

jan 2000 6363

n° d'ordre : 1976

THESE

présentée par

Claude FELIOT

pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université de Lille I

en

Automatique et productive



Modélisation de systèmes complexes : intégration et formalisation de modèles.

Date de soutenance le 05 décembre 1997.

G. Dauphin-Tanguy Président

P. Millot	Rapporteur
S. Gentil	Rapporteur
J.C. Pomerol	Rapporteur

M. Staroswiecki	Directeur de thèse
J.P Cassar	Examineur
L. Chittaro	Examineur
J.M Pénalva	Examineur

Thèse préparée au **Laboratoire d'Automatique et d'Informatique de Lille, LAIL**
URA CNRS 1440 D.

Travaux réalisés au **Laboratoire d'informatique appliquée, Commissariat à l'Energie**
Atomique, Marcoule.

B.U. LILLE 1



U 030 141802 6



« D'une autorité invincible, elle avait hérité de Man Ninotte une aptitude à battre la vie, à tout prévoir, à tout savoir, à tout organiser, au point que le papa l'avait surnommée la Baronne. ...Man Ninotte...fonctionnait avec quelques certitudes..., dont l'une d'elle était l'exigence de réussite de ses enfants. Elle avait résolu de ne pas en dévier... et surtout d'en payer le prix... »

Patrick Chamoiseau, *Antan d'Enfance*.

A la Baronne, à Zorro,...., à Man Ninotte, à Kikine,
merci à vous !

le président.

connaissances sur le système. Là encore, les fonctions, la structure, et le comportement du système sont décrits.

La première partie
Le chapitre premier (ce chapitre), est un chapitre d'introduction. On y abordera, dans un premier temps, et à travers une étude bibliographique, la notion de complexité des systèmes, ainsi que les concepts qui nous semblent les plus pertinents, liés à la modélisation et à l'analyse des systèmes en général et a priori complexes. On présentera ensuite les thèses que nous avons adoptées, après les avoir replacées dans leur contexte bibliographique. On analysera alors les motivations qui ont mené à l'adoption de ces deux thèses et les réponses que l'on espère ainsi apporter aux problèmes méthodologiques et épistémologiques que l'on aura préalablement abordés. On analysera ensuite le positionnement relatif de ces deux démarches et leur complémentarité.

L'approche que nous proposons, intègre alors différents modèles, différents points de vue de modélisation, exprimés dans des langages de niveaux de formalisation allant de celui des langages graphiques à celui des systèmes d'équations différentielles, en passant par celui des équations qualitatives. Les modèles de niveau de formalisation les plus faibles sont exprimés dans un langage graphique (langage SAGACE [Pen-94]), à l'image du formalisme S.A.D.T [Gal-90]. Ces modèles (de la matrice SAGACE) incluent la modélisation fonctionnelle du système qui est la plus familière et la plus usitée en automatique et permettent une représentation d'une classe très large de systèmes. L'inconvénient de ce type de modèles est que, comme les modèles fonctionnels, ils ne permettent pas (ou très peu) d'inférences, de calculs. Quant à leur validation, elle n'est que consensuelle.

La deuxième partie de ce document est alors constituée des quatre chapitres qui exposent les travaux menés sur la formalisation de ces modèles de représentation. Ces formalisations, classées en quatre niveaux croissant, ont pour but de doter ces modèles des mécanismes formels d'inférence nécessaires à l'identification des phénomènes, à leur agencement en réseaux, à leur analyse par niveaux hiérarchiques, et à la validation des représentations obtenues. Chacune de ces formalisations s'applique à une classe de plus en plus restreinte de systèmes, allant des systèmes automatisés en général, à ceux qui mettent en oeuvre des processus physiques continus différentiables traitant de matière et d'énergie.

Le chapitre 2 expose les formalisations apportées qui constituent le niveau 1. On propose tout d'abord une formalisation de la notion de fonction qui bien qu'elle soit la plus familière n'en n'est pas moins des plus ambiguës. Puis l'on introduit un concept générique : celui de processeur, qui permet d'exprimer les différents points de vue de modélisation de la matrice SAGACE, dont le point de vue fonctionnel, par des réseaux de processeurs. On illustre enfin cette représentation des systèmes, considérés à travers différents points de vue, par des réseaux de processeurs dans le cas particulier des systèmes automatisés de production.

Les chapitres 3 et 4 exposent respectivement les niveaux 2 et 3 de cette formalisation. Il s'agit d'élaborer un langage : vocabulaire, syntaxe et sémantique, pour la représentation des systèmes continus

traitant de flux de matière et d'énergie. On spécifie un nombre limité de classes de processus énergétiques et par voie de conséquence de processeurs. Ces classes de processeurs constituent alors l'alphabet de notre langage. Des règles de connexion de ces processeurs en réseaux sont ensuite établies et représentées par un système de règles de production. Cet ensemble de règles constitue la syntaxe du langage que l'on cherche à établir. Il est dès lors possible de construire des processeurs complexes syntaxiquement corrects par combinaison de processeurs élémentaires. Chaque processeur ainsi construit constitue un mot du langage. Sont ensuite spécifiées des équivalences entre les différents mots de ce langage organisés en classes d'équivalences. En d'autres termes, l'on établit une sémantique sur ce langage. Enfin, à l'aide des outils de la théorie des langages, l'ensemble des mots (réseaux de processeurs) syntaxiquement corrects peut être calculé, l'on spécifie alors le vocabulaire de notre langage.

Le chapitre 5 est le dernier de cette deuxième partie du document. C'est le quatrième niveau de formalisation. On y expose la spécification des structures algébriques (ensembles munis de leurs opérateurs) sur lesquelles repose le langage précédemment défini. On dispose alors d'une notation mathématique permettant de représenter les processus du système par des systèmes d'équations formelles dans ces structures algébriques de manière analogue aux représentations par des systèmes d'équations analytiques ou différentielles. On accède alors, à la démonstration de théorèmes, à l'élaboration de preuves et, au calcul formel des processus mis en oeuvre dans le système. On spécifie alors des algorithmes d'identification des processus, de décomposition, et de validation.

Le chapitre 6 constitue la troisième partie du document. Dans ce chapitre, on expose la méthode proposée pour l'écriture de systèmes d'équations différentielles à partir des modèles de représentation obtenus et validés formellement. Pour chaque classe de processus énergétiques, il est possible de définir un système générique d'équations différentielles et, de chaque équation formelle du réseau de processus, dans la structure algébrique précédemment définie, il est possible d'en déduire, de façon systématique, un système d'équations différentielles associé.

Enfin, le dernier chapitre est le chapitre de conclusion où des perspectives qu'ouvrent ces travaux sont proposées.

II. Complexité des systèmes.

La notion de "complexité d'un système" semble défier toute tentative de définition [Gun-94]. Cette notion, souvent intuitive, permet de qualifier des systèmes qui, par certains de leurs comportements, par leur taille, et par la diversité des natures des phénomènes mis en jeu, présentent des difficultés d'analyse. Certains systèmes présentent la particularité d'être en évolution (changement, naissance ou disparition, de comportements, de relations, d'interactions, au sein du système) ; ils sont le siège : de phénomènes d'émergence (d'un comportement collectif, d'une propriété de la collectivité que ne

possèdent pas les constituants, les individus), d'instabilités, de sensibilités aux conditions initiales (systèmes chaotiques...).

Toutefois, on trouve dans la littérature des formalisations qui, partant de la connexion intuitive entre complexité, désordre et aléas tentent, comme Van Emden [Van-70], de définir une mesure de la complexité en termes d'ordre et par là même d'entropie. Par le biais de la formulation statistique de l'entropie, la complexité fut également reliée à la quantité d'information et aux notions dérivées comme celles de neugentropie et de redondance. Ces évaluations de la complexité, en termes d'information et d'ordre, furent largement utilisées en chimie et en biologie par des auteurs comme : Von Forester [Von-60], Lowff [Low-62], Settlow et Pollard [Set-67] et d'autres... D'autres développements, plus récents, ont été menés par Bresch [Bre-79] qui base sa mesure de la complexité sur deux aspects de l'ordre : l'homogénéité et la symétrie.

Toutefois, ces développements mènent à la confusion et à l'assimilation des deux notions d'ordre et de complexité. Cette dernière est d'ailleurs bien loin de se réduire uniquement à des notions d'ordre et d'information.

On trouve alors d'autres développements basés : sur la théorie des langages et sur des considérations informatiques. Ainsi des travaux comme ceux de Papentin [Pap-80] se basent sur la taille minimale de la chaîne de description d'un système dans un langage L donné. Ces types de travaux ont abouti à l'élaboration du concept de complexité syntaxique [Ros-74] [Gunt-94]. On établit alors un lien entre le niveau de complexité d'un système et la classification des grammaires formelles en pouvoir de description croissant établie par Chomsky [Cho-59]. Ce genre de considération revient alors à évaluer non plus la complexité d'un système réel mais celle de sa représentation, de son modèle.

Bien qu'évaluer la complexité d'un système, fut l'objet de nombreuses recherches, une mesure universelle de cette complexité et la preuve qu'une telle mesure puisse un jour être élaborée n'a pas encore été proposée.

J.L. Le Moigne [Lem-85] ne donne d'ailleurs pas de définition absolue de cette complexité des systèmes, mais une définition relative en opposant complexité et complication. Un système "simplement" compliqué se prête alors à l'analyse par une méthode analytique "sans compromis". On entend par méthode analytique le fait de découper un problème, un système, ou une situation en éléments plus simples. L'analyse de chacune des parties de ce système suffit alors à la résolution du problème dans son ensemble ou à la compréhension et à la connaissance du comportement du système global. Ce n'est plus le cas pour un système complexe pour lequel une telle analyse mènerait non pas à une réduction de la taille du problème mais à une simplification. Il faut donc se garder d'appliquer une méthode analytique à la résolution d'un problème complexe sans être conscient des simplifications qu'elle entraîne. La position de Le Moigne et généralement de la communauté des systémiciens est alors la suivante : plutôt qu'une propriété intrinsèque du système, la complexité d'une situation, d'un problème relèverait plus de l'inadéquation des outils et méthodes

d'investigation. Cette complexité, moyennant une reconsidération de ces méthodes, n'en est pas moins modélisable en partie.

III. Appréhender la complexité des systèmes.

Comme le suggère Le Moigne, cette problématique de la complexité des systèmes est, avant celle de sa définition et de sa maîtrise, celle de son appréhension, de sa représentation ; en d'autres termes celle de sa modélisation.

La diversité des natures des phénomènes (que nous évoquions au paragraphe précédent) des systèmes auxquels l'on est susceptible d'être confronté, nous incite pour l'instant, à n'émettre aucune hypothèse restrictive quant à la nature et à la classe de ces systèmes. On se placera donc dans le cadre de la modélisation de systèmes, en général, *a priori* complexes.

Des exposés comme celui de Bernard Walliser dans son livre "Systèmes et modèles" [Wal-77] ont le mérite d'éclaircir le débat sur l'analyse des systèmes. Notre démarche étant une démarche de modélisation de systèmes, il est intéressant de rappeler et de préciser certaines de ces notions liées à la modélisation d'une part et à l'analyse des systèmes d'autre part.

III.1. Une démarche de modélisation.

Dans sa définition la plus large, la notion de modèle recouvre toute représentation d'un système réel, physique ou mentale, exprimée sous une forme verbale, graphique ou mathématique. Trop souvent ce terme de "modèle" est réservé à des constructions relativement formalisées, voire à des systèmes d'équations, il est cependant souhaitable d'adopter une conception moins restrictive.

III.1.a Différents niveaux de modélisation.

Tout modèle M quel qu'il soit peut-être considéré comme un intermédiaire entre, (ce que nomme Walliser par) : un champ théorique et un champ empirique (figure 1.1). Un champ théorique est un empilement de modèles compatibles avec M, allant jusqu'aux principes logico-mathématiques qui le sous-tendent. Un champ empirique est lui-même un empilement de modèles empiriques allant jusqu'aux protocoles expérimentaux qui appuient le modèle. La navigation entre champ empirique et champ théorique pose alors les problèmes de la validité et de l'interprétation du modèle.

III.1.b Différents niveaux de formalisation

Tout modèle est exprimé dans un langage plus ou moins formalisé. C'est le niveau de formalisation qui détermine le positionnement du modèle entre champ théorique et champ empirique. On distingue en particulier comme niveaux de formalisation :

- celui des langages littéraires, formés de symboles littéraires assemblés en une structure de concaténation ;

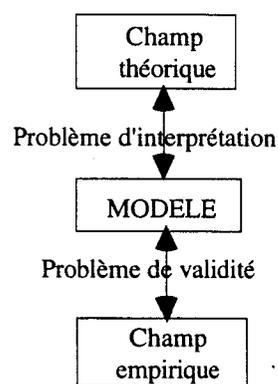


Figure 1.1 : un modèle est un intermédiaire entre un champ théorique et un champ empirique (Extrait de [Wal-77]).

- celui des langages iconiques, formés de symboles graphiques assemblés selon des règles diverses d'agencement ;

- et celui des langages logico-mathématiques, formés de symboles abstraits obéissant à diverses structures ; on citera essentiellement la théorie des ensembles (structure mère), les structures algébriques, les structures d'ordre, et la théorie des catégories.

Le niveau de formalisation d'un modèle est d'une grande importance quant à l'interprétation et à la validité du modèle. En effet, plus un modèle est formalisé et moins il est ambigu et donc plus le champ d'interprétation est restreint. Par contre, moins un modèle est formalisé et plus son pouvoir de description, plus son champ d'application et donc de validité est grand, en d'autres termes, plus il est général. A une description qualitative d'une grandeur observée en termes de : grande, petite ou nulle peuvent correspondre une infinité de valeurs numériques de cette grandeur. Une description qualitative est de ce point de vue plus ambiguë qu'une description quantitative. Par contre, cette description qualitative permet une description valide d'une plus grande classe de systèmes qu'une description quantitative ; en particulier, la première permet une description de grandeurs et de phénomènes difficilement quantifiables ; c'est une description plus générale.

évoqués
en Fig 1.1 →

Le choix du niveau de formalisation d'un modèle s'apparente à la résolution d'un compromis entre interprétation et validité ou entre généralité et pertinence du modèle, compromis du type de celui que l'on rencontre entre temps de calcul et précision en informatique.

III.1.c Différentes fonctions d'un modèle

Toute démarche de modélisation d'un système suppose une intention de connaissance de ce système et d'action sur ce système (figure 1.2). On peut distinguer trois fonctions primaires d'un modèle :

- une fonction cognitive : le modèle sert à représenter les connaissances que l'on a du système. On parle alors de modèles cognitifs ;

- une fonction prévisionnelle : le modèle sert alors à prévoir l'évolution des variables et du comportement du système. On parle alors couramment de modèle de simulation ;

- une fonction normative, ou décisionnelle : le système sert à prendre des décisions d'actions sur le système compte tenu des objectifs à atteindre (modèle de décision) ; ou encore, il représente les relations souhaitables entre variables du système. Cette fonction est nécessaire dans une démarche de conception et d'optimisation ; on parle alors de modèles normatifs.

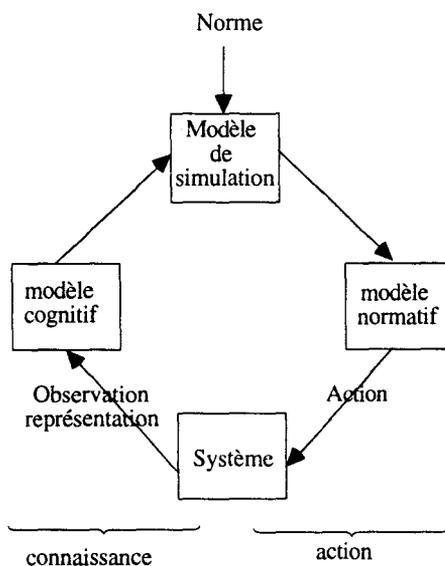


Figure 1.2 : démarche de connaissance et d'action, extrait de [Wal-77]

Un modèle peut remplir toute ou partie de ces fonctions auxquelles on peut ajouter des fonctions : pédagogique (modèle d'explication), de concertation (le modèle sert de support de communication et de confrontation de propositions d'actions), de recherche (le modèle sert alors à l'exploration systématique d'un domaine d'analyse).

III.2. Une démarche d'analyse système.

Une démarche de modélisation est certes une démarche de conception d'une représentation d'un système, mais c'est également le synonyme de l'analyse de ce système. Il devient alors nécessaire de préciser ce que l'on entend par système et de mettre l'accent sur les problèmes spécifiques à l'analyse de ce dernier.

Compte tenu du cadre dans lequel nous nous sommes placés, celui de la modélisation de systèmes en général *a priori* complexes, le sens que nous retiendrons pour le terme "système" est celui de la *théorie générale des systèmes* ou *systemique*. Le paradigme systemique a pour concept central celui de *système général*. Nous l'avons adopté afin d'en décliner les notions fondamentales et de bénéficier de son argumentaire, de sa cohérence et de sa généralité.

"La théorie des systèmes...", ou systemique, *"...s'efforce d'établir le cadre le plus général à l'intérieur duquel on peut étudier le comportement d'une entité complexe analysable..."* [Lad-85].

L'approche systemique apparaît en fait essentiellement comme une amorce de rapprochement des langages et des méthodologies des sciences physiques et des sciences humaines, en passant par les sciences biologiques et technologiques.

Comme le souligne J. L. Le Moigne, l'étude analytique de situations complexes ne peut se faire sans simplifications, or toute investigation ne saurait être menée sans une analyse à un moment ou à un autre du problème. Deux attitudes extrêmes peuvent alors être adoptées : la simplification à outrance, ou le renoncement à toute tentative de représentation. L'approche systemique se veut une tentative de conciliation entre des options épistémologiques souvent antagonistes que l'on retrouve dans les différentes disciplines qu'elle tente de rapprocher.

Notre propos n'est pas ici d'exposer de façon exhaustive les concepts de la théorie systemique, on pourra pour une étude approfondie se référer à des auteurs comme : L.Von Bertalanffy [Ber-93], H. Simon [Sim-91], J.L. Le Moigne ([Lem-84][Lem-85][Lem-89]), J. Mèlèse ([Mel-90][Mel-91]), E. Morin ([Mor-77][Mor-80][Mor-86][Mor-90][Mor-91]). L'exposé suivant n'est qu'une synthèse des notions fondamentales ayant trait à l'analyse et au découpage des systèmes qui nous semblent les plus pertinentes et utiles pour notre étude. Ces principes essentiellement méthodologiques sont pris en compte par J.L Le Moigne, dans son exposé sur la théorie du système général[Lem-84] qui propose comme définition d'un système celle :

D' un objet actif	}	dans un environnement
stable		par rapport à
évoluant		quelques finalités

Les principes inclus dans cette définition sont les suivants.

III.2.a- Systèmes et environnement :

Le premier problème épistémologique soulevé par la systemique est celui de la possibilité d'établir une coupure nette entre le système et

son environnement. Deux attitudes s'opposent : la première qui considère que l'on peut mettre en évidence des entités relativement individualisées dont les propriétés intrinsèques sont responsables des interactions avec leur environnement, la seconde insiste sur l'existence de "champs d'interactions" plus ou moins denses assimilables à des systèmes.

La première approche est, dans la terminologie systémique, appelée *approche substantialiste*, la seconde est appelée *approche existentialiste*. Poussées à l'extrême ces deux approches mènent respectivement aux conclusions suivantes :

- pour la première, l'approche substantialiste[Pia-68], il existe des entités ou systèmes totalement séparables de leur environnement dont les propriétés seraient intrinsèques et existeraient en dehors de toute interaction avec d'autres systèmes ;

- pour la seconde, l'approche existentialiste, au contraire il n'existerait que des entités conventionnelles aux contours flous et qui ne se définiraient que par leurs comportements dans un environnement donné.

Il est clair que ces deux attitudes extrêmes doivent être nuancées. En tout état de cause, dans une analyse, on est amené à isoler un système pour en étudier des propriétés plus ou moins spécifiques, mais on ne saurait faire abstraction de la totalité des interactions de ce système avec son environnement.

III.2.b- Systèmes et sous-systèmes :

Le second problème épistémologique lié au découpage et à l'analyse des systèmes que nous abordons ici concerne la possibilité de découper un système en sous-systèmes. Là encore deux attitudes peuvent s'opposer : la première insiste sur l'existence de sous-systèmes relativement individualisables qui interagissent de différentes façons selon leur organisation en réseau, la seconde au contraire considère un système comme un tout indissociable qui impose des contraintes aux sous-systèmes dont les comportements varient sensiblement une fois isolés.

Ces approches, dans la terminologie systémique, portent respectivement le nom d'*approche réductionniste* et d'*approche globaliste* ou *intégriste*. L'application sans compromis de chacune de ces deux approches mène aux conclusions suivantes :

- pour la première, l'approche réductionniste, toute propriété globale d'un système serait alors déductible par agrégation des propriétés microscopiques de chacune de ses parties ;

- pour la seconde, l'approche globaliste, au contraire il n'existerait que des propriétés globales non réductibles à celles des sous-systèmes et de leur réseau d'interactions.

En pratique, ces deux approches se complètent plus qu'elles ne s'opposent dans la mesure où, généralement des propriétés émergentes n'excluent pas l'existence de propriétés de certains sous-

systèmes ou de caractéristiques structurelles permettant d'en rendre compte.

III.2.c- Systèmes et temps :

Le dernier problème épistémologique qui nous sera utile pour la suite de notre étude et que nous abordons ici concerne la possibilité de distinguer des échelles de temps (Walliser [Wal-77] parle d'invariants temporels) dans un système. Les deux tendances que l'on pourrait opposer sont les suivantes : la première insiste sur l'existence de caractéristiques relativement stables permettant d'identifier une structure provisoire qui se modifierait de façon discontinue et indépendante, la seconde postule au contraire l'existence d'une évolution continue des caractéristiques du système, en définir une structure ne serait alors qu'une photographie instantanée de ce processus d'évolution.

La première approche, dans la terminologie systémique, porte le nom d'*approche structuraliste*, la seconde le nom d'*approche génétique*. Ces deux attitudes poussées à l'extrême mènent aux raisonnements suivants :

Il existerait, pour la première approche, des structures stables valables pour un intervalle de temps plus ou moins long dont on peut étudier les propriétés sans tenir compte des évolutions du système. Au contraire, dans la deuxième approche, dans la mesure où cette évolution est continue, l'étude d'une structure instantanée ne serait pas pertinente et seule l'évolution du système aurait un sens.

En pratique, tout système peut être considéré comme évoluant. Par ailleurs, toute évolution paraît plus ou moins hachée, et même dans l'hypothèse d'une évolution continue celle-ci est généralement suffisamment lente pour qu'une structure puisse être définie pour une période de temps suffisamment longue. Dans le cas contraire, l'évolution continue, rapide et perpétuelle d'un système rendrait son observation et sa représentation impossibles.

Deux autres approches viennent se greffer aux précédentes, elles portent respectivement le nom d'*approche fonctionnaliste* et d'*approche évolutionniste*. La première considère que le système est doté d'un certain nombre de modes de fonctionnement réversibles qui selon des contraintes externes ou internes définissent son évolution globale. La seconde postule qu'une perpétuelle adaptation du système à des contraintes externes ou internes donne lieu à un processus d'évolution irréversible du système.

Ces deux approches, poussées à l'extrême, mènent alors aux considérations suivantes :

- pour l'approche fonctionnaliste : le système serait alors en équilibre permanent et son intégrité ne serait jamais remise en cause allant jusqu'à nier d'éventuels dysfonctionnements ;

- pour l'approche évolutionniste, le système serait au contraire dans un état transitoire, on insiste alors sur l'existence de tensions perpétuelles allant jusqu'à nier l'existence de structures stables et cohérentes.

Là encore, en pratique, ces deux attitudes doivent être nuancées. Tout changement n'implique pas nécessairement la remise en cause de la totalité de la structure et de la cohérence du système. On ne peut non plus nier la possibilité de dysfonctionnements et de tensions au sein d'un système.

IV. Les thèses proposées.

Nous avons mis l'accent sur la nature complexe des systèmes, sur certains problèmes liés à la représentation, la modélisation et à l'analyse de ces systèmes *a priori* complexes. Nos propos seront, dans les paragraphes suivants, de présenter les hypothèses que nous avons émises et les thèses que nous avons adoptées en matière de modélisation de systèmes et qui sont à l'origine de ces travaux. On présentera alors les réponses que l'on espère apporter à ces problèmes. Ces principes résultent de la conjonction de travaux complémentaires menés au L.A.I.L sur la triple modélisation [Fel-93][Fel-94] qui est une approche multi-modèles et de ceux menés au L.I.A sur la méthode SAGACE [Pen-90][Pen-94] basée sur une analyse systémique.

Nous n'avons jusque-là pas émis d'hypothèses quant à la nature des systèmes évoqués. Il convient pour la suite de préciser que nous nous restreindrons aux systèmes artificiels finalisés (conçus dans un but, une mission), dont les systèmes automatisés font partie. (Nous émettrons tout au long de notre exposé les hypothèses nécessaires pour que partant de ces "systèmes artificiels finalisés," nous convergions progressivement vers les systèmes automatisés de production mettant en oeuvre des processus énergétiques continus.)

IV.1. Approches multi-modèles.

La première approche développée dans [Fel-93] est une approche multi-modèles motivée d'une part, par la diversité des natures des phénomènes et d'autre part, par la diversité des activités durant tout le cycle de vie du système (notamment les systèmes automatisés [Sta-94a]) et qui ont comme support le modèle de ce dernier.

Le constat est qu'il existe une infinité de modèles d'un même système, plus ou moins parfaits et plus ou moins complets. Ces modèles quels qu'ils soient portent l'accent sur une ou plusieurs propriétés, sur un ou plusieurs aspects du système qu'ils représentent. Ils ne remplissent qu'un nombre limité de fonctions d'un modèle (*cf. § : Différentes fonctions d'un modèle*), leur utilisation dans la résolution de problèmes (diagnostic, simulation, vérification,...) est plus ou moins efficace, et leur domaine de recouvrement des propriétés du système qu'ils représentent est limité (figure 1.3).

De nombreux travaux tentent alors de pallier aux insuffisances de modèles simples en les combinant à d'autres, en fonction de leur complémentarité et des problèmes que l'on tente de résoudre. Se posent alors les problèmes des modalités de navigation entre ces modèles et de couplage de ces derniers.

Parmi ces combinaisons de différents modèles, on trouve principalement la combinaison des modèles de la physique qualitative (avec De Kleer [Kle-86], Forbus[For-81][For-84], Kuipers[Kui-84][Kui-86]), et du raisonnement causal (avec De Kleer & Brown[Kle-84b], Iwasaki & Simon[Iwa-86], et d'autres [Ras-91][Bob-84][Dav-84]), combinés à des modèles quantitatifs, par exemple : [Bon-91], [Har-91], [Kui-88]. Ces approches mettent l'accent, principalement, sur les aspects que nous qualifierons pour l'instant de comportementaux et structurels, et ne traitent pas explicitement de l'aspect fonctionnel (à savoir ce que le système fait et pourquoi).

Toutefois, de récents travaux introduisent et traitent explicitement cet aspect fonctionnel. Ils constituent le courant du raisonnement à base de fonctions, avec Chandrasekaran [Chan89], Franke [Fra-91], Abu-Hanna [Abu-91], Sticklen [Sti-91], Sembugamoorthy [Sem-86], Chittaro[Chit-93], et d'autres [Keu-91] [Kle-84]. On traite ainsi avec succès de problèmes **jusque-là** récalcitrants[Sti-91].

IV.2. Modélisation : fonctionnelle, structurelle, et comportementale.

La thèse que nous avons retenue dans [Fel-93] rejoint ces derniers travaux qui intègrent, outre les aspects structurels et comportementaux, l'aspect fonctionnel. L'hypothèse émise est alors la suivante ; pour une description complète d'un système, il est nécessaire de répondre aux questions qui sont de savoir : ce que fait le système, comment il est fait et comment il le fait . Pour cela, nous avons intégré trois modèles que nous qualifions de modèle fonctionnel, structurel et comportemental[Fel-94]. Avant de présenter plus en détails ces trois modèles et leur couplage, nous proposons une analyse basée sur le niveau de complexité des systèmes et susceptible de mener à un tel choix d'intégration de modèles.

IV.2.a Une analyse basée sur une échelle de complexité des systèmes.

A la différence des travaux d'intégration de modèles précédents, qui mettent l'accent sur la nature (fonctionnelle, qualitative et quantitative) des connaissances que l'on a sur le système pour justifier le choix des modèles à coupler, nous basons notre analyse sur les besoins que doit satisfaire notre modèle, en d'autres termes, les fonctions qu'il doit remplir.

IV.2.a.1 Une échelle de complexité.

Pour cela l'on se base sur une échelle de complexité proposée dans la méthode SAGACE [INS-97] et à partir de laquelle on aboutit à la conclusion qu'il nous faut intégrer : un modèle pour la représentation, un modèle pour la simulation, et un modèle normatif.

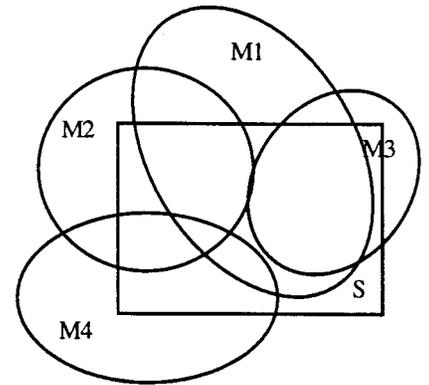


Figure 1.3 : modèle multiple d'un système, extrait de [Wal-77]. Chaque modèle d'un système ne recouvre qu'une partie, plus ou moins étendue, des propriétés d'un système.

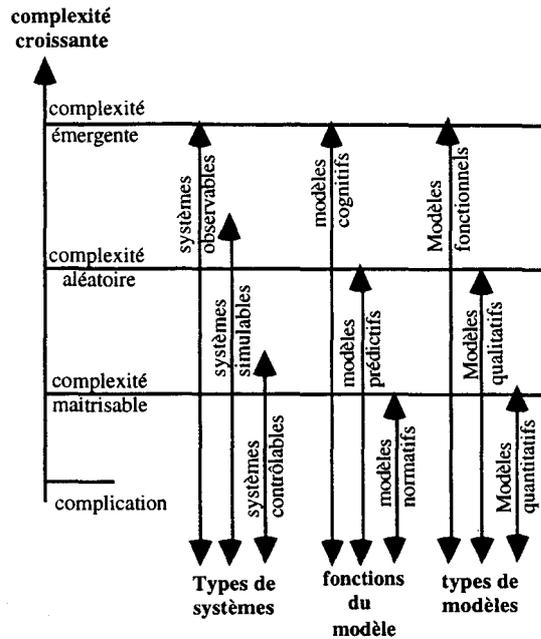


Figure 1.4 : une échelle de complexité des systèmes
La complexité des systèmes est en rapport avec les possibilités d'investigation qu'offrent les outils méthodes employées.

Cette échelle de complexité est celle de la figure 1.4.

Compte tenu des outils dont on dispose, on dira d'un système qu'il est à **complexité émergente**, si l'on ne peut qu'en concevoir une représentation. Cela suppose que le système est observable et qu'il est alors possible de rendre compte de ces observations, de les communiquer, et éventuellement de les expliquer ou plus précisément de les justifier (généralement en termes de fonctions). Le modèle d'un tel système doit remplir une fonction cognitive avec éventuellement une fonction pédagogique.

Un système est à **complexité aléatoire** si l'on peut, non seulement le représenter et justifier son comportement, mais aussi prédire ses comportements possibles. (On ne peut prédire de façon certaine son évolution mais seulement un ensemble de comportements possibles). Le modèle doit alors remplir une fonction prévisionnelle ou de simulation. Cela suppose une certaine stabilité, un certain niveau de reproductibilité de son comportement.

Un système est à **complexité maîtrisable**, s'il peut être représenté et simulé mais il est en outre possible de décider de son évolution et d'agir en conséquence sur son comportement. Le fait qu'il soit "contrôlable" suppose que puissent être identifiés certains paramètres d'action pour amener le système dans un certain état. Le modèle doit alors remplir une fonction décisionnelle et normative.

Un système "simplement" **compliqué** est à la fois observable, simulable, contrôlable, et ne demande que du temps pour mener à bien ces traitements. En outre, l'emploi d'une démarche analytique mène effectivement à une réduction de la taille du problème. L'étude des parties permet de déduire le comportement de l'ensemble.

Il apparaît donc qu'un modèle, pour être fonctionnellement complet, doit remplir les trois fonctions de base : cognitive, prédictive et normative.

IV.2.a.2 Types de modèles, fonctionnalités du modèle, et niveaux de formalisation.

La figure 1.5 illustre les fonctionnalités plus ou moins grandes des différents modèles fonctionnels, qualitatifs et quantitatifs.

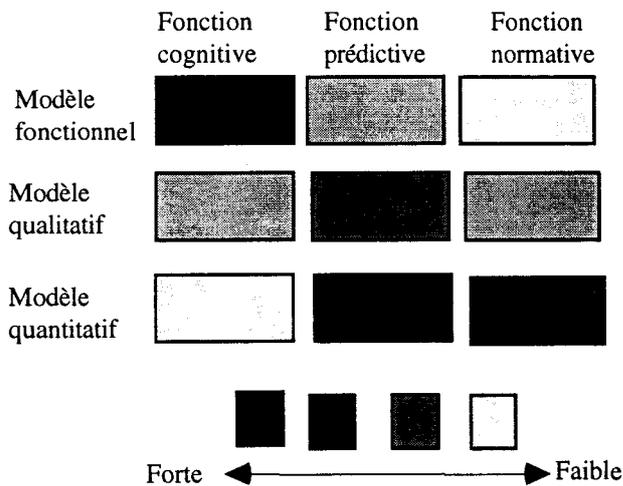


Figure 1.5 : plus ou moins grandes fonctionnalités des modèles : fonctionnel, qualitatif et quantitatif.

Les modèles fonctionnels permettent : une représentation d'une classe très large de systèmes, sous une forme aisément communicable (généralement graphique), et fournissent un premier niveau de compréhension et d'explication du comportement du système en justifiant ce dernier par ses *fonctions* supposées. La fonction prédominante de ce genre de modèle est essentiellement celle du recueil et de la représentation des connaissances. Ce sont des modèles essentiellement cognitifs qui ne permettent que très peu de raisonnements.

Les modèles qualitatifs permettent certes une représentation du système, mais leur fonction est essentiellement prédictive. On accède, avec ce type de modèles à un premier niveau de simulation en termes qualitatifs. Ils fournissent un ensemble de comportements possibles. Leur pouvoir inférentiel (fonction décisionnelle) est plus élevée, mais leur champ d'application (validité) est moins large que celui des modèles fonctionnels. Leur aptitude pédagogique et à la transmission des connaissances (fonction cognitive) est moindre mais ils **sont** moins ambigus (Interprétation) (figure 1.6).

Les modèles quantitatifs (systèmes d'équations différentielles, analytiques, modèles statistiques...), sont une représentation des systèmes et ils permettent une simulation plus fine de leur comportement, mais surtout ils se prêtent à la résolution de problèmes tels que l'optimisation, la conception, l'aide à la décision de manière plus efficace que les modèles qualitatifs... Ce sont des modèles normatifs. Ils cumulent les fonctions : cognitive, prédictive et normative, leur pouvoir inférentiel est le plus élevé, et leur

ambiguïté (Interprétation) est moindre. En contre partie, leur champ d'application est le moins large, leur fonction pédagogique et leur aptitude à la communication et à l'explication sont également moindres (figure 1.6).

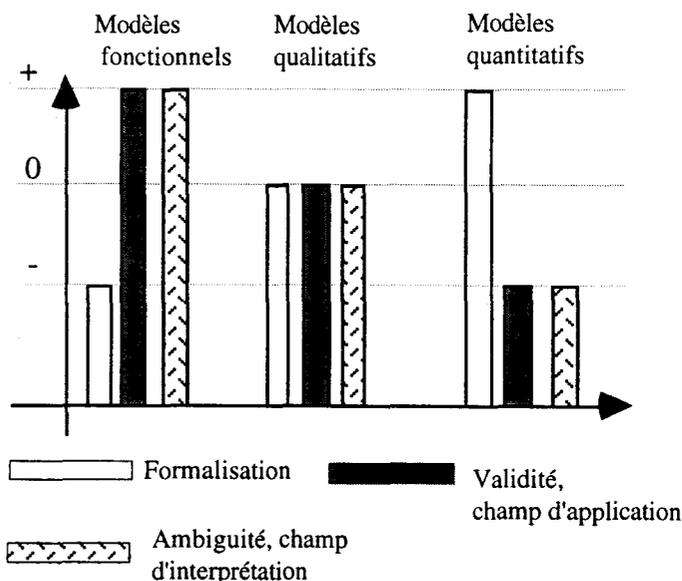


Figure 1.6

On notera par ailleurs (figure 1.6) qu'à chacun de ces types de modèles (fonctionnels, qualitatifs, quantitatifs) correspond un niveau de formalisation croissant (cf. § : *Différents niveaux de formalisation*). On entend également par "niveau de formalisation" la plus ou moins grande richesse des structures algébriques qui sous-tendent le langage avec lequel les modèles sont exprimés. La combinaison de ces trois types de modèles permet de disposer de niveaux de formalisation allant de celui des langages graphiques à celui des systèmes d'équations.

Les modèles dits "fonctionnels" relèvent du niveau de formalisation des langages iconiques. Ces modèles, à l'image des modèles de type S.A.D.T et IDEF[Gal-90], sont des langages graphiques constitués de symboles (boite, flèche) dont les règles d'agencements sont souvent les seuls formalismes. Ces règles constituent la syntaxe du langage graphique formant une structure algébrique très pauvre. Cette "algèbre" est généralement assortie d'une méthode de mise en oeuvre. Parmi ces modèles et méthodes, on trouve : les DFD (*Data Flow Diagrams*) qui sont à la base des méthodes SSA et SSAD (*Structured System Analysis, Structured System Analysis and Design*) ainsi que de SART (*Structured Analysis and Real Time*), pour la version dédiée aux systèmes temps réels ([Gan-79][De Ma-79]).

Les deux autres types de modèles relèvent des niveaux de formalisation des langages logico-mathématiques. Les modèles qualitatifs disposent d'algèbres beaucoup plus riches que les modèles fonctionnels (algèbre booléenne, algèbre des signes, ensembles flous...). Les modèles quantitatifs quant à eux bénéficient des structures algébriques les plus riches, (algèbre linéaire, espace vectoriel...).

Le fait de disposer de connaissances de telle ou telle nature (fonctionnelle, qualitative, quantitative) est une conséquence du niveau de complexité des systèmes et de la plus ou moins grande aptitude des modèles à la représentation, l'explication, la simulation...

D'un système à complexité émergente, on accède la plupart du temps à un niveau de connaissance et de compréhension de type fonctionnel (on peut généralement dire ce que le système fait et pourquoi il le fait). Le fait de disposer, pour ce type de systèmes, de connaissances fonctionnelles tient au domaine de validité très large des modèles fonctionnels (figure 1.6) et à leurs aptitudes à la communication et à l'explication (fonction cognitive)(figure 1.5).

C'est la combinaison d'une fonction, prédictive accrue par rapport à un modèle fonctionnel (figure 1.5) et d'un domaine d'application plus large que celui des modèles quantitatifs qui fait des modèles qualitatifs (figure 1.6) un bon compromis face à une situation d'une complexité aléatoire. On dispose alors grâce à ces modèles d'un niveau de connaissance et de compréhension de nature qualitative, en termes d'existence ou d'absence de relations, de liens entre grandeurs observables (1 ou 0, vrai ou faux); on accède à la prédiction qualitative de l'évolution des variables du système (croissante, décroissante, stable, positive, négative ou nulle), et à la caractérisation en termes flous des grandeurs observables (grande, petite, moyenne, forte, faible...). Cela suppose d'ailleurs qu'une structure (au sens d'invariant, de stabilité, de reproductibilité...) puisse être définie.

N.B : le terme qualitatif fait référence au niveau de formalisation et à la richesse des algèbres du niveau intermédiaire entre le niveau des langages iconiques et celui du langage des modèles quantitatifs. Il ne fait en aucun cas référence à un modèle particulier du même nom mais à l'ensemble de ces modèles de même niveau de formalisation.

Enfin, avec les systèmes à complexité maîtrisable, on peut à partir de ce niveau envisager l'utilisation de modèles quantitatifs. C'est cette moindre complexité qui permet, malgré un champ d'application plus étroit et une aptitude à la communication moindre (figure 1.6), d'exploiter les fonctions plus fines de simulation d'une part, et normative d'autre part, des modèles quantitatifs. On accède alors à une connaissance quantifiée des grandeurs et des relations entre ces grandeurs (en termes statistiques et probabilistes ou déterministes), à la maîtrise de l'évolution de ces grandeurs (détermination des paramètres d'action et contrôle de trajectoires...).

Ces considérations sont à l'origine du choix d'intégration de modèles : fonctionnel, qualitatif et quantitatif.

IV.2.a.3 Modèle fonctionnel, structurel, et comportemental.

Les trois modèles que nous avons combinés dans [Fel-94] étaient les suivants.

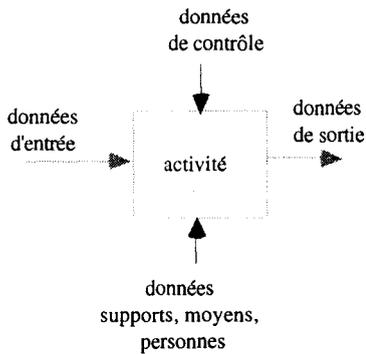


Figure 1.7 actigramme SADT

- i/ Un modèle fonctionnel pour lequel nous avons retenu le formalisme SADT [Gal-90]. SADT est un langage graphique assorti d'une méthode de mise en oeuvre, pour une analyse descendante, structurée, hiérarchique par niveaux. Les deux éléments graphiques de ce langage sont : les flèches et les boîtes qui, organisées en un diagramme, dont la forme générale est donnée par la figure 1.7, ont la sémantique suivante :

- une activité dont le déroulement est contraint par des données de contrôle, opérant sur des données en entrée et ayant pour résultats des données en sortie; activité qui fait appel à un certain nombre de moyens et d'acteurs (supports, moyens, personnes) .

Ces diagrammes élémentaires, organisés en réseaux hiérarchiques permettent alors une représentation fonctionnelle des systèmes.

-ii/ Un modèle "structurel", où l'on ne retient du modèle de comportement (le troisième modèle que nous avons intégré) que l'existence ou l'absence (1 ou 0) de liens, de contraintes entre les variables de description du système. Ce modèle structurel est une abstraction des contraintes du modèle de comportement. Ce modèle structurel est celui de l'approche structurelle utilisée et développée au L.A.I.L pour l'analyse structurelle des systèmes [Sta-89][Deck-91a][Deck-91b]. Il est de nature qualitative, c'est le plus simple, mais aussi le plus pauvre, que l'on puisse élaborer par abstraction des relations du modèle de comportement. Ce type de modèle est également utilisé par Iwasaki et Simon pour l'ordonnancement causal [Iwa-90]. Le qualificatif structurel attribué à ce modèle fait référence à la structure des équations du modèle de comportement et non à la structure du système. D'après l'analyse sur les niveaux de formalisation des langages de modélisation, le terme de modèle qualitatif est ici plus pertinent.

- iii/ Le modèle de comportement, est composé de contraintes entre variables de description du système. Ces contraintes peuvent être, selon la nature des connaissances dont on dispose : analytiques (statiques et/ou dynamiques), qualitatives (équations de confluence [Kle-84a] ou encore prendre la forme de règles de production (systèmes d'inductions, bases de connaissances, tables numériques) . Ce modèle de comportement recouvre alors des aspects aussi bien qualitatifs que formels ou quantitatifs. Toutefois, dans le cas de systèmes continus, le modèle de comportement est essentiellement formé de contraintes qualitatives et analytiques.

Ces trois modèles combinent donc les aspects : fonctionnel, qualitatif et quantitatif permettant d'appréhender des connaissances de chacun des trois types. Ils combinent également les deux niveaux de formalisation des langages iconiques et logico-mathématiques. Leur couplage permet de disposer du domaine de validité le plus large possible, d'une ambiguïté la plus faible et du niveau de formalisation le plus élevé possible compte tenu de la complexité du système étudié. Mais surtout, la motivation première est que ce couplage de modèles permet de combiner les fonctions : cognitive, prédictive, et normative attendues d'un modèle ; chaque modèle se prête alors de manière plus ou moins efficiente à différents types de résolutions de problèmes à base de modèles. On dispose alors d'un modèle permettant de couvrir, plus largement que ne le feraient les modèles

simples, les besoins des observateurs et utilisateurs du système aux différentes étapes de son cycle de vie.

Ces trois modèles s'articulent de la façon suivante (figure 1.8) :

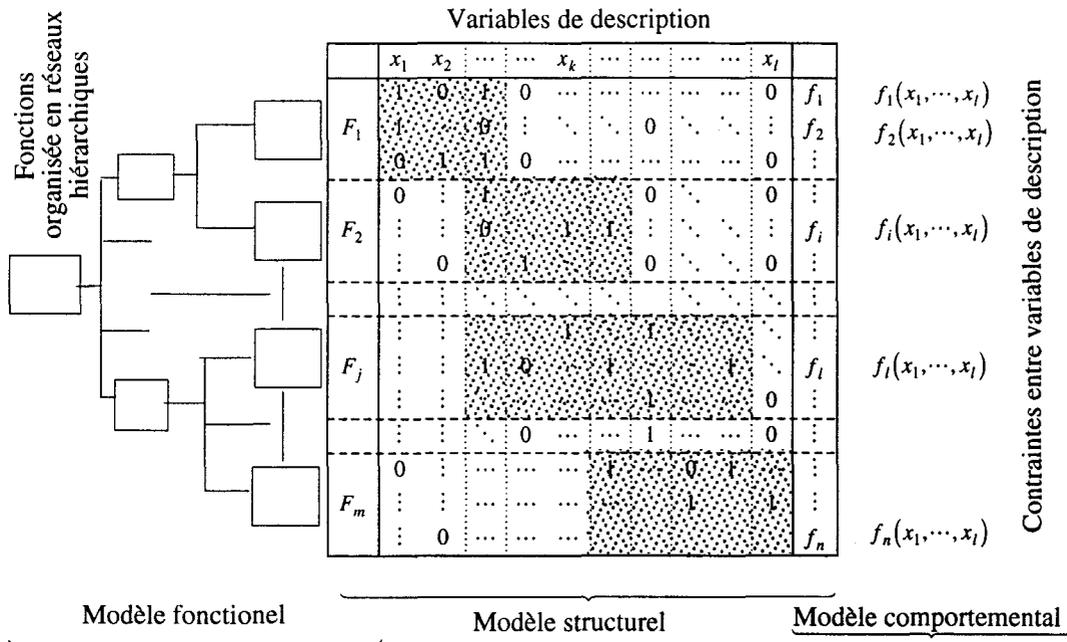


Figure 1.8: couplage des modèles : fonctionnel,

structurel, et comportemental.

A chaque fonction du système est associé : un ensemble de contraintes du modèle de comportement entre variables de description du système, et leur abstraction dans le modèle structurel.

On tente donc de pallier, par cette combinaison aux insuffisances de modèles simples quant à : leurs fonctionnalités (ce que nous permet de faire un modèle, les problèmes qu'il permet de résoudre), leur champ d'application (la nature des connaissances qu'il permet d'appréhender, la classe de systèmes à laquelle il s'applique), et au niveau de formalisation qu'ils procurent (ambiguïté, pouvoir inférentiel....).

Concernant les réponses que l'on espère apporter par cette intégration de modèles à chacune des questions de savoir : ce que fait, comment est fait et que fait le système, elles ne sont que partielles et parfois peu satisfaisantes. A la question de savoir ce que fait le système, le modèle fonctionnel répond de manière satisfaisante. On peut également considérer qu'une réponse partielle à la question de savoir : comment fait le système, est donnée par les trajectoires décrites par les équations du modèle quantitatif.

Concernant la question qui est, de savoir, comment est fait le système, le modèle structurel n'apporte pas de réponse explicite puisqu'il s'agit en réalité d'une description de la structure des équations du modèle comportemental et bien que cette dernière ne soit pas sans rapport avec la structure du système. L'information concernant la structure (que nous qualifierons dorénavant)

d'organique est contenue dans l'organisation hiérarchique du modèle fonctionnel, (elle se retrouve par là même dans l'organisation en blocs du modèle structurel). Cela suppose qu'il y ait correspondance bijective entre l'organisation hiérarchique fonctionnelle et l'organisation des constituants de la structure organique en systèmes et sous-systèmes. Dans ce cas, à chaque sous-système s_i correspond une fonction f_i et une seule, et à chaque élément s_{ij} de s_i correspond une fonction f_{ij} de f_i et une seule. Le couplage du modèle fonctionnel et du modèle structurel fait qu'il y a alors correspondance bijective entre l'organisation structurelle organique et les différents blocs du modèle structurel.

Le cas d'une correspondance bijective n'est malheureusement pas le cas général. Fonction et structure organique sont en général liées par une application quelconque. Ainsi à une fonction correspondent plusieurs parties distinctes de la structure organique et réciproquement. Dans le cas général, la réponse apportée par cette combinaison de modèles à la question de savoir comment est fait le système n'est donc que partielle voire pas satisfaisante, l'organisation fonctionnelle ne reflétant plus forcément l'organisation structurelle organique.

Il reste également les problèmes inhérents à l'analyse proprement dite des systèmes auxquels cette intégration n'apporte pas ou que peu de réponses. De nombreuses réponses complémentaires nous sont alors apportées par la méthode SAGACE qui constitue la seconde thèse que nous avons adoptée.

IV.3. La méthode SAGACE.

Nous abordons ici la présentation de la deuxième approche que nous avons adoptée qui porte l'accent sur les problèmes certes liés à la représentation mais surtout à l'analyse et au découpage des systèmes et au recueil des connaissances.

IV.3.a Une méthode et un outil.

SAGACE est à la fois une méthode d'analyse des systèmes et un support pour le recueil des connaissances sur ce système. Cette méthode d'analyse est constituée des trois phases suivantes :

- la phase de **cadrage** (figure 1.9.a), qui a pour but d'étudier le système globalement, dans son environnement, afin d'y recenser toutes les interactions (avec le milieu extérieur) pertinentes du point de vue de l'étude que l'on va mener. Cette vision globale permet ensuite de décider du projet d'étude : social, économique, technique,..., et d'extraire le sous-ensemble de contraintes liées à ce projet. Cette démarche constitue un compromis entre approches substantialiste et existentialiste. On considère donc que le système est à étudier dans son environnement mais que seul un sous-ensemble d'interactions sont pertinentes. On décide alors que ces interactions pertinentes sont celles du projet d'étude.

- la phase de **quasi-décomposition** : partant de l'hypothèse que ces systèmes sont **quasi décomposables**, c'est-à-dire qu'il est possible, en leur sein, d'identifier des îlots d'interactions fortes, il s'agira d'identifier les différents sous-systèmes qui le composent ainsi que

leurs interactions. On procède alors à une substitution du système global, défini par le projet d'étude, par un réseau de sous-systèmes que l'on va projeter dans une matrice des points de vue de modélisation dans la phase suivante. C'est ici un compromis entre approches réductionniste et globaliste. On considère d'une part qu'il existe des sous-ensembles non décomposables, dont la décomposition est risquée et qui sont donc à considérer dans leur ensemble : ce sont les sous-systèmes, ces îlots d'interactions fortes ; d'autre part, on considère également qu'il existe malgré tout une caractéristique structurelle : un réseau d'interactions qui permettent de rendre compte, par composition des propriétés des sous-systèmes, de celles du système global. En d'autres termes, ce système n'est qu'en partie décomposable.

- la phase de projection dans la **matrice des points de vue et d'analyse** (figure 1.9.b) : il s'agit d'étudier les sous-systèmes suivant différents angles et, de représenter ces différents points de vue. On structure ici le recueil des connaissances que l'on peut avoir sur les différents sous-systèmes, en orientant la vision de l'observateur sur ces derniers. Ces différents points de vue sont déterminés suivant des considérations systémiques que nous exposerons plus en détail par la suite. Cette matrice est constituée de neuf cases qui sont le croisement de trois **visions de modélisation**, et de trois **perspectives de modélisation** (cf. figure 1.9.b).

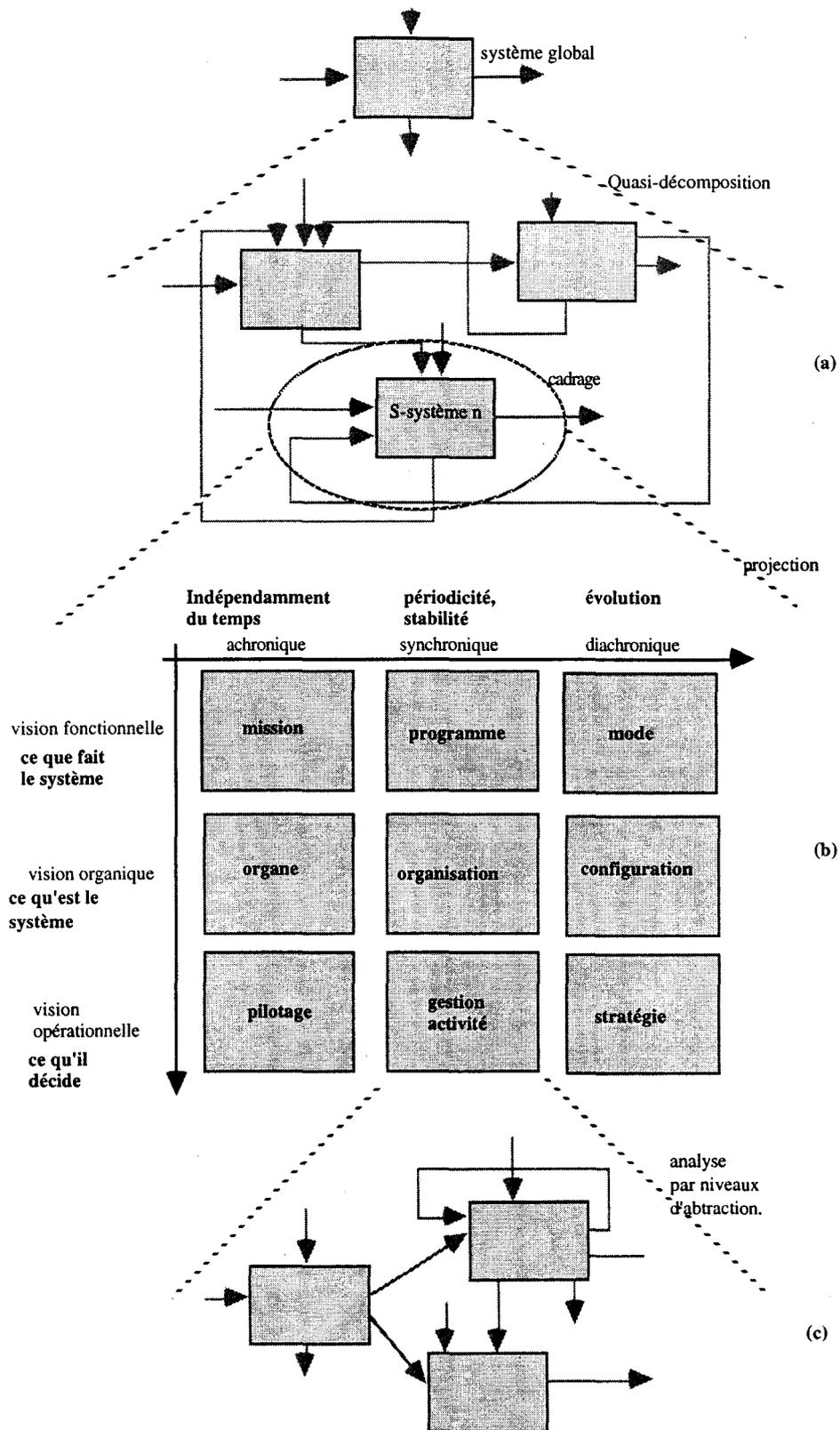


Figure 1.9 : les trois phases de la méthode SAGACE. (a) phase de cadrage, (b) projection en points de vue de modélisation, (c) analyse en niveaux hiérarchiques.

Chacune de ces trois phases est une réponse aux problèmes liés à l'analyse d'un système (cf. § : *Analyse système*) à savoir : sa séparation de son environnement, son découpage en sous-systèmes, et son analyse suivant différentes échelles de temps et différentes visions de modélisation.

Les paragraphes suivants analysent plus en détails chacune de ces trois phases, leur application et les concepts qui les sous-tendent.

IV.3.b Les différentes phases d'analyse de la méthode SAGACE.

IV.3.b.1 Phase de cadrage, logiques externes.

Un compromis entre *substantialisme* et *existentialisme* doit donc être trouvé pour extraire le système de son environnement sans nier ses interactions avec ce dernier. L'approche proposée ici s'inspire des travaux de J. Mèlèse [Mel-91], pour qui un système est à l'intersection de systèmes qu'il qualifie de *transversaux*. Par exemple, un système de production, qui serait le sujet de l'étude, s'inscrit dans un cadre plus large qu'est l'entreprise. Ce système de production répond à des besoins de nature : financière, technique, sociale... Si l'on considère ce système de production d'un point de vue uniquement financier, technique, ou social, on définit alors des sous-systèmes dit systèmes transversaux. C'est la conjonction de ces systèmes transversaux qui définit le système de production dans son ensemble.

La méthode SAGACE propose alors d'introduire la notion de logiques externes (au système). Chacun des systèmes transversaux peut être défini par rapport à une logique qui lui est propre, logique : économique, marketing, technique, sociale, etc. (figure 1.10). Chacune de ces "logiques" traduit un ensemble de préoccupations propres aux différents corps de métiers, aux différents centre d'intérêts, aux différents ensembles de besoins que doit satisfaire le système.

Définir le projet d'étude (ce que l'on cherche à savoir et pourquoi faire) revient à sélectionner, à définir l'ensemble des préoccupations que l'on cherche à satisfaire et à les croiser. On détache alors le système global de son environnement en ne retenant que la ou les logiques externes pertinentes du point de vue de l'étude (J. Mèlèse parle de coupes transversales). On parle, dans la terminologie SAGACE, de "cadrage" du projet d'étude. C'est par la même occasion une définition de la (des) finalité(s) du système, que le projet d'étude (ensemble des préoccupations) attribue au système.

La considération de telle ou telle logique externe se traduit concrètement dans le modèle par la prise en compte de contraintes à respecter et d'attentes à satisfaire (contraintes économiques, impératifs de production, sécurité,...).

IV.3.b.2 Phase de quasi-décomposition et logiques internes.

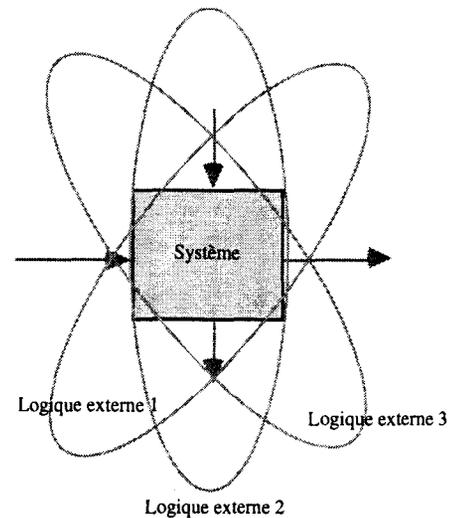


figure 1.10: logiques externes, systèmes transversaux, inspirés de [Mel-91].

N.B. : on parle de substitution et non de décomposition du système, car les sous-systèmes sont de complexité et de taille équivalentes à celles du système global, il n'y a donc pas de réduction de la taille et de cette complexité, il ne s'agit pas d'une décomposition.

Il est généralement nécessaire de substituer au système issu de la première phase de cadrage un réseau de sous-systèmes équivalent. Bien que la phase de cadrage restreigne le champ d'investigation, il n'en demeure pas moins très vaste. Nous avons soulevé le problème lié à cette démarche de décomposition en sous-systèmes (cf. § *Systèmes et sous-systèmes*). On suppose qu'une telle démarche est possible. En conséquence, on suppose que l'on est en présence de systèmes quasi décomposables, c'est-à-dire qu'il est possible d'identifier au sein du système des parties plus ou moins denses en interaction. On ne perd pas de vue pour autant que la séparation, le découpage mène de toutes manières à une simplification. L'enjeu de cette quasi-décomposition est alors d'obtenir des sous-systèmes ayant une certaine autonomie ; mais en retenant les liaisons qui permettent une recombinaison de ces sous-systèmes avec le moins de "pertes" possibles.

Ces découpages peuvent être guidés par des objectifs, des axes de délimitation : structurels, spatiaux, temporels, ..., pour choisir les frontières de séparation les moins défavorables et les moins risquées. F. Le Gallou [Le.Gal-92] parle d'interfaces optimales et propose un certain nombre de principes consacrés par l'expérience. Ces principes sont essentiellement basés sur la recherche de discontinuités (dans la densité des liaisons, dans la nature des flux....), mais ne permettent pas de dégager un principe général de délimitation.

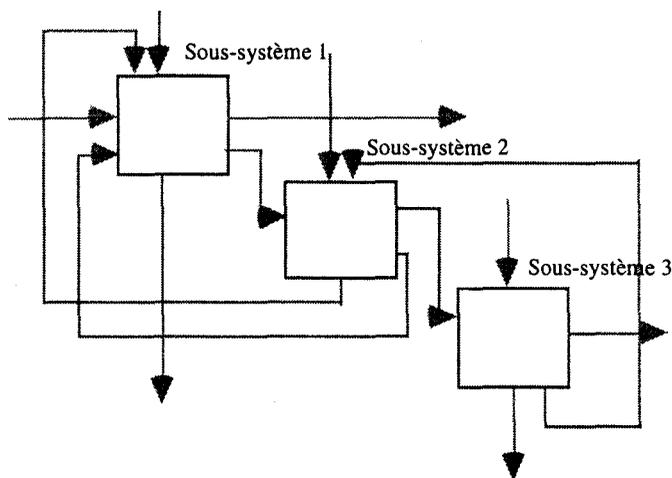


Figure 1.11 : découpage d'un système en sous-systèmes. On convient pour l'instant de représenter ces réseaux de sous-systèmes comme sur la figure, l'on reviendra plus en détail sur la syntaxe et la sémantique de ces diagrammes.

La méthode SAGACE préconise l'utilisation de logiques internes (au système). Pour chaque regroupement/séparation des différentes parties du système en sous-systèmes, on peut là encore identifier une "logique" qui le/la sous-tend ou qui le/la justifie. Comme pour toute classification, on peut déterminer un critère de similitude, un point commun. Il suffit alors de justifier une quasi-décomposition en sous-système en explicitant la ou les logiques internes qui mènent à ces démarcations.

Par exemple, une substitution très répandue en automatique est celle en : partie opérative, partie décision et partie information, reprise

entre autres par la méthode GRAI [App-90]. On peut associer à cette décomposition deux logiques internes : i/ la première consiste à séparer les parties traitant de la matière et de l'énergie d'une part, de celles traitant de l'information d'autre part ; ii/ la seconde consiste à séparer l'élaboration d'informations pour la maîtrise du système (prise de décision) et l'élaboration d'informations de connaissance sur le système (gestion des bases de données brutes et validées [Sta-94a, b, c]). En appliquant ces deux logiques à la quasi-décomposition d'un système automatisé, on retrouve le modèle O.I.D de l'automatique (opération, information, décision) que l'on convient de représenter par la figure 1.12.

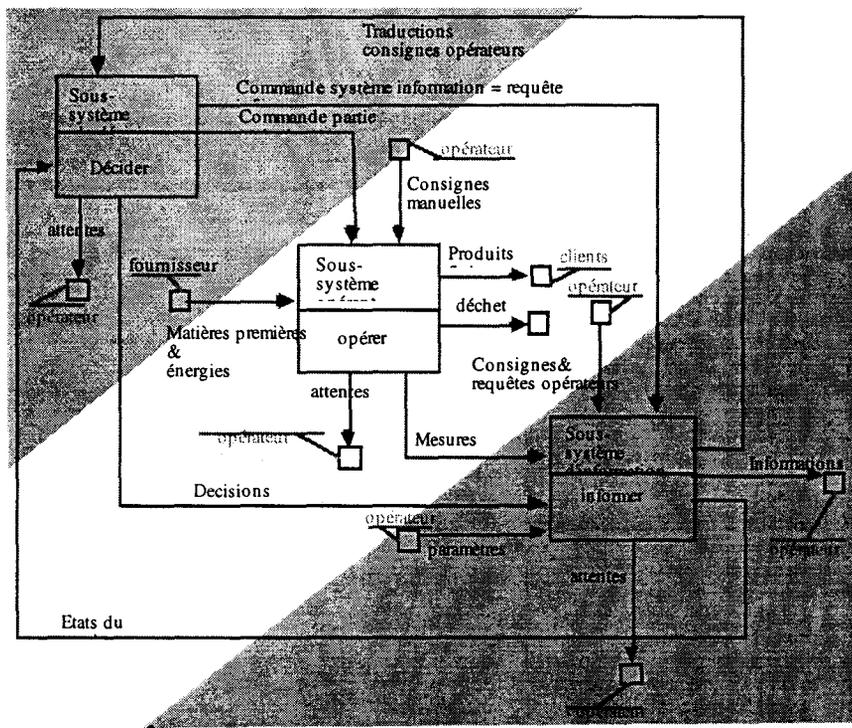


Figure 112 : découpage d'un système automatisé de production en sous-systèmes, suivant les logiques internes : nature des flux (matière, énergie, information), et type d'informations (de commande, et information de connaissance). Cette quasi-décomposition mène au modèle O.I.D de l'automatique en : partie opérative, partie information, et partie décision.

(Nous aurons par la suite l'occasion de revenir sur ce découpage qui permet d'isoler, entre autres, la partie opérative et ses couplages avec les parties : décision (commandes) et, information (mesures)).

IV.3.b.3 Phase de projection et points de vue de modélisation.

On a donc délimité l'étude grâce à la notion de logique externe et déterminé un ensemble de sous-systèmes à l'aide des logiques internes. Il reste que cette partie du système peut être étudiée suivant différents points de vue de modélisation et que, comme nous l'avons souligné précédemment (cf. § : *Systèmes et temps*), il peut être considéré suivant plusieurs perspectives de temps (à plus ou moins long terme).

La méthode SAGACE propose ici deux notions : celle de **vision de modélisation** et celle de **perspective de modélisation**, à l'aide desquelles on en définira une troisième : celle des **points de vue de modélisation**. Ces *visions de modélisation* et ces *perspectives de modélisation* sont au nombre de trois chacune définissant ainsi neuf points de vue de modélisation (figure 1.13).

Les **visions de modélisation** sont les suivantes :

- la **vision fonctionnelle** : où l'on s'intéresse à ce que fait le système;
- la **vision organique** : où l'on s'intéresse aux constituants, organes, et entités au sein du système, et à leur agencement ;
- la **vision opérationnelle** : où l'on s'intéresse aux contextes dans lesquels sont prises les décisions et qui influencent les mécanismes de ces prises de décisions par et sur le système.

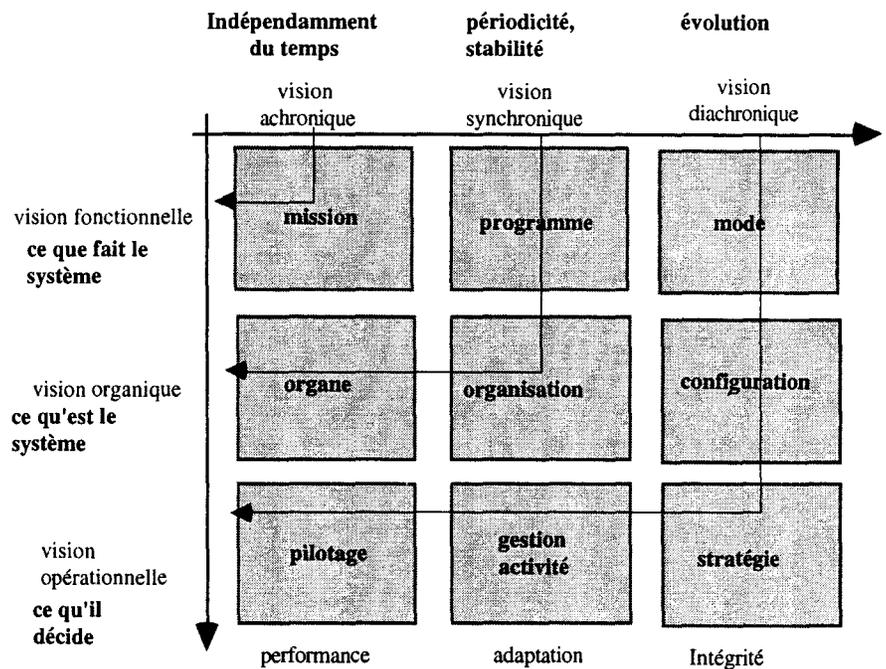


Figure 1.13 : SAGACE : matrice des points de vue de modélisation, croisement de trois visions de modélisation et de trois perspectives de modélisation.

Une introduction **aux trois perspectives de modélisation** que sont : la performance, l'adaptation, et l'intégrité du système consiste à les rattacher à des *perspectives de temps* à : court, moyen et, long terme, correspondant aux colonnes de la matrice SAGACE.

- La description d'un certain nombre d'aspects dans le système est à rattacher à des objectifs en performances de ce dernier et renvoient à une perspective à court terme.
- D'autres aspects encore sont liés à des considérations ayant trait à l'adaptation du système et renvoient à une perspective à moyen terme.
- D'autres enfin liés à l'évolution du système avec comme objectif la préservation de l'intégrité de ce dernier renvoient à une perspective à long terme.

Le croisement de ces trois perspectives et de ces trois visions donne les neuf points de vues de la matrice SAGACE. L'interprétation de ces différents points de vue est la suivante.

i/ -Dans une **vision fonctionnelle** :

a/- on s'intéresse à la **mission** du système, à ses finalités, à ses fonctions. C'est le domaine de l'analyse fonctionnelle, de la spécification de cahiers des charges, de l'analyse du besoin [AFA-89]. Cette description est indissociable des notions d'objectifs, de buts, de performances.

b/- Dans une perspective à moyen terme, on s'intéresse à l'organisation dans le temps des activités du système. On aborde alors la notion de **programme** ; c'est le domaine de l'algorithmique, de la programmation, de l'ordonnancement, et des outils tels que le grafcet et les réseaux de Petri [Dav-89]. La notion d'organisation renvoie quant à elle l'adaptation qui guide le choix de la meilleure organisation.

c/- Dans la dernière perspective, on s'intéresse alors aux différents **modes** de fonctionnement au cours de l'évolution du système. Ce point de vue est à l'interface entre les approches fonctionnaliste et évolutionniste citées précédemment (cf. § : *Systèmes et temps*). C'est le domaine de l'analyse des modes de marche (GEMMA), des modes d'utilisation et des modes de fonctionnement [Sta 94-d]. Un objectif de cette perspective à long terme est l'intégrité du système. L'évolution du système ne doit pas se faire au détriment de son intégrité.

ii/ -Dans une **vision organique** :

a/- à court terme, on s'intéresse à l'agencement en réseaux des constituants du système (les composants et **organes**). On décrit ici ce que l'on nomme la structure organique du système (organes et agencement). Cette organisation est permanente et correspond à la perspective à plus court terme envisageable.

b/- Dans une perspective à moyen terme, l'on décrit la logistique, l'**organisation** dans le temps des éléments du réseau organique. Un, à plusieurs éléments du réseau organique, sont actifs ou sollicités, ce à des instants précis et de manière synchrone. On décrit donc l'affectation de ces ressources (organiques) aux différentes tâches. C'est, par exemple, le domaine de l'allocation des ressources et des outils et méthodes tels que ceux de la recherche opérationnelle[Kauf-62]. De même que pour la vision fonctionnelle, correspond à cette perspective commune celle d'adaptation de l'allocation des ressources aux tâches.

c/- Dans une perspective à long terme, on s'intéresse alors aux différentes **configurations** adoptées par le système au cours de son évolution. Durant les différents stades de l'évolution du système sont disponibles des ensembles distincts de ressources dans un état donné ; ces ensembles varient et se succèdent, certaines ressources peuvent être mises en oeuvre ou remplacées en cas : d'indisponibilité ou de défaillances des ressources principales, dans le cadre d'une modification, d'une amélioration du système, constituant ainsi une

configuration donnée du système. C'est le domaine de l'analyse des configurations et de l'accommodation de pannes.

iii/- Dans une **vision opérationnelle** :

a/- dans une perspective à court terme, on s'intéresse aux contextes de **pilotage** ; il s'agit de décrire les différentes situations remarquables dans lesquelles sont prises les décisions concernant le pilotage des ressources du réseau organique et qui influencent la "manière" de piloter ces organes. C'est le domaine du contrôle et de l'élaboration des commandes. Ces décisions visent à optimiser les performances instantanées du système (régulations, plages de fonctionnement...).

b/- On envisage dans la perspective suivante la **gestion** de la structure du système, ou plus précisément celle des contextes dans lesquels sont prises les décisions dans le cadre d'une adaptation à court terme de la structure à une situation donnée et soumises aux décisions d'ordre stratégique. A un contexte de gestion correspond une "manière" de gérer les ressources du système. C'est le domaine de la gestion des activités.

c/- La dernière perspective relève de la **stratégie**. Elle s'inscrit dans le cadre de l'évolution du système. Les contextes stratégiques décrits ici déterminent une "manière" de décider de la stratégie et de l'évolution de la structure du système pour garantir l'intégrité à long terme du système. C'est le domaine de la supervision.

IV.3.c Fonction, structure et comportement dans la matrice SAGACE.

Nous avons utilisé en guise d'introduction aux points de vue de la matrice SAGACE la notion de perspectives de temps liées respectivement à celles de performance, d'adaptation et d'intégrité du système. Chacune de ces perspectives prises deux à deux sont alors considérées comme correspondant aux colonnes de la matrice. Une analyse plus fine montre qu'il n'en est pas exactement ainsi. Correspondent effectivement aux colonnes, les perspectives de performance, d'adaptation et d'intégrité mais, il n'en est pas de même pour celles de temps.

Plutôt que des perspectives à court, moyen et long terme la notion de temps dans la matrice SAGACE correspond à des visions temporelles, à des échelles de temps. Ces visions sont les suivantes :

- un certain nombre d'aspects décrits dans la matrice sont évoqués indépendamment du temps. C'est, dans la terminologie systémique, la vision **achronique** (indépendante du temps); la description de ces aspects du système ne fait donc en aucun cas intervenir des notions de synchronisation, de période, d'instant, ou de persistance ;

- d'autres aspects encore présentent une certaine périodicité et reproductibilité de leurs occurrences, et présentent une certaine régularité, un certain niveau de stabilité, ou encore sont permanents. Leur étude est à replacer dans le temps. C'est la perspective dite **synchronique** (dans le temps); cette perspective est celle où la description du déroulement des phénomènes est dépendante de

notions d'ordonnement dans le temps, de synchronisation, d'instant ;

- d'autres enfin prennent place dans le cadre de l'**évolution** du système. On qualifie cette perspective de **diachronique** (à travers le temps). A certaines périodes, et pour une durée plus ou moins longue, le système présente un certain nombre d'états caractérisant le stade de son évolution. Le système présente alors un et un seul de ces états distincts et qui se succèdent (à travers le temps) définissant une trajectoire de l'évolution de ce dernier.

Par ailleurs, les neuf points de vue de la matrice SAGACE peuvent être organisés en niveaux de modélisation comme sur la figure 1.14. Chacune de ces couches définit la fonction, la structure et le comportement, du système étudié et correspondent aux visions temporelles précédentes.

	Fonction	Fonctionnement	évolution	
Fonction	fonction	programme	mode	vision fonctionnelle
Structure	organe	organisation	configuration	vision organique
Comportement	pilotage	gestion	stratégie	vision opérationnelle

Figure 1.14 : Fonction, structure, et comportement, chacune de ces notions correspond à un niveau dans la matrice SAGACE.

Une modélisation fonctionnelle d'un système se résume à un point de vue de la matrice SAGACE. Il s'agit alors de justifier l'action du système en termes de missions, de services rendus, de plus values. On étudie ce que fait le système et ce, dans une perspective indépendante du temps. La description fonctionnelle du système est donc une vision achronique du système.

Définir la structure du système suppose l'étude de trois points de vue supplémentaires. Tout d'abord, il faut rendre compte de sa structure organique permanente. Il est également nécessaire de rendre compte des aspects invariants, périodiques, répétitifs (donc structurels), du moins pour une période suffisamment longue, à savoir l'aspect "activité programmée", tâches, et l'aspect "organisation dans le temps" et affectations des ressources, qui sont les aspects synchroniques du système. Ces trois points de vue constituant la structure du système servent à l'accomplissement de sa de la façon suivante : les organes sont, suivant une organisation, affectés dans le temps aux activités programmées du système. La caractéristique

permanente du réseau organique est une vision synchronique, c'est une description dans le temps. La description structurelle correspondante est donc une vision synchronique du système.

L'étude du comportement du système suppose que l'on raisonne suivant cinq points de vue. Répondre à la question de savoir comment fait le système, suppose que l'on décrive ses mécanismes de décision (vision opérationnelle), à court (pilotage), moyen (gestion), et long terme (stratégie), ainsi que les mécanismes d'évolution de sa structure (modes et configurations). Il faut ensuite remarquer que le système est, à tout instant, dans un et un seul mode, une et seule configuration, dans un et seul contexte de pilotage, un et un seul contexte de gestion et un e un contexte stratégique. Un changement dans l'un de ces états est une succession d'état. C'est une description dans le temps, définissant des trajectoires du système. La description comportementale dans la matrice SAGACE est une vision diachronique du système.

En résumé, les points de vue de SAGACE résultent donc du croisement des *visions* : fonctionnelle, organique, et opérationnelle et des *perspectives* que sont : la performance, l'adaptation et l'intégrité du système ; ils sont stratifiés en *visions temporelles* que sont : la vision *achronique fonctionnelle*, *synchronique structurelle*, et *diachronique comportementale*.

La structure est liée aux points de vue du niveau comportement de la façon suivante : chaque *mode* définit, à un stade donné de l'évolution du système, un *programme* mis en oeuvre ; une configuration définit, à un stade donné de l'évolution, un réseau d'*organes* sollicités dans le temps suivant une *organisation*. Les *organes* sont soumis aux décisions de *pilotage* (commande), l'*organisation* et les *programmes* sont soumis aux décisions de *gestion* (synchronisations, activations, d'affectations...).

Au niveau comportemental, les points de vue opérationnels sont liés de la façon suivante : les décisions de *pilotage* sont contraintes par la *gestion* , et celle de la *gestion* par les décisions *stratégiques*. Enfin les *modes* et les *configurations* sont également soumis aux décisions *stratégiques* : changements de modes, changements de configurations.

IV.4. Positionnement relatifs des deux approches et complémentarité.

Il apparaît donc dans les deux approches (triple modélisation et méthode SAGACE) des problématiques communes et des complémentarités. Elles ont notamment en commun le souci de parvenir à une description des aspects : fonctionnels, structurels, et comportementaux ; et de répondre ainsi aux trois questions qui sont de savoir : ce que fait, comment est fait, et comment fait le système. Mais il convient ici, de préciser ces concepts de : fonction, structure, et comportement, qui à l'évidence n'ont pas strictement la même définition dans les deux approches, malgré des préoccupations communes sous-jacentes. Il convient également de positionner clairement ces deux approches l'une par rapport à l'autre.

Nous proposons, pour illustrer le positionnement des deux approches et leurs complémentarités la figure 1.15.

L'approche de la triple modélisation par : fonction, structure, et comportement, entend combiner des modèles de niveau de formalisation et de fonctionnalité croissante. Ces niveaux que l'on convient de nommer respectivement : niveau cognitif ou descriptif ou encore de représentation, niveau qualitatif ou de qualification, et niveau quantitatif ou de quantification, définissent un axe : l'axe des niveaux de formalisation des langages de modélisation.

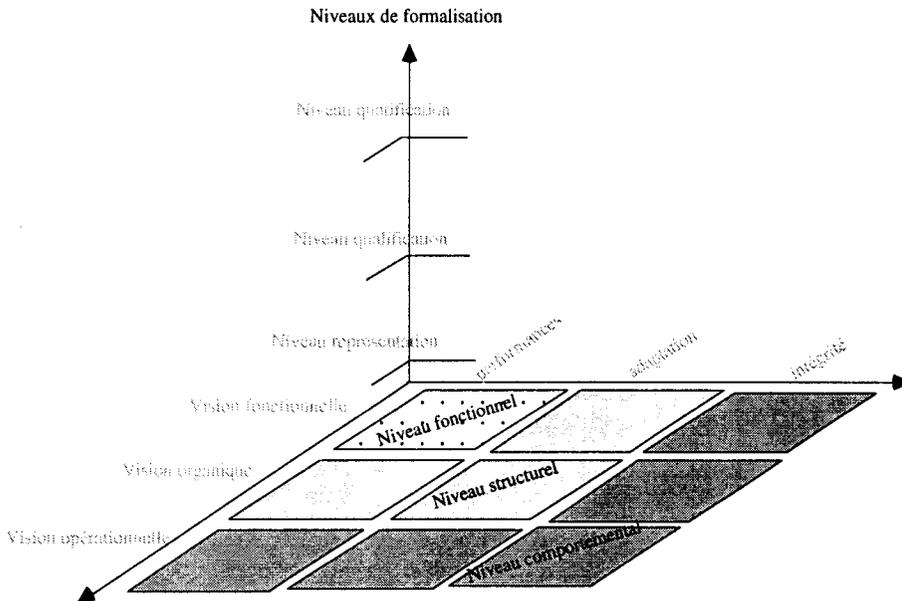


Figure 1.15 : positionnement des deux approches de la triple modélisation et de la méthode SAGACE.

La matrice SAGACE par : fonction, structure et comportement définit des visions : achronique, synchronique et diachronique du système, ces trois niveaux de modélisation se décomposent suivant deux axes :

i/- l'axe des visions de modélisation : fonctionnelle, organique, et opérationnelle,

ii/- l'axe des perspectives de modélisation : performance, adaptation, intégrité. Ces deux approches définissent donc trois axes de modélisation.

IV.4.a Positionnement des deux approches.

Dans les deux approches, les termes de : fonction, structure, et comportement, sont donc intimement liés à des niveaux de modélisation.

Pour l'approche dite de triple modélisation, ces trois termes se placent sur l'axe des niveaux de formalisation.

Les différents points de vue de la matrice SAGACE quant à eux sont exprimés dans le même langage et bénéficient donc du même niveau

de formalisation. Le niveau de formalisation du langage SAGACE (et non celui de la méthode) est celui d'un langage graphique. Dans cette mesure, il bénéficie du niveau de formalisation des langages iconiques (du type SADT, SART, SSA...). Les différents modèles de la matrice SAGACE se situent donc sur un même plan défini par les deux axes des visions et des perspectives de modélisation (figure 1.15). Ce plan comporte le modèle fonctionnel commun aux deux approches ; de plus, SAGACE ayant pour vocations premières : la représentation, le recueil et la communication, des connaissances sur le système, et pour faire référence à ces fonctions du modèle SAGACE, (on parlera du "niveau descriptif" ou encore du "niveau cognitif" de cette modélisation). Sur ce plan ainsi spécifié (plan du niveau cognitif), on définit les niveaux de modélisation : fonctionnel, structurel, et comportemental de la figure 1.13.

La notion de fonction est commune aux deux approches. Une modélisation fonctionnelle est, pour les deux approches, la description de ce que fait le système et pourquoi il le fait. Cette description est exprimée en termes de services rendus, de plus values, de missions, de buts. (Nous reviendrons plus en détail sur cette notion de fonction que nous tenterons de formaliser dans le chapitre suivant). Ces modèles sont des modèles de représentation.

La notion de structure, dans la méthode SAGACE, fait référence aux aspects : organique d'une part et, invariants au sein du système d'autre part. Il s'agit de la description des caractéristiques, propriétés et phénomènes invariants, stables, réguliers, périodiques, en d'autres termes : structurels. Alors que dans la première approche, par structure, on entend structure des systèmes de contraintes du modèle de comportement. On exprime par là, une abstraction de ces relations (projection dans une structure algébrique plus pauvre). Bien que cette structure (des systèmes d'équations) ne soit pas sans rapport avec la structure du système (au sens de la méthode SAGACE), il convient de distinguer ces deux notions. Le modèle structurel de la première approche est une modélisation intermédiaire entre le niveau cognitif et le niveau quantitatif, on le situera donc au niveau qualitatif. Quant aux modèles structuraux de la méthode SAGACE, ils se situent sur le plan cognitif au niveau structurel.

La notion de comportement, bien que dans les deux approches elle fasse référence aux trajectoires des variables et des états du système, n'a pas pour autant des définitions strictement équivalentes chacune d'elles. Le point commun des deux sens que prend le terme "comportement" dans chacune des approches est qu'ils se réfèrent à des trajectoires du système. Dans la première approche, les trajectoires sont celles des variables des systèmes d'équations : qualitatives, quantitatives et des contraintes formelles (graphes, règles de production...) ce, indépendamment du point de vue représenté. Ces modèles de comportement se situent suivant l'axe des formalisations du niveau qualification au niveau quantification. SAGACE n'envisage ce comportement qu'au niveau représentation. Les trajectoires auxquelles il est fait référence dans cette seconde approche, sont celles des états de la structure (mode et configuration) et des contextes opérationnels. Ces dernières trajectoires décrivent en quelque sorte l'évolution de la "manière" dont décide le système compte tenu des situations auxquelles il est confronté.

IV.4.b Les apports des différentes approches.

SAGACE introduit donc des concepts de modélisation que sont ceux de : fonction, organe, programme,..., à un même niveau de formalisation, à savoir celui de la représentation du système. La triple modélisation quant à elle, véhicule la notion de niveau de formalisation, sorte de granulerait, de finesse de la modélisation ou encore, de richesse de la structure algébrique sous-jacente.

L'information fournie par les méthodes d'analyse de type SADT, SSA, MERISE, est ce que fait ou doit faire le système pour satisfaire les besoins des exploitants, et les moyens mis ou devant être mis en oeuvre. Ces méthodes et modèles sont utilisés pour la spécification et la concertation et se situent donc au niveau cognitif. Ce sont ces fonctions que remplit généralement ce type de modèles qui leur valent le qualificatif de méthodes fonctionnelles. C'est une des origines de l'assimilation du niveau cognitif au seul point de vue fonctionnel. On parle alors à tort, de niveau fonctionnel. Cette assimilation conduit à une représentation, dans un seul point de vue dit "fonctionnel", des aspects du système qui certes sont intimement liés mais n'en restent pas moins distincts. Par exemple, SADT décrit en une seule représentation les fonctions du système, leurs supports (dispositifs, programmes, moyens, personnes), et l'affectation de chacun de ces supports à une ou plusieurs fonctions ; ou encore SART qui tente de décrire : l'organisation dans le temps et la synchronisation des tâches, ainsi que l'affectation des ressources. Ce sont effectivement ces supports qui réalisent les fonctions du système, et il y a bien une synchronisation des tâches, il est donc nécessaire de les représenter. Mais fonction, dispositif, programme,..., relèvent de points de vue différents. Chacune de ces entités peut faire l'objet d'une représentation indépendante. Les fonctions d'un système peuvent être énoncées indépendamment des moyens mis ou à mettre en oeuvre ainsi que de leur affectation dans le temps. Plus généralement, dispositif, programme, organisation (en d'autres termes, la structure du système), peuvent être décrits sans pour autant spécifier ce à quoi ils servent.

La méthode SAGACE nous enseigne donc que :

i/- la représentation du système ne se résume pas à la seule représentation fonctionnelle (de l'approche triple modélisation) qui n'est qu'une des représentations possibles. Représenter un système nécessite les descriptions : fonctionnelle, structurelle et, comportementale, qui sont respectivement des visions : achroniques, synchroniques et, diachroniques, du même système.

ii/- ces représentations sont aux croisements de trois visions de modélisation : fonctionnelle, organique, et opérationnelle, et de trois perspectives de modélisation que sont : la performance, l'adaptation, et l'intégrité du système. Neuf points de vue et trois niveaux de modélisation structurent le recueil des connaissances.

iii/- Ces neuf points de vue sont intimement liés mais doivent être distingués, car ils consistent individuellement en une représentation pertinente et, envisageable indépendamment des autres. Ainsi, le réseau organique est décrit indépendamment de sa fonction, ainsi que l'organisation dans le temps des tâches effectuées. L'affectation

dans le temps des organes aux différentes tâches pour la réalisation des fonctions constitue un point de vue distinct : l'organisation. Cela permet, par exemple, d'envisager différents réseaux organiques pour l'élaboration d'une même organisation pour la réalisation des mêmes tâches. On peut également envisager plusieurs organisations d'un même réseau organique affectées à un même ensemble de tâches pour les mêmes fonctions, etc.

L'approche triple modélisation introduit quant à elle les trois niveaux de formalisation : descriptif, qualitatif, quantitatif, ainsi que les trois niveaux de fonctionnalité d'un modèle : cognitif, prédictif, normatif. On peut alors envisager une déclinaison de chacun des points de vue de la matrice dans des langages de formalisation et de fonctionnalités croissantes.

IV.5. Quels modèles pour quels systèmes ?

Si l'on en croit la figure 1.15, il est alors possible d'établir jusqu'à neuf types de modèles à trois niveaux de formalisation différents, soient vingt-sept modèles d'un même système.

En pratique, le nombre de modèles établis dépend : du niveau de complexité du système, de la nature des connaissances, du projet d'étude et des sous-systèmes projetés dans la matrice, ces paramètres déterminent une "profondeur" de modélisation suivant les axes précédemment définis.

La représentation fonctionnelle est généralement possible pour une classe très large de systèmes : les systèmes finalisés (artefacts, systèmes de production,...). L'accès aux points de vue structurels dépend de la périodicité des phénomènes et de leur stabilité ; ils sont les plus pertinents pour la représentation des systèmes organisationnels (sociétés, entreprises, systèmes multi-agents...). Le niveau comportemental caractérise les systèmes essentiellement stratégiques (système d'armes, jeux...)[INS-97].

La déclinaison aux niveaux : qualitatif et quantitatif dépend de la nature des connaissances accessibles du même nom...

V. Conclusion.

Considérer un système comme complexe, suppose une démarche spécifique quant à sa modélisation et son analyse. La méthodologie que l'on propose, est une méthode d'analyse permettant : de détacher le système de son environnement, son découpage en sous-systèmes, sa représentation et le recueil des connaissances suivant différents points de vue. On envisage ensuite l'expression de ces différents points de vue à plusieurs niveaux de formalisation. On combine ainsi le domaine de validité très large des modèles de représentation et leur fort potentiel cognitif aux fonctions normative et de simulation des niveaux de formalisation plus élevée.

Il reste que ces modèles de représentation ne permettent pas (ou que très peu) d'inférences. Se pose alors le problème de l'analyse des différents points de vue. Comment identifier les différentes parties des réseaux qui formeront ces modèles, quelles règles d'agencement

adopter, quelle organisation hiérarchique pour ces réseaux, et enfin comment les valider ? Est-il possible de doter ces modèles de mécanismes d'inférence permettant, dès l'élaboration de ce premier niveau de représentation, de raisonner sur le système, de procéder à des calculs, au même titre que ceux dont on dispose avec des modèles qualitatifs et quantitatifs ? Enfin est-il possible de spécifier des règles qui permettent de guider l'écriture des systèmes d'équations analytiques et/ou qualitatives qui régissent les processus au sein du système, voire de les décliner de façon systématique à partir de ces représentations des systèmes ?

Les chapitres suivants proposent un certain nombre de réponses à ces questions. On cherche à se doter de notations et d'algorithmes de traitement de ces réseaux implémentables en machine.



CHAPITRE II

**Représentation des systèmes :
énoncé fonctionnel et représentation graphique**

I. INTRODUCTION.....	35
II. VERS UNE STRUCTURE DE DECLARATION FONCTIONNELLE.....	36
II.1. MODELISATION FONCTIONNELLE POURQUOI FAIRE ?.....	36
II.2. NOTION DE FONCTION.....	37
II.2.a Différents sens du terme de fonction.....	37
II.2.b Définition du terme de fonction.....	39
II.2.c Vers une structure de déclaration des fonctions d'un système.....	40
II.2.c.1 Mission, processus.....	40
II.2.c.2 Structure.....	41
II.2.c.3 Comportement.....	42
II.2.c.4 Système, sous-système.....	42
II.2.c.5 Environnement et finalité.....	43
II.2.c.6 Théorie.....	44
II.2.d Fonction, dysfonction, non fonction.....	44
III. REPRESENTATION FONCTIONNELLE PAR UN LANGAGE GRAPHIQUE.....	46
III.1. NOTION DE PROCESSEUR.....	47
III.2. ENVIRONNEMENT, FINALITE, ET LOGIQUES EXTERNES.....	47
III.3. THEORIE ET VARIABLES DE DESCRIPTION.....	48
III.4. SYSTEME ET LOGIQUE INTERNE.....	50
III.5. MISSION, PROCESSUS ET PROCESSEUR.....	50
III.6. STRUCTURE ET MODELISATION STRUCTURELLE.....	51
III.7. COMPORTEMENT ET MODELISATION COMPORTEMENTALE.....	51
IV. REPRESENTATION DES SYSTEMES AUTOMATISES PAR RESEAUX DE PROCESSEURS.....	51
IV.1. DEFINITION DU PROJET D'ETUDE.....	52
IV.2. DECOMPOSITION EN SOUS-SYSTEMES.....	52
IV.3. REPRESENTATION DANS LES DIFFERENTS POINTS DE VUE.....	54
V. CONCLUSION.....	59

I. Introduction

Bien que des méthodes telle S.A.D.T, pour l'analyse et le recueil des connaissances, soient très structurées, il n'en reste pas moins que les représentations auxquelles elles aboutissent sont largement dépendantes des sensibilités des observateurs. L'emploi d'une méthode S.A.D.T, S.S.A, S.A.R.T, MERISE ou d'autres, donnera lieu à autant de modèles différents que d'observateurs du système. La subjectivité de ces modèles de représentation n'est pas inhérente à la méthode. Cette multiplicité des représentations auxquelles peuvent aboutir ces méthodes tient d'une part, au faible niveau de formalisation des langages graphiques dans lesquels elles sont exprimées et d'autre part, au fait que les concepts que ces représentations tentent d'appréhender sont équivoques, à l'image de la plus usitée d'entre elles, celle de fonction qui recouvre un large spectre de significations.

Les résultats de ce chapitre constituent le premier des quatre niveaux de formalisation du modèle de représentation que nous proposerons dans ce travail. Il s'agira d'objectiver les concepts de modélisation, que sont ceux : de *fonction*, de *structure* et de *comportement*, et d'en définir une représentation graphique équivalente.

On abordera dans la première partie de ce chapitre, la notion de *fonction* qui est certes la plus familière, à ce niveau de modélisation (niveau représentation), mais aussi une des plus ambiguës et subjectives. Après une première étude bibliographique passant en revue les différentes applications de l'analyse fonctionnelle et les besoins qu'une telle analyse tente de satisfaire, on se focalisera sur la notion de *fonction*. Les différentes interprétations que l'on fait de cette notion, les définitions et formulations d'auteurs que l'on trouve dans la littérature sont ensuite présentées mettant en évidence, par leur nombre et leur diversité, la difficulté que l'on a à cerner une telle notion. On proposera alors, afin d'objectiver cette notion de *fonction*, une structure de déclaration des fonctions d'un système. Il s'agit de recenser les paramètres à prendre en compte pour une déclaration la moins ambiguë possible de ce qu'est une *fonction* d'un système. Cette structuration s'inspire de travaux similaires qu'elle généralise.

Il s'agit alors, dans la seconde partie, de représenter graphiquement les *fonctions* d'un système. On utilise pour cela le langage graphique ainsi que la méthode SAGACE. On montrera alors, en quoi une telle représentation graphique constitue un énoncé fonctionnel équivalent au précédent exprimé formellement. On introduit alors le concept générique de *processeur*, qui dans sa formulation graphique permet outre la représentation des *fonctions* d'un système celles de tous les points de vue de la matrice SAGACE à l'aide de réseaux de ces processeurs. On définit alors, par instanciations de cette entité générique, des processeurs fonctionnels, organiques, décisionnels...

Dans la troisième partie, on applique cette représentation multi-points de vue à la représentation de systèmes automatisés de production (S.A.P). Il s'agit d'illustrer ce que peut être une interprétation des préceptes généraux de la méthode SAGACE appliqués à la représentation d'un S.A.P. On montre alors que leur traduction

conduit à une version de concepts familiers de l'automatique tels que ceux de *fonctions*, de *dispositifs*, de *mode d'utilisation*, de *configuration* et d'autres, que cette matrice des points de vue a le mérite de fédérer et de représenter dans un même langage graphique. On se propose alors de montrer comment à partir d'analyses croisées de différents points de vue de la matrice l'on peut procéder à une première vérification de la cohérence de ces représentations. On présente alors les concepts de *réseaux sémantiques* et de *règles normatives*, qui sont une base à partir de laquelle ce modèle peut être doté des fonctionnalités normative et prédictive. On aboutit alors en satisfaisant aux règles normatives à une gestion dynamique des représentations.

II. Vers une structure de déclaration fonctionnelle.

II.1. Modélisation fonctionnelle pourquoi faire ?

De nombreux arguments plaident en faveur d'une modélisation fonctionnelle des systèmes. Outre la généralité et la souplesse de telles représentations, les différentes applications et disciplines où la modélisation fonctionnelle a fait ses preuves, essentiellement dans les domaines de la philosophie des sciences, de l'ingénierie, et de l'intelligence artificielle, attestent de l'intérêt de telles représentations.

En matière d'analyse fonctionnelle, on peut à travers la littérature distinguer les quatre grandes problématiques suivantes :

- *l'identification* : étant donnée une entité, il s'agit d'identifier la ou les fonctions que peut remplir cette entité, partant de la connaissance de sa structure, du comportement et de l'organisation de ses composants. (On se référera aux travaux de Freeman [Fre-71], DeKleer [Kle-84a,b], Joskowicz [Jos-87], Tezza [Tez-88], Dormoy [Dor-88], Falting [Fal-90]).

- *L'explication* : il s'agit d'expliquer la présence d'une entité au sein d'un système englobant, en termes de contribution à la fonction globale du système. (On se référera aux travaux de Hempel [Hem-65], Canfield [Can-64], Lehman [Leh-65], Beckner [Beck-69], Ayala [Aya-70], Ruse [Rus-90], Wright [Wri-73], Cummins [Cum-74], Nagel [Nag 77a,b]).

- *La sélection* : étant donné un ensemble de composants, il s'agit de sélectionner ceux qui utilisés conjointement sont susceptibles de remplir une fonction désirée. (On se référera aux travaux de Freeman [Fre-71], Stanfill, [Stan-83], Brady [Bran-87], Gelsey [Gel-87], Pu [Pu-88]).

- *La vérification* : il s'agit de vérifier qu'une entité donnée, dans une situation donnée, est capable de remplir une fonction désirée. (On se référera aux travaux de Murakami [Mur-88], Ulrich [Ulr-88]).

On parle, en évoquant ces différentes applications de la modélisation fonctionnelle, de raisonnements à base de fonctions (*functional reasoning*). Initialement, il s'agissait d'expliquer la présence et le rôle d'une entité au sein d'un système contenant (organisme vivant ou système artificiel), c'est l'explication fonctionnelle (*functional*

explanation). La notion de fonction est alors généralement exprimée en termes de moyens et de fins. Ce sont des travaux tels que ceux de Beckner [Beck-69] qui sont à l'origine du rapprochement des disciplines d'explication fonctionnelle dans les domaines de la biologie et des systèmes artificiels. En matière de vérification, de nombreux travaux ne sont que des reformulations critiques des travaux originaux de Hempel et Nagel ([Hem-65], [Nag-77a,b]. On trouve parmi ces travaux ceux de Lehman [Leh-65], Ayala [Aya-70], Ruse [Rus-71] et plus récemment Cummins [Cum-74]. Hempel donne une explication en termes de conditions suffisantes remplies par une entité au sein du système englobant pour la réalisation d'une fonction donnée. Nagel lui donne une explication en termes de conditions nécessaires.

Mais c'est dans le domaine de l'intelligence artificielle que de nouvelles interprétations de la notion de fonction furent formulées et que des implantations en machine ont été menées. C'est avec les travaux de Wright [Wri-73][Wri-76] que l'idée de coupler raisonnement fonctionnel, raisonnement causal, et simulation qualitative a été retenue. Ainsi, à partir d'une description formelle de la structure physique, du comportement, et des interactions du système avec le milieu extérieur, des méthodes d'explication fonctionnelles furent proposées ([Kle-84a, b], [Tez-88], [Pu-88], [Fal-90], [Abu-91], [Fra-91]). D'une façon générale, il s'agit dans ces méthodes, à partir d'une simulation qualitative et/ou d'un raisonnement causal, de dériver le comportement du système de sa structure et de ses interactions afin d'expliquer comment un tel comportement remplit cette ou ces fonctions, d'en déduire la ou les fonctions qu'il remplit ou qu'il est susceptible ou capable de remplir.

II.2. Notion de fonction.

La modélisation fonctionnelle suppose que la notion de fonction sur laquelle elle repose soit clairement définie. Or, dans le langage courant comme dans la littérature spécialisée, la notion de fonction recouvre un large spectre de significations. De plus, comme cela a été dénoncé par plusieurs auteurs ([Bon-92], [Keu-91], [Wim-72] et d'autres), trop d'exposés tiennent des propos ambigus sur les notions de fonction, d'activité, de but, et très peu précisent les liens entre *fonction*, *structure* et *comportement*. Cette ambiguïté et cette confusion font de la notion de fonction une notion subjective et intuitive donnant lieu, entre autres, à des représentations non univoques.

Il s'agira ici de cerner cette notion de fonction : les différents sens que recouvre ce terme, les différentes définitions d'auteurs que l'on trouve dans la littérature, leurs différences et leurs points communs. On tentera ensuite d'analyser les origines de l'ambiguïté de cette notion, et on proposera une structure de déclaration des fonctions d'un système.

II.2.a Différents sens du terme de fonction.

Winsatt [Wim-72], partant de l'analyse de Nagel [Nag-61], spécifie quatre sens distincts et selon lui pertinents du terme de fonction.

- La moins ambiguë de toutes est celle de *fonction mathématique*. Une relation binaire R , d'un ensemble E (ensemble de départ), vers un ensemble F (ensemble d'arrivé), est appelée *fonction* ou *relation fonctionnelle*, si pour tout élément x de E l'image $R(x)$ de x dans F possède exactement un élément [Bouv-82]. Une fonction mathématique est alors un relation univoque d'un ensemble de départ vers un ensemble d'arrivé.

- D'une façon générale, l'activité d'un système se traduit par un ensemble de conséquences perceptibles. Partant de cet ensemble de conséquences, l'interprétation de *fonction perspective* est une suggestion de Kauffman [Kau-71], qui préconise de considérer les fonctions d'une entité relativement à un point de vue, une perspective de ce qu'elle fait. Ainsi, seules certaines conséquences de l'activité de l'entité, parce qu'elles relèvent d'une perspective (thermodynamique, économique...), sont prises comme *fonctions* de cette dernière.

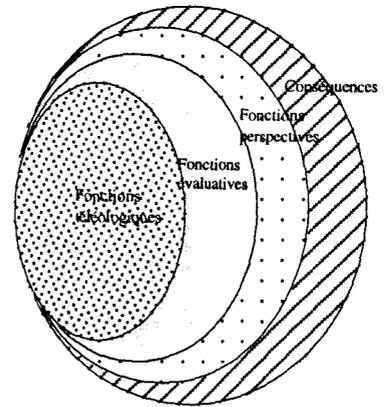
- Pour Lehman [Leh-65] et Hempel [Hemp-65], une *fonction évaluative* d'une entité est un sous-ensemble de l'ensemble des conséquences de son activité prises comme *fonctions* parce qu'elles participent à un fonctionnement *normal, standard* de cette entité et plus seulement suivant une perspective. Le problème immédiatement soulevé par une telle définition est celui de la définition d'une *norme* du fonctionnement de cette entité.

- Enfin, si un système a une *fonction*, au sens *téléologique* du terme, alors cette fonction sert un dessein, un projet, un but. On ne retient des conséquences d'un fonctionnement *normal* que celles qui favorisent, participent à, ou augmentent la probabilité de réalisation de ce projet.

Telles qu'elles sont énoncées par Winsatt, les trois dernières interprétations d'une *fonction* d'une entité sont essentiellement basées sur la notion de conséquences de l'activité de cette dernière. Seul un sous-ensemble de ces conséquences est à retenir relativement à une *perspective*, une *norme*, un *but*.

Chacune de ces trois définitions apparaît alors comme un cas particulier de la définition précédente sous certaines conditions. On pourrait alors représenter leur imbrication comme sur la figure 2.1. Les *fonctions perspectives* constituent un sous-ensemble de l'ensemble des conséquences de l'activité du système. Les *fonctions évaluatives* seraient un sous-ensemble de l'ensemble des *fonctions perspectives* si la *norme* est considérée comme une *perspective* particulière. Enfin, les fonctions téléologiques seraient un sous-ensemble des fonctions évaluatives si l'on considère le *but*, la *finalité* comme une *norme*.

Ces définitions, bien qu'elles aient le mérite d'exister, n'en restent pas moins très vagues. Dans la mesure où les notions de *perspective*, de *norme*, et de *but* ne sont pas clairement définies et spécifiées, ces définitions ne présentent que très peu d'aptitudes opératoires. Toutefois, elles renferment un aspect fondamental de la notion de fonction, c'est la *relativité* de ce que le système fait par rapport à une *perspective*, une *norme*, un *projet*. Les ensembles de conséquences que nous évoquions précédemment ne se définissent comme des *fonctions* que relativement à une *perspective*, une *norme*, un *but*. C'est cette relativité, cette dualité, qui est dans une large mesure la source essentielle de l'ambiguïté et de la subjectivité de la notion de fonction.



C'est, entre autres, en considérant la notion de fonction comme évidente, en niant cette relativité, ou en considérant *perspectives*, *normes*, et *projets* comme implicitement spécifiés ou évidents que des méthodes de type S.A.D.T conduisent à des représentations fonctionnelles non univoques, et manipulent une notion de *fonction* par trop ambiguë, floue, et subjective.

Figure 2.1 : imbrications des interprétations de fonction perspective, fonction évaluative et fonction téléologique. L'ensemble des fonctions perspectives est un sous-ensemble de conséquences de l'activité du système. En considérant une norme comme une perspective particulière, les fonctions évaluatives sont un sous-ensemble des fonctions perspectives. En considérant un projet comme une norme particulière, les fonctions téléologiques sont un sous-ensemble des fonctions évaluatives.

II.2.b Définition du terme de fonction.

Le raisonnement à base de modèles, en se focalisant sur la compréhension du fonctionnement des dispositifs (le "how things work?" de Keuneke [Keu-91]), a conduit à la question de savoir comment se représenter leur fonctionnement. On tente de saisir, sous une forme manipulable par un ordinateur, des connaissances de types fonctionnel, structurel et comportemental, et de reproduire des mécanismes d'inférence pour la résolution de problèmes (diagnostic, simulation, vérification,...). De nombreux auteurs proposent alors des énoncés de fonctions d'un dispositif. Parmi ces derniers on trouve, par exemple :

- Celui de Wright [Wri-73, 76] : " une fonction d'un composant c dans un système S est \mathcal{F} ."
- Celui de Hempel et Nagel [Hemp-65], [Nag-77a,b] : " La fonction d'un composant c dans un système S durant une période τ dans un environnement \mathcal{E} est de faire \mathcal{F} ."
- Celui de Cummins : " ...si une fonction d'un composant c dans S est \mathcal{F} , alors c présente des aptitudes à la réalisation de \mathcal{F} ..." .
- et d'autres...

Mais ces énoncés ne font aucunement référence à la structure et au comportement du système et n'établissent pas clairement les liens entre fonction, but ou finalité, structure, et comportement.

Des développements plus récents proposent des énoncés qui lient la notion de fonction à celle de comportement, de structure, et de but. On peut alors regrouper l'ensemble de ces énoncés en deux grands ensembles de définitions dont celles de Keuneke et Murakami sont les plus représentatives de chacun d'eux.

Pour Keuneke [Keu-91], " ...the function of a system is its intended purpose. The functional specification describes the system's goals at

a level of abstraction that is of interest at the system level". La fonction d'un système est ainsi son projet, sa finalité à un niveau d'abstraction donné. Elle se définit, par rapport au comportement de la façon suivante : *"the function is what is expected , and the behavior how this expected result is attained"*;

Murakami [Mur-88] a une vision plus physique et plus causaliste. Il introduit explicitement dans sa définition la notion de *transformation* de quantités physiques et de conséquences de ces transformations : *"Function is defined with : (a) a transformation between states of physical quantities and substances; and (b) physical feature that describes the relations between a physical structure and functions indirectly. The function of an assembly is derived as causalities of transformation, using physical features"*.

Les propos des différents auteurs montrent bien que la notion de *fonction* est difficile à cerner, et qu'une définition absolue et objective n'a pu être proposée. Une fonction est toujours évoquée de façon relative à un système, un composant, un environnement, un comportement, une structure, une perspective. Une fonction est tantôt entendue comme un ensemble de conséquences, tantôt comme un but, une finalité, ce qui est révélateur de la dualité de sa nature.

II.2.c Vers une structure de déclaration des fonctions d'un système.

Des auteurs comme Bonnet [Bon-92] et avant lui Cummins [Cum-74] et Winsatt [Win-72], proposent des structures de déclaration des fonctions d'un dispositif. La question est de savoir ce qu'il faut dire, quelles précisions apporter, quelles variables prendre en compte, pour que l'énoncé d'une fonction soit le moins ambigu possible. Tous ces travaux ont abouti à une prise en compte d'un certain nombre de variables dans la formulation des fonctions d'un dispositif comme : l'environnement E, le système S dont le dispositif est élément, et d'autres. Aucun, à notre avis, n'est aussi complet, quant à l'ensemble des variables à prendre en compte, et aussi rigoureux quant à la méthode de leur recensement, que l'exposé de Wimsatt dans [Wim-72]. C'est pourquoi on s'inspirera de cette méthode d'élaboration pour tenter d'aboutir à une formulation rigoureuse et générale des fonctions d'un système.

La démarche que nous adoptons consiste alors à lever progressivement les ambiguïtés de l'énoncé fonctionnel en prenant en compte une variable supplémentaire à chaque étape. La pertinence de chacune des variables que nous retiendrons est établie par le fait que cette fonction est susceptible ou non de varier selon la valeur de ces variables.

II.2.c.1 Mission, processus.

Dans les définitions de Keuneke et Murakami, on retrouve deux données importantes pour la spécification d'une *fonction*, celle de *but* pour Keuneke et celle de *transformation* (d'entités, de substances physiques) pour Murakami .

On propose de substituer aux termes de *but* ou encore de *projet* celui de *mission* employé dans le vocabulaire de la méthode SAGACE.

Quant à celui de *finalité*, on le réservera pour évoquer la *mission* du processus global défini par le projet d'étude. Il y a entre *finalité* et *mission* une différence de degré, on parlera de la *mission* d'un composant du système dans le cadre de la *finalité* de ce dernier.

Par ailleurs, on préférera à la notion de *transformation* celle plus générale de *processus*. On retient comme définition d'un processus celle de Miller [Mil-65] qui englobe "...tout changement dans le temps de matière, d'énergie et d'information...". On couvre ainsi une classe plus large de *transformations* que les seules transformations physiques évoquées par Murakami, en englobant également des transformations d'entités abstraites comme par exemple des services, des informations, etc.

Pour qu'une fonction puisse être attribuée à une entité, il faut que celle-ci témoigne d'une activité. Cette activité n'est perceptible que si cette entité produit des *changements* dans un environnement, des transformations d'entités tangibles ou abstraites, conséquences de cette activité. En d'autres termes, il faut qu'un *processus* soit mis en oeuvre. D'autre part, il faut pouvoir attribuer à ce processus une utilité quelconque, en d'autres termes, un but, une *mission*. Ainsi la donnée de ce *processus* et de cette *mission* est *a priori* pertinente pour l'énoncé d'une fonction.

On note \mathcal{F} une *fonction*, \mathcal{M} et \mathcal{C} respectivement la *mission* et le *processus*. On entend alors par *fonction*, la donnée d'un *processus* mis en oeuvre et de sa *mission*. En s'inspirant des notations de Wimsatt et de Bonnet, on note formellement :

$$\mathcal{F} = (\mathcal{C}, \mathcal{M}), \quad (2.1)$$

qui se lit : "la fonction \mathcal{F} est le processus \mathcal{C} mis en oeuvre dans le cadre de la mission \mathcal{M} ".

Si l'on met en oeuvre un autre processus ou si l'on change la mission, la fonction spécifiée est différente. *A posteriori*, les variables \mathcal{C} et \mathcal{M} sont pertinentes dans une déclaration de *fonction*.

II.2.c.2 Structure

On évoque généralement une *fonction* comme étant la fonction de quelque chose : fonction d'un composant, fonction d'un organe... En d'autres termes, on évoque une fonction comme étant celle de son support. Ce support est généralement un composant, un organe. On fait alors référence à la structure du système. Or en ne prenant en compte comme supports que les composants, et organes, on ne retient généralement de la structure du système que sa *structure organique*. Nous avons vu au chapitre I que la structure du système ne se résumait pas à sa seule structure organique et que cette dernière n'est qu'un des trois points de vue structurels de la matrice SAGACE (cf. chap. 1, § fonction, structure, comportement dans la méthode SAGACE).

On propose donc de substituer aux termes *composant* ou encore *organe*, celui de *structure* (au sens de la méthode SAGACE). C'est cette *structure* dans son ensemble (Organe, organisation, et programme) qui est le support des fonctions du système. On parlera

alors de *fonction* de la *structure* du système, ou d'une partie de cette structure, et non plus seulement de la fonction d'un organe ou de tout ou partie de la structure organique.

On note s_i tout ou partie de cette structure. L'énoncé fonctionnel devient alors :

$$F(s_i) = (C, M) \quad (2.2)$$

qui se lit : "la fonction \mathcal{F} de la structure s_i est le processus C mis en oeuvre dans le cadre de la mission \mathcal{M} ".

Si la structure, support du processus mis en oeuvre, varie alors la fonction est susceptible de varier. La variable s_i est donc pertinente dans l'énoncé de \mathcal{F} .

II.2.c.3 Comportement

En considérant que la fonction d'une entité est de faire quelque chose et non pas d'être quelque chose, il semble dès lors correct de parler de fonction d'un comportement comme concept premier, et que la fonction d'une structure soit conceptuellement secondaire. Il s'agit donc de la fonction du comportement de la structure. On introduit la variable comportement B dans l'énoncé de \mathcal{F} comme suit :

$$F(s_i(B)) = (C, M) \quad (2.3)$$

qui se lit : "la fonction \mathcal{F} du comportement B de la structure s_i est le processus C mis en oeuvre dans le cadre de la mission \mathcal{M} ".

Si la structure reste la même mais que son comportement change, alors la fonction dont elle est le support est susceptible de varier. *A posteriori*, la variable B est donc pertinente dans l'énoncé de \mathcal{F} .

II.2.c.4 Système, sous-système

Il est également nécessaire de préciser dans un énoncé fonctionnel la partie du système, le sous-système pris en considération. Soient deux éléments d'un même système, par exemple une pompe munie d'un régulateur, tous deux éléments d'un S.A.P. Supposons qu'on leur attribue une mission commune, par exemple le maintien d'un niveau constant de fluide dans un réservoir. Selon que la partie du système considérée inclut l'un ou l'autre de ces éléments ou les deux, le processus que l'on associera à la mission sera différent. Dans le cas où seule la pompe est incluse dans le sous-système, c'est le processus de la pompe qui sera retenu. Dans cette mesure, l'énoncé fonctionnel est susceptible de varier. Soit maintenant un élément d'un système auquel on attribue deux missions différentes, et supposons que cet élément puisse être considéré comme un élément commun à deux sous-systèmes d'un seul et même système. Selon que cet élément est considéré comme inclus dans l'un ou l'autre sous-système, la mission de cet élément variant d'un sous-système à l'autre, sa fonction est susceptible de varier bien que le processus soit le même. La variable système est donc *a priori*, pertinente dans l'énoncé de \mathcal{F} .

Soit s_y , la variable *système*, qui détermine le sous-système considéré. Ce sous-système peut être identique au système global. On introduit cette variable dans l'énoncé de \mathcal{F} comme suit.

Un système peut se définir de façon récursive comme un ensemble de sous-systèmes, chaque sous-système étant lui-même un système.

On note :

$$F(B(S_t))_{s_y} = (C, M)_{s_y} \quad (2.4)$$

l'énoncé de \mathcal{F} qui se lit : "la fonction \mathcal{F} du comportement \mathcal{B} de la structure s_t dans le système s_y est le processus C mis en œuvre dans le cadre de la mission \mathcal{M} ".

Cette variable est portée en indice dans la mesure où elle détermine un sous-ensemble de fonctions du système global : celui de cette partie du système. Cette variable a un statut différent de celui des variables précédemment rencontrées : celui de méta-variable.

On reliera plus tard cette variable s_y aux *logiques internes* qui, nous l'avons vu, permettent de formaliser le découpage d'un système en sous-systèmes (cf. chap. 1, § IV.3.2.b. *Phase de quasi-décomposition et logiques internes*).

II.2.c.5 Environnement et finalité

Plusieurs considérations conduisent à introduire deux variables supplémentaires que l'on nommera environnement \mathcal{E} et finalité \mathcal{P} .

Un système est en relation avec le milieu extérieur. On peut distinguer deux grands types de relations entre le système et son milieu : celles dues aux entrées et sorties du système, et celles dues aux interactions avec ce milieu. On convient de désigner par *environnement* l'ensemble des entrées et sorties et par *finalité* l'ensemble des interactions. Par *interaction* on désigne des influences mutuelles entre le système et le milieu extérieur. On peut distinguer deux types d'influences :

On se place explicitement dans un cadre plus large que celui des seuls systèmes quasi-isolés qui ne réagissent que par leur entrées et sorties.

- D'une part, celles du milieu extérieur sur le système. Elle se traduisent par une "pression" exercée par ce dernier sur le système. On dénomme ces influences : *contraintes*.

- D'autre part, celles du système sur le milieu extérieur. Elles constituent la réponse du système aux *contraintes* qu'il subit. Ces réponses satisfont à des *attentes* du milieu extérieur, en fonction desquelles le système est susceptible de réagir.

Une *finalité* ainsi qu'une *mission* peuvent se définir comme l'ensemble des *contraintes* à respecter et l'ensemble des *attentes* à satisfaire. *Contraintes* et *attentes* sont des concepts de la méthode SAGACE sur lesquels nous reviendrons plus longuement.

En optant pour une attitude faisant le compromis entre *substantialisme* et *existentialisme* (cf. chap. 1, §. III.2.1.-a/ *système et environnement*), on considère alors qu'un système présente un certain nombre de propriétés intrinsèques, mais également certains comportements dépendant de ces interactions avec le milieu extérieur ou propriétés extrinsèques. Dès lors, une variation de l'environnement

et/ou de la ou des finalités du système entraîne celles de certains processus et de certaines de ses missions. Par voie de conséquence, ses fonctions sont susceptibles de varier. Ces deux variables sont donc pertinentes.

On note :

$$F(S_t(B))_{S_y, E, P} = (C, M)_{S_y, E, P} \quad (2.5)$$

l'énoncé de \mathcal{F} qui se lit : "la fonction \mathcal{F} du comportement \mathcal{B} de la structure S_t dans le système S_y dans l'environnement \mathcal{E} et relativement à la finalité \mathcal{P} est le processus C mis en oeuvre dans le cadre de la mission \mathcal{M} ".

II.2.c.6 Théorie

Une dernière variable nous semble pertinente dans l'énoncé fonctionnel, celle de théorie notée \mathcal{T} . Elle peut être considérée comme une perspective au sens de l'interprétation de Kauffman de *fonction perspective* (cf. § II.2.a *Différents sens du terme de fonction*). Par ailleurs, nous avons vu que tout modèle est un intermédiaire entre un *champ empirique* et un *champ théorique*. (cf. chap. 1. § III.1.1 *différents niveaux de modélisation*).

Le choix d'un champ théorique particulier entraîne l'utilisation d'un type de variables de description et la référence à un ensemble de lois. Ainsi, dans un champ théorique ou plus simplement une théorie, l'observation, la représentation, l'explication et la compréhension du système se trouvent instantiées. Seuls les entités et concepts dont une référence est concevable (par exemple une variable) dans le domaine théorique retenu, sont accessibles à l'étude. (Une énergie n'a pas de sens d'un point de vue économique, par contre le coût de cette énergie est un concept de cette théorie). On ne décrit alors qu'une partie de l'environnement et qu'un sous ensemble de contraintes et d'attentes. Une variation de \mathcal{T} entraîne une variation de \mathcal{E} de \mathcal{P} mais aussi de S_y et par voie de conséquence de \mathcal{F} .

On note :

$$F(B(S_t))_{S_y, E, P, T} = (C, M)_{S_y, E, P, T} \quad (2.6)$$

l'énoncé de \mathcal{F} qui se lit : "la fonction \mathcal{F} du comportement \mathcal{B} de la structure S_t dans le système S_y dans l'environnement \mathcal{E} et relativement à la finalité \mathcal{P} dans la théorie \mathcal{T} est le processus C mis en oeuvre dans le cadre de la mission \mathcal{M} ".

II.2.d Fonction, dysfonction, non fonction.

On propose ici une extension de la notion de fonction. Une fonction est entendue comme une association d'un processus et d'une mission .

Par rapport à une mission donnée, trois sous-ensembles de processus peuvent être définis : ceux qui servent la mission, ceux qui au contraire entravent sa réalisation, et ceux qui n'ont aucune contribution positive ou négative quant à sa réalisation. Une analyse duale, partant d'un processus donné, aboutit à la classification des

missions en trois classes selon qu'elles bénéficient des contributions de ce processus, qu'elles les subissent ou pas .

On propose alors de définir les trois sous-ensembles suivants :

- celui des *fonctions* : une fonction est définie par un processus associé à une mission dont il augmente la probabilité de réalisation ou de façon duale par une mission associée à un processus dont la probabilité de réalisation est augmentée par ce dernier ;

- celui des *dysfonctions* : une dysfonction est définie par un processus associé à une mission dont il diminue la probabilité de réalisation ou par la proposition duale;

- celui des *non-fonctions* : une non-fonction est définie par un processus associé à une mission dont il n'affecte pas la probabilité de réalisation.

Par convention, on notera respectivement :

$$F^+(B(S_t))_{S_y, E, P, T} = (C, M)_{S_y, E, P, T}, \quad (2.7)$$

$$F^-(B(S_t))_{S_y, E, P, T} = (C, M)_{S_y, E, P, T}, \quad (2.8)$$

$$F^0(B(S_t))_{S_y, E, P, T} = (C, M)_{S_y, E, P, T}, \quad (2.9)$$

une fonction, une dysfonction, et une non-fonction.

On peut associer un processus à une ou plusieurs missions et réciproquement. Le tableau 2.1 illustre ces associations.

processus	missions			
	M ₁	M ₂	M _k	∪M _i
C ₁	+	-	-	*
C ₂	+	+		+
C ₁	+	-	-	*
∪C _j	+	*	-	*

Tableau 2.1 : association d'un ou de plusieurs processus et d'une ou de plusieurs mission. Un signe + indique une association qui définit une fonction, un signe - une dysfonction, 0 une non-fonction et * une combinaison quelconque de ces trois associations.

L'union ∪C_j des processus C_j définit un nouveau processus que l'on peut associer à chacune des missions M_i. Cette association peut alors définir de nouveau une fonction, une dysfonction et une non-fonction mais aussi une entité qui n'est d'aucun des trois types précédents mais une combinaison. Il en est de même pour l'union ∪M_i des missions M_i qui définit une nouvelle mission que l'on peut associer à chacun des processus C_j et définir une fonction, une dysfonction, une non-

fonction ou une combinaison de ces trois types. On retrouve donc les trois associations en fonction, dysfonction et non-fonction précédentes et une quatrième notée * qui est une combinaison quelconque des trois précédentes. C'est cette dernière qui est le cas général et que l'on nommera *énoncé fonctionnel*, noté :

$$F^*(B(S_c))_{S_v, E, P, T} = (C, M)_{S_v, E, P, T} \quad (2.10)$$

Un énoncé fonctionnel pour être complet se doit de spécifier aussi bien les fonctions que les dysfonctions d'un système ainsi que leurs unions. (Les non-fonctions n'affectant pas l'énoncé ne sont pas à prendre en compte).

On note également qu'une dysfonction n'est pas nécessairement synonyme de défaillance ou de défaut. Une dysfonction, telle qu'elle est définie ici, peut résulter d'un comportement "normal", ce n'est alors qu'une partie du processus mis en oeuvre, qui n'est pas souhaitée mais subie, c'est par exemple le cas de la perte de charge hydraulique inhérente au transport de fluide dans une canalisation. Une dysfonction ne devient synonyme de dysfonctionnement que lorsque la contribution de cette partie du processus est prédominante et supplante celles qui donnent lieu aux fonctions, par exemple quand la perte de charge devient trop importante suite à un bouchage partiel de la canalisation. Décider d'un seuil à partir duquel les dysfonctions sont considérées comme prédominantes par rapport aux fonctions (probabilité de réalisation faible, seuils éventuellement flous) relève de la compétence des agents (concepteurs, exploitants...) intervenant sur le système.

Les définitions adoptées permettent également d'envisager qu'une association (processus, mission) soit à certaines dates synonyme de fonction, à d'autres de non-fonction et à d'autres enfin de dysfonction. En d'autres termes, cette association peut se définir de façon dynamique.

III. Représentation fonctionnelle par un langage graphique.

Notre propos est ici de définir une représentation graphique équivalente à l'énoncé fonctionnel de l'équation 2.10. La représentation graphique est un langage privilégié par rapport aux deux autres langages généraux que sont : le langage discursif (écrit ou parlé), et le langage mathématique. Elle présente l'avantage de mieux mettre en évidence les relations entre éléments et permet une appréhension globale des phénomènes tout en conservant la possibilité de se focaliser sur des détails locaux. Par rapport au langage mathématique, elle offre l'avantage, au moins pour les non-spécialistes, d'une compréhension plus immédiate. Et peut-être, et surtout, elle oblige à bien expliciter la structure générale avant de formaliser et de quantifier tel ou tel rapport entre éléments. Le langage graphique permet une représentation structurée, hiérarchique par niveaux d'abstraction. Il permet de représenter, non seulement les entités au sein du système, mais aussi leurs modalités d'organisation hiérarchique, et en réseaux. Le langage que nous avons adopté est celui de la méthode SAGACE. On montrera en quoi une telle

représentation, telle qu'elle est préconisée dans cette méthode, constitue un énoncé équivalent à l'énoncé fonctionnel (eq. 2.10).

III.1. Notion de processeur.

Agencés comme sur la figure 2.2, les éléments graphiques de base que sont les boîtes et les flèches, définissent une entité que l'on nomme dans la terminologie SAGACE un *processeur*. Agencées en réseaux ces entités permettent une représentation des systèmes par des réseaux de processeurs. Telle qu'elle est entendue dans la méthode SAGACE, la notion de *processeur* fait référence à toute entité identifiable siège d'un processus et en interaction avec l'environnement extérieur. La sémantique du diagramme de la figure 2.2 est alors la suivante :

- la boîte définit le processeur par ses frontières et délimite un environnement intérieur et un environnement extérieur;
- portées sur l'axe horizontal, les flèches représentent des entités tangibles ou abstraites en entrée et en sortie du processeur. Cet axe, appelé axe des *transactions* dans la terminologie SAGACE, schématise le processus mis en oeuvre ;
- portées sur l'axe vertical, les flèches entrantes représentent des *contraintes* imposées par l'extérieur, les flèches sortantes des *attentes* de l'extérieur. Cet axe est appelé axe des *interactions*. Les flux portés sur cet axe sont des flux d'informations, on parle dans la terminologie SAGACE, d'*information de contrainte* et d'*information de représentation* (des attentes).

Ce diagramme élémentaire, le processeur, permet de représenter le système graphiquement, à chaque étape de l'analyse et dans les différents points de vue de la matrice SAGACE.

III.2. Environnement, finalité, et logiques externes.

La méthode SAGACE propose, dans sa première phase de l'analyse d'un système, de définir le projet d'étude par l'emploi de *logiques externes* (cf. chap.1 , § IV.3.2.a *Phase de cadrage, logiques externes*). On rappelle que ces logiques externes traduisent un ensemble de préoccupations qui guident l'étude, et un ensemble de besoins à satisfaire et qui la motivent. A l'aide de ces logiques externes sont alors définis des *systèmes transversaux*. On opère ainsi des "coupes" dans l'environnement global du système (ensembles des flux d'entrée et de sortie) et dans l'ensemble des interactions du système avec l'extérieur.

Par l'adoption d'une logique externe, on spécifie une partie de l'environnement et une partie des finalités. Cet environnement et cette finalité ainsi retenus sont ceux du projet d'étude. Ces choix sont conventionnels. Une logique externe différente aboutira à la spécification d'un autre environnement en entrée et en sortie du système et à un autre ensemble d'interactions.

Une logique externe pour l'étude d'un système pourrait être, par exemple, d'analyser le fonctionnement physique d'une installation du point de vue de la sécurité des opérateurs. On ne retiendra alors qu'un

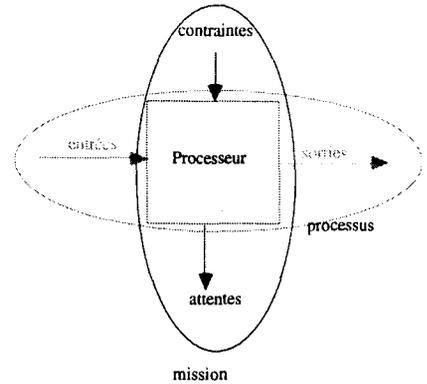


Figure 2.2 : diagramme élémentaire, figurant un processeur : primitive des représentations SAGACE.

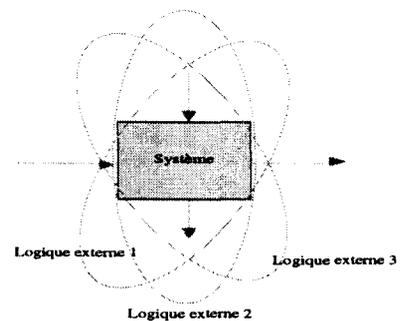


Figure 2.3 : l'adoption d'une logique externe est une spécification de l'environnement et de la finalité du système dans le cadre de l'étude.

sous-ensemble de phénomènes (physiques) affectant la sécurité des opérateurs (favorablement ou défavorablement), et on exclura tous les autres types (financiers, sociaux...). Quant à la finalité du système, elle n'est autre que celle du projet d'étude, à savoir la sécurité des opérateurs. Cette finalité est définie par un ensemble de contraintes et d'attentes.

L'adoption d'une logique externe particulière dans la première phase de l'étude aboutit à un *système transversal*. C'est une spécification des variables E et P pour l'étude du système et en particulier pour l'énoncé fonctionnel. L'énoncé équivalent est :

$$(E, P)$$

III.3. Théorie et variables de description.

Toute analyse s'appuie sur *un champ théorique* de référence, un ensemble de règles et de connaissances exprimées dans un langage donné. Le choix d'un champ théorique T détermine un type de variables de description. Seules les variables concevables dans ce champ théorique sont alors disponibles pour faire référence aux caractéristiques, attributs et propriétés du sujet d'étude. *Processus*, *contraintes* et *attentes* sont alors exprimés en fonction de variables imposées par la théorie. Réciproquement, l'utilisation de variables de description dote la représentation, de façon implicite, d'une information sur la variable T .

On convient alors d'attribuer aux flux de transaction et d'interaction un vecteur de variables. Prenons un S.A.P, celui de la figure 2.4, pour lequel aucun champ théorique particulier n'est spécifié, et auquel on attribue comme finalité celle de produire des biens et des services en respectant les objectifs de production et en satisfaisant à un niveau de performance attendu. Le processus mis en oeuvre est celui de la production de ces biens et services. Il est schématisé par les biens et services consommés en entrée et par ceux produits en sortie. Il en est de même pour les objectifs schématisés par les contraintes et les niveaux de performances par les attentes.

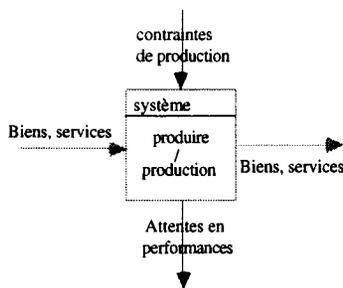


Figure 2.4 : soit un système de production, dont la finalité est de produire des biens en respectant les contraintes et en satisfaisant aux attentes. Le processus est celui de la production de ces biens.

Supposons que l'on se place d'un point de vue physique. Les biens et services de la figure 2.4 sont alors étiquetés par des vecteurs de variables relevant de la ou des théories physiques retenues (figure 2.5). Par exemple :

- une vision mécanique conduira à l'emploi d'un vecteur de variables : de vitesse, de position, de force, d'impulsion mécanique décrivant l'état mécanique des flux de transaction;

- une vision thermodynamique conduira à l'emploi d'un vecteur de variables thermodynamiques décrivant l'état énergétique de ces flux.

Le choix de l'un de ces champs théoriques conduira donc à schématiser respectivement : des processus de changement d'états mécaniques, des processus de changement d'états énergétiques. D'une façon générale, on peut envisager un vecteur d'attributs physiques concevables dans la ou les théories du champ dans lequel on s'est placé (dimensions géométriques, couleur, poids, volume,

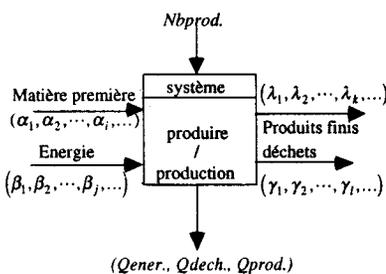


Figure 2.5 : une interprétation de l'énoncé fonctionnel de la figure 2.4 d'un point de vue physique.

forme....). Les processus schématisés sont alors des changements de ces vecteurs d'attributs.

Quant aux flux d'interaction, on attribue aux contraintes et attentes du profil de mission un vecteur de variables relevant de la théorie \mathcal{T} . On exprime alors que contraintes et attentes sont des *propositions* sur ces variables. Par exemple :

- supposons que la contrainte de production (de la figure 2.4) devant être respectée soit une quantité de produit par jours. On associe alors à ce flux de contrainte la variable *Nbprod.* : le nombre de produit par jours. On exprime alors que le processeur doit impérativement respecter une contrainte qui est une *proposition* sur la variable *Nbprod.* Mais il ne s'agit pas à ce niveau de modélisation (niveau représentation) d'expliciter cette proposition. La formulation explicite de celle-ci relève de niveaux de formalisation plus élevée. Une de ces propositions pourrait être :

$$Nbprod > 100 \text{ unité/jour.}$$

- Il en sera de même pour les attentes. En associant à l'attente en performances de la figure 2.4 le vecteur de variables (*Qener., Qdech., Qprod.*) (figure 2.5), on exprime par là que les performances effectives de l'activité du système seront évaluées par une fonction de la quantité d'énergie consommée, de la quantité de déchets, et de la quantité de produits. A partir de l'observation ou de la mesure de ces grandeurs une estimation des performances est élaborée (par les opérateurs ou le système lui même) pour évaluer le niveau de satisfaction des attentes. Ces informations sont alors qualifiées d'*informations de représentation* (des attentes). Il ne s'agit en aucun cas d'expliciter cette fonction d'évaluation et d'estimation des performances. Cette formulation relève de niveaux de formalisation supérieurs. Une proposition possible est par exemple :

$$Qdech = \min \text{ et } Qprod/Qener = \max$$

Supposons maintenant que l'on se place d'un point de vue économique ou financier, et que l'on considère la même représentation de la figure 2.4. Dans le champ théorique correspondant, aux biens et services des flux de transaction sont alors attribués des vecteurs de variables de coût, de valeur marchande, etc. Le processus de production figuré n'est plus un processus physique mais une opération financière équivalente. Il ne s'agit plus de produire des biens tangibles mais d'opérer une plus value. Quant aux flux d'interaction, on leur attribue des variables : de coût de production, de pertes de valeurs marchandes, de plus values...

- Ainsi, à la contrainte de production on pourra associer la variable *+Valprod* qui fait référence à la plus value devant être opérée par jour. Une proposition à expliciter à un niveau supérieur pourra être :

$$+Valprod > 500 \text{ KF/jour,}$$

- De même, à l'attente en performances, on associera par exemple le vecteur (*Valprod., Coûtener., Pertedech.*). Les variables de ce vecteur sont : la valeur des produits, le coût de l'énergie consommée et le manque à gagner que représentent les déchets. Ces informations sont représentatives des performances d'un point de vue financier de la

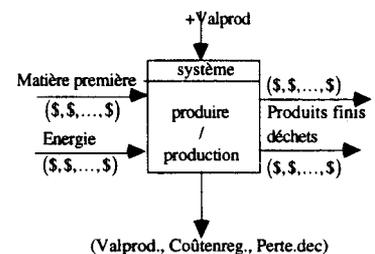


Figure 2.6 : une traduction de l'énoncé fonctionnel de la figure 2.4, d'un point de vue économique ou financier.

production. Une proposition à expliciter à un niveau de formalisation supérieure pourra être :

$$Pertedech. = \min \text{ et } Valprod./Coûtener. = \max$$

L'attribution d'un vecteur de variables de description aux flux de transaction et d'interaction est une spécification implicite de la variable théorie T. Le positionnement dans un champ théorique entraîne une traduction des représentations dans ce champ (en termes physiques, économiques,...). Le problème qui se pose alors est de savoir si dans ce champ des vecteurs d'attributs des flux peuvent être conçus. L'énoncé doit être traduisible dans le champ théorique et cette traduction doit être pertinente.

A ce stade, la représentation graphique spécifie les variables E, P et T, l'énoncé équivalent est :

$$(E, P, T)$$

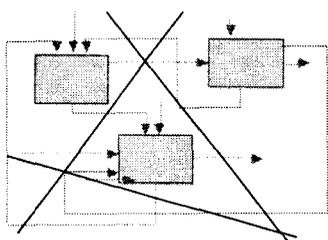


Figure 2.7 : l'adoption de logiques internes pour la décomposition d'un système en sous-systèmes aboutit à une spécification de la variable système S_y .

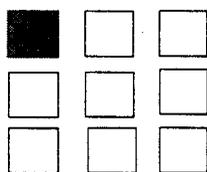
III.4. Système et logique interne.

Dans sa deuxième phase, la méthode SAGACE propose l'emploi de *logiques internes* pour la quasi-décomposition du système issu de la phase de cadrage en sous-systèmes. Ce sont ces sous-systèmes qui seront projetés dans la matrice des points de vue pour une analyse fonctionnelle, structurelle, et comportementale.

Cette quasi-décomposition, à l'aide de logiques internes, aboutit à une spécification de la variable système S_y . La figure 1.12 du chapitre 1 est un exemple de quasi-décomposition d'un S.A.P en partie opérative, décision, et information.

La représentation, à ce stade de l'analyse est une spécification des variables E, P, T et S_y , l'énoncé équivalent est :

$$(S_y, E, P, T)$$



III.5. Mission, processus et processeur.

L'utilisation de *processeurs* pour la représentation fonctionnelle des systèmes dans le point de vue correspondant, définit une modalité du processeur générique (de la figure 2.2), le *processeur fonctionnel*. Une fonction, ou toute autre forme d'un énoncé fonctionnel (Cf. § *Fonction, dysfonction, non fonction*) est vue comme une entité abstraite, consommant en entrée et produisant en sortie des services et des biens, soumise à des contraintes et répondant à des attentes. Cette entité abstraite répond alors à la définition d'un processeur et peut donc être représentée comme tel.

Un exemple de processeur fonctionnel est donné par la figure 2.8. Il s'agit, par exemple, de synthétiser le produit 3 par catalyse des produits 1 et 2 et par apport d'énergie. Le processus mis en oeuvre est une consommation de produits 1 et 2 et d'énergie et une production de type 3 et de dépôts. La mission est de synthétiser du produit 3, en respectant une contrainte, proposition de Q_{prod3} (quantité à produire) en satisfaisant aux attentes, propositions de la quantité d'énergie consommée q_{eng} et de la quantité de produit 3 effectivement fournie q_{prod3} .

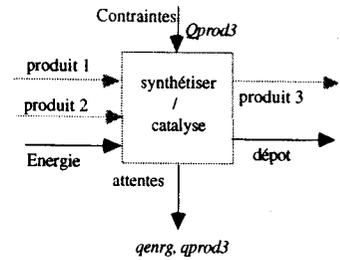


Figure 2.8 : une fonction est une interprétation du processeur générique dans le point de vue fonctionnel de la matrice SAGACE. On parle alors de processeurs fonctionnels.

Compte tenu du profil de la mission (contraintes, attentes), la partie du processus mis en oeuvre produisant le produit 3 définit une *fonction*, alors que celle qui produit des dépôts se révèle être une *dysfonction*. Le processeur de la figure 2.8 est un processeur fonctionnel figurant le processus et la mission. Une telle représentation est alors une traduction équivalente du membre droit (C, M) de l'énoncé fonctionnel (eq. 2.10).

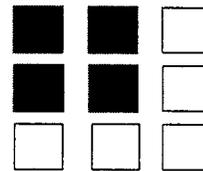
A ce stade de la représentation, l'énoncé équivalent est :

$$F^*(s_{y,E,P,T}) = (C, M)_{(s_{y,E,P,T})}$$

III.6. Structure et modélisation structurelle

Il reste à exprimer les variables de structure et de comportement. La représentation des points de vue structurels de la matrice SAGACE aboutit à une description de la structure, support des fonctions du premier point de vue. Les points de vue *organe*, *organisation*, et *programme*, spécifient la structure s_t de l'énoncé fonctionnel. Des ressources matérielles ou abstraites connectées en réseaux (point de vue organique), sont organisées dans le temps en dispositifs (point de vue organisation), affectés à la réalisation de tâches (points de vue programme) pour la réalisation des fonctions du système. Ces trois points de vue structurels associés au point de vue fonctionnel constituent un énoncé équivalent à :

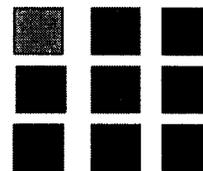
$$F^*(s_t)_{(s_{y,E,P,T})} = (C, M)_{(s_{y,E,P,T})}$$



III.7. Comportement et modélisation comportementale

De même, les représentations du système dans les points de vue comportementaux spécifiant : dans quel mode et dans quelle configuration la structure est considérée, ainsi que les logiques d'évolution, d'adaptation, et de pilotage de la structure en cours, constitue un énoncé de la variable de comportement B , qui est équivalent à l'énoncé 2.10 :

$$F^*(s_t(B))_{s_{y,E,P,T}} = (C, M)_{s_{y,E,P,T}}$$



IV. Représentation des systèmes automatisés par réseaux de processeurs.

La représentation à l'aide de réseaux de processeurs permet donc une représentation fonctionnelle des systèmes et constitue un énoncé équivalent à l'énoncé 2.10 que nous avons élaboré. La notion de

processeur permet également une représentation structurale et comportementale. Un processeur, dans chacun de ces points de vue, devient alors un mode, une configuration, un programme, ou un dispositif qui sont des notions familières de l'automatique.

IV.1. Définition du projet d'étude.

Considérons un Système Automatisé de Production (SAP), vu par un automaticien comme une association de trois entités :

- un processus physique, pour la transformation de flux matières premières en produits finis,
- un Système d'Exploitation de ce Processus (SEP) [Sta-94a],
- un ensemble d'opérateurs intervenant directement sur le processus physique ou par l'intermédiaire de son système d'exploitation à travers l'interface homme/machine.

On décide de ne retenir dans cet ensemble que le processus de production muni de son système d'exploitation en excluant les opérateurs. Par ce projet d'étude, on se place explicitement de la cadre d'une étude technique du système cybernétique. On représente alors ce S.A.P par la figure 2.9.

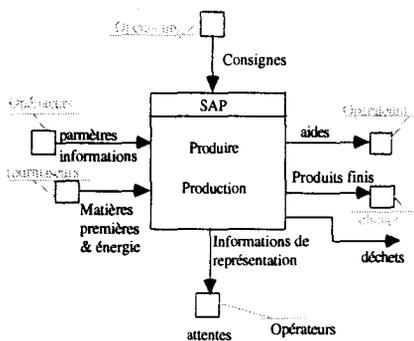


Figure 2.9 : Une représentation d'un système automatisé de production, en relation avec les opérateurs de conduite, les fournisseurs et clients. Cette représentation est particulière au projet d'étude.

Il communique avec les opérateurs par l'intermédiaire de l'interface homme/machine. Il reçoit des informations en provenance des opérateurs (paramètres), et fournit des aides à ces derniers pour la conduite du processus, sa maintenance, son suivi...Il consomme de l'énergie et des matières premières, en provenance des fournisseurs, qu'il transforme en produits finis à destination des clients. Fournisseurs et clients peuvent être d'autres systèmes automatisés. On retient comme contraintes les consignes des opérateurs et en attentes des *informations de représentation* recueillies (par observation ou par mesure) qui permettent aux opérateurs d'évaluer la satisfaction des consignes. Le milieu extérieur avec lequel le système est en interaction est donc constitué des opérateurs, des clients, et des fournisseurs. Ce milieu est celui défini dans le cadre de l'étude et seules les relations entre ces entités seront retenues.

IV.2. Décomposition en sous-systèmes.

On décide de procéder au découpage de ce système en les parties opérative, décision, et information.

On fait ainsi apparaître le couplage des différentes parties du système. Le sous-système d'information recueille les paramètres fournis par les opérateurs, les mesures sur le processus physique, les informations en provenance du sous-système de décision (dernière commande appliquée au processus, mode d'utilisation adopté, type de pilotage en cours...), il élabore des informations pour le système de décision (données validées, traductions des consignes opérateurs, estimations des mesures, estimations de l'état des ressources...) et fournit aux opérateurs des informations d'aide à l'exploitation du processus (aides à la conduite, à la maintenance, à la supervision), ainsi que des renseignements sur l'état et le fonctionnement du processus (états des ressources, mode d'utilisation en cours, valeur

d'un paramètre...). L'activité du système d'information est sous le contrôle du système de décision et des opérateurs qui lui adressent leurs requêtes (demandes d'informations, consignes...).

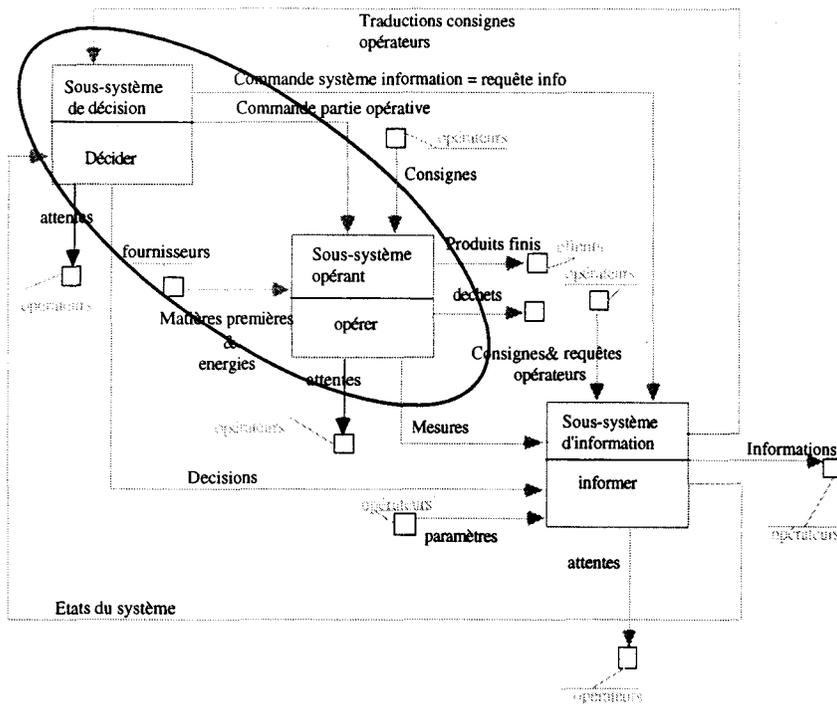


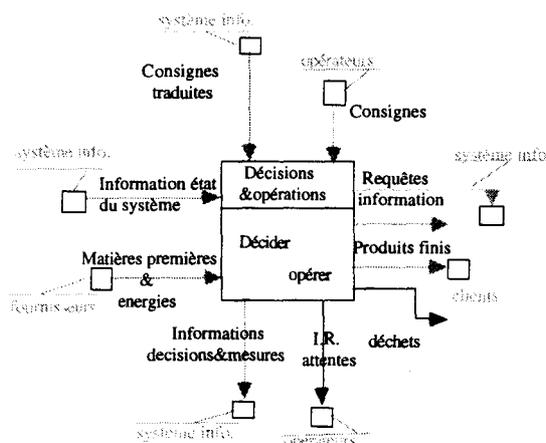
Figure 2.10 : décomposition du système de la figure 2.9, en partie décision, partie opération, et partie information. Ce découpage résulte de l'adoption de deux logiques internes, la première qui consiste à séparer les parties du système traitant matières et énergies permettant d'isoler la partie opérative siège du processus physique d'une part, la deuxième celle consistant à séparer les parties traitant d'informations de connaissance sur le système de celles traitant d'informations pour la commande : on isole ainsi les parties décision et information.

Le système de décision élabore les commandes de la partie opérative (signaux de contrôle des actionneurs) siège du processus physique, et les requêtes adressées au système d'information (besoins en information). Ces décisions sont élaborées à partir des informations qui lui sont fournies par le système d'information (données validées, estimations des mesures, ...). Les décisions sont prises compte tenu des consignes opérateurs adressées directement ou par le système d'information après traduction des consignes de ces derniers.

La partie opérative reçoit les matières premières et de l'énergie qu'elle transforme en produits finis et en déchets. Elle comprend les actionneurs qui appliquent les commandes aux éléments passifs. Elle comprend également les capteurs fournissant au système d'information les mesures sur la partie opérative. Outre les commandes en provenance du système de décision, la partie opérative est soumise à des consignes adressées directement par les opérateurs. Le système d'information est en mesure de répercuter ces éventuelles interventions des opérateurs vers le système de décision ou vers d'autres opérateurs.

Pour la poursuite de l'étude, on choisit de projeter dans la matrice des points de vue le sous-système composé de la partie opérative et du système de décision. Ainsi le système que l'on représentera dans les neuf points de vue de la matrice SAGACE est celui de la figure 2.11. Le milieu extérieur à ce sous-système est alors inclus dans celui du système de la figure 2.10 et se compose :

- des opérateurs, en interaction avec le système par les consignes qu'ils appliquent et par leurs attentes devant être satisfaites ;
- des clients, devant être fournis en produits finis par le système opérant ;
- des fournisseurs, d'où proviennent les matières premières et l'énergie ;
- et enfin, du système d'information. Il est l'intermédiaire entre le système de décision et les opérateurs dont il traduit les consignes. Il reçoit du système de décision et de la partie opérative des informations sur le fonctionnement de ces parties du système. En contre partie, il fournit au système de décision une estimation de l'état global du système .



I.R. : Informations de représentation.

Figure 2.11 : sous-système projeté dans la matrice des points de vue, composé du système de décision et du système opérant.

IV.3. Représentation dans les différents points de vue.

A l'issue des deux premières phases d'analyse, nous avons défini le projet d'étude, à savoir l'environnement, la finalité et la théorie ainsi que la partie du système que l'on souhaite analyser. Les prochaines étapes d'analyse de ce sous-système consisteront à projeter ce dernier dans les différents points de vue de la matrice SAGACE. Le tableau suivant donne une interprétation du processeur générique pour chacun des neuf points de vue de la matrice dans le cas de l'analyse d'un S.A.P.

C'est l'occasion de revenir sur la sémantique de ces diagrammes et notamment celle des flux d'interaction : contraintes et attentes.

- D'une manière générale une contrainte sur un processeur prend deux formes celle d'une requête adressée à ce dernier et qu'il se doit de satisfaire au mieux et celle de conditions de fonctionnement ou d'activation qui doivent être remplies préalablement. La nature de ces flux de contrainte dépend du point de vue. Ainsi dans le point de vue fonctionnel un flux de contrainte prend la forme d'objectif à atteindre quand dans le point de vue organique ce dernier prendra la forme de contraintes technologiques sur les ressources ou des consignes de pilotage.

- Correspond à ces contraintes une "espérance" du milieu extérieur au système avec lequel ce dernier est en interaction : des attentes. Outre le processus, les flux d'attente constituent la réponse des processeurs aux contraintes qui leur sont adressées. Ils prennent la forme d'informations observables par les opérateurs ou mesurables par le système d'information permettant ainsi d'évaluer la satisfaction des attentes, ce qui leur vaut le nom d'*information de représentation*. Ainsi, en attente d'un processeur organique sont disponibles des informations de représentation permettant aux opérateurs ou au système d'information d'évaluer le fonctionnement effectif des composants, l'activité effective des tâches, l'organisation réelle des dispositifs, etc.

Ceci étant, on retrouve dans les interprétations données par le tableau 2.2, outre la notion d'énoncé fonctionnel déjà abordée, des notions telles que celles de mode, de programme, de dispositif, configuration familières à l'Automatique. Ces modalités n'ont que valeur d'exemple et sont une des interprétations de la définition des points de vue de la matrice SAGACE auxquelles on est susceptible d'aboutir. L'analyse détaillée de chacun des points de vues de la matrice, les justifications de chacune de ces interprétations, et la définition de chacune d'elles sont données par l'annexe I.a, ce dans le cas d'un système automatisé de production.

Bien que chacune des représentations des différents points de vue soient envisageables indépendamment des autres elles n'en restent pas moins intimement liées. L'ensemble des liens existant entre ces points de vue constitue un réseau qui dans la terminologie SAGACE porte le nom de réseau sémantique. La figure 2.12 donne un exemple de réseau de relations sémantiques envisageable entre les différents points de vue.

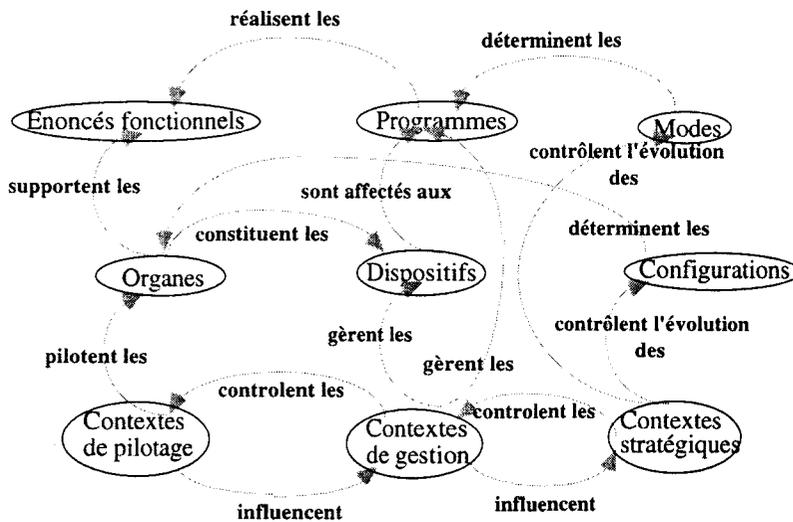


Figure 2.12 : un réseau sémantique envisageable entre les points de vue de la matrice SAGACE.

Il est entendu que ce réseau sémantique est particulier au projet d'étude et qu'il ne s'agit que d'un des réseaux sémantiques envisageables pour ce système.

Ces relations sont explicitées par la représentation de flux communs à plusieurs points de vue et/ou à des niveaux plus élevés de formalisation par des règles normatives qui contraignent ces relations.

La figure 2.13 est un exemple de partage de flux communs aux points de vue de la perspective d'adaptation : gestion, dispositif et programme. Un tel "câblage" est d'une part la représentation des relations entre ces points de vue exprimant le fait que les *contextes de gestion* contrôlent les *programmes* et l'*organisation* en fonction de l'*activité* et de l'*organisation* effectives issues de l'action des *tâches* et des *dispositifs*., et d'autre part il existe car s'agissant d'un système artificiel ce dernier aura été conçu comme tel.

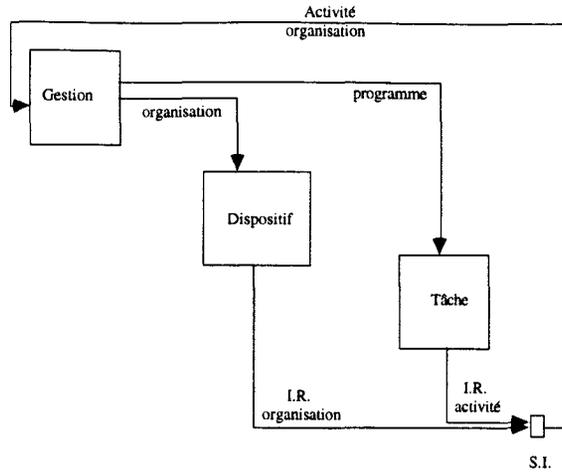
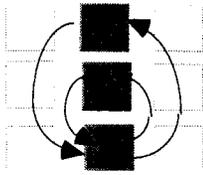
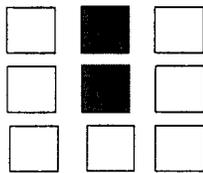


figure 2.13 : couplage des points de vue de la perspective d'adaptation.

Le tableau 2.3 quant à lui donne un exemple de règle normative contraignant la relation sémantique entre tâches et dispositifs en spécifiant les affectations admissibles de certains dispositifs à certaines tâches.



dispositifs/tâches	t.1.1.1	t.1.1.2	t.1.2.1	t.1.2.2	t.1.2.3
d.1.1	1	1	0	0	0
d.1.2.1	0	1	0	1	0
d.1.2.2	0	0	1	1	0
d.1.3	0	0	1	0	1

Tableau 2.3 : règle normative d'allocation des dispositifs aux tâches à réaliser

Ainsi une lecture en colonne de ce tableau précise que la tâche t.1.1.2 nécessite pour son exécution le dispositif d.1.1 et/ou d.1.2.1, alors qu'une lecture en ligne précise que le dispositif d.1.2.1 est à un moment ou à un autre alloué aux tâche t.1.1.2 et/ou t.1.2.2.

La spécification de ces règles normatives passe par une analyse croisée des points de vue de la matrice pris deux à deux. Le respect de ces règles normatives apporte une garantie supplémentaire à la cohérence de cette représentation multi points de vue et est à la base d'une gestion dynamique des connaissances sur le système. Le principe de cette gestion dynamique repose sur le respect de l'ensemble du réseau de contraintes normatives définissant un ensemble de trajectoires d'état admissibles dans les différents points de vue. On trouvera en annexe I.b un exposé détaillé sur les analyses croisées et les règles normatives à différents niveaux de formalisation avec en perspective, partant de ces règles, une gestion dynamique des représentations. On dote ainsi le modèle de représentation dont la fonctionnalité est principalement cognitif des fonctions prédictive et normative.

V. Conclusion

Il apparaît donc que la dénomination de *modélisation fonctionnelle* employée dans la littérature qualifie de manière plus ou moins pertinente plusieurs *modèles de représentation* de concepts, d'aspects d'un seul et même système envisageables indépendamment des autres bien qu'intimement liés.

Par modélisation fonctionnelle, on entend représentation fonctionnelle au sens de la matrice SAGACE. Cette représentation est alors une vision fonctionnelle et achronique dont un énoncé ne faisant aucunement intervenir le temps a été proposé. La représentation structurelle est quant à elle une vision synchronique distribuée sur trois points de vue et la représentation comportementale une vision diachronique distribuée sur cinq points de vue. La structure d'accueil qu'offre la matrice SAGACE a, outre le mérite de proposer une définition canonique pour chacun de ces concepts de modélisation permettant de les distinguer, ceux de les fédérer et de les exprimer dans un seul et même langage.

La fédération de ces points de vue et la spécification de règles normatives permettent d'envisager une gestion dynamique de ces représentations (dont l'annexe I.a constitue une préétude).

CHAPITRE III

Définition de classes de processeurs

I. INTRODUCTION.....	61
II. SUR LA DEFINITION ET L'UTILISATION DE TYPOLOGIES.....	62
III. DECOMPOSITION TRIADIQUE [LEM-84].....	65
III.1. PROCESSUS, PROCESSEURS, UNE TYPOLOGIE	67
IV. CAS DES SYSTEMES PHYSIQUES TRAITANT DES FLUX D'ENERGIE.....	68
IV.1. UN SYSTEME D'ABSTRACTION ENTRE DIFFERENTES THEORIES PHYSIQUES [PAY-61].	69
IV.1.a. Classification des variables.	70
IV.1.b. Classification des relations.	71
1 Relations structurelles :	71
2 Relations phénoménologiques :	72
IV.2. INTERPRETATION EN TERMES DE PROCESSUS.....	73
IV.2.a. Sémantique des couples (In,Ex): une typologie des objets processés.	74
IV.2.b. Sémantique des relations généralisées : une typologie des processus	
sur \mathcal{E}^c	76
Définition de classes de processus a priori.....	76
Une base de processus induite par le tétraèdre.	77
IV.2.c. Interprétation en T-E-F processus.	79
E-processus et dérivation d'énergie par rapport au temps.	80
T-processus et intégration de puissance par rapport au temps.	82
F-processus et relation proportionnelle.	83
Cas des transactions de type couplage.....	84
IV.3. GENERALISATION AUX PROCESSUS TRAITANT DES FLUX DE MATIERE.	84
IV.4. REPRESENTATION DES PROCESSUS PHYSIQUES.	89
IV.4.a. Processus énergétiques.	89
IV.4.b. Processus traitant de la matière.....	91
IV.4.c. Processus traitant matières et énergies.....	91
V. APPLICATION A LA REPRESENTATION DES SYSTEMES.....	91
V.1. REPERCUSSION SUR LA DEMARCHE D'ANALYSE.	92
V.2. QUELQUES PROCESSUS SIMPLES SUIVANT LES FLUX D'ENERGIE ET DE PUISSANCE.....	93
V.2.a. Représentation fonctionnelle.	99
V.2.b. Représentation par programmes.	102
Tâches d'injection pour le remplissage.	102
Tâches d'éjection pour la vidange.	103
Programme pour le stockage et la compensation de l'évaporation.	103
Programme pour le nettoyage des cuves.	104
V.2.c. Représentation de l'organisation.....	106
Dispositif d'injection.	106
Dispositif d'éjection.	106
Dispositif de nettoyage.	107
V.2.d. Modes et configurations.	107
V.2.e. Poursuite de l'étude.....	108
V.3. ANALYSE CROISEE ET VERIFICATION DE LA COHERENCE.	108
VI. CONCLUSION.....	110

I.

Introduction.

Le chapitre 1 propose une méthode d'analyse et de représentation des systèmes structurée et cohérente. Cette structuration comporte trois volets. Il s'agit tout d'abord d'une méthode d'analyse visant à réduire la complexité des problèmes étudiés : l'utilisation de logiques externes, de logiques internes et d'une matrice de points de vue, sont autant de principes de réduction de la complexité du problème mais qui visent à minimiser les "pertes" dues aux simplifications. Il s'agit ensuite d'une définition de concepts de modélisation ; les points de vue de la matrice sont autant d'aspects du problème que le modèle devra exprimer. Il s'agit enfin d'un langage d'expression de ces concepts dont la primitive et l'élément générique est le processeur.

Toutefois, pour un point de vue donné, la subjectivité de la représentation demeure. Plusieurs organisations hiérarchiques ou en réseaux, pour un même système, sont possibles. On aboutit alors à : différentes représentations des fonctions du système, différentes représentations des programmes, plusieurs représentations du réseau organique, etc. Cette subjectivité des représentations relève essentiellement de la difficulté d'identification des fonctions, organes, modes et autres ainsi que d'une absence de principe de décomposition des réseaux de processeurs.

Par ailleurs, quand on s'intéresse à la représentation des systèmes, il apparaît dans les représentations obtenues qu'un certain nombre de "motifs" sont récurrents. Les phénomènes que l'on rencontre présentent souvent des analogies rendant leurs représentations semblables. S'agissant de représenter les systèmes par des réseaux de processeurs, il vient alors l'idée de définir un nombre limité de classes ou de types de processeurs. Le langage d'expression des concepts de modélisation devient alors un langage typé à l'image des langages de programmation informatiques ou du langage naturel où les mots sont classés en *noms*, *adjectifs*, *verbes*, *adverbes*, etc. Cette classification, ce typage, constitue alors un niveau supplémentaire de formalisation de notre langage.

L'exposé de ce troisième chapitre propose alors de définir un nombre limité de classes de processeurs permettant de typer notre langage de représentation. Cette classification constituera le second des quatre niveaux de formalisation du modèle de représentation.

La première partie traite de l'utilisation de classes pour la représentation des systèmes et présente différentes typologies de *fonctions*, de *processus* ou de *dispositifs* proposées dans la littérature. Ces différentes classifications ont comme inconvénients majeurs d'être empiriques et de ne proposer aucune garantie formelle quant à la suffisance, la nécessité et la minimalité des classes proposées.

Rappelons tout d'abord qu'un processeur apparaît comme une entité active dans un environnement, que cette action porte sur deux axes : l'axe des transactions schématisant le processus, et l'axe des interactions schématisant le profil de mission. La démarche adoptée est alors la suivante : on se propose de classer non pas les profils de mission mais les processus. L'hypothèse sous-jacente est alors qu'il

existe un nombre limité de classes de processus ; ceci contrairement à de trop nombreuses typologies proposées dans la littérature et dont l'hypothèse sous-jacente revient à considérer qu'il existe un nombre limité de classes de missions. Cette seconde hypothèse nous semble bien trop restrictive car elle revient à considérer qu'il existe un nombre limité de types de contraintes à respecter et un nombre limité de types d'attentes à satisfaire, ce qui revient à réduire le *besoin* (au sens de l'analyse du besoin [AFA-89]) à quelques primitives à partir desquelles tout besoin peut être exprimé. En définissant des types ou des classes de processus, on définit alors par extension des classes de processeurs du même type que le processus dont ils sont le siège. Il en découle des classes de fonctions, des classes de dispositifs, de tâches, d'organes, etc.

Pour cela, dans la seconde partie, on propose d'adopter une typologie dite de décomposition triadique énoncée par Lemoigne [Lem-84] et que nous présenterons. Cette typologie, d'une très grande généralité et constituée de seulement trois classes de processus est a priori nécessaire, suffisante, et minimale.

Dans la troisième partie, on se propose alors de montrer, dans un premier temps, que cette typologie est valide dans le cas de systèmes physiques traitant de flux d'énergie ; ce par le truchement du concept unificateur d'énergie [Gir-90] et du cadre théorique du Bond-Graph [Kar-90][Bor-92][Sue-95] basé sur le tétraèdre d'état [Pay-61]. On propose ensuite une extension à la classe plus large de systèmes physiques traitant de flux de matières et d'énergie. Cette analyse constitue alors une validation a posteriori de la typologie proposée comme étant une base de processus (au sens mathématique du terme) à partir de laquelle tout processus physique peut être construit. On termine cette troisième partie par la présentation de la forme des représentations graphiques de chacune des classes de processus et donc de processeurs.

La quatrième partie traite ensuite de l'utilisation de ces processeurs typés pour l'identification des phénomènes au sein du système, de la validation des représentations dans chacun des points de vue et de la vérification de la cohérence des représentations de points de vue différents.

II. Sur la définition et l'utilisation de typologies.

De nombreux travaux suggèrent la définition de classes de fonctions, de buts, ou encore de dispositifs. L'intérêt d'établir sur ces ensembles (de fonctions, de dispositifs, et autres) des classes est de disposer d'un vocabulaire limité pour la modélisation. On s'efforce, dès lors que l'on dispose de ce vocabulaire, d'exprimer en ces termes les phénomènes perçus. C'est par la même occasion une aide à l'identification des phénomènes.

Une conséquence immédiate est que, dans le cas où une multitude de représentations d'un même phénomène est possible, l'utilisation de classes ou de langages typés réduit le champ des possibles. En limitant ainsi le nombre des représentations possibles, on tend vers des représentations univoques. C'est cette convergence vers une

représentation unique d'un même phénomène que l'on entend ici par "objectiver" la représentation des systèmes.

En contre partie, l'utilisation de tels vocabulaires expose le modélisateur à une perte de généralité. Certains phénomènes, compte tenu du vocabulaire dont on dispose ne pourront être exprimés, la typologie en question est alors insuffisante ou incomplète. D'autres encore pourront être exprimés de plusieurs manières dans un même vocabulaire, l'unicité des représentations est alors remise en cause ; se pose alors le problème de la nécessité de toutes les classes et de la minimalité de la typologie en question.

La typologie que l'on adoptera devra donc être suffisante et complète afin de garantir la plus grande généralité possible, elle devra être nécessaire et minimale pour garantir autant que possible l'unicité des représentations sans perte de généralité.

Les typologies proposées dans la littérature sont essentiellement des classifications de *fonctions* et de *composants* (correspondant aux *organes* de la terminologie SAGACE). Les éléments de chacune de ces classes portent le nom de *primitives fonctionnelles*. Parmi les différentes typologies de la littérature, on trouve notamment celles de Tezza [Tez-88], de Bylander [Byl-85], de Keuneke [Keu-91], ou encore de Chittaro [Chit-93] et d'autres [Sha-77], [Far-91].

[Sha-77]	{Atrans, Ptrans, Propel, Grasp, Ingest, Expel, Move, Do}
[Byl-85]	{Allow, Pump, Expel, Move, Create, Destroy}
[Tez-88],	{Support, Grasp, Enter, Contain, Hang, Cut, Pierce, Equilibrium, Stop, Plug}
[Keu-91]	{ToMake, ToMaintain, ToPrevent, ToControl}
[Far-91]	{Ptrans, A,trans, Grasp, Rotate, Propel, Realse, Set-Up, Set-Down}
[Chit-93]	{To-TRANSFER, To-ACCUMULATE, TO-SENSE-RATE-OF}; { <i>f-conduit, e-conduit, purely conductive conduit, f-barrier, e-barrier, q-reservoir, p-reservoir, e-generator, f-generator.</i> }

Tableau 3.1 : quelques "primitives fonctionnelles" et composants génériques de la littérature.

On considère, dans la typologie proposée par Tezza que les fonctions d'un artefact peuvent s'exprimer à l'aide d'un nombre limité de *Primitives fonctionnelles* telles que : *SUPPORT, GRASP, ENTER, CONTAIN, HANG, CUT, PIERCE, STOP, PLUG, EQUILIBRIUM*. Un objet est alors décomposable en ses constituants, chacun étant associé à une primitive fonctionnelle.

L'approche de Keuneke, pour qui une représentation fonctionnelle d'un système mécanique consiste à représenter chaque

composant associé à une fonction est similaire. Par cette association, on définit alors un *composant fonctionnel*. Le découpage de la structure d'un système (*structure* est ici à prendre au sens de *structure organique*) s'opère suivant ces composants fonctionnels. On déclare alors que quatre *types de fonctions* permettent d'exprimer celles d'un dispositif. Ces types de fonctions sont :

ToMake, atteindre un état donné,

ToMaintain, maintenir un état souhaité,

ToPrevent, maintenir le système hors d'états indésirables,

ToControl, réguler les changements d'état du système.

Pour Bylander, les fonctions d'un système sont déductibles des échanges de "substances" entre composants et de ce qu'ils sont capables de faire de ces substances. Il définit alors un ensemble de comportements : ALLOW, PUMP, EXPEL, MOVE, CREATE, DESTROY, à associer à ces composants. Dès lors, en sélectionnant un ensemble de composants, on déclare pouvoir exhiber tous les comportements possibles et expliquer aisément comment cet ensemble contribue à la fonction du système global.

Chittaro définit deux typologies, l'une concernant les buts (analogues aux *missions* de la terminologie SAGACE) et l'autre portant sur les composants (ou *organes*). Les trois finalités génériques sont : *To-TRANSFER*, *To-ACCUMULATE*, *TO-SENSE-RATE-OF* ; les neuf composants génériques sont : *f-conduit*, *e-conduit*, *purely conductive conduit*, *f-barrier*, *e-barrier*, *q-reservoir*, *p-reservoir*, *e-generator*, *f-generator*. Il se base pour cela sur un système d'abstraction : le tétraèdre d'état [Pay-61], sa terminologie de composants en est d'ailleurs inspirée. Ce système définit une base de relations généralisées valables dans différentes théories physiques. Il en déduit alors les neuf composants génériques précédents auxquels il associe l'une des trois finalités précédentes.

On pourrait tout d'abord reprocher à ces ensembles de primitives de n'être essentiellement que des typologies soit de fonctions soit de composants, ce qui dans l'optique d'une représentation multi points de vue des systèmes telle que SAGACE ne couvre qu'une partie des besoins. (On ne disposerait que de typologies pour les points de vue fonctionnel et organique).

De plus les fonctions telles qu'elles sont comprises dans ces travaux s'apparentent davantage à des projets ou des buts qu'à des fonctions telles que nous les avons définies dans le chapitre précédent. Ces "fonctions" sont donc à prendre au sens des *missions* de la terminologie des chapitres précédents. Dès lors, ces typologies, à l'exception de celles de Bylander et des composants génériques de Chittaro, en définissant un nombre limité de buts ou d'intentions (du système ou de ses exploitants), considèrent qu'il n'existe qu'un nombre limité de contraintes à respecter et d'attentes à satisfaire à partir desquelles tout profil de mission pourrait être exprimé. Cette hypothèse est à l'évidence trop restrictive et confine ces typologies arbitraires à des situations particulières où les besoins exprimés sont traduisibles par des profils de missions concevables dans ces typologies. C'est la généralité de ces typologies de missions empiriques qui est en cause.

Il en est de même des typologies de composants basées sur leurs fonctionnalités potentielles et qui défissent des composants fonctionnels. Ces considérations conduisent, par exemple, à des décompositions du réseau organique suivant les fonctions réalisées, adaptées aux seuls cas où il existe une décomposition fonctionnelle et une décomposition organique liées par une application bijective (une fonction / un organe). Dans le cas contraire où par exemple un ensemble d'organes communs à deux parties distinctes du système sert une même fonction ce type de décomposition échoue. Il n'existe alors pas de décomposition hiérarchique du réseau organique suivant une décomposition hiérarchique fonctionnelle.

L'approche de Chittaro est préférable aux précédentes à deux points de vue. D'une part elle propose une typologie des missions et une typologie des composants et préserve l'indépendance des deux concepts que sont *fonction* et *organe*. Ces typologies laissent alors la possibilité d'associer *fonctions* et *organes* suivant une relation quelconque. Du point de vue de la méthode d'autre part, sa définition des composants génériques passe par une classification des phénomènes et lois physiques basée sur les analogies bien connues entre phénomènes physiques. L'hypothèse sous-jacente est cette fois qu'il existe un nombre limité de types de phénomènes physiques. Toutefois cette classification n'est qu'une classification de composant. De plus, comme les autres classifications, les propriétés de complétude, de suffisance, de nécessité et de minimalité des ensembles obtenus ne sont pas établies formellement.

III. Décomposition triadique [Lem-84].

S'agissant de représenter les systèmes par des réseaux de processeurs, on cherche tout d'abord une typologie unique de processeurs valable dans les différents points de vue de la matrice, un vocabulaire unique permettant de typer aussi bien des fonctions que des organes, des dispositifs, des programmes, etc. On la voudrait suffisamment générale pour appréhender une classe la plus large possible de systèmes. Enfin, on cherche à se munir de garanties formelles permettant de valider cette typologie comme étant une base (au sens mathématique) de processeurs, donc comme étant un ensemble minimal, nécessaire, et suffisant.

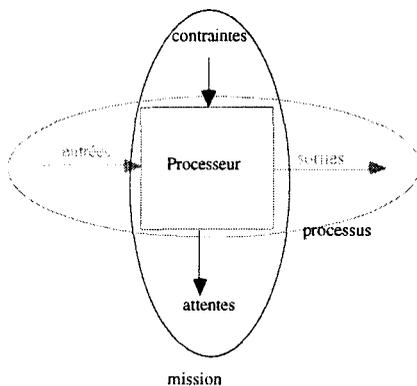


Figure 3.1 : un processeur est une entité active agissant sur et avec son milieu extérieur suivant deux axes : l'axe des transactions, et l'axe des interactions

On rappelle qu'un processeur est une entité active dans un milieu avec lequel il interagit suivant deux axes : l'axe des transactions et l'axe des interactions (Figure 3.1). Définir une typologie de processeurs consiste donc à définir une typologie de profils de missions (axe vertical) et/ou une typologie de processus (axe horizontal). La première possibilité, celle qui consiste à définir des profils de missions est à rejeter pour les raisons évoquées précédemment concernant les typologies tentant de définir des classes de projets, de buts ou de besoins. On émet donc comme hypothèse de travail qu'il existe un nombre limité de types de processus mis en oeuvre dans une infinité de missions. On cherche donc une typologie de processus. *A priori*, une telle tentative devrait satisfaire la première exigence, celle d'être applicable à tous les points de vue de la matrice SAGACE, la notion de processus étant commune à tous ces points de vue.

On rappelle également la définition d'un processus que nous avons retenue dans le chapitre précédent. Un processus est compris comme : "Tout changement dans le temps de matière, d'énergie, d'information", (J.Miller [Mil-65]). L'ensemble {Matière, énergie, information} est en fait une typologie d'objets processés. L'environnement \mathcal{E} est l'ensemble de ces objets processés, l'ensemble {Matière, énergie, information} est donc une partition de cet environnement. En reprenant les notations du chapitre 2, on note formellement :

$$\{E\} = \{E^e\} \cup \{E^m\} \cup \{E^i\} \quad (3.1)$$

L'environnement est l'ensemble des énergies, matières et informations sujettes à processus.

Lemoigne préconise une typologie générale et particulièrement simple de processus ; ceci en faisant remarquer que ces changements, "que l'on peut observer, attribuer, pressentir, anticiper, dans les formes des objets processés" [Lem-85], sont de trois types :

- changements dans le temps;
- changements de la position spatiale;
- changements dans la forme ("forme" est ici à prendre au sens large du terme, comme toute caractéristique d'un objet processé, autre que le temps et sa position, susceptible de varier : couleur, taille, amplitude,...).

Cette décomposition porte le nom de décomposition triadique.

Dès lors que la "position" de ces objets est rapportée dans un référentiel Temps-Espace-Forme (Figure 3.2), l'activité d'un système se traduit par une trajectoire dans ce repère, par un processus. Cette trajectoire identifie alors ce processus.

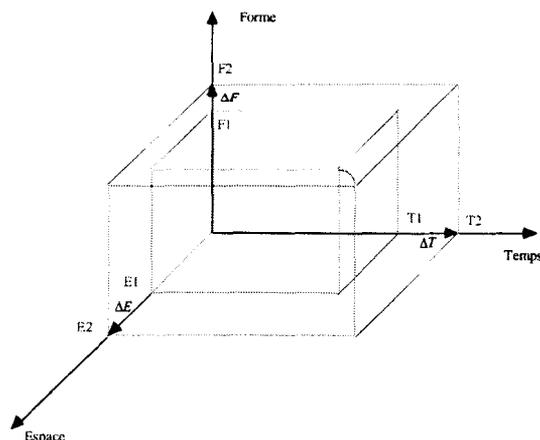


Figure 3.2: Référentiel Temps-Espace-Forme,
extrait de [Lem-85]

Ces variations de temps ΔT , de position spatiale ΔE , et de forme ΔF sont les composantes d'un vecteur de translation qui n'est autre que le processus observé. On propose de noter formellement un processus C comme un vecteur de translation dans ce repère :

$$C = (\Delta T, \Delta E, \Delta F) \quad (3.2)$$

III.1. Processus, processeurs, une typologie .

Une fois les objets traités identifiés et leur position rapportée dans le référentiel Temps-Espace-Forme, une typologie particulièrement simple des processus, et par conséquent de processeurs, peut être donnée :

- Un processus, dont le résultat est une affectation dans le temps de la position des objets traités dans le repère T-E-F, sans changement de la forme, et sans changement de la position spatiale, est caractéristique d'un processus : de stockage de matière, d'énergie, de mémorisation d'information. Par convention, on appellera un tel processus un T-processus ou processus de type T. Le vecteur caractéristique de ce type de processus est alors :

$$C_T = (\Delta T, 0, 0) \quad (3.3).$$

- Un processus d'affectation dans le temps de la position spatiale, sans changement de la forme, est caractéristique : d'un transport de matière, d'une conduction d'énergie, d'une transmission d'information. On appellera un tel processus un E-processus ou processus de type E. Le vecteur caractéristique est alors :

$$C_E = (\Delta T, \Delta E, 0) \quad (3.4.a).$$

Par passage à la limite, en admettant que le changement de la position spatiale est instantané, le processus élémentaire de type E est caractérisé par le vecteur :

$$C_E = (0, \Delta E, 0) \quad (3.4.b).$$

- Un processus, qui affecte, dans le temps, la forme sans changement de la position spatiale, est caractéristique : d'une transformation de matière, d'une conversion d'énergie, d'un calcul.

On appellera un tel processus un F-processus ou processus de type F. Le vecteur caractéristique est alors :

$$C_F = (\Delta T, 0, \Delta F) \quad (3.5.a)$$

Par passage à la limite, en admettant que les transformations sont instantanées, on a :

$$C_F = (0, 0, \Delta F) \quad (3.5.b)$$

Un processus quelconque est alors, dans le repère Temps-Espace-Forme, caractérisé par son vecteur de translation. Ce dernier est alors une combinaison linéaire des trois vecteurs élémentaires (3.3), (3.4.b) et (3.5.b) : $C = \lambda_T \cdot (\Delta T, 0, 0) + \lambda_E \cdot (0, \Delta E, 0) + \lambda_F \cdot (0, 0, \Delta F)$, $\lambda_{\{T,E,F\}} \in \{0,1\}$.

Cette typologie semble, du point de vue de sa généralité, satisfaisante ; elle est applicable aux différents points de vue de la matrice SAGACE, et elle comporte très peu de classes (trois). A priori, elle est minimale, nécessaire, suffisante et complète. On propose donc de la considérer comme telle et de l'adopter.

Dès lors, on décline aisément de ces classes de processus une typologie pour les processeurs. Un processeur sera dit du même type que le processus dont il est le siège. Ainsi un processeur sera dit : T-processeur, ou processeur de type T, s'il est le siège d'un processus de type T, comme un stockage d'énergie ou de matière, une mémorisation d'informations. De même, on définit les E-processeurs et F-processeurs. On généralise à un processeur quelconque qui peut alors être de type T ou E ou F ou d'une combinaison de ces types, s'il est le support d'un processus, de type T ou E ou F ou d'une combinaison de ces types.

Appliqué à la représentation multi points de vue, un processeur devient alors : un énoncé fonctionnel, un programme, un mode, un organe, un dispositif, etc. On dispose alors d'une typologie pour chacun des points de vue de la matrice SAGACE. Une fonction (resp. une dysfonction) sera dite du même type que le processeur qui la représente, ainsi une fonction (resp. une dysfonction) est de type T si le processeur est de type T. On décline également des composants ou organes de type T, E, F ou combiné suivant le type du processeur utilisé pour leur représentation, etc.

IV. Cas des systèmes physiques traitant des flux d'énergie.

En l'état, cette typologie de processus est tout aussi arbitraire que celles présentées dans la première partie. On ne peut, pour l'instant, juger de ses qualités que par une démarche heuristique. On voudrait, dans cette troisième partie s'assurer formellement que cet ensemble de processus est bien une base. Si cette typologie est générale pour les processus sur les objets de \mathcal{E} elle devrait l'être en particulier pour les systèmes physiques traitant des flux d'énergie de \mathcal{E}^c .

Partant des connaissances dont on dispose sur cette classe de systèmes et en particulier du concept d'énergie commun aux différentes théories physiques, on cherche à démontrer que les différents processus physiques sont d'un des trois types T, E, F ou

d'une combinaison de ces trois derniers. En d'autres termes, on voudrait, dans un premier temps, valider cette typologie comme une base de processus pour les systèmes traitant de flux d'énergie.

Il existe, dans le domaine des théories physiques de nombreuses classifications basées sur les analogies bien connues entre phénomènes physiques. On pense, par exemple, à la classification des variables thermodynamiques en variables intensives et variables extensives [Abb-92][Pér-93]. De ce point de vue le concept d'énergie commun aux différentes théories physiques s'est avéré des plus fertiles. Des travaux comme ceux de Paynter [Pay-61] ou encore Tonti [Ton-76] portent sur l'étude et la formalisation de ces analogies et proposent des typologies de variables et de relations sur ces processus physiques. Tonti en analysant les raisons de ces analogies fait par exemple remarquer que l'on fait toujours référence à une substance (à une grandeur extensive) en termes de quantité contenue dans une région de l'espace ou en termes de variations de cette quantité. On définit alors des concentrations, des densités, ..., ou des flux, des débits, ou courants volumiques de cette quantité. Deux opérations mathématiques fondamentales permettent alors le passage de l'une à l'autre : l'intégration et la dérivation. Entre les deux se trouve l'action que l'on convient de nommer *proportionnelle* (pas forcément linéaire) qui fait référence à des équations statiques. On pressent un rapprochement entre l'existence de quantités, concentrations, densités et processus de stockage, d'accumulation ou encore de type T ; entre l'existence de flux, débits, courants et phénomènes de transport ou encore de type E, etc. Il en est de même du rapprochement de l'action intégrale et des processus de type T, de l'action dérivée et des processus de type E ou encore de l'action proportionnelle et des processus de type F.

IV.1. Un système d'abstraction entre différentes théories physiques [Pay-61].

On ne s'intéresse donc, dans un premier temps, qu'à des systèmes physiques opérant sur des flux d'énergies, ou pouvant se ramener à des flux d'énergies. On restreint donc notre propos à l'ensemble \mathcal{E}^e .

Le concept d'énergie (l'analogue énergétique [Gir-90]), de source mécanique et physique, a trouvé sa formulation mathématique générale par l'intermédiaire du concept de dualité. Le modèle paradigmatique de l'énergie cherche systématiquement des couples de variables (In, Ex) : intensives et extensives conjuguées, et se base sur l'observation d'analogies entre phénomènes physiques relevant de théories différentes.

L'existence de ces similitudes, entre phénomènes physiques relevant de différentes théories, est bien connue. Conduction thermique, électrique, et débit hydraulique sont communément entendus comme des phénomènes analogues. On peut identifier des entités (chaleur, électrons, liquide), s'écoulant d'une source vers une destination (généralement des variables extensives), et des "forces" (gradient de température, potentiel électrique, pression), responsables ou causes de ces écoulements (généralement des variables intensives). Il est dès lors possible de spécifier un ensemble de variables généralisées et un système de relations généralisées, entre

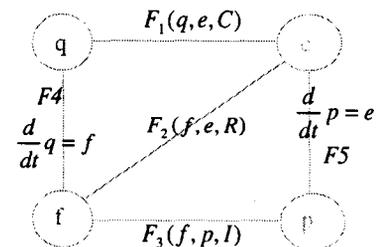


Figure 3.3 : le tétraèdre d'état, un système d'abstraction entre théories physiques.

ces variables. Relations et variables généralisées sont définies en raison de leur validité commune à plusieurs domaines physiques. Ce système, représenté par la figure 3.3 est le tétraèdre d'état. Dérivé par Paynter[Pay-61], il est à la base de la théorie Bond-Graph [Kar-90] [Sue-95] et est obtenu par :

- classification des variables, en vertu du rôle similaire qu'elles jouent dans les relations physiques relevant de théories différentes;
- classification des relations, en vertu du type des variables qu'elles contraignent, et de leur validité commune à plusieurs théories.

IV.1.a.

Classification des variables.

Le critère de classification des variables est basé sur l'observation que de nombreux phénomènes physiques sont usuellement décrits par des variables se référant à une quantité de substance : leur flux, et à des "forces", causes ou conséquences de ces flux. Par conséquent on distingue quatre variables généralisées :

- des flux généralisés (f): flux de masse, de volume, de charges électriques, d'entropie...
- des efforts généralisés (e) : les "forces" responsables ou causes, de ces flux, comme un gradient de température, un potentiel électrique ou une pression.
- des déplacements généralisés (q) : définis comme intégrales du flux par rapport au temps. Masse, volume, charge électrique, ... sont des déplacements généralisés.
- des impulsions généralisées (p) : définies comme intégrales des efforts par rapport au temps. Accumulation de flux magnétique dans une bobine, accumulation de moment angulaire dans un ressort, sont autant d'impulsions généralisées.

Le tableau 3.2 donne pour différentes théories les variables de flux, d'effort, de déplacement, et d'impulsion.

systèmes physiques	effort e	flux f	déplacement q	impulsion p
Mécanique de translation	F : Force [N]	\mathcal{V} : vitesse [m.s ⁻¹]	X : position [m]	P : impulsion [N.s]
Mécanique de rotation	γ : couple [N.m]	ω : vitesse angulaire [Rad.s ⁻¹]	α : angle [Rad]	Γ : moment angulaire [N.m.sec]
Hydraulique	P_r : pression [N.m ⁻²]	Q_v : débit volumique [m ³ .s ⁻¹]	V : volume [m ³]	P_p : moment de pression [N.m ⁻² .s]
Électrique	U : potentiel électrique [V]	I : courant électrique [A]	Q : charge électrique [C = A.s]	Φ : flux magnétique [V.s]
Thermique	θ : température [K]	\dot{S} : flux d'entropie [JK ⁻¹ .s ⁻¹]	S : entropie [JK ⁻¹]	
Unité du système SI : N newton, m mètre, S seconde, Rad radian, V volt, A ampère, C coulomb, K kelvin, J joules				

Tableau 3.2 : classification des variables en : effort, flux, déplacement, impulsion, pour quelques théories physiques courantes.

IV.1.b.

Classification des relations.

Différents types de relations peuvent être établis entre variables généralisées. Une première distinction, entre ces relations, est celle entre relations structurelles et relations phénoménologiques.

1

Relations structurelles :

Les relations structurelles sont des relations indépendantes de notions métriques et qui ne contiennent pas de paramètres (attributs géométriques ou phénoménologiques des composants : résistance, capacité, coefficient de couplage, ...), mais uniquement des coefficients sans dimension. Typiquement ce sont des relations d'équilibre (3.6), des lois de conservation (conservation de masse, conservation de l'énergie), loi des noeud (3.7) généralisée aux flux, loi des mailles (3.8) généralisée aux efforts. La validité de ces équations s'étend aux différents domaines physiques.

$$\sum_i \bar{f}_i = \frac{d}{dt} \sum_j \bar{p}_j \quad \text{relation fondamentale de la dynamique (3.6)}$$

$$\sum_i U_i = 0 \quad \text{loi des mailles en électricité (3.7)}$$

$$\sum_i I_i = 0 \quad \text{loi des noeuds (3.8)}$$

2

Relations phénoménologiques :

Ces relations dépendent de notions métriques et contiennent des paramètres. Leur validité est contrainte par des hypothèses opérationnelles (plage de température, de pression,...). On distingue deux sous-classes : celle des relations constitutives et celle des relations de couplage.

Relations constitutives :

Ces relations contiennent des variables relevant d'un même domaine physique. Loi d'Ohm en électricité (3.9), équation entre flux thermique et variation de température(3.10), équation entre pression et volume dans une cuve en hydraulique (3.11) (A étant la section de la cuve), sont autant de relations constitutives.

$$U - R \cdot I = 0 \quad \text{loi d'Ohm (3.9)}$$

$$m \cdot c \cdot \frac{d}{dt} \Theta = \phi \quad (3.10)$$

$$V = c_h \cdot P_r \text{ avec } c_h = \frac{A}{\rho \cdot g} \quad (3.11)$$

Relations de couplage :

Ces relations sont des contraintes entre variables relevant de plusieurs domaines physiques. Une relation entre le débit hydraulique, la vitesse mécanique d'écoulement, et la section du conduit est une relation de couplage(2.7).

$$Q_v = A \cdot v \quad (3.12)$$

Lors de la modélisation d'un système, les équations constitutives sont des relations phénoménologiques associées à un seul point de vue (une seule théorie), les relations de couplage à plusieurs.

En classant les entités physiques et les relations entre ces dernières, on obtient le système présenté sous la forme d'un graphe (Figure 3.3).

Ce système comprend les quatre variables généralisées : effort, flux, impulsion et déplacement, et cinq relations. Trois d'entre elles sont des relations constitutives :

- $F_1(q, e, C)$: relation entre déplacement, effort et un paramètre généralisé C (capacité généralisée)
- $F_2(f, e, R)$: entre flux, effort et un paramètre R (résistance généralisée);
- $F_3(f, p, I)$: entre flux, impulsion et un paramètre I (inductance généralisée).

Les deux autres relations restantes sont des relations structurelles, des lois de conservation (E_x : le déplacement accumulé dans une région varie selon le flux à travers sa surface) et correspondent aux

deux opérations mathématiques fondamentales : l'intégration et la dérivation par rapport au temps.

Le tableau 3.3, donne les modalités des équations généralisées pour quelques théories physiques.

	Relations généralisées, cas linéaire				
	Relations constitutives			Relations structurelles	
Système physique	$F_1(q, e, C)$	$F_2(f, e, R)$	$F_3(f, p, I)$	$F_5 = \frac{d}{dt} p$	$F_4 = \frac{d}{dt} q$
électrique	$Q = c \cdot U$	$U = R \cdot I$	$\Phi = L \cdot I$	$U = \frac{d}{dt} \Phi$	$I = \frac{d}{dt} Q$
Mécanique de translation	$\mathcal{F} = K \cdot X$	$\mathcal{F} = \alpha \cdot v$	$P = m \cdot v$	$\mathcal{F} = \frac{d}{dt} P$	$\mathcal{F} = \frac{d}{dt} X$
Hydraulique	$V = \frac{A}{\rho \cdot g} \cdot P_r$	$Q_v \cdot \frac{8 \cdot \pi \cdot \mu \cdot l}{A^2} = P_r$	$Q = \frac{1}{L} \cdot P_p$ $L = \frac{\rho}{l \cdot A}$	$Q_v = \frac{d}{dt} V$	$P_r = \frac{d}{dt} P_p$

C capacité, *R* résistance, *L* inductance, *K* raideur du ressort, α coefficient de frottement, *m* masse, *A* section du tube, ρ masse volumique, *g* accélération, μ viscosité, *l* longueur du tube.

Tableau 3.3 modalités des relations du tétraèdre d'état dans différentes théories physiques.

Les cinq relations, structurelles et phénoménologiques précédentes, ne recouvrent évidemment pas de façon exhaustive toute une théorie, mais elles peuvent être considérées comme une base (au sens mathématique) de relations à partir de laquelle peuvent être inférées, par combinaisons de relations structurelles et phénoménologiques et par substitutions de variables, les autres relations du domaine théorique considéré [Chi-93].

IV.2. Interprétation en termes de processus.

A l'issue du paragraphe précédent, sont identifiés quatre types de variables généralisées, et cinq types de relations entre ces variables. Ces classifications ont de profondes implications en termes de types d'objets processés, et de types de processus.

IV.2.a. Sémantique des couples (In,Ex): une typologie des objets processés.

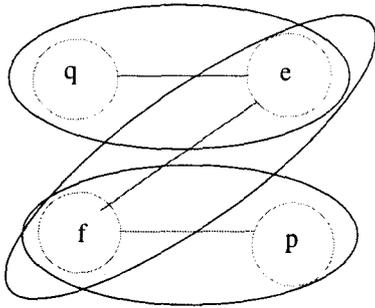


figure 3.4 : associations par paires (Intensive, Extensive) des variables généralisées.

A une variable généralisée du tétraèdre d'état correspond toujours une variable conjuguée. A un effort correspond toujours un flux et réciproquement. Il n'y a pas dans la nature de tension électrique sans courant (même nul), de débit sans pression, de température sans entropie... De même, à une variable de type déplacement généralisé, on peut associer un effort et à une impulsion on peut associer un flux généralisé. A un volume de fluide, on associe sa pression, à une quantité de mouvement on associe une vitesse. Les variables généralisées se retrouvent dans la nature associées par paires. Une des propriétés de ces couples est qu'ils sont constitués d'une variable intensive *In* et d'une variable extensive *Ex*. Ces couples sont :

- la paire (effort, flux) : cette paire satisfait à une relation de type F2;
- la paire (effort, déplacement) : cette paire satisfait à une relation de type F1;
- la paire (impulsion, flux) : cette paire satisfait à une relation de type F3.

On pourra vérifier aisément à partir du tableau 3.2, que pour une théorie donnée, chacun des trois couples précédents est constitué d'une variable intensive et d'une variable extensive.

En mécanique, quand la variable intensive de flux est la vitesse \mathcal{V} , la variable extensive d'effort est le poids *m.g.* En électricité la variable intensive est la variable d'effort *U* ou tension électrique quand la variable extensive est la variable de flux *I* ou courant électrique. Il en est de même pour les couples (effort, déplacement). La variable de déplacement est définie comme l'intégrale d'une variable de flux, en conséquence si le flux est extensif le déplacement l'est, de même si le flux est intensif le déplacement l'est également. D'après les propriétés des couples (effort, flux), on en déduit que si le flux est intensif l'effort est extensif, or le déplacement est du même type que la variable de flux, en conséquence quand l'effort est extensif le déplacement est intensif. De façon duale et pour des raisons similaires, quand l'effort est intensif, la variable de déplacement est extensive puisque la variable de flux l'est. On vérifie aisément cette conjugaison en variables intensive et extensive pour les couples (impulsion, flux).

Notations : on note $T = \{T_i\}$ un champ théorique, T_i est alors une théorie de ce champ (mécanique, hydraulique,...). *In* et *Ex* sont des types de variables respectivement intensives et extensives. On note Vg l'ensemble des variables généralisées. Cet ensemble comporte quatre classes de variables : $Vg = \{e\} \cup \{f\} \cup \{q\} \cup \{p\}$, respectivement les efforts, flux, déplacements et impulsions.

Les variables généralisées, dès lors qu'elles sont prises par couples de variables intensives et extensives conjuguées (*In, Ex*), ont la sémantique suivante :

- Pour une même théorie, un couple de variables de type (*e,f*) est équivalent à une puissance en ce que le produit *effort* \times *flux* dans cette théorie a toujours la dimension d'une puissance.

$$\forall T_i \in \mathcal{T}, (f, e) \in Vg \times Vg \Rightarrow e \times f \equiv [\mathcal{N}.m.s^{-1}]$$

Par exemple, le produit *tension* \times *courant* en électricité a la dimension d'une puissance:

$$U \times I \equiv [\mathcal{N}.m.sec^{-1}] \quad \text{puissance électrique (3.13)}$$

Il en est de même du produit *pression* \times *débit* en hydraulique :

$$Q_v \times Pr \equiv [\mathcal{N}.m.sec^{-1}] \quad \text{puissance hydraulique (3.14)}$$

- un couple de type (q, e) est équivalent à une énergie. Le produit de ces deux types de variables, dans une théorie donnée, a toujours la dimension d'une énergie :

$$\forall T_i \in \mathcal{T}, (q, e) \in Vg \times Vg \Rightarrow q \times e \equiv [\mathcal{N}.m]$$

Par exemple, en hydraulique le produit de la pression par le volume a la dimension d'une énergie :

$$\rho.V \times Pr = m.g.H \equiv [\mathcal{N}.m] \quad \text{énergie potentielle (3.15)}$$

- un couple, de type (f, p) est équivalent à une énergie. Le produit de ces deux types de variables, dans une théorie donnée, a toujours la dimension d'une énergie :

$$\forall T_i \in \mathcal{T}, (f, p) \in Vg \times Vg \Rightarrow f \times p \equiv [\mathcal{N}.m]$$

En mécanique, P_m étant l'impulsion mécanique ou quantité de mouvement, \mathcal{V} la vitesse, l'énergie cinétique est :

$$\frac{1}{2} \times P_m \times \mathcal{V} = E_c \equiv [\mathcal{N}.m] \quad \text{énergie cinétique (3.16)}$$

A l'image du produit $mg.z$, un produit de type $q.e$ souligne le caractère potentiel de cette énergie liée à la position. De même, à l'instar du produit $\frac{1}{2}.p_m.v$ un produit de type $f.p$ souligne le caractère cinétique de cette énergie liée au mouvement.

Ces couples amènent donc à définir deux classes d'objets processés, dont la nature prend deux formes : celle de puissance et celle d'énergie (de nature potentielle et/ou cinétique). Ces deux classes constituent une typologie des différentes parties de l'environnement \mathcal{E}^e . On a :

- l'ensemble, sur les domaines théoriques de \mathcal{T} , des couples (In, Ex) dont le produit à la dimension d'une puissance :

$$\mathcal{E}^{Pu} = \bigcup_{\mathcal{T}} \{(e, f)\} \subset Vg \times Vg / e \times f \equiv [\mathcal{N}.m.s^{-1}]$$

- l'ensemble, sur les domaines théoriques \mathcal{T} , des couples (In, Ex) dont le produit à la dimension d'une énergie (potentielle ou cinétique) :

$$\mathcal{E}^{ec} = \bigcup_{\mathcal{T}} \{(f, p)\} \subset Vg \times Vg : p \times f \equiv [\mathcal{N}.m]$$

$$\mathcal{E}^{ep} = \bigcup_T \{(q, e)\} \subset Vg \times Vg : q \times e \equiv [\mathcal{N}.m]$$

avec :

$$\mathcal{E}^{e_n} = \mathcal{E}^{ec} \cup \mathcal{E}^{ep}$$

Les différentes parties de l'environnement \mathcal{E}^e (ensemble des objets énergétiques processés), peuvent alors être référencées à l'aide d'un des trois types de couples précédents. Chacun de ces couples satisfait à une des relations de type constitutive du tétraèdre, avec :

$$\mathcal{E}^e = \mathcal{E}^{pu} \cup \mathcal{E}^{e_n}$$

IV.2.b.Sémantique des relations généralisées : une typologie des processus sur $\boxed{\mathcal{E}^e}$.

Définition de classes de processus a priori.

L'environnement \mathcal{E}^e étant délimité, les processus qui seront pris en compte portent donc sur tout ou partie de cet ensemble. Ces processus sont ceux qui transforment un ou plusieurs flux de type puissance ou énergie en un ou plusieurs flux de type puissance ou énergie. On peut donc, a priori, envisager quatre classes de processus sur \mathcal{E}^e :

- la classe des processus transformant la partie de l'environnement \mathcal{E}^{pu} en cette même partie \mathcal{E}^{pu} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}^{pu} \rightarrow \mathcal{E}^{pu} \\ (e, f) \xrightarrow{c} (e, f) \end{array} \right. \quad (3.17)$$

- la classe des processus transformant la partie de l'environnement \mathcal{E}^{pu} en la partie de l'environnement \mathcal{E}^{e_n} constituée des flux d'énergie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}^{pu} \rightarrow \mathcal{E}^{e_n} \\ (e, f) \xrightarrow{c} \{(q, e), (p, f)\} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

- la classe des processus transformant la partie de l'environnement \mathcal{E}^{e_n} en la partie de l'environnement \mathcal{E}^{pu} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}^{e_n} \rightarrow \mathcal{E}^{pu} \\ \{(q, e), (p, f)\} \xrightarrow{c} (e, f) \end{array} \right. \quad (3.19)$$

- et, enfin , la classe des processus transformant la partie de l'environnement \mathcal{E}^{e_n} en cette même partie \mathcal{E}^{e_n} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}^{e_n} \rightarrow \mathcal{E}^{e_n} \\ \{(q, e), (p, f)\} \xrightarrow{c} \{(q, e), (p, f)\} \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Cet ensemble de quatre types de processus est complet. Il suffit à prendre en compte tous les processus de transformation de l'environnement que nous avons délimité. La démonstration est immédiate; il s'agit là d'un problème de combinatoire, qui se ramène

au dénombrement des différentes applications binaires d'un ensemble de deux éléments (puissance et énergie) dans lui même. La question est de savoir si cet ensemble de classes de processus est une base (au sens mathématique), en d'autres termes de savoir :

- si elles suffisent à former par combinaison tous les processus envisageables, (nous avons vu que la réponse est positive);

- et si cet ensemble est minimal. La réponse à cette dernière question nous est donnée par le tétraèdre d'états.

Une base de processus induite par le tétraèdre.

Sous l'hypothèse que le tétraèdre est une base de relations à partir de laquelle toute relation d'une théorie physique peut être reconstituée, (affirmation que l'on tiendra pour vraie), ce système vu comme un graphe traduit l'ensemble complet et minimal des transformations de l'ensemble des variables généralisées dans lui même. De cet ensemble d'applications de Vg dans lui même, on déduit un ensemble d'applications sur les couples $\{(In, Ex)\} \subset Vg \times Vg$. En d'autres termes, du tétraèdre d'état, on déduit l'ensemble des applications de $\mathcal{E}^e \rightarrow \mathcal{E}^e$ induites par ce dernier. Le tétraèdre étant une base, le système de transformations qu'il induit sur les couples (In, Ex) est une base.

On déduit aisément du tétraèdre de la figure 3.3 le système de transformations de la figure 3.5, portant sur les couples de variables (In, Ex) . Les relations constitutives : $F_1(q, e, C) = 0$, $F_2(e, f, R) = 0$, et $F_3(p, f, I) = 0$, ainsi que l'application identité Id de Vg dans lui même, se traduisent alors par des boucles sur ce système de transformations. L'interprétation de ces chemins de longueur nulle est que les relations concernées ne donnent pas lieu à un processus, en ce sens qu'il n'y a pas en réalité de changements opérés dans \mathcal{E}^e , mais seulement une contrainte observable et respectée par les couples de variables concernées. Ce ne sont rien d'autre que des expressions de propriétés d'une seule et même partie de l'environnement (d'où leur nom de relations phénoménologiques). En d'autres termes, ces boucles correspondent à des vecteurs de translation nuls dans le référentiel Temps-Espace-Forme de la figure 3.2 (ou encore au processus identité dans ce repère).

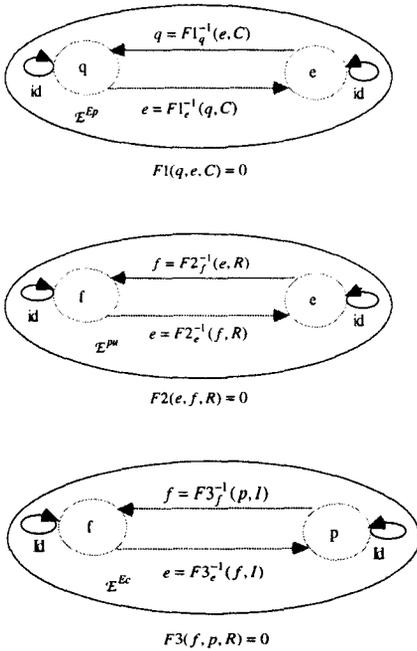


Figure 3.6.a, b, c : les relations constitutives du tétraèdre d'état et l'application identité pour les variables généralisées correspondent à l'application identité pour les couples de variables de types (intensive extensive).

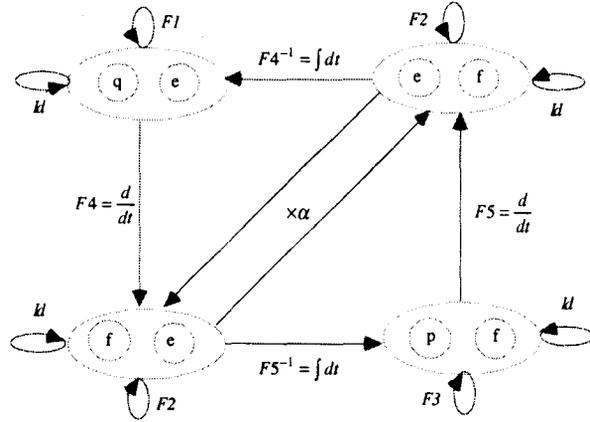


figure 3.5: système de transformations de l'ensemble des couples (In,Ex) de variables généralisées induites par le tétraèdre d'état.

Notation : soit $F(x_1, \dots, x_n) = 0$, une relation acausale des variables x_i , $i = 1 \dots n$, on convient de noter par $F_{x_i}^{-1}$ la relation déduite de F telle que :

$$x_i = F_{x_i}^{-1}(x_k), \quad i, k = 1 \dots n, \quad k \neq i$$

Les figures 3.6.a, b, et c sont des agrandissements des sommets du système de la figure 3.5. Les applications F_i , $i = 1 \dots 5$, du tétraèdre d'état et l'application identité pour l'ensemble des variables généralisées V_g n'étant pas des processus pour les couples (In,Ex), ces relations correspondent à l'application identité de \mathcal{E}^e dans lui-même.

Les autres relations étiquetant les arcs du système de la figure 3.5 sont des relations structurelles. Elles correspondent effectivement à une transformation d'un flux de puissance ou d'énergie en un autre de type puissance ou énergie. On parcourt alors un chemin non nul, qui traduit un processus. On retrouve, correspondant à des processus autres que l'identité pour \mathcal{E}^e , les trois actions : intégrale, dérivée, et proportionnelle (notée $\times \alpha$).

Par repliement des sommets étiquetés (e,f) et (q,e) ou (f,p) correspondant respectivement aux parties \mathcal{E}^{pu} et \mathcal{E}^e de l'environnement \mathcal{E}^e , on déduit aisément le système de transformations de la figure 3.7 de \mathcal{E}^e sur lui-même.

Le tétraèdre d'état induit donc trois classes de processus élémentaires sur les quatre définies a priori (équ. 3.17 à 3.20), qui sont :

- la classe des processus de transformations de puissance en puissance : $\mathcal{E}^{pu} \xrightarrow{\alpha:1/\alpha} \mathcal{E}^{pu}$;
- la classe des processus de transformations de puissance en énergie : $\mathcal{E}^{pu} \xrightarrow{\int dt} \mathcal{E}^e$;
- la classe des processus de transformations d'énergie en puissance : $\mathcal{E}^e \xrightarrow{d/dt} \mathcal{E}^{pu}$.

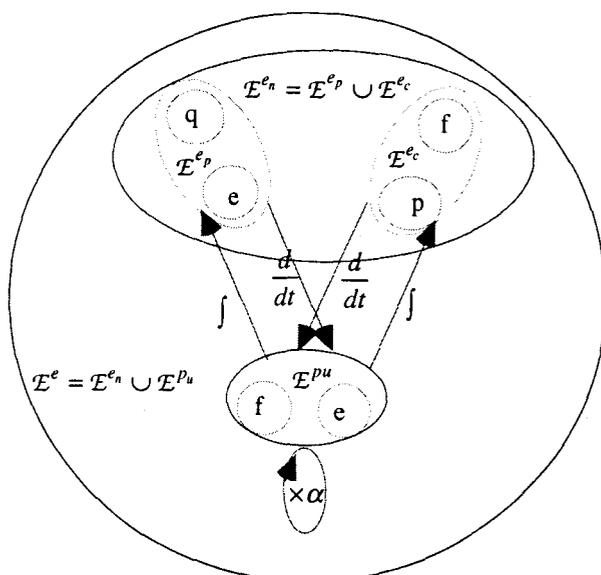


Figure 3.7 : Système de transformations induit par le tétraèdre d'état sur les parties de l'environnement constituées des flux d'énergies et des flux de puissances.

La quatrième classe de transformations définie *a priori* (équ. 3.20) : celle des transformations des énergies en énergies, correspond à un chemin de longueur au moins égale à deux dans le graphe de la figure 3.7. Un processus de cette classe apparaît alors comme une composition de deux au moins des trois processus précédents. Une énergie résulte par exemple : d'une transformation d'une énergie potentielle ou cinétique en une puissance, puis d'une transformation de cette puissance en une énergie potentielle ou cinétique, l'application correspondante est une composition :

$$\mathcal{E}^{en} \longrightarrow \mathcal{E}^{en} \Leftrightarrow \mathcal{E}^{en} \xrightarrow{d/dt} \mathcal{E}^{pu} \xrightarrow{\int dt} \mathcal{E}^{en}$$

On peut donc considérer que les trois processus induits par le tétraèdre d'état constituent une base de processus de transformations de cet environnement autres que l'identité.

IV.2.c. Interprétation en T-E-F processus.

Nous avons identifié trois classes de processus et montré que la quatrième classe envisageable, dans l'environnement des puissances et des énergies, était une composition des trois premières. Ces trois classes de processus constituent donc une base. On déclare ici qu'il y a correspondance bijective de chacune de ces classes avec celles de la décomposition triadique de Lemoigne présentée précédemment.

On rappelle tout d'abord que la dimension d'une énergie est en Newton mètre(3.21) et une puissance en Newton mètre par unité de temps(3.22).

$$Eng \equiv [\mathcal{N}.m] \quad (3.21)$$

$$Pu \equiv [\mathcal{N}.m.s^{-1}] \quad (3.22)$$

E-processus et dérivation d'énergie par rapport au temps.

On voudrait montrer ici qu'une dérivation par rapport au temps d'une quantité d'énergie est un processus de type E.

L'énergie est une grandeur extensive [Pér-93]. Par définition, on peut donc en définir une densité volumique :

$$\rho_{en} = \frac{dEn}{dV} \quad (3.23)$$

où dEn est la quantité d'énergie contenue dans l'élément de volume dV . Etant une grandeur extensive, l'équation de bilan de l'énergie, dans une région R de l'espace délimitée par une surface fermée s et ce entre deux dates prend la forme :

$$\Delta En = \Delta En^r + \Delta En^p, \quad (3.24)$$

où ΔEn^r est la quantité d'énergie reçue à travers la surface fermée s , et ΔEn^p la quantité d'énergie produite à l'intérieur de cette surface durant l'intervalle de temps considéré.

N.B : c'est l'énergie du système au sens de la thermodynamique qui est conservative et non l'énergie mécanique qui ne l'est que dans le cas d'un système isolé.

L'énergie est également une grandeur conservative [Pér-93], en conséquence son bilan se résume à :

$$\Delta En = \Delta En^r, \quad \Delta En^p \equiv 0, \quad (3.25)$$

la quantité d'énergie produite étant identiquement nulle. La forme différentielle de ce bilan entre deux dates t et $t+dt$ est :

$$dEn = \delta En^r \quad (3.26)$$

Par définition, on a :

$$\delta En^r = dt. \int_s J_e \cdot (-n). dS \quad (3.27)$$

où J_e est le courant volumique d'énergie dont l'expression est par définition [Pér-93] :

$$J_e = \rho_{en} \cdot v \quad (3.28)$$

où v est la vitesse de dérive, en $[m.s^{-1}]$, de la grandeur extensive concernée, en l'occurrence l'énergie.

Pour un élément de surface dS , on a :

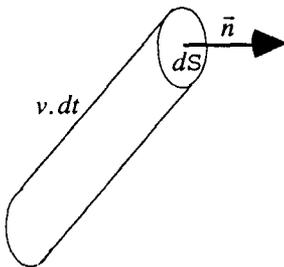
$$\delta En^r = dt. \rho_{en} \cdot v \cdot (-n). dS \quad (3.29)$$

Soit :

$$\frac{\delta En^r}{dt} = \rho_{en} \cdot v \cdot (-n). dS [\mathcal{N}.m.s^{-1}] \quad (3.30)$$

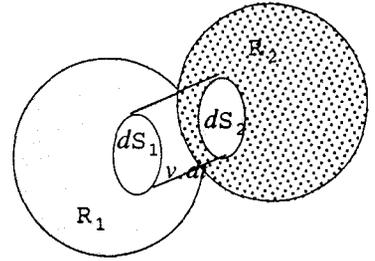
L'existence d'une puissance résultant de la dérivation par rapport au temps d'une énergie, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} Eng = Pu \equiv [\mathcal{N}.m.s^{-1}]$$



Ce processus n'est autre, d'après 3.30, qu'un transport d'énergie $\delta E_{ni} = \rho_{en} \cdot dV_i$ avec une vitesse v_i .

Considérons, par exemple, deux régions fermées R_1 et R_2 de l'espace, ne pouvant communiquer entre elles qu'à travers deux éléments de surface ds_1 et ds_2 d'aires identiques, distantes d'une longueur $dx = v \cdot dt$. On suppose qu'à l'instant t la région R_2 et le volume $dV = v \cdot dt \cdot ds$ entre R_1 et R_2 ont un contenu énergétique nul. Entre les dates t et $t+dt$ la région R_1 cède alors la quantité d'énergie :



$$\delta E_n(x, t)^r = J_e \cdot (-n_1) ds_1 \cdot dt = \rho_{en} \cdot v \cdot (-n_1) ds_1 \cdot dt \quad (3.31)$$

Dans l'hypothèse d'une conduction d'énergie idéale entre les deux régions (pas de dissipation d'énergie), on a alors, entre les dates $t+dt$ et $t+2 \cdot dt$:

$$\delta E_n(x + dx, t + dt)^r = J_e \cdot (-n_2) ds_2 \cdot dt = \rho_{en} \cdot v \cdot (-n_1) ds_1 \cdot dt \quad (3.32)$$

D'après les hypothèses, on déduit que :

$$\delta E_n(x, t)^r = \delta E_n(x + dx, t + dt)^r = J_e \cdot (-n) ds \cdot dt \quad (3.33)$$

On est en présence d'un processus qui, dans le temps, affecte la position spatiale de la quantité d'énergie $\delta E_n(x, t)^r$. Dans le référentiel Temps-Espace-Forme, ce processus se traduit par un vecteur de translation :

$$c = (\Delta T, \Delta E, 0) \quad (3.34)$$

qui n'est autre que le vecteur caractéristique d'un processus de type E (eq. 3.4.a). La composante $\Delta T \neq 0$ s'explique par une vitesse de dérive finie ou un temps de propagation non nul (ce qui est le cas des transports réels).

Par passage à la limite en considérant une processus instantané, on a :

$$\delta E_n(x, t)^r = \delta E_n(x + dx, t)^r \quad (3.35)$$

correspondant au cas limite d'un processus de type E pur de vecteur :

$$c = (0, \Delta E, 0) \quad (3.36)$$

qui n'est autre que le vecteur caractéristique de l'équation (3.4.b).

Une dérivation d'énergie par rapport au temps dans \mathcal{E}^r se traduit donc, dans le repère T-E-F, par un processus de type E :

$$\mathcal{E}^{en} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \mathcal{E}^{Pu} \Leftrightarrow \begin{cases} C = (\Delta T, \Delta E, 0) \\ \text{ou} \\ C = (0, \Delta E, 0) \end{cases} \quad (3.37)$$

Si on idéalise le processus en négligeant le temps le processus prédominant, correspondant à la composante constante entre ces deux

vecteurs, est un processus de transport. Par abus de langage, on convient qu'une dérivation d'énergie par rapport au temps est un processus de type E de vecteur caractéristique $c \approx (0, \Delta E, 0)$.

T-processus et intégration de puissance par rapport au temps.

On considère, une région R de l'espace délimitée par une surface fermée S . A l'instant initial t_0 le contenu énergétique à l'intérieur de cette région est nul. Entre les dates t_0 et t_0+dt le système reçoit une puissance Pu . Le bilan d'énergie dans cette région s'écrit :

$$En(t_0 + dt) = \int_{t_0}^{t_0+dt} Pu . dt \quad (3.38)$$

ou encore, et d'après 3.37 :

$$En(t_0 + dt) = \int_{t_0}^{t_0+dt} \frac{\delta En_0^r}{dt} . dt \quad (3.39)$$

Entre deux dates quelconques t et $t+dt$, on a:

$$\underbrace{En(t + dt) - En(t)}_{\Delta T} = \int_t^{t+dt} \underbrace{Pu}_{\Delta E} . dt \quad (3.40)$$

On est, d'après 3.39 et 3.37, en présence d'un processus, de vecteur caractéristique :

$$c = (\Delta T, \Delta E, 0) \quad (3.40.a)$$

On réécrit cette équation sous la forme suivante :

$$\underbrace{En(t + dt) - En(t)}_{\Delta T} = \int_{t_0}^t Pu . dt + \int_t^{t+dt} \underbrace{Pu}_{\Delta E} . dt \quad (3.41)$$

Elle caractérise le même processus que 3.40. Le cas limite correspond alors au cas d'un système isolé entre les dates t et $t+dt$, la composante ΔE du processus est alors nulle. Ce processus est alors un processus T pur et lui correspond l'équation :

$$\underbrace{En(t + dt) - En(t)}_{\Delta T} = \int_{t_0}^t Pu . dt = En(t) \quad (3.42.a)$$

Le vecteur caractéristique est alors :

$$c = (\Delta T, 0, 0) \quad (3.42.b)$$

N.B : l'équation 3.42.a comporte une ambiguïté due, pour chacun des membres de l'équation, à deux significations du signe "=" en termes de processus. L'équation constituée des deux premiers membres de 3.42.a correspond à un processus, en ce sens qu'il y a transformation d'une puissance en énergie. L'équation :

$$En(t + dt) = \int_{t_0}^t Pu . dt$$

correspond à une application de \mathcal{E}^{Pu} dans \mathcal{E}^e par action intégrale, soit :

$$\mathcal{E}^{pu} \xrightarrow{\int dt} \mathcal{E}^{en}$$

et à un processus de vecteur $c = (\Delta T, 0, 0)$ non nul.

Par contre, l'équation formée des deux membres suivants :

$$En(t + dt) = En(t)$$

n'a pas, à proprement parler, la signification d'un processus, c'est ici l'application identité de \mathcal{E}^e dans lui même, soit :

$$\mathcal{E}^{en} \xrightarrow{Id} \mathcal{E}^{en}$$

correspondant à un vecteur $c \equiv (0, 0, 0)$ identiquement nul. C'est en cela que la notation est ambiguë, car elle pourrait laisser croire à un processus de \mathcal{E}^{en} dans lui même, de vecteur caractéristique non nul, soit une application :

$$\mathcal{E}^e \xrightarrow{c} \mathcal{E}^e$$

correspondant au quatrième type de processus défini *a priori* (eq. 3.20) et dont on a vu qu'il n'est pas de type simple. Le risque est alors de conclure, à partir de l'équation 3.42.a, que ces processus sont de type T et de vecteur caractéristique $c = (\Delta T, 0, 0)$. Ce qui est faux et en contradiction avec le tétraèdre d'état.

Notations : pour lever l'ambiguïté du signe "=" en termes de processus, on réservera ce dernier à des relations d'équivalence ou à l'identité. On préférera, à l'avenir, pour signifier un processus ($c \neq (0, 0, 0)$) le signe " \mapsto " présentant comme avantages de se distinguer du signe "=" et de donner le sens de la transformation. Ainsi :

$$x \mapsto y \Leftrightarrow c \neq (0, 0, 0)$$

Signifie un processus, quand :

$$x = y \Leftrightarrow c \equiv (0, 0, 0)$$

est une relation d'équivalence ou l'identité.

En toute rigueur, d'après 3.41, un processus d'accumulation d'énergie par intégration de puissance par rapport au temps est un processus de vecteur caractéristique $c = (\Delta T, \Delta E, 0)$. Toutefois, là encore le type des processus se définit de manière dynamique. Le processus prédominant, composante constante du vecteur, étant le type T pur il est donc caractéristique de ces processus ; on convient qu'il est celui de ces processus de stockage, soit :

$$\mathcal{E}_T^{pu} \xrightarrow{\int dt} \mathcal{E}_T^E \Leftrightarrow C = (\Delta T, 0, 0) \quad (3.43)$$

F-processus et relation proportionnelle.

L'application notée : $\times\alpha$, regroupe les processus de transformations d'une puissance en une puissance. Ces processus, n'affectent pas le type des objets processés. En conséquence partant de \mathcal{E}^{pu} , ils ne donnent lieu qu'à des applications de \mathcal{E}^{pu} dans lui même, n'affectant que les attributs autres que le temps et la position spatiale. De tels processus répondent à la définition de processus de type F, soit :

$$\mathcal{E}_T^{pu} \xrightarrow{\times\alpha} \mathcal{E}_T^{pu} \Leftrightarrow C = (\Delta T, 0, \Delta F) \quad (3.44)$$

Le cas limite est le processus instantané de type F pur ($C \approx (0, 0, \Delta F)$), considéré par convention comme le type des processus de transformation.

Cas des transactions de type couplage.

Il existe deux types de relations phénoménologiques : les relations constitutives et de couplage. Jusqu' alors, n'a été étudié que le cas des relations de type constitutif, c'est à dire qui conservent la nature théorique des phénomènes (électrique en électrique, thermique en thermique, etc.). Dans le cas où ces relations font le lien entre deux théories au moins, il y a transaction de couplage. Les processus associés opèrent alors uniquement par transformations de flux de puissances d'une théorie \mathcal{T}_1 donnée en flux de puissances d'une autre théorie \mathcal{T}_2 . On note alors l'application correspondante :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{T}_1}^{Pu} \xrightarrow{\times r} \mathcal{E}_{\mathcal{T}_2}^{Pu}$$

où $\times r$ dénote une action de type proportionnel, comportant des paramètres de couplage. Elles donnent lieu à des processus de type F.

$$\mathcal{E}_{\mathcal{T}_1}^{Pu} \xrightarrow{\times r} \mathcal{E}_{\mathcal{T}_2}^{Pu} \Leftrightarrow C = (\Delta T, 0, \Delta F) \quad (3.45)$$

dont le cas limite où $C \approx (0, 0, \Delta F)$ est retenu comme type de ces processus.

Au terme de ce paragraphe, on conclut que cet ensemble de trois processus T, E, et F constitue une base de types de processus énergétiques, puisqu'il y a correspondance bijective entre ces classes de processus et celles induites par le tétraèdre. Si on admet le tétraèdre d'état comme une base, cet ensemble induit a par conséquent les propriétés de complétude (il permet de former tous les éléments de l'ensemble des processus par combinaisons de ses trois éléments) et de minimalité pour l'inclusion.

On définit par extension trois classes de processeurs du même type que le processus dont ils sont le siège. Il existe donc trois types de processeurs élémentaires : des processeurs de type T, E, ou F. Appliquée à la représentation des systèmes dans les différents points de vue, cette typologie de processeurs induit trois classes d'énoncés fonctionnels, trois classes d'organes... La restriction à l'application de cette typologie tient au type des objets processés, les typologies induites ne sont validées que pour les seuls processus opérant sur des flux d'énergies et de puissances. Ces trois classes forment alors un vocabulaire sur le langage de représentation.

IV.3. Généralisation aux processus traitant des flux de matière.

Il peut être intéressant de se placer dans le cadre de systèmes traitant de flux de matières, pour des raisons de pertinence ou de simplification de l'étude. C'est le cas, par exemple, quand la granularité du milieu ne permet pas de se ramener à un milieu continu et où l'étude et la représentation de transferts d'énergies autres que mécaniques n'est pas pertinente, ou encore dans le cas de processus à événements discrets, etc.

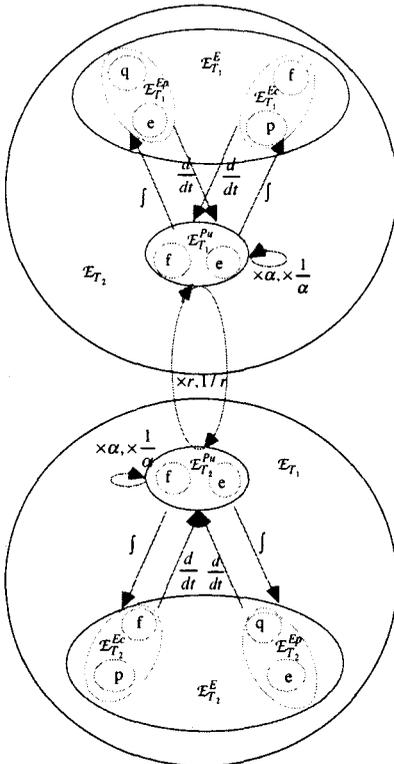


Figure 3.8 : Transactions de couplage entre deux domaines théoriques par transformations de flux de puissances.

Pour généraliser les résultats que l'on vient d'établir pour des systèmes traitant de flux d'énergies aux systèmes traitant des flux de matières, il faut remarquer que les variables de flux et de déplacement font généralement référence à des grandeurs extensives, à des flux physiques tangibles, par exemple :

- à un courant électrique I correspond un flux de charge électrique.
- à un débit volumique Q_v , ou massique Q_m correspond un flux de matière par unité de temps.

De même aux variables de déplacement correspondent généralement des quantités, des stocks, des concentrations des densités de substances et de matières.

Les parties de l'environnement : \mathcal{E}^m constituée de l'ensemble des quantités de matières et de substances et \mathcal{E}^f constituée de l'ensemble des flux de ces matières et substances, sont par nature extensives puisque, s'agissant de quantité de matière, l'on peut toujours en définir une densité massique ou volumique. Ces grandeurs étant extensives il en est de même de leur flux. Le passage de l'environnement $\mathcal{E}^e \subset In \times Ex$ des énergies et des puissances à $\mathcal{E}^m \cup \mathcal{E}^f \subset Ex$, celui des flux et quantités de matière correspond à l'opération mathématique de projection des couples (In, Ex) sur l'axe des variables extensives. Sur la figure 3.9, (dans le cas le plus courant et le plus pertinent pour cette analyse où les variables de flux et donc de déplacement sont des grandeurs extensives), sont représentées par des vecteurs les différents sous-ensembles de paires (In, Ex) de \mathcal{E}^e .

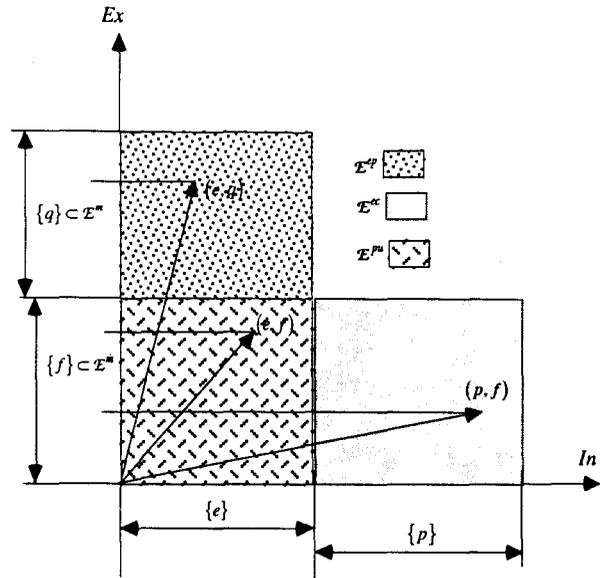


Figure 3.9 : Représentation suivant les axes In , Ex des couples de variables généralisées d'énergie et de puissance, ainsi que leur projection sur l'axe des variables extensives. Ici le cas retenu et le plus courant est celui où les variables de flux et de donc de déplacement se réfèrent à des grandeurs extensives. En conséquence les variables d'effort et d'impulsion sont sur l'axe In .

Les ensembles de chacune des paires de type $:(e,q)$, (e,f) et (f,p) couvrent un domaine précis du plan (In, Ex) correspondant aux différentes parties de \mathcal{E}^e . La projection de chacune des paires sur l'axe des variables extensives est soit une variable de flux soit une variable de déplacement. Ainsi, la projection d'une puissance ou d'une énergie à caractère cinétique est un flux et la projection d'une énergie à caractère potentiel est un déplacement. Les ensembles de chacune de ces projections sur l'axe des variables extensives couvrent un segment de droite correspondant à une des parties \mathcal{E}^m et $\mathcal{E}^{\tilde{m}}$. Ainsi la projection de \mathcal{E}^e sur l'axe des variables extensives, dans le cas où les variables extensives sont les flux et déplacements, est $\mathcal{E}^m \cup \mathcal{E}^{\tilde{m}}$.

En portant sur ce même plan (In, Ex) les vecteurs de translation correspondant à des processus de chacun des trois types sur \mathcal{E}^e dans lui-même, on obtient la figure 3.10 ; y figurent également leurs projections sur l'axe Ex qui ne sont autres que les vecteurs de translation correspondant aux différents types de processus sur $\mathcal{E}^m \cup \mathcal{E}^{\tilde{m}}$ dans lui-même.

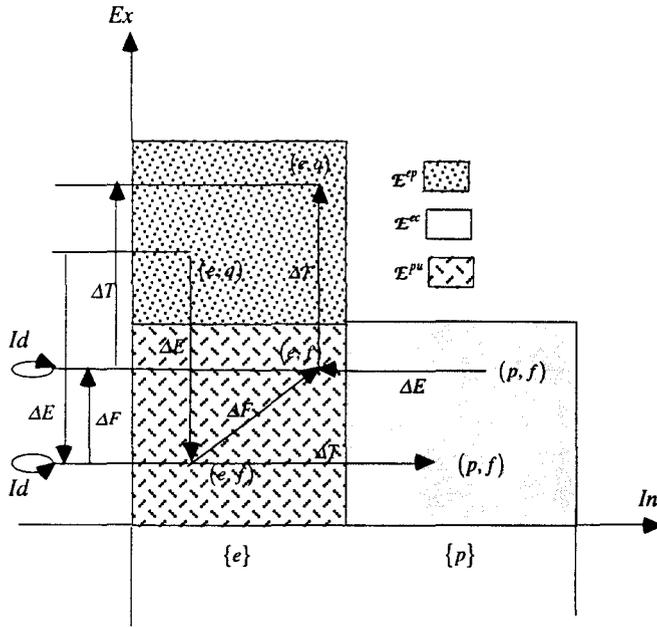


Figure 3.10 : on projette suivant les axes In , Ex les vecteurs de translation correspondant aux trois types de processeurs sur \mathcal{E}^e .

Cette projection sur l'axe des variables extensives induit la même typologie, en T , E , F sur $\mathcal{E}^m \cup \mathcal{E}^m$, que sur \mathcal{E}^e . Les applications correspondantes sont les suivantes :

- Un processus de type T sur $\mathcal{E}^{pu} \rightarrow \mathcal{E}^{ep}$ est une application :

$$\begin{cases} \mathcal{E}^{pu} \xrightarrow{\int dt} \mathcal{E}^{ep} \\ (e, f) \mapsto (e, q) \end{cases} \quad (3.46.a)$$

qui par projection sur l'axe Ex donne l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{E}^m \xrightarrow{\int dt} \mathcal{E}^m \\ (f) \mapsto (q) \end{cases} \Leftrightarrow c = (\Delta T, 0, 0) \quad (3.46.b)$$

correspondant à un processus de type T opérant la transformation d'un flux en un déplacement par intégration par rapport au temps .

-Un processus de type E sur $\mathcal{E}^{ep} \rightarrow \mathcal{E}^{pu}$ correspondant à l'application :

$$\begin{cases} \mathcal{E}^{ep} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \mathcal{E}^{pu} \\ (e, q) \mapsto (e, f) \end{cases} \quad (3.47.a)$$

par projection sur l'axe Ex donne dans \mathcal{E}^m sur lui même :

$$\begin{cases} \mathcal{E}^m \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \mathcal{E}^m \\ (q) \mapsto (f) \end{cases} \Leftrightarrow c = (0, \Delta E, 0) \quad (3.47.b)$$

correspondant à un processus de type E opérant la transformation d'un déplacement en un flux par dérivation par rapport au temps .

Un processus de type F dans $\mathcal{E}^{pu} \rightarrow \mathcal{E}^{pu}$ correspondant à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}^{pu} \rightarrow \mathcal{E}^{pu} \\ (e, f) \xrightarrow{\times\alpha/\times r} (e, f) \end{array} \right. \quad (3.48.a)$$

donne par projection sur l'axe Ex l'application :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}^m \rightarrow \mathcal{E}^m \\ (f) \xrightarrow{\times\alpha/\times r} (f) \end{array} \right\} \Leftrightarrow c = (0, 0, \Delta F) \quad (3.48.b)$$

correspondant à un processus de type F opérant par action proportionnelle $\times\alpha$ (cas mono théorique), $\times r$ (cas multi théorique).

Les projections des vecteurs des processus de type T et E respectivement sur $\mathcal{E}^{pu} \rightarrow \mathcal{E}^{ec}$ et $\mathcal{E}^{ec} \rightarrow \mathcal{E}^{pu}$ sont des vecteurs nuls sur l'axe Ex correspondant à l'identité sur \mathcal{E}^m . Pour s'en convaincre, il faut reconsidérer les actions élémentaires opérées par le tétraèdre sur chacune des variables généralisées des couples (In, Ex) concernées par ces processus.

- Un processus de type T correspondant à l'application :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}^{pu} \rightarrow \mathcal{E}^{ec} \\ (e, f) \xrightarrow{\int dt} (p, f) \end{array} \right. \quad (3.49.a)$$

correspond aux applications de Vg dans lui même suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} Vg \rightarrow Vg \\ \int dt \\ e \mapsto p \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} Vg \rightarrow Vg \\ f = f \end{array} \right. \quad (3.49.b)$$

La première correspond à un chemin de longueur 1 dans le tétraèdre et donc à un processus de Vg dans lui même, alors que la seconde est l'identité et correspond à un chemin de longueur nulle.

La projection sur l'axe Ex se traduit pour l'application (3.49.a) et d'après (3.49.b) par l'application :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}^m \rightarrow \mathcal{E}^m \\ f = f \end{array} \right\} \Leftrightarrow c = (0, 0, 0) \quad (3.49.c)$$

correspondant à un processus de vecteur caractéristique nul et qui n'est autre que l'identité pour \mathcal{E}^m .

Une analyse similaire conclut qu'un processus de type E dont l'application est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}^{ec} \rightarrow \mathcal{E}^{pu} \\ (p, f) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} (e, f) \end{array} \right. \quad (3.50)$$

donne lieu par projection à un processus nul dont l'application correspondante est (3.49.c).

La projection dans l'espace des variables extensives de l'ensemble des énergies et des puissances, induit les trois mêmes types de processus T, E, F mais traitant de flux de matières. Les applications correspondant à ces processus sur $\mathcal{E}^m \cup \mathcal{E}^m$ sont schématisées par le système de transformations figure 3.11; c'est l'analogue pour $\mathcal{E}^m \cup \mathcal{E}^m$ du système de transformations figure 3.7 portant sur \mathcal{E}^e .

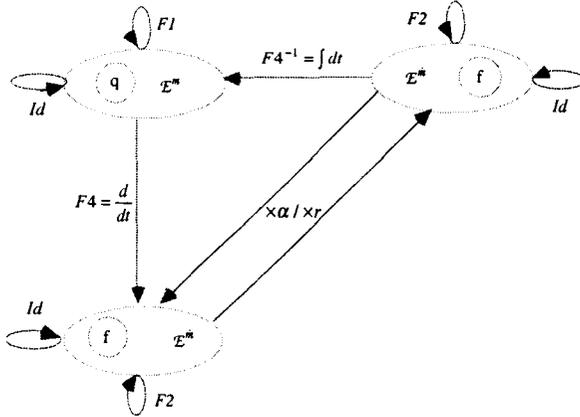
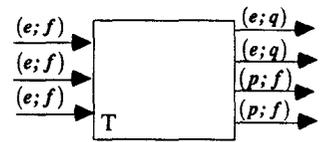


Figure 3.11 : système de transformations de $\mathcal{E}^m \cup \mathcal{E}^m$ sur lui-même ; ce système induit les mêmes classes de processus T, E et F

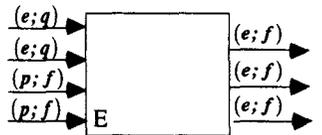
IV.4. Représentation des processus physiques.

Pour la représentation graphique de processus physiques, on se base sur le diagramme d'un processeur dont on ne retient que l'axe horizontal, celui des transactions schématisant ainsi les processus. L'axe vertical quant à lui dépendra du point de vue de représentation suivant les considérations du chapitre précédent.

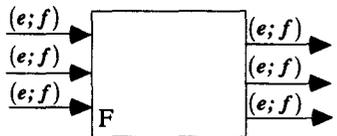


IV.4.a. Processus énergétiques.

Dans le cas de processus traitant exclusivement de puissances et d'énergies, on convient de les représenter comme sur les figures 3.12.a, b et c.



On adopte pour cela les conventions suivantes qui s'inspirent de la sémantique des couples de variables généralisées en termes de puissance et d'énergie :



- on convient de représenter un ensemble puissances par un vecteur tel que celui de la figure 3.13.a ;

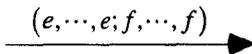


figure 3.13.a

où les couples de variables d'effort et de flux (e_i, f_j) de ce vecteur relevant chacune de la même théorie \mathcal{T}_k , prises parmi les composantes du vecteur de la figure (3.13.a) ont la signification d'une puissance.

Une représentation synthétique équivalente à la figure 3.13.a est par convention :

Figure 3.12 a, b, c : représentations des processus énergétiques de type T, E, F.

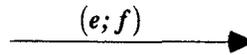


figure 3.13.b

où les caractères gras dénotent des vecteurs.

- de même, on convient de représenter une énergie, respectivement potentielle et cinétique, comme sur les figures 3.14.a et b.

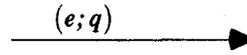


figure 3.14.a

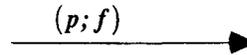


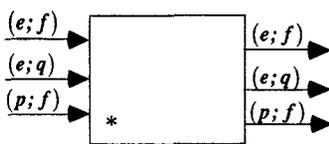
figure 3.14.b

Dès lors les représentations des figures 3.12.a, b, et c des processus T, E, et F, s'obtiennent de la façon suivante :

- d'après l'équation 3.43, un processus de type T consomme des puissances en entrée et produit des énergies en sortie, il vient donc la représentation de ces processus T par la figure 3.12.a :

- en se référant à l'équation 3.37, un processus de type E consomme des énergies en entrée et produit des puissances en sortie, on en déduit la représentation de ces processus E par la figure 3.12.b ;

- enfin, en se rapportant aux équations 3.44 ou 3.45, un processus de type F consommant en entrée des puissances et produisant en sortie des puissances est représenté par la figure 3.12.c.



Les autres processus qui ne seraient pas de type simple seront représentés par des superpositions de diagrammes parmi les trois précédents, comme par exemple celui de la figure 3.15. (Dans les chapitres suivants l'on développera les outils nécessaires pour typer ces processus composés.)

Figure 3.15 : représentation d'un processus quelconque traitant de puissances et d'énergies.

IV.4.b. Processus traitant de la matière.

D'après les développements précédents concernant l'extension de cette typologie aux processus traitant de la matière, on convient de représenter les processus T, E, et F de cette classe de systèmes comme sur les figures 3.16.a, b, et c.

On adopte pour cela des conventions similaires aux précédentes à savoir que :

- un flux de matière est représenté par une flèche étiquetée par un vecteur de variables généralisées de flux tel que :

$$(f, \dots, f) \Leftrightarrow (f) \tag{3.51.a}$$

- et une quantité de matière par un vecteur de variables généralisées de déplacement tel que :

$$(q, \dots, q) \Leftrightarrow (q) \tag{3.51.b}$$

Il vient alors, en se référant aux équations 3.46.b, 3.47.b et 3.48.b respectivement pour les processus de type T, E, et F, qu'une représentation satisfaisante de chacun de ces types de processus est donnée par les figures 3.16.a, b, et c.

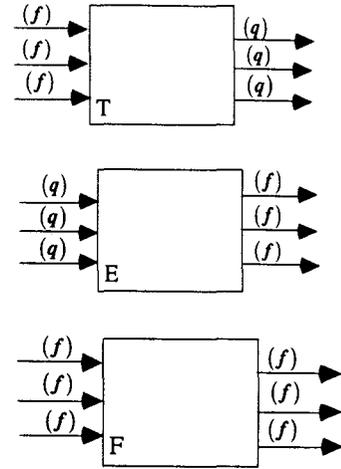


Figure 3.16 a, b, c : représentations des processus de type T, E, F traitant de la matière.

IV.4.c. Processus traitant matières et énergies.

Des cas plus généraux sont ceux de processus traitant à la fois des flux énergétiques et de matières. Leur représentation pour chacun des types simples est alors obtenue par superposition des représentations des types T, E et F de chacune des deux précédentes classes de processus. On obtient alors les représentations des figures 3.17.a, b, et c.

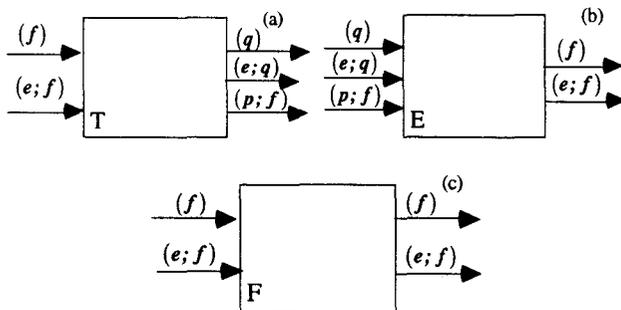


figure 3.17.a,b,et c : représentations des processus T, E, et F, traitant de la matière et de l'énergie.

Ces représentations sont par exemple indispensables pour la description de processus chimiques mettant en oeuvre les quatre types de flux : puissance, énergie, flux de matière, et quantité de matière.

V. Application à la représentation des systèmes

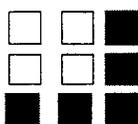
On dispose de trois types de processus T, E, F à partir desquels l'on définit trois types de processeurs et par conséquent autant de

types d'énoncés fonctionnels, d'organes, de dispositifs, etc. Le chapitre 2 a présenté des concepts de modélisation et une méthodologie d'analyse. La quatrième et dernière partie du présent chapitre a pour but d'illustrer l'application de la typologie proposée à ces concepts, par des exemples simples.

V.1. Répercussion sur la démarche d'analyse.

Tout d'abord, cette formalisation nécessite quelques commentaires quant à son application dans le cadre de la méthode proposée et à ses répercussions.

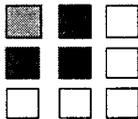
Suite à l'application de la démarche d'analyse et de représentation des systèmes prescrite au chapitre précédent, on dispose, pour un système donné, d'une matrice de points de vue comportant de un à neuf diagrammes de représentation.



L'étape suivante consistera donc à typer en termes de T, E, et F les différents processeurs composant ces diagrammes. Cela suppose que ces processeurs mettent en oeuvre des processus traitant d'énergie et de puissance et/ou de matière. Il apparaît que cette typologie n'est pas applicable aux points de vue du niveau comportemental de la matrice SAGACE. En effet, les cinq points de vue de ce niveau à savoir :

- les trois points de vue opérationnels : *pilotage, gestion, et stratégie*;

- ainsi que les points de vue de la perspective d'intégrité : *mode et configuration*;



sont par nature des points de vue mettant en oeuvre des processus portant sur de l'information. Un *mode* traite de *services* et de leurs *versions*, une *configuration* traite de *ressources* et de leurs *états*, quant aux processeurs des points de vue opérationnels ils consomment de l'information et produisent des décisions. Ces entités : *services, versions, ressources, états, décisions*, sont des informations. Nous n'avons validé la typologie T, E, F que pour les classes des processus énergétiques et traitant de flux de matières. En conséquence, on appliquera cette typologie uniquement aux points de vue comportant des processus de l'une de ces classes. D'après le chapitre précédent, ces points de vue sont ceux des niveaux fonctionnel et structurel qui sont les seuls à présenter des transactions de type énergétique ou matériel.

Il est toutefois possible de typer les processeurs des points de vue du niveau comportemental ; ceci en admettant cette typologie comme applicable aux processus traitant de l'information mais dont la validité ne repose que sur un raisonnement par analogie. On admet alors qu'un processus de type T est une mémorisation d'information, qu'un processus de type E est un transport d'information ou encore une transmission, et enfin qu'un processus de type F est une transformation d'informations qui n'est autre qu'un calcul. Cette typologie se prête alors à la représentation des systèmes informatiques comme ceux traitant de protocoles de communication, etc. Bien que le raisonnement par analogie ait été formalisé par des travaux comme celui de Michel Py [Py-94], il reste le plus décrié des raisonnements mathématiques, en conséquence nous nous restreindrons aux processus traitant matière et énergie. De plus,

l'essentiel des processus informatiques consistant en du calcul ces processus sont de type F. Le typage des processus n'apporte alors que très peu d'information à ces représentations.

Une conséquence immédiate est que, lors d'une analyse similaire à celle du chapitre 2, dans la phase de projection dans la matrice des points de vue, on ne projettera que les parties du système qui traitent de la matière et de l'énergie. En se référant à la quasi-décomposition d'un SAP (au chapitre 2, figure 2.10), on ne projettera alors que la partie opérative puisqu'elle est la seule à traiter ces types de flux. Le système projeté n'est alors plus celui de la figure 2.11 mais celui de la figure 3.18. Le système de décision, au même titre que le système d'information et les opérateurs sont alors des entités extérieures au système projeté et apparaîtront donc comme des processeurs dégénérés dans les différents points de vue. Un corollaire est également que les points de vue opérationnels seront vides, la partie opérative n'assurant aucune tâche de décision.

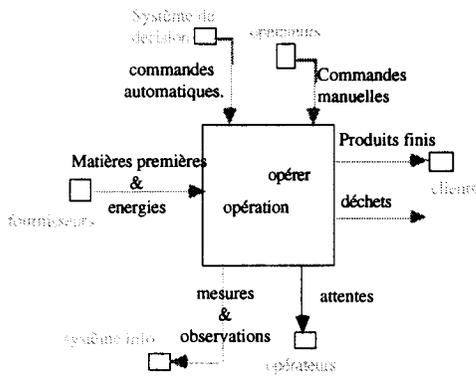


Figure 3.18 : partie opérative du SAP projetée dans la matrice des points de vue.

V.2. Quelques processus simples suivant les flux d'énergie et de puissance.

Supposons qu'un composant de cette partie opérative soit le système hydraulique constitué d'un réservoir et d'une canalisation en sortie de la figure 3.19. Intéressons nous à la représentation des processus dans le point de vue organique, ce qui est généralement la démarche la plus naturelle et la plus simple.

Ce système met en oeuvre des processus des types T, E et F. Il y a, à l'évidence : un processus de type T qui est le stockage de fluide par la cuve, un processus de type E permettant la circulation du fluide, et un processus de type F représentant les pertes de charges introduites par la canalisation en sortie.

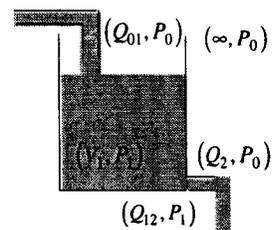
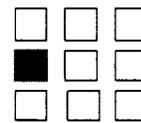


Figure 3.19 : un système hydraulique simple.

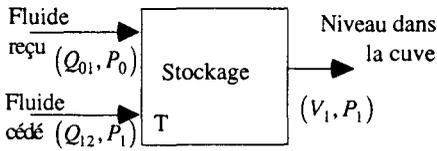


Figure 3.20.a : représentation du processus de stockage mis en oeuvre par le système de la figure 3.19.

Le résultat du processus de type T est une énergie hydraulique accumulée dans la cuve représentée par le vecteur (V_1, P_1) où V_1 est le volume de fluide dans la cuve et P_1 la pression statique au fond de cette cuve. Cette énergie résulte du bilan de l'accumulation des puissances hydrauliques en entrée et en sortie. La puissance hydraulique en entrée correspond au fluide fourni à la cuve en entrée représentée par le vecteur (Q_{01}, P_0) , où Q_0 est le débit en entrée et P_0 la pression du fluide à son admission dans la cuve, c'est également (dans le cas présent) la pression atmosphérique (cuve ouverte). La puissance en sortie quant à elle correspond au fluide cédé par la cuve, elle est représentée par le vecteur (Q_{12}, P_1) , où Q_{12} est le débit en sortie et P_1 la pression du fluide à sa sortie, c'est également celle qui règne au fond de la cuve. La représentation de ce processus est alors celle de la figure 3.20.a.

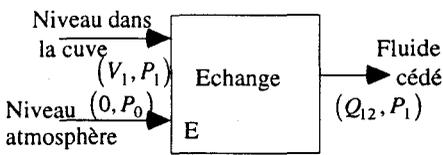


Figure 3.20.b : représentation du processus de type E mis en oeuvre par le système de la figure 3.19.

Le processus de type E, quant à lui est à l'origine du flux de puissance (Q_{12}, P_1) cédée par la cuve. Cette circulation de fluide est due à une différence de niveau d'énergie entre le niveau (V_1, P_1) au fond de la cuve et le niveau $(0, P_0)$ qui est celui du milieu extérieur, de pression P_0 (source de pression). C'est cette différence de potentiel qui tend à accélérer le fluide en sortie. La représentation de ce processus est alors celle de la figure 3.20.b. La forme de cette représentation est duale de celle de la figure 3.20.a.

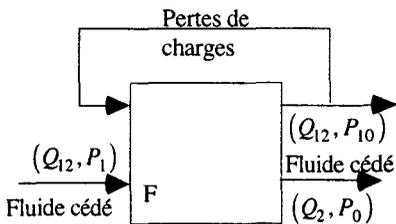


Figure 3.20.c : représentation du processus de type F mis en oeuvre par le système de la figure 3.19.

La représentation du processus F dû à la restriction hydraulique de la canalisation est celle de la figure 3.20. c. Cette représentation nécessite plusieurs remarques. Tout d'abord, les flux (Q_{12}, P_1) et (Q_2, P_0) , respectivement en entrée et en sortie du processus F, correspondent au même flux matériel à savoir le fluide cédé par la cuve ($Q_{12} = Q_2$), mais à deux flux énergétiques distincts : à l'entrée de la canalisation (donc à la sortie de la cuve) ce fluide à une puissance (Q_{12}, P_1) et une puissance (Q_2, P_0) à la sortie de la canalisation. Ensuite et contrairement à ces deux derniers flux, le flux (Q_{12}, P_{10}) représentant les pertes de charges est un flux purement énergétique ne correspondant par conséquent à aucun flux matériel.

Enfin, on aura noté que ce dernier flux est rebouclé à l'entrée du processus, ce rebouclage traduit, d'un point de vue énergétique, une contre réaction. Les flux (Q_{12}, P_{10}) et (Q_2, P_0) dépendent bien évidemment de (Q_{12}, P_1) , mais (Q_2, P_0) dépend également de la perte de charge (Q_{12}, P_{10}) . Pour s'en convaincre, il suffit de considérer une section de canalisation variable (cas d'une vanne). On est ici dans un cas analogue à une contre réaction en tension en électricité. (On verra une justification en termes de causalité des équations quantitatives dans le dernier chapitre).

A partir des trois précédentes représentations, on construit aisément la représentation du processus global de la figure 3.20.d.

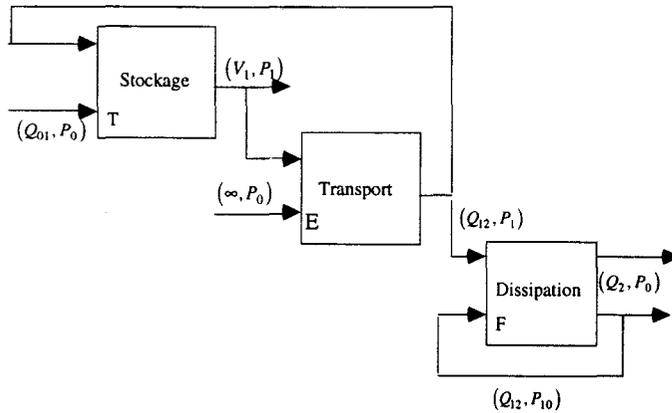


Figure 3.20.d : représentation du processus global mis en oeuvre par le système de la figure 3.19.

On complète cette représentation en portant sur le diagramme les flux d'interaction. D'après l'analyse du chapitre 2, s'agissant d'une représentation organique, ces flux d'interaction sont : des contraintes technologiques et les commandes des actionneurs ; les attentes concernent le fonctionnement des organes, ce sont également des observations et mesures sur ces derniers.

Sur les processus de la figure 3.20.d aucun processus n'est commandé, cet organe ne comportant aucun élément actif de type actionneur ; on ne trouvera pas donc pas de signaux de contrôle en provenance du système de décision ou des opérateurs. Par contre l'on peut envisager des contraintes technologiques comme par exemple un volume maximum à ne pas dépasser ceci pour éviter le débordement de la cuve, une section minimale pour le canalisation de sortie ceci afin d'introduire une perte de charge suffisamment faible. En attente on trouvera essentiellement les grandeurs que l'on souhaite observer, par exemple la hauteur de fluide dans la cuve pour en déduire le volume ainsi que la pression au fond de celle-ci, le débit en sortie, l'obstruction de la canalisation etc. Une représentation organique de ce système est alors celle de la figure 3.21.a .

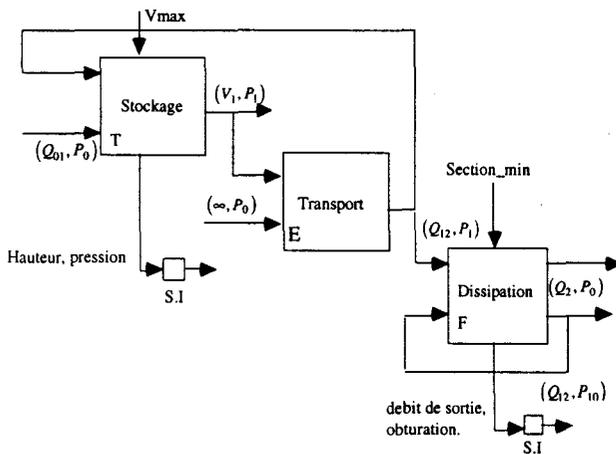


Figure 3.21.a : représentation organique du système de la figure 3.19.

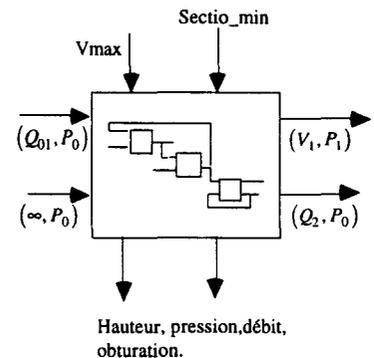


Figure 3.21.b : représentation de l'organe de la figure 3.19 à un niveau de décomposition moindre.

L'organe physique complet de la figure 3.19 est alors représenté au niveau d'abstraction supérieur par le diagramme de la figure 3.21.b. Il n'est d'aucun type simple. (Les développements des chapitres ultérieurs nous permettront des représentations, à un niveau d'abstraction quelconque, typées en T, E, F). Il apparaît qu'un réservoir muni de ses canalisations n'est pas simplement un processeur de type T, mais un réseau de processeurs de types simples.

Considérons maintenant un système plus conséquent celui de la figure 3.22, et intéressons nous à sa représentation organique. Il est constitué de deux réservoirs CU_i , de six vannes VN_{ij} , d'une pompe PP, et de canalisations constituant deux sous ensembles : un collecteur Col et un répartiteur Rep, respectivement en amont et en aval de la pompe. Chaque vanne est analogue à une canalisation introduisant des pertes de charges mais dont la section est variable et commandée. Chacun de ces organes sera représenté par un diagramme analogue à celui de la figure 3.20.c à ceci près que l'on portera en contrainte le signal de contrôle de l'ouverture de la vanne. La pompe est par son action de représentation analogue à celle d'une vanne ou d'une canalisation ; au lieu d'introduire une perte de charges elle introduit un gain de charges, ce changement de signe ne remet pas en cause la représentation de cette pompe. Elle sera par conséquent représentée par un diagramme de forme analogue à celle d'une vanne, la contrainte étant le signal de commande de cette pompe.

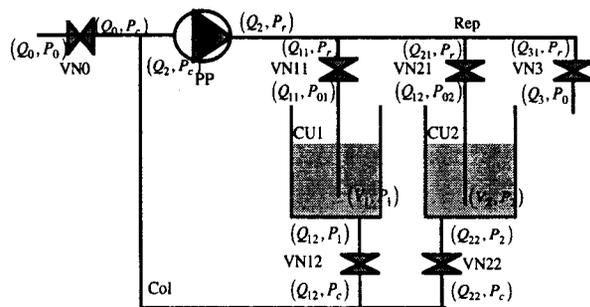


Figure 3.22 : un système hydraulique.

Les sous-ensembles $\{CU_1, VN_{12}\}$ et $\{CU_2, VN_{22}\}$ constitués d'une cuve et de sa vanne de sortie sont des sous-ensembles organiques de représentations analogues au diagramme de la figure 3.20. La représentation des sous-ensembles accumulateurs $AC_i = \{VN_{i1}, CU_i, VN_{i2}\}$ constitués d'une cuve CU_i munie de leurs vannes d'entrée VN_{i1} et sortie VN_{i2} est celle de la figure 3.22.a.

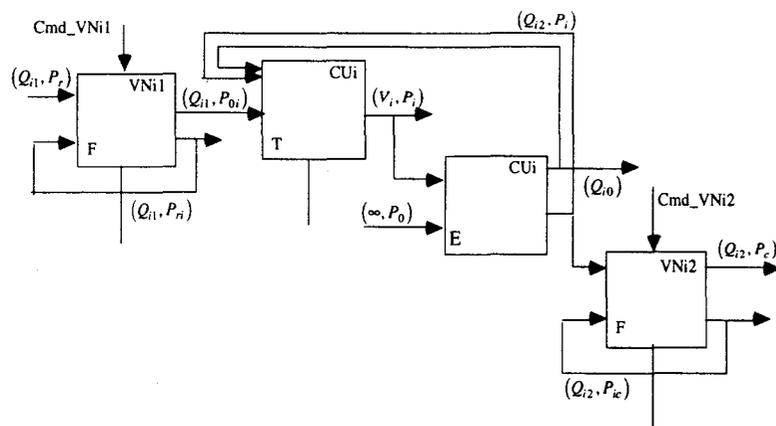


Figure 3.22.a : représentation organique des sous-ensembles accumulateurs $AC_i = \{VN_{i1}, CU_i, VN_{i2}\}$.

Sur ce diagramme, pour $i=1,2$, les vecteurs (Q_{i1}, P_{ri}) et (Q_{i2}, P_{ic}) sont les pertes de charges introduites respectivement par les vannes d'admission VN_{i1} et de sortie VN_{i2} , les signaux Cmd_VN_{i1} et Cmd_VN_{i2} sont les signaux de commande de ces vannes. Quant aux flux (Q_{i0}) ils représentent les pertes de fluide par évaporation ; ce sont des flux matériels. En toute rigueur, il faudrait prendre en considération les températures des fluides dans chacune des cuves et celle de l'atmosphère et représenter les phénomènes de changement de phases. On remarquera que les cuves sont représentées par deux processus de type T et E, or l'on convient généralement que ce sont des organes de stockage donc de type T. Cette remarque n'est pas sans rappeler la démonstration des paragraphes précédents qui aboutit à la conclusion qu'un processus de stockage est en toute rigueur caractérisé par un vecteur $c = (\Delta T, \Delta E, 0)$ (cf. équation 3.40.a) et que c'est par passage au cas limite que le vecteur caractéristique devient $c = (\Delta T, 0, 0)$ (cf. équation 3.42.b).

On peut également procéder à une simplification de la représentation de la figure 3.32.a en regroupant les processus E de CU_i et F de VN_{i2} , on obtient alors un autre processus dont la forme est celle d'un processus E. De plus, étant donnée l'égalité, notée symboliquement :

$$(Q_{i2}, P_i) = (Q_{i2}, P_c) + (Q_{i2}, P_{ic}),$$

et qui exprime l'égalité de ces sommes de puissances, on peut reboucler sur le processus T les deux flux de puissance : (Q_{i2}, P_c) et (Q_{i2}, P_{ic}) , en sortie du processus F, au lieu du flux de puissance (Q_{i2}, P_i) , en sortie du processus E. La représentation simplifiée est alors la suivante :

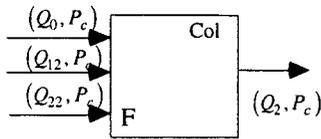


Figure 3.23.b : représentation du processus de collecte.

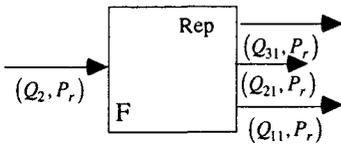


Figure 3.23.c : représentation du processus de répartition.

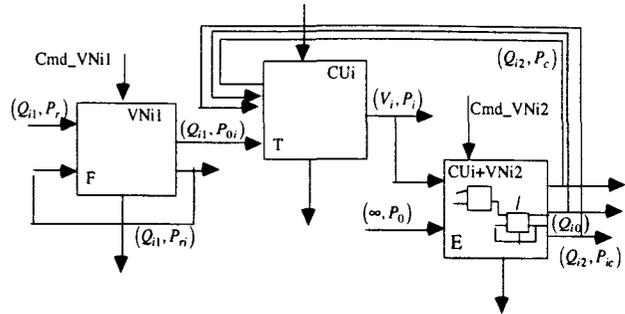


Figure 3.22.b : représentation équivalente des blocs ACi de la figure 3.22.a

Les parties collecteur et répartiteur quant à elles sont représentées par les diagrammes 3.23.b et c. On considère pour cela que les pertes de charges dues aux longueurs des canalisations et aux coudes ainsi qu'à la viscosité du fluide sont négligeables par rapport à celles introduites par les vannes. Le bloc constitué du collecteur, de la pompe et du répartiteur est représenté par la figure 3.23.d, où les flux (U, I) et (Q_2, P_{cr}) sont respectivement la puissance électrique fournie à la pompe et la puissance hydraulique fournie par la pompe pour compenser les pertes de charges. Globalement cet ensemble est représenté par le processus de type F équivalent de la figure 3.23.e. Quant aux flux de commande Cmd_AC_i , pour $i=1,2$, ils sont constitués des commandes des vannes VN_{i1} et VN_{i2} :

$$Cmd_AC_i = \{Cmd_VN_{i1}, Cmd_VN_{i2}\}$$

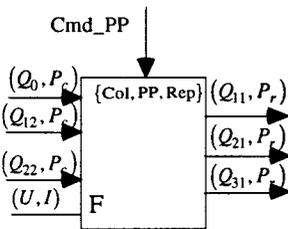


Figure 3.23.e : représentation équivalente à celle de la figure 3.23.d.

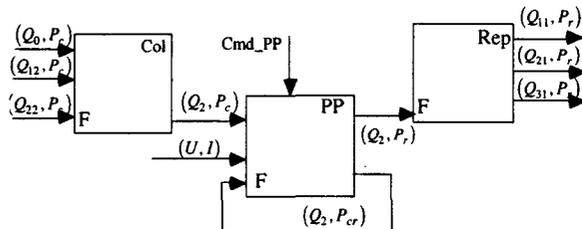


Figure 3.23.d : représentation du bloc constitué de la pompe du répartiteur et du collecteur.

La représentation organique de l'ensemble du système est alors celle de la figure 3.24, où les blocs AC_i sont ceux de la figure 3.22.a (représentés sous une forme agrégée pour simplifier la représentation), et où les flux (Q_0, P_{0c}) et (Q_3, P_{r0}) sont respectivement les pertes charges introduites par les vannes VN_0 et VN_3 .

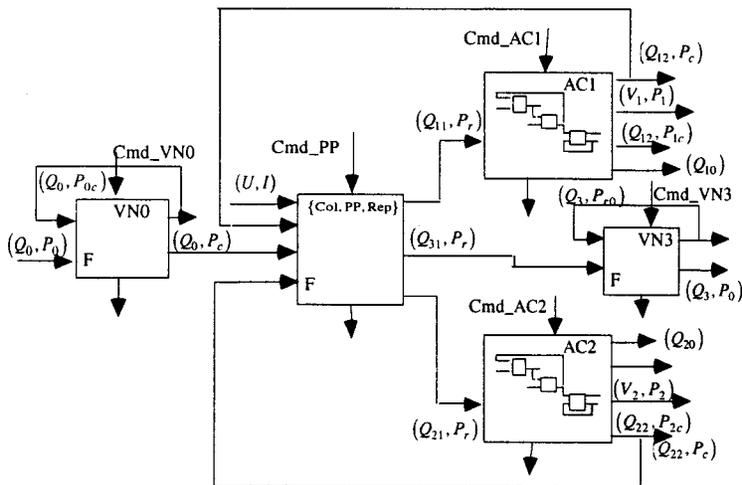
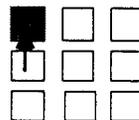


Figure 3.24 : représentation organique de l'ensemble du système de la figure 3.22.

On remarquera que l'utilisation de processeurs typés fait que suivant l'axe des transactions un certain nombre de motifs sont récurrents rendant les représentations analogues, notamment les séquences : ...T, E, F..T, E, F...

V.2.a.

Représentation fonctionnelle.



On suppose à ce système comme mission principale de constituer des réserves ; mission que l'on subdivise en cinq missions partielles, celles : de stocker le fluide, d'alimenter le système, de compenser l'évaporation, de vidanger les cuves et celle de les nettoyer. Pour établir la représentation, on s'appuiera sur le modèle organique du système dont la représentation fonctionnelle est, dans ce cas, aisément déductible. Au chapitre 2 nous avons établi les différentes représentations de manière indépendante et ensuite vérifié leur cohérence par des analyses croisées. On abordera ici le problème de manière différente ; la représentation organique nous étant donnée, on considère les parties du système censées réaliser telle ou telle fonction pour en déduire le processus mis en oeuvre dans le cadre de chacune des missions du système. On ne se soucie pas pour l'instant de la synchronisation des actions dans le temps (aspect programme).

Prenons par exemple la première des missions : celle de stocker du fluide et supposons que son profil (de mission) est de stocker un niveau donné afin d'obtenir une certaine autonomie. La contrainte est ici le niveau demandé dans les cuves et l'attente est l'autonomie espérée. Le processus mis en oeuvre est celui des cuves, il nous faut par conséquent retenir le processus T pour le stockage et le processus E lié à l'évaporation (Figure 3.22.a). La représentation de cet énoncé fonctionnel est alors (Figure 3.25.a):



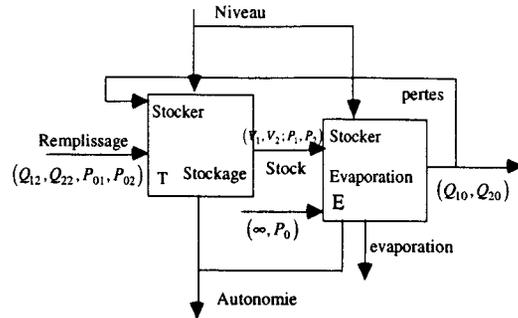


Figure 3.25.a : représentation de l'énoncé fonctionnel lié à la mission consistant à stocker de l'eau.

Le vecteur (Q_{10}, Q_{20}) représente l'ensemble des pertes par évaporation, $(Q_{11}, Q_{21}, P_{01}, P_{02})$ représente les deux flux de remplissage des cuves 1 et 2.

Nous avons évoqué dans le chapitre 2 le fait qu'il était concevable d'associer une ou plusieurs missions à un ou plusieurs processus ; on dispose ici d'un exemple. Sur cette figure, la mission "Stocker" est commune aux deux processus : "Stockage" de type T, "Evaporation" de type E. Le premier énoncé est une fonction : l'association du processus de stockage à la mission "stocker" constitue une fonction puisque le processus contribue à maintenir un niveau constant et à favoriser l'autonomie contrairement au second énoncé (stocker par évaporation) qui est une dysfonction puisque le processus d'évaporation que l'on subit entrave le maintien d'un niveau constant et remet en cause l'autonomie.

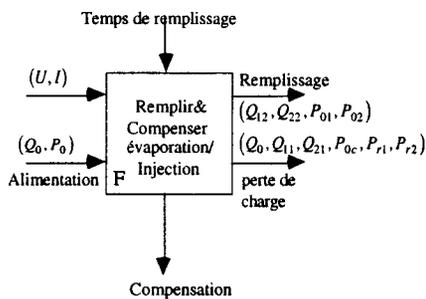


Figure 3.25.b : représentation de l'énoncé fonctionnel lié aux missions d'alimentation et de compensation.

Prenons les deux missions suivantes, celles d'alimenter et de compenser les pertes par évaporation. Pour cela interviennent : la vanne VN0, le collecteur, la pompe, le répartiteur et les deux vannes VN11 et VN21. En se référant à la représentation 3.24 et pour ce qui est des blocs AC_i à la représentation 3.22.a, en parcourant les chemins concernés par ces missions, on déduit le processus associé et l'énoncé fonctionnel de la figure 3.25.b. C'est un exemple d'association de plusieurs missions à un même processus. Le profil de la mission est précisé en contrainte par un temps de remplissage donné, et en attente par des vibrations que l'on voudrait minimales et une compensation de l'évaporation que l'on voudrait optimale. La forme de ce processus est celle d'un type F. Du point de vue de la mission, la partie du processus produisant le flux $(Q_0, Q_{11}, Q_{21}, P_{0c}, P_{r1}, P_{r2})$ (pertes de charges introduites par les vannes) est une dysfonction. Les flux (Q_0, P_0) et $(Q_{11}, Q_{21}, P_{01}, P_{02})$ qui dans le point de vue organique s'interprètent comme des flux de matière et d'énergie, sont dans le point de vue fonctionnel interprétés comme le résultat des services rendus ; ainsi et respectivement, ces flux sont : l'alimentation et le remplissage.

Il est concevable qu'un flux du point de vue organique s'interprète comme plusieurs services distincts dans le point de vue fonctionnel (nous en donnons un exemple ci-après).

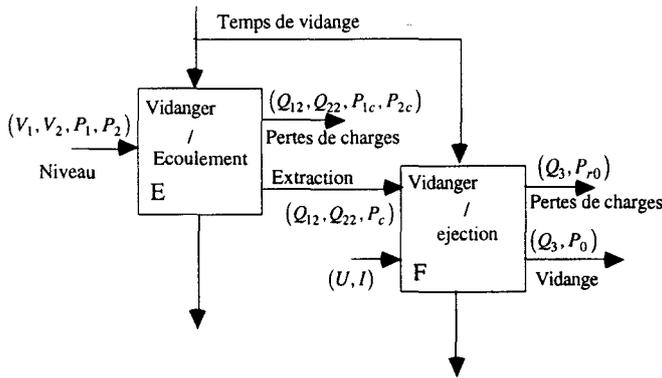


Figure 3.25.c : représentation de l'énoncé fonctionnel de la vidange des cuves.

Une analyse similaire conduit pour la mission de vidange à l'énoncé fonctionnel de la figure 3.25.c. Sont mis en oeuvre : les vannes de sortie de cuves VN12 et VN22, le collecteur, la pompe, et la vanne VN3. En parcourant les chemins dans les diagrammes du réseau organique, on identifie deux processus de type simple liés à cette mission. On remarquera que le flux (U, I) , qui dans le réseau organique est la puissance fournie à la pompe, est dans le point de vue fonctionnel interprété comme deux services distincts l'un est la puissance de l'alimentation (figure 3.25.b) l'autre celui de la vidange (figure 3.25.c).

La mission de nettoyage quant à elle nécessite un apport de fluide dans les cuves et une vidange. D'après ce qui précède et d'après les diagrammes du réseau organique, on a l'énoncé fonctionnel du nettoyage donné par la figure 3.25.d. On précise la mission en contrainte par une consommation que l'on veut minimale et en attente par une propreté des cuves.

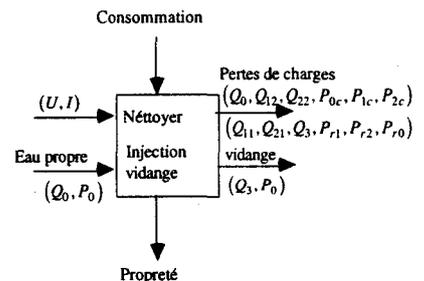


Figure 3.25.d : représentation de l'énoncé fonctionnel de la mission de nettoyage des cuves.

A partir des différents énoncés que l'on vient d'établir, on construit la représentation fonctionnelle de la figure 3.25.e. Cette représentation n'est qu'une des représentations possibles du point de vue fonctionnel. Cet exemple à le mérite de montrer que les représentations : organique et fonctionnelle, sont deux représentations d'aspects pertinents du système qui peuvent être distinctes et dont on ne peut faire l'économie. Dans ce cas, on a bénéficié de la relative simplicité de ce système qui rend aisée la déduction de la représentation fonctionnelle de la représentation organique. C'est souvent le cas pour les systèmes techniques artificiels tels que les S.A.P, mais il est entendu que ce n'est pas le cas général.

Nous nous sommes placé ici dans une démarche d'analyse ; partant du modèle organique et pour une mission donnée, on déduit le processus mis en oeuvre par le réseau organique. C'est en quelque sorte une démarche qui répond (partiellement) à la question de savoir comment la structure organique contribue à la réalisation de ses fonctions. Le processus mis en oeuvre dans le point de vue fonctionnel résulte du sous-réseau de processus de la partie du modèle organique supportant la mission considérée. Parmi les différentes représentations de ces processus, il est alors possible de déduire un processus (un réseau de processus) de type simple dans

$\{T, E, F\}$, équivalent à un réseau de processus. (On se munira par la suite d'outils mathématiques permettant de calculer formellement le processus et son type, on montrera également qu'il existe toujours une représentation équivalente en T, E, F).

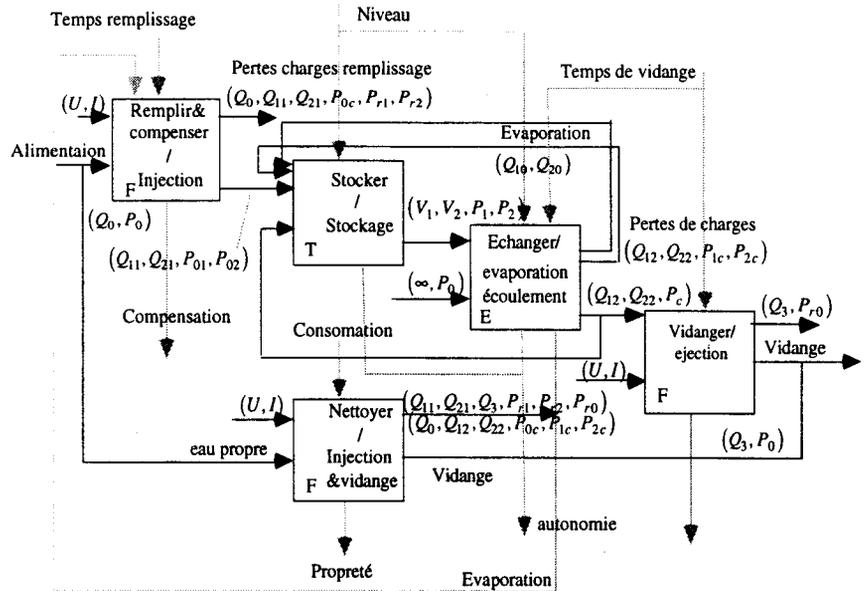
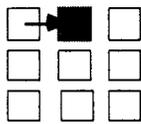


Figure 3.25.e : représentation fonctionnelle de du système de la figure 3.22

A l'inverse, dans une démarche de conception, étant donné une fonction (mission et processus associés), on élaborera un réseau organique tel que le réseau de processus qu'il génère inclut celui de la fonction.

V.2.b.

Représentation par programmes.



Sur ce système (figure 3.22), on peut également envisager une représentation dans le point de vue programme. Pour réaliser ses fonctions, le système effectue un certain nombre de tâches organisées en programmes. On suppose à ce système des tâches : d'injection, d'éjection, et de stockage à partir de l'exécution desquelles le système réalise ses fonctions. Des exemples de programmes pouvant atteindre les objectifs et respecter les contraintes sont donnés ci-après.

Taches d'injection pour le remplissage.

Une stratégie de remplissage des cuves consiste à remplir une cuve après l'autre. On réduit ainsi l'évaporation le fluide présentant alors une surface minimum en contact avec l'air. Le programme est alors représenté sur la figure 3.26.a.

Ce programme comporte deux tâches pour le remplissage de chacune des cuves : *Injection_1* et *Injection_2*, de type F. Sur requête de remplissage, la transition 1 arrête s'il y a lieu la vidange des cuves, quand l'arrêt est effectif la condition $\bar{Vidange}$ est vraie. On procède alors au remplissage de la première cuve par *Injection_1*; ce jusqu'à ce qu'une annulation de la requête de remplissage survienne : $\bar{Remplir}$, ou que la cuve soit pleine : *Niv1_Max*. Le programme se poursuit, toujours sous la condition $\bar{Vidange}$, par un remplissage de la deuxième cuve par *Injection_2* et ce jusqu'à ce qu'une annulation de la requête de remplissage survienne : $\bar{Remplir}$, ou que la cuve soit pleine : *Niv2_Max*. L'arrêt du programme nous ramène à la transition 1 permettant ainsi à de nouvelles requêtes d'être prises en compte. Le programme n'autorisant l'exécution de ces tâches que si la cuve concernée n'est pas pleine, si une nouvelle requête de remplissage survient alors qu'une des cuves est pleine, on évite le débordement de cette dernière. Un cheminement imprévu par les conditions et événements se traduira par un aléa qui redirige le programme vers le système de décision *SD* pour traitement, via le système d'information *SI*.

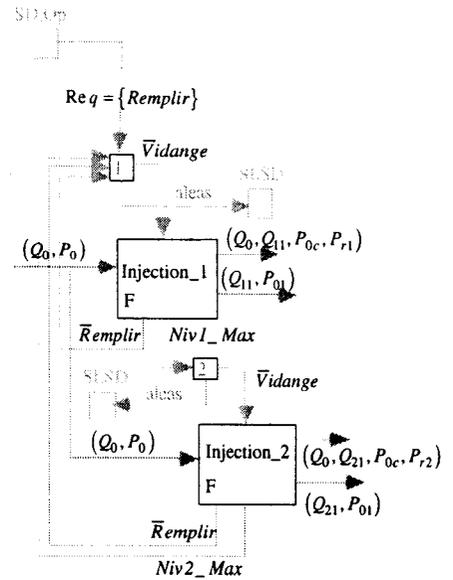


Figure 3.26.a : un exemple de programme pour la réalisation de la fonction de remplissage, satisfaisante du point de vue de l'attente concernant une évaporation minimale.

On vérifie que le processus généré par ce programme au cours du temps est celui nécessité par l'énoncé fonctionnel (*remplir&compenser/injection*), de la (figure 3.25.e).

Tâches d'éjection pour la vidange.

Pour réaliser la vidange des cuves, on exécute le programme de la figure 3.26.b. Ce programme comporte deux tâches : *Ejection_1* et *Ejection_2* de type E. Si la requête de la transition 1 (la même que celle du programme précédent) est une requête de vidange, alors cette transition procède à l'arrêt du remplissage des cuves s'il y a lieu. Quand la condition $\bar{Remplir}$ est satisfaite, on procède à la vidange des cuves par l'exécution simultanée des tâches d'éjection. Deux événements peuvent justifier l'arrêt de ces tâches : une annulation de la requête de vidange ($\bar{Vidange}$), et que les cuves soient vides (respectivement *Vide_1* et *Vide_2*). L'arrêt de ce programme nous ramène également à la transition 1 pour de nouvelles requêtes. Un cheminement imprévu par ces conditions et événements se traduira par un aléa redirigé via le système d'information vers le système de décision pour traitement.

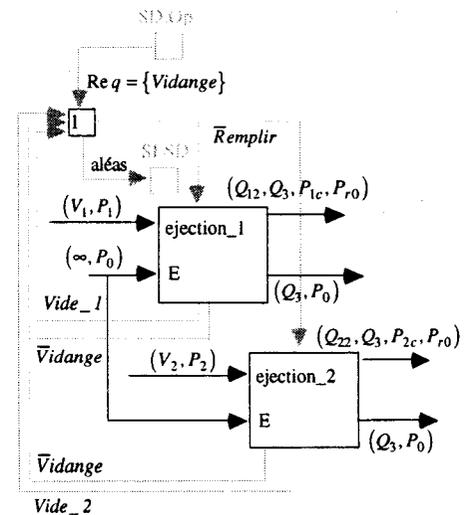


Figure 3.26.b : programme d'éjection pour la vidange des cuves.

Par ailleurs, le processus qui résulte, au cours du temps, de l'exécution de ce programme recouvre ceux des énoncés fonctionnels (échanger/écoulement) et (vidanger/éjection) de la figure (3.25.c).

Programme pour le stockage et la compensation de l'évaporation.

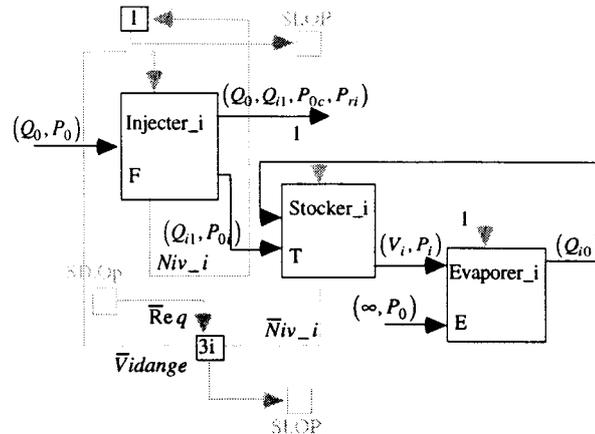


Figure 3.26.c : programme de stockage avec compensation de l'évaporation.

Le programme, celui de la figure 3.26.c, comporte, pour $i=1,2$, les tâches : de stockage, d'évaporation et d'injection, ces dernières (les injections) sont par ailleurs celles du programme de la figure 3.26.a. Ce programme est particulier car les tâches *Stocker* et *Evaporer* qui le composent ne sont effectuées par aucun organe actif (type actionneurs) puisqu'il s'agit des cuves. Toutefois, on peut considérer que le comportement de ces cuves que l'on exploite ici soit équivalent à des tâches dont l'exécution est permanente.

Ainsi à l'occurrence d'une baisse d'un des niveaux \bar{Niv}_i , on procède à la compensation de l'évaporation dans la cuve i par *Injection_i*. La transition $3i$ est alors franchissable si $\bar{Vidange}$ et à condition qu'une requête de vidange ou de remplissage ne soit pas en cours, ce qui se traduit par la requête \bar{Req} sur cette transition (complémentaire de Req sur la transition 1). Dans le cas contraire si une requête de remplissage est en cours il y aurait redondance de cette requête avec la compensation, et si une vidange est en cours la compensation n'a plus lieu d'être. L'injection est exécutée jusqu'à ce que le niveau dans la cuve i soit rétabli : Niv_i ; ce qui nous ramène à la transition 1 pour de nouvelles requêtes. Les tâches *Stocker_i* étant toujours actives cela garantit une prise en compte immédiate des événements \bar{Niv}_i , on s'assure ainsi une bonne compensation de l'évaporation.

Ce programme, pour $i=1,2$, satisfait au cours du temps, en termes de processus, aux besoins des énoncés fonctionnels : (*Stocker/stockage*) et (*compenser/injection*) de la figure 3.25.e.

Programme pour le nettoyage des cuves.

Le programme exécuté pour le nettoyage des cuves est celui de la figure 3.26.d. Il met en oeuvre les tâches d'injection et d'éjection des programmes précédents mais avec un contrôle différent. Ici, à l'occurrence d'une requête de nettoyage : Net , sur la transition 4, à la condition $\bar{Vidange}$, l'exécution des tâches d'injections est simultanée et ce jusqu'à ce que la requête de nettoyage soit annulée ou que les niveaux dans les cuves fixés pour ce nettoyage : Niv_{net_1} et Niv_{net_2} , soient atteints. A l'occurrence de ces deux événements, la

transition 5 est franchie si une requête Net est toujours formulée et à la condition $\bar{Remplir}$. On procède alors à la vidange des cuves par l'exécution simultanée des tâches d'éjection, ce jusqu'à ce que les deux cuves soient vides.

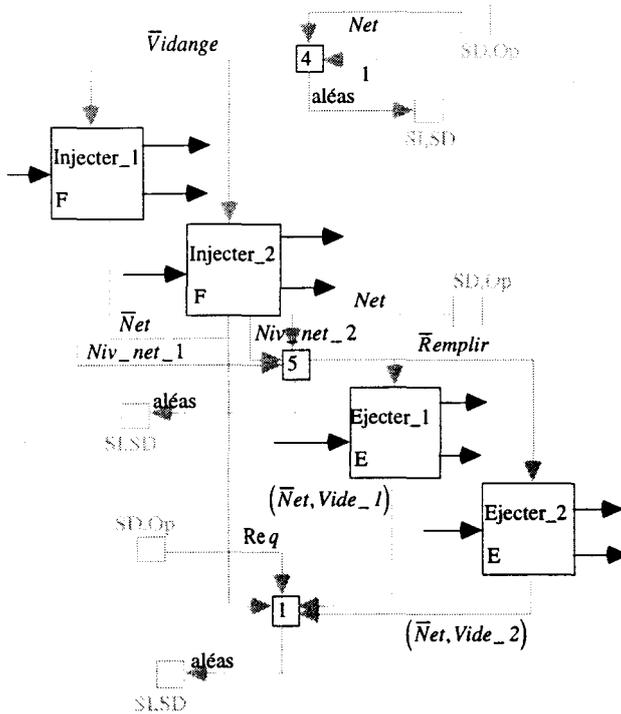


Figure 3.26.d : représentation du programme de nettoyage. Sur cette figure les transactions sont les mêmes que celles des tâches des programmes précédents. Pour alléger la représentation elles ne sont pas étiquetées. On se reportera pour cela aux figures 3.26.a,b,c.

A partir des différentes représentations des programmes, on construit aisément, par superposition des figures, le programme complet de la figure 3.26.e. En ce qui concerne les transactions, on se référera aux programmes précédents. On aboutit à une autre représentation différente de celles des points de vue organique et fonctionnel.

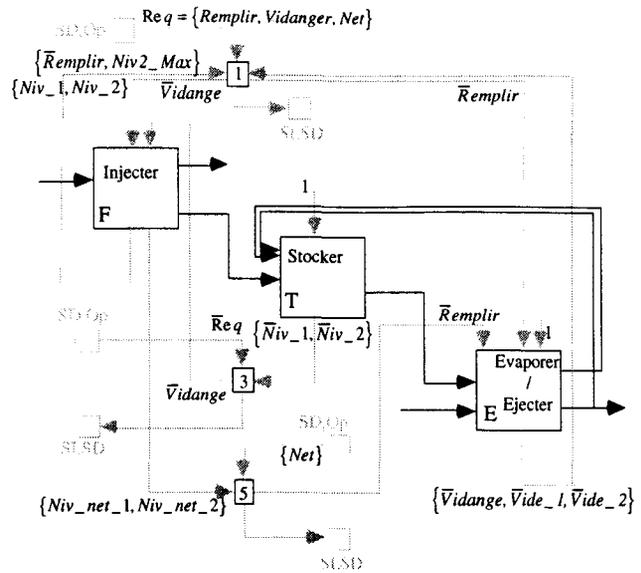
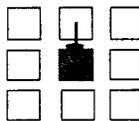


Figure 3.26.e : programme complet de réalisation des fonctions.

V.2.c. Représentation de l'organisation.



Pour chacune des tâches précédentes, il est nécessaire pour le système d'élaborer à partir de ses organes les dispositifs adéquats. Cette description est celle de l'organisation des ressources du système.

Dispositif d'injection.

Pour assumer les tâches d'injection, le système met en oeuvre les organes suivants : la vanne d'alimentation VN_0 , le collecteur Col , la pompe PP , le répartiteur Rep , et les vannes d'admission dans les cuves VN_{11} et VN_{21} . Par ailleurs, les vannes d'extraction VN_{12} et VN_{22} , ainsi que la vanne de vidange VN_3 doivent impérativement être fermées. L'organisation des ressources en dispositifs d'injection est alors représentée par la figure 3.27.a. (Les transactions sont aisément déductibles de ceux des programmes puisque les dispositifs produisent le même processus que celui de la tâche qu'ils réalisent ; pour alléger les représentations, elles ne sont pas représentées ; on se référera en conséquence aux programmes)

Ainsi, à l'occurrence d'une requête en dispositif d'injection $\{Inj_1, Inj_2\}$, la transition 1 procède s'il y a lieu à la fermeture des vannes d'extraction et d'éjection. Les conditions $\{\bar{V}N_{12}, \bar{V}N_3\}$ et/ou $\{\bar{V}N_{22}, \bar{V}N_3\}$ sont alors remplies et la transition 1 peut être franchie. L'élaboration des dispositifs requis est alors en cours. Ils sont disponibles quand respectivement les organes $\{PP, VN_{12}, VN_0\}$ et/ou $\{PP, VN_{21}, VN_0\}$ sont disponibles. Les aléas lors du franchissement de la transition et/ou de l'élaboration des dispositifs sont redirigés vers le système de décision via le système d'information.

Figure 3.27.a : organisation des ressources en dispositifs d'injection.

Dispositif d'éjection.

Une organisation similaire est adoptée pour l'élaboration des dispositifs d'éjection (figure 3.27.b).

Ici, c'est à l'occurrence d'une requête en dispositif d'éjection que la transition 1 est activée. Les conditions de franchissement sont alors que les vannes d'admission et la vanne d'alimentation soient fermées : $\{\bar{V}N_{11}, \bar{V}N_0\}$, $\{\bar{V}N_{21}, \bar{V}N_0\}$. Dans ces conditions le système procède à l'élaboration des dispositifs d'éjection ; ces derniers sont disponibles quand tous les organes qui les composent le sont : $\{PP, VN_{12}, VN_3\}$, $\{PP, VN_{22}, VN_3\}$. Les aléas quant à eux sont redirigés via le système d'information vers le système de décision pour traitements.

Dispositif de nettoyage.

Le dispositif de nettoyage est obtenu par l'élaboration des dispositifs d'injection et d'éjection. D'après les représentations des organisations précédentes, l'on construit aisément l'organisation suivante (figure 3.27.c).

Les dispositifs *Disp_Injec* et *Disp_Eject* sont constitués des dispositifs d'injection et d'éjection précédents et forment à leur tour le dispositif de nettoyage.

V.2.d.

Modes et configurations.

Les représentations précédentes ne sont valables que dans un mode donné et dans une configuration donnée. Il est alors nécessaire de décrire les différents modes et les différentes configurations dans lesquels le système est susceptible de se trouver au cours de son évolution. Pour chacun de ces modes et chacune de ces configurations les points de vue structurels et fonctionnel doivent être analysés et représentés en conséquence. Le système est alors susceptible de présenter autant de représentations par programme différentes qu'il y a de modes et autant de représentations de l'organisation et de représentations organiques qu'il y a de configurations. Il est susceptible ensuite de présenter autant de représentations fonctionnelles qu'il y a de couples de représentations : organiques et par programme. En pratique le nombre effectif de représentations dans les différents points de vue est inférieur car plusieurs représentations par programmes, organisations, organes, etc. sont communes à plusieurs modes et à plusieurs configurations.

Dans le cas présenté et d'après les représentations précédentes, l'on a supposé que le système était dans un mode d'utilisation ou dans un de ses sous-modes (ou modes de marche) dans lesquels les services élémentaires disponibles (qui sont par ailleurs des tâches élémentaires) étaient : Injecter_1, Injecter_2, éjecter_1, ejecter_2, et nettoyer et dans une de leurs versions : nominale ou dégradées. On pourrait envisager un mode dans lequel seuls les services portant sur la cuve 1 sont disponibles, etc.

De même, on a supposé une configuration dans laquelle tous les organes du système étaient dans un état donné autre qu'indisponible. On pourrait envisager une configuration où les vannes de la cuve 1

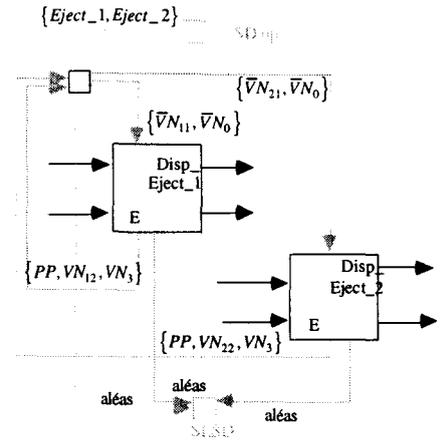


Figure 3.27.b : organisation en dispositif d'éjection.

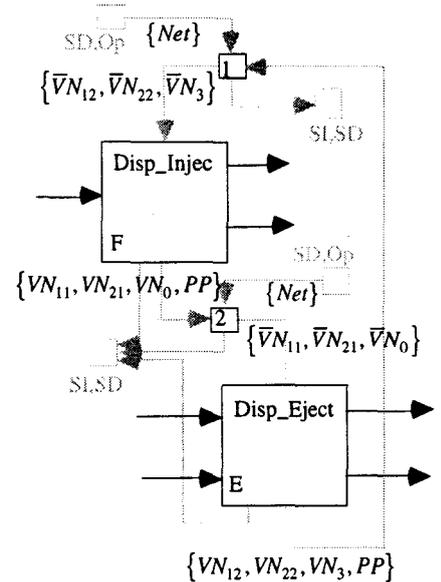


Figure 3.27.c : organisation en dispositif de nettoyage.

sont bloquées, une configuration dans laquelle la vanne VN3 est défaillante, etc.

V.2.e.

Poursuite de l'étude.

La poursuite de l'étude consistera à projeter les systèmes de décision et d'information qui assurent toutes les transitions mais aussi le pilotage, la gestion et la stratégie. On connaît à l'issue de cette analyse un ensemble de données consommées par le système d'information et de décision, et un certain nombre de données fournies par le système de décision (notamment les contrôles des programmes de l'organisation et des ressources). Il reste à décrire les données intermédiaires et leurs traitements.

Ces paragraphes sur la représentation des systèmes n'ont que valeur d'exemples. Ils confirment toutefois le fait que chacun des points de vue est une description pertinente d'un des aspects d'un même système. Il nous enseigne qu'il est possible d'identifier, parmi les processus mis en oeuvre, des processus de types simples et de construire une représentation particulière du système parmi toutes celles possibles. L'utilisation de ce typage des processus est possible à différents niveaux d'abstraction. Ces paragraphes donnent un certain nombre d'exemples de processus de type simple, globalement équivalents à un réseau de processus de types simples. De plus, cette typologie s'avère être un guide pour l'organisation hiérarchique des processeurs : on choisira, lors du passage d'un niveau d'abstraction à un autre (par décomposition/synthèse) une représentation dont les processus sont encore de types simples. Il apparaît également qu'un certain nombre de "motifs" sont récurrents dans les différentes représentations. Des développements ultérieurs consisteront à mettre à jours l'ensemble des "motifs" possibles et à en donner l'expression analytique, les équivalences de types et à se doter d'outils formels et mathématiques pour le traitement systématique des problèmes liés au typage des processus (cf. chapitres 4 & 5).

V.3.

Analyse croisée et vérification de la cohérence.

En l'état, il ne nous est possible de typer que des processus élémentaires ou des réseaux de processus très simples dont le type est aisément déductible de l'observation de la forme du processus global. En conséquence, on supposera pour l'instant que par décomposition hiérarchique on aboutisse à des processus élémentaires de types simples.

Doté des processeurs typés, on peut procéder à des vérifications de la cohérence des représentations complémentaires à celles menées au chapitre 2 (cf. chap. 2, § IV.2. Analyse croisée, règles normatives). Le principe général de ces vérifications consiste à s'assurer de la cohérence des types entre processeurs de points de vue différents. Par exemple, une condition nécessaire pour qu'un organe soit capable de supporter une fonction est que les deux processus mis en oeuvre soient de même type ; on ne s'aurait en effet réaliser une fonction qui nécessite un processus de stockage par un organe mettant en oeuvre un transport. Ce raisonnement est valable entre une tâche et l'énoncé

fonctionnel qu'elle réalise, entre un dispositif et une tâche qu'il exécute, etc.

Ces vérifications portant sur des processeurs typés, les analyses croisées suivant ce principe porteront sur les points de vue structurels et sur le point de vue fonctionnel (seuls points de vue auxquels nous avons convenu d'appliquer le typage des processus).

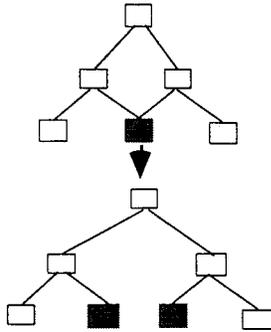
A titre d'exemple, vérifions que les représentations de l'exemple précédent sont cohérentes du point de vue du type des processeurs. Le tableau 3.4 suivant donne la décomposition des processeurs fonctionnels et organiques jusqu'à un niveau où les processus sont de types simples. On vérifie alors que chaque processeur fonctionnel est du même type T, E ou F que celui de l'organe qui le supporte. L'analyse pour la fonction de nettoyage n'est pas poursuivie puisque cette fonction se décompose en les deux sous-fonctions 'Remplir' et 'Vidanger' dont la cohérence est déjà vérifiée.

Fonctionnel	organique	circuit hydraulique			accumulateur i				
	VN_0	Col	PP	Rep	VN_{i1}	Cu_i	Cu_i	VN_{i2}	VN_3
remplir	alimenter	F							
	collecter		F						
vider	injecter			F					
	répartir								
nettoyer	admettre				F				
	stocker					T			
vider	évaporer						E		
	échanger						E		
nettoyer	extraire							F	
	collecter		F						
vider	éjecter			F					
	évaquer								F
nettoyer	répartir								
	remplir								
nettoyer	...								
	vidanger								

Tableau 3.4 : analyse croisée des points de vue organique et fonctionnel.

Ce croisement peut être effectué à différents niveaux d'abstraction quand les types des processus globaux sont encore simples comme c'est le cas dans le tableau 3.5.

	VN_0	Circuit Hydraulique	Accumulateur	VN_3
Remplir	F	F		
Stocker			T	
Evaporer			E	
Vidanger		F	F	F
Nettoyer



Passage d'un graphe de décomposition à un arbre de décomposition par démultiplications des parties communes.

On remarquera que deux processeurs fonctionnels distincts de niveau d'abstraction N peuvent être composés à un niveau $N+1$ d'abstraction moindre de sous fonctions communes. C'est le cas des processeurs "Remplir" et "Vidanger" qui comportent les mêmes sous processeurs "collecter" et "répartir". De même le processeur fonctionnel "nettoyer" se décompose de nouveau en les processeurs "Remplir" et "Vidanger". La décomposition n'est en réalité pas un arbre mais un graphe orienté qui est une représentation plus synthétique. On se ramène à un arbre en démultipliant les parties communes en autant de branches. Cette remarque est bien entendu valable dans les différents points de vue.

Cette analyse confirme également le fait que l'application entre processeurs fonctionnels et processeurs organiques peut être quelconque : un organe peut être associé à une ou plusieurs fonctions, plusieurs fonctions peuvent être supportées par un seul et même organe. Ceci est valable également pour les applications entre les autres points de vue.

Des analyses croisées similaires peuvent être menées en croisant les points de vue fonctionnel et programme, programme et dispositif, etc. (les développements ultérieurs permettront d'étendre la comparaison de types à des réseaux de processeurs).

VI.

Conclusion.

Il est possible d'identifier un nombre limité de classes de processus, et de prouver que cette typologie est une base au sens mathématique du terme (du moins pour les systèmes traitant de la matière et de l'énergie). Cette typologie en T, E, F proposée par Lemoigne est, en se basant sur le tétraèdre d'état du Bond-Graph, effectivement une base. Cette typologie est applicable telle quelle pour la représentation des systèmes dans les points de vue fonctionnel et structurel. Elle est extensible aux points de vue comportementaux mais en se satisfaisant d'un raisonnement par analogie pour la classe des processus informatiques (traitant de l'information). De cette typologie de processus, on déduit des classes de processeurs et par extension des classes d'énoncés fonctionnels, d'organes, de tâches, et de dispositifs.

Les processeurs étant les "mots" de notre langage de représentation, cette typologie permet une structuration de notre "vocabulaire" en qualifiant chacun de ces "mots" en termes de T, E, F.

Cette structuration a pour effet d'obliger l'observateur du système à identifier les processus dont le type est un des trois types T, E, F. On oblige ainsi l'observateur à s'exprimer (en représentant le système) en ces termes et donc à tendre vers des représentations univoques. C'est à l'observateur d'identifier, parmi les représentations possibles, celle(s) dont les processeurs sont de types simples.

Cette typologie, cette structuration des mots de notre langage constitue le niveau 2 de la formation du modèle de représentation proposée.

Elle fournit une aide à l'identification, un critère d'organisation hiérarchique des représentations, ainsi que des critères supplémentaires pour la vérification de la cohérence et la validation des représentations.

La suite des développements porteront sur la formalisation des "motifs" récurrents dans les représentations et des règles d'équivalence de types entre réseaux de processeurs.

CHAPITRE IV

**Vers un langage des systèmes physiques :
définition d'une syntaxe et d'une sémantique**

I. INTRODUCTION.....	113
II. INTRODUCTION A LA THEORIE DES LANGAGES ET SYSTEMES FORMELS.	114
II.1. DEFINITION D'UN ENSEMBLE	114
II.1.1. Ensemble défini par un schéma d'induction [Ben-91].....	115
II.1.2. Langage sur un alphabet : opérations.	115
Concaténation, produit et union de deux langages.....	115
Formalisme équationnel	116
Langage rationnel et automate fini	117
III. REGLES DE COMPOSITION (UNE SYNTAXE).....	118
III.1. UNE PREMIERE APPROCHE	118
III.1.1. Un système de production.	119
III.1.2. Écriture des règles.	119
III.2. VALIDATION DES REGLES PAR LE TETRAEDRE D'ETAT.	120
III.3. DETERMINATION DU LANGAGE.....	120
IV. REGLES D'EQUIVALENCE (UNE SEMANTIQUE).....	121
IV.1. EXPRESSION ANALYTIQUE DES CLASSES D'EQUIVALENCES.....	123
IV.1.1. Classe d'équivalence F	123
IV.1.2. Classe d'équivalence T	123
IV.1.3. Classe d'équivalence E	124
IV.2. CLOTURE DE L'ENSEMBLE $L(G)$	124
V. MISE EN OEUVRE ET APPLICATION A DES EXEMPLES.	126
V.1. VALIDATION SYNTAXIQUE D'UN RESEAU.....	126
V.2. AIDE A L'IDENTIFICATION DE PROCESSUS.	129
V.3. ORGANISATION HIERARCHIQUE DES RESEAUX.	131
V.4. DECOMPOSITION D'UN RESEAU DE NIVEAU N AU NIVEAU $N+1$	131
V.5. AGREGATION DE RESEAUX DE NIVEAU N AU NIVEAU $N-1$	133
VI. CONCLUSION.....	136

I. Introduction.

A l'issue du chapitre 3, ont été définies trois classes de processus et par extension trois classes de processeurs. La représentation d'exemples de systèmes simples a mis en évidence un certain nombre de motifs récurrents. A l'évidence, la composition de ces diagrammes élémentaires que sont les représentations des processeurs de type simple T, E et F, en réseaux ne peut se faire sans respect d'un certain nombre de règles, ne serait-ce que la compatibilité des entrées et sorties des processeurs connectés. Deux processeurs ne peuvent être mis l'un à la suite de l'autre que si les sorties du premier sont du même type (puissance ou énergie, flux de matière ou quantité de substance) que les entrées du second.

Nous avons également entrevu l'existence d'équivalences de type entre réseaux de processeurs. Dans un certain nombre de cas, il nous a été possible de déterminer un type simple parmi {T, E, F} pour le processus global généré par un réseau de processus de type simple.

Ce chapitre a donc pour but d'explicitier ces règles de connexion et de composition de processeurs typés en réseaux de processeurs, ainsi que les classes d'équivalences entre types de réseaux et de les exprimer formellement. Alors que la définition des classes a permis de structurer notre langage, les règles de connexion que nous cherchons à établir font office de syntaxe de ce langage. Quant aux règles d'équivalences elles constituent dans une certaine mesure une sémantique. On entend par là le fait d'être capable d'interpréter en termes de T, E, F une "phrase" constituée de mots de notre langage (ensemble de processus élémentaires composés en un réseau syntaxiquement correct). Ce troisième niveau de formalisation donne au modèle de représentation proposé la flexibilité et la puissance des modèles algébriques [Gree-90].

Nous ferons pour cela appel aux outils et formalismes de la théorie des langages et systèmes formels [Ben-91], dont une introduction est faite dans la première partie. On dispose alors des outils mathématiques permettant d'exprimer formellement ces règles de connexion et de composition à l'aide d'un système d'inductions. Il est dès lors possible de calculer la forme générale de toutes les séquences de processus qui respectent ces règles de connexion. Il nous est également possible de qualifier un réseau de processus comme étant ou non syntaxiquement correct. On dispose alors d'algorithmes d'aide à l'identification de processus et de validation formelle et systématique des représentations d'un point de vue syntaxique, d'aides à l'analyse et à la décomposition ainsi qu'à la synthèse de réseaux. La démarche que nous adopterons dans la seconde partie de ce chapitre, pour établir cette syntaxe est similaire à celle du chapitre précédent en ce qu'elle comporte deux étapes :

- la première consistera en une définition *a priori* de la syntaxe et ce en considérant les flux d'entrée et de sortie des différents types de processus et en envisageant les différentes connexions qui peuvent être effectuées de manière à ce que ces flux soient compatibles;

- la seconde constituera une validation *a posteriori* de la syntaxe obtenue précédemment. Nous nous baserons là encore sur le tétraèdre d'état dont on montrera qu'il induit exactement la même syntaxe.

Dans la troisième partie, il s'agira d'établir des classes d'équivalence entre les éléments de l'ensemble des séquences de processus syntaxiquement correctes calculées dans la seconde partie. Ici aussi la démarche comprend deux étapes :

- dans un premier temps, on définira les sous-ensembles de séquences de processus équivalents du point de vue de leur type à partir de l'observation de la forme de leur représentation. On déterminera ainsi les sous-ensembles des séquences de type T, E et F.

- ensuite, et à partir du tétraèdre d'état et des outils de la théorie des systèmes formels, nous calculerons l'expression analytique des éléments de chacune des classes d'équivalence déterminées précédemment. On dispose alors d'algorithmes pour l'organisation hiérarchique des représentations, d'aides à la décomposition et/ou à la synthèse de processus.

Cette troisième partie s'achèvera par l'étude des propriétés de l'ensemble des processus syntaxiquement corrects ainsi défini, on donnera une autre démonstration formelle du fait que la typologie T, E, F est une base ; on calculera également l'ensemble minimal équivalent à l'ensemble des processus syntaxiquement corrects appelé clôture de cet ensemble.

Dans la quatrième et dernière partie, nous reviendrons sur les exemples traités au chapitre précédent en leur appliquant les algorithmes de validation syntaxique, et d'organisation hiérarchique précédemment élaborés.

II. Introduction à la théorie des langages et systèmes formels.

II.1. Définition d'un ensemble.

En mathématique, on présente généralement deux manières de définir un ensemble. On peut soit exhiber tous les éléments de cet ensemble s'il est fini, soit écrire le formalisme :

$$S = \{x|P(x)\},$$

dans lequel x désigne un symbole générique muet et $P(x)$ une propriété de x . La première façon de définir un ensemble est appelée définition par énumération, la seconde est appelée définition en compréhension de S .

En informatique théorique, il existe deux grandes manières de définir effectivement un ensemble :

- par un algorithme de reconnaissance qui pour chaque candidat fournit une réponse "oui" ou "non" selon que ce candidat appartient ou non à S .

- par un algorithme de production qui calcule des éléments de S .
Un objet est alors élément de cet ensemble s'il est produit en un temps fini.

Le premier procédé caractérise les ensembles récursifs et fonde la théorie des automates [Hop-79]. Le second procédé caractérise les ensembles récursivement énumérables et fonde la théorie des grammaires [Sal-87]. Il repose sur le concept d'induction.

II.1.1. Ensemble défini par un schéma d'induction [Ben-91].

On définit un ensemble par induction, ou par un schéma d'induction en trois phases :

- *phase initiale ou base* : on décide qu'un certain nombre d'objets appartiennent à S . Ces objets forment un ensemble B appelé base (cet ensemble peut être lui même défini par un schéma d'induction);

- *phase inductive ou règles* : il s'agit ici d'énoncer un certain nombre (fini) de règles de production. Une règle décrit comment à partir de k objets de S on peut former sans ambiguïté un nouvel élément de S ;

- *phase de clôture* : cette phase a pour but de délimiter S .

Théorème 4.1 : *l'ensemble S défini par un schéma d'induction est l'ensemble minimal pour l'inclusion qui contient la base et qui est stable par les règles.*

Soit par exemple l'ensemble S défini par :

phase initiale : sa base ;

$$B = \{a, b\} \cup \{\varepsilon\}$$

phase de production : un ensemble de règles ;

$$\mathcal{R}_1 : w \rightarrow wa$$

$$\mathcal{R}_2 : w \rightarrow bw$$

phase de clôture :

$$S = \{w \mid w = b^* a^*\}$$

Cet ensemble est minimal pour l'inclusion et la production à partir des règles d'un nouvel élément donne un élément de la forme $b^* a^*$, cet ensemble est donc stable par les règles. (nous verrons ci-dessous la signification du signe *)

II.1.2. Langage sur un alphabet : opérations.

Concaténation, produit et union de deux langages

Soit V un ensemble que l'on appellera alphabet, cet ensemble est l'ensemble des lettres à partir desquelles on formera des mots d'un langage, V constitue généralement la base de l'ensemble que l'on définit -. Soient a et b deux éléments de V , on forme alors le mot w , concaténation de a et de b , comme suit :

$$w = \text{cat}(a, b) = ab$$

Le mot w est alors élément de l'ensemble V^+ défini comme l'ensemble des mots w formés par concaténation des éléments du vocabulaire V . En d'autres termes V^+ est l'ensemble des chaînes de caractères de longueur $n \geq 1$, dont tous les caractères sont éléments de V . On étend cet ensemble par adjonction de l'élément ε (mot fictif de longueur nulle) à l'ensemble V^* . On a :

$$V^* = V^+ \cup \{\varepsilon\},$$

on a dès lors $n \geq 0$.

La concaténation a comme propriétés :

$$\forall w_1, w_2 \in V^* \quad \text{cat}(w_1, w_2) = w_1 w_2 \in V^*$$

$$\forall w_1 \in V^* \quad \text{cat}(w_1, \varepsilon) = w_1, \quad \text{cat}(\varepsilon, w_1) = w_1$$

$$\forall w_1, w_2, w_3 \in V^* \quad \text{cat}(\text{cat}(w_1, w_2), w_3) = \text{cat}(w_1, \text{cat}(w_2, w_3))$$

L'ensemble V^* muni de l'opérateur de concaténation est donc muni d'une loi de composition interne et à une structure de monoïde libre engendré par V [Gon-95]. On appelle cette opération de concaténation *produit*.

Définition 4.1 : on appelle langage formel sur un alphabet V toute partie de V^* . On suppose V fini et non vide, de sorte que V^* est dénombrable (en bijection avec l'ensemble des entiers).

Soient donc deux langages L et L' sur V . On appelle *produit* de ces deux langages le langage L'' noté :

$$L'' = LL' = \{\alpha / \alpha = \beta\beta'; \beta \in L, \beta' \in L'\}$$

On définit également la somme de deux langages L'' :

$$L' = \{\alpha / \alpha \in L \vee \alpha \in L'\} = L \cup L'$$

On définit pour tout langage L le langage L^k de la manière suivante :

$$L^0 = \varepsilon$$

$$L^k = L^{k-1}L$$

On montre alors que :

$$L^* = \bigcup_{k \geq 0} L^k$$

Formalisme équationnel

Pour des raisons de commodité, et parce que l'on est familier de ce type de formalisme, on notera la concaténation par l'opérateur '.' et l'union par l'opérateur '+'. Ainsi l'expression suivante :

$$L'' = (L \cup L')L$$

définissant un langage L'' sera notée :

$$L'' = (L + L').L$$

On montre que ces opérateurs ont des propriétés similaires à la multiplication et à l'addition dans l'ensemble des nombres réels \mathcal{R} . Par exemple, on a :

$$L' = L.L + L'.L = L^2 + L'.L$$

Le formalisme équationnel introduit, offre des facilités de manipulation des expressions. Une propriété équationnelle remarquable de ces opérateurs est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.2 : Soit deux langages A et B donnés sur un vocabulaire V . On cherche des langages Z sur V qui vérifient l'équation :

$$Z = Z.A + B \tag{4.1}$$

Alors le langage $B.A^*$ est solution de cette équation. Quand $\varepsilon \notin A$ cette solution est unique.

Une règle de production, telle que $\mathcal{R}_1 : w \rightarrow wa$, sera notée :

$$\mathcal{R}_1 : w = wa$$

Langage rationnel et automate fini

Un langage L , engendré sur un vocabulaire V par les opérations de produit, d'itération et d'union, et dont les mots éléments de L peuvent se noter sous la forme d'une expression régulière est un langage dit rationnel. Un exemple d'expression régulière est :

$$a.(b.a^* + c).a.c^*$$

L'ensemble des langages rationnels forme la classe RAT des langages rationnels.

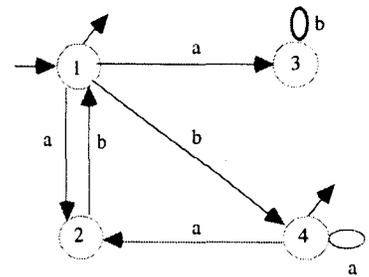
Définition 4.2 : on appelle automate fini, sur l'alphabet (ou le vocabulaire) V , la donnée d'un quintuplet $\mathcal{A} = (V, q, i, t, f)$, où q est l'ensemble fini des états de l'automate, $i \subseteq q$ (et $t \subseteq q$) est le sous-ensemble des états initiaux (terminaux), $f \subseteq q \times V \times q$ est l'ensemble des transitions de l'automate.

Le langage reconnu par l'automate \mathcal{A} est noté $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Ce langage est constitué des mots w tels que les caractères qui les forment sont ceux des étiquettes des arcs de l'automate rencontrés lors d'un parcours de ce dernier et ce dans le même ordre.

Théorème 4.3 : Soit L un langage sur V . les propositions suivantes sont équivalentes :

- L est reconnu par un automate fini déterministe
- L est reconnu par un automate fini non-déterministe
- L est rationnel

On montre que pour un langage rationnel L il existe un automate fini déterministe \mathcal{A} qui reconnaît ce langage. La réciproque est vraie. Cet automate est appelé automate équivalent (l'équivalence de machines à états et des différents types de grammaires est démontrée dans [Hop-79] et dans [Sal-87])



Un exemple d'automate fini. On a :

$$V = \{a, b\}$$

$$q = \{1, 2, 3, 4\}, i = \{1\}, t = \{3\}$$

$$f = \{(1, a, 2), (1, a, 3), (1, b, 4), (2, b, 1), (3, b, 3), (4, a, 2), (4, a, 4)\}$$

III. Règles de composition (une syntaxe)

Nous disposons des notations et outils suffisants pour établir et traiter la syntaxe que nous recherchons.

III.1. Une première approche

Notations : Pour des raisons de commodité et pour alléger les représentations, un flux de puissance sera étiqueté Pu et un flux d'énergie (cinétique ou potentielle) sera étiqueté Eng . On ne renonce pas pour autant aux labels des flux par des vecteurs de variables généralisées auxquels on fera appel si besoin est.

On rappelle la forme générale des différents processus des classes T, E, F par les figures 4.1, a, b et c. Pour établir les règles, on envisage les connexions possibles entre processus de chacun des types en ne retenant que celles qui sont compatibles du point de vue du type des entrées et des sorties des processus connectés.

Il apparaît graphiquement que :

- à un processus de type T produisant des flux d'énergie (de matière) en sortie, ne peuvent succéder que des processus de type E, recevant en entrée des flux d'énergie (de matière);

- à un processus de type F, ne peuvent succéder que des processus de type F ou de type T;

- à un processus de type E ne peuvent succéder que des processus de type F ou de type T.

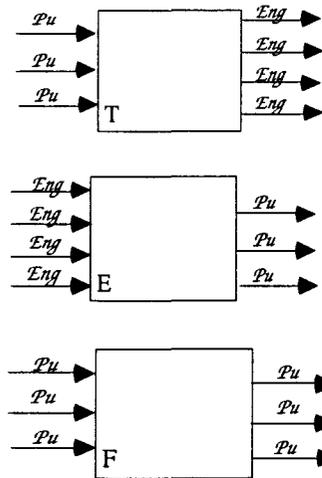


Figure 4.1, a, b, c : représentations des processus énergétiques de type T, E, F.

La dernière solution : connexion des sorties d'un processus de type E aux entrées de processus de type T, sera interdite de façon à ne considérer que des processus de transport réels. En effet, une telle connexion E. T représente, ou signifie un processus de transport d'énergie et/ou de matière vers une région de stockage. Mais le processus E est alors considéré comme idéal, sans dissipation, perte, conversion, transformation d'énergie et/ou de matière d'aucune sorte. Ce cas idéal ne reflète évidemment pas la réalité de tels processus physiques. Nous avons vu au chapitre précédent (cf. chap.3, §.IV.2.3. Interprétation en T-E-F processus.) que le cas limite d'un type E pur revient à considérer une vitesse de propagation infinie. On se contraint alors à considérer et à représenter des processus de transport réels, et donc à ne pas négliger les processus de transformation qui accompagnent les processus de type E. En conséquence, on intercalera toujours entre un processus de type E et un processus de type T, un processus de type F. Dans cette mesure, seule la séquence de processus : E suivi de F, sera autorisée dans un réseau de processus. En admettant que l'on idéalise de tels processus, on peut encore les représenter en intercalant un processus F qui serait l'identité.

Aux règles énoncées précédemment, on ajoute qu'une séquence de processus peut commencer par un processus d'un des trois types.

III.1.1. Un système de production.

On convient de représenter une séquence de processus typés par une chaîne de caractères w constituée de la concaténation des caractères de type de chacun des processus et dans le même ordre que celui des processus dans la séquence. Les caractères qui composent les chaînes w sont donc éléments de $V = \{T, E, F\}$: l'alphabet ou vocabulaire de notre langage. Une chaîne w est alors élément du langage V^+ . L'ensemble des mots w qui représentent les séquences respectant les règles de connexion spécifiées précédemment forme un sous-ensemble particulier de V^+ . Ce langage formé par l'ensemble des chaînes w est calculable à l'aide des outils de la théorie des langages.

Pour cela, à l'aide des notations de la théorie des langages, on traduit les règles de connexion énoncées par un système de production.

Les séquences de processus produites par les règles précédentes sont représentables à l'aide de ces chaînes w comme suit :

- dans une règle l'énoncé d'une séquence de processus est notée à l'aide d'un produit. Par exemple : "un processus de type i suivi d'un processus de type j ", est noté $i.j$ ($i, j \in V$).

- l'énoncé d'une alternative est notée '+'. Par exemple : "un processus de type i ou un processus de type j ", est noté $i + j$ ($i, j \in V$).

- l'énoncé de la production d'un nouveau processus par une règle est noté '='.

III.1.2. Écriture des règles.

La traduction des règles de connexion donne:

- une séquence de processus peut commencer par un processus d'un des trois types T, E, ou F. Cette règle, l'axiome, se traduit par la contrainte suivante sur les mots w :

$$R0 : w = F.w_F + T.w_T + E.w_E \quad (4.2)$$

qui dit qu'un mot w représentant une séquence de longueur k respectant cette règle peut commencer par un des trois caractères de V suivi d'un mot particulier, de longueur $k-1$, noté w_F , ou w_T , ou w_E selon le cas ;

-les successeurs d'un processus de type F sont de type F ou de type T. Cette règle spécifie la contrainte suivante sur les mots w_F précédés d'un caractère F :

$$R1 : w_F = F.w_F + T.w_T + \varepsilon \quad (4.3)$$

le caractère ε est rajouté pour tenir compte de l'arrêt de la séquence quand le processus concerné n'a plus de successeur, caractère que l'on adjoindra à V .

- les successeurs d'un processus de type T sont de type E ce qui donne la contrainte suivante sur les mots w_T :

$$R2 : w_T = E.w_E + \epsilon \tag{4.4}$$

- les successeurs d'un processus de type E sont de type F, soit :

$$R3 : w_E = F.w_F + \epsilon \tag{4.5}$$

Cet ensemble de règles, ce système d'équations, constitue la syntaxe du langage engendré par ces équations. Cette syntaxe est une propriété d'un sous-ensemble particulier de mots w de V^* . Ce sous-ensemble, ce langage, est constitué de l'ensemble des mots w solutions de ce système d'équations. On appellera ce langage ensemble des mots de type des séquences de processus syntaxiquement correctes.

Ces règles sont en accord avec notre intuition qu'un processus de stockage d'énergie (ou de matière) soit suivi d'un processus de transport pour restituer tout ou partie de cette énergie (de cette matière) à son environnement sous forme de puissance (ou de flux de matière); qu'un processus de transport d'énergie (de matière) s'accompagne d'une transformation de ce flux de puissance (de matière) par dissipation (par perte ou transformation), et enfin d'un flux de puissance (de matière) peut subir successivement un nombre quelconque de transformations ou être stocké.

III.2. Validation des règles par le tétraèdre d'état.

On a, en spécifiant cette syntaxe, une propriété remarquable des séquences de processus formées dans le respect d'un certain nombre de règles de connexion. Il nous faut valider cette syntaxe. Pour cela on se base à nouveau sur le tétraèdre dont on montre qu'il induit la même syntaxe.

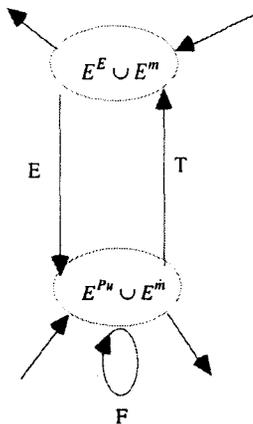


Figure 4.2 système de transition déduit du tétraèdre d'état.

Cet automate reconnaît le langage $L(G)$ sur V que l'on définit par les règles $R3$. Chaque transition de longueur 1 partant d'un sommet i est étiquetée par la séquence que correspondante

III.3. Validation du langage.

Il est possible de calculer la syntaxe de toutes les chaînes de caractères reconnues par cet automate ou cette syntaxe. Cet

En reconsidérant le système de transformations des parties de l'environnement de la figure 3.7 du chapitre 3, et en plaçant sur les transitions le type de processus correspondant, on obtient le système de transition de la figure 4.2. En considérant que les différentes séquences peuvent commencer par un des trois types de processus et en interdisant la séquence de processus E.T, on obtient l'automate à états de la figure 4.3.

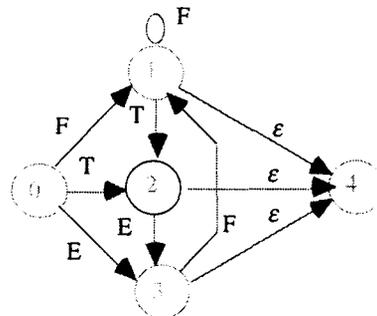


Figure 4.3: système de transitions déduit de 3.1 avec prise en compte des différents points d'entrée et de sortie et interdiction de la séquence E.T.

automate fini reconnaît le même langage que les règles $R0$ à $R3$ précédentes. Chaque chemin de longueur 1 partant d'un sommet i génère la même séquence que la règle R_i .

Détermination du langage.

Il est possible de calculer la syntaxe de toutes les chaînes de caractères reconnues par cet automate ou cette syntaxe. Cet

ensemble définit le langage $L(G)$. Le calcul de ce langage est le suivant :

en remplaçant w_E donné par 4.5 par sa valeur dans 4.4, on a :

$$R2 : w_T = E.(F.w_F + \varepsilon) + \varepsilon \quad (4.6)$$

puis en remplaçant w_T donné par 4.4 par sa valeur dans 4.3, on a :

$$R1 : w_F = (F+T.E.F).w_F + (T.E+T+\varepsilon) \quad (4.7)$$

Cette équation est de la forme $R : z = A.z + B$, pour la résoudre on utilise le théorème 4.3 . En notant $A=(F+T.E.F)$, $B=(T.E+T+\varepsilon)$, $Z = w_F$, une solution de 4.6 est alors $z = A^*.B$. On a donc :

$$R1 : w_F = (F+T.E.F)^*. (T.E+T+\varepsilon) \quad (4.8)$$

$$R2 : w_T = E.(F.(F+T.E.F)^*. (T.E+T+\varepsilon) + \varepsilon) + \varepsilon \quad (4.9)$$

$$R3 : w_E = F.(F+T.E.F)^*. (T.E+T+\varepsilon) + \varepsilon \quad (4.10)$$

La forme générale des mots w de $L(G)$ est , en remplaçant les chaînes : w_F , w_T , et w_E , par leur expression donnée respectivement par 4.8, 4.9 et 4.10 dans 4. 2 :

$$R0 : w = (F+T.E.F+E.F).(F+T.E.F)^*. (T.E+T+\varepsilon) + (T.E+T+\varepsilon) \quad (4.11)$$

En d'autres termes, $L(G)$ est l'ensemble de mots dont l'expression est 4.11.

$$L(G) = \{w / R0\} \quad (4.12)$$

On dira donc d'une séquence de processus qu'elle est syntaxiquement correcte si le mot de type de cette séquence est élément de $L(G)$. Par extension, on dira, d'un réseau de processus, qu'il est syntaxiquement correct si tous les chemins du réseau sont syntaxiquement corrects. On dispose par les règles syntaxiques d'un critère de validation formelle des représentations suivant l'axe des transactions.

IV. Règles d'équivalence (une sémantique).

On peut définir entre les différentes chaînes syntaxiquement correctes des règles d'équivalence. Si on considère une séquence de N processus syntaxiquement correcte, cette séquence est équivalente à un processus global qui reçoit en entrée les flux du premier processus de la chaîne et produit en sortie les mêmes flux que le dernier processus. On dira que le mot de type du processus global est équivalent (égal) au mot de type de la chaîne. On voit par exemple, d'après la figure 4.4 que le mot de type de la séquence T.E est égale au mot de type du processus global soit F :

$$T.E = F$$

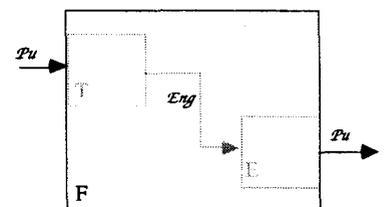


Figure 4.4 : une séquence T.E est globalement équivalente à un processus de type F.



Figure 4.5.a: un exemple de séquence équivalente à un processus de type F

La figure 4.5.a donne un autre exemple de séquence équivalente à un processus global de type simple, on a l'équation :

$$F.F.F = F^3 = F$$

De même la séquence de la figure 4.5.b est équivalente globalement à un processus de type T. Il vient alors l'équation :

$$T.E.F.T = T$$

Il existe toutefois des regroupements de processus n'ayant pas d'équivalent dans V comme c'est le cas pour la séquence de la figure 4.5.c, ou conduisant à une erreur de syntaxe comme c'est le cas du regroupement $E.F=E$ dans la séquence de la figure 4.5.d.



Figure 4.5.b : un exemple de séquence équivalente à un processus T

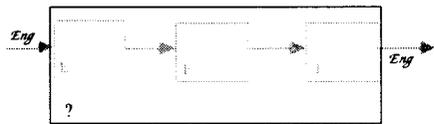


Figure 4.5.c : un exemple de séquence sans équivalent sur V .

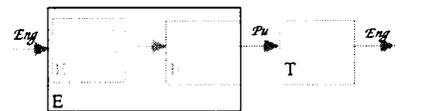


Figure 4.5.d: un regroupement menant à une erreur syntaxique.

On pourrait ainsi multiplier les exemples. Dans le cas général on distingue trois cas remarquables. On définit ainsi trois classes d'équivalences, trois sous-ensembles des mots de $L(G)$. Les règles générales d'équivalence que l'on peut établir sont les suivantes :

- une séquence, de longueur quelconque, consommant en entrée des flux de puissance (et/ou de matière) et produisant des flux de puissance (et/ou de matière) en sortie est équivalente à un processus global de type F, transformant ces mêmes flux d'entrée en ces mêmes flux en sortie (Figure 4.6.a).

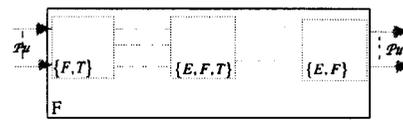


Figure 4.6.a: forme générale des séquences équivalentes à F.

- une séquence, de longueur quelconque, transformant des flux de puissance (resp. de matière) en flux d'énergies (resp. de quantité de matière) est équivalente à un processus global de type T, transformant ces mêmes flux d'entrée en ces mêmes flux en sortie (figure 4.6.b).

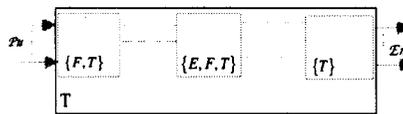


Figure 4.6.b : séquences équivalentes à T.

- une séquence, de longueur quelconque, transformant des flux d'énergie (resp. de quantité de matière) en flux de puissance (resp. de matière) est équivalente à un processus global de type E, transformant ces mêmes flux d'entrée en ces mêmes flux en sortie (figure 4.6.c).



Figure 4.6.c: séquences équivalentes à E.

IV.1. Expression analytique des classes d'équivalences.

Du point de vue des mots w sur le vocabulaire V représentant les séquences de processus, l'expression analytique de chacune des classes d'équivalence est calculée ci-dessous.

Les séquences de processus étant syntaxiquement correctes, les mots correspondant w sont éléments de $L(G)$. Ainsi pour chaque type de séquences équivalentes à un processus T ou E ou F, correspond un sous-système de transitions de G . Ces sous-systèmes sont :

IV.1.1. Classe d'équivalence F

Soit $G_F \subset G$ le sous-système de transitions correspondant aux mots w des séquences équivalentes à F. G_F , donné par la figure 4.7.a, est construit à partir de G suivant les considérations des paragraphes précédents. Le langage reconnu est $L(G_F) \subset L(G)$ calculé par :

$$\begin{aligned} w_0 &= F.w_1 + T.E.w_3 \\ w_1 &= F.w_1 + T.E.w_3 + \epsilon \\ w_3 &= F.w_1 + \epsilon \end{aligned}$$

L'expression générale des mots w représentant une séquence équivalente à un processus de type F est :

$$w_0 = (F + T.E.F)^* . (T.E + \epsilon) + T.E$$

Ainsi on peut écrire , en remplaçant w_0 par sa valeur égale à F, la règle d'équivalence suivante :

$$F = (F + T.E.F)^* . (T.E + \epsilon) + T.E \tag{4.13.a}$$

IV.1.2. Classe d'équivalence T

Le calcul de l'expression de la classe d'équivalence T se base sur $G_T \subset G$ le sous-système de transitions correspondant aux mots w des séquences équivalentes à T. G_T est donné par la figure 4.7.c. Ce système reconnaît le langage :

$$\begin{aligned} w_0 &= F.w_1 + T.w_2 \\ w_1 &= F.w_1 + T.w_2 \\ w_2 &= E.w_3 + \epsilon \\ w_3 &= F.w_1 + \epsilon \end{aligned}$$

dont l'expression générale est $w_0 = ((F + T.E.F)^* + \epsilon).T$. Ainsi, on peut écrire la règle d'équivalence :

$$T = ((F + T.E.F)^* + \epsilon).T \tag{4.13.b}$$

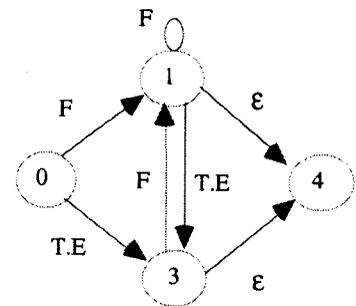


Figure 4.7.a : sous-système $G_F \subset G$ des processus équivalents à F.

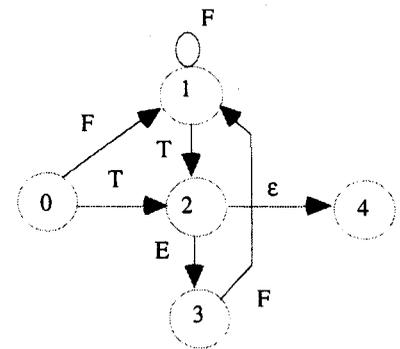


Figure 4.7.b : sous-système $G_T \subset G$ des processus équivalents à T.

IV.1.3. Classe d'équivalence E

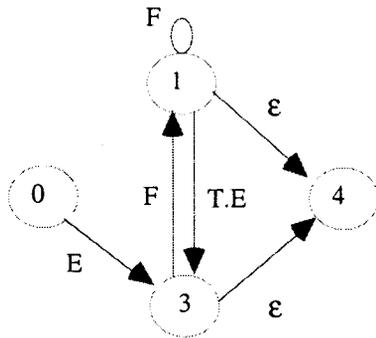


Figure 4.7.c sous-système $G_E \subset G$ des processus équivalents à E.

$G_E \subset G$: le sous-système de transitions correspondant aux mots w des séquences équivalentes à E est donné par la figure 4.7.c. Ce système reconnaît le langage calculé par :

$$w_0 = E.w_1$$

$$w_1 = F.w_2 + \epsilon$$

$$w_2 = E.w_2 + T.E.w_1 + \epsilon$$

dont l'expression générale $w_0 = E.F.(F+T.E.F)^*(T.E+\epsilon)+E$. Ainsi on peut écrire la règle d'équivalence suivante :

$$E = E.F.(F+T.E.F)^*(T.E+\epsilon)+E \quad (4.13.c)$$

Les règles précédentes sont des règles d'équivalence. Leur interprétation dépend du sens de lecture de ces règles. Lues de gauche à droite, elles signifient qu'un processus dont le mot de type est donné par le membre gauche de l'équation se décompose en séquences de processus dont les mots de type prennent une des formes données par le membre droit. La règle d'équivalence des processus de type F dit, par exemple, qu'un processus de type F peut se voir décomposé en la séquence T.E. On note :

$$F \rightarrow T.E$$

De façon réciproque, lues de droite à gauche, ces règles signifient qu'une séquence de processus dont le mot de type est une instance du membre droit de l'équation d'équivalence peut s'agréger en un processus global dont le mot de type est donné par le membre gauche. Par exemple, une séquence dont le mot de type : F.T.E.F.T, est une instance du membre droit de la règle d'équivalence des processus T, peut donc être agrégée en un processus global de type T. On note :

$$T \leftarrow F.T.E.F.T$$

IV.2. Clôture de l'ensemble L(G).

Nous avons défini L(G) par un ensemble de règles de composition des éléments d'un ensemble $V = \{T, E, F\} \cup \{\epsilon\}$. La spécification suivante :

$$V = \{T, E, F\} \cup \{\epsilon\};$$

$$R0 : w = F.w_F + T.w_T + E.w_E;$$

$$R1 : w_F = F.w_F + T.w_T + \epsilon;$$

$$R2 : w_T = E.w_E + \epsilon;$$

$$R3 : w_E = F.w_F + \epsilon;$$

constitue les deux premières phases d'un schéma d'induction qui définit sur V^* l'ensemble L(G). La première donne pour base de cet ensemble $V = \{T, E, F\} \cup \{\epsilon\}$. La deuxième donne comme système de production les règles R0 à R3. La troisième phase, la phase de clôture, consiste à délimiter cet ensemble en calculant l'ensemble minimal pour l'inclusion équivalent à L(G).

En appliquant les règles d'équivalences 4.13.a à c, à la propriété définissant $L(G)$, on a :

$$w \in L(G) \Leftrightarrow w = (\varepsilon + E.F).(F + T.E.F)^*(T.E + T + \varepsilon) + (T.E + T + E)$$

On a :

$$E.F = E \quad \text{en vertu de 4.13.c}$$

$$T.E.F = F \quad \text{en vertu de 4.13.a}$$

$$T.E = F \quad \text{en vertu de 4.13.a}$$

soit :

$$w = (\varepsilon + E).(F + F)^*(F + T + \varepsilon) + (F + T + E)$$

$$w = (\varepsilon + E).F^*(F + T + \varepsilon) + (F + T + E)$$

$$w = \varepsilon + F^* + E.F^* + E.F^*T + F + T + E$$

l'application des règles d'équivalence donne alors :

$$F^* = F \quad \text{en vertu de 4.13.a}$$

$$E.F = E \quad \text{en vertu de 4.13.c}$$

soit:

$$w = \varepsilon + T + E + F + E.F.T$$

L'ensemble minimal équivalent à $L(G)$ se définit donc comme :

$$L(G) = \{T, E, F\} \cup \{E.F.T\} \cup \{\varepsilon\}$$

$L(G)$ est donc équivalent à l'union de sa base $\{T, E, F\}$ et des singletons : $\{E.F.T\}$ l'élément composé, et $\{\varepsilon\}$. $L(G)$ est alors défini par énumération des éléments le constituant.

Chacune des expressions 4.13.a, b, c définit un langage respectivement : $L(G_F) \subset L(G)$, $L(G_T) \subset L(G)$ et $L(G_E) \subset L(G)$. En vertu des règles d'équivalence :

$$L(G_F) = \{F\}$$

$$L(G_T) = \{T\}$$

$$L(G_E) = \{E\}$$

Il vient immédiatement :

$$\left(\bigcup_{i \in \{T, E, F\}} L(G_i) \right) \cup \{E.F.T\} \cup \{\varepsilon\} = L(G) \quad (4.14.a)$$

$$\forall i, j \in \{T, E, F\}, i \neq j \Rightarrow L(G_i) \cap L(G_j) = \emptyset \quad (4.14.b)$$

$$\forall i \in \{T, E, F\} \Rightarrow L(G_i) \cap \{E.F.T\} = \emptyset$$

En conséquence $\{\{T\}, \{E\}, \{F\}, \{E.F.T\}, \{\varepsilon\}\}$ est une partition de $L(G)$.

Corollaire 4.1 : en conséquence quel que soit w , autre que l'élément composé E.F.T : un mot d'une séquence quelconque de

processus syntaxiquement correcte, il existe toujours un préfixe w_i et un suffixe w_j tels que w_i et w_j soient de type simple ou égal à ε .

$$\forall (w \neq E, F, T) \in L(G), \exists w_i \in L(G_i), w_j \in L(G_j), \\ (i, j \in \{T, E, F, \varepsilon\}, i \neq j) \Rightarrow w = w_i \cdot w_j$$

En d'autres termes, il existe toujours une séquence équivalente de niveau d'abstraction supérieur composée de processus de types simples parmi T, E, F ou ε . La réciproque est vraie lors d'une décomposition d'un processus global de type simple ; il existe alors toujours une séquence équivalente de processus de types simples à un niveau d'abstraction inférieur.

Ces corollaires permettront de guider l'organisation hiérarchique des réseaux de processus. Le passage d'un niveau d'abstraction à l'autre se faisant soit par agrégation soit par décomposition des processus, on choisira parmi les décompositions (agrégations) possibles celles qui donnent lieu à des processus de types simples.

Ces règles d'équivalence constituent une sémantique. En effet elles donnent une signification, en termes de type de processus T ou E ou F, aux différentes parties du réseau de processus.

V. Mise en oeuvre et application à des exemples.

L'application des résultats (syntaxe et équivalence) est extensible à tous les points de vue de la matrice SAGACE comportant des processus typés. On dispose de quelques réseaux de processeurs typés donnés au chapitre 3 à titre d'exemples que nous reprendrons ici.

Notations : Pour l'illustration de l'application des résultats que nous venons d'établir, n'est pertinent dans les réseaux de processeurs que l'axe des transactions schématisant les processus et leurs connexions. On ne retiendra en conséquence pour cette étude que la représentation des processus, en faisant l'économie de la représentation des interactions.

Pour des raisons de pertinence également, on ne retiendra pour les flux de transaction que leur type : puissance ou énergie. On utilisera les notations synthétiques : Pu (resp. \mathcal{M}), Eng (resp. \mathcal{M}) pour signifier une puissance (resp. un flux de matière) ou une énergie (resp. une quantité de matière).

V.1. Validation syntaxique d'un réseau.

A l'image des langages de programmation et des techniques de compilation et d'interprétation de programmes, la syntaxe de notre modèle servira pour la validation formelle des réseaux de processus élaborés (et donc de processeurs).

Reprenons le réseau de processus de la figure 3.20.d avec les conventions de représentations données précédemment ; on obtient le réseau de processus de la figure 4.8.a.

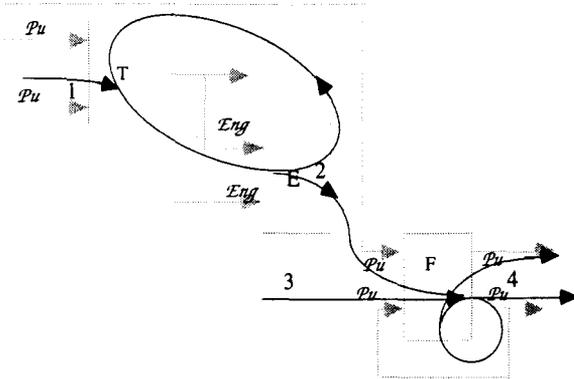


Figure 4.8.a : représentation du réseau de processus de la figure 3.20.d

L'ensemble des chemins que l'on peut parcourir dans ce réseau a été figuré et orienté. Le parcours direct du point 1 au point 4 sans passer par les boucles a pour mot de type :

$$w_{1,4} = T.E.F \Leftrightarrow w_{1,4} = F$$

qui est élément de $L(G)$ et a pour équivalent le type F, cette séquence est donc syntaxiquement correcte.

De même, les chemins menant du point 3 au point 4 passant par la boucle, de longueur $k=1\dots n$, ont pour expressions :

$$\begin{aligned} w_{3,4}^1 &= F \\ w_{3,4}^2 &= F.F = F^2 = F \\ &\vdots \\ w_{3,4}^n &= F\dots F = F^n = F \end{aligned}$$

L'union étant un opérateur idempotent, la superposition de tous les chemins menant de 3 à 4 a pour mot de type :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} w_{3,4}^k &= F + F^2 + \dots + F^k \\ \sum_{k \geq 1} w_{3,4}^k &= F.(E + F + F^2 + \dots + F^{k-1}) \\ &= F. \sum_{i \geq 0} F^i = F.F^* = F \end{aligned}$$

cet ensemble de chemins est donc syntaxiquement correct et de type globalement équivalent à F, la partie du réseau concernée (le processus muni de ses flux) est donc valide de ce point de vue.

Considérons maintenant les chemins menant du point 1 au point 2 passant par la seconde boucle, de longueur $k=1\dots n$, ils ont comme expressions :

$$\begin{aligned} w_{1,2}^1 &= T.E = F \\ w_{1,2}^2 &= T.\underbrace{E.T}_F.E = F.F = F \\ &\vdots \end{aligned}$$

Le chemin de longueur $k=1$ allant de 1 à 2 de mot de type $w_{1,2}^1 = T.E = F$ est syntaxiquement correct et à un équivalent global de type F. Par contre l'expression du mot de type $w_{1,2}^2 = T.E.T.E$ est syntaxiquement incorrecte à cause de la séquence E.T qu'elle comporte (et que nous avons interdite pour prendre en compte les processus de type F qui accompagnent toujours un processus de transport réel), malgré le fait qu'il existe une agrégation des processus qui mène à une équivalence de type F. Il peut y avoir deux raisons à cela :

- la première est qu'ont été négligés des phénomènes de dissipation. Il faut donc, si cela n'a pas été fait, identifier les processus de type F;

- la deuxième concerne la représentation : les processus de type F ont été pris en compte mais les flux de puissance rebouclés sur le processus T doivent être ceux du processus F et non ceux du processus E.

La figure 4.8 b montre une représentation équivalente à celle de la figure 4.8.a mais syntaxiquement correcte. On met à profit l'égalité de la puissance en sortie du processus E avec la somme des puissances en sortie du processus F. On reboucle sur le processus T les flux en sortie du processus F au lieu de celui en sortie du processus E, le réseau est alors syntaxiquement correct.

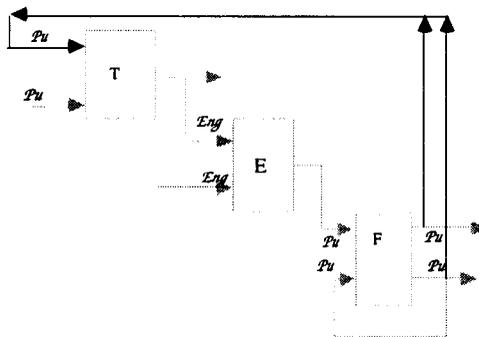


Figure 4.8.b : représentation syntaxiquement correcte équivalente à celle du réseau de processus de la figure 4.8.a.

Une remarque toutefois concernant le regroupement de processus E et F : une séquence de type E.F est égale à E, une conséquence de ces regroupements est que le réseau obtenu risque d'être syntaxiquement incorrect. Prenons le réseau de la figure 4.8.b et regroupons les processus E et F en un processus E équivalent, on obtient la figure 4.8.c. Le réseau de processus est alors de nouveau syntaxiquement incorrect.

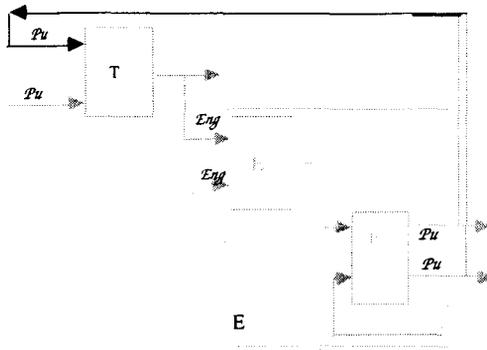


Figure 4.8.c.

Pour résoudre ce problème, on exploite l'équivalence $E=E.F$, ainsi en remplaçant le mot de type E d'un processus par E.F le réseau reste syntaxiquement correct. Cette convention a pour intérêt de signifier que le processus de transport s'accompagne de processus de transformations et que l'on ne peut les négliger. (Nous verrons une justification de cette notation, dans le dernier chapitre sur la mise en équation quantitative, par le fait qu'à un processus de type E on puisse rattacher une fonction de type $F_2(e,f,R)=0$ du tétraèdre; fonction qui caractérise par ailleurs les processus de type F.)

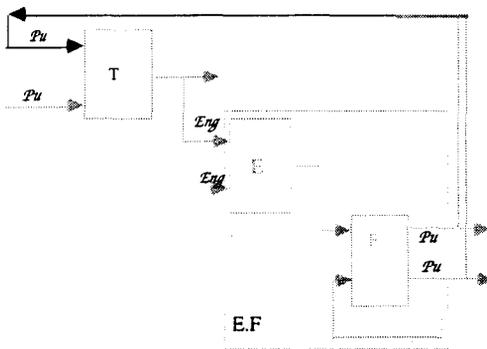


figure 4.8.d : correction de la représentation figure 4.8.c.

V.2. Aide à l'identification de processus.

Une autre exploitation de la syntaxe et des règles d'équivalence consiste en une aide à l'identification des processus ou plus précisément de leur type. La syntaxe étant une contrainte, l'identification du type d'un ou de plusieurs processus revient à satisfaire cette contrainte. Pour un réseau dont le type de certains processus est connu seul un sous-ensemble de solutions existe, quant aux types de ceux qui nous sont inconnus, de sorte que le réseau soit syntaxiquement correct. Prenons par exemple le réseau de la figure 4.9.a, à un stade intermédiaire de l'étude, dont on suppose que les mots de type w_1 et w_2 de deux des quatre processus sont inconnus.

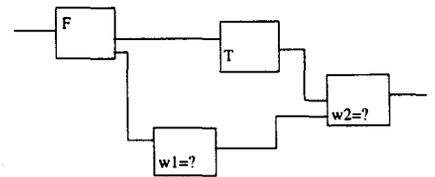


Figure 4.9.a : une ébauche de représentation dont le type certain processus reste à identifier.

D'après la structure du réseau, les contraintes suivantes existent pour les mots w_1 et w_2 :

- F étant le type du processus précédent celui de w_1 :

$$w_1 = F + T ;$$

- T étant le type du processus précédent w_2 :

$$w_2 = E ;$$

- w_1 étant le type du processus précédent w_2 :

$$(w_1 = F \Rightarrow w_2 = T + F) + (w_1 = T \Rightarrow w_2 = E).$$

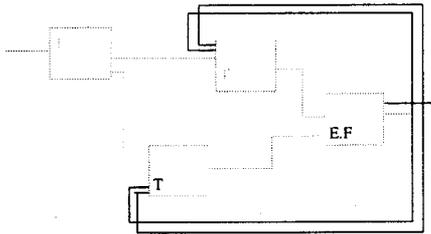


Figure 4.9.b : une représentation à laquelle l'identification des types des processus de la figure 4.9.a est susceptible de mener compte tenu de la réalité perçue.

Il vient que la solution est $w_1 = T$ et $w_2 = E$ comme solution unique pour ce réseau. Une représentation à laquelle celle-ci peut conduire, suite à l'analyse de l'existant, est donnée par la figure 4.9.b. Il devient alors nécessaire, pour le que le réseau soit syntaxiquement correct, que soient identifiés les processus de type F liés au processus E et que soient rebouclées les puissances en sortie du processus E.F sur les processus T de manière à ce que ces dernières soient comptées positivement ou négativement dans les bilans respectifs (d'énergie ou de matière) des processus T.

Dans ce type de démarche trois cas peuvent se présenter :

- le premier est celui où il existe une solution et une seule en termes de processus de types simples comme nous venons d'en avoir un exemple.

- Il se peut qu'il existe plusieurs solutions. Supposons qu'à un certain stade de l'analyse l'observateur ébauche le réseau de la figure 4.9.a. Alors les paires $(w_1=F, w_2=T)$ ou $(w_1=E, w_2=F)$ ou $(w_1=E, w_2=T)$ sont autant de solutions donnant lieu à des représentations syntaxiquement correctes. La charge d'identifier la représentation qui reflète le mieux la réalité perçue revient à l'observateur quitte à rejeter toutes les solutions qui lui sont proposées et à revoir son ébauche de représentation. Si la solution $(w_1=E, w_2=F)$ est retenue une représentation à laquelle l'on est susceptible d'aboutir peut être celle de la figure 4.9.b, et celle de la figure 4.9.c est une représentation possible si $(w_1=F, w_2=T)$ est retenue. La sortie du processus de type T est alors portée en entrée du processus de type E.

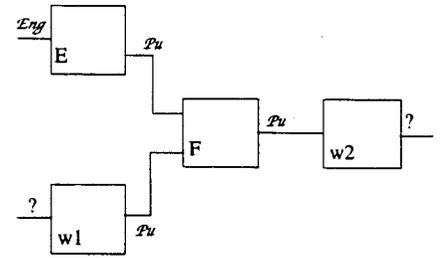


Figure 4.9.a : une ébauche de représentation pour laquelle il existe plusieurs solutions typées.

- Il se peut également qu'aucune solution n'existe. C'est le cas de la figure 4.10.a, où w_1 ne peut être à la fois de type F et de type T. Il n'existe pas de solutions en termes de types simples. Il faut soit revoir l'organisation en réseau de ces processus si w_1 est effectivement de type simple, soit décomposer le processus de type w_1 en réseaux de processus de types simples si la structure du réseau est correcte.

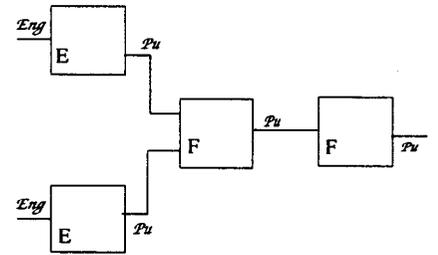


Figure 4.9.b : exemple de typage syntaxiquement correct du réseau de la figure 4.9.a.

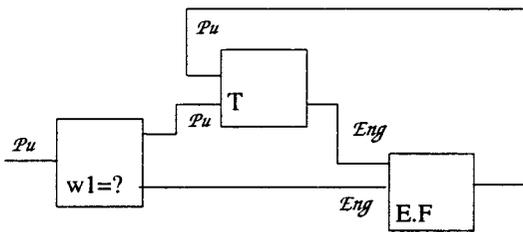


Figure 4.10.a : un exemple réseau n'ayant pas de solutions en termes de types simples.

V.3. Organisation hiérarchique des réseaux.

On aborde alors un troisième type d'aide que nous apportent la syntaxe et les règles d'équivalence, qui sont les aides à l'organisation hiérarchique des représentations, soit par décomposition soit par agrégation de processus.

V.4. Décomposition d'un réseau de niveau N au niveau N+1

Ainsi, si l'organisation du réseau de processus de la figure 4.10.a est correcte alors le processus étiqueté w_1 est décomposable en un réseau de processus dont on peut affirmer qu'il comporte deux sous-ensembles de chemins : un sous-ensemble de séquences de processus de type globalement équivalents à F, et un sous-ensemble de séquences de processus globalement équivalents à T. Le premier sous-ensemble est constitué des chemins transformant la puissance en entrée du processus global en la puissance de sortie, le second celui des séquences de processus transformant la puissance en entrée en l'énergie en sortie. En vertu des règles d'équivalence, tous les chemins équivalents à F ont un mot de type parmi:

$$F = (F + T.E.F)^* . (T.E + \epsilon) + T.E$$

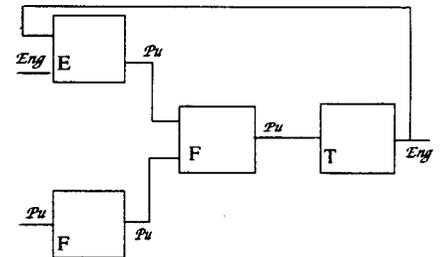


Figure 4.9.c : un autre typage syntaxiquement correct de la figure 4.9.a.

Quant aux chemins équivalents à T ils ont un mot de type parmi :

$$T = ((F + T.E.F)^* + \epsilon).T$$

Ces règles fournissent à l'observateur une aide pour d'identifier de proche en proche les processus composant ce réseau. En amont du réseau le flux d'entrée étant une puissance, il ne peut s'agir que de processus de type T ou de type F. En aval, concernant la puissance en sortie il ne peut s'agir que d'un processus de type F : son successeur dans la figure 4.10.a étant un processus de type T ; concernant le flux d'énergie en sortie, il ne peut s'agir que d'un processus de type T. Par exemple, sur la figure 4.10.b l'observateur aura identifié un processus de type T et un processus de type F en entrée et un processus de type F et un processus de type T en sortie. Ainsi de proche en proche une représentation possible vers laquelle l'observateur peut converger, compte tenu des règles d'équivalence, de la syntaxe et de la réalité perçue, est donnée par la figure 4.10.c.

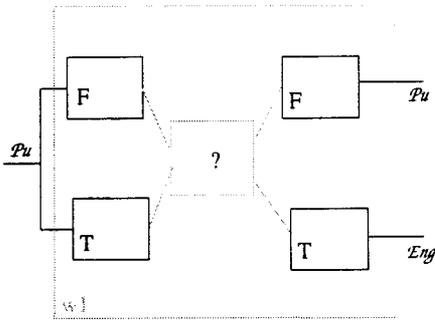


Figure 4.10.b : identification de proche en proche du type des processus.

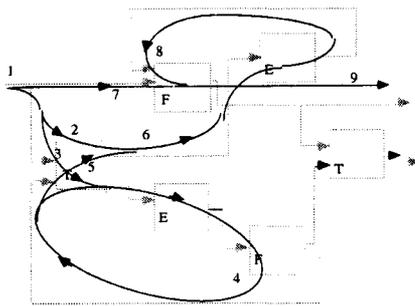


Figure 4.10.d : ensemble des chemins de type F menant de la puissance en entrée à celle en sortie.

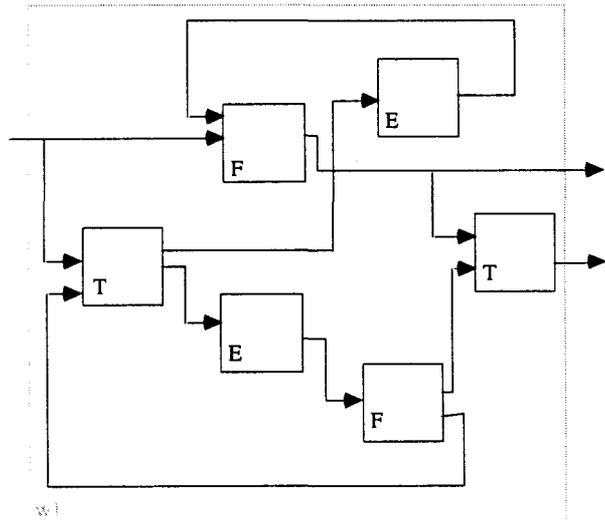


figure 4.10.c : un exemple de réseau solution équivalente du processus global étiqueté w1 sur la figure 4.10.a.

On vérifie alors que tous les chemins menant de la puissance en entrée à la puissance en sortie sont de type F. D'après la figure 4.10.d, on a l'expression des différentes portions de chemins possibles :

$$\left(\underbrace{(T.E.F)^*}_{1,3,4,5,6} . T + \underbrace{T}_{1,2,6} \right) . \underbrace{E.F}_{8,9} + \underbrace{F}_{1,7,9}$$

$$\left(\underbrace{F.T}_{1,3,4,5,6} + \underbrace{T}_{1,2,6} \right) . \underbrace{E}_{8,9} + \underbrace{F}_{1,7,9} = \left(\underbrace{T}_{1,2,4,5,6} + \underbrace{T}_{1,2,6} \right) . \underbrace{E}_{8,9} + \underbrace{F}_{1,7,9}$$

$$\underbrace{T}_{1,3,4,5,6} . \underbrace{E}_{8,9} + \underbrace{F}_{1,7,9} = \underbrace{F}_{1,2,4,5,6,8,9} + \underbrace{F}_{1,7,9} = F$$

Quant à tous ceux qui mènent de la puissance en entrée à l'énergie en sortie, ils sont de type T. D'après la figure 4.10.e il suffit de rajouter les portions 10, 11 et 12 aux expressions précédentes, ces chemins se notent alors :

$$\underbrace{F}_{1,2,3,4,5,6,7,8,9} \cdot \underbrace{T}_{10,12} + \underbrace{(T.E.F)^*}_{1,3,4} \cdot \underbrace{T}_{10,12} = \underbrace{T}_{1 \text{ à } 9, 10, 12} + \underbrace{F}_{1,2,3} \cdot \underbrace{T}_{11,12}$$

$$\underbrace{T}_{1 \text{ à } 9, 10, 12} + \underbrace{F}_{1,2,3} \cdot \underbrace{T}_{11,12} = \underbrace{T}_{1 \text{ à } 9, 10, 12} + \underbrace{T}_{1 \text{ à } 3, 11, 12} = \underbrace{T}_{1 \text{ à } 12}$$

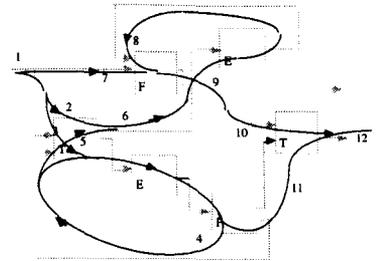


Figure 4.10.e : ensemble des chemins transformant la puissance en entrée en l'énergie en sortie.

Les règles d'équivalence sont capables de proposer des solutions syntaxiquement correctes pour la décomposition d'un processus de type simple parmi {T, E, F}. Le nombre de ces solutions est infini. En effet par un raisonnement sur la longueur k des chaînes de chacune des classes d'équivalence que l'on peut former, k étant un nombre entier strictement supérieur à 0, il y a bijection entre la longueur des chaînes et l'ensemble des entiers par l'application qui à k associe $k-1$. En conséquence, chacun des ensembles $L(G_F) = \{F\}$, $L(G_T) = \{T\}$, $L(G_E) = \{E\}$, sont des ensembles infinis dénombrables.

Il existe donc une infinité de solutions équivalentes syntaxiquement correctes dans le champ des possibles qui préserve la généralité du langage malgré une formalisation du niveau des langages algébriques. La charge d'identifier dans le champ des solutions celle(s) qui reflètent le mieux la réalité perçue revient à l'observateur. Celui-ci est alors guidé, mais conserve une marge importante pour l'innovation et la conception.

V.5. Agrégation de réseaux de niveau N au niveau $N-1$.

On se souvient que le réseau que nous venons d'élaborer (figure 4.10.c) est une décomposition du processus de la figure 4.10.a étiqueté w_1 qui n'est pas de type simple. On cherche donc à agréger le réseau de processus (figure 4.10.c) en un réseau équivalent au niveau $N-1$ de telle sorte que le réseau figure 4.10.a soit un réseau de processus de type simple. Il existe là encore plusieurs agrégations possibles donnant lieu à des processus de type simple et à un réseau de niveau $N-1$ syntaxiquement correct. C'est à l'observateur de choisir la plus pertinente d'entre elles.

A titre d'exemple on procède aux agrégations du réseau de la figure 4.10.c suivantes :

- agrégation de la boucle T.E.F : les chemins entre les flux 1 et 2, et les flux 1 et 3 ont pour expressions respectives (cf. figure 4.11.a ci-contre) :

$$\underbrace{(T.E.F)^*}_{1,2} \cdot T = F^* \cdot T = F \cdot T = T$$

$$\underbrace{(T.E.F)^*}_{1,3} = F^* = F$$

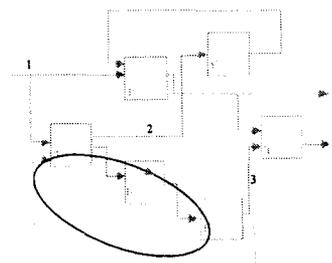


Figure 4.11.a

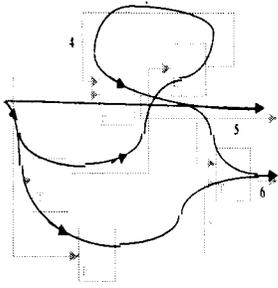


Figure 4.11.b : représentation équivalente suite à l'agrégation de la boucle T.E.F.

On obtient alors la représentation équivalente ci-contre (figure 4.11.b).

L'agrégation peut se poursuivre comme suit : tous les chemins, au nombre de quatre, sont alors des chaînes directes et ont pour expressions :

$$\underbrace{T.E.F}_{1,2,4,5} + \underbrace{F}_{1,5} = F$$

$$\underbrace{F.T}_{1,2,4,5,6} + \underbrace{F.T}_{1,3,6} = T$$

expressions qui conduisent, par exemple, à la représentation ci-contre (4.11.c).

Il existe d'autres représentations ; on pourrait par exemple agréger le réseau de la figure 4.11.b en regroupant les processus de même type en exploitant l'indempotence de '+' :

$$F+F+\dots+F=F$$

$$T+T+\dots+T=T$$

$$E+E+\dots+E=T$$

On obtient alors le réseau de la figure 4.11.d où chacun des processus T, E, et F est la superposition des diagrammes de même type de la figure 4.11.b

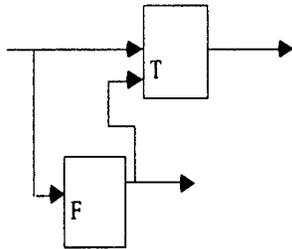


Figure 4.11.c : une agrégation possible de la représentation de la figure 4.11.a.

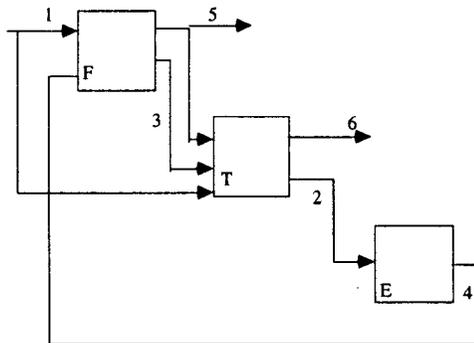


figure 4.11.d : une autre agrégation possible de la figure 4.10.c.

Il faut noter que quel que soit le réseau de processus de types simples parmi T, E, F, une agrégation du type de celle de la figure 4.11.d est toujours possible. En effet par superpositions des diagrammes de représentation des processus de chacun des trois types, on obtient la forme générique figure 4.12 à laquelle n'importe quelle représentation peut être ramenée.

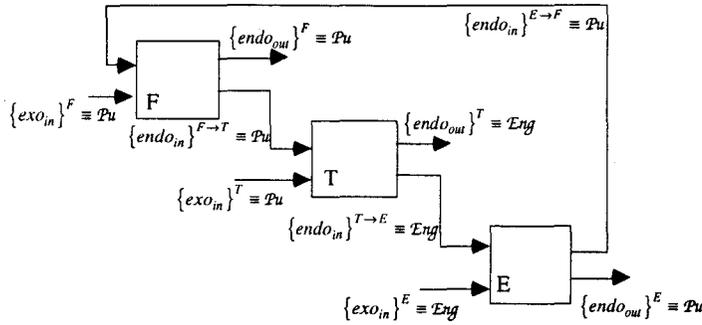


Figure 4.12 : forme canonique de tous les diagrammes de processus de type simple syntaxiquement corrects.

On distingue alors parmi les flux les sous-ensembles suivants :

- tout d'abord les flux de surface, c'est à dire ceux qui n'ont pas de processus les précédant, ou de processus leur succédant, ce sont respectivement :

-a/ les flux entrant du réseau ou flux exogènes parmi lesquels l'on distingue :

- les flux entrant dans les processus F de type puissance notés $\{exo_{in}\}^F \equiv Pu$,

- les flux entrant dans les processus T également de type puissance notés $\{exo_{in}\}^T$ (certains de ces flux peuvent être communs à la catégorie précédente),

- les flux entrant dans les processus E de type énergie notés $\{exo_{in}\}^E \equiv Eng$;

-b/ les flux sortant du réseau qui sont des flux endogènes, parmi lesquels on distingue :

- les flux sortant des processus F de type puissance notés $\{endo_{out}\}^F \equiv Pu$,

- les flux sortant des processus T de type énergie notés $\{endo_{out}\}^T \equiv Eng$,

- les flux sortant des processus E de type puissance notés $\{endo_{out}\}^E \equiv Pu$;

- On distingue ensuite des flux internes au réseau qui sont également des flux endogènes et parmi lesquels on distingue trois sous-ensembles :

- les flux allant des processus F vers les processus T de type puissance notés $\{endo_{in}\}^{F \rightarrow T} \equiv Pu$,

- les flux allant des processus T vers les processus E de type énergie notés $\{endo_{in}\}^{T \rightarrow E} \equiv Eng$,

- les flux allant des processus E vers les processus F de type puissance notés $\{endo_{in}\}^{E \rightarrow F} \equiv Pu$,

et qui, compte tenu des règles syntaxiques, sont les seuls admissibles.

Chacun des neuf sous-ensembles comportera un nombre quelconque d'éléments (voire aucun) selon les cas.

Supposons que l'on procède à l'agrégation de la figure 4.11.c et que l'on remonte ce réseau au niveau $N-1$; la représentation figure 4.10.a pour laquelle il n'existe pas de mots de type simple $w|$ parmi T, E ou F devient celle de la figure 4.13.

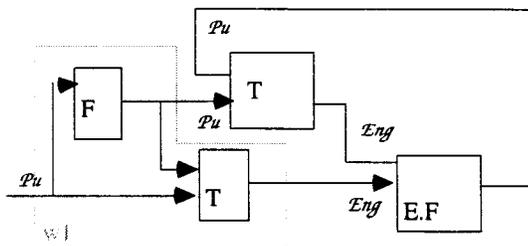
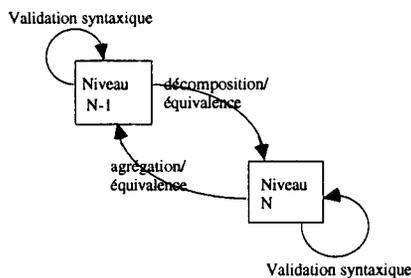


figure 4.13 : une solution syntaxiquement correcte du typage des processus de la figure 4.10.a.

A chacun des processus de cette figure, on peut de nouveau appliquer une démarche de décomposition-agrégation.



A l'image de ces exemples, il est toujours possible de se ramener à des représentations dont les processus sont de types simples. En pratique la convergence vers une représentation satisfaisante, (en ce qu'elle est pertinente et qu'elle reflète la réalité perçue), se fait à l'aide des règles syntaxiques et d'équivalence par décompositions et agrégations successives. Bien qu'il existe plus d'une représentation typée en T, E, F, ces différences ne résident que dans la forme graphique des diagrammes, car ces représentations sont toutes équivalentes.

VI. Conclusion.

La définition de règles de composition des processus de type simple est une syntaxe, et celle des règles d'équivalence une sémantique. Elles dotent notre langage d'un troisième niveau de formalisation. Il bénéficie dès lors de la puissance et de la souplesse des outils algébriques de la théorie des langages.

En prenant comme alphabet la base $\{T, E, F\} \cup \{\varepsilon\}$ des classes de processus et en explicitant les règles de composition en séquences de ces processus, on définit par un schéma d'induction l'ensemble $L(G)$ des mots de type des séquences de processus syntaxiquement correctes dont l'expression rationnelle est alors calculable. Cette syntaxe est validée par le tétraèdre d'état qui l'induit. La phase de clôture permet, grâce à la définition de classes d'équivalences, de montrer que $L(G)$ est réductible à l'union de sa base $\{T, E, F\} \cup \{\varepsilon\}$ et du mot E.F.T qui est le seul élément composé de cet ensemble. Chacun de ces éléments est alors une classe d'équivalence dont l'ensemble constitue une partition de $L(G)$.

On dispose alors :

- d'un critère de validation syntaxique des réseaux de processus, cette validation est formelle et nécessaire mais pas suffisante. Elle est à l'image des compilations de programmes informatiques ;

- d'aides à l'organisation hiérarchique des représentations pour la décomposition dans le cas d'une démarche descendante des processus les plus composés aux plus élémentaires et pour l'agrégation dans une démarche ascendante.

Les règles d'équivalence donnent la forme de décomposition des différents types T, E, et F de niveau N en réseaux de processus de type T, E, et F à un niveau hiérarchique $N+1$. Il existe alors une infinité de décompositions possibles et syntaxiquement correctes ; infinité qui malgré le niveau de formalisation élevé de ce langage préserve sa généralité et laisse une marge importante à l'innovation et à la conception.

Concernant l'agrégation de réseaux de processus, pour un réseau donné il en existe plusieurs. Mais on montre qu'il en existe une valable quel que soit le réseau et à laquelle on peut toujours procéder. La forme obtenue est la forme générique des réseaux de processus qui nous sera utile par la suite lors des démonstrations auxquelles nous procéderons.

Malgré la diversité des représentations, qui réside dans leur forme graphique, elles n'en restent pas moins univoques car elles sont formellement équivalentes. Il s'agit en effet de la même expression des chemins qu'elles comportent mais factorisée de manières différentes.

CHAPITRE V

**Vers un langage des systèmes physiques :
définition d'une algèbre des processus**

I. INTRODUCTION.....	139
II. UNE ALGEBRE DES TYPES DE PROCESSUS ET D'OBJETS.....	139
II.1 DEFINITIONS DES ENSEMBLES.....	140
II.2 COMPOSITION DE PROCESSUS ET DE LEUR TYPE, DEFINITION DES OPERATIONS.....	140
II.2.1 Opérateur de mise en série.....	141
II.2.2 Opérateur de mise en parallèle.....	142
II.2.3 Une structure de dioïde.....	142
Propriétés des opérateurs \otimes et \oplus	142
II.2.4 Isomorphisme des applications dans $(\Phi^*, \oplus, \otimes)$ et $(V^*, +, \cdot)$	143
II.2.5 Table de vérité des opérateurs de composition.....	144
II.3 TRANSACTIONS ET TRANSFORMATIONS DE TYPE DANS E , DEFINITIONS DES OPERATIONS.....	145
III. GRAPHE ETIQUETE SUR (S, \oplus, \otimes)	147
III.1 MISE EN EQUATION D'UN GRAPHE SANS CIRCUIT.....	148
III.1.1 Cas S.I.S.O.....	148
III.1.2 Cas M.I.M.O.....	149
III.2 MISE EN EQUATION D'UN GRAPHE AVEC CIRCUITS.....	150
III.2.1 Poids d'un chemin passant par un circuit.....	152
III.2.2 Graphe équivalent avec circuits.....	154
IV. REPRESENTATION MATRICIELLE D'UN RESEAU DE PROCESSUS.....	156
IV.1 MATRICE D'INCIDENCE GENERALISEE D'UN GRAPHE.....	157
IV.2 THEOREME DE CONVERGENCE DE LA MATRICE $A^{(k)}$ DANS $(L(G), \oplus, \otimes)$	157
IV.2.1 Élément p-régulier.....	157
V. MISE EN EQUATION D'UN RESEAU DE PROCESSUS.....	159
V.1 MISE EN EQUATION DES TRANSFORMATIONS.....	159
V.2 MISE EN EQUATION DE L'ORGANISATION.....	160
V.3 MISE EN EQUATION DU RESEAU DE PROCESSUS.....	162
VI. APPLICATIONS ET MISE EN OEUVRE.....	163
VI.1 VALIDATION SYNTAXIQUE D'UN RESEAU DE PROCESSUS.....	163
VI.2 CALCUL D'UN TYPAGE COMPATIBLE D'UN RESEAU DE PROCESSUS.....	166
VI.3 AIDE A LA SYNTHESE DE RESEAUX DE PROCESSUS.....	168
VI.4 VALIDATION D'UNE DECOMPOSITION AU NIVEAU N+1.....	169
VI.5 ANALYSE CROISEE, VERIFICATION DE LA COHERENCE.....	171
VII. CONCLUSION.....	172

I. Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons évoqué différents ensembles : ensemble des objets processés, ensemble des types d'objets processés, ensemble des processus, ensemble des types de processus, auxquels nous avons appliqué des opérations : transformation de flux, composition de processus, calcul de types de processus. Ces ensembles munis de leurs opérateurs se définissent alors comme des structures algébriques. Expliciter ces structures algébriques, étudier les propriétés de ces opérateurs et définir les règles de calcul dans chacune de ces structures est le but de ce chapitre. Cette formalisation constituera le quatrième et dernier niveau de formalisation de notre langage et du modèle de représentation. Le traitement systématique de ces opérations (transformations, compositions, calculs de types) est alors possible, l'on accède à la possibilité d'établir des théorèmes et à l'élaboration de preuves et d'algorithmes calculables par ordinateurs.

Dans la première partie, seront donc explicitées les différentes structures algébriques dans lesquelles nous évoluons. L'étude des propriétés de ces structures et notamment de leurs opérateurs y est menée.

La seconde partie porte sur l'application des opérateurs définis dans ces structures algébriques au traitement de réseaux de processus. On dispose alors des moyens nécessaires à l'élaboration d'un certain nombre de théorèmes qui nous seront utiles par la suite.

La troisième partie définit une notation mathématique des réseaux de processus sous la forme de matrices d'incidence généralisées de graphes.

Il nous est dès lors possible de représenter un réseau de processus comme un système d'équations dans les structures algébriques adéquates, préalablement définies.

La dernière partie porte sur la mise en oeuvre de cette représentation matricielle pour la validation syntaxique, le typage compatible des réseaux, l'aide à synthèse de processus et la validation de décompositions de processus à un niveau d'abstraction moindre.

II. Une algèbre des types de processus et d'objets.

Nous avons au cours des chapitres précédents évoqué quatre ensembles : \mathcal{E} l'environnement ou ensemble des objets processés, $\{P_u, Eng, M, M\}$ l'ensemble des types de ces objets, Φ l'ensemble des processus syntaxiquement corrects, et $L(G)$ l'ensemble des mots de type de ces processus. Nous avons également effectué des opérations sur ces ensembles : les transactions (transformations d'objets par les

processus), les compositions de processus et également des opérations portant sur le type des objets et des processus.

Il convient ici de bien définir ces ensembles ainsi que chacune de ces opérations, de les distinguer, d'élaborer les notations mathématiques adéquates et de définir les structures algébriques correspondantes.

II.1 Définitions des ensembles.

Les ensembles de types : $\{Pu, Eng, M, M\}$ et $L(G)$, sont définis respectivement par énumération et en compréhension. On voudrait disposer d'un de ces types de définition pour \mathcal{E} et Φ . Pour cela on fait appel aux applications w qui à un objet lui associe son type et w qui à un processus lui associe son type :

$$w : \begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow \{Pu, Eng, M, M\} \\ x \mapsto w(x) \end{cases} \quad (5.1.a)$$

$$w : \begin{cases} \Phi \rightarrow L(G) \\ \phi \rightarrow w(\phi) \end{cases} \quad (5.1.b)$$

On s'impose comme contrainte que w et w soient des applications surjectives. Les ensembles \mathcal{E} et Φ se définissent alors en compréhension comme suit :

$$\mathcal{E} = \{x / w(x) \in \{Pu, Eng, M, M\}\} \quad (5.2.a)$$

$$\Phi = \{\phi / w(\phi) \in L(G)\} \quad (5.2.b)$$

En d'autres termes, l'environnement est l'ensemble des objets de type : puissance, énergie, flux de matière, ou quantité de matière ; l'ensemble Φ des processus considéré est l'ensemble des processus syntaxiquement corrects donc de type à valeur dans $L(G)$.

II.2 Composition de processus et de leur type, définition des opérations.

A l'ensemble $L(G)$ des mots de type syntaxiquement corrects correspond donc par l'application w l'ensemble Φ des processus de types à valeur dans $L(G)$. On peut alors définir une partition de Φ en exploitant la surjection de l'application w . On définit les sous-ensembles de Φ suivants :

$$\Phi_T = \{\phi / w(\phi) \in \{T\}\}$$

$$\Phi_E = \{\phi / w(\phi) \in \{E\}\}$$

$$\Phi_F = \{\phi / w(\phi) \in \{F\}\}$$

$$\Phi_{E.F.T} = \{\phi / w(\phi) \in \{E.F.T\}\}$$

$$\Phi_\varepsilon = \{\phi / w(\phi) \in \{\varepsilon\}\}$$

qui sont les sous-ensembles de processus dont les images par w sont respectivement les classes d'équivalences : $\{T\}, \{E\}, \{F\}, \{E.F.T\}, \{\varepsilon\}$, de $L(G)$.

Ces ensembles définissent une partition de Φ puisque :

$$\begin{aligned} \forall \Phi_i, \Phi_j, i, j \in \{T, E, F, E.F.T, \varepsilon\}, i \neq j \\ \Rightarrow \Phi_i \cap \Phi_j = \emptyset \end{aligned} \quad (5.3.a)$$

en effet :

$$1/ \forall (\phi_i \in \Phi_i, \phi_j \in \Phi_j), i \neq j \Rightarrow w(\phi_i) \neq w(\phi_j)$$

les sous-ensembles : $\{T\}, \{E\}, \{F\}, \{E.F.T\}, \{\varepsilon\}$ étant une partition de $L(G)$;

$$\begin{aligned} 2/ \bigcup_i \Phi_i &= \{\phi / w(\phi) \in \{T\} \cup \{E\} \cup \{F\} \cup \{E.F.T\} \cup \{\varepsilon\}\} \\ &= \{\phi / w(\phi) \in L(G)\} = \Phi \end{aligned} \quad (5.3.b)$$

Une autre définition de Φ est alors donnée par cette partition:

$$\Phi = \Phi_T \cup \Phi_E \cup \Phi_F \cup \Phi_{E.F.T} \cup \Phi_\varepsilon \quad (5.4)$$

L'ensemble $L(G)$ à été construit à partir d'un vocabulaire V et d'un système de production (ensemble de règles). Nous avons alors muni l'ensemble $L(G)$ de deux opérateurs : la concaténation notée '.' et l'union notée '+'.
 La production d'un nouvel élément de Φ (un nouveau processus) quant à elle consiste à connecter des processus de Φ en réseaux de processus. On obtient alors un nouveau processus qui s'il est syntaxiquement correct est un nouvel élément de Φ . S'il ne l'est pas alors il est élément de Φ^* : l'ensemble des processus pouvant être construits par composition des éléments de la base de l'ensemble Φ . La base de Φ se définit à partir de celle de $L(G)$ c'est à dire V , il vient que cette base n'est autre que $\{\Phi_T, \Phi_E, \Phi_F, \Phi_\varepsilon\}$ que l'on conviendra de noter Φ_0 . (C'est par ailleurs l'ensemble des processus dont le mot de type est de longueur au plus égale à un). L'image par w de Φ^* n'est alors autre que V^* (langage engendré par V).

La composition de processus en réseaux est réductible à deux opérations élémentaires : la mise en série, et la mise en parallèle.

II.2.1 Opérateur de mise en série.

Soient N processus $\phi_i, i = 1..n$ de la base Φ_0 , la mise en série de ces N processus, illustrée par le schéma de la figure 5.5.a, forme un nouveau processus $\phi_{1,n} \in \Phi^*$. On convient de noter \otimes l'opération de mise en série. On écrit alors l'équation :

$$\phi_{1,n} = \phi_1 \otimes \phi_2 \otimes \dots \otimes \phi_{n-1} \otimes \phi_n \quad (5.5.a)$$

Le mot de type de ce nouveau processus $w_{1n} = w(\phi_{1,n}) \in V^*$ est égal à :

$$w_{1n} = w_1 \cdot w_2 \dots w_{n-1} \cdot w_n. \quad (5.5.b)$$

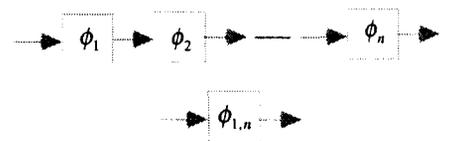


Figure 5.1.a : mise en série de processus

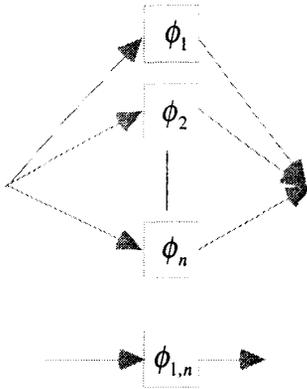


Figure 5.1.b: mise en parallèle de processus

II.2.2 Opérateur de mise en parallèle.

Soient N processus $\phi_i, i = 1..n$, éléments de la base Φ_0 , leur mise en parallèle forme un nouveau processus $\phi_{1,n} \in \Phi^*$ (figure 5.1.b). On convient de noter \oplus l'opération de mise en parallèle. On écrit alors l'équation :

$$\phi_{1,n} = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \dots \phi_{n-1} \oplus \phi_n. \tag{5.5.c}$$

Le mot de type de ce processus est alors $w_{1,n} = w(\phi_{1,n}) \in V^*$:

$$w_{1,n} = w_1 + w_2 + \dots w_{n-1} + w_n. \tag{5.5.d}$$

Proposition 1 : L'ensemble Φ^* se définit comme :

$$\Phi^* = \bigcup_{\oplus} \Phi^k \tag{5.6.a}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Phi^0 &= \Phi_\epsilon \\ \Phi^k &= \Phi^{k-1} \otimes \Phi_0 \end{aligned} \tag{5.6.b}$$

On peut dès lors affirmer les propositions suivantes :

Proposition 2 : un processus $\phi \in \Phi^*$ a comme propriété d'être syntaxiquement correct si $\phi \in (\Phi \subset \Phi^*)$ ce qui équivaut pour son mot de type à être tel que :

$$w(\phi) \in (L(G) \subset V^*) \tag{5.7}$$

II.2.3 Une structure de dioïde.

L'ensemble Φ^* muni des opérateurs de mise en série et de mise en parallèle a une structure de dioïde. De même l'ensemble V^* muni de la concaténation et de l'union a une structure de dioïde.

Définition : Soit un ensemble S muni de deux lois de composition internes \otimes et \oplus , alors (S, \oplus, \otimes) forme une structure algébrique appelée dioïde[Gon-95].

Propriétés des opérateurs \otimes et \oplus .

L'opérateur \oplus , appelé addition, munit l'ensemble S d'une structure de monoïde commutatif. \oplus a comme propriétés : la fermeture, l'associativité, la commutativité, et admet un élément neutre appelé élément nul :

$$\begin{aligned} a \oplus b &\in S \quad \forall a, b \in S \text{ fermeture;} \\ a \oplus (b \oplus c) &= (a \oplus b) \oplus c \quad \forall a, b, c \in S \text{ associativité;} \\ a \oplus b &= b \oplus a \quad \forall a, b \in S \text{ commutativité;} \\ a \oplus \emptyset &= \emptyset \oplus a = a \quad \forall a \in S \text{ élément neutre ou nul.} \end{aligned}$$

On vérifie que (Φ^*, \oplus) et $(V^*, +)$ forment des monoïdes commutatifs. L'élément nul étant respectivement le processus nul noté ϕ_\emptyset , et le caractère nul noté \emptyset , éléments fictifs que l'on adjoint dorénavant à ces ensembles.

L'opérateur \otimes , appelé multiplication, munit l'ensemble S d'une structure de monoïde. \otimes a les propriétés de fermeture et d'associativité et admet un élément neutre appelé unité :

$$\begin{aligned} a \otimes b &\in S \quad \forall a, b \in S \text{ fermeture;} \\ a \otimes (b \otimes c) &= (a \otimes b) \otimes c \quad \forall a, b, c \in S \text{ associativité;} \\ a \otimes \varepsilon &= \varepsilon \otimes a = a \text{ élément neutre ou unité.} \end{aligned}$$

L'opérateur \otimes est distributif à droite et à gauche par rapport à \oplus et admet l'élément nul comme élément absorbant :

$$\begin{aligned} a \otimes (b \oplus c) &= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \text{ distributivité à gauche;} \\ (a \oplus b) \otimes c &= (a \otimes c) \oplus (b \otimes c) \text{ distributivité à droite;} \\ a \otimes \emptyset &= \emptyset \otimes a = \emptyset \text{ élément absorbant.} \end{aligned}$$

On vérifie que (Φ^*, \otimes) et $(V^*, '.')$ ont une structure de monoïde, l'élément unité Φ_ε étant respectivement le processus identité et la chaîne ε .

Ainsi les structures $(\Phi^*, \oplus, \otimes)$ et $(V^*, +, '.')$ ont une structure de dioïde. On appellera $(\Phi^*, \oplus, \otimes)$ espace des processus et $(V^*, +, '.')$ l'espace des types de processus. Deux sous-espaces remarquables chacun inclus dans l'un des espaces précédents sont : (Φ, \oplus, \otimes) l'espace des processus syntaxiquement corrects, et $(L(G), +, '.')$ l'espace des mots de type syntaxiquement corrects.

On fera appel à l'algèbre des dioïdes dans l'étude des compositions de processus et de leur type.

II.2.4 Isomorphisme¹ des applications dans $(\Phi^*, \oplus, \otimes)$ et $(V^*, +, '.')$.

Les applications de mise en série et de mise en parallèle dans Φ^* et la concaténation et l'union dans V^* confèrent à ces deux ensembles la propriété d'être isomorphes.

Etant donné deux processus $\phi_1, \phi_2 \in \Phi^*$ et leurs images respectives $w_1, w_2 \in V^*$ par l'application w , alors l'image par w du produit $\phi_1 \otimes \phi_2 = \phi_3$ est $w(\phi_3) = w(\phi_1) \cdot w(\phi_2)$:

$$\begin{array}{ccc} (\phi_1, \phi_2) & \xrightarrow{w} & (w_1, w_2) \\ \downarrow \otimes & & \downarrow '. ' \\ \phi_3 & \xrightarrow{w} & w_3 \end{array}$$

de même l'image de la somme $\phi_1 \oplus \phi_2 = \phi_3$ est $w(\phi_3) = w(\phi_1) + w(\phi_2)$:

¹La propriété d'isomorphisme entre deux ensembles est particulièrement intéressante quand il s'agit d'établir des théorèmes sur un ensemble. On montre en effet que si un théorème est prouvé dans un ensemble il l'est également dans l'ensemble qui lui est isomorphe.

$$\begin{array}{ccc}
 (\phi_1, \phi_2) & \xrightarrow{w} & (w_1, w_2) \\
 \downarrow \oplus & & \downarrow + \\
 \phi_3 & \xrightarrow{w} & w_3
 \end{array}$$

On en déduit que les structures algébriques $(\Phi^*, \oplus, \otimes)$ et $(V^*, +, \cdot)$ sont isomorphes. Il en est par conséquent de même des structures (Φ, \oplus, \otimes) et $(L(G), +, \cdot)$. La propriété d'isomorphisme de ces structures est une condition nécessaire et suffisante pour que à tout théorème, établi dans une des structures, corresponde un théorème équivalent dans la structure isomorphe [Bouv-82]. En conséquence, Il suffira de se placer dans une structure algébrique (S, \oplus, \otimes) générique et isomorphe, signifiant selon les cas $(\Phi^*, \oplus, \otimes)$ ou (Φ, \oplus, \otimes) ou $(V^*, +, \cdot)$ ou encore $(L(G), +, \cdot)$, pour établir des théorèmes valables dans $(\Phi^*, \oplus, \otimes)$ et $(V^*, +, \cdot)$ ou dans (Φ, \oplus, \otimes) et $(L(G), +, \cdot)$ (dans le cas réseaux syntaxiquement corrects). \otimes et \oplus désignent respectivement la mise en série ou la concaténation et la mise en parallèle ou l'union. $S = \{T, E, F, E.F.T, \varepsilon, \emptyset\}$ désigne soit des processus soit le mot de type de ce processus.

II.2.5 Table de vérité des opérateurs de composition .

\otimes et \oplus ne sont des opérateurs internes que pour Φ^* et V^* et non pour Φ et $L(G)$. En effet une composition de processus non syntaxiquement correcte donne un nouvel élément de Φ^* et non de Φ (resp. V^* et non $L(G)$).

Seul le respect des règles syntaxiques et d'équivalence fait de ces opérateurs des opérateurs internes pour Φ et $L(G)$.

D'après les règles syntaxiques et d'équivalence, la composition syntaxiquement correcte de réseaux de processus donne les tables de vérités ci-après des opérateurs \cdot et $+$ de $(L(G), +, \cdot)$.

La table de vérité de la de multiplication \cdot est alors :

\cdot	\emptyset	ε	T	E	F	$E.F.T$
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
ε	\emptyset	ε	T	E	F	$E.F.T$
T	\emptyset	T	-	F	-	T
E	\emptyset	E	-	-	-	-
F	\emptyset	F	T	-	F	-
$E.F.T$	\emptyset	$E.F.T$	-	E	-	$E.F.T$

La table de vérité de l'addition $+$ est :

$+$	\emptyset	ε	T	E	F	$E.F.T$
\emptyset	\emptyset	ε	T	E	F	$E.F.T$
ε	ε	ε	$\varepsilon+T$	$\varepsilon+E$	$\varepsilon+F$	$E.F.T+\varepsilon$
T	T	$T+\varepsilon$	T	$T+E$	$T+F$	$(E.F+\varepsilon).T$
E	E	$E+\varepsilon$	$E+T$	E	$E+F$	$E.(E+F.T)$
F	F	$F+\varepsilon$	$F+T$	$F+E$	F	$F+E.F.T$
$E.F.T$	$E.F.T$	$E.F.T+\varepsilon$	$(E.F+\varepsilon).T$	E	$E.F.T+F$	$E.F.T$

L'isomorphisme des structures (Φ, \otimes, \oplus) et $(L(G), +, \cdot)$ rend aisée la transposition de ces tables pour $(L(G), +, \cdot)$ vers (Φ, \otimes, \oplus) ; il suffit pour cela de remplacer les opérateurs de multiplication et d'addition

par ceux de (Φ, \otimes, \oplus) et les caractères par des processus éléments de chacune des classes d'équivalence correspondantes de Φ .

II.3 Transactions et transformations de type dans \mathbb{E} , définitions des opérations.

Un réseau de processus, outre la composition de ses entités, figure également les transactions sur l'environnement opérées par ces processus.

Du point de vue de l'ensemble \mathbb{E} , les processus $\phi \in \Phi$ sont autant d'opérateurs applicables à ses éléments. Ces processus portent alors sur un ou plusieurs éléments de \mathbb{E} . Mais la composition syntaxique de réseaux de processus amène à ne considérer qu'un sous ensemble des parties de \mathbb{E} : celles constituées de l'union d'un ou plusieurs objets de type puissance et/ou flux de matière, et celles constituées de l'union d'un ou plusieurs objets de type énergie et/ou matière. On convient de noter l'ensemble de ces parties de \mathbb{E} :

$$\mathbb{E}^+ = \{ \mathbb{E}^{Pu \cup M}, \mathbb{E}^{Eng \cup M} \}$$

avec $\mathbb{E}^+ \subset \mathcal{P}(\mathbb{E})$: ensemble des parties de \mathbb{E} .

En effet, un processus syntaxiquement correct, de type à valeur dans $L(G)$ ne porte que sur un sous-ensemble d'objets de \mathbb{E} de type puissance et/ou flux de matière ou(-exclusif) sur un sous-ensemble d'objets de \mathbb{E} de type énergie et ou matière.

En conséquence l'application d'un processus syntaxiquement correct, à valeur de type dans $L(G)$, sur l'environnement est une application de $\mathbb{E}^+ \times \Phi \rightarrow \mathbb{E}^+$ appelée transaction.

Soient $x, y \in \mathbb{E}^+$, tels que y résulte de la transformation de x par un processus $\phi \in \Phi$ (figure 5.2.a), on convient alors de noter la transaction par :

$$x \otimes \phi = y$$

où \otimes est la mise en série de x avec le processus ϕ .

Du point de vue des types, on écrit la transaction sous la forme :

$$w(x).w(\phi) = w(y)$$

\otimes et \cdot sont alors des opérateurs de composition externes pour \mathbb{E}^+ et de $\{Pu \cup M, Eng \cup M\} = \{Pu, M, Eng, M\}^+$ (ensemble des valeurs de type de \mathbb{E}^+).

\oplus : l'union, est une loi de composition interne de l'ensemble des parties de $\mathbb{E}^+ : \mathcal{P}(\mathbb{E}^+)$. Seul le respect des règles syntaxiques fait de \oplus une loi de composition interne de \mathbb{E}^+ et confère à (\mathbb{E}^+, \oplus) une structure de monoïde commutatif.

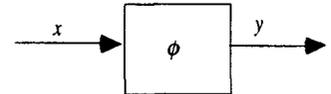


Figure 5.2.a : représentation d'une transaction par un processus.

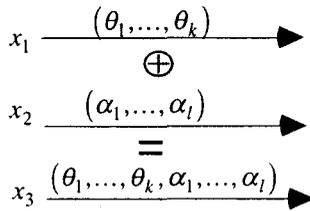


Figure 5.2.b : l'agrégation de flux dans une représentation correspond à l'opération d'addition dans \mathbb{E}^+ .

L'opération d'addition \oplus sur \mathbb{E}^+ correspond à l'agrégation de flux sur les diagrammes de représentation. Soient par exemple les flux x_1 et x_2 éléments de \mathbb{E}^+ , de la figure 5.2.b, placé en entrée d'un même processus, leur somme est équivalente à un flux d'entrée global qui est l'agrégation de ces flux en un flux x_3 . Elle est notée :

$$x_1 \oplus x_2 = x_3$$

La transformation de type correspondante est :

$$w(x_1) + w(x_2) = w(x_3)$$

et correspond à l'union des paramètres des vecteurs étiquetant les flux x_1 et x_2 pour former le vecteur de paramètres de x_3 .

$(\mathbb{E}^+, \oplus, \otimes)$ est alors un espace vectoriel sur le dioïde (Φ, \otimes, \oplus) , de même pour l'espace des types d'objets correspondants défini par rapport à $L(G)$.

Le respect des règles syntaxiques et d'équivalence donne la table de vérité des opérateurs \otimes et \oplus sur l'espace vectoriel $(\mathbb{E}^+, \oplus, \otimes)$:

\otimes	\emptyset	ε	T	E	F	E F T
Pu	\emptyset	Pu	Eng \oplus M	-	Pu \oplus M	-
M	\emptyset	M	Eng \oplus M	-	Pu \oplus M	-
Eng	\emptyset	Eng	-	Pu \oplus M	-	Eng \oplus M
M	\emptyset	M	-	Pu \oplus M	-	Eng \oplus M

\oplus	Pu	M	Eng	M
Pu	Pu	Pu \oplus M	-	-
M	Pu \oplus M	M	-	-
Eng	-	-	Eng	M \oplus Eng
M	-	-	M \oplus Eng	M

L'isomorphisme de $(\mathbb{E}^+, \oplus, \otimes)$ et de l'espace vectoriel des types d'objets correspondants fait de la translation de ces tables une opération aisée.

Par la suite et pour simplifier l'étude sans entamer sa généralité on restreindra notre propos au sous-ensemble $\mathbb{E}^e \subset \mathbb{E}$ des objets de type puissance ou énergie auquel correspond l'ensemble {Pu, Eng} des types de ces objets. Dès lors : $\mathbb{E}^e = \mathbb{E}^e$, on travaillera donc sur l'espace vectoriel $(\mathbb{E}^e, \oplus, \otimes)$ et sur l'espace des types correspondants.

N.B : Les espaces vectoriels que nous venons de définir sont très pauvres d'un point de vue algébrique. Contrairement au cas d'espaces vectoriels définis par une loi de composition externe sur un corps, tels que ceux de l'algèbre linéaire, celui-ci est défini sur le dioïde (S, \oplus, \otimes) . On ne dispose pas d'élément symétrique, ce qui interdit par exemple le calcul de déterminants et de matrices inverses.

III. Graphe étiqueté sur (S, \oplus, \otimes) .

N.B : nous avons défini différents ensembles relatifs à la composition de processus et de leur type : les dioïdes et ceux relatifs aux transaction des flux et de leur type : les espaces vectoriels. Tous sont des structures du type (S, \oplus, \otimes) , où S est tantôt l'ensemble des processus syntaxiquement corrects tantôt l'ensemble de leurs mots de type, (les opérateurs étant dans ces cas des opérateurs internes), tantôt l'ensemble des parties de l'environnement sujets à transactions tantôt leurs types. Pour simplifier les notations on travaillera sur une structure (S, \oplus, \otimes) qui fera référence aux dioïdes s'agissant des processus et de leur type ou aux espaces vectoriels s'agissant des parties de l'environnement ou de leur type. Le cas échéant, il suffira de préciser l'ensemble $\Phi, E, L(G)$ ou $\{Pu, Eng\}$ pour définir sans ambiguïté la structure algébrique et donc les opérateurs dont il s'agit.

On propose de considérer un réseau de processus comme un graphe $G(X,U)$, où X est l'ensemble des arcs du graphe et U l'ensemble de ses sommets.

X est alors étiqueté sur E^+ , et U sur Φ dans le cas de réseaux syntaxiquement corrects (figure 5.3.a).

Par les applications w et ω on passe de $G(X,U)$ au graphe pondéré sur les types des entités de ce graphe $G_w(w(X), w(U))$ (figure 5.3.b).

Définition : on peut définir deux types de chemins sur G ; un chemin de G est soit une suite ordonnée $\chi_{i,j} = x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j$ d'arcs se succédant dans G soit la suite ordonnée des sommets correspondants $\mu_{i+1,j} = u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{j-1}, u_j$.

Pour les calculs relatifs aux compositions de processus le second type de chemins est le plus pertinent.

Définition : Le poids du chemin $\mu_{i+1,j} = u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{j-1}, u_j$ dans Φ^* est le processus :

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i+1} \otimes \phi_{i+2} \otimes \dots \otimes \phi_j$$

le poids de ce chemin dans V^* est le mot de type :

$$w_{i+1,j} = w_{i+1} \otimes w_{i+2} \otimes \dots \otimes w_j$$

avec :

$$w_{i+1,j} = w(\phi_{i+1,j}).$$

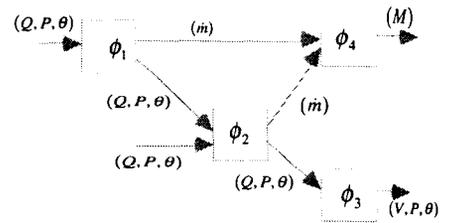


Figure 5.3.a: un réseau de processus syntaxiquement correct est un graphe étiqueté sur E^+ et Φ

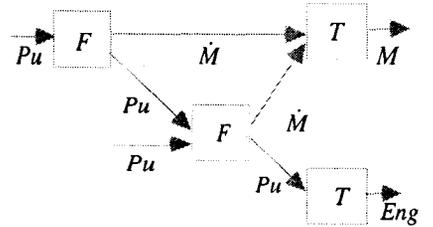


Figure 5.3.b : graphe pondéré sur les types des entités du réseau de la figure 5.3.a.

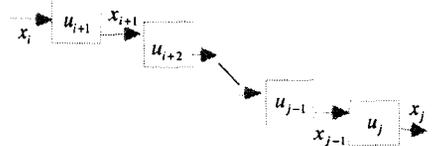


Figure 5.4.a : un exemple de chemin dans un réseau de processus $G(X,U)$.

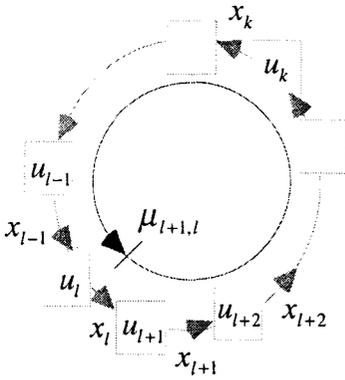


Figure 5.4.b: un exemple de circuit dans un graphe $G(X,U)$.

Définition : On ne retient comme définition des circuits dans G que celle des chemins de type $\mu_{l+1,l}$ tels que :

$$\mu_{l+1,l} = x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_{l-1}, x_l.$$

III.1 Mise en équation d'un graphe sans circuit.

III.1.1 Cas S.I.S.O.

Soit un graphe $G(X,U)$ sans circuit où un et un seul arc est en entrée et un et un seul arc est en sortie du graphe. On dira de ce graphe qu'il est de type SISO (Single Input, Single Output). Prenons par exemple celui de la figure 5.5.a :

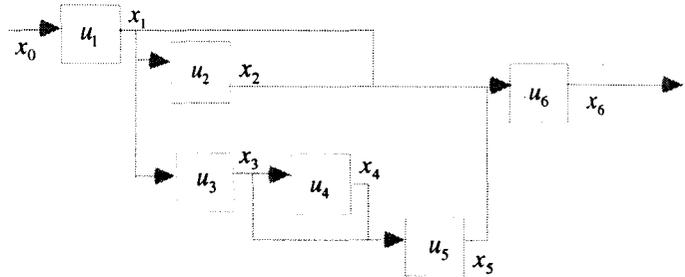


Figure 5.5.a: un exemple de réseau de processus sans circuit dans le cas de processus SISO.

La mise en équation de ce graphe consiste à donner la forme analytique de tous les chemins menant de x_0 à x_6 . On a :

$$U_{1,6} = u_1 \otimes u_6 \oplus u_1 \otimes (u_2 \oplus (u_3 \otimes u_4 \oplus u_3 \otimes u_4 \otimes u_5)) \otimes u_6$$

soit :

$$U_{1,6} = u_1 \otimes ((u_2 \oplus \varepsilon) \oplus (u_3 \otimes (u_4 \oplus \varepsilon) \otimes u_5)) \otimes u_6$$

Le graphe équivalent entre l'entrée et la sortie apparaît comme la somme (union ou superposition) des chemins allant de x_0 à x_6 . On vérifie que :

$$\begin{aligned} U_{1,6} &= u_1 \otimes u_6 \\ &\oplus u_1 \otimes u_2 \otimes u_6 \\ &\oplus u_1 \otimes u_3 \otimes u_5 \otimes u_6 \\ &\oplus u_1 \otimes u_3 \otimes u_4 \otimes u_5 \otimes u_6 \end{aligned}$$

Pondéré sur Φ^* le graphe équivalent est le processus global équivalent $\phi_{1,6}$, transformant l'entrée x_0 en la sortie x_6 , suivant :

$$\phi_{1,6} = \phi_1 \otimes ((\phi_2 \oplus \varepsilon) \oplus (\phi_3 \otimes (\phi_4 \oplus \varepsilon) \otimes \phi_5)) \otimes \phi_6$$

Ce processus est équivalent à la somme des processus transformant x_0 en x_6 . Dans l'espace des types, le poids $w_{1,6}$ de ce graphe équivalent est le mot de type du processus équivalent :

$$w_{1,6} = w_1 \otimes \left((w_2 \oplus \varepsilon) \oplus (w_3 \oplus (w_4 \oplus \varepsilon) \otimes w_5) \right) \otimes w_6$$

Si les types des processus de ce réseau sont ceux de la figure 5.5.b alors :

$$w_{1,6} = E \otimes \left((F \oplus \varepsilon) \oplus (F \otimes (F \oplus \varepsilon) \otimes F) \right) \otimes F$$

Par les règles d'équivalence on a :

$$w_{1,6} = E$$

Un réseau de processus équivalent à celui de la figure 5.5.a est donc le processus $\phi_{1,6}$ de mot de type $w_{1,6}$ transformant l'entrée x_0 en la sortie x_6 , soit le réseau de la figure 5.5.c.

III.1.2 Cas M.I.M.O

Considérons le cas de graphe sans circuit mais comportant plus d'un arc en entrée et plus d'une sortie, par exemple celui de la figure 5.6.a.

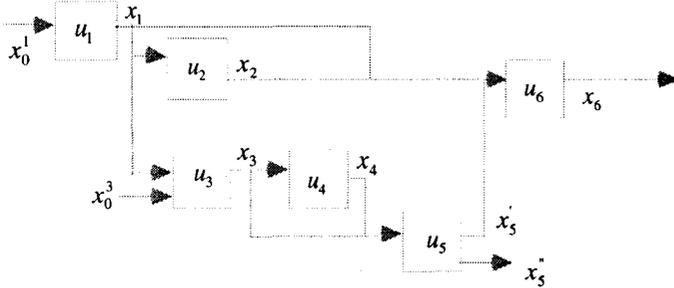


Figure 5.6.a: un exemple de graphe dans le cas M.I.M.O.

La mise en équation de ce graphe consiste à donner le système de quatre équations donnant la forme analytique des chemins entre chacune des deux entrées x_0^1, x_0^3 et des deux sorties x_5'', x_6 :

$$x_0^1 \rightarrow x_6 : \phi_{1,6} = \phi_1 \otimes \left((\phi_2 \oplus \varepsilon) \oplus (\phi_3 \otimes (\phi_4 \oplus \varepsilon) \otimes \phi_5) \right) \otimes \phi_6$$

$$x_0^1 \rightarrow x_5'' : \phi_{1,5} = \phi_1 \otimes \phi_3 \otimes (\phi_4 \oplus \varepsilon) \otimes \phi_5$$

$$x_0^3 \rightarrow x_5'' : \phi_{1,5} = \phi_3 \otimes (\phi_4 \oplus \varepsilon) \otimes \phi_5$$

$$x_0^3 \rightarrow x_6 : \phi_{1,5} = \phi_3 \otimes (\phi_4 \oplus \varepsilon) \otimes \phi_5 \otimes \phi_6$$

Avec les factorisations possibles, un réseau équivalent est donné par la figure 5.6.b. On a alors :

$$\phi_{1,6} = \phi_2 \oplus \varepsilon$$

$$\phi_{3,5} = \phi_3 \otimes (\phi_4 \oplus \varepsilon) \otimes \phi_5$$

En conservant le même typage de processus que celui de la figure 5.5.b on a les mots de type :

$$w_{1,6} = F$$

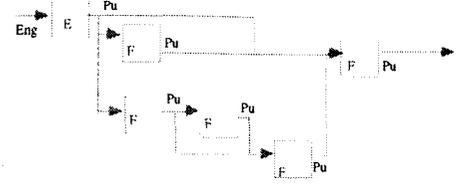


Figure 5.5.b: un exemple de typage du graphe de la figure 5.5.a

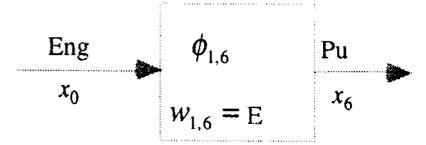


Figure 5.5.c : processus équivalent au réseau de la figure 5.5.a

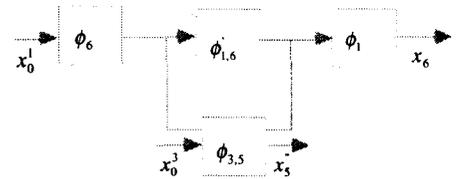


Figure 5.6.b un réseau de processus équivalent à celui de la figure 5.6.a.

$$w_{3,5} = F$$

Il existe alors autant de graphes équivalents à un niveau d'abstraction supérieur $n-1$ qu'il y a de factorisations de l'expression du réseau de processus au niveau n . Il existe autant de réseaux de processus équivalents de niveau d'abstraction moindre $n+1$ qu'il existe de développements (à l'aide des règles d'équivalence) de l'expression du réseau de niveau n .

III.2 Mise en équation d'un graphe avec circuits.

On considère ici le cas où le graphe $G(X,U)$ comporte un circuit. Le poids d'un chemin $\mu_{l+1,l} = u_{l+1}, u_{l+2}, \dots, u_{l-1}, u_l$ passant une fois par ce circuit est dans Φ^* , le processus :

$$\phi_{l+1,l} = \phi_{l+1} \otimes \dots \otimes \phi_l$$

et son mot de type V^* est :

$$w_{l+1,l} = w_{l+1} \otimes \dots \otimes w_l$$

Proposition 3 : le type du processus équivalent à un chemin $\mu_{l+1,l}$, passant une fois par un circuit de G , sous l'hypothèse d'un réseau syntaxiquement correct, a pour valeur F ou $E \otimes F \otimes T$:

$$w_{l+1,l} \in \{F, E \otimes F \otimes T\}^r$$

Démonstration

Hypothèse h1 : le réseau est syntaxiquement correct.

D'après la proposition 1 $w_{l+1,l} \in L(G)$. Le poids du circuit est :

$$w_{l+1,l} = w_{l+1} \otimes w_{l+2,l-1} \otimes w_l.$$

D'après h1, $w_l \in L(G)$, on en déduit, suivant les règles syntaxiques, les valeurs possibles de $w_{l+1} \in L(G)$ suivantes :

$$w_l = T \Rightarrow w_{l+1} = E;$$

$$w_l = E \Rightarrow w_{l+1} = F;$$

$$w_l = F \Rightarrow (w_{l+1} = F) \text{ ou } (w_{l+1} = T);$$

on a alors comme valeurs possibles pour $w_{l+1,l} = w_{l+1} \otimes w_{l+2,l-1} \otimes w_l$:

$$w_{l+1,l} = E \otimes w_{l+2,l-1} \otimes T;$$

$$w_{l+1,l} = F \otimes w_{l+2,l-1} \otimes F;$$

$$w_{l+1,l} = T \otimes w_{l+2,l-1} \otimes F;$$

ce qui implique pour $w_{l+2,l-1}$:

$$w_{l+2,l-1} = F;$$

$$w_{l+2,l-1} = F;$$

$$w_{l+2,l-1} = E;$$

d'où :

$$w_{l+1,l} = E \otimes F \otimes T;$$

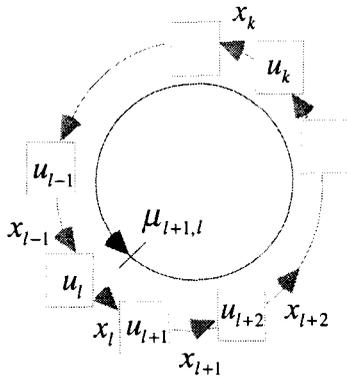


Figure 5.7.a : un chemin passant une fois et une seule par un circuit.

$$w_{l+1,l} = F \otimes F \otimes F;$$

$$w_{l+1,l} = T \otimes E \otimes F;$$

En vertu des règles d'équivalence on a :

$$(w_{l+1,l} = E \otimes F \otimes T) \text{ ou } (w_{l+1,l} = F)$$

soit :

$$w_{l+1,l} \in \{E \otimes F \otimes T, F\}.$$

Soit le chemin $\mu_{l+1,l}^k$ passant k fois par le circuit $\mu_{l+1,l}$. Son poids dans Φ^* est :

$$\phi_{l+1,l}^k = \underbrace{\phi_{l+1,l} \otimes \dots \otimes \phi_{l+1,l}}_{\times k}.$$

Son type est donc :

$$w_{l+1,l}^k = \underbrace{w_{l+1,l} \otimes \dots \otimes w_{l+1,l}}_{\times k}.$$

Proposition 4 : Le processus équivalent au chemin $\mu_{l+1,l}^k$ empruntant k fois les sommets du circuit $\mu_{l+1,l}$ a le même type que celui du processus équivalent au chemin $\mu_{l+1,l}$ passant une fois par ce circuit si le réseau est syntaxiquement correct.

$$w(\mu_{l+1,l}^k) = w(\mu_{l+1,l}).$$

Démonstration.

Hypothèse h1 : réseau syntaxiquement correct.

Le chemin $\mu_{l+1,l}^k$ s'écrit :

$$\mu_{l+1,l}^k = \mu_{l+1,l} \otimes \dots \otimes \mu_{l+1,l};$$

soit un poids égal à :

$$w(\mu_{l+1,l}^k) = w_{l+1,l} \otimes \dots \otimes w_{l+1,l} = w_{l+1,l}^k.$$

D'après la proposition 3, on a :

$$w_{l+1,l} = F \Rightarrow w_{l+1,l}^k = F^k = F$$

$$w_{l+1,l} = E \otimes F \otimes T \Rightarrow w_{l+1,l}^k = (E \otimes F \otimes T)^k = E \otimes F \otimes T$$

On a bien $w_{l+1,l}^k = w_{l+1,l}$.

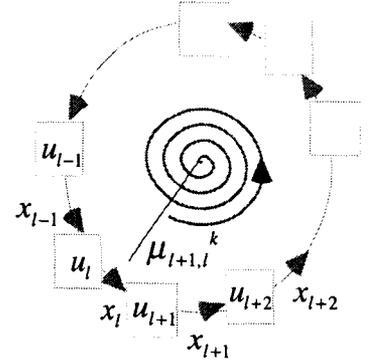


Figure 5.7.b : chemin passant k fois par un circuit.

$$w_{l,l+1} = F \otimes (F) \otimes F = F \otimes F = w_l \otimes w_{l+1};$$

$$(2) : w_l = F \quad w_{l+1} = T;$$

alors :

$$w_{l,l+1} = F \otimes (F) \otimes T = F \otimes T = w_l \otimes w_{l+1};$$

cas 3 : $w_l = E \quad w_{l+1,l} = F;$

$$w_l = E \quad w_{l+1} = F;$$

alors

$$w_{l,l+1} = E \otimes (F) \otimes F = E \otimes F = w_l \otimes w_{l+1}.$$

On a bien $w_{l,l+1} = w_l \otimes w(\mu_{l+1,l}^k) \otimes w_{l+1} = w_l \otimes w_{l+1}.$

Soit alors un chemin quelconque $\mu_{i,j} = \mu_{i,l}, \mu_{l+1,l}^k, \mu_{l,j}$, il s'écrit :

$$\mu_{i,j} = \mu_{i,l-1}, \mu_{l,l+1}, \mu_{l+2,j};$$

de ce qui précède on déduit :

$$w(\mu_{i,i}) = w(\mu_{i,l-1}) \otimes w_{l,l+1} \otimes w(\mu_{l+2,j});$$

soit :

$$w_{i,j} = w_{i,l} \otimes w_{l+1,j};$$

pois de la chaîne directe.

Corollaire. 1 : si $i=j=l$ alors $\mu_{i,j} = \mu_{l,l}$ s'écrit : $\mu_{i,i} = u_i, \mu_{l+1,l}^k, u_i$ d'après la proposition 5 on a :

$$w_{l+1,l} = \varepsilon$$

Le corollaire 1 s'accorde à notre intuition qu'un processus qui transforme un flux en lui même est le processus identité de type ε . Cela signifie également que parmi les processus F et E.F.T, c'est à dire transformant respectivement des puissances en puissances et des énergies en énergies, il en existe certains qui correspondent à des processus identité : ceux constituant les boucles du réseau. C'est une autre règle d'équivalence qui dit que des processus de type F ou E.F.T constituant les circuits d'un réseau de processus sont équivalents à des processus de type identité.

III.2.2 Graphe équivalent avec circuits.

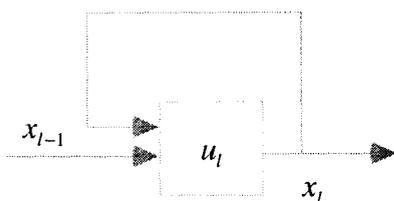


Figure 5.8.a : un graphe simple comportant un circuit.



Figure 5.8.b : Graphe équivalent sans circuit à $G(X,U)$.

On sait mettre sous la forme d'un système d'équations un graphe sans circuit et calculer les processus équivalents et leur type. Pour la mise en équation d'un graphe comportant des circuits, il faut pouvoir calculer le graphe sans circuit équivalent. Prenons le cas du graphe $G(X,U)$ de la Figure 5.8.a comportant un circuit. On cherche alors le graphe $G_{eq}(X_{eq},U_{eq})$ sans circuit équivalent entre x_{l-1} et x_l (figure 5.8.b).

Définition : Soit ϕ un processus quelconque de Φ^* . On appelle quasi-inverse de ϕ le processus ϕ^* défini comme :

$$\phi^* = \text{Lim}_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\oplus} \phi^k$$

son mot de type est alors :

$$w^* = w \left(\text{Lim}_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\oplus} \phi^k \right) = \text{Lim}_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\oplus} w^k$$

Théorème 5.1 : Soit à résoudre dans (S, \otimes, \oplus) l'équation :

$$y = y \otimes a \oplus b$$

on montre que $b \otimes a^*$ est la solution minimale de cette équation.

Démonstration : soit $y = b \otimes a^*$, alors :

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{\infty} b \otimes a^k \\ y \otimes a &= \sum_{k=1}^{\infty} b \otimes a^k \\ y \otimes a \oplus b &= \sum_{k=1}^{\infty} b \otimes a^k \oplus b \otimes a^0 \\ y \otimes a \oplus b &= \sum_{k=0}^{\infty} b \otimes a^k \\ \text{soit : } y \otimes a \oplus b &= y \end{aligned}$$

La mise en équation de la transaction de $G(X,U)$ dans E^+ donne :

$$x_l = x_l \otimes \phi_l \oplus x_{l-1} \otimes \phi_l$$

cette équation traduit la transformation par ϕ_l des arcs x_l et x_{l-1} en x_l . On a d'après le théorème 5.1 que la solution minimale de cette équation est :

$$x_l = x_{l-1} \otimes \phi_l \otimes \phi_l^*$$

La mise en équation du graphe équivalent $G_{eq}(X_{eq},U_{eq})$ est dans E^+ :

$$x_i = x_{i-1} \otimes \phi_{eq}$$

$G(X,U)$ et $G_{eq}(X_{eq},U_{eq})$ étant équivalents ils ont donc même poids dans Φ^* . On a :

$$\phi_{eq} = \phi_l \otimes \phi_l^*$$

$G(X,U)$ et $G_{eq}(X_{eq},U_{eq})$ étant équivalent ils ont également même poids dans $L(G)^*$:

$$w_{eq} = w_l \otimes w_l^*$$

Si on revient à l'expression de $\phi^* = \sum_{\oplus} \phi^k = \varepsilon \oplus \phi \oplus \dots \oplus \phi^k, k \rightarrow \infty$, alors ϕ^* est le processus équivalent à la somme des chemins passant, zéro, une fois, ..., une infinité de fois par le circuit. C'est donc le processus équivalent à tous les chemins possibles générés par ce circuit. Intuitivement ϕ^* est une solution satisfaisante comme processus équivalent à ces chemins.

Considérons le cas de la figure 5.9.a où le rebouclage est non unitaire. La mise en équation donne :

$$x_i = x_i \otimes \phi' \otimes \phi_l \oplus x_{i-1} \otimes \phi_l$$

La solution est donc :

$$\phi_{eq} = \phi_l \otimes (\phi' \otimes \phi_l)^*$$

et

$$w_{eq} = w_l \otimes (w' \otimes w_l)^*$$

La représentation équivalente est alors celle de la figure 5.9.b.

Le dernier cas que l'on envisagera est celui de la Figure 5.10.a. On cherche alors le graphe équivalent entre x_{i-1} et x_i où ces flux sont l'union de deux flux élémentaires. La mise en équation donne le système suivant :

dans E^+ :

$$x_i = x_{i-1} \otimes \phi_l \oplus x_{i-1} \otimes \phi_l \tag{5.8.a}$$

$$x_{i-1} = x_i \otimes \phi' \tag{5.8.b}$$

$$x_i = x_{i-1} \otimes \phi_l \oplus x_{i-1} \otimes \phi_l \tag{5.8.c}$$

en remplaçant x_i par sa valeur dans 5.8.a dans 5.8.b on a :

$$x_{i-1} = x_{i-1} \otimes \phi_l \otimes \phi' \oplus x_{i-1} \otimes \phi_l \otimes \phi' \tag{5.8.d}$$

soit d'après le théorème 5.1 :

$$x_{i-1} = x_{i-1} \otimes \phi_l \otimes \phi' \otimes (\phi_l \otimes \phi')^* \tag{5.8.e}$$

en remplaçant x_{i-1} par sa valeur dans (5.8.c) :

$$x_i = x_{i-1} \otimes \phi_l \otimes (\varepsilon \oplus \phi' \otimes (\phi_l \otimes \phi')^* \otimes \phi_l) \tag{5.8.f}$$

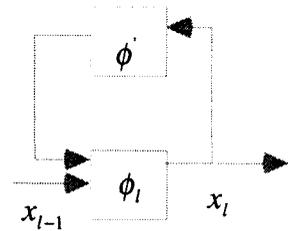


Figure 5.9.a : cas d'un rebouclage non-unitaire.

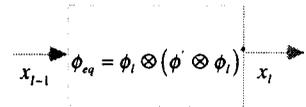


Figure 5.9.b : réseau équivalent à celui de la figure 5.9.a.

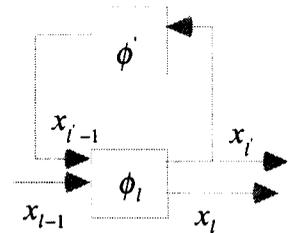


Figure 5.10.a : cas d'un graphe avec rebouclage non-unitaire et sortie non rebouclées

Le poids dans Φ^* du graphe équivalent est donc :

$$\phi_{eq} = \phi_l \otimes \left(\varepsilon \oplus \phi' \otimes (\phi_l \otimes \phi')^* \otimes \phi_l \right)$$

On en déduit son poids dans $L(G)$:

$$w_{eq} = w_l \otimes \left(\varepsilon \oplus w' \otimes (w_l \otimes w')^* \otimes w_l \right)$$

Deux réseaux sont équivalents s'ils ont la même expression formelle de leurs chemins. L'utilisation de la quasi-inverse dans l'espace vectoriel $(\Phi^*, \oplus, \otimes)$ donne l'expression formelle de l'infinité de chemins générée par un circuit dans un graphe. La proposition 4 démontre que cette quasi-inverse converge dans $(L(G), \oplus, \otimes)$ si le réseau est syntaxiquement correct et donc par isomorphisme dans (Φ, \oplus, \otimes) .

IV. Représentation matricielle d'un réseau de processus.

Les mises en équation précédentes sont satisfaisantes pour des réseaux de processus comportant peu de processus. Dans le cas de réseaux comportant un grand nombre de processus une mise en équation sous une forme matricielle est souhaitable.

On définit $M_N(S)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre N à éléments dans S ($S = \Phi^*$ ou V^*). On définit alors l'addition et la multiplication matricielle à partir de \oplus et \otimes . Soient $A = [a_{i,j}]$ et $B = [b_{i,j}]$ deux matrices d'ordre N telles que $a_{i,j}, b_{i,j} \in S$ et $i, j = 1 \dots n$, alors on a :

$$C = A \oplus B \Leftrightarrow c_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j} \quad \forall i, j,$$

$$C = A \otimes B \Leftrightarrow c_{i,j} = \sum_{1 \leq k \leq n} b_{k,j} \oplus a_{i,k} \quad \forall i, j$$

On notera l'inversion des termes dans le produit matriciel par rapport à la formule du calcul matriciel classique.

L'addition \oplus admet alors comme élément neutre la matrice nulle :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \emptyset & \dots & \emptyset \\ \dots & \dots & \dots \\ \emptyset & \dots & \emptyset \end{bmatrix}$$

La multiplication \otimes admet comme élément neutre la matrice identité :

$$I = \begin{bmatrix} \varepsilon & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \dots & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \varepsilon \end{bmatrix}$$

et $A^0 = I$.

IV.1 Matrice d'incidence généralisée d'un graphe.

Soit $G(X,U)$ un graphe étiqueté sur S alors la matrice d'incidence généralisée de G est :

$$A = [a_{i,j}]:$$

telle que :

$$a_{i,j} = \begin{cases} s_{i,j} \in S \Leftrightarrow \exists x_i u_j x_j \in X \times U \times X \\ \emptyset \end{cases}$$

On note par ailleurs:

- $C_{i,j}^k$ l'ensemble des chemins de i à j de longueur égale à k sommets.

- $C_{i,j}^{(k)}$ est l'ensemble des chemins de i à j de longueur au plus égale à k .

Proposition 6 [Gon-95] : La matrice $A^k = \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_k$, est la matrice des poids des chemins de longueur k dans G .

$$A^k = [a_{i,j}^k] \Leftrightarrow a_{i,j}^k = \sum_{\mu \in C_{i,j}^k} w(\mu).$$

Proposition 7 [Gon-95] : La matrice $A^{(k)} = \Sigma \oplus A^1 \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^k$ est la matrice des poids des chemins de longueur au plus égale à k dans G .

$$A^{(k)} = [a_{i,j}^{(k)}] \Leftrightarrow a_{i,j}^{(k)} = \sum_{\mu \in C_{i,j}^{(k)}} w(\mu).$$

Le calcul des expressions de tous les chemins est alors accessible par produit matriciel, mais il nous faut montrer que cette matrice converge malgré l'existence de boucles. On exploite pour cela la convergence des types de processus pour les réseaux syntaxiquement corrects.

IV.2 Théorème de convergence de la matrice $A^{(k)}$ dans $(L(G), \oplus, \otimes)$.

IV.2.1 Élément p-régulier.

Soit $a \in S$, a est dit p-régulier si :

$$\exists p \in \mathbb{N} \text{ tel que } a^{(p)} = a^{(p+1)} = \dots = a^{(p+q)} \quad \forall q \geq 1 \in \mathbb{N};$$

avec :

$$a^{(k)} = e \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots \oplus a^k.$$

Proposition 8 : le type d'un circuit de G est un élément 0-régulier :

$$w_{ii}^{(k)} = w_{ii}^0 = \varepsilon.$$

Démonstration

Soit w_{ii} , alors :

$$w_{ii}^{(k)} = \varepsilon \oplus w_{ii} \oplus w_{ii}^2 \oplus \dots \oplus w_{ii}^k,$$

d'après la proposition 4 :

$$w_{ii}^k = w_{ii} \quad \forall k \geq 1;$$

d'où :

$$w_{ii}^{(k)} = \varepsilon \oplus w_{ii} \oplus w_{ii} \oplus \dots \oplus w_{ii}.$$

L'opérateur \oplus étant idempotent on a :

$$w_{ii}^{(k)} = \varepsilon \oplus w_{ii} \text{ élément 1-régulier}$$

d'après le corollaire 1 :

$$w_{ii} = \varepsilon$$

d'où, par idempotence de \oplus :

$$w_{ii}^{(k)} = \varepsilon$$

Un graphe G est dit sans circuit p-absorbant si chacun de ses circuits est p-régulier.

Proposition 9 : Un graphe G syntaxiquement correct est sans circuit 0-absorbant.

Démonstration

Si G est syntaxiquement correct, un circuit dans G d'après la proposition 8 est 0-régulier. G est donc sans circuit 0-absorbant.

Cette proposition exprime d'une autre manière le fait que pour le calcul d'un chemin, passant par une ou plusieurs boucles, le type des boucles n'affecte pas celui du chemin qui est le même que celui de la chaîne directe sans passer par la boucle.

Théorème 5.2 : $C_{i,j}^{(k)}(0)$ étant l'ensemble des chemins de longueur au plus égale à $k+1$ sans cycle, si G est sans circuit 0-absorbant alors :

$$A_{i,j}^{(k)} = \sum_{\mu \in C_{i,j}^{(k)}(0)} w(\mu)$$

et $A^{(k)}$ admet comme limite A^* quasi-inverse de A:

$$A^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} A^{(k)} = A^{(N-1)}.$$

Un corollaire de ce théorème est que la diagonale de cette matrice est constituée de coefficients égaux à l'identité.

Ce théorème donne l'équivalent matriciel du théorème 5.1. Pour un réseau syntaxiquement correct de matrice d'incidence A, il existe un réseau équivalent sans boucle dont la matrice d'incidence est A^* et qui converge vers $A^{(N-1)}$. Ce théorème est intéressant à plus d'un titre, il confirme l'existence d'un processus équivalent ; on dispose

de l'expression formelle de sa matrice d'incidence, et il montre que cette matrice est calculable par un algorithme qui converge au plus après $N-1$ produits matriciels

V. Mise en équation d'un réseau de processus

Nous abordons dans cette partie l'aspect opérationnel de la mise en équation d'un réseau de processus.

V.1 Mise en équation des transformations.

Un réseau de processus est un ensemble de N processus : $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$, opérant sur $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(N)}$ (leurs N vecteurs de flux d'entrée) N transformations en $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(N)}$ (leur N vecteurs de flux de sortie). Une transformation d'un vecteur d'entrée en un vecteur de sortie est noté dans \mathbb{E}^+ :

$$Y^{(i)} = \phi_i \otimes X^{(i)}$$

On ne s'intéressera ici qu'aux types des processus et des flux du réseau, la translation des résultats dans l'espace des processus et des flux étant aisée par isomorphisme. On conviendra que $X^{(i)}$ et $Y^{(j)}$ sont des vecteurs de types d'objets formés sur $w(\mathbb{E}^{e+})$.

La mise en équation des N transformations d'un réseau de N processus consiste en N équations d'une des formes suivantes :

processus de type transformation :

$$Y^{(i)} = F \otimes X^{(i)}$$

processus de type stockage :

$$Y^{(i)} = T \otimes X^{(i)}$$

processus de type transport :

$$Y^{(i)} = E \otimes X^{(i)}$$

processus de (type composé) conversion d'énergie :

$$Y^{(i)} = E \otimes F \otimes T \otimes X^{(i)}.$$

On note :

-le vecteur des N vecteurs d'entrée X :

$$X = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(i)}, \dots, X^{(N)})$$

X n'est alors autre que l'union des flux d'entrée :

$$X = X^{(1)} \oplus X^{(2)} \oplus \dots \oplus X^{(i)} \oplus \dots \oplus X^{(N)}$$

les paramètres du vecteur X sont arrangés de telle sorte que les vecteurs $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(i)}$ soient des vecteurs de type puissance, puis $X^{(i+1)}, \dots, X^{(N)}$ des vecteurs de type énergie;

- le vecteur des N vecteurs de sortie Y :

$$Y = Y^{(1)} \oplus Y^{(2)} \oplus \dots \oplus Y^{(j)} \oplus \dots \oplus Y^{(N)}$$

$$Y = (Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(j)}, \dots, Y^{(N)})$$

ses éléments sont arrangés de telle sorte que les vecteurs $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(j)}$ soient des vecteurs de type puissance suivis de $Y^{(j+1)}, \dots, Y^{(N)}$, vecteurs de type énergie.

Dès lors, les N équations de type de transformation se notent sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ \vdots \\ Y^{(j)} \\ \dots \\ Y^{(j+1)} \\ \vdots \\ Y^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{matrix} & Pu & Eng \\ Pu & \begin{pmatrix} [F] & \vdots & [E] \\ \dots & \vdots & \dots \end{pmatrix} & \\ Eng & \begin{pmatrix} [T] & \vdots & [E.F.T] \end{pmatrix} & \end{matrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(i)} \\ X^{(i+1)} \\ \vdots \\ X^{(N)} \end{pmatrix} \quad (5.9.a)$$

soit de façon plus synthétique :

$$Y = A.X \quad (5.9.b)$$

Cette matrice A est la matrice de transformation.

-L'arrangement des paramètres des vecteurs Y et X induit une structuration de la matrice A en quatre sous-matrices :

$$A = \begin{pmatrix} A_F & \vdots & A_E \\ \dots & \vdots & \dots \\ A_T & \vdots & A_{E.F.T} \end{pmatrix} \quad (5.10.a)$$

la sous-matrice A_F est celle de la transformation de flux de puissance en d'autres flux de puissance, tous les coefficients de cette matrice sont égaux à F ou nuls.

Il en est de même pour A_E matrice des transports d'énergie sous forme de puissance, et de A_T matrice des stockages de puissances en énergies.

La matrice $A_{E.F.T}$ est celle des transformations de flux d'énergie en d'autres flux d'énergie, ce type de transformation résulte de la composition des types T, E, F.

-Tous les coefficients d'une même ligne dans la matrice sont égaux, sinon un même flux serait le résultat de deux types de processus ; ce serait par exemple une puissance à la fois issue d'une transformation et d'un transport simultanément ce qui est syntaxiquement incorrect.

V.2 Mise en équation de l'organisation.

Ces N processus $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ sont connectés en un réseau . Il en résulte une organisation qui est une propriété de ce réseau. Le même ensemble de processus connectés différemment donne un nouveau processus différent du premier. Il nous faut donc mettre cette organisation en équation.

Soient deux processus ϕ_r et ϕ_s du réseau. Il y a relation entre ces processus si et seulement si au moins une des composantes du vecteur de sortie de ϕ_r devient une des composantes du vecteur d'entrée de ϕ_s .

Soit $Y^{(r)}$ le vecteur de flux de sortie de ϕ_r et $X^{(s)}$ le vecteur de flux d'entrée de ϕ_s . Ces vecteurs prennent respectivement la forme :

$$Y^{(r)} = (Y_1^{(r)}, Y_2^{(r)}, \dots, Y_m^{(r)})$$

$$X^{(s)} = (X_1^{(s)}, X_2^{(s)}, \dots, X_n^{(s)})$$

Les composantes $Y_j^{(r)}$ et $X_i^{(s)}$ des vecteurs $Y^{(r)}$ et $X^{(s)}$ sont respectivement le $j^{\text{ième}}$ flux de sortie du $r^{\text{ième}}$ processus et le $i^{\text{ième}}$ flux d'entrée du $s^{\text{ième}}$ processus (figure 5.11.a,b).

Un exemple de mise en relation de ces deux processus est illustré par :

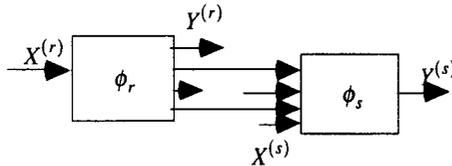


Figure 5.11.c: exemple de mise en relation de deux processus.

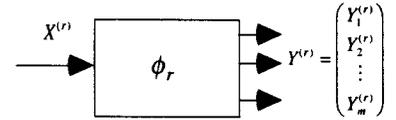


Figure 5.11.a : illustration de la décomposition du vecteur des flux de sortie d'un processus.

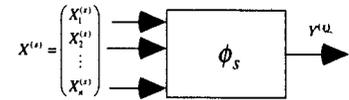


Figure 5.11.b: illustration de la décomposition du vecteur des flux d'entrée d'un processus.

Cette mise en relation de l'exemple ci-dessus s'écrit :

$$X_1^{(s)} = Y_2^{(r)}$$

$$X_3^{(s)} = Y_4^{(r)} \tag{5.11.a}$$

Du point de vu des types de flux ces équations sont équivalentes à un processus de transformation de flux de type ε (processus de type identité). On réécrit les équations (5.11.a) comme :

$$X_1^{(s)} = \varepsilon \cdot Y_2^{(r)}$$

$$X_3^{(s)} = \varepsilon \cdot Y_4^{(r)} \tag{5.11.b}$$

On étend la mise en équation à toutes les composantes du vecteur $X^{(s)}$ fonction de toutes les composantes du vecteur $Y^{(r)}$ on a :

$$\begin{pmatrix} X_1^{(s)} \\ X_2^{(s)} \\ X_3^{(s)} \\ X_4^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset & \varepsilon & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \varepsilon \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1^{(r)} \\ Y_2^{(r)} \\ Y_3^{(r)} \\ Y_4^{(r)} \end{pmatrix} \tag{5.11.c}$$

soit de façon plus synthétique :

$$X^{(s)} = C_{sr} \cdot Y^{(r)} \tag{5.11.d}$$

On étend la mise en équation de $X^{(s)}$ en fonction des N vecteurs de sortie $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(j)}, \dots, Y^{(N)}$ on a :

$$X^{(s)} = C_{s1} \cdot Y^{(1)} + C_{s2} \cdot Y^{(2)} + \dots + C_{sN} \cdot Y^{(N)} \quad (5.12.a)$$

Si deux processus ϕ_r et ϕ_s ne sont pas en relation alors on a :

$$C_{rs} = [\emptyset]$$

On peut ainsi écrire N équations de type (5.12.a) pour les N vecteurs de flux d'entrée $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(i)}, \dots, X^{(N)}$:

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= C_{11} \cdot Y^{(1)} + C_{12} \cdot Y^{(2)} + \dots + C_{1N} \cdot Y^{(N)} \\ X^{(2)} &= C_{21} \cdot Y^{(1)} + C_{22} \cdot Y^{(2)} + \dots + C_{2N} \cdot Y^{(N)} \\ &\vdots \\ X^{(N)} &= C_{N1} \cdot Y^{(1)} + C_{N2} \cdot Y^{(2)} + \dots + C_{NN} \cdot Y^{(N)} \end{aligned} \quad (5.13.a)$$

Soit sous la forme matricielle :

$$X = C \cdot Y \quad (5.13.b)$$

On appellera la matrice C matrice de structure ou de connexion. Cette matrice est équivalente à un processus de transformation des flux de sortie en flux d'entrée opéré par l'organisation du réseau de processus, elle traduit une propriété du système.

V.3 Mise en équation du réseau de processus.

Nous pouvons donc écrire deux équations sur un réseau de processus :

$$Y = A \cdot X \quad (5.14.a)$$

$$X = C \cdot Y \quad (5.15.b)$$

On obtient par combinaison de ces deux équations :

$$\begin{aligned} Y &= A \cdot C \cdot Y \\ X &= C \cdot A \cdot X \end{aligned} \quad (5.15)$$

Les matrices $A \cdot C$ et $C \cdot A$ sont respectivement les matrices de transformation des vecteurs de sortie en eux mêmes et de transformation des vecteurs d'entrée en eux mêmes par un chemin passant par un processus organisé.

On peut écrire une autre équation :

$$Y = A \cdot (C \cdot A) \cdot X \quad (5.16)$$

Cette équation s'interprète comme la matrice des transformations de longueur 2 (deux transformations successives). Par itération on peut écrire $N-1$ équations qui sont :

$$\begin{aligned} Y &= A \cdot X = A \cdot (C \cdot A)^0 \cdot X \\ Y &= A \cdot (C \cdot A) \cdot X \\ &\vdots \\ Y &= A \cdot (C \cdot A)^{N-1} \cdot X \end{aligned} \quad (5.17)$$

la matrice :

$$A.(C.A)^{N-1} \quad (5.18)$$

n'est autre que la matrice d'incidence généralisée à la puissance $N-1$ du réseau donnant toutes les séquences de $N-1$ processus.

Par sommation des matrices précédentes on peut calculer la matrice :

$$A.(C.A)^{(N-1)} = A + A.(C.A) + \dots + A.(C.A)^{N-1}$$

Cette matrice donne l'expression de toutes les séquences de processus de longueur inférieure ou égale à $N-1$. D'après le théorème 1 et en faisant tendre k vers l'infini, on a :

$$A.(C.A)^{(N-1)} = A.(C.A)^* = \lim_{k \rightarrow \infty} A.(C.A)^k$$

Elle n'est autre que la matrice d'incidence du processus globalement équivalent au réseau de processus de matrices de transformation A et d'organisation C .

VI. Applications et mise en oeuvre.

La mise en équation que nous venons d'élaborer est exploitable dans les catégories de problèmes suivantes :

- typage des réseaux de processus : Deux questions se posent alors : sont-ils, du point de vue des types de processus mis en oeuvre, organisés de façon cohérente (avec les règles syntaxiques) ? Existe-il, pour un réseau donné, un typage des processus qui soit compatible avec notre syntaxe ?

- organisation hiérarchique des réseaux : problèmes d'agrégation ou de décomposition de processus ;

- vérification de la cohérence des représentations entre les différents points de vue de la matrice SAGACE.

La résolution de ces problèmes se ramène d'une façon générale à des élévations en puissance de la matrice des types de ces réseaux dont nous venons d'exposer les principes d'écriture.

VI.1 Validation syntaxique d'un réseau de processus

Soit un réseau de processus $G(X,U)$; on rappelle que U est l'ensemble des processus du réseau et X l'ensemble des flux. Soient A et C , respectivement, la matrice des types de processus et la matrice de connexion.

Si ce réseau est syntaxiquement correct alors :

- a/tous les mots de type de sa matrice $A = [a_{i,j}]$ sont à valeurs dans $L(G)$, les N^2 conditions doivent être satisfaites :

$$\forall_{i,j}, i,j = 1 \dots N, w(a_{i,j}) = w_{i,j} \in L(G); \quad (5.19.a)$$

ou :

$$\forall i, j \in [1..N], w_{ij} \in \{F, E, T\} \cup \{E.F.T\} \cup \{\varepsilon\} \cup \{\emptyset\}. \quad (5.19.b)$$

- b/ tous les processus et leurs successeurs doivent être tels que les mots de types de tous les chemins de longueur deux (formés par un processus et un de ses successeurs dans le réseau) sont à valeur dans $L(G)$. On vérifie mathématiquement cette condition en calculant la matrice des chemins de longueur deux, soit:

$$A.(C.A) = [w_{ij}^2],$$

les coefficients de cette matrice doivent vérifier les N^2 équations :

$$\forall i, j \in [1..N], w_{ij}^2 \in L(G).$$

Prenons par exemple le réseau de la figure 5.12.a:

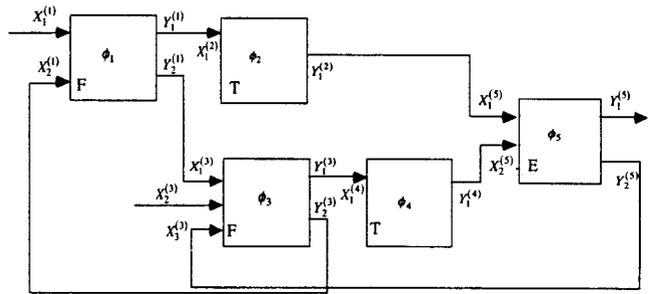


Figure 5.12.a: un exemple de réseau

Le mot de type de chacun des processus $\phi_i, i=1..5$ est à valeur dans $L(G)$, les N^2 premières conditions à satisfaire le sont donc. Pour l'écriture de la matrice des transformations, et de façon à la rendre plus concise, on pose :

$$X^{(1)} = X_1^{(1)} \oplus X_2^{(1)}, Y^{(1)} = Y_1^{(1)} \oplus Y_2^{(1)}$$

$$X^{(2)} = X_1^{(2)} \quad Y^{(2)} = Y_1^{(2)}$$

$$X^{(3)} = X_1^{(3)} \oplus X_2^{(3)} \oplus X_3^{(3)}, Y^{(3)} = Y_1^{(3)} \oplus Y_2^{(3)}$$

$$X^{(4)} = X_1^{(4)} \quad Y^{(4)} = Y_1^{(4)}$$

$$X^{(5)} = X_1^{(5)} \oplus X_2^{(5)}, Y^{(5)} = Y_1^{(5)} \oplus Y_2^{(5)}$$

Les équations de transactions portant sur les cinq flux d'entrée transformés en les cinq flux de sortie donnent :

$$\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(3)} \\ Y^{(5)} \\ Y^{(2)} \\ Y^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & F & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & E \\ \emptyset & T & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & T & \emptyset \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \\ X^{(3)} \\ X^{(4)} \\ X^{(5)} \end{pmatrix}. \quad (5.20.a)$$

Les vecteurs de flux sont arrangés suivant les types de flux en puissance puis énergie. On vérifie que les N^2 coefficients de la matrice de transformations sont éléments de $L(G)$.

Les équations de structure donnent la matrice C suivante :

$$\begin{pmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \\ X_1^{(2)} \\ X_1^{(3)} \\ X_2^{(3)} \\ X_3^{(3)} \\ X_1^{(4)} \\ X_1^{(5)} \\ X_2^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \varepsilon & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \varepsilon & \emptyset \\ \emptyset & \varepsilon & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \varepsilon & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \varepsilon & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \varepsilon & \emptyset \\ \emptyset & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1^{(1)} \\ Y_2^{(1)} \\ Y_1^{(3)} \\ Y_2^{(3)} \\ Y_1^{(5)} \\ Y_2^{(5)} \\ Y_1^{(2)} \\ Y_1^{(4)} \end{pmatrix} \quad (5.20.b)$$

La matrice $A.(C.A)$ est alors égale à :

$$\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(3)} \\ Y^{(5)} \\ Y^{(2)} \\ Y^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & F & \emptyset & \emptyset \\ F & \emptyset & \emptyset & \emptyset & E \\ \emptyset & F & \emptyset & F & \emptyset \\ T & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & T & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \\ X^{(3)} \\ X^{(4)} \\ X^{(5)} \end{pmatrix} \quad (5.20.c)$$

On vérifie que chacun des coefficients de la matrice $A.(C.A)$ est à valeurs dans $L(G)$. Le type de tous les processus est syntaxiquement correct ; le type de toutes les séquences de deux processus est syntaxiquement correct. On en déduit que le réseau est syntaxiquement correct.

Reprenons le même réseau de processus dans lequel on introduit volontairement des erreurs syntaxiques sur ϕ_2 et ϕ_5 . Le réseau devient celui de la figure 5.12.b :

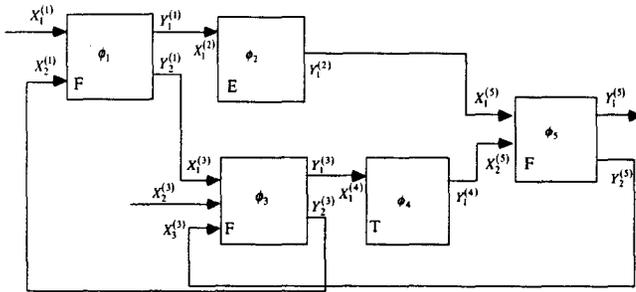


Figure 5.12.b: un exemple de réseau syntaxiquement incorrect.

Bien que les coefficients de la matrice A soient corrects, ceux de la matrice $A.C.A$ ne satisfont pas tous aux conditions de validité. On a $A.C.A$:

$$\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(3)} \\ Y^{(5)} \\ Y^{(2)} \\ Y^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & F & \emptyset & \emptyset \\ F & \emptyset & \emptyset & \emptyset & E \\ \emptyset & F & \emptyset & T.F & \emptyset \\ F.E & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & T & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \\ X^{(3)} \\ X^{(4)} \\ X^{(5)} \end{pmatrix} \quad (5.21.a)$$

Les deux coefficients $w_{1,2} = F.E$ et $w_{4,5} = T.F$ (les indices sont les numéros de processus et non la position dans la matrice) sont éléments de V^* mais pas de $L(G)$. Ils sont donc syntaxiquement incorrects. Le réseau est syntaxiquement incorrect. On est également capable de localiser ces incompatibilités dans le réseau et d'incriminer les séquences $\phi_1 \otimes \phi_2$ et $\phi_4 \otimes \phi_5$.

VI.2 Calcul d'un typage compatible d'un réseau de processus.

Etant donné un réseau partiellement typé (seul un sous-ensemble de l'ensemble des processus du réseau sont de types connus), on cherche à calculer les types admissibles des autres processus.

Considérons par exemple le réseau de la figure 5.12.c, où les mots de type des processus ϕ_2 , ϕ_3 et ϕ_4 respectivement w_2 , w_3 et w_4 sont supposés inconnus. On fait abstraction (pour la résolution du problème) des types de flux en entrée et en sortie des processus.

D'après la proposition 1, si le réseau est syntaxiquement correct, alors les mots de type de ses processus sont à valeurs dans $L(G)$. On fait l'hypothèse que les types des processus recherchés sont simples, c'est à dire à valeurs dans $\{T, E, F\}$. La matrice A s'écrit :

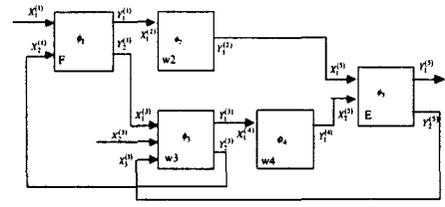


Figure 5.12.c: un exemple de réseau incomplètement typé.

$$\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \\ Y^{(3)} \\ Y^{(4)} \\ Y^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & w_2 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & w_3 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & w_4 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \\ X^{(3)} \\ X^{(4)} \\ X^{(5)} \end{pmatrix} \quad (5.22.a)$$

La proposition 1 permet donc d'écrire que les chemins de longueur 1 sont tels que :

$$\begin{aligned} w_2 &= T + E + F; \\ w_3 &= T + E + F; \\ w_4 &= T + E + F \end{aligned}$$

où le signe '+' est ici le *ou* logique.

L'obtention de nouvelles contraintes passe par le calcul de la matrice des chemins de longueur 2 : $A.C.A$. On a :

$$\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \\ Y^{(3)} \\ Y^{(4)} \\ Y^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & w_3.F & \emptyset & \emptyset \\ F.w_2 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ F.w_3 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & E.w_3 \\ \emptyset & \emptyset & w_3.w_4 & \emptyset & \emptyset \\ w_2.E & \emptyset & \emptyset & w_4.E & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \\ X^{(3)} \\ X^{(4)} \\ X^{(5)} \end{pmatrix}$$

Si le réseau est syntaxiquement correct, alors tous les coefficients des matrices $A.(C.A)^i$ sont à valeur dans $L(G)$, en particulier ceux de $A.(C.A)^2$. Ceci nous permet d'écrire :

$$w_3.F = T + E + F;$$

$$F.w_2 = T + E + F;$$

$$F.w_3 = T + E + F;$$

$$E.w_3 = T + E + F;$$

$$w_3.w_4 = T + E + F;$$

$$w_2.E = T + E + F;$$

$$w_4.E = T + E + F.$$

En satisfaisant les contraintes syntaxiques, les équations comportant une inconnue donnent :

$$w_3.F = T + E + F \Rightarrow w_3 = F + E$$

$$F.w_2 = T + E + F \Rightarrow w_2 = F + T$$

$$F.w_3 = T + E + F \Rightarrow w_3 = F + T$$

$$E.w_3 = T + E + F \Rightarrow w_3 = F$$

$$w_2.E = T + E + F \Rightarrow w_2 = T$$

$$w_4.E = T + E + F \Rightarrow w_4 = T$$

Soient :

$$w_2 \in \{T, E, F\} \cap \{F, T\} \cap \{T\}$$

$$w_3 \in \{T, E, F\} \cap \{F, E\} \cap \{F\}$$

$$w_2 \in \{T, E, F\} \cap \{T\}$$

d'où :

$$w_2 = T$$

$$w_3 = F$$

$$w_4 = T$$

On retrouve le typage du réseau initial de la figure 5.12.a.

Il se peut qu'il n'existe pas de solution en termes de types simples.

Prenons par exemple le réseau de la figure 5.12.d, où par rapport à l'exemple précédent les types des processus 1 et 5 ont été inversés.

De même que pour l'exemple précédent on a :

$$E.w_2 = T + E + F \Rightarrow w_2 = F$$

$$E.w_3 = T + E + F \Rightarrow w_3 = F$$

$$F.w_3 = T + E + F \Rightarrow w_3 = F + T$$

$$w_3.w_4 = T + E + F$$

$$w_3.E = T + E + F \Rightarrow w_3 = T$$

$$w_2.F = T + E + F \Rightarrow w_2 = F + E$$

$$w_4.F = T + E + F \Rightarrow w_4 = F + E$$

Soient :

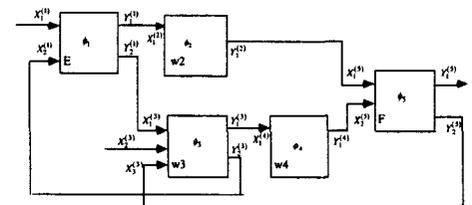


Figure 5.12.d: exemple de réseau sans typage compatible simple.

$$w_2 \in \{T, E, F\} \cap \{F\} \cap \{F, E\}$$

$$w_3 \in \{T, E, F\} \cap \{F\} \cap \{F, T\} \cap \{T\}$$

$$w_4 \in \{T, E, F\} \cap \{F, E\}$$

soient les solutions :

$$w_2 = F$$

$$w_3 = \emptyset$$

$$w_4 = F + E$$

Il n'existe pas de typage compatible. Cela ne signifie pas pour autant qu'il n'existe pas de typage composé qui soit compatible. La preuve en est que le réseau de la figure 5.12.e est syntaxiquement correct si le mot type du processus ϕ_3 est $w_3 = F.T$. On a alors :

$$w_2 = F$$

$$w_3 = F.T$$

$$w_4 = E$$

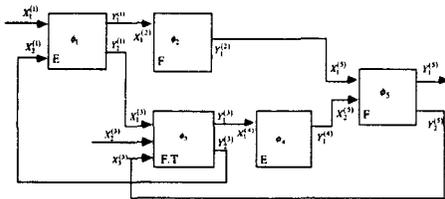


Figure 5.12.e : un exemple de réseau syntaxiquement correct avec des types composés.

Pour calculer cette solution il faut procéder à une décomposition puis à une synthèse du processus concerné.

VI.3 Aide à la synthèse de réseaux de processus.

Les traitements abordés jusqu'ici portaient sur un seul et même niveau d'abstraction. On aborde ici l'organisation hiérarchique et portent sur différents niveaux.

Commençons par l'agrégation. On souhaite, par la résolution de ce problème, proposer des partitions des processus de niveau n en processus de niveau d'abstraction supérieur, telles que le réseau obtenu soit syntaxiquement correct.

Soit donc un réseau de N processus donné par sa matrice de transformations A et sa matrice de connexions C . On a :

$$A = \begin{pmatrix} A_F & \vdots & A_E \\ \dots & \vdots & \dots \\ A_T & \vdots & A_{E.F.T} \end{pmatrix}$$

et :

$$C = [\{\varepsilon, \emptyset\}]$$

On distingue parmi les flux du réseau : les flux de surface, c'est à dire ceux qui ne sont la sortie d'aucun processus et ceux qui ne sont l'entrée d'aucun processus. Ce sont respectivement les flux d'entrée et de sortie du réseau global. Calculer le type équivalent d'un réseau consiste à calculer les types des processus qui transforment ces entrées en ces sorties.

Soit donc un flux d'entrée $X^{(i)}$ et un flux de sortie $Y^{(j)}$ du réseau, on veut connaître le type de processus qui transforme $X^{(i)}$ en $Y^{(j)}$. Si il existe un chemin $\mu_{i,j}$ de longueur $k \geq 0$ allant du processus ϕ_i au

processus ϕ_j alors le type de ce processus est $w_{i,j} = \omega(\mu_{i,j})$, poids du chemin dans $L(G)$. Si il existe un autre chemin allant de $X^{(i)}$ à $Y^{(j)}$ de longueur $k' \geq 0$ alors son poids est identique au premier. Tous les chemins de longueur quelconque $k \geq 0$ menant de $X^{(i)}$ à $Y^{(j)}$ sont autant de processus de type identique qui transforment $X^{(i)}$ en $Y^{(j)}$. Le processus équivalent est alors la somme dans Φ de tous ces processus. Soit $C_{i,j}^{(k)}$ l'ensemble des chemins de i à j de longueur au plus égale à k , on sait d'après la proposition 9 que le réseau est 0-absorbant, c'est à dire que les poids des chemins quels qu'ils soient est celui des chaînes directes, soit :

$$w_{i,j} = \sum_{C_{i,j}^{(k)}} w(\mu_{i,j}^k) = w(\mu_{i,j})$$

L'ensemble de tous les processus transformant un flux d'entrée quelconque en un flux de sortie quelconque du réseau est donné par conséquent par la matrice :

$$A \otimes (C \otimes A)^* = A \otimes \sum_{\oplus} (C \otimes A)^k$$

Le type de ces processus est alors :

$$w(A \otimes (C \otimes A)^*) = \sum_k w(A \otimes (C \otimes A)^k)$$

Cette matrice de type converge, ses éléments étant 0-absorbants. Pour un réseau de N processus, on a donc :

$$w(A \otimes (C \otimes A)^*) = w(A \otimes (C \otimes A)^{(N-1)})$$

$$w(A \cdot (C \cdot A)^{(N-1)}) = \begin{pmatrix} [F] & : & [E] \\ \dots & : & \dots \\ [T] & : & [E.F.T] \end{pmatrix}$$

Au bout de $N-1$ produits matriciels, on obtient l'expression et le type de tous les processus équivalents transformant toutes les entrées en les sorties. En sélectionnant la sous-matrice constituée des lignes et colonnes correspondant aux flux de surface (flux d'entrée et de sortie du graphe global), on obtient la matrice du réseau de processus équivalents et leur type au niveau $n-1$.

VI.4 Validation d'une décomposition au niveau n+1

Un processus de niveau n est dans le cas le plus général représenté par une matrice d'incidence (matrice de processus et de leur type) et plus seulement par un scalaire dans (Φ, \oplus, \otimes) et $(L(G), \oplus, \otimes)$. Supposons que l'observateur procède à une décomposition des processus du réseau de niveau n par la méthode présentée au chapitre quatre (cf. chap.4, § V.4. Décomposition d'un réseau de niveau N au niveau $N+1$). On cherche ici à valider cette décomposition en s'assurant qu'elle est bien équivalente.

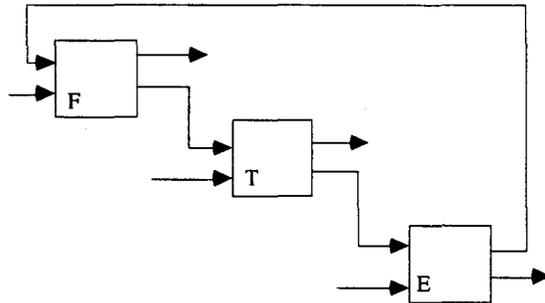
Rappelons les trois règles d'équivalence définies au chapitre précédent :

$$eq_F: F = (F + T.E.F)(F + T.E)^*(T.E + \epsilon) + T.E$$

$$eq_T: T = ((F + T.E.F)^* + \epsilon).T$$

$$eq_E: E = E.F.(F + T.E.F)^*(T.E + \epsilon) + E$$

Le réseau de processus décomposé est représenté par sa matrice A. Il existe donc une matrice de transformation et une matrice de structure : A' et C telles que $A = A' \otimes (C \otimes A')^*$. Ces matrices s'obtiennent aisément en mettant ce réseau sous la forme générique rappelée par la figure suivante.



Rappel de la forme générique des représentations.

Il existe une permutation des lignes et des colonnes de A' telle que celle-ci prennent la forme:

$$A' = \begin{pmatrix} A_F & \vdots & A_E \\ \dots & \vdots & \dots \\ A_T & \vdots & \emptyset \end{pmatrix}$$

La matrice de structure générique correspondante prend la forme :

$$C = \begin{pmatrix} C_{FF} & \emptyset & C_{EF} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & C_{TE} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ C_{FT} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

où, les lignes et colonnes nulles correspondent aux flux de surface.

La décomposition de ce réseau de niveau n consiste à décomposer tous les processus F, T et E de la forme générique, en des réseaux équivalents de processus de niveau n+1. Cela revient pour les coefficients non nuls de chaque sous-matrice : A_F , A_E , A_T , de A', à les remplacer par des chaînes équivalentes à T, E, F dont la forme est donnée par les règles d'équivalence. C'est à l'observateur que

revient la charge d'identifier les chaînes équivalentes qui reflètent le mieux la réalité perçue.

Les matrices : A_F, A_E, A_T ainsi obtenues donnent l'expression de tous les chemins des réseaux de niveau $n+1$ qui leur sont respectivement équivalents. Ces réseaux se ramènent également à une forme canonique et leur correspond donc une matrice de transformation et de structure telles que :

$$A_F = A'_F \cdot (C'_F \cdot A'_F)^*$$

$$A_T = A'_T \cdot (C'_T \cdot A'_T)^*$$

$$A_E = A'_E \cdot (C'_E \cdot A'_E)^*$$

En conséquence une décomposition de niveau n en un niveau $n+1$ donne les matrices de transformation et de structure : $A'_F, C'_F, A'_T, C'_T, C'_E, A'_E$. La validation de cette décomposition consiste à vérifier que :

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} A'_F \cdot (C'_F \cdot A'_F)^* & A'_T \cdot (C'_T \cdot A'_T)^* \\ \hline A'_E \cdot (C'_E \cdot A'_E)^* & \emptyset \end{array} \right)$$

et que :

$$A = A' \cdot (C \cdot A')^*$$

VI.5 Analyse croisée, vérification de la cohérence.

On propose ici une extension des procédures de validation croisées proposées au chapitre 3 (cf. chap. 3, § V.3. Analyse croisée et vérification de la cohérence.). Le principe général est de vérifier la cohérence des types entre les entités des différents points de vue de la matrice SAGACE que l'on croise ; par exemple, on vérifie que l'organe qui supporte une fonction est du même type que cette dernière.

On est ici en mesure d'étendre cette vérification de type en comparant le type de sous-réseaux de points de vue distincts.

A titre d'exemple, soit un énoncé fonctionnel de type w_f donné parmi $\{T, E, F\}$ et $G(X,U)$ un sous-réseau (ensemble de chemins) de processus du point de vue programme, susceptible de réaliser cette fonction. Soient A et C respectivement la matrice de transformation et de structure de $G(X,U)$.

Si le programme réalise l'énoncé fonctionnel souhaité alors :

$$[w_f] \subseteq [w_p] = A(C \cdot A)^*$$

En d'autres termes le type du processus globalement équivalent généré par ce programme doit inclure celui de l'énoncé fonctionnel à réaliser.

Prenons $G_f(X_f, U_f)$ un sous-réseau du point de vue fonctionnel, et $G_p(X_p, U_p)$ un sous-réseau du point de vue programme susceptible de réaliser cet ensemble d'énoncés fonctionnels. Alors une condition nécessaire à la cohérence de ces représentations est que :

$$A_f(C_f.A_f)^* = [w_f] \subseteq [w_p] = A_p(C_p.A_p)^*$$

en d'autres termes, il faut que tous les mots de types du réseau fonctionnel soient inclus dans ceux du réseau programme. En effet le programme doit générer les mêmes types de processus que ceux du réseau fonctionnel.

Cette vérification est applicable à toute analyse croisant deux points de vue de la matrice SAGACE parmi ceux comportant des processus typés

VII. Conclusion

Les diagrammes de représentation sont équivalents à des systèmes d'équations dans des structures algébriques de type (S, \oplus, \otimes) :

- la connexion des processus en réseaux est alors une composition dans une structure de dioïde par les lois de composition internes que sont \oplus la mise en parallèle et \otimes la mise en série. Ces lois portent soit sur les processus soit sur leur type. Le respect des règles syntaxiques fait de ces opérateurs des lois de composition internes dans $L(G)$ et Φ qui sont respectivement : l'ensemble des mots de type syntaxiquement corrects et l'ensemble des processus syntaxiquement corrects. Cet ensemble Φ est isomorphe de $L(G)$ par l'application w qui à un processus associe son type. L'isomorphisme de ces deux ensembles fait que la démonstration d'un théorème dans l'un de ces deux ensembles suffit pour qu'il existe un théorème équivalent dans l'autre.

- La transaction des flux par les processus d'un réseau est une composition des éléments de l'environnement dans un espace vectoriel défini sur l'un des diodes précédents par la loi de composition externe \otimes (pour l'application d'un processus) à ces flux et par la loi de composition interne \oplus (pour l'agrégation de flux). Le respect des règles syntaxiques fait de l'environnement et de l'ensemble des types de ses éléments des ensembles stables par ces lois de composition. L'isomorphisme de ces ensembles par ω , qui à un flux de l'environnement associe son type, fait que la démonstration d'un théorème dans l'un de ces ensembles suffit pour qu'un théorème équivalent soit valable dans l'autre.

Les structures algébriques sur lesquelles reposent les représentations étant définies ainsi que les règles de calcul, à une représentation on associe dès lors un système d'équations de type scalaire ou matriciel équivalent dans la structure algébrique adéquate.

La manipulation des représentations se ramène donc à des opérations dans ces structures :

- la transformation d'une représentation d'un niveau d'abstraction n en une autre équivalente et de même niveau est un(e) développement/factorisation de l'expression des chemins de réseau de processus. Bien que la forme de ces deux représentations soit différente elles correspondent à deux écritures de la même équation et elles sont par conséquent équivalentes. Les sensibilités des

observateurs aboutiront certainement à des formes différentes des représentations mais bel et bien à des représentations équivalentes et donc univoques.

- une agrégation est une opération de substitution. Agréger un réseau consiste à calculer l'expression équivalente des chemins du réseau et à la remplacer par son équivalent donné par les règles du même nom. Parmi les différentes substitutions possibles le choix de la plus pertinente revient à l'observateur du système.

- la décomposition d'un réseau de processus est également une substitution. On remplace alors dans l'expression des chemins les différents termes par une de leurs expressions équivalentes développées données par les règles d'équivalence. Le choix d'un développement particulier est à la charge de l'opérateur qui détermine celle qui est la plus pertinente par rapport à la réalité qu'il cherche à représenter.

L'identification des processus et de leur type conduit à la résolution d'un système d'équations à n inconnues. Quant aux problèmes de validation des propriétés syntaxiques du réseau elle se résume à des produits matriciels et à la vérification de l'appartenance des mots de types au langage $L(G)$.

La vérification de la cohérence des représentations elle consiste en la vérification de l'inclusion des mots de type d'un réseau d'un point de vue donné dans l'ensemble des mots de type des processus générés par un réseau d'un autre point de vue.

On dispose donc : d'une notation mathématique des représentations en systèmes d'équations, des règles de composition des entités des réseaux et des critères de validation de ces derniers, suffisants pour une implémentation et un traitement en machine pour l'aide à la conception, à l'analyse, la synthèse et la validations des représentations des systèmes.

Ce chapitre constitue le quatrième et dernier niveau de formalisation des représentations des systèmes.

La formalisation des modèles de représentation étant terminée et disposant d'une expression analytique de chacune il s'agit d'étudier les liens entre le niveau représentation et les niveaux de formalisation supérieure. Quel type de couplage peut-on établir? quels sont les apports de ces représentations pour une mise en équation à un niveau de formalisation supérieure?...

Le chapitre suivant propose une mise en équation quantitative dont la forme est calquée sur celle des représentation. On dispose ainsi d'une mise en équation quantitative analogue. Il est dès lors possible, en se basant sur l'expression analytique des modèles de représentation, de décliner les équations quantitatives

CHAPITRE VI

Mise en équation quantitative

I. INTRODUCTION.....	175
II. FORME GENERALE DES EQUATIONS : PRINCIPES.	176
II.1. CONTRAINTES SUR LES SORTIE DES ELEMENTS ACTIFS.	176
II.2. CONTRAINTES ENTRE VARIABLES D'ENTREE ET DE SORTIE.	178
II.3. COUPLAGES D'ELEMENTS ACTIFS ET ORGANISATION.	178
II.4. EXTENSION A UN RESEAU DE N ELEMENTS ACTIFS.....	179
II.5. SIMILITUDES DU MODELE QUANTITATIF AVEC LE MODELE DE REPRESENTATION.....	180
III. APPLICATION AUX PROCESSUS T, E, F.....	183
III.1. PROCESSUS DE STOCKAGE D'ENERGIE (TYPE T).	184
<i>III.1.a Relations sur le vecteur de sortie : relations phénoménologiques.</i>	184
a. Fonction d'état énergie et causalité intégrale	186
b. Cas d'une causalité dérivée :	188
c. Causalité et transformations de Legendre.	189
<i>III.1.b Relations entrée/sortie : relations structurelles.</i>	192
<i>III.1.c Exemples de processus T</i>	194
III.2. PROCESSUS DE TRANSFERT D'ENERGIE (TYPE E).	194
<i>III.2.a Rappels : phénomènes de transport.</i>	194
Courant convectif, courant non convectif, d'une grandeur extensive.	195
Transport par diffusion.	195
Transport par convection.	196
Théorie d'ONSAGER.	196
<i>III.2.b Ecriture des relations phénoménologiques.</i>	198
III.2.b.1 Mise en forme des équations phénoménologiques	199
<i>III.2.c Ecriture des relations structurelles:</i>	201
<i>III.2.d Exemples de processus de type E</i>	201
III.3. PROCESSUS DE TRANSFORMATION D'ENERGIE (TYPE F).....	202
<i>III.3.a Relations constitutives et de couplage.</i>	202
<i>III.3.b Relations structurelles</i>	202
<i>III.3.c Exemples de processus de type F.</i>	202
IV. MISE EN EQUATION DE PROCESSUS PHYSIQUES REELS ET MANIPULATION DES SYSTEMES D'EQUATIONS.	202
IV.1. SUBSTITUTIONS DE VARIABLES.	206
IV.2. ALGORITHME DE CALCUL DES EQUATIONS DES PROCESSUS EQUIVALENTS.	209
<i>IV.2.a Processus de dissipation d'énergie et problèmes de causalité des équations.</i>	209
<i>IV.2.b Inversibilité de $\begin{bmatrix} I - r' \cdot \varepsilon - r'' a \cdot c \end{bmatrix}$ et boucles algébriques.</i>	212
<i>IV.2.c Redondance des équations.</i>	215
<i>IV.2.d Systèmes d'équations de grande taille : approche locale.</i>	218
Regroupement des processus 1 à 3.....	219
Regroupement des processus 4 et 5.	224
Calcul des équations du système global par une approche locale.....	225
<i>IV.2.e Un système de production pour l'algorithme réel isomorphe.</i>	231
V. CONCLUSION.....	232

I. Introduction

A ce stade du développement de notre formalisme, on dispose : d'un modèle de représentation de systèmes par des réseaux de processeurs typés en T, E, F et d'une notation par des systèmes d'équations mathématiques formelles, dans des structures algébriques de type (S, \otimes, \oplus) .

Notre propos dans ce chapitre est l'élaboration du modèle quantitatif des réseaux de processeurs. (systèmes d'équations dans R^n)

Ce modèle devra présenter une forme analogue à celle du modèle de représentation, de telle sorte qu'il soit aisément déclinable à partir de ce dernier. Le modèle que nous développerons prend la forme de systèmes d'équations différentielles obtenues à partir des fonctions d'état et des équations de bilan (énergétique et massique) de la thermodynamique et de la physique en général et en particulier des relations généralisées du tétraèdre. La forme que nous adopterons devra en outre permettre son extension à d'autres types d'équations (modèles statistiques, modèles qualitatifs, ...) et à d'autres méthodes d'obtention de ces équations (identification, méthodes géométriques, apprentissage automatique,...). De plus, on souhaite que le modèle obtenu soit aisément simulable et que sa manipulation et son élaboration soient les plus systématiques possible ; ceci dans l'optique d'une implantation logicielle.

La première partie présente la forme générale retenue pour les équations qui consiste en des systèmes d'équations matricielles dont les matrices s'apparentent à des matrices de sensibilité. Cette mise en équation s'inspire de celle du modèle de représentation, afin que les équations du modèle quantitatif soient similaires aux précédentes et aisément déclinables à partir de ces dernières.

Dans la seconde partie, on décline la forme générale précédemment exposée aux cas des processus de type T, E, F, pour lesquels les variables et les contraintes sont celles du tétraèdre d'état du Bond-Graph. On décline alors la forme canonique des différentes matrices du modèle quantitatif pour chacun des trois types de processus. Ces matrices ainsi que leurs propriétés sont établies à partir des fonctions d'état de la physique et de la thermodynamique.

Dans la troisième partie, on s'intéresse à la mise en équation de réseaux de processus de type T, E, F. Ici encore on procède à la déclinaison des équations quantitatives des réseaux à partir des équations du modèle de représentation. On aboutit, à l'issue de cette troisième partie, à l'algorithme de calcul des équations du processus équivalent à un réseau dans R^n , isomorphe de celui du calcul formel dans (S, \otimes, \oplus) .

II. Forme générale des équations : principes.



Figure 6.1.a : une représentation d'un élément actif recevant m flux en entrée et produisant n flux en sortie. A chaque flux est attribuée une variable caractérisant l'état de ce flux.

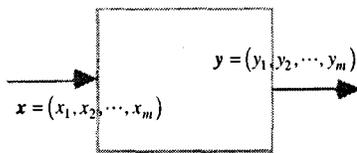


Figure 6.1.b : une représentation synthétique équivalente à celle de la figure 6.1.a., avec :
 $x = x_1 \oplus x_2 \cdots \oplus x_m$ et
 $y = y_1 \oplus y_2 \cdots \oplus y_n$

Les principes adoptés s'inspirent des travaux de O.Lang [Lan-65] sur la théorie générale des systèmes.

Notations : on convient de noter par des caractères minuscules une grandeur scalaire et par des caractères minuscules en gras des vecteurs ou des matrices. Ainsi, k est un scalaire, quand \mathbf{k} dénote une matrice ou un vecteur. On convient également de noter k_i le i ème paramètre du vecteur \mathbf{k} et par k_{ij} les coefficients de la matrice \mathbf{k} . D'après ces conventions, k_{ij} est alors une sous-matrice d'une matrice \mathbf{k} de dimensions supérieures.

Considérons un réseau d'éléments actifs, du type de celui de la figure 6.1.a, transformant un ensemble de flux en entrée en un ensemble de flux en sortie. On ne fait pour l'instant aucune hypothèse sur la nature de ces flux et de ces éléments actifs.

On suppose simplement que l'on peut attribuer à ces d'entrées et sorties un certain nombre de variables à valeurs numériques dans un domaine D . On note x_i les attributs ou variables d'entrée et y_j celles de sortie. On notera n le nombre de variables de sortie et m le nombre de variables d'entrée.

Ces variables sont arrangées en vecteurs d'entrée et de sortie. On note \mathbf{x} le vecteur des flux d'entrée et \mathbf{y} celui des flux de sortie (figure 6.1.b) :

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^t, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t. \quad (6.2)$$

On envisage alors sur les paramètres de ces vecteurs les ensembles de relations ci-après.

II.1. Contraintes sur les sortie des éléments actifs.

Parmi les relations envisageables entre les attributs des flux d'un élément, on en distinguera deux types remarquables :

- celui des relations portant sur les paramètres d'un même vecteur de sortie \mathbf{y} ;
- et celui des relations contraignant les paramètres du vecteur de sortie \mathbf{y} et ceux du vecteur d'entrée \mathbf{x} .

On note : $f_{yy}(y_1, y_2, \dots, y_n)_i = 0$, une relation, sous forme acausale, entre les paramètres d'un même vecteur de sortie. On peut envisager, sur l'ensemble des n variables du vecteur \mathbf{y} , au plus n relations du type :

$$\begin{aligned} f_{yy}(y_1, y_2, \dots, y_n)_1 &= 0 \\ &\vdots \\ f_{yy}(y_1, y_2, \dots, y_n)_{p \leq n} &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Généralement, de telles contraintes sont exprimées avec une orientation causale. On exprime alors une des n variables de sortie y_j

N.B. : il n'est pas nécessaire d'envisager des relations sur les vecteurs d'entrée uniquement car certaines de ces entrées sont également des sorties pour lesquelles on envisage déjà des relations. Les autres sont des flux exogènes pour lesquels on ne disposera généralement pas de relations.

N.B. : on ne fait pour le moment aucune hypothèse quant à l'indépendance des relations envisagées. Les procédés d'élaboration de ces relations que nous adopterons permettent de s'affranchir des problèmes de rang des matrices.

en fonction des $n-1$ autres. On peut donc envisager n équations au plus du type :

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(0, y_2, \dots, y_n) \\ y_i &= y_i(y_1, y_2, \dots, 0, \dots, y_n). \\ y_{p \leq n} &= y_i(y_1, y_2, \dots, 0) \end{aligned} \quad (6.4.a)$$

On note synthétiquement :

$$y = f_y(y), \quad (6.4.b)$$

ce système de relations, dans lequel une relation f_{y_i} est une forme causale de la relation acausale f_{y_j} correspondante.

Ces relations sont généralement non-linéaires. On voudrait disposer d'un système de relations équivalentes sous une forme matricielle. Il nous faut pour cela retenir une approche locale. On supposera donc ces relations différentiables sur le domaine D . Soit alors δy_i une variation infiniment petite de y_i autour d'un point de fonctionnement. D'après le système d'équations que nous avons supposé entre les paramètres d'un même vecteur de sortie, une variation δy_i est une forme différentielle :

$$\delta y_i = \varepsilon_{i1} \cdot \delta y_1 + \varepsilon_{i2} \cdot \delta y_2 + \dots + 0 \cdot \delta y_i + \dots + \varepsilon_{in} \cdot \delta y_n \quad (6.5.a)$$

où ε_{ij} est la **contribution** de la variation δy_j de y_j à la variation δy_i de y_i , avec :

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\delta y_i}{\delta y_j} \right)_{\substack{y_k \neq y_j \\ y_k = \text{const}}}, \text{ et par convention } \varepsilon_{ii} = 0. \quad (6.5.b)$$

On peut donc exprimer la variation des n paramètres y_n en fonction des variations des $n-1$ autres par un système de n équations de la forme :

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= 0 \cdot \delta y_1 + \varepsilon_{12} \cdot \delta y_2 + \dots + \varepsilon_{1j} \cdot \delta y_j + \dots + \varepsilon_{1n} \cdot \delta y_n \\ \delta y_i &= \varepsilon_{i1} \cdot \delta y_1 + \varepsilon_{i2} \cdot \delta y_2 + \dots + 0 \cdot \delta y_j + \dots + \varepsilon_{in} \cdot \delta y_n \\ \delta y_n &= \varepsilon_{n1} \cdot \delta y_1 + \varepsilon_{n2} \cdot \delta y_2 + \dots + \varepsilon_{nj} \cdot \delta y_j + \dots + 0 \cdot \delta y_n \end{aligned} \quad (6.6.a)$$

On note ce système de façon synthétique :

$$\delta y = \varepsilon \cdot \delta y, \quad (6.6.b)$$

où ε s'apparente à une matrice de sensibilité des sorties à leurs propres variations.

Si l'on s'intéresse à ces variations entre deux dates infiniment proches t et $t+dt$, on a :

$$\frac{\delta y}{dt} = \varepsilon \cdot \frac{\delta y}{dt}, \quad (6.7.a)$$

ou encore :

$$\dot{y} = \varepsilon \cdot \dot{y}. \quad (6.7.b)$$

II.2. Contraintes entre variables d'entrée et de sortie.

On suppose également un ensemble de contraintes entre les variables du vecteur d'entrée et les variables du vecteur de sortie d'un élément. Soient :

$$f_{yx}(x, y)_i = 0, \quad (6.8.a)$$

ces contraintes.

On choisit d'exprimer les paramètres du vecteur de sortie y en fonction des paramètres du vecteur d'entrée x . Par un raisonnement analogue à celui des relations précédentes (6.3), on peut envisager au plus n relations de la forme :

$$y_j = f_x(x)_i. \quad (6.8.b)$$

Ces relations étant généralement non linéaires, une approche locale donne les formes différentielles :

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= a_{11} \cdot \delta x_1 + a_{12} \cdot \delta x_2 + \dots + a_{1j} \cdot \delta x_j + \dots + a_{1n} \cdot \delta x_n \\ &\vdots \\ \delta y_i &= a_{i1} \cdot \delta x_1 + a_{i2} \cdot \delta x_2 + \dots + a_{ij} \cdot \delta x_j + \dots + a_{in} \cdot \delta x_n \\ &\vdots \\ \delta y_n &= a_{n1} \cdot \delta x_1 + a_{n2} \cdot \delta x_2 + \dots + a_{nj} \cdot \delta x_j + \dots + a_{nn} \cdot \delta x_n \end{aligned} \quad (6.8.c)$$

Une forme synthétique consiste en l'équation matricielle :

$$\delta y = a \cdot \delta x. \quad (6.8.d)$$

En considérant les variations δy de y entre deux dates infiniment proches t et $t+dt$, on a :

$$\dot{y} = a \cdot \dot{x}. \quad (6.8.e)$$

La matrice a s'apparente à une matrice de sensibilité des sorties aux variations des entrées.

II.3. Couplages d'éléments actifs et organisation.

Notations : on convient de noter x^i et y^j respectivement le vecteur d'entrée de l'élément i et le vecteur de sortie de l'élément j . Les grandeurs scalaires x_l^i et y_k^j sont respectivement le l -ème paramètre du vecteur d'entrée x^i et le k -ème paramètre du vecteur de sortie y^j . D'après les conventions de notation des grandeurs scalaires et vectorielles : x_l^i est alors le l -ème sous-vecteur (vecteur composé d'un sous-ensemble de paramètres d'un vecteur de dimensions supérieures) du vecteur x^i , de même pour le sous-vecteur y_k^j de y^j .

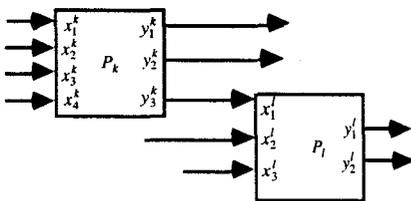


Figure 6.2 : Une représentation de deux éléments actifs P_k et P_l en relation.

Considérons un réseau d'éléments actifs qui interagissent par l'intermédiaire de leurs entrées et sorties (systèmes quasi-isolés). Soient alors deux éléments actifs P_k et P_l , on note y^k et y^l leur vecteur de sortie respectif et x^k , x^l leur vecteur d'entrée. L'élément actif P_k n'agit sur P_l que si une au moins de ses sorties y_k^k devient

une entrée x_j^l de l'élément actif P_l . En d'autres termes, il y a action de P_k sur P_l si, pour une valeur au moins de i et j ($i=1 \dots n$, $j=1 \dots m$), l'égalité :

$$x_j^l = y_i^k \quad (6.9.a)$$

est vraie.

En écrivant toutes les égalités de ce type entre les paramètres du vecteur d'entrée de x^l et de sortie de y^k , on établit une équation matricielle de la forme :

$$x^l = c_{lk} \cdot y^k. \quad (6.9.b)$$

La matrice c_{lk} est une matrice dont les coefficients sont égaux à 1 quand il y a égalité entre une entrée de P_l et une sortie de P_k , et 0 dans le cas contraire. Un exemple de ce type de matrice pourrait être :

$$c_{lk} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix} m_l \times n_k \quad (6.9.c)$$

Chaque ligne et chaque colonne de cette matrice ne compte alors qu'un coefficient au plus égal à 1.

Cette équation s'écrit sous une forme différentielle comme suit :

$$\delta x^l = c_{lk} \cdot \delta y^k \quad (6.9.d)$$

Si on considère les taux de variation de ces paramètres entre deux dates infiniment proches t et $t+dt$, on a l'équation :

$$\dot{x}^l = c_{lk} \cdot \dot{y}^k \quad (6.9.e)$$

II.4. Extension à un réseau de N éléments actifs.

On considère un réseau de N éléments actifs : P_1, P_2, \dots, P_N . On peut, pour chacun des N vecteurs de sortie y^1, y^2, \dots, y^N , écrire N relations du type (6.6.b), soient :

$$\begin{aligned} \delta y^1 &= \varepsilon_{11} \cdot \delta y^1 \\ &\vdots \\ \delta y^i &= \varepsilon_{ii} \cdot \delta y^i \\ &\vdots \\ \delta y^N &= \varepsilon_{NN} \cdot \delta y^N \end{aligned} \quad (6.10.a)$$

ou encore :

$$\delta y = \varepsilon \cdot \delta y. \quad (6.10.b)$$

Le vecteur y est alors tel que :

$$y = (y^1, y^2, \dots, y^N)^t, \quad (6.10.c)$$

La matrice ε est telle que :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{ii} & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \varepsilon_{NN} \end{pmatrix} \quad (6.10d)$$

Il est également possible d'écrire les N relations du type (6.8.d), soient :

$$\begin{aligned} \delta y^1 &= a_{11} \cdot \delta x^1 \\ &\vdots \\ \delta y^i &= a_{ii} \cdot \delta x^i \\ &\vdots \\ \delta y^N &= a_{NN} \cdot \delta x^N \end{aligned} \quad (6.11.a)$$

ou encore :

$$\delta y = a \cdot \delta x, \quad (6.11.b)$$

où le vecteur x est tel que :

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^N)', \quad (6.11.c)$$

et où la matrice a est telle que :

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{ii} & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{NN} \end{pmatrix} \quad (6.11.d)$$

Quant aux relations d'organisation, il est possible d'en écrire N de la forme :

$$\delta x^i = c_{i1} \cdot \delta y^1 + c_{i2} \cdot \delta y^2 + \cdots + c_{iN} \cdot \delta y^N, \quad (6.11.e)$$

ou encore :

$$\delta x = c \cdot \delta y, \quad (6.11.f)$$

avec :

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{iN} \\ \cdots & \cdots & c_{Nj} & \cdots \end{pmatrix} \quad (6.11.g)$$

II.5. Similitudes du modèle quantitatif avec le modèle de représentation.

Notations : on convient qu'une grandeur notée K en majuscule est une grandeur scalaire dans la structure algébrique (S, \otimes, \oplus) , c'est alors une grandeur formelle, à valeurs symboliques. K est alors un vecteur ou une matrice de coefficients à valeurs symboliques.

On peut d'ores et déjà noter une certaine ressemblance dans la forme du modèle quantitatif avec celle du modèle formel du chapitre précédent. Au chapitre 5 sur la définition d'une représentation mathématique formelle des réseaux de processus, nous avons établi un certain nombre d'équations formelles.

Ainsi, pour les chemins de longueur nulle dans le réseau de processus, on écrit la relation matricielle formelle $Y = \Sigma \otimes Y$, où la matrice Σ est la matrice identité dans la structure algébrique (S, \otimes, \oplus) . Pour le modèle quantitatif dans R^n , on envisage la forme différentielle $\delta y = \varepsilon \cdot \delta y$.

Pour les chemins de longueur 1 du réseau de processus, nous avons établi la relation $Y = A \otimes X$ dans (S, \otimes, \oplus) . On envisage alors dans R^n d'y associer la relation $\delta y = a \cdot \delta x$.

Enfin, les connexions des processus sont formellement représentées par l'équation formelle $X = C \otimes Y$, on envisage alors d'y associer la relation $\delta x = c \cdot \delta y$.

Les différentes matrices ε , a , c s'apparentent, nous l'avons dit, à des matrices de sensibilité. On peut également les considérer comme des matrices d'incidence de graphes ; graphes dont les arcs seraient pondérés par leurs coefficients et dont les sommets seraient les différentes variables y_i^k et x_i^k des vecteurs d'entrée et de sortie.

On associera à ces matrices comme graphes, des graphes biparti du type de celui de la figure 6.3, où les sommets sont deux sous-ensembles correspondant aux variables d'une part (sommets \circ) et aux relations d'autre part (sommets \diamond).

On convient alors qu'une équation du type :

$$\delta y_i = \varepsilon_{i1} \cdot \delta y_1 + \varepsilon_{i2} \cdot \delta y_2 + \dots + 0 \cdot \delta y_i + \dots + \varepsilon_{in} \cdot \delta y_n \quad (6.12.a)$$

se représente par un graphe biparti du type de la figure 6.4. Les sommets \circ sont les variables y_i ($i=1 \dots n$) de la relation, le sommet \diamond représente la relation qui lie ces variables. Les arcs sont pondérés par les coefficients ε_{ij} de la relation. Quant à l'orientation du graphe, elle figure la causalité adoptée, ici la variable y_i est exprimée en fonction des $n-1$ autres.

Ainsi, en associant à un réseau de processus les trois précédents ensembles d'équations quantitatives, tels que nous les envisageons, on élabore un graphe biparti orienté. Ce graphe est alors la superposition de trois sous-graphes, chacun correspondant à un des trois systèmes d'équations que nous avons envisagés (figure 6.5, a, b, et c) :

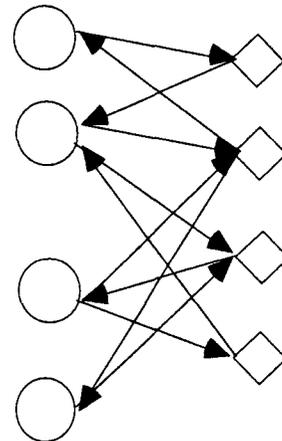


Figure 6.3 : graphe biparti orienté pour la représentation des équations quantitatives. Les sommets \circ sont des variables et les sommets \diamond les relations qui les lient. A un sommet \diamond correspond alors une ligne dans les systèmes d'équations. Les arcs, orientés suivant la causalité des équations, sont pondérés par les coefficients des matrices des systèmes d'équations.

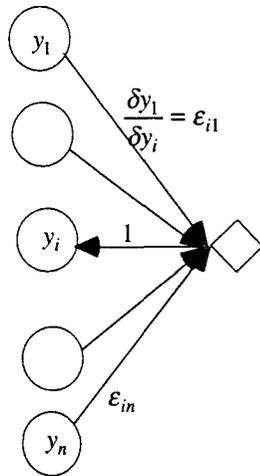


Figure 6.4 : représentation d'une forme différentielle du type (6.12.a)

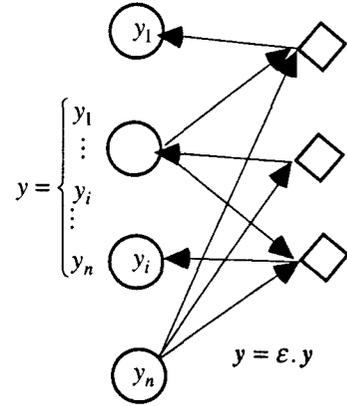


Figure 6.5.a : forme générale du graphe biparti associé aux relations $\delta y = \epsilon \cdot \delta y$. Un arc au plus aboutit à une variable.

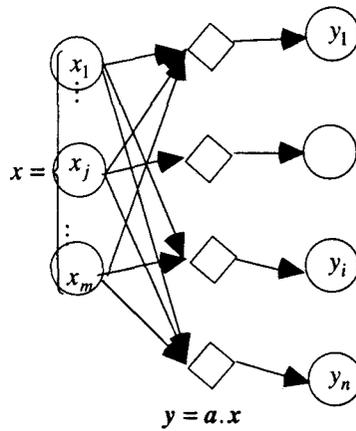


Figure 6.5.b : forme générale des graphes biparti associés aux équations du type $\delta y = a \cdot \delta x$. La causalité adoptée pour ces équations fait que les variables de sortie sont exprimées en fonction des variables d'entrée. En conséquence, les arcs quittent les sommets correspondant aux variables d'entrée et un arc au plus aboutit à une variable de sortie.

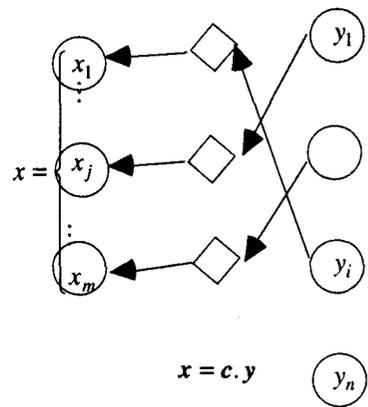


Figure 6.5.c : forme générale des graphes biparti associés aux relations d'organisation $\delta x = c \cdot \delta y$. Un arc au plus aboutit aux sommets correspondant aux variables d'entrée.

En résumé, à un diagramme de représentation d'un réseau de processus (figure 6.6.a), on associe :

i/- les équations formelles $Y = \Sigma \otimes Y$, $Y = A \otimes X$, $X = C \otimes Y$ dans la structure (S, \otimes, \oplus) ,

ii/- les équations quantitatives $\delta y = \varepsilon \cdot \delta y$, $\delta y = a \cdot \delta x$, $\delta x = c \cdot \delta y$. Ceci revient à associer au diagramme des processus un graphe biparti qui est la superposition des sous-graphes correspondant aux trois derniers systèmes d'équations.

Le diagramme de représentation d'un réseau de processus apparaît alors comme une interprétation ou une abstraction du graphe biparti (figure 6.6.b) associée aux équations quantitatives

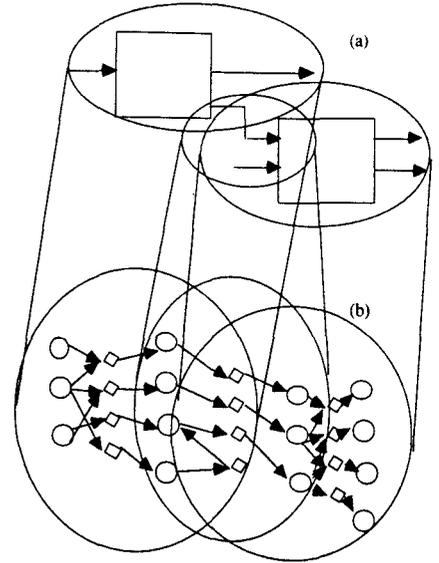


Figure 6.6.a et b : un réseau de processus (a) apparaît comme une interprétation du graphe biparti (b) associé.

III. Application aux processus T, E, F.

On convient que les éléments actifs évoqués jusqu'ici sont des processus T, E, F.

La question est maintenant de savoir : quelles peuvent être les modalités des précédentes matrices de contribution pour chaque type de processus T, E, F, et pour lesquels les variables des vecteurs d'entrée et de sortie sont les variables généralisées du tétraèdre d'état?

On cherche à mettre, sous les formes (6.6.b), (6.8.d) et (6.9.d) précédemment exposées, les relations qui lient ces variables généralisées et qui ne sont autres que des modalités des relations généralisées du tétraèdre d'état, qui nous sont données pour les différents domaines théoriques par les fonctions d'état et les équations de bilan (d'énergie, de masse) de la thermodynamique et de la physique (classique) en général.

Ces équations se présentent généralement sous la forme d'équations différentielles totales exactes. En effet, la description des changements qui se produisent dans les systèmes physiques aboutit souvent à des formes différentielles de type :

$$dY = C_1 \cdot dX_1 + C_2 \cdot dX_2 + \dots + C_n \cdot dX_n \quad (6.13.a)$$

On peut interpréter cette relation comme exprimant la contribution des variations dX_i des variables X_i à la différentielle totale exacte dY de la variable Y . Ces différentes contributions sont :

$$C_i = \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i} \right)_{\substack{X_k \neq X_i \\ X_k = \text{const}}} \quad (6.13.b)$$

Par rapport aux équations de contribution (6.6.b), (6.8.d) et (6.9.d) que nous avons envisagées, les relations du type (6.13.a) ont comme propriétés remarquables d'être des différentielles totales exactes et de dériver de fonctions d'état et d'équations de bilan.

Les paragraphes suivants exposent l'élaboration et l'étude des propriétés des matrices : ε , a , c , pour chacun des types de processus T, E, et F élaborées à partir d'équations du type (6.13.a) issues des lois de la thermodynamique et de la physique.

III.1. Processus de stockage d'énergie (type T).

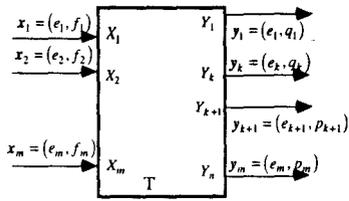


Figure 6.7.a : Représentation graphique d'un processus de type T. C'est un stockage d'énergie de nature potentielle (e,q) ou cinétique (f,p).

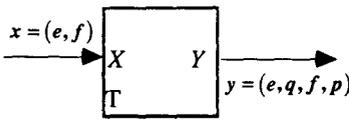


Figure 6.7.b : Une représentation synthétique équivalente à la figure 6.7.a.

La forme générale de la représentation d'un processus de type T est rappelée par la figure 6.7.a et une représentation synthétique équivalente par la figure 6.7.b.

Le flux d'entrée de la figure 6.7.b est une agrégation des flux d'entrée de la figure 6.7.a. Le flux des puissances en entrée est étiqueté par un vecteur de variables généralisées d'effort et de flux. Le flux des énergies en sortie est étiqueté par un vecteur de variables d'effort, de déplacement, de flux et d'impulsion.

Notations : on convient de noter : ${}^l k_j$ la i ème variable de type l du j ème processus. L'exposant gauche l peut prendre les valeurs : e, f, q, p et désigne alors une variable ou un vecteur de variables : d'effort, de flux, de déplacement, ou d'impulsion. Ainsi, ${}^e x_j$ dénote la i ème variable d'effort en entrée du j ème processus et ${}^p y^i$ le sous-vecteur de variables d'impulsion du vecteur de sortie y^i du i ème processus.

On utilisera également la notation équivalente : $y = (e, q, f, p)$, qui représente un vecteur de sortie dont les paramètres se subdivisent en sous-vecteurs : d'effort, de déplacement, de flux et d'impulsion. Par la suite, les paramètres des différents vecteurs d'entrée et de sortie seront classés dans cet ordre.

Ce type de processus (type T) est utilisé pour représenter une accumulation, dans une région de l'espace, d'énergies de natures physiques diverses (thermique, hydraulique, électrique...) à caractères potentiel (vecteur (e,q) et /ou cinétique (vecteur (f,p)). Ces processus sont soumis à la première loi de la thermodynamique : le principe de conservation de l'énergie. Ce principe s'écrit sous la forme différentielle d'un bilan d'énergie (6.14.a) pour les systèmes fermés, ou d'un bilan d'exergie (6.14.b) pour les systèmes ouverts. Ces bilans s'écrivent :

$$d\mathcal{E} = d\mathcal{E}_p + d\mathcal{E}_c + dU = \delta Q + \delta W \quad (6.14.a)$$

$$d\mathcal{E} = d\mathcal{E}_p + d\mathcal{E}_c + dU = \delta Q + \delta W - \left[\delta m(e_c + e_p + u) \right]_e^s \quad (6.14.b)$$

Dans ces équations : (6.14.a) et (6.14.b), \mathcal{E} est l'énergie totale du système (c'est une grandeur scalaire à ne pas confondre avec la matrice ε). C'est la somme de son énergie mécanique (\mathcal{E}_p énergie potentielle + \mathcal{E}_c énergie cinétique) et de son énergie interne U . Les énergies e_c , e_p , et u sont les énergies massiques, respectivement cinétique, potentielle et interne.

III.1.a Relations sur le vecteur de sortie : relations phénoménologiques.

Relations phénoménologiques : les équations que nous établirons dans les paragraphes suivants font intervenir des coefficients d'un des types :

$$\frac{\partial e}{\partial q} \text{ ou } \frac{\partial q}{\partial e} \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial p} \text{ ou } \frac{\partial p}{\partial e}$$

où e, q, f, et p dénotent des variables généralisées d'effort, de déplacement, de flux et d'impulsion du tétraèdre d'état. Ces dérivées partielles répondent alors à la définition des capacités et inductances généralisées du Bond-

graph et à leur inverse. Ces coefficients caractérisent les paramètres physiques des composants. Les équations qui lient ces variables dépendent de notions métriques (attributs des composants en unités S.I.) et sont qualifiées de phénoménologiques. Dans cette classe de relations, on distingue deux sous-classes : la classe des relations constitutives et la classe des relations de couplage. Les premières portent sur des variables d'un seul et même domaine théorique, par exemple la loi d'Ohm en électricité, la loi de Poiseuille en hydraulique, ou de Fourier en thermique. Les secondes lient des variables de domaines théoriques différents : par exemple la relation entre débit hydraulique et vitesse mécanique d'écoulement. Les équations de type $f_{yy}(y_1, y_2, \dots, y_n)_i = 0$ sont des équations phénoménologiques du tétraèdre sous la forme d'équations différentielles.

On cherche à établir les relations qui lient les paramètres d'un même vecteur de sortie y d'un processus de type T. Les flux de sortie du diagramme de représentation forment un champ d'énergies à caractère potentiel et/ou cinétique (figure 6.7.a). On forme alors le vecteur y structuré de la façon suivante :

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e_{y_1} \\ q_{y_1} \\ \vdots \\ e_{y_k} \\ q_{y_k} \\ f_{y_{k+1}} \\ p_{y_{k+1}} \\ \vdots \\ f_{y_n} \\ p_{y_n} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e \\ q \\ f \\ p \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e_{y_1} \\ \vdots \\ e_{y_k} \\ q_{y_1} \\ \vdots \\ q_{y_k} \\ f_{y_{k+1}} \\ \vdots \\ f_{y_n} \\ p_{y_{k+1}} \\ \vdots \\ p_{y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_y \\ q_y \\ f_y \\ p_y \end{pmatrix} = y \quad (6.15.a)$$

Le vecteur Y : vecteur formel de sortie du processus T (figure 6.7.b), est composé des paramètres Y_i signifiant soit des puissances soit des énergies. A ces scalaires formels sont associés des couples de variables généralisées suivant leur sémantique ((e,f) pour une puissance, (e,q) ou (f,p) pour une énergie potentielle ou cinétique) . En ordonnant comme convenu les paramètres de ce vecteur en : effort, déplacement, flux puis impulsion, on obtient le vecteur y ; vecteur pour lequel on cherche à établir un système de relations du type $y = f_y(y)$.

D'après la nature des variables qui forment le vecteur y , on peut envisager quatre types de relations :

$$e_i = e_i(e, q, f, p) \quad (6.15.b)$$

$$f_j = f_j(e, q, f, p) \quad (6.15.c)$$

$$q_k = q_k(e, q, f, p) \quad (6.15.d)$$

$$p_l = p_l(e, q, f, p) \quad (6.15.e)$$

Les différentielles totales exactes de ces équations s'obtiennent de façon systématique à partir des fonctions d'état de la thermodynamique : énergie, énergie libre, enthalpie, enthalpie libre...

Chacune des fonctions d'état permet d'obtenir un ensemble d'équations différentielles avec une causalité donnée. Les paragraphes suivants exposent : comment, d'une fonction d'état donnée, on obtient ces équations ; comment construire une fonction d'état souhaitée pour une causalité donnée, ainsi que les répercussions sur la structure des équations $\delta y = \varepsilon \cdot \delta y$ obtenues.

a. Fonction d'état énergie et causalité intégrale

La forme générale du membre gauche de l'équation de bilan d'énergie (6.14.a) pour un système fermé s'écrit encore :

$$d\mathcal{E} = \sum_i X_i \cdot dY_i. \quad (6.16.a)$$

Dans cette équation les variables X_i et Y_i sont des grandeurs physiques respectivement intensives et extensives. Chaque produit $X_i dY_i$ représente la variation d'une énergie de nature donnée (mécanique, électrique, hydraulique...). Chacune de ces variables est une variable interne au système. En termes de variables généralisées, l'équation (6.16.a) prend la forme :

$$d\mathcal{E}_p + dU + d\mathcal{E}_c = \sum_i e_i dq_i + \sum_j f_j dp_j \quad (6.16.b)$$

où chacune des sommes du membre droit de cette équation souligne le caractère potentiel ou cinétique, de l'énergie ainsi représentée. N'interviennent dans cette équation que les variables d'état internes au système, ces variables correspondent alors aux paramètres du vecteur de sortie y du processus T.

De ce bilan, on déduit les k équations :

$$e_i = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_i} = e_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (6.16.c)$$

et les $n-k$ équations :

$$f_j = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_j} = f_j(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (6.16.d)$$

La fonction d'état énergie (6.16.b) permet donc d'obtenir les deux types d'équations (6.16.c) et (6.16.d), où les variables d'effort et de flux : e_i et f_j sont les variables dépendantes, fonctions des variables indépendantes de déplacement et d'impulsion : q_i , p_j . Cette causalité est dite intégrale dans la terminologie Bond-Graph.

On déduit alors de ces équations le système d'équations différentielles totales suivant :

$$\begin{array}{r}
 \vdots \\
 de_i = \dots + \frac{\partial e_i}{\partial q_k} dq_k \quad \vdots \quad \vdots + \frac{\partial e_i}{\partial p_l} dp_l \quad \dots \\
 \vdots \\
 \hline
 df_j = \dots + \frac{\partial f_j}{\partial q_k} dq_k \quad \vdots \quad \vdots + \frac{\partial f_j}{\partial p_l} dp_l \quad \dots \\
 \vdots
 \end{array} \quad (6.16.e)$$

Sous une forme matricielle synthétique, on note ce système par :

$$\begin{pmatrix} de \\ df \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial e_i}{\partial q_k} & \dots & \frac{\partial e_i}{\partial p_l} & \dots \\ \vdots & \vdots \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial f_j}{\partial q_k} & \dots & \frac{\partial f_j}{\partial p_l} & \dots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq \\ dp \end{pmatrix} \quad (6.16.f)$$

La différentielle de la fonction d'état énergie étant une différentielle totale exacte, on a, d'après les relations de Maxwell sur les dérivées secondes croisées de l'énergie (6.16.b) :

$$\frac{\partial e_i}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial q_k \partial q_i} = \frac{\partial e_k}{\partial q_i} \quad (6.16.g)$$

$$\frac{\partial e_k}{\partial p_l} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial p_l \partial q_k} = \frac{\partial f_l}{\partial q_k} \quad (6.16.h)$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial p_l} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial p_l \partial p_j} = \frac{\partial f_j}{\partial p_l} \quad (6.16.i)$$

En d'autres termes, la matrice du système (6.16.f) est symétrique.

On construit alors le système d'équations $\delta y = \varepsilon \cdot \delta y$ (6.16.j), à partir des équations fournies par le système (6.16.f), qui prend la forme :

$$\begin{pmatrix} de \\ \overline{\overline{dq}} \\ df \\ \overline{\overline{dp}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial e}{\partial q} & 0 & \frac{\partial e}{\partial p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial q} & 0 & \frac{\partial f}{\partial p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} de \\ \overline{\overline{dq}} \\ df \\ \overline{\overline{dp}} \end{pmatrix} \quad (6.16.j)$$

Pour cela la matrice du système (6.16.f) est augmentée de lignes et de colonnes nulles de sorte que le système (6.16.j) obtenu compte autant de lignes et de colonnes que de paramètres dans le vecteur de sortie. La nouvelle matrice s'apparente alors une matrice d'incidence de graphe.

La méthode d'obtention des équations à partir de fonctions d'état confère aux équations du système $\delta y = \varepsilon \cdot \delta y$ les propriétés suivantes :

- les formes différentielles (quand elles sont exprimées, c'est à dire qu'il leur correspond une ligne non nulle dans la matrice ε) deviennent des différentielles totales exactes : $\delta y = dy$,
- les coefficients non nuls de la matrice ε sont des dérivées partielles ;
- les sous-matrices non nulles de ε héritent des propriétés de symétrie ((6.16.g) à (6.16.i)) des sous-matrices de (6.16.f) qui leur correspondent ;
- à une variable dépendante n°i correspond la ligne i non nulle et la colonne i nulle ;
- à une variable indépendante n°j correspond la ligne j nulle et la colonne j non nulle.

N.B. : on ne perdra pas de vue que la matrice ε est une matrice de contribution, ou encore une matrice d'incidence d'un graphe. En aucun cas une ligne nulle dans cette matrice ne devra s'interpréter comme une différentielle nulle. Une telle interprétation donnerait lieu au raisonnement suivant :

$$dy_i = 0 \Leftrightarrow y_i = \text{constante}$$

Cette proposition n'est pas forcément vraie. Une ligne nulle devra s'interpréter comme une absence de lien dans cette partie du graphe équivalent entre cette variable et celles formant les paramètres du vecteur y , ou encore que cette différentielle n'est pas exprimée par cet ensemble d'équations.

b. Cas d'une causalité dérivée :

La causalité dérivée est duale de la causalité intégrale. Dans ce cas les variables de déplacement et d'impulsion sont exprimées en fonction des variables d'effort et de flux.

Le système d'équations servant à l'élaboration de la matrice ε prend alors la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} dq \\ dp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial e} & \frac{\partial q}{\partial f} \\ \frac{\partial p}{\partial e} & \frac{\partial p}{\partial f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} de \\ df \end{pmatrix} \quad (6.17a)$$

Un tel système est dérivé de la fonction d'état Γ dont la différentielle est :

$$d\Gamma = -\sum_i q_i de_i - \sum_j p_j df_j \quad (6.17.b)$$

On obtient par les relations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p_i}{\partial f_k} \right) &= \left(\frac{\partial p_k}{\partial f_i} \right) & \left(\frac{\partial q_j}{\partial e_l} \right) &= \left(\frac{\partial q_l}{\partial e_j} \right) \\ \left(\frac{\partial p_l}{\partial e_k} \right) &= \left(\frac{\partial q_l}{\partial f_k} \right) \end{aligned} \quad (6.17.c)$$

Le système d'équations $dy = \varepsilon \cdot dy$ s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} de \\ dq \\ df \\ dp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial q}{\partial e} & 0 & \frac{\partial q}{\partial f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial p}{\partial e} & 0 & \frac{\partial p}{\partial f} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} de \\ dq \\ df \\ dp \end{pmatrix} \quad (6.17.d)$$

c. Causalité et transformations de Legendre.

Le choix de la fonction énergie comme fonction d'état impose non seulement le type d'équations que l'on peut déduire (6.16.c) et (6.16.d), mais aussi une causalité donnée.

Notation : on convient de noter par k une variable dépendante dans un système d'équations (extrémité d'un arc dans le graphe biparti) et par \bar{k} une variable indépendante (origine d'un arc). Avec les conventions de notation des grandeurs scalaires et matricielles, la notation \mathbf{k} représente un vecteur de variables dépendantes et $\bar{\mathbf{k}}$ un vecteur de variables indépendantes.

Supposons que pour des raisons de calcul, de simulation, ou de connaissance, on soit amené à choisir comme variables dépendantes un sous-ensemble quelconque de $n/2$ variables parmi les n variables que compte le vecteur \mathbf{y} . On note :

$$\mathbf{y} = (\mathbf{e} \ \bar{\mathbf{e}} \ \bar{\mathbf{q}} \ \mathbf{q} \ \mathbf{f} \ \bar{\mathbf{f}} \ \bar{\mathbf{p}} \ \mathbf{p}),$$

où chacun des sous-vecteurs de \mathbf{y} est structuré en variables dépendantes et indépendantes comme suit :

$${}^e\mathbf{y} = (\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}), \quad {}^q\mathbf{y} = (\bar{\mathbf{q}}, \mathbf{q}), \quad {}^f\mathbf{y} = (\mathbf{f}, \bar{\mathbf{f}}), \quad {}^p\mathbf{y} = (\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}).$$

On cherche à établir sur \mathbf{y} les quatre types de sous-ensembles d'équations suivants :

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}(\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{p}}) \quad (6.18.a)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{p}}) \quad (6.18.b)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{p}}) \quad (6.18.c)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{p}}). \quad (6.18.d)$$

D'après les paragraphes précédents, si ces fonctions dérivent de la différentielle d'une fonction d'état Γ , alors cette différentielle s'écrit :

$$d\Gamma = \pm \sum_i e_i dq_i \pm \sum_k q_k d\bar{e}_k \pm \sum_j f_j d\bar{p}_j \pm \sum_l p_l d\bar{f}_l. \quad (6.18.e)$$

La question est maintenant de savoir comment obtenir une telle fonction Γ ? Une méthode systématique existe qui permet, partant de la connaissance d'une fonction d'état, de construire toutes les fonctions d'état possibles à partir de cette dernière, cette méthode est connue sous le nom de transformations de Legendre [Abb-92][Per-93].

Partons de la fonction d'état énergie dont la différentielle est :

$$d\mathcal{E} = \sum_i e_i dq_i + \sum_j f_j dp_j \quad (6.18.f)$$

et formons la nouvelle fonction H telle que :

$$H = \mathcal{E} - \sum_k q_k \cdot \bar{e}_k - \sum_l p_l \bar{f}_l, \quad (6.18.g)$$

sa différentielle s'écrit alors :

$$dH = \sum_i e_i d\bar{q}_i - \sum_k q_k d\bar{e}_k + \sum_j f_j d\bar{p}_j - \sum_l p_l d\bar{f}_l \quad (6.18.h)$$

La fonction d'état H ainsi formée est bien une modalité de la fonction Γ recherchée.

On dispose donc d'une fonction d'état permettant de dériver les quatre sous-ensembles de relations recherchés ((6.18.a) à (6.18.d)), on obtient alors :

$$e_i = \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{q}_i}, \quad (6.18.i) \quad q_k = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{e}_k}, \quad (6.18.j)$$

$$f_j = \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{p}_j}, \quad (6.18.k) \quad p_l = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{f}_l}, \quad (6.18.l)$$

et par les relations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_i}{\partial \bar{q}_i} &= \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \bar{q}_i \partial \bar{q}_i} = \frac{\partial e_i}{\partial \bar{q}_i} & \frac{\partial e_i}{\partial \bar{e}_k} &= \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \bar{e}_k \partial \bar{q}_i} = -\frac{\partial q_k}{\partial \bar{q}_i} \\ \frac{\partial e_i}{\partial \bar{p}_j} &= \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \bar{p}_j \partial \bar{q}_i} = \frac{\partial f_j}{\partial \bar{q}_i} & \frac{\partial e_i}{\partial \bar{f}_l} &= \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \bar{f}_l \partial \bar{q}_i} = -\frac{\partial p_l}{\partial \bar{q}_i} \\ \frac{\partial q_k}{\partial \bar{e}_k} &= \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \bar{e}_k \partial \bar{e}_k} = \frac{\partial q_k}{\partial \bar{e}_k} & \frac{\partial q_k}{\partial \bar{p}_j} &= \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \bar{p}_j \partial \bar{e}_k} = -\frac{\partial f_j}{\partial \bar{e}_k} \\ \frac{\partial q_k}{\partial \bar{f}_l} &= \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \bar{f}_l \partial \bar{e}_k} = -\frac{\partial p_j}{\partial \bar{e}_k} & \frac{\partial f_j}{\partial \bar{p}_j} &= \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \bar{p}_j \partial \bar{p}_j} = \frac{\partial f_j}{\partial \bar{p}_j} \\ \frac{\partial f_j}{\partial \bar{f}_l} &= \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \bar{f}_l \partial \bar{p}_j} = -\frac{\partial p_l}{\partial \bar{p}_j} & \frac{\partial p_j}{\partial \bar{f}_l} &= \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \bar{f}_l \partial \bar{f}_l} = -\frac{\partial p_j}{\partial \bar{f}_l} \end{aligned} \quad (6.18.m)$$

Par différentiation de chacune des fonctions : e_i , q_k , f_j , p_l , on obtient l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{de}{d\bar{q}} \\ \frac{dq}{d\bar{e}} \\ \frac{df}{d\bar{p}} \\ \frac{dp}{d\bar{f}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial e}{\partial \bar{e}_i} & \frac{\partial e}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial e}{\partial \bar{f}} & \frac{\partial e}{\partial \bar{p}} \\ \frac{\partial q}{\partial \bar{e}_i} & \frac{\partial q}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial q}{\partial \bar{f}} & \frac{\partial q}{\partial \bar{p}} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{e}_i} & \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial f}{\partial \bar{f}} & \frac{\partial f}{\partial \bar{p}} \\ \frac{\partial p}{\partial \bar{e}_i} & \frac{\partial p}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial p}{\partial \bar{f}} & \frac{\partial p}{\partial \bar{p}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d\bar{e}}{d\bar{q}} \\ \frac{d\bar{q}}{d\bar{e}} \\ \frac{d\bar{p}}{d\bar{f}} \\ \frac{d\bar{f}}{d\bar{p}} \end{pmatrix} \quad (6.18.n)$$

La matrice de ce système se compose de seize sous-matrices :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

Ces matrices présentent les propriétés de symétrie et d'antisymétrie suivantes, déduites des relations de Maxwell (6.18.m) :

$$\alpha_{ii} = (\alpha_{ii})^t, \quad \alpha_{ij} = (-1)^{i+j} (\alpha_{ij})^t. \quad (6.18.o)$$

On construit alors le système d'équations $dy = \varepsilon \cdot dy$ (6.18.p) suivant :

$$\begin{pmatrix} de \\ d\bar{e} \\ dq \\ d\bar{q} \\ df \\ d\bar{f} \\ dp \\ d\bar{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial e}{\partial \bar{e}} & \frac{\partial e}{\partial \bar{q}} & 0 & 0 & \frac{\partial e}{\partial \bar{f}} & \frac{\partial e}{\partial \bar{p}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial q}{\partial \bar{e}} & \frac{\partial q}{\partial \bar{q}} & 0 & 0 & \frac{\partial q}{\partial \bar{f}} & \frac{\partial q}{\partial \bar{p}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial \bar{e}} & \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} & 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial \bar{f}} & \frac{\partial f}{\partial \bar{p}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial \bar{e}} & \frac{\partial f}{\partial \bar{q}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial p}{\partial \bar{e}} & \frac{\partial p}{\partial \bar{q}} & 0 & 0 & \frac{\partial p}{\partial \bar{f}} & \frac{\partial p}{\partial \bar{p}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\bar{e} \\ d\bar{q} \\ d\bar{f} \\ d\bar{p} \end{pmatrix} \quad (6.18.p)$$

La structure de la matrice ε est imposée par la causalité adoptée et est la suivante :

- lignes et colonnes nulles :

- à chaque sous-ensemble de variables dépendantes correspondent des colonnes nulles dans la matrice ;
- à chaque sous-ensemble de variables indépendantes correspondent des lignes nulles dans la matrice ;

- symétries dans la matrice :

- à un sous-ensemble de lignes non nulles, donc de variables dépendantes, correspond un sous-ensemble de lignes nulles, donc de variables indépendantes. Ces dernières sont les variables énergétiques conjuguées aux précédentes. En effet, si la variable e_i est élément du sous-ensemble de variables dépendantes $\{e\}$, alors la variable énergétique conjuguée est \bar{q}_i , élément des variables indépendantes $\{\bar{q}\}$. Ainsi, la ligne correspondant à la variable e_i est non nulle et lui correspond celle de la variable \bar{q}_i qui elle est nulle.

- les sous-matrices non nulles de ε présentent les propriétés de symétrie et d'antisymétrie héritées des sous-matrices α_{ij} (6.18.o) correspondantes.

III.1.b Relations entrée/sortie : relations structurelles.

N.B. : les équations que nous abordons ici sont qualifiées de structurelles. Ce type d'équations ne concerne que des variables de même dimension. En conséquence, les différents coefficients intervenant dans ces relations sont sans dimension.

On s'intéresse ici au deuxième type de relations que nous avons envisagé, celui des relations portant sur les variables des vecteurs d'entrée x et de sortie y (6.8.d). On structure le vecteur des variables d'entrée comme suit :

$$x = ({}^e x_1, {}^e x_2, \dots, {}^e x_m, {}^f x_1, {}^f x_2, \dots, {}^f x_m)^t = ({}^e x, {}^f x)^t \equiv (e, f)^t \quad (6.19.a)$$

On cherche donc à établir des relations du type :

$$y_j = f'_x(x)_i \quad (6.19.b)$$

Considérons pour cela le bilan d'énergie :

$$\pm \sum_i e_i \cdot dq_i \pm \sum_j f_j \cdot dp_j = \delta Q + \delta W \quad (6.19.c)$$

Alors que nous avons écrit le membre gauche de cette équation en termes de variables d'état internes au système (paramètres du vecteur y), le membre droit est une fonction des variables du vecteur d'entrée représentant les échanges d'énergie et de travail avec le milieu extérieur. L'équation de bilan (6.19.c), en termes de variables généralisées, prend alors la forme :

$$\pm \sum_i e_i \cdot dq_i \pm \sum_j f_j \cdot dp_j = \sum_k e_k \cdot f_k \cdot dt \quad (6.19.d)$$

où les variables généralisées du membre droit sont celles du vecteur x .

Alors que les relations de type $f_{yy}(y_1, y_2, \dots, y_n)_i = 0$ étaient des relations phénoménologiques, celles que nous écrirons ici sont structurelles. En conséquence, on ne recensera que quatre types d'équations :

$$e_i = e_i(\dots, e_k, \dots) \quad (6.19.e)$$

$$f_j = f_j(\dots, f_k, \dots) \quad (6.19.f)$$

$$q_i = q_i(\dots, f_k \cdot dt, \dots) \quad (6.19.g)$$

$$p_j = p_j(\dots, e_k \cdot dt, \dots) \quad (6.19.h)$$

Les deux premiers types d'équations (6.19.e) et (6.19.f) sont respectivement des lois des mailles généralisées aux efforts, et des lois des noeuds généralisées aux flux. Les deux suivantes (6.19.g) et (6.19.h) sont des équations dynamiques, faisant intervenir la dérivée par rapport au temps (resp. l'intégrale), des variables de déplacement et d'impulsion (resp. des variables de flux et d'effort), puisque par définition :

$$\frac{dq}{dt} = f \quad (6.19.i)$$

$$\frac{dp}{dt} = e \quad (6.19.j)$$

En faisant intervenir la variable opérationnelle de Laplace s , les équations (6.19.i et j) s'écrivent :

$$s q = f \quad s.p = e \quad (6.19.k \text{ et } l)$$

Les quatre types d'équations structurelles que nous cherchons à établir, écrites sous forme différentielle, prennent respectivement la forme :

$$de_i = \sum_k \frac{\partial e_i}{\partial e_k} . de_k \quad (6.19.m)$$

$$df_j = \sum_k \frac{\partial f_j}{\partial f_k} . df_k \quad (6.19.n)$$

$$dq_i = \sum_k \frac{\partial q_i}{\partial f_k} . df_k$$

or par définition, $dq = f . dt$ soit , $\frac{\partial q}{\partial f} = \frac{dt}{d} = \frac{1}{s}$ où s est la variable opérationnelle de Laplace, d'où :

$$dq_i = \sum_k \frac{1}{s} . df_k \quad (6.19.o)$$

De même on a :

$$dp_j = \sum_k \frac{1}{s} . de_k . \quad (6.19.p)$$

On déduit alors la forme générale du système d'équations $\delta y = \mathbf{a} . \delta x$:

$$\begin{pmatrix} \frac{de}{dt} \\ \frac{dq}{df} \\ \frac{df}{dp} \\ \frac{dp}{de} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial e}{\partial e} & 0 \\ 0 & \frac{\partial q}{\partial f} \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial f} \\ \frac{\partial p}{\partial e} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} de \\ df \end{pmatrix} \quad (6.19.q)$$

Par une analyse dimensionnelle des coefficients de la matrice \mathbf{a} , on précise la forme de cette matrice comme suit:

$$\begin{pmatrix} \frac{de}{dt} \\ \frac{dq}{df} \\ \frac{df}{dp} \\ \frac{dp}{de} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\alpha & 0 \\ 0 & \pm 1/s \\ 0 & \pm\alpha \\ \pm 1/s & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} de \\ df \end{pmatrix} \quad (6.19.r)$$

où les sous-matrices $\pm\alpha$ désignent des coefficients de proportionnalité sans dimension. En effet, les équations étant structurelles, elles ne sont fonctions que d'efforts d'une part et de flux d'autre part de même théorie physique. Ils ont donc même dimension. Ce sont, par exemple, les coefficients d'équations entre variables de pression, ou entre variables de température, ou entre variables de débit, mais pas entre une pression et une température : ce serait alors

une relation phénoménologique dépendante de notions métriques (coefficient de couplage...) déjà écrite. En conséquence :

$$\frac{\partial e_i}{\partial e_k} \equiv [rad] = 1$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial f_k} \equiv [rad] = 1$$

Ces dérivées partielles sont donc sans dimension : ce sont des coefficients de proportionnalité.

A partir des fonctions d'état thermodynamiques et des équations de bilan énergétique, il est donc possible de décliner, de façon systématique, respectivement les équations phénoménologiques et structurelles qui régissent les processus de type T.

III.1.c Exemples de processus T

On trouvera en annexe 2 le traitement détaillé d'un certain nombre d'exemples pour lesquels on élabore suivant les principes précédemment exposés les équations matricielles phénoménologiques et structurelles. Les exemples de processus T traités sont les suivants :

a/Systèmes fermés.

- Exemple 1 : Stockage d'énergie mécanique par une masse.
- Exemple 2 : Stockage d'énergie thermique par un corps solide.
- Exemple 3 : Stockage d'énergie interne par un fluide.

b/ Systèmes ouverts.

- Exemple 4 : Stockage d'énergie mécanique par une masse variable.

III.2. Processus de transfert d'énergie (type E).

III.2.a Rappels : phénomènes de transport.

Les paragraphes suivants rappellent des notions liées aux phénomènes de transport, à partir desquelles on établira une forme canonique des équations constitutives pour les processus de type E ; ceci afin de rendre l'élaboration des équations pour ce type de processus la plus systématique possible. (On pourra se référer, pour plus de précisions sur les notions et théories rapellées dans la suite, à des ouvrages comme [Abb-92] [Per-thermo][Per-hydro][Per-meca]...)

Définition : ρ_x étant la densité volumique d'une quantité X, la quantité *vecteur courant volumique* de X se définit comme :

$$J_x = \rho_x \cdot u \quad (6.20.a)$$

où u est le vecteur *vitesse moyenne de dérive*. On se ramène alors au vecteur *débit* de la quantité X, par intégration par rapport à la surface:

$$q_x = \int_s J_x \cdot ds \quad (6.20.b)$$

De par la définition d'un courant volumique, la grandeur X transportée est extensive. Elle ne saurait être intensive car il faut pouvoir en définir une densité volumique ρ_x .

Courant convectif, courant non convectif, d'une grandeur extensive.

Il existe deux contributions au transport d'une quantité X , l'une dite convective, quand il y a déplacement global de masse, l'autre non convective quand la masse est globalement immobile, c'est la diffusion. Généralement un courant volumique d'une quantité X résulte de la combinaison de ces deux types de transport :

$$J_x = J_{x,nc} + J_{x,c}$$

Transport par diffusion.

On sait que la non uniformité des variables intensives d'un système thermodynamique et physique en général est à l'origine des phénomènes de transport.

Un gradient de températures est à l'origine d'un courant volumique de chaleur J_{th} :

$$J_{th} = -\lambda grad\theta, \quad (6.20.c)$$

Un gradient de potentiels électriques est à l'origine d'un courant volumique de charges. On a la loi d'Ohm :

$$J_e = -\gamma gradV. \quad (6.20.d)$$

D'autres phénomènes encore se représentent comme des phénomènes de transport par diffusion bien qu'il puisse y avoir déplacement global de masse. On trouve par exemple le transport de la quantité de mouvement liée à la viscosité du fluide :

$$J_{p_m} = -\eta grad v, \quad (6.20.e)$$

où η est le coefficient de viscosité lié à la concentration et au libre parcours moyen ainsi qu'à v la vitesse des particules. On trouve également la diffusion de particules, fonction de la concentration :

$$J_n = -D grad n_v. \quad (6.20.f)$$

En termes de variables généralisées, ces expressions ont la forme générique :

$$f = -\alpha \cdot grad e \quad (6.20.g)$$

L'intégration par rapport à la surface permet de se ramener à des flux de chaleur, des courants électriques, des débits de particules...

Ces phénomènes de diffusion sont des phénomènes internes à une région délimitée par une frontière. Ces phénomènes se représentent comme des phénomènes de transport internes au même titre que ceux qui donnent lieu à des échanges avec l'extérieur par convection, phénomènes que nous abordons maintenant.

Transport par convection.

L'autre classe de phénomènes de transport recouvre ceux par déplacement global de masse. On trouve, par exemple, l'écoulement en milieu poreux avec la loi de Darcy :

$$J_s = -\rho \cdot \frac{k}{\mu} \cdot \text{grad} P_{mot} \quad (6.21.a)$$

où k est la perméabilité du milieu, μ la viscosité et P_{mot} la pression motrice.

Tous les phénomènes de transport de cette classe s'accompagnent par définition d'un transport de masse. Un courant volumique de masse s'écrit :

$$J_m = \rho \cdot v \quad (6.21.b)$$

où v est la vitesse d'écoulement. Dans la plupart des écoulements, il est possible de relier v à un gradient de pression, par une relation du type :

$$v = -k \cdot \text{grad} \cdot P^* \quad (6.21.c)$$

où P^* est la charge hydraulique et où k fait intervenir la viscosité du fluide et la géométrie du conduit d'écoulement. Il est donc possible, là encore, de ramener le courant volumique de masse à une expression similaire aux phénomènes de diffusion :

$$J_m = -\rho \cdot k \cdot \text{grad} \cdot P^* \quad (6.21.d)$$

Dans le cas où ce courant volumique de masse est à l'origine du transport d'une quantité X, alors le courant :

$$J_{x,c} = \rho_x \cdot v \quad (6.21.e)$$

peut se ramener à une expression de la forme :

$$J_{x,c} = \frac{\partial x}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial V} \cdot v = x_m \cdot J_m \quad (6.21.f)$$

où x_m est la densité massique de X. Il est donc possible, compte tenu des équations précédentes, de ramener cette expression à une forme similaire à celle de la diffusion :

$$J_{x,c} = -\Gamma \cdot \text{grad} \cdot P^* \quad (6.21.g)$$

Là encore, en termes de variables généralisées, ces expressions prennent la forme :

$$f = -\alpha \cdot \text{grad} e \quad (6.21.h)$$

Théorie d'ONSAGER.

Dans cette théorie, on admet que tout courant volumique (thermique, électrique, de diffusion,) peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de forces thermodynamiques :

$$J_i = \sum_k \alpha_{ik} \cdot X_k \quad (6.22.a)$$

$$\gamma = \frac{\alpha_{22}}{\theta} \quad \kappa = \frac{\alpha_{21}}{\theta \alpha_{22}} \quad \lambda = \frac{1}{\theta^2} \left(\alpha_{11} - \frac{\alpha_{12}^2}{\alpha_{22}} \right).$$

Les expressions des courants volumiques : thermique et électrique, sont alors :

$$\begin{aligned} J_{th} &= - \left(\frac{\lambda}{\theta^2} + \frac{\kappa^2 \gamma}{\theta} \right) e_{th} - \kappa \gamma \theta e_e \\ J_e &= - \frac{\kappa \gamma}{\theta^2} e_{th} + \gamma e_e \end{aligned} \tag{6.22.j}$$

C'est une relation phénoménologique.

On a par ailleurs les relations structurelles :

$$e_{th} = -grad \frac{1}{\theta} \tag{6.22.k}$$

$$e_e = -grad V \tag{6.22.l}$$

Dans le cas d'un transport dû uniquement à une force thermodynamique d'origine électrique, les relations précédentes deviennent :

$$\begin{aligned} J_{th} &= 0 \\ J_e &= -\gamma e_e \end{aligned} \tag{6.22.m}$$

et,

$$\begin{aligned} X_{th} &= 0 \\ e_e &= -grad V = \theta X_{elec} \end{aligned} \tag{6.22.n}$$

On remarquera le lien entre les forces thermodynamiques (6.22.c) à (6.22.e) et les gradients des variables d'effort dans les différentes équations des phénomènes de transport rencontrés. Des relations de transport du type (6.21.h) apparaissent comme des cas particuliers de celles fournies par la théorie D'Onsager.

III.2.b Ecriture des relations phénoménologiques.

La figure 6.8, rappelle sous une forme synthétique, la représentation générale d'un processus de type E. Il reçoit en entrée un vecteur d'énergies et produit en sortie un vecteur de puissances.

Nous avons vu, dans les chapitres précédents, qu'un processus de type E était indissociable d'un processus de type F. En effet, un processus de type E est régi, comme pour un processus de type F, par une relation généralisée du tétraèdre d'état du type F2(e, f, R) sur les paramètres des vecteurs de sortie. Pour garder en mémoire cette association, on parlera dorénavant de processus E.F pour les phénomènes de transport réels et non plus simplement E. On cherche donc à écrire des relations du type F2(e, f, R) pour élaborer des systèmes d'équations du type $\delta y = \varepsilon \cdot \delta y$.

En adoptant la causalité qui consiste à exprimer les flux en fonction des efforts, on a :

$$f_i = f_i(e) \tag{6.23.a}$$

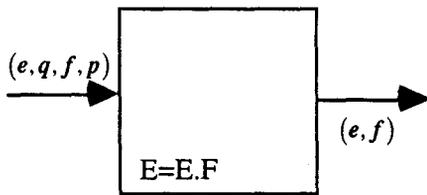


Figure 6.8 : représentation synthétique, générale d'un processus de type E.

soit, sous forme différentielle :

$$df_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial e_j} de_j \quad (6.23.b)$$

ou encore, sous une forme matricielle :

$$df = \left(\frac{\partial f_i}{\partial e_j} \right) . de \quad (6.23.c)$$

Les paramètres $\frac{\partial f_i}{\partial e_j}$ répondent à la définition des résistances généralisées du Bond-Graph. Les équations constitutives que nous cherchons à écrire pour ces processus E.F, nous sont pour l'essentiel fournies par la théorie d' Onsager.

En pratique, les variables de flux auxquelles on s'intéresse sont généralement les débits q_x des grandeurs extensives à travers une surface à une abscisse l (figure 6.9). Le passage des variables de courant volumique à celles de débit ne pose pas de problème particulier. En effet d'après :

$$q_x(l) = \int_{s(l)} \vec{J}_x . \vec{n} . ds \quad (6.23.d)$$

si les variables sont homogènes sur la section :

$$dq_x = \vec{J}_x . \vec{n} . ds \quad (6.23.e)$$

sinon :

$$dq_x(l) = d \left(\int_{s(l)} \vec{J}_x . \vec{n} . ds \right)$$

Les variables d'effort et de flux sont alors des grandeurs moyennes.

III.2.b.1 Mise en forme des équations phénoménologiques

On cherche, comme pour le cas des processus de type T, à mettre notre modèle quantitatif sous une forme semblable au modèle de représentation. On suit pour cela le schéma général précédemment exposé. On forme préalablement les vecteurs d'entrée et de sortie :

$$y = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \\ \frac{e}{f_1} \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \quad x \equiv \begin{pmatrix} e \\ q \\ f \\ p \end{pmatrix} \quad (6.24.a)$$

Comme dans le cas des processus de type T, les relations phénoménologiques des processus de type E.F correspondent aux chemins de longueur zéro dans les réseaux de processus. A l'équation formelle $Y = \Sigma \otimes Y$, dans la structure algébrique (S, \oplus, \otimes) , on fait correspondre dans R^n l'équation $\delta y = \varepsilon . \delta y$

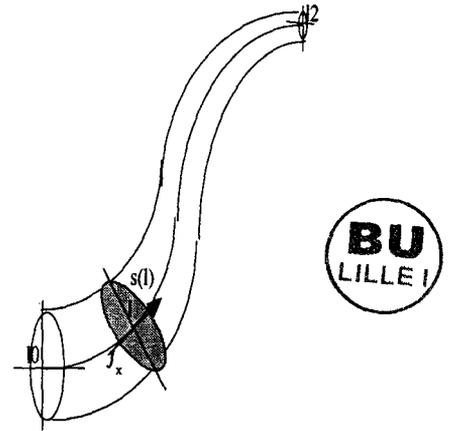


Figure 6.9: Écoulement le long d'une abscisse curviligne d'une grandeur extensive. Le débit de cette grandeur est mesuré, pour une abscisse donnée, par intégration sur la surface normale à l'axe de propagation.

En fonction de la causalité des équations, chacun des sous vecteurs de variables d'effort e_y et de variables de flux f_y du vecteur de sortie y se subdivise en variables dépendantes et indépendantes. Suivant les conventions d'ordonnement des paramètres des vecteurs, on a :

$$\begin{pmatrix} e \\ \bar{e} \\ \bar{f} \\ f \end{pmatrix} \equiv dy = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial e}{\partial e} & \frac{\partial e}{\partial f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial e} & \frac{\partial f}{\partial f} & 0 \end{pmatrix} \cdot dy \quad (6.24.b)$$

La structure de cette matrice nous est imposée par la causalité adoptée pour les équations. Les différentes sous matrices s'interprètent de la façon suivante :

- Les paramètres de la sous matrice $\frac{\partial e}{\partial e}$ sont ceux d'équations phénoménologiques entre efforts de domaines théoriques différents comme par exemple :

$$-\nabla v = \kappa \cdot \nabla \theta \quad (6.24.c)$$

avec : v le potentiel électrique, θ la température et ∇ l'opérateur nabla (pour le gradient). En notant $e_{elec} = -\nabla v$ et $e_{th} = -\nabla \theta$, la relation (6.24.c) s'écrit :

$$e_{elec} = -\kappa \cdot e_{th} \quad (6.24.d)$$

où κ est le coefficient thermoélectrique liant le gradient de potentiels électriques et le gradient de températures dans un dipôle : c'est une relation de couplage.

Les coefficients de la sous matrice $\frac{\partial f}{\partial f}$ sont ceux d'équations phénoménologiques entre flux de domaines théoriques différents comme par exemple la relation entre le débit massique et la vitesse mécanique d'écoulement dans un conduit :

$$q_m = \rho \cdot A \cdot v \quad (6.24.e)$$

ou encore :

$$dq_m = \rho \cdot A \cdot dv \quad (6.24.f)$$

(en supposant que le produit $\rho \cdot A$ de la densité massique par la section est constant), c'est une relation de couplage.

Les coefficients des matrices $\frac{\partial e}{\partial f}$ et $\frac{\partial f}{\partial e}$ sont respectivement les résistances généralisées du Bond-graph et leur inverse liant effort et flux de même domaine théorique, comme par exemple :

$$dU = r \cdot dI \quad (6.24.g)$$

pour la loi d'Ohm, ou encore :

$$dQ = -\lambda \cdot d\theta \quad (6.24.h)$$

pour la relation de Fourier.

Tous les paramètres de ces équations (6.24.b) sont également ceux des relations de la théorie d'Onsager.

III.2.c Ecriture des relations structurelles:

Les équations structurelles des processus de type E.F sont similaires à celles des processus de type T, mais avec une orientation causale différente des équations qui lient les déplacements aux flux et les impulsions aux efforts :

$$de = d \frac{dp}{dt} = s. dp \quad (6.25.a)$$

$$df = d \frac{dq}{dt} = s. dq \quad (6.25.b)$$

ici, ce sont les efforts et les flux qui s'expriment en fonction des déplacements et des impulsions contrairement aux équations (6.19.o) et (6.19.p).

Les relations entre efforts sont, dans le cas général, du type :

$$de = \pm \sum \alpha. \nabla de \quad (6.25.c)$$

comme par exemple la relation entre charge hydraulique et différence de pressions hydrauliques :

$$dX^* = -\nabla(dP^*) \quad (6.25.d)$$

En pratique, par intégration de ces gradients sur un domaine et en régime établi, l'équation (6.25.a) se ramène à une différence de potentiels du type :

$$de = \sum \pm \alpha. de \quad (6.25.e)$$

Quant aux relations sur les flux, on a :

$$df = \sum \pm \alpha df \quad (6.25.f)$$

De manière analogue aux processus de type T, on associe à l'équation formelle $Y = A \otimes X$ dans la structure algébrique (S, \oplus, \otimes) l'équation $\delta y = a. \delta x$. Cette équation correspond aux équations structurelles (6.25.a) à (6.25.f). La forme générale du système $\delta y = a. \delta x$ est alors :

$$dy = \begin{pmatrix} \pm \alpha & 0 & 0 & s \\ 0 & s & \pm \alpha & 0 \end{pmatrix} . dx \quad (6.25.g)$$

III.2.d Exemples de processus de type E

On trouvera en annexe 2 l'exposé détaillé de l'élaboration des équations constitutives et structurelles pour les processus de type E des exemples suivants.

Exemple 5 : Transport de chaleur par diffusion thermique.

Exemple 6 : Transport convectif d'énergie hydraulique.

III.3. Processus de transformation d'énergie (type F).

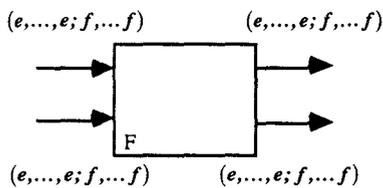


Figure 6.10 : représentation synthétique de la forme générale d'un processus de type F.

On aborde le dernier type de processus : les processus de type F. La forme générale de ce type de processus est rappelée par la Figure 6.10. Des analyses précédentes, on déduit les mises en forme des équations constitutives et structurelles ci-après

III.3.a Relations constitutives et de couplage.

La forme générale de l'équation $dy = \varepsilon \cdot dy$ est la même que pour les processus de type E.F. En effet, on a :

$$dy = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial e}{\partial e} & \frac{\partial e}{\partial f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial e} & \frac{\partial f}{\partial f} & 0 \end{pmatrix} \cdot dy \quad (6.26.a)$$

Les différents paramètres non nuls de cette matrice ont la même signification que pour les processus de type E.F. Il s'agit en effet, en sortie de ces processus, du même type de flux : des flux de puissance, régis par conséquent par les mêmes relations constitutives.

III.3.b Relations structurelles

La forme générale des équations structurelles est une sous matrice du cas des processus E.F (6.25.g) et T (6.19.r), qui s'écrit :

$$dy = \left(\begin{array}{c|c} \pm\alpha & 0 \\ \hline 0 & \pm\alpha \end{array} \right) \cdot dx, \quad (6.26.b)$$

cette sous-matrice ne comporte que les coefficients sans dimension de l'action proportionnelle.

III.3.c Exemples de processus de type F.

L'élaboration des équations constitutives et structurelles des processus de type F des exemples suivants est exposée en détail dans l'annexe 2.

Exemple 7 : Dissipation d'énergie hydraulique par frottement visqueux.

Exemple 8 : Dissipation d'énergie électrique

IV. Mise en équation de processus physiques réels et manipulation des systèmes d'équations.

Les processus que nous avons modélisé jusqu'ici étaient de types simples T, E ou F. Quand on s'intéresse à des processus physiques réels, on traite rarement de processus élémentaires mais de réseaux de processus typés. Nous abordons la mise en équation de ces réseaux

et le calcul des équations des processus globalement équivalents à ces derniers.

Tout d'abord, revenons sur la construction des systèmes d'équations $\delta y = \varepsilon \cdot \delta y$ et $\delta y = a \cdot \delta x$. A la première étape, les équations physiques permettent d'exprimer la différentielle d'un sous-ensemble de paramètres des vecteurs de sortie en fonction d'un sous-ensemble de paramètres des vecteurs d'entrée ou de sortie. Dans une seconde étape, les matrices des expressions ainsi obtenues sont augmentées d'autant de lignes et de colonnes nulles qu'il y a de différentielles de paramètres de sortie non exprimées et de paramètres d'entrée ayant une contribution nulle dans les équations précédentes. On obtient les matrices ε et a qui sont dès lors des matrices d'incidence de graphes dont les sommets sont étiquetés par les paramètres des vecteurs δy et δx . Les paramètres de ces vecteurs et les coefficients des matrices d'incidence sont à la fois :

- des grandeurs formelles, que sont les étiquettes des sommets et des arcs du graphe biparti correspondant;
- des grandeurs réelles, que sont les différentielles, les contributions ou encore les dérivées partielles de même nom.

Il est possible, dès lors que les paramètres des vecteurs δy et δx ainsi que les coefficients des matrices d'incidence ε et a sont pris comme des étiquettes de sous-ensembles de sommets et d'arcs d'un graphe, de les traiter avec les opérateurs d'addition et de multiplication \oplus et \otimes définis au chapitre précédent. Il est également possible de leur appliquer les mêmes algorithmes que ceux définis au chapitre 5 pour le calcul de processus formellement équivalents.

Le problème est que, du point de vue des valeurs réelles de ces étiquettes, l'application des opérateurs \oplus et \otimes entraîne un non sens en termes de contributions, de dérivées partielles ou de différentielles. On rappelle en effet que ces opérateurs \oplus et \otimes sont des opérateurs d'union et de concaténation pour les coefficients formels. Ainsi l'union de deux contributions ou la concaténation de deux dérivées partielles n'ont plus de sens en ces termes. Il convient donc, afin de préserver leur sémantique, de traiter ces vecteurs et matrices à valeurs réelles avec les opérateurs classiques d'addition "+" et de multiplication ".".

On souhaite donc appliquer des algorithmes, mettant en oeuvre la multiplication et l'addition classiques, isomorphes aux algorithmes formels. Les opérateurs de multiplication sont isomorphes. On est par contre confronté au problème qui est que les opérateurs d'addition \oplus et "+" ne sont pas isomorphes. Cela est dû à la propriété d'idempotence de \oplus que ne possède pas "+".

En effet, soient deux vecteurs Y_1 et Y_2 définis sur (S, \otimes, \oplus) du type de ceux rencontrés au chapitre précédent. Leurs paramètres sont des symboles formels qui nomment des sous-ensembles de sommets d'un graphe et non les grandeurs réelles associées, à savoir des différentielles. On note $\{Y_1\}$ et $\{Y_2\}$ les ensembles de paramètres de chacun de ces précédents vecteurs (ensembles des étiquettes des

sommets ainsi désignés). Soit Y le résultat de l'addition \oplus de ces deux vecteurs :

$$Y = Y_1 \oplus Y_2$$

alors $\{Y\}$, l'ensemble des paramètres (ou ensemble des étiquettes des sommets) de Y , est égal à :

$$\{Y\} = \{Y_1\} \cup \{Y_2\}$$

Considérons maintenant les vecteurs δ_{y_1} et δ_{y_2} définis pour $(R^n, +, \cdot)$ dont les paramètres sont les images par l'application $Re : S \rightarrow R$ qui aux étiquettes des vecteurs précédents leur associe la différentielle réelle de la variable formellement désignée. Le résultat de l'addition $\delta_y = \delta_{y_1} + \delta_{y_2}$ de ces vecteurs est alors isomorphe de celui de l'addition \oplus dans le seul cas où les deux ensembles de paramètres des vecteurs sont disjoints $\{Y_2\} \cap \{Y_1\} = \emptyset$. En effet, dans ce cas l'ensemble $\{\delta_y\}$ des différentielles réelles de δ_y est en bijection avec l'ensemble des étiquettes $\{Y\}$:

$$\begin{array}{ccc} Y_1, Y_2 & \xrightarrow{\oplus} & Y = Y_1 \oplus Y_2 \Leftrightarrow \{Y\} \\ Re \downarrow & & \downarrow Re \\ \delta_{y_1}, \delta_{y_2} & \xrightarrow{+} & \delta_y = \delta_{y_1} + \delta_{y_2} \Leftrightarrow \{\delta_y\} \end{array}$$

Malheureusement la disjonction de ces deux ensembles n'est pas toujours vraie. C'est le cas par exemple quand il y a des redondances analytiques dans les équations. On dispose alors de deux expressions au moins d'une seule et même différentielle. Considérons dy , comme étant à la fois un vecteur d'étiquettes désignant un sous-ensemble de sommets, et les différentielles réelles du même nom et pour laquelle on dispose de deux expressions :

$$\begin{aligned} dy &= a \cdot dx_1 \\ dy &= b \cdot dx_2 \end{aligned}$$

où les matrices a et b sont des matrices d'incidence de parties d'un même graphe. Par ces équations, on dispose à la fois de deux expressions formelles des étiquettes de deux chemins d'un même graphe menant au sous-ensemble de sommets $\{dy\}$ et de deux expressions matricielles des différentielles de même nom. L'opération :

$$dy = a \cdot dx_1 \oplus b \cdot dx_2,$$

donne alors l'expression formelle de l'ensemble de ces deux chemins, alors que l'opération :

$$2. dy = a \cdot dx_1 + b \cdot dx_2,$$

somme des différentielles des vecteurs, ne donne pas une expression isomorphe à la précédente et ne correspond plus à la valeur réelle de la différentielle dy .

La question est donc de savoir quel algorithme opérant avec '+' peut-on appliquer aux différentes expressions de cette différentielle qui soit isomorphe à l'algorithme formel et qui conserve la sémantique des entités réelles. Nous proposons d'utiliser la composition convexe. Elle est définie comme suit :

$$dy = p.a. dx_1 + q.b. dx_2$$

où p et q sont des matrices diagonales à coefficients réels positifs telles que :

$$p + q = I$$

où I est la matrice identité de R^n .

Parmi les compositions convexes envisageables, celles mettant en oeuvre des matrices p et q dont les coefficients sont égaux à 1 ou 0 sont intéressantes, en ce qu'elles opèrent un filtrage permettant de choisir entre deux expressions d'une même différentielle.

Supposons maintenant que les conditions d'isomorphisme soient satisfaites, alors une conséquence remarquable est la suivante :

- nous avons défini dans (S, \otimes, \oplus) la quasi-inverse d'une matrice A à coefficients formels, notée : A^* . Elle se définit comme étant égale à :

$$A^* = A^0 \oplus A^1 \oplus \dots \oplus A^n$$

avec :

$$A^n = \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{\times n}$$

Dans la mesure où nous avons supposé être dans les conditions d'isomorphisme des opérateurs formels et classiques, l'expression isomorphe de la quasi-inverse devient :

$$A^n = A.A \dots .A$$

$$A^* = A^0 + A^1 + \dots + A^n$$

soit :

$$A^* = \Sigma + A^1 + \dots + A^n$$

Si A est une matrice à coefficients scalaires réels alors :

$$\Sigma = I$$

$$A^n = A^n$$

l'expression de la quasi-inverse devient :

$$A^* = I + A^1 + \dots + A^n$$

qui n'est autre que le développement de $(I - A)^{-1}$. L'isomorphe de la quasi-inverse dans R^n est donc la résolvante $(I - A)^{-1}$:

$$A^* \Leftrightarrow (I - A)^{-1}$$

En conséquence, si nous satisfaisons aux conditions d'isomorphisme des opérateurs, une mise en équation des graphes qui aboutit à un système de la forme :

$$Z = Z \otimes A \oplus B,$$

forme que nous avons déjà rencontrée et dont la solution formelle est $Z = A^* . B$ se ramène à l'algorithme isomorphe pour les valeurs réelles :

$$Z = Z.A + B$$

dont la solution également isomorphe de la précédente est :

$$Z = (I - A)^{-1} . B$$

Le problème de la convergence de la solution $Z = A^* . B$ que nous avons résolu dans $\{T, E, F, \varepsilon, \emptyset\}$ devient celui de l'inversibilité de $(I - A)^{-1}$ dans R^n .

Nous disposons des outils mathématiques permettant de surmonter les difficultés qui se présenteront lors la manipulation des équations et du calcul de celles des processus équivalents. A l'aide des exemples des paragraphes suivants, nous mettrons à jour ces difficultés et le moyen de les surmonter. Nous verrons comment satisfaire aux conditions d'isomorphismes des opérateurs et comment s'affranchir du problème de l'inversibilité de la matrice résolvante pour le calcul des équations d'un réseau de processus à partir de celles de ses éléments.

IV.1. Substitutions de variables.

Considérons dans un premier temps les coefficients des matrices d'incidence : ε , a et c comme des grandeurs formelles, des étiquettes. On peut donc écrire :

$$\delta y = \varepsilon \otimes \delta y, \quad dy = a \otimes dx, \quad \delta x = c \otimes \delta y \quad (6.27.a, b, c)$$

L'isomorphisme des opérateurs de multiplication permet alors d'écrire pour les grandeurs réelles :

$$\delta y = \varepsilon . \delta y, \quad \delta y = a . \delta x, \quad \delta x = c . \delta y . \quad (6.27.d)$$

Appliquons les opérations \otimes , \oplus aux systèmes d'équations 6.27.a à c.

On peut par exemple écrire, par substitution de variable, la série d'équations :

$$\begin{aligned} dy &= a \otimes dx \\ \delta x &= c \otimes \delta y \\ dy &= a \otimes c \otimes \delta y \\ dy &= a \otimes c \otimes a \otimes dx \end{aligned} \quad (6.27.e)$$

Prenons comme exemple un système quelconque représenté par son graphe biparti (Figure 6.11) et par les équations suivantes :

$$dy = a \otimes dx \text{ soit } d \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \otimes d \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (6.27.f)$$

$$dx = c \otimes dy \text{ soit } d \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes d \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (6.27.g)$$

Par substitution, on obtient $dy = a \otimes c \otimes a \otimes dx$, soit :

$$d \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \cdot a_{31} & 0 & a_{12} \cdot a_{33} \\ a_{22} \cdot a_{31} & a_{23} \cdot a_{22} & a_{23}^2 \oplus a_{22} \cdot a_{33} \\ 0 & a_{22} \cdot a_{33} & a_{33} \cdot a_{23} \end{pmatrix} \otimes d \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (6.27.h)$$

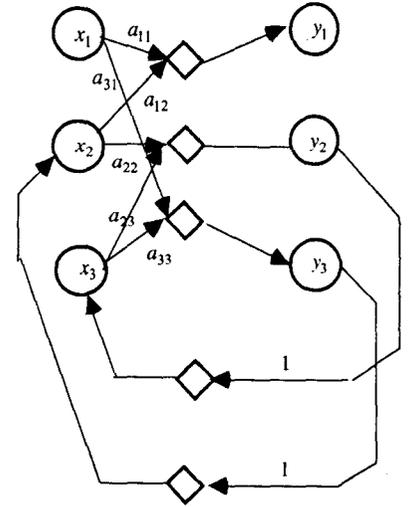


Figure 6.11 : graphe biparti représentant les relations 6.27.f et g.

Cette équation donne l'expression formelle des chemins de longueur 2 des sommets x aux sommets y . Par contre les équations isomorphes dans R^n ne constituent pas un nouveau jeu d'équations différentielles totales exactes obtenues par substitutions de variables.

Une opération de substitution de variable donnerait le système d'équations valides suivants :

$$d \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \cdot a_{31} & 0 & a_{12} \cdot a_{33} \\ a_{22} \cdot a_{31} & a_{23} \cdot a_{22} & a_{23}^2 + a_{22} \cdot a_{33} \\ a_{31} & a_{22} \cdot a_{33} & a_{33} \cdot a_{23} \end{pmatrix} \cdot d \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (6.27.i)$$

Par comparaison avec le système (6.27.h) obtenu précédemment, on remarque que les étiquettes des contributions a_{11} et a_{13} de la variable x_1 n'ont pas été propagées. Il n'y a dès lors plus bijection entre les étiquettes et leur valeur réelle. Ces pertes de contributions portent sur les variables externes ou exogènes du système d'équations, en l'occurrence la variable x_1 .

La raison de cette perte de contribution tient à l'opération $dx = c \cdot dy$, qui dans notre cas donne :

$$dx = d \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

On opère une substitution des variables du vecteur δx internes au système ou endogènes par les variables endogènes correspondantes du vecteur δy . De plus la matrice c filtre les variables exogènes et ne "laisse passer" que les variables endogènes. C'est ce filtrage qui est à l'origine de la perte des contributions des variables exogènes.

Il faut pouvoir élaborer un algorithme permettant de réinjecter ces variables exogènes dans les équations. On procède à la résolution de ce problème de la façon suivante. Les variables exogènes à réinjecter sont dans le vecteur δx . On dispose de deux expressions formelles de la différentielle dx :

$$dx = dx = \Sigma \otimes dx$$

$$dx = c \otimes dy$$

où Σ est la matrice formelle identité. On déduit de ces équations :

$$dx = c \otimes dy \oplus \Sigma \otimes dx$$

une équation à laquelle on peut faire correspondre la composition convexe :

$$dx = q.c.dy + r.I.dx$$

où I est la matrice identité dans R^n image par l'application Re de la matrice Σ et où q et r sont des matrices diagonales à coefficients positifs et dont la somme est égale à I . Notre but étant de réinjecter dans les équations les contributions des variables exogènes, les coefficients diagonaux de la matrice r non nuls seront ceux correspondant à ces dernières. Il doivent être égaux à 1 puisqu'il s'agit de recueillir la totalité de ces contributions. Les variables exogènes se repèrent par des lignes nulles dans la matrice c . Donc à une ligne nulle dans la matrice c on fait correspondre le coefficient diagonal de même numéro égal à 1 dans la matrice r . De la matrice r ainsi calculée on déduit :

$$q = I - r$$

On a donc $r.I = r$ et $q.c = c$. Ce dernier résultat est dû à la construction de la matrice q qui présente les mêmes coefficients diagonaux nuls que les lignes nulles de c .

La composition convexe $dx = q.c.dy + r.I.dx$ est alors égale à :

$$c.dy + r.dx$$

Le résultat des deux opérations :

$$dx = c \otimes dy \oplus r \otimes dx \Leftrightarrow c.dy + r.dx \quad (6.27.k)$$

appliquées à cet exemple, est pour les grandeurs formelles et les valeurs réelles :

$$d \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

avec r égale à :

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par cette opération (6.27.k), on effectue dans le vecteur x une substitution des variables endogènes par les variables y_j correspondantes.

On poursuit le traitement de ce réseau par l'opération :

$$dy = a \otimes (c \otimes dy \oplus r \otimes dx) \quad (6.27.l)$$

qui grâce à l'équivalence des opérateurs, donne dans R^n :

$$dy = a.c.dy + a.r.dx \quad (6.27.m)$$

Les règles de calcul de l'algèbre linéaire sont alors applicables, on a donc :

$$dy = (I - a.c)^{-1} a.r . dx \quad (6.27.n)$$

soit :

$$d \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a_{11} + a_{11} \cdot a_{23} + a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{12} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{23}}{a_{23} + a_{22} \cdot a_{33} - 1} \cdot dx_1 \\ \frac{-a_{22} a_{31}}{a_{23} + a_{22} \cdot a_{33} - 1} \cdot dx_1 \\ \frac{a_{23} - 1}{a_{23} + a_{22} \cdot a_{33} - 1} \cdot dx_1 \end{pmatrix}$$

On obtient par cette opération l'expression des variables de sortie en fonction des variables exogènes. On a éliminé les variables endogènes par substitution.

IV.2. Algorithme de calcul des équations des processus équivalents.

Au fil des exemples des paragraphes suivants qui illustreront notre propos, nous aborderons la résolution des différents problèmes susceptibles de se présenter lors de la mise en équation des réseaux de processus tels que :

- des problèmes de propagation des contributions liés à l'orientation du graphe et donc à la causalité des équations ;
- des problèmes d'inversibilité de matrices résolvantes, etc.

Au fil de ces paragraphes, par la résolution de ces différents problèmes, on construira l'expression des processus équivalents dans R^n isomorphe de $A.(C.A)^*$ dans (S, \otimes, \oplus) .

IV.2.a Processus de dissipation d'énergie et problèmes de causalité des équations.

Reconsidérons le processus de type F de dissipation d'énergie hydraulique par frottement visqueux de l'exemple 7 traité en annexe 2. Tel qu'il est représenté par la figure 6.12, le système d'équations $\delta x = c. \delta y$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} dp_{12}^* \\ dp_1^* \\ dq_{v12} \\ dq_{v1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp_{12}^* \\ dp_2^* \\ dq_{v12} \\ dq_{v2} \end{pmatrix} \quad (6.28.a)$$

On rappelle également les équations constitutives et structurelles qui régissent ce système :

- $dy = \varepsilon . dy$:

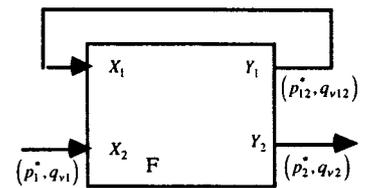


Figure 6.12 : représentation du processus de dissipation d'énergie due à la viscosité du fluide.

$$\begin{pmatrix} dp_{12}^* \\ dp_2^* \\ dq_{v12} \\ dq_{v2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\pi}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{R^4}{l} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} dp_{12}^* \\ dp_2^* \\ dq_{v12} \\ dq_{v2} \end{pmatrix} \quad (6.28.b)$$

- $dy = a \cdot dx$:

$$\begin{pmatrix} dp_{12}^* \\ dp_2^* \\ dq_{v12} \\ dq_{v2} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} dp_{12}^* \\ dp_1^* \\ dq_{v12} \\ dq_{v1} \end{pmatrix} \quad (6.28.c)$$

Si on procède à l'opération de substitution des variables non exogènes comme précédemment, avec :

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.28.d)$$

alors, à partir de l'équation (6.28.a), l'opération $dx = c \cdot dy + r \cdot dx$ donne :

$$dx = \begin{pmatrix} dp_{12}^* \\ dp_1^* \\ dq_{v12} \\ dq_{v1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^e y_1 \\ d^e x_2 \\ d^f y_1 \\ d^f x_2 \end{pmatrix} \quad (6.28.e)$$

On obtient à partir de 6.28.c et par l'opération $dy = (I - a \cdot c)^{-1} a \cdot r \cdot dx$, l'expression de la différentielle des variables de sortie :

$$dy = \begin{pmatrix} dp_{12}^* \\ dp_2^* \\ dq_{v12} \\ dq_{av2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ dp_1^* \\ dq_{av1} \\ dq_{av1} \end{pmatrix} \quad (6.28.f)$$

L'expression de la différentielle dp_{12}^* donnée par cette expression est fautive. La raison tient à la structure des équations. Dans le graphe biparti (figure 6.13) associé aux équations constitutives et structurelles (6.28.b) et (6.28.c) aucun chemin n'aboutit au sommet dp_{12}^* du vecteur δy et aucun chemin ne quitte le sommet dq_{av2} . En conséquence la variable dp_{12}^* , bien qu'elle soit une variable de sortie endogène se comporte comme les variables exogènes précédemment rencontrées. Quant à la variable dq_{av2} , elle se comporte comme un puits empêchant la propagation de ses effets et des variables en amont dans le graphe. Pour pallier à ce problème, la première chose à faire est de rendre possible la propagation des effets de ces variables en changeant la causalité des équations, donc l'orientation du graphe.

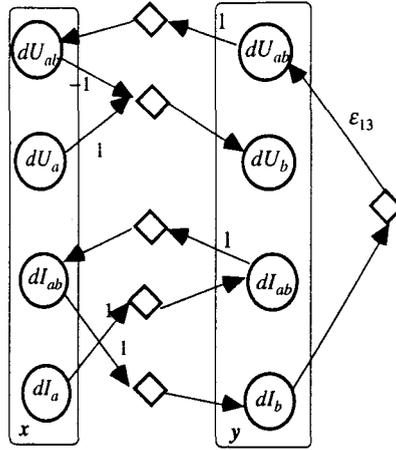
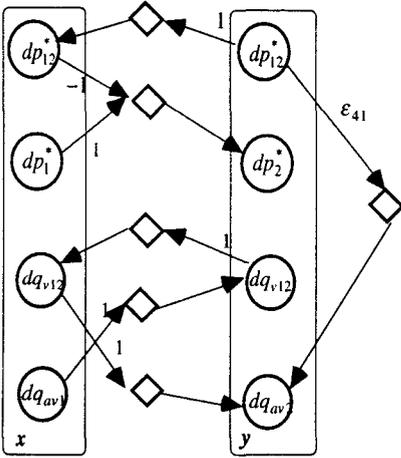


Figure 6.13 : graphe biparti équivalent associé aux équations constitutives et structurales du processus de dissipation d'énergie hydraulique. La variable dp_{12}^* se comporte alors comme une variable exogène qu'il faut pouvoir réinjecter dans les équations.

Figure 6.14 : graphe biparti des équations constitutives et structurales du processus de dissipation d'énergie électrique. La propagation des effets de la variable dU_{ab} , analogue à la variable dp_{12}^* , est ici possible.

C'est le cas pour le système d'équations de l'exemple 8 du processus de type F de dissipation d'énergie électrique traité en annexe 2, homologue électrique de l'exemple 7. La causalité de ces dernières équations donne une orientation au graphe telle que la propagation des effets de la variable dU_{ab} (analogue à la variable dp_{12}^*) du vecteur de sortie est maintenant possible (figure 6.14). Il reste que le chemin qui aboutit à cette variable est pris en compte par l'équation constitutive $dy = \epsilon \cdot dy$. Pour réinjecter cette variable, il nous faut faire intervenir d'une manière ou d'une autre ces équations constitutives. On procède pour cela à l'opération suivante.

On dispose de deux expressions de la différentielle dy :

$$dy = \epsilon \cdot dy \tag{6.30.a,b}$$

$$dy = a \cdot dx$$

on déduit :

$$dy = \epsilon \cdot dx \oplus a \cdot dx \tag{6.30c}$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} dU_{ab} \\ dU_b \\ dI_{ab} \\ dI_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dU_{ab} \\ dU_b \\ dI_{ab} \\ dI_b \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dU_a \\ dI_{ab} \\ dI_a \end{pmatrix} \tag{6.30.d}$$

Les lignes de même numéro dans les matrices de ce système d'équations, présentent une ligne nulle à une ligne non nulle et réciproquement. On se retrouve dans les conditions d'ensembles de

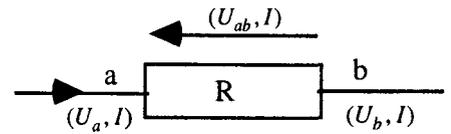


Figure 6.15.a : un dipole résistif traversé par un courant.

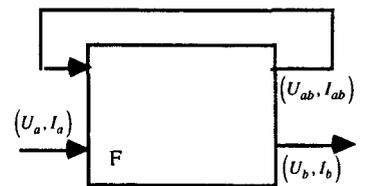


Figure 6.15.b : représentation du processus F de dissipation d'énergie.

différentielles disjointes. Il n'y a donc pas redondance analytique des équations. On peut appliquer l'algorithme isomorphe avec '+'. En conséquence, on écrit :

$$\begin{pmatrix} dU_{ab} \\ dU_b \\ dI_{ab} \\ dI_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dU_{ab} \\ dU_b \\ dI_{ab} \\ dI_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dU_{ab} \\ dU_a \\ dI_{ab} \\ dI_a \end{pmatrix} \quad (6.30.e)$$

On a donc $dy = \varepsilon \cdot dy + a \cdot dx$, soit en remplaçant dx par sa valeur après substitution des variables internes :

$$dy = \varepsilon \cdot dy + a \cdot c \cdot dy + a \cdot r \cdot dx \quad (6.30.f)$$

Les règles de calcul de l'algèbre linéaire étant applicables, on aboutit à :

$$dy = (I - \varepsilon - a \cdot c)^{-1} a \cdot r \cdot dx \quad (6.30.g)$$

Le résultat de cette équation donne :

$$dy = \begin{pmatrix} r \cdot dI_a \\ dU_a - r \cdot dI_a \\ dI_a \\ dI_a \end{pmatrix} \quad (6.30.h)$$

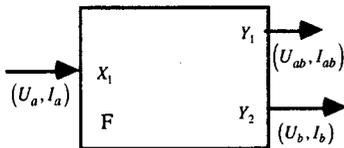


Figure 6.15.c : représentation du processus de type F équivalent à celui de la figure 6.29.b.

Toutes les variables de sortie sont exprimées en fonction des variables exogènes.

On retiendra comme principe que la causalité des équations devra être telle qu'il existe au moins un chemin qui aboutisse à chacune des variables de sortie, et que si nécessaire, les équations du système $dy = a \cdot dx$ devront être complétées par les équations du système $dy = \varepsilon \cdot dy$. On aboutit donc à l'algorithme de calcul de la différentielle des variables de sortie en fonction des variables exogènes d'entrée :

$$dy = (I - \varepsilon - a \cdot c)^{-1} a \cdot r \cdot dx$$

Cette équation se généralise au cas où les ensembles de différentielles ne sont pas disjointes et où il y a redondance analytique entre les équations constitutives et structurelles. Il suffit pour cela de procéder à une composition convexe de ces équations. Soit :

$$dy = r' \varepsilon \cdot dy + r'' a \cdot dx$$

$$dx = c \cdot dy + r \cdot dx$$

$$dy = (I - r' \varepsilon - r'' a \cdot c)^{-1} \cdot r'' a \cdot r \cdot dx$$

IV.2.b Inversibilité de $(I - r' \varepsilon - r'' a \cdot c)$ et boucles algébriques.

Pour illustrer notre propos, reconsidérons le système de masse de l'exemple 9 (annexe 2) et dont la représentation est rappelée par la figure 6.16.

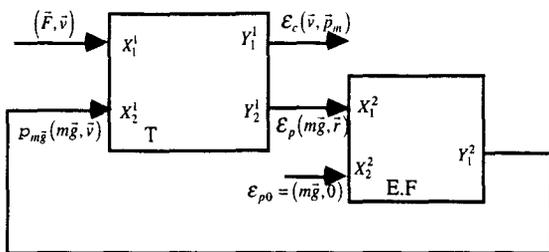


Figure 6.16 : représentation du processus du système de masse non isolé mécaniquement.

On rappelle également les équations établies en annexe 2.

Les vecteurs d'entrée et de sortie sont les suivants :

$$y = \begin{pmatrix} e y_2^1 \\ e y_1^2 \\ q y_2^1 \\ f y_1^1 \\ f y_1^2 \\ p y_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \\ mg \\ z \\ v_z \\ v_z \\ p_{m,z} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} e x_1^1 \\ e x_2^1 \\ e x_1^2 \\ e x_2^2 \\ q x_1^2 \\ q x_1^1 \\ f x_1^1 \\ f x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_z \\ mg \\ mg \\ mg \\ z \\ 0 \\ v_z \\ v_z \end{pmatrix} \quad (6.31.r)$$

L'équation constitutive du réseau est $dy = \varepsilon . dy$:

$$\begin{pmatrix} dmg \\ dmg \\ dz \\ dv_z \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dmg \\ dmg \\ dz \\ dv_z \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} \quad (6.31.s)$$

Enfin une équation structurelle $dy = a . dx$, parmi toutes celles possibles compte tenu des différentes égalités que l'on peut établir, s'écrit :

$$\begin{pmatrix} dmg \\ dmg \\ dz \\ dv_z \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 \\ -1/S & -1/S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dF_z \\ dmg \\ dmg \\ dz \\ d0 \\ dv_z \\ dv_z \end{pmatrix} \quad (6.31.t)$$

Les colonnes correspondant à des variables exogènes y sont encadrées.

L'organisation $dx = c . dy$ quant à elle, est d'après la figure 6.16 :

$$\begin{pmatrix} dF_z \\ dm_g \\ dm_g \\ dm_g \\ dz \\ d0 \\ dv_z \\ dv_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dm_g \\ dm_g \\ dz \\ dv_z \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} \quad (6.31.u)$$

De cette équation, on déduit la matrice r pour la substitution des variables d'entrée endogènes :

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.31.v)$$

Procédons à l'opération substitution :

$$dy = (I - r' \cdot \varepsilon - r'' \cdot a \cdot c)^{-1} \cdot r'' \cdot a \cdot r \cdot dx$$

Dans le cas particulier de cet exemple, toutes les lignes de la matrice a du système d'équations structurelles (6.31.k) sont non nulles. Elles fournissent donc une expression pour chacune des différentielles du vecteur de sortie. Afin de réduire la quantité de calcul, sélectionnons ces dernières expressions. Cela revient à une composition convexe des équations constitutives et structurelles où :

$$r'' = I, r' = [0]$$

On procède donc à l'opération $dy = (I - a \cdot c)^{-1} \cdot a \cdot r \cdot dx$. La matrice $(I - a \cdot c)$ est alors non inversible, ce qui est caractéristique d'un circuit dans le graphe. Cette boucle algébrique est dans le cas de ces équations :

$$d^e y_2^1 = d^e x_2^1 = d^e y_1^2 = d^e x_1^2 = d^e y_2^1 = d(mg)$$

Toutes ces égalités portent sur des variables internes et ne font pas intervenir la variable $^e x_2^2 = mg$ qui est une variable exogène. Choisissons une équation structurelle faisant intervenir cette variable exogène. Soit cette nouvelle matrice a telle que :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 \\ -1/S & 1/S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.31.w)$$

La matrice $(I - a.c)$ est alors inversible et le résultat de l'opération $dy = (I - a.c)^{-1} a.r.dx$ est alors :

$$dy = \begin{pmatrix} d^e y_2^1 \\ d^e y_1^2 \\ d^q y_2^1 \\ d^f y_1^1 \\ d^f y_1^2 \\ d^p y_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dmg \\ dmg \\ dz \\ dv_z \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^e x_2^2 \\ d^e x_2^2 \\ \frac{1}{s} d^f x_1^1 \\ d^f x_1^1 \\ d^f x_1^1 \\ -\frac{1}{s} (d^e x_1^1 - d^e x_2^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dmg \\ dmg \\ \frac{1}{s} \cdot v_z \\ dv_z \\ dv_z \\ -\frac{1}{s} (dF_z - dmg) \end{pmatrix} \quad (6.31.x)$$

On obtient donc une expression de chacune des variables de sortie en fonction des variables d'entrée exogènes. Dans le cas présent où seules les équations structurelles interviennent dans l'opération de substitution, on obtient alors une nouvelle équation purement structurelle de ce réseau de processus.

De cet exemple, on retiendra comme règle de privilégier, en cas de plusieurs égalités possibles d'une variable de sortie avec une ou plusieurs variables internes et une ou plusieurs variables exogènes, celles qui font intervenir les variables exogènes. Cela pour deux raisons : la première d'assurer la propagation des effets des variables d'entrée dans les équations ; la seconde pour se prémunir de boucles algébriques éventuelles.

IV.2.c Redondance des équations.

Dans ce cas, le problème est alors qu'il existe plusieurs équations structurelles. Cela suppose que l'on procède à une étude de la structure des équations pour détecter les boucles algébriques ou que l'on teste l'inversibilité de la matrice $(I - a.c)$ pour chacun des systèmes d'équations possibles. D'autre part et en supposant que l'on ait éliminé toutes les possibilités menant à des matrices non inversibles, faire un choix parmi les solutions restantes revient à renoncer à la redondance des équations au niveau du processus globalement équivalent. De plus, il n'y a pas *a priori* de raison de privilégier un jeu d'équations plutôt qu'un autre.

Si toutefois on souhaite calculer plusieurs équations pour le processus global, il faudra procéder au calcul $dy = (I - a.c)^{-1} a.r.dx$ autant de fois qu'il y a de possibilités. Cette démarche demande, d'une part, une méthode d'exploration de toutes les possibilités, et d'autre part, beaucoup de calculs. Elle est, par ailleurs, peu efficace car on risque de calculer plusieurs fois certaines équations.

Ici encore l'utilisation de compositions convexes permet de résoudre un certain nombre de problèmes. Cela permet notamment :

- i/ de s'affranchir du problème d'inversibilité de $(I - a.c)$;
- ii/ de préserver la redondance des équations au niveau du processus global ;

et ce de la façon exposée ci-après.

Illustrons notre propos à l'aide de l'exemple précédent. On peut, pour ce système, établir les égalités suivantes (cf. exemple 9, annexe 2) :

$$d^e y_1^2 = d^e x_1^2 = d^e x_2^2 = dm_g$$

$$d^f y_1^1 = d^f x_1^1 = d^f x_2^1 = dv_z$$

On peut donc écrire les compositions convexes :

$$d^e y_1^2 = \alpha_{11} \cdot d^e x_1^2 + \alpha_{12} \cdot d^e x_2^2 = dm_g$$

$$d^f y_1^1 = \alpha_{21} d^f x_1^1 + \alpha_{22} d^f x_2^1 = dv_z$$

avec pour $i=1,2$, $\alpha_{i1} + \alpha_{i2} = 1$. On dispose donc d'une expression unique pour chacune des différentielles concernées. A partir de ces expressions, on peut donc construire la matrice a^+ qui est la composition convexe de toutes les matrices structurales que l'on puisse établir compte tenu des différentes égalités. Cette matrice est la suivante :

$$\begin{pmatrix} dm_g \\ dm_g \\ dz \\ dv_z \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ -1/s & -1/s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dF_z \\ dm_g \\ dm_g \\ dm_g \\ dz \\ dO \\ dv_z \\ dv_z \end{pmatrix}$$

Procédons maintenant à l'opération $dy = (I - a^+ \cdot c)^{-1} a^+ \cdot r \cdot dx$. Les valeurs numériques des coefficients $\alpha_{ij} \in [0,1]$ n'étant pas fixées, cela contraint à procéder à l'inversion de la matrice $(I - a \cdot c)$ formellement. (Les outils logiciels actuels et l'avancement des algorithmes de manipulation algébrique et de calcul formel fait de cette procédure une opération aisée et courante). Le résultat de cette opération donne :

$$\begin{pmatrix} dm_g \\ dm_g \\ dz \\ dv_z \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{(\alpha_{11}-1)} \cdot \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{(\alpha_{11}-1)} \cdot \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{21} + \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{s} & 0 & 0 & \frac{-1}{s(\alpha_{11}-1)} \cdot \alpha_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dF_z \\ dm_g \\ dm_g \\ dm_g \\ dz \\ 0 \\ dv_z \\ dv_z \end{pmatrix}$$

Il reste à rechercher les solutions admissibles pour les différentes valeurs des coefficients α_{ij} . Parmi les différentes valeurs des α_{ij} , les plus pertinentes sont :

$$\begin{array}{c|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

Au regard des coefficients de la matrice, la solution $\alpha_{11} = 1$ conduit à des divisions par zéro et est donc à rejeter, ce à quoi on pouvait s'attendre puisqu'elle correspond au cas de la matrice structurale 6.31.t où la matrice $(I - a.c)$ est non inversible. Par ailleurs, toutes les valeurs possibles de $\alpha_{2i} \in [0,1]$ telles que $\alpha_{21} + \alpha_{22} = 1$ sont admissibles. On aboutit alors à la solution qui, dans ce cas, est unique de l'équation du processus global :

$$\begin{pmatrix} dmg \\ dmg \\ dz \\ dv_z \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{s} & 0 & 0 & \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dF_z \\ dmg \\ dmg \\ dmg \\ dz \\ d0 \\ dv_z \\ dv_z \end{pmatrix}$$

qui n'est autre que l'équation 6.31.x et où les colonnes correspondant aux variables exogènes sont encadrées.

Il est alors possible de réduire la taille des systèmes d'équations en supprimant les lignes et colonnes nulles correspondant aux variables non exogènes et en ne retenant que les lignes correspondant aux variables des vecteurs de sortie du processus global. Un exemple de système réduit pourrait être :

$$\begin{pmatrix} dmg \\ dmg \\ dz \\ dv_z \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{s} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dF_z \\ dmg \\ 0 \\ dv_z \end{pmatrix}$$

On évite ainsi l'explosion de la taille des systèmes d'équations d'un niveau d'abstraction à l'autre.

La généralisation de ces algorithmes à la matrice $(I - r'.\varepsilon - r''.a.c)$ ne présente aucune difficulté. On traitera alors les redondances dans la matrice ε à l'aide de compositions convexes et on élaborera une matrice ε^+ par une procédure analogue à celle employée pour a^+ . On procédera alors au calcul de $dy = (I - r'.\varepsilon^+ - r''.a^+.c)^{-1} a^+$.

Une généralisation des compositions convexes de plus de deux éléments est donnée par le tableau suivant :

n			2	1
2			α_1	$(1 - \alpha_1)$
3		α_2	$(1 - \alpha_2)\alpha_1$	$(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_1)$
4	α_3	$(1 - \alpha_3)\alpha_2$	$(1 - \alpha_3)(1 - \alpha_2)\alpha_1$	$(1 - \alpha_3)(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_1)$
\vdots	\vdots		\vdots	\vdots
n	α_n	$(1 - \alpha_n)\alpha_{n-1}$	\dots	$(1 - \alpha_n)\dots(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_1)$

En ligne on trouve le nombre d'éléments à composer et en colonne les coefficients à affecter à chacun des éléments.

L'exploration et la décomposition des solutions consiste à calculer les équations pour les valeurs α_i du tableau suivant :

α_n	α_{n-1}	...	α_2	α_1
1	0	0
0	1	0	...	\vdots
\vdots	0	\ddots	0	\vdots
\vdots	...	0	1	0
0	0	1

IV.2.d Systèmes d'équations de grande taille : approche locale.

Nous avons traité des exemples de réseaux dont la mise en équation aboutit à des systèmes d'équations de taille modeste. Nous avons pu traiter globalement ces réseaux à l'aide d'une seule équation constitutive, une seule équation structurelle et une seule équation d'organisation.

Toutefois, un inconvénient de la méthode que nous proposons est que, comme nous le verrons sur l'exemple ci-après, le nombre de variables croît très rapidement avec le nombre de processus dans le réseau. La taille des systèmes d'équations rend alors très vite les calculs impossibles (notamment le calcul formel de l'inverse des matrices). On propose une approche locale du calcul des équations du processus globalement équivalent à tout ou partie d'un réseau basée sur l'expression formelle des chemins dans ce réseau. On poursuivra par la même occasion la généralisation de l'algorithme de calcul des équations des processus équivalents.

On illustrera notre propos par un exemple que nous traiterons entièrement et en détail. Sera exposée une procédure pour décliner les algorithmes de calcul des équations du processus global à partir des traitements formels opérés sur les réseaux.

On considère un corps de masse m , composé de deux corps de masse m_1 et m_2 , avec $m_1+m_2=m$. La température de chacun de ces corps est respectivement θ_1 et θ_2 . La température ambiante est égale à θ_a .

La représentation de l'ensemble des processus de stockage d'énergie thermique par les masses et d'échange entre les masses et l'atmosphère est celle de la figure suivante :

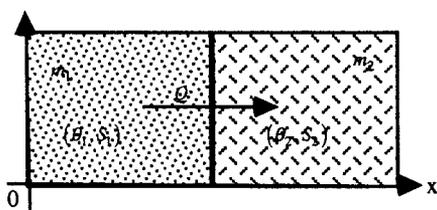


Figure 6.17 : corps de masse m composé de deux corps de masse m_1 et m_2 .

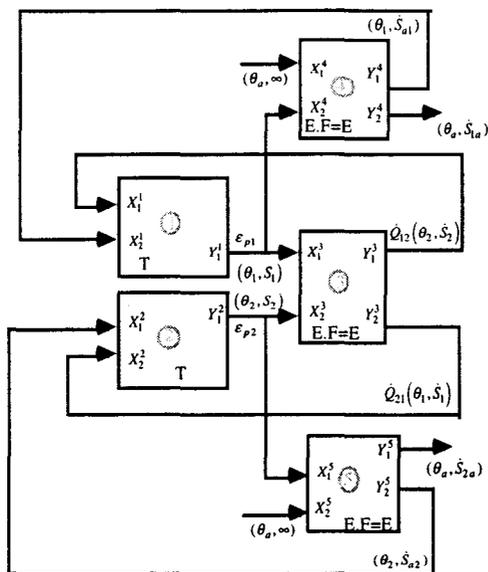


Figure 6.18: représentation des processus de stockage et d'échange.

Les équations constitutives et structurelles de chacun des processus de ce réseau sont données en annexe 2 dans l'exemple 10.

Ce réseau de processus présente un nombre conséquent de variables : vingt pour le vecteur d'entrée, et seize pour le vecteur de sortie qui rend le traitement global de ce dernier difficile.

On procède alors localement au calcul de processus équivalents à des sous réseaux et de proche en proche au calcul du processus global.

On dispose des outils qui nous permettent de calculer les équations d'un réseau ou d'une partie de ce réseau à partir d'algorithmes isomorphes à ceux des expressions formelles de ces réseaux. Ceci est valable pour l'expression formelle des chemins mais aussi des différentes simplifications formelles : agrégations de vecteurs, processus équivalents, etc. D'une manière générale, cette approche locale procède par le calcul des algorithmes isomorphes aux algorithmes formels.

Regroupement des processus 1 à 3.

Procédons à une première réduction du réseau de la figure 6.18 en calculant le processus équivalent entre les entrées X^1, X^2 , des processus 1 et 2 de type T et leur sortie Y^1 et Y^2 , passant par le processus 3 de type E.F qui leur est commun (cf. figure 6.18). Suivant les chemins indiqués sur le figure 6.19 le type du processus équivalent à cette partie du réseau est :

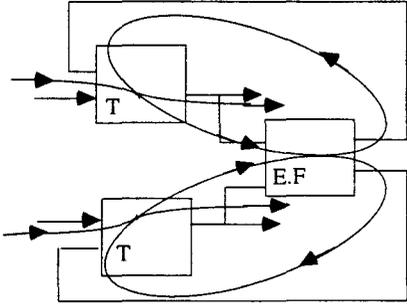


Figure 6.19 : chemins possibles entre les entrées $X_1^1, X_2^1, X_1^2, X_2^2$ et les sorties Y_1^1 et Y_1^2 .

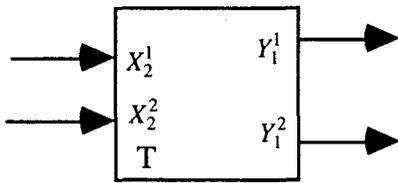


Figure 6.20 : processus formellement équivalent au sous-réseau de la figure 6.35.

$$\begin{aligned} T(E.F.T)^* + T(E.F.T)^* &= T(E.F.T)^* \\ T(E.F.T)^* &= T \end{aligned} \quad (6.34.a)$$

La représentation du processus formellement équivalent à ce sous-réseau est alors celle de la figure 6.20. La taille de ce sous-système reste suffisamment petite pour que celui-ci soit traité dans son ensemble.

La mise en équation de ce sous-réseau est la suivante :

a/ Mise en forme des vecteurs.

On forme les vecteurs d'entrée et de sortie du sous-réseau figure 6.19 :

$$x = (e_{x_1^1}, e_{x_2^1}, e_{x_1^2}, e_{x_2^2}, e_{x_1^3}, e_{x_2^3}, q_{x_1^3}, q_{x_2^3}, f_{x_1^1}, f_{x_2^1}, f_{x_1^2}, f_{x_2^2})^t \quad (6.34.b)$$

ou encore :

$$x = (\theta_2, \theta_1, \theta_2, \theta_1, \theta_1, \theta_2, S_1, S_2, \dot{S}_2, \dot{S}_{a1}, \dot{S}_{a2}, \dot{S}_1)^t \quad (6.34.c)$$

et :

$$y = (e_{y_1^1}, e_{y_1^2}, e_{y_1^3}, e_{y_2^3}, q_{y_1^1}, q_{y_1^2}, f_{y_1^3}, e_{y_2^3})^t \quad (6.34.d)$$

ou encore :

$$y = (\theta_1, \theta_2, \theta_2, \theta_1, S_1, S_2, \dot{S}_2, \dot{S}_1)^t \quad (6.34.e)$$

b/ Équations constitutives.

On forme à partir des équations constitutives de chacun des processus de cette partie du réseau (cf. Exemple 10, annexe 2), le système d'équations phénoménologiques $\delta y = \varepsilon . \delta y$ de l'ensemble. Ce dernier s'écrit alors compte tenu des vecteurs d'entrée et de sortie :

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_2 \\ d\theta_1 \\ dS_1 \\ dS_2 \\ d\dot{S}_2 \\ d\dot{S}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\theta_1}{m_1.c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\theta_2}{m_2.c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \frac{\theta_1}{\theta_2^2} & \lambda \frac{1}{\theta_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \frac{1}{\theta_1} & -\lambda \frac{\theta_2}{\theta_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_2 \\ d\theta_1 \\ dS_1 \\ dS_2 \\ d\dot{S}_2 \\ d\dot{S}_1 \end{pmatrix} \quad (6.34f)$$

c/ Équations structurelles.

De même, à partir des équations structurelles de chacun des processus qui composent cette partie du réseau (cf. exemple 10, annexe 2), on élabore l'équation structurelle de l'ensemble. Cette équation structurelle $\delta y = a . \delta x$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_2 \\ d\theta_1 \\ dS_1 \\ dS_2 \\ d\dot{S}_2 \\ d\dot{S}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{s} \cdot \frac{\theta_2}{\theta_1} & \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \cdot \frac{\theta_1}{\theta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_2 \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_1 \\ dS_1 \\ dS_2 \\ d\dot{S}_2 \\ d\dot{S}_1 \end{pmatrix}$$

(6.34.g)

d/ Équation d'organisation.

D'après la représentation du système (figure 6.19), le système $\delta x = c. \delta y$ d'organisation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} d\theta_2 \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_1 \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ dS_1 \\ dS_2 \\ d\dot{S}_2 \\ d\dot{S}_{a1} \\ d\dot{S}_{a2} \\ d\dot{S}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_2 \\ d\theta_1 \\ dS_1 \\ dS_2 \\ d\dot{S}_2 \\ d\dot{S}_1 \end{pmatrix}$$

(6.34.h)

Pour la substitution des variables internes, au vu de la matrice d'organisation, on utilise la matrice r égale à :

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.34.i)$$

e/Calcul du processus équivalent.

L'élaboration d'un algorithme isomorphe à l'opération $\delta y = \varepsilon \delta y \oplus a. \delta x$ nécessite une composition convexe. Aux vues de la structure des matrices ε et a :

- on est en présence de redondances des équations données par les lignes 1 et 2 de chacune des ces équations. En effet on dispose ici de deux expressions de la même variable ${}^e y_1^1 = \theta_1$ chacune étant fournie par les systèmes d'équations $\delta y = \varepsilon. \delta y$ (6.34.f) et $\delta y = a. \delta x$ (6.34.g) de même pour la variable ${}^e y_1^2 = \theta_2$. En conséquence, on affectera les coefficients diagonaux des matrices de la composition convexe des valeurs α_1 et $\alpha_1 - 1$ pour les lignes de numéro 1 et de α_2 et $\alpha_2 - 1$ pour les lignes de numéro 2.

- Pour les lignes de numéro 3 à 6 seules les équations structurelles fournissent une expression des différentielles correspondantes dans le vecteur de sortie, il nous faut donc les sélectionner par des coefficients égaux à 1 dans la matrice de la composition convexe portant sur les équations structurelles.

- Pour les lignes 7 et 8 ce sont les équations constitutives qui expriment les différentielles concernées, on les sélectionne donc à l'aide de coefficients égaux à 1 dans la matrice de composition portant sur ces dernières équations.

On aboutit donc à la matrice r' portant sur les équations constitutives :

$$r' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.34.j)$$

et à la matrice r'' qui filtre les expressions dans la matrice a elle est complémentaire de r' par rapport à la matrice identité, on a :

$$r'' = (I - r')$$

soit :

$$r'' = \begin{pmatrix} 1-\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.34.k)$$

Le résultat de l'opération :

$$\delta y = (I - r' \varepsilon - r'' a.c)^{-1} r'' . a.r . \delta x \quad (6.34.l)$$

est une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_2 \\ d\theta_1 \\ dS_1 \\ dS_2 \\ dS_2 \\ dS_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * & * & 0 & & 0 & * & * & 0 \\ \vdots & * & * & & \ddots & & * & * & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & * & * & & 0 & & * & * & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & * & * & \vdots \\ \vdots & * & * & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & 0 & & 0 & * & * & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_2 \\ d\theta_1 \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ dS_1 \\ dS_2 \\ dS_2 \\ dS_{a1} \\ dS_{a2} \\ dS_1 \end{pmatrix}$$

où les * signifient des coefficients non nuls.

Les variables du vecteur de sortie sont alors exprimées en fonction des variables exogènes (encadrées dans le vecteur d'entrée) du sous réseau (figure 6.19). Correspondent donc à ces variables exogènes des colonnes non nulles dans la matrice. Ces variables exogènes correspondent aux entrées du processus équivalent (figure 6.20). Quant aux sorties de ce processus équivalent, elles correspondent à celles repérées dans le vecteur de sortie.

Après réduction de ce système d'équations où on ne retient que la sous matrice constituée des lignes des variables de sorties et des colonnes des variables d'entrée du processus figure 6.20, et en retenant la solution pour laquelle $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, le système $\delta y' = \varepsilon a' . \delta x'$ obtenu est :

- avec comme nouveaux vecteurs d'entrée et de sortie :

$$y' = \begin{pmatrix} e y_1^1 \\ e y_1^2 \\ q y_1^1 \\ q y_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \quad x' = \begin{pmatrix} e x_2^1 \\ e x_2^2 \\ f x_2^1 \\ f x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{S}_{a1} \\ \dot{S}_{a2} \end{pmatrix} \quad (6.35.a,b)$$

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(\tau_{12} \cdot s + 1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\theta_1}{C \cdot s} (\tau_2 \cdot s + 1) & \frac{\theta_1}{c \cdot s} \\ 0 & 0 & \frac{\theta_2}{C \cdot s} & \frac{\theta_2}{c \cdot s} (\tau_1 \cdot s + 1) \\ 0 & 0 & \frac{k_1}{s} (\tau_2 \cdot c \cdot s + 1) & \frac{k_1}{s} \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{s} & \frac{k_2}{s} (\tau_1 \cdot s + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\dot{S}_{a1} \\ d\dot{S}_{a2} \end{pmatrix} \quad (6.35.c)$$

Les différents paramètres et constantes de temps dans ces équations sont :

$$C = (m_1 + m_2) \cdot c, \quad \tau_1 = m_1 \cdot \frac{c}{\lambda}, \quad \tau_2 = m_2 \cdot \frac{c}{\lambda}, \quad \tau_{12} = \frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot \frac{c}{\lambda}$$

$$k_1 = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}, \quad k_2 = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}$$

Ce système d'équations n'est plus purement structurel. Il fournit une expression pour chacune des différentielles du vecteur de sortie.

Les équations purement phénoménologiques $\delta y' = \varepsilon' \cdot \delta y'$ qui régissent ce processus équivalent sont celles portant sur les vecteurs de sortie des processus T numéro 1 et 2 de la figure 6.18. Ce sous-système est, compte tenu du vecteur de sortie, égal à :

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda \frac{\theta_2}{\theta_1^2} & \lambda \frac{1}{\theta_1} & 0 & 0 \\ \lambda \frac{1}{\theta_2} & -\lambda \frac{\theta_1}{\theta_2^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix} \quad (6.35.d)$$

Quant à la représentation réduite, elle est celle de la figure 6.21.

Regroupement des processus 4 et 5.

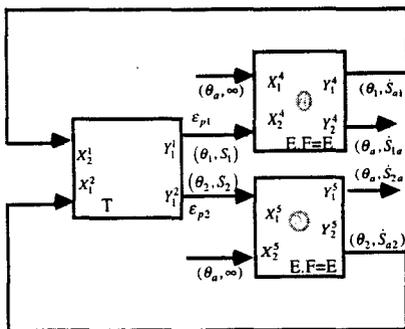


Figure 6.21: réseau réduit équivalent à celui de la figure 6.18

Les processus E.F numéro 4 et 5 de la figure 6.21 en parallèle sont équivalents à un processus global de type :

$$E \cdot F + E \cdot F = E \cdot F \quad (6.35.e)$$

dont l'entrée est :

$$X_1^4 \oplus X_2^5 \oplus X_2^4 \oplus X_1^5 \quad (6.35.f)$$

Dans la mesure où l'opérateur \oplus est idempotent, X_1^4 et X_2^5 étant les mêmes, on a la simplification suivante :

$$X_1^4 \oplus X_2^5 = X_1^4 = X_2^5 = (\theta_a, \infty) \quad (6.35.g)$$

Le flux de sortie quant à lui est :

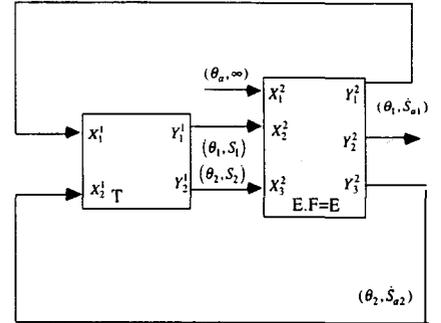
$$Y_1^4 \oplus Y_2^4 \oplus Y_1^5 \oplus Y_2^5 \quad (6.35.h)$$

En introduisant la variable $\dot{S}_a = \dot{S}_{1a} + \dot{S}_{2a}$, qui est le flux d'entropie total reçu par le milieu extérieur des deux corps, on peut former le flux :

$$Y_2^4 \oplus Y_1^5 = (\theta_a, \dot{S}_a) \quad (6.35.i)$$

En reportant ces simplifications et agrégations de flux, le réseau équivalent à celui de la figure 6.21, devient celui de la figure 6.22, dont les flux ont été renommés. On a les égalités entre les flux du réseau de la figure 6.21 et les flux du réseau équivalent de la figure 6.22 suivante :

$$\begin{aligned} X_1^1 &= X_2^1 & X_1^2 &= X_1^4 \oplus X_2^5 & Y_1^2 &= Y_1^4 \\ X_2^1 &= X_1^2 & X_2^2 &= X_2^4 & Y_2^2 &= Y_2^4 \oplus Y_1^5 \\ Y_1^1 &= Y_1^1 & X_3^2 &= X_1^5 & Y_3^2 &= Y_2^5 \end{aligned} \quad (6.36.a)$$



En suivant les nouvelles notations des flux de la figure 6.22, les différents vecteurs d'entrée et de sortie sont :

Figure 6.22 : réseau équivalent à celui de la figure 6.21 après regroupement des processus 4 et 5 de type E.F.

$$x^1 = \begin{pmatrix} e_{x_1^1} \\ e_{x_2^1} \\ f_{x_1^1} \\ f_{x_2^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{S}_{a1} \\ \dot{S}_{a2} \end{pmatrix} \quad y^1 = \begin{pmatrix} e_{y_1^1} \\ e_{y_2^1} \\ q_{y_1^1} \\ q_{y_2^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \quad (6.36.b, c)$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} e_{x_1^2} \\ e_{x_2^2} \\ e_{x_3^2} \\ q_{x_1^2} \\ q_{x_2^2} \\ q_{x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_a \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \infty \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} \quad y^2 = \begin{pmatrix} e_{y_1^2} \\ e_{y_2^2} \\ e_{y_3^2} \\ f_{y_1^2} \\ f_{y_2^2} \\ f_{y_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_a \\ \theta_2 \\ \dot{S}_{a1} \\ \dot{S}_a \\ \dot{S}_{a2} \end{pmatrix} \quad (6.36.d, e)$$

Calcul des équations du système global par une approche locale.

Les équations qui régissent le processus T (figure 6.22) : $\delta y^1 = \varepsilon_{a1} \cdot \delta x^1$ et $\delta y^1 = \varepsilon_1 \cdot \delta y^1$, sont celles du processus globalement équivalent au regroupement des processus 1, 2 et 3 calculées précédemment, soient les équations 6.35.c et d.

Les équations qui régissent le processus 2 de type E.F de la figure 6.22 sont déduites des équations de chacun des processus qui le composent. On a l'équation constitutive $\delta y^2 = \varepsilon_2 \cdot \delta y^2$:

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_a \\ d\theta_2 \\ d\dot{S}_{a1} \\ d\dot{S}_a \\ d\dot{S}_{a2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_a \frac{\theta_a}{\theta_1^2} & \frac{\lambda_a}{\theta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_a}{\theta_a} & -\lambda_a \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_a^2} & \frac{\lambda_a}{\theta_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_a}{\theta_2} & -\lambda_a \frac{\theta_a}{\theta_2^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_a \\ d\theta_2 \\ d\dot{S}_{a1} \\ d\dot{S}_a \\ d\dot{S}_{a2} \end{pmatrix} \quad (6.36.f)$$

et l'équation structurelle, $\delta y^2 = a_2 \cdot \delta x^2$:

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_a \\ d\theta_2 \\ d\dot{S}_{a1} \\ d\dot{S}_a \\ d\dot{S}_{a2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_a \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d^\infty \\ dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix} \quad (6.36.g)$$

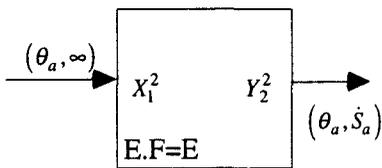


Figure 6.23 : processus globalement équivalent entre les entrées et les sorties du processus E.F de la figure 6.38.

Supposons, à titre d'exemple, que l'on s'intéresse au processus équivalent entre l'entrée exogène X_1^2 et la sortie Y_2^2 du processus E.F numéro 2 de la figure 6.22.

Ce processus est d'après la représentation de ce réseau (figure 6.22) globalement équivalent à un transport puisque son type est, d'après les équations formelles suivantes, de type E :

$$E.F.(T.E.F)^* = E.F.F^* = E.F = E \quad (6.36.h)$$

Sa représentation est alors celle de la figure 6.39.

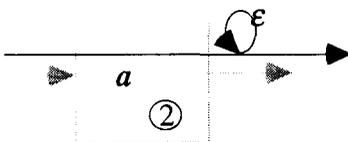


Figure 6.24.a

L'expression formelle du processus menant de X_1^2 à Y_2^2 , par des chemins de longueur au plus égale à 1, est d'après la schématisation des chemins de la figure 6.24.a :

$$Y^2 = \Sigma_{Y^2} \otimes Y^2 \quad (6.37.a)$$

$$Y^2 = A_2 \otimes X^2 \quad (6.37.b)$$

où $\Sigma_{Y^2} = \Sigma$ est la matrice identité dans (S, \otimes, \oplus) . (On ne procède pas aux simplifications des matrices identités car, pour l'écriture des équations quantitatives, il nous faut garder la "trace" de ces matrices afin de leur associer les matrices ϵ des relations constitutives correspondantes)

Soit :

$$Y^2 = \Sigma_{Y^2} \otimes Y^2 \oplus A_2 \otimes X^2 \quad (6.37.c)$$

La résolution de cette équation dans (S, \otimes, \oplus) donne :

$$Y^2 = \Sigma_{Y^2}^* \otimes A_2 \otimes X^2 \quad (6.37.d)$$

où $\Sigma_{Y^2}^*$ est la quasi-inverse de Σ_{Y^2} . L'équation (6.37.d) donne alors l'expression de tous les chemins possibles de longueur au plus égale à 1 menant de l'entrée X^2 à la sortie Y^2 (cf. figure 6.22).

Les algorithmes isomorphes, élaborés sur la base de ces expressions formelles, sont :

$$\delta y^2 = r_2' \cdot \varepsilon_2 \cdot \delta y^2 + r_2'' \cdot a_2 \cdot \delta x^2 \quad (6.37.g)$$

et, en résolvant ce système :

$$\delta y^2 = (I - r_2' \cdot \varepsilon_2)^{-1} \cdot r_2'' \cdot a_2 \cdot \delta x^2 \quad (6.37.h)$$

Le résultat de l'opération (6.37.h) donne l'expression des paramètres du vecteur de sortie y^2 du processus E.F (figure 6.22) en fonction des paramètres de son vecteur d'entrée x^2 :

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_a \\ d\theta_2 \\ d\dot{S}_{a1} \\ d\dot{S}_a \\ d\dot{S}_{a2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_a}{\theta_1} & -\lambda_a \frac{\theta_a}{\theta_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_a \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_a^2} & \frac{\lambda_a}{\theta_a} & \frac{\lambda_a}{\theta_a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_a}{\theta_2} & 0 & -\lambda_a \frac{\theta_a}{\theta_2^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_a \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\infty \\ dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix} \quad (6.37.i)$$

Simplification : de par leur construction les matrices ε ne comportent généralement que des chemins de longueur 1, dans la partie du graphe qu'elles décrivent. En conséquence, on a :

$$\varepsilon^n = (0) \quad n > 1$$

Donc :

$$(I - r' \cdot \varepsilon)^{-1} = I + r' \cdot \varepsilon$$

ce qui en pratique réduit considérablement la quantité de calcul.

Formellement le vecteur d'entrée X^2 s'écrit, d'après la figure 6.22 :

$$X^2 = \Sigma_{X^2} \otimes X^2 \oplus C_{21} \otimes Y^1 \quad (6.38.a)$$

En résolvant cette équation, on a :

$$X^2 = \Sigma_{X^2}^* \otimes C_{21} \otimes Y^1 \quad (6.38.b)$$

On peut alors écrire d'après (6.38.b), pour le modèle quantitatif et en introduisant la matrice de filtrage r_2 sur les variables exogènes :

$$\delta x^2 = r_2 \cdot \delta x^2 + c_{21} \cdot \delta y^1 \quad (6.38.c)$$

En résolvant ce système, on obtient la solution littérale :

$$\delta x^2 = (I - r_2)^{-1} c_{21} \cdot \delta y^1 \quad (6.38.d)$$

Généralement la matrice $(I - r_2)^{-1}$ du système (6.38.d) est non inversible, car les coefficients non nuls de la matrice de filtrage r_2 étant sur la diagonale et égaux à 1, la matrice $(I - r_2)$ présente alors des coefficients nuls sur sa diagonale, elle est alors non inversible. En conséquence, on retiendra l'expression (6.38.c) qui est toujours valable. En conséquence, pour préserver l'analogie entre les expressions formelles et quantitatives, on retiendra pour les vecteurs de sortie l'expression formelle de type (6.38.a).

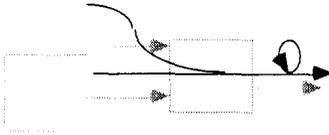


Figure 6.24.b

L'expression des chemins menant à Y^2 devient , en remplaçant X^2 par sa valeur donnée par (6.38.d) dans (6.37.d) :

$$Y^2 = \Sigma_{Y^2}^* \otimes A_2 \otimes C_{21} \otimes Y^1 + \Sigma_{Y^2}^* \otimes A_2 \otimes \Sigma_{X^2} \otimes X^2 \quad (6.39.a)$$

(6.39.a) donne l'expression formelle des chemins menant de X^2 et de Y^1 à Y^2 dans le réseau de la figure 6.22 schématisés par la figure 6.24.b.

L'algorithme isomorphe est alors :

$$\delta y^2 = (I - r_2 \cdot \varepsilon_2)^{-1} \cdot r_2 \cdot a_2 \cdot c_{21} \cdot \delta y^1 + (I - r_2 \cdot \varepsilon_2)^{-1} \cdot r_2 \cdot a_2 \cdot r_2 \cdot \delta x^2 \quad (6.39.b)$$

Avec c_{21} et r_2 telles que $\delta x^2 = c_{21} \cdot \delta y^1 + r_2 \cdot \delta x^2$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} d\theta_a \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\infty \\ dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_a \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\infty \\ dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix} \quad (6.39.c)$$

Le résultat de l'opération (6.39.b) donne :

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_a \\ d\theta_2 \\ dS_{a1} \\ dS_a \\ dS_{a2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_a \cdot \frac{\theta_a}{\theta_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_a}{\theta_a} & \frac{\lambda_a}{\theta_a} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_a \cdot \frac{\theta_a}{\theta_2^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_a}{\theta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_a \cdot \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_a}{\theta_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_a \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\infty \\ dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_a \\ d\theta_2 \\ dS_{a1} \\ dS_a \\ dS_{a2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ 0 \\ d\theta_2 \\ -\lambda_a \cdot \frac{\theta_a}{\theta_1^2} \cdot d\theta_1 \\ \frac{\lambda_a}{\theta_a} \cdot (d\theta_1 + d\theta_2) \\ -\lambda_a \cdot \frac{\theta_a}{\theta_2^2} \cdot d\theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d\theta_a \\ 0 \\ \frac{\lambda_a}{\theta_1} \cdot d\theta_a \\ -\frac{\lambda_a}{\theta_a^2} \cdot (\theta_1 + \theta_2) \cdot d\theta_a \\ \frac{\lambda_a}{\theta_2} \cdot d\theta_a \end{pmatrix} \quad (6.39.e)$$

Y^1 , d'après les chemins de la figure 6.22 s'écrit :

$$Y^1 = \Sigma_{Y^1}^* \otimes A_1 \otimes X^1 \quad (6.40.a)$$

dont l'expression isomorphe est pour le modèle quantitatif :

$$\delta y^1 = (I - r_1' \cdot \varepsilon_1)^{-1} \cdot r_1'' \cdot \varepsilon a_1 \cdot \delta x^1 \quad (6.40.b)$$

L'expression formelle des chemins, schématisés par la figure 6.24.c, menant à Y^2 devient d'après (6.40.a) et (6.39.a) :

$$Y^2 = \Sigma_{Y^2}^* \otimes A_2 \otimes C_{21} \otimes \Sigma_{Y^1}^* \otimes A_1 \otimes X^1 \oplus \Sigma_{Y^2}^* \otimes A_2 \otimes \Sigma_{X^2} \otimes X^2 \quad (6.40.d)$$

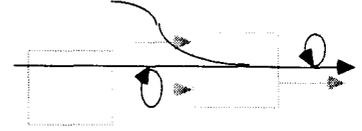


Figure 6.24.c

et, pour le modèle quantitatif, d'après (6.40.b) :

$$\delta y^2 = (I - r_2' \cdot \varepsilon_2)^{-1} \cdot r_2'' \cdot a_2 \cdot c_{21} \cdot (I - r_1' \cdot \varepsilon_1)^{-1} \cdot r_1'' \cdot \varepsilon a_1 \cdot \delta x^1 + (I - r_2' \cdot \varepsilon_2)^{-1} \cdot r_2'' \cdot a_2 \cdot r_2 \cdot \delta x^2 \quad (6.40.e)$$

En procédant à la composition convexe particulière ne sélectionnant que les équations fournies par l'équation (6.35.c), cette dernière fournissant une expression pour chaque différentielle du vecteur de sortie δy^1 , on a les matrices de filtrage :

$$r_1' = (0) \\ r_1'' = (I - r_1') = I$$

Soit en pratique :

$$\delta y^1 = (I - r_1' \cdot \varepsilon_1)^{-1} \cdot r_1'' \cdot \varepsilon a_1 \cdot \delta x^1 = \varepsilon a_1 \cdot \delta x^1 \quad (6.40.c)$$

qui pour le calcul de l'expression 6.40.e donne :

$$\delta y^2 = (I - r_2' \cdot \varepsilon_2)^{-1} \cdot r_2'' \cdot a_2 \cdot c_{21} \cdot \varepsilon a_1 \cdot \delta x^1 + (I - r_2' \cdot \varepsilon_2)^{-1} \cdot r_2'' \cdot a_2 \cdot r_2 \cdot \delta x^2 \quad (6.40.f)$$

dont le résultat est :

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_a \\ d\theta_2 \\ dS_{a1} \\ dS_a \\ dS_{a2} \end{pmatrix} = \frac{1}{C \cdot s \cdot B_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta_1 \cdot B_2 & \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_2 \cdot B_1 & \theta_2 \cdot B_1 \\ 0 & 0 & -\lambda_a \cdot \frac{\theta_a}{\theta_1} \cdot B_2 & -\lambda_a \cdot \frac{\theta_a}{\theta_1} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_a}{\theta_a} \cdot (\theta_1 \cdot B_2 + \theta_2) & \frac{\lambda_a}{\theta_a} \cdot (\theta_2 \cdot B_1 + \theta_1) \\ 0 & 0 & -\lambda_a \cdot \frac{\theta_a}{\theta_2} & -\lambda_a \cdot \frac{\theta_a}{\theta_2} \cdot B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ dS_{a1} \\ dS_{a2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d\theta_a \\ 0 \\ \frac{\lambda_a}{\theta_1} \cdot d\theta_a \\ -\frac{\lambda_a}{\theta_a^2} \cdot (\theta_1 + \theta_2) \cdot d\theta_a \\ \frac{\lambda_a}{\theta_2} \cdot d\theta_a \end{pmatrix} \quad (6.40.g)$$

avec :

$$B_1 = (\tau_1 \cdot s + 1), \quad B_2 = (\tau_2 \cdot s + 1), \quad B_{12} = (\tau_{12} \cdot s + 1)$$

L'expression formelle de X^1 est d'après les chemins de la figure 6.22 :

$$X^1 = \Sigma_{X^1} \otimes X^1 \oplus C_{12} \otimes Y^2 \quad (6.41.a)$$

soit, en résolvant cette équation :

$$X^1 = \Sigma_{X^1}^* \oplus C_{12} \otimes Y^2 \quad (6.41.b)$$

On associe alors à ces équations formelles l'équation quantitative:

$$\delta x^1 = r_1 \cdot \delta x^1 + c_{12} \cdot \delta y^2 \quad (6.41.c)$$

L'expression formelle des chemins menant à Y^2 devient, en remplaçant X^1 par sa valeur donnée par 6.41.a dans 6.40.d :

$$\begin{aligned} Y^2 = & \Sigma_{Y^2}^* \otimes A_2 \otimes C_{21} \otimes \Sigma_{Y^1}^* \otimes A_1 \otimes \Sigma_{X^1}^* \otimes C_{12} \otimes Y^2 \\ & \oplus \Sigma_{Y^2}^* \otimes A_2 \otimes C_{21} \otimes \Sigma_{Y^1}^* \otimes A_1 \otimes \Sigma_{X^1}^* \otimes \Sigma_{X^1} \otimes X^1 \\ & \oplus \Sigma_{Y^2}^* \otimes A_2 \otimes \Sigma_{X^2} \otimes X^2 \end{aligned}$$

L'ensemble des flux d'entrée de X^1 sont des flux endogènes. On a donc l'égalité :

$$\Sigma_{X^1} \otimes X^1 = C_{12} \otimes Y^2 \quad (6.41.d)$$

soit :

$$\begin{aligned} & \Sigma_{Y^2}^* \otimes A_2 \otimes C_{21} \otimes \Sigma_{Y^1}^* \otimes A_1 \otimes \Sigma_{X^1}^* \otimes C_{12} \otimes Y^2 \\ = & \Sigma_{Y^2}^* \otimes A_2 \otimes C_{21} \otimes \Sigma_{Y^1}^* \otimes A_1 \otimes \Sigma_{X^1}^* \otimes \Sigma_{X^1} \otimes X^1 \end{aligned}$$

ce qui en vertu de l'idempotence de l'addition formelle aboutit à l'expression simplifiée de Y^2 :

$$\begin{aligned} Y^2 = & \Sigma_{Y^2}^* \otimes A_2 \otimes C_{21} \otimes \Sigma_{Y^1}^* \otimes A_1 \otimes \Sigma_{X^1}^* \otimes C_{12} \otimes Y^2 \\ & \oplus \Sigma_{Y^2}^* \otimes A_2 \otimes \Sigma_{X^2} \otimes X^2 \end{aligned} \quad (6.41.e)$$

Tous les paramètres du vecteur δx^1 étant des variables internes, la matrice de filtrage r_1 portant sur les variables exogènes est nulle. La matrice $(I - r_1)^{-1}$ est alors inversible et égale à la matrice identité, soit :

$$\delta x^1 = (I - r_1)^{-1} c_{12} \cdot \delta y^2$$

$$\delta x^1 = c_{12} \cdot \delta y^2$$

ce résultat est cohérent avec l'équation formelle 6.41.d. On retrouve bien l'expression simplifiée 6.41.f déduite par isomorphisme de 6.41.e.

L'expression isomorphe est donc :

$$\begin{aligned} \delta y^2 = & (I - r_2 \cdot \varepsilon_2)^{-1} \cdot r_2 \cdot a_2 \cdot c_{21} \cdot (I - r_1 \cdot \varepsilon_1)^{-1} \cdot r_1 \cdot a_1 \cdot c_{12} \cdot \delta y^2 \\ & + (I - r_2 \cdot \varepsilon_2)^{-1} \cdot r_2 \cdot a_2 \cdot r_2 \cdot \delta x^2 \end{aligned} \quad (6.41.f)$$

La résolution de l'équation formelle (6.41.e) donne :

$$\begin{aligned} Y^2 = & \left(\Sigma_{Y^2}^* \otimes A_2 \otimes C_{21} \otimes \Sigma_{Y^1}^* \otimes A_1 \otimes \Sigma_{X^1}^* \otimes C_{12} \right)^* \\ & \otimes \Sigma_{Y^2}^* \otimes A_2 \otimes \Sigma_{X^2} \otimes X^2 \end{aligned} \quad (6.41.k)$$

équation à laquelle correspond l'algorithme :

$$\begin{aligned} \delta y^2 = & \left(I - \left((I - r_2 \cdot \varepsilon_2)^{-1} \cdot r_2 \cdot a_2 \cdot c_{21} \cdot (I - r_1 \cdot \varepsilon_1)^{-1} \cdot r_1 \cdot a_1 \cdot c_{12} \right) \right)^{-1} \\ & \cdot (I - r_2 \cdot \varepsilon_2)^{-1} \cdot r_2 \cdot a_2 \cdot r_2 \cdot \delta x^2 \end{aligned} \quad (6.41.l)$$

Le résultat de cette opération donne un système d'équations de la forme :

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_a \\ d\theta_2 \\ dS_{a1} \\ dS_a \\ dS_{a2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ * & \vdots & \vdots & * & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \vdots & \vdots & * & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\theta_a \\ d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\infty \\ dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix}$$

dont seules les colonnes correspondant aux variables exogènes du vecteur x_1^2 sont non nulles. On ne retient, alors comme équations qui régissent le processus E.F équivalent de la figure 6.23, entre l'entrée x_1^2 et la sortie y_2^2 , que le sous système constitué des lignes et colonnes correspondant, respectivement, aux paramètres du vecteur y_2^2 et du vecteur x_1^2 . Le résultat de cette opération aboutit au système d'équations $\delta y_2^2 = \epsilon a_{12} \delta x_1^2$:

$$\begin{pmatrix} d\theta_a \\ dS_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(s) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\theta_a \\ d\infty \end{pmatrix} \tag{6.41.m}$$

$$f(p) = \frac{\lambda_a}{\theta_a} \cdot \frac{(\theta_1^2 + (B_1 + B_2)\theta_1\theta_2 + \theta_2^2) \cdot B_{12} \cdot \tau_a \cdot s + (B_1 B_2 - 1)(\theta_1 + \theta_2)\theta_a}{\theta_1\theta_2 B_{12}^2 \tau_a^2 \cdot s^2 + (B_1\theta_1 + B_2\theta_2)\theta_a B_{12} \cdot \tau_a \cdot s + (B_1 B_2 - 1)\theta_a^2}$$

avec : $\tau_a = \frac{C}{\lambda_a}$.

Avec les conditions initiales $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, fonction de transfert $f(s)$ se simplifie et devient:

$$f(p) = -\frac{\tau_a}{1 + \tau_a \cdot p} \cdot \frac{\theta}{\theta_a}$$

On se retrouve dans le cas d'un corps de masse $m = m_1 + m_2$ à la température initiale θ échangeant de la chaleur avec l'atmosphère.

IV.2.e Un système de production pour l'algorithme réel isomorphe.

On décline donc de façon systématique l'algorithme de calcul des équations quantitatives en associant aux différents motifs de l'expression formelles l'expression isomorphe pour les grandeurs réelles.

Le système de production suivant génère automatiquement l'algorithme réel isomorphe à l'algorithme formel :

$_ \oplus _$	\rightarrow	$(r._ + (I-r)._)$
$_ \otimes _$	\rightarrow	$_ \cdot _$
$(_)^*$	\rightarrow	$(I-_)^{-1}$
$(_)^* \otimes _$	\rightarrow	$(I-r._)^{-1} \cdot (I-r)._$
Σ_Y	\rightarrow	ε^+
Σ_X	\rightarrow	r_c
A	\rightarrow	a^+
C	\rightarrow	c

où r est une matrice diagonale à coefficients positifs compris entre 0 et 1, r_c est une matrice de composition pour le filtrage des variables endogènes construite relativement à la matrice c . ε^+ et a^+ sont respectivement les compositions convexes de toutes les matrices constitutives et structurelles redondantes.

V. Conclusion

A l'issue de ce sixième et dernier chapitre, on dispose d'une forme canonique des équations quantitatives pour chacun des trois types de processus T, E, F. Ces équations prennent la forme de matrices de sensibilité ou d'incidence de graphes dont les sommets sont les variables des vecteurs d'entrée et de sortie du modèle de représentation et dont les arcs sont pondérés par les dérivées partielles des équations différentielles qui régissent les processus. Ces équations différentielles se déclinent de façon quasi systématique :

- i/ des fonctions d'état thermodynamiques pour les processus de type T et des équations de la théorie d'ONSAGER pour la plupart des processus E et F, pour ce qui est des équations phénoménologiques ;
- ii/ des bilans d'énergie et de masse, pour ce qui est des équations structurelles.

Chaque processus d'un réseau est ainsi mis en équation. La forme adoptée pour ces systèmes d'équations permet de modéliser le réseau dans son ensemble sous une forme analogue à celle du modèle de représentation.

On procède alors au calcul des équations différentielles du processus globalement équivalent à tout ou partie d'un réseau, soit globalement, soit par une procédure locale, basées toutes deux sur les équations du modèle de représentation. Il est en effet possible à l'aide de compositions convexes d'élaborer un algorithme isomorphe à l'expression formelle des chemins du graphe pour le calcul des équations différentielles correspondantes. La déclinaison de ces algorithmes isomorphes est systématique. Il est d'ailleurs possible d'élaborer un système de production qui génère ces derniers à partir des chaînes de caractères des expressions formelles du modèle de représentation.

Ces compositions convexes permettent également une prise en compte dans une même équation d'expressions redondantes et de s'affranchir des problèmes d'inversibilité des matrices résolvantes

réduisant ainsi la quantité de calcul. L'opération de décomposition d'une solution composée consiste à balayer les valeurs des coefficients de la composition de 0 à 1.

La forme particulière donnée aux différentes matrices des équations rencontrées permet d'envisager leur extension à des modèles relevant de structures algébriques plus pauvres. Ces équations peuvent être projetées, par exemple, dans la structure de l'algèbre booléenne : les matrices deviennent dès lors des matrices d'incidence classiques de la théorie des graphes. Les algorithmes de la théorie des graphes leur sont applicables sans autres modifications. On retombe ainsi sur le modèle structurel de la triple modélisation présentée au premier chapitre. On pourrait envisager une projection dans la structure de l'algèbre des signes $\{-, 0, +\}$ pour une modélisation de type qualitatif, etc.

CONCLUSION

générale

Conclusion et perspectives.

Considérer un système comme complexe, suppose une démarche spécifique quant à sa modélisation et son analyse. La méthodologie proposée est une approche multi modèles. Les différents concepts de modélisation sont déterminés par une analyse systémique et intégrés dans une structure d'accueil générale et cohérente : la matrice SAGACE. Ces modèles sont de type fonctionnel, structurel et comportemental, stratifiés en niveaux de formalisation descriptif, qualitatif et quantitatif.

L'interprétation d'un système automatisé de production, vu à travers cette matrice de points de vue SAGACE, recouvre des concepts de modélisation familiers de l'automatique que sont ceux de fonction, de programme, de mode, de configuration, de réseau de dispositifs, d'allocation de ressources, etc. Ces modèles, dans la matrice SAGACE, relèvent du niveau descriptif.

La modélisation descriptive est une représentation graphique des systèmes inspirée de SADT et qui bénéficie en l'état du niveau de formalisation le plus faible. Ce langage de modélisation ne possède aucun mécanisme calculatoire. Ce faible niveau de formalisation en fait un langage subjectif aboutissant à des représentations non univoques. Il est donc nécessaire d'élever le niveau de formalisation de cette représentation, l'idéal étant d'obtenir un langage univoque à caractère algébrique, au même titre que les langages des niveaux qualitatif et quantitatif. Pour cela, s'agissant de représenter des systèmes physiques, nous avons doté ce langage d'un alphabet constitué de trois classes de processus de type : T, E, F proposées par Lemoigne.

Nous avons démontré, à l'aide du tétraèdre d'état (de la théorie Bond-Graph) et du concept d'énergie :

- que cet alphabet est une base de processus physiques (au sens mathématique du terme), tout processus physique est alors décomposable en ses éléments ;

- que l'agencement des éléments de cet alphabet est contraint par une syntaxe : un ensemble de règles de composition, auquel obéissent les processus physiques ;

- que chacune des classes de cet alphabet est une classe d'équivalence. On dote ainsi notre langage d'une sémantique.

C'est dès lors un langage algébrique reposant sur une structure d'espace vectoriel défini sur un dioïde commutatif. Un réseau de processus y est représenté par des systèmes d'équations. On dispose dès lors d'outils mathématiques pour le calcul et l'élaboration de preuves, de théorèmes.

Nous avons défini les opérations d'addition, de multiplication, de factorisation de processus. A l'aide de ces dernières, on spécifie des algorithmes de calcul de processus équivalent, de calcul de type de

processus, de validation syntaxique des réseaux, de décomposition/synthèse de processus.

Les modèles des niveaux de formalisation supérieurs sont conçus de telle sorte qu'ils répondent à des algèbres isomorphes à celle du modèle de représentation. La déclinaison des modèles, d'un niveau de formalisation à l'autre, s'opère en changeant uniquement les opérateurs d'addition et de multiplication, les algorithmes eux restent inchangés.

Par exemple, les différents systèmes d'équations écrits pour le modèle quantitatif sont "calqués" sur ceux du modèle de représentation. Ces systèmes d'équations sont par ailleurs associés aux graphes biparti équivalents. On crée ainsi, en guise de modèle quantitatif, des entités analogues à celles des modèles de représentation : des graphes biparti pondérés par les coefficients et dérivées partielles des équations différentielles issues de la physique et des fonctions d'état thermodynamiques. Moyennant l'utilisation de compositions convexes, de l'addition et de la multiplication classiques, leur traitement s'opère à l'aide d'algorithmes identiques aux algorithmes formels.

L'isomorphisme des opérateurs permet alors de produire systématiquement ces algorithmes à partir des expressions formelles du réseau de processus. De plus, l'utilisation de compositions convexes permet de s'affranchir en partie des problèmes de causalité et de redondance des équations. Les choix concernant ces deux aspects s'opèrent *a posteriori* en fixant les valeurs numériques des paramètres de ces compositions convexes.

On dispose donc, pour chaque niveau de formalisation, d'un seul et même langage à caractère algébrique pour tous les modèles : fonctionnel, structurel et comportemental de la matrice SAGACE. Tous les modèles d'un même type répondent, aux différents niveaux de formalisation, à des algèbres isomorphes. Ces différentes formalisations ont pour but d'objectiver les représentations et de systématiser les démarches d'analyse, de recueil des connaissances et de mise en équation de systèmes complexes.

L'aspect systématique de cette approche permet d'envisager l'implémentation d'un outil d'aide à la conception de ces modèles de représentation, intégrant les fonctionnalités :

- de validation syntaxique des réseaux,
- d'aide à la synthèse et/ou à la décomposition de processus,
- de vérification de la cohérence des points vue,
- de production des systèmes d'équations de tout ou partie des réseaux de processus.

La forme adoptée aussi bien pour le modèle de représentation que le modèle quantitatif fait que l'on pourra envisager une extension à des modèles qualitatifs tels que ceux répondant à l'algèbre des signes en $\{+, 0, -\}$, à une algèbre booléenne avec $\{0,1\}$, ou encore ceux répondant à l'algèbre $\min()$ et $\max()$ tels que certains modèles flous [Bouc-93]. L'isomorphisme des opérateurs d'addition et de multiplication pour ces algèbres avec ceux du modèle formel étant

vérifiée, il reste à spécifier, comme pour le modèle quantitatif, des entités analogues au modèle de représentation. Par exemple des graphes biparti étiquetés sur $\{+, 0, -\}$, $\{0,1\}$ ou sur des ensembles flous, qui seraient des abstractions de ceux du modèle quantitatif, et dont les matrices d'incidence sont traitées à l'aide des opérateurs d'addition et de multiplication adéquats.

Une autre perspective de ces travaux concerne la conception des systèmes d'exploitation des S.A.P et celle de leur système de surveillance et de supervision.

Les modèles de représentation spécifient des ensembles de contraintes à respecter, d'attentes à satisfaire et d'observations ou mesures disponibles pour les processeurs des différents points de vue. Ces informations extractibles de façon systématique des modèles de représentation sont des guides précieux pour la spécification du cahier des charges des systèmes de décision et d'information. Ce sont des signaux de commande des actionneurs, des contraintes de synchronisation et d'autres, que le système de contrôle commande devra élaborer. Ce sont des événements de changement de mode, de changement de configuration, de début et de fin d'exécution de tâches, de disponibilité ou d'allocation de ressources, que le système d'information devra élaborer, estimer et valider à partir des observations et mesures disponibles.

Concernant la surveillance et la supervision des systèmes, le couplage des modèles, suivant l'axe des niveaux de formalisation (c.f. chapitre 1, figure 1.15), suggère une approche locale par processus. Prenons par exemple l'approche structurelle pour la conception des systèmes de surveillance par génération de résidus développées au L.A.I.L [Cas-94]. A partir de l'ensemble des relations sur le système et du graphe de ces relations, on génère un ensemble d'indicateurs de panne : les résidus, pour l'ensemble du système. Il serait intéressant de générer ces résidus non plus pour l'ensemble du système mais individuellement pour chacun des processus des modèles de représentation ou pour un sous-ensemble de processus. En exploitant le couplage des modèles aux différents niveaux de formalisation, on dispose pour un processus ou un ensemble de processus d'un ensemble de relations quantitatives ainsi que du graphe de ces relations (c.f. chapitre 1 § IV.2.a.3 modèle fonctionnel, structurel, et comportemental, figure 1.8). En appliquant à cet ensemble de relations la méthode de génération des résidus, on disposerait d'un ensemble d'indicateurs de panne pour ce processus en particulier. On est dès lors capable d'incriminer localement et selon le point de vue, un organe, une fonction, une tâche, etc. On peut espérer ainsi générer une information pour la surveillance localisée et en termes de fonctions défaillantes, d'organes mis en cause, de tâches mal exécutées, etc.

Une troisième perspective concerne l'intégration des fonctionnalités prédictive et normative à la méthode SAGACE. En l'état c'est une méthode et un outil dont la fonction est essentiellement cognitive. Elle fournit une représentation des systèmes pour la communication entre acteurs et le recueil des connaissances. Comme le suggère l'annexe I.b, par le biais des règles normatives il est possible de procéder à une gestion dynamique des

points vues de la matrice SAGACE (cf. annexe I.b, Analyse croisée, fonctions normative, prédictive et gestion dynamique des représentation.), ceci en satisfaisant à l'ensemble du réseau de contraintes entre les représentations des différents points de vue qui définissent en quelque sorte un ensemble de trajectoires possibles pour chacun des points de vue compte tenu de la représentation en cours. Il est dès lors envisageable de procéder à des simulations et à la validation des représentation dès les premières phases de l'analyse et de la conception des systèmes.

**Modélisation de systèmes complexes :
intégration et formalisation de modèles.**

ANNEXES

ANNEXES I

REPRESENTATION D'UN S.A.P PAR DES PROCESSEURS DANS LA MATRICE SAGACE.....	239
A. VISION FONCTIONNELLE : FONCTION, PROGRAMME ET MODE D'UTILISATION.....	239
A.1. <i>Vision fonctionnelle diachronique, perspective d'intégrité et organisation des services en modes d'utilisation.....</i>	240
A.2. <i>Vision fonctionnelle synchronique, perspective d'adaptation et organisation des services en programmes.....</i>	244
A.3. <i>Vision fonctionnelle achronique, performances et organisation des services en énoncés fonctionnels.....</i>	246
B. VISION ORGANIQUE, RESSOURCES, DISPOSITIFS ET CONFIGURATIONS.....	249
B.1. <i>Vision organique diachronique, perspective d'intégrité et organisation des ressources en configurations.....</i>	249
B.2. <i>Vision organique synchrone, perspective d'adaptation et organisation logistique des ressources en dispositifs.....</i>	251
B.3. <i>vision organique synchronique, perspective de performances et organisation des ressources en réseaux organiques.....</i>	253
C. VISION OPERATIONNELLE : PILOTAGE, GESTION ET STRATEGIE.....	255
C.1. <i>Stratégie, gestion des scénarios et des coordinations.....</i>	256
C.2. <i>Gestion, programme, et organisation.....</i>	258
C.3. <i>Pilotage des ressources.....</i>	260
ANALYSE CROISEE, VERIFICATION DE LA COHERENCE DES MODELES ET VALIDATION.....	262
D. INTERACTIONS ET COUPLAGES ENTRE POINTS DE VUE.....	263
D.1. <i>Couplage des points de vue de la perspective diachronique.....</i>	263
D.2. <i>Couplage des points de vue de la perspective synchronique.....</i>	264
D.3. <i>Couplage des points de vue pilotage et organe.....</i>	265
D.4. <i>Interactions des points de vue de la vision opérationnelle.....</i>	265
D.5. <i>Interaction du point de vue stratégique et du point de vue fonctionnel.....</i>	266
E. ANALYSE CROISEE, REGLES NORMATIVES.....	267
E.1. <i>Croisement des points de vue structuraux.....</i>	268
E.2. <i>Croisement de la structure et du point de vue fonctionnel.....</i>	271
E.3. <i>Croisements des points de vue comportementaux.....</i>	273
E.3.1. <i>Croisement des points de vue de la perspective d'intégrité.....</i>	273
E.3.2. <i>Croisements des points de vue de la vision opérationnelle.....</i>	275
F. REGLES NORMATIVES, FONCTION NORMATIVE, FONCTION PREVISIONNELLE, ET GESTION DYNAMIQUE DES REPRESENTATIONS.....	276
G. NIVEAU DE FORMALISATION.....	276
CONCLUSION.....	278

ANNEXE I.A

Représentation d'un S.A.P par des processeurs dans la matrice SAGACE.

Afin de bien cerner les points de vue de la matrice SAGACE et leur articulation, on propose ici une étude détaillée de chacun d'eux. On basera notre analyse sur des développements tels que ceux menés sur l'analyse fonctionnelle des actionneurs intelligents [Sta 94-d]. On illustrera comment et dans quels points de vue les notions de *service*, de *mode d'utilisation*, de *dispositif*, de *fonction*, de *tâche*, et d'autres couramment manipulées en automatique sont traduites et appréhendées dans ces différents points de vue.

A. Vision fonctionnelle : fonction, programme et mode d'utilisation.

Les trois premiers points de vue que nous abordons ici sont ceux de la *vision fonctionnelle*. Il s'agit de donner une représentation de ce que fait le système. Cette représentation est distribuée sur les trois points de vue de cette vision, correspondant chacun à une *perspective*.

D'un point de vue externe, celui des opérateurs, des clients et du système d'information, le système fournit un certain nombre de services [Sta 94-d][Fel-94.b]. On retient comme définition d'un service celle donnée par [Sta-94a] à savoir un traitement opéré en vue d'obtenir un résultat et dont l'exécution ne peut être scindée. Dans le cadre de cette étude, il s'agit de services de conduite du processus et de services de production de biens.

Soit $S_e = \{s_{e_1}, s_{e_2}, s_{e_3}, \dots, s_{e_n}\}$ l'ensemble des services dont est doté le système. On définit alors une organisation de ces services en *modes d'utilisation* comme un sous-ensemble $m_i \subseteq S_e$ de l'ensemble des services. La figure A.1 schématise une telle organisation de ces services. Dans un mode d'utilisation seul un sous ensemble de l'ensemble de ces services est alors accessible. Un mode est en fait caractérisé par ce que l'on peut demander au système durant une période donnée.

Une autre organisation possible de ces services est celle en *tâches* et *programmes*. Dans un mode donné, l'exécution des services disponibles est organisée dans le temps pour réaliser une *tâche*. M. Staroswiecki dans [Sta 94-d] décrit plusieurs modalités d'exécution dans le temps de ces services : répétitive, périodique, permanente, conditionnelle... Dans la période durant laquelle un mode est en cours l'ensemble des actions que peut mener le système est contraint par des impératifs de synchronisation et d'ordonnancement.

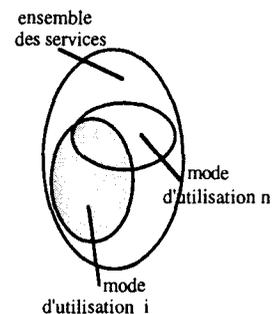
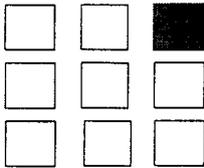


Figure A.1 : organisation des services en modes d'utilisation.

Enfin, une troisième modalité d'organisation peut être envisagée, l'organisation fonctionnelle. Dans un mode donné, l'exécution des tâches aboutit à la réalisation des *fonctions* du système.

On remarquera que le système, à un instant donné, est dans un mode et un seul, qu'il exécute une ou plusieurs tâches, et qu'il remplit la totalité de ses fonctions. On propose alors de représenter chacune de ces modalités d'organisation dans les trois perspectives : diachronique, synchronique et achronique de la *vision fonctionnelle*.



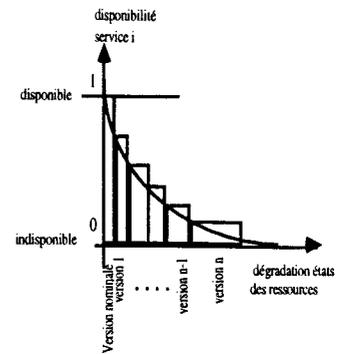
A.1. Vision fonctionnelle diachronique, perspective d'intégrité et organisation des services en modes d'utilisation.

Dans un premier temps et pour faciliter l'introduction, considérons que chacun des services pourvus par le système ne puisse être que dans deux états possibles : *disponible*, et *indisponible*. Ainsi, à un instant donné, seul un sous-ensemble de l'ensemble des services est disponible. L'ensemble des services disponibles est en fait ce que le système est capable de faire durant la période considérée. On convient que l'ensemble des services disponibles définit *un mode d'utilisation*.

Un mode d'utilisation reflète alors un des aspects de l'état de la structure du système. La description des passages d'un mode d'utilisation à l'autre : les transitions possibles ou prévisibles, et leurs modalités de transfert est une des représentations de l'évolution du système. Le système ne peut être à un instant donné que dans un seul mode. De plus, c'est une représentation, à un instant donné, de ce que fait le système. Une telle description est donc au croisement d'une *vision fonctionnelle diachronique* et de la perspective d'*intégrité* elle correspond donc au point de vue *mode* de la matrice SAGACE.

Généralisons maintenant l'état d'un service, et considérons qu'entre états *disponible* et *indisponible* un système puissent présenter un ensemble d'états intermédiaires. Plusieurs raisons peuvent être évoquées quant à ces "degrés de disponibilité". Tout d'abord, un service peut être disponible ou non, dans un mode donné, si son accès (par les opérateurs, ou le système) a été volontairement interdit par les concepteurs et programmé en conséquence, ceci pour des raisons de sécurité et pour préserver l'intégrité du système. Mais la disponibilité des services dépend également de l'état des ressources mises en oeuvre par ce service. Ainsi la manière (plus ou moins optimale) dont un service sera rendu dépendra de l'état plus ou moins dégradé de ces ressources. Pour tenir compte de cet état, le concepteur aura prévu plusieurs versions d'un même service adaptées à l'état des ressources qu'il nécessite [Sta-94d]. Si aucune des versions prévues ne permet de rendre ce service, compte tenu de l'état des ressources, il est alors indisponible. Un service est alors complètement disponible s'il est dans sa version nominale, sinon il est en version dégradée.

On parlera alors de *mode d'utilisation* comme un ensemble de services disponibles souhaités par les opérateurs ou le système. Si dans l'ensemble des services disponibles souhaités un au moins n'est pas dans sa version nominale, on définit un *mode de marche*. Contrairement à un mode d'utilisation un mode de marche est un mode subi. Dans le cas où tous les services souhaités sont en version nominale le mode de marche est identique au mode d'utilisation. La notion de mode de marche englobe donc celle de mode d'utilisation qui n'est qu'un cas particulier. Par la suite, la notion de *mode* fera donc référence à un mode de marche dans tous les cas et à un mode d'utilisation dans le cas particulier où tous les services sont en version nominale.



Lorsqu'on est dans un *mode* donné, l'indisponibilité de certains services nécessite un changement de mode. On parle alors de *services indispensables* dans ce mode. Par exemple, l'indisponibilité d'un service de régulation ou de pilotage automatique nécessite le passage en mode manuel. C'est un service indispensable au mode automatique.

Dans ce point de vue de la matrice SAGACE, il s'agira de représenter les différents modes dans l'un desquels le système se trouve à un instant donné et les modalités de passage d'un mode à l'autre.

Un processeur est donc un mode (figure A.2). Le processus est alors une production d'un ensemble de services disponibles, chacun dans une version donnée, ceci à partir des services disponibles dans le graphe des modes.

Le profil de mission est décrit par les contraintes et les attentes. Parmi les contraintes envisageables sur de tels processeurs, on trouve notamment : les *conditions* devant impérativement être satisfaites pour l'entrée dans ce mode, et les *requêtes* explicites de changement de mode adressées à ces processeurs. Ces dernières, les requêtes de changement de mode, sont positionnées par les seuls agents capables de décisions : les opérateurs qui sont des agents externes, et le système de décision qui est un agent interne. Ces agents extérieurs au point de vue mode sont représentés par des processeurs dégénérés (plots). Sont portés en attentes les *événements* attendus et susceptibles de provoquer ou de nécessiter un changement de mode d'une part, et des *informations de représentation* d'autre part. Ces informations sont des grandeurs observables et généralement mesurables, susceptibles d'être interprétées par les opérateurs et/ou traitées par le système d'information, seuls agents capables de s'informer sur le système. C'est à partir de ces informations de représentation que les opérateurs pourront se renseigner sur la façon dont sont satisfaites leurs attentes. C'est également à partir de ces grandeurs mesurables (quand elles le sont) que le système d'information élabore et valide une estimation : du mode en cours, de la disponibilité des services... Ces informations sont redirigées ensuite vers le système lui-même et/ou les opérateurs.

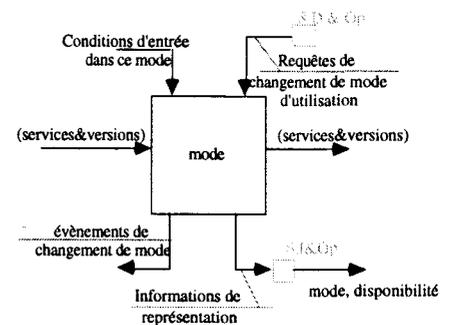


Figure A.2: représentation d'un mode comme un processeur consommant des services dans une version donnée, et produisant un ensemble de services disponibles dans une version donnée. Ce processeur est soumis à des contraintes telles que les conditions d'entrée dans ce mode et des requêtes. En réponse à ces contraintes sont positionnées en attente des informations de représentation de la disponibilité des services, du mode courant, des changements de modes.

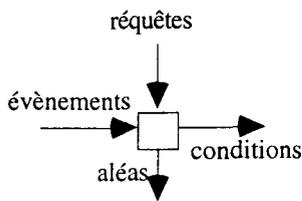


figure A.3 : représentation d'une transition comme un processeur dégénéré, procédant par son action à la satisfaction des conditions d'entrée dans un mode donné en fonction des événements et sous certaines contraintes. D'éventuels aléas sont possibles.

Les passages d'un mode à l'autre sont contrôlés par des *transitions*. Une transition est un processeur dégénéré, interne à ce point de vue (figure A.3). Cette dernière, compte tenu de certains *événements* susceptibles de provoquer ou de nécessiter un changement de mode, procède par son action à la satisfaction des *conditions* d'entrée dans le mode suivant. Son action est sous le contrôle de *requêtes* de transition. Le franchissement d'une transition, sous le contrôle des requêtes, est effectif si les événements attendus se produisent et si les conditions de transition sont satisfaites. Si aucune des conditions n'a pu être satisfaite par l'action de cette transition alors c'est un *aléa* et le franchissement de la transition se fait dans ce sens. Une transition peut être considérée comme un mode particulier ne possédant qu'un ou que des services de changement de mode. Une transition de ce point de vue se renseigne soit directement sur les modes par les événements soit sur d'autres aspects du système par l'intermédiaire du système d'information qui élabore, estime, et valide les informations dont elle peut avoir besoin.

La représentation de ces changements de mode prend une forme telle que celle de la figure A.4. Les différents modes peuvent être par exemple un mode de démarrage(mode 1), un mode de production (mode 2), un mode d'arrêt (mode 3).

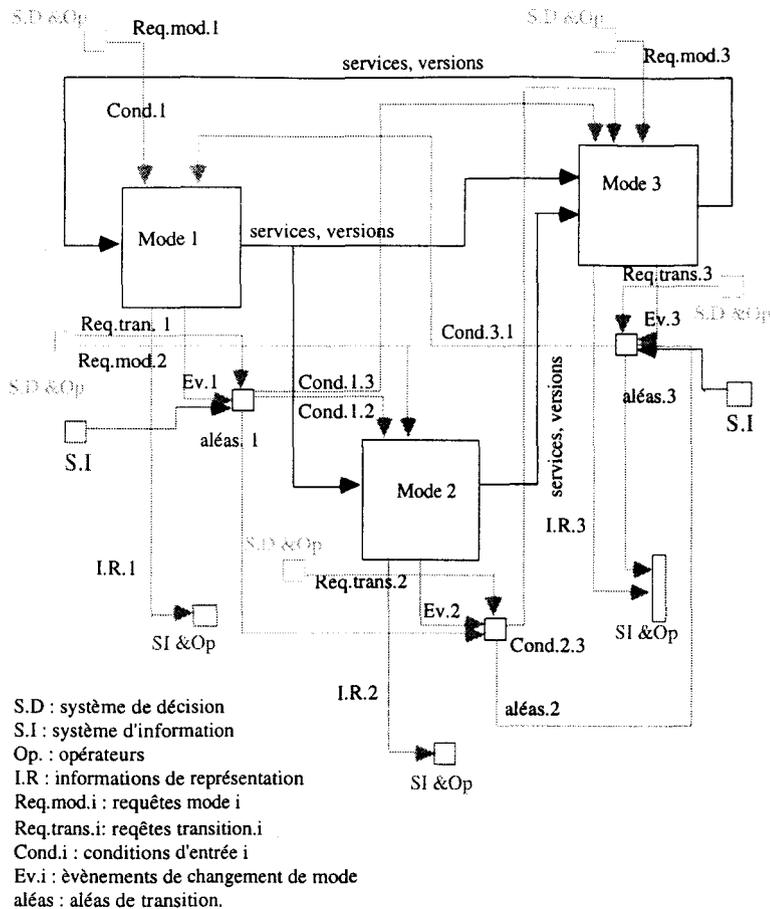


Figure A.4 : un exemple de réseau de modes, décrivant les scénarios possibles et les modalités de passage d'un mode à l'autre ainsi que les contraintes.

Cette représentation se fait à plusieurs niveaux d'abstraction. Ainsi, de façon récursive, chaque mode se décompose en un réseau de sous modes dans lesquels le système est susceptible de se trouver, sans pour autant sortir du mode global. D'un mode d'utilisation souhaité peut être obtenu au cours de l'évolution du système l'un de ses différents modes de marches (services en version non nominale) sans pour autant quitter ce mode d'utilisation (perte d'un service non indispensable pour ce mode). Le même raisonnement peut être tenu pour un mode de marche pour lequel on peut envisager plusieurs sous modes de marche. Le cas limite d'un mode élémentaire est celui d'un singleton, un seul service dans une version donnée. Une transition, étant également un processeur (dégénéré), peut être récursivement décomposée en sous transitions à différents niveaux d'abstraction. Elle peut également être sujet à une analyse par la méthode SAGACE si sa complexité le nécessite, elle constitue alors le projet d'étude.

Un chemin dans le réseau de la figure A.4 est, dans la terminologie SAGACE, appelé un *scénario*. Si un chemin passe par un aléa il y a *bifurcation* et changement de scénario.

A ce niveau, il ne s'agit que de représenter les modes, leurs contraintes et les attentes qu'ils doivent satisfaire, ainsi que les événements, conditions, requêtes, et aléas

pris en compte pour le franchissement des transitions. On exprime uniquement le fait qu'une transition est franchie suivant une fonction de ces événements, requêtes, attentes, et aléas. La formulation explicite des fonctions de transition, de prise en compte des requêtes, de positionnement des événements par les modes, de détermination des services et de leurs versions relève de niveaux de formalisation plus élevée (cf. chap. 1 § Positionnement relatifs des deux approches et complémentarité, figure 1.15).

Un exemple de ce que pourrait être une fonction pour le franchissement de la transition 2 entre les modes 1 et 2 à expliciter à un niveau de formalisation supérieure est donné par l'algorithme suivant :

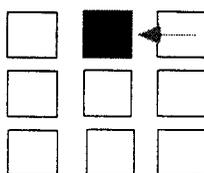
```

transition 2
  tant que requête_transition_1 différent de 1 ou 2
    tempo()
  Fin_de_tant_que
  Si
    requête_transition_1=2;
  alors
    satisfaire(événement 1, condition_1_2);
  Sinon
    satisfaire(événement 1, condition_1_3)
  fin_de_si

  Si
    condition_satisfaite = faux
  alors
    retourner aléa_1;
  Sinon
    retourner transition_franchie

  Fin_de_si
Fin_transition_2
    
```

Les requêtes, contrôlant les transitions et les modes sont positionnées par les agents de décision internes (système de décision) et externes au système (opérateurs), contrôlant ainsi les scénarios possibles (différents scénarios de démarrage, de production, et d'arrêt). Chaque niveau d'abstraction comportant plus d'un mode doit avoir au moins une transition, sinon il devient impossible de changer de mode. Chaque processeur de ce point de vue, doit fournir au moins un service dans au moins une version.



A.2. Vision fonctionnelle synchronique, perspective d'adaptation et organisation des services en programmes.

Dans un mode donné, l'exécution des services disponibles est organisée dans le temps. Cette organisation dans le temps définit des tâches dont l'exécution se traduit par une activité du système. Cette description est une vision de ce que fait le système, elle présente des caractéristiques périodiques, répétitives, programmées, synchrones. L'exécution de ces tâches doit être adaptée à la réalisation des fonctions du système. Cette représentation est donc à l'intersection de la vision fonctionnelle synchronique et de la perspective d'adaptation. Elle est à placer dans le point de vue programme de la matrice SAGACE.

Un processeur de ce point de vue est alors une tâche (figure A.5). Le processus est une consommation de matières premières, d'énergie et d'informations et une production d'entités d'une des ces trois natures.

Le profil de la mission est décrit par les contraintes et les attentes. Une tâche est sous le contrôle de requêtes en tâches et de conditions d'activation. Le positionnement des requêtes en tâches relève de processus de décision. Seuls les opérateurs et le système de décision en sont capables. Parmi les attentes, on peut distinguer, entre autres, des informations de représentation, observables par les opérateurs et/ou mesurables par le système d'information, susceptibles de permettre à ces derniers une inférence quant à l'activité du système (tâche, changement de tâche, aléas....) et de l'évaluer relativement à la perspective d'adaptation à la réalisation des fonctions du système.

Le passage d'une tâche à l'autre est décrit par des transitions. Une transition est un processeur dégénéré, dont le fonctionnement et la description est analogue à celles du point de vue *mode*. A l'occurrence d'événements de changement de tâche et sous le contrôle de requêtes de transition, ce processeur procède à la satisfaction des conditions d'activation de la ou des tâches suivantes. Si une ou plusieurs conditions d'activation ne peuvent être satisfaites, il y a aléas. Une transition peut être considérée comme une tâche particulière : celle d'un changement de tâche. Elle se renseigne éventuellement sur d'autres aspects du système par l'intermédiaire du système d'information qui élabore, estime et valide les informations dont elle a besoin.

Un processeur de ce point de vue (tâches et transitions) se décompose récursivement en réseaux de processeurs à plusieurs niveaux d'abstraction. Cette décomposition hiérarchique permet de représenter les sous tâches. Il en est de même des transitions.

A un niveau d'abstraction donné, un chemin dans le réseau de processeurs de ce point de vue définit un *programme*. Ainsi une tâche, à un niveau d'abstraction donné, se décompose en un programme (réseau de tâches). Les requêtes contrôlant les tâches et les transitions, sont positionnées par les agents de décision internes (système de décision) et externes (opérateurs) du système, contrôlant ainsi les programmes.

La description de ces tâches et programmes prend une forme telle que celle donnée par la figure A.6. Il peut s'agir, par exemple, dans le mode production (mode 2, figure A.4), d'une tâche de ponçage (tâche 1), d'une tâche de chauffage (tâche 2) et d'une tâche de perçage (tâche 3), organisées en programmes de production de pièces.

Telles qu'elles sont organisées sur la figure A.6 une exécution de la tâche 1 peut être suivie par l'exécution d'une ou des deux tâches 2 et 3. Tout dépendra du contrôle des programmes et des aléas possibles. Par exemple les programmes : "...ponçage, perçage, ponçage, chauffage...", ou, "...ponçage, perçage, chauffage..." sont deux programmes de production envisageables.

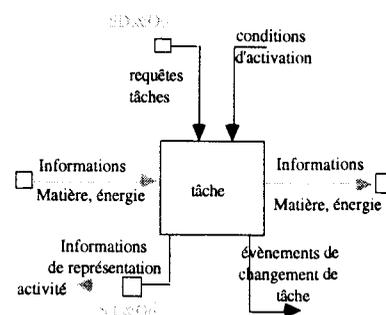


Figure A.5 : une tâche est un processeur traitant matière énergie et information, soumise à des conditions d'activation et des requêtes. En réponse à ces contraintes des informations de représentation de l'activité du système : tâches, changement de tâche, programme en cours, aléas, sont positionnées.

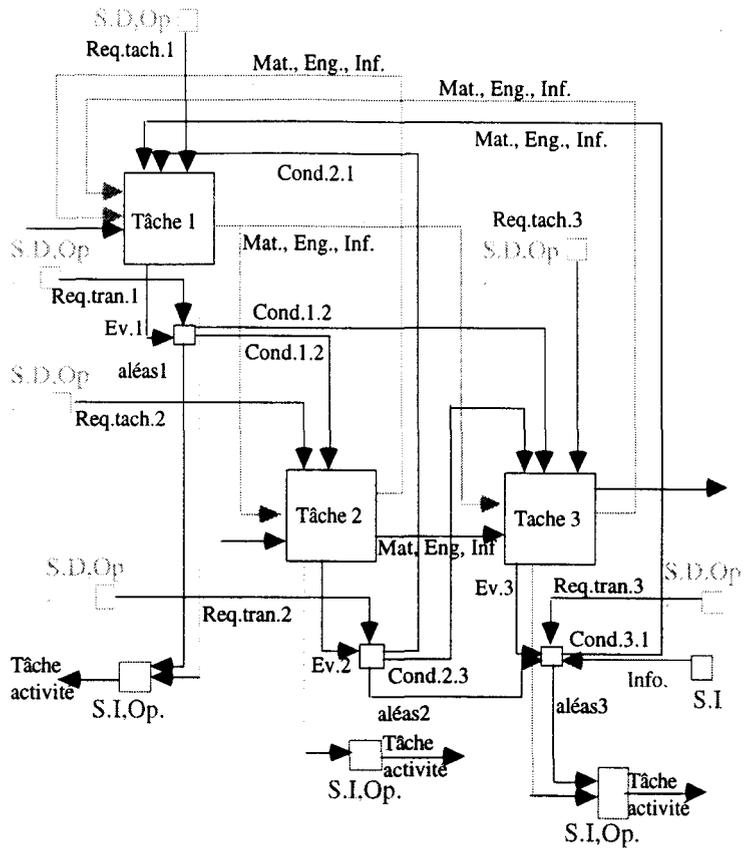
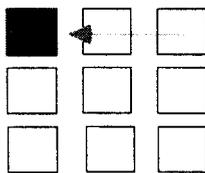


Figure A.6 : un exemple de réseau de tâches décrivant les programmes possibles ainsi que les modalités de passage d'une tâche à l'autre, les contraintes et attentes de ces processeurs.

Il s'agit, là encore, de représenter l'enchaînement et la synchronisation des tâches, les informations intervenant dans leur contrôle (requêtes en tâches et de transition, conditions d'activation) ainsi que les informations de représentation de l'activité du système (tâches, changements de tâches, aléas...). Il ne s'agit en aucun cas d'explicitier les fonctions, algorithmes, et équations des événements, requêtes et conditions qui relèvent de niveaux de formalisation supérieure.



A.3. Vision fonctionnelle achronique, performances et organisation des services en énoncés fonctionnels.

On décrit ici la dernière modalité d'organisation des services, celle en énoncés fonctionnels. Dans un mode donné, l'exécution d'un ou de plusieurs programmes se traduit par une *activité*. Cette activité sert à la réalisation des fonctions du système. La réalisation de ces fonctions est indépendante du temps. Le système se doit de remplir sa mission et s'efforce d'élaborer des processus qui par rapport à la mission définissent des fonctions. La description de cette organisation, indépendante du temps, de ce que fait le système est à placer à l'intersection de la *vision fonctionnelle achronique* et de la *perspective de performances*.

Un processeur de ce point de vue est alors un processeur fonctionnel (cf. § *Représentation fonctionnelle par un langage graphique.*).

La forme de ces représentations fonctionnelles est telle que celle de l'exemple de la figure A.7. Il peut s'agir de fonctions de production de trois types de pièces 1, 2, et 3.

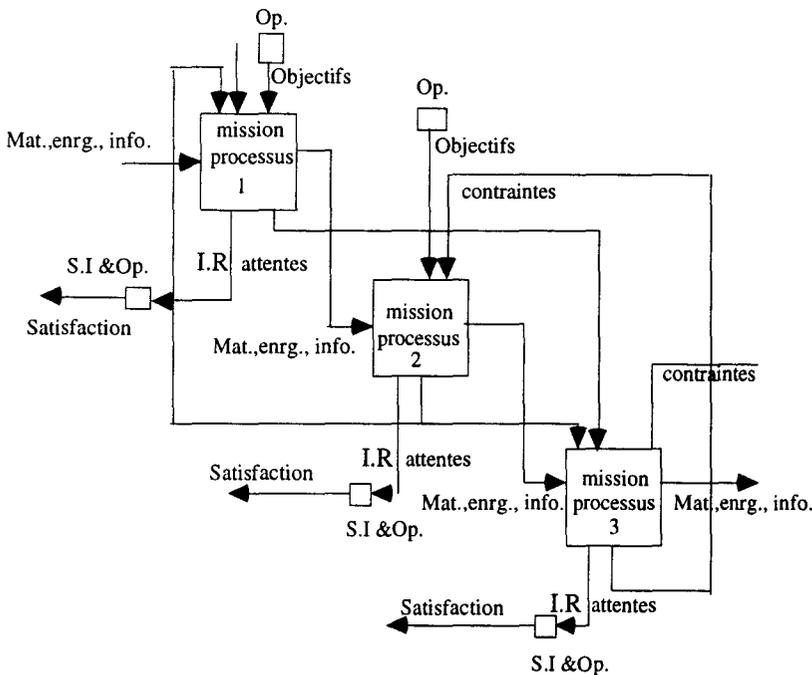


Figure A.7 : un exemple de réseau fonctionnel, décrivant les différentes fonctions du système et l'interdépendance des profils de mission. Ces processeurs sont soumis à des objectifs et leur réponses aux attentes permettent de mesurer la satisfaction des objectifs.

les processus sont des plus values, des transformations de services en d'autres, services et plus values qui peuvent prendre la forme d'énergies de matières ou d'informations.

Les interactions définissent le profil de mission des processus. Contraintes et attentes traduisent des objectifs à atteindre et des performances attendues concernant la réalisation de ces fonctions. Les objectifs contraignant les processeurs de ce point de vue sont positionnés par des agents capables de décisions stratégiques, et sont des traductions du besoin. La détermination et l'évolution des objectifs (et donc du besoin) au cours de l'évolution du système constituent des décisions à caractère stratégique.

N.B. : les mécanismes de cette détermination des objectif sont donc à représenter dans le point de vue stratégie de la matrice SAGACE(cf. §. Stratégie, gestion des scénarios et des coordinations, plus loin dans ce chapitre). Mais, dans le cadre de cette étude, s'agissant d'un système cybernétique, les seuls agents capables de telles décisions (fixer les objectifs) sont les opérateurs, agents externes au système projeté dans la matrice des points de vue. En conséquence, de tels mécanismes de décision ne seront pas représentés. (Il aurait fallu pour cela intégrer les opérateurs dans le système, et qu'il soit possible d'appréhender ces mécanismes de prise de décisions par ces derniers). On serait alors dans le cas d'un système autofinalisé.

Les attentes quant à elles prennent la forme d'informations de représentation, permettant aux agents capables de s'informer sur le système, à savoir les opérateurs et le système d'information, d'évaluer les résultats obtenus par ces processeurs fonctionnels et d'évaluer une *satisfaction* des attentes. Ainsi, un opérateur à partir de ses observations ainsi que le système d'information à partir de ses mesures sur le système évaluent les performances de ces processus en termes de *fonctions*, *non-fonctions*, et *dysfonctions* avec éventuellement un degré (fonction réalisée à 75% ...).

Une organisation telle que celle de la figure A.7 illustre, outre les transactions entre processeurs fonctionnels, l'interdépendance des profils de mission. Ainsi, la manière dont le processus 1 va satisfaire les attentes qui lui sont attribuées, va contraindre la réalisation de la mission 3 par le processus 3. En d'autres termes, la réalisation de la fonction 3 (resp. dysfonction) dépend de la réalisation de la fonction 1 (resp. dysfonction). Ainsi la qualité de la production des pièces de type 3 dépendra de celle des pièces de type 1, parce que les pièces 3 sont obtenues à partir de pièces de type 1, par exemple.

Il ne s'agit pas d'explicitier les fonctions liant contraintes, attentes et processus mais seulement de les représenter. La formulation explicite de ces fonctions relève là encore de niveaux de formalisation supérieure.

On remarque que cette description ne fait aucunement intervenir le temps (perspective achronique), ces interactions et ces processus sont permanents ne serait-ce que parce que le besoin (exprimé dans ce point de vue) est permanent.

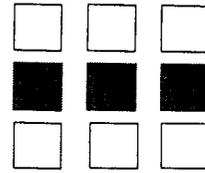
Avec ce dernier point de vue s'achève la représentation de ce que fait le système (vision fonctionnelle). Une méthode d'analyse fonctionnelle, de type S.A.D.T, démunie de ces points de vue peut conduire à une tentative de représentation en un seul et même point de vue de ces trois aspects. La méthode S.A.D.T, par exemple, ne retient que la vision fonctionnelle et ignore les trois perspectives et échelles de temps proposées. Une telle analyse peut alors conduire à un discours tel que le suivant :

“...les fonctions du système sont de démarrer, de produire des pièces de type 1, 2 et 3, de percer, poncer, et chauffer ...”

Bien que le système fasse chacune de ces actions, il faut remarquer que le système ne peut démarrer et produire en même temps, soit il démarre, soit il produit. Qu'il est susceptible de percer, percer, et chauffer simultanément, alternativement, de façon répétitive ou autre, mais pas en permanence. Et enfin, qu'il produit des pièces de type 1, 2 et 3 et que ce sont là ses fonctions indépendantes de toute échelle de temps. Démarrer et produire ne sont pas des fonctions mais correspondent à des modes, un et un seul mode, à un instant donné, est en cours. Percer, poncer, et chauffer, sont des tâches organisées dans le temps en programmes. Ces notions sont liées mais correspondent à des aspects distincts de ce que fait le système et notamment à des perspectives et des échelles de temps distinctes.

B. Vision organique, ressources, dispositifs et configurations.

Les représentations de la vision fonctionnelle ont été faites de manière complètement indépendante des moyens et des ressources. Chacun des services évoqués dans les paragraphes précédents, nécessite un certain nombre de ressources logicielles ou matérielles, sièges des processus mis en oeuvre. On peut, de façon analogue aux services, envisager trois modalités d'organisation de ces supports.



A un moment donné chaque ressource se trouve dans un état compris entre *disponibilité* et *indisponibilité*. L'ensemble des ressources disponibles dans un état donné définit autant de *configurations* des ressources du système.

Dans une configuration donnée, un sous-ensemble de l'ensemble des ressources disponibles, dans un état donné, est alloué ou non à une ou plusieurs tâches, formant un *dispositif*. On peut donc envisager l'organisation dans le temps, l'allocation ou la sollicitation dans le temps des ressources. L'allocation des ressources définit une *organisation logistique* des ressources ou *dispositif*.

Enfin, dans une configuration donnée et indépendamment du temps, l'ensemble des ressources forme un réseau d'*organes* connectés. On parle d'une organisation en *réseaux organiques*. Cette appellation permet de distinguer celle-ci de la *structure* du système. Trop souvent cette dernière est réduite à ces seuls réseaux d'organes.

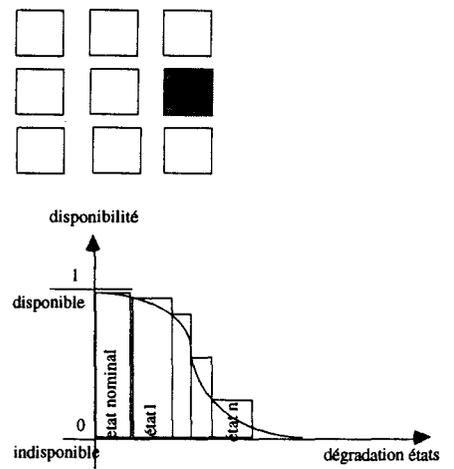
On propose alors d'illustrer comment ces différentes modalités d'organisation des ressources peuvent se représenter et dans quel point de vue de la matrice SAGACE.

B.1. Vision organique diachronique, perspective d'intégrité et organisation des ressources en configurations.

De façon analogue à un service, une ressource est dans un état compris entre état *disponible* et état *indisponible*. Les raisons de la disponibilité et/ou de l'indisponibilité d'une ressource ont deux origines. La première est une volonté du concepteur, qui interdit l'utilisation d'une ressource, pour une période de temps donnée, parce qu'elle est inutile, pour des raisons de sécurité (ressource en maintenance...) et dans un souci de préserver l'intégrité du système, ou pour d'autres raisons. La seconde est due à la dégradation naturelle ou accidentelle de l'état des ressources (usure, vieillissement, défaillance, panne,...).

La vision est organique, le système est dans une et une seule configuration à la fois l'échelle de temps est diachronique, et la perspective est celle de l'intégrité du système. Elle est donc à placer dans le point de vue configuration de la matrice SAGACE. Il s'agit alors de décrire l'ensemble des ressources disponibles, dans leur état, ainsi que les modalités de passage d'un ensemble à l'autre.

La forme de ces représentations est alors du type de celle de la figure A.8. Il peut s'agir par exemple de configurations telles que : "ressources principales actives" (configuration 1), "alimentation auxiliaire en marche" (configuration 2), et "ressources principales à 50%, ressources auxiliaires à 50%" (configuration 3). Ainsi dans la



première configuration, l'on est en configuration nominale ou dans une de ses sous configurations, les ressources principales présentent un état satisfaisant pour rester dans cette configuration. Dans la seconde, est prévu un remplacement de l'alimentation principale en énergie par une alimentation de secours en cas de panne de la première. Enfin dans la troisième, il est prévu "d'épauler" certaines ressources défaillantes, ne pouvant fonctionner à 100 % de leurs capacités, par des ressources auxiliaires (compensation de la défaillance de la pompe principale par une seconde en parallèle....).

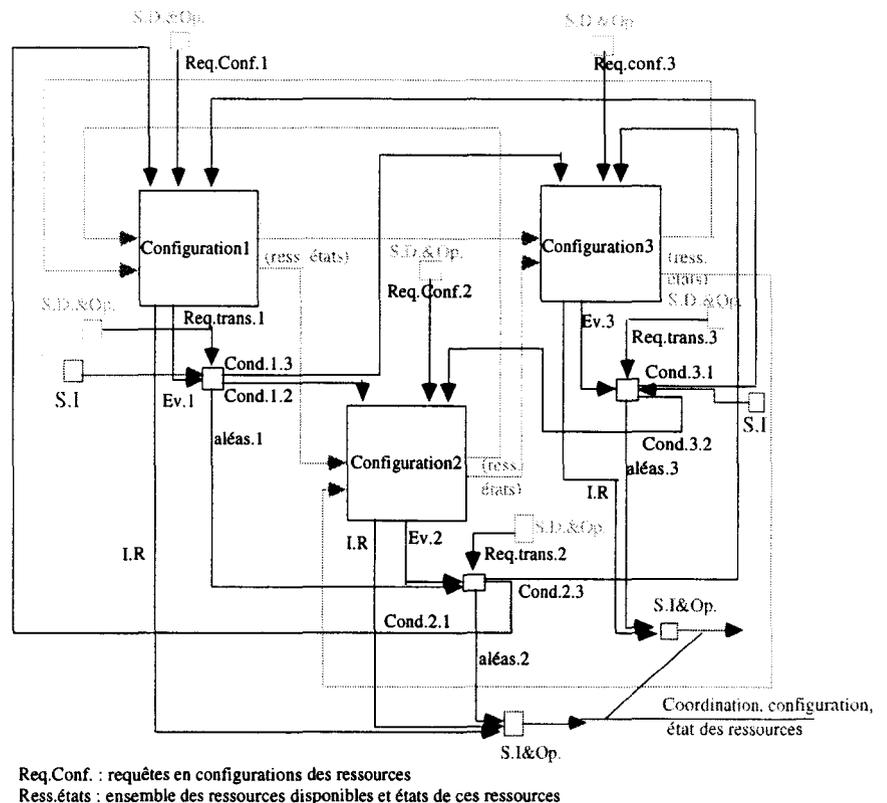


Figure A.8 : une représentation d'un réseau de configurations. Cette représentation de la vision organique est l'analogue du point de vue mode de la vision fonctionnelle.

Si toutes les ressources sont dans leur état nominal alors la configuration est nominale. Si une ou plusieurs ressources sont dans un état autre que leur état nominal (dégradé voire indisponible) alors la configuration est une sous configuration de la configuration nominale. Si une ressource indispensable à cette configuration est indisponible alors il y a nécessité de changement de configuration.

Seule l'indisponibilité de certaines ressources nécessite un changement de configuration. On parle alors de *ressource indispensable* à cette configuration.

Dans ce point de vue un processeur est une *configuration* des ressources. Les processus représentés sont alors ceux des changements de l'ensemble des ressources disponibles et de leurs états. Le profil de mission est défini en contrainte par : des conditions d'entrée dans la configuration et des requêtes explicites de configurations ; en attente par des informations de représentation de

la configuration, des états, et des changements de configuration en cours.

Les modalités de passage d'une configuration à l'autre sont décrites par des transitions dont le fonctionnement est similaire à celui des transitions déjà rencontrées dans les points de vues précédents. Elles sont contraintes par des *requêtes de transition* et sont susceptibles de présenter des *aléas*. Elles reçoivent en entrée les *événements* susceptibles de provoquer la sortie d'une configuration et satisfont, par leur action, aux *conditions* d'entrée dans une configuration destination. Une transition peut être considérée comme une tâche particulière de changement de configuration. Elle se renseigne éventuellement sur le système par l'intermédiaire du système d'information qui élabore, estime, et valide les informations qu'elle nécessite.

Chaque processeur de ce point de vue (configurations et transitions) est décomposable récursivement en réseaux de processeurs. Ces réseaux représentent alors les sous configurations d'une configuration globale et les sous transitions. Le cas limite d'une configuration élémentaire est celui d'un singleton, d'une seule ressource.

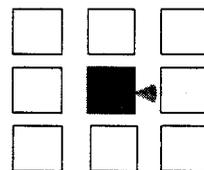
Les requêtes de ce point de vue sont positionnées par les seuls agents capables de décisions : les opérateurs et le système de décision. La formulation explicite des fonctions de prise en compte des contraintes, requêtes, et événements relève de niveaux de formalisation plus élevée.

Un chemin dans ces réseaux est une *coordination* des configurations. Le passage par un aléa est révélateur d'un changement de coordination. Le contrôle de la coordination des configurations est du ressort des agents de décision par l'intermédiaire des requêtes de transition et de configuration.

B.2. Vision organique synchrone, perspective d'adaptation et organisation logistique des ressources en dispositifs.

Dans une configuration donnée, à un instant donné, un sous-ensemble de l'ensemble des ressources disponibles peut être sollicité et alloué à une ou plusieurs tâches du point de vue programme. La description de l'allocation des ressources dans le temps est une description analogue au point de vue programme pour les services. Selon l'organisation logistique de ces ressources, le système disposera, à un instant donné, de tels ou tels *dispositifs*. Par exemple, le système organise ses ressources pour élaborer un dispositif de ponçage, un dispositif de perçage et un dispositif de chauffage qu'il affectera aux tâches correspondantes. Cette élaboration de dispositif, ces allocations se font de manière synchrone. La vision est donc *organique* l'échelle de temps est *synchronique* et la perspective est l'*adaptation* de la structure du système. Cette description de l'allocation des ressources relève donc du point de vue *organisation* de la matrice SAGACE.

Dans ce point de vue, chaque processeur est un *dispositif*. L'allocation de ces ressources se traduit par un processus dont ces



dernières sont le siège. Les contraintes sur ces processeurs sont des requêtes de dispositifs, et des conditions d'allocation. Aux attentes des opérateurs et du système d'information, ces processeurs répondent par des informations de représentation, permettant aux agents capables de s'informer de se construire une représentation de l'organisation du système, des allocations effectives de ressources, et des changements de dispositifs.

Les modalités de navigation dans ces réseaux sont contrôlées par les transitions de manière analogue aux transitions déjà rencontrées dans les autres points de vue. Leur franchissement est une fonction des événements susceptibles de provoquer des changements de dispositifs et des requêtes de transition. Leur direction est une fonction des conditions d'allocation qu'elles satisfont par leur action. Si aucune des conditions n'est remplie, le franchissement se fait dans le sens des aléas. Une transition peut être considérée comme une tâche particulière de changement de dispositif analogue aux tâches de changement d'activités. Elle se renseigne éventuellement sur le système par l'intermédiaire du système d'information qui élabore, estime, et valide les informations qu'elle nécessite.

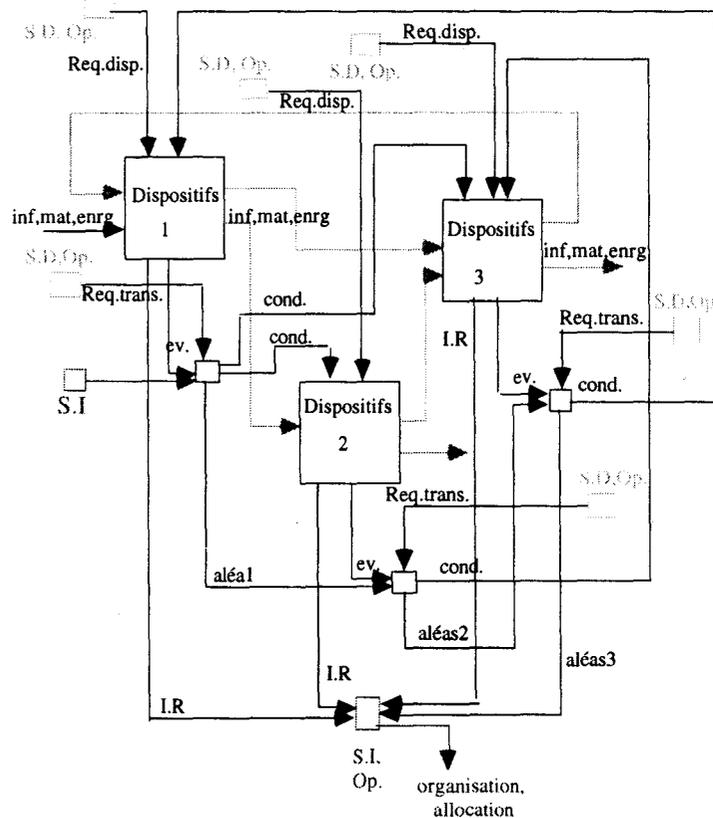


Figure A.9 : un exemple de représentation de réseau de dispositifs, on décrit alors l'organisation synchrone des ressources en dispositifs.

Un exemple de représentation de l'organisation dans le temps des ressources est donné par la figure A.9.

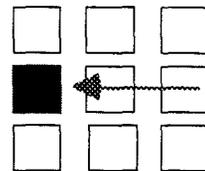
La représentation des processeurs de ce point de vue se fait à plusieurs niveaux d'abstraction et de façon récursive. On représente ainsi des "sous dispositifs " et des sous transitions. A un niveau d'abstraction donné, un chemin dans ces réseaux définit alors une *organisation logistique* des ressources. Le cas limite d'un dispositif élémentaire est celui de l'allocation d'une seule ressource.

Le positionnement des requêtes de transition est du ressort des opérateurs et du système de décision, contrôlant ainsi l'*organisation* de ces ressources. Ainsi le système peut élaborer un même dispositif par des organisations différentes.

La formulation explicite, par des algorithmes, des équations qualitatives, quantitatives, des fonctions de prise en compte des contraintes, événements et attentes par les dispositifs et par les transitions relève de niveaux de formalisation plus élevée.

B.3. vision organique synchronique, perspective de performances et organisation des ressources en réseaux organiques.

On aborde ici l'organisation des ressources en *réseaux organiques*, dans une configuration donnée. Ces ressources peuvent participer à l'élaboration d'un ou de plusieurs dispositifs.



Dans ce point de vue organique, les processeurs sont des ressources. Les processus sont des processus physiques et/ou informatiques transformant matière, énergie, et information. Les interactions décrites dans ce point de vue sont permanentes et donc par nature synchrones.

En contrainte, on trouve ici le contrôle du *pilotage* des ressources (la manière dont elles sont commandées) positionné par le système de décision (point de fonctionnement, consignes) et par les opérateurs (consignes manuelles) ainsi que les signaux de commande (commandes actionneurs). Les autres contraintes sur ces processeurs organiques sont généralement les paramètres qui interviennent ou qui doivent être pris en compte dans le contrôle et la commande de ces ressources. Elles sont de types technologiques (capacité d'un réservoir, section d'une canalisation, temps de réponse,...), ou des paramètres de réglages. Les attentes sont des informations de représentation des réglages effectifs : des informations permettant une évaluation des performances et des plages de fonctionnement des ressources, ainsi que les valeurs de grandeurs caractéristiques de leur fonctionnement (débit, pression, ...). Ces informations sont à destination des opérateurs, du système d'information, et des transitions.

Les transitions régissent les interactions entre ces ressources. Elles s'informent sur le fonctionnement des ressources et élaborent des commandes sous le contrôle du pilotage. Ces informations proviennent directement des ressources ou du système d'information. Ce dernier élabore et valide ces informations (données validées) à partir des observations recueillies sur le système (données brutes). Les aléas sont redirigés vers le système d'information, les opérateurs

ou les autres transitions. Typiquement une transition dans ce point de vue est une ressource de pilotage tel qu'un régulateur.

Un exemple de représentation d'un réseau organique est donné par la figure A.10.

On représente alors les transactions entre ressources et l'interdépendance des profils de mission (interdépendance de la commande des organes, des régulations, des contraintes technologiques,...). Chaque processeur de ce point de vue est décomposable en un réseau organique à un niveau d'abstraction moindre. Le cas limite d'un organe élémentaire est celui d'une ressource élémentaire.

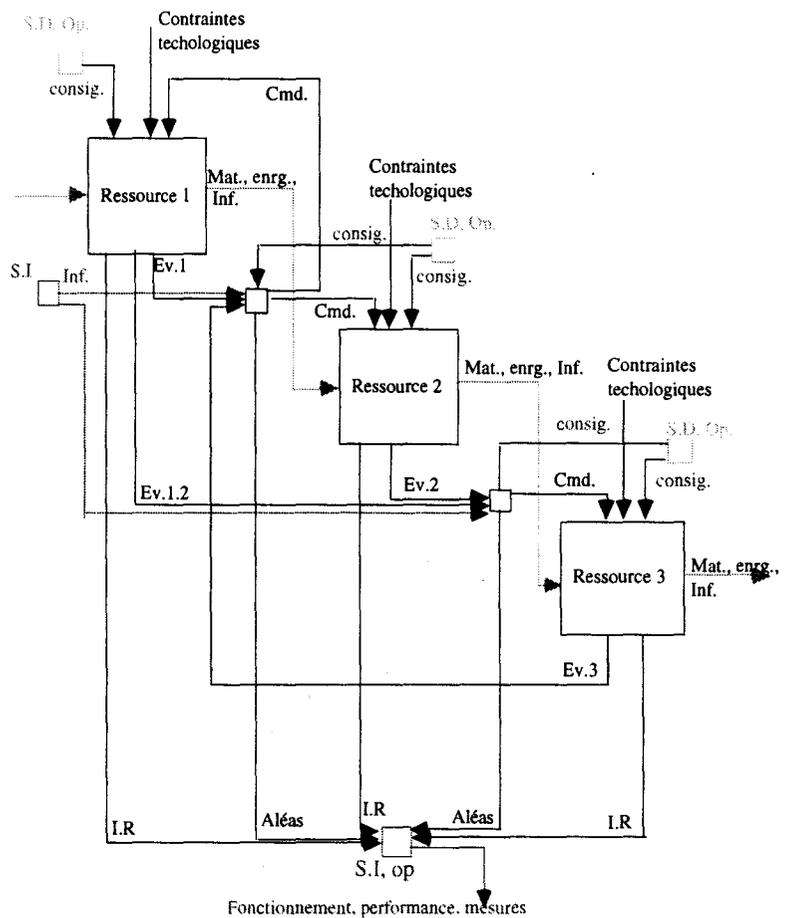


Figure A.10 : un exemple de représentation du réseau de ressources organiques, on décrit alors l'interconnexion de ces ressources et l'interdépendance des profils de mission.

Il s'agit de fournir une représentation des contraintes technologiques (volume maximum, section...) et des réglages pris en compte par les ressources. La formulation explicite de la réponse de ces processeurs aux contraintes (fonctions de transfert, équations différentielles....) relève de niveaux de formalisation plus élevée.

Quant au positionnement des contraintes de pilotage (consignes, plage de fonctionnement...), il est du ressort des opérateurs et du système de décision, contrôlant ainsi le *pilotage* des ressources. Leur description relève du point de vue opérationnel de pilotage (plus loin dans ce chapitre).

A partir des informations de représentation en provenance des ressources (mesures, observations), les informations sur le *fonctionnement* en cours sont élaborées, estimées et validées par le système d'information, et les opérateurs.

C. Vision opérationnelle : pilotage, gestion et stratégie.

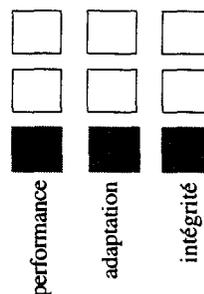
Les différents points de vue des visions fonctionnelle et organique sont soumis à des contrôles de la part des opérateurs et du système de décision. Le contrôle des scénarios, de la coordination, des tâches, de l'organisation, et du pilotage des ressources sont autant d'activités de décision. Une partie des contrôles effectués sur le système a déjà été décrite et prise en compte ; ce sont les changements de mode, de configuration, de programme, et autres, rencontrés dans les points de vue précédents. Ces contrôles sont assurés par les transitions, qui dans la mesure où elles s'informent sur le système (recueil des événements et d'informations en provenance du système d'information) pour déterminer leurs actions assurent une partie des activités de décision.

Toutefois, un dernier aspect des activités de décision reste à décrire et relève de la vision opérationnelle. Il s'agit alors de décrire comment ces décisions de contrôle sont prises et comment cette "manière" de décider évolue en fonction des différentes situations auxquelles le système est confronté. Plus précisément, il s'agit de décrire les *contextes opérationnels* dans lesquels sont prises les décisions contrôlant les visions fonctionnel et organique, ainsi que les modalités de changement de *contextes opérationnels*. Un contexte opérationnel est alors une situation remarquable susceptible de déterminer ou de nécessiter une "manière" de décider.

Qu'un système prenne une décision suppose qu'il s'informe et que compte tenu de ces informations et des contraintes auxquelles il doit obéir, il élabore ses décisions. A une prise de décisions correspond alors une attente que le système veut satisfaire, une solution qu'il veut apporter à un problème.

La description des informations à partir desquelles le système élabore ses décisions, les contraintes auxquelles il est soumis, les résultats escomptés ainsi que les décisions qui en résultent, constituent ce que l'on entend par *contexte opérationnel*. La description des événements susceptibles de changer la manière dont sont prises les décisions, celle des informations nécessaires à la détermination d'une nouvelle manière de décider constituent une description des changements de contexte opérationnel.

La vision opérationnelle de la matrice SAGACE propose de distribuer la description de ces contextes en trois points de vue. Chacune des perspectives : performance, adaptation, intégrité, relève alors d'un niveau de décision donné. Dans le cadre de l'étude spécifiée et dans le sous-système que l'on a projeté dans la matrice,



les mécanismes de décision que l'on décrira ne peuvent être que ceux du système de décision qui est la seule partie du système capable de tels mécanismes. Les opérateurs, étant des agents de décision externes au système, ils apparaissent comme des processeurs dégénérés dans ces points de vue.

La répartition de la représentation de ces contextes de décision en trois points de vue est donc guidée par trois perspectives qui sont l'intégrité du système, l'adaptation du système et ses performances. Il s'agira alors de décrire les contextes opérationnels dans lesquels sont élaborées les décisions concernant le contrôle de l'évolution de sa structure pour préserver son intégrité, celles concernant la gestion (dans le temps) de sa structure présentant la meilleure adaptation de sa structure à la réalisation des tâches qui lui incombent, et enfin celles concernant le pilotage des éléments de sa structure organique offrant les meilleures performances.

Concernant la vision temporelle à laquelle appartiennent ces points de vue, il faut remarquer que le système est à tout instant dans un et un seul contexte de : pilotage, de gestion, et de stratégie. La description des changements dans chacun de ces points de vue est donc diachronique (à travers le temps) et commune à la vision opérationnelle.

C.1. Stratégie, gestion des scénarios et des coordinations

Par *décision stratégique*, et dans le cas particulier de cette étude, on entend une décision prise pour préserver l'intégrité du système. Comme nous l'avons signalé précédemment, il ne s'agit aucunement de décrire les tâches de décision mais les contextes opérationnels. En l'occurrence, il s'agit de décrire l'ensemble des informations, contraintes, attentes et conditions définissant les contextes opérationnels stratégiques et les modalités de passage de l'un à l'autre.

Parmi les contrôles auxquels sont soumis les processeurs des différents points de vue rencontrés, ceux appliqués aux processeurs des points de vue *mode* et *configuration* sont à caractère stratégique. Il s'agit alors de la gestion des scénarios ou gestion des modes de marche, et de la gestion des configurations du système. Il s'agit bien, par ces gestions (des scénarios et de la coordination), de préserver l'intégrité du système.

Un processeur de ce point de vue (figure A.11) est alors un contexte stratégique dans lequel sont prises les décisions stratégiques. Le système s'informe sur lui même par l'intermédiaire du système d'information. Ce dernier lui fournit alors une estimation de la disponibilité effective des services et de l'état réel des ressources. A partir des ces informations, le système adopte une stratégie. Dans le cadre de l'étude, l'adoption d'une stratégie se traduit par :

- la détermination des scénarios : exprimée sous la forme de requêtes adressées aux processeurs du point de vue mode (requête de mode, requêtes de changement de mode, cf. §. *vision fonctionnelle diachronique, perspective d'intégrité et organisation des services en modes d'utilisation.*);

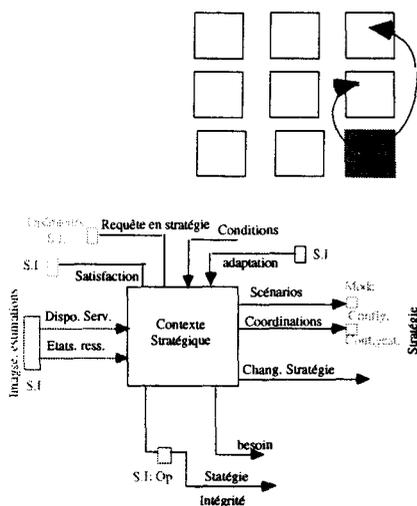


figure A.111 : représentation d'un contexte stratégique vu comme un processeur. On décrit alors les informations utiles au système pour décider du contrôle des scénarios et de la coordination, ainsi que les contraintes sur ces processeurs. Les attentes sont une expression du besoin. La perspective qui guide ces décisions est celle de la préservation de l'intégrité du système.

- la détermination d'une coordination des configurations du système : exprimée par des requêtes adressées aux processeurs du point de vue configuration (requête de configuration, requête de changement de configuration, cf. §. *Vision organique diachronique, perspective d'intégrité et organisation des ressources en configurations.*);

- et éventuellement par des décisions de changement de stratégie adressées aux transitions et contextes stratégiques de ce même point de vue.

Une décision stratégique pourrait également consister, compte tenu du contexte, à fixer les objectifs (du point de vue fonctionnel). Dans le cas d'un système cybernétique, la détermination de tels objectifs relève de la compétence des seuls opérateurs. Dans le cas où le système déterminerait ses propres objectifs, il s'agirait alors d'un système autofinalisé. Cette éventualité dépasse le cadre de notre étude (il aurait fallu intégrer au système les opérateurs et pouvoir appréhender leur raisonnement en matière de détermination de leurs besoins).

La détermination de ces décisions stratégiques est contrôlée par la *satisfaction* effective des objectifs issus du point de vue fonctionnel. Cette information est élaborée et validée par le système d'information. L'*adaptation* effective de la structure à la réalisation des tâches résultant de la gestion de cette structure, est également une information de contrainte(cf. §. *Gestion , programme, et organisation.*). L'estimation de cette *adaptation* est, comme nous le verrons plus tard, une "mesure" de l'adéquation entre dispositifs mis en oeuvre et tâches à effectuer. C'est une information élaborée et validée par le système d'information. Apparaissent également en contrainte sur les contextes stratégiques les requêtes explicites en stratégie de la part des opérateurs directement ou par l'intermédiaire du système d'information ainsi que les conditions d'entrée dans ce contexte.

La sémantique d'un diagramme tel que celui de la figure A.11 est alors :

- compte tenu de la disponibilité des services et de l'état des ressources, le système décide de la stratégie (scénario, coordination, et éventuellement les changements de stratégie) à adopter ;

- En réponse à l'activité de ces processeurs, des informations de représentation sont disponibles, permettant au système d'information, aux opérateurs et/ou directement au système de décision, de se construire une image, une estimation de la stratégie en cours et de la préservation de l'intégrité du système ainsi que des besoins exprimés par l'adoption de telle ou telle stratégie.

Un exemple de représentation de contextes stratégiques et des modalités de passage de l'un à l'autre est donné par la figure A.12. On pourrait envisager des contextes stratégiques tels que : "contexte de production intensive", "contexte de production normale", "contexte de démarrage",...

Comme dans les autres points de vue, les modalités de passage d'un contexte stratégique à l'autre sont contrôlées par des transitions. Une transition peut être considérée comme un contexte stratégique particulier, celui d'un changement de stratégie. A l'occurrence d'événements susceptibles de provoquer ou de nécessiter un changement de contexte stratégique et sous le contrôle d'éventuelles requêtes de changement de stratégie, une transition procède à la satisfaction des conditions d'entrée dans le contexte suivant. On peut envisager que cette requête de changement de stratégie soit formulée par le système de décision, comme c'est le cas pour la transition entre les contextes 1 et 2 ou 3 de l'exemple figure A.12. dans ce cas il y a *anticipation* de la part du système de décision.

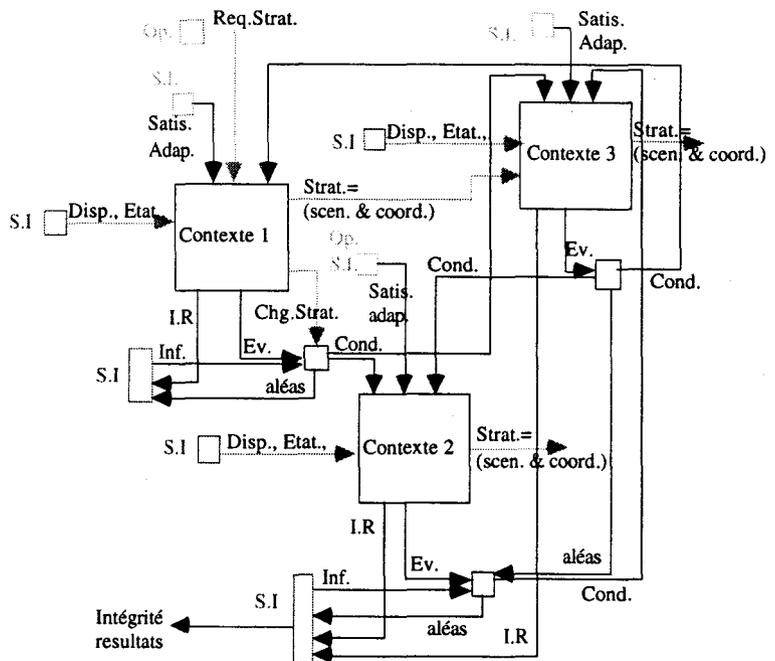
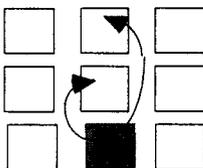


Figure A.12 : un exemple de représentation d'un réseau de contextes stratégiques. On décrit alors comment le système décide de telle ou telle stratégie et les modalités de changement de stratégie.

Une telle description est envisageable à différents niveaux d'abstraction. Chaque processeur de ce point de vue est alors décomposé en réseaux de processeurs .

La formulation explicite des fonctions de calcul de ces décisions, à partir des informations, contraintes, événements, attentes et aléas des contextes et des transitions relève de niveaux de formalisation supérieure.



C.2. Gestion , programme, et organisation.

Le deuxième type de contextes opérationnels que l'on aborde ici concerne la gestion de la structure du système. Les contextes décrits dans ce point de vue sont ceux dans lesquels les décisions de contrôle des *programmes* et de l'*organisation logistique* sont élaborées, ces décisions constituent la *gestion* de la structure du système.

Les processeurs de ce point de vue sont des *contextes opérationnels de gestion* (figure A.13) dans lesquels les *programmes* et l'*organisation* sont décidés. Compte tenu de l'*organisation effective* des ressources en dispositifs et de l'*activité effective*, toute deux estimées par le système d'information, le système détermine s'il y a lieu les *programmes* et l'*organisation* à adopter.

Ces processeurs sont contraints par la *stratégie* en cours (scénario et coordination), par les *performances* du pilotage des ressources (cf. § : *pilotage des ressources*.), par des *requêtes* explicites de gestions souhaitées (adressées soit directement par les opérateurs soit par l'intermédiaire du système d'information), ainsi que par des conditions d'entrée dans ce contexte de gestion. En attente, il résulte de l'adoption de telle ou telle gestion, des informations de représentation relatives à l'*adaptation* de la structure à la *gestion* en cours et à des *événements* susceptibles de provoquer un changement de contexte. Par *adaptation* de la structure, on entend la plus ou moins bonne aptitude des dispositifs issus de l'*organisation* à l'exécution des *programmes*. *Organisation*, et *activité* sont des informations élaborées, estimées et validées par le système d'information à partir des informations de représentation issues des processeurs des points de vue *programme*, et *organisation*.

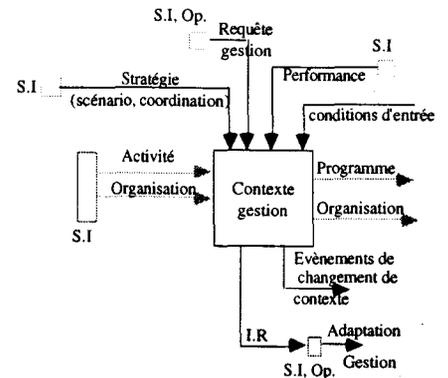


Figure A.13 : un contexte de gestion est vu comme un processeur. Le système décide alors de la gestion des programmes et de l'organisation des ressources. La perspective qui guide ces décisions est celle de l'adaptation de la structure du système.

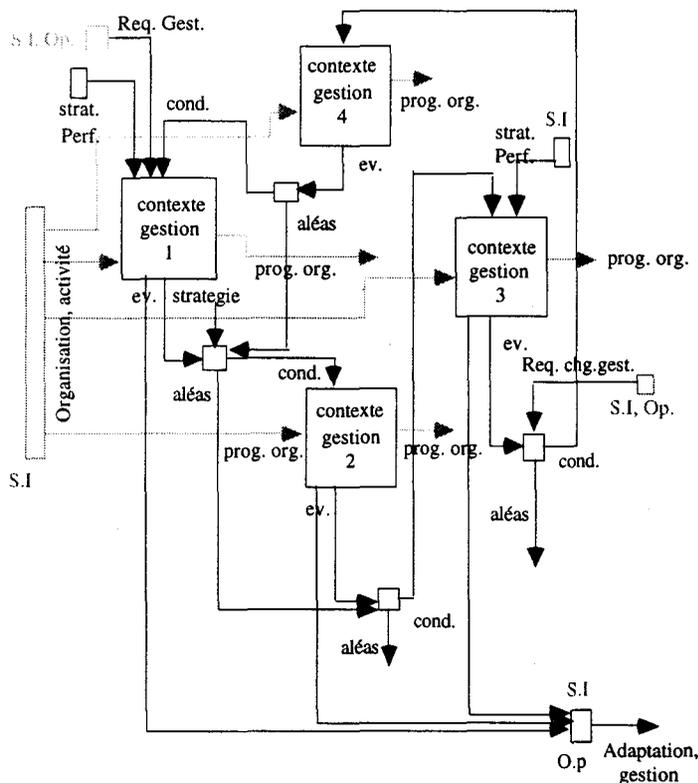
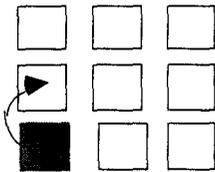


Figure A.14 : un exemple de représentation d'un réseau de contextes de gestion. On décrit alors comment le système décide de telle ou telle gestion de sa structure et comment il change de façons de décider de cette gestion.

Les modalités de passage d'un contexte de gestion à l'autre sont sous le contrôle de transitions. Une transition peut être considérée comme un contexte particulier : celui d'un changement de contexte

de gestion. A l'occurrence d'événements susceptibles de provoquer ou de nécessiter un changement de contexte, une transition, sous le contrôle de requêtes de changements de contexte, procède par son action à la satisfaction des conditions d'entrée dans le contexte suivant. Une requête de changement de contexte est adressée directement à une transition par les opérateurs ou par l'intermédiaire du système d'information.

Un exemple de description de ces contextes est donné par la figure A.14. On pourrait envisager des contextes de gestion comme par exemple : une gestion en fonctionnement normal automatique, gestion fonctionnement semi-automatique, gestion fonctionnement dégradé (où on ne disposerait pas des ressources principales et où l'on mettrait en oeuvre les ressources auxiliaires), gestion en production intensive...



C.3. Pilotage des ressources.

Le dernier point de vue opérationnel que l'on aborde ici est celui des contextes de pilotage des ressources.

Un processeur de ce point de vue est alors un *contexte de pilotage*. Le type de pilotage appliqué aux ressources du réseau organique est contraint par la *gestion* effective en cours (programmes et organisation), par des conditions d'entrée dans un contexte de pilotage ainsi que par des requêtes explicites de contextes de pilotage formulées par les opérateurs directement ou par l'intermédiaire du système d'information. Ces décisions sont prises à partir d'informations sur le *fonctionnement* effectif des ressources élaborées par le système d'information (plage de valeurs, temps de réponse, réponse fréquentielle, valeur d'un paramètre, finesse de la régulation...). Un *pilotage* se traduit par des consignes sur les processeurs du réseau organique (consigne de température, valeur d'un débit...). Des informations de représentation relatives au type de pilotage en cours et aux *performances* de ce type de pilotage figurent en attente ainsi que les événements susceptibles de provoquer ou de nécessiter un changement de contexte de pilotage.

Le passage d'un contexte de pilotage à l'autre s'effectue via les transitions. Une transition est un contexte de pilotage particulier, celui d'un changement de contexte de pilotage. A l'occurrence d'événements de changement de contexte et à partir d'éventuelles informations fournies par le système d'information, les transitions procèdent par leurs actions à la satisfaction des conditions d'entrée dans le contexte suivant. Si aucune condition n'est remplie il y a aléa. Ces transitions sont sous le contrôle de requêtes en provenance des opérateurs et/ou du système d'information.

Un exemple de réseau de contextes de pilotage est donné par la figure A.16. On peut par exemple envisager un contexte de pilotage économique des ressources, un contexte privilégiant les temps de réponse au détriment de la consommation d'énergie... Ces contextes étant la plupart du temps en rapport avec les performances attendues, on peut envisager des contextes dans lesquels le pilotage est optimisé suivant un ou plusieurs critères de performance.

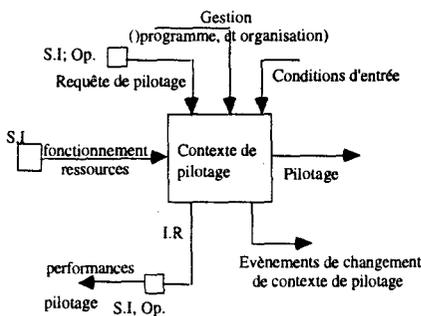


Figure A.15 : un contexte de pilotage est vu comme un processeur. Le système décide alors de quel type de pilotage il va appliquer au réseau organique. La perspective qui guide ces décisions est celle des performances du système.

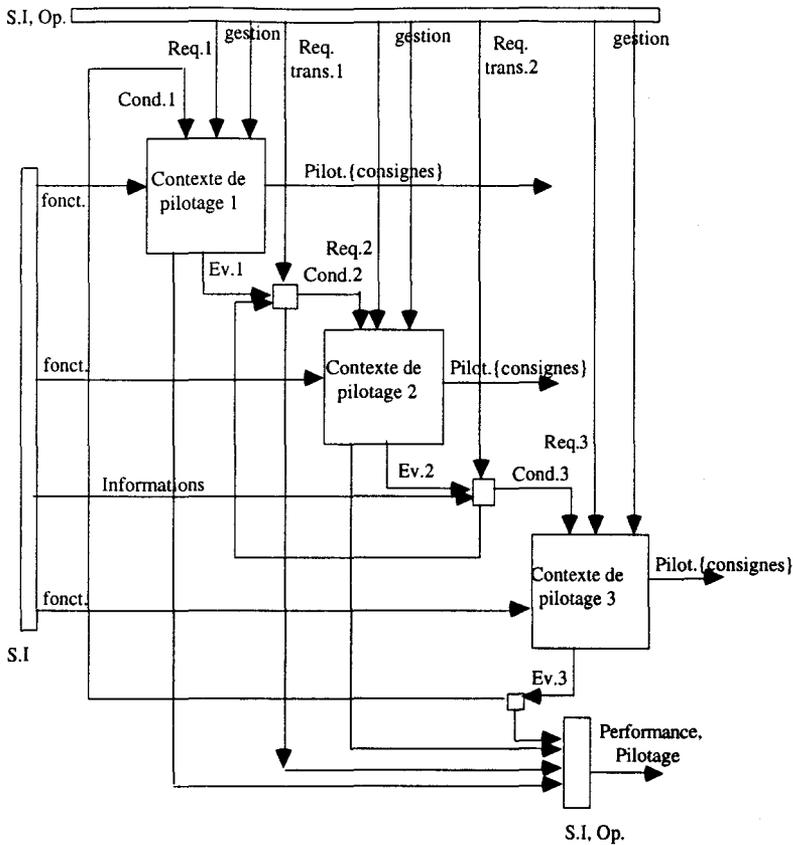


Figure A.16 : un exemple de représentation d'un réseau de contextes de pilotage. On décrit comment le système décide de tel ou tel pilotage à appliquer ainsi que les modalités de changement de la façon dont sont prises ces décisions.

ANNEXE I.b

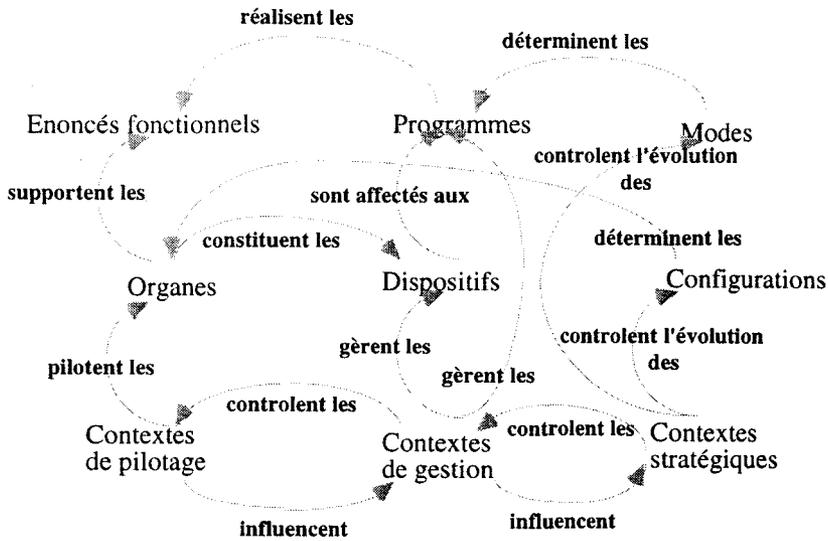
Analyse croisée, fonctions normative, prédictive et gestion dynamique des représentation.

Cette annexe I.b prolonge l'étude de la précédente et a pour base des analyses croisées des points de vue de la matrice. Pris deux à deux il est alors possible de spécifier des contraintes entre les cheminements dans les réseaux de chacun des points de vue et de s'assurer de la cohérence de ces deux représentations. Sur l'ensemble des points de vue il est alors possible d'établir un réseau de contraintes dont la satisfaction de l'ensemble permet d'envisager une gestion dynamique des représentations.

Analyse croisée, vérification de la cohérence des modèles et validation.

Nous avons jusqu'ici étudié les différents points de vue de la matrice indépendamment les uns des autres. Toutefois cette indépendance entre points de vue n'est que relative. Il existe des relations sémantiques entre ces derniers. Nous avons par exemple évoqué le fait que le réseau organique *supporte* les énoncés fonctionnels du système, que les dispositifs sont *affectés* aux tâches, que les contextes stratégiques *contrôlent* l'évolution de la structure du système, etc. L'ensemble de ces relations constitue alors le réseau sémantique qui lie les points de vue de la matrice SAGACE. Ces relations sont contraintes. En effet, n'importe quel organe ne supporte pas n'importe quelle fonction ; certaines tâches nécessitent un ensemble requis de dispositifs ; plusieurs alternatives d'exécution de programmes sont susceptibles de réaliser certaines fonctions mais pas toutes, etc. Ces contraintes s'expriment alors par les *règles normatives* du système. Ces règles normatives constituent par définition une *norme* pour notre système. Le respect de ces règles normatives tend à garantir la cohérence des différents points de vue. De même que les autres concepts de modélisation que nous avons rencontré jusqu'ici, ces relations peuvent être exprimées à plusieurs niveaux d'abstraction. Certaines de ces contraintes ont été représentées par des flux partagés par des processeurs de points de vue différents. Parmi ces flux, on trouve notamment les flux de contrôle des scénarios et de la coordination, ceux du contrôle des programmes et de l'organisation, ou encore ceux du contrôle du pilotage des ressources. Mais il existe d'autres contraintes du réseau sémantique qui ne sont pas exprimées par de tels "câblages" entre processeurs de points de vue différents. On peut envisager sous la forme de relations de type booléen, de tableaux de contingences, de règles floues, etc. Une manière simple d'analyser et de spécifier ces règles consiste à croiser un ou plusieurs points de vue. Les paragraphes suivants mettent l'accent sur les relations entre les différents points de vue ainsi que sur quelques exemples d'analyses croisées auxquelles on peut procéder pour vérifier la cohérence et la validité des représentations.

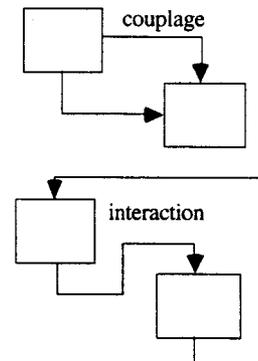
Mais avant tout, la figure suivante donne un exemple de ce que peut être un réseau sémantique.



Il est entendu que ce réseau sémantique est particulier à l'étude que nous menons ici et qu'il ne s'agit que d'un des réseaux sémantiques envisageables pour ce système.

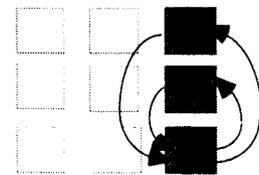
D. Interactions et couplages entre points de vue.

Certains flux sont communs à des processeurs de points de vue différents et constituent en quelque sorte une représentation des relations sémantiques concernées. Parmi ceux rencontrés lors des différentes représentations, on distingue deux types de liens. Les premiers sont ceux où des flux de transaction en sortie de processeurs d'un point de vue donné (axe horizontal) deviennent des flux d'interaction (axe vertical) contrôlant des processeurs d'un autre point de vue, ou de façon duale, ceux où des flux d'interaction en attente deviennent des flux de transaction en entrée. On qualifiera ces liens de *couplages*. Les seconds sont ceux où des flux d'interaction en attente de processeurs d'un point de vue deviennent des flux d'interaction en contraintes de processeurs d'un autre point de vue, on qualifiera ces liens d'*interactions*.



D.1. Couplage des points de vue de la perspective diachronique.

D'après les représentations menées dans les paragraphes précédents concernant les points de vue *mode*, *configuration* et *stratégie*, ces points de vue de la *perspective d'intégrité* sont couplés comme l'illustre la figure B.1.



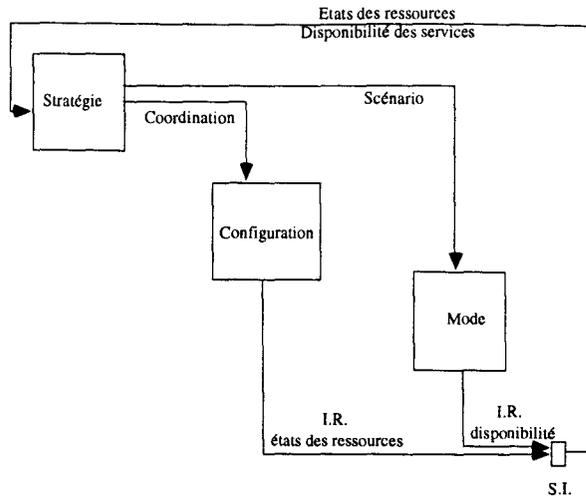


Figure B.1 : couplage des points de vue de la perspective diachronique. Les décisions stratégiques contrôlent les modes et configurations du système.

Les processeurs du point de vue *stratégie* décident, à partir d'estimations de l'*état* effectif des ressources et de la *disponibilité* effective des services, de la *coordination* et des *scénarios* appliqués respectivement aux processeurs du point de vue *configuration* et aux processeurs du point de vue *mode*. Ces estimations de l'*état des ressources* et de la *disponibilité* des services sont élaborées, et validées par le système d'information à partir d'informations de représentation issues des processeurs des points de vue *configuration* et *mode*.

D.2. Couplage des points de vue de la perspective synchronique.

De manière analogue aux points de vue de la perspective diachronique, les points de vue de la *perspective d'adaptation* sont couplés comme l'illustre la figure B.2.

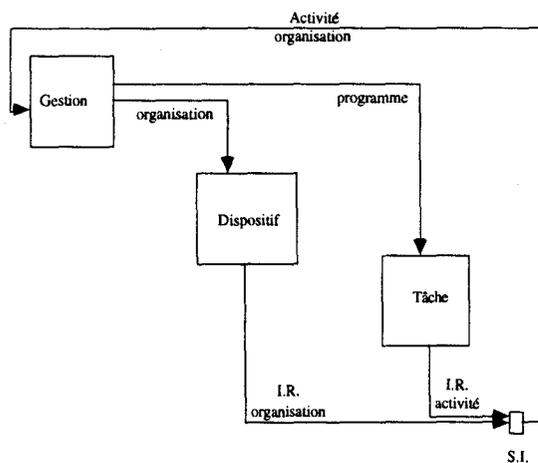
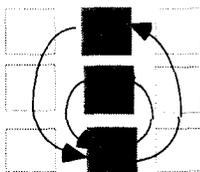


figure B.2 : couplage des points de vue de la perspective synchronique.

D'après la représentation du système, il apparaît que les processeurs du point de vue *gestion* décident, à partir d'estimations de l'*activité* et de l'*organisation* effectives de la structure, des *programmes* et de l'*organisation* à adopter. Ces estimations sont élaborées et validées par le système d'information à partir d'informations issues des points de vue *programme* et *organisation*.

D.3. Couplage des points de vue pilotage et organe.

Tel que le système est représenté, les points de vue *pilotage* et *organe* apparaissent également couplés comme l'illustre la figure A.I.30. Les processeurs du point de vue pilotage décident, à partir d'estimations du *fonctionnement* effectif des ressources, du *pilotage* (ensemble de consignes) à appliquer à ces dernières. Ces estimations sont élaborées et validées par le système d'information à partir d'informations de représentation issues des processeurs du point de vue organe.

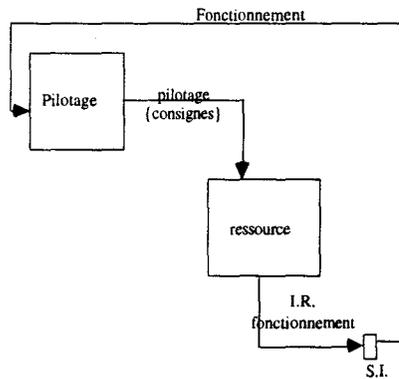
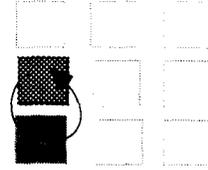
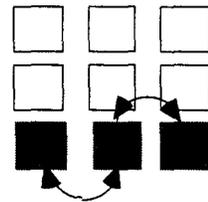


Figure B.3 : couplage des points de vue de pilotage et organe.

D.4. Interactions des points de vue de la vision opérationnelle.

Les différents contextes des points de vue de la *vision opérationnelle*, tel que le système est représenté, sont en interaction comme l'illustre la figure B.4.



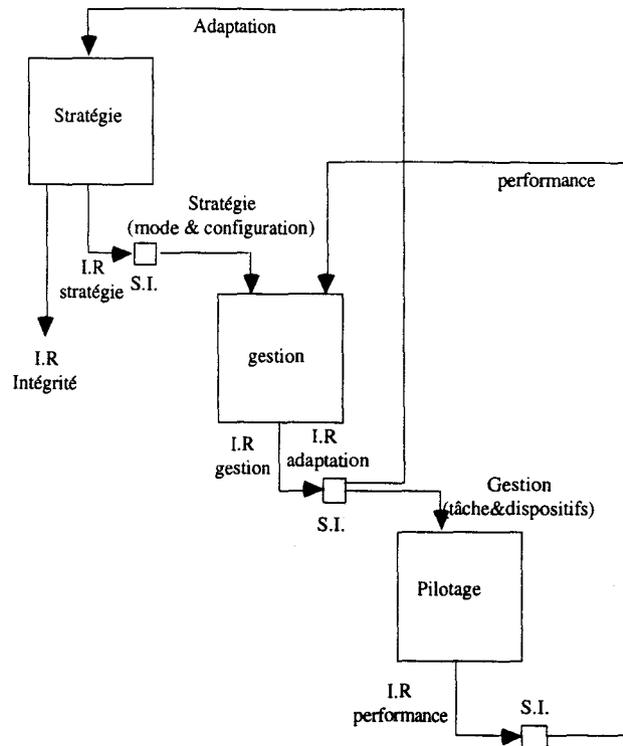
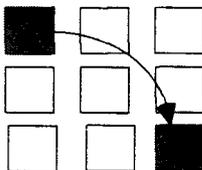


Figure B.4 : Interactions des points de vue de la vision opérationnelle.

Il y a interdépendance des profils de mission des différents contextes opératoires. La *stratégie* dépend en partie de l'*adaptation* effective de la structure. La *gestion* est contrainte par la *stratégie* effective en cours et par les *performances* effectives du pilotage des ressources. Le *pilotage* est contraint par la *gestion effective* de la structure. *Stratégie, adaptation* et *gestion* effectives, ainsi que les *performances* effectives sont des informations élaborées et validées par le système d'information. Elles sont issues, entre autres, d'informations de représentation en attente de processeurs des points de vue *stratégie, gestion* et *pilotage*, et recueillies par le système d'information.

D.5. Interaction du point de vue stratégique et du point de vue fonctionnel.

Compte tenu de la représentation du système, les points de vue *fonctionnel* et *stratégique* sont également en interaction comme l'illustre la figure B.5.



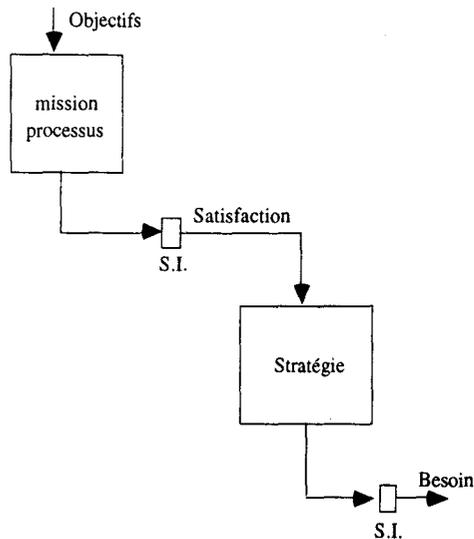


Figure B.5 : interaction entre fonctions du système et stratégies mise en oeuvre.

La stratégie adoptée par le système est partiellement fonction de la *satisfaction* des objectifs. Cette estimation est une information élaborée par le système d'information. A une décision stratégique correspond alors l'expression d'un *besoin*. Il n'y a pas de rebouclage des *besoins* exprimés en contraintes sur les processeurs fonctionnels comme *objectifs*. Un tel cas correspondrait à une détermination par les contextes stratégiques des objectifs du système. En d'autres termes, il s'agirait d'un système autofinalisé. Dans le cadre de notre étude, s'agissant d'un système cybernétique, une telle contre réaction n'est pas envisageable.

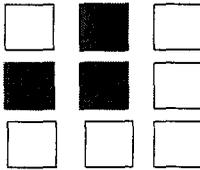
E. Analyse croisée, règles normatives .

Les couplages et interactions présentées pas les paragraphes précédents sont des échanges d'informations entre points de vue assurés par le système d'information. Un tel "câblage" entre points de vue est un cas particulier. Il est ici possible car s'agissant d'un système artificiel ce dernier a été conçu comme tel. Ces liens explicites sont des représentations de relations du réseau sémantique. Par exemple, il existe des contraintes entre les évolutions des points de vue *mode* et *configuration* dont devra tenir compte la *stratégie* pour préserver l'*intégrité* du système. De tels processus d'élaboration et d'échanges d'informations sont assurés dans ce cas précis par un système d'information.

Les relations du réseau sémantique s'expriment comme des contraintes entre les différents points de vue c'est à dire des règles normatives et ce dans un langage plus ou moins formalisé. Par exemple, pour un mode donné seules certaines configurations sont possibles et réciproquement, pour une stratégie donnée seul un sous-ensemble de gestions est applicable, un changement de gestion peut nécessiter l'application d'un pilotage précis, etc. Ces contraintes peuvent être mises en évidence par une analyse croisée des points de vue. Les paragraphes suivants traitent de quelques analyses croisées parmi les plus significatives et de la spécification des règles

associées. L'ensemble des règles normatives établies entre les différents points de vue forme alors un réseau de contraintes devant être simultanément respectées, constituant une norme. La satisfaction de l'ensemble de ces contraintes est une condition nécessaire mais pas suffisante pour garantir la cohérence des représentations.

E.1. Croisement des points de vue structuraux



Tel qu'il est représenté, le système est susceptible d'effectuer n'importe quelle tâche du point de vue *programme* et d'élaborer n'importe quel dispositif du point de vue *organisation*, à un instant donné. De même n'importe quelle ressource du point de vue *organe* est susceptible de participer à l'élaboration de n'importe quel dispositif du point de vue *organisation*. Toutefois cette indépendance entre points de vue structuraux n'est que relative. Certains dispositifs pourront être affectés à certaines tâches, certaines ressources pourront être sollicitées pour certains dispositifs, etc. Il convient donc, à l'aide de règles normatives, de restreindre le champ des possibles.

Les premières analyses croisées que nous abordons concernent ces trois points de vue structuraux. Considérons dans un premier temps les points de vue *programme* et *organisation*. Les tâches du point de vue *programme* sont assurées par les dispositifs du point de vue *organisation*. Les modalités d'affectation d'un dispositif à une ou plusieurs tâches sont soumises à des contraintes qu'il convient d'exprimer. Les réseaux de processeurs de chacun de ces points de vue sont organisés hiérarchiquement, cette organisation hiérarchique peut être décrite par des arbres comme l'exemple illustré par la figure B.6. Les feuilles de chacun de ces arbres représentent les dispositifs et tâches élémentaires issus de la représentation.

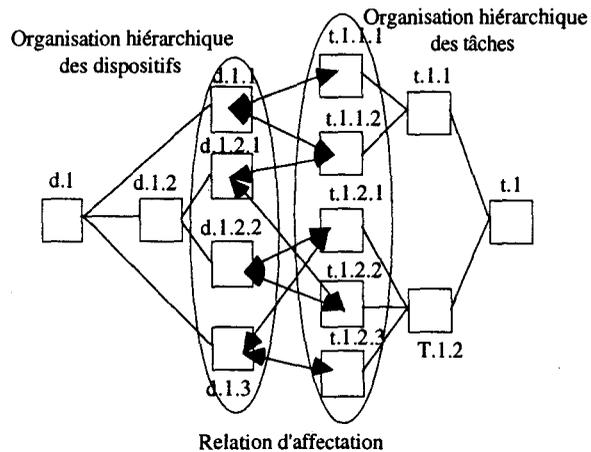
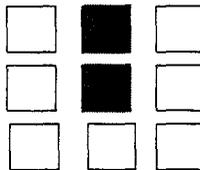


figure B.6: organisation hiérarchique des processeurs des points de vue organisation et programme. La mise en relation des feuilles de chacun des arbres est une spécification de la règle d'affectation des dispositifs aux tâches.

dispositifs/tâches	t.1.1.1	t.1.1.2	t.1.2.1	t.1.2.2	t.1.2.3
d.1.1	1	1	0	0	0
d.1.2.1	0	1	0	1	0
d.1.2.2	0	0	1	1	0
d.1.3	0	0	1	0	1

Tableau B.1 : règle normative d'allocation des dispositifs aux tâches à réaliser.

L'application entre les feuilles de ces arbres décrit alors quels dispositifs sont affectés à quelles tâches, ceci indépendamment du temps (les modalités d'organisation dans le temps étant déjà décrites dans chacun des points de vue). Ainsi un dispositif peut être affecté à une ou plusieurs tâches et réciproquement une tâche peut solliciter un ou plusieurs dispositifs. Une telle relation peut être décrite par le tableau B.1. Dans ce tableau, un coefficient égal à 1 signifie qu'à un moment donné un dispositif peut participer à la réalisation de la tâche correspondante, ou de façon duale que la tâche peut à un moment donné solliciter le dispositif correspondant. Une première vérification de la cohérence de la représentation consiste à vérifier d'une part que chaque dispositif est affecté à au moins une tâche et que chaque tâche a au moins un dispositif qui lui est affecté. Cela revient pour la relation du tableau B.1 à vérifier que ce dernier ne présente pas de ligne et de colonne nulle. Dans le cas contraire il s'agirait d'un dispositif qui ne sert à rien ou d'une tâche irréalisable car ne disposant pas des moyens nécessaires.

Une telle relation est envisageable à plusieurs niveaux d'abstraction. Dans notre cas, cette relation est aisément déductible de l'organisation hiérarchique et de la relation du tableau B.1. Par exemple, la relation d'affectation des dispositifs d.1.1, d.1.2 et d.1.3 aux tâches t.1.1 et t.1.2 est donnée par le tableau 2.5.

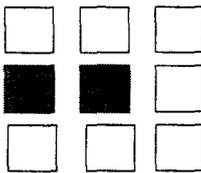
dispositifs/tâches	t.1.1	t.1.2
d.1.1	1	0
d.1.2	1	1
d.1.3	0	1

tableau B.2 : règle normative du tableau 2.4 au niveau d'abstraction n-1.

Les lignes et les colonnes du tableau B.1 sont déduites de celles du tableau B.2 suivant l'organisation hiérarchique par sommation (OU logique) des lignes et des colonnes agrégées. Réciproquement si une relation est donnée à un niveau d'abstraction n alors au niveau $n+1$ (niveau d'abstraction inférieur par décomposition du niveau n) la relation correspondante doit être telle que par sommations de ses lignes et de ses colonnes suivant l'organisation hiérarchique l'on retrouve la relation du niveau n .

Les tableaux B.1 ou B.2 expriment uniquement le fait que un dispositif est à un moment ou à un autre affecté à une ou plusieurs tâches.

On peut envisager, à un niveau de formalisation supérieur, de préciser ces contraintes d'affectation des dispositifs aux tâches par une proposition logique. Pour le tableau B.1 par exemple : le dispositif d.1.1 est affecté au cours du temps soit à la tâche t.1.1.1 soit à la tâche t.1.1.2. La spécification de cette contrainte (ou exclusif) à comme conséquence logique que les tâches t.1.1.1 et t.1.1.2 ne peuvent être exécutées simultanément car, si la tâche t.1.1.2 utilise le dispositif d.1.1 alors la tâche t.1.1.1 ne dispose plus de support. Il faudra alors vérifier que la représentation des programmes n'autorise pas un tel programme, par l'utilisation d'algorithmes de recherche de chemins dans les réseaux du point de vue programme. Si un tel programme exécutant les tâches t.1.1.1 et t.1.1.2 devait impérativement être exécuté il faudrait, compte tenu des ressources dont on dispose, prévoir un second dispositif capable d'assurer l'une des deux tâches pendant que le dispositif d.1.1 assure l'autre tâche. De telles contraintes peuvent également être envisagées sur les colonnes, par exemple : la tâche t.1.2.1 nécessite les dispositifs d.1.2.2 et d.1.3.



Une analyse croisée similaire entre les points de vue *organe* et *organisation* est possible, il s'agit alors de décrire quelles ressources interviennent dans la composition de quels dispositifs. Un exemple de relation de ce type est donné par le tableau B.3. Chaque ligne et chaque colonne de cette matrice présente un élément au moins non nul. En d'autres termes, chaque ressource participe à l'élaboration d'au moins un dispositif et chaque dispositif dispose d'au moins une ressource pour son élaboration.

organes/ dispositifs	d.1.1.1	d.1.2.1	d.1.2.2	d.1.3
o.1.1.1	1	1	0	1
o.1.1.2	1	1	0	0
o.1.1.3	0	0	1	1
o.2	1	0	0	1

tableau B.3 : règle normative d'élaboration des dispositifs à partir des organes.

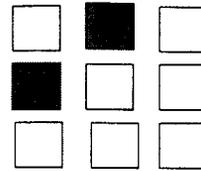
On peut comme précédemment envisager une spécification de ces contraintes par des propositions logiques et procéder à une vérification de la cohérence de la représentation dans le temps en confrontant ces contraintes aux représentations de chacun des points de vue concernés. Supposons par exemple que les contraintes suivantes soient spécifiées:

- le dispositif d.1.1.1 nécessite les organes o.1.1.1 et o.1.1.2 ;
- le dispositif d.1.2.1 nécessite o.1.1.1 ou o.1.1.2;
- l'organe o.1.1.1 élabore les dispositifs d.1.1.1 ou (d.1.2.1 et d.1.3);

- l'organe o.1.1.2 élabore soit d.1.1.1 soit d.1.2.1;

alors une organisation qui allouerait simultanément les dispositifs d.1.1.1 et d.1.2.1 est admissible.

Une troisième analyse croisée entre les points de vue structurels est envisageable, il s'agit alors de croiser les points de vue *programme* et *organe*. La troisième relation est alors aisément déductible de celles des tableaux B.1 et B.3 par le produit de ces deux matrices. On obtient ainsi la relation suivante donnée par le tableau B.4 :

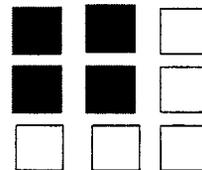


organe s/tâches	t.1. 1.1	t.1. 1.2	t.1. 2.1	t.1. 2.2	t.1. 2.3
o.1.1.1	1	1	1	1	1
o.1.1.2	1	1	0	1	0
o.1.1.3	0	0	1	1	1
o.2	1	1	1	0	1

tableau B.4 : règle normative d'affectation des organes aux tâches.

On vérifie que chaque ligne et chaque colonne présente un élément au moins non nul. Ainsi chaque ressource participe à au moins une tâche, et chaque tâche met en oeuvre au moins une ressource.

E.2. Croisement de la structure et du point de vue fonctionnel.



La structure étant le support des fonctions du système, des règles normatives sont également envisageables entre les points de vues structurels et le point de vue fonctionnel.

Si l'on croise le point de vue *fonctionnel* et le point de vue *programme* alors on peut indiquer quelles tâches participent à la réalisation de telle ou telle fonction. Le tableau B.5 donne un exemple de ce type de relation.

tâches/ fonctions	f.1	f.2	f.3
t.1.1.1	1	0	0
t.1.1.2	1	0	0
t.1.2.1	0	1	0
t.1.2.2	0	0	1
t.1.2.3	0	0	1

tableau B.5 : règle normative de réalisation des fonctions par les tâches.

On vérifie que chaque ligne et chaque colonne présente un élément au moins non nul. On s'assure ainsi que chaque tâche participe à la réalisation d'au moins une fonction et que chaque fonction dispose d'au moins une tâche pour sa réalisation.

En colonne il peut s'agir de contraintes de type et logique. f.1 est réalisée par t.1.1.1 et t.1.1.2 . En conséquence, il faudra vérifier que les programmes autorisent l'exécution des deux tâches t.1.1.1 et t.1.2.1 Un programme qui n'exécutera jamais la tâche t.1.1.1 ne serait pas capable de réaliser la fonction f.1. Ainsi compte tenu des contraintes, l'indisponibilité de t.1.1.1 ou t.1.1.2 entraîne la perte de la fonction f.1.

En croisant les points de vue *organe* et *fonctionnel*, on s'intéresse à la participation des ressources à une ou plusieurs fonctions. Cette relation est aisément déductible de la relation entre organes et tâches (tableau B.4) et de la relation entre tâches et fonctions par le produit de ces matrices. Soit $o \times t$ la relation du tableau 2.7 et $t \times f$ la relation du tableau 2.8 alors la relation entre organe et fonction notée $o \times f$ est égale à :

$$o \times f = o \times t \times t \times f$$

car si un organe est mis en oeuvre pour l'exécution d'une tâche et que cette tâche réalise une fonction alors cet organe est un support de cette fonction. Cette relation est donnée par le tableau B.6 . On vérifie que chaque ligne et chaque colonne de cette matrice présente un élément au moins non nul.

On dispose donc des relations $o \times f$ et $t \times f$, si on calcule la relation $o \times t$ par :

$$o \times t = o \times f \times f \times t$$

où $f \times t$ est la transposée de $t \times f$, on trouve la relation du tableau B.7 .

fonction /organe	f.1	f.2	f.3
o.1.1.1	1	1	1
o.1.1.2	1	0	1
o.1.1.3	0	1	1
o.2	1	1	1

tableau B.6: règle normative de support des fonctions par les organes.

organes /tâches	t.1.1.1	t.1.1.2	t.1.2.1	t.1.2.2	t.1.2.3
o.1.1.1	1	1	1	1	1
o.1.1.2	1	1	0	1	0
o.1.1.3	0	0	1	1	1
o.2	1	1	1	1	1

tableau B.7, règle normative de participation simultanée des tâches et organes à la réalisation des fonctions.

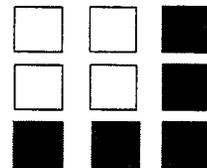
La relation entre organes et tâches donnée par le tableau B.7 est différente de celle donnée par le tableau B.4, notamment concernant la ressource o.2 et la tâche t.1.2.2, sans pour autant la contredire car leur interprétation est différente. La première, celle donnée par le tableau B.4 indique que la ressource o.2 n'intervient pas dans la réalisation de la tâche t.1.2.2 alors que la seconde indique que t.1.2.2 et o.2 peuvent être simultanément sollicités pour la réalisation des fonctions. Ces deux relations ne se contredisent pas, en effet d'après la relation $t \times f$ du tableau B.5, la réalisation de la fonction f.3 fait intervenir les tâche t.1.2.2 et/ou t.1.2.3, or la ressource o.2 est sollicitée par la tâche t.1.2.3, en conséquence t.1.2.2 et o.2 n'interviennent pas dans la réalisation de f.3. Une relation $o \times t$ du type de celle du tableau B.7 calculée à partir de relations $t \times f$ et $o \times f$ indique qu'une tâche et qu'un organe sont sollicités ou non pour la réalisation d'une même fonction, alors qu'une relation $o \times t$ du type de celle du tableau B.4 calculée par une analyse croisée des points de vue structurels indique qu'un organe est sollicité par telle ou telle tâche.

Supposons maintenant que compte tenu des relations $t \times f$ et $o \times f$ spécifiées, la relation $o \times t$ calculée à l'aide de ces relations indique par exemple, que la tâche t.1.1.1 et l'organe o.1.1.1 ne sont pas sollicités pour la réalisation d'une même fonction, alors cette relation contredirait celle du tableau B.4 qui dit que l'organe o.1.1.1 est sollicité par la tâche t.1.1.1. En effet si t.1.1.1 est sollicitée par une fonction quelconque, dans la mesure où cette tâche sollicite o.1.1.1 comme support, o.1.1.1 participe de fait à la réalisation de cette fonction, les deux relations se contredisent.

Pour que ces deux relations soient cohérentes, il faut vérifier "l'inclusion" de la relation $o \times t$ donnée par le tableau B.4 dans celle de la relation $o \times t$ donnée par le tableau B.7. Pour cela il suffit de vérifier que tout coefficient c_{ij} du tableau B.7 est supérieur ou égal au coefficient correspondant du tableau B.4.

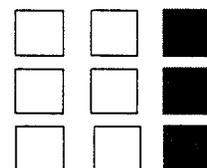
E.3. Croisements des points de vue comportementaux.

On s'intéresse ici à quelques analyses croisées concernant les points de vue de la couche comportementale de la matrice. Ces points de vue ont la particularité de ne présenter, à un moment donné, qu'un et un seul processeur actif par point de vue. Effet le système, à un instant donné, est dans un et un seul mode, dans une seule configuration, dans un seul contexte stratégique, dans un seul contexte de gestion et dans un et un seul contexte de pilotage.



E.3.1. Croisement des points de vue de la perspective d'intégrité.

Le système est susceptible de se trouver, pour un mode donné, dans une quelconque des configurations et réciproquement. Ceci souligne la relative indépendance de ces deux aspects de l'évolution de la structure du système. Toutefois, pour des raisons de cohérence et pour préserver l'intégrité du système, certaines configurations peuvent être interdites pour certains modes et réciproquement. Certaines associations entre modes et configurations seront préférées à d'autres. Enfin, certaines configurations entraîneront le passage



dans un sous ensemble de modes possibles. La description de ces contraintes entre ces deux aspects de l'évolution du système constitue la spécification des règles normatives entre ces points de vue. Ces contraintes doivent impérativement être prise en compte par le point de vue stratégique qui contrôle *scénarios* et *coordinations*.

Un exemple de relation entre modes et configurations est donné par le tableau B.8.

modes/confi- gurations	m.1	m.2.1	m.2.2
c.1.1.1	1	1	0
c.1.1.2	1	0	1
c.1.1.3	0	1	0

tableau B.8 règle normative entre modes et configurations.

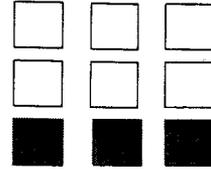
On vérifie que chaque ligne et que chaque colonne présente au moins un élément non nul. On s'assure ainsi qu'à chaque mode correspond au moins une configuration et que chaque configuration autorise au moins un mode. En ligne comme en colonne, il ne peut s'agir que de contraintes de type ou-exclusif. Par exemple pour le mode m.1 le système est soit dans la configuration c.1.1.1 soit dans la configuration c.1.1.2. De même pour la configuration c.1.1.2 le système est soit dans le mode m.1 soit dans le mode m.2.2.

Il faudra vérifier la cohérence de la représentation, en confrontant ces règles aux représentations de chacun des points de vue concernés. Ainsi une stratégie qui autoriserait le système à être dans le mode m.2.2 et dans la configuration c.1.1.1 remettrait en cause l'intégrité du système et est donc à rejeter. Une telle vérification est possible à l'aide d'algorithmes de recherche des chemins possibles (scénarios et configurations) dans chacun des réseaux de modes et de configurations.

Supposons maintenant que le système soit dans le mode m.2.1 et dans la configuration c.1.1.1. Supposons également qu'un scénario possible du point de vue mode soit pour une raison ou pour une autre un passage du mode m.2.1 au mode m.2.2, la relation du tableau 2.11 implique un passage dans la configuration c.1.1.2. En conséquence il faudra vérifier qu'il existe au moins une stratégie dans le contexte en cours qui autorise une telle coordination (de c.1.1.1 à c.1.1.2). Si ce n'était pas le cas alors il doit se diriger vers un contexte stratégique accessible qui autorise une telle coordination.

Il apparaît donc que cette analyse croisée permet un certain nombre de vérifications de la cohérence de chacun des points de vue mode et configuration mais également une aide pour la spécification des tâches de décision du point de vue stratégique.

E.3.2. Croisements des points de vue de la vision opérationnelle.



Les points de vue de la vision opérationnelle sont également contraints par des règles normatives. Une *stratégie* n'autorise qu'un sous-ensemble de *contextes de gestion*, une *gestion* n'autorise qu'un certain nombre de *contextes de pilotage*.

A l'inverse, l'application d'un type de *pilotage* nécessite le passage dans un des *contextes de gestion* qui l'autorise. Ces derniers peuvent nécessiter à leur tour un changement de *stratégie*. Les tableaux B.9 et B.10 donnent des exemples de contraintes entre *stratégie* et *gestion* et entre *gestion* et *pilotage*.

gestion/ stratégie	g.1.1	g.1.2	g.2
s.1	1	1	0
s.2	0	1	0
s.2	0	1	1

Tableau B.9 : règle normative entre stratégies et gestions

Il ne peut s'agir ici encore que de contraintes de type ou-exclusif puisqu'une seule stratégie et une seule gestion ne sont possibles à un instant donné. D'après cette relation, dans le contexte stratégique s.1, seuls les contextes de gestion g.1.1. et g.1.2 sont admissibles. Si le système est dans le contexte de gestion g.1.1 alors un changement de contexte stratégique de s.1 à s.2 nécessitera un changement de contexte de gestion vers g.1.2. Il reste à vérifier que les représentations des points de vue respectifs sont cohérentes avec ces contraintes.

gestion/ pilotage	p.1	p.2	p.3
g.1.1	1	0	0
g.1.2	0	1	0
g.2	0	1	1

tableau B.10 : règle normative entre gestions et pilotages

La relation du tableau B.10 contraint l'évolution des points de vue *gestion* et *programme*. Ainsi dans le contexte de gestion g.1.1 seul le contexte de pilotage p.1 est prévu. Un changement de contexte de g.1.1 vers g.2 entraîne un changement de contexte de pilotage vers p.2 ou-exclusif p.3.

On déduit aisément une contrainte entre les points de vue *stratégie* et *pilotage* à partir des deux relations précédentes par le produit de ces relations.

F. Règles normatives, fonction normative, fonction prévisionnelle, et gestion dynamique des représentations.

Des différentes analyses croisées, dont quelques exemples ont été présentés, est issu un réseau de contraintes sur les relations sémantiques entre les différents points de vue. Comme leur nom l'indique ces règles dotent le modèle d'une *fonction normative*. Cette fonctionnalité de la modélisation constitue un niveau supplémentaire d'aide à l'analyse du système et/ou à sa conception. L'analyse croisée des points de vue *mode* et *configuration* met en évidence un certain nombre de contraintes dont on tiendra compte dans le point de vue *stratégique* pour le contrôle des *scénarios* et de la *coordination*. De même l'analyse croisée des points de vue *organisation* et *programme* est une base pour la conception du contrôle des *tâches* et des *dispositif* dont on tiendra compte dans le point de vue *gestion*. etc.

Ces règles dotent également le modèle, dans une certaine mesure, d'une *fonction de prédiction*. Les contraintes devant être respectées y compris lors de l'évolution de l'état du système dans les différents points de vue, ces règles définissent un ensemble de trajectoires admissibles. Par ailleurs, les différents points de vue définissent des trajectoires possibles (scénarios, coordination, programmes, organisations,...). En confrontant, trajectoires admissibles et trajectoires possibles, il est possible d'opérer une gestion dynamique des différentes représentations afin de maintenir la cohérence de celles-ci. Ainsi certains changements de mode souhaités ou subis peuvent nécessiter des changements de configuration et réciproquement, des changements de stratégies entraîneront des changements de gestion, des changements de programme entraîneront des changements d'organisation, etc. Ce réseau de contraintes constitue une base sur laquelle s'appuierait cette gestion dynamique des représentations dans les différents points de vue. On doterait alors le modèle d'une fonction prédictive.

G. Niveau de formalisation.

Les exemples de contraintes présentées précédemment sont de nature ensembliste. Une ressource participe ou non à l'élaboration d'un dispositif, un dispositif supporte ou non une tâche, une tâche réalise ou non une fonction, etc. Elles donnent lieu à un raisonnement booléen, et à des inférences par conjonctions, disjonctions et implications de propositions logiques classiques. Ce type de règles est généralement satisfaisant pour un système technique comme un S.A.P, mais il est possible d'utiliser des règles de nature probabiliste, floue, ou autre. Supposons que, dans le cas de processus incertains, de n observations d'un système on tire par analyse des données la règle de nature probabiliste du tableau B.11 suivant :

modes/con- figurations	c.1	c.2	c.3	c.4
m.1	0,1	0,5	0,4	0
m.2	0,8	0	0	0,2
m.3	0	0,1	0,9	0

tableau B.11 : règle normative entre configurations et modes en terme de probabilité d'occurrence simultanée.

En fixant arbitrairement le *mode* on obtient les probabilités $p(c_j / m_i)$ pour que le système soit dans telle ou telle *configuration*. Sachant qu'il est forcément dans une des configurations, on vérifiera que la somme en ligne des probabilités est égale à 1. Ainsi la probabilité, sachant que le système est dans le mode m.1, pour que le système soit : dans la configuration c.1 est de 10%, dans la configuration c.2 est de 50%, et dans la configuration c.3 est de 40%, et il n'est jamais dans la configuration c.4. La relation inverse donnant la probabilité, sachant que le système est dans une *configuration* donnée, pour qu'il soit dans tel ou tel *mode* se calcule par la formule des probabilités conditionnelles:

$$p(m_i / c_j) = \frac{p(m_i \cap c_j)}{p(c_j)}$$

Les probabilités $p(m_i)$ sont égales à 1, les variables m_i étant imposées dans le tableau B.11. Les probabilités $p(m_i \cap c_j) = p(c_j / m_i)$ sont les coefficients du tableau B.11, les probabilités $p(c_j)$ sont les sommes en colonne des coefficients du tableau B.11. La relation inverse est donnée par le tableau B.12 :

configurations/ modes	m.1	m.2	m.3
c.1	0,11..1	0,88..9	0
c.2	0,83..3	0	0,16..7
c.3	0,36..36	0	0,81..81
c.4	0	1	0

tableau B.12 : règle normative inverse de celle du tableau B.11

En mettant en oeuvre des raisonnements et des inférences probabilistes, il est alors possible de gérer les représentations et dans une certaine mesure de simuler le système.

Dans le cas de processus dont la connaissances est imprécise et où l'on ne dispose pas de mesures statistiques sur les événements, l'utilisation de règles floues peut s'avérer pertinente. A partir d'une expertise du système, des règles comparables à des mesures de probabilité peuvent être spécifiées par des *mesures de possibilité* et des *mesures de nécessité*. Une mesure de possibilité permet d'exprimer à quel point l'occurrence d'un événement est considérée par l'expert comme possible et une mesure de nécessité permet

d'exprimer à quel point on en est certain, sans toutefois disposer d'une mesure sur la probabilité de réalisation de cette événement. L'occurrence d'un événement considérée par un expert comme tout à fait possible sera affectée d'une valeur maximale de 1, considérée comme impossible elle sera affectée d'une valeur nulle, considérée comme moyennement possible elle sera affectée d'une valeur comprise entre 0 et 1. L'occurrence d'un événement considérée comme certaine sera affectée d'une valeur égale à 1, considérée comme incertaine elle sera affectée d'une valeur nulle, entre les deux elle sera affectée d'une valeur comprise entre 1 et zéro. Une introduction à ce type de formalisme est donnée par [Bouc-93]. L'appel à des méthodes tel que le raisonnement possibiliste, la logique floue, et la théorie de l'évidence permettrons une gestion des représentations à partir de ce type de règles.

Conclusion.

Comme langage de représentation, celui de la méthode SAGACE à été retenu. Ce langage offre pour la représentation des systèmes la notion de *processeur*, permettant la représentation des couples (mission, processus). Quant à la méthode d'investigation proposée dans la méthodologie SAGACE, chaque étape de cette investigation et notre analyse se rejoignent. L'utilisation de *logiques externes* sont outre la définition du *projet d'étude*, une spécification des variables *environnement*, *finalité* et *théorie*. L'utilisation de *logiques internes* est dans la phase de cadrage une spécification du paramètre *système*. Enfin les différents points de vue de la matrice sont des représentations : des couples (mission, processus), de la *structure*, et du *comportement*.

La représentation d'un système en plusieurs points de vue proposée par la méthode SAGACE présente plusieurs intérêts. Tout d'abord, elle montre que la modélisation au niveau représentation ne se limite pas à la seule description des fonctions du système.

Sur la représentation fonctionnelle ensuite ; elle place évidemment la représentation fonctionnelle dans le cadre de ce que fait le système, mais dans une perspective indépendante du temps, ce qui distingue cette notion de celle de *programme* et de *mode*. Elle distingue également les fonctions du système de leurs supports, contrairement à une méthode de type S.A.D.T. Une représentation S.A.D.T comporte les données de support qui permettent de spécifier les moyens, tâches, et personnes intervenant dans la réalisation des fonctions en une seule représentation. En cela, SADT apparaît comme une représentation qui regrouperait en un seul les points de vue fonctionnel et structurel, sans toutefois pouvoir décrire les modalités d'organisation de ces supports en réseaux de ressources connectées entre elles ainsi que les modalités d'organisation de ces ressources dans le temps et leur affectation aux tâches.

La représentation de la structure dans la matrice est distribuée en trois points de vue, et montre qu'elle ne se résume pas à la seule description du réseau organique. Cette représentation permet également une description du fonctionnement de cette structure, que ne permettrait pas une représentation mono point de vue.

Le comportement quant à lui, prend un sens différent de celui généralement retenu en automatique. Il s'agit de décrire comment évolue la structure du système et dans quels contextes le système prend certaines de ses décisions : celles concernant l'*évolution*, la *gestion* et le *pilotage* de sa structure, et ce suivant trois perspectives, l'*intégrité*, l'*adaptation* et les *performances* de sa structure.

La représentation d'un système automatisé proposée dans ce chapitre montre ce que peut être, dans ce cas précis, une interprétation des préceptes définissant chacun des points de vue de cette matrice. Chacun des points de vue recouvre des notions classiques de l'automatique comme les *modes de marche*, les *configurations*, *programmes*, *réseau organique* ou encore *fonction*. Ces notions sont fédérées dans une structure d'accueil des connaissances sur le système qu'est la matrice SAGACE. Elle a en outre le mérite de les représenter dans un même langage à l'aide de la notion générique de *processeur*. La représentation du S.A.P par la méthode SAGACE est alors une démarche préalable à l'application des méthodes d'ingénierie.

En pratique, la représentation d'un système automatisé nécessitera une description de tout ou partie de l'ensemble des points de vue. Cela dépendra du projet d'étude, de la complexité du système étudié, et de son niveau d'automatisation. Un système peut ne comporter qu'un seul mode et/ou une seule configuration, ne mettre en oeuvre qu'un seul programme... Les applications entre points de vue peuvent être de simples bijections. Une tâche participera à une et une seule fonction, chaque ressource peut participer à un et un seul dispositif etc.

ANNEXES II

PROCESSUS DE TYPE T.....	281
<i>Systèmes fermés.</i>	281
Exemple 1 : Stockage d'énergie mécanique par une masse.	281
Exemple 2 : Stockage d'énergie thermique par un corps solide.....	284
Exemple 3 : Stockage d'énergie interne par un fluide.	285
<i>Systèmes ouverts</i>	286
Exemple 4 : Stockage d'énergie mécanique par une masse variable.	286
PROCESSUS DE TYPE E.....	289
<i>Exemple 5 : Transport de chaleur par diffusion thermique.</i>	289
<i>Exemple 6 : Transport convectif d'énergie hydraulique.</i>	290
PROCESSUS DE TYPE F.....	292
<i>Exemple 7 : Dissipation d'énergie hydraulique par frottement visqueux.</i>	292
<i>Exemple 8 : Dissipation d'énergie électrique.</i>	293
EXEMPLES DE RESEAUX DE PROCESSUS T, E, F.....	293
<i>Exemple 9 : Système mécanique de masse.</i>	293
a/ Système isolé :.....	293
b/ Système non isolé :.....	295
c/ Organisation du réseau.	296
-d/ Mise en équation du réseau :.....	297
<i>Exemple 10 : Echanges thermiques.</i>	298
a/ processus adiabatique.....	299
b/ système non isolé.	301

ANNEXE II

Mise en équation de réseaux de processus.

On trouvera dans les paragraphes ci-après quelques exemples de processus physiques pour lesquels on procède à l'élaboration des matrices ε et a .

Processus de type T

Systèmes fermés.

Exemple 1 : Stockage d'énergie mécanique par une masse.

Soit le système de la figure E1.1, de masse m soumise à l'action d'une force \vec{F} et de son poids $m\vec{g}$, animée d'une vitesse \vec{v} , à la position \vec{r} .

On représente le processus de stockage d'énergie mécanique par cette masse m par la figure E.1.2. Partant des vecteurs formels X et Y , on forme les vecteurs x , y structurés comme suit :

- a/ Mise en forme des vecteurs : d'après la représentation figure E1.2, on a :

$$X_1 \Leftrightarrow (\vec{F}, \vec{v}) = ({}^e x_1, {}^f x_1)$$

$$X_2 \Leftrightarrow (m\vec{g}, \vec{v}) = ({}^e x_2, {}^f x_2)$$

$$Y_1 \Leftrightarrow (\vec{v}, \vec{P}_m) = ({}^f y_1, {}^p y_1)$$

$$Y_2 \Leftrightarrow (m\vec{g}, \vec{r}) = ({}^e y_2, {}^q y_2)$$

soit en structurant les vecteurs en : effort, déplacement, flux, impulsion :

$$x = ({}^e x_1, {}^e x_2, {}^f x_1, {}^f x_2) \quad (E1.1.a)$$

$$y = ({}^e y_2, {}^q y_2, {}^f y_1, {}^p y_1) \quad (E1.2.a)$$

ou encore :

$$x = (\vec{F}, m\vec{g}, \vec{v}, \vec{v}) \quad (E1.1.b)$$

$$y = (m\vec{g}, \vec{r}, \vec{v}, \vec{P}_m) \quad (E1.2.b)$$

où \vec{P}_m est la quantité de mouvement ou impulsion mécanique.

N.B. : dans les vecteurs d'entrée et de sortie, apparaît plusieurs fois la même variable, par exemple : le vecteur de la vitesse \vec{v} est commun aux trois flux ${}^f x_1 = {}^f x_2 = {}^f y_1 = \vec{v}$. Bien que dans ce cas particulier cette vitesse soit la même, dans le cas général ce n'est pas forcément le cas. En conséquence, on traitera les instanciations de la même variable comme des variables distinctes.

- b/ Equations constitutives : La fonction d'état "énergie mécanique" s'écrit :

$$d\mathcal{E}_m = d\mathcal{E}_p + d\mathcal{E}_c = \delta W \quad (E1.3.a)$$

En termes de variables généralisées, le membre gauche de cette équation est de la forme :

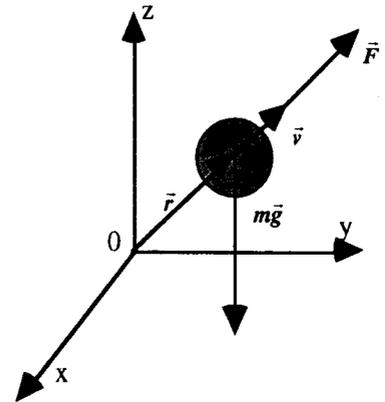


Figure E1.1 : soit un système de masse m constante, sa position et sa vitesse sont rapportées à un repère orthonormé. Cette masse est soumise à l'action de son poids et d'une force non conservative.

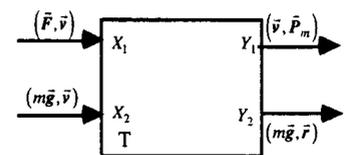


Figure E1.2 : Le processus mis en oeuvre par cette masse est un stockage d'énergie potentielle et cinétique. Ces énergies résultent de l'intégration des puissances de son poids et de la force extérieure \vec{F} .

$$d\mathcal{E}_m = fdp + edq. \quad (E1.3.b)$$

Exprimé en termes de variables du vecteur de sortie, le membre gauche de l'équation (E13.a) s'écrit :

$$d\mathcal{E}_m = {}^e y_2 \cdot d^q \bar{y}_2 + {}^f y_1 \cdot d^p \bar{y}_1 \quad (E1.3.c)$$

ou encore :

$$d\mathcal{E}_m = \bar{v} d\bar{p}_m + m\bar{g} d\bar{r} \quad (E1.3.d)$$

La forme de l'équation différentielle (E1.3.b) suggère que l'énergie mécanique est une fonction des variables d'impulsion et de déplacement :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m(q, p) \quad (6.E1.4)$$

Pour simplifier l'analyse, on ne s'intéresse qu'aux composantes du mouvement suivant l'axe des z , l'extension aux trois dimensions ne posant pas de problème particulier.

De l'équation d'état (E1.3.c) ou de (E1.3.d), on déduit les expressions suivantes des efforts et des flux :

$${}^e y_2 = \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial^q \bar{y}_2} = m \cdot g, \quad {}^f y_1 = \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial^p \bar{y}_1} = v_z \quad (E1.5. a, b)$$

Par différentiation, on obtient le système d'équations constitutives :

$$\begin{aligned} d^e y_2 &= \frac{\partial^e y_2}{\partial^q \bar{y}_2} d^q \bar{y}_2 + \frac{\partial^e y_2}{\partial^p \bar{y}_1} d^p \bar{y}_1 \\ d^f y_1 &= \frac{\partial^f y_1}{\partial^q \bar{y}_2} d^q \bar{y}_2 + \frac{\partial^f y_1}{\partial^p \bar{y}_1} d^p \bar{y}_1 \end{aligned} \quad (E1.6)$$

soient :

$$dv_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} dz + \frac{\partial v_z}{\partial p_{m,z}} dp_{m,z} \quad (E1.7.a)$$

$$dmg = \frac{\partial mg}{\partial z} dz + \frac{\partial mg}{\partial p_{m,z}} dp_{m,z} \quad (E1.7.b)$$

On vérifie que les relations de Maxwell sont respectées :

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}_m}{\partial z \partial p_{m,z}} = \frac{\partial mg}{\partial p_{m,z}} = 0 \quad (E1.8)$$

L'équation constitutive $dy = \varepsilon \cdot dy$ prend alors la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} d^e y_2 \\ d^q \bar{y}_2 \\ d^f y_1 \\ d^p \bar{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^e y_2 \\ d^q \bar{y}_2 \\ d^f y_1 \\ d^p \bar{y}_1 \end{pmatrix} \quad (E1.9.a)$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} dm g \\ dz \\ dv_z \\ dp_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dm g \\ dz \\ dv_z \\ dp_m \end{pmatrix} \quad (E1.9.b)$$

Ce système d'équations est bien une forme particulière de l'équation (6.17.p, cf. chapitre 6) pour une causalité intégrale, à ceci près que l'équation constitutive :

$$d^e y_2 = \frac{\partial^e y_2}{\partial^q \bar{y}_2} d^q \bar{y}_2 + \frac{\partial^e y_2}{\partial^p \bar{y}_1} d^p \bar{y}_1 \quad (E1.10)$$

est identiquement nulle.

- **c/ Equations structurelles** : Pour l'écriture des équations structurelles, on considère le bilan (E1.3.a) dans son ensemble. Le membre gauche exprimé en termes de variables du vecteur de sortie, le membre droit en termes de variables du vecteur d'entrée donnent la relation :

$${}^f y_1 \cdot d^p y + {}^e y_2 \cdot d^q \bar{y}_2 = {}^e x_1 \cdot {}^f x_1 \cdot dt + {}^e x_2 \cdot {}^f x_2 \cdot dt \quad (E1.11.a)$$

ou encore :

$$v_z \cdot dp_m + m \cdot g \cdot dz = F_z \cdot v_z \cdot dt + mg \cdot v_z \cdot dt \quad (E1.11.b)$$

Un des systèmes d'équations structurelles $\delta y = a \cdot \delta x$, compte tenu des identifications possibles entre les deux membres de cette équation, est :

$$\begin{pmatrix} d^e y_2 \\ d^q \bar{y}_2 \\ d^f y_1 \\ d^p \bar{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/p & -1/p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^e x_1 \\ {}^e x_2 \\ {}^f x_1 \\ {}^f x_2 \end{pmatrix} \quad (E1.12.a)$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} dm g \\ dz \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/p & -1/p & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dF_z \\ dm g \\ dv_z \\ dv_z \end{pmatrix} \quad (E1.12.b)$$

N.B. : le système d'équations structurelles que nous venons d'établir n'est qu'un des systèmes qu'il est possible d'écrire dans ce cas. Nous avons identifié la vitesse du flux d'énergie cinétique à celle de la vitesse du flux de la puissance du poids :

$$d^f y_1 = dv_z = d^f x_2$$

On aurait pu identifier cette vitesse comme étant la vitesse d'application de la force \vec{F} :

$$d^f y_1 = dv_z = d^f x_1$$

On obtiendrait alors un autre système d'équations structurelles. Le choix d'une possibilité plutôt qu'une autre est guidé par le contexte, notamment l'existence de boucles algébriques qui se traduit par des matrices non inversibles.

Exemple 2 : Stockage d'énergie thermique par un corps solide.

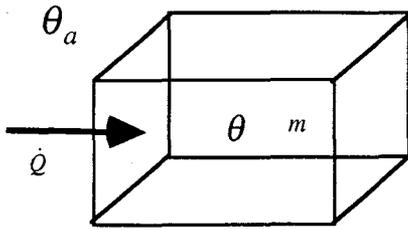


Figure E2.1: soit un corps solide de masse m , échangeant de l'énergie sous forme de chaleur avec le milieu extérieur.

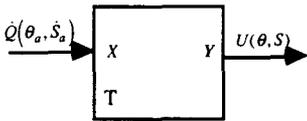


Figure E2.2 : représentation du processus de stockage d'énergie thermique par ce corps.

Soit un corps solide de masse m (figure E2.1), de température interne θ homogène, de volume v constant (on néglige la dilatation de ce corps), mécaniquement au repos. Ce système échange de la chaleur avec le milieu à la température θ_a . On représente le stockage d'énergie thermique par cette masse par la figure E2.2.

-a/ Mise en forme des vecteurs : Comme précédemment, on forme les vecteurs d'entrée et de sortie comme suit :

$$X \Leftrightarrow (\theta_a, \dot{S}_a) = (\epsilon_x, f_x) = x \quad (E2.1.a)$$

$$Y \Leftrightarrow (\theta, S) = (\epsilon_y, q_y) = y \quad (E2.1.b)$$

-b/ Equations constitutives : La fonction d'état énergie de ce système se résume à la différentielle de son énergie interne U :

$$dU = \theta \cdot dS \quad (E2.2.a)$$

où S est l'entropie du système. Le bilan d'énergie quant à lui s'écrit :

$$\theta \cdot dS = \delta Q \quad (E2.2.b)$$

où Q est la quantité de chaleur reçue algébriquement par ce corps.

Exprimé en termes de variables du vecteur de sortie, le membre gauche de l'équation (E2.2.b) devient :

$$dU = \epsilon_y \cdot d^q y \quad (E2.2.c)$$

et le membre droit exprimé en fonction des variables du vecteur d'entrée donne :

$$\delta Q = \epsilon_x \cdot f_x \cdot dt \quad (E2.2.d)$$

De l'équation d'état énergie (E2.2.a), on dérive le système d'équations constitutives que régit ce processus de la façon suivante :

- d'après l'équation d'état l'énergie, U est une fonction de l'entropie S du système : $U = U(S)$. En conséquence, on a :

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial S} = \theta(S) \quad (E2.3)$$

Par dérivation, on obtient :

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial S} ds = \frac{\theta}{m \cdot c} ds \quad (E2.4)$$

où c est la capacité calorifique du corps.

Après mise en forme de (E2.4), on obtient le système d'équations constitutives $dy = \epsilon \cdot dy$ suivant :

$$\left(\frac{d\theta}{dS} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \theta/m \cdot c \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dS} \right) \quad (E2.5)$$

- c/ Equations structurelles : Pour l'écriture des équations structurelles, on procède de la façon suivante :

- la quantité de chaleur reçue par le corps est :

$$\delta Q = \frac{1}{p} \delta \dot{Q} \quad (E2.6)$$

$$\text{On en déduit : } dS = \frac{1}{p} \left(\frac{\theta_a}{\theta} \cdot d\dot{S}_a \right). \quad (E2.7)$$

Après mise en forme de l'équation (E2.7), on aboutit à l'équation structurelle $dy = a \cdot dx$ suivante :

$$\left(\frac{d\theta}{dS} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{p} \cdot \frac{\theta_a}{\theta} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{d\theta_a}{d\dot{S}_a} \right) \quad (E2.8)$$

Exemple 3 : Stockage d'énergie interne par un fluide.

On considère ici le cas du système fermé (masse constante) de la figure E3.1, de température θ homogène dans tout le volume V , de pression P également homogène, mécaniquement au repos et qui reçoit du milieu extérieur de la chaleur et du travail mécanique. L'homogénéité des variables intensives assure un processus réversible, il n'y a donc pas de production d'entropie. On représente le processus de stockage d'énergie par le fluide comme sur la figure E3.2. Le système reçoit un flux de chaleur \dot{Q} et de la puissance mécanique due à la force de pression P_a .

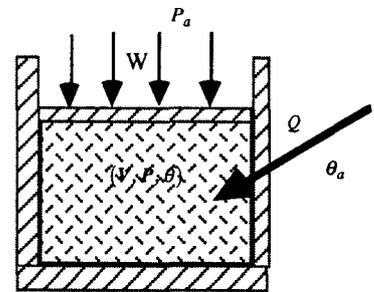


Figure E3.1 : système thermodynamique fermé, contenant un fluide caractérisé par son volume, sa pression, sa température et son entropie. Ce système échange du travail et de la chaleur avec le milieu extérieur.

a/ **Mise en forme des vecteurs** : On forme les vecteurs d'entrée et de sortie suivants :

$$x = ({}^e x_1, {}^e x_2, {}^f x_1, {}^f x_2)^t = (\theta_a, P_a, \dot{S}_a, q_v)^t \quad (E3.1.a)$$

$$y = ({}^e y_1, {}^e y_2, {}^q y_1, {}^q y_2)^t = (\theta, P, S, V)^t \quad (E3.1.b)$$

b/ **Equations constitutives** : L'équation d'état "énergie interne" qui régit le comportement du fluide contenu dans le volume V est :

$$dU = \theta dS - PdV. \quad (E3.2)$$

En vertu du premier principe de la thermodynamique, on a :

$$\theta dS - pdV = \delta Q + \delta W. \quad (E3.3)$$

Cette équation d'état (E3.3) suggère que l'énergie interne du système est une fonction de l'entropie et du volume. Mais supposons que pour des raisons de commodité, on choisisse comme variables indépendantes l'entropie S et la pression P . Pour écrire les équations constitutives, on cherche donc une fonction d'état qui soit une fonction de ces deux variables prises comme variables indépendantes. On forme alors à partir de l'énergie interne U la fonction $H=U+PV$ qui est l'enthalpie du système. On a l'expression de la différentielle de l'enthalpie :

$$dH = \theta dS + VdP \quad (E3.4)$$

Quant à la quantité de chaleur reçue algébriquement par le système et par unité de temps elle est égale à :

$$\delta Q = \theta_a \cdot \dot{S}_a \cdot dt \quad (E3.5.a)$$

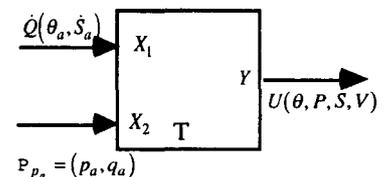


Figure E3.2: représentation du processus de stockage d'énergie par le système fermé de la figure E3.1

L'expression du travail de la pression atmosphérique est égale à :

$$\delta W = P_a \cdot q_v \cdot dt \quad (E3.5.b)$$

Il vient, d'après la fonction d'état enthalpie (E3.4) :

$$\theta(S, P) = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_p \quad V(S, P) = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_S \quad (E3.6.a, b)$$

On en déduit alors, par différentiation de ces variables, les équations constitutives :

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial S} dS + \frac{\partial \theta}{\partial p} dp \quad \text{et} \quad dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial p} dp \quad (E3.7.a, b)$$

En introduisant les coefficients calorifiques du fluide :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial S} \right)_p = -\frac{\theta}{C_p} \quad (E3.8.a)$$

où C_p est la capacité calorifique à pression constante, et

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S = -\chi_S \cdot V \quad (E3.8.b)$$

où χ_S est le coefficient relatif de compressibilité du fluide à entropie constante, et à l'aide des relations de Maxwell,

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right)_S = \frac{h}{\theta} = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial S} = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_p \quad (E3.9)$$

où h est le coefficient de chaleur latente de compression ; les équations constitutives (E3. 7.a) et (E3.7.b) s'écrivent après mise en forme, $dy = \varepsilon \cdot dy$:

$$\begin{pmatrix} d\theta \\ dp \\ dS \\ dV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{h}{\theta} & -\frac{\theta}{C_p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\chi_S \cdot V & \frac{h}{\theta} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\theta \\ dp \\ dS \\ dV \end{pmatrix} \quad (E3.10)$$

-c/ Equations structurelles : Pour les équations structurelles, par identification des variables du vecteur de sortie à celles du vecteur d'entrée et après mise en forme, on a le système d'équations suivant :

$$\begin{pmatrix} d\theta \\ dp \\ dS \\ dV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\theta}{\theta_a} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\theta_a \\ dp_a \\ dS_a \\ dq_a \end{pmatrix} \quad (E3.11)$$

Systèmes ouverts

Exemple 4 : Stockage d'énergie mécanique par une masse variable.

On reconsidère le système de masse de la figure E4.1, mais dont la masse varie entre deux dates t et $t+dt$ de m à $m+\delta m$. On note q_m le débit massique. On ne s'intéressera, comme pour le cas d'un système fermé, qu'aux composantes du mouvement suivant l'axe des z .

On utilise le bilan d'exergie (6.14.b, cf. chap. 6) pour les systèmes ouverts qui dans ce cas donne l'équation :

$$d\mathcal{E}_m = \delta W + q_m(e_c + e_p).dt \quad (E4.1)$$

où e_c et e_p sont respectivement les énergies cinétique et potentielle massiques apportées au système par le débit de masse q_m . Le processus de stockage est alors représenté par la figure E4.1.

Les expressions de ces énergies massiques sont :

$$e_c = \frac{v_z^2}{2} \text{ et } e_p = g \cdot z \quad (E4.2.a, b)$$

Les débits d'énergies correspondants sont respectivement :

$$q_m \cdot e_c = q_m \cdot \frac{v_z^2}{2} \quad (E4.3.a)$$

$$q_m \cdot e_p = q_m \cdot g \cdot z \quad (E4.3.b)$$

Le débit d'énergie cinétique (E4.3.a) s'exprime par le produit suivant de variables généralisées :

$$q_m \cdot e_c = \frac{1}{2}(e \cdot f) \quad (E4.4.a)$$

où l'effort serait :

$$\frac{\delta m \cdot v}{dt} = \frac{\delta p}{dt} \quad (E4.4b)$$

qui est un flux de quantité de mouvement par unité de temps et qui à la dimension de la dérivée d'une impulsion. Le flux est alors:

$$f = v_z \quad (E4.4.c)$$

Le cas du flux d'énergie potentielle (E4.3.b) quant à lui pose un problème d'interprétation en termes de variables généralisées. En effet bien que ce produit ait la dimension d'une puissance, il n'est pourtant pas le produit d'une variable d'effort par une variable de flux. Dans ce cas précis, on se trouve face à un produit de la dérivée d'un effort par un déplacement :

$$q_m \cdot g \cdot z = \dot{e} \cdot q \quad (E4.5)$$

Pour tenir compte de ce cas, on structure les vecteurs d'entrée et de sortie par ordre de dérivation décroissant comme suit :

$$y = ({}^e y_2, {}^q y_2, {}^f y_1, {}^p y_2) = (mg, z, v_z, p_m) \quad (E4.6.a)$$

$$x = (\dot{e}, e, f, q)$$

$$x = ({}^e x_2, {}^e x_1, {}^e x_3, {}^e x_4, {}^f x_1, {}^f x_3, {}^f x_4, {}^q x_2) \quad (E4.6.b)$$

$$x = (q_m \cdot g, q_m \cdot v_z, F_z, mg, v_z, v_z, v_z, z)$$

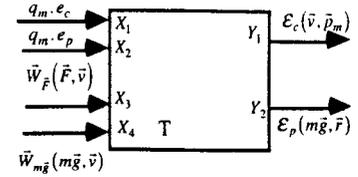


Figure E4.1 : représentation du processus de stockage d'énergie mécanique par une masse variable. Par rapport au système fermé, ce processus se voit affecté de deux flux de puissance supplémentaires en entrée, correspondant aux apports algébriques d'énergies cinétique et potentielle par le débit de masse.

N.B. : on ne perdra pas de vue que plusieurs modalités d'une même variable correspondent à un paramètre commun à des vecteurs distincts, il convient donc de les traiter comme des variables différentes.

Le membre gauche de l'équation (E4.1) reste inchangé par rapport au bilan d'énergie du système fermé (E1.3.d), les équations constitutives restent donc identiques, soit :

$$\begin{pmatrix} dm_g \\ dz \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dm_g \\ dz \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} \quad (E4.7)$$

-c/ Equations structurelles : Les équations structurelles, compte tenu de l'ordonnement des variables du vecteur d'entrée et de leur dimension, donne le système suivant :

$$\begin{pmatrix} dm_g \\ dz \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2p & 1/p & -1/p & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq_m \cdot g \\ dq_m \cdot v_z \\ dF_z \\ dm_g \\ dv_z \\ dv_z \\ dz \\ dz \end{pmatrix} \quad (E4.8)$$

Processus de type E

Exemple 5 : Transport de chaleur par diffusion thermique.

On considère le système de la figure E5.1, constitué de deux corps de masse m_1 et m_2 . On caractérise l'état de chacun des deux corps par les couples de variables (température, entropie) suivants : (θ_1, S_1) , (θ_2, S_2) . On suppose que la température des deux corps est homogène dans le volume occupé par chacun d'eux, et qu'ils subissent donc individuellement des transformations réversibles. On s'intéresse uniquement au processus de transport de chaleur entre ces deux corps. On représente ce processus par la figure E5.2.

A l'origine de cet échange, il existe une différence d'énergies potentielles thermiques, le gradient de températures de l'ensemble du système est non nul. Le corps 1 cède au corps 2 une quantité de chaleur par unité de temps \dot{Q}_{12} . De manière symétrique le corps 2 cède au corps 1 une quantité de chaleur par unité de temps \dot{Q}_{21} égale et opposée.

a/ Equations constitutives : On procède à l'écriture des relations constitutives de la façon suivante. On prend comme sens de propagation le sens des x positifs (figure E5.1), le flux de chaleur \dot{Q} créé par la différence de températures des deux corps est :

$$\dot{Q} = -\lambda \text{grad}\theta = -\lambda(\theta_2 - \theta_1). \quad (E5.1)$$

La chaleur reçue algébriquement par unité de temps par le corps 1 (E5.2.a) est égale à ce flux de chaleur et de même signe que lui (E5.1), quant à la quantité de chaleur reçue algébriquement par unité de temps par le corps 2 elle est égale et de signe opposée (E5.2.b) :

$$\dot{Q}_{12} = \dot{Q} \quad (E5.2.a)$$

$$\dot{Q}_{21} = -\dot{Q} \quad (E5.2.b)$$

En fonction des variables de température et d'entropie de chacun des deux corps ces flux de chaleur (E5.2.a et b) s'écrivent :

$$\theta_2 \cdot \dot{S}_2 = -\lambda(\theta_2 - \theta_1) \quad (E5.3.a)$$

$$\theta_1 \cdot \dot{S}_1 = \lambda(\theta_2 - \theta_1) \quad (E5.3.b)$$

Après différentiation et mise en forme, on obtient le système d'équations constitutives $dy = \varepsilon \cdot dy$:

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\dot{S}_1 \\ d\dot{S}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda \cdot \frac{\theta_2}{\theta_1^2} & \lambda \cdot \frac{1}{\theta_1} & 0 & 0 \\ \lambda \cdot \frac{1}{\theta_2} & -\lambda \cdot \frac{\theta_2}{\theta_2^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\dot{S}_1 \\ d\dot{S}_2 \end{pmatrix} \quad (E5.4)$$

B/ Equations structurelles : Pour les équations structurelles $dy = a \cdot dx$, on a :

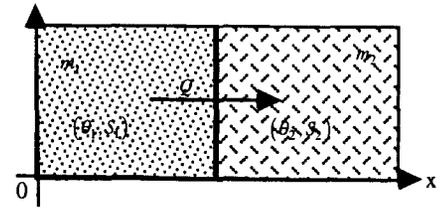


Figure E5.1: un système de deux masses en contact. Ces deux corps de même capacité thermique échangent de l'énergie sous forme de chaleur. Les températures de chacun des deux corps sont considérées comme homogènes dans chacun des volumes occupés par les deux corps. Seule l'interface présente un gradient de températures non nul. On considère alors que chacun des corps est le siège d'un processus réversible alors que globalement le système est le siège d'un processus irréversible avec production d'entropie.

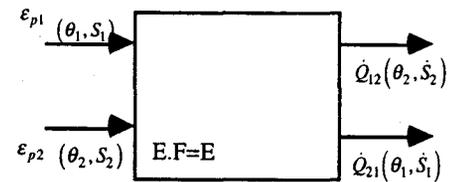


Figure 6.18 : représentation du processus d'échange de chaleur à l'interface entre les deux corps de la figure E5.1.

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\dot{S}_1 \\ d\dot{S}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix} \quad (E5.5)$$

Exemple 6 : Transport convectif d'énergie hydraulique.

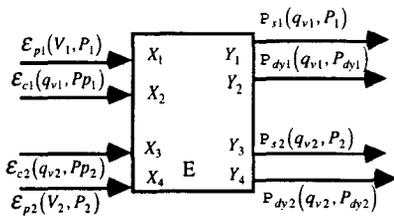


Figure E6.2 : Représentation du processus de transport mis en oeuvre par le fluide en écoulement figure E6.1..

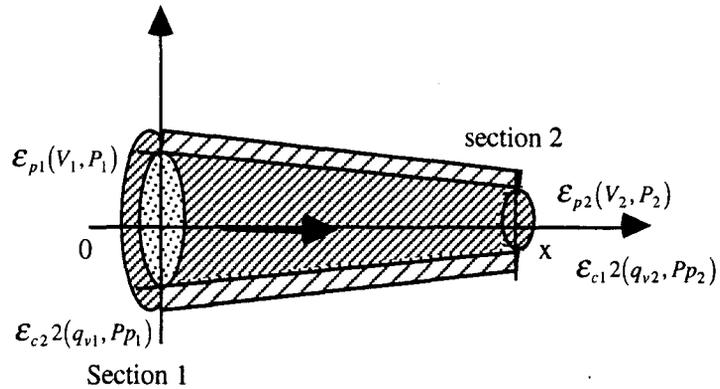


Figure E6.1 : coupe d'une canalisation de section variable dans laquelle circule un fluide incompressible.

On considère le système de la figure E6.1, où dans une canalisation de section variable s'écoule un fluide. On considère le fluide comme non visqueux. On néglige ainsi les pertes par frottement visqueux. On le considère également comme étant isochore. A chaque extrémité de la canalisation, le fluide est soumis aux travaux des forces de pression statiques qui dérivent de niveaux d'énergies potentielles hydrauliques à l'entrée et à la sortie de la canalisation (P_i, V_i) . D'autre part, ce fluide est animé d'une vitesse et possède donc une énergie cinétique (Pp_i, q_{v_i}) dépendante de la section et que l'on ne négligera pas. Ces énergies cinétiques sont à l'origine de pressions dynamiques équivalentes pour chacune des sections 1 et 2. On représente le processus de transport par la figure E6.2. A chacune des sections, on a une puissance hydraulique dérivant d'un potentiel représentée par un couple (P_i, q_{v_i}) (pression statique, débit volumique), et une puissance hydraulique qui dérive d'une énergie cinétique représentée par un couple (P_{dyn_i}, q_{v_i}) (Pression dynamique, débit volumique).

a/ Vecteurs d'entrée et de sortie : Les vecteurs d'entrée et de sortie structurés suivant les conventions d'ordonnancement des paramètres des vecteurs sont :

$$\begin{pmatrix} e \\ q \\ f \\ p \end{pmatrix} \equiv x = \begin{pmatrix} e_{x_1} \\ e_{x_4} \\ q_{x_1} \\ q_{x_4} \\ f_{x_2} \\ f_{x_3} \\ p_{x_2} \\ p_{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ V_1 \\ V_2 \\ q_{v_1} \\ q_{v_2} \\ P_{p_1} \\ P_{p_2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \equiv y = \begin{pmatrix} e_{y_1} \\ e_{y_2} \\ e_{y_3} \\ e_{y_4} \\ f_{y_1} \\ f_{y_2} \\ f_{y_3} \\ f_{y_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_{dyn_1} \\ P_2 \\ P_{dyn_2} \\ q_{v_1} \\ q_{v_1} \\ q_{v_2} \\ q_{v_2} \end{pmatrix}$$

On procède à la mise en équation de la façon ci-après.

b/ Equations constitutives : Pour les équations constitutives, on choisit d'exprimer les pressions en fonction des débits, on a les relations suivantes :

$$P_{dy1} = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{q_{v1}^2}{A_1^2} \text{ et } P_{dy2} = \frac{\rho}{2} \cdot \frac{q_{v2}^2}{A_2^2}, \quad (E6.1.a, b)$$

A_1 et A_2 sont les l'aires des sections à l'entrée et à la sortie de la canalisation (figure E6.1).

Il vient, après différentiation et mise en forme des équations (E6.1.a, b), le système d'équations constitutives $dy = a \cdot dx$:

$$\begin{pmatrix} dP_{s1} \\ dP_{dy1} \\ dP_{s2} \\ dP_{dy2} \\ \frac{dq_{v1}}{dq_{v1}} \\ dq_{v1} \\ dq_{v2} \\ dq_{v2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho}{2} \cdot \frac{q_{v1}}{A_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho}{2} \cdot \frac{q_{v2}}{A_2^2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dP_{s1} \\ dP_{dy1} \\ dP_{s2} \\ dP_{dy2} \\ \frac{dq_{v1}}{dq_{v1}} \\ dq_{v1} \\ dq_{v2} \\ dq_{v2} \end{pmatrix} \quad (E6.2)$$

c/ Equations structurelles : Pour les équations structurelles $dy = a \cdot dx$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} dP_{s1} \\ dP_{dy1} \\ dP_{s2} \\ dP_{dy2} \\ \frac{dq_{v1}}{dq_{v1}} \\ dq_{v1} \\ dq_{v2} \\ dq_{v2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dP_1 \\ dP_2 \\ dV_1 \\ dV_2 \\ \frac{dq_{v1}}{dq_{v1}} \\ dq_{v2} \\ dP_{p_1} \\ dP_{p_2} \end{pmatrix} \quad (E6.3)$$

On remarquera que dans le cas d'un système fermé (exemple 5 précédent de l'échange d'énergie thermique entre deux corps) on pouvait identifier les flux aux dérivées des variables de déplacement (E5.5), ce qui n'est plus le cas pour des systèmes ouverts.

Processus de type F

Exemple 7 : Dissipation d'énergie hydraulique par frottement visqueux.

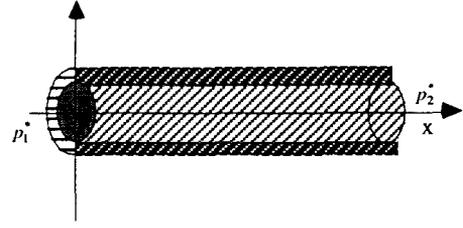


Figure E7.1 : écoulement d'un fluide visqueux dans une canalisation droite de section constante.

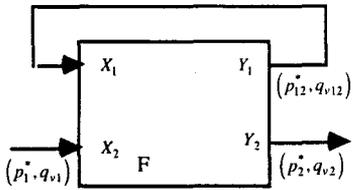


Figure E7.2: représentation du processus de dissipation d'énergie dû à la viscosité du fluide.

On considère le système de la figure E7.1, où un fluide visqueux circule dans une canalisation de section constante. On considère le fluide comme étant incompressible. La force qui tend à accélérer le fluide est la différence de charges hydrauliques (pression statique + pression dynamique) entre les sections en entrée et sortie de la canalisation. On ne s'intéresse qu'au processus de pertes de charges par frottement visqueux. Ce processus peut se représenter comme sur la figure E7.2, où la puissance hydraulique à l'entrée est transformée en la puissance hydraulique à la sortie, après dissipation d'énergie. On remarquera le rebouclage du flux de puissance dissipée, ce rebouclage traduit une contre réaction. Cette structure n'exprime rien d'autre que le fait que la puissance en sortie soit fonction de la puissance en entrée et de la puissance dissipée.

a/ Equations constitutives : La relation constitutive qui régit ce processus nous est donnée par la relation de Poiseuille pour une section circulaire :

$$q_v = -\frac{\pi}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x} \cdot R^4 \quad (E7.1.a)$$

où R est le rayon de la section et μ la viscosité dynamique.

En régime établi, le gradient de pressions est constant sur l'axe des x . En conséquence, on a :

$$q_v = -\frac{\pi}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{p_{12}^*}{l} \cdot R^4 \quad (E7.1.b)$$

Après différentiation et mise en forme de l'équation (E7.1.b) le système d'équations constitutives s'écrit :

$$\begin{pmatrix} dp_{12}^* \\ dp_2^* \\ dq_{v12} \\ dq_{v2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\pi}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{R^4}{l} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp_{12}^* \\ dp_2^* \\ dq_{v12} \\ dq_{v2} \end{pmatrix} \quad (E7.2)$$

b/ Equations structurelles : Pour les équations structurelles, on a :

$$\begin{pmatrix} dp_{12}^* \\ dp_2^* \\ dq_{v12} \\ dq_{v2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp_{12}^* \\ dp_1^* \\ dq_{v12} \\ dq_{v1} \end{pmatrix} \quad (E7.3)$$

Exemple 8 : Dissipation d'énergie électrique.

On considère le dipôle électrique de la figure E8.1, le processus auquel on s'intéresse est celui de la dissipation de puissance électrique aux bornes de ce dipôle. Ce processus est analogue au précédent, seules les variables et leur nature théorique changent. On représente ce processus selon la figure E8.2.

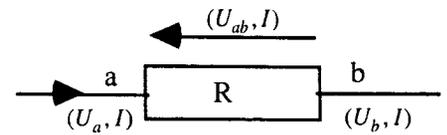


Figure E8.1 : un dipôle résistif traversé par un courant .

a/ Equations constitutives : L'écriture des relations constitutives à partir de la loi d'Ohm donne :

$$\begin{pmatrix} dU_{ab} \\ dU_b \\ dI_{ab} \\ dI_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dU_{ab} \\ dU_b \\ dI_{ab} \\ dI_b \end{pmatrix} \quad (E8.1)$$

On notera que la causalité des équations (E8.1) est légèrement différente de celle du système (E7.2). Les répercussions de l'adoption d'une causalité plutôt qu'une autre ainsi que des critères de choix de cette causalité sont analysés au chapitre 6.

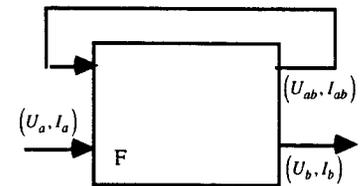


Figure E8.2 : représentation du processus F de dissipation d'énergie.

b/ Equations structurelles : Pour les relations structurelles, on a :

$$\begin{pmatrix} dU_{ab} \\ dU_b \\ dI_{ab} \\ dI_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dU_{ab} \\ dU_a \\ dI_{ab} \\ dI_a \end{pmatrix} \quad (E8.2)$$

Exemples de réseaux de processus T, E, F

Nous avons jusqu'ici procédé à l'élaboration des équations constitutives et structurelles de processus de type simple. Les paragraphes suivants donnent quelques exemples de mises en équation de réseaux de processus.

Exemple 9 : Système mécanique de masse.

Reconsidérons le système de masse m de l'exemple 1 dont seul le processus T a été étudié .

a/ Système isolé :

On considérera dans un premier temps ce système mécaniquement isolé, animé d'une vitesse \bar{v} à la position \bar{r} . Il est le siège d'un processus de stockage d'énergies potentielle et cinétique ainsi que d'une transformation d'énergie cinétique en énergie potentielle et réciproquement. On le représente comme sur la figure E9.1. Il ne subit que le travail de son poids.

- a1/ processus T.

Le principe de conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$d\mathcal{E}_m = d\mathcal{E}_c + d\mathcal{E}_p = 0 \quad (E9.1.a)$$

En termes de variables du vecteur de sortie du processus T, on a :

$$\vec{v} \cdot d\vec{p} + m\vec{g} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (E9.1.b)$$

Dans cette équation, le travail du poids n'est pas explicité, pourtant il y a bien variation de l'état mécanique de cette masse due au travail du poids. On a, d'après le bilan de l'énergie mécanique (E9.1.a) :

$$d\mathcal{E}_c = -d\mathcal{E}_p \quad (E9.1.c)$$

En termes de processus, on pourrait dire qu'il y a transformation d'énergie potentielle en énergie cinétique. D'après la typologie des processus que nous avons spécifiée, ce processus ne saurait être qu'un processus de type composé E.F.T. La séquence E.F représente la transformation de l'énergie potentielle en puissance, cette puissance est celle du poids. La séquence T quant à elle représente le processus de stockage (par la masse m) de cette puissance en énergie cinétique. On représente ces processus comme sur la figure E9.1. La puissance dérivée résulte d'une différence d'énergies potentielles non nulle $\mathcal{E}_p - \mathcal{E}_{p0} \neq 0$ qui s'annule pour $z \leq 0$. On interdit les z négatifs (plancher). La séquence E.F.T de processus représente un flux interne d'énergie.

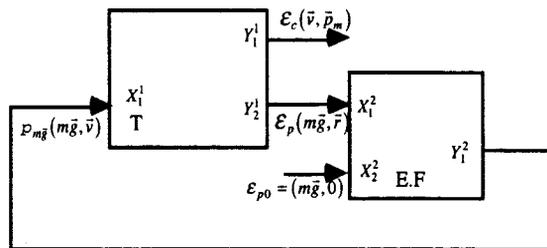


Figure 6E9.1 : représentation détaillée du système de la figure E1.1, considéré dans un premier temps comme mécaniquement isolé.

1/ Vecteurs d'entrée et de sortie :

Les vecteurs d'entrée et de sortie sont :

$$y^1 = \begin{pmatrix} e y_2^1 \\ q y_2^1 \\ f y_1^1 \\ p y_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \\ z \\ v_z \\ p_{m,z} \end{pmatrix} \quad x^1 = \begin{pmatrix} e x_1^1 \\ f x_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \\ v_z \end{pmatrix} \quad (E9.2)$$

2/ Equations constitutives et structurelles :

La mise en équation du processus de type T donne, sur l'axe des z , les équations constitutives et structurelles suivantes :

$$\begin{pmatrix} dmg \\ dz \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dmg \\ dz \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} \quad (E9.3.a)$$

$$\begin{pmatrix} d^e y_2^1 \\ d^q y_2^1 \\ d^f y_1^1 \\ d^p y_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1/p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^e x_1^1 \\ d^f x_1^1 \end{pmatrix} \quad (E9.b)$$

- a.2/ Processus E.F :

La mise en équation du processus de type E.F est la suivante:

L'effort (le poids) dérive d'un potentiel, c'est une force conservative :

$$de = dm\bar{g} = d(-grad(\mathcal{E}_p)) \quad (E9.4.a)$$

Le flux (la vitesse d'application de la force) s'identifie à la dérivée du déplacement (cas d'un système isolé):

$$df = p \cdot d\bar{r} = d\bar{v} \quad (E9.4.b)$$

1/ Equations structurelles :

On aboutit donc à l'équation structurelle suivante pour l'axe des z, avec comme vecteurs d'entrée et de sortie :

$$y^2 = \begin{pmatrix} e y_1^2 \\ f y_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \\ v_z \end{pmatrix} \quad x^2 = \begin{pmatrix} e x_1^2 \\ e x_2^2 \\ q x_1^2 \\ q x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (E9.5.a)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} d^e y_1^2 \\ d^f y_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^e x_1^2 \\ d^e x_2^2 \\ d^q x_1^2 \\ d^q x_1^2 \end{pmatrix} \quad (E9.5.b)$$

2/ Equation constitutives.

Pour les équations constitutives, on a :

$$\begin{pmatrix} d^e y_1^2 \\ d^f y_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^e y_1^2 \\ d^f y_1^2 \end{pmatrix} \quad (E9.6)$$

elles sont identiquement nulles.

b/ Système non isolé :

Considérons maintenant que le système subit, outre le travail de son poids, l'action d'une force \bar{F} . On a l'équation d'état :

$$d\mathcal{E}_c + d\mathcal{E}_p = \bar{F} \cdot d\bar{r} \quad (E9.7)$$

La représentation du processus est alors celui de la figure E9.2, où la puissance de cette force est schématisée.

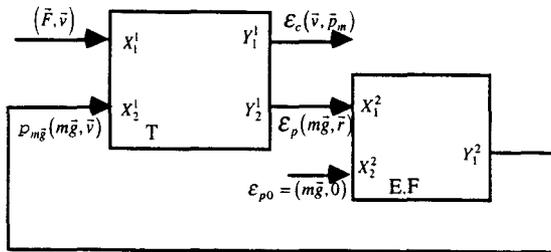


Figure E9.2 : représentation du système de la figure E1.1 dans le cas d'un système non isolé.

-b1/ Processus T :

Pour la mise en équation, seules les relations structurelles du processus de type T sont affectées, on a suivant l'axe des z :

1/ Vecteurs d'entrée et de sortie.

Le vecteur d'entrée qui devient :

$$x^1 = \begin{pmatrix} e x_1^1 \\ e x_2^1 \\ f x_1^1 \\ f x_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_z \\ mg \\ v_z \\ v_z \end{pmatrix} \tag{E9.8.a}$$

2/ Equations structurelles .

On a le nouveau système d'équations :

$$\begin{pmatrix} dmg \\ dz \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/p & -1/p & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dF_z \\ dmg \\ dv_z \\ dv_z \end{pmatrix} \tag{E9.8.b}$$

c/ Organisation du réseau.

La connexion des entrées et sorties des processus de ce système est prise en compte par les équations d'organisation de type $dx^{(i)} = c.dy^{(j)}$. On a les égalités suivantes :

- Egalités entre certaines sorties du processus de type T et certaines entrées du processus de type E.F :

- la première entrée du processus E.F est la deuxième sortie du processus T $x_1^2 = x_2^1$, soit :

$$\begin{pmatrix} d^e x_1^2 \\ d^q x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^e y_2^1 \\ d^q y_2^1 \end{pmatrix} \tag{E9.10.a}$$

- Egalités entre des entrées du processus de type T et des sorties du processus E.F.

- la deuxième entrée du processus de type T est égale à la sortie du processus de type E.F, soit : $x_2^1 = y_1^2$

$$\begin{pmatrix} d^e x_2^1 \\ d^f x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^e y_1^2 \\ d^f y_1^2 \end{pmatrix} \quad (E9.10.b)$$

Il apparaît donc que le processus réellement mise en oeuvre par cette masse n'est pas simplement un stockage comme cela à été représenté sur la figure E1.2. Il existe aussi des phénomènes de transport qui représentent la transformation de l'énergie potentielle en énergie cinétique et réciproquement. Cette aspect interne au système n'est pas explicité par l'équation de conservation de l'énergie mécanique, mais doit être pris en compte et représenté.

-d/ Mise en équation du réseau :

La mise en équation de ce réseau de processus (figure E9.2) est menée de la façon suivante.

1/ Vecteur d'entrée et de sortie.

On forme tout d'abord les vecteurs des variables d'entrée et de sortie de l'ensemble du réseau. Structurés suivant les conventions d'ordonnement des paramètres des vecteurs, ils deviennent :

$$y = \begin{pmatrix} e y_2^1 \\ e y_1^2 \\ q y_2^1 \\ f y_1^1 \\ f y_1^2 \\ p y_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \\ mg \\ z \\ v_z \\ v_z \\ p_{m,z} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} e x_1^1 \\ e x_2^1 \\ e x_1^2 \\ e x_2^2 \\ q x_1^2 \\ q x_1^1 \\ q x_1^2 \\ f x_1^1 \\ f x_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_z \\ mg \\ mg \\ mg \\ z \\ 0 \\ v_z \\ v_z \end{pmatrix} \quad (E9.11.a)$$

2/ Equations constitutives du réseau.

L'équation $dy = \varepsilon . dy$ est alors, par réécriture des équations (E9.3.a) et (E9.8.b) :

$$\begin{pmatrix} dmg \\ dmg \\ dz \\ dv_z \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dmg \\ dmg \\ dz \\ dv_z \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} \quad (E9.11.b)$$

3/ Equations structurelles du réseau.

L'équation $dy = a . dx$ s'écrit, à partir des systèmes d'équations (E9.5.b) et (E9.8.b) :

$$\begin{pmatrix} dm_g \\ dm_g \\ dz \\ dv_z \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ -1/p & -1/p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dF_z \\ dm_g \\ dm_g \\ dz \\ d0 \\ dv_z \\ dv_z \end{pmatrix} \quad (E9.11.c)$$

Il existe d'autres systèmes d'équations structurelles en effet le système précédent ne retient qu'un couple parmi les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} d^e y_1^2 = d^e x_1^2 = d^e x_2^2 = dm_g \\ d^f y_1^1 = d^f x_1^1 = d^f x_2^1 = dv_z \end{aligned}$$

Il existe en fait autant d'équations structurelles qu'il y a de couples d'égalités pris parmi les précédents, par exemple :

$$\begin{pmatrix} dm_g \\ dm_g \\ dz \\ dv_z \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ -1/p & -1/p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dF_z \\ dm_g \\ dm_g \\ dz \\ d0 \\ dv_z \\ dv_z \end{pmatrix} \quad (E9.11.d)$$

4/ Equation d'organisation du réseau.

A partir des équations (E9.10.a) et (E9.10.b) on déduit l'équation d'organisation du réseau :

$$\begin{pmatrix} dF_z \\ dm_g \\ dm_g \\ dm_g \\ dz \\ d0 \\ dv_z \\ dv_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dm_g \\ dm_g \\ dz \\ dv_z \\ dv_z \\ dp_{m,z} \end{pmatrix} \quad (E9.12)$$

Exemple 10 : Echanges thermiques.

On considère un corps de masse m , composé de deux corps de masse m_1 et m_2 , avec $m_1 + m_2 = m$. La température de chacun de ces corps est respectivement θ_1 et θ_2 . On supposera qu'individuellement chacun des deux corps est le siège de processus réversibles, cela suppose que leur température (variable intensive) θ_1 et θ_2 sont homogènes dans les volumes occupés par chacune des deux masses. On se ramène

donc au système de l'exemple 5 dont seul le processus de transport à été mis en équation.

a/ processus adiabatique.

On suppose, dans un premier temps, que le système global est isolé thermiquement de l'extérieur (processus adiabatique). Alors chacun des deux corps qui le composent est le siège de processus réversibles. Le système global est quant à lui le siège d'un processus irréversible (production d'entropie) puisqu'il existe un gradient non nul de températures à l'interface.

Les bilans de l'énergie interne et de l'entropie s'écrivent pour le système global :

$$dU_m = \theta dS = 0 \quad (E10.1.a)$$

$$dS = \delta S^r + \delta S^p \quad (E10.1.b)$$

Le processus global étant adiabatique, l'expression de l'entropie est :

$$\delta S^r \equiv 0, \quad dS = \delta S^p \quad (E10.1.c)$$

La variation d'entropie du système global se résume à la production interne d'entropie, l'entropie reçue du milieu extérieur étant nulle.

En fonction des énergies internes de chacun des deux corps, on a l'expression suivante de l'énergie interne du système global :

$$dU_m = dU_{m1} + dU_{m2} \quad (E10.1.d)$$

Le système étant isolé de l'extérieur, le bilan d'énergie s'écrit :

$$dU_m = \theta_1 dS_1 + \theta_2 dS_2 = 0 \quad (E10.2.a)$$

L'entropie du système global, en fonction des entropies de chacun des deux corps a pour expression :

$$dS = dS^p = dS_1 + dS_2 \quad (E10.2.b)$$

Chacun des deux corps, individuellement, se comporte comme un système non isolé thermiquement :

i/ le corps de masse m_1 reçoit de la chaleur cédée par le corps de masse m_2 :

$$dU_{m1} = \theta_1 dS_1 = \delta Q_{21} \quad (E10.3.a)$$

et son entropie a pour expression :

$$dS_1 = \delta S_1^r \quad \delta S_1^p \equiv 0 \text{ (processus réversible)} \quad (E10.3.b)$$

ii/ le corps de masse m_2 reçoit de la chaleur cédée par le corps de masse m_1 :

$$dU_{m2} = \theta_2 dS_2 = \delta Q_{12} \quad (E10.3.c)$$

et son entropie a pour expression :

$$dS_2 = \delta S_2^r \quad \delta S_2^p \equiv 0 \quad (E10.3.d)$$

Les processus de stockage d'énergie par chacun des deux corps est celui de l'exemple 2 (figure E2.2). Quant au processus d'échange il



est celui de l'exemple 5 (figure E5.2). Le processus global (Stockage et échanges d'énergies) est représenté par la figure E10.1.

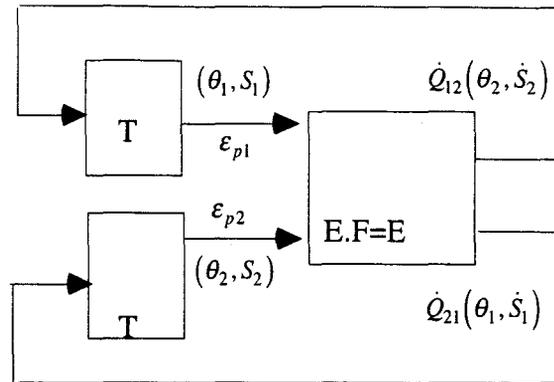


Figure E.10.1 : représentation des processus de stockage et d'échange d'énergie thermique par les deux corps.

La mise en équations de chacun des processus de ce réseau donne :

i/ Les processus de type T.

par une analyse identique à l'exemple 2 et pour chacune des masses, on déduit :

- les équations constitutives tirées de (E2.5) et égales à :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\theta_1}{dS_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_1/m_1.c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ dS_1 \end{pmatrix} \quad (E10.4.a)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d\theta_2}{dS_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \theta_2/m_2.c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\theta_2 \\ dS_2 \end{pmatrix} \quad (E10.4.b)$$

- les équations structurelles tirées de (E2.8) et égales à :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\theta_1}{dS_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ dS_1 \end{pmatrix} \quad (E10.5.a)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d\theta_2}{dS_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\theta_2 \\ dS_2 \end{pmatrix} \quad (E10.5.b)$$

ii/ Le processus de type E.F=E.

Ce processus est celui de l'exemple 5, on en déduit

- les équations constitutives tirées de (E5.4) et égales à :

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda \cdot \frac{\theta_2}{\theta_1^2} & \lambda \cdot \frac{1}{\theta_1} & 0 & 0 \\ \lambda \cdot \frac{1}{\theta_2} & -\lambda \cdot \frac{\theta_2}{\theta_2^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix} \quad (E10.6.a)$$

- les équations structurelles tirées de (E5.5) et égales à :

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\dot{S}_1 \\ d\dot{S}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ dS_1 \\ dS_2 \end{pmatrix} \quad (E10.6.b)$$

b/ système non isolé.

On suppose maintenant que le système global n'est plus isolé thermiquement. Il échange donc de la chaleur avec le milieu extérieur dont la température est θ_a . Le bilan d'énergie (6.32.a) s'écrit alors :

$$dU_m = \theta dS = \delta Q_a \quad (6E10.10.a)$$

La chaleur échangée par le système avec l'extérieur est la somme des chaleurs échangées par chacun des corps qui le composent. On représente alors le processus comme sur la figure E10.2. Les corps de masse m_1 et m_2 reçoivent du milieu ambiant respectivement les quantités de chaleur : δQ_{a1} et δQ_{a2} . Réciproquement, le milieu ambiant reçoit respectivement de la part des corps 1 et 2 les quantités de chaleur : $\delta Q_{1a} = -\delta Q_{a1}$ et $\delta Q_{2a} = -\delta Q_{a2}$.

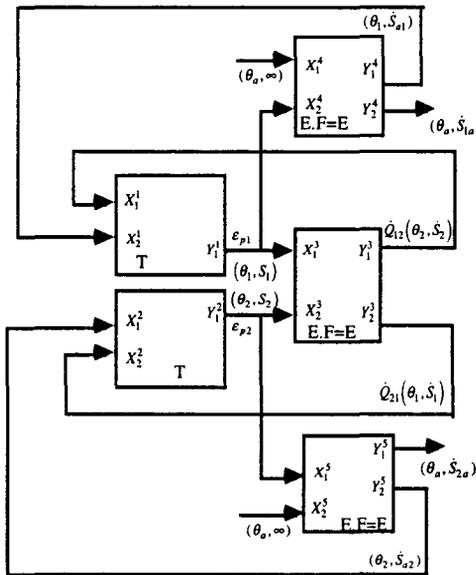


Figure E10.2: représentation des processus de stockage et d'échange pour le système figure E5.1 non isolé thermiquement.

Processus E.F d'échange avec le milieu.

Les équations constitutives des échanges de chacun des corps avec le milieu ambiant sont :

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_a \\ d\dot{S}_{a1} \\ d\dot{S}_{1a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_a \cdot \frac{\theta_a}{\theta_1^2} & \lambda_a \cdot \frac{1}{\theta_1} & 0 & 0 \\ \lambda_a \cdot \frac{1}{\theta_a} & -\lambda_a \cdot \frac{\theta_1}{\theta_a^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_a \\ dS_{a1} \\ dS_{1a} \end{pmatrix} \quad (E10.8.a)$$

$$\begin{pmatrix} d\theta_2 \\ d\theta_a \\ d\dot{S}_{a2} \\ d\dot{S}_{2a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_a \cdot \frac{\theta_a}{\theta_a^2} & \lambda_a \cdot \frac{1}{\theta_a} & 0 & 0 \\ \lambda_a \cdot \frac{1}{\theta_a} & -\lambda_a \cdot \frac{\theta_2}{\theta_a^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_2 \\ d\theta_a \\ d\dot{S}_{a2} \\ d\dot{S}_{2a} \end{pmatrix} \quad (E10.8.b)$$

Les équations structurelles sont :

$$\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_a \\ d\dot{S}_{a1} \\ d\dot{S}_{1a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_a \\ dS_1 \\ \infty \end{pmatrix} \quad (E10.9.a)$$

$$\begin{pmatrix} d\theta_2 \\ d\theta_a \\ d\dot{S}_{a2} \\ d\dot{S}_{2a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta_2 \\ d\theta_a \\ dS_2 \\ \infty \end{pmatrix} \quad (E10.9.b)$$

Processus T

Les équations constitutives des processus de type T du système non isolé restent inchangées par rapport au système isolé, soient :

$$\left(\frac{d\theta_1}{dS_1} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 / m_1 \cdot c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{d\theta_1}{dS_1} \right) \quad (E10.10.a)$$

$$\left(\frac{d\theta_2}{dS_2} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \theta_2 / m_2 \cdot c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{d\theta_2}{dS_2} \right) \quad (E10.10.b)$$

Les équations structurelles quant à elles sont affectées et deviennent :

$$\left(\frac{d\theta_1}{dS_1} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/p & 1/p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\dot{S}_{a1} \end{pmatrix} \quad (E10.11.a)$$

$$\left(\frac{d\theta_2}{dS_2} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/p & 1/p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\theta_2 \\ d\dot{S}_{a2} \end{pmatrix} \quad (E10.11.b)$$

Références bibliographiques

Bibliographie

- [Abb-92] M. M. Abbott, H.C. Van Ness, "Thermodynamique", MacGraw-Hill, Paris, 1992.
- [Abu-91] Abu-Hanna, Benjamins, Jansweijer, "device understanding & modelling for diagnosis", IEE expert, vol. 6, N°2, pp 26-32, 1991.
- [AFA-89], AFAV, "Exprimer le besoin : application de la démarche fonctionnelle", AFNOR gestion, Paris, 1989.
- [App-90] S. Appel, D. Breuil, E. Poumeyrol, "La méthode GRAI : concepts et démarche", ed. Thena, 1990, Paris.
- [Aya-70], F.J Ayala, "Teleological Explanation in Evolutionary Biology", Phi. of Sci., Vol. 37, n°1, pp. 1-15, 1970.
- [Beck-69], M. Beckner, "Function and Teleology", journal of the history of biology, Vol2, pp.-, 1969.
- [Ben-91] C.I. Benzaken "Systèmes formels, introduction à la logique et à la théorie des langages", Masson, Paris, 1991
- [Ber-93] L.V. Bertalanffy, "Théorie générale des systèmes", Dunod, Paris, 1993
- [Bob-84] D.G. Bobrow (Ed), "Special Volume On qualitative Reasoning about Physical Systems", Artificial intelligence, vol. 24, 1984.
- [Bon-91] A. Bonarini, V. Maniezzo, "Integrating qualitative and quantitative modelling", International Journal of Expert Systems : Research and Application, Vol. 4, n°1, pp 51-70, 1991.
- [Bon-92] J.C Bonnet, "Towards a formal representation of device functionality", Knowledge Systems Laboratory, Report N°KSL 92-54, June 1992.
- [Bor-92] P.Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P Richard, F. Rotella, I. Zambettakis, "Modélisation et identification des processus", Tome 2, Ed TECHNIP, 1992.
- [Bouc-93] B. Bouchon-Meunier, "La logique floue", Presse universitaire de France, Paris, 1993
- [Bouv-82] Alain Bouvier, "La théorie des ensembles", col. que sais-je?, 3eme Ed, Presse Universitaire de France.
- [Brad-87], M. Brady, J. Connell, "Generating and Generalising Model of Visual Objets", Artif. Intell., Vol. 31, pp. 159-183, 1987.
- [Bra-90] G. Brajnik, L Chittaro, C. Tasso, E. Toppano, "Epistemology, organisation & use of functional knowledge for reasoning about physical systems", 10th international workshop, expert systems and their application. Nanterre, France, EC2, 1990, p 53-66, Conference : Avignon, France, 28may-1june, 1990.
- [Bre-79], C. Bresch, Zur Quantifizierung von Muster, (preprint), University of Freiburg, Germany, 1979.
- [Byl-85], T. Bylander, B. Chandrasekaran : "Understanding Behaviour Using Consolidation", Proc.9th International Joint Conference on Artif. Intell. (IJCAI'85), pp. 450-454, 1985.
- [Cas-94] J.P Cassar, R.G. Litwak, V.Cocquempot, M.Starroswiecki, "Approche structurelle de la conception des systèmes de surveillance pour des procédés industriels complexes", Revue européenne de diagnostique et de sûreté de fonctionnement, Vol 2, pp 179-202, 1994.

- [Can-64], J. Canfield, "Teleological explanation in biology", *The British Journal of Philo. of Scien.*, Vol. 14, pp -, 1964.
- [Chan-89]B.Chandrasekaran, J.W Smith, J.Sticklen, "deep' model and their relation to diagnosis", *Artificial intelligence in medicine*, vol. 1, 1989, pp 29-40
- [Chit-93]L.Chittaro, G.guido, C. Tasso, E. Toppano, "functional and teleological knowledge in the multimodelling Approach For Reasoning about physical systems: a case study in diagnosis", *IEEE Trans. on Syst. Man and Cybernetics*, vol. 23, n°6, Nov/dec 1993.
- [Cho-59], N. Chomsky, "On certain Formal Properties of Grammars", *Information and Control*, Vol. 2, pp. 137-167, 1959.
- [Cum-74] Cummins, "functional analysis", *the journal of philosophy*, vol. 72, n°20, pp.741-765, 1974.
- [Dav-84]R.Davis, "Diagnostic Reasoning Based on Structure and Behaviour", *Artificial Intelligence*, vol. 24, pp 347-410, 1984.
- [Dav-89] R. Davis, "Du Grafcet aux réseaux de Petri", Hèmes, Paris, 1989.
- [Deck-91a] P. declerck, M. Staroswiecki, "Characterisation of the canonical components of a structural graph. Application to fault detection in large scale industrial plants.", *ECC 91, European Control Conference, Grenoble, Juillet 1991.*
- [Deck-91b] P. Declerck, M. Staroswiecki, "Identification of structurally solvable subsystems for the design of fault detection and isolation schemes, using the imbedding procedure", *9th IFAC/IFORS symposium on identification and system parameter estimation, Budapest, 8-12 Juillet 1991.*
- [De MA-79] De Marco T., "Structured analysis and System Specification", Yourdon Inc., New Jersey, 1979.
- [Dor-88], J.L. Dormoy, O. Raiman, " Assembling a Device", *Proc. 7th National Conf. on Artif. Intell. (AAAI-88)*, pp. 330-335, 1988.
- [Dur-94]D. Durand, 'La systémique", P.U.F, Paris, 1994.
- [Fal-90], B. Falting, "Qualitative Kinematics in Mechanisms", *Artif. Intell.*, Vol. 44, pp. 89-119, 1990.
- [Far-91], B.H, Far, "Task Planning, Motion Planning & Assessment of Plans", In *HASP: Human Acts Simulation Program, A Study on Intelligent Nuclear Systems*, JAERI-M 91-101, chap 4, pp. 40-56, 1991.
- [Fel-93] C. Feliot , "Modélisation fonctionnelle, structurelle, et comportementale, des systèmes automatisés de production en vue de leur automatisation intégrée", rapport de D.E.A, université de Lille I, juin 1993, Lille.
- [Fel-94a] C. Feliot, J.P Cassar, M. Staroswiecki, "functional, structural and behavioural models for the design of integrated automation systems.", *Mathmod IMACS symposium, Vienna, February 2-4, 1994, P. 526-532.*
- [Fel-94b] C.Feliot, M.Bayart, M. Staroswiecki, " Spécification fonctionnelle du système de décision des systèmes automatisés ", congrès IBRA, septembre 1994, Bruxelles.
- [Fel-96] C.Feliot, J.P Cassar, M. Staroswiecki, « towards a language of physical systems », *I.E.E.E SMC, Bejin (Pékin)*, 4-10 oct 1996.
- [For-81]K.D Forbus,"Qualitative Reasoning About Physical Systems", *Proc. Int'l joint conf. Artificial Intelligence(IJCAI 7)*, Morgan Kaufman, San Mateo, calif., 1981, pp 362-330.

[For-84]K.D Forbus, "Qualitative process Theory", *Artificial Intelligence*, vol. 24, pp 85-168, 1984.

[Fra-91]D.W Franke, "Deriving and using Description of Purpose", *IEE Expert*, vol. 6, n°2, pp 41-47, 1991

[Fre-71], P. Freeman, A. Newell, "A Model for Functional Reasoning In design", *Advanced Paper of 2nd Inter. Joint Conf. on Artif. Intell. (IJCA'71)*, pp. 621-640, London, 1971.

[Gal-90]M. Galinier, "SADT, un langage pour communiquer", Eyrolle, France, 1989.

[Gan-79] C. Gane, T. Sarson, "Structured System Analysis", Prentice Hall Inc., New York, 1979.

[Gel-87], A. Gelsey, "Automated Reasoning about Machine Geometry & Kinematics", *Proc. 3rd IEEE Conf. on AI Applications*, Orlando, FL, Feb. 1987.

[Gir-90]A. Gire, "Méthodologie ouverte de la modélisation, quelques réflexions épistémologiques", *La modélisation confluent des sciences*, Ed. CNRS, 55-70, Paris, 1990.

[Gon-95]M. Gondran, M. Minoux, "Graphes et algorithmes", ed Eyrolles, 1995.

[Gon-84]M. Gondran, M. Minoux, "Linear algebra in diode : a survey of recent results", *Annals of discrete Mathematics*, 19, 147-164, 1984.

[Gree-90] D.G. Green, "Syntactic modelling and simulation", *Simulation* 54(6), 281-286, 1990.

[Gunt-94] R. Gunther, B. Schapiro, P Wagner, "Complex systems, Complexity Measures, Grammar and Model-Infering", *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. No. 5, pp. 635-651, 1994.

[Har-91] N. Hari Narayanan, B. Chandrasekaran, "Integration of qualitative and quantitative methods in visual reasoning", *Proc. of Second Conference on AI, Simulation, and Planning in High Autonomy Systems*, Los Alamitos, CA, pp. 272-278, IEEE Computer Society Press, 1991

[Hem-65]C.G. Hempel, *Aspects of scientific explanation* (New York, 1965), 297-330.

[Hop-79]J.E. Hopcroft, J.D. Ullman, "introduction to automata theory, languages and computation", Addison Wesley, 1979.

[INS-97], INSTN, "SAGACE : Le systémographe", Institut National des Sciences et Techniques Nucléaire, Rapport session de formation : SAGACE, maîtriser la complexité des systèmes.

[Iwa-86] Y.Iwasaki and H.A. Simon, "causality in device behaviour", *Artificial Intelligence*, vol. 29, pp 3-32, 1986.

[Jos-87], L. Joskowicz, "Shape and Function in Mechanical Device", *Proc. 6th National Conf. Artif. Intell. (AAAI-87)*, pp. 611-615, 1987

[Kar-90]D.C. Karnopp, D.L. Margolis, R.C. Rosenberg, "System dynamics : a unified approach", John Wiley & sons, 2nd Ed, 1990.

[Kauf-62], A. Kaufmann, "Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle", Dunod, Paris, 1962.

[Kau-71]S.A. Kauffman 'Articulation of parts explanations in biology', *Boston studies in philosophy of science*, ed. R.S. Cohen and R.C. Buck, VIII(Derdrech, 1971), 257-72.

[Keu-91]Keuneke, "device Representation : the significance of functional knowledge", *IEE Expert*, vol. 6, n°2, pp 22-25, 1991.

[Kle-84a]J. De Kleer and J.S.Brown, "a qualitative physics based on confluences", *Artificial Intelligence*, vol. 24, pp 7-83, 1984.

[Kle-84b]J. De Kleer, "How circuit work", *Artificial Intelligence*, vol. 24, pp 205-280, 1984.

[Kle-86]J. De Kleer and J.S.Brown, "Theory of causal ordering", *Artificial Intelligence*, vol. 29, pp 33-61, 1986.

[Kui-84]Kuipers, "Common sense Reasoning About Causality : Deriving Behaviour from Structure", *Artificial Intelligence*, Vol. 24, pp 169-203, 1984.

[Kui-86]Kuipers, "Qualitative Simulation", *Artificial Intelligence*, Vol. 29, pp 288-338, 1986.

[Kui-88] B. Kuiper, D Berleant, "Using incomplete quantitative knowledge in qualitative reasoning", *Sixth National Conference on Artificial Intelligence*, San Mateo, CA , 1988, Morgan Kaufmann.

[Lad-85]J.Ladrière, "Système : épistémologie", *Encyclopédia Universalis*, Vol 17, 1985.

[Lan-65] O. Lange, "Whole and Parts, General Theory of system", Franklin Book Inc., 1965 (réed. 95)

[Le.Gal-92] F. Le Gallou, B. Bouchon-Meunier, "Systémique. Théorie et Application", ed Lavoisier, Tech.&Doc., Paris, 1992.

[Leh-65]H. Lehman, 'functional explanation in biology', *Phil. Sci.*, Vol 32, n°1, pp 1-20, 1965.

[Le M-84] J.L. Le Moigne, "La théorie du système général, théorie de la modélisation", P.U.F, Paris 1984 (réédité en 1994).

[LeM-85] J.L. Le Moigne, "La modélisation des système complexes", Dunod Bordas, Afcet systèmes, Paris 1989 (réédité 1990).

[Le M-89] J.L. Le Moigne, "La science des systèmes", *Encyclopédia Universalis*, 1989.

[Low-62], A. Lowff, "Biological order", Cambridge, MIT press.

[Mel-90] J. Mèlèse, "L'approche systémique des organisations", ed. Organisation, Paris, 1990.

[Mel-91] J. Mèlèse, "L'analyse modulaire des systèmes (AMS)", ed. Organisation, Paris, 1991.

[Mar-88] David A. Marca, Clément L; McGowan, "SADT : Structured Analysis and Design technique", McGraw Hill Book Company, New York, 1988.

[Mil-65]Miller. J.A. , "living systems", the organisation of behavioural sciences, vol. 10, n° 3&4, juil-oct 1965.

[Mor-77] E. Morin, "La Méthode I, la Nature de la Nature", ed. du Seuil, Paris, 1977

[Mor-80] E. Morin, "La Méthode II, la Vie de la Vie", ed. du Seuil, Paris, 1980

[Mor-86] E. Morin, "La Méthode III, la Connaissance de la Connaissance", ed. du Seuil, Paris, 1986

[Mor-90] E. Morin, "Introduction à la pensée complexe", ed. du Seuil, Paris, 1990.

[Mor-91]E. Morin, "La Méthode IV, les Idées. Leur habitat, leur vie, leurs moeurs, leur organisation", ed. du Seuil, Paris, 1991.

[Mur-88]Murakami, Nakajima, "computer-aided Design- Diagnosis Using Feature Description", *Artificial Intelligence in Engineering : Diagnosis & learning*, J.S. Gero (ed.), pp 199-226, Elsevier (1988).

[Nag-61]E.Nagel, "the structure of science", Harcourt Brace Jovanovich, New-York, 1961.

[Nag-77a], E. Nagel, "Teleology revisited : Goal Directed Processes in Biology", the journal of philosophy, Vol. 74, n°5, pp. 261-279, 1977.

[Nag-77b], E Nagel, "Teleology revisited : Functional Explanation in biology", the journal of philosophy, Vol.74 , n°5, pp. 280-301, 1977.

[Pia-68], J. Piaget, "Le structuralisme", PUF, 1968, Paris.

[Pap-80], F. Papentin, " On order and complexity. General considerations", *Journal of theor. Biol.*, Vol. 87, pp. 421-456, 1980.

[Pay-61]H.M. Paynter, "analysis and design of engineering systems", MIT press, Cambridge, 1961.

[Pen-90] J.M. Pénalva, "SAGACE : une représentation des connaissances pour la supervision de procédés continus", 10èmes Journées Internationales sur les Systèmes Experts, AVIGNON, 1990.

[Pen-94] J.M. Pénalva, E. Page, "SAGACE : la modélisation des systèmes dont la maîtrise est complexes", ILCE' 90, Montpellier, fev. 1994.

[Per-93] J. Ph. Pérez, A.M. Romulus, "Thermodynamique, fondements et applications", Masson, 1993.

[Pu-88], P. Pu, N.I. Badler, " Design Knowledge Capturing for Device Behaviour Reasoning, *Artif. Intell. in Engineering : Design*, J.S. Gero (ed.), pp. 37-56, Elsevier, 1988.

[Py-94], Michel Py, "Un modèle conceptuel de raisonnement par analogie", *Revue d'intelligence artificielle*, Vol. 8, n°1, pp 63-69, 1994.

[Ras-91] Rasmussen, "Event and the problem of causality", *Distributed Decision Making : Cognitive Models for Co-operative Work*; J. Rasmussen, B. Brehmer & J Leplat (eds), John Willey & Son, 1991.

[Ros-74], B. K. Rosen, "Syntactic Complexity", *Information and Control*, Vol. 24, pp. 305-335, 1974.

[Rus-71], M. Ruse, "Function Statements in biology", *Phi. of Sci.*, Vol. 38, n°1, pp. 87-95, 1971.

[Sal-87]A. Salomaa, "Formal languages", Academic Press, 1987

[Sem-86]V.Sembugamoorthy, B. Chandrasekaran, "Functional representation of devices and compilation of diagnostic problem-solving system", *Experience, Memory and Reasoning*, J.L. Kolodner and C.K.Riesbeck eds., Hillsdale, N.J : Lawrence Erlbaum, 1986, pp 47-73.

[Set-67], R. B. Setlow, E.C. Pollard, *Molecular Biophysics*, Palo Alto : Addison-Wesley, 1967.

[Sha-77], R. Shank, R. Abelson : "Scripts, Plans, Goals & Understanding, An inquiry into Human Knowledge Structure", Lawrence Erlbaum, 1977.

[Sim-91] H. Simon, "Science des systèmes, science de l'artificiel", trad J.L Lemoigne, ed. Bordas, 1991.

[Sue-95] C. Sueur, "L'approche Bond-Graph : Outil méthodologique pour l'automatique", Th. Habilitation, Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille URA CNRS D1440, Université des Sciences et Technologie de Lille, 1995.

[Stan-83], C. Stanfill, "The Decomposition of Large Domain : Reasoning about Machine", Proc. National Conf. on Artifi. Intell. (AAAAI-83), pp. -, 1983.

[Sta-89] M. Staroswiecki, P. Declerk, "Analytical Redundancy in non linear Interconnected Systems by means of Structural Analysis", IFAC IMACS IFORS AIPAC, 1989.

[Sta-94a] M. Staroswiecki, "Le génie des systèmes d'exploitation de processus : enjeux et problématique.", Salon MESUCORA, p. 1-35, Paris, 31 mai 1994.

[Sta-94-b] M. Staroswiecki, M. Bayart, H. Marti "Instrumentation intelligente et système d'information dans les processus de production", Entretiens de la technologie, Tome II, Thème 14, 15-16 mars, Paris, France.

[Sta-94-c] M. Staroswiecki, M. Bayart, "Models and Languages for Inter-operability of Smart Instruments", 2nd IFAC Symposium on Intelligent Components and Instruments for Control Application SICICA '94, p. 1-12, 8-10 Juin, Budapest, Hongrie.

[Sta 94-d] M. STAROSWIECKI, M. BAYART, "*Actionneurs Intelligents*", HERMES, France, 1994.

[Sti-91] J. Sticklen, A. Kamel, W.E. Bond, "Integrating quantitative and qualitative computation in a functional framework," Engineering Applications of Artificial Intelligence, Vol.4, n° 1, pp. 1-10, 1991.

[Sti-91] J. Sticklen, W.E. Bond, "functional Reasoning and functional modelling", IEEE Expert, vol. 6, n°2, pp 20-21, 1991.

[Tez-88], T. Tezza, E. Trucco, "Functional Reasoning for Flexible Robots", Artif. Intell. in Engineering : Robotics and Processes, J.S. Gero (ed.), pp.3-19, Elsevier, 1988.

[Ton-76], E. tonti, "the reasons for analogies between physical theories", Appl. Math. Modelling, Vol.1, pp. 37-50, juin, 1976.

[Ulr-88], K.T. Ulrich, W.P. Seering, "Function Sharing in mechanical Design", Proc. 7th National Conf. on Artif. Intell. (AAAI-88), pp. 342-346, 1988.

[Van-70], V. M.H Van Emden, "An Analysis of complexity", Mathematish Centrum, Amsterdam, 1970.

[Von-60], H. Von Forester, "Self-Organising System", M.C Yovits & C. Scott eds., New-York : Academic Press, 1960.

[Wal-77] B. Walliser, "Systèmes et modèles : introduction critique à l'analyse de systèmes", Ed Seuil, Paris, 1977.

[Wim-72] W.C. Winsatt, "teleology and the logical structure of function statements", Studies in history and philosophy of science, Macmilan journal ltd, vol. 3, p 1-80, 1972.

[Wri-73], L. Wright, "Functions", Phil. Review, Vol. 82, n°2, pp. 139-168, 1973.

[Wri-76], L. , "Teleological Explanation", University of California Press, 1976.

