

143 345

50376  
1997  
433

# THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le titre de

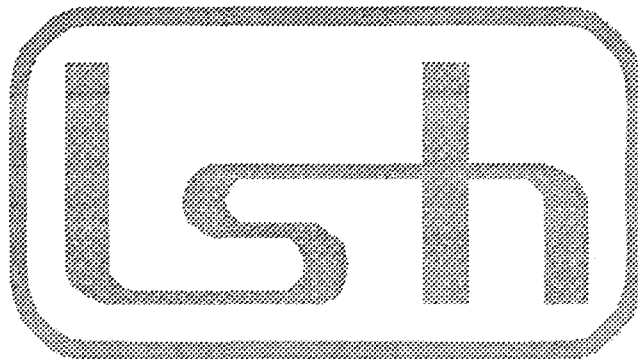
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

Discipline : Lasers, Molécules, Rayonnement Atmosphérique

par

Arnaud BOULNOIS

<p>ETUDES EN THEORIE DES LASERS : APPLICATION AU LASER A FIBRE OPTIQUE ET AU LASER MULTIMODE LONGITUDINAL</p>
---



Soutenu le 10 Décembre 1997 devant la commission d'examen

Président	M. P. GLORIEUX	USTL
Rapporteurs	M. T. ERNEUX	Université Libre de Bruxelles
	M. F. STOECKEL	Université Grenoble 1
Directrice du travail	Mme. H. ZEGHLACHE	USTL
Examineurs	Mme. M. LEBERRE	Université de Paris XI
	M. M. DOUAY	USTL

*Ce travail a été réalisé dans l'UFR de physique de l'Université des Sciences et Technologies de Lille, dans le Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne associé au C.N.R.S, dirigé par le Professeur P. Glorieux. Je tiens à le remercier pour m'avoir accepté dans ce laboratoire et pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.*

*Je suis très reconnaissant à ma directrice de thèse, Madame Hassina Zeghlache, Professeur à l'USTL qui a suivi mon travail au cours de ces 6 années.*

*Je tiens à remercier particulièrement Monsieur T. Erneux, Professeur à l'Université Libre de Bruxelles, et Monsieur F. Stoeckel, Professeur à l'université Joseph Fourier de Grenoble, qui ont accepté de rapporter sur ce travail. Je remercie également Madame Leberre, Directeur de Recherches à l'Université Paris Sud ainsi que Monsieur Marc Douay, professeur à l'Université de Lille pour avoir bien voulu ce joindre au jury.*

*Ces travaux n'auraient jamais eu lieu si je n'avais eu des Professeurs qui m'ont donné le goût de la physique. Je remercie donc les Professeurs B. Macke et B. Escaig pour leur enseignement de grande qualité. Je dois également mentionner ma première approche de la recherche qui s'est déroulée au sein de la cellule "Detectors Development" du CERN dirigée par les Professeurs F. Sauli et G. Charpak. J'y ai découvert la physique sous un jour hors du commun.*

# **PREMIERE PARTIE :**

## **ETUDE DU LASER A FIBRE DOPEE AU NEODYME**

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION</b>	<b>6</b>
<hr/>	
<b>1. PREMIER CHAPITRE</b>	<b>10</b>
<hr/>	
<b>1.A. EQUATIONS DE CHAMP.</b>	<b>14</b>
1.A.1. PRESENTATION GENERALE.	14
1.A.1.a. Décomposition longitudinale et transverse du champ.	15
1.A.1.b. Approximation de champ moyen.	17
1.A.1.c. Les équations de Maxwell.	18
1.A.2. POLARISATION ATOMIQUE ET PROPAGATION.	19
1.A.3. DEVELOPPEMENTS ET APPROXIMATIONS.	21
<b>1.B. DESCRIPTION DE L'INTERACTION RAYONNEMENT MATIERE.</b>	<b>25</b>
1.B.1. L'OPERATEUR DENSITE.	25
1.B.2. EQUATIONS DE BLOCH POUR LE NEODYME.	26
1.B.3. ETUDE DE LA POLARISATION ATOMIQUE.	29
1.B.3.a. Le moment dipolaire induit.	29
1.B.3.b. Equation de la polarisation atomique.	33
1.B.4. ETUDE DES POPULATIONS.	34
1.B.5. ELIMINATION ADIABATIQUE DE LA POLARISATION ATOMIQUE.	36
1.B.6. LES TERMES DE POMPAGE.	37
1.B.6.a. Définition.	37
1.B.6.b. Le champ de pompe.	38
1.B.6.c. Etude des variables matérielles de la transition de pompage.	39
<b>1.C. CAS PARTICULIER DU LASER A FIBRE DOPEE.</b>	<b>41</b>
1.C.1. CARACTERISTIQUE PROPRE DES SITES ACTIFS.	41
1.C.1.a. Le dopage dans la silice et ses conséquences sur l'effet laser.	41

1.C.1.b. Représentation mathématique.	43
1.C.2. NOTION DE CLASSES DE DIPOLES.	44
1.C.2.a. Premier cas limite : une seule classe de moments dipolaires.	45
1.C.2.b. Second cas limite : répartition isotrope des moments dipolaires.	45
1.C.3. CHANGEMENTS DE VARIABLES.	46
1.C.4. SERIES DE FOURIER.	48
1.C.5. FORMULATION SIMPLIFIEE DU MODELE.	54
<b>2. DEUXIEME CHAPITRE</b>	<b>56</b>
<hr/>	
<b>2.A. ETUDE DES ETATS STATIONNAIRES MONOMODES.</b>	<b>57</b>
2.A.1. LA SOLUTION TRIVIALE.	57
2.A.1.a. Calcul des valeurs stationnaires.	57
2.A.1.b. Analyse de stabilité linéaire : définition de la méthode.	58
2.A.1.c. Application à la solution triviale.	59
2.A.2. LE MODE FORT.	60
2.A.2.a. Intensité stationnaire du mode fort.	61
2.A.2.b. Etude de la stabilité du mode fort.	62
2.A.3. LE MODE FAIBLE.	64
2.A.3.a. Intensité stationnaire du mode faible.	65
2.A.3.b. Etude de la stabilité du mode faible.	66
2.A.4. REPRESENTATION DES DOMAINES D'EXISTENCE DE LA SOLUTION TRIVIALE ET DES SOLUTIONS MONOMODES.	68
<b>2.B. ETUDE DE LA SOLUTION STATIONNAIRE BIMODE.</b>	<b>74</b>
2.B.1. ETUDE ANALYTIQUE EXACTE.	74
2.B.2. DIAGRAMME DE BIFURCATION DES ETATS STATIONNAIRES.	76
2.B.3. ETUDE ANALYTIQUE APPROCHEE.	78
2.B.3.a. Ordre 0	79
2.B.3.b. Ordre 1	80
2.B.3.c. Ordre 2	82
2.B.4. RESTABILISATION VERS LES SOLUTIONS MONOMODES.	83
2.B.5. INFLUENCE DE LA POLARISATION DU CHAMP DE POMPE.	87
<b>2.C. SOLUTIONS INSTABLES.</b>	<b>91</b>
2.C.1. CHOIX DE DOMAINE DE PARAMETRES.	91
2.C.2. SIMULATIONS NUMERIQUES.	92
2.C.2.a. Choix de la polarisation du champ de pompe.	92

2.C.2.b. Comportements observés.	93
<b>2.D. CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE.</b>	<b>99</b>
<b><u>BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIER PARTIE</u></b>	<b><u>168</u></b>

# **INTRODUCTION**

Outil fondamental de la physique moderne, le laser est le fruit des travaux d'Albert Einstein sur l'émission stimulée et d'Alfred Kastler sur le pompage optique. Sa mise en oeuvre expérimentale durant les années 60 à donner la capacité de générer une lumière cohérente de très grande intensité et de très grande pureté spectrale. Les amplitudes obtenues, très supérieures à celles délivrées par les lampes classiques, ont révolutionné les approches théoriques et expérimentales des processus d'absorption et d'émission de la lumière par la matière. En termes mathématiques, ces nouveaux ordres de grandeurs se sont traduits par l'obligation de prendre en compte des composantes d'ordres plus élevés dans les développements des termes d'interaction dont la contribution est alors devenue au moins égale à celle des termes linéaires. C'est ainsi qu'est née une nouvelle branche de la physique et que s'est développé l'optique non linéaire. Les nombreuses recherches menées ont permis de mettre en évidence un grand nombre de phénomènes liés aux termes quadratiques et cubiques des champs. Parmi les plus connus, on peut citer l'effet Kerr, la génération de seconde harmonique, la bistabilité optique ainsi que les phénomènes transitoires cohérents.

Très rapidement de nombreuses applications ont été envisagées. En premier lieu, le laser s'est révélé être une source très efficace de rayonnement pour la spectroscopie. Puis, avec le développement de l'optique intégrée et la réalisation de diode laser, des applications plus techniques ont été mise en oeuvre. Désormais, le laser est à la base du stockage de l'information numérique et, associé aux fibres optique, contribue très largement au transport à très haut débit de l'image, du texte et de la vidéo. Mais ces utilisations nécessitent stabilité en amplitude et en fréquence ce qui implique une connaissance approfondie des caractéristiques physiques du laser et de son comportement. Aujourd'hui, ces conditions d'utilisation représentent les deux domaines principaux d'investigation de la physique théorique des lasers. Le premier s'intéresse à la physique des processus. Il s'attache à la description de l'interaction rayonnement matière et conduit en général à l'écriture des modèles. Le



second a pour objet de décrire le comportement des lasers dans l'espace des paramètres et utilise pour cela les modèles auxquels il applique les techniques d'analyse de stabilité linéaire ou non linéaire ainsi que les techniques d'intégration numérique.

Si ces études sont bien connues pour les lasers classiques (gaz, solides cristallins ou colorants), elles le sont moins pour le laser à fibre. En effet, situé au carrefour de la physique habituelle des lasers et de celle très développée des fibres optiques, il possède des caractéristiques liées à ces deux domaines mais également la somme de leur complexité.

Voilà pourquoi nous consacrons l'intégralité de la première partie de cette thèse à la modélisation du laser à fibre. La description que nous utilisons est celle du formalisme semi-classique qui consiste en un redéveloppement des équations de Bloch (description quantique de la matière) et des équations de Maxwell (description classique des champs). De plus, afin de relier nos travaux à ceux plus expérimentaux développés au sein du laboratoire, nous fixons une configuration du système dans laquelle le laser est bimode et émet deux champs polarisés suivants les 2 axes propres de propagation de la fibre.

Une fois le modèle obtenu, nous développons au maximum les études analytiques et numériques afin de déterminer les domaines de stabilité dans l'espace des paramètres et de retrouver les comportements expérimentaux. Mais ces investigations sont limitées par la complexité du système et du modèle. Voilà pourquoi, nous consacrons la seconde partie de la thèse à l'étude d'un modèle plus simple. Le but est alors de mettre en oeuvre de méthodes d'analyse de la dynamique plus « sophistiquées ». C'est ainsi que nous reprenons l'étude d'un laser multimode désaccordé en fréquence et décrit par le très connu modèle de Bloch-Maxwell. La première étape des calculs consiste à déterminer la position du point de déstabilisation de la solution stationnaire monode stable vers la solution multimode instable. Puis, à l'aide de la théorie des formes normales, nous reconstruisons des solutions oscillantes à partir de cette bifurcation de Hopf. Enfin, par l'étude des conditions d'existence, nous caractérisons

totallement cette bifurcation et déterminons les points de l'espace des paramètres où elle est supercritique ou bien souscritique.

# **1. PREMIER CHAPITRE**

**MISE EN EQUATION D'UN LASER A  
FIBRE DOPEE AU NEODYME**

Sans être systématique, le développement des études théoriques en optique non linéaire comporte deux étapes obligées. Quasiment indépendantes, elles font appel à des notions de physique et de mathématique très différentes, mais conduisent toutes deux au même objectif : la représentation et l'explication des comportements expérimentaux.

En règle générale, la première partie des calculs est consacrée à la description mathématique du système optique. C'est la phase de modélisation. Elle consiste en un développement des équations d'évolution des variables de champ et de matière sur la base de relations connues (équations de Bloch et de Maxwell). L'accent est porté sur la représentation des termes d'interaction rayonnement-matière qui sont le plus souvent de type dipolaire électrique (les contributions des moments dipolaires magnétiques et quadripolaires électriques étant presque toujours négligeables). L'objectif de ces développements est de fournir un modèle physiquement exploitable.

La seconde partie du travail est quant à elle dédiée à l'étude du comportement du système. Elle exploite le modèle afin de déterminer les intensités stationnaires puis les domaines d'existence des solutions dans l'espace des paramètres. Elle utilise pour cela les techniques d'analyse de stabilité linéaire ou non linéaire ainsi que des méthodes numériques. La validation de la démarche est effectuée au cours des développements par la confrontation des résultats théoriques et expérimentaux.

C'est en suivant ce schéma que nous avons développé notre étude du laser à fibre dopé au Néodyme. Le point de départ est l'étude expérimentale réalisée au sein du laboratoire. Elle a révélé un comportement complexe lié à la présence inhabituelle de deux états de polarisation dégénérés dans la cavité optique. En l'absence d'éléments de sélection, ces deux champs polarisés orthogonalement coexistent et interagissent par l'intermédiaire du matériau optique. Une étude résolue en polarisation a ainsi mis en évidence une grande variété de phénomènes

caractérisant ce laser dans ses états stables et instables. Les plus spectaculaires sont assurément l'existence de seuils d'oscillations différents pour chaque direction de polarisation ainsi que le phénomène d'antiphase observé dans des régimes périodiques et chaotiques [Bielawski, 1993].

Hors des modèles phénoménologiques basées sur des hypothèses d'inversions de population multiples injustifiées, l'absence d'étude théorique susceptible de décrire 'proprement' cette interaction entre les deux champs nous a conduit à reprendre la modélisation à son origine. Nous consacrerons donc l'intégralité du premier chapitre de cette thèse à la mise en équation du laser. Les premiers paragraphes auront pour objectif de définir le formalisme de la description qui consistera en une décomposition de la grandeur vectorielle "champ électromagnétique" en une somme de deux modes associés chacun à une polarisation transverse, une amplitude et une fréquence propre. L'introduction de cette grandeur dans les équations de Maxwell nous amènera ensuite à procéder à la même opération pour la seconde grandeur vectorielle du laser, la polarisation atomique. Nous l'aborderons via une description du moment dipolaire à l'échelle moléculaire que nous généraliserons ensuite à l'ensemble du milieu actif. Puis, nous introduirons cette nouvelle forme du vecteur  $\mathbf{P}(z,t)$  dans les équations de Bloch développées pour le système à quatre niveaux d'énergie qui représente habituellement l'ion de Néodyme. Nous expliciterons une série d'approximations permettant une exploitation mathématique (et analytique) du modèle. Certaines seront liées à l'évaluation de certaines grandeurs atomiques et de cavité (permettant l'élimination adiabatique de la polarisation, écriture d'un modèle de laser de classe B), d'autres à la propagation longitudinale et la distribution transverse des sites actifs entraînant une double décomposition en séries de Fourier longitudinale et transverse des variables de population. Nous consacrerons le second chapitre à la description des trois principaux modes de fonctionnement du laser : l'oscillation monomode stable, bimode stable et bimode instable. L'étude des situations monomodes mettra en

évidence la possibilité pour le système de fonctionner suivant une unique polarisation. L'analyse de stabilité et l'expression des conditions d'existence de ces solutions permettra d'expliquer théoriquement la présence des seuils d'oscillations distincts pour les deux polarisations du laser. Nous analyserons également l'influence de la polarisation du champ de pompe sur le seuil d'existence et l'amplitude des solutions. L'étude de la solution bimode aura pour objet essentiel la mise en évidence des liens entre les deux champs. Nous caractériserons l'influence des différents paramètres du laser sur la répartition des intensités suivant les deux directions de polarisation. Enfin, l'analyse des situations instables, périodiques ou non, permettra une validation du modèle et de ses non-linéarités par la reproduction des comportements expérimentaux.

## 1.A. EQUATIONS DE CHAMP.

### *1.A.1.Présentation générale.*

Dans sa description ondulatoire, la lumière émise par une lampe ou par un laser est représentée par l'intermédiaire de plusieurs grandeurs physiques telles que l'amplitude et la phase du vecteur champ électrique et du champ magnétique. En physique classique, les équations de Maxwell modélisent l'évolution spatiale et temporelle de ces variables. Ces équations permettent de faire le lien entre toutes les grandeurs constituant le rayonnement électromagnétique et d'établir une équation de propagation capable de rendre compte de tous les phénomènes susceptibles d'amplifier, d'atténuer ou de disperser les champs. Dans un milieu comme celui de la fibre optique, ce développement reste un travail à part entière qui fait encore aujourd'hui l'objet de nombreuses publications. En effet, la fibre optique n'est pas le guide d'onde parfait que l'on décrit souvent. Bien qu'aucun autre système ne soit capable d'égaliser sa capacité exceptionnelle à transporter la lumière, des études fines ont montré que cette qualité pouvait être altérée par de nombreuses perturbations. On peut notamment citer la diffusion du champ sur des défauts dus à la présence de constituants chimiques polluants ainsi que la forme du coeur, lieu de propagation du champ dont il est difficile d'assurer la régularité tout au long de la fibre [Agrawal, 1989], [Pocholle, 1985]. Quant à la biréfringence, c'est surtout sa faible composante induite par contrainte qui est gênante car la composante permanente permet, dans certains cas, de maintenir constante la polarisation du champ [Kaminow, 1981]. De plus, dans le cas d'une fibre dopée viennent s'ajouter des mécanismes d'absorption et de ré-émission qui n'existent pas dans une fibre blanche constituée uniquement de molécules de silice transparentes aux longueurs d'onde du pompage et de l'émission laser. Enfin, l'insertion du dopant entre les molécules de silice modifie beaucoup

leur répartition et induit une inhomogénéité également à l'origine de nombreuses perturbations de la dynamique des champs [Elejalde, 1992]. Tous les phénomènes que nous venons de décrire ne peuvent que modifier l'amplitude ou la phase d'un champ initialement présent dans la fibre. Ils sont donc de type passif. La nature totalement différente de ces processus ainsi que leurs intensités impliquent que, pour la description du champ laser et de sa dynamique, les effets passifs peuvent être négligés au profit d'une étude approfondie de l'interaction rayonnement.matière [Agrawal, 1989], car à l'inverse, l'effet laser est un processus actif puisqu'il génère un nouveau champ dans la cavité. C'est pourquoi nous faisons le choix de restreindre au minimum la modélisation des effets de propagation des champs dans la fibre optique. Pour cela, notre système est développé suivant un modèle d'onde plane se propageant dans le vide au sein d'un résonateur optique en anneau. Dans les sous-sections suivantes, nous allons préciser les notations et les approximations permettant de dériver les équations pour les champs.

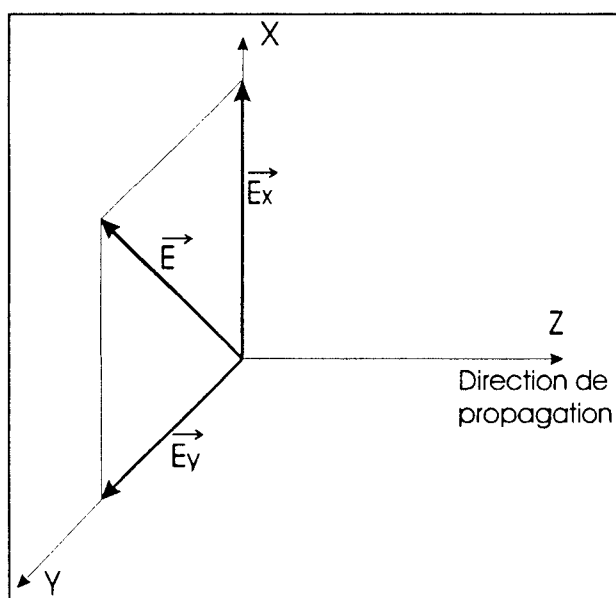
### *1.A.1.a. Décomposition longitudinale et transverse du champ.*

Une approximation importante que nous avons apportée à cette description des champs concerne le caractère fortement multimode longitudinal du laser à fibre [Bielawski, 1993]. En effet, suivant la longueur de la cavité, on peut observer plusieurs dizaines voire plusieurs centaines de modes suivant chaque direction de polarisation du champ. Expérimentalement, les modes de même polarisation semblent tous avoir le même comportement si bien qu'ils évoluent en 'paquet' [Bielawski, 1993]. Analytiquement, cette multitude de modes est difficile à appréhender. Dans la première partie de cette thèse, nous représenterons chaque paquet par un seul mode ce qui correspond en réalité au cas particulier d'une longueur de cavité réduite au minimum : le traitement particulier du laser multimode fera l'objet de la seconde partie de cette



thèse. Selon la description habituelle de la propagation du mode fondamental dans les fibres optiques et dans la dénomination standard, ce mode est de type LP01, LP rappelant sa polarisation rectiligne [Pocholle, 1985] ; sa dégénérescence autorise la coexistence de deux modes de fréquences très proches, polarisés perpendiculairement entre eux et perpendiculairement à la direction de propagation.

Mathématiquement, nous représentons le champ électrique total par un vecteur dont la norme dépend de l'espace et du temps, et qui se décompose en une somme vectorielle de deux composantes  $E_x$  et  $E_y$ . Dans un repère macroscopique lié à la fibre [fig. 1.A.1.1], les axes X et Y de ce repère sont transverses à la direction de propagation (Z) laquelle représente également l'axe de la fibre. Puisque nous avons supposé le milieu non biréfringent, l'orientation des axes propres dans le plan transverse est totalement libre et peut être fixée arbitrairement. Nous supposons donc par la suite que les directions X et Y constituent ces axes propres.



**Figure 1.A.1.1** : Décomposition vectorielle du champ électrique

dans un repère lié aux axes propres de la fibre

Pour décrire le champ électrique total, nous utiliserons les notations suivantes :

$$\mathbf{E}_{(z,t)} = \mathbf{E}_x(z,t) + \mathbf{E}_y(z,t) \quad (1.A.1.1)$$

La composante longitudinale du champ a été négligée car pour le mode LP01, le rapport entre les composantes longitudinale et transverse du champ électrique est égal à la différence entre les indices de gaine et de cœur, soit en général :

$$\boxed{\frac{E_{//}}{E_{\perp}} = 10^{-5}} \quad (1.A.1.2)$$

### *1.A.1.b. Approximation de champ moyen.*

Pour des puissances de fonctionnement très faibles (de l'ordre de quelques mW), la présence du milieu actif ne modifie que très peu la distribution longitudinale de l'amplitude du champ électrique [Sargent, 1974]. Les champs peuvent être décrits via une approximation dite de champ moyen : ceci permet de ne considérer que la dépendance spatiale liée aux modes de la cavité vide. On peut alors extraire le terme de propagation et exprimer les composantes de la relation (1.A.1.1) en un produit de termes indépendants, fonction l'un de l'espace et l'autre du temps selon :

$$\mathbf{E}_{(z,t)} = \frac{1}{2} [g_x(z) \beta_x(t) + c.c.] \mathbf{x} + \frac{1}{2} [g_y(z) \beta_y(t) + c.c.] \mathbf{y} \quad (1.A.1.3)$$

où

$$\beta_x(t) = \mathcal{E}_x(t) \exp[-i \nu_x t] \quad \text{et} \quad \beta_y(t) = \mathcal{E}_y(t) \exp[-i \nu_y t] \quad (1.A.1.4)$$

$$g_x(z) = \exp[-i k_x z] \quad \text{et} \quad g_y(z) = \exp[-i k_y z] \quad (1.A.1.5)$$

Les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont des vecteurs unitaires, le couple  $\{ \nu_x, \nu_y \}$  les fréquences sélectionnées par la cavité (modes longitudinaux) et  $\{ k_x, k_y \}$  les nombres d'onde associés à ces modes. Ces écritures sont valables dans le cas d'un modèle d'ondes planes progressives. Elles traduisent donc le choix d'un résonateur optique en anneau ce qui est justifié par la faible

amplitude des ondes contre-propagatives générées par le dioptre air-verre utilisé expérimentalement comme miroir à la sortie de la fibre.

### *1.A.1.c. Les équations de Maxwell.*

Les équations de propagation suivant chaque direction de polarisation sont développées à partir des équations de Maxwell suivant un schéma que nous préciserons brièvement en section 1.A.3. Ce calcul s'effectuera par approximations successives à partir de l'équation de Maxwell-Faraday et de la loi d'Ampère généralisée.

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_{(z,t)} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_{(z,t)} \quad (1.A.1.6)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H}_{(z,t)} = \mathbf{j}_{(z,t)} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}_{(z,t)} \quad (1.A.1.7)$$

Les relations de proportionnalité suivantes relient les différentes variables entre elles :

$$\mathbf{B}_{(z,t)} = \mu_0 \mathbf{H}_{(z,t)} \quad (1.A.1.8)$$

$$\mathbf{D}_{(z,t)} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_{(z,t)} + \mathbf{P}_{(z,t)} \quad (1.A.1.9)$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad (1.A.1.10)$$

$\mathbf{B}_{(z,t)}$  représente le champ magnétique,  $\mathbf{H}_{(z,t)}$  l'excitation magnétique,  $\mathbf{D}_{(z,t)}$  l'excitation électrique et  $\mathbf{j}_{(z,t)}$  la densité de courant dans le milieu (nulle dans notre cas). Les constantes  $\mu_0$  et  $\varepsilon_0$  sont la perméabilité et la permittivité du milieu assimilé au vide. Nous supposons en effet que les perturbations apportées par les variations de ces constantes, dues à la traversée d'un milieu transparent, n'influent pas sur les mécanismes de l'effet laser.  $\mathbf{P}_{(z,t)}$  représente la polarisation atomique macroscopique. Elle joue un rôle majeur dans l'effet laser et son étude fera l'objet du paragraphe suivant. C'est une grandeur vectorielle que nous pouvons

décomposer suivant le même principe que le champ électrique et extraire les grandeurs physiques liées à la cavité :

$$\mathbf{P}_{(z,t)} = \frac{1}{2} \left[ g_x(z) \bar{\beta}_x(t) + c.c \right] \mathbf{x} + \frac{1}{2} \left[ g_y(z) \bar{\beta}_y(t) + c.c \right] \mathbf{y} \quad (1.A.1.11)$$

où

$$\bar{\beta}_x(t) = \mathcal{P}_x(t) \exp[-i \nu_x t] \quad \text{et} \quad \bar{\beta}_y(t) = \mathcal{P}_y(t) \exp[-i \nu_y t] \quad (1.A.1.12)$$

### ***1.A.2.Polarisation atomique et propagation.***

Le traitement complet de la polarisation atomique dans un laser à fibre dopée est compliqué. L'existence de deux sources indépendantes capables d'apporter chacune leur contribution en est une des raisons principales. La première de ces sources est le dopant qui, via l'effet laser, fournit la composante principale de la polarisation atomique (que nous détaillerons dans la section 1.B.3). La seconde est la fibre elle-même dont les constituants chimiques réagissent à la présence de champs électriques intenses. Cette dernière composante, notée  $\mathbf{P}_f$ , se décompose en une série de termes développés en puissance entière du vecteur champ [Agrawal, 1989]. Le premier de ces termes est la composante de polarisation linéaire traduisant les effets d'atténuation et de dispersion de la fibre sur le champ. Il s'écrit :

$$\mathbf{P}_f^{(1)}(z,t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(1)}(t-t') \mathbf{E}(z,t') dt' \quad (1.A.2.1)$$

Dans notre étude, ces effets ne sont pas dominants et n'apportent pas de comportements particuliers car la fibre n'est pas biréfringente [Agrawal, 1989].

Le terme d'ordre deux est responsable de la génération de seconde harmonique et plus généralement du mélange à deux ondes. Sa forme est la suivante :

$$\mathbf{P}_f^{(2)}(z,t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(2)}(t-t',t-t'') \mathbf{E}(z,t') \mathbf{E}(z,t'') dt' dt'' \quad (1.A.2.2)$$

Il est nul dans les fibres non pas à cause de la symétrie du guide d'onde mais plutôt des propriétés centro-symétriques de la molécule SiO<sub>2</sub>. Les effets non-linéaires d'ordre deux sont quand même observables mais ils ne sont alors que des cas particuliers des effets d'ordre trois ce qui réduit beaucoup l'efficacité des processus. Par exemple, le doublement de fréquence dans les fibres s'effectue par un mélange de trois ondes de même fréquence. L'intensité délivrée est très faible et nécessite l'éclairage de la fibre par un champ laser très intense pendant un temps suffisamment long pour créer un réseau d'indice par orientation des défauts [Stolen, 1987].

La troisième composante de la polarisation est à l'origine de tous les comportements non-linéaires liés au phénomène de propagation tels que l'automodulation de phase ou la modulation croisée de la phase. Sa définition est la suivante :

$$\mathbf{P}_f^{(3)}(z,t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{(3)}(t-t',t-t'',t-t''') \mathbf{E}(z,t') \mathbf{E}(z,t'') \mathbf{E}(z,t''') dt' dt'' dt''' \quad (1.A.2.3)$$

Le paramètre  $\chi^{(3)}$  est très petit. Son influence n'apparaît que lorsque l'intensité du champ dans la cavité est très importante, c'est à dire pour des fonctionnements du laser en régime pulsé ou à des taux de pompage très élevés [Caglioti, 1987]. Ces conditions expérimentales particulières ne correspondent pas à celles mises en oeuvre dans les situations que nous souhaitons modéliser. Nous devons donc nous limiter au domaine des faibles pompages qui induisent nécessairement des intensités de champ intra-cavité faibles. Cette limitation est également nécessaire pour satisfaire l'approximation de champ moyen que nous avons présentée au chapitre 1.A.1.b. La polarisation non-linéaire d'origine propagative est donc négligeable ce qui nous fait perdre une source originale de couplage

entre les directions orthogonales de polarisation du champ [Agrawal, 1989].

Donner des valeurs précises de tous les paramètres constituant la polarisation atomique reste une gageure. En effet, chaque fibre possède des caractéristiques propres susceptibles de varier plus ou moins suivant sa constitution chimique. Le nombre de constituants présents dans la fibre est un paramètre important tout comme la méthode de fabrication. Enfin, la connaissance très approximative des proportions et de la disposition réelle des dopants et des co-dopants au sein de la fibre est susceptible d'influencer également l'efficacité des divers processus. Voilà pourquoi on assiste encore aujourd'hui à des polémiques concernant la prise en compte de certains effets d'ordre élevé [Hall, 1989].

### **1.A.3. Développements et approximations.**

La combinaison des équations (1.A.1.6) et (1.A.1.7) et des relations (1.A.1.4) et (1.A.1.5) permet d'établir une équation de propagation pour le champ électromagnétique au sein de la cavité. Ces développements nécessitent l'utilisation de deux approximations qui s'appliquent parfaitement au laser à fibre [Sargent, 1974]. La première dérive des propriétés des ondes planes et de la relation linéaire entre la polarisation atomique et le champ : les variations suivant X et Y de  $\mathbf{P}_{(z,t)}$  sont nulles ainsi que le terme  $\nabla \cdot \mathbf{P}_{(z,t)}$ . La seconde approximation est également liée au modèle d'onde plane qui permet de ne conserver que la double dérivation du champ par rapport à la variable z dans le développement du terme  $\nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E}_{(z,t)}$ . Compte tenu de ces approximations, l'équation de propagation s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{E}_{(z,t)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}_{(z,t)} - \mu_0 \bar{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_{(z,t)} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_{(z,t)} \quad (1.A.3.1)$$

La forme vectorielle de l'équation (1.A.3.1) autorise une projection suivant les deux directions de polarisation du champ électrique. Le paramètre  $\bar{\sigma}$

est un tenseur d'ordre deux qui n'apparaît pas explicitement dans les équations de Maxwell mais que l'on introduit phénoménologiquement. Nous le supposons diagonal car l'existence de termes croisés couple de façon linéaire les équations pour les deux polarisations du champ et n'apporte aucune contribution originale à la dynamique. On peut alors introduire les expressions développées des variables de champ et de polarisation atomique, les paramètres  $Q_x$  et  $Q_y$   $\left( Q_x = \frac{\epsilon_0 v_x}{\sigma_x}$  et  $Q_y = \frac{\epsilon_0 v_y}{\sigma_y} \right)$ , coefficients de qualité de la cavité suivant les directions de polarisation et simplifier des équations de propagation moyennant une série [Sargent, 1974]. Nous ne présenterons pas la totalité des calculs engendrés par le développement des expressions du champ et de la polarisation atomique mais nous rappelons chacun des termes négligés.

- L'hypothèse de l'amplitude et de la phase variant lentement par rapport à la fréquence optique, plus connue sous le nom de SVAPA, permet de négliger les dérivées d'ordre deux ainsi qu'une partie des dérivées d'ordre un du champ électrique et de la polarisation atomique. Cette approximation consiste à décomposer le champ et la polarisation en un produit de termes évoluant suivant des échelles de temps différentes. Le premier terme ( $\exp[i v_x t]$  ou  $\exp[i v_y t]$ ) est une composante sinusoïdale oscillant à la fréquence optique (quelques THz) qui fait office de porteuse du signal. Quant au second terme ( $\mathcal{E}_{x(t)}$  ou  $\mathcal{E}_{y(t)}$ ), il suit la dynamique imposée par le système physique (cavité et matière active supports de l'effet laser) dont les fréquences caractéristiques sont de l'ordre du MHz. Par conséquent, les termes de dérivation par rapport au temps de ces expressions (en supposant par exemple qu'elles évoluent sinusoïdalement) sont négligeables devant le produit du champ par la fréquence optique.

$$\frac{\partial^2}{c^2} \mathcal{E}_{x(t)} \ll \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_{x(t)} \ll v_x \mathcal{E}_{x(t)} \quad (1.A.3.2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{E}_y(t) \ll \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_y(t) \ll v_y \mathcal{E}_y(t) \quad (1.A.3.3)$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{P}_x(t) \ll \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_x(t) \ll v_x \mathcal{P}_x(t) \quad (1.A.3.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{P}_y(t) \ll \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_y(t) \ll v_y \mathcal{P}_y(t) \quad (1.A.3.5)$$

• L'hypothèse de bonne qualité de cavité permet quant à elle une autre série d'approximations. Elle consiste à supposer que les pertes sont très faibles et réparties uniformément tout au long de la cavité ce qui correspond à des valeurs élevées des coefficients de qualité  $Q_x$  et  $Q_y$ .

$$\frac{1}{Q_x} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_x(t) \ll \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_x(t) \quad (1.A.3.6)$$

$$\frac{1}{Q_y} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_y(t) \ll \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_y(t) \quad (1.A.3.7)$$

Enfin, connaissant les relations entre la fréquence et le nombre d'onde pour les modes de cavité, l'équation de propagation pour chaque direction de polarisation s'écrit :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \kappa_x \right) \mathcal{E}_x(t) = \frac{i v_x}{2 \varepsilon_0} \mathcal{P}_x(t) \quad (1.A.3.8)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \kappa_y \right) \mathcal{E}_y(t) = \frac{i v_y}{2 \varepsilon_0} \mathcal{P}_y(t) \quad (1.A.3.9)$$

Les équations (1.A.3.8) et (1.A.3.9) ne font pas apparaître de couplage direct entre les composantes orthogonales du champ électrique. Ceci est la principale conséquence de notre description minimaliste des phénomènes liés à la propagation au sein de la fibre. Il n'a pour autant pas trop perdu de sa généralité car la forme des équations reste en parfait accord avec celle publiée généralement [Kendall, 1980] [Casperson, 1991].

La section suivante sera consacrée à l'étude de l'interaction entre les atomes et le champ, où nous allons mettre en évidence ces couplages de



façon très naturelle sans qu'il soit nécessaire de recourir à des effets inhabituels de la description des lasers. Pour cela, le développement de l'écriture vectorielle de l'interaction rayonnement-matière sera suffisant et justifiera toutes les approximations effectuées jusqu'ici.

## 1.B. DESCRIPTION DE L'INTERACTION RAYONNEMENT MATIERE.

### 1.B.1.L'opérateur densité.

Dans un modèle semi-classique, le comportement des éléments actifs, initiateurs de l'effet laser (dans notre cas les ions Néodyme), est décrit par les équations de la mécanique quantique. Cette partie de la modélisation est d'une nature totalement différente de la précédente. Elle fait appel aux concepts et aux outils de la mécanique quantique que sont les opérateurs, l'Hamiltonien et les valeurs moyennes [Cohen-Tannoudji, 1977].

Dans un laser, la connaissance imparfaite de l'état quantique du système nous oblige à considérer un mélange statistique d'états dans lequel chacun d'entre eux est accessible avec une probabilité bien déterminée. Chaque état est lui même décrit par un ket contenant toutes les informations le concernant. Pour extraire les informations de ce système, on utilise l'opérateur densité. Si on note  $p_n$  la probabilité pour le système de se trouver dans l'état  $n$  (totalement décrit par le ket  $|\Phi_{n(t)}\rangle$ ), l'opérateur densité est constitué de la somme des opérateurs individuels de projection associés à chaque état  $n$ , somme pondérée par la probabilité  $p_n$  : les opérateurs de projection étant construits au moyen des ket et bra décrivant le niveau. L'opérateur densité s'écrit :

$$\rho_{(t)} = \sum_n p_n |\Phi_{n(t)}\rangle \langle \Phi_{n(t)}| \quad (1.B.1.1)$$

Nous pouvons ainsi accéder directement à toutes les probabilités en appliquant simplement l'opérateur densité sur chacun des kets. Le retour vers les grandeurs physiques macroscopiques s'obtient en prenant la valeur moyenne de l'observable correspondante (notée  $A$ ). Dans le formalisme de la matrice densité, cette valeur moyenne est égale à la trace

de la matrice résultant du produit de l'opérateur  $\rho$  par l'observable elle même :

$$\langle A \rangle = \text{tr} \{ A \rho \} \quad (1.B.1.2)$$

Dans notre étude, les états du système ne sont rien d'autres que les différents niveaux d'énergies occupés par les ions Néodyme au cours des différentes transitions. En fonctionnement laser, l'état quantique des ions évolue au cours du temps. Il en est de même des opérateurs et kets. Leur évolution est décrite par l'équation de Von-Neumann pour l'opérateur densité :

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = [H, \rho] \quad (1.B.1.3)$$

où  $H$  est l'hamiltonien décrivant le système. Il correspond à l'opérateur utilisé pour décrire les processus d'interaction stimulée entre les photons et les ions. Le terme  $[H, \rho]$  est le commutateur des deux opérateurs.

### ***1.B.2. Equations de Bloch pour le Néodyme.***

Les équations de Bloch pour le laser dérivent de la relation (1.B.1.3). Les éléments diagonaux de la matrice densité sont les populations normalisées des niveaux d'énergie, tandis que les éléments non diagonaux représentent les cohérences, c'est à dire l'accord de phase réalisé entre deux niveaux couplés par une transition radiative.

Comme la plupart des ions de terres rares, le Néodyme, élément lasant du système, est caractérisé par un spectre très étendu lié à la présence d'un grand nombre d'électrons autour du noyau. L'effet laser à 1.08  $\mu\text{m}$  ne faisant appelle qu'à un nombre très restreint d'états quantiques, sa représentation est d'ordinaire réduite à un système de quatre niveaux d'énergie. Les transitions de pompage à 0.820  $\mu\text{m}$  couplent le niveau fondamental (1) au niveau supérieur (2), tandis que la transition lasante à 1.08  $\mu\text{m}$  a lieu entre deux niveaux intermédiaires. Cette transition radiative de (3) vers (4) étant peu autorisée, le niveau (3) est métastable. Sa durée de vie est donc supérieure à celle des autres niveaux (420  $\mu\text{s}$ ), ce

qui facilite l'accumulation d'ions dans cet état d'énergie élevé et autorise la création d'une inversion de population nécessaire au démarrage de l'effet laser. Les niveaux (2) et (4) sont très instables, leur durée de vie est très courte (400 ps). Les ions désexcitent vers les niveaux inférieurs par des transitions non radiatives en émettant des phonons dans la matrice de silice.

Le schéma de la figure (1.B.2.1) représente les niveaux d'énergie et les transitions [Le Flohic, 1991] :

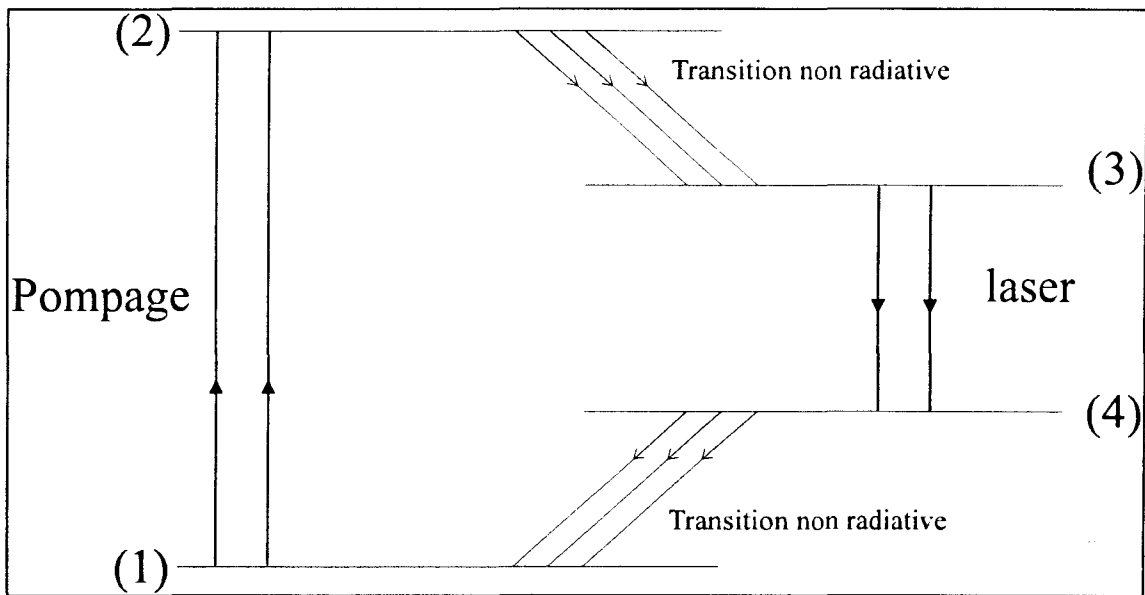


Figure 1.B.2.1 : représentation des niveaux d'énergie du Néodyme.

L'hamiltonien ne décrit pas les transitions non radiatives : elles sont intégrées dans les équations de façon phénoménologique. Ce raccourci théorique est dû à la description classique des champs laquelle ne permet pas de prendre en compte les fluctuations du vide à l'origine de l'émission spontanée. Des théories quantique ou semi-quantique du laser permettent une modélisation plus rigoureuse mais l'étude de la dynamique du laser est plus en rapport avec la théorie semi-classique. Pour un système à quatre niveaux d'énergie, les équations de Bloch pour les populations de chaque niveau s'écrivent [Hiang, 1990] :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{11} = -\frac{i}{\hbar} (\rho_{12} \mu_{21} - \text{c.c}) E_p + \frac{\rho_{44}}{\tau_4} + \frac{\rho_{11}^0}{\tau_1} \quad (1.B.2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{22} = \frac{i}{\hbar} (\rho_{12} \mu_{21} - \text{c.c.}) \mathbf{E}_p - \frac{\rho_{22}}{\tau_2} + \frac{\rho_{22}^0}{\tau_2} \quad (1.B.2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{33} = -\frac{i}{\hbar} (\rho_{34} \mu_{43} - \text{c.c.}) \mathbf{E} + \frac{\rho_{22}}{\tau_2} - \frac{\rho_{33}}{\tau_3} + \frac{\rho_{33}^0}{\tau_3} \quad (1.B.2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{44} = \frac{i}{\hbar} (\rho_{34} \mu_{43} - \text{c.c.}) \mathbf{E} + \frac{\rho_{33}}{\tau_3} - \frac{\rho_{44}}{\tau_4} + \frac{\rho_{44}^0}{\tau_4} \quad (1.B.2.4)$$

et pour les cohérences entre les niveaux :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{34} = -i \omega \rho_{34} - \frac{i}{\hbar} (\rho_{33} - \rho_{44}) \mu_{43} \mathbf{E} - \frac{\rho_{43}}{T_s} \quad (1.B.2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{12} = -i \omega_p \rho_{12} - \frac{i}{\hbar} (\rho_{11} - \rho_{22}) \mu_{21} \mathbf{E}_p - \frac{\rho_{12}}{T_p} \quad (1.B.2.6)$$

Nous avons introduit quelques notations correspondant à des grandeurs physiques :

$\mathbf{E}$ , le champ laser (défini par les relations (1.A.1.1 et 3, 1.A.3.8 et 9)) et  $\mathbf{E}_p$ , le champ de pompage optique.

$\omega$ , la fréquence des photons émis au cours de la transition lasante et  $\omega_p$  celle des photons absorbés au cours des transitions de pompage.

$\mu_{ij}$  est la composante du moment dipolaire induit au cours de la transition entre les états  $i$  et  $j$ . C'est une grandeur vectorielle.

$T_s$  et  $T_p$  sont respectivement les temps de relaxation des cohérences de la transition lasante et de la transition de pompage. Ils ont la particularité d'être extrêmement faibles :  $T_s = T_p = 83$  ns [Le Flohic, 1991].

$\tau_i$  est la durée de vie d'un électron sur le niveau d'énergie  $i$ . Le niveau (3) se désexcite spontanément par fluorescence avec un temps caractéristique relativement long ( $\tau_3 = 420$   $\mu$ s) alors que les niveaux (2) et (4) se vident beaucoup plus rapidement via des transitions non-radiatives ( $\tau_2 = \tau_4 = 400$  ps) [Le Flohic, 1991].

En l'absence de champs, les populations des niveaux tendent vers leur état à l'équilibre thermique (noté  $\rho_{ii}^0$ ). Pour les énergies les plus élevées, ces valeurs sont quasi nulles. La population à l'équilibre décroît

exponentiellement avec l'énergie (en  $\exp[-\hbar\omega]$ ) soit au moins un rapport 100 entre les populations des niveaux 1 et 2).

Dans notre présentation nous avons volontairement omis les dépendances spatiales et temporelles des éléments de la matrice densité qui devraient tous s'écrire sous la forme  $\rho_{ij}(\mathbf{a}, z, t)$  où  $\mathbf{a}$  représente les caractéristiques propres des sites actifs étudiés (nous reviendrons plus longuement sur ce paramètre au paragraphe suivant),  $t$ , le temps et  $z$ , la direction de propagation du champ. Les équations de Bloch ne font pas apparaître de terme de dérivation spatiale car le milieu lasant est solide. Dans cette première partie de la thèse, notre modèle sera donc toujours composé de dérivées ordinaires et ne comportera pas de dérivées partielles.

### ***1.B.3. Etude de la polarisation atomique.***

#### ***1.B.3.a. Le moment dipolaire induit.***

La description semi-classique de l'effet laser est basée sur « l'auto cohérence » du formalisme. Le couplage entre le champ électrique et le système atomique génère une polarisation atomique macroscopique qui est elle même une source pour le champ. Cette polarisation atomique, proportionnelle au champ, résulte de la création de moments dipolaires induits. Par son intermédiaire, le champ devient en quelque sorte sa propre source ce qui lui permet de s'auto-entretenir et de conserver sa cohérence. Cet effet particulier est la conséquence du phénomène d'émission stimulée. Au cours de ce processus, l'interaction entre un site actif et un photon d'énergie et de phase données génère un second photon identique sans qu'il y ait absorption ou modification des propriétés du premier [Cohen-Tannoudji, 1977]. Selon les lois de conservation de l'énergie, un apport d'énergie est nécessaire. Il est assuré par le processus de pompage qui, dans notre cas, est un champ laser dont la fréquence est adaptée à la transition de pompage du Néodyme (fig. 1.B.2.1).

La description des mécanismes d'interaction entre les champs et la matière se fait généralement de façon très simple car dans la plupart des systèmes connus (c'est le cas du Néodyme) les transitions sont de type dipolaire électrique. Les transitions d'ordre supérieur, dipolaire magnétique ou quadripolaire électrique, sont négligées car les moments induits sont toujours beaucoup plus faibles [Sargent, 1974]. Les mécanismes physiques sont également faciles à décrire si l'on abandonne l'approche corpusculaire du champ électrique pour ne conserver que la description ondulatoire. Considérons un ion de Néodyme : en l'absence de champ électrique, les électrons sont répartis autour du noyau suivant un ordre que la mécanique quantique permet de décrire précisément. L'application d'un champ électrique perturbe cet équilibre puisque l'interaction Coulombienne entre les particules chargées et le champ provoque leur déplacement. L'ion de Néodyme perd la symétrie qu'il possédait, au profit d'une nouvelle disposition caractérisée par un nouvel état d'équilibre moins stable que le précédent. Le passage des électrons, des orbites basses vers les états excités, correspond à la création d'un moment dipolaire induit par le champ appliqué. L'hamiltonien du système décrit cette interaction par le terme « **d'énergie de couplage** » [Cohen-Tannoudji, 1977] obtenu par le produit scalaire du champ par le moment dipolaire induit.

La polarisation atomique est la somme sur tout le milieu actif des moments dipolaires induits. Pour chaque atome, ce moment, noté  $\langle \mu \rangle$ , impliqué dans la transition lasante, est la valeur moyenne temporelle de l'opérateur vectoriel  $\mu_{43}$ . Les propriétés de l'opérateur densité donnent sa définition (cf. relation 1.B.1.2) :

$$\langle \mu \rangle = \rho_{34(a,z,t)} \mu_{43} + c.c \quad (1.B.3.1)$$

Ce moment dipolaire peut subir les mêmes transformations que le champ électrique, c'est à dire que nous pouvons le projeter suivant le repère défini par la figure 1.A.1.1 et également en extraire les dépendances temporelle et longitudinale de l'onde plane suivant chacune des directions

de polarisation. Afin de faciliter les écritures, nous introduisons une notation complexe avec le moment dipolaire vectoriel  $\eta_{34}$ :

$$\eta_{34} (a,z,t) = \rho_{34} (a,z,t) \mu_{43} \quad (1.B.3.2)$$

que nous écrivons encore sous la forme :

$$\begin{aligned} \eta_{34} (a,z,t) &= \rho_{34} (a,z,t) \{ \mu_x \mathbf{x} + \mu_y \mathbf{y} \} \\ &= \eta_x (a,z,t) \exp[i(k_x z - v_x t)] + \eta_y (a,z,t) \exp[i(k_y z - v_y t)] \end{aligned} \quad (1.B.3.3)$$

Les  $\mu_x$  et  $\mu_y$  sont les composantes du moment dipolaire induit dans le repère macroscopique. Ils ne sont pas accessibles directement mais s'expriment en fonction des éléments constituant le moment dipolaire dans un repère propre de l'ion Néodyme.

Cet ion possède en effet des propriétés de symétrie locale d'ordre relativement bas (groupe de symétrie  $C_{2v}$ ) qui autorisent une décomposition tensorielle du moment [Rawson, 1987]. Dans ce repère microscopique (l,m,n), l'opérateur vectoriel s'écrit sous forme diagonale :

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_l & 0 & 0 \\ 0 & \mu_m & 0 \\ 0 & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

Dans le paragraphe 1.C.1, nous montrerons que cette décomposition est propre à chaque site actif. Il y a donc à priori autant de repère (l,m,n) que d'ions Néodyme insérés dans la fibre. Le passage d'un des repères microscopiques au repère utilisé pour décrire le laser dans sa totalité nécessite une série de projections que nous représentons comme suit :

$$\mu_x = \mu_l \langle \mathbf{l} | \mathbf{x} \rangle^2 + \mu_m \langle \mathbf{m} | \mathbf{x} \rangle^2 + \mu_n \langle \mathbf{n} | \mathbf{x} \rangle^2 \quad (1.B.3.4)$$

$$\mu_y = \mu_l \langle \mathbf{l} | \mathbf{y} \rangle^2 + \mu_m \langle \mathbf{m} | \mathbf{y} \rangle^2 + \mu_n \langle \mathbf{n} | \mathbf{y} \rangle^2 \quad (1.B.3.5)$$

$$\mu_z = \mu_l \langle \mathbf{l} | \mathbf{z} \rangle^2 + \mu_m \langle \mathbf{m} | \mathbf{z} \rangle^2 + \mu_n \langle \mathbf{n} | \mathbf{z} \rangle^2 \quad (1.B.3.6)$$

qui résulte de trois rotations successives d'Euler et dont dépendent les cosinus directeurs. Une telle formulation, bien que rigoureuse, est malheureusement trop lourde. Nous pouvons la simplifier en nous basant sur des approximations déjà présentées. La relation (1.A.1.2) nous a



permis de montrer que la composante longitudinale du champ électrique pouvait être négligée. La description de l'interaction entre les photons et les sites de Néodyme étant basée sur un produit scalaire, son développement ne comporte donc que deux termes dans le repère macroscopique. Il n'est donc pas nécessaire de prendre en compte la composante longitudinale du moment dipolaire induit de la relation (1.B.3.3).

De plus, les trois composantes vectorielles  $\mu_m$ ,  $\mu_l$  et  $\mu_n$  de normes différentes ne constituent pas un développement essentiel de notre modélisation. Dans le souci de simplifier les écritures, nous supposons ces normes égales afin de ne conserver que le degré de liberté lié à l'orientation du moment dipolaire dans le plan transverse. Cette approximation revient en fait à relever l'ordre de symétrie de l'ion Néodyme. Il devient alors possible de travailler dans un repère de symétrie cylindrique dans lequel les composantes suivant X et Y des moments dipolaires sont données par les relations :

$$\mu_x = \mu \cos(\theta) \quad (1.B.3.7)$$

$$\mu_y = \mu \sin(\theta) \quad (1.B.3.8)$$

où  $\theta$  est l'angle entre la direction du moment dipolaire induit et l'axe X du repère macroscopique,  $\mu$  devient un paramètre du système. Graphiquement la représentation est la suivante :

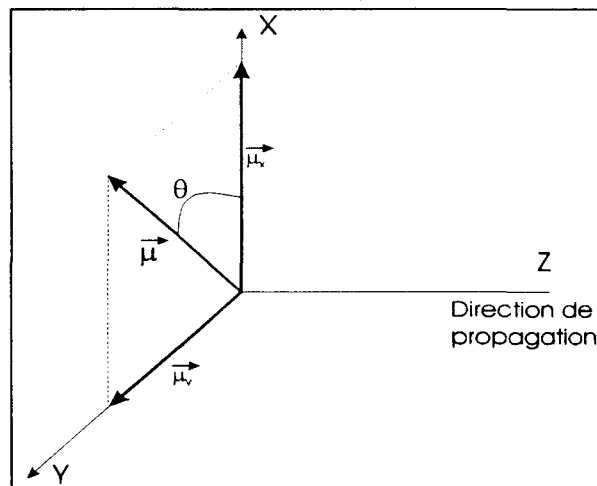


Figure 1.B.3.1 : projection du moment dipolaire dans le repère macroscopique.

### 1.B.3.b. Equation de la polarisation atomique.

Tous les développements du chapitre précédent ont pour objet la détermination de l'équation d'évolution temporelle de la valeur moyenne du moment dipolaire ce qui permettra par la suite d'obtenir celle de la polarisation atomique. Partant de l'équation (1.B.2.5), nous introduisons l'expression du moment dipolaire (1.B.3.1) et les notations de la relation (1.B.3.2) pour obtenir l'équation suivante :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + i\omega + \frac{1}{T_s} \right) \eta_{34(a,z,t)} = - \frac{i}{\hbar} (\rho_{33} - \rho_{44}) (\mu_{43} \mathbf{E}) \mu_{43} \quad (1.B.3.9)$$

Nous utilisons les formes développées dans la relation (1.A.1.3) pour le champ et celles (1.B.3.4), (1.B.3.5) et (1.B.3.6) pour le moment dipolaire. L'opération de dérivation effectuée puis la simplification des harmoniques 2 qui évoluent trop rapidement pour pouvoir être prises en compte (la fréquence optique est de l'ordre du THz) permettent d'obtenir une équation qu'il est possible de projeter suivant les deux directions transverses de polarisation du champ électrique. En reprenant les notations définies par la relation 1.B.3.3, on déduit :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + i(\omega - \nu_x) + \frac{1}{T_s} \right) \eta_{x(a,z,t)} = - \frac{i}{2\hbar} (\rho_{33} - \rho_{44}) \left\{ \mu_x \mathcal{E}_x(t) + \mu_y \mathcal{E}_y(t) g_{y(z)} g_{x(z)}^* \exp[-i(\nu_y - \nu_x)] \right\} \mu_y \quad (1.B.3.10)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + i(\omega - \nu_y) + \frac{1}{T_s} \right) \eta_{y(a,z,t)} = - \frac{i}{2\hbar} (\rho_{33} - \rho_{44}) \left\{ \mu_y \mathcal{E}_y(t) + \mu_x \mathcal{E}_x(t) g_{x(z)} g_{y(z)}^* \exp[-i(\nu_x - \nu_y)] \right\} \mu_y \quad (1.B.3.11)$$

### **1.B.4. Etude des populations.**

A partir des équations de Bloch pour les éléments diagonaux de la matrice densité (équations 1.B.2.1 à 1.B.2.4) nous obtenons l'équation d'évolution temporelle de la population des niveaux d'énergie. Pour décrire complètement un système de quatre niveaux, il faut au minimum deux variables (la somme et la différence des populations des niveaux impliqués dans la transition lasante) et donc deux équations [Kendall, 1980]. Une de ces variables apparaît déjà dans les équations (1.B.3.10) et (1.B.3.11), c'est la différence de population qui est une grandeur physique très représentative de l'état du système. Par exemple, une des conditions de démarrage du laser est qu'il y ait plus d'ions sur le niveau haut de la transition (le niveau (3)) que sur le niveau bas. Cette condition s'exprime par une différence de population positive. A l'inverse, la somme des populations ne peut pas être interprétée de façon claire quant à l'état du système et n'apparaît pas de façon naturelle dans les équations de Bloch.

A la différence des variables que nous avons rencontrées jusqu'ici, ces deux termes de population sont des grandeurs scalaires. Ils ne sont par pour autant indépendantes de la polarisation du champ, car les équations (1.B.2.1), (1.B.2.2), (1.B.2.3) et (1.B.2.4) montre que les populations des niveaux dépendent du produit scalaire entre les moments dipolaires induit et le champ. Par conséquent, dans le cas d'un produit scalaire proche de 0, le fonctionnement du laser s'altère alors qu'il est optimal lorsque le champ et la polarisation atomique sont colinéaires. De plus et dans la réalité, chaque ion de dopant représente un cas particulier, c'est pourquoi les variables de population comme celle de la polarisation dépendent du paramètre de site  $\mathbf{a}$ . Pour mettre en évidence l'origine des équations, nous introduisons les notations suivantes :

$$D_{(a,z,t)} = \rho_{33(a,z,t)} - \rho_{44(a,z,t)} \quad (1.B.4.1)$$

$$M_{(a,z,t)} = \rho_{33(a,z,t)} + \rho_{44(a,z,t)} \quad (1.B.4.2)$$

$$\sigma = \frac{\rho_{33}^0}{\tau_3} - \frac{\rho_{44}^0}{\tau_4} \quad (1.B.4.3)$$

$$\sigma' = \frac{\rho_{33}^0}{\tau_3} + \frac{\rho_{44}^0}{\tau_4} \quad (1.B.4.4)$$

obtenues via la somme et la différence des équations (1.B.2.3) et (1.B.2.4).

Les équations d'évolution des variables  $D_{(a,z,t)}$  et de  $M_{(a,z,t)}$  :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_3} + \frac{1}{2\tau_4} \right) D_{(a,z,t)} &= \sigma + \left( \frac{1}{2\tau_4} - \frac{1}{\tau_3} \right) M_{(a,z,t)} \\ &\quad - \frac{2i}{\hbar} (\eta_{34(a,z,t)} - \text{c.c}) \mathbf{E}_{(z,t)} + \frac{\rho_{22}}{\tau_2} \end{aligned} \quad (1.B.4.5)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\tau_4} \right) M_{(a,z,t)} = \sigma' + \frac{1}{2\tau_4} D_{(a,z,t)} + \frac{\rho_{22}}{\tau_2} \quad (1.B.4.6)$$

Bien qu'exacte cette formulation est beaucoup trop lourde. Sur des considérations physiques simples liées à la dynamique du système due couplage entre les polarisations orthogonales, et au vu des temps caractéristiques  $\tau_3$  et  $\tau_4$ , nous pouvons simplifier la description. Les valeurs données au chapitre 1.B.2 sont les suivantes :  $\tau_2 = \tau_4 = 400$  ps et  $\tau_3 = 420$   $\mu$ s. Le niveau (3) est métastable, la durée de vie des ions sur cet état excité est très longue. Au contraire, les niveaux (2) et (4) sont très instables, leur durée de vie est courte et les variables  $D_{(a,z,t)}$  et  $M_{(a,z,t)}$  sont donc presque égales. L'équation (1.B.4.5) peut se simplifier en posant  $D_{(a,z,t)} = M_{(a,z,t)}$ . Nous obtenons ainsi une équation plus simple pour l'évolution temporelle de la différence de population [Kendall, 1980] qui fait apparaître l'interaction directe entre la polarisation atomique et les composantes du champs laser. Son expression est :

$$\boxed{\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{\tau_3} \right) D_{(a,z,t)} = \sigma + \frac{\rho_{22}}{\tau_2} - \frac{i}{\hbar} (\eta_{x(a,z,t)} \mathcal{E}_{x(z,t)}^* + \eta_{y(a,z,t)} \mathcal{E}_{y(z,t)}^* - \text{c.c})} \quad (1.B.4.7)$$

### **1.B.5. Elimination adiabatique de la polarisation atomique.**

Tous les temps caractéristiques des variables utilisées pour décrire le laser sont à présent déterminés. Pour les champs, ce sont les inverses des termes de pertes  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$ , qui sont liés à la durée de vie des photons dans la cavité. Pour la polarisation atomique et l'inversion de population, ce sont respectivement  $T_s$  (temps de cohérence de la transition lasante) et  $\tau_3$  (durée de vie d'un ion excité sur le niveau 3). Si nous nous référons aux valeurs données dans le paragraphe 1.B.2, l'amortissement de la polarisation atomique ( $1/T_s$ ) s'avère beaucoup plus grand que ceux des autres équations ( $10^7$  pour la polarisation atomique et  $2 \cdot 10^3$  pour les populations). La conséquence sur la dynamique du laser est fondamentale. La polarisation atomique est une variable rapide, le comportement des autres variables, plus lent, va régir l'évolution du champ laser entre autres. La dérivée temporelle de la polarisation est annulée car elle atteint quasi-instantanément son état stationnaire et suit alors l'évolution des autres variables du système. On simplifie ainsi le système formé par les équations (1.B.3.10) et (1.B.3.11) pour obtenir une expression analytique exacte pour ses deux composantes [Sargent, 1974]. Les variables  $\eta_x$  et  $\eta_y$  s'écrivent donc :

$$\eta_{x(a,z,t)} = -\frac{T_s}{2\hbar} (i\alpha_x + \tilde{\alpha}_x) (\rho_{33(a,z,t)} - \rho_{44(a,z,t)}) \left\{ \mu_x^2 \mathcal{E}_x(t) + \mu_y \mu_x \mathcal{E}_y(t) g_y(z) g_x^*(z) \exp[-i(\nu_y - \nu_x)t] \right\} \quad (1.B.5.1)$$

$$\eta_{y(a,z,t)} = -\frac{T_s}{2\hbar} (i\alpha_y + \tilde{\alpha}_y) (\rho_{33(a,z,t)} - \rho_{44(a,z,t)}) \left\{ \mu_y^2 \mathcal{E}_y(t) + \mu_y \mu_x \mathcal{E}_x(t) g_x(z) g_y^*(z) \exp[-i(\nu_x - \nu_y)t] \right\} \quad (1.B.5.2)$$

Les notations réduites utilisées ont été définies en posant pour le mode x :

$$\Delta_x = T_s (\omega - \nu_x) \quad \alpha_x = \frac{1}{1 + \Delta_x^2} \quad \tilde{\alpha}_x = \frac{\Delta_x}{1 + \Delta_x^2} \quad (1.B.5.3)$$

et pour le mode  $y$  :

$$\Delta_y = T_s (\omega - \nu_y) \quad \alpha_y = \frac{1}{1 + \Delta_y^2} \quad \tilde{\alpha}_y = \frac{\Delta_y}{1 + \Delta_y^2} \quad (1.B.5.4)$$

Nous détaillons longuement ces approximations qui sont d'ordinaire résumées sous le terme d'élimination adiabatique. Elles ont pour résultat la réduction du nombre d'équations du modèle et la modification des équations de champ et de population. Les autres conséquences de ces approximations n'apparaîtront qu'au cours de l'étude de la dynamique. Elles sont liées à la diminution de la dimension de l'espace des phases qui limite la richesse des comportements observés.

Les équations (1.B.5.1) et (1.B.5.2) laissent apparaître un couplage entre les directions orthogonales du champ par l'intermédiaire de l'interaction dipolaire et ceci indépendamment des effets liés à la propagation. Ce couplage est très naturel car nous n'avons fait que développer les opérateurs vectoriels suivant les axes de polarisation du champ en cherchant toujours à simplifier au maximum les équations. La structure des équations liée au caractère auto-cohérent de l'effet laser produit un couplage dans les équations du champ et de l'inversion de population.

## **1.B.6. Les termes de pompage.**

### **1.B.6.a. Définition.**

Dans la relation (1.B.4.7),  $\rho_{22}$  est un terme de source du laser. Il traduit l'action du pompage qui fait passer les ions du niveau bas vers le niveau haut. Cette transition peut être décrite avec exactement le même formalisme que le mécanisme d'émission stimulée à ceci près qu'il n'y a plus émission et amplification d'un champ mais absorption et atténuation d'un autre champ. Les équations sont ainsi ressemblantes et seuls diffèrent les signes justifiant de l'inversion des processus physiques. Nous

effectuons donc les mêmes développements que ceux effectués jusqu'ici tout en apportant quelques hypothèses simplificatrices. Par convention, nous indiquons d'un p toutes les grandeurs se rapportant au pompage.

### *1.B.6.b. Le champ de pompe.*

L'inversion de population est réalisée par l'intermédiaire d'un champ laser issu d'un autre laser. Le laser à fibre transforme un rayonnement cohérent d'une longueur d'onde donnée en un autre rayonnement cohérent de longueur d'onde différente. Le champ de pompe possède donc des caractéristiques physiques particulières ; nous introduisons les notations suivantes :

$$\mathbf{E}_{p(z,t)} = \frac{1}{2} \left( \mathcal{E}_{p(t)} \exp[i(k_p z - \nu_p t)] + \text{c.c} \right) \quad (1.B.6.1)$$

$$\eta_{21(a,z,t)} = \rho_{21(a,z,t)} \mu_{12} = \eta_p(a,z,t) \exp[i(k_p z - \nu_p t)] \quad (1.B.6.2)$$

$k_p$  et  $\nu_p$  sont respectivement la constante de propagation et la fréquence du champ de pompe. Les miroirs étant transparents à la longueur d'onde de la pompe, le champ  $E_p$  se propage librement dans la fibre et ne subit pas les contraintes liées à la transmission du résonateur.

Pour obtenir une expression simple du terme de source présent dans l'équation de la population, nous précisons certaines propriétés de ce champ :

$\mathbf{E}_p$  est polarisé rectilignement tout au long de la cavité optique, et l'angle qu'il fait avec le moment dipolaire induit de la transition de pompage vaut  $\theta$  lorsqu'il est polarisé suivant X et  $\pi/2 - \theta$  lorsqu'il est polarisé suivant Y. Nous supposons que sa polarisation n'est jamais perturbée au cours de la propagation et l'amplitude du champ est supposée constante tout au long de la fibre : chaque site actif situé aussi bien en début qu'en fin de fibre reçoit toujours la même intensité de pompage.

$\rho_{22}$  est un terme dépendant du temps. L'équation (1.B.2.2) détermine son évolution. L'étude de cette expression montre que le terme de pompage est lié au produit du champ de pompe par la cohérence de la transition entre

les niveaux (1) et (2). Toutes ces variables dépendant du temps, nous obtenons un système dans lequel nous devons nous soucier à priori aussi bien de la dynamique du champ laser que celle du champ de pompe. Ceci est à la fois très difficile à mener et peu répandu dans la littérature. L'analyse du paragraphe 1.B.4 montre qu'il est possible d'éliminer adiabatiquement la population du niveau (2) ainsi que la cohérence de la transition de pompage à condition d'en extraire la fréquence optique. Nous obtenons par conséquent un terme de pompage dont la dépendance temporelle est celle de l'enveloppe du champ  $E_p$ . Dans la plupart des cas, nous considérerons ce terme constant. Toutefois, certaines expériences sont réalisées en laboratoire avec un champ de pompe modulé. Leur description nécessite l'introduction d'une composante sinusoïdale temporelle.

### *1.B.6.c. Etude des variables matérielles de la transition de pompage.*

Le développement du terme de pompage est similaire à celui du champ laser. Il compte une étape importante issue de l'élimination adiabatique de la cohérence effectuée sur une équation équivalente à (1.B.3.10 ou 11) appliquée au pompage :

$$\eta_{p(a,t)} = \frac{i T_p}{2 \hbar} (\alpha_p - i \tilde{\alpha}_p) \{ \mu_{21} \mathcal{E}_p(t) \} \mu_{21} \quad (1.B.6.3)$$

où

$$\Delta_p = T_p (\omega - \nu_p) \quad \alpha_p = \frac{1}{1 + \Delta_p^2} \quad \tilde{\alpha}_p = \frac{\Delta_p}{1 + \Delta_p^2} \quad (1.B.6.4)$$

Une autre approximation importante a été utilisée : le niveau (2) étant toujours peu peuplé, la transition de pompe est peu saturée ce qui permet d'écrire que la différence des populations entre les niveaux (1) et (2) est constante et égale à l'unité [Casperson, 1982].



L'élimination adiabatique de la population du niveau (2) donne lieu à l'équation suivante :

$$\frac{\rho_{22}^{(a,t)}}{\tau_2} = \frac{i}{2\hbar} \left( \eta_{p(a,t)}^* \mathcal{E}_{p(t)} - \text{c.c} \right) \quad (1.B.6.5)$$

dans laquelle la population à vide du niveau (2) a été négligée.

La combinaison des relations (1.B.6.3) et (1.B.6.5) permet d'écrire le terme de pompage sous la forme du carré d'un produit scalaire entre le champ et le moment dipolaire de pompe :

$$\frac{\rho_{22}^{(a,t)}}{\tau_2} = \frac{\alpha_p T_p}{2\hbar} \left( \boldsymbol{\mu}_{p(a)} \cdot \mathcal{E}_{p(t)} \right)^2 \quad (1.B.6.6)$$

Nous pouvons remarquer que lorsque le champ de pompe est polarisé selon X et que le moment dipolaire fait un angle  $\theta$  avec ce même axe, le terme de pompage est proportionnel au carré du cosinus de l'angle  $\theta$ . En revanche, lorsque le champ de pompe est polarisé selon Y, le terme de pompage est proportionnel au carré du sinus de  $\theta$ . Ceci montre que notre formulation prend en compte la polarisation du champ de pompe et permet l'étude de la répartition des intensités du laser suivant les axes propres de la fibre en fonction de l'angle d'injection de  $E_p$ .

La présence du paramètre de site  $\mathbf{a}$  dans les équations matérielles (1.B.4.7, 1.B.5.1-2 et 1.B.6.6) indique leur forme locale et donc exprimées pour un seul site actif. La généralisation à laquelle nous procéderons dans la section suivante permettra de nous affranchir de cette dépendance et de mettre en évidence les propriétés du laser à fibre. Le modèle développé prend en compte les propriétés microscopiques du dopant mais néglige les caractéristiques propres à la fibre et l'aspect propagation. Le passage de la description microscopique à macroscopique permet d'inclure l'influence de la fibre et d'aboutir au modèle qui sera analysé au chapitre II.

## **1.C. CAS PARTICULIER DU LASER A FIBRE DOPEE.**

Les équations matérielles développées en section 2 sont locales, donc pour un site particulier d'ion Néodyme. Dans la présente section, nous allons étendre la description à la totalité du milieu ce qui va nécessiter une sommation des équations sur tout le volume de la fibre et donc tous les sites actifs. Nous allons ainsi nous intéresser particulièrement à la dépendance spatiale (transverse et/ou longitudinale) de la polarisation atomique et de l'inversion de population.

### ***1.C.1.Caractéristique propre des sites actifs.***

#### ***1.C.1.a.Le dopage dans la silice et ses conséquences sur l'effet laser.***

Dans un milieu cristallin, la disposition des sites actifs dans la maille et dans tout le cristal peut être déterminée avec précision. L'environnement électronique des ions possède des propriétés bien établies et l'interaction entre le champ électrique et les moments dipolaires induits est quasiment toujours la même [Tocho, 1992] [Ferry, 1990].

Dans une fibre optique, la matrice de silice est une structure amorphe qui guide les champs et sert de support au dopant. Les différents arrangements entre les molécules de  $\text{SiO}_2$  créent des sites particuliers susceptibles de recevoir un ion fortement chargé. L'environnement électronique généré par la matrice fixe certaines caractéristiques propres de l'ion pour former les « sites actifs », c'est à dire ceux susceptibles de prendre part à l'effet laser. Ces sites particuliers se répètent aléatoirement tout au long de la fibre. Cette description est confirmée par le fait que le dopant ne s'insère dans la fibre que lorsque l'environnement électronique lui convient parfaitement. Les ions vont même parfois jusqu'à se regrouper en petits amas pour former des « clusters ». Ces clusters permettent aux

ions Néodyme de se rassembler afin de former entre eux un environnement électronique favorable et d'échapper ainsi aux contraintes imposées par la silice. Dans ce cas particulier, les ions ne participent pas à l'effet laser car leurs niveaux d'énergie sont fortement décalés par rapport à ceux des sites actifs, insérés dans la matrice [Arai, 1986].

Du point de vue de la structure de la silice, son aspect amorphe est nuancé par l'existence de régions localisées de cristallisation créées au cours de l'étirement de la fibre, lors de sa fabrication. De plus, la silice n'est composée que d'un nombre fini de structures ordonnées dont les différents arrangements se répètent tout au long de la maille. On peut donc supposer qu'il existe un ordre sous-jacent à l'apparent désordre de la structure amorphe [Rawson, 1987].

Ainsi nous supposons que chaque site possède des caractéristiques propres liées à sa position, son orientation ou son état électronique et qu'il interagit de façon particulière avec le champ : cette influence très forte de la silice sur le dopant est susceptible de faire varier l'efficacité de l'interaction rayonnement-matière suivant le site que l'on étudie. Les contraintes appliquées sur le moment dipolaire peuvent, par exemple, interdire certaines orientations ou en privilégier d'autres. Elles se traduisent également par la présence de champs électriques locaux permanents qui lèvent la dégénérescence des sous-niveaux Stark [Le Flohic, 1991]. Les transitions sont alors non seulement décalées en fréquence mais également perturbées en polarisation. Ce phénomène peut conduire à l'émission par un même site actif de photons polarisés perpendiculairement les uns par rapport aux autres et ce, indépendamment du champ incident. Il présente l'inconvénient de multiplier les variables de population et de cohérence et rend tout traitement analytique impossible. La nécessité de conserver un formalisme simple n'a pas permis de prendre en compte cette propriété particulière et dans la suite de cette étude, les transitions lasantes seront supposées présenter la polarisation du moment dipolaire induit de site.

### 1.C.1.b.Représentation mathématique.

Les caractéristiques de chaque site sont contenues dans le paramètre  $\mathbf{a}$  des variables matérielles. Dans un calcul complet prenant en compte les effets de la structure transverse du champ, ce paramètre devrait nécessairement représenter toutes les caractéristiques atomiques fixées par la position, l'orientation et le nombre de moments dipolaires induits au sein de la fibre. Notre étude, développée sur un modèle d'onde plane pour le champ, nous pouvons limiter son contenu à la variation de l'efficacité des processus de pompage et d'émission stimulée en fonction de l'orientation transverse du moment dipolaire induit, et cela si nous supposons que la répartition longitudinale des sites d'ions actifs est uniforme. Il est alors possible de réduire la dépendance en  $\mathbf{a}$  de la polarisation atomique et de l'inversion de population à la seule variable  $\theta$  qui repère la position du moment par rapport à l'axe X de la fibre. L'extension de la description à la totalité de la fibre nécessite alors la connaissance du nombre de moments induits orientés suivant la direction  $\theta$ , et représenté par une fonction de distribution continue  $n(\theta)$  (la dépendance en  $z$  est superflue). La continuité de cette fonction n'est pas en désaccord avec la sommation discrète sur tous les sites. Le nombre d'ions dans la fibre étant élevé, leur répartition entre 0 à  $2\pi$  doit naturellement être continue [Kendall, 1980]. L'avantage de cette opération est de permettre une description spatiale dans un repère de coordonnées cylindriques et la sommation sur l'ensemble des sites se traduit par une sommation sur un cylindre de longueur  $L$  égale à la longueur de la cavité. Les équations 1.A.3.8, 1.A.3.9 et 1.B.4.7 s'écrivent alors :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \kappa_x\right) \mathcal{E}_x(t) = \frac{i v_x}{2 \varepsilon_0} \frac{1}{2 \pi N L} \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\theta n(\theta) \eta_{x(\theta,z,t)} \quad (1.C.1.1)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \kappa_y\right) \mathcal{E}_y(t) = \frac{i v_y}{2 \varepsilon_0} \frac{1}{2 \pi N L} \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\theta n(\theta) \eta_{y(\theta,z,t)} \quad (1.C.1.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2}{\tau_3}\right) \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\theta n(\theta) D_{(\theta,z,t)} = \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\theta n(\theta) \left( \sigma + \frac{\rho^{22}(\theta,z,t)}{\tau_2} \right) - \frac{i}{\hbar} \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\theta n(\theta) \left( \eta_{x(a,z,t)} \mathcal{E}_x^*(z,t) + \eta_{y(a,z,t)} \mathcal{E}_y^*(z,t) - \text{c.c} \right)$$

(1.C.1.3)

où  $\eta_x$  et  $\eta_y$  sont données par les relations 1.B.5.1 et 1.B.5.2.

La structure de ces équations met en évidence l'importance de la fonction de répartition  $n(\theta)$  que nous allons à présent étudier dans le paragraphe qui suit.

### **1.C.2. Notion de classes de dipôles.**

La fonction  $n(\theta)$  décrit la répartition des moments dipolaires induits dans le plan transverse à la direction de propagation. Cette orientation des moments résulte d'une compétition entre le champ laser et les champs locaux. Ainsi dans les expériences de doublage de fréquence dans les fibres par mélange à quatre ondes, l'application de champs très intenses peut produire une polarisation permanente au sein de la fibre grâce, en particulier, à l'orientation des défauts. Il apparaît que, dans ce type d'expérience, les champs appliqués dominent largement les champs locaux puisqu'ils fixent la polarisation. Dans le cas du laser à fibre, c'est la situation inverse qui prédomine. Les champs intra-cavité restant toujours peu intenses pour ne pas blanchir la fibre, ce sont principalement les champs locaux qui fixent les orientations du dipôle induit et cette orientation s'effectue en fonction de la disposition de la matrice de silice autour du site actif.

Pour le dénombrement des ions orientés suivant une direction particulière, nous proposons un formalisme de classes de dipôles. Il permet d'associer à toute portion d'angle  $d\theta$  un certain poids correspondant au nombre de dipôles compris dans cette portion. La représentation ainsi obtenue peut être précise mais présente

l'inconvénient de décomposer le modèle en autant de sous-systèmes d'équations qu'il y a de classes. Pour poursuivre aussi loin que possible les calculs analytiques, nous nous sommes intéressés à deux cas extrêmes.

### ***1.C.2.a.Premier cas limite : une seule classe de moments dipolaires.***

Dans un premier temps, nous avons considéré le cas d'une seule classe de moments dipolaires induits même si du point de vue de la physique de la fibre, l'existence d'une seule classe est peu probable (interactions suffisamment fortes entre les sites actifs). Une telle approximation permet de mettre en évidence le type de non linéarité auquel elle donne lieu.

D'un point de vue mathématique, la forme des équations est identique au modèle de laser bimode sans structure de polarisation du champ. Celui-ci ne peut plus se décomposer suivant les deux axes propres de la fibre mais se retrouve polarisé suivant l'unique direction fixée par les moments dipolaires (un résultat prévisible).

### ***1.C.2.b.Second cas limite : répartition isotrope des moments dipolaires.***

A l'opposé du paragraphe précédent, on peut considérer une infinité de classe de dipôles toutes pondérées par le même nombre de moments dipolaires induits. Ce cas correspond à une distribution isotrope des moments dans le plan transverse, soit à une fonction de répartition  $n(\theta)$  égale à une constante  $N$ . Du point de vue de la physique, une telle distribution rend bien compte de la domination des champs locaux sur les champs appliqués y compris de trouver des classes de dipôles induits suivant la direction opposée au champ incident. La représentation la plus réaliste consisterait à réduire le poids  $n(\theta)$  des classes en fonction de l'éloignement  $(\theta - \theta_0)$  de la direction  $\theta_0$  de polarisation du champ dans la

cavité. Toutefois, l'avantage de la répartition isotrope des moments est d'autoriser un traitement mathématique simple des équations.

Dans le paragraphe suivant, nous appliquerons divers changements de variables et un double développement (transverse et longitudinal) en séries de Fourier pour transformer le système d'équations (1.C.1.1), (1.C.1.2) et (1.C.1.3).

### **1.C.3.Changements de variables.**

Nous avons développé séparément les écritures de chacune des composantes du modèle afin de bien mettre en évidence les phénomènes physiques propres au laser à fibre. Nous allons à présent réunir toutes les relations permettant d'exprimer les équations du champ et de la population tenant compte des expressions des composantes de la polarisation atomique (relations 1.B.5.1 et 1.B.5.2) et de celles des moments dipolaires exprimées dans le repère macroscopique lié à la fibre (relations 1.B.3.7 et 1.B.3.8). Les relations trigonométriques suivantes sont utilisées :

$$\mu_x^2 = \mu^2 \cos^2(\theta) = \frac{1}{2} \mu^2 (1 + \cos(2\theta)) \quad (1.C.3.1)$$

$$\mu_y^2 = \mu^2 \sin^2(\theta) = \frac{1}{2} \mu^2 (1 - \cos(2\theta)) \quad (1.C.3.2)$$

ainsi que des paramètres réduits définissant les amortissements de l'inversion de population ( $\gamma$ ) et du champ  $E_y$  ( $\kappa$ ) ainsi que le paramètre  $a$ , rapport des fréquences des deux polarisations du champ :

$$\gamma = \frac{2}{\kappa_x \tau_3} \quad (1.C.3.3)$$

$$\kappa = \frac{\kappa_y}{\kappa_x} \quad (1.C.3.4)$$

$$a = \frac{\nu_y}{\nu_x} \quad (1.C.3.5)$$

De nouvelles variables pour les polarisations du champ et l'inversion de population s'obtiennent par la prise en compte de coefficients pondérateurs qui apparaissent dans les équations.

$$\bar{D}_{(\theta,z,t)} = \frac{v_x T_s \mu^2}{8 \hbar \epsilon_0 \kappa_x} D_{(\theta,z,t)} \quad (1.C.3.6)$$

$$E_{i(t)} = \sqrt{\frac{T_s \mu^2}{2 \hbar^2 \gamma \kappa_x}} \mathcal{E}_{i(t)} \quad (1.C.3.7)$$

$$P^0 = \frac{v_x T_s \mu^2}{8 \hbar \epsilon_0 \gamma \kappa_x} \frac{1}{2 \pi N} \int_0^{2\pi} d\theta n(\theta) \left( \sigma + \frac{\rho^{22}(\theta,t)}{\tau_2} \right) \quad (1.C.3.8)$$

où P est le paramètre de pompe. Le modèle est complet, étendu à toute la fibre et les équations font apparaître un couplage entre les composantes orthogonales de polarisation du champ électrique. L'équation de la composante X du champ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + 1 \right) E_{x(\tau)} &= (\alpha_x - i \tilde{\alpha}_x) \frac{1}{2 \pi L} \left\{ \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\theta \bar{D}_{(\theta,z,\tau)} (1 + \cos(2\theta)) E_{x(\tau)} \right. \\ &+ \left. \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\theta \bar{D}_{(\theta,z,\tau)} \sin(2\theta) E_{y(\tau)} g_{y(z)} g_{x(z)}^* \exp \left\{ -i \frac{(v_y - v_x) \tau}{\kappa_x} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (1.C.3.9)$$

qui décrit l'évolution temporelle de  $E_x$ , dépend de  $E_y$ . On peut noter le changement d'échelle de temps, lequel a permis de normaliser à l'unité l'amortissement suivant cette direction de polarisation du champ.

L'équation pour  $E_y$  présente des couplages similaires entre les champs :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \kappa \right) E_{y(\tau)} &= a (\alpha_y - i \tilde{\alpha}_y) \frac{1}{2 \pi L} \left\{ \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\theta \bar{D}_{(\theta,z,\tau)} (1 - \cos(2\theta)) E_{y(\tau)} \right. \\ &+ \left. \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\theta \bar{D}_{(\theta,z,\tau)} \sin(2\theta) E_{x(\tau)} g_{x(z)} g_{y(z)}^* \exp \left\{ i \frac{(v_y - v_x) \tau}{\kappa_x} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (1.C.3.10)$$



Enfin, l'équation des populations réunit les composantes du champ et met en évidence leur interaction avec le milieu actif au cours de l'effet laser :

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma \right) \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\theta \bar{D}_{(\theta,z,t)} &= \gamma P^0 - \\
 \gamma \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\theta \bar{D}_{(\theta,z,\tau)} \left[ \left( \alpha_x (1 + \cos(2\theta)) |E_{x(\tau)}|^2 + \alpha_y (1 - \cos(2\theta)) |E_{y(\tau)}|^2 \right) + \right. \\
 \frac{1}{2} \sin(2\theta) E_{y(\tau)} E_{x(\tau)}^* \left[ (\alpha_x + \alpha_y) + i(\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x) \right] g_{x(z)} g_{y(z)}^* \exp \left\{ i \frac{(v_x - v_y) \tau}{\kappa_x} \right\} + \\
 \left. \frac{1}{2} \sin(2\theta) E_{x(\tau)} E_{y(\tau)}^* \left[ (\alpha_x + \alpha_y) - i(\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x) \right] g_{y(z)} g_{x(z)}^* \exp \left\{ -i \frac{(v_x - v_y) \tau}{\kappa_x} \right\} \right] & \quad (1.C.3.11)
 \end{aligned}$$

Les intégrales sur le volume de la fibre disparaissent lorsqu'on considère un développement de la variable de population en séries de Fourier.

#### 1.C.4.Séries de Fourier.

Un autre moyen de prendre en compte la sommation sur l'espace dans les équations du modèle consiste à remarquer que la présence des  $g_{x,y}(z)$  et des  $\cos(2\theta)$  dans les intégrales sous-entend une décomposition de la variable  $D(z,\theta,\tau)$  en série de termes complexes en  $ikz$  ou réels en  $\cos(2\theta)$ . Si le calcul nécessite de prendre en compte une infinité de termes, l'équation initiale est alors décomposée en une infinité d'équations reliant les différents ordres de la variable décomposée. L'intérêt de cette méthode réside dans le fait que les équations obtenues sont plus simples que l'équation initiale et qu'il est possible de tronquer la série [Zeghlache, 1988].

Comme nous sommes en présence d'une double sommation (sur  $Z$  et  $\theta$ ), un double développement est à envisager. Dans un premier temps, le développement lié à la direction de propagation contient les variables d'ordre  $n$  de la série qui s'écrivent :

$$D_{(\theta,n,\tau)} = \frac{1}{L} \int_0^L dz D_{(\theta,z,\tau)} \exp[-i n (k_y - k_x) z] \quad (1.C.4.1)$$

l'exponentielle de la différence entre les constantes de propagation provenant des termes d'interaction entre les champs électriques via les fonctions  $g_{x(z)}$  et  $g_{y(z)}$  définies par la relation 1.A.1.5.

A l'ordre  $n=0$ , cette variable est réelle et représente la moyenne de l'inversion de population sur la longueur de la fibre. L'ordre  $n=1$  est complexe et traduit l'effet de réseau 'matériel' créé dans la fibre par la propagation de deux champs de fréquences différentes.

Les termes de pompage ne dépendent pas de  $z$ . Leur développement en série de Fourier en  $Z$  se limitera à l'ordre 0. Il n'y aura donc pas de paramètres de pompe dans les équations d'évolution des variables  $D$  d'ordre supérieur ou égal à 1. Ces composantes deviennent négligeables ce qui permet de tronquer le développement. Nos simulations numériques ont confirmé cette approximation. Le développement est limité aux deux premiers termes qui constituent un système fermé.

Pour l'ordre 0 :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma \right) \int_0^{2\pi} d\theta \bar{D}_{(\theta,0,\tau)} &= \gamma P^0 - \\ \gamma \int_0^{2\pi} d\theta \left[ \bar{D}_{(\theta,0,\tau)} \left( \alpha_x (1 + \cos(2\theta)) |E_{x(\tau)}|^2 + \alpha_y (1 - \cos(2\theta)) |E_{y(\tau)}|^2 \right) + \right. \\ \frac{1}{2} \bar{D}_{(\theta,1,\tau)}^* \sin(2\theta) E_{y(\tau)} E_{x(\tau)}^* \left[ (\alpha_x + \alpha_y) + i(\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x) \right] \exp \left\{ i \frac{(v_x - v_y)\tau}{\kappa_x} \right\} + \\ \left. \frac{1}{2} \bar{D}_{(\theta,1,\tau)} \sin(2\theta) E_{x(\tau)} E_{y(\tau)}^* \left[ (\alpha_x + \alpha_y) - i(\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x) \right] \exp \left\{ -i \frac{(v_x - v_y)\tau}{\kappa_x} \right\} \right] & \end{aligned} \quad (1.C.4.2)$$

et pour l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma \right) \int_0^{2\pi} d\theta \bar{D}_{(\theta,1,\tau)} = \\
& -\gamma \int_0^{2\pi} d\theta \left[ \bar{D}_{(\theta,1,\tau)} \left( \alpha_x (1 + \cos(2\theta)) |E_{x(\tau)}|^2 + \alpha_y (1 - \cos(2\theta)) |E_{y(\tau)}|^2 \right) + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \bar{D}_{(\theta,0,\tau)} \sin(2\theta) E_{y(\tau)} E_{x(\tau)}^* \left[ (\alpha_x + \alpha_y) + i(\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x) \right] \exp \left\{ i \frac{(v_x - v_y)\tau}{\kappa_x} \right\} \right]
\end{aligned} \tag{1.C.4.3}$$

Ces deux équations comportent une intégration angulaire pour laquelle la même technique de développement basée sur les harmoniques angulaires va être appliquée. L'ordre 0 de cette série correspond aux termes ne possédant pas de coefficients multiplicateurs dépendant de  $\theta$ , tandis que l'ordre 1 correspond aux termes multiplicateurs de  $\cos(2\theta)$  et  $\sin(2\theta)$ . Ces deux termes sont du même ordre et peuvent être vus comme la partie réelle et la partie imaginaire d'une même variable complexe. Afin de conserver un système fermé et en utilisant les mêmes arguments que pour le développement longitudinal, nous limitons le développement aux deux premiers ordres de la série. Par conséquent, le problème de la double intégrale spatiale de la variable de population se résout par un développement en série comportant trois termes. Le premier est l'ordre 0 du développement en  $z$  et en  $\theta$  :

$$\bar{D}_{(0,0,\tau)} = \frac{1}{2\pi L} \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\theta \bar{D}_{(\theta,z,\tau)} \tag{1.C.4.4}$$

le deuxième est l'ordre 0 en  $z$  et l'ordre 1 en  $\theta$  :

$$\bar{D}_{(1,0,\tau)} = \frac{1}{2\pi L} \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\theta \bar{D}_{(\theta,z,\tau)} \cos(2\theta) \tag{1.C.4.5}$$

le troisième est l'ordre 1 en  $z$  et l'ordre 1 en  $\theta$  :

$$\bar{D}_{(1,1,\tau)} = \frac{1}{2\pi L} \int_0^L \int_0^{2\pi} dz d\theta \bar{D}_{(\theta,z,\tau)} \sin(2\theta) \exp[-i(k_y - k_x)z] \tag{1.C.4.6}$$

Nous obtenons ainsi un système ‘fermé’ de trois variables. Deux de ces variables sont réelles, leurs équations également, tandis qu’une est complexe et peut être décomposée en partie imaginaire et partie réelle. Il n’est pas courant de voir des variables de population complexes mais la prise en compte de la propagation longitudinale de deux champs de longueurs d’onde différentes produit nécessairement un effet spatial sur le milieu actif.

Les équations obtenues ne présentent plus de terme d’intégration. Pour les populations, elles s’écrivent :

Ordre 0.0 :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma \right) \bar{D}_{(0,0,t)} &= \gamma P^0 \\ -\gamma \left( \alpha_x (\bar{D}_{(0,0,t)} + \bar{D}_{(1,0,t)}) |E_{x(\tau)}|^2 + \alpha_y (\bar{D}_{(0,0,t)} - \bar{D}_{(1,0,t)}) |E_{y(\tau)}|^2 \right) - \\ \frac{\gamma}{2} \bar{D}_{(1,1,\tau)}^* E_{y(\tau)} E_{x(\tau)}^* \left[ (\alpha_x + \alpha_y) + i(\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x) \right] \exp \left\{ i \frac{(v_x - v_y)\tau}{\kappa_x} \right\} - \\ \frac{\gamma}{2} \bar{D}_{(1,1,\tau)} E_{x(\tau)} E_{y(\tau)}^* \left[ (\alpha_x + \alpha_y) - i(\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x) \right] \exp \left\{ -i \frac{(v_x - v_y)\tau}{\kappa_x} \right\} \end{aligned} \quad (1.C.4.7)$$

$\bar{D}_{(0,0,t)}$  est le terme prépondérant de l’inversion de population. C’est un terme de source pour les deux champs qu’il amplifie d’une façon équivalente.

Ordre 1.0 :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma \right) \bar{D}_{(1,0,t)} &= \gamma P^1 - \\ \gamma \left( \alpha_x |E_{x(\tau)}|^2 \left( \bar{D}_{(1,0,t)} + \frac{1}{2} \bar{D}_{(0,0,t)} \right) + \alpha_y |E_{y(\tau)}|^2 \left( \bar{D}_{(1,0,t)} - \frac{1}{2} \bar{D}_{(0,0,t)} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.C.4.8)$$

$\bar{D}_{(1,0,t)}$  est un terme d’importance moindre mais il signe la présence des différentes polarisations du champ. Il permet en particulier de

« privilégié » une direction de polarisation par rapport à une autre par l'intermédiaire du paramètre  $P^1$  qui sera explicité plus loin.

Ordre 1.1 :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma\right) \bar{D}_{(1,1,t)} = -\gamma \bar{D}_{(1,1,t)} \left(\alpha_x |E_{x(\tau)}|^2 + \alpha_y |E_{y(\tau)}|^2\right) - \frac{\gamma}{4} \bar{D}_{(0,0,\tau)} E_{y(\tau)} E_{x(\tau)}^* \left[(\alpha_x + \alpha_y) + i(\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x)\right] \exp\left\{i \frac{(v_x - v_y)\tau}{\kappa_x}\right\} \quad (1.C.4.9)$$

$\bar{D}_{(1,1,t)}$  est le terme qui s'annule lorsque le laser fonctionne sur un seul mode (champ polarisé seulement suivant X ou suivant Y). Pour les états stationnaires bimodes, il reste de petite amplitude. En revanche, il joue un rôle fondamental dans la déstabilisation du laser. La structure des deux équations de champ montre que c'est par lui que passe le couplage entre les deux polarisations du laser.

Le champ selon X est régi par :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + 1\right) E_{x(\tau)} = (\alpha_x - i \tilde{\alpha}_x) E_{x(\tau)} \left(\bar{D}_{(0,0,\tau)} + \bar{D}_{(1,0,\tau)}\right) + (\alpha_x - i \tilde{\alpha}_x) E_{y(\tau)} \bar{D}_{(1,1,\tau)}^* \exp\left\{-i \frac{(v_y - v_x)\tau}{\kappa_x}\right\} \quad (1.C.4.10)$$

Il n'y a pas une seule composante de la population contribuant à la polarisation X mais une somme des deux termes  $D_{(0,0,t)}$  et  $D_{(1,0,t)}$ . Cette combinaison additive se retrouve associée au champ X dans les équations (1.C.4.7 et 8).

Le champ selon Y est décrit par :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \kappa\right) E_{y(\tau)} = a(\alpha_y - i \tilde{\alpha}_y) E_{y(\tau)} \left(\bar{D}_{(0,0,\tau)} - \bar{D}_{(1,0,\tau)}\right) + a(\alpha_y - i \tilde{\alpha}_y) E_{x(\tau)} \bar{D}_{(1,1,\tau)} \exp\left\{-i \frac{(v_y - v_x)\tau}{\kappa_x}\right\} \quad (1.C.4.11)$$

Dans cette équation, c'est la différence des deux variables  $\bar{D}_{(0,0,t)}$  et  $\bar{D}_{(1,0,t)}$  qui sert de terme de source pour la composante du champ polarisée selon Y. Cette combinaison soustractive se retrouve également dans les équations de population.

Le paramètre  $P^1$  est un second terme de pompage qui provient de la décomposition en série de Fourier transverse du paramètre  $P^0$ . En effet, si l'on se réfère à la définition que nous avons donnée dans la relation (1.C.3.8),  $P^0$  peut se décomposer en deux termes : un terme constant lié aux populations à l'équilibre thermodynamique et un terme représentant la population du niveau 2 qui lui dépend de l'orientation du moment dipolaire induit au cours de la transition de pompage. En supposant que l'interaction entre le site actif et la matrice de silice est de même nature pour la transition de pompage et celle lasante, nous pouvons appliquer le même raisonnement pour l'orientation et la répartition des moments dipolaires induits. Il apparaît donc que la population du niveau 2 dépend de l'angle entre les moments dipolaires induits et le champ de pompe. C'est cette dépendance en  $\theta$  qui produit la décomposition de  $P^0$  en série de Fourier, l'ordre 0 correspondant à l'intégrale simple :

$$P^0 = \frac{\nu_x T_s \mu^2}{8 \hbar \epsilon_0 \gamma \kappa_x} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \left( \sigma + \frac{\rho^{22}(\theta,t)}{\tau_2} \right)$$

tandis que l'ordre 1 correspond à l'intégrale des coefficients multipliés par  $\cos(2\theta)$  :

$$P^1 = \frac{\nu_x T_s \mu^2}{8 \hbar \epsilon_0 \gamma \kappa_x} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho^{22}(\theta,t)}{\tau_2} \cos(2\theta)$$

Si le champ de pompe est polarisé suivant l'axe propre X de la fibre,  $\rho_{22}$  est proportionnel au carré de  $\cos(\theta)$ , en revanche si ce champ est polarisé suivant Y,  $\rho_{22}$  est proportionnel au carré de  $\sin(\theta)$ . Si le champ est polarisé circulairement, le produit scalaire peut s'écrire de la façon suivante :  $|\cos(\theta) \pm i \sin(\theta)|^2$ . Un calcul des intégrales des expressions de  $P^0$  et  $P^1$  montre qu'en négligeant les populations à l'équilibre thermique, les relations de proportionnalité sont les suivantes :

polarisation du champ de pompe	relation entre les paramètres
X	$P^1 = \frac{P^0}{2}$
Y	$P^1 = -\frac{P^0}{2}$
circulaire	$P^1 = 0$

Notre modèle est ainsi capable de prendre en compte la polarisation de la pompe, laquelle a un effet important sur le comportement du laser comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

### 1.C.5. Formulation simplifiée du modèle.

Il est encore possible de simplifier les équations en intégrant dans l'expression du champ  $E_y$  le terme de modulation temporelle dont la fréquence est égale à la différence des fréquences respectives des deux composantes du champ. Notons  $\delta$  le paramètre suivant :

$$\delta = \frac{v_x - v_y}{\kappa_x} \quad (1.C.5.1)$$

Les variables de population restent inchangées mais les champs s'écrivent :

$$E_x(\tau) = E_x(\tau) \quad (1.C.5.2)$$

$$E_y(\tau) = E_y(\tau) \exp\left[i \frac{v_x - v_y}{\kappa_x} \tau\right] \quad (1.C.5.3)$$

Le modèle prend ainsi sa forme finale :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + 1\right) E_x(\tau) = (\alpha_x - i \tilde{\alpha}_x) \left\{ E_x(\tau) \left( \bar{D}_{(0,0,\tau)} + \bar{D}_{(1,0,\tau)} \right) + E_y(\tau) \bar{D}_{(1,1,\tau)}^* \right\} \quad (1.C.5.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \kappa + i \delta\right) E_{y(\tau)} = a(\alpha_y - i \tilde{\alpha}_y) \left\{ E_{y(\tau)} (\bar{D}_{(0,0,\tau)} - \bar{D}_{(1,0,\tau)}) + E_{x(\tau)} \bar{D}_{(1,1,\tau)} \right\} \quad (1.C.5.5)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma\right) \bar{D}_{(0,0,t)} &= \gamma P^0 - \gamma \alpha_x (\bar{D}_{(0,0,t)} + \bar{D}_{(1,0,t)}) |E_{x(\tau)}|^2 - \\ &\quad \gamma \alpha_y (\bar{D}_{(0,0,t)} - \bar{D}_{(1,0,t)}) |E_{y(\tau)}|^2 - \\ &\quad \frac{\gamma}{2} \bar{D}_{(1,1,\tau)}^* E_{y(\tau)} E_{x(\tau)}^* [(\alpha_x + \alpha_y) + i(\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x)] - \\ &\quad \frac{\gamma}{2} \bar{D}_{(1,1,\tau)} E_{x(\tau)} E_{y(\tau)}^* [(\alpha_x + \alpha_y) - i(\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x)] \end{aligned} \quad (1.C.5.6)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma\right) \bar{D}_{(1,0,t)} &= \gamma P^1 - \\ &\quad \gamma \left( \alpha_x |E_{x(\tau)}|^2 \left( \bar{D}_{(1,0,t)} + \frac{1}{2} \bar{D}_{(0,0,t)} \right) + \alpha_y |E_{y(\tau)}|^2 \left( \bar{D}_{(1,0,t)} - \frac{1}{2} \bar{D}_{(0,0,t)} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.C.5.7)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma\right) \bar{D}_{(1,1,t)} &= -\gamma \bar{D}_{(1,1,t)} (\alpha_x |E_{x(\tau)}|^2 + \alpha_y |E_{y(\tau)}|^2) - \\ &\quad \frac{\gamma}{4} \bar{D}_{(0,0,\tau)} E_{y(\tau)} E_{x(\tau)}^* [(\alpha_x + \alpha_y) + i(\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x)] \end{aligned} \quad (1.C.5.8)$$

Les comportements dynamiques présentés par ce modèle seront étudiés par des méthodes numériques et analytiques, notre but étant de retrouver les comportements expérimentaux observés en laboratoire [Bielawski, 1993] établissant ainsi que les bonnes hypothèses concernant l'origine des non-linéarités ont été formulées. La première étape de cette démarche consiste à déterminer les états stationnaires du laser et sera l'objet du chapitre suivant.



## **2. DEUXIEME CHAPITRE**

**ETUDE DU COMPORTEMENT DU LASER  
A FIBRE DOPEE**

## 2.A. ETUDE DES ETATS STATIONNAIRES MONOMODES.

Les états stationnaires sont les états du système pour lesquels l'intensité émise par le laser est constante. Notre modèle étant développé en champs, les états stationnaires correspondent à des solutions dont l'amplitude est constante dans le temps, mais dont la phase est susceptible d'évoluer à fréquence fixe. Mathématiquement, ces solutions s'obtiennent en annulant les dérivées temporelles des variables de population et des amplitudes des champs, alors que les dérivées temporelles des phases de ces champs sont constantes.

Ce modèle admet mathématiquement 4 solutions stationnaires différentes. Nous allons les présenter successivement en commençant par la solution triviale (les deux champs sont nuls : non fonctionnement du laser). Puis, nous poursuivrons par l'étude des deux solutions stationnaires monomodes (un des deux champs est nul et la lumière émise par le laser est polarisée rectilignement). Enfin, nous terminerons cette section par la solution bimode pour laquelle l'intensité se répartit selon les deux axes transverses de la fibre.

### ***2.A.1.La solution triviale.***

#### ***2.A.1.a.Calcul des valeurs stationnaires.***

Tous les modèles de laser comportent une solution triviale qui correspond à un état de non-fonctionnement du système (laser off) : les champs  $E_x$  et  $E_y$  sont nuls simultanément, la variable  $D_{11}$  l'est également tandis que  $D_{00}$  est égale à  $P^0$  et  $D_{10}$  à  $P^1$ . Cet état existe dans un domaine de paramètres caractérisé par des pompages faibles. Physiquement, ceci signifie que l'on n'apporte pas assez d'énergie au système pour qu'il puisse démarrer : le gain reste inférieur aux pertes.

### **2.A.1.b. Analyse de stabilité linéaire : définition de la méthode.**

Pour déterminer précisément le domaine d'existence de la solution triviale, il faut étudier sa stabilité. Pour cela, il suffit de lui appliquer une perturbation exponentielle et d'en mesurer l'effet. Cette méthode revient à évaluer les valeurs propres de la matrice du système d'équations linéarisées en fonction d'un paramètre significatif du système : le paramètre de bifurcation. Cette matrice est de dimension égale au nombre d'équations réelles du système. Si les valeurs propres ont toutes des parties réelles négatives alors la perturbation est toujours décroissante et la solution est stable puisqu'elle retourne vers l'état d'équilibre d'origine. Si pour un ensemble de valeurs du paramètre de bifurcation, une partie réelle devient positive alors le système se déstabilise car la perturbation devient une croissante. Il quitte son état d'origine pour un autre état. Enfin, si une ou plusieurs valeurs propres complexes conjuguées deviennent imaginaires pures, en ce point de bifurcation, le laser présente un état oscillant d'amplitude nulle et de période égale à la partie imaginaire de la valeur propre [Bergé, 1988].

Pour la solution triviale, la perturbation est choisie sous la forme :

$$E_x(\tau) = \eta \varepsilon_x \exp[i \phi_x(\tau) + \lambda t] \quad (2.A.1.1)$$

$$E_y(\tau) = \eta \varepsilon_y \exp[i \phi_y(\tau) + \lambda t] \quad (2.A.1.2)$$

$$\bar{D}_{00}(\tau) = P^0 + \eta \rho_{00} \exp[\lambda t] \quad (2.A.1.3)$$

$$\bar{D}_{10}(\tau) = P^1 + \eta \rho_{10} \exp[\lambda t] \quad (2.A.1.4)$$

$$\bar{D}_{11}(\tau) = \eta \rho_{11} \exp[\lambda t] \quad (2.A.1.5)$$

$\eta$  est le paramètre de perturbation qui permet la linéarisation des équations. L'ordre 0 du développement correspond à l'état stationnaire (ici la solution triviale) et l'ordre 1 à l'évolution au cours du temps d'une perturbation de type exponentiel. La stabilité de la solution triviale se

détermine en introduisant la perturbation dans le système formé par les équations (1.C.5.4) à (1.C.5.8) et en supposant que :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_x(\tau) = \omega_x \quad (2.A.1.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_y(\tau) = \omega_y \quad (2.A.1.7)$$

**Remarque** : La présence de ces termes de phase dans ce premier calcul a pour but d'harmoniser les développements avec ceux qui viendront par la suite.

### 2.A.1.c. Application à la solution triviale.

Les  $\lambda$  sont les racines du polynôme généré par le déterminant de la matrice des équations linéarisées. Il se présente sous forme de deux mineurs dont le premier est déduit des équations d'inversion de population et s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda + \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (2.A.1.8)$$

Deux valeurs propres sont négatives ( $\lambda = -\gamma$ ) et correspondent donc à des directions stables tandis que la troisième est nulle ( $\lambda = 0$ ) ce qui indique une stabilité marginale. L'autre mineur dérive des équations de champ et s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 + i\omega_x - (\alpha_x - i\tilde{\alpha}_x)(P^0 + P^1) & 0 \\ 0 & \lambda + \kappa + i(\omega_y + \delta) - a(\alpha_y - i\tilde{\alpha}_y)(P^0 - P^1) \end{pmatrix} \quad (2.A.1.9)$$

Ce déterminant admet deux valeurs propres réelles. En séparant partie réelle et partie imaginaire, la première valeur propre s'écrit :

$$\lambda = -1 + \alpha_x(P^0 + P^1) \quad (2.A.1.10)$$

$$\omega_x = -\tilde{\alpha}_x(P^0 + P^1) \quad (2.A.1.11)$$

La solution triviale se déstabilise lorsque  $\lambda$  devient positif vers une solution oscillant à une fréquence que nous pouvons calculer également :

$$P_{cx}^0 + P_{cx}^1 = \frac{1}{\alpha_x} \quad (2.A.1.12)$$

$$\omega_{cx} = -\Delta_x \quad (2.A.1.13)$$

L'indice  $cx$  montre que nous avons déterminé un premier seuil de déstabilisation associé à la direction  $X$ .

Sur la direction  $Y$ , on détermine le seuil de déstabilisation de la solution triviale vers une solution oscillante mais à une fréquence différente :

$$P_{cy}^0 - P_{cy}^1 = \frac{\kappa}{a \alpha_y} \quad (2.A.1.14)$$

$$\omega_{cy} = \kappa \Delta_x - \delta \quad (2.A.1.15)$$

L'indice  $cy$  est relatif au seuil associé à la direction  $Y$ .

L'existence de deux seuils de déstabilisation ne pose pas de problème mais montre que deux solutions différentes peuvent émerger distinctement de la solution triviale. Le laser ne pouvant être dans deux états différents en même temps, l'évolution se fait donc naturellement vers la solution dont le seuil est le plus bas. Le choix s'opère donc essentiellement en fonction de la valeur des paramètres et de la polarisation du champ de pompe (décrite par  $P^1$ ). Du point de vue dynamique, une fois passé ce premier seuil, le second n'est plus validé puisqu'il correspond alors à la déstabilisation d'une solution déjà instable.

L'existence de deux solutions différentes associées chacune à une direction de polarisation correspond en réalité aux deux solutions monomodes susceptibles d'exister indépendamment l'une de l'autre. Ces solutions particulières du modèle font l'objet des deux prochains paragraphes.

### **2.A.2. Le mode fort.**

Du fait des pertes différentes pour les deux directions de polarisation, même à pompage égal (pour un pompage polarisé circulairement) et pour

des paramètres de désaccord en fréquence égaux, puisque  $\kappa > 1$ , le champ  $E_x$  est favorisé par rapport au champ  $E_y$  car celui-ci subit des pertes plus importantes. Ces deux solutions pouvant exister indépendamment l'une de l'autre, nous appelons mode fort (car présentant des pertes plus faibles) la solution monomode polarisée suivant X et mode faible, la solution monomode polarisée suivant Y. Elles présentent l'avantage de s'exprimer analytiquement ce qui nous permet d'étudier leur existence et leur stabilité.

### *2.A.2.a. Intensité stationnaire du mode fort.*

L'intensité stationnaire du mode fort est obtenue lorsque  $E_x$  est constant et  $E_y$  nul). Les expressions des variables s'obtiennent :

$$I_{xs} = \frac{\alpha_x P^0 - 4}{2 \alpha_x} + \frac{1}{2 \alpha_x} \sqrt{(\alpha_x P^0 - 4)^2 + 8(\alpha_x P^0 + \alpha_x P^1 - 1)} \quad (2.A.2.1)$$

$$\omega_{sx} = -\Delta_x \quad (2.A.2.2)$$

$$\bar{D}_{00s} = P^0 - I_{xs} \quad (2.A.2.3)$$

$$\bar{D}_{10s} = \frac{2P^1 - I_{xs}}{2 + \alpha_x I_{xs}} \quad (2.A.2.4)$$

$$\bar{D}_{11s} = 0 \quad (2.A.2.5)$$

L'intensité étant positive et réelle, la condition d'existence du mode fort

s'écrit :  $P_{sx}^0 + P_{sx}^1 \geq \frac{1}{\alpha_x}$  ce qui correspond également au seuil déterminé

au cours du paragraphe 2.A.1.c. Il est intéressant de constater que la polarisation du champ de pompe a un effet non négligeable sur ce seuil puisque ses valeurs sont les suivantes :

polarisation du champ de pompe	seuil d'apparition du mode fort
X	$P_{sx}^0 \geq \frac{2}{3\alpha_x}$
circulaire	$P_{sx}^0 \geq \frac{1}{\alpha_x}$
Y	$P_{sx}^0 \geq \frac{2}{\alpha_x}$

Ces résultats montrent que lorsque le champ de pompe est polarisé suivant X, le laser a plutôt tendance à émettre un champ polarisé suivant X (solution dont le seuil est le plus bas, mais également l'importance des couplages entre les polarisations orthogonales des champs puisque, même avec un champ de pompe polarisé suivant Y, il est possible d'émettre un champ laser polarisé suivant X. Ce comportement est dû principalement à la distribution transverse homogène des moments dipolaires qui favorise le transfert d'une direction sur l'autre.

D'autres calculs, développés sur un modèle à une seule classe de dipôles, ont montré qu'il était impossible de générer un champ laser lorsque le pompage est polarisé perpendiculairement à la direction privilégiée fixée par l'orientation de la classe. Expérimentalement, ce comportement a également été observé dans des lasers construits à partir de milieu cristallin [Hall, 1983].

La fréquence de ce mode correspond également à celle obtenue par la déstabilisation de la solution triviale, ce qui confirme la complémentarité des deux approches.

### ***2.A.2.b. Etude de la stabilité du mode fort.***

Mathématiquement la condition d'existence n'est pas suffisante pour affirmer le fonctionnement du laser selon ce mode. Il est nécessaire d'étudier sa stabilité afin de déterminer le domaine de l'espace des paramètres où ce fonctionnement a effectivement lieu. Pour cela, on

applique la méthode du paragraphe 2.A.1.b au 'mode fort'. Les non-linéarités étant issues de produits entre variables de champs et variables de population, le système d'équations linéarisées se décompose encore en deux mineurs indépendants de dimension (4\*4).

Le premier est constitué par les équations du champ  $E_x$  et les deux variables réelles de population  $D_{00}$  et  $D_{10}$ . Du point de vue physique, il correspond à une perturbation apportée sur le mode fort et s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_x E_{sx} & \alpha_x E_{sx} \\ 0 & 0 & -\tilde{\alpha}_x E_{sx} & -\tilde{\alpha}_x E_{sx} \\ -2 \alpha_x E_{sx} (D_{00s} + D_{10s}) & 0 & -\gamma (1 + \alpha_x E_{sx}^2) & -\gamma \alpha_x E_{sx}^2 \\ -2 \alpha_x E_{sx} \left( D_{10s} + \frac{D_{00s}}{2} \right) & 0 & -\frac{\gamma}{2} \alpha_x E_{sx}^2 & -\gamma (1 + \alpha_x E_{sx}^2) \end{pmatrix} \quad (2.A.2.6)$$

Nous avons étudié les valeurs propres de cette matrice dont une est nulle, et correspond à une direction de stabilité marginale, et les autres sont solutions d'un polynôme. Ces racines ont été analysées numériquement et analytiquement via un calcul perturbatif (avec l'hypothèse  $\gamma \ll 1$ ). Leurs parties réelles sont négatives quel que soit le domaine de l'espace des paramètres étudié et le mode fort ne peut être déstabilisé par ce biais.

Le passage vers une autre solution (stationnaire ou non) peut être réalisé sous l'action du couplage des deux autres variables du modèle, le champ  $E_y$  et la composante de population  $D_{11}$ . Les valeurs propres sont les racines du déterminant de la matrice (2\*2) suivante :

$$\begin{pmatrix} a(\alpha_y - i\tilde{\alpha}_y)(D_{00s} - D_{10s}) - \kappa + i(\delta + \Delta_x) & -\frac{\gamma}{4}[(\alpha_x + \alpha_y) + i(\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x)]E_{sx}D_{00s} \\ a(\alpha_y - i\tilde{\alpha}_y)E_{sx} & -\gamma(1 + \alpha_x E_{sx}^2) \end{pmatrix} \quad (2.A.2.7)$$

Cette matrice est complexe de dimension deux et ne permet pas d'obtenir analytiquement (et dans tous les cas) le signe de la partie réelle de ses valeurs propres. Pour remédier à ce problème, nous avons utilisé la présence du paramètre  $\gamma$  dont la valeur est très faible pour le laser à fibre. Une analyse perturbative basée sur le développement de tous les termes



en puissance de  $\gamma$  permet d'obtenir des résultats analytiques dès l'ordre le plus bas. Nous avons ainsi déterminé une expression approchée du seuil de déstabilisation du mode fort qui est donné par la relation :

$$\alpha_x P^0 + 3 - \sqrt{\Delta} = \frac{\alpha_x}{\frac{a}{\kappa} \alpha_y} \quad (2.A.2.8)$$

où  $\Delta$  représente :

$$\Delta = (\alpha_x P^0 - 4)^2 + 8(\alpha_x P^0 + \alpha_x P^1 - 1) \quad (2.A.2.9)$$

Ce seuil de destabilisation de la solution monomode correspond au passage par 0 de la partie réelle de l'une des deux valeurs propres. Notre système étant décrit par deux variables et leurs complexes conjugués, ce seuil est une bifurcation de Hopf laquelle traduit l'apparition d'une nouvelle fréquence dans le système et donc le passage d'une solution monomode à une solution bimode : le seuil d'apparition correspond à celui de seuil de déstabilisation de la solution monomode. A son émergence, la nouvelle solution est bien caractérisée par la présence simultanée des deux champs car la déstabilisation se fait suivant les variétés associées au champ  $E_y$  (qui était nul) et à la variable  $D_{11}$ .

Les résultats analytiques que nous présentons, issus de calculs perturbatifs ont été effectués en parallèle avec une étude numérique des valeurs propres exactes des déterminants, ce qui a permis de caractériser le lieu d'apparition de la solution bimode dans l'espace des paramètres. Nous présenterons ces résultats au paragraphe 2.A.4, après la détermination de l'autre solution monomode associée à la seconde direction de polarisation.

### **2.A.3.Le mode faible.**

L'inhomogénéité des pertes au sein de la fibre étant arbitrairement défavorable à la direction Y, l'intensité stationnaire délivrée suivant cette direction est plus faible comparativement à celle délivrée selon X (à

paramètres de désaccord en fréquence et pompage égaux). Ceci justifie la dénomination de ‘mode faible’.

D’un point de vue mathématique, les différences entre les deux solutions monomodes restent mineures et l’analyse est similaire aussi bien pour la détermination des seuils que de l’intensité.

### 2.A.3.a. Intensité stationnaire du mode faible.

La solution stationnaire est obtenue en posant le champ  $E_x$  égal à 0 dans les équations (1.C.5.4), (1.C.5.5), (1.C.5.6), (1.C.5.7) et (1.C.5.8) et ses caractéristiques sont les suivantes :

$$I_{ys} = \frac{\frac{a}{\kappa} \alpha_y P^0 - 4}{2 \alpha_y} + \frac{1}{2 \alpha_y} \sqrt{\left(\frac{a}{\kappa} \alpha_y P^0 - 4\right)^2 + 8 \left(\frac{a}{\kappa} \alpha_y P^0 - \frac{a}{\kappa} \alpha_y P^1 - 1\right)} \quad (2.A.3.1)$$

$$\omega_{sy} = \kappa \Delta_y - \delta \quad (2.A.3.2)$$

$$\bar{D}_{00s} = P^0 - \frac{\kappa}{a} I_{ys} \quad (2.A.3.3)$$

$$\bar{D}_{10s} = \frac{2P^1 + \frac{\kappa}{a} I_{ys}}{2 + \alpha_y I_{ys}} \quad (2.A.3.4)$$

$$\bar{D}_{11s} = 0 \quad (2.A.3.5)$$

Cette solution possède un seuil d’existence qui correspond à une intensité réelle et positive. Le seuil d’apparition d’une seconde solution monomode

est donné par la relation :  $P_{sy}^0 - P_{sy}^1 \geq \frac{\kappa}{a \alpha_y}$ . Cette solution correspond

bien au second seuil de déstabilisation de la solution triviale calculé dans le chapitre 2.A.1.c.

Comme précédemment, le seuil est sensible à la polarisation du champ de pompe et en exprimant  $P^1$  en fonction de  $P^0$  dans trois cas particuliers nous obtenons le tableau suivant :

polarisation du champ de pompe	seuil d'apparition du mode fort
Y	$P_{sy}^0 \geq \frac{2}{3} \frac{\kappa}{a \alpha_y}$
circulaire	$P_{sy}^0 \geq \frac{\kappa}{a \alpha_y}$
X	$P_{sy}^0 \geq 2 \frac{\kappa}{a \alpha_y}$

Lorsque le champ de pompe est polarisé suivant Y, il a plutôt tendance à générer un champ polarisé suivant la même direction, mais, dans certaines conditions, il peut générer un champ polarisé suivant la direction perpendiculaire (voir tableau du chapitre 2.A.2.a).

Il en est de même lorsque le champ de pompe est polarisé selon X. Le seuil d'apparition du mode faible est alors plus élevé et le mode fort est dans ce cas la solution « naturelle ». Toutefois, les valeurs des coefficients de désaccord en fréquence peuvent modifier cette compétition entre les deux solutions monomodes.

Nous insistons sur le fait que lorsqu'un des modes fonctionne, l'autre mode est automatiquement éteint. Pour que cette seconde composante apparaisse, un gain suffisant est nécessaire pour déstabiliser la solution monomode et apparaître toutes deux sous forme de solution bimode.

Le comportement similaire à celui du mode fort est également obtenu en étudiant la stabilité du mode faible.

### ***2.A.3.b. Etude de la stabilité du mode faible.***

Une perturbation de type exponentiel de l'état stationnaire est effectuée. Les équations étant relativement symétriques pour les deux champs, nous obtenons de nouveau une matrice (8\*8) décomposable en deux mineurs indépendants. Le premier de dimension 4 associe les équations liant les variables  $E_y$ ,  $D_{00}$  et  $D_{10}$  il s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \alpha_y E_{sy} & -a \alpha_y E_{sy} \\ 0 & 0 & -a \tilde{\alpha}_y E_{sy} & a \tilde{\alpha}_y E_{sy} \\ -2 \alpha_y E_{sy} (D_{00s} - D_{10s}) & 0 & -\gamma (1 + \alpha_y E_{sy}^2) & \gamma \alpha_y E_{sy}^2 \\ -2 \alpha_y E_{sy} \left( D_{10s} - \frac{D_{00s}}{2} \right) & 0 & \frac{\gamma}{2} \alpha_y E_{sy}^2 & -\gamma (1 + \alpha_y E_{sy}^2) \end{pmatrix} \quad (2.A.3.6)$$

Comme pour le mode fort, les valeurs propres de ce système ont toujours des parties réelles négatives quel que soit l'espace des paramètres considéré : toutes les perturbations associées à ces variétés s'atténuent exponentiellement. C'est encore dans l'étude du second mineur qu'une source d'instabilité pour le mode faible peut apparaître. Cette matrice de dimension deux à coefficients complexes associe les équations reliant les variables complexes  $E_x$  et  $D_{11}$ . Elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} (\alpha_x - i\tilde{\alpha}_x)(D_{00s} + D_{10s}) - 1 + i(\kappa\Delta_y - \delta) & -\frac{\gamma}{4}[(\alpha_x + \alpha_y) - i(\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_y)]E_{sy}D_{00s} \\ (\alpha_x - i\tilde{\alpha}_x)E_{sy} & -\gamma(1 + \alpha_y E_{sy}^2) \end{pmatrix} \quad (2.A.3.7)$$

Les calculs analytiques complets ne pouvant être développés, une étude perturbative ( $\gamma < 1$ ) permet de mettre en évidence une bifurcation de Hopf correspondant à l'émergence du champ polarisé suivant X et donc au passage de la solution monomode à la solution bimode. La valeur approchée du seuil de cette bifurcation est donnée par la relation :

$$\alpha_y \frac{a}{\kappa} P^0 + 3 - \sqrt{\Delta} = \frac{a}{\kappa} \alpha_y \quad (2.A.3.8)$$

avec la notation :

$$\Delta = \left( \alpha_y \frac{a}{\kappa} P^0 - 4 \right)^2 + 8 \left( \alpha_y \frac{a}{\kappa} P^0 - \alpha_y \frac{a}{\kappa} P^1 - 1 \right) \quad (2.A.3.9)$$

Ces résultats seront complétés par une étude numérique et comparés à celle directe des exposants de Liapunov des deux solutions monomodes au paragraphe 2.A.4.

Notons avant de clore ce paragraphe quelques cas particuliers suggérés par les analyses précédentes.

Ainsi la mise en évidence des comportements successifs du laser, lorsque le paramètre de pompe augmente, qui lui permet de passer de la solution nulle à une solution monomode puis à celle bimode ainsi que l'étude précise des seuils de déstabilisation de la solution triviale montrent qu'il existe un cas particulier intéressant à étudier : celui où les seuils d'apparition des modes fort et faible sont égaux ce qui se traduit par la présence de deux bifurcations de Hopf situées au même point de l'espace des paramètres. Cette situation est possible lorsque le pompage est polarisé circulairement ( $P^1=0$ ) et les paramètres de désaccord en fréquence vérifient la relation :  $\frac{\alpha_y}{\alpha_x} = \frac{\kappa}{a}$ . Ce point est caractérisé par une dynamique très riche liée à l'apparition simultanée de deux fréquences différentes.

D'une manière générale, la dynamique de la solution bimode sera plus variée pour des pompages circulaires qui sont seuls capables d'exciter suffisamment les deux modes pour que la compétition créée puisse générer une instabilité. Les situations liées à des pompages polarisés suivant X ou Y sont a priori moins susceptibles de générer une richesse de comportement.

#### ***2.A.4.Représentation des domaines d'existence de la solution triviale et des solutions monomodes.***

Les calculs de stabilité ont permis de déterminer quatre seuils différents correspondant chacun à l'apparition d'une solution stationnaire. La dépendance de ces seuils en fonction des paramètres du modèle nécessite une représentation des domaines de l'espace des paramètres dans lesquels existe chaque solution.

Les seuils de déstabilisation de la solution triviale sont simples à représenter. En revanche, pour les seuils d'apparition de la solution bimode, l'étude numérique s'est avérée plus efficace et la plus simple que l'étude analytique. Pour cela, nous avons utilisé les coefficients d'

Liapunov qui régissent la stabilité des solutions monomodes et qui sont solutions du polynôme de degré 2 issu de (2.A.2.7) ou (2.A.3.7). Leur expression complexe est par exemple pour le mode fort :

$$\lambda_{\pm} = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2} \quad (2.A.4.1)$$

avec

$$c_1 = -a(\alpha_y - i\tilde{\alpha}_y)(D_{00s} - D_{10s}) + \kappa + i(\delta + \Delta_x) - \gamma(1 + \alpha_x E_{sx}^2) \quad (2.A.4.2)$$

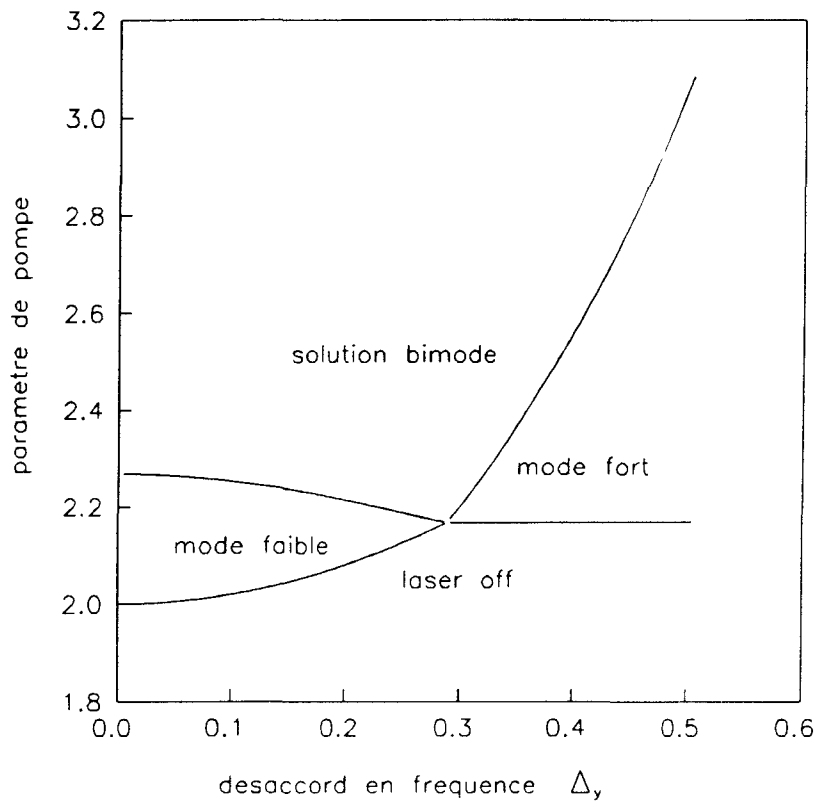
et

$$c_2 = \gamma(1 + \alpha_x E_{sx}^2) \left[ a(\alpha_y - i\tilde{\alpha}_y)(D_{00s} - D_{10s}) + \kappa + i(\delta + \Delta_x) \right] + a(\alpha_y - i\tilde{\alpha}_y) E_{sx} \frac{\gamma}{4} \left[ (\alpha_x + \alpha_y) + i(\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_y) \right] E_{sx} D_{00s} \quad (2.A.4.3)$$

Le programme détermine les zéros du polynôme en utilisant une méthode de Newton. La solution obtenue correspond à la valeur au seuil du paramètre de pompe pour différentes valeurs d'un paramètre. La même opération a été répétée pour les exposants de Liapunov du mode faible, obtenant ainsi des graphiques représentant exactement la position de tous les seuils. Toutefois pour la solution bimode, nous avons déterminé sa condition d'existence pas sa stabilité.

Ce calcul a été effectué pour différentes configurations, avec des pompages polarisés selon X ou Y et en balayant le désaccord en fréquence des deux modes polarisés.

Sur ce premier graphique, nous avons choisi un pompage polarisé suivant X et fait varier le paramètre  $\Delta_y$  :



**Figure 2.A.4.1 :** Domaines d'existence des solutions stationnaires dans un espace  $(P^0, \Delta_y)$ .

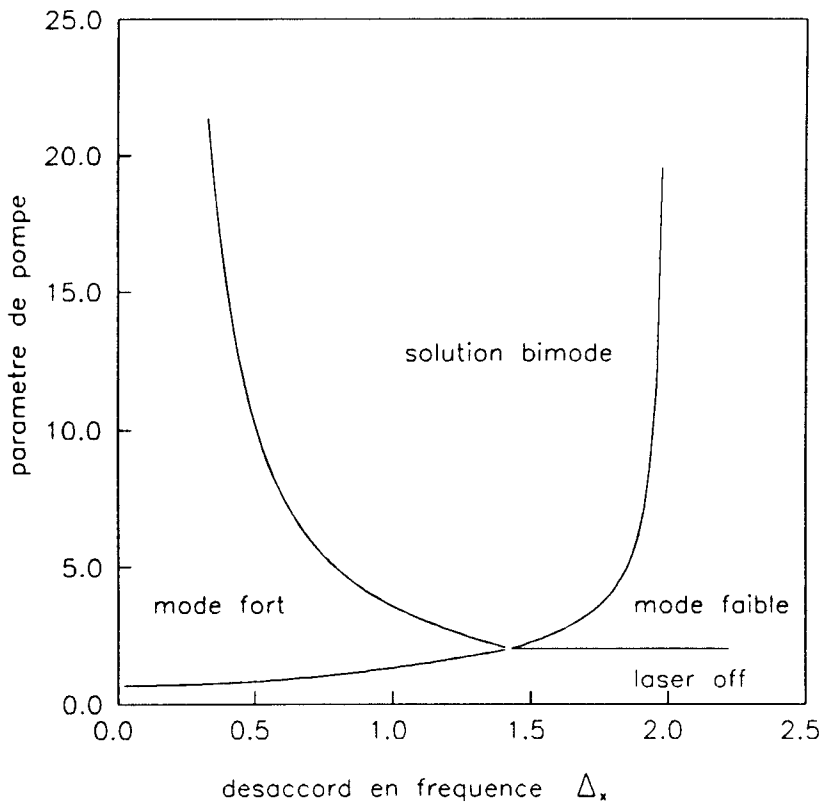
Valeur des paramètres :  $P^1 = P^0/2$ ,  $\Delta_x = 1.5$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\delta = 0.001$ ,  $a = 1$  et  $\gamma = 0.001$

Les courbes obtenues délimitant les domaines de stabilité des solutions s'expliquent comme suit : pour la solution triviale, lorsque la déstabilisation se fait vers le mode fort, c'est à dire lorsque  $\Delta_y$  est supérieur à 0.3, le seuil ne dépend que de  $\Delta_x$  (2.A.1.12). La représentation obtenue est donc une droite puisque ce paramètre est fixe. Au contraire, lorsque la déstabilisation s'effectue vers le mode faible ( $\Delta_y$  inférieur à 0.3), le seuil dépend de  $\Delta_y$ . Cette dépendance est en  $\frac{1}{1 + \Delta_y^2}$  (2.A.1.14). Le

passage des solutions monomodes vers la solution bimode s'explique mathématiquement de manière approchée (2.A.2.8 et 9 ou 2.A.3.8 et 9). Du point de vue de la physique, lorsque le mode faible fonctionne ( $\Delta_y$  inférieur à 0.3), augmenter  $\Delta_y$  favorise sa déstabilisation. Ceci tend à modifier l'efficacité de l'émission stimulée en sa défaveur : ce mode

s'éloigne du centre de la courbe de gain et reçoit moins d'énergie. Le mode fort en profite et le seuil de la bifurcation est abaissé. Ce seuil est d'autant plus bas que  $\Delta_x$  est faible. Pour le mode fort ( $\Delta_y$  supérieur à 0.3), la situation est inversée puisque l'augmentation de  $\Delta_y$  repousse le seuil d'apparition de la solution bimode : le laser oscillant selon le mode fort, l'augmentation de  $\Delta_y$  défavorise le mode faible qui peut de moins en moins venir déstabiliser. Le mode fort est conforté dans sa position de mode dominant.

Ces analyses sont confirmées par un second calcul effectué avec un désaccord en fréquence fixe suivant Y et un balayage du paramètre  $\Delta_x$ .



**Figure 2.A.4.2** : Domaines d'existence des solutions stationnaires dans un espace ( $P^0$ ,  $\Delta_x$ ).

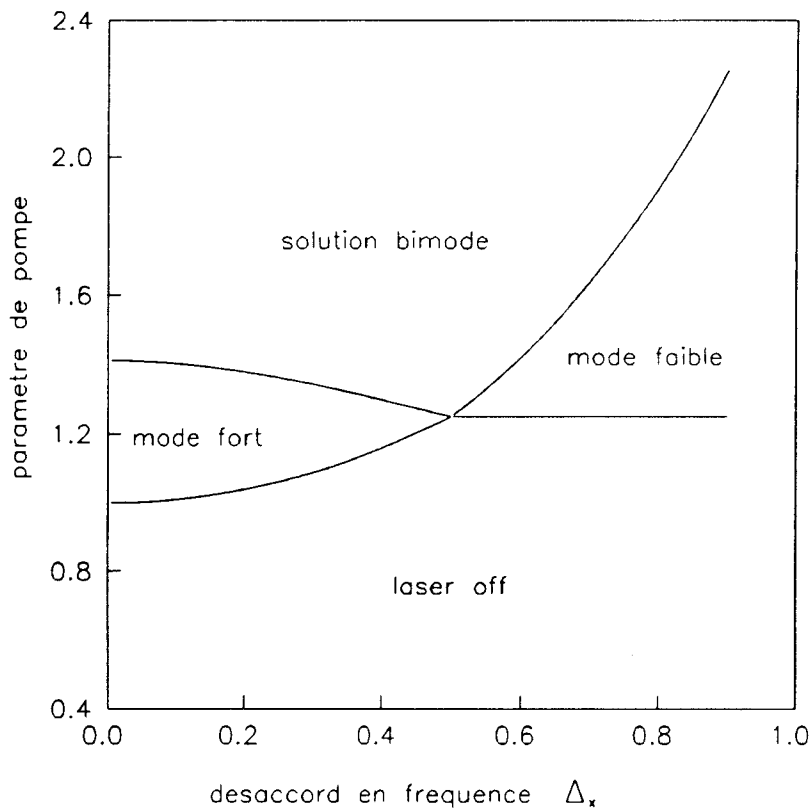
Valeur des paramètres :  $P^1 = P^0/2$ ,  $\Delta_y = 0.5$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\delta = 0.001$ ,  $a = 1$  et  $\gamma = 0.001$

L'interprétation de ces courbes reste identique à celle de la figure précédente. Augmenter le désaccord en fréquence sur le mode présent dans la cavité facilite l'apparition du second mode. A l'opposé, si le désaccord du mode absent est augmenté, le mode présent est favorisé.



Cependant, la valeur de seuil de  $\Delta_x$  entre les deux situations monomodes est plus élevée que dans le cas précédent. La polarisation de la pompe selon X tend à favoriser le mode X d'où la nécessité de le désaccorder très fortement pour permettre l'émergence de l'autre mode.

Cette dépendance des seuils en fonction de la polarisation de la est illustrée par le graphe suivant obtenu pour les mêmes valeurs de paramètres que la Figure 2.A.4.2 mais pour un champ polarisé circulairement.



**Figure 2.A.4.3** : Domaines d'existence des solutions stationnaires dans un espace ( $P^0$ ,  $\Delta_x$ ).

valeur des paramètres :  $P^1=0$ ,  $\Delta_y = 0.5$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\delta = 0.001$ ,  $a = 1$  et  $\gamma = 0.001$

L'effet de la polarisation de la pompe, si elle reproduit le schéma des passages d'une solution stationnaire à l'autre, modifie complètement les échelles des paramètres. En premier lieu, les domaines d'existence des solutions monomodes sont considérablement réduits : le laser a une forte tendance à émettre sur ses deux composantes simultanément. Le passage entre le mode fort et le mode faible a lieu pour des valeurs de paramètres

plus accessibles. Enfin les seuils de déstabilisation de la solution triviale sont modifiés suivant les lois que nous avons présentées dans les études ci-dessus. Ces trois observations sont la conséquence logique d'une meilleure répartition du gain suivant les deux directions de polarisation du champ qui facilite la compétition entre les modes et pourrait générer de nouveaux comportements dynamiques.

## **2.B. ETUDE DE LA SOLUTION STATIONNAIRE BIMODE.**

A l'opposé des solutions monomodes, la solution bimode représente une résolution de système comportant cinq équations à coefficients complexes et d'importantes nonlinéarités. Nous développerons quelques résultats issus de calculs généraux avant de présenter quelques études perturbatives permettant de cerner les caractéristiques de ces solutions dans un espace de paramètres réduit.

### ***2.B.1. Etude analytique exacte.***

Dans la section précédente, au cours de l'analyse de la bifurcation de Hopf déstabilisatrice de la solution monomode, nous avons remarqué qu'une nouvelle fréquence apparaissait ce point critique. En réalité, la dimension du système augmente car deux fréquences supplémentaires (celles de l'inversion complexe' ou de réseau et du nouveau mode faible ) participent à l'évolution du système. Il est décrit par 5 variables réelles et trois fréquences. Parmi celles ci, deux sont liées à la présence des deux champs complexes (les modes associés aux polarisations transverses) et la troisième correspond à la variable de population  $D_{11}$  laquelle modélise l'effet de réseau d'inversion créé par la propagation dans la fibre de deux champs évoluant à des fréquences différentes.

Les fréquences sont liées à des termes de phase qui se regroupent et s'ordonnent toujours de la même façon. On retrouve donc toujours un terme de phase globale résultant de l'addition (ou de la soustraction) des phases individuelles. De plus, pour une solution stationnaire, les intensités délivrées doivent être constantes. Il est donc important que le terme global de phase soit lui aussi constant ce qui impose des relations

entre les fréquences et les phases de  $E_x$ ,  $E_y$  et  $D_{11}$ . Mathématiquement, nous définissons les fréquences des variables complexes comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_{x(\tau)} = \omega_{sx} \quad (2.B.1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_{y(\tau)} = \omega_{sy} \quad (2.B.1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_{d(\tau)} = \omega_{sd} \quad (2.B.1.3)$$

et les conditions de stationnarité suivantes :

$$\omega_{sy} - \omega_{sx} - \omega_{sd} = 0 \quad (2.B.1.4)$$

$$\phi_{sy} - \phi_{sx} - \phi_{sd} = \text{constante} = \phi \quad (2.B.1.5)$$

Ces dernières représentent des conditions d'existence de la solution bimode. La relation entre les fréquences (blocage des fréquences et accord de phase) confirme que le réseau de population est une conséquence de la présence de champs désaccordés et l'existence d'un accord de phase est imposé par les effets nonlinéaires.

A partir de ces relations, il apparait une expression montrant le caractère 'conservatif' de l'intensité totale émise par le laser. Pour cela, nous utilisons l'équation qui régit l'évolution de  $D_{11}$  (équation 1.C.5.8), séparons les parties réelle et imaginaire et au moyen des relations 2.B.1.4 et 2.B.1.5, nous obtenons :

Nous établissons ainsi une relation entre les intensités délivrées suivants les deux directions de polarisation et des paramètres du système :

$$\left(1 + \alpha_x |E_{x(\tau)}|^2 + \alpha_y |E_{y(\tau)}|^2\right) = \frac{\omega_{ds} (\alpha_x + \alpha_y) \cos(\phi) - (\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x) \sin(\phi)}{\gamma (\alpha_x + \alpha_y) \sin(\phi) + (\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x) \cos(\phi)} \quad (2.B.1.6)$$

Les désaccords en fréquence et les pertes sont fixes. Pour un paramètre de pompe donné, la solution stationnaire et la fréquence  $\omega_{ds}$  sont constantes.

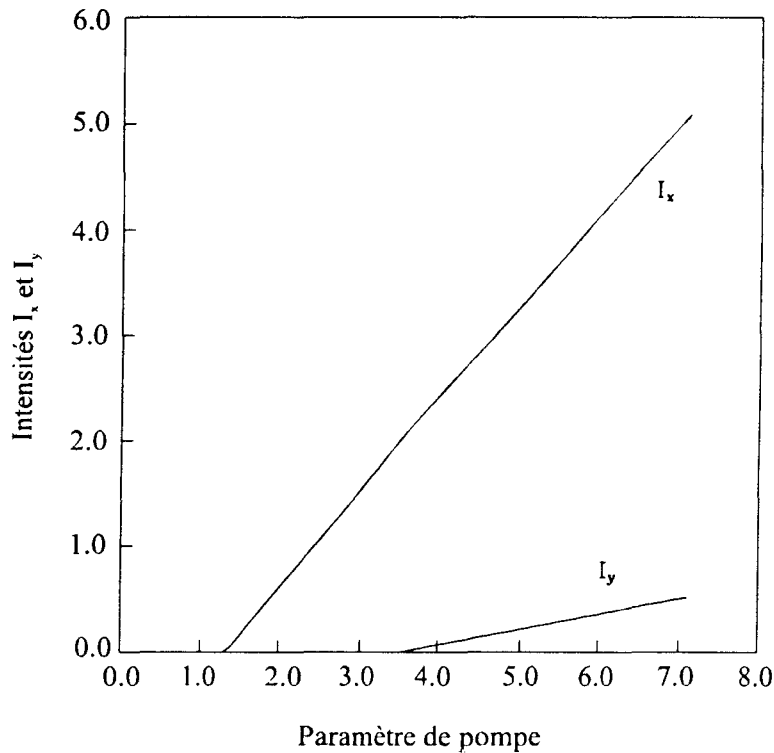
Cette relation montre donc que les amplitudes des champs ne peuvent évoluer indépendamment les unes des autres. Si l'intensité émise selon X augmente, celle émise selon Y doit diminuer et inversement. De plus, lorsque le paramètre de pompe augmente, l'intensité totale croît. D'après la relation (2.B.1.6), la fréquence  $\omega_{ds}$  doit croître également impliquant que les fréquences associées aux deux polarisations du champ s'éloignent l'une de l'autre (notons que pour les solutions monomodes, les fréquences étaient indépendantes du paramètre de pompe).

### ***2.B.2. Diagramme de bifurcation des états stationnaires.***

Ces études analytiques sont confirmées par les études numériques des intensités en fonction du paramètre de pompe. Les simulations ont considéré des conditions initiales correspondant à un laser hors fonctionnement (solution triviale) et en augmentant progressivement le pompage, on décrit tous les états accessibles. Les intensités reportées correspondent à un balayage très lent du paramètre de pompe ce qui laisse le temps au système de rejoindre son état stationnaire.

Le graphique obtenu est un diagramme de bifurcation sur lequel chaque seuil correspond à une bifurcation de Hopf, c'est à dire à l'apparition d'une ou plusieurs nouvelles fréquences.

Nous présentons le résultat d'un calcul réalisé avec des valeurs de paramètres choisies de façon à ce qu'il n'y ait pas d'autre instabilité.



**Figure 2.B.2.1 :** Variation des intensités en fonction du paramètre de pompe

valeur des paramètres :  $\Delta x=0.9$ ,  $\Delta y=0.1$ ,  $\delta=0.0$ ,  $k=1.01$ ,  $\gamma=0.09$  et  $P^1=P^0/2$

La figure 2.B.2.1 montre que le laser démarre lorsque le paramètre de pompe atteint une valeur légèrement supérieure à 1 (valeur théorique 1.20). Au-delà de ce seuil le régime est celui du mode fort dont l'intensité croît linéairement avec le pompage. Un second seuil pour  $P^0$  supérieur à 3.5 (valeur théorique 3.66) permet à la solution bimode de laser : la pente de l'intensité émise selon X décroît alors légèrement du fait de la présence du second champ mais l'intensité totale continue d'augmenter régulièrement. Les valeurs des intensités sont fonction des paramètres de désaccord en fréquence. Pour ce diagramme, nous avons pris  $\Delta x= 0.9$  et  $\Delta y=0.1$  pour permettre l'émergence du champ Y en présence du champ X. La polarisation du champ de pompe joue également un rôle important dans cette répartition comme nous le verrons par la suite.

Le choix d'autres valeurs de paramètres auraient pu produire un autre schéma (solution triviale puis mode faible puis solution bimode), mais

chaque diagramme met en évidence le même phénomène de répartition de l'intensité totale suivant les deux directions de polarisation du champ.

Ce diagramme de bifurcation est en parfait accord avec les expériences de balayage de la puissance de pompe réalisées en laboratoire [Bielawski, 1993]. Cet accord entre théorie et expérience valide en la modélisation proposée et justifie les nombreuses approximations utilisées qui reposent néanmoins sur la prise en compte des propriétés générales du système et des conditions expérimentales.

### ***2.B.3. Etude analytique approchée.***

Les équations de la solution stationnaire bimode sont trop complexes pour aboutir à des expressions analytiques exactes.

Néanmoins et partant des observations de la figure 2.B.2.1, un calcul perturbatif autour du point de bifurcation entre le mode fort et la solution bimode permet de traiter le champ  $E_y$  et la variable  $D_{11}$  comme des perturbations de  $E_x$ ,  $D_{00}$  et  $D_{10}$ . Pour cela, toutes les variables et le paramètre de contrôle sont développés en fonction d'un petit paramètre mesurant l'écart entre la valeur du pompage au point d'application des calculs et au point de bifurcation. Pour des raisons de commodité, nous n'exprimons pas explicitement ce petit coefficient mais indiquons les variables de l'exposant lié à l'ordre du développement.

Pour les amplitudes des variables complexes et les termes réels, nous adoptons les notations suivantes :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{(0)} + \varepsilon_x^{(1)} + \varepsilon_x^{(2)} \quad (2.B.3.1)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^{(1)} \quad (2.B.3.2)$$

$$\bar{D}_{00} = d_{00}^{(0)} + d_{00}^{(1)} + d_{00}^{(2)} \quad (2.B.3.3)$$

$$\bar{D}_{10} = d_{10}^{(0)} + d_{10}^{(1)} + d_{10}^{(2)} \quad (2.B.3.4)$$

$$\bar{D}_{11} = d_{11}^{(1)} \quad (2.B.3.5)$$

et pour les termes de pompage :

$$P_0 = P_0^{(0)} + P_0^{(1)} + P_0^{(2)} \quad (2.B.3.6)$$

$$P_1 = P_1^{(0)} + P_1^{(1)} + P_1^{(2)} \quad (2.B.3.7)$$

Ces développements sont introduits dans les équations stationnaires et chaque ordre est identifié successivement.

### 2.B.3.a. Ordre 0

L'ordre 0 correspond aux expressions du mode fort, le pompage étant égal à sa valeur au seuil d'apparition de la solution bimode.

Les développements s'appliquent également aux termes de phases des variables complexes dont le rôle au cours de ce calcul est prépondérant. A l'ordre 0, seule la fréquence du mode fort est déterminée :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_{x(\tau)}^0 = \omega_{sx}^0 = -\Delta_x. \text{ Les conditions d'existence de la solution bimode}$$

nécessitent que des termes d'ordre 0 des phases du champ  $E_y$  et de la variable  $D_{11}$  soient nuls et qu'ils vérifient les relations :

$$\omega_{sy}^0 - \omega_{sx}^0 - \omega_{sd}^0 = 0 \quad (2.B.3.8)$$

$$\phi_{y(\tau)}^0 - \phi_{x(\tau)}^0 - \phi_{d(\tau)}^0 - = \phi^0 = \text{cste} \quad (2.B.3.9)$$

Remarquons que l'amplitude des variables  $E_y$  et  $D_{11}$  est nulle à la bifurcation alors que leur fréquence respective est non nulle : ce qui correspond bien aux propriétés de la bifurcation de Hopf.

Une autre propriété importante de ce type de bifurcation est que le premier terme de correction des fréquences n'apparaît pas à l'ordre 1 mais à l'ordre 2. Ceci est dû à la forme des nonlinéarités et sera développé et illustré dans la seconde partie de cette thèse consacrée à l'étude des formes normales dans des modèles plus simples. Ces termes d'ordre 2 doivent également vérifier les conditions d'existence de la solution bimode ce qui s'écrit :

$$\omega_{sy}^{(2)} - \omega_{sx}^{(2)} - \omega_{sd}^{(2)} = 0 \quad (2.B.3.10)$$

$$\phi_{y(\tau)}^{(2)} - \phi_{x(\tau)}^{(2)} - \phi_{d(\tau)}^{(2)} - = \phi^{(2)} = \text{cste} \quad (2.B.3.11)$$



L'introduction de ces définitions dans les équations du modèle puis l'identification suivant les ordres du développement permettent de retrouver à l'ordre le plus bas les relations vérifiées par les solutions stationnaires du mode fort. Nous les rappelons rapidement :

$$\mathcal{E}_x^{(0)} = \alpha_x \mathcal{E}_x^{(0)} \left( \mathbf{d}_{00}^{(0)} + \mathbf{d}_{10}^{(0)} \right) \quad (2.B.3.12)$$

$$\mathbf{d}_{00}^{(0)} = \mathbf{P}_0^{(0)} - \alpha_x \mathbf{I}_x^{(0)} \left( \mathbf{d}_{00}^{(0)} + \mathbf{d}_{10}^{(0)} \right) \quad (2.B.3.13)$$

$$\mathbf{d}_{10}^{(0)} = \mathbf{P}_1^{(0)} - \alpha_x \mathbf{I}_x^{(0)} \left( \mathbf{d}_{10}^{(0)} + \frac{\mathbf{d}_{00}^{(0)}}{2} \right) \quad (2.B.3.14)$$

Les solutions détaillées du système ci-dessus sont données par les relations (2.A.2.1) à (2.A.2.5).

### 2.B.3.b. Ordre 1

A l'ordre 1, les expressions font apparaître les premières corrections à l'ordre zéro :

$$\left( i\omega_{sx}^{(0)} + 1 \right) \mathcal{E}_x^{(1)} = \left( \alpha_x - i\tilde{\alpha}_x \right) \left( \mathcal{E}_x^{(1)} \left( \mathbf{d}_{00}^{(0)} + \mathbf{d}_{10}^{(0)} \right) + \mathcal{E}_x^{(0)} \left( \mathbf{d}_{00}^{(1)} + \mathbf{d}_{10}^{(1)} \right) \right) \quad (2.B.3.15)$$

$$\mathbf{d}_{00}^{(1)} = \mathbf{P}_0^{(1)} - \alpha_x \mathbf{I}_x^{(1)} \left( \mathbf{d}_{00}^{(0)} + \mathbf{d}_{10}^{(0)} \right) - \alpha_x \mathbf{I}_x^{(0)} \left( \mathbf{d}_{00}^{(1)} + \mathbf{d}_{10}^{(1)} \right) \quad (2.B.3.16)$$

$$\mathbf{d}_{10}^{(1)} = \mathbf{P}_1^{(1)} - \alpha_x \mathbf{I}_x^{(1)} \left( \mathbf{d}_{10}^{(0)} + \frac{\mathbf{d}_{00}^{(0)}}{2} \right) - \alpha_x \mathbf{I}_x^{(0)} \left( \mathbf{d}_{10}^{(1)} + \frac{\mathbf{d}_{00}^{(1)}}{2} \right) \quad (2.B.3.17)$$

$$\begin{aligned} \left( i\left( \omega_{sy}^{(0)} - \delta \right) + \kappa \right) \mathcal{E}_y^{(1)} = & a \left( \alpha_y - i\tilde{\alpha}_y \right) \left\{ \mathcal{E}_y^{(1)} \left( \mathbf{d}_{00}^{(0)} - \mathbf{d}^{(0)} \right) + \right. \\ & \left. \mathcal{E}_x^{(0)} \mathbf{d}_{11}^{(1)} \left( \cos(\phi^{(0)}) + i \sin(\phi^{(0)}) \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.B.3.18)$$

$$\begin{aligned} \left( i\omega_{sd}^{(0)} + \gamma \right) \mathbf{d}_{11}^{(1)} = & -\gamma \alpha_x \mathbf{I}_x^{(0)} \mathbf{d}_{11}^{(1)} - \\ & \frac{\gamma}{4} \mathbf{d}_{00}^{(0)} \mathcal{E}_x^{(0)} \mathcal{E}_y^{(1)} \left( \cos(\phi^{(0)}) + i \sin(\phi^{(0)}) \right) \left( (\alpha_x + \alpha_y) - i(\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x) \right) \end{aligned}$$

(2.B.3.19)

Les équations (2.B.3.16 à 17) de ce système permettent de déterminer les corrections induites par la présence du deuxième champ sur les solutions stationnaires du mode fort.

$$I_x^{(1)} = \frac{P_1^{(1)} - (1 + \alpha_x I_x^{(0)})P_0^{(1)}}{1 + \alpha_x I_x^{(0)} + \alpha_x (d_{10}^{(0)} + 0.5 d_{00}^{(0)})} \quad (2.B.3.20)$$

$$d_{00}^{(1)} = -d_{10}^{(1)} = P_0^{(1)} - I_x^{(1)} \quad (2.B.3.21)$$

La correction sur l'intensité est négative quelles que soient les valeurs de paramètres utilisées ce qui est en accord avec le caractère conservatif de l'intensité totale et l'analyse numérique de la figure 2.B.2.1 faisant apparaître une baisse de la pente de l'intensité émise selon X. De plus, la correction d'intensité est très sensible à la polarisation du champ de pompe. Elle est maximale lorsque le champ de pompe est polarisé selon Y et minimale lorsqu'il est polarisé selon X.

Les équations (2.B.3.18 et 19) permettent de déterminer la fréquence du second mode et la phase initiale. La séparation des parties réelles et imaginaires et le rapport des différents membres permettent l'élimination des variables  $E_y$  et  $D_{11}$  pour obtenir la relation vérifiée par  $\phi^{(0)}$  :

$$\frac{4 a \alpha_y (d_{00}^{(0)} - d_{10}^{(0)}) - 4 \kappa}{d_{00}^{(0)} \left( (\alpha_x + \alpha_y) \cos(\phi^{(0)}) + (\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x) \sin(\phi^{(0)}) \right)} = \frac{a I_x^{(0)} \left( \alpha_y \cos(\phi^{(0)}) + \tilde{\alpha}_y \sin(\phi^{(0)}) \right)}{1 + \alpha_x I_x^{(0)}} \quad (2.B.3.22)$$

La fréquence de la variable  $D_{11}$  et celle du champ  $E_y$  sont déterminées à l'aide de la relation :

$$\omega_{sd}^{(0)} = \omega_{sy}^{(0)} + \Delta_x = (1 + \alpha_x I_x^{(0)}) \frac{(\alpha_x + \alpha_y) \sin(\phi^{(0)}) - (\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x) \cos(\phi^{(0)})}{(\alpha_x + \alpha_y) \cos(\phi^{(0)}) + (\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x) \sin(\phi^{(0)})} \quad (2.B.3.23)$$

Il est également possible d'extraire de ces deux équations une l'expression analytique du seuil de la solution bimode, constituée d'une relation polynomiale entre les composantes à l'ordre 0 des variables  $E_x$ ,  $D_{00}$ ,  $D_{10}$  et

les différents paramètres du système. Cette relation n'est pas directement exploitable et nécessite un traitement numérique.

### 2.B.3.c. Ordre 2

Nous ne présentons que les corrections à l'ordre deux des variables  $E_x$ ,  $D_{00}$  et  $D_{10}$  :

$$\begin{aligned} \left(i\omega_{sx}^{(0)} + 1\right)\varepsilon_x^{(2)} + i\omega_{sx}^{(2)}\varepsilon_x^{(0)} &= (\alpha_x - i\tilde{\alpha}_x)\left\{\varepsilon_x^{(2)}\left(d_{00}^{(0)} + d_{10}^{(0)}\right) + \varepsilon_x^{(1)}\left(d_{00}^{(1)} + d_{10}^{(1)}\right) + \right. \\ &\quad \left.\varepsilon_x^{(1)}\left(d_{00}^{(1)} + d_{10}^{(1)}\right) + d_{11}^{(1)}\varepsilon_y^{(1)}\left(\cos(\phi^{(0)}) + i\sin(\phi^{(0)})\right)\right\} \end{aligned} \quad (2.B.3.24)$$

$$\begin{aligned} d_{00}^{(2)} &= P_0^{(2)} - \alpha_x I_x^{(2)}\left(d_{00}^{(0)} + d_{10}^{(0)}\right) - \alpha_x I_x^{(1)}\left(d_{00}^{(1)} + d_{10}^{(1)}\right) - \\ &\alpha_x I_x^{(0)}\left(d_{00}^{(2)} + d_{10}^{(2)}\right) - d_{11}^{(1)}\varepsilon_y^{(1)}\varepsilon_x^{(0)}\left(\left(\alpha_x + \alpha_y\right)\cos(\phi^{(0)}) + \left(\tilde{\alpha}_y - \tilde{\alpha}_x\right)\sin(\phi^{(0)})\right) \end{aligned} \quad (2.B.3.25)$$

$$\begin{aligned} d_{10}^{(2)} &= P_1^{(2)} - \alpha_x I_x^{(2)}\left(d_{10}^{(0)} + \frac{d_{00}^{(0)}}{2}\right) - \alpha_x I_x^{(1)}\left(d_{10}^{(1)} + \frac{d_{00}^{(1)}}{2}\right) - \\ &\alpha_x I_x^{(0)}\left(d_{10}^{(2)} + \frac{d_{00}^{(2)}}{2}\right) - \alpha_x I_y^{(2)}\left(d_{10}^{(0)} - \frac{d_{00}^{(0)}}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.B.3.26)$$

Par définition, les intensités correspondent aux modules au carré des variables complexes. Par conséquent, les termes d'ordre 2 des intensités sont à relier aux définitions données au début du chapitre 5 C. Par exemple, l'ordre deux de l'intensité suivant Y n'est en fait que le carré de l'ordre 1 du champ  $E_y$ .

Les équations à l'ordre 2 font apparaître pour la première fois une correction de la fréquence du champ polarisé selon X. Ceci caractérise la présence d'une nouvelle échelle de temps issue de la bifurcation et qui rend possible la séparation des processus lents (dont la dynamique est

propre au type de bifurcation rencontrée) des processus rapides (dont les temps caractéristiques sont liés au système physique).

Un développement plus complet des calculs ci-dessus permettrait d'exprimer toutes les variables du système au premiers ordres et de rassembler les équations pour obtenir une équation (vectorielle) s'apparentant à la forme normale de la bifurcation. Cette dernière permettrait alors de calculer la solution bimode, de déterminer ses conditions d'existence dans l'espace des paramètres. Il serait ensuite possible de procéder à la reconstruction complète de cette solution autour du point de bifurcation et d'en déduire sa stabilité. Mais la correction en fréquence s'exprime au moyen d'ordre supérieur des corrections liées aux autres variables complexes et surtout la présence du terme de phase  $\phi^0$  produit des expressions difficilement exploitables. Néanmoins, nous présenterons dans la seconde partie de cette thèse un calcul de forme normale entièrement développé sur la base du modèle de Bloch Maxwell.

L'intérêt de ces calculs est de montrer que la solution stationnaire bimode naît de la destabilisation de la solution monomode et qu'il est même possible de déterminer les premières corrections sur le mode fort. Par contre, la stabilité de cette solution ainsi que la forme des solutions qui peuvent apparaître au voisinage de la bifurcation ne sont pas accessibles. Nous allons donc procéder à l'étude numérique du modèle pour confirmer les calculs analytiques effectués et déduire les nombreuses informations qu'il contient et qui ne sont pas accessibles au calcul analytique. Dans le paragraphe suivant, nous aborderons le cas où le comportement du laser est caractérisé par les seules solutions stationnaires monomodes et bimode.

#### ***2.B.4. Restabilisation vers les solutions monomodes.***

La stabilité de la solution bimode n'étant pas déterminée, il est impossible d'établir les domaines de l'espace des paramètres où cette solution oscille. Une situation particulière pour laquelle la destabilisation a lieu non pas

vers un état périodique ou quasi-périodique mais vers une solution monomode est apparue lors de l'évaluation des coefficients de Liapunov des solutions monomodes.

Cette situation est appréhendée dans les deux diagrammes suivants qui représentent la pompe de seuil en fonction des désaccords en fréquence.

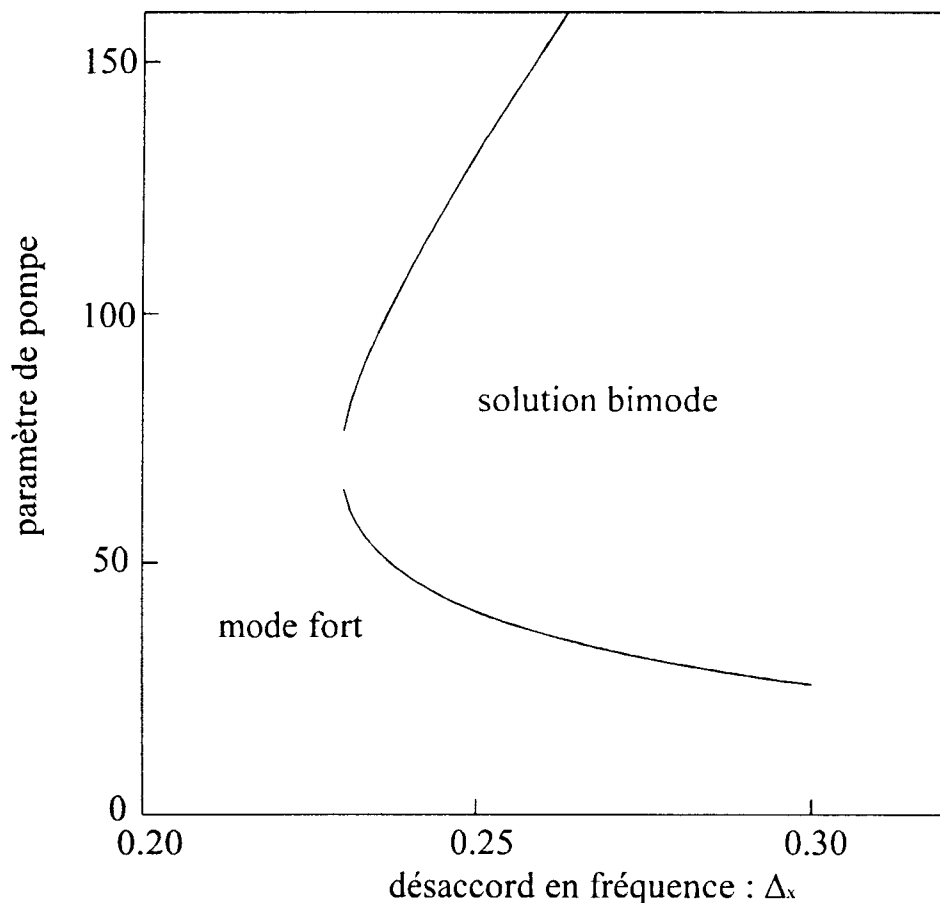


figure 2.B.4.1 : diagramme de restabilisation du mode fort pour un balayage de  $\Delta x$ .

valeurs des paramètres :  $P^1=P^0/2$ ,  $\Delta y=0.1$ ,  $\delta=0.0$ ,  $\kappa=1.0$ ,  $\gamma=0.001$

Quand la pompe augmente, les autres paramètres étant maintenus constants, la partie réelle du coefficient de Lyapounov devient positive au seuil d'apparition de la solution bimode et pour une valeur extrême de la pompe, redevient négative. Le laser oscille de façon monomode. Ce retour à la stabilité de la solution monomode peut signifier une déstabilisation de la solution bimode. Sur les figures 2.B.4.1 et 2.B.4.2 sont représentés les domaines d'existence de la solution bimode en fonction des désaccords en

fréquence du mode X ou Y : pour un désaccord supérieur à 0.23, le laser traverse le domaine d'existence et pas forcément de stabilité de la solution bimode.

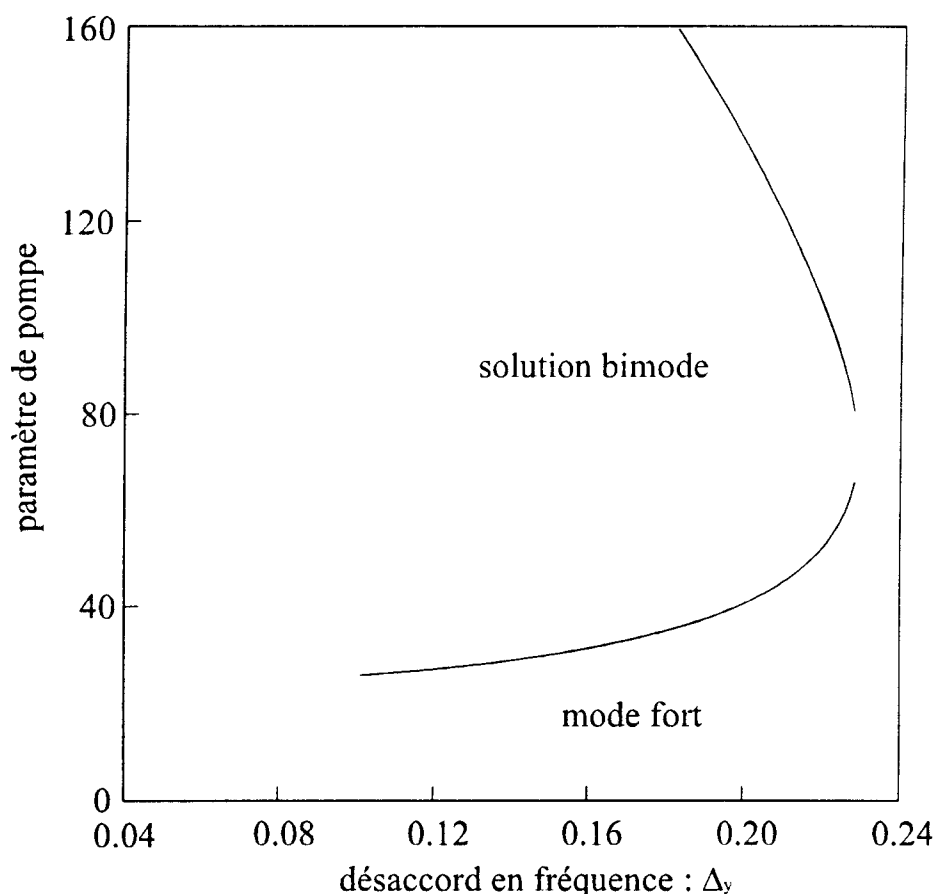


figure 2.B.4.2 : diagramme de restabilisation du mode fort pour un balayage de  $\Delta_y$ .

valeurs des paramètres :  $P^1=P^0/2, \Delta x=0.3, \delta=0.0, \kappa=1.0, \gamma=0.001$

La courbe obtenue dans le second cas est similaire. Le lobe est simplement inversé par rapport à la situation précédente. On remarque que pour un désaccord en fréquence du mode Y supérieur à 0.23, le mode fort est stable et qu'il ne peut subir une déstabilisation vers une oscillation bimode. Ceci est dû principalement à la polarisation du champ de pompe qui ne facilite pas l'émergence du second mode. Cette situation s'observe également sur la figure 2.B.41 mais dans ce cas nous obtenons

une limite inférieure pour le désaccord en fréquence du mode X. Le trait vertical en pointillé correspond à un trajet à travers l'espace des paramètres que nous avons effectué par intégration directe et que nous représentons sur la figure 2.B.4.3.

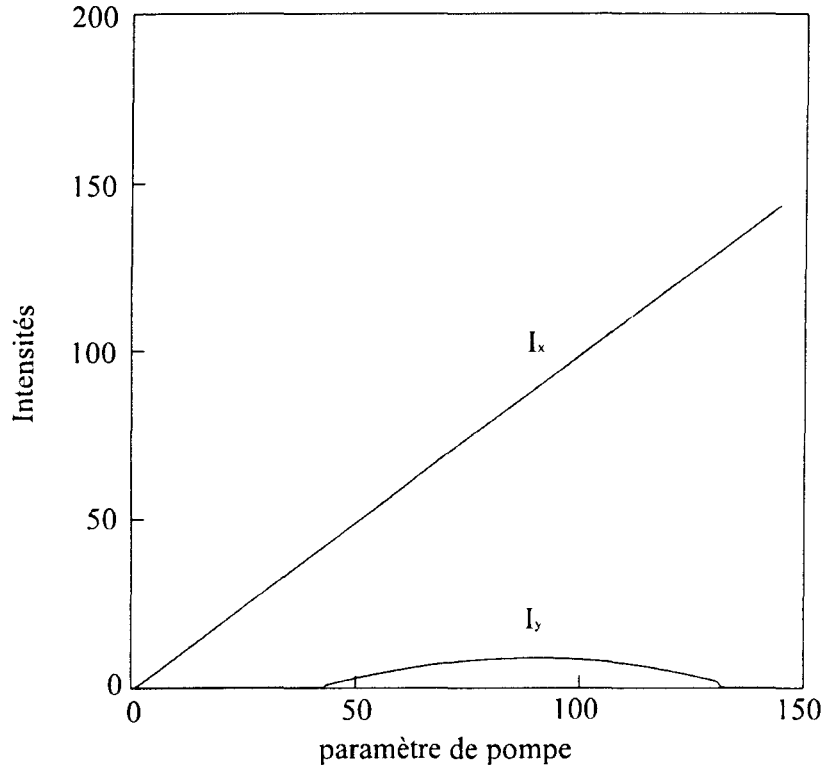


figure 2.B.4.3 : Diagramme de restabilisation du mode fort.

Valeur des paramètres :  $P^1 = P^0/2$ ,  $\Delta x = 0.3$ ,  $\Delta y = 0.2$ ,  $\delta = 0.001$ ,  $a = \kappa = 1.0$  et  $\gamma = 0.001$ .

L'intensité suivant Y est multipliée par 30

Les intersections de ce trait avec les courbes pleines donne les seuils d'apparition et de disparition de la solution bimode.

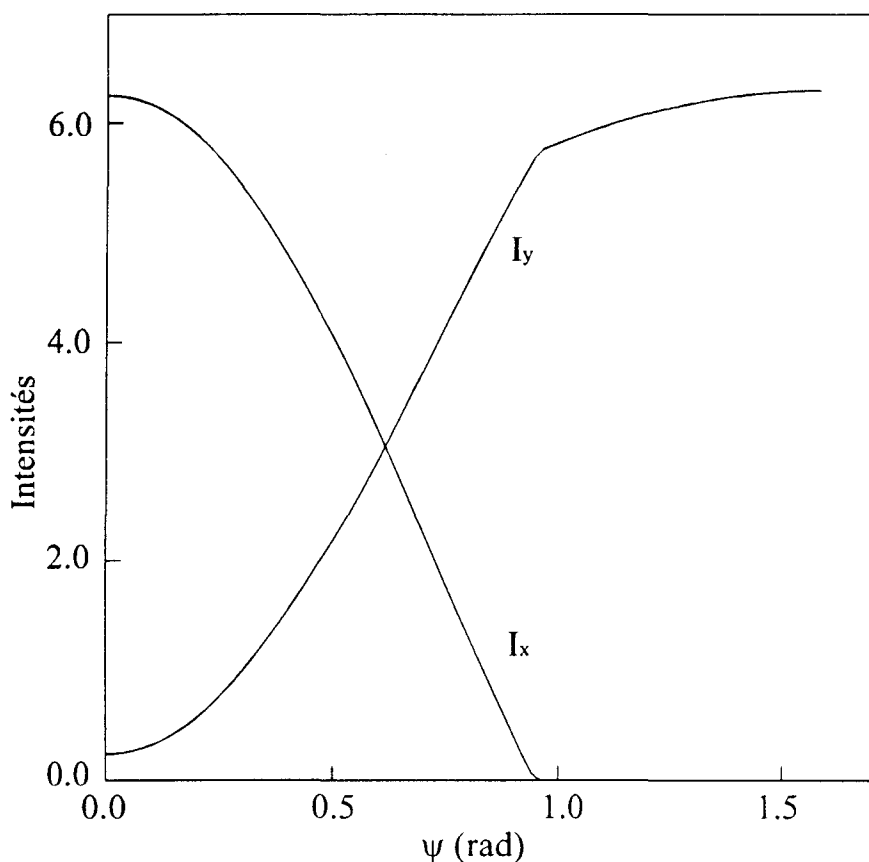
Les valeurs obtenues par le calcul des exposants de Liapunov sont parfaitement vérifiées par l'intégration numérique directe du modèle. A la première intersection de la figure 2.B.4.2 correspond bien le démarrage de la solution bimode. Passé ce point, le laser délivre une intensité également selon Y laquelle est si faible qu'il est impossible d'observer la moindre variation de la pente de  $I_x$ . L'intensité  $I_y$  ne croit pas linéairement avec le paramètre de pompe mais suit une parabole qui repasse par 0 au niveau

de la deuxième intersection représentée sur la figure 2.B.4.2. Il est intéressant de constater que cette intensité peut décroître alors que le paramètre de pompe croit, ce qui vient renforcer le caractère dominant du mode fort dû essentiellement à la polarisation du pompage. Ce basculement a lieu car le poids ( $\alpha_y$ ) de l'intensité selon Y et les non linéarités dues au réseau ne suffisent plus à maintenir  $I_y$  lorsque le pompage est trop élevé. Contrairement aux analyses précédentes, ces calculs font appel à des valeurs du paramètre de pompe totalement inaccessibles expérimentalement et qui sont en désaccord avec certaines approximations introduites au cours de la modélisation, la restabilisation de l'oscillation monomode ayant lieu pour des pompages trop élevés. Ils permettent néanmoins de vérifier la validité des approches numérique et analytique.

### ***2.B.5. Influence de la polarisation du champ de pompe.***

Dans ce paragraphe, nous revenons à une étude en relation avec les comportements observés expérimentalement [Bielawski, 1993] [Leners, 1994]. Au cours de l'étude des états stationnaires, nous avons souligné l'influence de la polarisation du champ de pompe sur les seuils d'apparition des modes fort et faible. Notre conclusion était qu'un pompage polarisé suivant une direction particulière favorisait l'émission laser selon cette direction. Nous allons généraliser cette approche en nous intéressant au comportement de la solution bimode. Pour cela, nous introduisons un nouveau paramètre noté  $\psi$  qui mesure l'angle entre la direction de polarisation du champ de pompe et l'axe propre X de la fibre. L'étude numérique des états stationnaires permet de mettre en évidence les variations de la répartition des intensités émises selon les deux directions de polarisation et ce, en fonction de  $\psi$ .





**Figure 2.B.5.1** : Variation des intensités en fonction de l'angle de polarisation du champ

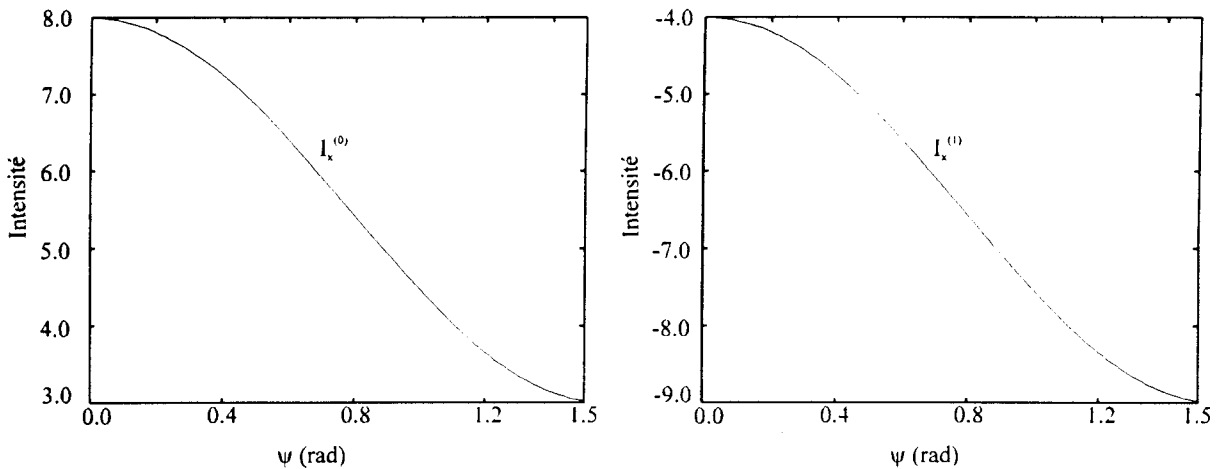
de pompe. Valeur des paramètres :  $P^0=8.0$ ,  $\Delta x=0.9$ ,  $\Delta y=0.1$ ,  $\delta=0.0$ ,  $a=0.9$ ,  $\kappa=1.0$  et  $\gamma=0.09$

Nous observons sur cette figure le comportement prévu par les analyses précédentes. Lorsque l'angle  $\psi$  est voisin de 0, le champ de pompe est polarisé suivant X et le laser émet principalement suivant cette direction. La rotation de  $E_p$  vers l'axe Y autorise une meilleure répartition du gain suivant les deux directions de polarisation ce qui favorise  $I_y$  aux dépens de  $I_x$ . Dans le cas particulier de la figure 11, le champ  $E_x$  va même jusqu'à s'éteindre complètement lorsque  $\psi$  s'approche de  $\pi/2$ .

Si nous ne pouvons pas proposer de solutions analytiques (bimodes) exactes capables de reproduire ce comportement, les calculs perturbatifs présentés au chapitre 2.B.3.b donne des résultats partiels significatifs.

Au voisinage du seuil de la bifurcation du mode fort vers la solution bimode, l'étude perturbative permet de décomposer l'intensité émise suivant X en une somme infinie de termes. L'ordre 0 correspond au mode

fort tandis que l'ordre 1 est l'expression de la correction à l'ordre le plus bas. Connaissant leurs expressions analytiques, nous pouvons étudier l'influence de la rotation du pompage sur leur valeur et vérifier ainsi la validité de nos calculs. Sur les graphiques suivant, nous représentons ces deux termes pour des valeurs de paramètres arbitraires. L'échelle en ordonnée de  $I_x^{(1)}$  est à multiplier par le petit paramètre utilisé au cours du calcul perturbatif.



**Figure 2.B.5.2 :** influence de la rotation du champ de pompe sur l'intensité  $I_x$  Résultat obtenu

à partir du calcul analytique. Valeurs des paramètres arbitraires.

Ces résultats analytiques mettent en évidence le même comportement que celui observé numériquement. L'accord entre ces deux études est qualitatif. Les courbes représentatives de l'intensité émise selon Y peuvent être déduites des précédentes grâce à la relation de conservation de l'intensité totale. On peut facilement deviner que leur forme correspond bien à celle représentée sur la figure 2.B.5.1.

Cette dernière étude constitue une validation de plus pour l'approche choisie pour décrire le laser à fibre. Ainsi la modélisation du pompage optique produit des résultats en parfait accord avec ceux obtenus expérimentalement et qui montrent encore le rôle fondamental des inversions de population dans la répartition du gain suivant les directions de polarisation du champ.

Après l'étude des états stationnaires, nous abordons un chapitre consacré à la présentation des différents types de comportement observés numériquement et inaccessibles au calcul.

## 2.C. SOLUTIONS INSTABLES.

L'étude des états instables (dans le sens non stationnaires) du laser est entièrement basée sur des simulations numériques. Notre système ne comporte que des dérivées ordinaires du premier ordre ce qui rend son intégration relativement simple. Ces calculs sont réalisés sur les stations de travail du LSH. Ils font appel à un algorithme développé à partir d'une méthode d'extrapolation à pas variable basée sur la méthode de Runge Kutta. La précision est en général de l'ordre de  $10^{-7}$  à  $10^{-9}$  pour chaque variable ce qui assure la validité des résultats que nous allons présenter.

### ***2.C.1.Choix de domaine de paramètres.***

Tous les paramètres définis au cours de la modélisation ont un sens physique et donc une valeur précise fixée par les conditions expérimentales. Cette valeur est susceptible de varier plus ou moins suivant les caractéristiques de la situation que l'on souhaite étudier. La liberté est grande pour la valeur des paramètres de désaccord en fréquence qui peuvent être ajustés expérimentalement en modifiant la longueur de cavité. De même et bien qu'à priori proches les uns des autres, les coefficients de réflexion peuvent varier sur un domaine suffisamment étendu et de façon totalement arbitraire. Inversement, les paramètres liés à l'ion Néodyme, en particulier les termes d'amortissement des populations et de la polarisation atomique ne peuvent varier que dans un domaine de valeurs très restreint. Seules des variations importantes de la température peuvent justifier un changement important de leur valeur. Depuis le début de notre étude, nous supposons que l'élargissement atomique en fréquence est homogène ce qui signifie que la variation du gain avec la fréquence est décrite par une lorentzienne de largeur à mi-hauteur égale à  $\gamma_L$ . Dans le cas d'un laser à fibre, une telle approximation ne peut être justifiée que lorsque le nombre de modes longitudinaux

observés à la sortie de laser est petit. Or expérimentalement, une centaine de mode au moins oscillent sur chaque direction de polarisation. L'élargissement homogène ne permet pas de représenter de telles situations car la courbe de gain est trop étroite. De plus, reprendre un modèle incluant un élargissement inhomogène et ré-effectuer tous les calculs peut modifier quantitativement les résultats mais pas forcément qualitativement. Nous simulerons l'oscillation d'un grand nombre de modes par des valeurs de désaccords en fréquence suffisamment élevées tel que la fréquence centrale du mode peut se trouver à 2 ou 3  $\gamma_{\perp}$  de la fréquence centrale de la courbe de gain. Cette approximation est couramment employée en physique des semi conducteurs et se traduit par l'introduction d'un coefficient de Henry traduisant la diffusion et la mobilité des porteurs de charges dans la bande de conduction. Ce coefficient, assimilé à un terme de désaccord en fréquence, prend souvent des valeurs élevées. Nous pouvons ainsi utiliser des valeurs pour  $\Delta_x$  et  $\Delta_y$  relativement élevées (allant jusque 3 ou 4) et par là même faire varier le paramètre « a » ( $= v_y/v_x$ ) dans un domaine plus large (a compris entre 0.7 et 1.3). Le paramètre  $\delta$  peut également prendre des valeurs variées mais nous n'avons pas précisément analysé son influence.

## ***2.C.2.Simulations numériques.***

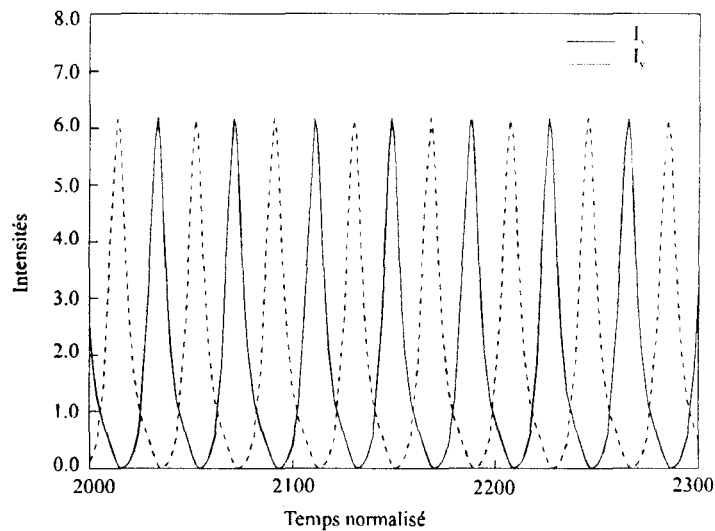
### ***2.C.2.a.Choix de la polarisation du champ de pompe.***

Les études présentées au paragraphe II-2.D montrent que lorsque le champ de pompe est polarisé selon X ou Y, la solution bimode est extrêmement stable et qu'elle ne disparaît que pour des paramètres de pompe très élevés au profit de la solution monomode dont elle est issue, laquelle est stable également. Pour observer un comportement instable du laser, il est nécessaire de favoriser la compétition entre les deux modes ce qui nécessite une meilleure répartition du gain suivant les deux directions de polarisation. Cette condition est remplie lorsque la polarisation du

champ de pompe est circulaire :  $P^1$  est nul dans toutes les simulations numériques présentées.

### 2.C.2.b. Comportements observés.

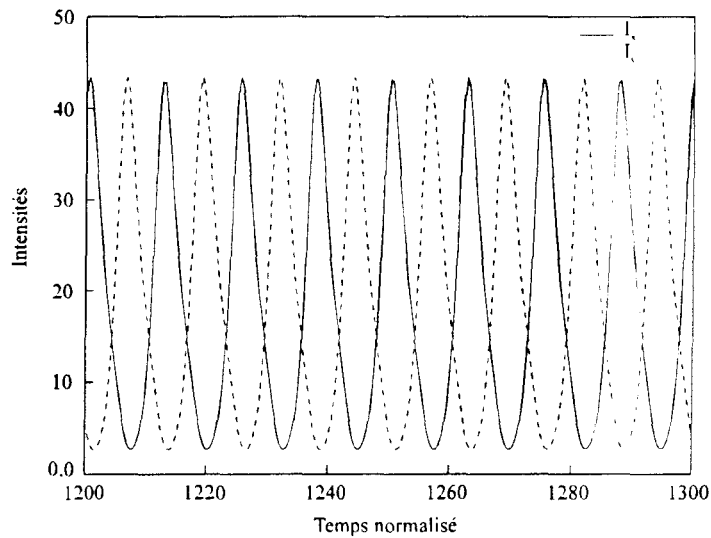
Le modèle présente une très grande diversité de comportements dans l'espace des paramètres. Le plus communément observé apparaît juste au-dessus de seuil de déstabilisation de la solution stationnaire monomode ou juste au delà de l'oscillation stationnaire bimode. Il correspond à un fonctionnement en opposition de phase des deux intensités  $I_x$  et  $I_y$  : les deux modes sont en compétition. Les oscillations sont T-périodiques et la génération de grands pulses à un système « Q-switché », signe d'existence d'échelles de temps dans un rapport non négligeable.



**Figure 2.C.2.1** : évolution temporelle des intensités  $I_x$  et  $I_y$

valeurs de paramètres :  $P^0=5$ ,  $\Delta x=\Delta y=0.6$ ,  $\delta=0.0$ ,  $\kappa=a=1.0$ ,  $\gamma=0.01$

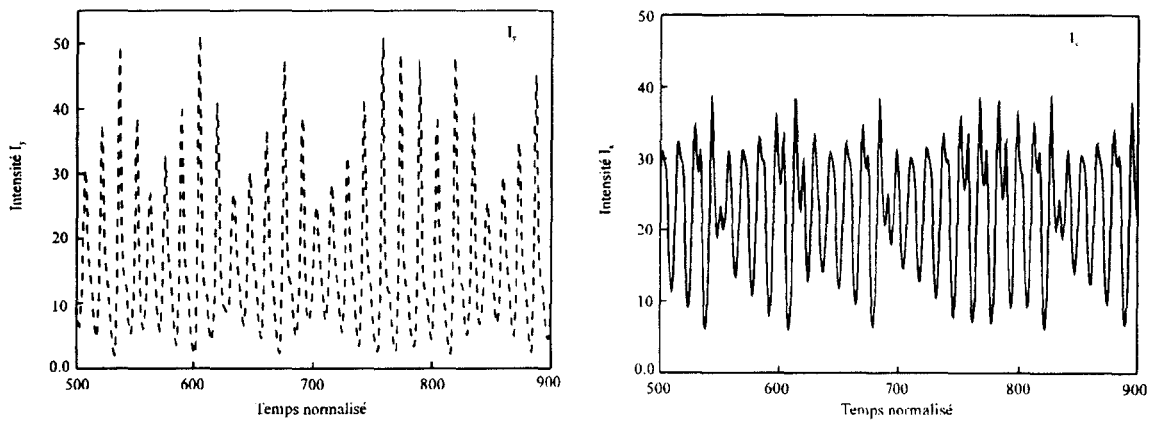
Lorsque le taux de pompe est augmenté, on observe un défilement des comportements du système mettant en jeu les deux polarisations du champ.



**Figure 2.C.2.2 :** évolution temporelle des intensités  $I_x$  et  $I_y$

valeurs de paramètres :  $P^0=38$ ,  $\Delta x=\Delta y=0.6$ ,  $\delta=0.0$ ,  $\kappa=a=1.0$ ,  $\gamma=0.01$

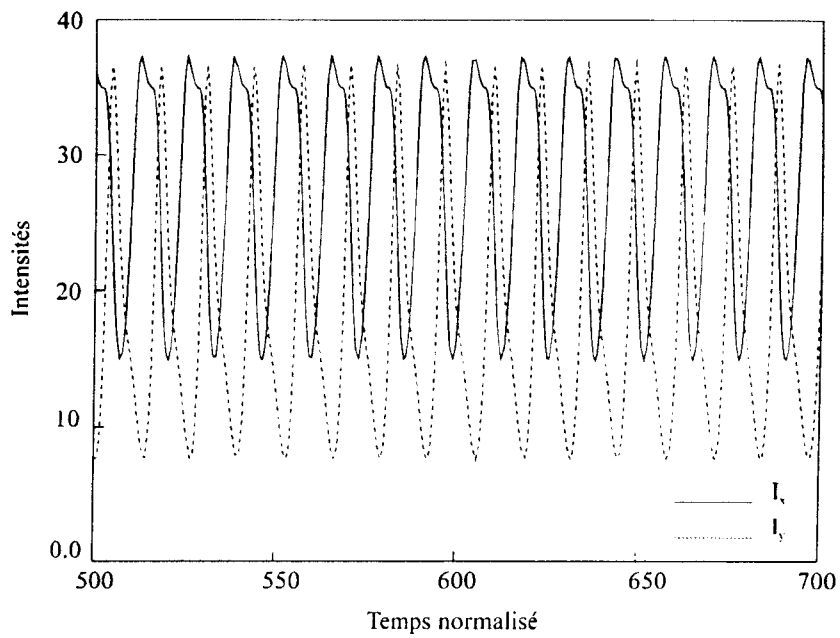
Régulier d'abord (figures 2.C.2.1, 2.C.2.2), on observe ensuite une dynamique chaotique sur les deux polarisations du champ (figure 2.C.2.3).



**Figure 2.C.2.3 :** évolution temporelle des intensités  $I_x$  et  $I_y$

valeurs de paramètres :  $P^0=40$ ,  $\Delta x=\Delta y=0.6$ ,  $\delta=0.0$ ,  $\kappa=a=1.0$ ,  $\gamma=0.01$

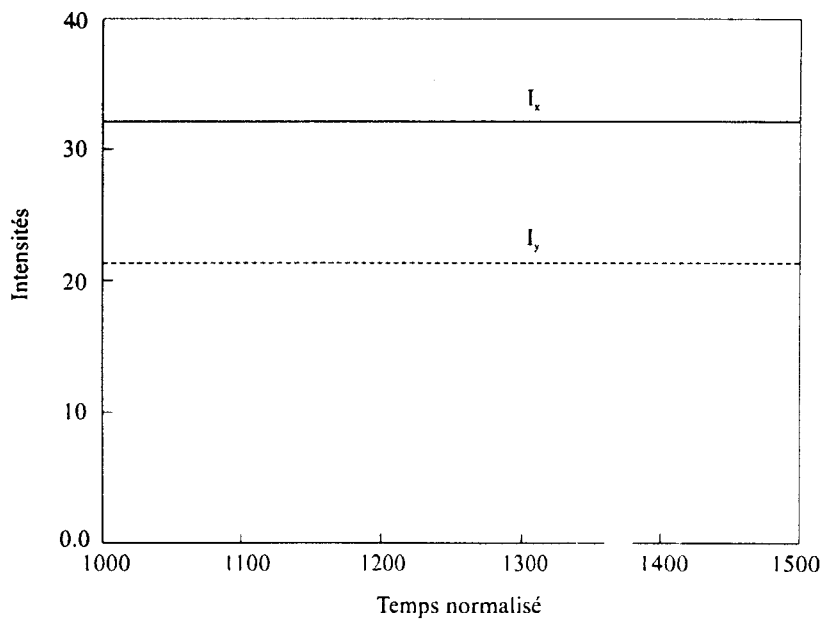
Puis une autre solution  $T$  périodique globalement en opposition de phase apparaît (figure 2.C.2.4),



**Figure 2.C.2.4** : évolution temporelle des intensités  $I_x$  et  $I_y$

valeurs de paramètres :  $P^0=48$ ,  $\Delta x=\Delta y=0.6$ ,  $\delta=0.0$ ,  $\kappa=a=1.0$ ,  $\gamma=0.01$

avant un retour à la solution stationnaire bimode (figure 2.C.2.5).



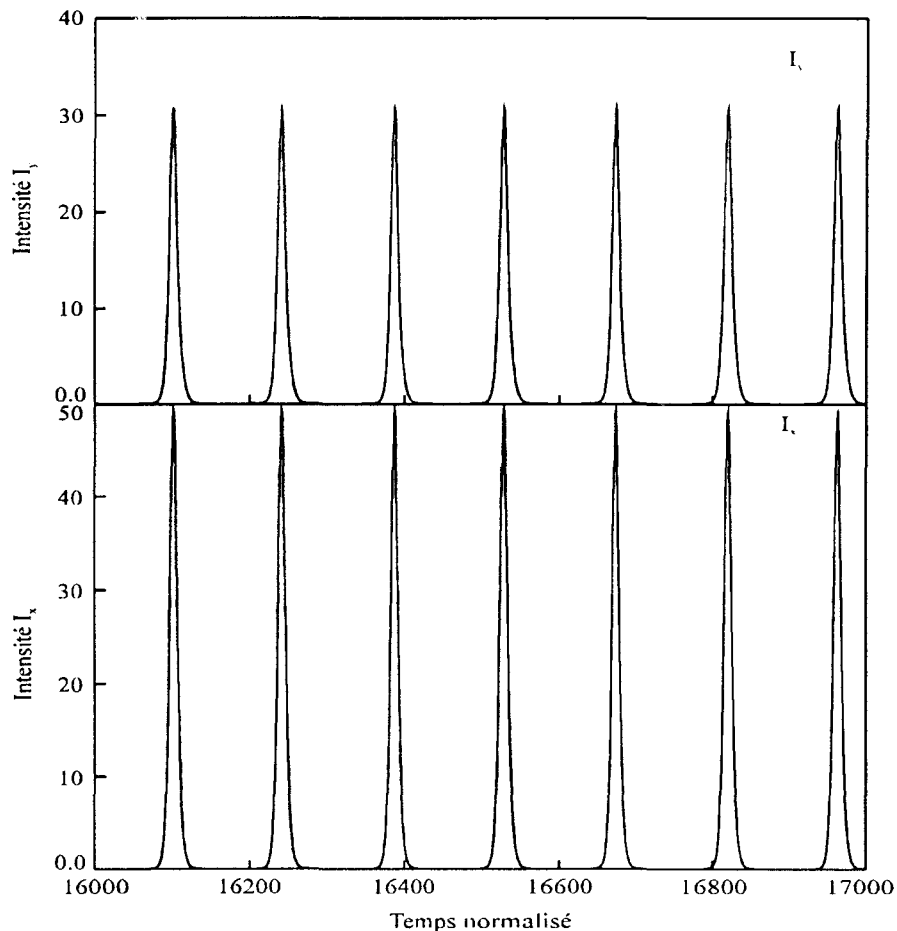
**Figure 2.C.2.5** : évolution temporelle des intensités  $I_x$  et  $I_y$

valeurs de paramètres :  $P^0=50$ ,  $\Delta x=\Delta y=0.6$ ,  $\delta=0.0$ ,  $\kappa=a=1.0$ ,  $\gamma=0.01$



Ces comportements sont assez typiques du modèle mais tous ne correspondent pas à des états observés expérimentalement. Pour pouvoir reproduire les situations expérimentales, il est nécessaire de maîtriser tous les paramètres du système.

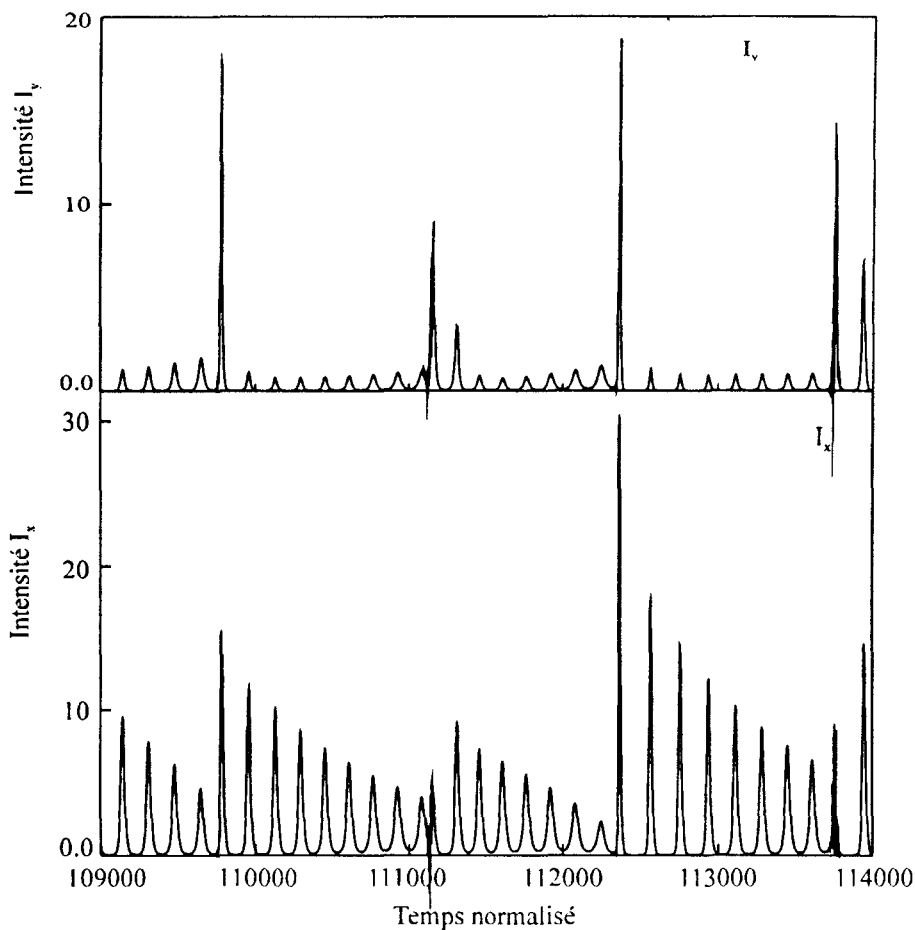
Dans un premier temps, nous avons cherché à retrouver les oscillations en phase de la solution T périodique, observées expérimentalement. Dans ce cas, le laser se comporte comme un système « Q-switché » qui génère de grands pulses après un temps d'attente au cours duquel l'intensité délivrée est nulle. Cette solution a été obtenue numériquement mais pour des valeurs élevées des paramètres de désaccord en fréquences, ce qui implique la nécessité de travailler avec un élargissement inhomogène (figure 2.C.2.6).



**Figure 2.C.2.6 :** oscillations en phase des intensités  $I_x$  et  $I_y$ . Valeurs de paramètres  $P^0=6$ ,

- $\delta=2.2$ ,  $a=0.75$ ,  $\Delta x=1.6$ ,  $\Delta y=1.1$ ,  $\kappa=1.8$  et  $\gamma=0.0004$ .

La dynamique dite d'antiphase a été surtout décrite dans les comportements expérimentaux chaotiques : en laboratoire, les observations portent sur un régime instable du laser qui génère des pulses suivant les deux directions de polarisation. Lorsqu'il émet une série décroissante de pulses selon X, il émet dans le même temps une série croissante de faibles pulses selon Y et inversement. Numériquement, nous avons obtenu des résultats similaires dans un régime intermittent chaotique (figure 2.C.2.8). Nous sommes ainsi proches du comportement réel ce qui valide la forme des non linéarités développées dans le modèle.

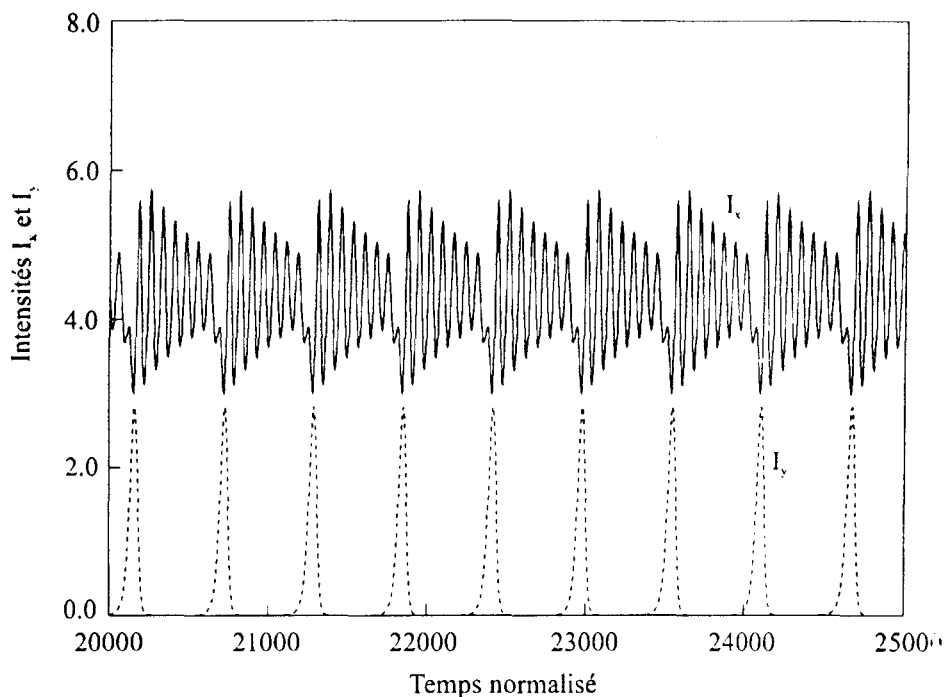


**Figure 2.C.2.7 :** oscillations en anti phase des intensité  $I_x$  et  $I_y$  dans un régime d'intermittence.

Valeurs de paramètres  $P^0=4$ ,  $\delta=2.1$ ,  $a=1.0$ ,  $\Delta x=1.6$ ,  $\Delta y=1.1$ ,  $\kappa=1.8$  et  $\gamma=0.0004$

Au cours des investigations de la dynamique dans des domaines particuliers de paramètres, a été mis en évidence un comportement de type « bursting » qui est un cas particulier d'intermittence et dont l'originalité provient du fait que l'intermittence n'apparaît que sur une

direction de polarisation alors que l'autre oscille de manière périodique (figure 2.C.2.8). Cette situation n'a jamais été observée en laboratoire et correspond à une polarisation de pompe particulière.



**Figure 2.C.2.8** : comportement en burst des intensités  $I_x$  et  $I_y$  dans un régime d'intermittence.

Valeurs de paramètres  $P^0=8$ ,  $P^1=3$ ,  $\delta=0.0$ ,  $a=1.0$ ,  $\Delta_x=0.5$ ,  $\Delta_y=0.5$ ,  $\kappa=1.0$  et  $\gamma=0.0001$

Tous ces résultats ont pour but d'illustrer la grande variété des situations observées. Nous ne les représentons que très partiellement vu le grand nombre de paramètres du système.

## 2.D. CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE.

Au cours de cette étude, nous avons présenté une façon particulière de modéliser le comportement du laser à fibre dopée au Néodyme. Nous nous sommes appuyé sur la théorie semi-classique que nous avons étendue au cas particulier qui nous intéressait. La prise en compte du caractère vectoriel transverse des variables de champ et de polarisation atomique a mis en évidence un couplage entre les directions orthogonales de polarisation du champ au cours de l'interaction rayonnement-matière. De plus, le double développement en série de Fourier des variables de population et la prise en compte de la répartition spatiale des moments dipolaires a conduit à une expression simplifiée des équations matérielles. Les résultats présentés pour les solutions stationnaires sont en parfait accord avec les expériences et certains états instables ont également été observés même pour des valeurs de paramètres peu en rapport avec la réalité.

Ces travaux ont été publiés sous la forme de deux articles distincts dans Physical Review A en Novembre 95 [Zeghlache, 95]. Leurs extensions peuvent s'orienter dans deux directions.

La première consiste en une analyse systématiques des comportements instables du laser pour entreprendre une étude classique du chaos et des états quasi-périodiques. Mais la grande dimension des espaces des paramètres et des phases rendent le traitement difficile.

La seconde possibilité serait de prendre en compte d'autres processus physiques de façon à mieux caractériser les domaines d'instabilité et, pour cela, se rapprocher des réalités expérimentales. La complexité du nouveau modèle risque néanmoins de constituer un autre frein.

## **SECONDE PARTIE :**

**STABILITE D'UN LASER MULTIMODE :  
CAS AVEC DESACCORD EN FREQUENCE**

# SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION</b>	<b>105</b>
---------------------	------------

---

<b>3. TROISIEME CHAPITRE</b>	<b>109</b>
------------------------------	------------

---

<b>3.A. LE MODELE ET LES SOLUTIONS STATIONNAIRES.</b>	<b>110</b>
3.A.1. PRESENTATION DU MODELE	110
3.A.2. SOLUTIONS STATIONNAIRES	111
3.A.2.a. Etude du minimum de déstabilisation	114
3.A.2.b. Etude du laser réellement désaccordé en fréquence	115
<b>3.B. ANALYSE DE STABILITE LINEAIRE.</b>	<b>116</b>
3.B.1. CALCUL POUR UN DESACCORD EN FREQUENCE NUL	117
3.B.2. CALCUL POUR UN DESACCORD EN FREQUENCE NON NUL.	120

<b>4. QUATRIEME CHAPITRE</b>	<b>122</b>
------------------------------	------------

---

<b>4.A. FORMULATION DU PROBLEME ET APPROXIMATIONS.</b>	<b>123</b>
4.A.1. ECRITURE DES VARIABLES.	123
4.A.2. APPROXIMATION DU LASER DE CLASSE B.	126
4.A.2.a. Cas de l'élimination adiabatique.	126
4.A.2.b. Autre approximation.	128
4.A.3. DEVELOPPEMENT POLYNOMIAL.	130
4.A.4. ORDRE 0 ET INVARIANT.	131
<b>4.B. DETERMINATION DES SEUILS D'INSTABILITE</b>	<b>134</b>
4.B.1. INVARIANT PERTURBE ET MODELE A L'ORDRE $\frac{1}{2}$ .	134
4.B.2. RELATIONS ENTRE LES INTEGRALES.	136
4.B.3. L'INTENSITE CRITIQUE	137
4.B.4. CALCUL DE LA FREQUENCE DES INSTABILITES AU VOISINAGE DU POINT CRITIQUE.	138

4.B.5. RESULTAT POUR $\gamma_{\perp}$ D'ORDRE 1.	140
4.B.6. RESULTATS POUR $\Gamma_{\perp}$ PETIT	142
<b>5. CINQUIEME CHAPITRE</b>	<b>145</b>
<hr/>	
<b>5.A. CONSTRUCTION DES SOLUTIONS DE PETITES AMPLITUDES.</b>	<b>146</b>
5.A.1. DEVELOPPEMENT POLYNOMIAL	148
5.A.2. CALCUL DE LA FREQUENCE	149
5.A.2.a. Ordre 1 du développement.	150
5.A.2.b. Ordre 2 du développement.	151
5.A.2.c. Ordre 3 du développement.	152
5.A.3. CORRECTION DE L'INTENSITE CRITIQUE	153
5.A.4. EXPLOITATION DES RESULTATS, APPLICATION A UN CAS PARTICULIER.	156
5.A.4.a. Résultats pour $\gamma_{\perp}$ supérieur à 1.	156
5.A.4.b. Intégration numérique du système complet.	158
<b>CONCLUSION DE LA SECONDE PARTIE.</b>	<b>160</b>
<hr/>	
<b>CONCLUSION GENERALE.</b>	<b>162</b>
<hr/>	
<b>BIBLIOGRAPHIE DE LA SECONDE PARTIE.</b>	<b>173</b>
<hr/>	

# Introduction.

Dans la première partie de cette thèse, nous avons dérivé un modèle susceptible de décrire le comportement stationnaire et dynamique du laser à fibre, basé sur la description de l'interaction entre deux modes du champ laser, polarisés orthogonalement dans le plan transverse à sa direction de propagation. Or, dans les expériences réalisées en laboratoire, plusieurs milliers de modes répartis selon les deux directions transverses oscillent simultanément. Nous avons alors formulé l'hypothèse d'un regroupement des modes en deux paquets, chacun étant associé à une direction de polarisation du champ. Puis afin de faciliter les développements, nous avons supposé que le comportement des modes au sein d'un paquet était homogène négligeant ainsi tous les aspects liés aux interactions entre modes de même polarisation.

Il existe donc, dans le laser à fibre, une autre source d'instabilités : le caractère multimode longitudinal du laser à fibre [Lugiato, 1985], que nous allons étudier. Nous ne tiendrons plus compte des effets de polarisation transverse et nous supposerons que tous les champs ont une orientation fixe dans ce plan. Il n'est également plus nécessaire de développer un système d'équations spécifique car il existe dans la littérature des modèles adaptables par un ajustement des valeurs de paramètres [Riskin, 1968]. L'intérêt de cette nouvelle approche est de pouvoir disposer d'un modèle, au premier abord plus simple, permettant néanmoins d'aborder la complexité multimode. Ceci permet également d'approfondir les calculs présentés partiellement dans le chapitre 2.B.3 de la première partie, l'objectif étant d'obtenir une expression analytique des solutions oscillantes générées par une bifurcation de Hopf et cela, afin de déterminer la nature de cette bifurcation. Nous devons évaluer les domaines d'existence et de stabilité des nouvelles solutions dans l'espace des paramètres ce qui nécessite une étude perturbative d'ordre élevé.



Dans sa forme de la partie I, le modèle du laser à fibre, composé de 5 équations complexes (relations 3.E.4 - 8 de la partie 1), ne permet pas de tels développements. C'est pourquoi, plutôt que de procéder à d'autres approximations, nous avons repris directement une nouvelle étude.

Le modèle utilisé est celui de Bloch-Maxwell pour les lasers multimodes longitudinaux à deux niveaux d'énergie [Risken, 1968]. Il suppose une cavité en anneau, la lumière se propage dans une seule direction et le milieu actif remplit toute la cavité (ce qui est vérifié par notre système). Nous supposons également un élargissement spectral de la courbe de gain homogène et nouveauté de l'analyse, nous prenons en compte l'existence d'un désaccord entre la fréquence atomique de la transition lasante et la fréquence du mode longitudinal de cavité le plus proche.

A l'état stationnaire, le laser oscille selon un seul mode : le mode fondamental [Haken, 1975] [Ohno, 1976]. Son nombre d'onde est déterminé par la longueur de la cavité et sa fréquence est proportionnelle à la différence entre la fréquence centrale de la courbe de gain et celle du mode de cavité vide. En augmentant le pompage, le passage vers un fonctionnement multimode peut intervenir lorsque la largeur à mi-hauteur de la courbe de gain est suffisante pour permettre l'amplification de modes latéraux les plus proches du mode fondamental [Lugiato, 1985] [Fu, 1989]. Les interactions non linéaires entre les modes amplifiés conduisent à la déstabilisation du système et à la génération de pulses géants qui se propagent dans la cavité [Risken, 1968]. Dans le cas du laser à fibre, ces conditions de déstabilisation sont parfaitement remplies. La cavité est longue de plusieurs dizaines de mètres ce qui réduit l'intervalle spectral libre entre les modes et l'élargissement de la courbe de gain est suffisamment important du fait de l'inhomogénéité de la distribution des sites actifs dans la matrice de silice. Tout ceci autorise l'oscillation simultanée de centaines voire de milliers de modes longitudinaux.

Le système sans désaccord en fréquence a souvent été étudié et les résultats ont été présentés sous de nombreuses formes [Risken, 1968]

[Ohno, 1976 et références incluses]. Certains auteurs ont présenté des calculs allant jusqu'à la détermination de la nature de la bifurcation qui engendre la déstabilisation de l'état stationnaire [Fu, 1989]. Dans un cas limite proche du laser de classe B, ils ont pu démontrer que la bifurcation pouvait être supercritique (oscillation stable) ou souscritique (oscillation instable) en fonction des valeurs du nombre d'onde [Baer, 1993].

Le cas avec désaccord en fréquence n'a été étudié que pour les systèmes monomodes décrits par des équations aux dérivées ordinaires (O.D.E) [Ning, 1990]. Quant au système multimode, il a été ignoré du fait de la complexité qu'engendre l'apparition d'une dimension supplémentaire dans ce problème et la présence de dérivées partielles (P.D.E), si ce n'est dans la limite de désaccords en fréquence faibles [Zorell, 1981]. Plus récemment, un travail théorique [Pieroux, 1994] basé sur le modèle de Tang, Statz et DeMars [Tang, 1963] et utilisant un développement modal longitudinal tenant compte des composantes de basses fréquences spatiales a permis de traiter une situation où seul le mode fondamental est accordé en fréquence. De même, l'expression analytique des fréquences de relaxation a été dérivée, une seule des solutions stationnaires pouvant être stable. La dynamique d'un laser bimode longitudinal a été étudiée dans le cas d'un pompage faiblement modulé.

Dans cette deuxième partie, nous nous proposons d'aborder le problème du laser multimode longitudinal désaccordé différemment. Nous généralisons une méthode développée par T. Erneux [Baer, 1993] [Carr, 1994] analysant le laser multimode mais accordé en fréquence et qui permet de construire les solutions oscillantes issues de la déstabilisation des solutions stationnaires. L'absence de désaccord traduit la dégénérescence en fréquence des solutions multimodes. Dans cette seconde partie de thèse, nous levons cette dégénérescence en considérant que même le mode fondamental d'oscillation peut être désaccordé. Malgré cette difficulté, il nous a été possible d'obtenir des résultats simples et exploitables analytiquement.

Nous présentons dans un premier chapitre (chapitre 3 de la thèse) le modèle, ses états stationnaires ainsi qu'une étude linéaire de leur stabilité. Les limites posées par ce calcul nous amènerons, dans le second chapitre, à reformuler le problème en effectuant différemment l'élimination adiabatique de la polarisation atomique. Dans le même chapitre, nous développons une étude non-linéaire basée sur l'hypothèse de la déstabilisation de l'état stationnaire fondamental par l'émergence des modes longitudinaux. Nous déterminerons alors une expression approchée de l'amplitude du pompage nécessaire pour atteindre la bifurcation de Hopf. Dans le troisième chapitre nous construirons les solutions de petites amplitudes qui apparaissent au delà de la bifurcation, ce qui permettra de la caractériser du point de vue de sa stabilité.

**3.**

## **TROISIEME CHAPITRE**

**CALCUL ET ANALYSE DE STABILITE  
DES ETATS STATIONNAIRES DU  
MODELE DE BLOCH - MAXWELL**

## 3.A. LE MODELE ET LES SOLUTIONS STATIONNAIRES.

### 3.A.1. Présentation du modèle

Nous utilisons le modèle semi-classique normalisé dit de "Bloch-Maxwell" [Lugiato, 1985]. L'interaction entre la lumière et la matière est de type dipolaire électrique et les grandeurs physiques représentées sont au nombre de trois. Elles sont notées  $E$ ,  $P$  et  $D$  et représentent respectivement l'amplitude du champ électrique, la polarisation atomique et l'inversion de population. La polarisation atomique est une somme statistique des moments dipolaires induits par le champ électrique et l'inversion de population est la différence entre les populations des niveaux haut et bas de la transition lasante (cf. figure 1.B.2.1).

Le modèle de "Bloch-Maxwell" est obtenu par le biais de l'approximation S.V.A.P.A (approximation de l'amplitude et de la phase variant lentement) qui n'est valable que lorsque l'intensité du champ électromagnétique à l'intérieur de la cavité reste faible. Elle consiste à développer les variables dans un référentiel tournant à la fréquence du mode de cavité le plus proche du centre de la courbe de gain. Les termes de la porteuse oscillant à la fréquence optique sont éliminés pour ne conserver que les composantes évoluant à des fréquences physiquement observables [Lugiato, 1985]. Elle permet de réduire les équations du champ et du milieu actif à un ensemble de dérivées partielles d'ordre 1. Elle conduit au système d'équations aux dérivées partielles suivant pour les trois variables du problème :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{E}_{(z,t)} = -\bar{E}_{(z,t)} + P_{(z,t)} \quad (3.A.1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{(z,t)} = \gamma_{\perp} \left( -P_{(z,t)} \left( 1 + i \tilde{\Delta} \right) + D_{(z,t)} \bar{E}_{(z,t)} \right) \quad (3.A.1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{(z,t)} = \gamma_{//} \left( A - D_{(z,t)} - \frac{1}{2} \left( P_{(z,t)}^* \bar{E}_{(z,t)} + \bar{E}_{(z,t)}^* P_{(z,t)} \right) \right) \quad (3.A.1.3)$$

$$\bar{E}_{(z+L,t)} = \bar{E}_{(z,t)} \quad (3.A.1.4)$$

Les notations ( $A$ ,  $L$ ,  $\tilde{\Delta}$ ,  $t$  et  $z$ ) représentent respectivement le paramètre de pompe, la longueur de la cavité, le désaccord entre une fréquence de cavité et celle atomique, le temps et la direction de propagation. La relation 3.A.1.4 traduit les conditions de bouclage sur un tour de cavité, continuité imposée pour la propagation du champ laser.

Nos notations supposent que les pertes de la polarisation atomique  $P$  et de l'inversion de population  $D$  sont normalisées à celles du champ  $\bar{E}_{(z,t)}$  et qu'elles sont uniformément réparties le long de la cavité. Les équations incluent également une normalisation de la variable d'espace à la vitesse de la lumière ainsi que l'extraction de la constante de propagation des modes de cavité. Le paramètre  $k$  est alors discret et indépendant de  $z$ .

### 3.A.2. Solutions stationnaires

Nous calculons les solutions stationnaires du modèle de Bloch-Maxwell dans le cadre de l'approximation de champ moyen. L'intensité du champ électrique est supposée constante tout au long de la cavité (aux termes de propagation près). La présence du terme complexe de désaccord en fréquence dans l'équation de la polarisation atomique (relation 3.A.1.2) suggère l'existence d'un décalage de la fréquence des modes du champ laser par rapport à la référence de la cavité vide [Ning, 1990]. Mathématiquement, il se traduit par la modulation temporelle et spatiale de l'amplitude à une fréquence et une constante de propagation proportionnelle au paramètre  $\tilde{\Delta}$ . L'intensité émise par le laser est bien

stationnaire mais dans un référentiel tournant, différent de celui utilisé au cours de la S.V.A.P.A.

Le champ électrique et la polarisation atomique se décomposent en une amplitude constante et un terme de phase dépendant de l'espace et du temps :

$$\bar{E}_{(z,t)} = \bar{E}_s \exp(i \Psi_{(z,t)}) \quad (3.A.2.1)$$

$$P_{(z,t)} = P_s \exp(i \Phi_{(z,t)}) \quad (3.A.2.2)$$

tels que

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi_{(z,t)} = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{(z,t)} = \omega_s \quad (3.A.2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Psi_{(z,t)} = -k_s \quad (3.A.2.4)$$

Le processus d'interaction dipolaire n'étant pas instantané, il existe un déphasage entre le champ et la polarisation atomique (cf. équation 3.A.1.1) que nous notons  $\Xi$ .

$$\Xi = \Phi_{(z,t)} - \Psi_{(z,t)} \quad (3.A.2.5)$$

En introduisant les relations 3.A.2.1 - 5 dans le modèle (équations 3.A.1.1. - 4), nous obtenons l'expression analytique des solutions stationnaires :

$$\omega_s = \frac{\gamma_{\perp} (k_s - \tilde{\Delta})}{1 + \gamma_{\perp}} \quad (3.A.2.6)$$

$$\tan(\Xi) = -\frac{\gamma_{\perp} \Delta + k_s}{1 + \gamma_{\perp}} \quad (3.A.2.7)$$

$$D_s = 1 + (\tan(\Xi))^2 \quad (3.A.2.8)$$

$$I_s = \bar{E}_s^2 = A - D_s \quad (3.A.2.9)$$

$$P_s^2 = D_s \bar{E}_s^2 \quad (3.A.2.10)$$

Ces expressions sont paramétrées par la constante de propagation, ce qui induit une infinité de solutions indépendantes (les différents modes

longitudinaux du système) dont la valeur est fonction de celle de  $k_s$ .  
 Mathématiquement,  $k_s$  doit vérifier la relation :

$$k_s = \frac{2 n \pi}{L} \quad (3.A.2.11)$$

Parmi ces différents états, le premier à émerger lors du démarrage du laser est celui dont la valeur de seuil de pompage est la plus basse. L'expression de ce seuil est donnée par la condition d'existence de la solution stationnaire (elle peut être calculée par une analyse de stabilité linéaire de la solution triviale) et correspond :

$$A_c = 1 + \left( \frac{\gamma_{\perp} \tilde{\Delta} + k_s}{1 + \gamma_{\perp}} \right)^2 \quad (3.A.2.12)$$

La courbe de seuil ( $A_c$  en fonction de  $k_s$ ) est représentée sur la figure 3.A.2.1 où l'on note que le minimum du pompage a lieu pour  $A_c = 1$  et  $k_s = -\tilde{\Delta} \gamma_{\perp}$ .

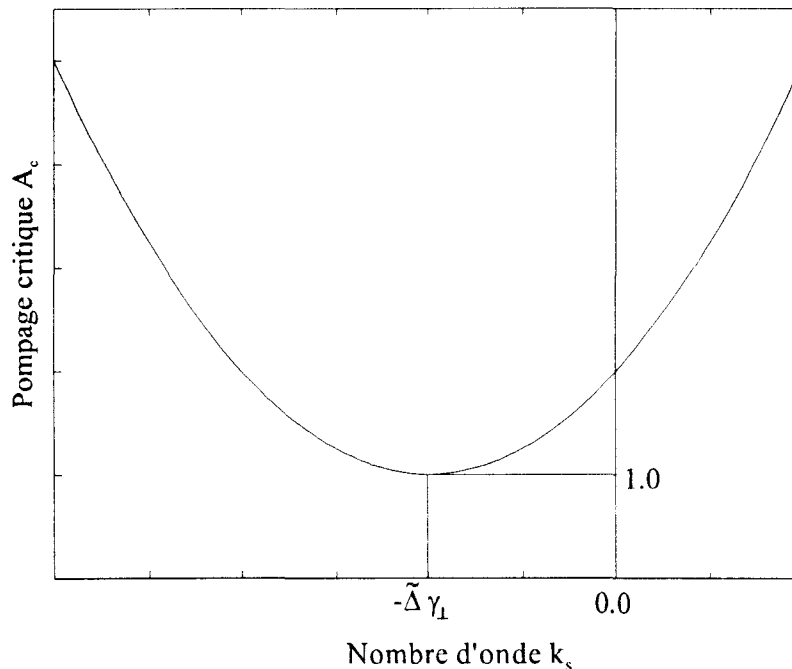


figure 3.A.2.1 : domaine de déstabilisation de la solution triviale

dans un espace  $(A_c, k_s)$  et pour  $\tilde{\Delta} > 0$ .



### 3.A.2.a. Etude du minimum de déstabilisation

La valeur minimale du seuil de déstabilisation s'obtient pour  $A_c$  égal à 1 et  $k_s$  égal à  $-\tilde{\Delta}\gamma_{\perp}$ . Si nous introduisons cette valeur de  $k_s$  dans les relations 3.A.2.6 - 10, nous obtenons des valeurs pour les solutions stationnaires du laser où le désaccord de fréquence n'apparaît plus, mais dont la forme pour le champ et la polarisation complexe s'accompagne d'un terme de propagation en  $\exp[-\tilde{\Delta}\gamma_{\perp}(t - z)]$ . De plus, au cours de l'analyse de stabilité linéaire, tous les termes complexes liés au désaccord en fréquence s'annulent et nous retrouvons le domaine de déstabilisation de la solution obtenue pour  $\tilde{\Delta} = 0$  [Haken, 1976]. L'explication de ce comportement est autant physique que mathématique. Si nous reprenons la définition du paramètre de désaccord en fréquence, la relation est :

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{\gamma_{\perp}}(\omega_c - \omega_a) \quad (3.A.2.13)$$

où  $\omega_c$  est la fréquence de cavité utilisée pour le développement du modèle et  $\omega_a$  la fréquence de la transition atomique. La relation de dispersion de la cavité vide permet de modifier la définition de  $\tilde{\Delta}$  :

$$\tilde{\Delta} = \frac{1}{\gamma_{\perp}}(k_c - k_a) \quad (3.A.2.14)$$

Si le minimum de la courbe de déstabilisation est réalisé et que  $k_s$  est égal à  $-\tilde{\Delta}\gamma_{\perp}$ , ceci implique que les deux constantes de propagation  $k_c$  et  $k_a$  sont séparées par un nombre entier de fois le facteur  $2\pi/L$  (puisque la valeur minimum de  $k_s$  est un nombre d'onde de la cavité vide). Il existera ainsi un mode de cavité oscillant à la fréquence atomique. Au démarrage, le laser vient naturellement se caler sur ce mode et délivre une intensité indépendante de  $\tilde{\Delta}$ . L'existence d'une fréquence et d'une constante de propagation stationnaires traduisent juste le déplacement de la fréquence du laser depuis la fréquence extraite arbitrairement au cours de la S.V.A.P.A vers le mode oscillant au centre de la courbe de gain.

### *3.A.2.b. Etude du laser réellement désaccordé en fréquence*

Afin que le laser soit véritablement désaccordé en fréquence, il ne doit plus exister de valeur de  $k_s$  égale à  $-\tilde{\Delta}\gamma_{\perp}$ . Le mode stationnaire apparaît alors pour une valeur du seuil légèrement supérieure à 1 et pour la valeur du nombre d'onde la plus proche possible du minimum de la courbe de déstabilisation de la solution triviale. Nous disposons maintenant d'une solution stationnaire dont l'intensité, la fréquence et le nombre d'onde sont parfaitement déterminés.

La valeur de  $k_s$  ne dépend pas des constantes physiques du milieu lasant mais juste de la longueur de cavité. Elle définit le mode de cavité choisi par le laser lors de son démarrage. Pour simplifier les développements, il est possible de modifier le modèle en remplaçant le mode quelconque de cavité extrait au cours de la S.V.A.P.A par le mode réellement présent au démarrage. La seule opération nécessaire à ce changement est la redéfinition du paramètre de désaccord en fréquence  $\tilde{\Delta}$ . Le modèle n'est plus maintenant développé sur le mode  $k_c$  (cf. relation 3.A.2.14) mais sur le mode  $k_c + k_s$ .

Dans un premier temps, nous définissons le nombre d'onde  $k_s$  au moyen de la relation :

$$k_s = -\tilde{\Delta}\gamma_{\perp} + R \quad (3.A.2.15)$$

où  $R$  mesure l'écart entre le minimum de déstabilisation et le nombre d'onde du mode de cavité le plus proche. Le nouveau paramètre de désaccord en fréquence  $\Delta$  s'écrit donc :

$$\Delta = \frac{1}{\gamma_{\perp}}(k_c + k_s - k_a) \quad (3.A.2.16)$$

ou plus simplement :

$$\Delta = \frac{R}{\gamma_{\perp}} \quad (3.A.2.17)$$

Si nous reportons cette nouvelle expression de  $\Delta$  dans la relation 3.A.2.15,  $k_s$  s'annule. Les solutions stationnaires s'écrivent désormais uniquement en fonction du paramètre de pompe, des constantes de relaxation et du nouveau paramètre de désaccord en fréquence.

$$\omega_s = -\frac{\gamma_{\perp} \Delta}{1 + \gamma_{\perp}} \quad (3.A.2.18)$$

$$\tan(\Xi) = -\omega_s \quad (3.A.2.19)$$

$$D_s = 1 + (\tan(\Xi))^2 \quad (3.A.2.20)$$

$$I_s = A - D_s \quad (3.A.2.21)$$

$$P_s^2 = D_s \bar{E}_s^2 \quad (3.A.2.22)$$

Par la suite, nous travaillerons toujours avec  $k_s$  égal à 0. Nos calculs montrent que pour une valeur fixée de  $\Delta$ , si le laser démarre sur une solution  $k_s$  différente de 0, alors il existe une situation physique exactement équivalente mais pour une valeur de  $\Delta$  inférieure et  $k_s$  égal à 0. Notre étude ne se limite donc pas au premier mode stationnaire mais est tout à fait généralisable à n'importe quel mode (donc n'importe quelle valeur de  $k_s$ ). Nous pouvons ainsi évaluer le comportement d'un laser soumis à des conditions initiales particulières qui font que le mode stationnaire n'est pas nécessairement celui de seuil le plus bas. Il suffit pour cela de faire varier la valeur du désaccord en fréquence sur des domaines délimités par la longueur de cavité.

### 3.B. ANALYSE DE STABILITE LINEAIRE.

L'existence mathématique des solutions ne signifie pas leur existence physique. Une étude de leur stabilité détermine les états du laser réellement accessibles et mesurables. La méthode standard utilisée est l'analyse de stabilité linéaire [Fu, 1989]. Nous l'avons développée dans

un premier temps pour le laser accordé en fréquence puis pour un système désaccordé. Les résultats que nous présentons confirment en partie ceux déjà publiés et montre les limites d'une telle méthode [Haken, 1978] [Baer, 1993].

### **3.B.1. Calcul pour un désaccord en fréquence nul**

En posant  $\Delta$  nul dans le système formé par les équations 3.A.1.1 - 4, il n'y a plus de termes complexes dans le modèle dont la dimension diminue. En ne conservant qu'une seule composante de Fourier pour chaque terme sinusoïdal, la perturbation de la solution stationnaire (caractérisée par  $k_s = 0$ ) s'écrit de la façon suivante :

$$\bar{E}_{(z,t)} = \bar{E}_s + \eta \mathcal{E} \exp[\lambda t + i\alpha z] \quad (3.B.1.1)$$

$$P_{(z,t)} = P_s + \eta \mathcal{P} \exp[\lambda t + i\alpha z] \quad (3.B.1.2)$$

$$D_{(z,t)} = D_s + \eta \mathcal{D} \exp[\lambda t] \quad (3.B.1.3)$$

L'existence du terme en  $z$  dans la perturbation est liée à la présence de la dérivée partielle relative à cette variable. Ce terme est une exponentielle complexe car les ondes se propagent sur un grand nombre de tours de cavité sans s'atténuer ni diverger. Le paramètre réel supplémentaire  $\alpha$  doit être déterminé au cours des développements, sa valeur permet d'identifier le mode longitudinal susceptible d'apparaître si le mode stationnaire se déstabilise. L'introduction de ces expressions dans le modèle conduit à l'écriture d'une matrice 3\*3 à coefficients complexes :

$$\begin{pmatrix} \lambda + i\alpha + 1 & -1 & 0 \\ -\gamma_{\perp} D_s & \lambda + \gamma_{\perp} & -\gamma_{\perp} \bar{E}_s \\ \gamma_{\parallel} P_s & \gamma_{\parallel} \bar{E}_s & \lambda + \gamma_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (3.B.1.4)$$

La stabilité est assurée lorsque toutes les valeurs propres ont des parties réelles négatives. Leur calcul nécessite la détermination des racines du polynôme d'ordre 3 obtenu par le développement du déterminant. Cet

ordre relativement élevé montre que malgré la simplicité des équations, l'utilisation analytique des expressions d'exposant de Liapunov est impossible. Il faut déterminer directement la position de la bifurcation de Hopf qui déstabilise la solution stationnaire [Risken, 1968]. Ce calcul permet de définir l'état de stabilité du système dans un espace des paramètres séparé en deux parties : celui correspondant au domaine de stabilité de la solution stationnaire et celui où cette solution, devenue instable, laisse la place à une solution oscillante dont l'existence et la stabilité restent à étudier.

L'expression analytique de la position du point de Hopf se calcule à l'aide des propriétés de ce type de bifurcation. Par définition, nous savons qu'elle se produit lorsque deux valeurs propres complexes conjuguées voient leurs parties réelles s'annuler. Il suffit donc de poser  $\lambda$  imaginaire pure ( $\lambda = i b$ ) dans le déterminant de la matrice de stabilité et de calculer la valeur critique du paramètre de pompe réalisant cette partie imaginaire. Nous obtenons l'équation suivante :

$$-i b^3 - b^2 (1 + \gamma_{//} + \gamma_{\perp} + i \alpha) + b [i (\gamma_{//} + A \gamma_{//} \gamma_{\perp}) - (\gamma_{//} + \gamma_{\perp})] + 2 \gamma_{//} \gamma_{\perp} (A - 1) + i A \alpha \gamma_{//} \gamma_{\perp} = 0 \quad (3.B.1.5)$$

La séparation des parties réelle et imaginaire conduit à deux relations dont l'une permet de déterminer l'expression de  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{-b^2 (1 + \gamma_{//} + \gamma_{\perp}) + 2 \gamma_{//} \gamma_{\perp} (A - 1)}{b (\gamma_{//} + \gamma_{\perp})} \quad (3.B.1.6)$$

L'autre (après report de la relation 3.B.1.4) est une forme bicarrée en  $b$  paramétrée par le pompage  $A$ ,

$$b^4 + \gamma_{//} b^2 [\gamma_{//} - 3 \gamma_{\perp} (A - 1)] + 2 A (\gamma_{//} \gamma_{\perp})^2 (A - 1) = 0 \quad (3.B.1.7)$$

dont les solutions sont les suivantes :

$$b_{\pm}^2 = \frac{\gamma_{//} [3 \gamma_{\perp} (A - 1) - \gamma_{//}] \pm \sqrt{(\gamma_{//} [\gamma_{//} - 3 \gamma_{\perp} (A - 1)])^2 - 8 A (\gamma_{//} \gamma_{\perp})^2 (A - 1)}}{2} \quad (3.B.1.8)$$

L'une au moins de ces expressions doit être réelle et positive, la condition le réalisant donne la position du point de bifurcation de Hopf. La racine étant réelle, le pompage est compris entre les valeurs suivantes :

$$A_{\pm} = \frac{5\gamma_{\perp} + 3\gamma_{//} \pm 2^{3/2} \sqrt{(\gamma_{//} + \gamma_{\perp})(\gamma_{//} + 2\gamma_{\perp})}}{\gamma_{\perp}} \quad (3.B.1.9)$$

Seule la racine positive  $A_+$  donne alors la position de la Hopf. Ce résultat n'est pas nouveau [Riskin, 1968]. Un traitement numérique du déterminant (3.B.1.4) permet de déterminer graphiquement le lieu de déstabilisation de la solution stationnaire dans un espace  $(A, \alpha)$ . Ainsi pour des valeurs de paramètres telles que  $\gamma_{//} = 0.01$  et  $\gamma_{\perp} = 1.0$ , nous avons obtenu la représentation de la figure 3.B.1.1 : ce graphique est très similaire à ceux déjà présents dans la littérature [Baer, 1993]. Son intérêt est d'être issu d'un calcul exact et d'être reproductible pour n'importe quelles valeurs des paramètres sans limite de validité.

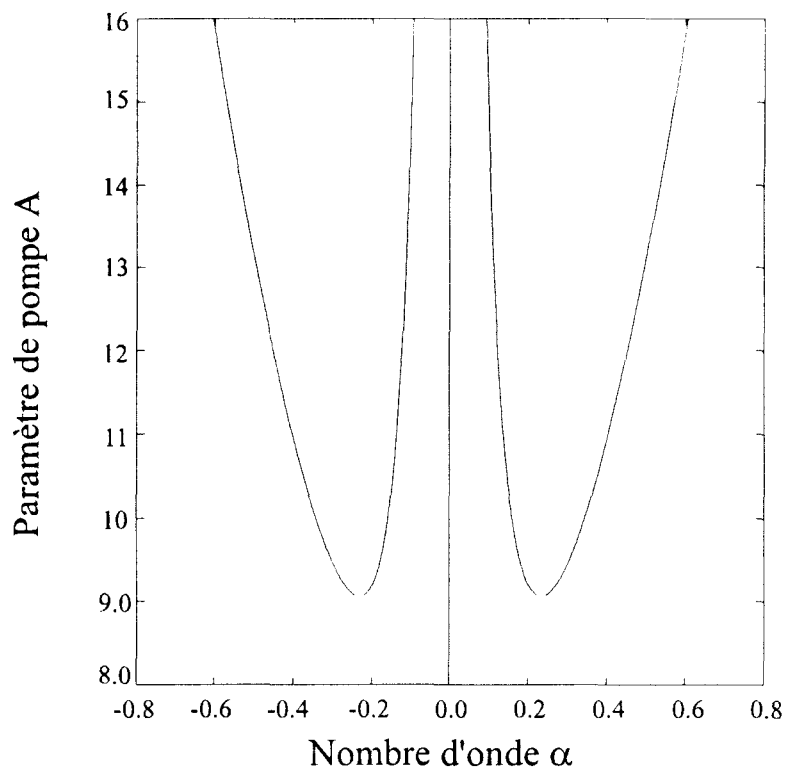


figure 3.B.1.1 : domaine de déstabilisation de la solution stationnaire monomode.

Calcul exact par Mathématica. Valeur de paramètres :  $\gamma_{\perp} = 1.0$  et  $\gamma_{//} = 0.01$

Il montre l'existence d'une valeur particulière du paramètre  $\alpha$  pour laquelle la déstabilisation s'opère et correspondant à une valeur minimale du paramètre de contrôle. Sa position, tout comme celle des courbes en général, dépend des valeurs fixées pour les autres paramètres physiques  $\gamma_{//}$  et  $\gamma_{\perp}$ . Nos études ont montré que  $\gamma_{//}$  influe essentiellement sur la position verticale et la forme des courbes. Plus il est grand, plus le seuil de déstabilisation est élevé et plus les lobes sont fins. A l'opposé,  $\gamma_{\perp}$  influe principalement sur la position horizontale des lobes. Le paramètre pertinent est en fait le rapport des  $\gamma$ . La référence [Baer, 93] propose une étude mathématique plus détaillée de cet aspect.

### ***3.B.2. Calcul pour un désaccord en fréquence non nul.***

Dans le cas plus général d'un laser désaccordé en fréquence, le comportement des solutions stationnaires dans l'espace des paramètres peut encore être étudié par une analyse de stabilité linéaire. Toutefois et comparativement au cas du laser accordé en fréquence, la présence du paramètre complexe dans l'équation de la polarisation atomique augmente la dimension du système, ce qui se traduit par un nombre d'équations réelles plus élevé dû à l'augmentation du nombre de degrés de liberté du laser.

Les développements présentés au paragraphe précédent, établissant une équation bicarrée pour la fréquence des instabilités à la bifurcation de Hopf, ne sont plus reproductibles car la levée de dégénérescence modifie le système d'équations : l'analyse de stabilité linéaire conduit à des résultats tout à fait originaux [Boulnois, en cours de rédaction].

Un traitement des équations pour un laser multimode désaccordé ont été publiés par Zorell mais sous l'approximation d'un faible désaccord et consistant en un développement perturbatif en puissance de  $\Delta$  [Zorell, 1981]. Cette méthode est rapide et plus facile à mettre en œuvre; mais les résultats obtenus présentent l'inconvénient de n'être valable que dans un

petit domaine de l'espace des paramètres et pour une situation faiblement multimode. La limitation vient, d'une part, du paramètre  $\Delta$  qui doit nécessairement être petit et, d'autre part, du fait que le développement s'effectue à partir d'un système déjà linéarisé. La présence simultanée de ces deux approximations réduit les calculs aux premiers ordres des développements ce qui ne permet pas de tirer des interprétations physiques satisfaisantes. De surcroît, cette méthode ne donne pas une expression analytique simple des domaines de déstabilisation de la solution stationnaire.

Afin d'obtenir une description plus générale du laser multimode désaccordé basée sur une étude non-linéaire des solutions multimodes (développée à partir d'une forme approchée des équations de Bloch Maxwell), il est nécessaire d'introduire des simplifications. Dans ce but, nous avons procédé à une reformulation des relations 3.A.1.1 - 4 moyennant une série d'approximations que nous allons détailler dans la section suivant.



## **4. QUATRIEME CHAPITRE**

**NOUVELLE APPROCHE  
DU LASER MULTIMODE**

## 4.A. FORMULATION DU PROBLEME ET APPROXIMATIONS.

Dans ce chapitre, nous écrirons les équations de Bloch-Maxwell sous une forme appropriée, basée sur un développement perturbatif, ce qui nous permettra une analyse des solutions issues de la bifurcation. Dans ce but, nous réécrivons les variables de champ et de polarisation en supposant les éléments lasants fixes le long de la fibre, ce qui permet de reporter la dépendance longitudinale uniquement sur la variable de champ. Dans le second paragraphe, nous introduirons l'approximation du laser de classe B relative aux temps caractéristiques des variables et aux éliminations adiabatiques s'y rapportant. Le petit paramètre du développement étant défini, nous renormaliserons les variables autour des solutions stationnaires et réécrivons les équations. Dans le dernier paragraphe, nous introduirons un développement polynomial et perturbatif des variables permettant de déduire les systèmes d'équations correspondant aux différents ordres.

### 4.A.1. *Ecriture des variables.*

Dans le laser, le champ électrique et la polarisation atomique évoluent à la même fréquence (cf. équation du champ électrique 3.A.1.1) et leurs amplitudes stationnaires sont proportionnelles (relation 3.A.2.10). La variable polarisation  $P_{(z,t)}$  peut donc remplacée par le produit du champ électrique  $E_{(z,t)}$  et d'un terme de correction complexe dépendant uniquement du temps. Cette transformation permet d'unifier le comportement spatial longitudinal et cela sans modifier la dynamique du système puisqu'elle permet de conserver tous ses degrés de liberté : en effet, elle autorise l'existence d'un déphasage entre les deux variables et les normes ne sont pas affectées. Par contre, pour le champ électrique, la

démarche est différente. Si en terme mathématique, le modèle peut admettre différents types de solutions, du point de vue de la physique elles ne correspondent pas toutes à des états possibles du système. Notre étude décrit le cas particulier de la déstabilisation d'un mode stationnaire par les modes latéraux ce qui correspond à l'émergence, au point de bifurcation, d'autres modes longitudinaux de la cavité [Riskin, 1968]. Cette démarche, bien qu'inhabituelle, est rendue nécessaire par la présence de la dérivée partielle en  $z$  dans l'équation de champ. Généralement dans la littérature, la présence du terme de propagation limite les calculs aux états stationnaires. Par cette approximation, l'évolution spatiale des modes de cavité peut être parfaitement connue et certains développements analytiques peuvent être poursuivis sans avoir à recourir directement à l'intégration numérique.

La forme mathématique des nouvelles solutions vient dans la continuité de l'état stationnaire calculé au paragraphe 3.A.2 (relations 3.A.2.18 - 22). Le champ électrique se décompose en un produit d'une amplitude réelle dépendant de l'espace et du temps et d'un terme de modulation. Les expressions pour la polarisation et le champ deviennent donc :

$$P_{(z,t)} = \left( p'(t) + i p''(t) \right) \bar{E}_{(z,t)} \quad (4.A.1.1)$$

$$\bar{E}_{(z,t)} = E_{(z,t)} \exp[i \phi(t)] + c.c \quad (4.A.1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t) = \omega(t) \quad (4.A.1.3)$$

L'inversion de population n'est pas affectée par cette nouvelle écriture des variables.

Dans une fibre dopée, les éléments lasants sont fixes et supposés répartis uniformément [cf. Partie I, chapitre 1]. La relation (4.A.1.1) exprime que la dépendance spatiale de la polarisation atomique est celle imposée par la propagation du champ. Quant au terme de modulation temporelle (relation 4.A.1.3), en l'absence d'approximation, sa valeur

stationnaire est égale à  $\omega_s$  (relation 3.A.2.6). Ces nouvelles variables sont introduites dans le modèle et l'identification des fréquences ainsi que des parties réelle et imaginaire permet d'obtenir un système composé de cinq équations gouvernant l'évolution des variables issues de la décomposition.

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) E_{(z,t)} = E_{(z,t)} \left( -1 + p'(t) \right) \quad (4.A.1.4)$$

$$\omega(t) = p''(t) \quad (4.A.1.5)$$

$$E_{(z,t)} \frac{\partial}{\partial t} p'(t) + p'(t) \frac{\partial}{\partial t} E_{(z,t)} - \omega(t) p''(t) E_{(z,t)} = \gamma_{\perp} E_{(z,t)} \left\{ D_{(z,t)} - \left( p'(t) - \Delta p''(t) \right) \right\} \quad (4.A.1.6)$$

$$E_{(z,t)} \frac{\partial}{\partial t} p''(t) + p''(t) \frac{\partial}{\partial t} E_{(z,t)} + \omega'(t) p'(t) E_{(z,t)} = -\gamma_{\perp} E_{(z,t)} \left\{ p''(t) + \Delta p'(t) \right\} \quad (4.A.1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{(z,t)} = \gamma_{//} \left( A - D_{(z,t)} - p'(t) |E_{(z,t)}|^2 \right) \quad (4.A.1.8)$$

L'utilisation de l'intensité du champ électrique modifie légèrement la forme du système. On utilise  $I_{(z,t)} = |E_{(z,t)}|^2 = E_{(z,t)}^2$  dans le modèle pour obtenir :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) I_{(z,t)} = 2 I_{(z,t)} \left( -1 + p'(t) \right) \quad (4.A.1.9)$$

$$\omega(t) = p''(t) \quad (4.A.1.10)$$

$$I_{(z,t)} \frac{\partial}{\partial t} p'(t) + \frac{p'(t)}{2} \frac{\partial}{\partial t} I_{(z,t)} - \omega(t) p''(t) I_{(z,t)} = \gamma_{\perp} I_{(z,t)} \left\{ D_{(z,t)} - \left( p'(t) - \Delta p''(t) \right) \right\} \quad (4.A.1.11)$$

$$I_{(z,t)} \frac{\partial}{\partial t} p''(t) + \frac{p''(t)}{2} \frac{\partial}{\partial t} I_{(z,t)} + \omega(t) p'(t) I_{(z,t)} = -\gamma_{\perp} I_{(z,t)} \left\{ p''(t) + \Delta p'(t) \right\} \quad (4.A.1.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{(z,t)} = \gamma_{//} \left( A - D_{(z,t)} - p'(t) I_{(z,t)} \right) \quad (4.A.1.13)$$

Notre objectif étant de déterminer analytiquement le seuil d'apparition de la nouvelle solution ainsi que la stabilité des solutions au voisinage de la bifurcation, l'utilisation d'un développement perturbatif permet de contourner les difficultés rencontrées au cours de l'analyse de stabilité linéaire (paragraphe 3.2.C). Cette méthode permet une formulation de modèle ayant des caractéristiques proches du système original dans un domaine de paramètres déterminé [Baer, 1993]. Pour cela, nous allons modifier les équations et définir les conditions physiques particulières pour lesquels un des paramètres du système physique est suffisamment petit pour être utilisé comme support du développement. Ceci fait l'objet du paragraphe qui suit. Il est basé sur les considérations physiques que nous allons développer.

#### ***4.A.2. Approximation du laser de classe B.***

Rappelons la définition de quelques uns des paramètres. Le terme d'amortissement de la polarisation atomique ( $\gamma_{\perp}$ ) est le rapport de la durée de vie des photons dans la cavité et du temps de relaxation de la cohérence. Le terme d'amortissement de la différence de population ( $\gamma_{//}$ ) est le rapport de la durée de vie des photons dans la cavité et de la durée de vie des atomes sur le niveau supérieur de la transition lasante. Ces deux paramètres ont des influences particulières sur la dynamique du système qui dans le cas du laser de classe B peuvent être interprétées de deux façons différentes.

##### ***4.A.2.a. Cas de l'élimination adiabatique.***

La dénomination de laser de classe B est utilisée lorsque  $\gamma_{\perp}$  est grand devant les termes de relaxation du champ électrique et de l'inversion de population [Fu, 1989]. La polarisation atomique est alors la

variable rapide du système. Elle suit adiabatiquement l'évolution des deux autres grandeurs physiques dont le comportement, plus lent, impose la dynamique et les temps caractéristiques du laser. Sur l'échelle de temps du champ électrique et de l'inversion de population, la polarisation atomique apparaît toujours dans un état stationnaire. On obtient ainsi une expression de  $P(z,t)$  en fonction de  $E(z,t)$  et  $D(z,t)$  et un modèle de dimension réduite. C'est ce qu'on appelle l'élimination adiabatique (elle a été utilisée en Partie I de cette thèse). Le modèle s'écrit :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \bar{E}_{(z,t)} = \bar{E}_{(z,t)} \left( -1 + \frac{D_{(z,t)}}{1 + i \Delta} \right) \quad (4.A.2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D_{(z,t)} = \gamma // \left( A - D_{(z,t)} - \frac{D_{(z,t)} E_{(z,t)}^2}{1 + \Delta^2} \right) \quad (4.A.2.2)$$

$$\bar{E}_{(z+L,t)} = \bar{E}_{(z,t)} \quad (4.A.2.3)$$

Les solutions stationnaires sont :

$$\omega_s = -\Delta \quad (4.A.2.4)$$

$$D_s = 1 + \Delta^2 \quad (4.A.2.5)$$

$$I_s = A - 1 - \Delta^2 \quad (4.A.2.6)$$

et correspondent bien à la limite  $\gamma_{\perp} \rightarrow \infty$  des solutions obtenues au paragraphe 3.A.2. Une analyse de stabilité linéaire permet de déterminer la position de la bifurcation de Hopf et une expression analytique des domaines de déstabilisation dans l'espace  $(A, \alpha)$ . Mais la dépendance en  $\Delta$  de la position de cette Hopf n'est pas physiquement acceptable. En effet, lorsque le désaccord en fréquence s'annule, la valeur du pompage critique devient infinie ce qui est en contradiction avec les calculs de stabilité linéaire du paragraphe 3.B.1 ( où la limite  $\gamma_{\perp} \rightarrow \infty$  de la relation 3.B.1.9 correspond à un pompage critique égal à 9). Ceci montre les conséquences, très importantes sur la dynamique du laser, que peut avoir l'élimination adiabatique. Il est donc nécessaire d'utiliser une approche mathématique différente.

#### 4.A.2.b. Autre approximation.

L'autre situation physique correspondant au laser de classe B est caractérisée par les conditions suivantes :  $\gamma_{//}$  est petit devant 1 et devant  $\gamma_{\perp}$  (ces deux paramètres sont normalisés aux pertes de cavité) [Baer, 1993]. Dans ce cas, l'inversion de population est une variable lente qui impose sa dynamique au reste du système. L'évolution temporelle des états stables et instables se déroule suivant une échelle de temps fixée par  $D_{(z,t)}$ . Mais contrairement au cas précédent, aucune variable n'est éliminée directement. Les simplifications sont moins drastiques ce qui garantit la présence de la bifurcation, si elle existe, dans un domaine de paramètres plus étendu.

Physiquement les deux situations sont similaires mais mathématiquement la seconde présente de nombreux avantages. Elle autorise des développements perturbatifs autour des solutions stationnaires du système exact et permet également l'écriture de nouvelles échelles de temps et d'espace.

Nous proposons les développements suivant autour des solutions stationnaires :

$$t' = \sqrt{2I_s \gamma_{//}} t \quad (4.A.2.7)$$

$$z' = \sqrt{2I_s \gamma_{//}} z \quad (4.A.2.8)$$

$$D = D_s + \sqrt{\frac{I_s \gamma_{//}}{2}} X \quad (4.A.2.9)$$

$$p' = 1 + \sqrt{\frac{I_s \gamma_{//}}{2}} Z' \quad (4.A.2.10)$$

$$p'' = \omega_s + \sqrt{\frac{I_s \gamma_{//}}{2}} Z'' \quad (4.A.2.11)$$

$$I_{(z,t)} = I_s (1 + Y) \quad (4.A.2.12)$$

Ces développements sont issus des échelles de temps et d'espace ainsi que des formes de modes propres obtenues lors de l'analyse de stabilité

linéaire lorsque  $\gamma_{//}$  est petit, ce qui introduit judicieusement un paramètre perturbatif dans les équations (4.A.1.9-13). Il est à noter que toutes ces variables et tous ces paramètres sont normalisés (et que suite à l'équation 4.A.2.12 la valeur de  $Y$  ne peut être inférieure à -1).

Les solutions issues de la bifurcation étant oscillantes et se propageant dans la cavité, le passage dans leur référentiel transforme le système de dérivées partielles en un système de dérivées ordinaires. Pour des solutions évoluant à la fréquence  $\Omega$  et se propageant à la vitesse de la lumière normalisée ( $c = 1$ ), nous proposons le changement de variable suivant :

$$\tau = \Omega t' + z' \quad (4.A.2.13)$$

Le fait d'extraire la fréquence d'oscillation de ces solutions particulières les rend  $2\pi$  périodiques dans le nouveau référentiel. Les conditions de bouclage se traduisent alors par la continuité de l'amplitude du champ en  $\tau$  et  $\tau + 2\pi$ ,  $\Omega$  étant un paramètre supplémentaire à déterminer.

L'objectif de ces développements est d'obtenir des expressions simplifiées pour les équations de champ et de l'inversion de population. Par contre, la polarisation atomique qui décrit l'interaction entre le champ et la matière, et qui est à l'origine de la non-linéarité, conserve une expression plus compliquée. Le modèle s'écrit donc :

$$(\Omega + k) \frac{\partial}{\partial \tau} Y = Z' (1 + Y) \quad (4.A.2.14)$$

$$\Omega \frac{\partial}{\partial \tau} Z' = \frac{1}{\sqrt{2\gamma_{//} I_s}} \left\{ \gamma_{\perp} (X - Z' + \Delta Z'') + 2\omega_s Z'' + \sqrt{\frac{\gamma_{//} I_s}{2}} (Z'')^2 - \left( 1 + \sqrt{\frac{\gamma_{//} I_s}{2}} Z' \right) \frac{\Omega}{1 + Y} \frac{\partial}{\partial \tau} Y \right\} \quad (4.A.2.15)$$



$$\Omega \frac{\partial}{\partial \tau} Z'' = \frac{1}{\sqrt{2\gamma_{//} I_s}} \left\{ -\gamma_{\perp} (Z'' + \Delta Z') - (Z'' + \omega_s Z') + \sqrt{\frac{\gamma_{//} I_s}{2}} (Z'' Z') \right. \\ \left. - \left( \omega_s + \sqrt{\frac{\gamma_{//} I_s}{2}} Z'' \right) \frac{\Omega}{1+Y} \frac{\partial}{\partial \tau} Y \right\} \quad (4.A.2.16)$$

$$\Omega \frac{\partial}{\partial \tau} X = -Y - \sqrt{\frac{\gamma_{//} I_s}{2}} \left\{ Z' (-1+Y) + \frac{X}{I_s} \right\} \quad (4.A.2.17)$$

Ces équations, réduites à quatre, mettent en évidence les différents ordres de grandeur des non linéarités, en fonction du paramètre de développement perturbatif  $\gamma_{//}$ .

#### 4.A.3. Développement polynomial.

Le système formé par les équations 4.A.2.14 - 17 ne fournit pas de résultats analytiques puisqu'il constitue uniquement une reformulation des équations. La présence de  $\gamma_{//}$  permet de développer les variables en puissances demi entières de  $\gamma_{//}$  et de décomposer le système d'équations en une série de sous systèmes fermés. Nous proposons donc les notations suivantes :

$$X = X_0 + \sqrt{\gamma_{//}} X_1 \quad (4.A.3.1)$$

$$Y = Y_0 + \sqrt{\gamma_{//}} Y_1 \quad (4.A.3.2)$$

$$Z' = Z'_0 + \sqrt{\gamma_{//}} Z'_1 \quad (4.A.3.3)$$

$$Z'' = Z''_0 + \sqrt{\gamma_{//}} Z''_1 \quad (4.A.3.4)$$

La présence des ordres supérieurs n'est pas nécessaire pour mener à bien les calculs. En revanche, leur absence limite la validité du développement à un domaine pour lequel  $\gamma_{//}$  est vraiment inférieur à 1. Au delà, les résultats perdent de leur cohérence.

#### 4.A.4. Ordre 0 et invariant.

L'introduction des relations 4.A.3.1 - 4 dans les équations 4.A.2.14 - 17 et l'identification suivant les puissances de  $\gamma_{//}$  (ordres  $-1/2$  et 0 des équations) conduit aux expressions suivantes :

$$(\Omega + k) \frac{\partial}{\partial \tau} Y_0 = Z'_0 (1 + Y_0) \quad (4.A.4.1)$$

$$0 = \gamma_{\perp} (X_0 - Z'_0 + \Delta Z''_0) + 2\omega_s Z'_0 - \frac{\Omega}{1 + Y_0} \frac{\partial}{\partial \tau} Y_0 \quad (4.A.4.2)$$

$$0 = -\gamma_{\perp} (Z''_0 + \Delta Z'_0) - (\omega_s Z'_0 + Z''_0) - \frac{\omega_s \Omega}{1 + Y_0} \frac{\partial}{\partial \tau} Y_0 \quad (4.A.4.3)$$

$$\Omega \frac{\partial}{\partial \tau} X_0 = -Y_0 \quad (4.A.4.4)$$

La caractéristique principale de ce nouveau système est que, dans les équations 4.A.4.2 et 4.A.4.3, les opérations de dérivation des composantes de la polarisation atomique n'apparaissent pas : ce qui rapproche ce calcul de l'élimination adiabatique telle qu'elle est pratiquée habituellement et cet ordre zéro correspond au laser de classe B conventionnel [Fu, 1989]. Les états stationnaires des variables  $Z'_0$  et  $Z''_0$  s'expriment alors en fonction de  $X_0$ ,  $Y_0$ , des paramètres du système mais également en fonction de la dérivée de  $Y_0$ . Le système d'équations 4.A.4.1 - 4 se réduit à un ensemble de deux relations.

Dans le but de faciliter les écritures et de réduire les expressions des coefficients, nous introduisons quatre nouveaux paramètres qui ne sont que des combinaisons particulières de paramètres déjà connus :

$$a_1 = \gamma_{\perp} + \frac{\Omega}{\Omega + k} \quad (4.A.4.5)$$

$$a_2 = \Delta \gamma_{\perp} + \omega_s + \frac{\omega_s \Omega}{\Omega + k} \quad (4.A.4.6)$$

$$b_1 = \Delta \gamma_{\perp} + 2\omega_s \quad (4.A.4.7)$$

$$b_2 = \gamma_{\perp} + 1 \quad (4.A.4.8)$$

Rappelons que  $\Omega$  est une grandeur qui reste à déterminer. Le modèle s'écrit sous une forme plus compacte en factorisant les termes de dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} Y_0 = \frac{\gamma_{\perp} b_2}{(a_1 b_2 + a_2 b_1)(\Omega + k)} (1 + Y_0) X_0 \quad (4.A.4.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} X_0 = -\frac{Y_0}{\Omega} \quad (4.A.4.10)$$

A l'ordre dominant, le comportement du laser est dirigé par les variables de champ et d'inversion de population. Ecrit sous cette forme, le système est directement intégrable ce qui permet de calculer les domaines d'évolution des grandeurs physiques dans l'espace des phases. Il suffit pour cela de combiner les équations 4.A.4.9 et 4.A.4.10 pour réduire le système à la seule relation :

$$dY_0 - \frac{dY_0}{1 + Y_0} + \frac{\gamma_{\perp} b_2 \Omega}{(a_1 b_2 + a_2 b_1)(\Omega + k)} X_0 dX_0 = 0 \quad (4.A.4.11)$$

dont le résultat de l'intégration est un invariant du système, qui est alors conservatif et qui s'écrit:

$$2Y_0 - 2 \text{Log}(|1 + Y_0|) + \frac{\gamma_{\perp} b_2 \Omega}{(a_1 b_2 + a_2 b_1)(\Omega + k)} X_0^2 = \text{cste} = C$$

$$(4.A.4.12)$$

La relation 4.A.4.12 relie les amplitudes des solutions oscillantes du modèle et est représentée dans l'espace des phases par des courbes fermées.

A titre pédagogique et pour illustrer explicitement l'influence du désaccord en fréquence, nous représentons sur la figure 4.A.4.1 les courbes obtenues pour une valeur de l'invariant C fixée à 2. Nous avons pris deux valeurs différentes du coefficient multiplicateur du carré de  $X_0$  qui contient le désaccord en fréquence. L'étude approximative des

paramètres, définis par les relations 4.A.4.5 - 8, montre que ce coefficient est maximal lorsque le désaccord en fréquence est nul et qu'il diminue proportionnellement à l'inverse du carré de  $\Delta$ . Les calculs numériques que nous présentons correspondent à des valeurs de ce coefficient égales à 1 pour  $\Delta = 0$  et à 0.4 pour  $\Delta \neq 0$ .

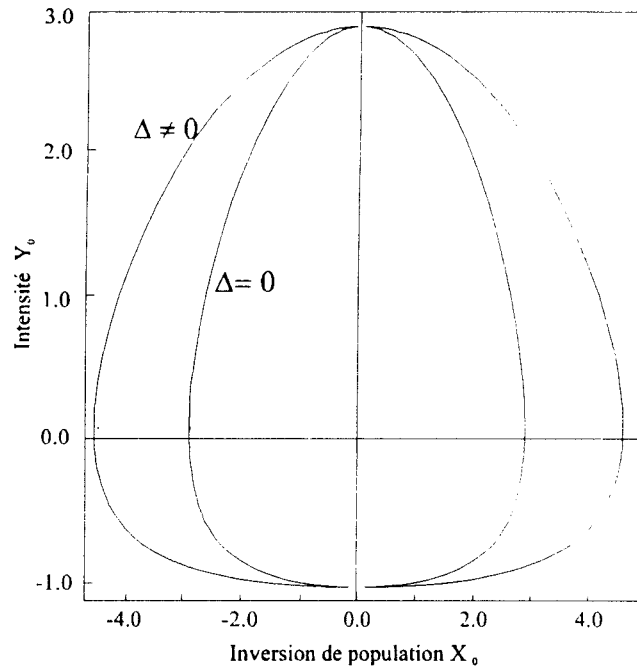


figure 4.A.4.1 : représentation de l'invariant dans un espace  $(X_0, Y_0)$

mise en évidence de l'influence du désaccord en fréquence.

Ces courbes montrent que le désaccord en fréquence autorise une plus grande amplitude de variation de la variable d'inversion de population  $X_0$ .

Ces premiers résultats permettent de visualiser l'ordre dominant des amplitudes (en intensité et en inversion de population) de la solution oscillante dans l'espace des paramètres. Nous ne connaissons toujours rien de sa fréquence  $\Omega$  et de son nombre d'onde  $k$  ainsi que de ses conditions d'existence et de stabilité. Nous allons donc consacrer la totalité de la section suivante à la détermination de son seuil d'apparition par une méthode totalement différente de celle employée habituellement dans les études linéaires [Baer, 1993].

## 4.B. DETERMINATION DES SEUILS D'INSTABILITE

Issue d'un calcul perturbatif, la relation 4.A.4.12 n'est valable que dans un domaine de paramètres délimité par la valeur de  $\gamma_{//}$ . A cette contrainte mathématique s'ajoute celle plus physique de la stabilité des solutions dans l'espace et le temps. En effet, le laser ne pouvant supporter une solution divergente, les amplitudes doivent nécessairement rester finies pour des temps très longs ou des longueurs de cavité importantes.

En terme mathématique, cette condition d'existence se traduit par l'obligation pour la solution à l'ordre 0 (ie l'invariant) de ne pas être affecté par la perturbation de la solution (l'ordre suivant,  $X_1$ ,  $Y_1$ ). Pour une fonction périodique, cette condition de pérennité est vérifiée si, sur une période, l'intégrale de la dérivée apporté par la perturbation à l'invariant est nulle [Zeghlache, 1992] [Baer, 1993].

Afin d'exprimer complètement cette condition, nous devons déterminer l'expression de l'invariant 'à l'ordre  $\frac{1}{2}$ ' (en quelque sorte, sa correction).

### 4.B.1. Invariant perturbé et modèle à l'ordre $\frac{1}{2}$ .

L'invariant d'ordre 0 est donné par relation 4.A.4.12 issu du système d'équations 4.A.4.1-4. On perturbe cet invariant au moyen du développement 4.A.3.1-4 :

$$X_0 + \sqrt{\gamma_{//}} X_1 \quad (4.B.1.1)$$

$$Y_0 + \sqrt{\gamma_{//}} Y_1 \quad (4.B.1.2)$$

entraînant celui de la constante qui s'écrit également :

$$C = C_0 + \sqrt{\gamma_{//}} C_1 \quad (4.B.1.3)$$

L'identification terme à terme conduit à 'l'invariant perturbé' de l'ordre  $\frac{1}{2}$  :

$$C_1 = 2Y_1 - \frac{2Y_1}{1+Y_0} + \frac{2\gamma_{\perp}\Omega b_2}{(a_1b_2 + a_2b_1)(\Omega+k)} X_0 X_1 \quad (4.B.1.4)$$

La condition de continuité et de stabilité de la solution d'ordre zéro s'écrit :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} C_1 d\tau = 0 \quad (4.B.1.5)$$

Dans un premier temps, nous traitons le terme de dérivation. Les variables  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $X_1$  et  $Y_1$  dépendant du temps, la forme suivante apparaît :

$$\frac{\partial C_1}{\partial \tau} = \frac{2Y_0}{1+Y_0} \frac{\partial Y_1}{\partial \tau} - \frac{2Y_1 Z'_0}{(1+Y_0)(\Omega+k)} + \frac{2\gamma_{\perp}\Omega b_2}{(a_1b_2 + a_2b_1)(\Omega+k)} \left( \frac{-Y_0 X_1}{\Omega} + X_0 \frac{\partial X_1}{\partial \tau} \right) \quad (4.B.1.6)$$

La présence des termes de dérivation des variables d'ordre 1 nécessite le calcul des équations d'évolution pour les composantes de ce rang obtenues par le développement des équations 4.A.2.14 - 17 (en utilisant les notations définies par les relations 4.B.1.1 et 4.B.1.2) qui conduisent à l'expression du modèle à l'ordre  $\frac{1}{2}$  :

$$(\Omega+k) \frac{\partial}{\partial \tau} Y_1 = Z'_1 (1+Y_0) + Z'_0 Y_1 \quad (4.B.1.7)$$

$$\Omega \frac{\partial}{\partial \tau} Z'_0 = \frac{1}{\sqrt{2I_s}} \left\{ \gamma_{\perp} (X_1 - Z'_1 + \Delta Z''_1) + 2\omega_s Z''_1 + \sqrt{\frac{I_s}{2}} (Z''_0)^2 - \left( \frac{\Omega}{1+Y_0} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \tau} Y_1 - \frac{Y_1}{1+Y_0} \frac{\partial}{\partial \tau} Y_0 + \sqrt{\frac{I_s}{2}} Z'_0 \frac{\partial}{\partial \tau} Y_0 \right) \right\} \quad (4.B.1.8)$$

$$\Omega \frac{\partial}{\partial \tau} Z_0'' = \frac{1}{\sqrt{2I_s}} \left\{ -\gamma_{\perp} (Z_1'' + \Delta Z_1') - (Z_1'' + \omega_s Z_1'') + \sqrt{\frac{I_s}{2}} (Z_0'' Z_0') \right. \\ \left. - \left( \frac{\Omega}{1+Y_0} \right) \left( \omega_s \frac{\partial}{\partial \tau} Y_1 - \omega_s \frac{Y_1}{1+Y_0} \frac{\partial}{\partial \tau} Y_0 + \sqrt{\frac{I_s}{2}} Z_0'' \frac{\partial}{\partial \tau} Y_0 \right) \right\} \quad (4.B.1.9)$$

$$\Omega \frac{\partial}{\partial \tau} X_1 = -Y_1 - \sqrt{\frac{I_s}{2}} \left\{ Z_0' (1+Y_0) + \frac{X_0}{I_s} \right\} \quad (4.B.1.10)$$

Ces équations mettent une nouvelle fois en évidence la contribution des deux composantes de la polarisation atomique. Celles du champ ( $Y_1$ ) et de l'inversion de population ( $X_1$ ) forment quasiment un système fermé à l'exception du terme en  $Z_1'$  que l'on peut remplacer par une combinaison des deuxième et troisième équations.

Après des transformations arithmétiques, les termes contenant les dérivées de  $X_1$  et  $Y_1$  de la relation 4.B.1.6 s'expriment en fonction des variables  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $X_1$  et  $Y_1$ . Ceci permet d'obtenir, en fin de calcul, une intégrale qui se décompose en une série de trois termes indépendants. Nous ne présenterons pas la totalité des calculs intermédiaires mais nous donnons dans le paragraphe suivant les éléments les plus importants.

#### **4.B.2. Relations entre les intégrales.**

Parmi ces simplifications, on note l'élimination de tous les termes du premier ordre ( $X_1$  et  $Y_1$ ). La condition de continuité définie par la relation 4.B.1.5 se décompose alors en une somme pondérée de trois intégrales que nous notons  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  et qui s'écrivent :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} Y_0 X_0^2 d\tau \quad I_2 = \int_0^{2\pi} X_0^2 d\tau \quad I_3 = \int_0^{2\pi} Y_0^2 d\tau$$

Si nous reprenons les relations données par les équations 4.A.4.9 et 4.A.4.10 (ordre 0 du modèle), la première intégrale s'exprime sous la forme :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} Y_0 X_0^2 d\tau = -\Omega \int_0^{2\pi} X_0^2 \frac{\partial X_0}{\partial \tau} d\tau = -\Omega \int_0^{2\pi} X_0^2 dX_0 \quad (4.B.2.1)$$

Pour des solutions oscillantes et périodiques, les valeurs en 0 et en  $2\pi$  sont égales. Cette dernière intégrale est donc nulle. Ce résultat est très important pour la suite du calcul puisque de nombreux termes contribuant à la perturbation de l'invariant sont éliminés.

Quant aux deux autres intégrales, elles s'expriment facilement l'une en fonction de l'autre :

$$I_2 = \int_0^{2\pi} X_0^2 d\tau = \int_0^{2\pi} X_0^2 (1 + Y_0) d\tau = \frac{(a_1 b_2 + a_2 b_1)(\Omega + k)}{\gamma_{\perp} b_2} \int_0^{2\pi} X_0 dY_0 \quad (4.B.2.2)$$

puis  $I_3$  :

$$I_3 = \int_0^{2\pi} Y_0^2 d\tau = -\Omega \int_0^{2\pi} Y_0 dX_0 = \Omega \int_0^{2\pi} X_0 dY_0 \quad (4.B.2.3)$$

qui permet de déduire une relation de proportionnalité entre  $I_2$  et  $I_3$  :

$$I_3 = \frac{\gamma_{\perp} b_2 \Omega}{(a_1 b_2 + a_2 b_1)(\Omega + k)} I_2 \quad (4.B.2.4)$$

Une relation similaire a été obtenue par Baer et Erneux [Baer 1993], seul le coefficient de proportionnalité est modifié par la présence du désaccord en fréquence.

### 4.B.3.L'intensité critique

L'équation (4.B.1.6) se réduit au produit d'une des intégrales  $I_2$  ou  $I_3$  et d'un coefficient dépendant de l'intensité stationnaire et des différents paramètres  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $k$  et  $\Omega$ . La condition de continuité (ou de solvabilité) annulant l'équation (4.B.1.6) n'est réalisée que pour certaines valeurs de l'intensité stationnaires : ce sont les seuils d'oscillation de la solution périodique caractérisé par une condition reliant les grandeurs  $\gamma_{\perp}$ ,



$\Delta$ , le nombre d'onde  $k$ , la fréquence  $\Omega$  et l'intensité critique. Cette valeur critique est donnée par la relation 4.B.3.1 :

$$\frac{1}{I_c} = \gamma_{\perp} \Gamma \left[ -1 + \frac{2 \Omega \Gamma}{(\Omega + k)} \left( 1 - \frac{a_2 b_1}{b_2^2} \right) \right] \quad (4.B.3.1)$$

où nous avons noté  $\Gamma$  le rapport :

$$\Gamma = \frac{b_2}{a_2 b_1 + a_1 b_2} \quad (4.B.3.2)$$

A désaccord en fréquence nul, les paramètres  $a_2$  et  $b_1$  s'annulent. Dans ce cas, l'intensité critique s'exprime plus simplement, pour redonner une forme connue [Baer, 1993] [Fu, 1989]:

$$\frac{1}{I_c} = \left\{ 1 - \frac{\Omega}{\gamma_{\perp}(\Omega + k) + \Omega} \right\} \left\{ -1 + \frac{2 \Omega}{\gamma_{\perp}(\Omega + k) + \Omega} \right\} \quad (4.B.3.3)$$

La fréquence  $\Omega$  est toujours un paramètre inconnu dont le calcul fera l'objet du paragraphe suivant.

#### **4.B.4. Calcul de la fréquence des instabilités au voisinage du point critique.**

Nous présentons au cours de ce paragraphe une méthode rapide de détermination de la fréquence  $\Omega$  : méthode qui sera complétée et vérifiée au cours du calcul de reconstruction de la solution oscillante. Notre objectif est de donner une expression approchée valable au voisinage du point de bifurcation. Ces développements viennent dans la continuité de ceux effectués lors de l'analyse de stabilité linéaire (section 3.B). Nous avons alors tenté de localiser les points de l'espace des paramètres pour

lesquels les exposants de Liapunov du système linéarisé étaient imaginaires pures.

Dans ce calcul, nous utilisons le modèle à l'ordre 0 (équations 4.A.4.9 et 4.A.4.10) et les propriétés de la bifurcation de Hopf. Par définition, nous savons qu'au point de déstabilisation, la solution stationnaire laisse place à une solution oscillante d'amplitude nulle. Dans un domaine de l'espace des paramètres proche de ce point, l'amplitude reste donc très petite ce qui autorise certaines approximations. Par exemple, on peut négliger les produits entre variables de même ordre comparativement aux variables elles-mêmes (ou  $X_0 Y_0 \ll X_0$  ou  $Y_0$ ). Le système passe de deux équations couplées à une seule équation différentielle du second ordre à coefficients constants. La fréquence de la solution oscillante est donnée par la relation :

$$\Omega = \frac{\gamma_{\perp} b_2}{(a_1 b_2 + a_2 b_1)(\Omega + k)} \quad (4.B.4.1)$$

Si nous développons cette expression, nous obtenons un polynôme de degré 2 à coefficients réels. A l'aide de nouveaux paramètres  $d_1$  et  $d_2$  :

$$d_1 = \frac{b_2 + \omega_s b_1}{\gamma_{\perp} b_2} \quad (4.B.4.2)$$

$$d_2 = \frac{b_2 - \omega_s b_1}{b_2} \quad (4.B.4.3)$$

la formulation du polynôme reste concise:

$$\Omega^2 (d_1 + d_2) + \Omega k d_2 = 1 \quad (4.B.4.4)$$

Le discriminant de ce polynôme est toujours positif, des solutions réelles existent quelles que soient les valeurs des paramètres.

Les racines s'expriment par :

$$\Omega_{\pm} = \frac{-k d_2 \pm \sqrt{(k d_2)^2 + 4 (d_1 + d_2)}}{2 (d_1 + d_2)} \quad (4.B.4.5)$$

A l'aide de ces solutions, il est maintenant possible de représenter les domaines de déstabilisation de la solution stationnaire dans un espace  $(I_c, \alpha)$ .

#### 4.B.5. Résultat pour $\gamma_{\perp}$ d'ordre 1.

Sur le graphe 4.B.5.1, nous avons représenté les domaines de déstabilisation de la solution monomode stationnaire pour des valeurs nulle et non nulle ( $\Delta = 0.5$ ) du désaccord en fréquence et pour  $\gamma_{\perp} = 2$ .

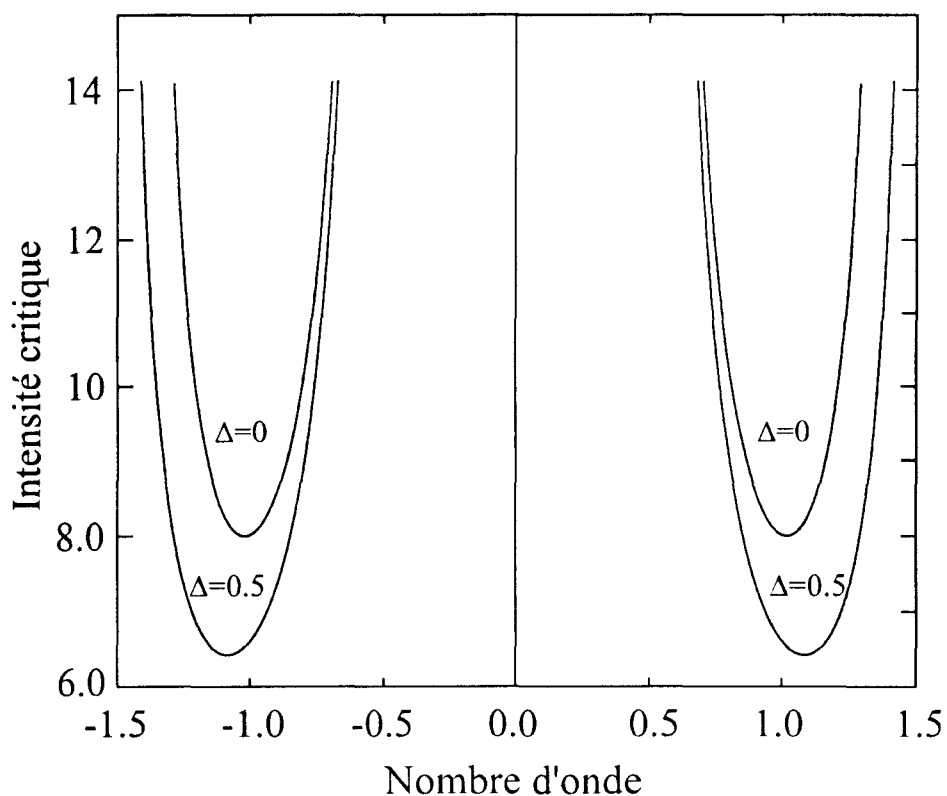


figure 4.B.5.1 : domaine de déstabilisation de la solution stationnaire dans un espace  $(I_c, \alpha)$ . Valeurs de paramètres :  $\Delta = 0$ ,  $\Delta = 0.5$ ,  $\gamma_{\perp} = 2$

Lorsque  $\gamma_{\perp}$  est grand, la présence du désaccord en fréquence baisse (l'instabilité apparaît pour des intensités critiques plus faibles) et élargit

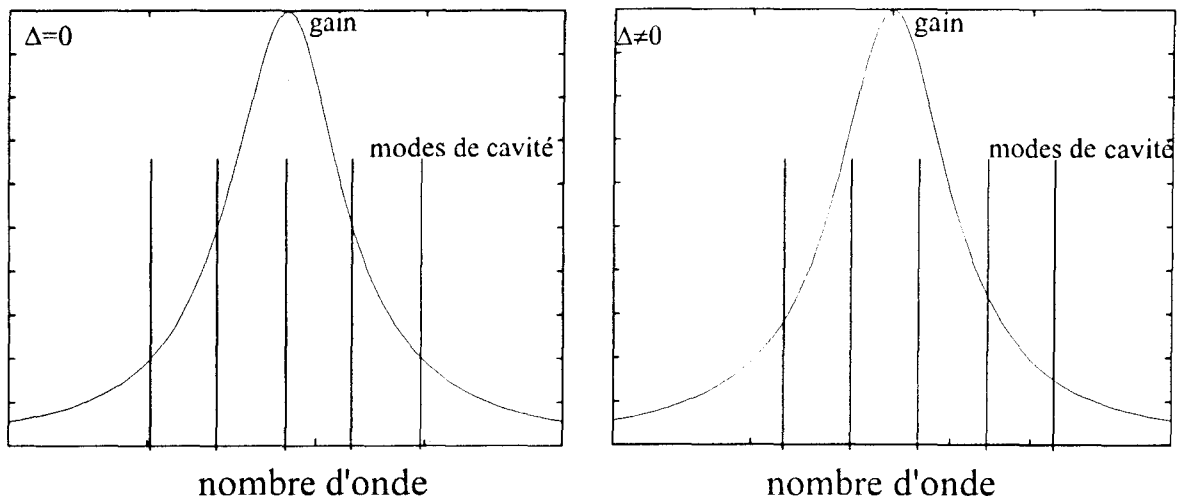
(un plus grand nombre de modes longitudinaux sont susceptibles d'intervenir) le domaine de déstabilisation de la solution stationnaire. Sur ce schéma, le seuil d'apparition des instabilités est inférieur à la valeur  $I_c = 8$  qui constitue la limite inférieure du cas  $\Delta = 0$  [Baer, 1993]. De même, pour une valeur fixée du paramètre de pompe, le nombre d'onde nécessaire à l'apparition de la solution oscillante admet une plage de valeurs beaucoup plus importante. Il apparaît donc que dans ce premier cas, la déstabilisation de la solution monomode nécessite un taux de pompage plus faible ainsi que des réglages moins précis de la cavité.

L'explication physique de ce comportement se trouve en partie dans les hypothèses que nous avons formulées. La solution stationnaire n'est déstabilisée que par les modes longitudinaux, les mécanismes de la bifurcation s'expliquent comme suit. En l'absence de désaccord en fréquence ( $\Delta = 0$ ), le mode fondamental représentant la solution stationnaire monomode est centré sur la courbe de gain. Malgré sa largeur importante due à la valeur élevée de  $\gamma_{\perp}$ , les modes latéraux peuvent se trouver relativement éloignés du maximum d'amplification (c'est le cas en général lorsque la cavité est petite et par conséquent l'intervalle spectral est grand). Il faut augmenter le pompage de façon à équilibrer les 'pertes' représentées par cette courbe de gain afin de permettre l'amplification des modes latéraux présents dans la cavité : les interactions non linéaires avec le mode fondamental engendrent sa déstabilisation.

La situation avec désaccord en fréquence est différente. Sa présence se traduit par un décalage entre la fréquence atomique et la fréquence du mode fondamental de la cavité vide. Dans la représentation spectrale, le mode fondamental ne coïncide plus avec le maximum de la courbe de gain atomique provoquant ainsi une augmentation du pompage nécessaire à son oscillation tout en produisant une diminution de l'intensité émise. Par contre, le décalage des fréquences ne concerne pas que le mode fondamental. Il influe également sur la position des modes latéraux (l'intervalle spectrale libre restant constant). Suivant le signe du désaccord, un des modes latéraux se trouve donc plus proche du

maximum de la courbe d'amplification. L'intensité de pompage nécessaire à son oscillation sera inférieure à celle requise en cas d'accord en fréquence. Le seuil de déstabilisation est de ce fait moins élevé.

Pour mieux illustrer ce comportement, nous avons représenté, sur le graphe 4.B.5.2, la distribution spectrale du gain et des modes de la cavité vide avec et sans désaccord.



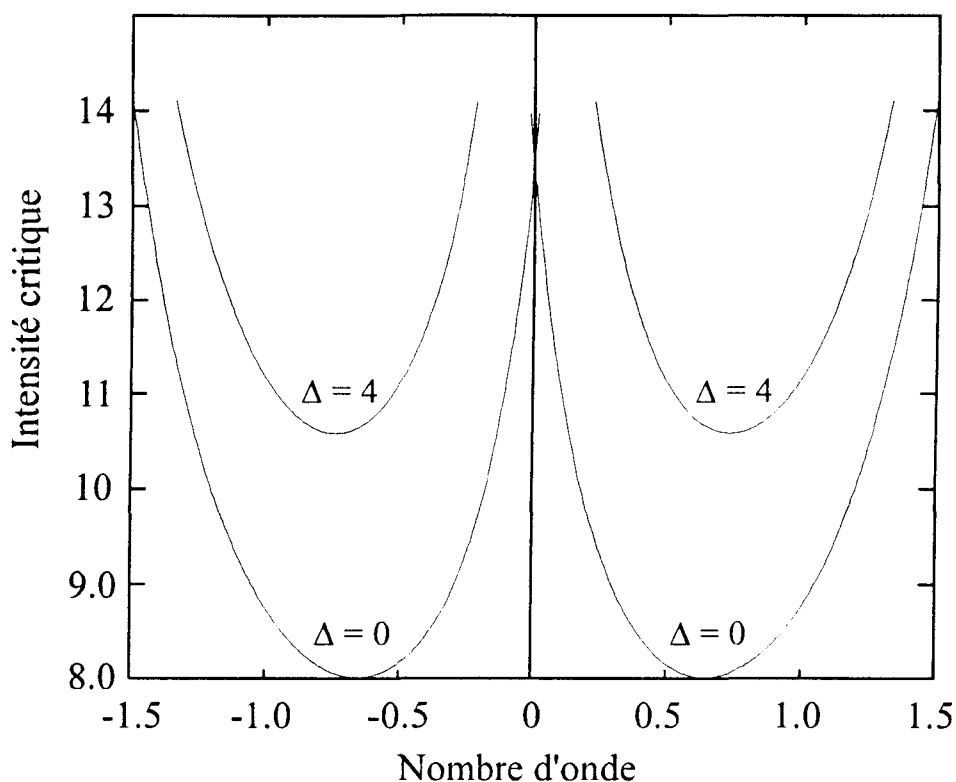
**figure 4.B.5.2** : distribution spectrale du gain et des modes de cavité

pour  $\gamma_{\perp}$  grand. Valeurs de paramètres arbitraires.

L'effet du désaccord en fréquence apparaît clairement sur le schéma de droite où l'on voit bien qu'un mode longitudinal passe dans la courbe de gain suite au décalage en fréquence et son oscillation nécessite moins de pompage que dans la situation 'accordée'.

#### **4.B.6. Résultats pour $\gamma_{\perp}$ petit**

Cette situation donne des résultats différents. Sur le graphique 4.B.6.1, nous présentons les domaines de déstabilisation pour deux valeurs différentes de  $\Delta$  et pour  $\gamma_{\perp} = 0.1$ .



**Figure 4.B.6.1:** domaine de déstabilisation de la solution stationnaire monomode. Valeurs de paramètres  $\Delta = 0$ ,  $\Delta = 4$  et  $\gamma_{\perp} = 0.1$

Dans ce cas, la présence du terme de désaccord en fréquence a des effets inverses au cas précédent : il diminue la surface du domaine de déstabilisation de la solution stationnaire et le décale vers des pompages plus élevés. Nous retrouvons bien sur cette figure le seuil  $I_c = 8$  du cas accordé mais le seuil pour la solution  $\Delta \neq 0$  est repoussé à des valeurs d'intensité critique supérieure à 10. La faible valeur de  $\gamma_{\perp}$  a donc des conséquences importantes sur le modèle tant du point de vue de la validité du développement ( $\gamma_{\parallel}$  petit) que du point de vue de la physique.

Dans le modèle de Bloch-Maxwell avec élargissement homogène, la courbe de gain est une lorentzienne normalisée dont la largeur à mi-hauteur est proportionnelle à  $\gamma_{\perp}$ . Par conséquent, nous sommes en présence d'un système sélectif qui n'amplifie que des valeurs de fréquences particulières. A désaccord en fréquence nul, le fonctionnement monomode est indépendant de la valeur de  $\gamma_{\perp}$ . Seul le passage à la

situation multimode nécessite plus d'énergie que dans le cas  $\gamma_{\perp}$  grand car la courbe de gain devenant très étroite, les modes latéraux se retrouvent très éloignés du domaine central d'amplification maximale.

Pour le laser désaccordé, le déplacement des fréquences fait sortir rapidement le mode central du domaine d'amplification maximal ce qui rend d'autant plus difficile le démarrage des modes latéraux et nécessite l'apport d'encore plus d'énergie.

De plus du point de vue mathématiquement, la présence d'un second petit paramètre dans un calcul perturbatif pose problème : la validité des résultats est remise en question dès que le second petit paramètre n'est plus négligeable devant le premier. Il semble donc logique de ne retenir que les résultats du chapitre 4.B.5 obtenus pour une valeur de  $\gamma_{\perp}$  suffisamment grande ( $\gamma_{\perp} > 1$ ).

## **5. CINQUIEME CHAPITRE**

<p><b>STABILITE DES SOLUTIONS OSCILLANTES</b></p>
---



## 5.A. CONSTRUCTION DES SOLUTIONS DE PETITES AMPLITUDES.

Les résultats présentés jusqu'ici constituent une étape intermédiaire importante vers l'objectif que nous nous sommes fixés. Nous connaissons les lieux de déstabilisation de la solution stationnaire vers une solution oscillante (équation 4.B.3.1) dont nous connaissons l'ordre le plus bas (invariant 4.A.4.12) et dont nous étudions la stabilité.

D'ordinaire, ce type de calcul est constitué d'une série d'opérations qui permet de déterminer, dans un premier temps, le point de bifurcation de la branche stationnaire (par une analyse de stabilité linéaire), puis d'analyser le voisinage immédiat du point de déstabilisation ce qui mène aux équations d'évolution sous une forme normale qui, une fois résolues, permettent la construction des solutions issues de la bifurcation. Il est ainsi possible d'exprimer les conditions d'existence de toutes les solutions susceptibles d'apparaître dans un domaine restreint entourant le point de Hopf [Lega, 1994] [Ning, 1990] [Zeghlache, 1992]. En général, ce calcul ne nécessite pas une nouvelle étude de stabilité car le système est nécessairement réduit ce qui restreint le nombre de solutions. Dans le domaine de paramètres où une solution existe, le laser finit toujours par rejoindre cet l'état

Dans notre cas, cette démarche n'est pas exactement applicable. D'une part, nous ne connaissons le point de bifurcation que de façon approchée et nos calculs ont montré que la validité des résultats imposait des contraintes importantes sur le domaine de l'espace des paramètres accessible à notre investigation. D'autre part, dès les premiers développements, nous avons préjugé de la forme des solutions oscillantes ce qui ne permet pas d'obtenir des résultats aussi généraux que ceux issus d'un calcul de type forme normale. Toutefois, en appliquant à cette situation particulière les techniques de construction des solutions

utilisées pour un calcul standard, nous avons été en mesure d'obtenir des résultats similaires. Cette méthode donne une condition d'existence pour la solution oscillante générée par l'interaction des modes longitudinaux en fonction des paramètres physiques du laser. L'interprétation est la suivante : si le système se déstabilise vers une solution réellement présente au voisinage du point de Hopf alors la bifurcation est supercritique. Le laser oscille suivant une fréquence donnée et l'amplitude des oscillations augmente lorsque l'on s'éloigne du point de bifurcation. Si la solution n'existe pas (ou pour des valeurs du pompage inférieures au point critique), la bifurcation est dite souscritique, c'est à dire que le système se déstabilise vers une solution présente au voisinage du point de Hopf qui est instable.

La construction de la solution oscillante utilise un développement perturbatif dont les caractéristiques s'appuient sur les propriétés générales des bifurcations de Hopf. L'objectif est de déterminer, dans un premier temps, l'évolution de la fréquence des oscillations lorsque l'on s'éloigne du point de bifurcation pour, ensuite calculer la correction sur l'intensité. Celle-ci nous donne alors la condition d'existence permettant de discuter la viabilité de la solution oscillante.

### 5.A.1. Développement polynomial

A la bifurcation coexistent au minimum deux solutions. On y retrouve la solution stationnaire déstabilisée et la solution oscillante dont l'amplitude est nulle mais qui oscille à une fréquence donnée. Autour de ce point, les caractéristiques de la fréquence et de l'amplitude peuvent être déterminées analytiquement. Il est nécessaire, pour cela, d'effectuer un développement polynomial de toutes les grandeurs physiques permettant de construire des solutions périodiques proches de celles qui apparaissent.

Du point de vue mathématique, cette opération nécessite une décomposition des variables en puissance d'un petit paramètre qui peut être fonction de la distance entre le point critique de Hopf et celui nécessairement voisin où l'analyse s'effectue. De plus, pour des calculs complets, l'évolution de la dépendance spatiale et temporelle de cette solution doit être prise en compte. Dans notre étude, plutôt que de décomposer les variables  $z$  et  $t$  en série, nous travaillons directement sur la variable de fréquence  $\Omega$  définie par la relation 4.A.2.13 et déjà présente dans les expressions. Ainsi, il n'est pas nécessaire de reprendre les calculs conduisant à l'intensité critique de déstabilisation de la solution stationnaire donnée par la relation 4.B.3.1.

Au point de bifurcation, les variables de champ et de population ayant une amplitude nulle mais oscillant à la fréquence de Hopf, nous proposons de développement polynomial suivant pour les variables  $X$ ,  $Y$  et  $\Omega$  :

$$Y = \eta Y_1 + \eta^2 Y_2 + \eta^3 Y_3 \quad (5.A.1.1)$$

$$X = \eta X_1 + \eta^2 X_2 + \eta^3 X_3 \quad (5.A.1.2)$$

$$\Omega = \Omega_0 + \eta^2 \Omega_2 \quad (5.A.1.3)$$

où  $\eta$  est le paramètre mesurant l'écart au point de Hopf.

Ces relations sont à inclure dans le modèle constitué par les équations 4.A.4.9 et 4.A.4.10 et constituant l'ordre zéro du développement du

modèle de Bloch Maxwell. Elles supposent un développement de toutes les expressions du chapitre 4 contenant X, Y,  $\Omega$  y compris les paramètres  $a_1$  et  $a_2$ .

### 5.A.2. Calcul de la fréquence

La première partie des développements est consacrée aux calculs des deux composantes de la fréquence  $\Omega_0$  et  $\Omega_2$ . Ils viennent en complément de du paragraphe 4.B.4 où nous avons présenté un calcul rapide et assez peu justifié sur le plan mathématique.

Le point de départ n'est pas le modèle de Bloch Maxwell mais son expression à l'ordre 0 du développement en fonction de  $\gamma_{//}$  à l'origine de l'invariant du système (équation 4.A.4.9-10). Nous rappelons son écriture (en supprimant les indices 'zéro') :

$$\Omega \frac{\partial}{\partial \tau} Y = \beta (1 + Y) X \quad (5.A.2.1)$$

$$\Omega \frac{\partial}{\partial \tau} X = -Y \quad (5.A.2.2)$$

$\beta$  est un nouveau paramètre dont nous donnons la définition ainsi que sa forme développée en puissance de  $\eta$ :

$$\beta = \frac{\gamma_{\perp} b_2 \Omega}{(a_1 b_2 + a_2 b_1)(\Omega + k)} \quad (5.A.2.3)$$

$$\beta = \beta_0 + \eta^2 \beta_2 \quad (5.A.2.4)$$

L'introduction de cette relation et des éléments du développement perturbatif (relations 5.A.1.1 - 3) dans les équations 5.A.2.1 et 5.A.2.2 conduit au système suivant:

$$\begin{aligned} (\Omega_0 + \eta^2 \Omega_2) \frac{\partial}{\partial \tau} (\eta Y_1 + \eta^2 Y_2 + \eta^3 Y_3) &= (\beta_0 + \eta^2 \beta_2) \\ & (1 + \eta Y_1 + \eta^2 Y_2 + \eta^3 Y_3) (\eta X_1 + \eta^2 X_2 + \eta^3 X_3) \end{aligned}$$

(5.A.2.5)

$$(\Omega_0 + \eta^2 \Omega_2) \frac{\partial}{\partial \tau} (\eta X_1 + \eta^2 X_2 + \eta^3 X_3) = -(\eta Y_1 + \eta^2 Y_2 + \eta^3 Y_3)$$

(5.A.2.6)

Une identification suivant les puissances de  $\eta$  permet la décomposition en une série de trois systèmes (dont deux sont solvables analytiquement).

### 5.A.2.a. Ordre 1 du développement.

C'est l'ordre le plus bas du développement. Les équations s'écrivent :

$$\Omega_0 \frac{\partial}{\partial \tau} Y_1 = \beta_0 X_1 \quad (5.A.2.7)$$

$$\Omega_0 \frac{\partial}{\partial \tau} X_1 = -Y_1 \quad (5.A.2.8)$$

Nous obtenons la transposition mathématique du raisonnement basé sur des considérations physiques de la paragraphe 4.B.4. Le système se réduit à une unique équation différentielle du second ordre à coefficients constants, sans second membre. La solution est harmonique et sa fréquence apparaît naturellement. Pour les variables de champ et d'inversion de population, nous obtenons les expressions générales suivantes :

$$X_1 = \alpha_1 e^{+i\tau} + \bar{\alpha}_1 e^{-i\tau} \quad (5.A.2.9)$$

$$Y_1 = -i\Omega_0 (\alpha_1 e^{+i\tau} - \bar{\alpha}_1 e^{-i\tau}) \quad (5.A.2.10)$$

$$\beta_0 = \Omega_0^2 \quad (5.A.2.11)$$

où  $\alpha_1$  est l'amplitude des oscillations. L'équation 5.A.2.11 n'est rien d'autre que l'ordre 0 en  $\eta$  de l'équation 4.B.4.1 représentant la fréquence de la solution oscillante.

Au voisinage de la bifurcation, ces solutions correspondent à l'ordre dominant. Dans l'espace des phases, la solution émergente est

représentée par un cycle limite centré sur la solution stationnaire, caractéristique de la bifurcation de Hopf. Le cycle est parcouru à une fréquence dépendant uniquement des grandeurs physiques du laser et qui est celle calculée à la paragraphe 4.B.4. Sur la base de ces résultats, nous poursuivons le calcul aux ordre supérieurs.

### 5.A.2.b. Ordre 2 du développement.

Le premier terme d'interaction entre le champ et l'inversion de population apparaît via le produit des variables  $X_1$  et  $Y_1$ . Le modèle s'écrit :

$$\Omega_0 \frac{\partial}{\partial \tau} Y_2 = \beta_0 (X_2 + X_1 Y_1) \quad (5.A.2.12)$$

$$\Omega_0 \frac{\partial}{\partial \tau} X_2 = - Y_2 \quad (5.A.2.13)$$

Le principe de résolution ne change pas. Nous obtenons une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, avec second membre.

La solution générale se décompose en deux solutions distinctes. La première est solution de l'équation sans second membre. Elle est de type  $2\pi$ -périodique. La seconde est une solution particulière de l'équation complète. Le produit des deux exponentielles complexes de la solution à l'ordre 1 génère des harmoniques doubles. Les solutions à l'ordre deux s'écrivent :

$$X_2 = \alpha_2 e^{+i\tau} + \bar{\alpha}_2 e^{-i\tau} - \frac{i\Omega_0}{3} (\alpha_1^2 e^{+2i\tau} - \bar{\alpha}_1^2 e^{-2i\tau}) \quad (5.A.2.14)$$

$$Y_2 = -i\Omega_0 (\alpha_2 e^{+i\tau} - \bar{\alpha}_2 e^{-i\tau}) - \frac{2\Omega_0^2}{3} (\alpha_1^2 e^{+2i\tau} + \bar{\alpha}_1^2 e^{-2i\tau}) \quad (5.A.2.15)$$

où  $\alpha_2$  est l'amplitude des oscillations.

Cette expression des solutions du système à l'ordre 2 montre qu'à l'écart du point de bifurcation, l'hypothèse de la sinusoïde pure ne peut

plus être retenue et que des contributions supplémentaires interviennent du fait de l'interaction entre les termes oscillants.

### 5.A.2.c. Ordre 3 du développement.

A l'ordre 3, des termes d'interaction s'ajoutent et de nouvelles harmoniques apparaissent qui élargissent le spectre de la solution. Mais la particularité, à cet ordre du développement, est la prise en compte de la correction en fréquence  $\Omega_2$  dont nous allons détailler les conséquences. La forme des équations est la suivante :

$$\Omega_0 \frac{\partial}{\partial \tau} Y_3 + \Omega_2 \frac{\partial}{\partial \tau} Y_1 = \beta_0 (X_3 + X_2 Y_1 + X_1 Y_2) + \beta_2 X_1 \quad (5.A.2.16)$$

$$\Omega_0 \frac{\partial}{\partial \tau} X_3 + \Omega_2 \frac{\partial}{\partial \tau} X_1 = -Y_3 \quad (5.A.2.17)$$

Aux ordres précédents, l'évolution des variables de champ et d'inversion de population étaient périodiques, à la fréquence  $\Omega_0$ . La présence du terme  $\Omega_2$  montre que certains termes vont avoir une évolution différente. Pour mettre en évidence cette modification fondamentale, reprenons la définition de la fréquence et observons le comportement d'une fonction purement sinusoïdale :  $f(\tau) = \sin(\Omega \tau) = \sin(\Omega_0 \tau + \eta^2 \Omega_2 \tau)$ . Sur une période, la première composante de la sinusoïde effectue une révolution complète alors que, du fait de la présence du petit paramètre  $\eta$ , le second terme n'a quasiment pas changé. Cet exemple montre qu'il y existe deux échelles de temps différentes et que les processus physiques liés à la bifurcation ne se comportent pas tous de la même façon. Du point de vue physique, il semble important de séparer les systèmes afin d'identifier les variables en fonction de leur échelle de temps. D'un point de vue mathématique, les conséquences sont plus radicales. La présence de termes quasi constants (échelle de temps lente) dans des équations gouvernant l'évolution de variables rapides conduit directement à une divergence des solutions. Leur suppression est à l'origine d'une condition de solvabilité du système

5.A.2.16 - 17 obtenue en annulant les contributions des termes en  $\Omega_2$  et celle des facteurs constants issus du développement du second membre de l'équations 5.A.2.16 [Zeghlache, 1992].

Cette condition est à l'origine de l'expression analytique de la correction de fréquence, qui pour notre modèle, s'écrit :

$$2 \Omega_2 - \frac{\beta_2}{\Omega_0} = -\frac{\Omega_0^3}{3} \alpha_1 \bar{\alpha}_1 \quad (5.A.2.18)$$

Le paramètre  $\beta_2$  est proportionnel à  $\Omega_2$  (son expression se dérive rapidement des relations 5.A.2.3, 5.A.1.3 et 5.A.1.4) et l'équation (5.A.2.18) constitue une relation de linéarité entre la correction à l'ordre 2 de la fréquence et le module du carré de l'amplitude de la solution oscillante d'ordre 1. Ce résultat intermédiaire constitue une étape importante dans le calcul de la correction de l'intensité critique.

### **5.A.3. Correction de l'intensité critique**

Dans ce chapitre, nous reprenons l'expression de l'intensité critique (relation 4.B.3.1) déduite de l'invariant (relation 4.A.4.12). L'objectif est d'y introduire les éléments du développement perturbatif (et en particulier le paramètres  $\Omega_2$ ) afin de déterminer la condition d'existence de la solution périodique de faible amplitude issue de la bifurcation.

L'expression générale de  $I_c$  écrite en fonction des paramètres  $\beta$  et  $\Gamma$  est la suivante :

$$I_c^{-1} = -\gamma_{\perp} \Gamma + 2\beta \Gamma \left( 1 + \frac{\gamma_{\perp}}{1 + \gamma_{\perp}} \right) + \frac{2\beta}{1 + \gamma_{\perp}} \left( \frac{\beta}{\gamma_{\perp}} - 1 \right) \quad (5.A.3.1)$$

Comme nous nous plaçons au voisinage immédiat du point critique de Hopf,  $\beta$  et  $\Gamma$  se décomposent en une somme de deux termes d'ordre 0 et 2. Au premier, nous retrouvons les caractéristiques suivantes qui sont celles de la bifurcation de Hopf :

$$\beta_0 = \Omega_0^2 \quad (5.A.3.2)$$



$$\Gamma_0 = \frac{(\Omega_0 + k)}{\gamma_{\perp} \Omega_0} \beta_0 \quad (5.A.3.3)$$

A l'ordre 2 et après avoir effectué le développement des paramètres  $a_1$ ,  $a_2$ , nous obtenons les expressions :

$$\beta_2 = \frac{k \Omega_2 \beta_0^2}{\Omega_0^2} (1 + dx) \quad (5.A.3.4)$$

$$\Gamma_2 = \frac{k \Omega_2 \beta_0^2}{(\gamma_{\perp} \Omega_0)^2} (-1 + dx) \quad (5.A.3.5)$$

$$\text{où } dx = \frac{(\Delta \gamma_{\perp})^2 (\gamma_{\perp} - 1)}{(\gamma_{\perp} + 1)^3} \quad (5.A.3.6)$$

Reportés dans l'expression de  $I_c$ , ces différents termes transforment la relation 5.A.3.1 en une somme :

$$I_c = I_h + \eta^2 I_2 \quad (5.A.3.7)$$

où :

$$I_h^{-1} = -\gamma_{\perp} \Gamma_0 + 2\beta_0 \Gamma_0 \left(1 + \frac{\gamma_{\perp}}{1 + \gamma_{\perp}}\right) + \frac{2\beta_0}{1 + \gamma_{\perp}} \left(\frac{\beta_0}{\gamma_{\perp}} - 1\right) \quad (5.A.3.8)$$

est l'intensité au point de Hopf et  $I_2$  s'écrit :

$$I_2 = -\frac{k \Omega_2 \Omega_0^2}{\gamma_{\perp} I_h^2} \left[ \frac{3\gamma_{\perp} (1 + \gamma_{\perp} - \gamma_{\perp} dx) - \gamma_{\perp} dx}{(\gamma_{\perp} + 1) \gamma_{\perp}} + \frac{4\Omega_0^2 (-1 + dx - \gamma_{\perp} + 3 dx \gamma_{\perp})}{(\gamma_{\perp} + 1) \gamma_{\perp}} \right] \quad (5.A.3.9)$$

L'exploitation des relations 5.A.3.7 - 9 nécessite au préalable quelques rappels. D'après la relation 5.A.2.18, la correction de la fréquence des instabilités,  $\Omega_2$ , est proportionnelle au carré de la norme de l'amplitude de la solution oscillante. L'équation 5.A.3.9 montre donc que  $I_2$  est également une fonction linéaire du carré de  $\alpha_1$ . De plus, les grandeurs  $I_h$  et  $I_c$  sont relatives à l'intensité stationnaire et sont directement reliées au paramètre de pompe (relation 3.A.2.21). Par définition,  $I_h$  est la valeur

de l'intensité stationnaire au point critique et correspond à un pompage critique. Si la valeur de  $I_c$  est supérieure à celle de  $I_h$ , l'intensité  $|\alpha_1|^2$ , qui s'exprime en fonction de cette différence et des paramètres du système, est positive et la bifurcation est supercritique; dans le cas opposé, la bifurcation est sous-critique et la solution oscillante instable.

La condition d'existence de la solution oscillante est directement issue de la relation 5.A.3.9 auquel on ajoute 5.A.2.18. Elle s'appuie sur la nécessité pour le carré de la norme de l'amplitude d'être positif afin que la solution périodique puisse exister. Elle est vérifiée si le terme entre crochet de la relation 5.A.3.9 est négatif. Le paramètre  $\Omega_0$  est de ce fait le nouveau paramètre de contrôle (son expression développée est donnée par la relation 4.B.4.5 et s'exprime principalement en fonction du nombre d'onde de la solution oscillante  $k$ ). Les limites du domaine d'existence de la solution oscillante s'écrivent :

$$\boxed{\Omega_0^2 > -\frac{3\gamma_{\perp}(1+\gamma_{\perp}-\gamma_{\perp}dx)-\gamma_{\perp}dx}{4(-1+dx-\gamma_{\perp}+3dx\gamma_{\perp})}} \quad (5.A.3.10)$$

où  $dx$  est toujours donné par l'équation 5.A.3.6.

Un développement limité jusqu'à l'ordre 2 de cette expression en fonction du paramètre de désaccord en fréquence  $\Delta$  conduit à des expressions plus simples. Dans ce cas limite, nous avons l'inégalité suivante :

$$\boxed{\Omega_0^2 > \frac{3\gamma_{\perp}}{4} - \frac{\Delta^2 \gamma_{\perp}^3 (1+2\gamma_{\perp}-3\gamma_{\perp}^2)}{2(\gamma_{\perp}+1)^4}} \quad (5.A.3.11)$$

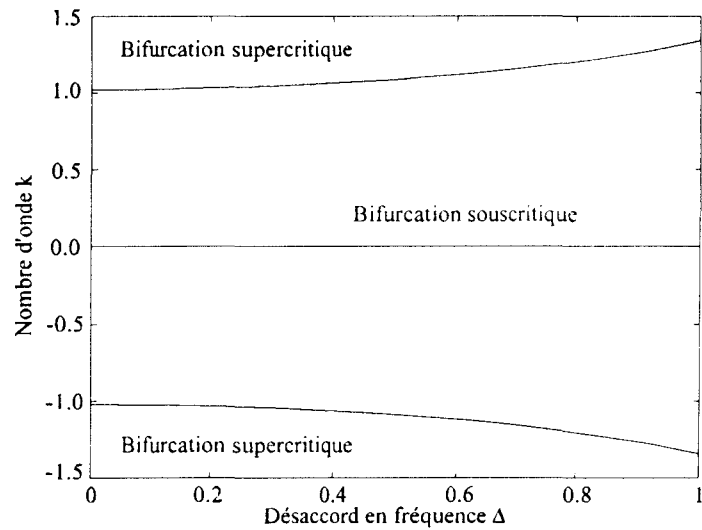
A désaccord nul, le résultat est exactement celui de la référence [Baer, 1993]. En présence de désaccord en fréquence, les résultats sont différents selon l'ordre de grandeur du paramètre  $\gamma_{\perp}$ .

#### ***5.A.4. Exploitation des résultats, application à un cas particulier.***

Tout comme dans les paragraphes 4.B.5 et 4.B.6, les résultats sont différents selon les domaines de paramètres délimités par la valeur  $\gamma_{\perp} = 1$ . De façon à assurer la validité de nos solutions, nous ne discuterons que les résultats obtenus pour  $\gamma_{\perp} > 1$ . Le second domaine de paramètres n'est pour autant à exclure et les hypothèses formulées à la fin du paragraphe 4.B.6 peuvent à nouveau s'appliquer pour expliquer le comportement observé.

##### ***5.A.4.a. Résultats pour $\gamma_{\perp}$ supérieur à 1.***

La relation 5.A.3.10 établit un lien entre la fréquence des instabilités au point de bifurcation, le terme d'atténuation de la polarisation atomique et le désaccord en fréquence. Le paramètre  $\Omega_0$  n'étant pas accessible directement, une interprétation physique complète nécessite l'utilisation de la relation 4.B.4.5 validée par le calcul du paragraphe 5.A.2. La représentation graphique 5.A.4.1 met clairement en évidence l'influence du désaccord en fréquence sur les domaines d'existence de la solution oscillante dans un espace  $(k, \Delta)$ .

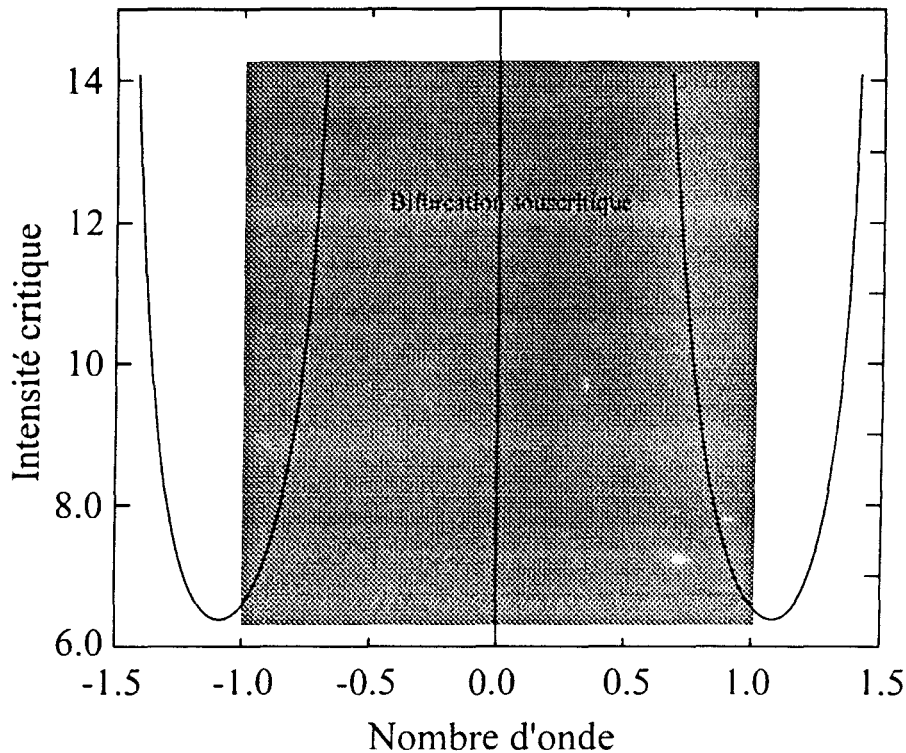


**Figure 5.A.4.1** : domaine d'existence de la solution oscillante dans l'espace  $(k, \Delta)$ . Valeur de paramètre  $\gamma_{\perp} = 2.0$ .

Dans ce cas, la présence de  $\Delta$  diminue la surface du domaine d'existence de bifurcation supercritique. Pour des valeurs de paramètres fixées, plus le désaccord est grand et plus la valeur du nombre d'onde nécessaire au démarrage d'une oscillation stable est grande.

Toutefois, les paramètres  $\Delta$  et  $k$  dépendent tous les deux de la longueur de cavité : la variation de l'un n'est pas totalement indépendante de celle de l'autre. C'est pourquoi, il nous semble plus judicieux d'illustrer l'influence de  $\Delta$  sur les courbes de déstabilisation de la solution stationnaire. Il faut pour cela fixer la valeur du désaccord en fréquence et déterminer la limite entre les domaines de stabilité et d'instabilité de la solution oscillante.

La figure 5.A.4.2 représente les limites des domaines d'oscillation stable et instable pour une valeur de  $\Delta$  égale à 0.5 : le nombre d'onde critique minimal est égal à  $\pm 1.08$  (ce qui ne correspond forcément pas à l'intensité critique minimale). Graphiquement, les domaines se séparent de la façon suivante :

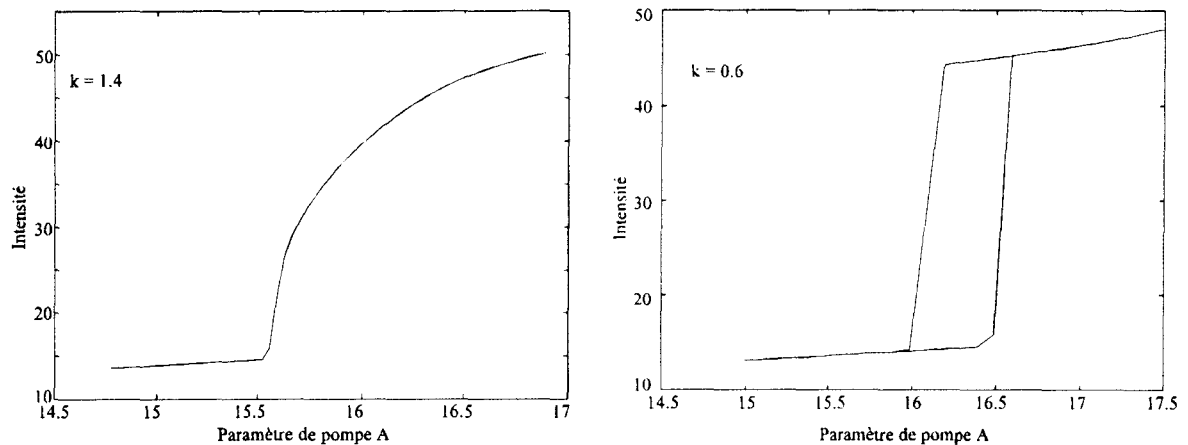


**Figure 5.A.4.2** : nature de la bifurcation dans l'espace  $(I_c, k)$ .  
 A l'intérieur des lobes et dans la partie sombre, la bifurcation est sous-critique. Valeurs des paramètres  $\gamma_L=2.0$ ,  $\Delta = 0.5$ .

#### ***5.A.4.b. Intégration numérique du système complet.***

Une vérification de ces résultats peut être effectuée par l'intégration numérique directe des équations du modèle de Bloch-Maxwell donnée par le système (3.A.1.1-4). La nature des points de bifurcation est alors mise en évidence par un balayage du paramètre de contrôle autour du point critique. En effet, une bifurcation sous-critique est caractérisée par un phénomène d'hystérèse caractéristique d'une courbe en S des solutions dont les branches inférieure (solution stationnaire) et supérieure (solution oscillante) sont stables alors que la branche intermédiaire, caractérisée par un pompage décroissant (solution oscillante) est instable. A l'opposé, une bifurcation supercritique se traduit par un croissance de l'amplitude des oscillations en fonction du paramètre de pompe.

Dans notre cas particulier, à une valeur donnée du paramètre de pompe correspondent deux valeurs positives critiques du nombre d'onde. Nous les avons retrouvées numériquement en balayant la longueur de la cavité du laser (puisque le nombre d'onde n'apparaît pas explicitement dans les équations). Puis, nous avons mis en évidence la nature de ces deux points par un balayage du paramètre de pompe. Les résultats de l'intégration pour les deux points critiques sont présentés sur la figure 5.A.4.3 suivante :



**Figure 5.A.4.3** : résultats de l'intégration autour de 2 points critiques de natures différentes. Valeurs des paramètres  $\gamma_{\perp}=2.0$ ,  $\gamma_{\parallel}=0.01$ ,  $\Delta = 0.5$ ,  $k = 0.6$  et  $1.4$ . (Au delà des points de bifurcation, les valeurs représentées correspondent au maximum de l'amplitude des oscillations)

L'intégration a été réalisée à l'aide d'un maillage de l'espace  $(z,t)$  suivant les directions  $z = t$  (vitesse de propagation normalisée) et  $t = \text{cste}$  et d'intervalles de temps et d'espace égaux afin de garantir la stabilité de l'algorithme

Ils mettent clairement en évidence la nature opposée des 2 points de bifurcation ce qui confirme bien la validité de tous les calculs développés jusqu'ici.

## Conclusion de cette partie

Nous avons consacré la seconde partie de cette thèse à l'étude d'un laser multimode longitudinal désaccordé en fréquence et décrit par le modèle de Bloch-Maxwell.

Les premiers développements, destinés à mieux connaître la dynamique de ce système et basés sur une analyse de stabilité linéaire se sont révélés vite . En effet, cette analyse n'a pas permis de déterminer l'expression analytique du point de déstabilisation de la solution stationnaire monomode vers la solution oscillante multimode. Ensuite, en cherchant un système plus simple, nous avons montré que dans le cas limite du laser de classe B, l'élimination adiabatique de la polarisation atomique conduisait à une profonde modification du comportement du système.

C'est pourquoi, nous avons développé une analyse non-linéaire du système dans un cas limite mathématiquement proche du modèle de classe B. Dans un premier temps, ce nouveau modèle a permis de déterminer une expression analytique approchée du point de déstabilisation de la solution monomode. Ensuite, une reconstruction de la solution oscillante par un développement perturbatif jusqu'à l'ordre 3 a conduit à l'étude des conditions d'existence de cette nouvelle solution et au partage de l'espace des paramètres entre les domaines de bifurcation supercritique et souscritique. Enfin, en toute dernière partie, une intégration numérique du modèle exacte est venue confirmer la validité des développements.

Ce qu'il faut retenir de la mise en oeuvre de cette méthode est à la fois sa complexité et sa puissance. En effet, avant d'aboutir au résultat final, les calculs sont très nombreux et parfois très longs. Mais les points positifs de ces développements sont qu'ils s'adaptent parfaitement aux systèmes décrits par un ensemble de dérivées partielles et que, au terme du calcul, la forme obtenue s'apparente à la forme normale de bifurcation. C'est donc un excellent outil pour l'étude de la dynamique des systèmes

mathématiquement complexes comme on peut le constater dans les publications actuelles [Lega, 1994] [Torre, 1994].



# CONCLUSION

Au cours de cette thèse, les travaux présentés ont eu pour objet l'étude théorique de la dynamique du laser à fibre dopée au Néodyme. Ce système au comportement très riche et très complexe a permis la mise en oeuvre de deux méthodes d'analyse différentes associées chacune à deux propriétés physiques particulières.

Nous avons consacré notre première approche à la description d'un laser oscillant simultanément sur deux états de polarisation orthogonaux. La modélisation de ce système optique très symétrique et dépourvu d'éléments de sélection a nécessité un redéveloppement complet des équations du laser sur la base de propriétés très générales de l'interaction rayonnement-matière.

Les premiers calculs ont consisté à décomposer les équations de Maxwell suivant les deux axes propres de la fibre en associant un unique mode de cavité à chacune des directions de polarisation. Puis, l'introduction des expressions vectorielles développées du champ dans les relations de Bloch ont permis une reformulation des équations de l'inversion de population et de la polarisation atomique. Notre but était alors de mettre en évidence l'influence de l'orientation du moment dipolaire induit sur la contribution de l'effet laser aux deux polarisations transverses du champ.

Dans la suite des développements, nous avons généralisé les résultats obtenus pour un seul ion de Néodyme à l'ensemble de la fibre en tenant compte cette fois des caractéristiques microscopiques et macroscopiques de la matrice et de son dopant. Des astuces mathématiques ainsi que des considérations physiques basées sur l'importance des champs locaux dans la répartition de la polarisation atomique induite ont conduit à l'écriture d'un nouveau modèle pour le laser de classe B à fibre dopée. L'étude de ce système formé de 5 équations complexes (2 pour les variables de champs et 3 pour les différentes composantes des variables de population) a eu pour objectif de rapprocher la théorie de l'expérience. Nos principaux résultats sont :

- la mise en évidence de l'existence de deux seuils indépendants associés à chaque direction de polarisation du champ (par l'analyse analytique exacte des solutions stationnaires monomodes),
- la démonstration de l'influence de chacune de ces polarisations sur la croissance de l'autre (par l'analyse analytique approchée de la solution stationnaire bimode),
- la caractérisation de l'effet de la polarisation et de l'orientation du champ de pompe par rapport aux axes propres de la fibre sur la répartition de l'intensité du champ laser émis,
- la mise en évidence numérique de régimes périodiques, quasi-périodiques et du phénomène d'antiphase dans des régimes chaotiques.

Toutefois ce dernier point a soulevé un problème car les résultats ont été obtenus dans des domaines de paramètres très éloignés de la réalité physique. Nous en avons déduit que certaines approximations étaient trop drastiques et qu'il était nécessaire de procéder à de nouveaux développements. L'objet de la seconde partie de la thèse a donc été de reprendre l'étude du laser à fibre en privilégiant cette fois l'aspect multimode comme source d'instabilités.

Pour cette nouvelle approche, nous avons utilisé le modèle "classique" de Bloch-Maxwell pour les lasers multimodes et désaccordés en fréquence. L'étude complète de ce système ne pouvant être conduites par les méthodes habituelles d'analyse de stabilité linéaire et d'approximation adiabatique, nous avons mis en oeuvre des méthodes plus originales.

La première a consisté à redéfinir l'approximation du laser de classe B afin de faire apparaître un paramètre très inférieur aux autres grandeurs caractéristiques du laser. Puis, par des opérations arithmétiques, nous avons transformé le modèle dans le but d'en extraire la solution oscillante particulière que nous supposons voir émerger de la déstabilisation de la solution stationnaire. Une fois son expression obtenue, l'application de conditions d'existence ont permis de déterminer

une expression analytique approchée de son seuil d'apparition. Mais ce résultat ne pouvait être qu'une étape intermédiaire car connaître l'existence d'une solution n'autorise que peu de conclusion sur l'état du laser. Il fallait donc nécessairement étudier la stabilité de la solution oscillante afin de déterminer les domaines de l'espace des paramètres dans lesquels elle représentait réellement l'état occupé par le système.

Pour cette ultime étape, il a fallu reconstruire les solutions à partir du point de bifurcation à l'aide d'un développement perturbatif jusqu'à l'ordre 3 et d'une définition de nouvelles échelles de temps et d'espace. Le résultat a été l'écriture d'une relation mathématique s'approchant de la forme normale de la bifurcation. C'est cette expression qui nous a menés jusqu'à la caractérisation complète de la déstabilisation la solution stationnaire monomode.

La complexité des développements de cette seconde partie n'ayant pas permis de tenir compte des aspects liés à la polarisation du champ laser, la comparaison entre ces résultats et ceux issus de la première partie n'a pas été possible. Voilà pourquoi il serait intéressant de poursuivre dans une voie d'unification et de simplification des deux théories afin d'ajouter les deux sources d'instabilités et d'en étudier les conséquences sur le modèle complet. Il serait alors certainement possible de retrouver les oscillations en anti-phase du laser dans des domaines de paramètres plus en rapport avec la réalité.

Mais, si tel n'était pas le cas, une nouvelle approche pourrait être mise en oeuvre en reconsidérant par exemple les effets liés à la propagation dans la cavité très particulière que forme la fibre optique. L'objectif serait alors de se rapprocher au maximum du modèle d'oscillateurs couplés qui décrit très bien la dynamique du laser mais manque de justification physique. L'autre démarche possible pourrait consister à affiner encore la description de l'interaction rayonnement matière pour prendre en compte d'autres effets capables d'influencer la polarisation du champ émis. Par exemple, chaque niveau de la transition lasante du Néodyme se décompose par effet Stark en plusieurs sous-

niveaux sous l'influence des champs électriques locaux et les transitions résultantes sont dépendantes de la polarisation. Une modélisation de ces transitions associée à notre description des champs locaux dans la matrice de silice pourrait certainement constituer une voie originale à explorer.

# **BIBLIOGRAPHIE**

## BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIERE PARTIE

- [Agrawal, 1989] Agrawal G.P., Nonlinear Fiber Optics, Academic press, New York, 1989.
- [Arai, 1986] Arai K., Namikawa H., Kumata K., Honda T., Ishii Y., Handa T., J. Appl. Phys. 59(10), 3430 (1986)
- [Arjona, 1990] Arjona M., Corbalan R., Laguarda F., Pujol J. Vilaseca R., Phys. Rev. A 41, 6559 (1990)
- [Bergé, 1988] Bergé P., Pomeau Y., Vidal Ch., L'ordre dans le chaos (Hermann, Paris, 1988)
- [Bielawski, 1993] Bielawski S. Instabilités et chaos dans un laser à fibre dopée Nd<sup>3+</sup>, Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille (1993)
- [Caglioti, 1987] Caglioti E., Trillo S., Wabnitz S. Opt. Lett. Vol 12, No 12, 1044 (1987)
- [Casperson, 1982] Casperson L. W., J. Appl. Phys., VOL 54, No 5, 2198 (1982).
- [Casperson, 1991] Casperson L. W., Sandle W. J., Wilson A. C., Warrington D. M., Ballagh R. J., J. Appl. Phys., VOL 69, No 12, 8005 (1980).
- [Cohen-Tannoudji, 1977] Cohen Tannoudji, Diu, Laloe Mécanique quantique Tome 1 et 2, Hermann (1977)

- [Desurvire, 1994] Desurvire E., "Erbium doped fiber amplifiers : principle end applications", Wiley, New York, 1994
- [Elejalde, 1992] Elejalde M. J., Balda R., Fernandez J., Macho E. Adam J. L., Phys. Rev. B Vol 46, No 9, 5169 (1992)
- [Etrich, 1992] Etrich C., IEEE J. Quant. Elec., VOL. 28, No 4, 811 (1992)
- [Ferry, 1990] Ferry M. J., Kliewer M. L., Reeves R. J., Powell R. C., Allik T. H., J. Appl. Phys. 68(12), 6372 (1990)
- [Hall, 1983] Hall D., IEEE J. Quant. Elec., VOL 19, No 11, 1704 (1983).
- [Hall, 1989] Hall D. W., Newhouse M. A., Borelli N. F., Dumbaugh W. H., Weidman D. L., Appl. Phys. Lett. VOL 54, No 14, 1293 (1989).
- [Jacobs, 1976] Jacobs R., Weber M., IEEE J. Quant. Elect., VOL 12, No 2, 102 (1976)
- [Jiang, 1991] Jiang S. H., Casperson L. W., J. Appl. Phys. 69(4), 1866 (1991)
- [Kaminow, 1981] Kaminow I. P., IEEE J. Quant. Elect., VOL 17, No 1, 15 (1981)
- [Kendall, 1980] Kendall C., Reizer K. C., Casperson L. W., J. Appl. Phys. VOL 51, No 12, 6083 (1980).



- [Lacot, 1994] Lacot E., Stoeckel F., Chenevier M. Phys. Rev. A 49, 3997 (1994)
- [Le Flohic, 1991] Le Flohic M., Francois P. L., Allain J. Y., Sanchez F. Stéphan G., IEEE J. Quant. Elec., VOL. 27, No 7, 1910 (1991)
- [Leners, 1994] Leners R., Francois P. L., Stéphan G., Opt. Lett. 19, 275 (1994)
- [Okamoto, 1982] Okamoto K., Sasaki Y., Shibata N., IEEE J. Quant. Elec., VOL. 18, No 11, 1890 (1982)
- [Pocholle, 1985] Pocholle J.P., L'optique guidée monomode et ses applications, Masson, Paris (1985)
- [Poole, 1991] Poole C. D., Foschini G. J., J. of Lightwave Tech. Vol 9 No 11 (1991)
- [Poole, 1988] Poole C. D., Giles C. R., Opt. Lett., Vol 13, No 2, 155 (1991)
- [Rawson, 1987] Rawson H., "Inorganic Glass Forming System", Academic Press, Londres (1987)
- [Reiser, 1980] Reiser K. C., Casperson L. W., J. Appl. Phys. 51(12), 6075 (1980)
- [Reiser, 1980] Reiser K. C., Casperson L. W., J. Appl. Phys. 51(12), 6083 (1980)

- [Sargent, 1974] Sargent III, Scully, Lamb, "Lasers Physic", Addison-Wesley Publishing Compagny (1974)
- [Stolen, 1987] Stolen R. H., Opt. Lett. 12, 585 (1987)
- [Takada, 1985] Takada K., Okamoto K., Noda J. J. Opt. Soc. Am. A Vol 2, No 5, 753 (1985)
- [Tocho, 1992] Tocho J. O., Jaque F., Garcia Sole J., Camarillo E., Cusso F., Munoz Santiuste J. E., Appl. Phys. Lett. 60(26), 3206 (1992)
- [Wabnitz, 1987] Wabnitz S. Phys. Rev. Lett. Vol 58, No 14, 1415 (1987)
- [Zeghlache, 1988] Zeghlache H., Mandel P., Abraham N. B., Hoffer L. M., Lippi G. L., Mello T., Phys. Rev. A 37, 470 (1988)
- [Zeghlache, 1995] Zeghlache H, Boulnois A., Phys. Rev. A 52, No 5, 4229 (1995).
- [Zeghlache, 1995] Zeghlache H, Boulnois A., Phys. Rev. A 52, No 5, 4243 (1995).

## BIBLIOGRAPHIE DE LA SECONDE PARTIE

- [Abraham, 1988] Abraham N. B., Mandel P., Narducci L. M., Phys. Rev. A 35, 1165 (1987).
- [Baer, 1993] Baer S., Erneux T., Euro J. of App. Math.(1993).
- [Carr, 1994] Carr W, Erneux T., Phys. Rev. A 50, 724 (1994) et Carr W, Erneux T., Phys. Rev. A 50, 4219 (1994).
- [Erneux, 1987] Erneux T., Baer S. M., Mandel P., Phys. Rev. A 35, 1165 (1987).
- [Fu, 1989] Fu H., Phys. Rev. A 40, No 4, 1868 (1989).
- [Graham, 1968] Graham R., Haken H., Z. Phys. 213, 420 (1968).
- [Haken, 1975] Haken H., Ohno H., Phys. Lett. 53A, 77 (1975).
- [Haken, 1976] Haken H., Ohno H., Opt Commun. 16, 205 (1976).
- [Haken, 1978] Haken H., Ohno H., Opt Commun. 26, 117 (1978).
- [Lega, 1994] Lega J., Moloney J. V., Newell A. C., Swift-Hohenberg equation for lasers, preprint (1994).
- [Lugiato, 1985] Lugiato L. A., Narducci L. M., Phys. Rev. A 32, No 3, 1576 (1985).
- [Ning, 1990] Ning C., Haken H., Phys. Rev. A 41, No 7, 3826 (1990).

- [Ohno, 1976] Ohno H., Haken H., Phys. Lett. 59A, 261 (1976).
- [Riskén, 1968] Riskén H., Nummèndal K., J. Appl. Phys. 39, 4662 (1968).
- [Torre, 1994] Torre M. S., Ranea-Sandoval H. F., Buceta R. C., Pre-print 1994.
- [Zèghlache, 1992] Zèghlache H, Zèhnlé V.. Phys. Rev. A 46, No 9, 6015 (1992).
- [Zèghlache, 1992] Zèghlache H, Zèhnlé V., Phys. Rev. A 46, No 9, 6028 (1992).
- [Zorell, 1981] Zorell J. Opt. Commun. 38, No 2, 127 (1981).

