N° d'ordre : 2183

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Djamel HAMADOUCHE

CONVERGENCE DE PROCESSUS STOCHASTIQUES À TRAJECTOIRES HÖLDERIENNES

Soutenue le 16 Décembre 1997 devant la Commission d'Examen :

Président :	J. DELPORTE, Université Catholique de Lille
Directeur de Thèse :	Ch. SUQUET, Université de Lille I
Rapporteurs :	A. ANTONIADIS, Université J. Fourier, Grenoble
	A. RAČKAUSKAS, Université de Vilnius
Examinateurs :	S. NICAISE, Université de Valenciennes
	Y. DAVYDOV, Université de Lille I
	M.-C. VIANO, Université de Lille I

A mes parents

Je tiens à exprimer ma respectueuse gratitude à Monsieur le Professeur J. DELPORTE *qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.*

Monsieur le Professeur Ch. SUQUET *a guidé mon activité de recherche. Ma reconnaissance envers lui est profonde pour l'aide précieuse et les conseils bienveillants qu'il n'a jamais cessé de me prodiguer.*

Messieurs les Professeurs A. RAČKAUSKAS *et* A. ANTONIADIS *ont accepté de juger ce travail et d'en être les rapporteurs. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma sincère reconnaissance.*

Madame le Professeur M.-C. VIANO, *Messieurs les Professeurs* *Y.* DAVYDOV *et S.* NICAISE *ont accepté de faire partie du jury de cette thèse, je leur exprime ma profonde gratitude.*

Je remercie Arlette LENGAIGNE *qui a dactylographié cette thèse avec patience et savoir-faire ainsi que toutes les personnes qui ont participé à sa réalisation matérielle.*

Table des matières

Introduction

L'étude classique de la convergence en loi des suites de processus stochastiques utilise essentiellement deux cadres fonctionnels. Lorsque les trajectoires ont des discontinuités, on a recours à l'espace de Skorohod $D[0,1]$ ou $D(\mathbb{R}^+)$. Lorsqu'elles sont continues, on se contente généralement de l'espace $C[0,1]$ ou $C(\mathbb{R}^+)$. Les processus considérés sont souvent de la forme

$$\xi_n(t) = h_n(X_1, \dots, X_n, t),$$

où $(X_i)_{i \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles et les h_n des fonctions déterministes. C'est le cas notamment pour les processus de sommes partielles lissés ou non, les processus empiriques, les processus quantiles,...Ces deux espaces de trajectoires fournissent des fonctionnelles continues pour la plupart des applications courantes de la convergence faible des processus stochastiques.

Il peut y avoir quelque intérêt à sortir de ces cadres fonctionnels usuels. Pour certaines fonctionnelles des trajectoires définies à l'aide d'intégrales, une topologie $L^2[0,1]$ ou $L^p[0,1]$ (donc plus faible que celle de $D[0,1]$) est suffisante (cf. [34] et sa bibliographie). Ceci permet quelquefois d'obtenir des théorèmes de convergence sous des conditions de dépendance de la suite $(X_i)_{i \geq 1}$ plus faibles que dans le cadre $D(0,1)$. Cette approche a été utilisée notamment par Oliveira [30], Oliveira et Suquet ([31] à [34]). Dans [45], Suquet et Viano établissent la convergence faible dans $L^2[0,1]^2$ d'une suite de processus multiparamétriques construits sur des v.a. dépendantes et étudient son application statistique à un problème de détection de rupture. Une autre alternative au cadre $D[0,1]$ est constituée par les espaces de Besov $B_p^{s,q}$ à faible indice de régularité ($s < 1/p$). Nous renvoyons pour cette étude à Boufoussi [6] et à Boufoussi, Chassaing et Roynette [5].

L'idée la plus naturelle si l'on cherche une alternative au cadre fonctionnel $C[0,1]$ est d'utiliser une échelle d'espaces hölderiens. Cela semble d'autant plus légitime que les processus limites habituels comme le mouvement brownien ou le pont brownien ont une régularité hölderienne bien connue et que les trajectoires de ξ_n ont souvent elle-mêmes une régularité supérieure (c'est le cas par exemple des lignes polygonales d'interpolation des processus de sommes partielles dans le principe d'invariance de Donsker-Prokhorov). Comme la topologie d'espace de Hölder est plus fine que celle de $C[0,1]$, on dispose dans ce cadre de davantage de fonctionnelles continues. Le premier résultat dans cette direction semble être celui de Lamperti [25] qui en 1962, a renforcé le principe d'invariance de Donsker-Prokhorov en obtenant[1] la convergence en loi dans les espaces de Hölder d'exposant $\alpha < 1/2$, ce qui est juste la borne de régularité hölderienne du mouvement brownien. Une démonstration plus récente du principe d'invariance de Lamperti est dûe à Kerkyacharian et Roynette [24] qui exploitent les isomorphismes entre les espaces de Hölder et des espaces de suites fournis par l'analyse de ces espaces à l'aide des fonctions triangulaires de Faber-Schauder. Ces isomorphismes avaient été étudiés par Ciesielski [8] qui en avait donné une application à la régularité des trajectoires d'un processus gaussien [9]. L'utilisation des espaces de suites semble particulièrement bien adaptée à la théorie des processus stochastiques. Une illustration récente en est le travail de Ciesielski, Kerkyacharian et Roynette [10]. Le développement de la théorie des ondelettes et la caractérisation de la plupart des espaces fonctionnels usuels par leurs coefficients d'ondelettes (cf. Meyer [27]) devrait avoir des retombées dans cette direction.

Notre travail sur la convergence faible hölderienne des processus s'inscrit dans cette perspective.

Nous commençons par rappeler au chapitre 1 l'étude due à Ciesielski de l'espace de Banach $\mathrm{H}_\alpha[0,1]$ des fonctions hölderiennes d'ordre α. Cet espace n'étant pas séparable, nous nous intéressons plus particulièrement à son sous-espace $\mathrm{H}_\alpha^0[0,1]$ qui l'est (il s'agit des fonctions f telles que $|f(x)-f(y)| = o(|x-y|^\alpha)$ uniformément sur $[0,1]$). En exploitant la caractérisation de Ciesielski du dual de H_α^0, nous proposons une représentation intrinsèque de ses éléments à l'aide de couples de mesures signées. La question des fonctionnelles continues sur H_α^0 nous ayant été souvent posées lors d'exposés relatifs à ce travail, nous en donnons ici une liste d'exemple assez fournie. Dans le même esprit, la continuité sur H_α^0 des opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires que nous présentons brièvement nous paraît susceptible d'applications ultérieures.

Après cette partie purement analyste, nous considérons les processus à trajectoires hölderiennes. Le point de vue que nous adoptons est de les traiter comme des éléments aléatoires des espaces H_α^0. La convergence en loi de tels processus équivaut à celle des lois de dimension finie et à l'équitension sur

[1]Lorsque les variables aléatoires X_i ont des moments de tout ordre, voir le théorème 2.1 au chapitre 2 pour un énoncé précis.

H_α^0 de leurs lois. Le principal outil d'équitension hölderienne disponible dans la littérature est la condition de Lamperti [25] (voir aussi [24]) qui repose sur une inégalité de moments du type :

$$\mathbb{E}\,|\xi_n(t)-\xi_n(s)|^\gamma < C|t-s|^{1+\delta}, \quad s,t\in[0,1].$$

Nous prouvons (théorème 1.24) qu'on peut se contenter de vérifier cette inégalité pour $|t-s|\geq a_n$, où a_n décroît vers 0, au prix d'une condition sur le contrôle en probabilité du module de continuité hölderien de ξ_n évalué en a_n.

Dans le chapitre 2 nous étudions la convergence de deux suites de processus de sommes partielles lissés. Nous commençons par une extension du principe d'invariance de Lamperti (pour les lignes polygonales aléatoires de Donsker-Prokhorov) au cas de variables X_i dépendantes. Nous considérons deux cas de dépendance faible : le mélange fort et l'association. Cette extension repose essentiellement sur des inégalités de moments et des théorèmes de limite centrale déjà disponibles dans la littérature. Nous nous intéressons ensuite au lissage par convolution des processus de sommes partielles et notre théorème 1.24 trouve là une première application pour établir un principe d'invariance hölderien.

Le chapitre 3 est consacré au processus empirique uniforme. Son lissage classique par une ligne polygonale (en remplaçant la fonction de répartition empirique par le polygone des fréquences cumulées croissantes) fournit un processus ξ_n. Il est bien connu que ce processus converge en loi dans $C[0,1]$ vers le pont brownien. Nous prouvons sa convergence hölderienne faible pour tout ordre de régularité $\alpha<1/4$. Nous montrons l'optimalité de cette borne. Son caractère a priori surprenant (le processus limite ayant une régularité $\alpha<1/2$) est lié au comportement asymptotique des *espacements* d'une suite i.i.d.. Ceci montre qu'en un certain sens, le lissage polygonal est trop brutal. Pour un lissage par convolution, les choses rentrent dans l'ordre et nous obtenons la borne de régularité $\alpha<1/2$ dans la convergence hölderienne faible vers le pont brownien. Ce dernier résultat a surtout un intérêt théorique car le lissage par convolution ne commute pas avec le changement de variable $U_i=F(X_i)$ qui transforme un échantillon i.i.d. de fonction de répartition marginale continue F en un échantillon uniforme sur $[0,1]$. Ceci nous a conduits à reprendre l'étude du processus empirique lissé par convolution dans le cadre plus général des processus indexés par la droite réelle.

Le chapitre 4 contient la partie générale de cette étude. Nous introduisons l'échelle des espaces fonctionnels $C_0^\alpha(\mathbb{R})$ formés des fonctions à régularité hölderienne globale α sur $\mathbb{R}$ et tendant vers 0 à l'infini. Notre premier travail est l'extension des résultats de Ciesielski à cette échelle d'espaces. Dans l'esprit de la théorie des ondelettes, nous les analysons grâce à deux familles de fonctions triangulaires. Pour des raisons de séparabilité, on considère l'échelle des sous-espaces $C_0^{\alpha,o}$ et on montre qu'ils sont Schauder-décomposables. Nous caractérisons le dual de $C_0^{\alpha,o}$ et en donnons une représentation intrinsèque à l'aide de mesures signées. En utilisant des résultats généraux de Suquet [43] sur l'équitension dans les espaces Schauder décomposables, nous obtenons trois théorèmes d'équitension de caractère assez général.

Comme application, on étudie au chapitre 5 la convergence faible dans $C_0^{\alpha,o}(\mathbb{R})$ de la suite de processus empiriques lissés par convolution. En particulier quand la fonction de répartition marginale F est suffisamment régulière (par exemple lipschitzienne), nous obtenons la convergence faible hölderienne de cette suite de processus vers un processus gaussien centré de covariance $\Gamma(s,t) = F(s) \wedge F(t) - F(s)F(t)$ pour tout $\alpha < 1/2$. Plus généralement si F est seulement r-hölderienne, cette convergence a lieu pour tout $\alpha < r/2$ et cette borne est optimale.

Chapitre 1

Le cadre fonctionnel H_α

1.1 Les espaces de Banach $\mathrm{H}_\alpha[0,1]$ et $\mathrm{H}_\alpha^0[0,1]$

1.1.1 Définitions

Nous reprenons les notations et les résultats de Ciesielski [8] sur les espaces de fonctions hölderiennes sur $[0,1]$. On définit l'espace de Hölder d'ordre α $(0 < \alpha \leq 1)$ comme l'espace, noté $\mathrm{H}_\alpha[0,1]$, des fonctions f nulles en 0 telles que :

$$\|f\|_\alpha = \sup_{0<|t-s|\leq 1} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha} < +\infty.$$

On note $w_\alpha(f,\delta)$ le module de continuité hölderien de f

$$w_\alpha(f,\delta) = \sup_{0<|t-s|<\delta} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

On définit le sous-espace $\mathrm{H}_\alpha^0[0,1]$ de $\mathrm{H}_\alpha[0,1]$ par :

$$f \in \mathrm{H}_\alpha^0 \iff f \in \mathrm{H}_\alpha \quad \text{et} \quad \lim_{\delta\to 0} w_\alpha(f,\delta) = 0.$$

Dans la suite, on abrègera les notations $\mathrm{H}_\alpha[0,1]$ et $\mathrm{H}_\alpha^0[0,1]$ en H_α et H_α^0. $(\mathrm{H}_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ est un espace de Banach non séparable. $(\mathrm{H}_\alpha^0, \|\cdot\|_\alpha)$ en est un sous-espace fermé séparable. $(\mathrm{H}_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ est séparable pour la norme $\|\cdot\|_\beta$, pour tout $0 < \beta < \alpha$, de plus H_α s'injecte continûment dans H_β.

1.1.2 Analyse par les fonctions triangulaires

Pour obtenir un isomorphisme de Banach, des espaces H_α et H_α^0 avec des espaces de suites, Ciesielski a utilisé la base de Faber-Schauder, obtenue par translations et changements d'échelle dyadiques de la fonction triangulaire

$$\Delta(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ 2(1-t) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Pour $n = 2^j + k$, $j \geq 0$, $0 \leq k < 2^j$, on pose :

$$\Delta_n(t) = \Delta_{j,k}(t) = \Delta(2^j t - k), \quad t \in [0,1].$$

On note $\Delta_0(t) = t\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$. On complète la famille $\{\Delta_n, n \in \mathbb{N}\}$ en lui adjoignant la fonction Δ_{-1} définie par $\Delta_{-1}(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$. Alors $\{\Delta_n, n \geq -1\}$ est une base de Schauder de $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme du supremum. De plus $\{\Delta_n, n \geq 0\}$ est une base de Schauder de l'hyperplan fermé $\mathcal{C}_0[0,1]$ des fonctions de $\mathcal{C}[0,1]$, nulles en 0. Plus précisément nous avons :

Lemme 1.1 (Faber-Schauder) *Pour toute fonction f de $\mathcal{C}_0[0,1]$,*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n(f)\Delta_n(t), \tag{1.1}$$

avec $\lambda_0(f) = f(1)$ et pour $n = 2^j + k$ ($j \geq 0$, $0 \leq k < 2^j$) :

$$\lambda_n(f) = \lambda_{j,k}(f) = f\Big(\frac{k+1/2}{2^j}\Big) - \frac{1}{2}\Big\{f\Big(\frac{k}{2^j}\Big) + f\Big(\frac{k+1}{2^j}\Big)\Big\}. \tag{1.2}$$

La série (1.1) converge uniformément sur $[0,1]$, autrement dit, au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathcal{C}_0[0,1]$.

Nous adoptons la notation classique ℓ^∞ pour l'espace de Banach des suites bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\geq 0}|u_n|$. De même c_0 désignera le sous-espace fermé des suites tendant vers zéro à l'infini.

Rappelons les résultats établis par Ciesielski en remarquant d'abord que toute fonction f de H_α étant dans $\mathcal{C}_0[0,1]$, admet ainsi la décomposition précédente avec convergence de la série (1.1) au moins dans $\mathcal{C}_0[0,1]$.

Théorème 1.2 (Ciesielski [8]) *Pour toute fonction f de H_α^0, la série*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n(f)\Delta_n(t),$$

converge au sens de la norme $\|\cdot\|_\alpha$. La famille $\{\Delta_n, n \geq 0)\}$ est une base de Schauder de $(\mathrm{H}_\alpha^0, \|\cdot\|_\alpha)$.

Théorème 1.3 (Ciesielski [8]) *On pose* $\Delta_n^{(\alpha)} = 2^{-(j+1)\alpha}\Delta_n$ *pour* $n = 2^j + k$ $(j \geq 0,\ 0 \leq k < 2^j)$ *et* $\Delta_0^{(\alpha)} = \Delta_0$. *Les espaces* $(\mathrm{H}_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ *et* $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *sont isomorphes par les opérateurs* S_α *et* $T_\alpha = S_\alpha^{-1}$ *définis comme suit :*

$$\begin{array}{rcl} S_\alpha : \mathrm{H}_\alpha & \longrightarrow & \ell^\infty \\ f & \longmapsto & u = (u_n)_{n\geq 0} \end{array}$$

avec $u_n = 2^{(j+1)\alpha}\lambda_n(f)$, $n \geq 1$ *et* $u_0 = \lambda_0(f)$.

$$\begin{array}{rcl} T_\alpha : \ell^\infty & \longrightarrow & H^\alpha \\ u = (u_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \Delta_n^{(\alpha)}. \end{array}$$

De plus $\|S_\alpha\| = 1$ *et*

$$\frac{2}{3(2^\alpha - 1)(2^{1-\alpha} - 1)} \leq \|T_\alpha\| \leq \frac{2}{(2^\alpha - 1)(2^{1-\alpha} - 1)}.$$

Théorème 1.4 (Ciesielski [8]) H^0_α *est isomorphe par* S_α *à* $c_{o,\alpha}$ *sous-espace des suites de* ℓ^∞ *vérifiant* $\lim_{j\to+\infty} 2^{(j+1)\alpha} \sup_{0\leq k<2^j} |u_{j,k}| = 0$.

Ainsi on a

$$f \in \mathrm{H}_\alpha \iff \sup_{j\geq 0} 2^{(j+1)\alpha} \sup_{0\leq k<2^j} |\lambda_{j,k}(f)| < +\infty, \quad |\lambda_0(f)| < +\infty$$

et

$$f \in \mathrm{H}^0_\alpha \iff f \in \mathrm{H}_\alpha \text{ et } \lim_{j\to+\infty} 2^{(j+1)\alpha} \sup_{0\leq k<2^j} |\lambda_{j,k}(f)| = 0.$$

1.1.3 Lignes polygonales

L'approximation d'une fonction f par les sommes partielles de sa série de Faber-Schauder n'est autre que son approximation par interpolation linéaire entre des points d'abscisse dyadique. Les lignes polygonales d'interpolation d'une fonction hölderienne jouent un rôle important dans notre travail. Pour contrôler leur norme, le résultat d'analyse élémentaire suivant nous sera utile.

Lemme 1.5 *Soit* f *une ligne polygonale sur* $[0,1]$, *de sommets* $(x_i, f(x_i))$, $(0 \leq i \leq n+1)$ *avec* $x_0 = 0$ *et* $x_{n+1} = 1$. *Alors*

$$\sup_{0\leq s<t\leq 1} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha}$$

est atteint en deux sommets $s = x_i$ *et* $t = x_j$, $0 \leq i < j \leq n+1$.

Preuve : Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(0) = 0$ et écrire f sous la forme :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n} \{p_i(t - x_i) + f(x_i)\} \mathbf{1}_{]x_i, x_{i+1}]}(t), \quad t \in [0, 1].$$

Ainsi pour $s \in]x_i, x_{i+1}]$ et $t \in]x_j, x_{j+1}]$,

$$f(t) - f(s) = p_j(t - x_j) - p_i(s - x_i) + f(x_j) - f(x_i).$$

Notons $F_\alpha(s,t) := |f(t) - f(s)||t - s|^{-\alpha}$.

Cas $i = j$:

$F_\alpha(s,t) = p_i|t - s|^{1-\alpha}$ est une fonction croissante de $|t - s|$, donc atteint son maximum aux extrémités du segment $[x_i, x_{i+1}]$.

Cas $i < j$:

Maximiser $F_\alpha(t, s)$ revient à maximiser

$$A(s,t) = \frac{(f(t) - f(s))^2}{(t - s)^{2\alpha}} = \tilde{A}(s,u) \;\text{ où }\; u = t - s\,.$$

Comme $s \in]x_i, x_{i+1}]$ et $t \in]x_j, x_{j+1}]$,

$$A(s,t) = \frac{|p_i(s - x_i) - p_j(t - x_j) + f(x_j) - f(x_i)|^2}{|t - s|^{2\alpha}} = \frac{|m + qt - ps|^2}{|t - s|^{2\alpha}}$$

avec $m = p_j x_j - p_i x_i + f(x_j) - f(x_i)$, $q = p_j$ et $p = p_i$. Donc

$$\tilde{A}(s,u) = \frac{(m + q(u + s) - ps)^2}{u^{2\alpha}} = u^{-2\alpha}(m + qu + rs)^2$$

où $r = q - p$. On étudie $\tilde{A}$ sur le domaine

$$D = \big\{(s,u)\,;\; s \in]x_i, x_{i+1}], s + u \in]x_j, x_{j+1}]\big\}$$

image par la bijection $h(s,t) \to (s, t - s)$ du carré $\Delta =]x_i, x_{i+1}] \times]x_j, x_{j+1}]$. C'est le parallélogramme de sommets a, b, c et d :

$$\begin{aligned} a &= (x_i, x_{j+1} - x_i), & b &= (x_{i+1}, x_{j+1} - x_{i+1}), \\ c &= (x_{i+1}, x_j - x_{i+1}), & d &= (x_i, x_j - x_i). \end{aligned}$$

On a

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial u} = 2u^{-2\alpha-1}(m + qu + rs)(-\alpha m + (1 - \alpha)qu - \alpha rs).$$

On étudie à s fixé, le signe de $\frac{\partial \tilde{A}}{\partial u}$. On a deux zéros, $u_1 = -\frac{m+rs}{q}$ et $u_2 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{m+rs}{q}$ et $u_1u_2 < 0$. On note $u^* = \max(u_1, u_2) > 0$. Comme $\tilde{A}$ change de signe en u^* (à s fixé) et $\lim \tilde{A}(s,u) = +\infty$ quand $u \to +\infty$, $\tilde{A}(s,.)$ est décroissante sur $[0, u^*]$, croissante sur $[u^*, 1]$ et son maximum est donc atteint sur l'un des segments $[a, b]$ ou $[c, d]$.

A u fixé, $\tilde{A}(.,u)$ est un carré, nul pour $s^* = \frac{m+qu}{-r}$. Si $s^* < 0, \tilde{A}(.,u)$ est croissante sur $[0,1]$. Si $s^* > 0, \tilde{A}(.,u)$ est décroissante sur $[0, s^*]$ et croissante sur $[s^*, 1]$ et donc son maximum est atteint sur l'un des segments $[a, d]$ ou $[b, c]$.

Ainsi le maximum de $\tilde{A}$ (en s et u) est atteint sur l'un des sommets a, b, c ou d du parallélogramme D ; c'est-à-dire en :

$$\begin{array}{rcllcl}
a &=& (x_i, x_{j+1} - x_i) & \Rightarrow & (s,t) &=& (x_i, x_{j+1}),\\
b &=& (x_{i+1}, x_{j+1} - x_{i+1}) & \Rightarrow & (s,t) &=& (x_{i+1}, x_{j+1}),\\
c &=& (x_{i+1}, x_j - x_{i+1}) & \Rightarrow & (s,t) &=& (x_{i+1}, x_j),\\
d &=& (x_i, x_j - x_i) & \Rightarrow & (s,t) &=& (x_i, x_j).
\end{array}$$

■

1.1.4 Compacité dans H_α^0

La convergence faible hölderienne d'une suite de processus stochastiques est équivalente à la convergence des lois fini-dimensionnelles de cette suite (cf. Proposition 1.20 ci-dessous) et à sa relative compacité dans l'espace des mesures de probabilité sur (la tribu borélienne de) H_α^0 muni de la topologie de la convergence étroite. Par le théorème de Prokhorov, cette relative compacité équivaut à l'équitension de la suite des lois. Il est donc utile de connaître les compacts de H_α^0. Commençons par une condition suffisante de relative compacité très utile en pratique.

Lemme 1.6 *Si* $0 < \alpha < \beta < 1$ *et si* K *est borné dans* H^β *alors* K *est relativement compact dans* H_α^0.

Ce résultat est contenu implicitement dans la preuve d'un lemme d'équitension de Lamperti (voir le lemme 1 dans [25]). Cette preuve combine l'utilisation de la dérivation fractionnaire et le théorème d'Ascoli. Nous proposons ci-dessous une démonstration plus élémentaire exploitant les isomorphismes avec les espaces de suites et la condition de relative compacité dans c_0 fournie par la proposition suivante :

Proposition 1.7 *Soit* $F \subset c_0$. *S'il existe* $g \in c_0$ *telle que pour tout* $f = (f(n))_{n\geq 0} \in F$, $|f(n)| \leq g(n)$, $\forall n \geq 0$ *alors* F *est relativement compact dans* c_0.

Ce résultat est sans doute bien connu des analystes, mais ne l'ayant trouvé dans la littérature que sous forme d'exercice, nous nous permettons d'en expliciter la preuve.

Preuve : Pour éviter une double indexation, nous considérons les suites comme des *fonctions* définies sur $\mathbb{N}$. Soit $g \in c_0$ et $K = \{f \in c_0\,;\, |f| \le g\}$. Comme K peut s'écrire $K = \prod_{n\in\mathbb{N}}[-g(n), +g(n)]$, il est compact pour la topologie produit de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ d'après le théorème de Tychonoff ou par le procédé diagonal pour la compacité de $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

Soit $(f_n)_{n\ge 0}$ une suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite notée encore $(f_n)_{n\ge 0}$ convergente vers f dans K (pour la topologie produit), c'est-à-dire, $\forall t \in \mathbb{N}, f_n(t) \to f(t)$ (convergence simple sur $\mathbb{N}$).

D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{N}$ et tout $n \ge 0$, $|f_n(t)| \le g(t)$ d'où par passage à la limite, $|f(t)| \le g(t)$. Comme $g \in c_0$, on a pour tout $\varepsilon > 0$ un $t_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall t \ge t_0$, $g(t) < \frac{\varepsilon}{2}$, donc $|f_n(t) - f(t)| \le 2g(t) < \varepsilon$.

Pour chaque $t = 0, 1, \ldots, t_0 - 1$, il existe un $m_t \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \ge m_t$, $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$, grâce à la convergence simple de f_n vers f.

Finalement pour $n_0 = \max\limits_{t<t_0} m_t$, on a

$$\forall n \ge n_0, \forall t \in \mathbb{N}, \quad |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Ainsi f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{N}$, autrement dit au sens de la topologie de c_0. K est donc compact dans c_0. Comme $\overline{F}$ (adhérence de F) est fermé et est inclus dans K, on en déduit que F est relativement compact dans c_0. ■

Preuve du lemme 1.6 : Soit K un borné de H^β. Il est clairement inclus dans tous les H^0_α pour tout $0 < \alpha < \beta$. On a (en notant comme d'habitude $n = 2^j + k$) :

$$S_\beta(K) = \{(u_n)_{n\ge 0},\ u_n = 2^{(j+1)\beta}\lambda_n(\varphi),\ \varphi \in K\}.$$

Comme S_β est un isomorphisme, $S_\beta(K)$ est borné, c'est-à-dire

$$\exists C > 0, \quad \sup_{\varphi\in K}\sup_{n\ge 0} |u_n| \le C$$

ce qui est équivalent à

$$|\lambda_0(\varphi)| \le C \quad \text{et} \quad 2^{(j+1)\beta}|\lambda_n(\varphi)| \le C, \quad \varphi \in K.$$

Ainsi $|\lambda_0(\varphi)| \le C$ et

$$\begin{aligned} 2^{(j+1)\alpha}|\lambda_n(\varphi)| &\le C2^{-(j+1)(\beta-\alpha)}, \quad n \ge 1, \varphi \in K \\ &\le C'n^{-(\beta-\alpha)}. \end{aligned}$$

Donc, d'après la proposition précédente,

$$L = \{(v_n)_{n\geq 0},\ v_n = 2^{(j+1)\alpha}|\lambda_n(\varphi)|, \varphi \in K\}$$

est relativement compact dans c_0. On a $K = S_\alpha^{-1}(L) = T_\alpha(L)$. Comme T_α est continue de c_0 dans H^0_α, K est relativement compact dans H^0_α.

Lemme 1.8 (Suquet [44]) *K est relativement compact dans H^0_α si et seulement si*

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{f\in K} w_\alpha(f,\delta) = 0. \tag{1.3}$$

Cette version hölderienne du théorème d'Ascoli n'est probablement pas originale. Il nous a paru utile d'en reproduire une démonstration basée sur l'isomorphisme entre H^0_α et un espace de suites. Celle ci améliore un résultat déjà contenu dans [43].

Preuve : Montrons d'abord la suffisance de (1.3). Notons E_jf la somme partielle de la série de Faber-Schauder de f relative aux fonctions $\Delta_{i,k}$ pour $i \leq j$ et $0 \leq k < 2^i$. D'après un théorème général caractérisant les relativement compacts d'un espace Schauder décomposable (cf. théorème 2 dans [43]), K est relativement compact dans H^0_α si et seulement s'il vérifie les deux conditions :

$$\begin{aligned} \forall j\in\mathbb{N},\quad \sup_{f\in K}\|E_jf\|_\alpha &< +\infty, &(1.4)\\ \lim_{j\to+\infty}\sup_{f\in K}\|f-E_jf\|_\alpha &= 0. &(1.5)\end{aligned}$$

En raison de l'isomorphisme du théorème 1.4, il existe une constante $C>0$ telle que pour toute $f\in\mathrm{H}^0_\alpha$,

$$\begin{aligned} \|E_jf\|_\alpha &\leq C\left\{\lambda_0(f) + \max_{0\leq i\leq j}\max_{0\leq k<2^i} 2^{i\alpha}\lambda_{i,k}(f)\right\}, &(1.6)\\ \|f-E_jf\|_\alpha &\leq C\sup_{i>j}\max_{0\leq k<2^i} 2^{i\alpha}\lambda_{i,k}(f). &(1.7)\end{aligned}$$

Il est clair que $|\lambda_0(f)| = |f(1)| \leq w_\alpha(f,1)$ et que :

$$2^{i\alpha}\lambda_{i,k}(f) \leq 2^{i\alpha}w_\alpha(f,2^{-(i+1)})2^{-(i+1)\alpha} \leq w_\alpha(f,2^{-(i+1)}). \tag{1.8}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \|E_jf\|_\alpha &\leq 2Cw_\alpha(f,1), &(1.9)\\ \|f-E_jf\|_\alpha &\leq Cw_\alpha(f,2^{-j}). &(1.10)\end{aligned}$$

On remarque alors que l'on a l'estimation élémentaire suivante :

$$\forall f \in \mathrm{H}_\alpha, \quad \forall j \geq 1, \quad w_\alpha(f, 1) \leq 2^j w_\alpha(f, 2^{-j}). \tag{1.11}$$

En effet soient x et y fixés dans $[0, 1]$. Si $2^{-j} < |x - y|$, on découpe $[0, 1]$ en 2^j intervalles dyadiques et on obtient par chaînage :

$$|f(x) - f(y)| \leq 2^j w_\alpha(f, 2^{-j}) 2^{-j\alpha} \leq 2^j w_\alpha(f, 2^{-j}) |x - y|^\alpha.$$

Si $|x - y| \leq 2^{-j}$, on a directement :

$$|f(x) - f(y)| \leq w_\alpha(f, 2^{-j}) |x - y|^\alpha.$$

Par (1.10), la convergence uniforme sur K de $w_\alpha(f, \delta)$ vers 0 implique (1.5). Grâce à (1.9) et (1.11), on voit que (1.4) est alors automatiquement réalisée. Ceci prouve la suffisance de (1.3) pour la relative compacité de K.

Pour montrer sa nécessité, on ne perd pas de généralité en supposant K compact. Il résulte de (1.11) que pour $\delta > 0$ fixé, $w_\alpha(f, \delta)$ est une norme sur H_α^0, équivalente à $\|f\|_\alpha$. Ainsi l'application $w_\alpha(\,.\,, \delta)$ est continue sur H_α^0. Si δ_n décroît vers 0, la suite d'applications continues $w_\alpha(\,.\,, \delta_n)$ décroît vers 0 sur H_α^0, à cause de la définition même de H_α^0. Par le théorème de Dini, cette décroissance est uniforme sur le compact K, ce qui prouve (1.3). ∎

Remarquons que le caractère superflu de la condition (1.4) vient de la nullité à l'origine de toutes les fonctions de H_α. Sans cette nullité, il faudrait redéfinir la norme de l'espace en lui ajoutant par exemple $|f(0)|$. Le contrôle du module de continuité hölderien n'impliquerait plus celui de la norme hölderienne globale et on ne pourrait plus faire l'économie d'une condition contrôlant la *taille* des trajectoires (via $\|E_j f\|_\alpha$ ou $\|f\|_\infty$ ou au moins leur valeur en 0).

1.2 Fonctionnelles et opérateurs sur H_α^0

Certains opérateurs et fonctionnelles utiles en statistique et quelques opérateurs importants en analyse sont continus sur H_α. Comme la convergence en loi se conserve par image continue, la convergence en loi dans un espace fonctionnel permet ainsi d'obtenir celle de fonctionnelles de trajectoires et des processus images continues. De plus, comme la topologie de H_α est plus fine que celle de $\mathcal{C}[0, 1]$, on peut espérer obtenir plus de fonctionnelles continues. Nous présentons dans cette section des exemples de fonctionnelles et d'opérateurs continus sur H_α. Commençons par le dual de H_α^0.

1.2.1 Dual de H^0_α

On note $(\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$, l'espace des suites réelles $a = (a_0, a_1, \dots)$ telles que $\|a\|_{\ell^1} = \sum_{n\geq 0} |a_n| < +\infty$. Le dual de H^0_α est donné par les résultats suivants :

Théorème 1.9 (Ciesielski [8]) *Toute fonctionnelle linéaire continue φ sur $(\mathrm{H}^0_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ est de la forme*

$$\varphi(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n \tag{1.12}$$

avec $u_0 = \lambda_0(f)$, $u_n = 2^{(j+1)\alpha}\lambda_n(f)$, $n = 2^j + k$, $(j \geq 0, 0 \leq k < 2^j)$ et $a = (a_0, a_1, \dots) \in \ell^1$.

De plus $\|\varphi\|_{(\mathrm{H}^0_\alpha)'} \leq \|S_\alpha\| \cdot \|a\|_{\ell^1}$, $\|a\|_{\ell^1} \leq \|T_\alpha\| \cdot \|\varphi\|_{(\mathrm{H}^0_\alpha)'}$ et les constantes $\|S_\alpha\|$ et $\|T_\alpha\|$ sont optimales.

Ce théorème nous permet de proposer une caractérisation plus intrinsèque du dual de H^0_α.

Théorème 1.10 *φ est une forme linéaire continue sur H^0_α si et seulement s'il existe μ mesure signée sur $[0,1]$ et ν mesure signée sur $[0,1]^2$ telles que :*

$$\varphi(f) = \int_{[0,1]} f(t)\mu(dt) + \int_{[0,1]^2} \frac{2f(t) - f(t+u) - f(t-u)}{u^\alpha}\nu(dt, du) \tag{1.13}$$

où la deuxième intégrande vaut zéro lorsque $u = 0$, ce qui revient à la prolonger par continuité puisque $f \in \mathrm{H}^0_\alpha$.

Preuve : On rappelle qu'une mesure signée est une différence de deux mesures positives de masses finies. φ telle qu'elle est définie par (1.13) est clairement une forme linéaire et

$$|\varphi(f)| \leq \|f\|_\infty |\mu|([0,1]) + 2\|f\|_\alpha |\nu|([0,1]^2).$$

Ainsi $|\varphi(f)| \leq c\|f\|_\alpha$ où $c = |\mu|([0,1]) + 2|\nu|([0,1]^2)$. Ceci entraîne sa continuité.

Réciproquement, si φ est une forme linéaire continue sur H^0_α, d'après le théorème 1.9, il existe $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^1$ telle que

$$\varphi(f) = \sum_{n\geq 0} a_n u_n \quad \text{avec} \quad u_0 = \lambda_0(f) \quad \text{et} \quad u_n = 2^{(j+1)\alpha}\lambda_n(f), n \geq 1.$$

En posant $\mu = a_0\delta_1$ (δ désignant la mesure de Dirac) et

$$\nu = \sum_{j\geq 0} \sum_{k=0}^{2^j-1} \frac{1}{2} a_{2^j+k} \delta_{t_{j,k}} \otimes \delta_{2^{-j-1}}, \quad \text{où} \quad t_{j,k} = \frac{k+1/2}{2^j},$$

on a

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &= \sum_{n\geq 0} a_n u_n \\
&= a_0 f(1) + \sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{2^j-1} \frac{a_{2^j+k}}{2}\Big\{2f\Big(\frac{k+1/2}{2^j}\Big) - f\Big(\frac{k+1}{2^j}\Big) - f\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\Big\}2^{(j+1)\alpha} \\
&= \int_{[0,1]} f(t)\mu(dt) + \int_{[0,1]^2} \frac{2f(t)-f(t+u)-f(t-u)}{u^\alpha}\nu(dt,du).
\end{aligned}$$

Ainsi φ admet la représentation (1.13). ∎

Remarque : Il est clair qu'il n'y a pas unicité de la décomposition (1.13). Le dual $\mathrm{H}_\alpha^{0\,\prime}$ est en fait isomorphe à un quotient de l'espace de Banach $\mathcal{M}[0,1]\oplus\mathcal{M}[0,1]^2$. L'intérêt de la décomposition (1.13) est de clarifier la structure d'une forme linéaire continue sur H_α^0. Sa première composante μ *charge* les valeurs de f, comme une forme linéaire continue sur $C[0,1]$. La deuxième composante ν *charge* les différences secondes de f avec pénalisation $u^{-\alpha}$, ce que l'on pourrait appeler les accroissements hölderiens de f.

1.2.2 Exemples de fonctionnelles

On donne maintenant quelques exemples de fonctionnelles continues sur H_α^0.

Exemple 1 : Cet exemple dû à Ciesielski, nécessite l'introduction d'une classe particulière de formes linéaires continues sur $\mathcal{C}[0,1]$. Soit $f\in\mathcal{C}[0,1]$ et g une fonction à variation $V(g)$ bornée sur $[0,1]$. On considère l'intégrale $\varphi(f)=\int_0^1 g\,df$ dont l'existence n'est pas évidente puisque f n'étant pas supposée à variation bornée, on ne peut la considérer comme une intégrale de Stieltjes. En fait on la construit comme :

$$\varphi(f)=\int_0^1 g(t)df(t)=\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 g_N(t)\,df(t)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^N a_nb_n, \qquad (1.14)$$

où $g_N=\sum_{n=0}^N a_n\chi_n$ est la somme partielle de la série de Haar de g et en notant :

$$b_n=\int_0^1 \chi_n(t)df(t):\;=\lambda_n(f),$$

le n-ième coefficient de Schauder de f. Remarquons que lorsque f est de classe C^1, l'intégrale ci-dessus coïncide avec la définition classique (*i.e.* au sens de Riemann) puisque $\int_0^1\chi_n(t)f'(t)dt=\lambda_n(f)$. L'existence de la limite dans (1.14) résulte du lemme élémentaire suivant.

Lemme 1.11 *Si g est une fonction à variation $V(g)$ bornée sur $[0,1]$ et $(a_n(g))_{n\geq 0}$ est la suite de ses coefficients de Haar alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(g)| < +\infty$.*

Preuve : On a : $\chi_0(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ et pour $j \geq 0$, $0 \leq k < 2^j$,

$$\chi_{2^j+k} = 2^{j/2}\Big(\mathbf{1}_{\left[\frac{k}{2^j},\frac{k+1/2}{2^j}\right[} - \mathbf{1}_{\left[\frac{k+1/2}{2^j},\frac{k+1}{2^j}\right[}\Big).$$

Clairement, $|a_0(g)| = |\int_0^1 g(t)\,dt| < +\infty$ car g est bornée. D'autre part,

$$\begin{aligned} a_{2^j+k}(g) &= \int_0^1 \chi_{2^j+k}(t) g(t)\,dt \\ &= 2^{j/2}\int_0^1 g(t)\Big(\mathbf{1}_{\left[\frac{k}{2^j},\frac{k+1/2}{2^j}\right[}(t) - \mathbf{1}_{\left[\frac{k+1/2}{2^j},\frac{k+1}{2^j}\right[}(t)\Big)\,dt \\ &= 2^{j/2}\left[\int_{k2^{-j}}^{(k+1/2)2^{-j}} g(t)\,dt - \int_{(k+1/2)2^{-j}}^{(k+1)2^{-j}} g(t)\,dt\right] \end{aligned}$$

En faisant le changement de variables $t = (u+2k)2^{-j-1}$ dans la première intégrale et $t = (v+2k+1)2^{-j-1}$ dans la deuxième, on obtient :

$$a_{2^j+k}(g) = \frac{1}{2\cdot 2^{j/2}}\int_0^1 \left[g\Big(\frac{t+2k}{2^{j+1}}\Big) - g\Big(\frac{t+2k+1}{2^{j+1}}\Big)\right]dt.$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} |a_{2^j+k}(g)| \leq \frac{1}{2\cdot 2^{j/2}} V(g),$$

car à t fixé,

$$\sum_{k=0}^{2^j}\left|g\left(\frac{t}{2^{j+1}} + \frac{k}{2^j}\right) - g\left(\frac{t}{2^{j+1}} + \frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}\right)\right| < V(g),$$

les intervalles $\left[\frac{t+2k}{2^{j+1}}, \frac{t+2k+1}{2^{j+1}}\right]$ $(0 \leq k < 2^j)$ étant disjoints. Par suite

$$\sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{2^j-1}|a_{2^j+k}(g)| \leq \frac{V(g)}{2}\sum_{j\geq 0}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^j < +\infty,$$

d'où la conclusion. ■

A partir de ces fonctionnelles linéaires continues φ sur $\mathcal{C}[0,1]$, en imposant des conditions de régularité supplémentaires à g, Ciesielski a obtenu des fonctionnelles continues sur H^0_α.

Théorème 1.12 (Ciesielski [8]) *Soit* $0 < \alpha < 1$, $\alpha+\beta = 1$ *et* $g \in H^\beta[0,1]$. *On suppose de plus que* g *est à variation* $V(g)$ *bornée sur* $[0,1]$. *La fonctionnelle linéaire*

$$\varphi(f) = \int_0^1 g(t)df(t)$$

est continue sur H^0_α *et sa norme satisfait l'inégalité :*

$$\|\varphi\|_{(\mathrm{H}^0_\alpha)'} \leq \left|\int_0^1 g(t)\,dt\right| + A(\alpha)\left[V(g)\|g\|_\beta\right]^{1/2},$$

où $A(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}(2^{\alpha/2}-1)}$.

Exemple 2 :

$$\varphi(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{t^{1+\beta}}\,dt, \quad \beta < \alpha.$$

Il est clair que c'est une fonctionnelle linéaire et

$$|\varphi(f)| \leq \|f\|_\alpha \int_0^1 \frac{dt}{t^{1+\beta-\alpha}} < +\infty \quad \text{pour} \quad \beta < \alpha.$$

Exemple 3 : Cet exemple généralise le précédent. Pour $0 < t_0 < 1$ et $0 < \beta < \alpha$, considérons :

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &= \text{v.p.} \int_0^1 \frac{f(t)\operatorname{sgn}(t-t_0)}{|t-t_0|^{1+\beta}}\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{t_0-\varepsilon} \frac{-f(t)}{(t_0-t)^{1+\beta}}\,dt + \int_{t_0+\varepsilon}^1 \frac{f(t)}{(t-t_0)^{1+\beta}}\,dt\right\}.
\end{aligned}$$

Il est clair que φ est une fonctionnelle linéaire et que

$$\varphi(f) = \text{v.p.} \int_0^1 \frac{f(t_0)\operatorname{sgn}(t-t_0)}{|t-t_0|^{1+\beta}}\,dt + \int_0^1 \frac{(f(t)-f(t_0))\operatorname{sgn}(t-t_0)}{|t-t_0|^{1+\beta}}\,dt,$$

où la deuxième intégrale est convergente ($\beta < \alpha$) et vérifie :

$$\left|\int_0^1 \frac{(f(t)-f(t_0))\operatorname{sgn}(t-t_0)}{|t-t_0|^{1+\beta}}\,dt\right| \leq \|f\|_\alpha \int_0^1 \frac{dt}{|t-t_0|^{1+\beta-\alpha}}.$$

La valeur principale de la première intégrale se calcule explicitement.

$$\begin{aligned}
\text{v.p.} \int_0^1 \frac{f(t_0)\operatorname{sgn}(t-t_0)}{|t-t_0|^{1+\beta}}\,dt &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{t_0-\varepsilon} \frac{-f(t_0)\,dt}{(t_0-t)^{1+\beta}} + \int_{t_0+\varepsilon}^1 \frac{f(t_0)\,dt}{(t_0-t)^{1+\beta}}\right\} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{t_0}^{\varepsilon} \frac{f(t_0)}{u^{1+\beta}}\,du + \int_\varepsilon^{1-t_0} \frac{f(t_0)}{v^{1+\beta}}\,dv\right\} \\
&= \frac{f(t_0)}{\beta}\left(\frac{1}{t_0^\beta} - \frac{1}{(1-t_0)^\beta}\right).
\end{aligned}$$

Comme $|f(t_0)|$ est majoré par $\|f\|_\alpha$, on obtient finalement

$$|\varphi(f)| \leq C(\alpha,\beta,t_0)\|f\|_\alpha$$

et la continuité de la fonctionnelle linéaire φ s'en déduit. ∎

Exemple 4 :

$$\varphi(f) = \int_0^1 \frac{1}{u}\int_{\{|t-s|\leq u\}} \frac{f(t)-f(s)}{|t-s|^\alpha}\, ds\, dt\, \mu(du)$$

où μ est une mesure signée sur $[0,1]$. φ est une fonctionnelle linéaire et

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| &\leq \|f\|_\alpha \int_0^1 \frac{1}{u}\int_{\{|t-s|\leq u\}} ds\, dt\, |\mu|(du) \\ &\leq 2|\mu|([0,1])\|f\|_\alpha, \end{aligned}$$

φ est donc continue.

Exemple 5 : Listons pour mémoire quelques fonctionnelles non linéaires dont la continuité sur H^0_α est évidente :

$$\varphi_1(f) = \|f\|_\alpha, \quad \varphi_2(f) = w_\alpha(f,\delta), \quad \varphi_3(f) = \sup_{t\in[0,1]} \frac{|f(t)-f(t_0)|}{|t-t_0|^\alpha}.$$

Exemple 6 : La p-variation au sens de Wiener pour $p \geq 1/\alpha$.

Soit f une fonction $[0,1] \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $c = c(f)$ telle que pour toute famille $(I_k, k \geq 1)$ d'intervalles disjoints $(I_k =]a_k, b_k[)$ de $[0,1]$:

$$\Big(\sum_k |f(b_k) - f(a_k)|^p\Big)^{1/p} \leq c < +\infty. \tag{1.15}$$

On dit alors que f a une p-variation bornée et on appelle p-variation de f la borne inférieure $V_p(f)$ des constantes c vérifiant (1.15). Si $f \in \mathrm{H}_\alpha$, $V_p(f)$ est finie pour tout $p \geq 1/\alpha$, en effet :

$$\begin{aligned} \Big(\sum_k |f(b_k) - f(a_k)|^p\Big)^{1/p} &= \Big(\sum_k (b_k-a_k)^{p\alpha}\frac{|f(b_k)-f(a_k)|^p}{(b_k-a_k)^{p\alpha}}\Big)^{1/p} \\ &\leq (\|f\|_\alpha^p)^{1/p}\Big(\sum_k (b_k-a_k)^{p\alpha}\Big)^{1/p} \\ &\leq \|f\|_\alpha\big(\sum_k (b_k-a_k)\big)^{1/p} \end{aligned}$$

car $p\alpha \geq 1$ et $b_k - a_k \leq 1$. Comme $\sum_k (b_k - a_k) \leq 1$, on obtient

$$\Big(\sum_k |f(b_k) - f(a_k)|^p\Big)^{1/p} \leq \|f\|_\alpha < +\infty.$$

Par suite $V_p(f) \leq \|f\|_\alpha$ et comme V_p vérifie l'inégalité triangulaire, ceci entraîne sa continuité.

1.2.3 Exemples d'opérateurs

Exemple 1 : *Intégration fractionnaire*
Considérons l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre β, de Riemann-Liouville (cf. par exemple M. Riesz [38]) :

$$I^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} f(t)\, dt, \quad x \in [0,1]. \tag{1.16}$$

L'intégrale converge au moins pour $\beta > 0$ et f continue. L'opérateur I satisfait les propriétés suivantes :

$$I^\beta(I^\gamma) = I^{\beta+\gamma}, \qquad \frac{d}{dx}(I^{\beta+1}) = I^\beta.$$

Proposition 1.13 *On suppose $\alpha, \beta > 0$ et $\alpha + \beta < 1$. Alors I^β est un opérateur linéaire continu de H_α dans $H_{\alpha+\beta}[0,1]$.*

Preuve : Il est clair que I^β est un opérateur linéaire. L'appartenance de $I^\beta f$ à $H_{\alpha+\beta}$ pour $f \in \mathrm{H}_\alpha$ est démontrée par le théorème 14 de Hardy Littlewood [21]. Pour vérifier la continuité de I^β, nous reprenons leur preuve en regardant comment les constantes sous-entendues dans leurs O dépendent de f. Il s'agit d'estimer

$$\Lambda = I^\beta f(x) - I^\beta f((x-h) \vee 0), \quad 0 \leq h \leq 1,$$

par un $O(h^{\alpha+\beta})$ uniformément en x.
<u>1^{er} cas</u> : $x - h \geq 0$, on a

$$\Lambda = I^\beta f(x) - I^\beta f(0) = I^\beta f(x),$$

ainsi

$$\begin{aligned} |\Lambda| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} |f(t)|\, dt \\ &\leq \frac{\|f\|_\alpha}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} x^\alpha\, dt = \|f\|_\alpha \frac{x^\alpha}{\Gamma(\beta)} \frac{x^\beta}{\beta}. \end{aligned}$$

Par suite
$$|\Lambda| \le \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\|f\|_\alpha h^{\alpha+\beta}.$$
<u>2e cas</u> : $0 < x-h < x \le 1$, on a
$$\Gamma(\beta)\Lambda = \int_0^x f(x-u)u^{\beta-1}du - \int_0^{x-h} f(x-h-v)v^{\beta-1}dv.$$
En posant $h+v=u$ dans la deuxième intégrale, on obtient :
$$\begin{aligned}\Gamma(\beta)\Lambda &= \int_0^x f(x-u)u^{\beta-1}\,du - \int_h^x f(x-u)(u-h)^{\beta-1}\,du\\ &= -\int_0^x (f(x)-f(x-u))u^{\beta-1}\,du\\ &\quad+\int_h^x (f(x)-f(x-u))(u-h)^{\beta-1}\,du + \frac{f(x)}{\beta}(x^\beta-(x-h)^\beta),\end{aligned}$$
qu'on peut écrire aussi, comme
$$\begin{aligned}\Gamma(\beta)\Lambda &= \frac{f(x)}{\beta}(x^\beta-(x-h)^\beta) - \int_0^h (f(x)-f(x-u))u^{\beta-1}\,du\\ &\quad -\int_h^x (f(x)-f(x-u))(u^{\beta-1}-(u-h)^{\beta-1})\,du\\ &= J_1+J_2+J_3.\end{aligned}$$
Majoration de J_1
<u>1er cas</u> : $h \le x \le 2h$, on a
$$|J_1| = \frac{|f(x)|}{\beta}(x^\beta-(x-h)^\beta) \le \frac{1}{\beta}\|f\|_\alpha x^\alpha(2h)^\beta,$$
par suite
$$|J_1| \le \frac{2^{\alpha+\beta}}{\beta}\|f\|_\alpha h^{\alpha+\beta}.$$
<u>2e cas</u> : $x > 2h$ (et donc $x-j > x/2$), on a $x^\beta-(x-h)^\beta = \beta(x-\theta h)^{\beta-1}h$, $\theta \in]0,1[$, par le théorème des accroissements finis. Ainsi
$$\begin{aligned}x^\beta-(x-h)^\beta &\le \beta(x-h)^{\beta-1}h, \quad \text{car} \quad \beta-1<0,\\ &\le \beta\Big(\frac{x}{2}\Big)^{\beta-1}h = \beta 2^{1-\beta}x^{\beta-1}h\end{aligned}$$
D'où $|J_1| \le \|f\|_\alpha 2^{1-\beta}x^{\alpha+\beta-1}h$ et comme $\alpha+\beta<1$ et $x>h$, on obtient
$$|J_1| \le 2^{1-\beta}\|f\|_\alpha h^{\alpha+\beta}.$$

Une majoration commune pour les deux cas est donc :

$$|J_1| \leq \frac{2}{\beta}\|f\|_\alpha h^{\alpha+\beta}.$$

Majoration de J_2

$$\begin{aligned}|J_2| &\leq \int_0^h |f(x)-f(x-u)|u^{\beta-1}\,du \\ &\leq \int_0^h \|f\|_\alpha u^{\alpha+\beta-1}\,du = \|f\|_\alpha \frac{h^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$|J_2| \leq \frac{\|f\|_\alpha}{\beta} h^{\alpha+\beta}.$$

Majoration de J_3

$$\begin{aligned}|J_3| &\leq \int_h^x \|f\|_\alpha \left|u^{\beta-1}-(u-h)^{\beta-1}\right|du \\ &= \|f\|_\alpha \int_h^x u^\alpha((u-h)^{\beta-1}-u^{\beta-1})\,du, \quad \text{car} \quad \beta-1<0.\end{aligned}$$

On pose $u = hw$, on obtient

$$\begin{aligned}|J_3| &\leq \|f\|_\alpha h^{\alpha+\beta} \int_1^{x/h} w^\alpha((w-1)^{\beta-1}-w^{\beta-1})\,dw \\ &\leq \|f\|_\alpha h^{\alpha+\beta} \int_1^{+\infty} w^\alpha((w-1)^{\beta-1}-w^{\beta-1})\,dw.\end{aligned}$$

Notons

$$C_{\alpha,\beta} = \int_1^{+\infty} w^\alpha((w-1)^{\beta-1}-w^{\beta-1})\,dw.$$

Au voisinage de l'infini, $(w-1)^{\beta-1}-w^{\beta-1} \sim w^{\beta-1}(1-\beta)w^{-1}$, donc l'intégrande dans $C_{\alpha,\beta}$ est équivalente à $(\beta-1)w^{\alpha+\beta-2}$ et comme $\alpha+\beta-2<-1$, on en déduit que $C_{\alpha,\beta}$ est finie.

Finalement

$$\left|I^\beta f(x) - I^\beta f(y)\right| \leq \left\{\frac{3}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{C_{\alpha,\beta}}{\Gamma(\beta)}\right\} \|f\|_\alpha |x-y|^{\alpha+\beta},$$

par suite

$$\|I^\beta f\|_{\alpha+\beta} \leq C\|f\|_\alpha \quad \text{avec} \quad C = \frac{3}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{C_{\alpha,\beta}}{\Gamma(\beta)}$$

Ainsi I^β est bien un opérateur linéaire continu de H_α dans $H_{\alpha+\beta}[0,1]$. ■

Exemple 2 : *Dérivation fractionnaire*

L'opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre β d'une fonction f est défini formellement par :

$$D^\beta f(x) = \frac{d}{dx}(I^{1-\beta} f)(x) \tag{1.17}$$

où $I^{1-\beta}$ est l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre $1-\beta$ de Riemann-Liouville.

On commence par un résultat de Hardy-Littlewood sur l'existence et la définition de l'opérateur D^β sur H_α.

Théorème 1.14 (Hardy-Littlewood [21]) *Si $0 < \beta < \alpha \leq 1$ et $f \in \mathrm{H}_\alpha$, alors $D^\beta f$ existe et $f = I^\beta D^\beta f$. De plus*

$$D^\beta(\mathrm{H}_\alpha) = \mathrm{H}_{\alpha-\beta}[0,1] \quad et \quad D^\beta(\mathrm{H}_\alpha^0) = \mathrm{H}_{\alpha-\beta}^0[0,1]\,.$$

Proposition 1.15 *D^β est un opérateur continu de H_α dans $\mathrm{H}_{\alpha-\beta}[0,1]$.*

Preuve : D'après le théorème 1.14, $I^\beta D^\beta = \mathrm{Id}_{\mathrm{H}_\alpha}$ pour $0 < \beta < \alpha$. Vérifions que $D^\beta I^\beta = \mathrm{Id}_{\mathrm{H}_{\alpha-\beta}}$. Soit $g \in \mathrm{H}_{\alpha-\beta}$,

$$\begin{aligned} D^\beta I^\beta g(x) &= \frac{d}{dx}\left\{I^{1-\beta}(I^\beta g)\right\}(x) = \frac{d}{dx}(I^1 g) = \\ &= \frac{d}{dx}\left(\int_0^x g(t)\,dt\right) = g(x). \end{aligned}$$

On en déduit que I^β est une bijection de $\mathrm{H}_{\alpha-\beta}$ sur H_α. I^β est un opérateur linéaire continu et bijectif de l'espace de Banach $\mathrm{H}_{\alpha-\beta}$ sur l'espace de Banach H_α. Son inverse D^β est donc lui aussi continu de H_α dans $\mathrm{H}_{\alpha-\beta}$, grâce à un corollaire classique du théorème de l'application ouverte (cf. par exemple Brézis [7], corollaire II.6 p. 19).

1.3 Processus à trajectoires dans H_α

Dans cette section, nous présentons deux points de vue sur les processus stochastiques à trajectoires hölderiennes. Dans le premier, on observe un nombre fini de valeurs $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_k)$ à partir desquelles on souhaite reconstituer la trajectoire et étudier sa régularité hölderienne. Dans le deuxième point de vue, on considère directement un processus à trajectoires dans H_α comme une variable aléatoire $\xi\colon \Omega \to \mathrm{H}_\alpha$. Sa loi $P_\xi = P\xi^{-1}$ est une mesure de probabilité sur la tribu borélienne de H^α.

1.3.1 Modification à trajectoires p.s. dans H_α

Etant donné un processus $\{\xi_t, t \in [0,1]\}$, quelques conditions pour qu'il ait une version à trajectoires presque sûrement dans H_α sont données par les théorèmes suivants :

Théorème 1.16 (Kolmogorov) *Soit $(\xi_t, t \in [0,1])$ un processus défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et supposons qu'il existe $\delta > 0$, $\gamma > 0$ et $C > 0$ tels que :*

$$\forall \lambda > 0, \quad P(|\xi_t - \xi_s| > \lambda) \le \frac{C}{\lambda^\gamma}|t-s|^{1+\delta}. \tag{1.18}$$

Alors il existe une version de ξ à trajectoires dans H_α^0 pour tout $0 < \alpha < \delta/\gamma$.

Théorème 1.17 (Nobelis [29]) *Une condition suffisante pour que presque toutes les trajectoires de ξ soient dans H_α^0 est qu'il existe une fonction de Young ϕ telle que :*

$$\int_0^1 Q(u)\phi^{-1}\Big(\frac{1}{u^2}\Big)\frac{1}{u^{\alpha+1}}du < +\infty, \tag{1.19}$$

avec $Q(u) = \inf\Big\{a > 0\colon \int_{\{|s-t|<u\}} \mathbb{E}\,\phi\{\frac{1}{a}|\xi_t - \xi_s|\Big\}\,dsdt < 1.$

Dans ces conditions, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{|t-s|<\varepsilon}\frac{|\xi_t - \xi_s|}{12^\alpha|t-s|^\alpha}\right] \le 6^5\int_0^\varepsilon Q(u)\phi^{-1}\Big(\frac{1}{u^2}\Big)\frac{1}{u^{\alpha+1}}du. \tag{1.20}$$

Rappelons qu'une fonction de Young est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue, paire, convexe et vérifiant : $\lim_{x\to 0}\frac{\phi(x)}{x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\phi(x)}{x} = +\infty$.

Corollaire 1.18 (Nobelis [29]) *Une condition suffisante pour que presque toutes les trajectoires de ξ soient dans H_α^0 est qu'il existe un nombre réel $p > 1$, tel que :*

$$\int_0^1 \left(\int_{\{|s-t|<u\}} \mathbb{E}\,|\xi_t - \xi_s|^p dsdt\right)^{1/p} \frac{1}{u^{\alpha+1+2/p}}du < +\infty. \tag{1.21}$$

On retrouve ainsi une condition suffisante antérieure d'Ibragimov.

Corollaire 1.19 (Ibragimov [23]) *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, croissante telle que pour tous s, t dans $[0,1]$:*

$$\mathbb{E}\,|\xi_t - \xi_s|^p \le f^p(|t-s|). \tag{1.22}$$

Une condition suffisante pour que presque toutes les trajectoires de ξ *soient dans* H_α *est que*

$$\int_0^1 \frac{f(u)}{u^{\alpha+1+1/p}} du < +\infty . \tag{1.23}$$

Dans le cas où l'intégrale diverge, Ibragimov a montré qu'il existe un processus ζ vérifiant (1.22), tel que

$$P\left(\sup_{s\neq t} \frac{|\zeta_t - \zeta_s|}{|t-s|^\alpha} = +\infty\right) = 1. \tag{1.24}$$

1.3.2 Elément aléatoire dans H_α

Le deuxième point de vue, *qui est celui adopté dans notre travail*, considère un processus à trajectoires hölderiennes comme un élément aléatoire de l'espace fonctionnel H_α. On observe directement toute une trajectoire, ce qui correspond au tirage au hasard d'une fonction ξ suivant la loi P_ξ. Cette situation se présente par exemple dans l'étude des principes d'invariance où l'on peut observer directement toute la trajectoire $\xi_n(t)$ (ligne polygonale) ou lorsque la trajectoire est fournie par un appareillage analogique (sismographe ...).

L'étude de la convergence en loi des éléments aléatoires de H_α^0 repose sur le résultat suivant.

Proposition 1.20 *La convergence en loi dans* H_α^0 *d'une suite de processus* $(\xi_n,\ n \geq 1)$ *équivaut à l'équitension sur* H_α^0 *de la suite des lois* $P_n = P\xi_n^{-1}$ *des éléments aléatoires* ξ_n *et à la convergence des lois fini-dimensionnelles de* ξ_n.

Preuve : En effet, il est clair que l'équitension et la convergence des lois fini-dimensionnelles sont des conditions nécessaires pour la convergence faible hölderienne d'une suite de processus $(\xi_n,\ n \geq 1)$. D'autre part, si la suite des lois $(P_n)_{n\geq 1}$ est équitendue, il existe au moins une sous-suite de $(P_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers P_ξ, loi d'un élément aléatoire ξ de H_α^0. Il reste à montrer que cette loi limite est unique.

Pour cela, on rappelle que si $\mathcal{X}$ est un espace de Banach séparable, sa tribu borélienne $\mathcal{B}_\mathcal{X}$ coïncide avec sa tribu cylindrique $\mathcal{C}_\mathcal{X}$, tribu engendrée par les fonctionnelles φ du dual topologique $\mathcal{X}'$. Ainsi, si on note, pour ξ élément aléatoire de $\mathcal{X}$ et φ élément déterministe de $\mathcal{X}'$,

$$L_\xi(\varphi) = \mathbb{E}\exp(i\langle\xi,\varphi\rangle) = \mathbb{E}\exp(i\varphi(\xi)),$$

la fonctionnelle caractéristique de ξ, on a

$$L_\xi(\varphi) = L_\zeta(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}' \iff \xi \text{ et } \zeta \text{ ont même loi } \quad (P_\xi = P_\zeta).$$

Par le théorème de convergence dominée, on voit facilement que la fonctionnelle caractéristique est continue sur $\mathcal{X}'$. Il suffit donc de tester l'égalité de L_ξ et L_ζ sur une partie dense de $\mathcal{X}'$ pour vérifier l'égalité des lois de ξ et ζ.

Revenons à H_α^0 et soit φ un élément du dual $(\mathrm{H}_\alpha^0)'$. Le théorème 1.9 nous fournit une suite $a = (a_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ telle que :

$$\varphi(f) = a_0 f(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 2^{(j+1)\alpha} \lambda_n(f), \quad f \in \mathrm{H}_\alpha^0. \tag{1.25}$$

De plus $\|\varphi\|_{(\mathrm{H}_\alpha^0)'} \leq \|S_\alpha\| \|a\|_{\ell^1}$. Cette inégalité nous permet de voir, via le critère de Cauchy, que la série dans (1.25) converge pour la topologie de la norme de $(\mathrm{H}_\alpha^0)'$. On en déduit alors que la famille des fonctionnelles $\{\lambda_n, n \geq 0\}$ définies par (1.2) est totale dans $(\mathrm{H}_\alpha^0)'$. Il en résulte immédiatement que la famille des évaluations aux points dyadiques $(f \mapsto f(k2^{-j}))$ est totale dans $(\mathrm{H}_\alpha^0)'$.

Pour conclure, supposons que $(P_n)_{n\geq 1}$ ait deux sous-suites dont les lois convergent respectivement vers P_ξ et P_ζ. La convergence des lois fini-dimensionnelles de $(P_n)_{n\geq 1}$ entraîne l'égalité de P_ξ et P_ζ. ■

1.3.3 Résultats d'équitension dans H_α

Dans les problèmes de convergence faible de processus dans H_α, nous avons besoin de conditions d'équitension. En raison de cette notion d'équitension, on travaillera sur $(\mathrm{H}_\alpha^0, \|\cdot\|_\alpha)$ qui est un espace polonais. Comme H_α^0 s'injecte continûment dans H_α, la convergence en loi sur H_α^0 implique la convergence en loi sur H_α. Une première condition suffisante est donnée par :

Théorème 1.21 (Kerkyacharian, Roynette [24]) *Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de processus nuls en 0 et vérifiant pour des constantes $\gamma > 0$, $\delta > 0$ et $c > 0$:*

$$\forall \lambda > 0, \quad P(|\xi_n(t) - \xi_n(s)| > \lambda) \leq \frac{c}{\lambda^\gamma} |t - s|^{1+\delta}. \tag{1.26}$$

Alors la suite des lois P_n des processus ξ_n est équitendue dans H_α^0 pour $0 < \alpha < \delta/\gamma$.

Dans les applications, cette condition est utilisée essentiellement sous sa version moments, obtenue via l'inégalité de Markov, à partir de (1.26).

Corollaire 1.22 (Lamperti [25]) *Soit* $(\xi_n)_{n\geq 1}$ *une suite de processus nuls en* 0 *et vérifiant pour des constantes* $\gamma > 0$, $\delta > 0$ *et* $c > 0$ *:*

$$\mathbb{E}\,|\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma \leq c|t-s|^{1+\delta}. \tag{1.27}$$

Alors la suite des lois P_n *des processus* ξ_n *est équitendue dans* H^0_α *pour* $0 < \alpha < \delta/\gamma$.

Par ailleurs, le lemme 1.8 nous donne directement la C.N.S. suivante, a priori moins maniable, mais utile pour tester l'optimalité de certains résultats (cf. chapitre 3).

Théorème 1.23 *Soit* $(\xi_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'éléments aléatoires de* H^0_α. *Elle est équitendue si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{\delta \to 0} \sup_{n\geq 1} P(w_\alpha(\xi_n, \delta) \geq \varepsilon) = 0.$$

Enfin nous avons obtenu le résultat suivant, inspiré d'un théorème de Davydov [13] dans le cadre $D[0,1]$ (espace de Skorokhod), pour disposer de plus de souplesse dans l'utilisation des inégalités de moment.

Théorème 1.24 (Hamadouche [19]) *Soit* $(\xi_n(t))_{n\geq 1}$ *une suite de processus à trajectoires dans* H^0_α, *vérifiant les conditions suivantes :*

a) Il existe des constantes $a > 1$, $b > 1$, $c > 0$ *et une suite de nombres positifs* $(a_n) \downarrow 0$ *telles que :*

$$\mathbb{E}\,|\xi_n(t) - \xi_n(s)|^a \leq c|t-s|^b, \tag{1.28}$$

pour tout n *et tous* s, t *tels que* $|t-s| \geq a_n$ *;*

b) $\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P\{w_\alpha(\xi_n, a_n) > \varepsilon\} = 0.$

Alors pour tout $\alpha < a^{-1}(\min(a,b) - 1)$, *la suite* $(\xi_n)_{n\geq 1}$ *est équitendue dans* H^0_α.

Preuve : On construit un autre processus ζ_n qui interpole linéairement ξ_n aux points $t_k = ka_n (0 \leq k \leq k_n)$ avec $k_n = [\frac{1}{a_n}]$ et $t_{k_n+1} = 1$. Les trajectoires de ζ_n sont des lignes polygonales, donc dans H^0_α, pour tout $\alpha \leq 1$. On utilise alors a) pour montrer l'équitension de $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ et b) pour prouver la convergence en probabilité vers 0 de $\|\xi_n - \zeta_n\|_\alpha$. L'équitension de $\{\xi_n, n \geq 1\}$ s'en déduit facilement via la caractérisation séquentielle de la relative compacité des familles de mesures de probabilité sur un espace polonais (ici H^0_α).

<ins>Première étape :</ins> *Equitension de* $\{\zeta_n,\ n \geq 1\}$.

Pour prouver l'équitension dans H^0_α, nous nous appuierons sur la condition suffisante de Kerkyacharian et Roynette (1.21). Plus précisément, en utilisant le corollaire 1.22, nous souhaitons montrer :

$$\mathbb{E}\,|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^a \leq K|t-s|^\gamma, \quad n \geq 1, \quad s,t \in [0,1] \tag{1.29}$$

où $\gamma = \min(a,b)$.
<u>1^er^ cas</u> : Si s et t sont dans le même segment $I_k = [ka_n, (k+1)a_n]$, $(0 \leq k \leq k_n)$, alors $|s-t| \leq a_n \leq 1$ et la définition de ζ_n nous donne :

$$|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)| = a_n^{-1}|t-s||\xi_n(t_k) - \xi_n(t_{k+1})|,$$

d'où en prenant les moments d'ordre a et en utilisant (1.28).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^a &= a_n^{-a}|t-s|^a\,\mathbb{E}\,|\xi_n(t_k) - \xi_n(t_{k+1})|^a \\ &\leq ca_n^{b-a}|t-s|^a \end{aligned}$$

On a $|t-s| \leq a_n \leq 1$, si $b-a<0$, on majore a_n^{b-a} par $|t-s|^{b-a}$; si $b-a \geq 0$, on majore a_n^{b-a} par 1. Nous obtenons ainsi :

$$\mathbb{E}\,|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^a \leq c|t-s|^\gamma, \quad \gamma = \min(a,b).$$

<u>2^e^ cas</u> : Si $s \in I_k$ et $t \in I_{k+1}$, on écrit :

$$|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)| \leq |\zeta_n(t) - \zeta_n(t_{k+1})| + |\zeta_n(t_{k+1}) - \zeta_n(s)|.$$

et par convexité, on se ramène à la majoration du premier cas

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^a &\leq 2^{a-1}c\big(|t-t_{k+1}|^\gamma + |t_{k+1}-s|^\gamma\big) \\ &\leq 2^a c|t-s|^\gamma. \end{aligned}$$

car $\gamma > 0$, $|t - t_{k+1}| \leq |t-s|$ et $|t_{k+1} - s| \leq |t-s|$.
<u>3^e^ cas</u> : Si $s \in I_k$ et $t \in I_{k+j}$ avec $(j>1)$, on découpe l'accroissement de ζ_n en :

$$|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)| \leq |\zeta_n(t) - \zeta_n(t_{k+j})| + |\zeta_n(t_{k+j}) - \zeta_n(t_{k+1})| + |\zeta_n(t_{k+1}) - \zeta_n(s)|.$$

Avec l'inégalité de Jensen, la condition a) et le premier cas, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^a &\leq 3^{a-1}c\big(|t-t_{k+j}|^\gamma + |t_{k+j}-t_{k+1}|^\gamma + |t_{k+1}-s|^\gamma\big) \\ &\leq 3^a c|t-s|^\gamma. \end{aligned}$$

car $|t - t_{k+j}|, |t_{k+j} - t_{k+1}|$ et $|t_{k+1} - s|$ sont inférieurs à $|t-s|$.

Ainsi l'inégalité de moment (1.29) est bien vérifiée (avec $K = 3^\alpha c$). L'équi-tension de $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ en découle.

Deuxième étape : *Convergence en probabilité de* $\|\xi_n - \zeta_n\|_\alpha$.

Posons pour alléger les écritures $\chi_n = \xi_n - \zeta_n$. Nous voulons montrer la convergence en probabilité vers 0 de la suite de variables aléatoires réelles :

$$\|\chi_n\|_\alpha = \sup_{0\leq s<t\leq 1} \frac{|\chi_n(t) - \chi_n(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

Comme à la première étape nous discutons suivant la localisation de s et t.

1^er^ cas : s, $t \in I_k$, donc $|t-s| \leq a_n$. On a

$$\frac{|\chi_n(t) - \chi_n(s)|}{|t-s|^\alpha} \leq \frac{|\xi_n(t) - \xi_n(s)|}{|t-s|^\alpha} + \frac{|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

La trajectoire de ζ_n étant affine sur I_k, on a :

$$\frac{|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|}{|t-s|^\alpha} = \frac{|\xi_n(t_k) - \xi_n(t_{k+1})|}{a_n}|t-s|^{1-\alpha},$$

qui est de la forme $f(u) = ku^{1-\alpha}$, $u = |t-s| \in [0, a_n]$. La fonction f est croissante, son maximum est atteint en $u = a_n$ donc

$$\begin{aligned} \frac{|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|}{|t-s|^\alpha} &\leq \frac{|\zeta_n(t_k) - \zeta_n(t_{k+1})|^\alpha}{a_n} \\ &= \frac{|\xi_n(t_k) - \xi_n(t_{k+1})|^\alpha}{a_n} \leq w_\alpha(\xi_n, a_n). \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{|\chi_n(t) - \chi_n(s)|}{|t-s|^\alpha} \leq 2w_\alpha(\xi_n, a_n).$$

2^e^ cas : $s \in I_k$, $t \in I_{k+1}$. On se ramène au premier cas par l'inégalité triangulaire :

$$\frac{|\chi_n(t) - \chi_n(s)|}{|t-s|^\alpha} \leq \frac{|\chi_n(t) - \chi_n(t_{k+j})|}{|t-s|^\alpha} + \frac{|\chi_n(t) - \chi_n(t_{k+1})|}{|t-s|^\alpha}$$

Comme $|t-s| \geq |t - t_{k+j}|$ et $|t-s| \geq |s - t_{k+1}|$ on obtient

$$\frac{|\chi_n(t) - \chi_n(s)|}{|t-s|^\alpha} \leq 4 \max_{\substack{|t-s|\leq a_n \\ s,t\in[0,1]}} \frac{|\xi_n(t) - \xi_n(s)|}{|t-s|^\alpha} = 4\, w_\alpha(\xi_n, a_n).$$

3[e] cas : $s \in I_k$, $t \in I_{k+j}$ $(j > 1)$.

$$\begin{aligned}\frac{|\chi_n(t)-\chi_n(s)|}{|t-s|^\alpha} &\le \frac{|\chi_n(t)-\chi_n(t_{k+j})|}{|t-s|^\alpha} + \frac{|\chi_n(s)-\chi_n(t_{k+1})|}{|t-s|^\alpha} \\ &\quad + \frac{|\chi_n(t_{k+1})-\chi_n(t_{k+j})|}{|t-s|^\alpha}.\end{aligned}$$

Le dernier terme est nul car $\xi_n(t_i) = \zeta_n(t_i)$ pour $0 \le i \le k_n$. D'après le 1[er] cas, on obtient :

$$\frac{|\chi_n(t)-\chi_n(s)|}{|t-s|^\alpha} \le 4\, w_\alpha(\xi_n, a_n), \quad 0 \le s < t \le 1.$$

Finalement, dans tous les cas de figure, $\|\zeta_n - \xi_n\|_\alpha \le 4\, w_\alpha(\xi_n, a_n)$. L'hypothèse b) du théorème nous donne alors la convergence en probabilité vers zéro de $\|\zeta_n - \xi_n\|_\alpha$. Ainsi $\{\xi_n,\, n \ge 1\}$ est équitendue dans H_α^0. ■

Chapitre 2

Principes d'invariance dans H_α

2.1 Introduction

Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées et telles que $\mathbb{E}\, X_j^2 = 1$. On définit classiquement les lignes polygonales aléatoires ξ_n par interpolation linéaire entre les points $(j/n, S_j/\sqrt{n})$ où $S_j = \sum_{k=1}^{j} X_k$.

Le principe d'invariance de Donsker Prokhorov nous dit alors que ξ_n converge en loi vers le mouvement brownien dans l'espace $C[0,1]$ des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme du supremum. De ce résultat découle la convergence en loi des fonctionnelles des trajectoires, continues sur $C[0,1]$, comme par exemple : $\|\xi_n\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\xi_n(t)|$.

Or on sait que le mouvement brownien W est à trajectoires presque sûrement hölderiennes pour tout ordre $\alpha < 1/2$. Les lignes polygonales ξ_n étant elles-mêmes hölderiennes d'ordre $\alpha = 1$, il est naturel d'étudier la convergence en loi de ξ_n vers W dans les espaces hölderiens H_α, pour $\alpha < 1/2$. Le principe d'invariance correspondant dans H_α a été démontré par Lamperti en 1962 [25]. Kerkyacharian et Roynette ont proposé plus récemment [24] une variante de sa preuve en utilisant la base des fonctions triangulaires de Faber-Schauder et leur condition suffisante d'équitension (1.21).

Théorème 2.1 (Lamperti [25]) *Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, centrées, réduites. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$ tel que $\mathbb{E}\,|X_j|^\gamma < +\infty$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq j < n$:*

$$\xi_n(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}}\Big[\sum_{0<k\leq j} X_k(\omega) + (nt-j)X_{j+1}(\omega)\Big], \quad \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n}. \qquad (2.1)$$

La loi de ξ_n converge étroitement vers la mesure de Wiener P_W dans H_α^0 pour tout $\alpha < 1/2 - 1/\gamma$.

Nous nous proposons d'étendre le résultat de Lamperti pour des variables aléatoires dépendantes. Nous envisagerons deux types de dépendance : le mélange fort (α-mélange[1]) et l'association. A chaque fois les propriétés utilisées sont une inégalité de moments pour les sommes de variables dépendantes et un théorème central limite. Ces outils sont rappelés à la section 2 et nos principes d'invariance sous dépendance sont établis section 3. Dans la section 4, on considère le processus des sommes partielles normalisées de Donsker-Prokhorov (dont les trajectoires sont des fonctions en escaliers) pour des variables aléatoires indépendantes et de même loi. Après lissage par convolution, on montre la convergence en loi dans H_α^0 du processus obtenu vers le mouvement brownien. Ce résultat est étendu au cas de variables dépendantes comme à la section 3.

2.2 Quelques outils de dépendance

On rappelle que le coefficient de mélange fort entre 2 tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est défini par :

$$\alpha(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sup_{(A,B)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} |P(A\cap B) - P(A)P(B)|. \tag{2.2}$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé. On définit le coefficient de mélange fort α_n par

$$\alpha_n = \sup\{\alpha(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_{n+k}^{+\infty}),\ k\in\mathbb{N}^*\} \tag{2.3}$$

où $\mathcal{F}_j^l$ désigne la tribu engendrée par les variables $(X_i,\ j\leq i\leq l)$. On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ est fortement mélangeante ou α-mélangeante si α_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Pour une revue récente sur le mélange, nous renvoyons à [15].

On dit que $X_1, X_2, \cdots, X_m$ est une suite finie de variables associées si

$$\mathrm{Cov}(f(X_1,\dots,X_m), g(X_1,\dots,X_m)) \geq 0, \tag{2.4}$$

pour toute paire f, g de fonctions $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ croissantes coordonnée par coordonnée et telles que cette covariance existe. On dit qu'une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables associées si toute sous-suite finie est associée. Les résultats connus sur l'association montrent que la structure de dépendance

[1] Le respect des notations classiques nous conduit ici à une surcharge, la lettre α étant utilisée à la fois pour l'exposant de régularité hölderienne et le coefficient de mélange. Le contexte devrait éviter toute ambiguité.

d'une suite de variables associées est fortement déterminée par sa structure de covariance c'est-à-dire par le coefficient

$$u(n) = \sup_{k \in \mathbb{N}^*} \sum_{j:\,|j-k| \geq n} \operatorname{Cov}(X_j, X_k). \tag{2.5}$$

Remarque : Si $(X_n)_{n \geq 1}$ est stationnaire

$$u(n) = 2 \sum_{j \geq n+1} \operatorname{Cov}(X_1, X_j).$$

Pour établir des principes d'invariance sous dépendance, nous aurons besoin des théorèmes de limite centrale et des inégalités classiques suivantes.

Théorème 2.2 (Davydov [12]) *Soient X et Y des variables aléatoires réelles centrées de variances finies. Pour p, q, $r \geq 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$,*

$$|\operatorname{Cov}(X, Y)| \leq 8\alpha(X, Y)^{1/p}\, \mathbb{E}^{1/q} |X|^q\, \mathbb{E}^{1/r} |Y|^r. \tag{2.6}$$

Théorème 2.3 (Yokoyama [46]) *Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement stationnaire, α-mélangeante telle que $\mathbb{E}\, X_1 = 0$, $\mathbb{E}\, |X_1|^{\gamma+\varepsilon} < +\infty$ pour un $\gamma > 2$, un $\varepsilon > 0$ et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^{\gamma/2-1} \alpha_n^{\varepsilon/(\gamma+\varepsilon)} < +\infty.$$

Alors il existe $C > 0$ tel que

$$\mathbb{E}\, |X_1 + X_2 + \cdots + X_n|^\gamma \leq C n^{\gamma/2}. \tag{2.7}$$

Théorème 2.4 (Odaïra, Yoshihara [35]) *Soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite α-mélangeante vérifiant pour des constantes $\varepsilon > 0$, $\gamma > 2$ les conditions :*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n^{\varepsilon/(\gamma+\varepsilon)} &< +\infty, \\ \sup_{j \geq 1} \mathbb{E}\, |X_j|^{\gamma+\varepsilon} &< +\infty. \end{aligned}$$

Alors $(X_j)_{j \geq 1}$ satisfait le théorème central limite fonctionnel dans $D[0, 1]$.

Ce dernier théorème a été amélioré par Doukhan, Massart et Rio [16]. Leur méthode pour prouver l'équitension ne nous a pas paru transposable au cadre fonctionnel höldérien.

Voici maintenant les théorèmes concernant l'association.

Théorème 2.5 (Birkel[3]) *Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires associées, centrées, telles que $\sup_{j\geq 1} \mathbb{E}\,|X_j|^{\gamma+\varepsilon} < +\infty$ pour un $\gamma > 2$ et un $\varepsilon > 0$. On suppose que le coefficient $u(n)$ défini par (2.5) vérifie*

$$u(n) = O\big(n^{-(\gamma-2)(\gamma+\varepsilon)/(2\varepsilon)}\big). \tag{2.8}$$

Alors il existe une constante b telle que pour tout $n \geq 1$:

$$\sup_m E|S_{n+m} - S_m|^\gamma \leq b n^{\gamma/2}, \quad \text{où} \quad S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j. \tag{2.9}$$

Théorème 2.6 (Newman, Wright [28]) *Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite strictement stationnaire de variables aléatoires centrées, de variance finie, associées telles que*

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(X_1^2) + 2\sum_{j\geq 2} \mathrm{Cov}(X_1, X_j) < +\infty.$$

Pour tout $n \geq 1$, on définit le processus :

$$W_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\Big(\sum_{k=1}^{j} X_k + (nt-j)X_{j+1}\Big), \quad \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n},\ 0 \leq j < n.$$

Alors W_n converge faiblement dans $C[0,1]$ vers le mouvement brownien W. A fortiori, les lois fini-dimensionnelles de W_n convergent vers celles de W.

2.3 Principes d'invariance sous dépendance

Nous présentons maintenant deux extensions du principe d'invariance de Lamperti aux variables aléatoires dépendantes.

Théorème 2.7 *Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite strictement stationnaire α-mélangeante de variables aléatoires centrées. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\mathbb{E}\,|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < +\infty$ et*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)^{\gamma/2-1}[\alpha_n]^{\varepsilon/(\gamma+\varepsilon)} < +\infty. \tag{2.10}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq j < n$:

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\Big[\sum_{k=1}^{j} X_k + (nt-j)X_{j+1}\Big], \quad \text{si} \quad \frac{j}{n} \leq t < \frac{j+1}{n}, \tag{2.11}$$

où

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\, X_1^2 + 2\sum_{j=2}^{+\infty} \mathrm{Cov}(X_1, X_j) < +\infty. \tag{2.12}$$

Les lois de ξ_n convergent étroitement vers la mesure de Wiener P_W dans H_α^0 pour tout $\alpha < 1/2 - 1/\gamma$.

Preuve : Montrons que sous les hypothèses du théorème 2.7 on a :

$$\mathbb{E}\, |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma \le K|t-s|^{1+\delta} \quad \text{avec} \quad 1+\delta = \frac{\gamma}{2} > 1.$$

Si $j/n \le s \le t \le j + 1/n$, on a $|\xi_n(t) - \xi_n(s)| = |t-s||X_{j+1}|\sqrt{n}$ (on suppose pour alléger que $\sigma = 1$). Par suite

$$\mathbb{E}\, |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma \le |t-s|^\gamma (\sqrt{n})^\gamma\, \mathbb{E}\, |X_1|^\gamma \le |t-s|^{\gamma/2} (\mathbb{E}\, |X_1|^{\gamma+\varepsilon})^{\gamma/(\gamma+\varepsilon)},$$

car $n|t-s| \le 1$.

Si $(j-1)/n \le s \le j/n \le (j+k)/n \le t \le (j+k+1)/n$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\, |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma \le\ & 3^{\gamma-1}\Big(\mathbb{E}\, |\xi_n(s) - \xi_n(\frac{j}{n})|^\gamma + \mathbb{E}\, |\xi_n(\frac{j}{n}) - \xi_n(\frac{j+k}{n})|^\gamma \\ & + \mathbb{E}\, |\xi_n(\frac{j+k}{n}) - \xi_n(t)|^\gamma\Big)\end{aligned}$$

par l'inégalité de Jensen.

On se contente d'estimer le terme du milieu car les deux autres se traitent de la même manière que le cas précédent.

$$\mathbb{E}\Big|\xi_n(\frac{j}{n}) - \xi_n(\frac{j+k}{n})\Big|^\gamma = \mathbb{E}\Big|\frac{1}{\sqrt{n}}(X_{j+1} + X_{j+2} + \cdots + X_{j+k})\Big|^\gamma. \tag{2.13}$$

En utilisant le théorème 2.3,

$$\mathbb{E}\, |\xi_n(\frac{j}{n}) - \xi_n(\frac{j+k}{n})|^\gamma \le K'(\frac{k}{n})^{\gamma/2} \le K'|t-s|^{\gamma/2} \quad \text{car} \quad |t-s| \ge k/n. \tag{2.14}$$

On obtient finalement

$$\mathbb{E}\, |\xi_n(t) - \xi_n(s)|^\gamma \le K|t-s|^{1+\gamma} \quad \text{avec} \quad 1+\delta = \frac{\gamma}{2} > 1. \tag{2.15}$$

Ainsi par le théorème 1.21 et l'inégalité de Markov, la suite des lois (P_n) des processus ξ_n est équitendue dans H_α^0, pour tout $\alpha < \delta/\gamma = 1/2 - 1/\gamma$.

Pour terminer, les lois fini-dimensionnelles de ξ_n convergent vers celles de W par le théorème 2.4 dont les hypothèses sont plus générales que celles du théorème 2.7 puisque pour $\gamma > 2$,

$$\forall n \ge 1, \quad (\alpha_n)^{\varepsilon/(\gamma+\varepsilon)} < (n+1)^{\gamma/2-1}(\alpha_n)^{\varepsilon/(\gamma+\varepsilon)}.$$

■

Théorème 2.8 *Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite strictement stationnaire de variables associées, centrées telles que $\mathbb{E}\,|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < +\infty$ pour un $\gamma > 2$ et un $\varepsilon > 0$. On suppose que*

$$u(n) = 2 \sum_{j\geq n+1} \operatorname{Cov}(X_1, X_j) = O\left(n^{-(\gamma-2)(\gamma+\varepsilon)/(2\varepsilon)}\right) \tag{2.16}$$

et

$$0 < \sigma^2 = \mathbb{E}\,|X_1|^2 + u(1) < +\infty.$$

Les lois de ξ_n convergent étroitement vers la mesure de Wiener P_W dans H_α^0, pour tout $\alpha < 1/2 - 1/\gamma$.

Preuve : L'équitension se démontre comme dans le cas α-mélangeant en utilisant l'inégalité de moments de Birkel (théorème 2.5) au lieu de celle de Yokoyama. La convergence des lois fini-dimensionnelles résulte du théorème 2.6. ∎

2.4 Lissage par convolution du processus de sommes partielles

Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées telles que $\mathbb{E}\,|X_1|^\gamma < +\infty$ pour un $\gamma > 2$. Notons σ^2 leur variance commune. On pose encore $S_i = \sum_{k=1}^{i} X_k$, $S_0 = 0$ et on considère le processus des sommes partielles normalisées de Donsker-Prokhorov :

$$\xi_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}, \quad t \in [0,1], \tag{2.17}$$

où $[nt]$ désigne la partie entière de nt. Selon le cas, nous utiliserons par commodité l'une ou l'autre des expressions suivantes de ξ_n :

$$\begin{aligned} \xi_n(t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} S_i \mathbf{1}_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}[}(t), \\ \xi_n(t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k \mathbf{1}_{[\frac{k}{n}, 1]}(t). \end{aligned}$$

Soit K une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} |u| K(u)\, du < +\infty \tag{2.18}$$

et $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs tendant vers zéro et vérifiant :

$$\frac{1}{b_n} = O(n^{\tau/2}), \quad 0 < \tau < \frac{1}{2}. \tag{2.19}$$

On définit la suite $(K_n)_{n\geq 1}$ de noyaux de convolution par

$$K_n(t) = \frac{1}{b_n} K(\frac{t}{b_n}), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

Nous considérons le processus de sommes partielles lissé défini par :

$$\zeta_n(t) = (\xi_n * K_n)(t) - (\xi_n * K_n)(0), \quad t \in [0,1]. \tag{2.21}$$

Le terme correctif $(\xi_n * K_n)(0)$ assure la nullité en zéro du processus. On imposera quelques conditions sur K_n afin que toutes les trajectoires de ζ_n soient dans $\mathrm{H}_{1/2}$ et donc dans H^0_α pour $\alpha < 1/2$. Ces conditions proviennent du lemme suivant :

Lemme 2.9 *Soit f une fonction mesurable bornée à support dans* $[0,1]$ *et K un noyau de convolution tel que*

$$K \in L^1([-1,1]) \cap L^{1/2}([-1,1]), \tag{2.22}$$

$$|K(x) - K(y)| \leq a(K)|x-y|, \quad x,y \in [-1,1], \tag{2.23}$$

pour une certaine constante $a(K)$. Alors la restriction à l'intervalle $[0,1]$ *de $f * K - f * K(0)$ est dans* $\mathrm{H}_{1/2}[0,1]$.

Preuve : Il est clair que $f * K$ est bornée. D'autre part :

$$\begin{aligned} |f * K(x) - f * K(y)| &\leq \int_{[0,1]} |f(u)||K(x-u) - K(y-u)|\,du \\ &\leq \|f\|_\infty a(K)^{1/2}|x-y|^{1/2} \\ &\qquad \int_{[0,1]} |K(x-u) - K(y-u)|^{1/2}\,du \\ &\leq 2\|f\|_\infty a(K)^{1/2}|x-y|^{1/2} \int_{[-1,1]} |K(v)|^{1/2}\,dv \\ &\leq c(K)|x-y|^{1/2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|f * K\|_{1/2} = w_{1/2}(f * K, 1) < +\infty\,.$$

■

Théorème 2.10 *Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, centrées et réduites telles que $\mathbb{E}\,|X_1|^\gamma < +\infty$ pour un $\gamma > 2$. On suppose que les noyaux de convolution K_n vérifient (2.20), (2.18), (2.22) et (2.23). Alors la suite de processus de sommes partielles lissés ζ_n définis par (2.21) converge faiblement vers le mouvement brownien W dans H_α^0 pour tout $\alpha < 1/2 - \max(\tau, 1/\gamma)$.*

Preuve : Le lemme 2.9 nous assure que ζ_n est dans H_α^0, pour tout $\alpha < 1/2$.
Equitension

On applique le théorème 1.24 avec $a_n = 1/n$. Ceci nous conduit à étudier séparément les cas $t - s \geq 1/n$ et $0 < t - s < 1/n$. On supposera sans perte de généralité que $s < t$ et $\sigma = 1$.

<u>1^er^ cas :</u> $|t - s| \geq 1/n$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma &= \mathbb{E}\,|\xi_n * K_n(t) - \xi_n * K_n(s)|^\gamma \\
&= \mathbb{E}\Big|\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\mathbb{R}}\Big(S_{[n(t-u)]} - S_{[n(s-u)]}\Big)K_n(u)\,du\Big|^\gamma \\
&= \mathbb{E}\Big|\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\mathbb{R}}\sum_{i=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} X_i K_n(u)\,du\Big|^\gamma .
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Jensen et le théorème de Fubini, on obtient :

$$\mathbb{E}\,|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\Big|\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{\mathbb{R}}\sum_{i=[n(s-u)]+1}^{[n(t-u)]} X_i\Big|^\gamma K_n(u)\,du.$$

En utilisant l'inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund pour les moments de sommes de variables aléatoires i.i.d., il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma &\leq \int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{[n(t-u)] - [n(s-u)]}{n}\Big)^{\gamma/2} c_\gamma K_n(u)\,du \qquad (2.24)\\
&\leq \int_{\mathbb{R}}\Big(|t-s| + \frac{2}{n}\Big)^{\gamma/2} c_\gamma K_n(u)\,du,
\end{aligned}$$

car $[n(t-u)] - [n(s-u)] \leq n(t-s) + 2$. Ainsi, comme $|t - s| \geq 1/n$, on a une constante c'_γ telle que :

$$\mathbb{E}\,|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^\gamma \leq c'_\gamma |t - s|^{\gamma/2}.$$

<u>2^e^ cas :</u> $0 \leq t - s < 1/n$.

On procède comme suit :

$$\begin{aligned}|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)| &= \Big|\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i\big(K_n(t-u) - K_n(s-u)\big)\mathbf{1}_{[\frac{i}{n},1]}(u)\,du\Big| \\ &\le \frac{a(K)}{b_n^2\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} |X_i||t-s|\Big(1-\frac{i}{n}\Big).\end{aligned}$$

En majorant $1 - i/n$ par 1, il vient

$$|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)| \le \frac{a(K)}{b_n^2\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} |X_i||t-s|$$

et par suite

$$\frac{|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|}{|t-s|^\alpha} \le \frac{a(K)}{b_n^2\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} |X_i||t-s|^{1-\alpha}.$$

D'où

$$\begin{aligned}w_\alpha(\zeta_n, \frac{1}{n}) &= \sup_{|t-s|\le\frac{1}{n}} \frac{|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|}{|t-s|^\alpha} \\ &\le \frac{a(K)}{b_n^2\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} |X_i|\Big(\frac{1}{n}\Big)^{1-\alpha} \\ &\le \frac{a(K)}{b_n^2 n^{1/2-\alpha}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i|. \qquad (2.25)\end{aligned}$$

D'après (2.19), $b_n^{-2}n^{\alpha-1/2}$ tend vers 0 dès que $1/2 - \alpha > \tau$. Par la loi forte des grands nombres, $n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$ tend presque sûrement vers $\mathbb{E}\,|X_1|$.

Ainsi $w_\alpha(\xi_n, \frac{1}{n})$ tend en probabilité vers 0 quand n tend vers l'infini, pour tout $\alpha < 1/2 - \tau$.

On conclut sur l'équitension de (ζ_n) par le théorème 1.24, en notant que ses hypothèses sont vérifiées pour $a = \gamma$, $b = \gamma/2$, $(\gamma > 2)$, $c = c'_\gamma$ et $a_n = 1/n$.

On obtient ainsi l'équitension de (ζ_n) dans H_α^0 pour tout α vérifiant $\alpha < 1/2 - \tau$ et $\alpha < 1/2 - 1/\gamma$, soit pour tout $\alpha < 1/2 - \max(\tau, 1/\gamma)$.

Convergence des lois fini-dimensionnelles de $\{\zeta_n,\ n \ge 1\}$

On se ramène à celles de ξ_n en montrant, par exemple, que la distance euclidienne de $(\zeta_n(t_1), \dots, \zeta_n(t_k))$ et $(\xi_n(t_1), \dots, \xi_n(t_k))$ tend en probabilité vers 0. Comme les lois fini-dimensionnelles de ξ_n convergent vers celles du mouvement brownien par le théorème central limite de Lindeberg-Lévy, il en sera de même pour celles de ζ_n. Il nous suffit donc de vérifier la convergence vers 0 de $\mathbb{E}\,|\zeta_n(t) - \xi_n(t)|^2$ pour tout $t \in [0,1]$.

On commence par noter que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|\xi_n * K_n(t) - \xi_n(t)|^2 &= \mathbb{E}\Big|\int_{\mathbb{R}} \big(\xi_n(t-u) - \xi_n(t)\big)K_n(u)\,du\Big|^2\\ &= \mathbb{E}\Big|\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{n}}\big(S_{[n(t-u)]} - S_{[nt]}\big)K_n(u)\,du\Big|^2\\ &= \mathbb{E}\Big|\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=[nt]+1}^{[n(t-u)]} X_i K_n(u)\,du\Big|^2.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Jensen relativement à la mesure de probabilité de densité K_n puis le théorème de Fubini, il vient

$$\mathbb{E}\,|\xi_n * K_n(t) - \xi_n(t)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\Big|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=[nt]+1}^{[n(t-u)]} X_i\Big|^2 K_n(u)\,du. \tag{2.26}$$

Par l'inégalité de moments de Marcinkiewicz-Zygmund, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|\xi_n * K_n(t) - \xi_n(t)|^2 &\leq c\int_{\mathbb{R}} \frac{\big|[n(t-u)] - [nt]\big|}{n} K_n(u)\,du\\ &\leq c\int_{\mathbb{R}} \Big(|u| + \frac{2}{n}\Big)K_n(u)\,du. \end{aligned}\tag{2.27}$$

Ainsi

$$\mathbb{E}\,|\xi_n * K_n(t) - \xi_n(t)|^2 \leq c\Big(b_n \int_{\mathbb{R}} |v| K(v)\,dv + \frac{2}{n}\Big).$$

Comme K possède un moment d'ordre 1 et b_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on en déduit que $\xi_n * K_n(t) - \xi_n(t)$ converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$ pour tout $t \in [0,1]$. En particulier pour $t = 0$, $\mathbb{E}\,|\xi_n * K_n(0)|^2$ converge vers 0. Comme pour tout $t \in [0,1]$,

$$\mathbb{E}\,|\zeta_n(t) - \xi_n(t)|^2 \leq \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}\big|\xi_n * K_n(t) - \xi_n(t)\big|^2 + \mathbb{E}\big|\xi_n * K_n(0)\big|^2\Big),$$

ceci achève la preuve de la convergence des lois fini-dimensionnelles et du théorème 2.10. ∎

Les techniques utilisées dans la preuve ci-dessus permettent une extension du résultat au cas de variables dépendantes.

Théorème 2.11 *Soit $(X_j)_{j\geq 1}$ une suite strictement stationnaire α-mélangeante de variables aléatoires centrées. On suppose qu'il existe $\gamma > 2$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\mathbb{E}\,|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < +\infty$ et*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)^{\gamma/2-1}[\alpha_n]^{\varepsilon/(\gamma+\varepsilon)} < +\infty. \tag{2.28}$$

Alors

$$\sigma^2 := \mathbb{E}\,|X_1|^2 + 2\sum_{j\geq 2} \mathrm{Cov}(X_1, X_j)$$

est fini. On suppose de plus que $\sigma^2 > 0$ et que les noyaux de convolution K_n vérifient (2.20), (2.18), (2.22) et (2.23). Alors la suite de processus de sommes partielles lissés ζ_n définis par (2.21) converge faiblement vers le mouvement brownien W dans H_α^0 pour tout $\alpha < 1/2 - \max(\tau, 1/\gamma)$.

Preuve : La finitude de σ^2 découle classiquement des hypothèses de moment et de mélange via l'inégalité de Davydov. L'équitension se démontre de la même manière que dans le théorème 2.10. Dans le cas $|t-s| \geq 1/n$, on utilise à la place de l'inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund, celle de Yokoyama (théorème 2.3). Pour montrer la convergence en probabilité vers 0 de $w_\alpha(\zeta_n, 1/n)$, il suffit de reprendre les majorations conduisant à (2.25) et d'appliquer l'inégalité de Markov à l'ordre un :

$$P\left\{\frac{a(K)}{b_n^2 n^{1/2-\alpha}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i| \geq \delta\right\} \leq \frac{a(K)}{\delta b_n^2 n^{1/2-\alpha}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\,|X_i|.$$

Comme $\mathbb{E}\,|X_i| \leq M^{1/(\gamma+\varepsilon)}$, ce majorant est bien un $O(b_n^{-2}n^{\alpha-1/2})$ et tend vers 0 pour tout $\alpha < 1/2 - \tau$.

Pour la convergence des lois fini-dimensionnelles de ζ_n, on se ramène à celles de ξ_n qui convergent vers celles du mouvement brownien grâce au théorème d'Odaïra-Yoshihara (théorème 2.4). On montre la convergence vers 0 de $\mathbb{E}\,|\zeta_n(t) - \xi_n(t)|^2$ en procédant comme dans le cas indépendant. La seule différence est le passage de (2.26) à (2.27), on remplace l'inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund par l'estimation de variance suivante, basée sur l'inégalité de Davydov (théorème 2.2) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{m} X_i\Big) &= m\mathrm{Var}X_1 + 2\sum_{j=2}^{m}\sum_{i=1}^{j-1}\mathrm{Cov}(X_1, X_{j-i+1}) \\
&\leq m\mathrm{Var}X_1 + 16m\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k^{1/p}\,\mathbb{E}^{1/q}\,|X_1|^q\,\mathbb{E}^{1/r}\,|X_1|^r.
\end{aligned}$$

En choisissant $q = r = \gamma + \varepsilon$ dans l'inégalité de Davydov, il vient :

$$\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{m} X_i\Big) \leq m\mathrm{Var}X_1 + 16m\big(\mathbb{E}\,|X_1|^{\gamma+\varepsilon}\big)^{2/(\gamma+\varepsilon)}\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k^{(\gamma-2+\varepsilon)/(\gamma+\varepsilon)}.$$

Comme $\gamma > 2$, la convergence de la série ci-dessus découle de l'hypothèse (2.28) sur les coefficients de mélange. On a donc bien

$$\operatorname{Var}\Big(\sum_{i=1}^{m} X_i\Big) = O(m)$$

et en appliquant ceci avec $m = |[n(t-u)] - [nt]|$, on peut conclure comme dans le cas indépendant. ■

Théorème 2.12 *Soit* $(X_j)_{j\geq 1}$ *une suite strictement stationnaire de variables associées, centrées telles que* $\mathbb{E}\,|X_1|^{\gamma+\varepsilon} < +\infty$ *pour un* $\gamma > 2$ *et un* $\varepsilon > 0$. *On suppose que*

$$u(n) = 2 \sum_{j\geq n+1} \operatorname{Cov}(X_1, X_j) = O\left(n^{-(\gamma-2)(\gamma+\varepsilon)/(2\varepsilon)}\right) \tag{2.29}$$

et

$$\sigma^2 := \mathbb{E}\,|X_1|^2 + u(1) > 0.$$

On suppose de plus que les noyaux de convolution K_n *vérifient (2.20), (2.18), (2.22) et (2.23). Alors la suite de processus de sommes partielles lissés* ζ_n *définis par (2.21) converge faiblement vers le mouvement brownien* W *dans* H_α^0 *pour tout* $\alpha < 1/2 - \max(\tau, 1/\gamma)$.

Preuve : Elle est analogue à celle du cas α-mélangeant, en remplaçant l'inégalité de moments de Yokoyama par celle de Birkel (théorème 2.5) et le théorème de limite centrale d'Odaïra-Yoshihara par celui de Newman-Wright (théorème 2.6). L'inégalité de variance est cette fois une conséquence directe de l'hypothèse $u(1) < +\infty$. ■

Chapitre 3

Processus empiriques lissés dans H_α^0

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions des principes d'invariance hölderiens relatifs au processus empirique uniforme. Ce processus étant à trajectoires discontinues, il convient d'abord de le lisser. Le lissage polygonal correspond au polygone des fréquences empiriques. Il est bien connu que ce processus polygonal converge en loi dans $C[0,1]$ vers le pont brownien B (cf. Billingsley [2], p. 105, théorème 13.1). Nous allons renforcer ce résultat en établissant (dans le cas d'une suite de variables aléatoires i.i.d.) que cette convergence en loi a lieu aussi dans les espaces H_α^0 pour tout $\alpha < 1/4$. Notons ici que, contrairement au principe d'invariance de Lamperti, la borne obtenue pour l'ordre de régularité α est inférieure à celle que l'on pourrait attendre de la régularité du processus limite B ($\alpha < 1/2$). Nous montrons l'optimalité de cette borne $1/4$ dont le caractère à première vue surprenant, s'explique par les propriétés des espacements d'une suite i.i.d.. Si l'on emploie plutôt un lissage par convolution du processus empirique, les choses rentrent dans l'ordre et on obtient la convergence vers le pont brownien dans H_α^0 pour tout ordre $\alpha < 1/2$.

3.2 Le processus empirique polygonal

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. La suite de processus empiriques uniformes ξ_n construite sur $(X_n)_{n\geq 1}$ s'obtient en centrant et en normalisant les fonctions de répartition empiriques F_n des échantillons de taille n :

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_i \leq t\}}, \tag{3.1}$$

$$\xi_n(t) = \sqrt{n}\big(F_n(t) - t\big), \quad t \in [0,1],\ n \geq 1. \tag{3.2}$$

Comme ξ_n est à trajectoires discontinues, on le lisse en remplaçant la fonction de répartition empirique F_n par le polygone des fréquences empiriques G_n qui interpole linéairement F_n entre deux sauts consécutifs. Pour expliciter l'écriture de G_n, nous notons $X_{n:i}$ ($1 \leq i \leq n$) les statistiques d'ordre obtenues en ordonnant dans le sens croissant chaque échantillon $\big(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\big)$. Ainsi $X_{n:1} = \min_{1\leq i\leq n} X_i$ et $X_{n:n} = \max_{1\leq i\leq n} X_i$. On pose de plus $X_{n:0} = 0$ et $X_{n:n+1} = 1$. On définit alors :

$$G_n(t) = F_n(t) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{t - X_{n:\,i-1}}{X_{n:\,i} - X_{n:\,i-1}}\Big)\mathbf{1}_{[X_{n:\,i-1}, X_{n:\,i}[}(t), \tag{3.3}$$

$$\tilde{\xi}_n(t) = \sqrt{n}\big(G_n(t) - t\big), \quad t \in [0,1],\ n \geq 1. \tag{3.4}$$

Remarquons qu'à la différence de ξ_n, $\tilde{\xi}_n$ n'est qu'asymptotiquement sans biais. On sait (cf. par exemple [2]) que

$$\xi_n \xrightarrow[D[0,1]]{\mathcal{L}} B \quad \text{et} \quad \tilde{\xi}_n \xrightarrow[C[0,1]]{\mathcal{L}} B.$$

Théorème 3.1 *Le processus empirique polygonal $\tilde{\xi}_n$ défini par (3.4) converge en loi dans H_α^0 pour tout $\alpha < 1/4$.*

Preuve : $\tilde{\xi}_n$ est une ligne polygonale, donc dans H_α^0 pour $0 < \alpha \leq 1$. D'autre part $B_t = W_t - tW_1$ est dans H_α^0, pour $0 < \alpha < 1/2$. Comme $\tilde{\xi}_n$ converge en loi vers B dans $C[0,1]$, la convergence des lois fini-dimensionnelles de $\tilde{\xi}_n$ vers celles de B est acquise.

Pour l'équitension de $(\tilde{\xi}_n)_{n\geq 1}$ dans H_α^0, on va vérifier les deux hypothèses du théorème 1.24. Nous utilisons pour cela un résultat bien connu sur le moment d'ordre 4 d'une somme de variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Lemme 3.2 *Soient $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, n variables aléatoires centrées, indépendantes, de même loi et telles que $\mathbb{E}\, Y_1^4 < +\infty$. Alors :*

$$\mathbb{E}\Big|\sum_{i=1}^{n} Y_i\Big|^4 = n\,\mathbb{E}\, Y_1^4 + 3n(n-1)(\mathbb{E}\, Y_1^2)^2. \tag{3.5}$$

En appliquant (3.5) avec $Y_i = \mathbf{1}_{\{s<X_i\leq t\}} - (t-s)$, on obtient :

$$\mathbb{E}\,|\xi_n(t)-\xi_n(s)|^4 \leq \frac{1}{n}|t-s| + 3|t-s|^2.$$

Compte tenu de la majoration élémentaire $\|\xi_n - \tilde{\xi}_n\|_\infty \leq n^{-1/2}$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|\tilde{\xi}_n(t)-\tilde{\xi}_n(s)|^4 &\leq 8\Big(\mathbb{E}\,|\xi_n(t)-\xi_n(s)|^4 + \frac{16}{n^2}\Big)\\ &\leq \frac{128}{n^2} + 8\Big(3|t-s|^2 + \frac{1}{n}|t-s|\Big)\end{aligned}$$

En particulier pour $|t-s| > 1/n$,

$$\mathbb{E}\,|\tilde{\xi}_n(t)-\tilde{\xi}_n(s)|^4 \leq 160|t-s|^2.$$

Ainsi la condition (a) du théorème 1.24 est satisfaite par $\tilde{\xi}_n$, avec $a=4$, $b=2$, $c=160$ et $a_n = 1/n$.

Pour vérifier la condition (b), on commence par remarquer que puisque les trajectoires de $\tilde{\xi}_n$ sont des lignes polygonales, le supremum dans la définition de leur norme hölderienne est atteint en deux sommets de la ligne polygonale (voir le lemme 1.5). Ceci reste vrai pour une ligne polygonale restreinte en abscisses à un segment I de longueur a_n au lieu de $[0,1]$. Pour étudier la convergence en probabilité vers 0 de $w_\alpha(\tilde{\xi}_n, a_n)$, on se ramène au contrôle de la norme hölderienne de la restriction de $\tilde{\xi}_n$ dans tout sous-intervalle I de longueur a_n de $[0,1]$. On discute alors suivant le nombre de sommets dans cet intervalle. Cette discussion fait intervenir l'espacement minimal $\delta_{n:1}$. Rappellons que l'on définit les espacements $\delta_{n,i}$ de l'échantillon $(X_1,\dots,X_n)$ par $\delta_{n,i} = X_{n:i} - X_{n:i-1}$ $(1\leq i\leq n+1)$. On note $\delta_{n:i}$ les statistiques d'ordre construites sur $(\delta_{n,1},\dots\delta_{n,n+1})$. Ainsi $\delta_{n:1}$ est la longueur minimale des $n+1$ intervalles découpés sur $[0,1]$ par l'échantillon $(X_1,\dots,X_n)$.

Lemme 3.3 *Si* $0<\alpha<1$, *et si* $1\geq a_n\geq 1/(n+1)$,

$$w_\alpha(\tilde{\xi}_n, a_n) \leq w(\tilde{\xi}_n, a_n)\delta_{n:1}^{-\alpha}. \tag{3.6}$$

où $w(\tilde{\xi}_n, a_n) = \sup\limits_{|t-s|\leq a_n} |\tilde{\xi}_n(t)-\tilde{\xi}_n(s)|$ *désigne le module de continuité au sens* $C[0,1]$ *de* $\tilde{\xi}_n$.

Preuve : Soit $I=[a,b]$ un sous-intervalle de $[0,1]$ de longueur a_n. Posons pour alléger les écritures :

$$\|f;I\|_\alpha = \sup_{\substack{s,t\in I\\ s<t}} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

1^er^ cas : on n'a pas de sommet dans l'intérieur de I. Alors $\|\tilde{\xi}_n; I\|_\alpha$ est atteint pour $|t-s| = a_n$ et ainsi :

$$\|\tilde{\xi}_n; I\|_\alpha \leq a_n^{-\alpha} w(\tilde{\xi}_n, a_n).$$

En utilisant la majoration évidente $\delta_{n:1} \leq 1/(n+1) \leq a_n$, on en déduit :

$$\|\tilde{\xi}_n; I\|_\alpha \leq w(\tilde{\xi}_n, a_n)\delta_{n:1}^{-\alpha}. \tag{3.7}$$

2^e^ cas : On a un seul sommet d'abscisse u_1 intérieur à I. Alors soit le supremum définissant $\|\tilde{\xi}_n; I\|_\alpha$ est atteint aux bornes a et b de I, ce qui nous ramène au premier cas, soit il est atteint pour $(s,t) = (a, u_1)$ ou $(s,t) = (u_1, b)$. Pour fixer les idées, supposons que ce soit en (a, u_1), le raisonnement est le même avec (u_1, b). Notons u_0 l'abscisse du premier sommet de la ligne polygonale $\tilde{\xi}_n$ à gauche de a. Si $u_0 < u_1 - a_n$, la trajectoire de $\tilde{\xi}_n$ étant rectiligne entre u_0 et u_1, par croissance de la fonction $x \mapsto x^{1-\alpha}$ on a :

$$\frac{|\tilde{\xi}_n(u_1) - \tilde{\xi}_n(a)|}{|u_1 - a|^\alpha} \leq \frac{|\tilde{\xi}_n(u_1) - \tilde{\xi}_n(u_1 - a_n)|}{a_n^\alpha},$$

de sorte que (3.7) est encore vérifiée. Si $u_1 - a_n \leq u_0 < a$, le même argument nous donne :

$$\frac{|\tilde{\xi}_n(u_1) - \tilde{\xi}_n(a)|}{|u_1 - a|^\alpha} \leq \frac{|\tilde{\xi}_n(u_1) - \tilde{\xi}_n(u_0)|}{|u_1 - u_0|^\alpha} \leq w(\tilde{\xi}_n, a_n)\delta_{n:1}^{-\alpha}.$$

Si $u_0 = a$, comme $u_1 - u_0 \geq \delta_{n:1}$, cette majoration reste valable.
3^e^ cas : On a k sommets $u_1, \dots, u_k$ $(k > 1)$ dans l'intérieur de I : $a < u_1 < \dots < u_k$. Si le maximum dans $\|\tilde{\xi}_n; I\|_\alpha$ est atteint pour $(s,t) = (u_i, u_j)$, alors $\delta_{n:1} \leq u_j - u_i < a_n$ et clairement :

$$\frac{|\tilde{\xi}_n(u_j) - \tilde{\xi}_n(u_i)|}{|u_j - u_i|^\alpha} \leq w(\tilde{\xi}_n, a_n)\delta_{n:1}^{-\alpha}.$$

Si le maximum est atteint en (a, u_i) avec $u_i > u_1$,

$$\frac{|\tilde{\xi}_n(u_i) - \tilde{\xi}_n(a)|}{|u_i - a|^\alpha} \leq \frac{w(\tilde{\xi}_n, a_n)}{|u_i - u_1|^\alpha} \leq w(\tilde{\xi}_n, a_n)\delta_{n:1}^{-\alpha}$$

et de même pour un maximum atteint en (u_i, b) avec $u_i < u_k$. Enfin si le maximum est atteint en (a, u_1) ou (u_k, b), on obtient (3.7) comme au deuxième cas.

Ainsi, (3.7) est vérifiée dans tous les cas de figure et comme le majorant obtenu ne dépend pas de I, le lemme est démontré. ∎

Pour le contrôle de $w(\tilde{\xi}_n, a_n)$ et $\delta_{n:1}$, nous invoquerons deux lemmes.

Lemme 3.4 (Shorack, Wellner [40]) *Soit ξ_n le processus empirique défini par (3.2). Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres positifs tels que*

$$a_n = \frac{(c_n \ln n)}{n} \quad \text{où} \quad c_n \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{\ln(1/c_n)}{\ln n} \to 0,$$

alors

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\ln(1/c_n)}{\ln n} w(\xi_n, a_n) \leq 2, \ p.s..$$

Lemme 3.5 (Devroye [14], [40]) *Soient $\delta_{n:k}$ les statistiques d'ordre des espacements $\delta_{n,i} = X_{n:i} - X_{n:i-1}$. On a, pour $b_n \geq 0$ tel que $b_n/n^2 \downarrow 0$*

$$P\Big(\limsup_{n\to+\infty}\{n^2\delta_{n:k} \leq b_n\}\Big) = \left\{\begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array}\right. \quad si \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^k}{n} = \left\{\begin{array}{ll} < & +\infty \\ = & +\infty \end{array}\right.$$

En appliquant le lemme 3.4, avec $c_n = 1/\ln n$ et le lemme 3.5 avec $b_n = n^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, on obtient :

$$\text{p.s.} \quad \exists n_0 \ \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \quad n^2\delta_{n:1} > \frac{1}{n^\varepsilon}$$

et

$$\text{p.s.} \quad \exists n_1 \ \text{ tel que } \forall n \geq n_1, \frac{\sqrt{n}\ln(\ln n)}{\ln n} w(\xi_n, a_n) \leq 2.$$

En utilisant (3.6) et la majoration évidente :

$$w(\tilde{\xi}_n, a_n) \leq \frac{2}{\sqrt{n}} + w(\xi_n, a_n),$$

on a alors pour tout $n \geq n_2 = \max(n_0, n_1)$:

$$\begin{aligned} w_\alpha(\tilde{\xi}_n, a_n) &\leq w(\tilde{\xi}_n, a_n)\delta_{n:1}^{-\alpha} \\ &\leq w(\xi_n, a_n)\delta_{n:1}^{-\alpha} + \frac{2\delta_{n:1}^{-\alpha}}{\sqrt{n}} \\ &\leq \frac{2\ln n}{\sqrt{n}\ln(\ln n)} \frac{1}{n^{-(2+\varepsilon)\alpha}} + \frac{2}{n^{1/2-(2+\varepsilon)\alpha}}. \end{aligned}$$

Ce majorant tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ pour tout $\alpha < \dfrac{1}{2(2+\varepsilon)} < \dfrac{1}{4}$.

On en déduit que $w_\alpha(\tilde{\xi}_n, a_n)$ converge presque sûrement vers 0 pour tout $\alpha < 1/4$. ceci achève la vérification de l'hypothèse (b) du théorème 1.24 et la preuve du théorème 3.1. ∎

L'ordre de régularité $\alpha < 1/4$ obtenu dans le théorème 3.1 est optimal. Plus précisément, nous montrons maintenant que :

Théorème 3.6 *La suite* $(\tilde{\xi}_n, n \geq 1)$ *n'est équitendue dans* H_α^0 *pour aucun* $\alpha \geq 1/4$.

Preuve : En raison des inclusions (topologiques) des espaces de Hölder, il est clair que l'on ne perd aucune généralité en faisant la preuve dans le cas $\alpha = 1/4$. On raisonne par l'absurde en supposant que $\tilde{\xi}_n$ converge en loi dans $\mathrm{H}_{1/4}^0$. On note P_n la loi de l'élément aléatoire $\tilde{\xi}_n$ de $\mathrm{H}_{1/4}^0$ (ainsi P_n est une mesure de probabilité sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_{1/4}$ de l'espace polonais $\mathrm{H}_{1/4}^0$). La famille $\{P_n,\, n \geq 1\}$ est donc relativement compacte pour la topologie de la convergence faible des mesures de probabilité sur $\mathcal{B}_{1/4}$. Par le théorème de Prokhorov, $\{\tilde{\xi}_n,\, n \geq 1\}$ est équitendue et doit donc vérifier (cf. théorème 1.23) la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{\delta \to 0} \sup_{j \geq 1} P(w_{1/4}(\tilde{\xi}_j, \delta) \geq \varepsilon) = 0. \tag{3.8}$$

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite quelconque décroissant vers 0. Comme

$$P(w_{1/4}(\tilde{\xi}_n, a_n) \geq \varepsilon) \leq \sup_{j \geq 1} P(w_{1/4}(\tilde{\xi}_j, a_n) \geq \varepsilon),$$

on doit avoir pour toute suite $a_n \downarrow 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} P(w_{1/4}(\tilde{\xi}_n, a_n) \geq \varepsilon) = 0. \tag{3.9}$$

Soient $X_{n:i}$, $X_{n:i+1}$ les deux statistiques d'ordre réalisant l'espacement minimal : $\delta_{n:1} = X_{n:i+1} - X_{n:i}$. On pose :

$$R_n = \frac{|\tilde{\xi}_n(X_{n:i+1}) - \tilde{\xi}_n(X_{n:i})|}{\delta_{n:1}^{1/4}} = \frac{\sqrt{n}}{\delta_{n:1}^{1/4}} \big(\frac{1}{n} - \delta_{n:\,1}\big).$$

Comme $\delta_{n:1} < 1/n$, on a $w_{1/4}(\tilde{\xi}_n, 1/n) \geq R_n$. De plus

$$\begin{aligned}
\{R_n \geq \varepsilon\} &= \Big\{\frac{1}{\sqrt{n}\delta_{n:\,1}^{1/4}} - \delta_{n:1}^{3/4}\sqrt{n} \geq \varepsilon\Big\} \\
&\supset \Big\{\frac{1}{\sqrt{n}\delta_{n:\,1}^{1/4}} \geq \varepsilon + \sqrt{n}\frac{1}{n^{3/4}}\Big\} \\
&= \Big\{\frac{1}{\sqrt{n}\delta_{n:\,1}^{1/4}} \geq \varepsilon + \frac{1}{n^{1/4}}\Big\} \\
&\supset \Big\{\frac{1}{\sqrt{n}\delta_{n:\,1}^{1/4}} \geq \varepsilon + 1\Big\},
\end{aligned}$$

d'où :

$$P(R_n \geq \varepsilon) \geq P\Big[n^{1/2}\delta_{n:1}^{1/4} \leq \frac{1}{1+\varepsilon}\Big]. \tag{3.10}$$

Pour la loi limite de $\delta_{n:1}$, nous disposons du résultat suivant :

Lemme 3.7 (Lévy [26], [40])

$$\forall t > 0, \quad P\big[(n+1)^2\delta_{n:1} \leq t\big] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - \mathrm{e}^{-t}.$$

On en déduit :

$$\liminf_{n\to+\infty} P(w_{1/4}(\tilde{\xi}_n, 1/n) \geq \varepsilon) \geq \liminf_{n\to+\infty} P(R_n \geq \varepsilon) \geq 1 - \exp\big(-(1+\varepsilon)^{-4}\big) > 0.$$

Cette minoration contredit clairement (3.9). Donc $(\tilde{\xi}_n, n \geq 1)$ n'est pas équitendue dans $\mathrm{H}^0_{1/4}$. Or pour $\alpha > 1/4$, l'injection canonique de H^0_α dans $\mathrm{H}^0_{1/4}$ est continue. Tout compact du premier espace est donc compact du deuxième et $(\tilde{\xi}_n, n \geq 1)$ ne peut être équitendue dans aucun H^0_α pour $\alpha \geq 1/4$. ∎

3.3 Le processus empirique lissé par convolution

On considère cette fois le processus

$$\zeta_n(t) = (\xi_n * k_n)(t) - (\xi_n * k_n)(0), \quad t \in [0,1], n \geq 1, \tag{3.11}$$

ξ_n étant le processus empirique uniforme non lissé et (k_n) une suite de noyaux de convolution du type $k_n(x) = c_n^{-1}k(c_n^{-1}x)$. Dans la définition de ζ_n, le terme supplémentaire $(\xi_n * k_n)(0)$est introduit pour corriger un certain effet de bord. En effet, comme le support des trajectoires de $\xi_n * k_n$ excède l'intervalle $[0,1]$, on considère seulement leur restriction à $[0,1]$ et on souhaite avoir $\zeta_n(0) = 0$ pour que les trajectoires soient dans H^0_α.

Théorème 3.8 *Soit (k_n) une suite de noyaux de convolution définie par $k_n(x) = c_n^{-1}k(c_n^{-1}x)$ où k est une densité de probabilité lipschitzienne sur la droite réelle et c_n décroît vers 0 de telle façon que $n^{-1/4} = O(c_n)$. Alors $(\zeta_n,\ n \geq 1)$ converge en loi dans $\mathrm{H}^0_\alpha[0,1]$ vers le pont brownien B pour tout $\alpha < 1/2$.*

Preuve : On utilise le théorème 1.24.

Convergence des lois fini-dimensionnelles. Puisque les lois de dimension finie de ξ_n convergent vers celles de B, il suffit de vérifier que pour tout t,

$(\xi_n * k_n - \xi_n)(t) = o_P(1)$. Ceci est une conséquence facile de la majoration suivante obtenue en appliquant l'inégalité de Jensen par rapport à la mesure de probabilité $k_n(u)\,du$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|\xi_n * k_n(t) - \xi_n(t)|^2 &\le \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\,|\xi_n(t-u) - \xi_n(t)|^2 k_n(u)\,du \\ &= \int_{t-1}^{t} u(1-u)k_n(u)\,du + t(t-1)\int_{\mathbb{R}\setminus[t-1,t]} k_n(u)\,du. \end{aligned}$$

Équitension. En appliquant à nouveau l'inégalité de Jensen, nous obtenons pour tout $a > 2$

$$\mathbb{E}\,|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^a \le \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\,|\xi_n(t-u) - \xi_n(s-u)|^a k_n(u)\,du.$$

L'inégalité de Rosenthal appliquée aux variables i.i.d. centrées

$$Y_i = \mathbf{1}_{(s-u,t-u]}(X_i) - (t-s), \quad s < t,$$

nous donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|\xi_n(t-u) - \xi_n(s-u)|^a &\le C_a\big(n^{1-a/2}\,\mathbb{E}\,|Y_1|^a + \mathrm{Var}^{a/2} Y_1\big) \\ &\le C_a\big(n^{1-a/2}|t-s| + |t-s|^{a/2}\big). \end{aligned}$$

Si on se restreint aux s, t tels que $t - s \ge 1/n$, ce majorant est dominé par $2C_a|t-s|^{a/2}$ et en intégrant par rapport à $k_n(u)\,du$ il vient

$$\mathbb{E}\,|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)|^a \le 2C_a|t-s|^{a/2}, \quad \text{pour } |t-s| \ge \frac{1}{n}.$$

Pour compléter la preuve, il reste à vérifier que $w_\alpha(\zeta_n, 1/n)$ converge vers 0 en probabilité. Notons d'abord que

$$w_\alpha(\zeta_n, 1/n) \le \int_0^1 |\xi_n(u)| \sup_{|t-s|\le n^{-1}} \frac{|k_n(t-u) - k_n(s-u)|}{|t-s|^\alpha}\,du.$$

En notant $a(k)$ la constante de Lipschitz de k on a

$$|k_n(t-u) - k_n(s-u)||t-s|^{-\alpha} \le a(k)c_n^{-2}|t-s|^{1-\alpha}$$

et en utilisant l'inégalité élémentaire

$$\mathbb{E}\,|\xi_n(u)| \le \mathbb{E}^{1/2}\,|\xi_n(u)|^2 = \sqrt{u(1-u)}, \quad 0 \le u \le 1,$$

nous obtenons

$$\mathbb{E}\,w_\alpha(\zeta_n, 1/n) \le a(k)c_n^{-2}n^{\alpha-1} = o(1),$$

pour tout $0 < \alpha < 1/2$. Par le théorème 1.24, $\{\zeta_n, n \ge 1\}$ est ainsi équitendue dans H_α^0 pour $\alpha < 1/2 - 1/a$. Comme il n'y a aucune contrainte de majoration sur le choix de a dans l'inégalité de Rosenthal que l'on a utilisée ici, la convergence faible dans H_α^0 de $\{\zeta_n, n \ge 1\}$ vers B est établie pour tout $\alpha < 1/2$. Ceci achève la preuve du théorème 3.8. ∎

Chapitre 4

L'espace de Hölder $C_0^{\alpha}(\mathbb{R})$

4.1 Introduction

Si l'on envisage des applications statistiques de la convergence dans H_α $(\alpha < 1/2)$ du processus empirique uniforme lissé ζ_n (cf. Théorème 3.8), on se heurte à une difficulté. En effet le lissage par convolution ne commute pas avec le changement de variable $U_i = F(X_i)$ où F est la fonction de répartition marginale de l'échantillon i.i.d. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Ceci semble limiter la portée de ce théorème et suggère une étude directe du processus empirique lissé bâti sur l'échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, donc *indexé par toute la droite réelle* au lieu de $[0, 1]$. Ceci était notre motivation de départ pour l'étude des processus hölderiens indexés par $\mathbb{R}$. Ce chapitre est consacré à la construction du cadre fonctionnel. On introduit une échelle d'espaces $C_0^{\alpha}(\mathbb{R})$ de fonctions tendant vers zéro à l'infini et de régularité hölderienne globable d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$. Pour des raisons de séparabilité, nous considérons des sous-espaces $C_0^{\alpha,o}(\mathbb{R})$ (les définitions seront précisées par la suite). Tous ces espaces sont analysés par des fonctions triangulaires de Schauder et on montre qu'ils sont isomorphes à des espaces de Banach de suites. Cette analyse est une extension de celle de Ciesielski sur les espaces $\mathrm{H}_\alpha[0, 1]$. Nous adoptons délibérément les notations de la théorie des ondelettes. En effet, à l'exception de l'orthogonalité, la base des fonctions triangulaires se comporte exactement comme une base d'ondelettes. L'avantage est dans la simplicité de ces fonctions. De plus les espaces d'approximation V_j correspondants ont eux aussi une structure particulièrement simple. Ce sont les espaces de lignes polygonales d'interpolation linéaire aux points dyadiques au niveau de résolution 2^{-j}.

4.2 Cadre fonctionnel

Pour $0 < \alpha < 1$, on définit $C_0^\alpha(\mathbb{R})$ comme l'espace des fonctions f telles que

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \tag{4.1}$$

$$\|f\|_\alpha := \|f\|_\infty + w_\alpha(f,1) < +\infty, \tag{4.2}$$

où $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|,\ x \in \mathbb{R}\}$ et pour $\delta > 0$,

$$w_\alpha(f,\delta) := \sup_{\substack{-\infty<s,t<+\infty\\ 0<|t-s|\leq\delta}} \frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha}. \tag{4.3}$$

Il est facile de voir que $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme sur $C_0^\alpha(\mathbb{R})$.
Remarque : La fonctionnelle $w_\alpha(\,.\,,1)$ est en général une semi-norme. Comme on a imposé ici que f soit nulle à l'infini, la nullité de $w_\alpha(f,1)$ implique celle de f. Ainsi $w_\alpha(\,.\,,1)$ est une norme sur $C_0^\alpha(\mathbb{R})$. On peut alors se demander quelle est l'utilité d'incorporer $\|f\|_\infty$ dans la définition de $\|f\|_\alpha$. Le rôle de $\|f\|_\infty$ apparaîtra clairement dans la preuve de la complétude de C_0^α (proposition 4.1 ci-dessous). En attendant, on peut donner l'argument élémentaire suivant. Considérons la fonction triangle f_n dont le graphe est le triangle isocèle de base le segment $[0,2n]$ et de sommet principal le point $(n,\sqrt{n})$. On vérifie immédiatement que $w_\alpha(f_n,1) = n^{-1/2}$. Donc $w_\alpha(f_n,1)$ tend vers 0 tandis que $\|f_n\|_\infty$ tend vers $+\infty$. Les deux normes ne sont donc pas équivalentes. Le même contre-exemple montre que la convergence d'une suite de fonctions dans $(C_0^\alpha,\ w_\alpha(\,.\,,1))$ n'implique même pas sa convergence simple, ce qui fait que ce dernier espace normé n'est guère intéressant pour une étude fine de la convergence des processus. La situation est donc assez différente de celle de $\mathrm{H}_\alpha[0,1]$ où $\|f\|_\infty$ est dominée par $w_\alpha(f,1)$ grâce à la nullité de f en 0. ■

Nous allons vérifier que $C_0^\alpha(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\alpha$ est un bien un espace de Banach. Son analyse ultérieure par des fonctions triangulaires de Schauder montrera, entre autres, qu'il contient un sous-espace isomorphe à $\ell^\infty(\mathbb{N})$ et n'est donc pas séparable. Pour des raisons d'équitension, nous remédions à cet inconvénient en introduissant le sous-espace $C_0^{\alpha,o}(\mathbb{R})$ défini par[1] :

$$f \in C_0^{\alpha,o}(\mathbb{R}) \iff f \in C_0^\alpha(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \lim_{\delta\to 0} w_\alpha(f,\delta) = 0. \tag{4.4}$$

[1]Le zéro en indice rappelle la nullité à l'infini et le petit o en exposant rappelle que pour les fonctions de cet espace on a l'estimation $|f(x)-f(y)| = o(|x-y|^\alpha)$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4.1 *$(C_0^\alpha(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\alpha)$ est un espace de Banach.*

Preuve : Il est clair que $(C_0^\alpha(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\alpha)$ est un espace vectoriel normé. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(C_0^\alpha(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\alpha)$. Comme $\|f_n\|_\infty \leq \|f_n\|_\alpha$, cette suite est aussi de Cauchy dans $C_0(\mathbb{R})$, espace de fonctions continues tendant vers zéro à l'infini, muni de la norme du supremum, qui est complet. Ainsi (f_n) converge dans $C_0(\mathbb{R})$ vers une fonction f appartenant à $C_0(\mathbb{R})$.

D'autre part, puisque $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $(C_0^\alpha(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\alpha)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, un entier $m(\varepsilon)$ tel que $\forall n \geq m(\varepsilon)$, $\|f_{n+p} - f_n\|_\alpha < \varepsilon$. Il existe ainsi une suite d'indices $(n_\ell)_{\ell\geq 1}$ telle que

$$\forall k \geq 1, \quad \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_\alpha < 2^{-k}.$$

On a

$$f_{n_\ell} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\ell-1}\left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right)$$

et

$$\lim_{\ell\to+\infty} f_{n_\ell} = f_{n_1} + \sum_{k\geq 1}\left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right) = f,$$

avec convergence dans $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. On en déduit

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &\leq \left|f_{n_1}(t) - f_{n_1}(s)\right| + \sum_{k\geq 1}\left|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t) - f_{n_{k+1}}(s) - f_{n_k}(s)\right| \\ &\leq C|t-s|^\alpha \quad \text{avec} \quad C = \left\|f_{n_1}\right\|_\alpha + 1. \end{aligned}$$

D'où

$$w_\alpha(f,1) \leq C \quad \text{et} \quad \|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + w_\alpha(f,1) < +\infty.$$

Ainsi f appartient à $(C_0^\alpha(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\alpha)$. On a aussi

$$\begin{aligned} \left|f_{n_\ell}(t) - f(t) - f_{n_\ell}(s) - f(s)\right| &= \Big|\sum_{k\geq \ell}\left(f_{n_k}(t) - f_{n_{k-1}}(t) - f_{n_k}(s) + f_{n_{k-1}}(s)\right)\Big| \\ &\leq \sum_{k\geq\ell}\left\|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right\|_\alpha |t-s|^\alpha \\ &= \sum_{k\geq\ell} 2^{-k}|t-s|^\alpha \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\left\|f_{n_\ell} - f\right\|_\alpha \leq \left\|f_{n_\ell} - f\right\|_\infty + \sum_{k\geq\ell} 2^{-k}.$$

Comme (f_{n_ℓ}) converge vers f dans $C_0(\mathbb{R})$, il existe un entier ℓ_0 tel que

$$\forall \ell \geq \ell_0, \quad \left\|f_{n_\ell} - f\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{et} \quad \left|\sum_{k\geq \ell} 2^{-k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc $\left\|f_{n_\ell} - f\right\|_\alpha < \varepsilon$ dès que $\ell \geq \ell_0$, ce qui prouve la convergence de la suite de Cauchy (f_{n_ℓ}) vers f dans $C_0^\alpha(\mathbb{R})$ et la complétude de $(C_0^\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$. ■

Proposition 4.2 *$(C_0^{\alpha,o}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\alpha)$ est un sous-espace fermé, séparable de $(C_0^\alpha(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\alpha)$.*

Preuve : Montrons d'abord que c'est un sous-espace fermé de $C_0^\alpha(\mathbb{R})$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $C_0^{\alpha,o}$, qui converge dans C_0^α vers une fonction f ; ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m(\varepsilon)$ tel que $\|f_{m_\varepsilon} - f\|_\alpha < \varepsilon/2$.

D'autre part

$$\begin{aligned} w_\alpha(f,\delta) &\leq w_\alpha(f_{m_\varepsilon} - f, \delta) + w_\alpha(f_{m_\varepsilon}, \delta) \\ &\leq \left\|f_{m_\varepsilon} - f\right\|_\alpha + w_\alpha(f_{m_\varepsilon}, \delta), \quad \text{avec} \quad \delta < 1. \end{aligned}$$

Comme $f_{m_\varepsilon} \in C_0^{\alpha,o}$, il existe un $\gamma(\varepsilon) > 0$ tel que $w_\alpha(f_{m_\varepsilon}, \delta) < \varepsilon/2$, $\forall \delta < \gamma(\varepsilon)$. Ainsi, pour tout $\delta < \gamma(\varepsilon)$, $w_\alpha(f,\delta) < \varepsilon$, donc f est bien dans $C_0^{\alpha,o}$. Le sous-espace $C_0^{\alpha,o}$ est donc fermé dans C_0^α.

Passons à la séparabilité. Soit $f \in C_0^{\alpha,o}(\mathbb{R})$, pour j fixé dans $\mathbb{N}$, notons $E_j f$ la ligne polygonale d'interpolation linéaire de f aux point $r_{j,k} = k/2^j$, $k \in \mathbb{Z}$. On a

$$\|E_j f - f\|_\alpha = \|E_j f - f\|_\infty + w_\alpha(E_j f - f, 1).$$

Dans ce qui suit, nous noterons $I_{j,k}$ l'intervalle dyadique :

$$I_{j,k} = \left[r_{j,k}\,;\, r_{j,k+1}\right].$$

Contrôle de $\|E_j f - f\|_\infty$
Soit $t \in \mathbb{R}$, il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que I_{j,k_0} contienne t. En notant que $E_j f$ est affine sur I_{j,k_0}, on a :

$$\begin{aligned} \left|(E_j f - f)(t)\right| &\leq \left|E_j f(t) - E_j f(r_{j,k_0})\right| + \left|E_j f(r_{j,k_0}) - f(t)\right| \\ &\leq \left|E_j f(r_{j,k_0+1}) - E_j f(r_{j,k_0})\right| + \left|f(r_{j,k_0}) - f(t)\right| \\ &\leq \left|f(r_{j,k_0+1}) - f(r_{j,k_0})\right| + \left|f(r_{j,k_0+1}) - f(t)\right| \\ &\leq w_\alpha(f, 2^{-j})2^{-j\alpha} + w_\alpha(f, 2^{-j})\left|t - r_{j,k_0}\right|^\alpha \\ &\leq 2w_\alpha(f, 2^{-j})2^{-j\alpha}. \end{aligned}$$

D'où

$$\left\|E_j f - f\right\|_\infty \leq 2^{-j\alpha+1} w_\alpha(f, 2^{-j}). \tag{4.5}$$

Contrôle de $w_\alpha(E_j f - f, 1)$

On discute suivant la localisation de s et t dans $\mathbb{R}$, tels que $|t-s| \leq 1$. Pour alléger les formules, nous poserons localement $E_j f - f = h_j$.

<u>1^er^ cas :</u> s et t sont dans un même intervalle $I_{j,k}$, donc $|t-s| \leq 2^{-j}$ et :

$$\begin{aligned}
\frac{\left|h_j(t) - h_j(s)\right|}{|t-s|^\alpha} &\leq \frac{\left|E_j f(t) - E_j f(s)\right|}{|t-s|^\alpha} + \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} \\
&= \frac{\left|E_j f(r_{j,k}) - E_j f(r_{j,k+1})\right|}{2^{-j}} |t-s|^{1-\alpha} + \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\left|h_j(t) - h_j(s)\right|}{|t-s|^\alpha} &\leq \frac{\left|f(r_{j,k}) - f(r_{j,k+1})\right|}{2^{-j\alpha}} + \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} \\
&\leq 2 w_\alpha(f, 2^{-j}).
\end{aligned}$$

<u>2^e^ cas :</u> s et t sont dans deux intervalles mitoyens, disons $I_{j,k}$ et $I_{j,k+1}$. On se ramène au premier cas par l'inégalité triangulaire.

$$\frac{\left|h_j(t) - h_j(s)\right|}{|t-s|^\alpha} \leq \frac{\left|h_j(s) - h_j(r_{j,k+1})\right|}{|t-s|^\alpha} + \frac{\left|h_j(t) - h_j(r_{j,k+1})\right|}{|t-s|^\alpha}.$$

Comme $|t-s| \geq \left|t - r_{j,k+1}\right|$ et $|t-s| \geq \left|s - r_{j,k+1}\right|$, il vient

$$\frac{\left|h_j(t) - h_j(s)\right|}{|t-s|^\alpha} \leq 4 w_\alpha(f, 2^{-j}).$$

<u>3^e^ cas :</u> s et t sont dans des intervalles non mitoyens $I_{j,k}$ et $I_{j,k+\ell}$ ($\ell > 1$).

$$\begin{aligned}
\frac{\left|h_j(t) - h_j(s)\right|}{|t-s|^\alpha} \leq\ & \frac{\left|h_j(t) - h_j(r_{j,k+\ell})\right|}{|t-s|^\alpha} + \frac{\left|h_j(s) - h_j(r_{j,k+1})\right|}{|t-s|^\alpha} \\
& + \frac{\left|h_j(r_{j,k+1}) - h_j(r_{j,k+\ell})\right|}{|t-s|^\alpha}.
\end{aligned}$$

Le dernier terme est nul car $E_j f$ coïncide avec f aux points $r_{j,k+1}$ et $r_{j,k+\ell}$. Ainsi, d'après le premier cas

$$\frac{\left|h_j(t) - h_j(s)\right|}{|t-s|^\alpha} \leq 4 w_\alpha(f, 2^{-j}).$$

Finalement, dans tous les cas

$$\frac{\left|(E_jf-f)(t)-(E_jf-f)(s)\right|}{|t-s|^\alpha}\leq 4w_\alpha(f,2^{-j}).$$

On en déduit les estimations

$$\begin{aligned} w_\alpha(E_jf-f,1) &\leq 4w_\alpha(f,1/2^j), &(4.6)\\ \left\|E_jf-f\right\|_\alpha &\leq (4+2^{1-j\alpha})w_\alpha(f,2^{-j}). &(4.7)\end{aligned}$$

L'inégalité (4.7) et la définition de $C_0^{\alpha,o}$ entraînent alors clairement la densité de l'ensemble des lignes polygonales à sommets d'abscisses $k/2^j$, $k\in\mathbb{Z}$, $j\in\mathbb{N}$, dans $(C_0^{\alpha,o}(\mathbb{R}),\|\cdot\|_\alpha)$. La séparabilité de cet espace en découle. ∎

On montre maintenant que $C_0^{\alpha,o}$ est Schauder décomposable, c'est-à-dire l'existence d'une suite de sous-espaces fermés $(\mathcal{X}_i, i\in\mathbb{N})$ telle que :

$$C_0^{\alpha,o}=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{X}_i, \tag{4.8}$$

où la somme directe est topologique (*i.e.* les projections canoniques sur les $\mathcal{X}_i$ sont continues). Pour la théorie générale des décompositions de Schauder, nous renvoyons à Singer [41].

Cette décomposition est utile pour obtenir un isomorphisme entre $C_0^{\alpha,o}$ et un espace de Banach de suites et pour étudier l'équitension de processus à trajectoires dans $C_0^{\alpha,o}$ suivant la méthode de [43]. La preuve est basée sur l'analyse de $C_0^{\alpha,o}$ par deux échelles de fonctions triangulaires construites comme suit. La première est constituée de la fonction

$$\Delta^*(t)=\begin{cases}1+t & \text{si}\quad -1\leq t\leq 0,\\ 1-t & \text{si}\quad 0\leq t\leq 1,\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases} \tag{4.9}$$

et de ses translatées

$$\Delta_k^*(t)=\Delta^*(t-k),\qquad t\in\mathbb{R},\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{4.10}$$

La deuxième échelle est la base de Faber-Schauder, obtenue par translations et changements d'échelle dyadiques de la fonction triangulaire :

$$\Delta(t)=\begin{cases}2t & \text{si}\quad 0\leq t\leq 1/2,\\ 2(1-t) & \text{si}\quad 1/2\leq t\leq 1,\\ 0 & \text{ailleurs,}\end{cases} \tag{4.11}$$

en notant

$$\Delta_{j,k}(t) = \Delta(2^j t - k), \qquad t \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}. \tag{4.12}$$

Pour expliquer les rôles respectifs joués par ces deux échelles, rappelons l'algorithme de Faber-Schauder de décomposition de l'espace $C(0,1)$. Si f est une fonction continue sur $[0,1]$ avec $f(0) = f(1) = 0$, sa projection $P_1 f$ sur (la droite vectorielle engendrée par) Δ est simplement l'interpolation linéaire de f entre les points 0, 1/2 et 1. La fonction $f - P_1 f$ s'annule ainsi en ces points, la projection $P_2 f$ de f sur l'espace engendré par $\Delta_{1,0}$, $\Delta_{1,1}$ est l'interpolation linéaire de $f - P_1 f$ aux points 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1...ainsi de suite. L'initialisation de l'algorithme pour une fonction quelconque f de $C(0,1)$ (pas nécessairement nulle en 0 et 1) nécessite l'adjonction à l'échelle $\{\Delta_{j,k},\ j \in \mathbb{N},\ 0 \leq k < 2^j\}$ de deux autres fonctions $h_{-1}(x) = 1$ et $h_0(x) = x$ de telle sorte que $f - P_0 f$ s'annule en 0 et 1, où P_0 est la projection donnée $P_0 f = f(0)h_{-1} + \big(f(1) - f(0)\big)h_0$. Géométriquement parlant, l'étape d'initialisation consiste en la soustraction du segment interpolant f aux points 0 et 1. Cette méthode ne peut être appliquée directement à $C_0^{\alpha,o}(\mathbb{R})$, puisque les points extrêmes sont rejetés à l'infini. L'idée est alors de soustraire la ligne polygonale $E_0 f$ interpolant f aux points entiers. C'est précisément le rôle qui sera joué par l'échelle $\{\Delta_k^*,\ k \in \mathbb{Z}\}$, puisque la projection $f \in C_0^{\alpha,o}$ sur le sous-espace engendré par cette échelle est $E_0 f$. La fonction $f - E_0 f$ s'annule ainsi en chaque entier $l \in \mathbb{Z}$ et peut être traitée localement sur chaque intervalle $[l, l+1]$ par l'algorithme de Faber-Schauder en utilisant l'échelle $\{\Delta_{j,k},\ j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\}$. Il convient de noter ici que l'échelle $\{\Delta_k^*,\ k \in \mathbb{Z}\}$ ne coïncide pas avec $\{\Delta_{-1,k},\ k \in \mathbb{Z}\}$. En particulier les supports de Δ_k^* et Δ_{k+1}^* se chevauchent.

Théorème 4.3 *L'espace $C_0^{\alpha,o}$ possède la décomposition de Schauder*

$$C_0^{\alpha,o} = V_0 \oplus \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} W_j, \tag{4.13}$$

où V_0 est le sous-espace fermé de C_0^{α} engendré par $\{\Delta_k^*,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et pour $j \geq 0$, W_j est le sous-espace fermé de C_0^{α} engendré par $\{\Delta_{j,k},\ k \in \mathbb{Z}\}$. Les projections E_0 sur V_0 et D_j sur W_j sont données par :

$$E_0 f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)\Delta_k^*, \tag{4.14}$$

$$D_j f = (E_{j+1} - E_j)f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k}(f)\Delta_{j,k}, \quad j \geq 0, \quad \text{où} \tag{4.15}$$

$$c_{j,k}(f) = f\big((k+1/2)2^{-j}\big) - \frac{1}{2}\big\{f\big(k2^{-j}\big) + f\big((k+1)2^{-j}\big)\big\}. \tag{4.16}$$

Les séries (4.14) et (4.15) convergent dans C_0^α.

La preuve est basée sur le lemme suivant qui montre que la suite de fonctions triangulaires qui engendrent V_0 ou W_j est en fait une base de Schauder de cet espace.

Lemme 4.4

(i) Une fonction g est dans V_0 si et seulement si $g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\Delta_k^*$ avec $\lim_{|k|\to+\infty} a_k = 0$. Cette représentation est unique, les a_k sont donnés par $a_k = g(k)$ et la convergence de la série a lieu au sens de la topologie de C_0^α.

(ii) Pour $j \geq 0$, une fonction g est dans W_j si et seulement si $g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{j,k}\Delta_{j,k}$ avec $\lim_{|k|\to+\infty} a_{j,k} = 0$. Cette représentation est unique, les $a_{j,k}$ sont donnés par $a_{j,k} = g\big((k+1/2)2^{-j}\big)$ et la convergence de la série a lieu au sens de la topologie de C_0^α.

Preuve : Soit g une fonction de V_0, elle est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions g_n affines sur chaque intervalle $[l, l+1]$ ($l \in \mathbb{Z}$). Donc g est elle-même affine sur chacun de ces intervalles. En remarquant que $\Delta_k^*(l) = \delta_{k,l}$ (symbole de Kronecker), la décomposition suivante s'en déduit

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(k)\Delta_k^*(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

avec (au moins) convergence simple. Comme $\Delta_k^*(l) = \delta_{k,l}$, cette décomposition est unique.

Réciproquement, soit $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite tendant vers zéro à l'infini, on considère la série

$$h(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\Delta_k^*(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

et ses sommes partielles

$$h_n(x) = \sum_{|k|\leq n} a_k\Delta_k^*(x).$$

Pour x fixé, on a au plus deux termes non nuls dans cette série (on rappelle que les supports de Δ_k^* et Δ_{k+1}^* se chevauchent), la convergence simple est donc acquise et la fonction h est définie. Clairement

$$\|h - h_n\|_\infty \leq 2 \max_{|k|>n} |a_k|. \tag{4.17}$$

D'autre part, pour tous x, y dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |(h-h_n)(x)-(h-h_n)(y)| &\leq \sum_{|k|>n} |a_k| \left|\Delta_k^*(x)-\Delta_k^*(y)\right| && (4.18) \\ &\leq 4|x-y| \max_{|k|>n} |a_k|, && (4.19) \end{aligned}$$

puisqu'à x et y fixés, on a au plus quatre termes non nuls dans le deuxième membre de (4.18). Ainsi

$$w_\alpha(h-h_n,\delta) \leq 4\delta^{1-\alpha} \max_{|k|>n} |a_k|. \tag{4.20}$$

Les estimations (4.17) et (4.20) nous donnent alors la convergence de h_n vers h au sens de la norme C_0^α. Donc h est dans V_0 et (i) est établie.

La preuve de (ii) est similaire, les seules différences sont les changements d'échelle dyadiques et le non-chevauchement des supports de $\Delta_{j,k}$ et $\Delta_{j,k+1}$.

Remarque : Comme conséquence de (i) et (ii), les espaces V_0 et W_j ont les descriptions géométriques suivantes.

- V_0 est l'espace des lignes polygonales tendant vers zéro à l'infini, avec sommets d'abscisses entières.
- W_j est l'espace des lignes polygonales tendant vers zéro à l'infini, avec sommets d'abscisses $l2^{-j-1}$ ($l \in \mathbb{Z}$) et nulles aux points $k2^{-j}$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- Pour $j \geq 1$, la somme directe $V_j := V_0 \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{j-1} W_i\right)$ est l'espace des lignes polygonales tendant vers zéro à l'infini, avec sommets d'abscisses $k2^{-j}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Preuve du Théorème 4.3 : Soit f une fonction de $C_0^{\alpha,o}$. On rappelle que $E_j f$ est l'interpolation linéaire de f aux points d'abscisses $r_{j,k} = k2^{-j}$. Par la description géométrique précédente, $E_0 f$ est clairement dans V_0 et de même $(E_{j+1}-E_j)f$ est dans W_j. On a

$$E_{j+1}f = E_0 f + \sum_{i=0}^{j} (E_{i+1}-E_i)f \tag{4.21}$$

et par (4.5) et (4.6), cette expression converge dans C_0^α vers f. On obtient ainsi la décomposition

$$f = E_0 f + \sum_{j=0}^{+\infty} (E_{j+1}-E_j)f \quad \text{(convergence forte dans } C_0^\alpha\text{)}. \tag{4.22}$$

La décomposition (4.14) de $E_0 f$ est évidente en utilisant (i) du lemme 4.4. En appliquant (ii) du même lemme à $g = D_j f = (E_{j+1}-E_j)f$, on trouve que les cœfficients correspondants $a_{j,k}$ sont

$$\begin{aligned} a_{j,k}(g) &= E_{j+1}f\big((k+1/2)2^{-j}\big) - E_jf\big((k+1/2)2^{-j}\big) \\ &= f\big((k+1/2)2^{-j}\big) - \frac{1}{2}\big\{f\big(k2^{-j}\big) + f\big((k+1)2^{-j}\big)\big\}, \end{aligned}$$

puisque E_jf est affine sur le segment $[k2^{-j},(k+1)2^{-j}]$. Ainsi (4.15) est vérifiée. Finalement, par (4.6) on obtient l'estimation

$$\|E_jf\|_\alpha \leq 6\|f\|_\alpha, \quad f \in C_0^{\alpha,o}, \tag{4.23}$$

d'où découle la continuité sur $C_0^{\alpha,o}$ des projections E_j et $D_j = E_{j+1} - E_j$. ∎

4.3 Isomorphismes avec des espaces de suites

On passe maintenant à la caractérisation des espaces C_0^α et $C_0^{\alpha,o}$ par leurs isomorphismes avec des espaces de suites.

Théorème 4.5 *Soit $\mathcal{S}^\alpha$ l'espace des suites doublement indexées*

$$u = (u_{j,k};\ j \geq -1,\ k \in \mathbb{Z}),$$

telles que

$$\forall j \geq -1, \quad \lim_{|k|\to+\infty} u_{j,k} = 0 \quad et \tag{4.24}$$

$$\|u\| := \sup_{j\geq -1} 2^{(j+1)\alpha} \sup_{k\in\mathbb{Z}} |u_{j,k}| < +\infty. \tag{4.25}$$

Alors l'opérateur $T : C_0^\alpha \to \mathcal{S}^\alpha$ défini par $Tf = u$ où

$$u_{-1,k} = f(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{4.26}$$

$$u_{j,k} = f\Big(\frac{k+1/2}{2^j}\Big) - \frac{1}{2}\Big\{f\Big(\frac{k}{2^j}\Big) + f\Big(\frac{k+1}{2^j}\Big)\Big\}, \quad j \geq 0,\ k \in \mathbb{Z} \tag{4.27}$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach.

Preuve : Premièrement T envoie continûment C_0^α dans l'espace de Banach $(\mathcal{S}^\alpha, \|\ \|)$. Ceci découle clairement des estimations $|u_{-1,k}| \leq \|f\|_\infty$ et $|u_{j,k}| \leq 2^{-(j+1)\alpha}w_\alpha(f, 2^{-j-1})$ qui donnent $\|Tf\| \leq \|f\|_\alpha$.

D'autre part le candidat naturel à l'inversion de T est l'opérateur R donné formellement par

$$(Ru)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_{-1,k}\Delta_k^*(x) + \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_{j,k}\Delta_{j,k}(x), \quad u \in \mathcal{S}^\alpha,\ x \in \mathbb{R}. \tag{4.28}$$

Notons $|u|$ la suite obtenue en substituant à chaque terme de u sa valeur absolue. Comme pour x fixé, il y a au plus deux termes $\Delta_k^*(x)$ non nuls, on a

$$\begin{aligned} R|u|(x) &\leq 2\sup_{k\in\mathbb{Z}}|u_{-1,k}| + \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-(j+1)\alpha}\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{(j+1)\alpha}|u_{j,k}| \\ &\leq 2\sup_{k\in\mathbb{Z}}|u_{-1,k}| + \frac{1}{2^\alpha-1}\sup_{j\geq 0}\sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{(j+1)\alpha}|u_{j,k}|. \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction Ru est bien définie, continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers zéro à l'infini. De plus

$$\|Ru\|_\infty \leq \frac{2}{2^\alpha-1}\|u\|. \tag{4.29}$$

Pour vérifier la régularité hölderienne de la fonction Ru, on fixe x, y dans $\mathbb{R}$ tels que $0 < |x-y| < 1$ et on écrit

$$|Ru(x) - Ru(y)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_{-1,k}|\big|\Delta_k^*(x) - \Delta_k^*(y)\big| + \sum_{j=0}^{+\infty} A_j \tag{4.30}$$

$$\text{avec} \quad A_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_{j,k}|\big|\Delta_{j,k}(x) - \Delta_{j,k}(y)\big|. \tag{4.31}$$

La première série dans le deuxième membre de (4.30) ayant au plus quatre termes non nuls, sa somme peut être majorée par

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_{-1,k}|\big|\Delta_k^*(x) - \Delta_k^*(y)\big| \leq 4\sup_{k\in\mathbb{Z}}|u_{-1,k}||x-y|. \tag{4.32}$$

Comme $0 \leq \Delta_{j,k} \leq 1$ et $\Delta_{j,k}$ a pour pente maximale 2^{j+1}, les estimations

$$\big|\Delta_{j,k}(x) - \Delta_{j,k}(y)\big| \leq \min\big(1, 2^{j+1}|x-y|\big), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{4.33}$$

donnent la majoration

$$A_j \leq 2\sup_{k\in\mathbb{Z}}|u_{j,k}| \min\big(1, 2^{j+1}|x-y|\big). \tag{4.34}$$

Soit j_0 l'entier tel que $2^{-j_0-1} \leq |x-y| < 2^{-j_0}$. En découpant la série $\sum_{j\geq 0} A_j$ en deux sommes indexées respectivement par $j \leq j_0$ et $j > j_0$ et en utilisant (4.33), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{+\infty} A_j \leq\ & 2\sup_{i\leq j_0,\, k\in\mathbb{Z}} 2^{(i+1)\alpha}|u_{i,k}| \sum_{j=0}^{j_0} 2^{(j+1)(1-\alpha)}|x-y| \\ & +2\sup_{i> j_0,\, k\in\mathbb{Z}} 2^{(i+1)\alpha}|u_{i,k}| \sum_{j=j_0+1}^{+\infty} 2^{-(j+1)\alpha}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Les majorations élémentaires

$$\sum_{j=0}^{j_0} 2^{(j+1)(1-\alpha)} \leq \frac{2^{2-\alpha}}{2-2^\alpha}|x-y|^{\alpha-1}$$

et

$$\sum_{j=j_0+1}^{+\infty} 2^{-(j+1)\alpha} \leq \frac{1}{2^\alpha-1}|x-y|^\alpha$$

donnent

$$\sum_{j=0}^{+\infty} A_j \leq \Big(\frac{8}{2-2^\alpha}+\frac{2}{2^\alpha-1}\Big)\|u\|\,|x-y|^\alpha. \tag{4.36}$$

Finalement en rassemblant (4.29), (4.32) et (4.36) il vient

$$\|Ru\|_\alpha \leq \Big(4+\frac{8}{2-2^\alpha}+\frac{4}{2^\alpha-1}\Big)\|u\|. \tag{4.37}$$

Ainsi la fonction Ru est dans C_0^α, l'opérateur R est continu et comme $R\circ T$ est l'identité de C_0^α, ceci achève la preuve. ∎

Remarque : Il est facile de voir maintenant que C_0^α n'est pas séparable. En effet il contient le sous-espace fermé

$$L := \Big\{f = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{v_j}{2^{(j+1)\alpha}}\Delta_{j,0},\ \ (v_j)_{j\geq 0} \in \ell^\infty(\mathbb{N})\Big\},$$

qui est isomorphe à $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Théorème 4.6 *$C_0^{\alpha,o}$ est isomorphe par T au sous-espace $\mathcal{S}^{\alpha,o}$ de $\mathcal{S}^\alpha$ défini par*

$$\mathcal{S}^{\alpha,o} := \big\{u\in\mathcal{S}^\alpha;\quad \lim_{j\to+\infty} 2^{j\alpha}\sup_{k\in\mathbb{Z}}|u_{j,k}| = 0\big\}. \tag{4.38}$$

Preuve : Par le théorème 4.5, il suffit de vérifier les inclusions $T(C_0^{\alpha,o}) \subset \mathcal{S}^{\alpha,o}$ et $R(\mathcal{S}^{\alpha,o}) \subset C_0^{\alpha,o}$. Si $u = Tf$ avec $f \in C_0^{\alpha,o}$, alors par la définition de $u_{j,k}$, on a

$$|u_{j,k}| \leq 2^{-(j+1)\alpha}w_\alpha(f, 2^{-j-1}),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

La première inclusion s'en déduit.

Réciproquement, soit $u \in \mathcal{S}^{\alpha,o}$, considérons la fonction $f = Ru$. Par (4.38), la suite $(\varepsilon_j)_{j\geq 0}$ définie par

$$\varepsilon_j := 2^{(j+1)\alpha}\sup_{k\in\mathbb{Z}}|u_{j,k}|$$

tend vers zéro à l'infini. Pour vérifier que $w_\alpha(f,\delta)$ décroît vers zéro avec δ, on ne perd pas de généralité en supposant que δ est de la forme 2^{-l}. Pour x, y dans $\mathbb{R}$ tels que $0 < |x-y| < \delta$, soit j_0 l'entier tel que $2^{-j_0-1} \leq |x-y| < 2^{-j_0}$. En utilisant (4.32) et (4.33) avec le même découpage que dans la preuve du théorème (4.6), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} &\leq 4\sup_{k\in\mathbb{Z}}|u_{-1,k}||x-y|^{1-\alpha} + 2\sum_{j=0}^{j_0}\varepsilon_j 2^{(j+1)(1-\alpha)}|x-y|^{1-\alpha} \\
&\qquad + 2\sum_{j=j_0+1}^{+\infty}\varepsilon_j 2^{-(j+1)\alpha}|x-y|^{-\alpha} \\
&\leq 4\|u\|\delta^{1-\alpha} + 4\sum_{j=0}^{j_0}\varepsilon_j 2^{(j-j_0)(1-\alpha)} + 2\sum_{j=j_0+1}^{+\infty}\varepsilon_j 2^{(j_0-j)\alpha} \\
&\leq 4\|u\|\delta^{1-\alpha} + 4v_{j_0} + \frac{4}{2^\alpha-1}\sup_{j\geq j_0}\varepsilon_j, \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

avec

$$v_{j_0} := \sum_{i=0}^{j_0}\varepsilon_{j_0-i}2^{i(\alpha-1)}.$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour les séries, on a $\lim_{j_0\to+\infty} v_{j_0} = 0$. En prenant le supremum sur x, y dans l'estimation précédente, on obtient

$$w_\alpha(f,\delta) \leq 4\|u\|\delta^{1-\alpha} + 4\sup_{j\geq l} v_j + \frac{4}{2^\alpha-1}\sup_{j\geq l}\varepsilon_j. \qquad (4.40)$$

Comme $\delta = 2^{-l}$, $w_\alpha(f,\delta)$ tend vers zéro avec δ. L'inclusion $R(\mathcal{S}^{\alpha,o}) \subset C_0^{\alpha,o}$ est établie et la preuve est complète. ∎

4.4 Le dual de $C_0^{\alpha,o}$

Nous nous proposons maintenant d'obtenir des théorèmes de représentation pour le dual de $C_0^{\alpha,o}$, analogues aux théorèmes 1.9 et 1.10 pour $\mathrm{H}_\alpha^{0\,\prime}$. La preuve du théorème 1.9 de Ciesielski repose sur l'isomorphisme entre H_α^0 et l'espace de suites $c_0(\mathbb{N})$ et sur la dualité classique $c_0' = \ell^1$. Exploitant l'isomorphisme entre $C_0^{\alpha,o}$ et $\mathcal{S}^{\alpha,o}$, nous suivons la même méthode au prix de quelques complications dues à la double indexation des suites. Pour prouver que $c_0' = \ell^1$, le fait que la famille canonique $\{e_n,\, n \geq 1\}$ de $c_0(\mathbb{N})$ soit une base de Schauder joue un rôle clé[2]. Notre premier travail sera donc la construction d'une base canonique de $\mathcal{S}^{\alpha,o}$. Introduisons la famille canonique normalisée $\{e_{j,k}^{(\alpha)},\ j \geq -1,\ k \in \mathbb{Z}\}$ définie par :

$$\forall i \geq -1,\ \forall l \in \mathbb{Z},\quad e_{j,k}^{(\alpha)}(i,l) = \begin{cases} 2^{-(j+1)\alpha} & \text{si } (i,l) = (j,k), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous noterons $e_{j,k}$ pour $e_{j,k}^{(0)}$.

Lemme 4.7 *La famille des suites $\{e_{j,k}^{(\alpha)},\ j \geq -1,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une base inconditionnelle de l'espace de Banach $\mathcal{S}^{\alpha,o}$.*

Preuve : Rappelons qu'une famille de vecteurs $\{x_i,\ i \in I\}$ d'un espace de Banach $\mathcal{X}$ est une base inconditionnelle si tout élément $x \in \mathcal{X}$ admet un développement unique $x = \sum_{i\in I} a_i x_i$ avec convergence forte dans $\mathcal{X}$ vers la même somme x pour toute permutation sur les termes de cette série. Une base inconditionnelle est donc *a fortiori* de Schauder.

Considérons l'espace $S^{0,o}$ des suites $v = (v_{j,k})_{j\geq -1,\, k\in\mathbb{Z}}$ vérifiant :

$$\forall j \geq -1,\quad \lim_{|k|\to+\infty} v_{j,k} = 0, \tag{4.41}$$

$$\lim_{j\to+\infty} \sup_{k\in\mathbb{Z}} |v_{j,k}| = 0, \tag{4.42}$$

muni de la norme :

$$\|v\|_{S^{0,o}} = \sup_{j\geq -1} \sup_{k\in\mathbb{Z}} |v_{j,k}|.$$

Par le changement de suite $v_{j,k} = 2^{(j+1)\alpha} u_{j,k}$, $S^{0,o}$ est isométrique à $\mathcal{S}^{\alpha,o}$. Il suffit donc de prouver que la famille $\{e_{j,k},\ j \geq -1,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une base inconditionnelle de $S^{0,o}$.

Soit v un élément quelconque de $S^{0,o}$. Montrons que la famille $\mathcal{F} = \{v_{j,k} e_{j,k},\ j \geq -1,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est sommable dans $S^{0,o}$ et a pour somme v. Fixons $\varepsilon > 0$. Par (4.42) il existe $j_0 = j_0(v,\varepsilon)$ tel que :

$$\forall j \geq j_0,\quad \sup_{k\in\mathbb{Z}} |v_{j,k}| < \varepsilon.$$

Par (4.41), on peut alors trouver $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall j < j_0,\quad |k| \geq k_0 \Rightarrow |v_{j,k}| < \varepsilon.$$

On obtient ainsi un ensemble fini d'indices :

$$I = \{(j,k);\ -1 \leq j < j_0,\ 0 \leq |k| < k_0\}$$

[2]Qu'elle ne soit pas une base de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ permet d'ailleurs de comprendre pourquoi la même méthode ne donne pas l'identification du dual de ℓ^∞.

tel qu'en notant I^c son complémentaire dans $(\{-1\} \cup \mathbb{N}) \times \mathbb{Z}$,

$$\forall J \text{ fini } \subset I^c, \quad \Big\| \sum_{(j,k)\in J} v_{j,k} e_{j,k} \Big\|_{S^{0,o}} \leq \sup_{(j,k)\in I^c} |v_{j,k}| < \varepsilon.$$

$\mathcal{F}$ vérifie ainsi le critère de Cauchy généralisé pour les familles sommables (voir L. Schwartz [39] (T. 2, XIV, 4 ; 1) p. 170). La série

$$\sum_{j\geq -1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_{j,k} e_{j,k} \tag{4.43}$$

converge dans $S^{0,o}$ vers la même somme, quel que soit l'ordre de sommation.

D'autre part cette série converge ponctuellement vers v sur l'ensemble $A = (\{-1\} \cup \mathbb{N}) \times \mathbb{Z}$ car pour (i,l) fixé dans A, la série numérique

$$\sum_{j\geq -1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_{j,k} e_{j,k}(i,l)$$

contient un seul terme non nul qui vaut $v_{i,l}$. Comme la convergence dans $S^{0,o}$ implique la convergence ponctuelle, la somme de la série (4.43) est bien v. ∎

Nous pouvons maintenant identifier le dual topologique $\mathcal{S}'^{\alpha,o}$ de $\mathcal{S}^{\alpha,o}$.

Lemme 4.8 *ψ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}^{\alpha,o}$ si et seulement s'il existe $z \in \ell^1(A)$ tel que :*

$$\psi(u) = \sum_{j\geq -1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{(j+1)\alpha} u_{j,k} z_{j,k}, \quad u \in \mathcal{S}^{\alpha,o}, \tag{4.44}$$

où l'on a noté $A = (\{-1\} \cup \mathbb{N}) \times \mathbb{Z}$. Cette représentation est unique.

Preuve : Pour $u \in \mathcal{S}^{\alpha,o}$, notons comme précédemment, $v_{j,k} = 2^{(j+1)\alpha} u_{j,k}$. Soit ψ une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}^{\alpha,o}$. Grâce au lemme 4.7, on a :

$$\forall u \in \mathcal{S}^{\alpha,o}, \quad \psi(u) = \sum_{j\geq -1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_{j,k} \psi(e^{(\alpha)}_{j,k}).$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, choisissons $u = u(N)$ défini par :

$$v_{j,k} = 2^{(j+1)\alpha} u_{j,k} = \begin{cases} \operatorname{sgn}\psi(e^{(\alpha)}_{j,k}) & \text{si } j \leq N \text{ et } |k| \leq N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que $\|u\|_{\mathcal{S}^{\alpha,o}} = \sup_{(j,k)\in A} |v_{j,k}| = 1$. En raison de la continuité de ψ, on a pour tout N :

$$|\psi(u)| = \sum_{j=-1}^{N} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi(e^{(\alpha)}_{j,k})| \leq \|\psi\|_{\mathcal{S}'^{\alpha,o}}.$$

Ce majorant ne dépendant pas de N, on en déduit que :

$$\sum_{j\geq -1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\psi(e_{j,k}^{(\alpha)})| < +\infty.$$

Donc si ψ est dans $\mathcal{S}'^{\alpha,o}$, la suite $z = \big(\psi(e_{j,k}^{(\alpha)})\big)_{(j,k)\in A}$ est un élément de $\ell^1(A)$ et vérifie (4.44).

Réciproquement, soit $z \in \ell^1(A)$. Pour tout $u \in \mathcal{S}^{\alpha,o}$, la série :

$$\psi_z(u) := \sum_{j\geq -1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{(j+1)\alpha}u_{j,k}z_{j,k}$$

est absolument convergente et vérifie :

$$|\psi_z(u)| \leq \|z\|_{\ell^1(A)} \sup_{j\geq -1, k\in\mathbb{Z}} 2^{(j+1)\alpha}|u_{j,k}| = \|z\|_{\ell^1(A)}\|u\|_{\mathcal{S}^{\alpha,o}}.$$

ψ_z est donc bien une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}^{\alpha,o}$. Enfin, pour vérifier l'unicité de la représentation (4.44), par linéarité de $z \mapsto \psi_z$, il suffit de supposer que $\psi_z(u)$ est identiquement nul sur $\mathcal{S}^{\alpha,o}$. Comme z est dans $\ell^1(A)$, c'est en particulier une suite bornée sur A. En choisissant $u_{j,k} = 2^{-(j+1)\alpha}\mathrm{sgn}(z_{j,k})$, on en déduit la nullité de $\|z\|_{\ell^1(A)}$, donc de z. ■

En utilisant l'isomorphisme entre $\mathcal{S}^{\alpha,o}$ et $C_0^{\alpha,o}$, nous déduisons immédiatement du lemme 4.8 une caractérisation du dual de $C_0^{\alpha,o}$.

Théorème 4.9 *φ est un élément du dual topologique de $C_0^{\alpha,o}$ si et seulement s'il existe $z \in \ell^1(A)$ telle que :*

$$\varphi(f) = \sum_{j\geq -1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{(j+1)\alpha}z_{j,k}u_{j,k}(f), \quad f \in C_0^{\alpha,o}, \tag{4.45}$$

les formes linéaires $u_{j,k}(f)$ étant définies par (4.26) et (4.27). Cette représentation est unique.

Enfin, nous pouvons donner une représentation à l'aide de mesures signées, comme au théorème 1.10.

Théorème 4.10 *φ est une forme linéaire continue sur $C_0^{\alpha,o}$ si et seulement s'il existe μ mesure signée sur $\mathbb{R}$ et ν mesure signée sur $\mathbb{R}\times[0,1]$ telles que :*

$$\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx) + \int_{\mathbb{R}\times[0,1]} \frac{2f(x)-f(x+y)-f(x-y)}{y^\alpha}\nu(dx,dy) \tag{4.46}$$

où la deuxième intégrande vaut zéro lorsque $y = 0$, ce qui revient à la prolonger par continuité puisque $f \in C_0^{\alpha,o}$.

Preuve : Si φ est définie par (4.46), on a clairement :

$$\begin{aligned}|\varphi(f)| &\leq \|f\|_\infty|\mu|(\mathbb{R}) + 2w_\alpha(f,1)|\nu|(\mathbb{R}\times[0,1]) \\ &\leq \{|\mu|(\mathbb{R}) + 2|\nu|(\mathbb{R}\times[0,1])\}\|f\|_\alpha.\end{aligned}$$

φ est donc bien une forme linéaire continue sur $C_0^{\alpha,o}$. Réciproquement, si φ est une forme linéaire continue sur $C_0^{\alpha,o}$, en utilisant la représentation (4.45) du théorème 4.9 et en choisissant :

$$\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} z_{-1,k}\delta_k \quad \text{et} \quad \nu = \sum_{j\geq 0}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2} z_{j,k}\delta_{k2^{-j}} \otimes \delta_{2^{-j-1}},$$

on obtient directement la représentation (4.46). ∎

Chapitre 5

Convergence faible de processus dans $C_0^{\alpha,o}$

5.1 Introduction

Pour montrer la convergence en loi d'une suite d'éléments aléatoires de $C_0^{\alpha,o}$, la méthode est la même que pour l'espace H_α^0. Cette convergence est équivalente à l'équitension de la suite des lois et à la convergence des lois finidimensionnelles. On pourrait en effet reprendre la preuve de la proposition 1.20 en remplaçant le théorème 1.9 de Ciesielski par la caractérisation du dual de $C_0^{\alpha,o}$ obtenue au chapitre 4 (théorème 4.9).

On est amené ainsi à étudier les conditions d'équitension dans $C_0^{\alpha,o}$ qui seront présentées à la section 2. Comme application, nous étudions à la section 3, la convergence faible hölderienne d'une suite de processus empiriques lissés par une suite de noyaux de convolution[1]. En particulier lorsque la fonction de répartition marginale F de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ est suffisamment régulière la suite de processus lissés converge faiblement dans $C_0^{\alpha,o}$ vers un processus gaussien centré de covariance $\Gamma(s,t) = F(t \wedge s) - F(t)F(s)$ pour tout $\alpha < 1/2$.

5.2 Equitension dans $C_0^{\alpha,o}$

On présente ici quelques conditions d'équitension de suites de processus stochastiques à trajectoires dans $C_0^{\alpha,o}$. Notre résultat de base est le théorème suivant qui est une généralisation du théorème de Prokhorov [36] sur l'équitension dans les espaces de Hilbert.

[1] Ces processus sont aussi appelés processus empiriques perturbés [42].

Théorème 5.1 (Suquet [43])
Soit $\mathcal{X}$ un espace de Banach, séparable et Schauder décomposable

$$\mathcal{X} = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} \mathcal{X}_i, \quad \textit{(somme directe topologique).}$$

On pose pour tout entier $j \geq 0$,

$$V_j = \bigoplus_{i=0}^{j} \mathcal{X}_i$$

et on note E_j la projection continue de $\mathcal{X}$ sur V_j. Soit $\mathcal{F}$ une famille de mesures de probabilité sur $\mathcal{X}$ et $E_j\mathcal{F} = \{\mu \circ E_j^{-1},\ \mu \in \mathcal{F}\}$. Alors $\mathcal{F}$ est équitendue si et seulement si

(*i*) *Pour tout entier $j \geq 0$, $E_j\mathcal{F}$ est équitendue sur V_j,*

(*ii*) *Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{j\to+\infty} \sup\limits_{\mu\in\mathcal{F}} \mu\big(f \in \mathcal{X} :\ \|f - E_j f\| > \varepsilon\big) = 0$.*

Remarque : Il est facile de voir que K est compact dans V_j si et seulement si $\pi_i K$ est compact dans $\mathcal{X}_i$ $(0 \leq i \leq j)$ où π_i est la projection canonique sur $\mathcal{X}_i$. Donc la condition (i) peut être remplacée par la condition suivante plus commode dans notre cas.

(i') Pour tout entier $i \geq 0$, $\pi_i\mathcal{F}$ est équitendue sur $\mathcal{X}_i$.

Notre premier résultat est une condition nécessaire et suffisante d'équitension basée sur l'isomorphisme de $C_0^{\alpha,o}$ avec l'espace de suites $\mathcal{S}^{\alpha,0}$.

Théorème 5.2 *Soit $(\xi_n,\ n \geq 1)$ une suite d'éléments aléatoires de $C_0^{\alpha,o}$. On définit les variables aléatoires $u_{j,k}(\xi_n)$ $(j \geq -1,\ k \in \mathbb{Z})$ par*

$$\begin{aligned} u_{-1,k}(\xi_n) &= \xi_n(k), \\ u_{j,k}(\xi_n) &= \xi_n\big((k+1/2)2^{-j}\big) - \frac{1}{2}\big\{\xi_n\big(k2^{-j}\big) + \xi_n\big((k+1)2^{-j}\big)\big\}, \quad j \geq 0. \end{aligned}$$

Alors $(\xi_n,\ n \geq 1)$ est équitendue dans $C_0^{\alpha,o}$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées

$$\lim_{A\to+\infty} \sup_{n\geq 1} P\big(|u_{i,k}(\xi_n)| \geq A\big) = 0, \quad i \geq -1,\ k \in \mathbb{Z}, \tag{5.1}$$

$$\lim_{q\to+\infty} \sup_{n\geq 1} P\Big(\sup_{|k|>q} |u_{i,k}(\xi_n)| \geq \varepsilon\Big) = 0, \quad i \geq -1,\ \varepsilon > 0, \tag{5.2}$$

$$\lim_{j\to+\infty} \sup_{n\geq 1} P\Big(\sup_{i\geq j} 2^{(i+1)\alpha} \sup_{k\in\mathbb{Z}} |u_{i,k}(\xi_n)| \geq \varepsilon\Big) = 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.3}$$

Preuve : En utilisant la décomposition (4.13) du théorème 4.3 et l'isomorphisme T, (5.3) apparaît comme une simple réécriture de la condition (ii) du théorème 5.1. Pour voir que la condition (i') pour $\mathcal{X} = C_0^{\alpha,o}$ est équivalente à (5.1) et (5.2), il suffit d'appliquer encore le théorème 5.1 à l'espace $T(V_0)$ ou $T(W_{i-1})$ $(i \geq 1)$. Dans ce cas, la décomposition de Schauder est donnée par la base canonique de l'espace correspondant. ∎

Remarque : Le système de conditions (5.1) à (5.3) ne peut pas être réduit. Pour le voir, montrons à l'aide de contre-exemples qu'aucune de ces trois conditions ne peut se déduire des deux autres. Nos trois contre-exemples seront des processus ξ_n dont la loi est une masse de Dirac.

(5.2) *et* (5.3) *n'impliquent pas* (5.1) :
Prendre ξ_n défini par :

$$\begin{cases} u_{-1,0}(\xi_n) &= n, \\ u_{j,k}(\xi_n) &= 0 \quad \text{si } (j,k) \neq (-1,0). \end{cases}$$

(5.3) *et* (5.1) *n'impliquent pas* (5.2) :
Prendre ξ_n défini par :

$$\begin{cases} u_{-1,k}(\xi_n) &= \delta_{n,k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ u_{j,k}(\xi_n) &= 0 \quad \text{si } j \geq 0,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(5.1) *et* (5.2) *n'impliquent pas* (5.3) :
Prendre ξ_n défini par :

$$\begin{cases} u_{j,0}(\xi_n) &= 2^{-(j+1)\alpha}\delta_{j,n}, \quad j \geq -1, \\ u_{j,k}(\xi_n) &= 0 \quad \text{si } j \geq -1,\ k \neq 0. \end{cases}$$

Du théorème 5.2, découle la caractérisation suivante de l'équitension, plus intrinsèque.

Théorème 5.3 *Une suite* $(\xi_n,\ n \geq 1)$ *d'éléments aléatoires de* $C_0^{\alpha,o}$ *est équitendue si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées*

(a) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \sup_{n \geq 1} P\Big(\sup_{|t| \geq A} |\xi_n(t)| \geq \varepsilon\Big) = 0,$

(b) *Pour tout* $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{\delta \to 0} \sup_{n \geq 1} P(w_\alpha(\xi_n, \delta) \geq \varepsilon) = 0.$

Preuve : Clairement (a) implique (5.2). En utilisant les estimations (4.5), (4.6) et l'isomorphisme T, (5.3) découle de la condition (b). Montrons que (a) et (b) impliquent (5.1). Le cas $i \geq 0$ est immédiat puisque :

$$|u_{i,k}(\xi_n)| \leq 2w_\alpha(\xi_n, 2^{-i-1})2^{-(i+1)\alpha}.$$

Pour traiter le cas $i = -1$, soit $\eta > 0$. En prenant $\varepsilon = 1$ dans (a), il existe un t_0 dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\sup_{n\geq 1} P(|\xi_n(t_0)| \geq 1) < \eta.$$

Par (b) il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(w_\alpha(\xi_n, \delta) < 1) \geq 1 - \eta.$$

Soit k fixé dans $\mathbb{Z}$. Il existe un entier N tel que $(N-1)\delta \leq |k - t_0| < N\delta$. Par chaînage de pas δ, on en déduit :

$$\forall n \geq 1, \quad P(|\xi_n(k) - \xi_n(t_0)| \leq N\delta^\alpha) \geq 1 - 2\eta.$$

Donc pour $A = 1 + N\delta^\alpha$, on a :

$$\forall n \geq 1, \quad P(|\xi_n(k)| \geq A) \leq 3\eta,$$

ce qui achève la vérification du cas $i = -1$. Ainsi les conditions (a) et (b) sont suffisantes pour l'équitension de $(\xi_n,\ n \geq 1)$ dans $C_0^{\alpha,o}$.

Pour montrer qu'elles sont aussi nécessaires, on utilise le résultat suivant.

Lemme 5.4 (Suquet [43]) *Soit $\mathcal{F}$ une famille compacte (pour la topologie de la convergence faible) de mesures de probabilité sur un espace métrique séparable S. Soient $(F_l,\ l \in \mathbb{N})$ une suite de parties fermées de S décroissante vers $\emptyset$. On définit les fonctions φ_l $(l \in \mathbb{N})$ par*

$$\begin{aligned} \varphi_l : \mathcal{F} &\to \mathbb{R}^+ \\ P &\mapsto \varphi_l(P) = P(F_l) \end{aligned}$$

Alors la suite (φ_l) converge vers zéro uniformément sur $\mathcal{F}$.

On considère maintenant deux suites $A_l \uparrow +\infty$, $\delta_l \downarrow 0$ et on définit

$$\begin{aligned} F_l^{(a)} &:= \Big\{f \in C_0^{\alpha,o},\ \sup_{|s|\geq A_l} |f(s)| \geq \varepsilon\Big\}, \quad (\text{pour } \varepsilon > 0 \text{ fixé}) \\ F_l^{(b)} &:= \{f \in C_0^{\alpha,o},\ w_\alpha(f, \delta_l) \geq \varepsilon\}, \quad (\text{pour } \varepsilon > 0 \text{ fixé}). \end{aligned}$$

Ces ensembles sont fermés en raison de la continuité sur $C_0^{\alpha,o}$ des fonctionnelles utilisées dans leur définition. En appliquant le lemme 5.4, on obtient la nécessité des conditions (a) et (b)pour l'équitension de $(\xi_n,\ n \geq 1)$. ■

On donne maintenant deux systèmes de conditions suffisantes d'équitension dans C_0^α dont la vérification est plus pratique que celle de (a) et (b).

Théorème 5.5 *Soit $(\xi_n,\ n \geq 1)$ une suite d'éléments aléatoires de $C_0^{\alpha,o}$. On suppose qu'il existe $\gamma \geq 1$, $\delta > 0$ et $\tau > 0$, tels que les conditions suivantes soient vérifiées*

(*i*) *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\sup\limits_{n\geq 1} \mathbb{E}\,|\xi_n(k)|^\tau < +\infty$.*

(*ii*) *La série $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\,|\xi_n(k)|^\tau$ converge, uniformément par rapport à $n \geq 1$.*

(*iii*) *Il existe une suite de fonctions croissantes G_n telle que*

$$P\big(|\xi_n(t)-\xi_n(s)| \geq \lambda\big) \leq \frac{\big(G_n(t)-G_n(s)\big)^{1+\delta}}{\lambda^\gamma},\ \lambda > 0,\ -\infty < s < t < +\infty.$$

(*iv*) *Il existe $0 < r \leq 1$, tel que G_n vérifie les conditions de régularité höldérienne suivantes*

$$g_{n,l} := \sup_{l\leq s<t\leq l+1} \frac{G_n(t)-G_n(s)}{(t-s)^r} < +\infty, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

(*v*) *La série $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} g_{n,l}^\delta\big(G_n(l+1)-G_n(l)\big)$ converge uniformément par rapport à $n \geq 1$ et ses sommes sont uniformément bornées.*

Alors $(\xi_n,\ n \geq 1)$ est équitendue dans $C_0^{\alpha,o}$ pour tout $0 < \alpha < r\delta/\gamma$.

Preuve : On va vérifier les conditions (5.1) à (5.3) du théorème 5.2. Le cas particulier $i = -1$ dans (5.1) et (5.2) découle clairement des deux conditions (*i*) et (*ii*). Comme pour $i \geq 0$,

$$u_{i,k}(\xi_n) = \frac{1}{2}\Big[\xi_n\Big(\frac{k+1/2}{2^i}\Big) - \xi_n\Big(\frac{k}{2^i}\Big)\Big] - \frac{1}{2}\Big[\xi_n\Big(\frac{k+1}{2^i}\Big) - \xi_n\Big(\frac{k+1/2}{2^i}\Big)\Big].$$

Les conditions (*iii*) et (*iv*) donnent les estimations

$$\begin{aligned} P\big(|u_{i,k}(\xi_n)| \geq A\big) &\leq \frac{1}{A^\gamma}\Big[G_n\Big(\frac{k+1/2}{2^i}\Big) - G_n\Big(\frac{k}{2^i}\Big)\Big]^{1+\delta} \\ &\quad + \frac{1}{A^\gamma}\Big[G_n\Big(\frac{k+1}{2^i}\Big) - G_n\Big(\frac{k+1/2}{2^i}\Big)\Big]^{1+\delta} \qquad (5.4) \\ &\leq \frac{g_{n,l}^\delta}{2^{(i+1)r\delta}A^\gamma}\Big[G_n\Big(\frac{k+1/2}{2^i}\Big) - G_n\Big(\frac{k}{2^i}\Big)\Big] \\ &\quad + \frac{g_{n,l}^\delta}{2^{(i+1)r\delta}A^\gamma}\Big[G_n\Big(\frac{k+1}{2^i}\Big) - G_n\Big(\frac{k+1/2}{2^i}\Big)\Big], \qquad (5.5) \end{aligned}$$

où l'entier l est défini par $2^i l \leq k < 2^i(l+1)$. Les fonctions G_n étant décroissantes, on utilise pour vérifier (5.1) l'estimation

$$P\big(|u_{i,k}(\xi_n)| \geq A\big) \leq \frac{1}{A^\gamma}\,\frac{g_{n,l}^\delta}{2^{(i+1)r\delta}}\big(G_n(l+1) - G_n(l)\big), \qquad (5.6)$$

dont la majoration uniforme par rapport à n est une conséquence évidente de la condition (v). Pour vérifier (5.2), on suppose, sans perte de généralité, que l'entier q est de la forme $q = m2^i$ où m est un entier positif tendant vers l'infini. En utilisant l'estimation (5.5) avec le schéma de sommation

$$\sum_{|k|>q} = \sum_{l>m}\Big(\sum_{k=l2^i}^{(l+1)2^i-1} + \sum_{k=-(l+1)2^i+1}^{-l2^i} \Big),$$

on obtient

$$P\Big(\sup_{|k|>q} |u_{i,k}(\xi_n)| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{\varepsilon^\gamma 2^{(i+1)r\delta}}\Big\{\sum_{l>m} g_{n,l}^\delta\big[G_n(l+1) - G_n(l)\big] + \sum_{l<-m} g_{n,l-1}^\delta\big[G_n(l) - G_n(l-1)\big]\Big\}. \tag{5.7}$$

Par la condition (v), ce majorant tend vers zéro uniformément par rapport à n quand m tend vers l'infini. Ainsi (5.2) est vérifiée. Finalement pour vérifier (5.3), la même méthode nous donne

$$P\Big(\sup_{i\geq j} 2^{(i+1)\alpha} \sup_{k\in\mathbb{Z}} |u_{i,k}(\xi_n)| \geq \varepsilon\Big) \leq \sum_{i\geq j} \frac{2^{(i+1)(\gamma\alpha - r\delta)}}{\varepsilon^\gamma} \sum_{l\in\mathbb{Z}} g_{n,l}^\delta\big[G_n(l+1)-G_n(l)\big].$$

Par la condition (v), ce majorant tend vers zéro uniformément par rapport à n quand j tend vers l'infini si $\gamma\alpha - r\delta < 0$. ■

Théorème 5.6 *Soit $(\xi_n,\ n \geq 1)$ une suite d'éléments aléatoires dans $C_0^{\alpha,o}$. On suppose l'existence de constantes $\gamma \geq 1$, $\delta > 0$ et $\tau > 0$, telles que les conditions suivantes soient satisfaites.*

(i) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\,|\xi_n(k)|^\tau < +\infty$.

(ii) Les séries $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\,|\xi_n(k)|^\tau$ convergent, uniformément par rapport à n.

(iii) Il existe une suite de fonctions croissantes bornées G_n telles que pour $\lambda > 0$ et $-\infty < s < t \leq s+1 < +\infty$,

$$P\big(|\xi_n(t) - \xi_n(s)| \geq \lambda\big) \leq \frac{|t-s|^\delta\big(G_n(t) - G_n(s)\big)}{\lambda^\gamma}.$$

(iv) $M := \sup_{n\geq 1}(G_n(+\infty) - G_n(-\infty)) < +\infty$.

(v) Les séries $\sum_{l\in\mathbb{Z}}\big(G_n(l+1)-G_n(l)\big)$ convergent uniformément par rapport à $n \geq 1$.

Alors $(\xi_n,\ n \geq 1)$ *est équitendue dans* $C_0^{\alpha,o}$ *pour tout* $0 < \alpha < \delta/\gamma$.

La démonstration est pratiquement la même (en plus simple) que celle du théorème précédent et sera donc omise.

Lorsque l'on a affaire à des éléments aléatoires de $C_0^{\alpha,o}$ engendrés à partir de processus à trajectoires discontinues par quelque procédure de lissage, la condition (*iii*) est parfois une exigence trop forte. On peut néanmoins l'affaiblir de la manière suivante.

Corollaire 5.7 *Supposons que la suite* $(\xi_n,\ n \geq 1)$ *d'éléments aléatoires de* $C_0^{\alpha,o}$ *vérifie*

$$\lim_{n\to+\infty} w_\alpha(\xi_n, 2^{-j(n)}) = 0 \quad \textit{en probabilité,} \tag{5.8}$$

où $j(n)$ *est une suite d'entiers croissante vers l'infini. Alors le théorème 5.6 reste valable avec* (*iii*) *vérifiée seulement pour* $1 \geq t - s \geq 2^{-j(n)}$.

Preuve : Considérons le processus auxiliaire $\tilde{\xi}_n = E_{j(n)}\xi_n$. Comme $u_{i,k}(\tilde{\xi}_n)$ est nul pour $i > j(n)$, le théorème 5.5 donne l'équitension de $(\tilde{\xi}_n,\ n \geq 1)$. Par (4.5), (4.6) et (5.8), $(\tilde{\xi}_n - \xi_n)$ converge en probabilité vers 0. Il en résulte que pour toute sous-suite $(\tilde{\xi}_{n_\ell},\ \ell \geq 1)$ convergente en loi dans $C_0^{\alpha,o}$, $(\xi_{n_\ell},\ \ell \geq 1)$ converge vers la même limite. La conclusion en découle par la caractérisation séquentielle de la relative compacité et le théorème de Prokhorov. ∎

5.3 Application au processus empirique lissé

On présente dans cette section, une application de nos résultats à la convergence faible höldérienne du processus empirique lissé. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, identiquement distribuées avec fonction de répartition marginale F. On note

$$F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[X_i,+\infty[}(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.9}$$

la fonction de répartition empirique et

$$\xi_n(t) = \sqrt{n}\big(F_n(t) - F(t)\big), \quad t \in \mathbb{R} \tag{5.10}$$

le processus empirique de l'échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. On introduit une suite de noyaux de convolution $K_n(t) = c_n^{-1}K(t/c_n)$ où K est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ et le paramètre c_n décroît vers 0 à une vitesse qui sera précisée ultérieurement. La suite $(K_n, n \geq 1)$ est une approximation de l'identité, ce qui signifie ici

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(t)\,dt = 1, \quad n \geq 1, \tag{5.11}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{|t|\geq\varepsilon} K_n(t)\,dt = 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.12}$$

Le processus empirique lissé correspondant est défini alors par

$$\zeta_n = \sqrt{n}(F_n - F) * K_n. \tag{5.13}$$

Nous imposons quelques conditions supplémentaires à K pour que chaque trajectoire de ζ_n soit dans $C_0^{1/2}$ et donc dans $C_0^{\alpha,o}$ pour tout $\alpha < 1/2$ (puisque nous n'attendons pas davantage de régularité pour le processus limite de ζ_n). Ces conditions sont données par le lemme suivant.

Lemme 5.8 *Soit f une fonction mesurable (non nécessairement continue) bornée, tendant vers zéro à l'infini et K un noyau de convolution vérifiant*

$$K \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^{1/2}(\mathbb{R}), \tag{5.14}$$

$$|K(x) - K(y)| \leq a(K)|x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{5.15}$$

pour une constante $a(K)$. Alors $f * K$ est dans $C_0^{1/2}$.

Preuve : Par des arguments élémentaires , $f * K$ est bornée et tend vers zéro à l'infini. L'estimation évidente

$$|f * K(x) - f * K(y)| \leq 2\|f\|_\infty a(K)^{1/2}\|K\|_{L^{1/2}}|x-y|^{1/2} \tag{5.16}$$

donne $w_{1/2}(f * K, 1) < +\infty$. ■

Dans ce qui suit, on suppose que les noyaux K_n vérifient (5.14) et (5.15).

Théorème 5.9 *Supposons que la fonction de répartition marginale F de la suite i.i.d. $(X_i,\ i \geq 1)$ vérifie pour certaines constantes $C > 0$, $0 < r \leq 1$*

$$|F(x) - F(y)| \leq C|x-y|^r, \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{5.17}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)^{1/2}(1 - F(x))^{1/2}\,dx < +\infty. \tag{5.18}$$

On suppose de plus que c_n décroît vers zéro et vérifie

$$n^{-1/4} = O(c_n). \tag{5.19}$$

Alors la suite des processus empiriques lissés $(\zeta_n,\ n \geq 1)$ définis par (5.13) est équitendue dans $C_0^{\alpha,o}$ pour tout $0 < \alpha < r/2$.

Preuve : Nous utilisons le corollaire 5.7 avec la suite d'entiers $j(n)$ définie par $2^{j(n)} \leq n < 2^{j(n)+1}$. Nous commençons par vérifier les conditions (i) à (v) du théorème 5.6 (uniquement la forme affaiblie pour (iii)).

D'abord (i) est satisfaite pour $\tau = 2$. En effet par l'inégalité de Jensen et le théorème de Fubini, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left|\int_{\mathbb{R}} \xi_n(t-u)K_n(u)\,du\right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\,|\xi_n(t-u)|^2 K_n(u)\,du = H * K_n(t), \tag{5.20}$$

où $H = F(1-F)$. Avec $H_n = H * K_n$, nous avons évidemment

$$\mathbb{E}\left|\zeta_n(t)\right|^2 \leq H_n(t) \leq 1, \quad t \in \mathbb{R},\ n \geq 1. \tag{5.21}$$

Pour vérifier (ii), il suffit de prouver la convergence uniforme des séries $\sum_{k\in\mathbb{Z}} H_n(k)$. Les H_n étant positives, on a clairement

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} H_n(k) = \int_{\mathbb{R}} L(u)K_n(u)\,du, \tag{5.22}$$

où

$$L(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} H(k-u), \quad u \in \mathbb{R}. \tag{5.23}$$

Remarquons maintenant que (5.18) implique l'existence de $\mathbb{E}\,X_1$ laquelle équivaut à la convergence des séries $\sum_{k>1} P(X_1 > k)$ et $\sum_{k\leq 0} P(X_1 \leq k)$. La convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série (5.23) est alors une conséquence immédiate des majorations

$$H(k-u) \leq 1 - F(k-1), \quad k > 1,\ u \in [0,1], \tag{5.24}$$
$$H(k-u) \leq F(k), \quad k \leq 0,\ u \in [0,1] \tag{5.25}$$

et de la 1-périodicité de L. Ainsi L est continue et bornée sur $\mathbb{R}$. D'autre part pour $m \geq 1$,

$$\sum_{k\geq m} H_n(k) \leq \int_{|u|\leq 1} \sum_{k\geq m}(1 - F(k-1))K_n(u)\,du + \int_{|u|>1} \|L\|_\infty K_n(u)\,du.$$

Par les propriétés (5.11) et (5.12) des noyaux K_n, ce majorant converge vers 0 uniformément en n quand m tend vers l'infini. L'utilisation de (5.25) à la place de (5.24) donne un résultat analogue pour $\sum_{k\leq m} H_n(k)$ $(m \to -\infty)$. Donc (ii) est vérifiée pour $\tau = 2$.

Comme $1/n \leq 2^{-j(n)} < 2/n$, le corollaire 5.7 nous permet de verifier (*iii*) seulement pour $1 \geq t-s \geq 1/n$, sous réserve que nous puissions établir la convergence en probabilité vers zéro de $w_\alpha(\zeta_n; 2/n)$. L'inégalité de Rosenthal nous donne pour tout $\gamma > 2$ une constante C_γ telle que

$$\mathbb{E}\big|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)\big|^\gamma \leq C_\gamma\big[n^{1-\gamma/2}\,\mathbb{E}\,|Y_1|^\gamma + \big(\mathbb{E}\,Y_1^2\big)^{\gamma/2}\big], \tag{5.26}$$

où les variables indépendantes, de même loi, centrées et bornées Y_i sont définies par

$$Y_i = \int_{\mathbb{R}} \Big(\mathbf{1}_{(s-u,t-u]}(X_i) - \mathbb{E}\,\mathbf{1}_{(s-u,t-u]}(X_i)\Big) K_n(u)\,du.$$

Par l'inégalité de Jensen, le théorème de Fubini et des majorations élémentaires des moments centrés de variables de Bernoulli, on obtient pour $s < t$ et $q \geq 2$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|Y_1|^q &\leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_{(s-u,t-u]}(X_i) - \mathbb{E}\,\mathbf{1}_{(s-u,t-u]}(X_i)\Big)^q K_n(u)\,du \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \big(F(t-u) - F(s-u)\big) K_n(u)\,du \\
&\leq F * K_n(t) - F * K_n(s).
\end{aligned}$$

En notant $\tilde{G}_n$ la fonction de répartition $F * K_n$ et en revenant à (5.26), nous avons

$$\mathbb{E}\big|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)\big|^\gamma \leq C_\gamma\big[n^{1-\gamma/2} + (\tilde{G}_n(t) - \tilde{G}_n(s))^{\gamma/2-1}\big](\tilde{G}_n(t) - \tilde{G}_n(s)).$$

Comme les K_n sont des densités de probabilité, les $\tilde{G}_n$ héritent la régularité r-hölderienne de F (voir (5.17)) *avec la même constante C indépendante de n*. De plus pour $1 \geq t-s \geq 1/n$, $n^{1-\gamma/2} \leq (t-s)^{\gamma/2-1} \leq (t-s)^{r(\gamma/2-1)}$. Donc pour $1 \geq t-s \geq 1/n$,

$$\mathbb{E}\big|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)\big|^\gamma \leq C'_\gamma|t-s|^{r(\gamma/2-1)}(\tilde{G}_n(t) - \tilde{G}_n(s)), \tag{5.27}$$

avec $C'_\gamma = C_\gamma(1 + C^{\gamma/2-1})$. Ainsi la version affaiblie de (*iii*) est vérifiée pour $\gamma > 2$ avec $\delta = r(\gamma/2-1)$ et

$$G_n := C'_\gamma F * K_n.$$

Comme les $F * K_n$ sont des fonctions de répartition, (*iv*) est satisfaite.

Pour vérifier (v), on laisse tomber la constante C'_γ et on observe que pour $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{l \geq m} \big(F * K_n(l+1) - F * K_n(l)\big) &= (1-F) * K_n(m), & (5.28) \\ \sum_{l \leq -m} \big(F * K_n(l) - F * K_n(l-1)\big) &= F * K_n(-m). & (5.29) \end{aligned}$$

La suite (K_n) étant une approximation de l'identité, $(1-F) * K_n$ et $F * K_n$ convergent *uniformément* sur $\mathbb{R}$ vers $1-F$ et F respectivement. Donc la convergence vers 0 quand m tend vers l'infini des membres de droite de (5.28) et (5.29) est uniforme en n. Ceci achève la vérification de (v).

Pour compléter la preuve,il reste à montrer la convergence en probabilité vers zéro de $w_\alpha(\zeta_n; 2/n)$. En utilisant (5.15), nous avons

$$\begin{aligned} |\zeta_n(t) - \zeta_n(s)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\xi_n(u)||K_n(t-u) - K_n(s-u)|\, du \\ &\leq a(K)\frac{|t-s|}{c_n^2} \int_{\mathbb{R}} |\xi_n(u)|\, du. \end{aligned}$$

On en déduit

$$w_\alpha(\zeta_n; 2/n) \leq 2^{1-\alpha} a(K) \frac{1}{n^{1-\alpha} c_n^2} \int_{\mathbb{R}} |\xi_n(u)|\, du,$$

puis

$$\mathbb{E}\, w_\alpha(\zeta_n; 2/n)^\beta \leq 2a(K) \frac{n^{\alpha-1}}{c_n^2} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\, |\xi_n(u)|\, du.$$

Enfin, puisque $\mathbb{E}\, |\xi_n(u)| \leq \mathbb{E}^{1/2}\, |\xi_n(u)|^2$,

$$\mathbb{E}\, w_\alpha(\zeta_n; 2/n) \leq 2a(K) \frac{n^{\alpha-1}}{c_n^2} \int_{\mathbb{R}} F(u)^{1/2}(1-F(u))^{1/2}\, du.$$

Ce majorant converge vers 0 grâce à (5.18) et (5.19). Ainsi par le corollaire 5.7, $(\zeta_n, n \geq 1)$ est équitendue dans $C_0^{\alpha,o}$ pour tout $\alpha < r(\gamma/2-1)/\gamma$. Comme aucune contrainte de majoration n'est faite sur le choix de γ dans l'inégalité de moment (5.26), cette équitension a lieu pour tout $\alpha < r/2$. ∎

Théorème 5.10 *Sous les hypothèses du théorème 5.9, la suite des processus empiriques lissés $(\zeta_n, n \geq 1)$ définis par (5.13) converge faiblement dans $C_0^{\alpha,o}$ pour tout $0 < \alpha < r/2$ vers un processus gaussien centré ζ de fonction de covariance*

$$\Gamma(s,t) = F(s) \wedge F(t) - F(s)F(t), \quad s,t \in \mathbb{R}. \tag{5.30}$$

Preuve : Par le théorème 5.9, $(\zeta_n,\ n \geq 1)$ est équitendue dans $C_0^{\alpha,o}$ pour tout $0 < \alpha < r/2$. Pour montrer la convergence des lois fini-dimensionnelles de ζ_n, on écrit

$$\zeta_n = \xi_n + (\xi_n * K_n - \xi_n) \tag{5.31}$$

et on rappelle que les lois fini-dimensionnelles de ξ_n convergent vers celles de ζ par le théorème central limite multinomial. Ainsi, il suffit de montrer que pour tout t, $(\xi_n * K_n - \xi_n)(t)$ tend vers zéro en probabilité. Par l'inégalité de Jensen

$$|\xi_n * K_n(t) - \xi_n(t)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |\xi_n(t-u) - \xi_n(t)|^2 K_n(u)\, du. \tag{5.32}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|\xi_n * K_n(t) - \xi_n(t)|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\,|\xi_n(t-u) - \xi_n(t)|^2 K_n(u)\, du \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |F(t) - F(t-u)| K_n(u)\, du. \end{aligned} \tag{5.33}$$

F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, comme fonction de répartition continue (d'ailleurs ceci découle aussi de l'hypothèse plus forte (5.17)). Par (5.12), le deuxième membre de (5.33) tend vers zéro quand n tend vers l'infini. ■

Remarques : L'expression (5.30) de la covariance du processus gaussien centré ζ montre qu'il a même loi que le processus $(B(F(t)),\ t \in \mathbb{R})$, où B désigne le pont brownien classique indexé par $[0,1]$. Cette représentation de la loi de ζ est utile pour tester l'optimalité de l'ordre de régularité höldérien dans la conclusion du théorème 5.10. Considérons pour cela la fonction de répartition particulière :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0, \\ t^r & \text{si} \quad 0 < t \leq 1, \\ 1 & \text{si} \quad t > 1. \end{cases}$$

qui vérifie clairement les hypothèses (5.17) et (5.18). Pour le processus limite ζ correspondant, nous pouvons écrire :

$$\sup_{|t-s|\leq 1} \frac{|\zeta(t) - \zeta(s)|}{|t-s|^{r/2}} \geq \limsup_{t\to 0^+} \frac{|\zeta(t)|}{t^{r/2}}$$

et

$$\begin{aligned} \limsup_{t\to 0^+} \frac{|\zeta(t)|}{t^{r/2}} &= \limsup_{t\to 0^+} \frac{|B(F(t))|}{F(t)^{1/2}} \quad \text{(en loi)} \\ &= \limsup_{u\to 0^+} \frac{W(u)}{u^{1/2}} \\ &= +\infty \quad \text{p.s.} \end{aligned}$$

par un résultat classique de Lévy (voir par exemple [22]) sur le mouvement brownien W. Donc presque sûrement les trajectoires de ζ n'appartiennent pas à $C_0^{r/2,o}$ et la conclusion du théorème 5.10 ne peut être améliorée. ∎

Conclusion

Il est clair que ce document n'épuise pas le sujet de la convergence faible hölderienne. Les perspectives pour une poursuite de ce travail sont diverses. Concernant les espaces $\mathrm{H}_\alpha[0,1]$, une extension au cas multidimensionnel peut être envisagée en utilisant une base de Schauder adéquate pour obtenir des isomorphismes avec des espaces de Banach de multi-suites.

En dimension 1, il serait intéressant de considérer d'autres méthodes de régularisation comme le lissage mixte combinant interpolation polygonale et convolution, le lissage par splines, les courbes de Bezier aléatoires,...

L'exploitation de la dérivation fractionnaire combinée avec la convergence faible hölderienne devrait trouver des applications à des processus du type brownien fractionnaire, particulièrement dans les problèmes de simulation.

Pour ce qui est des principes d'invariance, une extension de nos résultats au cas de variables non identiquement distribuées est assez directe. L'étude de la dépendance forte (longue mémoire) reste à faire.

L'étude dans H_α du processus quantile est en cours et devrait permettre une meilleure compréhension du rôle des statistiques d'ordre.

Le cadre fonctionnel C_0^α que nous avons introduit devrait être un outil commode pour l'étude de processus naturellement indexés par toute la droite réelle comme par exemple, la fonction caractéristique empirique lorsque la loi sous-jacente a une densité (voir à ce sujet la récente contribution de Račkauskas et Suquet [37]).

Les applications statistiques, notamment autour des divers processus empiriques ont été pour nous une source de motivation et constitueront un prolongement naturel de ce travail.

Bibliographie

[1] BALDI P., ROYNETTE B., Some exact equivalents for the Brownian motion in Hölder norm. Probability Theory and Related Fields 93 457–484 (1993).

[2] BILLINGSLEY P., Convergence of probability measures. J. Wiley, New-York 1968.

[3] BIRKEL T., Moment bounds for associated sequences Ann. Probab. 16 (1988), 1184–1193.

[4] BIRKEL T., The invariance principe for associated processes, Stochastic processes and their Applications, 27 (1988) 57–71.

[5] BOUFOUSSI B., CHASSAING P., ROYNETTE B., A Kolmogorov criterion and an invariance principle in Besov spaces, Les prépublications de l'Institut Elie Cartan, Nancy I 93 no 24.

[6] BOUFOUSSI B., Espaces de Besov, Caractérisation et applications, Thèse Université H. Poincaré, Nancy I, 1994.

[7] BRÉZIS H., Analyse fonctionnelle. Masson, Paris 1983.

[8] CIESIELSKI Z., On the isomorphisms of the spaces H_α and m, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (1960), 217-222.

[9] CIESIELSKI Z., Hölder conditions for realizations of Gaussian processes, Trans. Amer. Math. Soc. 99 (1961), 403–413.

[10] CIESIELSKI Z., KERKYACHARIAN G., ROYNETTE B., Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens. Studia-Math. 107 (1993) 171–204.

[11] COX J. T., GRIMMETT G., Central limit theorems for associated random variables and the percolation model, Ann. Probab. 12 (1984), 514–528.

[12] DAVYDOV Y., The invariance principle for stationary processes. Theory Probab. Appl. 15 (1970), 487–498.

[13] DAVYDOV Y., Weak convergence of discontinuous processes to continuous ones. Th. of Probab. and Math. Stat., Proc. of the seminar dedicated to memory of Kolmogorov march-may 1993, St Petersbourg, I. Ibragimov, A. Zaitser Eds. Gordon and Breach, 1996, 15–16.

[14] DEVROYE L., Upper and lower class sequences for minimal uniform spacings, Z. Wahrsch. verw. Geb., 61 (1982), 237–254.

[15] DOUKHAN P., Mixing. Lecture Notes in Statistics 85 (1994).

[16] DOUKHAN P., MASSART P., RIO E., The functional central limit theorem for strongly mixing processes, Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat., 30(1994), 63-82.

[17] FERNHOLZ L. T., Almost sure convergence of smoothed empirical distribution functions. Scand. J. Statist. 18 (1991) 255–262.

[18] HAMADOUCHE D., Principe d'invariance dans les espaces hölderiens pour des variables α-mélangeantes ou associées. Pub. IRMA Lille, 37-IX (1995).

[19] HAMADOUCHE D., Weak convergence of smoothed empirical process in Hölder spaces. Stat. Probab. Letters 36 (1998), 393–400.

[20] HAMADOUCHE D., SUQUET CH., Weak Hölder convergence of processes with application to the perturbed empirical process. Pub. IRMA Lille, 42-IV (1997).

[21] HARDY G. H., LITTLEWOOD J. E., Some properties of fractional integrals, I. Math. Zeitschr. 27 (1927), 565–606.

[22] HIDA T., Brownian motion, Springer (1980).

[23] IBRAGIMOV I., Sur la régularité des trajectoires des fonctions aléatoires. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A. 289 (1979), 545–547.

[24] KERKYACHARIAN G., ROYNETTE B., Une démonstration simple des théorèmes de Kolmogorov, Donsker et Ito-Nisio, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 312, Série I (1991), 877–882.

[25] LAMPERTI J., On convergence of stochastic processes, Trans. Amer. Math. Soc., 104 (1962), 430–435.

[26] LÉVY P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, Paris (1937).

[27] MEYER Y., Ondelettes et opérateurs I, Hermann (1990).

[28] NEWMAN C. M., WRIGHT A. L., An invariance principle for certain dependent se quences, Ann. Probab. 9 (1981), 671–675.

[29] NOBELIS PH., Fonctions aléatoires lipschitziennes, Lecture Notes Math. 850 (1981), 38–43.

[30] OLIVEIRA P. E., Invariance principles in $L^2[0,1]$, Comment. Math. Univ. Carolinae 31 (1990), 2, 357-366.

[31] OLIVEIRA P. E., SUQUET CH., An invariance principle in $L^2(0,1)$ for non stationary φ-mixing sequences, Comm. Math. Univ. Carolinae 36, 2 (1995) 293–302.

[32] OLIVEIRA P. E., SUQUET CH., $L^2(0,1)$ weak convergence of the empirical process for dependent variables. Lecture Notes in Statistics 103 (1995), A. Antoniadis and G. Oppenheim (Eds) Wavelets and Statistics, 331–344.

[33] OLIVEIRA P. E., SUQUET CH., An $L^2(0,1)$ invariance principle for LPQD random variables. Portugaliae Mathematica 53 (1995) 367–379.

[34] OLIVEIRA P. E., SUQUET CH., Weak convergence in $L^p[0,1]$ of the uniform empirical process under dependence, preprint, Pub. IRMA, Lille 41-VI, à paraître à Stat. Probab. Letters.

[35] OODAÏRA H., YOSHIHARA K. I., Functional central limit theorems for strictly stationary processes satisfying the strong mixing condition, Kodai Math. Sem. Rep. 24 (1972), 259–269.

[36] PROHOROV Y. V., Convergence of random processes and limit theorems in probability theory. Theor. Prob. Appl. 1 (1956), 157–214.

[37] RAČKAUSKAS A., SUQUET CH., Central limit theorem in Hölder spaces. Pub. IRMA Lille, 44 (1998), preprint.

[38] RIESZ M., L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Math. 81 (1949), 1–223.

[39] SCHWARTZ L., Topologie générale et analyse fonctionnelle. Hermann (1970).

[40] SHORACK G.R., WELLNER J.A., Empirical processes with applications to statistics. Wiley (1986).

[41] SINGER I., Bases in Banach Spaces II, Springer (1981).

[42] SUN S., Perturbed empirical distribution functions and quantiles under dependence. J. Theor. Prob., 8 (1995), 763–777.

[43] SUQUET CH., Tightness in Schauder decomposable Banach spaces. Translations of A.M.S., Proceedings of the St Petersburg Math. Soc., 5 (1996).

[44] SUQUET CH., Communication privée (1997).

[45] SUQUET CH., VIANO M.-C., Change point detection in dependent sequences : invariance principles for some quadratic statistics, à paraître dans Math. Methods of Stat.

[46] YOKOYAMA R., Moment bounds for stationary mixing sequences, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 52 (1980), 45–57.