*N° d'ordre : 2185*

# THÈSE

**présentée à**

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

**pour obtenir**

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES



par

**Lhassan HABACH**

# COMPORTEMENT P.S. DES EXTRÊMES DE CERTAINS PROCESSUS STATIONNAIRES

Soutenue le 17 Décembre 1997 devant la Commission d'Examen :

| | |
|---|---|
| Président : | M.-C. VIANO, Université de Lille I |
| Directeur de Thèse : | G. HAIMAN, Université de Lille I |
| Rapporteurs : | J.N. BACRO, INA-PG, Paris |
| | V. EGOROV, Université de S$^t$ Petersbourg |
| Examinateurs : | B. MASSÉ, Université du Littoral |
| | Y. DAVYDOV, Université de Lille I |
| | Ch. SUQUET, Université de Lille I |

*A mes parents,*

*A Mustapha, Marianne et Samy.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à :*

*Madame le Professeur* M.-C. VIANO, *directrice du laboratoire de Probabilités et Statistique, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.*

*Messieurs les Professeurs* J. N. BACRO *et* V. EGOROV, *rapporteurs de cette thèse, pour leur lecture approfondie et leurs judicieuses critiques.*

*Messieurs les Professeurs* Y. DAVYDOV, Ch. SUQUET *et* B. MASSÉ, *qui ont eu l'extrême obligeance de faire partie du jury de cette thèse.*

*Monsieur le Professeur* G. HAIMAN, *qui m'a initié à la théorie des valeurs extrêmes et qui a guidé mon activité de recherche. Ses nombreux conseils et son aide efficace m'ont été d'un secours précieux.*

*Monsieur le Professeur* M. A. LIFSHITS *pour l'attention particulière et intéressée qu'il a prêtée à mon travail. Ses remarques pertinentes m'ont permis d'en améliorer certains points.*

*Les membres du laboratoire de Probabilités et Statistique pour leur sympathie et leurs encouragements, et notamment* Ch. SUQUET, *qui a toujours fait preuve à mon égard d'une grande disponibilité.*

*Le personnel du secrétariat scientifique, ainsi que le personnel de l'imprimerie qui ont contribué à la réalisation matérielle de ce manuscrit.*

*Ma famille, mes amis et toutes les personnes qui, de près ou de loin, m'ont soutenu et apporté leur aide.*

# Table des matières

# Introduction générale

Cette étude est essentiellement consacrée au problème des extrêmes dans le cas des processus gaussiens stationnaires multivariés et des processus m-dépendants stationnaires.
Le problème de la comparaison des extrêmes d'une suite stationnaire à ceux de la suite de variables aléatoires indépendantes de même loi marginale a su attirer l'attention de nombreux mathématiciens. On peut citer à ce sujet Watson [43] (1954) ; Berman [2], [3] (1962, 1964) ; Loynes [31] (1965) ; O'Brien [36] (1974) ; Leadbetter [28] (1974) ; Galambos [14] (1975) ; Deheuvels [9] (1978) ; Haiman [20] (1981) ; Leadbetter, Lindgren, Rootzen [29] (1983) ; Amram[1] (1985) ; Leadbetter, Rootzen [30] (1988).
Ce problème, qui était étroitement lié aux questions ayant trait à la notion de loi limite, a permis l'étude de différents modèles stationnaires dépendants. Plusieurs directions de recherche ont été envisagées. L'étude qui est présentée ici se situe dans la direction des travaux de Haiman [21], [22], [23], [24], [25], [26]. Cette direction consiste à considérer les modèles ayant le même type de loi limite que la suite de variables aléatoires indépendantes de même loi marginale et d'imposer à ces modèles stationnaires des hypothèses supplémentaires qui assurent aux extrêmes d'avoir presque sûrement le même comportement que ceux d'une suite de variables aléatoires indépendantes. Plus précisément, le résultat est un principe d'invariance qui montre qu'étant donnée une suite stationnaire vérifiant certaines hypothèses d'indépendance locale et asymptotique, on peut construire sur le même espace de probabilité sur lequel cette suite est définie, une suite i.i.d., telle qu'à partir d'un certain rang, les maxima des deux suites coïncident.
Ce principe d'invariance a été démontré pour la première fois par Haiman dans [21] pour une suite stationnaire m-dépendante de variables aléatoires dont les lois marginales sont uniformément distribuées sur $(0,1)$ et vérifient

l'hypothèse $\mathbf{H_1}$ suivante :
Il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $1 < i \leq m$,

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \Big( \sup_{\substack{0<v<w<\epsilon \\ 0<u<\epsilon}} \frac{P(U_1 < u, v < U_i < w)}{u^\beta (w-v)} \Big) < +\infty.$$

Pour les processus gaussiens stationnaires, Haiman, dans [22], a obtenu le même résultat sous l'hypothèse $\mathbf{H_2}$ suivante :
La fonction de covariance $r(n)$, $(r(0) = 1)$, vérifie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |r(n)| < \frac{1}{2},$$

et

$$\limsup_{n \to +\infty} |r(n)|\, n^{4+\epsilon} < +\infty \text{ pour un certain } \epsilon > 0.$$

Ce résultat a été étendu par Haiman et Puri, dans [25], à la suite des vecteurs des J plus grandes valeurs parmi $X_1, \dots, X_n$, $J \geq 1$ fixé, sous d'autres hypothèses.
Haiman, dans [24], a généralisé son résultat de [21] au cas multivarié où la suite stationnaire m-dépendante $\{\mathbf{X}_n = (X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(d)})\}$, $d \geq 1$ vérifie l'hypothèse $\mathbf{H_3}$ suivante :
il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $2 \leq k \leq m$ et $1 \leq i, j \leq d$, et, pour $k = 1$, $1 \leq i < j \leq d$,

$$\limsup_{z \to b} \Big\{ \sup_{\substack{z<v<w<b \\ z<u<b}} \frac{P(X_1^{(i)} > u, v < X_k^{(i)} < w}{(-\ln(P(X_1^{(i)} > u)))^{-(1+d+\beta)} P(v < X_1^{(i)} < w)} \Big\} < +\infty,$$

où

$$b = \sup\{x, P(X_1^{(i)} < u) < 1\}.$$

Haiman, Kiki et Puri, dans [26], ont démontré le même résultat pour une chaîne de Markov en supposant que $(X_n)$ est strictement stationnaire et admet une densité de transition $f(x, y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue vérifiant :
il existe un entier $s \geq 1$, deux constantes $0 < \eta < 1$ et $M > 1$, et une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue $g(y)$ tels que :

$$\eta g(y) \leq f^s(x, y) \leq M g(y), \; x, y \in \mathbb{R},$$

où $f^k(x,y)$ est définie par :

$$f^k(x,y) = \int f^{k-1}(x,z) f(z,y) dz, \; k \geq 1.$$

Haiman, Mayeur, Nevzorov et Puri dans [27], ont établi le même principe d'invariance pour une suite strictement stationnaire $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a.r. 1-dépendante de f.d.r. $F(x) = P(X_1 \leq x)$ supposée strictement croissante au voisinage de $\omega = \sup\{x, F(x) < 1\}$ (c-à-d pour $x \geq x_0$, $x_0 < \omega$), sous l'hypothèse **H** suivante :
i) La fonction $\tilde{H}(u) = P\{F(X_1) > u, F(X_2) > u\}$ est continument différentiable au voisinage de $u = 1$ et

$$\tilde{H}'(1) = \lim_{x\to\omega} \frac{P\{X_1 > x, X_2 > x\}}{P\{X_1 > x\}} = \alpha, \; 0 \leq \alpha \leq 1/2.$$

ii) Il existe une constante positive $K$ telle que pour tout $u \leq v \leq w$, on a

$$P\{X_2 > u, \max(X_2, X_3) \in (v, v+dv)\} \leq Kh(u,v),$$

où

$$h(u,v) = P\{X_1 \leq u, X_2 > u, \max(X_2, X_3) \in (v, v+dv)\}.$$

Nous avons apporté notre contribution dans Habach [18] en démontrant un principe analogue pour une suite de vecteurs aléatoires gaussiens i.i.d. dont les coordonnées ne sont pas nécessairement indépendantes.
Le plan de ce travail est le suivant :
Le chapitre 1 est une synthèse des résultats principaux de la théorie des valeurs extrêmes dans le cas classique i.i.d. et dans le cas général stationnaire. Pour les développements, nous renvoyons à la bibliographie et notamment à Galambos [15], Leadbetter, Lindgren, Rootzen [29], Resnick [41].
Nous commençons le chapitre 2 par introduire la notion de records et temps de records et nous en donnons quelques propriétés importantes que nous utiliserons dans le reste de ce travail. Une synthèse complète des résultats connus sur les records jusqu'en 1987 est donnée dans Nevzorov [34]. Nous considérerons après une suite stationnaire m-dépendante vérifiant l'hypothèse (**H**) suivante :
(**H**) : il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $1 < i \leq m$,

$$\limsup_{z\to 1} \left\{ \sup_{\substack{z<v<w<1 \\ z<u<1}} \frac{P\{X_1 > u, v < X_i < w\}}{(-\ln(1-u))^{-(2+\beta)}(w-v)} \right\} < +\infty.$$

Soit $M_n = \max(X_1 \ldots, X_n), n \geq 1$. Haiman, dans [24], a démontré le théorème suivant :

**Théorème 0.0.1** *On peut construire sur le même espace de probabilité sur lequel $\{X_n\}$ est définie, une suite $\{\hat{X}_n\ ;\ n \geq 1\}$ de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$ telle que si $\hat{M}_n = \max(\hat{X}_1 \ldots, \hat{X}_n), n \geq 1$, alors il existe $N_0$ tel que p.s. pour tout $n \geq N_0$ :*

$$M_n = \hat{M}_n.$$

Nous nous proposons d'évaluer la queue de distribution de la variable aléatoire $N_0$. Plus exactement, nous démontrons le théorème suivant :

**Théorème 0.0.2** (Habach et Haiman [19]) *Il existe $\lambda > 0$ tel que :*

$$P(N_0 > s) = O((\log s)^{\frac{-\lambda}{2+\lambda}}).$$

Ce problème d'évaluation est lié étroitement à la construction de la suite $\{\hat{X}_n\}$. Nous rappelons donc les grandes lignes de cette construction. Pour démontrer le théorème précédent, nous avons été amené à majorer la probabilité $P(T_n > s)$ où $(T_n)$ est la suite des temps de records telle qu'elle est définie par Haiman (avec un seuil initial $r_0$). Dans le cas des records classiques, nous connaissons des résultats sur le moment d'ordre 1 du logarithme de la suite des temps de records, on peut voir à ce sujet Nevzorov [34] et Pfeifer [37]. Nous avons donc pensé à détérminer l'analogue de ces résultats dans le cas de la suite $(T_n)$. Ensuite, pour majorer $P(T_n > s)$, on applique l'inégalité de Markov à la suite $\log T_n$. Nous démontrons alors le résultat suivant :

**Théorème 0.0.3** *Soit $(T_n)$ la suite des temps de records définie dans le chapitre 2 par (2.1). On a :*

$$\mathbb{E} \log T_n = n - c + \log(\frac{r_0}{1-r_0}) + \frac{1-r_0}{r_0} + \frac{d}{2r_0^2} + O(1/2^n),$$

*où $|d| \leq 1$, $|O(x)| \leq C(r_0)\,|x|$, $C(r_0)$ étant une fonction de $r_0$ et $c$ est la constante d'Euler.*

Dans le chapitre 3, nous rappelons la définition des records dans le cas multivarié et nous en donnons quelques propriétés avant de démontrer le théorème

suivant :
Soit $\{\mathbf{X}_n = (X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(d)})\ ;\ n \geq 1\}$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués avec $\mathbf{X}_1 = (X_1^{(1)}, \ldots, X_1^{(d)})$ vecteur gaussien centré tel que :

$$\mathbb{E}\,[(X_1^{(i)})^2] = 1\ ;\ i = 1, \ldots, d \ \text{ et } \ \mathbb{E}\,(X_1^{(i)} X_1^{(j)}) = \rho_{i,j}\ ;\ |\rho_{i,j}| < 1.$$

Notons par :

$$u^* = u^*(\mathbf{u}) = \inf(u^{(1)}, \ldots, u^{(d)}),$$

$$G(u^*) = 1 - F(u^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u^*}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

et pour $\tau > 0$ fixé,

$$\psi(u^*) = \frac{\tau}{G(u^*)} \ln \frac{1}{G(u^*)} \ \text{ et } \ E(u^*) = \{n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq \psi(u^*)\}.$$

**Théorème 0.0.4** *Il existe $u_0 > 0$, deux constantes $c_0 > 0$ et $c > 0$ tels que, pour tout $\mathbf{u}$ vérifiant $u_0 < u^*(\mathbf{u})$ et $k > 0$ assez petit :*

$$\max_{1 \leq j \leq d} \max_{\substack{u^{(j)} < v^{(j)} < w^{(j)} < u^{(j)}(1+k) \\ n \in E(u^*)}} \left| \frac{P\Big(\mathbf{M}_n \leq \mathbf{u}, \bigcap_{i=1, i \neq j}^{d} (X_{n+1}^{(i)} < u^{(i)}), v^{(j)} < X_{n+1}^{(j)} < w^{(j)}\Big)}{(\prod_{i=1}^{d} P(X^{(i)} < u^{(i)}))^n (\prod_{i=1, i \neq j}^{d} P(X^{(i)} < u^{(i)})) P(v^{(j)} < X_{n+1}^{(j)} < w^{(j)})} - 1 \right|$$
$$\leq c_0 \Big(G(u^*)\Big)^c.$$

Ce théorème veut dire qu'asymptotiquement, la probabilité d'avoir un record est voisine de celle du cas où la suite $\{\mathbf{X}_n\}$ est i.i.d. avec indépendance des coordonnées. Pour des raisons de simplicité et pour ne pas alourdir les notations, la démonstration de ce théorème, basée sur le « lemme de comparaison de Berman »pour les processus gaussiens, est donnée dans le cas bivarié et son intérêt réside dans le fait qu'on peut en déduire un principe d'invariance presque sûr pour la suite des maxima-partiels du processus considéré.
Dans le chapitre 4, nous démontrons ce principe d'invariance à l'aide d'une méthode de couplage des records multivariés, c'est-à-dire en construisant sur le même espace de probabilité sur lequel $\{\mathbf{X}_n\}$ est définie, une suite $\{\hat{\mathbf{X}}_n\}$ de vecteurs aléatoires gaussiens indépendants et de même loi ayant en plus la

propriété d'avoir des coordonnées indépendantes, telle qu'à partir d'un certain rang aléatoire, les records et temps de records des deux suites coïncident (modulo un décalage aléatoire d'indice).
Un résultat antérieur a été obtenu dans ce sens par Geffroy dans [16] mais n'implique qu'une indépendance asymptotique « en loi » des plus grandes valeurs des marges d'un échantillon gaussien à deux dimensions. Notre résultat peut donc être considéré comme la version forte du résultat de Geffroy.

# Chapitre 1

# Introduction à la théorie des valeurs extrêmes

## 1.1 Théorie classique des extrêmes : cas univarié

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées ( i.i.d.) de fonction de répartition (f.d.r.) $F(x)$.
La théorie classique des extrêmes étudie la loi limite et les propriétés de $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
Donnons quelques définitions avant d'énoncer les résultats principaux de cette théorie.

**Définition 1.1.1** Soit

$$\Delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On dit qu'une fonction de répartition est dégénérée si elle est de la forme $\Delta(x - x_0)$.

**Définition 1.1.2** Deux fonctions de répartition non dégénérées $G_1$ et $G_2$ sont dites de même type s'il existe $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$G_1(x) = G_2(ax + b). \tag{1.1}$$

**Exemple 1.1.1** La loi normale $\mathcal{N}(0,1,x)$ de moyenne 0 et de variance 1 est du même type que $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2,x)=\mathcal{N}(0,1,\sigma^{-1}x-\sigma^{-1}\mu)$ pour $\sigma>0$ et $\mu\in\mathbb{R}$, en effet :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy=P(\mathcal{N}\leq\sigma^{-1}x-\sigma^{-1}\mu).$$

■

La fonction de répartition de $M_n=\max(X_1,\ldots,X_n)$ est $F_n(x)=F^n(x)$ puisque :

$$F_n(x)=P(M_n\leq x)=P(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i\leq x))=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leq x)=F^n(x).$$

**Lemme 1.1.1**

$$\lim_{n\to+\infty}M_n=\omega(F)\ \ p.s.\ \ où\ \ \omega(F)=\sup\{x:F(x)<1\}.$$

En effet, pour $x<\omega(F)$, $F(x)<1$ et $P(M_n\leq x)=F^n(x)$ qui tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Donc $M_n$ converge vers $\omega(F)$ en probabilité et, comme $(M_n)$ est une suite croissante, la convergence en probabilité implique la convergence presque sûre. ■

Le lemme précédent montre qu'une loi limite non dégénérée ne peut exister que si on normalise $M_n$. En réduisant alors convenablement la loi de $M_n$, c'est-à-dire en substituant à $M_n$ la variable $a_nM_n+b_n$ ($a_n>0$), celle-ci admet souvent une loi limite :

$$H(x)=\lim_{n\to+\infty}F^n(a_nx+b_n).$$

Le problème de la théorie classique des extrêmes dans le cas univarié est donc le suivant :
Existe-t-il deux suites $a_n>0$, $b_n$ et $H(x)$ une f.d.r. non dégénérée telles que :

$$P(\frac{M_n-b_n}{a_n}<x)=F^n(a_nx+b_n)\to H(x), \tag{1.2}$$

pour tout $x$ dans le support de $H$ ?

D'importants résultats ont été indiqués sur ce sujet (Fisher et Tippet [11], Fréchet [13]), mais le résultat central de cette théorie est dû à Gnedenko [17] qui a trouvé les formes possibles de $H(x)$ et les conditions que doit vérifier $F(x)$ pour que $F^n(a_nx+b_n)$ converge vers une loi d'un type détérminé.

**Théorème 1.1.1** (Gnedenko [17]) *Les seules distributions possibles, limites faibles de* $\frac{M_n - b_n}{a_n}$, $a_n > 0$ *sont les distributions de fonction de répartition :*
Type 1 (loi de Gumbel) *:*

$$\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Type 2 (loi de Fréchet) *:*

$$\Phi_a(x) = \begin{cases} e^{-x^{-a}} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Type 3 (loi de Weibull) *:*

$$\Psi_a(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ e^{-(-x)^a} & si\ x < 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

*La convergence a lieu dans le sens que $H$ est du même type que $\Lambda$, $\phi_a$ ou $\psi_a$.*

Un autre résultat fondamental de cette théorie est le célèbre théorème de Khintchine ( Leadbetter, Lindgren et Rootzen [29]), qui prouve qu'en dehors du cas dégénéré, la loi limite, si elle existe, est unique.

**Théorème 1.1.2** *Soient $F_n$ une suite de f.d.r. et $G$ une f.d.r. non dégénérées, $a_n > 0$ et $b_n$ des constantes telles que $F_n(a_n x + b_n)$ converge vers $G(x)$. Alors pour $G_*$ f.d.r. non dégénérée, $\alpha_n > 0$, $\beta_n$ des constantes,*

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) = G_*(x) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{a_n} = a \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{\beta_n - b_n}{a_n} = b.$$

*En plus,*

$$G_*(x) = G(ax + b).$$

## 1.2 Domaines d'attraction des lois limites extrêmes

**Définition 1.2.1** Si $G$ est l'une des trois lois limites extrêmes, on dit que $F$ est dans le domaine d'attraction de $G$, et on note $F \in D(G)$, s'il existe $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x).$$

### 1.2.1 Convergence de $P(M_n \leq u_n)$ où $(u_n)$ est une suite de constantes :

Le résultat suivant donne une condition nécessaire et suffisante de convergence de $P(M_n \leq u_n)$ où $(u_n)$ est une suite de constantes. Ce résultat, trivial dans le cas i.i.d., joue un rôle important dans la détérmination des domaines d'attraction et dans le cas stationnaire.

**Théorème 1.2.1** *Soit $(\xi_n)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de f.d.r. $F$ ; $0 \leq \tau \leq +\infty$, $M_n = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et $u_n$ une suite de nombres réels. Alors :*

$$\lim_{n \to +\infty} n(1 - F(u_n)) = \tau \iff \lim_{n \to +\infty} (M_n \leq u_n) = e^{-\tau}. \tag{1.6}$$

Notons que (1.2) est un cas particulier de (1.6) en faisant les identifications suivantes : $\tau = -\log H(x)$ ; $u_n = a_n x + b_n$. Une condition nécessaire et suffisante pour la loi limite $H$ est donc :

$$\lim_{n \to +\infty} n(1 - F(a_n x + b_n)) = -\log H(x).$$

Il est important de connaître sous quelles conditions l'un ou l'autre des trois types de lois limites possibles s'applique. Le résultat suivant nous donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que $F \in D(G)$ où $G \in \{type 1, 2, 3\}$. D'autres résultats concernant les domaines d'attraction des lois limites extrêmes sont donnés dans De Haan [6].

### 1.2.2 Conditions nécessaires et suffisantes

**Théorème 1.2.2** *Pour le type 1 :*

$$F \in D(\Lambda) \iff \exists g(t) > 0 \textit{ telle que } \lim_{t \to \omega(F)} \frac{1 - F(t + xg(t))}{1 - F(t)} = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

*Pour le type 2 :*

$$F \in D(\Phi_a) \iff \omega(F) = +\infty \textit{ et } \lim_{t \to +\infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\alpha}; \alpha > 0, x > 0. \tag{1.8}$$

*Pour le type 3 :*

$$F \in D(\Psi_a) \iff \omega(F) < +\infty \text{ et } \lim_{h\to 0} \frac{1 - F(\omega(F) - xh)}{1 - F(\omega(F) - h)} = x^\alpha ; \alpha > 0, x > 0. \tag{1.9}$$

**Remarque 1.2.1** Pour le type 1, on montre que $\int_0^{+\infty}(1 - F(u))du < +\infty$ et un choix convenable de la fonction $g$ est donné par :

$$g(t) = \frac{\int_t^{\omega(F)}(1 - F(u))du}{1 - F(t)} \text{ pour } t < \omega(F). \tag{1.10}$$

**Corollaire 1.2.1** *Dans le théorème précédent, les constantes $a_n$ et $b_n$ qui interviennent dans la convergence de $P(\frac{M_n - b_n}{a_n} < x)$ vers $H(x)$ sont :*
*Pour le type 1 :*

$$a_n = g(\lambda_n) \; ; \; b_n = \lambda_n = F^{-1}(1 - \frac{1}{n}) = \inf\{x : F(x) \geq 1 - \frac{1}{n}\}.$$

*Pour le type 2 :*

$$a_n = \lambda_n \; ; \; b_n = 0$$

*Pour le type 3 :*

$$a_n = \omega(F) - \lambda_n \; ; \; b_n = \omega(F).$$

**Exemple 1.2.1** 1) Loi de Cauchy :
Sa fonction de répartition est donnée par $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x$. On vérifie facilement que c'est le type 2 qui s'applique avec :

$$a_n = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}) \sim \frac{n}{\pi} \; ; \; b_n = 0. \tag{1.11}$$

2) Loi uniforme sur (0,1) :
C'est le type 3 qui s'applique avec :

$$a_n = \frac{1}{n} \; ; \; b_n = 1. \tag{1.12}$$

3) Loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ :
On montre dans ce cas que c'est le type 1 qui s'applique avec :

$$a_n = (2\log n)^{-\frac{1}{2}} \; ; \; b_n = (2\log n)^{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}(\log\log n + \log 4\pi)}{(2\log n)^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.13}$$

### 1.2.3 Lois limites pour les k-extrêmes

$(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de f.d.r. $F(x) = P(X_1 < x)$.

**Définition 1.2.2** La statistique d'ordre de $X_1, \ldots, X_n$ désigne le n-uple ordonné par valeurs croissantes obtenu à partir de $X_1, \ldots, X_n$ noté :

$$X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \ldots \leq X_{n-1,n} \leq X_{n,n}. \tag{1.14}$$

Remarquons que : $X_{1,n} = \inf(X_1, \ldots, X_n)$ et $X_{n,n} = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

**Définition 1.2.3** Pour $k \geq 1$ fixé, quand $n \to +\infty$, $X_{k,n}$ et $X_{n-k+1,n}$ sont appelés les k-ièmes extrêmes :
$X_{k,n}$ : k-ième extrême inférieur,
$X_{n-k+1,n}$ : k-ième extrême supérieur.

Si on note $A_j(x) = (X_j > x)$ et $B_j(x) = (X_j < x)$, on a :

$$(X_{k,n} \geq x) = (\text{au plus } (k-1) \text{ des } B_j(x), 1 \leq j \leq n \text{ se réalisent}),$$

$$(X_{n-k+1,n} < x) = (\text{au plus } (k-1) \text{ des } A_j(x), 1 \leq j \leq n \text{ se réalisent}).$$

D'où :

$$F_{n-k+1,n}(x) = P(X_{n-k+1,n} < x) = \sum_{t=0}^{k-1} \mathrm{C}_n^t (1 - F(x))^t (F(x))^{n-t}. \tag{1.15}$$

$$P(X_{k,n} \geq x) = 1 - F_{k,n}(x) = \sum_{t=0}^{k-1} \mathrm{C}_n^t (F(x))^t (1 - F(x))^{n-t}. \tag{1.16}$$

**Théorème 1.2.3** (Galambos [15]) *Pour k fixé, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
*i) il existe $a_n > 0$, $b_n$ et $H^{(k)}(x)$ non dégénérée telles que :*

$$\lim_{n\to+\infty} F_{n-k+1,n}(a_n x + b) = H^{(k)}(x);\ \alpha(H^{(k)}) \leq x \leq \omega(H^{(k)}). \tag{1.17}$$

*ii) il existe $a_n > 0$, $b_n$ et $H(x)$ non dégénérée telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty} F^n(a_n x + b_n) = H(x), \tag{1.18}$$

*si $H^{(k)}(x)$ existe, alors pour $\alpha(H) < x < \omega(H)$ :*

$$H^{(k)}(x) = H(x) \sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{t!} (\log \frac{1}{H(x)})^t, \quad \text{où } H(x) \in \{\text{type } 1, 2, 3\}. \tag{1.19}$$

Ce théorème nous montre que si $M_n$ a une loi limite $H$, le k-ième extrême supérieur a aussi une loi limite donnée par (1.19) avec les mêmes constantes de normalisation que $M_n$.

## 1.3 Théorie classique des extrêmes : cas multivarié

### 1.3.1 Fonctions de répartition et fonctions de répartition marginales

Soit $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \ldots, X^{(d)}) \in \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire de f.d.r. :

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_d) = P(X^{(1)} \leq x_1, \ldots, X^{(d)} \leq x_d),$$

et de f.d.r. marginale :

$$F^{(i)}(x_i) = F(+\infty, \ldots, x_i, \ldots, +\infty) = P(X^{(i)} \leq x_i),\ i = 1, \ldots, d.$$

Il est bien connu que $F^{(1)}, \ldots, F^{(d)}$ ne détérminent pas $F$. Deux exemples de cas possibles sont :
-l'indépendance : $\prod_{i=1}^{d} F^{(i)}$.
-l'égalité des marges : $X^{(1)} = \ldots = X^{(d)}$ ; $F = \min(F^{(1)}, \ldots, F^{(d)})$.
Tout de même, $F$ est partiellement liée à ses marges, (Deheuvels [10]). Dans le cas d'une loi bivariée ($d = 2$), Fréchet a montré que $F(x, y)$ peut prendre des valeurs arbitraires satisfaisant l'inégalité :

$$\sup(0, F^{(1)}(x) + F^{(2)}(y) - 1) \leq F(x, y) \leq \min(F^{(1)}(x), F^{(2)}(y)).$$

Plus généralement, pour $d \geq 2$, les inégalités suivantes sont usuellement appelées inégalités de Fréchet :

$$\sup(0, \sum_{i=1}^{d} F^{(i)}(x_i) - d + 1) \leq F(x_1, \ldots, x_d) \leq \min_{1 \leq i \leq d}(F^{(i)}(x_i)),$$

et découlent (en considérant les événements : $A_i = (X^{(i)} > x_i)$ et $1 - P(\cup A_i) = F(x)$) des inégalités de Bonferroni, qui s'écrivent pour :

$$T_k = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq d} P(A_{j_1} \ldots A_{j_k}),$$

$$\forall m = 1, 2, \ldots, [d/2], \ \sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k-1}T_k \leq P(\bigcup_{i=1}^{d} A_i) \leq \sum_{k=1}^{2m-1}(-1)^{k-1}T_k.$$

On obtient d'ailleurs, avec les mêmes notations, la formule de Poincaré :

$$P(\bigcup_{i=1}^{d} A_i) = \sum_{k=1}^{d}(-1)^{k-1}T_k.$$

### 1.3.2 Enoncé du problème

Soit $\mathbf{X}_n = (X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(d)})$,$n \geq 1$, $d \geq 1$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. de f.d.r. :

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_d) = P(X^{(1)} < x_1, \ldots, X^{(d)} < x_d),$$

et de f.d.r. marginale $F^{(i)}(x_i)$. On pose :

$$M_n^{(i)} = \max(X_1^{(i)}, \ldots, X_n^{(i)}); \ i = 1, \ldots, d \ \text{ et } \ \mathbf{M}_n = (M_n^{(1)}, \ldots, M_n^{(d)}).$$

On s'intéresse donc au problème suivant :
Existe-il deux suites $\mathbf{a}_n > 0$, $\mathbf{b}_n$ et $H(\mathbf{x})$ non dégénérée (chaque marge de $H$ l'est) telles que :

$$\lim_{n \to +\infty} P(\mathbf{M}_n \leq \mathbf{a}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{b}_n) = H(\mathbf{x}), \tag{1.20}$$

pour tout $\mathbf{x}$ dans le support de $H$.

**Définition 1.3.1** 1) $F_n(\mathbf{x})$ converge vers $F(\mathbf{x})$ si elle converge en tout point de continuité de $F$.
2) $F(\mathbf{x})$ est non dégénérée si toutes ses fonctions de répartition marginales le sont.

**Lemme 1.3.1** *Si $F_n(\mathbf{x})$ converge vers $F(\mathbf{x})$, alors $F_n^{(i)}(x_i)$ converge vers $F^{(i)}(x_i)$ pour tout $i$ tel que $1 \leq i \leq d$.*

Par conséquent, si le problème général a une solution, alors les coordonnées de $\mathbf{a}_n$, $\mathbf{b}_n$ et les marges de $H$ sont les solutions du problème univarié pour les marges de $F$ :

$$(F^{(i)}(a_n^{(i)}x + b_n^{(i)}))^n \to H^{(i)}(x), \text{ pour tout } i. \tag{1.21}$$

### 1.3.3 Fonctions de dépendance : Caractérisation des lois extrêmes multivariées

L'introduction de la fonction de dépendance, définie pour une fonction de répartition $F$ de $\mathbf{X} = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ de lois marginales $F_1, \dots, F_d$ continues, par l'identité :

$$D(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) = F(x_1, \dots, x_d), \tag{1.22}$$

a permis de résoudre le problème de la convergence faible asymptotique de $\mathbf{M}_n$. En effet, on montre que $\mathbf{M}_n$ converge asymptotiquement vers une loi limite si et seulement si c'est le cas pour chaque coordonnée et si

$$D_n(u_1, \dots, u_d) = D^n(u_1^{1/n}, \dots, u_d^{1/n}) \tag{1.23}$$

converge vers une f.d.r. limite.
Deheuvels [9] a, en plus, démontré sous quelles conditions $D_n$ converge vers une limite et a caractérisé toutes les limites possibles de $D_n$. Il a ensuite déduit la condition nécessaire et suffisante suivante pour l'indépendance :

**Théorème 1.3.1** *Pour que $\{M_n^{(1)}, \dots, M_n^{(d)}\}$ soient asymptotiquement indépendants, il faut et il suffit que, si :*

$$\forall 1 \leq i \leq d,\ \forall n \geq 1,\ a_{i,n} \text{ est tel que } P(X^{(i)} > a_{i,n}) \leq \frac{1}{n} \leq P(X^{(i)} \geq a_{i,n}),$$

*alors,*

$$\forall 1 \leq i < j \leq d,\ \lim_{n \to +\infty} nP(X^{(i)} > a_{i,n}, X^{(j)} > a_{j,n}) = 0.$$

En d'autres termes, il faut et il suffit que la condition d'indépendance soit vérifiée pour tous les couples de coordonnées.

### 1.3.4 Autres caractérisations des lois limites

**Théorème 1.3.2** (Resnick [41]) *Soit $(\mathbf{X}_n, n \geq 1)$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, de f.d.r. $F$. On suppose, pour simplifier, que les f.d.r. marginales de $F$ sont toutes égales à $F_1(x)$ qu'on suppose dans le domaine d'attraction de $G_1(x)$, l'une des trois lois limites du cas univarié, c'est-à-dire,*

$$\exists a_n > 0, b_n \text{ tels que } F_1^n(a_n x + b_n) \to G_1(x). \tag{1.24}$$

*Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*
*i)*

$$F^n(a_n\mathbf{x} + b_n\mathbf{1}) \to \prod_{i=1}^{d} G_i(x^{(i)}). \tag{1.25}$$

*ii) Pour tout* $1 \leq i < j \leq d$ *:*

$$P(\max_{l=1\dots,n} X_l^{(p)} \leq a_n x^{(p)} + b_n; p = i,j) \to G_1(x^{(i)})G_1(x^{(j)}). \tag{1.26}$$

*iii) Pour* $x^{(p)}$ *tel que* $G_1(x^{(p)}) > 0$, $1 \leq p \leq d$ *:*

$$\lim_{n\to+\infty} nP(X_1^{(p)} > a_n x^{(p)} + b_n; p = i,j) = 0 \text{ pour } 1 \leq i < j \leq d. \tag{1.27}$$

*iv) Pour* $1 \leq i < j \leq d$ *:*

$$\lim_{t\to\omega(F)} \frac{P(X^{(i)} > t, X^{(j)} > t)}{1 - F_1(t)} = 0. \tag{1.28}$$

D'autres versions de ce théorème ont été démontrées par Geffroy [16], Sibuya [42], De Haan et Resnick [7], Galambos [15], Marshall et Olkin [32].
Un corollaire très important est donné dans Sibuya [42] pour le cas gaussien multivarié :

**Théorème 1.3.3** (Sibuya [42]) *Soit* $F$ *une f.d.r. de loi normale multivariée avec les f.d.r. marginales supposées* $\mathcal{N}(0,1)$ *pour simplifier. Si*

$$\mathbb{E}(X_1^{(i)}X_1^{(j)}) = \rho_{i,j} < 1 \text{ pour tout } i,j, \tag{1.29}$$

*alors l'indépendance asymptotique i) du théorème précédent s'applique avec :*

$$G_1(x) = \Lambda(x) = e^{-e^{-x}}. \tag{1.30}$$

Une généralisation au cas gaussien stationnaire multivarié a été faite par Amram [1] :
Soit $\{\mathbf{X}_n = (X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(p)}), n \geq 1\}$ un processus gaussien stationnaire p-dimensionnel tel que :

$$\mathbb{E}\,\mathbf{X}_n = (\mathbb{E}\,X_n^{(i)} = 0, 1 \leq i \leq p).$$

$$V\mathbf{X}_n = (VX_n^{(i)} = 1, 1 \leq i \leq p).$$
$$r_{kl}(n) = \mathrm{Cov}(X_m^{(k)} X_{m+n}^{(l)}, 1 \leq k, l \leq p).$$

On pose :

$$\mathbf{M}_n = (\max_{1 \leq i \leq n} X_i^{(1)}, \ldots, \max_{1 \leq i \leq n} X_i^{(p)}).$$

**Théorème 1.3.4** *Si, pour* $\alpha = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |r_{kl}(n)|^\alpha < +\infty \; ; \; 1 \leq k \neq l \leq p,$$

*et*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |r_{ll}(n)|^\alpha < +\infty \; ; \; 1 \leq l \leq p,$$

*alors :*

$$\lim_{n \to +\infty} P(\mathbf{M}_n \leq \mathbf{a}_n \mathbf{x} + \mathbf{b}_n) = \prod_{i=1}^{p} e^{-e^{-x_i}}, \tag{1.31}$$

*avec*

$$\mathbf{a}_n \mathbf{x} + \mathbf{b}_n = (a_{1,n} x_1 + b_{1,n}, \ldots, a_{p,n} x_p + b_{p,n}),$$
$$a_{i,n} = (2 \log n)^{-1/2},$$
$$b_{i,n} = (2 \log n)^{1/2} - \frac{1}{2}(2 \log n)^{-1/2}(\log \log n + \log 4\pi),$$
$$x_i \in \mathbb{R} \;\; pour \;\; 1 \leq i \leq p.$$

## 1.4 Théorie des extrêmes pour les suites stationnaires

**Définition 1.4.1** On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est strictement stationnaire si et seulement si pour tout $n, h, i_1, \ldots, i_n$ entiers, les vecteurs $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n})$ et $(X_{i_1+h}, \ldots, X_{i_n+h})$ ont la même distribution.

On note $\mathbf{i}(k) = (i_1, \ldots, i_k)$, $\mathbf{j}(t) = (j_1, \ldots, j_t)$.
$F^*_{\mathbf{j}(t)}(u) = P(X_{j_1} < u, \ldots, X_{j_t} < u)$.

$$\begin{aligned} \alpha_{n,l} &= \max\Big\{ \Big| F^*_{\mathbf{i}(k)\mathbf{j}(t)}(u_n) - F^*_{\mathbf{i}(k)}(u_n) F^*_{\mathbf{j}(t)}(u_n) \Big| : \\ &\qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k < j_1 < \ldots < j_t \leq n, j_1 - i_k \geq l \Big\}. \end{aligned}$$

**Définition 1.4.2** On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ satisfait la condition $D(u_n)$ si

$$\alpha_{n,l_n} \to 0 \text{ pour une suite } l_n = o(n). \tag{1.32}$$

**Théorème 1.4.1** (Leadbetter, Lindgren et Rootzen [29]) *Soit $(X_n)$ une suite stationnaire, $a_n > 0$ et $b_n$ des constantes telles que $P(\frac{M_n - b_n}{a_n})$ converge vers une f.d.r. non dégénérée $G$. On suppose que la condition $D(u_n)$ est satisfaite pour $u_n = a_n x + b_n$ pour chaque réel $x$, alors $G$ est du même type que l'une des trois lois limites du cas classique i.i.d..*

**Définition 1.4.3** On dit que la suite stationnaire $(X_n)$ satisfait la condition $D'(u_n)$ si

$$\limsup_{n\to+\infty} n \sum_{j=2}^{+\infty} P(X_1 > u_{nM}, X_j > u_{nM}) = o(\frac{1}{M}), M \to +\infty. \tag{1.33}$$

**Théorème 1.4.2** (Loynes [31], Leadbetter, Lindgren et Rootzen [29]) *Soit $(X_n)$ une suite stationnaire de f.d.r. $F$ et satisfaisant la condition $D(u_n)$ pour $u_n = a_n x + b_n$ pour tout réel $x$ ; $a_n > 0$ et $b_n$ des constantes telles que $F^n(a_n x + b_n)$ converge, quand $n \to +\infty$, vers une f.d.r. $G(x)$. Si, en plus, la condition $D'(u_n)$ est satisfaite, alors $P(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x)$ converge vers la f.d.r. $G(x)$ (qui, nécessairement, est du même type que l'une des trois lois limites du cas classique i.i.d.).*

**Remarque 1.4.1** Si la suite $(X_n)$ est m-dépendante [pour tout $n, l, i_1 < \ldots < i_n < j_1 < \ldots < j_l$, entiers, les vecteurs $(X_{i_1} \ldots, X_{i_n})$ et $(X_{j_1} \ldots, X_{j_l})$ sont indépendants dès que $j_1 - i_n \geq m$], la condition $D(u)$ est vérifiée puisque $\alpha_{n,l} = 0$ pour $l \geq m$, et la condition

$$\lim_{u\to\omega(F)} \frac{\max_{2\leq j\leq m} P(X_1 \geq u, X_j \geq u)}{1 - F(u)} = 0 \tag{1.34}$$

implique $D'(u)$.

### 1.4.1 Convergence de $P(M_n \leq u_n)$ sous la dépendance

**Théorème 1.4.3** (Leadbetter, Lindgren et Rootzen [29], Davis [5]) *Soit $(u_n)$ une suite de constantes telle que $D(u_n)$ et $D'(u_n)$ soient satisfaites pour une suite stationnaire $(X_n)$ et soit $0 \leq \tau < +\infty$. Alors :*

$$P(M_n \leq u_n) \to e^{-\tau} \iff n(1 - F(u_n)) \to \tau.$$

Si $n(1-F(u_n)) \to +\infty$, la condition $D'(u_n)$ n'est pas toujours satisfaite. Pour prolonger le théorème précédent au cas $\tau = +\infty$, on fait les modifications suivantes :

**Corollaire 1.4.1** *On suppose que pour $\tau$ fini et suffisamment grand, il existe une suite $(v_n)$ telle que $n(1-F(v_n)) \to \tau$ et $D(v_n)$, $D'(v_n)$ soient satisfaites. Alors les conclusions du théorème précédent restent vraies, c'est-à-dire :*

$$P(M_n \leq u_n) \to 0 \iff n(1-F(u_n)) \to +\infty.$$

### 1.4.2 Cas gaussien stationnaire

Soit $(X_n)$ une suite stationnaire centrée gaussienne avec :

$$\mathrm{Cov}(X_1 X_{n+1}) = r_n = \mathbb{E}(X_1 X_{n+1}) \ ; \ r_0 = 1.$$

On sait que dans le cas i.i.d. ($r_n = 0$), on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(M_n \leq a_n x + b_n) = e^{-e^{-x}}, \text{ pour tout } x,$$

avec $a_n$ et $b_n$ donnés par (1.13).
Ce résultat a été généralisé par Watson [43] au cas $r_n = 0$ pour un nombre fini d'entiers (cas de la m-dépendance). Berman [3] a démontré qu'on a la même conclusion en supposant que $r_n$ tend vers 0 suffisamment vite, c'est -à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} r_n \log n = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} r_n^2 < +\infty.$$

Mittal et Ylvisaker [33] ont montré le résultat suivant :
1) Si

$$\lim_{n\to+\infty} r_n \log n = \tau \ ; \ 0 < \tau < +\infty,$$

alors :

$$\lim_{n\to+\infty} P(M_n \leq a_n x + b_n) = \Lambda(x+\tau) \star \phi(x(2\tau)^{-1/2}),$$

où

$$\Lambda(x) = e^{-e^{-x}} \ , \ \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

2) Si

$$(r_n)_n \ \text{ est décroissante, } \ r_n (\log n)^{1/3} \to 0,$$

$$(r_n \log n) \ \text{ est croissante}, \quad r_n \log n \to +\infty,$$

alors :

$$\lim_{n \to +\infty} P(M_n \leq (1 - r_n)^{1/2} a_n + x(r_n)^{1/2}) = \phi(x).$$

Pickands [38] a démontré que la condition $\lim_{n \to +\infty} r_n = 0$ ne suffit pas pour avoir la convergence vers $\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}$ de $P(M_n \leq a_n x + b_n)$.

# Chapitre 2

# Comportement p.s. des extrêmes de suites stationnaires m-dépendantes

## 2.1 Introduction et résumé

Soit $\{X_n \ ; \ n \geq 1\}$ une suite stationnaire de variables aléatoires réelles (v.a.r.) m-dépendantes ( pour tous $n, l, i_1 < \ldots < i_n < j_1 < \ldots < j_l$, entiers, les vecteurs $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_n})$ et $(X_{j_1}, \ldots, X_{j_l})$ sont indépendants dès que $j_1 - i_n \geq m$ ) de fonction de répartition $F(x) = P(X_1 \leq x)$. Posons $\omega = \sup\{x; F(x) < 1\}$.
Soit $r_0 < \omega$. On note :

$$T_1 = \inf\{k > 0, X_k > r_0\} \ ; \ R_1 = X_{T_1},$$

et pour $n \geq 2$ ,

$$T_n = \inf\{k > T_{n-1}, X_k > R_{n-1}\} \ ; \ R_n = X_{T_n}. \tag{2.1}$$

$\{(T_n, R_n); n \geq 1\}$ est appelée la suite des temps de records et records associée à $\{X_n\}_n$ et $r_0$.

**Proposition 2.1.1** (Galambos [15]) *Si $F$ est continue, la loi de $(T_n)_{n\geq 1}$ ne dépend pas de celle de $X_1$.*

**Remarque 2.1.1** Ce résultat nous permet, pour l'étude des records, de supposer que les variables aléatoires réelles considérées sont de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

On considére l'hypothèse $(H)$ suivante :
$(H)$ : $\exists \beta > 0$ tel que, pour tout $1 < i \leq m$,

$$\limsup_{z \to 1} \left\{ \sup_{\substack{z<v<w<1 \\ z<u<1}} \frac{P\{X_1 > u, v < X_i < w\}}{(-\ln(1-u))^{-(2+\beta)}(w-v)} \right\} < +\infty. \tag{2.2}$$

**Remarque 2.1.2** Dans les exemples suivants, l'hypothèse $(H)$ est satisfaite.
$(a)$ Soit $\{Y_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires ayant la loi de Morgenstern. On a

$$P(Y_1 \leq u_1, Y_k \leq u_2) = 1 - e^{-u_1} - e^{-u_2} + e^{-u_1-u_2}[1 + \alpha_k(1 - e^{-u_1})(1 - e^{-u_2})],$$

où $2 \leq k \leq m$ ; $0 \leq u_1$, $0 \leq u_2$ et $\alpha_k$ est une constante donnée. Alors, avec la transformation

$$\{X_n : = F(Y_n), n \geq 1\},$$

où $F(y) = P\{Y_1 < y\}$, on obtient

$$\limsup_{z \to 1} \left\{ \sup_{\substack{z<v<w<1 \\ z<u<1}} \frac{P\{X_1 > u, v < X_i < w\}}{(1-u)(w-v)} \right\} = 1 + \alpha_k,$$

ce qui implique (2.2) pour tout $\beta > 0$.
$(b)$ Soit $\{Y_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires ayant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Alors, si $\mathbb{E}(Y_1 Y_k) \leq 0$, pour $2 \leq k \leq m$, on montre que

$$P\{X_1 > u, v < X_k < w\} \leq (1-u)(w-v),$$

ce qui implique (2.2) pour tout $\beta > 0$.

Pour d'autres exemples où (2.2) est, ou n'est pas satisfaite, voir [27].
Soit $M_n = \max(X_1 \ldots, X_n), n \geq 1$. Haiman, dans [24], a démontré le théorème suivant :

**Théorème 2.1.1** *On suppose que $\{X_n\ ;\ n \geq 1\}$ vérifie l'hypothèse $(H)$. On peut construire sur le même espace de probabilité sur lequel $\{X_n\}$ est définie, une suite $\{\hat{X}_n\ ;\ n \geq 1\}$ de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$ telle que si $\hat{M}_n = \max(\hat{X}_1 \ldots, \hat{X}_n), n \geq 1$, alors il existe $N_0$ tel que p.s. pour tout $n \geq N_0$ :*

$$M_n = \hat{M}_n. \tag{2.3}$$

Nous nous proposons d'estimer la queue de distribution de la variable aléatoire $N_0$.
Notre résultat est le théorème suivant :

**Théorème 2.1.2** *La variable aléatoire $N_0$ dans le théorème* (2.1.1) *satisfait*

$$P(N_0 > s) = O((\log s)^{\frac{-\lambda}{2+\lambda}}), \tag{2.4}$$

*où $\lambda = 1 + \beta - \tau > 0$, avec $\tau$ un paramètre fixé pour chaque construction de $\{\hat{X}_n\}$, satisfaisant $1 + \beta/2 < \tau < 1 + \beta$.*

**Remarque 2.1.3** Notons que quand $(H)$ est satisfaite pour tout $\beta > 0$, alors pour tout $\delta > 0$,

$$P(N_0 > s) = O((\log s)^{-(1-\delta)}). \tag{2.5}$$

**Remarque 2.1.4** D'après la proposition (2.1.1), le théorème (2.1.2) reste valable pour une suite de variables aléatoires m-dépendantes de fonction de répartition continue (non nécessairement uniforme sur $[0, 1]$).

Comme ce problème d'estimation est lié étroitement à la construction de la suite $\{\hat{X}_n, n \geq 1\}$, il nous paraît intéressant de reproduire les grandes lignes de la méthode de construction de cette suite. Pour les détails des démonstrations, voir Haiman [21], [23], [24].
Nous commençons par introduire la notion de record dans le cas classique et dans un cas plus général (avec un seuil initial fixé). Nous en donnons quelques propriétés utiles pour le reste de ce travail.

## 2.2 Records classiques

Soit $\{X_n \ ; \ n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de f.d.r. commune $F$. On définit la suite $\{(T_n, R_n)\}_{n\geq 1}$ par :

$$T_1 = 1 \quad ; \quad R_1 = X_1,$$

et pour $n \geq 1$,

$$T_{n+1} = \inf\{k > T_n, X_k > R_n\} \quad ; \quad R_{n+1} = X_{T_{n+1}}. \tag{2.6}$$

Les suites $(T_n)_{n\geq 1}$ et $(R_n)_{n\geq 1}$ sont appelées respectivement temps de records et records de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$. Remarquons que si $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, $T_n$ est le $n^{\text{ième}}$ entier $k$ tel que $M_k > M_{k-1}$, $k > 1$. On peut en effet définir la suite $\{(T_n, R_n)\}_{n\geq 1}$ à l'aide de $M_n$ :

$$T_1 = 1 \quad ; \quad R_1 = M_1,$$

et pour $n \geq 1$,

$$T_{n+1} = \inf\{k > T_n, M_k > M_{T_n}\} \quad ; \quad R_{n+1} = M_{T_{n+1}}.$$

**Théorème 2.2.1** (Chandler [4], Foster et Stuart [12], Rényi [39])
*La suite $(T_n)$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition :*

$$P(T_n = k \mid T_{n-1} = l) = \frac{l}{k(k-1)} \quad si \quad k > l \geq n-1, n = 2, 3, \ldots. \tag{2.7}$$

**Corollaire 2.2.1** *La distribution conjointe des temps de records est donnée par :*

$$P(T_2 = k_2, \ldots, T_n = k_n) = [(k_2 - 1) \ldots (k_n - 1)k_n]^{-1} \ , \ 1 < k_2 < \ldots < k_n.$$

Ceci permet de donner les distributions marginales :

$$P(T_2 = k) = \frac{1}{k(k-1)},$$

d'où

$$\mathbb{E}(T_2) = +\infty,$$

et par suite, puisque $T_2 \leq T_n, n \geq 2$,

$$\mathbb{E}(T_n) = +\infty. \tag{2.8}$$

De même :

$$P(T_n = k) = \sum_{1<k_2<\ldots<k_{n-1}<k_n} [(k_2 - 1) \ldots (k_{n-1} - 1)(k-1)k]^{-1}. \tag{2.9}$$

**Remarque 2.2.1** Pour les temps inter-records $\Delta_n = T_n - T_{n-1}, n \geq 2$, on a aussi :

$$\mathbb{E}(\Delta_n) = +\infty. \tag{2.10}$$

Les théorèmes suivants, dûs à Rényi [40], donnent une représentation des records comme sommes de variables aléatoires indépendantes et des résultats asymptotiques concernant la suite des temps de records :

**Théorème 2.2.2** *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. ayant une f.d.r. $F$ continue et $(\xi_n)_{n\geq 1}$ la suite des indicatrices records définie par :*

$$\xi_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n \text{ est un record} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Alors :*
1) *$(\xi_n)$ est indépendante et sa distribution est donnée par :*

$$P(\xi_n = 1) = \frac{1}{n} \quad ; \quad n = 1, 2 \ldots \tag{2.11}$$

2) *On a les deux représentations suivantes :*
2.1 :

$$N(n) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.12}$$

*$N(n)$ est le nombre de records observés sur les variables $X_1, \ldots, X_n$.*
2.2 : *La suite $T_n$ vérifie*

$$P(T_n > k) = P(N(k) < n). \tag{2.13}$$

**Théorème 2.2.3** *On suppose $F$ continue sur $\mathbb{R}$. Alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log T_n}{n} = 1 \quad p.s. \tag{2.14}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{\log T_n - n}{\sqrt{n}} < x\right) = \phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt. \tag{2.15}$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log T_n - n}{(2n \log\log n)^{1/2}} = 1. \tag{2.16}$$

**Remarque 2.2.2** Le théorème précédent reste vrai pour la suite des temps inter-records $\Delta_n$.

## 2.3 Une autre définition des records

Pour une suite $(X_n)$ strictement stationnaire de variables aléatoires de f.d.r. marginale $F(x) = P(X_1 \leq x)$ supposée continue, Haiman, dans [21], a donné la définition plus générale suivante de la suite des records :

**Définition 2.3.1** Soit $r_0$ un seuil initial donné, $\alpha \leq r_0 < \omega$, où

$$\alpha = \inf\{x, F(x) > 0\} \quad ; \quad \omega = \sup\{x, F(x) < 1\}.$$

$$T_1 = \inf\{k \geq 1, X_k > r_0\} \quad ; \quad R_1 = X_{T_1},$$

et pour $n \geq 1$,

$$T_{n+1} = \inf\{k > T_n, X_k > R_n\} \quad ; \quad R_{n+1} = X_{T_{n+1}}.$$

Le choix du seuil initial $r_0$ n'influe pas sur le comportement asymptotique des records d'après la proposition suivante qui justifie la définition précédente :

**Proposition 2.3.1** (Haiman [21]) *Si $\{(T'_n, R'_n)\}_{n\geq 1}$ est une autre suite telle que pour $n \geq n_0$ :*

$$T'_{n+1} = \inf\{k > T'_n, X_k > R'_n\} \quad ; \quad R'_{n+1} = X_{T'_{n+1}},$$

*alors, il existe $n_1$ et $q$ telles que pour $n \geq n_1$ :*

$$T'_n = T_{n-q} \qquad et \qquad R'_n = R_{n-q}.$$

Haiman, dans [21], a donné des majorations et minorations presque sûres de la queue de distribution de la suite des records ainsi que de la suite inter-records :

**Proposition 2.3.2** 1) *Pour tout $0 < \alpha < 1$,*

$$P\{1 - F(R_n) \geq e^{-\alpha n} \ i.s.\} = 0, \tag{2.17}$$

*et pour tout $\beta > 1$,*

$$P\{1 - F(R_n) \leq e^{-\beta n} \ i.s.\} = 0. \tag{2.18}$$

2) *On note $\ln_2(x) = \ln \ln x$ et $[x]$ la partie entière de $x$. Alors, pour tout $\tau > 1$,*

$$P\{T_{n+1} - T_n > \frac{\tau}{1 - F(R_n)} \ln_2(\frac{1}{1 - F(R_n)}) \ i.s.\} = 0, \tag{2.19}$$

*et pour $0 < A < 1$,*

$$P\{T_{n+1} - T_n < \frac{1}{[1 - F(R_n)]^A} \ i.s.\} = 0. \tag{2.20}$$

## 2.4 Méthode de construction de la suite $\{\hat{X}_n\}$

On observe, comme dans Haiman [24], que le théorème (2.1.1) est équivalent au

**Théorème 2.4.1** *On suppose que $\{X_n \,;\, n \geq 1\}$ vérifie l'hypothèse $(H)$. Il existe $r_0$ et une suite $\{(\hat{T}_n, \hat{R}_n), n \geq 1\}$ de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité que $\{X_n, n \geq 1\}$ élargi de facteurs indépendants, $(\hat{T}_n)$ étant une suite strictement croissante d'entiers et $r_0 < \hat{R}_1 < \hat{R}_2 < \ldots$, tels que :*
*i) $\{(\hat{T}_n, \hat{R}_n), n \geq 1\}$ a la même loi de probabilité que $\{(T_n, R_n), n \geq 1\}$ lorsque la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ est i.i.d..*
*ii) Il existe deux variables aléatoires entières $N$ et $Q$ telles que p.s. pour $n \geq N$ :*

$$\hat{T}_n = T_{n-Q} \quad \text{et} \quad \hat{R}_n = R_{n-Q}. \tag{2.21}$$

On construit d'abord la suite $\{(\hat{T}_n, \hat{R}_n), n \geq 1\}$ ayant la loi de probabilité des records lorsque la suite $\{X_n\}$ est i.i.d.. La construction se fait de façon récursive :
On définit $(\hat{T}_1, \hat{R}_1)$ indépendamment de $(X_n)_{n \geq 1}$ et on suppose que la suite $(\hat{T}_p, \hat{R}_p)$ est construite pour $1 \leq p \leq n$ de sorte que les événements de la forme $(\hat{T}_1 = t_1, \hat{R}_1 \in \mathcal{A}_1)$ ; $\ldots$; $(\hat{T}_n = t_n, \hat{R}_n \in \mathcal{A}_n)$ (où $1 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ sont des entiers, et $\mathcal{A}_i, i = 1, \ldots, n$, des boréliens de $\mathbb{R}$) soient $\sigma\{X_1, \ldots, X_{t_n}\} \times \sigma'$ mesurables, où $\sigma'$ est une $\sigma$ -tribu indépendante de $\sigma\{X_n, n \geq 1\}$.
Pour construire $(\hat{T}_{n+1}, \hat{R}_{n+1})$, on démontre d'abord la proposition suivante :

**Proposition 2.4.1** *On suppose que $\{X_n\}$ satisfait l'hypothèse $(H)$. Alors il existe $0 < u_0 < 1$ et une constante $c \geq 0$ tels que pour tout $u_0 \leq u < 1$, on a :*

$$\sup_{\substack{u<v<w<1 \\ 1 \leq n \leq \psi(u)}} \left| \frac{P\{\max(X_1, \ldots, X_n) < u, v < X_{n+1} < w\}}{u^n(w-u)} - 1 \right|$$
$$\leq \rho(u) = c(\ln_2 \frac{1}{1-u})(\ln \frac{1}{1-u})^{-2-\beta}, \tag{2.22}$$

*où*

$$\ln_2(x) = \ln \ln(x) \textit{ et } \psi(u) = \frac{\tau}{1-u} \ln_2 \frac{1}{1-u}, \tau > 1.$$

**Remarque 2.4.1** (2.22) est la conséquence du théorème (2.5.1), p.35.

On utilise ensuite, en faisant les identifications nécessaires, le lemme :

**Lemme 2.4.1** (Haiman [21]) *Soit $Y$ un élément aléatoire dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Soit $H$ appartenant à $\mathcal{E}$ et $\hat{P}$ une probabilité sur $E$ telle que $0 < \hat{P}(H) < 1$.*
*On suppose que sur $H$ la loi de probabilité de $Y$ est absolument continue par rapport à $\hat{P}$ et :*

$$\max_{y \in H} \left| \frac{dP_Y}{d\hat{P}}(y) - 1 \right| (1 - \hat{P}(H))^{-1} = q < 1. \tag{2.23}$$

*Soit $Q$ une variable de Bernoulli indépendante de $Y$ telle que $P(Q = 0) = q$. Alors, il existe deux variables aléatoires $Y'$ à valeurs dans $H$ et $\overline{Y}$ à valeurs dans $H^c$ telles que si l'on pose :*

$$\hat{Y} = \begin{cases} Y & si\ Q = 1\ \ et\ Y \in H \\ \overline{Y} & si\ Q = 1\ \ et\ Y \in H^c \\ Y' & si\ Q = 0, \end{cases} \tag{2.24}$$

*alors la loi de $\hat{Y}$ est $\hat{P}$.*
*$H^c$ est le complémentaire de $H$ dans $E$.*

Soient $r > r_0$ et $n \geq 1$ fixés et soit

$$E = E_r = \{(s, r'), s \in \mathbb{N}, r' > r\}.$$

L'élément aléatoire $Y = Y_{t,r}$ est défini sachant $\hat{T}_n = t$ , $\hat{R}_n = r$ par :

$$\Big\{ Y = Y_{t,r} = (s, r'); (s, r') \in E_r \Big\} \iff \Big\{ \bigcap_{j=0}^{s-1} (X_{t+m+j} \leq r), X_{t+m+s} = r' \Big\},$$

et on prend,

$$H(r) = \{(s, r') \in E_r, 1 \leq s \leq \psi(r)\}.$$

Soit $\hat{P}$ la loi de probabilité induite sur $E_r$ lorsque la suite $\{X_n\}$ est i.i.d..On obtient alors comme conséquence de la proposition (2.4.1) le

**Lemme 2.4.2** *Il existe une constante positive c telle que :*

$$\max_{(s,r')\in H(r)} \left| \frac{dP_Y}{d\hat{P}}(s,r') - 1 \right| (\hat{P}(H^c(r)))^{-1} \leq c(\ln_2 \frac{1}{1-r})(\ln \frac{1}{1-r})^{-2-\beta+\tau}. \tag{2.25}$$

Pour $r$ suffisamment proche de 1 et $\tau > 1$ tel que $2 + \beta - \tau > 0$, on a :

$$q = c(\ln_2 \frac{1}{1-r})(\ln \frac{1}{1-r})^{-2-\beta+\tau} < 1.$$

On peut donc appliquer le lemme (2.4.1) avec :

$$Q = Q_{n+1} \text{ tel que } P(Q_{n+1} = 0) = q(\hat{R}_n) = c(\ln_2 \frac{1}{1-\hat{R}_n})(\ln \frac{1}{1-\hat{R}_n})^{-2-\beta+\tau}.$$

On choisit $Q_{n+1}$ ne dépendant de $\{X_n, n \geq 1\}$ qu'à travers $\hat{R}_n$.
Soit $L_{n+1}$ une variable de Bernoulli telle que :

$$P(L_{n+1} = 1) = (\hat{R}_n)^{m-1}.$$

On suppose en plus qu'elle est indépendante de $\hat{Y}$ et $Q_{n+1}$ et ne dépend de $\{X_n, n \geq 1\}$ qu'à travers $\hat{R}_n$.
Soit $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \times (\hat{R}_n, +\infty)$ indépendant de $Q_{n+1}$, $L_{n+1}$, $\hat{Y}$ et ne dépendant de $\{X_n\}$ et $(\hat{T}_1, \hat{R}_1), \ldots, (\hat{T}_n, \hat{R}_n)$ qu'à travers $\hat{R}_n$, tel que pour tout $s \geq 1$ et $r' > \hat{R}_n$ :

$$P(\tilde{Y}_1 = s, \tilde{Y}_2 > r') = (\hat{R}_n)^{s-1}(1 - r').$$

On définit maintenant $(\hat{T}_{n+1}, \hat{R}_{n+1})$ comme suit :

$$\text{Si } L_{n+1} = 0, \text{ alors } \hat{T}_{n+1} = \hat{T}_n + \tilde{Y}_1 \text{ ; } \hat{R}_{n+1} = \tilde{Y}_2. \tag{2.26}$$

$$\text{Si } L_{n+1} = 1, \text{ alors } \hat{T}_{n+1} = m - 1 + \hat{Y}_1 \text{ ; } \hat{R}_{n+1} = \hat{Y}_2, \tag{2.27}$$

où $(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2) = \hat{Y}$ est le vecteur aléatoire défini par le lemme (2.4.1) en faisant les identifications appropriées.
On vérifie que $\{(\hat{T}_1, \hat{R}_1), \ldots, (\hat{T}_{n+1}, \hat{R}_{n+1})\}$ possède la loi des records lorsque la suite $\{X_n\}$ est i.i.d., à savoir :

**Proposition 2.4.2** (Deheuvels [8]) $\{(\hat{T}_n, \hat{R}_n)\}_{n\geq 1}$ *est une chaîne de Markov telle que , pour* $n \geq 1$, $1 < t_2 < \ldots < t_n$, $s \geq 1$, *entiers, et pour des réels* $r_1 < \ldots < r_{n+1}$, *on ait :*

$$\begin{aligned} P\{\hat{T}_{n+1} - \hat{T}_n &= s \; ; \; \hat{R}_{n+1} < r_{n+1} \mid \hat{R}_1 = r_1 \; ; \; \hat{T}_2 = t_2, \hat{R}_2 = r_2 \; ; \; \ldots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \hat{T}_n = t_n, \hat{R}_n = r_n\} \\ &= P\{\hat{T}_{n+1} - \hat{T}_n = s \; ; \; \hat{R}_{n+1} < r_{n+1} \mid \hat{R}_n = r_n\} \\ &= (P\{X_1 \leq r_n\})^{s-1} P\{r_n < X_1 \leq r_{n+1}\}. \end{aligned}$$

La dernière étape de la construction consiste à montrer qu'il existe $N$ et $Q$ v.a. entières telles que p.s. pour $n \geq N$ :

$$\hat{T}_n = T_{n-Q} \text{ et } \hat{R}_n = R_{n-Q}.$$

Remarquons, par (2.26) et (2.27), que si :

$$\begin{cases} Q_{n+1}=1 \\ L_{n+1}=1 \\ \inf\{k \geq 0; X_{\hat{T}_n+m+k} > \hat{R}_n\} \leq \psi(\hat{R}_n) \\ \max(X_{\hat{T}_n+1}, \ldots, X_{\hat{T}_n+m-1}) \leq \hat{R}_n, \end{cases}$$

(on note $B_n$ l'intersection de tous ces événements), alors

$$\begin{cases} \hat{T}_{n+1} = \inf\{k > \hat{T}_n, X_k > \hat{R}_n\} \\ \hat{T}_{n+1} = \inf\{k \geq \hat{T}_{n+m}, X_k > \hat{R}_n\} \\ \hat{R}_{n+1} = X_{\hat{T}_{n+1}}, \end{cases} \tag{2.28}$$

ce qui donne, en particulier, la même relation de récurrence que (2.1).
On conclut, en utilisant la proposition suivante :

**Proposition 2.4.3** (Haiman [24]) *Soit* $\{(T'_n, R'_n), n \geq 1\}$ *une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ *telle que p.s. il existe* $p \geq 1$ *tel que* *pour tout* $n \geq p$ , *on a :*

$$\begin{cases} T'_{n+1} = \inf\{k > T'_n, X_k > R'_n\} \\ \\ R'_{n+1} = X_{T'_{n+1}}. \end{cases} \tag{2.29}$$

*Alors il existe deux entiers* $n_1$ *et* $q$ *tels que p.s. pour tout* $n \geq n_1$, *on a :*

$$T_n = T'_{n-q} \quad \text{et} \quad \mathrm{R_n} = \mathrm{R'_{n-q}}. \tag{2.30}$$

Ainsi, pour montrer (2.28), il suffit de montrer que :

$$P(B_n^c \ i.s.) = 0. \tag{2.31}$$

Pour cela, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 2.4.3** (Haiman [24]) *Pour tout* $0 < \alpha < 1$ *:*

$$P(1 - \hat{R}_n > e^{-\alpha n} \ i.s.) = 0, \tag{2.32}$$

pour déduire que, sous la condition,

$$1 < \tau < 1 + \beta, \tag{2.33}$$

il existe $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ des constantes positives telles que :

$$P(B_n^c) \leq k_1 e^{-\alpha(n+1)} + k_2 n^{-2-\beta+\tau} + k_3 n^{-\tau} + k_4 n^{-2-\beta}. \tag{2.34}$$

D'où, par Borel-Cantelli,

$$P(B_n^c \ i.s.) = 0. \tag{2.35}$$

## 2.5 Démonstration du théorème 2.1.2

Nous commençons par évaluer la queue de distribution de la variable aléatoire $N$ du théorème 2.4.1 qui, par la construction précédente, est telle que, p.s. pour $n \geq N$ :

$$\begin{aligned} \hat{T}_{n+1} &= \inf\{t > \hat{T}_n, X_t > \hat{R}_n\} \\ &= \inf\{t \geq \hat{T}_{n+m}, X_t > \hat{R}_n\} \end{aligned} \tag{2.36}$$

**Lemme 2.5.1** *Si, dans la construction précédente de* $\{(\hat{T}_n, \hat{R}_n)\}$*, on prend* $2+\beta < 2\tau$*, alors on a*

$$P(N > s) = O(\frac{1}{s^\lambda}), \tag{2.37}$$

*avec* $\lambda = 1+\beta-\tau$.

**Démonstration :**
Si $2+\beta < 2\tau$, par (2.34), il existe $c_1 > 0$ telle que :

$$P(B_n^c) \leq c_1 n^{-2-\beta+\tau}. \tag{2.38}$$

Ainsi, puisque $\tau < 1+\beta$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n^c) < \infty, \tag{2.39}$$

et il résulte, par le premier lemme de Borel-Cantelli , qu'il existe un événement $\Omega'$, $P(\Omega') = 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega'$, il existe $N(\omega)$ telle que si $n \geq N(\omega)$, alors $\omega \in B_n$. Nous avons aussi, pour tout $k \geq 1$,

$$(N > k) \subset \bigcup_{l \geq k} B_l^c,$$

donc,

$$P(N > k) \leq P(\bigcup_{l\geq k} B_l^c) \leq \sum_{l \geq k} P(B_l^c) \leq (\text{const.}) \sum_{l\geq k} l^{-2-\beta+\tau} \leq (\text{const.}) k^{-1-\beta+\tau}.$$

Ainsi nous avons (2.37). ■

Soit $\{X_n \; ; \; n \geq 1\}$ une suite stationnaire de variables aléatoires réelles m-dépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle $[0,1]$. Soit

$$M_n = \max(X_1 \ldots, X_n), \; n \geq 1.$$

**Lemme 2.5.2** *Soit* $(u_n)$ *une suite de nombres réels telle que*

$$\lim_{n \to +\infty} n(1-u_n) = 0. \tag{2.40}$$

*Alors il existe une constante positive k telle que*

$$P(M_n \geq u_n) \leq kn(1-u_n). \tag{2.41}$$

**Démonstration :**
Soit $S_1(x) = 1 - x$ et, pour $2 \leq k \leq m$, soit

$$S_k(x) = \sum_{1<i_2<i_3<\ldots<i_k\leq m} P(X_1 \geq x, X_{i_2} \geq x, \ldots, X_{i_k} \geq x). \qquad (2.42)$$

Nous utiliserons le résultat suivant :

**Théorème 2.5.1** (Haiman [20]) *Il existe $0 < u < 1$ et une fonction $\mu(x)$, définie pour $u \leq x \leq 1$, telle que*

$$P(M_n \leq x) = [1 + O_1(1 - x)]\mu^n(x), \qquad (2.43)$$

*où $|O_1(u)| < k_1 u$, $k_1$ étant une constante universelle.*
*Par ailleurs, la fonction $\mu$ satisfait*

$$\mu(x) = 1 - S_1(x) + S_2(x) + \ldots + (-1)^m S_m(x) + O_2((1 - x)^2), \qquad (2.44)$$

*où $|O_2(u)| < k_2 u$, $k_2$ étant une constante universelle.*

Nous avons alors :

$$P(M_n \geq x) = 1 - (1 + O_1(1 - x))\mu^n(x) = (1 - \mu^n(x))(1 + \frac{O_1(1 - x)}{1 - \mu^n(x)}).$$

Ainsi, puisque $\lim_{n\to\infty} \mu^n(x) = 0$, $u \leq x < 1$, il existe une constante $k_1 > 0$ telle que :

$$P(M_n \geq x) \leq k_1(1 - \mu^n(x)), \ u \leq x \leq 1. \qquad (2.45)$$

Ensuite, par (2.44),

$$\mu^n(u_n) = (1 - (1 - u_n) + o(1 - u_n))^n,$$

où, puisque $\lim_{n\to\infty} n(1 - u_n) = 0$, le terme de droite vaut

$$1 - n(1 - u_n) + o(n(1 - u_n)), \ n \to \infty.$$

D'où (2.41). ■

**Lemme 2.5.3** *Pour tous entiers $n$ et $s \geq n$, on a*

$$P(\hat{T}_n > s) \leq \frac{A(n, r_0)}{\log s}, \tag{2.46}$$

*où*

$$A(n, r_0) = n - c + \log(\frac{r_0}{1 - r_0}) + \frac{1 - r_0}{r_0} + \frac{d}{2r_0^2} + O(1/2^n), \tag{2.47}$$

*où $|d| \leq 1$, $|O(x)| \leq C(r_0)\,|x|$, $C(r_0)$ étant une fonction de $r_0$ et $c$ est la constante d'Euler.*

**Démonstration :**
Le résultat est une conséquence simple de l'inégalité de Markov et du

**Lemme 2.5.4** *Soit $A(n, r_0)$ comme dans (2.47), on a :*

$$\mathbb{E}(\log \hat{T}_n) = A(n, r_0). \tag{2.48}$$

**Démonstration :**
Soit $\{L_n\}_{n \geq 1}$ la suite des temps de records classiques associée à une suite $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition continue $F(x) = P(Y_1 \leq x)$. $\{L_n\}_{n \geq 1}$ est définie par $L_1 = 1$ et pour $k \geq 1$,

$$L_{k+1} = \inf\{t > L_k; Y_t > Y_{L_k}\}. \tag{2.49}$$

Nous allons utiliser les théorèmes suivants :

**Théorème 2.5.2** (Pfeifer [37]) *Quand $n \to \infty$,*

$$\mathbb{E}(\log L_n) = n - c + O(\mathbb{E}(1/L_n)) \text{ où } \mathbb{E}(1/L_n) = O(n^2/2^n). \tag{2.50}$$

**Théorème 2.5.3** (Nevzorov [35])

$$\mathbb{E}(1/L_n) = 1/2^n + O(1/3^n). \tag{2.51}$$

Afin d'estimer $\mathbb{E}(\log \hat{T}_n)$, les $\hat{T}_n$ peuvent être considérés comme les temps de records définis à l'aide d'un seuil initial $r_0$, $0 < r_0 < 1$ sur une suite de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur $[0, 1]$ comme suit :

$$\hat{T}_1 = \inf\{t \geq 1; Y_t > r_0\},$$

et pour $k \geq 1$,

$$\hat{T}_{k+1} = \inf\{t > \hat{T}_k; Y_t > Y_{\hat{T}_k}\}.$$

Notons par $U_k$ les $Y_i$ qui sont $> r_0$ et par $Z_l$ les $Y_i$ qui sont $\leq r_0$. Soit $L(n)$ le n$^{\text{ième}}$ temps de records classiques observé sur les $U_k$. Les valeurs records $\{U_{L(n)}\}_n$ coïncident avec $\{\hat{R}_n\}_n$ et

$$\hat{T}_n = L(n) + B_{L(n)},$$

où $B_{L(n)}$ est le nombre des $Z_k$ qui sont entre les $U_i$, $i \leq L(n)$.
Sachant que $L(n) = l$, $B_{L(n)}$ suit une loi binomiale négative de paramètres $l$ et $r_0$ et on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\log \hat{T}_n) &= \sum_{l=n}^{+\infty} \mathbb{E}\Big[\log(L(n) + B_{L(n)}) \mid L(n) = l\Big] P(L(n) = l) &(2.52)\\ &= \sum_{l=n}^{+\infty}\Big(\sum_{b=1}^{+\infty} \log(l+b) \mathrm{C}_{l+b-1}^{l-1}(1-r_0)^l r_0^b\Big) P(L(n) = l). &(2.53)\end{aligned}$$

Soit

$$\mathbb{E}^l(B) : = \mathbb{E}(B_{L(n)} \mid L(n) = l) = \frac{l r_0}{1 - r_0}. \tag{2.54}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\log \hat{T}_n) &= \sum_{l=n}^{+\infty}\Big(\sum_{b=1}^{+\infty}\Big[\log \mathbb{E}^l(B) + \log(1 + \frac{l + b - \mathbb{E}^l(B)}{\mathbb{E}^l(B)})\Big] \times &(2.55)\\ &\quad \mathrm{C}_{l+b-1}^{l-1}(1-r_0)^l r_0^b\Big) P(L(n) = l)\\ &= \sum_{l=n}^{+\infty} (\log l) P(L(n) = l) + \log \frac{r_0}{1 - r_0} + &(2.56)\\ &\quad \sum_{l=n}^{+\infty}\Big(\sum_{b=1}^{+\infty} \log(1 + \frac{l + b - \mathbb{E}^l(B)}{\mathbb{E}^l(B)}) \mathrm{C}_{l+b-1}^{l-1}(1-r_0)^l r_0^b\Big) P(L(n) = l),\end{aligned}$$

où, par le théorème 2.5.2,

$$\sum_{l=n}^{+\infty} (\log l) P(L(n) = l) = n - c + O(\mathbb{E}(\frac{1}{L_n})). \tag{2.57}$$

Afin d'évaluer le dernier terme dans (2.56) observons que

$$1+\frac{l+b-\mathbb{E}^l(B)}{\mathbb{E}^l(B)}=\frac{l+b}{\mathbb{E}^l(B)}=\frac{(l+b)(1-r_0)}{lr_0}\geq 1-r_0,$$

d'où

$$\frac{l+b-\mathbb{E}^l(B)}{\mathbb{E}^l(B)}\geq -r_0.$$

Alors, en utilisant le fait que pour $x \geq -r_0$,

$$|\log(1+x)-x|\leq\frac{x^2}{2(1-r_0)^2},$$

et que,

$$\mathrm{Var}(B_{L(n)}\mid L(n)=l)=\frac{lr_0}{(1-r_0)^2},$$

le dernier terme dans (2.56) vaut

$$\frac{1-r_0}{r_0}+\frac{1}{2}O(\frac{1}{r_0^2}+\frac{1}{(1-r_0)^2r_0}\mathbb{E}(\frac{1}{L_n})),\text{ avec } |O(x)|\leq x. \tag{2.58}$$

En combinant (2.56), (2.57), (2.58) et (2.51), on a (2.48). On combine maintenant les lemmes 2.5.1 et 2.5.3 pour avoir le

**Lemme 2.5.5** *On a*

$$P(\hat{T}_N>s)=O((\log s)^{-\frac{\lambda}{2+\lambda}}),\ s\geq 1. \tag{2.59}$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} P(\hat{T}_N>s) &= P(\hat{T}_N>s,N\leq\nu)+P(\hat{T}_N>s,N>\nu) & (2.60)\\ &\leq P(\hat{T}_N>s,N\leq\nu)+P(N>\nu). & (2.61)\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} P(\hat{T}_N>s,N\leq\nu) &= \sum_{n=1}^{\nu}P(\hat{T}_n>s,N=n) & (2.62)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\nu}P(\hat{T}_n>s), & (2.63)\end{aligned}$$

et, par (2.46)

$$\sum_{n=1}^{\nu} P(\hat{T}_n > s) = \frac{\nu(\nu+1)}{2} O(\frac{1}{\log s}) = \nu^2 O(\frac{1}{\log s}).$$

Ainsi, il existe des constantes $K_1$ et $K_2$ telles que

$$P(\hat{T}_N > s) \leq K_1 \frac{\nu^2}{\log s} + K_2 \frac{1}{\nu^\lambda},$$

et la valeur de $\alpha$ telle que

$$\frac{\nu^2}{\log s} = \frac{1}{\nu^\lambda} = (\log s)^\alpha$$

est

$$\alpha = \frac{-\lambda}{2+\lambda}.$$

■

Démontrons maintenant le théorème 2.1.2 :
Soit

$$\begin{aligned} L &= \inf\{k \geq 0; X_{\hat{T}_N+k} > M_{\hat{T}_N}\} \\ &= \inf\{k \geq m; X_{\hat{T}_N+k} > M_{\hat{T}_N}\}, \end{aligned} \tag{2.64}$$

et observons que

$$N_0 \leq \hat{T}_N + L. \tag{2.65}$$

Par le lemme 2.5.5, il existe une constante $k_1$ telle que

$$P(\hat{T}_N > t) \leq k_1 (\log t)^{-\frac{\lambda}{2+\lambda}} =: \epsilon(t). \tag{2.66}$$

Puisque $\lim_{t\to+\infty} \epsilon(t) = 0$, on peut appliquer le lemme 2.5.2 avec

$$u_t = 1 - \frac{\epsilon(t)}{kt},$$

et alors

$$P(M_t \geq u_t) \leq \epsilon(t),\ t \geq 1. \tag{2.67}$$

Pour tout $t$ fixé, soit
$$A = \{\hat{T}_N \le t, M_t \le u_t\}. \tag{2.68}$$
On a alors
$$P(\overline{A}) \le 2\epsilon(t), \tag{2.69}$$
et pour $l \ge 1$,
$$\begin{aligned} P\Big((L > l) \cap A\Big) &= P\Big((\inf\{k \ge m, X_{\hat{T}_N + k} > M_{\hat{T}_N}\} > l) \cap A\Big) \\ &\le P\Big((\inf\{k \ge m, X_{\hat{T}_N + k} > u_t\} > l) \cap (\hat{T}_N \le t)\Big) \\ &= \sum_{\tau=1}^{t} P\Big((\inf\{k \ge m, X_{\hat{T}_N + k} > u_t\} > l) \cap (\hat{T}_N = \tau)\Big) \\ &= \sum_{\tau=1}^{t} P\Big(\inf\{k \ge m, X_{\hat{T}_N + k} > u_t\} > l \mid \hat{T}_N = \tau\Big) \\ &\qquad\qquad \times P(\hat{T}_N = \tau). \end{aligned}$$
Puisque
$$(\hat{T}_N = \tau) \in \sigma(X_1, \ldots, X_\tau) \times \sigma',$$
où $\sigma'$ est indépendante de $(X_n)$, on a, par la m-dépendance et la stationnarité,
$$\begin{aligned} P\Big(\inf\{k \ge m, X_{\hat{T}_N + k} > u_t\} > l \mid \hat{T}_N = \tau\Big) &= P\Big(\inf\{k \ge 1, X_k > u_t\} > l\Big) \\ &= P\Big(M_l \le u_t\Big). \end{aligned}$$
Ainsi
$$P\Big((L > l) \cap A\Big) \le P\Big(M_l \le u_t\Big). \tag{2.70}$$
Ensuite, pour $s \ge 1$ et $0 < \beta < 1$ fixé, on pose $t = [s^\beta]$.
On a alors :
$$\begin{aligned} P(N_0 > s) &\le P(\hat{T}_N + L > s) \\ &\le P\{(\hat{T}_N + L > s) \cap A\} + P\{\overline{A}\} \\ &\le P\{(\hat{T}_N \le t, L > s - t) \cap A\} + 2\epsilon(t) \\ &= P\{(L > s - t) \cap A\} + 2\epsilon(t). \end{aligned} \tag{2.71}$$
Par (2.70),
$$P\{(L > s - t) \cap A\} \le P\{M_{s-t} \le u_t\} \le u_t^{\frac{s-t}{2}}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
u_t^{\frac{s-t}{2}} &= (1 - \frac{\epsilon(t)}{kt})^{\frac{s-t}{2}} = (1 - \frac{k_1(\log[s^\beta])^{-\frac{\lambda}{2+\lambda}}}{k[s^\beta]})^{\frac{s-[s^\beta]}{2}} \\
&\leq (1 - \frac{k_1}{k}\frac{(\beta\log s)^{-\frac{\lambda}{2+\lambda}}}{s^\beta})^{s^\beta\frac{(s^{1-\beta}-1)}{2}} \\
&\sim \exp\{-(\frac{k_1\beta^{-\frac{\lambda}{2+\lambda}}}{k}(\log s)^{-\frac{\lambda}{2+\lambda}}s^{1-\beta}\frac{1-s^{\beta-1}}{2})\} \\
&\leq \exp(-t^\gamma) \text{ pour } \gamma > 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, par (2.66),

$$u^{\frac{s-t}{2}}/\epsilon(t) \to 0 \text{ as } t \to \infty,$$

d'où (2.4).

# Chapitre 3

# Etude des extrêmes multivariés de suites gaussiennes i.i.d.

## 3.1 Introduction et préliminaires

On peut généraliser la définition des records au cas multivarié de la façon suivante :

**Définition 3.1.1** (Haiman [24]) Soit $\{\mathbf{X}_n = (X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(d)})\}$, $d \geq 1$ une suite de vecteurs aléatoires et $0 < r_0 < 1$ fixé. On pose :

$$\begin{aligned} T_1 &= \inf\{k > 0, \sup(X_k^{(1)}, \ldots, X_k^{(d)}) > r_0\} \\ \mathbf{R}_1 &= (R_1^{(1)}, \ldots, R_1^{(d)}) \text{ avec } R_1^{(j)} = \begin{cases} X_{T_1}^{(j)} & \text{si } X_{T_1}^{(j)} > r_0 \\ r_0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

et pour $n \geq 1$,

$$T_{n+1} = \inf_{1 \leq j \leq d} \{\inf\{k > T_n, X_k^{(j)} > R_n^{(j)}\}\} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{R}_{n+1} = (R_{n+1}^{(1)}, \ldots, R_{n+1}^{(d)}) \text{ avec } R_{n+1}^{(j)} = \begin{cases} X_{T_{n+1}}^{(j)} & \text{si } X_{T_{n+1}}^{(j)} > R_n^{(j)} \\ R_n^{(j)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite $\{(T_n, \mathbf{R}_n), n \geq 1\}$ est appelée suite des temps de records et records multivariés associée à $(\mathbf{X}_n)$ et à $r_0$.

**Remarque 3.1.1** D'après la définition précédente, on remarque qu'un record n'est pas toujours un point de l'échantillon et qu'il est réalisé dès qu'on a dépassement sur l'une ou l'autre des composantes de l'ancien record. Le résultat suivant montre que dans le cas i.i.d. (coordonnées indépendantes), presque sûrement, à partir d'un certain rang, on n'a dépassement que sur une seule composante de l'ancien record.

**Proposition 3.1.1** (Haiman [24]) *On note :*

$$J(n) = \#\{j; 1 \leq j \leq d, R_n^{(j)} > R_{n-1}^{(j)}\},\ d \geq 2, n \geq 2.$$

*Si* $\{\mathbf{X}_n\}_n$ *est i.i.d. avec indépendance des coordonnées qu'on suppose uniformément distribuées sur* $[0,1]$*, alors :*

$$P\{J(n) > 1\ i.s.\} = 0. \tag{3.2}$$

La proposition 2.3.2 du chapitre précédent se généralise au cas multivarié de la façon suivante :
Soit $\{\mathbf{X}_n\}_n$ une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. de f.d.r. $F$. On note, pour $\mathbf{x} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(d)})$,

$$x^* = \inf_{1 \leq j \leq d} \{x^{(j)}\}.$$

On a la

**Proposition 3.1.2** (Haiman [24]) 1) *Pour tout* $0 < a < 1$ *et* $b$ *tel que* $b \ln(d/(d-1)) > 1$*, on a :*

$$P\{1 - F(R_n^*) > e^{-(a/d)[n/(b \ln n)]}\ i.s.\} = 0, \tag{3.3}$$

$[x]$ *désigne la partie entière de* $x$.
2) *Pour tout* $\tau > 1$,

$$P\{T_{n+1} - T_n \geq \frac{\tau}{1 - F(R_n^*)} \ln_2(\frac{1}{1 - F(R_n^*)})\ i.s.\} = 0. \tag{3.4}$$

Soit $\{\mathbf{X}_n = (X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(d)})\ ;\ n \geq 1\}$ une suite de vecteurs aléatoires indépendants et identiquement distribués avec $\mathbf{X}_1 = (X_1^{(1)}, \ldots, X_1^{(d)})$ vecteur gaussien centré tel que :

$$\mathbb{E}\,[(X_1^{(i)})^2] = 1\ ;\ i = 1, \ldots, d \ \text{ et } \ \mathbb{E}\,(X_1^{(i)} X_1^{(j)}) = \rho_{i,j}\ ;\ |\rho_{i,j}| < 1. \tag{3.5}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= (u^{(1)}, \ldots, u^{(d)}). \\
M_n^{(i)} &= \max(X_1^{(i)}, \ldots, X_n^{(i)}) \; ; \; i = 1, \ldots, d, \; d \geq 1. \\
\mathbf{M}_n &= (M_n^{(1)}, \ldots, M_n^{(d)}), n \geq 1. \\
\mathbf{u} \leq \mathbf{v} \quad &\text{si} \quad u^{(i)} \leq v^{(i)}, i = 1, \ldots, d.
\end{aligned}$$

**Remarque 3.1.2** Comme la suite $\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$ est i.i.d., $\{\mathbf{M}_n, n \geq 1\}$ est un processus de Markov tel que pour tout $\mathbf{u}_1 \leq \ldots \leq \mathbf{u}_{n+1}$, on a

$$\begin{aligned}
P\{\mathbf{M}_{n+1} \leq \mathbf{u}_{n+1} \mid \mathbf{M}_1 &= \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{M}_n = \mathbf{u}_n\} \\
&= P\{\mathbf{M}_{n+1} \leq \mathbf{u}_{n+1} \mid \mathbf{M}_n = \mathbf{u}_n\} \\
&= P\{\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{u}_{n+1}\}.
\end{aligned}$$

Notons aussi par :

$$u^* = u^*(\mathbf{u}) = \inf(u^{(1)}, \ldots, u^{(d)}),$$

$$G(u^*) = 1 - F(u^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u^*}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

et pour $\tau > 0$ fixé,

$$\psi(u^*) = \frac{\tau}{G(u^*)} \ln \frac{1}{G(u^*)} \quad \text{et} \quad E(u^*) = \{n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq \psi(u^*)\}.$$

On se propose de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 3.1.1** *Il existe $u_0 > 0$, deux constantes $c_0 > 0$ et $c > 0$ tels que, pour tout $\mathbf{u}$ vérifiant $u_0 < u^*(\mathbf{u})$ et $k > 0$ assez petit :*

$$\max_{1 \leq j \leq d} \max_{\substack{u^{(j)} < v^{(j)} < w^{(j)} < u^{(j)}(1+k) \\ n \in E(u^*)}}$$
$$\left| \frac{P\Big(\mathbf{M}_n \leq \mathbf{u}, \bigcap_{i=1, i \neq j}^{d} (X_{n+1}^{(i)} < u^{(i)}), v^{(j)} < X_{n+1}^{(j)} < w^{(j)}\Big)}{(\prod_{i=1}^{d} P(X^{(i)} < u^{(i)}))^n (\prod_{i=1, i \neq j}^{d} P(X^{(i)} < u^{(i)})) P(v^{(j)} < X_{n+1}^{(j)} < w^{(j)})} - 1 \right|$$
$$\leq c_0 \Big(G(u^*)\Big)^c. \qquad (3.6)$$

Pour des raisons de simplicité et pour ne pas alourdir les notations nous démontrerons ce résultat dans le cas bivarié.

## 3.2 Le cas bivarié

Avec $G(u^*)$, $\psi(u^*)$, et $E(u^*)$ définis précédemment, l'énoncé du théorème 3.1.1 dans le cas bivarié est le suivant :

**Théorème 3.2.1** *Il existe $u_0 > 0$, deux constantes $c_0 > 0$ et $c > 0$ tels que, pour tout $\mathbf{u}$ vérifiant $u_0 < u^*(\mathbf{u})$ et $k > 0$ assez petit :*

$$\max_{\substack{j=1;i=2\\ j=2;i=1}} \max_{\substack{u^{(j)}<v^{(j)}<w^{(j)}<u^{(j)}(1+k)\\ n\in E(u^*)}}$$
$$\left|\frac{P(\mathrm{M}_n \leq \mathbf{u}, X_{n+1}^{(i)} < u^{(i)}, v^{(j)} < X_{n+1}^{(j)} < w^{(j)})}{P(X^{(1)} < u^{(1)})^n P(X^{(2)} < u^{(2)})^n P(X_{n+1}^{(i)} < u^{(i)}) P(v^{(j)} < X_{n+1}^{(j)} < w^{(j)})} - 1\right|$$
$$\leq c_0(G(u^*))^c. \tag{3.7}$$

**Démonstration :**
La démonstration de ce résultat est basée sur le lemme de comparaison de Berman pour les processus gaussiens. On pose :

$$\begin{aligned}
Q(n,\mathbf{u}) &= P(\mathrm{M}_n \leq \mathbf{u}) \\
&= P(M_n^{(1)} \leq u^{(1)}, M_n^{(2)} \leq u^{(2)}) \\
&= P(X_1^{(1)} \leq u^{(1)}, \ldots, X_n^{(1)} \leq u^{(1)}, X_1^{(2)} \leq u^{(2)}, \ldots, X_n^{(2)} \leq u^{(2)}).
\end{aligned}$$

$Q_I(n,\mathbf{u})$ désigne la probabilité $Q(n,\mathbf{u})$ quand la suite $\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$ est i.i.d. avec indépendance des coordonnées.
$Q_I(n,\mathbf{u}) = P(X^{(1)} < u^{(1)})^n P(X^{(2)} < u^{(2)})^n$.

**Lemme 3.2.1** *Il existe $u_1 > 0$, deux constantes positives $c_1$ et $c_2$, $\tau_0 > 0$ tels que pour tout $u^* \geq u_1$, $0 < \tau < \tau_0$, on a :*

$$\sup_{1\leq n\leq \psi(u^*)} \left|\frac{Q(n,\mathbf{u})}{Q_I(n,\mathbf{u})} - 1\right| \leq c_1(G(u^*))^{c_2}. \tag{3.8}$$

Pour démontrer ce lemme, on utilise le « lemme de comparaison » suivant :

**Lemme 3.2.2** (Berman [3]) *Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ des variables aléatoires normales réduites de matrice de covariance $\Lambda^1 = (\Lambda_{ij}^1)_{i,j=1,\ldots,n}$ et $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ des variables aléatoires normales réduites de matrice de covariance $\Lambda^0 =$*

$(\Lambda^0_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.
*On suppose* $\Lambda^0$ *et* $\Lambda^1$ *strictement définies positives.*
*Soient* $a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$ *des nombres réels.*
*Alors :*

$$|P\{a_1 < \xi_1 < b_1, \dots, a_n < \xi_n < b_n\} - P\{a_1 < \eta_1 < b_1, \dots, a_n < \eta_n < b_n\}|$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left|\Lambda^1_{ij} - \Lambda^0_{ij}\right| (1 - \delta^2_{ij})^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{c_i^2 + c_j^2}{2(1 + \delta_{ij})}), \tag{3.9}$$

*avec* $c_i = \min(|a_i|, |b_i|), i = 1, \dots, n$ *et* $\delta_{ij} = \max(\left|\Lambda^1_{ij}\right|, \left|\Lambda^0_{ij}\right|)$.

**Démonstration du lemme 3.2.1**
En appliquant (3.9), on a

$$|Q(n, \mathbf{u}) - Q_I(n, \mathbf{u})| \leq \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} |\Lambda_{ij}| (1 - (\Lambda_{ij})^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(u_1)^2 + (u_2)^2}{2(1 + |\Lambda_{ij}|)}\right\}$$

$\Lambda = (\Lambda_{ij})$ est la matrice de covariance d'ordre $2n$ de la suite
$X^{(1)}_1, X^{(1)}_2, \dots, X^{(1)}_n, X^{(2)}_1, \dots, X^{(2)}_n$.
Cette matrice a la forme suivante à cause de l'indépendance des vecteurs $\mathbf{X}_n, n \geq 1$ :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \ddots & \rho & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \ddots & \rho & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & \ddots & & \ddots & \rho \\ \rho & \ddots & & \ddots & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \rho & \ddots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \rho & \ddots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & \rho & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tous les termes situés strictement au dessus de la diagonale s'annulent sauf $n$ termes correspondants à

$$\mathbb{E}\,(X^{(1)}_i X^{(2)}_i) = \rho,\ i = 1, \dots, n.$$

Alors l'inégalité précédente devient :

$$\begin{aligned}
|Q(n,\mathbf{u}) - Q_I(n,\mathbf{u})| &\leq \frac{2}{\pi} n\,|\rho|\,(1-(\rho)^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{(u_1)^2+(u_2)^2}{2(1+|\rho|)}\} \\
&\leq (\text{const.}) n \exp\{-\frac{(u^*)^2}{2(1+|\rho|)}\}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
Q_I(n,\mathbf{u}) &= P(X^{(1)} < u^{(1)})^n P(X^{(2)} < u^{(2)})^n \\
&= (1-G(u^{(1)}))^n (1-G(u^{(2)}))^n \\
&\geq (1-G(u^*))^{2n} \\
&\geq (1-G(u^*))^{\frac{2\tau}{G(u^*)}\ln\frac{1}{G(u^*)}} \\
&\simeq (G(u^*))^{2\tau};\ (\ln(1-x) \sim -x \text{ quand } x \to 0),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left|\frac{Q(n,\mathbf{u})}{Q_I(n,\mathbf{u})} - 1\right| &= \left|\frac{Q(n,\mathbf{u}) - Q_I(n,\mathbf{u})}{Q_I(n,\mathbf{u})}\right| \\
&\leq (\text{const.}) n \Big(G(u^*)\Big)^{-2\tau} \exp\Big(\frac{-u^{*2}}{1+|\rho|}\Big) \\
&\leq (\text{const.}) \Big(\frac{\tau}{G(u^*)} \ln\frac{1}{G(u^*)}\Big) \Big(G(u^*)\Big)^{-2\tau} \exp\Big(\frac{-u^{*2}}{1+|\rho|}\Big) \\
&\leq (\text{const.}) (u^*)^{3+2\tau} \exp\Big(u^{*2}(-\frac{1}{1+|\rho|} + \frac{1+2\tau}{2})\Big) \\
&\qquad \left(\text{ceci car } G(u) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{u}\exp\Big(-\frac{u^2}{2}\Big) \text{ quand } u \to \infty\right) \\
&\leq (\text{const.}) (u^*)^{3+2\tau} \exp\Big(-\frac{u^{*2}}{2}(\frac{2}{1+|\rho|} - (1+2\tau))\Big),
\end{aligned}$$

or

$$\frac{2}{1+|\rho|} - (1+2\tau) > 0 \iff 2\tau < \frac{1-|\rho|}{1+|\rho|}$$

$$\lim_{u^*\to\infty} \frac{(u^*)^{3+2\tau}\exp\Big(-\frac{\beta}{2}u^{*2}\Big)}{\Big(G(u^*)\Big)^{c_2}} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 < c_2 < \beta,$$

d'où (3.8) avec

$$0 < \tau < \tau_0 < \frac{1-|\rho|}{2(1+|\rho|)} \quad \text{et} \quad 0 < c_2 < \frac{2}{1+|\rho|} - (1+2\tau). \qquad (3.10)$$

■

**Lemme 3.2.3** *On note par $f(x,y)$ la densité conjointe de $X_1$, $X_2$ .*
*On pose*

$$\begin{aligned} P(u,s) &= \int_{-\infty}^{u} f(x,s)dx, \\ P_I(u,s) &= P(X_1 < u)\varphi(s), \ \varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}. \end{aligned}$$

*Alors, il existe $0 < \alpha < 1$ et $K > 0$ tels que :*

$$\sup_{0<u<s<u(1+k)} \left| \frac{P(u,s)}{P_I(u,s)} - 1 \right| \leq K g(u), \qquad (3.11)$$

*avec*

$$k > 0 \textit{ assez petit, } K = \frac{2|\rho|}{(1-\rho^2)\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \quad \textit{et} \quad g(u) = \frac{u e^{-\frac{(1-\alpha)^2 u^2}{2}}}{P(X_1 < u)}.$$

**Démonstration :**
Soit $f_h$ la densité de la variable aléatoire $\mathcal{N}(0, \Lambda^h)$ où

$$\Lambda^h = \left(\Lambda_{ij}^h : 1 \leq i,j \leq 2\right) = h\Lambda^1 + (1-h)\Lambda^0 \qquad (3.12)$$

$$\Lambda_{11}^h = \Lambda_{22}^h = 1; \Lambda_{12}^h = \Lambda_{21}^h = \rho h.$$

Notons

$$F(h) = \int_{-\infty}^{u} f_h(x,s)dx, \quad 0 < h < 1.$$

$$P(u,s) - P_I(u,s) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(h)dh.$$

$$F'(h) = \int_{-\infty}^{u} \frac{\partial f_h}{\partial h}(x,s)dx = \int_{-\infty}^{u} \frac{\partial f_h}{\partial \Lambda_{12}^h} \frac{\partial \Lambda_{12}^h}{\partial h} dx.$$

Or, d'après (3.12),

$$\frac{\partial \Lambda_{12}^h}{\partial h} = \Lambda_{12}^1 - \Lambda_{12}^0 = \rho.$$

D'où

$$F'(h) = \rho \int_{-\infty}^{u} \frac{\partial f_h}{\partial \Lambda_{12}^h} dx.$$

Comme $f_h$ est gaussienne,

$$\frac{\partial f_h}{\partial \Lambda_{12}^h} = \frac{\partial^2 f_h}{\partial y_1 \partial y_2},$$

donc

$$F'(h) = \rho \int_{-\infty}^{u} \frac{\partial^2 f_h}{\partial y_1 \partial y_2}(x, s) dx = \rho \frac{\partial f_h}{\partial y_2}(y_1 = u, y_2 = s).$$

La densité $f_h$ est donnée par :

$$f_h(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2 h^2}} \exp\Big\{\frac{-1}{2(1-\rho^2 h^2)}(y_1^2 + y_2^2 - 2\rho h y_1 y_2)\Big\}.$$

$$\frac{\partial f_h}{\partial y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2 h^2}} \frac{\rho h y_1 - y_2}{1-\rho^2 h^2} \exp\Big\{\frac{-1}{2(1-\rho^2 h^2)}(y_1^2 + y_2^2 - 2\rho h y_1 y_2)\Big\}$$

et après simplification,

$$\begin{aligned} (\varphi(s))^{-1}\frac{\partial f_h}{\partial y_2}(y_1 = u, y_2 = s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2 h^2)}} \frac{\rho h u - s}{1-\rho^2 h^2} \\ &\times \exp\Big\{\frac{-1}{2(1-\rho^2 h^2)}(u - \rho h s)^2\Big\}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Pour $k$ positif assez petit, on a : $|\rho|(1+k) < \alpha < 1$ donc $|\rho| hs \leq \alpha u$, d'où

$$u - \rho h s \geq (1-\alpha)u. \tag{3.14}$$

D'autre part,

$$|\rho h u - s| \leq |\rho| u + (1+k)u = u(|\rho| + (1+k)) \leq 2u. \tag{3.15}$$

En appliquant (3.13), (3.14), (3.15), on a, pour $k > 0$ assez petit, si $u < s < u(1+k)$ :

$$\begin{aligned}
(\varphi(s))^{-1}\frac{\partial f_h}{\partial y_2}(y_1 = u, y_2 = s) &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2h^2)}}\frac{2u}{1-\rho^2h^2} \\
&\qquad \times \exp\Big\{\frac{-1}{2(1-\rho^2h^2)}(1-\alpha)^2u^2\Big\} \\
&\leq \frac{2}{1-\rho^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}u\exp\Big\{\frac{-1}{2}(1-\alpha)^2u^2\Big\}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\frac{P(u,s)-P_I(u,s)}{P(X_1<u)\varphi(s)} &\leq \int_0^1 \frac{F'(h)}{P(X_1<u)\varphi(s)}dh \\
&\leq \frac{2\,|\rho|}{1-\rho^2}\frac{u}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\frac{1}{P(X_1<u)}\exp\{\frac{-1}{2}(1-\alpha)^2u^2\},
\end{aligned}$$

d'où (3.11). ■

On déduit alors comme conséquence du lemme précédent qu'il existe $u_2 > 0$, deux constantes positives $c_3$ et $c_4$ tels que pour tout $u \geq u_2$,

$$\sup_{0<u<s<u(1+k)}\left|\frac{P(u,s)}{P_I(u,s)}-1\right| \leq c_3(G(u))^{c_4}. \tag{3.16}$$

En effet,

$$\lim_{u\to\infty}\frac{u\exp\Big(-\frac{(1-\alpha)^2u^2}{2}\Big)}{\Big(G(u)\Big)^{c_4}} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 < c_4 < (1-\alpha)^2.$$

■

D'où le

**Corollaire 3.2.1** *Pour tout $u \geq u_2$,*

$$\sup_{0<u<v<w<u(1+k)}\left|\frac{P(X^{(1)}<u, v<X^{(2)}<w)}{P(X^{(1)}<u)P(v<X^{(2)}<w)}-1\right| \leq c_3(G(u))^{c_4}, \tag{3.17}$$

*où $c_3$ et $c_4$ sont les constantes définies précédemment.*

**Démonstration du théorème 3.2.1**

Le théorème (3.2.1) est une conséquence immédiate de (3.8) et (3.17).

# Chapitre 4

# Comportement p.s. des extrêmes multivariés de suites gaussiennes i.i.d.

## 4.1 Introduction

La définition des records dans le cas multivarié a été donnée dans le chapitre précédent (définition 3.1.1).
Le résultat suivant montre que le choix du seuil initial $r_0$ dans cette définition n'influe pas sur le comportement asymptotique des records :

**Proposition 4.1.1** (Haiman [24]) *Soit* $\{(T'_n, \mathbf{R}'_n), n \geq 1\}$ *une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d$ *telle qu'il existe* $p \geq 1$ *tel que p.s. pour tout* $n \geq p$ *, on a :*

$$\begin{aligned} T'_{n+1} &= \inf_{1\leq j\leq d}\left\{\inf\{k > T'_n, X_k^{(j)} > R'^{(j)}_n\}\right\} \\ \mathbf{R}'_{n+1} &= (R'^{(1)}_{n+1}, \ldots, R'^{(d)}_{n+1}) \text{ avec } R'^{(j)}_{n+1} = \begin{cases} X^{(j)}_{T'_{n+1}} & \text{si } X^{(j)}_{T'_{n+1}} > R'^{(j)}_n \\ R'^{(j)}_n & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

*Alors il existe deux entiers* $n_1$ *et* $q$ *tels que p.s. pour tout* $n \geq n_1$*, on a :*

$$T_n = T'_{n-q} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_n = \mathbf{R}'_{n-q}.$$

Notre résultat est le théorème suivant :

**Théorème 4.1.1** *Soit* $\{\mathbf{X}_n = (X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(d)})\ ;\ n \geq 1\}$ *une suite i.i.d. avec* $\mathbf{X}_1 = (X_1^{(1)}, \ldots, X_1^{(d)})$ *vecteur gaussien centré tel que :*

$$\mathbb{E}\,[(X_1^{(i)})^2] = 1\ ;\ i = 1, \ldots, d \ \ et\ \ \mathbb{E}\,(X_1^{(i)} X_1^{(j)}) = \rho_{i,j}\ ;\ |\rho_{i,j}| < 1.$$

*Alors on peut construire sur le même espace de probabilité, qu'on suppose suffisamment grand, sur lequel* $\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$ *est définie, une suite* $\{\hat{\mathbf{X}}_n, n \geq 1\}$ *i.i.d.,* $\hat{\mathbf{X}}_1 = (\hat{X}^{(1)}, \ldots, \hat{X}^{(d)})\ ;\ \hat{X}^{(1)}, \ldots, \hat{X}^{(d)}$ *indépendantes* $\mathcal{N}(0,1)$ *telle que si* $\{(T_n, \mathbf{R}_n)\}$ *est la suite des records multivariés de* $\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$ *et* $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n)\}$ *celle de* $\{\hat{\mathbf{X}}_n, n \geq 1\}$*, alors il existe deux variables aléatoires entières* $N$ *et* $Q$ *telles que pour* $n \geq N$ *:*

$$\hat{T}_n = T_{n-Q} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{R}}_n = \mathbf{R}_{n-Q}. \tag{4.1}$$

*Par suite, si*

$$\hat{\mathbf{M}}_n = (\hat{M}_n^{(1)}, \ldots, \hat{M}_n^{(d)}) \text{ avec } \hat{M}_n^{(i)} = \max(\hat{X}_1^{(i)}, \ldots, \hat{X}_n^{(i)}); i = 1, \ldots, d$$

*alors, il existe* $N_0$ *tel que p.s. pour* $n \geq N_0$*,*

$$\hat{\mathbf{M}}_n = \mathbf{M}_n.$$

Observons, comme dans (Haiman [24]), que le théorème 4.1.1 est équivalent au

**Théorème 4.1.2** *Il existe* $r_0$ *et une suite* $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n), n \geq 1\}$ *de vecteurs aléatoires définis sur le même espace de probabilité que* $\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$ *élargi de facteurs indépendants,* $(\hat{T}_n)$ *étant une suite strictement croissante d'entiers;* $\{\hat{\mathbf{R}}_n = (\hat{R}_n^{(1)}, \ldots, \hat{R}_n^{(d)}); n \geq 1\}$ *est telle que :*

$$\mathbf{R}_0 < \hat{\mathbf{R}}_1 < \hat{\mathbf{R}}_2 < \ldots ; \mathbf{R}_0 = (R_0^{(1)}, \ldots, R_0^{(d)}) = (r_0, \ldots, r_0).$$

*On a, en plus :*
*i)* $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n), n \geq 1\}$ *a la même loi de probabilité que* $\{(T_n, \mathbf{R}_n)\}$ *lorsque les coordonnées de la suite* $\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$ *sont indépendantes.*
*ii) Il existe deux variables aléatoires entières* $N$ *et* $Q$ *telles que p.s. pour* $n \geq N$ *:*

$$\hat{T}_n = T_{n-Q} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{R}}_n = \mathbf{R}_{n-Q}. \tag{4.2}$$

**Remarque 4.1.1** Dans la suite, nous construisons $\{\hat{\mathbf{X}}_n, n \geq 1\}$ telle que $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n), n \geq 1\}$ vérifie i) et ii) du théorème (4.1.2), c'est-à-dire qu'à une translation aléatoire d'indice près, à partir d'un rang également aléatoire, $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n), n \geq 1\}$ coïncide avec la suite des records de $\{\hat{\mathbf{X}}_n, n \geq 1\}$. Remarquons cependant que $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n), n \geq 1\}$ n'est pas une suite de records de $\{\hat{\mathbf{X}}_n, n \geq 1\}$ au sens de la définition (3.1.1).

**Remarque 4.1.2** Geffroy dans [16] considére une suite i.i.d. bivariée $\{\mathbf{X}_n\}$, non nécessairement gaussienne, telle qu'il existe $(x_0, y_0)$, $x_0 \leq +\infty, y_0 \leq +\infty$, tel que :

$$F(x_0, y_0) = P(X_1^{(1)} \leq x_0, X_1^{(2)} \leq y_0) = 1$$

et

$$F(x, y) < 1 \text{ pour } x < x_0 \text{ ou } y < y_0.$$

Il montre que si

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} \left\{ \frac{1 + F(x,y) - F(x,y_0) - F(x_0,y)}{1 - F(x,y)} \right\} = 0 \tag{4.3}$$

alors $M_n^{(1)}$ et $M_n^{(2)}$ sont « asymptotiquement indépendants » au sens que

$$\max_{\substack{x \leq x_0 \\ y \leq y_0}} \left| P(M_n^{(1)} < x, M_n^{(2)} < y) - P(M_n^{(1)} < x) P(M_n^{(2)} < y) \right| = O(1/n). \tag{4.4}$$

Lorsque $\{\mathbf{X}_n\}$ est gaussienne, la condition (4.3) est satisfaite donc (4.4) est vraie. Notre théorème 4.1.1 peut donc être considéré comme la « version forte » du résultat de Geffroy.

La démonstration de (4.3) dans le cas gaussien est donnée en annexe.

**Remarque 4.1.3** Un résultat analogue au théorème 4.1.1 a été obtenu dans Haiman [24], pour une suite strictement stationnaire m-dépendante, $m \geq 1$, de vecteurs de dimension $d \geq 1$, $\{\mathbf{X}_n = (X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(d)}), n \geq 1\}$, dont les lois des couples $(X_1^{(i)}, X_k^{(j)})$, $2 \leq k \leq m$, $1 \leq i, j \leq d$ et $k = 1$, $1 \leq i < j \leq d$ vérifient certaines conditions. Dans notre cas, ces conditions se réduisent à une seule, à savoir :
il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $1 \leq i < j \leq d$,

$$\limsup_{z \to +\infty} \left\{ \sup_{\substack{z < v < w < +\infty \\ z < u < +\infty}} \frac{P\{X_1^{(i)} > u, v < X_1^{(j)} < w\}}{(-\ln(P(X_1^{(i)} > u)))^{-(d+1+\beta)} P\{v < X_1^{(j)} < w\}} \right\} < +\infty, \tag{4.5}$$

et celle-ci n'est satisfaite que si

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_1^{(\mathrm{i})}, \mathrm{X}_1^{(\mathrm{j})}) = \mathbb{E}\,(\mathrm{X}_1^{(\mathrm{i})}\mathrm{X}_1^{(\mathrm{j})}) = \rho_{\mathrm{ij}} < 0.$$

Par conséquent, le théorème 4.1.1 étend au cas $\rho_{ij} \geq 0$ l'application du résultat précité au cas i.i.d. gaussien.

**Remarque 4.1.4** La démonstration du théorème 4.1.1 doit être considérée comme une phase préliminaire et introductive à l'extension du résultat aux suites de vecteurs gaussiens stationnaires, suivant des techniques analogues à celles du cas univarié (d=1), introduites dans Haiman et Puri [25].

Nous démontrons le théorème 4.1.2 en construisant la suite $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n), n \geq 1\}$ satisfaisant i) et telle que :

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{n+1} &= \hat{T}_n + \inf_{1 \leq j \leq d} K(j);\ K(j) = \inf\{k \geq 1, X^{(j)}_{\hat{T}_n+k} > \hat{R}^{(j)}_n\} \\
\hat{\mathbf{R}}_{n+1} &= (\hat{R}^{(1)}_{n+1}, \ldots, \hat{R}^{(d)}_{n+1}) \text{ avec } R^{(j)}_{n+1} = \begin{cases} X^{(j)}_{\hat{T}_{n+1}} & \text{si } X^{(j)}_{\hat{T}_{n+1}} > \hat{R}^{(j)}_n \\ \hat{R}^{(j)}_n & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

On déduit alors le théorème 4.1.1 en utilisant la proposition 4.1.1.
On construit d'abord la suite $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n), n \geq 1\}$ ayant la loi de probabilité des records lorsque les coordonnées des $\mathbf{X}_n$ sont indépendantes. La construction se fait de façon récursive :
On définit $(\hat{T}_1, \hat{\mathbf{R}}_1)$ indépendamment de $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ et on suppose que la suite $(\hat{T}_p, \hat{\mathbf{R}}_p)$ est construite pour $1 \leq p \leq n$ de sorte que les événements de la forme $(\hat{T}_1 = t_1, \hat{\mathbf{R}}_1 \in \mathcal{A}_1)$ ; $\ldots$; $(\hat{T}_n = t_n, \hat{\mathbf{R}}_n \in \mathcal{A}_n)$ (où $1 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ sont des entiers, et $\mathcal{A}_i, i = 1, \ldots, n$, des boréliens de $\mathbb{R}^d$) soient $\sigma\{\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{t_n}\} \times \sigma'$ mesurables, où $\sigma'$ est une $\sigma$ -tribu indépendante de $\sigma\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$.
Pour construire $(\hat{T}_{n+1}, \hat{\mathbf{R}}_{n+1})$, on utilise la proposition ci-après, démontrée dans le chapitre précédent :
Posons $u^* = u^*(\mathbf{u}) = \inf(u^{(1)}, \ldots, u^{(d)})$, $G(u^*) = 1 - F(u^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u^*}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, et pour $\tau > 0$ fixé,

$$\psi(u^*) = \frac{\tau}{G(u^*)} \ln \frac{1}{G(u^*)} \text{ et } E(u^*) = \{n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq \psi(u^*)\}.$$

**Proposition 4.1.2** *Il existe $u_0 > 0$, deux constantes $c_0 > 0$ et $c > 0$ tels que, pour tout $\mathbf{u}$ vérifiant $u_0 < u^*(\mathbf{u})$ et $k > 0$ assez petit :*

$$\max_{1\leq j\leq d} \max_{\substack{u^{(j)}<v^{(j)}<w^{(j)}<u^{(j)}(1+k)\\ n\in E(u^*)}} \left| \frac{P\Big(\mathbf{M}_n \leq \mathbf{u}, \bigcap_{i=1,i\neq j}^{d}(X_{n+1}^{(i)} < u^{(i)}), v^{(j)} < X_{n+1}^{(j)} < w^{(j)}\Big)}{(\prod_{i=1}^{d} P(X^{(i)} < u^{(i)}))^n (\prod_{i=1,i\neq j}^{d} P(X^{(i)} < u^{(i)}))P(v^{(j)} < X_{n+1}^{(j)} < w^{(j)})} - 1 \right|$$
$$\leq c_0\Big(G(u^*)\Big)^c \tag{4.6}$$

On utilise ensuite, en faisant les identifications nécessaires, le lemme :

**Lemme 4.1.1** (Haiman [21]) *Soit $Y$ un élément aléatoire dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Soit $H$ appartenant à $\mathcal{E}$ et $\hat{P}$ une probabilité sur $E$ telle que $0 < \hat{P}(H) < 1$.*
*On suppose que sur $H$ la loi de probabilité de $Y$ est absolument continue par rapport à $\hat{P}$ et*

$$\max_{y\in H} \left|\frac{dP_Y}{d\hat{P}}(y) - 1\right| \Big(1 - \hat{P}(H)\Big)^{-1} = q < 1. \tag{4.7}$$

*Soit $Q$ une variable de Bernoulli indépendante de $Y$ telle que $P(Q = 0) = q$. Alors, il existe deux variables aléatoires $Y'$ à valeurs dans $H$ et $\overline{Y}$ à valeurs dans $H^c$ telles que si l'on pose :*

$$\hat{Y} = \begin{cases} Y & si\ Q = 1\ \ et\ Y \in H \\ \overline{Y} & si\ Q = 1\ \ et\ Y \in H^c \\ Y' & si\ Q = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

*alors la loi de $\hat{Y}$ est $\hat{P}$.*
*$H^c$ est le complémentaire de $H$ dans $E$.*

Nous démontrons le théorème 4.1.2 et construisons la suite $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n), n \geq 1\}$ dans le cas bivarié. Il est clair qu'on peut réécrire toutes les étapes de la démonstration en dimension supérieure.

## 4.2 Le cas bivarié

Dans ce cas, notre résultat est le suivant :

**Théorème 4.2.1** *Soit* $\{\mathbf{X}_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)}); n \geq 1\}$ *une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. avec* $\mathbf{X}_1 = (X_1^{(1)}, X_1^{(2)})$ *vecteur gaussien centré tel que :*

$$\mathbb{E}\,[(X_1^{(i)})^2] = 1; i = 1, 2 \quad et \quad \mathbb{E}\,(X_1^{(1)} X_1^{(2)}) = \rho;\ |\rho| < 1.$$

*Alors il existe une suite* $\{\hat{\mathbf{X}}_n, n \geq 1\}$ *i.i.d. définie sur le même espace de probabilité que* $\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$ *élargi de facteurs indépendants,* $\hat{\mathbf{X}}_1 = (\hat{X}^{(1)}, \hat{X}^{(2)})$ *;* $\hat{X}^{(1)}$*,* $\hat{X}^{(2)}$ *indépendantes* $\mathcal{N}(0,1)$*, telle que si* $\{(T_n, \mathbf{R}_n)\}$ *est la suite des records bivariés de* $\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$ *et* $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n)\}$ *celle de* $\{\hat{\mathbf{X}}_n, n \geq 1\}$*, alors il existe deux variables aléatoires entières* $N$ *et* $Q$ *telles que pour* $n \geq N$ *:*

$$\hat{T}_n = T_{n-Q} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{R}}_n = \mathbf{R}_{n-Q}. \tag{4.9}$$

*Par suite, si*

$$\hat{\mathbf{M}}_n = (\hat{M}_n^{(1)}, \hat{M}_n^{(2)}) \text{ avec } \hat{M}_n^{(i)} = \max(\hat{X}_1^{(i)}, \ldots, \hat{X}_n^{(i)})\ ;\ i = 1, 2$$

*alors, il existe* $N_0$ *tel que p.s. pour* $n \geq N_0$*,*

$$\hat{\mathbf{M}}_n = \mathbf{M}_n.$$

Observons comme précédemment que ce théorème est equivalent au

**Théorème 4.2.2** *Il existe* $r_0$ *et une suite* $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n), n \geq 1\}$ *de vecteurs aléatoires définis sur le même espace de probabilité que* $\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$ *élargi de facteurs indépendants,* $(\hat{T}_n)$ *étant une suite strictement croissante d'entiers ;* $\{\hat{\mathbf{R}}_n = (\hat{R}_n^{(1)}, \hat{R}_n^{(2)}); n \geq 1\}$ *est telle que :*

$$\mathbf{R}_0 < \hat{\mathbf{R}}_1 < \hat{\mathbf{R}}_2 < \ldots; \mathbf{R}_0 = (R_0^{(1)}, R_0^{(2)}) = (r_0, r_0).$$

*On a, en plus :*
*i)* $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n), n \geq 1\}$ *a la même loi de probabilité que* $\{(T_n, \mathbf{R}_n)\}$ *lorsque les coordonnées de la suite* $\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$ *sont indépendantes.*
*ii) Il existe deux variables aléatoires entières* $N$ *et* $Q$ *telles que p.s. pour* $n \geq N$ *:*

$$\hat{T}_n = T_{n-Q} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{R}}_n = \mathbf{R}_{n-Q}. \tag{4.10}$$

Au paragraphe (4.3), nous démontrerons le théorème 4.2.2 en construisant la suite $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n), n \geq 1\}$ satisfaisant i) et telle que :

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{n+1} &= \hat{T}_n + \inf_{j=1,2} K(j);\ K(j) = \inf\{k \geq 1, X^{(j)}_{\hat{T}_n+k} > \hat{R}^{(j)}_n\} \\
\hat{\mathbf{R}}_{n+1} &= (\hat{R}^{(1)}_{n+1}, \hat{R}^{(2)}_{n+1}) \text{ avec } R^{(j)}_{n+1} = \begin{cases} X^{(j)}_{\hat{T}_{n+1}} & \text{si } X^{(j)}_{\hat{T}_{n+1}} > \hat{R}^{(j)}_n \\ \hat{R}^{(j)}_n & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

On déduit alors le théorème 4.2.1 en utilisant la proposition 4.1.1.

**Proposition 4.2.1** (Haiman [24]) *Si $\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$ est i.i.d. avec indépendance des coordonnées, alors pour tout $0 < a < 1$ et $b$ tel que $b \ln 2 > 1$ :*

$$P\{G(R^*_n) > e^{-\frac{a}{2}[\frac{n}{b \ln n}]} \ i.s.\} = 0. \tag{4.11}$$

**Lemme 4.2.1** *Il existe deux constantes positives $c_1$, $c_2$ et $n_0$ tels que p.s. pour tout $n \geq n_0$ , l'événement*

$$F_n = \{F(R^*_n) > 1 - c_1 e^{-c_2 \frac{n}{\ln n}}\} \text{ se réalise.} \tag{4.12}$$

**Démonstration :**
D'après (4.11), $\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$ :

$$G(R^*_n) \leq e^{-\frac{a}{2}[\frac{n}{b \ln n}]}.$$

Ceci est équivalent à

$$F(R^*_n) \geq 1 - e^{-\frac{a}{2}[\frac{n}{b \ln n}]}.$$

Comme $[x] \geq x - 1$, on a

$$F(R^*_n) \geq 1 - e^{-\frac{a}{2}(\frac{n}{b \ln n} - 1)} = 1 - e^{\frac{a}{2}} e^{-\frac{an}{2b \ln n}}.$$

D'où (4.12) avec $c_1 = e^{\frac{a}{2}}$ et $c_2 = \frac{a}{2b}$. ∎

**Proposition 4.2.2** *Si $\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$ est i.i.d. avec indépendance des coordonnées, alors pour tout $\tau > 0$, on a*

$$P\{T_{n+1} - T_n \geq \psi(R^*_n) \ i.s.\} = 0. \tag{4.13}$$

**Démonstration :**
D'après (4.12), si on pose $v_n = c_1 e^{-c_2 \frac{n}{\ln n}}$, (4.13) est satisfaite si et seulement si :

$$P\{T_{n+1} - T_n \geq \psi(R_n^*), F(R_n^*) \geq 1 - v_n \ i.s.\} = 0.$$

Posons

$$B_n = \{T_{n+1} - T_n \geq \psi(R_n^*), F(R_n^*) \geq 1 - v_n\},$$

on a

$$P(B_n) = \int_{F(u^*)\geq 1-v_n} P\{T_{n+1} - T_n \geq \psi(u^*) \mid T_n = t, \mathbf{R}_n = \mathbf{u}\} dP_{(T_n,\mathbf{R}_n)}(t, \mathbf{u}),$$

or,

$$\begin{aligned}
P\{T_{n+1} - T_n \geq \psi(u^*) \mid T_n &= t, \mathbf{R}_n = \mathbf{u}\} \\
&= (P(X^{(1)} < u^{(1)})P(X^{(2)} < u^{(2)}))^{\psi(u^*)} \\
&\leq (F(u^*))^{\psi(u^*)} \\
&\simeq (G(u^*))^{\tau} \\
&\leq (v_n)^{\tau}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$P(B_n) \leq K e^{-K' \frac{n}{\ln n}} \ ; \ K = c_1^{\tau} \ ; \ K' = c_2 \tau.$$

On déduit (4.13) par le lemme de Borel Cantelli. ∎

## 4.3 Construction de la suite $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n), n \geq 1\}$

L'élément clé de la construction de la suite $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n), n \geq 1\}$ est le lemme (4.1.1). On construit la suite $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n), n \geq 1\}$ de façon récursive. On définit $(\hat{T}_1, \hat{\mathbf{R}}_1)$ indépendamment de $(\mathbf{X}_n)_{n\geq 1}$ et on suppose que la suite $(\hat{T}_p, \hat{\mathbf{R}}_p)$ est construite pour $1 \leq p \leq n$ de sorte que les événements de la forme $(\hat{T}_1 = t_1, \hat{\mathbf{R}}_1 \in \mathcal{A}_1); \ldots; (\hat{T}_n = t_n, \hat{\mathbf{R}}_n \in \mathcal{A}_n)$ (où $1 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ sont des entiers, et $\mathcal{A}_i, i = 1, \ldots, n$, des boréliens de $\mathbb{R}^2$) soient $\sigma\{\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{t_n}\} \times \sigma'$ mesurables, où $\sigma'$ est une $\sigma$ -tribu indépendante de $\sigma\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$.
Pour construire $(\hat{T}_{n+1}, \hat{\mathbf{R}}_{n+1})$, on applique le lemme 4.1.1 en faisant les identifications suivantes :
Soient $\mathbf{r} > \mathbf{R}_0$ et $n \geq 1$ fixés et soit

$$E = E_{\mathbf{r}} = \{(s, \mathbf{r}'), s \in \mathbb{N}, \mathbf{r}' > \mathbf{r}\}$$

$Y = Y_{t,\mathbf{r}}$ est définie sachant $\hat{T}_n = t$ , $\hat{\mathbf{R}}_n = \mathbf{r}$ par :

$$\{Y = Y_{t,\mathbf{r}} = (s, \mathbf{r}'); (s, \mathbf{r}') \in E_{\mathbf{r}}\} \iff \{\mathbf{X}_{t+1} < \mathbf{r}, \ldots, \mathbf{X}_{t+s-1} < \mathbf{r}, \mathbf{X}_{t+s} = \mathbf{r}'\}$$

et on prend, pour $r^* = r^*(\mathbf{r}) = \inf(r^{(1)}, r^{(2)})$,

$$H(\mathbf{r}) = \{(s, \mathbf{r}') \in E_{\mathbf{r}}, 1 \leq s \leq \psi(r^*), r^{(j)} < r'^{(j)} < r^{(j)}(1+k); j = 1 \text{ ou } j = 2\}.$$

Soit $\hat{P}$ la loi de probabilité induite par $E_{\mathbf{r}}$ lorsque les coordonnées des $\mathbf{X}_n$ sont indépendantes. On a le

**Lemme 4.3.1** *Il existe deux constantes positives $c_0$ et $c$ telles que :*

$$\max_{(s,\mathbf{r}') \in H(\mathbf{r})} \left| \frac{dP_Y}{d\hat{P}}(s, \mathbf{r}') - 1 \right| (\hat{P}(H^c(\mathbf{r})))^{-1} \leq c_0 (G(r^*))^{c-2\tau}. \tag{4.14}$$

**Démonstration :**
D'après la proposition 4.1.2, il existe deux constantes positives $c_0$ et $c$ telles que :

$$\max_{(s,\mathbf{r}') \in H(\mathbf{r})} \left| \frac{dP_Y}{d\hat{P}}(s, \mathbf{r}') - 1 \right| \leq c_0 (G(r^*))^{c}. \tag{4.15}$$

Soit $J(n) = \#\{j, 1 \leq j \leq 2, r_n^{(j)} > r_{n-1}^{(j)}\}$.
Pour $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
\hat{P}(H^c(\mathbf{r})) &\geq 1 - P\{T_{k+1} - T_k \leq \psi(r^*), J(k+1) = 1 \mid \mathbf{R}_k = \mathbf{r}\} \\
&= P\{T_{k+1} - T_k > \psi(r^*) \mid \mathbf{R}_k = \mathbf{r}\} \\
&\qquad + P\{T_{k+1} - T_k \leq \psi(r^*), J(k+1) \geq 1 \mid \mathbf{R}_k = \mathbf{r}\} \\
&\geq P\{T_{k+1} - T_k > \psi(r^*) \mid \mathbf{R}_k = \mathbf{r}\} \\
&= (P(X^{(1)} < r^{(1)}) P(X^{(2)} < r^{(2)}))^{\psi(r^*)} \\
&\geq (1 - G(r^*))^{2\psi(r^*)} \\
&\simeq (G(r^*))^{2\tau}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

On déduit (4.14) en appliquant (4.15) et (4.16). ∎

**Construction de $(\hat{T}_{n+1}, \hat{\mathbf{R}}_{n+1})$ :**
Pour $r^*$ suffisamment grand et pour $\tau$ vérifiant $0 < \tau < \inf(\tau_0, \frac{c}{2})$ on a,

$$q = c_0(G(r^*))^{c-2\tau} < 1.$$

On peut donc appliquer (4.7) et (4.8) :
Soit la variable aléatoire $Q$ donnée par le lemme 4.1.1, on pose :

$$Q_{n+1} = Q \; ; \; (P(Q_{n+1} = 0) = q(\mathbf{R}_n) = c_0(G(R_n^*))^{c-2\tau}).$$

On suppose que $Q_{n+1}$ ne dépend de $\{\mathbf{X}_n, n \geq 1\}$ et $(\hat{T}_1, \hat{\mathbf{R}}_1)$, ...,$(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n)$ qu'à travers $\hat{\mathbf{R}}_n$.
On définit $(\hat{T}_{n+1}, \hat{\mathbf{R}}_{n+1})$ comme suit :

$$\hat{T}_{n+1} = \hat{T}_n + \hat{Y}_1 \tag{4.17}$$

$$\hat{\mathbf{R}}_{n+1} = \hat{\mathbf{Y}}_2, \tag{4.18}$$

où $\hat{Y} = (\hat{Y}_1, \hat{\mathbf{Y}}_2)$ est donné par (4.8) du lemme 4.1.1.
On vérifie que $\{\hat{T}_1, \hat{\mathbf{R}}_1), \ldots, (\hat{T}_{n+1}, \hat{\mathbf{R}}_{n+1})\}$ satisfait la

**Proposition 4.3.1** (Deheuvels [8]) *Si les coordonnées des $\mathbf{X}_n$ sont indépendantes, la suite $\{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n)\}$ est une chaîne de Markov telle que pour tout $\mathbf{R}_0 < \mathbf{u}_1 < \ldots < \mathbf{u}_n$, $1 \leq t_1 < \ldots < t_n$ et $t > 0$, on a*

$$\begin{aligned} P\{\hat{T}_{n+1} - \hat{T}_n &= t, \hat{\mathbf{R}}_{n+1} > \mathbf{u}_n \mid \hat{T}_i = t_i, \hat{\mathbf{R}}_i = \mathbf{u}_i, i = 1, \ldots, n\} \\ &= P\{\hat{T}_{n+1} - \hat{T}_n = t, \hat{\mathbf{R}}_{n+1} > \mathbf{u}_n \mid \hat{\mathbf{R}}_n = \mathbf{u}_n\} \\ &= (P\{X_1^{(1)} < u_n^{(1)}\})^{t-1}(P\{X_1^{(2)} < u_n^{(2)}\})^{t-1} \\ &\qquad \times P\{(X_1^{(1)} > u_n^{(1)}) \cup (X_1^{(2)} > u_n^{(2)})\}. \end{aligned}$$

### 4.3.1 Démonstration du théorème 4.2.2

On pose

$$K(j) = \inf\{k \geq 1, X^{(j)}_{\hat{T}_n+k} > \hat{R}^{(j)}_n\} \; ; \; 1 \leq j \leq 2,$$

et

$$C_{n+1} = (\inf_{j=1,2} K(j) \leq \psi(R_n^*)) \cap (K(1) \neq K(2)).$$

D'après (4.17) et (4.18) $\hat{T}_{n+1}$ et $\hat{\mathbf{R}}_{n+1}$ sont tels que si $Q_{n+1} = 1$ et si l'événement $C_{n+1}$ se réalise, alors

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{n+1} &= \hat{T}_n + \inf_{j=1,2} K(j) \\
\hat{\mathbf{R}}_{n+1} &= (\hat{R}^{(1)}_{n+1}, \hat{R}^{(2)}_{n+1}) \text{ avec } R^{(j)}_{n+1} = \begin{cases} X^{(j)}_{\hat{T}_{n+1}} & \text{si } X^{(j)}_{\hat{T}_{n+1}} > \hat{R}^{(j)}_n \\ \hat{R}^{(j)}_n & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer que

$$P(Q_{n+1} = 0 \; i.s.) = 0.$$

et

$$P({C^c}_{n+1} \; i.s.) = 0.$$

**Lemme 4.3.2**

$$P(Q_{n+1} = 0 \; i.s.) = 0. \tag{4.19}$$

**Démonstration :**
D'après (4.12),

$$P(Q_{n+1} = 0 \; i.s.) = 0 \iff P(Q_{n+1} = 0, F(R^*_n) \geq 1 - c_1 e^{-c_2 \frac{n}{\ln n}} \; i.s.) = 0.$$

Posons

$$B_n = (Q_{n+1} = 0, F(R^*_n) \geq 1 - c_1 e^{-c_2 \frac{n}{\ln n}}).$$

Comme

$$P(Q_{n+1} = 0) = q(\mathbf{R}_n) = c_0 (G(R^*_n))^{c-2\tau},$$

on a

$$\begin{aligned}
P(B_n) &= \int_{F(r) \geq 1 - c_1 e^{-c_2 \frac{n}{\ln n}}} P(Q_{n+1} = 0 \mid R^*_n = r) dP_{R^*_n}(r) \\
&\leq K_1 e^{-K_1' \frac{n}{\ln n}} \; ; \; K_1 = c_0 c_1^{c-2\tau} \; ; \; K_1' = c_2(c - 2\tau).
\end{aligned}$$

On déduit (4.19) en utilisant le lemme de Borel-Cantelli, puisque $e^{-K' \frac{n}{\ln n}}$ est le terme général d'une série convergente. ∎

**Lemme 4.3.3**

$$P({C^c}_{n+1}\ i.s.) = 0. \tag{4.20}$$

**Démonstration :**
On pose

$$D_n = \{{C^c}_{n+1}, F(r_n^*) > 1 - c_1 e^{-c_2 \frac{n}{\ln n}}\}.$$

Alors,

$$P(D_n) = \sum_{t \geq n} \int_{\{\mathbf{r} | F(r^*) > 1 - c_1 e^{-c_2 \frac{n}{\ln n}}\}} P({C^c}_{n+1} \mid \hat{T}_n = t, \hat{\mathbf{R}}_n = \mathbf{r}) dP_{(\hat{T}_n, \hat{\mathbf{R}}_n)}(t, \mathbf{r}),$$

et

$$\begin{aligned} P({C^c}_{n+1} \mid \hat{T}_n = t, \hat{\mathbf{R}}_n = \mathbf{r}) &= 1 - P(C_{n+1} \mid \hat{T}_n = t, \hat{\mathbf{R}}_n = \mathbf{r}) \\ &= 1 - \int_{H(\mathbf{r})} dP_Y \\ &= \int_{H^c} d\hat{P} + \int_H d\hat{P} - \int_H (dP_Y / d\hat{P}) d\hat{P} \\ &\leq \hat{P}(H^c) + \int_H \left| 1 - (dP_Y / d\hat{P}) \right| d\hat{P}. \end{aligned}$$

On a, d'après (4.14), sur $H(\mathbf{r})$,

$$\left| 1 - (dP_Y / d\hat{P}) \right| \leq q(r^*) \hat{P}(H^c(\mathbf{r})) \,; \quad q(r^*) = c_0 (G(r^*))^{c - 2\tau}.$$

On en déduit :

$$P(D_n) \leq \int_{\{\mathbf{r} | F(r^*) > 1 - c_1 e^{-c_2 \frac{n}{\ln n}}\}} \hat{P}(H^c(\mathbf{r}))(1 + q(r^*)) dP_{\hat{\mathbf{R}}_n}(\mathbf{r}).$$

La définition de $H(\mathbf{r})$ nous donne :

$$\begin{aligned} \hat{P}(H(\mathbf{r})) &= \sum_{n=1}^{\psi(r^*)} P\{\mathbf{M}_{n-1} \leq \mathbf{r}, \mathbf{X}_n = \mathbf{r}', r^{(j)} < r'^{(j)} < r^{(j)}(1+k); \\ &\qquad\qquad j = 1 \text{ ou } j = 2\} \\ &= \sum_{n=0}^{\psi(r^*)-1} P\{\mathbf{M}_n \leq \mathbf{r}, \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{r}', r^{(j)} < r'^{(j)} < r^{(j)}(1+k); \\ &\qquad\qquad j = 1 \text{ ou } j = 2\}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.1.2, il existe une fonction

$$p(r^*) = c_0(G(r^*))^c,$$

telle que

$$P\{\mathbf{M}_n \leq \mathbf{r}, \mathbf{X}_n = \mathbf{r}', r^{(j)} < r'^{(j)} < r^{(j)}(1+k)\ ;\ j = 1 \text{ ou } j = 2\}$$

$$\geq (1 - p(r^*))P(\mathbf{M}_n \leq \mathbf{r})\Big( \sum_{\substack{i=1,2 \\ i \neq j}} P(X_1^{(i)} \leq r^{(i)})P(X_1^{(j)} \geq r^{(j)})\Big)$$

$$= (1 - p(r^*))P^n(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{r})\Big( \sum_{\substack{i=1,2 \\ i \neq j}} P(X_1^{(i)} \leq r^{(i)})P(X_1^{(j)} \geq r^{(j)})\Big).$$

D'où

$$\hat{P}(H(\mathbf{r})) \geq (1 - p(r^*))(1 - (P(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{r}))^{\psi(r^*)}),$$

et

$$\begin{aligned} \hat{P}(H^c(\mathbf{r})) &= 1 - \hat{P}(H(\mathbf{r})) \\ &\leq 1 - (1 - p(r^*))(1 - (P(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{r}))^{\psi(r^*)}) \\ &\leq (P(\mathbf{X}_1 \leq \mathbf{r}))^{\psi(r^*)} + p(r^*). \end{aligned}$$

Donc pour $n$ assez grand,

$$\hat{P}(H^c(\mathbf{r})) \leq (\text{const.})(e^{-c_2 \frac{n}{\ln n}} + (G(r^*))^c).$$

Par ailleurs, pour $n$ assez grand, si $1 - F(r^*) < c_1 e^{-c_2 \frac{n}{\ln n}}$,

$$\begin{aligned} q(r^*) &= c_0(G(r^*))^{c-2\tau} \\ &\leq (\text{const.})(e^{-c_2 \frac{n}{\ln n}})^{c-2\tau} \\ &\leq (\text{const.})(e^{-c_2(c-2\tau)\frac{n}{\ln n}}). \end{aligned}$$

Ainsi pour $n$ assez grand,

$$P(D_n) \leq (\text{const.})(e^{-c_2 \frac{n}{\ln n}} + e^{-cc_2 \frac{n}{\ln n}})(1 + e^{-c_2(c-2\tau)\frac{n}{\ln n}}).$$

On déduit (4.20) par le lemme de Borel-Cantelli puisque le deuxième membre est le terme général d'une série convergente. ∎

# Annexe

Geffroy dans [16] considére une suite i.i.d. bivariée $\{\mathbf{X}_n\}$, non nécessairement gaussienne, telle qu'il existe $(x_0, y_0)$, $x_0 \leq +\infty$, $y_0 \leq +\infty$, tel que

$$F(x_0, y_0) = P(X_1^{(1)} \leq x_0, X_1^{(2)} \leq y_0) = 1,$$

et

$$F(x, y) < 1 \quad \text{pour} \quad x < x_0 \quad \text{ou} \quad y < y_0.$$

Il montre que si la condition $(G)$ suivante est satisfaite,

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} \left\{ \frac{1 + F(x,y) - F(x,y_0) - F(x_0,y)}{1 - F(x,y)} \right\} = 0$$

alors $M_n^{(1)}$ et $M_n^{(2)}$ sont « asymptotiquement indépendants » au sens que

$$\max_{\substack{x \leq x_0 \\ y \leq y_0}} \left| P(M_n^{(1)} < x, M_n^{(2)} < y) - P(M_n^{(1)} < x) P(M_n^{(2)} < y) \right| = O(1/n).$$

Démontrons que lorsque $\{\mathbf{X}_n\}$ est gaussienne, la condition $(G)$ est vérifiée. On pose :

$$\begin{aligned} a &= F(x_0, y) - F(x, y), \\ b &= F(x, y_0) - F(x, y), \\ c &= 1 + F(x, y) - F(x, y_0) - F(x_0, y). \end{aligned}$$

On a $a + b + c = 1 - F(x, y)$, et il faut démontrer que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{c}{a + b + c} = 0$$

Soit

$$\begin{aligned}
c &= \int\int_{(X>x,Y>y)} f(t,s)dtds \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int\int_{(X>x,Y>y)} \exp[-\frac{t^2-2rts+s^2}{2(1-r^2)}]dtds.
\end{aligned}$$

La fonction de $x$, $h(x,y) = x^2 - 2rxy + y^2$ atteint son minimum au point $x = ry$. On a donc :

$$x^2 - 2rxy + y^2 \geq (1-r^2)y^2,$$

de même

$$x^2 - 2rxy + y^2 \geq (1-r^2)x^2.$$

On en déduit

$$x^2 - 2rxy + y^2 \geq \frac{1-r^2}{2}(x^2+y^2).$$

D'où

$$\begin{aligned}
c2\pi\sqrt{1-r^2} &= \int\int_{(X>x,Y>y)} \exp[-\frac{t^2-2rts+s^2}{2(1-r^2)}]dtds \\
&\leq \int\int_{(X>x,Y>y)} \exp[-\frac{1}{4}(t^2+s^2)]dtds \\
&= \int_x^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{4})dt \int_y^{+\infty} \exp(-\frac{s^2}{4})ds.
\end{aligned}$$

Or,

$$\int_x^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{4})dt < \frac{2}{x}\exp(-\frac{x^2}{4}).$$

D'où :

$$c2\pi\sqrt{1-r^2} < \frac{4}{xy}\exp(-\frac{1}{4}(x^2+y^2)).$$

On en déduit

$$c < \frac{2}{\pi xy\sqrt{1-r^2}}\exp(-\frac{1}{4}(x^2+y^2)).$$

D'autre part, il existe une fonction $\varphi$, $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 1$ telle que

$$b + c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2})dx = \varphi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\exp(-\frac{x^2}{2}).$$

De même :

$$a + c = \varphi_1(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}y}\exp(-\frac{y^2}{2}) \text{ avec } \lim_{x\to+\infty}\varphi_1(x) = 1.$$

D'où

$$\frac{a+b+2c}{c} > \sqrt{\frac{1-r^2}{2\pi}}[\varphi(x)y\exp(-\frac{1}{4}(x^2-y^2)) + \varphi_1(y)x\exp(\frac{1}{4}(x^2-y^2))].$$

L'une des deux exponentielles dans l'inégalité ci-dessus est $\geq 1$. D'où

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{a+b+2c}{c} = +\infty,$$

et par suite

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{c}{a+b+c} = 0.$$

■

# Bibliographie


[1] **Amram F., 1985.** Multivariate Extreme Value Distributions for Stationary Gaussian Sequences, *J.Multivariate Analysis,* 16, p. 237-240.

[2] **Berman, S.M., 1962.** Limiting distribution of the maximum term in a sequence of dependent random variables, *Ann. Math. Statist.*, 33, p.894-908.

[3] **Berman, S.M., 1964.** Limit theorems for the maximum term in stationary sequences, *Ann. Math. Statist.*, 35, p.502-516.

[4] **Chandler K.N., 1952.** The distribution and frequency of record values, *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser.B, 14, p. 220-228.

[5] **Davis R.A., 1979.** Maxima and minima of stationary sequences, *Ann. Probab.*, 7, p. 453-460.

[6] **De Haan L., 1976.** Sample extremes : an elementary introduction, *Statistit. Neerlandica*, 30, p. 161-172.

[7] **De Haan L., 1977.** Limit theory for multivariate sample extremes, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* , 40, p. 317-337.

[8] **Deheuvels P., 1974.** Majoration et minoration presque sûre optimale des éléments de la statistique ordonnée d'un échantillon croissant de variables aléatoires indépendantes, *Rend.Accad.Naz.Sci.Lincei* 56, p.707-719.

[9] **Deheuvels P., 1978.** Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes, *Pub. Inst. Stat. Univ. Paris*, XXIII, fasc.3-4, p. 1-36.

[10] **Deheuvels P., 1983.** Indépendance multivariée partielle et inégalités de Fréchet. Studies in Probability and Related Topics . Papers in Honour of OCTAV ONICESCU on his 90th Birthday , p. 145-155.

[11] **Fisher R.A. et Tippet L.H.C., 1928.** Limiting forms of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample, *Proc. Cambridge Philos, Soc.*, 24, p. 180-190.

[12] **Foster F.G. and Stuart A. 1954.** Distribution-free tests in time series based on the breaking of records, *J. Roy. Statist. Soc.*, Ser.B, 16, p. 1-22.

[13] **Fréchet M., 1927.** Sur la loi de probabilité de l'écart maximum, *Ann. Soc. Math. Polon.*, 6, p. 93-116.

[14] **Galambos J., 1975.** Limit laws for mixture with applications to asymptotic theory of extremes, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 32, p. 197-207.

[15] **Galambos., 1987.** The asymptotic theory of extreme order statistics, Robert E. Krieger Publishing company Malabar, Florida.

[16] **Geffroy J., 1958, 1959.** Contribution à la théorie des valeurs extrêmes, *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris*, VII, fasc. 3-4, p.37-121. VIII, fasc. 1, p.123-185.

[17] **Gnedenko B.V., 1943.** Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Ann. Math.*, 44, p. 423-453.

[18] **Habach L., 1997.** Comportement p.s. des extrêmes multivariés de suites i.i.d. de vecteurs gaussiens, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 325, Série I, p. 541-544.

[19] **Habach L., Haiman G., 1997.** Almost sure behaviour of extremes of m-dependent stationary sequences, Preprint.

[20] **Haiman G., 1981.** Valeurs extrémales de suites stationnaires de variables aléatoires m-dépendantes, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 17, n°3, p. 309-330.

[21] **Haiman G., 1987a.** Etude des extrêmes d'une suite stationnaire m-dépendante avec une application relative aux accroissements du processus de Wiener, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 23, n°3, p. 425-458.

[22] **Haiman G., 1987b.** Almost sure asymptotic behaviour of the record and record time sequences of a stationary gaussian process, *Mathematical Statistics and Probability Theory*, Vol A, p. 105-120.

[23] **Haiman G. et Puri M.L., 1990a.** A strong invariance principle concerning the J-upper order statistics for stationary m-dependent sequences, *J. Statist. Plann. Inference*, 25, p. 43-51.

[24] **Haiman G., 1992.** A strong invariance principle for the extremes of multivariate stationary m-dependent sequences, *J. Statist. Plann. Inference*, 32, p.147-163.

[25] **Haiman G. et Puri M.L., 1993.** A strong invariance principle concerning the J-upper order statistics for Gaussian sequences, *Ann. Probab.*, 21, N1, p. 86-135.

[26] **Haiman G., Kiki M., Puri M.L., 1995.** Extreme of Markov sequences, *J. Statist. Plann. Inference*,44, p.1-17.

[27] **Haiman G., Mayeur N., Nevzorov V. et Puri M., 1996.** Records and 2-block records of 1-dependent stationary sequences under local dependence, *Pub. IRMA Lille*, 40-X

[28] **Leadbetter R.M., 1974.** On extreme values in stationary sequences, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 28, p. 289-303.

[29] **Leadbetter M.R., Lindgren G., Rootzen H., 1983.** Extreme and related properties of random sequences and processes, Springer, New York .

[30] **Leadbetter M.R., et Rootzen H., 1988.** Extremal theory for stochastic processes, *Ann. Probab.*, 16, N2, p. 431-478.

[31] **Loynes R.M., 1965.** Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes, *Ann.Math.Statist.*, 36, p. 993-999.

[32] **Marshall A. et Olkin I., 1983.** Domains of attraction of multivariate extreme value distributions, *Ann. Probab.*, 11, p. 168-177.

[33] **Mittal et Ylvisaker D., 1975.** Limit distributions for the maximum of stationary Gaussian processes, *Stochastic Process. Appl.*, 3, p. 1-18.

[34] **Nevzorov V., 1987.** Records, *Theory Probab. Appl.*, 32, N2, p. 201-228.

[35] **Nevzorov V.B., 1995.** Asymptotic distributions of records in nonstationary schemes, *J. Statist. Plann. Inference*, 45, p.261-273.

[36] **O'Brien G.L., 1974.** Limit theorems for the maximum term of a stationary process, *Ann. Probab.*, 2, p. 540-545.

[37] **Pfeifer D., 1984.** A note on Moments of Certain Record Statistics, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 66, p. 293-296.

[38] **Pickands J. III 1954.** Maxima of stationary gaussian processes, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 7, p. 190-233.

[39] **Rényi A., 1962.** Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations . Colloquium on combinatorial Methods in Probability Theory (August 1-10, 1962), *Math. Inst., Aarhus Univ., Aarhus*, p. 104-117.

[40] **Rényi A., 1976.** On the extreme elements of observations, in Select Papers of Alfred Rényi, *Akadémiai Kiado*, Vol.3 p. 50-56.

[41] **Resnick S.I., 1987.** Extreme Values, Regular Variation and Point Processes, Springer, New York .

[42] **Sibuya M., 1960.** Bivariate extreme statistics, *Ann. Inst. Stat. Univ. Paris*, 11, p. 195-210.

[43] **Watson G.S. 1954.** Extreme values in sample from m-dependent stationary stochastic processes, *Ann. Math. Statist.*, 25, p. 789-800.