

N° d'ordre : 2114

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

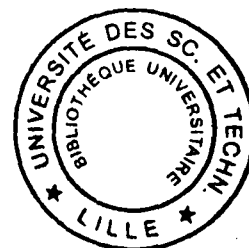
pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

par

Rodolphe PAUL



Conorme essentielle : Relèvement et continuité

Soutenue le 28 Novembre 1997 devant la Commission d'Examen :

Président : G. CŒURÉ, Université de Lille I

Rapporteurs : J.Ph. LABROUSSE, Université de Nice

J. ZEMÀNEK, Institut de Mathématiques
de l'Académie Polonaise (Varsovie)

Examineurs : M. MBEKHTA, Université de Lille I

F.H. VASILESCU, Université de Lille I

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance au Professeur M. MBEKITA qui a proposé et dirigé ce travail. Je le remercie pour toute sa compétence et pour toute la patience et toutes les qualités humaines dont il a toujours fait preuve.

Je remercie également Monsieur G. CŒURÉ qui me fait l'honneur de présider le jury de thèse.

Mes remerciements vont également à Messieurs J.Ph. LABROUSSE et J. ZEMANEK pour la lecture attentive de mon travail et toutes les suggestions et remarques qu'ils m'ont faites.

J'exprime aussi toute ma gratitude à Monsieur F. VASILESCU qui a bien voulu accepter de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie l'équipe de reprographie et le secrétariat scientifique pour la gentillesse et la disponibilité dont ils ont toujours fait preuve.

Merci également à tous mes amis mathématiciens ou non pour leur soutien avec une mention spéciale pour Monsieur F. HAN spécialiste incontesté du LaTeX.

Table des matières

1	INTRODUCTION	2
1.1	Motivations	2
1.2	Plan avec contenu détaillé	7
2	CONORME DANS LES ESPACES DE BANACH ET DE HILBERT	11
2.1	Quelques propriétés de la conorme dans un espace de Banach . . .	11
2.2	Opérateurs Fredholm et semi-Fredholm	12
2.3	Relèvement d'opérateurs particuliers de $B(H)$	17
3	CONORME DANS LES C^* ALGEBRES	22
3.1	Inverse généralisé dans les C^* algèbres	22
3.2	Conorme dans les C^* algèbres	24
4	CONORME ESSENTIELLE	29
4.1	Définition et propriétés	29
4.2	Relèvement de la conorme	31
4.3	Applications du relèvement de la conorme	37
4.4	Quelques résultats concernant $\gamma(T)$, $\gamma_\infty(T)$ et $\gamma_e(T)$	39
4.5	Exemples	40
5	CONTINUITE DE LA CONORME ESSENTIELLE	42
5.1	Relèvement de la conorme et opérateurs semi-Fredholm	42
5.2	Points de continuité de la conorme essentielle	44
	BIBLIOGRAPHIE	46

1 INTRODUCTION

NOTATIONS : Dans la suite , X désignera un espace de Banach, $B(X)$ l'algèbre des opérateurs bornés de X dans X et $K(X)$ l'idéal des opérateurs compacts de $B(X)$.

H désignera un espace de Hilbert.

Pour $T \in B(X)$, on notera respectivement:

$N(T)$, $R(T)$ et $\sigma(T)$ le noyau, l'image et le spectre de T .

On notera $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$, l'ensemble résolvant de T .

1.1 Motivations

En 1941, Calkin (c.f [C]) s'intéressa à une algèbre qui portera son nom et qui est définie comme suit:

Soit H un espace de Hilbert.

On note $C(H) = B(H)/K(H)$ l'algèbre de Calkin qui est une C^* algèbre et

$\pi : B(H) \longrightarrow B(H)/K(H)$ le morphisme canonique.

Ceci amena naturellement à définir un nouveau spectre dit "essentiel".

$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \pi(T) - \lambda \text{ n'est pas inversible}\}$. D'autre part, le théorème d' Atkinson (c.f [At]) montre le lien entre ce spectre essentiel et la théorie des opérateurs Fredholm et semi-Fredholm par l'équivalence :

$\pi(T)$ inversible est équivalent à T Fredholm.

L'apparition d'une structure quotient pose toujours le problème d'éventuels relèvements.

Dans ce cas, ils se posent de la façon suivante :

Pour $\pi(T)$ vérifiant une certaine propriété, existe-t-il un opérateur compact K de $B(H)$ tel que $T + K$ vérifie la même propriété?

On peut ainsi essayer de relever certains opérateurs particuliers.

Dans l'article qui introduit cette algèbre, Calkin s'y intéresse déjà :

Il démontra les propriétés suivantes :

Toute projection orthogonale de $C(H)$ est l'image par π d'une projection orthogonale de $B(H)$, (cf [C] ou [D-L-H]).

D'autre part, toute isométrie partielle de $C(H)$ est l'image par π d'une isométrie partielle de $B(H)$, (cf [D-L-H]).

En outre, on sait que tout élément idempotent de $C(H)$ est l'image par π d'un élément idempotent de $B(H)$, (cf [Pa]).

Pour les opérateurs autoadjoints, on a :

Si $\pi(T)$ autoadjoint alors il existe $K \in K(H)$ tel que $T + K$ autoadjoint.

Weyl précisa ce résultat en prouvant le théorème qui porte son nom:

Soit H espace de Hilbert séparable alors il existe $K \in K(H)$ tel que :

$T + K$ autoadjoint et $\sigma(\pi(T)) = \sigma(T + K)$. (c.f [W] ou [D-L-II]).

En utilisant le théorème de relèvement des éléments idempotents avec la preuve de [Pa] , on peut également relever les inverses généralisés :

Soit $a \in C(H)$ tel que $\exists b \in A$ vérifiant $aba = a$

Alors il existe $A \in B(H)$ et $B \in B(H)$ tels que :

$\pi(A) = a$; $\pi(B) = b$ et $ABA = A$

Cependant dans nombre de cas, il n'est pas possible de relever de façon aussi satisfaisante les éléments de l'algèbre de Calkin en gardant toutes leurs propriétés. Ainsi dans le cas qui vont suivre l'indice de l'opérateur apparaît comme une obstruction au relèvement.

Pour les inversibles, le théorème d'Atkinson donne une réponse partielle complétée par le résultat précis suivant :

Soit $\pi(T)$ inversible dans $C(H)$, alors

il existe $K \in K(H)$ tel que $T + K$ inversible si et seulement si $\text{ind}(T) = 0$.

Par conséquent, il n'existe pas toujours un relèvement inversible des éléments inversibles de $C(H)$.

Pour les opérateurs normaux, la solution est apportée par le théorème suivant:

Théorème de Brown-Douglas-Fillmore (c.f [B-D-F]) :

Soit $\pi(T)$ un élément normal de $C(H)$.

Il existe $K \in K(H)$ tel que $T + K$ normal

si et seulement si

$$\forall \lambda \in \rho_e(T), \text{ind}(T - \lambda) = 0$$

D'autre part, Brown, Douglas et Fillmore cf[B-D-F] montrèrent en 1973 que les opérateurs unitaires se relèvent de la façon suivante:

Soit $\pi(T)$ unitaire dans $C(H)$ avec H espace de Hilbert séparable.

il existe $K \in K(H)$ tel que $T + K$ unitaire si et seulement si $\text{ind}(T) = 0$.

Si $\text{ind}(T) = +n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors T est une perturbation compacte du "backward shift" de multiplicité n .

Si $\text{ind}(T) = -n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors T est une perturbation compacte du "shift" de multiplicité n adjoint du précédent.

Nous avons vu qu'on peut relever les inverses généralisés mais que pour les éléments inversibles, l'indice fait obstruction.

Or l'étude de l'inversibilité est essentielle en théorie des opérateurs.

Il semble donc particulièrement intéressant de considérer ce problème. Cette notion d'inversibilité est généralisée par les concepts d'inverse généralisé et d'opérateurs semi-Fredholm dont l'indice vient d'être évoqué.

Dans ce cadre, la conorme introduite par Kato dans [K1] et [K2] dont nous reprendrons la définition joue un rôle particulièrement important. Elle a d'ailleurs été introduite dans le cadre de la perturbation des opérateurs semi-Fredholm.

Rappelons que la conorme de T notée $\gamma(T)$ est définie par :

$$\gamma(T) = \inf \{ \|Tx\| : d(x, N(T)) = 1 \} \text{ si } T \neq 0$$

$$\gamma(T) = +\infty \text{ si } T = 0.$$

On connaît le lien entre la conorme et le spectre par l'égalité suivante démontrée par Apostol (c.f [A]) :

Pour $T \in B(H)$ où H espace de Hilbert, $\gamma(T) = \inf\{\sigma(|T|) \setminus \{0\}\}$ où $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$.
D'autre part, elle permet d'abord de déterminer si un opérateur a une image fermée par l'équivalence :

$\gamma(T) > 0$ si et seulement si $R(T)$ fermé.

Dans les espaces de Hilbert, la nullité de $\gamma(T)$ est donc un critère pour l'existence d'un inverse généralisé par les équivalences suivantes :

$$\gamma(T) > 0 \iff T \text{ possède un inverse généralisé} \iff R(T) \text{ fermé.}$$

Outre ces propriétés, la conorme joue également un rôle particulièrement intéressant dans la théorie des perturbations des opérateurs Fredholm et semi-Fredholm. On rappelle notamment le théorème suivant :

Soit T semi-Fredholm et $S \in B(X)$

Si $\|T - S\| < \gamma(T)$ alors S est semi-Fredholm et $\text{ind}(T) = \text{ind}(S)$.

c.f Goldberg [G]; Théorème V.1.6

En 1991, Mbekhta (c.f [M]) montra que la notion de conorme pouvait être étendue aux C^* algèbres en gardant les importants résultats connus dans les espaces de Hilbert.

On peut alors parler de conorme dans l'algèbre de Calkin qu'on nommera conorme essentielle et qu'on définit par :

$$\gamma_e(T) = \gamma(\pi(T)) \text{ où } T \in B(H)$$

Naturellement dans l'optique qui est la notre, le problème du relèvement de la conorme s'impose de lui-même.

D'autant plus que des résultats déjà connus permettent de montrer qu'on peut relever un élément de l'algèbre de Calkin de conorme nulle (respectivement strictement positive) par un opérateur de conorme nulle (respectivement strictement positive). Une solution partielle à ce problème est déjà connue :

Pour la démontrer on utilise l'équivalence suivante :

Soit A une C^* algèbre et $a \in A$

$\gamma(a) > 0$ si et seulement si a possède un inverse généralisé qui sera démontrée.

On utilisera et démontrera également le relèvement déjà évoqué des inverses généralisés qui est le suivant :

$\forall a \in C(H)$ avec $\gamma(a) > 0$, $\exists A \in B(H)$ tel que $\gamma(A) > 0$ et $\pi(A) = a$.

D'autre part, $\forall a \in C(H)$ avec $\gamma(a) = 0$, $\exists A \in B(H)$ tel que $\gamma(A) = 0$ et $\pi(A) = a$.

On peut donc retrouver dans les relèvements la nullité de la conorme

ou sa stricte positivité qui induit l'existence éventuelle d'un inverse généralisé.

Le résultat principal de ce travail sera dans un premier temps de prouver qu'on peut effectivement relever la conorme essentielle .

Nous prouverons dans un premier temps que

$$\gamma_e(T) = \sup_{K \in K(H)} \gamma(T + K).$$

Puis nous pourrions montrer que ce sup est atteint i.e $\forall T \in B(H)$, il existe K opérateur compact tel que $\gamma_e(T) = \gamma(T + K)$. ce qui consitue le véritable relèvement de la conorme.

En utilisant une démonstration analogue, on trouve également le relèvement de la norme :

Pour $T \in B(H)$, $\exists K \in K(H)$ tel que $\|\pi(T)\| = \|T + K\|$.

Ce résultat permettra ensuite d'intéressants prolongements.

Nous pourrions ainsi démontrer plusieurs théorèmes sur les opérateurs semi-Fredholm et en particulier une nouvelle caractérisation de ceux-ci en liaison avec la conorme essentielle et sa continuité.

Ces résultats prolongent l'étude des opérateurs points de continuité de la conorme effectuée par Labrousse et Mbekhta développée dans [L-M].

Dans un premier temps, on peut énoncer une nouvelle formule de calcul de la conorme :

$$\gamma(T)^2 = \sup \{c > 0; T^*T \geq c U^*U\}$$

où $T = U|T|$ décomposition polaire de $T \in B(H)$.

On peut également montrer que si T est normal dans $B(H)$ alors il existe un opérateur K compact et se trouvant dans le commutant de T tel que :

$$\gamma_e(T^n) = \gamma((T + K)^n).$$

En corollaire du théorème principal, on retrouve évidemment le relèvement des inverses généralisés.

Mais surtout le relèvement de la conorme permet de démontrer des résultats concernant les opérateurs semi-Fredholm et leurs perturbations.

Ainsi on démontre que :

Si T est un opérateur de $B(H)$ à image fermée alors $\gamma_e(T) = \gamma_\infty(T)$

où $\gamma_\infty(T) = \sup_{F \in K_0(H)} \gamma(T + F)$ et $K_0(H) = \{T \in B(H), \dim R(T) < \infty\}$.

Notons $\sigma_{S-F}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I \text{ n'est pas semi-Fredholm}\}$ le spectre essentiel semi-Fredholm.

En 1975, Forster et Kaashoek (cf [F-K]) démontrèrent que :

Si T est un opérateur Fredholm alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_\infty(T^n)^{1/n}$ existe et est égale à la borne supérieure des δ tels que $\dim N(T - \lambda I)$ et $\text{codim } R(T - \lambda I)$ sont constants pour $0 < |\lambda| < \delta$.

En 1986, Zemanek (c.f [Z1]) montra que :

Si $T \in B(H)$ est semi-Fredholm alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_\infty(T^n)^{1/n}$ existe

et elle vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_\infty(T^n)^{1/n} = s(T)$

où $s(T) = \sup \{\varepsilon \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}, 0 \leq |\lambda| < \varepsilon \implies T - \lambda I \text{ semi-Fredholm}\}$.

Dans le prolongement de ces résultats, nous démontrerons grâce au relèvement de la conorme un résultat sur le comportement asymptotique de la conorme essentielle pour les opérateurs semi-Fredholm :

Si $T \in B(H)$ est semi-Fredholm alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_e(T^n)^{1/n}$ existe

et elle vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_e(T^n)^{1/n} = d(0; \sigma_{S-F}(T))$.

Mais le résultat le plus intéressant est l'obtention d'une caractérisation des opérateurs semi-Fredholm.

D'abord, on démontre des propositions concernant leurs perturbations :

Si T semi-Fredholm et $S \in B(H)$

$\|T - S\| < \gamma_e(T)$ alors S est semi-Fredholm et $\text{ind}(T) = \text{ind}(S)$.

Egalement, $\|T - S\| < \gamma_e(T)$ implique $|\gamma_e(T) - \gamma_e(S)| \leq \|T - S\|$.

On peut alors démontrer la caractérisation évoquée précédemment après avoir prouvé que la conorme est semi-continue supérieurement :

Théorème :

T est un point de continuité pour la fonction $\gamma_e : B(H) \longrightarrow [0; +\infty]$

si et seulement si

$\gamma_e(T) = 0$ ou T est semi-Fredholm.

1.2 Plan avec contenu détaillé

Les chapitres 2 et 3 sont essentiellement des rappels de résultats déjà connus dont certains seront redémontrés.

La partie principale de ce travail est contenue dans les chapitres 4 et 5.

Chapitre 2

Dans ce chapitre seront rappelés des résultats connus sur la conorme dans les espaces de Banach et de Hilbert. Nous rappellerons les principaux résultats sur les opérateurs semi-Fredholm et leurs perturbations par des opérateurs compacts. Nous résoudrons aussi des problèmes de relèvement d'opérateurs particuliers et nous évoquerons les liens entre la conorme et la perturbation des opérateurs semi-Fredholm.

Rappelons d'abord la définition :

Définition 1.2.1 *Un opérateur T est dit semi-Fredholm s'il vérifie :*

$R(T)$ est fermé et $\min\{\dim N(T), \text{codim } R(T)\} < +\infty$.

Un opérateur T est dit Fredholm s'il vérifie :

$R(T)$ est fermé et $\max\{\dim N(T), \text{codim } R(T)\} < +\infty$.

Et, dans ce cas, on définit l'indice de T par

$$\text{ind } (T) = \dim N(T) - \text{codim } R(T).$$

Nous démontrerons d'abord des résultats utiles sur les opérateurs semi-Fredholm.

Puis nous énoncerons le théorème principal liant la conorme

et la perturbation des opérateurs semi-Fredholm :

Soit T semi-Fredholm et $S \in B(H)$

Si $\|T - S\| < \gamma(T)$ alors S est semi-Fredholm et $\text{ind } (T) = \text{ind } (S)$.

Ensuite, nous effectuerons le relèvement de quelques opérateurs particuliers.

Nous étudierons ainsi la perturbation des opérateurs semi-Fredholm :

Soit T semi-Fredholm et $K \in K(H)$

Alors $T + K$ est semi-Fredholm et $\text{ind } (T + K) = \text{ind } (T)$

Nous démontrerons notamment les équivalences :

(i) T semi-Fredholm $\iff \pi(T)$ inversible à gauche ou à droite.

(ii) T Fredholm $\iff \pi(T)$ inversible.

Ensuite, nous effectuerons le relèvement des inversibles par le théorème :
Soit T Fredholm.

$$\begin{aligned} \exists K \in K(H) \text{ tel que } T + K \text{ inversible} \\ \text{si et seulement si} \\ \text{ind } T = 0 \end{aligned}$$

Enfin, nous relèverons les projections orthogonales, les éléments idempotents et les inverses généralisés.

Chapitre 3 :

Dans ce chapitre, la notion de conorme sera définie dans le cadre général des C^* algèbres.

Nous rappellerons et redémontrerons des résultats concernant les inverses généralisés, la conorme et leurs propriétés.

Notamment pour A une C^* algèbre et $a \in A$ quelconque, l'équivalence de :

$$\gamma(a) > 0.$$

$$aA \text{ fermé.}$$

$$a \text{ g-inversible.}$$

$$a \text{ possède un inverse de Moore-Penrose.}$$

$$\text{et dans le cas particulier } a \text{ normal l'équivalence avec}$$

$$aA = a^2A$$

$$aA \oplus a^{-1}(0) = A$$

$$\text{et } 0 \notin \text{acc } \sigma(a)$$

On prouvera aussi que :

$$\gamma(a) = \inf \{ \sigma(|a|) \setminus \{0\} \}$$

qui est la généralisation du résultat d'Apostol évoqué dans l'introduction.

L'égalité $\gamma(T) = \|T^{-1}\|^{-1}$ valable quand T est inversible sera étendue aux C^* algèbres par :

Si $a \in A$ g-inversible alors $\gamma(a) = \|a^+\|^{-1}$ où a^+ inverse de Moore-Penrose de a .

On montrera également que la conorme est semi-continue supérieurement.

Nous ferons aussi le lien entre convergence de l'inverse de Moore-Penrose et de la conorme avec la proposition suivante :

Soient a et b éléments de A tels que $\gamma(a) > 0$ et $\gamma(b) > 0$.

$$\|b^+b - a^+a\| < 1 \implies |\gamma(b) - \gamma(a)| \leq \|b - a\|$$

Chapitre 4

La quatrième partie traitera du relèvement de la conorme essentielle qui est le résultat principal de ce travail.

On énoncera quelques propriétés élémentaires de la conorme.

Puis nous montrerons qu'on peut dans un premier temps relever la conorme en gardant sa stricte positivité ou sa nullité.

Les théorèmes suivants seront démontrés :

$$\gamma_e(T) = \sup_{K \in K(H)} \gamma(T + K).$$

Soit $T \in B(H)$, alors il existe K opérateur compact tel que

$$\gamma_e(T) = \gamma(T + K).$$

Nous montrerons également que ce Théorème reste vrai pour T opérateur semi-Fredholm si on remplace $\gamma_e(T)$ par $m_e(T)$ où $m_e(T) = \inf\{\sigma_e(|T|)\}$.

Nous démontrerons ensuite une nouvelle formule définissant la conorme.

Les résultats précédents seront précisés dans le cas particulier où T quasi-normal.

Ensuite seront donnés quelques applications directes de ces théorèmes.

Puis on s'intéressera aux liens entre $\gamma(T)$, $\gamma_\infty(T)$ et $\gamma_e(T)$.

Nous montrerons notamment que $\forall T \in B(H)$, $\gamma_\infty(T) > 0 \iff \gamma_e(T) > 0$.

Ainsi que si $T \in B(H)$ avec $\gamma(T) > 0$ alors $\gamma_\infty(T) = \gamma_e(T)$.

Nous proposerons également des conjectures prolongement du théorème principal de ce chapitre.

Enfin des exemples d'opérateurs avec différentes valeurs de conorme et de conorme essentielle seront donnés.

Chapitre 5

Dans la cinquième partie seront abordés les liens entre le relèvement de la conorme essentielle et les opérateurs semi-Fredholm. Puis les points de continuité de la conorme essentielle seront étudiés.

On démontrera au préalable une proposition similaire au théorème final de perturbation du chapitre 2 :

Soit T semi-Fredholm et $S \in B(H)$.

Si $\|T - S\| < \gamma_e(T)$ alors S est semi-Fredholm et $\text{ind}(T) = \text{ind}(S)$.

En 1985, Zemanek montra que pour T semi-Fredholm

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma(T^n)^{1/n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_\infty(T^n)^{1/n}$ existent et détermina leurs valeurs respectives.

Nous nous intéresserons nous aussi au comportement asymptotique de $\gamma_e(T)$ en démontrant le théorème suivant :

Soit $T \in B(H)$ semi-Fredholm

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_e(T^n)^{1/n} \text{ existe}$$

et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_e(T^n)^{1/n} = d(0, \sigma_{S-F}(T))$$

Enfin nous étudierons les points de continuité de $\gamma_e(T)$.
On remarquera d'abord que la conorme est semi-continue supérieurement.
Le résultat final de ce chapitre est le Théorème 5.2.2:
Soit $T \in B(H)$.

T est un point de continuité pour la fonction $\gamma_e : B(H) \longrightarrow [0, +\infty]$

si et seulement si

$\gamma_e(T) = 0$ ou T est semi-Fredholm.

2 CONORME DANS LES ESPACES DE BANACH ET DE HILBERT

2.1 Quelques propriétés de la conorme dans un espace de Banach

Soit X un espace de Banach.

2.1.1 $\gamma(T) > 0$ si et seulement si $R(T)$ est fermé (cf[K1])

2.1.2 $\gamma(T) = \gamma(T^*)$. (cf[K1])

2.1.3 Si T est inversible alors $\gamma(T) = \|T^{-1}\|^{-1}$ (cf[K1])

2.1.4 Si $V \in B(X)$ est une isométrie alors $\gamma(T) = \gamma(VT)$

Preuve de 2.1.4 :

Comme V isométrie, $N(T) = N(VT)$ et $\forall x \in X$, $\|Tx\| = \|VTx\|$.

D'où, $\gamma(T) = \inf\{\|Tx\|; d(x, N(T)) = 1\} = \inf\{\|VTx\|; d(x, N(VT)) = 1\}$
 $= \gamma(VT)$

Proposition 2.1.5 Soit $T \in B(X)$ et l'opérateur $T_0 : \begin{array}{ccc} R(T) & \longrightarrow & R(T) \\ x & \longmapsto & Tx \end{array}$

On a alors l'implication suivante :

$$R(T) \oplus N(T) = X \implies \{\lambda \in \mathbb{C}; 0 < |\lambda| < \gamma(T_0)\} \subset \rho(T)$$

Preuve :

De $R(T) \oplus N(T) = X$, on déduit que T_0 est inversible et par conséquent $\gamma(T_0) = \|T_0^{-1}\|^{-1}$

De là, $]0, \gamma(T_0)[\subset \rho(T_0)$ i.e $\forall \lambda$ tel que $0 < |\lambda| < \gamma(T_0)$, $T_0 - \lambda$ est inversible.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |\lambda| < \gamma(T_0)$.

Prouvons que $N(T - \lambda I) = \{0\}$

$N(T - \lambda) \subset R(T)$ donc $N(T - \lambda I) = N(T_0 - \lambda I) = \{0\}$

Montrons à présent que $R(T - \lambda I) = X$.

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda \neq 0$, $N(T) \subset R(T - \lambda I)$.

Or $R(T_0 - \lambda I) = R(T)$ car T_0 est inversible.

De là, $X = R(T) \oplus N(T) = R(T_0 - \lambda) \oplus N(T) \subseteq R(T - \lambda I)$
ce qui termine la preuve.

2.2 Opérateurs Fredholm et semi-Fredholm

Définition 2.2.1 *Un opérateur T est dit semi-Fredholm si :*

$R(T)$ est fermé et $\min\{\dim N(T), \text{codim } R(T)\} < +\infty$.

Un opérateur T est dit Fredholm si :

$R(T)$ est fermé et $\max\{\dim N(T), \text{codim } R(T)\} < +\infty$.

Et, dans ce cas, on définit l'indice de T par

$$\text{ind } (T) = \dim N(T) - \text{codim } R(T).$$

Remarque : $\text{codim } R(T) < +\infty$ implique $R(T)$ est fermé. (cf [K2])

Preuve :

$$\begin{aligned} \text{Soit } \tilde{T} : X/N(T) \times R(T)^\perp &\longrightarrow H \\ (\tilde{x}, y) &\longmapsto Tx + y \end{aligned}$$

Il est clair que $\tilde{T}$ est inversible.

D'où, $\exists c > 0, \forall (\tilde{x}, y) \|\tilde{T}(\tilde{x}, y)\| \geq c.(\|\tilde{x}\| + \|y\|)$

$\|Tx + y\| \geq c.(\|\tilde{x}\| + \|y\|)$

Si $y = 0, \|Tx\| \geq c.\|\tilde{x}\| \geq c.d(x, N(T)).$

On a donc $\gamma(T) \geq c > 0$ et par conséquent $R(T)$ fermé.

Lemme 2.2.2 *Soit $T \in B(X)$ semi-Fredholm alors T^* est semi-Fredholm.*

De plus si $\text{ind } (T) = n$ avec $n \in \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty; +\infty\}$

alors $\text{ind } (T^) = -n$.*

Preuve :

On sait que $R(T)$ fermé est équivalent à $R(T^*)$ fermé.

Il suffit ensuite d'utiliser les égalités suivantes:

$\dim N(T) = \text{codim } R(T^*)$ et $\text{codim } R(T) = \dim N(T^*)$

Par la suite, nous limiterons donc souvent les démonstrations aux cas où T est un opérateur semi-Fredholm avec $\text{ind } (T) = +\infty$ et au cas où T est un opérateur Fredholm sans nuire à la généralité.

Lemme 2.2.3 Soit $T \in B(X)$ semi-Fredholm.

i) Si $\text{ind}(T) \leq 0$ alors

il existe F_1 opérateur de rang fini de $B(X)$ et $T_1 \in B(X)$ tels que $T_1 T = I - F_1$.

ii) Si $\text{ind}(T) \geq 0$ alors

il existe F_2 opérateur de rang fini de $B(X)$ et $T_2 \in B(X)$ tels que $TT_2 = I - F_2$.

iii) Si T Fredholm alors

il existe $T_0 \in B(X)$ et F_1, F_2 opérateurs de rangs finis de $B(X)$ tels que :

$T_0 T = I - F_1$ et $TT_0 = I - F_2$

Preuve de 2.2.3 :

Il existe H_0 tel que $X = N(T) \oplus X_0$ avec X_0 fermé et X_1 tel que $X = X_1 \oplus R(T)$, on pose également P la projection sur X_1 suivant cette dernière décomposition.

Soit $T' : X_0 \longrightarrow R(T)$, il est clair que T' est bijectif.

$$x \longmapsto T'x$$

Posons $T_0 = T'^{-1}(I - P)$.

i) Soit $F_1 = I - T_0 T$.

$F_1 = Id$ sur $N(T)$ et $F_1 = 0$ sur X_0 donc F_1 convient car $\dim N(T) < +\infty$.

ii) Posons $F_2 = I - TT_0$.

$F_2 = 0$ sur $R(T)$ et $F_2 = Id$ sur X_1 donc F_2 car $\dim X_1 < +\infty$.

iii) Dans le cas où T est Fredholm, T vérifie à la fois :

$\dim N(T) < +\infty$ et $\dim X_1 < +\infty$.

Il est alors clair que l'opérateur T_0 défini précédemment convient.

Lemme 2.2.4 Soit $T \in B(X)$.

i) S'il existe $T_1 \in B(X)$ et $K_1 \in K(X)$ tel que $TT_1 = I - K_1$

Alors $\text{codim } R(T) < +\infty$ et $R(T)$ fermé.

ii) S'il existe $T_2 \in B(X)$ et $K_2 \in K(X)$ tel que $T_2 T = I - K_2$

Alors $\dim N(T) < +\infty$ et $R(T)$ fermé.

iii) S'il existe $T_1, T_2 \in B(H)$ et $K_1, K_2 \in K(X)$ tel que $T_1 T = I - K_1$ et

$TT_2 = I - K_2$

Alors T Fredholm.

Preuve :

i) $R(I - K_1) = R(TT_1) \subseteq R(T)$. Or K_1 compact donc $\text{codim } R(TT_1) < +\infty$

de là $\text{codim } R(T) < +\infty$

ii) On a $(T_2 T)^* = T^* T_2^* = I - K_2^*$ d'après le (i), $\text{codim } R(T^* T_2^*) < +\infty$ d'où

$\text{codim } R(T^*) = \dim N(T) < +\infty$. De plus $R(T^*)$ fermé $\iff R(T)$ fermé

iii) Comme précédemment ((i) et (ii)), on montre que $\text{codim } R(T) < +\infty$ et $\dim N(T) < +\infty$.

Proposition 2.2.5 *Réf : [S]*

Soit $S, T \in B(X)$ deux opérateurs Fredholm.

Alors ST est Fredholm et $\text{ind}(ST) = \text{ind}(S) + \text{ind}(T)$.

Preuve :

i) Comme T et S sont des opérateurs Fredholm, il existe T_0 et S_0 dans $B(X)$ et F_1, F_2, F_3, F_4 de rangs finis tels que :

$$T_0 T = I - F_1 \quad S_0 S = I - F_3$$

$$T T_0 = I - F_2 \quad S S_0 = I - F_4$$

$$T_0 S_0 S T = T_0 (I - F_3) T = I - F_1 - T_0 F_3 T = I - F_5$$

$$S T T_0 S_0 = S (I - F_2) S_0 = I - F_4 - S F_2 S_0 = I - F_6$$

où F_5 et F_6 sont des opérateurs de rang fini. Il suffit alors d'appliquer le lemme 2.2.4 pour en conclure que ST est Fredholm.

Preuve pour les indices :

$$R(T) \cap N(S) \subseteq R(T) \text{ et } \dim R(T) \cap N(S) < +\infty.$$

Il existe Y_1 sous-espace fermé de X et Y_2 sous-espace de dimension finie de X tels que :

$$R(T) = \dim R(T) \cap N(S) \oplus Y_1.$$

$$N(S) = \dim R(T) \cap N(S) \oplus Y_2.$$

On remarque que $R(T) \cap Y_2 = \{0\}$. En effet, $R(T) \cap Y_2 \subseteq R(T) \cap N(S) \cap Y_2 = \{0\}$. D'autre part, du fait que $\text{codim } R(T) < +\infty$, il existe Y_3 de dimension finie tel que (1) $Y = R(T) + Y_2 + Y_3 = Y_1 \oplus R(T) \cap N(S) \oplus Y_2 \oplus Y_3$.

On remarque alors que $\text{codim } R(T) = \dim Y_2 + \dim Y_3$ (2).

Prouvons que $\dim N(ST) = \dim N(T) + \dim R(T) \cap N(S)$ (3).

$$N(ST) = \{x \in X; Tx \in N(S)\} = \{x \in X; Tx \in \dim R(T) \cap N(S)\}.$$

$$\text{Posons } T' : N(ST) \longrightarrow R(T) \cap N(S)$$

$$x \longmapsto Tx$$

ST Fredholm de là $\dim N(ST) < +\infty$ et $N(T) \subseteq N(ST)$ par conséquent

$$N(T) = N(T').$$

T' est surjectif. On tire des assertions précédentes l'égalité:

$$\dim N(ST) = \dim N(T') + \dim R(T') \text{ qui prouve (3).}$$

Prouvons que $\text{codim } R(ST) = \text{codim } R(S) + \dim Y_3$ (4).

D'après (1), $Y = Y_1 \oplus N(S) \oplus Y_3$. D'autre part, $S(Y_1) \cap S(Y_3) = \{0\}$.

En effet, soit $y = Sy_1 = Sy_3$ avec $y_1 \in Y_1$ et $y_3 \in Y_3$.

Alors $y_1 - y_3 \in N(S)$ et $y_1 - y_3 \in Y_1 \oplus Y_3$ d'où $y_1 - y_3 = 0$ puis $y_1 = y_3 = 0$.

On en déduit que $R(S) = S(Y) = S(Y_1) \oplus S(Y_3)$ en outre

$$R(ST) = S(R(T)) = S(Y_1 + R(T) \cap N(S)) = S(Y_1) \text{ d'où}$$

$$R(S) = R(ST) \oplus S(Y_3).$$

D'autre part, du fait que $\text{codim } R(S) < +\infty$, on a :

$$X = R(S) \oplus X_1 \text{ avec } \dim X_1 < +\infty$$

On en déduit que $X = R(ST) \oplus S(Y_3) \oplus X_1$ et par conséquent

$$\text{codim } R(ST) = \dim X_1 + \dim S(Y_3) = \text{codim } R(S) + \dim S(Y_3).$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Considérons } S' : Y_3 & \longrightarrow & S(Y_3) \\ y & \longmapsto & Sy \end{array}$$

S' est naturellement surjectif, d'autre part $N(S') = N(S) \cap Y_3 = \{0\}$, S' est donc bijectif et de là $\dim Y_3 = \dim S(Y_3)$.

$$\text{Finalement } \text{codim } R(ST) = \text{codim } R(S) + \dim Y_3.$$

$$\begin{aligned} \dim N(ST) + \text{codim } R(T) &= \dim N(T) + \dim (R(T) \cap N(S)) + \dim Y_2 + \dim Y_3 \\ &= \dim N(T) + \dim N(S) + \dim Y_3 = \dim N(ST) + \text{codim } R(T) + \text{codim } R(S) \\ &= \dim N(T) + \dim N(S) + \dim Y_3 + \text{codim } R(S) \\ &= \dim N(T) + \dim N(S) + \text{codim } R(ST). \end{aligned}$$

On en conclut que :

$$\begin{aligned} \dim N(ST) - \text{codim } R(ST) &= \dim N(T) - \text{codim } R(T) + \dim N(S) - \text{codim } R(S) \\ \text{i.e } \text{ind } (ST) &= \text{ind } (S) + \text{ind } (T). \end{aligned}$$

Corollaire 2.2.6 Soit $T, S \in B(X)$ tels que ST Fredholm i.e $\dim N(ST) < +\infty$ et $\text{codim } R(ST) < +\infty$.

On a alors les deux résultats suivants :

(i) $\dim N(T) < +\infty$ et $\text{codim } R(S) < +\infty$.

(ii) $\dim N(S) < +\infty \iff \text{codim } R(T) < +\infty$.

i.e T est Fredholm si et seulement si S est Fredholm.

Preuve :

(i) vient directement des formules (3) et (4) de la preuve précédente.

(ii) vient directement des formules (3), (4) et (5) de la preuve précédente.

Lemme 2.2.7 Soit $T \in B(H)$ semi-Fredholm.

Soit S un inverse généralisé de T . Alors S semi-Fredholm et $\text{ind } (S) = -\text{ind } (T)$

Preuve:

Supposons que $\text{codim } R(T) < +\infty$.

(On peut se limiter à ce cas sans nuire à la généralité).

$H = R(TS) \oplus N(TS)$. Or $N(S) \subseteq N(TS)$ d'où

$$\dim N(S) \leq \dim N(TS) \leq \text{codim } R(TS) \leq \text{codim } R(T) < +\infty.$$

Si T Fredholm, $\text{ind } (TST) = \text{ind } (T) + \text{ind } (S) + \text{ind } (T)$

D'où le résultat pour les indices.

Proposition 2.2.8 *Soit $T \in B(H)$ semi-Fredholm.*

Notons T^+ son inverse de Moore-Penrose.

Soit $A \in B(H)$ tel que $I + AT^+$ inversible.

Alors $T + A$ est semi-Fredholm et on a $\text{ind}(T + A) = \text{ind}(T)$

Preuve :

Première partie: T est semi-Fredholm.

D'après 3.2.2, (résultats connus dans le cadre plus général des C^* algèbres), T possède bien un inverse de Moore-Penrose T^+ .

On peut sans nuire à la généralité se placer dans le cas $\text{codim } R(T) < +\infty$ et $\dim N(T) = +\infty$.

Posons TT^+ projection sur $R(T)$ alors $\dim R(I - TT^+) = \text{codim } R(T) < +\infty$.

On remarque que $(T + A)T^+ = TT^+ + AT^+ = I + AT^+ - F$ où $F = I - TT^+$.

$(T + A)T^+$ est une perturbation par un opérateur F de rang fini d'un inversible, il est donc Fredholm d'indice 0 ce qui implique d'après le (i) du corollaire 2.2.6, $\text{codim } R(T + A) < +\infty$.

et on a aussi $\text{codim } R(T + A) = \dim N(T + A)$ du fait de la nullité de l'indice.

Montrons que $T + A$ n'est pas Fredholm.

Si on avait $\dim N(T + A) < +\infty$, on aurait alors (cf (ii) du corollaire 2.2.6)

$\text{codim } R(T^+) < +\infty$ d'où $\dim N(T) < +\infty$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc $T + A$ est un opérateur semi-Fredholm et $\text{ind}(T + A) = \text{ind}(T)$.

Deuxième partie: T est Fredholm.

En regroupant, on obtient $\text{ind } T^+(T + A) = \text{ind}(I + T^+A - F) = \text{ind}(I + T^+A) = 0$

et $\text{ind } T^+(T + A) = \text{ind}(T + A) + \text{ind } T^+$ d'où $\text{ind}(T + A) = -\text{ind } T^+ = \text{ind } T$.

Proposition 2.2.9 *Réf : [G]*

Soit T semi-Fredholm et $S \in B(H)$

Si $\|T - S\| < \gamma(T)$ alors S est semi-Fredholm et $\text{ind}(T) = \text{ind}(S)$.

Preuve :

D'après 3.2.2 et 3.2.5, T possède un inverse de Moore-Penrose T^+ et

$\gamma(T) = \|\gamma(T^+)\|^{-1}$. On en tire que $\|T - S\| < \|\gamma(T^+)\|^{-1}$ puis

l'inégalité $\|(T - S)T^+\| < 1$.

De là, $I - (T - S)T^+ = I + (S - T)T^+$ inversible.

Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.2.8 avec $A = S - T$ pour conclure.

Rappelons la définition de la décomposition polaire maximale qui sera utilisée dans le preuve de la dernière proposition de ce sous-chapitre.

Proposition 2.2.10 *Réf : [H], Problème 106.*

Soit $T \in B(H)$.

Si $\dim N(T) \leq \dim N(T^*)$ alors il existe une isométrie V telle que $T = V|T|$.

Si $\dim N(T) \geq \dim N(T^*)$ alors il existe une co-isométrie V telle que $T = V|T|$.

La décomposition $T = V|T|$ est appelée décomposition polaire maximale de T .

Proposition 2.2.11 *Réf : [H]*

L'ensemble des opérateurs semi-Fredholm est un ouvert dense de $B(H)$.

Preuve :

Cet ensemble est ouvert d'après la proposition 2.2.9.

Densité :

Soit $T \in B(H)$ et $T = V|T|$ sa décomposition polaire maximale.

V est soit une isométrie soit une co-isométrie par conséquent V est semi-Fredholm.

Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe T_ε semi-Fredholm tel que $\|T - T_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.

$|T|$ est positif donc $\sigma(T) \subset [0, +\infty[$.

De là, $T_\varepsilon = |T| + \varepsilon.I$ inversible.

On a $\| |T| - T_\varepsilon \| = \| \varepsilon.I \| \leq \varepsilon$ d'où $\| V|T| - VT_\varepsilon \| = \| T - VT_\varepsilon \| \leq \varepsilon$.

Ceci termine la preuve car VT_ε est semi-Fredholm comme produit d'un inversible et d'un semi-Fredholm.

Remarque :

L'ensemble des opérateurs Fredholm n'est pas dense dans $B(H)$.

On peut même préciser que si T est semi-Fredholm et n'est pas Fredholm

alors T n'appartient pas à l'adhérence de l'ensemble des

opérateurs Fredholm (c.f [C-P-Y]).

2.3 Relèvement d'opérateurs particuliers de $B(H)$

Soit H un espace de Hilbert.

Proposition 2.3.1 *Réf:[Do]*

Soit T semi-Fredholm et $K \in K(H)$

Alors $T + K$ est semi-Fredholm et $\text{ind}(T + K) = \text{ind}(T)$

Preuve:

Premier cas : soit T un opérateur semi-Fredholm avec $\text{codim } R(T) < +\infty$ et $\dim N(T) = +\infty$

(On peut se limiter à ce cas sans nuire à la généralité).

D'après le lemme 2.2.3, Il existe T_2 et $K_2 \in K(H)$ tel que $TT_2 = I - K_2$.

$(T + K)T_2 = TT_2 + KT_2 = I - K_2 + KT_2$. Or $-K_2 + KT_2$ est compact, donc $T + K$ est semi-Fredholm avec $\text{codim } R(T) < +\infty$ d'après le lemme réciproque.

Deuxième cas :

Si T est Fredholm, alors il existe $T_0 \in B(H)$ et K_1, K_2 opérateurs compacts tels que $TT_0 = I - K_1$ et $T_0T = I - K_2$. En reprenant la preuve précédente, on obtient $\text{codim } R(T) < +\infty$.

$\dim N(T) < +\infty$ se démontre de façon similaire.

Pour l'indice, on procède de la façon suivante :

$\text{ind } T_0(T + K) = \text{ind } (I - K_1 + K) = \text{ind } (I) = 0$

et $\text{ind } T_0(T + K) = \text{ind } T_0 + \text{ind } (T + K)$

D'autre part, $\text{ind } (TT_0) = \text{ind } T + \text{ind } T_0 = \text{ind } (I - K_1) = 0$ ce qui permet de conclure.

Proposition 2.3.2

(i) T semi-Fredholm $\iff \pi(T)$ inversible à gauche ou à droite.

(ii) T Fredholm $\iff \pi(T)$ inversible.

Ce dernier résultat est le Théorème d'Atkinson.

Preuve :

Les deux cas de (i) (suivant la valeur de l'indice) se démontrent de façon similaire.

Soit T un opérateur semi-Fredholm tel que $\text{codim } R(T) < +\infty$

et $\dim N(T) = +\infty$

Alors d'après le lemme 2.2.3, il existe F_2 opérateur de rang fini de $B(H)$ et

$T' \in B(H)$ tels que :

$TT' = I - F_2$ de là $\pi(T)\pi(T') = \pi(TT') = \pi(I - F_2) = \pi(I)$.

$\pi(T)$ est donc inversible à droite.

Dans le cas où T est Fredholm, par le même raisonnement que précédemment, on obtient à la fois l'inversibilité à gauche et à droite.

Théorème 2.3.3

Soit T Fredholm.

$\exists K \in K(H)$ tel que $T + K$ inversible

si et seulement si

$$\text{ind } T = 0$$

Preuve :

Si $\text{ind } T = 0$ alors $\dim N(T) = \text{codim } R(T)$ tous deux finis.

On a alors les décompositions :

$H = N(T) \oplus H_1$ et $H = H_2 \oplus R(T)$ avec $\dim H_2 = \dim N(T)$ également finis.

Il existe donc une bijection de rang fini F de $N(T)$ vers H_2 .

Posons $\tilde{T} : \begin{array}{ccc} H = N(T) \oplus H_1 & \longrightarrow & H = H_2 \oplus R(T) \\ x_1 + x_2 & \longmapsto & Fx_1 + Tx_2 \end{array}$

Il est clair que $\tilde{T}$ est bijectif.

Considérons $T - \tilde{T}$.

Suivant la décomposition précédente, on a :

$$(T - \tilde{T})(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2 - Fx_1 - Tx_2 = Fx_1.$$

Par conséquent, $\tilde{T}$ est une perturbation de rang fini de T ce qui termine la preuve de cette implication.

Réciproque :

Soit T Fredholm tel que $\exists K \in K(H)$; $T + K$ inversible .

$$(T + K)^{-1}(T + K) = I \text{ d'où } (T + K)^{-1}T = I - (T + K)^{-1}K.$$

$(T + K)^{-1}T$ est donc Fredholm d'indice 0 comme perturbation de l'identité par un compact.

Or, $\text{ind } ((T + K)^{-1}T) = \text{ind } (T + K)^{-1} + \text{ind } T$. On en conclut que :

$$\text{ind } T = -\text{ind } (T + K)^{-1} = 0.$$

Rappelons la proposition suivante (cf [D-L-H]):

Proposition 2.3.4 Soit $A \in B(H)$ tel que $A^2 - A$ compact i.e $\pi(A)$ idempotent de $C(H)$ et $A = A^*$

Alors il existe $P = P^2 = P^* \in B(H)$ vérifiant :

(i) $PA = AP$.

Soit $\tilde{A} : R(P) \longrightarrow R(P)$ tel que $\tilde{A}(Px) = APx$.

On définit de la même façon $\tilde{I - A} : R(I - P) \longrightarrow R(I - P)$.

(ii) Les deux opérateurs $\tilde{A}$ et $\tilde{I - A}$ sont inversibles.

(iii) $\pi(P) = \pi(A)$.

Preuve :

Il existe un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $A - \alpha I$ est inversible.

Posons $f : \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \neq \alpha\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que :

$f(z) = 0$ si $\operatorname{Re}(z) < \alpha$

$f(z) = 1$ si $\operatorname{Re}(z) > \alpha$

On prend $P = f(A)$ par le calcul fonctionnel et on vérifie que :

$(f(z))^2 = f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ pour tout z dans $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \neq \alpha\}$.

Or pour $T \in B(H)$, $f(T)^* = \tilde{f}(T^*)$ où $\tilde{f}$ est définie par $\tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

On en déduit que $P = P^2 = P^*$. D'autre part, d'après la proposition 4.1.10, de $\forall z \in \sigma(\pi(A))$, $f(z) = z$, on conclut que $f(\pi(A)) = \pi(A) = \pi(f(A)) = \pi(P)$.

La commutativité de A^* et P est une propriété usuelle du calcul fonctionnel.

Prouvons l'inversibilité de $\tilde{A}$.

On pose $g : \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \neq \alpha\} \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que :

$g(z) = 0$ si $\operatorname{Re}(z) < \alpha$

$g(z) = z^{-1}$ si $\operatorname{Re}(z) > \alpha$

On a alors $Ag(A) = g(A)A = P$ ce qui prouve l'inversibilité de $\tilde{A}$. Pour $I - A$, il suffit d'inverser les rôles de $\operatorname{Re}(z) < \alpha$ et $\operatorname{Re}(z) > \alpha$.

On peut également relever les éléments idempotents :

Proposition 2.3.5 *Ref : [Pa].*

Soit $A \in B(H)$ tel que $A^2 - A$ compact i.e $\pi(A)$ idempotent de $C(H)$

Alors il existe $P = P^2 \in B(H)$ vérifiant :

(i) $PA = AP$.

Soit $\tilde{A} : R(P) \longrightarrow R(P)$ tel que $\tilde{A}(Px) = APx$.

On définit de la même façon $\widetilde{I - A} : R(I - P) \longrightarrow R(I - P)$.

(ii) Les deux opérateurs $\tilde{A}$ et $\widetilde{I - A}$ sont inversibles.

(iii) $\pi(P) = \pi(A)$.

Preuve :

$A^2 - A$ est compact, d'après le théorème de l'application spectrale, on a :

$\sigma(A^2 - A) = Q(\sigma(A))$ où $Q(X)$ est le polynôme $X(X - 1)$.

Les seuls points d'accumulation possibles du spectre sont alors 0 et 1.

Posons $P = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda$ où Γ est un contour dont l'intérieur ne contient pas 0 et contient 1.

P ainsi défini est idempotent.

On peut séparer le spectre en deux parties σ_1 et σ_2 d'intersection vide avec $0 \in \sigma_1$ et $1 \in \sigma_2$.

Il existe alors $T' \in B(H)$ tel que $P = T'A = AT'$ et il existe $T'' \in B(H)$ tel que $I - P = T''(I - A) = (I - A)T''$.

On a alors $A - P = A(I - P) + (A - I)P = (A^2 - A)(T' + T'')$.

Comme $(A^2 - A)$ est compact, $A - P$ l'est aussi, on a donc $\pi(A) = \pi(P)$.

Nous pouvons à présent relever les inverses généralisés.

Proposition 2.3.6 *Soit $a \in C(H)$ et $b \in C(H)$ tel que $aba = a$.*

Alors il existe A et B dans $B(H)$ vérifiant :

- (i) $\pi(A) = a$ et $\pi(B) = b$.
- (ii) $ABA = A$.

Preuve :

Soit A' et B' dans $B(H)$ tels que $\pi(A') = a$ et $\pi(B') = b$.

Alors $ba = \pi(B'A')$ est idempotent. On lui applique la proposition précédente : on obtient P idempotent et $\widetilde{BA}$ opérateur de $B(H)$ défini comme dans 2.3.5 avec cette fois $(B'A')^2 - B'A'$ compact .

Ces opérateurs vérifient alors les résultats suivants :

- (i) $PB'A' = B'A'P$ et $\pi(P) = \pi(B'A')$.
- (ii) $\widetilde{B'A'} : R(P) \longrightarrow R(P)$ inversible.

On notera T son inverse.

Montrons que $A'P$ relève a et TB' relève b .

$$\pi(A'P - A') = \pi(A'P - A'B'A') = \pi(A')\pi(P - B'A') = 0.$$

$$\pi(TB' - B') = \pi(TB'A'B' - B'A'B') = \pi(PB' - B'A'B') = \pi(P - B'A')\pi(B') = 0.$$

En outre, TB' inverse généralisé de $A'P$.

$$\text{En effet, } A'P TB' A'P = A'P(TB'A')P = A'P^3 = A'P.$$

Les opérateurs $A = A'P$ et $B = TB'$ sont donc des relèvements de a et respectivement b . De plus, B est un inverse généralisé de A .

3 CONORME DANS LES C^* ALGÈBRES

3.1 Inverse généralisé dans les C^* algèbres

Définition 3.1.1

Soit $a \in A$ et $L_a : A \rightarrow A$ l'opérateur défini par $L_a x = ax$

On note aA l'idéal image de L_a , $a^{-1}(0) = \{x \in a; ax = 0\}$ et

$a_{-1}(0) = \{x \in a; xa = 0\}$.

Définition 3.1.2 Soit $a \in A$. a est dit g -inversible si $\exists b \in a$ tel que $aba = a$.
 b est appelé inverse généralisé de a .

Remarque :

L'inverse généralisé n'est en général pas unique.

Toutefois si a est inversible $b = a^{-1}$ et par conséquent il est unique.

Propriétés élémentaires :

$$3.1.3 \quad (ab)^2 = ab \text{ et } (ba)^2 = ba.$$

$$3.1.4 \quad abA = aA \text{ et } (1 - ba)A = (ba)^{-1}(0) = a^{-1}(0)$$

$$3.1.5 \quad Aba = Aa \text{ et } A(1 - ab) = (ab)_{-1}(0) = a_{-1}(0)$$

$$3.1.6 \quad a \text{ } g\text{-inversible} \iff a^* \text{ } g\text{-inversible}$$

Remarque :

On peut normaliser l'inverse généralisé de telle sorte que $ab'a = a$ et $b'ab' = b'$ et que les idempotents ab et ba ne soient pas modifiés. En effet, il suffit de poser $b' = bab$

Définition 3.1.7 On dit que $a \in A$ possède un inverse de Moore-Penrose si a possède un inverse généralisé normalisé c tel que $(ca)^* = ca$ et $(ac)^* = ac$

On notera a^+ l'inverse de Moore-Penrose de a quand il existe.

Proposition 3.1.8 *Propriétés élémentaires :*

Si $a \in A$ possède un inverse de Moore-Penrose alors :

(i) L'inverse de Moore-Penrose est unique

(ii) $(a^*)^+ = (a^+)^*$

(iii) $(a^+)^{-1}(0) = (a^*)^{-1}(0)$ et $a^+A = a^*A$

(iv) $A = (1 - aa^+)A \oplus aA = (1 - a^+a)A \oplus a^+A$

Proposition 3.1.9

Soit $a \in A$

a g-inversible $\iff a$ possède un inverse de Moore-Penrose

Preuves : Pour 3.1.8 et 3.1.9 voir [HM1]

On note $\overline{A}$ l'ensemble des éléments de A possédant un inverse généralisé.

Proposition 3.1.10

Soit $a \in A$. a g-inversible $\iff a^*a$ g-inversible $\iff aa^*$ g-inversible

Et on a les égalités suivantes :

$$(a^*a)^+ = a^+(a^+)^* \text{ et } (aa^*)^+ = a^+(a^*)^+$$

Preuve :

Si a est g-inversible, on a :

$$a^*aa^+(a^+)^*a^*a = a^*aa^+(aa^+)^*a = a^*aa^+aa^+a = a^*aa^+a = a^*a$$

De plus, $a^+(a^+)^*aa^* = (a^+a)^*(a^+a)$ est autoadjoint donc a^*a est g-inversible et $(a^*a)^+ = a^+(a^+)^*$.

On procède de même pour aa^*

Réciproquement : si a^*a g-inversible d'inverse généralisé b alors $a^*aba^*a = a^*a$.

On a donc : $(a - aba^*a)^*(a - aba^*a) = 0$.

D'où ba^* inverse généralisé de a

Lemme 3.1.11 Soit $a \in A$ et a positif.

$$aA \text{ fermé} \implies a \text{ g-inversible}$$

Preuve: Si a est un opérateur positif, il possède une racine carrée $a^{1/2} = (a^{1/2})^*$.

De plus, $a^{1/2} \in \overline{aA}$ et $\overline{aA} = aA$ d'après l'hypothèse.

($\overline{aA}$ désigne l'adhérence de aA)

De là, il existe $b \in A$ tel que $a^{1/2} = ab$ puis $abb^*a = ab(ab)^* = a^{1/2}(a^{1/2})^* = a$

On en déduit que a g-inversible.

Théorème 3.1.12

Soit $a \in A$

$$aA \text{ fermé} \iff a \text{ g-inversible}$$

Preuve :

Si a est g-inversible alors $aA = abA = (1 - ab)^{-1}(0)$ qui est fermé

Si aA fermé alors a^*a est positif et $(a^*a)^{1/2}A$ fermé

En effet, $\|ax\| = \|(a^*a)^{1/2}x\|$ pour tout x de A et $d(x, a^{-1}(0)) = d(x, (a^*a)^{1/2})^{-1}(0)$

D'après le Lemme 3.1.11, $(a^*a)^{1/2}$ est donc g -inversible et de là a^*a l'est aussi et donc a en utilisant 3.1.10

3.2 Conorme dans les C^* algèbres

Définition 3.2.1 La conorme de $a \in A$ est $\gamma(a) = \gamma(L_a)$

$\gamma(a)$ est aussi donnée par la formule :

$$\gamma(a) = \inf\{\|ax\|; d(x, a^{-1}(0)) = 1\}$$

Théorème 3.2.2 On peut rassembler une partie des propositions précédentes en énonçant les équivalences suivantes.

Soit $a \in A$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\gamma(a) > 0$.
- (ii) aA est fermé.
- (iii) a est g -inversible.
- (iv) a possède un inverse de Moore-Penrose.

Cas particulier : Si a est normal i.e $a^*a = aa^*$.

On a aussi équivalence avec

- (v) $aA = a^2A$
- (vi) $aA \oplus a^{-1}(0) = A$
- (vii) $0 \notin \text{acc } \sigma(a)$

Preuve :

(i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) $\iff$ (iv) sont des rappels des propositions précédentes.

(vi) $\iff$ (vii) est une preuve classique.

(v) $\iff$ (vi) : Si $x \in A$, alors comme $aA = a^2A$ il existe $y \in A$ tel que $ax = a^2y$ donc $x - ay \in a^{-1}(0)$ et de plus $ay \in A$ ce qui prouve $A = a^{-1}(0) + aA$.

Soit $x \in aAa^{-1}(0)$, alors $\exists y \in A$ tel que $x = ay$.

On sait que si a est normal, on a $a^{-1}(0) = (a^*)^{-1}(0)$. De là $a^*x = a^*ay = 0$ puis $y^*a^*ay = 0$ ce qui amène $x = 0$.

L'implication inverse est immédiate.

(ii) $\implies$ (v) : c'est 3.1.8 (iv) appliqué à a normal.

(v) $\implies$ (ii) : Soit $(ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $y \in A$.

Alors $\exists x$ et z dans A tels que $y = ax + z$.

Montrons que $z = 0$. On remarque que $a^{-1}(0) = (a^*)^{-1}(0)$ implique

$az = 0 \iff a^*z = 0 \iff z^*a = 0$. De là, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z^*ax_n = 0$, or cette suite converge vers $z^*y = z^*ax + z^*z$. Par conséquent, $z^*z = 0 = z$ puis $y = ax$ ce qui prouve aA fermé.

Lemme 3.2.3

$$\forall x \in A, d(x, a^{-1}(0)) = \|a^+x\|$$

Preuve :

Soit $x \in A$ et $y \in a^{-1}(0)$.

$$\begin{aligned} \|a^+x - y\|^2 &= \|(a^+x - y)^*(a^+x - y)\| = \|(a^+x)^*a^+x - (a^+x)^*y - ya^+x + y^*y\| = \\ &= \|(a^+x)^*a^+x + y^*y\| \geq \|(a^+x)^*(a^+x)\| \geq \|a^+x\|^2. \end{aligned}$$

On en déduit que $\|a^+x - y\| \geq \|a^+x\|$.

D'autre part, il est évident que $\inf_{y \in a^{-1}(0)} \|a^+x - y\| \leq \|a^+x\|$.

Proposition 3.2.4

Soit $a \in A$

$$\gamma(a) = \inf\{\|ay\|; y \in a^+A \text{ et } \|y\| = 1\}$$

Preuve :

D'après 3.1.4 et 3.1.8(iv). $A = (1 - a^+a)A \oplus aA$ et $a^{-1}(0) = (1 - a^+aA)$.

De là, pour $x \in A$, $d(x, a^{-1}(0)) = d(a^+ax, a^{-1}(0)) = \|a^+ax\|$.

Du fait que $a^+aA = a^+A$, $\gamma(a) = \inf\{\|ax\|; d(x, a^{-1}(0)) = 1\} =$

$$\inf\{\|aa^+ax\|; \|a^+ax\| = 1\} = \inf\{\|ay\|; y \in a^+A \text{ et } \|y\| = 1\}.$$

Proposition 3.2.5 (généralisation de $\gamma(T) = \|T^{-1}\|^{-1}$ quand T est inversible)

Soit $a \in A$ g -inversible

$$\gamma(a) = \|a^+\|^{-1}$$

Preuve :

$$\|a^+\| = \sup\left\{\frac{\|a^+x\|}{\|x\|}; x \in A, x \neq 0\right\} = \sup\left\{\frac{\|a^+x\|}{\|x\|}; x \in aA, x \neq 0\right\} \text{ car } a^+A =$$

a^+aA .

$$= \sup\left\{\frac{\|a^+ay\|}{\|ay\|}; y \in a^+A, y \neq 0\right\} = \sup\left\{\frac{\|y\|}{\|ay\|}; y \in a^+A, y \neq 0\right\}$$

$$= \left(\inf\left\{\frac{\|ay\|}{\|y\|}; y \in A, y \neq 0\right\}\right)^{-1} = \frac{1}{\gamma(a)}.$$

Proposition 3.2.6

Soit $a \in A$ et a positif

$$\gamma(a) = \inf\{\sigma(a) \setminus \{0\}\}$$

Preuve :

D'après le Théorème 3.2.2 (i) $\iff$ (vii), $\gamma(a) = 0$ et $\inf\{\sigma(a) \setminus \{0\}\} = 0$ sont équivalents.

Supposons à présent que $\gamma(a) > 0$ et $\inf\{\sigma(a) \setminus \{0\}\} > 0$.

Montrons que $\gamma(a) \leq \inf\{\sigma(a) \setminus \{0\}\}$

a est normal et $\gamma(a) > 0$, on peut donc appliquer le Théorème 3.2.2,

(i) $\implies$ (vi), ce qui nous donne $aA \oplus a^{-1}(0) = A$ puis la proposition 2.1.5 appliquée à $X = A$ et $T = L_a$ nous donne directement l'inégalité recherchée.

Deuxième inégalité:

Soit $\lambda \notin \sigma(a)$ tel que $0 < \lambda < \gamma(a) = \inf\{\sigma(a) \setminus \{0\}\}$

Montrons qu'alors $\gamma(a) \geq \lambda$.

Avec les hypothèses, il existe $b \in A$ tel que $(a - \lambda)b = 1$ et $b \geq 0$ car $a - \lambda$ est positif.

Soit $x \in A$. De $ab = 1 + \lambda b$, on tire:

$$\|abx\|^2 = \|(x + \lambda bx)^*(x + \lambda bx)\| = \|x^*x + \lambda x^*bx + \lambda x^*bx + \lambda^2 x^*b^2x\|$$

D'où $\|abx\|^2 \geq \lambda^2 \|x^*b^*bx\| \geq \|\lambda bx\|^2$, puis $\|abx\| \geq \|\lambda bx\|$.

Comme $bA = A$, ceci prouve que $\forall y \in a, \|ay\| \geq \|y\| \geq d(y, a^{-1}(0))$.

De là $\gamma(a) = \inf\{\sigma(a) \setminus \{0\}\}$ ce qui termine la preuve.

Théorème 3.2.7

Soit $a \in A$ quelconque

$$\gamma(a) = \inf\{\sigma(|a|) \setminus \{0\}\}$$

Preuve : Il suffit d'appliquer la proposition précédente à $(a^*a)^{\frac{1}{2}}$.

En effet, $(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ est positif et $\|ax\| = \|(a^*a)^{\frac{1}{2}}x\|$ donne $\gamma(a) = \gamma((a^*a)^{\frac{1}{2}})$.

Remarque :

Ce théorème généralise le résultat suivant d'Apostol (cf[A]) :

Soit H espace de Hilbert et $T \in B(H)$. Alors $\gamma(T) = \inf\{(\sigma(|T|) \setminus \{0\})\}$

Formules élémentaires:

La conorme vérifie les propriétés suivantes :

$$3.2.8 \quad \gamma(a)^2 = \gamma(a^*a) = \gamma(aa^*) = \gamma(a^*)^2 = \gamma(|a|)^2 = \gamma(|a^*|)^2$$

$$3.2.9 \quad \gamma(a) > 0 \iff]0, \gamma(a)[\subseteq \rho(|a|) \iff 0 \notin \text{acc } \sigma(|a|)$$

$$3.2.10 \quad \text{Soit } a \text{ normal, alors } \forall n \in \mathbb{N}, \gamma(a^n) = \gamma(a)^n.$$

Preuves :

3.2.8, 3.2.9 et 3.2.10 découlent directement du théorème précédent et de sa preuve.

Proposition 3.2.11 *Soit $a \in A$.*

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma_n = \{a \in A, \gamma(a) \geq n\}$ est fermé dans A

Preuve :

On prouve d'abord le résultat pour a positif.

$\Lambda_n = \{a \in A^+, \gamma(a) \geq n\}$ est fermé dans A . Soit $a \in A$ et a positif. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $0 < \lambda < n$

Si $a \in \overline{\Lambda_n}$, alors $\exists b \in \overline{A^+}$ tel que $b - \lambda$ inversible et $\|b - a\| < \min(\lambda, n - \lambda)$ donc $a - \lambda = (b - \lambda)[1 + (b - \lambda)^{-1}(a - b)]$ est inversible.

$$\|(a - \lambda)^{-1}\| = \sup\{|\alpha|; \alpha \in \sigma(a - \lambda)^{-1}\} = \frac{1}{\inf_{\alpha \in \sigma(a)} |\alpha - \lambda|} \leq \frac{1}{\min(\lambda, n - \lambda)}.$$

d'où $\{a \in A^+; \gamma(a) \geq n\}$ fermé dans A .

Pour a quelconque, considérons la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A^+ \\ x & \longmapsto & x^*x \end{array}$$

$\{a \in A; \gamma(a) \geq n\} = f^{-1}(\{b \in A^+; \gamma(b) \geq n^2\})$ permet de conclure.

Théorème 3.2.12 *La conorme est semi-continue supérieurement :*

Soit $a \in A$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A

$$a_n \longrightarrow a \implies \overline{\lim} \gamma(a_n) \leq \gamma(a)$$

Preuve :

Ceci résulte directement de la proposition précédente.

Proposition 3.2.13 *Soient a et b éléments de A tels que $\gamma(a) > 0$ et $\gamma(b) > 0$.*

$$\|b^+b - a^+a\| < 1 \implies |\gamma(b) - \gamma(a)| \leq \|b - a\|$$

Preuve :

$1 + a^+a - b^+b$ est inversible .Notons c son inverse.

Remarquons que $1 = (1 + a^+a - b^+b)c$ conduit à $b = (b + ba^+a - bb^+b)c = ba^+ac$.

De là, $b = ac + ba^+ac - ac$ puis $b = ac + (b - a)a^+ac$.

On en déduit $\forall x \in A, \|bx\| \geq \|aa^+acx\| - \|b - a\|.\|a^+acx\|$.

On a alors $\|bx\| \geq \|a^+acx\| - \|b - a\|\|a^+acx\|$.

Or, $d(a^+acx, a^{-1}(0)) = \|a^+acx\| = \|b^+bx\| = d(x; b^{-1}(0))$.

De l'inégalité précédente, on déduit $\|bx\| \geq (\gamma(a) - \|b - a\|).d(x, b^{-1}(0))$ et de là, $\gamma(b) \geq \gamma(a) - \|b - a\|$.

La deuxième inégalité se démontre de façon similaire.

4 CONORME ESSENTIELLE

4.1 Définition et propriétés

Rappelons les notations et résultats des chapitres précédents.

$C(H) = B(H)/K(H)$ l'algèbre de Calkin et $\pi : B(H) \rightarrow C(H)$ la surjection canonique.

Définition 4.1.1 le spectre essentiel est $\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I \text{ n'est pas Fredholm}\}$
On note $\rho_e(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_e(T)$

D'après le théorème d'Atkinson, on a :

4.1.2

$$\sigma(\pi(T)) = \sigma_e(T)$$

Remarque : ce résultat est en fait exactement la proposition 2.3.2 réécrite en utilisant la notion de spectre essentiel.

Définition 4.1.3 Soit $T \in B(H)$

$\gamma(\pi(T))$ sera appelée la conorme essentielle de T et sera notée $\gamma_e(T)$.

Propriétés de la conorme essentielle:

$$4.1.4 \quad \gamma_e(T) = \gamma_e(|T|) = \inf\{\sigma_e(|T|) \setminus \{0\}\}$$

$$4.1.5 \quad \gamma_e(T)^2 = \gamma_e(T^*T) = \gamma_e(TT^*) = \gamma_e(T^*)^2$$

$$4.1.6 \quad \gamma(T) > 0 \iff]0, \gamma(T)[\subseteq \rho(|T|) \iff 0 \notin \text{acc } \sigma(|T|)$$

$$4.1.7 \quad \gamma_e(T) > 0 \iff]0, \gamma_e(T)[\subseteq \rho_e(|T|) \iff 0 \notin \text{acc } \sigma_e(|T|)$$

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème 3.2.7 et les formules 3.2.8, 3.2.9 à T et $\pi(T)$.

Proposition 4.1.8 Soit $T \in B(H)$

$$\forall K \in K(H), \gamma_e(T) = \gamma_e(T + K) \geq \gamma(T + K).$$

Preuve :

- $\gamma_e(T) = \gamma(\pi(T)) = \gamma(\pi(T + K)) = \gamma_e(T + K)$
 - Soit $A \in B(H)$, $\sigma_e(|A|) \subseteq \sigma(|A|) \setminus \{0\}$ d'où $\inf\{\sigma_e(|A|) \setminus \{0\}\} \geq \inf\{\sigma(|A|) \setminus \{0\}\}$
- En utilisant le Théorème 3.2.7, on obtient $\gamma_e(A) \geq \gamma(A)$.
 Cette inégalité appliquée à $A = T + K$ donne $\gamma_e(T + K) \geq \gamma(T + K)$.

Rappelons quelques résultats sur le spectre des opérateurs normaux.
 Ces propositions nous seront utiles dans la preuve du Théorème 4.2.2.

Proposition 4.1.9 Réf : c'est la proposition 4.5 de [Co].

Soit T opérateur normal de $B(H)$.

$R(T - \lambda I)$ est fermé si et seulement si λ est un point isolé de $\sigma(T)$.

Proposition 4.1.10 Réf : C'est la proposition 4.6 de [Co].

Soit T un opérateur normal de $B(H)$.

$\sigma_e(T) = \sigma(T) \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lambda \text{ est un point isolé de } \sigma(T) \text{ et est une valeur propre de multiplicité finie}\}$.

Preuve de 4.1.10 :

- (i) - Si $\lambda \notin \sigma(T)$ alors il est clair que $\lambda \notin \sigma_e(T)$.
- Si $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lambda \text{ est un point isolé de } \sigma(T) \text{ et est une valeur propre de multiplicité finie}\}$ alors λ pôle d'ordre 1 de $\lambda \mapsto R(T, \lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$.
 De là, $R(T - \lambda I)$ est fermé et $H = N(T - \lambda I) \oplus R(T - \lambda I)$.
 Comme $N(T - \lambda I)$ est de dimension finie, $T - \lambda I$ est Fredholm et par conséquent $\lambda \notin \sigma_e(T)$.
- (ii) Si $\lambda \notin \sigma_e(T)$ alors $R(T - \lambda I)$ est fermé. Et d'après la proposition précédente, λ est un point isolé de $\sigma(T)$.

Remarque : Si T opérateur normal de $B(H)$ alors tout point isolé de $\sigma(T)$ est une valeur propre de T .

4.2 Relèvement de la conorme

Ce relèvement est l'objet principal de ce travail.

On a déjà recherché pour différents opérateurs particuliers des relèvements dans l'algèbre de calkin. Il est alors naturel de chercher si un éventuel relèvement de la conorme essentielle est possible. Dans un premier temps, on remarque que si la conorme essentielle est nulle, on obtient facilement le relèvement désiré.

D'autre part, si elle est strictement positive on a un premier résultat partiel immédiat.

On regroupe ces deux résultats dans la proposition suivante :

Proposition 4.2.1 *Soit $T \in B(H)$ tel que $\gamma_e(T) = 0$.*

Alors $\forall K \in K(H)$, $\gamma(T + K) = 0$.

Soit $S \in B(H)$ tel que $\gamma_e(S) > 0$.

Alors il existe $K' \in K(H)$ tel que $\gamma(S + K') > 0$.

Preuve :

Il suffit d'appliquer la proposition 2.3.6 qui permet de relever les inverses généralisés et d'utiliser l'équivalence valable pour tout élément a d'une C^* algèbre :

a possède un inverse généralisé si et seulement si sa conorme est strictement positive qui a été démontrée dans un chapitre précédent.

Nous allons démontrer à présent un résultat beaucoup plus précis :

Théorème 4.2.2 *Soit $T \in B(H)$ alors*

$$\gamma_e(T) = \sup_{K \in K(H)} \gamma(T + K).$$

Démonstration :

Première inégalité : D'après 4.1.8, il est clair que $\gamma_e(T) \geq \sup_{K \in K(H)} \gamma(T + K)$.

Deuxième inégalité : $\gamma_e(T) \leq \sup_{K \in K(H)} \gamma(T + K)$

Si $\gamma_e(T) = 0$ alors l'égalité est évidente.

Si $\gamma_e(T) > 0$.

Premier cas : $]0, \gamma_e(T)[\subset \rho(|T|)$.

Alors $\gamma(T) = d(0, \sigma(|T|) \setminus \{0\}) \geq \gamma_e(T)$.

Donc $\sup_{K \in K(H)} \gamma(T + K) \geq \gamma(T) \geq \gamma_e(T)$.

Deuxième cas : $]0, \gamma_e(T)[\not\subset \rho(|T|)$.

D'après 4.1.7, on a toujours $]0, \gamma_e(T)[\subset \rho_e(|T|)$

D'après 4.1.10, on a :

$\sigma(|T|) \setminus \sigma_e(|T|) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lambda \text{ est un point isolé de } \sigma(|T|) \text{ et est une valeur propre de multiplicité finie}\}$ est dénombrable.

Donc il existe une suite de points distincts $(\lambda_n)_{n \geq 1} \subset]0, \gamma_e(T)[$ telle que

$$(i) \quad]0, \gamma_e(T)[\setminus (\lambda_n)_{n \geq 1} \subset \rho(|T|)$$

(ii)

les seuls points d'accumulations éventuels de la suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ sont 0 et $\gamma_e(T)$

$|T|$ est un opérateur normal et $\lambda_n \in \sigma(|T|) \cap \rho_e(|T|)$, on en déduit que :

Pour tout $n \geq 1$, on a $H = \overline{R(|T| - \lambda_n I)} \oplus N(|T| - \lambda_n I)$ et on a également $R(|T| - \lambda_n I)$ fermé d'après 4.1.9 d'où :

$$(iii) \quad H = R(|T| - \lambda_n I) \oplus N(|T| - \lambda_n I),$$

La décomposition (iii) est orthogonale et la dimension de $N(|T| - \lambda_n I)$ est finie.

Soit P_n la projection orthogonale sur $N(|T| - \lambda_n I)$, alors $P_n^2 = P_n = P_n^*$.

Comme pour $n \neq m$, $P_n x \in R(|T| - \lambda_m I)$, on a $P_n P_m = P_m P_n = P_n \delta_{n,m}$.

On remarque également que $|T|P_n = P_n|T| = \lambda_n P_n$.

Soit $\delta < \gamma_e(T)$. Posons $I_\delta = \{n \geq 1 ; \lambda_n \leq \delta\}$.

Alors pour tout $x \in H$, la série $\sum_{n \in I_\delta} P_n x$ est convergente. En effet, $\|\sum_{n \in I_\delta} P_n x\|^2 = \sum_{n \in I_\delta} \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$.

Soit $P_\delta x = \sum_{n \in I_\delta} P_n x$, alors $P_\delta \in B(H)$, $P_\delta^2 = P_\delta = P_\delta^*$ et $P_\delta |T| = |T| P_\delta$.

- Montrons que les opérateurs $|T|P_\delta$ et TP_δ sont compacts.

Si I_δ est fini alors P_δ est un opérateur de rang fini.

Par conséquent, $|T|P_\delta$ est aussi de rang fini et donc compact.

Si I_δ est infini, alors $\lambda_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ d'après (ii).

On peut supposer par commodité que la suite $(\lambda_n)_{\substack{n \geq 1 \\ n \in I_\delta}}$ est décroissante.

Soit $x \in H$,

$$\| |T|P_\delta x - \sum_{\substack{n=1 \\ n, m \in I_\delta}}^{m-1} |T|P_n x \|^2 = \left\| \sum_{\substack{n \geq m \\ n, m \in I_\delta}} \lambda_n P_n x \right\|^2 = \sum_{\substack{n \geq m \\ n, m \in I_\delta}} \lambda_n^2 \|P_n x\|^2 \leq \lambda_m^2 \sum_{\substack{n \geq m \\ n, m \in I_\delta}} \|P_n x\|^2 \leq \lambda_m^2 \|x\|^2$$

D'où,

$$\| |T|P_\delta - \sum_{\substack{n=1 \\ n, m \in I_\delta}}^{m-1} |T|P_n \| \leq \lambda_m \rightarrow 0 \text{ quand } m \rightarrow +\infty.$$

Donc $|T|P_\delta$ est compact comme limite d'opérateurs de rang fini dans $B(H)$.

Montrons à présent que l'opérateur TP_δ est compact:

$|T|P_\delta$ compact implique que $(|T|P_\delta)^2$ compact.

Puis, comme $|T|$ et P_δ commutent et $(P_\delta)^2 = P_\delta = P_\delta^*$, on a :

$$(|T|P_\delta)^2 = P_\delta^*(|T|)^2P_\delta = P_\delta^*T^*TP_\delta = (TP_\delta)^*(TP_\delta).$$

L'opérateur $(TP_\delta)^*(TP_\delta)$ est donc compact ce qui entraîne que TP_δ est compact.

Montrons qu'on a l'inclusion suivante :

$$]0, \delta] \subset \rho(|T|(I - P_\delta))$$

Puisque pour tout $\lambda \in]0, \delta]$, $|T| - \lambda I$ est Fredholm d'indice zéro et $|T|P_\delta$ compact, $|T|(I - P_\delta) - \lambda I$ est Fredholm d'indice zéro pour tout $\lambda \in]0, \delta]$. Donc, pour démontrer l'inclusion, il suffit de montrer que $N(|T|(I - P_\delta) - \lambda I) = \{0\}$ pour tout $\lambda \in]0, \delta]$.

Soit $x \in N(|T|(I - P_\delta) - \lambda I)$, alors

$$x = (I - P_\delta)|T|\frac{x}{\lambda} \text{ et } (|T| - \lambda I)x = P_\delta|T|x.$$

D'où $(|T| - \lambda I)x = P_\delta|T|(I - P_\delta)|T|\frac{x}{\lambda} = 0$. Par conséquent, $x \in N(|T| - \lambda I)$.

Si $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in I_\delta$, alors $|T| - \lambda I$ est inversible (d'après (i)) et donc $x = 0$.

Si $\lambda = \lambda_n$, $n \in I_\delta$, alors $x \in N(|T| - \lambda_n I)$ et donc $P_\delta x = x$.

En outre, $\lambda_n x = |T|(I - P_\delta)x = |T|(I - P_\delta)P_\delta x = 0$ d'où $x = 0$. Ce qui établit l'inclusion d'après la remarque initiale.

On peut à présent conclure :

Comme $|T|(I - P_\delta) = |T|(I - P_\delta)|$, $]0, \delta] \subset \rho(|T|(I - P_\delta))$ implique que $\gamma(T(I - P_\delta)) \geq \delta$. Par conséquent, pour tout $\delta < \gamma_e(T)$, il existe $K_\delta = TP_\delta$ compact tel que $\gamma(T - K_\delta) \geq \delta$.

D'où finalement, pour tout $\delta < \gamma_e(T)$, $\sup_{K \in K(H)} \gamma(T + K) \geq \delta$.

La deuxième inégalité est donc prouvée ce qui termine la démonstration du théorème.

Remarque 1 : l'égalité du Théorème précédent n'est plus valable lorsque $T \in B(X)$, X espace de Banach. En effet, il existe un espace de Banach X et un opérateur $T \in B(X)$, (cf [A-T], la preuve du Théorème 3.5) tel que T est semi-Fredholm, $L_{\pi(T)}$ injectif et il existe $R_n \in B(X)$ vérifiant $\|\pi(R_n)\| = 1$ et $\|\pi(TR_n)\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

D'où, $\gamma_e(T) = \gamma(L_{\pi(T)}) = 0$ et $\gamma(T) > 0$.

Remarque 2 : nous effectuerons par la suite une démonstration plus courte suggérée par J.Ph Labrousse de ce Théorème mais la construction de la preuve qui précède est indispensable pour démontrer le Théorème suivant.
Ce Théorème montre que le supremum est atteint. On obtient alors un relèvement exact de la conorme ce qui était notre objectif.

Théorème 4.2.3 Soit $T \in B(H)$, alors il existe K opérateur compact tel que

$$\gamma_e(T) = \gamma(T + K).$$

Démonstration :

Deux premiers cas sont immédiats :

- Si $\gamma_e(T) = 0$ alors $\gamma(T) = 0$, donc l'opérateur $K = 0$ convient.
- Si $\gamma_e(T) = +\infty$ alors T est compact. Dans ce cas, il suffit de prendre $K = -T$.

Démontrons l'égalité du théorème dans le cas où $0 < \gamma_e(T) < \infty$

- Si $0 < \gamma_e(T) < \infty$ alors d'après le Théorème 4.2.2, il existe $K_0 \in K(H)$ tel que $\gamma(T + K_0) > 0$. On peut à présent supposer que $\gamma(T) = \gamma(|T|) > 0$.
0 n'est donc pas un point d'accumulation de $\sigma(|T|)$.

Si $[\gamma(T), \gamma_e(T)[\subset \rho(|T|)$ alors $\gamma_e(T) = \gamma(T)$.

Dans ce cas l'égalité du théorème est vérifiée pour $K = 0$.

Si $[\gamma(T), \gamma_e(T)[\not\subset \rho(|T|)$,

on a alors $[\gamma(T), \gamma_e(T)[\cap \sigma(|T|) = (\lambda_n)_{n \geq 1}$ qui est une suite de points distincts avec $\gamma_e(T)$ comme seul point d'accumulation éventuel.

Comme dans la preuve du Théorème 4.2.2, on considère P_n la projection orthogonale sur $N(|T| - \lambda_n I)$ et on pose $\forall x \in H$, $Px = \sum_{n \geq 1} P_n x$.

Alors l'opérateur $K_1 = \gamma_e(T)P - |T|P$ est compact, en effet, soit la suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ est finie soit $\gamma_e(T) - \lambda_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Puisque $|T| = (I - P)|T| + \gamma_e(T)P - K_1$,

$$\gamma_e(T) = \gamma_e(|T|) = \gamma_e((I - P)|T| + \gamma_e(T)P).$$

- Montrons que $]0, \gamma_e(T)[\subset \rho((I - P)|T| + \gamma_e(T)P)$.

Pour cela, il suffit de montrer que :

$$\forall \lambda \in]0, \gamma_e(T)[, N((I - P)|T| + \gamma_e(T)P - \lambda I) = 0$$

Soit $x \in N((I - P)|T| + \gamma_e(T)P - \lambda I)$.

$$\text{Alors } \lambda x = (I - P)|T|x + \gamma_e(T)Px$$

$$\text{et } \forall n \geq 1, (|T| - \lambda I)x = (|T| - \gamma_e(T)I)Px = (|T| - \gamma_e(T)I) \left(\frac{\gamma_e(T)}{\lambda} \right)^n Px.$$

D'où $Px = 0$ et par conséquent $x \in N(|T| - \lambda I)$.

Si $\lambda \neq \lambda_n$, alors $|T| - \lambda I$ est inversible et donc $x = 0$.

Si $\lambda = \lambda_n$, alors $x = P_n x = Px$ d'où $(|T| - \lambda I)x = (\lambda_n - \gamma_e(T))x = 0$ et par conséquent $x = 0$.

On en déduit finalement que :

$$\gamma_e(T) = \gamma_e(|T|) = \gamma_e((I-P)|T| + \gamma_e(T)P) = \gamma((I-P)|T| + \gamma_e(T)P) = \gamma(|T| + K_1).$$

Maintenant, soit $T = V|T|$ la décomposition polaire de T avec V une isométrie ou une co-isométrie (cf 2.2.10). Par symétrie de l'adjoint, on peut supposer que V est une isométrie. En utilisant 2.1.4, on obtient :

$$\gamma_e(T) = \gamma(|T| + K_1) = \gamma(V(|T| + K_1)) = \gamma(T + K)$$

où $K = VK_1 \in K(H)$.

Le théorème est maintenant démontré.

Remarque :

Si T est semi-Fredholm alors

$$\gamma_e(T) = \max\{m_e(T), m_e(T^*)\}$$

où $m_e(T) = \inf\{\sigma_e(|T|)\}$. Il est clair que les Théorèmes 4.2.2 et 4.2.3 restent valables si on remplace " $\gamma_e(T)$ " par " $m_e(T)$ ".

On a donc la proposition suivante :

Proposition 4.2.4 Soit $T \in B(H)$ alors :

$$m_e(T) = \sup_{K \in K(H)} m(T + K).$$

De plus, il existe K opérateur compact de $B(H)$ tel que :

$$m_e(T) = m(T + K)$$

Théorème 4.2.5 Soit $T \in B(H)$ et $T = U|T|$ sa décomposition polaire avec U isométrie partielle et $N(T) = N(U)$.

$$\gamma(T)^2 = \sup\{c > 0; T^*T \geq cU^*U\}$$

Preuve :

On procède par double inégalité.

(i) Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $T^*T \geq cU^*U$.

On a alors $\forall x \in H, (T^*Tx, x) \geq c(U^*Ux, x)$

Si $x \in N(T)^\perp = N(U)^\perp$, on a : $\|Tx\|^2 \geq c\|Ux\|^2 \geq c\|x\|^2$.

Donc $\forall x \in N(T)^\perp$ et $x \neq 0$, $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \geq \sqrt{c}$ qui se traduit par $\gamma(T) \geq \sqrt{c}$.

On en conclut que $\gamma(T)^2 \geq \sup\{c > 0; T^*T \geq cU^*U\}$.

$$(ii) \forall x \in N(T)^\perp \text{ et } x \neq 0, \gamma(T)^2 \leq \frac{\|Tx\|^2}{\|x\|^2} \leq \frac{(T^*Tx, x)}{(U^*Ux, x)}$$

Donc $\forall x \in N(T)^\perp \text{ et } x \neq 0, \gamma(T)^2 \cdot (U^*Ux, x) \leq (T^*Tx, x)$,
ce qui prouve que $\gamma(T)^2 \cdot U^*U \leq T^*T$.

Finalement, $\gamma(T)^2 \leq \sup\{c > 0; T^*T \geq cU^*U\}$.

Définition 4.2.6 $T \in B(H)$ est dit *quasi-normal* si T commute avec T^*T .
(cf. [H, problème 108])

Remarque : Un opérateur normal est quasi-normal.

Proposition 4.2.7 Soit $T \in B(H)$, *quasi-normal*.
 $\{T\}' = \{S \in B(H); TS = ST\}$, le commutant de T .
On a alors :

$$\gamma_e(T) = \sup_{K \in K(H) \cap \{T\}'} \gamma(T + K)$$

et

$$\exists K \in K(H) \cap \{T\}' \text{ tel que } \gamma_e(T) = \gamma(T + K).$$

Preuve : Pour obtenir 4.2.7, il suffit de remarquer que T quasi-normal implique T commute avec $|T|$ et utiliser les démonstrations des Théorèmes 4.2.2 et 4.2.3.

Proposition 4.2.8

Si T est normal alors $\forall n \geq 1, \exists K \in K(H) \cap \{T\}',$ normal tel que $\gamma_e(T^n) = \gamma((T+K)^n)$.

Preuve : On utilise encore la démonstration du Théorème 4.4.4. On obtient avec la même construction un opérateur $K = V.K_1$ tel que $\gamma_e(T) = \gamma(T + K)$. De plus du fait que T est normal et de par la construction de K , K est alors normal et commute avec T donc $T + K$ est normal.

En appliquant la Proposition 3.2.10 pour $a = \pi(T)$ puis pour $a = T + K$, on a le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \gamma_e(T^n) = (\gamma_e(T))^n = (\gamma(T + K))^n = \gamma_e((T + K)^n).$$

4.3 Applications du relèvement de la conorme

Proposition 4.3.1 Soit $T \in B(H)$

$$\gamma_e(T) > 0 \iff \exists K \in K(H) \text{ tel que } R(T + K) \text{ fermé}$$

Preuve de 4.3.1 :

D'après le Théorème 4.2.3,

$\exists K \in K(H)$ tel que $\gamma(T + K) > 0$ et ceci équivaut à $R(T + K)$ fermé.

Notation : on rappelle que pour A C^* algèbre, $\overline{A}$ désigne l'ensemble des éléments de A admettant un inverse généralisé.

Proposition 4.3.2

$$\overline{C(H)} = \pi(\overline{B(H)})$$

Preuve de 4.3.1 :

En utilisant successivement 3.1.12 appliqué à $a = \pi(T)$ et à $a = T$ ainsi que le Théorème 4.2.3, on obtient :

$$\begin{aligned} T \in \overline{C(H)} &\iff \gamma_e(T) > 0 \iff \exists K \in K(H) \text{ tel que } \gamma(T + K) > 0 \\ &\iff \exists K \in K(H) \text{ tel que } T + K \in \overline{B(H)} \iff T \in \pi(\overline{B(H)}). \end{aligned}$$

Remarque : ce résultat est l'analogie des résultats 2.3.6 et 4.2.1 déjà connus.

Proposition 4.3.3 Soit $\pi(T) \in \overline{C(H)}$ et $\pi(T)^+$ son inverse de Moore-Penrose. Alors

$$\|\pi(T)^+\| = \inf_{K \in K(H)} \|(T + K)^+\|.$$

En fait, l'inf est atteint i.e : $\exists K_0 \in K(H)$ tel que $\|\pi(T)^+\| = \|(T + K_0)^+\|$

Preuve :

C'est une conséquence directe des théorèmes 4.2.2 et 4.2.3.

On rappelle d'abord que la proposition 3.2.5 donne l'égalité : $\gamma(\pi(T)) = (\|\pi(T)^+\|)^{-1}$.

Pour le premier résultat en appliquant 4.2.2 et l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\pi(T)^+\| &= \frac{1}{\gamma(\pi(T))} = \frac{1}{\sup_{K \in K(H)} \gamma(T + K)} = \frac{1}{\sup_{K \in K(H)} \frac{1}{\|(T + K)^+\|}} \\ &= \inf_{K \in K(H)} \|(T + K)^+\|. \end{aligned}$$

Pour le deuxième, on a :

$$\|\pi(T)^+\| = \frac{1}{\gamma(\pi(T))} = \frac{1}{\gamma(T + K_0)} \text{ en appliquant 4.2.3.}$$

Remarque :

En utilisant la proposition 3.2.5, on peut également proposer une démonstration plus courte du théorème 4.2.2 suggérée par J.Ph Labrousse :

Autre preuve du théorème 4.2.2 :

Si $\gamma_e(T) = 0$, le résultat est immédiat.

Si $\gamma_e(T) > 0$, en utilisant l'équivalence :

$\gamma_e(T) > 0 \iff \exists K_0 \in K(H)$ tel que $T + K_0$ admet un inverse généralisé, (cf 4.2.1).

On en déduit que $\tilde{T} = T + K_0$ admet un inverse de Moore-Penrose noté $\tilde{T}^+$. (cf 3.1.9)

D'autre part, on a $\forall K \in K(H)$, $\pi((\tilde{T} + K)^+) = \pi(\tilde{T} + K)^+ = \pi(\tilde{T})^+ = \pi(\tilde{T}^+)$.

Par conséquent, $(\tilde{T} + K)^+ = \tilde{T}^+ + K'$ où $K' \in K(H)$.

D'autre part, $\inf_{K \in K(H)} \|(\tilde{T} + K)^+\| = \inf_{K \in K(H)} \|(\tilde{T}^+ + K)\|$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \gamma_e(T) = \gamma_e(\tilde{T}) &= \frac{1}{\|(\pi(\tilde{T})^+)\|} = \frac{1}{\inf_{K \in K(H)} \|(\tilde{T}^+ + K)\|} = \frac{1}{\inf_{K \in K(H)} \|(T + K_0)^+ + K\|} \\ &= \frac{1}{\inf_{K \in K(H)} \|(T + K + K_0)^+\|} = \frac{1}{\inf_{K \in K(H)} \frac{1}{\gamma(T + K)}} \text{ en utilisant 3.2.5 pour la} \end{aligned}$$

dernière égalité.

$$\text{On a donc } \gamma_e(T) = \frac{1}{\inf_{K \in K(H)} \frac{1}{\gamma(T + K)}} = \sup_{K \in K(H)} \gamma(T + K).$$

C'est le résultat recherché.

Proposition 4.3.4 Soit $T \in B(H)$ alors il existe $K \in B(H)$ compact tel que

$$\|\pi(T)\| = \|T + K\|.$$

Preuve :

cette proposition se démontre en utilisant un raisonnement analogue à celui du Théorème 4.2.3.

Ce dernier résultat donne une réponse partielle à la conjecture de C. Olsen et J. Plastiras [O-P] , page 389, voir aussi [O], [A-P] et [P].

Conjecture 1:

Soit $T \in B(H)$ et P un polynôme à coefficients complexes, alors on conjecture le résultat suivant :

il existe K compact tel que

$$\gamma_e(P(T)) = \gamma(P(T + K)).$$

4.4 Quelques résultats concernant $\gamma(T)$, $\gamma_\infty(T)$ et $\gamma_e(T)$.

Définition 4.4.1 On pose

$$K_0(H) = \{T \in B(H), \dim R(T) < \infty\};$$

$$\gamma_\infty(T) = \sup_{F \in K_0(H)} \gamma(T + F)$$

Il découle directement de ces définitions les inégalités suivantes :

Proposition 4.4.2

$$0 \leq \gamma(T) \leq \gamma_\infty(T) \leq \gamma_e(T)$$

Proposition 4.4.3 Soit $T \in B(H)$

$$\gamma(T) > 0 \iff \gamma_\infty(T) > 0.$$

Preuve: Si $R(T)$ est fermé alors pour tout $F \in K_0(H)$, $R(T + F)$ est fermé. En effet, $R(T) + R(F)$ est fermé dans H comme somme d'un sous-espace fermé et d'un sous-espace de dimension finie. D'autre part, $R(T + F) \subset R(T) + R(F)$ et $\dim \frac{R(T) + R(F)}{R(T + F)} < \infty$ impliquent que $R(T + F)$ est fermé dans $R(T) + R(F)$ et donc fermé dans H .

Proposition 4.4.4 Soit $T \in K(H) \setminus K_0(H)$

$$\text{Alors } \gamma(T) = \gamma_\infty(T) = 0 \text{ et } \gamma_e(T) = +\infty.$$

Preuve : Si T est compact et $R(T)$ fermé alors $R(T)$ de dimension finie. Donc si $T \in K(H) \setminus K_0(H)$ alors $R(T)$ n'est pas fermé et donc $\gamma(T) = 0$. D'après la proposition précédente, $\gamma(T) = \gamma_\infty(T) = 0$. D'autre part, $\gamma_e(T) = \sup_{K \in K(H)} \gamma(T + K)$ et $\gamma(0) = +\infty$ donc $\gamma_e(T) = +\infty$.

Théorème 4.4.5 Soit $T \in B(H)$ avec $\gamma(T) > 0$, alors

$$\gamma_e(T) = \gamma_\infty(T).$$

Preuve :

On procède par double inégalité :

Première inégalité: on a toujours $\gamma_e(T) \geq \gamma_\infty(T)$.

Pour la deuxième inégalité, on reprend la démonstration du Théorème 4.2.2.

Il suffit alors de montrer que l'opérateur TP_δ est cette fois de rang fini.

$\gamma(T) > 0$ implique que 0 n'est pas un point d'accumulation de $\sigma(|T|)$.

Par conséquent, pour tout $\delta < \gamma_e(T)$, I_δ est un ensemble fini donc P_δ puis TP_δ sont de rang fini. On en conclut que :

$$\forall \delta < \gamma_e(T), \sup_{F \in K_0(H)} \gamma(T + F) \geq \delta$$

Ceci prouve que $\gamma_\infty(T) \geq \gamma_e(T)$.

4.5 Exemples

Exemple 1

Exemple d'opérateur tel que $\gamma(T) = \gamma_\infty(T) = 0$ et $\gamma_e(T) = +\infty$.

Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n \geq 1}$ une base hilbertienne de H .

Soit $T \in B(H)$ défini par $\forall n \geq 1, Te_n = \frac{1}{n}e_n$.

Alors $T \in K(H)$ comme limite d'opérateurs de rang fini.

Comme $\gamma(0) = +\infty$, $\gamma_e(T) = \sup\{\gamma(T + K), K \in K(H)\} = \gamma(0) = +\infty$.

De plus, il est clair que T n'est pas de rang fini i.e $T \in K(H) \setminus K_0(H)$.

Donc, d'après les propositions 4.4.3 et 4.4.4, $\gamma(T) = \gamma_\infty(T) = 0$.

Exemple 2

Exemple d'opérateur tel que $\gamma(T) = \gamma_\infty(T) = 0$ et $0 < \gamma_e(T) < \infty$.

Soit H comme dans l'exemple 1. Soit P la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par e_{2n} et K opérateur de $B(H)$ défini par :

$$\forall n \geq 1, Ke_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}e_{2n-1}; Ke_{2n} = 0.$$

K est alors compact comme limite d'opérateurs de rang fini.

Posons $T = P + K$ alors $Te_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}e_{2n-1}$ et $Te_{2n} = e_{2n}$.

$N(T) = 0$ donc $\gamma(T) = \inf\{\|Tx\|; x \neq 0\} = 0$.

En effet, $\|Te_{2n-1}\| = \frac{1}{2n-1}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

On en déduit également que $\gamma_\infty(T) = 0$.

Et on a : $\gamma_e(T) = \inf\{\sigma_e(T) \setminus \{0\}\} = 1$.

Exemple 3

Exemple d'opérateur T tel que $\gamma_e(T) = \gamma(T) = \gamma_\infty(T) = 0$.

Soit $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_n \oplus \dots$ où $H_n = \ell^2(\mathbb{N}^*)$

Soit $T \in B(H)$ défini par $Tx = (\frac{x_n}{n})_{n \geq 1}$ où $x = (x_n)_{n \geq 1} \in H$.

Prouvons que $\gamma_e(T) = 0$.

Notons T_n la restriction de T à H_n , alors $T_n : H_n \longrightarrow H_n$ est un isomorphisme.

Donc T n'est pas compact.

De plus, $\forall K \in K(H)$, $T + K = (T + K)_n : H_n \longrightarrow H_n$

est semi-Fredholm avec $\dim N((T + K)_n) < \infty$.

Soit $e_i \in H_n$ où $(e_i)_{i \geq 1}$ est la base canonique de $H_n = \ell^2$.

Alors, $\|(T + K)_n(e_i)\| \longrightarrow \frac{1}{n}$ et $d(e_i, N((T + K)_n)) \longrightarrow 1$ quand $i \longrightarrow +\infty$.

Or, $\gamma((T + K)_n)d(e_i, N((T + K)_n)) \leq \|(T + K)_n(e_i)\|$, d'où, en faisant tendre i vers l'infini, on obtient $\gamma((T + K)_n) \leq \frac{1}{n}$.

Et comme $\forall n \geq 1$, $\gamma(T + K) \leq \gamma((T + K)_n) \leq \frac{1}{n}$, on en déduit que :

$\gamma(T + K) = 0$ pour tout compact $K \in K(H)$.

Par conséquent $\gamma_e(T) = 0$.

Pour conclure, on sait que de façon générale,

$\gamma_e(T) = 0$ implique $\gamma(T) = \gamma_\infty(T) = 0$.

5 CONTINUITE DE LA CONORME ESSENTIELLE

5.1 Relèvement de la conorme et opérateurs semi-Fredholm

Notons $\sigma_{S-F}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I \text{ n'est pas semi-Fredholm}\}$ le spectre essentiel semi-Fredholm.

Soit $d(T)$ le rayon de la plus grande boule ouverte centrée en T et incluse dans l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm.

On prend $d(T) = 0$ si T n'est pas semi-Fredholm.

Soit $s(T) = \sup \{\varepsilon \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}, 0 \leq |\lambda| < \varepsilon \implies T - \lambda I \text{ semi-Fredholm}\}$

Si T est semi-Fredholm alors $s(T) = d(0, \sigma_{S-F}(T))$.

Remarque: $\forall T \in B(H), d(T) \leq s(T)$

Proposition 5.1.1 *Si T est semi-Fredholm, on a :*

- (i) $\gamma(T) \leq d(T) \leq s(T)$
- (ii) $\gamma_\infty(T) \leq d(T) \leq s(T)$

Preuve :

(i) D'après la proposition 2.2.9, la boule $B(0, \gamma(T))$ est incluse dans l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm donc $\gamma(T) \leq d(T)$.

(ii) Comme les opérateurs semi-Fredholm sont stables par perturbation finie, $\forall F \in B(H)$ de rang fini, $d(T + F) = d(T)$. De (i), on déduit $\gamma_\infty(T) \leq d(T)$.

Proposition 5.1.2

Soit T semi-Fredholm et $S \in B(H)$

Si $\|T - S\| < \gamma_e(T)$ alors S est semi-Fredholm et $\text{ind}(T) = \text{ind}(S)$.

Preuve : D'après le Théorème 4.2.3, il existe $K \in K(H)$ tel que :

$\gamma_e(T) = \gamma(T + K)$ d'où $\|(T + K) - (S + K)\| < \gamma(T + K)$.

D'après 2.2.9, $S + K$ est semi-Fredholm et $\text{ind}(T + K) = \text{ind}(S + K)$.

Et, comme les opérateurs semi-Fredholm ainsi que leurs indices sont stables par les perturbations compactes, la proposition est démontrée.

Proposition 5.1.3 *Soit $T, S \in B(H)$, T semi-Fredholm alors :*

$$\|T - S\| < \gamma_e(T) \implies |\gamma_e(T) - \gamma_e(S)| \leq \|T - S\|.$$

Démonstration : Puisque T est semi-Fredholm, $\pi(T)$ est inversible à gauche ou inversible à droite dans $C(H)$. Sans perte de généralité on peut supposer que $\pi(T)$ est inversible à gauche (sinon on considérerait $\pi(T^*)$). Soit maintenant $S \in B(H)$ tel que $\|\pi(T) - \pi(S)\| < \frac{1}{\|\pi(T)^{-1}\|}$.

Alors $\|\pi(T)^+(\pi(T) - \pi(S))\| < 1$ d'où $I - \pi(T)^+(\pi(T) - \pi(S)) = \pi(T)^+\pi(S)$ est inversible. Donc $[\pi(T)^+\pi(S)]^{-1}\pi(T)^+\pi(S) = I$ ce qui implique que $\pi(S)$ est inversible à gauche. En utilisant 3.2.13, on voit facilement que :

$$|\gamma_e(T) - \gamma_e(S)| \leq \|\pi(T) - \pi(S)\|.$$

Donc on a montré l'implication suivante :

$$\|\pi(T) - \pi(S)\| < \frac{1}{\|\pi(T)^+\|} \implies |\gamma_e(T) - \gamma_e(S)| \leq \|\pi(T) - \pi(S)\|.$$

Et, comme d'après 3.2.5, $\gamma_e(T) = \frac{1}{\|\pi(T)^+\|}$ et $\|\pi(T) - \pi(S)\| \leq \|T - S\|$,

la proposition est démontrée.

Rappelons le Théorème 8.2 de [Z1] qui servira dans la preuve du Théorème suivant:

Théorème 5.1.4 *Soit T un opérateur semi-Fredholm de $B(X)$ où X est un espace de Banach.*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_\infty(T^n)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(T^n)^{1/n} = s(T)$$

Théorème 5.1.5 *Soit $T \in B(H)$ semi-Fredholm*

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_e(T^n)^{1/n} \text{ existe}$$

et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_e(T^n)^{1/n} = d(0, \sigma_{S-F}(T))$$

Preuve :

Puisque T semi-Fredholm, $R(T)$ est fermé ainsi que $R(T^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (cf [S]) et de là $\forall n \in \mathbb{N}, \gamma(T^n) > 0$. En appliquant la proposition 4.4.5 à T^n , on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, \gamma_e(T^n) = \gamma_\infty(T^n)$.

Maintenant, le Théorème 5.1.4 rappelé ci-dessus permet de conclure.

5.2 Points de continuité de la conorme essentielle

Proposition 5.2.1

La fonction $\gamma_e : B(H) \longrightarrow [0, +\infty]$ est semi-continue supérieurement

Preuve : Il suffit d'appliquer 3.2.12 à $a = \pi(T)$.

Remarque : dans [Z2] Proposition 1, on trouve une version de ce Lemme dans le cadre des espaces de Banach.

Théorème 5.2.2 Soit $T \in B(H)$

T est un point de continuité pour la fonction $\gamma_e : B(H) \longrightarrow [0, +\infty]$

si et seulement si

$\gamma_e(T) = 0$ ou T est semi-Fredholm.

Démonstration

"Si".

Quand $\gamma_e(T) = 0$, la continuité de γ_e découle de sa semi-continuité supérieure (cf proposition 5.2.1).

Supposons donc que $\gamma_e(T) > 0$ et que T est semi-Fredholm. Alors la continuité de γ_e se déduit de la proposition 5.1.3.

"Seulement si":

Supposons que la fonction γ_e est continue au point T et que $\gamma_e(T) > 0$.

Alors il existe $\alpha > 0$ tel que si $\|T - S\| < \alpha$ alors $\gamma_e(S) \geq \frac{\gamma_e(T)}{2} \geq \delta$.

D'autre part l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm est dense dans $B(H)$ (cf 2.2.11). Donc il existe

$(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs semi-Fredholm qui converge vers T dans $B(H)$.

Alors pour $\varepsilon = \min\{\alpha, \delta\} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_N - T\| < \min\{\alpha, \delta\}$.

D'où $\gamma_e(T_N) \geq \delta$ et $\|T_N - T\| < \delta$.

Par conséquent, $\|T_N - T\| < \gamma_e(T_N)$.

La proposition 5.1.2 permet alors de conclure.

Remarque : on peut rapprocher ce résultat du théorème 2.16 de [L-M]

qui caractérise les points de continuité de la conorme.

Proposition 5.2.3 Soit $T \in B(H)$ tel que $\gamma_e(T) > 0$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) T est un point de continuité pour la fonction $\gamma_e : B(H) \longrightarrow [0, +\infty]$
- (2) $\exists \beta > 0, \exists \alpha > 0$, tel que $\forall S \in B(H), \|T - S\| < \alpha \implies \gamma_e(S) \geq \beta$
- (3) $\exists \beta > 0, \exists \alpha > 0$, tel que $\forall S \in B(H), \|T - S\| < \alpha \implies]0, \beta[\subset \rho_e(|S|)$
- (4) $\exists \beta > 0, \exists \alpha > 0$, tel que $\forall S \in B(H), \|T - S\| < \alpha \implies]0, \beta[\subset \rho_e(|S^*|)$
- (5) T est semi-Fredholm .

Démonstration : Les implications $(1) \implies (2) \implies (3)$ sont immédiates.

$(3) \iff (4)$. Il suffit de remarquer que :

$]0, \beta[\subset \rho_e(T^*T) \iff]0, \beta[\subset \rho_e(TT^*)$ puis d'appliquer le théorème de l'application spectrale.

$(3) \implies (5)$: Puisque l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm est dense dans $B(H)$, il existe $S \in B(H)$ semi-Fredholm tel que $\|T - S\| < \min\{\alpha, \beta\}$.

D'où, par l'hypothèse (3), $\|T - S\| < \gamma_e(S)$. Maintenant la Proposition 5.1.2 permet de conclure.

$(5) \implies (1)$: Voir le Théorème 5.2.2.

Remarque : Dans [L-M] les auteurs ont étudié les points de continuité de la fonction $\gamma : S \longmapsto \gamma(S)$ où S appartient à l'ensemble des opérateurs fermés à domaines denses dans H .

Bibliographie

- [A-P] C.A. Akemann and G.K. Pedersen , *Ideal perturbations of elements in C^* -algebras*, Math Scand. **41** (1977), 117-139.
- [A] C. Apostol, the reduced minimum modulus, Michigan Math. J. **32** (1985), 279-294.
- [A-T] K. Astala and H-O. Tylli, *On the bounded compact approximation property and measures of noncompactness*, J. Funct. Anal. **70** (1987), 388-401.
- [At] Atkinson F.V, *The normal solvability of linear equations in normed spaces*, Math.Sb. **28** (70) (1951), 03-14 (Russe) ; MR **13** p 46.
- [B-D-F] L.G Brown, R.G Douglas and P.A Filmore *unitary equivalence modulo the compact operators and extension of C^* algebras*, Lectures Notes in Mathematics, Springer Verlag **345** (1973), 58-128.
- [C] J.W Calkin *Two-sided ideals and congruence in the ring of bounded operators in Hilbert space*, Annals of Mathematics, **42** (1941), 839-873
- [C-P-Y] S.R Caradus ,W.E Pfaffenberg and B.Yood *Calkin algebra and algebras of operators on Banach spaces*, Marcel DEKKER 1974
- [Co] J.B Conway *A course in functional analysis*, Second Edition. Springer Verlag New-York (1990)
- [D-L-H] P. De la Harpe, *Initiation à l'algèbre de Calkin*, Lectures Notes in Maths, Springer Verlag **725** (1978), 180-219.
- [Do] R.G Douglas, , *Banach algebra technics in operator theory* Academic Press. New-York (1972)
- [F-K] K.H. Forster and M.A. Kaashoek, *The asymptotic behaviour of the reduced minimum modulus of a Fredholm operator* , Proceedings of A.M.S **49** 1 (1975), 123-131.
- [G] S. Goldberg , *Unbounded Linear Operators*, New York, Mac Graw Hill, 1966.
- [H] P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, D. Van Nostrand , 1967.
- [H-M1] R.E. Harte and M. Mbekhta, *On generalized inverses in C^* -algebras* , Studia Math. **103** (1992), 71-77.
- [H-M2] R.E. Harte and M. Mbekhta, *Generalized inverses in C^* -algebras II*, Studia Math. **106** (1993), 129-138.

- [K1] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer Verlag, Berlin, 1966.
- [K2] T. Kato, *Perturbation Theory for nullity, deficiency and other quantities of linear Operators*, Jour. Anal. Math. **6** (1958), 261-322;
- [L-M] J.Ph. Labrousse and M. Mbekhta, *Les opérateurs points de continuité pour la conorme et l'inverse de Moore-Penrose*, Houston J. Math. **18** (1992), 7-23.
- [L-S-S] L.E. Labuschagne , A. Ströh and J.Swart, *The uniqueness of operational quantities in Von Neumann Algebras*, (preprint).
- [M] M. Mbekhta, *Conorme et inverse généralisé dans les C^* algèbres* , Canad. Math. Bull. **35** (1992), 01-08.
- [M-P] M. Mbekhta et R.Paul, *Sur la conorme essentielle*, Studia mathematica **117** (3) (1996) pp 243-252,
- [O] C.L. Olsen , *norm of compact perturbations of operators*, Pacific Math. J. N1Vol68(1977), 209 – 228.
- [O-P] C.L. Olsen and J.K. Plastiras , *Quasialgebraic operators, compact perturbations and the essential norm*, Michigan Math. J. **21** (1974), 385-397.
- [Pa] R. Paul , *Algèbre de Calkin et problèmes de relèvements*, Mémoire de D.E.A . LILLE . 1992
- [P] G.K. Pedersen, *Spectral formulas in quotient C^* -algebras*, Math. Z. **148** (1976), 299-300.
- [S] Schechter , *Basic theory of Fredholm operators* , Anna. Scuola. Norm. Sup. Pisa. **21** (1967) 261-280.
- [W] Weyl .H , *Ueber beschränkte quadratische formen, deren differenz vollstetig ist*, Ren.Circ Mat.Palermo **27** (1909), 373-392.
- [Z1] J. Zemánek , *Geometric characteristics of semi-Fredholm operators and their asymptotic behaviour*, Studia Math. **80** (1984) 219-234.
- [Z2] J. Zemánek, *The Semi-Fredholm radius of a linear operator*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **32** (1984) 67-76.

