N° d'ordre : 2121

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Abderrabi MAATI

Réalisabilité locale des structures de Cauchy-Riemann rigides de R^3, dans les classes Hölderiennes

Soutenue le 7 novembre 1997 devant la Commission d'Examen :

Président : Philippe ANTOINE, Université de Lille I
Rapporteurs : Jacqueline DETRAZ, Université de Provence
Jean-Jacques LŒB, Université d'Angers
Examinateurs : François BERTELOOT, Université de Lille I
Gérard CŒURÉ, Université de Lille I

Cette thèse a été effectuée au sein de l'équipe d'Analyse Complexe, sous la direction du Professeur Gérard Cœuré. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance et de mes vifs remerciements, pour avoir accepté de diriger ma recherche, pour ses conseils, pour ses idées et surtout pour le temps qu'il a bien voulu me consacrer ainsi que pour son incessant soutien.

Mes remerciements vont aussi au Professeur Philippe Antoine qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Je suis sincèrement honoré de la présence dans le jury du Professeur Jacqueline Détraz de l'Université de Provence, ainsi que de celle du Professeur Jean-Jacques Lœb de l'Université d'Angers. Je tiens à les remercier vivement d'avoir bien voulu être rapporteurs de ce travail.

François Berteloot a accepté d'examiner ce travail, je lui en suis reconnaissant.

Anne-Marie Chollet, Joachim Michel et Vincent Thilliez ont montré l'intérêt qu'ils portent à mon travail, je les en remercie sincèrement.

Je remercie également les étudiants, enseignants et chercheurs de l'U.F.R. de Mathématiques et, plus particulièrement, Serguei Ivachkovitch, Abdellah Hanani, Pascal Honvault, Volker Mayer et Christine Sacré pour la sympathie qu'ils m'ont témoignée.

Enfin, je remercie chaleureusement Raymonde Bérat et tout le personnel de reprographie de l'U.F.R. de Mathématiques.

Sommaire

0 Introduction

Etant donnée une structure de Cauchy-Riemann V sur une variété lisse M de dimension $2n-1$, existe-t-il une immersion Φ de M dans $\mathbf{C}^n$ telle que $\Phi_*(V)$ soit la structure C.R de l'hypersurface $\Phi(M)$, induite par la structure complexe de $\mathbf{C}^n$? Lorsque la réponse est affirmative on dit que la structure V est réalisable. Nous nous limitons à une étude locale ; ce problème est alors équivalent à un problème sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre du type suivant : Etant donnés k opérateurs différentiels du premier ordre et à coefficients complexes $L_1, L_2, \ldots, L_k$ sur $\mathbf{R}^N$ qui satisfont à la condition de compatibilité :

$$[L_i, L_j] \in \{L_1, \ldots, L_k\} = \mathcal{L}$$

le système $L_j u = 0$, $(j = 1, 2, \ldots, k)$ admet-il $N-k$ solutions indépendantes ?

La réponse est positive lorsque $N = 2k+1$, $\mathcal{L}$ et $\bar{\mathcal{L}}$ sont linéairement indépendants et à coefficients analytiques ; c'est une conséquence du théorème de Frobenius holomorphe [4].

Lorsque les coefficients sont seulement indéfiniment différentiables, il se passe des phénomènes nouveaux découverts par H. Lewy (1956) ; dans $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ on considère l'opérateur $P = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + iz\frac{\partial}{\partial t}$ L'équation $Pu = f$ n'a, en général aucune solution, même localement, pour f fonction indéfiniment différentiable. L. Nirembert (1974) montre que le noyau de l'opérateur $P + iz\varphi\frac{\partial}{\partial t} + i\phi\cdot(z\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial z})$, où $\varphi(0,0,t)$ et $\phi(0,0,t)$ sont des fonctions plates à l'origine, bien choisies, est trivial sur tout ouvert connexe contenant l'origine. Ainsi certaines perturbations d'un opérateur analytique peut rendre son noyau trivial.

H. Jacobowitz et F. Trèves (1982) [7] démontrent le résultat général suivant dont l'opérateur P de Lewy-Niremberg est un cas particulier. Soit L la structure C.R induite par la structure complexe de $\mathbf{C}^2$ sur une hypersurface strictement pseudo-convexe. Alors il existe une perturbation de la forme $L = L + f_1 Q_1 + f_2 Q_2$ où f_1 et f_2 sont plates à l'origine, Q_1 et Q_2 sont deux champs de vecteurs convenables, telle que si $\tilde{L}v = 0$ avec v indéfiniment différentiable, toutes les dérivées de v à l'origine sont nulles.

Souvent les systèmes possédant certaines symétries font exception à la règle générique. S. Baouendi, L.P. Rothschild et F. Trèves (1985) [3] ont introduit la notion de rigidité sur les C.R structures.

Ce sont les structures de Cauchy-Riemann V sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^{2n-1}$ pour lesquelles il existe une sous algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de dimension finie des sections tangentes à M vérifiant :

$$
\begin{aligned}
* \quad V_a \oplus \bar{V}_a \oplus (\mathcal{G}_a \otimes \mathbf{C}) &= \mathbf{C} \otimes T_a(\Omega) \qquad \forall a \in \Omega \\
* \quad [\mathcal{S}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{S} \text{ avec } \mathcal{S} &= C^{\infty}(\Omega, V) \\
* \quad [\mathcal{G}, \mathcal{G}] &= 0
\end{aligned}
$$

Les auteurs démontrent que de telles structures C.R, rigides et indéfiniment différentiables, sont réalisables dans $\mathbf{C}^n$.

La démonstration repose sur les théorèmes de Frobenius et Nirenbert-Newlander.

E.M. Chirka a généralisé dans [5] ce résultat aux structures rigides de classe $C^{k+\alpha}$ $(k \geq 1, 0 < \alpha < 1)$.

Enfin, les structures C.R, indéfiniment différentiables et strictement pseudoconvexes dans $\mathbf{R}^{2n-1}$ sont toujours localement réalisables, pour $n \geq 4$, le problème restant ouvert lorsque $n = 3$.

La preuve de ce résultat, démontrée initialement par Kuranishi [8], a été simplifiée par Akahori [1] et Webster [12].

Dans ce travail, nous proposons lorsque $n = 2$, c'est-à-dire dans R^3, une nouvelle démonstration du résultat de Chirka [5]. La méthode utilisée repose sur l'utilisation de l'opérateur de Cauchy dans $\mathbf{C}$, la mise sous une forme canonique du champ définissant la structure C.R, et l'inversion d'un opérateur dans un espace de Banach convenable.

1 Opérateur de Cauchy

Pour étudier la réalisabilité des structures de Cauchy-Riemann rigides de $\mathbf{R}^3$ dans les classes Hölderiennes, nous utiliserons les propriétés de l'opérateur de Cauchy A sur $\mathbf{C}$; défini par : $Af = \frac{1}{\pi z} * f$.

Il est connu que A augmente l'ordre de dérivabilité d'une unité dans les classes Hölderiennes d'exposants non entier (E.M. Stein [11]) ; afin d'estimer la norme de l'opérateur A, nous proposons une démonstration de ce résultat qui repose sur la décomposition de Littlewood-Paley dont on trouve une exposition récente dans [2]. Commençons par rappeler quelques définitions qui fixeront les notations :

S' : Ensemble des distributions tempérées sur $\mathbf{R}^q$.

Λ (resp. $\wedge$) : Transformation de Fourier (resp. inverse).

D^β : pour tout $\beta \in \mathbf{N}^q$, on note $D^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}}$ et $\|\beta\| = \Sigma_i \beta_i$.

$C_b^\alpha(\mathbf{R}^q)$ (resp. C_0^α, C_Q^α) : pour tout réel $\alpha \geq 0$, c'est la classe Hölderienne des fonctions u sur $\mathbf{R}^q$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ dont des dérivées jusqu'à la partie entière de α (notée aussi $|\alpha|$), sont bornées et continues sur $\mathbf{R}^q$ (resp. et de plus à support compact, resp. à support dans un compact Q donné) et vérifiant :

$$|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)| \leq C|x-y|^{\alpha - |\alpha|},$$

pour x et y dans $\mathbf{R}^q$, et pour tout β tel que $\|\beta\| = |\alpha|$.

La meilleure constante C dans la relation précédente est notée $\| u \|'_\alpha$.

Pour tout $u \in C_b^\alpha$, on pose $\| u \|_0 = Sup_{x \in \mathbf{R}^q} | u(x) |$.

$C_b^\alpha(\mathbf{R}^q)$ est un espace normé par $\| u \|_\alpha = \| u \|_0 + \| u \|'_\alpha$.

On introduit les deux fonctions φ et ψ suivantes :

$\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^q), \psi(\xi) = 1$ pour $| \xi | \leq \frac{1}{2}$, et $\psi(\xi) = 0$ pour $| \xi | \geq 1$,

$\varphi(\xi) = \psi(\frac{\xi}{2}) - \psi(\xi)$; φ est supportée dans la couronne $\frac{1}{2} \leq | \xi | \leq 2$.

Pour toute distribution u dans S' on pose :

$$u_p = \varphi(2^{-p}x)^\vee * u \text{ } pour \text{ } p \in \mathbf{N}$$
$$u_{-1} = \psi^\vee * u.$$

Les fonctions u_p sont les restrictions à $\mathbf{R}^q$ de fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}^q$ et pour toute distribution $u \in S'$, on a $u = \sum_{p \geq -1} u_p$, la convergence ayant lieu pour la topologie de la convergence simple de S' en dualité avec l'espace des fonctions à décroissance rapide ; c'est la décomposition de Littlewood-Paley de u.

Dans la suite, afin de simplifier l'ecriture, les inégalités établies le seront à des constantes universelles et multiplicatives près.

Proposition 1 *Il existe une constante C ne dépendant que de la dimension de l'espace telle que :*

$$\| D^\beta u_p \|_0 \leq 2^{p\|\beta\|}.C^{\|\beta\|}. \| u_p \|_0 \ , \quad pour\ tout\ \ \beta \in \mathbf{N}^q \ , \quad pour\ tout\ \ p \geq 0.$$

$$\| D^\beta u_{-1} \|_0 \leq C^{\|\beta\|}. \| u_{-1} \|_0 \ , \quad pour\ tout\ \ \beta \in \mathbf{N}^q.$$

Preuve : Soit χ une fonction plateau valant 1 sur le support de φ.

La variable d'espace est notée ξ.

$(D^\beta u_p)^\wedge(\xi) = \xi^\beta (u_p)^\wedge = \xi^\beta \varphi(2^{-p}\xi)(u)^\wedge(\xi) = 2^{p\|\beta\|}(\xi^\beta.\chi)(2^{-p}\xi).(u_p)^\wedge(\xi)$
$D^\beta u_p = 2^{p\|\beta\|}(\xi^\beta.\chi)(2^{-p}\xi)^\vee * u_p$, pour tout $p \geq 0$.

La propriété, pour $p \geq 0$, est obtenue en remarquant que

$$\begin{aligned} |\ ((\xi)^\beta.\chi)(2^{-p}\xi)^\vee\ |_{L^1} &= |\ ((\xi)^\beta.\chi)^\vee\ |_{L^1} \\ &\leq |\ (I+\triangle)^q((\xi)^\beta.\chi)\ |_{L^1} \\ &\leq C^{\|\beta\|} \end{aligned}$$

où C est une constante qui ne dépend que de la dimension q.
Un calcul analogue conduit à : $D^\beta u_{-1} = ((\xi)^\beta.\chi)^\vee * u_{-1}$ où cette fois χ est une fonction plateau valant 1 sur le support de ψ, l'inégalité cherchée s'en déduit immédiatement.

Proposition 2 *Il existe une constante C ne dépendant que de la dimension de l'espace telle que pour tout α positif et non entier et tout u dans C^α, on a :*

$$\| u \|_\alpha \leq C^\alpha [\| u_{-1} \|_0 + Max[\frac{1}{d(\alpha)}, \frac{1}{1-d(\alpha)}].Sup_{p\geq 0} \| 2^{p\alpha} u_p \|_0]$$

où $d(\alpha)$ désigne la partie décimale de α.

Preuve : Tout d'abord :

$$\| u \|_0 \leq \sum_{p\geq -1} \| u_p \|_0 \leq \| u_{-1} \|_0 + \frac{1}{1-2^{-\alpha}}.Sup_{p\geq 0} \| 2^{p\alpha} u_p \|_0$$

$$\| D^\beta u \|_0 \leq \| D^\beta u_{-1} \|_0 + \sum_{p\geq 0} \| D^\beta u_p \|_0$$

Par application de la proposition 1, on obtient :

$$\| D^\beta u \|_0 \leq C^{\|\beta\|}[\| u_{-1} \|_0 + (\sum_{p\geq 0} 2^{p(\|\beta\|-\alpha)}).Sup_{p\geq 0} \| 2^{p\alpha} u_p \|_0]$$

Ainsi lorsque $\mid \beta \mid$ est égale à la partie entière de α, on a :

$$\| D^\beta u \|_0 \leq C^{\|\beta\|}[\| u_{-1} \|_0 + \frac{1}{d(\alpha)}.Sup_{p\geq 0} \| 2^{p\alpha} u_p \|_0].$$

Cette majoration montre que le terme de droite dans la proposition 2 majore

$$Sup_{|x-y|\geq 1, |\beta|=|\alpha|} \frac{\mid D^\beta u(x) - D^\beta u(y) \mid}{\mid x-y \mid^{d(\alpha)}}.$$

Enfin lorsque $\mid x - y \mid \leq 1$, on a :

$$\mid D^\beta u(x) - D^\beta u(y) \mid \leq \sum_{q=-1}^{p-1} \| \nabla D^\beta u_q \|_0 \mid x - y \mid + \sum_{q=p}^{+\infty} \| D^\beta u_q \|_0$$

En utilisant la proposition (1), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mid D^\beta u(x) - D^\beta u(y) \mid \quad & \leq \quad C^{\|\beta\|}[\| u_{-1} \|_0 \mid x - y \mid^{d(\alpha)} + \sum_0^{p-1} 2^{q(\|\beta\|+1)}. \| u_q \|_0 \mid x - y \mid \\
& + \quad \sum_{q=p}^{+\infty} 2^{q\|\beta\|} \| u_q \|_0] \\
& \leq \quad C^{\|\beta\|}[\| u_{-1} \|_0 \mid x - y \mid^{d(\alpha)} \\
& + \quad (Sup_{q\geq 0} 2^{q\alpha} \| u_q \|_0).(\sum_0^{p-1} 2^{q(1-d(\alpha))}. \mid x - y \mid + \sum_{q=p}^{+\infty} 2^{-qd(\alpha)})] \\
& \leq \quad C^{\|\beta\|}[\| u_{-1} \|_0 \mid x - y \mid^{d(\alpha)} + \\
& + \quad (Sup_{p\geq 0} 2^{p\alpha} \| u_p \|_0).(\frac{2^{p(1-d(\alpha))}}{2^{1-d(\alpha)} - 1}. \mid x - y \mid + \frac{2^{-pd(\alpha)}}{1 - 2^{-d(\alpha)}})].
\end{aligned}$$

Comme $\mid x - y \mid \leq 1$, on choisit p vérifiant :

$$\frac{1}{2 \mid x - y \mid} < 2^p \leq \frac{1}{\mid x - y \mid}$$

On constate alors que $\frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x-y|^{d(\alpha)}}$ est majoré par le membre de droite de la proposition 2, ce qui, compte tenu de la majoration de $\| u \|_0$, fournit le résultat.

Proposition 3 *Il existe une constante C ne dépendant que de la dimension de l'espace telle que pour tout α positif :*

$$\| u_p \|_0 \leq C^\alpha 2^{-p\alpha} \| u \|_\alpha \ mboxpourtout \ p \geq -1.$$

Preuve : Pour $p \geq 0$, on a :

$$(u_p)^\wedge = \varphi(2^{-p}\xi)(u)^\wedge(\xi) = \sum_{|\beta|=k}(2^{-p}\xi)^\beta \chi_\beta(2^{-p}\xi)(u_p)^\wedge(\xi)$$

où $\chi_\beta = \dfrac{\xi^\beta.\chi}{\sum_{\|\beta\|=k}(\xi^\beta)^2}$, avec pour χ une fonction plateau valant 1 sur le support de φ. Ainsi :

$$u_p = 2^{-pk}\sum_{|\beta|=k}\chi_\beta(2^{-p}\xi)^\vee * D^\beta u_p \text{ , avec ; } \|\beta\| = k$$

$$\begin{aligned}\| u_p \|_0 &\leq 2^{-pk}\sum_{\|\beta\|=k} | \chi_\beta(2^{-p}\xi)^\vee |_{L^1} .Sup_{\|\beta\|=k} \| D^\beta u_p \|_0 \\ &\leq 2^{-pk}.C^k.Sup_{\|\beta\|=k} \| D^\beta u_p \|_0 .\end{aligned}$$

En effet : $| \chi_\beta(2^{-p}\xi)^\vee |^{\frac{1}{k}}_{L^1} = | \chi_\beta^\vee |^{\frac{1}{k}}_{L^1}$ est majoré par une constante ne dépendant que de la dimension de l'espace et le cardinal des β dans $\mathbf{N}^q$, vérifiant $\|\beta\| = k$, est majoré par une puissance k.
Il reste à majorer $D^\beta u_p$ lorsque $\|\beta\| = | \alpha |$.

$$\begin{aligned}D^\beta u_p(x) &= \varphi(2^{-p}\xi)^\vee * D^\beta u = 2^{pq}\int \varphi^\vee(2^p(x-y))D^\beta u(y)dy \\ &= 2^{pq}\int \varphi^\vee(2^p(x-y))[D^\beta u(y) - D^\beta u(x)]dy\end{aligned}$$

car $\varphi(0) = 0$.
Ainsi

$$\begin{aligned}\| D^\beta u_p \|_0 &\leq 2^{pq} \| u \|_\alpha \int | \varphi^\vee(2^p(x-y)) | . | x-y |^{d(\alpha)} dy \\ &\leq 2^{pq} \| u \|_\alpha \int | \varphi^\vee(y) | . | y |^{d(\alpha)} dy.2^{-pd(\alpha)}\end{aligned}$$

Ce qui donne la majoration annoncée pour $p \geq 0$. D'autre part, on a :
$\| u_{-1} \|_0 \leq | \psi^\vee |_{L^1} . \| u \|_0$.

Proposition 4 *$(C_b^\alpha\ , \| \|_\alpha)$ est un espace de Banach, et quitte à multiplier la norme par une constante $(C_b^\alpha\ , \| \|_\alpha)$ est une algèbre de Banach. (α non entier).*

Preuve : D'après la proposition 1, il existe deux constantes positives a et b telles que :

$$a \| u \|_\alpha \leq Sup_p(2^{p\alpha} \| u_p \|_0) \leq b \| u \|_\alpha .$$

Soit (u^n) une suite de Cauchy dans l'éspace C_b^α.
d'une part on a :

la suite (u^n) converge vers u dans l'espace C_b^0, car $\|\ \|_0 \leq \|\ \|_\alpha$ et $(C_b^0\ ,\|\ \|_0)$ est un éspace complet, et de la relation

$$\begin{aligned} \| (u^n - u^m)_p \|_0 &= \| \varphi(2^{-p}z)^\vee * (u^n - u^m) \|_0 \\ &\leq | \varphi^\vee |_{L^1} . \| u^n - u^m \|_0 \end{aligned}$$

on déduit que pour tout entier p la suite (u_p^n) est une suite de Cauchy dans C_b^0, qui converge dans C_b^0 ; en passant à la limite dans la relation $u_p^n = \varphi(2^{-p}z)^\vee * u^n$, la limite de u_p^n est donc u_p.

D'autre part :
pour $\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tq : $\forall n, m \geq N(\varepsilon)$ on a : $Sup_p(2^{p\alpha} \| (u^n - u^m)_p \|_0) < \varepsilon$ ainsi :

$$\| (u^n - u^m)_p \|_0 < \varepsilon 2^{-p\alpha} \qquad \forall p \geq 0.$$

En faisant tendre l'entier m vers $+\infty$, on obtient :

$$2^{p\alpha} \| (u^n - u)_p \|_0 < \varepsilon \qquad \forall p \geq 0$$

et

$$Sup_p(2^{p\alpha} \| (u^n - u)_p \|_0) < \varepsilon$$

d'où :
la suite (u^n) converge vers u dans C_b^α, et l'éspace C_b^α est donc complet.

D'autre part, la propriété multiplicative de C_b^α résulte de l'inégalité suivante démontrée dans [2] : il existe une constante C_α telle que :

$$\| uv \|_\alpha \leq C_\alpha [\| u \|_0 \| v \|_\alpha + \| u \|_\alpha \| v \|_0]$$

$$\text{pour tout } \ u, v \in C_b^\alpha \ (\alpha \notin \mathbf{N}).$$

Théorème 1 *Dans* $\mathbf{C}$, *l'opérateur de Cauchy* A *est un opérateur borné de l'espace* C_Q^α *dans* $C^{\alpha+1}$ *pour tout* α *positif non entier. Il existe une constante* C *telle que la norme* $\| A \|_\alpha$ *vérifie la majoration suivante :*

$$\| A \|_\alpha \leq C^\alpha [(diamQ) + Max(\frac{1}{d(\alpha)}, \frac{1}{1 - d(\alpha)})]$$

pour tout α *dans* $\mathbf{R}_+ \backslash \mathbf{N}$. *On a noté* $diamQ$, *le diamètre de* Q.

Preuve : On s'appuie sur le résultat suivant dont la démonstration est reportée en fin.

Lemme 1

$$\| (Af)_p \|_0 \leq 2^{-p} \| f_p \|_0 \quad pourtout\ p \geq 0$$

$$\| (Af)_{-1} \|_0 \leq (diamQ). \| f \|_\alpha .$$

D'après la proposition 2, on a :

$$\| Af \|_{\alpha+1} \leq C^\alpha [\| (Af)_{-1} \|_0 + Max[\frac{1}{d(\alpha)}, \frac{1}{1-d(\alpha)}].Sup_{p\geq 0} \| 2^{p(\alpha+1)}(Af)_p \|_0]$$

On utilise maintenant le lemme :

$$\| Af \|_{\alpha+1} \leq C^\alpha [(diamQ). \| f \|_\alpha + \mathrm{Max}[\frac{1}{d(\alpha)}, \frac{1}{1-d(\alpha)}].Sup_{p\geq 0} \| 2^{p\alpha}(f)_p \|_0].$$

Il suffit maintenant d'appliquer la proposition 3 et de changer la constante C, pour obtenir le résultat.

Preuve du Lemme : Soit θ une fonction de classe C^∞ sur **C**, valant $\frac{1}{z}$ sur la couronne $\frac{1}{2} \leq |\ z\ | \leq 2$, et à support compact.

Puisque A est un inverse à droite de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, pour les fonctions à support compact on a :

$$\begin{aligned}
(f_p)^\wedge .2^{-p}.\theta(2^{-p}z) &= (\frac{\partial}{\partial \bar{z}} A(f))^\wedge_p .2^{-p}\theta(2^{-p}z) \\
&= [\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(A(f))_p]^\wedge .2^{-p}\theta(2^{-p}z) \\
&= (Af)^\wedge_p z.2^{-p}\theta(2^{-p}z) \\
&= (Af)^\wedge .\varphi(2^{-p}z).z.2^{-p}\theta(2^{-p}z) \\
&= (Af)^\wedge .\varphi(2^{-p}z) \\
&= (Af)^\wedge_p .
\end{aligned}$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned}
\| (Af)_p \|_0 &\leq 2^{-p} \mid \theta(2^{-p}z)^\vee \mid_{L^1} . \| f_p \|_0 \\
&\leq 2^{-p} \mid \theta^\vee \mid_{L^1} . \| f_p \|_0
\end{aligned}$$

2 Opérateurs différentiels rigides

Désignons par χ_k l'ensemble des germes des champs de vecteurs de classe C^k à l'origine de $\mathbf{R}^n$, et par $Diff^{k+1}$ le groupe local des germes de difféomorphismes à l'origine de $\mathbf{R}^n$ de classe C^{k+1}.
Soit X un élément de χ_k, on lui associe son flot F_X ; F_X est dans $Diff^k$.
Etant donné $\varphi \in Diff^{k+1}$, on définit $\varphi_* F_X$ par conjugaison :
$\varphi_* F_X = \varphi o F_X o \varphi^{-1}$, $\varphi_* F_X$ est un sous groupe à 1 paramètre de $Diff^k$. On a :

$$\varphi_* F_X = F_{\varphi_*(X)} \tag{1}$$

où

$$\varphi_*(X)(x) = d\varphi(\varphi^{-1}(x)) \, . \, X(\varphi^{-1}(x)) \text{ et de classe } C^k.$$

Soit P_k l'ensemble des opérateurs differentiels lineaires, d'ordre 1 dont les coéfficients sont des germes de fonctions de classe C^k à l'origine.

A tout X appartenant à l'ensemble χ_k, on lui associe l'élément L_X dans P_k, en posant par définition :

$$L_X(f) = \frac{d}{dt}[f o F_X^t(x)]_{t=0} \tag{2}$$

Le groupe $Diff^{k+1}$ agit par définition sur P_k de la facon suivante :

$$(\varphi_* L_X)_x(f) = (L_X)_{\varphi^{-1}(x)}(f o \varphi).$$

Ainsi on a la relation :

$$\varphi_* L_X = L_{\varphi_*(X)} \tag{3}$$

Supposons qu'il existe un sous-groupe local G à 1 paramètre de $Diff^{k+1}$ laissant l'opérateur L_X invariant (i.e il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(G^t)_* L_X = L_X$, $\forall \mid t \mid \leq \varepsilon$), alors pour tout élément φ de $Diff^{k+1}$, $\varphi_* G$ est un sous-groupe qui laisse l'opérateur $L_{\varphi_*(X)}$ invariant.

Soit Y le générateur infinitésimal de G (i.e $Y(x) = \frac{d}{dt}[G^t(x)]_{t=0}$). Si $Y(0) \neq 0$, alors d'après le théorème de linéarisation des champs de vecteurs, il existe un difféomorphisme $\varphi \in Diff^{k+1}$ tel que le groupe $\varphi_*(G)$ soit un groupe de translations le long du vecteur Y(0).

Ce groupe est donné par l'ensemble des transformations qui à tout x assez voisin de l'origine fait correspondre l'elément $x + tY(0)$. Il est alors clair qu'on a la proposition suivante :

Proposition 5 *Soit L un élément de P_k. S'il existe un sous-groupe à 1 paramètre de $Diff^{k+1}$ laissant l'opérateur L invariant, dont le générateur infinitésimal ne s'annule pas à l'origine alors :*
il existe un système de coordonnées locales $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans lequel L s'ecrit sous la forme :

$$L = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où les coefficients a_i (i=1,2,...,n) sont des fonctions de classe C^k.

Par complexification ce résultat s'étend au champs à coefficients complexes.

Proposition 6 *Soit $L_X \in \mathbf{C} \otimes P_k$, et $X \in \mathbf{C} \otimes \chi_k$ où X est le champ de vecteurs associé à l'opérateur différentiel donné par (2). On suppose que l'opérateur L_X est invariant par un sous-groupe à 1 paramètre de $Diff^{k+1}$, de générateur infinitésimal Y, tel que les vecteurs $X(0)$ et $Y(0)$ sont $\mathbf{C}$-linéairements indépendants. Alors :*
il existe un système de coordonnées locales dans lequel le champ L_X a pour forme :

$$L_X = A[\frac{\partial}{\partial x_1} + i \sum_{k=2}^{n} b_k(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_k}]$$

où les coefficients b_k(k=2,...,n) sont des fonctions réelles de classe C^k, et A une fonction non nulle à l'origine.

Preuve : D'après la proposition 5, il existe un système de coordonnées locales dans lequel
$L = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y(0) = (0, ..., 0, 1) \neq 0$.

Puisque $X(0)$ et $Y(0)$ sont linéairement indépendants, alors l'un des coefficients de L est non nul à l'origine.

En renumérotant les n-1 premières variables, on peut supposer que L s'écrit sous la forme :

$$L = A[\frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{i=2}^{n} a_i(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_i}].$$

Posons l'opérateur $N = \frac{\partial}{\partial x_1} + Re(\sum_{i=2}^{n-1} a_i(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_i})$.
soit α_j la solution du problème de Cauchy dans $\mathbf{R}^{n-1}(x_1, ..., x_{n-1})$ suivant :

$$\begin{cases} N\alpha_j = 0 \\ \alpha_j|_{x_1=0} = x_j, \quad j = 2, ..., n-1 \end{cases}$$

Soit β_n une solution dans $\mathbf{R}^{n-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} N(\beta_n) + Re(a_n) = 0 \\ \beta_n(0) = 0 \end{cases}$$

Les solutions $\alpha_2, \ ..., \ \alpha_{n-1}$ et β_n sont déterminées dans un voisinage de l'origine et le Jacobien $\frac{\partial(x_1, \alpha_2, \ ..., \ \alpha_{n-1}, \beta_n + x_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}(0) = 1$.

On peut donc prendre $(x_1, \alpha_2, \ ..., \ \alpha_{n-1}, \beta_n + x_n = \alpha_n)$ comme nouvelles coordonnées dans lesquelles le champ L devient

$$\begin{aligned} L &= L(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + L(\alpha_2)\frac{\partial}{\partial \alpha_2} + ... + L(\alpha_{n-1})\frac{\partial}{\partial \alpha_{n-1}} + L(\alpha_n)\frac{\partial}{\partial \alpha_n} \\ &= A[\frac{\partial}{\partial x_1} + i(Im(\sum_2^{n-1} a_i(x_1, ..., x_{n-1})\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_i}))\frac{\partial}{\partial \alpha_2} + ... + \\ &+ \ iIm(\sum_2^{n-1} a_i(x_1, ..., x_{n-1})\frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_i}))\frac{\partial}{\partial \alpha_{n-1}} + \\ & \quad +i(Im(\sum_2^{n-1} a_j(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\frac{\partial \beta_n}{\partial x_j}) + Im(a_n))\frac{\partial}{\partial \alpha_n}] \\ &= A[\frac{\partial}{\partial x_1} + i(\sum_{k=2}^{n} b_k(x_1, ..., x_{n-1})\frac{\partial}{\partial \alpha_k})]. \end{aligned}$$

où :

$$b_k(x_1, ..., x_{n-1}) = Im(\sum_{i=2}^{n-1} a_i(x_1, ..., x_{n-1})\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i}) \ , \ k = 2, ..., n-1$$

et

$$b_n(x_1, ..., x_{n-1}) = Im(\sum_2^{n-1} a_i(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\frac{\partial \beta_n}{\partial x_i}) + Im(a_n),$$

A est une fonction de classe C^k à valeurs complexes et non nulle à l'origine et b_k(k=2,...,n) des fonctions reèlles de classe C^k.

Définition 1 *Un germe L à l'origine, d'opérateurs différentiels linéaires d'ordre 1 à coéfficients de classe C^k et complexes, sera dit rigide, s'il existe un sous-groupe à 1 paramètre $\Phi \in Diff^{k+1}$, de générateur infinitésimal Y tel que :*
L soit invariant par Φ et tel que L, $\bar{L}$ et L_Y soient $\mathbf{C}$-linéairement indépendants.

Proposition 7 *Soit $L \in \mathbf{C} \otimes P_k$ qu'on suppose rigide alors :*
il existe un système de coordonnées locales dans lequel :

$$L = A[\frac{\partial}{\partial x_1} + i[\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \sum_{k=2}^{n} b_k(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\frac{\partial}{\partial x_k}]]$$

où les coéfficients b_k (k=2,...,n) sont des fonctions réelles de classe C^k en les variables $(x_2, ..., x_{n-1})$ et de classe C^{k-1} en $(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ et A est une fonction de classe C^k non nulle à l'origine.

Preuve : D'après ce qui précède, il existe un difféomorphisme $\Psi \in Diff^{k+1}$ pour lequel
$\Psi_*(L) = A[\frac{\partial}{\partial x_1} + i\sum_{k=2}^{n} b_k(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\frac{\partial}{\partial x_k}]$, où b_k(k=2,...,n) sont des fonctions réelles de classe C^k et le champ $\Psi_*(L_Y) = \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Comme L, $\bar{L}$ et L_Y sont linéairement indépendants, l'un des $b_k(0) \neq 0$ $(k = 2, ..., n-1)$
Écrivons la fonction b_k sous la forme

$$b_k(x_1, ..., x_{n-1}) = b'_k(x_2, ..., x_{n-1}) + x_1 c_k(x_1, ..., x_{n-1}),$$

alors b'_k sont des fonctions de classe C^k et c_k est de classe C^k en les variables $(x_2, ..., x_{n-1})$ et de classe C^{k-1} en $(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$.
Comme l'un des $b'_k(0)$ est non nul (k=2,...,n-1), on peut linéariser le champ $\sum_{k=2}^{n} b'_k(x_2, x_3, ..., x_{n-1})\frac{\partial}{\partial x_k}$ dans $\mathbf{R}^{n-2}(x_2, ..., x_{n-1})$, et en renumérotant éventuellement les nouvelles coordonnées, le champ L devient :

$$L = A[\frac{\partial}{\partial x_1} + i[\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \sum_{k=2}^{n} c_k(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\frac{\partial}{\partial x_k}]].$$

3 Réalisabilité locale des structures de Cauchy-Riemann rigides

Une structure de Cauchy-Riemann (Abrev C.R) sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^{2n-1}$ (n>1) est la donnée d'un sous fibré V de dimention n-1 de $\mathbf{C} \otimes T(\Omega)$ tel que $V \bigcap \bar{V} = \{0\}$ et $[V, V] \subset V$.

Une telle structure est dite localement réalisable en a, s'il existe un difféomorphisme Φ d'un voisinage de a sur une hypersurface M de $\mathbf{C}^n$ tel que $\Phi_*(V)$ soit la structure C.R de M (dite structure C.R standard) obtenue en restreignant à $\mathbf{C} \otimes T(M)$ la structure complexe de $\mathbf{C}^n$ engendrée par les champs $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$ (i= 1,2,...,n) et notée $T^{0,1}(M)$.

Ce problème se ramène à l'étude d'un système d'équations aux dérivées partielles par la proposition suivante :

Proposition 8 *Soit $\Phi = (\Phi_1, ..., \Phi_n)$ un difféomorphisme d'un voisinage de a sur une hypersurface M de $\mathbf{C}^n$ tel que $L(\Phi_k) = 0$, pour tout k= 1,2,...,n et tout L dans V.*

Alors $\Phi_*(V)$ est la structure C.R standard de M.

Preuve : On exprime $\Phi_*(L)$ dans la base $(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i})$:

$$\Phi_*(L) = L(\Phi_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + L(\bar{\Phi_1})\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + ... + L(\Phi_n)\frac{\partial}{\partial z_n} + L(\bar{\Phi_n})\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n},$$

la proposition exprime l'appartenance à $(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, ..., \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n})$ de $\Phi_*(L)$ pour tout L dans V.

Lorsque n = 2, on sait d'après Nirenberg [9], qu'étant donné un champ L engendrant une structure C.R sur $\mathbf{R}^3$, le système $L(\Phi_1) = L(\Phi_2) = 0$ peut n'avoir que des solutions triviales.

Plus précisément soit $L = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} - iz_1\frac{\partial}{\partial u}$ (L est le champ de vecteurs qui engendre $T^{0,1}(S)$, où S est l'hypersuface de $\mathbf{C}^2$ d'équations $Imz_2 - \mid z_1 \mid^2 = 0$, $u = Rez_2$, est biholomorphe à la sphère S^3) alors il existe un champ $\tilde{L}$ tangent à l'ordre infini (à l'origine) à L, tel que

les seules solutions de l'équation $\tilde{L}(\Phi) = 0$ sont les fonctions constantes.

Cet exemple a été étendu par Jacobowitz [6], aux champs L engendrant $T^{0,1}(M)$ pour toute hypersurface M strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^2$.

La structure de Cauchy-Riemann V est dite strictement pseudo-convexe en a si la forme hermitienne définie sur $V_a \times V_a$ par :

$\mathcal{L}(L, M) = i[L, \bar{M}]$ $(modV_a + \bar{V}_a)$ est définie positive ou négative.

On sait qu'une structure C.R, indéfiniment différentiable et strictement pseudo-convexe en a est localement réalisable lorsque $n \geq 4$ [1], [8] et [12] pour $n = 3$, le problème est ouvert ; pour $n = 2$ la structure C.R peut n'être pas localement réalisable comme il vient d'être décrit.

Hypersurface rigide :

Définition 2 *Soit M un germe à l'origine d'hypersurfaces de classe C^k de $\mathbf{C}^n$; M est dit rigide à l'origine s'il existe un germe X de champs de vecteurs holomorphes, sans point critique dont la partie réelle est tangente à M.*

Proposition 9 *Supposons que le germe M est rigide. Alors :*

il existe un système de coordonnées holomorphes dans un voisinage $\mathcal{V}$ de l'origine de $\mathbf{C}^n$, pour lequel M a une équation de la forme :

$M = \{Imz_n = f(z_1, ..., z_{n-1})\}$, où f est une fonction de classe C^k, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

De plus le sous-fibré $T^{0,1}(M)$ de $\mathbf{C} \otimes TM$ a une base formée d'opérateurs différentiels rigides pour un même sous groupe à un paramètre dans le groupe $Diff^{k+1}$.

Preuve : D'après le théorème de linéarisation des champs de vecteurs holomorphes, il existe un système de coordonnées holomorphes dans un voisinage de l'origine $\mathcal{V}$ dans lequel le champ X prend la forme $X(z) = (0, ..., 0, 1)$.

Le plan tangent de M à l'origine est alors défini par $T_0(M) = \{Imz_n = 0\}$, et l'hypersurface M prend la forme $M = \{Imz_n - f(z_1, ..., z_{n-1}, Re(z_n)) = 0\}$, avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Enfin puisque le vecteur X(z) est tangent à M, la fonction f est indépendante de Re(z_n).

Si on paramètre M par $(z_1, ..., z_{n-1}, Re(z_n))$, alors tout élément L de $T^{0,1}(M)$ a pour base des opérateurs différentiels L_k de la forme suivante :

$$L_k = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} - i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}\frac{\partial}{\partial u}\ , \ u = Re(z_n)\ , (k = 1, ..., n-1)$$

Les opérateurs L_k sont donc rigides.

M.S.Baouendi, L.P.Rothshild et F.Trèves [3] démontrent pour les structures C.R. rigides et indéfiniment différentiables la réciproque ; ils prouvent qu'une telle structure C.R est localement réalisable sur une hypersurface rigide.

Rappelons la définition de la rigidité des structures de Cauchy-Riemann introduite par ces auteurs [3].

Définition 3 *La structure de Cauchy-Riemann V est dite rigide sur Ω s'il existe une sous algèbre de Lie $\mathcal{G}$, de dimension finie, de l'espace des sections $C^\infty(\Omega, T\Omega)$ telle que :*

* $V_a + \bar{V}_a + (\mathcal{G}_a \otimes \mathbf{C}) = \mathbf{C} \otimes T_a(\Omega) \qquad \forall a \in \Omega$

* $[\mathcal{L}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{L}$ *avec* $\mathcal{L} = C^\infty(\Omega, V)$

* $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = 0$

On a vu au chapitre II, que cette définition coïncide lorsque n = 2 avec celle que nous avons donnée.

D'autre part E.M.Chirka, utilisant une extension en classe C^{k+a} ($k \geq 1, 0 < \alpha < 1$) du théorème de Nirenberg-Newlander obtenu par SM. Webster [13] étend le résultat de [3] cité plus haut aux champs rigides de classe C^{k+a}.

Lorsque $n = 2$, c'est-à-dire dans $\mathbf{R}^3$, nous proposons dans ce qui suit une nouvelle démonstration du résultat de Chirka [5] reposant sur les propriétés de l'opérateur de Cauchy dans les classes Hölderiennes.

On reprend les notations du chapitre II ; on a établi l'existence d'un système de coordonnées locales dans lesquelles le champ L définissant la structure C.R. rigide de $\mathbf{R}^3$ a pour forme, au voisinage de l'origine :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\partial}{\partial x} + itb_1(t,x)\frac{\partial}{\partial x} + itb_2(t,x)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{4}$$

Définition 4 *Nous dirons qu'une structure C.R. rigide de $\mathbf{R}^3$ est dans la classe Hölderienne C^α si les fonctions b_1 et b_2 de (1) sont dans cette classe, au voisinage de l'origine.*

Cette définition est intrinsèque par la proposition suivante :

Proposition 10 *Soit Φ un difféomorphisme local, conservant l'origine, transformant le champ (1) en un champ du même type :*

$$\Phi_*(L) = \frac{\partial}{\partial t'} + i\frac{\partial}{\partial x'} + it'\tilde{b_1}(t',x')\frac{\partial}{\partial x'} + it'\tilde{b_2}(t',x')\frac{\partial}{\partial y'}.$$

Alors en supposant seulement b_1, $\tilde{b_1}$, b_2, $\tilde{b_2}$ continues dans un voisinage de l'origine, $\tilde{b_1}$ et $\tilde{b_2}$ sont liées à b_1 et b_2 par les relations suivantes :

$\tilde{b_2} = d.b_2$, $\tilde{b_1} = b_1 + c.b_2$, où c et d sont des constantes avec d non nulle.

Preuve : Désignons par (Φ_1, Φ_2, Φ_3) les composantes de Φ, on a :

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + i(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + tb_1(t,x)\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + tb_2(t,x)\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}) = 1 \tag{5}$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + i(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + tb_1(t,x)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + tb_2(t,x)\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}) = i[1 + \Phi_1.(\tilde{b_1} o \Phi)] \tag{6}$$

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}+i(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x}+tb_1(t,x)\frac{\partial\Phi_3}{\partial x}+tb_2(t,x)\frac{\partial\Phi_3}{\partial y})=i\Phi_1.(\tilde{b_2}o\Phi) \tag{7}$$

Supposons b_2 et $\tilde{b_2}$ non identiquement nulles; quitte à considérer Φ^{-1} au lieu de Φ, on peut supposer b_2 non identiquement nulle. La relation (2) donne : $\Phi_1=t+c(x,y)$ et $\frac{\partial c}{\partial x}+tb_1(t,x)\frac{\partial c}{\partial x}+tb_2(t,x)\frac{\partial c}{\partial y}=0$.

En posant $t=0$, on obtient $\frac{\partial c}{\partial x}=0$, puis $b_2(t,x)c'(y)=0$

Ainsi $\Phi_1=t$

Les relations (3) et (4) donnent la relation (5) suivante :

$$\Phi_2=x+c(y)\ ,\qquad c(0)=0$$

$$b_1(t,x)+b_2(t,x)c'(y)=\tilde{b_1}(t,x+c(y)) \tag{8}$$

$$\Phi_3=d(y)\ ,\qquad d(0)=0\ ,\qquad d'(0)\neq 0$$

$$b_2(t,x)d'(y)=\tilde{b_2}(t,x+c(y))$$

En posant $y=0$ dans (5), on obtient

$$\tilde{b_2}(t,x)=b_2(t,x)d'(0)$$

$$\tilde{b_1}(t,x)=b_1(t,x)+b_2(t,x).c'(0).$$

Considérons maintenant le cas où b_2 et $\tilde{b_2}$ sont identiquement nulles; le début de la discussion du cas précédent montre

$$\Phi_1=t+c(y),c(0)=0$$

$$\Phi_2 \text{ est independant de } t \tag{9}$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+tb_1(t,x)\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}=1+(t+c(y)).\tilde{b_1}(t+c(y),\Phi_2) \tag{10}$$

Posons $t=y=0$ dans la dernière relation de (6), on obtient : $\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}(0,x)=1$, ce qui entraine $\Phi_2(0,x)=x$.

Posons maintenant seulement $y=0$, on obtient $\tilde{b_1}(t,x)=b_1(t,x)$.

Théorème 2 *Soit L une structure de Cauchy-Riemann rigide appartenant à la classe Hölderiènne C^α dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^3$. Si α est un réel positif non entier, alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de l'origine de $\mathbf{R}^3$ et une immersion Φ de $\mathcal{V}$ sur une hypersurface rigide de $\mathbf{C}^2$, telle que Φ soit dans la classe C^α, et telle que $\Phi_*(L)$ soit la structure complexe standard de M, c.à.d $\Phi_*(L)=T^{0,1}(M)$.*

Preuve : On introduit l'application u de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{C}^2$, définie par $u(t,x,y) = (x - it, y)$; on cherche Φ sous la forme $\Phi = u - H$.

On considère l'equation

$$L(H) = L(u) \tag{1}$$

D'après la proposition 8, il s'agit de montrer que (1) admet, dans un voisinage convenable de l'origine, une solution dans la classe Hölderienne C^α, telle que $H'(0)$ soit assez petit pour que Φ soit une immersion.

La proposition 7 permet de prendre des coordonnées locales dans lesquelles L est de la forme :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i(\frac{\partial}{\partial x} + tb_1(t,x).\frac{\partial}{\partial x} + tb_2(t,x).\frac{\partial}{\partial y})$$

Par hypothèse b_1 et b_2 appartenant à C^α dans un voisinage compact de l'origine que l'on notera Q dans la suite. On a :

$$Lu = it(b_1, b_2).$$

Puisque Lu est indépendant de y, on peut chercher une solution de l'équation (1) sous la forme $H = \frac{1}{2}A(V)$, alors A étant un inverse à droite de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, (1) devient :

$$V + \frac{i}{2}tb_1.\frac{\partial}{\partial x}oA(V) = L(u). \tag{2}$$

Soit χ_Q une fonction plateau à support dans le compact Q et valant 1 dans $\frac{1}{2}.Q$.

Soit ε un réel > 0 et considérons l'équation :

$$W(z) + \frac{i}{2}\varepsilon.t.b_1(\varepsilon z).(\frac{\partial}{\partial x}oAW)(z).\chi_Q(z) = \chi_Q(z)Lu(\varepsilon z) \tag{3}$$

où

$$z = t + ix$$

alors la fonction $V(z) = W(\frac{z}{\varepsilon})$ sera solution de l'équation (2) sur le compact $\frac{\varepsilon}{2}.Q$.

En effet :

on a $AV(z) = \varepsilon.AW(\frac{z}{\varepsilon})$ et $(\frac{\partial}{\partial x}AV)(z) = (\frac{\partial}{\partial x}AW)(\frac{z}{\varepsilon})$ lorsque $V(z) = W(\frac{z}{\varepsilon})$.

Soit T_ε l'opérateur défini par :

$$T_\varepsilon(W)(z) = \frac{i}{2}\varepsilon.t.b_1(\varepsilon z).(\frac{\partial}{\partial x}oAW)(z).\chi_Q(z).$$

On sait, d'après le chapitre I, que $\frac{\partial}{\partial x}oA$ est un opérateur borné de C^α_Q dans C^α et que C^α est une algèbre de Banach.Il est alors clair que T_ε est un opérateur borné de C^α_Q et que la norme $\| T_\varepsilon \|_{C^\alpha_Q} = O(\varepsilon)$.

On choisit ε assez petit pour que Id + T_ε soit inversible dans C_Q^α.
Considérons :

$$\begin{aligned} W &= (Id + T_\varepsilon)^{-1}(Lu(\varepsilon z).\chi_Q(z)) \\ &= i\varepsilon.(Id + T_\varepsilon)^{-1}[\chi_Q(z).(tb_1(\varepsilon z), tb_2(\varepsilon z))]. \end{aligned}$$

Alors $H(z) = \frac{1}{2}AV(z) = \frac{\varepsilon}{2}AW(\frac{z}{\varepsilon})$ sera dans la classe C^α et solution de (1). De plus $H'(0) = \frac{1}{2}AW(0) = O(\varepsilon)$.

Ainsi pour ε assez petit $\Phi = u - H$ sera une immersion dans $\mathbf{C}^2$, appartenant à la classe C^α, du voisinage $\frac{\varepsilon}{2}.Q$ de l'origine de $\mathbf{R}^3$. Ce qui termine la construction de Φ.

Il reste à verifier que l'image M d'un voisinage de l'origine de $\mathbf{R}^3$ par Φ est une hypersurface rigide.

Désignons par Φ_1 et Φ_2 (resp. H_1 et H_2) les composantes de Φ (resp. H) dans $\mathbf{C}^2$.

On a :

$$Re\Phi_1 = x - ReH_1(t, x)$$

$$Im\Phi_1 = -t - ImH_1(t, x)$$

$$Im\Phi_2 = ImH_2(t, x).$$

Comme $H'(0)$ est un $O(\varepsilon)$, on peut choisir ε assez petit pour que l'application qui a l'elément (t, x) associe $(Re\Phi_1, Im\Phi_1)$ soit un difféomorphisme local.
Il existe donc une application θ de classe C^1 telle que l'equation de M soit dans un voisinage de l'origine :

$$Im\Phi_2 = ImH_2 \ o \ \theta(Re\Phi_1, Im\Phi_1).$$

Ainsi M est rigide dans ce voisinage de l'origine.

Références

[1] Akahori A., A new approach to the local embedding theorem of C.R structures for $n \geq 4$, Mem. Amer. Math. Soc. n^0 366, Providence, R.I., (1987).

[2] Alinhac S., Gérard P. Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser, Editions du CNRS.

[3] Baouendi M.S., Rothschild L.P. and Trèves F., CR structures with group action and extendability of CR functions, Invent. Math. 82 : 359-396 (1985).

[4] Bogess A., CR Manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex, Studies in advanced Mathematics (1991).

[5] Chirka E.M., Introduction to the geometry of CR manifolds, Math. Survey 46-1 (1991).

[6] Jacobowitz H., An introduction to CR structures, Mathematical surveys and monographs, 32, (AMS), (1990).

[7] Jacobowitz H., and Trèves F., Non realizable, CR structures, Invent. Math. **66** : 231-249, (1982).

[8] Kuranishi M., Strongly pseudoconvex CR structures over small balls, I, Ann. of Math. **115** : 451-500, 1982); II, Ann. of Math. **116** : 1-64, (1982); III, Ann. of Math. **116** : 249-330 (1982).

[9] Nirenberg L., On a question of Hans Lewy, Russian Math. Surveys 29 : 251-262 (1974).

[10] Rosay J.P., New exemple of non locally embeddable CR structures, Ann. Inst. Fourier, **39**, 3, 811-823 (1989).

[11] Stein E.M., Harmonic Analysis, Princeton Mathematical Series, 43.

[12] Webster S., On the proof of Kuranishi's Embedding Theorem, Annals Inst. H. Poincaré **6**,(1989) 183-207.

[13] Webster S., A new proof of the Niremberg-Newlander Theorem, Math. Z. **201**, (1989), 303-316.