

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE LILLE

THESE DE DOCTORAT

Présentée au

LABORATOIRE DE MECANIQUE DE LILLE

(GROUPE FIABILITE DES STRUCTURES)

Spécialité : Mécanique

Par

Mohand Ameziane HAMADOUCHE

Ingénieur U S T H B



**ANALYSE DYNAMIQUE DES STRUCTURES INELASTIQUES PAR LA
THEORIE DE L'ADAPTATION**

**DYNAMIC ANALYSIS OF INELASTIC STRUCTURES WITH THE
SHAKEDOWN THEORY**

Soutenue le 7 juillet 1997 devant la commission d'examen composée de :

Président, Rapporteur	Mr. C. POLIZZOTTO	Università di Palermo (Italy)
Rapporteurs	Mr. L. RAAD	University of Alaska Fairbanks (U.S.A.)
	Mr. C. WIELGOSZ	Laboratoire de Génie Civil de Nantes
Directeur de thèse	Mr. D. WEICHERT	Institut für Allgemeine Mechanik, Aachen (Allemagne)
Examineurs	Mr. I. SHAHROUR	Ecole Centrale de Lille
	Mr. G. DE SAXCE	Laboratoire de Mécanique de Lille USTL
	Mr. B. LANDJERIT	Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille

*A ma mère,
à mon père,
à ma famille,
et à mes amis (es).*

REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé au sein du Laboratoire de Mécanique de Lille "Groupe Fiabilité des Structures" (Ecole Universitaires d'Ingénieurs de Lille).

Je voudrais exprimer ma sincère gratitude et ma vive reconnaissance à mon directeur de recherche Monsieur D. WEICHERT, Professeur, directeur de l'Institut für Allgemeine Mechanik, RWTH Aachen. Je lui adresse mes plus vifs remerciements pour l'aide et l'attention qu'il a porté à ce travail et pour la confiance qu'il m'a accordée en me laissant un large champ d'initiative. Ses qualités scientifiques et humaines m'ont profondément marqué.

Je remercie très sincèrement Monsieur C. POLIZZOTTO, Professeur à l'Université de Palerme (Italie), d'avoir accepté de présider la commission d'examen et d'être l'un des rapporteurs de ma thèse.

Je remercie vivement Monsieur L. RAAD, Professeur d'Université à Alaska Fairbanks (U.S.A.), d'avoir accepté de juger cette thèse. Ses idées et ses conseils m'ont été d'une aide précieuse.

Je tiens également à remercier Monsieur C. WIELGOSZ, Professeur à l'Université de Nantes d'avoir accepté d'être rapporteur. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur I. SHAHROUR, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille pour ses conseils judicieux et son aide durant ce travail. Je lui suis reconnaissant d'avoir accepté de participer au jury.

A Monsieur G. DE SAXCE, Professeur à l'Université des sciences et technique de Lille j'aimerais exprimer ma profonde gratitude pour ses conseils et pour avoir accepté de participer au jury.

Je remercie également Monsieur B. LANDJERIT, Professeur à l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille, d'avoir bien voulu participer au jury.

Je remercie mes collègues du groupe fiabilité des structures (L.M.L) et tout particulièrement Messieurs S. LEMDANI, A. HACHEMI, N. BENSEDDIQ, R. OUSTA, J.-B. TRITSCH, M. ABOUTAYEB, P. DUFRENOY. A. HADDI pour les discussions fructueuses et leur soutien moral et amical.

En dernier lieu, je tiens à remercier tous mes proches, parents et amis, et plus particulièrement Monsieur et Madame KECIR pour l'aide et le soutien moral qu'ils m'ont apporté.

ABSTRACT

The objective of this work is to propose and develop some practical rules for shakedown problems of interest to geotechnical engineers problems to predict the failure; then a generalization of the dynamic shakedown theorems is proposed.

A number of models for the behaviour of soils under cyclic loads have been proposed in the soil mechanic literature. These models capture to varying degrees the important features of soil behaviour such as pore pressure generation, cyclic weakening, fatigue and degradation characteristics and cyclic hysteresis, etc., and can conceivably be incorporated in finite element codes for solution of boundary value problems. However, for practical problem, the response of a soil structure can be evaluated for only a very limited number of cycles due to constraints on computing costs. In view of this, procedures for the prediction of shakedown or lack of it when the structure is subjected to a set of loads fluctuating arbitrarily within the given bounds is of considerable importance. In this context especially, methods based on the shakedown theory have found an increasing attention. In the last years, many papers have been devoted to the extension and generalization of the dynamic shakedown theorems. A common feature and limitation of these theorems is the assumption of viscous damping to model the internal damping of soil materials. As a consequence, this hypothesis, may incur a serious error to estimate the shakedown limit load.

The viscous damping, so far used to represent the damping mechanism of soils is not adequate, since viscous damping implies that the energy dissipated per cycle of vibration is proportional to the frequency of excitation. In soil tests, however, it is observed that the energy dissipated is independent of the frequency of excitation. In order to account for the physical observation, we propose here in to a use viscoelastic damping model with complex modulus to model the internal damping of soils. The damping can be considered by the concept of a complex stiffness, $K_1 + jK_2$. The loss factor η , a measure of the damping, is the ratio K_2 / K_1 . The complex modulus is only defined for harmonic excitation, but since any real signal can be represented as a Fourier sum, the complex modulus approach can also be used for analysis of a system subjected to arbitrary excitation.

The numerical procedure is based on a coupling of the finite element method with mathematical programming, giving the safety factor against failure due to incremental collapse.

KEY WORDS : Shakedown – Limit analysis – Elastoplasticity –Viscoelasticity – Finite element – Optimization – Complex stiffness – Dynamic of soils – Mechanic of pavements.

RESUME

Dans cette étude, nous présentons une extension du théorème d'adaptation aux cas des géomatériaux sous sollicitations dynamiques. Le comportement du sol sous de telles sollicitations est fortement non-linéaire et présente un caractère dissipatif qui n'existe pas dans un milieu élastique; ces caractéristiques doivent être prises en compte pour obtenir des solutions raisonnables.

L'effet de l'érouissage (cinématique linéaire et isotrope) est pris en compte par l'utilisation du concept des matériaux standards généralisés. Le caractère dissipatif est représenté par l'introduction d'une matrice de rigidité complexe. L'amortissement est introduit dans la loi de comportement et conduit aux mêmes solutions formelles que la loi d'élasticité linéaire.

Les modules complexes sont définis uniquement pour une excitation harmonique, mais une classe très large d'excitation peut être décomposée en une somme de fonctions harmoniques par l'application de la transformée de Fourier. D'où la généralisation de l'approche par modules complexes à l'étude des systèmes soumis à une excitation quelconque.

L'introduction d'une matrice de rigidité complexe permet de tenir compte de l'amortissement mais pas des non-linéarités physiques, ces dernières sont prises en compte à travers le concept de l'adaptation lui-même.

L'approche développée est appliquée pour l'étude du comportement des chaussées sous sollicitations de type impulsif. La procédure numérique pour l'étude de l'adaptation plastique est basée sur le couplage de la méthode des éléments finis avec la programmation mathématique non-linéaire qui donne ainsi le facteur de sécurité contre la défaillance.

MOTS CLES : Adaptation – Analyse Limite – Elastoplasticité – Viscoélasticité – Eléments finis – Optimisation – Lois de comportement complexes – Dynamique des sols – Mécanique des chaussées.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	10
1. INTRODUCTION	10
2. HISTORIQUE	11
3. MOTIVATION	16
4. CONTENU DU RAPPORT	18
CHAPITRE 1	
RAPPEL DES PRINCIPALES METHODES CLASSIQUES D'ANALYSE DES STRUCTURES DE GENIE CIVIL SOUMISES A DES CHARGEMENTS DYNAMIQUES	22
1.1. INTRODUCTION	22
1.2. CAS DES STRUCTURES ELASTIQUES	22
1.2.1. Définition d'un spectre de réponse	22
1.2.2. Méthode d'analyse dynamique par superposition modale	25
1.2.2.1. Analyse dans le domaine temporel	25
1.2.2.2. Analyse dans le domaine fréquentiel	28
1.3. CAS DES STRUCTURES INELASTIQUES	31
1.3.1. Analyse modale à partir du spectre inélastique	31
1.3.2. Calcul pas à pas	32
1.4. CONCLUSION	36

CHAPITRE 2

BASES DE LA THEORIE D'ADAPTATION 37

2.1. INTRODUCTION	37
2.2. HYPOTHESES DE BASE	37
2.3. ENONCE DU THEOREME STATIQUE DE MELAN	40
2.4. COEFFICIENT DE SECURITE A L'ADAPTATION	44
2.5. CONCLUSION	45

CHAPITRE 3

COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES GEOMATERIAUX 46

3.1. INTRODUCTION	46
3.2. APPROCHE DU COMPORTEMENT DES GEOMATERIAUX	46
3.2.1. Concept de l'état critique	46
3.2.2. Concept de l'état caractéristique	47
3.2.3. Concept de l'état d'adaptation	49
3.3. OBSERVATIONS EXPERIMENTALES ET HYPOTHESES DE BASE	51
3.4. CONSIDERATIONS THEORIQUES ET MODELISATION	53
3.4.1. Critère de plasticité	53
3.4.2. Matériaux standards généralisés	55
3.4.3. Modélisation de l'amortissement interne	57
3.5. CONCLUSION	63

CHAPITRE 4

GENERALISATION DU THEOREME D'ADAPTATION AUX CAS DES GEOMATERIAUX SOUS SOLLICITATIONS DYNAMIQUES 64

4.1. INTRODUCTION	64
4.2. EQUATION D'EVOLUTION EN DYNAMIQUE	64
4.3. REPOSE DYNAMIQUE FICTIVE	66
4.4. CONDITION SUFFISANTE D'ADAPTATION	68
4.4.1. Enoncé du théorème	69
4.4.2. Démonstration	69
4.5. ADAPTATION SOUS DES CYCLES DE CHARGES HYDROSTATIQUES	73
4.6. ADAPTATION SOUS DES CYCLES DE CHARGES DEVIATORIQUES	75
4.7. CONCLUSION	75

CHAPITRE 5

ETUDE NUMERIQUE DE L'ADAPTATION 77

5.1. INTRODUCTION	77
5.2. DOMAINE D'ADAPTATION	77
5.3. FACTEUR DE CHARGES A L'ADAPTATION	79
5.4. FORMULATION ELEMENTS FINIS	81
5.4.1. Calcul de la réponse purement élastique	81
5.4.1.1. Principe de Hamilton	81
5.4.1.2. Equation de Lagrange	82
5.4.1.3. Principe de la méthode des éléments finis en dynamique	85
5.4.1.3.1. Discrétisation spatiale	85
5.4.1.3.2. Formulation élémentaire	85

5.4.1.3.3. Formulation globale	86
5.4.2. Etude numérique de l'adaptation plastique	88
5.4.2.1 Discrétisation du champ d'auto-contrainte	89
5.5. CONCLUSION	91
CHAPITRE 6	
APPLICATION DE LA THEORIE DE L'ADAPTATION A LA	
MECANIQUE DES CHAUSSEES	92
6.1. INTRODUCTION	92
6.2. ETUDE DES CHAUSSEES SOUS SOLLICITATIONS DYNAMIQUES	93
6.3. APPLICATION DE LA THEORIE DE L'ADAPTATION A LA MECANIQUE	
DES CHAUSSEES	94
6.4. VALIDATION DU PROGRAMME	96
6.4.1. Cas d'un chargement à un seul paramètre	99
6.4.2. Cas d'un chargement à deux paramètres	100
6.5. EXPLOITATION NUMERIQUE	102
6.6. ETUDE D'UN MODELE MONOCOUCHE	103
6.6.1. Etude de l'influence de la cohésion et de l'angle de frottement sur la	
charge limite à l'adaptation	103
6.6.2. Etude de l'influence des contraintes de cisaillements sur la charge	
limite à l'adaptation	107
6.6.3. Détermination du domaine d'adaptation	108
6.6.3.1. Matériau élastique parfaitement plastique	108
6.6.3.2. Matériau élastoplastique écrouissable	110
6.7. ETUDE D'UN MODELE BICOUCHE	111
6.7.1. Etude de l'influence du module d'Young sur la charge limite à	
l'adaptation	112

6.7.2. Etude de l'influence de l'épaisseur de la couche d'asphalte sur la charge limite à l'adaptation	113
6.8. Validation de l'approche pour le cas d'une sollicitation harmonique	114
CONCLUSION GENERALE	116
REFERENCES	119
ANNEXES	130

NOTATIONS

Les principales notations utilisées dans ce rapport sont définies ci-dessous. Les autres notations seront définies lors de leur apparition dans chaque chapitre.

M	matrice des masses
M	rapport des contraintes à l'état critiques
C	matrice d'amortissement
C_{cr}	coefficient d'amortissement critique
K	matrice de rigidité
K[*]	matrice de rigidité complexe
\tilde{K}	matrice de rigidité effective
B	matrice d'interpolation des déformations
ψ	matrice modale
E	tenseur d'élasticité
\tilde{E}	tenseur d'élasticité complexe
E	module de Young
L	opérateur linéaire matriciel
H[±]	matrice de localisation de l'élément
\ddot{u}	accélération
\dot{u}	vitesse
u	déplacement
\ddot{u}_s	accélérogramme
$\ddot{\tilde{u}}$	accélération élastique fictive
\tilde{u}	déplacement élastique fictif
\bar{u}^r	déplacement résiduel
ε	déformation totale
ε^e	déformation élastique
$\tilde{\varepsilon}$	déformation élastique fictive

ε^{er}	déformation élastique résiduelle
$\bar{\varepsilon}^{er}$	déformation élastique résiduelle indépendante du temps
ε^p	déformation plastique
$\bar{\varepsilon}^p$	déformation plastique indépendante du temps
ε^{dp}	déformation plastique liée à la variation du déviateur des contraintes S
ε_v^p	déformation volumique plastique liée à la variation de la partie hydrostatique des contraintes p
σ^e	contrainte élastique
$\overset{\circ}{\sigma}$	contrainte élastique fictive
ρ	contrainte résiduelle
$\bar{\rho}$	contrainte résiduelle indépendante du temps
$P\delta_{ij}$	partie hydrostatique du tenseur des contraintes σ
S	partie déviatoire du tenseur des contraintes σ
q	contrainte de cisaillement maximale appelée aussi contrainte déviatorique ($q = \sigma_1 - \sigma_3$)
F	vecteur de force aux noeuds
\tilde{F}	vecteur force effectif
$F(\omega)$	transformée de Fourier de l'accélération $\ddot{u}_s(t)$
η	facteur de perte
μ	coefficient de frottement
$H(\omega)$	fonction de réponse en fréquence complexe
β, γ	paramètres d'optimisation
ϕ	vecteur propre
ω	pulsation d'excitation
ω_0	pulsation propre
f	fréquence d'excitation
f_0	fréquence propre
ρ	masse volumique
ν	coefficient de Poisson
e	indice des vides à l'état critique
δ	symbole de Kronecker

$\dot{\lambda}$	multiplicateur plastique
\mathcal{F}	critère de plasticité
W	énergie de déformation élastique fictive
ϕ	dissipation
D	énergie dissipée au cours d'un cycle
T	énergie cinétique totale
V	énergie potentielle totale
U	énergie de déformation
\mathcal{W}	potentiel des forces conservatives de surface et de volume.
\mathcal{L}	lagrangien
α	facteur de charge ($\alpha =$ charge limite P / charge appliquée P_0)
α_{SD}	facteur de charge à l'adaptation
R	paramètre d'écroûissage isotrope
ξ	tenseur d'écroûissage cinématique
ζ	pourcentage d'amortissement critique
Φ	fonction de contrainte d'Airy
g	fonction homogène de degré pair
P_{ij}	gradient de la fonction scalaire $g(\sigma_{ij})$ par rapport un tenseur du second ordre σ_{ij}
\mathcal{D}	domaine de chargement
\mathcal{D}	enveloppe convexe du domaine \mathcal{D}
$\phi(R, \bar{R})$	fonction scalaire positive
x_1, x_2, x_3	système de coordonnées rectangulaires
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	contraintes principales
$N_i(x, y, z)$	fonction base de l'approximation définie dans le domaine V

Un être mathématique, avec un indice représente un vecteur (par exemple u_i), avec deux indices ou plus représente un tenseur (par exemple σ_{ij} tenseur d'ordre 2, E_{ijkl} tenseur d'ordre 4).

Sauf mention explicite du contraire, on utilise la convention de sommation sur les indices muets. Quand le même indice se trouve dans une même expression algébrique, cette expression représente la somme de toutes les expressions correspondantes obtenues en donnant toutes les valeurs possibles à l'indice considéré (par exemple $\sum_{i=1}^n A_i B_i = A_1 B_1 + \dots + A_n B_n$)

On utilisera pour la dérivée partielle (par exemple) de A par rapport à la coordonnée x_i , la notation $A_{,i} = \frac{\partial A}{\partial x_i}$.

Dans certains chapitres, ou paragraphes, les symboles ci-dessus peuvent avoir une signification différente. Celle-ci est dans ce cas clairement explicitée.

INTRODUCTION GENERALE

1. INTRODUCTION

Le premier instrument de calcul de l'ingénieur pour évaluer la résistance des structures fut la théorie d'élasticité, qui a été amenée à un grand degré de perfection par un siècle et demi de recherches. Le reproche que peut faire l'ingénieur à l'analyse élastique, qu'elle est incapable de prendre en compte les propriétés anélastique des matériaux en calcul des structures. Cette carence a ouvert la voie à un nouveau théorème : celui de l'analyse limite, basé généralement sur l'hypothèse simplifiée du chargement proportionnel. Or, ce mode de chargement peut être lui-même considéré dans la pratique plus comme une hypothèse commode de calcul que comme la réalité : Les charges appliquées sont très souvent variables dans le temps et d'une manière indépendante les unes des autres. Pour un trajet de chargement donné, le comportement d'une structure élastoplastique est déterminé par la solution d'un problème d'évolution. Ceci signifie que, pour déterminer son comportement asymptotique, il faut a priori mener un calcul pas à pas qui n'est pas possible si le trajet de chargement n'est pas exactement connu sur un intervalle infini. Par contre, on sait généralement que le chargement varie entre certaines bornes, cette observation est à l'origine du développement du concept de l'adaptation plastique.

Partant du problème d'évolution en élastoplasticité qu'on ne peut espérer résoudre exactement dans tous les cas pratiques, d'une part à cause de sa complexité, d'autre part à cause d'une mauvaise connaissance des données de ce problème, la théorie de l'adaptation permet de résumer l'information utile à l'ingénieur au calcul d'un seul paramètre : le coefficient de sécurité à l'adaptation. L'intérêt pratique de cette théorie est indéniable, comme le prouvent les ouvrages construits selon la théorie des charges limites. De plus, la théorie de l'adaptation apporte un certain nombre d'informations qualitatives : le travail dissipé plastiquement dans toute la structure est fini, les déformations plastiques tendent vers une limite, la réponse en contraintes tend vers une réponse purement élastique.

2. HISTORIQUE

Depuis les travaux originaux de BLEICH [6] (1932), la théorie de l'adaptation plastique a connu un développement considérable. L'approche statique du phénomène, appliquée au milieu continu est condensée dans le théorème fondamental de MELAN [85] (1936), dont SYMONDS [140] (1951) et KOITER [54] (1952) ont simplifié la démonstration. Dans un article resté célèbre, KOITER [56] (1960) établit une approche cinématique du théorème de l'adaptation, dans lequel il introduit le coefficient de sécurité ; ceci lui permet d'obtenir une majoration du travail des déformations plastiques, ce qui constitue un pas décisif vers la maturité du théorème. L'analyse convexe apparaît comme un outil particulièrement efficace dans la description mathématique du phénomène d'adaptation (DEBORDES & NAYROLES [29] (1976)). A partir du concept de dissipation moyenne, DE SAXCE [33] (1989) introduit de nouveaux principes variationnels pour décrire les états limites, et récemment, KAMENJARZH & WEICHERT [53] (1992), expriment au moyen de la dualité la borne du coefficient de sécurité, en considérant le cas particulier de la surface d'écoulement sphérique.

L'extension et l'application du théorème de l'adaptation aux classes de matériaux à comportements complexes, tenant compte des sollicitations thermiques et dynamiques, de l'érouissage, des effets géométriques et de l'endommagement ont suscité beaucoup d'intérêt ces dernières années.

Déjà PRAGER [121] (1956) et ROZENBLUM [125] (1957) donnent une extension du premier théorème en prenant en compte les contraintes thermiques. L'influence de la température sur le module de Young et sur le seuil d'écoulement a été donnée par KÖNIG [57] (1969) et [60] (1979). ROZENBLUM [126] (1965) et DE DONATO [32] (1970) utilisent l'approche cinématique pour les sollicitations thermiques, alors que GOKHFELD &

CHERNIAVSKY [39] (1980) et GROSS-WEEGE & WEICHERT [41] (1992) utilisent l'approche statique.

L'effet de l'écroutissement a été étudié en premier par MELAN [86] (1938) dans un article original par l'introduction de l'écroutissement cinématique linéaire. NEAL [96] (1950) utilisa le critère d'écoulement linéaire pour des considérations numériques; MAIER [78] (1972) présenta un modèle généralisé pour les structures discrètes, tenant compte des effets géométriques du second ordre; MANDEL & al. [83] (1977) et ZARKA & al. [150] (1990) mirent en évidence une condition nécessaire de l'adaptation pour les structures élastoplastiques à écroutissement isotrope et cinématique combinés. KÖNIG [66] (1987) et KÖNIG & SIEMASZKO [67] (1988) développèrent une méthode d'analyse de stabilité du processus d'adaptation; PONTER [105] (1975) et MANDEL [82] (1976) étendirent le théorème au comportement du matériau écrouti. Tous ces auteurs ont traité le cas de l'écroutissement cinématique linéaire illimité. Mais PONTER [105] (1975), ZARKA & CASIER [149] (1981) et KÖNIG [66] (1987) constatèrent que l'hypothèse de l'écroutissement illimité conduit à l'impossibilité de prédire la non-adaptation par déformations plastiques progressives, et que seul l'effondrement de la structure par plasticité alternée peut être modélisé. L'écroutissement cinématique limité fut pris en compte par WEICHERT & GROSS-WEEGE [145] (1988) et STEIN & al. [139] (1990). Utilisant le modèle du matériau standard généralisé (M.M.S.G.), WEICHERT & GROSS-WEEGE [145] (1988) proposèrent une limite d'évolution du paramètre d'écroutissement cinématique linéaire au moyen d'une condition simplifiée de deux surfaces d'écoulement.

L'extension de la théorie pour des lois constitutives plus réalistes a été étudiée par POLIZZOTTO & al. [114] (1991), [115] (1993), STEIN & al. [139] (1990), NAYROLES & WEICHERT [95] (1993), WEICHERT & GROSS-WEEGE [145] (1988), MAIER & NOVATI [81] (1990).

La généralisation du théorème d'adaptation de MELAN aux cas des sollicitations dynamiques a trouvé une attention plus soutenue. Parmi les nombreux travaux qui ont contribué à son évolution, ici seulement quelques un peuvent être mentionnés. CERADINI [16] (1969) fut le premier à donner une extension du théorème de MELAN aux cas des sollicitations dynamiques, HWA-SHAN-HO [50] (1972) simplifia le problème en introduisant le coefficient d'amplification dynamique dans le calcul du coefficient de sécurité et réduit ainsi l'étude d'un problème dynamique à un problème quasi statique. La prise en compte de l'écroutissage a été étudiée par MAIER [77] (1972) et POLIZZOTTO [107] (1980) en utilisant des modèles linéaires discrets pour exploiter les potentialités de la programmation mathématique linéaire. L'extension du théorème cinématique de KOITER étant due à CORRADI & MAIER [23] (1973), [24] (1974), POLIZZOTTO & al. [115] (1993). Les deux théorèmes, respectivement le théorème de MELAN et de KOITER, ont été reformulés par POLIZZOTTO [111] (1984) en utilisant l'analyse modale donnant ainsi une généralisation de ces derniers. Tous les théorèmes d'adaptation en dynamique ont été développés pour une histoire de chargement supposée connue. Cependant il y a des situations pratiques où l'histoire de chargement est inconnue mais où l'on sait qu'elle appartient à un domaine de chargement (ensemble d'histoires de chargements qui sont tous possibles). Une généralisation du théorème de CERADINI [16] (1969) pour de telles situations est donnée par POLIZZOTTO [110] (1984).

MAIER [76] (1969) montre les liaisons entre l'approche cinématique et l'approche statique au moyen de la dualité en programmation linéaire, avec la prise en compte des lois non-associées. GOKHFELD [38] (1966) et SAWCZUK [136] (1969) déduisent, en utilisant l'approche cinématique, un critère d'effondrement incrémental et montrent que, dans le cas du critère d'écoulement linéaire, l'inégalité énergétique peut être intégrée dans le temps. Plusieurs nouvelles solutions ont été obtenues en utilisant cette approche. Un critère de plasticité

alternée a été établi par KÖNIG [59] (1979), indépendamment de la plasticité accumulée ; la distinction entre l'adaptation plastique et le rochet a été étudiée par POLIZZOTTO [116] (1993).

L'adaptation ne présente pas toujours une condition suffisante de sécurité, bien qu'elle nous permette le calcul de la charge limite, en revanche elle ne donne aucune information sur les déformations plastiques associées qui peuvent être inadmissibles de point de vue de l'état limite de service. Beaucoup d'auteurs (PONTER [104] (1972), MAIER [79] (1973), CORRADI & NOVA [25] (1974), CAPURSO [12] (1974), [13] (1975), [14] (1975), [15] (1979) POLIZZOTTO [108] (1980), [109] (1982), [112] (1984), [113] (1986), MAIER & NOVATI [81] (1990)) ont orienté leurs études vers des techniques de majoration des déplacements et des déformations plastiques accumulées ; ces techniques permettent leurs estimations directes utiles dans le dimensionnement et la prévision de la résistance des structures.

Les méthodes d'analyse de l'adaptation ont évolué avec les performances des méthodes numériques. Ainsi, on est passé de l'étude des structures discrétisées par des éléments unidimensionnels utilisant une formulation matricielle et l'optimisation linéaire à l'étude des structures bidimensionnelles discrétisées par les éléments finis et utilisant l'optimisation non-linéaire (COHN & MAIER [18] (1979), KÖNIG & MAIER [62] (1981), MAIER & LLOYD SMITH [80] (1986), KÖNIG [66] (1987), RAAD & WEICHERT [127] (1988), WEICHERT & GROSS-WEEGE [145] (1988) et GROSS-WEEGE [40] (1990)).

La généralisation du théorème d'adaptation au comportement des structures géométriquement non-linéaires a également suscité un intérêt particulier chez certains auteurs. Le premier à s'intéresser à ce problème fut MAIER [78] (1972). Il présenta une approche tenant compte des effets géométriques dit du "second ordre" appliqués aux structures discrètes en utilisant une formulation matricielle simplifiée. Cette méthode est aussi utilisée par KÖNIG

[61] (1980) et [65] (1984), KÖNIG & SIEMASZKO [67] (1988) pour l'étude de l'influence des effets géométriques sur la stabilité des structures. En appliquant les deux théorèmes, statique et cinématique de l'adaptation WEICHERT [144] (1986) et [146] (1990) introduit l'influence des non-linéarités géométriques en utilisant l'approche tensorielle dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Pour des raisons pratiques, il étudie les petites évolutions au voisinage d'une configuration déformée de référence, en mentionnant l'intérêt des approximations cinématiques proposées par CASEY [10] (1985). Récemment, TRITSCH [142] (1993) a utilisé le formalisme tensoriel des grandes déformations ; Il a développé une formulation originale du premier théorème, et fait un lien entre les différentes approches géométriquement non-linéaires. Tous ces auteurs utilisent l'artifice d'un corps de comparaison purement élastique soumis aux mêmes charges que le corps étudié. Concernant les lois de comportement et l'affaiblissement des matériaux, WEICHERT & RAAD [147] (1992) donnent une extension du théorème statique d'adaptation à une certaine classe de géomatériaux élastiques parfaitement plastiques avec des coefficients d'élasticité variables. Dans le cadre de la mécanique des milieux continus et en utilisant le concept du M.M.S.G, HACHEMI & WEICHERT [43] (1992) établissent une extension générale du premier théorème à une certaine classe de matériaux élastoplastiques endommageables. Les résultats expérimentaux sont rares et se limitent à très peu de travaux dont sont cités ceux de LEERS & al. [68] (1985).

L'idée d'utiliser la charge limite d'adaptation comme un paramètre de base pour le dimensionnement des chaussées semble avoir été suggérée en premier par SHARP & BOOKER (1984) [141]. Ces auteurs ont montré que les observations données par les tests AASHO [3] (1972) sur le comportement des chaussées sont compatibles avec le concept d'adaptation. Ils considèrent alors un modèle de chaussée sous l'hypothèse de déformation plane et appliquent le théorème de MELAN [85] (1936) pour le calcul de la borne inférieure de la charge limite à l'adaptation. Cependant, l'utilisation de la technique de la programmation mathématique

linéaire appliquée pour l'analyse des structures s'avère souvent inefficace pour le cas d'un milieu continu. Ils développèrent alors une procédure alternative appelée "method of conics". COLLINS & CLIFFE [22] (1987) donnent l'interprétation physique de cette procédure et montrent qu'elle peut être considérée comme étant duale du théorème cinématique donné par KOITER [56] (1960). Ces derniers ont généralisé cette procédure pour le cas des milieux tridimensionnels et calculé la borne supérieure de la charge limite d'adaptation en utilisant la technique de programmation mathématique non linéaire. Leurs résultats se comparent à ceux de PONTER & al [106] (1985) et ALWIS & GRUNDY [2] (1985) qui ont appliqué directement le théorème de KOITER [56] (1960) pour le calcul de la charge limite à l'adaptation. Récemment, RAAD & al [127] (1988), [128] (1989) et [129] (1988) ont utilisé la technique des éléments finis pour mieux estimer la charge limite d'adaptation.

3. MOTIVATION

Les théorèmes limites ou d'effondrement occupent une place distincte dans la littérature de la mécanique des sols. Cela est particulièrement dû au fait qu'ils sont étroitement liés à la solution des problèmes de stabilité du sol sous un simple programme de chargement. Cependant, pour un programme de chargement complexe dont la durée est illimitée tels que ceux qui se produisent par exemple dans les fondations des structures marines et les chaussées, ces théorèmes sont incapables de prédire la sécurité de ces structures, même pour un chargement inférieur à la charge limite.

Un nombre considérable de modèles est proposé pour décrire le comportement du sol sous sollicitations cycliques. Ces modèles capturent avec des degrés variables les traits importants du comportement du sol tels que la génération des pressions interstitielles, la fatigue cyclique et le comportement hystérétique et peuvent convenablement être incorporés dans un code d'éléments finis pour la solution des problèmes aux limites. Cependant, pour les problèmes pratiques, la réponse d'une structure de sol peut être évaluée seulement pour un

nombre limité de cycles, vu le coût de calcul prohibitif. La théorie de l'adaptation est donc une alternative pour l'étude du comportement des structures à long terme soumises à des chargements quelconques variant entre des bornes fixes. Durant ces dernières années cette théorie a trouvé une attention plus soutenue vu ses résultats très convaincants et son efficacité. C'est dans ce contexte, que nous proposons une extension du théorème d'adaptation aux cas des géomatériaux sous sollicitations dynamiques. En particulier l'approche doit tenir compte des constatations expérimentales suivantes :

- sous contraintes hydrostatiques, seul se manifeste un comportement contractant du sol ;
- sous contraintes déviatoriques, le comportement contractant à faible niveau devient dilatant au-delà d'un certain seuil à déformation volumétrique nulle définissant l'état caractéristique ;
- la règle d'écouissage isotrope utilisée dans les modèles élastoplastiques se révèle inefficace pour décrire le comportement du sol sous chargement cyclique. Pour une modélisation plus réaliste nous proposons l'utilisation d'un écouissage cinématique linéaire limité et isotrope ;
- le comportement du sol sous sollicitations cycliques (dynamiques) présente un caractère dissipatif qui n'existe pas dans un milieu élastique; ces caractéristiques doivent être convenablement prises en compte pour obtenir des solutions raisonnables. Les théorèmes classiques d'adaptation en dynamique sont tous basés sur l'hypothèse d'un amortissement visqueux pour la modélisation de l'amortissement interne des matériaux. Ce dernier implique que l'énergie dissipée est proportionnelle à la fréquence d'excitation ($D = \pi C \omega u^2$) ce qui est contraire à la réalité expérimentale pour la plupart des matériaux en particulier les sols. Comme conséquence de cette hypothèse, elle peut induire des erreurs sérieuses lors de l'estimation de la charge limite d'adaptation. Pour tenir compte des observations physiques, on propose ici

d'utiliser les propriétés d'un matériau viscoélastique pour représenter l'amortissement matériel du sol.

4. CONTENU DU RAPPORT

Dans le **premier chapitre**, nous passons en revue les principales méthodes qui, à l'heure actuelle, sont à la base des calculs dynamiques des structures. Nous étudions particulièrement le cas des séismes, mais la plupart des éléments s'étendent à d'autres types de chargements dynamiques.

Dans le **deuxième chapitre**, nous exposons la théorie de l'adaptation. Celle-ci permet de résumer l'information utile à l'ingénieur au calcul d'un seul paramètre : le coefficient de sécurité à l'adaptation. De plus, cette théorie apporte un certain nombre d'informations qualitatives : le travail dissipé plastiquement dans toute la structure est fini, les déformations plastiques tendent vers une limite.

La prise en compte d'actions dynamiques dans le dimensionnement des structures telles que les tremblements de terre sur les centrales nucléaires ou les barrages, la houle sur les plates-formes pétrolières ou bien aux vibrations induites dans notre environnement immédiat, nécessite la connaissance du comportement du sol soumis à des chargements cycliques. Le **troisième chapitre** constitue l'objet de cette étude.

Dans le **quatrième chapitre**, nous proposons l'extension du théorème d'adaptation aux cas des sols sous sollicitations dynamiques, dont le comportement est fortement non-linéaire et présente un caractère dissipatif qui n'existe pas en milieu élastique. Ces caractéristiques doivent être prises en compte pour obtenir des solutions raisonnables.

L'effet de l'érouissage est pris en compte par l'utilisation d'un matériau standard généralisé, qui est un matériau élastoplastique défini dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles à partir d'une famille de paramètres (flux thermodynamique) supposés dériver d'un potentiel de forces thermodynamiques (associées aux flux) et pour lequel on suppose vérifier l'hypothèse de dissipativité normale (potentiel convexe). Pour une modélisation plus réaliste du comportement des sols sous sollicitations cycliques on a introduit un érouissage mixte (combinaison de l'érouissage cinématique et isotrope).

L'amortissement matériel du sol est représenté par l'introduction d'une matrice de rigidité complexe. Celle-ci se forme exactement comme les matrices de valeurs réelles avec la différence que les modules complexes sont utilisés pour la formation de cette matrice. Les modules complexes sont définis uniquement pour une excitation harmonique, cependant toute excitation peut toujours être décomposée en une somme de fonctions harmoniques par l'application de la transformée de Fourier. D'où la généralisation de l'approche par modules complexes à l'étude des systèmes soumis à une excitation quelconque.

Nous présentons dans **le cinquième chapitre** la méthode des éléments finis en dynamique de type déplacement utilisée pour le calcul de la réponse dans le corps de référence purement élastique. Pour le calcul des contraintes résiduelles, nous utilisons les éléments finis statiquement admissibles. La procédure numérique est basée sur le couplage de la méthode des éléments finis et un processus itératif d'optimisation utilisant la méthode du Lagrangien augmenté. Le facteur de charge α est la fonction objective à optimiser sous contraintes d'inégalités qui dérivent du critère d'écoulement.

Pour l'étude des chaussées sous sollicitations dynamiques, nous avons été amenés à modifier le programme de calcul existant WEICHERT & GROSS-WEEGE [145] (1988) à

savoir toute la partie utilisée pour le calcul plastique de l'adaptation et de l'analyse limite. La version originale du programme utilisant des éléments finis statiquement admissibles (en introduisant la fonction de contraintes d'Airy qui satisfait automatiquement l'équilibre) ne peut pas être appliquée pour une étude en dynamique qui nécessite la prise en compte des forces d'inertie, de l'amortissement et de l'érouissage.

Le sixième chapitre est consacré à la validation et à l'application de l'approche proposée à la mécanique des chaussées sous sollicitations dynamiques. La plupart des études de modélisation actuellement disponibles ne se sont intéressées qu'à la simulation du comportement de la chaussée sous conditions de charge statique. L'étude du comportement des chaussées sous sollicitations dynamiques est très logique, la chaussée travaille en pratique sous l'application de lourdes charges circulant rapidement. Les actions dynamiques verticales corrélatives au franchissement des obstacles qui sont de type impulsif, peuvent atteindre 1.5 à 2 fois la charge statique, les efforts horizontaux sont eux aussi variables à la suite d'un choc et prennent la même allure oscillatoire que les efforts verticaux.

Le problème considéré est une chaussée soumise à une charge verticale répartie uniformément et aux contraintes de cisaillement, sous condition de déformation plane. Le sol est modélisé comme un matériau élastique parfaitement plastique ou érouissable obéissant au critère de DRUCKER-PRAGER avec une loi d'écoulement associée. Les exemples que nous allons considérer se classent dans trois séries dont chacune a un but différent.

Dans la première série nous examinons l'influence de certaines propriétés matérielles (angle de frottement, cohésion), ainsi que l'effet des contraintes de cisaillement sur la charge limite à l'adaptation.

Dans la deuxième série, nous déterminons le domaine d'adaptation pour un matériau élastique parfaitement plastique et pour un matériau écrouissable. Nous considérons alors un programme de chargement à deux paramètres (charge normale et tangentielle), les charges varient indépendamment l'une de l'autre entre des bornes fixes.

Nous considérons dans la troisième série le cas d'un bicouche. Nous étudions l'influence de la rigidité relative, de la cohésion relative et de l'épaisseur sur la charge limite à l'adaptation.

La comparaison des résultats obtenus est faite par rapport à une étude statique à l'adaptation et à l'analyse limite.

CHAPITRE 1

***RAPPEL DES PRINCIPALES METHODES CLASSIQUES
D'ANALYSE DES STRUCTURES DE GENIE CIVIL
SOUMISES A DES CHARGEMENTS DYNAMIQUES***

RAPPEL DES PRINCIPALES METHODES CLASSIQUES D'ANALYSE DES STRUCTURES DE GENIE CIVIL SOUMISES A DES CHARGEMENTS DYNAMIQUES

1.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous passons en revue les principales méthodes qui sont à la base des calculs dynamiques des structures. Nous nous intéressons d'abord aux structures élastiques. Nous verrons ensuite le cas des structures dont les matériaux sont inélastiques.

Nous supposerons que, d'une part, la structure est discrète ou discrétisée, et d'autre part, que l'hypothèse des petites transformations géométriques est admissible.

Dans ce chapitre nous étudions plus particulièrement le cas des séismes, mais la plupart des éléments s'étendent rapidement à d'autres types de chargements dynamiques.

1.2. CAS DES STRUCTURES ELASTIQUES

1.2.1. Définition d'un spectre de réponse

Le spectre de réponse en accélération, vitesse ou déplacement permet de faire intervenir la notion de contenu en fréquence du mouvement. Son but est de caractériser un séisme d'après la réponse d'une structure simple. Par définition, un spectre de réponse en accélération est la courbe donnant l'accélération maximale d'oscillateurs à un degré de liberté et de fréquence propre variable. Un tel oscillateur est représenté sur la figure 1.1. Il est caractérisé par une masse M , une raideur K et un amortissement C . Si le socle le supportant est soumis à un accélérogramme $\ddot{u}_s(t)$ (figure 1.2 séisme d'Olympia PECKER [100] (1984)), le mouvement relatif $u(t)$ de la masse M par rapport au socle est régi par l'équation :

$$M [\ddot{u}(t) + \ddot{u}_s(t)] + C \dot{u}(t) + K u(t) = 0 \quad (1.1)$$

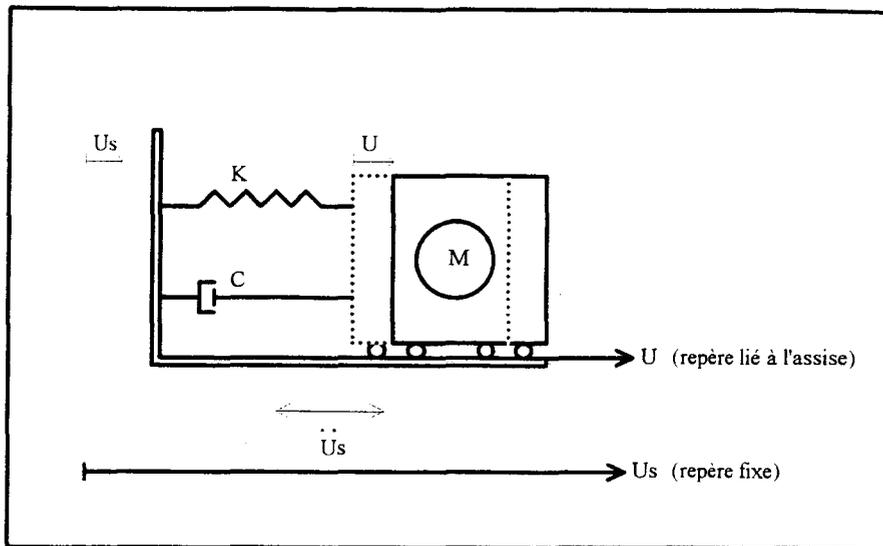


Figure 1.1- Oscillateur simple à un degré de liberté –

En introduisant les variables :

$$- \text{ pulsation propre } \omega_0^2 = \frac{K}{M} \quad (1.2)$$

$$- \text{ pourcentage d'amortissement critique } \zeta = \frac{C}{2 (K M)^{0.5}} \quad (1.3)$$

L'équation (1.1) prend la forme suivante :

$$\ddot{u}(t) + 2 \omega_0 \zeta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = - \ddot{u}_s(t) \quad (1.4)$$

A un pourcentage d'amortissement critique donné, la résolution de cette équation différentielle, pour diverses valeurs de la fréquence propre $f_0 = \omega_0 / 2\pi$, permet de connaître l'accélération maximale subie par la masse M . En répétant cette opération pour différentes valeurs de ζ , on obtient les spectres de réponse de la figure (1.3) correspondant à l'accélérogramme de la figure (1.1) et à des pourcentages d'amortissement critique 0 %, 5 % et 10 %. Cette notion de spectre de réponse peut être étendue au cas des vitesses ou des déplacements. Elle constitue la base de l'analyse modale des structures (CLOUGH & PENZIEN [21] (1993)).

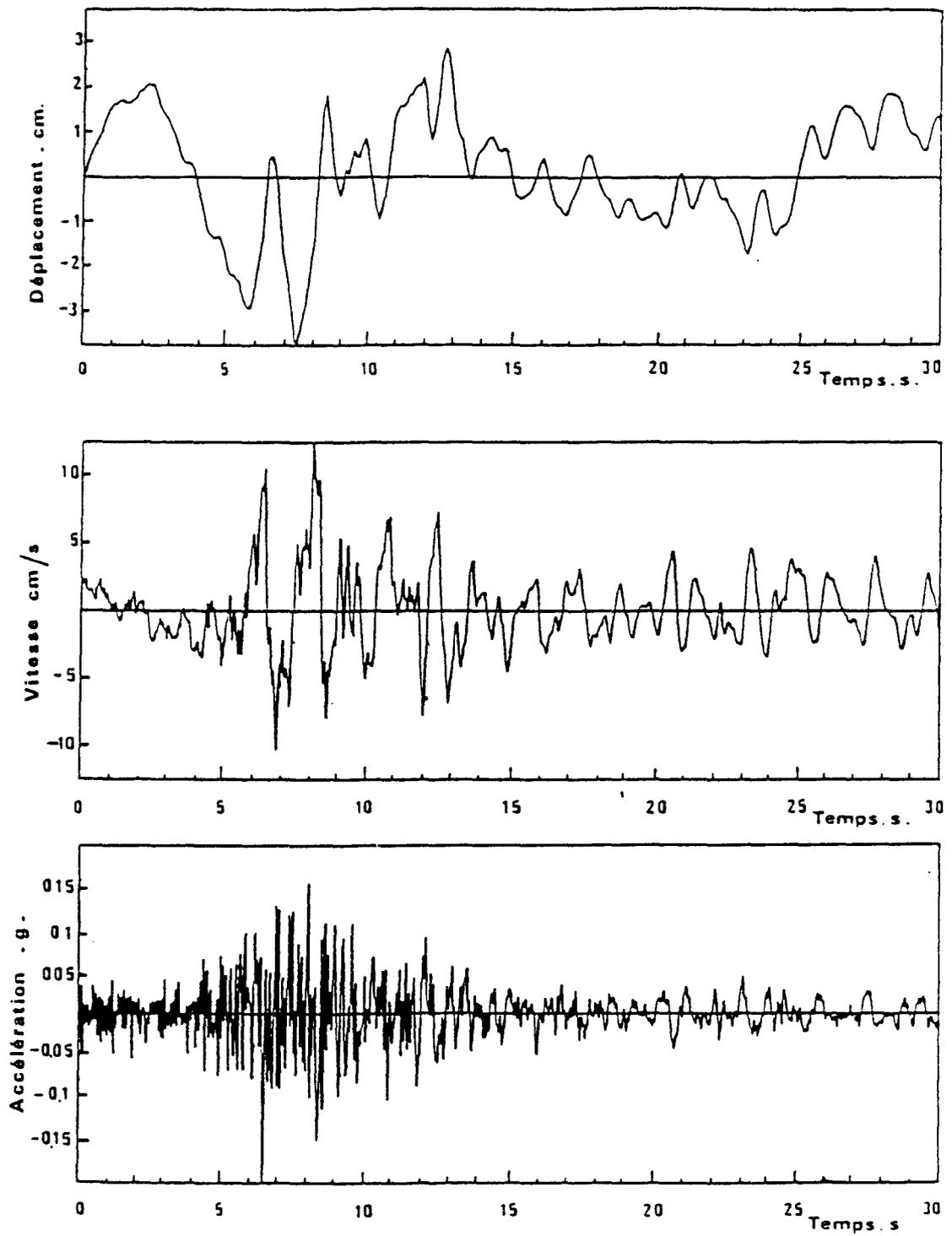
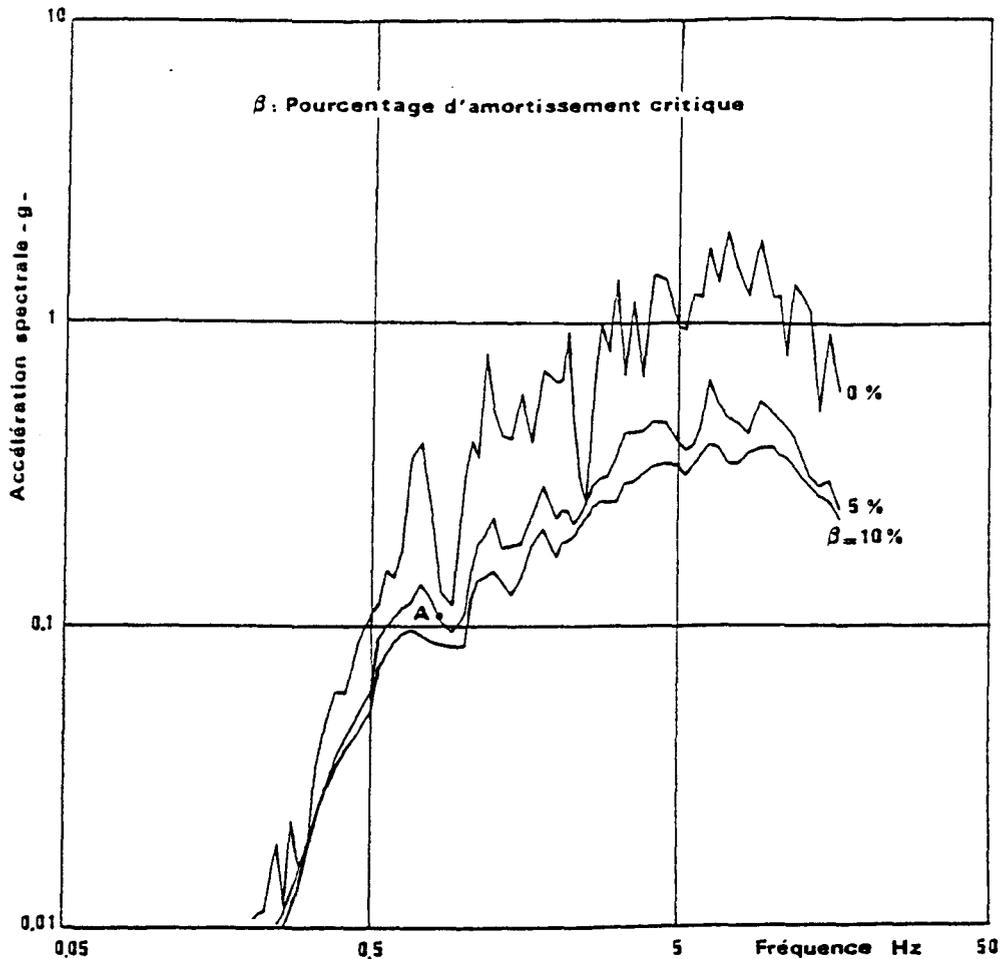


Figure 1.2 – Séisme d'Olympia [100] –



1.2.2. METHODE D'ANALYSE DYNAMIQUE PAR SUPERPOSITION MODALE

1.2.2.1. Analyse dans le domaine temporel

Par des transformations mathématiques appropriées, on peut transformer un système de n équations différentielles couplées en un système de n équations différentielles découplées. Cela est possible en utilisant la propriété d'orthogonalité des modes propres de vibrations. La résolution de chacune des équations permet d'obtenir la réponse dans chaque mode, la solution est obtenue par superposition des réponses modales (CLOUGH & PENZIEN [21] (1993)).

La condition d'équilibre dynamique d'une structure discrète ou discrétisée non amortie à n degrés de liberté s'écrit :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1.5)$$

Considérons le problème homogène correspondant :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (1.6)$$

dont on cherche des solutions sous la forme :

$$\mathbf{u}(t) = \phi \exp(-j\omega t) \quad (1.7)$$

En introduisant l'équation (1.7) dans l'équation (1.6), on obtient :

$$(-\mathbf{M} \omega^2 + \mathbf{K}) \phi = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

Comme ϕ n'est généralement pas nul, la solution de l'équation (1.8) est donnée par :

$$\det(-\mathbf{M} \omega^2 + \mathbf{K}) = 0 \quad (1.9)$$

L'expression (1.9) est l'équation caractéristique. La solution de cette équation constitue un problème aux valeurs propres et permet d'obtenir n pulsations propres $\{\omega_i\}_{i=1,n}$ soit $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots < \omega_n$. La plus petite valeur de ω , soit ω_1 , est la pulsation fondamentale. Pour $i > 1$, ω_i est appelée pulsation d'ordre i . A chaque valeur propre correspond une forme propre d'oscillation. L'ensemble des valeurs propres et des formes propres est appelé " mode propre (ou normal) de vibration ".

Soient $\{\phi_i\}_{i=1,n}$ les vecteurs propres associés aux $\{\omega_i\}_{i=1,n}$, ils sont deux à deux orthogonaux vis-à-vis de \mathbf{M} et \mathbf{K} , autrement dit, quand les valeurs propres sont distinctes on a :

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (1.10)$$

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Définissons la matrice Ψ dont les colonnes sont les vecteurs propres $\{\phi_i\}$ classés dans l'ordre croissant des valeurs propres $\{\omega_i\}$.

$$\Psi = [\{\phi_1\} \dots \dots \{\phi_n\}] \quad (1.11)$$

Le vecteur \mathbf{u} représentant la déformée de la structure peut s'écrire comme la superposition de modes propres sous la forme :

$$\mathbf{u}(t) = \Psi \mathbf{Y}(t) \quad (1.12)$$

Le problème se ramène alors au calcul des coefficients $\mathbf{Y}(t)$ composantes du vecteur $\mathbf{Y}(t)$ qui sont des fonctions du temps. Si l'on note $\ddot{\mathbf{Y}}(t)$ la dérivée seconde de $\mathbf{Y}(t)$ par rapport au temps, l'équation (1.6) devient :

$$\mathbf{M} \Psi \ddot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{K} \Psi \mathbf{Y}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1.13)$$

On prémultiplie chaque terme de l'équation (1.13) par ϕ_i^T et en utilisant l'orthogonalité des modes propres pour ne tenir que des termes non nuls, on obtient les n équations différentielles découplées.

$$M_i \ddot{Y}_i(t) + K_i Y_i(t) = F_i(t) \quad i = 1, n \quad (1.14)$$

C'est l'équation d'un système à un degré de liberté soumis au chargement $F_i(t)$ avec :

$$\begin{aligned} M_i &= \phi_i^T \mathbf{M} \phi_i \\ K_i &= \phi_i^T \mathbf{K} \phi_i \\ F_i(t) &= \phi_i^T \mathbf{F}(t) \end{aligned} \quad (1.15)$$

où M_i , K_i et F_i représentent respectivement la masse modale, la rigidité modale et la force modale. Dans le cas d'un séisme la force $F_i(t)$ est égale à :

$$F_i(t) = -M_i \ddot{u}_s(t) \quad (1.16)$$

L'équation (1.14) devient alors :

$$M_i \ddot{Y}_i(t) + K_i Y_i(t) = -M_i \ddot{u}_s(t) \quad i = 1, n \quad (1.17)$$

La solution de (1.17) est donnée par l'intégrale de Duhamel (CLOUGH & PENZIEN [21] (1993)) :

$$Y_i(t) = -\frac{1}{\omega_i} \int_0^t \ddot{u}_s(\tau) \sin[\omega_i(t - \tau)] d\tau \quad (1.18)$$

avec $\omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i}$.

Le vecteur déplacement $\mathbf{u}(t)$ est obtenu par la superposition de toutes les réponses modales.

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i Y_i(t) \quad (1.19)$$

La méthode exposée ci-dessus est aussi valable pour le cas où la matrice de rigidité est complexe \mathbf{K}^* (CLOUGH & PENZIEN [21] (1993)).

1.2.2.2. Analyse dans le domaine fréquentiel

L'étude dans le domaine temporel est générale. Elle permet de déterminer la réponse de tout système linéaire soumis à une excitation quelconque. Mais il est parfois plus commode d'effectuer l'étude dans le domaine fréquentiel (par exemple dans l'étude des problèmes d'interaction sol-structures l'obtention des solutions dans le domaine temporel est extrêmement complexe et inefficace du point de vue numérique, le domaine fréquentiel conduit alors à une formulation plus simple PECKER [100] (1984)). La méthode consiste à exprimer le

chargement appliqué comme une somme de composantes harmoniques en utilisant la transformée de Fourier, à calculer la réponse de la structure pour chaque composante, et à superposer enfin les réponses harmoniques pour obtenir la réponse totale.

La transformée de Fourier $F(\omega)$ de l'accélération $\ddot{u}_s(t)$ vérifie :

$$\ddot{u}_s(t) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (1.20)$$

où Re désigne la partie réelle. La fonction $F(\omega)$ complexe est donnée par :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{u}_s(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (1.21)$$

Les deux intégrales (1.20) et (1.21) sont connues sous le nom de formules de réciprocity de Fourier parce que la fonction temps peut se déduire de la fonction fréquence et vice-versa par des procédés équivalents. Une condition nécessaire pour l'existence de la transformée de Fourier est que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\ddot{u}_s(t)| dt \quad (1.22)$$

soit finie.

L'intégrale de Fourier de l'équation (1.20) peut être interprétée comme étant la représentation d'un chargement quelconque sous la forme d'une somme infinie de composantes harmoniques, où $\frac{1}{2\pi} F(\omega)$ représente l'amplitude par unité de ω de la composante de charge de fréquence ω .

Dans ce qui suit on supposera que le chargement périodique a duré suffisamment longtemps pour que le régime transitoire soit amorti, seule la réponse en régime permanent sera considérée. On tient compte de l'amortissement par l'introduction d'une raideur complexe (voir chapitre 3), et on introduit la fonction excitation complexe unité $\exp(j\omega t)$. L'équation du mouvement (1.1) devient :

$$M \ddot{u}(t) + \overset{*}{K}(\omega) u(t) = \exp(j\omega t) \quad (1.23)$$

où $\overset{*}{K}(\omega) = K(\omega) [1 + j \eta(\omega)]$ est la raideur complexe et $\eta(\omega)$ est le facteur de perte.

La solution de (1.23) en régime permanent est de la forme :

$$u(t) = H(\omega) \exp(j\omega t) \quad (1.24)$$

Si on reporte (1.24) dans (1.23), on trouvera que la fonction $H(\omega)$, que l'on appellera dorénavant fonction de réponse en fréquence complexe, prend la forme :

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 M + \overset{*}{K}(\omega)} \quad (1.25)$$

La multiplication de la fonction de réponse en fréquence complexe $H(\omega)$ par $\frac{1}{2\pi} F(\omega)$ donne l'amplitude par unité de ω de la composante de réponse à la fréquence ω . La réponse totale est obtenue en sommant ces composantes de réponse sur l'intervalle de fréquence entier, on aura donc :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \quad (1.26)$$

L'application de l'analyse en fréquence se limite aux cas pour lesquels les transformées de Fourier des fonctions de chargement sont connues; et même dans ce cas le calcul des intégrales peut s'avérer long et fastidieux. Il convient donc de rendre l'utilisation de la méthode plus commode en la formulant de manière numérique (voir CLOUGH & PENZIEN [21] (1993)).

La formulation numérique se base sur l'utilisation des algorithmes de transformée de Fourier rapide. Cette procédure est si efficace et si puissante, qu'elle a fait des méthodes d'intégration dans le domaine fréquentiel des méthodes compétitives de point de vue numérique par rapport aux méthodes dans le domaine temporel (voir CLOUGH & PENZIEN [21] (1993)).

1.3. CAS DES STRUCTURES INELASTIQUES

1.3.1. Analyse modale à partir du spectre inélastique

La méthode de la superposition modale ne peut théoriquement plus être appliquée dans le cas des matériaux non-linéaires. Néanmoins, d'un point de vue pratique, cette méthode a été étendue aux systèmes non linéaires à travers d'un coefficient de ductilité qui permet de construire un spectre inélastique à partir d'un spectre élastique. Cette méthode quoique pratique, ne repose ni sur des solutions rigoureuses ni sur des considérations mécaniques liées à la structure (NAVIDI-KASMAI [94]).

Du spectre inélastique ainsi conçu, on effectue une superposition modale en utilisant les modes propres élastiques. Le calcul reste très approché; en effet la linéarité est utilisée alors que le problème est non-linéaire (figure 1.4) (NAVIDI-KASMAI [94]).

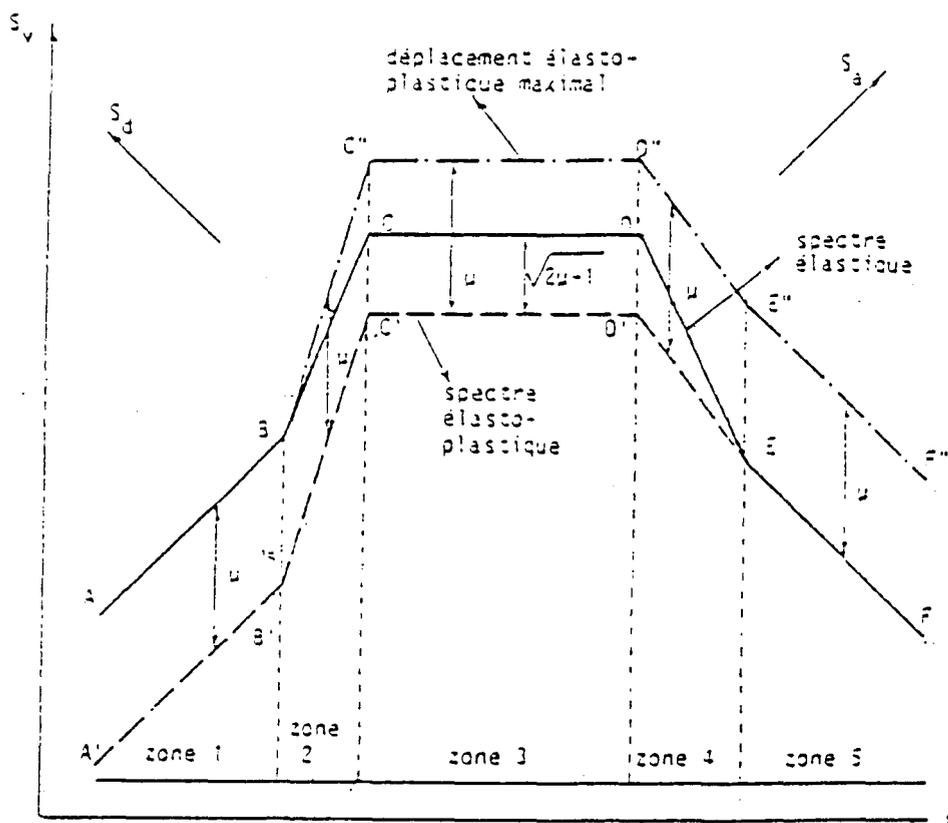


Figure 1.4 – Construction d'un spectre inélastique à partir d'un spectre élastique [94] –

1.3.2. Calcul pas-à-pas

Le procédé est de discrétiser l'évolution d'une structure par rapport au temps et de formuler ce qui se passe à $t + \Delta t$ en fonction de ce qui se passe à t à partir de développements limités des déplacements, vitesses et/ou accélérations.

L'équation différentielle du mouvement peut être écrite en prenant pour inconnues les déplacements relatifs $\mathbf{u}(t)$ par rapport à l'assise rocheuse (le socle Fig. 1.1) :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{u}(t) = -\mathbf{M} \mathbf{I} \ddot{u}_s(t) \quad (1.27)$$

où \mathbf{I} est un vecteur unité. En utilisant une méthode de différences finies centrées, l'accélération et la vitesse sont développées au second ordre, au sens de Taylor, soit alors :

$$\ddot{\mathbf{u}}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{u}_{t-\Delta t} - 2\mathbf{u}_t + \mathbf{u}_{t+\Delta t}) \quad (1.28)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_{t-\Delta t}) \quad (1.29)$$

On voit que l'expression de l'accélération à l'instant t fait intervenir le déplacement à l'instant $t + \Delta t$. On aboutit alors à deux méthodes suivant qu'on substitue l'expression (1.28) dans l'équation de l'équilibre à l'instant t ou à l'instant $t + \Delta t$.

a) Cas explicite (équilibre à l'instant t) : Reportant (1.28) dans (1.27), on obtient une expression ne faisant intervenir que des termes connus à droite :

$$\mathbf{M} \mathbf{u}_{t+\Delta t} = -\Delta t^2 \mathbf{M} \mathbf{I} \ddot{u}_s(t) - (\Delta t^2 \mathbf{K}^* - 2\mathbf{M}) \mathbf{u}_t - \mathbf{M} \mathbf{u}_{t-\Delta t} \quad (1.30)$$

L'algorithme (1.30) conduit à la résolution d'un système linéaire à chaque pas de temps. Si le pas de temps est petit, et qu'il y a beaucoup d'incrément, cela peut être coûteux et on peut se demander s'il n'y aurait pas possibilité de construire une matrice de masse diagonale ou, selon la terminologie éléments finis une matrice de masse concentrée. L'intérêt de cette dernière est que le système (1.30) devient trivial. C'est la raison essentielle pour laquelle on utilise des méthodes explicites.

Il est possible d'utiliser une formule d'intégration numérique particulière pour la matrice de masse qui la rende diagonale. En effet, si on choisit les abscisses d'intégration aux noeuds du maillage (formule de Gauss-Lobatto) la matrice de masse sera automatiquement diagonale.

b) Cas implicite (équilibre à l'instant $t + \Delta t$) : L'équation d'équilibre à l'instant $t + \Delta t$ s'écrit :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \mathbf{K}^* \mathbf{u}(t + \Delta t) = - \mathbf{M} \mathbf{I} \ddot{\mathbf{u}}_S(t + \Delta t) \quad (1.31)$$

Par substitution de (1.28) dans (1.31), on obtient le système suivant en $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$:

$$(\Delta t^2 \mathbf{K}^* + \mathbf{M}) \mathbf{u}_{t+\Delta t} = - \Delta t^2 \mathbf{M} \mathbf{I} \ddot{\mathbf{u}}_S(t + \Delta t) + \mathbf{M} (2 \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_{t-\Delta t}) \quad (1.32)$$

Comme il n'est pas question de rendre la matrice de rigidité diagonale, on voit qu'on aura un système à résoudre à chaque pas.

Les algorithmes implicites et explicites se différencient par les aspects suivants :

- la précision de l'algorithme, comme dans toute intégration numérique, dépendra de la durée de l'incrément de temps. Trois facteurs essentiels doivent être considérés lors du choix de cette durée: (1) la rapidité de variation du chargement appliqué, (2) la complexité des caractéristiques non-linéaires de rigidité, et (3) la période T de vibration de la structure. L'incrément de temps doit être assez court pour permettre une bonne représentation de toutes ces grandeurs, la dernière étant relative au comportement du système en vibration libre. Si le pas de temps choisi est grand par rapport à la période d'un mode propre, il se produit en général un phénomène d'amortissement numérique, analogue à un amortissement matériel (augmentation de la période, diminution de l'amplitude) ;

- la stabilité de l'algorithme, qui caractérise le risque de divergence par suite de l'amplification d'erreurs numériques au cours des pas de calculs successifs. Les algorithmes implicites sont inconditionnellement stables, c'est-à-dire, stables quel que soit le pas de temps. Les algorithmes explicites sont conditionnellement stables (CLOUGH & PENZIEN [21] (1993)) ;

– le coût de calcul, les méthodes implicites sont en général peu performantes du fait qu'elles impliquent à chaque pas de temps la résolution d'un système d'équations. Les méthodes explicites, malgré leur stabilité numérique limitée, sont souvent plus avantageuses de ce point de vue, car elles engendrent des calculs vectoriels simples à condition d'être associées à une approximation diagonale de la masse.

En conclusion, on retiendra que :

- pour les problèmes de dynamique lente (fréquence < 30 Hz comme ordre de grandeur), on utilise en général des méthodes implicites avec un pas de temps relativement grand qui amortira les hautes fréquences ;
- pour les problèmes de dynamique rapide (explosion, choc, ... > 50 Hz), on utilise plutôt des méthodes explicites avec un pas de temps relativement petit pour intégrer correctement le comportement des modes hautes fréquences.

Différents schémas d'intégration numérique ont été proposés pour résoudre l'équation différentielle (1.27) pas-à-pas dans le temps. Le plus connu est l'algorithme de NEWMARK [21]. Il est basé sur le développement de TAYLOR au deuxième ordre des inconnues \dot{u} et u :

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + \Delta t [(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_t + \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}] \quad (1.33)$$

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{u}}_t + 2\beta \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}] \quad (1.34)$$

L'accélération à l'incrément $t + \Delta t$ peut être évaluée à partir de la relation (1.34)

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t - \left(\frac{1-2\beta}{2\beta} \right) \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (1.35)$$

Les paramètres β et γ sont à choisir de façon à optimiser la solution donnée par l'intégration numérique. En retenant $\beta = \frac{1}{6}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$ on impose l'hypothèse usuelle d'une variation linéaire de l'accélération pendant l'intervalle du temps Δt . Les équations (1.33) et

(1.34) peuvent être réécrites en prenant comme variables les variations $\Delta \dot{\mathbf{u}}$ et $\Delta \ddot{\mathbf{u}}$ de la vitesse et de l'accélération au cours du pas de temps :

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}} = \frac{6}{\Delta t^2} \Delta \mathbf{u} - \frac{6}{\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t - 3 \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (1.36)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{u}} = \frac{3}{\Delta t} \Delta \mathbf{u} - 3 \dot{\mathbf{u}}_t - \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_t \quad (1.37)$$

En substituant les équations (1.36) et (1.37) dans l'équation incrémentale du mouvement (1.27), il vient :

$$\tilde{\mathbf{K}}(t) \Delta \mathbf{u} = \Delta \tilde{\mathbf{F}} \quad (1.38)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}(t) = \mathbf{K}^*(t) + \frac{6}{\Delta t^2} \mathbf{M} \quad (1.39)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{F}} = -\mathbf{M} \mathbf{I} \ddot{\mathbf{u}}_s + \mathbf{M} \left[\frac{6}{\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t - 3 \ddot{\mathbf{u}}_t \right] \quad (1.40)$$

où,

– $\tilde{\mathbf{K}}(t)$ est appelée matrice de rigidité effective. C'est une combinaison de \mathbf{K}^* et de \mathbf{M} .

– $\Delta \tilde{\mathbf{F}}$ est appelé vecteur force effectif. C'est la somme du vecteur $\mathbf{F}(t) = -\mathbf{M} \mathbf{I} \ddot{\mathbf{u}}_s(t)$ et d'une combinaison de \mathbf{K}^* et de \mathbf{M} .

Le système matriciel (1.38) peut être résolu par toute méthode numérique adéquate (élimination de Gauss par exemple). Les conditions initiales pour le pas de temps suivant sont ainsi déterminées. Pour éviter l'accumulation d'erreurs, $\Delta \ddot{\mathbf{u}}$ n'est pas calculé à partir de l'équation (1.36) mais évalué directement à partir de l'équation du mouvement (1.27) :

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{I} \ddot{\mathbf{u}}_s(t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}^* \Delta \mathbf{u} \quad (1.41)$$

Les équations d'équilibre sont ainsi satisfaites exactement à chaque incrément de temps. Les équations (1.39) et (1.40) permettent de recalculer $\tilde{\mathbf{K}}(t)$ et $\Delta \tilde{\mathbf{F}}$ pour l'incrément suivant. La stabilité du processus d'intégration impose que le pas du temps Δt soit inférieur à environ la moitié de la plus petite période de vibration du système ($\Delta t < 0.55T$) PECKER [100] (1984)).

Cet algorithme est couramment utilisé, ainsi que celui de WILSON [21] dans la solution des problèmes dynamiques linéaires et non linéaires.

Ce type de calcul est très long pour les raisons suivantes :

- le signal excitation sismique étant très variable, sa discrétisation impose un pas de temps petit. Or le pas de temps de calcul doit être au plus égal à ce dernier ;
- on est souvent amené à utiliser des algorithmes implicites qui nécessitent des itérations internes à chaque pas, ce qui augmente considérablement le temps de calcul ;
- si le calcul doit être fait pour plusieurs signaux, l'analyse risque de devenir d'un coût prohibitif.

1.4. Conclusion

La méthode de superposition modale, basée sur la supposition que toute position déformée d'une structure est une combinaison linéaire des modes de vibration, présente certes un grand avantage puisqu'elle est facile à résoudre mais présente aussi des inconvénients dont la recherche d'un nombre important de modes propres de vibration et sa limitation aux systèmes linéaires élastiques.

La superposition modale empirique à partir des spectres inélastiques ne repose sur aucune base sérieuse et ne permet pas de tenir compte des champs des contraintes résiduelles développées dans la structure ainsi que des déformations plastiques.

Les méthodes d'intégration dans le domaine fréquence sont particulièrement bien adaptées et compétitives du point de vue numérique, mais elles ne sont applicables qu'aux systèmes linéaires.

Il apparaît donc que dans le domaine inélastique le dimensionnement réaliste est très difficile et qu'il faut souvent avoir recours à des calculs pas-à-pas coûteux pour obtenir des résultats fiables. Si le trajet de chargement d'une structure n'est pas exactement connu, on sait généralement qu'il varie entre certaines bornes. Cette observation est à l'origine du développement du concept de l'adaptation plastique.

CHAPITRE 2

BASES DE LA THEORIE D'ADAPTATION

BASES DE LA THEORIE D'ADAPTATION

2.1. INTRODUCTION

Nous rappelons les fondements de la théorie d'adaptation dite statique, abondamment citée dans la littérature par le théorème de Melan (MELAN [85] (1936), [86] (1938)). Ce théorème utilise la propriété de convexité du domaine élastique et introduit la fonction d'énergie totale résiduelle de déformations élastiques. Il est basé sur les hypothèses suivantes :

- transformations infiniment petites ;
- évolution quasi-statique ;
- comportement élastoplastique parfait ou avec écrouissage cinématique linéaire ;
- loi d'écoulement associée.

2.2. HYPOTHESES DE BASE

Considérant un corps élastique parfaitement plastique de volume V et de surface $S = S_u \cup S_T$, $S_u \cap S_T = \emptyset$, rattaché à un système de coordonnées rectangulaires x_i ($i = 1, 2, 3$) et soumis à :

- des forces de volume : F_i dans V ;
- des tractions de surface : T_i sur S_T ;
- des déplacements imposés : U_i sur S_u ;

ces charges varient arbitrairement et indépendamment l'une de l'autre entre des limites connues.

La condition d'équilibre d'une distribution de contraintes σ_{ij} avec les forces de volume F_i et des tractions de surface T_i sur S_T est exprimée par le principe des travaux virtuels :

$$\int_V F_i \dot{u}_i dV + \int_{S_T} T_i \dot{u}_i dS = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad (2.1)$$

On suppose qu'une décomposition additive des déformations totales ε_{ij} , en déformations élastiques ε_{ij}^e et déformations plastiques ε_{ij}^p est justifiée.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (2.2)$$

La déformation élastique ε_{ij}^e est liée linéairement à la contrainte σ_{ij} par la loi de Hooke :

$$\varepsilon_{ij}^e = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \quad (2.3)$$

Pour un matériau élastique isotrope le tenseur d'élasticité \mathbf{E} s'exprime par :

$$E_{ijkl}^{-1} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\delta_{ik}\delta_{jl} - \nu\delta_{ij}\delta_{kl}] \quad (2.4)$$

avec la propriété de symétrie $E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{klij}$

où E est le module de Young, ν le coefficient de Poisson et δ le symbole de Kronecker.

Tandis que la déformation plastique est exprimée par la loi de normalité :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.5)$$

avec

$$\dot{\lambda} = 0 \text{ si } \mathcal{F} < 0 \text{ ou si } \mathcal{F} = 0 \text{ et } \dot{\mathcal{F}} < 0$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \text{ si } \mathcal{F} = \dot{\mathcal{F}} = 0$$

où $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique donné par la condition de consistance ; $\mathcal{F}(\sigma_{ij}) = 0$ est le critère de plasticité représenté par une surface convexe dans l'espace des contraintes et le point (\cdot) exprime la dérivée temporelle des quantités considérées.

On suppose que le matériau obéit au principe de HILL [49] (1950), qui stipule que :

(a) si $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ est une vitesse de déformation plastique non nulle, se produisant pour un état de contrainte σ_{ij} quelconque et $\sigma_{ij}^{(s)}$ un état de contrainte de sécurité, alors le corps satisfait la relation de convexité suivante (Fig. 2.1) :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p > 0 \quad (2.6a)$$

Pour tout $\sigma_{ij}^{(s)}$ appartenant au domaine défini par l'inégalité $F(\sigma_{ij}^{(s)}) < 0$;

(b) par contre, pour un état de contraintes admissibles $\sigma_{ij}^{(a)}$ défini par $F(\sigma_{ij}^{(a)}) \leq 0$, on a :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(a)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (2.6b)$$

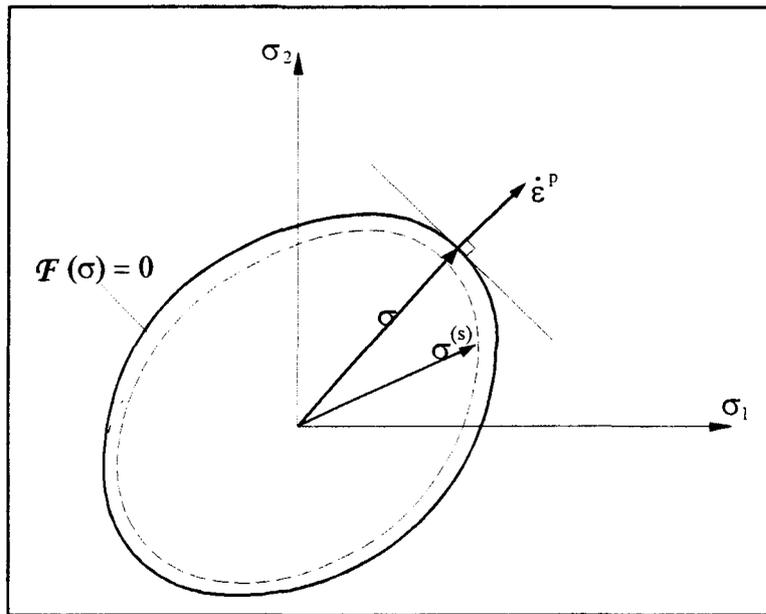


Fig. 2.1 – Convexité de la surface d'écoulement et loi de normalité –

Dans ce qui suit on introduit la notion du problème de référence purement élastique (toutes les quantités relatives à ce problème de référence seront indiquées par l'exposant (\circ)), qui diffère du problème d'origine seulement par le fait que le matériau réagit dans ce cas d'une manière purement élastique avec le même module d'élasticité au même chargement extérieur.

Etant donné que les déformations plastiques n'interviennent pas, les équations suivantes sont alors vérifiées :

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = - F_i \quad \text{dans } V \quad (2.7a)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} n_j = T_i \quad \text{sur } S_T \quad (2.7b)$$

$$\dot{u}_i = U_i \quad \text{sur } S_u \quad (2.7c)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad \text{dans } V \quad (2.7d)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = E_{ijkl}^{-1} \dot{\sigma}_{ij} \quad \text{dans } V \quad (2.7e)$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal unitaire extérieur à la surface S .

Le champ de contrainte résiduelle est défini par :

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^e(t) \quad (2.8a)$$

Comme ρ est la différence entre deux champs de contraintes statiquement admissibles avec les mêmes données en efforts, le champ de contraintes résiduelles est un champ d'auto-contrainte. C'est-à-dire ρ vérifie les conditions d'équilibre homogènes suivantes :

$$\rho_{ij,j} = 0 \quad \text{dans } V \quad (2.8b)$$

$$n_j \rho_{ij} = 0 \quad \text{sur } S_T \quad (2.8c)$$

La déformation élastique résiduelle associée :

$$\varepsilon_{ij}^{er} = E_{ijkl}^{-1} \rho_{kl} \quad \text{dans } V \quad (2.8e)$$

2.3. ENONCE DU THEOREME STATIQUE DE MELAN

Le théorème peut être énoncé comme suit :

1. Une structure élastoplastique **s'adapte** sous des sollicitations variables répétées, c'est-à-dire que son comportement, après un certain nombre de cycles de charges initiales, devient purement élastique s'il existe une distribution de contraintes résiduelles indépendante du temps $\bar{\rho}$ telle que sa superposition avec les contraintes purement élastiques constitue un état de

contraintes sûr (2.6a) et ne viole pas le critère d'écoulement en tout point x de la structure, sous les différentes combinaisons possibles de charges à l'intérieur des limites prescrites :

$$\mathcal{F} [\overset{\circ}{\sigma}_{ij}(x, t) + \bar{\rho}_{ij}(x)] < 0 \quad (2.9)$$

avec
$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} + \bar{\rho}_{ij} = \sigma_{ij}^{(s)}$$

où, $\overset{\circ}{\sigma}$ vérifie le système d'équations (2.7) et $\bar{\rho}$ vérifie les conditions d'équilibre homogènes (2.8b) et (2.8c).

2. Par contre, si on ne peut trouver une distribution de contraintes résiduelles indépendante du temps, constituant avec les contraintes élastiques un état de contraintes admissibles ($\sigma^{(a)}$), sous la combinaison de charges possibles, alors la structure ne **s'adapte** pas.

Pour la démonstration de ce théorème (critère de Melan), on considère l'énergie de déformation élastique fictive W correspondant aux contraintes auto-équilibrées ($\rho - \bar{\rho}$), où ρ est le champ de contraintes résiduelles actuelles à chaque étape du programme de chargement et $\bar{\rho}$ est un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps pour lequel le critère de Melan est satisfait. Soit ε^{er} le champ de déformations élastiques correspondant au champ de contraintes résiduelles ρ par la loi de Hooke.

L'énergie de déformation élastique fictive W de forme quadratique est définie par :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) E_{ijkl}^{-1} (\rho_{kl} - \bar{\rho}_{kl}) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) (\varepsilon_{ij}^{er} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{er}) dV \end{aligned} \quad (2.10)$$

La dérivée de W par rapport au temps donne :

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) E_{ijkl}^{-1} \dot{\rho}_{kl} dV \\ &= \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{er} dV \end{aligned} \quad (2.11)$$

La déformation totale à chaque instant est donnée par :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{er} + \varepsilon_{ij}^p \quad (2.12)$$

où ε_{ij}^e est le champ de déformations élastiques correspondant aux contraintes élastiques σ_{ij}^e , et ε_{ij}^{er} est le champ de déformations élastiques résiduelles associées aux contraintes résiduelles.

En tenant compte de l'équation (2.12) l'équation (2.11) devient :

$$\dot{W} = \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij})(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^e - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) dV \quad (2.13)$$

Le champ de contraintes résiduelles $(\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij})$ est auto-équilibré et la vitesse de déformations $(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^e)$ est cinématiquement admissible, car elle est la différence entre deux vitesses de déformations cinématiquement admissibles. Le principe des travaux virtuels permet alors d'écrire

$$\dot{W} = \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij})(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^e) dV = 0 \quad (2.14)$$

et l'équation (2.13) devient :

$$\dot{W} = - \int_V (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV \quad (2.15)$$

En tenant compte de l'équation (2.8a), les contraintes résiduelles peuvent être exprimées comme :

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^e \quad (2.16a)$$

$$\bar{\rho}_{ij} = \sigma_{ij}^{(s)} - \sigma_{ij}^e \quad (2.16b)$$

où σ_{ij} est l'état de contraintes actuelles et $\sigma_{ij}^{(s)}$ l'état de contraintes de sécurité. On obtient finalement :

$$\dot{W} = - \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV \leq 0 \quad (2.17)$$

La quantité W est une fonctionnelle positive et toujours décroissante en raison de l'inégalité (2.6a). Pour qu'elle ne devienne pas négative, il faut qu'à un moment donné :

$$\dot{W} = - \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p dV = 0 \quad (2.18)$$

La dernière équation est satisfaite si l'une des deux alternatives suivantes a lieu :

- (a) soit $(\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_{ij}^{(s)})$, c'est-à-dire $(\rho_{ij} \rightarrow \bar{\rho}_{ij})$ pour $t > t_\infty$;
- (b) soit $\dot{\epsilon}_{ij}^p \rightarrow 0$ pour $t > t_\infty$.

Le cas où $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}$ est orthogonal à $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ est exclu car $\sigma_{ij}^{(s)}$ est supposé strictement à l'intérieur du domaine élastique convexe (Fig. 2.1). Comme $\mathcal{F}(\sigma_{ij}) \rightarrow \mathcal{F}(\sigma_{ij}^{(s)}) < 0$ implique que $\dot{\epsilon}_{ij}^p \rightarrow 0$, on constate que les deux alternatives (a) et (b) entraînent le comportement élastique de la structure quand $t > t_\infty$, ce qui est appelé adaptation.

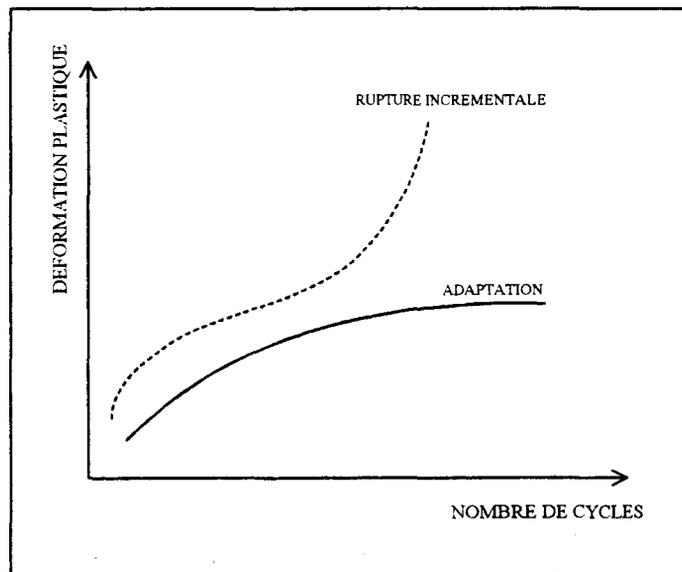


Figure 2.2 – Adaptation et rupture incrémentale –

2.4. COEFFICIENT DE SECURITE A L'ADAPTATION

La valeur de la déformation plastique totale qui peut apparaître avant que la structure atteigne son état d'adaptation, n'a pas été donnée par le critère et la démonstration de Melan. Il a été suggéré par KOITER [56] (1960) que l'évaluation du travail plastique, accompli sur la structure est un critère convenable pour estimer les déformations plastiques totales. Il peut être démontré que l'énergie totale dissipée est bornée en utilisant l'équation (2.6b). Pour cela, on considère un coefficient de sécurité $\alpha > 1$ contre la défaillance de la structure due à l'inadaptation, tel que l'état de contrainte $\alpha\sigma_{ij}^{(s)}$ soit à l'intérieur du domaine élastique et constitue un état admissible, c'est-à-dire que :

$$\mathcal{F}(\alpha\sigma_{ij}^{(s)}) < 0 \quad (2.19)$$

avec $\alpha(\bar{\sigma}_{ij} + \bar{\rho}_{ij}) = \sigma_{ij}^{(a)}$ comme état de contrainte admissible.

Le principe du travail plastique maximal (équation (2.6b)) montre que :

$$(\sigma_{ij} - \alpha\sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (2.20)$$

D'où l'on déduit :

$$\dot{W}_p = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dV \leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_V (\sigma_{ij} - \alpha\sigma_{ij}^{(s)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p dV \quad (2.21)$$

L'intégration par rapport au temps de l'inégalité précédente conduit à l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} W_p &\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} [W(0) - W(\tau)] \\ &\leq \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_V \frac{1}{2} \bar{\rho}_{ij} E_{ijkl}^{-1} \bar{\rho}_{kl} dV \end{aligned} \quad (2.22)$$

Cette inégalité implique que l'énergie totale dissipée est bornée.

2.5. CONCLUSION

Partant du problème d'évolution en élastoplasticité qu'on ne peut espérer résoudre exactement dans tout les cas pratiques d'une part à cause de sa complexité, d'autre part à cause d'une mauvaise connaissance des données de ce problème, la théorie de l'adaptation permet de résumer l'information utile à l'ingénieur au calcul d'un seul paramètre : le coefficient de sécurité à l'adaptation. L'intérêt pratique de cette théorie est indéniable comme le prouvent les ouvrages construits selon la théorie des charges limites.

De plus, la théorie de l'adaptation apporte un certain nombre d'informations qualitatives : le travail dissipé plastiquement dans toute la structure est fini, les déformations plastiques tendent vers une limite, la réponse en contraintes tend, dans le cas quasi-statique, vers une réponse purement élastique.

CHAPITRE 3

COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES GEOMATERIAUX

COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES GEOMATERIAUX

3.1. INTRODUCTION

Le rapide développement du génie civil en milieu marin, les constructions à terre sur des sites terrestres à sismicité dangereuse, ont rendu nécessaire d'acquérir une bonne connaissance du comportement rhéologique des sols soumis à des sollicitations cycliques. L'étude des sols sous de telles sollicitations, qui constitue l'objet du présent chapitre, apparaît comme une étape essentielle du génie parasismique.

3.2. APPROCHE DU COMPORTEMENT DES GEOMATERIAUX

3.2.1. Concept de l'état critique

La théorie de l'état critique développée par ROSCOE & BURLAND [130](1968) et SCHOFIELD & WROTH [134](1968) s'attache à rendre compte du comportement des sols, sables et argiles, dans le domaine des grandes déformations, principalement sous chargement monotone.

Le concept d'état critique repose sur la définition d'un état idéal asymptotique que le matériau doit approcher sous cisaillement monotone. Cet état ultime est caractérisé par quelques propriétés essentielles, que nous rappelons ici brièvement.

A l'état critique :

- l'écoulement plastique du matériau s'effectue à vitesse de déformation volumique totale nulle ($\dot{\epsilon}_v = 0$, le matériau devient incompressible) ;
- l'indice des vides du matériau est lié à la contrainte moyenne supportée par celui-ci, indépendamment de tout autre facteur ($e_{cr} = e_0 - \lambda \ln p$) ;
- la contrainte déviatorique q est proportionnelle à la contrainte moyenne p ($q = \mathcal{M} p$) ;

où, \mathcal{M} , λ et e_0 sont des constantes caractérisant le matériau, $q = \sigma_1 - \sigma_3$, $p = \frac{1}{3} (\sigma_1 + 2\sigma_2)$ le champ de contraintes est de révolution et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, sont les contraintes principales.

3.2.2. Concept de l'état caractéristique

L'état critique traduit un comportement asymptotique du sol dans le domaine des grandes déformations à la rupture où l'écoulement se produit sans variation de volume. Il ne permet donc pas de suivre l'évolution de la déformation irréversible, et s'avère par conséquent, inadéquat à l'étude du comportement des sols sous sollicitations non monotones.

Pour rendre compte du comportement des sols sous chargement cyclique et transitoire, il est nécessaire d'étudier les mécanismes de déformation du matériau tout au long du chargement, et non plus seulement à la rupture, en grandes déformations. En effet, au cours de ces chargements cycliques, les déformations instantanées restent de faible importance : la rupture du matériau peut être le plus souvent caractérisée par une accumulation progressive et continue de petites déformations.

Le chargement des sols sous sollicitations cycliques a fait l'objet de très nombreux travaux, dont on ne citera que les travaux de HABIB & LUONG [42] (1978) sur les sols pulvérulents (les sables).

Lors d'un essai triaxial axisymétrique conventionnel ($\sigma_1 > \sigma_2, \sigma_2 = \sigma_3$) en compression monotone drainée, l'échantillon de sable présente initialement une diminution de volume lorsque le déviateur $\tau = \sigma_1 - \sigma_3$ croît, la vitesse de déformation volumétrique tend vers 0. Dans le cas d'un sable lâche, cet état n'est atteint qu'asymptotiquement. Pour un sable plus dense, la vitesse de déformation s'annule et change de signe : le matériau devient dilatant (figure 3.1). La dilatance résulte du désenchevêtrement des grains, elle est d'autant plus prononcée que le sable est initialement dense et que la pression de confinement est faible. Le comportement est similaire lors d'un chargement triaxial en extension ($\sigma_1 < \sigma_2, \sigma_2 = \sigma_3$), avec initialement une phase contractante suivie d'une phase dilatante.

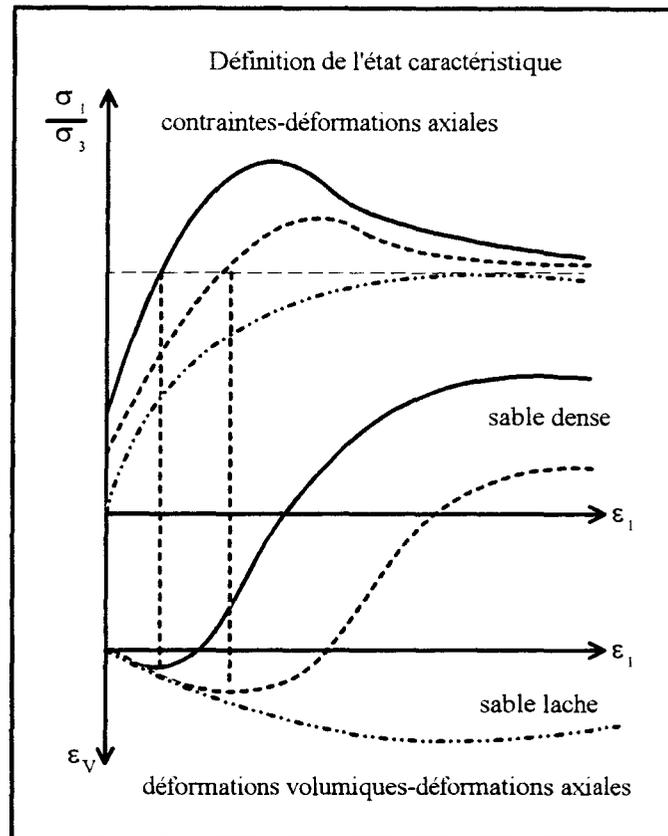


Figure 3.1 – Variation de volume sous chargement monotone –

La valeur de la contrainte où la vitesse de la déformation volumique est nulle lors d'un essai drainé définit un seuil dans le comportement d'un sol granulaire, que LUONG [71] (1978) et HABIB & LUONG [42] (1978) ont dénommé état caractéristique (voir figure 3.1).

Cet état caractéristique est associé à :

- un taux de variation de volume nul $\dot{\epsilon}_v$;
- un seuil de changement de comportement, le processus d'enchevêtrement des grains est remplacé par un processus de désenchevêtrement ;
- une déformation du sol relativement faible ;
- une indépendance vis-à-vis de la porosité initiale.

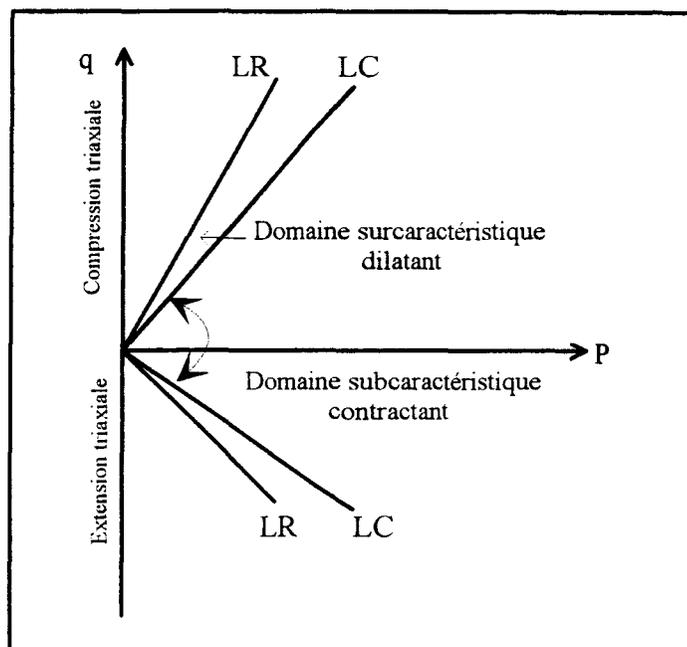


Figure 3.2 - Critère caractéristique -(LUONG)

L'état caractéristique sépare deux types de comportement rhéologique du sable : contractant dans le domaine sub-caractéristique, limité dans le plan (p, q) par deux droites LC, et dilatant dans le domaine sur-caractéristique jusqu'à la limite de rupture définie par les deux droites LR (figure 3.2). Dans le cas des sables lâches, les droites caractéristiques sont confondues avec les droites de rupture. L'état caractéristique se confond avec l'état critique SCHOFIELD & WROTH [134] (1968).

Le concept d'état caractéristique défini précédemment permet également de rendre compte du comportement sous chargement cyclique LUONG [71] (1978) ; HABIB & LUONG [42] (1978) et SIDANER [138] (1981).

3.2.3. Concept de l'état d'adaptation

L'état caractéristique est défini, en général, pour les déformations avant la rupture du matériau, bien qu'il présente un réel avantage par rapport aux approches classiques dont notamment celles qui font appel au concept d'état critique. En revanche, il ne forme pas une

limite entre l'adaptation et la rupture incrémentale. C'est l'état d'adaptation qui présente cet avantage majeur (figure 3.3).

Cet état d'adaptation :

- est associé à une vitesse de déformation plastique volumique et déviatorique nulle ;
- forme un critère de sécurité vis-à-vis de la rupture incrémentale et de la fatigue cyclique.

→ L'état d'adaptation sépare le domaine des contraintes pour le matériau en deux régions parfaitement distinctes (pour plus de détails voir chapitre 4) :

– le domaine d'adaptation (le comportement du sol peut être contractant ou dilatant), où tout chargement cyclique conduit à la stabilisation des déformations plastiques après un grand nombre de cycles ;

– le domaine de non-adaptation où tout chargement cyclique conduit à la rupture du sol par dilataance progressive.

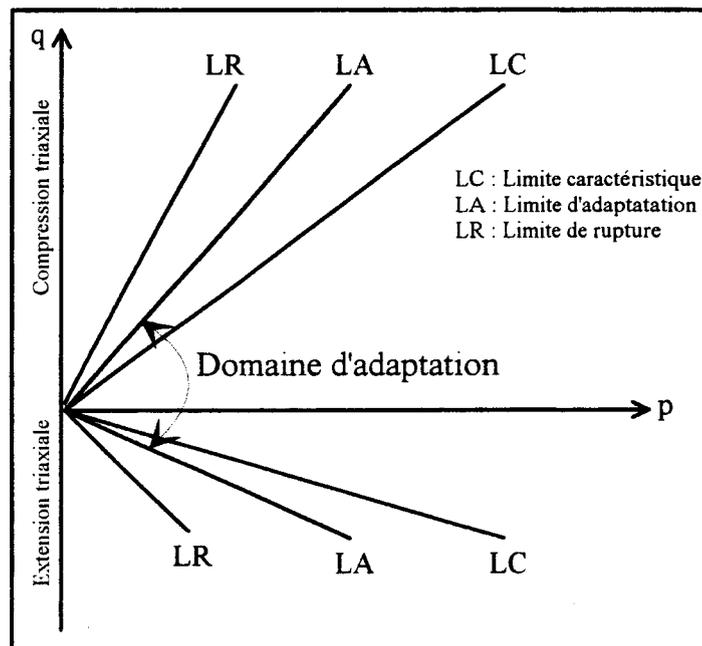


Figure 3.3 – Critère de l'adaptation –

La prédiction de la réponse du sol aux actions dynamiques par la théorie de l'adaptation nécessite la connaissance de son comportement sous l'effet de ces chargements. L'essai triaxial de révolution offre en effet un compromis raisonnable et pratique pour simuler les conditions imposées à un élément de sol, afin d'obtenir des données de laboratoire utilisables dans l'étude du comportement des fondations, remblais et talus sous des chargements dus au séisme et à la houle. Dans ce qui suit nous rappelons brièvement les propriétés fondamentales du sol soumis à des sollicitations cycliques ainsi que les hypothèses de base qui vont nous servir pour l'extension du théorème d'adaptation au cas des sols qui sera exposé dans le quatrième chapitre.

3.3. OBSERVATIONS EXPERIMENTALES ET HYPOTHESES DE BASE

Les résultats expérimentaux observés sur les sables et les argiles [48], [101], [138] et [148] montrent :

- l'existence des déformations réversibles et irréversibles sous sollicitations hydrostatiques et déviatoriques ;
- que ces déformations (réversibles et irréversibles) évoluent de façon non-linéaire en fonction de la sollicitation ;
- que sous contraintes hydrostatiques statiques ou cycliques, seul se manifeste le comportement contractant (figure 3.4) ;
- que sous contraintes déviatoriques, le comportement contractant à faible niveau devient dilatant au-delà d'un certain seuil à déformation volumétrique nulle définissant l'état caractéristique (figure 3.5) ;
- que le sol est un matériau écrouissable ;
- que sous sollicitations cycliques il y a apparition de boucles d'hystérésis. Ces dernières mettent en évidence une dissipation d'énergie.

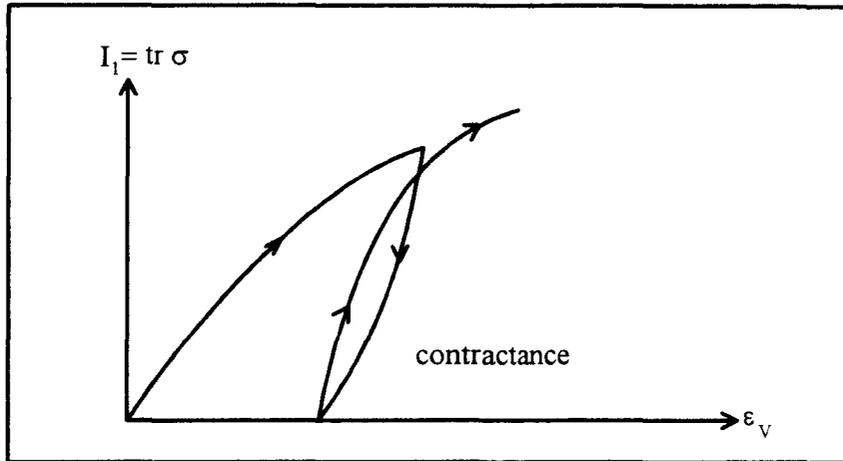


Figure 3.4 - Essai triaxial hydrostatique (matériau granulaire)-

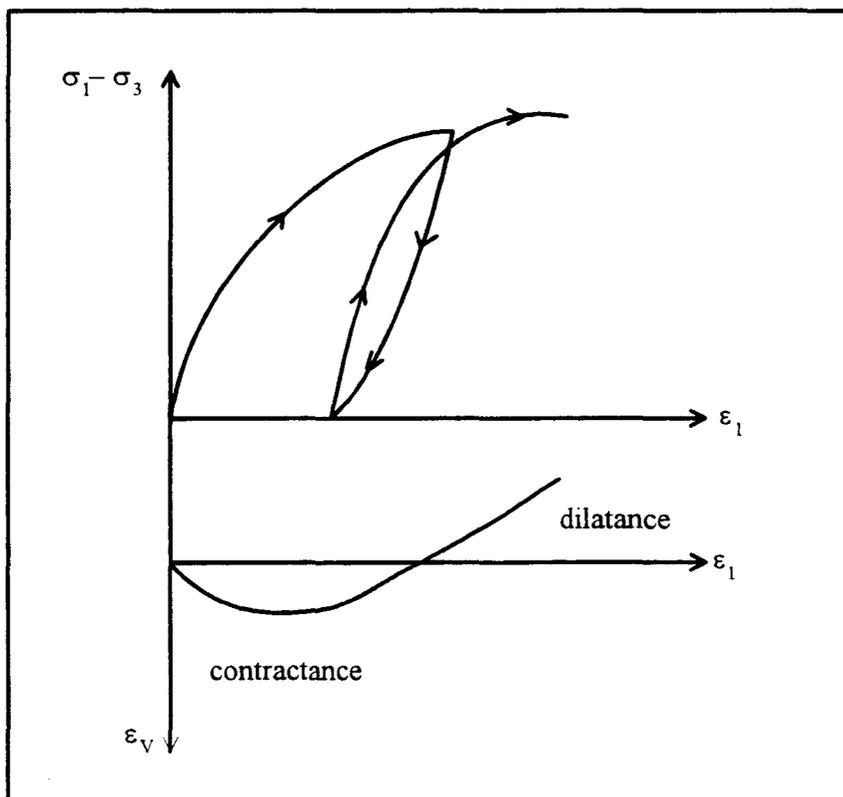


Figure 3.5 - Essai triaxial axisymétrique (matériau granulaire) -

Ces observations expérimentales sont difficiles à décrire, pour cela nous avons choisi une modélisation élastoplastique avec les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la déformation subie par le matériau reste faible, de sorte que l'hypothèse des petites perturbations s'applique ;
- les non-linéarités et l'anisotropie résultent de la plasticité ;
- l'écroissage cinématique est linéaire limité ;
- on se place dans le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés développés par HALPHEN et NGUYEN [45] (1975).

3.4. CONSIDERATIONS THEORIQUES ET MODELISATION

3.4.1. Critère de plasticité

La condition d'écoulement est représentée par une surface limitant un domaine convexe dans l'espace des contraintes, c'est la fonction de charge ou critère de limite d'élasticité. Si le point représentatif de l'état des contraintes σ est situé à l'intérieur du domaine limité par la surface de charge $\mathcal{F}(\sigma) < 0$ les déformations sont élastiques. Lorsque le point atteint la surface, les déformations plastiques apparaissent. Dans le cas d'un matériau écroissable, la fonction de charge dépend non seulement de l'état des contraintes σ mais également de l'histoire antérieure du chargement. On rend compte de cette dépendance à l'aide d'un certain nombre de variables cachées appelées paramètres d'écroissage, qui peuvent être soit des grandeurs scalaires R , soit des grandeurs tensorielles ξ . Le critère s'écrit alors sous la forme générale :

$$\mathcal{F}(\sigma, \xi, R) = 0 \quad (3.1)$$

Dans le cas où les paramètres d'écroissage sont caractérisés par une grandeur scalaire, le domaine d'élasticité se transforme par homothétie du centre O . On dit qu'il y a écroissage isotrope. Dans le cas où ils sont caractérisés par un paramètre tensoriel, les frontières successives du domaine d'élasticité se déduisent de la frontière initiale par translation dans l'espace des contraintes. On dit alors qu'il y a écroissage cinématique.

La règle d'érouissage isotrope utilisée dans les modèles élastoplastiques se révèle inefficace pour décrire le comportement du sol sous chargement cyclique, puisqu'un déchargement-rechargement est toujours élastique tant que le point actuel de contrainte reste à l'intérieur de la surface de charge, ce qui est manifestement contredit par l'expérience. Pour tenir compte de l'effet du déchargement-rechargement dans le comportement du matériau, il est proposé ici d'utiliser la combinaison de l'érouissage isotrope et cinématique. La surface de charge se translate et se dilate uniformément dans toutes les directions. Elle est représentée par une équation ayant la forme suivante (voir PREVOST [119] (1978)) :

$$\mathcal{F} = g(\sigma_{ij} - \xi_{ij}) - [k(R)]^n = 0 \quad (3.2)$$

où $\xi(\varepsilon_{ij}^p)$ désigne sa translation dans l'espace des contraintes et $k(R)$ est une mesure de sa taille actuelle (k et R sont des fonctions croissantes du temps). Pour les sols, g est convenablement choisie comme une fonction homogène de ses arguments, de degré pair, et l'exposant $n \geq 1$ est choisi égal au degré de $(\sigma_{ij} - \xi_{ij})$. Dans notre cas g est d'ordre 2 donc $n = 2$ (voir PREVOST [119] (1978)).

Pour tenir compte de l'érouissage cinématique linéaire limité (figure 3.6), nous avons introduit un critère à deux surfaces de charges \mathcal{F}_L et \mathcal{F}_I (voir WEICHERT & GROSS-WEEGE [145](1988)). La surface de charge $\mathcal{F}_L = 0$ est considérée comme une surface limite ("bounding surface") (DAFALIAS & HERRMANN [28] (1980)). Dans notre cas sa position est fixe, elle est représentée par une fonction convexe de la forme :

$$\mathcal{F}_L(\sigma_{ij}) = g(\sigma_{ij}) - k_L^2 = 0 \quad (3.3)$$

La surface de charge \mathcal{F}_I délimite le domaine élastique dans l'espace des contraintes. Lors de l'écoulement plastique, elle change de taille et de position en étant entraînée par le point représentatif de l'état des contraintes suivant une loi d'érouissage (cinématique linéaire). Une limitation à cette translation est donnée par la surface limite $\mathcal{F}_L = 0$ qui contient la fonction de charge \mathcal{F}_I pour tous les états d'érouissage physiquement admissibles. La surface de charge subit une translation et une expansion. Elle est décrite par l'équation :

$$\mathcal{F}_I(\sigma_{ij}, \xi_{ij}, R) = g(\sigma_{ij} - \xi_{ij}) - k_I^2(R) \quad (3.4)$$

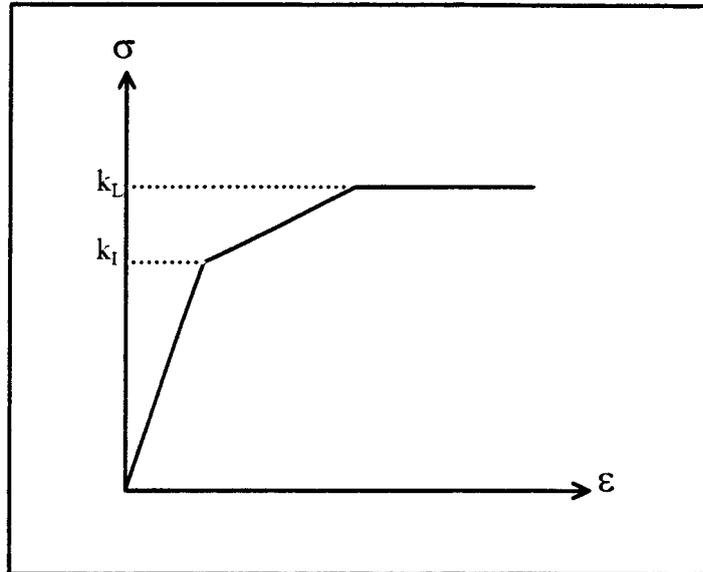


Figure 3.6 – Matériau élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire limité –

3.4.2. Matériaux standards généralisés

Le concept des matériaux standards généralisés (MSG) a été introduit par HALPHEN et NGUYEN [45] (1975). Ce formalisme a été développé dans le cadre thermodynamique des processus irréversibles.

Dans le cas d'une théorie mécanique, dans laquelle on néglige les effets thermiques, la dissipation est définie à partir de l'inégalité de Clausius Duhem :

$$\phi = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{W} \geq 0 \quad (3.5)$$

où W est l'énergie stockée qui dépend des variables d'état (mesurables ε ou cachées ε^p, x_k) :

$$W = W(\varepsilon, x_k) \quad (3.6)$$

En élastoplasticité les déformations n'interviennent que sous la forme de leurs partitions $\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p$, soit :

$$W = W[(\varepsilon - \varepsilon^p), x_k] = W(\varepsilon^e, x_k) \quad (3.7)$$

Les variables internes x_k de nature scalaire ou tensorielles représentent l'état actuel de la matière, c'est-à-dire ici l'état de l'érouissage ; on utilise classiquement une variable scalaire R (variable d'érouissage isotrope) et une variable tensorielle α (érouissage cinématique). Le découplage entre comportement élastique et érouissage impose d'écrire l'énergie libre sous la forme :

$$W = W_e(\varepsilon^e) + W_p(R, \alpha) \quad (3.8)$$

En utilisant l'inégalité de Clausius Duhem avec

$$\dot{W} = \frac{\partial W_e}{\partial \varepsilon^e} \dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial W_p}{\partial R} \dot{R} + \frac{\partial W_p}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \geq 0 \quad (3.9)$$

on obtient :

$$\phi = (\sigma_{ij} - \frac{\partial W_e}{\partial \varepsilon^e}) : \dot{\varepsilon}^e + \sigma \dot{\varepsilon}^p - \frac{\partial W_p}{\partial R} \dot{R} - \frac{\partial W_p}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \geq 0 \quad (3.10)$$

Le premier terme $(\sigma_{ij} - \frac{\partial W_e}{\partial \varepsilon^e})$ doit s'annuler pour tout $\dot{\varepsilon}^e$ la dissipation devient donc :

$$\phi = \sigma \dot{\varepsilon}^p - k \dot{R} - \xi \dot{\alpha} \geq 0 \quad (3.11)$$

où $k = \frac{\partial W_p}{\partial R}$ et $\xi = \frac{\partial W_p}{\partial \alpha}$ sont les forces thermodynamiques associées respectivement à R et α .

Dans le cas de l'élasticité linéaire, le potentiel thermodynamique convexe W_e , est une forme quadratique définie positive des composantes du tenseur des déformations :

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^e E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \quad (3.12)$$

E est un tenseur du 4^e ordre, dont les composantes sont les coefficients d'élasticité. Dans ce qui suit on va associer à l'élasticité une dissipation intrinsèque en introduisant un potentiel thermodynamique sous la forme (ce choix sera justifié dans la section 3.4.3) :

$$\overset{*}{W}_e = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^e \overset{*}{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \quad (3.13)$$

$\overset{*}{E}$ est un tenseur du 4^e ordre, dont les composantes sont complexes :

$$\overset{*}{E} = E_1 + j E_2 \quad (3.14)$$

où E_1 et E_2 sont définies positives.

3.4.3. Modélisation de l'amortissement interne

Dans ce qui suit on considère que le chargement cyclique est unidirectionnel et qu'il est dû à un mouvement sismique.

Il est d'usage dans les calculs de réponse dynamique d'un profil de sol ou dans les problèmes d'interaction sol-structure de considérer que le mouvement sismique a pour origine une onde de cisaillement se propageant verticalement. Dans ces conditions, un élément de sol pris à une certaine profondeur h dans le profil est soumis au cycle de chargement représenté à la figure 3.7.

Initialement, dans le cas d'un profil de sol horizontal, l'élément est en équilibre sous les contraintes verticale effective σ_v et horizontale effective σ_h , égale à $k_0 \sigma_v$ où k_0 est le coefficient de poussée des terres au repos. Le passage de l'onde de cisaillement se traduit par l'application sur les faces horizontales de l'élément de sol, et donc sur les faces verticales pour maintenir les conditions d'équilibre, d'une contrainte de cisaillement $\tau(t)$. Sous l'effet de cette contrainte l'élément de sol subit une déformation de cisaillement simple appelé également distorsion notée γ .

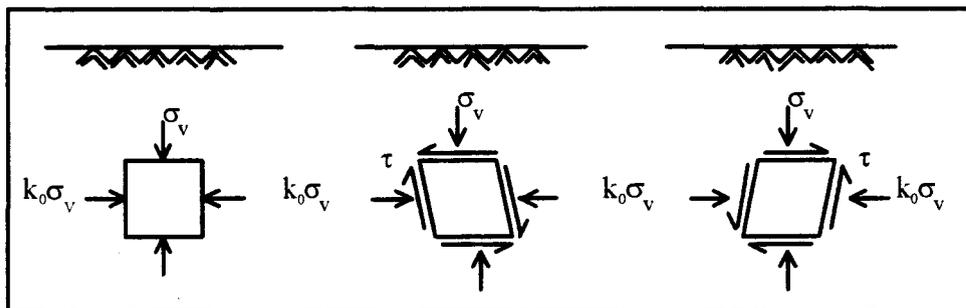


Figure 3.7 – Séquence de chargement idéalisée –

L'enregistrement d'une courbe effort-déformation $\tau = f(\gamma)$ est reproduit à la figure 3.8 pour un cycle de contraintes fermé. Un cycle fermé n'est pas nécessairement centré autour de l'origine mais par simplification on le supposera dans la suite. Les expériences montrent d'ailleurs que les observations faites sur ce cas restrictif sont généralisables à tout cycle de contraintes fermé (PECKER [98] (1984)).

La figure 3.8 montre que, pour un cycle fermé de chargement le comportement du sol est caractérisé par une boucle appelée boucle d'hystérésis, dont la surface et l'inclinaison dépendent de l'amplitude de la déformation au cours du cycle. Plus cette dernière est grande, plus l'aire de la boucle est importante et plus celle-ci est inclinée sur l'horizontale. Cette boucle d'hystérésis met en évidence une dissipation d'énergie dans le matériau. Le terme "amortissement matériel" est utilisé pour décrire le phénomène physique de conversion d'énergie cinétique et d'énergie potentielle (énergie de déformation) en chaleur. L'amortissement est une grandeur fondamentale dans l'étude des phénomènes vibratoires en particulier au voisinage de la résonance. C'est lui qui permet à un système physique mis en vibration à une fréquence égale à sa fréquence de résonance, de maintenir une amplitude de déplacement limitée.

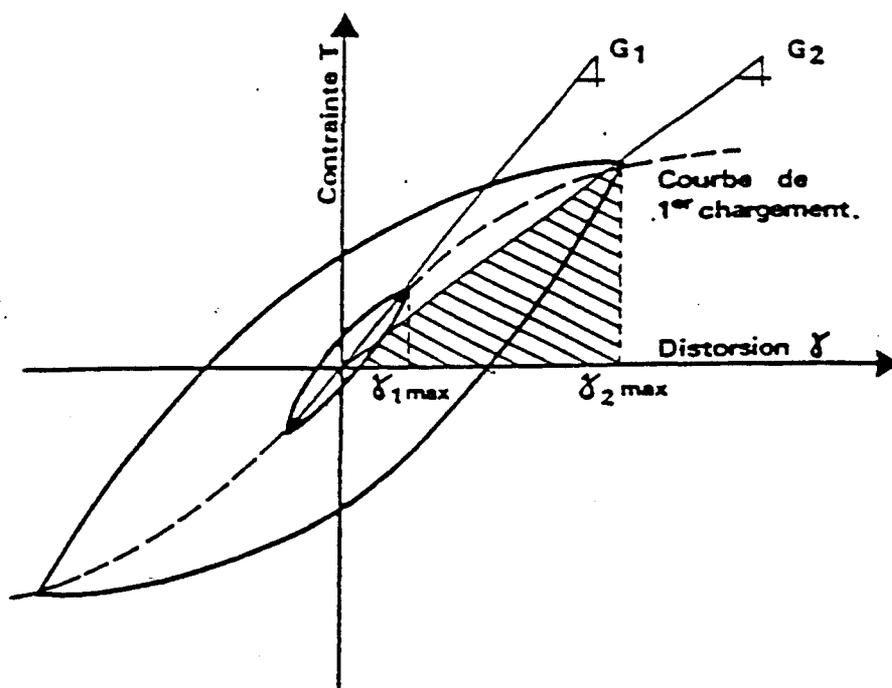


Figure 3.8 - Energie dissipée dans le sol par un amortissement hystérétique -

Parmi les matériaux présentant de l'amortissement, on peut distinguer ceux pour lesquels :

- l'énergie dissipée dépend de la vitesse de déformation. C'est en particulier le cas des matériaux viscoélastiques linéaires par exemple les polymères ;
- l'énergie dissipée ne dépend pas de la vitesse de déformation, l'amortissement est dit "hystérétique" (figure 3.8). Dans ce cas, les matériaux sont caractérisés par des non-linéarités importantes. L'amortissement est attribué à des déformations plastiques au niveau des cristaux ou des grains constituant la structure. Les sols appartiennent à cette catégorie.

Deux grandeurs peuvent être utilisées pour caractériser l'amortissement d'un matériau :

- l'énergie dissipée par cycle dans l'élément ;
- le rapport de cette énergie à une énergie élastique de référence.

Dans la pratique, on préfère exprimer l'amortissement matériel à l'aide d'une grandeur adimensionnelle obtenue en normant l'énergie dissipée par une énergie élastique de référence.

Le coefficient de perte, noté η , est par définition égal au rapport de l'énergie dissipée D au cours d'un cycle à 2π fois l'énergie élastique emmagasinée U :

$$\eta = \frac{D}{2\pi U} \quad (3.15)$$

Le calcul sera mené en cisaillement, mais il pourrait tout aussi bien être fait en compression. L'énergie élastique emmagasinée au cours d'un cycle vaut :

$$U = \frac{1}{2} G \gamma_m^2 = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} \quad (3.16)$$

où γ_m est l'amplitude de déformation maximale. En se reportant à la figure 3.8, U est l'aire du triangle hachuré.

Les matériaux viscoélastiques présentent sous sollicitation harmonique une boucle d'hystérésis de forme elliptique. On rend compte du comportement du matériau en introduisant des modules complexes de la forme (pour plus de détails voir annexe A) :

$$\overset{*}{G} = G_1(\omega) + j G_2(\omega) \quad (3.17)$$

où G_1 et G_2 dépendent de la pulsation de la force excitatrice et j le nombre imaginaire de carré -1 . L'expression ci-dessus écrite pour le module de cisaillement traduit le fait que sous sollicitation harmonique, la contrainte peut être décomposée en une composante en phase avec la déformation ($G_1(\omega)$) et une autre déphasée de 90° ($G_2(\omega)$). Pour cette sollicitation la boucle d'hystérésis formée est elliptique (figure 3.9).

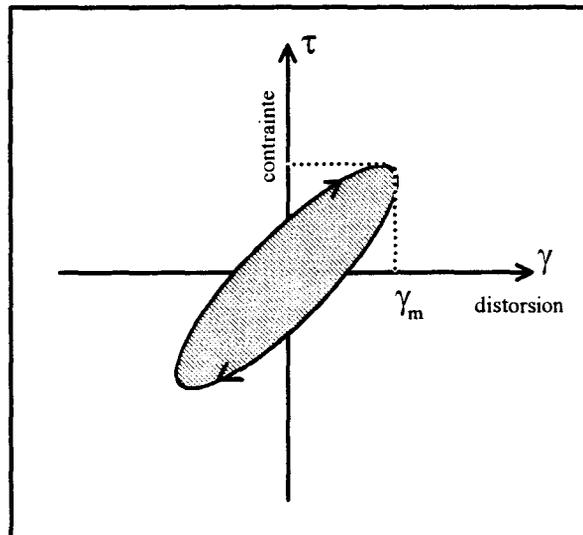


Figure 3.9 – Energie dissipée par un matériau viscoélastique sous sollicitation harmonique –

On peut montrer que pour un cycle d'amplitude maximale γ_m , l'énergie spécifique dissipée vaut (voir annexe A) :

$$D = \pi G_2(\omega) \gamma_m^2 \quad (3.18)$$

Du point de vue rhéologique, un matériau viscoélastique linéaire peut être représenté par un ressort et un amortisseur placés en série (modèle de MAXWELL) ou en parallèle (modèle de KELVIN-VOIGT (figure 3.10)). Dans ce dernier cas, $G_1(\omega) = G$ est la caractéristique du ressort et $G_2(\omega) = C \omega$ où C est la caractéristique de l'amortisseur.

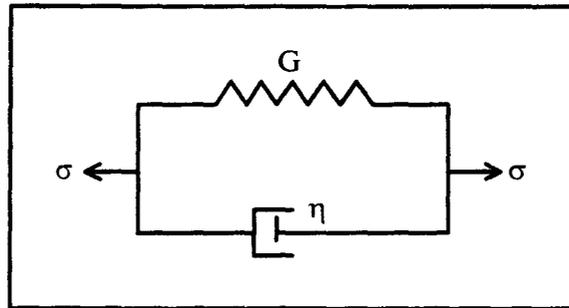


Figure 3.10 - Modèle de KELVIN-VOIGT -

Une façon commode de caractériser l'amortissement d'un tel modèle est d'introduire la notion de pourcentage d'amortissement critique, il mesure l'amortissement réel par rapport à l'amortissement critique et vaut (voir chapitre 1) :

$$\zeta = \frac{C}{C_{cr}} = \frac{C \omega_0}{2 G_1} \quad (3.19)$$

où $\omega_0^2 = \frac{G_1}{M}$ est la pulsation propre du modèle.

D'après l'équation (3.18) et la relation (3.15), en se plaçant à la résonance, c'est-à-dire quand la fréquence d'excitation $(\frac{\omega}{2\pi})$ est égale à la fréquence propre du modèle $(\frac{\omega_0}{2\pi})$, on a la relation :

$$\zeta = \frac{D}{4\pi U} = \frac{\eta}{2} \quad (3.20)$$

Dans le cas du modèle de KELVIN-VOIGT (figure 3.10), le module de cisaillement complexe \hat{G}^* (eq. 3.17) s'écrit :

$$\hat{G}^* = G \left(1 + j \omega \frac{C}{G} \right) \quad (3.21)$$

Des équations (3.15), (3.16) et (3.18) on déduit que :

$$\dot{G}^* = G (1 + j \eta) \quad (3.22)$$

Posant $2\zeta = \eta$, la relation (3.22) prend la forme :

$$\dot{G}^* = G (1 + 2j \zeta) \quad (3.23)$$

En rapprochant l'équation (3.23) de la relation (3.20), on constate qu'il y a égalité entre l'énergie dissipée dans le matériau de raideur G et de coefficient de perte η et celle dissipée à résonance dans l'oscillateur simple de caractéristiques G et $\zeta = \frac{\eta}{2}$. Le coefficient ζ de l'équation (3.23) est le pourcentage d'amortissement critique du sol.

Les résultats développés ci-dessus, dans le cas de sollicitations unidirectionnelles, se généralisent immédiatement au cas de sollicitations harmoniques quelconques (SALENCON [133] (1983)).

La loi de comportement s'écrit sous une forme analogue à la loi de HOOKE généralisée:

$$\varepsilon_{ij} = \dot{E}_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \quad (3.24)$$

où le tenseur \dot{E}_{ijkl}^{-1} est formé à l'aide des modules de cisaillement et volumétrique complexes. La loi de comportement donnée par l'équation (3.24) conduit aux mêmes solutions formelles que la loi d'élasticité linéaire (PECKER [100] (1984)).

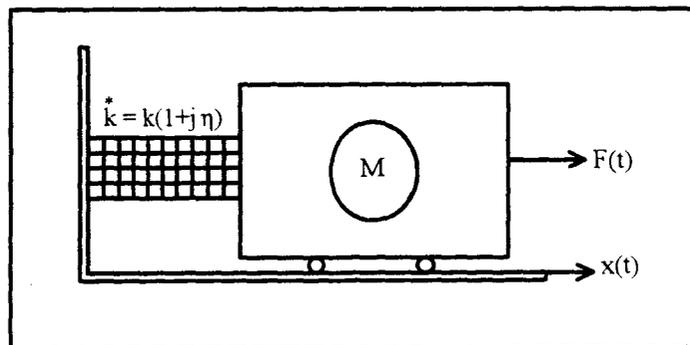


Figure 3.11 - Modèle viscoélastique -

3.5. CONCLUSION

Le concept d'état critique comme le concept d'état caractéristique, vérifient à partir d'approches différentes du comportement d'un matériau pulvérulent une propriété commune. Ces approches font correspondre à un état de contrainte particulier une vitesse de déformation volumique nulle. En revanche, le concept d'état d'adaptation fait correspondre à un état de contrainte particulier une vitesse de déformation plastique nulle.

Bien que le seuil caractéristique soit fondamental pour l'étude du comportement des matériaux pulvérulents sous chargement cyclique, le seuil d'adaptation (en condition drainée) représente la limite stable du comportement du matériau. Le franchissement de ce seuil lors d'un chargement cyclique entraînera la rupture par dilatance progressive.

Les modèles élastiques parfaitement plastiques ou à écrouissage isotrope se révèlent inefficaces pour décrire le comportement des sols sous chargement cyclique, une modélisation réaliste nécessite la prise en compte d'un écrouissage cinématique et isotrope combiné.

La prise en compte de l'amortissement se fait par l'introduction des matrices de rigidité élémentaires complexes \mathbf{K}^* . Ces matrices se forment exactement comme les matrices de valeurs réelles, avec la différence que les modules complexes sont utilisés pour la formation de \mathbf{E}_{ijkl}^* .

L'introduction d'une matrice de rigidité complexe permet de tenir compte de l'amortissement mais pas des non-linéarités matérielles. En effet on a supposé que la dissipation est la somme de deux entités indépendantes. Une est la conséquence des déformations plastiques et de l'écrouissage, et l'autre est la conséquence de l'amortissement. C'est cette dernière qui est reprise dans la matrice de rigidité complexe.

CHAPITRE 4

***EXTENSION DU THEOREME D'ADAPTATION AUX CAS DES
GEOMATERIAUX SOUS SOLLICITATIONS DYNAMIQUES***

EXTENSION DU THEOREME D'ADAPTATION AUX CAS DES GEOMATERIAUX SOUS SOLLICITATIONS DYNAMIQUES

4.1. INTRODUCTION

Dans le présent chapitre, nous proposons une extension du théorème d'adaptation aux cas des géomatériaux sous sollicitations dynamiques avec la prise en compte des phénomènes dissipatifs (l'amortissement) et de l'écouissage cinématique linéaire et isotrope. L'amortissement matériel est en particulier pris en compte en formant les matrices de rigidité à partir des modules complexes ; il est dans ce cas indépendant de la fréquence.

4.2. EQUATION D'EVOLUTION EN DYNAMIQUE

On considère un corps Ω de volume V et de frontière S soumis aux actions extérieures variables dans le temps suivantes :

- forces de volume $F_i(x, t)$;
- forces de surface $T_i(x, t)$ agissant sur la partie S_T de S ;
- déplacements imposés $U_i(x, t)$ sur la partie S_u de S .

Soient respectivement $u_i(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$ et $\epsilon_{ij}(x, t)$ les déplacements, les déformations et les contraintes dans le corps réel qui résultent des forces extérieures et des conditions initiales suivantes :

$$u_i(x, 0) = u_{i0}(x) \quad (4.1 \text{ a})$$

$$\dot{u}_i(x, 0) = \dot{u}_{i0}(x) \quad (4.1 \text{ b})$$

Les déplacements dans le corps réel peuvent être exprimés comme la somme de deux contributions :

$$u_i(x, t) = u_i^e(x, t) + u_i^f(x, t) \quad (4.2)$$

où $u_i^e(x, t)$ est la réponse en déplacement qui résulte des forces de volume (y compris les forces d'inerties), des tractions de surface et des déplacements imposés et $u_i^r(x, t)$ est la réponse en déplacement qui résulte des déformations plastiques. Il vient donc :

$$u_i^e(x, t) = U_i(x, t) \quad \text{sur } S_u \quad (4.3 \text{ a})$$

$$u_i^r(x, t) = 0 \quad \text{sur } S_u \quad (4.3 \text{ b})$$

Sous l'hypothèse des petites déformations, un champ de déformation compatible peut être dérivé de la relation linéaire suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.4)$$

En tenant compte de l'équation (4.2), on peut écrire :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^r \quad (4.5 \text{ a})$$

avec

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2} (u_{i,j}^e + u_{j,i}^e) \quad (4.5 \text{ b})$$

$$\varepsilon_{ij}^r = \frac{1}{2} (u_{i,j}^r + u_{j,i}^r) \quad (4.5 \text{ c})$$

$\varepsilon_{ij}^e(x, t)$ est le champ de déformations élastiques à l'instant t qui résulte des forces de volume (y compris les forces d'inerties), des tractions de surface et des déplacements imposés et $\varepsilon_{ij}^r(x, t)$ est le champ de déformations résiduelles à l'instant t qui résulte des déformations plastiques, défini par :

$$\varepsilon_{ij}^r(x, t) = \varepsilon_{ij}^p(x, t) + \varepsilon_{ij}^{er}(x, t) \quad (4.6)$$

où $\varepsilon_{ij}^p(x, t)$ et $\varepsilon_{ij}^{er}(x, t)$ sont, respectivement, les champs de déformations plastiques et élastiques résiduelles actuelles. Finalement la déformation totale $\varepsilon_{ij}(x, t)$ a pour expression :

$$\varepsilon_{ij}(x, t) = \varepsilon_{ij}^e(x, t) + \varepsilon_{ij}^r(x, t) = \varepsilon_{ij}^e(x, t) + \varepsilon_{ij}^p(x, t) + \varepsilon_{ij}^{er}(x, t) \quad (4.7)$$

La part élastique de la déformation est liée aux contraintes par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij}^e = E_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}^e \quad (4.8 \text{ a})$$

$$\rho_{ij} = E_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}^{er} \quad (4.8 \text{ b})$$

Le champ de contraintes σ_{ij} qui a pour expression,

$$\sigma_{ij}(x, t) = \sigma_{ij}^e(x, t) + \rho_{ij}(x, t) \quad (4.9)$$

doit satisfaire les équations d'équilibre dynamique suivantes :

$$\sigma_{ij,j} + F_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad \text{dans } V \quad (4.10 \text{ a})$$

$$\sigma_{ij} n_j - T_i = 0 \quad \text{sur } S_T \quad (4.10 \text{ b})$$

Comme le champ de contraintes résiduelles est un champ d'auto-contraintes, le système d'équations suivant est vérifié :

$$\sigma_{ij,j}^e + F_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad \text{dans } V \quad (4.11 \text{ a})$$

$$\sigma_{ij}^e n_j - T_i = 0 \quad \text{sur } S_T \quad (4.11 \text{ b})$$

$$\rho_{ij,j} = 0 \quad \text{dans } V \quad (4.11 \text{ c})$$

$$\rho_{ij} n_j = 0 \quad \text{sur } S_T \quad (4.11 \text{ d})$$

4.3. REPONSE DYNAMIQUE FICTIVE

On définit un processus fictif relatif à un corps de référence (toutes les quantités relatives à ce processus seront indiquées par l'exposant (\circ)). Toute réponse, aux mêmes actions extérieures auxquelles est soumis le corps réel avec des conditions initiales arbitraires, considérées comme élastiques et déterminées avec les constantes élastiques du corps réel sera appelée "réponse fictive".

Le champ de déformations $\varepsilon_{ij}^\circ(x, t)$ est cinématiquement admissible, donc :

$$\varepsilon_{ij}^\circ = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad \text{dans } V \quad (4.12 \text{ a})$$

$$\dot{u}_i(x, t) = U_i(x, t) \quad \text{sur } S_u \quad (4.12 \text{ b})$$

Le champ de contraintes $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}(x, t)$ doit satisfaire les équations d'équilibre dynamiques suivantes :

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij,j} + F_i - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad \text{dans } V \quad (4.13 \text{ a})$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} n_j - T_i = 0 \quad \text{sur } S_T \quad (4.13 \text{ b})$$

Une distribution de contraintes résiduelles indépendantes du temps doit être additionnée aux contraintes purement élastiques définies dans le corps de référence. Pour cela on impose un champ de déformations plastiques indépendant du temps $\bar{\varepsilon}_{ij}^p(x)$. Ce dernier n'est pas a priori un champ d'auto-déformation qui vérifie la condition de compatibilité, par contre le champ $\bar{\varepsilon}_{ij}^p(x) + \bar{\varepsilon}_{ij}^{er}(x)$ possède cette propriété.

Soit alors :

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^p + \bar{\varepsilon}_{ij}^{er} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j}^r + \bar{u}_{j,i}^r) \quad (4.14)$$

$$\bar{\rho}_{ij} = E_{ijkl}^* \bar{\varepsilon}_{kl}^{er} \quad (4.15)$$

$\bar{\rho}_{ij}(x)$ est un champ d'auto-contrainte, il doit satisfaire les équations d'équilibre homogènes :

$$\bar{\rho}_{ij,j} = 0 \quad \text{dans } V \quad (4.16 \text{ a})$$

$$\bar{\rho}_{ij} n_j = 0 \quad \text{sur } S_T \quad (4.16 \text{ b})$$

Pour la clarté de la démonstration du théorème de l'adaptation, des différences seront considérées entre quantités correspondantes à la réponse réelle et fictive.

$$\Delta u_i = u_i - (\overset{\circ}{u}_i + \bar{u}_i^r) \quad (4.17 \text{ a})$$

Satisfaisant les conditions aux limites :

$$\Delta u_i = 0 \quad \text{sur } S_u \quad (4.17 \text{ b})$$

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - (\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij}^p + \bar{\varepsilon}_{ij}^{\varepsilon}) = \Delta \varepsilon_{ij}^e + \Delta \varepsilon_{ij}^p + \Delta \varepsilon_{ij}^{\varepsilon} \quad (4.17 \text{ c})$$

avec $\Delta \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^e - \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$ $\Delta \varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p - \bar{\varepsilon}_{ij}^p$ $\Delta \varepsilon_{ij}^{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}^{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{\varepsilon}$

$$\Delta \sigma_{ij} = \sigma_{ij} - (\overset{\circ}{\sigma}_{ij} + \bar{\rho}_{ij}) = \Delta \sigma_{ij}^e + \Delta \rho_{ij} \quad (4.17 \text{ d})$$

avec $\Delta \sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^e - \overset{\circ}{\sigma}_{ij}$ $\Delta \rho_{ij} = \rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}$

$\bar{\varepsilon}_{ij}^p$ et $\bar{\varepsilon}_{ij}^{\varepsilon}$ sont indépendantes du temps donc :

$$\Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (4.18 \text{ a})$$

$$\Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{\varepsilon} \quad (4.18 \text{ b})$$

La quantité $\Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \Delta \dot{\varepsilon}_{ij}^{\varepsilon}$ représente une distribution de déformation compatible, les déplacements correspondants (Δu_i^r) vérifient la condition :

$$\Delta u_i^r = 0 \quad \text{sur } S_u \quad (4.18 \text{ c})$$

Des équations (4.10) et (4.13), on déduit pour $\Delta \sigma_{ij}$ les relations suivantes :

$$\Delta \sigma_{ij,j} - \rho \Delta \ddot{u}_i = 0 \quad \text{dans } V \quad (4.19 \text{ a})$$

$$\Delta \sigma_{ij} n_j = 0 \quad \text{sur } S_T \quad (4.19 \text{ b})$$

4.4. CONDITION SUFFISANTE D'ADAPTATION

Le domaine d'élasticité est défini à partir de :

$$\mathcal{F} = \sqrt{g(\sigma_{ij} - \xi_{ij})} - k(R) \quad (4.20)$$

où ξ_{ij} est le tenseur d'écouissage cinématique lié à la déformation plastique par la relation

$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = A \dot{\xi}_{ij}$, où A est une constante scalaire positive ou plus généralement une matrice définie

positive constante, g est une fonction homogène de degré pair, $k(R)$ est une fonction croissante de R , cette dernière est une variable d'écroissage scalaire fonction croissante du temps ($\dot{R} > 0$).

4.4.1. Enoncé du théorème

S'il existe une réponse fictive $(\overset{\circ}{u}_i, \overset{\circ}{\xi}_{ij}, \overset{\circ}{\sigma}_{ij})$, un champ fixe d'auto-contraintes $\bar{\rho}_{ij}$ et des variables d'écroissages $\bar{\xi}_{ij}(x)$, $\bar{R}(x)$ telles que :

$$\sqrt{g(\overset{\circ}{\sigma}_{ij} + \bar{\rho}_{ij} - \bar{\xi}_{ij})} - \bar{k}(\bar{R}) < 0 \quad \forall x \in V \text{ et } \forall t \in [0, t_{\infty}] \quad (4.21)$$

alors il y a adaptation, pourvu que $k(R)$ soit une fonction croissante de R .

4.4.2. Démonstration

Pour la démonstration du théorème, considérons la fonctionnelle $W(t)$ suivante dont la partie réelle et la partie imaginaire sont des formes quadratiques définies positives :

$$\begin{aligned} W(t) = & \frac{1}{2} \int_V \rho \Delta \dot{u}_i \Delta \dot{u}_i dV + \frac{1}{2} \int_V \Delta \rho_{ij} E_{ijk}^{-1} \Delta \rho_{kl} dV + \frac{1}{2} \int_V \Delta \sigma_{ij}^e E_{ijk}^{-1} \Delta \sigma_{kl}^e dV + \int_V \phi(R, \bar{R}) dV \\ & + \frac{1}{2} \int_V A (\xi_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) (\xi_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) dV + \frac{1}{2} j \eta \int_V \Delta \rho_{ij} E_{ijk}^{-1} \Delta \rho_{kl} dV + \frac{1}{2} j \eta \int_V \Delta \sigma_{ij}^e E_{ijk}^{-1} \Delta \sigma_{kl}^e dV \end{aligned} \quad (4.22)$$

où

$\frac{1}{2} \int_V \rho \Delta \dot{u}_i \Delta \dot{u}_i dV$	représente l'énergie cinétique totale ;
$\frac{1}{2} \int_V \Delta \sigma_{ij}^e E_{ijk}^{-1} \Delta \sigma_{kl}^e dV$	représente l'énergie de déformation élastique ;
$\frac{1}{2} \int_V \Delta \rho_{ij} E_{ijk}^{-1} \Delta \rho_{kl} dV$	représente l'énergie de déformation élastique résiduelle ;
$\frac{1}{2} \int_V A (\xi_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) (\xi_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) dV$	représente l'énergie due à l'écroissage cinématique ;
$\int_V \phi(R, \bar{R}) dV$	représente une fonction scalaire positive qui sera définie plus loin.

La dérivée de $W(t)$ par rapport au temps nous donne :

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) = & \int_V \rho \Delta \ddot{u}_i \Delta \dot{u}_i dV + \int_V \Delta \sigma_{ij}^e \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^e dV + \int_V \Delta \rho_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^{er} dV + \int_V M(R, \bar{R}) \dot{R} dV \\ & + \int_V A(\xi_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) \dot{\xi}_{ij} dV + j \eta \int_V \Delta \sigma_{ij}^e \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^e dV + j \eta \int_V \Delta \rho_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^{er} dV \end{aligned} \quad (4.23)$$

En se référant aux équations (4.19), (4.17a) et (4.17b), le principe des travaux virtuels nous permet d'écrire :

$$\int_V \rho \Delta \ddot{u}_i \Delta \dot{u}_i dV = - \int_V \Delta \sigma_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad (4.24)$$

En considérant les équations (4.17) et (4.18), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_V \Delta \sigma_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} dV &= \int_V \Delta \sigma_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^p dV + \int_V (\Delta \sigma_{ij}^e + \Delta \rho_{ij}) (\Delta \dot{\epsilon}_{ij}^e + \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^{er}) dV \\ &= \int_V \Delta \sigma_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^p dV + \int_V \Delta \sigma_{ij}^e \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^e dV + \int_V \Delta \sigma_{ij}^e \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^{er} dV + \int_V \Delta \rho_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^e dV \\ &+ \int_V \Delta \rho_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^{er} dV \end{aligned} \quad (4.25)$$

En tenant compte de $\int_V \Delta \sigma_{ij}^e \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^{er} dV = \int_V \Delta \rho_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^e dV = 0$ (principe des travaux virtuels),

l'équation (4.25) devient :

$$\int_V \Delta \sigma_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V \Delta \sigma_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^p dV + \int_V \Delta \sigma_{ij}^e \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^e dV + \int_V \Delta \rho_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^{er} dV \quad (4.26)$$

Remplaçons (4.26) dans l'équation (4.24) et en tenant compte de (4.8a) et (4.8b) il vient :

$$\begin{aligned} \int_V \rho \Delta \ddot{u}_i \Delta \dot{u}_i dV = & - \int_V \Delta \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dV - \int_V \Delta \sigma_{ij}^e \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^e dV - \int_V \Delta \rho_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^{er} dV \\ & - j \eta \int_V \Delta \sigma_{ij}^e \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^e dV - j \eta \int_V \Delta \rho_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij}^{er} dV \end{aligned} \quad (4.27)$$

En rapprochant l'équation (4.27) de l'équation (4.23), on obtient :

$$\dot{W}(t) = - \int_V (\sigma_{ij} - (\bar{\sigma}_{ij} + \bar{\rho}_{ij})) \dot{\varepsilon}_{ij}^p dV + \int_V M(R, \bar{R}) \dot{R} dV + \int_V A(\xi_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) \dot{\xi}_{ij} dV \quad (4.28)$$

Soit $P_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$ où g est une fonction homogène convexe d'ordre pair (pour les sols on

pourra la supposer d'ordre 2). De la convexité de g , on déduit :

$$\left[\left(\frac{\sigma_{ij} - \xi_{ij}}{k} \right) - \left(\frac{\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\xi}_{ij}}{\bar{k}} \right) \right] P_{ij} > 0 \quad (4.29)$$

D'autre part l'inégalité (4.29) peut encore s'écrire :

$$(\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) P_{ij} < (\sigma_{ij} - \xi_{ij}) \frac{\bar{k}}{k} P_{ij} \quad (4.30)$$

Laquelle, en tenant compte de l'équation (4.20) et en remplaçant P_{ij} par sa valeur (à droite de l'inégalité), devient :

$$(\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) P_{ij} < 2 k \bar{k} \quad (4.31)$$

Après quelques manipulations algébriques, on déduit :

$$(\sigma_{ij} - \xi_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p - (\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) \lambda P_{ij} + 2 \lambda k \bar{k} - (\sigma_{ij} - \xi_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p > 0 \quad (4.32)$$

ou encore, puisque $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda P_{ij}$ et $g = k^2$:

$$(\sigma_{ij} - \xi_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p - (\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^p + 2 \lambda k (k - \bar{k}) > 0 \quad (4.33)$$

La règle d'évolution de la variable d'écrouissage scalaire R est telle que (voir HALPHEN & NGUYEN [45] (1975)) :

$$\dot{R} = -\lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial k} \quad (4.34)$$

Donc :

$$\dot{R} = 2 \lambda k \quad (4.35)$$

Remplaçons $2 \lambda k$ par \dot{R} dans l'équation (4.33), il vient alors :

$$(\sigma_{ij} - \xi_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^p - (\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^p - (k - \bar{k}) \dot{R} > 0 \quad (4.36)$$

Après une simple transformation de l'inéquation (4.36) et la multiplication de cette dernière par un (-1) , on obtient :

$$-(\sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^p + (\xi_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^p + (k - \bar{k}) \dot{R} < 0 \quad (4.37)$$

Soit

$$M(R, \bar{R}) = (k(R) - \bar{k}(\bar{R})) \text{ et } \phi(R, \bar{R}) = \int_{\bar{R}}^R M(\vartheta, \bar{R}) d\vartheta$$

où $k(R)$ est une fonction croissante de R (par hypothèse), $M(R, \bar{R})$ a le signe de $(R - \bar{R})$ et $\phi(R, \bar{R})$ est positive pour les valeurs de R différentes de \bar{R} . L'intégrale de l'équation (4.37) sur le volume nous donne :

$$-\int_V (\sigma_{ij} - \xi_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^p + \int_V (\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^p + \int_V M(R, \bar{R}) \dot{R} < 0 \quad (4.38)$$

La partie réelle et la partie imaginaire de la fonctionnelle $W(t)$ sont définie positive, sa dérivée par rapport au temps dépend seulement de la déformation plastique :

- $\dot{W}(t) = 0$ a lieu en l'absence des déformations plastiques.
- $\dot{W}(t) < 0$ a lieu si un écoulement plastique se produit.

Comme $W(t)$ ne peut pas devenir négative, ce qui implique que $\forall t > 0 \quad \left| \int_0^t \dot{W}(t) dt \right| \leq W(0)$,

il doit exister un instant t^* tel que : $\int_{t^*}^t \dot{W}(t) dt = 0$. Les déformations plastiques doivent cesser de se développer, et le corps s'adapte.

Le sol est un matériau compressible, les variations de volume résultent de l'application d'un état de contrainte sphérique (isotrope) ou déviatorique. Cette variation de volume peut être positive ou négative suivant l'état de la structure initiale du squelette du sol. Décomposons le tenseur de contraintes en sa partie hydrostatique et déviatorique :

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + P \delta_{ij} \quad (4.39)$$

où S_{ij} est la partie déviatorique du tenseur des contraintes et P sa partie hydrostatique. Les déformations associées sont :

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^{dp} + \frac{1}{3} \varepsilon_v^p \delta_{ij} \quad (4.40)$$

où ε_{ij}^{dp} est la déformation plastique liée à la variation du déviateur des contraintes S_{ij} et ε_v^p la déformation plastique liée à la variation de la partie hydrostatique des contraintes P . La dérivée de $W(t)$ par rapport au temps s'écrit finalement :

$$\dot{W}(t) = - \int_V (S_{ij} - \bar{S}_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^{dp} dV - \frac{1}{3} \int_V (P - \bar{P}) \dot{\varepsilon}_v^p dV + \int_V A (\xi_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) \dot{\xi}_{ij} dV + \int_V M(R, \bar{R}) \dot{R} dV < 0 \quad (4.41)$$

4.5. ADAPTATION SOUS DES CYCLES DE CHARGES HYDROSTATIQUES

Sous des cycles de charges hydrostatiques l'équation (4.41) devient :

$$\dot{W}(t) = - \frac{1}{3} \int_V (P - \bar{P}) \dot{\varepsilon}_v^p dV + \int_V M(R, \bar{R}) \dot{R} dV < 0 \quad (4.42)$$

Les déformations volumiques sont positives (figure 3.4), le comportement du sol est toujours contractant ce qui implique que $\dot{W}(t)$ reste toujours négative. La déformation volumique plastique ε_v^p se stabilise après un certain nombre de cycles et le sol **s'adapte**. Ce résultat théorique est en accord avec les résultats expérimentaux de LUONG [72] (1978) : *"la figure (4.3) montre que la déformation volumétrique ε_v et la partie plastique ε_v^p sous chargement hydrostatique en condition drainée après un cycle, après dix cycles, et enfin après un grand*

nombre de cycles de façon à atteindre la valeur asymptotique de ε_v^p . Le sol présente alors un comportement élastique non linéaire. L'adaptation peut être considérée comme obtenue pour un nombre fini de cycles de chargement isotrope".

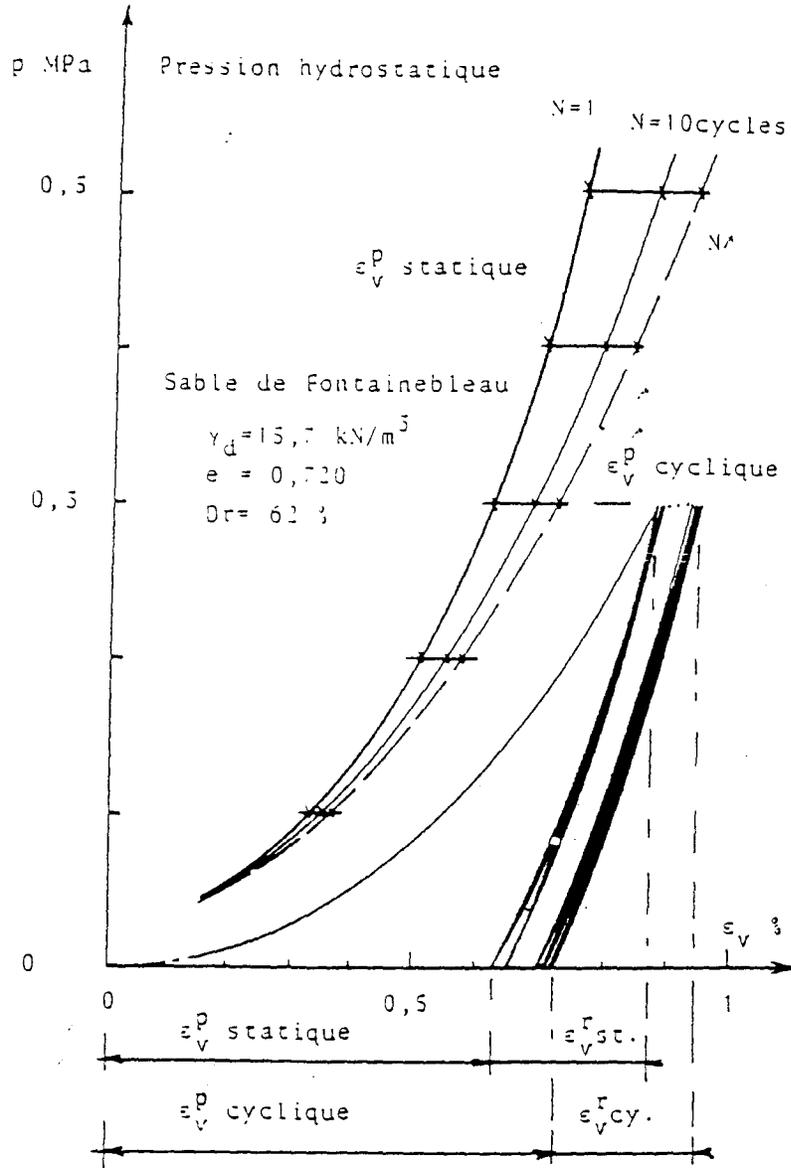


Figure 4.3 – déformations volumiques sous compressions isotropes cycliques (LUONG) –

Sous sollicitation hydrostatique aucun phénomène d'instabilité ou de rupture n'apparaît à l'échelle de l'échantillon. Pour provoquer la rupture du sol il faut donc le soumettre à un état de contraintes non sphériques.

4.6. ADAPTATION SOUS DES CYCLES DE CHARGES DEVIATORIQUES

Dans les matériaux granulaires une variation de volume significative peut se produire pour un chargement purement déviatorique (Fig. 3.5). Cette variation de volume est liée à l'aspect discontinu du matériau et aux conditions cinématiques qui en résultent lors du chargement. Dans ce cas, la dérivée de $W(t)$ par rapport au temps s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) = & - \int_V [(S_{ij} + P\delta_{ij}) - (\bar{S}_{ij} + \bar{P}\delta_{ij})] (\dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^{dp}) dV + \int_V A (\xi_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) \dot{\xi}_{ij} dV \\ & + \int_V M(R, \bar{R}) \dot{R} dV < 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Sous une sollicitation déviatoire, il apparaît des variations de volume, domaine de contractance et domaine de dilataance séparés par une surface d'état caractéristique (figure 3.2.). $\dot{W}(t)$ est toujours négative quelque soit le comportement du sol contractant ou dilatant et on a **adaptation**. Au-delà de l'état de l'adaptation on peut avoir rupture par dilataance progressive.

4.7. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons présenté une extension du théorème d'adaptation aux cas des géomatériaux sous sollicitations dynamiques. L'amortissement est correctement représenté par l'introduction d'une matrice de rigidité complexe, il est introduit dans la loi de comportement et conduit aux mêmes solutions formelles que la loi d'élasticité linéaire.

La prise en compte de l'érouissage en utilisant le concept des matériaux standards généralisés permet de décrire de façon plus réaliste le comportement des sols sous sollicitations cycliques.

Sous sollicitations hydrostatiques cycliques, seul se manifeste le comportement contractant ce qui implique qu'on a toujours adaptation. Sous contraintes déviatoriques, le comportement contractant à faible niveau devient dilatant au-delà d'un certain seuil à

déformation volumétrique nulle définissant l'état caractéristique. Ce dernier bien qu'il présente un réel avantage par rapport aux approches classiques, dont notamment celles qui font appel au concept d'état critique, il ne forme pas en revanche une limite entre l'adaptation et la rupture incrémentale : c'est le concept d'adaptation qui présente cet avantage majeur.

CHAPITRE 5

ETUDE NUMERIQUE

ETUDE NUMERIQUE

5.1. INTRODUCTION

Le problème posé dans l'étude de l'adaptation des structures est le suivant : On suppose que les charges appliquées varient indépendamment l'une de l'autre dans des intervalles connus. Ces intervalles à leur tour varient proportionnellement au coefficient de sécurité α . On cherche la valeur limite α_{SD} qui garantit l'adaptation de la structure et qui permet d'obtenir une majoration du travail de déformation plastique.

La résolution de ce problème demande :

- la solution du problème du corps de référence purement élastique correspondant aux mêmes conditions limites que le problème posé ;
- la construction d'un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps.

La détermination du coefficient de sécurité à l'adaptation utilise la méthode de programmation mathématique qui consiste à maximiser α tout en veillant à ce que le critère d'écoulement ne soit pas violé. Le nombre de contraintes d'optimisation est proportionnel au nombre de points-tests pour lesquels on souhaite évaluer le critère d'écoulement ; la non-linéarité de ces dernières est liée au critère d'écoulement choisi. La résolution choisie de ce problème d'optimisation non-linéaire sous contraintes repose sur la méthode dite de Lagrangien augmenté exposée par PIERRE & LOWE [103] (1975).

5.2. DOMAINE DE CHARGEMENT

On suppose que chaque charge, symboliquement notée P_i , peut varier à l'intérieur d'un intervalle donné.

$$P_1 \in I_1 = [P_1^-, P_1^+] = [\mu_1^-, \mu_1^+] P_1$$

.

.

$$P_n \in I_n = [P_n^-, P_n^+] = [\mu_n^-, \mu_n^+] P_n$$

On note le domaine de toutes les charges extérieures possibles par \mathbb{D} défini par :

$$\mathbb{D} = \left\{ \mathbf{P} / \mathbf{P} = \mu_i \mathbf{P}_i, \quad \mu_i \in [\mu_i^-, \mu_i^+] \right\} \quad (5.1)$$

où les \mathbf{P}_i ($i = 1, \dots, n$) sont les n charges généralisées indépendantes (ex. : les forces de volume, les tractions de surface, les déplacements imposés, variation de température ou la combinaison de ces charges) et les μ_i sont les multiplicateurs de charges avec respectivement μ_i^+ et μ_i^- , les bornes supérieure et inférieure correspondantes.

Le domaine \mathbb{D} a la propriété de convexité c'est-à-dire que pour tous \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 appartenant à \mathbb{D} , toutes les valeurs de \mathbf{P} définies par

$$\mathbf{P} = \theta \mathbf{P}_1 + (1 - \theta) \mathbf{P}_2, \quad \theta \in [0, 1] \quad (5.2)$$

appartiennent aussi à \mathbb{D} . L'enveloppe convexe du domaine \mathbb{D} est définie par

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathbf{P} = \sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{P}_i, \quad \mu_i = \mu_i^- \text{ ou } \mu_i^+ \right\} \quad (5.3)$$

Chaque élément \mathbf{P} de \mathcal{D} peut s'écrire comme :

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^m \theta_i \mathbf{P}_i \quad (5.4)$$

où

$$\sum_{i=1}^m \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0 \quad \forall i \quad (5.5)$$

avec $m = 2^n$ et les \mathbf{P}_i , les points de \mathcal{D} , sont les points anguleux de \mathbb{D} . Le cas bidimensionnel est montré sur la figure 5.1.

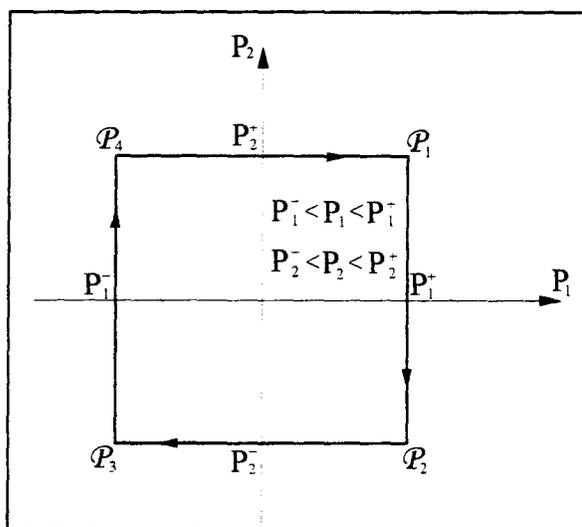


Fig. 5.1 – Domaine de variation des charges –

On peut se poser la question de savoir si le comportement d'une structure soumise, par exemple, à des cycles de charges sera le même que celui de la même structure soumise à des charges variant de manière quelconque entre les mêmes limites. La réponse est donnée par le théorème suivant (voir MORELLE & NGUYEN [87] (1983)) :

"L'adaptation peut avoir lieu dans le domaine de chargement \mathcal{D} si et seulement si on a adaptation dans son enveloppe convexe \mathcal{S} . Sa conséquence est que, pour un domaine de variation de charges donné, s'il y a adaptation pour les points anguleux du domaine \mathcal{P}_i , alors il y a adaptation pour tous les points du domaine".

5.3. FACTEUR DE CHARGES A L'ADAPTATION

Pour déterminer le facteur de charges à l'adaptation (α_{SD}), on doit tenir compte de deux critères d'effondrement :

- le critère d'effondrement par déformations plastiques progressives ;
- le critère d'effondrement par déformations plastiques alternées.

Pour chaque critère, on détermine le facteur de charges correspondant, respectivement (α_{PP}) et (α_{AP}) , qui définit ainsi le domaine d'évolution des charges pour lequel on vérifie qu'une quelconque histoire de charges ne peut conduire à la déstabilisation du processus d'adaptation, et le facteur de charges à l'adaptation résulte de la plus petite valeur des deux facteurs, c'est-à-dire l'intersection entre les deux domaines de charges. Dans ce qui suit, on ne considère que le cas de la plasticité accumulée.

Le problème de la recherche du multiplicateur limite α_{SD} correspondant à l'état limite d'adaptation plastique, peut être mis sous la forme suivante :

$$\text{Maximiser } \alpha \quad (5.6)$$

sous les contraintes :

$$\bar{\rho}_{ij,j} = 0 \quad \text{dans } V \quad (5.7a)$$

$$n_j \bar{\rho}_{ij} = 0 \quad \text{sur } S_T \quad (5.7b)$$

$$\mathcal{F}_I(\alpha \overset{\circ}{\sigma}_{ij}(\mathcal{P}) + \bar{\rho}_{ij} - \bar{\xi}_{ij}) < 0 \quad (5.8a)$$

$$\mathcal{F}_L(\alpha \overset{\circ}{\sigma}_{ij}(\mathcal{P}) + \bar{\rho}_{ij}) < 0 \quad (5.8b)$$

C'est un problème de programmation mathématique, avec α comme fonction objective à optimiser et les deux critères d'écoulement comme conditions subsidiaires non-linéaires (voir WEICHERT & GROSS-WEEGE [145] (1988)). Les deux surfaces distinctes \mathcal{F}_I et \mathcal{F}_L , sont respectivement la surface d'écoulement et la surface de charge. La surface \mathcal{F}_I se translate et change de forme, la limitation de son mouvement est donnée par la surface de charges \mathcal{F}_L contenant \mathcal{F}_I pour tous les états physiques possibles d'écrouissage. Les deux fonctions choisies \mathcal{F}_I et \mathcal{F}_L sont convexes de type DRUCKER- PRAGER.

La satisfaction de la condition (5.8b) assure que l'état de sécurité n'est jamais externe à la surface de charge \mathcal{F}_L et garantit implicitement la limite de l'écrouissage. La condition (5.8a) contrôle l'exigence de l'adaptation.

5.4. FORMULATION ELEMENTS FINIS

5.4.1. Calcul de la réponse purement élastique

Pour résoudre le problème du corps de référence purement élastique, on utilise les éléments finis cinématiquement admissibles en dynamique. L'analyse d'une structure soumise à un chargement dynamique consiste à déterminer les déplacements, les déformations et les contraintes. Les expressions de ces fonctions sont obtenues à partir des équations du mouvement qui ne peuvent être établies qu'à partir du moment où les forces d'inertie sont déterminées, connues ou estimées. C'est la différence avec la statique.

En élastostatique, les théorèmes de l'énergie (principe des travaux virtuels ou théorème de l'énergie potentielle totale dans le cas d'une approche de type déplacement) constituent une caractérisation énergétique de l'état d'équilibre.

En dynamique il existe également une approche énergétique ou variationnelle pour l'étude du mouvement, c'est le principe de Hamilton qui en constitue le fondement.

5.4.1.1. Principe de Hamilton

Le mouvement d'un système élastique conservatif entre deux instants t_1 et t_2 s'effectue

de telle sorte que la fonctionnelle $\int_{t_2}^{t_1} (T-V) dt$ soit stationnaire, c'est à dire :

$$\delta \left[\int_{t_2}^{t_1} (T-V) dt \right] = 0 \quad \forall \delta u_i \neq 0 \quad (5.9)$$

On a respectivement pour l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle totale V :

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \quad (5.10)$$

$$V = U - W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \int_{S_T} T_i u_i dS - \int_V F_i u_i dV \quad (5.11)$$

L'énergie potentielle totale V est la somme de l'énergie de déformation U et du potentiel des forces conservatives de surface et de volume. Dans le cas où les seules forces de volume qui existent sont les forces d'inertie, la dernière intégrale est supposée nulle.

On peut démontrer que (IMBERT [51] (1979)), pour un accroissement virtuel δu_i des déplacements satisfaisant les conditions aux limites (C L) cinématiques ($u_i = U_i$ sur S_u) et les conditions initiales (C I) :

$$\begin{aligned} \text{C.L : } \delta u_i(t) &= 0 && \text{sur } S_u \\ \text{C.I : } \delta u_i(t) &= 0 && \text{pour } t = t_1 \text{ et } t = t_2 \end{aligned}$$

les conditions d'extremum du Lagrangien :

$$\delta \left[\int_{t_2}^{t_1} \mathcal{L} dt \right] = 0 \quad \forall \delta u_i \neq 0 \quad (5.12)$$

où $\mathcal{L} = T - V$ sont, d'une part, les équations du mouvement et, d'autre part, les conditions aux limites sur les contraintes.

$$\sigma_{ij,j} + \rho \ddot{u}_i = F_i \quad \text{dans } V \quad (5.13)$$

$$\sigma_{ij} n_j - T_i = 0 \quad \text{sur } S_T \quad (5.14)$$

Ainsi, les équations du mouvement sont les équations d'Euler du problème variationnel :

$$\delta \left[\int_{t_2}^{t_1} \mathcal{L} dt \right] = 0 \quad (5.15)$$

5.4.1.2. Equation de Lagrange

En pratique, on cherche à obtenir des solutions approchées du problème continu en le réduisant à un problème discret à un nombre fini de degrés de liberté. Si la méthode de discrétisation choisie est une méthode d'éléments finis de type déplacement, on va chercher

une approximation de la solution en termes d'interpolation des déplacements aux noeuds q_i . En séparant les variables d'espace et du temps, on écrit pour chaque composante de déplacement :

$$u_j(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) q_i(t) \quad (5.16)$$

avec

$q_i(t)$: déplacements aux noeuds, fonctions inconnues du temps.

$N_i(x, y, z)$: fonction base de l'approximation définie dans le domaine V .

On a de même pour les composantes de vitesse :

$$\dot{u}_j(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \dot{q}_i(t) \quad (5.17)$$

On peut ainsi exprimer le Lagrangien $\mathcal{L} = T - V$ à l'aide des déplacements aux noeuds et leurs dérivées :

$$\mathcal{L} = T[\dot{u}_j] - V[u_j] \quad (5.18)$$

$$\mathcal{L} = T[\dot{q}_i] - V[q_i] \quad (5.19)$$

Le principe de Hamilton s'énonce alors :

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} \mathcal{L}[q_i, \dot{q}_i, t] dt = 0 \quad \forall \delta q_i \neq 0 \quad (5.20)$$

Il s'agit d'un problème variationnel à n fonctions arguments $\{q_i, i = 1, n\}$ de la variable temps.

On rappelle que les conditions d'extremum de cette fonctionnelle sont les équations d'Euler suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) = 0 \quad i = 1, n \quad (5.21)$$

ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) = 0 \quad i = 1, n \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = F_i(t) \quad i = 1, n \quad (5.23)$$

avec F_i force correspondant au déplacement nodal q_i , et définie par le travail virtuel des forces extérieures :

$$\delta W = F_i \delta q_i \quad (5.24)$$

Ces équations sont appelées équations de Lagrange ou encore équations d'Euler-Lagrange. Elles sont les équations du système discret défini par une approximation du système continu avec n déplacements aux noeuds.

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir les équations du mouvement du système à partir des expressions des énergies cinétique et potentielle. Dans le cas des petits mouvements des systèmes élastiques, les énergies cinétique et de déformation s'expriment respectivement comme formes quadratiques des vitesses et des déplacements aux noeuds, soient :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.25)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (5.26)$$

Les équations de Lagrange deviennent alors :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}(t) \quad (5.27)$$

5.4.1.3. Principe de la méthode des éléments finis en dynamique

On va exposer ici la méthode la plus utilisée en dynamique, basée sur une discrétisation spatiale par éléments finis de type déplacement. Elle permet l'étude du comportement dynamique d'une structure par la connaissance des déplacements aux noeuds en fonction du temps. Comme en statique, nous allons considérer successivement :

- la discrétisation spatiale du domaine en éléments finis ;
- la formulation au niveau de l'élément ;
- la formulation globale après assemblage.

5.4.1.3.1. Discrétisation spatiale

La phase de discrétisation consiste à découper la structure (domaine V) en éléments finis (sous domaines V^e) de forme géométrique simple. Dans chaque élément, on définit une approximation des déplacements en fonction des coordonnées d'espace et de temps, soit :

$$[\mathbf{u}(x, y, z, t)]^e = [\mathbf{N}(x, y, z)]^e [\mathbf{q}(t)]^e \quad (5.28)$$

avec

$[\mathbf{u}(x, y, z)]^e$: vecteur des déplacements en un point $M(x, y, z)$ de l'élément e .

$[\mathbf{N}(x, y, z)]^e$: matrice d'interpolation pour l'élément e .

$[\mathbf{q}(t)]^e$: vecteur des déplacements aux noeuds de l'élément e .

5.4.1.3.2. Formulation élémentaire

La formulation au niveau de l'élément consiste à exprimer les énergies cinétique et potentielle en fonction, respectivement, des vitesses et des déplacements aux noeuds. On rappelle l'expression de l'énergie potentielle totale en fonction des déplacements aux noeuds de l'élément, soit :

$$V^e = U^e - W^e = \mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{q}^{eT} \mathbf{F}^e \quad (5.29)$$

avec :

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (5.30)$$

$$\mathbf{F}^e = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{F} dV + \int_{S^e} \mathbf{N}^T \mathbf{T} dS \quad (5.31)$$

On rappelle que l'on a :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{q}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}$$

où \mathbf{L} est un opérateur linéaire matriciel, \mathbf{B} est la matrice d'interpolation des déformations, \mathbf{E} le tenseur d'élasticité, \mathbf{F} et \mathbf{T} sont respectivement les vecteurs des forces de volume et de surface.

En ce qui concerne l'énergie cinétique de l'élément, on a :

$$T^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} \rho \dot{\mathbf{u}}^{eT} \dot{\mathbf{u}}^e dV \quad (5.32)$$

Mais par ailleurs, on a :

$$\dot{\mathbf{u}}^e = \mathbf{A}^e \dot{\mathbf{q}}^e$$

D'où :

$$T^e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{eT} \mathbf{M}^e \dot{\mathbf{q}}^e \quad (5.33)$$

avec

$$\mathbf{M}^e = \int_{V^e} \rho \mathbf{N}^{eT} \mathbf{N}^e dV \quad (5.34)$$

matrice des masses cohérentes de l'élément e .

5.4.1.3.3. Formulation globale

La formulation globale du problème consiste en l'obtention des équations du mouvement à partir de l'expression des énergies cinétique et potentielle en fonction des vitesses et déplacements aux noeuds de la structure.

On peut définir pour chaque élément une relation matricielle permettant d'établir une correspondance entre les déplacements aux noeuds de l'élément \mathbf{q}^e et les déplacements aux noeuds de la structure \mathbf{q} , soit :

$$\mathbf{q}^e_{(n_e \cdot 1)} = \mathbf{H}^e_{(n_e \cdot N)} \mathbf{q}_{(N \cdot 1)} \quad (5.35)$$

avec \mathbf{H}^e matrice de localisation de l'élément ($n_e =$ nombre de degrés de liberté de l'élément et $N =$ nombre de degrés de liberté de la structure).

L'énergie cinétique de la structure peut s'exprimer comme suit :

$$T = \sum_{e=1}^n T^e = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^{e\top} \mathbf{M}^e \dot{\mathbf{q}}^e = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{H}^e \mathbf{M}^e \mathbf{H}^e \dot{\mathbf{q}} \quad (5.36)$$

soit :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^\top \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (5.37)$$

avec

$$\mathbf{M} = \mathbf{H}^{e\top} \mathbf{M}^e \mathbf{H}^e \quad (5.38)$$

matrice de masse cohérente de la structure.

L'assemblage est conduit de la même manière pour les matrices de rigidité élémentaires. On a en effet :

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (5.39)$$

avec

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \mathbf{H}^{e\top} \mathbf{K}^e \mathbf{H}^e \quad (5.40)$$

matrice de rigidité de la structure.

La matrice de rigidité complexe \mathbf{K}^* se forme exactement comme la matrice de valeurs réelles avec la différence que les modules complexes sont utilisés pour la formation de cette matrice.

5.4.2. Etude numérique de l'adaptation plastique

Soit un domaine de chargement, sa taille est caractérisée par le paramètre α . Conformément au théorème d'adaptation, si on peut trouver un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps, tel que l'addition de ce dernier à l'enveloppe des contraintes élastiques donne un état de contraintes de sécurité qui satisfasse la condition d'écoulement, alors la structure s'adapte.

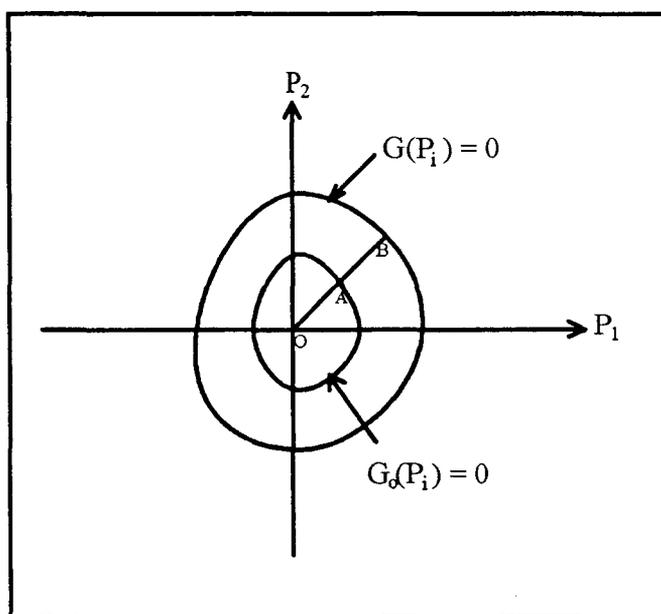


Figure 5.2 - Domaine de chargement $G(P_i) = 0$ et domaine de charge unitaire $G_0(P_i)$ dans l'espace des charges P_i ($OB = \alpha OA$)

L'application du théorème d'adaptation revient à construire un champ de contraintes résiduelles paramétriques, en altérant ce dernier de telle façon qu'on maximise le facteur de charges α , tout en veillant à ce que le critère ne soit pas violé.

Construire une famille de paramètres appropriés, de champs de contraintes auto-équilibrées est le problème central de la théorie de l'adaptation. Il sera construit au moyen de la technique des éléments finis, cette approche permet l'application de la méthode pour une large variété de formes et de charges.

5.4.2.1. Discrétisation du champ d'auto-contraintes

Le champ de contraintes résiduelles sera construit selon la technique éléments finis équilibre développée par GALLAGHER & DHALLA [37] (1975), basée sur l'utilisation de fonctions potentiel et des polynômes d'interpolation d'Hermite en jonction avec un processus d'optimisation non linéaire.

Le champ de contraintes résiduelles doit satisfaire les équations d'équilibre sans second membre suivantes :

$$\bar{\rho}_{ij,j} = 0 \quad \text{dans } V \quad (5.41)$$

$$n_j \bar{\rho}_{ij} = 0 \quad \text{sur } S_T \quad (5.42)$$

La formulation des éléments s'effectue à partir d'hypothèses sur les champs de contraintes, il est nécessaire de choisir ces champs de manière à ce qu'ils satisfassent les équations différentielles d'équilibre.

Une solution pratique pour définir des champs de contraintes admissibles consiste en l'utilisation de fonctions potentiel, ou fonctions de contraintes. Ces fonctions sont des expressions qui dérivées selon certaines règles, donnent des composantes de contraintes qui vérifient automatiquement les conditions d'équilibre. L'état de contrainte plane n'admet qu'une seule de ces fonctions, appelée fonction de contrainte d'Airy notée Φ , dont la définition est la suivante :

$$\rho_{11} = (\partial^2 \Phi / \partial^2 x_2) = \Phi_{,22} \quad (5.43)$$

$$\rho_{22} = (\partial^2 \Phi / \partial^2 x_1) = \Phi_{,11} \quad (5.44)$$

$$\rho_{12} = (\partial^2 \Phi / \partial x_1 \partial x_2) = -\Phi_{,12} \quad (5.45)$$

On définit une approximation de la fonction de contrainte d'Airy, soit :

$$\Phi = \mathbf{N}^T \Phi^e \quad (5.46)$$

où, le vecteur N^T est un vecteur composé d'un ensemble de fonctions de forme et Φ^e désigne un vecteur de coefficients de fonctions de contraintes aux noeuds de l'élément. L'exposant "e" définit la quantité relative à un élément.

Le vecteur des dérivées secondes peut s'écrire :

$$[\Phi_{,22} ; \Phi_{,11} ; -\Phi_{,12}]^T = N'' \Phi^e \tag{5.47}$$

En tenant compte de (5.43–5.45) l'éq. (5.42) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \Phi_{,22} n_1 - \Phi_{,12} n_2 &= 0 \\ -\Phi_{,12} n_1 + \Phi_{,11} n_2 &= 0 \end{aligned} \tag{5.48}$$

En rapprochant (5.47) et (5.48), il résulte :

$$\left[\begin{pmatrix} N_{,22}^T \\ -N_{,12}^T \end{pmatrix} n_1 + \begin{pmatrix} -N_{,12}^T \\ N_{,11}^T \end{pmatrix} n_2 \right] \Phi^e = 0 \tag{5.49}$$

Par sommation sur tous les éléments, on obtient un système d'équations de contraintes.

$$C \hat{\Phi} = 0 \tag{5.50}$$

Les éléments du vecteur $\hat{\Phi}$ ne sont pas linéairement indépendants. On applique alors une procédure d'élimination de Gauss-Jordan pour déterminer le vecteur Φ dont les éléments sont linéairement indépendants ; l'équation (5.50) est alors équivalente à :

$$C \Phi = C X \Phi \quad \text{avec} \quad C X = 0 \tag{5.51}$$

L'approximation de la fonction de contrainte d'Airy $\Phi(x,y)$ est de la forme (voir GALLAGHER & DHALLA [37] (1975)) :

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \tag{5.52}$$

où, les paramètres inconnus a_{ij} sont au nombre de 16. Ces derniers sont remplacés par les paramètres Φ_{ij} , lesquels permettent une identification mécanique. Ils sont donnés par la valeur de la fonction Φ , sa dérivée première, $\Phi_{,x}$ et $\Phi_{,y}$ et sa dérivée seconde $\Phi_{,xy}$ aux points nodaux de chaque élément.

La nécessité de satisfaire les conditions d'équilibre inter-élément qui exige la continuité de Φ et de ses dérivées d'un élément à l'autre, est assurée par l'utilisation des polynômes d'interpolation bicubique d'Hermite, dont dérivent les fonctions de formes suivantes :

$$\begin{aligned}
 N_1(x) &= (1 - 3S^2 + 2S^3) & N_1(y) &= (1 - 3t^2 + 2t^3) \\
 N_2(x) &= (3S^2 - 2S^3) & N_2(y) &= (3t^2 - 2t^3) \\
 N_3(x) &= a S (S - 1)^2 & N_3(y) &= b t (t - 1)^2 \\
 N_4(x) &= a S (S^2 - S) & N_4(y) &= b t (t^2 - t) \\
 S &= \frac{x}{a} & t &= \frac{y}{b}
 \end{aligned}$$

5.5. CONCLUSION

Les théorèmes énergétiques sont à la base de la méthode des éléments finis. Plusieurs solutions sont envisageables selon que la méthode est construite à partir de la formulation déplacements virtuels ou forces virtuelles et que la résolution est effectuée en déplacements ou forces inconnues. Une solution exacte est en général impossible à construire et des approximations sont nécessaires. Elles portent soit sur le champ de déplacement, soit sur le champ de contraintes.

La procédure numérique pour l'étude de l'adaptation plastique est basée sur le couplage de la méthode des éléments finis avec la programmation mathématique non-linéaire qui donne ainsi le facteur de sécurité contre la défaillance.

L'utilisation des éléments finis cinématiquement admissibles donne une borne supérieure, alternativement la borne inférieure est obtenue par l'utilisation des éléments finis statiquement admissibles. Dans notre cas, nous avons utilisé la combinaison des deux modèles respectivement pour le calcul de la réponse purement élastique et les contraintes résiduelles, ce qui conduit à une meilleure estimation de la charge limite d'adaptation.

CHAPITRE 6

*APPLICATION DE LA THEORIE DE L'ADAPTATION A LA
MECANIQUE DES CHAUSSEES*

MECANIQUE DES CHAUSSEES

6.1. INTRODUCTION

Une chaussée est essentiellement destinée à supporter les actions mécaniques des véhicules et à les reporter sur le terrain de fondation sous-jacent. Il paraît, à première vue, beaucoup plus facile de construire une chaussée qu'un ouvrage d'art tel qu'un pont : mais la difficulté du problème tient à ce que la construction des chaussées, même quand elle emploie les mêmes techniques que celles des ponts comporte toujours une recherche extrêmement poussée de l'économie. Pour un ouvrage d'art qui constitue sur une voie de communication un point singulier et dont la ruine aurait des conséquences catastrophiques, il est logique de consentir une dépense exceptionnelle et indispensable de prendre un coefficient de sécurité important. Par contre il serait extrêmement onéreux de prendre un tel coefficient de sécurité lorsqu'il s'agit d'une simple chaussée dont l'insuffisance ne peut se traduire que par des déformations dommageables certes, mais non catastrophiques, et le plus souvent réparables.

La technique de la construction des routes présente donc le caractère, qui lui est particulier, de rechercher à éviter toute surabondance et d'admettre un coefficient de sécurité très faible. Il est probablement plus économique d'accepter un risque modéré que de construire systématiquement des chaussées beaucoup trop chères.

Cette faible marge de sécurité, cette recherche constante de l'économie, constituent la véritable difficulté de la construction routière. Elle est accentuée par le fait que les éléments du problème sont souvent difficiles à chiffrer, l'action des véhicules, le comportement du terrain de fondation, les propriétés des matériaux utilisés, sont complexes et échappent aux calculs précis.

6.2. ETUDE DES CHAUSSEES SOUS SOLLICITATIONS DYNAMIQUES

La plupart des études de modélisation actuellement disponibles ne se sont intéressées qu'à la simulation du comportement de la chaussée sous conditions de charge statique. L'étude du comportement des chaussées sous sollicitations dynamiques est très logique, la chaussée travaille en pratique sous l'application de lourdes charges circulant rapidement. Les actions dynamiques verticales corrélatives au franchissement des obstacles qui sont de type impulsif, peuvent atteindre 1.5 à 2 fois la charge statique, les efforts horizontaux sont eux aussi variables à la suite d'un choc et prennent la même allure oscillatoire que les efforts verticaux.

Une charge impulsive consiste en une impulsion unique semblable à celle que l'on a représentée en figure 6.1.

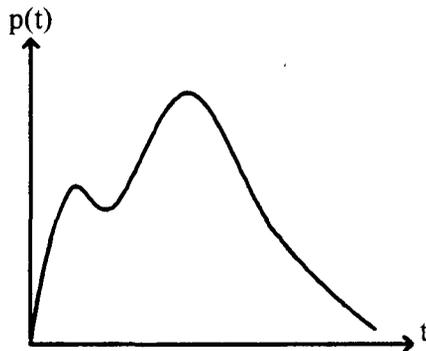


Fig 6.1 – Chargement impulsif quelconque –

Ces charges impulsives sont généralement de courte durée, l'amortissement présente alors beaucoup moins d'importance pour la réponse maximale que dans le cas de charges périodiques. La réponse maximale à une charge impulsive sera atteinte dans un laps de temps très court, avant que les forces d'amortissement n'aient le temps d'absorber une énergie conséquente.

La chaussée est soumise à une séquence de charges en mouvement, sa résistance est liée non seulement à la valeur maximale de la charge susceptible d'être appliquée, mais aussi à la répétitivité de cette dernière. C'est la répétition des charges qui est toutefois à l'origine de la fatigue et de la fissuration dans les couches de la chaussée.

6.3. APPLICATION DE LA THEORIE DE L'ADAPTATION A LA MECANIQUE DES CHAUSSEES

Le domaine de la mécanique des chaussées est limité à deux ambitions : Comprendre le fonctionnement des divers types de structures des chaussées et définir les règles du dimensionnement. Il faut s'attendre à ce qu'une chaussée sera assujettie à un très grand nombre de cycles durant sa vie, en conséquence la rupture pourra se produire plutôt par une accumulation graduelle des déformations plastiques que par un effondrement soudain. La prédiction du comportement d'une chaussée à long terme, par un modèle ne peut être évaluée que pour un nombre limité de cycles vu le coût du calcul prohibitif. Dans ce cas l'analyse du problème par la théorie de l'adaptation s'impose.

L'idée d'utiliser la charge limite d'adaptation comme un paramètre de base pour le dimensionnement des chaussées semble avoir été suggérée en premier par SHARP & BOOKER [141] (1984). Ces auteurs ont montré que les observations données par les tests AASHO [3] (1972) (American Association of State Highway Officials) sur le comportement des chaussées sont compatibles avec le concept d'adaptation.

Les essais AASHO [3] (1972) réalisés en 1960, qui ont porté sur un million de passages de véhicules sur 836 types différents de chaussées, ont été particulièrement remarquables par leur ampleur et par le soin minutieux apporté aux analyses auxquelles ils ont donné lieu. Les

expérimentateurs avaient défini un indice d'aptitude au service (P.S.I.), au départ (chaussée parfaite) P.S.I. = 5, la valeur 2.5 nécessite un reprofilage et la valeur de 1.5 correspond à la mise hors service. En étudiant la dégradation de P.S.I. au cours de l'expérience ils ont montré que l'on peut estimer la durée de vie d'une chaussée de composition connue, en fonction du trafic lourd qu'elle devra supporter.

La performance d'une chaussée est ainsi donnée par la variation de P.S.I. avec le temps ou le nombre de passages répétés. La rupture est atteinte quand le P.S.I. = 1.5, l'adaptation est observée quand le P.S.I. se stabilise (figure 6.2).

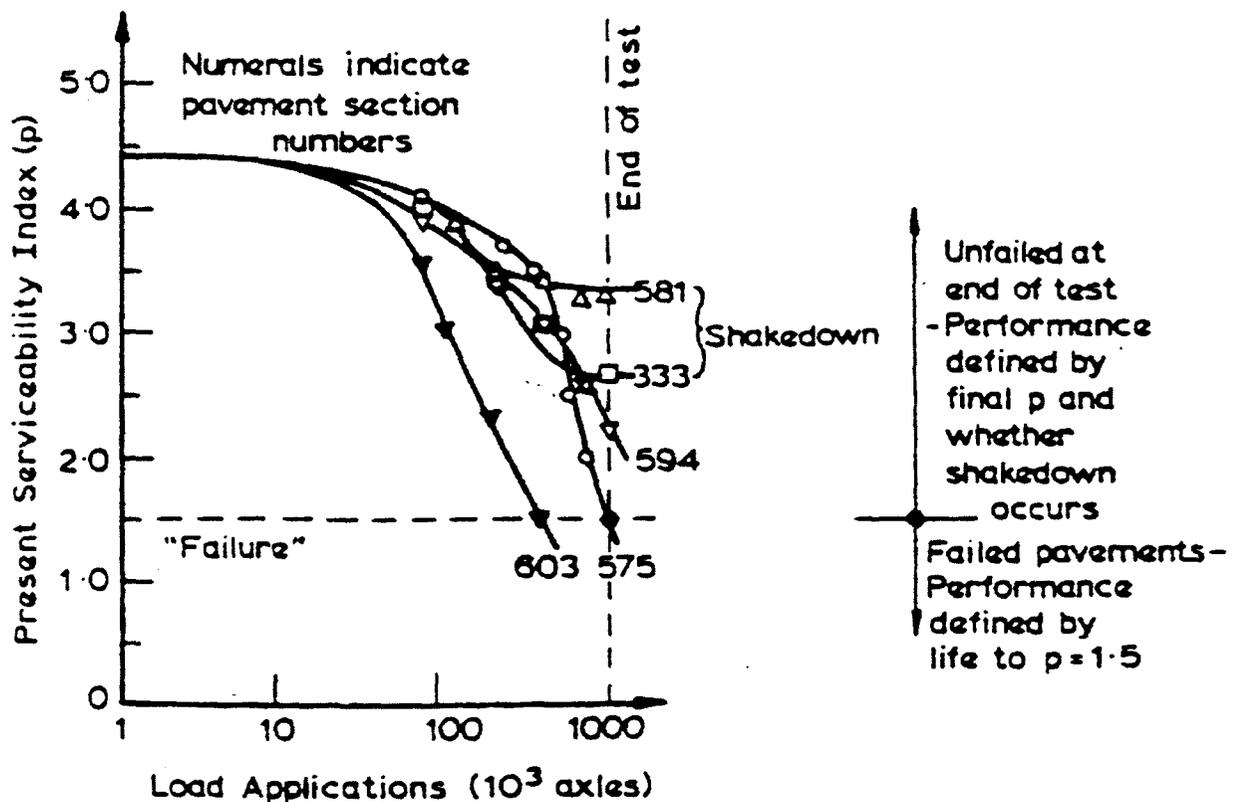


Fig 6.2 - Performance d'une chaussée en fonction de P.S.I. (essais AASHO) [3] -

6.4. VALIDATION DU PROGRAMME

Beaucoup de travaux théoriques ont été réalisés dans le but de généraliser le théorème d'adaptation pour d'autres cas de sollicitations et de lois de comportements ; en parallèle il y a une faible contribution dans l'étude numérique d'adaptation, en particulier pour les applications géotechniques. La plupart des études antérieures considèrent le sol comme un matériau élastique parfaitement plastique sous sollicitations quasi statiques.

Pour l'étude des chaussées sous sollicitations dynamiques, nous avons été amenés à modifier le programme de calcul existant WEICHERT & GROSS-WEEGE [145] (1988) à savoir toute la partie utilisée pour le calcul plastique de l'adaptation et de l'analyse limite. La version originale du programme ne peut pas être appliquée pour une étude en dynamique qui nécessite la prise en compte des forces d'inertie, des phénomènes dissipatifs ainsi que de l'écroutissement cinématique et isotrope, pour une modélisation plus réaliste du comportement du sol sous chargement cyclique. A cela s'ajoute la technique numérique qui utilise des éléments finis équilibre basée sur l'utilisation de la fonction de contraintes d'Airy. Dans notre cas, nous avons utilisé des éléments finis cinématiquement admissibles pour le calcul de la réponse élastique et des éléments finis statiquement admissibles pour le calcul des contraintes résiduelles.

Le problème considéré est une chaussée soumise à une charge verticale répartie uniformément et aux contraintes de cisaillement, sous condition de déformation plane (figure 6.3). Le sol est modélisé comme un matériau élastique parfaitement plastique obéissant au critère de DRUCKER-PRAGER avec une loi d'écoulement associée. L'analyse présentée se limite au cas des sols secs ; l'effet du chargement cyclique sur la pression des pores n'est pas pris en compte. Tous les éléments sont constitués du même matériau. Le facteur de charge

α ($\alpha = P/P_0$) est calculé deux fois, dans le premier cas pour une charge constante, analyse limite et le deuxième cas pour une charge qui varie entre 0 et une charge maximale fixe, calcul d'adaptation.

L'exemple considéré est schématisé sur la figure 6.3 (les dimensions sont en inches). Les propriétés matérielles ainsi que le chargement appliqué sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Matériau	Module Elastique (p.s.i)	Coefficient de Poisson	Cohésion (p.s.i)	Angle de Frottement (°)	Chargement (p.s.i)
Argile ou Sable	1000	0.47	5 10	0	5
				5	
				10	
				15	
				20	
				25	
				30	
35					
40					

Tableau 1 – Propriétés matérielles et chargement –

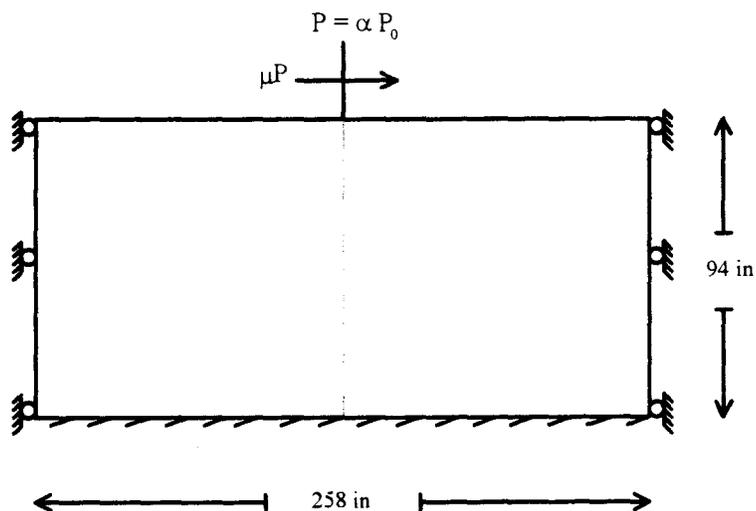


Figure 6.3 – Schématisation d'une chaussée –

Le facteur de charge maximum α ($\alpha = P/P_0$) est calculé par un processus d'optimisation (chapitre 5) où α est la fonction objective à optimiser sous contraintes d'inégalités qui dérivent du critère d'écoulement, ces dernières doivent être vérifiées en des points tests. Pour notre cas, nous avons considéré 9 points tests par élément. Le nombre de point tests doit être minimisé étant donné que les contraintes d'optimisation sont proportionnelles au nombre de points et que le coût de calcul augmente en conséquence.

Pour la validation du programme, nous avons considéré des exemples à un seul paramètre de chargement et des exemples à deux paramètres de chargement. Une étude statique comparative entre la version classique et la nouvelle version du programme est illustrée sur les figures 6.4–6.9. Dans le cas d'un chargement à un seul paramètre les tracés des courbes sont confondus (figures 6.4, 6.5). Pour le cas d'un chargement à deux paramètres les tracés des courbes sont confondus (figure 6.7–6.9) pour le cas d'un chargement proportionnel (analyse limite) par contre pour le cas d'un chargement cyclique (adaptation), on constate un faible écart entre les deux courbes pour le cas où $\phi = 30^\circ$ (figure 6.6 et 6.8), cet écart est dû à une faible convergence des résultats. En général les résultats obtenus sont en bonne concordance, ce qui justifie la fiabilité de l'approche éléments finis utilisée. Le programme ainsi modifié permet l'application du théorème de MELAN au cas des sols sous sollicitations dynamiques.

6.4.1. Cas d'un chargement à un seul paramètre

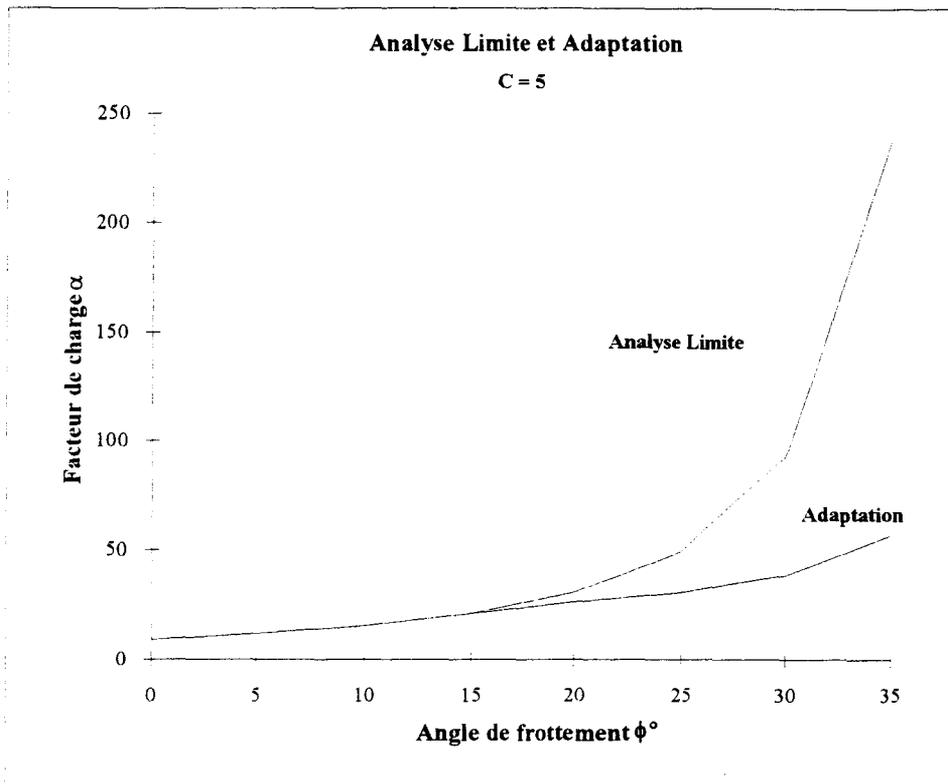


Figure 6.4

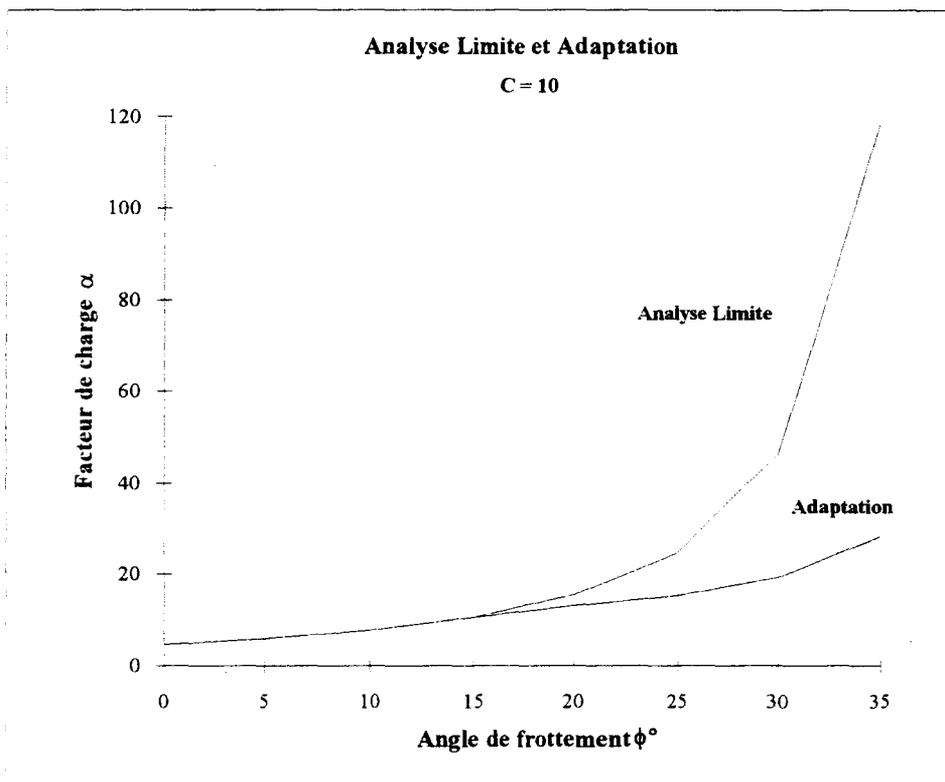


Figure 6.5

6.4.2. Cas d'un chargement à deux paramètres

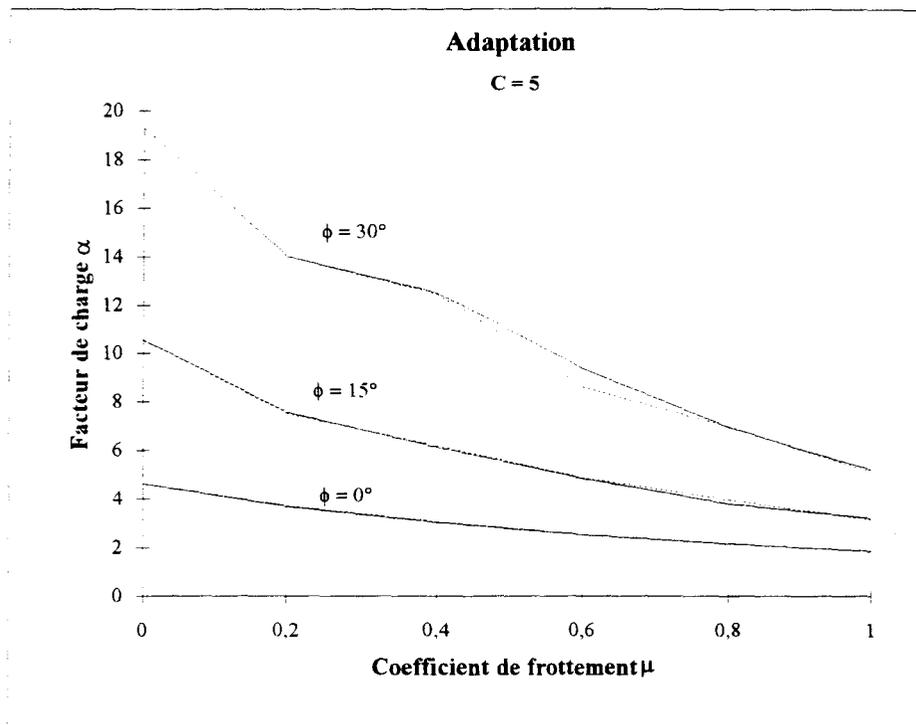


Figure 6.6

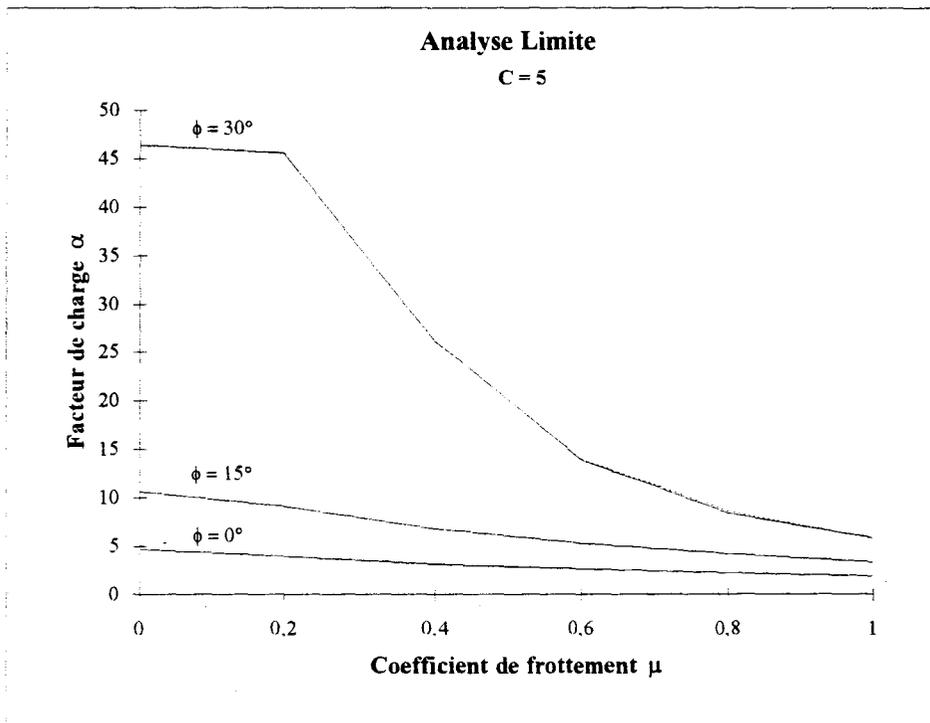


Figure 6.7

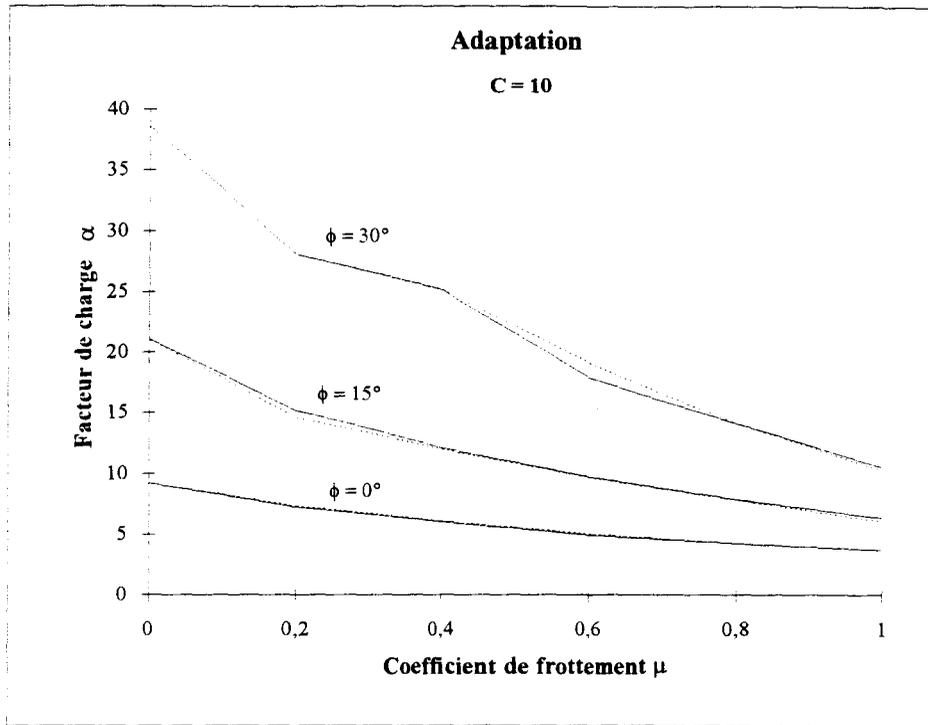


Figure 6.8

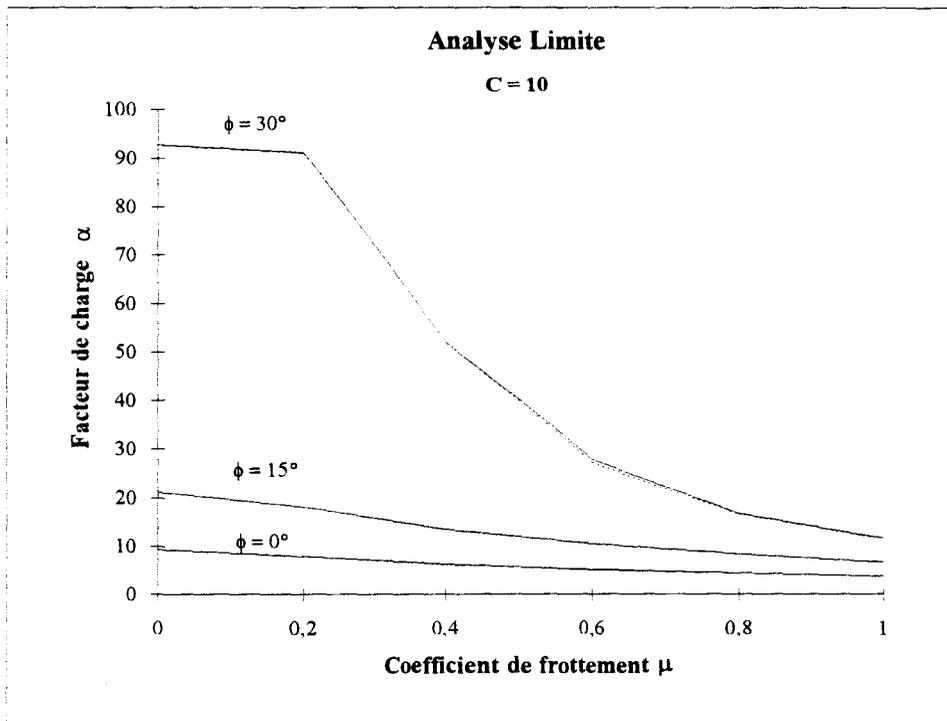


Figure 6.9

6.5. EXPLOITATION NUMERIQUE

L'approche développée sera appliquée à l'étude de la chaussée schématisée sur la figure 6.10, avec les mêmes propriétés matérielles et de chargement que celles données dans le tableau 1. Les résultats obtenus seront comparés à ceux obtenus en adaptation et en analyse limite dans le cas d'une analyse quasi-statique.

Les exemples que nous allons considérer se classent dans trois séries dont chacune a un but différent.

La première série porte sur l'étude d'un semi-espace homogène et isotrope (figure 6.11). Nous examinons l'influence de certaines propriétés matérielles (angle de frottement, cohésion), ainsi que l'effet des contraintes de cisaillement sur la charge limite à l'adaptation et à l'analyse limite.

Dans la deuxième série, nous déterminons le domaine d'adaptation pour un matériau élastique parfaitement plastique et pour un matériau écrouissable. Nous considérons alors un programme de chargement à deux paramètres (charge normale et tangentielle), les charges varient indépendamment l'une de l'autre entre des bornes fixes.

Nous examinons dans la troisième série le cas d'un bicouche (couche d'une épaisseur limitée surmontant un semi-espace homogène et isotrope). Nous étudions l'influence de la rigidité et de l'épaisseur sur la charge limite à l'adaptation.

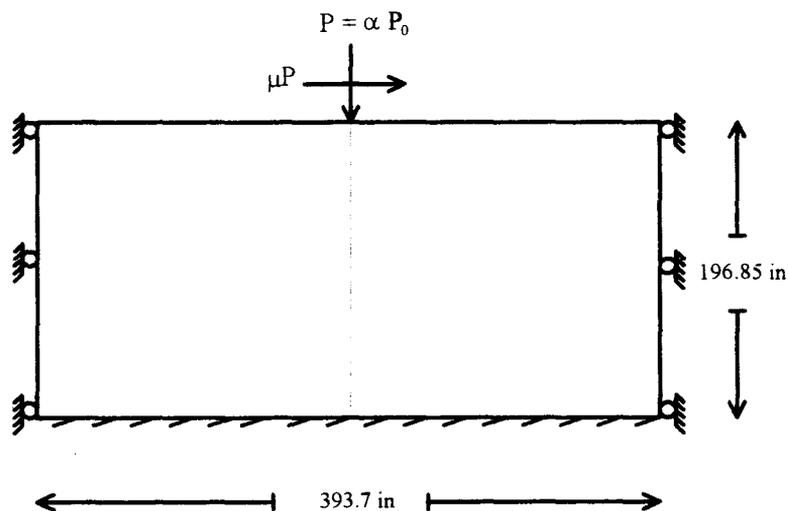


Figure 6.10

6.6. ETUDE D'UN MODELE MONOCOUCHE

La pression p (de l'ordre de 0.2 à 0.7 MPa) exercée par la pneumatique ne peut généralement pas être supportée par le sol naturel. Le rôle de la chaussée est de répartir cette pression pour l'amener à un niveau compatible avec ce qui peut être supporté par le sol support. Si le corps de la chaussée n'est pas trop différent du terrain naturel (corps granulaire par exemple), on peut raisonnablement supposer que la pression se répartit à travers le corps de la chaussée de la même manière que dans le sol.

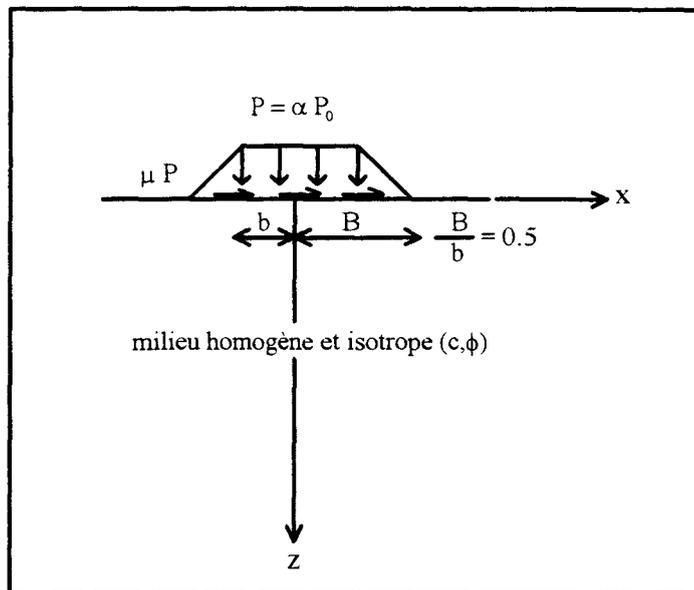


Fig 6.11 - Modèle monocouche -

6.6.1. Etude de l'influence de la cohésion et de l'angle de frottement sur la charge limite

Une augmentation significative de la charge limite en statique comme en dynamique résulte de l'accroissement de la cohésion (figures 6.12, 6.13 et 6.14). La relation entre le facteur de charge et la cohésion est linéaire. Les mêmes constatations sont observées pour le cas où l'on fait varier l'angle de frottement (figures 6.15, 6.16) sauf que dans ce cas la relation entre le facteur de charge et la cohésion n'est pas linéaire.

Le facteur de charge quasi-statique est supérieur au facteur de charge dynamique. En effet les actions dynamiques corrélatives aux franchissements des obstacles peuvent atteindre 1.5 à 2 fois la charge quasi-statique.

La résistance des chaussées est liée non seulement à la valeur maximale des charges statiques susceptibles de leur être appliquées, mais aussi à la répétitivité des forces dynamiques. Il découle à partir des résultats obtenus qu'un dimensionnement basé sur l'analyse limite ne garantit pas la sécurité des structures si les charges sont variables ou simplement cycliques.

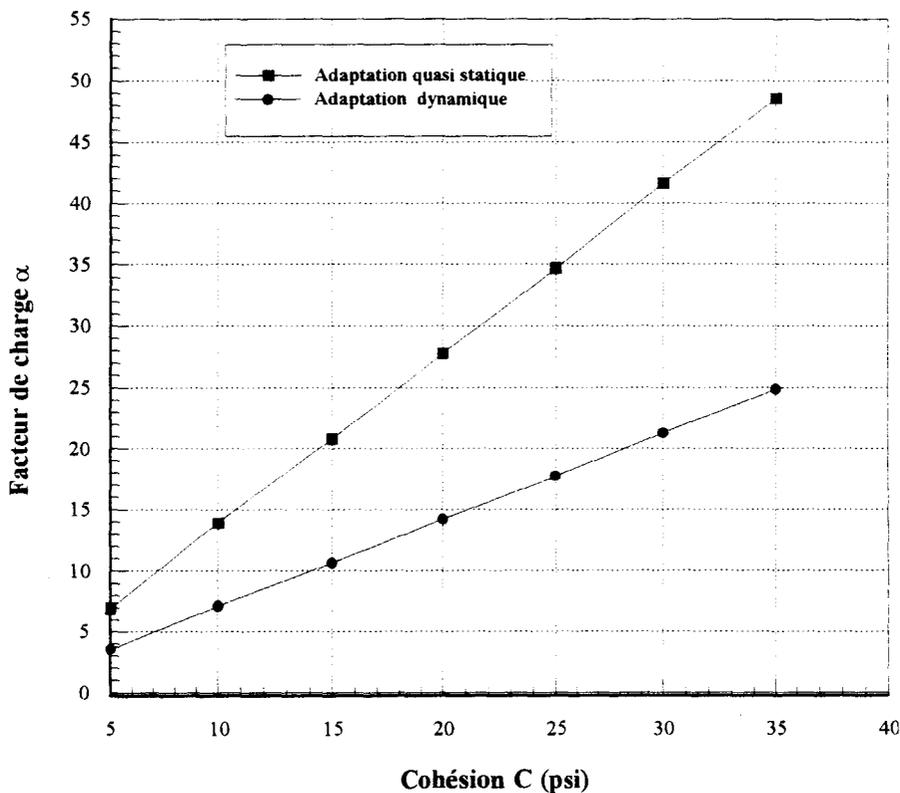


Figure 6.12 Influence de la cohésion sur la charge limite ($\phi = 0^\circ$)

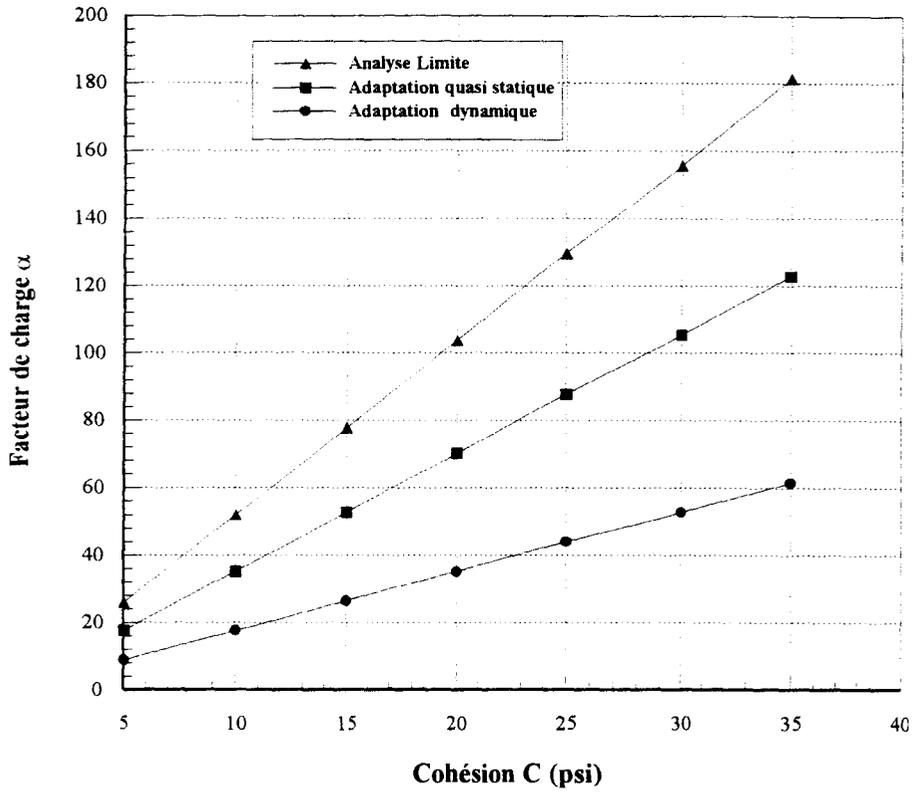


Figure 6.13 Influence de la cohésion sur la charge limite ($\phi = 15^\circ$)

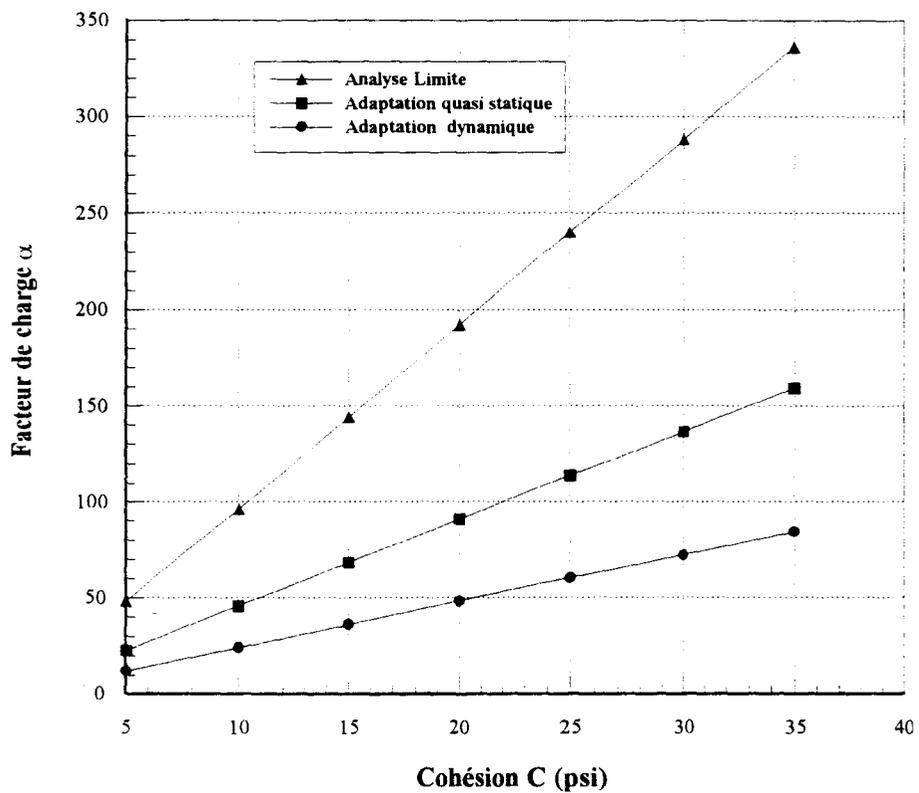


Figure 6.14 Influence de la cohésion sur la charge limite ($\phi = 30^\circ$)

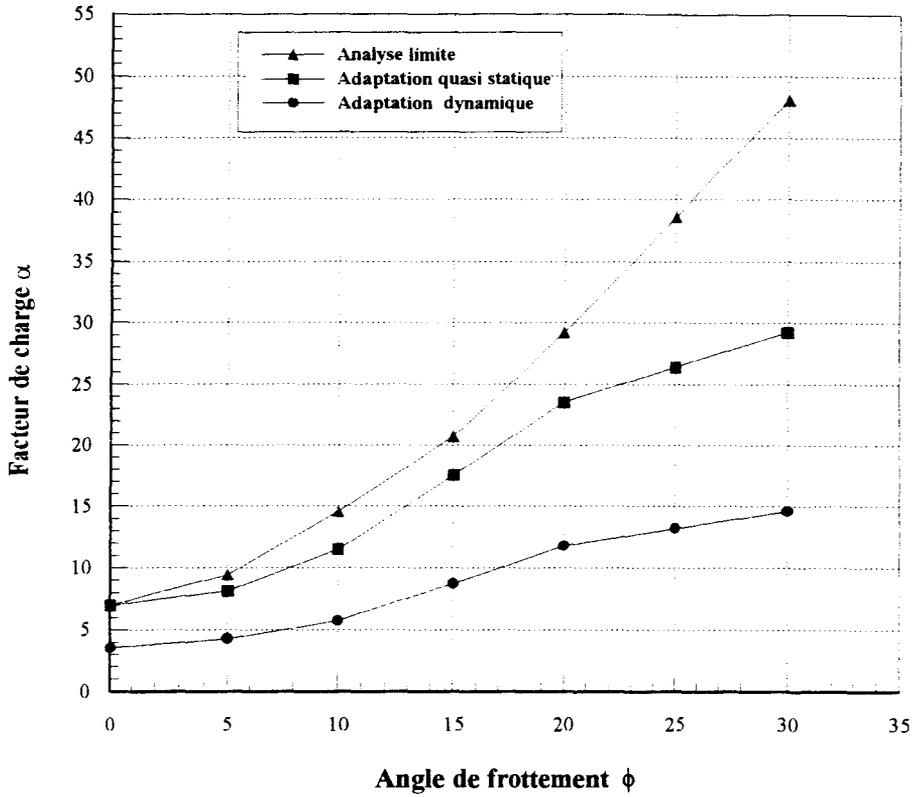


Figure 6.15 Influence de l'angle de frottement ϕ sur la charge limite ($C = 5$)

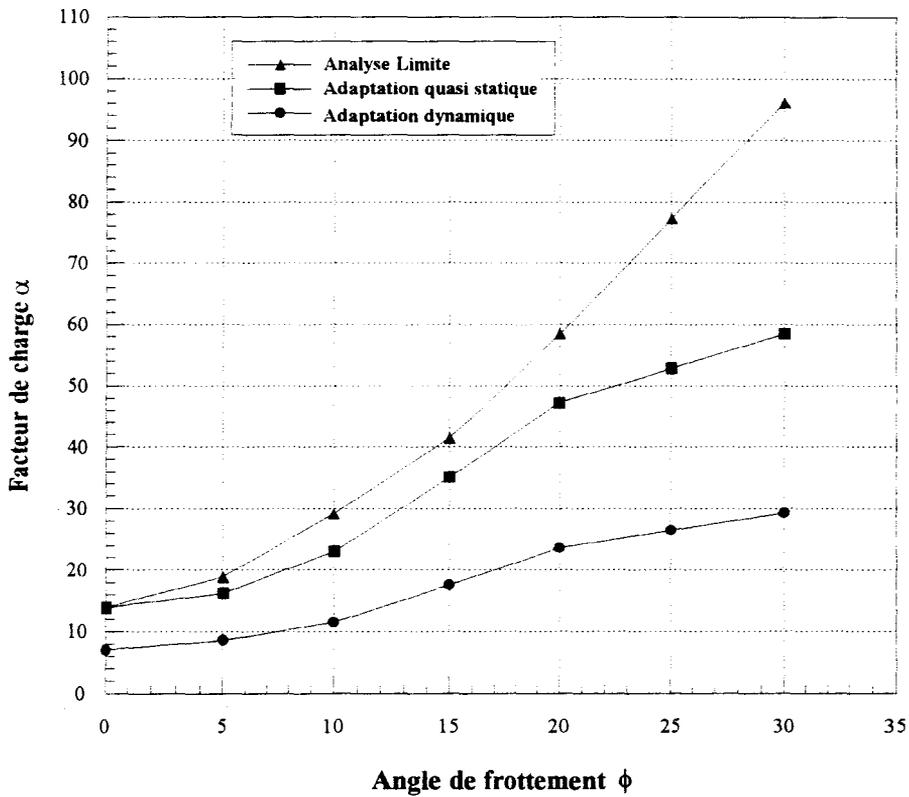


Figure 6.16 Influence de l'angle de frottement ϕ sur la charge limite ($C = 10$)

6.6.2. Etude de l'influence des contraintes de cisaillement

On peut constater sur les figures 6.17 et 6.18 que les contraintes de cisaillement exercent une influence considérable sur la résistance de la chaussée. Pour les petites valeurs de μ (μ = charge axiale / charge tangentielle) la rupture se produit à l'intérieur du terrain (à une certaine profondeur en dessous de la surface). Pour des valeurs plus grandes de μ , la rupture s'initialise en surface, ce qui justifie la décroissance de la charge limite quand le coefficient de frottement μ croît.

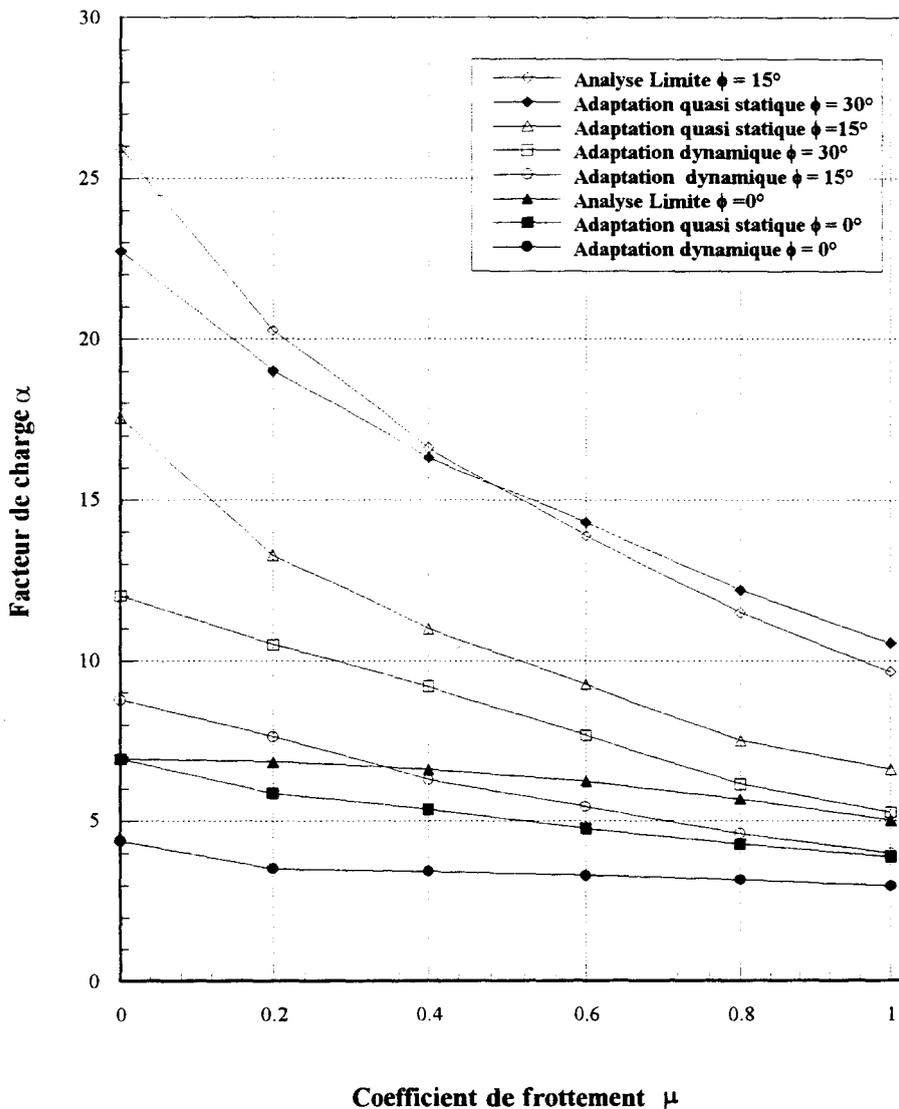


Figure 6.17 Influence du coefficient de frottement μ sur la charge limite ($C = 5$, $\phi = 0^\circ$, $\phi = 15^\circ$, $\phi = 30^\circ$)

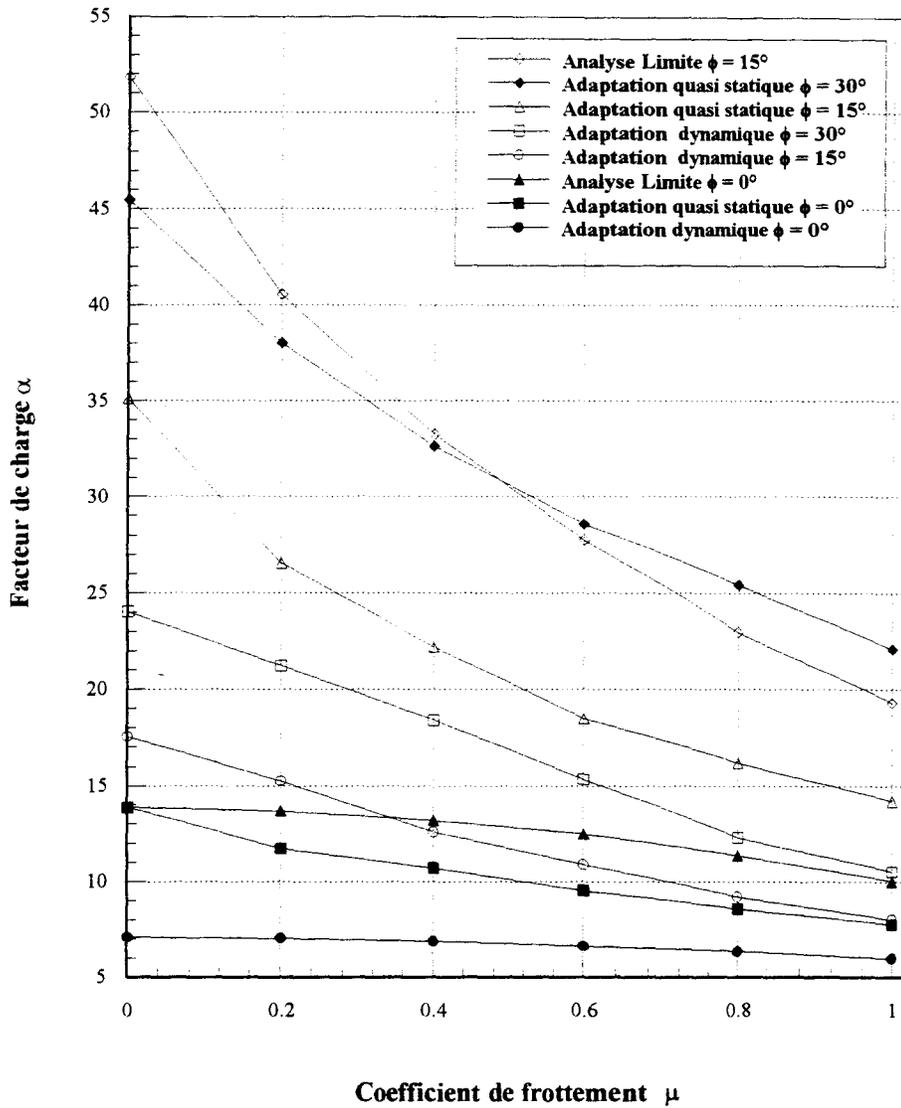


Figure 6.18 Influence du coefficient de frottement μ sur la charge limite ($C = 10$, $\phi = 0^\circ$, $\phi = 15^\circ$, $\phi = 30^\circ$)

6.6.3. Détermination du domaine d'adaptation

6.6.3.1. Matériau élastique parfaitement plastique

Considérons deux charges P et Q indépendantes l'une de l'autre, le domaine d'étude est un rectangle dont les coins dans l'espace des charges (P , Q) sont définis par :

$$(0, 0), (0, Q_{\max}), (P_{\max}, Q_{\max}), (P_{\max}, 0).$$

La méthode d'optimisation détermine la valeur du coefficient de sécurité vis-à-vis d'un cas de charge, on peut assimiler cette méthode à la recherche du coefficient de sécurité à l'adaptation dans une direction donnée du domaine de charges. La répétition de cette détermination dans plusieurs directions (balayage) permet d'obtenir le domaine d'adaptation pour lequel la condition d'adaptation est vérifiée en n'importe quel point du domaine.

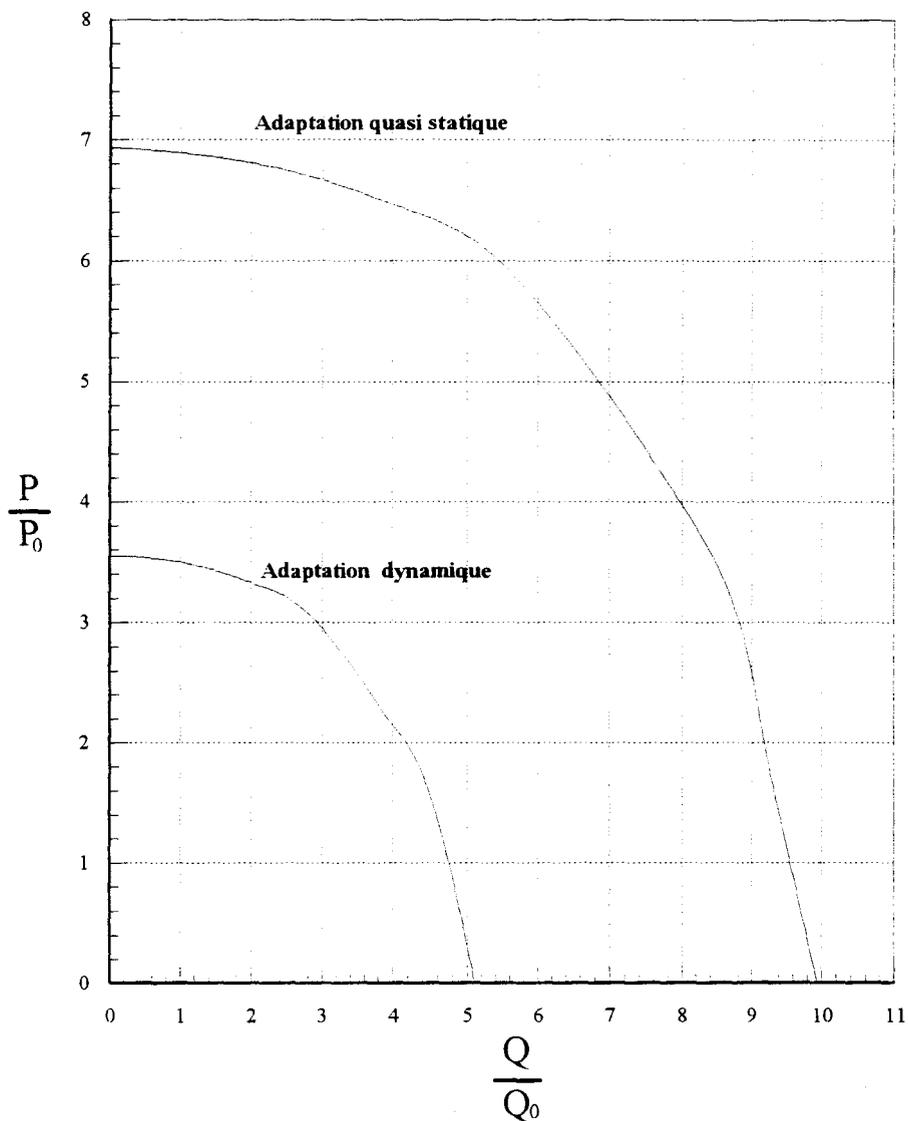


Figure 6.19 – Domaine d'adaptation d'un matériau élastique parfaitement plastique –

6.6.3.2. Matériau élastoplastique écrouissable

Comme nous l'avons vu au chapitre 3, l'écrouissage est modélisé dans l'approche présentée par l'utilisation d'une surface d'écoulement limite (figure 3.6), caractérisée par le seuil d'écoulement k_L , tel qu'il a été proposé par WEICHERT & GROSS-WEEGE [145] (1988). La valeur du seuil d'écoulement limite k_L est exprimée en fonction du seuil d'écoulement initial k_I ($k_L / k_I = \xi$). Nous constatons que le domaine de charge augmente avec ξ ($\xi = 1.1, \dots, 1.5$), et que l'écrouissage favorise la résistance et la fiabilité de la chaussée.

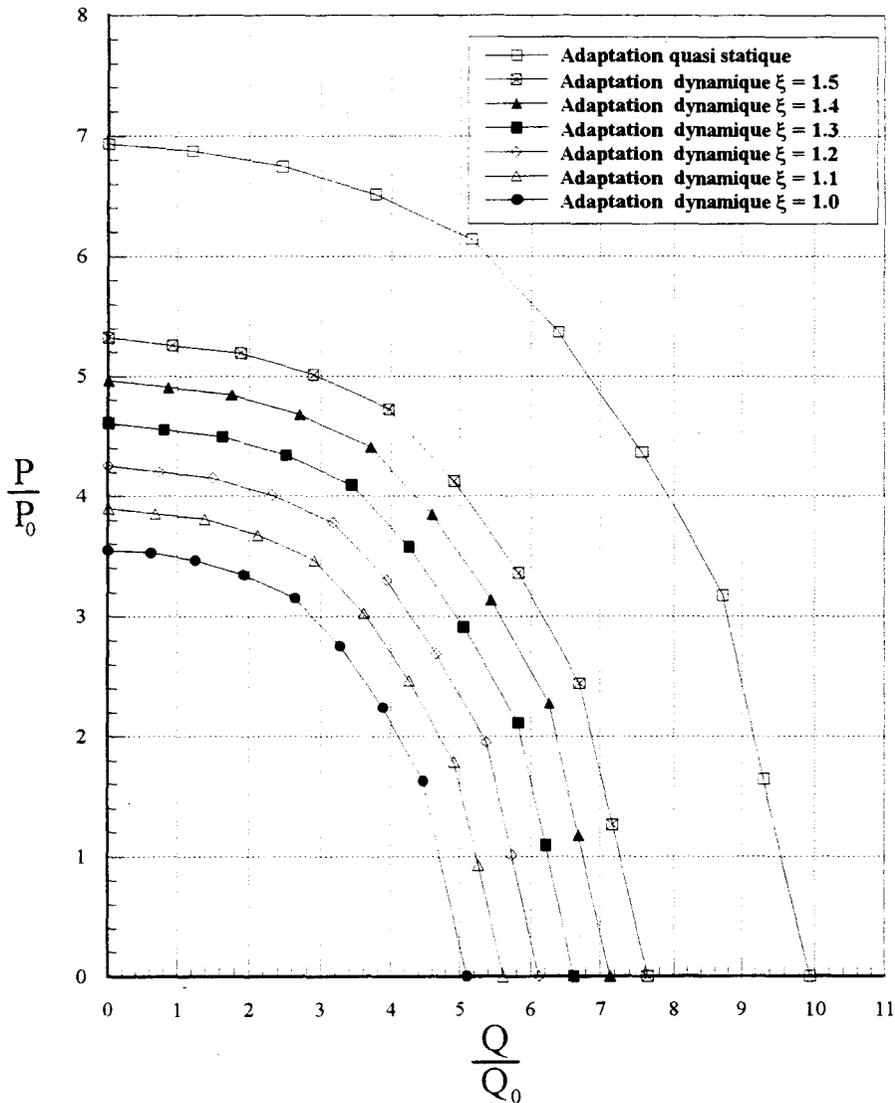


Figure 6.20 - Domaine d'adaptation d'un matériau écrouissable -

6.7. ETUDE D'UN MODELE BICOUCHE

Lorsque la contrainte verticale sur le sol support est limitée à une valeur très faible (0.1 à 0.2) de la pression exercée sur la surface par exemple, il peut être très coûteux de réaliser la répartition des pressions par l'intermédiaire d'un corps granulaire (l'épaisseur D est forte). Pour diminuer cette épaisseur, à contrainte sur le sol constante, il suffit d'augmenter le rapport de module entre la couche de chaussée (E) et le sol support (E_0). Ce résultat peut être atteint à l'aide d'un liant hydraulique (ciment, laitier, etc...) ou hydrocarboné.

Les modèles bicouches sont intéressants puisqu'ils permettent de déterminer les grandes tendances de variations (rôle de l'épaisseur, rôle du rapport de module d'Young entre couches, rôle du rapport de cohésion entre couches...).

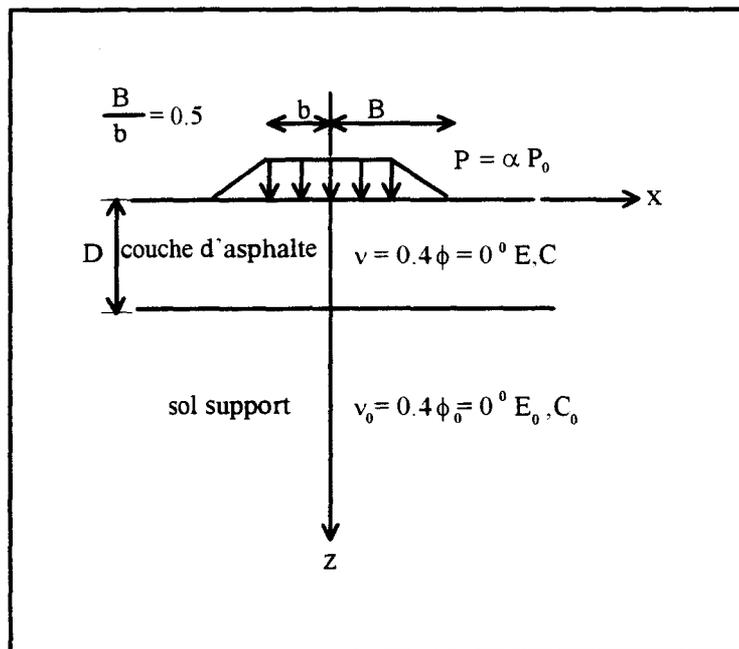


Fig 6.21 - Modèle bicouche -

6.7.1. Etude de l'influence du module d'Young sur la charge limite d'adaptation

Les matériaux bitumineux présentent la particularité que, pour un niveau de contrainte fixé, la déformation dépend du temps. On dit que le comportement d'un tel matériau est viscoélastique. Cette propriété se traduit par la dépendance du module de rigidité $\dot{E}(j\omega)$ (en notation complexe $\dot{E}(j\omega) = |\dot{E}| \exp(j\phi)$) de la fréquence d'application de la charge : le module est élevé lorsque le matériau est soumis à une sollicitation rapide, le module est faible lorsque le matériau est soumis à une sollicitation lente (tableau 2). Dans ce qui suit, on va examiner l'évolution de la performance de la chaussée en fonction de la rigidité.

Fréquence f (Hz)	5	10	20	80
$E(\omega) 10^6 \text{ p s i}$	0.88	1	1.16	1.5

Tableau 2 - (AASHO) [3] -

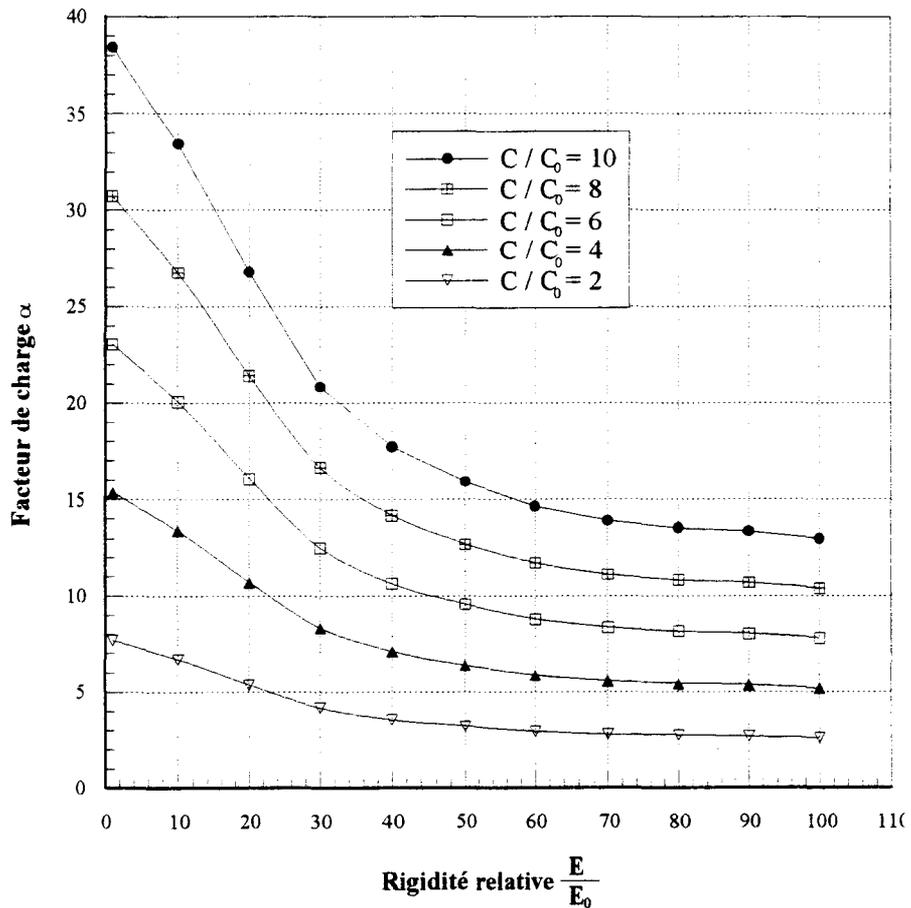


Figure 6.22 Influence de la rigidité relative et de la cohésion relative sur la charge limite d'adaptation en dynamique

Pour le cas des chaussées peu rigides (E/E_0 relativement faible), une grande proportion de la charge appliquée est répartie sur le sol support. La valeur de la charge limite pour le cas d'un chargement proportionnel ou cyclique est sensible à la capacité portante de ce dernier. Pour le cas des chaussées rigides (E/E_0 relativement grand), des contraintes additionnelles sont attirées vers la couche supérieure qui supporte presque la totalité du chargement appliqué. Ce qui implique une accumulation de déformations plastiques dans la couche d'asphalte et en conséquence, une diminution de la charge limite d'adaptation quand la rigidité croît.

6.7.2. Etude de l'influence de l'épaisseur de la couche d'asphalte sur la charge limite d'adaptation

La deuxième variable qui influe sur la charge limite d'adaptation est l'épaisseur D de la couche d'asphalte (figure 6.21) ; celle-ci joue un rôle symétrique de celui de la rigidité relative E/E_0 : l'accroissement de l'épaisseur D induit une augmentation de la charge limite d'adaptation (figure 6.23).

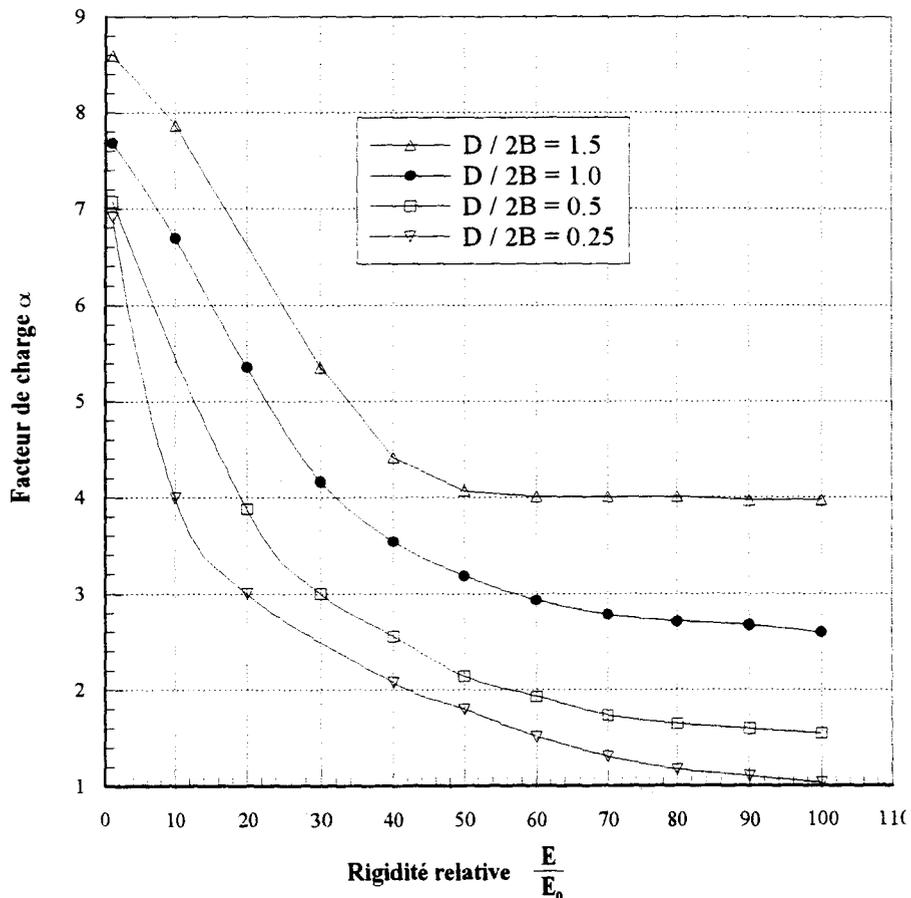


Figure 6.23 Influence de l'épaisseur de la couche d'asphalte D et de la rigidité relative E/E_0 sur la charge limite d'adaptation en dynamique ($C/C_0 = 2$)

6.8. VALIDATION DE L'APPROCHE POUR LE CAS D'UNE SOLLICITATION HARMONIQUE

Pour montrer l'efficacité de l'approche développée au chapitre 4, on va mener une étude comparative sur une structure de chaussée amortie respectivement par un amortissement visqueux et un amortissement hystérétique (indépendant de la fréquence). Ce dernier est pris en compte par l'introduction d'une matrice de rigidité complexe, définie pour une excitation harmonique.

Dans ce qui suit, on ne considère que la réponse en régime permanent. L'amortissement visqueux est représenté par le modèle de RAYLEIGH (CLOUGH & PENZIEN [21] (1993)), qui suppose que la matrice d'amortissement C est une forme linéaire de la matrice de masse M et de la matrice de rigidité K . La matrice d'amortissement s'écrit alors :

$$C = C_1 M + C_2 K \quad (6.1)$$

Les constantes C_1 et C_2 peuvent être reliées aux facteurs d'amortissement de n'importe quel mode i par :

$$\zeta_i = \frac{C_1}{2\omega_i} + \frac{C_2 \omega_i}{2} \quad (6.2)$$

où ζ_i et ω_i sont respectivement le facteur d'amortissement et la fréquence propre au mode i .

La relation (6.2) permet d'obtenir C_1 et C_2 connaissant les facteurs d'amortissement de deux modes différents. Ce dernier est généralement déterminé expérimentalement, les fréquences propres peuvent être déterminées par une analyse modale (voir chapitre 1). Pour notre cas $\zeta = 0.1$, $C_1 = 2$ et $C_2 = 0.0017$.

L'étude est menée dans le domaine fréquentiel, le principe est de calculer la réponse de la structure de chaussée à une sollicitation harmonique, sur une plage de fréquences couvrant les fréquences générées par les charges de roues. On trace ensuite le spectre de déplacement en fonction de la fréquence, les contraintes sont calculées par rapport à la fréquence correspondant au pic des déplacements, et par un processus d'optimisation on détermine le domaine d'adaptation.

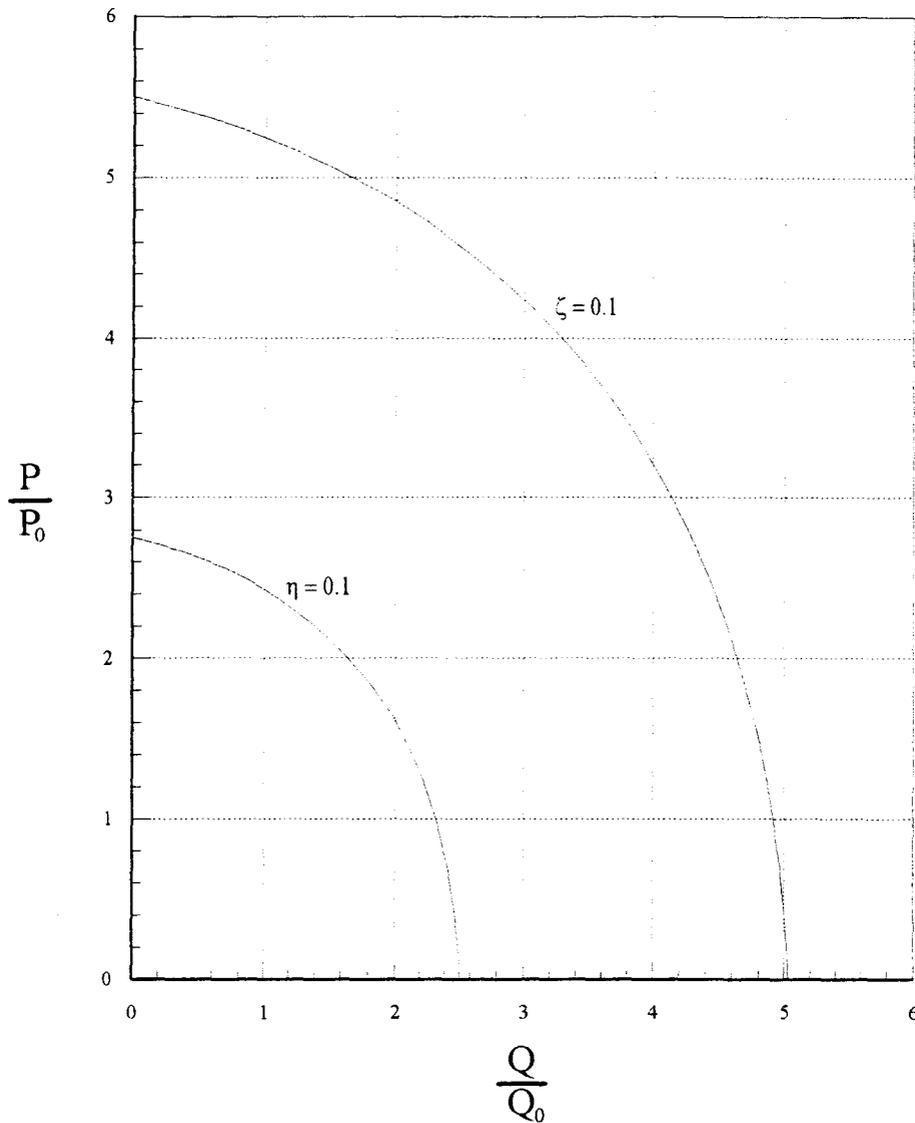


Figure 6.24 – Domaine d'adaptation défini par un amortissement hystérétique $\eta = 0.1$ et un amortissement visqueux linéaire $\zeta = 0.1$ déterminé à la résonance –

Le modèle type linéaire visqueux n'est pas fiable pour représenter les mécanismes de déperdition dans les sols. Cependant l'utilisation d'un tel modèle peut induire des erreurs sérieuses (figure 6.24), en effet l'énergie dissipée par cycle par ce dernier est proportionnelle à la fréquence d'excitation ce qui est contraire aux observations physiques qui montrent que l'énergie dissipée dans le sol est indépendante de la fréquence. Cela se traduit par une surestimation des forces d'amortissement donc de la charge limite, ce qui entraîne la défaillance ou la non-adaptation de la structure.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Le rapide développement du génie civil en milieu marin, la construction des ouvrages importants (les centrales nucléaires, les grands barrages, les réservoirs à gaz naturel) sur des sites terrestres à sismicité dangereuse, ont rendu nécessaire d'acquérir une bonne connaissance du comportement rhéologique des sols soumis à des sollicitations cycliques, et le développement de modèles sophistiqués.

Ces modèles capturent avec des degrés variables les traits importants du comportement du sol tel que la génération des pressions interstitielles, la fatigue cyclique et le comportement hystérétique et peuvent convenablement être incorporés dans un code d'élément finis pour la solution des problèmes aux limites. Cependant, pour les problèmes pratiques, la réponse d'une structure de sol ne peut être évaluée que pour un nombre limité de cycles, vu le coût de calcul prohibitif. La théorie de l'adaptation est une alternative pour l'étude du comportement du sol à long terme. Ces dernières années cette théorie a trouvé une attention plus soutenue vue ses résultats très convaincants et son efficacité.

Le travail présenté est une extension du théorème d'adaptation aux cas des sols sous sollicitations cycliques (dynamiques). Le comportement du sol sous de telles sollicitations est fortement non-linéaire et présente un caractère dissipatif qui n'existe pas en milieu élastique, ces caractéristiques doivent être prises en compte pour obtenir des solutions raisonnables.

L'effet de l'érouissage est pris en compte par l'utilisation d'un matériau standard généralisé, qui est un matériau élastoplastique défini dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles à partir d'une famille de paramètres (flux thermodynamique) supposés dériver d'un potentiel de forces thermodynamiques (associées aux flux) et pour lequel on suppose vérifier l'hypothèse de dissipativité normale (potentiel convexe). Pour une modélisation plus réaliste du comportement des sols sous sollicitations cycliques on a introduit un érouissage mixte (combinaison de l'érouissage cinématique et isotrope).

L'amortissement matériel est représenté par l'introduction d'une matrice de rigidité complexe. Celle-ci se forme exactement comme les matrices de valeurs réelles avec la différence que les modules complexes sont utilisés pour la formation de cette matrice. Les modules complexes sont définis uniquement pour une excitation harmonique, cependant toute excitation peut toujours être décomposée en une somme de fonctions harmoniques par l'application de la transformée de Fourier. D'où la généralisation de l'approche par modules complexes à l'étude des systèmes soumis à une excitation quelconque.

L'introduction d'une matrice de rigidité complexe permet de tenir compte de l'amortissement mais pas des non-linéarités, ces dernières sont prises en compte par le concept de l'adaptation lui-même. En effet on a supposé que la dissipation est la somme de deux entités indépendantes. Une est la conséquence des déformations plastiques et de l'écroutissement, et l'autre est la conséquence de l'amortissement. C'est cette dernière qui est reprise dans la matrice de rigidité complexe.

L'approche développée est appliquée à l'étude du comportement des chaussées sous sollicitations de type impulsif. Les chaussées travaillent en pratique sous l'application de lourdes charges circulant rapidement. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par la théorie de l'adaptation et de l'analyse limite en statique. La procédure numérique pour l'étude de l'adaptation plastique est basée sur le couplage de la méthode des éléments finis avec la programmation mathématique non-linéaire qui donne ainsi le facteur de sécurité contre la défaillance. L'utilisation des éléments finis cinématiquement admissibles donne une borne supérieure, alternativement la borne inférieure est obtenue par l'utilisation des éléments finis statiquement admissibles. Dans notre cas, nous avons utilisé la combinaison des deux modèles respectivement pour le calcul de la réponse purement élastique et les contraintes résiduelles; ce qui conduit à une meilleure estimation de la charge limite d'adaptation. La mise en oeuvre de solutions numériques nécessite la résolution des étapes suivantes :

- calcul de la réponse purement élastique. Il est possible de choisir un schéma d'intégration dans le domaine temps, dans le domaine fréquence ou, s'agissant d'analyse de structure, de procéder à une analyse modale ;
- détermination d'un champ de contraintes résiduelles auto-équilibré indépendant du temps ;

– détermination du multiplicateur de charge par un processus d’optimisation, qui consiste à déterminer le facteur de charges qui garantit l’adaptation, tout en veillant à ce que le critère d’écoulement ne soit pas violé.

L’approche proposée présente plusieurs points positifs :

- simple dans son utilisation ;
- permettant des calculs peu coûteux ;
- pouvant convenir à toutes sortes de géométries de la structure et à n’importe quel type de chargement dynamique (arbitraire ou simplement cyclique) ;
- traitant les matériaux non linéaires couramment utilisés par les ingénieurs ;
- facilité d’analyser les résultats puisqu’elle présente un paramètre de sécurité unique : le multiplicateur des charges appliquées.

Cependant pour les perspectives de recherches nous proposons :

- généralisation de l’étude pour le cas d’un domaine de chargement par l’application du théorème de POLIZZOTTO [110] (1984) ;
- introduction de la théorie de contrainte-dilatance de ROWE [121] (1961) qui va permettre de mieux contrôler la dilatance à l’adaptation et de s’assurer que l’hypothèse des petites déformations n’est pas violée, elle peut être utilisée comme un critère de sécurité en déformation. La satisfaction à la fois du critère en contrainte et en déformation nous garantit l’adaptation et la validité de l’hypothèse des petites déformations ;
- l’extension du théorème statique et cinématique aux cas des matériaux poreux saturés ;
- l’application de la théorie de l’adaptation pour l’étude des chaussées sous l’effet des cycles gel-dégel.

REFERENCES

REFERENCES

- [1] **ABOUSTIT, B. L. & REDDY, D. V.**, "Finite element linear programming approach to foundation shakedown", In: Pande, G.N. and Zienkiewicz, O. C. (eds.), *Soils Under Cyclic and Transient Loading*, Balkrma, pp. 468-489, (1980).
- [2] **ALWIS, W. W. M. & GRUNDY, P.**, "Shakedown analysis of plates", *Int. J. Mech. Sci.*, 27, pp. 71-82, (1985).
- [3] **AASHO** Interim guide for design of pavement structures, Washington: American Association of State Highway and Transportation Officials 1972.
- [4] **BELYTSCHCO, T. & HODGE, P. G.**, "Plane Stress Limit Analysis by Finite Elements", *Proc. ASCE, J. of Eng. Mech. Div.* vol. 96, EM6, pp.931-944, (1970).
- [5] **BELYTSCHCO, T.**, "Plane Stress Shakedown Analysis by Finite Elements", *Int. J. Mech. Sci.* vol. 14, pp. 619-625, 1972.
- [6] **BLEICH, H.**, "Über die Bemessung statisch unbestimmter Stablwerke unter der Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltens des Baustoffes", *Bauingenieur*, 13, 261-267, (1932).
- [7] **BORINO, G., FLUSCHI, P. & POLIZZOTTO, C.**, "Consistent time modelling for the evolutive analysis of elastic-plastic solids", In: Owen, D. R., Hinion, E. & Onaie E., (eds.), *Computational plasticity*, 85-98, (1989).
- [8] **BOWER, A. F. & JOHNSON, K. L.**, "Plastic flow and shakedown of the rail surface in repeated wheel-rail contact", *Wear*, 144, pp. 1-18, (1991).
- [9] **CAMBOU, B. & JAFARI, K.**, "Modèle de comportement des sols non cohérents", *Rev. Franç. Géotech.* No. 44, pp. 43-55, (1988).
- [10] **CORIGLIANO, A. & MAIER, G.** "Dynamic shakedown analysis and bounds for elastoplastic structures with nonassociative, internal variable constitutive laws", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 32, No. 21, pp. 3145-3160, (1995).
- [11] **CAPRA, A. & DAVIDOVICI, V.**, "Calcul dynamique des stuctures en zone sismique", Edition Eyrolles.
- [12] **CAPURSO, M.**, "A Displacement Bounding Principle in Shakedown of Structures Subjected to Cyclic Loads", *Int. J. Solids Structures*, 10, pp. 77-92, (1974).
- [13] **CAPURSO, M.**, "Extended Displacement Bound Theorems for Contiua Subjected to Dynamic Loading", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 113-122, (1975).

- [14] CAPURSO, M., "Displacement Bounding Principles in the Dynamics of Elastoplastic continua", *J. Struct. Mech.*, 3(3), pp. 259-281, 1974-1975.
 - [15] CAPURSO, M., "Some Upper Bound Principles to Plastic Strains in Dynamics Shakedown of Elastoplastic Structures", *J. Struct. Mech.* 7(1), pp. 1-20, (1979).
 - [16] CERADINI, G., "Sull' adattamento dei corpi elasto-plastici soggetti ad azioni dinamiche", *Giorn. Genio Civile*, 106, N° 4/5, 239-250, (1969).
 - [17] CERADINI, G., "Dynamic Shakedown in Elastic-plastic bodies", *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE* 106 (3), pp. 481-498, (1980).
 - [18] COHN, M. Z. & MAIER, G., "Engineering plasticity by mathematical programming," Pergamon Press, New York, (1979).
 - [19] CHANDLER, H. W., "A plasticity Theory Without Drucker's Postulate, Suitable for Granular Materials", *J. Mech. Phys. Solids* Vol. 33, No. 3, pp. 215-226, (1985).
 - [20] CHEN, W. F., "Limit Analysis and Soil Plasticity", Elsevier, (1975).
 - [21] CLOUGH, R.W. & PENZIEN J., "Dynamics of structures", Mac Graw Hill, (1993).
 - [22] COLLINS, I. F. & CLIFFE P. F., "Shakedown in Frictional Materials Under Moving Surface Loads", *Int. J. for Num. and Analyt. Meth. in Geomechanics* 11, pp. 409-420, (1987).
 - [23] CORRADI, L. & MAIER, G., "Inadaptation theorems in the dynamics of elastic-workhardening structures", *Ing.-Archiv.*, 43, pp. 44-57, (1973).
 - [24] CORRADI, L. & MAIER G., "Dynamic Non-Shakedown for Elastic-Perfectly Plastic Continua", *J. Mech. Phys. Solids*, 22, pp. 401-413, (1974).
 - [25] CORRADI, L. & NOVA, R., "A comparative study of bounding techniques in dynamic shakedown of elastoplastic structures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol. 3, pp. 139-155, (1974).
 - [26] CORRADI, L. ZAVELANI, A., "A Linear Programming Approach to Shakedown of Structures", *Computer Methods in Appl. Mech. Eng.*, Vol. 3, pp. 37-53, (1974).
 - [27] DAFALIAS Y. F. & POPOV E. P., "A model of Nonlinearly Hardening Materials for Complex Loading", *Acta Mechanica* 21, 173-192, (1975).
 - [28] DAFALIAS, Y. F. & HERRMANN, L. R., "Bounding Surface Formulation of Soils Plasticity", In : Pande G. N. and Zienkiewicz, O. C. (eds), *Soils Under Cyclic and Transient Loading*, Balkema, Rotterdam, (1980).
-

-
- [29] **DEBORDES, O. & NAYROLES, B.**, "Sur la théorie et le calcul à l'adaptation des structures élastoplastiques", *J. Méc.*, 15, N°1, 1-53, (1976).
- [30] **DEBORDES, O.**, "Duality : Some results in asymptotical elastoplasticity," In: AUSLENDER A. (Ed.), *Convex analysis and its applications*, Springer, Berlin, 100-114, (1977).
- [31] **DEBORDES, O.**, "Adaptation des structures parfaitement plastiques," in : *Matériaux et Structures sous Chargement Cyclique*, Ass. Amicale des Ingénieurs Anciens Elèves de l'E.N.P.C., Paris, pp. 191-201, (1979).
- [32] **DE DONATO, O.**, "Second shakedown theorem allowing for cycles of both loads and temperature", *First Lombardo Scienza Lettere (A)*, 104, 265-277, (1970).
- [33] **DE SAXCE, G.**, "Sur quelques problèmes de mécanique des solides considérés comme matériaux à potentiels convexes", Thèse de doctorat, Coll. Pub. Fac. Sci. Appl., 118, Université de Liège, (1989).
- [34] **DOROSZ, S.**, "An upper bound to maximum residual deflections of elastic-plastic structures at shakedown", *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech.*, 24, 167-174, (1976).
- [35] **DRUCKER, D. C.**, "On the postulate of stability of material in the mechanics of continua," *J. Mech.*, 3, 235-249, (1964).
- [36] **FRAEIJIS, DE VEUBEKE, B.**, "Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method", in : O. Zienkiewicz, *Stress analysis ch.9* (Wiley, 1965).
- [37] **GALLAGHER, R. H. & DHALLA, A. K.**, "Direct Flexibility Finite Element Elastoplastic Analysis", Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A, (1975).
- [38] **GOKHFELD, D. A.**, "Some problems of shakedown of plates and shells," *Izd. Nauka, Moskwa*, 284-291, (1966).
- [39] **GOKHFELD, D. A. & CHERNIAVSKY, O. F.**, "Limit analysis of structures at thermal cycling," *Sijthoff and Noordhoff*, (1980).
- [40] **GROSS-WEEGE, J.**, "A unified formulation of statical shakedown criteria for geometrically nonlinear problems", *Int. J. Plast.*, 6, 433-447, (1990).
- [41] **GROSS-WEEGE, J. & WEICHERT, D.**, "Elastic-plastic shells under variable mechanical and thermal loads", *Int. J. Mech. Sci.*, 34, 863-880, (1992).
- [42] **HABIB, P. & LUONG, M. P.**, "Sols pulvérulents sous chargement cycliques", Séminaire Matériaux et Structures Sous Chargement Cycliques, 28-29 septembre 1978, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau.
-

-
- [43] **HACHEMI, A. & WEICHERT, D.**, "An extension of the static shakedown theorem to a certain class of inelastic materials with damage", *Arch. Mech.*, 44, 5, 491-498, (1992).
- [44] **HACHEMI, A.**, "Contribution à l'analyse de l'adaptation des structures inélastiques avec prise en compte de l'endommagement", Thèse de doctorat, Université de Lille1, (1994).
- [45] **HALPHEN, B. & NGUYEN, QUOC SON**, "Sur les matériaux standards généralisés", *J. Mec.*, 14, N° 1, 39-63, (1975).
- [46] **HALPHEN, B.**, "Accomodation et adaptation des structures élastoviscoplastiques et plastiques", in *Matériaux et Structures sous Chargement Cyclique*, Ass. Amicale des Ingénieurs Anciens Elèves de l'E.N.P.C., Paris, pp. 203-229, (1979).
- [47] **HALPHEN, B. & SALENCON, J.**, "Cours de calcul des structures anélastiques", Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (1987).
- [48] **HICHER, P. V.**, "Comportement mécanique des argiles saturées sur divers chemins de sollicitations monotones et cycliques - Application à une modélisation élastoplastique et viscoplastique", Thèse de Doctorat d'état, Universté Paris 6 (1985).
- [49] **HILL, R.**, "The mathematical theory of plasticity", Oxford eds., (1950).
- [50] **HWA-SHAN,-HO**, "Shakedown in elastic-plastic systems under dynamic loading", *Trans. ASME, Ser. E., J. Appl. Mech.*, 39, 416-421, (1972).
- [51] **IMBERT, J. F.**, "Analyse des structures par éléments finis", Cepadues, Toulouse, (1979).
- [52] **JOHNSON, K. L.**, "The application of shakedown principles in rolling and sliding contact", Presented at 1st European Congress of Applied Mechanics, Munich Sept. 1991.
- [53] **KAMENJARZH, J. & WEICHERT, D.**, "On kinematic upper bounds for the safety factor in shakedown theory", *Int. J. Plast.* 8, 827-837, (1992).
- [54] **KOITER, W. T.**, "Some remarks on plastic shakedown theorems", *Proc. 8th Int. Congr. Appl. Mech.*, n° 1, Istanbul, 220-230, (1952).
- [55] **KOITER, W. T.**, "A new general theorem on shakedown of elastic-plastic structures", *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wet. B59* (1956), 24 - 34.
- [56] **KOITER, W. T.**, "General theorems for elastic-plastic solids", In: *Progress in Solid Mechanics*, North Holland, Amsterdam, 167-220, (1960).
-

- [57] KÖNIG, J. A., "A shakedown theorem for temperature dependent elastic moduli", Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech., 17, 161-165, (1969).
 - [58] KÖNIG, J. A., "Quelques problèmes récents dans la théorie de l'adaptation", Symp. Franco-polonais Problèmes de Réologie et de Mécanique des sols, Nice (1974).
 - [59] KÖNIG, J. A., "On upper bounds to shakedown loads", Z. Angew. Math. Mech., 59, 349-354, (1979).
 - [60] KÖNIG, J. A., "On the incremental collapse criterion accounting for temperature dependence of the yield-point stress", Arch. Mech. Stos., 31, 317-325, (1979).
 - [61] KÖNIG, J. A., "On stability of the incremental collapse process", Arch. Inz. Lad., 26, 219-229, (1980).
 - [62] KÖNIG, J. A. & MAIER, G., "Shakedown analysis of elastoplastic structures, a review of recent developments", Nucl. Eng. Design., 66, 81-95, (1981).
 - [63] KÖNIG, J. A., "On some recent developments in the shakedown theory", Adv. Mech., 5, 237-258, (1982).
 - [64] KÖNIG, J. A., "Shakedown criteria in the case of loading and temperature variations", J. Méc. Théo. Appl., N° Spécial, 99-108, (1982).
 - [65] KÖNIG, J. A., "Stability of the incremental collapse", In: POLIZZOTTO C. & SAWCZUK A. (Ed.), Inelastic Structures. under variable. loads, Palerme, 329-344, (1984).
 - [66] KÖNIG, J. A., "Shakedown of elastic-plastic structures", Elsevier, Amsterdam (1987).
 - [67] KÖNIG, J. A. & SIEMASZKO. A. "Strainhardening effects in shakedown process", Ing.-Archiv., 58, 58-66, (1988).
 - [68] LEERS, K., KLIE, W., KÖNIG, J. A. & MAHREHOLTZ O., "Experimental investigations on shakedown of tubes", In: SAWCZUK A. & BIANCHI G. (eds.), Plasticity Today, Elsevier, London, 259-275, (1985).
 - [69] LEMAITRE, J. & CHABOCHE, J. L., "Mécanique des matériaux solides", Dunod, Paris, (1985).
 - [70] LUONG, M. P., "Phénomènes cycliques dans les sols pulvérulents", Revue Française de Géotechnique, Vol. 10, pp. 39-53, (1980).
 - [71] LUONG, M. P., "Etat caractéristique du sol", C.R. Ac. Sc., Paris, t. 287, série B, 305 (1978).
-

- [72] LUONG, M. P., "Comportements cycliques des sols pulvérulents", C.R. Ac. Sc., Paris, t. 287, série B, 313 (1978).
- [73] LUONG, M. P., "Les phénomènes cycliques dans les sables", Journées de Rhéologie 1979, E. N. T. P. E., Vaulx-en-Velin, 25 avril (1979).
- [74] LUONG, M. P., "Aspects rhéologiques des sols sous sollicitations cycliques et transitoires", Séminaire Effets Cycliques et Transitoires dans les Structures, St-Rémy-lès-Chevreuse, 23-25 octobre (1979).
- [75] LUONG, M. P., "Stress-strain aspects of cohesionless soils under cyclic and transient loading", In: Symp. Swansea, Wales, January (1980).
- [76] MAIER, G., "Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and non-associated flow-laws", *Meccanica*, 6, 250-260, (1969).
- [77] MAIER, G., "Shakedown of plastic structures with unstable parts", *Proc. ASCE, J. M. the Eng. Mech. Division*, Vol. 98, N. EM5, 1322-1333, Oct. (1972).
- [78] MAIER, G., "A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric effects," In: SAWCZUK A. (Ed.), *Proc. Symp. Foundations of Plasticity*, Warsaw, 417-433, (1972).
- [79] MAIER, G., "Upper bounds on deformations of elastic-workhardening structures in the presence of dynamic and second-order geometric effects", *J. Struct. Mech.*, 2(4), 265-280, (1973).
- [80] MAIER, G. & LLOYD SMITH, D., "Update to mathematical programming: Application to engineering plastic analysis", In: STEELE C.R. & SPRINGER G.S. (eds.), *ASME*, New York, 377-383, (1986).
- [81] MAIER, G. & NOVATI, G., "Dynamic shakedown and bounding theory for a class of nonlinear hardening discrete structural models", *Int. J. of Plasticity*, Vol. 6, pp. 551-572, (1990).
- [82] MANDEL, J., "Adaptation d'une structure plastique écouissable", *Mech. Res. Comm.*, 3, 483-488, (1976).
- [83] MANDEL, J., ZARKA, J. & HALPHEN, B., "Adaptation d'une structure élastoplastique à écouissage cinématique", *Mech. Res. Comm.*, 4, 309-314, (1977).
- [84] MARTIN, J. B., "Plasticity: Fundamentals and general results", MIT Press, Cambridge (MA), (1975).

-
- [85] MELAN, E., "Theorie statisch unbestimmter Tragwerke aus ideal-plastischem Baustoff", Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften (Wien) Abt. IIA, 145, 195-218, (1936).
- [86] MELAN, E., "Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums", Ing. Arch., 8, 116-126, (1938).
- [87] MORELLE, P. & NGUYEN DANG HUNG, "Etude numérique de l'adaptation plastique des plaques et coques de révolution par les éléments finis d'équilibre", J. Méc. Théor. Appl., 2, 567-599, (1983).
- [88] MORELLE, P., "Structural shakedown analysis by dual finite-element formulations," Eng. Struct., 6, 70-79, (1984).
- [89] MROZ, Z., "On the Description of anisotropic Work Hardening", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 15, pp. 163-175, 1967.
- [90] MROZ, Z., "On the theory of steady plastic cycles in structures", First SMiRT Conf., Berlin, Paper L5/6, (1971).
- [91] MROZ, Z. NORRIS, V. A. & ZIENKIEWICZ O. C., "An Anisotropic Hardening Model for Soils and its Application to Cyclic Loading", In. J. Num. Anal. Meth. Geomech. Vol. 2, pp. 203-221, (1978).
- [92] MROZ, Z. NORRIS, V. A. & ZIENKIEWICZ O. C., "Application of anisotropic hardening model in the analysis of elasto-plastic deformation of soils", Géotechnique 29, No. 1, 1-34, 1979.
- [93] MROZ, Z. NORRIS, V. A. & ZIENKIEWICZ O. C., "An anisotropic critical state model for soils subject to cyclic loading", Géotechnique 31, No. 4, 451-469, 1981.
- [94] NAVIDI-KASMAI, P., "Analyse Dynamique Simplifiée des Structures Inélastiques", Thèse de Doctorat, E.N.P.C. (1985).
- [95] NAYROLES, B. & WEICHERT, D., "La notion de sanctuaire d'élasticité et l'adaptation des structures", C. R. Acad. Sci., t. 316, Série II, Paris, 1493-1498, (1993).
- [96] NEAL, B. G., "Plastic collapse and shake-down theorems for structures of strain-hardening material," J. Aero. Sci., 17, 297-306, (1950).
- [97] NGUYEN, DANG HUNG & KÖNIG, J. A., "A finite element formulation for shakedown problems using a yield criterion of the mean", Comp. Math. Appl. Mech. Eng., 8, 179-192, (1976).
-

-
- [98] **PALGEN, L. & NGUYEN, D.H.**, "Shakedown analysis by displacement method and equilibrium finite elements", Transactions of the CSME, Vol. 6, No. 1, pp. 34-40, 1980-1981.
- [99] **PANDE, G. N.**, "Shakedown of foundation subjected to cyclic loads," In : Pande G. N. and Zienkiewicz, O. C. (eds.), Soils Under Cyclic and Transient Loading, Balkema, Rotterdam, (1980).
- [100] **PECKER, A.**, "Dynamique des sols", Presses de l'école nationale des ponts et chaussées (1984).
- [101] **POOROOSHASB, H. B., HOBULEC, I. & SHERBOURNE, A.N.**, "Yielding and flow of sand in triaxial compression", Canadian Geotechnical Journal, vol. 3, N° 4, pp. 179-190, Nov., 1966.
- [102] **PERZYNA, P.**, "Constitutive modelling of dissipative solids for postcritical behaviour and fracture", ASME, J. Eng. Mat. Techn., 106, 410-419, (1984).
- [103] **PIERRE, D. A. & LOWE, M. J.**, "Mathematical programming via augmented Lagrangians", London, Addison-Wesley, (1975).
- [104] **PONTER, A. R. S.**, "An Upper Bound on the Small Displacements of Elastic Plastic, Perfectly Plastic Structures", Journal of Appl. Mech. 39 pp. 959-963, (1972).
- [105] **PONTER, A. R. S.**, "A general shakedown theorem for elastic-plastic bodies with workhardening", Proc. SMIRT-3, paper L5/2, (1975).
- [106] **PONTER, A. R. S., HEARLE, A. D. & JOHNSON, K. L.**, "Application of the Kinematical shakedown theorem to rolling and sliding point contacts", J. Mech. Phys. Solids, 33, pp. 339-362, (1985).
- [107] **POLIZZOTTO, C.**, "On work-hardening adaptation of discrete structures under dynamic loading", Arch. Mech., 32, 1, pp. 81-99, Warszawa (1980).
- [108] **POLIZZOTTO, C.**, "A local bounding principle for dissipation energy in shakedown of elastic-perfectly plastic solids", Int. J. Solids Structures Vol. 16, pp. 253-263, (1980).
- [109] **POLIZZOTTO, C.**, "A unified treatment of shakedown theory and related bounding techniques", S.M. Archives, 7, 19-75, (1982).
- [110] **POLIZZOTTO, C.**, "Dynamic shakedown of elastic-plastic solids for a set of alternative loading histories", Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 19, No. 4, pp. 363-371, (1984).
-

-
- [111] **POLIZZOTTO, C.**, "Dynamic Shakedown By modal Analysis", Journal of the Italian Association of Theoretical and Applied Mechanics AIMETA Vol. 19, No. 2, (1984).
- [112] **POLIZZOTTO, C.**, "A bounding technique for dynamic plastic deformations of damaged structures", Nuclear Engrg. Design, 79, 365-376, (1984).
- [113] **POLIZZOTTO, C.**, "A convergent bounding principle for a class of elasto-plastic strain-hardening solids", Int. J. Plasticity, 2, 359-370, (1986).
- [114] **POLIZZOTTO, C., BORINO, G., CADDEMI, S. & FUSCHI, P.**, "Shakedown problems for material models with internal variables", Eur. J. Mech., A. Solids, 6, 621-639, (1991).
- [115] **POLIZZOTTO, C., BORINO, G., CADDEMI, S. & FUSCHI, P.**, "Theorems of restricted dynamic shakedown", Int. J. Mech., 35, n. 9, 787-801, (1993).
- [116] **POLIZZOTTO, C.**, "On the conditions to prevent plastic shakedown : part I-theory ; part II-the plastic shakedown limit load", Transactions of ASME, J. Appl. Mech., 60, 15-25, (1993).
- [117] **PREVOST, J. H.**, "Mathematical Modelling of Monotonic and Cyclic Undrained Clay Behaviour", Int. J. Num. Mech. Geom. Vol. 1, No. 2, pp. 195-216, (1977).
- [118] **PREVOST, J. H.**, "Anisotropic Undrained Stress-Strain Behaviour of Clay", J. Geotech. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 104, No. EM5, pp. 1075-1090, (1978).
- [119] **PREVOST, J. H.**, "Plasticity Theory for Soil Stress-Strain Behaviour", J. Eng. Mech. Div. ASCE, Vol. 104, No. EM5, pp. 1077-1094, (1978).
- [120] **PREVOST, J. H.**, "Two-Surface vs. Multi-Surface Plasticity Theories", Int. J. Num. Meth Geom. Vol. 6, pp. 323-338, (1982).
- [121] **PRAGER, W.**, "Shakedown in elastic-plastic media subjected to cycles of load and temperature", Symp. Plasticita Nella Scienza Della Construzioni, 239-244, (1956).
- [122] **PRAGER, W.**, "An introduction to plasticity", Addison-Wesley, London, (1959).
- [123] **PANDE, G. N. & ABDULLAH, W. S.**, "Shakedown of elastic-plastic continua with special reference to soil-rock structures", Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading, Swansea, pp. 739-746, (1980).
- [124] **PYCKO, S. & MROZ, Z.**, "Alternative approach to shakedown as a solution of a min-max problem", Acta Mechanica, 93, 202-222, (1992).
- [125] **ROZENBLUM, V. I.**, "On shakedown of uneven heated elastic-plastic bodies", Izv. Akad. Nauk. SSSR. Otn. Mekh. Mash., 7, 136-138, (1957).
-

-
- [126] ROZENBLUM, V. I., "On shakedown analysis of uneven heated elastic-plastic bodies", *Prikl. Mat. Tkh. Fiz.*, 7, 98-101, (1965)
- [127] RAAD, L WEICHERT, D & NAJIM, W., "Stability of multilayer systems under repeated loads", In. *Transportation Research Record*, 1207, TRB, National Research Council, Washington, D. C, pp. 181-186, (1988).
- [128] RAAD, L WEICHERT, D & HAIDAR, A., "Shakedown and fatigue of pavements with granular bases", In. *Transportation Research Record*, 1227, Washington, D.C, (1989).
- [129] RAAD, L WEICHERT, D & HAIDAR, A., "Analysis of full-depth asphalt concrete pavement using shakedown theory", In. *Transportation Research Record*, 1227, Washington, D.C, pp. 53-65, (1989).
- [130] ROSCOE, J. & BURLAND, B., "Stress-strain behaviour of wet clay engineering plasticity", Ed. Heyman J. et Leckie F. A., Cambridge, 1968.
- [131] ROWE, P W., "The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact", *Proc. R. Soc. séries A*, 269, pp. 500-527 1961.
- [132] ROSENBLUETH, E. & HERRERA, I., "On a kind of hysteritic damping", *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, VOL. 90, No. EM4, (1964).
- [133] SALENCON, J., "Viscoélasticité", Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (1983).
- [134] SCHOFIELD, A. N. & WROTH, C. P., *Critical state soil mechanics*. Mac Graw Hill, G. (1968).
- [135] SACZUK, J. & STUMPF, H., "On statical shakedown theorems for non-linear problems", Ruhr- Universität Bochum, IfM-Report N° 67, (1990).
- [136] SAWCZUK, A., "Evaluation of upper bounds to shakedown loads for shells", *J. Mech. Phys. Solids*, 17, 291-301, (1969).
- [137] SAWCZUK, A., "Shakedown analysis of elastic-plastic structures", *Nucl. Eng. Design*, 28, 121-136, (1974).
- [138] SIDANER J. F., "Comportement cyclique et transitoire des milieux pulvérulents", Thèse Dr. Ingénieur, E.N.P.C., Paris, (1981).
- [139] STEIN, E., ZHANG, G. & KÖNIG, J. A., "Micromechanical modelling and computation of shakedown with nonlinear kinematic hardening including examples for 2-D problems," In: AXELRAD D.R. & MUSCHIK W. (Eds.), *Recent Developments of micromechanics*, Springer-Verlag, Berlin, (1990).
-

- [140] SYMONDS, P. S., "Shakedown in continuous media", *Trans. ASME, Ser. E., J., Appl. Mech.* 18, 85-89, (1951).
- [141] SHARP, R. W., & BOOKER, J. R., "Shakedown of Pavements under moving surface loads", *Journal of Transportation Engineering*, Vol. 110, No. 1 January, 1984.
- [142] TRITSCH, J. B., "Analyse d'adaptation des structures élasto-plastiques avec prise en compte des effets géométriques", Thèse de doctorat, Université de Lille1, (1993).
- [143] WATWOOD, V. B. & HARTZ, B. J., "An equilibrium stress field model for finite element solutions of two-dimensional elastostatic problems", *Int. J. Solid Structures*, Vol. 4, pp. 857-873, (1968).
- [144] WEICHERT, D., "On the influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of elastic-plastic structures", *Int. J. Plast.*, 2, 135-148, (1986).
- [145] WEICHERT, D. & GROSS-WEEGE, J., "The numerical assessment of elastic-plastic sheets under variable mechanical and thermal loads using a simplified two-surface yield condition", *Int. J. Mech. Sci.*, 30, 757-767, (1988).
- [146] WEICHERT, D., "Advances in the geometrically nonlinear shakedown theory", In KLEIBER M. & KÖNIG J.A. (eds.), *Inelastic Solids and Structures*, Pineridge Press, Swansea, U.K., 489-502, (1990).
- [147] WEICHERT, D. & RAAD, L., "Extension of the static shakedown-theorem to a certain class of materials with variable elastic coefficients", *Mech. Res. Comm.*, 19, 511-519, (1992).
- [148] WOOD, D. M., "Laboratory investigation of the behaviour of soils under cyclic loading", In Pande, G. N. and Zienkiewicz, O. C. (eds.), *Soils Under Cyclic and Transient Loading*, Balkema, Rotterdam, (1980).
- [149] ZARKA, J. & CASIER, J., "Elastic-plastic response of structure to cyclic loading: Practical rules", In: NEMAT-NASSER S. (Ed.), *Mech. Today*, 6, Pergamon, Oxford, (1981).
- [150] ZARKA, J., FRELAT, J., INGLEBERT, G. & KASMAI-NAVIDI, P., "A new approach in inelastic analysis of structures", *Martinus Nijhoff Pub.*, Dordrecht/Boston/Lancaster, (1990).

ANNEXES

ANNEXE A

A.1. Matériau Viscoélastique linéaire

Un matériau viscoélastique, appelé parfois matériau avec mémoire, est un matériau dont le comportement dépend non seulement du chargement actuel, mais aussi de l'histoire de chargement. Comme son nom l'indique, viscoélasticité est une généralisation de l'élasticité et de la viscosité. L'élément élastique est modélisé par un ressort élastique linéaire, l'élément visqueux par un amortisseur. C'est pourquoi, un modèle viscoélastique est une combinaison d'un ressort linéaire et d'un amortisseur. Si les deux éléments sont placés en série, il est connu comme le modèle de MAXWELL, par contre s'ils sont placés en parallèle il est connu comme le modèle de VOIGT. Dans ce qui suit on présente brièvement le modèle standard linéaire.

A.2. Modèle Standard Linéaire

Un modèle standard linéaire est représenté sur la figure A.1. C'est une combinaison du modèle de MAXWELL et d'un ressort linéaire placés en parallèle.

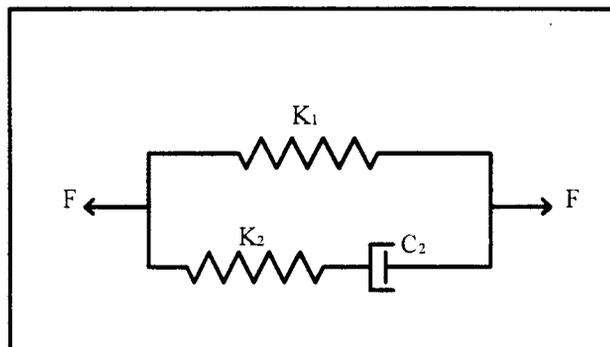


Figure A.1. - Modèle standard linéaire -

L'équation différentielle du modèle peut être dérivée comme suit. A partir de l'équation d'équilibre, on déduit que :

$$F = F_1 + F_2 \quad (\text{A.1})$$

où, F_1 est la force dans le ressort et F_2 la force dans le modèle de MAXWELL. Etant donné que les déformations sont les mêmes dans le ressort et dans l'élément de MAXWELL, on aura alors les relations suivantes :

$$U = \frac{F_1}{K_1} \quad (\text{A.2})$$

pour le ressort et

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{K_2} \frac{dF_2}{dt} + \frac{F_2}{C_2} = \frac{1}{K_2} \left(\frac{dF}{dt} - K_1 \frac{dU}{dt} \right) + \frac{1}{C_2} (F - K_1 U) \quad (\text{A.3})$$

pour le modèle de MAXWELL. En réarrangeant les termes l'équation (A.3) devient :

$$\frac{dF}{dt} + \frac{K_2}{C_2} F = (K_1 + K_2) \frac{dU}{dt} + \frac{K_1 K_2}{C_2} U \quad (\text{A.4})$$

qui est la relation force-déplacement sous forme différentielle du modèle standard linéaire.

L'équation (A.4) peut être aussi interprétée en terme de contrainte-déformation d'expression :

$$\sigma + a \frac{d\sigma}{dt} = E \left(\varepsilon + b \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \quad (\text{A.5})$$

On identifie la contrainte à la force et la déformation au déplacement. Les constantes a et b peuvent être reliées aux constantes du ressort et du dashpot par une simple comparaison.

La description sommaire d'un modèle viscoélastique donnée ci-dessus ne se veut pas générale. Pour une étude plus complète on pourra se reporter à SALENCON [123] (1980).

Le modèle de MAXWELL et le modèle de VOIGT sont les modèles de base pour décrire le comportement rhéologique de la plupart des matériaux viscoélastiques.

A.3. Equations constitutives en utilisant les modules complexes

Parmi toutes les relations utilisées pour décrire le comportement rhéologique des matériaux viscoélastiques, la plus couramment utilisée est, peut être, la représentation par les modules complexes. En utilisant cette représentation, les équations constitutives devront être exprimées dans le domaine fréquentiel. Pour démontrer cette affirmation retournons à l'équation (A.5). Si on applique des contraintes et des déformations harmoniques de la forme $\sigma = \sigma_0 \exp(j\omega t)$ et $\varepsilon = \varepsilon_0 \exp(j\omega t)$, alors de l'équation (A.5) entraîne la relation suivante :

$$\sigma_0 = E \varepsilon_0 \left[\frac{1 + j \omega b}{1 + j \omega a} \right] \quad (\text{A.6})$$

En notation complexe l'équation (A.6) se transforme en :

$$\sigma = E^*(\omega) \varepsilon = (E_1(\omega) + jE_2(\omega)) \varepsilon \quad (\text{A.7})$$

où,

$$E_1 = \left[\frac{1 + \omega^2 a b}{1 + \omega^2 a^2} \right] E \quad (\text{A.8})$$

$$E_2 = \left[\frac{\omega (b - a)}{1 + \omega^2 a^2} \right] E \quad (\text{A.9})$$

$$E = \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \varepsilon_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

L'équation (A.7) représente la relation contrainte-déformation sous forme complexe pour le cas unidimensionnel. Il est visible à partir des équations (A.8) et (A.9) que les composantes du module complexe E_1 et E_2 dépendent de la fréquence, elles sont définies donc dans le domaine fréquentiel. Dans ce cas l'équation du mouvement est aussi définie dans le domaine fréquentiel. Pour retourner au domaine temporel on doit utiliser la transformée de Fourier. Il en est de même pour le facteur de perte qui est par définition égal au rapport de l'énergie dissipée D au cours d'un cycle à 2π fois l'énergie élastique emmagasinée :

$$\eta = \frac{D}{2\pi U} \quad (\text{A.11})$$

qui est aussi égale :

$$\eta = \frac{E_2}{E_1} \quad (\text{A.12})$$

Si le facteur de perte est indépendant de la fréquence, l'amortissement est dit hystéritique, c'est le cas des sols.

A.4. Boucle d'Hystérisis d'un Matériau Viscoélastique

La relation de contrainte-déformation pour un matériau viscoélastique sous un chargement cyclique est une ellipse dans le plan σ - ε . Ceci peut être vérifié à partir de l'équation (A.7),

$$\sigma = (E_1 + jE_2) \varepsilon = E_1 \varepsilon + \frac{E_2}{|\omega|} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{A.13})$$

étant donné que $j|\omega|\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{dt}$ pour un mouvement harmonique. Il est à noter que l'utilisation de la valeur absolue $|\omega|$ est nécessaire étant donné que le signe du second terme de

l'équation (A.13) doit être positif. Autrement une valeur négative de ω conduit à une valeur négative de E_2 . En substituant $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$ dans l'équation (A.13), il résulte :

$$\sigma = E_1 \varepsilon_0 \sin \omega t + \frac{E_2}{|\omega|} \varepsilon_0 \omega \cos \omega t \quad (\text{A.14})$$

$$\sigma = E_1 \varepsilon \pm E_2 [(\varepsilon_0^2 - \varepsilon^2)]^{1/2} \quad (\text{A.15})$$

L'équation (A.15) représente une ellipse dans le plan σ - ε .

L'énergie spécifique dissipée par cycle de vibration peut être calculée à partir de l'expression :

$$D = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma d\varepsilon = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right) dt \quad (\text{A.16})$$

En utilisant la relation (A.14), l'équation (A.16) devient :

$$\begin{aligned} D &= \int_0^{2\pi/\omega} (E_1 \varepsilon_0 \sin \omega t + E_2 \varepsilon_0 \cos \omega t) \omega \varepsilon_0 \cos \omega t dt \\ D &= E_2 \omega \varepsilon_0^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt = \pi E_2 \varepsilon_0^2 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

L'énergie élastique emmagasinée peut être évaluée en terme de l'amplitude de la déformation :

$$U = \frac{1}{2} E_1 \varepsilon_0^2 \quad (\text{A.18})$$

Par substitution des équations (A.17) et (A.18) dans l'équation (A.11) on obtient :

$$\eta = \frac{D}{2\pi U} = \frac{E_2}{E_1} \quad (\text{A.19})$$

ANNEXE B

Nous présentons dans cette partie l'algorithme d'optimisation, développé par PIERRE & LOWE [101] (1975) et utilisé dans notre étude. Cet algorithme est basé sur les techniques fondamentales suivantes :

- la technique des multiplicateurs de Lagrange, qui permet de transformer le problème d'optimisation avec contraintes en un problème sans contraintes,
- les conditions de Kuhn-Tucker, qui permettent de vérifier si un point proposé est effectivement un point optimal,
- la technique de descente (Line search), qui permet de trouver la plus grande pente.

Le problème d'optimisation consiste à trouver le point optimal x^* , qui maximise la fonction objective f . Il peut être énoncé comme suit :

Trouver

$$f(x^*) = \max_x f(x) \quad (\text{B.1})$$

sous les contraintes

$$p_i(x) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 < n \quad (\text{B.2a})$$

$$q_j(x) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m_2 \quad (\text{B.2b})$$

et tel que

$$c_k < x_k < d_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{B.2c})$$

où, le vecteur $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ est un élément de l'espace Euclidien à n dimensions $x \in E^n$. Les a_i , b_j , c_k et d_k sont des constantes réelles. La fonction objective f et les contraintes p_i et q_j peuvent être des fonctions linéaires ou non-linéaires.

Le problème peut être transformé en utilisant la fonction de Lagrange, définie par :

$$L(x, \alpha, \beta) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i (a_i - p_i) + \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j (b_j - q_j) \quad (\text{B.3})$$

où α_i et β_j sont respectivement, les vecteurs multiplicateurs de Lagrange de dimension m_1 et m_2 .

Le gradient de L en par rapport à x , s'exprime par :

$$\nabla_x L = \nabla_x f - \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i \nabla_x p_i - \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \nabla_x q_j. \quad (\text{B.4})$$

Au point optimal x^* , le développement en série de Taylor de chaque terme de contrainte d'inégalité $q_j(x)$, s'exprime par :

$$q_j(x^* + \Delta x) = q_j^* + \Delta x \nabla_x q_j^* + \dots, \quad j \in S_a \quad (\text{B.5})$$

où

$$S_a = \{j \mid q_j^* = b_j\} \quad (\text{B.6a})$$

et

$$q_j(x^* + \Delta x) \leq b_j \quad \forall j. \quad (\text{B.6b})$$

Des équations (B.5) et (B.6), Δx doit satisfaire :

$$\Delta x \nabla q_j^* \leq 0, \quad j \in S_a. \quad (\text{B.7})$$

De même, au voisinage de x^* :

$$p_i^* = a_i \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{B.8a})$$

et

$$p_i(x^* + \Delta x) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1. \quad (\text{B.8b})$$

Le développement en série de Taylor de $p_i(x^* + \Delta x)$, s'exprime par :

$$p_i(x^* + \Delta x) = p_i^* + \Delta x \nabla_x p_i^* + \dots \quad (\text{B.9})$$

et en se basant sur les équations (B.8), cette série donne, en tenant compte du terme de premier ordre :

$$\Delta x \nabla_x p_i^* = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1. \quad (\text{B.10})$$

D'une manière équivalente, les deux inégalités :

$$\Delta x \nabla_x p_i^* \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{B.11a})$$

et

$$-\Delta x \nabla_x p_i^* \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{B.11b})$$

sont les conditions pour lesquelles Δx admissible est satisfait.

En se limitant aux termes en Δx , f^* est optimale si :

$$f(x^* + \Delta x) - f^* \approx \Delta x \nabla_x f^* \leq 0 \quad (\text{B.12})$$

pour tout Δx suffisamment petit et satisfaisant les équations (B.6b) et (B.8b).

Dans ce qui suit, on développe le Lagrangien Augmenté $L_a(x, \alpha, \beta, w)$ en additionnant les termes de pénalité à L , avec w comme ensemble de facteurs de pondération. L_a est développé afin d'obtenir une relation directe entre un maximum local

sous contraintes de $f(x)$ et un maximum local sans contraintes de $L_a(x, \alpha^*, \beta^*, w)$ en respectant x .

Le Lagrangien Augmenté est exprimé par :

$$L_a = L - w_1 P_1 - w_2 P_2 - w_3 P_3 \quad (\text{B.13})$$

où, L est le Lagrangien de l'équation (B.3) et $w = [w_1, w_2, w_3]$ est l'ensemble de facteurs de pondération ($w_i > 0$), avec :

$$P_1 = \sum_{i=1}^{m_1} (a_i - p_i)^2 \quad (\text{B.14a})$$

$$P_2 = \sum_{j \in C_a} (b_j - q_j)^2, \quad C_a = \{j \mid \beta_j > 0\} \quad (\text{B.14b})$$

et

$$P_3 = \sum_{j \in C_b} (b_j - q_j)^2, \quad C_b = \{j \mid \beta_j = 0 \text{ et } q_j \geq b_j\}. \quad (\text{B.14c})$$

Le gradient du Lagrangien Augmenté (L_a), en respectant x , est exprimé par :

$$\nabla_x L_a = \nabla_x f - \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i^+ \nabla_x p_i - \sum_{j \in C_a} \beta_j^+ \nabla_x q_j + \sum_{j \in C_b} 2 w_3 (b_j - q_j) \nabla_x q_j \quad (\text{B.15})$$

où

$$\alpha_i^+ = \alpha_i - 2 w_1 (a_i - p_i) \quad (\text{B.16a})$$

et

$$\beta_j^+ = \beta_j - 2 w_2 (b_j - q_j). \quad (\text{B.16b})$$

Si $L_a(x^*, \alpha^*, \beta^*, w)$ est un maximum local pour le problème sans contraintes, en respectant x , pour les valeurs finis de $w_i > 0$, alors $f(x^*)$ est un maximum local pour le problème avec contraintes de $f(x)$, tel que $(x^*, \alpha^*, \beta^*, w)$ satisfait les conditions de Kuhn-Tucker :

$$p_i(x^*) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1 \quad (\text{B.17a})$$

$$q_j(x^*) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m_2 \quad (\text{B.17b})$$

$$\beta_j^* (b_j - q_j(x^*)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_2 \quad (\text{B.17c})$$

$$\beta_j^* \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_2 \quad (\text{B.17d})$$

et

$$\nabla_x L_a(x^*, \alpha^*, \beta^*, w) = 0. \quad (\text{B.17e})$$

La recherche du point maximal est basée sur la technique de "line search", exprimée par :

$$x^{k+1} = x^k + \rho r^k \quad (\text{B.18})$$

avec

$$r^k = H^k g^k \quad (\text{B.19})$$

où, x^{k+1} est la nouvelle valeur de x obtenue pour une variation de ρ selon la direction $H^k g^k$. H^k est une matrice de dimension $n \times n$, g^k est le gradient de L_a , calculé en x^k et ρ est un scalaire positif.

L'idée de base de la technique de descente "line search" est de choisir une direction de descente r^k en x^k à chaque itération, de telle façon qu'à l'itération suivante, on choisisse un point x^{k+1} diminuant $f(x)$, (voir Fig. B.1), c'est-à-dire qu'il faut :

– choisir r^k pour lequel, $\nabla_x f(x^k) r^k < 0$, $r^k > 0$,

– choisir $x^{k+1} = x^k + \rho r^k$,

de sorte que $f(x^{k+1}) < f(x^k)$.

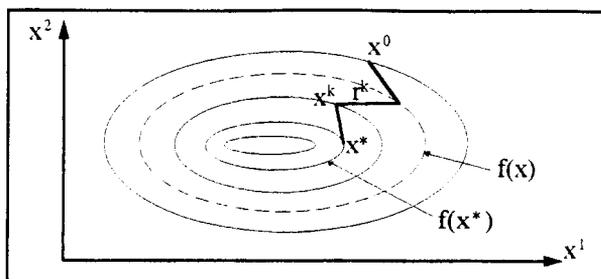


Fig. B.1 - Technique de descente -

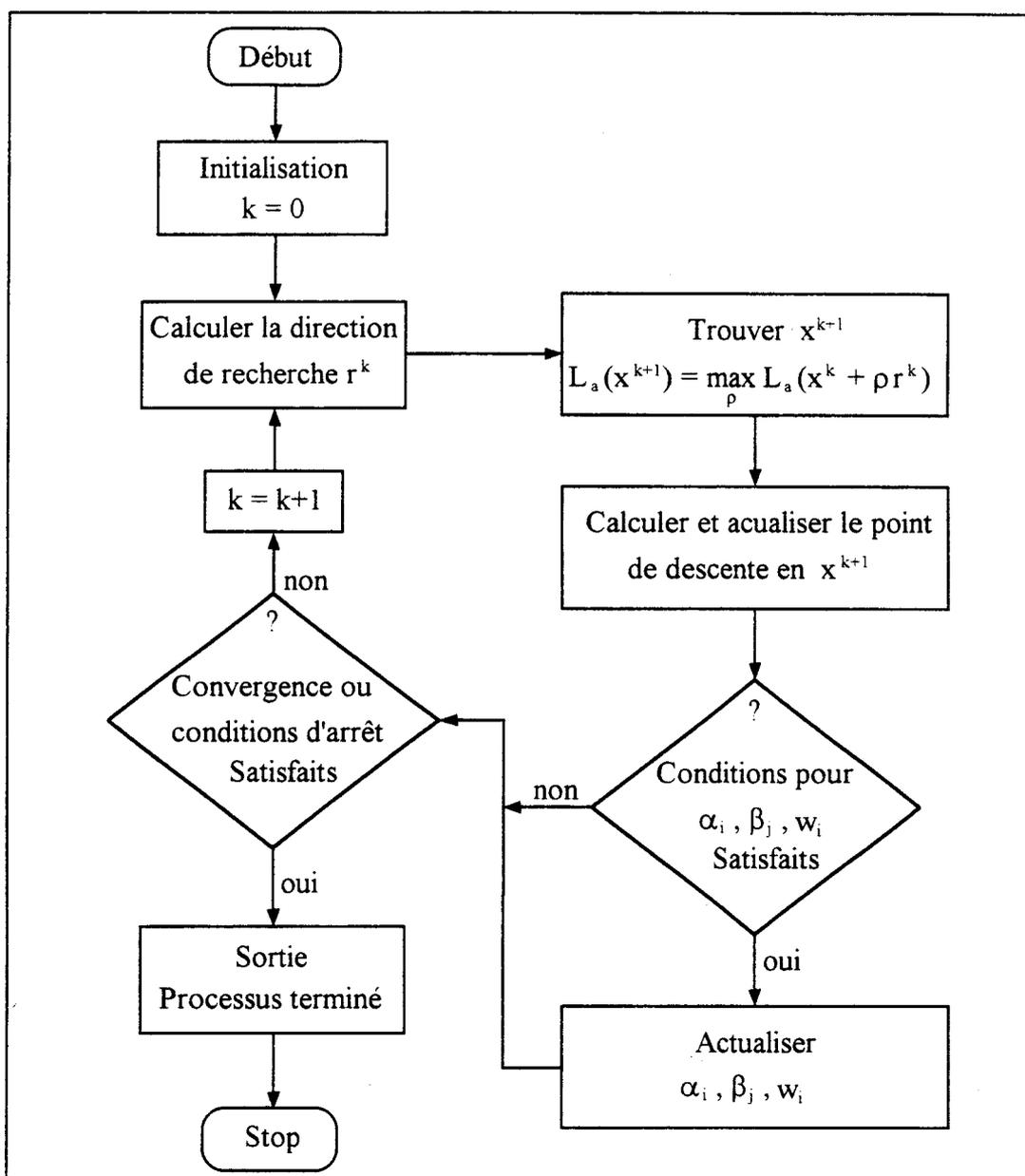


Fig. B.2 - Algorithme de recherche du point optimal -



RESUME

Dans cette étude, nous présentons une extension du théorème d'adaptation aux cas des géomatériaux sous sollicitations dynamiques. Le comportement du sol sous de telles sollicitations est fortement non-linéaire et présente un caractère dissipatif qui n'existe pas dans un milieu élastique; ces caractéristiques doivent être prises en compte pour obtenir des solutions raisonnables.

L'effet de l'érouissage (cinématique linéaire et isotrope) est pris en compte par l'utilisation du concept des matériaux standards généralisés. Le caractère dissipatif est représenté par l'introduction d'une matrice de rigidité complexe. L'amortissement est introduit dans la loi de comportement et conduit aux mêmes solutions formelles que la loi d'élasticité linéaire.

Les modules complexes sont définis uniquement pour une excitation harmonique, mais une classe très large d'excitation peut être décomposée en une somme de fonctions harmoniques par l'application de la transformée de Fourier. D'où la généralisation de l'approche par modules complexes à l'étude des systèmes soumis à une excitation quelconque.

L'introduction d'une matrice de rigidité complexe permet de tenir compte de l'amortissement mais pas des non-linéarités physiques, ces dernières sont prises en compte à travers le concept de l'adaptation lui-même.

L'approche développée est appliquée pour l'étude du comportement des chaussées sous sollicitations de type impulsif. La procédure numérique pour l'étude de l'adaptation plastique est basée sur le couplage de la méthode des éléments finis avec la programmation mathématique non-linéaire qui donne ainsi le facteur de sécurité contre la défaillance.

MOTS CLES : Adaptation – Analyse Limite – Elastoplasticité – Viscoélasticité – Eléments finis – Optimisation – Lois de comportement complexes – Dynamique des sols – Mécanique des chaussées.