

juin 2000 4 907

N° d'ordre : 2058

# UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

## LABORATOIRE DE MECANIQUE DE LILLE

"GROUPE FIABILITE DES STRUCTURES"

### THESE DE DOCTORAT EN MECANIQUE

présentée par :

**Mohamed El Amine BELOUHRANI**

---

#### CONTRIBUTION A L'ANALYSE D'ADAPTATION DES STRUCTURES INELASTIQUES FISSUREES

#### CONTRIBUTION TO THE SHAKEDOWN ANALYSIS OF INELASTIC CRACKED STRUCTURES

---

Soutenue le 00/00/97 devant la commission d'examen composée de :

<b>Président de jury</b>	Mme.	S. DEGALLAIX	Ecole Centrale de Lille
<b>Rapporteurs</b>	M.	C. K. LE	Universität Bochum, (Allemagne)
	M.	R. SCHMIDT	I.A.M., RWTH, Aachen, (Allemagne)
	M.	G. DE SAXCE	L.M.L - Université de Lille1
<b>Examineurs</b>	M.	B. LANDJERIT	E.U.D.I.L., Lille
	M.	D. WEICHERT	I.A.M., RWTH, Aachen, (Allemagne)

B.U. LILLE  
 D 030 123650 7



## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur D. WEICHERT, qui m'a initié à la recherche et qui m'a dirigé durant toutes ces années de travail. Il a toujours su être disponible pour m'aider et m'encourager. Je voudrais qu'il trouve dans ces quelques lignes l'expression de ma plus grande reconnaissance.

Je remercie vivement Messieurs C. K. LE, R. SCHMIDT et G. DE SAXCE pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, je leur suis très reconnaissant d'avoir bien voulu en être rapporteurs, J'exprime également ma gratitude à Madame S. DEGALLAIX pour avoir accepté d'assurer la présidence du jury. Mes remerciements vont de même à Monsieur B. LANDJERIT qui a accepté d'être membre de ce Jury.

Je remercie aussi Monsieur A. HACHEMI pour son aide précieuse, ainsi que tous mes collègues du Laboratoire de Mécanique de Lille (L.M.L.) et de l'Ecole Universitaire Des Ingénieurs de Lille (E.U.D.I.L.). Je ne les cite pas mais ils se reconnaîtront.

En dernier lieu, je tiens à remercier tous mes proches, parents et amis, et plus particulièrement mon épouse et ma fille pour tout le soutien moral et la patience qu'elles ont su m'apporter durant tout le déroulement de ce travail.

**RESUME :** Dans ce travail, une contribution à l'analyse de prédiction de la défaillance des structures mécaniques est proposée. La nouvelle approche pour l'étude des structures élastoplastiques fissurées consiste en une proposition d'extension du théorème statique d'adaptation aux structures fissurées.

Le phénomène de la fissuration est pris en compte suivant une analyse de la rupture développée par NGUYEN Q. S. dans le cadre général des milieux standards généralisés. Une condition supplémentaire est imposée sur la longueur de la fissure afin de contrôler sa propagation. La borne supérieure de la longueur de la fissure est déterminée en utilisant un modèle de rupture ductile de CHABOCHE & LEMAITRE, cette borne limite est directement liée à l'énergie plastique dissipée, grandeur toujours croissante. L'adaptation exige qu'en tout point de la structure le travail dissipé reste borné, pour le trajet de charges prévu.

Pour la détermination du domaine des charges de sécurité "adaptation", nous faisons appel à la méthode des éléments finis statiquement admissibles et à un processus d'optimisation. Ce dernier consiste à déterminer le facteur de charges garantissant l'adaptation de la structure vis-à-vis de la ruine plastique tout en veillant à ce que la longueur de la fissure reste inférieure à sa valeur critique.

Avec la charge d'adaptation évaluée pour une plaque fissurée chargée en mode I, un facteur d'intensité de contrainte correspondant à l'état d'adaptation est calculé. Une comparaison de ce facteur au seuil de fatigue correspondant à la même plaque et au même matériau, montre que ces facteurs peuvent être assimilés à des seuils de fatigue tenant compte des contraintes résiduelles. Des propriétés de ces facteurs sont tirées, pour quelques exemples de matériaux traités.

**MOTS CLES :** Adaptation - Analyse limite - Elastoplasticité - Fissuration - Optimisation - Eléments finis - Facteur d'intensité de contraintes - Seuil de fatigue.

**ABSTRACT :** In this work, a contribution to the prediction analysis of the failure of the mechanical structures is proposed. The new approach for the study of elastic-plastic cracked structures consists in a proposition of the static shakedown theorem extension to cracked structures.

The phenomenon of the crack growth is processed following an analysis of fracture developed by NGUYEN Q. S. in the global framework of generalized standard materials. A supplementary condition is imposed on the crack length so as to control its propagation. The limit value of the crack length is determined by using a ductile fracture model of CHABOCHE J. L. & LEMAITRE J., this boundary limit is directly linked to dissipated plastic energy, always with a growing size. For the current load path and in all point of the structures, the shakedown analysis needs that the total dissipated energy remains bounded.

For the determination of the safety domain loads, "shakedown domain", this approach uses the finite element method and an optimization procedure. This last concept, consists in determination of the safety factor against failure of the structure beside the plastic collapse with the condition that the crack length remains inferior to its critical value.

With the shakedown load evaluated for a cracked plate loaded in mode I, a stress intensity factor corresponding to the shakedown state is calculated. A comparison of this factor to the fatigue threshold that corresponds to same plates and materials, shows that these factors can be assimilated to that of threshold, taking account of the residual stress. Some properties of these factors are pulled for several examples of materials studied in this work.

**KEYS WORDS :** Shakedown - Limit analysis - Elastoplasticity - Fracture - Optimization - Finite element - Stress intensity factor - Fatigue threshold.

# **SOMMAIRE**

## **SOMMAIRE**

### **INTRODUCTION GENERALE**

1. GENERALITES .....	6
2. HISTORIQUE .....	7
3. MOTIVATIONS .....	12
4. CONTENU DU RAPPORT .....	13

### **CHAPITRE 1**

#### **NOTIONS SUR LA THEORIE DE L'ADAPTATION**

1.1. INTRODUCTION .....	15
1.2. HYPOTHESES DE BASE .....	16
1.2.1. Conditions statiques.....	16
1.2.2. Conditions cinématiques.....	17
1.3. THEOREME DE MELAN .....	19
1.3.1. Enoncé du théorème.....	19
1.3.2. Démonstration du théorème.....	21
1.4. COEFFICIENT DE SECURITE A L'ADAPTATION .....	24
1.5. CONCLUSION .....	25

## **CHAPITRE 2**

### **COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DES CORPS FISSURES**

2.1 INTRODUCTION .....	27
2.2 THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX FISSURES.....	28
2.2.1 Position du problème.....	29
2.2.2 Analyse énergétique de la fissuration.....	30
2.3 DEFINITION GLOBALE DU TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE.....	37
2.4 FISSURATION EN COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE .....	39
2.5 COURBE DE RESISTANCE A LA FISSURATION.....	40
2.6 DISSIPATIONS NORMALES ET LOI DE PROPAGATION .....	42
2.7 MODELE DE FISSURATION PAR RUPTURE DUCTILE .....	44
2.8 CONCLUSION .....	47

## **CHAPITRE 3**

### **EXTENSION DU THEOREME D'ADAPTATION DE MELAN**

3.1. INTRODUCTION .....	48
3.2 .THEOREME STATIQUE D'ADAPTATION .....	48
3.2.1 Hypothèses .....	48
3.2.2 Proposition 1.....	50
3.2.3 Discussion 1.....	51
3.2.4 Proposition 2.....	56

3.2.5 Discussion 2 .....	56
3.3 LONGUEUR LIMITE DE LA FISSURE A L'ADAPTATION .....	60
3.4 ELIMINATION DE LA SINGULARITE DU CHAMP DE CONTRAINTES ....	62
3.5 FACTEUR DE CHARGE A L'ADAPTATION .....	65
3.5.1 Facteur de charge vis-à-vis de la plasticité accumulée .....	67
3.5.2 Facteur de charge vis-à-vis de la plasticité alternée .....	68
3.6 CONCLUSION .....	69

## **CHAPITRE 4**

### **FORMULATION ELEMENTS FINIS**

4.1 INTRODUCTION .....	70
4.2 CALCUL DE LA REPONSE PUREMENT ELASTIQUE.....	71
4.2.1 Principe du minimum de l'énergie complémentaire .....	71
4.2.2 Discrétisation à l'aide de fonction de contraintes .....	72
4.2.3 Conditions limites statiques pour la fonction d'Airy .....	76
4.2.4 Equations de contraintes par la méthode du Lagrangien augmenté.....	79
4.3 PHASE PLASTIQUE .....	80
4.3.1 Discrétisation du champ de contraintes résiduelles .....	80
4.3.2 Détermination du multiplicateur de charge limite.....	81
4.4 CONCLUSION .....	82

## CHAPITRE 5

### APPLICATIONS NUMERIQUES AUX PLAQUES FISSUREES

5.1 INTRODUCTION .....	83
5.2 VALIDATION DU MODULE DE CALCUL .....	85
5.3 INFLUENCE DE LA LONGUEUR DE LA FISSURE SUR LE DOMAINE D'ADAPTATION .....	88
5.3.1 Plaque avec fissure centrale .....	88
5.3.2 Plaque avec fissure latérale .....	92
5.4 INFLUENCE DES INCLUSIONS SUR LA CHARGE D'ADAPTATION.....	97
5.4.1 Cas d'une inclusion en amont de la pointe de la fissure .....	97
5.4.2 Cas de deux inclusions de part et d'autre de la fissure .....	101
5.5. CONCLUSION.....	104

## CHAPITRE 6

### FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTES A L'ADAPTATION $K_{SD}$ ET SEUILS DE FATIGUE $K_S$

6.1. INTRODUCTION.....	106
6.2. FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTES ET MODES DE RUPTURE	106
6.3. SEUILS DE FATIGUE ET INFLUENCE DE LA MICROSTRUCTURE.....	108
6.4. FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTES A L'ADAPTATION.....	109
6.4.1. Plaque avec fissure latérale.....	109
6.4.2. Plaque avec fissure centrale.....	111

## **INTRODUCTION GENERALE**

## **INTRODUCTION GENERALE**

### **1. GENERALITES**

Les systèmes mécaniques conçus, sont généralement destinés à remplir leur fonction sans dommage notable durant le temps d'exploitation escompté, en étant soumis à un ensemble de sollicitations défini préalablement.

Lors de sa conception, pour assurer sa fonction, le système doit donc remplir certains critères sur sa résistance et son comportement vis-à-vis des charges qu'il doit supporter. Avant de passer à la phase de fabrication, le constructeur effectue alors des simulations afin de tirer le meilleur compromis entre le coût de fabrication et les critères contractuels du système à concevoir. Une des manières d'arriver à un résultat concret est de procéder à des essais expérimentaux sur un prototype. Le coût de l'expérience et la difficulté de créer les conditions d'essai "parfaites", poussent de plus en plus le constructeur à privilégier la simulation numérique qui fait appel à la programmation sur ordinateur.

Pour l'évaluation de la résistance et la fiabilité d'un système mécanique, la théorie d'élasticité linéaire fût et reste encore la plus employée dans les bureaux d'étude. Néanmoins, celle-ci montre ses limites au-delà de la limite élastique. Pour combler cette carence, la théorie de l'analyse limite permet d'accéder à la charge limite avant la défaillance du système, mais ne reste applicable que dans le cas d'un chargement proportionnel. Toutefois, elle a permis d'accéder à l'idée qu'avant de s'écrouler, le système peut subir des déformations plastiques irréversibles.

Lorsque le système est amené à supporter des charges variables, la méthode incrémentale "pas-à-pas" reste applicable, mais nécessite la connaissance avec exactitude

de l'histoire de chargement, et la détermination de l'ensemble des paramètres décrivant l'état du système à chaque étape de chargement.

L'analyse de l'adaptation présente une alternative intéressante au calcul "pas-à-pas" pour l'évaluation de la fiabilité lorsque le chargement est variable ; elle permet de définir un domaine de charge sûr, situé entre le domaine élastique et celui de charges limites, pour lequel, quelle que soit l'histoire des charges à l'intérieur de ce domaine, le système est dans un état de sécurité. Certes, elle reste incapable de donner le spectre des contraintes et des déformations, mais permet de répondre à la préoccupation primordiale de l'ingénieur, qui est de savoir si le système va s'écrouler ou non et cela sans connaître l'histoire de chargement avec exactitude.

Le théorème statique d'adaptation stipule que, pour une histoire de charge quelconque évoluant entre des limites prescrites, si certaines conditions sont remplies, la réponse élastoplastique du système deviendra purement élastique (état d'adaptation). On comprend mieux l'intérêt pratique de la méthode, puisque au lieu de faire un calcul "pas-à-pas" sur l'histoire d'un chargement, on obtient directement une réponse valable pour toutes les histoires de charges comprises dans le "domaine d'adaptation".

## **2. HISTORIQUE**

La première étude sur les structures élastoplastiques soumises à des charges variables semble être due à BLEICH [4] (1932), cette étude a été généralisée aux milieux continus tridimensionnels par l'application d'un théorème, abondamment cité dans la littérature comme "théorème statique d'adaptation de MELAN" (MELAN [72] (1936)), pour des poutres constituées d'un matériau élastique parfaitement plastique, sous l'hypothèse de la linéarité géométrique et de la validité de la règle d'écoulement associée. La démonstration et l'aménagement de ce dernier n'ont été donnés que plus tard par SYMONDS & PRAGER [116] (1950), SYMONDS [117] (1951) et KOITER [47] (1952).

L'approche cinématique est due à KOITER, dans un article très célèbre (KOITER [48] (1960)), cet auteur introduit la notion de coefficient de sécurité vis-à-vis de l'adaptation, ceci lui permet d'obtenir une majoration du travail de déformations plastiques, ce qui constitue un progrès vers la maturité de la théorie. DEBORDES & NAYROLES [12] (1976) montrent que l'approche statique et l'approche cinématique sont duales au sens de l'analyse convexe.

A partir du concept de dissipation moyenne, DE SAXCE [14] (1989) introduit de nouveaux principes variationnels pour décrire les états limites, KAMENJARZH & WEICHERT [46] (1992) expriment, au moyen de la dualité, la borne du coefficient de sécurité, en considérant le cas particulier de surface d'écoulement sphérique.

L'extension de ces théorèmes aux classes de problèmes élargies tenant compte de l'érouissage, du changement de température, de l'influence de la géométrie et de l'endommagement a suscité beaucoup d'intérêt ces dernières années.

Déjà MELAN [73] (1938), étudie l'effet de l'érouissage en introduisant l'érouissage cinématique linéaire illimité, NEAL [80] (1950) utilise le critère d'écoulement linéaire pour des considérations numériques ; pour les structures discrètes, MAIER [67] (1972) présenta un modèle généralisé, où il tient compte des effets géométriques du second ordre ; MANDEL & al. [70] (1977) et ZARKA & al. [129] (1990) mirent en évidence une condition nécessaire d'adaptation pour les structures élastoplastiques à érouissage cinématique et isotrope combinés. KÖNIG [58] (1987) et KÖNIG & SIEMASZKO [59] (1988) développèrent une méthode d'analyse de stabilité du processus d'adaptation ; PONTER [96] (1975) et MANDEL [69] (1976) étendirent le théorème au comportement du matériau éroui, en utilisant le modèle du Matériaux Standards Généralisés ( M.S.G.) développé par HALPHEN & NGUYEN QUOC SON [35] (1975). Ces auteurs ont traité l'érouissage cinématique illimité. Mais PONTER [96] (1975), ZARKA & CASIER [128] (1981) et KÖNIG [58] (1987) constatèrent que l'hypothèse de l'érouissage illimité conduit à l'impossibilité de prédire la non-adaptation par déformations plastiques progressives et que seul l'effondrement de la structure par

plasticité alternée peut être modélisé. L'écoulement cinématique limité est pris en compte par WEICHERT & GROSS-WEEGE [123] (1988) et STEIN et al. [113] (1990). Utilisant le M.S.G., WEICHERT & GROSS-WEEGE [123] (1988) proposèrent une limite d'évolution du paramètre d'écoulement cinématique linéaire, au moyen d'une condition simplifiée de deux surfaces d'écoulement ; Pour considérer le problème de l'adaptation non-linéaire, STEIN & al. [113] (1990) proposèrent un modèle micro-mécanique "overlay model" avec écoulement cinématique non-linéaire limité, similaire au modèle micro-mécanique proposé par NEAL [80] (1950) pour les états de contraintes unidimensionnelles.

L'effet de la température a été étudié en premier par PRAGER [97] (1956) et ROZENBLUM [105] (1957), qui donnèrent une extension du théorème statique en tenant compte des contraintes thermiques. L'influence de la température sur le module de Young et sur le seuil d'écoulement a été donnée par KÖNIG [49] (1969) et [52] (1979). ROZENBLUM [106] (1965) et DE DONATO [13] (1970) utilisèrent l'approche cinématique pour les sollicitations thermiques, alors que GOKHFELD & CHERNIAVSKY [25] (1980) et GROSS-WEEGE & WEICHERT [30] (1992) utilisent l'approche statique. Le premier à étudier le cas des sollicitations dynamiques est KALISKI & WLODARCZVK [45] (1967). Le théorème statique a été généralisé à ce type de sollicitations par CERADINI [8] (1969), MROZ [78] (1971), MAIER [66] (1972), HWA-SHAN-HO [40] (1972) et CORRADI & MAIER [10] (1973).

Le problème de la loi d'écoulement non-associée, constaté le plus souvent dans les matériaux à friction tel que le sol, a été étudié en premier par MAIER [65] (1969), la notion de "domaine élastique réduit", qui remplace le domaine élastique usuel défini pour le cas de la loi d'écoulement associée, a été introduite pour ces matériaux. Récemment, ce concept a été appliqué par PYCKO & MAIER [101] (1995) et par CORIGLIANO & al. [9] (1995), dans le cas, respectivement, quasi-statique et dynamique.

La généralisation du théorème d'adaptation au comportement des structures géométriquement non-linéaires a suscité un intérêt particulier, MAIER [67] (1972) fût le premier à s'intéresser. Il présenta une approche, tenant compte des effets géométriques

du second ordre, appliquée aux structures discrètes, en utilisant une formulation matricielle simplifiée. Cette méthode est aussi utilisée par KÖNIG [53] (1980), [57] (1984) et KÖNIG & SIEMASZKO [59] (1988) pour l'étude de l'influence des effets géométriques sur la stabilité des structures.

En utilisant les deux théorèmes, statique et cinématique, WEICHERT [122] (1986) et [125] (1990) introduit l'influence des non-linéarités géométriques en utilisant l'approche tensorielle dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Il étudie les petites évolutions au voisinage d'une configuration déformée de référence, en mentionnant l'intérêt des approximations de CASEY [7] (1985). GROSS-WEERGE [28] (1988) présenta des résultats numériques pour les coques de révolution en se basant sur les travaux de MORELLE & NGUYEN DANG HUNG [76] (1983) et MORELLE [77] (1984), et ceci en utilisant la méthode d'optimisation non-linéaire dite de Lagrangien Augmenté (PIERRE & LOWE [92] (1975)). Il (GROSS-WEERGE [29] (1990)) montre par la suite que cette formulation peut servir de base à une unification des différentes approches non-linéaires déjà élaborées. Il est suivi dans cette démarche par SACZUK & STUMPF [107] (1990) ainsi que PYCKO & KÖNIG [99] (1991). TRITSCH [119] (1993) utilise le formalisme tensoriel des grandes déformations présenté par SIDOROFF [111] (1982) ; il développe une formulation originale du théorème statique, et fait un lien entre les différentes approches géométriquement non-linéaires.

Du point de vu mathématique, NAYROLES & WEICHERT [79] (1993) étudièrent le problème des conditions minimales sur les lois constitutives, pour le théorème statique d'adaptation dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Ils montrent que pour les matériaux dissipatifs, induisant des déformations inélastiques, le théorème peut être appliqué s'il existe un noyau élastique vital pour la structure, ce noyau est appelé "sanctuaire d'élasticité". Ils montrent que ce concept peut être appliqué aux matériaux endommageables. Dans le cas du matériau à loi d'écoulement non-associée le "sanctuaire d'élasticité" peut être considéré comme la généralisation du concept de "domaine élastique réduit" introduit par MAIER [65] (1972).

Dans le cas des matériaux ductiles, le problème de l'endommagement, dans le cadre de la mécanique des milieux continus a suscité beaucoup d'intérêt ces dernières années (voir LEMAITRE [63] (1985)). Concernant les lois de comportement et l'affaiblissement des matériaux, WEICHERT & RAAD [126] (1992) donnent une extension du théorème statique d'adaptation à une certaine classe de géomatériaux élastiques parfaitement plastiques, avec des coefficients d'élasticité variables. HACHEMI & WEICHERT [31] (1992) et [33] (1997) établissent une extension générale du théorème statique aux matériaux élastoplastiques endommageables, selon le modèle d'endommagement isotrope de JU [44] (1989) et LEMAITRE [63] (1985). Les mêmes tentatives d'extensions sont données dans les papiers de POLIZZOTTO & al. [95] (1996) et FENG & YU [18] (1995).

La détérioration finale des structures est le plus souvent précédée par l'apparition et la propagation de fissures. Ce phénomène a été, en général, exclu de l'analyse d'adaptation. Ce manque d'investigations s'explique par le fait que, suivant les théorèmes d'adaptation classiques, la charge limite que peut supporter une structure fissurée devra être nulle. Ceci est dû à la singularité du champ de contraintes élastiques à la pointe de la fissure. D'un autre côté, l'expérience montre qu'il existe une certaine valeur limite de l'intensité de la charge, qui si le chargement appliqué n'excède pas cette valeur, la structure fissurée sera dans un état de sécurité et une propagation de fissure ne se produit pas. La première tentative de coupler la théorie d'adaptation avec la propagation stable de la fissure est due à WEICHERT [124] (1989). Bien plus tard, HUANG & STEIN [39] (1996) utilisent une méthode analytique d'adaptation de ces mêmes auteurs [38] (1994), pour tirer un facteur d'intensité de contraintes à l'adaptation pour une plaque sollicitée en tension, la fissure est assimilée à une entaille aiguë suivant le concept du bloc de matériau de NEUBER [81] (1958). BELOUHRANI & WEICHERT [2] (1997), proposent une extension du théorème statique d'adaptation aux structures fissurées, utilisant une analyse de la rupture développée par NGUYEN QUOC SON [88] (1980) dans le cadre général des matériaux standards généralisés et la théorie de croissance des fissures donnée par GRIFFITH [26] (1921) et [27] (1924). Cette proposition d'extension est basée sur le

caractère dissipatif des phénomènes considérés. Une condition supplémentaire a été introduite pour se prémunir de la propagation instable de la fissure.

### **3. MOTIVATIONS**

Les matériaux utilisés dans l'industrie sont souvent ductiles (métaux et alliages). Ils supportent des déformations plastiques irréversibles avant de se rompre, même lorsqu'ils comportent des défauts de fabrication ou des fissures.

Il n'existe pas de matériau ou de produit totalement exempt de défaut. Le rôle du concepteur est de distinguer parmi ces défauts, ceux qui sont nuisibles de ceux qui ne le sont pas et qui peuvent subsister dans le système construit.

Lorsqu'une fissure est décelée dans un système, le concepteur effectue une analyse, où il devra explorer le risque de rupture brutale, le risque de ruine plastique et l'évolution prévisible de la fissure. Les résultats issus de cette analyse suscitent de nombreuses questions :

Est ce que

- le risque de rupture brutale est exclu ?
- la fissure considérée n'est pas évolutive ?
- la vitesse d'évolution permet de garantir une durée de vie en fatigue bien supérieure au nombre de cycles prévu ?

Pour cela, on fait appel à la mécanique de la rupture, qui a remplacé les méthodes de conception et de dimensionnement usuelles, à cause de la singularité géométrique engendrée par la fissure.

Toutefois, on sait que la mécanique de la rupture ne peut à elle seule assurer qu'une fissure est admissible. Elle ne s'occupe que de ce qui se passe à la pointe (front) d'une fissure où les fortes contraintes et déformations peuvent faire céder le matériau, amenant

ainsi la propagation de la fissure. Les critères d'admissibilité des défauts de la mécanique de la rupture sont donc par essence locaux, attachés aux événements pouvant se produire à la pointe de la fissure. On sait aussi que même sans défaut, une structure ne peut supporter des charges illimitées, elle finit par se ruiner.

Pour tenir compte de ces deux types de ruine et prévoir la stabilité et la sécurité de la structure fissurée, que nous avons proposé une nouvelle approche par l'application de la théorie de l'adaptation. En utilisant une méthode mathématique d'optimisation, nous déterminerons la borne inférieure du facteur de charge de sécurité et la borne supérieure que peut atteindre la longueur de la fissure à l'état d'adaptation de la structure.

#### **4. CONTENU DU RAPPORT**

Le **premier chapitre** de ce rapport est consacré à l'étude d'adaptation en général. Nous passerons en revue les fondements du théorème statique d'adaptation qui utilise la propriété de convexité de la surface d'écoulement et introduit la fonction de l'énergie totale résiduelle de déformations élastiques.

Nous consacrerons le **deuxième chapitre** au comportement élastoplastique des corps fissurés dans le domaine des petites transformations. L'approche adoptée est celle de la thermodynamique des phénomènes irréversibles, qui constitue l'un des fondements indispensables de la théorie de la plasticité. La méthode suivie est basée sur une analyse de la rupture développée par NGUYEN Q. S. [88] (1980) dans le cadre général des milieux standards généralisés et la théorie de croissance des fissures basée sur le bilan d'énergie global de tout le système proposée par GRIFFITH A. [26] (1921) [27] (1924). Nous terminerons ce chapitre par la définition des lois de propagation et par un choix du modèle de fissuration en rupture ductile.

Dans le **troisième chapitre**, nous donnerons deux propositions d'extension du théorème statique d'adaptation pour les structures fissurées, sous sollicitations mécaniques variables. Nous exprimerons ensuite la borne supérieure de la longueur que

peut prendre la fissure à l'adaptation, ainsi que la borne inférieure du coefficient de sécurité qui garantit l'adaptation et la sécurité de la structure.

Dans le **quatrième chapitre**, nous aborderons la partie numérique pour valider la théorie établie. Nous donnerons la mise en œuvre pratique des développements nécessaires dans un code de calcul en éléments finis, dont la formulation est basée sur le principe de la minimisation de l'énergie complémentaire utilisant les fonctions d'Airy.

Le **cinquième chapitre** sera consacré aux applications numériques, nous considérerons des exemples classiques de plaques sous tension. L'influence des inclusions sur la charge d'adaptation est étudiée.

Nous présenterons dans le **sixième chapitre** des facteurs d'intensité de contraintes correspondants à l'état d'adaptation de la structure fissurée. La comparaison de ces facteurs aux seuils de fatigue de certains matériaux sera faite, et quelques propriétés de ces facteurs seront tirées.

# **CHAPITRE 1**

## **NOTIONS SUR LA THEORIE DE L'ADAPTATION**

## 1. NOTIONS SUR LA THEORIE DE L'ADAPTATION

### 1.1. INTRODUCTION

Pour le calcul et le dimensionnement des structures élastoplastiques, la théorie de l'adaptation trouve son cadre d'application privilégié, lorsque les charges appliquées sur la structure sont variables, cycliques ou non cycliques.

Le problème posé est le suivant : On suppose que les charges appliquées peuvent varier indépendamment les unes des autres, dans des intervalles connus. Ces intervalles, à leur tours varient proportionnellement à un paramètre  $\alpha$  appelé coefficient de sécurité introduit par Koiter, on cherche la valeur limite  $\alpha^*$  qui garantit l'adaptation de la structure, c'est-à-dire le fait qu'elle se comporte d'une manière parfaitement élastique après des déformations inélastiques.

Au-delà de cette valeur  $\alpha^*$ , deux modes de ruines sont possibles :

- Sous l'effet de l'accumulation des déformations plastiques, il y a formation d'un mécanisme : c'est la "ruine par déformations plastiques progressives",
- les déformations plastiques sont nulles en moyenne et donc, en un point donné, sont tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, il y aura une rupture de type fatigue plastique appelée "ruine par déformations plastiques alternées".

La résolution de ce problème demande :

- La solution d'un problème élastique correspondant aux mêmes conditions limites que le problème posé,
- la construction d'un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps.

## 1.2. HYPOTHESES DE BASE

On considère un corps élastique-parfaitement plastique de volume  $\Omega$  et de surface  $\Gamma$  suffisamment lisse composée de deux parties disjointes  $\Gamma_\sigma$  et  $\Gamma_u$ , où respectivement des tractions de surface et des déplacements sont imposés ( $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ ,  $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$ ), soumis à

$$\text{- des forces de volume : } f_i \text{ dans } \Omega, \quad (1.1)$$

$$\text{- des forces de surface : } p_i \text{ sur } \Gamma_\sigma, \quad (1.2)$$

$$\text{- des déplacements imposés : } u_i^d \text{ sur } \Gamma_u. \quad (1.3)$$

Ces charges peuvent varier arbitrairement et indépendamment entre des limites prescrites.

Dans la suite, on n'étudiera que des transformations géométriques linéaires et isothermes.

Le corps étudié ne subissant que des petits déplacements et déformations, les champs de contraintes et de déformations exactes  $\sigma_{ij}(x, t)$  et  $\varepsilon_{ij}(x, t)$ , en tout point  $x$  du corps étudié et à chaque instant  $t$ , obéissent aux conditions suivantes:

### 1.2.1. Conditions statiques

Le champ de contraintes  $\sigma_{ij}$  est dit statiquement admissible s'il s'équilibre avec les forces de volume et les tractions de surface, c'est-à-dire vérifiant les relations suivantes :

$$\sigma_{ij,j} = -f_i \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.4)$$

$$n_j \sigma_{ij} = p_i \quad \text{sur } \Gamma_\sigma, \quad (1.5)$$

où  $n$  est le vecteur normal unitaire, externe à la surface  $\Gamma$ .

### 1.2.2. Conditions cinématiques

Le champ de déformations  $\varepsilon_{ij}(x)$  est dit cinématiquement admissible s'il dérive d'un champ déplacement  $u_i(x)$  telles que les relations suivantes soient satisfaites :

$$u_i = u_i^d \quad \text{sur } \Gamma_u, \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.7)$$

La virgule suivit d'un index dénote la dérivée partielle de la quantité considérée par rapport aux coordonnées cartésiennes, associées au index :  $(\cdot)_{,j} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j}$ .

La condition d'équilibre d'un champ de contraintes  $\sigma_{ij}$  avec les forces de volume  $f_i$  et de surface  $p_i$  sur  $\Gamma_\sigma$ , est exprimée par le principe des travaux virtuels :

$$\int_{\Omega} f_i u_i d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i d\Gamma = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega, \quad (1.8)$$

pour toutes les champs de déformations cinématiquement admissibles.

On suppose une décomposition additive pour les déformations totales,  $\varepsilon_{ij}$ , en déformations purement élastiques,  $\varepsilon_{ij}^e$ , et en déformations purement plastiques,  $\varepsilon_{ij}^p$ ,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (1.9)$$

La déformation élastique  $\varepsilon_{ij}^e$  est supposée relié directement à la contrainte  $\sigma_{ij}$  par la loi de Hooke :

$$\varepsilon_{ij}^e = L_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (1.10)$$

où  $L_{ijkl}$  est le tenseur d'élasticité qui obéit aux relations de symétrie suivantes :

$$L_{ijkl} = L_{jikl} = L_{ijlk} = L_{klij}, \quad (1.11)$$

pour un matériau isotrope, on a  $L_{ijkl} = \frac{1}{E} \left[ (1 + \nu) \delta_{ik} \delta_{jl} - \nu \delta_{ij} \delta_{kl} \right]$ ,

où  $E$  est le module de Young et  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

Tandis que la déformation plastique est exprimée par la loi de normalité :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.12)$$

avec

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \text{si } F < 0 \quad \text{ou si } F = 0 \quad \text{et } \dot{F} < 0, \quad (1.12a)$$

et

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad \text{si } F = \dot{F} = 0, \quad (1.12b)$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur plastique et  $F(\sigma_{ij}) \leq 0$  le critère de plasticité.

On suppose que le matériau obéit au postulat de Drucker, qui stipule que :

1°- Si  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  est une vitesse de déformation plastique non nulle, se produisant pour un état de contrainte  $\sigma_{ij}$  quelconque, et  $\sigma_{ij}^{(s)}$  est un état de contrainte de sécurité, alors le matériau satisfait la relation de convexité suivante (fig. 1.1) :

$$\left( \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)} \right) \dot{\epsilon}_{ij}^p > 0, \quad (1.13)$$

pour tout  $\sigma_{ij}^{(s)}$  appartenant au domaine défini par l'inégalité  $F(\sigma_{ij}^{(s)}) < 0$ .

2°- Par contre, pour un état de contrainte admissible  $\sigma_{ij}^a$ , c'est-à-dire appartenant au domaine convexe  $F(\sigma_{ij}^a) \leq 0$ , on a :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^a) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0. \tag{1.14}$$

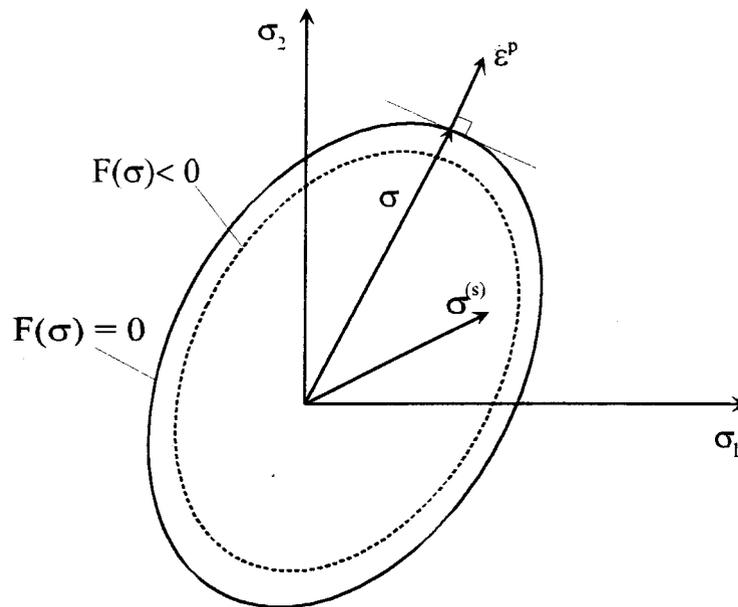


Fig.1.1 - Convexité de la surface d'écoulement et règle de normalité

### 1.3. THEOREME STATIQUE D'ADAPTATION DE MELAN

#### 1.3.1. Enoncé du théorème

On considère un corps B de volume  $\Omega$  et de surface  $\Gamma$  constituée de deux parties disjointes  $\Gamma_\sigma$  et  $\Gamma_u$ , où respectivement les conditions aux limites statiques et cinématiques sont prescrites (fig. 1.2 ). Les charges externes sont les forces de volume  $f_i$ , les forces de surface  $p_i$  et les déplacements imposés  $u_i^d$ , qui varient localement entre des limites fixées.

Dans ce qui suit, on introduit la notion d'un problème de référence purement élastique, qui diffère du problème d'origine seulement par le fait que le matériau réagit, dans ce cas, d'une manière purement élastique avec le même module d'élasticité que le problème d'origine.

Toutes les quantités relatives à ce problème de référence sont indiquées par la souscription "c".

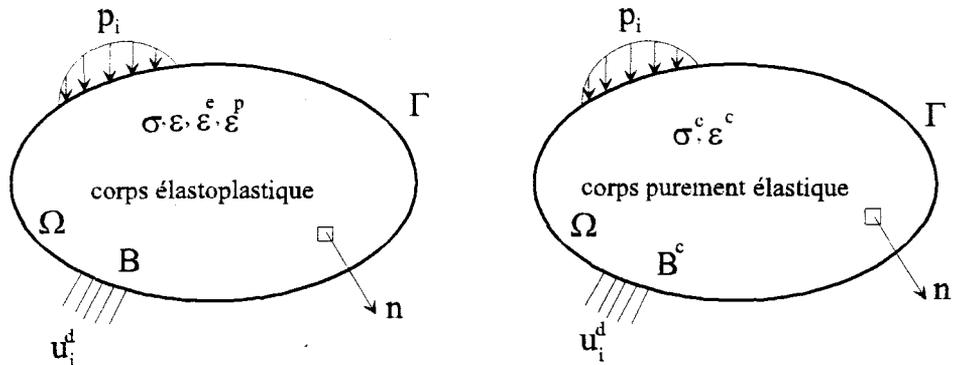


Fig. 1.2 - Problème réel et problème de référence

Le théorème de Melan stipule que s'il existe un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps  $\rho^\circ$ , en tout point  $x$  du corps et pour toutes les combinaisons possibles des sollicitations, telles que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\rho_{ij,j}^\circ = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{1.15a}$$

$$n_j \rho_{ij}^\circ = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\sigma, \tag{1.15b}$$

$$F(\sigma_{ij}^c(x, t) + \rho_{ij}^\circ(x)) < 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{1.15c}$$

pour  $t > 0$ , le corps  $B$  s'adapte en respectant le chargement imposé.

On suppose que la solution du problème de référence est donnée, et que le système d'équations suivant est vérifié :

$$\sigma_{ij,j}^c = -f_i \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.16a)$$

$$n_j \sigma_{ij}^c = p_i \quad \text{sur } \Gamma_\sigma, \quad (1.16b)$$

$$u_i^c = u_i^d \quad \text{sur } \Gamma_u, \quad (1.16c)$$

$$\varepsilon_{ij}^c = \frac{1}{2}(u_{i,j}^c + u_{j,i}^c) \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.16d)$$

$$\varepsilon_{ij}^c = L_{ijkl} \sigma_{kl}^c \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.16e)$$

Le critère de Melan est une condition nécessaire pour l'adaptation, s'il n'existe aucun champ de contraintes résiduelles  $\rho^\circ$  indépendant du temps, tel que l'on ait

$$F(\sigma_{ij}^c(x,t) + \rho_{ij}^\circ(x)) \leq 0, \quad (1.17)$$

en tout point  $x$  du corps  $B$  et pour toutes les combinaisons des sollicitations, alors le corps ne peut jamais s'adapter.

### 1.3.2 Démonstration du théorème

On donne, dans ce paragraphe, la démonstration classique du théorème de Melan afin de pouvoir mieux faire le lien entre ce théorème et son extension (chapitre 3).

On considère l'énergie élastique fictive  $W$  (forme quadratique positive) correspondant au contraintes résiduelles  $(\rho_{ij} - \rho_{ij}^\circ)$ , où  $\rho_{ij}$  est la contrainte résiduelle actuelle à chaque instant de chargement, et  $\rho_{ij}^\circ$  est un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps pour lequel le critère de Melan est vérifié.

Soit  $\varepsilon_{ij}^r$  la déformation élastique correspondant aux contraintes résiduelles  $\rho_{ij}$  définit par la loi de Hooke :

$$\varepsilon_{ij}^r = L_{ijkl} \rho_{kl}, \quad (1.18)$$

on aura :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^{\circ}) L_{ijkl} (\rho_{kl} - \rho_{kl}^{\circ}) d\Omega. \quad (1.19)$$

La dérivée de  $W$  par rapport au temps donne :

$$\dot{W} = \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^{\circ}) L_{ijkl} \dot{\rho}_{kl} d\Omega, \quad (1.20)$$

avec (1.18), on obtient :

$$\dot{W} = \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^{\circ}) \dot{\varepsilon}_{ij}^r d\Omega. \quad (1.21)$$

La déformation actuelle à chaque instant est donnée par :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^c + \varepsilon_{ij}^p, \quad (1.22)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^c + \varepsilon_{ij}^r + \varepsilon_{ij}^p, \quad (1.23)$$

où  $\varepsilon_{ij}^c$  est le champ de déformations élastiques correspondant aux contraintes purement élastiques  $\sigma_{ij}^c$  par la loi de Hooke donc :

$$\dot{W} = \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^{\circ}) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^c - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) d\Omega \quad (1.24)$$

$$= - \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^{\circ}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p d\Omega + \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^{\circ}) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^c) d\Omega, \quad (1.25)$$

posons  $I_1 = \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^{\circ}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p d\Omega$  et  $I_2 = \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^{\circ}) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^c) d\Omega$ ,

on a donc :  $\dot{W} = -I_1 + I_2$ , or  $I_2$  est nulle car en petites déformations, on définit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.26)$$

de même

$$\varepsilon_{ij}^c = (u_{i,j}^c + u_{j,i}^c). \quad (1.27)$$

Nous pouvons donc écrire :

$$I_2 = \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^{\circ}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^c)_{,j} d\Omega, \quad (1.28)$$

en appliquant le théorème de Gauss à  $I_2$  on obtient :

$$I_2 = \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^{\circ})_{,j} (\dot{u}_i - \dot{u}_i^c) d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^{\circ}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^c) n_j d\Gamma. \quad (1.29)$$

Comme  $\rho$  et  $\rho^{\circ}$  sont des champs de contraintes résiduelles, donc auto-équilibrés vérifiant les équations d'équilibre, et que  $\dot{u} = 0$ ,  $\dot{u}^c = 0$  sur  $\Gamma_u$  alors  $I_2 = 0$  donc :

$$\dot{W} = -I_1.$$

On écrit de nouveau:

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c, \quad \rho_{ij}^{\circ} = \sigma_{ij}^s - \sigma_{ij}^c, \quad (1.30)$$

où  $\sigma_{ij}$  est l'état de contraintes actuel et  $\sigma_{ij}^{(s)}$  l'état de contraintes de sécurité, on obtient finalement :

$$\dot{W} = - \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p d\Omega. \quad (1.31)$$

En tenant compte de l'hypothèse de normalité pour la loi d'écoulement,  $\dot{W}$  est négative chaque fois que les déformations plastique apparaissent.

Pour la suite du raisonnement, la proposition classique est que :

- La forme quadratique  $W$  est définie positive, elle ne peut pas devenir négative,  $\dot{W}$  doit donc s'annuler.  $\dot{W}$  étant exprimée à partir d'un produit scalaire faisant intervenir le tenseur des taux déformations plastiques et un tenseur non-nul  $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})$ , cela revient à dire qu'après un certain temps, le taux de déformations plastiques  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  devient nul et les déformations plastiques cessent d'évoluer.

#### 1.4. COEFFICIENT DE SECURITE A L'ADAPTATION

Le coefficient de sécurité introduit par Koiter (KOITER [48] (1960)) permet de dire de façon décisive que les déformations plastiques cessent d'évoluer après une durée déterminée.

Cela revient à dire que l'énergie totale dissipée par déformations plastiques est bornée.

On avait

$$\sigma^c(t) + \rho^o = \sigma^{(s)}(t), \quad (1.32)$$

On suppose que l'on peut trouver un coefficient de valeur  $\alpha \geq 1$ , dit de sécurité à l'adaptation, tel que :

$$\alpha(\sigma_{ij}^c + \rho_{ij}^o) = \alpha\sigma_{ij}^{(s)}, \quad (1.33)$$

soit un état de contraintes admissible.

De l'hypothèse de normalité, on déduit :

$$(\sigma_{ij} - \alpha \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0, \quad (1.34)$$

ce qui donne :

$$(\sigma_{ij} - \alpha \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p + \alpha \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq \alpha \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p, \quad (1.35)$$

$$\alpha (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq (\alpha - 1) \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p, \quad (1.36)$$

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p. \quad (1.37)$$

Soit l'intégration sur le domaine  $\Omega$  de (1.37) donne :

$$\dot{W}_p = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p d\Omega \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p d\Omega = -\frac{\alpha}{\alpha - 1} \dot{W}. \quad (1.38)$$

En intégrant (1.38) par rapport au temps, entre  $t_0$  du début des déformations plastiques et l'instant  $t$ , on obtient :

$$W_p \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} [W(t_0) - W(t)] \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_{ij}^{\circ} L_{ijkl} \rho_{kl}^{\circ} d\Omega. \quad (1.39)$$

Nous avons vu précédemment que la forme quadratique  $W$  tend vers une valeur constante de façon décroissante lorsque  $t$  tend vers l'infini, la valeur de  $W(t_0)$  est finie et positive. Ainsi pour toute valeur de  $\alpha \geq 1$ , l'énergie dissipée par déformations plastiques entre l'instant  $t_0$  et  $t$  est bornée. On est donc sûr qu'il y a adaptation.

## 1.6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons rappelé le théorème statique d'adaptation de Melan et le coefficient de sécurité à l'adaptation de Koiter, qui constituent la base de la théorie d'adaptation.

Cette théorie trouve son cadre d'application privilégié lorsque la structure est soumise à des charges variables. L'adaptation implique l'existence d'un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps, et que l'énergie dissipée par déformations plastiques reste bornée. Cela garantit l'existence d'un noyau élastique vital pour la structure. C'est la notion de "sanctuaire d'élasticité" développée par NAYROLES & WEICHERT [77] (1993), qui est la généralisation du concept de "domaine élastique réduit" introduit par MAIER [63] (1969) dans le cas du matériau à loi d'écoulement non-associée. Les vitesses de déformations plastiques s'annulent une fois qu'elles appartiennent à ce noyau.

Le théorème classique est basé sur la mécanique des milieux continus. Malgré les extensions qu'il a subies depuis son énoncé par Melan, il reste incapable de répondre aux questions suivantes :

- Est-ce que l'existence d'une fissure dans la structure, empêche ou non la structure de s'adapter à un chargement?
  
- Sous quelles conditions une structure fissurée pourra-t-elle s'adapter ?

## **CHAPITRE 2**

### **COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DES STRUCUTURES FISSUREES**

## 2. COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DES STRUCTURES FISSUREES

### 2.1. INTRODUCTION

Quand la rupture se produit dans un solide, de nouvelles surfaces sont créées d'une manière irréversible. Cette séparation matérielle est la conséquence de la rupture des liaisons atomiques ou moléculaires due aux contraintes locales élevées. Le phénomène peut être approché de différents points de vue, dépendants de l'échelle d'observation. D'un côté on a l'approche à l'échelle atomique, où le phénomène prend place dans le matériau à des échelles de l'ordre de  $10^{-9}$  m, de l'autre côté on a l'approche continue qui considère le comportement du matériau à des échelles plus grandes, de l'ordre de  $10^{-4}$  m. Dans l'approche à l'échelle atomique, le problème est étudié en utilisant les concepts de la mécanique quantique. L'approche continue utilise les théories de la mécanique des milieux continus et la thermodynamique. La nature complexe de la rupture empêche un traitement unifié du problème, et les théories existantes s'arrangent avec le sujet de point de vue microscopique et macroscopique. L'objectif majeur de la mécanique de la rupture est de combler le vide entre ces deux approches.

L'approche de la mécanique des milieux continus au problème de la fissuration assume l'existence de défauts plus grands comparés aux dimensions caractéristiques de la microstructure, et considère le matériau continu et homogène. Pour étudier le problème de croissance d'une fissure existante, vide ou autre défaut, on a besoin d'une analyse de contraintes couplée à un postulat de prédiction quand la rupture se produit. Plusieurs de ces critères ont été avancés au cours des années, chaque critère implique une quantité qui doit être reliée à la perte de la continuité. Sa valeur critique représente une mesure de la résistance du matériau à la décohésion.

Dans ce chapitre, on développera une analyse de la rupture dans le cadre général des milieux standards généralisés et de la thermodynamique des processus irréversibles (NGUYEN Q. S. [88](1980)) pour exprimer l'énergie dissipée dans un corps

élastoplastique fissuré. Nous présenterons ensuite la théorie de la croissance de fissure basée sur le bilan d'énergie global de tout le système (GRIFFITH A. A. [26](1921) [27](1924)) ; à partir de ce bilan d'énergie, le critère de Griffith et la définition globale du taux de restitution d'énergie sont déduits. Dans une tentative d'étendre les principes de l'analyse élastique linéaire aux situations d'écoulement localisé au front de fissure, les différentes irréversibilités associées à la rupture ont été réunies pour définir la résistance à la rupture du matériau (courbe R). Cette approche permet à la théorie de Griffith d'être appliquée aux métaux et à d'autres matériaux de construction, et de formuler un critère de rupture ductile (CHABOCHE J. L. & LEMAITRE J. [62] (1985)).

## 2.2. THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX FISSURES

Considérons un matériau élastoplastique en transformation infinitésimale. Suivant la thermodynamique en mécanique des milieux continus classiques dans le cadre de la méthode de l'état local, on postule que les lois d'état dérivent d'un potentiel, qui est une fonction scalaire, concave en température, convexe en d'autres variables et contenant l'origine. En prenant la densité volumique de l'énergie libre de Helmholtz  $\psi$ , fonction des variables d'état  $(\varepsilon, \Theta, \varepsilon^e, \varepsilon^p, \alpha_i)$ , on écrit :

$$\psi = \psi(\varepsilon, \Theta, \varepsilon^e, \varepsilon^p, \alpha_i).$$

En élastoplasticité, les déformations n'interviennent que sous forme de leur partition  $\varepsilon - \varepsilon^p = \varepsilon^e$ ,

$$\psi = (\varepsilon - \varepsilon^p, \Theta, \alpha_i) = \psi(\varepsilon^e, \Theta, \alpha_i). \quad (2.1)$$

Si  $s$  désigne l'entropie volumique et  $\sigma$  le tenseur de contrainte, nous avons :

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial \Theta}, \quad (2.2a)$$

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e}, \quad (2.2b)$$

$$A_i = -\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i}, \quad (2.2c)$$

$A_i$  est la force thermodynamique associée aux variables internes  $\alpha_i$ , qui peuvent caractériser, par exemple, les effets d'érouissage.

### 2.2.1. Position du problème

Supposons, pour simplifier, que le matériau occupe un milieu plan  $\Omega$  d'épaisseur  $h$ , ayant une fissure unique rectiligne en propagation dans son prolongement (fig. 2.1), avec une vitesse linéique  $\dot{a}$  ou surfacique  $\dot{A} = \dot{a}h$  ( $h$  : épaisseur du domaine  $\Omega$ ), et vérifiant les hypothèses suivantes :

H1- Les lèvres de la fissure sont libres de toutes contraintes (fissure ouverte), et des données aux limites, en forces  $P_i$  et en déplacement, sont imposées sur la frontière  $\Gamma$ .

H2- La densité volumique d'énergie libre et les quantités  $\Theta \frac{\partial s}{\partial t}$  et  $s \frac{\partial \Theta}{\partial t}$  sont intégrables dans tout  $\Omega$  et à chaque instant.

H3- Pour une fonction  $F$  donnée, définie sur  $\Omega$ , la condition de transport parallèle

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} = -\dot{a}(t) \frac{\partial F}{\partial x} \right) \text{ est applicable. (voir Annexe A)}$$

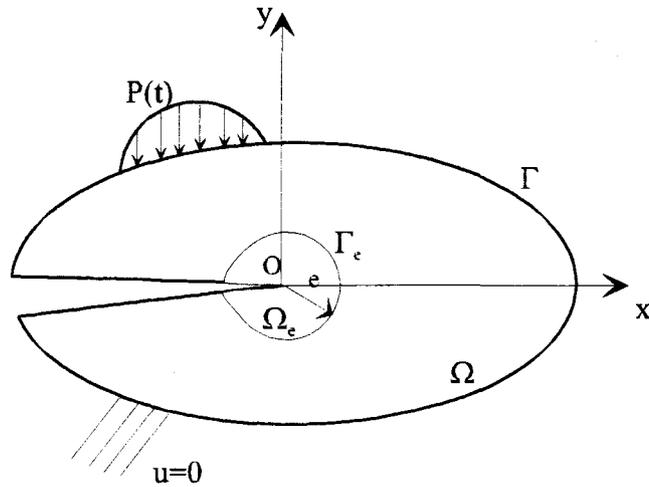


Fig. 2.1- Schématisation du milieu fissuré

L'énergie libre globale du système est :

$$\Psi = \int_{\Omega} \psi(\varepsilon^e, \Theta, \alpha_i) d\Omega, \quad (2.3)$$

et l'énergie interne globale :

$$E = \int_{\Omega} \psi(\varepsilon^e, \Theta, \alpha_i) d\Omega + \int_{\Omega} \Theta s d\Omega. \quad (2.4)$$

### 2.2.2. Analyse énergétique de la fissuration

Sans limiter la généralité de la théorie et pour simplifier l'écriture, nous allons négliger l'énergie cinétique, ainsi que la densité volumique de production interne de chaleur à distance  $r$ . Si  $\dot{W}_x$  et  $\dot{Q}$  représentent pour le système, respectivement, la puissance des efforts extérieurs et la puissance calorifique, le premier principe de la thermodynamique donne le bilan d'énergie suivant :

$$\dot{W}_x + \dot{Q} = \dot{E} + 2\gamma\dot{a}. \quad (2.5)$$

Le terme  $2\gamma\dot{a}$  dans (2.5) intervient car la frontière du volume considéré est évolutive, la fissure faisant partie de la frontière du solide, le facteur 2 provient du fait qu'on a deux surfaces.

$2\gamma\dot{a}$  est ainsi la puissance dissipée dans le mécanisme de décohésion ;  $\gamma$  étant une caractéristique du matériau, supposée constante.

Le second principe de la thermodynamique exprime que la puissance intrinsèque dissipée,  $D$ , est non négative, nous l'énonçons comme suit (avec H2) :

$$D = \int_{\Omega} -\dot{\Theta} s d\Omega + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Theta s d\Omega - \dot{Q} \geq 0. \quad (2.6)$$

Si nous éliminons  $\dot{Q}$ , les relations (2.5) et (2.6) donnent l'expression de la dissipation intrinsèque :

$$D = \dot{W}_x - \dot{\Psi} - \int_{\Omega} s \dot{\Theta} d\Omega - 2\gamma\dot{a}. \quad (2.7)$$

En désignant par  $u_i$  les déplacements produits par les efforts extérieurs à l'instant actuel, et  $F_i$  les efforts de volume,  $\dot{W}_x$  s'écrit :

$$\dot{W}_x = \int_{\Omega} F_i \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} P \dot{u}_i d\Gamma. \quad (2.8)$$

La pointe de la fissure (point O) étant un point singulier, le calcul de  $\dot{\Psi}$  n'est pas trivial. Pour résoudre ce problème, on entoure le point O par une surface fermée  $\Omega_e$  de rayon  $e$ , et de frontière  $\partial\Omega_e$ ; Le domaine  $\Omega_e$  étant en translation de vitesse  $\dot{a}(t)$ . On obtient un domaine  $\Omega^* = \Omega - \Omega_e$  libre de singularité, et l'expression de l'énergie libre globale dans ce domaine est donnée par :

$$\Psi_e = \int_{\Omega^*} \psi d\Omega. \quad (2.9)$$

Nous avons  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{\Psi}_\epsilon = \dot{\Psi}$  si nous pouvons établir que  $\Delta\Psi_\epsilon = \Psi - \Psi_\epsilon$  vérifie  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Delta\Psi_\epsilon) = 0$ .

Or, pour tout  $t' \geq t$  :

$$\Delta\Psi_\epsilon(t') = \int_{\Omega_\epsilon(t)} \psi(X + a(t') - a(t), t') d\Omega, \quad (2.10)$$

où nous avons noté  $\psi(X, t) = \psi(\epsilon^\circ(X, t), \Theta(X, t), \alpha_i(X, t))$ . En remarquant que (Annexe A) :

$$\dot{\psi}(x + a(t') - a(t), t|_{t'=t}) = \psi_{,t} + \dot{a}\psi_{,1}, \quad (2.11)$$

si la fonction  $\psi_{,t} + \dot{a}\psi_{,1}$  est intégrable dans  $\Omega$ , nous aurons effectivement  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Delta\Psi_\epsilon) = 0$ ,

NGUYEN Q.S [88](1980) [90](1981).

On introduit dans le même esprit l'hypothèse suivante :

La fonction  $\psi$  vérifie la relation :

$$\psi_{,t} = -\dot{a}\psi_{,1} + (\text{fonction intégrable}), \quad (2.12)$$

qui assure la relation :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{\Psi}_\epsilon = \dot{\Psi}. \quad (2.13)$$

La condition (2.12) exprime le transport parallèle des singularités dans le mouvement du front de fissure (Annexe A). Elle est vérifiée en particulier lorsque  $\psi$  possède, au voisinage du point O, l'expression asymptotique :

$$\psi = H(t, \dot{a}) r^s \tilde{\psi}(x - a(t), y, \dot{a}), \quad (2.14)$$

avec

$H$  : l'intensité de  $\psi$  due à la singularité,

$s$  : l'ordre de la singularité,

$r$  : la distance entre le point considéré et la pointe de la fissure,

$\tilde{\psi}$  : une fonction géométrique.

Nous obtenons donc pour  $\dot{\Psi}_e$ , l'expression suivante (voir aussi Annexe A) :

$$\dot{\Psi}_e = \int_{\Omega^*} (-\sigma_{ij} : \dot{\epsilon}_{ij}^e + A_\beta \dot{\alpha}_\beta + s\dot{\Theta}) d\Omega - \int_{\Gamma_e} \dot{a}\psi n_1 d\Gamma. \quad (2.15)$$

De plus, la formule de Green sous l'hypothèse H1 s'écrit :

$$\int_{\Omega^*} F_i \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} P_i \dot{u}_i d\Gamma - \int_{\Gamma_e} \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i d\Gamma = \int_{\Omega^*} \sigma_{ij} : \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega, \quad (2.16)$$

$n$  étant la normale à  $\Gamma_e$ . Compte tenu de cette égalité et l'hypothèse de partition de la déformation totale, l'expression de  $\dot{\Psi}_e$  s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_e = & \int_{\Omega^*} F_i \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} P_i \dot{u}_i d\Gamma - \int_{\Gamma_e} (\dot{a}\psi n_1 + \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i) d\Gamma \\ & - \int_{\Omega^*} (\sigma_{ij} : \dot{\epsilon}_{ij}^p + A_\beta \dot{\alpha}_\beta) d\Omega - \int_{\Omega^*} s\dot{\Theta} d\Omega \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pour des raisons physiques (NGUYEN Q. S. [88] (1980)), la puissance intrinsèque volumique dissipée  $\sigma_{ij} : \dot{\epsilon}_{ij}^p + A_\beta \dot{\alpha}_\beta$  est intégrable dans  $\Omega$ , c'est-à-dire la quantité

$$\lim_{e \rightarrow 0} \int_{\Omega - \Omega_e} (\sigma_{ij} : \dot{\epsilon}_{ij}^p + A_\beta \dot{\alpha}_\beta) d\Omega \text{ existe.}$$

Soit avec le passage à la limite ( $e \rightarrow 0$ ) de (2.17), sous l'hypothèse H2, et comme  $\dot{\Psi}_e$  est intégrable, nous obtenons l'existence de la limite :

$$\lim_{e \rightarrow 0} \int_{\Gamma_e} (\dot{a}\psi n_1 + \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i) d\Gamma < +\infty, \quad (2.18)$$

et

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{\Psi}_\epsilon = \dot{W}_x - \int_{\Omega} (\sigma_{ij} : \dot{\epsilon}_{ij}^p + A_\beta \dot{\alpha}_\beta) d\Omega \\ - \int_{\Omega} s \dot{\Theta} d\Omega - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} (\dot{a} \psi n_1 + \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.19)$$

La puissance intrinsèque dissipée du système s'écrit alors :

$$D = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} : \dot{\epsilon}_{ij}^p + A_\beta \dot{\alpha}_\beta) d\Omega + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} (\dot{a} \psi n_1 + \sigma_{ij} n_j \dot{u}_i) d\Gamma - 2\gamma \dot{a} \quad (2.20)$$

Les relations (2.19) et (2.20) suggèrent d'introduire la quantité  $G$ , définie lorsque  $\dot{a} \neq 0$  par :

$$G = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} (\psi n_1 + \sigma_{ij} n_j \frac{\dot{u}_i}{\dot{a}}) d\Gamma, \quad (2.21)$$

qui, avec la condition de transport parallèle appliquée au déplacement, donne :

$$G = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} (\psi n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) d\Gamma. \quad (2.22)$$

D'où l'expression de la dissipation intrinsèque :

$$D = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} : \dot{\epsilon}_{ij}^p + A_\beta \dot{\alpha}_\beta) d\Omega + (G - 2\gamma) \dot{a}. \quad (2.23)$$

La puissance intrinsèque dissipée du solide fissuré se compose d'un terme de volume, de densité  $(\sigma_{ij} : \dot{\epsilon}_{ij}^p + A_\beta \dot{\alpha}_\beta)$ , et d'un terme linéaire le long du front de fissure de densité  $(G - 2\gamma) \dot{a}$ .

La quantité  $G$  est la force thermodynamique associée à la longueur de la fissure  $a$ , elle est appelée taux de restitution d'énergie.

De plus, en transformation quasi statique, nous avons la possibilité d'avoir un paramétrage global du système avec fissure, c'est-à-dire que le système est globalement

défini par les variables d'état  $(u, \alpha, a, \Theta)$  (NGUYEN Q. S [88](1980) LEMAITRE J. & CHABOCHE J.L. [62](1985)), on aura donc :

$$\Psi = \Psi(u, \alpha, a, \Theta). \quad (2.24)$$

L'expression (2.24) nous permet d'introduire les forces thermodynamiques associées aux variables d'état globales  $(u, \alpha, a, \Theta)$  :

$$P = \frac{\partial \Psi}{\partial u}, \quad (2.25a)$$

$$A = -\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}, \quad (2.25b)$$

$$s = -\frac{\partial \Psi}{\partial \Theta}, \quad (2.25c)$$

$$G = -\frac{\partial \Psi}{\partial a}. \quad (2.25d)$$

Notons encore que, puisque la densité d'énergie  $\psi(\varepsilon^e, \alpha_i, \Theta)$  est convexe par rapport à  $\varepsilon^e$ , alors nécessairement  $G \geq 0$ .

En effet, il suffit de vérifier que :

$$\Psi(u, \alpha, a, \Theta) \geq \Psi(u, \alpha, a[\tau], \Theta), \quad \text{pour tout } \tau \geq 0, \quad (2.26)$$

or, si la densité d'énergie  $\psi(\varepsilon^e, \alpha_i, \Theta)$  est convexe par rapport à  $\varepsilon^e$ , le principe du minimum est valable pour tout  $\tau \geq 0$ . Pour une perturbation de  $a[\tau]$ , en maintenant les autres variables bloquées, nous avons  $u[0]$  cinématiquement admissible lorsque la longueur de la fissure est à  $a[\tau]$ , donc  $\Psi(u, \alpha, a[\tau], \Theta)$  est un minimum et l'inégalité (2.26) résulte.

L'utilisation de la formule (2.22), valable pour la plasticité parfaite, conduit à un résultat apparemment paradoxal et sans intérêt  $G = 0$  (paradoxe de Rice). Cela signifie

que le solide  $\Omega^*$  ne fournit aucune énergie à la pointe de la fissure, ce qui est en contradiction avec l'évidence expérimentale et exclut la possibilité d'avoir un critère de rupture local.

Pour surmonter cette difficulté, il y' a deux possibilités :

- Changer la modélisation de façon à trouver  $G \neq 0$  sur un contour à définir, NGUYEN Q. S. [87] (1985) propose d'introduire des lignes de discontinuité de certains champs mécaniques au voisinage de le pointe de la fissure, et en appliquant les deux principes de la thermodynamique, obtient  $G \neq 0$ ,
- conserver le modèle de la fissure idéale avec  $G = 0$ , mais abandonner l'idée de trouver un critère local.

Notons aussi qu'en plasticité parfaite, qui sera le cadre de notre travail, nous avons:

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} \sigma : \dot{\epsilon}^P d\Omega + \int_{\Gamma_\epsilon} (\dot{a}\psi n_1 + \sigma n \dot{u}) d\Gamma \right]. \quad (2.27)$$

En appliquant la condition de transport parallèle à  $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ , on a :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \epsilon_{ij,t}^P - \dot{a}\epsilon_{ij,1}^P. \quad (2.28)$$

Alors (2.27) peut s'écrire sous la forme

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} \sigma_{ij} \epsilon_{ij,t}^P d\Omega - \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} \dot{a}\sigma_{ij} \epsilon_{ij,1}^P d\Omega + \int_{\Gamma_\epsilon} \dot{a}(\psi n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) d\Gamma \right], \quad (2.29)$$

et comme :

$$- \int_{\Gamma_\epsilon} \psi n_1 d\Gamma = \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{ij}^e} \epsilon_{ij,1}^e d\Omega - \int_{\Gamma} \psi n_1 d\Gamma, \quad (2.30)$$

nous en déduisons que :

$$D = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij,t}^p d\Omega + \dot{a} \int_{\Gamma} (\psi n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) d\Gamma. \quad (2.31)$$

Cette expression de la dissipation, nous permet de découpler les deux phénomènes, et de faire une étude locale pour la plasticité, et globale pour la fissuration. Nous verrons après comment on tiendra compte de l'énergie dissipée dans les déformations plastiques.

La quantité  $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^p$  n'a pas de signification physique précise, elle dépend de la densité de la puissance plastique dissipée,  $\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ , et de  $\varepsilon_{ij,t}^p = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial t}$ , qui caractérise le changement de la distribution de la déformation plastique autour de O.

Le deuxième terme de l'expression (2.31) traduit bien le fait que l'énergie disponible, pour créer la décohésion à la pointe de la fissure, est nécessairement une énergie élastique, stockée provisoirement dans la structure. Ce qui justifie aussi l'emploi comme paramètre de fissuration, le taux de restitution d'énergie élastique dans un contexte purement macroscopique, pour un solide fissuré soumis à des déformations plastiques non confinées.

### 2.3. DEFINITION GLOBALE DU TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE

Une autre manière de définir le taux de restitution d'énergie avec des quantités globales, consiste à étudier le bilan des énergies mises en jeu dans le processus d'accroissement de fissure. Considérons toujours le milieu fissuré élastique dans lequel la fissure croît avec une vitesse linéique  $\dot{a}$  ou surfacique  $\dot{A} = \dot{a}h$ , et appliquons le premier principe de la thermodynamique à tout le solide, considéré dans l'hypothèse des petites perturbations.

$$\dot{E} + \dot{K} = \dot{W}_x + \dot{Q} - 2\gamma\dot{A}, \quad (2.32)$$

rappelons que  $E$  est l'énergie interne,  $K$  l'énergie cinétique,  $\dot{Q}$  le taux de chaleur reçue par le domaine considéré et  $\dot{W}_x$  la puissance des efforts extérieurs.

Le taux de l'énergie interne s'exprime par :

$$\dot{E} = -P_{(i)} + \dot{Q} = \int_{\Omega} \sigma : \dot{\epsilon} d\Omega + \dot{Q} = \dot{W}_e + \dot{Q}, \quad (2.33)$$

$P_{(i)}$  est la puissance des efforts intérieurs et  $\dot{W}_e$  la puissance de déformation élastique.

Le premier principe de la thermodynamique peut donc s'écrire sous la forme :

$$\dot{W}_e + \dot{K} = \dot{W}_x - 2\gamma\dot{A}. \quad (2.34)$$

Une condition de stabilité du processus de fissuration est que l'énergie cinétique ne s'accroît pas :

$$\dot{K} = \dot{W}_x - \dot{W}_e - 2\gamma\dot{A} \leq 0. \quad (2.35)$$

En considérant  $A$  comme seule variable de ce bilan global, cela revient à écrire :

$$\left( \frac{\partial W_x}{\partial A} - \frac{\partial W_e}{\partial A} \right) \dot{A} \leq 2\gamma\dot{A}, \quad (2.36)$$

d'où (avec  $\dot{A} \geq 0$ )

$$\frac{\partial W_x}{\partial A} - \frac{\partial W_e}{\partial A} \leq 2\gamma. \quad (2.37)$$

La quantité du premier membre, qui représente l'énergie disponible lors d'un accroissement de fissure, et qui peut être utilisée pour créer ce mécanisme, est par définition le taux de restitution d'énergie  $G$  (GDOUTOS E. E. [21] (1993) LEMAITRE J. & CHABOCHE J. L. [62] (1985)) :

$$G = \frac{\partial W_x}{\partial A} - \frac{\partial W_e}{\partial A}. \quad (2.38)$$

## 2.4. FISSURATION EN COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE

Dans les matériaux ductiles, comme les aciers à faible teneur en carbone, les aciers inoxydables et les polymères, la plasticité intervient sous deux aspects :

- Au niveau d'une zone plastique en amont du front de fissure, source d'un effet d'histoire par développement de contraintes résiduelles,
- au niveau du mécanisme de progression de fissure par superposition du mécanisme de rupture ductile.

Tant que les sollicitations sont assez faibles, monotones croissantes ou périodiques, ces effets peuvent être négligés ou contourner (LEMAITRE J. & CHABOCHE J. L. [62] (1985) GDOUTOS E. E. [21] (1993)). Par contre, pour les sollicitations importantes et fortement variables, la progression stable des fissures de rupture ductile, et les effets d'histoire liés aux surcharges ne peuvent être modélisés qu'avec prise en compte de la plasticité.

Considérant donc une fissure d'aire  $A$  dans un corps déformable soumis à un chargement arbitraire, suivant la loi de conservation d'énergie on a :

$$\dot{E} + \dot{K} = \dot{W}_x - 2\gamma\dot{A} + \dot{Q}, \quad (2.39)$$

le taux de l'énergie interne s'exprimera par :

$$\dot{E} = \dot{W}_e + \dot{W}_p + \dot{Q}, \quad (2.40)$$

où  $W_e$  représente l'énergie de déformation élastique et  $W_p$  le travail plastique, d'où (2.39) s'écrira, compte tenu de (2.40) :

$$\dot{K} + \dot{W}_e + \dot{W}_p = \dot{W}_x - 2\gamma\dot{A}. \quad (2.41)$$

En écrivant la condition de stabilité du processus ( $\dot{K} \leq 0$ ) on obtient :

$$\dot{W}_x - \dot{W}_e - \dot{W}_p - 2\gamma\dot{A} \leq 0, \quad (2.42)$$

qui s'écrira, compte tenu de  $\dot{A} \geq 0$  :

$$\frac{\partial W_x}{\partial A} - \frac{\partial W_e}{\partial A} \leq \frac{\partial W_p}{\partial A} + 2\gamma, \quad (2.43)$$

le premier terme de (2.43) n'est autre que le taux de restitution d'énergie  $G$ . Soit en posant  $2\gamma = G_0$  (seuil de fissuration en absence de déformations plastiques), l'expression (2.43) devient donc :

$$G \leq G_0 + \frac{\partial W_p}{\partial A}, \quad (2.44)$$

qui peut être utilisée comme critère de rupture ductile, où le terme de droite représente la résistance à la fissuration, plus connue sous le nom de courbe R, (LEMAITRE J. & CHABOCHE J. L. [62](1985), GDOUTOS E.E. [21](1993)).

De plus, on a l'énergie potentielle qui est donnée par :

$$\Pi = W_e - W_x. \quad (2.45)$$

Alors  $G$  peut être exprimé directement à partir de l'énergie potentielle par :

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial A}. \quad (2.46)$$

## 2.5. COURBE DE RESISTANCE A LA FISSURATION ( COURBE R)

La méthode de la courbe "résistance à la fissuration" ou courbe R est une méthode à paramètres pour étudier la rupture dans le cas de la croissance de fissure stable, cette dernière est, généralement, accompagnée de déformations anélastiques observées avant l'instabilité globale, phénomène associé surtout aux structures minces telles que les plaques (contraintes planes), où la résistance à la rupture est représentée

par une courbe évoluant au cours de la propagation de fissure, plutôt qu'un paramètre de résistance singulier.

Des courbes typiques représentant la variation de la longueur de fissure avec la charge, en déformation plane et contrainte plane, sont données par la figure (2.2)

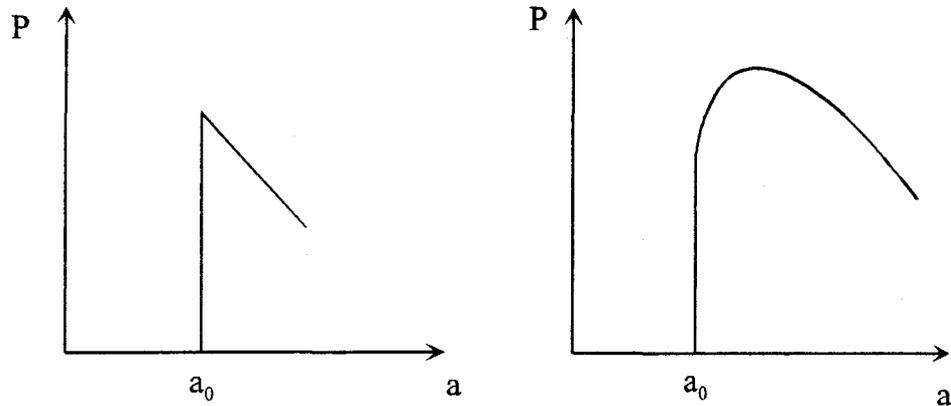


Fig. 2.2 - Courbes typiques charge-longueur de fissure :

a) déformation plane    b) contrainte plane

Les bases théoriques pour la courbe R peuvent être tirées de l'équation des bilans d'énergie (2.43), qui s'applique à la croissance stable de la fissure. Pour les cas où l'énergie dissipée plastiquement,  $W_p$ , n'est pas négligeable, l'équation prend la forme :

$$G \leq R, \quad (2.47)$$

avec

$$G = \frac{\partial W_x}{\partial A} - \frac{\partial W_e}{\partial A}, \quad (2.48)$$

et

$$R = 2\gamma + \frac{\partial W_p}{\partial A}, \quad (2.49)$$

R représente le taux d'énergie dissipée durant la propagation stable de la fissure. Il est composé de deux parties : la première correspond à l'énergie consommée dans la création de nouvelles surfaces, la seconde à l'énergie dissipée dans les déformations plastiques (GDOUTOS E.E. [21](1993)).

Dans le cas où la zone plastique à la pointe de la fissure est relativement petite, les deux parts de la dissipation décrites par l'équation (2.49) peuvent être rassemblées pour former un nouveau paramètre du matériau, associé à la résistance à la rupture.

A la suite de l'initiation de la fissure, la zone plastique autour de la pointe de la fissure augmente d'une manière non linéaire avec la longueur de la fissure, donc le taux d'énergie dissipée dans les déformations plastiques, qui constitue la majeure partie de l'énergie dissipée dans l'équation (2.49), augmente non linéairement avec la longueur de la fissure.

La courbe R est considérée comme une caractéristique du matériau pour une certaine épaisseur, une température et un taux de déformation donnés. Elle est indépendante de la longueur initiale de la fissure et de sa géométrie.

## 2.6. DISSIPATION NORMALE ET LOIS DE PROPAGATIONS

L'expression (2.23) de la dissipation intrinsèque nous permet de développer, pour le solide fissuré, l'hypothèse de dissipativité normale afin d'obtenir d'une manière systématique des lois de propagation, lorsque  $G \neq 0$ , (NGUYEN Q. S [88](1980), MAUGIN G. A. [71](1992)).

En mécanique des milieux continus, la plupart des modèles de matériaux vérifient cette hypothèse ; on se pose la question si le phénomène de rupture, qui est un processus irréversible, peut correspondre à des mécanismes dissipatifs normaux.

Rappelons que si la dissipation s'écrit sous la forme  $X\dot{x}$ , où X est une force et  $\dot{x}$  une vitesse, l'hypothèse de dissipativité normale sera vérifiée s'il existe un potentiel de

dissipation  $\psi(\dot{x})$ , fonction convexe de  $\dot{x}$ , telle que  $X$  est un gradient ( ou sous-gradient si  $\psi$  n'est pas dérivable), (GERMAIN P. [22](1973), MOREAU J. J. [75](1973)).

$$X = \frac{\partial \psi}{\partial \dot{x}}(\dot{x}). \quad (2.50)$$

On peut aussi introduire l'image  $\phi(X)$  de  $\psi(\dot{x})$  par la transformée de Legendre-Fenchel  $\phi(X) = [\sup_{\dot{x}} X\dot{x} - \psi(\dot{x})]$ . La fonction  $\phi(X)$  est convexe et vérifie :

$$\dot{x} = \frac{\partial \phi(X)}{\partial X}. \quad (2.51)$$

Les relations (2.50) et (2.51) sont des lois de comportement reliant  $\dot{x}$  et  $X$ . De cette façon, on peut construire systématiquement des lois d'évolution à partir de l'expression de la puissance dissipée.

L'hypothèse de dissipativité normale, appliquée à la dissipation volumique de l'équation (2.23), donne la loi d'évolution en élastoplasticité qui correspond à la loi de normalité.

Selon le choix du potentiel  $\psi$ , l'hypothèse de dissipativité normale appliquée au second terme de (2.23) donne différentes lois de propagation de fissure.

Si  $\phi$  et  $\psi$  sont des potentiels dérivables, nous avons :

$$\dot{A} = \frac{\partial \phi}{\partial G}(G), \quad G = \frac{\partial \psi}{\partial \dot{A}}(\dot{A}). \quad (2.52)$$

Ce sont des lois de propagation visqueuses, comparables à des lois viscoélastiques ou viscoplastiques en mécanique des milieux continus.

Si nous adoptons un potentiel de dissipation  $\psi(\dot{A})$  homogène de degré 1 de la forme  $F(\dot{A})$ , alors le potentiel  $\phi(G)$  est la fonction indicatrice du domaine admissible

$G \leq F$ . La loi de comportement (2.52) s'exprime ainsi : (NGUYEN Q. S. [88] (1980), MAUGIN G. A. [71](1992))

$$\begin{cases} G < F \rightarrow \dot{A} = 0 \\ G = F \rightarrow \dot{A} \geq 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

Le choix d'un potentiel de dissipation permet de formuler un modèle de fissuration par rupture ductile. L'influence de la plasticité est prise en compte dans l'expression de  $F$  dans (2.53).

## 2.7. MODELE DE FISSURATION PAR RUPTURE DUCTILE

Ce modèle ne rend pas compte des distributions des contraintes dans le solide, mais traduit la rupture ductile par le concept de la courbe  $R$  (résistance à la fissuration).

On considère que le potentiel de dissipation par fissuration peut se mettre sous la forme d'une fonction seuil suivant LEMAITRE J. & CHABOCHE J. L. [62](1985) :

$$\phi^* = F = G - H_p = 0, \quad (2.54)$$

avec des conditions de charge-décharge de type plasticité :

$$\left. \begin{cases} F < 0 \rightarrow \text{pas d'évolution de la fissure} \\ F = 0 \rightarrow \text{évolution stable} \end{cases} \right\}$$

La rupture ductile est traitée de la même manière que l'élastoplasticité. La variable  $H_p$  joue ainsi le rôle d'une valeur critique  $G_c$ , évoluant au cours de la rupture, qui décrit en fait la courbe  $R$  (résistance à la fissuration). Cette courbe  $R$  joue, pour la rupture ductile avec les variables  $G$  et  $A$ , le même rôle que la courbe d'écrouissage pour la plasticité avec les variables contrainte et déformation.

Par analogie avec la plasticité, LEMAITRE J. & CHABOCHE J. L. [62] (1985) supposent, pour obtenir des expressions simples, que l'énergie libre est une fonction puissance et que la partie plastique s'exprime par :

$$\Psi^p = G_0 h_p + \frac{Vm}{m+1} h_p^{\frac{m+1}{m}}, \quad (2.55)$$

où  $V$ ,  $m$  et  $G_0$  sont des constantes dépendant du matériau.

L'hypothèse de normalité généralisée associée aux phénomènes dissipatifs instantanés donne les lois d'évolution suivantes :

$$\dot{A} = \lambda \frac{\partial \phi^*}{\partial G} = \lambda \frac{\partial F}{\partial G} = \lambda, \quad \text{et} \quad \dot{h}_p = -\lambda \frac{\partial F}{\partial H_p} = \lambda, \quad (2.56)$$

$\lambda$  est un multiplicateur indépendant du temps, qui est nul lorsqu'il n'y a pas de propagation de fissure.

La variable seuil  $H_p$  est donnée par :

$$H_p = \frac{\partial \Psi}{\partial h_p} = G_0 + V h_p^{1/m}. \quad (2.57)$$

La condition de charge-décharge, nécessitant d'imposer  $F = 0$  et  $\dot{F} = 0$  au cours de la propagation de fissure implique la condition de consistance :

$$\frac{\partial F}{\partial G} \dot{G} + \frac{\partial F}{\partial H_p} \dot{H}_p = 0, \quad (2.58)$$

qui donne l'expression du multiplicateur :

$$\lambda = \dot{A} = \dot{h}_p = H(F) \frac{m}{V} \frac{\langle \dot{G} \rangle}{h_p^{(1-m)/m}}, \quad (2.59)$$

où  $H$  désigne la fonction d'Heaviside :  $H(F) = 0$  si  $F < 0$  ,  $H(F) = 1$  si  $F = 0$ , tandis que le crochet de Mc Cauley  $\langle \cdot \rangle$  est défini par  $\langle \dot{G} \rangle = 0$  si  $\dot{G} < 0$  et  $\langle \dot{G} \rangle = \dot{G}$  si  $\dot{G} \geq 0$ . On voit que  $\lambda = 0$  lorsque  $F < 0$  ou lorsqu'il y a décharge ( $\dot{F} < 0$ ). L'équation (2.52) est valable pour les matériaux ductiles, où la résistance à la fissuration augmente avec la propagation de fissure. La vitesse de fissuration est alors, en tenant compte de  $F = G - H_p = 0$  :

$$\dot{A} = H(F) \frac{m}{V} \left\langle \frac{G - G_0}{V} \right\rangle^{m-1} \langle \dot{G} \rangle. \quad (2.60)$$

Soit en intégrant, on trouve :

$$A = A_0 + \left\langle \frac{G - G_0}{V} \right\rangle^m, \quad (2.61)$$

qui décrit l'évolution de la fissure tant que la rupture se produit d'une façon stable, cette équation (2.61) décrit aussi la courbe  $H_p$  par (2.57) :

$$H_p(A - A_0) = G_0 + V(A - A_0)^{1/m}. \quad (2.62)$$

L'instabilité de la fissure (croissance de la vitesse de propagation de la fissure incontrôlée) intervient lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l} G = H_p \\ \text{et} \\ \frac{\partial G}{\partial A} = \frac{\partial H_p}{\partial A} \end{array} \right. \quad (2.63)$$

De l'équation (2.63), on tire généralement la longueur critique de la fissure  $A_c$ , à laquelle la rupture instable se produit.

## 2.8. CONCLUSION

A travers ce chapitre, nous avons montré qu'une analyse de la rupture, développée dans le cadre général des milieux standards généralisés, permet de contourner le problème de singularité du champ de contraintes élastiques. La puissance intrinsèque dissipée, du solide fissuré, peut être exprimée comme étant la somme de la dissipation plastique et de la puissance dissipée par fissuration. Par l'introduction du taux de restitution d'énergie et de l'hypothèse de dissipativité normale, l'extension du théorème statique d'adaptation aux structures fissurées peut être abordée.

Le choix d'un modèle de fissuration par rupture ductile, est nécessaire pour la détermination de la longueur limite que peut prendre la fissure à l'adaptation.

## **CHAPITRE 3**

**EXTENSION DU THEOREME  
D'ADAPTATION DE MELAN  
AUX STRUCTURES FISSUREES**

### 3. EXTENSION DU THEOREME D'ADAPTATION DE MELAN AUX STRUCTURES FISSUREES

#### 3.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, une contribution à l'extension du théorème statique d'adaptation aux structures fissurées, soumises à des chargements variables est donnée. Nous considérons la structure élastique-parfaitement plastique du chapitre 1, dans laquelle, une fissure est supposée exister, le même raisonnement est adopté pour énoncer et discuter cette extension. Pour tenir compte de la fissuration, nous utilisons l'approche du chapitre 2, qui consiste à isoler en premier lieu la singularité, pour ensuite la prendre en compte en considérant tout le domaine matériel. On exprime, en utilisant le critère de rupture ductile, la longueur limite que peut prendre la fissure à l'adaptation.

#### 3.2. THEOREME STATIQUE D'ADAPTATION

##### 3.2.1 Hypothèses de base

On considère un corps élastique parfaitement plastique  $B$ , occupant un milieu  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ , soumis à des forces de volume  $F_i$  et des tractions de surface  $P_i$  sur une partie  $\Gamma_\sigma$  de sa frontière. Sur la partie complémentaire  $\Gamma_u$  les déplacements  $u_i^d$  sont imposés. Ce corps  $B$  contient une fissure unique de longueur  $a$ , les lèvres de la fissure sont libres de toutes contraintes (fissure ouverte). Les sollicitations  $F_i(x,t)$ ,  $P_i(x,t)$  et  $u_i^d(x,t)$ , varient localement entre des limites fixées :

$$\begin{aligned}
 F^-(x) &\leq F(x,t) \leq F^+(x) && \text{dans } \Omega, \\
 P^-(x) &\leq P(x,t) \leq P^+(x) && \text{sur } \Gamma_\sigma, \\
 u^-(x) &\leq u^d(x,t) \leq u^+(x) && \text{sur } \Gamma_u.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Dans la suite, on introduit la notion de problème de référence purement élastique, qui diffère du problème d'origine seulement par le fait que le matériau réagit d'une manière purement élastique avec le même module d'élasticité (Fig. 3.1). Toutes les quantités relatives à ce problème de référence sont indiquées par la souscription "c".

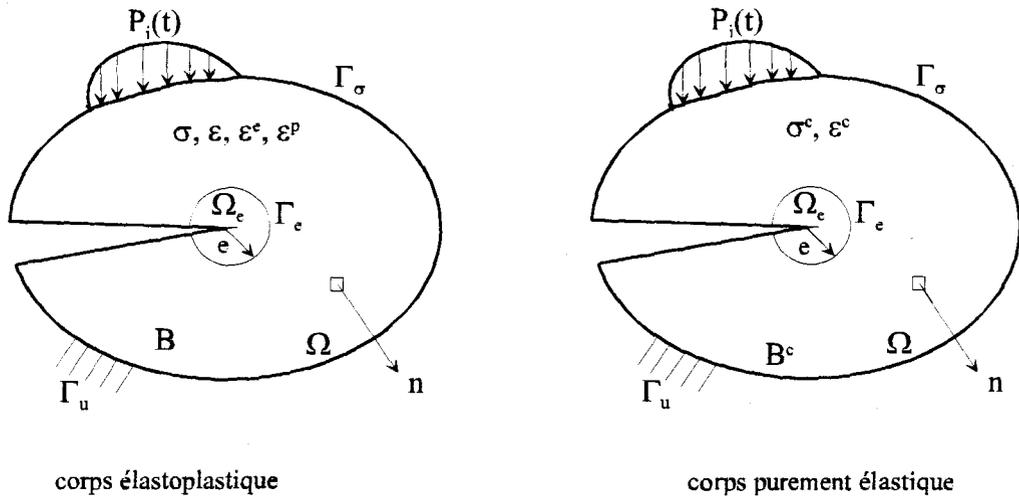


Fig. 3.1

On suppose que la solution à ce problème de référence est donnée, et que le système d'équations suivant est vérifié :

$$\sigma_{ij,j}^c = -F_i \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.2)$$

$$n_j \sigma_{ij}^c = P_i \quad \text{sur } \Gamma_\sigma, \quad (3.3)$$

$$u_i^c = u_i^d \quad \text{sur } \Gamma_u, \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{ij}^c = \frac{1}{2}(u_{i,j}^c + u_{j,i}^c) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{ij}^c = L_{ijkl} \sigma_{kl}^c \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.6)$$

### 3.2.2. Proposition 1

La structure fissurée s'adapte pour l'histoire de chargement donné en (3.1), s'il existe un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps  $\rho^\circ$ , tels que pour le temps  $t > 0$ , les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\rho_{ij,j}^\circ = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.7)$$

$$n_j \rho_{ij}^\circ = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (3.8)$$

$$F(\sigma_{ij}^c + \rho_{ij}^\circ, \sigma_s) < 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.9)$$

avec 
$$\sigma_{ij}^c + \rho_{ij}^\circ = \sigma_{ij}^{(s)}. \quad (3.10)$$

En supplément, une condition doit être imposée sur la longueur de la fissure afin de contrôler sa propagation.

$$a_{lim} < a_c \quad (3.11)$$

$a_c$  est la longueur critique de la fissure, pour laquelle nous avons propagation instable.

Il est à noter que dans la condition (3.9), la singularité du champ de contraintes  $\sigma^\circ$ , du problème de référence purement élastique, est à exclure. L'influence de la pointe de la fissure sur le processus dissipatif sera pris en compte, comme dans le chapitre 2, dans la discussion de la proposition.

Les conditions (3.7-3.9) impliquent que la structure fissurée s'est adaptée au chargement donné, c'est-à-dire, que l'écoulement plastique et la propagation de la fissure cessent d'évoluer après un certain temps. Néanmoins, la fissure aurait pu, en se propageant, atteindre la longueur critique avant l'état d'adaptation. Afin d'éviter cette situation catastrophique, la condition (3.11) est introduite, pour assurer la sécurité de la structure vis-à-vis de la rupture instable. Nous montrerons dans le § 3.3, pour le modèle adopté,

comment déterminer la longueur limite,  $a_{lim}$ , que peut prendre la fissure à l'état d'adaptation.

### 3.2.3. Discussion 1

Pour la démonstration de cette proposition, on considère l'énergie de déformation élastique fictive  $W$  correspondant aux contraintes auto-équilibrées  $(\rho - \rho^\circ)$ , où  $\rho$  est le champ de contraintes résiduelles à chaque étape du programme de chargement, et  $\rho^\circ$  est un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps. Soit  $\varepsilon^r$  le champ de déformations élastiques correspondant à  $\rho$  par la loi de Hooke.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^\circ) L_{ijkl} (\rho_{kl} - \rho_{kl}^\circ) d\Omega \quad (3.12)$$

$W$  est non-négative, puisque  $L$  est défini positif. Dans l'équation (3.12),  $\rho$  représente la différence entre l'état de contrainte inconnu ( $\sigma$ ), dépendant du temps dans le corps  $B$ , et l'état de contrainte donné ( $\sigma^c$ ), dépendant du temps dans le corps de référence purement élastique  $B^c$ , telle que :

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c, \quad (3.12a)$$

$$\rho_{ij}^\circ = \sigma_{ij}^{(s)} - \sigma_{ij}^c, \quad (3.12b)$$

$\sigma_{ij}^{(s)}$  est un état de contrainte de sécurité défini par le fait que le critère de Hill est satisfait au sens strict (éq (1.13)).

Nous avons aussi les définitions suivantes pour les déformations :

$$\varepsilon_{ij}^r = L_{ijkl} \rho_{kl}, \quad \varepsilon_{ij}^{r^\circ} = L_{ijkl} \rho_{kl}^\circ, \quad (3.13a)$$

$$\varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^r = \frac{1}{2}(u_{i,j}^r + u_{j,i}^r), \quad (3.13b)$$

$$u_i = u_i^c + u_i^r, \quad (3.13c)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^c + \varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^c + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^r. \quad (3.13d)$$

Comme dans le chapitre 2, on introduit  $\Omega^* = \Omega - \Omega_e$ , tel que  $\Omega_e$  est un domaine de frontière  $\Gamma_e$  entourant la pointe de la fissure.

On aura :

$$W^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega^*} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^o) L_{ijkl} (\rho_{kl} - \rho_{kl}^o) d\Omega. \quad (3.14)$$

La dérivation par rapport au temps et l'application de la condition de transport parallèle donnent :

$$\dot{W}^* = \int_{\Omega^*} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^o) L_{ijkl} \dot{\rho}_{kl} d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_e} \dot{a} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^o) L_{ijkl} (\rho_{kl} - \rho_{kl}^o) n_1 d\Gamma. \quad (3.15)$$

L'équation (3.15) combinée avec les équations (3.12) et (3.13) mène à :

$$\dot{W}^* = \int_{\Omega^*} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^c - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_e} \dot{a} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) L_{ijkl} (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^{(s)}) n_1 d\Gamma. \quad (3.16)$$

D'autre part, nous avons :

$$\varepsilon_{ij}^{(s)} = L_{ijkl} \sigma_{kl}^{(s)} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij}^{(s)} = \varepsilon_{ij}^c + \varepsilon_{ij}^{or},$$

soit comme  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{or} = 0$ , alors  $\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(s)}$ . De cette relation, on écrit :

$$\int_{\Omega^*} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^c) d\Omega = \int_{\Omega^*} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{(s)}) d\Omega.$$

De l'application du théorème du Gauss on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega^*} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(s)}) d\Omega &= \int_{\Omega^*} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{i,j}^{(s)}) d\Omega \\
&= - \int_{\Omega^*} (\sigma_{ij,j} - \sigma_{ij,j}^{(s)}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(s)}) d\Omega \\
&\quad + \int_{\Gamma} n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(s)}) d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Gamma_c} n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(s)}) d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Soit (3.16) devient :

$$\begin{aligned}
\dot{W}^* &= - \int_{\Omega^*} (\sigma_{ij,j} - \sigma_{ij,j}^{(s)}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(s)}) d\Omega + \int_{\Gamma} n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(s)}) d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Omega^*} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p d\Omega \\
&\quad - \int_{\Gamma_c} \left[ \dot{a} \frac{1}{2} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) L_{ijkl} (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^{(s)}) n_l + n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(s)}) \right] d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Le passage à la limite ( $e \rightarrow 0$ ) de (3.18), donne l'expression de  $\dot{W}$  :

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= \lim_{e \rightarrow 0} \dot{W}^* = - \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} - \sigma_{ij,j}^{(s)}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(s)}) d\Omega \\
&\quad + \int_{\Gamma} n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(s)}) d\Gamma - \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p d\Omega \\
&\quad - \lim_{e \rightarrow 0} \int_{\Gamma_c} \left[ \dot{a} \frac{1}{2} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) L_{ijkl} (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^{(s)}) n_l + n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(s)}) \right] d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Soit en remarquant que :

$$- \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} - \sigma_{ij,j}^{(s)}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(s)}) d\Omega + \int_{\Gamma} n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(s)}) d\Gamma = 0, \tag{3.20}$$

et en posant :

$$\Delta \bar{G} = \lim_{e \rightarrow 0} \int_{\Gamma_c} \left[ \frac{1}{2} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) L_{ijkl} (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^{(s)}) n_l - n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(s)}) \right] d\Gamma, \tag{3.21}$$

on obtient :

$$\dot{W} = - \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p dv - \Delta \bar{G} \dot{a}. \tag{3.22}$$

Le premier terme de droite, dans l'équation (3.22), est négatif d'après le principe de Hill. La longueur de la fissure, telle qu'elle a été définie, ne peut que croître ou rester constante, donc le deuxième terme est aussi négatif si  $\Delta\bar{G} \geq 0$ , mais ceci reste difficile à démontrer mathématiquement. Nous donnons notre démonstration en se basant sur l'analogie avec la force thermodynamique  $G$ , mais une démonstration rigoureuse reste à établir.

Nous avons :

$$\Delta\bar{G} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} [(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})L_{ijkl}(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^{(s)})n_1 - n_j(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})(u_i - u_i^{(s)})_{,1}]d\Gamma. \quad (3.23)$$

Posons :

$$u_i^* = u_i - u_i^{(s)}, \quad (3.24a)$$

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}, \quad (3.24b)$$

$$\epsilon_{ij}^* = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^{(s)}, \quad (3.24c)$$

avec

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^* &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(s)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(s)}}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (u_i - u_i^{(s)})}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_j - u_j^{(s)})}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (3.24d)$$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^* &= 0 && \text{dans } \Omega \\ n_j \sigma_{ij}^* &= 0 && \text{sur } \Gamma_\sigma \\ u_i^* &= 0 && \text{sur } \Gamma_u \end{aligned} \quad (3.25)$$

Soit l'énergie de déformation élastique fictive :

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* L_{ijkl} \sigma_{kl}^* d\Omega = \int_{\Omega} \bar{w} d\Omega. \quad (3.26)$$

En quasi-statique, nous avons la possibilité d'un paramétrage global,  $\bar{W} = \bar{W}(u^*, a)$ , telle que la force thermodynamique associée à la longueur de la fissure  $a$ , que nous noterons  $\bar{G}^*$  est donnée par :

$$\bar{G}^* = -\frac{\partial \bar{W}(u^*, a)}{\partial a} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon}} (\bar{w} n_i - n_j \sigma_{ij}^* u_{i,j}^*) d\Gamma. \quad (3.27)$$

Pour montrer donc que  $\bar{G}^* \geq 0$ , il suffit de montrer que :

$$\bar{W}(u^*, a) \geq \bar{W}(u^*, a[\tau]) \quad \text{pour tout } \tau \geq 0. \quad (3.28)$$

Sachant que  $\bar{w}$  est convexe par rapport à  $\epsilon^*$ , le principe du minimum est donc valable pour tout  $\tau \geq 0$ . Une perturbation de  $a[\tau]$ , en maintenant  $u^*$  bloqué, nous avons  $u^*[0]$  est cinématiquement admissible lorsque  $a = a[\tau]$ , ce qui implique que  $\bar{W}(u^*, a[\tau])$  est le minimum et donc l'inégalité précédente résulte.

Et finalement :

$$\bar{G}^* \geq 0, \quad (3.29a)$$

c'est-à-dire :

$$\Delta \bar{G} \geq 0. \quad (3.29b)$$

Si  $\Delta \bar{G}$  est positive, de l'inégalité (2.6) et (2.23) il suit que  $\dot{W} \leq 0$ , et comme  $W$  est définie quadratique positive et donc ne peut devenir négative. Alors  $\dot{W}$  doit s'annuler après une durée déterminée c'est-à-dire  $\dot{\epsilon}_{ij}^p \rightarrow 0$  et  $\dot{a} \rightarrow 0$  (l'écoulement plastique et la fissuration cessent d'évoluer). Dans ce cas on dit que la structure fissurée s'est adaptée.

$$\dot{W} \rightarrow 0 \text{ et } W(t) \rightarrow \text{constante pour } t \rightarrow \infty,$$

$$W(0) \geq W(t) \quad \text{pour } t > 0.$$

Notons toutefois que dans cette approche proposée, nous avons considéré  $\frac{d\rho^\circ}{dt} = \frac{\partial \rho^\circ}{\partial t} - \dot{a} \frac{\partial \rho^\circ}{\partial x} = 0$ , ce qui est difficile à satisfaire sans tenir compte de la propagation de la fissure par un critère de rupture ductile. Pour cela nous avons la possibilité de formuler notre proposition en se basant sur un repère local centré en la pointe de la fissure et mobile avec celle-ci avec la même vitesse.

### 3.2.4. Proposition 2

Soit le repère local  $(O, X, Y)$ , mobile avec la pointe de la fissure, si  $(o, x, y)$  représente le repère fixe, nous avons  $X = x - a(t)$  et  $Y = y$ . Dans la suite de notre raisonnement, nous utiliserons les quantités relatives au repère local.

La structure fissurée s'adapte pour l'histoire de chargement donné en (3.1), s'il existe un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps  $\rho^\circ(X)$ , tels que pour le temps  $t > 0$ , les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\rho_{ij,j}^\circ(X) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.30)$$

$$n_j \rho_{ij}^\circ(X) = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (3.31)$$

$$F(\sigma_{ij}^\circ(X, t) + \rho_{ij}^\circ(X), \sigma_s) < 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.32)$$

$$a_{\text{lim}} < a_C \quad (3.33)$$

### 3.3.5. Discussion 2

Considérons toujours l'énergie de déformation élastique fictive  $W$  donnée par:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega(t)} (\rho_{ij}^\circ(X, t) - \rho_{ij}^\circ(X)) L_{ijkl} (\rho_{kl}(X, t) - \rho_{kl}^\circ(X)) d\Omega, \quad (3.34)$$

et

$$W^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega^*(t)} (\rho_{ij}(X, t) - \rho_{ij}^\circ(X)) L_{ijkl} (\rho_{kl}(X, t) - \rho_{kl}^\circ(X)) d\Omega = \int_{\Omega^*(t)} w d\Omega, \quad (3.35)$$

nous avons :

$$\dot{W}^* = \int_{\Omega^*} \dot{w} d\Omega - \int_{\Gamma_e} \dot{a} w n_1 d\Gamma, \quad (3.36)$$

avec

$$\dot{w} = (\rho_{ij}(X, t) - \rho_{ij}^\circ(X)) L_{ijkl} (\dot{\rho}_{kl}(X, t) - \dot{\rho}_{kl}^\circ(X)), \quad (3.37a)$$

et

$$\dot{\rho}_{kl}(X, t) = \rho_{kl,t} - \dot{a} \rho_{kl,1}, \quad \dot{\rho}_{kl}^\circ(X) = -\dot{a} \rho_{kl,1} \quad (\rho_{kl,t}^\circ = 0), \quad (3.37b)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}^* &= \int_{\Omega^*} ((\rho_{ij}(X, t) - \rho_{ij}^\circ(X)) L_{ijkl} \rho_{kl,t}) d\Omega \\ &\quad - \dot{a} \int_{\Omega^*} (\rho_{ij} - \rho_{ij}^\circ) L_{ijkl} (\rho_{kl} - \rho_{kl}^\circ)_{,1} d\Omega - \int_{\Gamma_e} \dot{a} w n_1 d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.38)$$

qui s'écrit aussi comme :

$$\begin{aligned} \dot{W}^* &= \int_{\Omega^*} ((\rho_{ij}(X, t) - \rho_{ij}^\circ(X)) L_{ijkl} \rho_{kl,t}) d\Omega \\ &\quad - \dot{a} \int_{\Omega^*} \frac{\partial w}{\partial (\varepsilon^r - \varepsilon^{or})} (\varepsilon^r - \varepsilon^{or})_{,1} d\Omega - \int_{\Gamma_e} \dot{a} w n_1 d\Gamma \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sachant que :

$$- \int_{\Omega^*} \frac{\partial w}{\partial (\varepsilon^r - \varepsilon^{or})} (\varepsilon^r - \varepsilon^{or})_{,1} d\Omega = - \int_{\Gamma} w n_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_e} w n_1 d\Gamma, \quad (3.40)$$

on écrit :

$$\dot{W}^* = \int_{\Omega^*} ((\rho_{ij}(X,t) - \rho_{ij}^0(X))L_{ijkl}\rho_{kl,t})d\Omega - \dot{a} \int_{\Gamma} wn_1 d\Gamma + \int_{\Gamma_e} \dot{a} wn_1 d\Gamma - \int_{\Gamma_e} \dot{a} wn_1 d\Gamma, \quad (3.41)$$

qui avec la loi de Hooke et l'hypothèse de partition de la déformation s'écrit :

$$\dot{W}^* = \int_{\Omega^*} (\sigma_{ij}(X,t) - \sigma_{ij}^{(s)}(X,t))(\varepsilon_{ij,t} - \varepsilon_{ij,t}^c - \varepsilon_{ij,t}^p)d\Omega - \dot{a} \int_{\Gamma} wn_1 d\Gamma. \quad (3.42)$$

Le passage à la limite ( $e \rightarrow 0$ ) de (3.42), donne l'expression de  $\dot{W}$  :

$$\dot{W} = \lim_{e \rightarrow 0} \dot{W}^* = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^c)_{,t} d\Omega - \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})\varepsilon_{ij,t}^p d\Omega - \dot{a} \int_{\Gamma} wn_1 d\Gamma. \quad (3.43a)$$

L'équation (3.43a) s'écrit aussi en tenant compte de  $\varepsilon_{ij,t}^c = \varepsilon_{ij,t}^{(s)}$  :

$$\dot{W} = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})(u_{i,j} - u_{i,j}^{(s)})_{,t} d\Omega - \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})\varepsilon_{ij,t}^p d\Omega - \dot{a} \int_{\Gamma} wn_1 d\Gamma, \quad (3.43b)$$

$$= - \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} - \sigma_{ij,j}^{(s)})(u_i - u_i^{(s)})_{,t} d\Omega + \int_{\Gamma} n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})(u_i - u_i^{(s)})_{,t} d\Gamma - \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})\varepsilon_{ij,t}^p d\Omega - \dot{a} \int_{\Gamma} wn_1 d\Gamma, \quad (3.44)$$

et sachant que :

$$\int_{\Gamma} n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})(u_i - u_i^{(s)})_{,t} d\Gamma = \int_{\Gamma} n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})(\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(s)}) d\Gamma + \dot{a} \int_{\Gamma} n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})(u_i - u_i^{(s)})_{,1} d\Gamma, \quad (3.45)$$

et puisque :

$$- \int_{\Gamma} n_j (\sigma_{ij,j} - \sigma_{ij,j}^{(s)})(u_i - u_i^{(s)})_{,t} d\Gamma + \int_{\Gamma} n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})(\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(s)}) d\Gamma = 0, \quad (3.46)$$

nous obtenons :

$$\dot{W} = - \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})\varepsilon_{ij,t}^p d\Omega - \dot{a} \int_{\Gamma} [(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})L_{ijkl}(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^{(s)})n_i - n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})(u_i - u_i^{(s)})_{,1}] d\Gamma, \quad (3.47)$$

soit en posant :

$$\Delta \bar{G} = \int_{\Gamma} [(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) L_{ijkl} (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^{(s)}) n_l - n_j (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) (u_i - u_i^{(s)})_{,1}] d\Gamma, \quad (3.48)$$

on écrit :

$$\dot{W} = - \int_{\Omega} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \varepsilon_{ij,t}^p - \Delta \bar{G} \dot{a}. \quad (3.49)$$

Le même raisonnement (proposition 1) peut être adopté pour montrer que  $\Delta \bar{G}$  est positive et l'adaptation de la structure.

Dans la suite de notre travail, nous admettons que  $\Delta \bar{G}$  est positive.

Ce phénomène d'adaptation d'une structure fissurée peut s'expliquer par : le champ de contraintes résiduelles indépendant du temps  $\rho_{ij}^o(X)$  existe, le régime permanent est atteint. Ce champ de contraintes résiduelles va jouer le rôle de bouclier contre la fissuration, étant donné que la fissuration est la conséquence de la plasticité (un point matériel se plastifie avant de se rompre), la vitesse de propagation de la fissure tendra vers zéro, c'est-à-dire la fissure cesse d'évoluer. Ceci explique en fait le phénomène d'arrêt de la propagation de fissure.

**Remarque :**

Les deux approches proposées impliquent chacune des difficultés de mise en œuvre et d'application.

- la deuxième approche ignore totalement la propagation de la fissure et nous affranchi de la dépendance du champs de contraintes résiduelles  $\rho^o$  par rapport à l'espace matériel. Mais ne renseigne en rien sur la longueur que peut prendre la fissure à l'adaptation, donc la sécurité de la structure vis-à-vis de la rupture instable n'est pas assurée.

- avec la première approche par contre, nous pouvons déterminer la longueur limite que peut prendre la fissure à l'adaptation, mais nécessite une hypothèse forte pour être

valable. Le champs de contraintes résiduelles  $\rho^\circ$  correspond à la valeur limite que prendra le champs de contraintes résiduelles réel, il doit être indépendant du temps et de l'espace matériel, ce qui est difficile à satisfaire sans un critère local de rupture ductile, nous ferons donc l'hypothèse que  $\Omega(a) \equiv \Omega(a_0)$ , c'est-à-dire que pour  $\rho^\circ$  déterminé à  $a = a_0$  reste indépendant du temps même dans le cas d'une propagation de la fissure, ce qui peut être justifier par le fait qu'en rupture ductile la propagation de fissure est lente et petite.

Dans la suite, nous utiliserons la première approche proposée. A travers le paragraphe suivant, nous donnerons la méthode de détermination de  $a_{lim}$  pour le modèle adopté et reste valable uniquement pour la proposition 1.

### 3.3. DETERMINATION DE LA LONGUEUR LIMITE DE LA FISSURE

Dans le modèle qu'on a adopté pour la rupture ductile, la fissuration dépend de l'énergie dissipée dans les déformations plastiques, toujours croissante. On est alors conduit à exiger, pour qu'il y ait adaptation de la structure, que le travail dissipé reste borné quand le temps  $t$  tend vers l'infini.

Soit en utilisant le critère de fissuration en élastoplasticité, la fonction de charge s'exprimera par (2.44) :

$$F = G - G_0 - \frac{\partial W_p}{\partial a} \leq 0, \quad (3.50)$$

d'autre part, on peut écrire que :

$$G\dot{a} = \begin{cases} 0 & \text{si } G < G_0 + \frac{\partial W_p}{\partial a} \\ (G_0 + \frac{\partial W_p}{\partial a})\dot{a} & \text{si } G = G_0 + \frac{\partial W_p}{\partial a} \end{cases} \quad (3.51)$$

On se place dans le cas où on a propagation de fissure, et on écrit :

$$(G - G_0)\dot{a} = \frac{\partial W_p}{\partial a} \dot{a} = \dot{W}_p, \quad (3.52)$$

avec  $\dot{W}_p = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p d\Omega$ .

Or d'après notre modèle on a (2.61) :

$$(G - G_0) = V(a - a_0)^{\frac{1}{m}}, \quad (3.53)$$

soit (3.52) et (3.53) donnent :

$$V(a - a_0)^{\frac{1}{m}} \dot{a} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p d\Omega. \quad (3.54)$$

En intégrant (3.54) par rapport au temps, on obtient :

$$V \frac{m}{m+1} (a - a_0)^{\frac{m+1}{m}} = \int_0^t \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p d\Omega dt, \quad (3.55)$$

or on sait qu'à l'adaptation on a (KOITER [48](1960)) :

$$\int_0^t \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p d\Omega dt \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_{ij}^{\circ} L_{ijkl} \rho_{kl}^{\circ} d\Omega, \quad (3.56)$$

donc de (3.55) et (3.56), on écrit :

$$V \frac{m}{m+1} (a - a_0)^{\frac{m+1}{m}} \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_{ij}^{\circ} L_{ijkl} \rho_{kl}^{\circ} d\Omega, \quad (3.57)$$

d'où l'on tire l'expression de la longueur a :

$$a \leq a_0 + \left[ \frac{m+1}{m} \frac{1}{V} \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_{ij}^{\circ} L_{ijkl} \rho_{kl}^{\circ} d\Omega \right]^{\frac{m}{m+1}}, \quad (3.58)$$

et la longueur limite de la fissure :

$$a_{\text{lim}} = a_0 + \left[ \frac{m+1}{m} \frac{1}{V} \frac{\alpha}{\alpha-1} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_{ij}^{\circ} L_{ijkl} \rho_{kl}^{\circ} d\Omega \right]^{\frac{m}{m+1}} \quad (3.59)$$

### 3.4. ELIMINATION DE LA SINGULARITE DU CHAMP DE CONTRAINTES

Pour l'application du théorème d'adaptation aux structures fissurées, on doit manipuler des quantités locales, telle que la contrainte, en un point donné de la structure. Pour cela le problème de la singularité du champ de contraintes élastiques doit être résolu, car théoriquement à la pointe de la fissure,  $\sigma^{\circ}$  tend vers l'infini, qui est physiquement en désaccord avec l'expérimentation ; pour contourner ce problème, on assimile la fissure à une entaille de rayon fini, idée similaire au concept du bloc de matériau introduit par NEUBER [80](1968) pour les entailles aiguës.

En effet, en recherchant une entaille aiguë où la théorie classique de la mécanique des milieux continus n'est plus applicable, NEUBER [79](1958)[80](1968) introduit le concept du bloc de matériau, suivant lequel l'avant continu d'une entaille aiguë est considéré comme un bloc de matériau de dimension finie  $\varepsilon$ , à travers lequel, pas de gradient de contrainte ne se développe. Pour obtenir les contraintes solutions, l'entaille originale doit être remplacée par une entaille fictive de rayon  $r_f$  ( $> r$  : rayon de l'entaille originale), voir figure (3.2).

Le facteur de concentration de contraintes se trouve réduit, ce qui est dû à l'enlargissement du rayon de l'entaille, et la théorie classique de la mécanique reste applicable. Le rayon  $r_f$  de l'entaille fictive est obtenu en mettant la moyenne des contraintes, réparties sur le bloc  $\varepsilon$  de l'entaille originale, égale à la contrainte maximale de l'entaille modifiée, c'est-à-dire :

$$\sigma_{\text{max}|_{r_f}} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \sigma|_r dr \quad (3.60)$$

Soit en se basant sur l'expression de la distribution des contraintes au voisinage de la racine de l'entaille donnée par CREAGER [11](1966), l'équation (3.60) donne l'expression de  $r_f$  :

$$r_f = r + n\varepsilon, \quad (3.61)$$

avec  $r_f$  le rayon de l'entaille fictive,  $\varepsilon$  la longueur du bloc de matériau de Neuber (constante du matériau), et  $n$  un facteur dépendant du type de chargement, il est égal à 2 en mode I et 0.5 en mode III (NEUBER [82](1968)). RADAJ et ZHANG [102](1993) donnent des valeurs de  $n$  pour le mode II et le mode mixte I-II :

$$n = 0.074 \text{ pour le mode II,}$$

$$n = 2 \frac{1 + 1.172\lambda^2}{1 + 31.64\lambda^2} \text{ pour le mode mixte,}$$

avec  $\lambda = \frac{K_{II}}{K_I}$   $K_i$  étant le facteur d'intensité de contraintes.

Donc le rayon de l'entaille fictive est égal au rayon de l'entaille originale augmenté de  $n$  fois la dimension du bloc de matériau de Neuber.

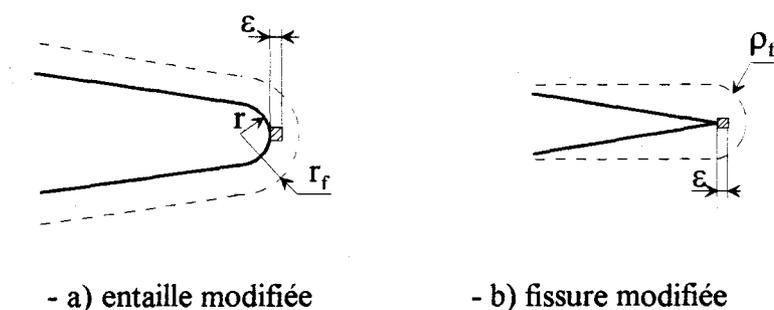


Fig. 3.2

Dans le cas d'une fissure, le rayon du front de fissure fictive, noté  $\rho_f$ , peut être obtenu en mettant  $r = 0$  dans l'équation (3.61) :

$$\rho_f = n\varepsilon . \quad (3.62)$$

L'équation (3.62) indique implicitement que la fissure peut être traitée comme une entaille de rayon  $\rho_f$  (fig. 3.2).

En effet, les expériences avec différents matériaux faites par FROST [19](1960), JACK & PRISE [43](1970), et SWANSON & al. [115](1986), montrent qu'une structure fissurée, sous des chargements cycliques, se comporte de la même manière qu'une structure entaillée de même géométrie et de rayon très petit devant la longueur de l'entaille.

Pour déterminer le rayon en fond de fissure fictive  $\rho_f$ , le bloc de matériau de Neuber est plus au moins conceptuel ; une mesure directe de ce paramètre reste difficile. En utilisant une méthode indirecte, KUHN & HARADRATH [61](1952) ont calculé le rayon  $\rho_f$  pour les matériaux métalliques ; ils ont collecté un grand nombre de "facteurs de fatigue"  $K_F$  à partir d'expériences de fatigue, et les ont comparés aux "facteurs de NEUBER" qui sont donnés par :

$$K_N = 1 + \frac{K_T - 1}{1 + \sqrt{\rho/r}} . \quad (3.63)$$

Soit en mettant  $K_N$  égal à  $K_F$ ,  $\rho_f$  peut être déterminé par cette équation.

Physiquement, le bloc de matériau de Neuber peut être interprété comme étant la somme du nombre minimum de particules microscopiques du matériau (comme les grains) ; la propriété de chaque microparticule doit être différente des autres, mais l'ensemble de toutes ces microparticules doit avoir la propriété du matériau macroscopique. Dans un travail de HUANG & STEIN [39](1996),  $\rho_f$  est établi égal à dix fois la taille du grain :

$$\rho_f \approx 10\xi . \quad (3.64)$$

KUHN et HARADRATH [61](1952) ont proposé une relation entre  $\rho_f$  et la résistance ultime du matériau  $\sigma_u$ . Dans leur travail original, la dépendance de  $\rho_f$  sur  $\sigma_u$  est donnée sous forme de diagramme. RITCHE [104](1979) a donné une forme compacte pour représenter cette relation, elle s'écrit :

$$\sqrt{\rho_f} = \frac{530}{\sigma_u^2}, \quad (3.65)$$

où  $\rho_f$  est en inches et  $\sigma_u$  en ksi. Une comparaison de cette forme avec le diagramme de KUHN montre que l'équation (3.65) n'est pas en accord parfait et en particulier pour les matériaux à basse résistance.

Pour la suite de notre travail, l'équation (3.64) semble la plus appropriée pour établir le rayon au fond de fissure fictive, et sachant que  $\rho_f$  est donné pour un chargement en mode I, on écrit pour généraliser :

$$\varepsilon \approx 5\xi. \quad (3.66)$$

Soit, avec les équations (3.62) et (3.66), on peut obtenir la valeur de  $\rho_f$  pour les différents modes de chargement.

### 3.5. FACTEUR DE CHARGES A L'ADAPTATION

Pour déterminer le facteur de charges à l'adaptation ( $\alpha_{SD}$ ), on doit tenir compte de deux critères d'effondrement :

- Le critère d'effondrement par déformations plastiques progressives,
- le critère d'effondrement par déformations plastiques alternées.

Pour chaque critère, on détermine le facteur de charges correspondant, respectivement,  $\alpha_{PP}$  et  $\alpha_{AP}$ , qui définit ainsi le domaine d'évolution des charges, pour lequel on vérifie qu'une quelconque histoire de charges ne peut conduire à la

déstabilisation du processus d'adaptation. Le facteur de charges à l'adaptation résulte de la plus petite valeur des deux facteurs, c'est-à-dire l'intersection entre les deux domaines de charges.

On note par  $D$ , le domaine de charges externes, défini par :

$$D = \left\{ P = \sum_{i=1}^n \mu_i P_i, \mu_i \in [\mu_i^-, \mu_i^+] \right\}, \quad (3.67)$$

où, les  $P_i$  sont les charges généralisées fixées et indépendantes (ex : forces de volume, tractions de surfaces, déplacements imposés ou la combinaison de ces charges) et  $\mu_i$  sont les multiplicateurs de charges avec  $\mu_i^+$  et  $\mu_i^-$ , respectivement, la borne supérieure et la borne inférieure ( $i=1, \dots, n$ ).

Le domaine  $D$  est convexe, c'est-à-dire, pour tout  $P_1$  et  $P_2$  appartenant à  $D$ , toutes les valeurs de  $P$  définies par :

$$P = \theta P_1 + (1 - \theta) P_2, \quad \theta \in [0, 1], \quad (3.68)$$

appartiennent aussi à  $D$ .

La convexité de  $D$  nous permet d'appliquer le théorème suivant : Il y a adaptation dans le domaine de charges  $D$ , si et seulement si, il y a adaptation dans le domaine  $\mathcal{D}$ , enveloppe convexe du domaine  $D$ , défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ P / P = \sum \mu_i P_i, \mu_i = \mu_i^- \text{ ou } \mu_i^+ \right\}. \quad (3.69)$$

La conséquence de cette propriété est que, pour un domaine de charges donné, s'il y a adaptation pour les points anguleux du domaine ( $P_1, P_2, \dots$  fig. (3.3)), alors il y a adaptation pour tous les points du domaine. Cette propriété permet à l'analyse d'adaptation de s'affranchir de la variable temps.

Chaque élément  $P$  de  $\mathcal{D}$  peut s'écrire par :

$$P = \sum_{i=1}^m \theta_i \mathcal{P}_i, \quad (3.69)$$

où

$$\sum_{i=1}^m \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0 \quad \forall i, \quad (3.70)$$

avec  $m = 2^n$  et les  $\mathcal{P}_i$ , les points de  $\mathcal{D}$ , sont les points anguleux de  $D$ . Le cas bidimensionnel est montré sur la figure (3.3) :

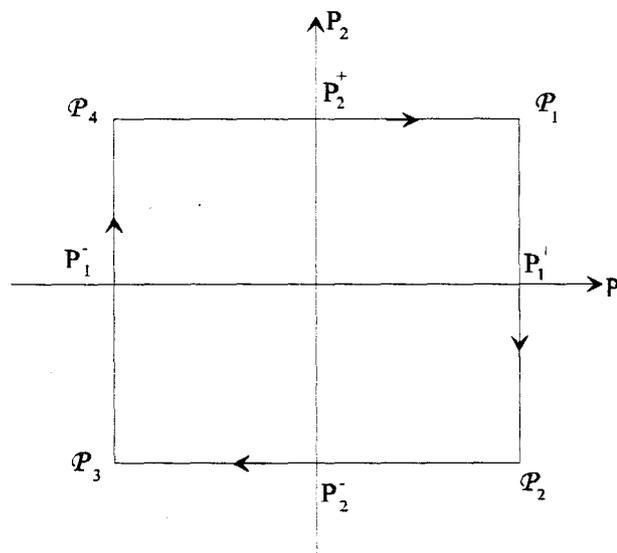


Fig. 3.3 - Domaine de variation des charges

### 3.5.1. Facteur de charges vis-à-vis de la plasticité accumulée

Le facteur de charges contre l'effondrement par déformations plastiques progressives ou accumulées ( $\alpha_{pp}$ ) est la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\alpha_{PP} = \max_{\rho^{\circ}} \alpha, \quad (3.71)$$

sous les contraintes :

$$F(\alpha\sigma^{\circ}(\mathcal{P}) + \rho^{\circ}, \sigma_s) < 0 \quad \forall \mathcal{P} \in \mathcal{D}, \quad (3.72)$$

$$a_{\text{lim}}(\alpha, \rho^{\circ}) < a_C. \quad (3.73)$$

Ceci est un problème de programmation mathématique, avec  $\alpha$  comme fonction objective à optimiser sous les conditions (3.72) et (3.73).

### 3.5.2. Facteur de charges vis-à-vis de la plasticité alternée

Le terme plasticité alternée signifie que le processus de déformation plastique est tel que, la déformation totale est nulle et que son amplitude est inférieure à une certaine limite. Le facteur de charges contre l'effondrement par déformations plastiques alternées est exprimé par le problème d'optimisation suivant (KÖNIG [52](1979)) :

$$\alpha_{AP} = \max_{\rho^{\circ}} \alpha, \quad (3.74)$$

telle que

$$F_A(\alpha\sigma^{\circ}(x,t) + \rho^{\circ}(x), \sigma_s) < 0. \quad (3.75)$$

Donc, le critère de sécurité contre l'effondrement par plasticité alternée (contre la fatigue oligocyclique) est satisfait s'il existe un champ de contrainte  $\rho^{\circ}$  quelconque indépendant du temps, lequel, superposé à l'enveloppe de contraintes élastiques, ne viole pas le critère d'écoulement.

Comme il a été proposé par KÖNIG [59](1987), le problème de la plasticité alternée peut être considéré comme un problème élastique limite. Ainsi, au lieu de

considérer le problème précédant pour déterminer le facteur de charges vis-à-vis de la plasticité alternée, on résout le problème d'optimisation suivant :

$$\alpha_{AP} = \max \alpha, \quad (3.76)$$

sous les contraintes :

$$F_A \left\{ \pm \frac{1}{2} [\mu_i^+ - \mu_i^-] \alpha \sigma^c(\mathcal{P}), \sigma_s \right\} < 0 \quad \forall \mathcal{P} \in \mathbf{D}, \quad (3.77)$$

où toutes les combinaisons du signe  $\pm$  sont considérées. On constate qu'on n'a pas tenu compte de la fissuration, car la ruine par plasticité alternée intervient une fois que l'état de contraintes franchit le seuil d'écoulement ( $\sigma_s$ ).

Ainsi, les deux cas de défaillance étudiés nous donnent finalement le facteur de charges à l'adaptation, exprimé par :

$$\alpha_{SD} = \min (\alpha_{PP}, \alpha_{AP}). \quad (3.78)$$

### 3.6 CONCLUSION

Nous avons proposé dans ce chapitre, une approche d'extension du théorème statique d'adaptation aux structures fissurées. Nous avons montré qu'une structure fissurée s'adapte sous certaines conditions de chargement, et que l'énergie dissipée par fissuration reste bornée. Par ce fait, la condition sur la longueur limite, que peut prendre la fissure, garantie la sécurité de la structure vis-à-vis de la rupture brutale.

Nous avons ensuite donné une justification pour assimiler la fissure à une entaille de rayon fini, ce qui règle le problème de la singularité, en vu des applications numériques nécessaires à la validation de l'approche établie. On montre aussi que la mise en œuvre de cette théorie revient à résoudre un problème mathématique d'optimisation.

## **CHAPITRE 4**

**FORMULATIONS ELEMENTS**

**FINIS**

## 4. FORMULATION ELEMENTS FINIS

### 4.1. INTRODUCTION

La mise en œuvre du théorème statique d'adaptation repose sur la méthode des éléments finis, statiquement admissibles, et sur la méthode de programmation mathématique. Cette dernière consiste à maximiser la facteur de charges, tout en veillant à ce que le critère d'écoulement ne soit violé en aucun point de la structure, et que la longueur de la fissure reste inférieure à la longueur critique. La résolution du problème de l'analyse d'adaptation sous contrainte utilise la méthode dite du Lagrangien augmenté, proposée par PIERRE & LOWE [92] (1975) et nécessite :

- La solution du problème du corps de comparaison purement élastique, correspondant aux mêmes conditions limites que le problème posé,
- la construction d'un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps.

Pour cela on utilise la méthode des éléments finis en terme de contraintes, basée sur le principe de minimisation de l'énergie complémentaire (GALLAGHER & DHALLA [20] (1975)). Celle-ci utilise les fonctions de contraintes pour la construction de la fonction d'énergie complémentaire, et représente un dual algébrique à la méthode d'éléments finis en déplacements. Cette méthode a été utilisée, entre autre, par BELYTSCHKO & HODGE [3] (1972) et WEICHERT & GROSS-weege [122] (1988), respectivement, pour l'étude de l'analyse limite et de l'adaptation des structure bidimensionnelles.

## 4.2. CALCUL DE LA REPONSE PUREMENT ELASTIQUE

### 4.2.1. Principe du minimum de l'énergie complémentaire

Le principe du minimum de l'énergie complémentaire constitue un fondement variationnel de la formulation directe de souplesse des éléments. Cette méthode utilise les forces aux noeuds, comme inconnues, dans la formulation des équations d'éléments finis.

L'énergie complémentaire  $\Pi_c$  d'une structure est donnée par la somme de l'énergie complémentaire de déformation ( $U^*$ ), et du potentiel ( $V^*$ ) des forces de frontière, agissant dans les déplacements imposés soit :

$$\Pi_c = U^* + V^* \quad (4.1)$$

Le principe s'énonce comme suit : parmi tous les états de contraintes statiquement admissibles, l'état de contraintes qui satisfait également aux équations contraintes-déformations (loi de Hooke (eq. (1.10)) et à tous les déplacements imposés aux frontières donne à l'énergie complémentaire une valeur stationnaire. Soit :

$$\delta\Pi_c = \delta U^* + \delta V^* = 0, \quad (4.2)$$

Notons que dans le cas de l'élasticité linéaire,  $\Pi_c$  est un minimum à l'équilibre :

$$\delta^2\Pi_c = \delta^2 U^* + \delta^2 V^* \geq 0. \quad (4.3)$$

En exprimant l'énergie complémentaire en fonction des contraintes et des déplacements imposés sur la frontière  $\Gamma_u$ , on obtient l'expression suivante :

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma L \sigma d\Omega - \int_{\Gamma_u} T u d\Gamma \quad (4.4)$$

où la première intégrale du second membre est  $U^*$ , et la deuxième est  $-V^*$ .  $\Gamma_u$  est la frontière sur laquelle les déplacements  $\bar{u}$  sont imposés, et  $T$  représente les tractions de surface correspondantes.

#### 4.2.2. Discrétisation à l'aide de fonction de contraintes

Une solution pratique, pour définir des champs de contraintes qui satisfassent les équations d'équilibre, consiste en l'utilisation des fonctions potentielles, ou fonction de contraintes. Ces fonctions sont des expressions qui, dérivées selon certaines règles, donnent des composantes de contraintes vérifiant automatiquement les conditions d'équilibre. L'état de contraintes planes n'admet qu'une seule de ces fonctions, appelée fonction de contraintes d'Airy, qui sera utilisée pour la discrétisation de notre problème.

##### 4.2.2.1 Résolution du problème plan par la fonction d'Airy

Dans le cas des systèmes plans, les équations d'équilibre sont identiquement vérifiées en posant :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \Delta, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \Delta, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \Delta, \quad (4.5)$$

avec  $\Phi = \Phi(x, y)$  la fonction d'Airy et  $\Delta$  le potentiel dont dérivent les forces volumiques  $f = -\text{grad}\Delta$ .

En absence des forces de volume, l'équilibre dans le domaine  $\Omega$  prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_{,yyx} - \Phi_{,xyy} &= 0 \\ -\Phi_{,xyx} + \Phi_{,xxy} &= 0 \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega, \quad (4.6)$$

avec

$$\Phi_{,yy} = \sigma_x, \quad \Phi_{,xx} = \sigma_y \quad \text{et} \quad -\Phi_{,xy} = \tau_{xy}.$$

La condition de compatibilité s'écrit :

$$\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} - 2\varepsilon_{xy,xy} = 0. \quad (4.7)$$

Soit en combinant la loi de Hooke, la définition des déformations et la définition de la fonction de contraintes d'Airy, l'équation (4.7) s'écrit :

$$\frac{1}{E} \left[ (\sigma_{x,yy} - \nu\sigma_{y,yy}) + (-\nu\sigma_{x,xx} + \sigma_{y,xx}) - 2(1+\nu)\sigma_{xy,xy} \right] = 0$$

$$\sigma_{x,yy} - \nu\sigma_{y,yy} - \nu\sigma_{x,xx} + \sigma_{y,xx} - 2\sigma_{xy,xy} - 2\nu\sigma_{xy,xy} = 0 \quad (4.8)$$

$$\Phi_{,yyyy} - \nu\Phi_{,xxyy} - \nu\Phi_{,yyxx} + \Phi_{,xxxx} + 2\Phi_{,xyxy} + 2\nu\Phi_{,xyxy} = 0$$

$$\Phi_{,yyyy} + \Phi_{,xxxx} + 2\Phi_{,xyxy} = 0.$$

Et connaissant l'identité suivante :

$$\begin{aligned} \Delta(\cdot) &= (\cdot)_{,xx} + (\cdot)_{,yy} \\ \Delta\Delta(\cdot) &= (\cdot)_{,xxxx} + (\cdot)_{,yyyy} + 2(\cdot)_{,xxyy} \end{aligned} \quad (4.9)$$

on obtient l'équation biharmonique bien connue :

$$\Delta\Delta\Phi = 0. \quad (4.10)$$

De ce fait, tout champ de contraintes qui dérive de la fonction  $\Phi$ , étant une solution de l'équation différentielle (4.10), doit satisfaire l'équation d'équilibre statique, le critère de compatibilité, et minimise l'énergie complémentaire  $\Pi_c$ .

Afin d'éviter les complexités de l'analyse concernant les valeurs aux noeuds des fonctions de contraintes d'Airy, on ne tiendra compte que du premier terme de l'expression (4.4). Le second terme sera pris en considération dans le § 4.2.3 sous forme

d'équation de contraintes. Ainsi, en contraintes planes, l'énergie complémentaire de déformation ( $\Pi_c = U^*$ ) s'écrit :

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix} [L] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} h d\Gamma \quad (4.11)$$

h étant l'épaisseur du domaine  $\Omega$ .

Compte tenu de l'équation (4.5), on obtient :

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \begin{Bmatrix} \Phi_{,yy} & \Phi_{,xx} & -\Phi_{,xy} \end{Bmatrix} [L] \begin{Bmatrix} \Phi_{,yy} \\ \Phi_{,xx} \\ -\Phi_{,xy} \end{Bmatrix} h d\Gamma \quad (4.12)$$

Si on exprime le champ des fonctions de contraintes sous forme analogue aux fonctions des déformées, on obtient :

$$\Phi = [N] \{\Phi^e\}^T \quad (4.13)$$

avec

$[N]$  : vecteur des fonctions d'interpolation,

$\{\Phi^e\}$  : vecteur de coefficients de fonction de contraintes aux noeuds de l'élément.

Le vecteur des dérivées secondes peut s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{,yy} & \Phi_{,xx} & -\Phi_{,xy} \end{Bmatrix}^T = [N]'' \{\Phi^e\}^T \quad (4.14)$$

Soit en substituant l'équation (4.14) dans l'expression (4.12), on obtient l'énergie complémentaire de déformation sous la forme :

$$\Pi_c = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \{\Phi^e\} [N]''^T [L][N]'' \{\Phi^e\} h d\Gamma = \frac{1}{2} \{\Phi^e\}^T [K^e] \{\Phi^e\}, \quad (4.15a)$$

avec

$$[K^e] = \int_{\Gamma} [N]''^T [L][N]'' h d\Gamma, \quad (4.15b)$$

qui représente la matrice de flexibilité élémentaire.

Nous avons vu que dans la formulation des problèmes de contraintes planes, l'énergie complémentaire fait usage d'une fonctionnelle exprimée en fonction des dérivées secondes de la fonction d'Airy  $\Phi$  en tant qu'inconnue de base aux noeuds. La continuité de ses dérivées premières au passage des frontières des éléments est donc impérative.

Pour cela, une interpolation polynomiale bicubique d'Hermite a été choisie, qui assure la compatibilité inter-élément des déplacements d'une part, et possède toutes les fonctions de déformée d'autre part (BOGNER & al. [5] (1965)),

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j. \quad (4.16)$$

Les 16 inconnues ( $a_{ij}$ ) de l'expression (4.16) sont remplacées par le vecteur ( $\Phi_{ij}$ ). Ce dernier regroupe non seulement les valeurs de  $\Phi$ , mais aussi les dérivées premières  $\Phi_{,x}$ ,  $\Phi_{,y}$  et les dérivées secondes  $\Phi_{,xy}$  dans les noeuds de chaque élément.

### 4.2.3. Conditions aux limites statiques pour la fonction d'Airy

Pour définir les équations de contraintes restituant la continuité des déplacements aux frontières, il est important de spécifier cette continuité en un certain nombre de points le long de ces frontières, ce qui revient à identifier les fonctions de contraintes aux noeuds communs.

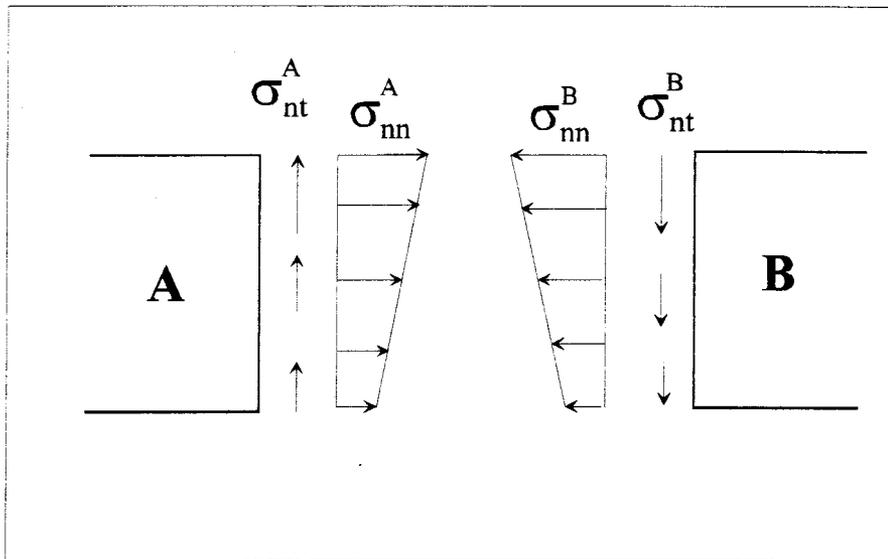


Fig. 4.1 - Condition de continuité des contraintes inter-éléments

$$\begin{aligned}
 \sigma_{nn}^A = \sigma_{nn}^B &\rightarrow \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right]^A = \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right]^B \\
 \sigma_{nt}^A = \sigma_{nt}^B &\rightarrow \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial t} \right]^A = \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial t} \right]^B
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Les deux conditions sont valables pour chaque côté de deux éléments voisins A et B. De même on a :

$$\Phi^A = \Phi^B$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]^A = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]^B. \quad (4.18)$$

L'exigence de mettre en interconnexion les éléments, dans le but de retenir une formulation valide du minimum de l'énergie complémentaire, est due à la continuité des contraintes normales et de cisaillement le long de la frontière.

Considérons à présent, le cas de contraintes planes dans lequel les contraintes  $\sigma_y(x)$  et  $\tau_{xy}(x)$  agissent sur un élément dont un côté est parallèle à l'axe des  $x$  (fig. 4.2). En tout point de ce côté on a :

$$\frac{\partial^2 \Phi^{i-j}}{\partial x^2} = \sigma_y(x). \quad (4.19)$$

En intégrant deux fois la relation (4.19), et en évaluant les constantes d'intégration en fonction des valeurs de  $\Phi$  et de  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_{,x}$  aux extrémités, on obtient :

$$-\Phi_{,xi} + \Phi_{,xj} = \int_0^a \sigma_y(x) dx$$

$$-\Phi_i + \Phi_j - a\Phi_{,xi} = \int_0^a dx \int_0^x \sigma_y(x) dx \quad (4.20)$$

La présence de la contrainte de cisaillement le long du côté (i-j), nous donne :

$$\Phi_{,yi} - \Phi_{,yj} = \int_0^a \tau_{xy}(x) dx, \quad (4.21a)$$

avec

$$-\Phi_{,xyi} = \tau_{xy(x=0)}, \quad -\Phi_{,xyj} = \tau_{xy(x=a)}. \quad (4.21b)$$

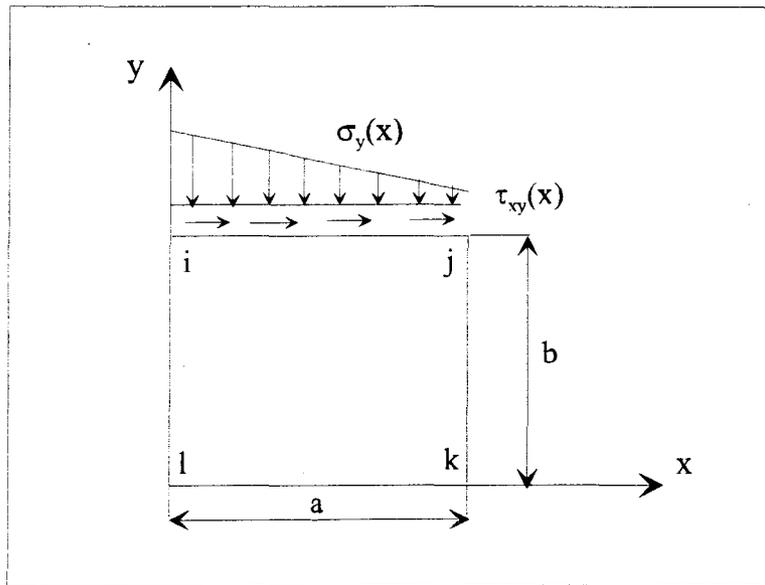


Fig. 4.2 - Contraintes normales et de cisaillement réparties sur un coté d'un élément

Par l'addition de toutes ces équations, provenant des opérations relatives à toutes les conditions aux limites, nous formons un système pour l'ensemble des équations de contraintes.

Ainsi pour  $r$  conditions de contraintes et  $n$  degrés de liberté, nous obtenons :

$$[C_{rxn}^e] \{ \Phi_{nx1}^e \} = \{ P_{rx1}^e \}, \quad (4.22)$$

où  $\{ P_{rx1}^e \}$  est le vecteur de charges extérieures, résultant à partir de l'intégration de la surface de traction  $\Gamma_\sigma$  le long de la frontière de chaque élément (GALLAGHER & DHALLA [20] (1975)).

L'énergie complémentaire totale ( $\Pi_c$ ) pour une structure à  $N_e$  éléments est donnée par :

$$\Pi_c = \sum_{e=1}^{N_e} \Pi_c^e = \frac{1}{2} \{\Phi\}^T [K] \{\Phi\}, \quad (4.23)$$

où  $[K]$  est la matrice de souplesse globale, et  $\{\Phi\}$  est le vecteur global des fonctions de contraintes. De même on a :

$$[C]\{\Phi\} = \{P\}, \quad (4.24)$$

qui représente le système d'équations de contraintes globales, et la matrice  $[C]$  contient les coefficients des équations de contraintes.

#### 4.2.4. Equations de contraintes par la méthode du Lagrangien augmenté

Pour tenir compte de ces équations de contraintes dans la formulation de l'énergie complémentaire, nous introduisons la notion de multiplicateur de Lagrange, ceci nous permet de former la fonctionnelle augmentée  $\Pi_c^a$  :

$$\Pi_c^a = \frac{1}{2} \{\Phi\}^T [K] \{\Phi\} + \{\lambda_L\}^T [C] \{\Phi\} - \{\lambda_L\}^T \{P\}, \quad (4.25)$$

où,  $\lambda_L$  est le multiplicateur de Lagrange.

La première variation par rapport à  $\Phi$  et  $\lambda_L$  donne le système d'équations suivant:

$$\begin{bmatrix} K & C^T \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \lambda_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

La partition inférieure n'est autre que le système des équations de contraintes qui peut être résolu par partition si  $[K]$  n'est pas singulière. La partition supérieure donne :

$$\{\Phi\} = -[K]^{-1} [C]^T \{\lambda_L\}, \quad (4.27)$$

d'où, avec la partition inférieure on obtient :

$$\{\lambda_L\} = ([C][K]^{-1}[C]^T)^{-1}(-\{P\}), \quad (4.28)$$

et on obtient les paramètres de la fonction de contraintes  $\{\Phi\}$  en substituant  $\{\lambda_L\}$  dans l'équation (4.27). Ces paramètres seront utilisés, à leur tour, pour la détermination des contraintes élastiques aux points de Gauss en utilisant les expressions des contraintes (éq.4.5).

### 4.3. PHASE PLASTIQUE

#### 4.3.1. Discrétisation du champ de contraintes résiduelles

Suivant la formulation proposée par NGUYEN DANG HUNG & KÖNIG [83] (1976), le champ de contraintes résiduelles est discrétisé de la même manière que le champ de contraintes élastiques. Ce champ de contraintes résiduelles doit satisfaire les conditions d'équilibre suivantes :

$$\rho_{ij,j}^{\circ} = 0 \quad \text{et} \quad n_j \rho_{ij}^{\circ} = 0. \quad (4.29)$$

Pour le calcul de ces contraintes résiduelles, nous formulons à nouveau le système d'équations de contraintes avec forces de surfaces nulle, on obtient :

$$[C]\{\Phi\} = 0. \quad (4.30)$$

La résolution de ce système d'équations (équations de contraintes sous conditions d'équilibre homogènes) a été simplifiée en utilisant la méthode d'élimination de Gauss-Jordan (STIEFEL [114] (1960)), l'équation (4.30) se ramène à :

$$[C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (4.31)$$

où,  $C_1^{-1}$  est supposée exister. Finalement :

$$\{\Phi_1\} = -[C_1^{-1}][C_2]\{\Phi_2\} \Rightarrow \{\Phi\} = J\{\Phi_2\} = \begin{bmatrix} -[C_1^{-1}][C_2] \\ I \end{bmatrix} \{\Phi_2\}, \quad (4.32)$$

représente le champ de contraintes résiduelles.

### 4.3.2. Détermination du multiplicateur de charge limite

Pour un chargement donné, on détermine le multiplicateur de charge limite, facteur de sécurité contre la défaillance, en utilisant la méthode d'optimisation non linéaire, qui garantit l'adaptation de notre structure, et détermine en même temps la borne limite de la longueur de la fissure avant défaillance.

A cette fin, on résout le problème d'optimisation suivant :

$$\alpha_{SD} = \text{Max} \alpha, \quad (4.33)$$

sous les contraintes :

$$a(\alpha, \rho^\circ) < a_c, \quad (4.34a)$$

$$F(\alpha \sigma^\circ(P) + \rho^\circ, \sigma_s) < 0. \quad (4.34b)$$

La longueur de la fissure est exprimée par :

$$a = a_0 + \left[ \frac{m+1}{m} \cdot \frac{1}{V} \cdot W_p \right]^{\frac{m}{m+1}}, \quad (4.35)$$

$m$  et  $V$  sont des constantes du matériau, représentant les paramètres de la courbe  $R$  (éq.(2.62)),  $a_0$  la longueur initiale de la fissure, et  $W_p$  la borne de la dissipation plastique qui s'exprime pour toute la structure par :

$$W_p = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\rho^{\circ} L \rho^{\circ}) d\Omega. \quad (4.36)$$

#### 4.4. CONCLUSION

Dans ce chapitre, une méthode de discrétisation du problème d'adaptation est donnée. La résolution de ce problème consiste à résoudre un problème de programmation mathématique qui nécessite :

- La solution d'un problème élastique correspondant aux mêmes conditions limites que le problème posé,
- la construction d'un champ de contraintes résiduelles auto-équilibré et indépendant du temps.

La discrétisation adoptée du problème repose sur la méthode des éléments finis statiquement admissibles, dont la formulation est basée sur le principe du minimum de l'énergie complémentaire, et qui, couplée avec un processus d'optimisation donnera le multiplicateur de charge de sécurité.

## **CHAPITRE 5**

### **APPLICATIONS NUMERIQUES AUX STRUCTURES FISSUREES**

## 5. APPLICATIONS NUMERIQUES AUX PLAQUES FISSUREES

### 5.1. INTRODUCTION

Afin d'illustrer la nouvelle approche, présentée au chapitre 3, pour l'étude de l'adaptation des structures fissurées, sous sollicitations mécaniques variables, nous étudierons, dans ce paragraphe, quelques exemples numériques de l'adaptation des plaques fissurées.

La mise en œuvre numérique a été réalisée avec un code de calcul en éléments finis, développé initialement par GROSS-WEEGE [28](1988) pour l'étude des plaques et coques et adapté à nos besoins.

L'étude est menée vis-à-vis de deux critères d'effondrement :

- Le critère d'effondrement par déformations plastiques progressives,
- le critère d'effondrement par déformations plastiques alternées.

Chaque critère définit un domaine limite de variations de charges. Ce domaine englobe tous les points de charges limites, et à l'intérieur duquel on a adaptation. Le domaine est obtenu de la façon suivante : Pour les différents multiplicateurs de charges  $\mu_i^+$  (ou  $\mu_i^-$ ), définissant le domaine de charges  $D_i$ , nous calculerons, à l'aide du processus d'optimisation, le facteur de sécurité correspondant  $\alpha_{SD}$ . De cette façon, on définit le domaine de charge limite  $D_i^{SD}$ , et en superposant tous les domaines  $D_i^{SD}$ , on construit le domaine limite (figure 5.1).

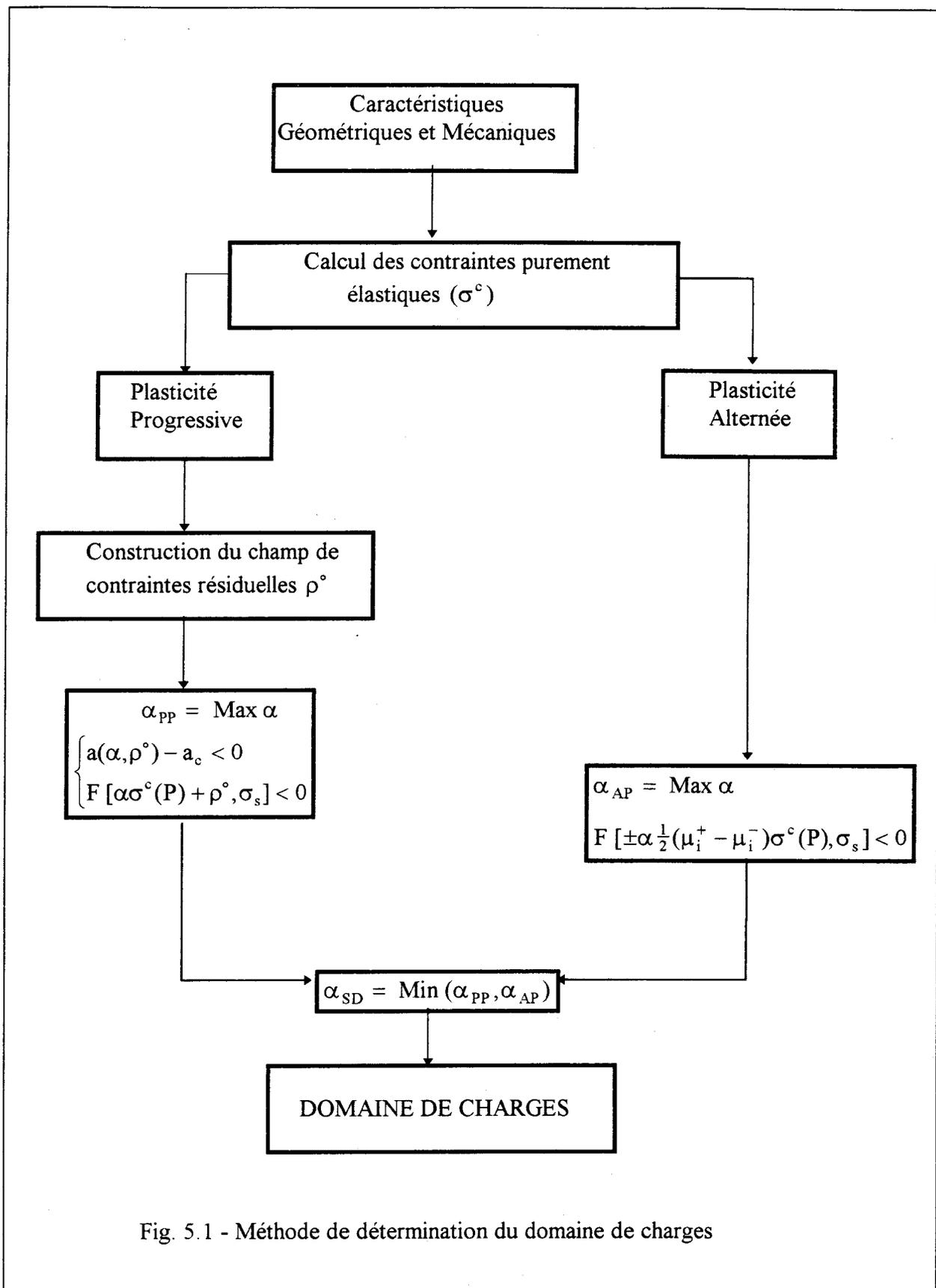


Fig. 5.1 - Méthode de détermination du domaine de charges

Cette étude sera menée comme suit :

- Après validation du module de calcul, nous considérerons une plaque avec une fissure centrale chargée uniformément sur les côtés dont nous déterminerons le domaine d'adaptation pour les différentes longueurs de la fissure. Le même calcul sera réalisé pour une plaque avec fissure latérale.
- La deuxième application sera consacrée à l'influence des inclusions sur la charge d'adaptation. Nous considérerons le cas d'une inclusion en amont de la pointe de la fissure et le cas de deux inclusions de part et d'autre de la fissure.

## 5.2. VALIDATION DU MODULE DE CALCUL

Pour valider le module de calcul, nous considérons une plaque non fissurée chargée sur les côtés (fig. 5.2). Différents types de maillages en nombre d'éléments et de points-tests sont testés.

Les deux cas de charges considérés sont :

- les deux charges  $P_1$  et  $P_2$  varient d'une manière quelconque entre les limites  $0 \leq P_1 \leq P_{1\max}$  et  $0 \leq P_2 \leq P_{2\max}$  (deux paramètres de charges "adaptation"),
- les deux charges  $P_1$  et  $P_2$  varient d'une manière proportionnelle  $P_1 = P_{1\max}$  et  $P_2 = P_{2\max}$  (chargement proportionnel "analyse limite").

Le calcul mené vis-à-vis de l'analyse limite comme cas particulier de l'adaptation et à l'adaptation en utilisant exclusivement le critère de Von-Mises, montre que la finesse du maillage n'influe que peu sur le résultat obtenu. Par contre le temps de calcul augmente fortement avec le nombre d'éléments. Ce qui nous a ramené, pour déterminer le facteur de charge, à choisir 36 éléments et optimiser le problème sur 180 point-tests.

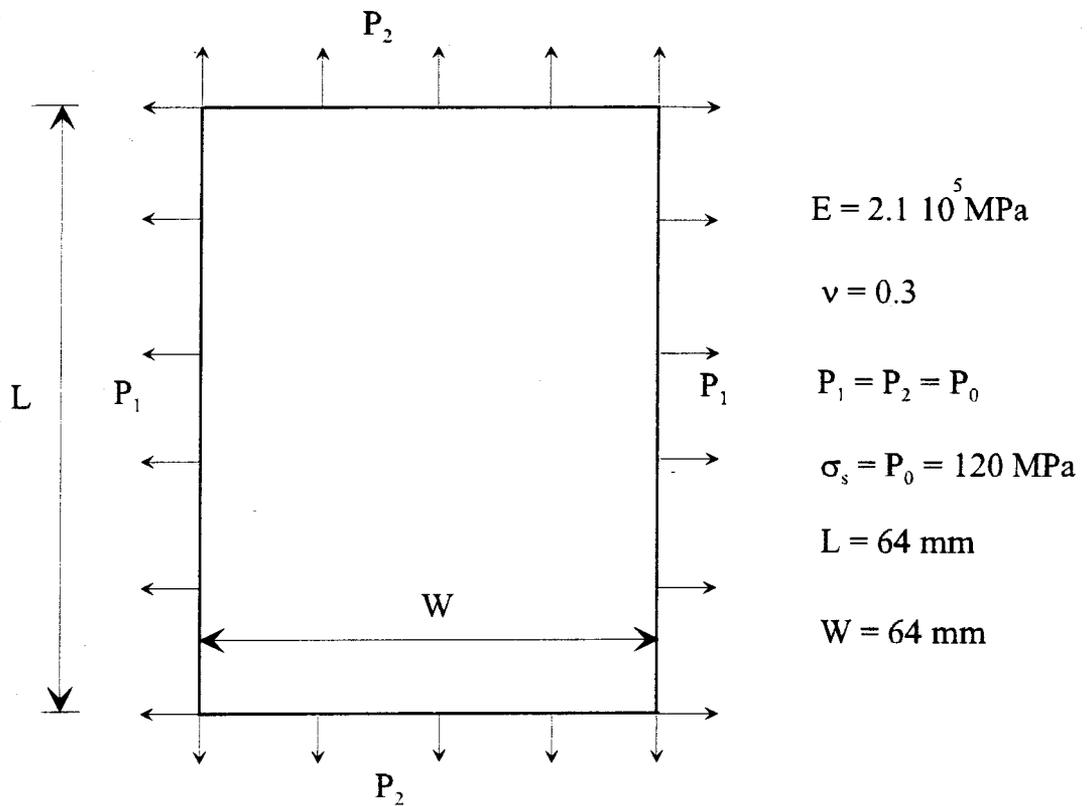


Fig. 5.2 - Plaque rectangulaire soumise à des tractions sur les cotés

On montre sur la figure (5.3), le type d'élément et les points-tests utilisés pour déterminer le facteur de charge. Sachant que ces derniers ne correspondent pas forcément aux points de Gauss et aux noeuds des éléments.

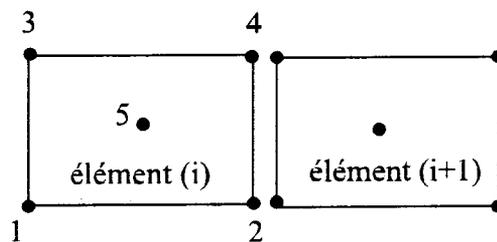


Fig. 5.3 - Type d'élément et points-tests

Il découle, à partir des domaines de charges obtenus pour les deux cas de charges, qu'un dimensionnement basé sur l'analyse limite est dangereux si les charges appliquées peuvent varier de manière indépendante.

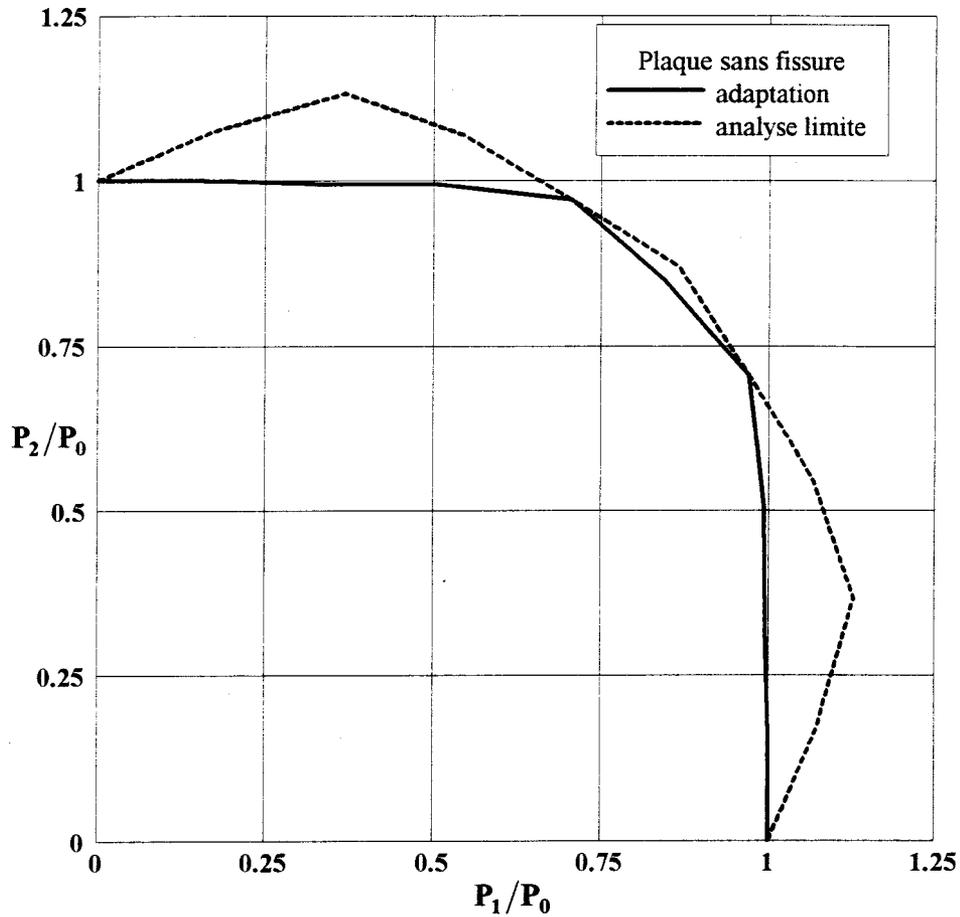


Fig. 5.4 - Domaine de charge pour une plaque non fissurée

### 5.3. INFLUENCE DE LA LONGUEUR DE LA FISSURE SUR LE DOMAINE D'ADAPTATION

#### 5.3.1. Cas d'une plaque avec fissure centrale

Nous considérons le cas d'une plaque rectangulaire pourvue d'une fissure centrale, et soumise à des tractions uniformes (fig. 5.5).

Vu la symétrie du problème, seul le quart supérieur droit de la structure a été discrétisé. La symétrie du champ de déplacement est respectée par l'annulation des déplacements verticaux du bord inférieur en chaque noeuds, sauf ceux des lèvres de la fissure, et par l'annulation des déplacements horizontaux du bord vertical gauche (fig.5.6).

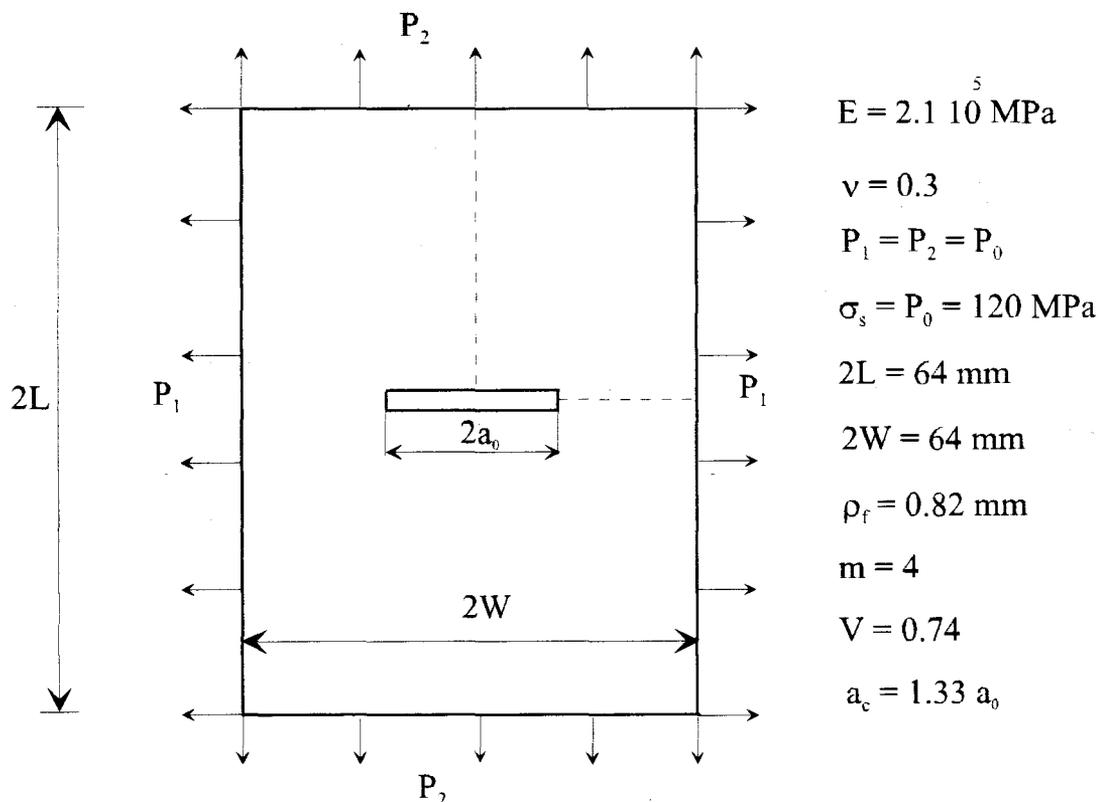


Fig. 5.5 - Plaque rectangulaire avec fissure centrale

Pour ce type de problème, nous avons été amené à raffiner le maillage au voisinage de la pointe de la fissure, ce qui a donné un maillage avec 118 éléments et 590 points-tests (fig. 5.6).

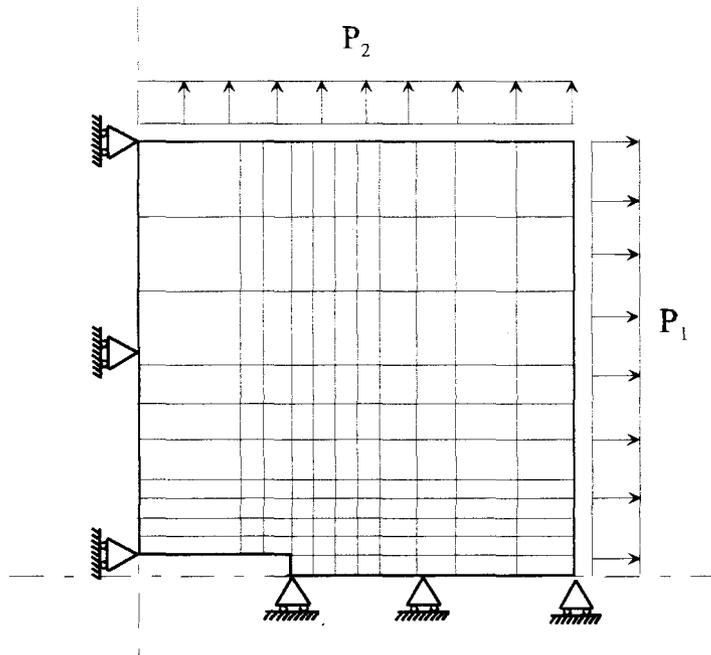


Fig. 5.6 - Maillage et conditions aux limites du quart de la plaque

Le résultat obtenu (fig. (5.7)) montre que la charge de sécurité est réduite en présence d'une fissure, cette réduction dépend de la longueur de la fissure. La charge  $P_2$  modifie défavorablement le domaine de charge et réduit la charge limite obtenue. Alors que sous la charge  $P_1$ , l'influence de la fissure est moindre étant donné que la concentration de contrainte est moins importante, et se situe sur les lèvres de la fissure et non en amont de la pointe de la fissure.

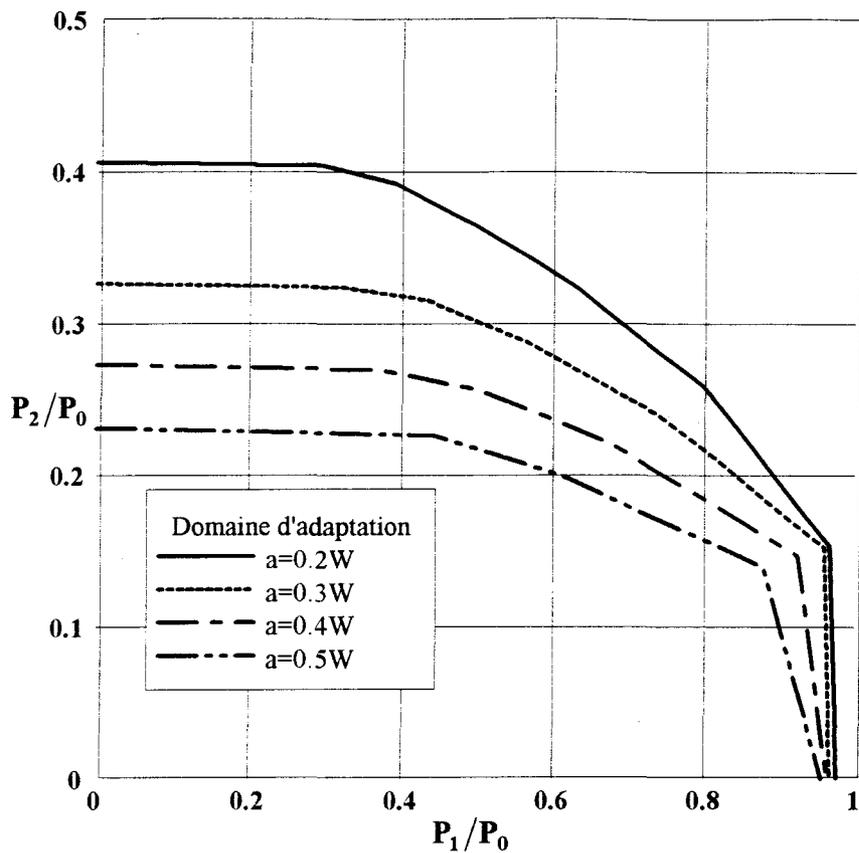


Fig. 5.7 - Influence de la fissure sur le domaine d'adaptation.

La figure (5.8) montre bien que également dans le cas d'une plaque fissurée, le dimensionnement basé sur l'analyse limite n'est pas adéquat si les charges appliquées peuvent varier d'une manière indépendante.

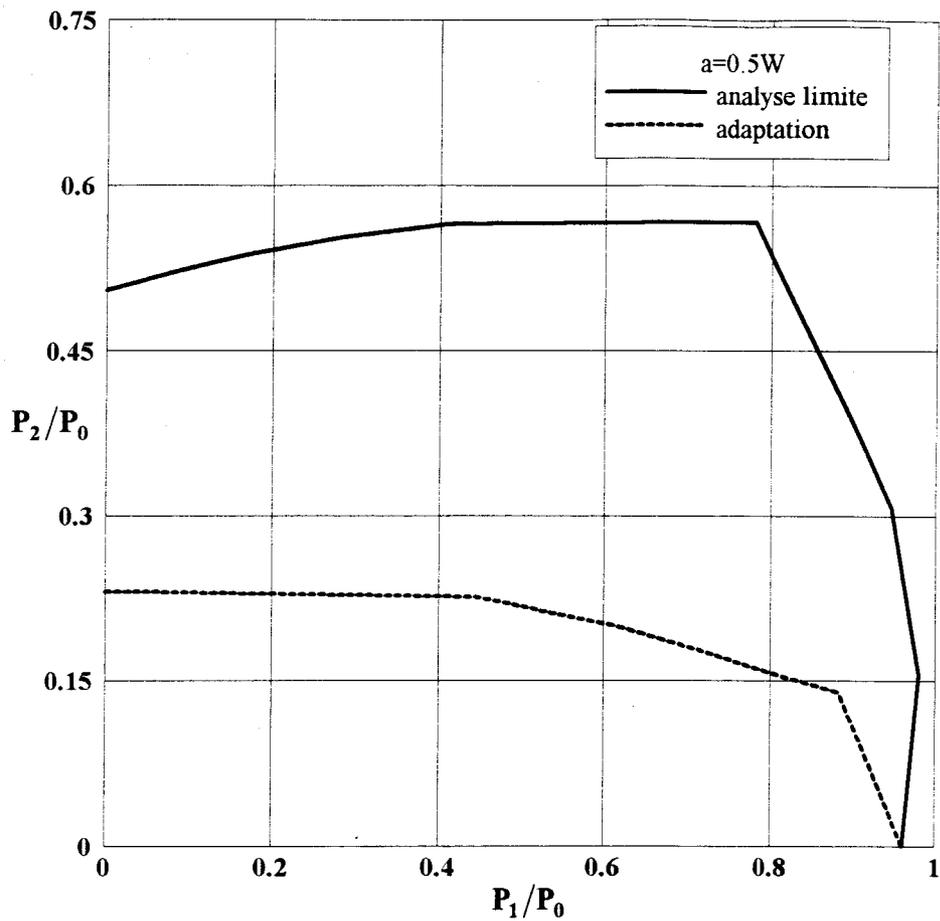


Fig.5.8 - Domaine d'adaptation et d'analyse limite pour une plaque fissurée.

On montre sur la figure (5.9) l'influence de la longueur de la fissure sur le facteur de charge dans le cas d'une plaque avec fissure centrale soumise à une tension uniforme.

La variation de la charge limite avec la longueur de la fissure est en accord avec son expression analytique (MIANNAY [74] (1995), PLUVINAGE [93] (1989) et [94] (1995)) :

$$\frac{P_{2AL}}{P_0} = 1 - \frac{a}{W}, \quad (5.1)$$

qui traduit la charge limite comme étant la résistance du ligament restant de la plaque fissurée soumise à une tension uniforme.

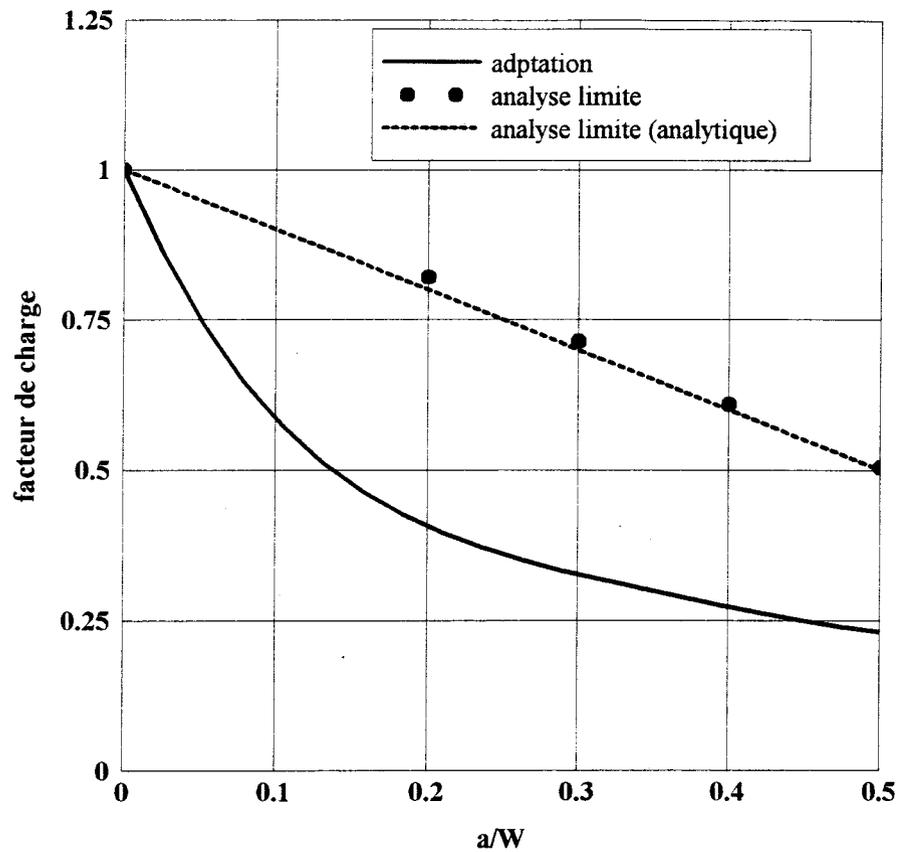


Fig. 5.9 - Influence du rapport  $a/W$  sur le facteur de charge.

### 5.3.2. Cas d'une plaque avec fissure latérale

Nous considérons le cas d'une plaque rectangulaire pourvue d'une fissure latérale et soumise à des tractions uniformes (fig. 5.10).

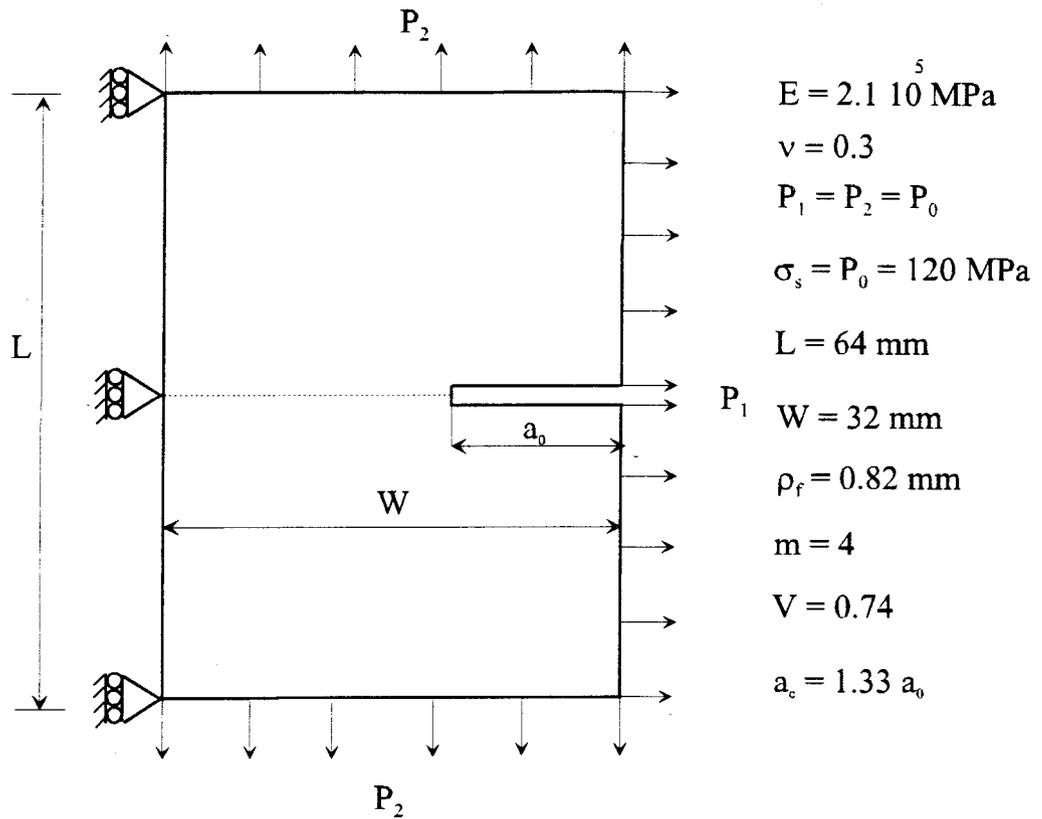


Fig. 5.10 - Plaque rectangulaire avec fissure latérale.

Vu la symétrie, seule la moitié supérieure de la structure a été discrétisée, nous avons adopté un maillage avec 100 éléments et 500 points-tests (fig. 5.11).

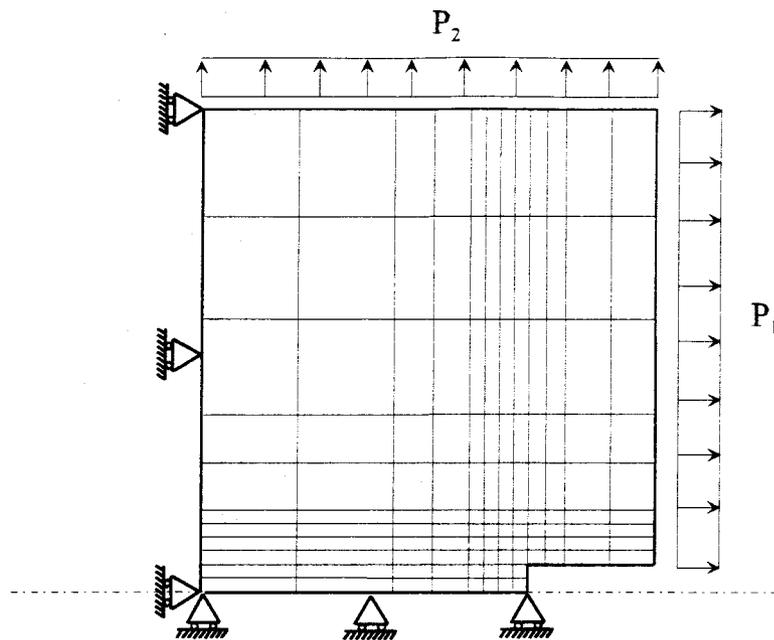


Fig. 5.11 - Maillage et conditions aux limites de la demi-plaque

La figure (5.12) montre comme dans le cas de la fissure centrale, que la charge de sécurité est réduite en présence de la fissure. Cette réduction dépend de la longueur de celle-ci. La charge  $P_2$  modifie défavorablement le domaine de charge et réduit la charge limite obtenue. Alors que sous la charge  $P_1$ , l'influence de la fissure est moindre.

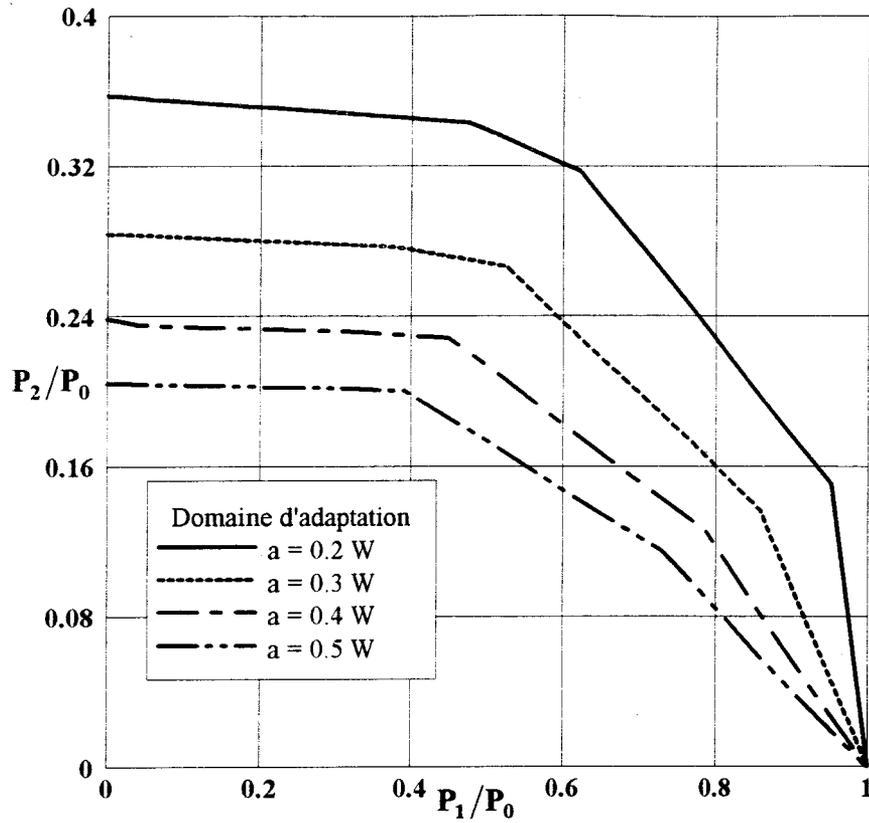


Fig. 5.12 - Influence de la fissure sur le domaine d'adaptation

Avec des charges variant d'une manière indépendante, la figure (5.13) montre, comme dans le cas de la fissure centrale, que le dimensionnement basé sur l'analyse limite est dangereux.

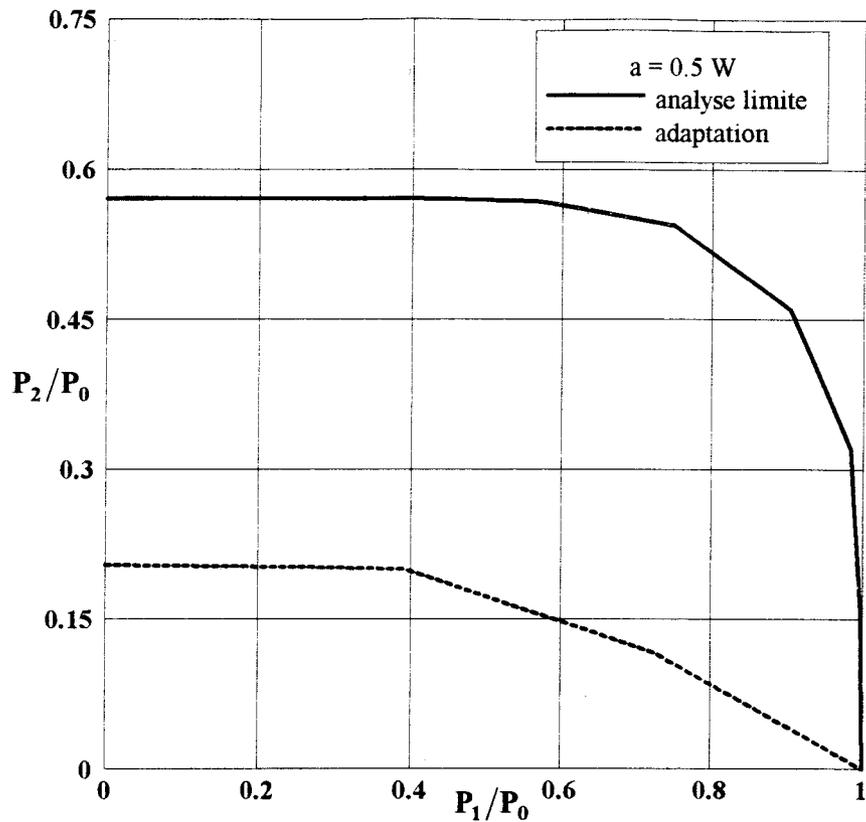


Fig. 5.13 - Domaine d'adaptation et d'analyse limite

L'influence de la longueur de la fissure sur le facteur de charge dans le cas de la plaque avec fissure latérale soumise à la tension uniforme  $P_2$  est montrée sur la figure (5.14). La valeur de la charge limite est en accord avec l'expression analytique (éq. (5.1)).

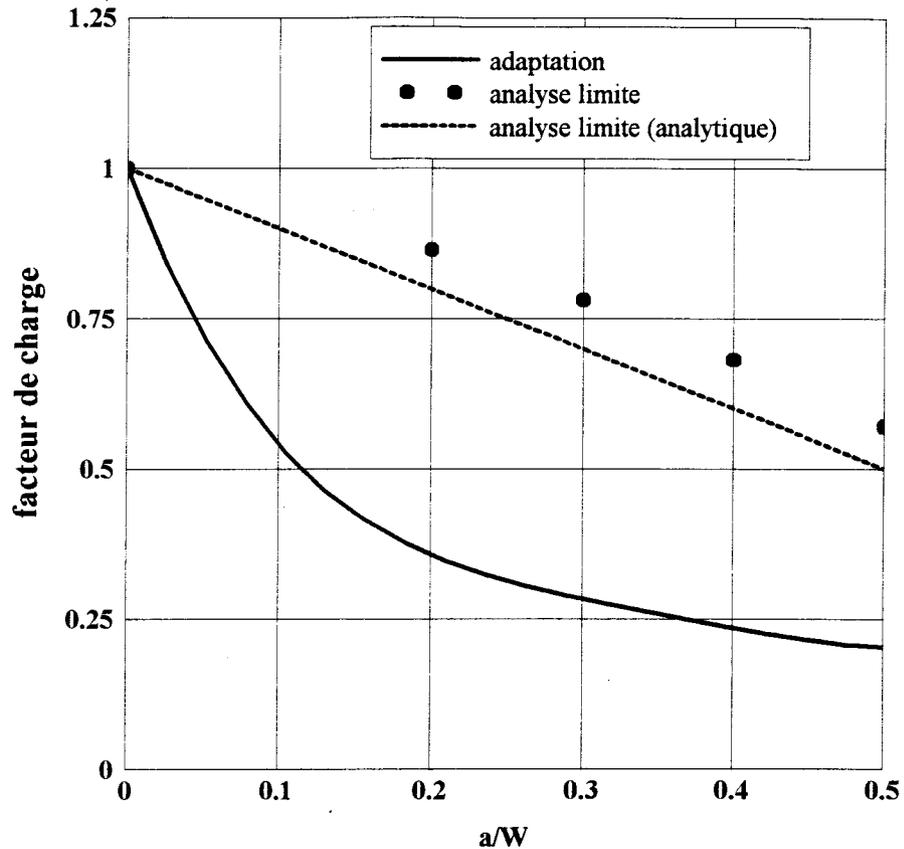


Fig. 5.14 - Influence du rapport  $a/W$  sur le facteur de charge

#### 5.4. INFLUENCE DES INCLUSIONS SUR LA CHARGE D'ADAPTATION

Dans ce paragraphe, on analyse l'influence des inclusions sur la valeur de la charge d'adaptation d'une plaque pourvue d'une fissure latérale et soumise à une traction  $P$ .

##### 5.4.1. Cas d'une inclusion en amont de la pointe de fissure

On considère une plaque rectangulaire pourvue d'une fissure latérale, avec une inclusion en amont de la pointe de fissure, et soumise à une traction  $P$  (fig. 5.15).

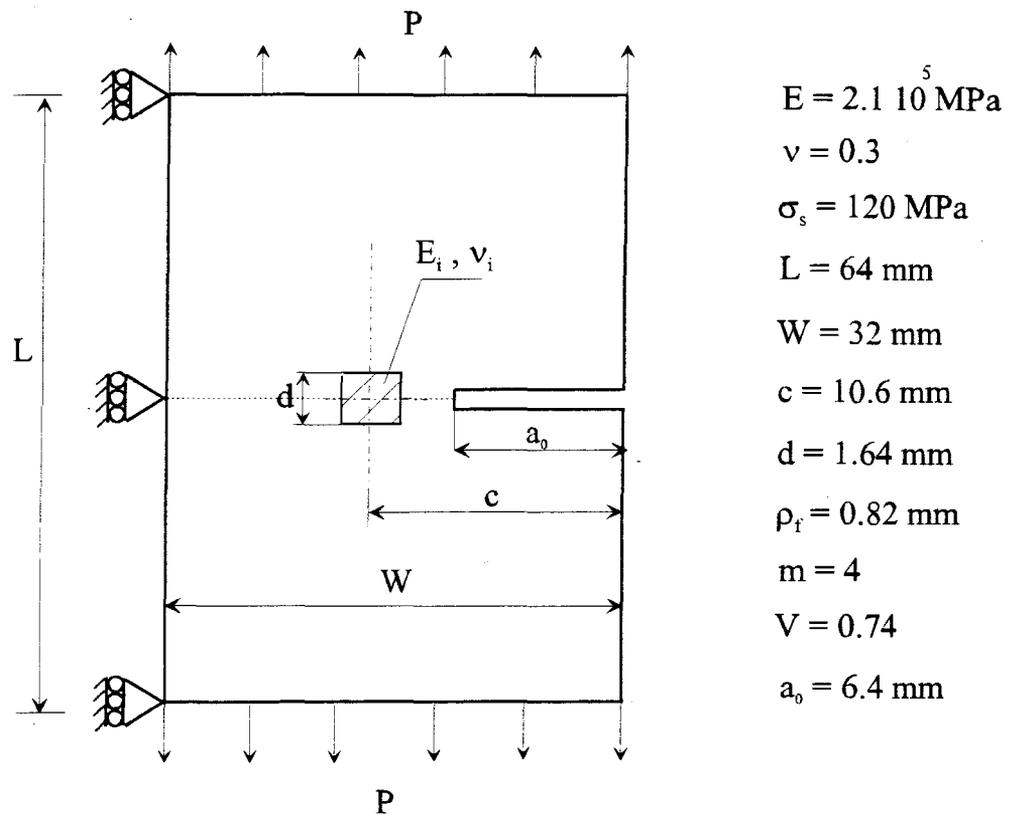


Fig. 5.15 - Inclusion en amont de la fissure

Le maillage et les conditions aux limites adoptés sont ceux montrés dans la figure (5.11).

#### 5.4.1.1. Influence du module de Young $E_i$ de l'inclusion

La charge d'adaptation  $P_{SD}$  est évaluée pour différents modules de Young de l'inclusion. Le module de Young  $E_i$  de l'inclusion est compris entre  $10^5 \text{ MPa}$  et  $2 \times 10^5 \text{ MPa}$  pour les inclusions douces, et entre  $2.4 \times 10^5 \text{ MPa}$  et  $7 \times 10^5 \text{ MPa}$  pour les inclusions dures.

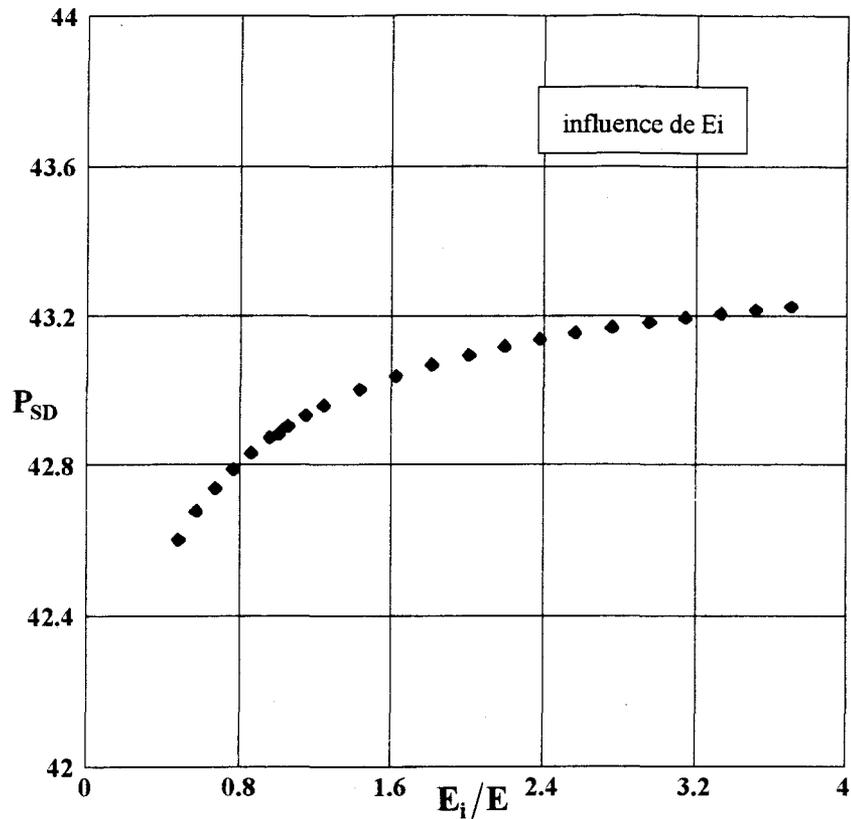


Fig. 5.16 - Variation de la charge d'adaptation  $P_{SD}$  avec le rapport  $\frac{E_i}{E}$

La figure (5.16) montre l'effet de croissance de  $P_{SD}$  lorsque le rapport  $\frac{E_i}{E}$  augmente. Au delà d'une certaine valeur de la dureté de l'inclusion, la valeur de  $P_{SD}$  tend vers une valeur limite.

#### 5.4.1.2. Influence de la distance $r$ entre l'inclusion et la fissure

Nous constatons une influence considérable de l'inclusion sur la charge d'adaptation  $P_{SD}$ , et suivant deux cas :

- le rapport  $\frac{E_i}{E} < 1$ , les résultats obtenus montrent que le rapport  $\frac{P_{SD}}{P_{SD0}}$  ( $P_{SD0}$  est la valeur de  $P_{SD}$  en absence de l'inclusion (matériau homogène)) diminue lorsque la distance entre l'inclusion et la fissure décroît, cela agit défavorablement sur la fiabilité de la structure,

- le rapport  $\frac{E_i}{E} > 1$ ,  $\frac{P_{SD}}{P_{SD0}}$  croît quand l'inclusion s'approche de la pointe de la fissure, la structure devient plus résistante.

On remarque que les deux courbes, figure (5.17), tendent vers une valeur de  $\frac{P_{SD}}{P_{SD0}} = 1$  (matériau homogène) quand  $\frac{r}{a}$  augmente. Une comparaison qualitative montre que ces résultats sont en accord avec ceux de LI & CHUDNOVSKY [64](1993) et HADDI & WEICHERT [34](1995).

L'étude de l'influence du module de Young de l'inclusion et de sa distance par rapport à la pointe de la fissure sur la charge d'adaptation, montre que la présence d'une inclusion douce est généralement néfaste pour la sécurité de la structure. Par contre, une inclusion dure peut, suivant sa dureté et sa position, améliorer sa résistance.

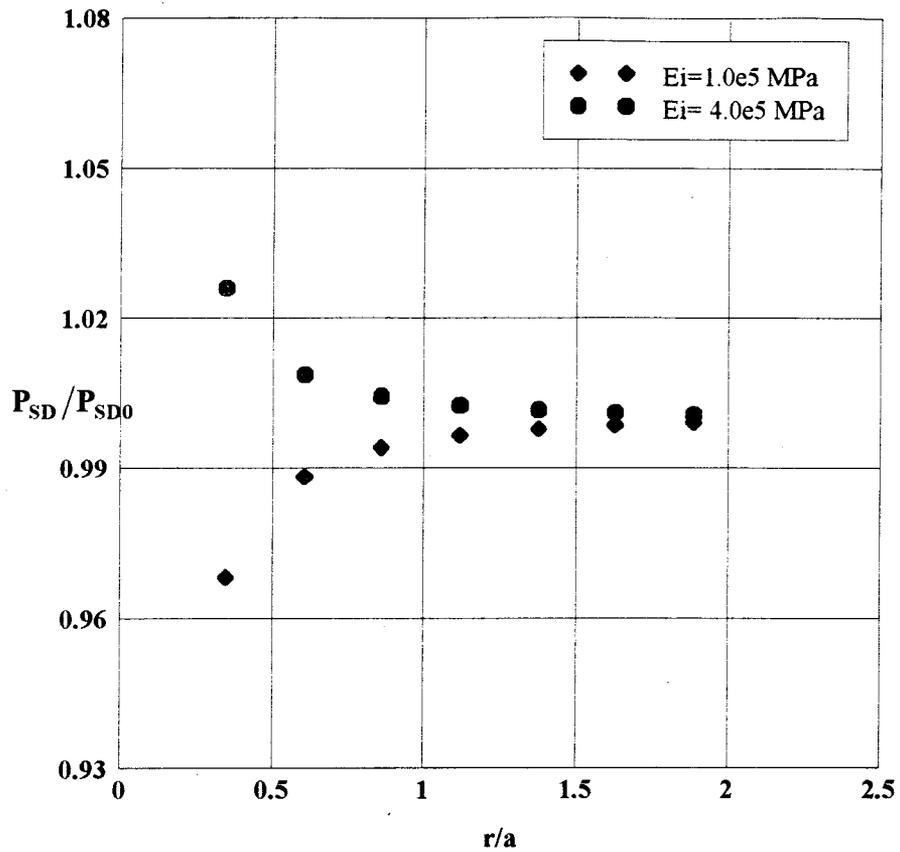


Fig. 5.17 - Le rapport  $\frac{P_{SD}}{P_{SD0}}$  en fonction de  $\frac{r}{a}$

#### 5.4.2. Cas de deux inclusions de part et d'autre de la fissure

Nous considérons la même structure (fig. 5.15), en présence de deux inclusions de part et d'autre de la fissure (fig. 5.18).

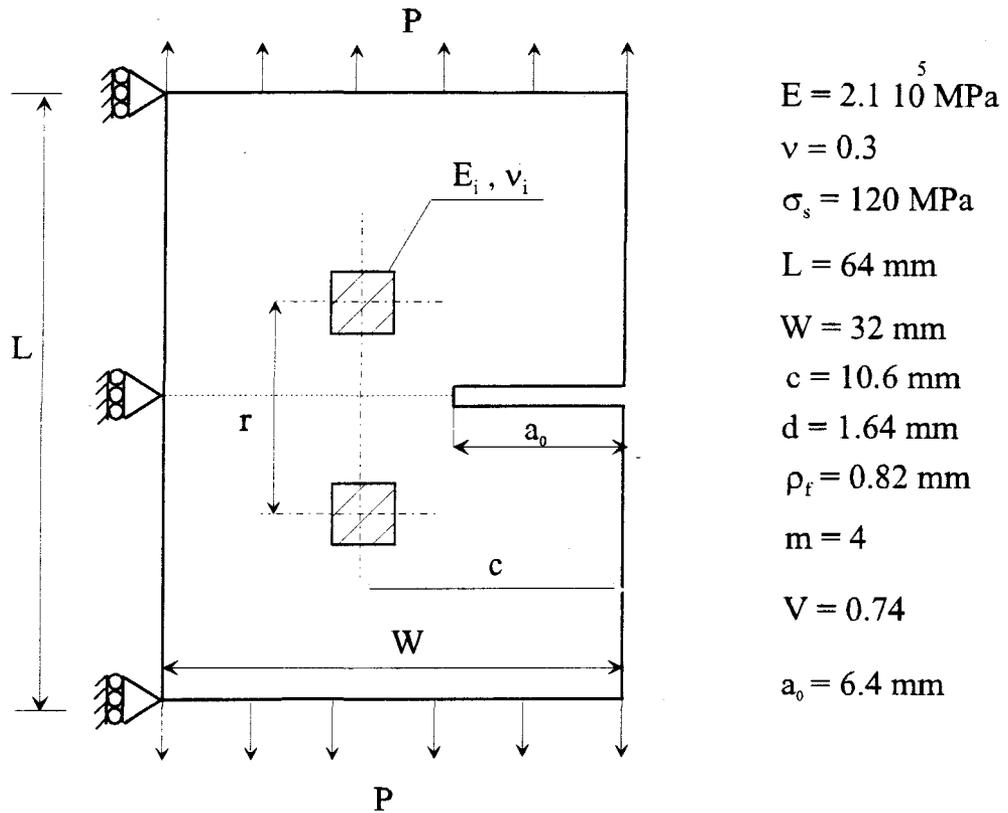


Fig. 5.18

#### 5.4.2.1. Influence du module de Young $E_i$ des inclusions

Les résultats obtenus, figure (5.19), montrent que la présence de deux inclusions de part et d'autre de la fissure influe sur la fiabilité de la structure.

La dureté des inclusions augmente la charge d'adaptation et donc améliore la résistance de la structure fissurée. On remarque que la pente de la courbe obtenue est plus raide que dans le cas d'une seule inclusion (l'influence est plus importante).

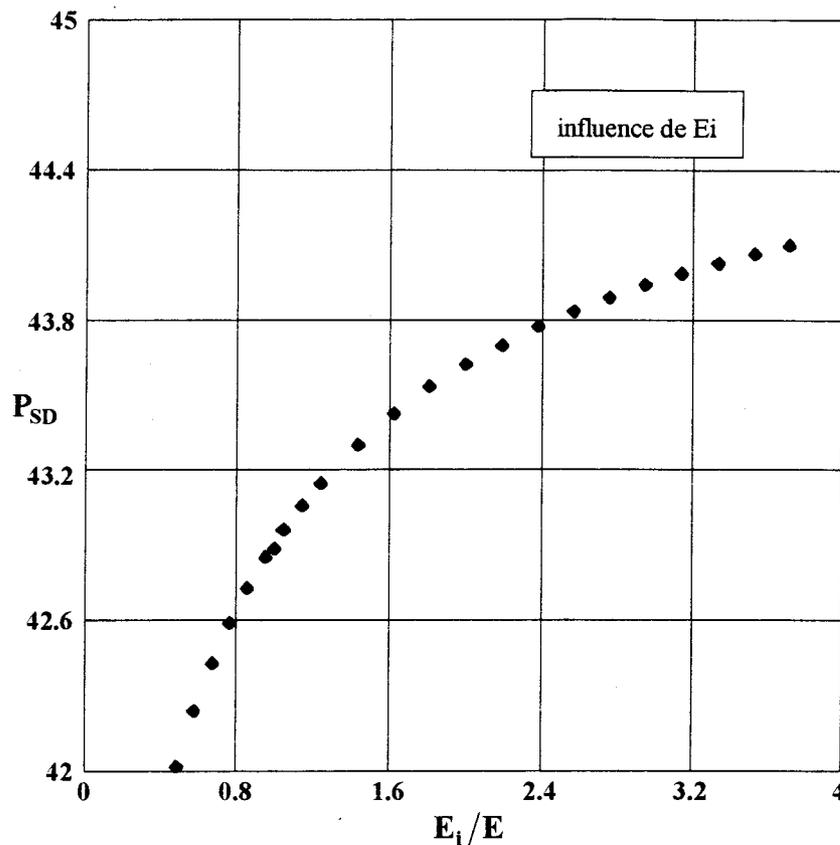


Fig. 5.19 - Variation de la charge d'adaptation  $P_{SD}$  avec le rapport  $\frac{E_i}{E}$

#### 5.4.2.2. Influence de la distance entre les deux inclusions

La charge d'adaptation  $P_{SD}$  varie suivant deux cas (fig.5.20) :

-  $\frac{E_i}{E} > 1$ , la valeur de  $P_{SD}$  croît quand la distance diminue, cela s'explique lorsque les deux inclusions sont plus proches, on peut les considérées comme une seule, ce qui nous ramène au cas d'une inclusion dure qui augmente la résistance de la structure,

-  $\frac{E_i}{E} < 1$ , lorsque la distance diminue, on se ramène au cas d'une inclusion douce en amont de la pointe de la fissure, ce qui diminue la résistance de la structure et par conséquent  $P_{SD}$  diminue.

De plus, lorsque la distance  $\frac{r}{a}$  augmente, les deux courbes tendent vers la valeur  $P_{SD0}$  correspondant au cas du matériau homogène.

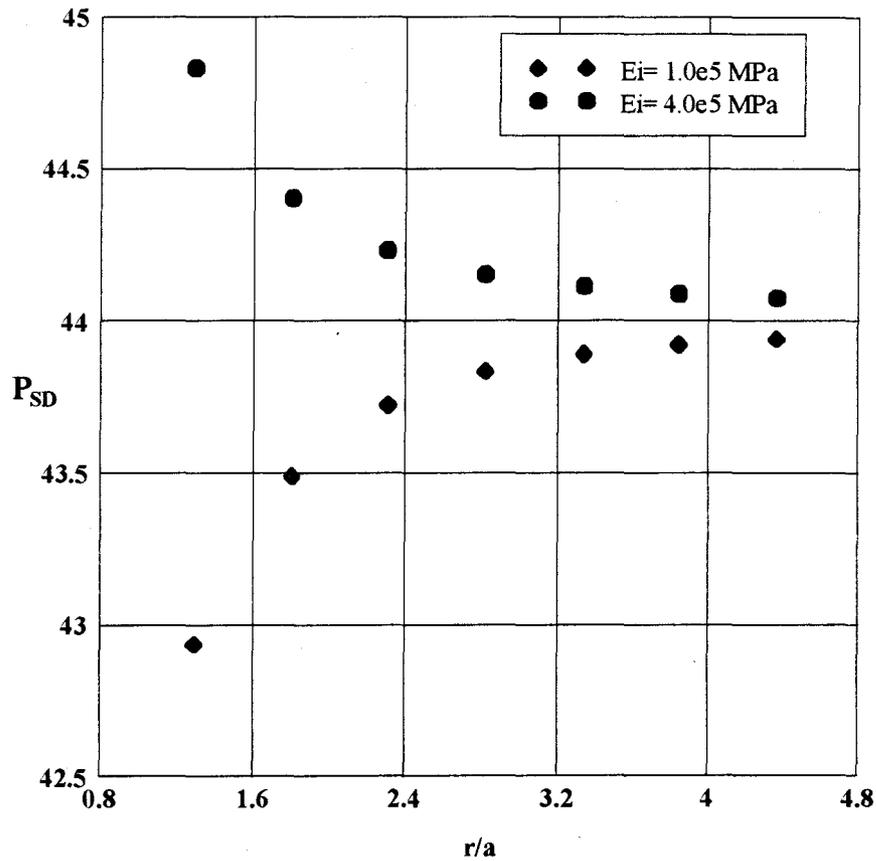


Fig.5.20 - Variation de  $P_{SD}$  avec la distance entre deux inclusions.

### 5.5. CONCLUSION

Dans ce chapitre, des applications numériques sur des plaques fissurées ont été réalisées. Nous avons considéré des cas de charges simples en traction. Comme attendu,

les résultats obtenus traduisent bien le fait que la fissure réduit considérablement la charge de sécurité et montrent que le modèle développé est bien en mesure de simuler ce comportement, la fissure peut causer la ruine de la structure si la fissure n'est pas décelée ou son influence ignorée.

L'étude de l'influence des inclusions montre que suivant le cas, les inclusions peuvent rendre la structure plus résistante, comme elles peuvent, au contraire, accélérer la ruine de la structure en réduisant la charge de sécurité.

L'originalité de cette étude et le manque de résultats expérimentaux dans ce domaine, empêchent la validation directe de nos résultats. Néanmoins, l'évaluation précise de la charge de sécurité par l'analyse d'adaptation permet, avec les données géométriques de la structure, de calculer un facteur d'intensité de contraintes correspondant à l'état d'adaptation. Ce facteur peut être, dans certains cas, comparé au seuil de fatigue correspondant à la même structure et aux mêmes modes de chargement.

## **CHAPITRE 6**

**FACTEUR D'INTENSITE DE  
CONTRAINTE A L'ADAPTATION  
 $K_{SD}$  ET SEUILS DE FATIGUE  $K_S$**

## 6. FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTES A L'ADAPTATION $K_{SD}$ ET SEUILS DE FATIGUE $K_S$

### 6.1. INTRODUCTION

Comme autre exemple de l'utilité de l'analyse d'adaptation des structures fissurées, nous calculerons dans ce chapitre des facteurs d'intensité de contraintes que nous noterons  $K_{SD}$ , correspondants à l'état d'adaptation de la structure fissurée. Nous montrerons que ces facteurs peuvent être considérés comme des paramètres pouvant être assimilés à des seuils de fatigue tenant compte des contraintes résiduelles qui se développent en amont de la pointe de la fissure et qui, si elles sont de compression, jouent le rôle de bouclier contre la fissuration.

### 6.2. FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTES ET MODES DE RUPTURE

Le paramètre le plus classique défini en mécanique de la rupture est le facteur d'intensité de contraintes  $K$ . Comme le facteur de concentration  $K_t$  déterminé pour les trous ou les congés de raccordement, le facteur d'intensité de contraintes est défini à partir du champ de contraintes autour d'une fissure. Le principe de sa détermination est basé sur la méthode de superposition permettant de distinguer les différents modes de rupture (fig. 6.1) donnés par IRWIN [42] (1956). En élasticité, les facteurs d'intensité de contraintes sont ainsi calculés d'une manière analytique pour les structures simples avec des chargements élémentaires.

Les trois modes de rupture sont :

- Le mode I ou mode d'ouverture, les surfaces de la fissure se déplacent perpendiculairement l'une à l'autre,

- le mode II ou glissement droit, les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction perpendiculaire au front de fissure,

- le mode III ou glissement vis, les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction parallèle au front de fissure.

Le plus dangereux des modes est le mode I, pour cette raison, la plupart des études de la mécanique de la rupture ont porté sur ce mode.

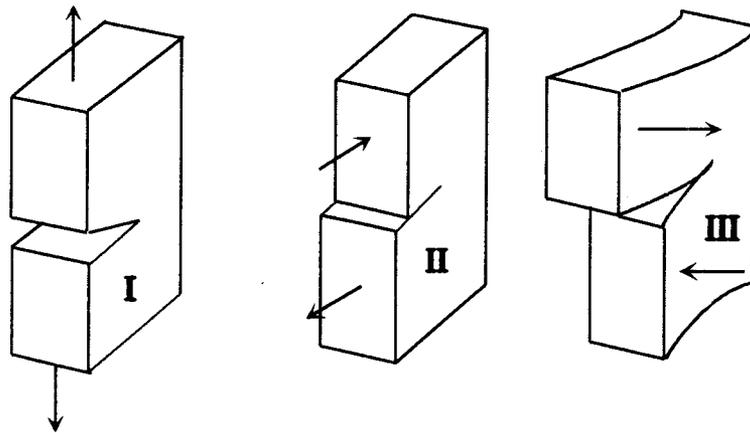


Fig. 6.1 - Modes de rupture

Lorsque plusieurs modes sont simultanément présents, on dit qu'il s'agit d'un mode mixte.

Les expressions analytiques des facteurs d'intensité de contraintes pour un certain nombre de situations simples en élasticité, peuvent être trouvées dans les ouvrages de BUI [6] (1978) et BARTHELEMY [1] (1980).

Le facteur d'intensité de contraintes pour une plaque fissurée, sollicitée en mode I, est donné par :

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \quad (6.1)$$

Pour les plaques de dimensions finies, l'expression (6.1) doit être multipliée par un facteur de correction géométrique  $g(\frac{a}{W})$ . L'expression de ce facteur de correction dépend de la configuration de la fissure et du chargement.

Comme pour le critère de rupture  $G_C$  (§ 2.6), on peut définir une valeur critique de  $K_I$  représentée par  $K_{IC}$ , qui représente la ténacité du matériau et sa résistance à une propagation instable de la fissure. La ténacité dépend du matériau, notamment de son état métallurgique, du traitement thermique, et de l'épaisseur pour les plaques.

Le critère d'acceptabilité d'une fissure de dimensions données, est le suivant :

$$\begin{aligned} K_I < K_{IC} & \quad \text{non critique} \\ K_I \geq K_{IC} & \quad \text{critique} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Il est à noter que  $K_I < K_{IC}$  veut dire qu'il n'y a pas de rupture fragile, mais la fissure peut se propager. En cas de chargement alterné ( fatigue). L'augmentation de la taille de la fissure fait augmenter la valeur de  $K_I$ , jusqu'à la rupture brutale.

### 6.3. SEUILS DE FATIGUE ET INFLUENCE DE LA MICROSTRUCTURE

L'analyse à la fatigue consiste à étudier la propagation de fissure dans une structure sous un chargement alterné. On définit l'existence d'un seuil  $K_S$  au-dessous duquel la croissance des fissures est quasi-nulle.

$$K_I < K_S \quad \text{pas de propagation} \quad (6.3)$$

Parmi les facteurs influençant le seuil de fatigue, citant la microstructure du matériau. D'une façon générale,  $K_S$  augmente avec la taille du grain, cette augmentation a été observée sur les aciers ferritiques par plusieurs chercheurs (RADHAKRISHNA [103])

(1984), TAYLOR [118] (1984), WASEN et al. [121] (1988)). Il a été suggéré que la dépendance entre  $K_S$  et  $\xi^{\frac{1}{2}}$  ( $\xi$  est le diamètre du grain) peut avoir une forme linéaire [103][118][121] :

$$K_S = a_1 + b_1 \xi^{\frac{1}{2}}, \quad (6.4)$$

où  $K_S$  est en  $\text{MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}$  et  $\xi$  en mètre,  $a_1$  et  $b_1$  sont des constantes.

#### **6.4. FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTES A L'ADAPTATION**

On considère les plaques fissurées du § 5.3 chargées en mode I. Nous calculerons les facteurs d'intensité de contraintes correspondants à l'état d'adaptation  $K_{SD}$  (Eq. 6.5) et des comparaisons avec des seuils de fatigue de certains matériaux seront réalisées.

$$K_{SD} = \alpha_{SD} \cdot P \cdot \sqrt{\pi a}, \quad (6.5)$$

$\alpha_{SD}$  est le facteur de charge d'adaptation,  $P$  est la charge appliquée et  $a$  est la longueur de la fissure.

##### **6.4.1. Plaque avec fissure latérale**

On considère la plaque rectangulaire pourvue d'une fissure latérale et soumise à une traction uniforme  $P$  (fig 6.2).

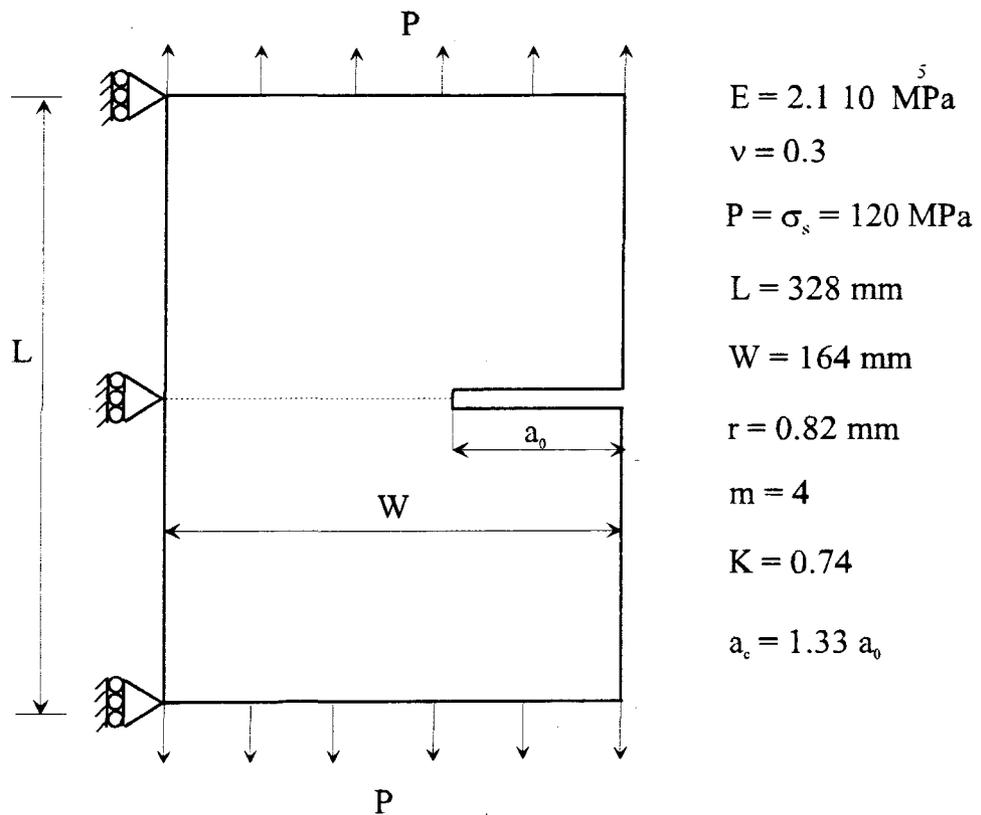


Fig. 6.2 - Plaque fissurée chargée en mode I.

Nous avons calculé le facteur d'intensité de contraintes à l'adaptation pour différentes longueurs de la fissure. Les résultats obtenus (fig.6.3), montrent que  $K_{SD}$  est indépendant de la longueur de la fissure, et peut donc être considéré comme paramètre de sécurité contre la défaillance par plasticité et fissuration pour le mode I de sollicitation.

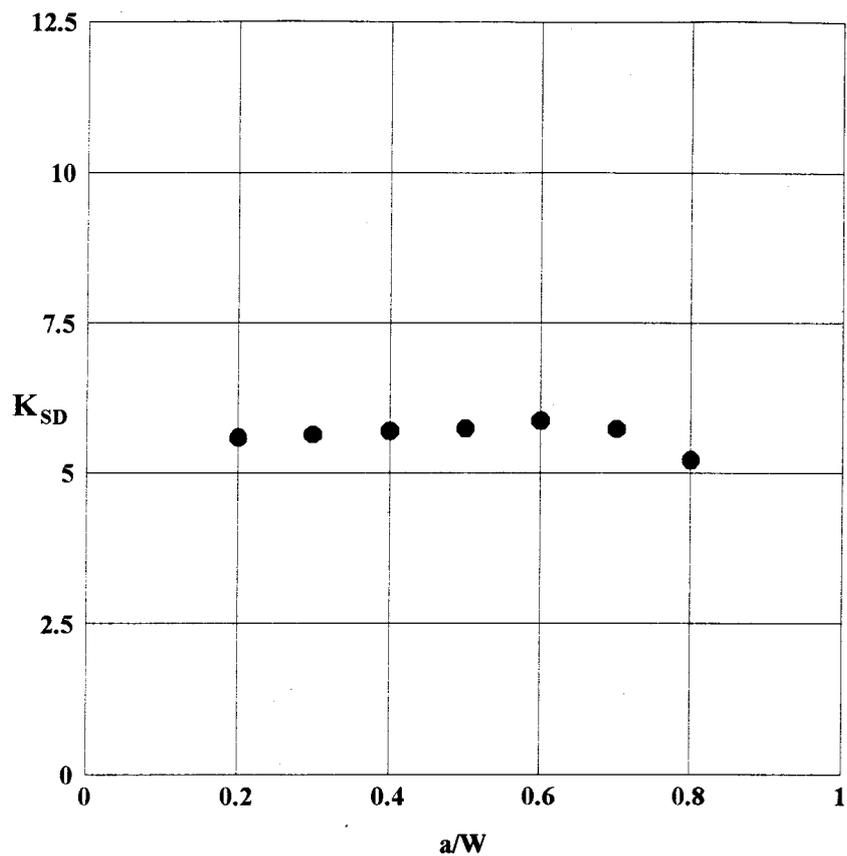


Fig. 6.3 - Indépendance de  $K_{SD}$  par rapport à  $a/W$

#### 6.4.2. Plaque avec fissure centrale

Le même constat est fait, pour le cas d'une plaque pourvue d'une fissure centrale et sollicitée en mode I (fig. (6.4) et (6.5)).

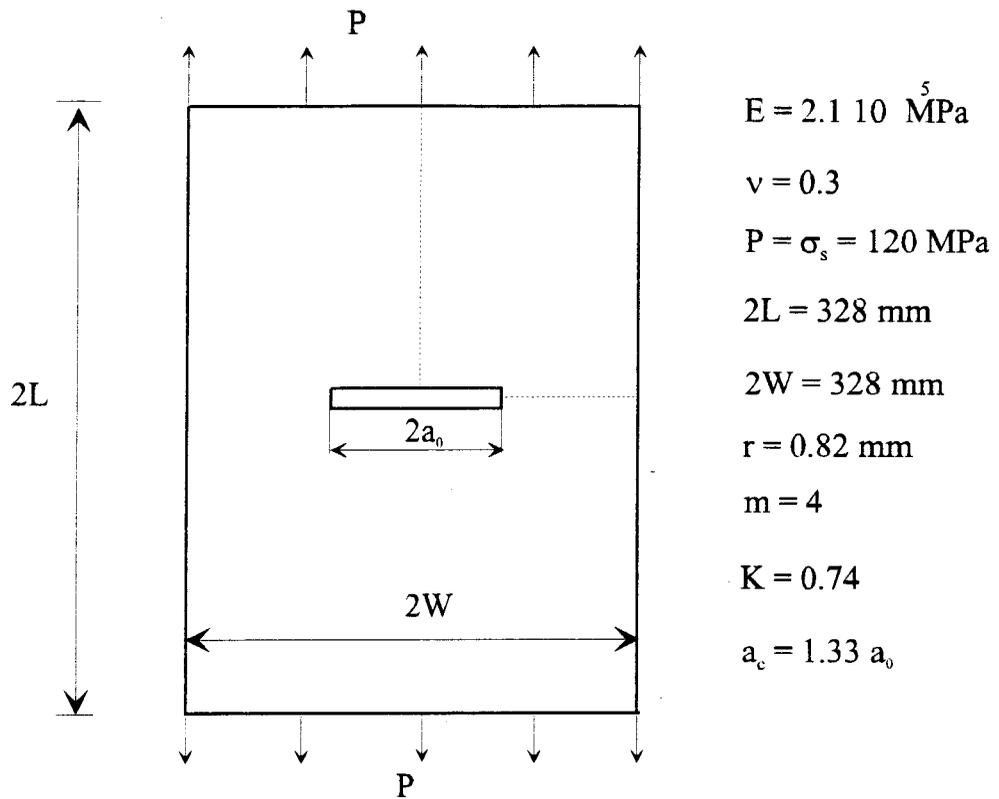


Fig. 6.4 - Plaque fissurée chargée en mode I.

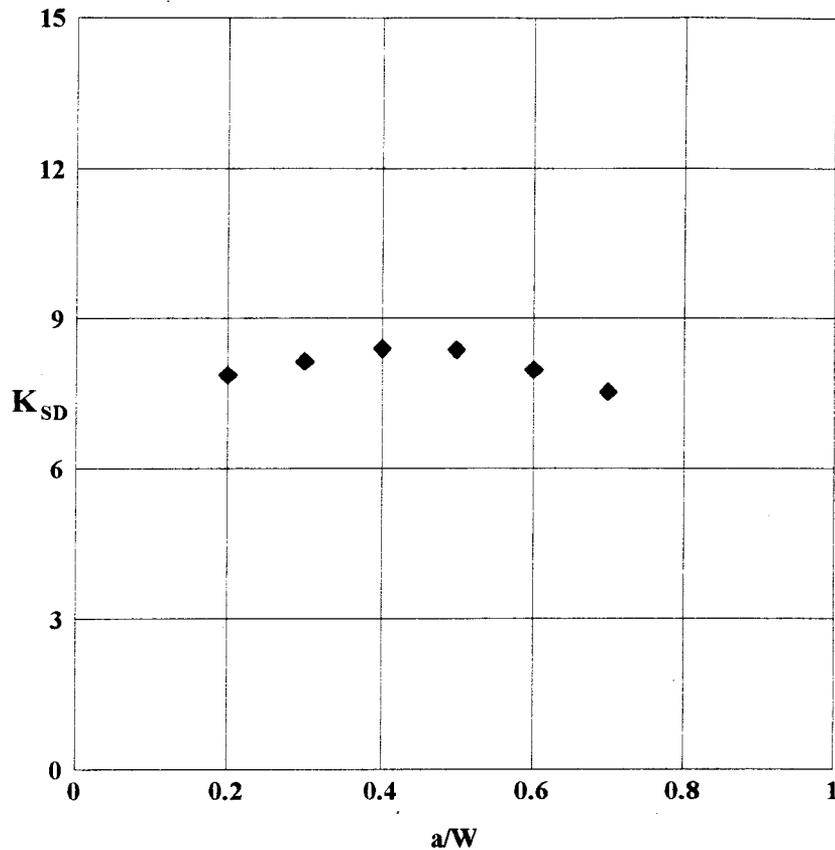


Fig. 6.5 - Indépendance de  $K_{SD}$  par rapport à  $a/W$ .

#### 6.4.3. Comparaison des valeurs de $K_{SD}$ aux seuils de fatigue $K_S$ de certains matériaux

Dans ce paragraphe, nous comparerons les valeurs de  $K_{SD}$  calculées dans le cas d'une plaque rectangulaire sollicitée en mode I, aux seuils de fatigue  $K_S$  donnés par WASEN & al. [121] (1988) et les facteurs d'intensité de contraintes d'adaptation donnés par HUANG & STEIN [39] (1996) pour quelques matériaux. Les propriétés de ces matériaux sont données dans le tableau 1 :

Matériaux	désignation	diamètre du grain en $\mu\text{m}$	$\sigma_s$ en MPa	$\sigma_u$ en MPa
Docol 350	A	8	260	360
SS 141147	B	15	185	322
Acier doux	C	29	210	304
Acier doux	D	45	160	279
Acier doux	E	82	120	242

Tableau 1.- Diamètre du grain et données mécaniques des matériaux.

D'après les résultats donnés dans le tableau 2, nous constatons que les  $K_{SD}$  coïncident bien avec les  $K_{sh}$  donnés par HUANG & STEIN [39](1996). Par contre, nous remarquons une disparité avec les seuils de fatigue  $K_S$  donnés par WASEN et al. [121](1988) pour les matériaux A et E, où la limite d'écoulement est faible pour E et importante pour A. Ceci s'explique par le fait que pour le matériau E, qui possède une limite d'écoulement faible, la défaillance de la structure est due à la plasticité, ce qui a donné une valeur de  $K_{SD} < K_S$ . Par contre pour le matériau A, comme la limite d'écoulement est plus importante, nous avons un accroissement des contraintes résiduelles en compression à la pointe de la fissure, ce qui augmente la résistance à la

fissuration et donne une valeur  $K_{SD} > K_S$ . Une première constatation peut être faite: Les  $K_{SD}$  peuvent être considérés comme des seuils de fatigue tenant compte des contraintes résiduelles.

Désignation	$K_S$	$K_{sh}$	$K_{SD}$
A	5.4	8.9	8.43
B	6.0	7.6	6.49
C	6.2	9.5	8.22
D	6.7	8.1	6.8
E	8.2	7.8	5.73

Tableau 2.- Seuils de fatigue et facteurs d'intensité de contraintes à l'adaptation

#### 6.4.4. Influence de la microstructure sur les valeurs de $K_{SD}$

Dans ce paragraphe, nous étudierons l'influence du diamètre du grain sur le facteur d'intensité de contraintes à l'adaptation  $K_{SD}$ , la figure (6.6) montre que le rapport  $\frac{K_{SD}}{\sigma_s}$  varie linéairement avec  $\xi^{\frac{1}{2}}$  :

$$\frac{K_{SD}}{\sigma_s} = a_2 + b_2 \xi^{\frac{1}{2}} \quad (6.6)$$

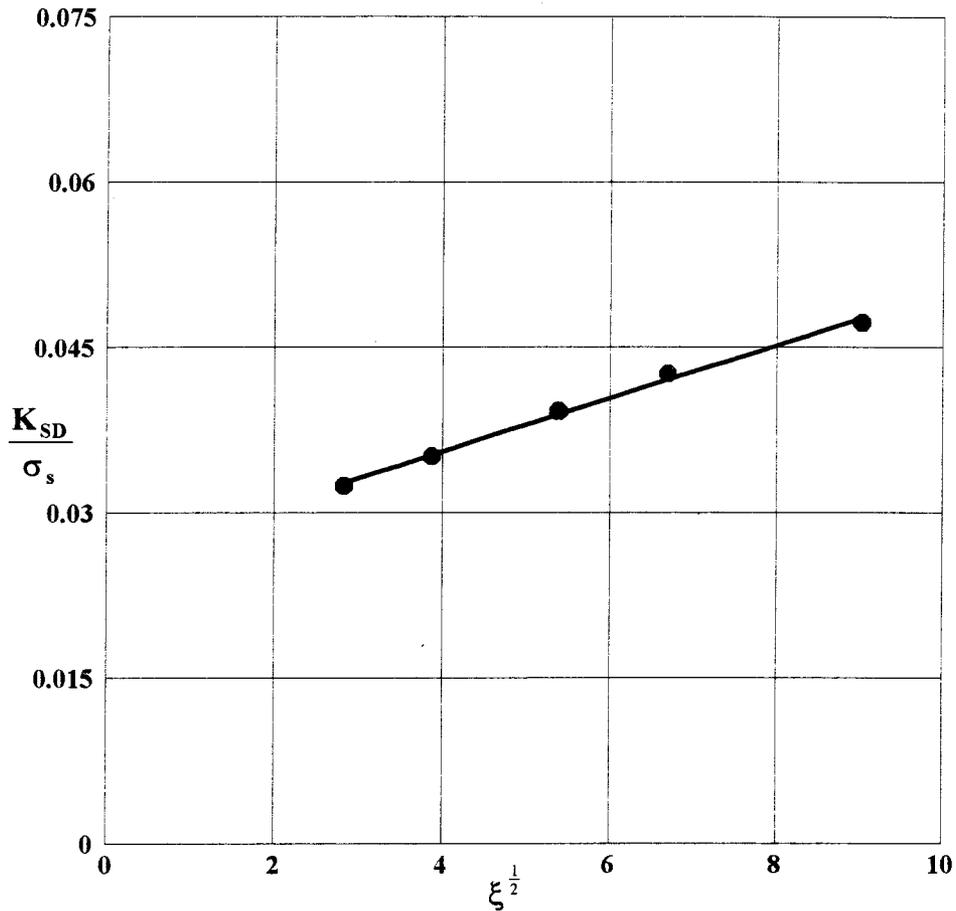


Fig. 6.6 - Relation entre  $\frac{K_{SD}}{\sigma_s}$  et  $\xi^{\frac{1}{2}}$

En comparant l'équation (6.6) à (6.5) relative au seuil de fatigue, on remarque que la limite d'écoulement influence le facteur d'intensité de contraintes à l'adaptation. Cela s'explique par le fait que le facteur d'intensité de contraintes à l'adaptation est calculé en tenant compte de la limite d'écoulement et la borne limite de la fissuration. De plus, sachant que la limite d'écoulement a une relation avec le diamètre du grain de la forme (WASEN & al. [121] (1988), XU DONG LI [127] (1996)) :

$$\sigma_s = a_3 + b_3 \xi^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.7)$$

$\sigma_s$  augmente quand le diamètre du grain diminue et comme l'intensité des contraintes résiduelles augmente avec une augmentation de la limite d'écoulement, on déduit des équations (6.5) et (6.6) que les disparités constatées entre les valeurs de  $K_{SD}$  et  $K_S$  sont dues aux contraintes résiduelles.

Nous concluons que les facteurs d'intensité de contraintes à l'adaptation calculés dans le paragraphe précédent ne sont autres que les seuils de fatigue tenant compte des contraintes résiduelles.

## 6.5. CONCLUSION

Dans ce dernier chapitre, nous avons calculé à partir de la charge d'adaptation, des facteurs d'intensité de contraintes correspondants à l'état d'adaptation. Les premiers résultats montrent que ces facteurs sont indépendants de la longueur de la fissure, ce qui implique, qu'ils caractérisent un seuil de l'intensité de contraintes au dessous duquel, la structure est dans un état de sécurité. Nous avons ensuite calculé des facteurs d'intensité de contraintes d'adaptation pour certains matériaux que nous avons comparé aux seuils de fatigue correspondants. Les écarts constatés sont dus essentiellement aux contraintes résiduelles qui se développent au voisinage de la pointe de la fissure, et empêchent sa propagation. Nous avons observé aussi qu'il existe une relation linéaire entre les facteurs d'intensité de contraintes à l'adaptation avec le diamètre du grain du matériau pour les exemples traités dans ce travail.

## **CONCLUSION GENERALE**

## **CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES**

Dans ce travail, nous avons proposé une contribution à l'analyse de prédiction de défaillance des structures mécaniques.

Cette contribution consiste en proposition d'extension du théorème statique d'adaptation aux structures fissurées, soumises à des sollicitations mécaniques variables. Ces structures sont restées exclues de l'analyse d'adaptation à cause de la singularité du champ de contraintes élastiques. L'idée directrice est que les structures fissurées ne peuvent dissiper des énergies infinies, et l'expérience montre que bien des structures restent souvent sûres même en présence de fissures. L'approche thermodynamique des phénomènes irréversibles a été adoptée. En se basant sur une analyse de la rupture développée par NGUYEN Q. S. [88] (1980) et la théorie de croissance des fissures basée sur le bilan d'énergie global proposée par GRIFFITH A. A. [26] (1921) [27] (1924), nous avons exprimé la dissipation intrinsèque de la structure fissurée, cette dissipation est une quantité finie.

Cette méthode nous a permis de discuter la proposition d'extension du théorème statique d'adaptation par une démarche analogue à celle qui a été utilisée pour tenir compte de l'endommagement. Une condition supplémentaire a été introduite sur la longueur que peut prendre la fissure à l'adaptation pour nous prémunir de la rupture instable.

Pour valider cette proposition, nous avons introduit les développements nécessaires dans un code de calcul utilisant la méthode des éléments finis statiquement admissibles, et la méthode de programmation mathématique. Cette dernière consiste à déterminer la borne inférieure du facteur de charge limite, ainsi que la borne supérieure de la longueur de la fissure, tout en veillant à ce que le critère d'écoulement ne soit violé en aucun point de la structure et la borne supérieure de la longueur de la fissure reste

toujours inférieure à la longueur critique, à laquelle nous avons rupture instable. Cette approche nécessite un minimum d'informations sur l'histoire du chargement et demande:

- une solution purement élastique du problème de référence,
- un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps.

Nous avons justifié le fait que la fissure peut être assimilée à une entaille aiguë, dont le rayon est déterminé suivant le concept du bloc de matériau de NEUBER [82] (1968). Ce rayon est directement lié au diamètre du grain du matériau. Ceci règle le problème de la singularité du champ de contraintes élastiques et évite le recours à la programmation d'éléments finis spéciaux pour traiter cette singularité.

L'étude a été appliquée aux plaques sous tension. Les résultats obtenus montrent bien qu'une structure fissurée s'adapte sous certaines conditions. L'influence de la longueur de la fissure sur la charge d'adaptation, montre que celle-ci est considérablement réduite. La fissure peut causer la ruine de la structure si la fissure n'est pas décelée à temps ou son influence négligée.

L'étude de l'influence des inclusions sur la charge d'adaptation montre que suivant le cas, la présence des inclusions peut être nocive, comme elle peut améliorer la résistance de la structure fissurée, ce qui ouvre une voie intéressante pour le choix de matériaux composites dans ces situations.

L'originalité de cette étude et le manque de résultats expérimentaux dans ce domaine, empêchent la validation directe de nos résultats. Toutefois, l'évaluation précise de la charge de sécurité par l'analyse d'adaptation avec les données géométriques de la structure, nous ont permis de calculer un facteur d'intensité de contraintes correspondant à l'état d'adaptation. La comparaison de ces facteurs aux seuils de fatigue de certains matériaux, montre que ces facteurs peuvent être considérés comme étant des seuils de fatigue tenant compte des contraintes résiduelles. Nous avons montré aussi, que lorsque ces facteurs sont normés par rapport à la limite d'écoulement, ils varient linéairement avec le diamètre du grain du matériau.

Cette étude constitue un point de départ dans l'analyse d'adaptation des structures fissurées. Certains points doivent être repris, comme par exemple, la dépendance du champ de contraintes résiduelles  $\rho^\circ$  avec l'évolution du domaine matériel, nous suggérons d'introduire la longueur de la fissure comme variable à déterminer de la même manière que  $\rho^\circ$ , ceci revient à chercher un  $\rho^\circ$  et une configuration géométrique tel que les arguments du théorème d'adaptation soient vérifiés, mais une relation simple entre le champ de contraintes et la longueur de la fissure est nécessaire afin d'optimiser le problème. Pour que cette approche soit complète et constituer une étude de fiabilité aussi réaliste que possible, elle devra tenir compte de l'interaction entre les différents paramètres influençant la fiabilité de la structure, tels que l'écrouissage, l'endommagement, le chargement thermique et les instabilités géométriques.

A moyen terme, on peut prévoir :

- l'étude d'adaptation d'une structure contenant plusieurs fissures, on pourra tenir compte de l'interaction entre ces fissures.
- dans notre étude, nous avons supposé, qu'à l'état initial, la structure fissurée était vierge de plasticité, d'écrouissage et d'endommagement, il serait intéressant, par exemple, d'étudier une structure contenant une fissure créée par un endommagement critique.
- considérer les lèvres de la fissure non libres de contraintes pour pouvoir étudier l'effet de fermeture de la fissure.
- formuler le théorème d'adaptation en terme de facteur d'intensité de contraintes, pour rejoindre les concepts de la mécanique de la rupture.
- Pour améliorer la précision des calculs et réduire encore leur temps, il est nécessaire de modifier le programme, au niveau des types d'éléments, introduire par exemple des éléments triangulaires pour pouvoir raffiner le maillage au voisinage de la fissure sans pour autant augmenter le nombre d'éléments.

## **REFERENCES**

**REFERENCES**

1. - **BARTHELEMY B.**, "Notions pratiques de la mécanique de la rupture", Eyrolles, Paris, (1980).
2. - **BELOUCHRANI M. A. & WEICHERT D.**, "An extension of the static shakedown theorem to inelastic cracked structures" soumis pour publication dans Int. J. Mech. Sci.
3. - **BELYTSCHKO T. & HODGE P. G.** "Plane Stress limit Analysis by Finites elements", Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. , vol.96, EM 6, 931-944, (1970).
4. - **BLEICH H.**, "Über die Bemessung Statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes", Bauingenieur, vol.19/20, 261, (1932).
5. - **BOGNER F. K., Fox R. L. & SCHMIT L. A.**, "The generation of inter-element compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas", Proc. : Conference on matrix methods in Struct. Mech., Daytona, AFFDL-TR, 66-80, (1965).
6. - **BUI H. D.**, "Mécanique de la rupture fragile", Masson, Paris, (1978).
7. - **CASEY J.**, "Approximate kinematical relations in plasticity", In. J. Solids Struct., 21, 671-682, (1985).
8. - **CERADINI G.**, "Sull adattamento dei corpi elasto-plastici soggetti ad azioni dinamiche", Giorn. Genio Civile, 106, 4/5, 239-250, (1969).
9. - **CORIGLIANO A., MAIER G. & PYCKO S.**, "Dynamic shakedown analysis and bounds for elastoplastic structures with nonassociative internal variable constitutive laws", Int. J. Sol. Struct., 32, 21, 3145-3166, (1995).
10. - **CORRADI L. & MAIER G.**, "Inadaptation theorems in dynamics of elastic-workhardening structures", Ing.-Archiv., 43, 44-57, (1973).
11. - **CREAGER M.**, Master Thesis, Lehigh University, (1966).

12. - **DEBORDES O. & Nayroles B.**, " Sur la théorie et le calcul à l'adaptation des structures élastoplastiques", *J. Méc.* , 15, N°1, 1-53, (1976).
13. - **DE DONATO O.**, "Second shakedown theorem allowing for cycles of both loads and temperature", *First Lombardo Scienza Lettere (A)*, 104, 265-277, (1970).
14. - **DE SAXCE G.**, "Sur quelques problèmes de mécanique des solides considérés comme matériaux à potentiels convexes", Thèse de doctorat, Coll. Pub. Fac. Sci. Appl., 118, Université de Liège, (1989).
15. - **DOROSZ S.**, " An upper bound to maximum residual deflections of elastic-plastic structures at shakedown", *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci Tech.*, 24, 167-174, (1976).
16. - **DOWING N. E.**, "Fatigue at notches and the local strain and fracture mechanics approaches", *Fracture Mechanics, ASTM, STP 677*, Ed : C. W. Schmith, 247-273, (1979).
17. - **DRUCKER D.C.**, "On the postulate of stability of material in the mechanic of continua", *J. Mech*, 3, 235-249, (1964).
18. - **FENG X. & YU S.**, "Damage and shakedown analysis of structures with strain-hardening", *Int. J. Plasticity*, 11, 237, (1995).
19. - **FROST N.E.**, "Notch effects and the critical alternating stress required to propagate a crack in aluminium alloy subject to fatigue loading", *J. Mech. Eng. Sci.* 2, N°2, 109-119, (1960).
20. - **GALLAGHER R. H. & DHALLA A. K.**, "Direct flexibility finite element elastoplastique analysis", Englewood Cliffs, New Jersey, USA, (1975).
21. - **GDOUTOS E. E.**, "Fracture mechanics , An Introduction", Kluwer Academic Publishers, (1993).
22. - **GERMAIN P.**, "Cours de Mécanique des milieux continus", Masson, Paris (1973).
23. - **GERMAIN P. , NGUYEN Q. S. & SUQUET P. ,** "Continuum thermodynamics", *J. Appl. Mech.*, A.S.M.E. , vol 50, 1010-1020, (1983).

24. - **GOKHFELD D. A.**, "Some problems of shakedown of plates and shells", *Izd. Nauka*, Moskwa, 284-291, (1966).
25. - **GOKHFELD D. A. & CHERNIAVSKY O. F.**, "Limit analysis of structures at thermal cycling", *Sijthoff and Noordhoff*, (1980).
26. - **GRIFFITH A. A.**, "The phenomena of rupture and flow in solids", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A221*, 163-198, (1921).
27. - **GRIFFITH A. A.**, "The theory of rupture", *Proceedings of First International Congress of Applied Mechanics*, Delft, 55-63, (1924).
28. - **GROSS-WEEGE J.**, "Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken", *Ruhr-Universität Bochum, IfM-Report*, 58, (1988).
29. - **GROSS-WEEGE J.**, "A unified formulation of statical shakedown criteria for geometrically nonlinear problems", *Int. J. Plast.*, 6, 433-447, (1990).
30. - **GROSS-WEEGE J. & WEICHERT D.**, "Elastic-plastic shells under variable mechanical and thermal loads", *Int. J. Mech. Sci.*, 34, 863-880, (1992).
31. - **HACHEMI A. & WEICHERT D.**, "An extension of the static shakedown theorem to a certain class of inelastic materials with damage", *Arch. Mech.*, 44, 5, 491-498, (1992).
32. - **HACHEMI A.**, "Contribution à l'analyse d'adaptation des structures inélastiques avec prise en compte de l'endommagement", *Thèse de doctorat, Université de Lille1*, (1994).
33. - **HACHEMI A. & WEICHERT D.**, "Application of shakedown theory to damaging inelastic material under mechanical and thermal loads", *Int. J. Mech. Sci.*, en cours d'impression.
34. - **HADDI A. & WEICHERT D.**, "Influence d'une inclusion sur le facteur d'intensité de contrainte dans un milieu bi-et tridimensionnels", *2<sup>ème</sup> Colloque National en Calcul des Structures*, Giens (Var)-France, (1995).
35. - **HALPHEN B. & NGUYEN QUOC SON**, "Sur les matériaux standards généralisés", *J. Mec.*, 14, 1, 39-63, (1975).

36. - **HASEBE H., NAKAMURA T. & IIDA I.**, "Notch mechanics for plane and thin plate bending problems", *Eng. Frac. Mech.*, 37, 87-99, (1990).
37. - **HILL R.**, "The mathematical theory of plasticity", In: Oxford (Ed.), (1950).
38. - **HUANG Y. & STEIN E.**, "An analytical method for shakedown problems with linear kinematic hardening materials", *Int. J. Solids Struct.*, 31, 18, 2433-2444, (1994).
39. - **HUANG Y. & STEIN E.**, "Shakedown of a cracked body consisting of kinematic hardening material.", *Eng. Frac. Mech.*, 54, 1, 107-112, (1996)
40. - **HWA-SHAN-HO**, "Shakedown in elastic-plastic systems under dynamic loading", *Trans. ASME, Ser. E., J. Appl. Mech.*, 39, 416-421, (1972).
41. - **IRWIN G. R.**, "Fracture dynamics" , In : *Fracture of Metals*, American Society For Metals, Cleveland, U.S.A., 147-166, (1948).
42. - **IRWIN G. R.**, "Relation of stresses near a crack to the crack extension force", *Int. Cong. Appl. Mech.*, pp. 245, Bruxelles, (1956).
43. - **JACK A. R. & PRICE A. T.**, "The initiation of fatigue cracks from notches in mild steel plates", *Int. Journal of Fracture Mechanics*, 6, N°4, 401-409, (1970).
44. - **JU J. W.**, "On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects", In. *J. Solids Struct.*, 25, 803-833, (1989).
45. - **KALISKI S. & WLODARCZYK E.**, "The problem of resonance for longitudinal elastic-plastic waves in finite bar", *Proc. Vibr. Probls.*, 8, 47-59, (1967).
46. - **KAMENJARZH J. & WEICHERT D.**, " On kinematic upper bounds for the safety factor in shakedown theory", *Int. J. Plast.*, 8, 827-837, (1992).
47. - **KOITER W. T.**, "Some remarks on plastic shakedown theorems", *Proc. Eighth Int. Congr. Appl. Mech.*, Istanbul, 220-230, (1952).
48. - **KOITER W. T.**, "General theorems for elastic-plastic solids", In : **SNEDDON I.N. & HILL R.** (Ed), *Progress in solid mechanics*, North Holland, Amsterdam, 165-221, (1960)

49. - **KÖNIG J. A.**, "A shakedown theorem for temperature dependent elastic moduli", Bull. Ac. Pol.Sci. Ser.Sci.Tech., 17, 161-165,(1969).
50. - **KÖNIG J. A.**, "Shakedown theory of plates", Arch. Mech. Stos, 21, 623-637, (1969).
51. - **KÖNIG J. A.**, "On upper bounds to shakedown loads", Z. Angew. Math. Mech., 59, 349-354, (1979).
52. - **KÖNIG J. A.**, "On the incremental collapse criterion accounting for temperature dependance of the yield-point stress", Arch. Mech. Stos., 31, 317-325, (1979).
53. - **KÖNIG J. A.**, "On the stability of the incremental collapse process", Arch. Inz. Lad., 27,1, 219-229, (1980).
54. - **KÖNIG J. A. & MAIER G.**, "Shakedown analysis of elastoplastic structures, a review of recent developement", Nuclear Engineering and Design, 66, 81-95, (1981).
55. - **KÖNIG J. A.**, "On some recent developments in shakedown theory", Adv. Mech., 5, 237-258, (1982).
56. - **KÖNIG J. A.**, "Shakedown criteria in the case of loading and temperature variations", J. Méc. Théo. Appl., N° Spécial, 99-108, (1982).
57. - **KÖNIG J. A.**, "Stability of the incremental collapse", In C.POLIZZOTTO & A.SAWCZUK (Ed), Inelastic struct. under var. loads, Palerme, 329-344, (1984).
58. - **KÖNIG J. A.**, "Shakedown of elastic-plastic structures", Elsevier, Amsterdam, (1987).
59. - **KÖNIG J. A. & SIEMASZKO A.**, "Strainhardening effects in shakedown process", Ing.-Archiv., 58, 58-66, (1988).
60. - **KUHN H. W. & TUCKER A. W.**, "Nonlinear programming", In : Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, NEYMAN J. (Ed.), University of California Press, Berkeley, 481-493, (1951).
61. - **KUHN P. & HARADRATH H. F.**, "An engineering method for estimating notch-size effect in fatigue tests on steel", NACA Technical note 2805, (1952).

62. - **LEMAITRE J. & CHABOCHE J. L.**, "Mécanique des matériaux solides", Dunod, Paris, (1985).
63. - **LEMAITRE J.**, "A continuous damage mechanics model for ductile fracture", *J. Eng. Mat. Tech.*, 107, 83-89, (1985).
64. - **LI R. & CHUDNOVSKY A.**, "Variation of the energy release rate as a crack approaches and passes through an elastic inclusion", *Int. J. Fract.*, 59, R69-R74, (1993).
65. - **MAIER G.**, "Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and non-associated flow-laws", *Meccanica*, 6, 250-260, (1969).
66. - **MAIER G.**, "On quasi-static and dynamic shakedown of workhardening plastic structures with unstable parts", *J. Eng. Mech. Div.*, 98, 1322-1327, (1972).
67. - **MAIER G.**, "A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric effects", In : SAWCZUK A. (Ed.), *Proc. Symp. Foundations of Plasticity*, Warsaw, 417-433, (1972).
68. - **MAIER G. & LLOYD SMITH D.**, "Update to mathematical programming application to engineering plastic analysis", In: STEELE C. R. & SPRINGER G. S. (Ed.), *ASME*, New York, 377-383, (1986).
69. - **MANDEL J.**, "Adaptation d'une structure plastique écrouissable et approximations", *Mech. Res. Comm.*, 3, 483-488, (1976).
70. - **MANDEL J., ZARKA J. & HALPHEN B.**, "Adaptation d'une structure élastoplastique à écrouissage cinématique", *Mech. Res. Comm.*, 4, 309-314, (1977).
71. - **MAUGIN G. A.**, "The thermomechanics of plasticity and fracture", Cambridge University Press, (1992).
72. - **MELAN E.**, "Theorie statisch unbestimmter Tragwerke aus ideal-plastischem Baustoff" *Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften (Wien) Abt. IIA*, 145, 195-218, (1936).
73. - **MELAN E.**, "Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums", *Ing. Arch.*, 8, 116-126, (1938).

74. - **MIANNAY D. P.**, "Mécanique de la rupture", les Ulis : Editions de physique, (1995).
75. - **MOREAU J. J.**, "On unilateral constraints, friction and plasticity", cours C.I.M.E Bressanone, (1973).
76. - **MORELLE P. & NGUYEN DANG HUNG**, "Etude numérique de l'adaptation plastique des plaques et des coques de révolution par les éléments finis d'équilibre", Journal de mécanique théorique et appliquée, vol.2, N°4, 567-599, (1983).
77. - **MORELLE P.**, "Structural shakedown analysis by dual finite-element formulations", Eng. Struct., 6, 70-79, (1979).
78. - **MROZ Z.**, "On the theory of steady plastic cycles in structures", First SMIRT Conf., Berlin, Paper L5/6, (1971).
79. - **NAYROLES B. & WEICHERT D.**, "La notion de sanctuaire d'élasticité et d'adaptation des structures", C. R. Acad. Sci., t. 316, Série II, Paris, 1493-1498, (1993).
80. - **NEAL B. G.**, "Plastic collapse and shake-down theorems for structures of strain-hardening material", J. Aero. Sci., 17, 297-306, (1950).
81. - **NEUBER H.**, Kerbspannungslehre, Springer-verlag, Berlin, (1958).
82. - **NEUBER H.**, "Über die Berücksichtigung der Spannungskonzentration bei Festigkeitsberechnungen", Konstruktion 20 (7), 245-251, (1968).
83. - **NGUYEN DANG HUNG & KÖNIG J. A.**, "A finite element formulation for shakedown problems using a yield criterion of the mean", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. , 8, 179, (1979).
84. - **NGUYEN Q. S. & STOLZ C.**, "Sur le problème en vitesses de propagation de fissure et de déplacement en rupture fragile ou ductile", C. R. Acad. Sci., t.301, Série II, Paris, n° 10, 661-664, (1985).
85. - **NGUYEN Q. S.**, "Sur l'utilisation des critères de l'énergie en rupture et en fatigue", C. R. Acad. Sci., t. 286 , Série A, Paris, 483-485, (1978).

86. - **NGUYEN Q. S. & MICHEL J. C.**, "Solutions asymptotiques avec discontinuité forte en plasticité parfaite et en rupture ductile", C.R. Acad. Sci., t. 304 , Série II, Paris, n° 17, 1029-1033, (1987).
87. - **NGUYEN Q. S.**, "Critère de propagation en rupture ductile", C. R. Acad. Sci., t. 301 , Série II, Paris, n° 9, 567-570, (1985).
88. - **NGUYEN Q. S.**, "Méthodes énergétique en mécanique de la rupture", Journal de Mécanique, vol.19, N° 2, (1980).
89. - **NGUYEN Q. S., PRADEILLES R. M. & STOLZ C.**, "Sur une loi de propagation régularisante en rupture et endommagement fragile", C.R. Acad. Sci, t. 309 , Série II, Paris, 9, 1515-1520, (1989).
90. - **NGUYEN Q. S.**, "A thermodynamic description of the running crack problem", I.U.T.A.M. Symposium, Dourdan, 315-330, North Holl. Publ., (1980).
91. - **OROWAN E.**, "Fracture and strength of solids", In Reports on Progress in Physics XII, 185-232, (1948).
92. - **PIERRE D. A. & LOWE M. J.**, "Mathematical programming via Augmented Lagrangians", London : Addison-Wesley, (1975).
93. - **PLUVINAGE G.**, "Mécanique élasto-plastique de la rupture, Critères d'amorçage", Toulouse, Cépadues-Editions, (1989).
94. - **PLUVINAGE G.**, "120 exercices de mécanique élasto-plastique de la rupture", Toulouse, Cépadues-Editions, (1995).
95. - **POLIZZOTTO C., BORINO G. & FUSCHI P.**, "An extended shakedown theory for elastic-plastic damage material models", Eur. J. Mech. A. Solids, 15, 5, 825-858, (1996).
96. - **PONTER A. P. S.**, "A general shakedown theorem for elastic-plastic bodies with workhardening", Proc. SMIRT-3, paper L5/2, (1975).
97. - **PRAGER W.**, "Shakedown in elastic-plastic media subjected to cycles of load and temperature", Symp. Plasticita Nella Scienza Della Construzioni, 239-244, (1956).

98. - **PRAGER W.**, "An introduction to plasticity", Addison-Wesley, London, (1959).
99. - **PYCKO S. & KÖNIG J. A.**, "Steady plastic cycles on reference configuration in the presence of second-order geometric effects", *Eur. J. Mech. Solids*, 10, 536-574, (1991).
100. - **PYCKO S. & MROZ Z.**, "Alternative approach to shakedown as a solution of a min-max problem" *Acta Mechanica*, 93, 202-222, (1992).
101. - **PYCKO S. & MAIER G.**, "Shakedown theorems for some classes of nonassociated hardening elastic-plastic material models" *Int. J. Plast.*, 11, 4, 367-395, (1995).
102. - **RADAJ D. & ZHANG S.**, "On the relation between notch stress and crack stress intensity in plane shear and mixed mode loading" *Eng. Frac. Mech.*, vol 44, N°5, 691-704, (1993).
103. - **RADHAKRISHNA V. M.**, In C.J. BEEVERS (Ed.), *Fatigue '84, Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Conf. On Fatigue and Fatigue Thresholds*, Birmingham, september 3-7, 1984, Engineering and Materials Advisory Services, Warley, 371, (1984).
104. - **RITCHIE R. O.**, "Near-threshold fatigue-crack propagation in steels" *Int. Metals Reviews*, 5-6, 205-230, (1979).
105. - **ROZENBLUM V. I.**, "On shakedown of uneven heated elastic-plastic bodies" *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Otn. Mekh. Mash.*, 7, 136-138, (1957)
106. - **ROZENBLUM V. I.**, "On shakedown analysis of uneven heated elastic-plastic bodies" *Prikl. Mat. Tkh. Fiz.*, 7, 98-101, (1969).
107. - **SACZUK J. & STUMPF H.**, "On statical shakedown theorems for non-linear problems" Ruhr-Universität Bochum, IfM-Report, 67, (1990).
108. - **SAWZUCK A.**, "On incremental collapse of shell under cyclic loading" In: Niordson F. I. (Ed.), *Theory of thin shells*, Springer Verlag, Berlin, 328-340, (1969).
109. - **SAWZUCK A.**, "Evaluation of upper bounds to shakedown loads for shells" *J. Mech. Phys. Solids*, 17, 291-301, (1969).

110. - **SAWZUCK A.**, "Shakedown analysis of elastic-plastic structures" *Nucl. Eng. Design.*, 28, 121-136, (1974).
111. - **SIDOROFF F.**, "Cours sur les grandes déformations" *Rapport Gréco*, 51, (1982).
112. - **SIEMASZKO A.**, "Inadaptation analysis with hardening and damage" *Eur. J. Mech. Solids*, 12, 237-248, (1993).
113. - **STEIN E., ZHANG G. & KÖNIG J. A.**, "Micromechanical modelling and computation of shakedown with nonlinear kinematic hardening including examples for 2-D problems" In: **AXELRAD D. R. & MUSCHIK W.** (Ed.), *Recent developments of micromechanics*, Springer-Verlag, Berlin, (1990).
114. - **STIEFEL E.**, "Note on Jordan elimination, linear programming and Tchebycheff approximation", *Numer. Math.*, 2, 1-17, (1960).
115. - **SWANSON R. E., THOMPSON A. W. & BERNSTEIN I. M.**, "Effect of notch root radius on stress intensity in mode I and mode II loading" *Metallurgical Transactions*, A 17A, 1633-1637, (1986).
116. - **SYMONDS P. S. & PRAGER W.**, "Elastic-plastic analysis of structures subjected to loads varying arbitrarily between prescribed limits", *J. of Appl. Mech.*, 315-323, (1950).
117. - **SYMONDS P. S.**, "Shakedown in continuous media" *Trans. ASME, Ser. E., J., Appl. Mech.*, 18, 85-89, (1951).
118. - **TAYLOR D.**, In : **C.J. BEEVERS** (Ed.), *Fatigue '84, Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Conf. On Fatigue and Fatigue Thresholds*, Birmingham, september 3-7, 1984, Engineering and Materials Advisory Services, Warley, 479, (1984).
119. - **TRITSCH J. B.**, "Analyse d'adaptation des structures élasto-plastiques avec prise en compte des effets géométriques" *Thèse de doctorat, Université de Lille1*, (1993).
120. - **VASUDEVAN A. K., SAVANANDA K. & LOUAT N.**, "A review of crack closure, fatigue crack threshold and related phenomena" *Materials Science and Engineering*, A188, 1-22, (1994).

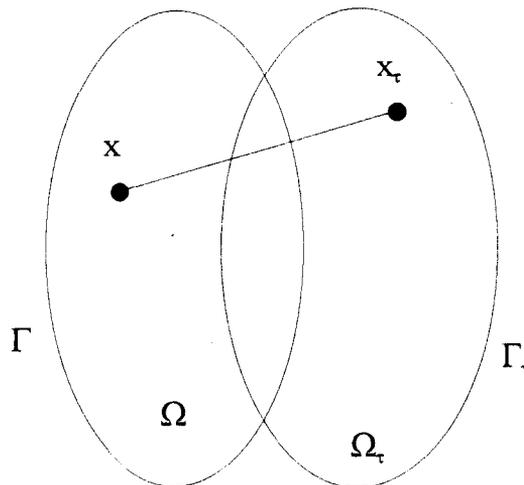
121. - **WASEN J., HAMBERG K. & KARLSSON B.**, "The influence of Grain Size and Fracture Surface Geometry on the Near-threshold Fatigue Crack Growth in Ferritic Steels", *Materials Science and Engineering A*, 102, 217-226, (1988).
122. - **WEICHERT D.**, "On the influence of geometrical nonlinearities on shakedown of elastic-plastic structures" *Int. J. Plast.*, 2, 135-148, (1986).
123. - **WEICHERT D. & GROSS-WEEGE J.**, "The Numerical Assessment of Elastic-Plastic Sheets under variable mechanical and thermal loads using a simplified two-surface yield condition", *Int. J. Mech. Sci.*, vol.30, N° 10, 757-767, (1988).
124. - **WEICHERT D.**, "Failure assessment of structures using refined material laws" In: *Advances in constitutive laws for Engineering Materials*, Proc. ICCLM 1989, Ed.: JINGHONG F. & MURAKAMI S., Pergamon Press, 665-670, (1989).
125. - **WEICHERT D.**, "Advances in the geometrically nonlinear shakedown theory" In: *KLEIBER M. & KÖNIG J. A. (Ed.), Inelastic Solids and Structures*, Pineridge Press, Swansea, U.K., 489-502, (1990).
126. - **WEICHERT D. & RAAD L.**, "Extension of the static Shakedown theorem to a certain class of materials with variable elastic coefficients" *Mech. Res. Comm.*, 19, 511-519, (1992).
127. - **XU-DONG LI & EDWARDS L.**, "Theoretical Modelling of Fatigue Threshold for Aluminium Alloys", *Eng. Frac. Mech.*, 54, 35-48, 1996.
128. - **ZARKA J. & CASIER J.**, "Elastic-plastic response of structure to cyclic loading: Practical rules" In: *NEMAT-NASSER S. (Ed.), Mech. Today*, 6, Pergamon, Oxford, (1981).
129. - **ZARKA J., FRELAT J., INGLEBERT G. & KASMAI-NAVIDI P.**, "A new approach in inelastic analysis of structures" *Martinus Nijhoff Pub.*, Dordrecht/ Boston/ Lancaster, (1990).

## **ANNEXES**

## ANNEXE A

Dans cette annexe, nous présentons le comportement des fonctions et des fonctionnelles quand le domaine  $\Omega$  où elles sont définies évolue au cours du temps.

La variation du domaine  $\Omega$  est décrite par le paramètre temps  $\tau$  et le vecteur vitesse  $v = v(x)$  qui définit la transformation de  $\Omega$  à  $\Omega_\tau$  (fig. A1).



-fig A1-

cette transformation est considérée comme une fonction du point  $x$  et du paramètre  $\tau$  :

$$x_\tau = x_\tau(x, \tau) = x + \tau v(x). \quad (A1)$$

### 1- DERIVEE TOTALE D'UNE FONCTION

La première étape pour déterminer la dérivée totale d'un scalaire et d'une fonction vecteur quand le domaine évolue est d'exprimer ces fonctions dans la transformée du domaine  $\Omega_\tau$ . Dans le cas particulier d'une fonction  $g$ , on écrit :

$$\begin{aligned} g = g(x) &\mapsto g_\tau = g_\tau(x_\tau) \\ x \in \Omega &\quad x_\tau \in \Omega_\tau \end{aligned} \quad (A.2)$$

avec

$$\Omega_\tau = \{x_\tau ; x_\tau = x + \tau v(x), x \in \Omega, \tau \in \mathbb{R}\}. \quad (A.3)$$

La variation totale de  $g$ , représentée par sa dérivée au point  $x$  est :

$$\dot{g} = \dot{g}(x, \Omega, v) = \frac{d}{d\tau} g_\tau [x + \tau v(x)]_{\tau=0}, \quad (A.4)$$

qui s'écrit sous la forme :

$$\dot{g} = g' + \bar{\nabla} g \cdot \bar{v}, \quad (A.5)$$

où  $\bar{\nabla} g$  et  $g'$  représentent respectivement le gradient et la dérivée première de  $g$ .

## 2- DERIVEE TOTALE D'UNE FONCTIONNELLE

En procédant de la même manière que pour une fonction, on exprime l'intégrale de la fonctionnelle dans la transformée du domaine, ensuite on applique la formule de la dérivée matérielle d'une fonctionnelle. Soit :

$$G_\Omega = \int_\Omega g d\Omega, \quad (A.6)$$

$$\dot{G}_\Omega = \int_\Omega (\dot{g} + g \operatorname{div} \bar{v}) d\Omega. \quad (A.7)$$

En remplaçant  $\dot{g}$  par son expression, nous avons :

$$\dot{G}_\Omega = \int_\Omega (g' + \bar{\nabla} g \cdot \bar{v} + g \operatorname{div} \bar{v}) d\Omega, \quad (A.8)$$

or nous savons que :

$$\vec{\nabla} \mathbf{g} \cdot \vec{v} + \mathbf{g} \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div}(\vec{v} \cdot \mathbf{g}), \quad (\text{A.9})$$

et en appliquant la formule de Green-Ostrogradski :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{v} \cdot \mathbf{g}) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{g} \cdot \vec{v} \cdot \vec{n}) d\Gamma, \quad (\text{A.10})$$

$\vec{n}$  étant la normale extérieure à  $\partial\Omega$ , on obtient :

$$\dot{G}_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{g}' d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{g} \cdot \vec{v} \cdot \vec{n}) d\Gamma. \quad (\text{A.11})$$

Dans notre cas, nous avons à calculer  $\dot{\Psi}_e = \int_{\Omega - \Omega_e(t)} \psi d\Omega$ , où  $\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\varepsilon^e(\mathbf{x}, t), \Theta(\mathbf{x}, t), \alpha_{\beta}(\mathbf{x}, t))$  et  $\Omega_e(t)$  est un domaine de frontière  $\Gamma_e(t)$ , en translation de vitesse  $\dot{\mathbf{a}}(t)$ , nous écrivons :

$$\dot{\Psi}_e = \int_{\Omega - \Omega_e(t)} (\psi' + \psi \operatorname{div} \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{a}} \vec{\nabla} \psi) d\Omega. \quad (\text{A.12})$$

Comme :

$$\psi \operatorname{div} \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{a}} \vec{\nabla} \psi = \operatorname{div}(\vec{\mathbf{a}} \psi), \quad (\text{A.13})$$

et

$$\int_{\Omega - \Omega_e(t)} \operatorname{div}(\vec{\mathbf{a}} \psi) d\Omega = - \int_{\Gamma_e} (\psi \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{n}) d\Gamma, \quad (\text{A.14})$$

sachant que  $\vec{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{x}}$  et compte tenu de (A.12) et (A.14), on écrit (en posant  $\vec{\mathbf{x}} \cdot \vec{n} = n_1$ ) :

$$\dot{\Psi}_e = \int_{\Omega - \Omega_e(t)} \psi' d\Omega - \int_{\Gamma_e(t)} \dot{\mathbf{a}} \psi n_1 d\Gamma, \quad (\text{A.15})$$

qui s'écrira aussi :

$$\dot{\Psi}_e = \int_{\Omega - \Omega_e(t)} (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - s \dot{T} - A_{\beta} \dot{\alpha}_{\beta}) d\Omega - \int_{\Gamma_e(t)} \dot{\mathbf{a}} \psi n_1 d\Gamma. \quad (\text{A.16})$$

## ANNEXE B

Dans cette annexe, nous présentons l'algorithme d'optimisation développé par PIERRE & LOWE [92] (1975) et utilisé dans notre étude. Le résumé des étapes fondamentales de l'algorithme est tiré du travail de HACHEMI [32](1994). Cet algorithme est basé sur les techniques suivantes :

- la technique des multiplicateurs de Lagrange, qui permet de transformer le problème d'optimisation avec contraintes en un problème sans contraintes,

- les conditions de Kuhn-Tucker, qui permettent de vérifier si un point proposé est effectivement un point optimal,

- la technique de descente (Line search), qui permet de trouver la plus grande pente.

Le problème d'optimisation consiste à trouver le point optimal  $x^*$ , qui maximise la fonction objective  $f$ . Il peut être énoncé comme suit :

Trouver

$$f(x^*) = \max_x f(x), \quad (\text{B.1})$$

sujette aux contraintes

$$p_i(x) = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m_1 < n, \quad (\text{B.2a})$$

$$q_j(x) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m_2, \quad (\text{B.2b})$$

et tel que

$$c_k < x_k < d_k \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{B.2c})$$

où, le vecteur  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  est un élément de l'espace Euclidien à  $n$  dimensions  $x \in E^n$ . Les  $a_i, b_j, c_k$  et  $d_k$  sont des constantes réelles. La fonction objective  $f$  et les contraintes  $p_i$  et  $q_j$  peuvent être des fonctions linéaires ou non-linéaires.

Le problème peut être transformé en utilisant la fonction de Lagrange, définie par:

$$L(x, \alpha, \beta) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i (a_i - p_i) + \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j (b_j - q_j), \quad (\text{B.3})$$

où,  $\alpha_i$  et  $\beta_j$  sont respectivement, les vecteurs multiplicateurs de Lagrange de dimension  $m_1$  et  $m_2$ .

Le gradient de  $L$  en respectant  $x$ , s'exprime par :

$$\nabla_x L = \nabla_x f - \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i \nabla_x p_i - \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \nabla_x q_j. \quad (\text{B.4})$$

Au point optimal  $x^*$ , le développement en série de Taylor de chaque terme de contrainte d'inégalité  $q_j(x)$ , s'exprime par :

$$q_j(x^* + \Delta x) = q_j^* + \Delta x \nabla_x q_j^* + \dots, \quad j \in S_a, \quad (\text{B.5})$$

$$S_a = \left\{ j \mid q_j^* = b_j \right\}, \quad (\text{B.6a})$$

et

$$q_j(x^* + \Delta x) \leq b_j \quad \forall j. \quad (\text{B.6b})$$

Des équations (B.5) et (B.6),  $\Delta x$  doit satisfaire :

$$\Delta x \nabla_x q_j^* \leq 0, \quad j \in S_a. \quad (\text{B.7})$$

De même, au voisinage de  $x^*$  :

$$p_i^* = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \quad (\text{B.8a})$$

et

$$p_i(x^* + \Delta x) = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m_1. \quad (\text{B.8b})$$

Le développement en série de Taylor de  $p_i(x^* + \Delta x)$ , s'exprime par :

$$p_i(x^* + \Delta x) = p_i^* + \Delta x \nabla_x p_i^* + \dots, \quad (\text{B.9})$$

et en se basant sur les équations (B.8), cette série donne, en tenant compte du terme de premier ordre :

$$\Delta x \nabla_x p_i^* = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1. \quad (\text{B.10})$$

D'une manière équivalente, les deux inégalités :

$$\Delta x \nabla_x p_i^* \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \quad (\text{B.11a})$$

et

$$-\Delta x \nabla_x p_i^* \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \quad (\text{B.11b})$$

sont les conditions pour lesquelles  $\Delta x$  admissible est satisfait.

En se limitant au termes en  $\Delta x$ ,  $f^*$  est optimale si :

$$f(x^* + \Delta x) - f^* \approx \Delta x \nabla_x f^* \leq 0, \quad (\text{B.12})$$

pour tout  $\Delta x$  suffisamment petit et satisfaisant les équations (B.6b) et (B.8b).

Dans ce qui suit, on développe le Lagrangien Augmenté  $L_a(x, \alpha, \beta, w)$  en additionnant les termes de pénalité à  $L$ , avec  $w$  comme ensemble de facteurs de pondération.  $L_a$  est développé afin d'obtenir une relation directe entre un maximum local

sous contraintes de  $f(x)$  et un maximum local sans contraintes de  $L_a(x^*, \alpha^*, \beta^*, w)$  en respectant  $x$ .

Le Lagrangien Augmenté est exprimé par :

$$L_a = L - w_1 P_1 - w_2 P_2 - w_3 P_3, \quad (\text{B.13})$$

où,  $L$  est le Lagrangien de l'équation (B.3) et  $w = [w_1, w_2, w_3]$  est l'ensemble de facteurs de pondération ( $w_i > 0$ ), avec :

$$P_1 = \sum_{i=1}^{m_1} (a_i - p_i)^2, \quad (\text{B.14a})$$

$$P_2 = \sum_{j \in C_a} (b_j - q_j)^2, \quad C_a = \{j \mid \beta_j > 0\}, \quad (\text{B.14b})$$

$$P_3 = \sum_{j \in C_b} (b_j - q_j)^2, \quad C_b = \{j \mid \beta_j = 0 \text{ et } q_j \geq b_j\}. \quad (\text{B.14c})$$

Le gradient du Lagrangien Augmenté ( $L_a$ ), en respectant  $x$ , est exprimé par :

$$\nabla_x L_a = \nabla_x f - \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i^+ \nabla_x p_i - \sum_{j \in C_a} \beta_j^+ \nabla_x q_j + \sum_{j \in C_b} 2w_3 (b_j - q_j) \nabla_x q_j, \quad (\text{B.15})$$

où

$$\alpha_i^+ = \alpha_i - 2w_1 (a_i - p_i), \quad (\text{B.16a})$$

et

$$\beta_j^+ = \beta_j - 2w_2 (b_j - q_j). \quad (\text{B.16b})$$

Si  $L_a(x^*, \alpha^*, \beta^*, w)$  est un maximum local pour le problème sans contraintes, en respectant  $x$ , pour les valeurs finies de  $w_i > 0$ , alors  $f(x^*)$  est un maximum local pour

le problème avec contraintes de  $f(x)$ , tel que  $(x^*, \alpha^*, \beta^*, w)$  satisfait les conditions de Kuhn-Tucker (KUHN-TUCKER [60] (1951)) :

$$p_i(x^*) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \quad (\text{B.17a})$$

$$q_j(x^*) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m_2, \quad (\text{B.17b})$$

$$\beta_j^*(b_j - q_j(x^*)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_2, \quad (\text{B.17c})$$

$$\beta_j^* \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_2, \quad (\text{B.17d})$$

et

$$\nabla_x L_a(x^*, \alpha^*, \beta^*, w) = 0. \quad (\text{B.17e})$$

La recherche du point maximal est basée sur la technique de "line search", exprimée par :

$$x^{k+1} = x^k + \rho r^k, \quad (\text{B.18})$$

avec

$$r^k = H^k g^k, \quad (\text{B.19})$$

où,  $x^{k+1}$  est la nouvelle valeur de  $x$  obtenue pour une variation de  $\rho$  selon la direction  $H^k g^k$ .  $H^k$  est une matrice de dimension  $n \times n$ ,  $g^k$  est le gradient de  $L_a$  évalué en  $x^k$  et  $\rho$  est un scalaire positif.

L'idée de base de la technique de descente "line search" est de choisir une direction de descente  $r^k$  en  $x^k$  à chaque itération, de telle façon qu'à l'itération suivante, on choisit un point  $x^{k+1}$  diminuant  $f(x)$ , c'est-à-dire qu'il faut :

- choisir  $r^k$  pour lequel,  $\nabla_x f(x^k) r^k < 0$ ,  $r^k > 0$ ,

- choisir  $x^{k+1} = x^k + \rho r^k$ ,

en sorte que  $f(x^{k+1}) < f(x^k)$ .

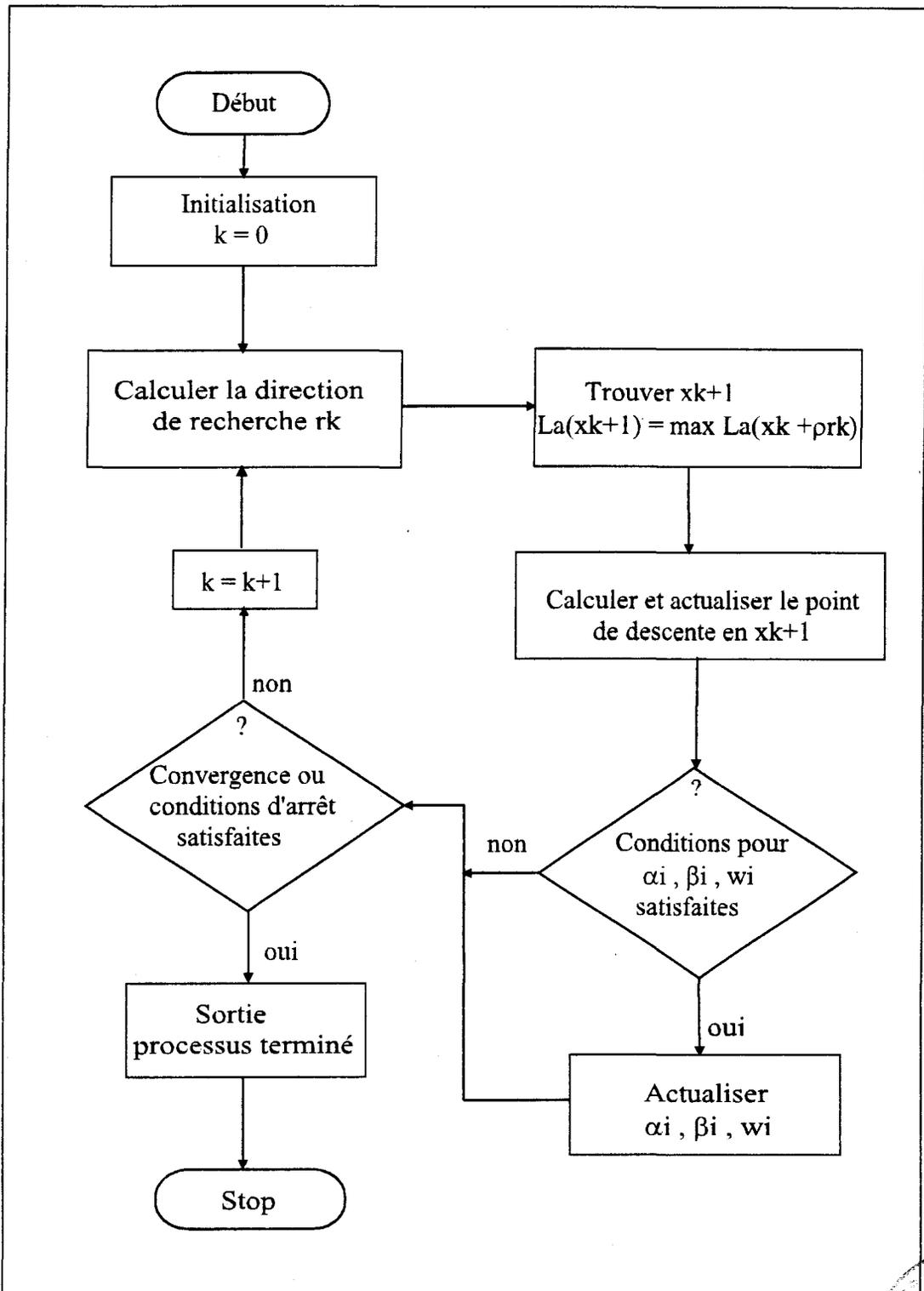


Fig. B.1 - Algorithme de recherche du point optimal

