Nº d'ordre : 2112

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

par

Haykel SKHIRI

Opérateurs semi-Fredholm : structures et approximations

Soutenue le 28 Novembre 1997 devant la Commission d'Examen :

Président	:	G. CŒURÉ	Université de Lille I
Rapporteurs	:	J.P. LABROUSSE	Université de Nice
		S. STRATILA	Institut de Mathématiques de l'Académie Roumaine (Roumanie)
Examinateurs	:	M. MBEKHTA	Université de Lille I
		H. QUEFFELEC	Université de Lille I
		F.H. VASILESCU	Université de Lille I
		J. ZEMÀNEK	Institut de Mathématiques de l'Académie Polonaise (Pologne)

Table des matières

Remerciements

En premier lieu je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de recherche Monsieur M. MBEKHTA, Professeur à l'Université de Lille I, c'est à lui que va tout particulièrement ma reconnaissance pour la confiance et l'aide qu'il m'a accordé. Ses qualités humaines et scientifiques, sa disponibilité, sa gentillesse qu'il manifestait chaque fois que je m'adresse à lui, les conseils et la clarté des explications qu'il me prodiguait; tout cela est pour beaucoup dans l'aboutissement de ce travail. Je tiens encore à le remercier du fond du cœur.

Je remercie très sincèrement Monsieur G. CŒURÉ, Professeur à l'Université de Lille I, qui me fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je remercie tout particulièrement Monsieur J.P. LABROUSSE, Professeur à l'Université de Nice, et Monsieur S. STRATILA, Professeur à l'Institut de Mathématiques de Bucarest (Roumanie), qui se sont intéressés à ce travail et y ont rapporté des remarques et commentaires suggestifs.

Je remercie vivement Monsieur F.H. VASILESCU, Professeur à l'Université de Lille I, qui ma souvent écouté; je suis très sensible à l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie du jury de cette thèse.

Mes remerciments vont également à Monsieur H. QUEFFELEC, Professeur à l'Université de Lille I, et Monsieur J. ZEMÀNEK, Professeur à l'Institut de Mathématiques de Varsovie (Pologne) qui ont accepté d'examiner mon travail et me faire l'honneur de participer au jury de cette thèse.

Je tiens à remercier toute l'équipe d'Analyse Fonctionnelle et en particulier C. BADEA et C. BENHIDA. Au sein de cette équipe j'ai pu tirer profit des plusieurs exposés dans le cadre du groupe de travail.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Monsieurs M. BLEL, H. ELMIR, H. HARZALLAH et H. Ben MASSAOUD Professeurs à la Faculté des sciences de Monastir; ils m'ont encouragé à poursuivre mes études de troisième cycle. Qu'ils y trouvent ma profonde reconnaissance.

Je tiens à remercier le personnel de la Bibliothèque de Mathématiques de Lille, des sécrétariats et de la reprographie pour l'aide qu'ils m'ont toujours

prodiguée.

J'exprime enfin mes remerciements à mes amis pour leur soutien moral très précieux et inestimable.

Je ne pourrais pas citer toutes les personnes que je voudrais remercier ici, mais j'espère qu'elles se reconnaîtront.

Je dédie cette thèse à mes parents pour qui j'éprouve un grand amour et un profond respect que je tiens à leur exprimer ici, de la manière la plus humble.

1 Introduction

Dans cette thèse, nous nous intéressons à certains problèmes liés aux opérateurs semi-Fredholm. On évoque, notamment, le fameux problème d'approximation d'un opérateur T fixé dans $B(H)$ par des classes $\mathcal{M} \subseteq B(H)$. Ce problème consiste à déterminer la distance de T à $\mathcal{M}$ notée $\operatorname{dist}(T, \mathcal{M})$ et définie par $\operatorname{dist}(T, \mathcal{M}) = \inf\{\|T - L\| : L \in \mathcal{M}\}$. Il a été posé au début des années soixante-dix par P.R. Halmos [34], R.B. Holmes et B.R. Kripke [40] et largement étudié par de nombreux auteurs surtout dans le cas séparable. Citons en particulier, [1], [2], [7], [9], [13], [39]. Il a abouti à des résultats subtils dans la Théorie des Opérateurs ainsi qu'en Analyse Fonctionnelle.

Dans ce travail ce problème est abordé dans le cas hilbertien mais dans un cadre un peu restreint où l'on ne considère généralement que les classes d'opérateurs liées à l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm. Par exemple, dans le cas hilbertien séparable, si F^n (resp. $G^n_{\pm}$) désigne l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm (resp. semi-inversibles) d'indice n avec $n \in \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, nous déterminons $\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup\limits_{j \in J} F^j\Big)$ et $\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup\limits_{j \in J} G^j_{\pm}\Big)$ pour tout sous-ensemble J de $\overline{\mathbb{Z}}$. Nous calculons aussi la distance d'un opérateur arbitraire à l'ensemble $\mathcal{S} + K(H)$ et $\mathcal{S}_e$ où $K(H)$ désigne l'ensemble des opérateurs compacts et $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_e$) l'ensemble des isométries dans $B(H)$ (resp. $C(H) = B(H)/K(H)$).

En 1992 M. Mbekhta a établi un résultat très intéressant dans le cas hilbertien séparable sur les composantes connexes semi-Fredholm dans $B(H)$. Il a prouvé que les composantes connexes semi-Fredholm ont la même frontière et que $B(H)$ s'écrit comme la réunion de cette frontière commune (Δ) et de l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm. Ce résultat nous a incité à étudier la structure interne des composantes connexes semi-

Fredholm dans $B(H)$. Nous généralisons ce résultat pour toute réunion de composantes connexes semi-Fredholm et nous le montrons pour les fermetures des composantes connexes semi-inversibles. D'autre part, nous donnons quelques résultats sur la structure des composantes connexes semi-Fredholm. Pour cela, on note F^n_m l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm appartenant à F^n et de nullité fixée égale à $m \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ $(n \leq m)$. Nous prouvons que pour tout $J \subseteq \overline{\mathbb{N}}$, $\bigcup_{j \in J} F^n_j$ est connexe par arcs et que $F^n_{\underline{j}}$ est dense dans $\bigcup_{j \in J} F^n_j$ avec $\underline{j} = \inf\{j : j \in J\}$ et $n \leq \underline{j}$.

L'abondance des résultats dans le cas hilbertien séparable d'une part et le manque de travaux dans le cas non séparable du moins pour tout ce qui concerne la structure des opérateurs semi-Fredholm d'autre part, nous a motivé à donner quelques résultats sur ce sujet dans le cas non séparable et de discuter dans ce cas le résultat de M. Mbekhta mentionné auparavant. Dans le cas séparable, on montre que l'ensemble $\mathcal{F}$ des opérateurs Fredholm, $\overline{\mathcal{F}}$, l'ensemble F_+ des opérateurs Fredholm à gauche et $\overline{F_+}$ ont tous la même frontière Δ. Il est donc naturel de se demander si ces égalités restent vraies dans le cas non séparable.

D'autre part, dans le cas hilbertien non séparable, nous donnons quelques résultats sur les opérateurs α-semi-Fredholm qui sont des généralisations naturelles des opérateurs semi-Fredholm. Rappelons qu'un sous-espace X de H est dit α-fermé, α étant un cardinal compris entre $\aleph_0$ et $\dim H$, s'il existe un sous-espace fermé M de H tel que $M \subseteq X$ et $\dim(\overline{X \cap M^\perp}) < \alpha$ et qu'un opérateur T est dit α-semi-Fredholm si l'image de T est un sous-espace α-fermé et $\min\{\dim N(T), \dim N(T^*)\} < \alpha$. En particulier, les opérateurs $\aleph_0$-semi-Fredholm sont exactement les opérateurs semi-Fredholm. Nous étudions aussi les points de continuité de l'application $\gamma_\alpha : T \longmapsto \gamma_\alpha(T)$ où $\gamma_\alpha(T)$ désigne la conorme de poids α de T qui caractérise exactement les opérateurs à image α-fermée.

Cette thèse comporte deux parties.

Nous commençons par rappeler certains résultats classiques de la Théorie des Opérateurs, notamment, la définition de la conorme d'un opérateur et le fameux théorème de Kato sur la stabilité des opérateurs semi-Fredholm par des petites perturbations. Nous rappelons également quelques résultats primordials du module minimal essentiel $m_e(T) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_e(|T|)\}$, qui joue un rôle crucial dans cette thèse ainsi que d'autres résultats dont on aura besoin dans la suite.

Dans tout ce travail, H désigne un espace de Hilbert complexe de dimension infinie et $B(H)$ l'algèbre des opérateurs bornés de H dans lui même. Pour tout $T \in B(H)$, nous notons T^*, $N(T)$ et $R(T)$ respectivement l'adjoint, le noyau et l'image de T. On désigne par $\alpha(T) = \dim N(T)$ la nullité de T et par $\beta(T) = \dim(H/R(T))$ la codimension de $R(T)$. D'autre part, pour un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $B(H)$, on note $\overline{\mathcal{M}}$, $\mathrm{int}(\mathcal{M})$ et $\partial(\mathcal{M})$ respectivement la fermeture, l'intérieur et la frontière de $\mathcal{M}$ dans $B(H)$.

Première partie

Dans toute cette partie, on suppose que H est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie.

Dans le premier paragraphe, nous déterminons $\mathrm{dist}\Big(T, \bigcup\limits_{j \in J} F^j\Big)$ $(J \subseteq \overline{\mathbb{Z}})$ en fonction de $m_e(T)$ et $m_e(T^*)$. Nous montrons l'égalité $\overline{\bigcup\limits_{j \in J} F^j} = \bigcup\limits_{j \in J} \overline{F^j}$ en justifiant le fait que $\overline{\bigcup\limits_{j \in J} F^j}$ s'écrit comme la réunion disjointe de $\bigcup\limits_{j \in J} F^j$ et d'une partie Δ de $B(H)$ indépendante de J, qui n'est autre que l'ensemble des opérateurs non semi-Fredholm. Ce fait permet également d'établir que la frontière de $\bigcup\limits_{j \in J} F^j$ est égale à Δ pour $J \subseteq \overline{\mathbb{Z}}$. Par ailleurs, nous prouvons que $\bigcup\limits_{j \in J} F^j$ est égale à l'intérieur de $\overline{\bigcup\limits_{j \in J} F^j}$. Ainsi, nous déduisons que les ensembles $\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}$ (avec $J \subsetneqq \mathbb{Z}$) ont tous la même frontière, égale à Δ. Plus précisément, $\partial(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}) = \partial(\bigcup_{j\in J} \overline{F^j}) = \partial(\bigcup_{j\in J} F^j) = \Delta$ (avec $J \subsetneqq \overline{\mathbb{Z}}$.) En particulier, si on note $\mathcal{F}$ (resp. F_+) l'ensemble des opérateurs Fredholm (resp. semi-Fredholm à gauche), on obtient $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \Delta$, $\overline{F_+} = F_+ \cup \Delta$, $\mathrm{int}(\overline{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}$, $\mathrm{int}(\overline{F_+}) = F_+$ et $\partial(\mathcal{F}) = \partial(\overline{\mathcal{F}}) = \partial(\overline{F_+}) = \partial(F_+) = \Delta$.

Un autre résultat important sur les opérateurs semi-Fredholm concernant, cette fois les opérateurs semi-inversibles, dit que pour tout $T \in B(H)$ et $J \subseteq \overline{\mathbb{Z}}$, $\mathrm{dist}\big(T, \bigcup_{j\in J} F^j\big) = \mathrm{dist}\big(T, \bigcup_{j\in J} G^j_\pm\big)$. Ceci nous permet de remarquer que $\overline{\bigcup_{j\in J} G^j_\pm} = \bigcup_{j\in J} \overline{G^j_\pm} = \overline{\bigcup_{j\in J} F^j}$ et d'établir les mêmes formules sur la fermeture, l'intérieur et la frontière pour $\overline{\bigcup_{j\in J} G^j_\pm}$.

Dans le deuxième paragraphe, nous nous intéressons à l'étude des structures internes des composantes connexes semi-Fredholm. Nous définissons F^n_m comme l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm appartenant à F^n et de nullité fixée égale à m $(n \leq m)$. Nous remarquons que si $n < m$ et $m > 0$, $\bigcup_{j=0}^{p} F^n_{m+j}$ est d'intérieur vide et ainsi, nous concluons que $\bigcup_{j=0}^{p} F^n_{m+j}$ est un ouvert si et seulement si $m = n$ ou $m = 0$. Nous montrons que si $m, m' \in \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, et T, $L \in F^n_m \cup F^n_{m'}$, il existe un chemin continu inclus dans $F^n_m \cup F^n_{m'}$, d'extrémités T et L et par conséquent, nous prouvons que pour tout $J \subseteq \overline{\mathbb{N}}$, $\bigcup_{j\in J} F^n_j$ est connexe par arcs, avec $j_J = \inf\{j : j \in J\} \geq n$.

Dans la deuxième partie de ce paragraphe, nous montrons que tout opérateur non semi-Fredholm peut être approché par une suite d'opérateurs de F^n_m. Cela entraîne que $\Delta \subseteq \overline{F^n_m}$ pour tous n, m tels que $n \leq m$. De plus, nous déterminons explicitement $\mathrm{dist}\big(T, \bigcup_{j\in J} F^n_j\big)$ et nous montrons que $\mathrm{dist}\big(T, \bigcup_{j\in J} F^n_j\big) = \mathrm{dist}(T, F^n_{j_J})$. Ceci prouve que $F^n_{j_J}$ est dense dans $\bigcup_{j\in J} F^n_j$.

Dans le troisième paragraphe, nous nous intéressons à une classe très particulière d'opérateurs semi-Fredholm; à savoir la classe $\mathcal{S}_e = \{L \in B(H) : \pi(L^*)\pi(L) = \pi(I)\}$ où $\pi(L)$ dénote la classe de T dans l'algèbre de Calkin $C(H) = B(H)/K(H)$. Nous déterminons explicitement $\text{dist}(T, \mathcal{S} + K(H))$, $\text{dist}(T, \mathcal{S}_e)$ et $\text{dist}(T, \mathcal{V}_e)$ en fonction de la norme essentielle $\|T\|_e := \|\pi(T)\|$ et du module minimal essentiel $m_e(T)$ de l'opérateur T. $\mathcal{S} := \{L \in B(H) : L^*L = I\}$ étant la classe des isométries, $\mathcal{V} = \mathcal{S}^* \cup \mathcal{S}$ la classe des isométries partielles maximales et $\mathcal{V}_e = \mathcal{S}_e{}^* \cup \mathcal{S}_e$. Nous montrons, de plus, que toutes ces distances sont atteintes. Ceci prouve, en particulier que ces classes sont des parties fermées de $B(H)$ et nous déduisons que $\mathcal{V}_e = \mathcal{V} + K(H)$. Cette dernière égalité donne d'une manière différente une réponse du résultat déjà connu de P. de la Harpe (voir, [35]) sur le relèvement dans l'algèbre de Calkin : si T est un opérateur de B(H) tel que $\pi(T)$ soit une isométrie dans $C(H)$, alors T s'écrit comme la somme d'une isométrie partielle maximale et d'un opérateur compact. D'autre part, nous prouvons que $\mathcal{S}_e \cap I_n\,(n \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\})$ est à la fois ouvert et fermé dans $\mathcal{S}_e$ où I_n désigne l'ensemble des opérateurs d'indice n. Enfin, nous prouvons que $\partial(\mathcal{V}_e) = \mathcal{V}_e$, $\partial(\mathcal{S} + K(H)) = \mathcal{S} + K(H)$ et $\partial(\mathcal{S}_e) = \mathcal{S}_e$.

Deuxième partie

Dans toute cette partie, on suppose que H est un espace de Hilbert non séparable.

Dans le premier paragraphe nous introduisons la notion du module minimal d'un élément a d'une C^*-algèbre unitaire A, ce module minimal est noté $\eta(a)$ et défini par :

$$\eta(a) = \inf\{\|ax\| : \ x \in A \ \text{ et } \ \|x\| = 1\}.$$

Nous montrons qu'un élément a de A admet un inverse de Moore-Penrose $a^\dagger$ tel que $a^\dagger a = e$ si et seulement si son module minimal $\eta(a)$ est strictement positif. Nous montrons que $\eta(a)$ est égal à $\inf \sigma(|a|)$ où $|a|$ dénote la racine carrée de a^*a et que l'application $\eta : a \longmapsto \eta(a)$ est continue.

Dans le deuxième paragraphe, nous étudions les opérateurs α-semi-Fredholm. Notons, $J_\alpha(H) = \{T \in B(H) : \dim(\overline{R(T)}) < \alpha\}$ et $K_\alpha(H) = \overline{J_\alpha(H)}$ la fermeture de $J_\alpha(H)$ dans $B(H)$. Comme pour les opérateurs semi-Fredholm, le module minimal $m_e(\cdot)$ joue un rôle important. On a heureusement une quantité qui joue le même rôle que ce dernier pour les opérateurs α-semi-Fredholm. Cette quantité n'est autre que le module minimal $\eta(\pi_\alpha(\cdot))$ (noté $m_\alpha(\cdot)$) de $\pi_\alpha(\cdot)$ où π_α dénote la surjection canonique de $B(H)$ sur l'algèbre quotient $C_\alpha(H) = B(H)/K_\alpha(H)$. Nous remarquons que $m_\alpha(T) > 0$ caractérise exactement l'ensemble Φ_+^α des opérateurs α-semi-Fredholm à gauche. Nous montrons que $m_\alpha(T)$ est le rayon de la plus grande boule ouverte centrée en T et incluse dans Φ_+^α. Nous établissons aussi un théorème qui étend le théorème de Kato aux opérateurs α-semi-Fredholm en prouvant que pour tout $T \in \Phi_\pm^\alpha$ et pour tout $S \in B(H)$ tel que $\|T - S\| < m_\alpha(T)$, $S \in \Phi_\pm^\alpha$ et $\mathrm{ind}_\alpha(T) = \mathrm{ind}_\alpha(S)$ où $\mathrm{ind}_\alpha(\cdot)$ dénote l'indice de poids α. Nous montrons aussi que pour tout opérateur $S \in B(H)$ tel que $R(S)$ soit un sous-espace α-fermé et si $L \in B(\mathcal{H})$ (avec $\mathcal{H} = \overline{R(S)}$) est un opérateur α-semi-Fredholm à gauche alors $R(LS)$ est un sous-espace α-fermé.

Dans le troisième paragraphe, nous continuons l'étude des opérateurs α-semi-Fredholm et nous nous intéressons, cette fois, aux points de continuité de la conorme de poids α définie par :

$$\begin{aligned}\gamma_\alpha(T) \;=\; \sup\Big\{ \rho(X,T) : \; & X \text{ est un sous-espace fermé de } N(T)^\perp \text{ et} \\ & \dim(X^\perp \cap N(T)^\perp) < \alpha\Big\},\end{aligned}$$

où

$$\rho(M,T) = \begin{cases} \inf\{\|T(x)\| : x \in M \text{ et } \|x\| = 1\} & \text{si } M \neq \{0\}, \\ +\infty & \text{si } M = \{0\}. \end{cases}$$

Nous montrons que pour tout $T \in J_\alpha(H) \cup \left(K_\alpha(H)\right)^c$, $\gamma_\alpha(T) = \inf\left\{\lambda : \lambda \in \sigma_\alpha(|T|) \setminus \{0\}\right\}$ où $\sigma_\alpha(T)$ désigne le spectre de poids α de l'opérateur T. Ceci nous permet, par exemple, de montrer que pour tout $T \in J_\alpha(H) \cup \left(K_\alpha(H)\right)^c$, $\gamma_\alpha(T)$ est égale à la conorme $c(\pi_\alpha(T))$ de $\pi_\alpha(T)$. Nous prouvons que $c(\pi_\alpha(T)) = \sup\limits_{K \in K_\alpha(H)} \gamma(T+K)$ et que ce supremum est atteint. Cela entraîne que pour tout $T \in J_\alpha(H) \cup \left(K_\alpha(H)\right)^c$, $\gamma_\alpha(T) = \sup\limits_{K \in K_\alpha(H)} \gamma(T+K)$ et que ce supremum est atteint. Par ailleurs, nous montrons que $T \in B(H)$ est un point de continuité pour l'application $c_\alpha : B(H) \longrightarrow [0, +\infty]$ donnée par $c_\alpha : T \longmapsto c(\pi_\alpha(T))$ si et seulement si $c(\pi_\alpha(T)) = 0$ ou $T \in \Phi_\pm^\alpha$. Par conséquent, nous déduisons que les points de continuité de l'application $\gamma_\alpha : B(H) \longrightarrow [0, +\infty]$ donnée par $\gamma_\alpha : T \longmapsto \gamma_\alpha(T)$ sont exactement les opérateurs T de $B(H)$ tel que $T \notin K_\alpha(H)$ et $\gamma_\alpha(T) = 0$ ou $T \in \Phi_\pm^\alpha$.

Dans le quatrième paragraphe, nous nous intéressons au problème d'approximation qui est posé tout au début, dans le cas hilbertien non séparable. Nous calculons certaines distances à des classes d'opérateurs liées à l'ensemble semi-Fredholm. La difficulté, dans ce cas, est de distinguer les opérateurs d'indice infini. En d'autres termes, il faudrait comparer des cardinaux infinis. Notons que ce problème ne se pose pas dans le cas hilbertien séparable, puisque le seul cardinal infini dans ce cas est $\aleph_0$. Nous calculons la distance aux opérateurs Fredholm ainsi qu'aux opérateurs semi-inversibles $G_\pm^\beta$ d'indice β. Cette distance, contrairement au cas séparable, admet différentes formules suivant que $|\beta| \leq \tau(T)$ ou $|\beta| > \tau(T)$. Nous montrons aussi les mêmes formules pour les composantes connexes semi-Fredholm d'indice β. Ceci donne une idée sur la complexité de l'étude des composantes connexes semi-Fredholm dans le cas non séparable. Nous déterminons également la distance aux opérateurs semi-Fredholm à gauche et à droite.

Dans le dernier paragraphe, nous nous intéressons à l'étude des composantes connexes dans le cas non séparable. Nous montrons que le résultat de M. Mbekhta cité auparavant sur les composantes connexes semi-Fredholm, ne se généralise pas au cas hilbertien non séparable. En fait, nous avons les mêmes résultats que dans le cas séparable pour les composantes connexes semi-Fredholm d'indice n compris entre $-\aleph_0$ et $\aleph_0$. C'est à dire, pour tout $J \subsetneqq \overline{\mathbb{Z}}$, on a $\operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big) = \bigcup_{j\in J} F^j$ et la frontière de $\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}$ coïncide avec la frontière $\bigcup_{j\in J} F^j$ et est indépendante du choix de J. Notons Λ cette frontière commune. La différence des résultats obtenus par rapport au cas séparable est due essentiellement aux cardinaux qui sont strictement supérieurs à $\aleph_0$. En effet, nous montrons dans le cas hilbertien non séparable que deux composantes connexes semi-Fredholm d'indices α et β avec $\alpha \neq \beta$ et $\alpha, \beta > \aleph_0$ ou $\alpha, \beta < -\aleph_0$ sont incomparables c'est à dire $\partial(F^\alpha) \not\subset \partial(F^\beta)$ et $\partial(F^\beta) \not\subset \partial(F^\alpha)$ où F^β désigne l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm d'indice β. Nous montrons aussi que si $\alpha = \dim H$, alors $\Lambda \subsetneqq \partial(F^\beta)$, $\partial(\overline{F_+}) \subsetneqq \partial(F_+)$ et $\partial(\mathcal{F}) \neq \partial(F_+)$. Ceci diffère du cas séparable.

Préliminaires

2 Préliminaires

Dans ce paragraphe, on donne quelques résultats sur la théorie des opérateurs semi-Fredholm en s'en tenant strictement à ce qui interviendra dans cette thèse.

Lorsque nous parlerons d'algèbres dans cette thèse, il s'agira toujours d'algèbres sur le corps des nombres complexes. Dans ce travail nous nous intéressons essentiellement aux algèbres des opérateurs bornés d'un espace de Banach X dans un autre espace de Banach Y en particulier $B(H)$ l'algèbre de Banach des opérateurs bornés de H dans H avec H un espace hilbertien; nous nous intéressons aussi aux algèbres quotients $B(H)/I$ avec I est un idéal fermé de $B(H)$ satisfaisant certaines hypothèses.

Le noyau et l'image d'un opérateur T de $B(H)$ se notent $N(T)$ et $R(T)$, et le second est un sous-espace de H qui n'est pas nécessairement fermé. L'adjoint de T s'écrit T^*. Rappelons les identités élémentaires et fondamentales [20], [57]

$$N(T) = (R(T^*))^{\perp}, \qquad \overline{R(T)} = N(T^*)^{\perp}. \tag{2.1}$$

En 1958 T. Kato [44], introduisit pour la première fois la conorme d'un opérateur T qui est définie par :

$$\gamma(T) = \inf\Big\{\frac{\|T(x)\|}{d(x, N(T))} : x \notin N(T)\Big\}, \tag{2.2}$$

où $d(x, N(T))$ désige la distance dans X de x à $N(T)$.

Alors on peut voir sans difficulté les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\gamma(T) &= \inf\Big\{\|T(x)\| : x \in N(T)^{\perp} \text{ et } d(x, N(T)) = 1\Big\}, \\
&= \inf\Big\{\tfrac{\|T(x)\|}{d(x,N(T))} : x \in X \text{ et } d(x, N(T)) \geq a\|x\|, \text{ avec } 0 < a < 1\Big\}, \\
&= \sup\Big\{a : \|T(x)\| \geq a\, d(x, N(T))\Big\}.
\end{aligned}$$

On remarque que pour les espaces hilbertiens la conorme d'un opérateur $T \in B(H)$ admet une expression plus simple :

$$\gamma(T) = \inf\Big\{\|T(x)\| : x \in N(T)^{\perp} \text{ et } \|x\| = 1\Big\}. \tag{2.3}$$

T. Kato montra dans son fameux article [44], que les opérateurs à image fermée sont exactement les opérateurs de $B(X,Y)$ dont la conorme est strictement positive. En plus il montra que la conorme est stable par passage à l'adjoint. Plus précisément

Théorème 2.1 ([18], [31], [32], [43], [44])
Soit $T \in B(X,Y)$, alors :

1) $\gamma(T) > 0$ *si et seulement si* $R(T)$ *est fermé;*

2) $\gamma(T) = \gamma(T^*)$.

Comme la théorie des opérateurs semi-Fredholm est liées aux opérateurs à image fermée, il est donc nécessaire de donner quelques résultats classiques mais essentiels sur cette classe d'opérateurs.

Théorème 2.2 ([18], [31])
Soit $T \in B(X,Y)$. Supposons qu'il existe N un sous-espace fermé de Y tel que $R(T) \oplus N$ (somme directe algébrique) est un fermé de Y. Alors $R(T)$ est un fermé.

Démonstration :

Soit T_0 l'opérateur défini par :

$$\begin{array}{rcl} T_0 \ : \ X \times N & \longrightarrow & Y \\ (x,y) & \longmapsto & T(x)+y. \end{array}$$

Alors, T_0 est un opérateur borné et comme par hypothèse $R(T_0) = R(T) + N$ est un fermé de Y, on en déduit que : $\gamma(T_0) > 0$.

D'ailleurs on a : $R(T) \cap N = \{0\}$, donc $N(T_0) = N(T) \times \{0\}$. Ceci prouve en tenant compte de la relation (2.2), que :

$$\begin{aligned} \|T(x)\| = \|T_0(x,0)\| & \geq \gamma(T_0)\, d\big((x,0), N(T_0)\big), \\ & = \gamma(T_0)\, d(x, N(T)). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\gamma(T) \geq \gamma(T_0) > 0$. ∎

Corollaire 2.3 ([31], Corollaire IV.1.13)

Soit $T \in B(X,Y)$. Supposons que $\dim(Y/R(T))$ *est finie, alors $R(T)$ est fermé.*

Démonstration :

Vu l'hypothèse, il existe N un sous-espace de dimension égale à $\dim(Y/R(T))$ tel que Y soit la somme directe de $R(T)$ et de N (c.à.dire $Y = R(T) \oplus N$). Donc ceci nous permet par le Théorème 2.2, de conclure que $R(T)$ est un sous-espace fermé. ∎

Lemme 2.4 ([31], Lemme IV.2.9)

Soit $T \in B(X,Y)$ un opérateur à image fermée. Supposons qu'il existe M un sous-espace de X (non nécessairement fermé) tel que $N(T)+M$ est un sous-espace fermé, alors $T(M)$ est fermé. En particulier, si M est fermé et $\dim N(T)$ *est finie alors $T(M)$ est fermé.*

Démonstration :
Soit T_1 la restriction de T à $N(T)+M$. Alors T_1 est un opérateur borné et il est clair que $N(T_1)=N(T)$. D'où, $\gamma(T_1)\geq\gamma(T)>0$. Donc, il résulte du Théorème 2.1, que $T(M)=T_1(M+N(T))=R(T_1)$ est un fermé. ■

Pour un opérateur T de $B(X,Y)$, on notera $\alpha(T)$ la nullité de T c'est à dire $\alpha(T)=\dim N(T)$ et $\beta(T)$ la codimension de $R(T)$ c'est à dire $\beta(T)=\dim Y/R(T)$.

Considérons les classes d'opérateurs suivantes :

- $F_+=\{T\in B(H) : R(T)$ est fermé et $\alpha(T)$ est finie$\}$, l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm à gauche.
- $F_-=\{T\in B(H) : R(T)$ est fermé et $\alpha(T^*)$ est finie$\}$, l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm à droite.
- $F=F_+\cup F_-$, l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm.
- $\mathcal{F}=F_+\cap F_-$, l'ensemble des opérateurs Fredholm.

Remarquons au passage que l'ensemble des opérateurs inversibles est inclus dans $\mathcal{F}$ et que l'ensemble des opérateurs semi-inversibles est inclus dans F.

Pour tout T de $B(H)$, on appelle spectre essentiel de T, l'ensemble $\sigma_e(T)$ défini par :

$$\sigma_e(T)=\{\lambda\in\mathbb{C} : T-\lambda I \text{ n'est pas Fredholm }\}.$$

Alors $\sigma_e(T)$ est un ensemble compact de $\mathbb{C}$, non vide inclus dans le spectre classique ($\sigma_e(T)\subseteq\sigma(T)$).

Pour un opérateur T semi-Fredholm on définit, l'indice de T, $\mathrm{ind}(T)$ par

$$\text{(2.4)} \qquad \mathrm{ind}(T) = \begin{cases} \alpha(T) - \alpha(T^*) & \text{si } \max\{\alpha(T), \alpha(T^*)\} \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{si } \alpha(T) \text{ est infinie,} \\ -\infty & \text{si } \alpha(T^*) \text{ est infinie.} \end{cases}$$

Maintenant, on va énoncer l'un des premiers théorèmes importants de la théorie des opérateurs semi-Fredholm établi en 1958 par T. Kato [44]. Ce théorème affirme que les opérateurs semi-Fredholm sont stables par les petites perturbations. Plus précisément :

Théorème 2.5 ([18], [31], [43], [44])
Soient $T \in B(X,Y)$ un opérateur semi-Fredholm et $S \in B(X,Y)$ tel que $\|T - S\| < \gamma(T)$, alors :

i) S *est semi-Fredholm;*

ii) $\alpha(S) \leq \alpha(T)$ *et* $\beta(S) \leq \beta(T)$*;*

ii) $\mathrm{ind}(S) = \mathrm{ind}(T)$.

L'une des conséquences importantes du théorème de Kato, le corollaire suivant :

Corollaire 2.6 ([31], Corollaire V.1.7)
Soient $T \in B(X,Y)$ un opérateur semi-Fredholm et $S \in B(X,Y)$ tel que $\|S\| < \gamma(T)$, alors il existe un réel $\rho > 0$ tel que $\alpha(T + \lambda S)$ et $\beta(T + \lambda S)$ sont constantes pour tout $0 < |\lambda| < \rho$.

Remarque 2.7

Dans le cas ou $S = I$, K.H. Förster et M.A. Kaashoek ont montré [29], dans le cas des espaces de Banach et pour les opérateurs Fredholm que le plus grand réel strictement positif ρ tel que $\alpha(T + \lambda I)$ et $\beta(T + \lambda I)$ sont constantes pour tout $0 < |\lambda| < \rho$, est égal à $\lim_{n\to+\infty} \gamma(T^n)^{\frac{1}{n}}$. Et d'autre part, ils ont remarqué que $\lim_{n\to+\infty} \gamma(T^n)^{\frac{1}{n}} = \sup_{n>0} \gamma(T^n)^{\frac{1}{n}} \geq \gamma(T)$. Ce résultat a été généralisé pour les opérateurs semi-Fredholm par J. Zemánek (voir [62]). L'essentiel pour la suite de ce travail, c'est qu'on peut prendre $\rho = \gamma(T)$ dans le Corollaire 2.6.

Si $X = Y$, on note $B(X)$ à la place de $B(X, X)$. Nous noterons $K(X)$ l'ensemble des opérateurs compacts sur X; on voit facilement que c'est un ideal bilatère hermitien fermé dans $B(X)$.

On appelle algèbre de Calkin de X et on note $C(X)$ le quotient de $B(X)$ par $K(X)$ c'est à dire $C(X) = B(X)/K(X)$; c'est une C^*-algèbre avec unité. Le premier qui s'est intéressé à cette algèbre très particulière était J.W. Calkin. Dans son article [17] publié en 1941, dans le cas hilbertien, il donne une esquisse de la nouvelle théorie des opérateurs semi-Fredholm.

Nous désignerons par $\pi : B(X) \to C(X)$ la projection canonique et $\|T\|_e = \|\pi(T)\|$ la norme essentielle de T.

Du point de vue historique, la relation entre l'inversibilité dans $B(X)$ modulo l'idéal des opérateurs compacts et la notion des opérateurs Fredholm a été prouvé pour la première fois par Atkinson (voir [4] et [5]), en montrant qu'un opérateur $T \in B(H)$ est Fredholm si et seulement si $\pi(T)$ est inversible dans $C(X)$.

De même il montra que si $\pi(T)$ est semi-inversible à gauche (resp. à droite) alors $T \in F_+$ (resp. $T \in F_-$). La réciproque tombe en défaut, c'est à dire on a seulement les inclusions $\phi_{le} \subsetneqq F_+$ et $\phi_{re} \subsetneqq F_-$, où

$$\begin{aligned}\phi_{le} &= \{L \in B(X) : \pi(L) \text{ est semi-inversible à gauche dans } C(X)\},\\ \phi_{re} &= \{L \in B(X) : \pi(L) \text{ est semi-inversible à droite dans } C(X)\}.\end{aligned}$$

Mais si pour $T \in F_+$ (resp. $T \in F_-$) on rajoute la condition $R(T)$ (resp. $N(T)$), admet un complément topologique alors $T \in \phi_{le}$ (resp. $T \in \phi_{re}$). C'est à dire on a :

$$\begin{aligned}\phi_{le} &= \{L \in F_+ : R(L) \text{ admet un complément topologique }\},\\ \phi_{re} &= \{L \in F_- : N(L) \text{ admet un complément topologique }\}.\end{aligned}$$

Lorsque X est un espace de Hilbert, on le notera par la lettre H pour faire allusion aux espaces de Hilbert.

Donc pour les espaces hilbertiens on a :

Théorème 2.8 ([33])

Soit $T \in B(H)$, alors on a :

1) *$T \in F_+$ si et seulement si il existe $L \in B(H)$ et $K_1 \in K(H)$ tels que $LT = I + K_1$;*

2) *$T \in F_-$ si et seulement si il existe $S \in B(H)$ et $K_2 \in K(H)$ tels que $TS = I + K_2$.*

Notons $\mathcal{A}(H) = \{L \in B(H) : L^* = L\}$, l'ensemble des opérateurs autoadjoints.

Pour un ensemble Ω, d'un espace métrique (W, d), on note $\mathcal{B}or(\Omega)$ l'ensemble des boréliens de Ω.

Définition 2.9 ([24], [25], [53])

Soit $E : \mathcal{B}or(\Omega) \longrightarrow \mathcal{A}(H)$ une application. On dit que E est une mesure spectrale si elle vérifie les trois conditions suivantes :

1) $E(\emptyset) = 0$, $E(\Omega) = I$ *où* $I = I_{|H}$ *l'opérateur identité de* H.

2) *Si* $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{B}or(\Omega)$, *alors* $E(\omega_1 \cap \omega_2) = E(\omega_1)\, E(\omega_2)$.

3) *Si* $(\omega_k)_{k\geq 0}$ *est une suite de* Ω *telle que les* ω_k $(k \geq 0)$ *sont deux à deux disjoints, alors* $\sum\limits_{k\geq 0} E(\omega_k)(x)$ *est convergente pour tout* $x \in H$ *et*

$$E\Big(\bigcup_{k\geq 0} \omega_k\Big)(x) = \sum_{k\geq 0} E(\omega_k)(x).$$

Remarque 2.10

1) *Pour tous* $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{B}or(\Omega)$, $E(\omega_1)\, E(\omega_2) = E(\omega_2)\, E(\omega_1)$.

2) *Pour tout* $\omega \in \mathcal{B}or(\Omega)$, $E(\omega) \in \mathcal{A}(H)$ *et* $E(\omega)^2 = E(\omega)$.

3) *Soit* $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{B}or(\Omega)$ *tels que* $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$, *alors* $E(\omega_1) \perp E(\omega_2)$.

4) *Pour tous* $x, y \in H$, *l'application* $E_{x,y} : \mathcal{B}or(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par*

$$E_{x,y}(\omega) =< E(\omega)x, y >, \ \omega \in \mathcal{B}or(\Omega);$$

est une mesure complexe sur $\mathcal{B}or(\Omega)$.

5) *Pour tous* $x \in H$ *et* $\omega \in \mathcal{B}or(\Omega)$, *on a :*

$$E_{x,x}(\omega) =< E(\omega)x, x >= \|E(\omega)x\|^2.$$

D'où, $E_{x,x}$ *est une mesure positive sur* $\mathcal{B}or(\Omega)$ *dont la variation totale est égale à* $\|E_{x,x}\| = \|x\|$.

Pour Ω un ensemble de $\mathbb{C}$, notons $\mathcal{C}(\Omega)$ l'ensemble des toutes les fonctions continues sur Ω.

Théorème 2.11 ([53], Théorèmes 12.28 et 12.29)
Soit $T \in B(H)$ un opérateur normal et $E(\cdot)$ sa mesure spectrale. Soit $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ et notons, $\omega_0 = f^{-1}(\{0\})$. Alors :

1) $N(f(T)) = R(E(\omega_0))$.

2) $N(T - \lambda_0) = R(E(\{\lambda_0\}))$, *pour tout* $\lambda_0 \in \sigma(T)$.

3) λ_0 *est une valeur propre de* T *si et seulement si* $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$.

4) *Tout point isolé de* $\sigma(T)$ *est une valeur propre de* T.

Pour $T \in B(H)$, T^*T est un opérateur positif[1], donc d'après le calcul fonctionnelle continue, il existe un unique opérateur positif $L \in B(H)$ vérifiant $L^2 = T^*T$. L est appelée la racine carrée de T^*T. Dans toute la suite on notera $|T|$ cette racine carrée ($|T| = (T^*T)^{1/2}$). On peut vérifier facilement que[2] pour tout $x \in H$, $\|T(x)\| = \|\,|T|(x)\|$. Il en résulte que $N(|T|) = N(T)$.

Nous notons pour $L \in B(H)$, $E_L(\cdot)$ (resp. $E_L^*(\cdot)$) la mesure spectrale de $|L| = (L^*L)^{1/2}$ (resp. $|L^*| = (LL^*)^{1/2}$).

Pour alléger les notations, on pose $E_T(\cdot) = E(\cdot)$ et $E_T^*(\cdot) = E^*(\cdot)$ sans ambiguïté pour la suite.

Soit M un sous-espace de H. Soit $(e_i)_{i\in I}$ un système orthogonal maximal de $\overline{M}$. On vérifie facilement que si $(f_j)_{j\in J}$ est un autre système orthogonal maximal de $\overline{M}$, alors nécessairement $\mathrm{card}(I) = \mathrm{car}(J)$. Ceci justifie bien la définition suivante : la dimension d'un sous-espace vectoriel M est le cardinal d'un système orthogonal maximal de $\overline{M}$. Ainsi, par définition pour tout sous-espace vectoriel M de H, on a : $\dim M = \dim \overline{M}$.

[1] Car $\sigma(T^*T) \subseteq \mathbb{R}_+$ et T^*T est un opérateur autoadjoint.

[2] $\|\,|T|(x)\|^2 =< |T|^2(x), x >=< T^*T(x), x >=< T(x), T(x) >= \|T(x)\|^2$.

Soient M, M' deux sous-espaces vectoriels de H, et $(e_i)_{i\in I}$ (resp. $(f_j)_{j\in J}$) un système orthogonal maximal de $\overline{M}$ (resp. $\overline{M'}$). Nous dirons que $\dim M < \dim M'$ (resp. $\dim M = \dim M'$) si $\mathrm{card}(I) < \mathrm{card}(J)$ (resp. $\mathrm{card}(I) = \mathrm{card}(J)$).

Pour $T \in B(H)$, on définit, $\mathrm{ind}(T)$, l'indice de T par :

$$\mathrm{ind}(T) = \begin{cases} \alpha(T) - \alpha(T^*) & \text{si } \alpha(T) < \aleph_0 \text{ et } \alpha(T^*) < \aleph_0, \\ \alpha(T) & \text{si } \alpha(T) > \alpha(T^*) \text{ et } \alpha(T) \geq \aleph_0, \\ -\alpha(T^*) & \text{si } \alpha(T^*) > \alpha(T) \text{ et } \alpha(T^*) \geq \aleph_0, \\ 0 & \text{si } \alpha(T) = \alpha(T^*) \geq \aleph_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Définition 2.12

Soit $V \in B(H)$, on dit que V est une isométrie partielle si la restriction de V à $N(V)^{\perp}$ est une isométrie, c'est à dire si $V^*V_{|N(V)^{\perp}} = I_{|N(V)^{\perp}}$.

Proposition 2.13 ([33], [53])

Tout opérateur T de $B(H)$ se décompose d'une manière unique sous la forme $T = V|T|$, avec V une isométrie partielle vérifiant $N(V) = N(T)$ et $R(V) = \overline{R(T)}$. $V|T|$ s'appelle la décomposition polaire de T.

En général, nous allons utiliser la Proposition 2.13 sous une autre forme mettant en évidence l'importance du rôle jouer par l'indice d'un opérateur. Plus précisément on a :

Lemme 2.14 ([33])

Soit $T \in B(H)$, alors il existe W une isométrie (resp. co-isométrie, unitaire) si $\mathrm{ind}(T) < 0$ *(resp.* $\mathrm{ind}(T) > 0$, $\mathrm{ind}(T) = 0$) *tel que $T = W|T|$ et* $\mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(W)$.

Pour tout T de $B(H)$, on note $m_e(T)$, le module minimal essentiel (the essential minimum modulus) de T, défini par :

$$m_e(T) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_e(|T|)\}. \tag{2.6}$$

Cette quantité joue un rôle crucial dans la théorie des opérateurs semi-Fredholm et en particulier dans ce travail, comme on le constatera tout au long de cette thèse. Son avantage, est qu'elle caractérise complètement les opérateurs semi-Fredholm à gauche. Plus précisément on a :

Théorème 2.15 ([6], [28], [38])
Soit $T \in B(H)$, alors :

1) $m_e(T) > 0$ *si et seulement si* $\dim N(T)$ *est finie et* $R(T)$ *est fermé. Autrement dit,*

$$m_e(T) > 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad T \in F_+.$$

2) *Si $m_e(T) > 0$ et $m_e(T^*) > 0$, alors $m_e(T) = m_e(T^*)$.*

Remarque 2.16

1) *Si $\alpha(T^*)$ (resp. $\alpha(T)$) est infinie, alors $m_e(T) \geq m_e(T^*)$ (resp. $m_e(T^*) \geq m_e(T)$).*

2) *Si $\alpha(T)$ (resp. $\alpha(T^*)$) est finie, alors $m_e(T) \geq m_e(T^*)$ (resp. $m_e(T^*) \geq m_e(T)$).*

3) *Si $\alpha(T^*) \geq \alpha(T)$ (resp. $\alpha(T) \geq \alpha(T^*)$), alors $m_e(T) \geq m_e(T^*)$ (resp. $m_e(T^*) \geq m_e(T)$).*

Voici une propriété essentielle du module minimal essentiel, qui établi le lien étroit entre $m_e(T)$ et la mesure spectrale de $|T|$.

Théorème 2.17 ([6], [38])
Soit $T \in B(H)$, alors :

$$m_e(T) = \inf\{\lambda > 0 : \dim E(]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[)H \textit{ est infinie, pour tout } \varepsilon > 0\}.$$

Géométriquement $m_e(T)$ est le rayon de la plus grande boule ouverte incluse dans l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm à gauche et de centre l'opérateur T, (voir, par exemple [61]). Ce résultat est basé sur le théorème suivant :

Théorème 2.18
Soient T un opérateur semi-Fredholm d'indice $n \in \overline{\mathbb{Z}}$ et $S \in B(H)$ tel que $\|T - S\| < \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}$, alors

1) *S est semi-Fredholm;*

2) $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(S) = n$.

Démonstration :
Quitte à permuter les rôles de T et T^*, on peut supposer que $m_e(T) = \max\{m_e(T),\ m_e(T^*)\}$, sinon on passe à l'adjoint. Donc $m_e(T) > 0$, car dans l'hypothèse on a supposé que $\max\{m_e(T), m_e(T^*)\} > 0$.

D'autre part, soit $\gamma_e(T) = \inf\left\{\sigma_e(|T|) \setminus \{0\}\right\}$, la conorme essentielle de T (voir [51], pour plus de détails). Alors, on remarque que $\gamma_e(T) = m_e(T)$ si $m_e(T) > 0$. Or, d'après le Théorème 2 [51], il existe K un opérateur compact tel que $\gamma_e(T) = \gamma(T + K)$. Donc

$$0 \leq \|T - S\| < m_e(T) = \gamma_e(T) = \gamma(T + K).$$

D'où,

$$(*) \qquad \|T + K - (S + K)\| \leq \gamma(T + K).$$

D'ailleurs, puisque $T \in F_+$, $T+K$ est aussi un élément de F_+. Ainsi, on conclut par $(*)$ et le Théorème 2.5, que $S+K \in F_+$ et

$$\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind}(S+K) = \operatorname{ind}(S).$$

■

Dans cette thèse on va passer souvent par la décomposition polaire d'un opérateur. Il est donc nécessaire de connaître certaines propriétés des opérateurs positifs.

Théorème 2.19 ([20], Proposition 4.5, page 359)
Soient $T \in B(H)$ un opérateur normal et $\lambda \in \sigma(T)$. Alors

$$R(T-\lambda I) \text{ est un fermé } \quad \text{si et seulement si } \quad \lambda \text{ est un point isolé de } \sigma(T).$$

Proposition 2.20 ([20], Proposition 4.6, page 359)
Si T est un opérateur normal. Alors :

$$\begin{aligned}\sigma(T) \setminus \sigma_e(T) \quad = \quad & \{\lambda \in \sigma(T) : \lambda \text{ est un point isolé de } \sigma(T) \text{ et} \\ & \lambda \text{ est une valeur propre de multiplicité finie}\}.\end{aligned}$$

Pour $T \in B(X,Y)$, on note, $m(T)$, le module minimal de T, défini par

$$m(T) = \inf\{\|T(x)\| : x \in X \text{ et } \|x\| = 1\}. \tag{2.7}$$

Pour en savoir plus, en particulier sur les propriétés de $m(T)$, voir par exemple [30]. Si $T \in B(H)$, on montre facilement la relation suivante :

$$m(T) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma(|T|)\}. \tag{2.8}$$

Gelfond et Naimark ont montré en 1943 que toute C^*-algèbre est isomorphe à une sous-C^*-algèbre d'opérateurs de $B(\mathcal{H})$ pour un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ convenable plus précisément :

Théorème 2.21 ([20], [22])

Pour toute C^*-algèbre A, il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un homomorphisme isométrique stellaire $\varrho : A \longrightarrow B(\mathcal{H})$.

En particulier, comme $C(H)$ est une C^*-algèbre, d'après ce dernier théorème, il existe $\mathcal{H}$ un espace hilbertien et un homomorphisme isométrique stellaire $\varrho : A \longrightarrow B(\mathcal{H})$. Donc pour tout $T \in B(H)$, et du fait que ϱ est un homomorphisme, on conclut que

$$(*) \qquad \sigma(\varrho\pi(T)) \subseteq \sigma(\pi(T)).$$

Puisque, $\varrho(C(H))$ est une sous-C^*-algèbre de $B(\mathcal{H})$, et d'après la Proposition 1.14 [20] (page 235), on conclut que $\sigma_{\varrho(C(H))}(\varrho[\pi(T)]) = \sigma(\varrho[\pi(T)])$, où $\sigma_{\varrho(C(H))}(\varrho[\pi(T)])$ désigne le spectre de l'élément $\varrho(\pi(T))$ comme étant un élément de l'algèbre $\varrho(C(H))$. En utilisant maintenant le fait que $\varrho^{-1} : \varrho(C(H)) \longrightarrow C(H)$ est un homomorphisme, on obtient :

$$(**) \qquad \sigma(\pi(T)) = \sigma(\varrho^{-1}\varrho\pi(T)) \subseteq \sigma(\varrho\pi(T)).$$

Donc $(*)$ et $(**)$ impliquent que

$$(2.9) \qquad \sigma(\pi(T)) = \sigma(\varrho(\pi(T))).$$

D'autre part, comme $\pi(|T|)$ (resp. $\varrho\pi(|T|)$) est un élément positif de $C(H)$ (resp. $B(\mathcal{H})$) et $\pi(|T|)$ (resp. $\varrho\pi(|T|)$) vérifie $(\pi(|T|))^2 = \pi(T^*)\pi(T)$ (resp. $(\varrho\pi(|T|))^2 = \varrho\pi(T^*)\ \varrho\pi(T)$), on conclut d'après l'unicité de la racine carrée que $\pi(|T|) = |\pi(T)|$ (resp. $\varrho\pi(|T|) = |\varrho\pi(T)|$). Cela justifie en tenant compte de (2.9) et (2.8), les égalités suivantes :

$$(2.10) \qquad \begin{aligned} m_e(T) &= \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma(\pi(|T|))\}, \\ &= \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma(\varrho\pi(|T|))\}, \\ &= \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma(|\varrho\pi(T)|)\}, \\ &= m(\varrho\pi(T)). \end{aligned}$$

premier Chapitre

Étude des opérateurs semi-Fredholm sur un espace hilbertien séparable

3 Étude des opérateurs semi-Fredholm sur un espace hilbertien séparable

Dans le cas hilbertien séparable, l'indice d'un opérateur T de $B(H)$, admet une expression plus simple (mais qui coïncide bien évidemment avec la notion de l'indice qu'on avait adoptée au paragraphe précédent (voir (2.5), page 28))

$$\text{ind}(T) = \dim N(T) - \dim N(T^*) \quad (\text{avec } \infty - \infty = 0)\,.$$

Ceci est dû au fait que le seul cardinal infini inférieur ou égal à $\dim H$ est égal à $\aleph_0$.

Pour $n \in \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, nous notons :

$I_n = \{T \in B(H) : \ \text{ind}(T) = n\}$, l'ensemble des opérateurs d'indice n

et

$F^n = F \cap I_n$ l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm d'indice n.

On rappelle que F^n est connexe par arcs et que F^n est une composante connexe de l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm, pour plus de détails voir par exemple [20], [21], [23] et [45].

Considérons aussi les classes d'opérateurs :

- $G_+ = \{T \in B(H) : T$ est semi-inversible à gauche$\}$.
- $G_- = \{T \in B(H) : T$ est semi-inversible à droite$\}$.
- $G_\pm = G_+ \cup G_-$: l'ensemble des opérateurs semi-inversibles.

- $G = G_+ \cap G_-$: l'ensemble des opérateurs inversibles.

- Si $n \in \overline{\mathbb{Z}}$, nous notons $G^n_\pm = G_\pm \cap I_n$, l'ensemble des opérateurs semi-inversibles d'indice n.

- Si $n \in \overline{\mathbb{Z}}_- = \mathbb{Z}_- \cup \{-\infty\}$, nous notons $G^n_+ = G_+ \cap I_n$, l'ensemble des opérateurs semi-inversibles à gauche d'indice n.

- Si $n \in \overline{\mathbb{Z}}_+ = \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$, nous notons $G^n_- = G_- \cap I_n$, l'ensemble des opérateurs semi-inversibles à droite d'indice n.

Structure topologique des composantes connexes semi-Fredholm

Cette partie consiste en l'article [54] à paraître au
" Proceedings of the American Mathematical Society "

3.1 Structure topologique des composantes connexes semi-Fredholm

En 1985 S. Izumino et Y. Kato [42], ont montré que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\operatorname{dist}(T, F^n) = \begin{cases} \max\{m_e(T), m_e(T^*)\} & \text{si } \operatorname{ind}(T) \neq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

P.Y. Wu [60], en 1989 obtient ces mêmes formules de distances pour les composantes connexes semi-inversibles $G_\pm^n$ d'indice n, et pour tout $n \in \overline{\mathbb{Z}}$. Ainsi, en tenant compte du au Théorème 2.18, on voit sans aucune difficulté que cette dernière formule subsiste même si $n \in \overline{\mathbb{Z}}$.

Théorème 3.1.1
Soient $T \in B(H)$ et $n \in \overline{\mathbb{Z}}$. Alors :

$$\operatorname{dist}(T, F^n) = \begin{cases} \max\{m_e(T), m_e(T^*)\} & \textit{si } \operatorname{ind}(T) \neq n, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Ceci prouve en particulier que pour tous $n \in \overline{\mathbb{Z}}$ et $T \in F^n$, la boule de $G_\pm^n$ de centre de T et de rayon r avec $0 < r < \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}$ est dense dans la boule $\mathcal{B}(T, r) \subseteq F^n$.

Ce dernier théorème a permi à M. Mbekhta ([50], Corollaire 1.4) de montrer que dans $B(H)$ les composantes connexes semi-Fredholm ont la même frontière et que $B(H)$ s'écrit comme la réunion de cette frontière commune (Δ) et de l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm. Ceci montre qu'on peut imaginer $B(H)$ " comme " un cahier aux bords soudés et dont les feuilles seraient les composantes connexes semi-Fredholm.

Théorème 3.1.2 ([50], Corollary 1.4)

La frontière de $\overline{F^j}$ ne dépend pas de j et si $\Delta = \partial(\overline{F^j})$, alors $\Delta = \partial(F^j)$ et $B(H) = \Delta \cup \Big(\bigcup\limits_{j\in\overline{\mathbb{Z}}} F^j\Big)$.

Remarque

1) $\Delta = \{T \in B(H) : \max\{m_e(T), m_e(T^*)\} = 0\}$. En effet, d'après le Théorème 2.1 [42] et le Corollaire 2.2 [42], on remarque que :

$$\Delta = \partial(F^0) = \partial(\overline{G}) = \{T \in B(H) : m_e(T) = m_e(T^*) = 0\}.$$

2) Δ est un fermé avec intérieur vide (i.e de premier catégorie).

3) Δ est stable par les perturbations compacts : $\Delta + K(H) = \Delta$ où $\Delta + K(H) = \{T + S, T \in \Delta \text{ et } S \text{ compact}\}$.

4) Δ est connexe par arcs. En effet, puisque $0 \in \Delta$ et si $T \in \Delta$, alors $tT \in \Delta$ pour tout $t \in [\,0, 1\,]$.

Nous proposons maintenant de montrer le théorème suivant.

Théorème 3.1.3

Soient $T \in B(H)$ et $J \subseteq \overline{\mathbb{Z}}$. Alors

1) $$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F^j\Big) = \begin{cases} \max\{m_e(T), m_e(T^*)\} & \textit{si } \operatorname{ind}(T) \notin J, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

2) $$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} I_j\Big) = \begin{cases} \max\{m_e(T), m_e(T^*)\} & \textit{si } \operatorname{ind}(T) \notin J, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration :

1) Soit $n = \operatorname{ind}(T) \in \overline{\mathbb{Z}}$. Si $n \in J$, alors $F^n \subseteq \bigcup_{j\in J} F^j$, d'où on conclut que :

$$(1) \qquad 0 \leq \operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F^j\Big) \leq \operatorname{dist}(T, F^n).$$

Par ailleurs, d'après le Théorème 3.1.1, on a : $\operatorname{dist}(T, F^n) = 0$. Par suite, on conclut compte tenu de (1), que

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F^j\Big) = 0.$$

Supposons maintenant que $n \notin J$ et soit $j_0 \in J$. Alors en utilisant le Théorème 3.1.1 et le fait que $n \neq j_0$, on obtient :

$$(2) \qquad \operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F^j\Big) \leq \operatorname{dist}(T, F^{j_0}) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

Montrons l'inégalité inverse, soit $S \in \bigcup_{j\in J} F^j$, alors on a : $\operatorname{ind}(S) \neq n = \operatorname{ind}(T)$, donc d'après le Théorème 2.18, on doit avoir $\|T - S\| \geq \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}$. Ceci prouve que :

$$(3) \qquad \operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F^j\Big) \geq \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

Par conséquent, (2) et (3) impliquent que :

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F^j\Big) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

2) Remarquons d'abord que $\bigcup_{j\in J} F^j \subseteq \bigcup_{j\in J} I_j$, donc si $\operatorname{ind}(T) = n \in J$, alors compte tenu de 1), on obtient que :

$$0 \leq \operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} I_j\Big) \leq \operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F^j\Big) = 0.$$

Si maintenant $n \notin J$, alors pour tout $S \in \bigcup_{j\in J} I_j$, $\operatorname{ind}(S) \neq \operatorname{ind}(T)$, donc d'après le Théorème 2.18, on conclut que $\|T - S\| \geq \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}$. Par conséquent,

$$(4) \qquad \operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} I_j\Big) \geq \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

Inversement, par la première assertion, on voit que :

(5) $$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} I_j\Big) \leq \operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F^j\Big) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

Donc, on conclut au moyen de (4) et (5) que :

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} I_j\Big) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 3.1.3 . ∎

Le corollaire qui suit est une simple conséquence du Théorème 3.1.3.

Corollaire 3.1.4

Pour tout $J \subseteq \overline{\mathbb{Z}}$, on a :

$$\Delta \subseteq \overline{\bigcup_{j\in J} F^j} = \overline{\bigcup_{j\in J} I_j}.$$

Corollaire 3.1.5

Soit $T \in B(H)$. Alors

1) $$\operatorname{dist}(T, F) = \begin{cases} m_e(T^*) & si \quad \operatorname{ind}(T) = +\infty, \\ 0 & si \quad \operatorname{ind}(T) \ \textit{est fini}, \\ m_e(T) & si \quad \operatorname{ind}(T) = -\infty. \end{cases}$$

2) $$\operatorname{dist}(T, F_+) = \begin{cases} m_e(T^*) & si \quad \operatorname{ind}(T) = +\infty, \\ 0 & si \quad \operatorname{ind}(T) \neq +\infty. \end{cases}$$

3) $$\operatorname{dist}(T, F_-) = \begin{cases} m_e(T) & si \quad \operatorname{ind}(T) = -\infty, \\ 0 & si \quad \operatorname{ind}(T) \neq -\infty. \end{cases}$$

Démonstration :

La première assertion résulte trivialement du Théorème 3.1.3, avec $J = \mathbb{Z}$.

2) et 3) sont des conséquences du Théorème 3.1.3, avec respectivement $J = \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $J = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ et le fait que $\max\{m_e(T), m_e(T^*)\}$ est égal à $m_e(T)$ (resp. $m_e(T^*)$) si $\alpha(T^*) = +\infty$ (resp. $\alpha(T) = +\infty$) (voir Remarque 2.16). ∎

Théorème 3.1.6

Soit $J \subseteq \overline{\mathbb{Z}}$. Alors :

1)
$$\overline{\bigcup_{j\in J} F^j} = \Delta \cup \Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big) = \bigcup_{j\in J} \overline{F^j};$$

2)
$$\partial\Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big) = \Delta.$$

Démonstration

1) Si $J = \overline{\mathbb{Z}}$, alors le résultat résulte du Théorème 3.1.2, car $\overline{\bigcup_{j\in J} F^j} = B(H)$. Supposons maintenant que $J \neq \overline{\mathbb{Z}}$. Alors, de nouveau le Théorème 3.1.2 nous permet d'écrire :

$$B(H) = \Delta \cup \Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big) \cup \Big(\bigcup_{j\in \overline{\mathbb{Z}}\setminus J} F^j\Big).$$

Cela entraîne que $\Delta \cup \Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big)$ est un fermé, comme le complément de l'ouvert $\Big(\bigcup_{j\in \overline{\mathbb{Z}}\setminus J} F^j\Big)$ dans $B(H)$. Donc, on en déduit que :

$$\overline{\bigcup_{j\in J} F^j} \subseteq \Delta \cup \Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big).$$

L'inclusion inverse est évidente parce que par le Corollaire 3.1.4, on a : $\Delta \subset \overline{\bigcup_{j\in J} F^j}$.

La deuxième égalité est une simple conséquence de l'égalité suivante :

$$\bigcup_{j\in J} \overline{F^j} = \bigcup_{j\in J} \Big(\Delta \cup F^j\Big).$$

2) Comme $\bigcup\limits_{j\in J} F^j$ est un ouvert de $B(H)$, et en utilisant la première assertion, on en déduit que :

$$\partial\Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big) = \Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big) \setminus \Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big) = \Big(\Delta \cup \Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big)\Big) \setminus \Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big) = \Delta.$$

Ceci achève la preuve du Théorème 3.1.6. ∎

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Théorème 3.1.6.

Corollaire 3.1.7

1) $$\overline{F} = F \cup \Delta,\ \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \Delta,\ \overline{F_+} = F_+ \cup \Delta,\ \textit{et}\ \ \overline{F_-} = F_- \cup \Delta.$$

2) $$\partial(\mathcal{F}) = \partial(F) = \partial(F_+) = \partial(F_-) = \Delta.$$

On a aussi :

Corollaire 3.1.8

Soit $J \subseteq \mathbb{Z}$, alors

$$\overline{\bigcup_{j\in J} I_j} = \Delta \cup \Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big) = \Delta \cup \Big(\bigcup_{j\in J} I_j\Big).$$

Démonstration :

En utilisant le Théorème 3.1.6 et le Corollaire 3.1.4, on voit que :

$$\Delta \cup \Big(\bigcup_{j\in J} I_j\Big) \subseteq \overline{\bigcup_{j\in J} I_j} = \overline{\bigcup_{j\in J} F^j} = \Delta \cup \Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big) \subseteq \Delta \cup \Big(\bigcup_{j\in J} I_j\Big).$$

∎

Théorème 3.1.9

Soit $J \subsetneqq \overline{\mathbb{Z}}$. *Alors :*

1) $$\operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big) = \bigcup_{j\in J} F^j = \operatorname{int}\Big(\bigcup_{j\in J} \overline{F^j}\Big);$$

2) $$\partial\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big) = \partial\Big(\bigcup_{j\in J} \overline{F^j}\Big) = \Delta.$$

Démonstration :

1) Montrons la première égalité. Clairement, comme $\bigcup_{j\in J} F^j$ est un ouvert, de $B(H)$, on a :

$$\bigcup_{j\in J} F^j \subseteq \operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big).$$

Inversement, soit T un opérateur appartenant à $\operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big)$. Si T est semi-Fredholm, alors $T \in \bigcup_{j\in J} F^j$. En effet, d'après le Théorème 3.1.6, on voit que :

$$\begin{aligned} T \in \operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big) &= \operatorname{int}\Big(\Delta \cup \Big[\bigcup_{j\in J} F^j\Big]\Big), \\ &\subseteq \Delta \cup \Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big). \end{aligned}$$

Et puisque $T \notin \Delta$, on conclut que $T \in \bigcup_{j\in J} F^j$.

Supposons maintenant que T n'est pas semi-Fredholm, ceci revient à dire que $T \in \Delta$. Soit $n \notin J$ (ceci est toujours possible parce que $J \neq \overline{\mathbb{Z}}$). Alors, en utilisant le Théorème 3.1.2, on voit que $T \in \Delta = \partial(F^n)$. Ceci nous permet de conclure que :

$$T \in \operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big) \cap \partial(F^n),$$

cela entraîne que $\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big) \cap F^n$ n'est pas vide, ce qui contredit la continuité de l'indice.

La seconde égalité est une conséquence du Théorème 3.1.6 et de la première égalité.

2) En utilisant 1) et le Théorème 3.1.6, on obtient :

$$\begin{aligned}
\partial\Big(\bigcup_{j\in J}\overline{F^j}\Big) &= \partial\Big(\overline{\bigcup_{j\in J}F^j}\Big),\\
&= \Big(\overline{\bigcup_{j\in J}F^j}\Big)\setminus \operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J}F^j}\Big),\\
&= \Big(\Delta\cup\Big[\bigcup_{j\in J}F^j\Big]\Big)\setminus\Big(\bigcup_{j\in J}F^j\Big)=\Delta\,.
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 3.1.9. ■

Le corollaire suivant est une conséquence directe du Théorème 3.1.9.

Corollaire 3.1.10

1) $$\operatorname{int}(\overline{\mathcal{F}})=\mathcal{F},\ \operatorname{int}(\overline{F_+})=F_+,\quad et\ \operatorname{int}(\overline{F_-})=F_-\,.$$

2) $$\partial(\overline{\mathcal{F}})=\partial(\mathcal{F})=\partial(\overline{F_+})=\partial(F_+)=\partial(\overline{F_-})=\partial(F_-)=\Delta\,.$$

On a aussi

Corollaire 3.1.11

Soit $J\subsetneqq\overline{\mathbb{Z}}$. *Alors :*

1) $$\operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J}I_j}\Big)=\bigcup_{j\in J}F^j=\operatorname{int}\Big(\bigcup_{j\in J}I_j\Big);$$

2) $$\partial\Big(\overline{\bigcup_{j\in J}I_j}\Big)=\partial\Big(\bigcup_{j\in J}I_j\Big)=\Delta\,.$$

Démonstration :

1) La première égalité est une conséquence immédiate du Corollaire 3.1.8 et des Théorèmes 3.1.6 et 3.1.9.

Quand à la seconde égalité, il suffit de remarquer que :

$$\bigcup_{j\in J}F^j\subseteq\operatorname{int}\Big(\bigcup_{j\in J}I_j\Big)\subseteq\operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J}F^j}\Big)=\bigcup_{j\in J}F^j.$$

En effet, les deux premières inclusions sont évidentes et la dernière égalité est tout simplement la première assertion du Théorème 3.1.9.

2) est une conséquence directe de la première assertion et du Corollaire 3.1.8. ■

Théorème 3.1.12

Soient $T \in B(H)$ et $J \subseteq \overline{\mathbb{Z}}$, alors

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} G_{\pm}^{j}\Big) = \begin{cases} \max\{m_e(T), m_e(T^*)\} & si \quad \operatorname{ind}(T) \notin J, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Démonstration

Soit $n = \operatorname{ind}(T)$. Si $n \in J$, comme $G_{\pm}^{n} \subseteq \bigcup_{j\in J} G_{\pm}^{j}$, et en utilisant le Théorème 3.1 [60], on en déduit que :

$$0 \leq \operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} G_{\pm}^{j}\Big) \leq \operatorname{dist}(T, G_{\pm}^{n}) = 0.$$

Supposons maintenant que $n \notin J$. Soit $j_0 \in J$, alors puisque $G_{\pm}^{j_0} \subseteq \bigcup_{j\in J} G_{\pm}^{j}$, et en utilisant le Théorème 3.1 [60], on conclut que :

(1) $$0 \leq \operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} G_{\pm}^{j}\Big) \leq \operatorname{dist}\Big(T, G_{\pm}^{j_0}\Big) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

D'autre part, pour tout $L \in \bigcup_{j\in J} G_{\pm}^{j}$, $\operatorname{ind}(L) \neq n = \operatorname{ind}(T)$. Donc d'après le Théorème 2.18, on doit avoir : $\|T - L\| \geq \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}$. Par conséquent,

(2) $$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} G_{\pm}^{j}\Big) \geq \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

Maintenant (1) et (2) impliquent que :

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} G_{\pm}^{j}\Big) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

■

Le corollaire suivant est une simple conséquence du Théorème 3.1.12.

Corollaire 3.1.13
Soient $T \in B(H)$ et $J \subseteq \overline{\mathbb{Z}}_+$, alors

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} G_-^j\Big) = \begin{cases} \max\{m_e(T), m_e(T^*)\} & si \quad \operatorname{ind}(T) \notin J, \\ 0 & si \quad \operatorname{ind}(T) \in J. \end{cases}$$

On a aussi le même résultat pour $\bigcup_{j\in J} G_+^j$ avec J un sous-ensemble quelconque de $\overline{\mathbb{Z}}_-$.

Corollaire 3.1.14
Soient $T \in B(H)$ et $J \subseteq \overline{\mathbb{Z}}_-$, alors

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} G_+^j\Big) = \begin{cases} \max\{m_e(T), m_e(T^*)\} & si \quad \operatorname{ind}(T) \notin J, \\ 0 & si \quad \operatorname{ind}(T) \in J. \end{cases}$$

Le Théorème 3.1.12, nous permet par exemple de calculer la distance de T aux ensembles $G_- \setminus G$ et $G_+ \setminus G$.

Corollaire 3.1.15
Soit $T \in B(H)$. Alors :

1) $$\operatorname{dist}(T, G_- \setminus G) = \begin{cases} m_e(T) & si \quad \operatorname{ind}(T) \leq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

2) $$\operatorname{dist}(T, G_+ \setminus G) = \begin{cases} m_e(T^*) & si \quad \operatorname{ind}(T) \geq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Le Théorème qui suit caractérise pour tout sous-ensemble J de $\overline{\mathbb{Z}}$ la fermeture, l'intérieur et la frontière de $\bigcup_{j\in J} G_\pm^j$.

Théorème 3.1.16

Soit $J \subseteq \mathbb{Z}$. Alors :

1) $\overline{\bigcup_{j\in J} G_{\pm}^{j}} = \Delta \cup \Big(\bigcup_{j\in J} F^{j}\Big) = \bigcup_{j\in J} \overline{G_{\pm}^{j}}$.

Si en plus $J \neq \mathbb{Z}$, alors :

2) $\operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} G_{\pm}^{j}}\Big) = \bigcup_{j\in J} F^{j} = \operatorname{int}\Big(\bigcup_{j\in J} \overline{G_{\pm}^{j}}\Big)$;

3) $\partial\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} G_{\pm}^{j}}\Big) = \partial\Big(\bigcup_{j\in J} \overline{G_{\pm}^{j}}\Big) = \Delta$.

Démonstration :

1) Montrons la première égalité. Si $J = \mathbb{Z}$, alors comme $G_{\pm}$ est dense dans $B(H)$ (voir [33], Problème 109), et en utilisant le Théorème 3.1.2, on conclut que :

$$\overline{\bigcup_{j\in J} G_{\pm}^{j}} = \Delta \cup \Big(\bigcup_{j\in J} F^{j}\Big) = B(H).$$

Supposons maintenant que $J \subsetneq \mathbb{Z}$, alors d'après le Théorème 3.1.6, on constate que $\Delta\cup\Big(\bigcup_{j\in J} F^{j}\Big)$ est fermé. Or, $\bigcup_{j\in J} G_{\pm}^{j}$ est inclus dans $\Delta\cup\Big(\bigcup_{j\in J} F^{j}\Big)$, par suite

$$\overline{\bigcup_{j\in J} G_{\pm}^{j}} \subseteq \Delta \cup \Big(\bigcup_{j\in J} F^{j}\Big). \tag{1}$$

D'autre part, d'après le Théorème 3.1.12, on voit que :

$$\Delta \cup \Big(\bigcup_{j\in J} F^{j}\Big) \subseteq \overline{\bigcup_{j\in J} G_{\pm}^{j}}. \tag{2}$$

Donc, la première égalité résulte de (1) et (2).

Pour la seconde égalité, d'abord d'après les Théorèmes 3.1.3 et 3.1.12, on conclut pour tout $j \in \mathbb{Z}$, que $\overline{F_{\pm}^{j}} = \overline{G_{\pm}^{j}}$. Donc $\bigcup_{j\in J} \overline{G_{\pm}^{j}} = \bigcup_{j\in J} \overline{F^{j}}$. Par conséquent, en utilisant le Théorème 3.1.6, on obtient :

$$\Delta \cup \Big(\bigcup_{j\in J} F^{j}\Big) = \bigcup_{j\in J} \overline{F^{j}} = \bigcup_{j\in J} \overline{G_{\pm}^{j}}.$$

2) Est une conséquence directe de la première assertion et des Théorèmes 3.1.6 et 3.1.9.

3) La première égalité est une conséquence directe de 1) et 2); la deuxième égalité est due au fait que :

$$\partial\Big(\bigcup_{j\in J}\overline{G^j_\pm}\Big) = \Big(\Delta\cup\Big[\bigcup_{j\in J}F^j\Big]\Big)\setminus\Big(\bigcup_{j\in J}F^j\Big) = \Delta.$$

Ceci achève la preuve du Théorème 3.1.16. ∎

Les corollaires suivants sont des conséquences immédiates du Théorème 3.1.16.

Corollaire 3.1.17

Soient $J\subseteq\overline{\mathbb{Z}}_-$ et $J'\subseteq\overline{\mathbb{Z}}_+$. Alors :

1) $\overline{\bigcup_{j\in J}G^j_+} = \Delta\cup\Big(\bigcup_{j\in J}F^j\Big)$ *et* $\overline{\bigcup_{j\in J'}G^j_-} = \Delta\cup\Big(\bigcup_{j\in J'}F^j\Big)$;

2) $\mathrm{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J}G^j_+}\Big) = \bigcup_{j\in J}F^j$ *et* $\mathrm{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J'}G^j_-}\Big) = \bigcup_{j\in J'}F^j$;

3) $\partial\Big(\overline{\bigcup_{j\in J}G^j_+}\Big) = \partial\Big(\overline{\bigcup_{j\in J'}G^j_-}\Big) = \Delta.$

Corollaire 3.1.18

1) $\overline{G_+} = \Delta\cup\Big(\bigcup_{j\le 0}F^j\Big)$ *et* $\overline{G_-} = \Delta\cup\Big(\bigcup_{j\ge 0}F^j\Big)$.

2) $\mathrm{int}(\overline{G_+}) = \bigcup_{j\le 0}F^j$ *et* $\mathrm{int}(\overline{G_-}) = \bigcup_{j\ge 0}F^j$.

3) $\partial(\overline{G_+}) = \partial(\overline{G_-}) = \Delta.$

Corollaire 3.1.19

1) $\overline{G_+ \setminus G} = \Delta \cup \Big(\bigcup_{j<0} F^j\Big)$ *et* $\overline{G_- \setminus G} = \Delta \cup \Big(\bigcup_{j>0} F^j\Big)$.

2) $\operatorname{int}\big(\overline{G_+ \setminus G}\big) = \bigcup_{j<0} F^j$ *et* $\operatorname{int}\big(\overline{G_- \setminus G}\big) = \bigcup_{j>0} F^j$.

3) $\partial\big(\overline{G_+ \setminus G}\big) = \partial\big(\overline{G_- \setminus G}\big) = \Delta$.

Structure des opérateurs semi-Fredholm avec nullité fixée

Cette partie consiste en l'article
[56], Acta. Sci. Math (Szeged). **63**, (1997), 607–622.

3.2 Structure des opérateurs semi-Fredholm avec nullité fixée

On garde les mêmes notations des paragraphes précédents.

Dans ce paragraphe, on se propose d'étudier les classes des opérateurs semi-Fredholm d'indice et de nullité fixés.

D'après [20], [21], [23] et [45], on sait que les composantes connexes semi-Fredholm ce sont les F^n $(n \in \overline{\mathbb{Z}})$, l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm de même indice n.

Nous notons, $F^n_m = \{T \in F^n : \text{tel que } \alpha(T) = m\}$, avec $n \leq m \leq +\infty$ et $m \geq 0$, l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm d'indice n et de nullité m.

Lemme 3.2.1
Soit $T \in F^n$, tel que $\alpha(T) > 0$ et $\beta(T) > 0$. Alors, pour tout réel ε de $]0, \gamma(T)[$, il existe $T_\varepsilon \in B(H)$, vérifiant :

i) $0 < \|T - T_\varepsilon\| \leq \varepsilon$;

ii) $T_\varepsilon \in F^n$;

iii) $\alpha(T_\varepsilon) = \begin{cases} n & si \;\; n > 0, \\ 0 & si \;\; n \leq 0. \end{cases}$

Démonstration :
Soient $\{e_1, \ldots, e_{\alpha(T)}\}$ une base orthonormale de $N(T)$ et $\{f_1, \ldots, f_{\beta(T)}\}$ une base orthonormale de $N(T^*)$. Si $n > 0$, cela signifie que $\alpha(T) > \beta(T)$,

et $\alpha(T) \leq \beta(T)$ si $n \leq 0$. On définit $T_\varepsilon \in B(H)$, de la manière suivante :

- pour $n > 0$

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(e_j) &= \varepsilon f_j \quad \text{si } j = 1, \ldots, \beta(T), \\ T_\varepsilon(e_j) &= 0 \quad \text{si } \beta(T) + 1 \leq j \leq \alpha(T), \\ T_\varepsilon &= T \quad \text{sur } N(T)^\perp ; \end{aligned}$$

- pour $n \leq 0$

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(e_j) &= \varepsilon f_j \quad \text{si } 1 \leq j \leq \alpha(T), \\ T_\varepsilon &= T \quad \text{sur } N(T)^\perp . \end{aligned}$$

Alors, une vérification de routine montre que :

$$\begin{cases} \alpha(T_\varepsilon) = n & \text{si } n > 0, \\ \alpha(T_\varepsilon) = 0 & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$$

et

$$0 < \|T - T_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

Donc T_ε vérifie $i)$ et $iii)$.

$ii)$ Est une simple conséquence du Théorème 2.5. ∎

Proposition 3.2.2

Soient $m, p \in \overline{\mathbb{N}}$ et $n \in \overline{\mathbb{Z}}$ tels que $n \leq m$, alors :

1) $int\Big(\bigcup_{j=0}^{p} F^n_{m+j}\Big) = \emptyset$ *si $n < m$ et $m > 0$.*

2) $\bigcup_{j=0}^{p} F^n_{m+j}$ *est un ouvert* $\iff$ $m = n$ *ou* $m = 0$.

Démonstration :

1) Soit $T \in \bigcup_{j=0}^{p} F^n_{m+j}$, avec $n < m$ et $m > 0$. On va prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, la boule de centre T et de rayon ε n'est pas incluse dans $\bigcup_{j=0}^{p} F^n_{m+j}$.

Tout d'abord, remarquons que la condition $n < m$ signifie que $\beta(T) > 0$. D'autre part, il existe i un entier naturel compris entre 0 et p tel que $\alpha(T) = m + i > 0$. Donc, T vérifie les hypothèses du Lemme 3.2.1, d'où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $L_\varepsilon \in \mathcal{B}(T, \varepsilon)$ tel que $L_\varepsilon \neq T$ et L_ε n'appartient pas à $\bigcup_{j=0}^{p} F_{m+j}^{n}$. Ceci prouve que $T \notin \operatorname{int}\left(\bigcup_{j=0}^{p} F_{m+j}^{n}\right)$. Par conséquent, $\operatorname{int}\left(\bigcup_{j=0}^{p} F_{m+j}^{n}\right) = \emptyset$.

2) " $\Longleftarrow$ " Si $m = 0$, alors l'assertion découle immédiatement du Théorème 2.5.

Supposons donc $n = m$, soient $T \in \bigcup_{j=0}^{p} F_{n+j}^{n}$ et $\mathcal{B}(T, \gamma(T))$ la boule ouverte de $B(H)$ de centre T et de rayon $\gamma(T)$. Alors, $\mathcal{B}(T, \gamma(T)) \subseteq \bigcup_{j=0}^{p} F_{n+j}^{n}$. En effet, soit $S \in \mathcal{B}(T, \gamma(T))$, d'après le Théorème 2.5, on a :

$$S \in F^{n} \quad \text{et} \quad n = \operatorname{ind}(S) \leq \alpha(S) \leq \alpha(T) \leq n + p.$$

Donc $S \in \bigcup_{j=0}^{p} F_{n+j}^{n}$. Ceci prouve que $\bigcup_{j=0}^{p} F_{n+j}^{n}$ est un ouvert.

" $\Longrightarrow$ " Est une conséquence directe de 1).

Ceci achève la démonstration de la Proposition 3.2.2. ∎

On remarque d'après la Proposition 3.2.2, que les F_{m}^{n} (avec $n \leq m$) n'ont pas la même structure puisque F_{m}^{n} est un ouvert pour $n = m$ ou $m = 0$, et ne l'est pas pour les autres cas. Cependant le théorème suivant montre que tous les F_{n}^{m} $(n \leq m)$ sont connexes par arcs.

Théorème 3.2.3

Soient $m \in \overline{\mathbb{N}}$ et $n \in \overline{\mathbb{Z}}$, tels que $n \leq m$. Alors F_{m}^{n} est connexe par arcs.

Démonstration :

- Si $0 \leq m = n < +\infty$, alors $F_{m}^{n} = G_{-}^{n}$ est connexe par arcs. Si $m = n = +\infty$, alors $F_{+\infty}^{+\infty} = F^{+\infty}$ est connexe par arcs ([23], Théorème 5.32).

Supposons donc $n < m < +\infty$. Soit $T, S \in F_m^n$, alors il existe $U \in B(H)$ unitaire tel que $N(SU) = N(T)$. En effet, comme $\dim N(T) = \dim N(S)$ et $\dim N(T)^\perp = \dim N(S)^\perp = +\infty$, il existe des isométries surjectives :

$$U_0 : N(T) \longrightarrow N(S) \quad \text{et} \quad U_1 : N(T)^\perp \longrightarrow N(S)^\perp.$$

Donc $U = U_0 \oplus U_1$ est un opérateur unitaire de $B(H)$ et on voit facilement que $N(SU) = N(T)$.

D'autre part, comme le groupe des opérateurs unitaires est connexe par arcs, il existe $\delta : [0,1] \longrightarrow B(H)$ une application continue avec

$$\delta(0) = I, \delta(1) = U \ \text{ et } \ \forall\, t \in [0,1], \delta(t) \text{ est un opérateur unitaire .}$$

Maintenant, l'application $\tilde{\delta} : [0,1] \longrightarrow B(H)$ définie par $\tilde{\delta}(t) = S\delta(t)$ est continue et vérifie :

$$\tilde{\delta}(0) = S,\ \tilde{\delta}(1) = SU \ \text{ et } \tilde{\delta}(t) \in F_m^n, \ \ \forall\, t \in [0,1].$$

Par conséquent, on peut supposer que $N(S) = N(T)$.

Soient $\{e_1, \ldots, e_m\}$ une base orthonormale de $N(T)$ et $\{f_1, \ldots, f_{m-n}\}$ une base orthonormale de $N(T^*)$. Pour $n > 0$, définissons $\widetilde{T}$ par :

$$\begin{aligned} \widetilde{T}(e_j) &= f_j \quad \text{si } j = 1, \ldots, m-n, \\ \widetilde{T}(e_j) &= 0 \quad \text{si } j = m-n+1, \ldots, m, \\ \widetilde{T} &= T \quad \text{sur } N(T)^\perp; \end{aligned}$$

et pour $n \leq 0$,

$$\begin{aligned} \widetilde{T}(e_j) &= f_j \quad \text{pour } j = 1, \ldots, m, \\ \widetilde{T} &= T \quad \text{sur } N(T)^\perp . \end{aligned}$$

De la même façon on définit $\widetilde{S}$. Alors, on voit facilement que $\widetilde{T}$ est semi-inversible à droite (resp. à gauche) si $n \geq 0$ (resp, $n < 0$) et $\operatorname{ind}(T) = n$.

Grâce à la symétrie de l'adjoint, on peut supposer que $\widetilde{T} \in G_{-}^{n}$ $(n \geq 0)$. Tout d'abord, remarquons que $N(\widetilde{T}) = N(\widetilde{S})$ et puisque $\widetilde{T}, \widetilde{S}$ sont deux éléments de G_{-}^{n}, on constate d'après la preuve du Théorème 5.32 [23], qu'il existe $\eta : [0,1] \longrightarrow G_{-}^{n}$ une application continue tel que :

$$\eta(0) = \widetilde{S},\ \eta(1) = \widetilde{T} \text{ et } \forall\, t \in [0,1], N(\eta(t)) = N(\widetilde{T}) = N(\widetilde{S}).$$

Soit maintenant, l'application $\theta : [0,1] \longrightarrow B(H)$, définie par :

$$\theta(t) = \begin{cases} \eta(t) & \text{sur } N(T)^{\perp} = N(S)^{\perp}, \\ 0 & \text{sur } N(T) = N(S)\ . \end{cases}$$

Alors, θ est continue et on voit sans difficulté que :

$$\theta(0) = S,\ \theta(1) = T \text{ et } \forall\, t \in [0,1], \theta(t) \in F_{m}^{n}.$$

Ce qui prouve bien que F_{m}^{n} est connexe par arcs.
Ceci prouve le résultat voulu. ∎

M. Mbekhta m'a signalé que le Théorème 3.2.3, était déjà prouvé par J.P. Labrousse [45] dans le cas hilbertien pour les opérateurs non bornés, mais la démonstration qu'on avait donné plus haut est totalement différente.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat suivant.

Théorème 3.2.4
Soient $m, m' \in \overline{\mathbb{N}}$ et $n \in \overline{\mathbb{Z}}$ tel que $n \leq m$ et $n \leq m'$. Alors $F_{m'}^{n} \cup F_{m}^{n}$ est connexe par arcs.

Démonstration :
- Si $m = m'$, le théorème résulte trivialement du Théorème 3.2.3.
- Si $m \neq m'$, quitte à permuter les rôles de m et m', on peut supposer que

$m' < m$. D'abord, remarquons que $m < +\infty$. En effet, si $m = +\infty$, alors $n = +\infty$, d'où $m' = +\infty$ (car $n \leq m'$) ceci contredit le fait que $m' < m$. On observe aussi que $0 < m - m' < m - n$.

Soient $T \in F_m^n$ et $L \in F_{m'}^n$. Soient $\{e_1, \ldots, e_m\}$ une base orthonormale de $N(T)$ et $\{f_1, \ldots, f_{m-n}\}$ une base orthonormale de $R(T)^\perp$. Définissons T_2 par :

$$\begin{array}{rcccll} T_2 & : & N(T) & \longrightarrow & R(T)^\perp & \\ & & e_i & \longmapsto & f_i & \text{si } \ 1 \leq i \leq m - m', \\ & & e_i & \longmapsto & 0 & \text{si } \ m - m' < i \leq m = \alpha(T). \end{array}$$

Alors, l'image de T_2 est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $f_1, \ldots, f_{m-m'}$. Donc $R(T_2)$ est un sous-espace de H de dimension finie égale à $m - m'$. Posons maintenant $T_1 = T_{|N(T)^\perp}$ la restriction de T à $N(T)^\perp$, alors $R(T_1) = R(T)$ est un sous-espace fermé de H. Soit η l'application définie par :

$$\begin{array}{rcccl} \eta & : & [0\,,\,1] & \longrightarrow & B(H) \\ & & t & \longmapsto & T_1 \oplus t\,T_2. \end{array}$$

Alors, $\eta(0) = T$ et $R(\eta(t))$ est la somme de $R(T_1)$ un sous-espace fermé et $R(T_2)$ un sous-espace de dimension finie. Il en résulte que pour tout $t \in]0\,,\,1]$, $R(\eta(t))$ est un sous-espace fermé de H. D'autre part, on vérifie sans difficulté que :

$$\alpha(\eta(t)) = m - (m - m') = m'$$

et

$$\beta(\eta(t)) = (m - n) - (m - m') = m' - n.$$

Donc, pour tout $t \in]0\,,\,1]$, $\eta(t) \in F_{m'}^n$. Comme $\eta(1)$ et L sont dans $F_{m'}^n$ et que $F_{m'}^n$ est connexe par arcs, il existe θ un chemin continu tel que :

$$\theta(0) = \eta(1), \ \ \theta(1) = L \ \text{ et } \ \forall\, t \in [0, 1],\, \theta(t) \in F_{m'}^n.$$

Donc l'application ρ défini par :

$$\begin{array}{rcl} \rho \; : \; [0\,,1] & \longrightarrow & B(H) \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \eta(2t) & \text{si } t \in [0\,,\,\frac{1}{2}], \\ \theta(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}\,,\,1], \end{cases} \end{array}$$

est continue. En plus, on a :

$$\rho(0) = T,\ \rho(1) = L \quad \text{et} \quad \rho(t) \in F^n_{m'} \cup F^n_m, \text{ pour tout } t \in [0\,,\,1].$$

Ceci prouve que $F^n_{m'} \cup F^n_m$ est connexe par arcs. ■

Dans toute la suite nous noterons $j_J = \inf\{j : j \in J\}$, pour un sous-ensemble J de $\overline{\mathbb{N}}$ ($J \subseteq \overline{\mathbb{N}}$).
Nous allons en déduire une propriété intéressante concernant les F^n_m ($n \leq m$).

Corollaire 3.2.5
Soient $J \subseteq \overline{\mathbb{N}}$ et $n \in \overline{\mathbb{Z}}$ tel que $n \leq j_J$. Alors :

$$\bigcup_{j \in J} F^n_j \text{ est connexe par arcs.}$$

Démonstration :
- Si J est réduit à un point, le corollaire résulte trivialement du Théorème 3.2.4.
- Si card$(J) \geq 2$, alors comme dans la preuve du Théorème 3.2.4, on remarque que $n < +\infty$, donc $+\infty \notin J$. Et le corollaire résulte immédiatement du Théorème 3.2.4. ■

Nous allons déterminer la distance d'un opérateur T à $\bigcup_{j \in J} F^n_j$. Pour cela on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.6

Soient $T \in B(H)$, $J \subseteq \overline{\mathbb{N}}$ et $n \in \overline{\mathbb{Z}}$ tel que $n \leq j$. Supposons que $\max\{m_e(T), m_e(T^*)\} > 0$, alors :

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F_j^n\Big) \leq \operatorname{dist}\Big(T, F_j^n\Big) \leq \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

Démonstration :

Si $n = +\infty$. Alors, on remarque que $\bigcup\limits_{j\in J} F_j^{+\infty} = F^{+\infty}$, ainsi d'après le Théorème 3.1.1, on conclut que

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F_j^{+\infty}\Big) = \operatorname{dist}\Big(T, F^{+\infty}\Big) \leq \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

Supposons maintenant que $n < +\infty$. Comme $T \in F_j^n$ si et seulement si $T^* \in F_{j-n}^{-n}$, et quitte à remplacer T par T^*, on peut supposer sans perte de généralité que $\max\{m_e(T), m_e(T^*)\} = m_e(T) > 0$. Donc par le Théorème 2.15, on a : $\alpha(T)$ est finie et $R(T)$ est un fermé de H.

Soit $\varepsilon > 0$, on lui associe le sous-espace fermé $X_\varepsilon = E([0, m_e(T)+\varepsilon[)H$. Alors, d'après le Théorème 2.17, on a :

$$\dim(X_\varepsilon) = +\infty. \tag{1}$$

D'autre part, comme $\alpha(T)$ est finie et $R(T)$ est fermé, d'après le Lemme 2.4, on conclut que $T(X_\varepsilon^\perp)$ est fermé, d'où H est la somme directe de $T(X_\varepsilon^\perp)$ et $T(X_\varepsilon^\perp)$:

$$H = T(X_\varepsilon^\perp) \oplus \Big(T(X_\varepsilon^\perp)\Big)^\perp.$$

Puisque, $\dim(E(\{0\})H) = \alpha(T) < +\infty$ et $\dim(X_\varepsilon) = +\infty$, il s'ensuit que $\dim T(X_\varepsilon) = \dim X_\varepsilon = +\infty$. Or, on vérifie sans difficulté que $T(X_\varepsilon) \subseteq (T(X_\varepsilon^\perp))^\perp$, donc

$$\dim\Big(T(X_\varepsilon^\perp)\Big)^\perp = +\infty.$$

Ainsi, il existe M_ε et M'_ε (resp. N_ε et N'_ε) deux sous-espaces fermés de X_ε (resp. $(T(X_\varepsilon^\perp))^\perp$) tels que :

$$M_\varepsilon \oplus M'_\varepsilon = X_\varepsilon, \;\; \dim M_\varepsilon = +\infty \;\text{ et }\; \dim M'_\varepsilon = j,$$

(resp. $N_\varepsilon \oplus N'_\varepsilon = (T(X_\varepsilon^\perp))^\perp$, $\dim N_\varepsilon = +\infty$ et $\dim N'_\varepsilon = j_J - n$).

D'autre part, puisque, $\dim M_\varepsilon = \dim N_\varepsilon = +\infty$, il existe $U\colon M_\varepsilon \longrightarrow N_\varepsilon$ une isométrie surjective. Maintenant définissons $T_\varepsilon \in B(H)$ par :

$$T_\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon U & \text{sur } M_\varepsilon , \\ 0 & \text{sur } M'_\varepsilon , \\ T & \text{sur } X_\varepsilon^\perp . \end{cases}$$

Alors, on vérifie aisément que $T_\varepsilon \in F^n_{j_J}$ et que

$$\|T - T_\varepsilon\| \leq \|T_{|X_\varepsilon}\| + \|T_{\varepsilon|X_\varepsilon}\| \leq m_e(T) + 2\varepsilon. \tag{2}$$

Par conséquent,

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F^n_j\Big) \leq \operatorname{dist}\Big(T, F^n_{j_J}\Big) \leq m_e(T) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

■

Dans la suite on aura aussi besoin du lemme suivant qui montre que tout opérateur non semi-Fredholm est la limite d'une suite d'éléments de F^n_m (avec $n \leq m$) plus précisément :

Lemme 3.2.7

Soient $T \in B(H)$, $J \subseteq \overline{\mathbb{N}}$ et $n \in \overline{\mathbb{Z}}$ tel que $n \leq j_J$. Supposons que $\max\{m_e(T), m_e(T^*)\} = 0$, *alors*

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F^n_j\Big) = \operatorname{dist}\Big(T, F^n_{j_J}\Big) = 0.$$

Démonstration :

Si $n = +\infty$, alors on remarque d'abord que $F^{+\infty}_{+\infty} = F^{+\infty}$, d'où d'après le Théorème 3.1.1, on conclut que :

$$\operatorname{dist}(T, F^{+\infty}_{+\infty}) = \operatorname{dist}(T, F^{+\infty}) = 0.$$

Supposons maintenant que $n < \infty$, soit $\varepsilon > 0$, on lui associe le sous-espace fermé $X_\varepsilon = E([0,\varepsilon[)H$. Alors, d'après le Théorème 2.17, on a :

$$(1) \qquad \dim X_\varepsilon = +\infty.$$

On va distinguer 2 cas :

• $\underline{1^{er} cas :}$ Si $\alpha(T) = \alpha(T^*) = +\infty$.

Alors, $\operatorname{ind}(T) = 0$, d'où d'après le Lemme 2.14, il existe W unitaire tel que $T = W|T|$. Or

$$|T|(X_\varepsilon^\perp) = |T|E([\varepsilon,+\infty[)H = E([\varepsilon,+\infty[)H = X_\varepsilon^\perp,$$

par suite $X_\varepsilon = \Big(|T|(X_\varepsilon^\perp)\Big)^\perp$.

D'autre part, comme X_ε est un sous-espace fermé de H de dimension infinie, il existe M_ε et M'_ε (resp, N_ε et N'_ε) deux sous-espaces fermés de X_ε tels que :

$$M_\varepsilon \oplus M'_\varepsilon = X_\varepsilon, \ \dim M_\varepsilon = +\infty \quad \text{et} \quad \dim M'_\varepsilon = j,$$

(resp, $N_\varepsilon \oplus N'_\varepsilon = X_\varepsilon$, $\dim N_\varepsilon = +\infty$ et $\dim N'_\varepsilon = j - n$). Puisque $\dim M_\varepsilon = \dim N_\varepsilon$, il existe $U : M_\varepsilon \longrightarrow N_\varepsilon$ une isométrie surjective. Définissons maintenant $A_\varepsilon \in B(H)$ par :

$$A_\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon U & \text{sur } M_\varepsilon, \\ 0 & \text{sur } M'_\varepsilon, \\ |T| & \text{sur } X_\varepsilon^\perp. \end{cases}$$

Soit $T_\varepsilon = WA_\varepsilon$, alors $T_\varepsilon \in F_j^n$ et on a :

$$\|T - T_\varepsilon\| \leq \| \, |T|_{|X_\varepsilon}\| + \|A_{\varepsilon|X_\varepsilon}\| \leq 2\varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F_j^n\Big) = \operatorname{dist}\Big(T, F_j^n\Big) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\} = 0.$$

• $\underline{2^{eme} cas :}$ Si $\alpha(T) < +\infty$ ou $\alpha(T^*) < +\infty$.
Tout d'abord, d'après le Lemme 1 [12], on a :

$$(2) \qquad \dim E(]0,\varepsilon[)H = \dim E^*(]0,\varepsilon[)H.$$

D'autre part, puisque $\max\{m_e(T), m_e(T^*)\} = 0$, d'après le Théorème 2.17, on constate que :

$$(3) \qquad E(]0,\varepsilon[)H = +\infty \qquad \text{si } \alpha(T) < +\infty,$$

ou

$$(4) \qquad E^*(]0,\varepsilon[)H = +\infty \qquad \text{si } \alpha(T^*) < +\infty.$$

Par suite, on conclut au moyen de (2), (3) et (4) que :

$$(5) \qquad \dim E(]0,\varepsilon[)H = \dim E^*(]0,\varepsilon[)H = +\infty.$$

Par ailleurs, il n'est pas difficile de voir que :

$$(6) \qquad T(E(]0,\varepsilon[)H) \subseteq \left(T(X_\varepsilon^\perp)\right)^\perp.$$

D'où, en tenant compte des (5) et (6), et le fait que $T_{|E(]0,\varepsilon[)H}$ est un opérateur injectif, on conclut que :

$$\dim(T(X_\varepsilon^\perp))^\perp = +\infty.$$

Comme, $T(X_\varepsilon^\perp)$ est un fermé de H, on en déduit que H est la somme directe de $T(X_\varepsilon^\perp)$ et $(T(X_\varepsilon^\perp)^\perp$:

$$H = T(X_\varepsilon^\perp) \oplus (T(X_\varepsilon^\perp)^\perp.$$

Définissons, T_ε comme dans la preuve du Lemme 3.2.6. Alors, on montre sans difficulté que :

$$T_\varepsilon \in F_{\jmath}^n \quad \text{et} \quad \|T - T_\varepsilon\| \leq \|T_{|X_\varepsilon}\| + \|T_{\varepsilon|X_\varepsilon}\| \leq 2\varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F_j^n\Big) = \operatorname{dist}\Big(T, F_{\mathfrak{j}}^n\Big) = 0.$$

Ceci achève la démonstration du Lemme 3.2.7. ■

Nous avons désormais en main les outils nécessaires pour attaquer la preuve du théorème suivant :

Théorème 3.2.8

Soient $T \in B(H)$, $J \subseteq \overline{\mathbb{N}}$ et $n \in \overline{\mathbb{Z}}$, tel que $n \leq \mathfrak{j}$.

1) *Pour* $\operatorname{ind}(T) \neq n$, *on a :*

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F_j^n\Big) = \operatorname{dist}\Big(T, F_{\mathfrak{j}}^n\Big) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

2) *Pour* $\operatorname{ind}(T) = n$.

i) Si $\mathfrak{j} \leq \alpha(T)$, alors :

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F_j^n\Big) = \operatorname{dist}\Big(T, F_{\mathfrak{j}}^n\Big) = 0.$$

ii) Si $\mathfrak{j} > \alpha(T)$, alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F_j^n\Big) &= \operatorname{dist}\Big(T, F_{\mathfrak{j}}^n\Big) \\ &= \begin{cases} \varrho(T) & si\ \ m_e(T) > \gamma(T), \\ m_e(T) & si\ \ m_e(T) = \gamma(T), \end{cases} \end{aligned}$$

où $\varrho(T) = \sup\Big\{\lambda : \dim E([0,\lambda[)H < \mathfrak{j}\Big\}$.

Démonstration :

1) D'abord, d'après le Théorème 2.18, on remarque, pour tout $L \in \bigcup_{j\in J} F_j^n$, que

$$\|T - L\| \geq \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

Donc,

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{dist}\left(T, F^n_{j_J}\right) \geq \operatorname{dist}\left(T, \bigcup_{j\in J} F^n_j\right) \geq \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

Inversement, d'après les Lemmes 3.2.6 et 3.2.7, on conclut que :

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{dist}\left(T, \bigcup_{j\in J} F^n_j\right) \leq \operatorname{dist}\left(T, F^n_{j_J}\right) \leq \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

Donc (1) et (2) entraînent que :

$$\operatorname{dist}\left(T, \bigcup_{j\in J} F^n_j\right) = \operatorname{dist}\left(T, F^n_{j_J}\right) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}.$$

2) *i)* Si $j_J \leq \alpha(T)$, on va distinguer deux cas :

- <u>1^{er} *cas :*</u> Si $\alpha(T) < +\infty$.

Si $R(T)$ n'est pas fermé, alors $\max\{m_e(T), m_e(T^*)\} = 0$, d'où par les Lemmes 3.2.6 et 3.2.7, on constate que :

$$\operatorname{dist}\left(T, \bigcup_{j\in J} F^n_j\right) = \operatorname{dist}\left(T, F^n_{j_J}\right) = 0.$$

Maintenant supposons que $R(T)$ est fermé.

- Si $j_J = \alpha(T)$, alors l'assertion est évidente.

- Si $j_J < \alpha(T)$. Soient $\{e_1, \ldots, e_{\alpha(T)}\}$ une base orthonormale de $N(T)$ et $\{f_1, \ldots, f_{\alpha(T)-n}\}$ une base orthonormale de $N(T^*)$. Choisissons un réel ε strictement positif et définissons $T_\varepsilon \in B(H)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(e_j) &= 0 && \text{si } j = 1, \ldots, j_J, \\ T_\varepsilon(e_j) &= \varepsilon f_{j-j_J} && \text{si } j = j_J + 1, \ldots, \alpha(T), \\ T_\varepsilon &= T && \text{sur } N(T)^\perp. \end{aligned}$$

Une vérification de routine montre que $T_\varepsilon \in F^n_{j_J}$ et $\|T - T_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. Donc,

$$\operatorname{dist}\left(T, \bigcup_{j\in J} F^n_j\right) = \operatorname{dist}\left(T, F^n_{j_J}\right) = 0.$$

- <u>2^{eme}cas :</u> Si $\alpha(T)=+\infty$.

• Si $j_J<+\infty$, alors $n=0$, ceci implique que $\alpha(T)=\alpha(T^*)=+\infty$. Donc par le Théorème 2.15, on conclut que $\max\{m_e(T),m_e(T^*)\}=0$. Ainsi, en utilisant le Lemme 3.2.7, on en déduit que :

$$\operatorname{dist}\Big(T,\bigcup_{j\in J}F_j^0\Big)=\operatorname{dist}\Big(T,F_{j_J}^0\Big)=0.$$

• Si $j_J=+\infty$, alors $n=0$ ou $n=+\infty$.

Si $n=0$, alors comme le point précédent, on voit que :

$$\operatorname{dist}\Big(T,\bigcup_{j\in J}F_j^0\Big)=\operatorname{dist}\Big(T,F_{j_J}^0\Big)=0.$$

Supposons donc $n=+\infty$, alors on remarque que $\alpha(T^*)<+\infty$ et que $J=\{+\infty\}$. Donc $T\in\overline{F^{+\infty}}=\overline{F_{+\infty}^{+\infty}}=\overline{\bigcup_{j\in J}F_j^{+\infty}}$. Par conséquent, $\operatorname{dist}(T,\bigcup_{j\in J}F_j^{+\infty})=0$.

ii) Si $j_J>\alpha(T)$.

• Si $m_e(T)=\gamma(T)$, tout d'abord, en utilisant le Théorème 2.5, on voit que :

$$m_e(T)=\gamma(T)\leq\operatorname{dist}\Big(T,\bigcup_{j\in J}F_j^n\Big)\leq\operatorname{dist}\Big(T,F_{j_J}^n\Big).\tag{3}$$

Inversement, puisque $\alpha(T)$ est finie, on conclut d'après la Remarque 2.16, que $m_e(T)=\max\{m_e(T),m_e(T^*)\}$. Maintenant en utilisant les Lemmes 3.2.6 et 3.2.7, on constate que :

$$\operatorname{dist}\Big(T,\bigcup_{j\in J}F_j^n\Big)\leq\operatorname{dist}\Big(T,F_{j_J}^n\Big)\leq m_e(T).\tag{4}$$

Donc, en combinant (3) et (4), on conclut que :

$$\operatorname{dist}\Big(T,\bigcup_{j\in J}F_j^n\Big)=\operatorname{dist}\Big(T,F_{j_J}^n\Big)=m_e(T).$$

• Si $m_e(T)>\gamma(T)$.

D'abord, d'après le Théorème 1 [7], on constate que :

$$\varrho(T)\leq\operatorname{dist}\Big(T,\bigcup_{j\in J}F_j^n\Big)\leq\operatorname{dist}\Big(T,F_{j_J}^n\Big).\tag{5}$$

Inversement, soit $\varepsilon > 0$, on va construire un opérateur $T_\varepsilon \in F_j^n$ tel que $\|T - T_\varepsilon\| \leq \varrho(T) + \varepsilon$.

D'abord, nous remarquons que $\dim E([0, \varrho(T)+\varepsilon[)H \geq j$ d'où, il existe M_ε un sous-espace fermé de H de dimension j tel que :

$$E([0, \varrho(T) - \varepsilon[)H \subseteq M_\varepsilon \subseteq E([0, \varrho(T) + \varepsilon[)H.$$

Notons, P_ε la projection orthogonale sur M_ε et $T_\varepsilon = T(I - P_\varepsilon)$. Alors on voit que :

$$\begin{cases} \alpha(T_\varepsilon^*) & = & j - \alpha(T) + \alpha(T^*) = j - n\,, \\ \alpha(T_\varepsilon) & = & j\,; \end{cases}$$

et

$$\|T - T_\varepsilon\| = \|TP_\varepsilon\| \leq \varrho(T) + \varepsilon.$$

D'autre part, comme $m_e(T) > 0$, par le Théorème 2.15, on constate que $R(T)$ est un sous-espace fermé de H et $\alpha(T) < +\infty$. En utilisant maintenant le Lemme 2.4, on conclut que $R(T_\varepsilon)$ est fermé. Ceci prouve que $T_\varepsilon \in F_j^n$. D'où,

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F_j^n\Big) \leq \operatorname{dist}\Big(T, F_j^n\Big) \leq \|T - T_\varepsilon\| \leq \varrho(T) + \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F_j^n\Big) \leq \operatorname{dist}\Big(T, F_j^n\Big) \leq \varrho(T). \tag{6}$$

Donc, (5) et (6) impliquent que :

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F_j^n\Big) = \operatorname{dist}\Big(T, F_j^n\Big) = \varrho(T).$$

Ceci achève la preuve du Théorème 3.2.8. ∎

Corollaire 3.2.9

Soient $J \subseteq \overline{\mathbb{N}}$ et $n \in \overline{\mathbb{Z}}$ tel que $n \leq j$, alors F_j^n est dense dans $\bigcup_{j\in J} F_j^n$.

Démonstration :

Conséquence immédiate du Théorème 3.2.8, puisque pour tout $T \in B(H)$, on a :

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F_j^n\Big) = \operatorname{dist}\Big(T, F_j^n\Big).$$

■

Notons $C_m^n = \{S \in I_n : \alpha(S) = m, \text{ avec } n \leq m\}$.

Corollaire 3.2.10

Soit $J \subseteq \overline{\mathbb{N}}$, alors

$$\bigcup_{j\in J} F_j^n \text{ est dense dans } \bigcup_{j\in J} C_j^n.$$

Démonstration :

La démonstration est une conséquence directe de l'égalité suivante qui n'est pas difficile a montré :

$$\forall\, T \in B(H),\ \operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} F_j^n\Big) = \operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{j\in J} C_j^n\Big).$$

■

Théorème 3.2.11

Soient $n \in \overline{\mathbb{Z}}$ et $T \in B(H)$ un opérateur semi-Fredholm d'indice n, alors :

$$\operatorname{dist}\Big(T, \Big[\bigcup_{i=0}^{\alpha(T)} F_i^n\Big]^c\Big) = \begin{cases} \gamma(T) & \text{si } n \neq +\infty, \\ m_e(T^*) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration :

Si $n = +\infty$, alors on voit que $\bigcup_{i=0}^{\alpha(T)} F_i^{+\infty} = F_{+\infty}^{+\infty} = F^{+\infty}$. Or, d'après le Théorème 3.1.2, on a

$$B(H) = \Delta \cup \Big(\bigcup_{i\in\overline{\mathbb{Z}}\setminus\{+\infty\}} F^i\Big) \cup F^{+\infty}.$$

Donc,

$$\Big[\bigcup_{i=0}^{\alpha(T)} F_i^n\Big]^c = \big(F^{+\infty}\big)^c = \Delta \cup \Big(\bigcup_{i\in\overline{\mathbb{Z}}\setminus\{+\infty\}} F^i\Big).$$

Ainsi, en utilisant les Théorèmes 3.1.6 et 3.1.3 et la Remarque 2.16, on conclut que :

$$\mathrm{dist}\Big(T, \Big[\bigcup_{i=0}^{+\infty} F_i^{+\infty}\Big]^c\Big) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\} = m_e(T^*).$$

Supposons maintenant que $n \neq +\infty$, ceci implique que $\alpha(T)$ est finie. Soit $\varepsilon > 0$, alors il découle directement de la définition de la conorme de T l'existance d'un vecteur unitaire x_0 appartenant à $N(T)^\perp$ tel que $\|T(x_0)\| \leq \gamma(T) + \varepsilon$. Définissons maintenant $L \in B(H)$ de la manière suivante :

$$L(x) = T(x) - \ < x, x_0 > T(x_0),$$

où $< \cdot, \cdot >$ désigne le produit scalaire sur H.

Alors, on voit sans difficulté que :

$$\alpha(L) = \alpha(T) + 1,\ \ \gamma(L) \geq \gamma(T) > 0 \ \text{ et } \ \alpha(L^*) = \alpha(T^*) + 1,$$

Ceci impliquent que, $\mathrm{ind}(L) = \ \mathrm{ind}(T) = n$. Par conséquent, $L \in F^n_{\alpha(T)+1}$.

D'autre part, comme $\|T - L\| = \|T(x_0)\| \leq \gamma(T) + \varepsilon$, on en déduit que :

$$\mathrm{dist}\Big(T, \Big[\bigcup_{i=0}^{\alpha(T)} F_i^n\Big]^c\Big) \leq \gamma(T).$$

Inversement, d'après le Théorème 2.5, on voit que pour tout $L \in \Big[\bigcup_{i=0}^{\alpha(T)} F_i^n\Big]^c$,

$$\|T - L\| \geq \gamma(T).$$

Ceci implique que, $\mathrm{dist}\Big(T, \Big[\bigcup_{i=0}^{\alpha(T)} F_i^n\Big]^c\Big) \geq \gamma(T)$.

Le Théorème 3.2.11 est démontré. ∎

Corollaire 3.2.12

Soient $i \in \overline{\mathbb{N}}$ et $n \in \overline{\mathbb{Z}}$ tel que $i \geq n$. Soit $T \in F_i^n$, alors :

$$\operatorname{dist}\Big(T, (F_i^n)^c\Big) = \begin{cases} m_e(T^*) & \textit{si } n = +\infty, \\ \\ \gamma(T) & \textit{si } i = 0 \textit{ ou } n = i < +\infty, \\ \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration :

- Si $n = +\infty$, alors $i = +\infty$. D'où $F_{+\infty}^{+\infty} = F^{+\infty}$. Par conséquent, $\operatorname{dist}\Big(T, (F_{+\infty}^{+\infty})^c\Big) = \operatorname{dist}\Big(T, (F^{+\infty})^c\Big)$. Donc, en utilisant les Théorèmes 3.1.6 et 3.1.3 et la Remarque 2.16, on obtient :

$$\operatorname{dist}\Big(T, (F_{+\infty}^{+\infty})^c\Big) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\} = m_e(T^*).$$

- Si $i = 0$ ou $n = i < +\infty$, ceci implique que $\alpha(T) = 0$ ou $\beta(T) = 0$. Donc, en utilisant le Théorème 2.5, on voit que

$$\|T - L\| \geq \gamma(T), \text{ pour tout } L \in (F_i^n)^c.$$

Ceci implique que $\operatorname{dist}\Big(T, (F_i^n)^c\Big) \geq \gamma(T)$. L'inégalité inverse découle directement du Théorème 3.2.11.

- Supposons maintenant que $n < +\infty$, $n \neq i$ et $i > 0$, cela revient à dire que $n < i$ et $i > 0$. Puisque $n \neq i$, on conclut que $\beta(T) > 0$. D'autre part, en tenant compte du fait que $T \in F_i^n$ et $n < i$, on conclut que $i < +\infty$.

On a : $H = N(T) \oplus N(T)^\perp$. Soit $\varepsilon > 0$, fixons un vecteur unitaire x_0 de $N(T)$ et un vecteur unitaire y_0 de $R(T)^\perp$. Soit M un sous-espace de $N(T)$ tel que $N(T) =< x_0 > \oplus M$, où $< x_0 >$ désigne le sous-espace engendré par x_0. Définissons $L_\varepsilon \in B(H)$ par :

$$L_\varepsilon(x) = \begin{cases} T(x) & \text{si } \ x \in N(T)^\perp, \\ \\ \varepsilon < x, x_0 > y_0 & \text{si } \ x \in N(T). \end{cases}$$

Alors, une vérification de routine montre que :

$$\|T - L_\varepsilon\| = \|\varepsilon y_0\| = \varepsilon,\ \alpha(L_\varepsilon) = \alpha(T) - 1,\ \gamma(L_\varepsilon) > 0 \ \text{ et } \ \operatorname{ind}(L_\varepsilon) = n.$$

Ceci entraîne que $L_\varepsilon \in F_{i-1}^n \subsetneq (F_i^n)^c$. Donc $\operatorname{dist}\big(T, (F_i^n)^c\big) = 0$. ■

On va maintenant déterminer les frontières des F_m^n et $\overline{F_m^n}$ (avec $n \leq m$). Avant cela nous montrons d'abord le théorème suivant.

Théorème 3.2.13

Soient $J \subseteq \overline{\mathbb{N}}$ et $n \in \overline{\mathbb{Z}}$ tel que $n \leq j_J$. Alors

1) $\overline{\bigcup_{j\in J} F_j^n} = \Delta \cup \Big(\bigcup_{j_J \leq j} F_j^n\Big)$.

2) $$\operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F_j^n}\Big) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \ n < j_J \ \text{ et } \ j_J > 0, \\ \bigcup_{j_J \leq j} F_j^n & \text{si } \ n = j_J \ \text{ ou } \ j_J = 0 . \end{cases}$$

Démonstration :

1) Si $j_J = 0$, alors l'égalité est une simple conséquence du Théorème 3.1.6. Supposons donc $j_J > 0$. D'une part, par le Lemme 3.2.7, on voit que $\Delta \subseteq \overline{\bigcup_{j\in J} F_j^n}$ et d'autre part, par le Théorème 3.2.8, on constate que $\bigcup_{j_J \leq j} F_j^n \subseteq \overline{\bigcup_{j\in J} F_j^n}$. Donc

$$(1) \qquad \Delta \cup \Big(\bigcup_{j_J \leq j} F_j^n\Big) \subseteq \overline{\bigcup_{j\in J} F_j^n}.$$

Montrons l'inclusion inverse.

Comme $\bigcup_{0\leq j<j_J} F_j^n$ est un ouvert (voir, Théorème 2.5), on en déduit que

$$\Delta \cup \Big(\bigcup_{j_J \leq j} F_j^n\Big) = \left\{\Big(\bigcup_{j\neq n} F^j\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{0\leq j<j_J} F_j^n\Big)\right\}^c \text{ est un fermé .}$$

Or, $\bigcup\limits_{j \in J} F_j^n$ est inclus dans $\Delta \cup \Big(\bigcup\limits_{\jmath \leq j} F_j^n\Big)$, par suite :

$$\text{(2)} \qquad \overline{\bigcup_{j \in J} F_j^n} \subseteq \Delta \cup \Big(\bigcup_{\jmath \leq j} F_j^n\Big).$$

Donc, on conclut au moyen de (1) et (2) que :

$$\overline{\bigcup_{j \in J} F_j^n} = \Delta \cup \Big(\bigcup_{\jmath \leq j} F_j^n\Big).$$

2)

- Si $n < \jmath$ et $\jmath > 0$.

Soit $T \in \overline{\bigcup\limits_{j \in J} F_j^n}$. Si T est semi-Fredholm, alors d'après la première assertion, on constate que : T appartient à $\bigcup\limits_{j \geq \jmath} F_j^n$. Maintenant, en utilisant le Lemme 3.2.1 et encore une fois la première assertion, on conclut que : $T \notin \text{int}\Big(\overline{\bigcup\limits_{j \in J} F_j^n}\Big)$.

Supposons maintenant qu'il existe un opérateur $T \in \text{int}\Big(\overline{\bigcup\limits_{j \in J} F_j^n}\Big)$, alors d'après ce qui précéde on constate que T n'est pas semi-Fredholm c'est à dire que $T \in \Delta$. Donc, compte tenu du fait que $\Delta = \partial(F^{\jmath})$ (voir, Théorème 3.1.2), on conclut que

$$T \in \partial(F^{\jmath}) \cap \text{int}\Big(\overline{\bigcup_{j \in J} F_j^n}\Big).$$

ceci entraîne que $F^{\jmath} \cap \overline{F^n} \neq \emptyset$, ce qui contredit la continuité de l'indice. Par conséquent, $\text{int}\Big(\overline{\bigcup\limits_{j \in J} F_{\jmath}^n}\Big) = \emptyset$.

- Si $\jmath = 0$.

Tout d'abord, d'après le Théorème 3.2.8, on remarque que $\overline{\bigcup\limits_{j \in J} F_j^n} = \overline{F^n}$. Or, d'après le Théorème 3.1.9, on a : $\text{int}(\overline{F^n}) = F^n$, par suite :

$$\text{int}\Big(\overline{\bigcup_{j \in J} F^n}\Big) = F^n = \Big(\bigcup_{j \geq \jmath} F_j^n\Big).$$

- Si $\jmath = n > 0$.

Soit $T \in \text{int}\Big(\overline{\bigcup\limits_{j \in J} F^n}\Big)$. En utilisant la première assertion et le fait que

$\Delta = \partial(F^m)$ pour un certain m différent de n (voir, Théorème 3.1.2), on conclut que $T \notin \Delta$, c'est à dire T est semi-Fredholm. Donc, compte tenu de 1), on déduit que $T \in \bigcup_{n\leq j} F_j^n$. Ceci prouve que $\operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F_j^n}\Big) \subseteq \bigcup_{n\leq j} F_j^n$.

L'inclusion inverse découle immédiatement de 1) et de la Proposition 3.2.2.

Ceci achève la démonstration du Théorème 3.2.13. ■

En utilisant la Proposition 3.2.2 et le Théorème 3.2.13, on voit sans difficulté les corollaires suivants.

Corollaire 3.2.14

Soient $m, p \in \overline{\mathbb{N}}$ et $n \in \overline{\mathbb{Z}}$ tel que $n \leq m$, alors :

$$\partial\Big(\bigcup_{0\leq j\leq p} F_{m+j}^n\Big) = \Delta \cup \Big(\bigcup_{p<j\leq+\infty} F_{m+j}^n\Big).$$

Corollaire 3.2.15

Soient $J \subseteq \overline{\mathbb{N}}$ et $n \in \overline{\mathbb{Z}}$ tel que $n \leq j_J$, alors :

$$\partial\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F_j^n}\Big) = \begin{cases} \overline{\bigcup_{j\in J} F_j^n} & si \quad n < j_J \quad et \quad j_J > 0, \\[2ex] \Delta & si \quad n = j_J \quad et \quad j_J = 0 . \end{cases}$$

Corollaire 3.2.16

Soient $J \subseteq \overline{\mathbb{N}}$ et $n \in \overline{\mathbb{Z}}$ tel que $n \leq j_J$, alors :

$$\overline{\bigcup_{j\in J} F_j^n} \text{ est connexe par arcs.}$$

Démonstration :

Vu le Corollaire 3.2.5 et le fait que Δ est connexe par arcs, il suffit de montrer que si $T \in \Delta$ et $L \in F_m^n$ avec $m \geq j$, il existe un chemin continu inclus dans $\overline{\bigcup_{j \in J} F_j^n}$ et d'extrimités T et L. L'application θ définie par :

$$\begin{aligned} \theta \ : \ [0\,,1] &\longrightarrow B(H) \\ t &\longmapsto tT. \end{aligned}$$

est continue et $\theta(t) \in \Delta$ pour tout $t \in [0,1]$. L'application η définie par :

$$\begin{aligned} \eta \ : \ [0\,,1] &\longrightarrow B(H) \\ t &\longmapsto tL. \end{aligned}$$

est continue, $\eta(0) = 0$ et $\eta(t) \in F_m^n$ pour tout $t \in]0,1]$. Donc, l'application τ définie par :

$$\begin{aligned} \tau \ : \ [0\,,1] &\longrightarrow B(H) \\ t &\longmapsto \begin{cases} \theta(2t) & \text{si } t \in [0\,,\frac{1}{2}], \\ \eta(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}\,,1], \end{cases} \end{aligned}$$

est continue et vérifie :

$$\tau(0) = T, \ \rho(1) = L \quad \text{et} \quad \rho(t) \in \Delta \cup F_m^n \text{ pour tout } t \in [0\,,1].$$

Ceci prouve que $\overline{\bigcup_{j \in J} F_j^n}$ est connexe par arcs. ∎

Sur les isométries partielles maximales essentielles

Cette partie consiste en l'article

[55], Studia Mathematica **128** (2) (1998), 135–144.

3.3 Sur les isométries partielles maximales essentielles

Notons,

$\mathcal{U} = \{L \in B(H) : \ L^*L = LL^* = I\}$, l'ensemble des opérateurs unitaires.

$\mathcal{S} = \{L \in B(H) : \ L^*L = I\}$, l'ensemble des isométries .

Alors, il est bien connu que tout opérateur L de $\mathcal{S}$, vérifie :

$$\|L(x)\| = \|x\|, \ \text{ pour tout } x \text{ de } H.$$

On note aussi :

$$\mathcal{V} = \mathcal{S} \cup (\mathcal{S})^* = \{L \in B(H) : L^*L = I \text{ ou } LL^* = I\},$$

l'ensemble des isométries partielles maximales.

Considérons les classes d'opérateurs suivantes :

- $\mathcal{U}_e = \{ \ L \in B(H) : \pi(L^*)\pi(L) = \pi(L)\pi(L^*) = \pi(I)\}$, l'ensemble des opérateurs essentiellements unitaires.

- $\mathcal{S}_e = \{ \ L \in B(H) : \pi(L^*)\pi(L) = \pi(I)\}$, l'ensemble des isométries essentielles.

- $\mathcal{V}_e = \mathcal{S}_e \cup (\mathcal{S}_e)^* = \{ \ L \in B(H) : \pi(L^*)\pi(L) = \pi(I) \text{ ou } \pi(L)\pi(L^*) = \pi(I)\}$, l'ensemble des isométries partielles maximales essentielles.

Alors, on voit sans difficulté les inclusions strictes suivantes :

$$\mathcal{U} \subsetneqq \mathcal{U}_e, \ \ \mathcal{S} \subsetneqq \mathcal{S}_e, \ \ \mathcal{V} \subsetneqq \mathcal{V}_e;$$

$$\mathcal{U} \subsetneqq \mathcal{S} \subsetneqq \mathcal{V} \ \text{ et } \ \mathcal{U}_e \subsetneqq \mathcal{S}_e \subsetneqq \mathcal{V}_e.$$

Lemme 3.3.1

Soit $T \in B(H)$. Supposons que $T \in F_+$ et soit K_0 l'opérateur défini par

$$K_0 = E([0, m_e(T)[)\Big(|T| - m_e(T)I\Big) + E(]\,\|T\|_e, \|T\|\,])\Big(|T| - \|T\|_e I\Big).$$

Alors, K_0 est un opérateur compact et

$$\|\,|T| - I - K_0\,\| = \max\{1 - m_e(T), \|T\|_e - 1\} = \|\,|T| - I\,\|_e.$$

Démonstration :

Nous notons, d'abord les deux opérateurs K_1 et K_2 définies par :

$$K_1 = E([0, m_e(T)[)(|T| - m_e(T)I) \quad \text{et} \quad K_2 = E(]\,\|T\|_e, \|T\|\,])(|T| - \|T\|_e I).$$

Alors, K_1 et $K_2 \in K(H)$. En effet, soient ε un réel tel que $0 < \varepsilon < m_e(T)$ et

$$\begin{aligned} K_{1,\varepsilon} &= E([0, m_e(T) - \varepsilon[)\Big(|T| - m_e(T)I\Big), \\ K_{2,\varepsilon} &= E(]\|T\|_e + \varepsilon, \|T\|])\Big(|T| - \|T\|_e I\Big). \end{aligned}$$

Alors, d'après la Proposition 2.20, on remarque que pour tout point λ de $\sigma(|T|) \cap \Big([0, m_e(T) - \varepsilon] \cup [\|T\|_e + \varepsilon, \|T\|]\Big)$ est un point isolé de $\sigma(|T|) \cap \Big([0, m_e(T) - \varepsilon] \cup [\|T\|_e + \varepsilon, \|T\|]\Big)$, donc $\sigma(|T|) \cap \Big([0, m_e(T) - \varepsilon] \cup [\|T\|_e + \varepsilon, \|T\|]\Big)$ est un ensemble fini.

Par ailleurs, comme $\lambda \notin \sigma_e(|T|)$, on conclut que $E(\{\lambda\})H = N(|T| - \lambda I)$ est un sous-espace de dimension finie. Par conséquent, $\dim R(K_{i,\varepsilon}) < +\infty$ pour $i = 1, 2$. D'où, $K_{1,\varepsilon}$ et $K_{2,\varepsilon} \in K(H)$.

Or, on voit facilement que $\|K_i - K_{i,\varepsilon}\| \leq \varepsilon$ pour $i = 1, 2$, par suite :

$$K_1 \in K(H), \; K_2 \in K(H) \; \text{ et } \; K_0 = K_1 + K_2 \in K(H).$$

On a donc établi la première partie du lemme. Montrons maintenant la deuxième. Remarquons, d'abord que l'opérateur $|T| - I - K_0$ peut s'écrire en fonction de $E(\cdot)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} |T| - I - K_0 \;&=\; \Big(m_e(T) - 1\Big)E([0, m_e(T)[) + E([m_e(T), \|T\|_e])(|T| - I) \\ &\quad + (\|T\|_e - 1)E(]\|T\|_e, \|T\|]). \end{aligned}$$

Donc, on vérifie sans difficulté que :

$$\sigma(|T| - I - K_0) \subseteq [m_e(T) - 1, \|T\|_e - 1].$$

D'autre part, comme

$$\{m_e(T) - 1, \|T\|_e - 1\} \subseteq \sigma_e(|T| - I) = \sigma_e(|T| - I - K_0) \subseteq \sigma(|T| - I - K_0),$$

on en déduit que

$$m_e(T) - 1 \in \sigma(|T| - I - K_0) \text{ et } \|T\|_e - 1 \in \sigma(|T| - I - K_0).$$

Par ailleurs, puisque que $|T| - I - K_0$ est un opérateur autoadjoint, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\| \, |T| - I - K_0 \, \| &= \sup\{|\lambda|, \ \lambda \in \sigma(|T| - I - K_0)\}, \\
&= \sup\{|\lambda|, \ \lambda \in [m_e(T) - 1, \|T\|_e - 1]\}, \\
&= \max\{1 - m_e(T), \|T\|_e - 1\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\| \, |T| - I - K_0 \, \| = \max\{1 - m_e(T), \|T\|_e - 1\}.$$

De même, comme $\pi(|T| - I)$ est un élément autoadjoint de $C(H)$, on conclut que :

$$\begin{aligned}
\| \, |T| - I \, \|_e &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_e(|T| - I)\}, \\
&= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_e(|T|) - 1\}, \\
&= \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité est due au fait que :

$$m_e(T) = \inf\{|\lambda|, \ \lambda \in \sigma_e(|T|)\} \text{ et } \|T\|_e = \sup\{|\lambda|, \ \lambda \in \sigma_e(|T|)\}.$$

Donc,

$$\| \, |T| - I - K_0 \, \| = \max\{1 - m_e(T), \|T\|_e - 1\} = \| \, |T| - I \, \|_e.$$

Ceci achève la preuve du Lemme 3.3.1. ■

Remarque :

Le lecteur peut retrouver à la fin de cette thèse (Annexes page 159) une deuxième démonstration de l'égalité :

$$\| \, |T| - I - K_0 \, \| = \max\{1 - m_e(T), \|T\|_e - 1\}.$$

Théorème 3.3.2

Soit $T \in B(H)$, alors

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) = \begin{cases} \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\} & \textit{si} \quad \operatorname{ind}(T) \leq 0, \\ \\ \max\{\|T\|_e - 1, 1 + m_e(T^*)\} & \textit{sinon,} \end{cases}$$

et cette distance est atteinte.

Démonstration :

Tout d'abord, on voit facilement que pour tous $W \in \mathcal{S}$ et $K \in K(H)$:

(1) $\quad \|T - W - K\| \geq \|T - W - K\|_e = \|T - W\|_e \geq \|T\|_e - 1.$

D'autre part, d'après la Proposition 6.10 [38], on voit que :

(2) $\quad \|T - W - K\| \geq m_e(W) - m_e(T) = 1 - m_e(T).$

Par conséquent, (1) et (2) impliquent que :

(3) $\quad \operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) \geq \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\}.$

- Si $\operatorname{ind}(T) \leq 0$.

Soit $T = W_0|T|$, la décomposition polaire de T avec W_0 une isométrie (voir, Lemme 2.14). Supposons d'abord que $m_e(T) > 0$. Soit K_0 l'opérateur défini comme dans l'énoncé du Lemme 3.3.1. Alors, $W_0 + W_0K_0 \in \mathcal{S} + K(H)$, donc en utilisant ce même Lemme 3.3.1, on obtient :

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
\text{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) &\leq \|T - (W_0 + W_0K_0)\|, \\
&= \|\,|T| - I - K_0\,\|, \\
&= \|\,|T| - I\,\|_e, \\
&= \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, on conclut par (3) et (4) que :

$$
\begin{aligned}
\text{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) &= \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\}, \\
&= \|T - (W_0 + W_0K_0)\|.
\end{aligned}
$$

Ceci prouve que cette distance est atteinte.

Maintenant, si $m_e(T) = 0$, alors en utilisant l'inégalité (3) et le Théorème 2.3 [52], on obtient :

$$
\text{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) = \text{dist}(T, \mathcal{U} + K(H)) = \max\{\|T\|_e - 1, 1\},
$$

et cette distance est atteinte par le même Théorème 2.3 [52].

- Si $\text{ind}(T) > 0$.

D'abord, par le Théorème 2.3 [52], on remarque que

$$
\begin{aligned}
\text{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) &\leq \text{dist}(T, \mathcal{U} + K(H)), \\
&= \max\{\|T\|_e - 1, 1 + m_e(T^*)\}.
\end{aligned}
$$

Réciproquement, soient $W \in \mathcal{S}$ et $K \in K(H)$, alors d'après le Théorème 2.1 [52], on conclut que :

$$
(5) \qquad \|T - W - K\| \geq 1 + m_e(T^*) \quad (\text{car } \text{ind}(W) \neq \text{ind}(T)).
$$

D'où, (1) et (5) impliquent que

$$
\text{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) \geq \max\{\|T\|_e - 1, 1 + m_e(T^*)\}.
$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) &= \max\{\|T\|_e - 1, 1 + m_e(T^*)\}, \\ &= \mathrm{dist}(T, \mathcal{U} + K(H)). \end{aligned}$$

Et cette distance est atteinte d'après le Théorème 2.3 [52]. ■

Corollaire 3.3.3

Soit $T \in B(H)$ tel que $\mathrm{ind}(T) > 0$, *alors :*

$$\mathrm{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) \geq 1.$$

Corollaire 3.3.4

$\mathcal{S} + K(H)$ est un fermé.

Démonstration :

Ceci résulte du fait que la distance à $\mathcal{S} + K(H)$ est atteinte.

Théorème 3.3.5

Soit $T \in B(H)$, alors :

$$\mathrm{dist}(T, \mathcal{V} + K(H)) = \max\Big\{\|T\|_e - 1, \min\{1 - m_e(T), 1 - m_e(T^*)\}\Big\},$$

et cette distance est atteinte.

Démonstration :

Quitte à remplacer T par T^*, on peut supposer sans perte de généralité que $\mathrm{ind}(T) \leq 0$, cela signifie que $\alpha(T) \leq \alpha(T^*)$. Donc par la Remarque 2.16, on a : $m_e(T) \geq m_e(T^*)$. En utilisant maintenant le Théorème 3.3.2, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(T, \mathcal{V} + K(H)) &\leq \mathrm{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)), \\ &= \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\}, \\ &= \max\Big\{\|T\|_e - 1, \min\{1 - m_e(T), 1 - m_e(T^*)\}\Big\}. \end{aligned}$$

Réciproquement, soient $W \in \mathcal{V}$ et $K \in K(H)$. Alors, grâce à la Proposition 6.10 [38], on obtient :

$$\|T - W - K\| \geq \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\},$$

(resp, $\max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T^*)\}$), si W est une isométrie (resp, co-isométrie). D'où,

$$\text{dist}(T, \mathcal{V} + K(H)) \geq \max\Big\{\|T\|_e - 1, \min\{1 - m_e(T), 1 - m_e(T^*)\}\Big\}.$$

Par conséquent,

$$\text{dist}(T, \mathcal{V} + K(H)) = \max\Big\{\|T\|_e - 1, \min\{1 - m_e(T), 1 - m_e(T^*)\}\Big\}.$$

Ceci nous permet d'abord de conclure que

$$\text{dist}(T, \mathcal{V} + K(H)) = \begin{cases} \text{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) & \text{si} \quad \text{ind}(T) \leq 0, \\ \text{dist}(T, [\mathcal{S} + K(H)]^*) & \text{si} \quad \text{ind}(T) > 0; \end{cases}$$

et ensuite par le Théorème 3.3.2 que cette distance est atteinte.
Ceci achève la démonstration du Théorème 3.3.5. ■

Corollaire 3.3.6
$\mathcal{V} + K(H)$ *est un fermé.*

Démonstration :
Ceci résulte du fait que la distance à $\mathcal{V} + K(H)$ est atteinte. ■

Dans la suite, on va donner les expressions des distances d'un opérateur arbitraire T de $B(H)$ à $\mathcal{S}_e$ et $\mathcal{V}_e$ en fonction de $\|T\|_e, m_e(T)$ et $m_e(T^*)$.

Avant cela, nous avons besoin d'un lemme qui montre que $m_e(TW) \geq m_e(T)$ pour tous T de $B(H)$ et $W \in \mathcal{S}_e$.

Lemme 3.3.7

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $B(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs bornés de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.

1) *Si $W \in B(\mathcal{H})$ est une isométrie et $L \in B(\mathcal{H})$, alors $m(LW) \geq m(L)$.*

2) *Si W une isométrie essentielle de $B(H)$ et $T \in B(H)$, alors $m_e(TW) \geq m_e(T)$.*

Démonstration :

1) Puisque, $\{W(x) : \; x \in \mathcal{H} \text{ et } \|x\| = 1\} \subseteq \{x \in \mathcal{H} : \|x\| = 1\}$, on a :

$$\begin{aligned} m(LW) &= \inf\{\|LW(x)\| : x \in \mathcal{H} \text{ et } \|\dot{x}\| = 1\}, \\ &\geq \inf\{\|L(x)\| : x \in \mathcal{H} \text{ et } \|x\| = 1\} = m(L). \end{aligned}$$

2) En utilisant 1), les relations (2.10) (voir page 32) et le fait que $\varrho\pi(W)$ est une isométrie de $B(\mathcal{H})$ où $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert qui provient du théorème de Gelfond et Naimark, on obtient :

$$\begin{aligned} m_e(TW) = m(\varrho\pi(TW)) &= m(\varrho\pi(T)\,\varrho\pi(W)), \\ &\geq m(\varrho\pi(T)) = m_e(T). \end{aligned}$$

■

Théorème 3.3.8

Soit $T \in B(H)$, alors :

1) $$\operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_e) = \begin{cases} \max\{\|T\|_e - 1, 1 + m_e(T^*)\} & si \quad \operatorname{ind}(T) = +\infty \\ \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\} & sinon, \end{cases}$$

et cette distance est atteinte.

2) $$\operatorname{dist}(T, \mathcal{V}_e) = \max\Big\{\|T\|_e - 1, \min\{1 - m_e(T), 1 - m_e(T^*)\}\Big\},$$

et cette distance est atteinte.

Démonstration :

1) Tout d'abord, remarquons que pour tout $W \in \mathcal{S}_e$, on a :

$$\|T - W\| \geq \|T\|_e - \|W\|_e = \|T\|_e - 1.$$

Donc,

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_e) \geq \|T\|_e - 1.$$

- Si $\operatorname{ind}(T) = +\infty$.

D'abord, d'après le Théorème 2.4 [52], on voit que :

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_e) \leq \operatorname{dist}(T, \mathcal{U}_e) = \max\{\|T\|_e - 1, 1 + m_e(T^*)\}.$$

Réciproquement, soit $W \in \mathcal{S}_e$. Alors, en utilisant le Lemme 3.3.7, le Théorème 2.1 [52], et le fait que $\operatorname{ind}(T^*W) = -\infty$, on conclut que :

$$\|T^*W - I\|_e \geq 1 + m_e(T^*W) \geq 1 + m_e(T^*).$$

D'où,

$$\|T - W\| \geq \|T^*W - I\|_e \geq 1 + m_e(T^*).$$

Par conséquent, en tenant compte de (1), on obtient :

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_e) \geq \max\{\|T\|_e - 1, 1 + m_e(T^*)\}.$$

Donc (2) et (3) entraînent que :

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_e) &= \max\{\|T\|_e - 1, 1 + m_e(T^*)\}, \\ &= \operatorname{dist}(T, \mathcal{U}_e). \end{aligned}$$

et cette distance est atteinte d'après le Théorème 2.4 [52].

- Si $\operatorname{ind}(T) \neq +\infty$. Alors, en utilisant (1) et la Proposition 6.10 [38], on obtient :

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_e) \geq \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\}.$$

Inversement.

- Si $\operatorname{ind}(T)$ est fini. Alors, par le Théorème 2.4 [52], on a :

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_e) \leq \operatorname{dist}(T, \mathcal{U}_e) = \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\}.$$

Par conséquent, (4) et (5) impliquent que :

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_e) &= \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\}, \\ &= \operatorname{dist}(T, \mathcal{U}_e). \end{aligned}$$

Et cette distance est atteinte par le Théorème 2.4 [52].

- Si $\operatorname{ind}(T) = -\infty$. Alors, d'après le Théorème 3.3.2, on voit que :

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_e) \leq \operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)) = \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\}.$$

Par conséquent, (4) et (6) impliquent que :

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(T, \mathcal{S}_e) &= \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\}, \\ &= \operatorname{dist}(T, \mathcal{S} + K(H)), \end{aligned}$$

et cette distance est atteinte par le Théorème 3.3.2.

2) D'après le Théorème 3.3.5, on voit que

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{dist}(T, \mathcal{V}_e) &\leq \operatorname{dist}(T, \mathcal{V} + K(H)), \\ &\leq \max\Big\{\|T\|_e - 1, \min\{1 - m_e(T), 1 - m_e(T^*)\}\Big\}. \end{aligned}$$

D'où, il suffit de montrer que :

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{V}_e) \geq \max\Big\{\|T\|_e - 1, \min\{1 - m_e(T), 1 - m_e(T^*)\}\Big\}.$$

Soit $W \in \mathcal{V}_e$, alors à l'aide de la Proposition 6.10 [38], on constate que :

$$\|T - W\| \geq \min\{1 - m_e(T), 1 - m_e(T^*)\}.$$

Or, il est clair que $\|T - W\| \geq \|T\|_e - 1$, par suite :

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{dist}(T, \mathcal{V}_e) \geq \max\Big\{\|T\|_e - 1, \min\{1 - m_e(T), 1 - m_e(T^*)\}\Big\}.$$

Par conséquent, (7) et (8) impliquent que :

$$\text{dist}(T, \mathcal{V}_e) = \max\Big\{\|T\|_e - 1, \min\{1 - m_e(T), 1 - m_e(T^*)\}\Big\},$$

et en plus, on conclut que :

$$\text{dist}(T, \mathcal{V}_e) = \begin{cases} \text{dist}(T, \mathcal{S}_e) & \text{si} \quad \text{ind}(T) \leq 0, \\ \text{dist}(T, (\mathcal{S}_e)^*) & \text{si} \quad \text{ind}(T) > 0. \end{cases}$$

Cela prouve en tenant compte de la première assertion que cette distance est atteinte.

Ceci conclut la démonstration du Théorème 3.3.8. ∎

Corollaire 3.3.9

$\mathcal{S}_e$ et $\mathcal{V}_e$ sont fermés.

Démonstration :

Ceci résulte du fait que les distances à $\mathcal{S}_e$ et $\mathcal{V}_e$ sont atteintes. ∎

Corollaire 3.3.10

$\mathcal{V}_e = \mathcal{V} + K(H)$.

Démonstration :

Ceci est une simple conséquence des corollaires 3.3.6 et 3.3.9 et des Théorèmes 3.3.5 et 3.3.8. ∎

Corollaire 3.3.11

1) *Si $T \in \mathcal{S}_e$, alors* $\text{ind}(T) \neq +\infty$.

2) $T \in \mathcal{S}_e \iff \|T\|_e = m_e(T) = 1$.

3) $T \in \mathcal{V}_e \iff \|T\|_e = m_e(T) = 1$ *ou* $\|T\|_e = m_e(T^*) = 1$.

Corollaire 3.3.12

$\mathcal{S} + K(H)$ est à la fois ouvert et fermé dans $\mathcal{S}_e$.

Démonstration :

Vu le Corollaire 3.3.4, il suffit de montrer que $\mathcal{S} + K(H)$ est un ouvert. Soit $T \in \mathcal{S}+K(H)$, alors par le Corollaire 3.3.3, on constate que $\operatorname{ind}(T) = n \leq 0$.

Par ailleurs, si $\mathcal{B}(T, \gamma(T))$ désigne la boule ouverte de $B(H)$ de centre T et de rayon $\gamma(T)$, on va montrer que $\mathcal{B}(T, \gamma(T)) \cap \mathcal{S}_e \subseteq \mathcal{S} + K(H)$. Soit $L \in \mathcal{B}(T, \gamma(T)) \cap \mathcal{S}_e$, en particulier $L \in \mathcal{S}_e$, donc d'après le Corollaire 3.3.11, $\|L\|_e = m_e(L) = 1$. Or, d'après le Théorème 2.5, on doit avoir : $\operatorname{ind}(L) = \operatorname{ind}(T) = n \leq 0$. Donc ceci nous permet par le Théorème 3.3.2 et le Corollaire 3.3.4, de conclure que $L \in \mathcal{S} + K(H)$. ∎

Corollaire 3.3.13

Pour $n \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $\mathcal{S}_e \cap I_n$ est à la fois ouvert et fermé dans $\mathcal{S}_e$.

Démonstration :

Comme pour tout T de $\mathcal{S}_e \cap I_n$, T est semi-Fredholm et grâce à la continuité de l'indice, on voit facilement que $\mathcal{S}_e \cap I_n$ est un ouvert de $\mathcal{S}_e$. Montrons que $\mathcal{S}_e \cap I_n$ est un fermé. Soit $T \in \overline{\mathcal{S}_e \cap I_n} \subseteq \overline{\mathcal{S}_e} = \mathcal{S}_e$, donc T est semi-Fredholm et par la continuité de l'indice, on conclut que T est d'indice n. Par conséquent, $T \in \mathcal{S}_e \cap I_n$. ∎

Théorème 3.3.14

1) $\partial(\mathcal{V}_e) = \partial(\mathcal{V} + K(H)) = \mathcal{V}_e = \mathcal{V} + K(H)$.

2) $\partial(\mathcal{S}_e) = \partial(\overline{\mathcal{S}_e}) = \overline{\mathcal{S}_e} = \mathcal{S}_e$.

3) $\partial(\mathcal{S} + K(H)) = \partial(\overline{\mathcal{S} + K(H)}) = \mathcal{S} + K(H)$.

Démonstration :

1) Tout d'abord, d'après le Corollaire 3.3.9, $\mathcal{V}_e$ est un fermé. On va montrer que $\text{int}(\mathcal{V}_e) = \emptyset$. Supposons que $\text{int}(\mathcal{V}_e) \neq \emptyset$. Soit $T \in \text{int}(\mathcal{V}_e)$, alors on en déduirait qu'il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $\mathcal{B}(T, r)$ de centre T et de rayon r est incluse dans $\mathcal{V}_e$, et comme l'opérateur L défini par $L = (1 + \frac{r}{2\|T\|})T$ appartient à $\mathcal{B}(T, r) \subseteq \mathcal{V}_e$, on conclurait que $\|L\|_e = 1$. Ceci contredirait le fait que $\|L\|_e = (1 + \frac{r}{2\|T\|})\|T\|_e = 1 + \frac{r}{2\|T\|} \neq 1$. Par conséquent,

$$\partial(\mathcal{V}_e) = \partial(\overline{\mathcal{V}_e}) = \overline{\mathcal{V}_e} = \mathcal{V}_e.$$

2) Tout d'abord, d'après le Corollaire 3.3.9, $\mathcal{S}_e$ est un fermé. Or, $\text{int}(\mathcal{S}_e) = \text{int}(\mathcal{V}_e) = \emptyset$, par suite :

$$\partial(\mathcal{S}_e) = \partial(\overline{\mathcal{S}_e}) = \overline{\mathcal{S}_e} = \mathcal{S}_e.$$

L'assertion 3) est une conséquence du Corollaire 3.3.4, et le fait que $\text{int}(\mathcal{S} + K(H)) = \emptyset$.

Ceci achève la démonstration du Théorème. ∎

Corollaire 3.3.15

1) $\partial(\mathcal{U}_e) = \partial(\overline{\mathcal{U}_e}) = \overline{\mathcal{U}_e} = \mathcal{U}_e$,

2) $\partial(\mathcal{U} + K(H)) = \partial(\overline{\mathcal{U} + K(H)}) = \mathcal{U} + K(H) = \mathcal{U}_e \cap I_0$.

Démonstration :

1) Comme $\text{dist}(T, \mathcal{U}_e)$ est atteinte, on en déduit que $\mathcal{U}_e$ est fermé. D'autre part, au cours de la démonstration du Théorème 3.3.14, on a prouvé que $\mathcal{V}_e$ est d'intérieur vide, et puisque $\mathcal{U}_e \subseteq \mathcal{V}_e$, $\mathcal{U}_e$ l'est aussi. Par conséquent,

$$\partial(\mathcal{U}_e) = \partial(\overline{\mathcal{U}_e}) = \overline{\mathcal{U}_e} = \mathcal{U}_e.$$

2) En utilisant le Théorème 2.3 [52], on obtient que :

$$\mathcal{U} + K(H) = \overline{\mathcal{U} + K(H)} = \mathcal{U}_e \cap I_0.$$

Or, $\mathrm{int}(\overline{\mathcal{U} + K(H)}) = \mathrm{int}(\mathcal{U}_e) = \emptyset$, par suite :

$$\partial(\mathcal{U} + K(H)) = \partial(\overline{\mathcal{U} + K(H)}) = \mathcal{U} + K(H) = \mathcal{U}_e \cap I_0.$$

$\blacksquare$

Deuxième Chapitre

Études des opérateurs α-semi-Fredholm sur un espace hilbertien non séparable

4 Études des opérateurs α-semi-Fredholm sur un espace hilbertien non séparable

4.1 Le module minimal dans une C^*-algèbre

Dans ce paragraphe, nous allons établir quelques résultats concernant les C^*-algèbres qui seront utilisées ultérieurement pour étudier les opérateurs semi-Fredholm et les opérateurs α-semi-Fredholm dans un espace hilbertien non séparable.

Nous définissons le module minimal d'un élément a dans une C^*-algèbre A. Nous donnons les importantes propriétés de ce module minimal.

Soit A une C^*-algèbre unitaire, dont nous notons e son élément unité. On suppose que son élément unité e n'est pas réduit à 0 (autrement dit, $e \neq 0$), nous supposerons toujours que la norme vérifie la condition supplémentaire $\|e\| = 1$.

Soit $a \in A$, on lui associe l'opérateur de multiplicatoin à gauche L_a, défini par : $L_a(x) = ax$, pour $x \in A$.
Nous notons, $c(a)$ la conorme de a définie par :

$$(4.1.1) \qquad c(a) = \gamma(L_a) = \begin{cases} \inf\{\|ax\| : d(x, L_a^{-1}(0)) = 1\} & \text{si } a \neq 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'une des propriétés importantes de la conorme est donnée par le lemme suivant :

Lemme 4.1.1 ([37], [49])

1) $$c(a) = \inf\left\{\sigma(|a|) \setminus \{0\}\right\} \quad \textit{où} \;\; |a| = (a^*a)^{1/2}.$$

2) $$c(a)^2 = c(a^*a) = c(aa^*) = c(a^*)^2.$$

Définition :

Soit $a \in A$, on appelle module minimal (minimum modulus) noté $\eta(a)$ de a, le réel défini par :

$$\eta(a) = m(L_a) = \inf\{\|ax\| \;:\; x \in A \;\; et \;\; \|x\| = 1\}.$$

Alors, on voit sans difficulté, les deux propriétés suivantes qui seront utiles pour la suite :

(4.1.2) $$\eta(a) > 0 \iff L_a^{-1}(0) = \{0\} \text{ et } aA \text{ est fermé.}$$

(4.1.3) $$\eta(a) > 0 \implies \eta(a) = c(a).$$

On dit qu'un élément $a \in A$ est régulier si $a \in aAa$ (que nous notons $a \in \overline{A}$); dans ce cas il existe $b \in A$ tel que $aba = a$, et on dit que b est un inverse généralisé de a. Alors ab *et* ba sont des idempotents (i.e $(ab)^2 = ab$ *et* $(ba)^2 = ba$).

En général b n'est pas unique. Si en plus $(ab)^* = ab$ et $(ba)^* = ba$, alors b est l'inverse de Moore-Penrose de a. Il est unique (c.f. [36], Théorème 5), et dans toute la suite il sera noté $a^\dagger$.
Nous notons aussi $A^\dagger$, l'ensemble des éléments de A qui admettent un inverse de Moore-Penrose. Le Théorème 6 [36], montre que $A^\dagger = \overline{A}$.

Après ces préliminaires, venons en au théorème essentiel de ce paragraphe.

Théorème 4.1.2

Soit $a \in A$, alors :

1) $\eta(a) > 0$ *si et seulement si* a *admet un inverse de Moore-Penrose* $a^\dagger$ *tel que* $a^\dagger a = e$. *Et dans ce cas on a :* $\eta(a) = \|a^\dagger\|^{-1} = c(a)$.

2) $\eta(a^*) > 0$ *si et seulement si* a *admet un inverse de Moore-Penrose* $a^\dagger$ *tel que* $aa^\dagger = e$. *Et dans ce cas on a :* $\eta(a^*) = \|a^\dagger\|^{-1} = c(a^*)$.

3) a *est inversible si et seulement si* $\eta(a) > 0$ *et* $\eta(a^*) > 0$. *Et dans ce cas on a :* $\eta(a) = \eta(a^*) = \|a^{-1}\|^{-1}$.

Démonstration :

1) « Si » Par hypothèse $a^\dagger a = e$ d'où, $L_{a^\dagger} L_a = I$. Donc pour tout x de A, on a :

$$\|x\| = \|L_{a^\dagger} L_a(x)\| = \|a^\dagger L_a(x)\| \leq \|a^\dagger\| \, \|L_a(x)\|,$$

ceci implique que $\|x\| \, \|a^\dagger\|^{-1} \leq \|L_a(x)\|$. Par conséquent,

$$\eta(a) \geq \|a^\dagger\|^{-1} > 0.$$

« Seulement si » En utilisant les Théorèmes 6 et 8 [36], et l'assertion (4.1.2), on constate que $a \in A^\dagger$. Ceci nous permet en sachant que $aa^\dagger a = a$, de conclure que $e - a^\dagger a \in L_a^{-1}(0) = \{0\}$, donc $a^\dagger a = e$. Enfin, par le Théorème 2 [37] et en tenant compte de l'assertion (4.1.3), on conclut que : $\eta(a) = \|a^\dagger\|^{-1} = c(a)$.

2) Est une conséquence immédiate de 1) et du fait que $(a^\dagger)^* = (a^*)^\dagger$ (cf. [36], page 73).

3) Il suffit de remarquer que $a^\dagger = a^{-1}$ si a est inversible et ensuite utiliser 1) et 2). ■

Corollaire 4.1.3

Soit $a \in A$, alors :

1) $\eta(a) > 0$ *si et seulement si* $|a|$ *est inversible.*

2) $\eta(a) = \inf \sigma(|a|)$.

Démonstration :

1) Puisque, pour tout x de A, $\|ax\| = \| \, |a| \; x \, \|$, on conclut que : $\eta(|a|) = \eta(a)$. Or, un élément positif dans une C^*-algèbre est inversible si et seulement si il est semi-inversible à gauche, par suite en tenant compte du Théorème 4.1.2, on constate que

$$\eta(a) > 0 \iff |a| \text{ est inversible.}$$

2) Si $\eta(a) = 0$, alors $|a|$ n'est pas inversible. Donc $\eta(a) = \inf \sigma(|a|) = 0$. Supposons maintenant que $\eta(a) > 0$, alors d'après 1), on constate que $|a|$ est inversible, ceci implique que $\inf \sigma(|a|) > 0$. Donc, d'après le Lemme 4.1.1, on conclut que :

$$(1) \qquad c(a) = \inf\Big\{\sigma(|a|) \setminus \{0\}\Big\} = \inf \sigma(|a|).$$

D'autre part, d'après l'assertion (4.1.3), on voit que : $\eta(a) = c(a)$, et en tenant compte de (1), on conclut que

$$\eta(a) = c(a) = \inf \sigma(|a|).$$

Ceci établit le Corollaire 4.1.3. ■

Corollaire 4.1.4

Soit $a, b \in A$ *tels que* $\|a - b\| < \eta(a)$, *alors :*

1) b *admet un inverse de Moore-Penrose* $b^\dagger$ *tel que* $b^\dagger b = e$.

2) a *est inversible si et seulement si* b *est inversible.*

Démonstration :

1) Comme par hypothèse $\eta(a) > 0$, par le Théorème 4.1.2, on en déduit que $\eta(a) = \|a^\dagger\|^{-1}$. Donc $\|a^\dagger(a-b)\| < 1$, ceci implique que $e - a^\dagger a - a^\dagger b$ est inversible. Par conséquent, $a^\dagger b$ est inversible (car $e = a^\dagger a$). Soit $b_1 = (a^\dagger b)^{-1} a^\dagger$, alors $b_1 b = e$. Ceci implique que $\eta(b) \geq \|b_1\|^{-1} > 0$. Donc d'après le Théorème 4.1.2, on conclut que b admet un inverse de Moore-Penrose et que $b^\dagger b = e$.

2) Comme $a^\dagger b$ est inversible, on voit facilement que :

$$\begin{aligned} b \text{ est inversible} \quad & \text{si et seulement si} \quad a^\dagger \text{ est inversible,} \\ & \text{si et seulement si} \quad a \text{ est inversible.} \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du Corollaire 4.1.4. ■

On va terminer cette section par la proposition suivante qui affirme que l'application $\eta : A \longrightarrow \mathbb{R}_+$, donnée par $a \longmapsto \eta(a)$, est continue.

Proposition 4.1.5

Soient a et b dans A, alors :

1) $|\eta(a) - \eta(b)| \leq \|a - b\|$.

2) $|\eta(a) - \eta(b^*)| \leq \|a - b\|$ *si a est semi-inversible à gauche et b est semi-inversible à droite.*

Démonstration :

1) Soit $\{b_n\}$ une suite d'éléments de A telle que $\|b_n\| = 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \|b\, b_n\| = \eta(b)$. Alors on a :

$$\|a - b\| \geq \|(a-b)b_n\| \geq \|ab_n\| - \|bb_n\| \geq \eta(a) - \|bb_n\|.$$

Maintenant en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$\|a - b\| \geq \eta(a) - \eta(b).$$

En interchangeant, a et b, on obtient : $\|a - b\| \geq \eta(b) - \eta(a)$.
Par conséquent,

$$\|a - b\| \geq | \eta(a) - \eta(b) | .$$

2) Soit a_1 (resp. b_1) un inverse à gauche (resp. à droite) de a (resp. b), alors on voit facilement que :

$$\eta(a) \geq \|a_1\|^{-1} > 0 \quad \text{et} \quad \eta(b^*) \geq \|b_1^*\|^{-1} > 0.$$

D'où, par le Théorème 4.1.2, on déduit que a et b sont des éléments de $A^\dagger$ et qu'il existe $a^\dagger$ et $b^\dagger$ de A tels que :

$$a^\dagger a = bb^\dagger = e \ , \ \eta(a) = \|a^\dagger\|^{-1} \quad \text{et} \quad \eta(b^*) = \|b^\dagger\|^{-1}.$$

Or,

$$\|a^\dagger\| \ \|a - b\| \ \|b^\dagger\| \geq \|b^\dagger - a^\dagger\| \geq \Big| \ \|a^\dagger\| - \|b^\dagger\| \ \Big| ,$$

par suite :

$$\|a - b\| \geq | \ \eta(a) - \eta(b^*) \ | .$$

Ceci achève la démonstration de la Proposition 4.1.5. ■

4.2 Les opérateurs α-semi-Fredholm

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert complexe de dimension infinie non nécessairement séparable.

Soit $\Theta = \{\alpha \text{ un cardinal} : \aleph_0 \leq \alpha \leq \dim H\}$.

Dans tout ce qui suit α est toujours supposé un élément de Θ.

Soient X et Y deux espaces de Hilbert. Soit $T \in B(X,Y)$ l'ensemble des opérateurs bornés de X sur Y. D'après le Lemme 2.4 [47], on a : $\dim \overline{R(T)} \leq \dim X$. Ceci nous permet de constater que :

$$\dim N(T)^{\perp} = \dim \overline{R(T)}. \tag{4.2.1}$$

En effet, soit $T_0 = T_{|N(T)^{\perp}}$ la restriction de T à $N(T)^{\perp}$. Alors $T_0 : X_0 = N(T)^{\perp} \longrightarrow Y_0 = \overline{R(T)}$ est un opérateur injectif à image dense. Donc, d'après le Lemme 2.4 [47], on doit avoir :

$$\dim Y_0 = \dim \overline{R(T)} \leq \dim X_0 = \dim N(T)^{\perp}. \tag{$*$}$$

Or, $T_0{}^* : Y_0 = \overline{R(T)} \longrightarrow X_0 = N(T)^{\perp}$ est aussi un opérateur injectif à image dense[3], par suite de nouveau le Lemme 2.4 [47], appliqué cette fois à l'opérateur $T_0{}^*$, nous permet de voir que :

$$\dim N(T)^{\perp} = \dim X_0 = \dim \overline{R(T_0{}^*)} \leq \dim Y_0 = \dim \overline{R(T)}. \tag{$**$}$$

D'où, l'assertion (4.2.1) résulte de $(*)$ et $(**)$.

En particulier, s'il existe $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur injectif à image dense, on conclut d'après ce qui précède que $\dim X = \dim Y$.

[3] Car $N(T_0)^* = R(T_0{}^{\perp}) = \{0\}$ et $\overline{R(T_0)^*} = N(T_0)^{\perp} = X_0$ (voir, (2.1)).

Nous notons, $J_\alpha(H) = \{T \in B(H) : \dim(\overline{R(T)}) < \alpha\}$. Puisque $\alpha \geq \aleph_0$, on vérifie facilement que $J_\alpha(H)$ est un sous-espace vectoriel de $B(H)$. Or, en utilisant (4.2.1), on voit que

$$\dim \overline{R(T)} = \dim N(T)^{\perp} = \dim \overline{R(T^*)},$$

ceci implique que $J_\alpha(H)$ est stable par passage à l'adjoint en d'autre mots $J_\alpha(H)$ est un sous-espace hermitien de $B(H)$. De plus, il n'est pas difficile de vérifier que pour tous $K \in J_\alpha(H)$ et $T \in B(H)$, KT et TK appartiennent à $J_\alpha(H)$. Par conséquent, $J_\alpha(H)$ est un idéal bilataire de $B(H)$ (voir aussi, [47] Théorème 6.1). Mais $J_\alpha(H)$ n'est pas en général un fermé de $B(H)$, d'où il est naturel de considérer $K_\alpha(H) = \overline{J_\alpha(H)}$ la fermeture de $J_\alpha(H)$ dans $B(H)$. Alors, $K_\alpha(H)$ est aussi un idéal bilataire autoadjoint de $B(H)$ (c.f. [15], [26], [47]). On remarque aussi, que $K_\alpha(H)$ est un idéal bilataire fermé propre de $B(H)$ parce que $I \notin J_\alpha(H)$. En plus d'après le Corollaire 6.1 [47] et le Théorème 6.4 [47], tout idéal bilataire fermé propre de $B(H)$ est de la forme $K_\alpha(H)$ pour un certain α de Θ. Puisque $K_\alpha(H) \subseteq K_\beta(H)$ pour $\alpha < \beta$, il s'ensuit que $K_{\dim H}(H)$ est l'idéal bilataire fermé maximal de $B(H)$. Enfin, on remarque que $K_{\aleph_0}(H)$ n'est autre que l'idéal des opérateurs compacts.

Nous remarquons aussi que du fait que $K_\alpha(H) = \overline{J_\alpha(H)}$, un opérateur $T \in B(H)$ est semi-inversible à gauche (resp. à droite) modulo $K_\alpha(H)$ si et seulement si T est semi-inversible à gauche (resp. à droite) modulo $J_\alpha(H)$.

Nous notons, $C_\alpha(H)$ l'algèbre quotient $B(H)/K_\alpha(H)$ et π_α: $B(H) \longrightarrow C_\alpha(H)$ la surjection canonique. Alors, il est bien connu que $C_\alpha(H)$ muni de l'involution $* : \pi_\alpha(T)^* = \pi_\alpha(T^*)$ est une C^*-algèbre.

Pour alléger la notation on pose, pour tout opérateur T de $B(H)$, $\|T\|_\alpha$ au lieu de $\|\pi_\alpha(T)\|$ la norme de $\pi_\alpha(T)$.

Nous notons, $\sigma_\alpha(T)$ le spectre de poids α de T, défini par :

$$\sigma_\alpha(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \pi_\alpha(T - \lambda I) \text{ n'est pas inversible dans } C_\alpha(H)\}.$$

Alors, on voit facilement que pour tout $K \in K_\alpha(H)$,

$$\sigma_\alpha(T + K) = \sigma_\alpha(T),$$

et si $\aleph_0 \leq \beta \leq \alpha \leq \dim H$, alors

$$\sigma_\alpha(T) \subseteq \sigma_\beta(T) \subseteq \sigma_{\aleph_0}(T) = \sigma_e(T) \subseteq \sigma(T).$$

Remarquons aussi que, comme l'inversibilité modulo $K_\alpha(H)$ est équivalente à l'inversibilité modulo $J_\alpha(H)$, il s'ensuit que :

$$\sigma_\alpha(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ n'est pas inversible modulo } J_\alpha(H)\}.$$

Nous rappelons, qu'un sous-espace X de H est dit α-fermé s'il existe un sous-espace fermé M de H tel que $M \subseteq X$ et $\dim(\overline{X \cap M^\perp}) < \alpha$ (voir [26]). On outre, si M est un sous-espace fermé de H inclus dans un autre sous-espace vectoriel X de H, alors :

$$\dim(X \cap M^\perp) = \dim(\overline{X} \cap M^\perp). \tag{4.2.2}$$

Cette assertion est une simple conséquence du lemme suivant :

Lemme 4.2.1 ([26], Lemme 2.2)

Soient X un sous-espace vectoriel de H et M un sous-espace fermé de H tel que $M \subseteq X$, alors :

$$\overline{X \cap M^\perp} = \overline{X} \cap M^\perp.$$

Soient $T \in B(H)$ et M un sous-espace de H, on considère la quantité, $\rho(M, T)$, définie par :

$$\rho(M,T) = \begin{cases} \inf\Big\{\|T(x)\| : x \in M \text{ et } \|x\| = 1\Big\} & \text{si } M \neq \{0\}, \\ +\infty & \text{si } M = \{0\}. \end{cases}$$

Alors, on remarque d'une part, que $\rho(M,T) \leq \|T\|$ si $M \neq \{0\}$ et $\rho(M,T) = +\infty$ si et seulement si $M = \{0\}$ et d'autre part, la conorme $\gamma(T)$ égale à $\rho(N(T)^{\perp}, T)$.

Pour un opérateur T de $B(H)$, la conorme de poids α (the reduced minimum modulus of weight α), notée $\gamma_\alpha(T)$, est définie par :

$$\begin{aligned}\gamma_\alpha(T) \;=\; \sup\Big\{\ \rho(X,T) : \ & X \text{ est un sous-espace fermé de } N(T)^{\perp} \text{ et} \\ & \dim(X^{\perp} \cap N(T)^{\perp}) < \alpha\Big\},\end{aligned}$$

Alors, on remarque, pour tout T de $B(H)$, que

$$\gamma_\alpha(T) \leq \|T\| \quad \text{si} \ \ \alpha \leq \dim \overline{R(T)},$$

et

$$\gamma_\alpha(T) = +\infty \ \ \text{si } \alpha > \dim \overline{R(T)}.$$

En fait, d'après l'assertion (4.2.1) (voir, page 101) on a : $\dim N(T)^{\perp} = \dim \overline{R(T)}$, donc si $\alpha \leq \dim \overline{R(T)}$, on en déduit que $\dim N(T)^{\perp} \geq \alpha$. D'où,

$$\gamma_\alpha(T) \leq \inf\Big\{\|T(x)\| : x \in N(T)^{\perp}, \|x\| = 1\Big\} \leq \|T\|.$$

Par conséquent, $\gamma_\alpha(T) \leq \|T\|$ si $\alpha \leq \dim \overline{R(T)}$.
Maintenant, si $\alpha > \dim \overline{R(T)}$, alors d'après l'assertion (4.2.1), on a : $\dim N(T)^{\perp} < \alpha$, ceci implique que $\gamma_\alpha(T) \geq \rho(\{0\}, T) = +\infty$.

Cette conorme de poids α a été étudiée par L. Burlando [15]. Elle a notamment montré que comme pour la conorme, $\gamma_\alpha(\cdot)$ vérifie :

$$\gamma_\alpha(T) = \gamma_\alpha(T^*). \tag{4.2.3}$$

D'autre part, elle a prouvé que cette conorme de poids α vérifie aussi :

(4.2.4) $\quad \gamma_\alpha(T) > 0 \quad$ si et seulement si $\quad R(T) \quad$ est α-fermé .

Enfin, on remarque que si $\alpha, \beta \in \Theta$ et $\beta \leq \alpha$,

$$\gamma(T) \leq \gamma_\beta(T) \leq \gamma_\alpha(T). \tag{4.2.5}$$

Considérons maintenant les classes d'opérateurs suivantes :

- $\Phi_{+}^{\alpha} = \{\ L \in B(H) : \pi_\alpha(T)$ est semi-inversible à gauche dans $C_\alpha(H)\}$, l'ensemble des opérateurs α-semi-Fredholm à gauche.

- $\Phi_{-}^{\alpha} = \{\ L \in B(H) : \pi_\alpha(T)$ est semi-inversible à droite dans $C_\alpha(H)\}$, l'ensemble des opérateurs α-semi-Fredholm à droite.

- $\Phi^{\alpha} = \Phi_{+}^{\alpha} \cap \Phi_{-}^{\alpha}$, l'ensemble des opérateurs α-Fredholm.

- $\Phi_{\pm}^{\alpha} = \Phi_{+}^{\alpha} \cup \Phi_{-}^{\alpha}$, l'ensemble des opérateurs α-semi-Fredholm.

Comme $K_{\aleph_0}$ est l'idéal des opérateurs compacts, on constate d'après le théorème d'Atkinson que l'ensemble des opérateurs $\aleph_0$-Fredholm (resp. $\aleph_0$-semi-Fredholm à gauche, $\aleph_0$-semi-Fredholm à droite, $\aleph_0$-semi-Fredholm) coïncide exactement avec l'ensemble des opérateurs Fredholm (resp. semi-Fredholm à gauche, semi-Fredholm à droite, semi-Fredholm).

Comme pour le cas des opérateurs Fredholm (resp. semi-Fredholm à gauche, semi-Fredholm à droite, semi-Fredholm), on sait que T est Fredholm (resp. semi-Fredholm à gauche, semi-Fredholm à droite, semi-Fredholm) si et seulement si $R(T)$ est fermé et $\max\{\dim N(T), \dim N(T^*)\} < \aleph_0$ (resp. $\dim N(T) < \aleph_0$, $\dim N(T^*) < \aleph_0$, $\min\{\dim N(T), \dim N(T^*)\} < \aleph_0$), le Théorème 2.6 [26], étend ces résultats aux opérateurs α-Fredholm, α-semi-Fredholm à gauche, α-semi-Fredholm à droite et α-semi-Fredholm. Plus précisément on a :

- T est α-Fredholm si et seulement si $R(T)$ est α-fermé et $\max\{\dim N(T), \dim N(T^*)\} < \alpha$.

- T est α-semi-Fredholm à gauche si et seulement si $R(T)$ est α-fermé et $\dim N(T) < \alpha$.

- T est α-semi-Fredholm à droite si et seulement si $R(T)$ est α-fermé et $\dim N(T^*) < \alpha$.

- T est α-semi-Fredholm si et seulement si $R(T)$ est α-fermé et $\min\{\dim N(T),\ \dim N(T^*)\} < \alpha$.

Notons, pour $T \in B(H)$, $m_\alpha(T) = \inf\ \{\lambda : \lambda \in \sigma_\alpha(|T|)\}$ (voir [15], Définition 3.5). Comme $\pi_\alpha(|T|)$ est un élément positif de $C_\alpha(H)$ et $\pi_\alpha(|T|)$ vérifie $(\pi_\alpha(|T|))^2 = \pi_\alpha(T^*)\,\pi_\alpha(T)$, d'après l'unicité de la racine carrée, on déduit que $\pi_\alpha(|T|) = |\pi_\alpha(T)|$. Ceci nous permet de voir d'après les notations du paragraphe précédent que $m_\alpha(T) = \eta(\pi_\alpha(T))$. En effet,

$$
\begin{aligned}
\eta(\pi_\alpha(T)) &= \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma(|\pi_\alpha(T)|)\},\\
&= \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_\alpha(\pi_\alpha(|T|))\},\\
&= \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_\alpha(|T|)\} = m_\alpha(T).
\end{aligned} \tag{4.2.6}
$$

On observe aussi que pour tout K de $K_\alpha(H)$, $m_\alpha(T) = m_\alpha(T+K)$ et que $m_{\aleph_0}(T) = m_e(T)$, le module minimal essentiel de T.

Comme pour le module minimal essentiel $m_e(T)$ de T, on sait d'après le Théorème 2.17 (page 29) qu'il vérifie la formule suivante :

$$m_e(T) = \inf\{\lambda : \dim E(]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[)H \text{ est infinie },\ \forall \varepsilon > 0\},$$

L. Burlando a généralisé ce résultat pour $m_\alpha(T)$ en montrant :

Lemme 4.2.2 ([15], Lemme 3.6)
Soient $\alpha \in \Theta$ et $T \in B(H)$ un opérateur autoadjoint, alors

$$\lambda \in \sigma_\alpha(T) \iff \dim\Big(E(]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[)H\Big) \geq \alpha, \ \textit{pour tout}\ \varepsilon > 0.$$

Elle a montré aussi :

Théorème 4.2.3 ([15], Théorème 3.7)
Soient $T \in B(H)$ et $\alpha \in \Theta$, alors :

1) $m_\alpha(T) = \sup\{\lambda > 0 : \dim E([0,\lambda[)H < \alpha\}$, *où par définition* $\sup\{\lambda > 0 : \dim E([0,\lambda[)H < \alpha\}$ *égal à zéro si* $\dim E([0,\lambda[)H \geq \alpha$ *pour tout* $\lambda > 0$.

2) $\gamma_\alpha(T) \geq \max\{m_\alpha(T), m_\alpha(T^*)\}$.

3) $\gamma_\alpha(T) = m_\alpha(T)$ *si* $\dim N(T) < \alpha$.

4) $\gamma_\alpha(T) = m_\alpha(T^*)$ *si* $\dim R(T)^\perp < \alpha$.

Des Théorèmes 4.1.2 et 4.2.3, nous tirons le théorème suivant que nous utiliserons dans la suite pour étudier les opérateurs semi-Fredholm dans le cas des espaces de Hilbert non séparables.

Théorème 4.2.4
Soient $T \in B(H)$ et $\alpha \in \Theta$, alors :

1) *a) Il existe $L \in B(H)$ tel que $LT - I \in K_\alpha(H)$ si et seulement si $m_\alpha(T) > 0$. Et dans ce cas, il existe $L_0 \in B(H)$ tel que $L_0T - I \in K_\alpha(H)$ et $m_\alpha(T) = \|L_0\|_\alpha^{-1}$.*

   b) $T \in \Phi_+^\alpha$ si et seulement si $m_\alpha(T) > 0$.

2) *$R(T)$ est α-fermé et* $\dim N(T) < \alpha$ *si et seulement si $m_\alpha(T) > 0$.*

3) *a) Il existe $S \in B(H)$ tel que $TS - I \in K_\alpha(H)$ si et seulement si $m_\alpha(T^*) > 0$. Et dans ce cas, il existe $S_0 \in B(H)$ tel que $TS_0 - I \in K_\alpha(H)$ et $m_\alpha(T^*) = \|S_0\|_\alpha^{-1}$.*

   b) $T \in \Phi_-^\alpha$ si et seulement si $m_\alpha(T^*) > 0$.

4) *$R(T^*)$ est α-fermé et* $\dim N(T^*) < \alpha$ *si et seulement si $m_\alpha(T^*) > 0$.*

5) *$T \in \Phi^{\alpha}$ si et seulement si $m_{\alpha}(T) > 0$ et $m_{\alpha}(T^*) > 0$. Et dans ce cas on a : $m_{\alpha}(T) = m_{\alpha}(T^*)$.*

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{B}(T, r)$ désignera la boule ouverte de $B(H)$ de centre T et de rayon r.

Nous notons, ind_{α} la fonction définie de $B(H)$ à valeur dans $(-\Theta) \cup \Theta \cup \mathbb{Z}$ qui à $T \in B(H)$ associe :

$$\mathrm{ind}_{\alpha}(T) = \begin{cases} \mathrm{ind}(T) & \text{si } \begin{cases} \alpha > \aleph_0 \text{ et } \max\{\dim N(T), \dim N(T^*)\} \geq \alpha \\ \text{ou} \\ \alpha = \aleph_0, \end{cases} \\ 0 & \text{si } \alpha > \aleph_0 \text{ et } \max\{\dim N(T), \dim N(T^*)\} < \alpha. \end{cases}$$

où $\mathrm{ind}(T)$ désigne l'indice classique de T (voir (2.5), page 28).

Nous rappelons (voir [19], Théorème 1) le résultat important suivant : l'application $\mathrm{ind}_{\alpha} : T \longmapsto \mathrm{ind}_{\alpha}(T)$ est constante sur chaque composantes connexes de $\Phi^{\alpha}_{\pm}$.

Ce résultat et le Théorème 4.2.4, vont nous permettre d'établir :

Théorème 4.2.5

Soient $T \in \Phi^{\alpha}_{+}$ et $S \in B(H)$ tel que $\|T - S\|_{\alpha} < m_{\alpha}(T)$. Alors

1) $S \in \Phi^{\alpha}_{+}$.

2) $\mathrm{ind}_{\alpha}(T) = \mathrm{ind}_{\alpha}(S)$.

3) *$T \in \Phi^{\alpha}$ si et seulement si $S \in \Phi^{\alpha}$.*

Démonstration :

Les preuves de la première et la troisième assertion découlent immédiatement du Théorème 4.2.4 et du Corollaire 4.1.4.

Il reste à montrer 2). Tout d'abord, nous déduisons de la première assertion que :

$$\vartheta(T, m_\alpha(T)) = \{L \in B(H) : \|T - L\|_\alpha < m_\alpha(T)\} \subseteq \Phi_\pm^\alpha.$$

D'autre part, on remarque que $\vartheta(T, m_\alpha(T)) = \bigcup_{K \in K_\alpha(H)} \mathcal{B}(T + K, m_\alpha(T))$.
On va montrer que $\vartheta(T, m_\alpha(T))$ est connexe par arcs. Soient L et $S \in \vartheta(T, m_\alpha(T))$, alors il existe $K, K' \in K(H)$ tels que $L \in \mathcal{B}(T+K, m_\alpha(T))$ et $S \in \mathcal{B}(T+K', m_\alpha(T))$. Comme $\mathcal{B}(T+K, m_\alpha(T))$ et $\mathcal{B}(T+K', m_\alpha(T))$ sont connexes par arcs, il suffit de montrer que $T + K$ et $T + K'$ sont connectés par un chemin continu inclus dans $\vartheta(T, m_\alpha(T))$. Soit τ l'application définie par :

$$\begin{array}{rccl} \tau & : & [0,1] & \longrightarrow & B(H) \\ & & t & \longmapsto & T + (1-t)K + tK'. \end{array}$$

Alors, τ est une application continue et on voit facilement que τ vérifie :

$$\tau(0) = T + K, \quad \tau(1) = T + K' \text{ et } \quad \forall\, t \in [0,1],\ \tau(t) \in \vartheta(T, m_\alpha(T)).$$

Donc $\vartheta(T, m_\alpha(T))$ est connexe par arcs. Finalement, d'après le Théorème 1 [19], qui a été rappelé un peu plus haut, on conclut que :

$$\forall\, L \in \vartheta(T, m_\alpha(T)), \quad \mathrm{ind}_\alpha(T) = \mathrm{ind}_\alpha(L).$$

■

Le corollaire qui suit affirme que même si T et S vérifient la faible condition suivante : $\|T - S\| < m_\alpha(T) + m_\alpha(S)$, l'assertion 3) du Théorème 4.2.5, subsiste.

Corollaire 4.2.6

Soient T et S dans $B(H)$ tels que $\|T - S\|_\alpha < m_\alpha(T) + m_\alpha(S)$, alors

$$\mathrm{ind}_\alpha(T) = \mathrm{ind}_\alpha(S).$$

Démonstration :

Tout d'abord, observons que par le Théorème 4.2.5, $\min\{m_\alpha(T), m_\alpha(S)\} > 0$ et donc ce même Théorème 4.2.5, de nouveau implique que $\vartheta(T, m_\alpha(T)) \cup \vartheta(S, m_\alpha(S)) \subseteq \Phi_\pm^\alpha$. Or, $\vartheta(T, m_\alpha(T)) \cup \vartheta(S, m_\alpha(S))$ est connexe (car $\vartheta(T, m_\alpha(T)) \cap \vartheta(S, m_\alpha(S)) \neq \emptyset$), par suite d'après le Théorème 1 [19], on conclut que $\text{ind}_\alpha(T) = \text{ind}_\alpha(S)$. ■

Comme on la signalé dans les préliminaires, $m_e(T)$ le module minimal essentiel de T est le rayon de la plus grande boule ouverte de centre T incluse dans F_+ l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm à gauche. Cette propriété sera généralisée pour $m_\alpha(T)$, le module minimal de poids α. Plus précisément on montre dans la proposition suivante que $m_\alpha(T)$ est aussi le rayon de la plus grande boule ouverte de centre T incluse dans Φ_+^α l'ensemble des opérateurs α-semi-Fredholm à gauche.

Proposition 4.2.7

Soient $T \in B(H)$ et $\alpha \in \Theta$, alors :

1) *a)* $m_\alpha(T) = \text{dist}(T, (\Phi_+^\alpha)^c)$.

   b) $m_\alpha(T^*) = \text{dist}(T, (\Phi_-^\alpha)^c)$.

2) $$\lim_{n\to\infty} m_\alpha(T^n)^{1/n} = \text{dist}(0, \sigma_\alpha^+(T)), = \sup_n m_\alpha(T^n)^{1/n},$$

   où $\sigma_\alpha^+(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \notin \Phi_+^\alpha\}$.

Démonstration :

1) Tout d'abord, d'après le Théorème 4.2.5, on remarque que :

$$m_\alpha(T) \leq \text{dist}(T, (\Phi_+^\alpha)^c).$$

Inversement, soient $T = V|T|$ la décomposition polaire de T et $L = V(|T| - m_\alpha(T)I)$. Comme, $|T| - m_\alpha(T)I \notin \Phi_+^\alpha$, L est aussi n'appartient pas à Φ_+^α.

Donc, on en déduit que :

$$\text{dist}(T, (\Phi_+^\alpha)^c) \leq \|T - L\| = m_\alpha(T).$$

La preuve de b) résulte de a) par passage à l'adjoint.

La deuxième assertion découle immédiatement du Théorème 2.21 et du Théorème 3 [48]. ■

Si $\alpha = \aleph_0$, on sait d'après les travaux de P.Y. Wu [60], sur les opérateurs semi-Fredholm dans un espace de Hilbert séparable, que la distance d'un opérateur T à l'ensemble des opérateurs non semi-Fredholm est égale à $\max\{m_e(T), m_e(T^*)\}$, le théorème suivant étend ce résultat aux espaces de Hilbert non séparables et aux opérateurs non α-semi-Fredholm.

Théorème 4.2.8
Soient $T \in B(H)$ et $\alpha \in \Theta$, alors :

$$\text{dist}(T, (\Phi_\pm^\alpha)^c) = \max\{m_\alpha(T), m_\alpha(T^*)\}.$$

Démonstration:
Tout d'abord, observons que la Proposition 4.2.7, entraîne que :

$$\text{dist}(T, (\Phi_\pm^\alpha)^c) \geq \max\{m_\alpha(T), m_\alpha(T^*)\}.$$

Inversement, on peut supposer que $T \in \Phi_\pm^\alpha$ (sinon l'inégalité est évidente) et que $\max\{m_\alpha(T),\, m_\alpha(T^*)\} = m_\alpha(T) > 0$ (sinon on passe à l'adjoint). Soit $T = V|T|$ la décomposition polaire de T. Soit $\varepsilon > 0$, on lui associe l'idempotent $E_\varepsilon = E(]m_\alpha(T) - \varepsilon, m_\alpha(T) + \varepsilon[)$. Alors, d'après le Lemme 4.2.2, on voit que $H_\varepsilon = R(E_\varepsilon)$ est un sous-espace de dimension supérieure ou égale à α.

Dans un premier temps, nous allons construire une suite d'opérateurs $(S_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de $(\Phi_\pm^\alpha)^c$ vérifiant $\|T - S_\varepsilon\| < m_\alpha(T) + \varepsilon$. Posons $S_\varepsilon = T(I - E_\varepsilon)$,

alors $H_\varepsilon \subseteq N(S_\varepsilon)$, ceci implique que $\dim N(S_\varepsilon) \geq \alpha \geq \aleph_0$. Par conséquent, d'après le Théorème 4.2.4, on voit que $S_\varepsilon \notin \Phi_+^\alpha$.
D'autre part, $S_\varepsilon \notin \Phi_-^\alpha$. En effet, si $S_\varepsilon \in \Phi_-^\alpha$, alors $V|T|(I - E_\varepsilon)$ est semi-inversible à droite modulo K_α, ceci entraîne que V est semi-inversible à droite modulo K_α, cela revient à dire que $V \in \Phi_-^\alpha$.

D'ailleurs, puisque $T \in \Phi_+^\alpha$, on constate que $\dim N(V) = \dim N(T) < \alpha$, donc de nouveau par le Théorème 4.2.4, on conclut que $V \in \Phi^\alpha$. Or, $S_\varepsilon = V|T|(I - E_\varepsilon) \in \Phi_-^\alpha$, par suite $|T|(I - E_\varepsilon) \in \Phi_-^\alpha$, cela revient à dire que $\pi_\alpha(|T|(I - E_\varepsilon))$ est semi-inversible à droite dans $c_\alpha(H)$ et comme, $\pi_\alpha(|T|(I - E_\varepsilon))$ est un élément positif, on en déduit que $\pi_\alpha(|T|(I - E_\varepsilon))$ est inversible dans $c_\alpha(H)$ ceci est équivalent à dire que $|T|(I - E_\varepsilon) \in \Phi^\alpha$. Donc $S_\varepsilon = V|T|(I - E_\varepsilon) \in \Phi^\alpha$, ceci contredit le fait que $S_\varepsilon \notin \Phi_+^\alpha$.
Par conséquent, on conclut que $S_\varepsilon \notin \Phi_\pm^\alpha$.

Finalement, on en déduit que :

$$\operatorname{dist}(T, (\Phi_\pm^\alpha)^c) \leq \|T - S_\varepsilon\| = \|TE_\varepsilon\| = \| \, |T|E_\varepsilon\| \leq m_\alpha(T) + \varepsilon,$$

et ceci imlique que

$$\operatorname{dist}(T, (\Phi_\pm^\alpha)^c) \leq m_\alpha(T) = \max\{m_\alpha(T), m_\alpha(T^*)\}.$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 4.2.8. ■

Théorème 4.2.9

Soit $S \in B(H)$ tel que $R(S)$ est α-fermé (avec $\alpha \in \Theta$). Notons $\mathcal{H} = \overline{R(S)}$ et soit $L \in B(\mathcal{H})$ α-semi-Fredholm à gauche, alors $R(LS)$ est α-fermé.

Démonstration :

Tout d'abord, pour M (resp. M_1) un sous-espace de H (resp. $\mathcal{H}$), on note $M^\perp$ (resp. ${}^\perp M_1$) le sous-espace orthogonal de M (resp. M_1) dans H (resp. $\mathcal{H}$). Nous allons nous y prendre de la façon suivante.

D'abord, par définition d'un sous-espace α-fermé, il existe un sous-espace fermé $M \subseteq R(S)$ et un sous-espace fermé $Y \subseteq R(L)$ tels que

$$\dim(M^{\perp} \cap \mathcal{H}) < \alpha \tag{1}$$

et

$$\dim({}^{\perp}Y \cap \overline{R(L)}) < \alpha. \tag{2}$$

Soit $L_0 : D = L^{-1}(Y) \cap {}^{\perp}N(L) \longrightarrow Y$ la restriction de L à D. Comme, L_0 est une application linéaire bijective, on en déduit que $\gamma(L_0) > 0$.
Dans un premier temps, on va montrer que :

$$\dim {}^{\perp}(M \cap D) < \alpha. \tag{3}$$

Soit M_1 l'orthogonal de $M \cap D$ dans D, alors D s'écrit :

$$(M \cap D) \oplus M_1 = D, \tag{4}$$

et par suite $\mathcal{H}$ s'écrit :

$$(M \cap D) \oplus M_1 \oplus {}^{\perp}D = \mathcal{H}. \tag{5}$$

Puisque, M est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$, il s'ensuit que :

$$\mathcal{H} = M \oplus (M^{\perp} \cap \mathcal{H}). \tag{6}$$

Or, (4) implique que $M_1 \cap M = \{0\}$ et en utilisant (5) et le fait que $M \subseteq \mathcal{H}$, on obtient :

$$M \oplus M_1 \subseteq \mathcal{H}. \tag{7}$$

Maintenant, en combinant (6), (7) et (1), on obtient :

$$\dim M_1 \leq \dim(M^{\perp} \cap \mathcal{H}) < \alpha. \tag{8}$$

D'autre part, comme $N(L) \subseteq {}^{\perp}D$, il vient :

$${}^{\perp}D = N(L) \oplus {}^{\perp}N(L) \cap {}^{\perp}D. \tag{9}$$

Soit $L_1 : {}^{\perp}N(L) \cap {}^{\perp}D \longrightarrow \mathcal{H}$ la restriction de L à ${}^{\perp}N(L) \cap {}^{\perp}D$, alors on remarque que :

$$(10) \qquad R(L_1) \cap Y = \{0\}.$$

En effet, soit $y \in R(L_1) \cap Y$, alors il existe $x_1 \in {}^{\perp}N(L) \cap {}^{\perp}D$ et $x_2 \in D = L^{-1}(Y) \cap {}^{\perp}N(L)$ tels que $y = L_1(x_1) = L_0(x_2)$. Or, $L_1(x_1) = L(x_1)$ et $L_0(x_2) = L(x_2)$, par suite $L(x_1 - x_2) = 0$, d'où $x_1 - x_2 \in N(L)$. Mais comme, x_1 et x_2 appartiennent tous les deux à ${}^{\perp}N(L)$, on conclut que $x_1 - x_2 \in {}^{\perp}N(L) \cap N(L) = \{0\}$. Ceci implique, d'une part que $x_1 = x_2$ et d'autre part que $x_1 = x_2 \in D \cap {}^{\perp}D$ (car $x_1 \in {}^{\perp}D$ et $x_2 \in D$). Donc $x_1 = x_2 = 0$, cela entraîne que $y = 0$.

Par ailleurs, puisque Y est un sous-espace fermé de $\overline{R(L)}$, on peut écrire :

$$(11) \qquad \overline{R(L)} = Y \oplus ({}^{\perp}Y \cap \overline{R(L)}).$$

Mais, compte tenu du fait que $R(L_1) \subseteq R(L)$ et $R(L_1) \cap Y = \{0\}$, on constate que :

$$(12) \qquad Y \oplus R(L_1) \subseteq \overline{R(L)}.$$

Donc, (11), (12) et (2) entraînent que :

$$(13) \qquad \dim R(L_1) \leq \dim({}^{\perp}Y \cap \overline{R(L)}) < \alpha.$$

Maintenant, en utilisant (13) et le fait que L_1 est injectif, on obtient :

$$(14) \qquad \dim({}^{\perp}N(L) \cap {}^{\perp}D) = \dim(L_1({}^{\perp}N(L) \cap {}^{\perp}D)) \leq \dim R(L_1) < \alpha.$$

Et puisque L est α-semi-Fredholm à gauche, il s'ensuit que $\dim N(L) < \alpha$. Ceci implique, compte tenu de (14) et (9), que $\dim {}^{\perp}D < \alpha$. Par conséquent, en combinant (5) et (8), on conclut que :

$$\dim {}^{\perp}(M \cap D) \leq \dim M_1 + \dim {}^{\perp}D < \alpha.$$

Donc (3) est démontré.

D'autre part, on a $L(M\cap D)\cap L(M_1) = \{0\}$. En effet, soient $x_1 \in M\cap D$ et $x_2 \in M_1$ tels que $L(x_1) = L(x_2)$. Alors $x_1 - x_2 \in N(L)$, donc $x_1 - x_2 \in N(L) \cap {}^{\perp}N(L) = \{0\}$ (car $x_1 \in D \subseteq {}^{\perp}N(L)$ et $x_2 \in M_1 \subseteq D \subseteq {}^{\perp}N(L)$). Ceci implique que $x_1 = x_2$. Comme $x_1 \in M \cap D$ et $x_2 \in M_1$, et compte tenu de (4), on conclut que : $x_1 = x_2 = 0$. D'où, $L(M\cap D)\cap L(M_1) = \{0\}$. Maintenant, comme $\min\{\gamma(L_{|M\cap D}), \gamma(L_{|M_1})\} \geq \gamma(L_0) > 0$, on en déduit que $L(M \cap D)$ et $L(M_1)$ sont deux sous-espaces fermés de H, d'où, Y s'écrit :

$$L(M \cap D) \oplus L(M_1) = Y. \tag{15}$$

Puisque, $L(M \cap D)$ est un sous-espace fermé de Y, il s'ensuit que :

$$Y = L(M \cap D) \oplus \left({}^{\perp}(L(M \cap D)) \cap Y\right). \tag{16}$$

Donc (15), (16) et (8) impliquent que :

$$\dim({}^{\perp}[L(M \cap D)] \cap Y) = \dim L(M_1) \leq \dim M_1 < \alpha. \tag{17}$$

Maintenant, par (15) et (11), on conclut que :

$${}^{\perp}(L(M \cap D)) = {}^{\perp}Y \oplus L(M_1), \tag{18}$$

et

$$\overline{R(L)} = L(M \cap D) \oplus L(M_1) \oplus ({}^{\perp}Y \cap \overline{R(L)}\,). \tag{19}$$

D'où, on conclut au moyen de (18) et (19) que :

$$L(M_1) \subseteq \overline{R(L)} \cap {}^{\perp}[L(M \cap D)]. \tag{20}$$

Ceci implique, compte tenu de (19) et de (20) que :

$$\begin{aligned}
\overline{R(L)} \cap {}^{\perp}(L(M \cap D) &= L(M_1) \oplus \Big[\left(\overline{R(L)} \cap {}^{\perp}(L(M \cap D))\right) \cap \\
&\qquad \left(L(M \cap D) \oplus [{}^{\perp}Y \cap \overline{R(L)}\,]\right)\Big], \\
&= L(M_1) \oplus [{}^{\perp}Y \cap \overline{R(L)}].
\end{aligned}$$

Donc,

$$\dim\left({}^{\perp}[L(M\cap D)]\cap\overline{R(L)}\right) < \alpha.$$

Par conséquent,

$$\dim\left({}^{\perp}[L(M\cap D)]\cap\overline{R(LS)}\right) < \alpha.$$

Ceci achève la preuve du théorème car $L(M\cap D)\subseteq R(LS)$ et $L(M\cap D)$ est un sous-espace fermé. ■

4.3 Les opérateurs points de continuité pour la conorme de poids α

J.P. Labrousse et M. Mbekhta dans leur article [46], s'intéressent aux opérateurs points de continuité pour la conorme dans le cas des opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert. Ceci nous a conduit à étudier les opérateurs points de continuité pour la conorme de poids α, toujours dans le cas des opérateurs bornés et en se basant sur les résultats du paragraphe précédent.

Rappelons d'après les notations de la page 96, la conorme de $\pi_\alpha(T)$ est donnée par :

$$c(\pi_\alpha(T)) = \inf\left\{\sigma_\alpha(|T|) \setminus \{0\}\right\}. \tag{4.3.1}$$

L. Burlando dans son article [15], sur les opérateurs bornés dans un espace de Hilbert non séparable, a montré que la conorme de poids α admet une expression beaucoup plus simple que la première définition que l'on avait donnée à la page 104. Plus précisément elle montre que :

Lemme 4.3.1 ([15], Théorème 4.1)
Soit $T \in B(H)$, alors :

$$\gamma_\alpha(T) = \inf\{\lambda > 0 : \dim E(]0, \lambda[)H \geq \alpha\}.$$

Notre premier résultat de ce paragraphe est le théorème suivant qui donne pour n'importe quel opérateur T de $(K_\alpha(H))^c$ une relation assez simple entre sa conorme de poids α et le spectre de poids α de son module $|T|$.

Théorème 4.3.2

Soient $T \in B(H)$ et $\alpha \in \Theta$. Supposons que $T \notin K_\alpha(H)$, alors :

$$\gamma_\alpha(T) = \inf\big\{\lambda : \lambda \in \sigma_\alpha(|T|) \setminus \{0\}\big\}.$$

Démonstration :

Remarquons, d'abord que, $\delta = \inf\big\{\lambda : \lambda \in \sigma_\alpha(|T|) \setminus \{0\}\big\}$ existe[4]. Supposons que $\delta > \gamma_\alpha(T)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma_\alpha(T)+\varepsilon < \delta$, alors par définition de δ, on a :

$$(1) \qquad]0, \gamma_\alpha(T) + \varepsilon[\cap \sigma_\alpha(|T|) = \emptyset.$$

On va montrer que

$$(2) \qquad \dim E(]0, \gamma_\alpha(T) + \varepsilon[)H < \alpha.$$

• <u>1^{er} *cas*</u> si $\alpha = \aleph_0$.

Alors, on remarque que $\sigma_{\aleph_0}(|T|) = \sigma_e(|T|)$ et en utilisant (1), on voit que $]0, \gamma_{\aleph_0}(T) + \varepsilon[\cap \sigma_e(|T|) = \emptyset$. Donc d'après la Proposition 2.20, on conclut que $\dim E(]0, \gamma_{\aleph_0}(T) + \varepsilon[)H < \aleph_0$.

• <u>2^{eme} *cas*</u> si $\alpha > \aleph_0$.

D'abord, d'parès (1) et le Lemme 4.2.2, on constate que pour tout $\lambda \in]0, \gamma_\alpha(T)+\varepsilon[$, il existe ε_λ tel que $]\lambda-\varepsilon_\lambda, \lambda+\varepsilon_\lambda[\subseteq]0, \gamma_\alpha(T)+\varepsilon[$ et $\dim E(]\lambda-\varepsilon_\lambda, \lambda + \varepsilon_\lambda[)H < \alpha$. Ainsi, il existe deux suites $(\lambda_n)_{n>0}$ et $(\varepsilon_n)_{n>0}$ telles que $\varepsilon_n > 0$, $\lambda_n \in]0, \gamma_\alpha(T) + \varepsilon[$, $]0, \gamma_\alpha(T) + \varepsilon[= \bigcup_{0<n}]\lambda_n - \varepsilon_n, \lambda_n + \varepsilon_n[$ et $\dim E(]\lambda_n - \varepsilon_n, \lambda_n + \varepsilon_n[)H < \alpha$. Il en résulte que $\dim E(]0, \gamma_\alpha(T) + \varepsilon[)H < \alpha\aleph_0 = \alpha$. (voir [14], Corollaire 4, page 73).

Ceci prouve (2). Maintenant, en utilisant le Lemme 4.3.1, on conclut que $\gamma_\alpha(T) + \varepsilon \leq \gamma_\alpha(T)$, absurde. Par conséquent, $\delta \leq \gamma_\alpha(T)$.

[4] Car $\sigma_\alpha(|T|) \neq \{0\}$. En effet, si ce n'était pas le cas, puisque $\pi_\alpha(|T|)$ est un élément positif, il s'ensuivrait que $\|\pi_\alpha(|T|)\| = \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma_\alpha(|T|)\} = 0$. Il en résulterait que $|T| \in K_\alpha(H)$ et cela entraînerait que $T \in K_\alpha(H)$. Ce qui serait incompatible avec l'hypothèse.

Montrons l'inégalité inverse. On peut supposer que $\gamma_\alpha(T) > 0$, car sinon l'inégalité est évidente.
Soit $0 < \lambda < \gamma_\alpha(T)$, alors d'après le Lemme 4.3.1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\dim E(]0, \lambda + \varepsilon[)H < \alpha$. D'autre part, en utilisant le Lemme 4.2.2, on conclut que :

$$]0, \lambda[\cap \sigma_\alpha(|T|) = \emptyset.$$

Cela entraîne que $\delta \geq \lambda$, par conséquent $\delta \geq \gamma_\alpha(T)$.
Ceci achève la preuve du Théorème 4.3.2. ■

Remarque

D. Ernest, a montré [27], qu'un opérateur $T \in K_\alpha(H)$ est à image α-fermée si et seulement si $T \in J_\alpha(H)$. Donc, en tenant compte de l'assertion (4.2.4), on conclut, pour tout $T \in K_\alpha(H) \setminus J_\alpha(H)$, que $\gamma_\alpha(T) = 0$. D'autre part, il est évident que $\gamma_\alpha(T) = +\infty$ si $T \in J_\alpha(H)$. Donc, il résulte de tout cela que :

$$\gamma_\alpha(T) = \begin{cases} \inf\left\{\lambda : \lambda \in \sigma_\alpha(|T|) \setminus \{0\}\right\} & \text{si} \quad T \notin K_\alpha(H), \\ 0 & \text{si} \quad T \in K_\alpha(H) \setminus J_\alpha(H), \\ +\infty & \text{si} \quad T \in J_\alpha(H). \end{cases}$$

Corollaire 4.3.3

1) *Si* $T \in J_\alpha(H) \cup \left(K_\alpha(H)\right)^c$, *alors* $\gamma_\alpha(T) = c(\pi_\alpha(T))$.

2) *Si* $T \notin K_\alpha(H)$ *et* $K \in K_\alpha(H)$, *alors* $\gamma_\alpha(T) = \gamma_\alpha(T + K)$.

Démonstration :

1) Si $T \in J_\alpha(H)$, alors $\gamma_\alpha(T) = c(\pi_\alpha(T)) = +\infty$. Si $T \in \left(K_\alpha(H)\right)^c$, alors l'égalité résulte immédiatement de la relation (4.3.1) et du Théorème 4.3.2.

2) Résulte trivialement de 1). ■

Récemment M. Mbekhta et R. Paul, ont montré que la conorme essentielle $\gamma_e(T)$ d'un opérateur T qui est définie par : $\gamma_e(T) = \inf\Big\{\lambda : \lambda \in \sigma_e(|T|) \setminus \{0\}\Big\}$, vérifie $\gamma_e(T) = \sup\limits_{K \in K(H)} \gamma(T+K)$ (cf, [51] Théorème 1) et que ce supremum est atteint ([51], Théorème 2). Dans le théorème suivant nous généralisons ce résultat pour $c(\pi_\alpha(T))$ la conorme de $\pi_\alpha(T)$, en montrant par une méthode plus élémentaire que :

$$c(\pi_\alpha(T)) = \sup_{K \in K_\alpha(H)} \gamma(T+K) \quad \text{et que ce supremum est atteint.}$$

Théorème 4.3.4

Soient $T \in B(H)$ et $\alpha \in \Theta$, alors :

1) $c(\pi_\alpha(T)) = \sup\limits_{K \in K_\alpha(H)} \gamma(T+K)$.

2) *Il existe $K \in K_\alpha(H)$ tel que $c(\pi_\alpha(T)) = \gamma(T+K)$.*

Démonstration :

1) Si $T \in K_\alpha(H)$, alors $c(\pi_\alpha(T)) = c(0) = +\infty = \sup\limits_{K \in K_\alpha(H)} \gamma(T+K)$.
Supposons maintenant que $T \notin K_\alpha(H)$, alors grâce à l'assertion (4.3.1) et le Corollaire 4.3.3, on conclut pour tout $K \in K_\alpha(H)$, que $\gamma_\alpha(T+K) = c(\pi_\alpha(T+K))$. Donc, pour tout $K \in K_\alpha(H)$, on a :

$$\gamma_\alpha(T) = c(\pi_\alpha(T)) = c(\pi_\alpha(T+K)) = \gamma_\alpha(T+K) \geq \gamma(T+K).$$

Par conséquent,

$$\sup_{K \in K_\alpha(H)} \gamma(T+K) \leq c(\pi_\alpha(T)).$$

Montrons l'inégalité inverse, on peut supposer que $c(\pi_\alpha(T)) > 0$, car sinon l'inégalité est évidente. Soit $T = V|T|$ la décomposition polaire de T. Soit $\varepsilon > 0$, on lui associe l'opérateur $K_\varepsilon = -V|T|E(]0, \gamma_\alpha(T) - \varepsilon[)$. Alors, par le Lemme 4.3.1, on conclut que $\dim E(]0, \gamma_\alpha(T) - \varepsilon[)H < \alpha$, ceci implique que $K_\varepsilon \in J_\alpha(H) \subseteq K_\alpha(H)$.

Par ailleurs, comme

$$T + K_\varepsilon = V|T|E([\gamma_\alpha(T) - \varepsilon, +\infty[),$$

on en déduit que

$$\gamma(T + K_\varepsilon) \geq \gamma_\alpha(T) - \varepsilon.$$

Donc,

$$\sup_{K \in K_\alpha(H)} \gamma(T + K) \geq \sup_{\varepsilon > 0} \gamma(T + K_\varepsilon) \geq \gamma_\alpha(T) = c(\pi_\alpha(T)).$$

2) Si $c(\pi_\alpha(T)) = 0$, alors $\gamma(T) = 0$. Dans ce cas, il suffit de prendre $K = 0$. Si $c(\pi_\alpha(T)) = +\infty$, alors $T \in K_\alpha(H)$. Dans ce cas, il suffit de prendre $K = -T$. Supposons donc $0 < c(\pi_\alpha(T)) < +\infty$. Alors $T \notin K_\alpha(H)$, d'où d'après le Corollaire 4.3.3, on a : $c(\pi_\alpha(T)) = \gamma_\alpha(T)$.

D'autre part, d'après 1), on voit qu'il existe $K_0 \in K_\alpha(H)$ tel que $\gamma(T + K_0) > 0$. Soit $L = T + K_0$, alors $\gamma_\alpha(L) = \gamma_\alpha(T) > 0$. Posons, $K_1 = E_L(]0, \gamma_\alpha(T)[)(-|L| + \gamma_\alpha(T)I)$ où on rappelle que $E_L(\cdot)$ désigne la mesure spectrale de $|L|$. Alors $K_1 \in K_\alpha(H)$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, on lui associe l'opérateur

$$K_\varepsilon = E_L(]0, \gamma_\alpha(T) - \varepsilon[)(-|L| + \gamma_\alpha(T)I),$$

alors en utilisant le Lemme 4.3.1, on voit facilement que $K_\varepsilon \in J_\alpha(H)$. Par ailleurs, comme $\|K_1 - K_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, et en sachant que $K_\alpha(H)$ est un fermé de $B(H)$, on conclut que $K_1 \in K_\alpha(H)$.

D'autre part, on a :

$$|L| + K_1 = \gamma_\alpha(T)E_L(]0, \gamma_\alpha(T)[) + |L|E_L([\gamma_\alpha(T), +\infty[),$$

et on montre sans aucune difficulté que :

$$\gamma(|L| + K_1) = \gamma_\alpha(T).$$

Maintenant, écrivant L sous sa forme polaire $W|L|$ avec W une isométrie ou co-isométrie (voir, Lemme 2.14), par symétrie de l'adjoint on peut supposer que W est une isométrie. Posons $K = K_0 + WK_1$, alors $K \in K_\alpha(H)$ et K vérifie

$$\gamma(T + K) = \gamma(L + WK_1) = \gamma(|L| + K_1) = \gamma_\alpha(T).$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 4.3.4. ■

Corollaire 4.3.5

1) $\overline{C_\alpha(H)} = \overline{B(H)} + K_\alpha(H)$.

2) *Si* $\pi_\alpha(T) \in (C_\alpha(H))^\dagger$, *alors :*

$$\|\pi_\alpha(T)^\dagger\| = \inf_{K \in K_\alpha(H)} \|(T + K)^\dagger\|.$$

Démonstration :

1) L'inclusion " $\overline{B(H)} + K_\alpha(H) \subseteq \overline{C_\alpha(H)}$ " est évidente, montrons l'inclusion inverse.

Soit $T \in \overline{C_\alpha(H)}$, alors $c(\pi_\alpha(T)) > 0$ (cf. [37], Théorème 2), d'où d'après le Théorème 4.3.4, il existe $K \in K_\alpha(H)$ tel que $\gamma(T + K) = c(\pi_\alpha(T)) > 0$. Donc, en tenant compte du Théorème 8 [36], on conclut que $T \in \overline{B(H)} + K_\alpha(H)$.

La preuve de 2) découle immédiatement du Théorème 2 [37]. ■

Le corollaire suivant résulte immédiatement du Théorème 4.3.4 et du Corollaire 4.3.3.

Corollaire 4.3.6

Soit $T \in B(H)$ *et supposons que* $T \in J_\alpha(H) \cup \left(K_\alpha(H)\right)^c$, *alors :*

$$\gamma_\alpha(T) = \sup_{K \in K_\alpha(H)} \gamma(T + K),$$

et ce supremum est atteint.

Corollaire 4.3.7

Soit $T \in B(H)$ tel que $T \in J_\alpha(H) \cup \left(K_\alpha(H)\right)^c$, alors :

$$\gamma_\alpha(T) = c(\pi_\alpha(T)) = \sup_{K \in J_\alpha(H)} \gamma(T+K).$$

Démonstration:

Si $T \in J_\alpha(H)$, alors on voit sans aucune difficulté les égalités suivantes :

$$c(\pi_\alpha(T)) = c(0) = \sup_{K \in J_\alpha(H)} \gamma(T+K) = +\infty.$$

Supposons maintenant que $T \notin K_\alpha(H)$. Au cours de la démonstration du Théorème 4.3.4, on a vu que l'opérateur $K_\varepsilon = -V|T|E(]0, \gamma_\alpha(T) - \varepsilon[) \in J_\alpha(H)$. Par conséquent,

$$(1) \qquad \sup_{K \in J_\alpha(H)} \gamma(T+K) \geq \sup_{\varepsilon} \gamma(T+K_\varepsilon) = \gamma_\alpha(T) = c(\pi_\alpha(T)).$$

Or,

$$(2) \qquad \sup_{K \in J_\alpha(H)} \gamma(T+K) \leq \sup_{K \in K_\alpha(H)} \gamma(T+K) = \gamma_\alpha(T) = c(\pi_\alpha(T)).$$

Donc, on conclut au moyen de (1) et (2), que :

$$\gamma_\alpha(T) = c(\pi_\alpha(T)) = \sup_{K \in J_\alpha(H)} \gamma(T+K).$$

■

Lemme 4.3.8

Soient $T \in \Phi_\pm^\alpha$ et $S \in B(H)$ tel que $\|T-S\| < c(\pi_\alpha(T))$, alors :

$$|c(\pi_\alpha(T)) - c(\pi_\alpha(S))| \leq \|T-S\|.$$

Démonstration:

Remarquons d'abord, qu'on peut supposer que $T \in \Phi_+^\alpha$ sinon on passe à l'adjoint. Ainsi, en appliquant le Théorème 2 [37], on obtient :

$$\|T-S\|_\alpha < \|T-S\| < c(\pi_\alpha(T)) = \|\pi_\alpha(T)^\dagger\|^{-1}.$$

D'où, on en déduit que :

$$(1) \qquad \|\pi_\alpha(T)^\dagger(\pi_\alpha(T) - \pi_\alpha(S))\| < 1.$$

Ceci implique que $I - \pi_\alpha(T)^\dagger(\pi_\alpha(T) - \pi_\alpha(S)) = \pi_\alpha(T)^\dagger\pi_\alpha(S)$ est inversible, par conséquent $S \in \Phi_+^\alpha$. Finalement, d'après (1) et le Théorème 5 [37], on constate que :

$$|c(\pi_\alpha(T)) - c(\pi_\alpha(S))| \leq \|T - S\|_\alpha \leq \|T - S\|.$$

Le Lemme 4.3.8 est démontré. ■

Lemme 4.3.9

L'application $c_\alpha : B(H) \longrightarrow [0, +\infty]$ donnée par $c_\alpha : T \longmapsto c(\pi_\alpha(T))$ est semi-continue supérieurement.

Démonstration:

Ceci résulte trivialement du Théorème 7 [37]. ■

Théorème 4.3.10

Soit $T \in B(H)$, alors T est un point de continuité pour l'application c_α : $B(H) \longrightarrow [0, +\infty]$ donnée par $c_\alpha : T \longmapsto c(\pi_\alpha(T))$ si et seulement si $c(\pi_\alpha(T)) = 0$ ou $T \in \Phi_\pm^\alpha$.

Démonstration :

" Si " Quand $c(\pi_\alpha(T)) = 0$, la continuité de c_α découle de sa semi-continuité supérieure (voir, Lemme 4.3.9). Si $c(\pi_\alpha(T)) > 0$ et $T \in \Phi_\pm^\alpha$, alors la continuité de c_α se déduit du Lemme 4.3.8.

" Seulement si " Supposons que l'application c_α est continue au point T et que $c(\pi_\alpha(T)) > 0$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|T - S\| < \varepsilon$ et $c(\pi_\alpha(T)) \geq \delta = \frac{1}{2}c(\pi_\alpha(T))$.

D'autre part, comme l'ensemble des opérateurs semi-inversibles est dense dans $B(H)$ (voir [33], Problème 109), alors il existe $(T_n)_n$ une suite d'opérateurs de $\Phi_\pm^\alpha$ telle que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|T_n - T\| = 0$. D'où, pour $\theta = \min\{\varepsilon, \delta\} > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_{n_0} - T\| < \theta$. Donc $c(\pi_\alpha(T_{n_0})) \geq \delta$. Par conséquent,

$$\|T_{n_0} - T\| < c(\pi_\alpha(T_{n_0})). \tag{1}$$

Comme, $T_{n_0} \in \Phi_\pm^\alpha$, par le Théorème 4.2.3, on conclut que

$$c(\pi_\alpha(T_{n_0})) = \gamma_\alpha(T_{n_0}) = \max\{m_\alpha(T_{n_0}), m_\alpha((T_{n_0})^*)\}.$$

Donc, d'après (1) et le Théorème 4.2.5, on conclut que $T \in \Phi_\pm^\alpha$. ■

Pour $T \in B(H)$, on note $\rho_\alpha(T) = (\sigma_\alpha(T))^c = \mathbb{C} \setminus \sigma_\alpha(T)$

Corollaire 4.3.11

Soit $T \in B(H)$ tel que $c(\pi_\alpha(T)) > 0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

(1) *T est un point de continuité pour l'application $c_\alpha : B(H) \longrightarrow [0, +\infty]$ définie par $c_\alpha : T \longmapsto c(\pi_\alpha(T))$.*

(2) *Il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $S \in B(H)$,*

$$\|T - S\| < a \quad \Longrightarrow \quad c(\pi_\alpha(T)) \geq b.$$

(3) *Il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $S \in B(H)$,*

$$\|T - S\| < a \quad \Longrightarrow \quad]0, b[\subseteq \rho_\alpha(|S|).$$

(4) *Il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $S \in B(H)$,*

$$\|T - S\| < a \quad \Longrightarrow \quad]0, b[\subseteq \rho_\alpha(|S^*|).$$

(5) $T \in \Phi_{\pm}^{\alpha}$.

Démonstration :

Les implications (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) sont triviales.

(3) et (4) sont équivalentes, ceci découle simplement du théorème de l'application spectrale et du fait

$$]0,b[\subseteq \rho_\alpha(T^*T) \iff]0,b[\subseteq \rho_\alpha(TT^*).$$

(3) $\Longrightarrow$ (5) comme $G_\pm$ est dense dans $B(H)$ (voir [33], Problème 109), il existe $S \in \Phi_{\pm}^{\alpha}$ tel que $\|T - S\| < \min\{a, b\}$. D'où, en utilisant l'hypotèse (3), on constate que

$$(*) \qquad \|T - S\| < c(\pi_\alpha(S)).$$

D'autre part, comme $S \in \Phi_{\pm}^{\alpha}$, par le Corollaire 4.3.3 et le Théorème 4.2.3, on conclut que

$$(**) \qquad c(\pi_\alpha(S)) = \gamma_\alpha(S) = \max\{m_\alpha(S), m_\alpha(S^*)\}.$$

Donc, on en déduit, par $(*)$, $(**)$ et le Théorème 4.2.5, que $T \in \Phi_{\pm}^{\alpha}$.

(5) $\Longrightarrow$ (1) résulte immédiatement du Théorème 4.3.10. ∎

Théorème 4.3.12

Soit $T \in B(H)$, alors T est un point de continuité pour l'application $\gamma_\alpha : B(H) \longrightarrow [0, +\infty]$ donnée par $\gamma_\alpha : T \longmapsto \gamma_\alpha(T)$ si et seulement si $T \notin K_\alpha(H)$ et $\gamma_\alpha(T) = 0$ ou $T \in \Phi_{\pm}^{\alpha}$.

Démonstration :

" Si " Si $T \notin K_\alpha(H)$ et $\gamma_\alpha(T) = 0$ ou $T \in \Phi_{\pm}^{\alpha}$, alors il existe ϑ un voisinage ouvert de T tel que $\vartheta \subseteq (K_\alpha(H))^c$. D'où, par le Corollaire 4.3.3, on a : pour tout $S \in \vartheta$, $\gamma_\alpha(S) = c(\pi_\alpha(S))$. Maintenant le Théorème 4.3.10, nous permet de conclure.

" Seulement si " Montrons d'abord :

Si $T \in K_\alpha(H)$, alors T n'est pas un point de continuité de l'application γ_α.

En effet, pour tout voisinage borné ϑ de T on a : $\vartheta \cap J_\alpha(H) \neq \emptyset$ et $\vartheta \cap G_\pm \neq \emptyset$ (car $\overline{G_\pm} = B(H)$). Ainsi, d'une part, on aurait :

$$\gamma_\alpha(S) = +\infty \text{ si } S \in \vartheta \cap J_\alpha(H),$$

et d'autre part,

$$0 < \gamma(S) \leq \gamma_\alpha(S) \leq \|S\| < +\infty \text{ si } S \in \vartheta \cap G_\pm.$$

Ce qui est absurde. Donc, on conclut que T ne peut pas être un point de continuité de l'application γ_α.

Soit T un point de continuité de l'application γ_α (donc $T \notin K_\alpha(H)$) et supposons que $\gamma_\alpha(T) > 0$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $S \in \mathcal{B}(T,\varepsilon)$, $S \notin K_\alpha(H)$ et $\gamma_\alpha(S) \geq \frac{1}{2}\gamma_\alpha(T) > 0$ où $\mathcal{B}(T,\varepsilon) = \{L \in B(H) : \|T - L\| < \varepsilon\}$. Alors, comme $c_{\alpha|\mathcal{B}(T,\varepsilon)} = \gamma_{\alpha|\mathcal{B}(T,\varepsilon)}$, on en déduit que T est un point de continuité de l'application c_α et que $c_\alpha(T) = \gamma_\alpha(T) > 0$. Par suite par le Théorème 4.3.10, on conclut que $T \in \Phi_\pm^\alpha$.

Ceci conclut la démonstration du Théorème 4.3.12. ■

Corollaire 4.3.13

Soit $T \in B(H)$ tel que $\gamma_\alpha(T) > 0$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) *T est un point de continuité pour l'application $\gamma_\alpha : B(H) \longrightarrow [0,+\infty]$ définie par $\gamma_\alpha : T \longmapsto \gamma_\alpha(T)$.*

(2) *Il existe $a, b > 0$ tels que pour tout $S \in B(H)$,*

$$\|T - S\| < a \quad \Longrightarrow \quad \gamma_\alpha(T) \geq b \textit{ et } S \notin K_\alpha(H).$$

(3) *Il existe* $a, b > 0$ *tels que pour tout* $S \in B(H)$,

$$\|T - S\| < a \quad \Longrightarrow \quad]0, b[\subseteq \rho_\alpha(|S|) \;\; et \;\; S \notin K_\alpha(H).$$

(4) *Il existe* $a, b > 0$ *tels que pour tout* $S \in B(H)$,

$$\|T - S\| < a \quad \Longrightarrow \quad]0, b[\subseteq \rho_\alpha(|S^*|) \;\; et \;\; S \notin K_\alpha(H).$$

(5) $T \in \Phi^\alpha_\pm$.

Démonstration :

L'implication (1) $\Longrightarrow$ (2) est facile à voir.

L'implication (2) $\Longrightarrow$ (3) découle immédiatement du Théorème 4.3.2.

(3) $\Longleftrightarrow$ (4) voir Corollaire 4.3.11.

L'implication (3) $\Longrightarrow$ (5) est similaire à l'implication "(3) $\Longrightarrow$ (5)" du démonstration du Corollaire 4.3.11.

(5) $\Longleftrightarrow$ (1) est une conséquence directe du Théorème 4.3.12.

■

4.4 Approximation par les opérateurs semi-Fredholm

Nous notons, G le groupe des opérateurs inversibles.

Les quantités suivantes ont été introduites par R. Bouldin [10], [11] et [12], afin de caractériser les éléments de $\overline{G}$ et pour determiner $\operatorname{dist}(T, G)$.

$$\text{(4.4.1)} \qquad \operatorname{ess\,nul} T = \inf\{\dim E([0,\varepsilon[)H : \varepsilon > 0\}.$$

$$\text{(4.4.2)} \qquad \operatorname{ess\,def} T \overset{\text{def}}{=} \operatorname{ess\,nul} T^*.$$

Notons aussi :

$$\text{(4.4.3)} \qquad \Im(T) = \max\{\aleph_0, \operatorname{ess\,nul} T, \operatorname{ess\,def} T\}.$$

$$\text{(4.4.4)} \qquad \tau(T) = \sup\{\lambda > 0 : \dim E([0,\lambda[)H < \Im(T)\}.$$

$$\text{(4.4.5)} \qquad \mu(T) = \max\{\tau(T), \tau(T^*)\}.$$

R. Bouldin a énoncé quelques propriétés de $\tau(T)$ et $\Im(T)$ (cf. [12], Théorème 2). Il les a caractérisées en fonction de la mesure spectrale $E(\cdot)$ de $|T|$. Malheureusement, *ii)* de ce théorème est inexacte. Cependant *ii)* serait vrai si on remplaçait $E(]\lambda, \lambda+\varepsilon[)$ par $E(]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[)$ et les mêmes techniques utilisées au cours de cette démonstration s'appliqueraient aussi à $E(]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[)$. Ainsi, on obtient :

Théorème 4.4.1 ([12], **Théorème 2**)

1) $\tau(T) \geq m_e(T) \geq 0$.

2) $\tau(T) = \inf\{\lambda > 0 : \dim E(]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[)H \geq \Im(T),\ \forall\varepsilon > 0\}$, *et* $\dim E(]\tau(T)-\varepsilon, \tau(T)+\varepsilon[)H \geq \Im(T),\ \forall\varepsilon > 0$.

3) $\tau(T) = 0 \iff \operatorname{ess\,nul} T \geq \operatorname{ess\,def} T$ *et* $\operatorname{ess\,nul} T \geq \aleph_0$.

4) *Si* $\tau(T) = \tau(T^*)$, *alors* $\operatorname{ess\,nul} T = \operatorname{ess\,def} T$ *et par conséquent* T *est dans la fermeture des opérateurs inversibles.*

5) *Si* $\tau(T) > 0$ *et* $\tau(T^*) > 0$, *alors* $\tau(T) = \tau(T^*)$.

On va utiliser à maintes reprises le lemme suivant qui établit la relation entre la mesure spectrale de $|T|$ et celle de $|T^*|$.

Lemme 4.4.2 ([12], Lemme 1)

Soit $T = U|T|$ *la décomposition polaire de* T, *et soit* V *la restriction de* U *à* $\overline{R(T^*)}$, $V = U_{|\overline{R(T^*)}} : \overline{R(T^*)} \longrightarrow \overline{R(T)}$. *Si on note par* A *la restriction de* $|T|$ *à* $\overline{R(T^*)}$ $(A = |T|_{|\overline{R(T^*)}})$ *et* B *la restriction de* $|T^*|$ *à* $\overline{R(T)}$ $(B = |T^*|_{|\overline{R(T)}})$, *alors* $B = VAV^*$. *Il s'ensuit que, pour tout intervalle* ω *de* $]0, +\infty[$, $E^*(\omega) = VE(\omega)V^*$.

On va determiner la distance de T à plusieures classes d'opérateurs. Avant cela nous montrons d'abord les deux lemmes suivants :

Lemme 4.4.3

Soit $T \in B(H)$, *alors :*

$\tau(T) > 0$ *et* $\tau(T^*) = 0$ *si et seulement si* $\dim N(T) \leq \operatorname{ess\,nul} T < \Im(T)$ *et* $\dim N(T^*) = \operatorname{ess\,def} T = \Im(T)$.

Démonstration :

" $\Longleftarrow$ " Résulte immédiatement du Théorème 4.4.1.

" $\Longrightarrow$ " Soit $0 < \lambda < \tau(T)$, tel que :

$$\operatorname{ess\,nul} T = \dim E([0, \lambda[)H \quad \text{et} \quad \operatorname{ess\,def} T = \dim E^*([0, \lambda[)H.$$

Alors, par le Théorème 4.4.1, on conclut que :

(1) $\qquad \dim N(T) \leq \operatorname{ess\,nul} T < \Im(T) \quad \text{et} \quad \operatorname{ess\,def}\,(T) = \Im(T).$

Or, d'après le Lemme 4.4.2 on a : $\dim E(]0,\lambda[)H = \dim E^*(]0,\lambda[)H$. Par suite, en tenant compte de (1), on conclut que :

$$\dim N(T^*) = \dim E^*(\{0\})H = \dim E^*([0,\lambda[)H = \operatorname{ess\,def} T = \Im(T).$$

Ceci achève la démonstration du Lemme 4.4.3. ■

Corollaire 4.4.4

Soit $T \in B(H)$ tel que $\tau(T) > 0$ et $\tau(T^*) = 0$, alors $\operatorname{ind}(T) = -\Im(T)$.

Démonstration :

Conséquence immédiate du Lemme 4.4.3. ■

Lemme 4.4.5

Soit $T \in B(H)$ tel que $\tau(T) > 0$ et $\tau(T^*) > 0$, alors :

$$\tau(T) = \tau(T^*) = m_e(T) = m_e(T^*).$$

Démonstration :

Tout d'abord, d'après le Théorème 4.4.1, on constate que $\tau(T) = \tau(T^*)$. D'autre part, soit $\lambda \in]0,\tau(T)[$ tel que :

(1) $\quad \operatorname{ess\,nul} T = \dim E([0,\lambda[)H \quad$ et $\quad \operatorname{ess\,def} T = \dim E^*([0,\lambda[)H.$

Alors, par définition de $\tau(T)$ et $\tau(T^*)$, on a :

$$\dim E([0,\lambda[)H < \Im(T) \quad \text{et} \quad \dim E^*([0,\lambda[)H < \Im(T).$$

Donc, d'après (1) et la relation (4.4.3), on conclut que $\Im(T) = \aleph_0$. Par conséquent,

$$\tau(T) = \tau(T^*) = m_e(T) = m_e(T^*).$$

Ceci achève la démonstration du Lemme 4.4.5. ■

Remarque 4.4.6

Soit $T \in B(H)$, alors $\tau(T) = m_{\Im(T)}(T)$.

La démonstration de cette remarque découle immédiatement du Théorème 4.2.3, parce que

$$m_{\Im(T)}(T) = \sup\{\lambda \geq 0 : \dim E([0, \lambda[)H < \Im(T)\}.$$

Pour simplifier les notations nous écrivons seulement π (resp. $\mathcal{F}$) au lieu de $\pi_{\aleph_0}$ (resp. $\Phi^{\aleph_0}$). On remarque que $\mathcal{F}$ n'est autre que l'ensemble des opérateurs Fredholm.

Théorème 4.4.7

Soit $T \in B(H)$ tel que $T \notin \mathcal{F}$, alors

$$\mathrm{dist}(T, \mathcal{F}) = \mathrm{dist}(T, G) = \mu(T).$$

Démonstration :

Tout d'abord, on remarque par le Corollaire 8 [12], que :

$$\mathrm{dist}(T, \mathcal{F}) \leq \mathrm{dist}(T, G) = \mu(T).$$

D'où, il suffit de montrer que : $\mathrm{dist}(T, \mathcal{F}) \geq \mu(T)$. On peut supposer que $\mu(T) > 0$, car sinon l'inégalité est évidente. On va distinguer trois cas.

- Si $\tau(T) = \tau(T^*) > 0$.

Alors, d'après le Lemme 4.4.5, on voit que $\mu(T) = m_e(T)$, et maintenant en utilisant le Théorème 4.2.5 (avec $\alpha = \aleph_0$), on obtient : $\mathrm{dist}(T, \mathcal{F}) \geq m_e(T) = \mu(T)$.

- Si $\tau(T) > 0$ et $\tau(T^*) = 0$.

D'abord, grâce au Corollaire 4.4.4, on constate que :

$$\mathrm{ind}_{\Im(T)}(T) = \mathrm{ind}(T) = -\Im(T).$$

D'autre part, comme pour tout $L \in \mathcal{F}$, $\mathrm{ind}_{\Im(T)}(T) \neq -\Im(T)$, et en utilisant le Théorème 4.2.5 (avec $\alpha = \Im(T)$), on conclut que

$$\mathrm{dist}(T, \mathcal{F}) \geq \tau(T) = \mu(T) = m_{\Im(T)}(T).$$

- Si $\tau(T) = 0$ et $\tau(T^*) > 0$.

Tout simplement, d'après le point précédent, on constate que :

$$\mathrm{dist}(T, \mathcal{F}) = \mathrm{dist}(T^*, \mathcal{F}) \geq \tau(T^*) = \mu(T).$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 4.4.7. ■

Corollaire 4.4.8

Soit $T \in B(H)$ tel que $T \notin \mathcal{F}$, alors

$$\mathrm{dist}(\pi(T), \pi(\mathcal{F})) = \mu(T).$$

Démonstration:

Tout d'abord, d'après le Théorème 4.4.7, on remarque que :

$$\mathrm{dist}(\pi(T), \pi(F)) \leq \mathrm{dist}(T, F) = \mu(T).$$

Inversement, on peut supposer que $\mu(T) > 0$, car sinon l'inégalité est évidente. Comme $T \notin \mathcal{F}$, d'après le Lemme 4.4.5, on constate que : $\min\{\tau(T),\, \tau(T^*)\} = 0$. On va distinguer deux cas :

- Si $\tau(T) > 0$ et $\tau(T^*) = 0$, alors d'après le Corollaire 4.4.4, on a : $\mathrm{ind}_{\Im(T)}(T) = \mathrm{ind}(T) = -\Im(T)$.

D'autre part, comme $\mathrm{ind}(S) = \mathrm{ind}_{\aleph_0}(S)$ est fini et $\mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}_{\aleph_0}(T) = -\Im(T)$, et d'après le Théorème 4.2.5, (avec $\alpha = \aleph_0$), on doit avoir :

$$\|T - S\|_e = \|\pi(T) - \pi(S)\| \geq m_{\Im(T)}(T) = \mu(T).$$

Par conséquent,

$$\mathrm{dist}(\pi(T), \pi(\mathcal{F})) \geq m_{\Im(T)}(T) = \mu(T).$$

• Si $\tau(T) = 0$ et $\tau(T^*) > 0$, alors en utilisant le point précédent, on voit que :

$$\operatorname{dist}(\pi(T), \pi(\mathcal{F})) = \operatorname{dist}(\pi(T^*), \pi(\mathcal{F})) \geq m_{\Im(T)}(T^*) = \mu(T).$$

Ceci achève la démonstration du Corollaire 4.4.8. ■

Pour β vérifiant $-\dim H \leq \beta \leq \dim H$, on note

$I_\beta = \{T \in B(H) : \ \operatorname{ind}(T) = \beta\}$, l'ensemble des opérateurs d'indice β.

Pour $T \in B(H)$, on lui associe les ensembles $\Theta(T) = \{\beta \text{ un cardinal} : 0 \leq \beta \leq \Im(T)\}$ et $\Theta_-(T) = \{-\beta : \ \beta \in \Theta(T)\}$.

Nous, nous proposons de montrer le théorème suivant :

Théorème 4.4.9
Soit $T \in B(H)$.

1) *Si $J \subseteq \Theta(T)$, alors*

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta \in J} (G_- \cap I_\beta)\Big) = \begin{cases} \mu(T) & si \quad \operatorname{ind}(T) \notin J, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

2) *Si β un cardinal tel que $\Im(T) < \beta \leq \dim H$, alors :*

$$\operatorname{dist}(T, G_- \cap I_\beta) = \max\{m_\beta(T), m_\beta(T^*)\}.$$

Pour la démonstration du Théorème 4.4.9, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 4.4.10
Soient $T \in B(H)$, $\varepsilon > 0$ et $\lambda \geq \mu(T)$. Notons $H_\varepsilon = E([0, \lambda + \varepsilon[)H$, si ε suffisamment petit, alors :

$$\dim H_\varepsilon = \dim(TH_\varepsilon^\perp)^\perp.$$

Démonstration du Lemme 4.4.10 :

Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T. Tout d'abord, d'après la Proposition 2.13, on a :

$$(1) \qquad R(U) = \overline{R(T)} = N(T^*)^\perp = N(|T^*|)^\perp = E^*(]0, +\infty[)H.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
(TH_\varepsilon^\perp)^\perp &= \Big[U|T|E([\lambda+\varepsilon, +\infty[)H\Big]^\perp, \\
&= \Big[UE([\lambda+\varepsilon, +\infty[)H\Big]^\perp, \\
&= \Big[E^*([\lambda+\varepsilon, +\infty[)UH\Big]^\perp \quad \text{(d'après le Lemme 4.4.2)}, \\
&= \Big[E^*([\lambda+\varepsilon, +\infty[)H\Big]^\perp \quad \text{(d'après (1))}, \\
&= E^*([0, \lambda+\varepsilon[)H.
\end{aligned}$$

Maintenant, si $\lambda = 0$, alors pour ε suffisamment petit on a :

$$(2) \qquad \dim E([0,\varepsilon[)H = \operatorname{ess\,nul} T \quad \text{et} \quad \dim E^*([0,\varepsilon[)H = \operatorname{ess\,def} T.$$

Ainsi, en utilisant le Théorème 4.4.1 et le fait que $\mu(T) = 0$, on obtient :

$$(3) \qquad \aleph_0 \leq \operatorname{ess\,nul} T = \operatorname{ess\,def} T.$$

Donc,

$$(4) \qquad \dim E([0,\varepsilon[)H = \dim E^*([0,\varepsilon[)H.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\dim([T(H_\varepsilon^\perp)]^\perp) &= \dim E^*([0,\varepsilon[)H, \\
&= \dim E([0,\varepsilon[)H, \\
&= \dim H_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\lambda > 0$, alors par le Lemme 4.4.2 et le Théorème 4.4.1, on voit pour tout $\varepsilon > 0$, que :

$$(5) \qquad \dim(E(]0, \lambda+\varepsilon[)H) = \dim(E^*(]0, \lambda+\varepsilon[)H) \geq \Im(T).$$

Comme,

$$\dim(E(\{0\})H) \leq \Im(T) \quad \text{et} \quad \dim(E^\star(\{0\})H) \leq \Im(T),$$

il vient,

$$\dim(E([0,\lambda+\varepsilon[)H) = \dim(E(]0,\lambda+\varepsilon[)H)$$

et

$$\dim(E^\star([0,\lambda+\varepsilon[)H) = \dim(E^\star(]0,\lambda+\varepsilon[)H).$$

D'où, il résulte de (5), que

$$\dim(E([0,\lambda+\varepsilon[)H) = \dim(E^\star([0,\lambda+\varepsilon[)H).$$

Par conséquent, $\dim H_\varepsilon = \dim(TH_\varepsilon^\perp)^\perp$.

Ceci établit la preuve du Lemme 4.4.10. ∎

Démonstration du Théorème 4.4.9 :

1) Si $\mathrm{ind}(T) \in J$. Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T avec U une co-isométrie et $\mathrm{ind}(U) = \mathrm{ind}(T)$ (voir, Lemme 2.14). Soit $\varepsilon > 0$, on lui associe le sous-espace $H_\varepsilon = E([0,\varepsilon[)H$. Soit $L_\varepsilon = E([0,\varepsilon[) \oplus |T|_{|H_\varepsilon^\perp}$. Alors, il est facile de voir que L_ε est inversible, cela entraîne que $UL_\varepsilon \in \bigcup_{\beta\in J}\Big(G_- \cap I_\beta\Big)$. Puisque, $\|T - UL_\varepsilon\| \leq \|\,|T| - L_\varepsilon\| \leq 2\varepsilon$, il s'ensuit que :

$$\mathrm{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta\in J}(G_- \cap I_\beta)\Big) = 0.$$

Supposons maintenant que $\mathrm{ind}(T) \notin J$.

Soit $\zeta \in J$, cette fois on pose $H_\varepsilon = E([0,\mu(T)+\varepsilon[)H$. Comme, d'après le Lemme 4.4.10, H_ε et $[T(H_\varepsilon^\perp)]^\perp$ ont la même dimension, il existe $W : H_\varepsilon \longrightarrow (TH_\varepsilon^\perp)^\perp$ une co-isométrie d'indice ζ.

Définissons maintenant $L_\varepsilon = \varepsilon W \oplus T_{|H_\varepsilon^\perp} \in B(H)$. Une vérification de routine montre que :

$$L_\varepsilon \in G_- \quad \text{et} \quad \mathrm{ind}(L_\varepsilon) = \mathrm{ind}(W) = \zeta,$$

d'où, $L_\varepsilon \in \bigcup_{\beta\in J}(G_- \cap I_\beta)$.
D'autre part, comme

$$\|T - L_\varepsilon\| \leq \|T_{|H_\varepsilon}\| + \varepsilon\|W\| \leq \mu(T) + 2\varepsilon,$$

il vient que :

$$\mathrm{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta\in J}(G_- \cap I_\beta)\Big) \leq \mu(T).$$

Montrons maintenant l'inégalité inverse.

On peut supposer que $\mu(T) > 0$ (sinon l'inégalité est évidente). On va distinguer deux cas.

• Si $\min\{\tau(T), \tau(T^*)\} > 0$. Alors, d'après le Théorème 4.4.1, on constate que $\tau(T) = \tau(T^*)$ et par le Lemme 4.4.5, on voit que : $\mu(T) = m_e(T)$. Ainsi, en utilisant le Théorème 4.2.5 (avec $\alpha = \aleph_0$), on obtient :

$$\mathrm{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta\in J}(G_- \cap I_\beta)\Big) \geq m_e(T) = \mu(T).$$

• Si $\min\{\tau(T), \tau(T^*)\} = 0$. Tout d'abord, par le Lemme 4.4.3, on conclut que $\mathrm{ind}_{\Im(T)}(T) = \mathrm{ind}(T) = \pm\Im(T)$, ensuite en utilisant le Théorème 4.2.5, on obtient :

$$\mathrm{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta\in J}(G_- \cap I_\beta)\Big) \geq \max\{m_{\Im(T)}(T), m_{\Im(T)}(T^*)\} = \mu(T).$$

2) Notons, $\delta(T) = \max\{m_\beta(T), m_\beta(T^*)\}$, alors $\delta(T) \geq \mu(T)$. Soit $\varepsilon > 0$, on lui associe le sous-espace $H_\varepsilon = E([0, \delta(T) + \varepsilon[)H$. Dans un premier temps on va prouver que $\dim H_\varepsilon = \dim([T(H_\varepsilon^\perp)]^\perp) \geq \beta$.

- Si $\delta(T) = 0$. Alors, par le Théorème 4.2.3, on conclut que $\dim H_\varepsilon \geq \beta$, et donc d'après le Lemme 4.4.10, on constate que $\dim H_\varepsilon = \dim([T(H_\varepsilon^\perp)]^\perp) \geq \beta$.

- Si $\delta(T) > 0$. Supposons que $0 < \varepsilon < \delta(T)$, alors grâce au Lemme 4.2.2, on conclut que :

$$\dim(E(]\delta(T) - \varepsilon, \delta(T) + \varepsilon[)H) \geq \beta \quad \text{ou} \quad \dim(E^*(]\delta(T) - \varepsilon, \delta(T) + \varepsilon[)H) \geq \beta.$$

Donc, en on déduit, d'après le Lemme 4.4.2, que :

$$\dim(E(]\delta(T)-\varepsilon,\delta(T)+\varepsilon[)H) = \dim(E^{\star}(]\delta(T)-\varepsilon,\delta(T)+\varepsilon[)H) \geq \beta.$$

Ceci entraîne que

$$\dim H_\varepsilon \geq \beta.$$

Et donc, d'après le Lemme 4.4.10, on conclut que :

$$\dim H_\varepsilon = \dim(TH_\varepsilon^{\perp})^{\perp} \geq \beta.$$

Ainsi, il existe $W : H_\varepsilon \longrightarrow (TH_\varepsilon^{\perp})^{\perp}$ une co-isométrie d'indice β. Posons maintenant, $L_\varepsilon = \varepsilon W \oplus T_{|H_\varepsilon^{\perp}}$, alors on voit aisément que $L_\varepsilon \in G_- \cap I_\beta$ et que $\|T - L_\varepsilon\| \leq \delta(T) + 2\varepsilon$. Ceci implique que :

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{dist}(T, G_- \cap I_\beta) \leq \delta(T).$$

Inversement, pour tout $L \in G_- \cap I_\beta$, on a :

$$\operatorname{ind}(L) = \beta \neq \operatorname{ind}(T) \quad \text{et} \quad \operatorname{ind}_\beta(T) = 0, \;\; \operatorname{ind}_\beta(L) = \beta.$$

Donc, d'après le Théorème 4.2.5, on doit avoir :

$$\|T - L\| \geq \delta(T), \; \forall\, L \in G_- \cap I_\beta.$$

ceci implique que :

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{dist}(T, G_- \cap I_\beta) \geq \delta(T).$$

Par conséquent, on conclut au moyen de (1) et (2) que :

$$\operatorname{dist}(T, G_- \cap I_\beta) = \delta(T).$$

Ceci achève la preuve du Théorème 4.4.9. ∎

Le corollaire qui suit résulte immédiatement du Théorème 4.4.9, par passage à l'adjoint.

Corollaire 4.4.11

Soit $T \in B(H)$.

1) *Si $J \subseteq \Theta_-(T)$, alors :*

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta\in J}(G_+ \cap I_\beta)\Big) = \begin{cases} \mu(T) & \textit{si} \quad \operatorname{ind}(T) \notin J, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

2) *Si β un cardinal tel que $\Im(T) < \beta \leq \dim H$, alors :*

$$\operatorname{dist}(T, G_+ \cap I_{-\beta}) = \max\{m_\beta(T), m_\beta(T^*)\}.$$

Corollaire 4.4.12

Soit $T \in B(H)$.

1) *Si $J \subseteq \Theta(T) \cup \Theta_-(T)$, alors :*

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta\in J} I_\beta\Big) = \begin{cases} \mu(T) & \textit{si} \quad \operatorname{ind}(T) \notin J, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

2) *Si $\Im(T) < |\beta| \leq \dim H$, alors :*

$$\operatorname{dist}(T, I_\beta) = \max\{m_{|\beta|}(T), m_{|\beta|}(T^*)\},$$

$$\textit{où} \quad |\beta| = \begin{cases} \beta & \textit{si } \beta \geq 0, \\ -\beta & \textit{si } \beta < 0. \end{cases}$$

Démonstration :

1) Tout d'abord, d'après le Théorème 4.4.9 et le Corollaire 4.4.11, on doit avoir :

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta\in J} I_\beta\Big) &\leq \operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta\in J}(G_\pm \cap I_\beta)\Big) \\ &\leq \begin{cases} \mu(T) & \text{si} \quad \operatorname{ind}(T) \notin J, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Inversement, on peut supposer que $\operatorname{ind}(T) \notin J$ et $\mu(T) > 0$, sinon l'inégalité est évidente. Deux cas peuvent se présenter.

• Si $\min\{\tau(T), \tau(T^*)\} > 0$. Alors, d'après le Théorème 4.4.1, on a : $\tau(T) = \tau(T^*)$, et en tenant compte du Lemme 4.4.5, on conclut que : $\mu(T) = m_e(T)$. Or, pour tout $S \in \bigcup_{\beta \in J} I_\beta$, on a :

$$\|T - S\| \geq m_e(T) = \mu(T),$$

car si $\|T - S\| < m_e(T)$, on conclurait d'après le Théorème 2.18, que $\operatorname{ind}(S) = \operatorname{ind}(T) \in J$, ceci contredirait l'hypothèse $\operatorname{ind}(T) \notin J$. Par conséquent,

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta \in J} I_\beta\Big) \geq m_e(T) = \mu(T).$$

• Si $\min\{\tau(T), \tau(T^*)\} = 0$. Tout d'abord, par le Corollaire 4.4.4, on conclut que $\operatorname{ind}_{\Im(T)}(T) = \operatorname{ind}(T) = \pm\Im(T)$, ensuite en utilisant le Théorème 4.2.5, on constate comme dans le point précédent que :

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta \in J} I_\beta\Big) \geq \max\{m_{\Im(T)}(T), m_{\Im(T)}(T^*)\} = \mu(T).$$

2) En utilisant le Théorème 4.4.9 et le Corollaire 4.4.11, on obtient l'inégalité suivante :

$$\operatorname{dist}(T, I_\beta) \leq \operatorname{dist}(T, G_\pm \cap I_\beta) \leq \max\{m_{|\beta|}(T), m_{|\beta|}(T^*)\},$$

et l'inégalité inverse résulte immédiatement du Théorème 4.2.5.

Ceci conclut la preuve du Corollaire 4.4.12. ■

D'après les notations précédentes on remarque que $\Phi_+^{\aleph_0} \cup \Phi_-^{\aleph_0} = F$, l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm.

Pour β un cardinal vérifiant $\beta \leq \dim H$, on note F^β (resp. $F^{-\beta}$) l'ensemble des opérateurs semi Fredholm d'indice β (resp. $-\beta$).

On montre de la même façon les corollaires suivants.

Corollaire 4.4.13

Soit $T \in B(H)$.

1) *Si* $J \subseteq \Theta(T) \cup \Theta_-(T)$, *alors :*

$$\operatorname{dist}\Big(T, \bigcup_{\beta \in J}(F^\beta)\Big) = \begin{cases} \mu(T) & si \quad \operatorname{ind}(T) \notin J, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

2) *Si* $\Im(T) < |\beta| \leq \dim H$, *alors :*

$$\operatorname{dist}(T, F^\beta) = \max\{m_{|\beta|}(T), m_{|\beta|}(T^*)\}.$$

Corollaire 4.4.14

Soit $T \in B(H)$, *alors :*

1) $$\operatorname{dist}(T, G_+) = \begin{cases} \tau(T^*) & si \quad \operatorname{ind}(T) > 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

2) $$\operatorname{dist}(T, G_-) = \begin{cases} \tau(T) & si \quad \operatorname{ind}(T) < 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Corollaire 4.4.15

Soit $T \in B(H)$, *alors :*

$$\inf\Big\{ \|T - L\| : L \in B(H) \quad tel\ que \quad \operatorname{ind}(L) \neq \operatorname{ind}(T)\Big\} = \mu(T).$$

Corollaire 4.4.16

Soit $T \in B(H)$, *alors :*

1) $$\operatorname{dist}(T, G_+ \setminus G) = \begin{cases} \tau(T^*) & si \quad \operatorname{ind}(T) \geq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

2) $$\operatorname{dist}(T, G_- \setminus G) = \begin{cases} \tau(T) & si \quad \operatorname{ind}(T) \leq 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Grâce au Corollaire 4.4.16, on voir sans difficulté que la distance de T à $G_\pm \setminus G$ est donnée par :

$$\operatorname{dist}(T, G_\pm \setminus G) = \begin{cases} \tau(T)\ (= \tau(T^*)) & \text{si} \quad \operatorname{ind}(T) = 0, \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 4.4.17

Soit $T \in B(H)$, alors :

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{F}) = \begin{cases} \tau(T^*) & si \quad \operatorname{ind}(T) \geq \aleph_0, \\ \\ 0 & si \quad \operatorname{ind}(T) \text{ est fini}, \\ \\ \tau(T) & si \quad \operatorname{ind}(T) \leq -\aleph_0. \end{cases}$$

Démonstration:

Soit $\beta = \operatorname{ind}(T)$.

• Si β est fini, alors $F^\beta \subseteq \mathcal{F}$, d'où d'après le Corollaire 4.4.13, on voit que :

$$0 \leq \operatorname{dist}(T, \mathcal{F}) \leq \operatorname{dist}(T, F^\beta) = 0.$$

• Si $\beta \geq \aleph_0$, alors il est facile de voir que $\Im(T) = \operatorname{ess\,nul} T$. Donc, en tenant compte du Théorème 4.4.1, on conclut que $\tau(T) = 0$. Ainsi en utilisant le Théorème 4.4.7, on obtient :

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{F}) \leq \operatorname{dist}(T, G) = \tau(T^*).$$

Inversement, pour tout $L \in \mathcal{F}$, $\operatorname{ind}(L)$ est fini, d'où si $\beta = \operatorname{ind}(T)$, on voit facilement que :

$$\operatorname{ind}_\beta(L) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{ind}_\beta(T) = \operatorname{ind}(T) \neq 0.$$

Donc, en utilisant le Théorème 4.2.5 et le Lemme 4.4.3, on obtient :

$$\operatorname{dist}(T, \mathcal{F}) \geq m_\beta(T^*) = \tau(T^*).$$

• Si $\beta \leq -\aleph_0$, tout simplement grâce au point précédent, on obtient :

$$\text{dist}(T, \mathcal{F}) = \text{dist}(T^*, \mathcal{F}) = \tau(T).$$

■

D'après les notations précédentes on voit que $F_+ = \Phi_+^{\aleph_0}$ est l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm à gauche et $F_- = \Phi_-^{\aleph_0}$ est l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm à droite.

Pour un opérateur T de $B(H)$, la distance de T à F_+ et F_- sont données par les formules :

Théorème 4.4.18

Soit $T \in B(H)$, alors :

1) $$\text{dist}(T, F_+) = \begin{cases} \tau(T^*) & si \quad \text{ind}(T) \geq \aleph_0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

2) $$\text{dist}(T, F_-) = \begin{cases} \tau(T) & si \quad \text{ind}(T) \leq -\aleph_0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Démonstration :

1) Soit $\beta = \text{ind}(T)$.

• Si $\beta \geq \aleph_0$, alors en utilisant le Théorème 4.4.17, on obtient :

$$\text{dist}(T, F_+) \leq \text{dist}(T, \mathcal{F}) = \tau(T^*).$$

Montrons maintenant l'inégalité inverse.

On peut supposer que $\tau(T^*) > 0$, car sinon l'inégalité est évidente. Comme $\text{ind}(T) \geq \aleph_0$, on en déduit que $\Im(T) = \text{ess nul}\, T$ et en tenant compte du Théorème 4.4.1, on conclut que $\tau(T) = 0$. Donc, d'après le Théorème 4.2.5 et le Lemme 4.4.3, on doit avoir pour tout $L \in F_+$,

$$\|T - L\| \geq m_\beta(T^*) = \tau(T^*).$$

Ceci prouve que :

$$\mathrm{dist}(T, F_+) \geq m_\beta(T^*) = \tau(T^*).$$

Donc,

$$\mathrm{dist}(T, F_+) = \tau(T^*).$$

• Si $\beta < \aleph_0$, comme $F \cap I_\beta \subseteq F_+$, d'après le Corollaire 4.4.13, on conclut que :

$$0 \leq \mathrm{dist}(T, F_+) \leq \mathrm{dist}(T, F^\beta) = 0.$$

La preuve de 2) résulte immédiatement de 1) par dualité. ∎

4.5 Sur la frontière de certains classes d'opérateurs

Nous gardons les notations des paragraphes précédents.

Notons, $\Lambda = \{L \in B(H) : \tau(L) = \tau(L^*) = 0\}$.

Rappelons le résultat suivant qui a été démontré par R.H. Bouldin et dont aura besoin très souvent dans ce paragraphe.

Lemme 4.5.1 ([12], Corollaire 8)
Soit $T \in B(H)$, alors :

$$\mathrm{dist}(T, G) = \begin{cases} \mu(T) & \textit{si } T \notin \mathcal{F} \cap I_0, \\ \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas hilbertien séparable, S. Izumino et Y. Kato [42], ont montré qu'un opérateur T appartient à $\partial(\overline{G})$ si et seulement si T n'est pas semi-Fredholm (ceci équivalent à dire que $m_e(T) = m_e(T^*) = 0$). La situation pour les espaces de Hilbert non séparables est un peu différente car la frontière de $\overline{G}$ est en générale incluse strictement dans le complémentaire des opérateurs semi-Fredholm. Plus précisément les opérateurs appartenant à $\partial(\overline{G})$ vérifient une condition plus forte donnée par :

$$L \in \partial(\overline{G}) \iff \tau(L) = \tau(L^*) = 0.$$

Il faut noter que dans le cas hilbertien séparable, $\tau(T)$ est égale à $m_e(T)$ et donc le théorème qui suit étend le résultat de S. Izumino et Y. Kato [42], aux cas des espaces hilbertiens non séparables.

Théorème 4.5.2

$$\partial(\overline{G}) = \{L \in B(H) : \tau(L) = \tau(L^*) = 0\} = \Lambda.$$

Démonstration :

" $\subset$ " D'abord, d'après le Lemme 4.5.1, on voit sans difficulté les inclusions suivantes :

$$G \subseteq \mathcal{F} \cap I_0 \subseteq \mathrm{int}(\overline{G}) \subseteq \overline{G}.$$

Donc pour tout opérateur T de $\partial(\overline{G})$, on constate que $T \notin \mathcal{F} \cap I_0$. D'où, d'après le Lemme 4.5.1, on doit avoir $\mathrm{dist}(T, G) = \mu(T)$. Donc, en sachant que $T \in \partial(\overline{G}) \subseteq \overline{G}$, on conclut que $\mu(T) = 0$. Par conséquent $T \in \Lambda$.

" $\supset$ " Soit $T \in \Lambda$, alors par le Lemme 4.5.1, on constate que :

$$0 \leq \mathrm{dist}(T, G) \leq \mu(T) = 0,$$

ceci implique que $T \in \overline{G}$. Pour terminer la preuve du théorème, il suffit de prouver que $T \in \overline{\overline{G}^c}$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathrm{ind}(T) \leq 0$ sinon on passe à l'adjoint. Soit $T = V|T|$ la décomposition polaire de T avec V une isométrie et $\mathrm{ind}(V) = \mathrm{ind}(T)$ (voir, Lemme 2.14). Soit $\varepsilon > 0$, on lui associe l'idempotent $E_\varepsilon = E([0, \varepsilon[)$, on pose aussi $E_\varepsilon^\perp = I - E_\varepsilon$.

Soit $(e_j)_{j \in J}$ une base orthonormale de $E([0, \varepsilon[)H$ où J est un ensemble tel que $\mathrm{card}(J) = \dim E([0, \varepsilon[)H$. Compte tenu du fait que $\tau(T) = 0$, on conclut que $\mathrm{card}(J) = \dim E([0, \varepsilon[)H \geq \Im(T)$. Fixons j_0 de J, comme $\mathrm{card}(J) = \mathrm{card}(J \setminus \{j_0\})$, il existe une bijection $\varphi : J \longrightarrow J \setminus \{j_0\}$.

Définissons, maintenant un opérateur W de $B(H)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} W(x) &= x \qquad \text{si } x \in (E_\varepsilon(H))^\perp = E_\varepsilon^\perp(H) , \\ W(e_j) &= e_{\varphi(j)} \quad \text{si } j \in J. \end{aligned}$$

Alors, on vérifie facilement que W est une isométrie d'indice -1 et que

(1) $$WE_\varepsilon^\perp = E_\varepsilon^\perp.$$

Soient $S_\varepsilon = (|T| - \varepsilon I)E_\varepsilon^\perp$ et $L_\varepsilon = VW(S_\varepsilon + \varepsilon I)$. Alors, on voit sans difficulté que :

(2) $$S_\varepsilon + \varepsilon I \in G \quad \text{et} \quad \| S_\varepsilon - |T| \| \leq \varepsilon,$$

$$(3) \qquad E_\varepsilon^\perp S_\varepsilon = S_\varepsilon \quad \text{et} \quad WS_\varepsilon = S_\varepsilon.$$

Ceci implique que :

$$N(L_\varepsilon) = \{0\} \quad \text{et} \quad \operatorname{ind}(L_\varepsilon) \leq -1.$$

Donc, on en déduit que $L_\varepsilon \notin \mathcal{F} \cap I_0$. Ainsi, par le Lemme 4.5.1, on constate que : $\operatorname{dist}(L_\varepsilon, G) = \mu(L_\varepsilon)$.

D'autre part, comme $R(L_\varepsilon) = R(VW)$ est un fermé et $N(L_\varepsilon) = \{0\}$, on en déduit que $L_\varepsilon \in F_+$, ceci implique que $\mu(L_\varepsilon) \geq \tau(L_\varepsilon) \geq m_e(L_\varepsilon) > 0$. Donc, par le Lemme 4.5.1, on constate que $L_\varepsilon \notin \overline{G}$, ceci revient à dire que $L_\varepsilon \in \overline{G}^c$.

Finalement, on conclut au moyen de (2) et (3) que $\|T - L_\varepsilon\| \leq 2\varepsilon$. Ceci prouve que $T \in \overline{\overline{G}^c}$. ■

Théorème 4.5.3

Soit $T \in B(H)$, alors :

$$\operatorname{dist}(T, \partial(\overline{G})) = \mu(T).$$

Démonstration :

- Si $T \notin \overline{G}$, alors $\operatorname{dist}(T, \partial(\overline{G})) = \operatorname{dist}(T, \partial(\overline{G}))$.

En effet, soit $\nu = \operatorname{dist}(T, \partial(\overline{G}))$, on peut supposer que $\nu > 0$, sinon l'égalité est évidente (car $\operatorname{dist}(T, \partial(\overline{G})) \leq \operatorname{dist}(T, \partial(\overline{G}))$). Soit $\mathcal{B}(T, \nu) = \{L \in B(H) : \|T - L\| < \nu\}$, alors

$$\mathcal{B}(T, \nu) \subseteq \left(\partial(\overline{G})\right)^c = \left(\overline{G} \cap [\operatorname{int}(\overline{G})]^c\right)^c = \overline{G}^c \cup \operatorname{int}(\overline{G}).$$

Or, $\overline{G}^c$ et $\operatorname{int}(\overline{G})$ sont deux ouverts disjoints, et comme $\mathcal{B}(T, \nu)$ est connexe, on en déduit que $\mathcal{B}(T, \nu) \subseteq \overline{G}^c$ (car $T \notin \operatorname{int}(\overline{G}) \subseteq \overline{G}$). Donc $\operatorname{dist}(T, \overline{G}) \geq \nu = \operatorname{dist}(T, \partial(\overline{G}))$.

Ainsi, on conclut d'après le Lemme 4.5.1, que $\operatorname{dist}(T, \partial(\overline{G})) = \mu(T)$.

- Supposons maintenant que $T \in \overline{G}$. Deux cas peuvent se présenter.

• Si $T \notin \mathcal{F} \cap I_0$, alors par le Lemme 4.5.1, on déduit que :

$$\operatorname{dist}(T, G) = \mu(T).$$

Or, comme $T \in \overline{G}$, on conclut que $\mu(T) = 0$, ceci implique que $T \in \Lambda = \partial(\overline{G})$. Par conséquent,

$$\operatorname{dist}(T, \partial(\overline{G})) = \mu(T) = 0.$$

• Si $T \in \mathcal{F} \cap I_0$, tout d'abord d'après le Théorème 4.4.1 et le Lemme 4.4.5, on remarque que :

$$\tau(T) = \tau(T^*) = m_e(T) = m_e(T^*) > 0.$$

D'autre part, on a $G \subseteq \mathcal{F} \cap I_0 \subseteq \operatorname{int}(\overline{G})$, en particulier $(\mathcal{F} \cap I_0) \cap \partial(\overline{G}) = \emptyset$. Par suite, en utilisant les Théorèmes 4.2.5 et 4.5.2, on voit que :

$$\forall\, L \in \partial(\overline{G}),\ \|T - L\| \geq \mu(T) = m_e(T).$$

Par conséquent,

$$\operatorname{dist}(T, \partial(\overline{G})) \geq \mu(T) = m_e(T).$$

Inversement, soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T avec U unitaire (voir, Lemme 2.14). Soit $S = U(|T| - m_e(T)I)$, alors on voit sans difficulté que :

$$\text{(1)} \qquad m_e(S) = m_e(S^*) = 0.$$

Montrons que $S \in \Lambda$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{ess\,nul} S = \dim E_S([0, \varepsilon[)H \ \text{ et } \ \operatorname{ess\,def} S = \dim E_S^*([0, \varepsilon[)H.$$

Alors, comme S est un opérateur normal, $\dim N(S) = \dim N(S^*)$. Or, d'après le Lemme 4.4.2, on a : $\dim E_S(]0, \varepsilon[)H = \dim E_S^*(]0, \varepsilon[)H$, par suite :

$$\text{(3)} \qquad \dim E_S([0, \varepsilon[)H = \dim E_S^*([0, \varepsilon[)H.$$

Ainsi, d'après le Théorème 2.17 et les relations (1), (2) et (3), on conclut que $\operatorname{ess\,nul} S = \operatorname{ess\,def} S \geq \aleph_0$.
Enfin, par le Théorème 4.4.1, on constate que $\tau(S) = \tau(S^*) = 0$, ceci entraîne que $S \in \partial(\overline{G}) = \Lambda$. Par conséquent,

$$\operatorname{dist}(T, \partial(\overline{G})) \leq \|T - S\| = m_e(T) = \mu(T).$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 4.5.3. ∎

On voit sans difficulté l'assertion suivante :

$$\overline{G} \cap G_+ = G. \tag{4.5.1}$$

Théorème 4.5.4
Soit $T \in B(H)$, alors :

$$\operatorname{dist}(T, \partial(G)) = \begin{cases} \mu(T) & si\ T \notin \overline{G}, \\ m(T) = \eta(T) & sinon. \end{cases}$$

Démonstration:
- Si $T \notin \overline{G}$, alors $\operatorname{dist}(T, \partial(G)) = \operatorname{dist}(T, G)$. En effet, soit $\nu = \operatorname{dist}(T, \partial(G))$, on peut supposer que $\nu > 0$ sinon l'égalité est évidente. Soit $\mathcal{B}(T, \nu) = \{L \in B(H) : \|T - L\| < \nu\}$, alors $\mathcal{B}(T, \nu) \subseteq \left(\partial(G)\right)^c = \left(\overline{G} \cap G^c\right)^c = \overline{G}^c \cup G$. Or, $\overline{G}^c$ et G sont deux ouverts disjoints, et comme $\mathcal{B}(T, \nu)$ est connexe, on en déduit que $\mathcal{B}(T, \nu) \subseteq \overline{G}^c$ (car $T \notin G \subseteq \overline{G}$). Donc $\operatorname{dist}(T, G) \geq \nu = \operatorname{dist}(T, \partial(G))$.

Ainsi, d'après le Lemme 4.5.1, on conclut que :

$$\operatorname{dist}(T, \partial(G)) = \operatorname{dist}(T, G) = \mu(T).$$

- Supposons donc $T \in \overline{G}$. On va distinguer deux cas.
- Si $T \notin I_0$, alors par le Lemme 4.5.1, on voit que :

$$0 = \operatorname{dist}(T, G) = \mu(T).$$

Donc, $\eta(T) = 0$ (car $\mu(T) \geq m_e(T) \geq \eta(T)$), ceci implique que T n'appartient pas à G, donc

$$T \in \overline{G} \cap G^c = \partial(G).$$

Par conséquent,

$$\operatorname{dist}(T, \partial(G)) = \eta(T) = 0.$$

• Si $T \in I_0$, soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T avec U unitaire (voir, Lemme 2.14). Soit $L = U(|T| - \eta(T))$, alors L n'est pas inversible. Soit $\varepsilon > 0$, on lui associe l'opérateur $L_\varepsilon = U(|T| - \eta(T) + \varepsilon)$. Comme $\sigma(|T| - \eta(T)) \subseteq \mathbb{R}_+$ et $-\varepsilon \notin \sigma(|T| - \eta(T))$, on en déduit que L_ε est inversible. Or, $\|L - L_\varepsilon\| = \|\varepsilon U\| = \varepsilon$, par suite $L \in \partial(G)$. Donc

$$\operatorname{dist}(T, \partial(G)) \leq \|T - L\| = \eta(T).$$

Montrons l'inégalité inverse.
Supposons qu'il existe $L \in \partial(G)$ tel que $\|T - L\| < \eta(T)$. Alors, d'abord par le Corollaire 4.1.4, on conclut que T et L sont semi-inversibles à gauche, ensuite comme T appartient à $\overline{G} \cap G_+$, et compte tenu de (4.5.1), on en déduit que T est un opérateur inversible. Enfin, par le Corollaire 4.1.4, on conclut que L est un opérateur inversible, ce qui contredit le fait que L est dans $\partial(G)$. Donc,

$$\forall\, L \in \partial(G),\ \|T - L\| \geq \eta(T).$$

Par conséquent, $\operatorname{dist}(T, \partial(G)) \geq \eta(T)$.
Le Théorème 4.5.4 est démontré. ∎

Considérons maintenant $F^n = F \cap I_n$, les classes des opérateurs semi-Fredholm d'indice n où $n \in \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\aleph_0, \aleph_0\}$.
Si $n = 0$, en utilisant le Lemme 4.5.1, nous montrons sans difficulté les deux assertions suivantes :

(4.5.2) $$\overline{G} = \overline{F^0}.$$

(4.5.3) $$\overline{G} \cap \{L \in B(H) : \mu(L) > 0\} = F^0.$$

Nous avons montré dans le cas hilbertien séparables que pour tout $J \subsetneqq \overline{\mathbb{Z}}$, $\operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big) = \bigcup_{j\in J} F^j$ et $\partial\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big) = \partial\Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big)$ $(= \{T \in B(H) : m_e(T) = m_e(T^*) = 0\})$, (voir, Théorèmes 3.1.6 et 3.1.9). On va montrer les mêmes égalités pour les espaces de Hilbert non séparables.

Théorème 4.5.5

Soit $J \subsetneqq \overline{\mathbb{Z}}$, *alors :*

1) $\operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big) = \bigcup_{j\in J} F^j$;

2) $\partial\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big) = \partial\Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big) = \Lambda.$

Démonstration :

1) L'inclusion " $\bigcup_{j\in J} F^j \subseteq \operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big)$ " étant évidente, il suffit de montrer l'inclusion inverse.

- Soit $T \in \operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big)$. Nous allons montrer que $\mu(T) > 0$. Si ce n'était pas le cas, comme $\mu(T) \geq \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}$ (voir, Théorème 4.4.1), on conclurait que T n'est pas semi-Fredholm. Soit $m \in \overline{\mathbb{Z}} \setminus J$, ceci est possible car $J \subsetneqq \overline{\mathbb{Z}}$, alors par le Théorème 4.4.13, on devrait avoir $T \in \overline{F^m}$ (car $\mu(T) = 0$) et puisque T n'est pas semi-Fredholm, on conclurait que $T \in \overline{F^m} \setminus F^m = \partial(F^m)$, il en résulterait que $T \in \partial(F^m) \cap \operatorname{int}\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big)$, donc $\Big(\overline{\bigcup_{j\in J} F^j}\Big) \cap F^m \neq \emptyset$, ce qui contredirait la continuité de l'indice. Par conséquent, $\mu(T) > 0$.

Donc par le Corollaire 4.4.13, on constate que T est un opérateur d'indice $j \in J$ (c.a.d $T \in \bigcup_{j\in J} I_j$). On va distinguer trois cas suivant que l'indice n de T soit fini ou bien égal à $\aleph_0$ ou à $-\aleph_0$.

• Si n fini. Alors $\delta(T) = \min\{\tau(T), \tau(T^*)\} > 0$, car si ce n'était pas le cas, on conclurait par le Corollaire 4.4.4, que $\operatorname{ind}(T) = \pm\Im(T)$, cela reviendrait à dire que $\Im(T) = \pm n$, ce qui contredirait le fait que $\Im(T) \geq \aleph_0$. Donc $\mu(T) = \tau(T) = \tau(T^*) > 0$. Par conséquent, par le Lemme 4.4.5, on conclut que :

$$m_e(T) = m_e(T^*) = \mu(T) > 0.$$

Donc

$$T \in \mathcal{F} \cap \bigcup_{j \in J} I_j \subseteq \bigcup_{j \in J} F^j.$$

• Si $n = \aleph_0$. Tout d'abord, remarquons que $\alpha(T) \geq \alpha(T^*)$, donc $\tau(T) \leq \tau(T^*)$. D'où, $\tau(T) = 0$ et $\tau(T^*) = \mu(T) > 0$, car si $\tau(T) > 0$ par le Lemme 4.4.5, on conclurait que T est Fredholm, ceci contredirait le fait que $T \in I_{\aleph_0}$. Par conséquent, d'après le Corollaire 4.4.4, on constate que $\operatorname{ind}(T) = \Im(T)$, ceci prouve que $\Im(T) = \aleph_0$, en particulier $\tau(T^*) = m_e(T^*) > 0$. Donc, $T \in F \cap I_{\aleph_0} = F^{\aleph_0} \subseteq F \cap \Big(\bigcup_{j \in J} I_j\Big) = \bigcup_{j \in J} F^j$.

• Si $n = -\aleph_0$. Alors $\tau(T^*) \leq \tau(T)$ et on montre comme le point précédent que $m_e(T) = \mu(T) > 0$. Par conséquent, $T \in F^{-\aleph_0} \subseteq \bigcup_{j \in J} F^j$.

2) La première égalité résulte immédiatement de la première assertion. Montrons la deuxième égalité.

Soit $T \in \Lambda$ (c'est à dire $\mu(T) = 0$), d'abord comme $\mu(T) \geq \max\{m_e(T), m_e(T^*)\} \geq 0$, on en déduit que T n'est pas semi-Fredholm, en particulier $T \notin \bigcup_{j \in J} F^j$.

D'autre part, d'après le Corollaire 4.4.13, on voit que $T \in \overline{\bigcup_{j \in J} F^j}$. Maintenant en utilisant 1), on conclut que $T \in \partial\Big(\bigcup_{j \in J} F^j\Big)$. Ceci prouve que $\Lambda \subseteq \partial\Big(\bigcup_{j \in J} F^j\Big)$.

Montrons l'inclusion inverse « $\partial\Big(\bigcup_{j \in J} F^j\Big) \subseteq \Lambda$ ». Soit $T \in \partial\Big(\bigcup_{j \in J} F^j\Big)$, alors

$\delta(T) = \min\ \{\tau(T), \tau(T^*)\} = 0$, car si ce n'était pas le cas, on conclurait d'abord par le Lemme 4.4.5, que T est Fredholm, et ensuite par le Corollaire 4.4.13, on constaterait que $T \in \bigcup_{j\in J} I_j$. Donc $T \in \mathcal{F} \cap \bigcup_{j\in J} I_j \subseteq \bigcup_{j\in J} F^j$. Ceci contredirait le fait que $T \in \partial\Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big)$. Par conséquent, $\delta(T) = 0$.

Nous allons montrer que $\mu(T) = 0$. Pour cela on va distinguer trois cas suivant que l'indice n de T soit fini ou bien égal à $\aleph_0$ ou à $-\aleph_0$.

- Si n est fini, supposons que $\mu(T) > 0$, alors par les Corollaires 4.4.13 et 4.4.4, on conclurait que $n = \ \mathrm{ind}(T) = \pm\Im(T)$, ceci contredirait le fait que $\Im(T) \geq \aleph_0$.
- Si $n = \aleph_0$, alors $\tau(T) \leq \tau(T^*)$. On va prouver que $\tau(T^*) = 0$. Si ce n'était pas le cas, comme ci-dessus, on conclurait par le Corollaire 4.4.4, que $\aleph_0 = n = \ \mathrm{ind}(T) = \Im(T)$. Cela entraînerait que $m_e(T^*) = \tau(T^*) > 0$. Donc T est semi-Fredholm. D'autre part, puisque $\mu(T) = m_e(T^*) > 0$ et $T \in \overline{\bigcup_{j\in J} F^j}$, d'après le Corollaire 4.4.13, on devrait avoir $n = \ \mathrm{ind}(T) \in J$. Il en résulterait que $T \in \bigcup_{j\in J} F^j$, ceci contredirait le fait que $T \in \partial\Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big)$.
- Si $n = -\aleph_0$. On montre comme ci-dessus que $\tau(T) = \mu(T) = 0$.

Conclusion : Nous avons montré que pour tout opérateur T de $\partial\Big(\bigcup_{j\in J} F^j\Big)$, $\mu(T)$ est nécessairement nulle, cela revient à dire que $T \in \Lambda$.
Ceci achève la preuve du Théorème 4.5.5. ∎

L. Burlando a caractérisé aussi les éléments de $\partial(F^n)$ en fonction de $d(T)$ (cf. [16]) où $d(T) = \min\{d_\varepsilon(T) : \varepsilon > 0\}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, d_ε désigne la dimension commune du sous-espace fermé Y de H vérifiant $\|T(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$, $\forall x \in Y$, $x \neq 0$ et $\|T(x)\| \geq \varepsilon\|x\|\ \forall\, x \in Y^\perp$.

En utilisant l'assertion (4.5.2), et le Théorème 4.5.5, on montre sans difficulté le corollaire suivant :

Corollaire 4.5.6

1) $\mathrm{int}(\overline{G}) = F^0 = \mathcal{F} \cap I_0$.

2) $\partial(\overline{G}) = \partial(F^0)$.

3) $\partial(G) = \partial(\overline{G}) \cup (F^0 \setminus G)$.

Remarque :

Le Corollaire 4.5.6, est démontré dans le cas ou H est un espace de Hilbert séparable [42] par S. Izumino et Y. Kato, donc ceci étend ce résultat au cas des espaces de Hilbert non séparables.

Théorème 4.5.7

1) $\mathrm{int}(\overline{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}$.

2) $\partial(\overline{\mathcal{F}}) = \partial(\mathcal{F}) = \Lambda$.

Démonstration :

1) L'inclusion " $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{int}(\overline{\mathcal{F}})$ " étant évidente, il suffit de montrer l'autre inclusion. En effet, soit $T \in \mathrm{int}(\overline{\mathcal{F}})$, alors $\mu(T) > 0$, car si ce n'était pas le cas, par le Théorème 4.5.5, on conclurait que $T \in \Lambda = \partial(F^{\aleph_0})$. Il en résulterait que $T \in \mathrm{int}(\overline{\mathcal{F}}) \cap \partial(F^{\aleph_0})$, ce qui entraînerait que $\mathcal{F} \cap F^{\aleph_0} \neq \emptyset$. Contradiction (à cause de la continuité de l'indice). Par conséquent, $\mu(T) > 0$. Enfin, compte tenu du fait que $T \in \overline{\mathcal{F}}$, et par le Théorème 4.4.7, on conclut que T est Fredholm.

2) La première égalité découle immédiatement de 1).
Montrons d'abord l'inclusion " $\Lambda \subseteq \partial(\mathcal{F})$ ". Soit $T \in \Lambda$, alors $\tau(T) = \tau(T^*) = 0$. Donc d'après le Théorème 4.4.1, $m_e(T) = m_e(T^*) = 0$. Ceci entraîne que $T \notin \mathcal{F}$. D'autre part, d'après le Théorème 4.4.17, on constate que $T \in \overline{\mathcal{F}}$. Donc $T \in \partial(\mathcal{F})$. Par conséquent, $\Lambda \subseteq \partial(\mathcal{F})$.

Montrons maintenant l'inclusion inverse. Soit $T \in \partial(\mathcal{F})$.

- Si $\mathrm{ind}(T)$ est fini. D'abord, on conclut que $m_e(T) = m_e(T^*)$ et $\tau(T) =$

$\tau(T^*)$. D'autre part, comme $T \notin \mathcal{F}$, on en déduit que $m_e(T) = m_e(T^*) = 0$. Enfin par le Lemme 4.4.5, on voit que $\tau(T) = \tau(T^*) = 0$. Donc $T \in \Lambda$.

- Si $\operatorname{ind}(T) \geq \aleph_0$, ceci signifie que $\dim N(T) \geq \dim N(T^*)$, d'où $\tau(T) \leq \tau(T^*)$. Or, d'après Le Théorème 4.4.17, on a : $\operatorname{dist}(T, \mathcal{F}) = \tau(T^*)$ et comme $T \in \overline{\mathcal{F}}$ (car $T \in \partial(\mathcal{F})$), on conclut que $\tau(T^*) = 0$. Ceci implique que $\tau(T) = \tau(T^*) = 0$. Donc $T \in \Lambda$.

- Si $\operatorname{ind}(T) \leq -\aleph_0$. Comme le point précédent on constate que $\tau(T) \geq \tau(T^*)$ et par le Théorème 4.4.17, on conclut que $\tau(T) = 0$. Il en résulte que $\tau(T) = \tau(T^*) = 0$. Donc, on en déduit que $T \in \Lambda$.

Ceci achève la preuve du Théorème 4.5.7. ■

Corollaire 4.5.8

Soit $T \in B(H)$, alors

$$\operatorname{dist}(T, \partial(\mathcal{F})) = \operatorname{dist}(T, \partial(\overline{\mathcal{F}})) = \mu(T).$$

Démonstration :

D'après les Théorèmes 4.5.2 et 4.5.7, on constate que :

$$\partial(\mathcal{F}) = \partial(\overline{\mathcal{F}}) = \partial(\overline{G}).$$

Donc, en utilisant le Théorème 4.5.3, on obtient :

$$\operatorname{dist}(T, \partial(\mathcal{F})) = \operatorname{dist}(T, \partial(\overline{\mathcal{F}})) = \mu(T).$$

■

Dans le cas ou H est un espace de Hilbert séparable, nous avons montré au premier paragraphe du chapitre précédent (voir Corollaire 3.1.10) que :

$$\partial(\mathcal{F}) = \partial(\overline{F_+}) = \partial(F_+) = \{T \in B(H) : m_e(T) = m_e(T^*) = 0\}.$$

Il est donc naturel de se demander si ces égalités restent vraies pour les espaces de Hilbert non séparables. Le théorème suivant prouve qu'il n'en est rien.

Théorème 4.5.9

1) $\partial(\overline{F_+}) \subsetneqq \partial(F_+)$ *et* $\partial(\mathcal{F}) \neq \partial(F_+)$.

2) *Si* $\alpha = \dim H$, *alors* $\Lambda \subsetneqq \partial(F^\alpha)$ *et* $\Lambda \subsetneqq \partial(F^{-\alpha})$.

3) *Si* $\aleph_0 < \alpha < \beta \leq \dim H$, *alors* $\partial(F^\alpha) \not\subset \partial(F^\beta)$ *et* $\partial(F^\beta) \not\subset \partial(F^\alpha)$.

Démonstration :

1) On va construire un opérateur T qui appartient à $\partial(F_+)$ et T n'appartenant pas ni à $\partial(\mathcal{F})$ ni à $\partial(\overline{F_+})$.

Soit α un cardinal strictement supérieur à $\aleph_0$ et inférieur à $\dim H$ ($\aleph_0 < \alpha \leq \dim H$). Soient M et N deux sous-espaces fermés de H tels que $\dim M = \alpha$, $\dim N = \dim H$ et $M \oplus N = H$. Soient aussi M' et N' deux sous-espaces fermés de H tels que $\dim M' = \aleph_0$, $\dim N' = \dim H$ et $M' \oplus N' = H$. Soient $U : N \longrightarrow N'$ une isométrie surjective et $T_\alpha \in B(H)$, tel que $T_\alpha = U$ sur N et 0 sur M. Alors, $\dim N(T_\alpha) = \dim M = \alpha$, d'où $m_e(T_\alpha) = 0$. Puisque $R(T_\alpha)$ est fermé (car $\gamma(T_\alpha) = 1$), il s'ensuit que $\dim N(T_\alpha^*) = \dim R(T_\alpha)^\perp = \dim N'^\perp = \dim M' = \aleph_0$. Donc $m_e(T_\alpha^*) = 0$. Par conséquent,

$$(1) \qquad m_e(T_\alpha) = m_e(T_\alpha^*) = 0 \ \ (\Longleftrightarrow T_\alpha \notin F)$$

D'autre part, puisque $1 = \gamma(T_\alpha) = \inf\{\sigma(|T_\alpha|) \setminus \{0\}\}$ [3], on conclut que 0 est un point isolé de $\sigma(|T_\alpha|)$. Ceci implique qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0, \varepsilon[$,

$$E_{T_\alpha}([0,\lambda[)H = N(T_\alpha) \ \text{ et } \ E^*_{T_\alpha}([0,\lambda[)H = N(T_\alpha^*).$$

Par conséquent,

$$\operatorname{ess\,nul} T_\alpha = \alpha \quad \text{et} \quad \operatorname{ess\,def} T_\alpha = \aleph_0.$$

Donc, on conclut que $\tau(T_\alpha^*) \geq \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ et $\tau(T_\alpha) = 0$.

Ceci impliquent que $\qquad T_\alpha^* \notin \Lambda. \qquad (2)$

Et par conséquent, d'après le Théorème 4.5.7, on voit que $T_\alpha^* \notin \partial(\mathcal{F})$.
D'autre part, comme $\operatorname{ind}(T_\alpha^*) = -\alpha$ et en utilisant le Théorème 4.4.18, on en déduit que : $\quad T_\alpha^* \in \overline{F_+}. \quad$ (3)
D'où (1) et (3) impliquent que $T_\alpha^* \in \partial(F_+)$.
Il en résulte que $\quad \Lambda = \partial(\mathcal{F}) \neq \partial(F_+)$.

Montrons maintenant que $T_\alpha^* \in \operatorname{int}(\overline{F_+})$.
Tout d'abord, d'après le Théorème 4.2.4, on constate que $m_\alpha(T_\alpha^*) > 0$. D'autre part, par le Théorème 4.2.5, on constate que pour tout opérateur L appartenant à $\mathcal{B}(T_\alpha^*, m_\alpha(T_\alpha^*))$, $\operatorname{ind}(L) = \operatorname{ind}_\alpha(L) = \operatorname{ind}_\alpha(T_\alpha^*) = -\alpha$, où $\mathcal{B}(T_\alpha^*, m_\alpha(T_\alpha^*))$ désigne la boule ouverte de $B(H)$ de centre T_α^* et de rayon $m_\alpha(T_\alpha^*)$. Donc, par le Théorème 4.4.18, on voit que $\mathcal{B}(T_\alpha^*, m_\alpha(T_\alpha^*)) \subseteq \overline{F_+}$, par conséquent, $T_\alpha^* \notin \partial(\overline{F_+})$. Il en résulte que $\partial(\overline{F_+}) \subsetneqq \partial(F_+)$.

2) D'abord, par le Corollaire 4.4.13, on conclut que $\Lambda \subseteq \overline{F^\alpha}$. Or, $\Lambda \cap F^\alpha = \emptyset$, par suite $\Lambda \subseteq \partial(F^\alpha)$ (car F^α est un ouvert). D'autre part, soit T_α défini comme dans 1). Puisque $\operatorname{ind}(T_\alpha) = \alpha$, d'après le Corollaire 4.4.13, on conclut que $T_\alpha \in \overline{F^\alpha}$. Or, d'après (1), T_α n'est pas semi-Fredholm, par suite $T_\alpha \in \partial(F^\alpha)$. Finalement, comme $\mu(T_\alpha) = \tau(T_\alpha^*) > 0$, on en déduit que $T_\alpha \notin \Lambda$. Ceci prouve que $\Lambda \subsetneqq \partial(F^\alpha)$.
Enfin pour voir que $\Lambda \subsetneqq \partial(F^{-\alpha})$, il suffit de remarquer que $\Lambda \subseteq \partial(F^{-\alpha})$, $T_\alpha^* \notin \Lambda$ et $T_\alpha^* \in \partial(F^{-\alpha})$.

3) Soit $T_\alpha, T_\beta \in B(H)$ définis comme dans 1). Puisque $\operatorname{ind}(T_\alpha) = \alpha$ (resp. $\operatorname{ind}(T_\beta) = \beta$), d'après le Corollaire 4.4.13, on conclut que $T_\alpha \in \overline{F^\alpha}$ (resp. $T_\beta \in \overline{F^\beta}$). Or, d'après (1), T_α et T_β ne sont pas semi-Fredholm, par suite $T_\alpha \in \partial(F^\alpha)$ (resp. $T_\beta \in \partial(F^\beta)$).
Par ailleurs, d'après le Corollaire 4.4.13, on a :

$$\operatorname{dist}(T_\alpha, F^\beta) = \max\{m_\beta(T_\alpha), m_\beta(T_\alpha^*)\} \geq \tau(T_\alpha^*) > 0$$

et

$$\operatorname{dist}(T_\beta, F^\alpha) = \mu(T_\beta) = \tau(T_\beta^*) > 0.$$

Il en résulte que $T_\alpha \notin \partial(F^\beta)$ et $T_\beta \notin \partial(F^\alpha)$. Ceci prouve que $\partial(F^\alpha) \not\subset \partial(F^\beta)$ et $\partial(F^\beta) \not\subset \partial(F^\alpha)$. ∎

En montre de la même manière le corollaire suivant.

Corollaire 4.5.10

Si $\aleph_0 < \alpha < \beta \leq \dim H$, *alors*

$$\partial(F^\alpha) \not\subset \partial(F^{-\beta}),\ \partial(F^{-\beta}) \not\subset \partial(F^\alpha);$$

$$\partial(F^{-\alpha}) \not\subset \partial(F^\beta),\ \partial(F^\beta) \not\subset \partial(F^{-\alpha});$$

$$\partial(F^{-\alpha}) \not\subset \partial(F^{-\beta}),\ \partial(F^{-\beta}) \not\subset \partial(F^{-\alpha}).$$

5 Annexes

2^{eme} **preuve de** $\| \, |T| - I - K_0\| = \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\}$ (voir, Lemme 3.3.1 page 80). Soit

$$\omega_1 = [0, m_e(T)[), \; \omega_2 = [m_e(T), \|T\|_e] \text{ et } \omega_3 =]\|T\|_e, \|T\|].$$

Alors, H s'écrit :

$$H = E(\omega_1)(H) \oplus E(\omega_2)(H) \oplus E(\omega_3)(H).$$

Soit $x \in H$, $x = x_1 + x_2 + x_3$, avec $x_i \in E(\omega_i)(H)$, $1 \leq i \leq 3$.
En utilisant les mêmes notations que le Théorème 12.21 (page 319) [53] et le Théorème 12.22 (pages 321-322) [53], on voit que si

$$f(t) = (m_e(T) - 1)\chi_{\omega_1}(t) + (t-1)\chi_{\omega_2}(t) + (\|T\|_e - 1)\chi_{\omega_3}(t),$$

alors

$$\begin{aligned}
\|(|T| - I - K_0)(x)\|^2 &= < \int_{\sigma(T)} f(t)\, dE(t)\,(x), \int_{\sigma(T)} f(t)\, dE(t)\,(x) > \\
&= < \int_{\sigma(T)} |f(t)|^2\, dE(t)\,(x), x > \\
&= \int_{\sigma(T)} \Big((m_e(T)-1)^2\chi_{\omega_1}(t) + (t-1)^2\chi_{\omega_2}(t) \\
&\quad +(\|T\|_e - 1)^2\chi_{\omega_3}(t)\Big) d\mu_{x,x}(t) \\
&= (m_e(T)-1)^2 < E(\omega_1)(x), x > \\
&\quad + < \int_{\sigma(T)} (t-1)^2\chi_{\omega_2}(t)\; dE(t)\,(x), x > \\
&\quad +(\|T\|_e - 1)^2 < E(\omega_3)(x), x > \\
&= (m_e(T)-1)^2 < E(\omega_1)(x), E(\omega_1)(x) > \\
&\quad + < \int_{\omega_2} (t-1)^2\; dE(t) \int_{\sigma(T)} \chi_{\omega_2}(t)\; dE(t)\;(x), x > \\
&\quad +(\|T\|_e - 1)^2 < E(\omega_3)(x), E(\omega_3)(x) >
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (m_e(T)-1)^2 < E(\omega_1)(x_1), E(\omega_1)(x_1) > \\
&\quad + < \int_{\omega_2} (t-1)^2 dE(t)\, E(\omega_2)(x), x > \\
&\quad +(\|T\|_e - 1)^2 < E(\omega_3)(x_3), E(\omega_3)(x_3) > \\
&= (m_e(T)-1)^2 \int_{\omega_1} d\mu_{x_1,x_1} + \int_{\omega_2} (t-1)^2\, d\mu_{x_2,x_2} \\
&\quad +(\|T\|_e - 1)^2 \int_{\omega_3} d\mu_{x_3,x_3} \\
&\leq (m_e(T)-1)^2 \|x_1\|^2 + (\|T\|_e - 1)^2 \|x_3\|^2 \\
&\quad +(\|T\|_e - 1)^2 \|x_3\|^2 \\
&\leq \max\{(m_e(T)-1)^2, (\|T\|_e - 1)^2\} \|x\|^2,
\end{aligned}
$$

dans l'avant dernière égalité on a utilisé le fait que pour toute fonction borélìenne bornée g sur $\sigma(T)$ et ω un borélien de $\sigma(T)$, on a :

$$\left|\int_{\omega} g(\lambda) d\mu_{x,x}\right| \leq \left(\sup_{\lambda\in\omega} |g(\lambda)|\right) \|x\|^2.$$

Donc, on en déduit que $\| \,|T| - I - K_0\| \leq \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\}$. Or, si x est un vecteur unitaire de $E(\omega_1)(H)$, $\|(|T| - I - K_0)\ (x)\| = |1 - m_e(T)|$, et si x est un vecteur unitaire de $E(\omega_2)(H)$, $\|(|T| - I - K_0)\ (x)\| = |\|T\|_e - 1|$. Par conséquent,

$$\| \,|T| - I - K_0\| = \max\{\|T\|_e - 1, 1 - m_e(T)\}.$$

■

Bibliographie

Bibliographie

[1] **T. Ando & T. Sekiguchi & T. Suzuki**, *Approximation by positive operators.* Math. Z. **131** (1973), 273–282.

[2] **C. Apostol & L.A. Fialkow & D.A. Herrero & D. Voiculescu**, *Approximation of Hilbert space operators.* Vol II. Pitman, Boston, 1984.

[3] **C. Apostol**, *The reduced minimum modulus,* Michigan. Math. J. **32** (1985), 279–294.

[4] **F.V. Atkinson**, *The normal solvability of linear equations in normed space,* (1951) Mat. Sb Vol **28**, 3–14 (en Russe); MR 13 P 46.

[5] **F.V. Atkinson**, *On relatively regular operators,* Acta. Sci. Math (Szeged), **15** (1953), 38–56.

[6] **R.H. Bouldin**, *The essential minimum modulus,* Indiana. Univ. Math. J. **30** (1981), 513–517.

[7] **R.H. Bouldin**, *Approximation by operators with fixed nullity,* Proc. A. M. S. **103** (1988), 141–144.

[8] **R.H. Bouldin**, *Approximation by semi-Fredholm operators with fixed nullity,* Rocky Mautain. J. Math. **20** (1990), 39–50.

[9] **R.H. Bouldin**, *The distance to operators with fixed index,* Acta. Sci. Math (Szeged). **54** (1990), 139–143.

[10] **R.H. Bouldin**, *Closure of invertible operators on Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 721–726.

[11] **R.H. Bouldin**, *Distance To Invertible operators Without Separability,* Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 489–497.

[12] **R.H. Bouldin**, *Approximation by Fredholm operators on a non separable Hilbert space,* Glasgow. Math. J. **35** (1993), 167–178.

[13] **R.H. Bouldin**, *Generalization of semi-Fredholm operators,* Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 3757–3763.

[14] **N. Bourbaki**, *Éléments de Mathématique. Livre I. Théorie des ensembles. Chapitre* 3, *Ensembles ordonnés cardinaux, nombres entiers,* Hermann, Paris 1967.

[15] **L. Burlando**, *Distance formulas on operators whose kernel has fixed Hilbert dimension,* Rendiconti Di Mathematica. **10** (1990), 209–238.

[16] **L. Burlando**, *Approximation by semi-Fredholm and semi-α-Fredholm operators with fixed index in a Hilbert space*, Communication tenue à la 14^{eme} conférence international du theory des opérateurs. Timişoara (Romanie) 1-5/6/1992.

[17] **J.W. Calkin**, *Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert spaces*, Ann of Math. **42** (1941), 839–873.

[18] **S.R. Caradus & W.E. Plaffenberger & B. Yood**, *Calkin algebras and algebras of operators on Banach spaces*, M. Dekker. New. York **1974**.

[19] **L.A. Coburn & A. Lebow**, Components of invertible elements in quotient algebras of operators. Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 359–365.

[20] **J.B. Conway**, *A course in functional analysis*, Second Edition. Springer-Verlag New York 1990.

[21] **H. Cordes & J.P. Labrousse**, *The invariance of the index in metric space of closed operators*, J. Math. Mech. 12 (1963), 693–720.

[22] **R.S. Doran & V.A. Belfi**, *A Characterizations of C^*-algebras*, M. Dekker, Inc, New York Basel 1986.

[23] **R. Douglas**, *Banach Algebra Technique in Operaror Theory*, Academic press, New York, 1972.

[24] **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear operators part I*, Viley interscience (1963).

[25] **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear operators part II*, Viley interscience (1963).

[26] **G. Edgar & D. Ernest & S. G. Lee**, *Weighing operator sepectra*, Indiana. UniV. Math. J. **21** (1971), 61–80.

[27] **D. Ernest**, *Operators with α-closed range*, Tôhoku. Math. Journ. **24**, (1972), 45–49.

[28] **P.A. Fillmore & J.G. Stampfli & J.P. Williams**, *On the essential numerical range, the essential spectrum, and a problem of Halmos*, Acta. Sci. Math. 33 (1972), 179–192.

[29] **K.H. Förster & M.A. Kaashoek**, *The asymptotic behaviour of the reduced minimun modulus of a Fredholm operator*, Proc. Amer. Math. Soc. 49 (1975), 123–131.

[30] **H.A. Gindler & A.E. Taylor**, *The minimum modulus of linear operator and its use in spectral theory*, Studia. Math. **22** (1962) 15–41.

[31] **S. Goldberg**, *Unbounded linear operators*, Mc Graw-Hill, New York, 1966.

[32] **S. Goldberg & M.G. Krein**, *The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators*, In A. M. S. Translations. Series 2, **13** (1960), 185–265.

[33] **P.R. Halmos**, *A Hilbert space problem book*, D. Van Nostrand, 1967.

[34] **P.R. Halmos**, *Positive approximations of operators*, Indiana. Univ. J. **21** (1971), 951–960.

[35] **P. De la Harpe**, *Initiation à l'algèbre de Calkin,* Lectures Notes in Maths, Springer Verlag **725** (1978), 180-219.

[36] **R. E. Harte & M. Mbekhta**, *On generalized inverses in C^*-Algabras*, Studia. Math. **103** (1992), 71–77.

[37] **R. E. Harte & M. Mbekhta**, *Generalized inverses in C^*-Algabras II*, Studia. Math. **106** (1993), 129–138.

[38] **D.A. Herrero**, *Approximation of Hilbert spaces operators*, Vol. I, Pitman, Boston, 1982.

[39] **R.B. Holmes**, *Best approximation by normal operators*, J. App. Theory. **12** (1974), 412–417.

[40] **R.B. Holmes & B.R. Kripke**, *Best approximation by compact operators*, Indiana. Univ. J. **21** (1971), 255–263.

[41] **S. Izumino**, *Inequalities on operators with index zero*, Math. Japonica **23** n^o 5 (1979), 565–572.

[42] **S. Izumino & Y. Kato**, *The closure of invertible operators on a Hilbert space*, Acta Sci. Math (Szeged) **219** (1985), 321–327.

[43] **T. Kato**, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, Berlin, 1966.

[44] **T. Kato**, *Perturbation theory for nullity, deficiency, and other quantities of linear operators*, J. Anal. Math. **6** (1958), 261–322.

[45] **J.P. Labrousse**, *On a metric space of closed operators on Hilbert space*, Rev. Mat. Fis. Teor. Tucuman. **16** (1966), 45–77.

[46] **J.P. Labrousse & M. Mbekhta**, *Les opérateurs points de continuité pour la conorme et l'inverse de moore-Penrose*, Houston. J. Math. **18** (1992), 7–23.

[47] **E. Luft**, *The two-sided closed ideals of the algebra of bounded linear operators of Hilbert space*, Czechoslovak. Math. J. **18** (1968), 595 - 605.

[48] **E. Makai & J. Zemànek**, *The surjectivity radus, packing numbersa and boundedness below of linear operators*, Integral Equations And Operators Theory. Vol **6** (1983), 372–384.

[49] **M. Mbekhta**, *Conorme et inverse généralisé dans les C^*-Algèbres*, Canad. Math. Bull. Vol **35** (4), (1992), 515–522.

[50] **M. Mbekhta**, *Sur la structure des composantes connexes semi-Fredholm de $B(H)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **116**, n^o 2 (1992), 521–524.

[51] **M. Mbekhta & R. Paul**, *Sur la conorme essentielle*, Studia. Math. **117** (3) (1996), 243–252.

[52] **D.D. Rogers**, *Approximation by unitary and essentially unitary operators*, Acta. Sci. Math. **39** (1977), 141–151.

[53] **W. Rudin**, *Functional Analysis*, Second Edition. International Serie In Pure and Applied Mathematics 1991.

[54] **H. Skhiri**, *On the topological boundary of semi-Fredholm operators*, Pub.I. R. M. A. Lille (1996). Vol **38**; $n^0 XI$ (à paraître dans Proc. Amer. Math. Soc).

[55] **H. Skhiri**, *Sur les isométries partielles maximales essentielles*, Studia. Math **128** (2) (1998), 135–144.

[56] **H. Skhiri**, *Structure of semi-Fredholm operators with fixed nullity*, Acta. Sci. Math (Szeged) **63**, (1997), 607–622.

[57] **A. Taylor**, *Introduction to functional analysis*, Wiley, 1958.

[58] **J. Weidmann**, *Linear operators in Hilbert spaces*, Springer, New York, (1980).

[59] **P.Y. Wu**, *Approximation by partial isometries*, Proceding. Edinburgh. Math. Soc **29** (1986), 255–261.

[60] **P.Y. Wu**, *Approximation by invertible and noninvertible operators*, J. Approximation. Theory. **56** (1989), 267–276.

[61] **J. Zemànek**, *Geometric interpretation of the essential minimum modulus, invariant subspaces and other toppics* (Timisoara Herculane, 1981), pp 255–227, Operator. Theory : adv. appl, 6 Birkhauser, Basel 1982.

[62] **J. Zemànek**, *The stability radius of a semi-Fredholm operaors*, Integral. Equations and Operators. Theory. Vol **8** (1985), 137 – 144.