues avec RN[A] sur la base de test »

L'analyse des tableaux 3.6.2 et 3.7.3 indique que la règle RN[A] conduit :

* Dans le cas des éprouvettes entaillées (cas de figure 5 et 6),

  → à donner des résultats très corrects dans le cas de chargements à amplitude constante (cas 5),

  → à ne pas rendre compte de l'influence néfaste des petits cycles dans la séquence de chargement (cas 6).

* Dans le cas des éprouvettes lisses,

  → à donner des résultats corrects dans le cas de chargements à amplitude constante (cas 1), ainsi que dans le cas de chargements comportant des surcharges (cas 2) (l'application de surcharges périodiques entraîne une réduction importante de la durée de vie des éprouvettes lisses) ;

  → à ne pas rendre compte de l'influence néfaste des petits cycles dans la séquence de chargement (cas 3 et 4).

Il apparaît donc que certaines tendances observées expérimentalement sont parfaitement bien respectées par le modèle. On peut toutefois contester sa capacité à rendre compte correctement de l'influence des petits cycles : ceux-ci ont tendance à réduire la durée de vie des éprouvettes lorsqu'ils sont combinés avec des cycles endommageants, mais ce constat n'est pas vérifié par le modèle. La cause de ce problème est liée au fait que la base d'apprentissage est beaucoup trop restreinte et ne rend pas compte de ce type de phénomène.

Dans l'ensemble, on peut considérer que le modèle obtenu par réseau de neurones est satisfaisant. Ses prédictions sont très correctes sur le domaine défini par la base d'apprentissage (tout comme SEA), et de plus, il permet apparemment des extrapolations qualitativement raisonnables, à l'exception de la prise en compte de l'effet néfaste des petits cycles.

Nous avons également vérifié que le choix du sous-ensemble (A) de descripteurs conduit à des résultats satisfaisants, indépendamment du choix de la topologie du réseau qui est utilisé.

Par exemple, la recherche d'une « règle » relative à un modèle topologique à 2 couches avec back-propagation, à partir du sous-ensemble (A) de descripteurs, conduit aux résultats suivants :

- Résultats obtenus sur la base d'essais de fatigue (apprentissage + test) :

X=log(réel)	Y=log(prédit)	X - Y	réel (r)	prédit (p)	100*(p-r)/r
3,68069792	3,68069792	0	4793,99877	4793,99877	0
3,91142392	3,91075349	0,00067043	8154,99918	8142,41978	-0,15425382
4,45472288	4,41143608	0,0432868	28491,9964	25789,0937	-9,48653314
4,85873556	4,89172554	-0,03298998	72232,9848	77933,7439	7,89218262
4,07700443	3,99415398	0,08285046	11940,0029	9866,29227	-17,3677566
4,41442156	4,37773991	0,03668165	25966,9869	23863,8168	-8,09939976
4,63092613	4,63221455	-0,00128841	42749,0169	42876,028	0,29710878
4,91243982	4,96656895	-0,05412912	81740,9768	92591,0367	13,2737097
4,34855795	4,4448638	-0,09630585	22312,9992	27852,4752	24,826228
4,69770002	4,71192217	-0,01422215	49854,0016	51513,6317	3,32898066
4,89419413	4,87159252	0,0226016	78377,9908	74403,3554	-5,07111157
5,11265516	5,00844288	0,10421228	129614,97	101963,064	-21,3338826
4,10404301	4,14745283	-0,04340982	12706,9993	14042,7716	10,5120981
4,65652943	4,64165878	0,01487064	45345,0021	43818,6288	-3,3661336
5,24979973	4,87391281	0,37588692	177745,956	74801,9313	-57,9163807
4,27943897	4,31094027	-0,03150129	19030,0081	20461,6318	7,52298021
4,71323013	4,79961538	-0,08638525	51669,0091	63039,8808	22,0071409
5,13252878	4,97579575	0,15673304	135684,045	94579,2239	-30,2945133

Tableau 3.7.4 : « Résultats obtenus à partir d'un modèle à 2 couches avec back propagation »

Ces résultats sont représentés sur la figure 3.7.3 ci-dessous. Leur analyse conduit, d'une manière générale, aux mêmes remarques que celles qui ont été formulées pour la règle RN[A].

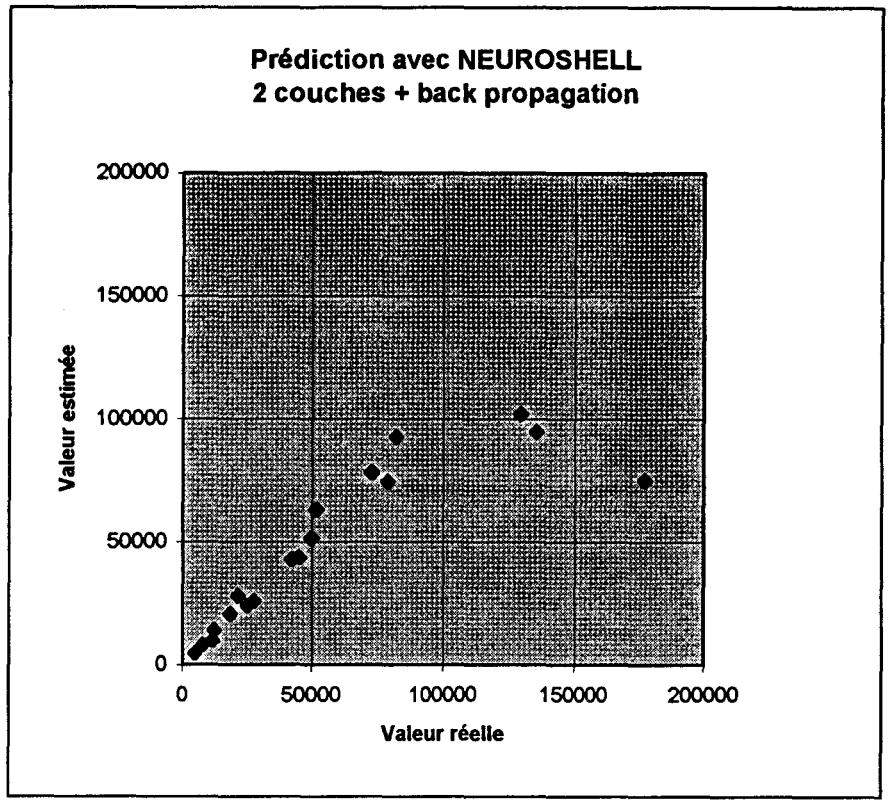


Figure 3.7.3 : « Prédiction obtenue à partir d'un modèle à 2 couches avec back propagation »

- Résultats obtenus sur la base d'essais de fatigue permettant le contrôle de la fiabilité de la règle :

Comme précédemment, Nous avons utilisé le modèle ainsi déterminé sur la base d'essais de fatigue présentés dans le tableau 3.6.2. Les prédictions données par le modèle sont regroupées dans le tableau 3.7.5.

Cas de figure	X=log(réel)	Y=log(prédit)	X - Y	réel (r)	prédit (p)	100*(p-r)/r
1	4,85515547	5,13314867	-0,2779932	71640	135877,85	89,67
2	4,65498447	4,82082319	-0,16583872	45184	66194,70	46,50
3	4,7261076	5,13737106	-0,41126347	53224	137205,35	157,79
4	4,42965555	4,8255477	-0,39589214	26894	66918,73	148,82
5	4,81864166	4,79961538	0,01902628	65863	63039,88	-4,29
6	4,32992649	4,80682039	-0,4768939	21376	64094,44	199,84

Tableau 3.7.5 : « Prédictions obtenues sur la base de test »

L'analyse des tableaux 3.6.2 et 3.7.5 indique que la règle conduit :

* Dans le cas des éprouvettes entaillées (cas de figure 5 et 6),

  → à donner des résultats très corrects dans le cas de chargements à amplitude constante (cas 5),

  → à ne pas rendre compte de l'influence néfaste des petits cycles dans la séquence de chargement (cas 6).

* Dans le cas des éprouvettes lisses,

  → à rendre compte du fait que l'application de surcharges périodiques entraîne une réduction importante de la durée de vie des éprouvettes lisses (cas 1 et 2),

  → à ne pas rendre compte de l'influence néfaste des petits cycles dans la séquence de chargement (cas 3 et 4). Encore une fois, ceci est liée au fait que la base d'apprentissage est trop restreinte. Les essais de fatigue qu'elle regroupe ne sont pas représentatifs de ce type de phénomène

L'examen de ce tableau conduit donc au mêmes remarques que celles qui ont put être formulées à l'égards du tableau 3.7.3.

3.8 - CONCLUSION

Après « brassage » des descripteurs retenus dans cette étude, il nous est apparu que le choix optimal correspond à celui de (A). Indépendamment du choix de la méthode d'apprentissage utilisée, il conduit à des prévisions que nous pouvons qualifier d'excellentes sur les bases d'apprentissage et de test. Cette stabilité, au niveau des résultats obtenus, nous conforte dans l'idée que le sous-ensemble (A) contient bien les descripteurs significatifs pour la base de donnée considérée.

Les descripteurs prépondérants sont liés :

- A l'état de contrainte au point critique de la structure pour le cycle stabilisé : PMOY, RJ2MOY, D, DP et DRJ2.
- A la triaxialité du chargement au point critique de la structure pour le cycle stabilisé : MAX(P/RJ2).
- Aux gradients de fluctuation de chargement au point critique de la structure pour le cycle stabilisé : ∇DX, ∇DY, ∇DP et ∇DRJ2.

Le caractère prédictif d'une règle a pu être contrôlé sur une base d'exemples pour lesquels la conclusion est essentiellement d'ordre qualitatif (voir tableau 3.6.2).

Aucune règle n'a pu rendre compte de l'influence néfaste des petits cycles dans le cas où ils sont combinés avec des cycles endommageants. La cause de ce problème est liée au fait que la base d'apprentissage est beaucoup trop restreinte et ne rend pas compte de ce type de phénomène.

CONCLUSION

CONCLUSION

La prédiction de la ruine différée des structures est l'un des enjeux principaux de la course à la qualité. La fatigue est l'une des causes majeures de ce type de ruine.

Les modèles mathématiques utilisés pour cette prédiction font souvent abstraction de certaines réalités et en privilégient d'autres. Il est donc indispensable d'avoir recours aux essais.

Les chargements réels sont souvent très complexes. De nombreuses méthodes permettent de ramener ces chargements à des séquences simplifiées. On peut par exemple citer la méthode de rain-flow qui est sans doute la plus célèbre d'entre elles. Des règles de cumul (linéaire ou non), couplées à ces méthodes, permettent ensuite d'évaluer « l'endommagement » dans une structure donnée. Ce type d'analyse est aujourd'hui couramment utilisé.

Partant du principe que le chargement et la réponse globale de la structure sont indissociables, nous avons proposé un algorithme permettant de tenir compte du chargement réel. Le choix délibéré d'une loi très simple de comportement non linéaire et l'utilisation de l'espace des variables transformées permet alors d'évaluer très rapidement l'état de la structure au cours du temps. Nous avons ainsi pu montrer que dans le cas de chargements constitués de séquences successives, il était possible d'exhiber des séquences asymptotiques. Dans le cas où la structure est adaptée, ces séquences peuvent être rapidement atteintes. Cette méthode peut donc avantageusement remplacer les méthodes classiques de comptage utilisées en fatigue.

Nous avons ensuite montré qu'une bonne description des champs de contraintes et de déformations, résultant du calcul, dans les séquences stabilisées permettait de caractériser de manière intrinsèque la réponse de la structure.

A partir d'une base d'essais de fatigue réalisés sur des éprouvettes entaillées et soumises à des chargements variés, nous avons montré qu'il était possible d'utiliser un sous-ensemble de ces descripteurs pour construire des règles ou des réseaux permettant des prévisions de durée de vie fiables. Leur caractère prédictif a pu être contrôlé sur des exemples tests. Hormis les variables classiques intervenant dans les critères de fatigue usuels, il apparaît que le gradient de fluctuation du

chargement et le degré de triaxialité du chargement sont des paramètres prépondérants. Il est à noter que le caractère intrinsèque de ces descripteurs permet, a priori, le passage aux structures plus complexes.

Suite à ce travail de recherche, de nombreuses voix de développement s'ouvrent. Il s'agit d'abord d'étendre cette méthode aux cas de chargements non-radiaux en suivant l'ébauche donnée dans la partie III. Il est également nécessaire d'enrichir la base d'exemples utilisée, de manière à améliorer la généralité des prédictions. Il faut aussi approfondir les propriétés discriminatoires des descripteurs prépondérants, et mettre en évidence des essais ou analyses mécaniques plus approfondies permettant d'expliquer leur influence.

ANNEXES

ANNEXES

ANNEXE 1 : Calculs approchés en élasto-plasticité (Neuber - Glinka)

Des méthodes approchées peuvent être utilisées afin de tenir compte des redistributions de contrainte engendrées par un écoulement plastique dans une zone de concentration de contrainte. Les conditions de validité des méthodes présentées sont que la zone plastique reste suffisamment confinée (entourée par une zone élastique) et que le chargement soit radial.

La solution élastique du problème est supposée connue, sous l'action de la sollicitation extérieure : On note Σ^{el} et E^{el} la contrainte et la déformation calculées élastiquement au point le plus sollicité. On se place dans le cas des structures planes de faible épaisseur (contraintes planes), pour lesquelles on peut considérer que l'état de contrainte en fond d'entaille est uniaxial.

1.1 - METHODE DE NEUBER

Elle suppose que le produit de la contrainte et de la déformation locale est indépendant de l'écoulement plastique, d'où :

$$\Sigma \cdot E = \Sigma^{el} \cdot E^{el} = \frac{(\Sigma^{el})^2}{E}, \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

où E représente le module de Young.

La solution élasto-plastique locale (approchée) est donc obtenue dès lors où la courbe d'écrouissage du matériau est connue (voir figure 1.1.1). La méthode peut se généraliser au cas des chargements cycliques en utilisant la courbe cyclique du matériau et en raisonnant en amplitude (voir figure 1.1.2) :

$$\Delta\Sigma \cdot \Delta E = \Delta\Sigma^{el} \cdot \Delta E^{el} = \frac{(\Delta\Sigma^{el})^2}{E} \qquad \textbf{(1.1.2)}$$

Rappel : Loi de comportement cyclique du matériau :

$$\frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta\Sigma}{2 \cdot E} + \left(\frac{\Delta\Sigma}{2 \cdot K'}\right)^{1/n'}, \qquad \textbf{(1.1.3)}$$

avec :

* K' = coefficient de la loi d'écrouissage cyclique
* n' = exposant de la loi d'écrouissage cyclique

On a donc :

$$\frac{(\Delta\Sigma)^2}{E} + 2\cdot\Delta\Sigma\cdot\left(\frac{\Delta\Sigma}{2\cdot K'}\right)^{1/n'} = \frac{(\Delta\Sigma^{el})^2}{E} \qquad \textbf{(1.1.4)}$$

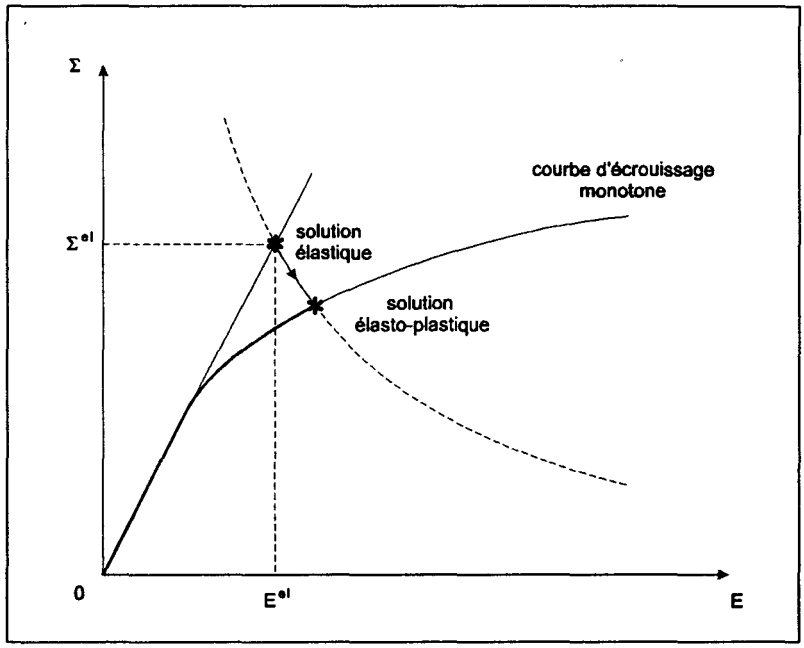


Figure 1.1.1 : « Méthode de Neuber dans le cas d'un chargement monotone »

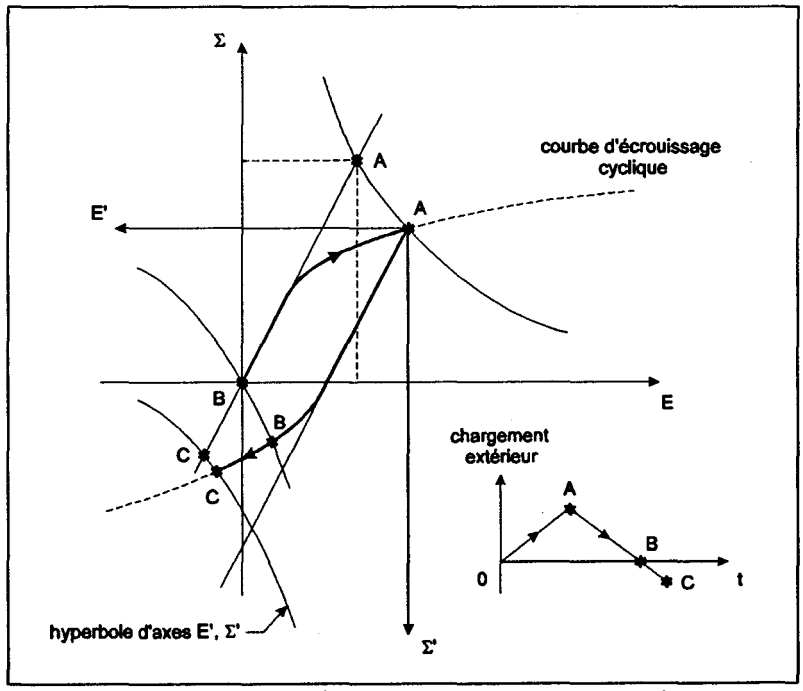


Figure 1.1.2 : « Méthode de Neuber dans le cas d'un chargement cyclique »

Le coefficient de concentration de contrainte élastique, K_t, est défini par la relation :

$$\Sigma^{el} = K_t \cdot \Sigma_N \ , \qquad \textbf{(1.1.5)}$$

or on a :

$$E^{el} = \Sigma^{el} / E \ , \qquad \textbf{(1.1.6)}$$

donc :

$$E^{el} = K_t \cdot E_n \qquad \textbf{(1.1.7)}$$

Σ_N et E_N représentent respectivement la contrainte et la déformation nominales.

Dans le cas d'un chargement cyclique, le coefficient de concentration de contrainte élastique est donc relié aux grandeurs locales par la relation :

$$\Delta\Sigma \cdot \Delta E = \Delta\Sigma^{el} \cdot \Delta E^{el} = K_t^2 \cdot \Delta\Sigma_N \cdot \Delta E_N \qquad \textbf{(1.1.8)}$$

1.2 - METHODE DE GLINKA

Elle repose sur le concept d'énergie de déformation absorbée localement. L'auteur suppose vérifiée la relation suivante (voir figure 1.2.1) :

$$W_\Sigma = \int \Sigma(E) \cdot dE = \int \Sigma^{el}(E^{el}) \cdot dE^{el} = K_t^2 \cdot \int \Sigma_N(E_N) \cdot dE_N \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

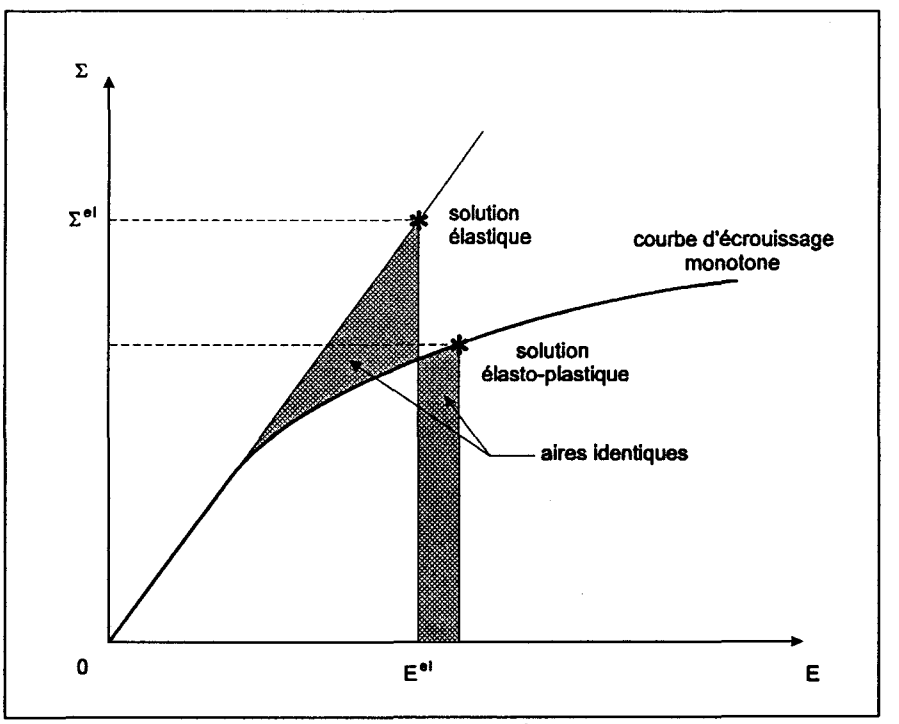


Figure 1.2.1 : « Méthode de Glinka dans le cas d'un chargement monotone »

On a donc :

$$\left.\begin{aligned} W_\Sigma &= \int \Sigma(E)\cdot dE \\ W_{\Sigma_N} &= \int \Sigma_N(E_N)\cdot dE_N \end{aligned}\right\} \quad K_t^2 = \frac{W_\Sigma}{W_{\Sigma_N}} \qquad \textbf{(1.2.2)}$$

* W_Σ représente l'énergie de déformation par unité de volume au point le plus sollicité de la structure (donc en fond d'entaille).
* W_{Σ_N} représente l'énergie de déformation per l'unité de volume engendrée par la sollicitation nominale.

Dans le cas d'un chargement cyclique, on a :

$$W_{\Delta\Sigma} = \int \Delta\Sigma\cdot d(\Delta E) = \int \Delta\Sigma^{el}\cdot d(\Delta E^{el}) = \frac{(\Delta\Sigma^{el})^2}{2\cdot E} \qquad \textbf{(1.2.3)}$$

La loi d'écrouissage cyclique étant définie par :

$$\frac{\Delta E}{2} = \frac{\Delta\Sigma}{2\cdot E} + \left(\frac{\Delta\Sigma}{2\cdot K'}\right)^{1/n'}, \qquad \textbf{(1.2.4)}$$

on a donc par intégration :

$$W_{\Delta\Sigma} = \frac{(\Delta\Sigma)^2}{2\cdot E} + \frac{2\cdot\Delta\Sigma}{n'+1}\cdot\left(\frac{\Delta\Sigma}{2\cdot K'}\right)^{1/n'} = \frac{(\Delta\Sigma^{el})^2}{2\cdot E} \qquad \textbf{(1.2.5)}$$

Connaissant $\Delta\Sigma^{el}$ ainsi que le paramètres de la loi d'écrouissage cyclique, la résolution de l'équation ci-dessus permet la détermination de $\Delta\Sigma$. La loi d'écrouissage cyclique permet alors, connaissant $\Delta\Sigma$, de déterminer ΔE.

Le paramètre n' étant compris entre les valeurs 0 et 1, on en déduit immédiatement que la méthode de Glinka conduit à une estimation de la contrainte locale qui est plus faible que celle prévue par la règle de Neuber.

La loi d'écrouissage étant strictement croissante, la déformation locale obtenue à partir de la méthode de Glinka est donc également inférieure à celle obtenue à partir de la règle de Neuber.

ANNEXE 2 : Procédure Rainflow

C'est une méthode permettant l'identification des cycles qui sont présents dans un signal donné.

Il est à noter que les méthodes de comptage de cycles ne peuvent être appliquées qu'à des signaux uniaxiaux. Dans le cas de sollicitations multiaxiales, il est alors nécessaire de définir une variable uniaxiale appelée variable de comptage, qui soit représentative du chargement multiaxial considéré. La méthode de comptage Rainflow est ensuite appliquée à la séquence de la variable de comptage, de manière à identifier les cycles qui la constituent.

Voyons à présent comment s'effectue la procédure d'identification des cycles dans le cas d'un signal relatif à un chargement de service uniaxial.

L'étendue du signal est tout d'abord découpée en classes d'intervalle de largeur constante. Comme le montre la figure 2.1, les extremums locaux composant le signal sont ensuite ramenés à une valeur représentative de la classe où ils appartiennent (sa valeur moyenne en général).

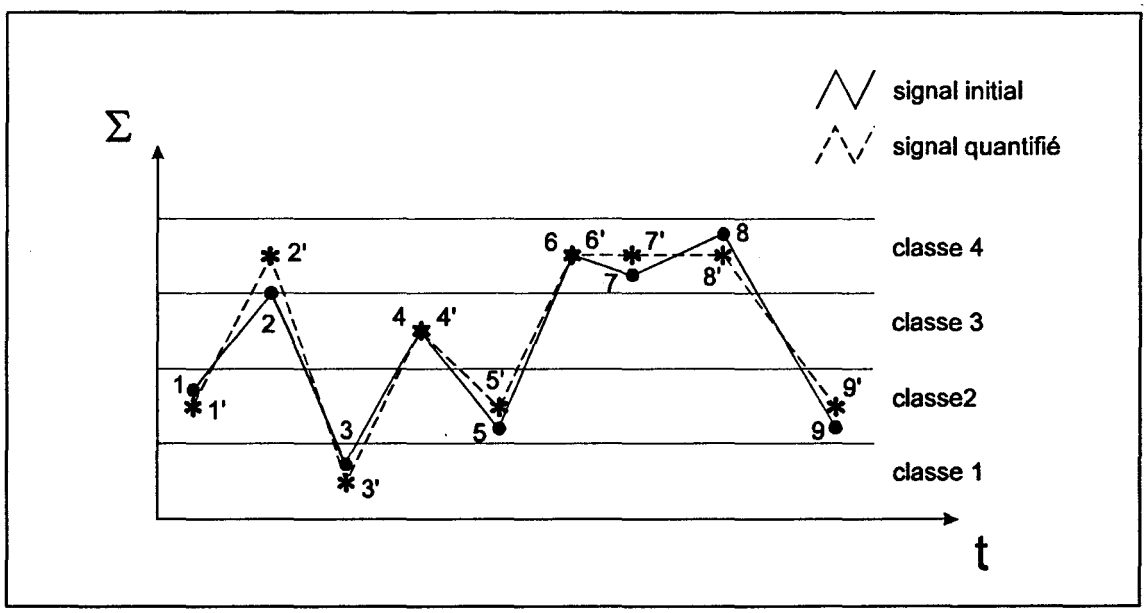


Figure 2.1 : « Quantification du signal »

Remarque :

Dans l'exemple présenté sur la figure 2.1, il est nécessaire de supprimer du signal quantifié, deux des trois points successifs 6', 7' et 8', qui appartiennent à la même classe.

La procédure Rainflow est ensuite appliquée sur le signal quantifié. Elle repose en fait sur l'obtention de boucles d'hystérésis fermées dans le plan (Σ, E) (voir figure 2.2).

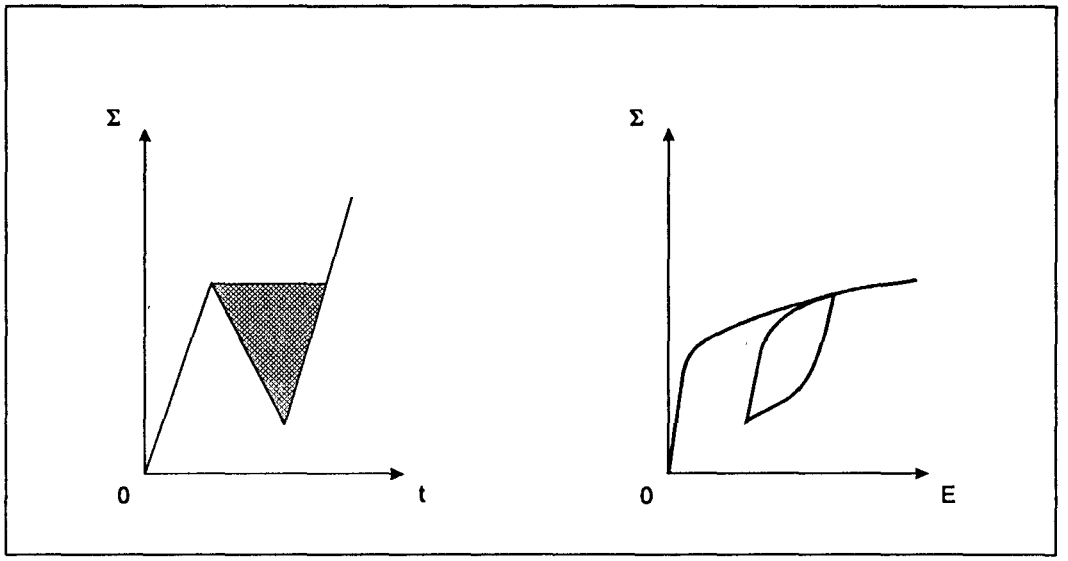


Figure 2.2 : « Identification d'un cycle par une procédure Rainflow »

La procédure d'identification suit donc la règle suivante (voir figure 2.3) : le cycle (2-3-3') est extrait lorsque l'amplitude de la transition (2-3) est inférieure à celles des transitions (1-2) et (3-4) qui l'encadrent.

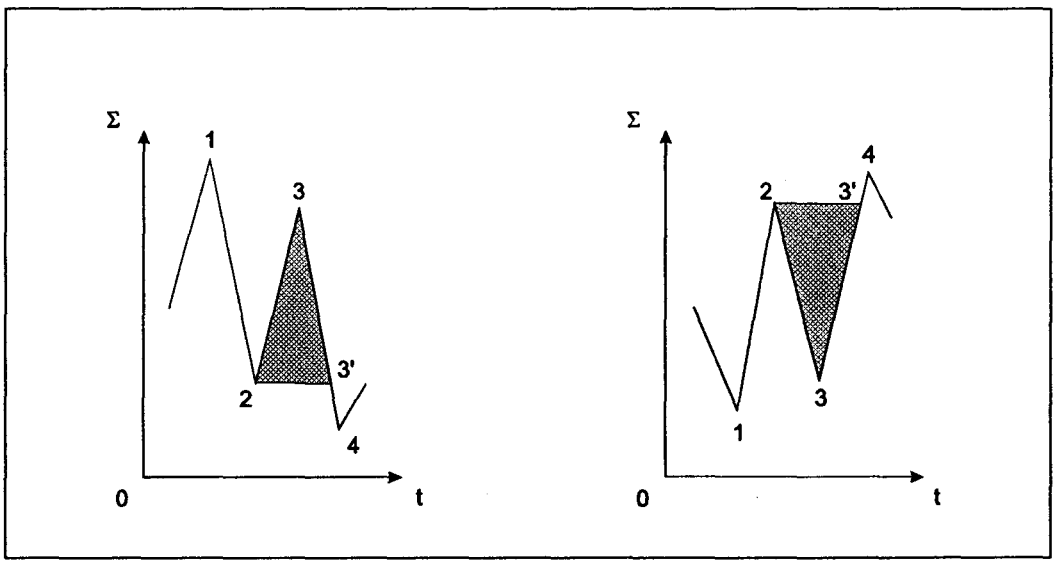


Figure 2.3 : « Procédure Rainflow d'extraction de cycles »

Cette procédure d'identification des cycles est indépendante du type de comportement de la structure : Dans le cas d'un comportement élastique, l'aire de la boucle d'hystérésis a alors simplement la particularité d'être nulle (voir figure 2.4).

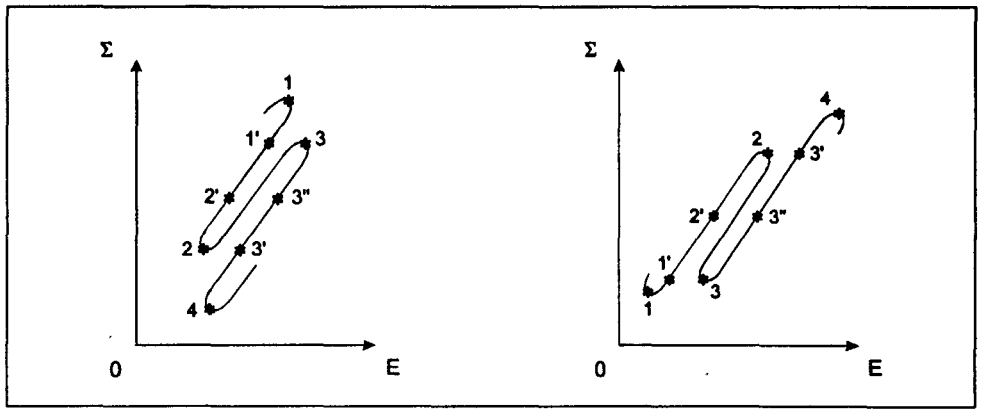


Figure 2.4 : « Identification d'un cycle par une procédure Rainflow dans le cas d'un comportement élastique »

Dans ce cas, le cycle (2-3-3') peut aussi bien être défini par (1'-2-3) que par (2'-2-3-3 ") (où 2' et 3" correspondent à la mi-hauteur de la transition (2-3)).

La méthode Rainflow conduit ainsi à la création d'un tableau à double entrée (classe de départ, classe d'arrivée) appelé matrice de transition. Chaque élément (i,j) de ce tableau donne le nombre de cycles dont les valeurs minimale et maximale correspondent respectivement aux classes i et j.

L'utilisation d'un algorithme de tirage aléatoire des cycles contenus dans la matrice de transition, obtenue par la méthode Rainflow, permet de construire un chargement aléatoire programmé (voir figure 2.5).

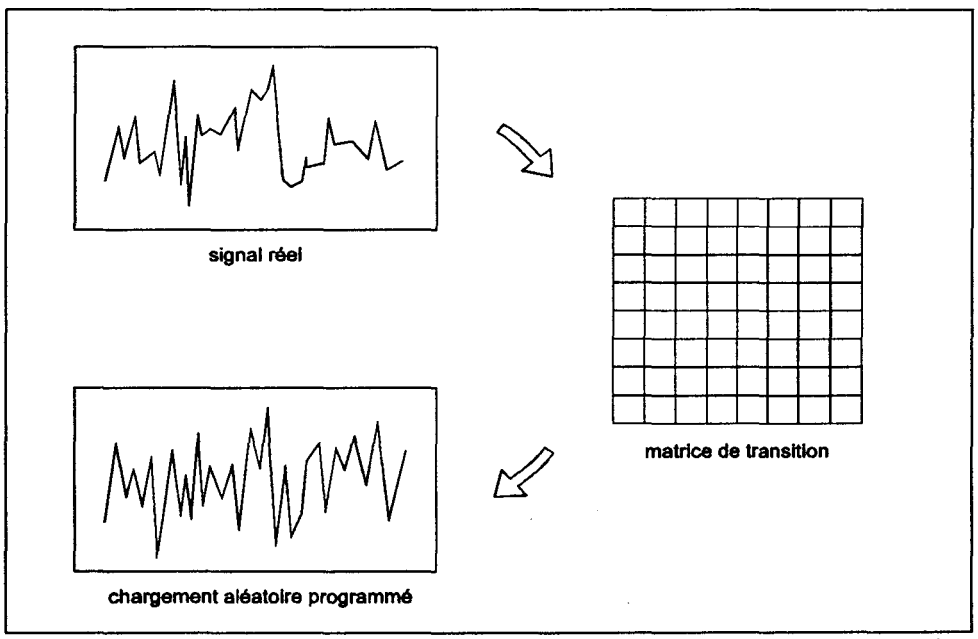


Figure 2.5 : « Construction d'un chargement aléatoire programmé »

Remarque : Devant la dispersion importante des résultats obtenus à partir des différents algorithmes bâtis sur cette méthode, une normalisation de la procédure d'identification des cycles a été mise au point [42].

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

[1] PAPADOPOULOS I.
« Fatigue polycyclique des métaux - une nouvelle approche », Thèse de l'ENPC, Décembre 1987.

[2] GALTIER A.
« Contribution à l'étude de l'endommagement des aciers sous sollicitations uni ou multi-axiales », Thèse de l'ENSAM, Mai 1993.

[3] DANG-VAN K.
« Sur la résistance à la fatigue des métaux », Sciences et Techniques de l'Armement, 3ème fascicule, p. 647-722, 1973.

[4] MANDEL J.
« Adaptation d'une structure plastique écrouissable », Mech. Res. Comm., Vol. 3, p. 251-256, Pergamon Press, 1976.

[5] MANDEL J., ZARKA J., HALPHEN B.
« Adaptation d'une structure élastoplastique à écrouissage cinématique », Mech. Res. Comm., Vol. 4, p. 309-314, Pergamon Press, 1977.

[6] DANG-VAN K., CAILLETAUD G., FLAVENOT J.F., LEDOUARON A., LIEURADE H.P.
« Critère d'amorçage en fatigue à grand nombre de cycles sous sollicitations multiaxiales », Amorçage des fissures sous sollicitations complexes, Journées internationales de printemps, p. 301-328, Paris, 1984.

[7] DEPERROIS A.
« Sur le calcul de limites d'endurance des aciers », Thèse de l'Ecole Polytechnique, Juin 1991.

[8] VIDAL E.
« Prévision de la durée de vie en fatigue multiaxiale sous sollicitations d'amplitude variable à l'aide d'un critère global », Thèse de l'INSA de Lyon, Janvier 1996.

[9] ROBERT J.L.
« Contribution à l'étude de la fatigue multiaxiale sous sollicitations périodiques ou aléatoires », Thèse de l'INSA de Lyon, Janvier 1992.

[10] NOVOZHILOV V.V.
« Theory of elasticity », Pergamon Press, London 1961.

[11] SINES G.
« Behaviour of metals under complex static and alternating stresses », In metal fatigue, Sines and Waisman J.L. Editors, Mc Graw Hill, 1959.

[12] CROSSLAND B.
« Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel », International conference on fatigue of metals, London, 1956.

[13] DUBAR L.
« Fatigue multiaxiale des aciers : Passage de l'endurance à l'endurance limitée. Prise en compte des accidents géométriques », Thèse de l'ENSAM, Juin 1992.

[14] FROUSTEY C., LASSERRE S., DUBAR L.
« Essais de fatigue multiaxiaux et par blocs, validation d'un critère pour les matériaux métalliques », MAT. TEC. 92, Fatigue et contraintes, 1992.

[15] SIMBURGER A.
« Festigkeitsverhalten Zäher Werkstoffe bei einer mehrachsigen, phasenverschobenen Schwingbeanspruchung mit Körperfesten und veränderlichen Hauptspannungsrichtungen », Bericht N° FB-121, Laboratorium für Betriebsfestigkeit, Darmstad, 1975.

[16] FOGUE M.
« Critère de fatigue à longue durée de vie pour des états multiaxiaux de contraintes sinusoidales en phase et hors phase », Thèse de l'INSA de Lyon, Juillet 1987.

[17] ELLYIN F.
« Recent developments in predicting multiaxial fatigue failure », Res. Mechanica 25, p. 1-23, 1988.

[18] LEFEBVRE D., ELLYIN F.
« Cyclic response and inelastic strain energy in low cycle fatigue », International journal of fatigue 6, p. 9-15, 1984.

[19] ELLYIN F., GOLOS K., XIA Z.
« In phase and out of phase multiaxial fatigue », Transaction of the ASME, Vol. 113, p. 112-118, 1991.

[20] CAZAUD R.
« La fatigue des métaux », Dunod, Paris, 1969.

[21] LU J., FLAVENOT J.F.
« Prediction of residual stress relaxation during fatigue loading and taking residual stresses in a multiaxial fatigue criteria into account », ICRS2, Nancy, 1988.

[22] MAEDER G.
« Mesures de contraintes par diffraction des rayons X », Traitements mécaniques de surfaces, Vol. 2, p. 59-96, 1985.

[23] CASTEX L., SPRAUEL J.M.
« Evolution récente de l'analyse des contraintes résiduelles par diffractométrie X », Revue Française de Mécanique n° 2, p. 103-110, 1987.

[24] VASSEUR E.
« Détermination des contraintes résiduelles dans les matériaux isotropes et anisotropes, par l'utilisation d'ondes ultrasonores », Mémoire de DEA de l'Université de Lille 1, Octobre 1992.

[25] HARIRI S., VAUCHER R., FLAHAUT P., EYZOP D., ROBIN C.
«Residual stresses measurements by dissolution methods », Congrès MAT. TEC. 96, Mars 1996.

[26] HARIRI S., VAUCHER R., ROBIN C., SHAMSHIRSAZ M.
« Residual stresses of thermal origin in multimaterial plates », ECRS4, Juin 1996.

[27] ZARKA J., FRELAT J., INGLEBERT G., KASMAI-NAVIDI P.
« A new approach in inelastic analysis of structures », CADLM Gif sur Yvette, 1990.

[28] DHATT G., TOUZOT G.
« Une présentation de la méthode des éléments finis », Maloine S.A. éditeur, 1984.

[29] SKALLI N., FLAVENOT J.F.
« Prise en compte des contraintes résiduelles dans un calcul prévisionnel de fatigue », Journées internationales de printemps, p. 98-117, Paris, 1984.

[30] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L.
« Mécanique des matériaux solides », Dunod, Paris, 1988.

[31] MINER M.A.
« Cumulative damage in fatigue », Journal of applied mecanics, p. 159-164, septembre 1945.

[32] BRAND A.
« Calcul des pièces à la fatigue, méthode du gradient », Senlis, CETIM, 1980.

[33] VIDAL E., KENMEUGNE B., ROBERT J.L., BAHUAUD J.
« Fatigue life prediction of components using multiaxial criteria », 6ème journées internationales de printemps, Saint Germain en Laye, p. 353-366, 31 mai - 3 juin 1994.

[34] WINTER A. T.
« A model for the fatigue of copper at low plastic strain amplitudes », Philosophical Magasin, Vol. 30, pp 719-738, 1974.

[35] PAPADOPOULOS I.
« A new criterion of fatigue strength for out of phase bending and torsion of hard metals », International journal of fatigue, Vol. 16, N° 6, p. 377-384, 1994.

[36] GOLOS K., ELLYIN F.
« A total strain energy density theory for cumulative fatigue damage », Transactions of the ASME, Vol. 110, 1988.

[37] MANDEL J.
« Cours de Mécanique des Milieux Continus », Tome 2, Mécanique des solides, Paris, Gauthier-Villars éditeur, 1966.

[38] CRUSSARD C.
« Creep and fatigue as affected by grain boundaries », Metal treatment 14, p. 149-160, 1947.

[39] NEUBER H.
« Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies with arbitrary non-linear stress-strain law », Journal of applied mechanics, Vol. 28, p. 544-550, 1961.

[40] MOLSKI K., GLINKA G.
« A method of elastic-plastic stress and strain calculation at a notch root », Materials science and engineering, N° 50, p. 93-100, 1981.

[41] AMZALLAG C., GEREY J.P., ROBERT J.L., BAHUAUD J.
« La méthode Rainflow de comptage des cycles. Application aux 3 séquences CARLOS uniaxiales », Editions de la revue de métallurgie, N° 7, p. 54-68, 1993.

[42] NORME NF A03-406
« Fatigue sous sollicitations d'amplitude variable - Méthode Rainflow de comptage des cycles », Normalisation Française, 1993.

[43] CHAUDONNERET M., ROBERT M.
« Fatigue lifetime prediction methods : An analysis of the different approximations involved in local approaches », ONERA, Cape town (South Africa), March 27-31, 1995.

[44] BLEUZEN C. & AL.
« Fatigue testing and life prediction for notched specimens of 2024 and 7010 alloys subjected to aeronautical spectra », ASTM STP 1231, p. 504-526, 1994.

[45] ZARKA J., CASIER J.
« Elastic plastic response of a structure to cyclic loading ; Practical rules », Mechanics today Vol. 6, S. NEMAT-NASSER Editor, Pergamon Press, 1979.

[46] VASSEUR E., NAVIDI P., HARIRI S.
« Direct determination of limiting cycle during cyclic loading », Computational Materials Science 7, 1996.

[47] SALENCON J.
« Introduction à l'élasto-plasticité », Cours de l'Ecole Polytechnique, 1993.

[48] MOREAU J. J.
« Rafle par un convexe variable », Séminaire d'analyse unilatérale, Montpellier, 1971.

[49] HALPHEN B.
« Problèmes quasi-statiques en viscoplasticité », Thèse Dr. ès Sciences, Paris, 1978.

[50] LU J., FLAVENOT J.F.
« Relaxation des contraintes résiduelles sous chargement cyclique. Influence des caractéristiques mécaniques et prévision par le calcul », Journées de printemps SFM-ATT, Fatigue et traitement de surface, Paris, 1988.

[51] FLAVENOT J.F., LU J., TURBAT A.
« Prévision par le calcul de la relaxation des contraintes résiduelles de grenaillage en fatigue. Application au grenaillage de précontrainte », CETIM.

[52] BRAHAM S.
« Modélisation du galetage des vilebrequins. Evolution des contraintes résiduelles sous chargement de service », Thèse de l'Ecole Polytechnique, Octobre 1991.

[53] RAPPORT EUR 16555 EN
« Bounds and estimates on inelastic deformations », Nuclear Science and Technology.

[54] BATOZ J.L., DHATT G.
« Modélistion des structures par éléments finis », Volume 1 : Solides élastiques, Hermès Editeur, Paris, 1990.

[55] ZIENKIEWICZ O.C.
« La méthode des éléments finis », Ediscience, Paris, 1973.

[56] SHAROUR I.
« Méthode des éléments finis », Cours de l'Ecole des Mines de Douai, 1994.

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE

[57] BASSAL J.L.
« Introduction à la méthode des éléments finis », Cours de l'Ecole des Mines de Douai, 1983.

[58] HABLOT J.M.
« Construction de solutions exactes en élastoplasticité, application à l'estimation d'erreur par apprentissage », Thèse de l'ENPC, Juin 1990.

[59] RITCHIE R.O., THOMPSON A.W.
« On macroscopic and microscopic analyses for crack initiation and crack growth toughness in ductile alloys », Metallurgical Transactions A, Vol. 16A, p. 233-248, Février 1985.

[60] TERRIEN M.
« Systèmes experts par apprentissage en contrôle non destructif », Les systèmes experts et leurs applications, volume 3, p. 439-447, 1991.

[61] HECHT-NIELSEN R.
« Neuro-computing », Addison Wesley, 1990.

[62] HERTZ J., KROGH A., PALMER R.
« Introduction to the theory of neural computation », Santa Fe Institute, Addison Wesley, 1991.