N° d'ordre : 2182

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Caroline NOQUET

PRINCIPE D'INVARIANCE LOCAL POUR LES CHAÎNES DE MARKOV

Soutenue le 16 Décembre 1997 devant la Commission d'Examen :

Président :	Ch. SUQUET, Université de Lille I
Directeur de Thèse :	Y. DAVYDOV, Université de Lille I
Rapporteurs :	G. LETAC, Université Paul Sabatier, Toulouse
	J. MÉMIN, Université de Rennes
Examinateurs :	B. MASSÉ, Université du Littoral
	Y. DAVYDOV, Université de Lille I

A mon père,
A mon grand-père.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à :

Monsieur Gérard Letac et Monsieur Jean Mémin qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse. Je les remercie pour leurs remarques constructives et leurs conseils.

Monsieur Charles Suquet et Monsieur Bruno Massé qui m'ont fait l'honneur d'être membres du jury.

Mon directeur de thèse, Monsieur Youri Davydov, qui m'a proposé l'idée de ce travail. Sa participation, ses nombreux conseils, ses remarques et ses encouragements ont été décisifs pour sa réalisation.

Monsieur Michel Gordin, qui m'a prodigué de nombreux conseils concernant la théorie des chaînes de Markov.

Les membres du laboratoire de Statistique et Probabilités, notamment Monsieur Charles Suquet, qui m'a apporté son aide pour les formalités administratives et Monsieur Daniel Flipo, qui n'a pas hésité à répondre à mes questions concernant l'utilisation du traitement de texte, Nelly pour l'aide qu'elle m'a apportée à la mise en page de ce texte.

Le personnel du secrétariat scientifique, ainsi que le personnel de l'imprimerie qui ont contribué à la réalisation matérielle de ce manuscrit.

Ma famille et amis à qui je dédie cette thèse pour le soutien moral et financier qu'ils m'ont apporté durant toutes mes études, ainsi que David pour son infinie patience.

Table des matières

Introduction

Le point de départ de ce travail est une étude réalisée par Y. A. Davydov, lequel a montré un principe d'invariance (P.I.) local pour une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d.). Le premier objectif était donc de généraliser ce résultat au cas des chaînes de Markov (c.m.).

La méthode utilisée par Y. A. Davydov consiste, dans un premier temps, à majorer la distance en variation (notée $\| \ \|$) entre la loi d'une suite et la loi translatée, en faisant apparaître des quantités de type Fisher. En effet, considérons une suite $\xi = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de v.a.i.i.d.. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la v.a. ξ_k est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue. Supposons que la densité p de ξ_k est absolument continue (a.c.) et définissons la quantité de Fisher associée à p par

$$I(p) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p'}{p}(x) \right]^2 p(x)\, dx.$$

Soit $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle et $n \in \mathbb{N}^*$. Notons P_n, P_n^a les lois respectives des vecteurs $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et $\bar{\xi} + \bar{a} = (\xi_1 + a_1, \ldots, \xi_n + a_n)$ et $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^a$ les lois respectives des suites ξ et $\xi + a = (\xi_k + a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. Si $I(p)$ est finie, alors Y. A. Davydov a montré les inégalités suivantes

$$\|P_n^a - P_n\| \leq \sqrt{I(p)} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2},$$

$$\|\mathcal{P}^a - \mathcal{P}\| \leq \sqrt{I(p)} \sqrt{\sum_{k \geq 1} a_k^2}.$$

Nous supposons bien sûr que $a \in \ell_2$ dans la deuxième inégalité, sinon la majoration serait triviale, avec

$$\ell_2 = \left\{ a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \,|\, \forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k \in \mathbb{R} \text{ et } \sum_{k \geq 1} a_k^2 < \infty \right\}.$$

Une inégalité de même type existe aussi dans le cas où ξ est une suite de v.a.i. n'ayant plus la même loi.

Ensuite, grâce à la première inégalité, Y. A. Davydov a montré un P.I. local pour les fonctionnelles stochastiques dans le P.I. de Donsker-Prokhorov. Ici, la suite ξ est telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(\xi_k) = 0$ et $\mathrm{Var}(\xi_k) = \sigma^2 < \infty$. Posons $S_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et construisons le processus polygonal ζ_n obtenu à partir des points $(k/n, S_k/\sigma\sqrt{n})$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Il est défini pour tout $t \in [0;1]$ et tout $\omega \in \Omega$ par

$$\zeta_n(t,\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\Big[S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}(\omega)\Big],$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x. Notons $\mathbb{C}[0;1]$ l'espace des fonctions continues sur $[0;1]$ et notons P_n la loi de ζ_n dans $\mathbb{C}[0;1]$. Le P.I. de Donsker-Prokhorov (théorème 10.1, [1]) affirme que $P_n \Rightarrow W$, où W est la loi du processus de Wiener défini par $\{w(t); t \in [0;1]\}$ et « $\Rightarrow$ » désigne la convergence en loi. Du résultat précédent, nous pouvons déduire que si φ est une fonctionnelle définie sur $\mathbb{C}[0;1]$, W-presque partout (p.p.) continue, alors

$$P_n\varphi^{-1} \Rightarrow W\varphi^{-1},$$

c'est-à-dire que nous avons ici la convergence faible. Y. A. Davydov s'est alors intéressé aux hypothèses qu'il faut ajouter pour établir la convergence en variation et il a montré qu'en imposant des conditions plus fortes sur la distribution commune des v.a. ξ_k et qu'en restreignant la classe des fonctionnelles, il est possible de montrer que $P_n\varphi^{-1}$ converge en variation vers $W\varphi^{-1}$, que nous noterons

$$P_n\varphi^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{var} W\varphi^{-1}.$$

La première étape de ce travail a donc été de généraliser les inégalités ci-dessus au cas des c.m. homogènes stationnaires ou non. Ensuite, nous sommes revenus au cas d'une suite de v.a.i. et nous avons majoré la distance en variation entre la loi de cette suite et la loi de la suite translatée par une autre suite de v.a.i.. Ce travail constitue l'objet du premier chapitre et s'effectue en deux temps. En effet, il faut d'abord estimer la distance en variation entre la loi d'un vecteur de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) et la loi du vecteur translaté. Puis, nous avons montré qu'on l'on peut passer à la limite dans cette majoration.

Quand nous nous sommes intéressés aux différentes applications de ce type d'inégalités, nous avons constaté qu'elles pouvaient nous permettre d'étudier la continuité absolue entre la loi d'une suite et la loi translatée. Bien sûr, cette question a déjà été largement étudiée par L. A. Shepp (1965) dans le cas d'une suite de v.a.i.i.d. lorsque la translation est non aléatoire. D'autre part, H. Sato (1991) a étudié la continuité absolue entre des chaînes de Markov localement équivalentes. Enfin, concernant le cas des v.a.i.i.d. lorsque la translation est aléatoire, des résultats ont été donnés par H. Sato, M. Tamashiro et C. Watari (1993-1994). Dans le deuxième chapitre, nous avons pu grâce aux inégalités, aborder ce problème de façon unique.

Enfin, le troisième chapitre consiste à utiliser la méthode de Y. A. Davydov pour touver un P.I. local pour les c.m.. Nous avons effectué ce travail dans le cas des c.m. homogènes stationnaires et dans le cas des c.m. homogènes non stationnaires. Pour ce faire, considérons une c.m. $\xi = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous définissons le processus polygonal construit à partir des $(n+1)$ points $(0,0)$ et $(k/n, S_k/\sqrt{n})$ pour tout $1 \leq k \leq n$, où $S_k = f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_k)$. Celui-ci s'écrit pour tout $t \in [0;1]$ et tout $\omega \in \Omega$

$$\zeta_n(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} \Big[S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt]) f(\xi_{[nt]+1}(\omega)) \Big].$$

Comme d'habitude, la loi de ζ_n est notée P_n. Tout d'abord, nous avons supposé la convergence faible de cette suite de lois (P_n), c'est-à-dire $P_n \Rightarrow W_c$, où W_c est la loi du processus défini par $\{cw(t); t \in [0;1]\}$ avec c une certaine constante. Nous avons montré qu'en restreignant la classe des fonctionnelles φ et en ajoutant certaines conditions sur f, il était possible d'en déduire, grâce à un théorème limite local pour les fonctionnelles stochastiques dû à Y. A. Davydov, que nous avions aussi la convergence forte, c'est-à-dire

$$P_n \varphi^{-1} \xrightarrow[n \to \infty]{var} W_c \varphi^{-1}.$$

Enfin, nous avons recherché dans tous les résultats existant déjà sur la convergence faible de la suite de lois (P_n), le plus approprié à notre situation. En particulier, nous nous sommes intéressés au cas des c.m. Harris-récurrentes. Cela nous a alors permis d'énoncer un P.I. local pour les c.m. homogènes stationnaires, puis pour les c.m. homogènes non stationnaires.

Chapitre 1

Inégalités pour la distance en variation entre la loi d'une suite aléatoire et la loi translatée

1.1 Introduction

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux inégalités dans le cas fini, c'est-à-dire que nous allons majorer la distance en variation entre la loi d'un vecteur aléatoire de dimension n et la loi du vecteur translaté. Cette étude a déjà été réalisée par Y. A. Davydov [4], dans le cas des v.a.i.i.d., mais aussi dans le cas des v.a.i. n'ayant plus la même loi.

En effet, soit $\xi = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d., définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de loi P_n et $\bar{\xi} + \bar{a} = (\xi_1 + a_1, \ldots, \xi_n + a_n)$ de loi P_n^a. De plus, nous supposons que la densité p de la v.a. ξ_k est a.c.. La quantité de Fisher $I(p)$ est définie par

$$I(p) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p'}{p}(x) \right]^2 p(x)\, dx.$$

Dans ce cas, si $I(p) < \infty$, l'inégalité démontrée par Y. A. Davydov [4] est la suivante

$$\| P_n^a - P_n \| \leq \sqrt{I(p)} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}. \tag{1.1}$$

De même, supposons que les v.a. ξ_k sont indépendantes, mais n'ont plus la même loi. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la densité p_k de la v.a. ξ_k est supposée a.c.. La quantité de Fisher relative à p_k est $I(p_k)$. Avec les mêmes notations, si pour tout

$1 \leq k \leq n$, $I(p_k) < \infty$, alors nous avons

$$\| P_n^a - P_n \| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 I(p_k)}. \tag{1.2}$$

L'objectif de ce chapitre est tout d'abord de généraliser ces inégalités au cas des c.m. homogènes stationnaires ou non. D'autre part, nous nous intéressons au cas où la translation est aléatoire. Pour ce faire, nous considérons aussi une suite $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de v.a.i.i.d. et $\eta = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i., indépendante de la suite ξ et nous étudions la distance en variation entre la loi du vecteur $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et la loi du vecteur $\bar{\xi} + \bar{\eta} = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n)$.

Enfin, il est intéressant d'étudier le comportement de ces inégalités lorsque n tend vers l'infini, cela constituera l'objet du dernier paragraphe de ce chapitre.

1.2 Cas des chaînes de Markov homogènes stationnaires

1.2.1 Notations et définition

Soit $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une c.m. homogène stationnaire, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, de loi de probabilité initiale stationnaire Π et de noyau de probabilité de transition P. Nous supposons que la densité π de Π est a.c.. La famille $\{p(x,.); x \in \mathbb{R}\}$ est la famille des densités de probabilité de transition de P. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous supposons que la densité $p(x,.)$ est a.c.. Nous noterons π' la dérivée de π et p'_x, p'_y les dérivées de p respectivement par rapport à la première et à la deuxième coordonnée, en supposant que ces quantités sont définies et existent au sens usuel de la dérivabilité.

Considérons la chaîne inversée (par rapport à la loi de probabilité initiale stationnaire Π) et notons Q son noyau de probabilité de transition. Alors Q est défini par la famille des densités de probabilité de transition $\{q(y,.); y \in \mathbb{R}\}$ où

$$q(y,.) = \frac{\pi(.)p(.,y)}{\pi(y)}.$$

Définissons la notion de I-régularité suivante (voir [13], §7).

Définition 1.1 *Soit O un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. La famille des densités de probabilité $\{p(.,\theta); \theta \in O\}$ est dite I-régulière (ou d'information régulière) si l'application*

$$\begin{array}{ll} O & \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \lambda) \\ \theta & \longmapsto p^{1/2}(.,\theta), \end{array}$$

est continûment différentiable (au sens des normes standard de $\mathbb{R}$ et $L^2(\mathbb{R}, \lambda)$).

Remarque 1.1 Cela implique que pour tout $\theta \in O$, $\frac{\partial}{\partial\theta}p^{1/2}(.,\theta) \in L^2(\mathbb{R},\lambda)$. Appelons $I(\theta)$ la quantité d'information associée définie par

$$I(\theta) = 4\left\|\frac{\partial}{\partial\theta}p^{1/2}(.,\theta)\right\|_2^2,$$

où $\| \quad \|_2$ désigne la norme dans $L^2(\mathbb{R},\lambda)$.

Remarque 1.2 Même si nous ne supposons pas l'existence des dérivées ponctuelles, nous avons certaines conséquences qui découlent de la I-régularité. En effet, posons

$$\Phi(.,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}p^{1/2}(.,\theta),$$

alors nous avons la représentation suivante

$$2\Phi(.,\theta)p^{1/2}(.,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}p(.,\theta).$$

Donc si l'application $\theta \longmapsto p^{1/2}(.,\theta)$ est différentiable (comme une application à valeurs dans $L^2(\mathbb{R},\lambda)$), alors l'application $\theta \longmapsto p(.,\theta)$ est différentiable (comme une application à valeurs dans $L^1(\mathbb{R},\lambda)$). Par conséquent, $I(\theta)$ peut s'écrire sous la forme usuelle de la quantité de Fisher

$$I(\theta) = \int_{\mathbb{R}}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}p(x,\theta)}{p(x,\theta)}\right]^2 p(x,\theta)\,dx.$$

Posons $J = \{x \in \mathbb{R} | \pi(x) > 0\}$. Grâce à la stationnarité, il est clair que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de la v.a. ξ_k est concentrée sur J. Nos hypothèses de I-régularité sont les suivantes.

(R) La famille $\{\pi(.+t); t \in \mathbb{R}\}$ est I-régulière.

La quantité de Fisher associée ne dépend pas de t et sera notée $I(\pi)$. Elle est donc définie par

$$I(\pi) = \int_{\mathbb{R}}\left[\frac{\pi'}{\pi}(x)\right]^2 \pi(x)\,dx = \int_J\left[\frac{\pi'}{\pi}(x)\right]^2 \pi(x)\,dx. \qquad (1.3)$$

Il est clair que $I(\pi) < \infty$.

Remarque 1.3 Dans ce cas, il est suffisant de supposer la différentiabilité de l'application en $t = 0$ seulement. En effet, la translation $\pi^{1/2}(.) \longmapsto \pi^{1/2}(.+t)$ est un opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R},\lambda)$.

Remarque 1.4 Sous la condition **(R)**, π a une version a.c.. En effet, si $\| \quad \|_1$ désigne la norme dans $L^1(\mathbb{R},\lambda)$, grâce à la remarque 1.2, nous avons

$$\left\|\pi(.+t) - \pi(.) - \int_0^t \pi'(.+u)\,du\right\|_1 = o(t).$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\left\|\pi(.+t)-\pi(.)-\int_0^t \pi'(.+u)\,du\right\|_1\\
&\quad\leq \sum_{k=1}^{n}\left\|\pi\Big(.+\frac{k}{n}t\Big)-\pi\Big(.+\frac{k-1}{n}t\Big)-\int_{\frac{k-1}{n}t}^{\frac{k}{n}t}\pi'(.+u)\,du\right\|_1\\
&\quad= n\left\|\pi\Big(.+\frac{t}{n}\Big)-\pi(.)-\int_0^{\frac{t}{n}}\pi'(.+u)\,du\right\|_1\\
&\quad= n\,o\left(\frac{t}{n}\right)\to 0,\quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $t\in\mathbb{R}$ et pour presque tout $x\in\mathbb{R}$, nous avons

$$\pi(x+t)-\pi(x)=\int_0^t \pi'(x+u)\,du.$$

Posons

$$\tilde{\pi}(x)=\int_{-\infty}^{x}\pi'(u)\,du.$$

Alors $\tilde{\pi}$ est a.c. et pour tout $t\in\mathbb{R}$, nous avons

$$\tilde{\pi}(.+t)-\tilde{\pi}(.)=\pi(.+t)-\pi(.),$$

$$(\tilde{\pi}-\pi)(.+t)=(\tilde{\pi}-\pi)(.),$$

c'est-à-dire que $\tilde{\pi}-\pi$ est une constante p.p.. Mais grâce au lemme 1.1 qui est démontré p.11, nous savons que

$$\lim_{|x|\to\infty}\tilde{\pi}(x)=0$$

et $\pi\in L^1(\mathbb{R},\lambda)$, donc cette constante est nulle.

Nos autres hypothèses de I-régularité sont les suivantes.

$(\mathbf{R}^+)$ La famille $\{p(x,.);x\in J\}$ est I-régulière.

Nous noterons $I^+(x)$ la quantité de Fisher associée, définie pour tout $x\in J$ par

$$I^+(x)=\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{p'_x}{p}(x,y)\right]^2 p(x,y)\,dy=\int_J\left[\frac{p'_x}{p}(x,y)\right]^2 p(x,y)\,dy. \tag{1.4}$$

$(\mathbf{R}^-)$ La famille $\{q(y,.);y\in J\}$ est I-régulière.

Nous noterons $I^-(y)$ la quantité de Fisher associée, définie pour tout $y \in J$ par

$$\begin{aligned}
I^-(y) &= 4\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial}{\partial y} q^{1/2}(y,x)\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\frac{\partial}{\partial y} q(y,x)}{q^{1/2}(y,x)}\right|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\frac{\partial}{\partial y} q(y,x)}{q(y,x)}\right|^2 q(y,x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p'_x}{p}(x,y) - \frac{\pi'}{\pi}(y)\right]^2 \frac{\pi(x)p(x,y)}{\pi(y)}\, dx \\
&= \int_J \left[\frac{p'_x}{p}(x,y) - \frac{\pi'}{\pi}(y)\right]^2 \frac{\pi(x)p(x,y)}{\pi(y)}\, dx. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Nous supposons de plus que

$$\int_J I^+(x)\pi(x)\, dx < \infty, \qquad (1.6)$$

$$\int_J I^-(y)\pi(y)\, dy < \infty. \qquad (1.7)$$

Nous noterons alors

$$I = I(\pi) + \int_J I^+(x)\pi(x)\, dx + \int_J I^-(y)\pi(y)\, dy.$$

Enfin, soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. De la même façon que dans le paragraphe 1.1, nous définissons les vecteurs aléatoires $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de loi P_n et $\bar{\xi} + \bar{a} = (\xi_1 + a_1, \ldots, \xi_n + a_n)$ de loi P_n^a.

1.2.2 Résultat

Le problème est de majorer la distance en variation entre P_n et P_n^a dans le but d'obtenir une inégalité de type (1.1). Nous rappelons que

$$\begin{aligned}
\| P_n^a - P_n \| = \int_{\mathbb{R}^n} \Big|\pi(x_1 + a_1) \prod_{k=2}^n p(x_{k-1} + a_{k-1}, x_k + a_k) \\
- \pi(x_1) \prod_{k=2}^n p(x_{k-1}, x_k)\Big|\, d\bar{x}, \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

où $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 1.1 *Sous les hypothèses* (**R**), (**R**$^+$), (**R**$^-$), (1.6) *et* (1.7), *l'inégalité suivante a lieu*

$$\| P_n^a - P_n \| \leq \sqrt{2I} \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}. \qquad (1.9)$$

Remarque 1.5 L'inégalité (1.8) peut être transformée de la façon suivante

$$\| P_n^a - P_n \| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\pi(x_1 + a_1) - \pi(x_1)| \prod_{k=2}^{n} p(x_{k-1}, x_k)\, d\bar{x}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \pi(x_1 + a_1) \left| \prod_{k=2}^{n} p(x_{k-1} + a_{k-1}, x_k + a_k) - \prod_{k=2}^{n} p(x_{k-1}, x_k) \right| d\bar{x}.$$

Appelons I_2 la deuxième intégrale, alors

$$\| P_n^a - P_n \| \leq \| P_1^{a_1} - P_1 \| + I_2.$$

Cette séparation permet ainsi d'éviter des conditions restrictives sur π. D'autre part, nous nous intéressons au comportement asymptotique de cette inégalité et une remarque analogue s'applique aussi pour un nombre fini de premières coordonnées.

Remarque 1.6 Nous pouvons comparer l'inégalité (1.9) obtenue avec le résultat (1.1), c'est-à-dire lorsque la c.m. est une suite de v.a.i.i.d.. Nous obtenons alors l'inégalité (1.1) à la constante $\sqrt{2}$ près.

1.2.3 Démonstration

L'idée principale de la démonstration est inspirée de la théorie de l'estimation asymptotique de I. A. Ibragimov et A. Z. Has'minskii [13].

Nous allons définir une nouvelle suite de v.a. et nous montrerons que celles-ci sont centrées, 2 non-corrélées et que leurs moments d'ordre 2 sont majorés par I. En effet, posons

$$\begin{aligned} \Psi :\ [0;1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \Psi(t) = \pi(x_1 + ta_1) \prod_{k=2}^{n} p(x_{k-1} + ta_{k-1}, x_k + ta_k). \end{aligned}$$

L'expression (1.8) peut alors s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \| P_n^a - P_n \| &= \int_{\mathbb{R}^n} |\Psi(1) - \Psi(0)|\, d\bar{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^1 \Psi'(t)\, dt \right| d\bar{x} \\ &\leq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\Psi'(t)|\, d\bar{x}\, dt = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)} \right| \Psi(t)\, d\bar{x}\, dt, \quad (1.10) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\Psi'(t)}{\Psi(t)} &= a_1 \left[\frac{\pi'}{\pi}(x_1 + ta_1) + \frac{p'_x}{p}(x_1 + ta_1, x_2 + ta_2) \right] \\ &+ \sum_{k=2}^{n-1} a_k \left[\frac{p'_y}{p}(x_{k-1} + ta_{k-1}, x_k + ta_k) + \frac{p'_x}{p}(x_k + ta_k, x_{k+1} + ta_{k+1}) \right] \\ &+ a_n \left[\frac{p'_y}{p}(x_{n-1} + ta_{n-1}, x_n + ta_n) \right]. \end{aligned}$$

C'est pourquoi nous définissons les v.a. suivantes

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\pi'}{\pi}(\xi_1) + \frac{p'_x}{p}(\xi_1, \xi_2), \\ X_k = \frac{p'_y}{p}(\xi_{k-1}, \xi_k) + \frac{p'_x}{p}(\xi_k, \xi_{k+1}) \quad \text{pour tout } 2 \leq k \leq n-1, \\ X_n = \frac{p'_y}{p}(\xi_{n-1}, \xi_n) . \end{cases} \tag{1.11}$$

En effectuant un changement de variables dans l'inégalité (1.10) et en utilisant les notations (1.11), nous obtenons

$$\| P_n^a - P_n \| \leq \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k X_k \right| \leq \left[\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k \right)^2 \right]^{1/2} . \tag{1.12}$$

Avant d'étudier les moments des v.a. X_k, nous allons démontrer quelques résultats préliminaires.

Lemme 1.1 *Si la famille des densités de probabilité $\{p(.,\theta); \theta \in O\}$ est I-régulière, alors pour tout $\theta \in O$*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \theta} p(x,\theta)\, dx = 0.$$

Preuve : rappelons que $\Psi(.,\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} p^{1/2}(.,\theta)$, alors nous avons déjà vu que

$$2\Psi(.,\theta) p^{1/2}(.,\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} p(.,\theta). \tag{1.13}$$

Montrons que $\frac{\partial}{\partial \theta} p(.,\theta)$ est intégrable pour tout $\theta \in O$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} p(x,\theta) \right| dx &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} p(x,\theta)}{p(x,\theta)} \right| p(x,\theta)\, dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} p(x,\theta)}{p(x,\theta)} \right]^2 p(x,\theta)\, dx \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{I(\theta)} < \infty. \end{aligned}$$

D'autre part, la différentiabilité de

$$\begin{aligned} O &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \lambda) \\ \theta &\longmapsto p^{1/2}(.,\theta), \end{aligned}$$

implique la différentiabilité de

$$\begin{aligned} O &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto \left\| p^{1/2}(.,\theta) \right\|_2^2. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbb{R}}\left(p^{1/2}(x,\theta)\right)^2 dx = \frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbb{R}} p(x,\theta)\,dx = \frac{\partial}{\partial\theta}1 = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\mathbb{R}} p^{1/2}(x,\theta)p^{1/2}(x,\theta)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} 2p^{1/2}(x,\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}p^{1/2}(x,\theta)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2p^{1/2}(x,\theta)\Psi(x,\theta)\,dx.\end{aligned}$$

D'après (1.13), nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial\theta}p(x,\theta)\,dx = 0.$$

■

Nous allons alors appliquer ce lemme aux hypothèses (**R**), (**R**$^+$) et (**R**$^-$).
La famille $\{\pi(.+t); t\in\mathbb{R}\}$ est I-régulière donc

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial t}\pi(x+t)\,dx = 0,$$

c'est-à-dire qu'en effectuant un changement de variables, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}}\pi'(x)\,dx = \int_J \pi'(x)\,dx = 0. \tag{1.14}$$

La famille $\{p(x,.); x\in J\}$ est I-régulière donc pour tout $x\in J$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x}p(x,y)\,dy = \int_J\frac{\partial}{\partial x}p(x,y)\,dy = 0,$$

ou encore

$$\int_J p'_x(x,y)\,dy = 0. \tag{1.15}$$

La famille $\{q(y,.); y\in J\}$ est I-régulière donc pour tout $y\in J$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial y}q(y,x)\,dx = 0,$$

ou encore

$$\int_J\left[\frac{p'_y(x,y)\pi(x)}{\pi(y)} - \frac{\pi'(y)p(x,y)\pi(x)}{\pi^2(y)}\right]dx = 0. \tag{1.16}$$

Ceci peut s'écrire

$$\int_J\left[\pi(x)p'_y(x,y) - \frac{\pi'}{\pi}(y)\pi(x)p(x,y)\right]dx = 0. \tag{1.17}$$

Montrons que $\int_J |p'_y(x,y)|\, \pi(x)\, dx < \infty$ pour presque tout $y \in J$.

$$\begin{aligned}
\left(\int_{J^2} |p'_y(x,y)|\, \pi(x)\, dx\, dy\right)^2 &= \left(\int_{J^2} \left|\frac{p'_y}{p}(x,y)\right| \pi(x)p(x,y)\, dx\, dy\right)^2 \\
&\leq \int_{J^2} \left[\frac{p'_y}{p}(x,y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\, dx\, dy \\
&= \int_{J^2} \left[\frac{p'_y}{p}(x,y) - \frac{\pi'}{\pi}(y) + \frac{\pi'}{\pi}(y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\, dx\, dy \\
&\leq 2\int_{J^2} \left[\frac{p'_y}{p}(x,y) - \frac{\pi'}{\pi}(y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\, dx\, dy \\
&\quad + 2\int_{J^2} \left[\frac{\pi'}{\pi}(y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\, dx\, dy \\
&= 2\int_J \int_J \left[\frac{p'_y}{p}(x,y) - \frac{\pi'}{\pi}(y)\right]^2 \frac{\pi(x)p(x,y)}{\pi(y)}\, dx\, \pi(y)\, dy \\
&\quad + 2\int_J \left[\frac{\pi'}{\pi}(y)\right]^2 \int_J \pi(x)p(x,y)\, dx\, dy.
\end{aligned}$$

Or la chaîne est stationnaire, donc

$$\int_J \pi(x)p(x,y)\, dx = \pi(y).$$

Par conséquent

$$\left(\int_{J^2} |p'_y(x,y)|\, \pi(x)\, dx\, dy\right)^2 \leq 2\int_J I^-(y)\pi(y)\, dy + 2I(\pi) < \infty. \tag{1.18}$$

Revenons à l'inégalité (1.17), pour presque tout $y \in J$, nous pouvons écrire

$$\int_J \pi(x)p'_y(x,y)\, dx - \frac{\pi'}{\pi}(y)\int_J \pi(x)p(x,y)\, dx = 0,$$

$$\int_J \pi(x)p'_y(x,y)\, dx = \pi'(y). \tag{1.19}$$

Cela implique que

$$\int_{J^2} \pi(x)p'_y(x,y)\, dx\, dy = \int_J \pi'(y)\, dy = 0. \tag{1.20}$$

Il est également intéressant de montrer que pour presque tout $x \in J$, nous avons

$$\int_J p'_y(x,y)\, dy = 0. \tag{1.21}$$

Lemme 1.2 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une densité de probabilité a.c. telle que*

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{f'}{f}(x)\right]^2 f(x)\,dx < \infty,$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\,dx = 0.$$

Preuve : il est clair que f' est intégrable, car

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{f'}{f}(x)\right| f(x)\,dx \leq \sqrt{I(f)} < \infty.$$

De plus, f est a.c. et si a et b désignent deux réels quelconques, nous avons

$$|f(b) - f(a)| = \left|\int_a^b f'(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

Alors pour tout $b > a$,

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx \leq \int_a^{+\infty} |f'(x)|\,dx \longrightarrow 0, \quad a \to +\infty. \tag{1.22}$$

Par conséquent, la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy et $(f(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $l \geq 0$, lorsque n tend vers l'infini.
De plus, $|f(x) - f([x])| \to 0$ quand $x \to +\infty$ grâce à (1.22), donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$

Si $l > 0$ alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = +\infty.$$

Ceci contredit le fait que f est une densité. Donc $l = 0$ et lorsque a et b tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\,dx = 0.$$

■

L'idée pour obtenir (1.21) est d'appliquer ce lemme à la densité conditionnelle de $\xi_2/\xi_1 = x$. Celle-ci est définie pour tout $x \in J$ par

$$\begin{aligned} f : \ & J \longrightarrow \mathbb{R} \\ & y \longmapsto f(y) = p(x,y). \end{aligned}$$

Nous savons déjà que

$$\int_J \int_J \left[\frac{f'}{f}(y)\right]^2 f(y)\,dy\,\pi(x)\,dx = \int_{J^2} \left[\frac{p'_y}{p}(x,y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\,dx\,dy < \infty.$$

Donc pour presque tout $x \in J$, nous avons

$$I(f) = \int_J \left[\frac{f'}{f}(y)\right]^2 f(y)\,dy < \infty.$$

D'autre part, nous avons supposé que $p(x,.)$ est a.c. pour tout $x \in \mathbb{R}$. Nous pouvons alors appliquer le lemme 1.2 et pour presque tout $x \in J$, nous avons

$$\int_J f'(y)\,dy = \int_J p'_y(x,y)\,dy = 0.$$

Montrons maintenant que les v.a. X_k sont centrées.

Lemme 1.3 *Pour tout* $1 \le k \le n$, *nous avons* $\mathbb{E}(X_k) = 0$.

Preuve : calculons tout d'abord $\mathbb{E}(X_1)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1) &= \mathbb{E}\left[\frac{\pi'}{\pi}(\xi_1) + \frac{p'_x}{p}(\xi_1,\xi_2)\right] \\
&= \int_J \frac{\pi'}{\pi}(x)\pi(x)\,dx + \int_{J^2} \frac{p'_x}{p}(x,y)\pi(x)p(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_J \pi'(x)\,dx + \int_J \int_J p'_x(x,y)\,dy\,\pi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

D'après (1.14) et (1.15), $\mathbb{E}(X_1) = 0$.
Soit $2 \le k \le n-1$, calculons $\mathbb{E}(X_k)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_k) &= \mathbb{E}\left[\frac{p'_y}{p}(\xi_{k-1},\xi_k) + \frac{p'_x}{p}(\xi_k,\xi_{k+1})\right] \\
&= \int_{J^2} p'_y(x,y)\pi(x)\,dx\,dy + \int_{J^2} p'_x(x,y)\pi(x)\,dx\,dy \\
&= \int_{J^2} p'_y(x,y)\pi(x)\,dx\,dy + \int_J \int_J p'_x(x,y)\,dy\,\pi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

D'après (1.15) et (1.20), $\mathbb{E}(X_k) = 0$.
Enfin, d'après (1.20)

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left[\frac{p'_y}{p}(\xi_{n-1},\xi_n)\right] = \int_{J^2} p'_y(x,y)\pi(x)\,dx\,dy = 0.$$

■

Lemme 1.4 *Pour tout $1 \leq k \leq n$, nous avons $\mathbb{E}(X_k^2) \leq I$.*

Preuve : commençons par calculer $\mathbb{E}(X_1^2)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1^2) &= \mathbb{E}\left[\frac{\pi'}{\pi}(\xi_1) + \frac{p'_x}{p}(\xi_1, \xi_2)\right]^2 \\
&= \int_J \left[\frac{\pi'}{\pi}(x)\right]^2 \pi(x)\,dx + \int_{J^2} \left[\frac{p'_x}{p}(x,y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\,dx\,dy \\
&\quad + 2\int_{J^2} \pi'(x)p'_x(x,y)\,dx\,dy \\
&= I(\pi) + \int_J\int_J \left[\frac{p'_x}{p}(x,y)\right]^2 p(x,y)\,dy\,\pi(x)\,dx \\
&\quad + 2\int_J \pi'(x)\int_J p'_x(x,y)\,dy\,dx.
\end{aligned}$$

D'après (1.15), le troisième membre de cette égalité est donc nul.
Donc d'après (1.4), nous avons

$$\mathbb{E}(X_1^2) = I(\pi) + \int_J I^+(x)\pi(x)\,dx \leq I.$$

Soit $2 \leq k \leq n-1$, calculons $\mathbb{E}(X_k^2)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_k^2) &= \mathbb{E}\left[\frac{p'_y}{p}(\xi_{k-1}, \xi_k) + \frac{p'_x}{p}(\xi_k, \xi_{k+1})\right]^2 \\
&= \int_{J^2} \left[\frac{p'_y}{p}(x,y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\,dx\,dy \\
&\quad + \int_{J^2} \left[\frac{p'_x}{p}(x,y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\,dx\,dy \\
&\quad + 2\int_{J^3} p'_y(x,y)p'_x(y,z)\pi(x)\,dx\,dy\,dz.
\end{aligned}$$

Comme $\int_J p'_x(y,z)\,dz = 0$, la dernière intégrale vaut 0.
D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{J^2} \left[\frac{p'_y}{p}(x,y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\,dx\,dy \\
&\quad = \int_{J^2} \left[\frac{p'_y}{p}(x,y) - \frac{\pi'}{\pi}(y) + \frac{\pi'}{\pi}(y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\,dx\,dy \\
&\quad = \int_{J^2} \left[\frac{p'_y}{p}(x,y) - \frac{\pi'}{\pi}(y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\,dx\,dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \int_{J^2} \left[\frac{\pi'}{\pi}(y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\,dx\,dy \\
& + 2\int_{J^2} p'_y(x,y)\frac{\pi'}{\pi}(y)\pi(x)\,dx\,dy - 2\int_{J^2}\left[\frac{\pi'}{\pi}(y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\,dx\,dy \\
= & \int_J I^-(y)\pi(y)\,dy - \int_J \left[\frac{\pi'}{\pi}(y)\right]^2 \int_J \pi(x)p(x,y)\,dx\,dy \\
& + 2\int_J \frac{\pi'}{\pi}(y)\int_J p'_y(x,y)\pi(x)\,dx\,dy.
\end{aligned}
$$

D'après (1.19), $\int_J p'_y(x,y)\pi(x)\,dx = \pi'(y)$ et

$$
\int_{J^2}\left[\frac{p'_y}{p}(x,y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\,dx\,dy = \int_J I^-(y)\pi(y)\,dy + I(\pi). \tag{1.23}
$$

Par conséquent

$$
\mathbb{E}(X_k^2) = \int_J I^+(x)\pi(x)\,dx + \int_J I^-(y)\pi(y)\,dy + I(\pi) = I.
$$

Enfin, nous pouvons calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ et en déduire d'après (1.23) que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n^2) &= \mathbb{E}\left[\frac{p'_y}{p}(\xi_{n-1},\xi_n)\right]^2 \\
&= \int_{J^2}\left[\frac{p'_y}{p}(x,y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_J I^-(y)\pi(y)\,dy + I(\pi) \le I.
\end{aligned}
$$

∎

Lemme 1.5 *Nous avons les résultats suivants :*
(i) pour tout $1 \le k \le n-1$, $\mathrm{Cov}(X_k, X_{k+1}) \le I/2$,
(ii) pour tout $1 \le k \le n-2$ *et pour tout* $2 \le i \le n-k$, $\mathrm{Cov}(X_k, X_{k+i}) = 0$.

Remarque 1.7 La propriété (ii) ressemble aux conditions de la définition d'une suite 2-dépendante. En effet, une suite aléatoire $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est dite 2-dépendante si pour tous sous ensembles $S, S' \subset \mathbb{N}^*$, $d(S,S') \ge 2$ implique que $\sigma(X_k; k\in S)$ est indépendante de $\sigma(X_k; k \in S')$.

Preuve :
(i) Soit $2 \le k \le n-2$, d'après le lemme 1.3, il est clair que

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Cov}(X_k, X_{k+1}) = \mathbb{E}(X_k X_{k+1}) \\
& \quad = \mathbb{E}\left[\left(\frac{p'_y}{p}(\xi_{k-1},\xi_k) + \frac{p'_x}{p}(\xi_k,\xi_{k+1})\right)\left(\frac{p'_y}{p}(\xi_k,\xi_{k+1}) + \frac{p'_x}{p}(\xi_{k+1},\xi_{k+2})\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{J^3} p'_y(x,y)p'_y(y,z)\pi(x)\,dx\,dy\,dz \\
&\quad + \int_{J^4} p'_y(x,y)p'_x(z,t)\pi(x)p(y,z)\,dx\,dy\,dz\,dt \\
&\quad + \int_{J^3} p'_x(x,y)p'_x(y,z)\pi(x)\,dx\,dy\,dz \\
&\quad + \int_{J^2} \frac{p'_x}{p}(x,y)\frac{p'_y}{p}(x,y)\pi(x)p(x,y)\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Grâce à (1.15) et (1.21), il est clair que les trois premières intégrales sont nulles. Sachant que $2ab \leq a^2 + b^2$ et d'après (1.23), le calcul nous donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_k, X_{k+1}) &\leq \frac{1}{2}\int_{J^2}\left[\frac{p'_x}{p}(x,y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\,dx\,dy \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{J^2}\left[\frac{p'_y}{p}(x,y)\right]^2 \pi(x)p(x,y)\,dx\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_J I^+(x)\pi(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_J I^-(y)\pi(y)\,dy + \frac{1}{2}I(\pi) \\
&= \frac{1}{2}I.
\end{aligned}$$

Calculons de même

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_1, X_2) &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\pi'}{\pi}(\xi_1) + \frac{p'_x}{p}(\xi_1,\xi_2)\right)\left(\frac{p'_y}{p}(\xi_1,\xi_2) + \frac{p'_x}{p}(\xi_2,\xi_3)\right)\right] \\
&= \int_{J^2} \frac{p'_x}{p}(x,y)\frac{p'_y}{p}(x,y)\pi(x)p(x,y)\,dx\,dy \\
&\leq \frac{1}{2}I.
\end{aligned}$$

De façon analogue, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_{n-1}, X_n) &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{p'_y}{p}(\xi_{n-2},\xi_{n-1}) + \frac{p'_x}{p}(\xi_{n-1},\xi_n)\right)\left(\frac{p'_y}{p}(\xi_{n-1},\xi_n)\right)\right] \\
&= \int_{J^2} \frac{p'_x}{p}(x,y)\frac{p'_y}{p}(x,y)\pi(x)p(x,y)\,dx\,dy \\
&\leq \frac{1}{2}I.
\end{aligned}$$

(*ii*) Soit $2 \leq k \leq n-3$ et $2 \leq i \leq n-k-1$. Comme $k+i \geq k+2$, alors $k+i-1 \neq k$. De plus, nous avons

$$\mathrm{Cov}(X_k, X_{k+i}) = \mathbb{E}(X_k X_{k+i}).$$

Il est clair que cette covariance est nulle grâce aux égalités (1.15) et (1.21).
Il en est de même pour $\mathrm{Cov}(X_1, X_{1+i})$ et $\mathrm{Cov}(X_{n-i}, X_n)$ pour tout $2 \leq i \leq n-2$, ainsi que pour $\mathrm{Cov}(X_1, X_n)$. ∎

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 1.1 et à l'inégalité (1.12). Grâce aux lemmes 1.3, 1.4 et 1.5, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\| P_n^a - P_n \| &\leq \left[\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) \right]^{1/2} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(a_k X_k) + 2 \sum\nolimits_{1 \leq i < j \leq n} |a_i|\,|a_j| \,\mathrm{Cov}(X_i, X_j) \right]^{1/2} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \,\mathbb{E}(X_k^2) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} |a_i|\,|a_{i+1}| \,\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1}) \right]^{1/2} \\
&\leq \left[I \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + I \sum_{i=1}^{n-1} |a_i|\,|a_{i+1}| \right]^{1/2} \\
&\leq \sqrt{I} \left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i+1}|^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2} \\
&\leq \sqrt{I} \left[2 \sum_{i=1}^{n} a_k^2 \right]^{1/2},
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité attendue.

1.3 Cas des chaînes de Markov non homogènes

1.3.1 Notations

Soit $\xi = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une c.m. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. La loi Π est la loi de probabilité initiale, de densité π que nous supposons a.c. . Pour tout $k \geq 2$, $\{p_k(x,.); x \in \mathbb{R}\}$ est la famille des densités de probabilité de transition de l'instant $k-1$ à l'instant k. Pour tout $k \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}$, nous supposons que $p_k(x,.)$ est a.c. . D'autre part, π' désigne la dérivée de π et pour tout $k \geq 2$, p_k^x et p_k^y sont les dérivées respectives de p_k par rapport à la première et à la deuxième coordonnée. Nous supposons que ces dérivées existent au sens usuel de la dérivabilité.

Considérons la chaîne inversée (par rapport à la loi de probabilité initiale Π). Pour tout $k \geq 2$, nous noterons $\{q_{k-1}(y,.); y \in \mathbb{R}\}$ la famille des densités de probabilité de transition de l'instant $-k$ à l'instant $-(k-1)$.

Pour tout $k \geq 1$, notons f_k la densité de ξ_k, c'est-à-dire

$$f_k(y) = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \pi(x_1) p_2(x_1, x_2) \ldots p_k(x_{k-1}, y) dx_1 \ldots dx_{k-1}.$$

Nous supposons que π est strictement positive λ-p.p. et pour tout $k \geq 2$, p_k est strictement positive λ^2-p.p., où λ^2 est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. Avec ces notations, nous pouvons alors exprimer la densité $q_{k-1}(y,.)$. En effet, elle s'écrit

$$q_{k-1}(y,.) = \frac{p_k(.,y) f_{k-1}(.)}{f_k(y)}.$$

Nos hypothèses de I-régularité sont les suivantes.

(**R**) La famille $\{\pi(.+t); t \in \mathbb{R}\}$ est I-régulière.

La quantité de Fisher associée est

$$I(\pi) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\pi'}{\pi}(x)\right]^2 \pi(x)\, dx < \infty. \tag{1.24}$$

Pour tout $k \geq 2$

($\mathbf{R_k}$) La famille $\{f_k(.+t); t \in \mathbb{R}\}$ est I-régulière.

La quantité de Fisher associée est

$$I(f_k) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{f_k'}{f_k}(y)\right]^2 f_k(y)\, dy < \infty. \tag{1.25}$$

($\mathbf{R_k^+}$) La famille $\{p_k(x,.); x \in \mathbb{R}\}$ est I-régulière.

La quantité de Fisher associée est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$I_k^+(x) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p_k^x}{p_k}(x,y)\right]^2 p_k(x,y)\, dy. \tag{1.26}$$

($\mathbf{R_k^-}$) La famille $\{q_{k-1}(y,.); y \in \mathbb{R}\}$ est I-régulière.

La quantité de Fisher associée est définie pour tout $y \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} I_{k-1}^-(y) &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial y} q_{k-1}(y,x)}{q_{k-1}(y,x)}\right]^2 q_{k-1}(y,x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p_k^y}{p_k}(x,y) - \frac{f_k'}{f_k}(y)\right]^2 \frac{p_k(x,y) f_{k-1}(x)}{f_k(y)}\, dx. \end{aligned} \tag{1.27}$$

De plus, pour tout $k \geq 2$, nous supposons que

$$I_k^+ = \int_{\mathbb{R}} I_k^+(x) f_{k-1}(x)\, dx < \infty, \tag{1.28}$$

$$I_k^- = \int_{\mathbb{R}} I_{k-1}^-(y) f_k(y)\, dy < \infty. \tag{1.29}$$

Notons alors pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} I_1 &= I(\pi) + I(f_2) + I_2^+ + I_2^-, \\ I_k &= I(f_k) + I(f_{k+1}) + I_k^+ + I_k^- + I_{k+1}^+ + I_{k+1}^- \quad \text{pour tout } 2 \leq k \leq n-1, \\ I_n &= I_n^- + I_n^+ + I(f_n). \end{cases}$$

Enfin, pour $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, nous définissons les vecteurs $\bar{\xi}$ et $\bar{\xi} + \bar{a}$ de lois respectives P_n et P_n^a.

1.3.2 Résultat

Il s'agit ici de majorer la distance en variation suivante

$$\begin{aligned} \| P_n^a - P_n \| \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \Big| & \pi(x_1 + a_1) \prod_{k=2}^{n} p_k(x_{k-1} + a_{k-1}, x_k + a_k) \\ & - \pi(x_1) \prod_{k=2}^{n} p_k(x_{k-1}, x_k) \Big| \, d\bar{x}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Théorème 1.2 *Supposons que* (**R**) *soit vérifiée et que pour tout* $2 \leq k \leq n$, $(\mathbf{R_k})$, $(\mathbf{R_k^+})$, $(\mathbf{R_k^-})$, (1.28) *et* (1.29) *soient vérifiées, alors l'inégalité suivante a lieu*

$$\| P_n^a - P_n \| \leq \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 I_k}. \tag{1.31}$$

Remarque 1.8 Lorsque nous comparons l'inégalité (1.31) avec l'inégalité (1.9), obtenue dans le cas des c.m. homogènes stationnaires, nous pourrions croire que la majoration obtenue ici est meilleure car la constante qui apppараît est $\sqrt{3/2}$ alors que dans (1.9), la constante est $\sqrt{2}$. En fait, si la c.m. est homogène stationnaire, pour k allant de 2 jusque $n-1$, les quantités I_k sont égales à $2I$ et I_1 , I_n sont inférieures ou égales à $2I$. C'est pourquoi, dans le cas des c.m. homogènes stationnaires, (1.31) est exactement (1.9) à la constante $\sqrt{3/2}$ près. De même, si la c.m. est maintenant une suite de v.a.i., alors (1.31) est analogue à l'inégalité (1.2).

1.3.3 Démonstration

La démonstration de ce théorème suit le même schéma que celle du théorème dans le cas homogène stationnaire. La difficulté réside ici dans la complexité des notations.

Introduisons la fonction

$$\begin{aligned} \Psi : \; [0;1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \Psi(t) = \pi(x_1 + t a_1) \prod_{k=2}^{n} p_k(x_{k-1} + t a_{k-1}, x_k + t a_k). \end{aligned}$$

L'expression (1.30) devient alors

$$\| P_n^a - P_n \| \leq \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\Psi'(t)| \, d\bar{x} \, dt. \tag{1.32}$$

Après le calcul de $\Psi'(t)$, nous définissons les v.a. suivantes

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\pi'}{\pi}(\xi_1) + \frac{p_2^x}{p_2}(\xi_1, \xi_2), \\ X_k &= \frac{p_k^y}{p_k}(\xi_{k-1}, \xi_k) + \frac{p_{k+1}^x}{p_{k+1}}(\xi_k, \xi_{k+1}) \quad \text{pour tout } 2 \leq k \leq n-1, \\ X_n &= \frac{p_n^y}{p_n}(\xi_{n-1}, \xi_n). \end{aligned} \tag{1.33}$$

En effectuant un changement de variables dans (1.32) et en utilisant ces notations, nous obtenons

$$\| P_n^a - P_n \| \leq \mathbb{E} \left| \sum_{k=1}^n a_k X_k \right| \leq \left[\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n a_k X_k \right)^2 \right]^{1/2}. \tag{1.34}$$

Les v.a. X_k possèdent les mêmes propriétés que dans le cas homogène stationnaire, c'est-à-dire qu'elles sont centrées, 2 non-corrélées et que les moments d'ordre 2 sont majorés par les quantités I_k à une constante près.
Mais donnons d'abord quelques égalités qui seront utiles par la suite.
D'après (**R**) et le lemme 1.1, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} \pi'(x) \, dx = 0. \tag{1.35}$$

Pour tout $2 \leq k \leq n$, d'après ($\mathbf{R_k}$) et le lemme 1.1, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} f_k'(y) \, dy = 0. \tag{1.36}$$

Pour tout $2 \leq k \leq n$, d'après ($\mathbf{R_k^+}$) et le lemme 1.1, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} p_k^x(x, y) \, dy = 0. \tag{1.37}$$

Pour tout $2 \leq k \leq n$, d'après ($\mathbf{R_k^-}$) et le lemme 1.1, nous avons pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial y} q_{k-1}(y, x) \, dx = 0, \\ &\int_{\mathbb{R}} \left[p_k^y(x, y) f_{k-1}(x) - \frac{f_k'}{f_k}(y) f_{k-1}(x) p_k(x, y) \right] dx = 0, \\ &\int_{\mathbb{R}} p_k^y(x, y) f_{k-1}(x) \, dx = \frac{f_k'}{f_k}(y) \int_{\mathbb{R}} f_{k-1}(x) p_k(x, y) \, dx, \\ &\int_{\mathbb{R}} p_k^y(x, y) f_{k-1}(x) \, dx = f_k'(y). \end{aligned} \tag{1.38}$$

Pour tout $2 \leq k \leq n$, d'après (1.28), nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_k^x}{p_k}(x,y)\right]^2 f_{k-1}(x) p_k(x,y)\, dx\, dy \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p_k^x}{p_k}(x,y)\right]^2 p_k(x,y)\, dy\; f_{k-1}(x)\, dx \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}} I_k^+(x) f_{k-1}(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_k^x}{p_k}(x,y)\right]^2 f_{k-1}(x) p_k(x,y)\, dx\, dy = I_k^+. \tag{1.39}$$

De même, pour tout $2 \leq k \leq n$, calculons

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_k^y}{p_k}(x,y)\right]^2 f_{k-1}(x) p_k(x,y)\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_k^y}{p_k}(x,y) - \frac{f_k'}{f_k}(y) + \frac{f_k'}{f_k}(y)\right]^2 f_{k-1}(x) p_k(x,y)\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_k^y}{p_k}(x,y) - \frac{f_k'}{f_k}(y)\right]^2 f_{k-1}(x) p_k(x,y)\, dx\, dy \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{f_k'}{f_k}(y)\right]^2 f_{k-1}(x) p_k(x,y)\, dx\, dy \\
&\quad + 2 \int_{\mathbb{R}^2} p_k^y(x,y) \frac{f_k'}{f_k}(y) f_{k-1}(x)\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p_k^y}{p_k}(x,y) - \frac{f_k'}{f_k}(y)\right]^2 f_{k-1}(x) p_k(x,y)\, dx\, dy \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{f_k'}{f_k}(y)\right]^2 \int_{\mathbb{R}} f_{k-1}(x) p_k(x,y)\, dx\, dy \\
&\quad + 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{f_k'}{f_k}(y) \int_{\mathbb{R}} p_k^y(x,y) f_{k-1}(x)\, dx\, dy.
\end{aligned}$$

D'après (1.25), (1.27), (1.29) et (1.38), nous avons alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_k^y}{p_k}(x,y)\right]^2 f_{k-1}(x) p_k(x,y)\, dx\, dy = I_k^- + I(f_k). \tag{1.40}$$

Enfin, la densité conditionnelle de $\xi_k/\xi_{k-1} = x$ est la fonction suivante

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
y &\longmapsto p_k(x,y).
\end{aligned}$$

Nous savons que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{p_k^y}{p_k}(x,y)\right]^2 f_{k-1}(x)p_k(x,y)\,dx\,dy<\infty.$$

Donc pour presque tout $x\in\mathbb{R}$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{p_k^y}{p_k}(x,y)\right]^2 p_k(x,y)\,dy<\infty.$$

En appliquant le lemme 1.2, nous avons alors pour presque tout $x\in\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} p_k^y(x,y)dy=0. \tag{1.41}$$

Revenons-en maintenant aux v.a. X_k et montrons qu'elles sont centrées.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1) &= \mathbb{E}\left[\frac{\pi'}{\pi}(\xi_1)+\frac{p_2^x}{p_2}(\xi_1,\xi_2)\right]\\ &= \int_{\mathbb{R}}\pi'(x)\,dx+\int_{\mathbb{R}^2}p_2^x(x,y)\pi(x)\,dx\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}}\pi'(x)\,dx+\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}p_2^x(x,y)\,dy\;\pi(x)\,dx.\end{aligned}$$

D'après (1.35) et (1.37), $\mathbb{E}(X_1)=0$.
Soit $2\le k\le n-1$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_k) &= \mathbb{E}\left[\frac{p_k^y}{p_k}(\xi_{k-1},\xi_k)+\frac{p_{k+1}^x}{p_{k+1}}(\xi_k,\xi_{k+1})\right]\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\frac{p_k^y}{p_k}(x,y)f_{k-1}(x)p_k(x,y)\,dx\,dy\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^2}\frac{p_{k+1}^x}{p_{k+1}}(x,y)f_k(x)p_{k+1}(x,y)\,dx\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}p_k^y(x,y)\,dy\;f_{k-1}(x)\,dx\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}p_{k+1}^x(x,y)\,dy\;f_k(x)\,dx.\end{aligned}$$

D'après (1.37) et (1.41), $\mathbb{E}(X_k)=0$.
Enfin

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}\left[\frac{p_k^n}{p_n}(\xi_{n-1},\xi_n)\right]\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}p_n^y(x,y)f_{n-1}(x)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

D'après (1.41), $\mathbb{E}(X_n) = 0$.
Calculons les moments d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1^2) &= \mathbb{E}\left[\frac{\pi'}{\pi}(\xi_1) + \frac{p_2^x}{p_2}(\xi_1, \xi_2)\right]^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\pi'}{\pi}(x)\right]^2 \pi(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_2^x}{p_2}(x,y)\right]^2 \pi(x) p_2(x,y)\, dx\, dy \\
&\quad + 2\int_{\mathbb{R}^2} \pi'(x) p_2^x(x,y)\, dx\, dy.
\end{aligned}$$

D'après (1.37), il est clair que la troisième intégrale est nulle. D'autre part, d'après (1.24) et (1.39), nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\pi'}{\pi}(x)\right]^2 \pi(x)\, dx = I(\pi) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_2^x}{p_2}(x,y)\right]^2 \pi(x) p_2(x,y)\, dx\, dy = I_2^+.$$

Donc

$$\mathbb{E}(X_1^2) = I(\pi) + I_2^+.$$

Soit $2 \leq k \leq n-1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_k^2) &= \mathbb{E}\left[\frac{p_k^y}{p_k}(\xi_{k-1}, \xi_k) + \frac{p_{k+1}^x}{p_{k+1}}(\xi_k, \xi_{k+1})\right]^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_k^y}{p_k}(x,y)\right]^2 f_{k-1}(x) p_k(x,y)\, dx\, dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_{k+1}^x}{p_{k+1}}(x,y)\right]^2 f_k(x) p_{k+1}(x,y)\, dx\, dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} p_k^y(x,y) p_{k+1}^x(y,z) f_{k-1}(x)\, dx\, dy\, dz.
\end{aligned}$$

Il est clair d'après (1.37), que la troisième intégrale est nulle.
D'après (1.39) et (1.40), nous avons

$$\mathbb{E}(X_k^2) = I_k^- + I(f_k) + I_{k+1}^+.$$

Enfin

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n^2) &= \mathbb{E}\left[\frac{p_n^y}{p_n}(\xi_{n-1}, \xi_n)\right]^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_n^y}{p_n}(x,y)\right]^2 f_{n-1}(x) p_n(x,y)\, dx\, dy.
\end{aligned}$$

D'après (1.40), il est clair que

$$\mathbb{E}(X_n^2) = I_n^- + I(f_n).$$

Calculons les covariances. Nous savons déjà que les v.a. X_k sont centrées.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X_1, X_2) &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\pi'}{\pi}(\xi_1) + \frac{p_2^x}{p_2}(\xi_1, \xi_2)\right)\left(\frac{p_2^y}{p_2}(\xi_1, \xi_2) + \frac{p_3^x}{p_3}(\xi_2, \xi_3)\right)\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \pi'(x) p_2^y(x, y)\, dx\, dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \pi'(x) p_3^x(y, z) p_2(x, y)\, dx\, dy\, dz \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} p_2^x(x, y) p_3^x(y, z) \pi(x)\, dx\, dy\, dz \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{p_2^x}{p_2}(x, y) \frac{p_2^y}{p_2}(x, y) \pi(x)\, dx\, dy.
\end{aligned}$$

Il est clair d'après (1.37) et (1.41), que seule la dernière intégrale est non nulle et en utilisant $2ab \leq a^2 + b^2$, nous avons

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X_1, X_2) &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_2^x}{p_2}(x, y)\right]^2 \pi(x) p_2(x, y)\, dx\, dy \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_2^y}{p_2}(x, y)\right]^2 \pi(x) p_2(x, y)\, dx\, dy \\
&= \frac{1}{2} I_2^+ + \frac{1}{2} I_2^- + \frac{1}{2} I(f_2).
\end{aligned}$$

Soit $2 \leq k \leq n-2$, de la même façon

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X_k, X_{k+1}) &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{p_k^y}{p_k}(\xi_{k-1}, \xi_k) + \frac{p_{k+1}^x}{p_{k+1}}(\xi_k, \xi_{k+1})\right)\right. \\
&\qquad \left.\left(\frac{p_{k+1}^y}{p_{k+1}}(\xi_k, \xi_{k+1}) + \frac{p_{k+2}^x}{p_{k+2}}(\xi_{k+1}, \xi_{k+2})\right)\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{p_{k+1}^x}{p_{k+1}}(x, y) \frac{p_{k+1}^y}{p_{k+1}}(x, y) f_k(x) p_{k+1}(x, y)\, dx\, dy \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_{k+1}^x}{p_{k+1}}(x, y)\right]^2 f_k(x) p_{k+1}(x, y)\, dx\, dy \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_{k+1}^y}{p_{k+1}}(x, y)\right]^2 f_k(x) p_{k+1}(x, y)\, dx\, dy.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\operatorname{Cov}(X_k, X_{k+1}) \leq \frac{1}{2} I_{k+1}^+ + \frac{1}{2} I_{k+1}^- + \frac{1}{2} I(f_{k+1}).$$

Enfin

$$\operatorname{Cov}(X_{n-1}, X_n) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{p_{n-1}^y}{p_{n-1}}(\xi_{n-2}, \xi_{n-1}) + \frac{p_n^x}{p_n}(\xi_{n-1}, \xi_n)\right)\left(\frac{p_n^y}{p_n}(\xi_{n-1}, \xi_n)\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{p_n^x}{p_n}(x,y)\frac{p_n^y}{p_n}(x,y) f_{n-1}(x) p_n(x,y)\, dx\, dy \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_n^x}{p_n}(x,y)\right]^2 f_{n-1}(x) p_n(x,y)\, dx\, dy \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p_n^y}{p_n}(x,y)\right]^2 f_{n-1}(x) p_n(x,y)\, dx\, dy.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\mathrm{Cov}(X_{n-1}, X_n) \leq \frac{1}{2} I_n^+ + \frac{1}{2} I_n^- + \frac{1}{2} I(f_n).
$$

D'autre part, il est facile de montrer que pour $1 \leq k \leq n-2$ et $2 \leq i \leq n-k$, $\mathrm{Cov}(X_k, X_{k+i}) = 0$.

Revenons à la majoration de la distance en variation et à l'inégalité (1.34).

$$
\begin{aligned}
\| P_n^a - P_n \| &\leq \left[\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k\right)^2\right]^{1/2} = \left[\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k\right)\right]^{1/2} \\
&= \left[\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(a_k X_k) + 2\sum_{1\leq i\leq j\leq n} |a_i|\,|a_j|\,\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\right]^{1/2} \\
&= \left[\sum_{k=1}^n a_k^2\, \mathbb{E}(X_k^2) + 2\sum_{k=1}^{n-1} |a_k|\,|a_{k+1}|\,\mathrm{Cov}(X_k, X_{k+1})\right]^{1/2} \\
&\leq \left[\sum_{k=1}^n a_k^2\, \mathbb{E}(X_k^2) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k^2 + a_{k+1}^2)\mathrm{Cov}(X_k, X_{k+1})\right]^{1/2} \\
&= \left[\sum_{k=1}^n a_k^2\, \mathbb{E}(X_k^2) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2\Big[\mathrm{Cov}(X_k, X_{k+1}) + \mathrm{Cov}(X_{k-1}, X_k)\Big]\right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Appelons S la quantité qui se trouve entre crochets.

$$
\begin{aligned}
S &= a_1^2\, \mathbb{E}(X_1^2) + a_n^2\, \mathbb{E}(X_n^2) + a_1^2 \mathrm{Cov}(X_1, X_2) + a_n^2 \mathrm{Cov}(X_{n-1}, X_n) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n-1} a_k^2 \left[\mathbb{E}(X_k^2) + \mathrm{Cov}(X_k, X_{k+1}) + \mathrm{Cov}(X_{k-1}, X_k)\right] \\
&\leq a_1^2\left[I(\pi) + \frac{1}{2}I(f_2) + \frac{3}{2}I_2^+ + \frac{1}{2}I_2^-\right] + a_n^2\left[\frac{3}{2}I(f_n) + \frac{3}{2}I_n^- + \frac{1}{2}I_n^+\right] \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n-1} a_k^2\left[\frac{3}{2}I(f_k) + \frac{1}{2}I(f_{k+1}) + \frac{1}{2}I_k^+ + \frac{3}{2}I_k^- + \frac{3}{2}I_{k+1}^+ + \frac{1}{2}I_{k+1}^-\right] \\
&\leq \frac{3}{2}\sum_{k=1}^n a_k^2 I_k.
\end{aligned}
$$

Donc l'inégalité annoncée est prouvée. ∎

1.4 Cas où le vecteur de la translation est aléatoire

1.4.1 Notations

Dans ce paragraphe, nous considérons une suite de v.a.i.i.d., $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. La densité p de la v.a. ξ_k est supposée a.c.. Les dérivées première et seconde de p sont notées p' et p''. Nous définissons alors les quantités suivantes, sous réserve d'existence de p' d'une part et de p'' d'autre part

$$I_1(p) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p'}{p}(x)\right]^2 p(x)\,dx \quad \text{et} \quad I_2(p) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p''}{p}(x)\right]^2 p(x)\,dx. \tag{1.42}$$

D'autre part, soit $\eta = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i., définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, supposée indépendante de ξ. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous noterons Q_k la loi de la v.a. η_k. Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les vecteurs aléatoires $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et $\bar{\xi}+\bar{\eta} = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n)$ ont les lois respectives P_n et P_n^η. Nous rappelons que la densité de ce dernier est définie par

$$\begin{aligned} h :\ & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \bar{u} \longmapsto h(\bar{u}) = \int_{\mathbb{R}^n} p(u_1 - v_1)\cdots p(u_n - v_n) Q_1(dv1)\cdots Q_n(dv_n). \end{aligned}$$

1.4.2 Résultats

Le problème est donc de majorer la distance en variation

$$\begin{aligned} \| P_n^\eta - P_n \| &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^n p(u_k - v_k) Q_k(dv_k) - \prod_{k=1}^n p(u_k) \right| d\bar{u} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} p(u_k - v_k) Q_k(dv_k) - \prod_{k=1}^n p(u_k) \right| d\bar{u} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[p(u_k - \eta_k)] - \prod_{k=1}^n p(u_k) \right| d\bar{u}. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Théorème 1.3 *Si $I_1(p) < \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité suivante a lieu*

$$\| P_n^\eta - P_n \| \leq \sqrt{I_1(p) \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k| \leq \varepsilon\}}] + 8 \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}. \tag{1.44}$$

Remarque 1.9 Lorsque nous faisons tendre ε vers l'infini, nous retrouvons alors une inégalité complètement analogue à (1.1). En effet,

Corollaire 1.1 *Si $I_1(p) < \infty$, alors*

$$\| P_n^\eta - P_n \| \leq \sqrt{I_1(p)} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\eta_k^2]}. \tag{1.45}$$

De plus, si η n'est plus une suite de v.a. mais une suite réelle, alors (1.45) est exactement l'inégalité (1.1).

Il est possible de démontrer une autre inégalité dans le cas où les lois des v.a. η_k sont symétriques.

Théorème 1.4 *Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de η_k est symétrique. Si $I_2(p) < \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité suivante a lieu*

$$\| P_n^\eta - P_n \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} I_2(p) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{1}_{\{|\eta_k| \leq \varepsilon\}}] + 8 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}. \tag{1.46}$$

Remarque 1.10 Il est possible de faire tendre ε vers l'infini dans l'inégalité précédente, cela nous donne

Corollaire 1.2 *Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de η_k est symétrique. Si $I_2(p) < \infty$, alors*

$$\| P_n^\eta - P_n \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} I_2(p)} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\eta_k^4]}. \tag{1.47}$$

Nous obtenons également deux résultats du même type lorsque $\xi = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.i. mais n'ayant plus la même loi, c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ξ_k a la densité p_k, supposée a.c.. Par contre, $\eta = (\eta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est toujours une suite de v.a.i., indépendante de ξ. Avec les mêmes notations, nous obtenons les deux résultats suivants.

Théorème 1.5 *Si pour tout $1 \leq k \leq n$, $I_1(p_k) < \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité suivante a lieu*

$$\| P_n^\eta - P_n \| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} I_1(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{1}_{\{|\eta_k| \leq \varepsilon\}}] + 8 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}. \tag{1.48}$$

Remarque 1.11 Lorsque nous faisons tendre ε vers l'infini, nous obtenons une inégalité analogue à (1.2).

Corollaire 1.3 *Si pour tout $1 \leq k \leq n$, $I_1(p_k) < \infty$, alors*

$$\| P_n^\eta - P_n \| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} I_1(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^2]}. \tag{1.49}$$

D'autre part, lorsque η est une suite réelle non aléatoire, ceci est exactement l'inégalité (1.2).

Il est clair que le cas où η est une suite symétrique donne aussi un résultat analogue au théorème 1.4.

Théorème 1.6 *Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de η_k est symétrique. Si pour tout $1 \leq k \leq n$, $I_2(p_k) < \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité suivante a lieu*

$$\| P_n^\eta - P_n \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} \sum_{k=1}^{n} I_2(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{I}_{\{|\eta_k| \leq \varepsilon\}}] + 8 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}. \tag{1.50}$$

Remarque 1.12 Lorsque ε tend vers l'infini, nous obtenons

Corollaire 1.4 *Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de η_k est symétrique. Si pour tout $1 \leq k \leq n$, $I_2(p_k) < \infty$, alors*

$$\| P_n^\eta - P_n \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} \sum_{k=1}^{n} I_2(p_k) E[\eta_k^4]}. \tag{1.51}$$

1.4.3 Démonstrations

Les idées de démonstrations sont inspirées de deux articles, l'un de H. Sato et C. Watari [28] et l'autre de H. Sato et M. Tamashiro [27]. Dans un premier temps, nous allons définir de nouvelles notions et transformer l'égalité (1.43). La définition et les résultats qui suivent, se trouvent dans le livre de J. Jacod et A. N. Shiryaev ([14], chapitre IV et V).

Définition 1.2 *Soient deux mesures de probabilité P_1 et P_2, toutes deux a.c. par rapport à une troisième mesure Q, de densités respectives z_1 et z_2 par rapport à Q. Nous définissons alors la distance de Hellinger $\rho(P_1, P_2)$ dont le carré est défini par*

$$\rho^2(P_1, P_2) = \frac{1}{2} \int (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2})^2 \, dQ. \tag{1.52}$$

Cette distance vérifie alors le résultat suivant

Théorème 1.7 *Avec ces notations, nous avons l'inégalité suivante*

$$\| P_1 - P_2 \| \leq 2\sqrt{2}\rho(P_1, P_2). \tag{1.53}$$

Notons

$$H(P_1, P_2) = \int \sqrt{z_1 z_2}\, dQ.$$

Par conséquent

$$\rho^2(P_1, P_2) = 1 - H(P_1, P_2)$$

et (1.53) donne

$$\| P_1 - P_2 \|^2 \leq 8\Big(1 - H(P_1, P_2)\Big). \tag{1.54}$$

Or P_n^η et P_n sont deux mesures de probabilté a.c. par rapport à λ^n (qui est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$), donc nous pouvons appliquer (1.54) et

$$\| P_n^\eta - P_n \|^2 \leq 8\Big(1 - H(P_n^\eta, P_n)\Big), \tag{1.55}$$

où

$$\begin{aligned} H(P_n^\eta, P_n) &= \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[p(u_k - \eta_k)]} \sqrt{\prod_{k=1}^{n} p(u_k)}\, d\bar{u} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\mathbb{E}[p(u_k - \eta_k)]} \sqrt{p(u_k)}\, du_k. \end{aligned} \tag{1.56}$$

Pour tout $1 \leq k \leq n$, notons μ_k et ν_k les lois respectives des v.a. $\xi_k + \eta_k$ et ξ_k. Alors

$$\begin{aligned} H(\mu_k, \nu_k) &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\mathbb{E}[p(u_k - \eta_k)]} \sqrt{p(u_k)}\, du_k \\ &= 1 - \rho^2(\mu_k, \nu_k), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \rho^2(\mu_k, \nu_k) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{\mathbb{E}[p(u_k - \eta_k)]} - \sqrt{p(u_k)}\right)^2 du_k \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{\mathbb{E}[p(x - \eta_k)]} - \sqrt{p(x)}\right)^2 dx. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} H(P_n^\eta, P_n) &= \prod_{k=1}^{n} H(\mu_k, \nu_k) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \rho^2(\mu_k, \nu_k)\Big). \end{aligned} \tag{1.58}$$

Le résultat suivant très classique se démontre facilement par récurrence.

Lemme 1.6 *Soit $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombre réels tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_k \leq 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons*

$$1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} x_k. \tag{1.59}$$

Soit $1 \leq k \leq n$. Il est clair que $\rho^2(\mu_k, \nu_k) \geq 0$. D'autre part, lorsque $a, b \geq 0$, $(a-b)^2 \leq a^2 + b^2$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\rho^2(\mu_k, \nu_k) &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[p(x-\eta_k)]\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} p(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} p(x-y)\,dx\,Q_k(dy) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} p(u)\,du\,Q_k(dv) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} p(u)\,du \int_{\mathbb{R}} Q_k(dv) + \frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $1 \leq k \leq n$, nous avons $0 \leq \rho^2(\mu_k, \nu_k) \leq 1$ et d'après le lemme 1.6

$$1 - \prod_{k=1}^{n}\Big(1 - \rho^2(\mu_k, \nu_k)\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \rho^2(\mu_k, \nu_k).$$

En combinant ceci avec (1.55) et (1.58), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\| P_n^\eta - P_n \|^2 &\leq 8\Big(1 - H(P_n^\eta, P_n)\Big) \\
&\leq 8\Big(1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - \rho^2(\mu_k, \nu_k))\Big) \\
&\leq 8\sum_{k=1}^{n} \rho^2(\mu_k, \nu_k).
\end{aligned} \tag{1.60}$$

Ainsi, pour majorer $\| P_n^\eta - P_n \|$, il suffit de majorer $\rho^2(\mu_k, \nu_k)$.

Preuve du Théorème 1.3 : soit $1 \leq k \leq n$ et $\varepsilon > 0$, alors

$$\begin{aligned}
\rho^2(\mu_k, \nu_k) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \Big(\sqrt{\mathbb{E}[p(x-\eta_k)]} - \sqrt{p(x)}\Big)^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \Big(\sqrt{\mathbb{E}[p(x-\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] + \mathbb{E}[p(x-\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|>\varepsilon\}}]} \\
&\qquad - \sqrt{p(x)\mathbb{P}\{|\eta_k| \leq \varepsilon\} + p(x)\mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}\Big)^2 dx.
\end{aligned}$$

Or nous savons que pour tous a, b, c, $d \geq 0$, l'inégalité suivante a lieu

$$\Big(\sqrt{a+b} - \sqrt{c+d}\Big)^2 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{d})^2.$$

Par conséquent

$$\rho^2(\mu_k, \nu_k) \leq \frac{1}{2}(A_1 + A_2), \tag{1.61}$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{\mathbb{E}[p(x-\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]} - \sqrt{p(x)\mathbb{P}\{|\eta_k|\le\varepsilon\}} \right)^2 dx, \\ A_2 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{\mathbb{E}[p(x-\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|>\varepsilon\}}]} - \sqrt{p(x)\mathbb{P}\{|\eta_k|>\varepsilon\}} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Pour majorer A_2, utilisons pour $a, b \ge 0$

$$(a-b)^2 \le a^2 + b^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} A_2 &\le \int_{\mathbb{R}} \Big(\mathbb{E}[p(x-\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|>\varepsilon\}}] + p(x)\mathbb{P}\{|\eta_k|>\varepsilon\} \Big)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} p(x-y)\mathbb{1}_{\{|y|>\varepsilon\}}\, Q_k(dy)\, dx + \mathbb{P}\{|\eta_k|>\varepsilon\} \int_{\mathbb{R}} p(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} p(u)\mathbb{1}_{\{|v|>\varepsilon\}}\, Q_k(dv)\, du + \mathbb{P}\{|\eta_k|>\varepsilon\} \\ &= \int_{\mathbb{R}} p(u)\, du \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{|v|>\varepsilon\}}\, Q_k(dv) + \mathbb{P}\{|\eta_k|>\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$A_2 \le 2\mathbb{P}\{|\eta_k|>\varepsilon\}. \tag{1.62}$$

Pour majorer A_1, nous allons définir la fonction suivante

$$\begin{aligned} \Phi_k :\ [0;1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \Phi_k(t) = \mathbb{E}^{1/2}[p(x-t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]. \end{aligned}$$

Nous allons vérifier que Φ_k est dérivable. Soit

$$\begin{aligned} F :\ [0;1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto F(t) = \int_{\mathbb{R}} p(x-ty)\mathbb{1}_{\{|y|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dy). \end{aligned} \tag{1.63}$$

Posons $f(t,y) = p(x-ty)\mathbb{1}_{\{|y|\le\varepsilon\}}$. Alors

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) \right| = \left| -yp'(x-ty)\mathbb{1}_{\{|y|\le\varepsilon\}} \right|.$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |y|\,|p'(x-ty)|\,\mathbb{1}_{\{|y|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dy)\, dx &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |v|\,|p'(u)|\,\mathbb{1}_{\{|v|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dv)\, du \\ &= \int_{\mathbb{R}} |p'(u)|\, du \int_{\mathbb{R}} |v|\,\mathbb{1}_{\{|v|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dv) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{p'}{p}(u)\right| p(u)\, du\ \ \mathbb{E}[|\eta_k|\,\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}] \\ &\le \Big(I_1(p)\Big)^{1/2} \Big(\mathbb{E}[\eta_k^2\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}] \Big)^{1/2} \\ &\le \sqrt{I_1(p)} \times \varepsilon < \infty. \end{aligned}$$

Donc $\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,y)\right| Q_k(dy) < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et $F'(t)$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_{\mathbb{R}} -yp'(x-ty)\mathbb{I}_{\{|y|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dy) \\ &= \mathbb{E}[-\eta_k p'(x-t\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Calculons alors

$$\Phi_k'(t) = \frac{\mathbb{E}[-\eta_k p'(x-t\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]}{2\,\mathbb{E}^{1/2}[p(x-t\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\Phi_k(1)-\Phi_k(0)\Big)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \Phi_k'(t)\,dt\right)^2 dx \\ &\le \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \Big(\Phi_k'(t)\Big)^2 dx\, dt \\ &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{E}^2[-\eta_k p'(x-t\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]}{4\,\mathbb{E}[p(x-t\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]}\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{1.65}$$

D'après l'inégalité de Schwarz, si $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$ et $\mathbb{E}(\frac{X^2}{Y^2}) < \infty$, alors

$$\frac{\mathbb{E}^2(X)}{\mathbb{E}(Y^2)} \le \mathbb{E}\left(\frac{X^2}{Y^2}\right). \tag{1.66}$$

Montrons que nous pouvons appliquer cette inégalité. Prenons

$$Y^2 = p(x-t\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}} \quad \text{et} \quad \frac{X^2}{Y^2} = \eta_k^2 \frac{p'^2}{p}(x-t\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}.$$

Tout d'abord

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(Y^2)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^2} p(x-ty)\mathbb{I}_{\{|y|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dy)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} p(u)\mathbb{I}_{\{|v|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dv)\,du \\ &= \int_{\mathbb{R}} p(u)\,du \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\{|v|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dv) \\ &= \mathbb{P}\{|\eta_k| \le \varepsilon\} \le 1. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Donc $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
Ensuite

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left(\frac{X^2}{Y^2}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{p'^2}{p}(x-ty)y^2\mathbb{I}_{\{|y|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dy)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{p'^2}{p}(u)v^2\mathbb{I}_{\{|v|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dv)\,du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p'}{p}(u)\right]^2 p(u)\,du \int_{\mathbb{R}} v^2\mathbb{I}_{\{|v|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dv) \\ &= I_1(p)\,\mathbb{E}[\eta_k^2\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}] \le \varepsilon^2 I_1(p) < \infty. \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}\left(\frac{X^2}{Y^2}\right) < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
Nous pouvons alors appliquer (1.66) et (1.65) devient

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \frac{1}{4}\int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\eta_k^2 \frac{p'^2}{p}(x - t\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}\right] dx\, dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{p'^2}{p}(x - ty)y^2 \mathbb{I}_{\{|y|\leq\varepsilon\}}\, Q_k(dy)\, dx\, dt \\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p'}{p}(u)\right]^2 p(u)\, du \int_{\mathbb{R}} v^2 \mathbb{I}_{\{|v|\leq\varepsilon\}}\, Q_k(dv) \\ &= \frac{1}{4} I_1(p)\, \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}]. \end{aligned} \tag{1.68}$$

En combinant (1.60), (1.61), (1.62) et (1.68), nous obtenons

$$\begin{aligned} \| P_n^\eta - P_n \|^2 &\leq 4\sum_{k=1}^{n}(A_1 + A_2) \\ &\leq 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}I_1(p)\, \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] + 2\mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}\right) \\ &= I_1(p)\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] + 8\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

∎

Remarque 1.13 Nous pouvons remarquer que dans cette démonstration, grâce au théorème 1.7, nous avons en fait majoré la distance de Hellinger $\rho(P_n^\eta, P_n)$. Nous obtenons donc, comme corollaire du théorème 1.3, une inégalité pour cette distance.

Corollaire 1.5 *Si $I_1(p) < \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité suivante a lieu*

$$\begin{aligned} \rho(P_n^\eta, P_n) &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\rho^2(\mu_k, \nu_k)} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{I_1(p)\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] + 8\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}, \end{aligned}$$

où ν_k est la loi de ξ_k et μ_k est la loi de $\xi_k + \eta_k$.

Etudions maintenant le cas où les v.a. η_k sont symétriques. Nous allons démontrer le théorème 1.4 pratiquement de la même façon que le théorème 1.3.

Preuve du Théorème 1.4 : soit $1 \leq k \leq n$ et $\varepsilon > 0$. La loi de η_k est symétrique, donc

$$\rho^2(\mu_k, \nu_k) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{\mathbb{E}[p(x + \eta_k)]} - \sqrt{p(x)}\right)^2 dx.$$

De la même façon que dans la démonstration du théorème 1.3, nous écrirons

$$\rho^2(\mu_k, \nu_k) \leq \frac{1}{2}(A_1 + A_2), \tag{1.69}$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{\mathbb{E}[p(x+\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}]} - \sqrt{p(x)\mathbb{P}\{|\eta_k| \leq \varepsilon\}}\right)^2 dx, \\ A_2 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{\mathbb{E}[p(x+\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|>\varepsilon\}}]} - \sqrt{p(x)\mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}\right)^2 dx. \end{aligned}$$

La quantité A_2 se majore de la même façon, c'est-à-dire

$$A_2 \leq 2\mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}. \tag{1.70}$$

Pour majorer A_1, nous définissons aussi la fonction suivante

$$\begin{aligned} \Phi_k : \ [0;1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \Phi_k(t) = \mathbb{E}^{1/2}[p(x+t\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}]. \end{aligned}$$

Ici, nous savons que $I_2(p) < \infty$. Or d'après le théorème 1 de [28],

$$I_1(p) \leq \frac{3}{2}\sqrt{I_2(p)}.$$

Donc $I_1(p) < \infty$ et comme dans le raisonnement précédent, Φ_k est dérivable et $\Phi_k'(t)$ s'écrit

$$\Phi_k'(t) = \frac{\mathbb{E}[\eta_k p'(x+t\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}]}{2\,\mathbb{E}^{1/2}[p(x+t\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}]}.$$

Ceci implique grâce à la symétrie de la loi de η_k, que

$$\Phi_k'(0) = \frac{\mathbb{E}[\eta_k \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}]p'(x)}{2\mathbb{P}^{1/2}\{|\eta_k| \leq \varepsilon\}p(x)} = 0.$$

Montrons que Φ_k' est dérivable. Soit

$$\begin{aligned} G : \ [0;1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto G(t) = \int_{\mathbb{R}} y\, p'(x+ty)\mathbb{I}_{\{|y|\leq\varepsilon\}}\, Q_k(dy). \end{aligned} \tag{1.71}$$

Posons $g(t,y) = y\, p'(x+ty)\mathbb{I}_{\{|y|\leq\varepsilon\}}$. Alors

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,y) = y^2 p''(x+ty)\mathbb{I}_{\{|y|\leq\varepsilon\}}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} y^2\,|p''(x+ty)|\,\mathbb{1}_{\{|y|\le\varepsilon\}}\,Q_k(dy)\,dx &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} v^2\,|p''(u)|\,\mathbb{1}_{\{|v|\le\varepsilon\}}\,Q_k(dv)\,du \\
&= \int_{\mathbb{R}} |p''(u)|\,du \int_{\mathbb{R}} v^2\mathbb{1}_{\{|v|\le\varepsilon\}}\,Q_k(dv) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{p''}{p}(u)\right| p(u)\,du\ \mathbb{E}[\eta_k^2\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}] \\
&\le (I_2(p))^{1/2}\left(\mathbb{E}[\eta_k^4\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]\right)^{1/2} \\
&\le \sqrt{I_2(p)}\times\varepsilon^2<\infty.
\end{aligned}$$

Donc $\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,y)\right| Q_k(dy)<\infty$ pour presque tout $x\in\mathbb{R}$ et $G'(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
G'(t) &= \int_{\mathbb{R}} y^2p''(x+ty)\mathbb{1}_{\{|y|\le\varepsilon\}}\,Q_k(dy) \\
&= \mathbb{E}[\eta_k^2p''(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]. \qquad (1.72)
\end{aligned}$$

Calculons alors

$$\begin{aligned}
\Phi_k''(t) &= \frac{\mathbb{E}[\eta_k^2p''(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]\times 2\,\mathbb{E}^{1/2}[p(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]}{4\,\mathbb{E}[p(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]} \\
&\quad -\frac{\mathbb{E}^2[\eta_kp'(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]}{4\,\mathbb{E}[p(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]\times\mathbb{E}^{1/2}[p(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]} \\
&= \frac{\mathbb{E}[\eta_k^2p''(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]}{2\,\mathbb{E}^{1/2}[p(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]}-\frac{\mathbb{E}^2[\eta_kp'(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]}{4\,\mathbb{E}^{3/2}[p(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]}.
\end{aligned}$$

Par intégration par parties, nous avons

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{\mathbb{R}}\Big(\Phi_k(1)-\Phi_k(0)\Big)^2dx=\int_{\mathbb{R}}\left[\Phi_k'(0)+\int_0^1(1-t)\Phi_k''(t)\,dt\right]^2\,dx \\
&\le \int_0^1(1-t)^2\int_{\mathbb{R}}\Big(\Phi_k''(t)\Big)^2\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

Comme $(a-b)^2\le 2a^2+2b^2$, alors

$$\begin{aligned}
A_1 &\le 2\int_0^1(1-t)^2\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathbb{E}^2[\eta_k^2p''(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]}{4\,\mathbb{E}[p(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]}\,dx\,dt \\
&\quad +2\int_0^1(1-t)^2\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathbb{E}^4[\eta_kp'(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]}{16\,\mathbb{E}^3[p(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]}\,dx\,dt. \qquad (1.73)
\end{aligned}$$

Montrons que nous pouvons à nouveau appliquer (1.66).
Ici, $Y^2=p(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}$ et nous savons déjà que $\mathbb{E}(Y^2)<\infty$ pour presque tout $x\in\mathbb{R}$. Par ailleurs, nous prenons

$$\frac{X^2}{Y^2}=\eta_k^4\frac{p''^2}{p}(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left(\frac{X^2}{Y^2}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} y^4 \frac{p''^2}{p}(x+ty) \mathbb{I}_{\{|y|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dy)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} v^4 \frac{p''^2}{p}(u) \mathbb{I}_{\{|y|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dv)\, du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p''}{p}(u)\right]^2 p(u)\, du \int_{\mathbb{R}} v^4 \mathbb{I}_{\{|v|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dv) \\
&= I_2(p)\, \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}] \le \varepsilon^4 I_2(p) < \infty.
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}\left(\frac{X^2}{Y^2}\right) < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
En appliquant (1.66), nous obtenons

$$\frac{\mathbb{E}^2[\eta_k^2 p''(x+t\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]}{\mathbb{E}[p(x+t\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}]} \le \mathbb{E}\left[\eta_k^4 \frac{p''^2}{p}(x+t\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}\right]. \tag{1.74}$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Hölder, si $\mathbb{E}(Y^{4/3}) < \infty$ et $\mathbb{E}\left(\frac{X^4}{Y^4}\right) < \infty$, alors

$$\frac{\mathbb{E}^4(X)}{\mathbb{E}^3(Y^{4/3})} \le \mathbb{E}\left(\frac{X^4}{Y^4}\right). \tag{1.75}$$

Montrons que nous pouvons l'appliquer. Prenons

$$Y^{4/3} = p(x+t\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}} \quad \text{et} \quad \frac{X^4}{Y^4} = \eta_k^4 \frac{p'^4}{p^3}(x+t\eta_k)\mathbb{I}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left(Y^{4/3}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} p(x+ty)\mathbb{I}_{\{|y|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dy)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} p(u)\, du \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\{|v|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dv) \\
&= \mathbb{P}\{|\eta_k| \le \varepsilon\} \le 1.
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(Y^{4/3}) < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\left(\frac{X^4}{Y^4}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{p'^4}{p^3}(x+ty) y^4 \mathbb{I}_{\{|y|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dy)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{p'^4}{p^3}(u)\, du \int_{\mathbb{R}} v^4 \mathbb{I}_{\{|v|\le\varepsilon\}}\, Q_k(dv) \\
&= K(p)\, \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\le\varepsilon\}}] \\
&\le \varepsilon^4 K(p),
\end{aligned}$$

où

$$K(p) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p'}{p}(u)\right]^4 p(u)\,du.$$

Or d'après la proposition de [28], nous savons que

$$K(p) \leq \frac{9}{4} I_2(p).$$

Donc $K(p) < \infty$. Par conséquent, $\mathbb{E}\left(\frac{X^4}{Y^4}\right) < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et nous pouvons appliquer (1.75), ce qui nous donne

$$\frac{\mathbb{E}^4[\eta_k p'(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}]}{\mathbb{E}^3[p(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}]} \leq \mathbb{E}\left[\eta_k^4 \frac{p'^4}{p^3}(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}\right]. \tag{1.76}$$

Appliquons donc les deux inégalités (1.74) et (1.76) à (1.73), alors

$$\begin{aligned}
A_1 &\leq 2\int_0^1 (1-t)^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4}\,\mathbb{E}\left[\eta_k^4 \frac{p''^2}{p}(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}\right] dx\,dt \\
&\quad + 2\int_0^1 (1-t)^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{16}\,\mathbb{E}\left[\eta_k^4 \frac{p'^4}{p^3}(x+t\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}\right] dx\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{p''^2}{p}(u)\,du \int_{\mathbb{R}} v^4 \mathbb{1}_{\{|v|\leq\varepsilon\}}\, Q_k(dv)\,dt \\
&\quad + \frac{1}{8}\int_0^1 (1-t)^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{p'^4}{p^3}(u)\,du \int_{\mathbb{R}} v^4 \mathbb{1}_{\{|v|\leq\varepsilon\}}\, Q_k(dv)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}(1-t)^3\right]_0^1 \left[I_2(p) + \frac{1}{4}K(p)\right] \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{1}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] \\
&\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \left[1 + \frac{9}{4} \times \frac{1}{4}\right] I_2(p)\,\mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{1}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] \\
&= \frac{25}{96} I_2(p)\,\mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{1}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}].
\end{aligned} \tag{1.77}$$

En combinant (1.60), (1.69), (1.70) et (1.77), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\| P_n^\eta - P_n \|^2 &\leq 4\sum_{k=1}^n (A_1 + A_2) \\
&\leq \sum_{k=1}^n 4A_1 + 8\sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\} \\
&\leq \frac{25}{24} I_2(p) \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{1}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] + 8\sum_{k=1}^n P\{|\eta_k| > \varepsilon\}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.14 Comme nous l'avons signalé lors de la remarque 1.13, nous obtenons également un corollaire du théorème 1.4 pour la distance de Hellinger.

Corollaire 1.6 *Si $I_2(p) < \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité suivante a lieu*

$$
\begin{aligned}
\rho(P_n^\eta, P_n) &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \rho^2(\mu_k, \nu_k)} \\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{25}{24} I_2(p) \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{I}_{\{|\eta_k| \leq \varepsilon\}}] + 8 \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}},
\end{aligned}
$$

où ν_k est la loi de ξ_k et μ_k est la loi de $\xi_k + \eta_k$.

En ce qui concerne le cas où $\xi = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.i. mais n'ayant plus la même loi, la distance en variation que nous devons majorer est la suivante

$$
\| P_n^\eta - P_n \| = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[p_k(u_k - \eta_k)] - \prod_{k=1}^n p_k(u_k) \right| d\bar{u}.
$$

Il est évident que les démonstrations des théorèmes 1.5 et 1.6 se rédigent de la même façon que celles des théorèmes 1.3 et 1.4, à la différence près que la densité p doit être partout remplacée par la densité p_k.

1.5 Passage à la limite dans ces inégalités

Il est intéressant d'étudier le comportement de ces inégalités lorsque n tend vers l'infini. Dans un premier temps, nous démontrons un lemme qui nous permet de passer à la limite dans les différents cas que nous avons traités précédemment, ensuite nous énoncerons les inégalités limites ainsi obtenues.

1.5.1 Lemme

Tout d'abord, rappelons les quelques notions suivantes. Nous notons $\mathbb{R}^\infty$ l'espace des suites infinies $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}^\infty$. De plus, $\mathbb{R}^\infty$ muni de la métrique définie dans [1] (p. 218 et p. 19), est un espace métrique complet séparable (e.m.c.s.). Pour $n \geq 1$, notons Π_n la projection naturelle suivante

$$
\begin{aligned}
\Pi_n : \ \mathbb{R}^\infty &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
x &\longmapsto \Pi_n(x) = (x_1, \ldots, x_n),
\end{aligned}
$$

qui est mesurable, continue et inversible.

Un ensemble cylindrique est, par définition, un ensemble de la forme $\Pi_n^{-1} H$, où $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et $n \geq 1$. Or pour $n \geq 1$, Π_n est continue, donc les ensembles cylindriques appartiennent à $\mathcal{B}^\infty$. Notons $\mathcal{F}$ la classe des ensembles cylindriques, comme $\mathbb{R}^\infty$ est séparable, $\mathcal{F}$ engendre $\mathcal{B}^\infty$ (voir [1]).

Soient $X = (X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $Y = (Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de v.a. réelles, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Notons $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les lois respectives de X et de Y dans $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{Q}_n$ désignent respectivement les lois des suites $(X_1, \ldots, X_n, 0, \ldots)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n, 0, \ldots)$. Notons alors

$$P_n = \mathcal{P}_n \Pi_n^{-1} = \mathcal{P}\Pi_n^{-1} \quad \text{et} \quad Q_n = \mathcal{Q}_n \Pi_n^{-1} = \mathcal{Q}\Pi_n^{-1},$$

les lois respectives des vecteurs $\bar{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ et $\bar{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$.

Lemme 1.7 *Avec ces notations, nous avons*

$$\| \mathcal{P} - \mathcal{Q} \| \leq \limsup \| P_n - Q_n \| . \tag{1.78}$$

Preuve : nous savons que $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}$ si et seulement si $\mathcal{P}_n(A) \to \mathcal{P}(A)$ pour tout ensemble A de $\mathcal{P}$-continuité cylindrique (voir [1], p. 19). Dans notre cas, il est clair que

$$\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P} \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_n \Rightarrow \mathcal{Q}.$$

Or d'après le théorème 2.7 de [6], nous savons que

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P} \\ \mathcal{Q}_n \Rightarrow \mathcal{Q} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \| \mathcal{P} - \mathcal{Q} \| \leq \limsup \| \mathcal{P}_n - \mathcal{Q}_n \| . \tag{1.79}$$

Enfin, notons $E_n = \{x \in \mathbb{R}^\infty | x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)\}$. Il est clair que E_n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\| \mathcal{P}_n - \mathcal{Q}_n \| = \| P_n - Q_n \| . \tag{1.80}$$

Ainsi, (1.79) et (1.80) l'inégalité annoncée (1.78). ∎

Remarque 1.15 En réalité, nous pouvons montrer le résultat suivant.

$$\| \mathcal{P} - \mathcal{Q} \| = \lim_{n\to\infty} \| P_n - Q_n \| . \tag{1.81}$$

Preuve : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\begin{array}{llll} J_n : & \mathbb{R}^\infty & \longrightarrow & E_n \\ & x & \longmapsto & J_n(x) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots). \end{array}$$

Alors

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P} J_n^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_n = \mathcal{Q} J_n^{-1},$$

donc

$$\| \mathcal{P}_n - \mathcal{Q}_n \| = \| \mathcal{P} J_n^{-1} - \mathcal{Q} J_n^{-1} \| \leq \| \mathcal{P} - \mathcal{Q} \| .$$

Par conséquent

$$\limsup \| \mathcal{P}_n - \mathcal{Q}_n \| \leq \| \mathcal{P} - \mathcal{Q} \| .$$

Ainsi avec (1.79), nous avons

$$\| \mathcal{P} - \mathcal{Q} \| = \limsup \| \mathcal{P}_n - \mathcal{Q}_n \| .$$

De plus, posons $u_n = \| \mathcal{P}_n - \mathcal{Q}_n \|$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante car

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n+1} J_n^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_n = \mathcal{Q}_{n+1} J_n^{-1}$$

et

$$\begin{aligned} u_n = \| \mathcal{P}_n - \mathcal{Q}_n \| &= \| \mathcal{P}_{n+1} J_n^{-1} - \mathcal{Q}_{n+1} J_n^{-1} \| \\ &\leq \| \mathcal{P}_{n+1} - \mathcal{Q}_{n+1} \| = u_{n+1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante majorée, donc la limite existe et

$$\| \mathcal{P} - \mathcal{Q} \| = \lim_{n\to\infty} \| \mathcal{P}_n - \mathcal{Q}_n \| = \lim_{n\to\infty} \| P_n - Q_n \| .$$

■

1.5.2 Résultats

Le passage à la limite dans toutes les inégalités finies des paragraphes précédents se fait alors sans difficulté grâce au lemme 1.7.

Premier cas : v.a.i.i.d. et translation non aléatoire

Soit $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{P}$ et soit $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. $\mathcal{P}^a$ désigne alors la loi de la suite $\xi + a = (\xi_k + a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. Le passage à la limite dans l'inégalité (1.1) nous donne le résultat suivant : si la densité p de ξ_k est a.c., si $I(p) < \infty$ et si $a \in \ell_2$, alors

$$\| \mathcal{P}^a - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{I(p)} \sqrt{\sum_{k\geq 1} a_k^2}. \tag{1.82}$$

Deuxième cas : v.a.i. et translation non aléatoire

Nous conservons les mêmes notations, mais $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est ici une suite de v.a.i.. Le passage à la limite dans (1.2) nous donne : si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la densité p_k de ξ_k est a.c., $I(p_k) < \infty$ et $\sum_{k\geq 1} a_k I(p_k) < \infty$, alors

$$\| \mathcal{P}^a - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\sum_{k\geq 1} a_k I(p_k)}. \tag{1.83}$$

Troisième cas : c.m. homogènes stationnaires et translation non aléatoire

Soit $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une c.m. homogène stationnaire de loi de probabilité initiale stationnaire Π, de densité π a.c., de noyau de probabilité de transition P, de famille de densités de transition $\{p(x,.); x \in \mathbb{R}\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x,.)$ est a.c.. Avec les mêmes notations que dans le paragraphe 1.2, le passage à la limite dans le théorème 1.1 nous donne

Théorème 1.8 *Si* (R), (R$^+$), (R$^-$), (1.6) *et* (1.7) *sont vérifiées et si* $a \in \ell_2$, *alors*

$$\| \mathcal{P}^a - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{2I} \sqrt{\sum_{k\geq 1} a_k^2}. \tag{1.84}$$

Quatrième cas : c.m. non homogènes et translation non aléatoire

Soit $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une c.m. de loi de probabilité initiale Π (de densité π a.c.). La famille des densités de probabilité de transition de l'instant $k-1$ à l'instant k est $\{p_k(x,.); x \in \mathbb{R}\}$. Pour tout $k \geq 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_k(x,.)$ est a.c.. Avec les mêmes notations que dans le paragraphe 1.3, le passage à la limite dans le théorème 1.2 nous donne

Théorème 1.9 *Si* (R) *est vérifiée, si* (R$_\mathbf{k}$), (R$_\mathbf{k}^+$), (R$_\mathbf{k}^-$), (1.28) *et* (1.29) *sont vérifiées pour tout* $k \geq 2$ *et si de plus*

$$\sum_{k\geq 1} a_k^2 I_k < \infty,$$

alors

$$\| \mathcal{P}^a - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{k\geq 1} a_k^2 I_k}. \tag{1.85}$$

Cinquième cas : v.a.i.i.d. et translation aléatoire

Soit $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. et $\eta = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i., indépendante de ξ. Comme d'habitude, $\mathcal{P}$ est la loi de ξ et $\mathcal{P}^\eta$ est la loi de la suite $\xi + \eta = (\xi_k + \eta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. Avec les notations du paragraphe 1.4, le passage à la limite dans le théorème 1.3 donne

Théorème 1.10 *Si* $I_1(p) < \infty$ *et si pour* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] < \infty \quad et \quad \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\} < \infty, \tag{1.86}$$

alors

$$\| \mathcal{P}^\eta - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{I_1(p) \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] + 8 \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}. \tag{1.87}$$

Grâce à la remarque 1.13 et au corollaire 1.5, nous obtenons le corollaire suivant pour la distance de Hellinger.

Corollaire 1.7 *Si $I_1(p) < \infty$ et si pour $\varepsilon > 0$,* (1.86) *est réalisée, alors*

$$\begin{aligned}\rho(\mathcal{P}^\eta, \mathcal{P}) &\leq \sqrt{\sum_{k\geq 1} \rho^2(\mu_k, \nu_k)} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{I_1(p) \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] + 8 \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}},\end{aligned}$$

où ν_k est la loi de ξ_k et μ_k est la loi de $\xi_k + \eta_k$.

Remarque 1.16 En fait, au lieu de la condition (1.86), nous pouvons supposer que $\eta \in \ell_2$ preque sûrement (p.s.). En effet, démontrons le résultat très classique suivant.

Lemme 1.8 *Soit $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i. telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de α_k soit concentrée sur $\mathbb{R}^+$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) pour $\delta > 0$

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\alpha_k \mathbb{I}_{\{\alpha_k\leq\delta\}}] < \infty \quad et \quad \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{\alpha_k > \delta\} < \infty.$$

(ii) $\sum_{k\geq 1} \alpha_k < \infty$ p.s..

Preuve :
$(i) \Rightarrow (ii)$: si $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|\alpha_k| > \delta\} < \infty$, nous avons d'après le lemme de Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}\{\limsup\{\alpha_k > \delta\}\} = 0.$$

Donc pour presque tout ω de Ω, il existe $k_0(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0(\omega)$, $\alpha_k(\omega) = \alpha_k(\omega)\mathbb{I}_{\{\alpha_k(\omega)\leq\delta\}}$.
De plus

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k\geq 1} \alpha_k \mathbb{I}_{\{\alpha_k\leq\delta\}}\right] = \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\alpha_k \mathbb{I}_{\{\alpha_k\leq\delta\}}] < \infty,$$

donc

$$\sum_{k\geq 1} \alpha_k \mathbb{I}_{\{\alpha_k\leq\delta\}} < \infty \text{ p.s.},$$

et $\sum_{k\geq 1} \alpha_k < \infty$ p.s..
$(ii) \Rightarrow (i)$: d'après le théorème des trois séries de Kolmogorov, comme

$$\sum_{k\geq 1} \alpha_k < \infty \quad \text{p.s.},$$

alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\alpha_k \mathbb{1}_{\{|\alpha_k|\leq\delta\}}] < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|\alpha_k| > \delta\} < \infty,$$

ce qui signifie, puisque la loi de α_k est concentrée sur $\mathbb{R}^+$, que

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\alpha_k \mathbb{1}_{\{\alpha_k\leq\delta\}}] < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{\alpha_k > \delta\} < \infty.$$

■

Pour justifier la remarque 1.16, nous pouvons appliquer le lemme 1.8 à la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*} = (\eta_k^2)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $\delta = \varepsilon^2$.
Le passage à la limite dans le corollaire 1.1 nous donne

Corollaire 1.8 *Si $I_1(p) < \infty$ et si $\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\eta_k^2] < \infty$, alors*

$$\| \mathcal{P}^\eta - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{I_1(p)} \sqrt{\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\eta_k^2]}. \tag{1.88}$$

Sixième cas : v.a.i.i.d. et translation aléatoire symétrique

Le passage à la limite dans le théorème 1.4 nous donne

Théorème 1.11 *Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de η_k est symétrique. Si $I_2(p) < \infty$ et si pour $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{1}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] < \infty \quad \textit{et} \quad \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\} < \infty, \tag{1.89}$$

alors

$$\| \mathcal{P}^\eta - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} I_2(p) \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{1}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] + 8 \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}. \tag{1.90}$$

Grâce à la remarque 1.14 et au corollaire 1.6, nous obtenons le corollaire suivant pour la distance de Hellinger.

Corollaire 1.9 *Si $I_2(p) < \infty$ et si pour $\varepsilon > 0$, (1.89) est réalisée, alors*

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{P}^\eta, \mathcal{P}) &\leq \sqrt{\sum_{k\geq 1} \rho^2(\mu_k, \nu_k)} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{25}{24} I_2(p) \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{1}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] + 8 \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}, \end{aligned}$$

où ν_k est la loi de ξ_k et μ_k est la loi de $\xi_k + \eta_k$.

Remarque 1.17 Au lieu de la condition (1.89), il est possible de supposer que $\eta \in \ell_4$ p.s.. Cela découle du lemme 1.8 appliqué à la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*} = (\eta_k^4)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $\delta = \varepsilon^4$.

Le passage à la limite dans le corollaire 1.2 donne

Corollaire 1.10 *Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de η_k est symétrique. Si $I_2(p) < \infty$ et si $\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\eta_k^4] < \infty$, alors*

$$\| \mathcal{P}^\eta - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} I_2(p) \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\eta_k^4]}. \tag{1.91}$$

Septième cas : v.a.i. et translation aléatoire

Soit $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $\eta = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de v.a.i., indépendantes l'une de l'autre. Comme d'habitude, $\mathcal{P}$ est la loi de ξ et $\mathcal{P}^\eta$ celle de $\xi + \eta$. Avec les notations du paragraphe 1.4, le passage à la limite dans le théorème 1.5 donne

Théorème 1.12 *Si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $I_1(p_k) < \infty$ et si pour $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{k\geq 1} I_1(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] < \infty \quad et \quad \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\} < \infty, \tag{1.92}$$

alors

$$\| \mathcal{P}^\eta - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\sum_{k\geq 1} I_1(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] + 8 \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}. \tag{1.93}$$

De même, le passage à la limite dans le corollaire 1.3 nous donne

Corollaire 1.11 *Si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $I_1(p_k) < \infty$ et si*

$$\sum_{k\geq 1} I_1(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^2] < \infty,$$

alors

$$\| \mathcal{P}^\eta - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\sum_{k\geq 1} I_1(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^2]} < \infty. \tag{1.94}$$

Huitième cas : v.a.i. et translation aléatoire symétrique

Enfin, en passant à la limite dans le théorème 1.6 et dans le corollaire 1.4, nous obtenons

Théorème 1.13 *Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de η_k est symétrique. Si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $I_2(p_k) < \infty$ et si pour $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{k\geq 1} I_2(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] < \infty \quad et \quad \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\} < \infty, \tag{1.95}$$

alors

$$\| \mathcal{P}^\eta - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} \sum_{k \geq 1} I_2(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{I}_{\{|\eta_k| \leq \varepsilon\}}] + 8 \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}. \tag{1.96}$$

Corollaire 1.12 *Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de η_k est symétrique. Si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $I_2(p_k) < \infty$ et si*

$$\sum_{k \geq 1} I_2(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^4] < \infty,$$

alors

$$\| \mathcal{P}^\eta - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} \sum_{k \geq 1} I_2(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^4]}. \tag{1.97}$$

Chapitre 2

Continuité absolue

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est l'application des inégalités démontrées dans le chapitre précédent à l'étude de la continuité absolue.

Dans un premier temps, nous démontrons quelques lemmes préliminaires concernant la notion de continuité absolue. Ensuite, en appliquant ces lemmes et en utilisant les inégalités du paragraphe 1.5, nous montrerons la continuité absolue entre la loi d'une suite de v.a. et la loi translatée, dans tous les cas que nous avons traités.

2.2 Lemmes préliminaires

Nous rappelons que si μ et μ' sont deux mesures définies sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, alors μ est absolument continue (a.c.) par rapport à μ' ($\mu \ll \mu'$), si pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu'(A) = 0$, nous avons $\mu(A) = 0$.

Si $\mu \ll \mu'$ et $\mu' \ll \mu$, alors μ et μ' sont équivalentes et ceci se note $\mu \sim \mu'$.

2.2.1 Continuité absolue entre mesures produits

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ deux espaces mesurables, μ une mesure définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et ν_1, ν_2 deux mesures définies sur $(\Omega', \mathcal{A}')$. Nous considérons alors les deux mesures produits $\mu \times \nu_1$ et $\mu \times \nu_2$ définies sur l'espace produit $(\Omega \times \Omega', \mathcal{A} \times \mathcal{A}')$.

Lemme 2.1

$$\nu_1 \sim \nu_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu \times \nu_1 \sim \mu \times \nu_2.$$

Preuve : supposons que $\nu_2 \ll \nu_1$. Alors pour tout $A' \in \mathcal{A}'$ tel que $\nu_1(A') = 0$, nous avons $\nu_2(A') = 0$.
Soit $B \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}'$ tel que $\mu \times \nu_1(B) = 0$.

Notons pour tout $x \in \Omega$, $Bx = \{y \in \Omega' | (x,y) \in B\}$, alors $Bx \in \mathcal{A}'$. Par conséquent, $\mu \times \nu_1(B) = 0$ implique que

$$\mu \times \nu_1(B) = \int_\Omega \nu_1(Bx)\, \mu(dx) = 0.$$

Dans ce cas, $\nu_1(Bx) = 0$ μ-p.p. et grâce à la continuité absolue de ν_2 par rapport à ν_1, nous avons aussi $\nu_2(Bx) = 0$ μ-p.p.. Ainsi

$$\mu \times \nu_2(B) = \int_\Omega \nu_2(Bx)\, \mu(dx) = 0.$$

Ceci signifie que $\mu \times \nu_2 \ll \mu \times \nu_1$. De la même façon, $\nu_1 \ll \nu_2$ implique que $\mu \times \nu_1 \ll \mu \times \nu_2$.
Supposons maintenant que $\mu \times \nu_2 \ll \mu \times \nu_1$. Pour tout $B \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}'$ tel que $\mu \times \nu_1(B) = 0$, nous avons $\mu \times \nu_2(B) = 0$.
Soit $A' \in \mathcal{A}'$ tel que $\nu_1(A') = 0$ et posons $B = \Omega \times A'$. Dans ce cas

$$\mu \times \nu_1(B) = \mu \times \nu_1(\Omega \times A') = \mu(\Omega)\nu_1(A') = 0.$$

Alors $\mu \times \nu_2(B) = 0$, soit $\mu(\Omega)\nu_2(A') = 0$ et $\nu_2(A') = 0$, autrement dit $\nu_2 \ll \nu_1$. Un raisonnement analogue montre que si $\mu \times \nu_1 \ll \mu \times \nu_2$, alors $\nu_1 \ll \nu_2$. Ceci termine la preuve du lemme. ∎

2.2.2 Continuité absolue et mesure translatée

Nous considérons l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, a.c. par rapport à λ. Donc d'après le théorème de Radon-Nikodym, la densité q de μ par rapport à λ existe et pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, nous pouvons écrire

$$\mu(A) = \int_A q(x)\, dx.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et μ^a la mesure translatée de μ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mu^a(A) = \mu(A + a) = \int_{A+a} q(x)\, dx = \int_A q(x+a)\, dx.$$

Lemme 2.2 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$\mu \sim \mu^a \quad \Longleftrightarrow \quad q > 0 \quad \lambda\text{-p.p.}.$$

Preuve : supposons que q est strictement positive λ-p.p.. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\mu(A) = 0$.

$$\mu(A) = \int_A q(x)\, dx \quad \text{et} \quad q > 0 \quad \lambda\text{-p.p.},$$

donc $\lambda(A) = 0$. Or λ est invariante par translation, donc pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lambda(A+a) = 0$ et

$$\mu^a(A) = \int_{A+a} q(x)\,dx = 0.$$

Par conséquent, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mu^a \ll \mu$. Par symétrie, il est évident que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mu \ll \mu^a$.
Supposons maintenant que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mu^a \sim \mu$. Soit $\mathcal{N}$ la mesure de la loi normale centrée réduite et φ sa densité par rapport à λ ($\varphi > 0$).
Posons $\nu = \mu * \mathcal{N}$. Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, nous avons

$$\nu(A) = \mu * \mathcal{N}(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A-x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mu^{(-x)}(A)\varphi(x)\,dx.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mu^{(-x)} \sim \mu$. Donc pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\mu(A) = 0$, nous avons $\mu^{(-x)}(A) = 0$ et $\nu(A) = 0$.
Par conséquent, $\nu \ll \mu$. Réciproquement, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\nu(A) = 0$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} \mu^{(-x)}(A)\varphi(x)\,dx = 0,$$

donc $\mu^{(-x)}(A) = 0$ et $\mu(A) = 0$ λ-p.p.. Ainsi $\mu \ll \nu$ et $\mu \sim \nu$. Nous avons alors $\mu \sim \nu$ et la densité de μ par rapport à λ existe et est strictement positive λ-p.p..

■

2.2.3 Continuité absolue et convergence en variation

Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de mesures et μ une mesure, définies sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. Lorsque μ_n converge en variation vers μ ($\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mu$), alors pour tout $A \in \mathcal{A}$, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A).$$

Lemme 2.3 *Si $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mu$ et si pour tout $n \geq 2$, $\mu_n \sim \mu_1$, alors $\mu \ll \mu_1$.*

Preuve : soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu_1(A) = 0$, alors pour tout $n \geq 2$, $\mu_n(A) = 0$. Or $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mu$, donc

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = 0,$$

donc $\mu \ll \mu_1$. ■

2.3 Cas des variables aléatoires indépendantes et translation non aléatoire

2.3.1 Cas des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées

Reprenons les notations du paragraphe 1.1. Soit $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d.. La densité p de ξ_k est supposée a.c. et $I(p)$ désigne la quantité d'information de Fisher associée à p.

Pour toute suite $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ réelle, nous définissons la suite translatée $\xi + a$ et $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^a$ désignent respectivement les lois de ξ et $\xi + a$. Dans ce cas, le résultat obtenu est

Théorème 2.1 *Supposons que $p > 0$ λ-p.p. et $I(p) < \infty$ alors pour toute suite $a \in \ell_2$, nous avons*

$$\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^a.$$

Remarque 2.1 L'étude de la continuité absolue dans ce cas a déjà été réalisée par L. A. Shepp [29] et son résultat est beaucoup plus complet que celui-ci. La démonstration de L. A. Shepp utilise l'alternative de Kakutani [16], ce qui n'est pas notre cas. Après les démonstations du paragraphe 2.3.3, nous expliquerons comment nous pouvons aussi utiliser l'alternative de Kakutani.

2.3.2 Cas des variables aléatoires indépendantes n'ayant plus la même loi

Ici, $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.i.. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la densité p_k de ξ_k est supposée a.c. et $I(p_k)$ est la quantité de Fisher associée à p_k.

Dans ce cas, avec les mêmes notations, c'est-à-dire que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^a$ désignent respectivement les lois de ξ et $\xi + a$, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 2.2 *Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k > 0$ λ-p.p. et $I(p_k) < \infty$, alors pour toute suite a telle que*

$$\sum_{k\geq 1} a_k^2 I(p_k) < \infty, \tag{2.1}$$

nous avons

$$\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^a.$$

2.3.3 Démonstrations

Notons

$$\xi^1 = (\xi + a) = (\xi_1 + a_1, \ldots, \xi_n + a_n, \ldots) \text{ de loi } \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^a,$$
$$\xi^2 = (\xi_1, \xi_2 + a_2, \ldots, \xi_n + a_n, \ldots) \text{ de loi } \mathcal{P}_2,$$

et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \xi^n &= (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n + a_n, \xi_{n+1} + a_{n+1}, \ldots) \text{ de loi } \mathcal{P}_n, \\ \xi^{n+1} &= (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \quad \xi_n \quad, \xi_{n+1} + a_{n+1}, \ldots) \text{ de loi } \mathcal{P}_{n+1}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ν_n désigne la loi de la v.a. ξ_n et $\nu_n^{(-a_n)}$ la loi translatée, donc la loi de la v.a. $\xi_n + a_n$. De plus, si μ_n est la loi de $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_{n+1} + a_{n+1}, \ldots)$, nous pouvons écrire

$$\mathcal{P}_n = \mu_n \times \nu_n^{(-a_n)} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{n+1} = \mu_n \times \nu_n. \tag{2.2}$$

Preuve du théorème 2.1 : cas des v.a.i.i.d.

Première étape : montrons que $\mathcal{P} \ll \mathcal{P}^a$.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. La densité p de la v.a. ξ_n est strictement positive λ-p.p.. Donc d'après le lemme 2.2, pour tout $a_n \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\nu_n \sim \nu_n^{(-a_n)}.$$

Grâce au lemme 2.1, pour tout $a_n \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\mu_n \times \nu_n \sim \mu_n \times \nu_n^{(-a_n)},$$

soit encore

$$\mathcal{P}_{n+1} \sim \mathcal{P}_n.$$

Par récurrence, nous en déduisons que pour tout $n \geq 2$, nous avons

$$\mathcal{P}_n \sim \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^a. \tag{2.3}$$

Notons $a^n = (0, \ldots, 0, a_n, a_{n+1}, \ldots)$. Dans ce cas, $\mathcal{P}_n$ est la loi de la suite $\xi + a^n$, c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}^{a^n}.$$

Supposons que $a \in \ell_2$, alors $a^n \in \ell_2$ également. D'autre part, $I(p) < \infty$. Nous pouvons donc appliquer l'inégalité (1.82)

$$\| \mathcal{P}^{a^n} - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{I(p)} \sqrt{\sum_{k \geq 1} ((a^n)_k)^2},$$

ou encore

$$\| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{I(p)} \sqrt{\sum_{k \geq n} a_k^2}.$$

Or $a \in \ell_2$, donc le second membre de l'inégalité tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi

$$\lim_{n \to \infty} \| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n \xrightarrow[n \to \infty]{var} \mathcal{P}. \tag{2.4}$$

En appliquant le lemme 2.3 à (2.3) et (2.4), nous avons

$$\mathcal{P} \ll \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^a.$$

Deuxième étape : montrons que $\mathcal{P}^a \ll \mathcal{P}$.

Notons

$$\begin{aligned} \zeta = (\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}^*} &= (\xi_k + a_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ de loi } \mathcal{Q} = \mathcal{P}^a, \\ \zeta - a = (\zeta_k - a_k)_{k\in\mathbb{N}^*} &= (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ de loi } \mathcal{Q}^{-a} = \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Il est évident que le raisonnement précédent s'applique aussi aux suites ζ et $\zeta - a$. En effet, ζ vérifie toutes les hypothèses nécessaires, c'est une suite de v.a.i.i.d., la densité de ζ_k est a.c. et elle est strictement positive λ-p.p. ($x \mapsto p(x - a_k)$). La quantité de Fisher associée à cette densité n'est autre que $I(p)$, elle est donc finie. De plus, $(-a) \in \ell_2$. Par conséquent, $\mathcal{Q} \ll \mathcal{Q}^{-a}$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}^a \ll \mathcal{P}$. Ceci termine la démonstration du théorème 2.1. ■

Preuve du théorème 2.2 : cas des v.a.i.

Première étape : montrons que $\mathcal{P} \ll \mathcal{P}^a$.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. La densité p_n de la v.a. ξ_n est strictement positive λ-p.p.. Donc d'après le lemme 2.2, pour tout $a_n \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\nu_n \sim \nu_n^{(-a_n)}.$$

Grâce au lemme 2.1, pour tout $a_n \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\mu_n \times \nu_n \sim \mu_n \times \nu_n^{(-a_n)},$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_{n+1} \sim \mathcal{P}_n.$$

Par récurrence, nous en déduisons que pour tout $n \geq 2$, nous avons

$$\mathcal{P}_n \sim \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^a. \tag{2.5}$$

D'autre part, $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}^{a^n}$. Nous savons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $I(p_k) < \infty$ et a est telle que

$$\sum_{k\geq 1} a_k^2 I(p_k) < \infty,$$

alors la suite a^n vérifie aussi cette hypothèse et nous pouvons appliquer l'inégalité (1.83)

$$\| \mathcal{P}^{a^n} - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\sum_{k\geq 1} I(p_k)((a^n)_k)^2},$$

ou encore

$$\| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\sum_{k\geq n} I(p_k) a_k^2}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, le second membre de l'inégalité tend vers 0 et

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P}. \tag{2.6}$$

Or (2.5) et (2.6) sont exactement les hypothèses du lemme 2.3, donc

$$\mathcal{P} \ll \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^a.$$

Deuxième étape : montrons que $\mathcal{P}^a \ll \mathcal{P}$.

Comme auparavant, nous définissons les suites $\zeta = (\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}^*} = (\xi_k + a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de loi $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^a$ et $\zeta - a = (\zeta_k - a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de loi $\mathcal{Q}^{-a} = \mathcal{P}$. Les v.a. ζ_k vérifient les mêmes hypothèses que les v.a. ξ_k. Elles sont indépendantes et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la densité de ζ_k est $q_k(x) = p_k(x - a_k)$. Elle est donc strictement positive λ-p.p. et $I(q_k) = I(p_k) < \infty$. De plus, la suite $(-a)$ est telle que

$$\sum_{k\geq 1} (-a_k)^2 I(q_k) = \sum_{k\geq 1} a_k^2 I(p_k) < \infty.$$

Nous appliquons alors le raisonnement de la première étape et

$$\mathcal{Q} \ll \mathcal{Q}^{-a} \text{ c'est-à-dire que } \mathcal{P}^a \ll \mathcal{P}.$$

■

Expliquons maintenant comment utiliser l'alternative de Kakutani [16] dans le cas des v.a.i.i.d.. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons vu que la loi de ν_k de la v.a. ξ_k est équivalente à la loi $\nu_k^{(-a_k)}$ de la v.a. $\xi_k + a_k$, car nous avons supposé que p est strictement positive λ-p.p.. D'autre part, nous pouvons calculer le carré de la distance de Hellinger entre ces deux lois, il est défini par

$$\rho^2\left(\nu_k, \nu_k^{(-a_k)}\right) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{p(x+a_k)} - \sqrt{p(x)}\right)^2 dx.$$

Il est facile de voir que

$$\rho^2\left(\nu_k, \nu_k^{(-a_k)}\right) \leq \frac{1}{8} a_k^2 I(p).$$

Donc

$$\sum_{k\geq 1} \rho^2\left(\nu_k, \nu_k^{(-a_k)}\right) \leq \frac{1}{8} I(p) \sum_{k\geq 1} a_k^2.$$

Or $a \in l_2$ et $I(p)$ est finie par hypothèses, donc d'après l'alternative de Kakutani, nous en déduisons directement que $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^a$.

Nous avons évidemment le même raisonnement dans le cas où ξ est une suite de v.a.i.. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, p_k est supposée strictement positive λ-p.p., donc la loi de ξ_k est équivalente à la loi de $\xi_k + a_k$. Dans ce cas, nous avons

$$\sum_{k\geq 1} \rho^2\Big(\nu_k, \nu_k^{(-a_k)}\Big) \leq \frac{1}{8}\sum_{k\geq 1} a_k^2 I(p_k).$$

Or le second membre de l'inégalité est fini par hypothèses et d'après l'alternative de Kakutani, $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^a$.

2.4 Cas des chaînes de Markov et translation non aléatoire

2.4.1 Chaînes de Markov homogènes stationnaires

Nous reprenons ici toutes les notations du paragraphe 1.2 que nous rappelons brièvement. Soit $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une c.m. homogène stationnaire. La densité de probabilité initiale stationnaire π est supposée a.c.. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x,.)$ est la densité de probabilité de transition supposée a.c.. Nous considérons la chaîne inversée par rapport à la loi de probabilité initiale stationnaire et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $q(y,.)$ est la densité de probabilité de transition de cette chaîne. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $I(\pi)$, $I^+(x)$ et $I^-(y)$ désignent les quantités de Fisher associées respectivement aux hypothèses de I-régularité $(\mathbf{R})$, $(\mathbf{R}^+)$ et $(\mathbf{R}^-)$. Enfin, rappelons que

$$I = I(\pi) + \int_{\mathbb{R}} I^+(x)\pi(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} I^-(y)\pi(y)\,dy.$$

Soit $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Comme précédemment, $\mathcal{P}$ désigne la loi de la chaîne ξ et $\mathcal{P}^a$ celle de la loi translatée $\xi + a = (\xi_k + a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. Dans ce cas, le résultat que nous obtenons grâce au théorème 1.8 est le suivant

Théorème 2.3 *Supposons que*

(i) $\pi > 0$ *λ-p.p. et* $p > 0$ *λ^2-p.p.,*

(ii) $(\mathbf{R})$, $(\mathbf{R}^+)$ *et* $(\mathbf{R}^-)$ *sont vérifiées,*

(iii) $\int_{\mathbb{R}} I^+(x)\pi(x)\,dx < \infty$ *et* $\int_{\mathbb{R}} I^-(y)\pi(y)\,dy < \infty$,

alors pour toute suite $a \in \ell_2$, *nous avons*

$$\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^a.$$

2.4.2 Chaînes de Markov non homogènes

Rappelons les notations du paragraphe 1.3. Ici, $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une c.m. qui n'est plus homogène . La densité de probabilité initiale π est a.c. et pour tout $k \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $p_k(x,.)$ est la densité de probabilité de transition de l'instant $k-1$ à l'instant k supposée a.c.. Nous considérons la chaîne inversée par rapport à la loi de probabilité initiale et pour tout $k \geq 2$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $q_{k-1}(y,.)$ est la densité de transition de l'instant $-k$ à l'instant $-(k-1)$.

$I(\pi)$ est la quantité de Fisher associée à l'hypothèse de I-régularité $(\mathbf{R})$ et pour tout $k \geq 2$, tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $I(f_k)$, $I_k^+(x)$ et $I_{k-1}^-(y)$ sont les quantités de Fisher associées respectivement aux hypothèses de I-régularité $(\mathbf{R_k})$, $(\mathbf{R_k^+})$ et $(\mathbf{R_k^-})$. Nous notons pour tout $k \geq 2$

$$I_k^+ = \int_{\mathbb{R}} I_k^+(x) f_{k-1}(x)\, dx \quad \text{et} \quad I_k^- = \int_{\mathbb{R}} I_{k-1}^-(y) f_k(y)\, dy,$$

où f_k est la densité de ξ_k.
Rappelons que

$$I_1 = I(\pi) + I(f_2) + I_2^+ + I_2^-,$$

et pour tout $k \geq 2$

$$I_k = I(f_k) + I(f_{k+1}) + I_k^+ + I_k^- + I_{k+1}^+ + I_{k+1}^-.$$

Dans ce cas, avec les mêmes notations (ξ et $\xi + a$ de lois respectives $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^a$), nous obtenons grâce au théorème 1.9

Théorème 2.4 *Supposons que*

(i) $\pi > 0$ *λ-p.p. et pour tout* $k \geq 2$, $p_k > 0$ *λ^2-p.p.,*

(ii) $(\mathbf{R})$ *est vérifiée ainsi que* $(\mathbf{R_k})$, $(\mathbf{R_k^+})$ *et* $(\mathbf{R_k^-})$ *pour tout* $k \geq 2$,

(iii) pour tout $k \geq 2$, $I_k^+ < \infty$ *et* $I_k^- < \infty$,

alors pour toute suite a telle que

$$\sum_{k\geq 1} a_k^2 I_k < \infty, \tag{2.7}$$

nous avons

$$\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^a.$$

Remarque 2.2 Le cas des c.m. a déjà été traité par H. Sato [26]. Ce dernier a démontré la continuité absolue de deux c.m. localement équivalentes. Sa démonstration utilise un résultat dû à Y. M. Kabanov, R. S. Lipcer et A. N. Shiryaev [15]. Après les démonstrations, nous expliquerons la méthode et les outils utilisés par H. Sato.

2.4.3 Démonstrations

Nous utilisons les mêmes notations que dans les démonstrations du paragraphe 2.3.

$$\xi^1 = (\xi + a) = (\xi_1 + a_1, \ldots, \xi_n + a_n, \ldots) \text{ de loi } \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^a,$$

et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \xi^n &= (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n + a_n, \xi_{n+1} + a_{n+1}, \ldots) \text{ de loi } \mathcal{P}_n, \\ \xi^{n+1} &= (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \quad \xi_n \quad, \xi_{n+1} + a_{n+1}, \ldots) \text{ de loi } \mathcal{P}_{n+1}. \end{aligned}$$

Montrons tout d'abord le lemme suivant, valable dans les deux cas.

Lemme 2.4 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n \sim \mathcal{P}_{n+1}$.*

Preuve : fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Les suites ξ^n et ξ^{n+1} sont à valeurs dans $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}^\infty)$. Posons

$$\begin{aligned} Y_n &= \{(0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) | \text{ pour tout } k \geq 1,\ x_{n+k} \in \mathbb{R}\} \\ Z_n &= \{(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0, \ldots) | \text{ pour tout } 1 \leq k \leq n,\ x_k \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous pouvons identifier $\mathbb{R}^\infty$ à $Y_n \times Z_n$. Considérons une partition de $Y_n \times Z_n$, notée

$$\Gamma = \{\gamma_y; y \in Y_n\} \text{ où } \gamma_y = \{y + z; z \in Z_n\}.$$

Posons μ_n la projection de $\mathcal{P}_n$ sur Y_n, c'est aussi la projection de $\mathcal{P}_{n+1}$ sur Y_n. Ainsi, μ_n est la loi de la suite $(0, \ldots, 0, \xi_{n+1} + a_{n+1}, \xi_{n+2} + a_{n+2}, \ldots)$.
Soit $y = (0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) \in Y_n$, appelons

- P_y^n : la loi conditionnelle de $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n + a_n)$ sachant que $\xi_{n+1} + a_{n+1} = x_{n+1}, \xi_{n+2} + a_{n+2} = x_{n+2}, \ldots,$
- Q_y^n : la loi conditionnelle de $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)$ sachant que $\xi_{n+1} + a_{n+1} = x_{n+1}, \xi_{n+2} + a_{n+2} = x_{n+2}, \ldots.$

En considérant la chaîne inversée par rapport à la probabilité initiale qui est aussi une c.m. et qui vérifie la propriété de Markov,

- P_y^n est la loi conditionnelle de $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n + a_n)/\xi_{n+1} + a_{n+1} = x_{n+1}$,
- Q_y^n est la loi conditionnelle de $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)/\xi_{n+1} + a_{n+1} = x_{n+1}$.

Alors P_y^n et Q_y^n sont des lois n-dimensionnelles dont les densités respectives p_n et q_n sont données pour $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ par
- dans le cas homogène stationnaire

$$\begin{aligned} p_n : \ & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \bar{x} \longmapsto p_n(\bar{x}) = \frac{\pi(x_1) \cdots p(x_{n-1}, x_n - a_n) p(x_n - a_n, x_{n+1} - a_{n+1})}{\pi(x_{n+1} - a_{n+1})}, \\ q_n : \ & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \bar{x} \longmapsto q_n(\bar{x}) = \frac{\pi(x_1) \cdots p(x_{n-1}, x_n) p(x_n, x_{n+1} - a_{n+1})}{\pi(x_{n+1} - a_{n+1})}, \end{aligned}$$

- dans le cas non homogène

$$
\begin{aligned}
p_n : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\bar{x} &\longmapsto \frac{\pi(x_1)\cdots p_n(x_{n-1}, x_n - a_n)p_{n+1}(x_n - a_n, x_{n+1} - a_{n+1})}{f_{n+1}(x_{n+1} - a_{n+1})}, \\
q_n : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\bar{x} &\longmapsto \frac{\pi(x_1)\cdots p_n(x_{n-1}, x_n)p_{n+1}(x_n, x_{n+1} + a_{n+1})}{f_{n+1}(x_{n+1} - a_{n+1})}.
\end{aligned}
$$

Grâce à la condition (i) du théorème 2.3 et à la condition (i) du théorème 2.4, p_n et q_n sont strictement positives λ^n-p.p. dans les deux cas. Donc pour tout $y \in Y_n$, $P_y^n \sim Q_y^n$.
Soit $A \in \mathcal{B}^\infty$ tel que $\mathcal{P}_n(A) = 0$. Par conséquent

$$\mathcal{P}_n(A) = \int_{Y_n} P_y^n(A)\, \mu_n(dy) = 0,$$

c'est-à-dire que pour tout $y \in Y_n$, $P_y^n(A) = 0$ μ_n-p.p..
Comme $P_y^n \sim Q_y^n$ pour tout $y \in Y_n$, nous avons

$$Q_y^n(A) = 0 \quad \mu_n\text{-p.p.}$$

et aussi

$$\mathcal{P}_{n+1}(A) = \int_{Y_n} Q_y^n(A)\, \mu_n(dy) = 0.$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1} \ll \mathcal{P}_n$.
Un raisonnement analogue montre que $\mathcal{P}_n \ll \mathcal{P}_{n+1}$, ce qui termine la démonstration du lemme 2.4. ∎

Par récurrence, nous en déduisons que pour tout $n \geq 2$, nous avons

$$\mathcal{P}_n \sim \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^a. \tag{2.8}$$

Preuve du théorème 2.3 : cas homogène stationnaire.

Première étape : montrons que $\mathcal{P} \ll \mathcal{P}^a$.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Rappelons que $a^n = (0, \ldots, 0, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, $\mathcal{P}$ est la loi de la chaîne ξ et $\mathcal{P}_n$ est la loi de la chaîne $\xi + a^n$, ce qui signifie avec les notations habituelles que $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}^{a^n}$. Si $a \in \ell_2$, alors $a^n \in \ell_2$ également. Nous pouvons donc appliquer l'inégalité (1.84) à ce cas précis et

$$\| \mathcal{P}^{a^n} - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{2I} \sqrt{\sum_{k \geq 1} ((a^n)_k)^2},$$

ou encore

$$\| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{2I}\sqrt{\sum_{k\geq n} a_k^2}.$$

Nous savons que $I < \infty$ et le second membre de l'inégalité tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (car $a \in \ell_2$), donc

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P}. \tag{2.9}$$

Il nous reste à appliquer le lemme 2.3 à (2.8) et (2.9), ce qui nous donne

$$\mathcal{P} \ll \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^a.$$

Deuxième étape : montrons que $\mathcal{P}^a \ll \mathcal{P}$.

Ceci s'effectue comme dans les démonstrations du paragraphe 2.3 en posant

$$\zeta = (\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}^*} = (\xi_k + a_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ de loi } \mathcal{Q} = \mathcal{P}^a,$$
$$\zeta - a = (\zeta_k - a_k)_{k\in\mathbb{N}^*} = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ de loi } \mathcal{Q}^{-a} = \mathcal{P}.$$

En appliquant le raisonnement précédent aux c.m. ζ et $\zeta - a$, il est clair que

$$\mathcal{Q} \ll \mathcal{Q}^{-a} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathcal{P}^a \ll \mathcal{P}.$$

■

Preuve du théorème 2.4 : cas non homogène.

Première étape : montrons que $\mathcal{P} \ll \mathcal{P}^a$.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la suite a soit telle que $\sum_{k\geq 1} a_k^2 I_k < \infty$, alors la suite a^n vérifie aussi cette hypothèse car

$$\sum_{k\geq 1}((a^n)_k)^2 I_k = \sum_{k\geq n} a_k^2 I_k < \infty.$$

Nous avons alors toutes les hypothèses permettant d'appliquer le théorème 1.9 et l'inégalité (1.85).

$$\| \mathcal{P}^{a^n} - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\frac{3}{2}\sum_{k\geq 1}((a^n)_k)^2 I_k},$$

ou encore

$$\| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\frac{3}{2}\sum_{k\geq n} a_k^2 I_k}.$$

Le second membre de l'inégalité tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini grâce à l'hypothèse (2.7) et

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P}. \tag{2.10}$$

Ceci combiné avec (2.8) permet de conclure

$$\mathcal{P} \ll \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^a.$$

Deuxième étape : montrons que $\mathcal{P}^a \ll \mathcal{P}$.

Le même raisonnement s'applique aux chaînes ζ et $\zeta - a$ et nous donne

$$\mathcal{Q} \ll \mathcal{Q}^{-a} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathcal{P}^a \ll \mathcal{P}.$$

■

Expliquons maintenant comment obtenir la continuité absolue en utilisant les outils de H. Sato [26] et de Y. M. Kakanov, R. S. Lipcer et A. N. Shiryaev [15].

Nous savons que

$$\|\mathcal{P}^a - \mathcal{P}\| \leq 2\sqrt{2}\rho(\mathcal{P}^a, \mathcal{P}). \tag{2.11}$$

D'autre part, le théorème 4.6 de H. Sato [26] nous donne

$$\begin{aligned} \rho^2(\mathcal{P}^a, \mathcal{P}) &\leq \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{p_k(\xi_{k-1} + a_{k-1}, y + a_k)} - \sqrt{p_k(\xi_{k-1}, y)}\right)^2 dy\right] \\ &\leq \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\left(\sum_{k\geq 1} a_k^2\right), \end{aligned} \tag{2.12}$$

où

$$\begin{aligned} M_1 &= \sup_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p_k^x}{p_k}(\xi_{k-1}, y)\right]^2 p_k(\xi_{k-1}, y)\, dy\right], \\ M_2 &= \sup_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p_k^y}{p_k}(\xi_{k-1}, y)\right]^2 p_k(\xi_{k-1}, y)\, dy\right]. \end{aligned}$$

Dans le cas homogène stationnaire, nous avons alors

$$M_1 = \int_{\mathbb{R}} I^+(x)\pi(x)\, dx = I^+ \quad \text{et} \quad M_2 = \int_{\mathbb{R}} I^-(y)\pi(y)\, dy + I(\pi) = I^- + I(\pi).$$

Donc en combinant les deux résultats (2.11)et (2.12), nous obtenons une inégalité analogue à (1.84)

$$\|\mathcal{P}^a - \mathcal{P}\| \leq 2\sqrt{I}\sqrt{\sum_{k\geq 1} a_k^2}.$$

Dans le cas non homogène, nous voyons par récurrence comme nous l'avons fait dans le paragraphe 1.4.3, que

$$\rho^2(P_n^a, P_n) \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{p_k(\xi_{k-1} + a_{k-1}, u_k + a_k)} - \sqrt{p_k(\xi_{k-1}, u_k)}\right)^2 du_k\right],$$

où $p_1(u_0, u_1) = \pi(u_1)$ et $a_0 = 0$. Définissons maintenant $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le processus de Hellinger associé à P_n et P_n^a (chap IV, [14]) par

$$h_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\sqrt{p_k(\xi_{k-1}+a_{k-1}, u_k+a_k)} - \sqrt{p_k(\xi_{k-1}, u_k)}\right)^2 du_k\right].$$

Posons pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} I_k^- &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{p_k^y}{p_k}(\xi_{k-1}, y)\right]^2 p_k(\xi_{k-1}, y)\, dy\right], \\ I_k^+ &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{p_k^x}{p_k}(\xi_{k-1}, y)\right]^2 p_k(\xi_{k-1}, y)\, dy\right]. \end{aligned}$$

Nous voyons alors que $I_1^- = I(\pi)$ et $I_1^+ = 0$.
En suivant la même idée de démonstration que celle du théorème 4.6 de H. Sato [26], nous avons

$$\rho^2(\mathcal{P}^a, \mathcal{P}) \leq \mathbb{E}(h_\infty) \leq \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}(a_{k-1}^2 I_k^+ + a_k^2 I_k^-).$$

Donc dans notre cas, nous avons

$$\|\mathcal{P}^a - \mathcal{P}\| \leq 2\sqrt{\sum_{k\geq 1}(a_{k-1}^2 I_k^+ + a_k^2 I_k^-)}.$$

Ceci est analogue à l'inégalité (1.85).

Venons-en à la continuité absolue. Nous savons d'après le corollaire 2.8 du chapitre IV de [14] que

$$\mathcal{P}(h_\infty < \infty) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P} \ll \mathcal{P}^a.$$

Si

$$\sum_{k\geq 1}(a_{k-1}^2 I_k^+ + a_k^2 I_k^-) < \infty,$$

nous avons alors $\mathcal{P} \ll \mathcal{P}^a$. Cela donne aussi $\mathcal{P} \ll \mathcal{P}^{-a}$. Il nous reste maintenant à appliquer le lemme 4.2 de [26], nous obtenons $\mathcal{P}^a \ll \mathcal{P}$.

2.5 Cas des variables aléatoires indépendantes et translation aléatoire

2.5.1 Cas des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées

Reprenons les notations du paragraphe 1.4. La suite $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.i.i.d.. La densité p de ξ_k est supposée a.c.. Rappelons que

$$I_1(p) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p'}{p}(x)\right]^2 p(x)\,dx \quad \text{et} \quad I_2(p) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p''}{p}(x)\right]^2 p(x)\,dx.$$

D'autre part, $\eta = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.i., indépendante de ξ. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Q_k désigne la loi de η_k. Enfin, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^\eta$ désignent respectivement les lois des suites ξ et $\xi + \eta$. Grâce au théorème 1.10, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 2.5 *Supposons que $p > 0$ λ-p.p. et $I_1(p) < \infty$, alors pour toute suite η telle qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant*

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] < \infty \quad \textit{et} \quad \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\} < \infty, \tag{2.13}$$

nous avons

$$\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^\eta. \tag{2.14}$$

Remarque 2.3 Comme nous l'avons signalé lors de la remarque 1.16, au lieu de la condition (2.13), nous pouvons supposer que la suite $\eta \in \ell_2$ p.s..

Remarque 2.4 H. Sato et M. Tamashiro ont étudié le cas particulier où ξ est une suite gaussienne standard et η une suite non négative. Leur démonstration utilise aussi l'alternative de Kakutani [16] et ils ont aussi démontré (théorème 1, [27]) que dans ce cas, (2.14) implique que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{\eta_k\leq\varepsilon\}}] < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}^2\{\eta_k > \varepsilon\} < \infty.$$

Le corollaire 1.8 nous donne le résultat suivant.

Corollaire 2.1 *Supposons que $p > 0$ λ-p.p. et $I_1(p) < \infty$, alors pour toute suite η telle que*

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\eta_k^2] < \infty, \tag{2.15}$$

nous avons

$$\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^\eta.$$

Supposons maintenant que la suite η est symétrique, le théorème 1.11 nous permet de démontrer le résultat suivant.

Théorème 2.6 *Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de η_k est symétrique. Si $p > 0$ λ-p.p. et $I_2(p) < \infty$, alors pour toute suite η telle qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant*

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] < \infty \quad et \quad \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\} < \infty, \tag{2.16}$$

nous avons

$$\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^\eta.$$

Remarque 2.5 Comme nous l'avons signalé lors de la remarque 1.17, au lieu de la condition (2.16), nous pouvons supposer que la suite $\eta \in \ell_4$ p.s..

Le corollaire 1.10 nous donne le résultat suivant.

Corollaire 2.2 *Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de η_k est symétrique. Si $p > 0$ λ-p.p. et $I_2(p) < \infty$, alors pour toute suite η telle que*

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[\eta_k^4] < \infty, \tag{2.17}$$

nous avons

$$\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^\eta.$$

Remarque 2.6 Ce cas a déjà été étudié par H. Sato et C. Watari [28] et ils utilisent aussi l'alternative de Kakutani. Après les démonstrations, nous montrerons comment nous pouvons également utiliser cette alternative.

2.5.2 Cas des variables aléatoires n'ayant plus la même loi

Ici, $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.i.. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, p_k désigne la loi de ξ_k et est supposée a.c.. De plus, $\eta = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est toujours une suite de v.a.i., indépendante de ξ. Les lois respectives de ξ et $\xi + \eta$ sont $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^\eta$. Grâce au théorème 1.12, nous démontrons

Théorème 2.7 *Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k > 0$ λ-p.p. et $I_1(p_k) < \infty$, alors pour toute suite η telle qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant*

$$\sum_{k\geq 1} I_1(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] < \infty \quad et \quad \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\} < \infty, \tag{2.18}$$

nous avons

$$\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^\eta.$$

Comme conséquence du corollaire 1.11, nous avons

Corollaire 2.3 *Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k > 0$ λ-p.p. et $I_1(p_k) < \infty$, alors pour toute suite η telle que*

$$\sum_{k\geq 1} I_1(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^2] < \infty, \tag{2.19}$$

nous avons

$$\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^\eta.$$

Enfin, dans le cas symétrique, grâce au théorème 1.13, nous démontrons

Théorème 2.8 *Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de η_k est symétrique, $p_k > 0$ λ-p.p. et $I_2(p_k) < \infty$, alors pour toute suite η telle qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant*

$$\sum_{k\geq 1} I_2(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] < \infty \quad et \quad \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\} < \infty, \tag{2.20}$$

nous avons

$$\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^\eta.$$

Comme conséquence du corollaire 1.12, nous obtenons

Corollaire 2.4 *Supposons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de η_k est symétrique, $p_k > 0$ λ-p.p. et $I_2(p_k) < \infty$, alors pour toute suite η telle que*

$$\sum_{k\geq 1} I_2(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^4] < \infty, \tag{2.21}$$

nous avons

$$\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^\eta.$$

2.5.3 Démonstrations

Nous noterons comme dans toutes les démonstrations précédentes

$$\xi^1 = (\xi + \eta) = (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_n + \eta_n, \ldots) \text{ de loi } \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^\eta,$$

et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \xi^n &= (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n + \eta_n, \xi_{n+1} + \eta_{n+1}, \ldots) \text{ de loi } \mathcal{P}_n, \\ \xi^{n+1} &= (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \quad \xi_n \quad, \xi_{n+1} + \eta_{n+1}, \ldots) \text{ de loi } \mathcal{P}_{n+1}. \end{aligned}$$

De plus, ν_n et $\nu_n * Q_n$ sont les lois respectives des v.a. ξ_n et $\xi_n + \eta_n$. Notons μ_n la loi de la suite $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_{n+1} + \eta_{n+1}, \xi_{n+2} + \eta_{n+2}, \ldots)$. Dans ce cas, nous pouvons écrire

$$\mathcal{P}_n = \mu_n \times (\nu_n * Q_n) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{n+1} = \mu_n \times \nu_n.$$

Montrons tout d'abord le résultat suivant valable dans le cas des v.a.i.i.d. ou le cas des v.a.i..

Lemme 2.5 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\nu_n * Q_n \sim \nu_n$.*

Preuve : soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\nu_n(A) = 0$. Nous savons que p est strictement positive λ-p.p. (ou p_k est strictement positive λ-p.p. pour tout $k \in \mathbb{N}^*$), donc d'après le lemme 2.2, pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\nu_n^a \sim \nu_n,$$

c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\nu_n^{(-x)} \sim \nu_n$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\nu_n * Q_n(A) &= \int_{\mathbb{R}} \nu_n(A-x)Q_n(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \nu_n^{(-x)}(A)Q_n(dx) = 0\end{aligned}$$

et $\nu * Q_n \ll \nu_n$.
Réciproquement, soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\nu_n * Q_n(A) = 0$. Donc

$$\nu_n * Q_n(A) = \int_{\mathbb{R}} \nu_n(A-x)Q_n(dx) = 0$$

et $\nu_n(A-x) = \nu_n^{(-x)}(A) = 0$ Q_n-p.p..
Or p est strictement positive λ-p.p. (ou p_k est strictement positive λ-p.p. pour tout $k \in \mathbb{N}^*$), donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\nu_n^{(-x)} \sim \nu_n.$$

Donc $\nu_n(A) = 0$ et $\nu_n \ll \nu_n * Q_n$. ∎

Nous pouvons alors appliquer le lemme 2.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\mathcal{P}_n = \mu_n \times (\nu_n * Q_n) \sim \mu_n \times \nu_n = \mathcal{P}_{n+1}.$$

Par récurrence, nous en déduisons que pour tout $n \geq 2$, nous avons

$$\mathcal{P}_n \sim \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^\eta. \tag{2.22}$$

De plus, nous définissons également

$$\begin{aligned}&\zeta^1 = \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \text{ de loi } \mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}, \\ &\zeta^2 = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots) \text{ de loi } \mathcal{Q}_2,\end{aligned}$$

et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\zeta^n &= (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_{n-1} + \eta_{n-1}, \quad \xi_n \quad, \xi_{n+1}, \ldots) \text{ de loi } \mathcal{Q}_n, \\ \zeta^{n+1} &= (\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_{n-1} + \eta_{n-1}, \xi_n + \eta_n, \xi_{n+1}, \ldots) \text{ de loi } \mathcal{Q}_{n+1}.\end{aligned}$$

Bien sûr, ν_n et $\nu_n * Q_n$ sont toujours les lois respectives des v.a. ξ_n et $\xi_n + \eta_n$. De plus, appelons τ_n la loi de la suite $(\xi_1 + \eta_1, \ldots, \xi_{n-1} + \eta_{n-1}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$. Dans ce cas, nous pouvons écrire

$$\mathcal{Q}_n = \tau_n \times \nu_n \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_{n+1} = \tau_n \times (\nu_n * Q_n).$$

D'après les lemmes 2.1 et 2.5, nous montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}_n \sim \mathcal{Q}_{n+1}$ et pour tout $n \geq 2$, nous avons

$$\mathcal{Q}_n \sim \mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}. \tag{2.23}$$

Montrons maintenant les théorèmes énoncés plus haut.

Preuve du théorème 2.5 : v.a.i.i.d. et translation aléatoire.

Première étape : montrons que $\mathcal{P} \ll \mathcal{P}^\eta$.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\eta^n = (0, \ldots, 0, \eta_n, \eta_{n+1}, \ldots)$. Dans ce cas, $\mathcal{P}$ est la loi de ξ et $\mathcal{P}_n$ est la loi de la suite translatée $\xi + \eta_n$, c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_n \sim \mathcal{P}^{\eta^n}.$$

Supposons que η vérifie la condition (2.13), c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k| \leq \varepsilon\}}] < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\} < \infty,$$

alors pour le même ε, η^n vérifie aussi cette condition car

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{E}[((\eta^n)_k)^2 \mathbb{I}_{\{|(\eta^n)_k| \leq \varepsilon\}}] = \sum_{k \geq n} \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k| \leq \varepsilon\}}] < \infty$$

et

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\{|(\eta^n)_k| > \varepsilon\} = \sum_{k \geq n} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\} < \infty.$$

D'autre part, $I_1(p) < \infty$, donc toutes les conditions du théorème 1.10 sont réalisées et nous pouvons appliquer l'inégalité (1.87)

$$\| \mathcal{P}^{\eta^n} - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{I_1(p) \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}[((\eta^n)_k)^2 \mathbb{I}_{\{|(\eta^n)_k| \leq \varepsilon\}}] + 8 \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\{|(\eta^n)_k| > \varepsilon\}},$$

ou encore

$$\| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{I_1(p) \sum_{k \geq n} \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k| \leq \varepsilon\}}] + 8 \sum_{k \geq n} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}.$$

Les deux séries qui apparaissent dans le second membre de cette inégalité sont les restes de deux séries convergentes, donc leurs limites sont nulles lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent

$$\lim_{n \to \infty} \| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n \xrightarrow[n \to \infty]{var} \mathcal{P}. \tag{2.24}$$

En appliquant le lemme 2.3 à (2.22) et (2.24), nous avons

$$\mathcal{P} \ll \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^\eta.$$

Deuxième étape : montrons que $\mathcal{P}^\eta \ll \mathcal{P}$.

Posons

$$\begin{aligned}\zeta^n &= (\xi_1+\eta_1,\ldots,\xi_{n-1}+\eta_{n-1},\xi_n,\xi_{n+1}\ldots) \text{ de loi } \mathcal{Q}_n,\\ \xi+\eta &= (\xi_1+\eta_1,\ldots,\xi_{n-1}+\eta_{n-1},\xi_n+\eta_n,\xi_{n+1}+\eta_{n+1},\ldots) \text{ de loi } \mathcal{P}^\eta.\end{aligned}$$

Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}Y_n &= (0,\ldots,0,\xi_n,\xi_{n+1},\ldots) \text{ de loi } \mathcal{P}_{Y_n},\\ Z_n &= (0,\ldots,0,\xi_n+\eta_n,\xi_{n+1}+\eta_{n+1},\ldots) \text{ de loi } \mathcal{P}_{Z_n}.\end{aligned}$$

Grâce à l'indépendance des v.a., il est évident que

$$\| \mathcal{Q}_n - \mathcal{P}^\eta \| = \| \mathcal{P}_{Y_n} - \mathcal{P}_{Z_n} \| .$$

De plus, $Z_n = Y_n + \eta^n$ et toutes les hypothèses du théorème 1.10 sont vérifiées, ainsi

$$\| \mathcal{P}_{Y_n} - \mathcal{P}_{Z_n} \| \leq \sqrt{I_1(p)\sum_{k\geq n}\mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] + 8\sum_{k\geq n}\mathbb{P}\{|\eta_k|>\varepsilon\}}.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{Q}_n - \mathcal{P}^\eta \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P}^\eta. \tag{2.25}$$

En appliquant le lemme 2.3 à (2.23) et (2.25), nous avons

$$\mathcal{P}^\eta \ll \mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}.$$

■

Preuve du corollaire 2.1 : le raisonnement est identique à la démonstration précédente, hormis le fait que nous appliquons le corollaire 1.8 et l'inégalité (1.88) à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}^{\eta^n}$ et à $\mathcal{P}_{Y_n}$ et $\mathcal{P}_{Z_n}$, c'est-à-dire que

$$\| \mathcal{P}^{\eta^n} - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{I_1(p)}\sqrt{\sum_{k\geq 1}\mathbb{E}[((\eta^n)_k)^2]},$$

ou encore

$$\| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{I_1(p)}\sqrt{\sum_{k\geq n}\mathbb{E}[\eta_k^2]}.$$

Or $I_1(p) < \infty$ et grâce à l'hypothèse (2.15), le second membre de l'inégalité tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P}. \tag{2.26}$$

Donc (2.22), (2.26) et le lemme 2.3 permettent de conclure

$$\mathcal{P} \ll \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^\eta.$$

De même

$$\| \mathcal{P}_{Y_n} - \mathcal{P}_{Z_n} \| \leq \sqrt{I_1(p)} \sqrt{\sum_{k \geq n} \mathbb{E}[\eta_k^2]},$$

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{Q}_n - \mathcal{P}^\eta \| = \lim_{n\to\infty} \| \mathcal{P}_{Y_n} - \mathcal{P}_{Z_n} \| = 0.$$

Donc

$$\mathcal{Q}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}. \tag{2.27}$$

Ainsi, (2.23) et (2.27) nous donne grâce au lemme 2.3

$$\mathcal{P}^\eta \ll \mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}.$$

■

Preuve du théorème 2.6 : v.a.i.i.d. et translation aléatoire symétrique. Le même raisonnement est valable en appliquant le théorème 1.11 et l'inégalité (1.90), c'est-à-dire

$$\| \mathcal{P}^{\eta^n} - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} I_2(p) \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[((\eta^n)_k)^4 \mathbb{I}_{\{|(\eta^n)_k| \leq \varepsilon\}}] + 8 \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\{|(\eta^n)_k| > \varepsilon\}},$$

ou encore

$$\| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} I_2(p) \sum_{k\geq n} \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{I}_{\{|\eta_k| \leq \varepsilon\}}] + 8 \sum_{k \geq n} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}.$$

Or $I_2(p) < \infty$ et grâce à l'hypothèse (2.16), les deux séries qui apparaissent dans le second membre de cette inégalité sont les restes de deux séries convergentes. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P}.$$

Par conséquent

$$\mathcal{P} \ll \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^\eta.$$

De même

$$\| \mathcal{P}_{Y_n} - \mathcal{P}_{Z_n} \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} I_2(p) \sum_{k\geq n} \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{I}_{\{|\eta_k| \leq \varepsilon\}}] + 8 \sum_{k \geq n} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{Q}_n - \mathcal{P}^\eta \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P}^\eta,$$

$$\mathcal{P}^\eta \ll \mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}.$$

■

Preuve du corollaire 2.2 : en appliquant le corollaire 1.10, nous avons

$$\| \mathcal{P}^{\eta^n} - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} I_2(p)} \sqrt{\sum_{k\geq 1} \mathbb{E}[((\eta^n)_k)^4]},$$

ou encore

$$\| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} I_2(p)} \sqrt{\sum_{k\geq n} \mathbb{E}[\eta_k^4]}.$$

Or $I_2(p) < \infty$ et grâce à l'hypothèse (2.17), le second membre de l'inégalité tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini et

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P},$$

$$\mathcal{P} \ll \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^\eta.$$

De même

$$\| \mathcal{P}_{Y_n} - \mathcal{P}_{Z_n} \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} I_2(p)} \sqrt{\sum_{k\geq n} \mathbb{E}[\eta_k^4]}.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{Q}_n - \mathcal{P}^\eta \| = \lim_{n\to\infty} \| \mathcal{P}_{Y_n} - \mathcal{P}_{Z_n} \| = 0.$$

Alors $\mathcal{Q}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P}^\eta$ et

$$\mathcal{P}^\eta \ll \mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}.$$

■

Preuve du théorème 2.7 : v.a.i. et translation aléatoire.
Nous appliquons le théorème 1.12.

$$\| \mathcal{P}^{\eta^n} - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\sum_{k\geq 1} I_1(p_k)\, \mathbb{E}[((\eta^n)_k)^2 \mathbb{I}_{\{|(\eta^n)_k| \leq \varepsilon\}}] + 8 \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|(\eta^n)_k| > \varepsilon\}},$$

ou encore

$$\| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\sum_{k\geq n} I_1(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{I}_{\{|\eta_k| \leq \varepsilon\}}] + 8 \sum_{k\geq n} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}.$$

Grâce à l'hypothèse (2.18), nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P},$$

$$\mathcal{P} \ll \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^\eta.$$

De même

$$\| \mathcal{P}_{Y_n} - \mathcal{P}_{Z_n} \| \leq \sqrt{\sum_{k\geq n} I_1(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^2 \mathbb{1}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] + 8 \sum_{k\geq n} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{Q}_n - \mathcal{P}^\eta \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P}^\eta,$$
$$\mathcal{P}^\eta \ll \mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}.$$

■

Preuve du corollaire 2.3 : en appliquant le corollaire 1.11, nous avons

$$\| \mathcal{P}^{\eta^n} - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\sum_{k\geq 1} I_1(p_k)\, \mathbb{E}[((\eta^n)_k)^2]},$$

ou encore

$$\| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\sum_{k\geq n} I_1(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^2]}.$$

Or $\sum_{k\geq 1} I_1(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^2] < \infty$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P},$$
$$\mathcal{P} \ll \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^\eta.$$

De même

$$\| \mathcal{P}_{Y_n} - \mathcal{P}_{Z_n} \| \leq \sqrt{\sum_{k\geq n} I_1(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^2]}.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{Q}_n - \mathcal{P}^\eta \| = \lim_{n\to\infty} \| \mathcal{P}_{Y_n} - \mathcal{P}_{Z_n} \| = 0.$$

Alors $\mathcal{Q}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P}^\eta$ et

$$\mathcal{P}^\eta \ll \mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}.$$

■

Preuve du théorème 2.8 : v.a.i. et translation aléatoire symétrique. En appliquant le théorème 1.13, nous avons

$$\| \mathcal{P}^{\eta^n} - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} \sum_{k\geq 1} I_2(p_k)\, \mathbb{E}[((\eta^n)_k)^4 \mathbb{1}_{\{|(\eta^n)_k|\leq\varepsilon\}}] + 8 \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}},$$

ou encore

$$\| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} \sum_{k\geq n} I_2(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{1}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] + 8 \sum_{k\geq n} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}.$$

Grâce à l'hypothèse (2.20),

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P},$$

$$\mathcal{P} \ll \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^\eta.$$

De même

$$\| \mathcal{P}_{Y_n} - \mathcal{P}_{Z_n} \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} \sum_{k\geq n} I_2(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^4 \mathbb{1}_{\{|\eta_k|\leq\varepsilon\}}] + 8 \sum_{k\geq n} \mathbb{P}\{|\eta_k| > \varepsilon\}}.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{Q}_n - \mathcal{P}^\eta \| = \lim_{n\to\infty} \| \mathcal{P}_{Y_n} - \mathcal{P}_{Z_n} \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P}^\eta,$$

$$\mathcal{P}^\eta \ll \mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}.$$

■

Preuve du corollaire 2.4 : en appliquant le corollaire 1.12, nous avons

$$\| \mathcal{P}^{\eta^n} - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} \sum_{k\geq 1} I_2(p_k)\, \mathbb{E}[((\eta^n)_k)^4]},$$

ou encore

$$\| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} \sum_{k\geq n} I_2(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^4]}.$$

Grâce à l'hypothèse (2.21),

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{P}_n - \mathcal{P} \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P},$$

$$\mathcal{P} \ll \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^\eta.$$

De même

$$\| \mathcal{P}_{Y_n} - \mathcal{P}_{Z_n} \| \leq \sqrt{\frac{25}{24} \sum_{k\geq n} I_2(p_k)\, \mathbb{E}[\eta_k^4]}.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{Q}_n - \mathcal{P}^\eta \| = \lim_{n\to\infty} \| \mathcal{P}_{Y_n} - \mathcal{P}_{Z_n} \| = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_n \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{P}^\eta.$$

$$\mathcal{P}^\eta \ll \mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}.$$

■

Comme dans le cas des v.a.i.i.d. et de la translation non aléatoire, nous pouvons aussi démontrer l'équivalence des lois en utilisant directement l'alternative de Kakutani. C'est d'ailleurs la méthode utilisée par H. Sato et C. Watari dans [28]. En effet, nous avons déjà énoncer deux inégalités pour la distance de Hellinger (corollaires 1.7 et 1.9) et d'après les hypothèses des théorèmes 2.5 et 2.6, nous savons que

$$\sum_{k\geq 1} \rho^2(\mu_k, \nu_k) < \infty, \tag{2.28}$$

où ν_k et μ_k sont les lois respectives des v.a. ξ_k et $\xi_k + \eta_k$. Nous avons déjà vu que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, μ_k est équivalente à ν_k, car p est strictement positive λ-p.p.. Il reste donc à appliquer directement l'alternative de Kakutani et cela nous donne $\mathcal{P} \sim \mathcal{P}^\eta$.

Chapitre 3

Principe d'invariance local pour les chaînes de Markov

3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est la recherche d'un P.I. local pour les c.m.. L'idée est issue d'une étude réalisée par Y. A. Davydov lequel a utilisé l'inégalité (1.1) pour démontrer un P.I. local pour les fonctionnelles stochastiques dans le P.I. de Donsker-Prokhorov [6].

En effet, soit $\xi = (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d., définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(\xi_k) = 0$ et $\mathrm{Var}(\xi_k) = \sigma^2 < \infty$. La densité de chaque v.a. ξ_k est notée p et $I(p)$ est la quantité de Fisher associée.

Posons $S_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et construisons le processus polygonal ζ_n obtenu à partir des $(n+1)$ points $(k/n, S_k/\sigma\sqrt{n})$ pour tout $0 \le k \le n$. Le processus ζ_n est un processus à trajectoires continues sur $[0;1]$, c'est-à-dire que ζ_n est un élément de $\mathbb{C}[0;1]$. Alors ζ_n est défini pour tout $t \in [0;1]$ et tout $\omega \in \Omega$ par

$$\zeta_n(t,\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\Big[S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}(\omega)\Big]. \tag{3.1}$$

Comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction générale, nous notons P_n la loi de ζ_n et le P.I. de Donsker-Prokhorov (théorème 10.1, [1]) affirme que $P_n \Rightarrow W$ dans $\mathbb{C}[0;1]$. Par conséquent, si φ est une fonctionnelle définie sur $\mathbb{C}[0;1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, mesurable et W-p.p. continue, alors

$$P_n\varphi^{-1} \Rightarrow W\varphi^{-1}.$$

En imposant des conditions plus fortes sur la densité p et en restreignant la classe des fonctionnelles, il est possible d'obtenir une assertion plus forte. En effet, voici le résultat obtenu par Y. A. Davydov (théorème 15.2, [5]).

Théorème 3.1 *Soit* $\varphi : \mathbb{C}[0;1] \to \mathbb{R}$. *Si les conditions suivantes sont réalisées*

(1) p *est a.c. et* $I(p) < \infty$,

(2) $\varphi \in \mathcal{M}_W$ *(voir la définition dans* 3.2.2*),*

alors nous avons

$$P_n \varphi^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{var} W\varphi^{-1}.$$

Dans [5], nous pouvons trouver la définition de la classe $\mathcal{M}_W$ et une démonstration de ce résultat qui n'utilise pas l'inégalité (1.1). Plus tard, Y. A. Davydov a réalisé une autre démonstration de ce résultat qui utilise (1.1) et un théorème limite local pour les fonctionnelles de processus aléatoires (théorème 1, [3]). Cette nouvelle approche donne la possibilité de simplifier la démonstration.

Le but est d'utiliser cette deuxième méthode de démonstration dans le cas des c.m.. Dans un premier temps, nous donnerons un P.I. local pour une c.m. homogène stationnaire. Ensuite, nous nous intéresserons au cas homogène non stationnaire.

3.2 Cas des chaînes de Markov homogènes stationnaires

Soit $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une c.m. homogène stationnaire, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Nous construisons alors le processus polygonal ζ_n suivant. Posons $S_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_k)$. Le processus ζ_n est construit à partir des $(n+1)$ points $(k/n, S_k/\sqrt{n})$ pour tout $0 \le k \le n$ et est défini pour tout $t \in [0;1]$ et tout $\omega \in \Omega$ par

$$\zeta_n(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}}\Big[S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt])f(\xi_{[nt]+1}(\omega))\Big]. \tag{3.2}$$

Notons P_n la loi de ζ_n. Dans un premier temps, nous allons supposer la convergence faible de cette suite de lois et nous allons montrer que nous avons aussi la convergence en variation. Ensuite, nous appliquerons ce résultat au cas des c.m. Harris-récurrentes.

3.2.1 Inégalité pour la chaîne de Markov $(f(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$

Supposons que ξ est la c.m. homogène stationnaire définie dans le paragraphe 1.2. Rappelons que Π est la loi de probabilité initiale stationnaire de densité π supposée a.c. et P est le noyau de probabilité de transition avec la famille des densités de probabilité de transition $\{p(x,.); x \in \mathbb{R}\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x,.)$ est supposée a.c.. Les dérivées π', p'_x et p'_y existent au sens usuel. Rappelons que q est la densité de probabilité de transition de la chaîne inversée (par rapport à Π). Q est le noyau de transition correspondant à la famille des densités

$\{q(y,.);y\in\mathbb{R}\}$. Rappelons les hypothèses de I-régularité.

(**R**) La famille $\{\pi(.+t);t\in\mathbb{R}\}$ est I-régulière.

$$I(\pi)=\int_J\left[\frac{\pi'}{\pi}(x)\right]^2\pi(x)\,dx,$$

où $J=\{x\in\mathbb{R}|\pi(x)>0\}$.

(**R**$^+$) La famille $\{p(x,.);x\in J\}$ est I-régulière. Pour tout $x\in J$, nous avons

$$I^+(x)=\int_J\left[\frac{p'_x}{p}(x,y)\right]^2 p(x,y)\,dy.$$

(**R**$^-$) La famille $\{q(y,.);y\in J\}$ est I-régulière. Pour tout $y\in J$, nous avons

$$I^-(y)=\int_J\left[\frac{p'_y}{p}(x,y)-\frac{\pi'}{\pi}(y)\right]^2\frac{\pi(x)p(x,y)}{\pi(y)}\,dx.$$

De plus, nous notons

$$I^+=\int_J I^+(x)\pi(x)\,dx,\quad I^-=\int_J I^-(y)\pi(y)\,dy\quad\text{et}\quad I=I(\pi)+I^++I^-.\tag{3.3}$$

Dans le paragraphe 1.2, nous avons démontré une inégalité pour la distance en variation entre les lois des vecteurs $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ et $(\xi_1+a_1,\dots,\xi_n+a_n)$, où la suite $a=(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est réelle et $n\in\mathbb{N}^*$ est fixé.

Dans ce paragraphe, nous allons majorer la distance en variation entre les lois des vecteurs $(f(\xi_1),\dots,f(\xi_n))$ et $(f(\xi_1)+a_1,\dots,f(\xi_n)+a_n)$ notées respectivement $\widehat{P_n}$ et $\widehat{P_n^a}$.

Théorème 3.2 *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application deux fois dérivable vérifiant les deux conditions suivantes*

(*i*) $\exists\delta>0$ *tel que* $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)\geq\delta$,

(*ii*) $\exists M>0$ *tel que* $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f''(x)|\leq M$.

Si (**R**), (**R**$^+$), (**R**$^-$) *sont vérifiées, si $I^+<\infty$ et $I^-<\infty$, alors l'inégalité suivante a lieu*

$$\|\widehat{P_n^a}-\widehat{P_n}\|\leq\sqrt{2\widehat{I}}\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2},\tag{3.4}$$

où $\widehat{I}=\frac{1}{\delta^2}I+\frac{2M^2}{\delta^4}+\frac{1}{\delta^2}I(\pi)$.

Remarque 3.1 Grâce aux hypothèses, il est clair que $\widehat{I}<\infty$.

Remarque 3.2 La suite $(f(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ reste une c.m. homogène stationnaire. Il aurait été possible d'appliquer directement le théorème 1.1 et l'inégalité (1.9) à la chaîne $(f(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$, en donnant les conditions en termes des densités des v.a. $(f(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$. Toutefois, il est préférable de garder les conditions sur la chaîne initiale ξ et d'en ajouter sur f. En effet, nous nous intéressons au P.I. pour les c.m. et un tel résultat existe déjà avec certaines hypothèses sur f.

Preuve : f réalise une bijection (strictement croissante) de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Donc $(f(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une c.m. homogène stationnaire.
Si $J = \{x \in \mathbb{R}|\pi(x) > 0\}$, nous noterons $\widehat{J} = f(J) = \{u \in \mathbb{R}|\pi[f^{-1}(u)] > 0\}$. La densité de probabilité stationnaire de la chaîne $(f(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est notée $\widehat{\pi}$ et est définie pour $u \in \mathbb{R}$ par

$$\widehat{\pi}(u) = \frac{\pi[f^{-1}(u)]}{f'[f^{-1}(u)]}.$$

D'autre part, $\{\widehat{p}(u,.); u \in \mathbb{R}\}$ désigne la famille des densités de probabilité de transition. Pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tout $v \in \mathbb{R}$, elles sont définies par

$$\widehat{p}(u,v) = \frac{p[f^{-1}(u), f^{-1}(v)]}{f'[f^{-1}(v)]}.$$

Grâce aux hypothèses (i) et (ii), nous pouvons démontrer que $\widehat{\pi}$ et $\widehat{p}(u,.)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, sont a.c.. Notons $\{\widehat{q}(v,.); v \in \mathbb{R}\}$ la famille des densités de probabilité de transition de la chaîne inversée. Pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tout $v \in \widehat{J}$, nous avons

$$\widehat{q}(v,u) = \frac{\widehat{\pi}(u)\widehat{p}(u,v)}{\widehat{\pi}(v)} = \frac{\pi[f^{-1}(u)]p[f^{-1}(u), f^{-1}(v)]}{f'[f^{-1}(u)]\pi[f^{-1}(v)]}.$$

Alors $\widehat{P_n}$ est la loi du vecteur $(f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n))$, de densité

$$p_n(u_1, \ldots, u_n) = \widehat{\pi}(u_1) \prod_{k=2}^{n} \widehat{p}(u_{k-1}, u_k).$$

La distance en variation que nous devons majorer est donc

$$\| \widehat{P_n^a} - \widehat{P_n} \| = \int_{\mathbb{R}^n} |p_n(u_1 + a_1, \ldots, u_n + a_n) - p_n(u_1, \ldots, u_n)| \, d\bar{u}.$$

Nous pouvons appliquer l'inégalité (1.9) à la c.m. $(f(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$. Pour cela, calculons $I(\widehat{\pi})$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\widehat{\pi}'}{\widehat{\pi}}(u)\right]^2 \widehat{\pi}(u)\, du &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\pi'[f^{-1}(u)]}{\pi[f^{-1}(u)]} - \frac{f''[f^{-1}(u)]}{f'[f^{-1}(u)]}\right]^2 \frac{\pi[f^{-1}(u)]}{(f'[f^{-1}(u)])^3}\, du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\pi'(x)}{\pi(x)} - \frac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2 \frac{\pi(x)}{(f'(x))^2}\, dx.
\end{aligned}$$

En utilisant $(a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ et les hypothèses (i) et (ii) du théorème 3.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\widehat{\pi}'}{\widehat{\pi}}(u)\right]^2 \widehat{\pi}(u)\,du &\leq \frac{2}{\delta^2}\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\pi'}{\pi}(x)\right]^2 \pi(x)\,dx + 2\int_{\mathbb{R}} \frac{[f''(x)]^2}{[f'(x)]^4}\pi(x)\,dx, \\ I(\widehat{\pi}) &\leq \frac{2}{\delta^2}I(\pi) + \frac{2M^2}{\delta^4}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Avec le même changement de variables, nous pouvons aussi calculer

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\widehat{p}'_u}{\widehat{p}}(u,v)\right]^2 \widehat{p}(u,v)\,dv = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p'_x}{p}[f^{-1}(u),y]\right]^2 \frac{p[f^{-1}(u),y]}{(f'[f^{-1}(u)])^2}\,dy$$

et notons

$$\begin{aligned} \widehat{I}^+ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\widehat{p}'_u}{\widehat{p}}(u,v)\right]^2 \widehat{p}(u,v)\,dv\,\widehat{\pi}(u)\,du \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p'_x}{p}[f^{-1}(u),y]\right]^2 \frac{p[f^{-1}(u),y]}{(f'[f^{-1}(u)])^2}\,\frac{\pi[f^{-1}(u)]}{f'[f^{-1}(u)]}\,du\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p'_x}{p}(x,y)\right]^2 \frac{p(x,y)}{(f'(x))^2}\pi(x)\,dx\,dy \\ &\leq \frac{1}{\delta^2}I^+. \end{aligned} \tag{3.6}$$

De même, nous calculons

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial v}\widehat{q}(v,u)}{\widehat{q}(v,u)}\right]^2 \widehat{q}(v,u)\,du \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p'_y[f^{-1}(u),f^{-1}(v)]}{p[f^{-1}(u),f^{-1}(v)]f'[f^{-1}(v)]} - \frac{\pi'[f^{-1}(v)]}{\pi[f^{-1}(v)]f'[f^{-1}(v)]}\right]^2 \times \\ &\qquad\qquad \times \frac{\pi[f^{-1}(u)]p[f^{-1}(u),f^{-1}(v)]}{f'[f^{-1}(u)]\pi[f^{-1}(v)]}\,du \end{aligned}$$

et notons

$$\begin{aligned} \widehat{I}^- &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial v}\widehat{q}(v,u)}{\widehat{q}(v,u)}\right]^2 \widehat{q}(v,u)\,du\,\widehat{\pi}(v)\,dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{p'_y(x,y)}{p(x,y)f'(y)} - \frac{\pi'(y)}{\pi(y)f'(y)}\right]^2 \pi(x)p(x,y)\,dx\,dy \leq \frac{1}{\delta^2}I^-. \end{aligned} \tag{3.7}$$

En combinant (3.5), (3.6) et (3.7), nous avons alors l'inégalité annoncée. ■

3.2.2 Définition de la classe $\mathcal{M}_P$

Les notions introduites dans ce paragraphe sont issues des sections 13 et 14 de [5]. Soit $(X, \mathcal{B}_X, P)$ un espace vectoriel métrique mesurable. Chaque élément l de X engendre un groupe $G^l = \{G^l_c; c \in \mathbb{R}\}$ de translations

$$G^l_c(x) = x + cl.$$

Définition 3.1 *Une translation l est admissible pour P si $P^l = P(G^l_1)^{-1} \ll P$. De plus, l définit une direction admissible pour P si le groupe G^l est admissible, c'est-à-dire, si $P^{cl} \ll P$ pour tout $c \in \mathbb{R}$. L'ensemble de toutes les directions admissibles pour P est noté H_P.*

Soit $x, l \in X$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Un segment parallèle à l est un ensemble de la forme $\Delta = \{x + cl; c \in [a; b]\}$ (noté $\Delta \parallel l$). De plus, $\Delta_n = \{x_n + cl_n; c \in [a_n; b_n]\}$ converge vers Δ (noté $\Delta_n \to \Delta$) si $x_n \to x$, $l_n \to l$, $a_n \to a$ et $b_n \to b$.
Enfin, pour un segment $\Delta = \{x + cl; c \in [a; b]\}$ et une fonctionnelle $\varphi : X \to \mathbb{R}$, nous définissons la fonction suivante pour tout $c \in [a; b]$

$$\varphi_\Delta(c) = \varphi(x + cl).$$

Définition 3.2 *Nous dirons que $\varphi \in \mathcal{M}_P$ si pour P-presque tout $x \in X$, il existe $l \in H_p$ et un voisinage V de x tels que pour P-presque tout $y \in V$ et tout segment $\Delta = \{y + cl; c \in [a; b]\} \subset V$, nous avons*

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_n \parallel l_n \\ \Delta_n \to \Delta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda\varphi^{-1}_{\Delta_n} \xrightarrow[n\to\infty]{var} \lambda\varphi^{-1}_{\Delta},$$

pour toute suite (l_n) qui converge vers l.

Dans le paragraphe suivant, nous allons nous intéresser plus particulièrement à la classe $\mathcal{M}_W$. Prenons $X = \mathbb{C}[0; 1]$.

Remarque 3.3 Nous savons que H_W est défini par

$$H_W = \Big\{ l \in \mathbb{C}[0; 1] |\ l \text{ a.c. }, l(0) = 0 \text{ et } l' \in L^2([0; 1]) \Big\}.$$

H_W est aussi appelé espace de Cameron-Martin (voir par exemple [25], chap. VIII, § 2).

Définition 3.3 *Nous dirons que $\varphi \in \mathcal{M}_W$ si pour W-presque tout $x \in \mathbb{C}[0; 1]$, il existe $l \in H_W$ et un voisinage V de x tels que pour W-presque tout $y \in V$ et tout segment $\Delta = \{y + cl; c \in [a; b]\} \subset V$, nous avons*

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_n \parallel l_n \\ \Delta_n \to \Delta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda\varphi^{-1}_{\Delta_n} \xrightarrow[n\to\infty]{var} \lambda\varphi^{-1}_{\Delta},$$

pour toute suite (l_n) qui converge vers l.

Remarque 3.4 Les classes $\mathcal{M}_P$ et $\mathcal{M}_W$ sont vraiment très larges. Appelons X^* l'espace dual de X, muni de la topologie faible et de la forme bilinéaire $<.,.>$ exprimant la dualité de X et X^*. Supposons que X est un espace de Banach séparable, nous dirons que φ est continûment Frechet différentiable dans une région $G \subset X$, si l'application $x \mapsto D\varphi(x)$ de G dans X^* est continue au sens de la topologie faible. D'après le théorème 13.7 de [5], nous savons que si pour P-presque tout x, il existe un voisinage V_x de x dans lequel φ est continûment Frechet différentiable et si $D\varphi(x)(H_P) \neq \{0\}$, alors $\varphi \in \mathcal{M}_P$.

Les exemples qui suivent sont disponibles dans [5] et sont des exemples de fonctionnelles qui appartiennent à $\mathcal{M}_W$.

Exemple 3.1 Soit $t_0 \in [0;1]$. Posons

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \quad \mathbb{C}[0;1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_1(x) = x(t_0). \end{aligned}$$

Alors $\varphi_1 \in \mathcal{M}_W$.

Exemple 3.2 Posons

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \quad \mathbb{C}[0;1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_2(x) = \sup_{t \in [0;1]} x(t). \end{aligned}$$

Alors $\varphi_2 \in \mathcal{M}_W$.

Exemple 3.3 Posons

$$\begin{aligned} \varphi_3 : \quad \mathbb{C}[0;1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_3(x) = \sup_{t \in [0;1]} |x(t)|. \end{aligned}$$

Alors $\varphi_3 \in \mathcal{M}_W$.

Exemple 3.4 Considérons la fonctionnelle intégrale suivante

$$\begin{aligned} \varphi_4 : \quad \mathbb{C}[0;1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_4(x) = \int_0^1 q(x(t))\,\mu(dt), \end{aligned}$$

où μ est une mesure finie sur $\mathcal{B}([0;1])$ et q une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème 14.4 de [5], si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un intervalle ouvert $J \subset (-\varepsilon; \varepsilon)$ sur lequel q' est continue et non nulle, alors $\varphi_4 \in \mathcal{M}_W$.

Remarque 3.5 Soit $c > 0$. Notons W_c la loi du processus $\{cw(t); t \in [0;1]\}$, où $\{w(t); t \in [0;1]\}$ est le processus de Wiener. Il est clair que $\mathcal{M}_{W_c}$ et $\mathcal{M}_W$ sont les mêmes.

D'autres exemples de fonctionnelles appartenant à $\mathcal{M}_W$ ou plus généralement à $\mathcal{M}_P$, sont disponibles dans [5] et [6].

3.2.3 Principe d'invariance local

Nous avons déjà construit le processus polygonal ζ_n défini par (3.2) et nous notons P_n sa loi. Le P.I. local s'énonce de la façon suivante.

Théorème 3.3 *Si les conditions suivantes sont réalisées*

(1) $(\mathbf{R})$, $(\mathbf{R}^+)$, $(\mathbf{R}^-)$, $I^+ < \infty$ *et* $I^- < \infty$,

(2) f *est dérivable deux fois et il existe* $\delta > 0$ *et* $M \geq 0$ *tels que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq \delta$ *et* $|f''(x)| \leq M$,

(3) $P_n \Rightarrow W_c$ *pour une constante* $c > 0$,

(4) $\varphi \in \mathcal{M}_W$,

alors nous avons

$$P_n\varphi^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{var} W_c\varphi^{-1}.$$

Remarque 3.6 Nous verrons dans le paragraphe suivant qu'en ajoutant des conditions supplémentaires peu restrictives sur la chaîne ξ et sur la fonction f, il existe un P.I. pour le processus ζ_n, c'est-à-dire que la condition (3) sera réalisée pour une certaine constante c.

Preuve : l'idée de la démonstration est d'utiliser l'inégalité (3.4) et un théorème limite local pour les fonctionnelles de processus aléatoires (théorème 1, [3]). En effet, considérons une suite de lois de probabilité $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_X$ d'un e.m.c.s. X muni de la distance ρ. Notons $Z(\mathbb{R})$ l'espace de Banach des mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec la variation totale comme norme. La restriction de la mesure de Lebesgue à $\mathcal{B}([a;b])$ est notée $\lambda_{[a;b]}$. La fonction φ est définie sur X et à valeurs réelles. Le théorème 1 de [3] s'énonce de la façon suivante.

Théorème 3.4 *Supposons que* $P_n \Rightarrow P_\infty$ *et que pour* P_∞*-presque tout* x, *il existe une boule ouverte* B *de centre* x, $\varepsilon > 0$ *et une famille* $(G_{c,n}; c \in]0;\varepsilon]; n \in \mathbb{N}^*)$ *de transformations de* X *vérifiant les points suivants*

(*i*) *pour tout* $c \in]0;\varepsilon[$, $G_{c,n}x \to G_{c,\infty}x$, $\quad n \to \infty$, *en mesure* P_n,

(*ii*) *la transformation* $G_{c,\infty}$ *est continue pour tout* $c \in]0;\varepsilon[$ *et pour toute boule* S

$$d(S,c) = \sup_{z\in S} \rho(z, G_{c,\infty}) \to 0, \quad c \to 0,$$

(*iii*) $\lim_{c\to 0} \limsup \| P_nG_{c,n}^{-1} - P_n \| = 0$,

(*iv*) *pour tout* $\delta \in]0;\varepsilon[$

$$\int_B \| \lambda_{[0;\delta]}\varphi_{z,n}^{-1} - \lambda_{[0;\delta]}\varphi_{z,\infty}^{-1} \| \; P_n(dz) \to 0, \quad n \to \infty,$$

où $\varphi_{z,n}(c) = \varphi(G_{c,n}z)$, $c \in]0;\varepsilon]$, $n \in \mathbb{N}^*$, (*v*) *pour tout* $\delta \in]0;\varepsilon[$, *l'application*

$$\begin{array}{rcl} B & \longrightarrow & Z(\mathbb{R}) \\ z & \longmapsto & \lambda_{[0;\delta]}\varphi^{-1}_{z,\infty}, \end{array}$$

est continue P_∞*-p.p.,*

alors nous avons

$$P_n\varphi^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{var} P_\infty\varphi^{-1}.$$

Dans notre cas, $X = \mathbb{C}[0;1]$ est un e.m.c.s.. La distance ρ est définie pour tous éléments $f, g \in \mathbb{C}[0;1]$ par

$$\rho(f,g) = \sup_{t\in[0;1]} |f(t) - g(t)|.$$

La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{C}[0;1])$ sera notée $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$. Grâce à la condition (3), nous voyons que $P_\infty = W_c$.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Notons F_n le sous espace des lignes polygonales passant par les points $(k/n, x(k/n))$ pour tout $0 \leq k \leq n$ et tout $x \in \mathbb{C}[0;1]$. Alors F_n est de dimension finie et P_n est concentrée sur F_n. Posons Π_n l'application de $\mathbb{C}[0;1]$ dans F_n, qui à tout point x associe la ligne polygonale construite à partir des points $(k/n, x(k/n))$ pour tout $0 \leq k \leq n$.

Soit $\varphi \in \mathcal{M}_W$. Appelons X_0 l'ensemble considéré dans la définition de la classe $\mathcal{M}_W$, c'est-à-dire que $W(X_0) = 1$. Soit $x \in X_0$, alors il existe $l \in H_W$ et V, un voisinage de x tels que pour W-presque tout $y \in V$ et pour tout segment $\Delta = \{y + cl; c \in [a;b]\} \subset V$, nous avons

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_n \parallel l_n \\ \Delta_n \to \Delta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda\varphi^{-1}_{\Delta_n} \xrightarrow[n\to\infty]{var} \lambda\varphi^{-1}_{\Delta},$$

pour toute suite $l_n \to l$.

Alors, l et V sont fixés par la précédente définition. Choisissons B une boule ouverte de centre x telle que $B \subset V$ et choisissons $\varepsilon > 0$ tel que pour W-presque tout $y \in B$, tout segment $\Delta = \{y + cl; c \in [0;\varepsilon]\}$ soit inclus dans V.

Posons pour tout $c \in]0;\varepsilon]$ et tout $y \in B$

$$G_{c,n}y = y + c\Pi_n(l) \quad \text{et} \quad G_{c,\infty}y = y + cl.$$

Le but est maintenant de vérifier les cinq conditions du théorème 3.4.

(*i*) Soit $c \in]0;\varepsilon[$. Alors

$$\begin{aligned} G_{c,n}x &= x + c\Pi_n(l), \\ G_{c,\infty}x &= x + cl. \end{aligned}$$

Or lorsque $n \to \infty$, $\Pi_n(l) \to l$, alors $G_{c,n}x \to G_{c,\infty}x$. Comme la convergence est uniforme sur les boules $\{| x | \leq A; A \in \mathbb{R}^+\}$ et comme la fonction $G_{c,\infty}$ est

continue, nous avons la convergence en mesure P_n.
(ii) Soit $c \in]0; \varepsilon[$. Alors

$$G_{c,\infty} y = y + cl.$$

Ici $G_{c,\infty}$ est une application continue. Soit S une boule, calculons

$$\begin{aligned} d(S,c) &= \sup_{z \in S} \rho(z, G_{c,\infty} z) = \sup_{z \in S} \sup_{t \in [0;1]} |z(t) - z(t) - cl(t)| \\ &= \sup_{z \in S} \sup_{t \in [0;1]} |cl(t)| = c \sup_{t \in [0;1]} |l(t)| \to 0, \quad c \to 0. \end{aligned}$$

(iii) Appelons T_n l'application de F_n dans $\mathbb{R}^n$, qui à toute ligne polygonale passant par les points $(k/n, x_k = x(k/n))$ (pour tout $0 \leq k \leq n$) associe le vecteur $(\sqrt{n}x_1, \sqrt{n}(x_2 - x_1), \dots, \sqrt{n}(x_n - x_{n-1}))$. Alors T_n est linéaire bijective. Rappelons que ζ_n est la ligne polygonale passant par les points $(k/n, S_k/\sqrt{n})$, pour tout $0 \leq k \leq n$. Alors

$$T_n(\zeta_n) = (f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)).$$

Donc $P_n T_n^{-1} = \widehat{P_n}$.
D'autre part, $\zeta_n + c\Pi_n(l)$ est la ligne polygonale passant par les $(n+1)$ points $(k/n, S_k/\sqrt{n} + cl(k/n))$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Rappelons que $S_0 = 0$ et $l(0) = 0$, car $l \in H_W$. Alors

$$T_n(\zeta_n + c\Pi_n(l)) = \Big(f(\xi_1) + c\sqrt{n}\, l(1/n), \dots, f(\xi_n) + c\sqrt{n}(l(1) - l(1 - 1/n))\Big).$$

Posons pour tout $0 \leq k \leq n-1$

$$a_{k+1} = \sqrt{n}\left[l\Big(\frac{k+1}{n}\Big) - l\Big(\frac{k}{n}\Big) \right].$$

Alors

$$T_n(\zeta_n + c\Pi_n(l)) = (f(\xi_1) + ca_1, \dots, f(\xi_n) + ca_n).$$

Or $\zeta_n + c\Pi_n(l) = G_{c,n}\zeta_n$ et $P_n G_{c,n}^{-1} T_n^{-1} = \widehat{P_n^{ca}}$. Comme T_n est linéaire bijective, nous avons

$$\| P_n G_{c,n}^{-1} - P_n \| = \| P_n G_{c,n}^{-1} T_n^{-1} - P_n T_n^{-1} \| = \| \widehat{P_n^{ca}} - \widehat{P_n} \| .$$

Par conséquent, les conditions (1) et (2) du théorème 3.3 permettent d'appliquer le théorème 3.2 et l'inégalité (3.4) et nous obtenons

$$\| P_n G_{c,n}^{-1} - P_n \| \leq c\sqrt{2\widehat{I}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}.$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} n\left[l\Big(\frac{k}{n}\Big) - l\Big(\frac{k-1}{n}\Big)\right]^2 = n\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{(k-1)/n}^{k/n} l'(t)\,dt\right]^2 \\ &= n\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{l'(t)}{n} n\,dt\right]^2 \leq n\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left[\frac{l'(t)}{n}\right]^2 n\,dt \\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n} [l'(t)]^2\,dt = \int_0^1 [l'(t)]^2\,dt = \| l' \|_2^2 .\end{aligned}$$

Donc

$$\| P_n G_{c,n}^{-1} - P_n \| \leq c\sqrt{2\widehat{I}}\, \| l' \|_2 .$$

D'après la remarque 3.1, $\widehat{I} < \infty$ et d'après la remarque 3.3, $l' \in L^2([0;1])$, nous en déduisons que

$$\lim_{c\to 0} \limsup \| P_n G_{c,n}^{-1} - P_n \| = 0.$$

(iv) Soit $\delta \in]0;\varepsilon[$. Pour tout $c \in]0;\varepsilon[$ et tout $z \in B$,

$$\begin{aligned}\varphi_{z,n}(c) &= \varphi(G_{c,n}z) = \varphi(z + c\Pi_n(l)), \\ \varphi_{z,\infty}(c) &= \varphi(G_{c,\infty}z) = \varphi(z + cl).\end{aligned}$$

Nous savons que pour W-presque tout $z \in B$, $\Delta = \{z + cl; c \in [0;\varepsilon]\} \subset V$. Posons $\Delta_n = \{z_n + c\Pi_n(l); c \in [0;\varepsilon]\}$. Si $z_n \to z$ et comme $\Pi_n(l) \to l$, alors $\Delta_n \parallel \Pi_n(l)$ et $\Delta_n \to \Delta$. Donc d'après la définition de la classe $\mathcal{M}_W$, nous savons que

$$\lambda\varphi_{\Delta_n}^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{var} \lambda\varphi_{\Delta}^{-1},$$

avec pour $c \in]0;\varepsilon[$

$$\begin{aligned}\varphi_{\Delta_n}(c) &= \varphi(z_n + c\Pi_n(l)) = \varphi_{z_n,n}(c), \\ \varphi_{\Delta}(c) &= \varphi(z + cl) = \varphi_{z,\infty}(c).\end{aligned}$$

Donc pour W-presque tout $z \in B$, nous avons

$$\begin{aligned}\lambda\varphi_{z_n,n}^{-1} &\xrightarrow[n\to\infty]{var} \lambda\varphi_{z,\infty}^{-1}, \\ \lambda_{[0;\delta]}\varphi_{z_n,n}^{-1} &\xrightarrow[n\to\infty]{var} \lambda_{[0;\delta]}\varphi_{z,\infty}^{-1},\end{aligned}$$

$$\| \lambda_{[0;\delta]}\varphi_{z_n,n}^{-1} - \lambda_{[0;\delta]}\varphi_{z,\infty}^{-1} \| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty. \tag{3.8}$$

D'autre part, posons $\Delta_n = \{z_n + cl; c \in [0;\varepsilon]\}$, alors si $z_n \to z$, $\Delta_n \to \Delta$. Donc d'après la définition de la classe $\mathcal{M}_W$, nous savons que

$$\lambda\varphi_{\Delta_n}^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{var} \lambda\varphi_{\Delta}^{-1},$$

avec pour $c \in]0;\varepsilon[$

$$\varphi_{\Delta_n}(c) = \varphi(z_n + cl) = \varphi_{z_n,\infty}(c),$$
$$\varphi_{\Delta}(c) = \varphi(z + cl) = \varphi_{z,\infty}(c).$$

Donc pour W-presque tout $z \in B$, nous avons

$$\lambda\varphi^{-1}_{z_n,\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{var} \lambda\varphi^{-1}_{z,\infty},$$
$$\lambda_{[0;\delta]}\varphi^{-1}_{z_n,\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{var} \lambda_{[0;\delta]}\varphi^{-1}_{z,\infty},$$

$$\| \lambda_{[0;\delta]}\varphi^{-1}_{z_n,\infty} - \lambda_{[0;\delta]}\varphi^{-1}_{z,\infty} \| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty. \tag{3.9}$$

Pour continuer, nous avons besoin du résultat suivant.

Lemme 3.1 *Soit h_n et h des fonctions bornées. Si $P_n \Rightarrow P$ et si*

$$D = \{z |\ \forall (z_n), z_n \to z, h_n(z_n) \to h(z)\}$$

est tel que $P(D) = 1$, alors

$$\int h_n\, dP_n \longrightarrow \int h\, dP.$$

La preuve de ce lemme découle directement du théorème 5.5 de [1].
Appliquons ce lemme. En effet $P_n \Rightarrow W_c$ et posons

$$h_n(z_n) = \| \lambda_{[0;\delta]}\varphi^{-1}_{z_n,n} - \lambda_{[0;\delta]}\varphi^{-1}_{z_n,\infty} \| \quad \text{et} \quad h(z) = 0.$$

Or

$$h_n(z_n) \leq \| \lambda_{[0;\delta]}\varphi^{-1}_{z_n,n} - \lambda_{[0;\delta]}\varphi^{-1}_{z,\infty} \| + \| \lambda_{[0;\delta]}\varphi^{-1}_{z_n,\infty} - \lambda_{[0;\delta]}\varphi^{-1}_{z,\infty} \| .$$

D'après (3.8) et (3.9), nous savons que pour W-presque tout $z \in B$, si $z_n \to z$, alors $h_n(z_n) \to 0$. Donc l'ensemble $D = \{z \in B |\ \forall (z_n), z_n \to z, h_n(z) \to h(z)\}$ est tel que $W(D) = 1$ et d'après le lemme 3.1, nous avons

$$\int_B \| \lambda_{[0;\delta]}\varphi^{-1}_{z,n} - \lambda_{[0;\delta]}\varphi^{-1}_{z,\infty} \| P_n(dz) \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

(v) Soit $\delta \in]0;\varepsilon[$. Rappelons que $Z(\mathbb{R})$ est l'espace de Banach des mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec la variation totale comme norme.
Soit $z \in B$. Choisissons une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $z_n \in B$ et $z_n \to z$.

$$\begin{aligned} \varphi_{z_n,\infty}(c) &= \varphi(G_{c,\infty}z_n) = \varphi(z_n + cl), \\ \varphi_{z,\infty}(c) &= \varphi(G_{c,\infty}z) = \varphi(z + cl). \end{aligned}$$

Or nous savons que pour W-presque tout $z \in B$, $\Delta = \{z + cl; c \in [0;\varepsilon]\} \subset V$ et si nous posons $\Delta_n = \{z_n + cl; c \in [0;\varepsilon]\}$, $\Delta_n \to \Delta$. Donc d'après la définition de la classe $\mathcal{M}_W$, nous savons que

$$\lambda\varphi_{\Delta_n}^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{var} \lambda\varphi_{\Delta}^{-1},$$

avec pour $c \in]0;\varepsilon[$,

$$\begin{aligned} \varphi_{\Delta_n}(c) &= \varphi(z_n + cl) = \varphi_{z_n,\infty}(c), \\ \varphi_{\Delta}(c) &= \varphi(z + cl) = \varphi_{z,\infty}(c). \end{aligned}$$

Donc pour W-presque tout $z \in B$, si la suite (z_n) est telle que $z_n \in B$ et $z_n \to z$, alors

$$\begin{aligned} \lambda\varphi_{z_n,\infty}^{-1} &\xrightarrow[n\to\infty]{var} \lambda\varphi_{z,\infty}^{-1}, \\ \lambda_{[0;\delta]}\varphi_{z_n,\infty}^{-1} &\xrightarrow[n\to\infty]{var} \lambda_{[0;\delta]}\varphi_{z,\infty}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\| \lambda_{[0;\delta]}\varphi_{z_n,\infty}^{-1} - \lambda_{[0;\delta]}\varphi_{z,\infty}^{-1} \| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

L'application

$$\begin{aligned} B &\longrightarrow Z(\mathbb{R}) \\ z &\longmapsto \lambda_{[0;\delta]}\varphi_{z,\infty}^{-1}, \end{aligned}$$

est continue W-p.p..
Ainsi nous avons vérifié toutes les hypothèses du théorème 3.4 et

$$P_n\varphi^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{var} W_c\varphi^{-1}.$$

■

3.2.4 Cas des chaînes Harris-récurrentes

Dans ce paragraphe, nous allons étudier les relations entre les conditions de I-régularité et les conditions requises pour avoir le P.I., c'est-à-dire la condition (3) du théorème 3.3. Les notions et résultats qui suivent sont principalement issus de [23]. Soit $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la c.m. définie dans le paragraphe 3.2.1.

Définition 3.4 (*définition* 2.1, [23]) *Un ensemble F non vide est un fermé de transition pour le noyau P si $P(x, F^c) = 0$ pour tout $x \in F$.*
La chaîne est indécomposable s'il n'existe pas deux fermés de transition disjoints.

Nous supposons que ξ est indécomposable. Pour un ensemble $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et un état initial x, $h_B^\infty(x)$ désigne la probabilité de visiter B une infinité de fois en ayant commencé en x.

Définition 3.5 (*définition* 3.5, [23]) *La chaîne ξ est récurrente par rapport à une mesure μ définie sur l'espace des états, si pour tout ensemble B mesurable tel que $\mu(B) > 0$, nous avons $h_B^\infty(x) > 0$ pour tout x et $h_B^\infty = 1$ excepté pour un ensemble de mesure μ nulle. Si $h_B^\infty \equiv 1$, alors la chaîne est Harris-récurrente.*

Remarque 3.7 D'après la proposition 2.4 de [23], si une chaîne est récurrente par rapport à une mesure μ non triviale, alors il existe une mesure dite maximale qui a la collection la moindre possible d'ensembles nuls relativement à d'autres mesures par rapport auxquelles la chaîne est récurrente. En particulier, toute mesure stationnaire est maximale en supposant que la chaîne est récurrente par rapport à une certaine mesure.

Lemme 3.2 *Si une c.m. est indécomposable et a une mesure de probabilité stationnaire, alors elle est récurrente.*

Preuve : selon le théorème 3.6 de [23], toute chaîne indécomposable est soit dissipative, soit récurrente. Rappelons que la chaîne est dite dissipative (définition 3.3, [23]) si $Gg = \sum_{k\geq 0} P^k g < \infty$ partout sur l'espace des états, pour une fonction g mesurable strictement positive. Pour une chaîne dissipative, une telle fonction g peut être choisie de telle façon que $Gg \leq 1$ partout sur l'espace des états (proposition 3.9, [23]). Alors en intégrant Gg par rapport à la probabilité stationnaire, nous obtenons $\infty \leq 1$, donc la chaîne est récurrente. ∎

Lemme 3.3 *Le noyau de transition $x \mapsto P(x,.)$ est continu en variation dans tout intervalle ouvert $J_0 \subseteq J$.*

Preuve : rappelons que $J = \{x \in \mathbb{R} | \pi(x) > 0\}$. Pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P(x, B) = \int_B p(x, y)\, dy.$$

Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \{x \in \mathbb{R} | \pi(x) > \frac{1}{n}\}$. Alors, comme π est a.c., J_n est ouvert. D'autre part, $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} J_n$. Soit $x_1, x_2 \in J_0$, $x_1 < x_2$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $J_0 \subset J_n$ et nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |p(x_2, y) - p(x_1, y)|\, dy &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{x_1}^{x_2} |p'_x(x, y)|\, dx\, dy \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{p'_x}{p}(x, y) \right| p(x, y)\, dy\, dx \\
&\leq \int_{x_1}^{x_2} [I^+(x)]^{1/2}\, dx \\
&\leq |x_2 - x_1|^{1/2} \left(\int_{J_0} I^+(x)\, dx \right)^{1/2} \\
&\leq c^{-1/2} |x_2 - x_1|^{1/2} \left(\int_{J_0} I^+(x)\pi(x)\, dx \right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{n}\, |x_2 - x_1|^{1/2} \sqrt{I^+}.
\end{aligned}$$

Donc le noyau de transition est continu en variation dans J_0. ■

Lemme 3.4 *L'ensemble J est un fermé de transition.*

Preuve : soit $x_0 \in J$ et supposons qu'il existe un ensemble A tel que $A \cap J = \emptyset$ et $P(x_0, A) > 0$. Comme conséquence du lemme 3.3, nous avons

$$P(.,A) \geq \frac{1}{2}P(x_0, A),$$

dans un voisinage N de x_0, $N \subseteq J$. Alors grâce à la stationnarité de la chaîne, nous avons

$$\begin{aligned}
\Pi(A) &= \int_A \pi(y)\,dy = \int_A \int_J p(x,y)\pi(x)\,dx\,dy \\
&= \int_J P(x,A)\pi(x)\,dx \geq \int_N P(x,A)\pi(x)\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}P(x_0,A)\int_N \pi(x)\,dx = \frac{1}{2}P(x_0,A)\Pi(N).
\end{aligned}$$

Or $N \subseteq J$, donc $\Pi(N) > 0$ et $P(x_0, A) > 0$, donc $\Pi(A) > 0$. Mais $A \cap J = \emptyset$ donc $\Pi(A) = 0$ ce qui contredit l'assertion précédente. ■

Selon la proposition 3.13 de [23], pour une c.m. récurrente, il existe un sous ensemble H de l'espace des états, fermé de transition, dont la mesure de probabilité stationnaire est égale à 1 et tel que la restriction de la chaîne à H soit Harris-récurrente. Un tel ensemble est un ensemble de Harris.

Lemme 3.5 *J est un ensemble de Harris pour ξ.*

Preuve : rappelons qu'une fonction h est dite harmonique (respectivement surharmonique) pour un noyau de transition P si $Ph = h$ (respectivement $Ph \leq h$). Prouvons d'abord que toute fonction bornée harmonique pour $\xi_{/J}$ (la restriction de ξ à J) est une constante.

Soit h une telle fonction, définie sur J et $h \leq K$ sur J pour une constante K. Posons

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in J, \\ K & \text{si } x \notin J. \end{cases}$$

Or J est un fermé de transition, donc pour tout $x \in J$, $P(x, J^c) = 0$.

Soit $x \in J$. Comme h est harmonique pour P sur J, nous avons

$$\begin{aligned}
P\tilde{h}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{h}(y)P(x,dy) = \int_J \tilde{h}(y)P(x,dy) \\
&= \int_J h(y)P(x,dy) = Ph(x) = h(x) = \tilde{h}(x).
\end{aligned}$$

Soit $x \notin J$. Alors

$$P\tilde{h}(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{h}(y)P(x,dy) \leq K\int_{\mathbb{R}} P(x,dy) = K = \tilde{h}(x).$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P\tilde{h}(x) \leq \tilde{h}(x)$ et $\tilde{h}$ est sur-harmonique. Grâce à la proposition 3.13 de [23], la récurrence de la chaîne ξ implique que toute fonction sur-harmonique est une constante Π-p.s.. Donc h est une constante λ-p.p. sur J. Or h est harmonique sur J, donc pour tout $x \in J$

$$\int_{\mathbb{R}} h(y)P(x,dy) = Ph(x) = h(x).$$

Mais d'après le lemme 3.3 et grâce à la bornitude de h, Ph est continue comme une fonction sur J. Ceci nous permet de conclure que h est une constante. Ainsi, nous avons prouvé que toute fonction bornée harmonique pour $\xi_{/J}$ est une constante. Selon le théorème 3.8 de [23], ceci implique que $\xi_{/J}$ est soit dissipative, soit Harris-récurrente. Cependant, elle ne peut être dissipative à cause de l'existence de la loi de probabilité stationnaire (voir la preuve du lemme 3.2), donc elle est Harris-récurrente. ∎

Remarque 3.8 D'après le théorème 5.2 de [23], comme la loi de probabilité stationnaire est finie, la chaîne est aussi positive récurrente.

Venons-en maintenant au P.I. pour les c.m.. Il y a différentes versions du théorème central limite (T.C.L.) et du P.I. pour les c.m. homogènes stationnaires. Nous allons considérer leur approche basée sur la résolution d'une certaine équation dans l'espace de Hilbert $L^2(J,\Pi)$ par rapport à la mesure stationnaire Π.

M. I. Gordin a proposé un T.C.L. pour les suites stationnaires générales dans [8] et un P.I. pour les processus stationnaires généraux dans [9]. Plus tard, dans [10], ces résultats ont été utilisés pour prouver le T.C.L. pour les c.m. stationnaires générales et sous les mêmes conditions, le P.I. a été démontré dans [11]. Parallèlement, N. Maigret a démontré un P.I. pour les processus étagés construits à partir d'une c.m. stationnaire Harris-récurrente positive [17]. C'est exactement le cas de la c.m. que nous avons considérée, c'est pourquoi [17] peut être considéré comme une référence clé. Cependant, N. Maigret considère des fonctions sur l'espace des trajectoires de la chaîne qui dépendent de deux valeurs successives alors qu'ici nous nous restreignons aux fonctions dépendant seulement d'un état de la chaîne.

Considérons ξ une c.m. homogène stationnaire et Harrris-récurrente sur J de loi de probabilité initiale stationnaire Π. Soit $f \in L^2(J,\Pi)$ une fonction qui vérifie la condition suivante

(C) $Pf = Pg - g$ pour une fonction $g \in L^2(J,\Pi)$.

Remarque 3.9 La représentation **(C)** pour une fonction Pf est possible si et seulement si f peut être représentée sous la forme

(C′) $f = Ph - h$ pour une fonction $h \in L^2(J,\Pi)$.

En effet, si f vérifie **(C′)**, $Pf = P(Ph-h) = P(Ph)-(Ph)$, alors **(C)** est vérifiée pour $g = Ph$.

Et si f vérifie (**C**), alors $f = f - Pf + Pf = f - Pf + Pg - g = P(g-f) - (g-f)$, alors (**C'**) est vérifiée pour $h = g - f$.

Remarque 3.10 Remarquons que $\int_J f(x)\Pi(dx) = 0$ est une condition nécessaire évidente pour que l'équation (**C**) ait une solution. Notons

$$L_0^1(J,\Pi) = \left\{ f \in L^1(J,\Pi) | \int_J f(x)\Pi(dx) = 0 \right\}.$$

Remarque 3.11 L'équation (**C**) a une solution mesurable pour toute fonction $f \in L_0^1(J,\Pi)$. Cela découle du théorème 5.1 dans [18]. D'autre part, si $|Pf|$ est une fonction spéciale (définition dans [18] et [23]) et si $f \in L_0^1(J,\Pi)$, alors $Pf = Pg - g$ pour une fonction $g \in L^\infty(J,\Pi)$ (qui désigne l'ensemble des fonctions mesurables bornées).

L'assertion (**C**) a certains avantages pour les c.m. Harris-récurrentes parce que Pf est une « meilleure » fonction que f. Par contre, la formule pour la variance limite introduite ci-après, semble plus simple lorsqu'elle est écrite en fonction de h.

Rappelons que ζ_n est le processus polygonal construit au début du paragraphe 3.2 à partir de la c.m. ξ qui est simplement supposée homogène stationnaire et Harris-récurrente positive, pour énoncer le théorème qui suit. La loi de ζ_n est P_n. Notons $\| \quad \|_2$ la norme dans $L^2(J,\Pi)$ et W_σ la loi du processus $\{\sigma w(t); t \in [0;1]\}$.

Théorème 3.5 *Si $f \in L^2(J,\Pi)$ vérifie* (**C**), *alors*

$$P_n \Rightarrow W_\sigma,$$

où $\sigma^2 = \|g-f\|_2^2 - \|P(f-g)\|_2^2 = \|h\|_2^2 - \|Ph\|_2^2$.

Ce théorème est un mélange des résultats de [10], [11] et [17]. Nous voyons alors que la condition (3) du théorème 3.3, p. 82 est vérifiée avec la constante $c = \sigma$.

Les résultats précédents et le théorème 3.3 nous permettent alors d'énoncer le corollaire suivant. Rappelons que ξ est la c.m. homogène stationnaire définie dans le paragraphe 3.2.1.

Corollaire 3.1 *Si les conditions suivantes sont réalisées*

(1) (**R**), (**R**$^+$), (**R**$^-$), $I^+ < \infty$ *et* $I^- < \infty$,

(2) $f \in L^2(J,\Pi)$ *est dérivable deux fois et il existe* $\delta > 0$ *et* $M \geq 0$ *tels que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq \delta$ *et* $|f''(x)| \leq M$ *et* f *vérifie* (**C**) (*ou* (**C'**)), *avec*

$$\sigma^2 = \|g-f\|_2^2 - \|P(f-g)\|_2^2 = \|h\|_2^2 - \|Ph\|_2^2 > 0,$$

(3) ξ *est indécomposable,*

(4) $\varphi \in \mathcal{M}_W$,

alors nous avons

$$P_n\varphi^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{var} W_\sigma\varphi^{-1}.$$

Remarque 3.12 Dans le théorème 3.5, c'est-à-dire pour la convergence faible, nous ne sommes pas obligés de supposer que $\sigma^2 > 0$, ce qui est nécessaire dans le résultat précédent pour la convergence forte.

Remarque 3.13 Les conditions (1) et (3) permettent, grâce aux lemmes 3.2 et 3.5, de conclure que la chaîne ξ est Harris-récurrente positive sur J. Ceci, avec la condition **(C)**, nous donne le P.I. pour P_n. Ainsi, toutes les hypothèses du théorème 3.3 sont vérifiées.

3.2.5 Applications

Appliquons le corollaire 3.1 aux exemples cités dans le paragraphe 3.2.2. Rappelons que $S_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_k)$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $t \in [0;1]$, le processus polygonal est défini par

$$\zeta_n(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}}\Big[S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt]) f(\xi_{[nt]+1}(\omega))\Big].$$

Exemple 3.5 Soit

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \quad \mathbb{C}[0;1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_1(x) = x(1). \end{aligned}$$

Alors $P_n\varphi_1^{-1}$ est la répartition de $\zeta_n(1) = S_n/\sqrt{n}$ et $W_\sigma\varphi_1^{-1}$ est la répartition de $\sigma w(1)$, c'est-à-dire $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. D'où

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

Remarque 3.14 Ceci n'est autre qu'un théorème limite local pour la chaîne de Markov $(f(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Exemple 3.6 Soit

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \quad \mathbb{C}[0;1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_2(x) = \sup_{t\in[0;1]} x(t). \end{aligned}$$

Alors $P_n\varphi_2^{-1}$ est la répartition de

$$\sup_{t\in[0;1]} \zeta_n(t) = \max_{0\le k\le n}\left(\frac{S_k}{\sqrt{n}}\right)$$

et nous avons alors

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{0\le k\le n} S_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{L}\left(\sigma \sup_{t\in[0;1]} w(t)\right).$$

Exemple 3.7 Soit

$$\begin{array}{rcl} \varphi_3 : & \mathbb{C}[0;1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto \varphi_3(x) = \sup_{t\in[0;1]} |x(t)|\,. \end{array}$$

Ici nous avons

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\le k\le n} |S_k|\right) \xrightarrow[n\to\infty]{var} \mathcal{L}\left(\sigma \sup_{t\in[0;1]} |w(t)|\right).$$

3.3 Cas des chaînes de Markov homogènes non stationnaires

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux c.m. homogènes non stationnaires, c'est-à-dire que la loi de probabilité initiale n'est plus la loi de probabilité stationnaire Π, mais une loi de probabilité initiale Γ.

3.3.1 Inégalité pour la chaîne de Markov $(f(\xi_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$

Supposons que ξ est la c.m. définie dans le paragraphe 1.3, mais ici la chaîne ξ est homogène. Supposons que la loi de probabilité initiale a une densité γ a.c.. Le noyau de probabilité de transition P a pour famille de densités de probabilité de transition $\{p(x,.); x \in \mathbb{R}\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x,.)$ est a.c.. Les dérivées γ', p'_x et p'_y sont définies et existent au sens usuel de la dérivation. Pour $k \ge 2$, f_k désigne la densité de la v.a. ξ_k. Elle est donc définie par

$$f_k(y) = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \gamma(x_1)p(x_1,x_2)\cdots p(x_{k-1},y)\,dx_1\ldots dx_{k-1}.$$

Par commodité, nous supposons que γ est strictement positive λ-p.p. et pour tout $k \ge 2$, p_k est strictement positive λ^2-p.p.. Nous considérons alors la chaîne inversée par rapport à la loi de probabilité initiale, de famille de densités de probabilité de transition $\{q_{k-1}(y,.); y \in \mathbb{R}\}$, où

$$q_{k-1}(y,.) = \frac{p(.,y)f_{k-1}(.)}{f_k(y)}.$$

Rappelons les hypothèses de I-régularité.

(**R**) La famille $\{\gamma(.+t); t \in \mathbb{R}\}$ est I-régulière et

$$I(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\gamma'}{\gamma}(x)\right]^2 \gamma(x)\,dx.$$

($\mathbf{R}^+$) La famille $\{p(x,.); x \in \mathbb{R}\}$ est I-régulière et pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$I^+(x) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p'_x}{p}(x,y)\right]^2 p(x,y)\,dy.$$

Pour tout $k \geq 2$, nous avons

($\mathbf{R_k}$) La famille $\{f_k(.+t); t \in \mathbb{R}\}$ est I-régulière et

$$I(f_k) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{f'_k}{f_k}(x)\right]^2 f_k(x)\,dx.$$

($\mathbf{R_k}^-$) La famille $\{q_{k-1}(y,.); y \in \mathbb{R}\}$ est I-régulière et pour tout $y \in \mathbb{R}$, nous avons

$$I^-_{k-1}(y) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p'_y}{p}(x,y) - \frac{f'_k}{f_k}(y)\right]^2 \frac{p(x,y)f_{k-1}(x)}{f_k(y)}\,dx.$$

De plus, pour tout $k \geq 2$, nous supposons que

$$I^+_k = \int_{\mathbb{R}} I^+(x) f_{k-1}(x)\,dx < \infty,$$
$$I^-_k = \int_{\mathbb{R}} I^-_{k-1}(y) f_k(y)\,dy < \infty.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et notons

$$\begin{cases} I_1 = I(\gamma) + I(f_2) + I^+_2 + I^-_2, \\ I_k = I(f_k) + I(f_{k+1}) + I^+_k + I^+_{k+1} + I^-_k + I^-_{k+1} & \text{pour tout } 2 \leq k \leq n-1, \\ I_n = I^-_n + I^+_n + I(f_n). \end{cases}$$

Enfin, notons Q^a_n et Q_n les lois respectives des vecteurs $\bar{\xi} + \bar{a}$ et $\bar{\xi}$. Le résultat donné par le théorème 1.2 est alors le suivant

$$\|Q^a_n - Q_n\| \leq \sqrt{\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 I_k}.$$

Comme dans le paragraphe 3.2.1, ce qui nous intéresse, c'est de majorer la distance en variation entre les lois des vecteurs $(f(\xi_1) + a_1, \ldots, f(\xi_n) + a_n)$ et $(f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n))$ que nous noterons respectivement $\widehat{Q^a_n}$ et $\widehat{Q_n}$. En procédant de la même façon que dans ce paragraphe, nous obtenons

Théorème 3.6 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable vérifiant les deux conditions suivantes*

(i) *$\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq \delta$,*

(ii) *$\exists M \geq 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f''(x)| \leq M$.*

Si $(\mathbf{R})$, $(\mathbf{R}^+)$, $(\mathbf{R_k})$ *et* $(\mathbf{R_k}^-)$ *pour tout* $k \geq 2$, *sont vérifiées et si pour tout* $k \geq 2$, $I_k^+ < \infty$ *et* $I_k^- < \infty$, *alors*

$$\|\widehat{Q_n^a} - \widehat{Q_n}\| \leq \sqrt{3 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \widehat{I_k}},$$

où pour tout $1 \leq k \leq n$, *nous posons*

$$\widehat{I_k} = \frac{1}{\delta^2} I_k + \frac{2M^2}{\delta^4}.$$

Preuve : la démonstration est identique à la démonstration du théorème 3.4. La densité de probabilité initiale de la chaîne $(f(\xi_k))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est notée $\widehat{\gamma}$ et est définie pour $u \in \mathbb{R}$ par

$$\widehat{\gamma}(u) = \frac{\gamma[f^{-1}(u)]}{f'[f^{-1}(u)]}.$$

D'autre part, $\{\widehat{p}(u,.); u \in \mathbb{R}\}$ désigne la famille des densités de probabilité de transition. Pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tout $v \in \mathbb{R}$, elles sont définies par

$$\widehat{p}(u, v) = \frac{p[f^{-1}(u), f^{-1}(v)]}{f'[f^{-1}(v)]}.$$

Grâce aux hypothèses (i) et (ii) du théorème 3.6, nous pouvons démontrer que $\widehat{\gamma}$ et $\widehat{p}(u,.)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, sont a.c..
Notons $\widehat{f_k}$ la densité de $f(\xi_k)$, elle est définie pour tout $v \in \mathbb{R}$ par

$$\widehat{f_k}(v) = \frac{f_k[f^{-1}(v)]}{f'[f^{-1}(v)]}.$$

De même, $\{\widehat{q}_{k-1}(v,.); v \in \mathbb{R}\}$ désigne la famille des densités de probabilité de transition de la chaîne inversée, elles sont définies pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tout $v \in \widehat{J}$

$$\widehat{q}_{k-1}(v, u) = \frac{f_{k-1}[f^{-1}(u)] p[f^{-1}(u), f^{-1}(v)]}{f'[f^{-1}(u)] f_k[f^{-1}(v)]}.$$

Pour appliquer l'inégalité (1.31) du théorème 1.2, nous calculons les quantités de Fisher associées aux densités définies précédemment. En effet, nous avons

$$I(\widehat{\gamma}) \leq \frac{2}{\delta^2} I(\gamma) + \frac{2M^2}{\delta^4}$$

et pour tout $k \geq 2$, nous avons

$$\begin{aligned}
\widehat{I_k^+} &\leq \frac{1}{\delta^2} I_k^+, \\
I(\widehat{f_k}) &\leq \frac{2}{\delta^2} I(f_k) + \frac{2M^2}{\delta^4}, \\
\widehat{I_k^-} &\leq \frac{1}{\delta^2} I_k^-.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du théorème. ∎

3.3.2 Principe d'invariance local

La c.m. ξ est celle définie au début du paragraphe précédent. Rappelons que $S_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_k)$. Le processus polygonal ζ_n est défini pour tout $t \in [0;1]$ par

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\Big[S_{[nt]} + (nt - [nt])f(\xi_{[nt]+1})\Big].$$

Cette fois, nous noterons Q_n sa loi. Comme dans le paragraphe 3.2.3, nous pouvons énoncer un P.I. local.

Théorème 3.7 *Si les conditions suivantes sont réalisées*

(1) $(\mathbf{R})$, $(\mathbf{R^+})$, $(\mathbf{R_k})$, $(\mathbf{R_k}^-)$, $I_k^+ < \infty$, $I_k^- < \infty$ *pour tout* $k \geq 2$,

(2) f *est dérivable deux fois et il existe* $\delta > 0$ *et* $M \geq 0$ *tels que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq \delta$ *et* $|f''(x)| \leq M$,

(3) $Q_n \Rightarrow W_c$ *pour une constante* $c > 0$,

(4) $\varphi \in \mathcal{M}_W$,

alors nous avons

$$Q_n\varphi^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{var} W_c\varphi^{-1}.$$

Preuve : le seul changement par rapport à la démonstration du théorème 3.3 se situe au niveau du point (iii). En effet, nous avons

$$T_n(\zeta_n) = (f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)) \text{ donc } Q_n T_n^{-1} = \widehat{Q_n}$$

et

$$T_n(\zeta_n + c\Pi_n(l)) = \Big(f(\xi_1) + c\sqrt{n}\, l(1/n), \ldots, f(\xi_n) + c\sqrt{n}(l(1) - l(1 - 1/n))\Big),$$

donc

$$Q_n G_{c,n}^{-1} T_n^{-1} = \widehat{Q_n^{ca}},$$

en posant pour tout $0 \leq k \leq n-1$

$$a_{k+1} = \sqrt{n}\left[l\Big(\frac{k+1}{n}\Big) - l\Big(\frac{k}{n}\Big)\right].$$

Alors

$$\|Q_n G_{c,n}^{-1} - Q_n\| = \|\widehat{Q_n^{ca}} - \widehat{Q_n}\| \leq \sqrt{3\sum_{k=1}^{n} c^2 a_k^2 \widehat{I_k}}.$$

D'où

$$\limsup \|Q_n G_{c,n}^{-1} - Q_n\| \leq c\sqrt{3 \sup_{0\leq k\leq n} \widehat{I_k}}\, \|l'\|_2.$$

Donc

$$\lim_{c\to 0} \limsup \|Q_n G_{c,n}^{-1} - Q_n\| = 0.$$

■

3.3.3 Principe d'invariance

Ici ξ est une c.m. homogène Harris-récurrente positive, de loi de probabilité initiale Γ, de noyau de probabilité de transition P et de loi de probabilité stationnaire Π. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rappelons que $S_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_k)$. Le processus ζ_n est défini pour tout $t \in [0; 1]$ par

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[S_{[nt]} + (nt - [nt])f(\xi_{[nt]+1})\right].$$

Nous indicerons par Γ lorsque Γ sera la loi de probabilité initiale et nous omettrons cet indice si la loi de probabilité initiale est la loi de probabilité stationnaire Π. D'autre part, la loi de ce processus sera notée P_n lorsque Π est la loi de probabilité initiale et Q_n si la loi de probabilité initiale est Γ. D'après le théorème 3.5, nous savons que si $f \in L^2(\mathbb{R}, \Pi)$ vérifie la condition (**C**), alors $P_n \Rightarrow W_\sigma$. Nous allons montrer que cette convergence reste valable lorsque Γ est la loi de probabilité initiale.

Théorème 3.8 *Si $f \in L^2(\mathbb{R}, \Pi)$ et vérifie* (**C**), *alors*

$$Q_n \Rightarrow W_\sigma.$$

Preuve : l'idée de la démonstration est inspirée de la méthode utilisée par P. Billingsley dans [2] et [1] (théorèmes 16.3 et 20.2), mais aussi d'une méthode issue de N. V. Gizbrekht [7]. D'après [2], il existe une suite d'entiers naturels $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui tend vers l'infini assez lentement pour que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\max_{k\le k_n} |S_k| \ge \varepsilon\sqrt{n}\} = 0, \tag{3.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\Gamma\{\max_{k\le k_n} |S_k| \ge \varepsilon\sqrt{n}\} = 0, \tag{3.11}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Définissons alors le processus suivant pour tout $t \in [0; 1]$ par

$$\zeta'_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t \le \frac{k_n}{n}, \\ \zeta_n(t) - \frac{S_{k_n}}{\sqrt{n}} & \text{si } \frac{k_n}{n} \le t \le 1. \end{cases}$$

Nous noterons P'_n et Q'_n les lois de ζ'_n lorsque la loi de probabilité initiale est respectivement Π et Γ.
Posons

$$\delta_n = \sup_{0\le t\le 1} |\zeta_n(t) - \zeta'_n(t)|.$$

Il est clair que

$$\delta_n \le \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k\le k_n} |S_k|,$$

autrement dit, grâce à (3.10) et (3.11), nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\delta_n \geq \varepsilon\} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\Gamma\{\delta_n \geq \varepsilon\} = 0.$$

Calculons maintenant la distance en variation

$$\begin{aligned} \|P'_n - Q'_n\| &= \|P_{(f(\xi_{k_n+1}),\ldots,f(\xi_n))} - Q_{(f(\xi_{k_n+1}),\ldots,f(\xi_n))}\| \\ &= \|P_{(\xi_{k_n+1},\ldots,\xi_n)} - Q_{(\xi_{k_n+1},\ldots,\xi_n)}\|, \end{aligned}$$

où $P_{(\xi_{k_n+1},\ldots,\xi_n)}$ (respectivement $Q_{(\xi_{k_n+1},\ldots,\xi_n)}$) est la loi du vecteur $(\xi_{k_n+1},\ldots,\xi_n)$ lorsque la loi de probabilité initiale est Π (respectivement Γ). Donc

$$\begin{aligned} \|P'_n - Q'_n\| = \int_{\mathbb{R}^{n-k_n}} \Big| &\Pi(dx_{k_n+1})P(x_{k_n+1}, dx_{k_n+2})\cdots P(x_{n-1}, dx_n) \\ &-\Gamma P^{k_n+1}(dx_{k_n+1})P(x_{k_n+1}, dx_{k_n+2})\cdots P(x_{n-1}, dx_n)\Big|, \end{aligned}$$

où ΓP^{k_n+1} désigne la loi de ξ_{k_n+1} lorsque Γ est la loi de probabilité initiale. Nous pouvons alors écrire

$$\|P'_n - Q'_n\| = \int_{\mathbb{R}} |\Pi(dx) - \Gamma P^{k_n+1}(dx)| = \|\Pi - \Gamma P^{k_n+1}\|.$$

Or d'après le théorème 2.2 de [23] et la définition de J, nous savons que notre c.m. récurrente est apériodique. D'après le corollaire 6.7 de [23], si ξ est une c.m. apériodique Harris-récurrente positive, de loi de probabilité stationnaire Π, alors pour toute loi de probabilité initiale quelconque Γ, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \|\Gamma P^n - \Pi\| = 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \|P'_n - Q'_n\| = 0.$$

D'après le théorème 4.1 de [1], nous pouvons affirmer que

$$\left.\begin{array}{l} P_n \Rightarrow W_\sigma \\ \delta_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad P'_n \Rightarrow W_\sigma.$$

D'autre part, $\|P'_n - Q'_n\| \to 0$, $n \to \infty$, donc

$$Q'_n \Rightarrow W_\sigma.$$

En appliquant de nouveau le théorème 4.1 de [1], nous avons

$$\left.\begin{array}{l} Q'_n \Rightarrow W_\sigma \\ \delta_n \xrightarrow{\mathbb{P}_\Gamma} 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad Q_n \Rightarrow W_\sigma.$$

Ceci termine la démonstration du théorème 3.8. ∎

3.3.4 Cas des chaînes Harris-récurrentes

Enfin, il nous reste à énoncer un corollaire du théorème précédent en utilisant le théorème 3.8.

Corollaire 3.2 *Si les conditions suivantes sont réalisées*

(1) $(\mathbf{R})$, $(\mathbf{R^+})$, $(\mathbf{R_k})$, $(\mathbf{R_k}^-)$, $I_k^+ < \infty$, $I_k^- < \infty$ *pour tout* $k \geq 2$,

(2) $f \in L^2(\mathbb{R}, \Pi)$ *est dérivable deux fois et il existe* $\delta > 0$ *et* $M \geq 0$ *tels que* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq \delta$ *et* $|f''(x)| \leq M$ *et* f *vérifie* $(\mathbf{C})$ *avec* $\sigma^2 > 0$,

(3) ξ *est indécomposable,*

(4) $\varphi \in \mathcal{M}_W$,

alors nous avons

$$Q_n\varphi^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{var} W_\sigma\varphi^{-1}.$$

3.4 Remarque sur l'espace $\mathbb{D}[0;1]$

Il est très fréquent que le processus étagé défini pour tout $t \in [0;1]$ par

$$\tilde{\zeta}_n = \frac{1}{\sigma_n} S_{[nt]},$$

où σ_n sont des constantes normalisantes, soit considéré. Les trajectoires de ce processus sont des fonctions étagées qui sont continues à droite et qui ont une limite à gauche (fonctions cadlag). L'espace $\mathbb{C}[0;1]$ n'est pas approprié à l'étude de la convergence faible des lois de tels processus et est habituellement remplacé par l'espace $\mathbb{D}[0;1]$, des fonctions sans discontinuités de second ordre, muni de la topologie de Skorokhod. Pour la convergence forte des distributions des fonctionnelles de trajectoires du processus $\tilde{\zeta}_n$, une difficulté apparaît, liée au fait que l'espace $\mathbb{D}[0;1]$ n'est pas un espace vectoriel topologique et par conséquent, nous ne pouvons pas directement utiliser les résultats du paragraphe 3.2 et 3.3. En fait, la même méthode que celle développée dans ces deux paragraphes précédents peut être appliquée à ce cas précis à la condition de réadapter certains résultats à l'espace $\mathbb{D}[0;1]$, en particulier le théorème 3.4.

Y. A. Davydov a étudié ce problème dans [5] et a montré que dans le cas des v.a.i.i.d., il est possible de remplacer l'espace $\mathbb{D}[0;1]$ par un espace plus approprié. En effet, soit $\mathcal{D}$ la tribu borélienne de $\mathbb{D}[0;1]$ et $\mathcal{U}$ la tribu des sous ensembles de $\mathbb{D}[0;1]$ engendré par la topologie uniforme. Soit P_n les lois sur $\mathcal{D}$ correspondant aux processus $\tilde{\zeta}_n$ et W la loi du processus de Wiener sur $\mathcal{D}$. Les lois P_n et W peuvent être étendues à $\mathcal{U}$ (voir [1]). Nous garderons les mêmes notations pour ces extensions. Si $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définissant le processus $\tilde{\zeta}_n$ sont i.i.d. et telles que $\mathbb{E}(\xi_n) = 0$ et $\mathrm{Var}(\xi_n) = \sigma^2 < \infty$, alors nous avons aussi la convergence faible dans $\mathcal{U}$,

$$P_n \Rightarrow W.$$

Nous notons $E[0;1]$ la fermeture uniforme de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{D}[0;1]$ qui ont un nombre fini de sauts et où les moments de ces sauts sont des points rationnels. Alors $E[0;1]$ muni de la topologie uniforme est un espace de Banach séparable. La tribu borélienne de $E[0;1]$ coincide avec la tribu $\mathcal{U} \cap E[0;1]$. Comme $E[0;1]$ est le support des lois P_n et W, nous pouvons immédiatement appliquer la méthode utilisée dans [5] par Y. A. Davydov et nous obtenons

Théorème 3.9 *Si les conditions suivantes sont réalisées*

(1) *p la densité de la v.a. ξ_k est a.c. et la quantité de Fisher associée $I(p) < \infty$,*

(2) *$\varphi \in \mathcal{M}_W$,*

alors nous avons

$$P_n\varphi^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{var} W\varphi^{-1}.$$

Il semblerait que la même méthode que celle utilisée par Y. A. Davydov que nous venons d'exposer peut s'appliquer au cas des chaînes de Markov homogènes stationnaires ou non, c'est dans cette direction, entre autre que nous envisageons de poursuivre les recherches sur ce sujet.

Bibliographie

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures,* Wiley, New York (1968).

[2] P. Billingsley, *The invariance principle for dependent random variables,* Trans. Am. Math. Soc., Vol. 83, N° 1, p. 250–268 (1956).

[3] Y. A. Davydov, *Local limit theorems for functionals of random processes,* Th. Probab. Appl., Vol. 33, N° 4, p. 732–738 (1988).

[4] Y. A. Davydov, *Sur le théorème local limite en dimension infinie,* LOMI séminaires, Vol. 177, p. 46–50 (1989).

[5] Y. A. Davydov, M. A. Lifshits, *Fibering method in some probabilistic problems,* J. Sov. Math., Vol. 31, p. 2796–2858 (1985).

[6] Y. A. Davydov, M. A. Lifshits, N. V. Smorodina, *Les propriétés locales des répartitions des fonctionnelles stochastiques,*en russe Nauka, Moscou (1995).

[7] N. V. Gizbrekht, *On the invariance principle for the sum of random variables that are defined on a homogeneous Markov chain,* Siberian Math. J., Vol. 31, N° 1, p. 159–162 (1990).

[8] M. I. Gordin, *On the central limit theorem for stationary processes,* J. Sov. Math., Vol. 10, N° 5, p. 1174–1176 (1969).

[9] M. I. Gordin, *Some questions of the theory of stationary random processes,* Dissertation, Leningrad state university (1970).

[10] M. I. Gordin, B. A. Lifshits *The central limit theorem for stationary random processes,* J. Sov. Math., Vol. 19, N° 2, p. 392–394 (1978).

[11] M. I. Gordin, B. A. Lifshits *Invariance principle for stationary random processes,* J. Sov. Math., Vol. 23, N° 4, p. 865–866 (1978).

[12] H. S. Ho, *Gaussian Measures in Banach Spaces,* Nauka, Moscou (1975).

[13] I. A. Ibragimov, R. Z. Has'minskii, *Statistic Estimation : Asymptotic Theory,* Springer-Verlag, Berlin, New York (1981).

[14] J. Jacod, A. N. Shiryaev, *Limit theorems for stochastic processes,* Springer-Verlag, Berlin, New York (1987).

[15] Y. M. KABANOV, R. S. LIPCER, A. N. SHIRYAEV, *On the question of absolute continuity and singularity of locally absolutely continuous probability measures,* Math. USSR Sbornik , Vol. 33, p. 203–221 (1977).

[16] S. KAKUTANI *On equivalence of infinite product measures,* Ann. Math., Vol. 49, p. 214–224 (1948).

[17] N. MAIGRET, *Théorème limite central fonctionnel pour une chaîne récurrente au sens de Harris et positive,* Ann. Inst. Henri Poincaré , Vol. 14, N° 4, p. 425–440 (1978).

[18] J. NEVEU, *Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris,* Ann. Inst. Fourier, Vol. 22, p. 85–130 (1972).

[19] C. NOQUET, *Inégalité pour la distance en variation des lois de deux vecteurs markoviens,* Pré-pub. IRMA, Vol. 37, I (Lille 1995).

[20] C. NOQUET, *Inégalités pour la distance en variation entre la loi d'une suite et la loi translatée,* Pré-pub. IRMA, Vol. 42, I (Lille 1997).

[21] C. NOQUET, *Principe d'invariance local pour les fonctionnelles stochastiques de chaînes de Markov,* Pré-pub. IRMA, Vol. 43, IX (Lille 1997).

[22] C. NOQUET, *Inégalités pour la distance en variation entre la loi d'une suite et la loi translatée et applications,* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I, p. 1033–1036 (1997).

[23] E. NUMMELIN, *General irreductible Markov chains and non-negative operators,* Cambridge University Press, London (1984).

[24] D. REVUZ, *Markov chains,* North-Holland, Amsterdam, New york, Oxford (1984).

[25] D. REVUZ, M. YOR, *Continuous martingales and Brownian motion,* Sringer-Verlag, Berlin (1991).

[26] H. SATO, *Absolute continuity of locally equivalent Markov chains,* Mem. fac. Sci., Kyushu univ. ser. A, Vol. 45, N° 2, p. 285–308 (1991).

[27] H. SATO, M. TAMASHIRO, *Multiplicative chaos and random translation,* Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 30, N° 2, p. 245–264 (1994).

[28] H. SATO, C. WATARI, *Some integral inequalities and absolute continuity of a symmetric random translation,* J. of Funct. Anal. , Vol. 114, p. 257–266 (1993).

[29] L. A. SHEPP, *Distinghishing a sequence of random variables from a translate of itself,* Ann. Math. Statist. , Vol. 36, p. 1107–1112 (1965).

[30] A. N. SHIRYAEV, *Probability,* Springer-Verlag, New York (1984).