

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

en Productique : Automatique et Informatique Industrielle

par

Jean-Marc BERTRAND

**ANALYSE STRUCTURELLE
ET COMMANDE PAR DECOUPLAGE ENTREE-SORTIE
DES MODELES BOND GRAPHS**

Soutenue le 17 Décembre 1997 devant le jury d'examen

M.	M. STAROSWIECKI	: Président
M.	M. MALABRE	: Rapporteur
M.	S. SCAVARDA	: Rapporteur
M.	C. COMMAULT	: Examineur
Mme.	G. DAUPHIN-TANGUY	: Examineur, Directeur de thèse
M.	P. GAWTHROP	: Examineur
M.	A. RAULT	: Examineur
M.	C. SUEUR	: Examineur, Directeur de thèse



Remerciements

J'adresse mes remerciements à l'ensemble des membres du jury de cette thèse.

Monsieur Marcel Staroswiecki, Professeur à l'Université de Lille, me fait un grand honneur en acceptant de présider ce jury. Je l'en remercie vivement.

Monsieur Michel Malabre, Directeur de Recherches CNRS à l'IRCyN, unanimement reconnu par la communauté des automaticiens pour ses travaux relatifs à l'approche géométrique, a accepté d'être l'un des rapporteurs de ce travail. Ses réflexions précises et bienveillantes m'ont incontestablement aidé à acquérir une vision rigoureuse.

Monsieur Serge Scavarda, Professeur à l'INSA Lyon, a accepté d'être l'autre rapporteur de cette thèse. Son expertise, tant en automatique que dans le domaine de la modélisation par bond-graph, m'a permis de mieux appréhender les problématiques liées à l'automatique, en particulier dans un contexte industriel.

Les contributions scientifiques de Monsieur Christian Commault, Professeur à l'ENSIEG, sont nombreuses dans le domaine de la commande. Je suis flatté de l'intérêt qu'il manifeste envers mes travaux en acceptant de participer à ce jury.

Monsieur Peter Gawthrop, Professeur à l'Université de Glasgow, dont les contributions théoriques sont unanimement reconnues dans la communauté des bond-graphistes, me fait le plaisir d'être l'un des examinateurs de ce travail.

Je suis enfin honoré de la présence de Monsieur André Rault, Directeur Adjoint de PSA / DRAS, qui manifeste beaucoup d'intérêt pour les bond-graphs. Il a accepté d'examiner l'intérêt de cette contribution dans une perspective industrielle. Je l'en remercie vivement.

Madame Geneviève Dauphin-Tanguy, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille, a co-dirigé ce travail. Pendant ces trois ans, j'ai apprécié le dynamisme, la rigueur et l'intuition dont elle a fait preuve pour orienter mes travaux dans des directions intéressantes. Ses qualités humaines m'ont d'autre part aidé à franchir les moments difficiles de la manière la plus active possible.

Ce travail a également été co-dirigé par Monsieur Christophe Sueur, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille. En instaurant entre nous un climat de collaboration sincère, il m'a transmis son expertise technique et sa méthode, fruits de nombreux travaux. Son contact restera comme un moment privilégié, par lequel j'ai acquis l'expérience humaine d'un réel travail d'équipe.

Le personnel du laboratoire a contribué à rendre agréable mon cadre de travail. Nos relations cordiales ont permis de créer le contexte nécessaire à tout travail serein. Evidemment, j'adresse un salut amical à mes collègues chercheurs. Leur entrain indéfectible a été pour moi un encouragement certain. Quelques uns sont aujourd'hui partis et je n'oublie pas les bons moments passés également avec eux.

Mes pensées vont en outre à tous les enseignants de Montcy, de Lille et de Toulouse qui ont donné de leur personne pour contribuer à ma formation. Le fruit de leur travail représente certainement aujourd'hui une de mes plus grandes richesses.

Ben (mon vieux Maurice), Franck de base, Laurent, Raphaëlibus... merci pour la couleur et le bon sens que vous insufflez à ma vie (pour Laurent, la couleur, c'est souvent du rouge!). Tel Fils tel Père, merci pour ta générosité, toi l'Ami qui me veut du bien.

Ma famille m'a soutenu. Ensemble, nous avons partagé des moments très intenses pendant lesquels j'ai beaucoup appris. Depuis Charleville, Lille, Lyon, Gunstett, vous m'avez donné confiance et vous avez cru en moi. J'avoue humblement que c'est aussi la peur de vous décevoir qui m'a parfois poussé à m'accrocher. Dans mon coeur, ce travail qui s'achève est aussi le votre.

Mamie, je suis fier de tes combats et de tes défis. Une de tes jolies lettres se termine sur des mots que je n'oublierai pas : nur immer Kopf hoch.

A Robert et Sandrine

Table des matières

Introduction	1
1 Structure des systèmes linéaires	3
1.1 Représentation algébrique	4
1.1.1 Zéros d'une matrice polynômiale	4
1.1.2 Pôles et zéros d'une matrice rationnelle	5
1.1.3 Pôles et zéros à l'infini d'une matrice rationnelle	6
1.1.4 Inversibilité d'un système	6
1.2 Représentation géométrique	7
1.2.1 Notations	8
1.2.2 Sous-espaces invariants	8
1.2.3 Récapitulatif	13
1.3 Structure	13
1.3.1 La structure à l'infini	14
1.3.2 La structure essentielle	16
1.3.3 La structure finie	17
1.3.4 La liste I_2 de Morse	21
1.3.5 Invariance de la structure	22
1.4 Découplage entrée-sortie	22
1.4.1 La commande par découplage	23
1.4.2 Existence d'une solution	24
1.4.3 Stabilité et modes fixes	29
1.5 Conclusion	32
2 Méthodologie bond-graph	33
2.1 Le langage bond-graph	33
2.1.1 Éléments et causalité	34
2.1.2 Chemin causal	38
2.1.3 Représentation d'état	41
2.2 Etude structurelle	43
2.2.1 Rang de la matrice d'état	43

2.2.2	Commandabilité en état	45
2.2.3	Inversibilité	46
2.3	Structures finie et infinie	47
2.3.1	Structure finie	48
2.3.2	Structure infinie	51
2.3.3	Structure infinie et transmissions directes	53
2.3.4	Structure essentielle	55
2.4	Conclusion	56
3	Découplage régulier	57
3.1	Outils pour l'analyse	57
3.1.1	Zéros invariants des modèles lignes	58
3.1.2	Exemple	61
3.1.3	Nombre de zéros invariants nuls	65
3.1.4	Exemple	70
3.1.5	Extension à l'étude des zéros-système nuls	74
3.1.6	Exemple	77
3.2	Outils pour la commande	80
3.2.1	Découplage et rejet de perturbations	81
3.2.2	Sous-espaces de découplage	86
3.2.3	Exemple	88
3.3	Conclusion	95
4	Approche du cas non régulier	97
4.1	Stabilité	98
4.1.1	Principe de résolution	98
4.1.2	Analyse graphique	99
4.1.3	Calcul formel des lois de commande	104
4.2	Découplabilité	105
4.2.1	Modification de la structure infinie	106
4.2.2	Principe de résolution graphique	108
4.2.3	Analyse graphique	109
4.2.4	Calcul formel d'une loi de commande	113
4.3	Conclusion	114
5	Application	117
5.1	Présentation du problème	117
5.2	Modèle simplifié monovariable	121
5.2.1	Rejet de perturbations	122
5.2.2	Etude du modèle initial	123
5.2.3	Modification de la position de l'actionneur	126

TABLE DES MATIÈRES

x

5.3	Modèle multivariable non simplifié	129
5.4	Conclusion	131
Conclusion		133
Bibliographie		134
Annexes		141
A.1	Matrices unimodulaire et bicausale	141
A.2	Ordres d'essentialité	143
A.3	Variables généralisées	144
A.4	Composants et éléments de jonction	145
A.5	Représentation d'état	146
A.6	Zéros invariants nuls en ligne	148
A.7	Zéros invariants nuls globaux	150
A.8	Spectres fixes et sous-espaces de découplage	153
A.9	Sous-espace de découplage stabilisant	155
A.10	Lien d'information	161
A.11	Retour d'état et stabilité	163

Introduction

Ce travail concerne la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes physiques linéaires. Il s'inscrit dans la problématique suivante :

- une architecture de commande est à concevoir pour un système physique.
- un modèle bond-graph est utilisé pour décrire le système considéré. Ce modèle est graphique, il permet une compréhension rapide des différents phénomènes physiques concernés.

L'idée est alors d'exploiter la forme graphique de ce modèle pour en détecter les propriétés structurelles dans un objectif de commande donné. Dès la phase de modélisation, il s'agit ainsi de répondre à la question suivante : étant donné un objectif de commande visé - placement de pôles, rejet de perturbations par exemple - est-il possible de mettre en oeuvre, à partir du modèle considéré, une stratégie de commande donnée - le découplage entrée-sortie? Cette démarche d'analyse structurelle permet de proposer d'éventuelles modifications du modèle, destinées à rendre possible la stratégie de commande choisie - prise en compte de phénomènes physiques négligés jusqu'à présent, modification du placement des capteurs et actionneurs. La synthèse structurelle de la loi de commande peut alors être réalisée en utilisant des outils méthodologiques existants - approche géométrique.

A travers ce travail, notre objectif est de proposer des méthodes graphiques simples permettant d'apporter rapidement une réponse aux questions suivantes : le modèle proposé est-il découplable avec stabilité? Quelles sont les propriétés dynamiques du modèle découplé? De quelles parties du modèle en boucle ouverte ces propriétés dépendent-elles? Comment calculer l'expression formelle des lois de commande correspondantes?

Le premier chapitre de ce rapport vise ainsi à rappeler les principaux éléments définissant la structure d'un système linéaire. Il a également pour but de situer l'intérêt de ces concepts dans un objectif de commande par découplage entrée-sortie.

Dans le second chapitre, nous présentons quelques rappels relatifs à la méthodologie bond-graph. L'objectif est tout d'abord de résumer les principales règles permettant de construire un modèle bond-graph, en lien avec les phénomènes physiques qu'il décrit. Il s'agit également de rappeler des méthodes existantes, destinées à caractériser la structure d'un système linéaire à partir de son modèle bond-graph.

Notre contribution est présentée dans les troisième et quatrième chapitres. Elle s'applique, pour une large part, aux modèles dont la matrice d'état est inversible (aucun pôle nul). Cette hypothèse est satisfaite pour un nombre important d'applications, en particulier dans le cas de modèles non simplifiés.

Le troisième chapitre concerne l'étude des modèles bond-graph possédant autant de variables d'entrée que de variables de sortie. Pour cette classe de modèles, nous présentons des méthodes d'analyse structurelle puis de synthèse de lois de commande fondées sur des procédures graphiques. Les méthodes d'analyse ont pour but de caractériser graphiquement la stabilité du modèle découplé à partir du modèle bond-graph en boucle ouverte. Les méthodes de synthèse visent à déterminer l'expression formelle de lois de commande régulières assurant à la fois la non interaction et la stabilité du modèle bouclé. Ces techniques reposent sur l'utilisation d'outils géométriques.

Les modèles bond-graph étudiés dans le quatrième chapitre possèdent plus de variables d'entrée que de variables de sortie et ne peuvent pas être découplés par les techniques précédentes. A partir de manipulations graphiques élémentaires, nous caractérisons la structure de lois de commande non régulières destinées à rendre ces modèles découplables avec stabilité. Les lois de commande réalisant le découplage entrée-sortie du modèle ainsi obtenu sont alors calculées selon les techniques présentées dans le troisième chapitre.

A travers une application automobile entrant dans le cadre d'un contrat d'étude L.A.I.L. / P.S.A.-D.R.A.S., nous illustrons enfin l'intérêt de ces procédures dans une démarche de conception d'architecture de commande. Nous étudions des modèles de suspension hydraulique active, pour lesquels l'objectif est de contrôler la position de la caisse du véhicule. Nous avons choisi deux modèles multivariables du déplacement en pompage-tangage de la suspension. Sur ces modèles, nous mettons en oeuvre certaines des méthodologies présentées dans les chapitres précédents.

Chapitre 1

Structure des systèmes linéaires

La structure des systèmes linéaires est étudiée de longue date par la communauté des automaticiens. A cet effet, deux approches ont historiquement été utilisées. La première, algébrique, vise à décrire le système par l'intermédiaire de représentations matricielles et polynômiales [49]. La seconde, géométrique, repose sur la notion de sous-espace de l'espace d'état. L'objectif poursuivi est dans ce cas d'associer les propriétés dynamiques du système à des propriétés d'espace [60] [43].

Complémentaires, ces deux approches véhiculent une quantité importante d'informations concernant la structure du système [18] [36]. L'objectif de ce chapitre est de préciser les plus importantes d'entre elles, dans une optique d'analyse et de commande par découplage entrée-sortie.

Nous considérons donc des systèmes linéaires invariants décrits par l'équation d'état (1.1). $x(\cdot) \in \mathcal{X} \approx \mathcal{R}^n$ représente le vecteur d'état. $y(\cdot) \in \mathcal{Y} \approx \mathcal{R}^p$ représente le vecteur de sortie. $u(\cdot) \in \mathcal{U} \approx \mathcal{R}^m$ représente le vecteur d'entrée de commande. Précisons que l'amalgame sera fait, dans ce chapitre, entre la notion de modèle mathématique et celle de système d'état, noté $\sum(C, A, B)$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Nous introduisons dans un premier temps des outils algébriques destinés à définir les notions de pôles et zéros d'un système linéaire. Puis nous rappelons les concepts élémentaires permettant de décrire le système $\sum(C, A, B)$ à travers une représentation géométrique. Nous utilisons ensuite conjointement ces deux approches pour définir la structure du système linéaire $\sum(C, A, B)$. Nous présentons enfin l'intérêt de ces concepts pour la commande des systèmes linéaires par découplage entrée-sortie, à travers le rappel

4 CHAPITRE 1 STRUCTURE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

des principales contributions apportées par la communauté des automati-
ciens.

1.1 Représentation algébrique

Nous rappelons tout d'abord des techniques de factorisation matricielle nécessaires pour définir les notions de pôles et zéros, finis et infinis, de matrices polynômiales et rationnelles. Ces techniques font appel aux notions de matrice unimodulaire et bicausale présentées en annexe A.1. Puis nous introduisons deux matrices spécifiques - la matrice système et la matrice de transfert - à partir desquelles seront définis les éléments structurels caractéristiques du système. Ces deux matrices sont finalement utilisées pour rappeler les principales définitions relatives à l'inversibilité du système.

1.1.1 Zéros d'une matrice polynômiale

Les zéros d'une matrice polynômiale sont calculés à partir de sa forme de Smith, exprimée comme le rappelle la définition suivante.

Définition 1.1 . Soit $R(s) \in \mathcal{R}_{pol}^{a \times b}(s)$ une matrice polynômiale de rang r . Il existe toujours des matrices unimodulaires $U_1(s) \in \mathcal{R}_{pol}^{a \times a}(s)$ et $U_2(s) \in \mathcal{R}_{pol}^{b \times b}(s)$ vérifiant les équations (1.2) et (1.3), où $\Lambda(s)$ est la forme de Smith de $R(s)$.

$$U_1(s) \cdot R(s) \cdot U_2(s) = \Lambda(s) \quad (1.2)$$

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \lambda_1(s) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda_r(s) & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Les polynômes $\lambda_i(s)$ sont appelés polynômes invariants de $R(s)$. Ils sont uniques, normalisés - unitaires - et vérifient :

Propriété 1.2 . Pour $i = 1, \dots, (r-1)$, $\lambda_i(s)$ divise $\lambda_{i+1}(s)$.

La définition suivante établit le lien entre les polynômes invariants et les zéros d'une matrice polynômiale.

Définition 1.3 . Les zéros d'une matrice polynômiale sont les racines de ses polynômes invariants.

Comme l'exprime la remarque suivante, il est cela dit possible de caractériser les polynômes invariants d'une matrice polynômiale $R(s)$ sans systématiquement calculer sa forme de Smith.

Remarque 1.4 . Soit $\Delta_i(s)$ le plus grand diviseur commun à tous les mineurs d'ordre i de $R(s)$. Les polynômes invariants de $R(s)$ sont alors exprimés par les relations (1.4) et (1.5).

$$\lambda_i(s) = \frac{\Delta_i(s)}{\Delta_{i-1}(s)} \quad (1.4)$$

$$\Delta_0(s) = 1 \quad (1.5)$$

1.1.2 Pôles et zéros d'une matrice rationnelle

Les pôles et zéros d'une matrice rationnelle sont calculés à partir de sa forme de Smith McMillan, exprimée comme le rappelle la définition suivante.

Définition 1.5 . Soit $H(s) \in \mathbb{R}_{rat}^{p \times m}(s)$ une matrice rationnelle de rang r . Soit $d(s)$ le plus petit commun multiple normalisé des dénominateurs de $H(s)$ tel que $H(s) = \frac{N(s)}{d(s)}$. Soit $\Lambda(s)$ la forme de Smith de $N(s)$. Il existe des matrices unimodulaires $U_1(s)$ et $U_2(s)$ telles que $U_1(s) \cdot H(s) \cdot U_2(s) = \frac{\Lambda(s)}{d(s)}$. Posons $\frac{\Lambda(s)}{d(s)} = \text{diag} \left\{ \frac{\lambda_i(s)}{d(s)} \right\}$ et notons $\varepsilon_i(s)$ et $\psi_i(s)$ des polynômes premiers entre eux tels que $\left\{ \frac{\lambda_i(s)}{d(s)} \right\} = \left\{ \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} \right\}$. La forme de Smith McMillan de $H(s)$ est alors la matrice $M(s)$ définie par les équations (1.6) et (1.7).

$$U_1(s) \cdot H(s) \cdot U_2(s) = M(s) \quad (1.6)$$

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Les polynômes $\varepsilon_i(s)$ et $\psi_i(s)$ sont uniques, normalisés et vérifient :

Propriété 1.6 . Pour $i = 1, \dots, (r-1)$, $\varepsilon_i(s)$ divise $\varepsilon_{i+1}(s)$ et $\psi_{i+1}(s)$ divise $\psi_i(s)$.

Le lien entre ces polynômes et les pôles et zéros de la matrice rationnelle $H(s)$ est rappelé par la définition suivante.

Définition 1.7 . Les zéros - respectivement pôles - de la matrice rationnelle $H(s)$ sont les racines des polynômes $\varepsilon_i(s)$ - respectivement $\psi_i(s)$.

1.1.3 Pôles et zéros à l'infini d'une matrice rationnelle

Les ordres de multiplicité des pôles et zéros à l'infini d'une matrice rationnelle quelconque sont caractérisés à partir d'une troisième forme canonique : la forme de Smith McMillan à l'infini.

Définition 1.8 [27][56]. Soit $T(s) \in \mathbb{R}_{\text{rat}}^{p \times m}(s)$ une matrice rationnelle de rang r . Il existe toujours des matrices bicausales $B_1(s)$ et $B_2(s)$ vérifiant les équations (1.8) et (1.9), où $\Phi(s)$ est la forme de Smith McMillan à l'infini de $T(s)$.

$$T(s) = B_1(s) \cdot \Phi(s) \cdot B_2(s) \quad (1.8)$$

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} s^{-n'_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & s^{-n'_r} & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Les coefficients n'_i sont rangés par ordre décroissant dans la matrice $\Phi(s)$. Ils caractérisent les ordres des pôles et zéros à l'infini de $T(s)$, comme le rappelle le théorème suivant.

Théorème 1.9 [17][18]. Soit $T(s)$ une matrice rationnelle de rang r . Il existe des factorisations de Smith McMillan à l'infini de $T(s)$. La forme de Smith McMillan à l'infini de $T(s)$, notée $\Phi(s)$, est cependant unique. n'_i positif est appelé ordre d'un zéro à l'infini de $T(s)$. Si n'_i est négatif, $(-n'_i)$ est appelé ordre d'un pôle à l'infini de $T(s)$.

C'est en particulier à travers l'étude de deux matrices spécifiques que ces techniques permettent d'exhiber la structure du système $\sum(C, A, B)$: la matrice système - une matrice polynômiale - et la matrice de transfert - une matrice rationnelle.

1.1.4 Inversibilité d'un système

Définition 1.10 . La matrice système associée au système $\sum(C, A, B)$ est la matrice polynômiale $P(s)$ définie par l'équation (1.10).

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Définition 1.11 . La matrice de transfert associée au système $\sum (C, A, B)$ est la matrice rationnelle $T(s)$ définie par l'équation (1.11).

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (1.11)$$

Ces deux matrices vérifient la propriété suivante.

Propriété 1.12 . La matrice système $P(s)$ et la matrice de transfert $T(s)$ associées au système carré $\sum (C, A, B)$ vérifient l'équation (1.12).

$$\det [P(s)] = \det [sI - A] \cdot \det [T(s)] \quad (1.12)$$

Essentielles pour caractériser la structure du système $\sum (C, A, B)$, ces matrices renferment également les informations relatives aux propriétés d'inversibilité du système : connaissant les valeurs désirées des variables de sortie, est-il possible de déterminer les valeurs à imposer aux variables d'entrée? Caractériser l'inversibilité d'un système consiste donc à déterminer le rang de sa matrice de transfert.

Définition 1.13 . Soit $\sum (C, A, B)$ le système décrit par l'équation (1.1), possédant m variables d'entrée et p variables de sortie. Soit $T(s)$ sa matrice de transfert. Le système $\sum (C, A, B)$ est inversible à droite si $\text{rang } [T(s)] = p$. Il est inversible à gauche si $\text{rang } [T(s)] = m$.

Pour un système carré, cette définition se simplifie de la manière suivante.

Définition 1.14 . Un système possédant autant de variables d'entrée que de variables de sortie est inversible si et seulement si sa matrice de transfert est inversible.

1.2 Représentation géométrique

A l'instar des techniques algébriques précédentes, l'approche géométrique définit des outils pour l'analyse structurelle et la commande des systèmes linéaires. L'utilisation de ces outils repose cela dit sur des fondements différents. Il s'agit en effet d'associer les propriétés dynamiques du système à des propriétés d'espaces [58].

Après avoir précisé les notations essentielles, nous rappelons les principales définitions et propriétés des sous-espaces usuels [59]. Nous résumons finalement les notations relatives aux sous-espaces utilisés par la suite.

1.2.1 Notations

Considérons le système $\sum (C, A, B)$ écrit par l'équation (1.1). Notons $\mathcal{K} = \ker C$ le noyau de la matrice de sortie et $\mathcal{B} = \text{Im } B$ l'espace image de la matrice de commande B .

Le demi-plan complexe gauche est noté C_- et le spectre d'une matrice H est noté $\sigma(H)$. Notons également h_i la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice H et H_i son $i^{\text{ème}}$ bloc. $\bar{h}_i$ représente la matrice H privée de sa $i^{\text{ème}}$ ligne; $\bar{H}_i$ représente la matrice H privée de son $i^{\text{ème}}$ bloc.

Enfin, soient $\mathcal{W}_1$ et $\mathcal{W}_2$ deux sous-espaces tels que $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_2$. L'espace quotient de $\mathcal{W}_2$ sur $\mathcal{W}_1$ est noté $\mathcal{W}_2/\mathcal{W}_1$: il contient les vecteurs de $\mathcal{W}_2$ qui n'appartiennent pas à $\mathcal{W}_1$. Si $\mathcal{W}_1$ et $\mathcal{W}_2$ vérifient de plus $A\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_1$ et $A\mathcal{W}_2 \subset \mathcal{W}_2$, alors l'application induite par A sur l'espace quotient $\mathcal{W}_2/\mathcal{W}_1$ est notée $(A \parallel \mathcal{W}_2/\mathcal{W}_1)$.

1.2.2 Sous-espaces invariants

Dans cette section, nous présentons deux types de sous-espaces communément utilisés pour la résolution de problèmes de commande : les sous-espaces $(A, \mathcal{B})$ -invariant et les sous-espaces $(\mathcal{K}, A)$ -invariants.

Notons que, pour l'étude de problèmes plus généraux que ceux présentés dans ce travail, nous parlons de sous-espaces $(A, \mathcal{T})$ -invariants ou $(\mathcal{T}, A)$ -invariants, où $\mathcal{T}$ est un sous-espace quelconque de $\mathcal{X}$.

Définition 1.15 . $\mathcal{W}$ est un sous-espace $(A, \mathcal{B})$ -invariant si et seulement il vérifie l'équation (1.13).

$$A\mathcal{W} \subset \mathcal{W} + \mathcal{B} \quad (1.13)$$

En termes de retour d'état, cette définition se traduit par la propriété suivante.

Propriété 1.16 . $\mathcal{W}$ est un sous-espace $(A, \mathcal{B})$ -invariant si et seulement il existe un ensemble de retours d'états F tels que $(A + BF)\mathcal{W} \subset \mathcal{W}$.

La loi de commande ainsi construite garantit donc que toute trajectoire d'état initialisée dans le sous-espace $\mathcal{W}$ y sera maintenue. Nous noterons $\mathcal{F}(A, B; \mathcal{W})$ l'ensemble des matrices de retour F vérifiant $(A + BF)\mathcal{W} \subset \mathcal{W}$.

Soit $\mathcal{L}(A, \mathcal{B}; \Psi)$ le sous-ensemble des sous-espaces $(A, \mathcal{B})$ -invariants inclus dans le sous-espace Ψ . Ce sous-ensemble étant fermé pour l'addition, il possède un élément maximum défini par la propriété suivante.

Propriété 1.17 . *Le sous-ensemble $\mathcal{L}(A, B; \Psi)$ possède un élément maximal unique, noté $\mathcal{V}^*(\Psi) = \sup \mathcal{L}(A, B; \Psi)$.*

Le sous-espace $\mathcal{V}^*(\Psi)$ peut être obtenu en calculant la limite de l'algorithme décrit par l'équation (1.14), encore appelé "Controlled Invariant Subspace Algorithm" [60].

$$\begin{cases} \mathcal{V}_0 = \mathcal{X} \\ \mathcal{V}_\mu = \Psi \cap A^{-1}(B + \mathcal{V}_{\mu-1}) \end{cases} \quad (1.14)$$

Pour la synthèse de lois de commande par découplage entrée-sortie, nous utiliserons un sous-ensemble particulier de sous-espaces (A, B) -invariants : le sous-ensemble des sous-espaces (A, B) -invariants inclus dans le noyau de la matrice de sortie, noté $\mathcal{L}(A, B; \mathcal{K})$.

L'élément maximal de ce sous-ensemble est communément noté $\mathcal{V}^* = \sup \mathcal{L}(A, B; \mathcal{K})$. Il peut être obtenu en calculant la limite de l'algorithme décrit par l'équation (1.14), avec $\Psi = \mathcal{K}$.

Pratiquement, nous utiliserons l'orthogonal du sous-espace $\mathcal{V}^*$. Ce sous-espace est obtenu en calculant la limite de l'algorithme décrit par l'équation (1.15) [2].

$$\begin{cases} \mathcal{V}_0^\perp = 0 \\ \mathcal{V}_\mu^\perp = \mathcal{K}^\perp + A^t(B^\perp \cap \mathcal{V}_{\mu-1}^\perp) \end{cases} \quad (1.15)$$

Une propriété fondamentale établit un lien entre le sous-espace $\mathcal{V}^*$ et l'observabilité du système bouclé. Cette propriété est exprimée de la manière suivante.

Propriété 1.18 . *Le sous-espace $\mathcal{V}^*$ est le plus grand sous-espace inobservable que l'on puisse construire par retour d'état.*

$\mathcal{V}^*$ est donc le sous-espace des conditions initiales de toutes les trajectoires d'état annulatrices de la sortie en boucle fermée. Les dynamiques associées à ces trajectoires sont inobservables. Elles peuvent être stables ou non.

Les dynamiques stables sont associées à un second type de sous-espaces (A, B) -invariants : les sous-espaces stabilisables.

Définition 1.19 . *$\mathcal{W}$ est un sous-espace (A, B) -invariant stabilisable si et seulement si il existe un retour d'état $F \in \mathcal{F}(A, B; \mathcal{W})$ vérifiant l'équation (1.16).*

$$\sigma(\mathcal{W} | A + BF | \mathcal{W}) \subset C_- \quad (1.16)$$

10 CHAPITRE 1 STRUCTURE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Un sous-espace stabilisable $\mathcal{W}$ est donc un sous-espace $(A, \mathcal{B})$ -invariant à partir duquel on peut construire un retour d'état $F \in \mathcal{F}(A, \mathcal{B}; \mathcal{W})$ tel que $(A + BF)$ soit stable sur $\mathcal{W}$. Soit $\mathcal{L}^-(A, \mathcal{B}; \mathcal{K})$ le sous-ensemble des sous-espaces stabilisables inclus dans le noyau de la matrice de sortie. Ce sous-ensemble vérifie la propriété suivante.

Propriété 1.20 . *Le sous-ensemble $\mathcal{L}^-(A, \mathcal{B}; \mathcal{K})$ possède un élément maximal unique, noté $\mathcal{V}_{stab}^* = \sup \mathcal{L}^-(A, \mathcal{B}; \mathcal{K})$.*

Il vérifie de plus l'équation (1.17).

$$\mathcal{V}_{stab}^* \subset \mathcal{V}^* \quad (1.17)$$

Parmi toutes les trajectoires annulatrices de la sortie, le sous-espace $\mathcal{V}_{stab}^*$ ne caractérise donc que celles dont les dynamiques sont stables. Il sera donc utilisé comme support à la synthèse de lois de commande garantissant simultanément le découplage et la stabilité du système bouclé.

Contrairement au cas précédent, aucun algorithme simple n'existe pour calculer formellement une base de ce sous-espace. Nous montrerons comment l'outil bond-graph fournit, dans certains cas, une alternative à ce problème de calcul.

Dans l'ensemble des trajectoires stables annulatrices de la sortie, deux types de dynamiques peuvent finalement être isolées : les dynamiques fixes et les dynamiques libres. Ces dernières sont associées à un troisième type de sous-espace $(A, \mathcal{B})$ -invariants : les sous-espaces de commandabilité.

Définition 1.21 [44][37]. *R est un sous-espace de commandabilité si et seulement s'il existe des matrices F et G telles que R est l'espace commandable du système $(A + BF, BG)$.*

Le sous-espace de commandabilité R est lié aux dynamiques du système bouclé comme le montre la propriété suivante.

Propriété 1.22 [37]. *R est un sous-espace $(A, \mathcal{B})$ de commandabilité si et seulement si, pour tout choix de spectre Λ , il existe un retour d'état F vérifiant les équations (1.18).*

$$\begin{cases} F \in \mathcal{F}(A, \mathcal{B}; R) \\ \sigma(R|A + BF|R) = \Lambda \end{cases} \quad (1.18)$$

Un sous-espace $(A, \mathcal{B})$ de commandabilité R garantit donc que, quelles que soient deux valeurs du vecteur d'état $x_1 \in R$ et $x_2 \in R$, il existe une loi de commande permettant de passer de l'état x_1 à l'état x_2 , dans un temps fixé a priori, selon une trajectoire qui reste immergée dans R .

Soit $\mathcal{C}(A, \mathcal{B}; \Psi)$ le sous-ensemble des sous-espaces de commandabilité inclus dans le sous-espace Ψ . Ce sous-ensemble vérifie la propriété suivante.

Propriété 1.23 . *Le sous-ensemble $\mathcal{C}(A, \mathcal{B}; \Psi)$ possède un élément maximal unique, noté $R^*(\Psi) = \sup \mathcal{C}(A, \mathcal{B}; \Psi)$.*

Le sous-espace $R^*(\Psi)$ peut être obtenu en calculant la limite de l'algorithme décrit par l'équation (1.19). Cet algorithme est appelé "Controllability Subspace Algorithm" [60]; il utilise le sous-espace $\mathcal{V}^*(\Psi) = \sup \mathcal{L}(A, \mathcal{B}; \Psi)$, plus grand sous-espace $(A, \mathcal{B})$ -invariant contenu dans le sous-espace Ψ .

$$\begin{cases} R_0(\Psi) = 0 \\ R_\mu(\Psi) = \mathcal{V}^*(\Psi) \cap (AR_{\mu-1} + \mathcal{B}) \end{cases} \quad (1.19)$$

De manière usuelle, le plus grand sous-espace de commandabilité contenu dans le noyau de la matrice de sortie est noté $R^* = \sup \mathcal{C}(A, \mathcal{B}; \mathcal{K})$. Il vérifie l'équation (1.20).

$$R^* \subset \mathcal{V}_{stab}^* \quad (1.20)$$

Ce sous-espace R^* peut être obtenu en calculant la limite de l'algorithme décrit par l'équation (1.19), où $\mathcal{V}^*(\Psi) = \mathcal{V}^* = \sup \mathcal{L}(A, \mathcal{B}; \mathcal{K})$.

Finalement, les propriétés des trois sous-espaces $(A, \mathcal{B})$ -invariants $\mathcal{V}^*$, $\mathcal{V}_{stab}^*$ et R^* sont les suivantes.

Les trois sous-espaces $(A, \mathcal{B})$ -invariants $\mathcal{V}^*$, $\mathcal{V}_{stab}^*$ et R^* vérifient les relations d'inclusion données par l'équation (1.21).

$$R^* \subset \mathcal{V}_{stab}^* \subset \mathcal{V}^* \quad (1.21)$$

Chacun de ces sous-espaces caractérise toutes ou seulement une partie des trajectoires de l'espace d'état annultrices de la sortie :

- $\mathcal{V}^*$: toutes.
- $\mathcal{V}_{stab}^*$: celles dont les dynamiques sont stables.
- R^* : celles dont les dynamiques sont librement assignables.
- $\mathcal{V}^*/R^*$: celles dont les dynamiques sont fixes.
- $\mathcal{V}_{stab}^*/R^*$: celles dont les dynamiques sont fixes et stables.

12 CHAPITRE 1 STRUCTURE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Ce travail fait enfin appel à un dernier type de sous-espaces invariants : les sous-espaces $(\mathcal{K}, A)$ -invariants, où $\mathcal{K} = \ker C$. Ces sous-espaces interviendront cependant de manière beaucoup moins directe que les sous-espaces $(A, \mathcal{B})$ -invariants. Aussi serons nous très brefs dans les rappels des définitions et propriétés relatifs à ces sous-espaces.

Définition 1.24 . $\mathcal{W}$ est un sous-espace $(\mathcal{K}, A)$ -invariant si et seulement s'il vérifie l'équation (1.22).

$$A(\mathcal{W} \cap \mathcal{K}) \subset \mathcal{W} \quad (1.22)$$

Soit $\mathcal{S}(\mathcal{K}, A; \mathcal{B})$ le sous-ensemble des sous-espaces $(\mathcal{K}, A)$ -invariants contenant le sous-espace $\mathcal{B}$. Ce sous-ensemble possède un élément minimal unique, noté $S^* = \inf \mathcal{S}(\mathcal{K}, A; \mathcal{B})$.

Ce sous-espace S^* peut être obtenu en calculant la limite de l'algorithme décrit par l'équation (1.23), appelé "Conditional Invariant Subspace Algorithm".

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_\mu = \mathcal{B} + A(\mathcal{K} \cap S_{\mu-1}) \end{cases} \quad (1.23)$$

Comme le montrent les algorithmes décrits par les équations (1.14) et (1.23), les sous-espaces $\mathcal{V}^*$ et S^* découlent de formulations duales. Ils sont par conséquent liés par la propriété suivante.

$$\textbf{Propriété 1.25} . \sup \mathcal{L}(A, \mathcal{B}; \mathcal{K}) = (\inf \mathcal{S}(\mathcal{B}^\perp, A^t; \mathcal{K}^\perp))^\perp$$

Nous rappelons finalement deux propriétés liant les sous-espaces $\mathcal{V}^*$, R^* et S^* .

Propriété 1.26 . Les sous-espaces $\mathcal{V}^*$, R^* et S^* vérifient l'équation (1.24).

$$R^* = \mathcal{V}^* \cap S^* \quad (1.24)$$

Propriété 1.27 . Pour un système inversible à droite, les sous-espaces $\mathcal{V}^*$ et S^* vérifient l'équation (1.25).

$$\mathcal{V}^* + S^* = \mathcal{X} \quad (1.25)$$

1.2.3 Récapitulatif

Les notations par lesquelles sont décrits les sous-espaces utilisés dans la suite de ce travail sont finalement les suivantes.

$\mathcal{V}^* = \sup \mathcal{L}(A, \mathcal{B}; \ker C)$: plus grand sous-espace $(A, \mathcal{B})$ -invariant inclus dans $\ker C$.

$\mathcal{V}_{stab}^* = \sup \mathcal{L}^-(A, \mathcal{B}; \ker C)$: plus grand sous-espace $(A, \mathcal{B})$ -invariant stabilisable inclus dans $\ker C$.

$R^* = \sup \mathcal{C}(A, \mathcal{B}; \ker C)$: plus grand sous-espace $(A, \mathcal{B})$ -invariant de commandabilité inclus dans $\ker C$.

$S^* = \inf \mathcal{S}(\ker C, A; \mathcal{B})$: plus petit sous-espace $(\ker C, A)$ -invariant contenant $\mathcal{B}$.

$\mathcal{V}_i^* = \sup \mathcal{L}(A, \mathcal{B}; \ker c_i)$: plus grand sous-espace $(A, \mathcal{B})$ -invariant inclus dans $\ker c_i$.

$\mathcal{V}_{istab}^* = \sup \mathcal{L}^-(A, \mathcal{B}; \ker c_i)$: plus grand sous-espace $(A, \mathcal{B})$ -invariant stabilisable inclus dans $\ker c_i$.

$R_i^* = \sup \mathcal{C}(A, \mathcal{B}; \ker c_i)$: plus grand sous-espace $(A, \mathcal{B})$ -invariant de commandabilité inclus dans $\ker c_i$.

$S_i^* = \inf \mathcal{S}(\ker c_i, A; \mathcal{B})$: plus petit sous-espace $(\ker c_i, A)$ -invariant contenant $\mathcal{B}$.

$\Gamma_i^* = \sup \mathcal{L}(A, \mathcal{B}; \ker \overline{C}_i)$: plus grand sous-espace $(A, \mathcal{B})$ -invariant inclus dans $\ker \overline{C}_i$.

$\mathcal{W}_i^* = \sup \mathcal{C}(A, \mathcal{B}; \ker \overline{C}_i)$: plus grand sous-espace $(A, \mathcal{B})$ -invariant de commandabilité inclus dans $\ker \overline{C}_i$.

1.3 Structure

La structure d'un système est l'image de son architecture. A ce titre, elle définit le cadre des stratégies de commande possibles. Dans cette optique, à l'aide des outils algébriques et géométriques précédents, nous décrivons donc à présent les éléments structurels utiles pour la suite de ce travail.

Ces éléments sont donnés par des listes d'entiers ou de polynômes. Certaines de ces listes sont associées au comportement externe du système : nous décrivons en particulier la structure à l'infini et la structure essentielle. D'autres listes caractérisent le comportement interne du système : la structure finie et la liste I_2 de Morse.

1.3.1 La structure à l'infini

La structure à l'infini d'un système contient deux types d'informations : la structure infinie globale et la structure infinie en ligne.

Définition 1.28 [14]. *La structure à l'infini globale du système $\sum (C, A, B)$ est donnée par la liste des ordres des zéros à l'infini de sa matrice de transfert.*

Cette liste, notée $\sum_{\infty} (C, A, B)$, est associée, de manière globale, à l'ensemble des sorties du système. Conformément à la définition 1.8, les éléments qu'elle contient sont identifiés sur la forme de Smith McMillan à l'infini de la matrice de transfert $G(s)$. Or les systèmes considérés ici sont des systèmes propres. Ils ne possèdent donc pas de pôle à l'infini. Le nombre d'éléments contenus dans la liste $\sum_{\infty} (C, A, B)$ est par conséquent égal au rang de la matrice de transfert.

Les systèmes concernés par ce travail étant inversibles à droite, le rang de leur matrice de transfert est égal à p , le nombre de sorties - définition 1.13. La liste $\sum_{\infty} (C, A, B)$ possède donc p éléments, notés $\{n'_1, \dots, n'_p\}$.

Ces entiers décrivent la façon dont l'ensemble des variables de sortie s'organise en fonction des variables d'entrée quand la variable s tend vers l'infini. La matrice de transfert du système $\sum (C, A, B)$ vérifie alors l'équation (1.26).

$$G(s) = \left[\frac{CB}{s} + \frac{CAB}{s^2} + \dots \right] \quad (1.26)$$

Le lien existant entre cette relation entrée-sortie et la structure à l'infini globale du système est rappelé par la propriété suivante.

Propriété 1.29 [21]. *Les ordres des zéros à l'infini globaux d'un système sont respectivement égaux au nombre minimum de dérivations de chaque variable de sortie nécessaire pour que les variables d'entrée apparaissent de manière explicite et indépendante dans les équations.*

L'équation (1.26) et la propriété 1.29 permettent par conséquent d'exprimer les relations liant les entiers $\{n'_1, \dots, n'_p\}$ aux variables d'entrée et de sortie du système. Ces relations sont décrites par les équations (1.27), dans

lesquelles le rang de la matrice Ω est maximal.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} s^{n'_1} y_1(s) \\ \vdots \\ s^{n'_p} y_p(s) \end{bmatrix} = \Omega \cdot \begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_m(s) \end{bmatrix} + \Omega'(s) \cdot \begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_m(s) \end{bmatrix} \\ \Omega = \begin{bmatrix} c_1 A^{(n'_1-1)} B \\ \vdots \\ c_p A^{(n'_p-1)} B \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.27)$$

Remarque 1.30 . Cette approche reste valable même si le système possède des transmissions directes. Dans ce cas, les ordres de ses zéros à l'infini sont également identifiés sur la forme de Smith McMillan à l'infini de la matrice de transfert. L'un au moins de ces entiers est cependant nul.

Les zéros infinis globaux caractérisent donc l'indépendance globale des variables d'entrée par rapport aux dérivées des variables de sortie; ils jouent à ce titre un rôle capital dans la résolution des problèmes de commande par découplage entrée-sortie. Nous aurons l'occasion d'y revenir - chapitres 3 et 4.

A chaque sous-système $\sum (c_i, A, B)$ est également associée une structure à l'infini, appelée structure à l'infini en ligne. Cette structure caractérise chaque sortie du système prise séparément; elle n'est donc composée que d'un seul élément, appelé ordre du $i^{\text{ème}}$ zéro infini en ligne.

Définition 1.31 . L'ordre du zéro infini en ligne associé au sous-système $\sum (c_i, A, B)$ est l'entier n_i vérifiant l'équation (1.28).

$$n_i = \inf \{ \mu \in N \text{ tel que } c_i A^{\mu-1} B \neq 0 \} \quad (1.28)$$

Cet entier n_i est donc égal au nombre de dérivations de la variable de sortie $y_i(t)$ nécessaire pour que le vecteur d'entrée y apparaisse explicitement.

Des liens existent entre ces éléments structurels définis d'une manière algébrique et certains sous-espaces définis par l'approche géométrique. En particulier, la structure à l'infini globale peut être déduite des étapes des algorithmes décrits par les équations (1.14) et (1.23).

Propriété 1.32 [12]. La somme des ordres des zéros infinis globaux d'un système vérifie l'équation (1.29). Si le système est inversible à droite, la propriété 1.27 permet d'obtenir le résultat donné par l'équation (1.30).

$$\sum_i n'_i = \dim \left(\frac{\mathcal{V}^* + S^*}{\mathcal{V}^*} \right) \quad (1.29)$$

$$\dim \mathcal{V}^* = n - \sum_i n'_i \quad (1.30)$$

Une relation similaire permet de caractériser la dimension du sous-espace $\mathcal{V}_i^*$ en fonction de l'entier n_i défini par l'équation (1.28). Compte tenu de cette équation, une base du sous-espace $\mathcal{V}_i^{*\perp}$ est en effet obtenue en calculant la limite de l'algorithme décrit par l'équation (1.15). Cette base est donnée par l'équation (1.31).

$$\mathcal{V}_i^{*\perp} = \text{vect} \left\{ (c_i)^t, \dots, (c_i A^{n_i-1})^t \right\} \quad (1.31)$$

La dimension du sous-espace $\mathcal{V}_i^*$ est alors immédiatement déduite, comme le rappelle la propriété suivante.

Propriété 1.33 . *La dimension du sous-espace $\mathcal{V}_i^*$ est donnée par l'équation (1.32).*

$$\dim \mathcal{V}_i^* = n - n_i \quad (1.32)$$

Plus qualitativement, l'ordre du zéro infini en ligne associé à chaque sortie s'apparente à un retard : le plus petit retard existant entre cette sortie et les entrées du système. En particulier, dans le cas des systèmes discrets, ce retard représente le nombre d'échantillonnages nécessaire pour que le signal d'entrée atteigne la sortie.

1.3.2 La structure essentielle

La structure essentielle est donnée par une liste $\{n_{ie}\}$ d'entiers appelés ordres d'essentialité [13]. Le nombre d'ordres d'essentialité est égal, pour un système inversible à droite, au nombre de sorties.

Chaque ordre d'essentialité traduit une information propre à une sortie donnée du système. La définition de ces entiers repose sur les notions de matrice de Toeplitz et de ligne essentielle d'une matrice [13]. Ces notions sont rappelées en annexe A.2. Nous rappelons brièvement les propriétés relatives au calcul des ordres d'essentialité.

Une caractérisation simple de ces entiers est obtenue par l'utilisation conjointe d'outils géométriques et algébriques. La propriété suivante exprime d'abord chaque entier n_{ie} en termes de dimensions d'espaces.

Propriété 1.34 [13]. Soit $\sum (C, A, B)$ un système inversible à droite. Soient $\mathcal{V}^*$ et Γ_i^* tels que $\mathcal{V}^* = \sup \mathcal{L}(A, B; \ker C)$ et $\Gamma_i^* = \sup \mathcal{L}(A, B; \ker \overline{C}_i)$ - section 1.2.3. L'entier n_{ie} vérifie alors l'équation (1.33).

$$n_{ie} = \dim(\Gamma_i^* / \mathcal{V}^*), i = 1, \dots, p \quad (1.33)$$

La règle utilisée, en pratique, pour calculer les ordres d'essentialité est déduite des propriétés 1.32 et 1.34. Cette règle est rappelée par la propriété suivante.

Propriété 1.35 . Soit $\sum (C, A, B)$ un système inversible à droite. Soit $\{n'_j\}$ la structure à l'infini globale du système $\sum (C, A, B)$. Soit $\{\tilde{n}_j^i\}$ la structure à l'infini globale du système $\sum (\overline{C}_i, A, B)$. n_{ie} vérifie alors l'équation (1.34).

$$n_{ie} = \sum_j n'_j - \sum_j \tilde{n}_j^i \quad (1.34)$$

Pour une sortie donnée, l'ordre du zéro essentiel est donc égal à la somme des ordres des zéros à l'infini globaux du système moins la somme des ordres des zéros à l'infini globaux du système privé de la sortie considérée.

Plus qualitativement, signalons qu'un ordre d'essentialité caractérise le degré de dépendance de la sortie associée par rapport à toutes les autres. Nous verrons que la structure essentielle joue, à ce titre, un rôle important dans la résolution de problèmes de commande par découplage entrée-sortie non-régulier - chapitre 4.

1.3.3 La structure finie

La structure finie du système $\sum (C, A, B)$ est donnée par une liste de polynômes définis de la manière suivante.

Définition 1.36 . La structure finie du système $\sum (C, A, B)$ est l'ensemble des polynômes invariants de la matrice système associée.

Conformément à la définition 1.1, ces polynômes sont identifiés sur la forme de Smith de la matrice système. Ils permettent d'introduire la notion de zéro invariant d'un système.

Définition 1.37 . Les racines des polynômes invariants de la matrice système - i.e. les zéros de la matrice système - sont appelées zéros invariants du système.

18 CHAPITRE 1 STRUCTURE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Compte tenu de cette définition et de la remarque 1.4, les zéros invariants d'un système vérifient donc la propriété suivante.

Propriété 1.38 . *Les zéros invariants d'un système sont les racines communes à tous les mineurs d'ordre maximum de sa matrice système.*

Dans le problème du découplage entrée-sortie, les zéros invariants jouent un rôle capital que permet d'introduire l'interprétation physique suivante [35]. z_0 est un zéro invariant si, lorsqu'on excite le système par une entrée $u(t) = g \exp(z_0 t)$, la sortie reste identiquement nulle alors que l'état suit la loi $x(t) = x_0 \exp(z_0 t)$. Le zéro invariant caractérise donc une fréquence "absorbée" par le système. Cette notion de zéro invariant semble par là être associée à la notion de trajectoire d'état annulatrice de la sortie. L'approche géométrique permet de qualifier cette intuition d'une manière plus précise.

Propriété 1.39 . *Pour toute matrice de retour d'état $F \in \mathcal{F}(\mathcal{V}^*)$, l'application $(A + BF \parallel \mathcal{V}^* / R^*)$ est fixe. Ses valeurs propres, définies par le spectre $\sigma(A + BF \parallel \mathcal{V}^* / R^*)$, sont les zéros invariants du système.*

Les zéros invariants caractérisent donc le comportement dynamique interne du système bouclé par un retour d'état $F \in \mathcal{F}(\mathcal{V}^*)$. Comme nous l'avons précisé en section 1.2.2, le sous-espace $\mathcal{V}^* / R^*$ caractérise en effet, parmi les trajectoires d'état annulatrices de la sortie en boucle fermée, celles dont les dynamiques sont fixes : ces dynamiques sont précisément les zéros invariants du système en boucle ouverte.

Ces zéros invariants peuvent être stables ou instables. Pour l'analyse de la stabilité du système découplé, nous nous intéresserons particulièrement aux zéros invariants instables du système en boucle ouverte. La propriété suivante définit, à cet effet, le contenu invariant instable du système en boucle ouverte en termes de dimensions d'espaces.

Propriété 1.40 [59]. *Soit $C^+(C, A, B)$ la somme de tous les ordres de multiplicité de tous les zéros invariants instables du système $\Sigma(C, A, B)$. Cet entier vérifie alors l'équation (1.35).*

$$C^+(C, A, B) = \dim(\mathcal{V}^* / \mathcal{V}_{stab}^*) \quad (1.35)$$

Le cumul invariant instable caractérise donc les dynamiques des trajectoires instables annulatrices de la sortie. Par l'approche graphique qui nous intéresse, une structure particulière est donnée en $s = 0$ - section 2.2.1. Il s'agira donc plus particulièrement de décrire la structure des zéros invariants nuls.

Pour l'analyse des propriétés structurelles d'un système, d'autres types de zéros fournissent des informations pertinentes. Nous en rappelons les principales définitions et propriétés.

Définition 1.41 . *Les zéros de transmission - $\{zt\}$ - d'un système $\sum (C, A, B)$ sont les zéros de sa matrice de transfert.*

Ces zéros sont donc identifiés sur la forme de Smith McMillan de la matrice de transfert, comme le rappellent les définitions 1.5 et 1.7. Si le système est minimal, ses zéros de transmission vérifient la propriété suivante.

Propriété 1.42 . *Pour un système $\sum (C, A, B)$ complètement gouvernable et observable, l'ensemble des zéros de transmission est identique à l'ensemble des zéros invariants.*

Dans le cas plus général d'un système non minimal, l'ensemble des zéros de transmission est seulement inclus dans l'ensemble des zéros invariants. L'étude des zéros de découplage permet alors de préciser la structure des zéros du système.

Définition 1.43 . *Les zéros finis de découplage d'entrée - $\{ze\}$ - sont les valeurs de la variable s vérifiant l'équation (1.36).*

$$\text{rang}[sI - A|B] < n \quad (1.36)$$

Les zéros définis d'une manière structurelle sont nuls. Ils correspondent aux pôles nuls non commandables structurellement du système en boucle ouverte; leur nombre est donc égal à la dimension de l'espace non commandable du système en boucle ouverte.

Un formalisme dual permet de définir les zéros de découplage de sortie.

Définition 1.44 . *Les zéros finis de découplage de sortie - $\{zs\}$ - sont les valeurs de la variable s vérifiant l'équation (1.37).*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} < n \quad (1.37)$$

De même que pour les zéros de découplage d'entrée, les zéros de découplage de sortie définis d'une manière structurelle sont nuls. Ils correspondent aux pôles nuls non observables du système en boucle ouverte; leur nombre est donc égal à la dimension de l'espace non observable du système en boucle ouverte.

20 CHAPITRE 1 STRUCTURE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Les zéros finis de découplage d'entrée et les zéros finis de découplage de sortie permettent de définir l'ensemble des zéros finis de découplage d'entrée-sortie.

Définition 1.45 . *Les zéros finis de découplage d'entrée qui sont également zéros finis de découplage de sortie sont appelés zéros finis de découplage d'entrée-sortie - $\{zes\}$.*

Remarque 1.46 . *L'ensemble des zéros de découplage $\{zd\}$ est alors défini selon l'équation (1.38).*

$$\{zd\} = \{ze\} \cup \{zs\} - \{zes\} \quad (1.38)$$

Un dernier type de zéros sera utilisé dans la suite de ce travail : les zéros-système.

Définition 1.47 [49]. *L'ensemble des zéros-système $\{zs\}$ est composé des zéros du plus grand diviseur commun de tous les mineurs $\mathcal{M}(s)$ de la matrice système $P(s)$ vérifiant l'équation (1.39), où la valeur maximum de k est notée θ telle que $0 \leq \theta \leq \min(m, p)$.*

$$\mathcal{M}(s) = P(s)_{1,2,\dots,n,(n+i_1),\dots,(n+i_k)}^{1,2,\dots,n,(n+j_1),\dots,(n+j_k)} \quad (1.39)$$

L'équation (1.39) indique que les lignes et colonnes ôtées de la matrice $P(s)$ pour calculer chaque mineur $\mathcal{M}(s)$ sont toutes choisies dans les matrices B et C .

Cet ensemble des zéros-système peut enfin être construit à partir de l'ensemble des zéros de transmission et des zéros de découplage, comme le rappelle la propriété suivante.

Propriété 1.48 . *L'ensemble des zéros-système $\{zs\}$ est défini conformément à l'équation (1.40).*

$$\{zs\} = \{zt\} \cup \{zd\} \quad (1.40)$$

Graphiquement, ces différents ensembles sont représentés conformément à la figure 1.1 [35].

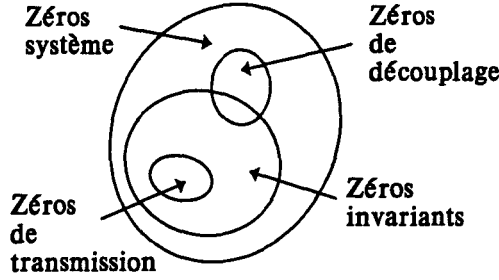


Figure 1.1.

Remarque 1.49 . *L'ensemble des zéros-système contient l'ensemble des zéros invariants dans le cas général. Cependant, si le système possède autant de variables d'entrée que de variables de sorties ou s'il est minimal, ces deux ensembles sont identiques.*

1.3.4 La liste I_2 de Morse

La liste I_2 de Morse est une liste d'entiers caractérisant la structure du sous-espace $R^* = \sup C(A, B; K)$ - section 1.2.3.

La définition de cette liste fait appel à la notion de listes duales, rappelée par la propriété suivante.

Propriété 1.50 . *Deux listes d'entiers $\{m_k\}$ et $\{p_k\}$ sont dites duales si elles vérifient l'équation (1.41).*

$$\begin{cases} m_i = \text{card}\{p_\alpha \geq i\} , i \geq 1 \\ p_i = \text{card}\{m_\alpha \geq i\} , i \geq 1 \end{cases} \quad (1.41)$$

L'entier m_i est donc égal au nombre d'éléments p dont la valeur est supérieure ou égale à i . De même, l'entier p_i est égal au nombre d'éléments m dont la valeur est supérieure ou égale à i .

A l'aide de cette propriété, nous rappelons à présent la définition de la liste I_2 de Morse.

Définition 1.51 [43]. *Soit $R^* = \sup C(A, B; K)$ le sous-espace calculé par l'algorithme (1.19) et R_μ le sous-espace obtenu à la $\mu^{\text{ème}}$ étape de cet algorithme. Soit $\alpha_\mu = \dim(R_\mu / R_{\mu-1})$, $\mu \geq 1$. La liste I_2 de Morse est alors donnée par la liste $\{\sigma_i\}$, duale de la liste $\{\alpha_\mu\}$.*

Cette liste possède ρ éléments, avec $\rho = \dim(\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^*)$. Ces éléments correspondent aux indices de commandabilité de la plus grande partie inobservable créée par un bouclage $F \in \mathcal{F}(A, B; R^*)$.

La liste I_2 de Morse intervient en particulier dans les problèmes de commande par retour d'état statique non régulier. A cet effet, nous aurons l'occasion de l'utiliser en partie 4.2.

1.3.5 Invariance de la structure

Sous l'action d'un retour d'état statique régulier, les éléments structurels précédents sont invariants - structure infinie, zéros invariants, structure essentielle, liste I_2 entre autres. Ils permettent alors de conclure à l'existence - ou non - de solutions à certains problèmes de découplage entrée-sortie. Nous exploiterons ces conditions structurelles pour résoudre le problème du découplage entrée-sortie ligne par ligne avec stabilité.

S'il n'est structurellement pas soluble par retour d'état statique régulier, on peut éventuellement trouver une forme de commande différente, qui **modifie** la structure du système de telle sorte qu'elle rende le problème soluble. Nous envisagerons d'utiliser, dans ce cas, des lois de commande par retour d'état statique non régulier - chapitre 4.

1.4 Découplage entrée-sortie

La dernière partie de ce chapitre vise enfin à définir le contexte dans lequel s'inscrit notre travail. Nous dressons ainsi un historique rapide des contributions essentielles relatives à la commande par découplage entrée-sortie. Nous rappelons en particulier les principaux résultats sur lesquels s'appuient nos travaux.

Nous définissons tout d'abord le sens de l'expression "commande par découplage entrée-sortie". Nous précisons en particulier les différents qualificatifs utilisés pour décrire cette stratégie de commande et les différentes formes qu'elle peut revêtir.

Puis nous rappelons les principales contributions apportées par la communauté pour décrire des solutions de commande statiques régulières possibles. Parmi ces travaux, nous distinguons ceux qui fournissent des éléments d'analyse de ceux qui fournissent des éléments pour la synthèse des lois de commande.

Une des problématiques majeures liées à la commande d'un système par découplage entrée-sortie concerne la stabilité du système bouclé : une solution donnée permet-elle de garantir la stabilité du système découplé ? De

nombreuses études ont été réalisées pour apporter des éléments de réponse à cette question. Nous rappelons finalement les principales d'entre elles.

1.4.1 La commande par découplage

Le but d'une loi de commande par découplage entrée-sortie est de transformer un système global couplé en un ensemble de sous-systèmes indépendants les uns des autres. L'objectif est ainsi d'assurer que chaque bloc d'entrée du système découplé ne commande qu'un seul bloc de sortie.

Considérons le cas général d'un système possédant m entrées et p sorties avec $m \neq p$. Si la matrice de sortie est partitionnée en blocs, on parle de découplage par blocs. Une loi de commande par découplage doit alors garantir que chaque bloc d'entrée ne commande qu'un seul bloc de sortie [19]. Si chaque bloc de sortie n'est constitué que d'un seul scalaire, on parle de découplage par lignes. Enfin, un système possédant autant d'entrées que de sorties est dit carré. Dans ce cas, une loi de commande par découplage entrée-sortie a pour objet de transformer le système multivariable initial en un ensemble de sous-systèmes monovariabiles indépendants.

Dans ces différents cas, le découplage est dit diagonal. La matrice de transfert du système découplé est en effet - bloc - diagonale. Néanmoins, il se peut qu'aucune solution de contrôle ne permette de réaliser un découplage diagonal. Un objectif de commande moins ambitieux peut dans ce cas être poursuivi: le découplage triangulaire. Par cette solution de commande, la matrice de transfert du système bouclé est triangulaire. Les sorties peuvent ainsi être réglées en cascade.

Différentes formes de loi de commande permettent d'atteindre cet objectif de découplage entrée-sortie. La plus générale d'entre elles est donnée par l'équation (1.42).

$$u(s) = F(s)x(s) + G(s)v(s) \quad (1.42)$$

x , u et v représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande (en boucle ouverte) et de consigne (en boucle fermée). s représente l'opérateur de Laplace.

En particulier, on parle de précompensation dynamique lorsque l'équation (1.42) prend la forme de l'équation (1.43), où $G(s)$ est une matrice de transfert propre.

$$u(s) = G(s)v(s) \quad (1.43)$$

Par contre, on appelle retour d'état toute loi de commande du type de celle donnée par l'équation (1.44), où $F(s)$ est une matrice de transfert propre.

$$u(s) = F(s)x(s) + Gv(s) \quad (1.44)$$

24 CHAPITRE 1 STRUCTURE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Dans ce dernier cas, si la loi de commande n'introduit aucun état supplémentaire, le retour d'état est dit statique. La matrice $F(s)$ est alors constante. Dans l'hypothèse inverse, le retour d'état est dit dynamique. On parle enfin de retour d'état régulier si la matrice G est non singulière. Un retour d'état régulier conserve par conséquent le nombre d'entrées indépendantes du système.

A travers notre démarche d'analyse structurelle, l'objectif est de comprendre l'influence du modèle d'un système physique sur les possibilités structurelles de commande par découplage. Dans cette optique, il est essentiel de pouvoir constamment identifier le sens physique de chaque variable d'état. Pour cette raison, nous ne nous intéressons, dans ce travail, qu'aux lois de commande par retour d'état statique. Dans le cas régulier, de très nombreuses contributions ont été apportées par la communauté scientifique. La section suivante a pour objectif de rappeler les principales d'entre elles. De plus amples informations sont données à ce sujet dans [44].

1.4.2 Existence d'une solution

L'une des premières études connues concernant le problème du découplage entrée-sortie a été réalisée entre les années 1930 et 1940, en Union Soviétique, par Voznesenskii. Il s'agissait d'un problème de contrôle de turbines [44]. Jusqu'au début des années 1960, les travaux de la communauté scientifique n'ont cependant permis aucune véritable avancée. En 1963, Morgan [42] apporte les premiers résultats significatifs : pour la première fois, il formule le problème du découplage entrée-sortie en termes de retour d'état. En particulier, il propose une méthode de synthèse de loi de commande par retour d'état. En 1967, Falb et Wolovich [21] abordent le problème du découplage statique régulier des systèmes carrés par une approche matricielle. Leur démarche est nouvelle en ce sens qu'ils cherchent à identifier des conditions d'existence de solutions. Pour le découplage statique régulier des systèmes carrés, ils caractérisent une condition nécessaire et suffisante de découplabilité exprimée par le théorème suivant.

Théorème 1.52 [42]. *Considérons un système $\Sigma(C, A, B)$ possédant p variables d'entrée et p variables de sortie. Soient $\{d_1, \dots, d_p\}$ les plus petits entiers non négatifs tels que $c_i A^{d_i} B \neq 0$. $\Sigma(C, A, B)$ est statiquement dé-*

couplable ligne par ligne si et seulement s'il vérifie l'équation (1.45).

$$\text{rang} \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1} B \\ \vdots \\ c_p A^{d_p} B \end{bmatrix} = p \quad (1.45)$$

En 1970, Wonham et Morse [60] introduisent une nouvelle approche : l'approche géométrique - partie 1.2. Leur idée est de conditionner l'existence d'une solution de commande (F, G) à l'existence d'un ensemble de sous-espaces particuliers : les sous-espaces de commandabilité.

Considérons des partitions de l'entrée et de la sortie en k blocs. Le système étant bloc découplé par une loi de commande du type $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$, notons $\mathcal{W}_i$, $i = 1, \dots, k$, le sous-espace de l'espace d'état, commandable par le vecteur de consignes v_i . Le sous-espace $\mathcal{W}_i$ est un sous-espace de commandabilité - définition 1.21. Il vérifie l'équation (1.46), où G^i est le bloc des colonnes de la matrice G relatif au vecteur de consignes v_i .

$$\mathcal{W}_i = \langle A + BF \mid BG^i \rangle, i = 1, \dots, k \quad (1.46)$$

A l'aide des sous-espaces $\{\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_k\}$, Wonham et Morse formulent le problème du découplage statique par blocs de la manière suivante.

Théorème 1.53 [60]. *Soit $\sum (C, A, B)$ un système dont la sortie est partitionnée en k blocs $\{C_1, \dots, C_k\}$. Le découplage par blocs par retour d'état statique est possible si et seulement s'il existe une famille de sous-espaces de commandabilité $\{\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_k\}$ vérifiant les équations (1.47).*

$$\begin{cases} \mathcal{W}_i + \ker C_i = \mathcal{X} \\ \mathcal{W}_i \subset \ker \overline{C}_i \\ \cap_i \mathcal{F}(A, B; \mathcal{W}_i) \neq \emptyset \end{cases} \quad (1.47)$$

Les deux premières équations expriment le fait que l'entrée de consigne v_i doit commander le vecteur de sortie y_i , sans toutefois affecter les vecteurs de sortie y_j , $j \neq i$. La troisième équation vise à garantir la compatibilité de la famille de sous-espaces $\{\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_k\}$: il existe un retour d'état F rendant simultanément invariants tous les sous-espaces de cette famille.

Deux problèmes posent cependant les limites de cette approche géométrique. Parmi tous les sous-espaces de commandabilité contenus dans un sous-espace donné, on ne sait caractériser de manière simple que celui dont la taille

est maximale: $\mathcal{W}_i^* = \sup \mathcal{C}(A, B; \ker \overline{C}_i)$ - algorithme 1.19. D'autre part, la famille des sous-espaces de commandabilité de taille maximale $\{\mathcal{W}_1^*, \dots, \mathcal{W}_k^*\}$ est la seule pour laquelle il existe une condition nécessaire et suffisante de compatibilité [44].

De ce fait, Wonham et Morse traitent les cas pour lesquels la famille maximale est solution. En particulier, ils établissent la condition nécessaire et suffisante suivante de découplabilité régulière.

Théorème 1.54 [60]. *Soit le système $\sum (C, A, B)$ pour lequel $\{C_1, \dots, C_k\}$ est une partition par blocs de la sortie. Soit $\mathcal{W}_i^*$, $i = 1, \dots, k$, le plus grand sous-espace de commandabilité inclus dans $\ker \overline{C}_i$. Le problème du découplage statique admet une solution régulière si et seulement si l'équation (1.48) est vérifiée.*

$$\mathcal{B} = \sum_i \mathcal{B} \cap \mathcal{W}_i^* \quad (1.48)$$

A l'instar du théorème 1.52 concernant les systèmes carrés, ce résultat décrit pour la première fois une condition de découplabilité par blocs, sans faire appel au calcul explicite des lois de commande. Dans le cas où le nombre d'entrées du système est égal au nombre de blocs de sortie à découpler, le lien entre découplabilité et solution de commande est établi par le théorème suivant.

Théorème 1.55 [60]. *Si le nombre d'entrées du système est égal au nombre k de blocs de sortie à découpler et si l'équation (1.48) est vérifiée, alors la famille maximale $\{\mathcal{W}_1^*, \dots, \mathcal{W}_k^*\}$ est la seule solution.*

Concernant les systèmes carrés, ce théorème montre ainsi que les plus petits sous-espaces de commandabilité assurant le découplage statique du système sont les sous-espaces $\mathcal{W}_i^* = \sup \mathcal{C}(A, B; \ker \overline{C}_i)$, $i = 1, \dots, k$. Dans ce cas, la famille maximale constitue par conséquent la meilleure solution possible.

En 1982, Descusse et Dion [14] proposent des résultats importants pour l'analyse des propriétés de découplabilité par lignes d'un système. Ces résultats sont à rapprocher de ceux donnés par les théorèmes 1.52 et 1.54. En effet, ils établissent deux conditions nécessaires et suffisantes de découplabilité statique régulière des systèmes carrés inversibles. La première condition est géométrique, exprimée par le théorème suivant.

Théorème 1.56 [14]. *Soit $\sum (C, A, B)$ un système carré inversible. Soit $\mathcal{V}^*$ - respectivement $\mathcal{V}_i^*$ - le plus grand sous-espace (A, B) -invariant contenu dans*

$\ker C$ - respectivement dans $\ker c_i$, $i = 1, \dots, p$. $\sum (C, A, B)$ est statiquement découplable ligne par ligne si et seulement si il vérifie l'équation (1.49).

$$\mathcal{V}^* = \cap_{i=1}^p \mathcal{V}_i^* \quad (1.49)$$

La seconde condition établie par Descusse et Dion est structurelle. Elle exprime la découplabilité statique régulière d'un système carré inversible en termes de structures à l'infini globale et en ligne. Cette condition est rappelée par le théorème suivant.

Théorème 1.57 [14]. *Le système $\sum (C, A, B)$ carré inversible est découplable par retour d'état statique régulier si et seulement si les ordres de ses zéros à l'infini sont respectivement égaux aux ordres des zéros à l'infini des sous-systèmes lignes $\sum (c_i, A, B)$, $i = 1, \dots, p$.*

Ces résultats sont étendus en 1983 par Dion [19] au problème du découplage par bloc, comme le rappelle le théorème suivant.

Théorème 1.58 [19]. *Soit $\sum (C, A, B)$ un système pour lequel $\{C_1, \dots, C_k\}$ est une partition par blocs de la sortie. Soient $\sum_{\infty} (C, A, B)$ et $\sum_{\infty} (C_i, A, B)$ les structures à l'infini respectives de $\sum (C, A, B)$ et $\sum (C_i, A, B)$, $i = 1, \dots, k$. $\sum (C, A, B)$ est découplable par retour d'état statique régulier relativement à la partition $\{C_1, \dots, C_k\}$ si et seulement si l'équation (1.50) est vérifiée.*

$$\sum_{\infty} (C, A, B) = \cup_{i=1}^k \sum_{\infty} (C_i, A, B) \quad (1.50)$$

Dans le cas du découplage ligne par ligne, ce théorème a été enrichi, en 1986, d'une information structurelle liée à la structure essentielle du système - section 1.3.2. Le résultat proposé est énoncé par le théorème suivant.

Théorème 1.59 [13]. *Soit $\sum (C, A, B)$ un système inversible à droite possédant p variables de sortie. Soit $\{n'_i\}$ - respectivement $\{n_i\}$ - la liste des ordres de ses zéros infinis globaux - respectivement en ligne. Soit $\{n_{ie}\}$ la liste de ses ordres d'essentialité. Les trois conditions données par l'équation (1.51) sont des conditions nécessaires et suffisantes équivalentes pour que le système $\sum (C, A, B)$ soit découplable ligne par ligne par retour d'état statique régulier.*

$$\begin{cases} n_i = n_{ie}, i = 1, \dots, p \\ \{n'_i\} = \{n_i\} \\ \{n'_i\} = \{n_{ie}\} \end{cases} \quad (1.51)$$

En 1991, Dion et Commault [20] proposent une interprétation de ces résultats pour l'étude des systèmes linéaires structurés. Ces systèmes sont représentés par des modèles de type digraphe, à partir desquels les auteurs définissent les notions de chemins entrée-sortie disjoints et de longueur de chemins. Ils utilisent ces notions pour calculer les ordres des zéros infinis globaux et en ligne du système à partir de sa représentation digraphe.

Ces résultats sont adaptés au formalisme bond-graph par Rahmani [46] en 1993. L'auteur introduit en particulier l'équivalence entre les notions de chemins disjoints sur un modèle de type digraphe et chemins causaux différents sur le modèle bond-graph associé - définition 2.9. Ces travaux permettent donc de caractériser les structures infinies globales et en ligne d'un système à partir de son modèle bond-graph - propriétés 2.28 et 2.26. A la lumière des résultats antérieurs - théorème 1.59 - la découplabilité statique régulière d'un système linéaire est ainsi caractérisée structurellement à partir de son modèle bond-graph.

Comme en témoignent ces résultats, différentes techniques ont donc été mises au point pour l'analyse des propriétés structurelles de découplabilité statique d'un système. Par contre, les techniques de synthèse structurelle des lois de commande $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ correspondantes n'ont fait l'objet que de relativement peu de publications.

Historiquement, ce sont d'abord Falb et Wolovich [21] qui déterminent, en 1967, certaines lois de commande statiques régulières dans le cas des systèmes carrés. Pour cela, ils font appel à des méthodes matricielles, utilisées également par Gilbert [24] en 1969 pour compléter leurs travaux.

En 1970, Wonham et Morse [60][44] proposent à leur tour une procédure de synthèse d'un retour d'état statique régulier découplant. Cette procédure vise à exhiber à la fois la structure des matrices F , G et celle du système découplé. Elle repose cependant sur des considérations géométriques et matricielles relativement complexes.

Par l'approche géométrique, la méthode la plus intuitive semble alors être fondée sur la formulation du problème du découplage énoncée par le théorème 1.53. Il s'agit ainsi d'abord de trouver une famille de sous-espaces de commandabilité $\{\mathcal{W}_i\}$ vérifiant simultanément les deux premières conditions du théorème 1.53 et la condition du théorème 1.54. Ces sous-espaces servent ensuite de support au calcul de la matrice F . L'idée est en effet de paramétrer cette matrice F puis d'écrire qu'elle doit rendre chaque sous-espace $\mathcal{W}_i$ $(A + BF)$ -invariant - propriété 1.16. Des équations correspondantes sont déduites les conditions que doivent satisfaire les coefficients de la matrice de retour d'état F . Cette matrice vérifie donc finalement l'équation (1.52).

$$F \in \cap_i \mathcal{F}(A, B; \mathcal{W}_i) \quad (1.52)$$

La matrice G est directement déduite de l'équation (1.48) [44].

Cette méthode est illustrée dans [59]. L'auteur en donne également une description matricielle, plus propice à un traitement informatique. Elle n'explique cependant pas clairement les liens existant entre les sous-espaces, supports au calcul de la loi de commande, et les propriétés induites par cette loi sur le système bouclé.

En 1985, Andrei [1] utilise cette méthode pour caractériser la structure de lois de commande par découplage entrée-sortie à partir de modèles de type digraphe. Ses travaux concernent principalement les systèmes de grande dimension dont la représentation graphique est peu connexe. De nombreuses simplifications sont ainsi faites, rendant les algorithmes peu adaptés à l'étude de modèles fortement connexes du type bond-graph. Toujours pour des systèmes structurés de grande dimension, van der Woude [61] révisera cette approche quelques années plus tard en réalisant la synthèse de lois de commande assurant le rejet de perturbations.

En 1989, Grizzle et Isidori [25] caractérisent également la propriété de non-interaction à l'aide d'outils géométriques. Ils n'utilisent cependant pas les mêmes sous-espaces que Wonham et Morse. Plutôt que d'utiliser des sous-espaces de commandabilité du système entier privé de chaque bloc de sortie ($\mathcal{W}_i^*$), ils s'appuient en effet directement sur des sous-espaces caractéristiques de chaque bloc de sortie ($\mathcal{V}_i^*, R_i^*$) - section 1.2.3. D'un point de vue calculatoire, cette approche semble être beaucoup plus pratique. Elle est exploitée par Claude [11] au début des années 1990 pour proposer une méthode de calcul explicite de lois de commande par retour d'état statique régulier. En 1994, Sueur [55] envisage finalement l'utilisation de la méthodologie bond-graph pour calculer l'expression formelle de certains sous-espaces invariants.

Les résultats présentés dans ces trois dernières références constituent les fondements de nos travaux concernant la synthèse de lois de commande - partie 3.2.

1.4.3 Stabilité et modes fixes

Supposons à présent que, pour un problème donné, l'existence d'une solution de commande soit prouvée. Cette solution permet-elle de garantir a priori la stabilité du système découplé?

Cette problématique essentielle est introduite par Falb et Wolovich [21] puis précisée par Gilbert [24] à la fin des années 1960. Dans le cas des systèmes carrés, ils montrent tout d'abord qu'en imposant une structure découplée par l'action d'un retour d'état statique, certains modes du système bouclé ne peuvent plus être librement assignés. Ils montrent également que le nombre

30 CHAPITRE 1 STRUCTURE DES SYSTÈMES LINÉAIRES

de ces modes varie en fonction de la loi de commande statique utilisée. De nombreux travaux ont dès lors pour but de caractériser le nombre et la valeur de ces modes.

En 1970, Wonham et Morse [60] [44] introduisent la notion de mode fixe.

Définition 1.60 [60]. *Les modes fixes sont les modes du système découplé dont la valeur est fixée quel que soit le retour d'état statique régulier utilisé pour réaliser le découplage.*

De cette définition est immédiatement déduite la propriété suivante.

Propriété 1.61 [25]. *Soit $\sum (C, A, B)$ un système découplable par retour d'état statique régulier. Il existe un retour d'état statique régulier assurant à la fois la non-interaction et la stabilité du système bouclé si et seulement si tous les modes fixes sont strictement stables.*

Dans le cas du découplage par blocs, Wonham et Morse proposent une première caractérisation géométrique des modes fixes.

En 1980, Koussiouris [32] utilise pour sa part une approche polynomiale. Il considère les systèmes possédant autant d'entrées que de blocs de sorties à découpler, pour lesquels il définit la notion de zéros invariants interconnectés. Puis il montre que les modes fixes sont précisément ces zéros invariants interconnectés. Ses travaux sont révisés par Icart *et al.* en 1990 [30] pour aboutir au théorème suivant.

Théorème 1.62 [29]/[30]. *Soit $\sum (C, A, B)$ un système commandable et régulièrement découplable. Appellons zéros invariants interconnectés les zéros invariants du système global $\sum (C, A, B)$ qui ne sont pas zéros invariants des sous-systèmes blocs $\sum (C_i, A, B)$. Alors les modes fixes du système découplé coïncident avec les zéros invariants interconnectés.*

En 1989, Grizzle et Isidori [25] précisent la caractérisation géométrique des modes fixes proposée par Wonham et Morse. Ils montrent d'une part que l'ensemble - le "plus petit" - des modes fixes est obtenu par l'action d'une loi de commande calculée à partir de la famille des sous-espaces de commandabilité de tailles maximales $\{\mathcal{W}_1^*, \dots, \mathcal{W}_k^*\}$. D'autre part, ils caractérisent ces modes fixes par les sous-espaces $\{R_1^*, \dots, R_k^*\}$ associés à chaque bloc de sortie. Leur résultat est rappelé par le théorème suivant.

Théorème 1.63 [25]/[30]. *Soit $\sum (C, A, B)$ un système dont la sortie est partitionnée en k blocs $\{C_1, \dots, C_k\}$. Soit R_i^* le plus grand sous-espace de commandabilité contenu dans $\ker C_i, i = 1, \dots, k$. De même, soit R^* le plus*

grand sous-espace de commandabilité contenu dans $\ker C$. Soit enfin Λ l'ensemble des modes fixes du système pour la partition des sorties choisie. Λ vérifie alors l'équation (1.53), où F représente toute matrice de retour d'état rendant simultanément invariants les sous-espaces $\{R_1^*, \dots, R_k^*\}$.

$$\Lambda = \sigma \left(A + BF \left| \frac{\cap_i R_i^*}{R^*} \right. \right) \quad (1.53)$$

En d'autres termes, les sous-espaces $\{R_1^*, \dots, R_k^*\}$ sont les supports géométriques à utiliser pour synthétiser le retour d'état statique régulier qui engendrera le "nombre minimal" de modes fixes, c'est à dire les "vrais" modes fixes.

En 1994, Martinez Garcia et Malabre [40] proposent des conditions permettant de déterminer si une solution existe au problème du découplage avec stabilité. Pour les systèmes possédant autant de blocs d'entrées que de sorties à découpler, ils établissent tout d'abord la condition géométrique rappelée par le théorème suivant.

Théorème 1.64 [40]. Soit $\sum (C, A, B)$ un système commandable possédant p variables de sortie. $\sum (C, A, B)$ est découplable ligne par ligne avec stabilité par retour d'état statique régulier si et seulement si les équations (1.54) sont simultanément vérifiées.

$$\begin{cases} \mathcal{V}^* = \cap_{i=1}^p \mathcal{V}_i^* \\ \mathcal{V}_{stab}^* = \cap_{i=1}^p \mathcal{V}_{istab}^* \end{cases} \quad (1.54)$$

Puis ils formulent cette condition géométrique en termes structurels. A cet effet, ils adoptent les notations suivantes: $C_\infty(C, A, B)$, la somme des ordres des zéros à l'infini du système global; $C_\infty(c_i, A, B)$, l'ordre du zéro à l'infini associé au $i^{ème}$ sous-système ligne - section 1.3.1; $C^+(C, A, B)$ - respectivement $C^+(c_i, A, B)$ -, la somme des ordres de multiplicité de tous les zéros invariants instables du système global - respectivement du $i^{ème}$ sous-système ligne - section 1.3.3. Conformément à ces notations, ils proposent le résultat suivant.

Théorème 1.65 [40]. Soit $\sum (C, A, B)$ un système commandable possédant p variables de sortie. $\sum (C, A, B)$ est découplable ligne par ligne avec stabilité par retour d'état statique régulier si et seulement si les équations (1.55) sont simultanément vérifiées.

$$\begin{cases} C_\infty(C, A, B) = \sum_{i=1}^p C_\infty(c_i, A, B) \\ C^+(C, A, B) = \sum_{i=1}^p C^+(c_i, A, B) \end{cases} \quad (1.55)$$

Dans ce cas, les modes non assignables en boucle fermée sont tous stables. L'ensemble de ces modes contient l'ensemble des modes fixes.

Ce dernier résultat constitue notre point de départ pour déterminer une condition structurelle graphique de découplabilité statique avec stabilité - partie 3.1.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les principaux concepts permettant de définir la structure d'un système linéaire. Nous avons également précisé l'intérêt de ces notions dans un objectif de commande par découplage entrée-sortie, à travers un rapide historique des principales contributions apportées par la communauté scientifique.

Dans le chapitre suivant, nous présentons des résultats établis par l'équipe, destinés à caractériser graphiquement la structure d'un système à partir de son modèle bond-graph.

Chapitre 2

Méthodologie bond-graph

Représentation intermédiaire entre le niveau mathématique et le niveau technologique, l'outil bond-graph est un formalisme graphique de modélisation des systèmes physiques. Né aux états-unis en 1960 [45], il a motivé depuis de nombreuses vocations. L'Europe accueille en particulier des spécialistes de renom, dont les contributions concernent des applications à vocation tant industrielle que scientifique [9] [10].

L'outil bond-graph est aujourd'hui plus qu'un outil de modélisation. Il devient un outil puissant d'analyse, au service duquel émergent des méthodologies prometteuses [52] [23] [22].

Dans ce chapitre, nous présentons ainsi la méthodologie bond-graph à la fois comme un outil de modélisation et d'analyse. Nous définissons dans un premier temps les concepts élémentaires autour desquels est construit le langage bond-graph. Puis nous rappelons l'intérêt de ce formalisme pour l'analyse des propriétés structurelles d'un système. Dans une optique de commande, nous décrivons enfin des méthodes développées par l'équipe, permettant de caractériser la structure d'un système à partir de son modèle bond-graph.

2.1 Le langage bond-graph

La première partie de ce chapitre vise à rappeler les principales définitions nécessaires pour lire et manipuler un modèle bond-graph.

Nous présentons tout d'abord les différents éléments constitutifs d'un modèle bond-graph, en lien avec leur signification physique [31]. Puis nous rappelons la notion de chemin causal, qui occupe une place centrale dans la suite de ce travail. Nous décrivons enfin brièvement des techniques permettant de déduire d'un modèle bond-graph sa représentation d'état.

2.1.1 Éléments et causalité

Un modèle bond-graph est un modèle graphique décrivant les échanges de puissance au sein d'un système physique. Ce modèle est construit à l'aide de liens de puissance, connectant entre eux un ensemble de composants via une structure de jonction.

Les liens de puissance modélisent le cheminement de la puissance au sein du système. Ils sont représentés par des demi-flèches dont le sens indique le sens de parcours conventionnel positif de la puissance. Deux variables - dites variables de puissance - sont associées à chaque lien : l'effort $e(t)$ et le flux $f(t)$. Elles permettent de définir la puissance $P(t)$ véhiculée par le lien, comme l'indique l'équation (2.1).

$$P(t) = e(t) \cdot f(t) \quad (2.1)$$

A partir de ces deux variables de puissance sont définies deux variables d'énergie : le moment généralisé $p(t)$ et le déplacement généralisé $q(t)$. Ces deux variables sont exprimées conformément aux équations (2.2) et (2.3).

$$p(t) = \int e(t) dt \quad (2.2)$$

$$q(t) = \int f(t) dt \quad (2.3)$$

Le sens physique de chacune de ces quatre variables généralisées est déterminé par le domaine physique du phénomène modélisé. A titre d'exemple, en mécanique de translation, l'effort $e(t)$ est une force et le flux $f(t)$ est une vitesse; en hydraulique, l'effort $e(t)$ est une pression et le flux $f(t)$ est un débit volumique. Plus de détails sont fournis en annexe A.3, concernant le sens physique de chaque variable généralisée.

Sur le modèle, la puissance véhiculée par les liens est distribuée à des composants. Ces composants décrivent les phénomènes physiques retenus dans la phase de définition des hypothèses de modélisation. Trois d'entre eux décrivent des phénomènes passifs : $\{C, I, R\}$; les deux autres, $\{S_e, S_f\}$, décrivent des phénomènes actifs.

L'élément C est un élément dynamique de type capacitif. Il permet de modéliser les phénomènes de stockage d'énergie caractérisés par une relation entre l'effort $e(t)$ et l'intégrale du flux $f(t)$: ressort, condensateur, réservoir, ... Pour un phénomène linéaire, la loi générique décrivant un élément capacitif est donnée par l'équation (2.4), où C est un coefficient caractéristique

du phénomène modélisé.

$$e(t) - \frac{1}{C} \int f(t) dt = 0 \quad (2.4)$$

L'élément I est un élément dynamique de type inertiel. Il permet de modéliser les phénomènes de stockage d'énergie caractérisés par une relation entre le flux $f(t)$ et l'intégrale de l'effort $e(t)$: masse, inductance, inertie d'un fluide, ... Pour un phénomène linéaire, la loi générique décrivant un élément inertiel est donnée par l'équation (2.5), où I est un coefficient caractéristique du phénomène modélisé.

$$f(t) - \frac{1}{I} \int e(t) dt = 0 \quad (2.5)$$

L'élément R est un élément statique de type résistif. Il permet de modéliser les phénomènes de dissipation d'énergie, caractérisés par une relation entre l'effort $e(t)$ et le flux $f(t)$: frottement, résistance, restriction hydraulique, ... Pour un phénomène linéaire, la loi générique décrivant un élément résistif est donnée par l'équation (2.6), où R est un coefficient caractéristique du phénomène modélisé.

$$e(t) - Rf(t) = 0 \quad (2.6)$$

Les deux derniers éléments, $\{S_e, S_f\}$, modélisent des phénomènes actifs : ils représentent des sources de puissance. L'élément S_e est une source d'effort : force de pesanteur, générateur de tension, ... L'élément S_f est une source de flux : vitesse appliquée, générateur de courant, ... Pour chacune de ces deux sources, la grandeur appliquée - effort $e(t)$ ou flux $f(t)$ - est indépendante de la grandeur induite - flux $f(t)$ ou effort $e(t)$.

Ajoutons que ces efforts et flux sont captés, sur le modèle bond-graph, par l'intermédiaire de détecteurs $\{D_e, D_f\}$. L'élément D_e est un détecteur d'effort. L'élément D_f est un détecteur de flux. Ces éléments mesurent des signaux. Les liens qui les relient au reste du modèle ne transmettent par conséquent aucune puissance.

C'est finalement au travers d'une structure de jonction que la puissance est distribuée aux composants. Cette structure, conservative de puissance, permet de connecter entre elles les différentes parties du modèle. Elle est composée des éléments $\{TF, GY, 0, 1\}$. Les éléments TF et GY modélisent par exemple des mécanismes cinématiques (levier, pignons, ...) ou des changements de domaine physique. Les éléments 0 - respectivement 1 - décrivent des jonctions d'effort - respectivement de flux - communs. En annexe A.4 est proposée une description plus détaillée de ces éléments de jonction.

Le modèle obtenu à ce stade ne permet pas de préciser comment, pour la simulation, les différentes variables sont organisées entre elles. Cette information est fournie par un élément supplémentaire porté sur chaque lien de puissance : le trait causal.

Imaginons deux sous-systèmes couplés A et B , tels que le sous-système A fournit de la puissance au sous-système B . Le sous-système A peut appliquer au sous-système B un effort ou un flux. S'il applique un effort (une force, par exemple), le sous-système B lui renvoie un flux (une vitesse, par exemple) - figure 2.1. S'il applique un flux, le sous-système B lui renvoie un effort - figure 2.2. La position du trait causal sur le lien de puissance permet de différencier ces deux cas : par convention, le trait causal est placé près de l'élément pour lequel l'effort est une donnée. Le flux est alors une donnée pour l'élément opposé.

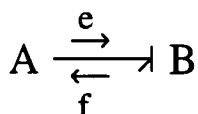


Figure 2.1.

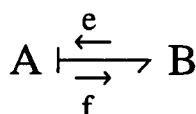
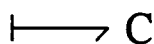


Figure 2.2.

Quelques règles régissent l'affectation de la causalité sur le modèle bond-graph.

La causalité des éléments dynamiques est choisie, de préférence, de telle sorte que la variable de sortie soit obtenue, à partir de la variable d'entrée, par intégration plutôt que par dérivation. Les éléments dynamiques sont alors dits "en causalité intégrale".

Pour un élément C , ce choix correspond à la configuration flux entrant-effort sortant. Il est représenté par la figure 2.3.

Figure 2.3: élément C en causalité intégrale.

Ce choix revient à écrire l'équation (2.4) sous la forme suivante - équation (2.7) :

$$e(t) = \frac{1}{C} \int f(t) dt \quad (2.7)$$

A un élément I en causalité intégrale correspond une configuration effort entrant-flux sortant - figure 2.4.

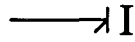


Figure 2.4: élément I en causalité intégrale.

Ce choix de causalité revient à écrire l'équation (2.5) sous la forme suivante - équation (2.8) :

$$f(t) = \frac{1}{I} \int e(t) dt \quad (2.8)$$

Par le choix inverse de causalité, les variables de sortie sont obtenues en dérivant les variables d'entrée. Dans ce cas, les éléments dynamiques sont dits "en causalité dérivée".

Le gain complexe - ou transmittance - d'un élément C en causalité intégrale est déduit de l'équation (2.7). Il est donné par l'équation (2.9).

$$\frac{E(s)}{F(s)} = \frac{1}{Cs} \quad (2.9)$$

De la même manière, nous déduisons de l'équation (2.8) l'expression du gain complexe d'un élément I en causalité intégrale. Cette expression est donnée par l'équation (2.10).

$$\frac{F(s)}{E(s)} = \frac{1}{Is} \quad (2.10)$$

Remarque 2.1 . *Le gain d'un élément dynamique en causalité dérivée est égal à l'inverse de son gain en causalité intégrale.*

La causalité des éléments R linéaires peut être affectée librement : parmi les deux formes causales, aucun choix n'est préféré a priori. L'équation (2.6) montre que le gain d'un élément R est constant : suivant l'affectation causale adoptée, ce gain vaut R ou $\frac{1}{R}$.

La causalité affectée aux sources est par contre obligatoire. Elle est déterminée par le type de source à utiliser - effort ou flux. Dans tous les cas, la grandeur imposée par la source est une donnée pour le reste du modèle.

Remarque 2.2 . *Une source d'effort et une source de flux - ou un détecteur d'effort et un détecteur de flux - sont deux éléments duaux. Transformer l'un en l'autre - et inversement - est une manipulation causale particulière appelée dualisation.*

Causalité	Eléments bond-graph	
intégrale	$\vdash \longrightarrow C$	$\longrightarrow \nmid I$
dérivée	$\longrightarrow \nmid C$	$\vdash \longrightarrow I$
arbitraire	$\vdash \longrightarrow R$	$\longrightarrow \nmid R$
obligatoire	$Se \longrightarrow \nmid$	$Sf \vdash \longrightarrow$
restreinte	$\vdash \overset{m}{\longrightarrow} TF \vdash \longrightarrow$	$\longrightarrow \nmid \overset{m}{TF} \longrightarrow \nmid$
	$\vdash \overset{r}{\longrightarrow} GY \longrightarrow \nmid$	$\longrightarrow \nmid \overset{r}{GY} \longrightarrow \nmid$
	$\vdash \overset{\perp}{\longrightarrow} 0 \vdash \longrightarrow$	$\longrightarrow \nmid \overset{\perp}{1} \longrightarrow \nmid$

Tableau 2.1: causalité.

Enfin, des principes systématiques règlent l’affectation de la causalité pour les éléments de jonction. En particulier, pour les jonctions 0 : “un seul trait causal près de la jonction 0” ; pour les jonctions 1 : “un seul trait causal sans lien près de la jonction 1”. Des règles similaires permettent d’affecter la causalité des éléments TF et GY : “position symétrique du trait causal sur les liens connectés à un élément TF ” ; “position antisymétrique du trait causal sur les liens connectés à un élément GY ”.

Les différentes formes causales que peuvent adopter chaque composant et chaque élément de jonction sont finalement résumées dans le tableau 2.1.

Sur le modèle bond-graph, la représentation graphique de ces informations causales permet de construire des chemins. Ces chemins sont appelés chemins causaux.

2.1.2 Chemin causal

Nous rappelons, dans cette section, les principales définitions relatives à la notion de chemin causal.

Définition 2.3 . Soient deux ensembles J_1 et J_2 composés des éléments suivants : $J_1 = \{C, I, R, S_e, S_f\}$ et $J_2 = \{C, I, R, D_e, D_f\}$. Un chemin causal entre un élément de l’ensemble J_1 et un élément de l’ensemble J_2 est une

alternance de liens de puissance, d'éléments de jonction et de composants telle que : une causalité complète et correcte est affectée à l'ensemble de la séquence; deux liens connectés en un même noeud ont des affectations causales opposées.

Sur le modèle présenté en figure 2.5, un chemin causal lie l'élément dynamique I_1 à l'élément résistif R_1 . Ce chemin emprunte les liens 1,2,3 et 4.

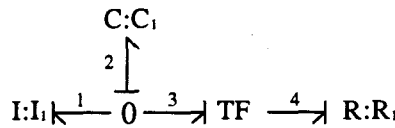


Figure 2.5: chemin causal.

La notion de chemin causal sur un modèle bond-graph est voisine de celle de chemin sur un modèle digraphe. Cependant, sur un modèle de type digraphe, un chemin ne peut être défini entre des éléments résistifs. D'autre part, ce chemin ne peut pas contenir d'éléments dynamiques en causalité dérivée.

La définition 2.3 permet d'introduire le concept de boucle causale.

Définition 2.4 . *Une boucle causale est un chemin causal fermé entre deux éléments de l'ensemble $\{C, I, R\}$. Ce chemin part de la sortie d'un composant. Il rejoint l'entrée de ce composant sans parcourir le même lien en suivant la même variable plus d'une fois.*

Remarque 2.5 . *Une boucle causale ne traversant aucun composant - élément dynamique ou résistif - est appelée boucle de causalité.*

Dans la suite de ce travail, la notion de boucle causale n'occupe pas une place essentielle. Par contre, nous utilisons largement le concept de chemin causal, à travers deux grandeurs qui en sont caractéristiques : sa longueur et son gain.

Définition 2.6 . *Soit un chemin causal reliant un élément de l'ensemble $J_1 = \{C, I, R, S_e, S_f\}$ à un élément de l'ensemble $J_2 = \{C, I, R, D_e, D_f\}$. Soit N_i - respectivement N_d - le nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale - respectivement en causalité dérivée - traversés par ce chemin. Si $N_d = 0$, la longueur de ce chemin vaut N_i , plus un s'il relie une source ou un*

élément dynamique à un élément dynamique. Si $N_d \neq 0$, nous introduisons la notion de longueur généralisée du chemin causal. Cette longueur généralisée vaut $(N_i - N_d)$, plus un si le chemin relie une source ou un élément dynamique à un élément dynamique. Cette longueur généralisée peut donc éventuellement être négative.

Signalons que la longueur généralisée d'un chemin causal est appelée "ordre du chemin causal" dans [22]. Par analogie avec le vocabulaire employé pour décrire les chemins d'un modèle digraphe, nous conservons la terminologie "longueur".

Le gain d'un chemin causal est calculé à partir des gains des éléments qu'il traverse, comme l'exprime la définition suivante.

Définition 2.7 . Le gain G_c d'un chemin causal est calculé conformément à l'équation (2.11).

$$G_c = (-1)^{n_0+n_1} \prod_{j,k} \left(m_j \text{ ou } \frac{1}{m_j} \right) \left(r_k \text{ ou } \frac{1}{r_k} \right) \prod_{gc} \quad (2.11)$$

- n_0 - respectivement n_1 - représente le nombre de changements d'orientation des liens de puissance aux jonctions 0 lorsque l'on suit la variable flux - respectivement aux jonctions 1 lorsque l'on suit la variable effort.

- $m_j, r_k, \frac{1}{m_j}, \frac{1}{r_k}$ représentent les modules des éléments de jonction TF et GY rencontrés en parcourant le chemin causal, compte tenu de la causalité qui leur est affectée.

- $\prod_{gc}$ représente le produit des gains des composants traversés par le chemin causal.

D'une manière similaire, le gain G_b d'une boucle causale est calculé selon l'équation (2.12). Les notations n_0 et n_1 sont identiques à celles utilisées pour la définition 2.7; $\prod_{gb}$ représente le produit des gains des composants traversés par la boucle.

$$G_b = (-1)^{n_0+n_1} \left(m_j^2 \text{ ou } \frac{1}{m_j^2} \right) \left(r_k^2 \text{ ou } \frac{1}{r_k^2} \right) \prod_{gb} \quad (2.12)$$

Remarque 2.8 . Une boucle de causalité dont le gain vaut $+1$ est dite non-solvable. Pour ce choix particulier de causalité, il est impossible d'écrire explicitement une solution aux relations liant toutes les variables du modèle bond-graph [48]. Ce cas de figure est donc autant que possible à éviter.

Rappelons finalement la définition de chemins causaux différents.

Définition 2.9 . *Deux chemins causaux sont différents s'ils n'ont en commun aucun élément dynamique en causalité intégrale.*

Des chemins causaux différents sur le modèle bond-graph représentent par conséquent des chemins disjoints sur le modèle digraphe associé.

Grâce à l'ensemble de ces informations causales, les différentes variables du modèle sont structurées d'une manière propice au calcul d'une représentation d'état.

2.1.3 Représentation d'état

Dans cette section, nous rappelons les propriétés élémentaires de la représentation d'état associée à un modèle bond-graph.

Cette représentation est déduite du modèle affecté d'une causalité intégrale préférentielle. Les variables d'état utilisées pour construire cette représentation d'état sont les variables d'énergie liées aux éléments dynamiques : le moment généralisé $p(t)$ pour un élément I - équation (2.2) - et le déplacement généralisé $q(t)$ pour un élément C - équation (2.3). Chacune de ces variables n'est statiquement indépendante que si elle est associée à un élément dynamique en causalité intégrale. L'ordre de la représentation d'état est donc donné, sur le modèle bond-graph en causalité intégrale, par le nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale.

Deux méthodes permettent de déterminer explicitement la représentation d'état à partir du modèle bond-graph.

La première consiste à écrire les lois constitutives de la structure de jonction et des composants, pour expliciter "à la main" les dérivées des variables d'état.

La seconde méthode consiste à déduire la représentation d'état d'une représentation vectorielle des différentes variables du modèle. Cette méthode n'est pas utilisée dans la suite de ce travail. Elle est résumée en annexe A.5.

A titre d'exemple, considérons le modèle bond-graph décrit par la figure 2.6. Ce modèle possède une source d'entrée E , un détecteur de sortie D et trois éléments dynamiques en causalité intégrale.

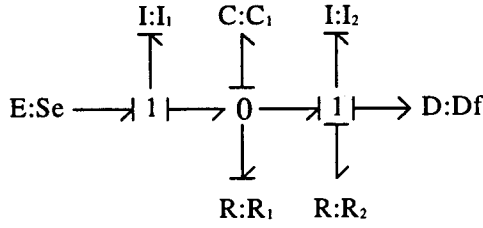


Figure 2.6.

La représentation d'état qui lui est associée est donnée par l'équation (2.13), où le vecteur d'état est $x(t) = \begin{bmatrix} p_{I_1}(t) & p_{I_2}(t) & q_{C_1}(t) \end{bmatrix}^t$.

$$\begin{cases} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

Les expressions formelles des matrices A , B et C sont données par l'équation (2.14). **Fin de l'exemple**

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{C_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{I_2} & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{I_1} & \frac{-1}{I_2} & \frac{-1}{R_1 C_1} \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.14)$$

Signalons que la structure de la matrice d'état A déduite d'un modèle bond-graph est toujours symétrique par rapport à la première diagonale. Le modèle digraphe associé à un modèle bond-graph est donc fortement connexe.

Si le modèle ne possède aucun élément dynamique en causalité dérivée, le calcul du gain de certains chemins causaux permet d'établir l'expression formelle du produit entre les matrices A , B et C [46].

Notons en effet S_j la $j^{\text{ème}}$ source d'entrée et D_i le $i^{\text{ème}}$ détecteur de sortie du modèle bond-graph en causalité intégrale. Nous pouvons alors énoncer la propriété suivante.

Propriété 2.10 [46]. Pour $k \geq 0$, $[c_i A^k B_j] = \sum G_{k+1}(S_j, D_i)$, où le coefficient $G_{k+1}(S_j, D_i)$ représente le terme constant du gain d'un chemin causal de longueur $(k+1)$ entre la source d'entrée S_j et le détecteur de sortie D_i .

Les transmissions directes éventuelles sont représentées, dans l'équation d'état, par la matrice D - annexe A.5, équation (6.23). Les coefficients de cette matrice sont déterminés, à partir du modèle bond-graph, comme le rappelle la propriété suivante.

Propriété 2.11 [46]. Soit d_{ij} le coefficient de transmission directe entre la source d'entrée S_j et le détecteur de sortie D_i . $d_{ij} = \sum G_0(S_j, D_i)$, où $G_0(S_j, D_i)$ représente le gain d'un chemin causal de longueur nulle entre la source d'entrée S_j et le détecteur de sortie D_i .

La mise en oeuvre de ces calculs sera illustrée en section 3.2.3.

2.2 Etude structurelle

Les propriétés structurelles d'un modèle sont les propriétés vérifiées pour presque toutes les valeurs numériques de ses paramètres, à l'exception de quelques valeurs particulières. Ces propriétés constituent des informations précieuses dans la phase de conception d'un système par simulation. Elles permettent en effet de garantir que le comportement mis en évidence par simulation est dû à la structure intrinsèque du modèle et non aux valeurs numériques, forcément inexactes, choisies pour ses paramètres.

Le langage bond-graph est un formalisme bien adapté pour la caractérisation des propriétés structurelles. Des travaux antérieurs - [52], [23] et [22] pour les systèmes linéaires, [47] pour les systèmes non-linéaires - ont montré que les manipulations causales sur le modèle bond-graph constituent en effet un outil efficace.

Parmi celles-ci, nous rappelons tout d'abord des techniques permettant de calculer le rang de la matrice d'état. Puis nous présentons des travaux relatifs à l'étude de la commandabilité et de l'observabilité en état [51]. Nous rappelons enfin les principaux résultats concernant l'inversibilité d'un modèle bond-graph [46].

2.2.1 Rang de la matrice d'état

Le rang de la matrice d'état est calculé à partir de deux entiers déterminés sur le modèle bond-graph : n et t .

n est exprimé conformément aux définitions suivantes.

Définition 2.12 [16]. L'ordre d'un système est le nombre de conditions initiales indépendantes.

Définition 2.13 [16]. *La dimension de l'équation d'état est égale à l'ordre du système.*

Définition 2.14 [16]. *L'ordre n du système d'équations différentielles décrivant les dynamiques du système est égal au nombre de variables d'état indépendantes.*

Affectons une causalité intégrale préférentielle au modèle bond-graph. n est alors égal au nombre d'éléments dynamiques admettant une causalité intégrale - section 2.1.3.

Imposons à présent une causalité dérivée au modèle bond-graph. L'entier t est alors défini de la manière suivante.

Définition 2.15 [51]. *t est le nombre d'éléments dynamiques conservant une causalité intégrale lorsque la causalité dérivée préférentielle est imposée au modèle bond-graph, sans introduire de boucle de causalité non solvable - remarque 2.8.*

Le rang de la matrice d'état est finalement calculé conformément au théorème suivant.

Théorème 2.16 [51]. *Soit $bg\text{-rang}[A]$ le rang bond-graph de la matrice d'état d'un modèle bond-graph linéaire. $bg\text{-rang}[A]$ vérifie l'équation (2.15).*

$$bg - rang [A] = n - t \quad (2.15)$$

Signalons que le calcul de ce rang bond-graph ne suppose pas l'indépendance a priori des coefficients de la matrice d'état A . Précisons également que l'expression "rang plein" qui sera utilisée fréquemment dans la suite de ce travail signifie "rang bond-graph plein". Rappelons enfin que l'entier t vérifie la propriété suivante.

Propriété 2.17 [51]. *t est égal au nombre de valeurs propres nulles de la matrice d'état.*

Si l'ensemble des éléments dynamiques du modèle peut être affecté d'une causalité dérivée, on parle de modèle de rang plein. Dans ce cas, conformément au théorème 2.16, la matrice d'état A est inversible. La représentation mathématique associée au modèle bond-graph en causalité dérivée est alors donnée par l'équation (2.16).

$$\begin{cases} x(t) = A^{-1} \dot{x}(t) - A^{-1}Bu(t) \\ y(t) = CA^{-1} \dot{x}(t) - CA^{-1}Bu(t) \end{cases} \quad (2.16)$$

Par abus de langage, on peut appeler “variables d'état du modèle bond-graph en causalité dérivée” les dérivées des variables d'état du modèle bond-graph en causalité intégrale. Ce sont par conséquent les variables de puissance associées aux éléments dynamiques : le flux $f(t)$ pour un élément C , l'effort $e(t)$ pour un élément I .

2.2.2 Commandabilité en état

La propriété de commandabilité structurelle en état du modèle bond-graph est déduite de la valeur du rang structurel de la matrice $[A|B]$. Comme dans le cas précédent, ce rang est calculé à partir de l'entier q , défini sur le modèle bond-graph de la manière suivante.

Définition 2.18 [51]. q est le nombre d'éléments dynamiques conservant une causalité intégrale lorsque :

- la causalité dérivée est imposée au modèle bond-graph.
- toutes les dualisations des sources d'entrée ont été tentées pour éliminer les causalités intégrales restantes - remarque 2.2 - sans toutefois introduire de boucle de causalité non solvable.

Le rang structurel de la matrice $[A|B]$ est donc calculé conformément à la propriété suivante.

Propriété 2.19 [51]. Considérons la matrice $[A|B]$ dont le rang bond-graph est noté $bg\text{-rang}[A|B]$. $bg\text{-rang}[A|B]$ vérifie l'équation (2.17).

$$bg\text{-rang}[A|B] = n - q \quad (2.17)$$

A partir de travaux réalisés par Lin [33], ce résultat a permis de mettre en évidence une condition nécessaire et suffisante de commandabilité structurelle des modèles bond-graph. Cette condition est rappelée par le théorème suivant.

Théorème 2.20 [51]. Un modèle bond-graph est structurellement commandable si et seulement si :

- $bg\text{-rang}[A|B] = n$.
- chaque élément dynamique en causalité intégrale du modèle bond-graph en causalité intégrale est causalement lié à au moins une source d'entrée.

Les théorèmes 2.16 et 2.20 permettent ainsi de déterminer le nombre de sources d'entrée nécessaires pour rendre le système commandable - ce nombre est égal à t - et les positions souhaitables de ces sources.

Des manipulations causales semblables - mise en causalité dérivée et dualisation des détecteurs de sortie - permettent aussi de calculer le rang structural de la matrice $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$. Une condition nécessaire et suffisante d'observabilité structurelle est ainsi déduite, duale de celle rappelée par le théorème 2.20. Le lecteur trouvera le détail de ces procédures dans [51].

2.2.3 Inversibilité

Contrairement aux propriétés précédentes, l'inversibilité structurelle n'est pas déduite de la mise en causalité dérivée du modèle bond-graph. Elle est caractérisée, sur le modèle bond-graph en causalité intégrale, via l'étude des chemins causaux entrée-sortie différents - définition 2.9. Dans le cas d'un modèle possédant autant de sources d'entrée que de détecteurs de sortie, une condition suffisante d'inversibilité a été proposée par Rahmani [46]. Elle est rappelée par le théorème suivant.

Théorème 2.21 [46]. *Considérons un modèle bond-graph ayant p sources d'entrée et p détecteurs de sortie. S'il existe, sur ce modèle, un unique choix de p chemins causaux différents entre les sources d'entrée et les détecteurs de sortie, alors le modèle est inversible.*

Dans le cas où plusieurs choix de chemins causaux entrée-sortie différents existent, conformément à la propriété 1.12, la matrice de transfert est structurellement inversible si et seulement si la matrice système l'est également. Le modèle est donc inversible si et seulement si le déterminant de sa matrice système est non nul.

Grâce à l'utilisation de l'algèbre de Grassmann, une technique graphique a été proposée pour calculer l'expression formelle de ce déterminant [54]. Cette technique repose sur la notion de modèle bond-graph réduit, exprimée par la définition suivante.

Définition 2.22 . *Soit un modèle bond-graph possédant une famille de chemins causaux entrée-sortie différents. Le modèle bond-graph réduit est le modèle bond-graph obtenu en éliminant tous les éléments dynamiques en causalité intégrale contenus dans cette famille de chemins causaux entrée-sortie différents.*

Signalons que les éléments du modèle bond-graph réduit ne doivent avoir subi aucun changement de causalité. Les éléments provoquant des conflits de causalité doivent donc en être enlevés.

L'expression formelle du déterminant de la matrice système est ainsi obtenu de la manière suivante.

Propriété 2.23 [46]. Soit $P(s)$ la matrice système associée à un modèle bond-graph possédant p sources d'entrée et p détecteurs de sortie. Le déterminant de la matrice $P(s)$ vérifie l'équation (2.18).

$$\det [P(s)] = \sum_{i=1}^q (-1)^{\sigma_i} \left\{ \left(\prod_p G \right)_i (P_r)_i \right\} \quad (2.18)$$

q est le nombre de familles possible de p chemins causaux entrée-sortie différents. Pour chaque famille i : $\left(\prod_p G \right)_i$ est le produit des termes constants des gains des p chemins causaux entrée-sortie différents; $(P_r)_i$ est le polynôme caractéristique du modèle bond-graph réduit; σ_i est le nombre de permutations nécessaire pour ordonner les sorties dans l'ordre du vecteur de sortie initial quand on suit les p chemins causaux entrée-sortie différents dans l'ordre du vecteur d'entrée initial.

Précisons que le modèle bond-graph réduit dont $(P_r)_i$ est le polynôme caractéristique est construit en éliminant du modèle initial tous les éléments dynamiques traversés par la $i^{\text{ème}}$ famille de p chemins causaux entrée-sortie différents. Les demi-flèches et éléments de structure de jonction générant alors un conflit de causalité doivent également être ôtés. Les éléments résistifs pour lesquels ces manipulations imposent un changement de causalité doivent enfin aussi être éliminés.

Nous utilisons également cette règle pour déterminer l'expression formelle des zéros invariants d'un système modélisé par bond-graph. Un exemple sera présenté à cette occasion en section 2.3.1.

Enfin, si le nombre de sources d'entrée m est différent du nombre de détecteurs de sortie p , une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.24 . Un modèle bond-graph possédant m sources d'entrée et p détecteurs de sortie est inversible à gauche ou à droite si et seulement si il existe un ensemble de $\min(m, p)$ chemins causaux entrée-sortie différents.

Nous rappellons à présent des méthodes graphiques similaires, destinées à exhiber les structures finie et infinie d'un modèle bond-graph linéaire.

2.3 Structures finie et infinie

Les techniques permettant de caractériser la structure finie de modèles de type bond-graph ont été proposées par Sueur [53]. A cet effet, l'utilisation

de l'algèbre de Grassmann a permis d'exprimer graphiquement sur le modèle des manipulations algébriques opérées sur la matrice système [54]. Des manipulations graphiques analogues ont par ailleurs été présentées dans [52] et [53], pour caractériser la structure à l'infini d'un système à partir de sa représentation bond-graph. Ces techniques ont été dérivées de celles initialement proposées pour l'étude des modèles de type digraphe [20].

Parmi ces différents résultats, nous rappelons d'abord ceux relatifs à l'étude de la structure finie de modèles bond-graph possédant autant de sources d'entrée que de détecteurs de sortie. Dans ce cas, le calcul du déterminant de la matrice système permet de déterminer l'expression symbolique des zéros invariants, via l'étude des chemins causaux entrée-sortie différents. Les longueurs de ces chemins causaux entrée-sortie différents sont ensuite utilisées pour caractériser les structures à l'infini globale et en ligne du modèle. Nous rappelons enfin brièvement comment ces méthodes peuvent être exploitées pour déterminer graphiquement les ordres d'essentialité du modèle.

2.3.1 Structure finie

Dans cette section, nous rappelons tout d'abord une méthode de détermination graphique des zéros invariants d'un modèle bond-graph linéaire. Cette méthode est ensuite illustrée par un exemple.

Conformément aux résultats rappelés en section 1.3.3, les zéros invariants d'un système sont les zéros de sa matrice système $P(s)$. Pour un système possédant autant de variables d'entrée que de variables de sortie, ces zéros sont en outre les racines du déterminant de la matrice système. Dans ce cas, la propriété 2.23 nous permet de déterminer le nombre et l'expression formelle des zéros invariants d'un système à partir de son modèle bond-graph.

Propriété 2.25 [53]. *Considérons un modèle bond-graph ayant p sources d'entrée et p détecteurs de sortie. Le nombre de zéros invariants de ce modèle est égal au nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale du modèle bond-graph réduit obtenu en enlevant les p chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts.*

L'expression formelle de ces zéros invariants est obtenue en calculant les racines du déterminant de la matrice système. Ce calcul est réalisé conformément à la propriété 2.23. Nous l'illustrons par l'exemple suivant.

Considérons le modèle bond-graph décrit par la figure 2.7. Ce modèle possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et six éléments dynamiques en causalité intégrale.

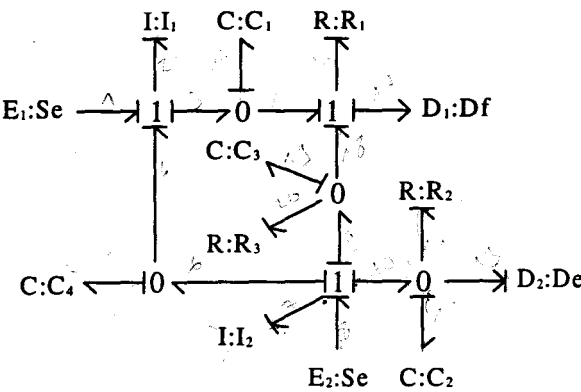


Figure 2.7.

Phase1 : calcul du nombre de zéros invariants

Deux familles existent, de deux chemins causaux entrée-sortie différents. La première famille est constituée des chemins $E_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow D_1$ et $E_2 \rightarrow I_2 \rightarrow C_2 \rightarrow D_2$. La seconde famille est constituée des chemins $E_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow C_3 \rightarrow R_3 \rightarrow D_1$ et $E_2 \rightarrow I_2 \rightarrow C_2 \rightarrow D_2$.

Les deux chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts sont ceux qui composent la première famille. Ils traversent quatre éléments dynamiques en causalité intégrale. Selon la propriété 2.25, le modèle possède donc deux zéros invariants.

Phase2 : calcul de l'expression formelle des zéros invariants

L'expression symbolique de ces zéros invariants est déduite du calcul du déterminant de la matrice système. Conformément à la propriété 2.23, ce calcul nécessite l'étude du modèle bond-graph réduit associé à chaque famille de chemins causaux entrée-sortie différents - définition 2.22.

Deux modèles bond-graph réduits existent dans notre cas. Ils sont décrits par les figures 2.8 et 2.9.

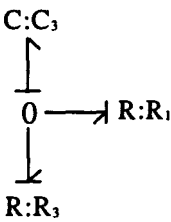


Figure 2.8.



Figure 2.9.

i	σ_i	$(\prod_2 G)$	P_r
1	0	$\frac{1}{I_1 C_1 R_1} \cdot \frac{1}{I_2 C_2}$	$s \cdot \left(s + \frac{1}{R_3 C_3} + \frac{1}{R_1 C_3} \right)$
2	0	$\frac{1}{I_1 C_1 R_1^2 C_3} \cdot \frac{1}{I_2 C_2}$	s

Tableau 2.2: grandeurs associées aux modèles bond-graph réduits.

Pour chacun d'entre eux, les grandeurs associées σ , $(\prod_2 G)$ et (P_r) définies par la propriété 2.23 sont consignées dans le tableau 2.2.

Ces grandeurs permettent de calculer l'expression symbolique du déterminant de la matrice système. Cette expression est donnée par l'équation (2.19).

$$\det [P(s)] = \frac{1}{I_1 I_2 R_1 C_1 C_2} \cdot s \cdot \left(s + \frac{1}{R_3 C_3} \right) \quad (2.19)$$

Les zéros invariants du modèle sont les racines de ce polynôme. Leurs expressions sont données par l'équation (2.20). **Fin de l'exemple**

$$\begin{cases} s = 0 \\ s = \frac{-1}{R_3 C_3} \end{cases} \quad (2.20)$$

Dans certains cas, le nombre de zéros invariants nuls peut être directement mis en évidence. En effet, pour chaque famille de p chemins causaux entrée-sortie différents, si la matrice d'état du modèle bond-graph réduit est de rang non maximal, le déterminant de la matrice système peut être factorisé par une puissance de s . Cette puissance est égale au nombre de zéros invariants nuls du système.

Ce cas de figure est cependant peu fréquent. Généralement - et c'est le cas pour l'exemple précédent - un zéro invariant nul provient de simplifications entre les termes du déterminant de la matrice système. Seul le calcul effectif de ce déterminant permet alors de détecter la présence de zéros invariants nuls.

Une technique graphique sera présentée, au chapitre 3, pour déterminer sans calcul le nombre de zéros invariants nuls.

Le principe de calcul du déterminant de la matrice système - propriété 2.23 - peut d'autre part être étendu pour déterminer graphiquement les zéros invariants de modèles bond-graph possédant m sources d'entrée et p détecteurs de sortie, avec $m \neq p$. Cette technique sera également présentée au

chapitre 3, en lien avec l'étude des caractéristiques dynamiques du modèle découplé [3].

2.3.2 Structure infinie

Dans cette section, nous rappelons les méthodes graphiques permettant de caractériser la structure infinie d'un système à partir de son modèle bond-graph. Ces méthodes sont ensuite illustrées par un exemple.

La structure à l'infini d'un système linéaire est composée de deux listes d'entiers : la liste $\{n'_i\}$ des ordres des zéros à l'infini globaux et la liste $\{n_i\}$ des ordres des zéros à l'infini en ligne - section 1.3.1. La notion de longueur de chemin causal entrée-sortie - définition 2.6 - permet de déterminer graphiquement la valeur de ces entiers sur le modèle bond-graph.

Propriété 2.26 [53]. *L'ordre n_i du zéro infini en ligne associé à la variable de sortie $y_i(t)$ est égal à la longueur du plus court chemin causal existant entre le détecteur de sortie considéré et l'ensemble des sources d'entrée.*

Une méthode similaire permet de déterminer graphiquement le nombre de zéros à l'infini globaux. Comme le rappelle la propriété suivante, cette méthode fait appel à la notion de chemins causaux différents - propriété 2.9.

Propriété 2.27 [53]. *Le nombre de zéros à l'infini globaux d'un système représenté par un modèle bond-graph est égal au nombre maximal de chemins causaux entrée-sortie différents.*

Les ordres de ces zéros à l'infini globaux sont d'autre part calculés selon l'algorithme rappelé par la propriété suivante.

Propriété 2.28 [53]. *Les ordres des zéros à l'infini globaux vérifient l'équation (2.21), où L_k est la somme des longueurs des k plus courts chemins causaux entrée-sortie différents.*

$$\begin{cases} n'_1 = L_1 \\ n'_k = L_k - L_{k-1} \end{cases} \quad (2.21)$$

Remarque 2.29 . Conformément aux propriétés 2.10 et 2.28, la matrice Ω introduite par les équations (1.27) est par conséquent la matrice des termes constants des gains des p chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts.

Les méthodes de calcul définies par les propriétés 2.26, 2.27 et 2.28 sont illustrées par l'exemple suivant.

Considérons le modèle bond-graph présenté en figure 2.10. Ce modèle possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et six éléments dynamiques en causalité intégrale. Nous en calculons les ordres des zéros à l'infini en ligne et globaux.

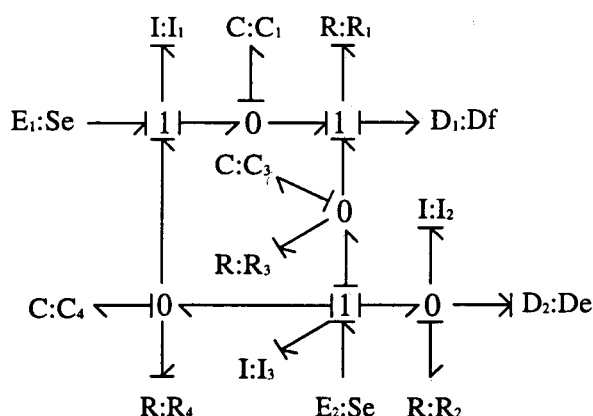


Figure 2.10.

Phase1 : calcul des ordres des zéros infinis en ligne

Deux possibilités de chemins causaux les plus courts du détecteur de sortie D_1 vers les sources d'entrée apparaissent. Ces chemins rejoignent soit la source d'entrée E_1 - $D_1 \rightarrow R_1 \rightarrow C_1 \rightarrow I_1 \rightarrow E_1$ - soit la source d'entrée E_2 - $D_1 \rightarrow R_1 \rightarrow C_3 \rightarrow I_3 \rightarrow E_2$. La longueur de chacun de ces deux chemins vaut 2 - définition 2.6. L'ordre n_1 du zéro infini en ligne associé à la sortie $y_1(t)$ vaut par conséquent $n_1 = 2$ - propriété 2.26.

Le chemin le plus court du détecteur de sortie D_2 vers les sources d'entrée est $D_2 \rightarrow R_2 \rightarrow I_3 \rightarrow E_2$. La longueur de ce chemin vaut 1 - définition 2.6. L'ordre n_2 du zéro infini en ligne associé à la sortie $y_2(t)$ vaut par conséquent $n_2 = 1$ - propriété 2.26.

Phase2 : calcul des ordres des zéros infinis globaux

Ce modèle possède deux choix de deux chemins causaux entrée-sortie différents: $E_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow D_1$ et $E_2 \rightarrow I_3 \rightarrow R_2 \rightarrow D_2$ ou $E_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow C_3 \rightarrow R_1 \rightarrow D_1$ et $E_2 \rightarrow I_3 \rightarrow R_2 \rightarrow D_2$ - définition 2.9. Selon la propriété 2.27, il possède donc deux zéros infinis globaux, dont les ordres respectifs sont donnés par les entiers n'_1 et n'_2 .

L'entier n'_1 est égal à la longueur du chemin causal le plus court entre le détecteur de sortie D_1 et les sources d'entrée - propriété 2.28. Ce chemin est $D_2 \rightarrow R_2 \rightarrow I_3 \rightarrow E_2$. Sa longueur vaut $L_1 = 1$. L'ordre du premier zéro infini global vaut donc $n'_1 = 1$.

Selon l'algorithme (2.21), la détermination de l'entier n'_2 nécessite le calcul des longueurs des deux chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts. Ces chemins sont $E_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow D_1$ et $E_2 \rightarrow I_3 \rightarrow R_2 \rightarrow D_2$. La somme L_2 de leurs longueurs vaut $L_2 = 3$. L'ordre n'_2 du second zéro infini global vaut par conséquent $n'_2 = 2$. **Fin de l'exemple**

Si le modèle possède des transmissions directes - remarque 1.30 - le calcul des entiers $\{n'_1, \dots, n'_p\}$ par l'algorithme (2.21) demande cependant plus d'attention.

2.3.3 Structure infinie et transmissions directes

Dans cette section, nous précisons la méthode de calcul des entiers $\{n'_i\}$ pour le cas de modèles possédant des transmissions directes. Nous illustrons cette méthode par un exemple.

Si le modèle possède des transmissions directes, au moins un des entiers n'_i est nul. Au moins une des lignes de la matrice Ω - section 1.3.1 - est dans ce cas donnée par une des lignes de la matrice de transmissions directes D . La plupart du temps, il existe alors plusieurs choix de p chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts. Il arrive dans ce cas fréquemment que les gains des chemins causaux différents les plus courts d'au moins deux détecteurs de sortie vers l'ensemble des sources d'entrée soient proportionnels. La matrice Ω n'est donc plus inversible et l'indépendance entre l'ensemble des variables d'entrée et l'ensemble des dérivées des variables de sortie n'est plus vérifiée - propriété 1.29.

Dans ce cas, les entiers calculés selon l'algorithme (2.21) ne sont donc pas égaux aux ordres des zéros à l'infini globaux du système. Au moins une des variables de sortie $y_i(t)$ doit en effet être dérivée plus que n'_i fois pour que les variables d'entrée apparaissent de manière globalement indépendante dans l'ensemble des dérivées des variables de sortie.

En calculant les ordres des zéros à l'infini par l'algorithme (2.21), il faut donc alors également vérifier que les gains des chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts ne sont pas proportionnels.

Nous illustrons ce cas de figure par l'exemple suivant.

Considérons le modèle bond-graph présenté en figure 2.11. Ce modèle possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$

et deux éléments dynamiques en causalité intégrale. Nous en calculons les ordres des zéros infinis globaux.

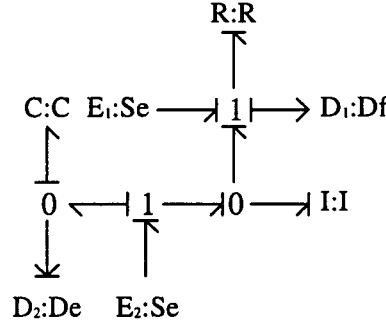


Figure 2.11.

Appliquons la propriété 2.28. L'ordre du premier zéro infini global vaut $n'_1 = 0$. Le modèle possède en effet deux transmissions directes, correspondant aux chemins causaux entrée-sortie $E_1 \rightarrow R \rightarrow D_1$ et $E_2 \rightarrow R \rightarrow D_2$.

L'ordre du second zéro infini global n'_2 est calculé à partir des longueurs des plus courts chemins causaux entrée-sortie différents. Deux couples existent, de chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts : $E_1 \rightarrow R \rightarrow D_1$, $E_2 \rightarrow R \rightarrow C \rightarrow D_2$ et $E_1 \rightarrow R \rightarrow C \rightarrow D_2$, $E_2 \rightarrow R \rightarrow D_1$. Les longueurs de ces chemins valent respectivement $\{0, 1\}$ et $\{1, 0\}$. La propriété 2.28 permet ainsi de déduire pour n'_2 la valeur $n'_2 = 1$.

Or les variables d'entrée et de sortie du modèle vérifient les équations (2.22).

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ sy_2(s) \end{bmatrix} = \Omega \cdot u(s) + \Omega'(s) \cdot u(s) \\ \Omega = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ \frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \\ \Omega'(s) = \begin{bmatrix} \frac{-\frac{1}{s}}{R(RIC + \frac{1}{s} + \frac{R}{s^2})} & \frac{-\left(\frac{1}{s} + \frac{R}{s^2}\right)}{R(RIC + \frac{1}{s} + \frac{R}{s^2})} \\ \frac{-\left(\frac{1}{s} + \frac{R}{s^2}\right)}{RC(RC + \frac{1}{s} + \frac{R}{s^2})} & \frac{-\left(\frac{1}{s} - \frac{R^2 C}{Is^2} + \frac{R}{Is^2}\right)}{(RC + \frac{1}{s} + \frac{R}{Is^2})} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

L'expression de la matrice Ω est obtenue de manière immédiate à partir du modèle bond-graph. En effet, les coefficients de sa première ligne sont égaux aux gains des chemins causaux de longueur nulle des sources d'entrée

vers le détecteur de sortie D_1 - propriété 2.11. De même, les coefficients de sa seconde ligne sont égaux aux termes constants des gains des chemins causaux de longueur un des sources d'entrée vers le détecteur de sortie D_2 - propriété 2.10.

Cette matrice Ω n'est pas inversible : les termes constants des gains des chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts de chaque détecteur de sortie vers l'ensemble des sources d'entrée sont en effet proportionnels. La propriété 1.29 n'est donc pas vérifiée : les zéros infinis globaux du modèle ne sont pas donnés par le couple $\{0, 1\}$.

En dérivant une seconde fois la variable $y_2(t)$, les équations (2.22) deviennent les suivantes - équations (2.23) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ s^2 y_2(s) \end{bmatrix} = \Omega_1 \cdot u(s) + \Omega'_1(s) \cdot u(s) \\ \Omega_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \\ \frac{-1}{(RC)^2} \left\{ \frac{-1}{(RC)^2} + \frac{1}{IC} \right\} \end{bmatrix} \\ \Omega'_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{-\frac{1}{s}}{R(RIC + \frac{I}{s} + \frac{R}{s^2})} & \frac{-\left(\frac{I}{s} + \frac{R}{s^2}\right)}{R(RIC + \frac{I}{s} + \frac{R}{s^2})} \\ \frac{RC^2 + \left(\frac{RC}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{R}{Is^3}\right)}{RC^2 \left(\frac{RC}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{R}{Is^3}\right)} & \frac{\left(1 + \frac{R}{Is}\right) - \left(\frac{1}{IC} - \frac{1}{(RC)^2}\right) \left(\frac{RC}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{R}{Is^3}\right)}{\left(\frac{RC}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{R}{Is^3}\right)} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.23)$$

La première ligne de la matrice Ω_1 est identique à la première ligne de la matrice Ω . Les coefficients de la seconde ligne de la matrice Ω_1 sont égaux aux termes constants des gains des chemins causaux de longueur deux des sources d'entrée vers le détecteur de sortie D_2 - propriété 2.10.

La matrice Ω_1 est inversible. L'élément dynamique I casse en effet la proportionnalité entre les gains des chemins causaux entrée-sortie de longueurs zéro et deux. Les ordres des zéros infinis globaux du modèle ont donc finalement pour valeurs respectives $n'_1 = 0$ et $n'_2 = 2$. **Fin de l'exemple**

2.3.4 Structure essentielle

La structure essentielle est composée d'une liste, notée $\{n_{ie}\}$, d'entiers appelés ordres d'essentialité - section 1.3.2. La propriété 1.35 rappelle à ce sujet que l'ordre d'essentialité associé à la variable de sortie $y_i(t)$ est calculé à partir des zéros infinis globaux du système initial et des zéros infinis globaux du système privé de la sortie considérée. Les procédures graphiques par lesquelles sont déterminés les ordres des zéros infinis globaux permettent donc également

de calculer les ordres d'essentialité d'un système représenté par son modèle bond-graph.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé des concepts élémentaires relatifs à la méthodologie bond-graph. Nous avons en particulier présenté les fondements de ce formalisme pour la modélisation des systèmes physiques. Nous avons également souligné les principaux résultats permettant de caractériser graphiquement des propriétés structurelles d'un système à partir de son modèle bond-graph. Enfin, nous avons rappelé les méthodes graphiques permettant de décrire les structures finie et infinie d'un système à partir de son modèle bond-graph.

L'ensemble de ces méthodes constitue le point de départ de nos travaux concernant la commande par découplage entrée-sortie des modèles bond-graph. L'étude des solutions de commande par loi statique régulière est présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Découplage régulier

Dans ce chapitre sont présentés nos résultats relatifs à la commande par découplage entrée-sortie des systèmes représentés par un modèle bond-graph. Ces résultats concernent les modèles bond-graph linéaires possédant autant de sources d'entrée que de détecteurs de sortie. Parmi ces résultats, les contributions les plus importantes s'appliquent aux modèles dont la matrice d'état A est inversible - modèles de rang plein. Ce cas de figure se présente pour la plupart des modèles physiques non simplifiés.

Nous définissons d'abord des méthodes graphiques d'analyse. A partir du modèle bond-graph du système en boucle ouverte, il s'agit de pouvoir donner une réponse à la question suivante : existe-t-il un retour d'état statique régulier permettant de concevoir un modèle découplé stable ? Les procédures présentées s'appliquent aux modèles dont la matrice d'état est de rang quelconque - sections 3.1.1 et 3.1.5 - ou seulement de rang plein - section 3.1.3.

Nous nous plaçons ensuite dans une optique de commande. L'objectif est alors de calculer l'expression formelle des retours d'état statiques réguliers dont nous venons de montrer l'existence. A partir de supports géométriques, nous montrons ainsi en quoi la méthodologie bond-graph est un outil d'aide à la synthèse de lois de commande par découplage entrée-sortie. Les méthodes graphiques proposées s'appliquent ici aux modèles dont la matrice d'état est de rang plein.

3.1 Outils pour l'analyse

Dans cette partie, nous proposons des méthodes graphiques d'analyse destinées à apporter une réponse à la question suivante : le modèle bond-graph peut-il être découplé avec stabilité par retour d'état statique régulier ? Les résultats rappelés en partie 1.4 montrent que cette propriété dépend des zéros

invariants du modèle en boucle ouverte.

Pour caractériser la stabilité du modèle découplé, l'idée la plus intuitive consiste à caractériser ses modes fixes - définition 1.60. S'ils sont tous stables, la propriété 1.61 assure qu'un modèle découplé stable peut être obtenu. Nous proposons ainsi une procédure graphique de détermination formelle des zéros invariants de chaque modèle ligne $\sum (c_i, A, B)$. Les zéros invariants du modèle global carré étant connus - section 2.3.1 - nous déduisons du théorème 1.62 l'expression symbolique de ses modes fixes. Cette procédure graphique ne suppose aucune hypothèse particulière concernant le rang de la matrice d'état du modèle.

Pour notre objectif, l'étude de l'ensemble des zéros invariants n'est cependant pas nécessaire. La stabilité du modèle découplé peut en effet être déduite de l'étude des seuls zéros invariants instables du modèle en boucle ouverte - théorème 1.65. Nous proposons donc, dans un second temps, une méthode graphique visant à déterminer directement le nombre de zéros invariants nuls du modèle. Cette méthode repose sur des manipulations causales. Elle ne s'applique qu'aux modèles bond-graph dont la matrice d'état est inversible. Nous en déduisons une condition nécessaire et suffisante de stabilité du modèle découplé dans le cas - très fréquent - où le modèle bond-graph ne possède pas de zéros invariants strictement instables.

Nous présentons enfin les perspectives envisagées pour l'étude des modèles bond-graph dont la matrice d'état n'est pas inversible. Nous examinons en particulier le cas des modèles gouvernables mais non observables. Pour cette classe de modèles, la notion de zéro-système généralise celle de zéro invariant utilisée jusqu'alors. En particulier, les zéros déterminés graphiquement sur le modèle sont à présent les zéros-système, contenant l'ensemble des zéros invariants. Nous exposons donc une méthode graphique de détermination des zéros-système nuls. Nous en déduisons une procédure graphique de calcul du nombre de zéros invariants nuls.

3.1.1 Zéros invariants des modèles lignes

Nous proposons dans cette section une méthode de détermination graphique des zéros invariants associés à chaque modèle ligne $\sum (c_i, A, B)$ [3]. Cette méthode s'applique quelles que soient les propriétés de commandabilité et d'observabilité du modèle.

Soit $P_i(s)$ - équation (3.1) - la matrice système associée au sous-système

ligne $\sum (c_i, A, B)$.

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -c_i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Cette matrice possède $(n + 1)$ lignes et $(n + m)$ colonnes. L'ordre maximum de ses mineurs vaut donc $(n + 1)$. Les notations relatives à ces mineurs sont précisées par la définition suivante.

Définition 3.1 . $\Delta_{n+1}^{i,j}(s)$ représente le j^{me} mineur d'ordre maximum de la matrice $P_i(s)$. $\Delta_{n+1}^i(s)$ représente le plus grand commun diviseur de tous les mineurs $\Delta_{n+1}^{i,j}(s)$.

Conformément à la propriété 1.38, les zéros invariants du sous-système ligne $\sum (c_i, A, B)$ sont les racines de $\Delta_{n+1}^i(s)$. L'objectif est ainsi d'établir l'expression formelle de chaque mineur $\Delta_{n+1}^{i,j}(s)$. Les racines communes à chacun de ces mineurs seront les zéros invariants du sous-système ligne $\sum (c_i, A, B)$.

Considérons donc la matrice $M_{n+1}^j(s)$ construite en enlevant $(m - 1)$ colonnes de la matrice $P_i(s)$. Le mineur $\Delta_{n+1}^{i,j}(s)$ est obtenu, à partir de cette matrice, comme le montre l'équation (3.2).

$$\Delta_{n+1}^{i,j}(s) = \det [M_{n+1}^j(s)] \quad (3.2)$$

Pour éliminer $(m - 1)$ colonnes de la matrice $P_i(s)$, il faut tout d'abord enlever de la matrice B un nombre de colonnes égal à M tel que $0 < M < (m - 1)$. Ces colonnes sont notées $\{B^1, \dots, B^M\}$. Il s'agit ensuite d'enlever $N = (m - 1 - M)$ colonnes du reste de la matrice $P_i(s)$. Ces colonnes sont notées $\{A^1, \dots, A^N\}$. Pour éliminer ces colonnes $\{A^1, \dots, A^N\}$, l'idée est d'ajouter à la matrice $P_i(s)$ N lignes $\{L_1, \dots, L_N\}$ telles que le seul terme non nul de chaque ligne L_i soit celui qui appartient également à la colonne A^i à éliminer. En effet, notons $P_i^j(s)$ la matrice ainsi construite - figure 3.1.

A un couple de valeurs (M, N) donné correspondent plusieurs modèles BG_{iM} . Nous les distinguons grâce à la notation suivante.

Définition 3.4 . *Le modèle bond-graph BG_{iM}^j représente la $j^{\text{ème}}$ configuration entrées-sorties possible du modèle BG_{iM} .*

A partir du modèle bond-graph BG_i , et pour chaque valeur de M comprise entre 0 et $(m - 1)$, nous appliquons la procédure suivante.

1. Construction de chaque modèle bond-graph BG_{iM}^j .
2. Calcul du déterminant de chaque matrice système associée.

Conformément aux définitions 3.3 et 3.4, chaque modèle BG_{iM}^j possède en effet un nombre égal de sources d'entrée et de détecteurs de sortie. Ce nombre vaut $(m - M)$. La matrice système associée est la matrice $P_i^j(s)$ décrite par la figure 3.1. A une constante multiplicative près, son déterminant est égal au mineur $\Delta_{n+1}^{i,j}(s)$ - équation (3.3). L'expression formelle de ce déterminant est obtenue en appliquant au modèle bond-graph BG_{iM}^j la règle graphique rappelée par la propriété 2.23. Nous déduisons ainsi l'expression symbolique des racines du mineur $\Delta_{n+1}^{i,j}(s)$. Les zéros invariants du sous-système ligne $\sum (c_i, A, B)$ sont finalement les racines communes à tous les mineurs $\Delta_{n+1}^{i,j}(s)$.

Remarque 3.5 . *Si deux mineurs $\Delta_{n+1}^{j_1}(s)$ et $\Delta_{n+1}^{j_2}(s)$ n'ont aucun facteur commun, alors le PGCD des mineurs d'ordre $(n + 1)$ de la matrice $P_i(s)$ est constant. Dans ce cas, le sous-système ligne $\sum (c_i, A, B)$ ne possède donc aucun zéro invariant. Dans un souci de rapidité, nous chercherons autant que possible à identifier en premier lieu ces cas de figure.*

Notons enfin que cette méthode permet également de déterminer l'expression symbolique des zéros invariants de modèles non carrés possédant plus d'une variable de sortie.

3.1.2 Exemple

Dans cette section, nous illustrons par un exemple la procédure présentée dans la section précédente [3].

Considérons le modèle bond-graph présenté en figure 3.2. Ce modèle possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et six éléments dynamiques, tous affectés d'une causalité intégrale. Il est de rang plein - théorème 2.16 - et découplable par retour d'état statique régulier - théorème 1.59.

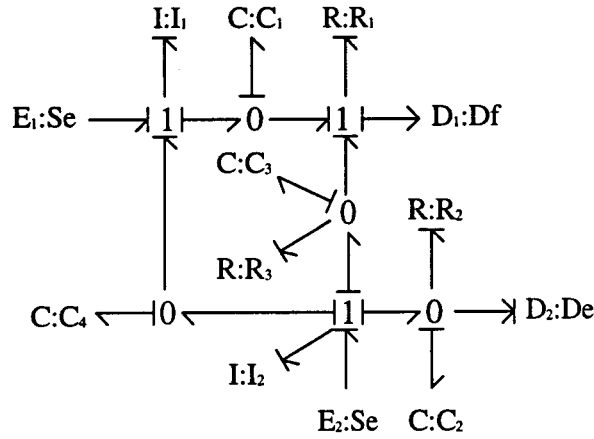
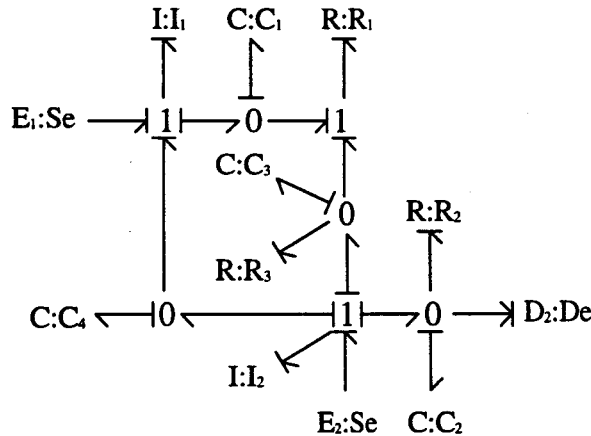


Figure 3.2.

Ce modèle possède deux zéros invariants, dont le calcul a été détaillé en section 2.3.1. Ces zéros invariants ont pour expression $s = 0$ et $s = \frac{-1}{R_3 C_3}$. Nous déterminons l'expression symbolique des zéros invariants associés à chaque sous-système ligne. Nous détaillons plus particulièrement l'étude du second sous-système ligne. Nous en déduisons l'expression symbolique des modes fixes du modèle.

Soit en figure 3.3 le modèle bond-graph BG_2 - définition 3.2 - associé au sous-système ligne $\sum(c_2, A, B)$.

Figure 3.3: modèle bond-graph BG_2 .

La matrice système $P_2(s)$ associée à ce modèle possède sept lignes et huit colonnes. Son $j^{\text{ème}}$ mineur d'ordre 7 est noté $\Delta_7^{2,j}(s)$ - définition 3.1. Pour

le calculer, nous devons supprimer une colonne de la matrice $P_2(s)$. Nous choisissons d'exprimer d'abord les mineurs d'ordre 7 calculés en conservant les deux colonnes de la matrice B .

Ce premier choix impose pour M et N les valeurs $M_1 = 0$ et $N_1 = 1$. Il faut par conséquent utiliser un détecteur de sortie fictif D_0 . A chacune des positions possibles de ce détecteur de sortie correspond un modèle bond-graph $BG_{2M_1}^j$ - définition 3.4. Ce modèle possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$ et deux détecteurs de sortie $\{D_0, D_2\}$. Le déterminant de sa matrice système est égal, à une constante près, au mineur $\Delta_{2,j}^{2,j}(s)$ - équation (3.3).

Plaçons dans un premier temps le détecteur de sortie D_0 sur l'élément C_1 . Le modèle bond-graph obtenu est noté $BG_{2M_1}^1$. Il est représenté sur la figure 3.4.

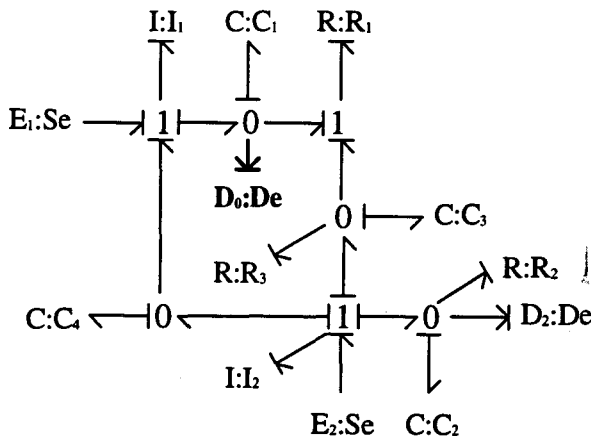


Figure 3.4: modèle bond-graph $BG_{2M_1}^1$.

La matrice système associée à ce modèle est notée $P_2^1(s)$ - figure 3.1. L'expression symbolique de son déterminant est obtenue en appliquant au modèle $BG_{2M_1}^1$ la règle rappelée par la propriété 2.23. Cette règle repose sur l'étude des chemins causaux entrée-sortie différents.

Sur le modèle $BG_{2M_1}^1$, une seule famille de deux chemins causaux entrée-sortie différents existe. Ces chemins sont $E_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_1 \rightarrow D_0$ et $E_2 \rightarrow I_2 \rightarrow C_2 \rightarrow D_2$. L'expression symbolique du déterminant de la matrice système $P_2^1(s)$ en est déduite. Cette expression est donnée par l'équation (3.4).

$$\det [P_2^1(s)] = \frac{1}{I_1 I_2 C_1 C_2} s \left(s + \frac{1}{R_1 C_3} + \frac{1}{R_3 C_3} \right) \quad (3.4)$$

Le premier mineur d'ordre 7 de la matrice $P_2(s)$ vérifie donc l'équation (3.5), où K_1 est une constante multiplicative.

$$\Delta_7^{2,1}(s) = K_1 \det [P_2^1(s)] \quad (3.5)$$

Plaçons maintenant le détecteur de sortie D_0 sur l'élément C_4 . Le modèle bond-graph obtenu est noté $BG_{2M_1}^2$. Il est représenté sur la figure 3.5.

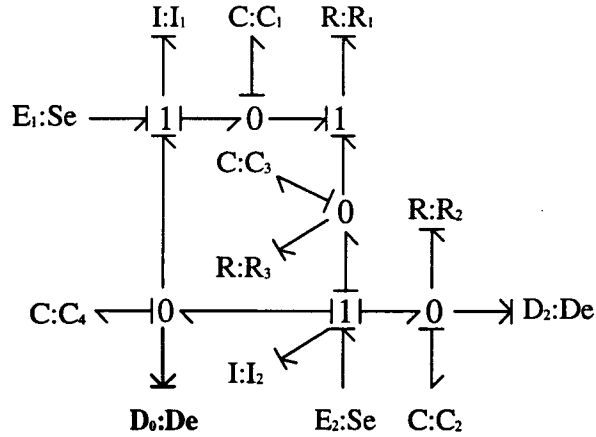


Figure 3.5: modèle bond-graph $BG_{2M_1}^2$.

Ce modèle ne possède également qu'une seule famille de deux chemins causaux entrée-sortie différents. Ces chemins sont $E_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_4 \rightarrow D_0$ et $E_2 \rightarrow I_2 \rightarrow C_2 \rightarrow D_2$. Conformément à la propriété 2.23, nous en déduisons l'expression symbolique du déterminant de la matrice système $P_2^2(s)$. Cette expression est donnée par les équations (3.6).

$$\begin{cases} \det [P_2^2(s)] = Q(s) + R(s) \\ Q(s) = \frac{-1}{I_1 I_2 C_2 C_4} \left(s + \frac{1}{R_1 C_3} + \frac{1}{R_3 C_3} \right) \left(s + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \\ R(s) = \frac{1}{R_1^2 I_1 I_2 C_1 C_2 C_3 C_4} \end{cases} \quad (3.6)$$

Le second mineur d'ordre 7 de la matrice $P_2(s)$ vérifie donc l'équation (3.7), où K_2 est une constante multiplicative.

$$\Delta_7^{2,2}(s) = K_2 \det [P_2^2(s)] \quad (3.7)$$

Les mineurs $\Delta_7^{2,1}(s)$ et $\Delta_7^{2,2}(s)$ donnés par les équations (3.5) et (3.7) n'ont aucun facteur commun. Le PGCD des mineurs d'ordre 7 de la matrice

$S=0$ zéro invariant
 $S=\frac{1}{R_3C_3}$ de GAB

5 GAB n'a pas de zéro



$S=0$
 $S=\frac{1}{R_3C_3} = \text{mode fixe}$

3.1 OUTILS POUR L'ANALYSE

$P_2(s)$ est donc constant. Par conséquent, le sous-système ligne $\sum(c_2, A, B)$ ne possède aucun zéro invariant - remarque 3.5.

L'étude du sous-système ligne $\sum(c_1, A, B)$ est menée de manière tout à fait similaire [3]. Elle conduit à la conclusion suivante: le sous-système ligne $\sum(c_1, A, B)$ ne possède également aucun zéro invariant.

Conformément au théorème 1.62, les modes fixes du modèle présenté en figure 3.2 sont donc ses deux zéros invariants. L'un d'entre eux étant nul, nous en déduisons la conclusion suivante: aucun retour d'état statique régulier ne peut découpler ce modèle tout en garantissant la stabilité du modèle découplé. **Fin de l'exemple**

Supposons néanmoins qu'il existe une loi de commande (F_0, G_0) vérifiant la propriété suivante.

Propriété 3.6 . *La loi de commande (F_0, G_0) est un retour d'état statique régulier. Par action de cette loi de commande, le nombre de modes non assignables du modèle découplé est supérieur ou égal au nombre de modes fixes. Tous ces modes non assignables sont cependant strictement stables.*

Si l'objectif est de minimiser le nombre de modes non assignables du modèle découplé, une telle solution de commande n'est pas systématiquement la meilleure. Si l'objectif est "uniquement" de concevoir par bouclage un modèle découplé stable, cette loi de commande est une solution possible: le théorème 1.65 établit une condition nécessaire et suffisante d'existence de cette loi de commande (F_0, G_0) . Cette condition repose non pas sur l'étude de tous les zéros invariants du modèle en boucle ouverte mais seulement sur l'étude de ses zéros invariants instables. Or l'expérience montre que les modes instables d'un modèle découplé obtenu à partir d'un modèle bond-graph sont la plupart du temps des modes nuls.

Nous présentons donc dans la section 3.1.3 une méthode graphique simple permettant de déterminer le nombre de zéros invariants nuls d'un système à partir de son modèle bond-graph. A l'aide de cette méthode, nous déduisons une condition nécessaire et suffisante graphique d'existence de la loi de commande (F_0, G_0) décrite par la propriété 3.6. Ces méthodes découlent de l'étude du modèle bond-graph affecté d'une causalité dérivée.

3.1.3 Nombre de zéros invariants nuls

Les résultats présentés dans cette section concernent les modèles bond-graph dont la matrice d'état A est inversible - modèles de rang plein (section 2.2.1).

Pour cette classe de modèles, nous proposons une méthode graphique de détermination du nombre de zéros invariants nuls.

Ces résultats sont présentés en trois phases. Nous définissons tout d'abord deux notions nouvelles: la longueur et le gain d'un chemin causal sur le modèle en causalité dérivée - première phase. Nous calculons ensuite la structure infinie de ce modèle en causalité dérivée - seconde phase. Nous en déduisons enfin le nombre de zéros invariants nuls du modèle en causalité intégrale - troisième phase.

1. Chemin causal et causalité dérivée

Considérons un modèle bond-graph de rang plein. Affecté d'une causalité intégrale préférentielle, il est noté *BGI*. Affecté d'une causalité dérivée préférentielle, il est noté *BGD*. La représentation mathématique associée au modèle bond-graph *BGD* est rappelée par les équations (3.8).

$$\begin{cases} x(t) = A^{-1} \dot{x}(t) - A^{-1}Bu(t) \\ y(t) = CA^{-1} \dot{x}(t) - CA^{-1}Bu(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

Sur ce modèle *BGD*, nous définissons tout d'abord la nouvelle notion de longueur d'un chemin causal.

Définition 3.7 . *Sur le modèle bond-graph en causalité dérivée *BGD*, soit un chemin causal reliant un élément de l'ensemble $J_1 = \{C, I, S_e, S_f\}$ à un élément de l'ensemble $J_2 = \{C, I, D_e, D_f\}$. Soit N_d le nombre d'éléments dynamiques en causalité dérivée traversés par ce chemin. La longueur de ce chemin vaut alors N_d , plus un s'il relie une source ou un élément dynamique à un élément dynamique.*

Le gain de ce chemin causal est calculé, sur le modèle bond-graph en causalité dérivée, comme l'est le gain d'un chemin causal sur le modèle bond-graph en causalité intégrale. La règle de calcul de ce gain est rappelée par la définition 2.7. Elle repose sur l'expression des gains des éléments traversés par le chemin. En causalité intégrale et en causalité dérivée, ces expressions sont données par les équations (2.9), (2.10) et par la remarque 2.1.

Otons à présent du modèle *BGD* tous les détecteurs de sortie sauf le $i^{\text{ème}}$. Le modèle bond-graph obtenu est noté *BGD_i*. La représentation mathématique qui lui est associée est donnée par les équations (3.9).

$$\begin{cases} x(t) = A^{-1} \dot{x}(t) - A^{-1}Bu(t) \\ y_i(t) = c_i A^{-1} \dot{x}(t) - c_i A^{-1}Bu(t) \end{cases} \quad (3.9)$$

Sur ce modèle BGD_i , le calcul du gain de certains chemins causaux permet de déterminer l'expression formelle du produit entre les matrices A^{-1} , B et c_i . Cette propriété est similaire à celle établie pour le modèle bond-graph en causalité intégrale - section 2.1.3.

Soient en effet S_j la $j^{\text{ème}}$ source d'entrée du modèle bond-graph BGD_i et D_i son $i^{\text{ème}}$ détecteur de sortie. L'expression de $y_i(t)$ donnée par les équations (3.9) permet de déduire de manière immédiate la propriété suivante.

Propriété 3.8 [4]/[6]. Pour $k \geq 1$, $[c_i A^{-k} B^j] = -\sum G_{k-1}(S_j, D_i)$, où le coefficient $G_{k-1}(S_j, D_i)$ représente, sur le modèle bond-graph BGD_i , le terme constant du gain d'un chemin causal de longueur $(k-1)$ entre la source d'entrée S_j et le détecteur de sortie D_i .

Enfin, nous introduisons la notion de chemins causaux différents sur le modèle bond-graph en causalité dérivée BGD . Cette notion est décrite par la propriété suivante, duale de la propriété 2.9.

Propriété 3.9 . Sur le modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle, deux chemins causaux sont différents s'ils n'ont en commun aucun élément dynamique en causalité dérivée.

Pour déterminer le nombre de zéros invariants nuls du modèle bond-graph en causalité intégrale BGI , nous étudions, sur le modèle bond-graph en causalité dérivée BGD , les chemins causaux entrée-sortie les plus courts.

2. Structure infinie du modèle en causalité dérivée

Considérons la représentation mathématique associée au modèle bond-graph BGD_i - équation (3.9). Cette représentation nous permet de définir l'entier n_{id} de la manière suivante.

Définition 3.10 [4]/[6]. Soit n_{id} le plus petit entier vérifiant les équations (3.10). Compte tenu des équations (3.9), n_{id} est donc égal au nombre minimum d'intégrations de la variable de sortie $y_i(t)$ nécessaire pour y faire apparaître explicitement au moins une des entrées.

$$\begin{cases} c_i A^{-(k+1)} B = 0, k < n_{id} \\ c_i A^{-(n_{id}+1)} B \neq 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Cet entier n_{id} peut également être déterminé à partir du modèle bond-graph BGD_i . Ce calcul est réalisé conformément à la propriété suivante.

Propriété 3.11 [4]/[6]. *Sur le modèle BGD_i , n_{id} est égal à la longueur du plus court chemin causal reliant le $i^{\text{ème}}$ détecteur de sortie à l'ensemble des sources d'entrées.*

Cette propriété établit donc un lien entre les deux grandeurs suivantes : le nombre d'intégrations de la variable de sortie $y_i(t)$ à réaliser d'une part ; le nombre d'éléments dynamiques traversés par le plus court chemin causal entrée-sortie sur le modèle BGD_i d'autre part. Ce lien est évidemment également valable si le chemin traverse des éléments dynamiques en causalité intégrale.

Conformément aux propriétés 2.26 et 3.11, chaque entier n_{id} , $i = 1, \dots, p$, est donc déterminé sur le modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle BGD comme l'est l'entier n_i sur le modèle bond-graph en causalité intégrale préférentielle BGI . Cette analogie nous conduit à adopter la notation suivante.

Propriété 3.12 [4]/[6]. *n_{id} est appelé ordre du zéro infini en ligne associé au modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle BGD_i .*

Ce concept de zéro infini en ligne associé au modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle BGD_i est à présent étendu au modèle bond-graph global. Nous définissons ainsi le nouveau concept de zéro infini global associé au modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle BGD .

Définition 3.13 [4]/[6]. *Soit $\{n'_{1d}, \dots, n'_{pd}\}$ l'ensemble des entiers vérifiant l'équation (3.11), où L_{kd} est la somme des longueurs des k plus courts chemins causaux entrée-sortie différents sur le modèle bond-graph BGD . Nous appelons ces entiers ordres des zéros à l'infini globaux du modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle BGD .*

$$\begin{cases} n'_{1d} = L_{1d} \\ n'_{kd} = L_{kd} - L_{kd-1} \end{cases} \quad (3.11)$$

Ces entiers sont donc calculés sur le modèle bond-graph BGD comme le sont les entiers $\{n'_1, \dots, n'_p\}$ sur le modèle bond-graph en causalité intégrale BGI - propriété 2.28.

Remarque 3.14 . *Le modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle BGD possède généralement des transmissions directes. La détermination graphique des entiers $\{n'_{1d}, \dots, n'_{pd}\}$ - définition 3.13 - doit donc prendre en compte les éventuelles proportionnalités entre les gains des chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts - section 2.3.2.*

Les entiers n_{id} et n'_{id} sont finalement utilisés pour calculer le nombre de zéros invariants nuls du modèle bond-graph en causalité intégrale BGI.

3. Nombre de zéros invariants nuls

Le nombre de zéros invariants nuls du modèle ligne $\sum (c_i, A, B)$ est calculé conformément au théorème suivant.

Théorème 3.15 [4]/[6]. *Soit n_{id} l'ordre du zéro infini associé au modèle bond-graph en causalité dérivée BGD_i. Le nombre de zéros invariants nuls du modèle $\sum (c_i, A, B)$ est alors égal à n_{id} .*

La démonstration de ce théorème est présentée en annexe A.6.

De même, nous utilisons les entiers n'_{id} pour calculer le nombre de zéros invariants nuls du modèle global $\sum (C, A, B)$.

Théorème 3.16 [4]/[6]. *Soient $\{n'_{1d}, \dots, n'_{pd}\}$ les ordres des zéros à l'infini globaux du modèle bond-graph en causalité dérivée BGD. Le nombre de zéros invariants nuls du modèle bond-graph en causalité intégrale BGI est égal à $\sum_{k=1}^p n'_{kd}$.*

La démonstration de ce théorème est présentée en annexe A.7.

Les théorèmes 3.15 et 3.16 proposent donc des méthodes entièrement graphiques pour calculer le nombre de zéros invariants nuls d'un modèle bond-graph. A l'aide d'algorithmes utilisés jusqu'à présent pour l'étude des modèles bond-graph en causalité intégrale, ils exploitent des informations structurelles contenues dans le modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle. A partir de ces résultats, nous déduisons une condition nécessaire et suffisante graphique d'existence de la loi de commande (F_0, G_0) introduite par la propriété 3.6. Cette condition repose sur le théorème 1.65. Elle est énoncée par le théorème suivant.

Théorème 3.17 [4]/[6]. *Soit $\sum (C, A, B)$ un système carré p entrées- p sorties, de rang plein et ne possédant aucun zéro invariant strictement instable. Soit $\{n_i\}$ - respectivement $\{n'_i\}$ - la structure à l'infini en ligne - respectivement globale - de son modèle bond-graph en causalité intégrale préférentielle. Soit $\{n_{id}\}$ - respectivement $\{n'_{id}\}$ - la structure à l'infini en ligne - respectivement globale - de son modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle. Une solution stable existe au problème du découplage statique régulier de $\sum (C, A, B)$ si et seulement si les entiers n_i, n'_i, n_{id} et n'_{id} vérifient les équations (3.12).*

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^p n'_i = \sum_{i=1}^p n_i \\ \sum_{i=1}^p n'_{id} = \sum_{i=1}^p n_{id} \end{cases} \quad (3.12)$$

Compte tenu des résultats énoncés par les théorèmes 1.65, 3.15 et 3.16, la preuve de ce théorème est immédiate. Nous déduisons finalement des équations (3.12) la propriété suivante.

Propriété 3.18 . *Soit un modèle bond-graph carré, de rang plein et ne possédant aucun zéro invariant strictement instable. L'étude de sa découplabilité statique régulière et l'étude de la stabilité du modèle découplé sont réalisées de manière duale, respectivement sur les modèles en causalité intégrale préférentielle et en causalité dérivée préférentielle.*

Les résultats proposés dans cette section sont illustrés par un exemple que nous présentons dans la section suivante.

3.1.4 Exemple

Dans cette section, nous déterminons graphiquement le nombre de zéros invariants nuls d'un modèle bond-graph de rang plein. Nous en déduisons que ce modèle est découplable avec stabilité par retour d'état statique régulier.

Considérons le modèle bond-graph présenté en figure 3.6 et noté $BG1$. Ce modèle possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et six éléments dynamiques, tous affectés d'une causalité intégrale. Il est de rang plein - théorème 2.16 - et découplable par retour d'état statique régulier - théorème 1.59.

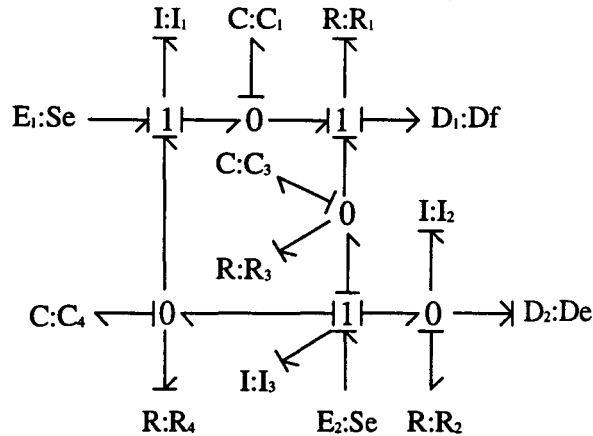
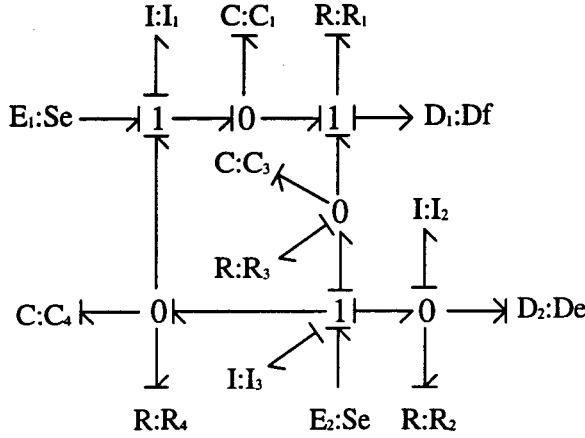


Figure 3.6: modèle bond-graph $BG1$.

La causalité dérivée peut être assignée à l'ensemble des éléments dynamiques de ce modèle. Le modèle bond-graph ainsi obtenu est noté $BG2$. Il est décrit par la figure 3.7.

Figure 3.7: modèle bond-graph $BG2$.

Phase1 : détermination du nombre total de zéros invariants.

Quatre couples de chemins causaux entrée-sortie différents existent sur le modèle bond-graph $BG1$. Pour chacun d'entre eux, le premier chemin relie la source d'entrée E_1 au détecteur de sortie D_1 et le second chemin relie la source d'entrée E_2 au détecteur de sortie D_2 .

La famille de chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts est $E_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow D_1$, $E_2 \rightarrow I_3 \rightarrow R_2 \rightarrow D_2$. Le modèle bond-graph réduit construit à partir de cette famille possède donc trois éléments dynamiques en causalité intégrale - définition 2.22.

Conformément à la propriété 2.25, le modèle bond-graph $BG1$ possède donc trois zéros invariants. Certains d'entre eux peuvent être nuls : l'étude de la structure infinie du modèle bond-graph $BG2$ permet d'en déterminer le nombre.

Phase2 : détermination du nombre de zéros invariants nuls.

Le modèle bond-graph $BG2$ possède des transmissions directes. En effet, les chemins causaux les plus courts du détecteur de sortie D_1 vers les sources d'entrée ne traversent aucun élément dynamique en causalité dérivée. L'ensemble de ces chemins est noté C_{c1} . Selon les définitions 3.7 et 3.13, l'entier n'_{1d} a donc pour valeur $n'_{1d} = 0$.

Les chemins causaux les plus courts du détecteur de sortie D_2 vers les sources d'entrée ont pour longueur un - définition 3.7. L'ensemble de ces chemins est noté C_{c2} . Selon la remarque 3.14, avant de donner à l'entier n'_{2d} la valeur $n'_{2d} = 1$, il nous faut nous assurer que les termes constants des gains des

éléments de l'ensemble C_{c2} ne sont pas proportionnels aux gains des éléments de l'ensemble C_{c1} . Ceci est garanti par la présence de l'élément résistif R_4 qui permet de construire le chemin $D_2 \rightarrow I_2 \rightarrow R_4 \rightarrow E_2$. Conformément à la définition 3.13 et à la remarque 3.14, l'entier n'_{2d} a donc pour valeur $n'_{2d} = 1$.

Nous déduisons par conséquent du théorème 3.16 que le modèle bond-graph $BG1$ possède un zéro invariant nul.

Phase3 : calcul des zéros invariants non nuls.

L'expression formelle des deux zéros invariants non nuls est déterminée conformément à la propriété 2.23. Ce type de calcul a déjà été exposé - section 2.3.1. Il repose sur l'étude de chaque couple de chemins causaux entrée-sortie différents. Il permet de montrer que les deux zéros invariants non nuls du modèle bond-graph $BG1$ ont pour expressions $s = \frac{-1}{R_3 C_3}$ et $s = \frac{-1}{R_4 C_4}$.

Les trois zéros invariants du modèle bond-graph $BG1$ ont donc pour expressions $s = 0$, $s = \frac{-1}{R_3 C_3}$ et $s = \frac{-1}{R_4 C_4}$. Aucun d'entre eux n'est strictement instable. Conformément au théorème 3.17, l'étude des structures infinies en ligne du modèle bond-graph $BG2$ nous permet dans ce cas de savoir si le modèle bond-graph $BG1$ peut être découplé statiquement avec stabilité.

Phase4 : détermination du nombre de zéros invariants nuls associés à chaque sous-système ligne.

Sur le modèle bond-graph $BG2$, les chemins causaux les plus courts de chaque détecteur de sortie vers les sources d'entrée sont respectivement $D_1 \rightarrow R_1 \rightarrow E_1$ et $D_2 \rightarrow I_2 \rightarrow R_4 \rightarrow E_2$. Conformément à la définition 3.7, les longueurs respectives de ces chemins valent zéro et un. La propriété 3.11 permet d'en déduire pour les entiers n_{1d} et n_{2d} les valeurs $n_{1d} = 0$ et $n_{2d} = 1$.

Phase5 : conclusion.

Le théorème 3.17 permet ainsi de tirer la conclusion suivante : un retour d'état statique régulier existe, permettant de découpler le modèle bond-graph $BG1$ tout en garantissant la stabilité du modèle découplé. Cette solution de commande, ainsi que les propriétés dynamiques du modèle découplé correspondant, seront définis dans la seconde partie de ce chapitre.

A titre de remarque, notons que le modèle bond-graph $BG1$ privé de l'élément résistif R_4 est également découplable par retour d'état statique régulier. Mais aucun modèle découplé stable ne peut être conçu par cette stratégie de commande. En effet, sur le modèle bond-graph $BG2$, la proportionnalité entre les gains des chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts

impose de nouvelles valeurs pour les entiers n'_{1d} et n'_{2d} : $n'_{1d} = 0$ et $n'_{2d} = 2$ - remarque 3.14. Les entiers n_{1d} et n_{2d} restant inchangés, les équations (3.12) ne sont donc plus vérifiées. Le théorème 3.17 nous permet ainsi de tirer la conclusion suivante: le modèle bond-graph $BG1$ privé de l'élément résistif R_4 ne peut pas être découplé avec stabilité par un retour d'état statique régulier. **Fin de l'exemple**

Si le modèle possède des zéros invariants strictement instables, la structure infinie du modèle en causalité dérivée ne permet pas de caractériser la stabilité du modèle découplé. Nous utilisons dans ce cas la procédure présentée en section 3.1.1. Nous déterminons ainsi "à la main" l'expression symbolique des zéros invariants strictement instables du modèle. S'ils sont tous également des zéros invariants en ligne, il existe une solution statique régulière au problème du découplage avec stabilité. Sinon, le découplage statique avec stabilité est impossible - théorème 1.65.

Ce dernier cas est illustré par l'exemple du modèle bond-graph présenté en figure 3.8. Ce modèle possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et cinq éléments dynamiques, tous affectés d'une causalité intégrale. Il est de rang plein - théorème 2.16 - et découplable par retour d'état statique régulier - théorème 1.59.

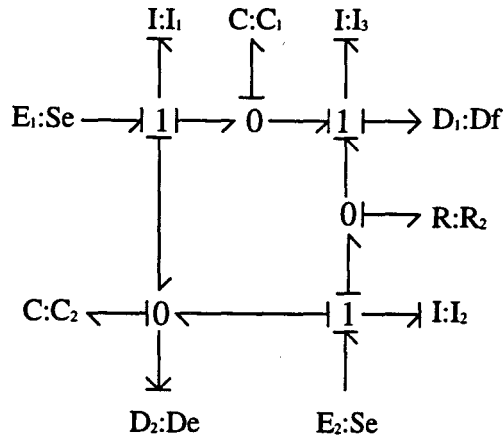


Figure 3.8.

Des développements similaires à ceux que nous venons d'expliciter montrent que ce modèle possède un seul zéro invariant, dont la valeur est $s = \frac{+1}{R_2 C_1}$ - propriété 2.23. Les sous-systèmes ligne ne possédant aucun zéro invariant, le zéro invariant du modèle global est un mode fixe - théorème 1.62. Strictement instable, il rend impossible toute solution de découplage avec stabilité par retour d'état statique régulier - propriété 1.61.

3.1.5 Extension à l'étude des zéros-système nuls

Cette section concerne l'étude des modèles bond-graph non minimaux : la matrice d'état A n'est pas inversible et le modèle est gouvernable mais non observable. Ces modèles possèdent en outre autant de variables d'entrée que de variables de sortie. Pour cette classe de modèles, l'objectif est de caractériser graphiquement le nombre de zéros invariants nuls globaux et en ligne, liés à l'étude de la stabilité du modèle découplé - théorème 1.65.

Pourquoi ce problème doit-il être examiné? La non minimalité du modèle complique à présent la détermination du nombre de zéros invariants nuls de chaque modèle ligne. Deux ensembles de zéros, identiques jusqu'à présent, sont en effet maintenant à distinguer : les zéros invariants et les zéros-système, le premier ensemble étant inclus dans le second - remarque 1.49. La définition des zéros-système - définition 1.47 - incite à penser que les zéros déterminés graphiquement sont les zéros-système. La problématique est alors la suivante : comment étendre les résultats précédents - théorèmes 3.15 et 3.16 - pour déterminer graphiquement le nombre de zéros-système nuls? Comment identifier ceux d'entre eux qui sont des zéros invariants?

Les résultats proposés dans cette section sont pour l'instant des perspectives, non encore démontrées de manière rigoureuse. Nous les présentons en trois phases. Nous définissons tout d'abord la notion de longueur généralisée d'un chemin causal sur le modèle en causalité dérivée préférentielle - première phase. Nous proposons ensuite une procédure graphique de détermination des zéros-système - seconde phase. Cette procédure est enfin utilisée pour déterminer graphiquement le nombre de zéros invariants nuls du modèle ligne $\sum (c_i, A, B)$ - troisième phase.

1. Longueur généralisée d'un chemin causal sur le modèle en causalité dérivée préférentielle

Si la matrice d'état A n'est pas inversible, la définition 3.7 - longueur d'un chemin causal sur le modèle en causalité dérivée préférentielle - n'est plus valable. Comme pour le modèle en causalité intégrale, nous introduisons donc la notion de longueur généralisée d'un chemin causal sur le modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle.

Définition 3.19 [8]. *Soit un modèle bond-graph dont la matrice d'état A est quelconque. Sur le modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle, soit un chemin causal reliant un élément de l'ensemble $J_1 = \{C, I, S_e, S_f\}$ à un élément de l'ensemble $J_2 = \{C, I, D_e, D_f\}$. Soit N_d - respectivement N_i - le nombre d'éléments dynamiques en causalité dérivée - respectivement en causalité intégrale - traversés par ce chemin. La longueur généralisée de*

ce chemin vaut alors $(N_d - N_i)$, plus un s'il relie une source ou un élément dynamique à un élément dynamique.

Cette définition nous permet de généraliser la notion d'ordre du $i^{\text{ème}}$ zéro infini en ligne du modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle.

Propriété 3.20 [8]. Soit un modèle bond-graph dont la matrice d'état A est quelconque. Soit n_{id} l'ordre du $i^{\text{ème}}$ zéro infini en ligne du modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle. n_{id} est alors égal à la longueur généralisée du plus court chemin causal entre le $i^{\text{ème}}$ détecteur de sortie et l'ensemble des sources d'entrée du modèle en causalité dérivée préférentielle.

Cette propriété est à présent utilisée pour déterminer graphiquement le nombre de zéros-système nuls d'un modèle bond-graph.

2. Nombre de zéros-système nuls

Pour un modèle bond-graph monovariante, les zéros-système correspondent aux zéros invariants - remarque 1.49. Le nombre de zéros-système nuls est alors déterminé conformément à la propriété suivante.

Propriété 3.21 [8]. Soit n_{sz} le nombre de zéros-système nuls d'un modèle bond-graph monovariante. Soit q le nombre de ses pôles nuls. Soit n_d l'ordre du zéro infini du modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle. n_{sz} vérifie alors l'équation (3.13).

$$n_{sz} = n_d + q \quad (3.13)$$

Cette propriété est illustrée par l'exemple suivant.

Considérons le modèle bond-graph $BG1$, présenté en figure 3.9. Ce modèle possède une source d'entrée E , un détecteur de sortie D et deux éléments dynamiques, tous deux affectés d'une causalité intégrale.

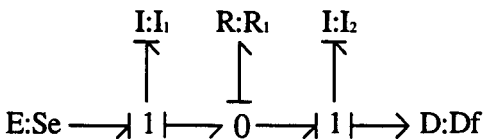


Figure 3.9: modèle bond-graph $BG1$.

Imposons à ce modèle une causalité dérivée. Le modèle ainsi obtenu est noté $BG2$. Il est décrit en figure 3.10.

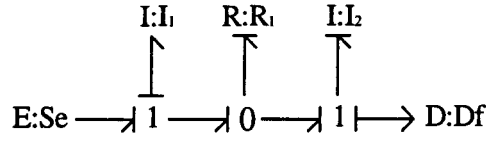


Figure 3.10: modèle bond-graph BG2.

Les deux éléments dynamiques de ce modèle ne peuvent pas être simultanément affectés d'une causalité dérivée: l'un d'entre eux conserve une causalité intégrale. Le rang de la matrice d'état du modèle BG1 est donc égal à un - théorème 2.16. Ce modèle possède donc un pôle nul - propriété 2.17: $q = 1$.

Sur le modèle BG2, la longueur généralisée du plus court chemin causal entrée-sortie définit la valeur de l'entier n_d : $n_d = -1$ - propriété 3.20. La propriété 3.21 permet alors d'affirmer que le modèle BG1 ne possède aucun zéro invariant nul. **Fin de l'exemple**

Cette propriété doit pouvoir être étendue pour l'étude des modèles multivariables. Dans ce cas, nous n'identifions plus le nombre de zéros invariants nuls mais le nombre de zéros-système nuls. A travers la propriété suivante, nous présentons ce résultat comme une intuition non encore validée effectivement.

Propriété 3.22 [8]. Soit n'_{sz} le nombre de zéros-système nuls d'un modèle bond-graph multivariable. Soit q le nombre de ses pôles nuls. Les ordres des zéros infinis globaux du modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle sont enfin notés $\{n'_{1d}, \dots, n'_{pd}\}$. n'_{sz} vérifie alors l'équation (3.14).

$$n'_{sz} = q + \sum_{k=1}^p n'_{kd} \quad (3.14)$$

Rappelons que si le modèle possède autant de sources d'entrée que de détecteurs de sortie, l'entier n'_{sz} exprimé par la propriété 3.22 définit également le nombre de zéros invariants nuls du modèle - remarque 1.49. Signalons d'autre part que les propriétés 3.21 et 3.22 sont valables y compris dans le cas général où aucune représentation d'état n'existe pour décrire le modèle [8].

A l'aide de la propriété 3.22, nous proposons finalement une méthode graphique de calcul du nombre de zéros invariants nuls du modèle ligne commandable mais non observable $\sum (c_i, A, B)$.

3. Nombre de zéros invariants nuls en ligne

Conformément à la propriété 3.22, nous déterminons tout d'abord le nombre de zéros-système nuls du modèle $\sum (c_i, A, B)$. Il s'agit ensuite d'identifier, parmi ces zéros-système, ceux qui sont également des zéros invariants. A cet effet, nous utilisons la propriété suivante, corrélant les notions de zéro découplant et de zéro invariant - section 1.3.3.

Propriété 3.23 [57]. *Si un zéro découplant de sortie - mode non observable - peut être rendu zéro découplant d'entrée - mode non gouvernable - par injection de sortie, alors ce zéro découplant de sortie est un zéro invariant.*

Un zéro découplant de sortie qui peut être rendu zéro découplant d'entrée par injection de sortie est finalement identifié graphiquement par la propriété suivante.

Propriété 3.24 [8]. *Considérons le modèle ligne $\sum (c_i, A, B)$. Un zéro découplant de sortie peut être rendu zéro découplant d'entrée par injection de sortie si et seulement si, sur le modèle en causalité dérivée préférentielle, la dualisation du détecteur de sortie augmente le nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale.*

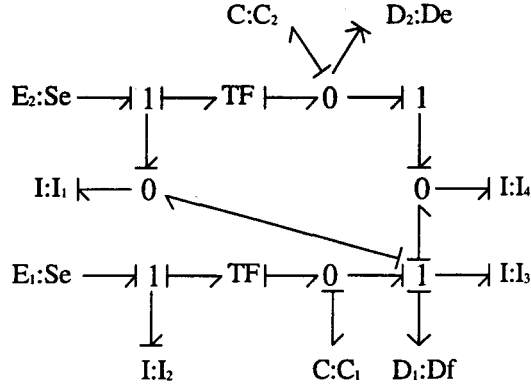
Une procédure tout à fait similaire - dualisation des sources d'entrée - doit permettre de déterminer le nombre de zéros invariants nuls d'un modèle non commandable. Ce résultat serait par exemple utile pour l'étude du rejet de perturbations quand le modèle n'est pas commandable par les seules entrées de commande.

Nous illustrons à présent ces résultats à travers un exemple.

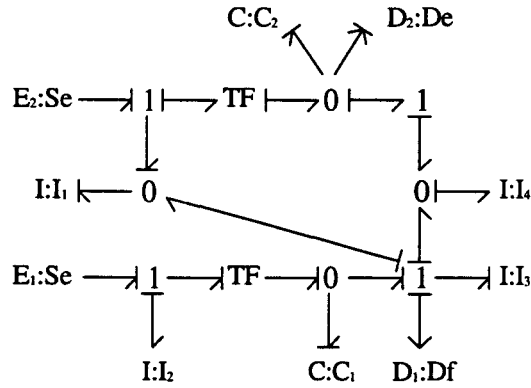
3.1.6 Exemple

Dans cette section, nous calculons le nombre de zéros invariants nuls d'un modèle bond-graph gouvernable mais non observable.

Considérons le modèle bond-graph présenté en figure 3.11 et noté BG1. Ce modèle possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et six éléments dynamiques, tous affectés d'une causalité intégrale.

Figure 3.11: modèle bond-graph $BG1$.

Imposons à ce modèle la causalité dérivée. Le modèle bond-graph ainsi obtenu est noté $BG2$. Il est décrit par la figure 3.12.

Figure 3.12: modèle bond-graph $BG2$.

Sur ce modèle, deux éléments dynamiques conservent une causalité intégrale: I_1 et I_3 par exemple. Le rang de la matrice d'état du modèle $BG1$ est donc égal à quatre - théorème 2.16.

La dualisation des deux sources d'entrée du modèle $BG2$ permet d'affecter à ces deux éléments dynamiques une causalité dérivée. Selon le théorème 2.20, le modèle $BG1$ est donc structurellement gouvernable.

D'une manière similaire - dualisation des détecteurs de sortie - on montre que le rang de la matrice d'observabilité est égal à cinq - section 2.2.2. Le modèle $BG1$ n'est donc pas observable: il possède un zéro découplant de sortie nul - définition 1.44. En outre, ce zéro découplant de sortie nul est aussi un zéro invariant nul car le modèle $BG1$ est carré - remarque 1.49.

Nous détaillons à présent le calcul du nombre de zéros invariants nuls du modèle ligne $\sum(c_2, A, B)$. Ce calcul est réalisé en deux étapes. Nous déter-

minons d'abord le nombre de zéros-système nuls du modèle. Nous identifions ensuite ceux qui sont également des zéros invariants.

Le modèle bond-graph associé au modèle $\sum (c_2, A, B)$ est obtenu en enlevant du modèle $BG1$ le détecteur de sortie D_1 . Nous obtenons ainsi le modèle $BG3$ - figure 3.13.

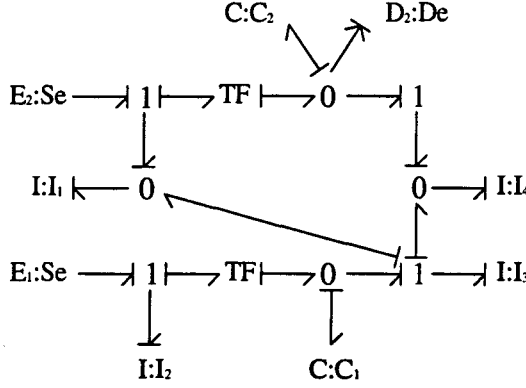


Figure 3.13: modèle bond-graph $BG3$.

Imposons à ce modèle la causalité dérivée. Le modèle bond-graph ainsi obtenu est noté $BG4$. Il est décrit par la figure 3.14.

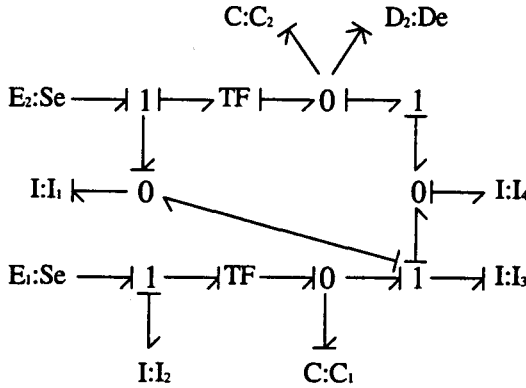


Figure 3.14: modèle bond-graph $BG4$.

Le calcul du nombre de zéros-système nuls du modèle $BG3$ est réalisé conformément à la propriété 3.22.

Le rang de la matrice d'état du modèle $BG3$ est bien sûr toujours égal à quatre. Le modèle $BG3$ possède donc deux pôles nuls: $q = 2$ - propriété 2.17.

D'autre part, l'entier n'_{2d} a pour valeur $n'_{2d} = 0$. En effet, sur le modèle $BG4$, l'un des plus courts chemins causaux du détecteur de sortie D_2 vers

l'ensemble des sources d'entrée est $D_2 \rightarrow I_4 \rightarrow I_3 \rightarrow E_2 (E_1)$. La longueur généralisée de ce chemin vaut zéro - définition 3.19.

La propriété 3.22 permet par conséquent de déduire la conclusion suivante : le modèle $\sum (c_2, A, B)$ possède deux zéros-système nuls. Ce sont ses deux zéros découplants de sortie nuls.

Nous déterminons à présent le nombre de zéros-système nuls qui sont également des zéros invariants. A cet effet, nous appliquons la propriété 3.24.

Sur le modèle BG4, la dualisation du détecteur de sortie D_2 n'impose une causalité intégrale qu'à un seul élément dynamique supplémentaire : l'élément I_4 . Parmi les deux zéros-système du modèle $\sum (c_2, A, B)$, un seul est donc un zéro invariant. Ce modèle possède par conséquent un zéro invariant nul.

Une étude tout à fait identique permet finalement de montrer que le modèle $\sum (c_1, A, B)$ possède un zéro-système nul, qui n'est cependant pas un zéro invariant. **Fin de l'exemple**

3.2 Outils pour la commande

Dans cette partie, nous déterminons l'expression formelle de retours d'état statiques réguliers $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ assurant le découplage entrée-sortie du modèle. Ces expressions sont obtenues grâce à l'utilisation conjointe de l'approche géométrique et du formalisme bond-graph.

Dans un contexte géométrique, synthétiser une loi de commande consiste tout d'abord à identifier des sous-espaces de l'espace d'état dont les propriétés sont adéquates pour l'objectif de commande visé [58]. Il s'agit ensuite d'en caractériser les expressions symboliques sous la forme la plus adaptée au calcul - simple - de la loi de commande.

Ainsi, nous rappelons dans un premier temps les techniques de synthèse sur lesquelles sont fondées nos travaux. Ces techniques sont dérivées de celles utilisées pour le rejet de perturbations. Elles reposent sur la notion centrale de sous-espace de découplage [11] [25]. Nous proposons en particulier deux choix de sous-espaces de découplage : $\mathcal{V}_i^* = \sup \mathcal{L}(A, B; \ker c_i)$ puis $\mathcal{V}_{istab}^* = \sup \mathcal{L}^-(A, B; \ker c_i)$ - section 1.2.3. Nous rappelons les propriétés induites par les lois de commande correspondantes sur le modèle découplé.

Puis nous montrons comment le formalisme bond-graph permet de déterminer l'expression symbolique de ces sous-espaces de découplage. Dans cette optique, nous proposons des méthodes graphiques fondées sur les notions de longueur et gain de chemins causaux. Les expressions formelles obtenues sont directement utilisées pour calculer l'expression symbolique des lois de

commande et de la matrice de transfert du modèle découplé.

Ces techniques sont finalement mises en oeuvre sur un exemple.

3.2.1 Découplage et rejet de perturbations

Dans cette section, nous rappelons des techniques de calcul de retours d'état statiques réguliers pour le découplage entrée-sortie des systèmes carrés. Ces méthodes utilisent des outils géométriques. Elles sont dérivées de techniques de synthèse de lois de commande par rejet de perturbations pour les systèmes monovariabiles.

Considérons le système monovariable décrit par l'équation (3.15), où $d(\cdot) \in \mathcal{D} \approx \mathcal{R}^q$ représente le vecteur de perturbations.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) \\ y(t) = cx(t) \end{cases} \quad (3.15)$$

Découpler la variable de sortie $y(t)$ du vecteur de perturbations $d(t)$ consiste à trouver une loi de commande qui rend la variable de sortie du système bouclé in affectée par le vecteur de perturbations. Cet objectif n'est réalisable que si le système en boucle ouverte satisfait certaines conditions. Des outils géométriques ont permis de caractériser simplement ces conditions. Elles sont rappelées par le théorème suivant.

Théorème 3.25 [59]. *La variable de sortie $y(t)$ du système (3.15) peut être découplée du vecteur de perturbations $d(t)$ si et seulement si il existe un sous-espace (A, B) -invariant D vérifiant l'équation (3.16). D est alors appelé sous-espace de découplage de la perturbation $d(t)$.*

$$\text{Im } E \subset D \subset \mathcal{V}^* \subset \ker c \quad (3.16)$$

Le plus grand sous-espace de découplage est $\mathcal{V}^* = \sup \mathcal{L}(A, B; \ker c)$ - propriété 1.17. Tous, ou seulement certains de ces sous-espaces de découplage doivent être rendus $(A + BF)$ -invariants par le bouclage F utilisé pour réaliser le rejet de la perturbation - équation (3.17).

$$(A + BF)D \subset D \quad (3.17)$$

Ce rejet peut donc être effectué à condition que la perturbation soit contenue dans un espace caché de la sortie - équation (3.16). Sous l'action d'une loi de commande judicieusement choisie, cet espace est invariant - équation

(3.17). La perturbation y restera donc "enfermée" et n'affectera pas la sortie du système bouclé.

Ce système bouclé est décrit par l'équation (3.18), où $v(t)$ représente la variable d'entrée de consigne.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + Bv(t) + Ed(t) \\ y(t) = cx(t) \end{cases} \quad (3.18)$$

La matrice de retour d'état F est calculée conformément à la propriété suivante.

Propriété 3.26 [11]. *Considérons un système monovisible décrit par l'équation (3.15) et vérifiant le théorème 3.25. Soient $n_0 \geq 1$ l'ordre de son zéro infini. Les bouclages F qui rendent $(A + BF)$ -invariant tout sous-espace de découplage D sont calculés selon les équations (3.19).*

$$\begin{cases} cA^{(n_0-1)}(A + BF) = h \\ h.D = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Cette propriété définit le rôle essentiel du sous-espace de découplage vis à vis des propriétés dynamiques du système bouclé. Ce lien est introduit par la matrice h . Selon les équations (3.19), la matrice h est une matrice ligne telle que le vecteur h^t est une combinaison linéaire des vecteurs de base du sous-espace $D^\perp$. Cette combinaison linéaire est exprimée via des paramètres qui seront les degrés de liberté introduits par la loi de commande dans le système bouclé. Conformément aux équations (3.19), le nombre de ces degrés de liberté est égal à $\dim D^\perp$. Concevoir la structure de la loi de commande consiste par conséquent à trouver le sous-espace de découplage adapté aux caractéristiques dynamiques souhaitées en boucle fermée.

Selon le théorème 3.25, le plus grand sous-espace de découplage possible est le sous-espace $\mathcal{V}^* = \sup \mathcal{L}(A, B; \ker c)$ - propriété 1.17. Cette solution minimise le nombre de degrés de liberté apportés par la loi de commande - équations (3.19). De ce point de vue, une alternative plus intéressante peut être apportée par le sous-espace $\mathcal{V}_{stab}^* \subset \mathcal{V}^*$ - propriété 1.20. Sous certaines conditions, ce sous-espace peut en effet être utilisé pour garantir la stabilité du système bouclé. Ce résultat est rappelé par le théorème suivant.

Théorème 3.27 [59]. *Supposons que le système (3.15) soit stabilisable. Sa variable de sortie $y(t)$ peut alors être découplée du vecteur de perturbations*

$d(t)$ tout en garantissant la stabilité du système bouclé si et seulement si l'équation (3.20) est vérifiée.

$$\text{Im } E \subset \mathcal{V}_{stab}^* \subset \mathcal{V}^* \quad (3.20)$$

Utilisons dans ce cas le sous-espace $\mathcal{V}_{stab}^*$ comme support au calcul de la matrice de retour d'état F - propriété 3.26. Conformément aux notations définies en section 1.2.1, cette matrice F vérifie alors la propriété suivante.

Propriété 3.28 [11]. *Dans le cas monovarié, toute matrice de retour d'état F telle que $(A + BF) \mathcal{V}_{stab}^* \subset \mathcal{V}_{stab}^*$ vérifie l'équation (3.21).*

$$\sigma(\mathcal{V}_{stab}^* | A + BF | \mathcal{V}_{stab}^*) \subset C_- \quad (3.21)$$

Remarque 3.29 . *A des fins didactiques, nous avons utilisé les théorèmes 3.25 et 3.27 dans un contexte monovarié. Ils sont en fait également valables pour des systèmes multivariés.*

Ces résultats relatifs au rejet de perturbation pour les systèmes monovariés sont à présent étendus aux systèmes multivariés carrés statiquement découplables. Une méthode est ainsi rappelée, permettant de déterminer l'expression formelle de lois de commande par découplage entrée-sortie.

Considérons le système multivarié décrit par l'équation (3.22). Ce système possède p variables d'entrées et p variables de sortie. De plus, il est supposé découplable par retour d'état statique régulier.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.22)$$

Le système découplé par un retour d'état statique régulier $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ est décrit par l'équation (3.23), où $v(t)$ représente le vecteur d'entrées de consignes.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + BGv(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.23)$$

Notons $\bar{v}_i(t)$ le vecteur $v(t)$ privé de sa $i^{\text{ème}}$ composante. Notons également (BG^i) la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice (BG) et E_i la matrice (BG) privée de sa $i^{\text{ème}}$ colonne. Décomposons ainsi le système (3.23) en p sous-systèmes

monovariabiles $\sum (c_i, (A + BF), BG^i)$, pour chacun desquels le vecteur $\bar{v}_i(t)$ est vu comme un vecteur de perturbations - équation (3.24).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + BG^i v_i(t) + E_i \bar{v}_i(t) \\ y_i(t) = c_i x(t) \end{cases} \quad (3.24)$$

Le système (3.23) étant découplé, la variable de sortie $y_i(t)$ du système (3.24) est découplée du vecteur de perturbations $\bar{v}_i(t)$, pour $i = 1, \dots, p$ simultanément. Le théorème 3.25 permet alors de déduire la propriété suivante.

Propriété 3.30 [25][11]. *A chaque variable de sortie $y_i(t)$ du système découplé (3.23) sont associés des sous-espaces $(A + BF)$ -invariants D_i vérifiant l'équation (3.25). Ces sous-espaces sont appelés sous-espaces de découplage associés à la variable de sortie $y_i(t)$.*

$$\text{Im } E_i \subset D_i \subset \mathcal{V}_i^* \subset \ker c_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.25)$$

Le plus grand sous-espace de découplage est $\mathcal{V}_i^* = \sup \mathcal{L}(A, B; \ker c_i)$ - section 1.2.3.

Ainsi, pour les p sous-systèmes monovariabiles (3.24) simultanément, la loi de commande $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ construit la perturbation $\bar{v}_i(t)$ de telle sorte qu'elle soit incluse dans un sous-espace de découplage existant D_i - équation (3.25). Ce sous-espace est rendu $(A + BF)$ -invariant : la perturbation $\bar{v}_i(t)$ y restera donc "enfermée".

Les propriétés 3.26 et 3.30 permettent par conséquent de déduire une règle de calcul des lois de commande $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ découplant le système (3.22). Cette règle est exprimée par la propriété suivante.

Propriété 3.31 [11]. *Soit un système carré découplable par retour d'état statique régulier. Soient Ω sa matrice de découplage et $\{n_i\}$ sa structure à l'infini en ligne. Soit $\{D_i\}$ une famille de supports géométriques solution pour le problème du découplage. L'ensemble des matrices $\{F, G\}$ telles que la loi de commande $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ découple le système est alors calculé selon les équations (3.26).*

$$\begin{cases} h_i \cdot D_i = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ \Omega F = [h_i - c_i A^{n_i}]_{i=1, \dots, p} \\ \Omega G = \text{diag}[g_i]_{i=1, \dots, p} \end{cases} \quad (3.26)$$

Cette propriété définit ainsi une méthode de calcul des matrices F et G à partir d'une famille de sous-espaces de découplage solution. L'expression symbolique de ces matrices F et G est déterminée grâce à l'utilisation du logiciel Maple.

Les coefficients g_i , $i = 1, \dots, p$, sont des paramètres librement assignables, destinés à régler les gains statiques du système bouclé. D'autre part, comme dans le cas monovisible, chaque matrice ligne h_i est obtenue par combinaison linéaire des vecteurs de base du sous-espace $D_i^\perp$. Elle introduit par conséquent dans la loi de commande un nombre de degrés de liberté égal à $\dim D_i^\perp$. Le choix des sous-espaces de découplage permet donc de fixer le nombre total de degrés de liberté introduits par la loi de commande. Il permet en particulier d'assurer la stabilité du système découplé, si le découplage avec stabilité est possible.

Nous utilisons dans ce cas deux ensembles de sous-espaces de découplage: $\{\mathcal{V}_1^*, \dots, \mathcal{V}_p^*\}$ puis $\{\mathcal{V}_{1stab}^*, \dots, \mathcal{V}_{pstab}^*\}$. Ces stratégies déterminent les propriétés dynamiques du système découplé, comme le rappelle la propriété suivante.

Propriété 3.32 [59]/[41]. *Considérons un système carré, gouvernable et découplable par retour d'état statique régulier. En choisissant $\{\mathcal{V}_1^*, \dots, \mathcal{V}_p^*\}$ comme ensemble de sous-espaces de découplage, les modes non assignables du système découplé sont tous les zéros invariants du système en boucle ouverte. Supposons de plus que le découplage avec stabilité soit possible. En choisissant $\{\mathcal{V}_{1stab}^*, \dots, \mathcal{V}_{pstab}^*\}$ comme ensemble de sous-espaces de découplage, les modes non assignables du système découplé sont alors tous les zéros invariants strictement stables du système en boucle ouverte.*

Une démonstration de cette propriété, utilisant la notion de sous-espaces de découplage, est proposée en annexe A.8.

Remarque 3.33 . *Le retour d'état crée un espace inobservable contenu dans le sous-espace $\mathcal{V}^*$ - propriété 1.18. Le système étant carré, $R^* = 0$: la partie gouvernable du sous-espace $\mathcal{V}^*$ est vide. Tous les modes rendus inobservables par le retour d'état sont donc également rendus ingouvernables. Ceci justifie l'expression "modes non assignables" utilisée dans la propriété 3.32.*

Selon la propriété 3.31, pour calculer la loi de commande associée à une famille de sous-espaces de découplage $\{D_1, \dots, D_p\}$, il faut connaître l'expression formelle des sous-espaces $\{D_1^\perp, \dots, D_p^\perp\}$. Nous montrons, dans la section suivante, comment le formalisme bond-graph permet d'établir graphiquement l'expression symbolique des bases des sous-espaces $\mathcal{V}_i^{*\perp}$ et $\mathcal{V}_{istab}^{*\perp}$.

3.2.2 Sous-espaces de découplage

Dans cette section, nous calculons l'expression formelle des bases des sous-espaces $\mathcal{V}_i^{*\perp}$ et $\mathcal{V}_{istab}^{*\perp}$. Ces expressions sont déduites de l'étude des modèles bond-graph en causalités intégrale et dérivée.

Les modèles bond-graph étudiés sont de rang plein - théorème 2.16. De plus, en causalité intégrale préférentielle, tous leurs éléments dynamiques sont affectés d'une causalité intégrale.

L'équation (1.31) donne l'expression d'une base du sous-espace $\mathcal{V}_i^{*\perp}$. Cette expression est rappelée par l'équation (3.27), où n_i est l'ordre du zéro infini associé à la variable de sortie $y_i(t)$.

$$\mathcal{V}_i^{*\perp} = \text{vect} \left\{ (c_i)^t, \dots, (c_i A^{n_i-1})^t \right\}, \quad n_i \geq 1 \quad (3.27)$$

L'expression formelle de chaque vecteur de cette base est obtenue par l'étude du modèle bond-graph en causalité intégrale préférentielle. Notons en effet X^j le $j^{\text{ème}}$ vecteur de base de l'espace d'état. Notons également D_i le $i^{\text{ème}}$ détecteur de sortie du modèle bond-graph en causalité intégrale et DE_j son $j^{\text{ème}}$ élément dynamique en causalité intégrale. Le gain de cet élément est noté $g(DE_j)$. Il vaut $\frac{1}{I}$ pour un élément I et $\frac{1}{C}$ pour un élément C . Nous pouvons alors rappeler la propriété suivante.

Propriété 3.34 [46]. Pour $k \geq 0$, $[c_i A^k] X^j = \sum G_k(DE_j, D_i) \times g(DE_j)$, où $G_k(DE_j, D_i)$ est le terme constant du gain d'un chemin causal de longueur k entre l'élément dynamique DE_j et le détecteur de sortie D_i .

La $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur $(c_i A^k)^t$, $k = 0, \dots, n_i - 1$, exprimé par l'équation (3.27), est égale au coefficient $[c_i A^k] X^j$. Son expression formelle est donc déterminée, sur le modèle bond-graph en causalité intégrale préférentielle, conformément à la propriété 3.34.

Considérons à présent le modèle bond-graph affecté d'une causalité dérivée préférentielle. Otons de ce modèle tous les détecteurs de sortie sauf le $i^{\text{ème}}$. Le modèle bond-graph obtenu est noté BGD_i - section 3.1.3. La représentation mathématique qui lui est associée est donnée par les équations (3.28).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A^{-1} \ddot{x}(t) - A^{-1} B u(t) \\ y_i(t) = c_i A^{-1} \ddot{x}(t) - c_i A^{-1} B u(t) \end{cases} \quad (3.28)$$

Soit n_{id} l'ordre du zéro infini associé au modèle bond-graph BGD_i - propriété 3.11. A l'aide de cet entier, nous définissons le sous-espace $\mathcal{V}_{id}^{*\perp}$, dont

une base est donnée par l'équation (3.29).

$$\mathcal{V}_{id}^{*\perp} = \text{vect} \left\{ (c_i A^{-1})^t, \dots, (c_i A^{-n_{id}})^t \right\}, \quad n_{id} \geq 1 \quad (3.29)$$

L'expression formelle de chaque vecteur de cette base est obtenue par l'étude du modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle BGD_i . Notons en effet $\tilde{X}^j$ le $j^{\text{ème}}$ vecteur de base de l'espace "d'état" associé au modèle BGD_i - section 2.2.1. DE_{jd} représente son $j^{\text{ème}}$ élément dynamique en causalité dérivée et D_i son $i^{\text{ème}}$ détecteur de sortie. L'expression de $y_i(t)$ donnée par les équations (3.28) permet de déduire de manière immédiate la propriété suivante.

Propriété 3.35 [6]. Pour $k \geq 1$, $[c_i A^{-k}] \tilde{X}^j = \sum G_{k-1}(DE_{jd}, D_i)$, où le coefficient $G_{k-1}(DE_{jd}, D_i)$ représente, sur le modèle bond-graph BGD_i , le terme constant du gain d'un chemin causal de longueur $(k-1)$ entre l'élément dynamique DE_{jd} et le détecteur de sortie D_i .

La $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur $(c_i A^{-k})^t$, $k = 1, \dots, n_{id}$, exprimé par l'équation (3.29), est égale au coefficient $[c_i A^{-k}] \tilde{X}^j$. Son expression formelle est donc déterminée, sur le modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle BGD_i , conformément à la propriété 3.35.

Comme le montrent les propriétés 3.34 et 3.35, les sous-espaces $\mathcal{V}_i^{*\perp}$ et $\mathcal{V}_{id}^{*\perp}$ sont calculés, sur les modèles bond-graph en causalités intégrale et dérivée, par un algorithme identique. Conformément aux équations (3.27) et (3.29), ils vérifient d'autre part la propriété suivante.

Propriété 3.36 [6]. Les dimensions des sous-espaces $\mathcal{V}_i^{*\perp}$ et $\mathcal{V}_{id}^{*\perp}$ vérifient les équations (3.30).

$$\begin{cases} \dim(\mathcal{V}_i^{*\perp}) = n_i \\ \dim(\mathcal{V}_{id}^{*\perp}) = n_{id} \end{cases} \quad (3.30)$$

Dans le cas où le sous-système ligne $\sum(c_i, A, B)$ ne possède aucun zéro invariant strictement instable, une base du sous-espace $\mathcal{V}_{istab}^{*\perp}$ est finalement exprimée à partir des bases des sous-espaces $\mathcal{V}_i^{*\perp}$ et $\mathcal{V}_{id}^{*\perp}$. Cette expression est donnée par la propriété suivante.

Propriété 3.37. Si le sous-système ligne $\sum(c_i, A, B)$ ne possède aucun zéro invariant strictement instable, le sous-espace $\mathcal{V}_{istab}^{*\perp}$ est exprimé en fonction des sous-espaces $\mathcal{V}_i^{*\perp}$ et $\mathcal{V}_{id}^{*\perp}$ conformément à l'équation (3.31).

$$\mathcal{V}_{istab}^{*\perp} = \mathcal{V}_i^{*\perp} \oplus \mathcal{V}_{id}^{*\perp} \quad (3.31)$$

La démonstration de cette propriété est présentée en annexe A.9.

La propriété 3.37 appelle quelques commentaires. Si le modèle global ne possède pas de zéros invariants strictement instables, les modèles en ligne n'en possèdent pas non plus. Dans ce cas, si une solution stable existe - théorème 3.17 - un retour d'état calculé à partir des sous-espaces $\mathcal{V}_{istab}^{*\perp}$ - propriétés 3.32, 3.31 et 3.37 - permet de rendre le modèle découplé stable : les sous-espaces $\mathcal{V}_{id}^{*\perp}$ ont apporté les degrés de liberté nécessaires pour éliminer, de l'ensemble des modes non assignables en boucle fermée, les zéros invariants nuls globaux.

Par contre, si le modèle global possède des zéros invariants strictement instables, un modèle découplé stable ne peut être obtenu que si ces zéros invariants strictement instables sont aussi zéros invariants des modèles en ligne - théorème 1.62. Dans ce cas, il doit exister un ensemble de sous-espaces $\{\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_p\}$ permettant d'apporter le nombre de degrés de liberté nécessaires pour éliminer, de l'ensemble des modes non assignables en boucle fermée, les zéros invariants globaux strictement instables. Une intuition nous incite à penser que les sous-espaces de découplage $\mathcal{V}_{istab}^*$, $i = 1, \dots, p$, pourraient alors vérifier l'équation (3.32).

$$\mathcal{V}_{istab}^{*\perp} = \mathcal{V}_i^{*\perp} \oplus \mathcal{V}_{id}^{*\perp} \oplus \mathcal{J}_i^\perp \quad (3.32)$$

Dans cette équation, les sous-espaces $\{\mathcal{J}_1^\perp, \dots, \mathcal{J}_p^\perp\}$ caractérisent les zéros invariants strictement instables des modèles en ligne au même titre que les sous-espaces $\{\mathcal{V}_{id}^{*\perp}, \dots, \mathcal{V}_{pd}^{*\perp}\}$ en caractérisent les zéros invariants nuls - théorème 3.15 et propriété 3.36. Le formalisme bond-graph ne permet malheureusement pas encore de valider cette intuition.

3.2.3 Exemple

Dans cette section, nous illustrons par un exemple les techniques de calcul de lois de commande présentées dans la section précédente.

Cet exemple est traité en deux étapes. Dans un premier temps, nous choisissons comme sous-espaces de découplage les sous-espaces $\{\mathcal{V}_i^*\}_{i=1,\dots,p}$. Le modèle découplé ainsi obtenu est instable - **phase1**. Nous calculons donc une seconde loi de commande, utilisant comme supports géométriques les sous-espaces $\{\mathcal{V}_{istab}^*\}_{i=1,\dots,p}$. Le modèle découplé obtenu est ainsi rendu stable - **phase2**.

Le modèle bond-graph présenté dans cette section est identique à celui étudié en section 3.1.4. Ce modèle est décrit par la figure 3.15 et noté BG1. Il possède deux sources d'entrée $\{E_1, E_2\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et six éléments dynamiques, tous affectés d'une causalité intégrale.

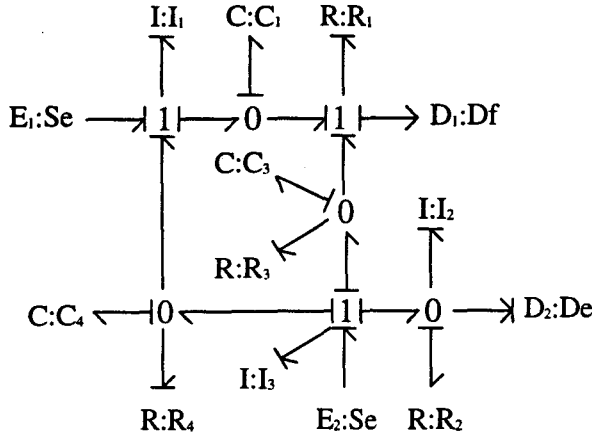


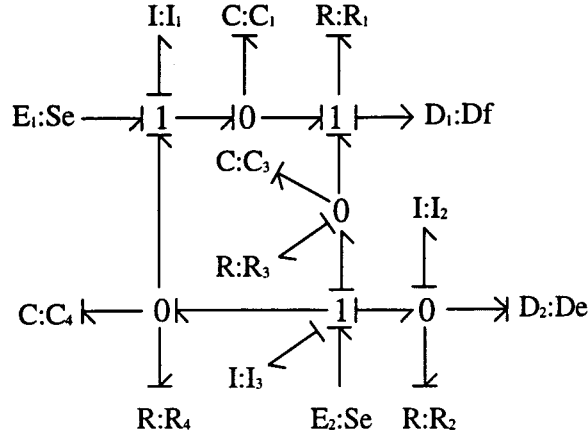
Figure 3.15: modèle bond-graph *BG1*.

Le vecteur d'état associé à ce modèle est par conséquent donné par l'équation (3.33) - section 2.1.3.

$$x(t) = \begin{bmatrix} p_{I_1}(t) & p_{I_2}(t) & p_{I_3}(t) & q_{C_1}(t) & q_{C_3}(t) & q_{C_4}(t) \end{bmatrix}^t \quad (3.33)$$

Le modèle bond-graph *BG1* est de rang plein - théorème 2.16 - et découplable avec stabilité par retour d'état statique régulier - théorème 3.17. Il possède de plus trois zéros invariants, dont les expressions sont $s = 0$, $s = \frac{-1}{R_3 C_3}$ et $s = \frac{-1}{R_4 C_4}$ - section 3.1.4.

La causalité dérivée peut être assignée à l'ensemble des éléments dynamiques du modèle bond-graph *BG1*. Le modèle bond-graph ainsi obtenu est noté *BG2*. Il est décrit par la figure 3.16.

Figure 3.16: modèle bond-graph $BG2$.

Phase1 : découplage par les sous-espaces $\{\mathcal{V}_1^*, \mathcal{V}_2^*\}$

Les ordres des zéros infinis en ligne du modèle bond-graph $BG1$ valent respectivement $n_1 = 2$ et $n_2 = 1$ - propriété 2.26. Conformément à l'équation (3.27), les sous-espaces $\mathcal{V}_1^{*\perp}$ et $\mathcal{V}_2^{*\perp}$ vérifient par conséquent l'équation (3.34).

$$\begin{cases} \mathcal{V}_1^{*\perp} = \text{vect} \{ (c_1)^t, (c_1 A)^t \} \\ \mathcal{V}_2^{*\perp} = \text{vect} \{ (c_2)^t \} \end{cases} \quad (3.34)$$

Nous détaillons le calcul de la base du sous-espace $\mathcal{V}_1^{*\perp}$. Ce calcul est réalisé en appliquant la propriété 3.34 au modèle bond-graph $BG1$.

L'expression symbolique du vecteur $(c_1)^t$ est obtenue par l'étude des chemins causaux de longueur zéro des éléments dynamiques en causalité intégrale vers le détecteur de sortie D_1 . Ces chemins causaux n'existent qu'à partir des éléments dynamiques C_1 et C_3 : ce sont les chemins $C_1 \rightarrow R_1 \rightarrow D_1$ et $C_3 \rightarrow R_1 \rightarrow D_1$. Les gains de ces chemins sont tous les deux égaux à $\frac{1}{R_1}$ - définition 2.7. Conformément à la propriété 3.34, le vecteur $(c_1)^t$ a donc pour expression - équation (3.35) :

$$(c_1)^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_3} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Selon cette même propriété, l'expression symbolique du vecteur $(c_1 A)^t$ est obtenue par l'étude des chemins causaux de longueur un des éléments dynamiques en causalité intégrale vers le détecteur de sortie D_1 . Ces chemins causaux n'existent qu'à partir des éléments dynamiques I_1 , I_3 , C_1 et C_3 .

Examinons par exemple les chemins causaux de longueur un allant de l'élément dynamique C_1 vers le détecteur de sortie D_1 . Ces chemins sont $C_1 \xrightarrow{-} R_1 \xrightarrow{-} C_1 \xrightarrow{-} R_1 \xrightarrow{-} D_1$ et $C_1 \xrightarrow{-} R_1 \xrightarrow{-} C_3 \xrightarrow{-} R_1 \xrightarrow{-} D_1$. Leurs gains valent respectivement $\frac{-1}{R_1^2 C_1}$ et $\frac{-1}{R_1^2 C_3}$. Soit X^4 le quatrième vecteur de base de l'espace d'état - équation (3.33). Conformément à la propriété 3.34, le coefficient $[c_1 A] X^4$ a donc pour expression - équation (3.36) :

$$[c_1 A] X^4 = \frac{-1}{R_1 C_1} \cdot \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_3} \right) \quad (3.36)$$

Nous calculons ainsi l'expression symbolique de chaque composante du vecteur $(c_1 A)^t$. Nous en déduisons l'expression d'une base du sous-espace $\mathcal{V}_1^{*\perp}$ - équation (3.37).

$$\mathcal{V}_1^{*\perp} = \text{vect} \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{R_1 C_1 I_1} \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_1 C_3 I_3} \\ \frac{1}{R_1 C_1} & \frac{-1}{R_1 C_1} \cdot \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_3} \right) \\ \frac{1}{R_1 C_3} & \frac{-1}{R_1 C_3} \cdot \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_3} + \frac{1}{R_3 C_3} \right) \\ 0 & 0 \end{array} \right. \quad (3.37)$$

De la même manière, nous déterminons l'expression symbolique d'une base du sous-espace $\mathcal{V}_2^{*\perp}$ - équation (3.38).

$$\mathcal{V}_2^{*\perp} = \text{vect} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{-R_2}{I_2} \\ \frac{R_2}{I_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \quad (3.38)$$

Puis, à partir des équations (3.37) et (3.38), nous calculons l'expression formelle de la loi de commande utilisant les sous-espaces $\{\mathcal{V}_1^*, \mathcal{V}_2^*\}$ comme sous-espaces de découplage. Ce calcul est réalisé conformément à la propriété 3.31.

Les sous-espaces $\{\mathcal{V}_1^*, \mathcal{V}_2^*\}$ vérifient l'équation (3.39).

$$\dim(\mathcal{V}_1^{*\perp}) + \dim(\mathcal{V}_2^{*\perp}) = 3 \quad (3.39)$$

Nous savons donc, avant d'effectuer tout calcul, que ce choix de sous-espaces de découplage apporte trois degrés de liberté en boucle fermée - propriété 3.31. Ces trois degrés de liberté serviront à assigner trois des pôles du système découplé. Le modèle étant d'ordre six, trois pôles du système bouclé ne pourront donc pas être assignés librement. Ces trois pôles sont les trois zéros invariants du modèle bond-graph en boucle ouverte $BG1$ - propriété 3.32.

Le calcul symbolique de la loi de commande est réalisé à l'aide du logiciel Maple. La matrice ligne h_i utilisée pour ce calcul, $i = 1, 2$, est obtenue par combinaison linéaire des vecteurs de base du sous-espace $\mathcal{V}_i^{*\perp}$, $i = 1, 2$ - propriété 3.31, équations (3.37) et (3.38). De ce calcul est déduite l'expression formelle de la matrice de transfert $T_{BF}(s)$ en boucle fermée. Cette expression est donnée par l'équation (3.40).

$$T_{BF}(s) = \begin{bmatrix} \frac{g_1}{(s^2 - p_1^1 s - p_0^1)} & 0 \\ 0 & \frac{g_2}{(s - p_0^2)} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Cette matrice est diagonale. De plus, comme prévu, elle est d'ordre trois. Les coefficients g_1 et g_2 sont des paramètres introduits par la loi de commande pour régler les gains statiques du système bouclé. Les coefficients p_0^1 , p_1^1 et p_0^2 sont les degrés de liberté introduits dans la loi de commande respectivement par les sous-espaces de découplage $\mathcal{V}_1^*$ et $\mathcal{V}_2^*$ - propriété 3.31.

D'autre part, l'expression formelle du polynôme caractéristique en boucle fermée $P_{BF}(s)$ est donnée par l'équation (3.41).

$$P_{BF}(s) = s \left(s + \frac{1}{R_3 C_3} \right) \left(s + \frac{1}{R_4 C_4} \right) (s - p_0^2) (s^2 - p_1^1 s - p_0^1) \quad (3.41)$$

Cette équation confirme le fait que les trois modes non assignables du modèle découplé sont les trois zéros invariants du modèle bond-graph en boucle ouverte $BG1$. L'un d'entre eux étant nul, le modèle découplé est instable. Nous calculons par conséquent une seconde loi de commande, destinée à assurer la stabilité du modèle découplé.

Phase2 : découplage par les sous-espaces $\{\mathcal{V}_{1stab}^*, \mathcal{V}_{2stab}^*\}$

Le modèle bond-graph $BG1$ est découplable avec stabilité par retour d'état statique régulier - section 3.1.4. Selon la propriété 3.32, les sous-espaces $\{\mathcal{V}_{1stab}^*, \mathcal{V}_{2stab}^*\}$ sont donc des supports géométriques garantissant la stabilité du modèle découplé. D'autre part, le modèle $BG1$ ne possède aucun zéro invariant strictement instable. Les sous-espaces de découplage $\{\mathcal{V}_{1stab}^*, \mathcal{V}_{2stab}^*\}$ peuvent donc être calculés conformément à la propriété 3.37.

Les ordres des zéros infinis du modèle bond-graph $BG2$ ont respectivement pour valeurs $n_{1d} = 0$ et $n_{2d} = 1$ - propriété 3.11. Selon l'équation (3.29), une base des sous-espaces $\mathcal{V}_{1d}^{*\perp}$ et $\mathcal{V}_{2d}^{*\perp}$ est donc donnée par l'équation (3.42).

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{1d}^{*\perp} = 0 \\ \mathcal{V}_{2d}^{*\perp} = \text{vect} \left\{ (c_2 A^{-1})^t \right\} \end{cases} \quad (3.42)$$

L'expression symbolique de la base du sous-espace $\mathcal{V}_{2d}^{*\perp}$ est calculée en appliquant la propriété 3.35 au modèle bond-graph $BG2$. Cette propriété indique en effet que l'expression formelle du vecteur $(c_2 A^{-1})^t$ est obtenue par l'étude des chemins causaux de longueur zéro des éléments dynamiques en causalité dérivée vers le détecteur de sortie D_2 . Un tel chemin causal n'existe qu'à partir de l'élément dynamique I_2 . Il rejoint directement le détecteur de sortie D_2 . Le gain de ce chemin causal vaut +1 - section 3.1.3. Conformément à la propriété 3.35, le vecteur $(c_2 A^{-1})^t$ a donc pour expression - équation (3.43) :

$$(c_2 A^{-1})^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

L'expression d'une base du sous-espace $\mathcal{V}_{2d}^{*\perp}$ est donc donnée par l'équation (3.44).

$$\mathcal{V}_{2d}^{*\perp} = \text{vect} \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

La propriété 3.37 et l'équation (3.42) nous permettent donc de déduire l'équation (3.45).

$$\mathcal{V}_{1stab}^{*\perp} = \mathcal{V}_1^{*\perp} \quad (3.45)$$

De plus, compte tenu des équations (3.38) et (3.44), nous pouvons également écrire - équation (3.46) :

$$\mathcal{V}_{2stab}^{*\perp} = vect \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \frac{-R_2}{I_2} & 1 \\ \frac{R_2}{I_3} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right. \quad (3.46)$$

A partir de ces équations, nous calculons l'expression formelle de la loi de commande utilisant les sous-espaces $\{\mathcal{V}_{1stab}^*, \mathcal{V}_{2stab}^*\}$ comme sous-espaces de découplage - propriété 3.31. Ces sous-espaces vérifient l'équation (3.47).

$$\dim(\mathcal{V}_{1stab}^{*\perp}) + \dim(\mathcal{V}_{2stab}^{*\perp}) = 4 \quad (3.47)$$

La propriété 3.31 permet donc de déduire que ce choix de sous-espaces de découplage apporte quatre degrés de liberté. Par rapport à la solution de commande précédente, nous disposerons donc d'un degré de liberté supplémentaire - équation (3.39). Ce degré de liberté est introduit par le sous-espace $\mathcal{V}_{2d}^{*\perp}$. Il permet de rendre observable et gouvernable le mode nul en boucle fermée généré par la solution de commande précédente. Les modes non assignables du nouveau modèle découplé seront donc les deux zéros invariants strictement stables $s = \frac{-1}{R_3 C_3}$ et $s = \frac{-1}{R_4 C_4}$ du modèle bond-graph en boucle ouverte BG1 - propriété 3.32.

La loi de commande est calculée à partir des matrices lignes h_1 et h_2 , obtenues par combinaison linéaire des vecteurs de base des sous-espaces respectifs $\mathcal{V}_{1stab}^{*\perp}$ et $\mathcal{V}_{2stab}^{*\perp}$ - propriété 3.31, équations (3.45) et (3.46). Nous en déduisons l'expression formelle de la nouvelle matrice de transfert en boucle fermée $T_{BF}(s)$. Cette expression est donnée par l'équation (3.48).

$$T_{BF}(s) = \begin{bmatrix} \frac{g_1}{(s^2 - p_1^1 s - p_0^1)} & 0 \\ 0 & \frac{g_2 s}{(s^2 - p_0^2 s - p_d^2)} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Cette matrice est diagonale et, comme prévu, d'ordre quatre. Le degré de liberté supplémentaire apporté par rapport à la solution de commande précédente - équation (3.40) - est le coefficient p_d^2 . Remarquons que le mode nul en boucle fermée qu'il permet de rendre observable et gouvernable devient un zéro de la fonction de transfert correspondante - équation (3.48).

L'expression symbolique du nouveau polynôme caractéristique en boucle fermée est donnée par l'équation (3.49).

$$P_{BF}(s) = \left(s + \frac{1}{R_3 C_3}\right) \left(s + \frac{1}{R_4 C_4}\right) (s^2 - p_0^2 s - p_d^2) (s^2 - p_1^1 s - p_0^1) \quad (3.49)$$

Cette expression montre que les seuls modes non assignables du modèle découplé sont désormais les deux zéros invariants strictement stables du modèle bond-graph en boucle ouverte *BG1*. Le modèle découplé est donc à présent stable. **Fin de l'exemple**

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre sont exposés nos résultats concernant le découplage entrée-sortie des modèles bond-graph possédant autant de sources d'entrée que de détecteurs de sortie.

Nous avons tout d'abord présenté des méthodes graphiques d'analyse destinées à apporter une réponse à la question suivante : existe-t-il un retour d'état statique régulier permettant de concevoir un modèle découplé stable ? Répondre à cette question nécessite de connaître la structure des zéros invariants du modèle. Nous avons caractérisé cette structure grâce à des procédures graphiques applicables aux modèles dont la matrice d'état est de rang quelconque - sections 3.1.1 et 3.1.5 - ou seulement de rang plein - section 3.1.3.

A partir de supports géométriques, nous avons ensuite proposé des méthodes graphiques de synthèse de lois de commande. En particulier, nous avons déterminé l'expression formelle de retours d'état statiques réguliers assurant à la fois la non interaction et la stabilité du modèle bouclé, quand le problème est soluble. Ces méthodes sont applicables aux modèles dont la matrice d'état est de rang plein.

Si le modèle ne peut pas être découplé avec stabilité par retour d'état statique régulier, des techniques de contrôle statique non régulier peuvent être mises en oeuvre. Une approche de solution à ce type de problème est présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Approche du cas non régulier

Les résultats présentés dans ce chapitre concernent le problème du découplage entrée-sortie par loi de commande statique non régulière. Ce type de loi de commande s'écrit sous la forme $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$, où la matrice G n'est pas inversible. Par l'action d'un tel bouclage, le nombre d'entrées de commande indépendantes n'est donc plus conservé.

Par le passé, des travaux importants ont été engagés pour essayer de déterminer des conditions de découplabilité entrée-sortie par retour d'état statique non régulier [15]. L'intérêt porté à ce type de stratégie de commande provient du fait qu'aucune raison pratique ne justifie la contrainte de régularité imposée jusqu'à présent sur la structure de la loi de commande. Malgré des contributions très importantes, aucune condition nécessaire et suffisante de découplabilité statique n'a pu être identifiée dans le cas général [13] [15] [28].

Notre objectif, à travers ce chapitre, est d'évaluer l'intérêt du formalisme bond-graph pour la résolution de ce type de problème. Nous étudions donc des modèles bond-graph de rang plein possédant m sources d'entrée et p détecteurs de sortie, avec $m > p$. Pour cette classe de modèles, nous ne proposons pas de condition générale de solvabilité du problème de découplage entrée-sortie statique. Par contre, nous montrons comment des outils graphiques élémentaires peuvent rapidement conduire à une solution simple à partir d'un modèle donné.

Nous envisageons en particulier deux types de problème. Le premier concerne les modèles découplables par retour d'état statique régulier, pour lesquels aucun modèle découplé stable ne peut être conçu. Nous identifions par une procédure graphique simple la structure d'un retour d'état permettant éventuellement de rendre le modèle bouclé découplable avec stabilité. Nous étudions ensuite des modèles non découplables par retour d'état statique régulier. Dans le même esprit, nous identifions graphiquement la structure d'un retour d'état permettant éventuellement de rendre le modèle

bouclé découplable par retour d'état statique régulier. Dans ces deux cas, une seconde boucle de commande découple ensuite le modèle avec stabilité - chapitre 3.

4.1 Stabilité

Dans cette partie, nous étudions des modèles bond-graph de rang plein possédant m sources d'entrée et p détecteurs de sortie, avec $m > p$. Ces modèles ne sont découplables par retour d'état statique régulier qu'en utilisant p entrées de commande parmi les m disponibles. D'autre part, la stabilité du modèle découplé ne peut pas être obtenue.

Dans ces conditions, l'objectif est de définir graphiquement la structure d'un premier retour d'état destiné à rendre le modèle découplable avec stabilité. Le modèle bouclé sera ensuite découplé avec stabilité par un second retour d'état, calculé selon les techniques présentées dans le chapitre 3.

Les méthodologies exposées dans ce chapitre ne reposent sur aucun élément théorique nouveau par rapport à ceux qui ont déjà été introduits. Elles résultent au contraire de l'exploitation graphique du modèle bond-graph et des résultats antérieurs. Nous choisissons par conséquent de les présenter à travers un exemple

Nous exposons donc dans un premier temps le principe général de résolution. Puis nous détaillons ces méthodes à travers un exemple pour illustrer la démarche d'analyse graphique. Nous présentons enfin les étapes du calcul formel des lois de commande.

4.1.1 Principe de résolution

Dans cette section, nous exposons le principe général de résolution [7].

Parmi les m sources d'entrée disponibles, p sources permettent de découpler le modèle par retour d'état statique régulier. Ces sources sont identifiées sur le modèle bond-graph en causalité intégrale conformément au théorème 1.59 et aux propriétés 2.26 et 2.28. L'idée est d'utiliser les autres sources - $(m - p)$ sources au maximum - pour rendre, par un premier bouclage, le modèle découplable avec stabilité.

La stabilité du modèle découplé est liée à la structure infinie du modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle. En effet, le modèle bond-graph en causalité intégrale est découplable avec stabilité si et seulement si, sur le modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle, les gains des plus courts chemins causaux entrée-sortie différents ne sont pas proportionnels - théorème 3.17.

Si cette condition n'est pas vérifiée, nous créons, sur le modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle, de nouveaux chemins causaux qui cassent la proportionnalité générant l'instabilité.

Soit $\delta \leq (m - p)$ le nombre nécessaire de nouveaux chemins causaux entrée-sortie. Ces δ nouveaux chemins causaux empruntent des liens d'information reliant δ jonctions judicieusement choisies aux δ sources d'entrée inutilisées pour réaliser le découplage - un lien par source d'entrée. Ces chemins constituent un retour "d'état" sur le modèle bond-graph en causalité dérivée préférentielle. Nous verrons que ce bouclage fictif est équivalent à un retour d'état sur le modèle bond-graph en causalité intégrale.

Le modèle bond-graph en causalité intégrale ainsi obtenu est rendu découplable avec stabilité. Si $\delta < (m - p)$, ce modèle possède plus de sources d'entrée que de détecteurs de sortie. Si $\delta = (m - p)$, le modèle bouclé possède p sources d'entrée et p détecteurs de sortie. Sa matrice d'état est de rang plein. Il peut donc être découplé avec stabilité par les techniques de commande présentées dans le chapitre 3.

Nous illustrons à présent ce dernier cas de figure.

4.1.2 Analyse graphique

Dans cette section, nous détaillons la méthode exposée dans la section précédente. Pour des raisons de clarté, nous raisonnons ici à partir d'un modèle possédant trois sources d'entrée et deux détecteurs de sortie [7]. Les méthodes présentées sont néanmoins valides pour des modèles possédant des nombres de sources d'entrée et de détecteurs de sortie plus importants.

Considérons le modèle bond-graph présenté en figure 4.1. Ce modèle est noté *BG1*. Il possède trois sources d'entrées $\{E_1, E_2, E_3\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et neuf éléments dynamiques, tous affectés d'une causalité intégrale.

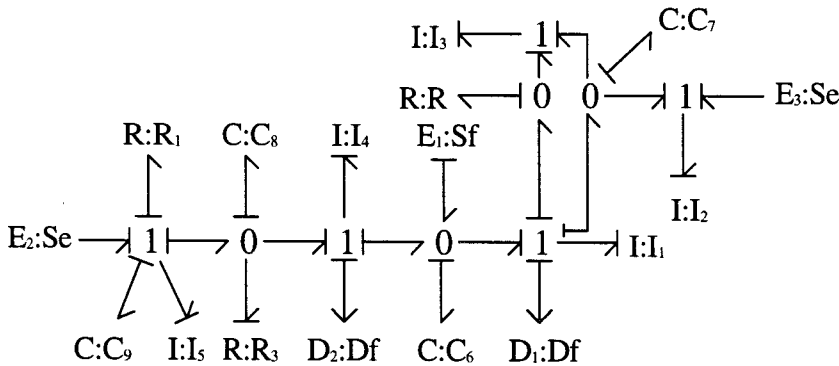


Figure 4.1: modèle bond-graph *BG1*.

La causalité dérivée peut être assignée à l'ensemble des éléments dynamiques de ce modèle. Le modèle ainsi obtenu est noté *BG2*. Il est décrit en figure 4.2.

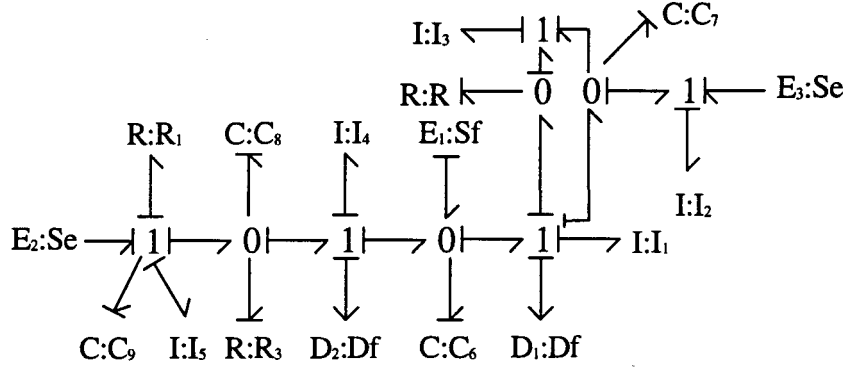


Figure 4.2: modèle bond-graph *BG2*.

Phase1 : découplabilité du modèle *BG1*

Nous calculons tout d'abord les ordres des zéros infinis globaux du modèle bond-graph *BG1*. Ce calcul est réalisé grâce à l'étude de ses chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts - propriété 2.28.

Deux couples existent, de chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts. Ces chemins sont $E_1 \rightarrow C_6 \rightarrow I_1 \rightarrow D_1$, $E_2 \rightarrow I_5 \rightarrow C_8 \rightarrow I_4 \rightarrow D_2$ et $E_1 \rightarrow C_6 \rightarrow I_4 \rightarrow D_2$, $E_3 \rightarrow I_2 \rightarrow C_7 \rightarrow I_1 \rightarrow D_1$. Conformément à la propriété 2.28, nous en déduisons que les ordres des zéros infinis globaux du modèle *BG1* ont respectivement pour valeur $n'_1 = 2$ et $n'_2 = 3$.

Puis nous calculons les ordres des zéros infinis en ligne du modèle. Les chemins causaux les plus courts de chaque détecteur de sortie vers l'ensemble des sources d'entrée sont respectivement $D_1 \rightarrow I_1 \rightarrow C_6 \rightarrow E_1$ et $D_2 \rightarrow I_4 \rightarrow C_6 \rightarrow E_1$. La propriété 2.26 indique que les entiers n_1 et n_2 ont ainsi pour valeurs $n_1 = 2$ et $n_2 = 2$.

Le théorème 1.59 permet par conséquent de conclure que le modèle bond-graph *BG1* n'est pas découplable par retour d'état statique régulier. Il le devient par contre si la source d'entrée E_1 n'est pas utilisée. Les ordres de ses zéros infinis sont en effet dans ce cas tous égaux à trois. Ce modèle est-il alors également découplable avec stabilité?

Phase2 : découplabilité avec stabilité du modèle *BG1* privé de la source d'entrée E_1

La stabilité du modèle découplé est déduite de l'étude des zéros invariants instables du modèle en boucle ouverte - théorème 1.65.

Une analyse similaire à celle exposée en section 3.1.4 permet dans un premier temps de montrer que le modèle étudié possède trois zéros invariants. Parmi eux, certains peuvent être nuls. L'étude de la structure infinie du modèle bond-graph *BG2* permet d'en calculer le nombre.

Les chemins causaux les plus courts du détecteur de sortie D_1 vers les sources d'entrée sont $D_1 \rightarrow R_3 \rightarrow I_3 \rightarrow R \rightarrow E_3$ et $D_1 \rightarrow C_9 \rightarrow E_2$ (les deux chemins causaux de longueur nulle de ce détecteur de sortie vers la source d'entrée E_3 s'annulent mutuellement). Selon la définition 3.13, l'entier n'_{1d} a donc pour valeur $n'_{1d} = 1$.

Les chemins causaux les plus courts du détecteur de sortie D_2 vers les sources d'entrée sont également de longueur un. Les gains de ces chemins sont cependant égaux aux gains des chemins définissant la valeur de l'entier n'_{1d} . Nous déduisons donc de la remarque 3.14 que l'entier n'_{2d} n'est pas égal à un. Il vaut en fait $n'_{2d} = 2$. Le théorème 3.16 nous permet donc d'affirmer que le modèle étudié possède trois zéros invariants nuls.

Ce modèle ne possède donc aucun zéro invariant strictement instable. Par contre, ses trois zéros invariants sont nuls.

Les chemins causaux les plus courts de chaque détecteur de sortie vers les sources d'entrée étant tous les deux de longueur un, les entiers n_{1d} et n_{2d} ont pour valeurs $n_{1d} = 1$ et $n_{2d} = 1$ - propriété 3.11.

Le théorème 3.17 permet donc finalement de conclure que le modèle étudié n'est pas découplable avec stabilité par retour d'état statique régulier.

Le modèle bond-graph *BG1* est donc découplable par retour d'état statique régulier en utilisant comme entrées de commande les sources d'entrée $\{E_2, E_3\}$. Mais la stabilité du modèle découplé ne peut pas être obtenue. Nous allons donc utiliser la source d'entrée E_1 pour réaliser un premier retour d'état. Ce retour d'état vise à modifier la structure finie du modèle initial, de sorte que le modèle bouclé devienne découplable avec stabilité par retour d'état statique régulier.

Phase3 : modification de la structure finie du modèle *BG1*

Rendre le modèle bond-graph *BG1* découplable avec stabilité nécessite de casser, sur le modèle bond-graph *BG2*, la proportionnalité entre les gains des chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts - **phase2**. Dans cet objectif, l'idée est de créer un nouveau chemin causal entrée-sortie sur le modèle bond-graph *BG2*. Ce chemin est réalisé par l'intermédiaire d'un lien d'information reliant une jonction du modèle judicieusement choisie à la source d'entrée E_1 .

sources d'entrée ont toujours pour longueur un : $n_{1d} = 1$ et $n_{2d} = 1$. L'un de ces chemins est cependant nouveau. Il part du détecteur de sortie D_1 et rejoint la source d'entrée E_2 en traversant le lien d'information : $D_1 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha_{15}} C_9 \rightarrow E_2$.

Grâce à ce chemin, les gains des chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts ne sont plus proportionnels - ils le sont sur le modèle bond-graph $BG2$. Les ordres n'_{1d} et n'_{2d} des zéros infinis du modèle bond-graph $BG3$ ont par conséquent pour valeurs $n'_{1d} = 1$ et $n'_{2d} = 1$ - définition 3.13. Le théorème 3.17 permet donc d'affirmer que le modèle bond-graph $BG4$ est découplable avec stabilité par retour d'état statique régulier.

Le lien d'information ajouté au modèle bond-graph $BG2$ représente un retour "d'état" fictif réalisé avec les dérivées des variables d'état. En effet - annexe A.10 - ce lien signifie que le flux $f_9(t) = \dot{q}_9(t)$ est mesuré sur la jonction 1 notée en gras puis envoyé sur la première entrée de commande - figure 4.3.

Ce bouclage fictif réalisé sur le modèle bond-graph en causalité dérivée correspond à un retour d'état réalisé sur le modèle bond-graph en causalité intégrale. Sur le modèle bond-graph $BG4$, le flux sur la jonction 1 notée en gras est en effet imposé par l'élément dynamique I_5 . La mesure réellement envoyée sur la source d'entrée modulée E_1 est par conséquent le flux $f_5(t)$. La justification mathématique de cette manipulation graphique est présentée en annexe A.11.

Le retour d'état ainsi réalisé sur le modèle bond-graph $BG4$ est de la forme $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$, où les matrices F et G vérifient l'équation (4.1).

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_{15}}{I_5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_{22} \\ g_{31} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Ce bouclage introduit un degré de liberté noté α_{15} . Ce paramètre permet de modifier la valeur de l'un des trois zéros invariants nuls du modèle initial. L'expression des trois zéros invariants du modèle bond-graph $BG4$ est en

effet donnée par l'équation (4.2).

$$\begin{cases} s^2 = 0 \\ s = \frac{\alpha_{15}}{R_3(-\alpha_{15}C_8 + C_6)} \end{cases} \quad (4.2)$$

La valeur du paramètre α_{15} est évidemment choisie de manière à rendre stable ce dernier zéro invariant.

Le modèle bouclé par cette première loi de commande possède deux variables d'entrée et deux variables de sortie. Sa matrice d'état est de rang plein. Pour le découpler, nous pouvons donc appliquer les techniques de commande par retour d'état statique régulier présentées dans le chapitre 3.

4.1.3 Calcul formel des lois de commande

Dans cette section, nous calculons la loi de commande permettant de découpler avec stabilité le modèle bond-graph *BG4*. Ce calcul est réalisé en appliquant les techniques présentées en partie 3.2.

Le modèle bond-graph *BG4* est découplable avec stabilité par retour d'état statique régulier. Conformément à la propriété 3.32, une loi de commande construite à partir des sous-espaces de découplage $\{\mathcal{V}_1^*, \mathcal{V}_2^*\}$ permet de concevoir un modèle découplé dont les modes non assignables sont tous les zéros invariants du modèle initial. Si la loi de commande est construite à partir des sous-espaces $\{\mathcal{V}_{1stab}^*, \mathcal{V}_{2stab}^*\}$, la propriété 3.32 nous permet d'autre part d'affirmer que les modes non assignables du modèle découplé sont tous les zéros invariants strictement stables du modèle initial. Nous présentons les résultats obtenus par cette dernière stratégie de commande.

Conformément à la propriété 3.31, le calcul de cette loi de commande est réalisé à partir des expressions symboliques des bases des sous-espaces $\{\mathcal{V}_{1stab}^{*\perp}, \mathcal{V}_{2stab}^{*\perp}\}$. Ces expressions sont déterminées, à partir des modèles bond-graph *BG3* et *BG4*, selon la propriété 3.37.

D'autre part, la propriété 3.36 et les résultats présentés en section précédente - **phase1** et **phase3** - permettent de montrer que ces bases vérifient l'équation (4.3).

$$\dim(\mathcal{V}_{1stab}^{*\perp}) + \dim(\mathcal{V}_{2stab}^{*\perp}) = 8 \quad (4.3)$$

Nous savons donc par avance que la loi de commande utilisant ces sous-espaces comme supports géométriques apporte huit degrés de liberté en boucle fermée - propriété 3.31. Le modèle étant d'ordre neuf, un mode du modèle bouclé ne pourra pas être librement assigné : ce mode est le zéro invariant du modèle bond-graph *BG4* rendu strictement stable par l'action

du premier bouclage - propriété 3.32. L'expression de ce mode est donnée par l'équation (4.4).

$$s = \frac{\alpha_{15}}{R_3 (-\alpha_{15}C_8 + C_6)} \quad (4.4)$$

Le calcul formel de la loi de commande est réalisé à l'aide du logiciel Maple. Nous en déduisons l'expression symbolique de la matrice de transfert $T_{BF}(s)$ du modèle bouclé - équation (4.5).

$$T_{BF}(s) = \begin{bmatrix} \frac{g_1 s}{(s^4 - p_2^1 s^3 - p_1^1 s^2 - p_0^1 s - p_d^1)} & 0 \\ 0 & \frac{g_2 s}{(s^4 - p_2^2 s^3 - p_1^2 s^2 - p_0^2 s - p_d^2)} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Cette matrice est diagonale. Comme prévu, elle est d'ordre huit.

Les degrés de liberté apportés par la loi de commande sont les coefficients $p_j^1, p_j^2, j = 0, 1, 2$ et les coefficients p_d^1 et p_d^2 . D'autre part, les coefficients g_1 et g_2 sont des paramètres librement assignables destinés à régler les gains statiques du système bouclé.

Rappelons que les zéros de chaque fonction de transfert de la matrice $T_{BF}(s)$ - équation (4.5) - correspondent aux zéros invariants nuls du modèle $BG4$ rendus observables et gouvernables par la loi de commande.

Enfin, l'expression symbolique du polynôme caractéristique $P_{BF}(s)$ de la matrice d'état en boucle fermée est donnée par l'équation (4.6).

$$\begin{cases} P_{BF}(s) = P_1(s) \cdot P_2(s) \cdot P_3(s) \\ P_1(s) = (s^4 - p_2^1 s^3 - p_1^1 s^2 - p_0^1 s - p_d^1) \\ P_2(s) = (s^4 - p_2^2 s^3 - p_1^2 s^2 - p_0^2 s - p_d^2) \\ P_3(s) = \left(s + \frac{\alpha_{15}}{R_3(\alpha_{15}C_8 - C_6)} \right) \end{cases} \quad (4.6)$$

Cette expression montre que le seul mode non assignable du modèle dé-couplé est le zéro invariant du modèle bond-graph $BG4$ rendu strictement stable par l'action du premier bouclage - équation (4.4). Le modèle dé-couplé est donc stable.

4.2 Découplabilité

Dans cette partie, nous étudions des modèles bond-graph de rang plein, possédant m sources d'entrée et p détecteurs de sortie, avec $m > p$. Ces modèles ne sont pas découplables par retour d'état statique régulier. L'objectif est

alors de définir la structure de lois de commande destinées à les rendre découplables par retour d'état statique régulier.

Des travaux antérieurs ont montré l'intérêt, pour ce problème, de retours d'état statiques non réguliers [34]. Le nombre d'entrées de commande indépendantes n'est dans ce cas pas conservé. Les résultats obtenus ne fournissent cependant pas pour l'instant de condition nécessaire et suffisante de solubilité dans le cas général [15] [28].

Nous n'en proposons pas non plus. Par contre, nous présentons une méthode graphique simple permettant d'identifier une forme de retour d'état statique non régulier rendant le modèle découplable par retour d'état statique régulier. Cette méthode repose directement sur l'analyse causale du modèle. C'est pourquoi nous la présentons à travers un exemple.

Nous rappelons ainsi dans un premier temps le rôle d'une loi de commande non régulière pour la résolution des problèmes de découplage entrée-sortie par retour d'état statique. Puis nous exposons un principe de résolution graphique, que nous détaillons à travers un exemple. Nous présentons finalement la démarche de calcul formel d'une loi de commande.

4.2.1 Modification de la structure infinie

Dans cette section, nous rappelons des liens existant entre structure infinie, structure essentielle et loi de commande par retour d'état statique non régulier.

La découplabilité statique régulière d'un modèle est déduite de l'étude de sa structure infinie - théorème 1.59. Si le modèle n'est pas découplable par retour d'état statique, l'idée est donc de modifier sa structure infinie de sorte que le théorème 1.59 soit vérifié. Suivant certaines conditions, ceci peut être réalisé à l'aide d'un retour d'état statique non régulier.

Dans cette objectif, il s'agit par conséquent de trouver une réponse aux deux questions suivantes.

1. Quelle structure infinie viser?
2. Existe-t-il un retour d'état permettant d'atteindre cette structure?

Aucune réponse n'a été pour l'instant donnée à la première question.

Des travaux antérieurs ont montré que la plus petite structure infinie qui puisse être atteinte en découplant le modèle par retour d'état n'est jamais inférieure à la structure essentielle du modèle en boucle ouverte $\{n_{ie}\}_{BO}$ [13] - section 1.3.2. Mais cette structure n'est pas nécessairement la plus petite qui puisse être atteinte tout en découplant le modèle par retour d'état statique : cette structure minimale peut être supérieure à $\{n_{ie}\}_{BO}$ [28].

La structure infinie minimale à viser n'est donc pas connue pour l'instant dans le cas général.

Par contre, une réponse a été apportée à la seconde question par Loiseau [34]. L'auteur a en effet caractérisé les conditions permettant de savoir s'il existe un retour d'état statique $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ permettant de concevoir un modèle bouclé dont la structure infinie est égale à une structure donnée. Ces conditions sont exprimées par le théorème 4.1. Elles font appel aux notions de liste I_2 de Morse - définition 1.51 - et de liste duale - propriété 1.50.

Théorème 4.1 [34]. *Soit un modèle $\Sigma(C, A, B)$ dont $\{n'_i\}$ est la structure à l'infini et $\{\sigma_i\}$ la liste I_2 de Morse. Soit $\{p_i\}$ une liste d'entiers donnée. Notons respectivement $\{\nu_i\}$, $\{\alpha_i\}$ et $\{\pi_i\}$ les listes duales des listes $\{n'_i\}$, $\{\sigma_i\}$ et $\{p_i\}$. Soit $\{\Delta_i\}$ la liste obtenue en rangeant les différences $(\pi_i - \nu_i)$ dans un ordre non croissant ($\Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \dots$). Alors il existe un retour d'état statique non régulier (F, G) tel que la structure infinie du modèle bouclé soit la liste $\{p_i\}$ si et seulement si les équations (4.7) sont vérifiées.*

$$\begin{cases} \nu_1 - \nu_i \geq \pi_1 - \pi_i, i \geq 1 \\ \sum_{i=1}^j \alpha_i \geq \sum_{i=1}^j \Delta_i, j \geq 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

Pour rendre un modèle découplable par retour d'état statique régulier, une manière de procéder est donc la suivante.

Nous visons a priori la structure essentielle du modèle en boucle ouverte, notée $\{n_{ie}\}_{BO}$. Il s'agit donc de savoir si un retour d'état statique non régulier existe, permettant de construire un modèle bouclé dont la structure infinie $\{n'_i\}_{BF}$ soit donnée par la liste $\{n_{ie}\}_{BO}$ - théorème 4.1.

Si tel est le cas, nous calculons l'expression de ce retour d'état [34].

Nous vérifions a posteriori que la structure essentielle du modèle bouclé $\{n_{ie}\}_{BF}$ est inchangée par rapport à celle du modèle en boucle ouverte. La structure infinie du modèle bouclé vérifie dans ce cas l'équation (4.8).

$$\{n'_i\}_{BF} = \{n_{ie}\}_{BO} = \{n_{ie}\}_{BF} \quad (4.8)$$

Le modèle bouclé vérifie donc les conditions du théorème 1.59. Il est par conséquent découplable par retour d'état statique régulier.

Cette procédure est à envisager principalement dans le contexte d'un traitement numérique. Formellement, elle implique des calculs trop fastidieux.

En effet, le calcul de la liste I_2 de Morse - définition 1.51 - nécessite de connaître la dimension des espaces obtenus à chaque étape de l'algorithme

du R^* - équation (1.19). Ces espaces sont d'autre part eux-mêmes déterminés à partir du sous-espace $\mathcal{V}^*$ - équation (1.15) ...

Le formalisme bond-graph permet dans certains cas de proposer une solution formelle au problème du découplage non régulier. La méthode de résolution repose sur des manipulations graphiques élémentaires.

4.2.2 Principe de résolution graphique

Dans cette section, nous exposons une méthode graphique permettant, suivant les cas, de rendre un modèle bond-graph découplable par retour d'état statique régulier. Cette méthode repose sur des fondements identiques à ceux présentés en section 4.1.1.

Le modèle bond-graph considéré n'est pas découplable par retour d'état statique régulier. Le théorème 1.59 et les propriétés 2.26 et 2.28 permettent de déterminer graphiquement la cause de cette propriété: les chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts ne sont pas respectivement les plus courts vers l'ensemble des sources d'entrée.

Dans ce cas, l'idée est de créer des nouveaux chemins causaux sur le modèle bond-graph en causalité intégrale. Ces chemins doivent permettre de construire, sur le nouveau modèle, un ensemble de p chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts qui soient respectivement les plus courts vers l'ensemble des sources d'entrée.

Soit $\beta \leq (m - p)$ le nombre de nouveaux chemins causaux nécessaire pour rendre le modèle découplable par retour d'état statique régulier. Ces β nouveaux chemins causaux empruntent des liens d'information reliant β jonctions judicieusement choisies à β sources d'entrée. Un seul chemin est créé par source d'entrée. Ces liens d'information constituent un retour d'état $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ sur le modèle bond-graph en causalité intégrale. La structure des matrices F et G est immédiatement déduite de la position des liens sur le modèle - annexe A.10.

Le modèle ainsi obtenu est rendu découplable par retour d'état statique régulier.

Si $\beta < (m - p)$, ce modèle bouclé possède plus de sources d'entrée que de détecteurs de sortie. Pour le découpler, il faudra utiliser des techniques de découplage par blocs. Si $\beta = (m - p)$, le modèle bouclé possède p sources d'entrée et p détecteurs de sortie. Il peut donc être découplé par les techniques de commande régulières présentées dans le chapitre 3. Nous illustrerons plus particulièrement ce cas de figure - section 4.2.3.

Notons que, pour isoler les β sources d'entrée à utiliser, aucune procédure systématique n'existe. Cependant, le problème vient souvent du fait qu'une même source d'entrée est touchée par les chemins causaux les plus courts venant de plusieurs détecteurs de sortie. Enlever cette source rend le modèle non inversible. Elle est alors utilisée comme entrée de commande pour un retour d'état non régulier.

4.2.3 Analyse graphique

Dans cette section, nous détaillons la méthode graphique proposée dans la section précédente. Pour des raisons de clarté, comme en section 4.1.2, nous raisonnons à partir d'un modèle possédant trois sources d'entrée et deux détecteurs de sortie. L'objectif est par là d'illustrer la simplicité du principe de résolution.

Considérons le modèle bond-graph présenté en figure 4.5. Ce modèle est noté *BG1*. Il possède trois sources d'entrées $\{E_1, E_2, E_3\}$, deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ et dix éléments dynamiques, tous affectés d'une causalité intégrale.

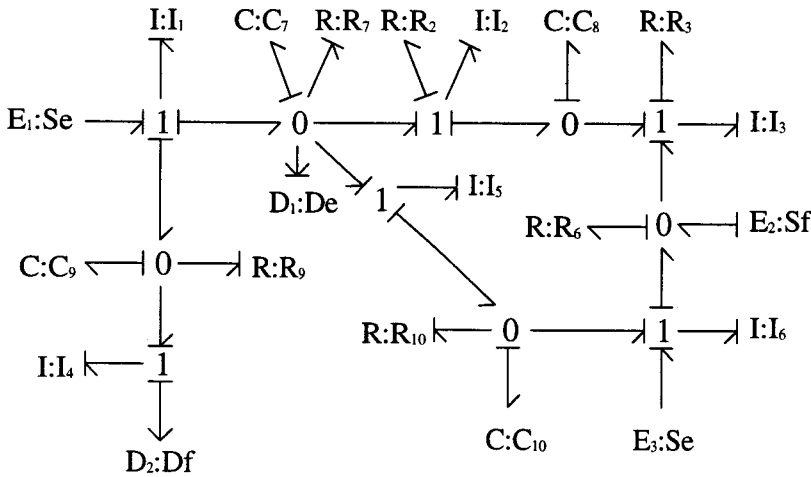


Figure 4.5: modèle bond-graph *BG1*.

Phase1 : découplabilité statique régulière du modèle *BG1*

Il est clairement impossible de construire, sur le modèle *BG1*, deux chemins causaux entrée-sortie différents qui soient respectivement les plus courts vers l'ensemble des sources d'entrée.

En effet, sur ce modèle, deux chemins causaux entrée-sortie ne peuvent être différents que si l'un d'entre eux relie la source d'entrée E_1 au détecteur de sortie D_2 . L'autre chemin relie alors la source d'entrée E_2 ou la source d'entrée E_3 au détecteur de sortie D_1 . Dans tous les cas, ce dernier chemin n'est pas le plus court du détecteur de sortie D_1 vers l'ensemble des sources d'entrée, puisque ce plus court chemin rejoint la source d'entrée E_1 .

Le modèle bond-graph $BG1$ n'est donc pas découplable par retour d'état statique régulier.

Ce résultat est confirmé par la valeur des ordres des zéros infinis globaux et en ligne. Les propriétés 2.26 et 2.28 permettent en effet de montrer que ces entiers vérifient l'équation (4.9).

$$\begin{cases} n_1 = 2 \\ n_2 = 3 \\ n'_1 = 2 \\ n'_2 = 5 \end{cases} \quad (4.9)$$

Cette analyse montre que le modèle ne peut être découplé par aucun retour d'état statique régulier utilisant la source d'entrée E_1 comme une des deux entrées de commande. D'autre part, supprimer cette source d'entrée ne modifierait pas le problème : le modèle privé de la source d'entrée E_1 ne serait plus inversible - aucun couple de chemins causaux entrée-sortie différents. Cette source d'entrée est donc utilisée pour construire, grâce à un lien d'information, un nouveau chemin causal entrée-sortie.

Phase2 : modification de la structure infinie du modèle $BG1$

Nous cherchons donc à créer deux chemins causaux entrée-sortie différents vérifiant les deux propriétés suivantes :

- le chemin arrivant au détecteur de sortie D_1 provient de la source d'entrée E_2 ou de la source d'entrée E_3 . La longueur de ce chemin doit être égale à quatre. Ce chemin doit en effet aussi être le plus court du détecteur de sortie D_1 vers l'ensemble des sources d'entrée.
- le chemin arrivant au détecteur de sortie D_2 doit traverser la source d'entrée E_1 , sans toutefois raccourcir la longueur minimale du chemin défini pour le détecteur D_1 . Le chemin partant du détecteur de sortie D_1 et rejoignant les sources d'entrée E_2 et E_3 en traversant la source E_1 doit donc être de longueur au moins égale à quatre.

Remarquons que le plus petit ordre des zéros infinis du modèle bouclé ne pourra donc pas être inférieur à quatre. Ceci est confirmé par la valeur des ordres d'essentialité du modèle en boucle ouverte $BG1$: $\{n_{ie}\}_{BO} = \{4, 5\}$ - sections 1.3.2 et 4.2.1.

Nous proposons la solution décrite par la figure suivante. Le lien d'information noté en gras mesure l'effort imposé par l'élément dynamique C_{10} . Cet effort module la source d'effort E_1 .

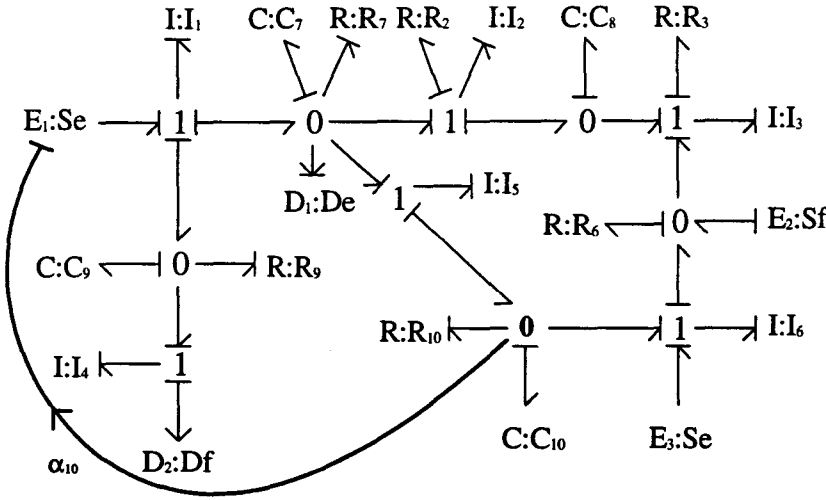


Figure 4.6: modèle bond-graph $BG2$.

Le modèle bond-graph $BG2$ est découplable par retour d'état statique régulier. En effet, grâce à la présence du lien d'information, deux chemins causaux entrée-sortie différents existent, qui sont respectivement les plus courts vers l'ensemble des sources d'entrée. Ces chemins sont $D_1 \rightarrow C_7 \rightarrow I_2 \rightarrow C_8 \rightarrow I_3 \rightarrow R_6 \rightarrow E_2$ et $D_2 \rightarrow I_4 \rightarrow C_9 \rightarrow I_1 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha_{10}} C_{10} \rightarrow I_6 \rightarrow E_3$. Leurs longueurs définissent les ordres des zéros infinis du modèle $BG2$. Ces entiers vérifient l'équation (4.10).

$$\begin{cases} n'_1 = 4 \\ n'_2 = 5 \end{cases} \quad (4.10)$$

La structure infinie du modèle en boucle ouverte $BG1$ était donnée par la liste $\{2, 5\}$ - équation (4.9). Celle du modèle bouclé est à présent donnée par la liste $\{4, 5\}$ - équation (4.10). Ce changement de structure infinie est réalisé par l'action d'un retour d'état statique non régulier, dont l'expression symbolique est directement déduite de la position du lien d'information sur le modèle $BG2$.

En effet, la position de ce lien indique que la grandeur mesurée par le détecteur fictif pour moduler la source d'entrée E_1 est l'effort imposé par l'élément dynamique C_{10} - annexe A.10. Le retour d'état correspondant s'écrit donc $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$, où l'expression des matrices F et G est donnée par l'équation (4.11).

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_{10}}{C_{10}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_{21} & 0 \\ 0 & g_{31} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Le coefficient α_{10} est le degré de liberté apporté par la loi de commande.

A titre de remarque, signalons que la structure essentielle du modèle $BG2$ est donnée par la liste $\{4, 5\}$ - propriété 1.35. La structure essentielle du modèle n'a donc pas été affectée par le bouclage non régulier.

Phase3 : découplabilité avec stabilité du modèle $BG2$

La stabilité du modèle découplé dépend de la structure finie du modèle en boucle ouverte - théorème 3.17. Examinons donc les zéros invariants du modèle $BG2$.

Ce modèle ne possède qu'un seul zéro invariant. En effet, le modèle bond-graph réduit obtenu en enlevant les éléments dynamiques traversés par les deux chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts n'est composé que d'un seul élément dynamique - élément I_5 . La propriété 2.25 permet ainsi d'affirmer que le modèle $BG2$ ne possède qu'un seul zéro invariant.

De plus, conformément à la propriété 2.25, ce zéro invariant est nul. En effet, il n'existe sur le modèle bond-graph $BG2$ qu'un seul choix de chemins causaux entrée-sortie différents. A ce choix est associé un modèle bond-graph réduit uniquement composé de l'élément dynamique I_5 . Le polynôme caractéristique correspondant ne possède donc qu'une seule racine : $s = 0$.

Le modèle ne possédant aucun zéro invariant strictement instable, sa mise en causalité dérivée permet de savoir si un modèle découplé stable peut être obtenu - théorème 3.17.

Imposons donc la causalité dérivée au modèle *BG2*. Le modèle ainsi obtenu est noté *BG3* - figure 4.7. Tous ses éléments dynamiques sont affectés d'une causalité dérivée.

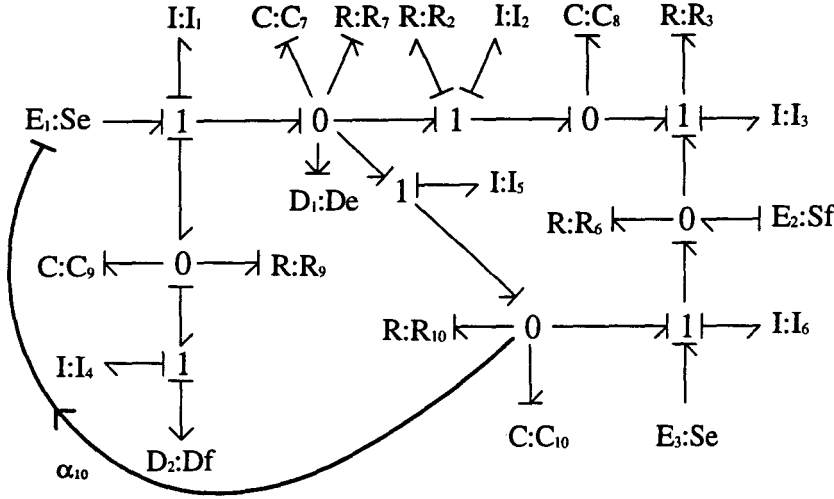


Figure 4.7: modèle bond-graph *BG3*.

Le lien d'information introduit en **phase2** génère sur le modèle *BG3* une boucle de causalité. Le gain de cette boucle est égal à α_{10} , degré de liberté apporté par bouclage - équation (4.11). La valeur de ce paramètre doit par conséquent être choisie différente de un - remarque 2.8.

Sur le modèle *BG3*, les chemins causaux les plus courts du détecteur de sortie D_1 vers les sources d'entrée ont pour longueur un. L'entier n_{1d} a par conséquent pour valeur $n_{1d} = 1$. De même, les chemins causaux les plus courts du détecteur de sortie D_2 vers les sources d'entrée sont de longueur nulle. L'entier n_{2d} vaut par conséquent $n_{2d} = 0$.

D'autre part, grâce au chemin créé à travers la source d'entrée E_1 par le lien d'information, les gains des chemins causaux définissant la valeur de l'entier n_{1d} ne sont pas proportionnels à ceux définissant la valeur de l'entier n_{2d} . Les entiers n'_{1d} et n'_{2d} sont donc respectivement égaux aux entiers n_{1d} et n_{2d} .

Le théorème 3.17 nous permet donc de déduire que le modèle bond-graph *BG2* est découplable avec stabilité par retour d'état statique régulier.

4.2.4 Calcul formel d'une loi de commande

Dans cette section, nous calculons la loi de commande permettant de découpler avec stabilité le modèle bond-graph *BG2*. Ce calcul est réalisé en

appliquant les techniques présentées en partie 3.2.

Le modèle bond-graph $BG2$ possède deux sources d'entrée et deux détecteurs de sortie. Il est de rang plein et découplable avec stabilité par retour d'état statique régulier. Nous calculons donc la loi de commande conformément à la propriété 3.31.

Si cette loi de commande utilise comme supports géométriques les sous-espaces $\{\mathcal{V}_{1stab}^*, \mathcal{V}_{2stab}^*\}$, la propriété 3.32 nous permet d'affirmer que les modes non assignables du modèle découplé sont tous les zéros invariants strictement stables du modèle initial. Son seul zéro invariant étant nul - section 4.2.3, **phase3** - cette solution de commande permet donc de concevoir un modèle bouclé dont tous les modes pourront être assignés librement.

Conformément à la propriété 3.31, le calcul de cette loi de commande est réalisé à partir des expressions symboliques des bases des sous-espaces $\{\mathcal{V}_{1stab}^{\perp}, \mathcal{V}_{2stab}^{\perp}\}$. Ces expressions sont déterminées, à partir des modèles bond-graph $BG2$ et $BG3$, selon la propriété 3.37.

L'expression formelle de la loi de commande est déterminée à l'aide du logiciel Maple - propriété 3.31. Nous en déduisons l'expression symbolique de la matrice de transfert $T_{BF}(s)$ du modèle bouclé - équation (4.12).

$$T_{BF}(s) = \begin{bmatrix} \frac{g_1 s}{(s^5 - p_3^1 s^4 - p_2^1 s^3 - p_1^1 s^2 - p_0^1 s - p_d^1)} & 0 \\ 0 & \frac{g_2}{(s^5 - p_4^2 s^4 - p_3^2 s^3 - p_2^2 s^2 - p_1^2 s - p_0^2)} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Cette matrice est diagonale et, comme prévu, d'ordre dix.

Les cinq paramètres p_j^2 , $j = 0, \dots, 4$, sont les degrés de liberté apportés par le sous-espace $\mathcal{V}_{2stab}^* = \mathcal{V}_2^*$. Les cinq autres degrés de liberté sont apportés par le sous-espace $\mathcal{V}_{1stab}^* = (\mathcal{V}_1^* \cap \mathcal{V}_{1d}^*)$ - propriété 3.37. Les coefficients g_1 et g_2 sont enfin des paramètres librement assignables destinés à régler les gains statiques du modèle bouclé - propriété 3.31.

4.3 Conclusion

Les méthodes présentées dans ce chapitre concernent les modèles bond-graph possédant plus de sources d'entrée que de détecteurs de sortie. Ces méthodes visent à exhiber la structure de retours d'état statiques non réguliers utilisés pour le découplage entrée-sortie du modèle.

Deux classes de modèles ont été étudiées : les modèles découplables par retour d'état statique régulier mais sans stabilité - partie 4.1 - puis les modèles non découplables par retour d'état statique régulier - partie 4.2. Dans ces

deux cas, le découplage entrée-sortie est réalisé par l'action de deux boucles de commande. Un premier retour d'état rend le modèle découplable avec stabilité - partie 4.1 - ou découplable - partie 4.2 - par retour d'état statique régulier : nous en identifions graphiquement la structure. Le modèle bouclé est ensuite découplé par un second retour d'état, du type de ceux présentés dans le chapitre 3.

Pour résoudre ces deux problèmes, des outils similaires ont été proposés. Ils ont pour but de modifier la structure des chemins causaux entrée-sortie du modèle. A cet effet, l'idée consiste à placer un nombre minimum de liens d'information entre certaines jonctions et certaines sources d'entrée inutilisées. Le problème de stabilité est ainsi résolu en plaçant des liens sur le modèle en causalité dérivée - partie 4.1. Pour résoudre le problème de découplabilité, des liens sont cette fois-ci placés sur le modèle en causalité intégrale - partie 4.2.

Ces techniques graphiques ont été présentées séparément. Cependant, elles peuvent être mises en oeuvre conjointement pour rendre un même modèle découplable avec stabilité par retour d'état statique régulier.

Chapitre 5

Application

Dans ce chapitre, nous illustrons certaines des procédures présentées au cours des chapitres précédents. Il s'agit en particulier de montrer comment le formalisme bond-graph permet d'orienter la conception d'une architecture de commande dans un objectif de contrôle donné.

Dans le cadre d'un contrat d'étude signé avec P.S.A. Peugeot Citroën, nous nous intéressons à des modèles de suspension hydraulique active demi-véhicule, pour lesquels l'objectif est de contrôler la position de la caisse. Ces modèles décrivent le déplacement de la suspension en pompage-tangage [26].

Nous présentons tout d'abord les deux modèles multivariables considérés. Le premier est construit selon l'hypothèse suivante : les masses de caisse avant et arrière sont supposées localisées sur leurs essieux respectifs. Aucune hypothèse particulière n'a par contre été retenue pour la construction du second modèle. Nous constatons que le premier modèle est découplé par construction. Nous étudions alors le modèle monovariable simplifié associé en particulier à la roue arrière. A partir de ce modèle, nous construisons des lois de commande par retour d'état statique permettant de découpler la variable de sortie de certaines variables de perturbation d'entrée. Nous présentons enfin des résultats concernant la commande par découplage entrée-sortie du second modèle multivariable.

5.1 Présentation du problème

Dans cette partie, nous présentons brièvement deux modèles multivariables du déplacement en pompage-tangage d'une suspension hydraulique active demi-véhicule [26].

Le schéma de principe est décrit par la figure 5.1.

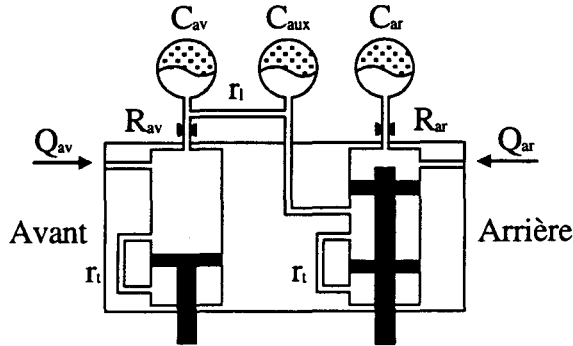


Figure 5.1: suspension hydraulique active.

Les éléments porteurs sont des sphères gonflées à l'azote, de capacités C_{av} , C_{ar} , C_{aux} . Ces sphères constituent les ressorts de la suspension - ressorts pneumatiques.

L'amortissement est réalisé grâce à des restrictions hydrauliques de paramètres R_{av} et R_{ar} , placées sur les conduites menant aux sphères.

Les tiges des vérins de suspension sont enfin liées aux bras de suspension. La commande active de la suspension est réalisée grâce à deux servovalves délivrant les débits d'huile nécessaires pour asservir la position de la caisse - Q_{av} , Q_{ar} .

Le premier modèle de suspension considéré dans ce chapitre est noté *BGM1* - figure 5.2 [26]. Pour construire ce modèle, l'hypothèse suivante a été retenue : les masses de caisse avant et arrière sont supposées localisées sur leurs essieux respectifs.

Le modèle *BGM1* possède deux sources d'entrée de commande $\{E_1, E_2\}$, neuf éléments dynamiques, tous affectés d'une causalité intégrale et deux détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$. Ces deux détecteurs représentent les deux variables à commander - vitesses verticales absolues de caisse avant et arrière - qui ne sont ici pas mesurables. Deux capteurs $\{D_3, D_4\}$ mesurent les vitesses verticales relatives de la caisse. Ces mesures permettront de reconstruire l'état du système utilisé pour la commande.

Les éléments dynamiques I_{av} et I_{ar} représentent les masses de caisse avant et arrière. Les éléments dynamiques C_p et I_r modélisent respectivement la raideur de chaque pneumatique et la masse de chaque roue. Enfin, les éléments *TF* représentent les vérins hydrauliques de suspension.

Les sources d'entrée $\{E_3, E_4\}$ décrivent les perturbations engendrées par le profil de la route - source de vitesse. Les sources d'entrée $\{E_5, E_6\}$ modéli-

sent pour leur part les perturbations provoquées, sur la caisse, par le transfert de masse lors d'un freinage ou d'une accélération.

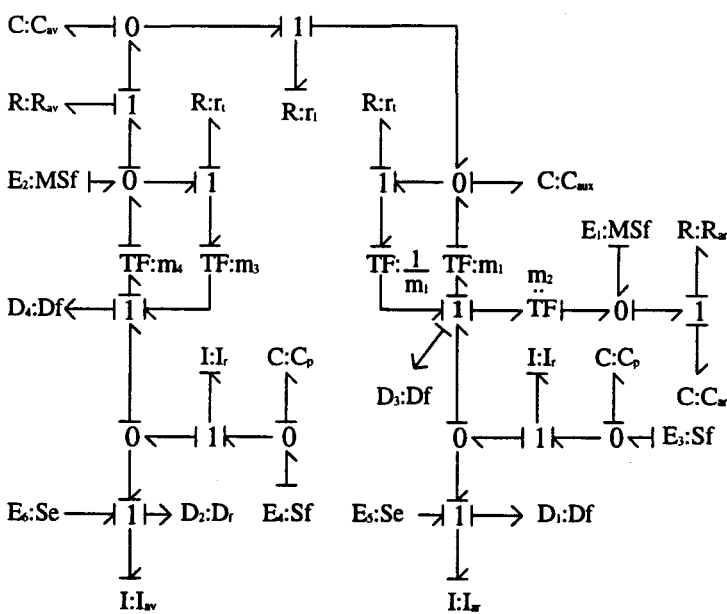
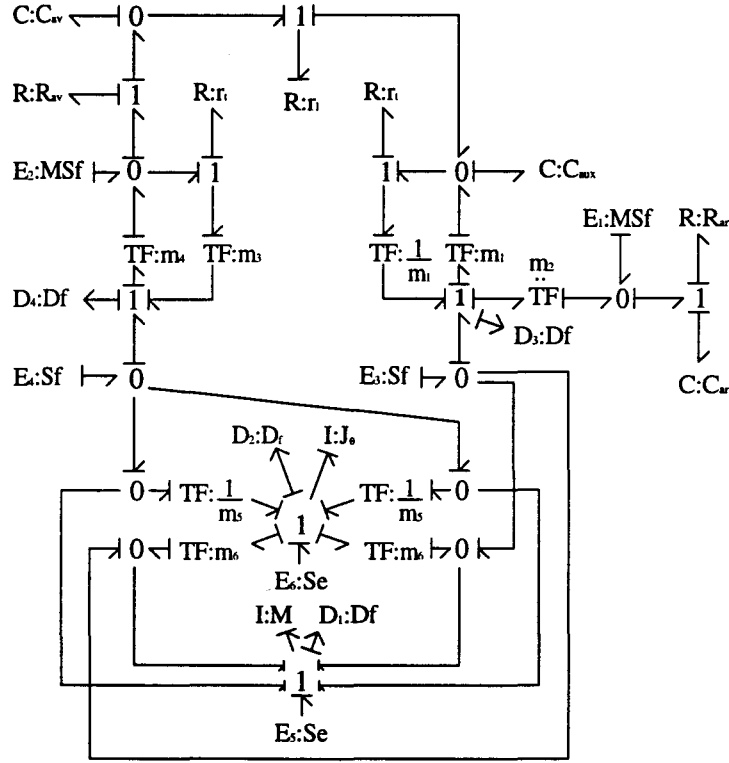


Figure 5.2: modèle bond-graph *BGM1*.

Le second modèle bond-graph de suspension active considéré dans ce chapitre est noté *BGM2* - figure 5.3 [26]. Pour construire ce modèle, aucune hypothèse simplificatrice n'a cette fois-ci été retenue.

Figure 5.3: modèle bond-graph *BGM2*.

Les éléments dynamiques J_θ et I_M représentent respectivement l'inertie en tangage et la masse de la caisse du véhicule. Les éléments TF de modules $\frac{1}{m_5}$ et m_6 représentent les bras de levier créés respectivement entre chaque essieu et le centre de gravité du véhicule. Nous n'avons pas représenté, sur ce modèle, les éléments dynamiques C_p et I_r modélisant respectivement la raideur de chaque pneumatique et la masse de chaque roue.

Les sources d'entrée $\{E_3, E_4\}$ décrivent les mêmes phénomènes que sur le modèle *BGM1* - perturbations engendrées par le profil de la route. Les sources d'entrée $\{E_5, E_6\}$ modélisent également des perturbations appliquées sur la caisse du véhicule. La source d'entrée E_5 représente le lâcher de masse. La source d'entrée E_6 modélise à présent un moment de tangage.

Les détecteurs de sortie $\{D_1, D_2\}$ représentent enfin les deux variables de sortie à commander. Le détecteur D_1 représente l'information vitesse verticale absolue de la caisse, dont l'intégrale est le débattement de la caisse. Le détecteur D_2 représente l'information vitesse angulaire de rotation de la caisse en tangage, dont l'intégrale est l'angle de tangage du véhicule.

Nous constatons que le modèle *BGM1* est découplé par construction. En effet, les gains des deux chemins causaux partant de l'élément dynamique C_{aux} et rejoignant la jonction 1 notée en gras s'annulent mutuellement. Les parties avant et arrière du modèle sont donc isolées l'une de l'autre.

L'étude de ce modèle multivariable peut donc se ramener à celle de chaque modèle monoroue.

5.2 Modèle simplifié monovariable

Dans cette partie, nous présentons des résultats concernant l'analyse structurale et la commande par rejet de perturbation du modèle monoroue arrière.

Nous considérons le modèle décrit par la figure 5.4 et noté *BG1*. Ce modèle possède une entrée de commande $\{E_1\}$ représentée par la source de flux modulée *MSf*, quatre éléments dynamiques, tous affectés d'une causalité intégrale et un détecteur de sortie $\{D_1\}$. Ce détecteur représente la variable à commander - vitesse absolue de la caisse - qui n'est ici pas mesurable. Le capteur $\{D_2\}$ mesure la vitesse relative de la caisse. Cette mesure permettra de reconstruire l'état du système, utilisé pour la commande. Le modèle *BG1* possède enfin deux sources d'entrée de perturbation $\{E_2, E_3\}$. La source d'entrée E_2 modélise la vitesse verticale engendrée, sur la roue, par le profil de la route. La source d'entrée E_3 représente le lâcher de masse sur la caisse.

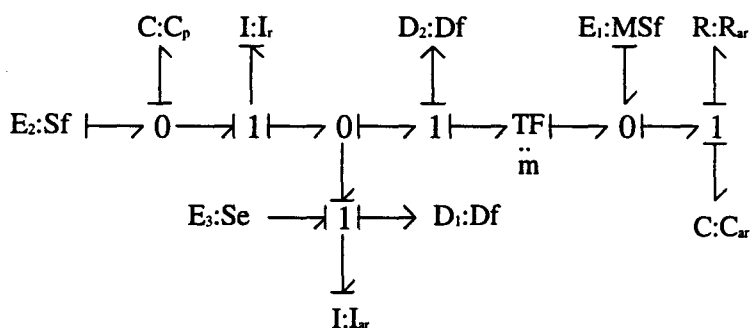


Figure 5.4: modèle bond-graph *BG1*.

En éliminant du modèle *BG1* les sources d'entrée E_2 et E_3 , nous obtenons le modèle "non perturbé" noté *BG2* - figure 5.5.

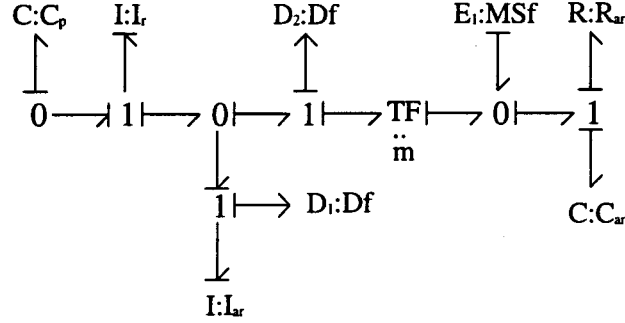


Figure 5.5: modèle bond-graph BG2.

La forme de la représentation d'état déduite du modèle BG1 est donnée par l'équation (5.1).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + P_2 d_2(t) + P_3 d_3(t) \\ y(t) = c_1 x(t) \\ z(t) = c_2 x(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

$u(t)$ est la variable d'entrée de commande - débit d'huile. $y(t)$ est la variable de sortie à commander - vitesse verticale absolue de la caisse. $x(t)$ est le vecteur de variables d'état. $d_2(t)$ et $d_3(t)$ sont les variables d'entrée de perturbation respectivement associées aux sources d'entrée E_2 et E_3 . Enfin, $z(t)$ est la mesure de la vitesse verticale relative de la caisse. Cette mesure est utilisée pour reconstruire l'état du système en vue de sa commande. Le modèle doit donc être structurellement observable avec le capteur D_2 - $\text{rang} \begin{bmatrix} A \\ c_2 \end{bmatrix} = 4$. On peut vérifier graphiquement que cette propriété est satisfaite - section 2.2.2.

Dans ce contexte, l'objectif est de construire, si possible, des lois de commande par retour d'état statique permettant de découpler la variable de sortie des variables d'entrée de perturbation.

5.2.1 Rejet de perturbations

Une loi de commande du type $u(t) = Fx(t)$ ne permet pas de découpler la perturbation $d_3(t)$ de la variable de sortie $y(t)$. En effet, sur le modèle BG1, les sources d'entrée E_1 et E_3 sont situées à la même distance du détecteur de sortie D_1 . La condition nécessaire et suffisante de rejet de la perturbation $d_3(t)$ exprimée par le théorème 3.25 n'est donc pas vérifiée.

Par contre, moyennant la mesure de la perturbation, l'objectif de découplage peut être atteint. La loi de commande à utiliser dans ce cas est de la forme $u(t) = Fx(t) + Gd_3(t)$ [38].

La synthèse de ce type de loi de commande n'a pas été détaillée dans ce travail. Nous nous intéressons plus précisément au rejet de la perturbation $d_2(t)$ correspondant au mouvement de la route, en ignorant la perturbation représentée, sur le modèle $BG1$, par la source d'entrée E_3 .

5.2.2 Etude du modèle initial

Dans cette section, nous calculons l'expression symbolique d'une loi de commande par retour d'état statique découplant la variable de sortie $y(t)$ du modèle $BG1$ de sa variable d'entrée de perturbation $d_2(t)$. Nous caractérisons tout d'abord la solubilité du problème de rejet de perturbation - **phase1**. Nous déterminons ensuite l'expression formelle des pôles du modèle bouclé - **phase2**. Nous donnons enfin l'expression symbolique d'une loi de commande - **phase3**.

Phase1 : découplabilité du modèle $BG1$.

Sur le modèle $BG1$, le chemin causal le plus court du détecteur de sortie D_1 vers la source d'entrée E_1 est $D_1 \rightarrow I_{ar} \rightarrow R_{ar} \rightarrow E_1$. La longueur de ce chemin causal est égale à un - définition 2.6. Cette longueur définit la valeur de l'ordre n_1 du zéro infini du modèle : $n_1 = 1$.

D'autre part, le chemin causal le plus court du détecteur de sortie D_1 vers la source d'entrée E_2 est $D_1 \rightarrow I_{ar} \rightarrow R_{ar} \rightarrow I_r \rightarrow C_p \rightarrow E_2$. La longueur de ce chemin causal est égale à trois.

La comparaison des longueurs de ces deux chemins causaux permet de tirer la conclusion suivante : le signal de commande parvient au détecteur de sortie avant le signal de perturbation. La condition nécessaire et suffisante de rejet de la perturbation $d_2(t)$ exprimée par le théorème 3.25 est donc vérifiée. La variable de sortie $y(t)$ peut ainsi être découplée de la variable de perturbation $d_2(t)$ par une loi de commande du type $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$, où $v(t)$ est la variable d'entrée de consigne. Cette loi de commande utilise comme support géométrique le sous-espace $\mathcal{V}^*$ - section 1.2.3.

L'entier n_1 étant égal à un, la loi de commande apporte un degré de liberté en boucle fermée. Parmi les quatre modes du modèle bouclé, un seul pourra donc être assigné librement. Nous caractérisons à présent l'expression formelle des trois autres pôles du modèle bouclé.

Phase2 : structure finie du modèle $BG2$.

La valeur de ces pôles est fixée. Ces modes sont en effet les trois zéros invariants du modèle "non perturbé" en boucle ouverte $BG2$.

L'étude du modèle *BG2* en causalité dérivée permet tout d'abord de montrer qu'aucun de ces zéros invariants n'est nul. Notons en effet *BG3* le modèle *BG2* affecté d'une causalité dérivée - figure 5.6.

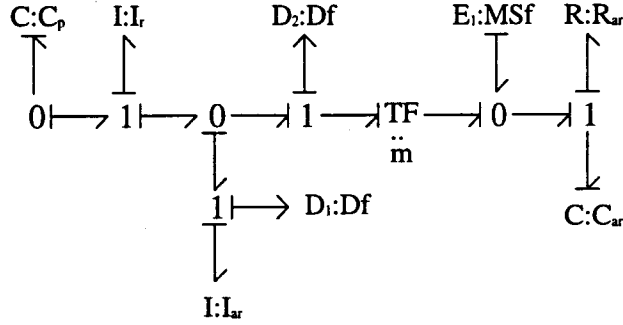


Figure 5.6: modèle bond-graph *BG3*.

Sur ce modèle, le plus court chemin causal du détecteur de sortie D_1 vers la source d'entrée E_1 ne traverse aucun élément dynamique. Selon la propriété 3.11, l'ordre n_{1d} du zéro infini du modèle *BG3* vaut par conséquent $n_{1d} = 0$. Le théorème 3.15 permet ainsi de déduire que le modèle *BG2* ne possède aucun zéro invariant nul.

L'expression formelle des zéros invariants est alors obtenue en appliquant la propriété 2.23 au modèle *BG2*. Ces zéros invariants sont les racines du polynôme $Q(s)$ donné par l'équation (5.2).

$$Q(s) = \left(s + \frac{1}{R_{ar}C_{ar}}\right) \cdot \left(s^2 + \frac{1}{I_r C_p}\right) \quad (5.2)$$

Remarquons que ces zéros invariants sont également les modes fixes du modèle bouclé. En effet, les techniques présentées en section 3.1.1 permettent de montrer sans calcul que le modèle *BG1* privé de la source d'entrée E_3 ne possède aucun zéro invariant - détecteur fictif sur l'élément dynamique C_{ar} . Les modes fixes du modèle bouclé sont par conséquent tous les zéros invariants du modèle *BG2* [39].

Phase3: loi de commande et modèle bouclé.

Nous donnons enfin l'expression symbolique d'une loi de commande par retour d'état statique permettant de découpler la variable de sortie $y(t)$ de la variable d'entrée de perturbation $d_2(t)$.

Cette loi s'écrit $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$, où $v(t)$ est la variable d'entrée de consigne en boucle fermée. Les expressions formelles des matrices F et

G sont calculées conformément à la propriété 3.31. Elles sont données par l'équation (5.3).

$$\begin{cases} F = \left[\left(\frac{p_1}{mR_{ar}} + \frac{m}{I_{ar}} \right) \frac{-1}{R_{ar}C_{ar}} \frac{-m}{I_r} 0 \right] \\ G = \left[\frac{gI_{ar}}{mR_{ar}} \right] \end{cases} \quad (5.3)$$

Le degré de liberté apporté par cette loi de commande est le paramètre p_1 . Il permet de placer un pôle du modèle bouclé. Le coefficient g est en outre destiné à régler le gain statique du modèle bouclé.

La matrice de transfert de ce modèle bouclé est la matrice $T_{BF}(s)$ vérifiant l'équation (5.4).

$$\begin{cases} T_{BF}(s) = \begin{bmatrix} T_{BF}^1(s) & T_{BF}^2(s) \end{bmatrix} \\ y(s) = T_{BF}^1(s)v(s) + T_{BF}^2(s)d_2(s) \end{cases} \quad (5.4)$$

Les expressions formelles des fonctions de transfert $T_{BF}^1(s)$ et $T_{BF}^2(s)$ sont déduites de l'équation (5.3). Elles sont données par l'équation (5.5).

$$\begin{cases} T_{BF}^1(s) = \frac{g}{(s-p_1)} \\ T_{BF}^2(s) = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

La fonction de transfert $T_{BF}^2(s)$ étant nulle, la variable de sortie $y(t)$ du modèle bouclé est effectivement découplée de la variable de perturbation $d_2(t)$.

Enfin, le polynôme caractéristique $R(s)$ de la matrice d'état en boucle fermée $(A + BF)$ est donné par l'équation (5.6).

$$R(s) = (s - p_1) \cdot \left(s + \frac{1}{R_{ar}C_{ar}} \right) \cdot \left(s^2 + \frac{1}{I_r C_p} \right) \quad (5.6)$$

Comme prévu, les racines de ce polynôme sont d'une part les trois zéros invariants du modèle "non perturbé" $BG2$ et d'autre part le mode assigné grâce au paramètre p_1 .

La solution de commande proposée n'apporte donc qu'un seul degré de liberté. Les trois modes non assignables du modèle bouclé étant tous des modes fixes, aucune loi de commande du type $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ ne permet, à partir du modèle existant, d'augmenter le nombre de modes assignables du modèle découplé.

5.2.3 Modification de la position de l'actionneur

Dans cette section, nous proposons une modification de la structure du modèle $BG1$ permettant de concevoir une solution de commande telle que le modèle découplé possède deux degrés de liberté.

Cette modification consiste à placer la source d'entrée de commande E_1 sur l'élément dynamique C_{ar} . Le débit de commande est ainsi injecté directement dans la sphère. Le modèle ainsi obtenu est noté $BG4$ - figure 5.7.

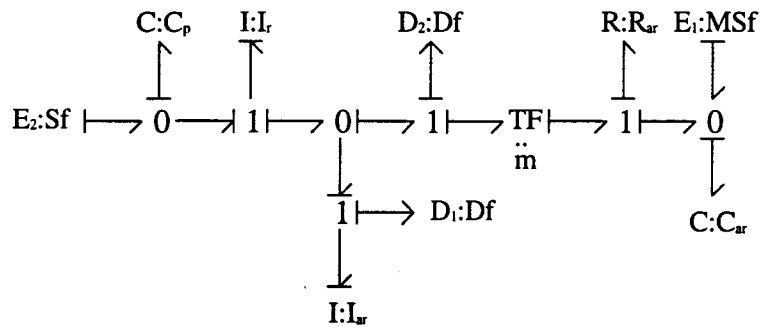


Figure 5.7: modèle bond-graph $BG4$.

En éliminant de ce modèle la source d'entrée E_2 , nous obtenons le modèle "non perturbé" $BG5$ - figure 5.8.

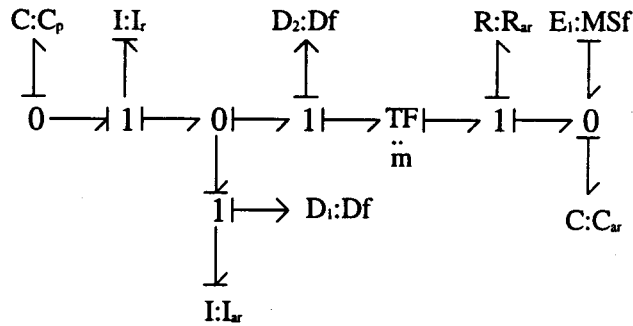


Figure 5.8: modèle bond-graph $BG5$.

Phase1 : découplabilité du modèle $BG4$.

Sur le modèle $BG4$, le chemin causal le plus court du détecteur de sortie D_1 vers la source d'entrée E_1 est à présent $D_1 \rightarrow I_{ar} \rightarrow C_{ar} \rightarrow E_1$. La longueur de ce chemin causal est égale à deux - définition 2.6. Cette longueur définit la nouvelle valeur de l'ordre n_1 du zéro infini du modèle : $n_1 = 2$.

La longueur du plus court chemin causal du détecteur de sortie D_1 vers la source d'entrée E_2 étant toujours égale à trois, le rejet de la perturbation $d_2(t)$ peut être réalisé par une loi du type $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$. Cette loi de commande utilise, ici encore, le sous-espace $\mathcal{V}^*$ - section 1.2.3 - comme support géométrique.

L'entier n_1 étant égal à deux, la loi de commande apporte désormais deux degrés de liberté en boucle fermée. Par conséquent, deux des modes du modèle bouclé pourront être assignés librement. La valeur des deux autres modes est fixée: ces modes sont les deux zéros invariants du modèle $BG5$, dont nous déterminons à présent l'expression formelle.

Phase2: structure finie du modèle $BG5$.

Nous calculons tout d'abord le nombre de zéros invariants nuls. A cet effet, nous affectons au modèle $BG5$ une causalité dérivée. Le modèle obtenu est noté $BG6$ - figure 5.9.

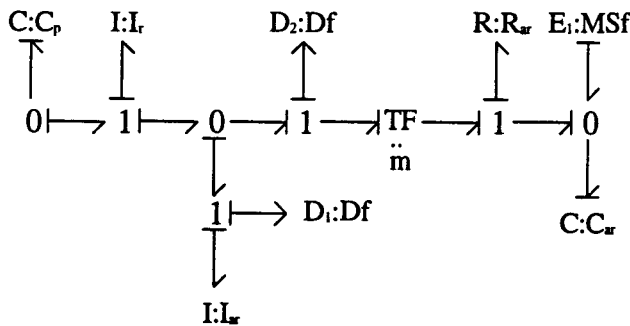


Figure 5.9: modèle bond-graph $BG6$.

Sur ce modèle, le plus court chemin causal du détecteur de sortie D_1 vers la source d'entrée E_1 ne traverse aucun élément dynamique. Comme dans le cas de la section précédente, nous en déduisons que le modèle $BG5$ ne possède aucun zéro invariant nul.

L'expression symbolique des deux zéros invariants est donc déterminée conformément à la propriété 2.23. Ces zéros invariants sont les racines du polynôme $Q(s)$ donné par l'équation (5.7).

$$Q(s) = \left(s^2 + \frac{1}{I_r C_p} \right) \tag{5.7}$$

Pour les mêmes raisons que dans la section précédente, ces zéros invariants sont également les modes fixes du modèle découplé [39].

Phase3: loi de commande et modèle bouclé.

Nous donnons enfin l'expression formelle du retour d'état statique $u(t) = Fx(t) + Gv(t)$ permettant de construire le modèle découplé dont nous avons montré l'existence.

Les expressions symboliques des matrices F et G sont calculées conformément à la propriété 3.31, où le sous-espace de découplage utilisé est le sous-espace $\mathcal{V}^*$ - section 1.2.3. Ces expressions formelles sont données par l'équation (5.8).

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{bmatrix} \\ G = \begin{bmatrix} \frac{gI_{ar}C_{ar}}{m} \end{bmatrix} \\ f_1 = f_{11} + f_{12} \\ f_{11} = \frac{-1}{mI_{ar}^2I_r} [-p_{21}I_{ar}^2C_{ar}I_r + m^2I_{ar}I_r(p_{22}R_{ar}C_{ar} - 1)] \\ f_{12} = \frac{-1}{mI_{ar}^2I_r} [m^4R_{ar}^2C_{ar}(I_r + I_{ar})] \\ f_2 = \frac{1}{I_{ar}I_r} [p_{22}I_{ar}I_r + m^2R_{ar}(I_r + I_{ar})] \\ f_3 = \frac{m}{I_{ar}I_r^2} [I_{ar}I_r(p_{22}R_{ar}C_{ar} - 1) + m^2R_{ar}^2C_{ar}(I_r + I_{ar})] \\ f_4 = \frac{-mC_{ar}R_{ar}}{I_rC_p} \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Les coefficients p_{21} et p_{22} sont les deux degrés de liberté permettant d'assigner deux des modes du modèle bouclé. Comme pour la première loi de commande, le coefficient g permet quant à lui de régler le gain statique du modèle bouclé.

La matrice de transfert de ce modèle bouclé est la matrice $T_{BF}(s)$ vérifiant l'équation (5.9).

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{BF}(s) = \begin{bmatrix} T_{BF}^1(s) & T_{BF}^2(s) \end{bmatrix} \\ y(s) = T_{BF}^1(s)v(s) + T_{BF}^2(s)d_2(s) \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Les expressions formelles des fonctions de transfert $T_{BF}^1(s)$ et $T_{BF}^2(s)$ sont déduites de l'équation (5.8). Elles sont données par l'équation (5.10).

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{BF}^1(s) = \frac{g}{(s^2 - p_{22}s - p_{21})} \\ T_{BF}^2(s) = 0 \end{array} \right. \quad (5.10)$$

La fonction de transfert $T_{BF}^2(s)$ étant nulle, la variable de sortie $y(t)$ du modèle bouclé est effectivement découplée de la variable de perturbation $d_2(t)$.

Enfin, le polynôme caractéristique $R(s)$ de la matrice d'état en boucle fermée $(A + BF)$ est donné par l'équation (5.11).

$$R(s) = (s^2 - p_{22}s - p_{21}) \cdot \left(s^2 + \frac{1}{I_r C_p} \right) \quad (5.11)$$

Comme prévu, les racines de ce polynôme sont d'une part les deux zéros invariants du modèle non perturbé $BG5$ et d'autre part les deux modes assignés grâce aux paramètres p_{21} et p_{22} .

Signalons enfin que, pour un modèle de suspension faiblement amorti - $R_{ar} \approx 0$, les caractéristiques du modèle découplé sont tout à fait identiques à celles que nous venons de présenter - même modes non assignables et même nombre de degrés de liberté. La structure de la loi de commande est cependant différente: le quatrième état n'est pas utilisé par la loi de commande - équation (5.12).

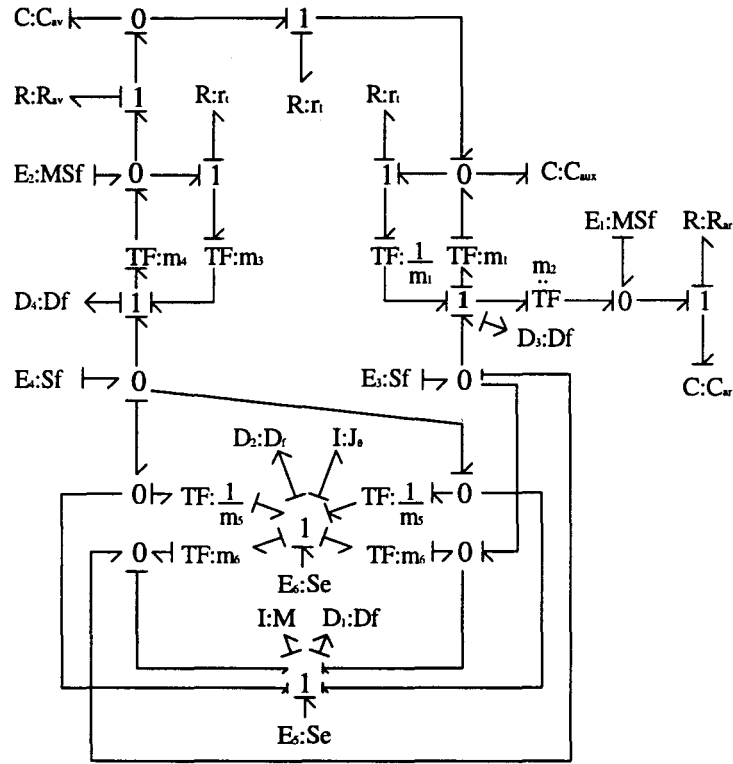
$$\begin{cases} F = \left[\frac{1}{I_{ar} m} (p_{31} I_{ar} C_{ar} + m^2) & p_{32} & \frac{-m}{I_r} & 0 \right] \\ G = \left[\frac{g I_{ar} C_{ar}}{m} \right] \end{cases} \quad (5.12)$$

5.3 Modèle multivariable non simplifié

Dans cette partie, nous présentons enfin des résultats concernant l'analyse structurelle et la commande par découplage entrée-sortie du modèle de suspension en pompage-tangage non simplifié - modèle $BGM2$. Nous étudions tout d'abord les propriétés de commandabilité et d'observabilité de ce modèle - **phase1**. Nous en caractérisons ensuite la découplabilité statique régulière - **phase2**.

Phase1: commandabilité et observabilité structurelles du modèle $BGM2$.

Ces propriétés sont déduites de la mise en causalité dérivée du modèle. Le modèle ainsi obtenu est noté $BGM3$ - figure 5.10.

Figure 5.10: modèle bond-graph *BGM3*.

La causalité dérivée peut être assignée à l'ensemble des éléments dynamiques de ce modèle. Cependant, des boucles de causalité apparaissent. Ces boucles sont localisées sur la partie inférieure du modèle. La valeur du gain de chacune d'entre elles doit être différente de un - remarque 2.8.

L'examen de ces différentes boucles permet de montrer qu'aucune d'entre elles ne possède un gain de valeur un. Par contre, certains de ces gains sont égaux à $\frac{m_6}{m_5}$. Il convient donc de s'assurer que les paramètres m_5 et m_6 ne sont pas égaux. Physiquement, cela revient à considérer que le centre de gravité du véhicule n'est pas situé à égale distance des deux essieux.

Dans ce cas, la matrice d'état du modèle bond-graph *BGM2* est de rang plein. Ce modèle est donc structurellement commandable par les sources d'entrée modulées $\{E_1, E_2\}$ et observable par les capteurs $\{D_3, D_4\}$. Les mesures fournies par ces capteurs pourront donc être utilisées pour reconstituer les variables d'états du modèle utilisées par la loi de commande.

Phase2: découplabilité du modèle *BGM2* et modèle bouclé.

Le modèle *BGM2* est inversible. En effet, conformément à la propriété 2.23, l'étude des gains des chemins causaux entrée-sortie différents de longueur un permet de montrer que le coefficient du terme de plus haut degré du déterminant de la matrice système n'est pas nul.

De plus, ce modèle est découplable par retour d'état statique régulier. En effet, examinons sur ce modèle les chemins causaux entrée-sortie les plus courts.

Le chemin causal le plus court du détecteur de sortie D_1 vers les sources d'entrée de commande est $D_1 \rightarrow M \rightarrow R_{ar} \rightarrow E_1$ ou $D_1 \rightarrow M \rightarrow R_{av} \rightarrow E_2$. De même, le chemin causal le plus court du détecteur de sortie D_2 vers les sources d'entrée de commande est $D_2 \rightarrow J_\theta \rightarrow R_{ar} \rightarrow E_1$ ou $D_2 \rightarrow J_\theta \rightarrow R_{av} \rightarrow E_2$. Il existe donc au moins un couple de chemins causaux entrée-sortie différents qui soient respectivement les plus courts vers l'ensemble des sources d'entrée. Le modèle *BGM2* est par conséquent découplable par retour d'état statique régulier.

Les longueurs respectives de ces chemins sont égales à un - définition 2.6. La loi de commande apportera donc au total deux degrés de liberté p_1 et p_2 , tels que la matrice de transfert $T_{BF}(s)$ du modèle bouclé vérifie l'équation (5.13).

$$T_{BF}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-p_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s-p_2)} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Parmi les cinq modes du modèle bouclé, deux pourront donc être assignés librement et trois seront fixes.

Une manière d'augmenter le nombre de degrés de liberté disponibles en boucle fermée est là encore de placer les sources d'entrée modulées $\{E_1, E_2\}$ directement sur les éléments dynamiques C_{ar} et C_{av} . Les chemins causaux entrée-sortie différents les plus courts du modèle *BGM2* ont dans ce cas chacun pour longueur deux. La loi de commande apporte alors au total quatre degrés de liberté en boucle fermée, de telle sorte qu'un seul des modes du modèle découplé n'est fixe. Ce mode a pour valeur $s = \frac{-1}{r_1 C_{aux}}$.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons illustré l'intérêt de l'analyse structurale d'un modèle bond-graph dans une démarche de conception d'architecture de commande. Nous avons également calculé l'expression formelle de retours d'état statiques permettant d'atteindre un objectif de contrôle donné - rejet de perturbations, placement de pôles.

Ces lois de commande sont exprimées de manière symbolique en fonction des paramètres du modèle. Certains de ces paramètres peuvent varier dans des proportions importantes - masse du véhicule par exemple. Une identification en temps réel de ces paramètres - moindres carrés récurrents par exemple - permettrait alors de recalculer les valeurs numériques des coefficients de la loi de commande. Cette boucle d'adaptation en améliore ainsi la robustesse.

En outre, ces lois de commande sont des retours d'état statiques. Elles nécessitent par conséquent de pouvoir mesurer les états du système. Si certains d'entre eux ne sont pas mesurables, un observateur doit être intégré dans la boucle de commande pour reconstituer les états à partir de la mesure des sorties. Des techniques de contrôle par retour de sortie permettraient de s'affranchir de cette reconstruction. Ces techniques sont actuellement à l'étude au sein de l'équipe.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé des outils méthodologiques d'aide à la conception d'architectures de commande pour des systèmes physiques modélisés par bond-graph. Dès la phase de construction du modèle, ces outils visent à apporter une réponse à la question suivante : dans un objectif de contrôle donné - rejet de perturbations par exemple - est-il possible de mettre en oeuvre, à partir du modèle considéré, une stratégie de commande par découplage entrée-sortie?

Notre contribution concerne l'étude de la stabilité du modèle découplé. Cette propriété dépend de la structure des zéros invariants du modèle.

Nous avons ainsi tout d'abord mis en évidence l'intérêt du modèle bond-graph en causalité dérivée pour déterminer le nombre de zéros invariants nuls. Les procédures proposées à cet effet sont entièrement graphiques et ne nécessitent aucun calcul. Elles permettent, dans la plupart des cas, de savoir si le modèle considéré peut être découplé avec stabilité par retour d'état statique régulier.

De plus, nous avons montré comment identifier, grâce à ces procédures, les éléments du modèle en boucle ouverte dont dépend la stabilité du modèle découplé. Si nécessaire, le modèle peut ainsi être modifié de manière à rendre possible la stratégie de commande envisagée - prise en compte de phénomènes physiques négligés jusqu'à présent, modification du placement des actionneurs par exemple.

Enfin, nous avons proposé une méthode visant à déterminer l'expression formelle - et non numérique - de lois de commande garantissant la non interaction et la stabilité du modèle bouclé. Cette méthode repose sur l'utilisation conjointe d'outils géométriques et du formalisme bond-graph.

Les résultats présentés dans ce mémoire ne constituent cependant qu'une première approche pour la résolution des problèmes de commande - par découplage entrée-sortie - des modèles bond-graph.

Concernant les techniques de découplage par retour d'état statique, au moins trois questions importantes restent en effet sans réponse. Les deux

premières concernent les modèles bond-graph dont la matrice d'état est de rang plein. Ces questions sont les suivantes :

Comment déterminer spécifiquement le nombre et l'expression formelle des zéros invariants strictement instables? S'ils ne sont pas des modes fixes, comment caractériser l'expression formelle des sous-espaces de découplage correspondants? Quelle information fournit à cet effet la bicausalité?

Pour les modèles possédant plus de variables d'entrée que de variables de sortie, comment généraliser la méthode de calcul des lois de commande fondée sur la notion de sous-espace de découplage? Le formalisme bond-graph permet-il, en particulier, de caractériser et d'exploiter de manière simple la structure du sous-espace de commandabilité R^* ?

La troisième interrogation concerne les modèles bond-graph non observables ou non commandables, dont la matrice d'état n'est donc pas inversible. Pour cette classe de modèles, les intuitions présentées pour décrire la structure des zéros-système peuvent-elles être validées? Pour calculer l'expression symbolique des lois de commande, comment s'affranchir de la non-inversibilité de la matrice d'état?

Une extension majeure à donner à ce travail concerne enfin la commande des modèles bond-graph par retour de sortie. Ce type de loi de commande trouve en effet une application immédiate dans les cas où la mesure des variables d'état du système est impossible. Par une approche purement géométrique, des travaux importants ont déjà été réalisés. Le formalisme bond-graph présente très certainement un intérêt dans cette démarche, que des travaux ultérieurs devront identifier.

Pour terminer, rappelons que ces méthodes s'inscrivent dans une perspective de réduction des temps de conception de nouveaux composants et organes physiques. A cet effet, un outil informatique d'analyse - Archer - est en cours de développement. Il vise à permettre un accès très rapide à l'ensemble des propriétés structurelles du modèle d'un système en phase de conception.

Bibliographie

- [1] Andrei, N. (1985). Sparse systems: digraph approach of large scale linear systems theory. ISR, Verlag TÜV Rheinland.
- [2] Basile, G. et G. Marro (1992). Controlled invariants and conditioned invariants in linear system theory. Englewood Cliffs, Prentice Hall, New Jersey, USA.
- [3] Bertrand, J.M., C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy (1996). Détermination graphique des modes fixes de systèmes physiques modélisés par bond-graph. AGI'96, Tours, France, pp. 147-150.
- [4] Bertrand, J.M., C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy (1997). Bond-graph for modeling and control: structural analysis tools for the design of input-output decoupling state feedbacks. International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, Phoenix, Arizona, USA, pp. 103-108.
- [5] Bertrand, J.M., C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy (1997). Bond-graph modelling for geometric decoupling control. "2nd MATHMOD VIENNA" IMACS Symposium on Mathematical Modelling, Vienna, Austria, pp. 123-128.
- [6] Bertrand, J.M., C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy (1997). Bond-graph modeling and geometric approach: input-output decoupling with stability. IFAC Conference on Control of Industrial Systems, Belfort, France, pp. 317-322.
- [7] Bertrand, J.M., C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy (1997). Bond-graph modeling and geometric approach: analysis of non square systems. IFAC Conference on System Structure and Control, Bucharest, Romania, pp. 101-106.
- [8] Bertrand, J.M., C. Sueur et G. Dauphin-Tanguy (1997). On the finite and infinite structures of bond-graph models. IEEE Conference on Systems, Man and Cybernetics, Orlando, Florida, USA, pp. 2472-2477.

- [9] Breedveld, P.C., R.C. Rosenberg and T. Zhou (1991). Bibliography of bond-graph theory and application. *Journal of the Franklin Institute*, vol. 328, No. 5/6, pp. 1067-1109.
- [10] [http: //www.ece.arizona.edu/~cellier/bg.html](http://www.ece.arizona.edu/~cellier/bg.html).
- [11] Claude, D. (1992). *Automatique - Cours de Maîtrise*. Service de Publications Paris Onze édition , Université Paris-Sud, Orsay, France.
- [12] Commault, C. et J.M. Dion (1982). Structure at infinity of linear multivariable systems. A geometric approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 693-696.
- [13] Commault, C., J. Descusse, J.M. Dion, J.F. Lafay et M. Malabre (1986). New decoupling invariants: the essential orders. *International Journal of control*, vol. 44, No. 3, pp. 689-700.
- [14] Descusse, J. et J.M. Dion (1982). On the structure at infinity of linear square decoupled systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-27, No. 4, pp. 971-974.
- [15] Descusse, J., J.F. Lafay et M. Malabre (1988). Solution to Morgan's problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-33, No. 8, pp. 732 -739.
- [16] Van Dijk, J. (1994). On the role of bond-graph causality in modelling mechatronic systems. PhD thesis. University of Twente.
- [17] Dion, J.M. et C. Commault (1982). Smith-McMillan factorizations at infinity of rational matrix functions and their control interpretation. *Systems & Control Letters*, vol. 1, No. 5, pp. 312-320.
- [18] Dion, J.M. (1983). Sur la structure à l'infini des systèmes linéaires. Thèse de doctorat. Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [19] Dion, J.M. (1983). Feedback block decoupling and infinite structure of linear systems. *International Journal of Control*, vol. 37, No. 3, pp. 521-533.
- [20] Dion, J.M. et C. Commault (1991). Feedback decoupling of structured systems. *European Control Conference*, Grenoble, France, pp. 1789-1793.

- [21] Falb, P.L. et W.A. Wolowich (1967). Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-12, pp. 651-659.
- [22] Fotsu Ngwompo, R. (1997). Contribution au dimensionnement des systèmes sur des critères dynamiques et énergétiques - Approche par bond-graph. Thèse de doctorat. Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- [23] Gawthrop, P.J. (1997). Control system configuration: inversion and bi-causal bond graphs. *International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, Phoenix, Arizona, USA, pp. 97-102.
- [24] Gilbert, E.G. (1969). The decoupling of multivariable systems by state feedback. *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 7, pp. 50-63.
- [25] Grizzle, J.W. et A. Isidori (1989). Block noninteracting control with stability via static state feedback. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 2, pp. 315-341.
- [26] Guillemard, F. (1996). Présentation d'une méthodologie générale pour l'analyse et la commande des systèmes physiques: application au cas de la suspension oléopneumatique active. Thèse de doctorat. Université Lille I.
- [27] Hautus, M.L.J. (1975). The formal laplace transform for smooth linear systems. *Mathematical systems theory*, Udine. *Lecture notes in economics and mathematical systems*, vol. 131, Springer Verlag.
- [28] Herrera Hernandez, A.N. (1991). Sur le découplage des systèmes linéaires par des lois statiques non régulières. Thèse de doctorat. Université de Nantes.
- [29] Icart, S. (1990). Etude du découplage ligne par ligne avec stabilité: le cas des systèmes linéaires. Thèse de doctorat. Université de Nantes.
- [30] Icart, S., J.F. Lafay et M. Malabre (1990). A Unified Study of the Fixed Modes of Systems Decoupled via Regular Static State Feedback. *Joint Conference on New Trends in System Theory*, Genova, Italy, pp. 425-432. Birkhauser Boston.
- [31] Karnopp, D.C., D.L. Margolis et R.C. Rosenberg (1990). *System dynamics: a unified approach*. John Wiley & Sons, Inc..

- [32] Koussiouris, T. (1980). A frequency domain approach to the block decoupling problem II: pole assignment while block decoupling a minimal system by state feedback and a constant non singular input transformation and the observability of the block decoupled system. *International Journal of Control*, vol. 32, pp. 443-464.
- [33] Lin, C.T., Structural controllability (1974). *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-19, pp. 201-208.
- [34] Loiseau, J.J. (1988). Sur la modification de la structure à l'infini par un retour d'état statique. *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 26, No. 2, pp. 251-273.
- [35] Macfarlane, A.G.J. et N. Karcnias (1976). Poles and zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex variable theory. *International Journal of Control*, vol. 24, No. 1, pp. 33-74.
- [36] Malabre, M. (1985). Sur le rôle de la structure à l'infini et des sous-espaces presque invariants dans la résolution de problèmes de commande. Thèse de doctorat. Université de Nantes.
- [37] Malabre, M. (1993). Approche géométrique: outils de base. Colloque Σ_{∞}^{+} : Commande des Systèmes Linéaires - Approche Structurale, Nantes, France.
- [38] Malabre, M. et J.C. Martinez Garcia (1993). The modified disturbance rejection problem with stability: a structural approach. *European Control Conference*, Groningen, the Netherlands, pp. 1119-1124.
- [39] Malabre, M. et J.C. Martinez Garcia (1995). On the fixed poles for disturbance rejection. *IFAC Conference on System Structure and Control*, Nantes, France, pp. 601-604.
- [40] Martinez Garcia, J.C. et M. Malabre (1994). The row by row decoupling problem with stability: a structural approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-39, No. 12, pp. 2457 -2460.
- [41] Martinez Garcia, J.C. et M. Malabre (1995). Simultaneous disturbance rejection and regular row by row decoupling with stability: a geometric approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-40, No. 2, pp. 365 -369.

- [42] Morgan, B.S. (1964). The synthesis of linear multivariable systems by state feedback. Joint Automatic Control Conference, pp. 468-472.
- [43] Morse, A.S. (1973). Structural invariants of linear multivariable systems. SIAM Journal of Control and Optimization, vol. 11, No. 3, pp. 446-465.
- [44] Morse, A.S. et W.M. Wonham (1971). Status of noninteracting control. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-16, No. 6, pp. 568-581.
- [45] Paynter, H.M. (1960). Analysis design of engineering systems. Cambridge, Mass. MIT Press.
- [46] Rahmani, A. (1993). Etude structurelle des systèmes linéaires par l'approche bond-graph. Thèse de doctorat. Université Lille I.
- [47] Rimaux, S. (1995). Etude des propriétés structurelles de certaines classes de systèmes physiques non linéaires modélisés par bond-graph. Thèse de doctorat. Université Lille I.
- [48] Rosenberg, R.C. et A.N. Andry (1979). Solvability and bond-graph junction structures with loops. IEEE Transactions on Circuit and Systems, vol. CAS-26, No.2, pp. 130 -137.
- [49] Rosenbrock, H.H. (1970). State space and multivariable theory. Nelson, London, England.
- [50] Schumacher, J.M. (1980). A complement on pole placement. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-25, No. 2, pp. 281-282.
- [51] Sueur, C. (1990). Contribution à la modélisation et l'analyse des systèmes dynamiques par une approche bond-graph. Application aux systèmes polyarticulés plans à segments flexibles. Thèse de doctorat. Université Lille I.
- [52] Sueur, C. et G. Dauphin-Tanguy (1991). Bond-graph approach for structural analysis of MIMO linear systems. Journal of the Franklin Institute, vol. 328, No. 1, pp. 55-70.
- [53] Sueur, C. et G. Dauphin-Tanguy (1992). Poles and zeros of multivariable linear systems: a bond graph approach. In: Bond Graphs for Engineers (P.C. Breedveld and G. Dauphin-Tanguy (ed.)), pp. 211-228. Elsevier Science Publishers B. V..

- [54] Sueur, C. et G. Dauphin-Tanguy (1992). Grassmann algebra and bond-graph modelling. *Journal of the Franklin Institute*, vol. 329, No.6, pp. 1129-1146.
- [55] Sueur, C. et G. Dauphin-Tanguy (1994). Bond-graph modelling and invariant subspaces. "MATHMOD VIENNA" IMACS Symposium on Mathematical Modelling, Vienna, Austria, vol. 1, pp. 41-44.
- [56] Verghese, G.C. (1978). Infinite frequency behaviour of generalized dynamical systems. Ph.D. thesis, Electrical Engineering Department, Stanford University.
- [57] Van der Weiden, A.J.J. et O.H. Bosgra (1982). Analyse structurelle des systèmes linéaires multivariables strictement propres et non propres (théorie et applications). Dans: *Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique, l'Analyse de Systèmes et le Traitement du Signal*. pp. 115-202. Editions du C.N.R.S.
- [58] Wonham, W.M. (1979). Geometric state-space theory in linear multivariable control: a status report. *Automatica*, vol. 15, pp. 5-13.
- [59] Wonham, W.M. (1985). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. Springer Verlag, third edition, New York, USA.
- [60] Wonham, W.M. et A.S. Morse (1970). Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems: a geometric approach. *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 8, No. 1, pp. 1-18.
- [61] Van der Woude, J.W. (1994). Graph theoretic methods for the computation of disturbance decoupling feedback matrices for structured systems. *Linear Algebra and its Applications*, vol. 196, pp. 139-162.

Annexes

A.1 Matrices unimodulaire et bicausale

Dans cette annexe, nous rappelons les notions de matrice unimodulaire et bicausale utilisées en partie 1.1.

Ces matrices sont des éléments des différents ensembles suivants.

$\mathcal{R}_{pol}(s)$: l'ensemble des polynômes en l'indéterminée s dont les coefficients sont des nombres réels.

$\mathcal{R}_{pol}^{a \times b}(s)$: l'ensemble des matrices à a lignes et b colonnes dont les coefficients sont des éléments de $\mathcal{R}_{pol}(s)$.

$\mathcal{R}_{rat}(s)$: l'ensemble des fractions rationnelles en l'indéterminée s dont les coefficients sont des nombres réels.

$\mathcal{R}_{rat}^{p \times m}(s)$: l'ensemble des matrices à p lignes et m colonnes dont les coefficients sont des éléments de $\mathcal{R}_{rat}(s)$.

$\mathcal{R}_{rp}(s)$: l'ensemble des fractions rationnelles propres en l'indéterminée s dont les coefficients sont des nombres réels.

$\mathcal{R}_{rp}^{p \times m}(s)$: l'ensemble des matrices à p lignes et m colonnes dont les coefficients sont des éléments de $\mathcal{R}_{rp}(s)$.

Définition 6.1 . Soit $U(s) \in \mathcal{R}_{pol}^{a \times a}(s)$ une matrice polynômiale. $U(s)$ est une matrice unimodulaire si et seulement si son inverse $U^{-1}(s)$ est aussi polynômiale.

Une matrice unimodulaire $U(s)$ est donc une matrice carrée dont le déterminant est une constante non nulle.

Définition 6.2 . Soit $B(s) \in \mathcal{R}_{rp}^{a \times a}(s)$ une matrice rationnelle propre. $B(s)$ est une matrice bicausale si et seulement si son inverse $B^{-1}(s)$ est aussi propre.

Remarque 6.3 . *De manière équivalente, une matrice bicausale $B(s)$ est telle que son déterminant vérifie l'équation (6.14).*

$$\det \left[\lim_{s \rightarrow \infty} \{B(s)\} \right] \neq 0 \quad (6.14)$$

A.2 Ordres d'essentialité

Dans cette annexe figure la définition de l'ordre d'essentialité n_{ie} associé à la $i^{\text{ème}}$ sortie du système $\sum (C, A, B)$ [13] - section 1.3.2.

Cette définition repose sur la notion de ligne essentielle d'une matrice.

Définition 6.4 . La ligne p_0 d'une matrice M contenant p lignes et m colonnes est essentielle si elle ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des $(p - 1)$ autres lignes de M .

Soit Γ_n la matrice de Toeplitz à l'ordre n relative au système $\sum (C, A, B)$, définie par l'équation (6.15).

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ CA^{n-1}B & \dots & \dots & CB \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Soit γ_μ^i la ligne de Γ_n définie par l'équation (6.16).

$$\gamma_\mu^i = [c_i A^{\mu-1} B \mid c_i A^{\mu-2} B \mid \dots \mid c_i B \mid 0] \quad (6.16)$$

L'ordre d'essentialité associé à la $i^{\text{ème}}$ sortie du système $\sum (C, A, B)$ est alors défini de la manière suivante.

Définition 6.5 . L'ordre d'essentialité associé à la $i^{\text{ème}}$ sortie du système $\sum (C, A, B)$ est l'entier n_{ie} vérifiant l'équation (6.17).

$$n_{ie} = \inf \{ \mu \in N \text{ tel que la ligne } \gamma_\mu^i \text{ est essentielle dans } \Gamma_n \} \quad (6.17)$$

A.3 Variables généralisées

Dans cette annexe figure un tableau décrivant le sens physique possible de chacune des quatre variables généralisées - section 2.1.1.

	effort $e(t)$	flux $f(t)$	moment généralisé $p(t)$	déplacement généralisé $q(t)$
mécanique translation	force	vitesse	moment	déplacement
mécanique rotation	couple	vitesse angulaire	moment angulaire	angle
hydraulique	pression	débit volumique	impulsion	volume
acoustique	pression	vitesse volumique	moment	volume
électrique	tension	courant	flux magnétique	charge
chimique	potentiel chimique	flux molaire	-	masse molaire
thermo- dynamique	température	flux entropique	-	entropie

Tableau 6.1: variables généralisées.

A.4 Composants et éléments de jonction

Le tableau figurant dans cette annexe décrit les jonctions élémentaires nécessaires à la construction d'un modèle bond-graph - section 2.1.1.

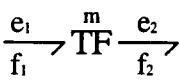
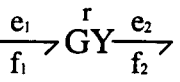
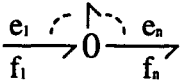
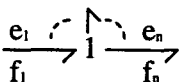
élément bond-graph	nom	relation élémentaire
	transformateur	$e_1(t) - m e_2(t) = 0$ $f_2(t) - m f_1(t) = 0$
	gyrateur	$e_1(t) - r f_2(t) = 0$ $e_2(t) - r f_1(t) = 0$
	jonction 0	$e_1(t) = \dots = e_n(t)$ $\sum_{i=1}^n f_i(t) = 0$
	jonction 1	$f_1(t) = \dots = f_n(t)$ $\sum_{i=1}^n e_i(t) = 0$

Tableau 6.2: éléments de jonction.

A.5 Représentation d'état

Dans cette annexe est résumée une méthode permettant d'exprimer la représentation d'état associée à un modèle bond-graph - section 2.1.3. Cette méthode est détaillée dans [51].

Considérons la représentation vectorielle suivante, reliant les différentes variables du modèle bond-graph - figure A.1.

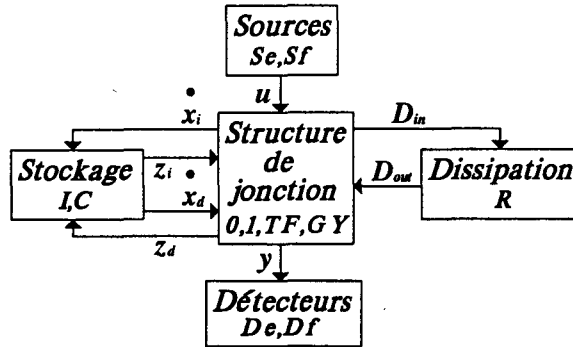


Figure A.1: représentation vectorielle d'un modèle bond-graph.

Le vecteur D_{in} - respectivement D_{out} - regroupe l'ensemble des efforts et flux entrant - respectivement sortant - du champ dissipatif. Ces deux vecteurs vérifient l'équation (6.18).

$$D_{out} = L D_{in} \text{ avec } L = \begin{bmatrix} [R] & 0 \\ 0 & [\frac{1}{R}] \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Le vecteur x_i regroupe les variables d'état associées aux éléments dynamiques en causalité intégrale; le vecteur z_i est son vecteur d'état complémentaire, défini par l'équation (6.19).

$$z_i = F_i x_i \text{ avec } F_i = \begin{bmatrix} [\frac{1}{I_i}] & 0 \\ 0 & [\frac{1}{C_i}] \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Le vecteur x_d regroupe les variables d'état associées aux éléments dynamiques en causalité dérivée; le vecteur z_d est son vecteur d'état complémentaire, défini par l'équation (6.20).

$$x_d = F_d z_d \text{ avec } F_d = \begin{bmatrix} [I_d] & 0 \\ 0 & [C_d] \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

A la représentation vectorielle décrite par la figure 2.7 est associée une matrice de structure S - équation (6.21). Cette matrice permet d'exprimer les variables sortant de la structure de jonction en fonction des variables qui y entrent.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ z_d \\ D_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{x}_d \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Elle vérifie quelques propriétés particulières, rappelées par les équations (6.22).

$$\begin{cases} S_{21} = -S_{12}^t \\ S_{32} = S_{23} = 0 \\ S_{31} = -S_{13}^t \end{cases} \quad (6.22)$$

La représentation d'état associée au modèle bond-graph est déduite des équations (6.21) et (6.22) si $S_{24} = 0$. Dans ce cas, aucun chemin causal n'existe entre les sources d'entrée et les éléments dynamiques statiquement dépendants - éléments I et C en causalité dérivée. La représentation d'état est alors donnée par l'équation (6.23).

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx_i(t) + Du(t) \end{cases} \quad (6.23)$$

Les expressions des matrices A et B sont données par les équations (6.24). Détailler les manipulations nécessaires pour déterminer ces expressions ne présente pas d'intérêt dans le cadre de ce travail. Ces calculs sont exposés dans [51].

$$\begin{cases} A = (I + S_{12}F_d^{-1}S_{12}^T F_i)^{-1} (S_{11} + S_{13}L(I - S_{32}L)^{-1}S_{31}) F_i \\ B = (I + S_{12}F_d^{-1}S_{12}^T F_i)^{-1} (S_{14} + S_{13}L(I - S_{32}L)^{-1}S_{34}) \end{cases} \quad (6.24)$$

A.6 Zéros invariants nuls en ligne

Nous présentons, dans cette annexe, la démonstration du théorème 3.15 - section 3.1.3.

□ Soit $G_i(s)$ la matrice de transfert du sous-système ligne $\sum(c_i, A, B)$ - équations (6.25).

$$\begin{cases} G_i(s) = \frac{1}{D(s)} N_i(s) \\ N_i(s) = [N_{1i}(s) \dots N_{pi}(s)] \end{cases} \quad (6.25)$$

La matrice d'état A du modèle étant de rang plein, le sous-système ligne $\sum(c_i, A, B)$ est structurellement gouvernable et observable. Conformément à la propriété 1.42, ses zéros invariants sont donc également ses zéros de transmission. Les zéros invariants nuls du sous-système ligne $\sum(c_i, A, B)$ sont donc ses zéros de transmission nuls. Selon la définition 1.41, ce sont les zéros nuls de la matrice $G_i(s)$.

Le modèle étant de rang plein, il ne possède aucun pôle nul - propriété 2.17. Les zéros nuls de la matrice $G_i(s)$ sont donc tous les zéros nuls de la matrice polynômiale $N_i(s)$ - équations (6.25). Selon la définition 1.3, ces zéros nuls sont les racines des polynômes invariants de la matrice $N_i(s)$. Cette matrice étant une matrice ligne, elle ne possède qu'un seul polynôme invariant, noté $\lambda_1^i(s)$. Conformément à la remarque 1.4, $\lambda_1^i(s)$ est le PGCD des polynômes $\{N_{1i}(s), \dots, N_{pi}(s)\}$ - équation (6.25). Les zéros invariants nuls du sous-système ligne $\sum(c_i, A, B)$ sont donc les racines nulles communes à tous les numérateurs de sa matrice de transfert. Nous exprimons à présent le nombre de ces racines nulles.

Suivant la définition 1.11, l'expression de la matrice de transfert $G_i(s)$ est donnée par l'équation (6.26).

$$G_i(s) = c_i(sI - A)^{-1} B \quad (6.26)$$

Une expression équivalente est donnée par l'équation (6.27).

$$G_i(s) = c_i(sA^{-1} - I)^{-1} A^{-1} B \quad (6.27)$$

Or, au voisinage de $s = 0$, nous pouvons écrire - équation (6.28) :

$$\left[(sA^{-1} - I)^{-1} \right]_{s \rightarrow 0} = - [I + sA^{-1} + s^2A^{-2} + \dots] \quad (6.28)$$

Des équations (6.27) et (6.28), nous déduisons donc pour la matrice $G_i(s)$ l'expression donnée par l'équation (6.29).

$$[G_i(s)]_{s \rightarrow 0} = - [(c_i A^{-1} B) + (c_i A^{-2} B) s + (c_i A^{-3} B) s^2 + \dots] \quad (6.29)$$

Compte tenu de la définition 3.10 introduisant l'entier n_{id} , l'expression de la matrice $[G_i(s)]_{s \rightarrow 0}$ devient donc la suivante - équation (6.30) :

$$[G_i(s)]_{s \rightarrow 0} = - [(c_i A^{-(n_{id}+1)} B) s^{n_{id}} + (c_i A^{-(n_{id}+2)} B) s^{(n_{id}+1)} + \dots] \quad (6.30)$$

Finalement, l'expression de la matrice $G_i(s)$ au voisinage de $s = 0$ est donnée par l'équation (6.31).

$$[G_i(s)]_{s \rightarrow 0} = -s^{n_{id}} [(c_i A^{-(n_{id}+1)} B) + (c_i A^{-(n_{id}+2)} B) s + \dots] \quad (6.31)$$

n_{id} est par conséquent égal au nombre de racines nulles communes à tous les numérateurs de la matrice de transfert $G_i(s)$. Compte tenu de nos hypothèses, le nombre de zéros invariants nuls du sous-système ligne $\sum (c_i, A, B)$ est ainsi égal à n_{id} . $\square$

A.7 Zéros invariants nuls globaux

Dans cette annexe figure la démonstration du théorème 3.16 - section 3.1.3.

□ Soit $\sum (C, A, B)$ un système carré de rang plein. Soient $P(s)$ sa matrice système et $G(s)$ sa matrice de transfert - définitions 1.10 et 1.11. Ces deux matrices vérifient l'équation (6.32).

$$\det [P(s)] = \det [sI - A] \cdot \det [G(s)] \quad (6.32)$$

Selon la propriété 1.38, les zéros invariants du système $\sum (C, A, B)$ sont les racines du polynôme $\det [P(s)]$. La matrice d'état A étant inversible, le nombre de zéros invariants nuls du système $\sum (C, A, B)$ est égal au nombre de racines nulles du polynôme $\det [G(s)]$. Nous déterminons le nombre de ces racines nulles.

Considérons le modèle bond-graph du système $\sum (C, A, B)$, auquel nous affectons une causalité dérivée. La matrice de transfert associée à ce modèle est notée $G_d(s)$. Elle est aisément déduite de la représentation mathématique donnée par les équations (2.16). Au voisinage de $s = 0$, cette matrice vérifie l'équation (6.33).

$$[G_d(s)]_{s \rightarrow 0} = [(-CA^{-1}B) + (-CA^{-2}B)s + \dots] \quad (6.33)$$

Soit θ'_k la matrice des termes constants des gains des chemins causaux entrée-sortie de longueur k sur le modèle bond-graph en causalité dérivée. Conformément à la propriété 3.8, l'équation (6.33) peut être écrite sous la forme de l'équation (6.34).

$$[G_d(s)]_{s \rightarrow 0} = \sum_{k=0}^{\infty} \theta'_k s^k \quad (6.34)$$

Exprimée en fonction d'une variable tendant vers l'infini, cette équation devient la suivante - équation (6.35) :

$$\left[G_d \left(\frac{1}{s} \right) \right]_{s \rightarrow \infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta'_k}{s^k} \quad (6.35)$$

Considérons à présent le modèle bond-graph d'un système possédant des transmissions directes. Ces transmissions directes sont représentées par la matrice D telle que le vecteur de variables de sortie vérifie l'équation (6.36).

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (6.36)$$

Affectons à ce modèle une causalité intégrale. Quand s tend vers l'infini, l'équation (1.26) décrivant sa matrice de transfert $G(s)$ devient - équation (6.37) :

$$[G(s)]_{s \rightarrow \infty} = \left[D + \frac{CB}{s} + \frac{CAB}{s^2} + \dots \right] \quad (6.37)$$

Soit θ_k la matrice des termes constants des gains des chemins causaux entrée-sortie de longueur k sur le modèle bond-graph en causalité intégrale. Conformément à la propriété 2.10, l'équation (6.37) peut être écrite sous la forme de l'équation (6.38).

$$[G(s)]_{s \rightarrow \infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta_k}{s^k} \quad (6.38)$$

Les équations (6.34), (6.35), et (6.38) montrent ainsi que le formalisme bond-graph permet d'écrire les matrices $[G_d(s)]_{s \rightarrow 0}$ et $[G(s)]_{s \rightarrow \infty}$ sous une forme identique. A l'aide de la définition 1.28, du théorème 1.9, de la remarque 1.30 et de la propriété 2.28, cette analogie nous permet de tirer la conclusion suivante : les entiers $\{n'_{1d}, \dots, n'_{pd}\}$ - définition 3.13 - sont identifiés sur la forme de Smith McMillan à l'infini de la matrice $G_d\left(\frac{1}{s}\right)$. Cette matrice est notée $\Phi'(s)$. Conformément à la définition 1.8 et à la remarque 6.3, elle vérifie les équations (6.39).

$$\begin{cases} G_d\left(\frac{1}{s}\right) = J'_1(s) \cdot \Phi'(s) \cdot J'_2(s) \\ \det [\lim_{s \rightarrow \infty} \{J'_k(s)\}] \neq 0 \text{ avec } k = 1, 2 \\ \Phi'(s) = \text{diag} \left\{ s^{-n'_{1d}}, \dots, s^{-n'_{pd}} \right\} \end{cases} \quad (6.39)$$

Des équations (6.39), nous déduisons l'équation (6.40), où K'_1 et K'_2 sont des constantes non nulles.

$$\det \left[G_d\left(\frac{1}{s}\right) \right]_{s \rightarrow \infty} \approx K'_1 \cdot K'_2 \cdot \frac{1}{s^{(\sum_{i=1}^p n'_{id})}} \quad (6.40)$$

Exprimée en fonction d'une variable tendant vers zéro, cette équation devient la suivante - équation (6.41) :

$$\det [G_d(s)]_{s \rightarrow 0} \approx K'_1 \cdot K'_2 \cdot s^{(\sum_{i=1}^p n'_{id})} \quad (6.41)$$

Puisque les matrices de transfert $G(s)$ et $G_d(s)$ sont égales, nous pouvons finalement écrire l'équation (6.42).

$$\det [G(s)]_{s \rightarrow 0} \approx K'_1 \cdot K'_2 \cdot s^{(\sum_{i=1}^p n'_{id})} \quad (6.42)$$

Compte tenu de nos hypothèses, nous déduisons de l'équation (6.42) la conclusion suivante : le nombre de zéros invariants nuls du modèle bond-graph en causalité intégrale est égal à la somme des ordres des zéros à l'infini du modèle bond-graph en causalité dérivée. $\square$

A.8 Spectres fixes et sous-espaces de découplage

Dans cette annexe figure la démonstration de la propriété 3.32 - section 3.2.1.

□ Nous rappelons tout d'abord un résultat figurant dans [50], utilisé en particulier dans [39]. Ce résultat décrit en termes géométriques les propriétés de placement de pôles de lois de commande construites à partir de sous-espaces (A, B) -invariants. Pour le cas des systèmes gouvernables, il est résumé par la propriété suivante.

Propriété 6.6 [50]. Soient $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ un sous-espace (A, B) -invariant et $R^*(\mathcal{V})$ sa plus grande partie gouvernable - propriété 1.23. Soit F une matrice de retour d'état telle que $(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$. Soient enfin $A_{\mathcal{V}}$ la matrice d'état du système en boucle fermée et $\sigma(A_{\mathcal{V}})$ son spectre. La seule partie fixe du spectre $\sigma(A_{\mathcal{V}})$ est le spectre $\sigma_{\mathcal{V}}(A_{\mathcal{V}})$ défini par l'équation (6.43).

$$\sigma_{\mathcal{V}}(A_{\mathcal{V}}) = \sigma(A_{\mathcal{V}} \parallel (\mathcal{V}/R^*(\mathcal{V}))) \quad (6.43)$$

La partie fixe du spectre du système bouclé est donc localisée dans le sous-espace $\mathcal{V}$ mais hors du sous-espace $R^*(\mathcal{V})$. Nous utilisons ce résultat pour caractériser les propriétés de lois de commande construites à partir de deux sous-espaces (A, B) -invariants particuliers : $\mathcal{V}^*$ - propriété 1.17 - puis $\mathcal{V}_{stab}^*$ - propriété 1.20.

Les systèmes concernés par ce travail étant carrés, nous savons d'ores et déjà que les sous-espaces $R^*(\mathcal{V}^*)$ et $R^*(\mathcal{V}_{stab}^*)$ vérifient l'équation (6.44) [25] [41].

$$R^*(\mathcal{V}^*) = R^*(\mathcal{V}_{stab}^*) = 0 \quad (6.44)$$

Considérons un système carré, gouvernable, observable et découplable par retour d'état statique régulier. Selon le théorème 1.56, nous pouvons écrire - équation (6.45) :

$$\mathcal{V}^* = \cap_{i=1}^p \mathcal{V}_i^* \quad (6.45)$$

Pour construire la loi de commande réalisant la non-interaction, utilisons les sous-espaces $\{\mathcal{V}_1^*, \dots, \mathcal{V}_p^*\}$ comme supports géométriques. Conformément à la propriété 3.31, chaque sous-espace de découplage $\mathcal{V}_i^*$ vérifie alors, par construction, l'équation (6.46).

$$(A + BF)\mathcal{V}_i^* \subset \mathcal{V}_i^*, \quad i = 1, \dots, p \quad (6.46)$$

Des équations (6.45) et (6.46), nous déduisons de manière immédiate l'équation (6.47).

$$(A + BF)\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^* \quad (6.47)$$

La propriété 6.6 et les équations (6.44) et (6.47) permettent dans ce cas de tirer la conclusion suivante: le spectre fixe de la matrice d'état en boucle fermée vérifie l'équation (6.48).

$$\sigma_{\mathcal{V}^*}(A_{\mathcal{V}^*}) = \sigma(\mathcal{V}^* | A_{\mathcal{V}^*} | \mathcal{V}^*) \quad (6.48)$$

Conformément à la propriété 1.39 et compte tenu de l'équation (6.44), ces modes sont tous les zéros invariants du système en boucle ouverte.

Supposons maintenant que le système soit, en plus, régulièrement découplable avec stabilité. Selon le théorème 1.64, nous pouvons écrire - équation (6.49):

$$\mathcal{V}_{stab}^* = \cap_{i=1}^p \mathcal{V}_{istab}^* \quad (6.49)$$

Utilisons donc les sous-espaces $\{\mathcal{V}_{1stab}^*, \dots, \mathcal{V}_{pstab}^*\}$ pour construire la loi de commande non-interactive. Conformément à la propriété 3.31, chaque sous-espace de découplage $\mathcal{V}_{istab}^*$ vérifie, par construction, l'équation (6.50).

$$(A + BF) \mathcal{V}_{istab}^* \subset \mathcal{V}_{istab}^*, \quad i = 1, \dots, p \quad (6.50)$$

A l'aide des équations (6.49) et (6.50), nous déduisons donc que le sous-espace $\mathcal{V}_{stab}^*$ vérifie l'équation (6.51).

$$(A + BF) \mathcal{V}_{stab}^* \subset \mathcal{V}_{stab}^* \quad (6.51)$$

La propriété 6.6 et les équations (6.44) et (6.51) permettent dans ce cas de tirer la conclusion suivante: le spectre fixe de la matrice d'état en boucle fermée vérifie l'équation (6.52).

$$\sigma_{\mathcal{V}_{stab}^*}(A_{\mathcal{V}_{stab}^*}) = \sigma(\mathcal{V}_{stab}^* | A_{\mathcal{V}_{stab}^*} | \mathcal{V}_{stab}^*) \quad (6.52)$$

Nous déduisons finalement de la propriété 3.28 et des équations (6.49) et (6.50) que ce spectre est composé de tous les zéros invariants strictement stables du système en boucle ouverte. $\square$

A.9 Sous-espace de découplage stabilisant

Dans cette annexe figure la démonstration de la propriété 3.37 - section 3.2.2.

Cette démonstration est scindée en trois parties. Nous montrons tout d'abord que les sous-espaces $\mathcal{V}_i^{*\perp}$ et $\mathcal{V}_{id}^{*\perp}$ sont en somme directe pour former le sous-espace $\mathcal{V}_{is}^{*\perp}$ - **phase1**. Puis nous montrons que le sous-espace $\mathcal{V}_{is}^*$ est un sous-espace $(A, \mathcal{B})$ -invariant inclus dans le sous-espace $\mathcal{V}_i^*$ - **phase2**. Nous en déduisons enfin que le sous-espace $\mathcal{V}_{is}^*$ est en fait le sous-espace $\mathcal{V}_{istab}^*$ - **phase3**.

$$\square \text{ Phase1: } \mathcal{V}_{is}^{*\perp} = \mathcal{V}_i^{*\perp} \oplus \mathcal{V}_{id}^{*\perp}.$$

Soit une base du sous-espace $\mathcal{V}_i^{*\perp}$, rappelée par l'équation (6.53).

$$\mathcal{V}_i^{*\perp} = \text{vect} \left\{ (c_i)^t, \dots, (c_i A^{n_i-1})^t \right\}, \quad n_i \geq 1 \quad (6.53)$$

De même, une base du sous-espace $\mathcal{V}_{id}^{*\perp}$ est rappelée par l'équation (6.54).

$$\mathcal{V}_{id}^{*\perp} = \text{vect} \left\{ (c_i A^{-1})^t, \dots, (c_i A^{-n_{id}})^t \right\}, \quad n_{id} \geq 1 \quad (6.54)$$

Dans cette équation, n_{id} vérifie la définition 3.10: il est le plus petit entier vérifiant les équations (6.55).

$$\begin{cases} c_i A^{-(k+1)} B = 0, & k < n_{id} \\ c_i A^{-(n_{id}+1)} B \neq 0 \end{cases} \quad (6.55)$$

Soit enfin S_i^* le plus petit sous-espace (c_i, A) -invariant contenant $\mathcal{B}$ - section 1.2.3. Il peut être calculé selon l'algorithme rappelé par l'équation (6.56) - section 1.2.2.

$$\begin{cases} S_i^0 = 0 \\ S_i^\mu = \mathcal{B} + A \left((\ker c_i) \cap S_i^{\mu-1} \right) \end{cases} \quad (6.56)$$

Montrons tout d'abord que les sous-espaces $S_i^{*\perp}$ et $\mathcal{V}_{id}^{*\perp}$ sont liés par la relation suivante - équation (6.57):

$$\mathcal{V}_{id}^{*\perp} \subset S_i^{*\perp} \quad (6.57)$$

Pour cela, nous exprimons le produit $(\mathcal{V}_{id}^{*\perp})^t \cdot S_i^*$. Conformément aux équations (6.54), (6.55) et (6.56), le premier vecteur de base du sous-espace $\mathcal{V}_{id}^{*\perp}$ vérifie l'équation (6.58):

$$c_i A^{-1} \cdot S_i^* = 0 \quad (6.58)$$

De même, pour le second vecteur de base du sous-espace $\mathcal{V}_{id}^{*\perp}$, compte tenu des équations (6.54), (6.55) et (6.58), nous pouvons écrire l'équation (6.59).

$$c_i A^{-2} \cdot S_i^* = 0 \quad (6.59)$$

Ce calcul peut être répété pour tous les vecteurs de base du sous-espace $\mathcal{V}_{id}^{*\perp}$. Le dernier d'entre eux vérifie ainsi l'équation (6.60).

$$c_i A^{-n_{id}} \cdot S_i^* = 0 \quad (6.60)$$

Les équations (6.54) et (6.58), (6.59), (6.60) permettent donc de déduire l'équation (6.61), qui justifie l'équation (6.57).

$$(\mathcal{V}_{id}^{*\perp})^t \cdot S_i^* = 0 \quad (6.61)$$

Construisons à présent le sous-espace $\mathcal{V}_{is}^{*\perp}$ conformément à l'équation (6.62).

$$\mathcal{V}_{is}^{*\perp} = \mathcal{V}_i^{*\perp} + \mathcal{V}_{id}^{*\perp} \quad (6.62)$$

Les systèmes $\sum (C, A, B)$ concernés par ce travail sont inversibles à droite. Les sous-systèmes lignes $\sum (c_i, A, B)$ le sont donc également. La propriété 1.27 permet donc d'écrire l'équation (6.63).

$$\mathcal{V}_i^* + S_i^* = \mathcal{X} \quad (6.63)$$

De cette dernière équation, nous déduisons de manière immédiate l'équation (6.64).

$$\mathcal{V}_i^{*\perp} \cap S_i^{*\perp} = 0 \quad (6.64)$$

Les équations (6.64) et (6.57) nous permettent donc de déduire l'équation suivante :

$$\mathcal{V}_i^{*\perp} \cap \mathcal{V}_{id}^{*\perp} = 0 \quad (6.65)$$

Conformément aux équations (6.62) et (6.65), nous terminons la première phase de cette démonstration par la conclusion suivante : les sous-espaces $\mathcal{V}_i^{*\perp}$ et $\mathcal{V}_{id}^{*\perp}$ sont en somme directe, tels que l'équation (6.66) soit vérifiée.

$$\mathcal{V}_{is}^{*\perp} = \mathcal{V}_i^{*\perp} \oplus \mathcal{V}_{id}^{*\perp} \quad (6.66)$$

Phase2 : $\mathcal{V}_{is}^*$ est un sous-espace (A, B) -invariant inclus dans $\mathcal{V}_i^*$.

Conformément à la définition 1.15, le sous-espace $\mathcal{V}_{is}^*$ est un sous-espace (A, B) -invariant si et seulement s'il vérifie l'équation (6.67).

$$A\mathcal{V}_{is}^* \subset \mathcal{V}_{is}^* + \mathcal{B} \quad (6.67)$$

Le problème consiste donc à montrer que, pour tout vecteur $x \in \mathcal{V}_{is}^*$, l'équation (6.68) est vérifiée.

$$\{\mathcal{V}_{is}^{*\perp} \cap \mathcal{B}^\perp\}^t . Ax = 0 \quad (6.68)$$

Dans un premier temps, nous exprimons une base de l'espace $\{\mathcal{V}_{is}^{*\perp} \cap \mathcal{B}^\perp\}$.

Compte tenu de l'équation (6.66), une base de cet espace est obtenue par l'union des bases des espaces $\{\mathcal{V}_i^{*\perp} \cap \mathcal{B}^\perp\}$ et $\{\mathcal{V}_{id}^{*\perp} \cap \mathcal{B}^\perp\}$. Nous explicitons à présent ces deux bases.

Les vecteurs de base du sous-espace $\mathcal{V}_i^{*\perp}$ qui appartiennent à l'espace $\mathcal{B}^\perp$ sont identifiés grâce à la définition de l'entier n_i - définition 1.31 : n_i est le plus petit entier vérifiant l'équation (6.69).

$$\begin{cases} c_i A^{(k-1)} B = 0, & k < n_i \\ c_i A^{(n_i-1)} B \neq 0 \end{cases} \quad (6.69)$$

Cette équation peut en effet être traduite de la manière suivante - équation (6.70).

$$\begin{cases} (c_i A^{(k-1)})^t \in \mathcal{B}^\perp, & k < n_i \\ (c_i A^{(n_i-1)})^t \notin \mathcal{B}^\perp \end{cases} \quad (6.70)$$

Conformément aux équations (6.53) et (6.70), l'espace $\{\mathcal{V}_i^{*\perp} \cap \mathcal{B}^\perp\}$ est donc engendré par une base décrite de la manière suivante - équation (6.71) :

$$\{\mathcal{V}_i^{*\perp} \cap \mathcal{B}^\perp\} = \text{vect} \left\{ (c_i)^t, \dots, (c_i A^{n_i-2})^t \right\} \quad (6.71)$$

De même, les vecteurs de base du sous-espace $\mathcal{V}_{id}^{*\perp}$ qui appartiennent à l'espace $\mathcal{B}^\perp$ sont identifiés grâce à la définition de l'entier n_{id} rappelée par l'équation (6.55). Comme dans le cas précédent, cette définition peut en effet être écrite de la manière suivante - équation (6.72) :

$$\begin{cases} (c_i A^{-(k+1)})^t \in \mathcal{B}^\perp, & k < n_{id} \\ (c_i A^{-(n_{id}+1)})^t \notin \mathcal{B}^\perp \end{cases} \quad (6.72)$$

Compte tenu des équations (6.54) et (6.72), tous les vecteurs de base du sous-espace $\mathcal{V}_{id}^{*\perp}$ appartiennent donc à l'espace $\mathcal{B}^\perp$. L'espace $\{\mathcal{V}_{id}^{*\perp} \cap \mathcal{B}^\perp\}$ est donc engendré par une base décrite de la manière suivante - équation (6.73) :

$$\{\mathcal{V}_{id}^{*\perp} \cap \mathcal{B}^\perp\} = \text{vect} \left\{ (c_i A^{-1})^t, \dots, (c_i A^{-n_{id}})^t \right\} \quad (6.73)$$

Les équations (6.71) et (6.73) permettent donc d'écrire une base de l'espace $\{\mathcal{V}_{is}^{*\perp} \cap \mathcal{B}^\perp\}$ sous la forme donnée par l'équation suivante :

$$\{\mathcal{V}_{is}^{*\perp} \cap \mathcal{B}^\perp\} = \text{vect} \left\{ (c_i)^t, \dots, (c_i A^{n_i-2})^t \mid (c_i A^{-1})^t, \dots, (c_i A^{-n_{id}})^t \right\} \quad (6.74)$$

Nous montrons à présent que tout vecteur $x \in \mathcal{V}_{is}^*$ vérifie l'équation (6.68).

L'équation (6.66) peut être écrite sous la forme suivante - équation (6.75) :

$$\mathcal{V}_{is}^* = \mathcal{V}_i^* \cap \mathcal{V}_{id}^* \quad (6.75)$$

Ainsi, tout vecteur x appartenant au sous-espace $\mathcal{V}_{is}^*$ appartient également au sous-espace $\mathcal{V}_i^*$. Il vérifie donc l'équation (6.76).

$$(\mathcal{V}_i^{*\perp})^t . x = 0 \quad (6.76)$$

Les équations (6.53) et (6.76) permettent ainsi de déduire que tout vecteur $x \in \mathcal{V}_{is}^*$ vérifie les équations (6.77).

$$\begin{cases} c_i x = 0 \\ c_i A x = 0 \\ \vdots \\ c_i A^{(n_i-1)} x = 0 \end{cases} \quad (6.77)$$

Selon l'équation (6.75), tout vecteur x appartenant au sous-espace $\mathcal{V}_{is}^*$ appartient d'autre part également au sous-espace $\mathcal{V}_{id}^*$. Il vérifie donc l'équation (6.78).

$$(\mathcal{V}_{id}^{*\perp})^t . x = 0 \quad (6.78)$$

Conformément aux équations (6.54) et (6.78), tout vecteur $x \in \mathcal{V}_{is}^*$ vérifie donc aussi les équations (6.79).

$$\begin{cases} c_i A^{-1} x = 0 \\ c_i A^{-2} x = 0 \\ \vdots \\ c_i A^{-n_{id}} x = 0 \end{cases} \quad (6.79)$$

Pour chaque vecteur z appartenant à la base de l'espace $\{\mathcal{V}_{is}^{*\perp} \cap \mathcal{B}^\perp\}$ - équation (6.74) - nous calculons maintenant l'expression $z^t A x$, $x \in \mathcal{V}_{is}^*$ - équation (6.68).

La première partie de cette base est composée des vecteurs $v_k = (c_i A^k)^t$, $k = 0, \dots, (n_i - 2)$ - équation (6.74). Pour ces vecteurs, l'équation (6.77) permet de déduire l'équation suivante :

$$v_k^t A x = 0, \quad x \in \mathcal{V}_{is}^* \quad (6.80)$$

La seconde partie de cette base est composée des vecteurs $w_k = (c_i A^{-k})^t$, $k = 1, \dots, n_{id}$. Selon l'équation (6.77), pour le vecteur w_1^t , nous pouvons écrire - équation (6.81) :

$$w_1^t A x = 0 \quad (6.81)$$

Pour les vecteurs w_k restant, $k = 2, \dots, n_{id}$, l'équation (6.79) permet d'autre part de déduire l'équation (6.82).

$$w_k^t A x = 0 \quad (6.82)$$

Ainsi, tout vecteur z appartenant à la base de l'espace $\{\mathcal{V}_{is}^{*\perp} \cap \mathcal{B}^\perp\}$ vérifie l'équation (6.83).

$$z^t A x, \quad x \in \mathcal{V}_{is}^* \quad (6.83)$$

Par conséquent, pour tout vecteur $x \in \mathcal{V}_{is}^*$, nous pouvons écrire - équation (6.84) :

$$\{\mathcal{V}_{is}^{*\perp} \cap \mathcal{B}^\perp\}^t . A x = 0 \quad (6.84)$$

Nous déduisons donc de cette dernière équation que le sous-espace $\mathcal{V}_{is}^*$ est un sous-espace $(A, \mathcal{B})$ invariant. L'équation (6.75) permet d'autre part d'ajouter que cet espace est inclus dans le sous-espace $\mathcal{V}_i^*$. Ceci conclut la seconde phase de cette démonstration.

Phase3 : $\mathcal{V}_{is}^* = \mathcal{V}_{istab}^*$.

Les résultats précédents - **phase1** et **phase2** - ont permis de montrer que le sous-espace $\mathcal{V}_{is}^*$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{is}^{*\perp} = \mathcal{V}_i^{*\perp} \oplus \mathcal{V}_{id}^{*\perp} \\ \mathcal{V}_{is}^* \text{ est un sous-espace } (A, \mathcal{B})\text{-invariant} \end{cases} \quad (6.85)$$

Ainsi, compte tenu de la propriété 3.36, le sous-espace $\mathcal{V}_{is}^{*\perp}$ vérifie l'équation (6.86).

$$\dim(\mathcal{V}_{is}^{*\perp}) = n_i + n_{id} \quad (6.86)$$

Si le sous-système ligne $\sum (c_i, A, B)$ ne possède aucun zéro invariant strictement instable, le théorème 3.15, la propriété 1.40 et l'équation (6.86) permettent donc d'écrire - équation (6.87) :

$$\dim(\mathcal{V}_{is}^{*\perp}) = n_i + C^+(c_i, A, B) \quad (6.87)$$

Il découle de la propriété 1.33 et de l'équation (6.87) que le sous-espace $\mathcal{V}_{is}^*$ vérifie alors l'équation (6.88).

$$\dim(\mathcal{V}_{is}^*) = \dim(\mathcal{V}_i^*) - C^+(c_i, A, B) \quad (6.88)$$

Dans ces conditions, les équations (6.85) et (6.88) permettent d'affirmer que le sous-espace $\mathcal{V}_{is}^*$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{is}^* \text{ est un sous-espace } (A, B)\text{-invariant} \\ \mathcal{V}_{is}^* \subset \mathcal{V}_i^* \\ \dim(\mathcal{V}_{is}^*) = \dim(\mathcal{V}_i^*) - C^+(c_i, A, B) \end{array} \right. \quad (6.89)$$

Nous tirons de l'équation (6.89) la conclusion suivante : si le sous-système ligne $\sum(c_i, A, B)$ ne possède aucun zéro invariant strictement instable, le sous-espace $\mathcal{V}_{is}^*$ est le plus grand sous-espace (A, B) -invariant inclus dans $(\ker c_i)$ qui soit intérieurement stabilisable. Ce sous-espace définit par conséquent le sous-espace $\mathcal{V}_{istab}^*$. $\square$

A.10 Lien d'information

Dans cette annexe figure la description de la notion de lien d'information utilisée en section 4.1.2.

Un lien d'information est un capteur qui mesure une grandeur physique - effort ou flux - pour moduler une source d'entrée. Sur une jonction 0, la grandeur mesurée est un effort. Sur une jonction 1, la grandeur mesurée est un flux. La source d'entrée modulée par cette grandeur est communément appelée source modulée ou encore source commandée.

Un lien d'information est représenté par une flèche doublée d'un trait causal. Le trait causal sert uniquement à rappeler la nature de la grandeur physique mesurée. Il ne traduit aucune information structurelle relative au modèle. Par contre, la flèche indique le sens dans lequel le lien peut être parcouru : il ne peut être causalement parcouru que dans le sens opposé à celui indiqué par la flèche, suivant l'expression consacrée "remonter le lien".

La justification est la suivante.

Remonter un chemin causal revient à chercher les variables dont dépend la variable étudiée. Considérons par exemple le modèle bond-graph suivant - figure A.2.

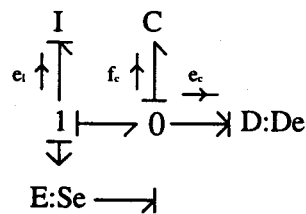


Figure A.2.

Le détecteur de sortie D mesure l'effort e_C . Cet effort est imposé par l'élément dynamique C . Il est calculé à partir d'un flux f_C . Ce flux est lui-même imposé par l'élément dynamique I et calculé à partir d'un effort e_I . Or cet effort n'est pas imposé par la source d'entrée E . En effet, le lien d'information transmet un signal et non une puissance : il mesure ici un flux et renvoie un effort nul. L'effort e_I ne dépend donc pas de la grandeur délivrée par la source d'entrée E . Le chemin causal venant du détecteur de sortie D et traversant les éléments dynamiques C et I ne peut donc pas être poursuivi en suivant le lien dans le sens de la flèche.

Inversement, considérons le modèle bond-graph décrit par la figure A.3.

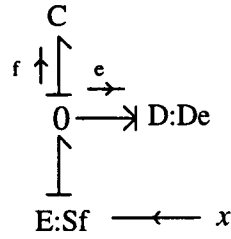


Figure A.3.

Le détecteur de sortie D mesure un effort e . Cet effort est imposé par l'élément dynamique C . Il est calculé à partir du flux f . Ce flux est imposé par la source d'entrée E , elle même commandée par la grandeur x . Le flux f dépend donc de la variable x . Le chemin causal partant du détecteur de sortie D et traversant l'élément dynamique C peut donc être poursuivi à travers la source d'entrée E en remontant le lien d'information.

Cette analyse est également valable si le lien d'information est placé sur le modèle bond-graph en causalité dérivée. Dans ce cas également, le lien d'information ne peut donc être causalement parcouru que dans le sens opposé à celui indiqué par la flèche.

A.11 Retour d'état et stabilité

Cette annexe concerne les méthodes présentées en section 4.1.2. Nous montrons que les liens d'information placés sur le modèle bond-graph en causalité dérivée correspondent à un retour d'état sur le modèle bond-graph en causalité intégrale.

Considérons un modèle bond-graph de rang plein possédant m sources d'entrée et p détecteurs de sortie, avec $m > p$. Ce modèle est découplable par retour d'état statique régulier en utilisant p entrées de commande parmi les m disponibles. Le vecteur constitué des p variables d'entrée correspondantes est noté $u_2(t)$. Notons $u_1(t)$ le vecteur rassemblant les $(m - p)$ variables d'entrée restantes.

La représentation d'état associée à ce modèle bond-graph est donnée par l'équation (6.90).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u_1(t) + B_2u_2(t) \quad (6.90)$$

En causalité dérivée, il est décrit par l'équation (6.91).

$$x(t) = A^{-1} \dot{x}(t) - A^{-1}B_1u_1(t) - A^{-1}B_2u_2(t) \quad (6.91)$$

Sur ce modèle en causalité dérivée, nous construisons $(m - p)$ liens d'information entre $(m - p)$ jonctions et les $(m - p)$ sources d'entrées associées au vecteur $u_1(t)$ - un lien par source d'entrée. Ces liens sont conçus de telle sorte à vérifier le théorème 3.17. Conformément à l'annexe A.9, ces liens transmettent des mesures prélevées sur le modèle bond-graph en dérivée. Ces mesures sont les dérivées de certaines variables d'état du modèle en causalité intégrale. Elles sont bouclées sur les entrées de commandes associées au vecteur $u_1(t)$ par l'intermédiaire d'une matrice F_d vérifiant l'équation (6.92).

$$u_1(t) = F_d \dot{x}(t) \quad (6.92)$$

Dans le cas général, ces variables vérifient l'équation (6.93).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2u_2(t) \quad (6.93)$$

Les équations (6.92), (6.93) et (6.90) permettent alors de déduire l'équation d'état du modèle bouclé. Cette expression est donnée par l'équation (6.94).

$$\dot{x}(t) = (A + B_1F_dA)x(t) + (B_1F_dB_2 + B_2)u_2(t) \quad (6.94)$$

Cette équation montre que le retour d'état réalisé par les liens d'information sur le modèle bond-graph en causalité dérivée - équation (6.92) - correspond à un bouclage sur l'état du modèle bond-graph en causalité intégrale.

La matrice de retour d'état F_i utilisée à cet effet vérifie de plus l'équation (6.95).

$$F_i = F_d A \quad (6.95)$$

Remarquons que dans le cas général décrit par l'équation (6.93), les variables mesurées sur le modèle en dérivée sont associées à des éléments dynamiques directement liés aux sources d'entrée $u_2(t)$ sur le modèle en causalité intégrale. Dans ce cas, la matrice de commande du modèle bouclé n'est pas B_2 mais $(B_1 F_d B_2 + B_2)$ - équation (6.94).

Graphiquement, cela traduit le fait que des chemins directs ont été créés, sur le modèle en causalité intégrale, entre des sources d'entrée associées au vecteur $u_1(t)$ et des sources d'entrée associées au vecteur $u_2(t)$. La structure infinie du modèle en causalité intégrale - liée aux entrées de commande du vecteur $u_2(t)$ - a par conséquent pu être modifiée, rendant ce modèle non découplable par retour d'état statique régulier.

Dans la pratique, ce cas général est peu fréquent. Il se présente généralement quand, sur le modèle en causalité intégrale, les sources d'entrée associées au vecteur $u_2(t)$ attaquent non pas des éléments dynamiques mais des éléments résistifs. La puissance fournie par les sources d'entrée est alors dissipée dans ces éléments résistifs, ce qui rend ce type de configuration peu attractif.

Nous considérons donc que, dans la majorité des cas, l'équation (6.93) est en fait simplifiée de la manière suivante - équation (6.96) :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (6.96)$$

L'équation d'état du modèle bouclé est alors finalement donnée par l'équation (6.97).

$$\dot{x}(t) = (A + B_1 F_d A) x(t) + B_2 u_2(t) \quad (6.97)$$

Ce modèle bouclé possède p variables d'entrée et p variables de sortie. Il est découplable avec stabilité par retour d'état statique régulier. Ses entrées de commande - vecteur $u_2(t)$ - peuvent donc à présent être utilisées pour découpler le modèle.