1997
524

n° 2038

THESE

présentée par

Valéry CODFERT

pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université des Sciences et Technologies de Lille (Flandres Artois)

dans la spécialité:

Productique: Automatique et Informatique industrielle

UNIVERSITÉ DES SC. ET TECHN. BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE LILLE

Modélisation Globale d'un système d'Essuyage

Soutenue le 27 juin 1997 devant le jury:

Thèse préparée à l'École Centrale de Lille
sous la direction de MM. P. BORNE et J.L. SORTAIS

TABLE DES MATIERES

1. CHAPITRE 1: INTRODUCTION **10**

1.1 OBJECTIF 11
1.2 DÉMARCHE 11
1.3 PRÉCÉDENTS TRAVAUX 12
1.4 CAPTEURS ..... ERREUR! SIGNET NON DEFINI.
1.5 PIÈCES - TERMINOLOGIE 17
1.6 RÉSUME DES CHAPITRES 21

2. CHAPITRE 2: ÉLASTICITÉ **22**

2.1 ÉLASTICITÉ 26
2.1.1 Introduction *25*
2.1.2 Bilan des Élasticités à retenir *25*
2.1.3 Modèles pris en compte pour ce qui est de l'élasticité ..... ***Erreur! Signet non défini.***
2.2 MODÉLISATION DE LA LAME D'ESSUIE-GLACE 29
2.2.1 Présentation du problème *29*
2.2.2 Bilan des forces *29*
2.2.3 Calcul des paramètres de la lame *31*
2.2.4 Validation du modèle ..... ***Erreur! Signet non défini.***
2.2.5 QUELQUES RESULTATS PRATIQUES 35
2.2.5.1 Logiciel développé *35*
2.2.5.2 Courbes générales de déplacement et de forces *36*
2.2.5.3 Quelques résultats issus des simulations *38*
2.3 ÉTUDE DU FLAMBAGE 39
2.3.1 Préambule *39*
2.3.2 Étude d'une bielle parfaitement droite *39*
2.3.2.1 Calcul de la force critique Pc dans l'hypothèse des faibles déplacements 39
2.3.2.2 Application numérique ..... **Erreur! Signet non défini.**
2.3.2.3 Effet du désalignement de la bielle par rapport à l'axe passant par les deux rotules 40
2.3.3 Étude d'une bielle coudée *41*
2.3.3.1 Déplacement des rotules 42
2.3.3.2 Déplacement vertical de la flèche en M 42
2.3.3.3 Application numérique 42
2.3.4 Calcul du moment quadratique I *42*
2.3.4.1 Calcul du moment quadratique I_y 42
2.3.4.2 Calcul du moment quadratique I_z 43
2.3.5 Validation des résultats *43*
2.3.6 Optimisation du profil en U *44*
2.3.7 Comparaison avec un profil circulaire *44*
2.4 MODELISATION DE LA VERTEBRE / REPARTITION D'APPUI 46
2.4.1 Préambule *46*
2.4.2 Equation aux trois moments *46*
2.4.3 Relations déterminant le déplacement des points de la vertèbre. *49*
2.4.3.1 Introduction ..... **Erreur! Signet non défini.**
2.4.3.2 Expression du déplacement des différents points 49
2.4.4 Expression des angles ω_i' et ω_i'' *50*
2.4.5 Détermination des forces d'appui à l'aide des pressions linéiques et des déformations de la vertèbre... *50*
2.4.6 Détermination des forces d'appui P_i en tenant compte de l'équilibre des moments issus des balais *50*
2.4.7 Résolution du système d'équation *50*

3. CHAPITRE 3: JEUX **52**

3.1 PRÉAMBULE 54
3.2 TYPES DE MODELES 54
3.2.1 Modèles dont nous ne tiendrons pas compte par la suite *54*

3.2.1.1 Maintien du contact ..... Erreur! Signet non défini.
3.2.1.2 Modèles aléatoires 55
3.2.2 Modélisation du choc (impact) *55*
3.2.2.1 Transfert de la quantité de mouvement 55
3.2.2.2 Utilisation d'ondes 56
3.2.2.3 Modèle 'continu' (linéaire ou de Hertz) 56
3.2.3 Autres caractéristiques des modèles développés *58*
3.2.3.1 Élasticité de contact et des liens 58
3.2.3.2 Perturbations 59
3.2.3.3 Méthodes de réduction pour les élasticités des liens 59
3.2.3.4 Modèle des sous-structures 59
3.2.4 Modèle utilisé *59*
3.3 PROBLÈMES DE PRÉCISION 60
3.3.1 Influence des modes hautes fréquences *60*
3.3.1.1 Le choc possède une énergie haute fréquence non négligeable 60
3.3.1.2 Les forces maximales rencontrées lors du choc présentent une grande sensibilité aux fréquences d'excitation. 61
3.3.1.3 Sensibilité aux autres éléments annexes comme le couvercle 62
3.3.1.4 Modes hautes fréquences et tolérances de fabrication 62
3.3.2 Modèle chaotique *62*
3.3.3 Influence des pas de temps de calcul et d'affichage *63*
3.3.3.1 Pas de temps de calcul interne 63
3.3.3.2 Pas d'affichage 64
3.3.3.3 Ordre de grandeur de l'interpénétration et précision du modèle général 64
3.4 RESULTATS BIBLIOGRAPHIQUES 65
3.4.1 Sensibilité à la vitesse *65*
3.4.2 Surcourses et phénomènes de rattrapage de jeux *66*
3.4.3 Quelques résultats *66*
3.4.4 Élasticité et flexibilité *66*
3.5 CALCUL DES FORCES D'IMPACT POUR LE SYSTÈME D'ESSUYAGE 67
3.5.1 Cas des rotules *67*
3.5.2 Cas des déplacement linéaires *69*
3.5.3 Cas des déplacements angulaires *70*

4. CHAPITRE 4: FROTTEMENT 71

4.1 INTRODUCTION 74
4.1.1 Préambule *74*
4.1.2 Bref historique *73*
4.1.3 Tribologie: science contestée du frottement *73*
4.1.4 Visions modernes de la tribologie ..... ***Erreur! Signet non défini.***
4.1.5 Différents modes de lubrification *75*
4.2 FROTTEMENT DANS LES ARTICULATIONS MECANIQUES 76
4.2.1 Paliers *76*
4.2.1.1 Paliers poreux autolubrifiants (cas des paliers des axes de sortie) 76
4.2.1.2 Paliers lisses (cas de l'axe entre l'entraîneur et le carter) 79
4.2.2 Rotule *79*
4.2.3 Raisons de la non prise en compte de ces phénomènes de frottement *79*
4.3 FROTTEMENT ENTRE LE CAOUTCHOUC ET LE VERRE 80
4.3.1 Préambule *80*
4.3.2 Frottement entre le caoutchouc et le verre en l'absence d'eau *80*
4.3.2.1 Adhérence et hystérésis ..... Erreur! Signet non défini.
A Définition 80
B Prépondérance de l'adhésion pour notre cas 80
C Différence adhésion / adhérence 81
D Composantes générales de l'adhésion 81
E Intervention des forces cohésives 82
F Influence de l'acido-basicité 83
G Influence mal connue des charges électriques 84
H Cas des chaînes de caoutchouc 84
I Vision récente de l'adhésion 84
4.3.2.2 Composition des matériaux 85
A Verre 85

a Mouillabilité 85
b Pare-brise hydrophile et hydrophobe ..... Erreur! Signet non défini.
c Salissures du pare-brise 85
B Caoutchouc 86
a Chlore 86
b Charges lubrifiantes 87
c Grain de carbone 88
d Caoutchouc naturel et synthétique 88
e Autres composants et diffusion 88
4.3.2.3 Effet de différents paramètres 89
A Influence de l'état de surface 89
B Influence du temps ..... Erreur! Signet non défini.
a Influence du passé 90
b Influence du vieillissement 91
c Rodage 91
C Influence de la température et de la vitesse (paramètre aTv) 92
D Influence mal connue de l'humidité 95
E Influence du produit de nettoyage 96
F Influence des produits d'usure 96
G Influence de la force normale 97
a Relation linéaire entre la surface réelle de contact et la force de frottement 97
b Composante supplémentaire d'adhésion 99
c Léger écart avec la loi de Hertz ..... Erreur! Signet non défini.
d Interaction entre les forces adhésives et les contraintes élastiques 99
e Cas de l'essuie-glace 100
H Effet de la forme de contact 102
a Influence de la forme de contact sur la forme de la courbe de frottement 102
b Invariance de la pression de contact 105
c Largeur de contact 106
d Influence du rayon de courbure 108
4.3.3 Frottement entre le caoutchouc et le verre en présence d'eau *109*
4.3.3.1 Explication et équation du phénomène 109
A Préambule 109
B Équation de Reynolds ..... Erreur! Signet non défini.
C Effet supplémentaire des déformations : élastohydrodynamique 110
a Effet de la composante normale 111
b Effet de la composante tangentielle 111
c Effet de la rugosité 112
d Résultats expérimentaux pour l'essuie-glace 112
4.3.3.2 Influence de différents paramètres 113
A Influence de la quantité d'eau 113
B Influence restreinte de la composition des matériaux 113
C Filet d'eau généré en partie par les aspérités 113
D Tensioactif (présent dans le liquide lave-glace) 113

5. CHAPITRE 5: AÉRODYNAMIQUE 115

5.1 PREAMBULE 117

5.2 CONNAISSANCES PHENOMENOLOGIQUES 117
5.2.1 Visualisation et caractéristiques des écoulements aérodynamiques ..... *Erreur! Signet non défini.*
5.2.2 Disposition des filets d'air *118*
5.2.2.1 Disposition des filets d'air autour d'une voiture 118
5.2.2.2 Influence de l'angle d'inclinaison entre le filet d'air et l'axe du balai 120
5.2.3 Champ de vitesse sur un pare-brise avant *121*
5.2.4 Portance et traînées *121*
5.2.5 Cas du déflecteur (A.L.V. chez Valeo) *125*
5.2.6 Dépression et surpression *124*
5.3 EQUATIONS CLASSIQUES D'AERODYNAMIQUE 125
5.3.1 Préambule *125*
5.3.2 Équation de conservation de la masse *125*
5.3.3 Fluides incompressibles *125*
5.3.4 Équation de Navier-Stokes *125*

5.3.5 Fluide parfait *126*
5.3.6 Équation de Bernouilli *126*
5.3.7 Couche limite (fluide incompressible) *126*
5.4 ÉQUATIONS UTILISEES DANS LA PRATIQUE 127

6 CHAPITRE 6: RÉSULTATS ISSUS DES SIMULATIONS ET DES EXPÉRIENCES/VALIDATION DU MODELE 128

6.1 PRÉAMBULE 130
6.2 EXPLICATION DES PHÉNOMÈNES 130
6.2.1 Inertie *130*
6.2.2 Poids ..... ***Erreur! Signet non défini.***
6.2.3 Frottement *137*
6.2.4 Aérodynamique *141*
6.2.5 Jeux *143*
6.2.6 Elasticité *146*
6.3 DIFFÉRENTES COURBES (FORCES, COUPLES, DÉPLACEMENTS, ...) DANS LES PIÈCES 150
6.3.1 Moteur (manivelle moteur) *150*
6.3.2 Forces dans les bielles *151*
6.3.3 Sortie du mécanisme (axes et manivelles de sortie) ..... ***Erreur! Signet non défini.***
6.3.4 Paramètres du balai en contact avec le pare-brise *159*
6.4 PHÉNOMENES VIBRATOIRES 161
6.4.1 Vibration principale transmise dans tout le système *161*
6.4.2 Vibration platine négligeable *162*
6.4.3 Vibrations issues du moteur ..... ***Erreur! Signet non défini.***
6.5 VALIDATION DU MODELE 164

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

* M. BARQUINS, 'Friction and Wear of Rubber-like materials', Wear, 160 (1993) pp. 1-11

* M. BARQUINS, A.D. ROBERTS, 'Adherence and friction of epoxided natural rubber vulcanizates' Journal de chimie physique, 1987, 84, n°2 (1987)

* M. BARQUINS, A.D. ROBERTS, 'Rubber friction variation with rate and temperature: some new observations' Journal of Physics. D. Applied Physics, (1986), pp. 547-563

* M. BEGOUT, 'Les Problèmes liés aux frottement Elastomère-Verre dans l'automobile', Thèse (1979)

* T. BIDOT, D. CHARGY, G. POT, "CFD applications in the automotive industry using the N3S code", Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1995-06, Industrial Computational Fluid Dynamics, 3-7 Avril 1995.

* M. C. BLOUET, "Frottement, usure et lubrification des matériaux plastiques", Ingénieurs de l'automobile 1-77 pp. 39-48

* J.F. CAROLE, "Elaboration et Caractérisation de Composites Particulaires à Matrice a base de Fer pour application tribologiques", thèse en 1996, Orsay

* V. CODFERT, J.L. SORTAIS, D. CASARIL, "Wiper System Dynamic Behavior" SAE 97, n° 970588, pp. 203-206

* V. CODFERT, J.L. SORTAIS "Negative Stick-Slip modelisation", CESA 96 IMACS IEEE SMC, Vol. 2, pp. 988-993,

* V. CODFERT, J.L. SORTAIS 'Presentation and Comparison of Two Methods Used for Impacts Studies' SAMS 0208, pp. 1-19,

* J. COGNARD, 'Science de l'adhésion', cours ENSMM (Besançon)

* R. COMOLET "Mécanique expérimentales des fluides: dynamique des fluides réels", tome 2, edition Masson 1982

* D. CUMMINGS, A. N. GENT, W. KIM, and J. PADOVAN, 'Contact of Rubber Wedges with a Flat Rigid Surface', Rubber Chemestry and Technology, vol. 65 , pp. 223-230

*Joseph Francis DECK, 1992, "The Dynamics of Spatial Mechanims with Clearances and Support Structures", Thèse M.I.T.

* S. DUBOWSKY, N.D. PERREIRA, "Noise and Vibration Generated by Impacts in Linkage Systems: with Application to Engines", Symposium on Engine Noise : Excitation, Vibration and Radiation, oct 1981, Warren Mi, pp 147-177

* J.F. DOYLE "An Experimental Method for Determining the Dynamic Contact Law", Experimental Mechanics, mars 1984, pp. 10-16

* C.W. EXTRAND, A.N. GENT, S.Y. KAANG, 'Friction of a rubber wedge on glass', Rubber Chemistry and Technology vol. 64 p.108-117 (1990)

* Bernard GIUDICELLI: "Modèles Hydrodynamiques conservatifs pour des Paliers Autolubrifiants Poreux en Régime Permanent", Thèse 1993.

* GLACIER SIC: documentation technique du fournisseur.

* T.J.R. HUGHES, R.L. TAYLOR, J.L. SACKMAN, et al., "A Finite Element Method for a class of Contact-Impact Problems", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 8 (1976) pp 249-276

* B.S. HSU and S.F. LING 'Windshield Wiper System Design'(1990), Int. J. of Vehicle Design, vol. 11, n°1, pp. 63-78

* T. KAKIZAKI, J.F. DECK, S.DUBOWSKY "Modeling the spatial Dynamics of Robotic Manipulators with flexible Liinks and Joint Clearances", Journal of Mechanical Design, décembre 1993, Vol. 115, pp. 839-847

* Y.A. KHULIEF, A.A. SHABANA, "A continuous Force Model for the impact analysis of flexible multibody systems", (1987) Mechanism and Machine Theory, pp. 213-224

* Y.A. KHULIEF, A.A. SHABANA, "Impact Responses of Multi-Body Systems with Consistent and Lumped Masses", Journal of Sound and Vibration, 1986, Vol. 104, pp. 187-207,

* KLÜBER: documentation technique du fournisseur

* J.E.F. 92: Journées Européennes du Freinage, ''Recueil des conférences et débats'', 3 et 4 déc. 1992, Lille

* Y. KOGURE, "Improvement of surface conditions and properties of vulcanised rubber (surface treatment of wiper blades for vehicles)", Nippon Gomu Kyokaishi, N°5, 1992, pp287, paru dans International Polymer Science and Technology, Vol. 20, N°3, 1993

* H.M. LANKARANI, P.E. NIKRAVESH, "A Contact force Model With Hysteresis Damping for Impact Analysis of Multibody Systems", Journal of Mechanical Design, sept. 1990, Vol. 112, pp. 369-376

* A. I. LEONOV, 'On the dependence of friction force on sliding velocity in the theory of adhesive friction of elastomers', Wear, 141 (1990), pp. 137-145

* K. C. LUDEMA, CRC Hanbook of Lubrification, Vol. 2, pp.31-48, 1983

* METAFRAM: documentation technique du fournisseur.

* D. F. MOORE, 'The Friction and Lubrification of Elastomers, Pergamon Press, 1972

* Shinri MUTO "Automobile aerodynamics", juin 1990

* T.C.Q. NOAKES, 'Surface Treatment of Natural Rubber for Reduction Friction' Proceedings International Rubber Technology Conference (1988) p.288-305

* R. RORRER, N.S. EISS, 'Frictional Oscillations in Wet and dry elastomeric Sliding', Tribology Transactions Vol. 38,(1995),2, pp. 323-328

* C.W SHAO, F.W. LIOU and A.K. PATRA "A Conatct Phase Model for the Analysis of Flexible Mechanisms under Impact Loading" Computer & Structures 1993 Vol. 49 Fasc. 4, pp.617-623

* J. K. SHIN, M.S. and B.M. KWAK, "A Design for Reducing the Effects of clearances at Revolute Joints", 1985, Proc. Instn. Mech. Engrs Vol 199 C2 pp.153-158

* Harkrishan SINGH, Ford Motor Co., 'Windshield Wiper Linkage Analysis' (1971), S.A.E. 1971, n° 710254 pp. 1-9

* J.L. SORTAIS, B. LISIECKI, V. CODFERT 'Tribological Study of the Rubber Blade with the Infrared Thermography System', SAE 96, n° 960438 pp59-63,

* TAKADOUM, cours ENSMM (Besançon) sur la tribologie.

* Y. TATARA, "Extensive Theory of Force Appoach Relations of Elastic Spheres in Compression and in Impact", avril 1989, Journal of Engineering Materials and Technology Vol. 111 pp. 163-168

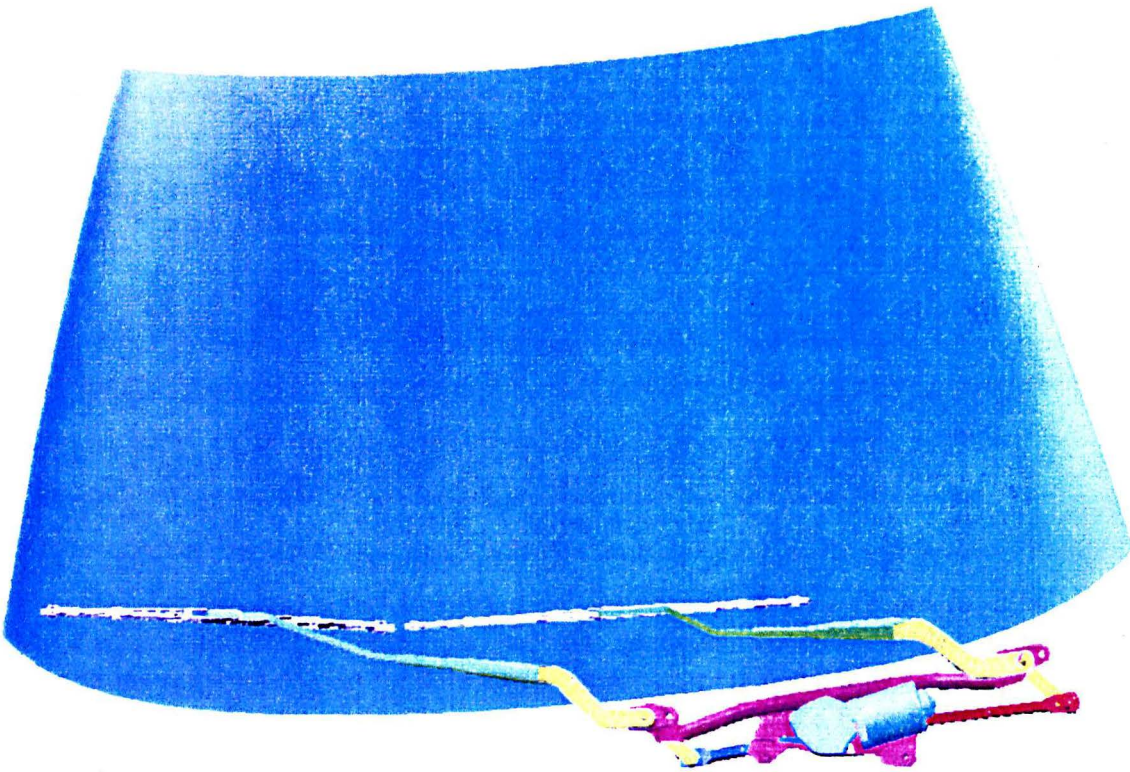
* H.H.S. WANG, B. ROTH "Position Errors due to Clearances in Journal Bearings", Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, sept. 1989, Vol. 111 pp 315-320

* S.C. WU, E.J. HAUG, "A Substructure Technique for Dynamics of Flexible Mechanical Systems with Contact-Impact", Journal of Mechanical Design, sept. 1990, Vol. 112, pp. 390-398

* W.S. YOO, E.J. HAUG, "Dynamics of Flexible Mehanical Systems Using Vibration and Static Correction Modes", Design Engineering Technical Conferene, Cincinati, Ohio, 10-13 sept. 1985

CHAPITRE 1:

INTRODUCTION GENERALE



Modèle utilisé pour la simulation (CATDADS)

1.1 OBJECTIF

L'objectif consiste à appréhender la dynamique d'un essuie-glace complet, comprenant: le moteur, les mécanismes et les bras-balais.
Les paramètres influençant le système ont été regroupés en quatre thèmes les jeux, l'élasticité, les frottements et l'aérodynamique. Le système a été modélisé en trois dimensions en raison du rôle capital de certains angles (angles d'attaque, angles de site, ...).
Nous nous sommes particulièrement attachés à comprendre les fonctionnements et les dysfonctionnements du système d'essuyage au travers de ses caractéristiques dynamiques (déplacement, force ...). C'est la raison pour laquelle, il a été nécessaire de programmer, de paramétrer et de valider des progiciels permettant la simulation d'un système d'essuyage.
Au travers cette thèse, 'Valeo Systèmes d'Essuyage' souhaite se doter d'un outil performant de simulation validé. Cet outil, accompagné d'une meilleure compréhension du système, doivent permettre de réduire les temps de conception (remplacement des protypes par des simulations), la fiabilité et la qualité du produit. Il permettra en outre d'optimiser la forme des produits.

1.2 DÉMARCHE

Chacun des quatre thèmes envisagés pouvant faire l'objet d'un travail de thèse, nous avons abordé le sujet d'une façon plus générale, avec une vision plus globale, en mettant en évidence les éléments susceptibles d'avoir une influence sur le système.

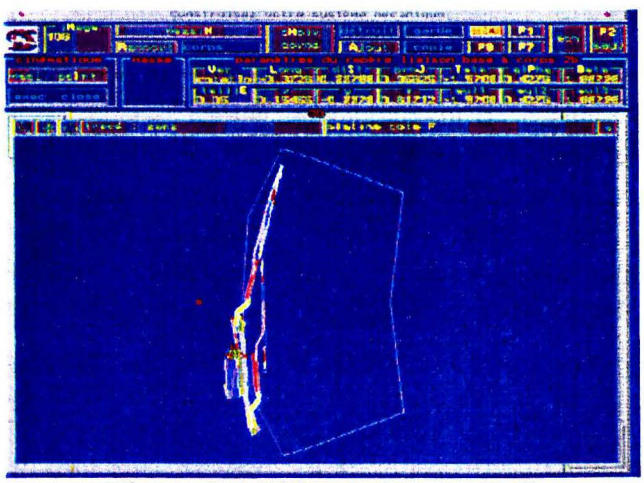


Figure 1.2.1 Simulation sur SDS

L'avancement des travaux a été fortement conditionné par le logiciel utilisé. Matlab s'est révélé mal adapté aux calculs en trois dimensions des pièces et aux représentations graphiques. Un modèle simple, puis un plus complexe ont été constitués sur un logiciel spécialisé: SDS. Mais le temps de calcul du modèle plus complexe s'est avéré rédhibitoire. Il a été évalué en effet à plus d'un an, si bien que nous nous sommes donc reportés sur DADS qui a l'avantage de récupérer les données géométriques sous CATIA (logiciel de CAO).

Le modèle doit posséder un caractère généraliste et permettre la simulation de la variété des systèmes d'essuyage fabriqués. Là où cela a été possible, un examen a priori des éléments pouvant intervenir dans le système d'essuyage a été mené de façon à ce que le modèle soit valable pour tout système. Par exemple, les bielles coudées définies et étudiées

respectivement aux paragraphes 1.6 et 2.3 ont été traitées alors que notre système de référence (Peugeot 106) n'en comporte pas.

1.3 PRÉCÉDENTS TRAVAUX

Peu d'articles ont été publiés sur le sujet certainement en raison de leur confidentialité.

Nous pouvons citer les travaux de [Singh, 71], dans lesquels le système considéré est composé d'un moteur symbolisé par un couple et une vitesse constants et d'un mécanisme modélisé par des barres rigides. Les évolutions des couples, vitesses et accélération disponibles en sortie d'axes sont examinés. Des critères limites sur ces paramètres sont imposés pour éviter le calage du moteur, certaines caractéristiques jugées mauvaises du mouvement ou de la charge du moteur.

[Yoo, Haug 1985] ont simulé un modèle d'essuie-glace en deux dimensions avec des bras modélisés par des poutres et une vitesse de manivelle moteur constante. Dans ce modèle des modes vibratoires et un mode statique ont été introduits. Les auteurs ont mis en évidence que une fréquence vibratoire du bras voisine de 13-14Hz.

Dans les travaux de [Hsu et Ling, 90], le moteur est représenté par une loi entre le couple et le courant et une équation électrique liant tension, courant et vitesse moteur. Le mécanisme est toujours décrit par un système en deux dimensions constitués de barres rigides sans poids. Les bras-balais sont modélisés par deux barres flexibles au bout desquelles sont disposées des masses ponctuelles. Le système a été résolu par les équations de Lagrange. Les simulations ont mis en évidence que l'élasticité du bras diminuait légèrement les pics d'accélération et de vitesse mais augmentait les pointes de courant.

Dans le cadre de la Société Valeo, des modèles ont été conçus en interne. Plusieurs variantes existent ou ont existé mais prennent en compte à peu près les mêmes éléments: une loi reliant le couple moteur (sortie motoréducteur) avec sa vitesse, un mécanisme rigide en deux dimensions, un frottement constant en bout de balai (considéré comme rigide). L'un de ces modèles "Modtim" offre l'avantage de permettre le prédimensionnement d'éléments constitutifs (longueur des bielles et des manivelles).

1.4 CAPTEURS

Le rôle des capteurs est double: valider les calculs effectués et compléter nos connaissances sur les comportements physiques que nous ne connaissons pas actuellement. Par exemple, nous ne pouvons pas effectuer, pour l'instant, des simulations aérodynamiques et nous devons donc nous appuyer sur des essais.

La mise en oeuvre des capteurs présente des difficultés. Notamment certaines mesures sont, pour l'instant, impossibles à réaliser. Par exemple, il serait très intéressant de disposer en dynamique de capteurs mesurant les forces et les déplacements le long de la lame au contact de la vitre. Malheureusement les technologies actuelles ne le permettent pas.
De plus les capteurs utilisés exceptés les accéléromètres ne sont pas des produits standards et ont dû être développés spécialement pour cette thèse. A cela deux raisons, premièrement les pièces de l'essuyage sont trop petites pour des capteurs standards, deuxièmement les capteurs doivent pouvoir être embarqués et donc avoir un encombrement réduit pour ne pas gêner leur montabilité. Cette mise au point longue et coûteuse de capteurs miniatures a limité leur nombre et nous nous sommes concentré sur les mesures qui nous semblaient être les plus intéressantes.

A de rares exceptions près, les capteurs modifient le fonctionnement du système. Nous nous sommes imposés de ne pas changer le type de fonctionnement du système même si on gagnait plus de précision pour éviter de créer ou de faire disparaître des modes de fonctionnement.
La localisation des capteurs joue un rôle important dans la validation des modèles et l'identification des paramètres. Les capteurs ont été placés en entrée et en sortie de chacun des modules suivants: le moteur, les mécanismes et les bras-balai. Pour le dernier module, ne pouvant pas placer de capteurs mesurant la situation entre le balai et la vitre, nous nous sommes donc contentés de l'interface entre le bras et le balai

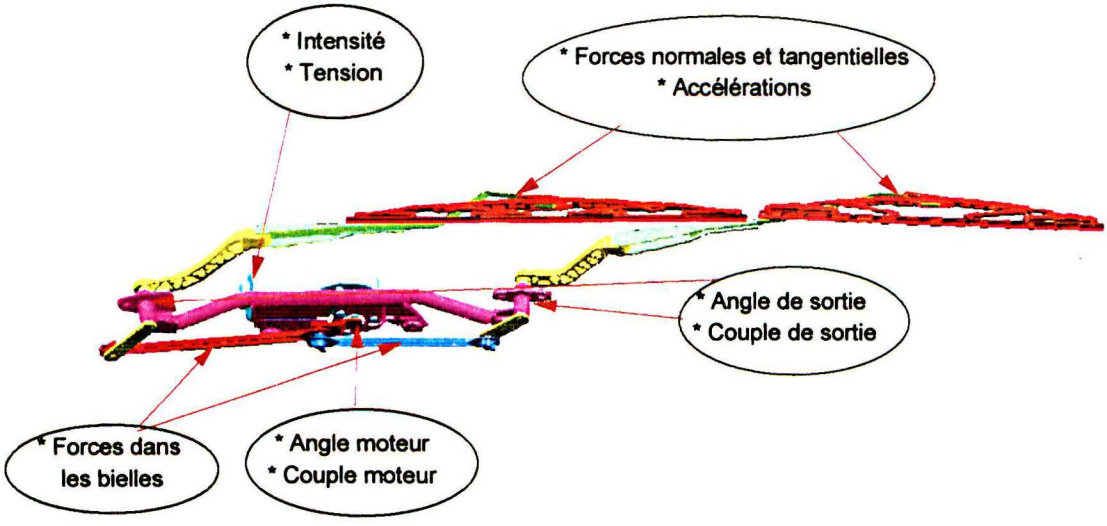


Figure 1.5.1 emplacements des capteurs

capteur	Technologie	nombre de capteurs	Étendue de mesure du capteur	Principales erreurs		
intensité	shunt	1	N.A. ***	bruit de mesure et valeur minimale lue par l'enregistreur		
tension moteur	prise directe via un pont diviseur	1	N.A. ***	bruit de mesure et valeur minimale lue par l'enregistreur		
codeur angulaire angle moteur	optique 4x1024 pts/tour (A et B)	1	N.A. ***	erreur de discrétisation (2π / 4048 rad)		
couple moteur	jauges de contrainte	1	50Nm	écart de linéarité 0,25%	erreur de mobilité* 0,05%	erreur d'hystérésis * 0,05%
force dans les bielles	jauges de contrainte en S	2	1000N	écart de linéarité* 0,25%	erreur de mobilité* 0,05%	erreur d'hystérésis * 0,05%
angle de sortie	optique 4x2540 pts/tour (A et B)	2	N.A. ***	erreur de discrétisation (2π / 10160 rad)		
couple de sortie	jauges de contrainte	2	50Nm	écart de linéarité* 0,25%	erreur de mobilité* 0,05%	erreur d'hystérésis * 0,05%
force normale** au pare-brise	jauges de contrainte (liées au capteur suivant)	2	50N	écart de linéarité* 0,25%	erreur de mobilité* 0,05%	erreur d'hystérésis * 0,05%
force tangentielle** au pare-brise	jauges de contrainte	2	50N	écart de linéarité* 0,25%	erreur de mobilité* 0,05%	erreur d'hystérésis * 0,05%
accéléromètre dans le sens du mouvement du balai	piezzo-résistif (se comporte comme un filtre passe-bas)	2	20g	±5% de 0 à 200Hz -5% de 200 à 700Hz	fréquence de résonnance 1192Hz	

* valeur maximale rencontrée pour ce type de capteurs

** dans le repère balai et lié au balai, ce qui est différent des repères liés aux points de contact entre la lame et le pare-brise.

*** N.A. *** non appliquable

Tableau 1.5.1 : Caractéristiques des capteurs

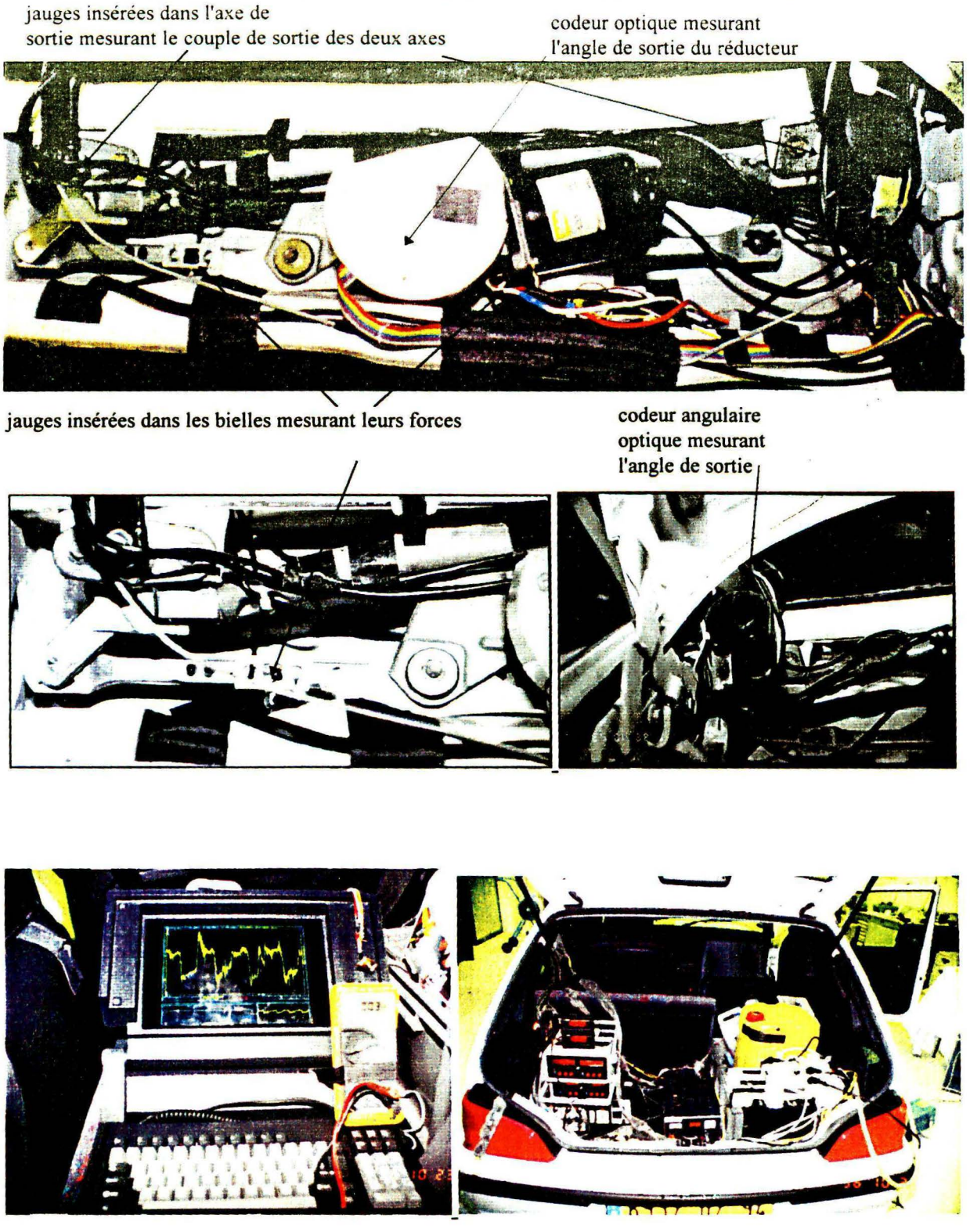


Figure 1.5.2 Emplacement des capteurs dans la timonerie et conditions d'essais au sein du véhicule

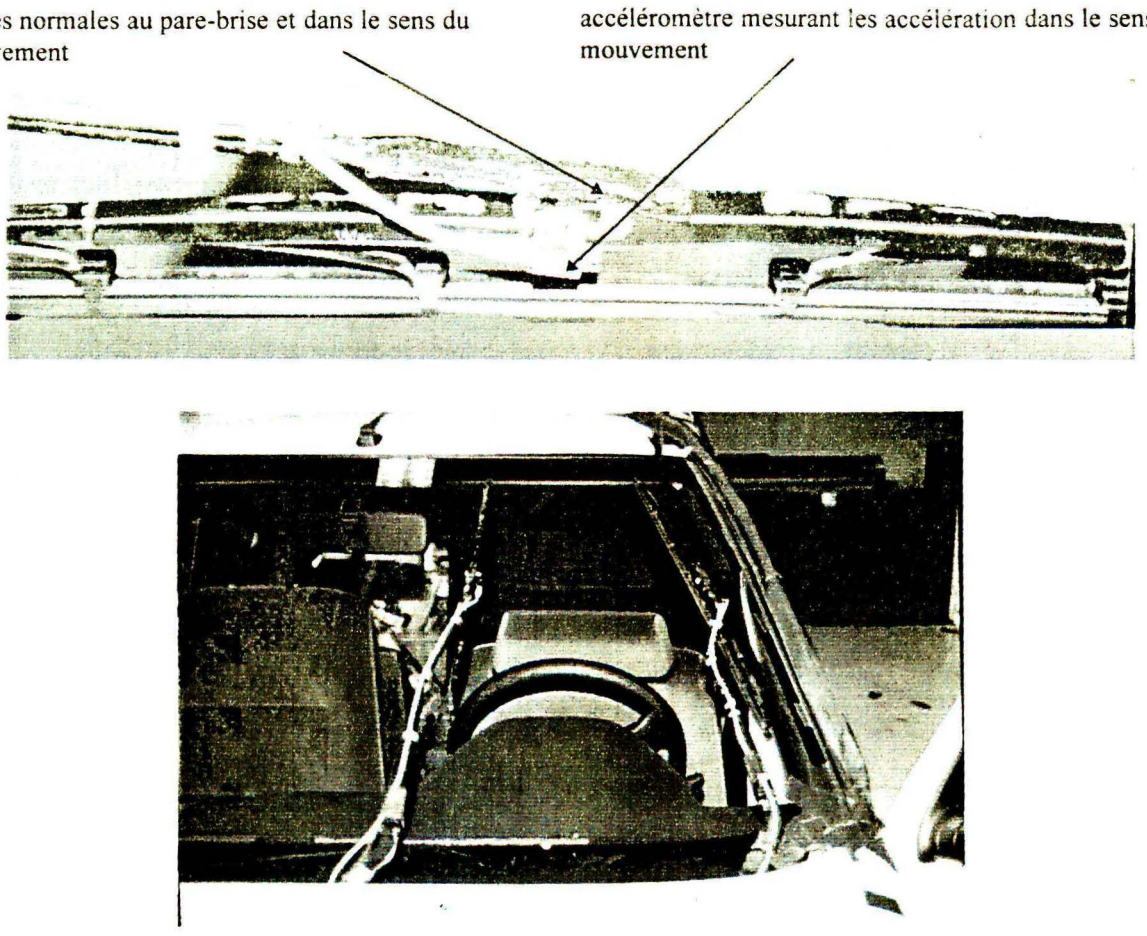


Figure 1.5.3 Emplacement des capteurs dans les bras-balais

1.5 PIÈCES - TERMINOLOGIE

Afin de faciliter la compréhension du mémoire, nous utiliserons les notations et le vocabulaire qui vont suivre. Par souci d'efficacité et de concision, la plupart du vocabulaire sera reportée directement sur les figures numérotées 1.5.1 à 1.5.6.

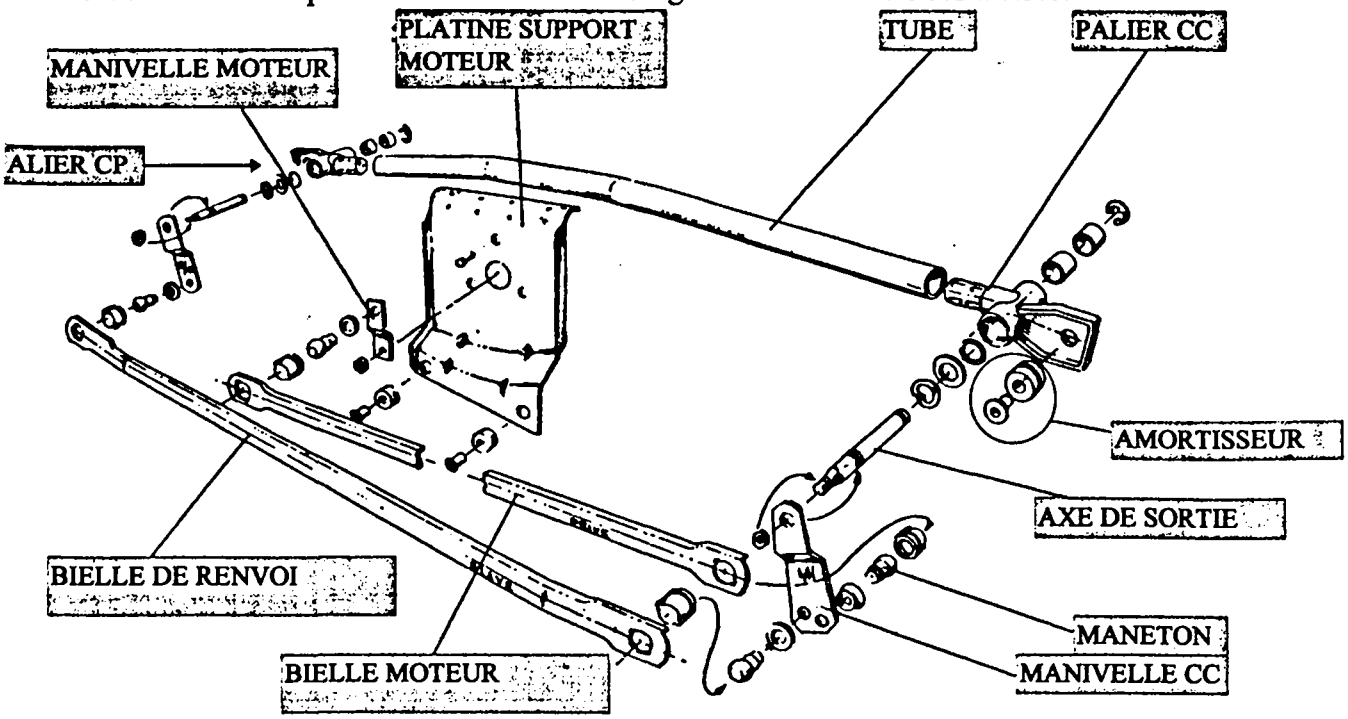


Figure 1.5.1. Détail du mécanisme à renvoi

Nous utiliserons les abréviations suivantes:
"CC" pour "Côté Conducteur",
"CP" pour "Côté Passager",
"AF" pour "Arrêt Fixe" et "OAF" pour "Opposé d'Arrêt Fixe ". (fig. 1.5.4)
Ces deux dernières abréviations désignent les positions extrêmes du balai en mouvement correspondant aux retournements de la lame.

Nous allons détailler les parties principales de l'essuie-glace. L'ensemble du système d'essuie-glace se décompose en deux parties: la timonerie et la partie porte-balai.

TIMONERIE
A
EMBIELLAGE CENTRAL

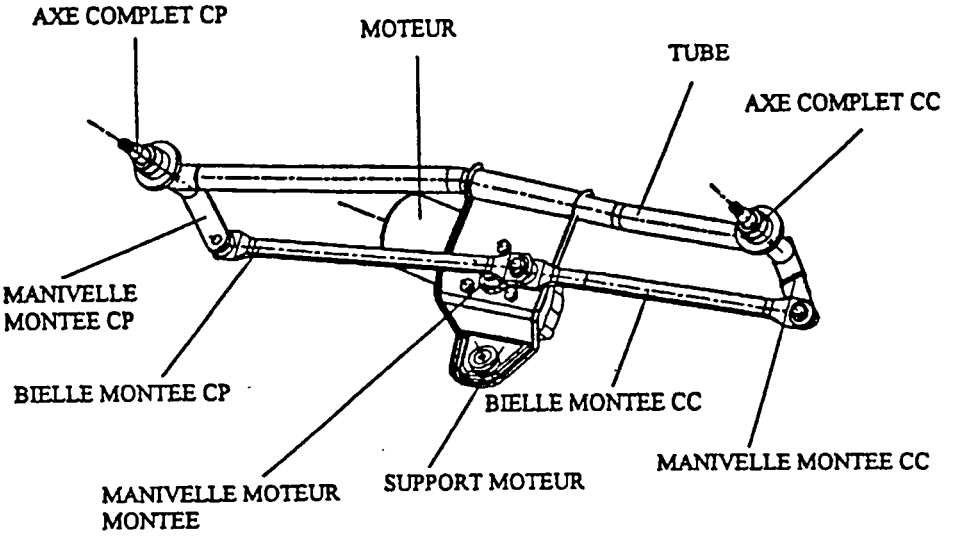


Figure 1.5.2. Détail d'un mécanisme à embiellage central (comme celle de la Peugeot 106)

Nous allons examiner un ensemble de définitions détaillant les différentes parties:
EMBIELLAGE : ensemble de bielles, manivelles CC et CP, manivelles moteur et axes
Les deux types les plus classiques d'embiellage sont: l'embiellage central (la manivelle moteur est en liaison directe avec les bielles CC et CP) et l'embiellage à renvoi (la manivelle moteur est en liaison avec une seule des deux bielles qui entraîne l'autre bielle)
PLATINE: ensemble composé du support moteur, du tube et des paliers.
MÉCANISME : il comprend l'embiellage et la platine
TIMONERIE : il comprend le mécanisme et le moteur
BRAS-BALAI: ensemble composé du porte-balai et du balai (fig. 1.5.3)

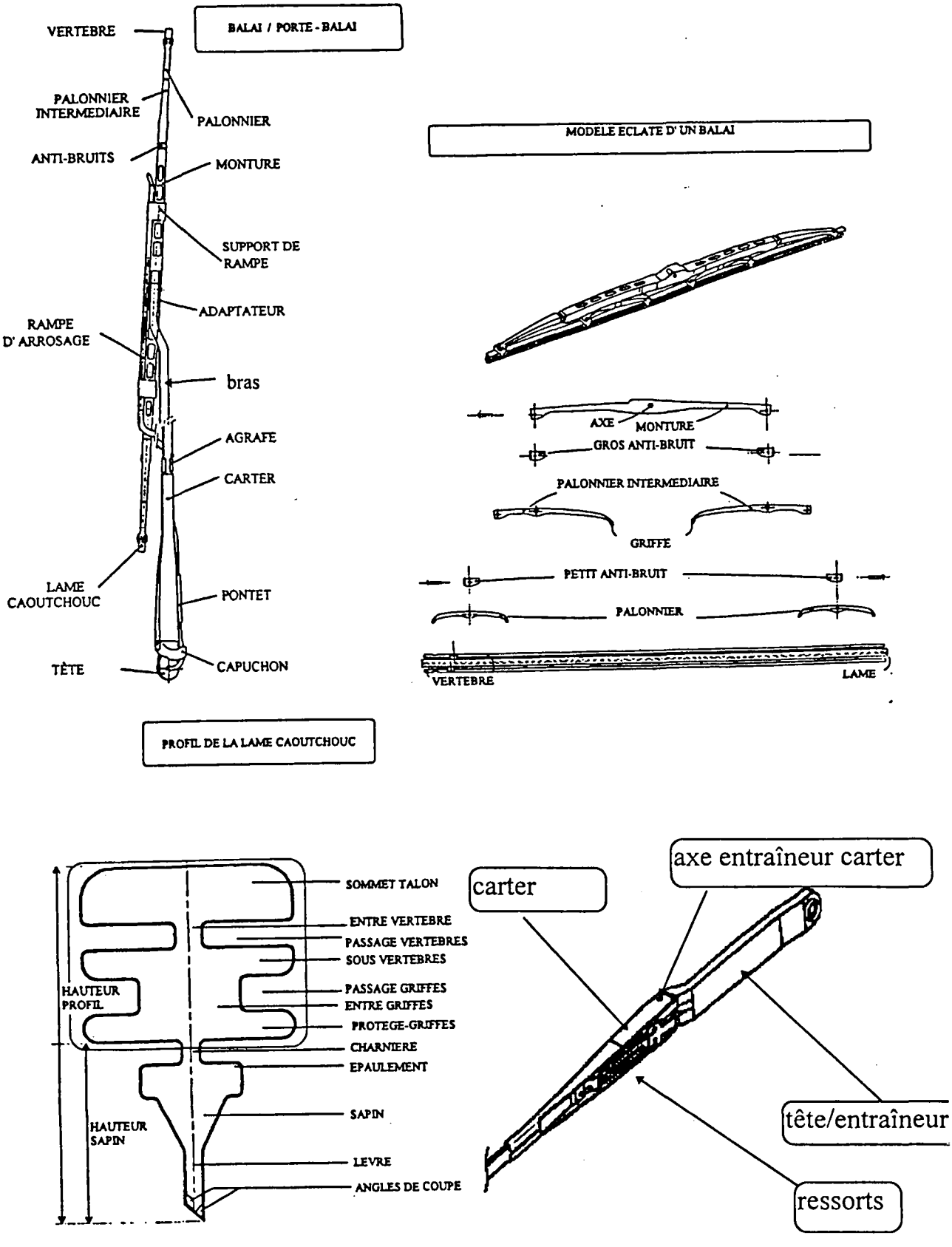


Figure 1.5.3. Détails des bras-balai, balai et lame

ANGLE DE BALAYAGE: angle entre l'AF et l'OAF

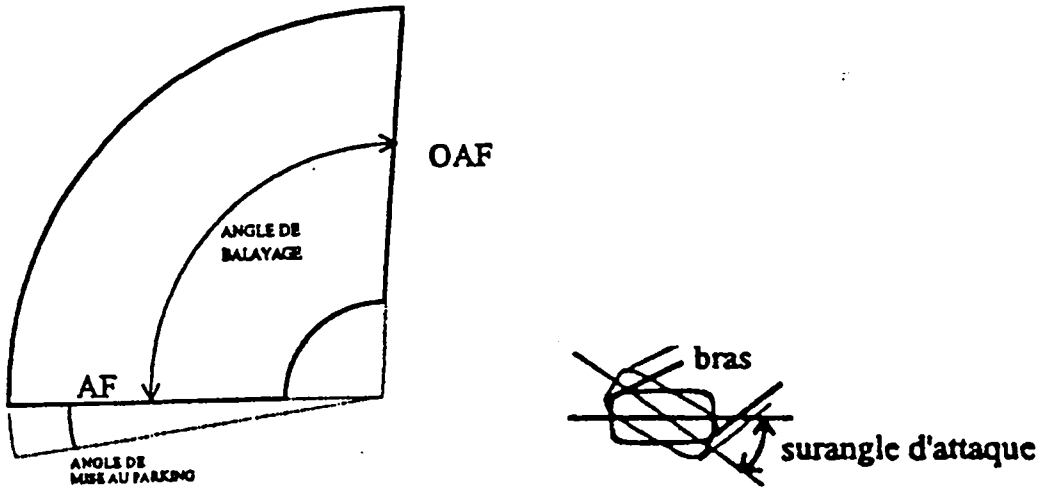


Figure 1.5.4. Angle de balayage et surangle d'attaque

ANGLE D'ATTAQUE : angle entre la normale au pare-brise et le plan de symétrie du talon.
ANGLE D'ESSUYAGE : angle entre le plan tangent à la vitre et la tangente à la lèvre au contact.
ANGLE DE TÊTE INCLINÉE : angle entre le plan perpendiculaire à l'axe de sortie et l'axe tête/carter

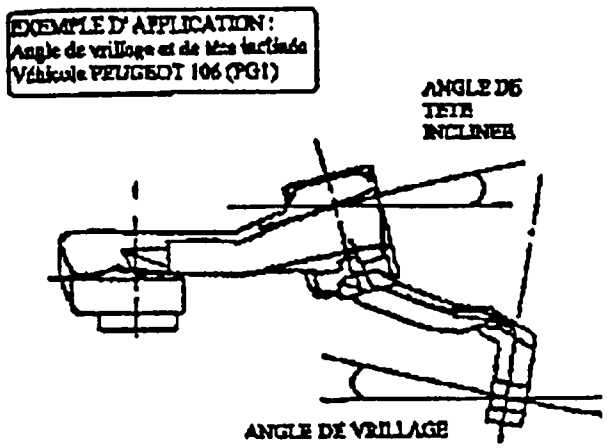


Figure 1.5.5. Définition d'angle de tête inclinée

ANGLE DE VRILLAGE : angle entre le plan perpendiculaire à l'axe de sortie et le plan du crochet (du bras).
ANGLE DE SITE: angle de rotation de l'entraîneur (ou tête) par rapport à l'axe du crochet selon l'axe de rotation défini par l'axe de liaison entre le carter et l'entraîneur (ou tête).

Généralement l'angle de site est pris nul à l' AF.

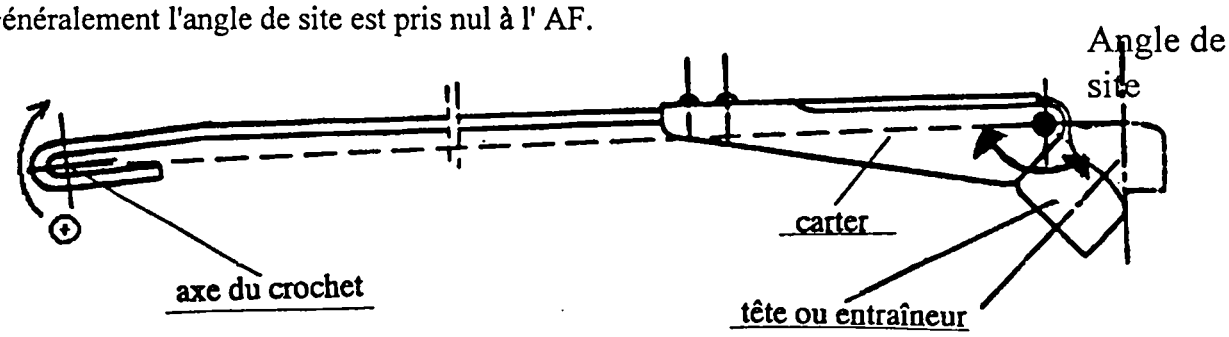


Figure 1.5.6. : Définition de l'angle de site

1.6 RÉSUME DES CHAPITRES

Le chapitre 2 traite des élasticités rencontrées dans le système d'essuyage. Les élasticités à prendre en compte sont importantes pour déterminer la construction des modèles reflétant la réalité. Les différentes pièces constituant le système sont passées au crible afin de déterminer les élasticités prépondérantes. Les éléments nécessitent une étude plus approfondie et feront l'objet de sous-chapitres entiers. C'est ainsi que nous nous intéresserons à la modélisation de la lame, élément important de l'essuyage qui a fait l'objet d'un logiciel spécialisé, aux différents flambages que peuvent rencontrer les bielles (fig. 1.5.1), à la vertèbre (fig. 1.5.3), véritable répartiteur de pression le long de la lame.

Les jeux mécaniques seront abordés dans le chapitre 3. Le jeu se traduit par une phase libre et par un choc. Nous verrons au travers de simulations et d'expériences les conséquences sur le système d'essuyage.

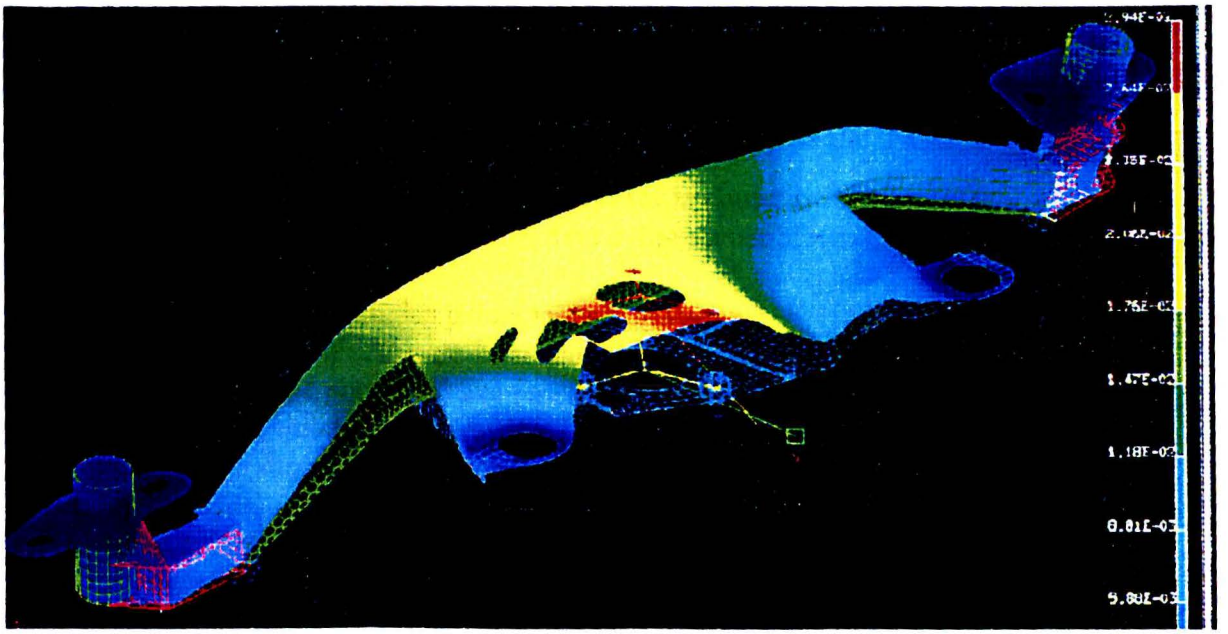
Le frottement entre la lame de caoutchouc et la vitre a un caractère essentiel dans l'essuyage, c'est pourquoi il a fait l'objet d'un chapitre entier. En effet son importance sur la dynamique du système n'est plus à démontrer. Malheureusement il est très fortement variable. Un facteur dix se rencontre couramment. Le frottement étant sensible à de nombreux paramètres, il est apparu nécessaire de détailler les éléments l'influençant. Cette description est importante pour la compréhension du phénomène, pour la modélisation et pour procéder à de bonnes expériences.

L' aérodynamique joue également un rôle capital dans l'essuyage. Un de ces effets les plus classiques est le soulèvement des balais lorsque la vitesse du véhicule est importante. Nous verrons plus en détail ses autres effets et la complexité de sa prise en compte dans le chapitre 5.

Le chapitre 6 est la compilation des résultats issus de simulation et de l'expérience qui permettent de bien comprendre les phénomènes en jeu.

CHAPITRE 2:

ÉLASTICITÉ ET VIBRATIONS



Liste des notations utilisées dans ce chapitre:

A: constante servant à déterminer la flèche de flambage,
a'_i avec $2 \le i \le n-1$: constantes géométriques servant au calcul des trois moments,
a_3: coefficient dépendant de paramètres géométriques
$A^*_d(n,i)$ matrice servant à déterminer $d^*(i,n)$,
A_{P_i}: avec $1 \le i \le n$:matrice servant à déterminer P_i,
$A_{\omega'_i}(i)$ avec $1 \le i \le n-1$: matrice servant à déterminer ω'_i,
$A_{\omega''_i}(i)$ avec $1 \le i \le n-1$: matrice servant à déterminer ω''_i,
b_3: coefficient dépendant de paramètres géométriques
b'_i: avec $2 \le i \le n-2$: constantes géométriques servant au calcul des trois moments,
B_{P_i} avec $1 \le i \le n$: matrice servant à déterminer P_i,
$B^*_d(n,i)$ matrice servant à déterminer $d^*(i,n)$,
C: longueur de tôle dépliée,
c_3: coefficient dépendant de paramètres géométriques
c'_i: constantes géométriques servant au calcul des trois moments,
C_{P_i} avec $1 \le i \le n$: matrice servant à déterminer P_i,
d: valeur absolue de x_4,
$d^*(i,n)$: déplacement du énième point de la poutre i
d_1: valeur absolue de x_1,
d_2: différence entre d et d_1,
d_M: déplacement vertical de la flèche en M,
d_{rotule}: déplacement des rotules dû au flambage dans la direction de la longueur de la bielle,
e épaisseur des profils (fig. 2.3.6),
E module de Young,
l longueur de la barre pour l'étude de flambage,
e_i avec $1 \le i \le n-1$: longueur d'un élément discret sur la poutre i,
f: coefficient de frottement "apparent", c'est à dire vu par le balai,
f': coefficient de frottement,
G_i avec $1 \le i \le n$: points d'appui des palonniers sur la vertèbre,
h: hauteur entre le talon et le pare-brise dans un repère lié au balai,
h_f: écart initial entre la poutre et l'axe passant par les deux rotules
h_u: dimension caractéristique du profil en U (fig. 2.3.6),
I moment quadratique d'une section de barre,
I_y moment quadratique d'une section de barre par rapport à l'axe y,
I_z moment quadratique d'une section de barre par rapport à l'axe z,
k_f: constante servant à déterminer la flèche de flambage,
l_1 et l_2: longueurs (en abscisse) entre le point de flèche maximale et les deux rotules
l_u: dimension caractéristique du profil en U (fig. 2.3.6),
M: point de flèche maximale,
$m(x_f)$ moment généré par la force unitaire,
$M(x_f)$moment généré par la force P,

M_1: moment d'encastrement de la charnière (exercé par le talon),
M_3: moment d'encastrement de la lèvre en P_3 (exercé par le sapin),
M'_i: avec $0 \leq i \leq n+1$ moments de coupure de la vertèbre,
N: force d'appui dans un repère lié au balai,
N': force normale au pare-brise,
N_1: force normale au niveau du contact entre le sapin et le talon,
N_2: force normale au niveau de la charnière,
O: point d'attache entre la charnière et le talon,
P: force de compression utilisée dans le calcul de flambage,
P_i avec $1 \leq i \leq n$: force d'appui en G_i,
P_c: force critique à partir de laquelle la poutre flambe
P_1: point de contact entre le sapin et le talon,
P_2: point d'attache entre le sapin et la charnière,
P_3: point d'attache entre le sapin et la lèvre,
P_4: point d'attache entre le sapin et la lèvre,
Q: force latérale utilisée dans le calcul de flambage,
q_i avec $0 \leq i \leq n$: pression linéique s'exerçant sur la travée i si elle existe,
q_{ij} avec $1 \leq j \leq n_i$: valeur de q_i au $j^{ème}$ point de la poutre i,
R: force de frottement apparent dans un repère lié au balai,
R': force de frottement,
R_{e0}: repère orthonormé en 2 dimensions lié au balai, de centre O, l'axe des abscisses étant parallèle à la surface de contact et celui des ordonnées étant orienté vers le bas,
r_f: rayon intérieur du profil circulaire,
R_f: rayon extérieur du profil circulaire,
X: variable intermédiaire utile à la résolution des équations,
x_1, x_2, x_3, x_4: abscisses respectives des points P_1, P_2, P_3,et P_4, dans R_{e0},
y_f: flèche liée au flambage au point d'abscisse x_f,
Y_f: flèche de la bielle coudée en M,
y_1, y_2, y_3, y_4: ordonnées respectives des points P_1, P_2, P_3,et P_4, dans R_{e0},
z_i: cotte du point G_i,
λ : constante servant à déterminer la flèche de flambage,
ω'_i et ω''_i avec $1 \leq i \leq n-1$: rotations sur appuis de la travée i isochargée par q_i,
θ : angle d'attaque,
θ_c : angle d'attaque pour lequel le coefficient de frottement apparent, f, devient infini,
θ_3 : angle de rotation du point P3 par rapport à R_{e0},
$\theta^i_{j/k}$ rotation sur appuis de G_j isochargée par M_i seul le long de la poutre k avec :
$j \in \{i-1, i, i+1\}$ et $k \in \{i-1, i\}$

2.1 ÉLASTICITÉ

2.1.1 Introduction

Les différentes pièces de l'essuie-glace subissent des déformations de part leur élasticité et sous l'effet des forces appliquées. Ces déformations génèrent des déplacements par rapport aux repères liés à ces mêmes pièces, déplacements qui n'existeraient pas si les pièces étaient indéformables. L'objectif de ce chapitre est de définir l'importance de ces déplacements ainsi que les effets dynamiques résultants. Le système d'essuyage peut être vu comme un assemblage de composants. Nous allons devoir définir dans chaque pièce la flexibilité qui aura un impact sur la dynamique du système. Deux points importants peuvent justifier la prise en compte de la flexibilité dans le modèle :

* la flexibilité engendre des déplacements qui, vis à vis des autres pièces ou pour le système d'essuyage, sont importants.
* la ou les fréquences de résonance induites sont assez faibles pour pouvoir jouer un rôle dans le système.

Les effets vibratoires importants constatés ont une valeur maximale de l'ordre de 200-300Hz (broutement). Nous fixerons la limite à 1000Hz pour plus de sécurité et éviter qu'un phénomène important sur d'autres systèmes d'essuyage ne soit pas pris en compte. Comme nous le verrons par la suite, cette augmentation de la valeur limite ne change pas les phénomènes à prendre en compte.

Suivant que les pièces ont une forme simple ou complexe, les calculs ont été effectués en utilisant une approche théorique ou en utilisant la méthode des éléments finis.
Les formules de RDM associées à la méthode exposée en annexe D ont été utilisées pour les calculs théoriques les plus immédiats. Pour les autres cas, une étude particulière plus étendue sur le sujet a été effectuée (paragraphes 2.2, 2.3 et 2.4).

2.1.2 Bilan des Élasticités à retenir

Les relations entre les différentes variables mises en oeuvre et les ordres de grandeur des fréquences de vibration et des déplacements sont indiqués dans les tableaux 2.1.1 et 2.1.2.
Dans la colonne de gauche, nous avons indiqué les valeurs numériques qui ont servi à effectuer les calculs dans les autres colonnes. La majeure partie de ces données est issue du dimensionnement des pièces extraites des différents plans existants. Nous avons néanmoins effectué un calcul de bielle coudée avec une flèche non présente dans notre cas afin de disposer d'un ordre de grandeur pour les autres systèmes. Dans la majorité des cas, nous avons précisé le déplacement et l'angle de rotation généré pour les balais afin de juger de la pertinence des paramètres. Lorsque les angles générés sont inférieurs d'au moins dix fois l'angle maximal généré par une flexibilité nous avons considéré le déplacement négligeable. Dans le domaine fréquentiel, nous avons simplement comparé la fréquence propre à notre seuil de 1000Hz.
Nous n'avons pas effectué de calcul d'éléments finis de la monture et des palonniers du balai. C'est pourquoi nous avons apposé la mention 'négligé' et non 'négligeable' bien qu'il soit physiquement évident qu'ils se déforment moins que la lame ou le bras. Nous avons apposé la même mention pour les calculs vibratoires des pièces complexes que nous n'avons pas effectués.
Des parties importantes du balai comme la charnière, la lèvre et la vertèbre ont été traitées succinctement dans le tableau mais seront examinées plus en profondeur aux chapitres 2.2 et 2.4.

	Statique					Dynamique			
$E=210.10^9 Nm^{-2}$ $G=81.10^9 Nm^{-2}$		formule de la force ou du couple	raideur k dans $F = k\Delta l$	ordre de grandeur	bilan	Conditions limites	formule 1ère fréquence	ordre de grandeur	bilan / 1000hz
bielle $S=3,7810^{-5}m^2$ $l=0,2$ m	compression/ traction	$F = \frac{ES}{l}\Delta l$	$\approx 4.10^7 Nm^{-1}$	$\Delta l \approx 5\mu m$ $\Delta\theta \approx 0,005°$	négligeable	Encastré (appuyé) / encastré (appuyé)	$\sqrt{\frac{ES}{4ml}} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$\approx 13000Hz$	négligeable
$I=2,210^{-10}m^4$ $y=1.10^{-2}m$ $F=200N$ $m=50.10^{-3}kg$	flambage par déformation initiale	$F = \frac{3EI}{y^2 l}\Delta x$	$\approx 6,9.10^6 Nm^{-1}$	$d \approx 29\mu m$ $\Delta\theta \approx 0,02°$	négligeable	masse centrée à la moitié de la flèche	$\sqrt{\frac{3EI}{4y^2 lm}}$	$\approx 5900Hz$	négligeable
manivelle $i_1=1,3.10^{-9}m$ $i_2=3,2.10^{-8}m$	compression/ traction	$F = \frac{ES}{l}\Delta l$	$\approx 2,8.10^8 Nm^{-1}$	$d \approx 1\mu m$	négligeable	Encastré / encastré (appuyé)	$\sqrt{\frac{ES}{4ml}} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$\approx 42000Hz$	négligeable
$l=6.10^{-2}m$ $S=8.10^{-5}m^2$ $m=40.10^{-3}kg$	flexion sans compter le maneton	$F = \frac{12EI}{l^3}\Delta l$ avec I=I1 ou I2	$\approx 1,5.10^7 Nm^{-1}$(1) $\approx 3,7.10^8 Nm^{-1}$(2)	$d \approx 13\mu m$ $\Delta\theta \approx 0,01°$ pour (1)	négligeable	Encastré / appuyé	$\approx \frac{15,41}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{l^3 m}} \approx \frac{2,453}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$	$\approx 14000Hz$(1) $\approx 70000Hz$(2)	négligeable
arbre $d=10^{-2}m$ $l_{arbre}=6,4.10^{-2}m$	torsion	$M_t = \frac{G\pi d^4}{32 l_{arbre}}\alpha$	$\approx 1240 Nm.rad^{-1}$	$\Delta\theta \approx 0,3°$	**important**	Encastré / encastré	$\sqrt{\frac{G\pi d^4}{128 l_{arbre}^2 J}} = \frac{1}{2l_{arbre}}\sqrt{\frac{G}{\rho}}$	$\approx 25000Hz$	négligeable
$\rho=7800kgm^{-3}$ $I=4,9.10^{-10}m^4$ $m=39.10^{-3}kg$ $Mt=10mN$	flexion	$F = \frac{12EI}{l^3}\Delta l$	$\approx 4,7.10^6 Nm^{-1}$	$d \approx 42\mu m$ $\Delta\theta \approx 0,04°$	négligeable	Encastré / encastré	$\approx \frac{22,37}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{l_{arbre}^3 m}} \approx \frac{3,56}{l_{arbre}^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$	$\approx 11300Hz$	négligeable
platine	tout	éléments finis		$d \approx 6\mu m$ $\Delta\theta \approx 0,005°$	négligeable			83, 103, 369, 752, 1035, 1226 Hz ...	**important**
entraîneur	tout	éléments finis		$d \approx 40\mu m$ $\Delta\theta \approx 0,02°$	négligeable				négligé

(1) flexion dans la direction de l'axe

(2) flexion dans la direction du mouvement du bout de la bielle

Tableau 2.1.1: *Bilan de l'élasticité et des vibrations des pièces (début)*

		formule de la force ou du couple	raideur k dans $F = k\Delta l$	ordre de grandeur	bilan	formule 1ère fréquence	ordre de grandeur	bilan / 1000hz
carter + bras	flexion suivant la hauteur	éléments finis	345 Nm^{-1} 370 Nm^{-1}	$d \approx 2{,}9cm$ $d \approx 2{,}7cm$	**important**			
	flexion dans le sens du mouvement		2200 Nm^{-1} 2500 Nm^{-1}	$d \approx 4{,}5mm$ $d \approx 4mm$ $\Delta\theta \approx 0{,}45°$	**important**			
	compression			$d \approx 0{,}4mm$				
charnière $E=3.10^{6}$	flexion	$F = \frac{3EI}{l^3}\Delta l$	3000 Nm^{-1}	(cf. mod. lame)	**important**			**important**
$I=1{,}38.10^{-13}.m^4$ $l=0{,}75.10^{-3}$ m $A=0{,}55.10^{-5}m^2$ F=0,45N $J=1.10^{-10}$ $m = 6{,}8.10^{-6}$ kg	traction	$F = \frac{EA}{l}\Delta l$	22000 Nm^{-1}	2.10^{-5}	négligeable			négligé
lèvre $L=5.45.10^{-3}m$ $l=1.95.10^{-3}$ m	flexion	$F = \frac{3EI}{l^3}\Delta l$	310 Nm^{-1}	(cf. mod. lame)	**important**			
$A=0{,}675.10^{-5}m^2$ $I=2{,}56.10^{-13}$ $m=4.10^{-6}$	traction	$F = \frac{EA}{l}\Delta l$	10000 Nm^{-1}		négligeable			négligé
monture et palonnier					négligé			négligé
vertèbre	flexion	$Mt = \frac{a^3b^3}{a^2+b^2}\frac{G\Delta\alpha_{vert}}{3{,}6\, l_{vert}}$	(cf. mod. pression)		**important**			

Tableau 2.1.2: *Bilan de l'élasticité et des vibrations des pièces (fin)*

2.1.3 Modèles pris en compte pour ce qui est de l'élasticité

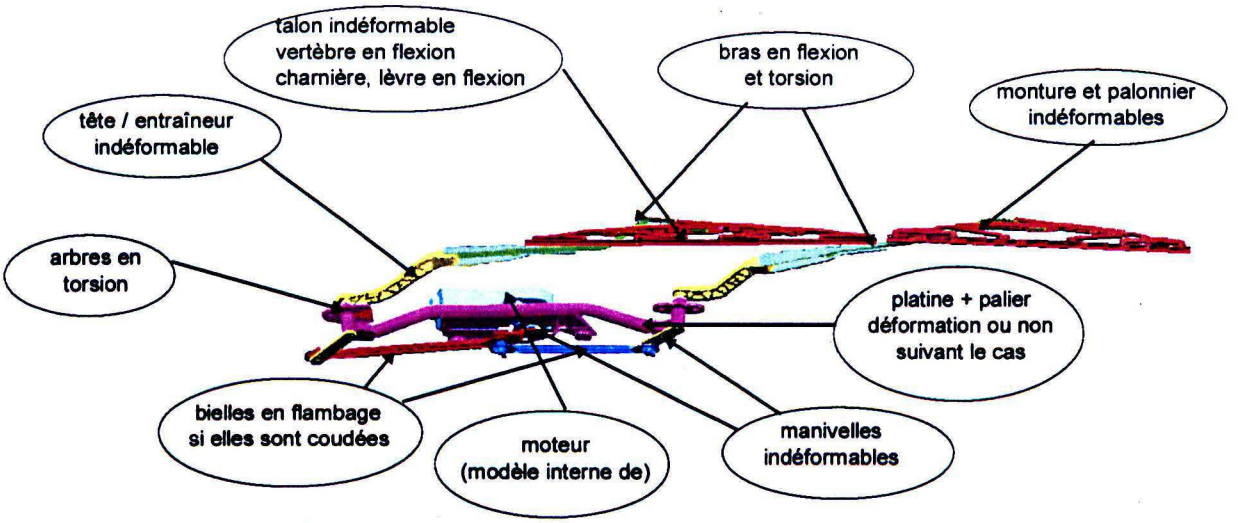


Figure 2.1.1: *Élasticités à prendre en compte dans un système d'essuyage*

La figure 2.1.1 représente toutes les élasticités importantes pour le système d'essuyage. Bien sûr, certains éléments sont dans certains cas négligeables. Par exemple dans le cas de notre modèle de référence qui sert à la validation, à savoir l'essuie-glace de la Peugeot 106, les bielles sont droites et ne sont donc pas à considérer. Dans le cas de bielles coudées et si l'élasticité s'avérerait importante, un 'ressort linéaire' pourrait être adjoint.

Il est très important de constater que les premières fréquences propres de vibrations du système d'essuyage ne sont pas le fait de vibrations propres des pièces le composant mais plutôt de la combinaison de pièces. Il en résulte l'absence d'harmoniques.

Différents modèles ont intégré progressivement ces élasticités. Les résultats seront exposés au chapitre 6.

2.2 MODÉLISATION DE LA LAME D'ESSUIE-GLACE

2.2.1 Présentation du problème

Nous allons nous intéresser à la partie inférieure de la lame de caoutchouc (avec le talon, la charnière et le sapin) qui est en contact avec le pare-brise (fig. 2.2.1).
Les calculs nécessaires à cette partie sont présentés en détail en annexe A.
Nous allons nous intéresser à une coupe de la lame. Cette modélisation sera faite uniquement lorsqu'il y a calage, c'est à dire, lorsque le sapin est en contact avec le talon.

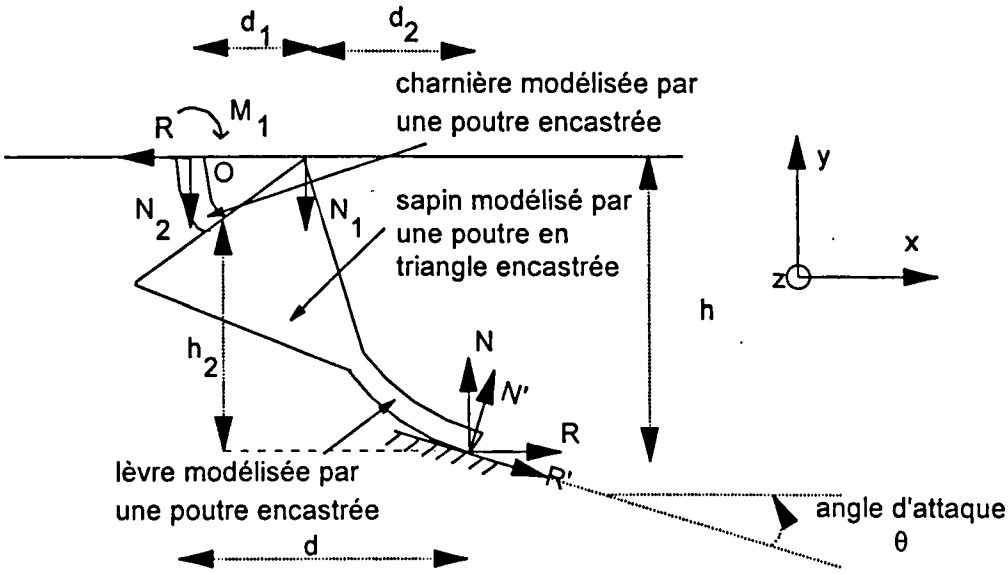


Figure 2.2.1 : *Modèle de la lame pris en compte*

2.2.2 Bilan des forces

Soit N la force d'appui normale au talon (fig. 2.2.1). Elle se décompose en deux forces une au niveau de la charnière N_2 et une autre au contact entre le sapin et le talon N_1. Au niveau de la vitre, la force de réaction présente deux composantes: une force normale à la vitre N' et une force de frottement R'. Dans le repère lié au talon, nous noterons R et N les composantes du vecteur de réaction dans le repère de référence. Nous ferons l'hypothèse qu'au niveau du contact entre le talon et le sapin aucune force de frottement n'agit.
Soit M_1 le moment d'encastrement de la charnière exercé par le talon.

En effectuant un bilan des forces et en tenant compte de la relation de Coulomb, $R' = f'N'$, nous obtenons:

$$\frac{R}{N} = \frac{\sin(\theta) + f'\cos(\theta)}{\cos(\theta) - f'\sin(\theta)} \qquad (2.2.1)$$

Nous obtenons ainsi un coefficient de frottement équivalent au niveau de la lame.
Nous allons examiner les coefficients de frottement équivalents pour différentes valeurs de coefficients de frottement f'.

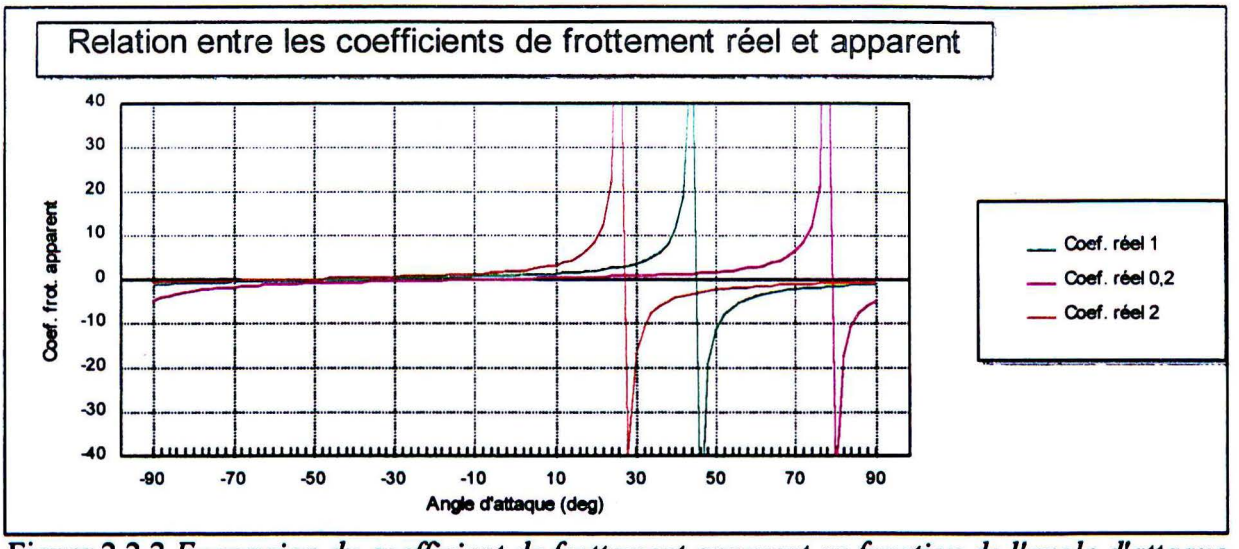


Figure 2.2.2 *Expression du coefficient de frottement apparent en fonction de l'angle d'attaque pour trois coefficients de frottement réels.*

Nous pouvons définir un angle critique pour lequel, le frottement apparent devient infini. Cet angle critique est donné par la fonction

$$\theta_c = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{f'}\right) \qquad (2.2.2).$$

A titre indicatif, pour les coefficients de frottements de 0,2 , 1 et 2, cet angle vaut respectivement et approximativement 78,7°, 45° et 26,6°.

La formule 2.2.1 suppose que R et x sont orientés dans le même sens. Si le mouvement change de sens, N reste inchangé alors que R change de sens. Si nous conservons le repère précédent, l'équation devient:

$$f = -\frac{\sin(\theta) - f'\cos(\theta)}{\cos(\theta) + f'\sin(\theta)} = \frac{\sin(-\theta) + f'\cos(-\theta)}{\cos(-\theta) - f'\sin(-\theta)} \qquad (2.2.3)$$

Cette formule correspond pour la formule 2.2.1 à changer θ en $-\theta$. Donc lorsque l'on change le sens du mouvement, tout se passe comme si l'angle d'attaque changeait de signe. Nous pouvons résumer la situation par la figure 2.2.3.

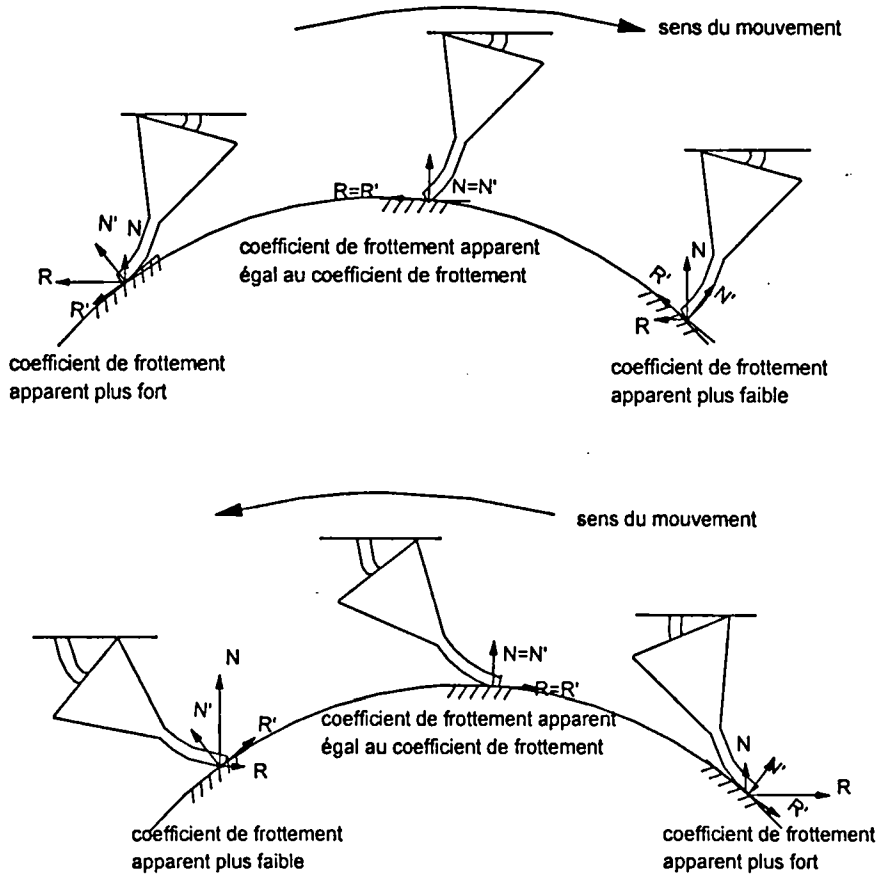


Figure 2.2.3 : *Application pratique de la différence entre les coefficients de frottement réel et apparent*

Nous avons cinq inconnues: M_1, N, N_1, N_2, R (elles sont représentées sur la figure 2.2.1 et définies en annexe A) et 3 équations issues du bilan des forces et moments. Il nous manque une relation pour que, connaissant un paramètre, nous puissions déterminer tous les autres. Elle sera déterminée par les équations issues de résistance des matériaux. En fait il nous manque une relation caractérisant l'élasticité de la lame.

2.2.3 Calcul des paramètres de la lame

A partir des équations de la résistance des matériaux, nous avons déterminé des relations liant le déplacement des différents points caractéristiques de la lame avec les forces et moments.

Nous allons utiliser les relations précédentes pour déterminer les déformations de la lame. Nous pourrons ainsi déterminer successivement les points P_2, P_1, P_3, P_4. Nous désignerons par XX_{char} et XX_{sap}, les paramètres concernant respectivement la charnière ou le sapin (fig. 2.2.4).

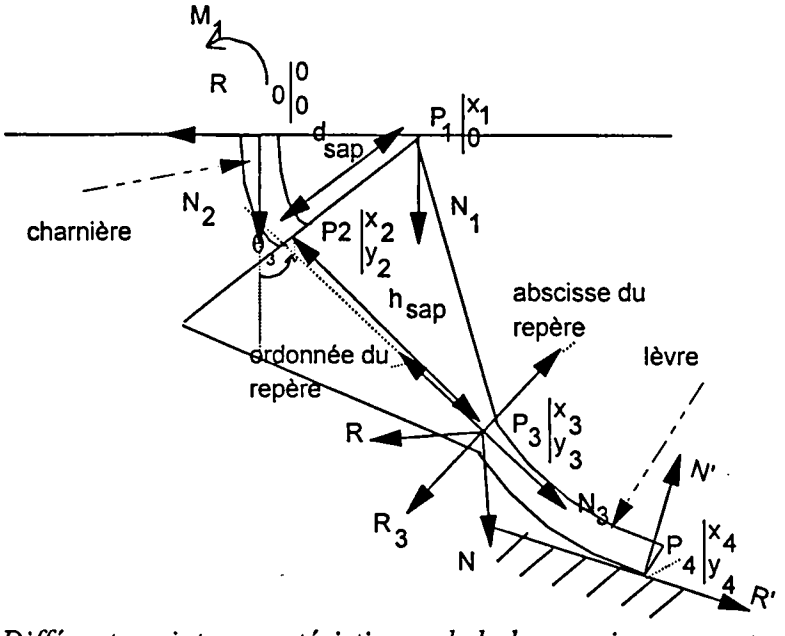


Figure 2.2.4 : *Différents points caractéristiques de la lame pris en compte dans les calculs.*

La combinaison des équations conduit à la résolution d'une équation implicite:

$$X = l_{lèvre}\left(\sin(a_3 + b_3N + c_3NX) + f\cos(a_3 + b_3N + c_3NX)\right) + \left(\cos(a_3 + b_3N + c_3NX) - f\sin(a_3 + b_3N + c_3NX)\right)\frac{\left(\sin(a_3 + b_3N + c_3NX)N + \cos(a_3 + b_3N + c_3NX)R\right)l_{lèvre}^3}{3E_{lèvre}I_{lèvre}} \quad (2.2.3),$$

avec $X = (x_4 - x_3) - f(y_4 - y_3)$ (2.2.4)

et a_i des coefficients dépendant de paramètres géométriques dont l'expression complète est fournie en annexe A.

A partir de la variable X, nous pouvons déterminer successivement à l'aide d'expressions explicites, les autres paramètres géométriques, ainsi que les forces et les moments.

Détermination des premiers paramètres géométriques

$$\theta_2 \approx \frac{l_{char}}{d_{sap}}$$

$$M_1 = -\frac{Rl_{char}}{2} - \frac{E_{char}I_{char}}{d_{sap}}$$

$$x_1 = \frac{Rl_{char}^3}{12E_{char}I_{char}} + d_{sap}$$

$$x_2 = \frac{l_{char}^2}{2d_{sap}} + \frac{Rl_{char}^3}{12E_{char}I_{char}}$$

$$y_2 = -l_{char}$$

Résolution de l'équation implicite :

$$X = l_{lèvre}\left(\sin(a_3 + b_3N + c_3NX) + f\cos(a_3 + b_3N + c_3NX)\right) +$$
$$\left(\cos(a_3 + b_3N + c_3NX) - f\sin(a_3 + b_3N + c_3NX)\right)\frac{\left(\sin(a_3 + b_3N + c_3NX)N + \cos(a_3 + b_3N + c_3NX)R\right)l_{lèvre}^3}{3E_{lèvre}I_{lèvre}}$$

Détermination de paramètres géométriques complémentaires

$$\theta_3 = a_3 + b_3N + c_3NX$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1N + c_1NX + x_2 \\ a_2 + b_2N + c_2NX + y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 = -h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\sin(\theta_3)\cos(\theta_3)N + \cos^2(\theta_3)R\right)l_{lèvre}^3}{3E_{lèvre}I_{lèvre}} + \sin(\theta_3)l_{lèvre} + x_3 \\ \dfrac{\left(\sin^2(\theta_3)N + \sin(\theta_3)\cos(\theta_3)R\right)l_{lèvre}^3}{3E_{lèvre}I_{lèvre}} - l_{lèvre}\cos(\theta_3) + y_3 \end{bmatrix}$$

Détermination de forces et moments

$$M_1 = -\frac{Rl_{char}}{2} - \frac{E_{char}I_{char}}{d_{sap}}$$

$$M_3 = N(x_4 - x_3) - R(y_4 - y_3)$$

$$N_2 = \frac{E_{char}I_{char}}{d_{sap}d_1} + N\left(\frac{fl_{char}}{2d_1} - \frac{d_2}{d_1} - \frac{fh}{d_1}\right)$$

$$N_1 = N - N_2$$

Figure 2.2.5: *Algorithme principal*

2.2.4 Validation du modèle

Nous avons validé ce modèle par rapport à un modèle d'éléments finis utilisé couramment et validé. Les calculs ont été effectués sur un modèle classique de profil de lame "GC4".

Compte tenu que le caoutchouc est un matériau non-linéaire, les erreurs sont acceptables. Nous pouvons donc considérer que le modèle est validé pour des pressions linéiques nominales et doubles du nominal. Le modèle n'est cependant pas correct pour des pressions trop fortes qui écraseraient une bonne partie de la lèvre sur la vitre.

Résultats du calcul par éléments finis (en mm)							
	Point 1: x	Point 2: x	Point 2: y	Point 3: x	Point 3: y	Point 4: x	Point 4: y
f=0,2; p=15	-1.69199	-0.190518	-0.730091	1.53392	-3.09465	-2.70628	-4.62102
f=1; p=15	-1.693791	-0.208281	-0.734703	1.669377	-3.04554	-3.18097	-4.24447
f=0,2; p=30	-1.691834	-0.200081	-0.733104	1.651412	-3.04121	-3.22317	-4.1491
f=1; p=30	-1.688277	-0.227396	-0.741739	1.875481	-2.95226	-3.74819	-3.43611
Résultats du modèle (en mm)							
	Point 1: x	Point 2: x	Point 2: y	Point 3: x	Point 3: y	Point 4: x	Point 4: y
f=0,2; p=15	1.703324	0.2039934	-0.75	1.5458099	-3.160908	2.941595	-4.56618
f=1; p=15	1.716620	0.2172896	-0.75	1.5566104	-3.157053	3.326741	-4.22782
f=0,2; p=30	1.706648	0.2073175	-0.75	1.6229392	-3.120248	3.560173	-3.94935
f=1; p=30	1.733240	0.2390969	-0.75	1.7003682	-3.092241	4.051079	-3.32192
Écarts entre les deux (en %)							
	Point 1: x	Point 2: x	Point 2: y	Point 3: x	Point 3: y	Point 4: x	Point 4: y
f=0,2; p=15	0.67	7.07	2.73	0.78	2.14	8.70	1.19
f=1; p=15	1.35	4.33	2.08	6.75	3.67	4.58	0.39
f=0,2; p=30	0.88	3.62	2.3	1.72	2.60	10.5	4.81
f=1; p=30	2.66	5.15	1.11	9.34	4.74	8.08	3.32

Tableau 2.2.1: *Les erreurs du modèle sont faibles*

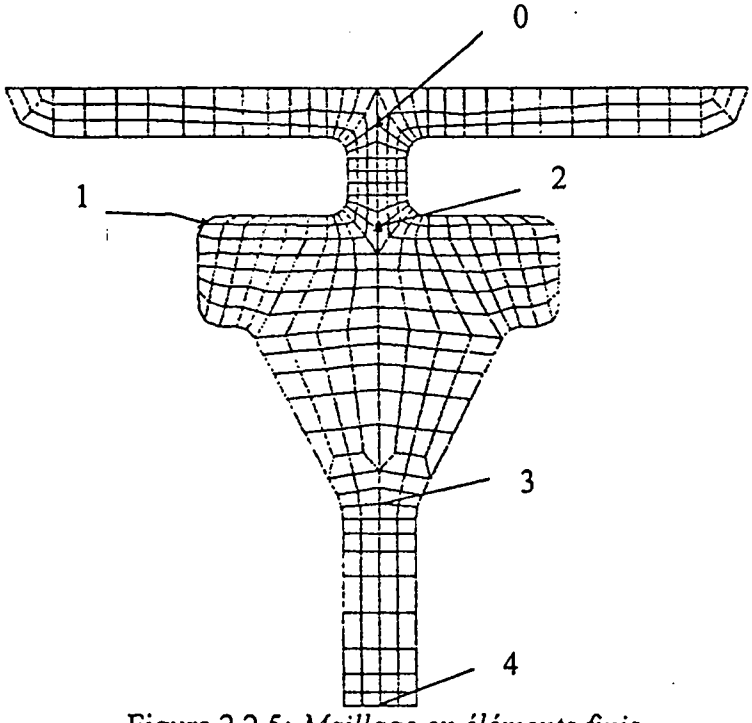


Figure 2.2.5: *Maillage en éléments finis*

2.2.5 Quelques résultats pratiques

2.2.5.1 Logiciel développé

A partir de l'algorithme précédent et en apportant quelques compléments géométriques, nous avons programmé un logiciel sous Matlab (fig. 2.2.6) déterminant et traçant la force de calage, l'angle de raclage (angle entre la lèvre et la vitre) et les déplacements horizontaux et verticaux des extrémités de la lame en fonction de 8 paramètres possibles propres à la la lame.

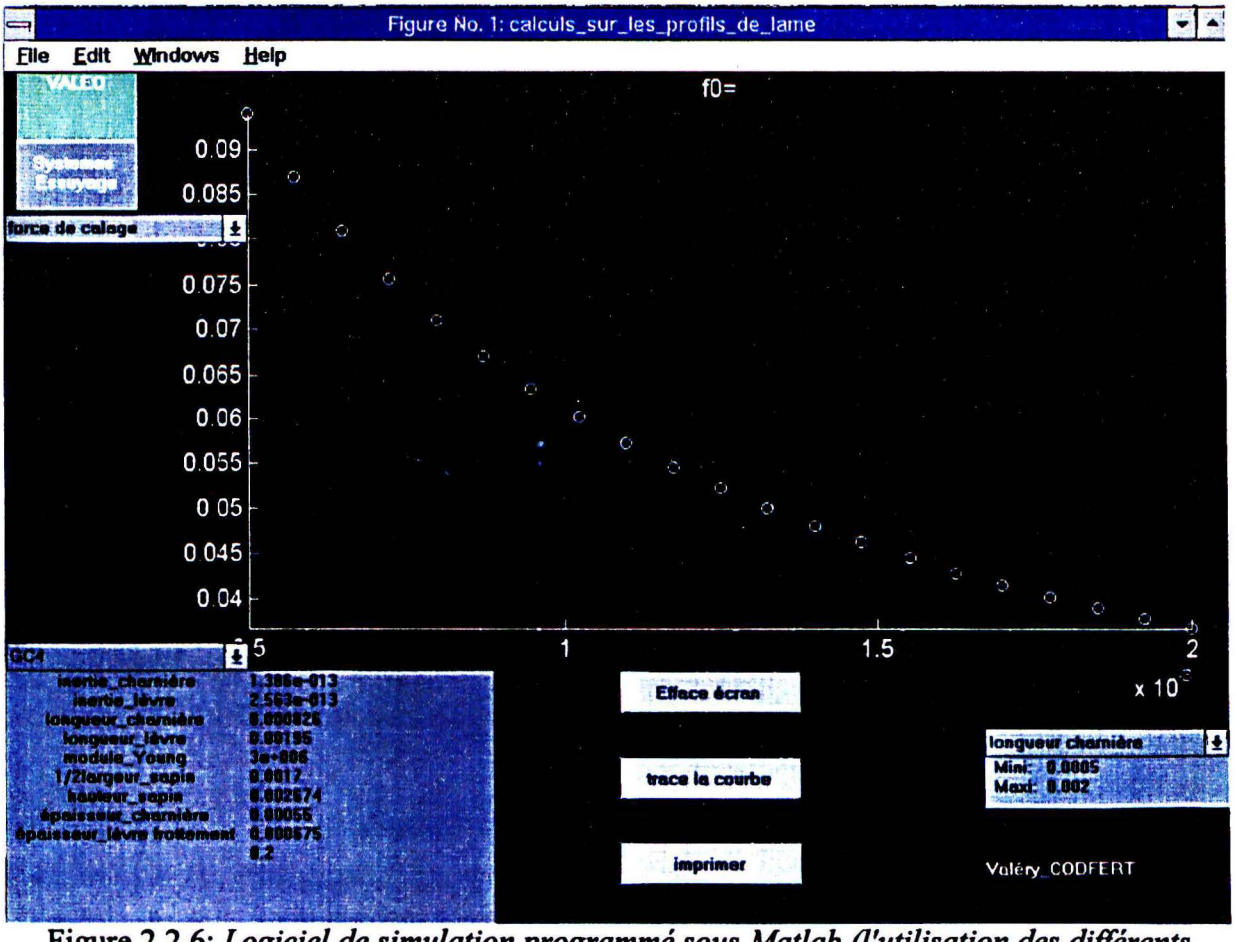


Figure 2.2.6: *Logiciel de simulation programmé sous Matlab (l'utilisation des différents menus permet d'utiliser la même page pour la définition et la visualisation des résultats)*

2.2.5.2 Courbes générales de déplacement et de forces

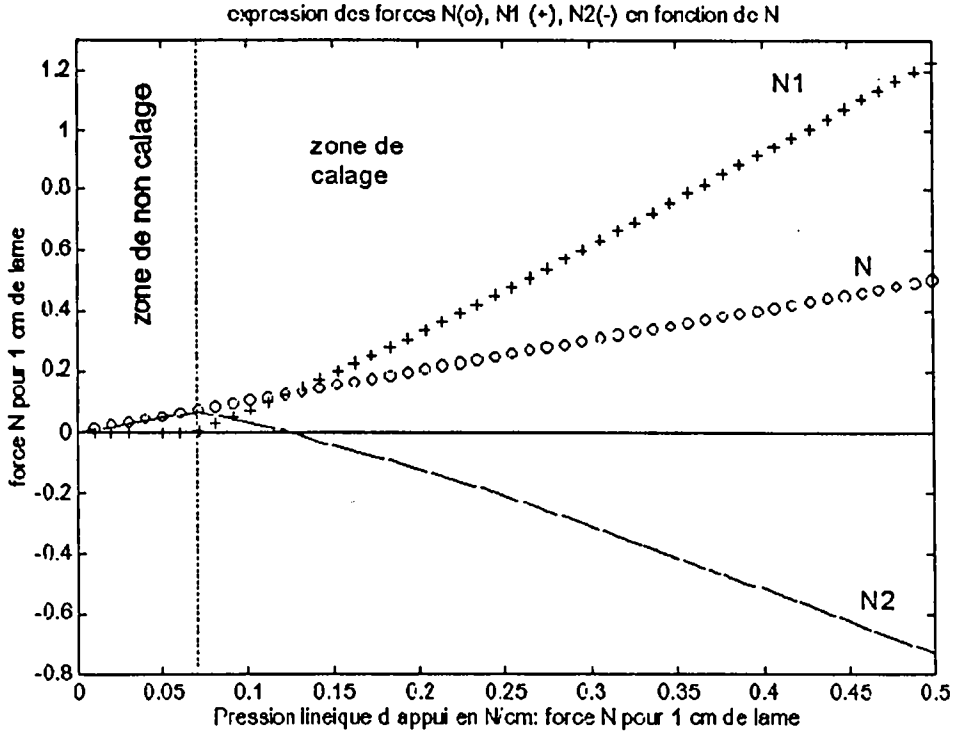


Figure 2.2.7: *Évolution des différentes forces en fonction de la charge*

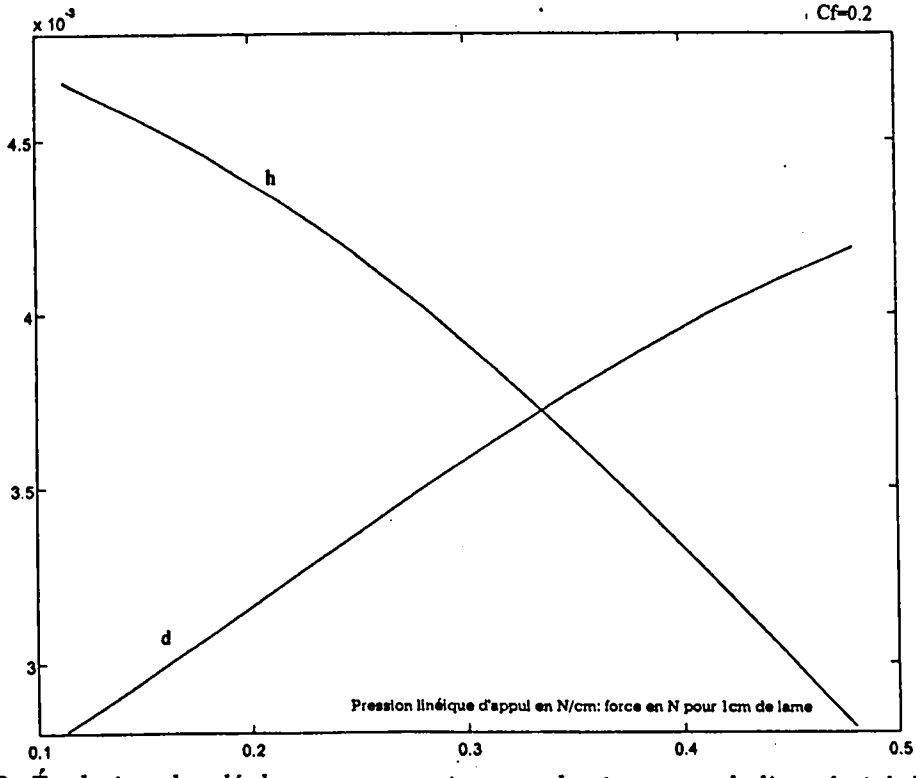


Figure 2.2.8: *Évolution des déplacements verticaux et horizontaux de l'extrémité de la lame en fonction de la charge.*

Nous allons examiner l'évolution des forces en liaison avec l'extérieur du système et des déplacements de l'extrémité de la lame.

La figure 2.2.7 présente l'évolution des trois forces principales. Nous pouvons distinguer deux zones, celle où la lame est calée (domaine de validité du modèle) et celle où elle ne l'est pas.

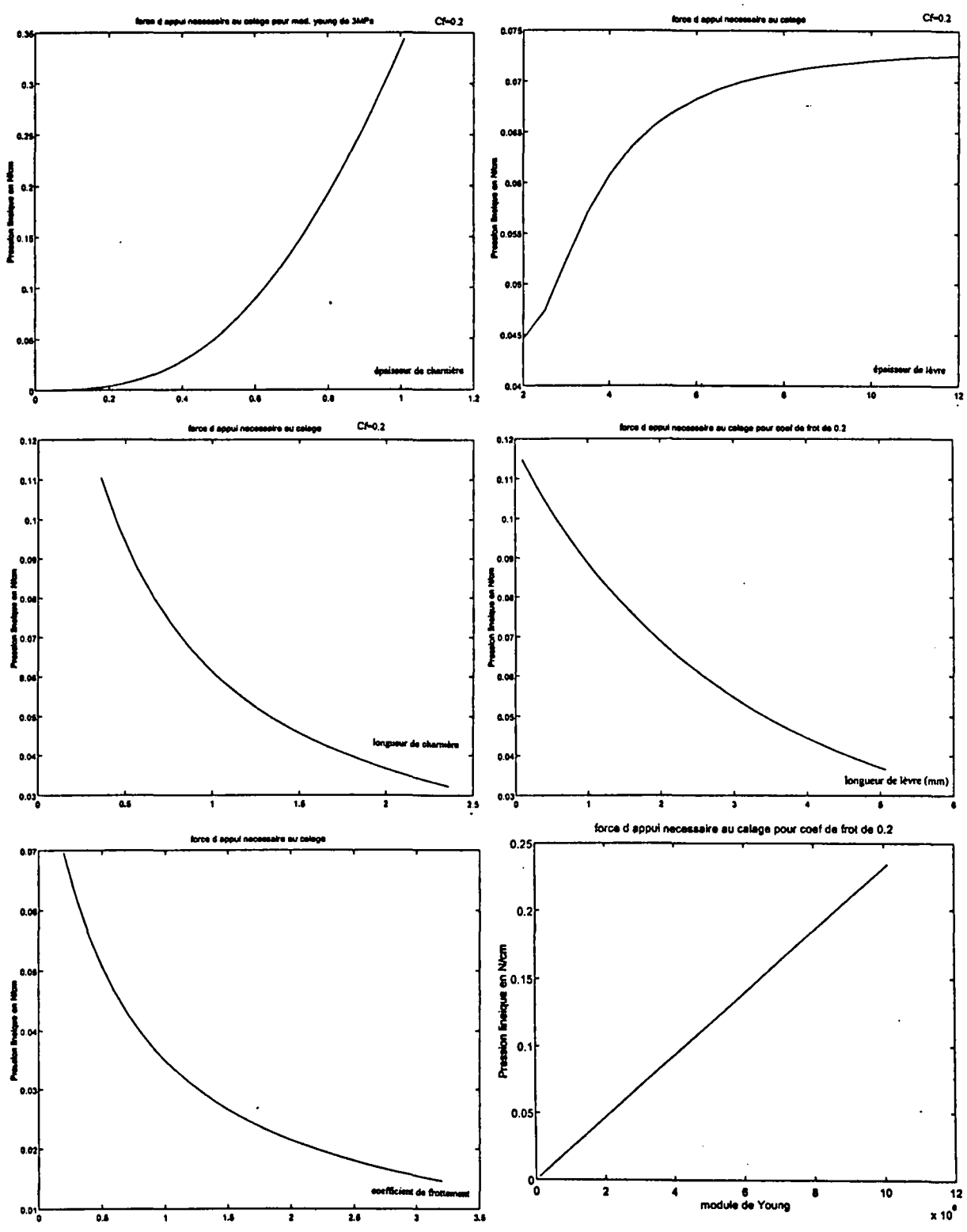


Figure 2.2.10 *Evolution de la force de calage en fonction de différents paramètres*

Lorsque la lame n'est pas calée, le système est plus simple, la force entre le talon et l'extrémité du sapin N_1 est nulle et il y a égalité entre la force d'appui N et la force entre le talon et la charnière N_2.
Dans la zone de calage, nous pouvons à nouveau isoler deux parties. Une première est définie lorsque les deux forces N_1 et N_2 sont orientées dans le même sens et sont inférieures individuellement et en valeur absolue à N. La deuxième partie est déterminée lorsque la force entre le talon et l'extrémité du sapin N_1 dépasse la force d'appui. Dans ce cas la force au niveau de la charnière N_2 s'inverse. Ainsi la charnière passe de la compression à la traction. L'évolution de ces deux forces N_1 et N_2 n'est le fait que de l'équilibre des forces et des moments ainsi que la situation géométrique influencée par les déformations de la lame.
La figure 2.2.8 montre la décroissance de la hauteur de la lame et l'augmentation du déplacement horizontal de l'extrémité de la lame en fonction de la charge.

2.2.5.3 Quelques résultats issus des simulations

La force de calage est importante. En effet lorsque la lame est calée, la position est assez stable: dans un sens la charnière est bloquée contre le sapin, dans l'autre son mouvement oblige le balai à s'élever verticalement et s'oppose donc au poids. Lorsque la lame n'est pas calée, des vibrations de charnière gênantes pour l'essuyage peuvent survenir.

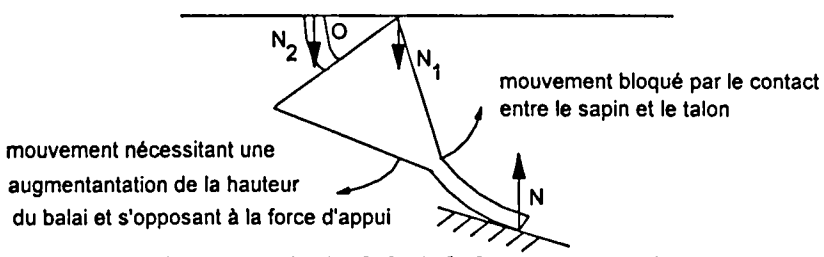


Figure 2.2.9: *Stabilité de la position calée*

Les résultats de la figure 2.2.10 s'interprètent bien. Le lien entre l'épaisseur ou la longueur de charnière avec la force de calage est assez direct: plus la longueur de charnière est importante ou moins l'épaisseur de charnière est importante, plus la charnière sera facile à 'plier' et plus vite la force nécessaire au calage sera atteinte. Le lien avec l'épaisseur ou la longueur de lèvre avec la force de calage passe par le résultat précédent. Plus la longueur de la lèvre est importante, plus le moment généré par la force de contact sur la charnière sera important et par conséquent plus vite la force nécessaire au calage sera atteinte. Plus l'épaisseur de lèvre est faible plus la lèvre fléchit, plus le moment créé par la force normale est important. Par contre la diminution l'épaisseur de lèvre génère une diminution du moment créé par la force de frottement. Il y a donc un effet contradictoire. Pour des coefficients de frottement faibles, seul le moment créé par la force normale est à considérer si bien que plus l'épaisseur de lèvre est faible moins la force de calage est importante.
De la même façon, plus le coefficient de frottement est important, plus la force de frottement est importante, plus le moment généré sur la charnière est important et plus la lame aura tendance à caler.
Les différentes expressions des déplacements sont linéaires par rapport au module d'Young. Il est donc naturel qu'il en soit de même de la force de calage.

2.3 ÉTUDE DU FLAMBAGE

2.3.1 Préambule

Les calculs sont effectués en statique. Ils sont néanmoins transposables en dynamique si les variations de forces sont suffisamment lentes pour permettre au système de venir à sa position d'équilibre. Dans ce chapitre nous nous proposons de détailler les différentes formules de flambage de bielles droites, de bielles coudées puis nous nous intéresserons à l'optimisation de la section. Les détails des calculs sont exposés en annexe B.

2.3.2 Étude d'une bielle parfaitement droite

Nous supposerons que la bielle a une section constante et par voie de conséquence un moment quadratique I constant sur toute sa longueur. Les éventuels écarts expérimentaux s'expliqueront en grande partie par cette hypothèse ou par la différence entre les modules d'Young théoriques et réels.

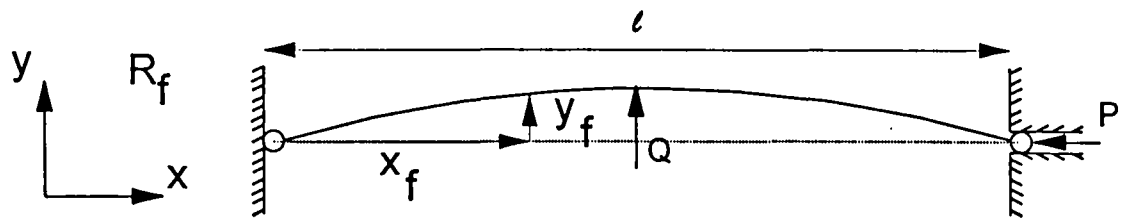


Figure 2.3.1: *Bielle en compression soumise à une force latérale Q.*

Considérons le cas où la bielle est soumise à une force de compression P (fig. 2.3.1). Si cette force est plus petite qu'une grandeur Pc appelée force critique, l'équilibre est stable: une légère déformation transversale produite par l'action d'une force Q agissant latéralement disparaît lorsque la force est supprimée. Au-dessus de cette force critique, la déformation transversale ne disparaît pas. Il est déconseillé d'atteindre cette force critique car la pièce peut casser.

2.3.2.1 Calcul de la force critique Pc dans l'hypothèse des faibles déplacements

En utilisant une équation simplifiée issue des faibles déplacements : $\frac{d^2 y_f}{dx_f^2} = \frac{M}{EI}$ (2.3.1),

où y_f est la flèche d'abscisse x_f,
$m(x_f)$ moment généré par la force unitaire,
$M(x_f)$ moment généré par la force P,
E module de Young,
I moment quadratique d'une section de barre,
l longueur de la barre,

il vient:

$$Pc = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \qquad (2.3.2)$$

Cette formule est connue sous le nom de "loi d'Euler".

2.3.2.2 Application numérique

Prenons pour être concret une bielle assez courte, d'une longueur l de 0,2m; en acier de module d'Young $E = 200\ 10^9$ Pa, ayant un moment quadratique classique I de $2.2\ 10^{-10}\ m^4$. En appliquant la loi d'Euler nous obtenons une force critique Pc de 10860N. La formule d'Euler met bien en évidence que la force critique est inversement proportionnelle au carré de la longueur de la bielle. Par exemple, prenons une bielle de longueur double, nous avons $Pc \approx 2714N$, soit une force critique quatre fois plus faible.

2.3.2.3 Effet du désalignement de la bielle par rapport à l'axe passant par les deux rotules

Nous supposerons que la bielle est écartée de l'axe passant par les deux rotules d'une distance constante et égale à h.

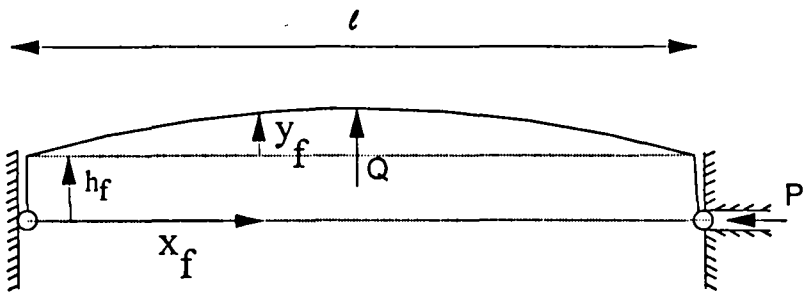


Figure 2.3.2: *Bielle désalignée par rapport à l'axe passant par les deux rotules*

Nous reprenons les notations du 1.1.

$$y_f = A.\sin(k_f x_f + \lambda) - \frac{Q}{2P} x_f - h_f \qquad (2.3.3),$$

avec λ constante dépendant des conditions limites,

$$k_f = \frac{P^2}{EI}, \qquad (2.3.4),$$

$$A = \sqrt{h_f^2 + \left(\frac{\frac{Ql}{2P} + h_f(1-\cos(kl))}{\sin(kl)}\right)^2}, \qquad (2.3.5) \text{ et}$$

$$\tan(\lambda) = \frac{h_f \sin(kl)}{\frac{Ql}{2P} + h_f(1-\cos(kl))} \qquad (2.3.6).$$

Dans le cas particulier où h_f=0, nous retrouvons l'équation précédente. La flèche tend vers l'infini si kl tend vers π. La formule d'Euler reste encore valable dans notre cas.

A *Influence de la hauteur h sur le paramètre A*

Soit A_0 la valeur de A pour h_f =0. Lorsque kl tend vers π, et donc que la force appliquée tend vers la force critique, le ratio $\frac{A}{A_0}$ est alors équivalent à :

$$1 + 4\frac{P}{Q}\frac{h_f}{l} \qquad (2.3.7).$$

Cette formule démontre bien que le rapport $\frac{A}{A_0}$ varie linéairement en fonction de la hauteur h_f et que même si la force critique est identique, la dégradation est d'autant plus importante que la hauteur de désalignement est élevée.

B *Application numérique*

Considérons le cas d'une bielle de Peugeot 106, la hauteur h est de 0,94mm au nominal et 1,53mm au maximum. Prenons comme hypothèse que $\frac{P}{Q} \approx 100$. La force transversale Q, dans notre cas, représente alors le propre poids de la bielle. En appliquant les formules précédentes, nous obtenons un rapport $\frac{A}{A_0}$ voisin de 3 au nominal et de 4 au maximum.

C *Influence de la hauteur h sur le déphasage λ*

Rappelons que :

$$\tan(\lambda) = \frac{h_f \sin(k_f l)}{\frac{Ql}{2P} + h_f(1 - \cos(k_f l))} \qquad (2.3.8).$$

Lorsque la force P tend vers la force critique d'Euler $\sin(k_f l)$ tend vers zéro et donc λ aussi. Si nous négligeons l'effet de la force Q, la déformée est symétrique au moment du flambage.

2.3.3 Étude d'une bielle coudée

Considérons une bielle coudée. Nous considérerons qu'elle est formée de deux poutres (fig. 2.3.3).

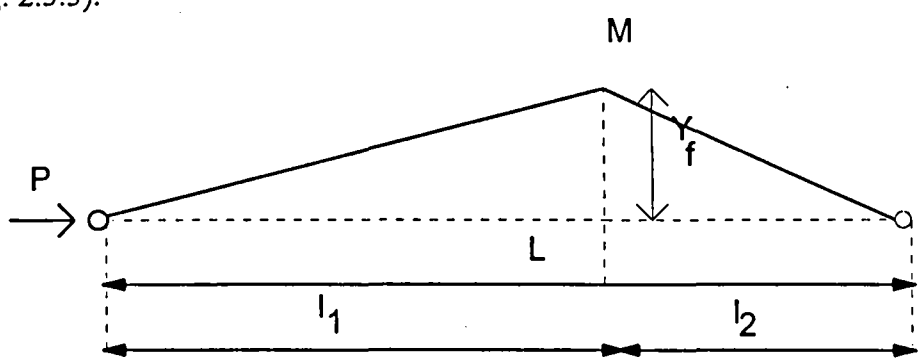


Figure 2.3.3: *Modèle de bielle coudée*

Nous nous proposons de déterminer le déplacement des rotules l'une par rapport à l'autre, ainsi que la flèche au point M.

2.3.3.1 Déplacement des rotules

Soit d_{rotule} le déplacement des rotules dans la direction de la longueur de la bielle. D'après les calculs effectués en annexe B, il vient:

$$d_{rotule} = \frac{PY_f^2 L}{3EI} \qquad (2.3.9)$$

Nous pouvons noter que le déplacement est proportionnel à la force P, à la longueur de la bielle L et au carré de la flèche initiale y_f.

2.3.3.2 Déplacement vertical de la flèche en M

De même que précédemment, intéressons nous au déplacement vertical du point M. Celui-ci est donné par la formule:

$$d_M = -\frac{P \cdot Y_f \cdot l_1 \cdot l_2}{3EI} = -\frac{P \cdot Y_f \cdot \alpha_1 \cdot (1-\alpha_1) L^2}{3EI} \qquad (2.3.10),$$

avec $\alpha_1 = \frac{l_1}{L}$.

Remarquons que contrairement au cas précédent, le déplacement est proportionnel à la flèche initiale et au carré de la longueur de la bielle.

2.3.3.3 Application numérique

Prenons le cas d'une bielle en acier de module d'Young de $200\ 10^9$ Pa, de longueur assez courte de 0,2m, possédant une flèche initiale en son milieu de un centimètre, de moment quadratique $I = 6{,}56\ 10^{-10}\ m^4$ et soumis à une force de 700N. Les formules précédentes (2.3.9) et (2.3.10) donnent: $d_{rotule} = 3{,}6\ 10^{-5} m$ et $d_M = 1{,}8\ 10^{-4} m$. Ces valeurs nous permettent d'estimer des ordres de grandeur des déplacements.

2.3.4 Calcul du moment quadratique I

2.3.4.1 Calcul du moment quadratique I_y

Considérons la forme en U suivante :

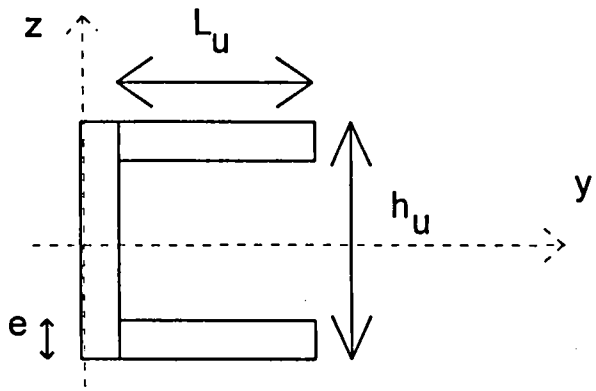


Figure 2.3.4: *Profil en U*

Le moment quadratique suivant l'axe z. est déterminé par l'équation:

$$I_y = eL_u\left(\frac{h_u^2}{2} - eh_u + \frac{2e^2}{3}\right) + \frac{eh_u^3}{12} \qquad (2.3.11).$$

Le profil de bielle de la 106 a pour épaisseur e 1,5mm, pour hauteur h_u 12,2mm et pour longueur L_u 6,5mm. D'après la formule précédente nous obtenons: $I_y = 7.88\ 10^{-10} m^4$.

2.3.4.2 Calcul du moment quadratique I_z

Le moment quadratique suivant l'axe z est donné par la formule suivante:

$$I_z = 2eL_u\left(\frac{L_u^2}{3} + L_u e + e^2\right) + h_u\frac{e^3}{3} - \frac{e(L_u(L_u+2e)+h_u\frac{e}{2})^2}{2L_u+h_u} \qquad (2.3.12)$$

Pour une bielle de Peugeot 106, nous obtenons $I_z = 2{,}2\ 10^{-10} m^4$.
Nous remarquons que les moments quadratiques sont différents selon les deux axes. La bielle flambera dans le sens où son moment quadratique sera le plus faible (valeur la plus faible de I_y et I_z). Il ne sert donc à rien d'avoir un I_y élevé si I_z est faible pour une bielle droite.

2.3.5 Validation des résultats

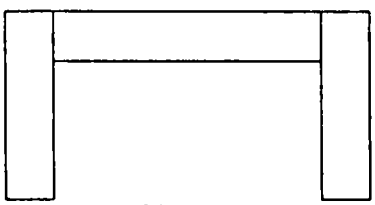


Figure 2.3.5: profil servant à la validation

Pour valider les résultats nous allons les comparer à ceux obtenus à l'aide d'un logiciel SDS.

	Formule	SDS
Ordonnée du centre de gravité	≈ -2.76471	≈ -2.76471
I_z	≈ 1638	≈ 1639
I_y	≈ 298	≈ 297

Tableau 2.3.1: *Validation des calculs de moment quadratique*

Les résultats sont identiques au dernier chiffre significatif près dans le cas du calcul des inerties. Nous pouvons donc considérer que les formules sont validées.

2.3.6 Optimisation du profil en U

Pour une masse de profil, et pour une épaisseur donnée, la longueur de tôle dépliée égale à $C = h_u + 2L_u$ est constante. Les deux inerties varient en sens opposés, plus h_u est élevé, plus I_y est fort et plus I_z est faible. Pour éviter au maximum le flambage, il est nécessaire d'égaler ces deux valeurs.
Transformons les équations précédentes en faisant apparaître la longueur de tôle dépliée C et un des deux paramètres parmi h_u et L_u.

$$I_y = +\frac{e^3C}{3} - \frac{e^3h_u}{3} - \frac{e^2h_uC}{2} + \frac{eCh_u^2}{4} + \frac{e^2h_u^2}{2} - \frac{eh_u^3}{6} \qquad (2.3.13)$$

De même

$$I_z = \frac{eC^3}{48} + h_u\left[\frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{4}C\right] + h_u^2\left[-\frac{e^2}{2} - \frac{e}{8}C - \frac{e^3}{4C}\right] + h_u^3\left[\frac{e}{6} + \frac{e^2}{4C}\right] - \frac{eh_u^4}{16C} \qquad (2.3.14)$$

L'optimisation revient à résoudre l'équation suivante où C est constant et h variable:

$$\frac{eC^3}{48} - \frac{e^3C}{3} + h_u\left[\frac{2e^3}{3} + \frac{3e^2C}{4}\right] + h_u^2\left[-e^2 - \frac{3eC}{8} - \frac{e^3}{4C}\right] + h_u^3\left[\frac{e}{3} + \frac{e^2}{4C}\right] - \frac{eh_u^4}{16C} = 0 \qquad (2.3.15)$$

Si nous considérons le cas du profil de la 106, l'épaisseur e et la grandeur C ont pour valeurs respectives: 1,5 et 25,2 millimètres. La résolution de l'équation donne une hauteur h et une longueur L respectives de 8,23 et 8,49 millimètres et conduit à des moments quadratiques égaux : $I_y = I_z \approx 3{,}62\ 10^{-10} m^4$

Le gain par rapport aux pièces réellement fabriquées est de 65% sur le moment quadratique. Ce résultat se traduit par une force critique multipliée par 1,65.

2.3.7 Comparaison avec un profil circulaire

Pour pouvoir comparer les deux profils, nous conserverons la même masse, c'est à dire la même surface de profil, ainsi que la même épaisseur de tôle.

Traduisons cela en équation. Soit R_f le rayon extérieur et r_f le rayon intérieur du tube. Nous obtenons les relations d'équivalence suivantes:

$$\begin{cases} R_f = \frac{e}{2} + \frac{C}{2\pi}, \\ r_f = R_f - e. \end{cases} \qquad (2.3.16)$$

Le moment quadratique est donné par la formule classique $I = \frac{\pi}{16}\left(R_f^4 - r_f^4\right)$ (2.3.17).

Pour notre profil de bielle, il vient:

$R_f \approx 4{,}76mm$,

$r_f \approx 3{,}26mm$ et

$I = 7{,}86\ 10^{-11} m^4$.

Ce résultat démontre que la performance du profil en U est supérieure à celle du profil circulaire. Ce résultat peut avoir une portée plus générale. En effet, le moment quadratique du profil circulaire peut être approximé avec une bonne précision par la formule suivante:

$$I = \frac{1}{32\pi^2}ec^3 \approx \frac{ec^3}{316} \qquad (2.3.18).$$

La formule du moment quadratique I_y du profil en U contient le terme $\frac{ec^3}{48}$ et donc I_y est supérieur à la valeur de $\frac{ec^3}{48}$ et par voie de conséquence au moment quadratique du profil circulaire. Dans ce contexte, il est donc avantageux de prendre un profil en U.

La figure 2.3.7 résume bien la situation pour les trois profils.

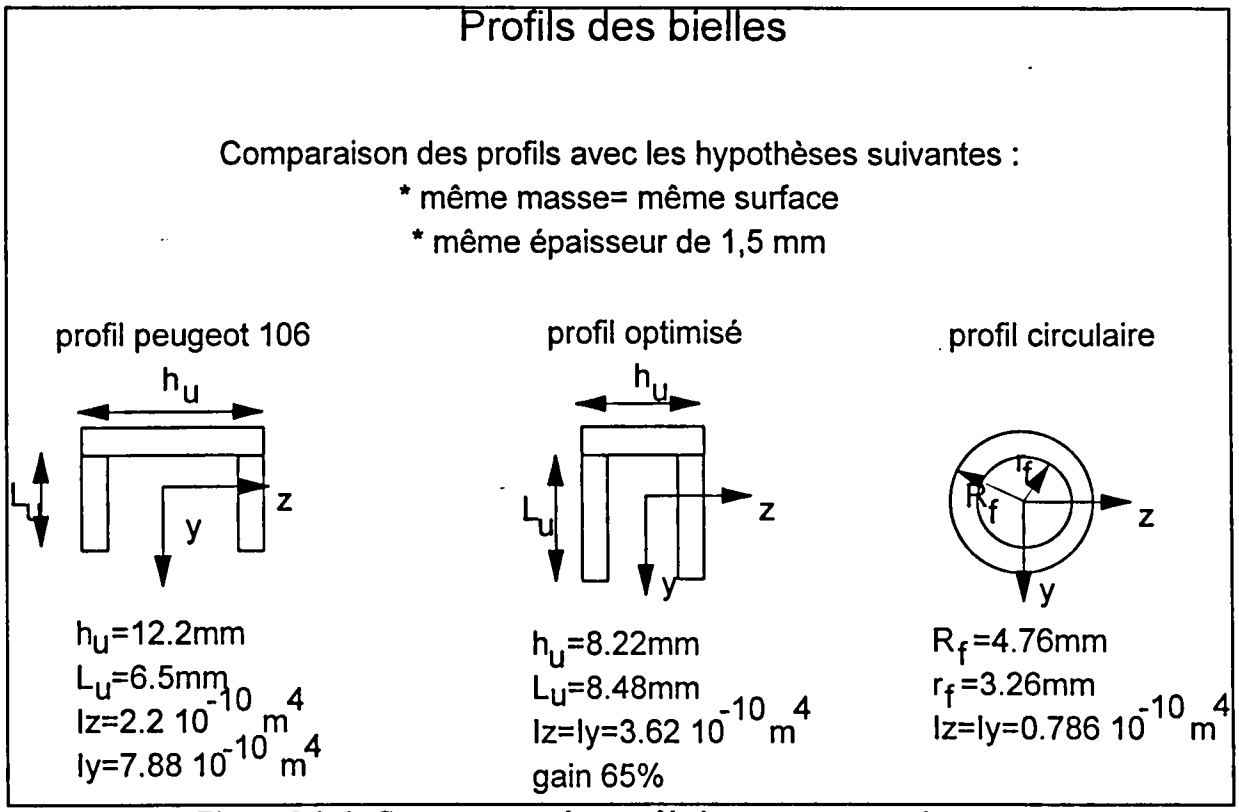


Figure 2.3.6: *Comparaison des profils à isomasse et isoépaisseur des différentes géométries de bielle*

2.4 MODELISATION DE LA VERTEBRE / REPARTITION D'APPUI

2.4.1 Préambule

La vertèbre est un élément du balai utilisé pour répartir les forces appliquées par les palonniers en une pression assez régulière sur la lame. La vertèbre est constituée physiquement de deux lames en acier de section rectangulaire, de largeur et de hauteur faibles par rapport à la longueur. Nous faisons l'hypothèse que les deux lames côte à côte ont le même comportement. Ainsi nous la considérons comme un seul élément, une poutre pouvant fléchir verticalement. Ce paragraphe a pour but de construire un algorithme calculant la pression d'appui statique. Cette étude a permis en outre de déterminer les équations d'élasticité nécessaires au modèle dynamique de DADS (chap. 5).

2.4.2 Equation aux trois moments

Nous allons nous servir de la résistance des matériaux (R.D.M.) pour construire notre modèle physique.

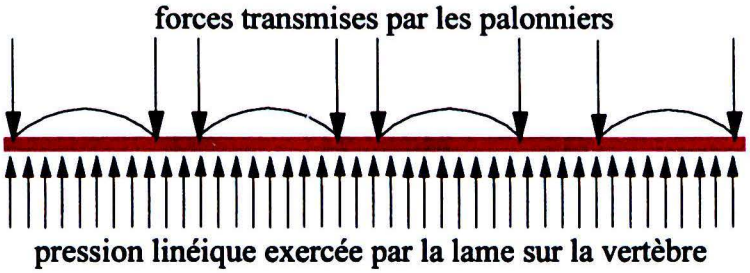


Figure 2.4.1: *Modèle physique de répartition d'appui*

En schématisant les griffes des palonniers par des appuis simples, et en inversant la figure 2.4.1 (rotation de 180°), nous obtenons le modèle de R.D.M. équivalent décrit sur la figure 2.4.2. La pression linéique est donc placée au-dessus et les forces des palonniers en dessous contrairement à la figure 2.4.1.

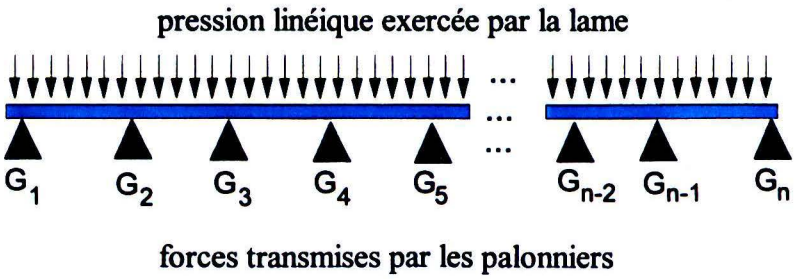


Figure 2.4.2: *Modèle R.D.M. de répartition d'appui*

Le système est hyperstatique d'ordre n-2. Pour résoudre ce système, nous allons construire un modèle équivalent isostatique. Nous ajoutons des pivots et des moments M'_i aux points G_i, pour i variant de 2 à n-i (fig. 2.4.3).

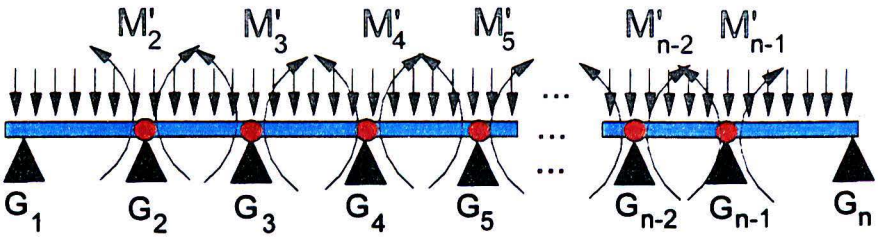


Figure 2.4.3: *Modèle R.D.M. utilisé pour lever l'hyperstaticité*

Nous isolons les travées i-1 et i pour étudier les rotations en G_i. Nous décomposons la vertèbre (fig. 2.4.4) en n-1 poutres avec n points d'appui, n-1 pressions linéiques q_1 ... q_{n-1} et n-2 moments de coupures M'_2 ... M'_{n-1}. Par commodité d'écriture nous posons: $M'_0 = M'_1 = M'_n = M'_{n+1} = 0$ et $q_0 = q_n = 0$.

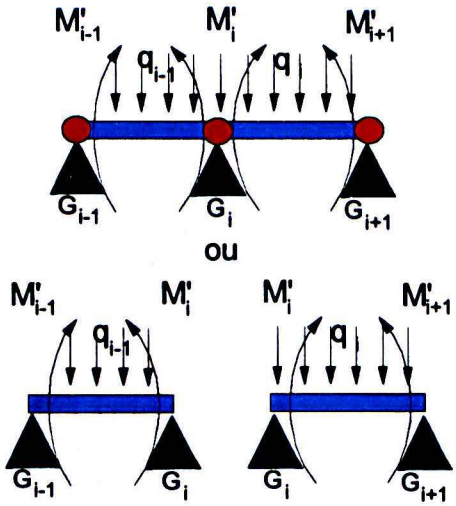


Figure 2.4.4: *Segmentation de la vertèbre en tronçons de poutres*

Nous allons déterminer les moments M'_i à partir de la relation appelée équation aux 3 moments. Soit ω'_i et ω''_i les rotations sur appuis de la travée i, isochargées par q_i.

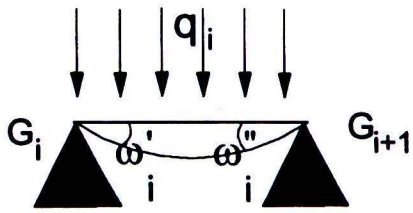


Figure 2.4.5: *Définition de ω'_i et ω''_i*

Soit $\theta^i_{j/k}$ la rotation sur appuis de G_j isochargée par M'_i seul le long de la poutre k avec : $j \in \{i-1, i, i+1\}$ et $k \in \{i-1, i\}$

Figure 2.4.6: $\theta^{i}_{i/i}$ *et* $\theta^{i+1}_{i/i}$

Nous avons effectué précédemment des "coupures" aux différents points d'appui. Pour pouvoir revenir au cas qui nous concerne et calculer les différents moments M'_i, nous allons exprimer la continuité des rotations au niveau des points d'appui G_i.
Si les points G_i sont alignés nous obtenons :

$$\theta^{i-1}_{i/i-1} + \theta^{i}_{i/i-1} + \omega''_{i-1} = \theta^{i+1}_{i/i} + \theta^{i}_{i/i} + \omega'_i \qquad (2.4.1)$$

soit encore

$$b'_{i-1}M'_{i-1} + \left(c'_{i-1} + a'_i\right)M'_i + b'_i M'_{i+1} = \omega'_i - \omega''_{i-1} \qquad (2.4.2)$$

$$\text{avec } a'_i = c'_i = 2b'_i = \frac{l_i}{3EI_i}. \qquad (2.4.3)$$

Cette équation est appelée équation aux 3 moments. Lorsque les points G_i n'ont pas la même altitude z_i, nous ajoutons un terme correctif tenant compte de la rotation globale des poutres:

$$b'_{i-1}M'_{i-1} + \left(c'_{i-1} + a'_i\right)M'_i + b'_i M'_{i+1} = \omega'_i - \omega''_{i-1} + \frac{z_{i+1} - z_i}{l_i} - \frac{z_i - z_{i-1}}{l_{i-1}} \qquad (2.4.4)$$

C'est un système à n-2 équations avec n-2 inconnues.

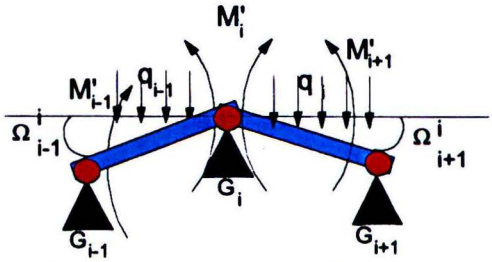


Figure 2.4.7: *Différence d'altitude des points d'appui*

Le résultat précédent peut se mettre sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} (c'_1+a'_2) & b'_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & (c'_2+a'_3) & b'_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b'_{n-3} & (c'_{n-3}+a'_{n-2}) & b'_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{n-2} & (c'_{n-2}+a'_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M'_2 \\ M'_3 \\ \dots \\ \dots \\ M'_{n-2} \\ M'_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega'_2-\omega''_1+\frac{z_3-z_2}{l_2}-\frac{z_2-z_1}{l_1} \\ \omega'_3-\omega''_2+\frac{z_4-z_3}{l_3}-\frac{z_3-z_2}{l_2} \\ \dots \\ \dots \\ \omega'_{n-2}-\omega''_{n-3}+\frac{z_{n-1}-z_{n-2}}{l_{n-2}}-\frac{z_{n-2}-z_{n-3}}{l_{n-3}} \\ \omega'_{n-1}-\omega''_{n-2}+\frac{z_n-z_{n-1}}{l_{n-1}}-\frac{z_{n-1}-z_{n-2}}{l_{n-2}} \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

2.4.3 Relations déterminant le déplacement des points de la vertèbre.

2.4.3.1 Introduction

La démonstration des résultats énoncés ici est traitée en annexe E. La résolution analytique des équations s'avère pour le moins très difficile voire impossible. Aussi nous avons effectué une discrétisation de chaque poutre i en n_i éléments. Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.2, q_i est une fonction de la distance entre la vertèbre et le pare-brise et du coefficient de frottement apparent (prise en compte de l'angle d'attaque). Lorsque la distance atteint un seuil (longueur à vide), q_i est nul et présente un plateau. Si nous prenons des splines classiques du type polynomial pur ou des fonctions de Bézier, nous n'arriverons pas à approximer correctement un palier nul suivi de points non nuls. En effet les fonctions d'interpolation donneraient des points non nuls (notamment des forces négatives) au niveau du palier nul. Ces fonctions sont donc mal adaptées à ce genre de problème. Nous nous contenterons donc de fonctions constantes par morceaux qui ont l'avantage de bien s'intégrer. Nous considérons un partage régulier, c'est à dire que les morceaux sont de longueurs constantes. Traduisons cette hypothèse en équations. A cet effet, nous prenons les notations suivantes: n_i le nombre d'éléments considérés sur la travée i , $e_i = \frac{l_i}{n_i}$ (E.20) et $q_i(x) = q_{ik}$ avec $k = E\left(\frac{x}{l_i} n_i\right) + 1$ où E(x) est la partie entière de x. En d'autres termes, sur l'élément de poutre i, la pression q_i varie de q_{i1} à q_{ini}.

2.4.3.2 Expression du déplacement des différents points

Le déplacement du énième point de la poutre i évoqué au 2.4.3.1 peut s'écrire de la façon suivante:

$$d^*(i,n) = A^*_d(n,i)\begin{bmatrix} M_i \\ M_{i+1} \end{bmatrix} + B^*_d(n,i)\begin{bmatrix} q_{i1} \\ .. \\ q_{in_i} \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

où $A^*_d(n,i)$ et $B^*_d(n,i)$ sont deux matrices composées d'une seule ligne et respectivement de deux et de n_i colonnes.

2.4.4 Expression des angles ω'_i et ω''_i

Comme précédemment ω'_i et ω''_i sont linéaires par rapport aux $[q_{ij}]_{j=1}^{n_i}$:

$$\omega_i' = A_{\omega_i'}(i)\begin{bmatrix} q_{i1} \\ .. \\ q_{in_i} \end{bmatrix} \text{ et } \omega_i'' = A_{\omega_i''}(i)\begin{bmatrix} q_{i1} \\ .. \\ q_{in_i} \end{bmatrix} \qquad (2.4.7)$$

où $A_{\omega_i'}(i)$ et $A_{\omega_i''}(i)$ sont deux matrices composées d'une seule ligne et de n_i colonnes. Elles ne dépendent que de la poutre.

2.4.5 Détermination des forces d'appui à l'aide des pressions linéiques et des déformations de la vertèbre

Le point G_i est soumis à une force d'appui P_i par les palonniers. Cette force d'appui peut s'écrire sous la forme suivante:

$$P_i = A_{P_i}\begin{bmatrix} M_{i-1} \\ M_i \\ M_{i+1} \end{bmatrix} + B_{P_i}\begin{bmatrix} q_{i1} \\ .. \\ q_{in_i} \end{bmatrix} + C_{P_i}\begin{bmatrix} q_{(i-1)1} \\ .. \\ q_{(i-1)n_{i-1}} \end{bmatrix}, \qquad (2.4.8)$$

avec A_{P_i}, B_{P_i} et C_{P_i} trois matrices composées d'une seule ligne et respectivement de 3 n_i et n_{i-1} colonnes.

2.4.6 Détermination des forces d'appui P_i en tenant compte de l'équilibre des moments issus des balais

Comme nous l'avons établi en annexe E, nous pouvons considérer en première approximation, que les forces d'appui sont constantes pour gagner du temps, ou alors considérer des équations reliant les forces d'appui avec les coordonnées des points du balais.

2.4.7 Résolution du système d'équation

L'algorithme exposé à la figure 2.4.8 est le bilan des équations exposées précédemment. Comme nous l'avons évoqué au paragraphe 2.4.6, plusieurs variantes peuvent être considérées et sont prises en compte sur la figure 2.4.8.

Remarquons que le système revient à considérer un modèle à plusieurs entrées (cotes des vertèbres z_i ou angles balais suivant le modèle adopté) et plusieurs sorties (écarts de forces d'appui). Différents algorithmes (méthode du gradient, méthode de Gauss-Newton ou mélange des deux [Marquardt 1963]) ou différentes méthodes d'automatique gérant le non linéaire comme la logique floue sont envisagés.

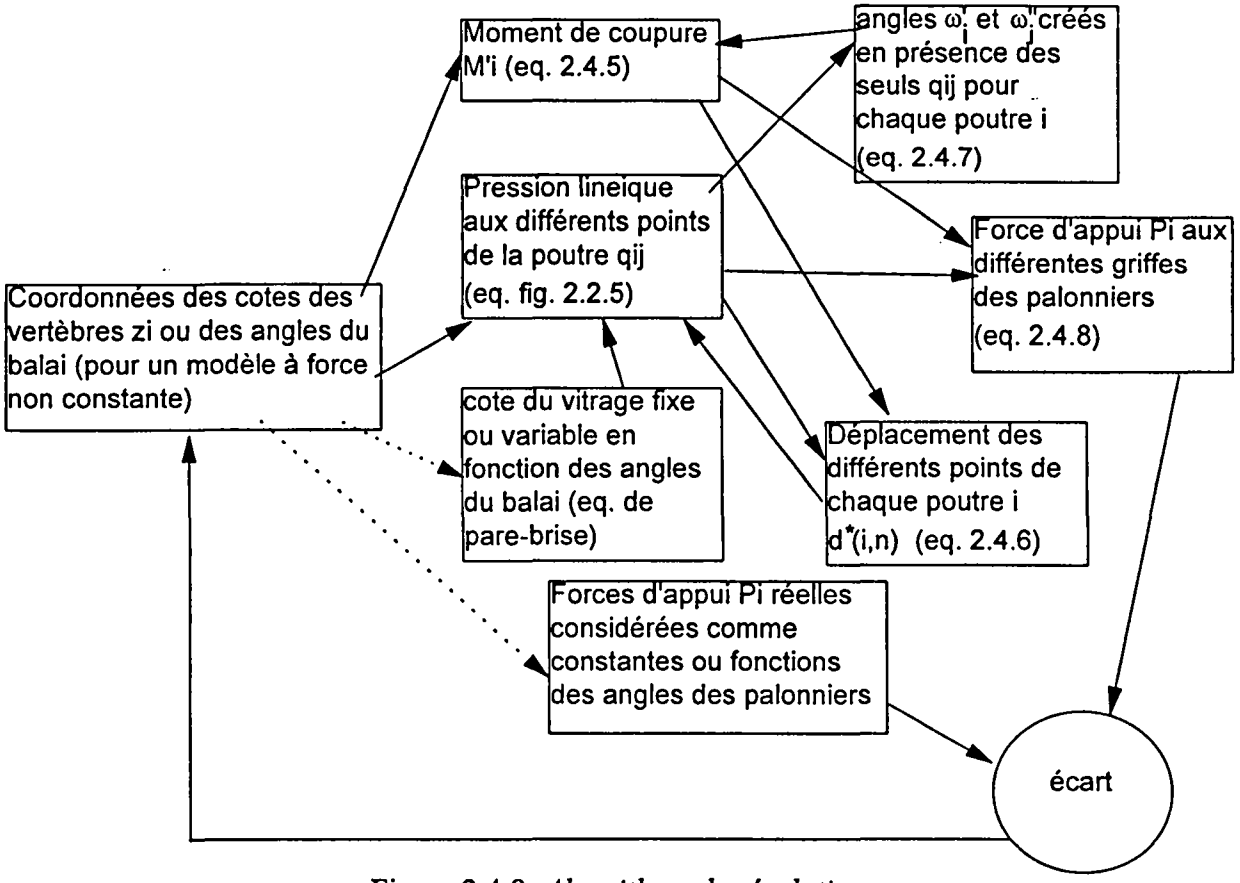
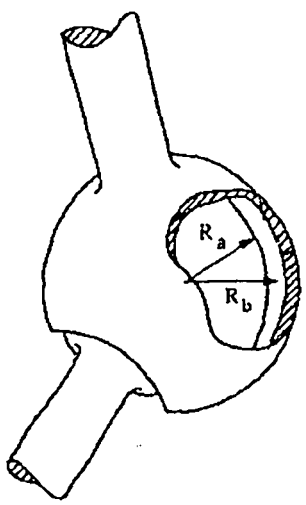


Figure 2.4.8: *Algorithme de résolution*

CHAPITRE 3:

JEUX



Listes des notations utilisées dans ce chapitre:

a: accélération relative des deux corps pendant la phase libre,
a_θ: accélération angulaire relative des deux corps pendant la phase libre,
A_i: section de contact,
C_p: raideur angulaire,
C_m: couple maximal atteint,
e: coefficient de restitution,
E_i: module d'Young du corps i,
F_{ij}: force de contact entre les corps i et j
F_m: force maximale due au choc,
I_{axe}: inertie de rotation des pièces solidaires de l'axe
j: jeu entre deux pièces
k: raideur de Hertz,
l_{ij}: opérateur logique valant 1 pendant le choc et 0 autrement
m: masse réduite
m_i: masse du corps i,
R_i: rayon de courbure du corps i,
T_l: durée de la phase libre
U_i: vitesse constante de l'onde dans le corps i,
V_d: vitesse relative des deux corps avant le choc
v_{i-}: vitesses du corps i (1 ou 2) avant le choc,
v_{i+}: vitesses du corps i (1 ou 2) après le choc,
x: interpénétration des deux solides
x_m: interpénétration maximale des deux solides
Δt: pas de temps,
ρ_i: masse volumique du corps i,
δ_{ij}: écart entre les deux points de contact
δ'_{ij}: dérivée temporelle de δ_{ij},
θ_j: jeu angulaire
μ: constante liée à l'amortissement
$\upsilon\delta_{ij}$: coefficient d'amortissement
ν_i: coefficient de poisson du corps i,

3.1 PRÉAMBULE

Les ingénieurs savent depuis longtemps que les jeux, les chocs engendrés par ceux-ci et la flexibilité des liaisons diminuent souvent significativement les performances dynamiques des machines et engendrent des vibrations et des bruits [Dubowsky, Perreira 1981]. Selon [Deck 1992], éliminer ces effets est presque toujours coûteux et souvent impossible.
Les jeux introduisent des discontinuités dans les modèles. Nous pouvons distinguer trois phases: le contact, le choc (impact) suivi de la relaxation et la phase libre sans contact. La phase d'impact est généralement la plus brève mais c'est elle qui génère les forces nécessaires pour maintenir le contact entre les deux solides, ou pour les faire rebondir.

3.2 TYPES DE MODELES

3.2.1 Modèles dont nous ne tiendrons pas compte par la suite

3.2.1.1 Maintien du contact

Dans cette technique les paramètres mécaniques et les conditions opératoires doivent être choisis pour éviter la perte de contact, afin d'éviter les chocs et les conséquences des grandes forces d'impact. [Shin, Kwak 1985] ont traité un cas concret avec une de ces méthodes.
Cependant, selon [Deck 1992], les choix de conception et les limites opératoires requises pour maintenir en permanence le contact peuvent ne pas être réalistes.
Nous ne prendrons pas en compte ce type de modèle car notre but ici est de simuler l'influence du jeu et non de concevoir un autre système.

3.2.1.2 Modèles aléatoires

Des modèles stochastiques ayant pour but de produire une description aléatoire des erreurs de position des extrémités des bras d'un robot dues aux effets cinématiques des jeux ont été développés mais comme le souligne à juste titre [Deck 1992], cette technique est peu adaptée aux modèles dynamiques déterministes. C'est pourquoi nous n'aborderons pas ce type de modèle.

3.2.2 Modélisation du choc (impact)

3.2.2.1 Transfert de la quantité de mouvement

Le modèle du transfert de quantité de mouvement représente un choc entre deux barres comme un événement infiniment court, caractérisé par la conservation de la quantité de mouvement et un coefficient de restitution de l'énergie du type:

$$e = \frac{v_{2+} - v_{1+}}{v_{2-} - v_{1-}} \qquad (3.2.1),$$

avec v_{i+} et v_{i-} vitesses du corps i (1 ou 2) après et avant le choc.
[Lankarani, Nikravesh 1990]. Toutefois ces modèles ne déterminent pas les forces entre les barres.
Selon [Deck 1992], le modèle de transfert de moment convient bien à un mouvement intermittent et a été utilisé avec des corps flexibles pour des systèmes en 2 et en 3 dimensions avec à la fois des chocs internes et externes et des changements de masse qui peuvent être causés par exemple par un bras de robot serrant et libérant une charge. Ce modèle de liaison a été combiné avec des techniques de barres flexibles non linéaires.

[Khulief, Shabana 1987] ont proposé une extension de la méthode aux systèmes de solides qui sont assemblés par des liaisons et donné une masse équivalente d'impact à partir des autres masses, des dérivées temporelles des paramètres généraux du système et de leur matrice de liaison.

3.2.2.2 Utilisation d'ondes

[Shao, Liou, Patra1993] et [Hughes, Taylor, Sackman 1976] ont exposé une telle méthode. La surface de contact est considérée comme le front d'une onde élastique qui commence à se propager. Comme la méthode précédente, un saut de vitesse et d'accélération est pris en compte tenant compte d'un équilibre de la quantité de mouvement. Mais ici la deuxième équation est déterminée par une analyse de propagation d'ondes à vitesse constante U_i (l'indice i dépend du solide considéré). Cette deuxième équation est trouvée en appliquant l'impact aux morceaux de solides en contact, de section de contact A_i et de longueur $U_i\Delta t$, avec Δt pas de temps que l'on fait tendre vers zéro. L'intégration sur Δt de l'équation fondamentale de la dynamique donne :

$A_1\rho_1U_1v_{1+} - A_1\rho_1U_1v_{1-} = A_2\rho_2U_2v_{2+} - A_2\rho_2U_2v_{2-}$ (3.2.2) [Shao, Liou, Patra1993].

3.2.2.3 Modèle 'continu' (linéaire ou de Hertz)

A *Principe*

Une approche simple pour modéliser les jeux aux liaisons est de les traiter comme des forces entre les barres aux emplacements des jeux. Les modèles de force prenant en compte les jeux prédisent les forces de contact comme une fonction de mouvement relatif, de la géométrie du contact et des propriétés des matériaux en contact. Au cours du mouvement, les forces ne sont donc fonction que des positions relatives, voire de leurs dérivées et peuvent donc être produites par des ressorts et des amortisseurs.

Ce type de modèle est capable de prédire les forces générées entre les barres quand le choc survient.

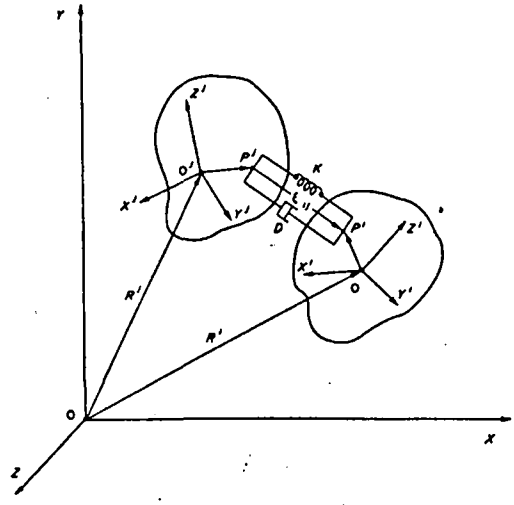


Figure 3.2.1 *Modèle continu modélisé par un ressort et un amortisseur en parallèle*

B *Utilisation du modèle de Hertz ou du modèle linéaire*

a *Le modèle de Hertz reflète la réalité*

A ma connaissance, la loi de Hertz n'a pas été mise en cause, au contraire, elle donne de bons résultats.
Selon [Dubowsky, Perreira 1981], la méthode de Hertz utilisée pour un modèle à une dimension, donne des résultats très précis.
[Doyle 1984] a dans un cas simple comparé les valeurs données par un modèle théorique exact, une simulation par éléments finis et l'expérience. Bien que pour un modèle statique la courbe expérimentale soit très proche de celle de Hertz, de légers écarts sont apparus sur celle du modèle dynamique. Les raisons probables de ces écarts sont, selon l'auteur, le fait d'avoir négligé l'effort tranchant dans le modèle de poutre, un léger désalignement de la jauge sur le site d'impact et les effets de moyennage sur la longueur des jauges de contraintes. Mais comme on le voit sur la figure suivante la réalité s'approche assez bien de la loi de Hertz.

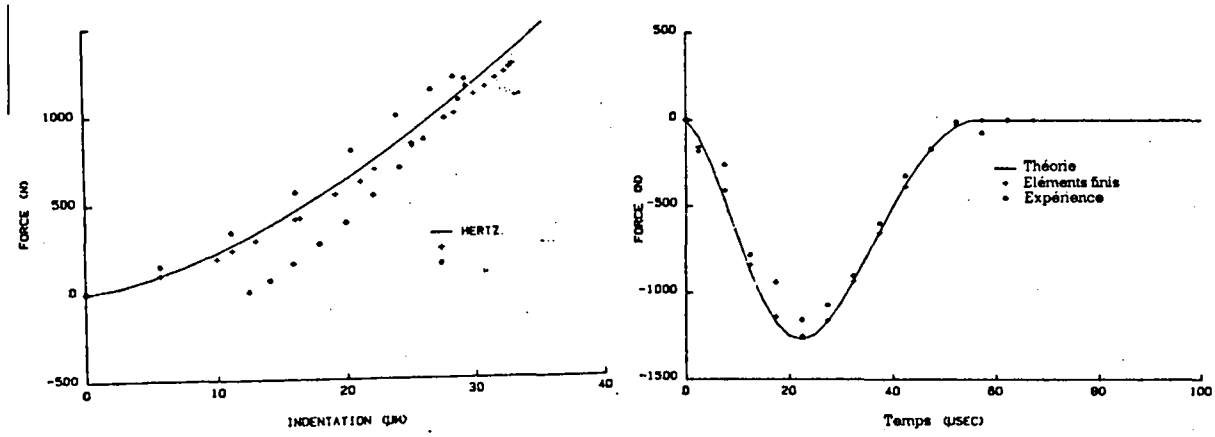


Figure 3.2.2 *Comparaison entre la théorie de Hertz et l'expérience selon [Doyle 1984] (à gauche statique, à droite dynamique)*

Selon [Tatara 1989], le modèle de Hertz est valable en statique et en dynamique pour deux sphères en contact tant que le déplacement reste inférieur au dixième du rayon de la sphère. Il propose des termes correctifs permettant une utilisation en dehors de ce domaine.
Dans nos modèles nous n'atteignons pas de telles limites.

b *La formule de Hertz est largement répandue*

Selon [Hughes, Taylor, Sackman 1976], la formule de Hertz est largement utilisée même dans des cas qui ne respectent pas les hypothèses et elle donne de bons résultats. Pour des formes pointues, l'auteur cependant utilise des équations reliant différents noeuds sur le lieu de contact.
Nous pouvons remarquer qu'à l'échelle microscopique les surfaces ne sont pas lisses et qu'elles ne sont donc pas aussi pointues qu'on pourrait l'imaginer au premier abord.

c *Utilisation d'un amortissement du type de la loi de Hertz pour éviter les discontinuités*

[Lankarani, Nikravesh 1990], se sont intéressés à un modèle de Hertz du type:

$$F_{ij} = k\delta_{ij}^{n} + \mu\delta_{ij}^{n}\dot{\delta}_{ij}^{n} \qquad (3.2.3)$$

avec k raideur, δ_{ij} écart entre les deux points de contact $n = 1,5$ et μ une constante. Le gros avantage d'un tel modèle sur celui de Kelvin-Voight (linéaire et viscoélastique) est sa non-linéarité. Le choc est en effet non-linéaire. Dans un modèle linéaire, juste avant la séparation, les solides exercent des forces dues à l'amortissement contrairement au modèle de Hertz. De même lorsque les solides commencent à rentrer en contact, le terme linéaire d'amortissement introduit une discontinuité.

d ***Méthodes linéaires***

[Khulief, Shabana 1987] définissent ce modèle à l'aide de ressorts logiques, présents pendant le choc et absents le reste du temps, par la formule:

$$F_{ij} = [k\delta_{ij} + \upsilon\delta_{ij}\delta'_{ij}]l_{ij} \qquad (3.2.4)$$

avec k raideur, δ_{ij} écart entre les deux points de contact, $\upsilon\delta_{ij}$ coefficient d'amortissement dépendant de l'interpénétration, δ'_{ij} dérivée temporelle de δ_{ij}, l_{ij} opérateur logique valant 1 pendant le choc et 0 sinon. En fait la méthode linéaire peut être perçue comme la linéarisation de la méthode de Hertz autour d'un point de fonctionnement. Pour augmenter la précision du modèle, tout en conservant la facilité d'emploi des fonctions linéaires, la courbe de raideur peut être approximée par des fonctions linéaires par morceaux.

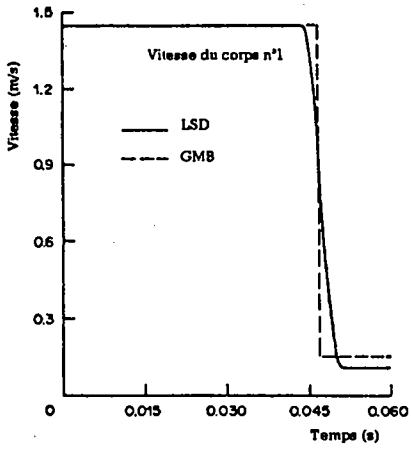


Figure 3.2.3: *Différence de réponse entre un modèle de transfert de quantité de mouvement (trait continu) et un modèle continu (pointillé), selon [Khulief, Shabana 1987]*

3.2.3 Autres caractéristiques des modèles développés

3.2.3.1 Élasticité de contact et des liens

Il est important de distinguer l'élasticité du contact de celle des pièces (liens ou barres). Dans la majorité des cas cités, la seule élasticité entre les pièces est donnée par la loi de Hertz pour chacune des extrémités des pièces, alors que les éléments finis sont utilisés pour modéliser l'élasticité des pièces. Cela se comprend bien pour deux raisons au moins: d'abord lors du contact les noeuds ne sont, en général, pas en vis à vis (excepté le cas pris par [Wu, Haug

1990]), ensuite les noeuds ne sont souvent pas utilisés tels quels mais sous une forme réduite par synthèse modale (C.M.S. Component Mode Synthesis)

3.2.3.2 Perturbations

[Kakizaki, Deck, Dubowsky 1993] reprenant la thèse [Deck 1992], ont présenté cette méthode qui consiste à considérer un vecteur comprenant les écarts des points caractéristiques entre un modèle réel et un modèle idéal sans jeu et sans élasticité. Les noeuds de chaque barre ne sont pas tous conservés dans les calculs puisque le degré du système est réduit par C.M.S. Seuls sont gardés les points de liaison. Les jeux sont introduits en modifiant certaines matrices utilisées pour le calcul (qui sont fonction des liaisons) et en introduisant une force non linéaire qui, globalement, reflète la loi de Hertz. Autrement dit, cette méthode s'apparente aux modèles continus vus précédemment, à la différence près, qu'elle considère un vecteur de différence pour augmenter l'efficacité numérique.

3.2.3.3 Méthodes de réduction pour les élasticités des liens

Comme le font remarquer [Khulief, Shabana 1986], en raison du grand nombre de degrés de liberté générés par les éléments finis, la synthèse modale est utilisée pour réduire l'ordre du modèle. Une autre approche est l'utilisation de méthodes de synthèse des sous-structures, dans lesquelles on utilise des ensembles de fonctions admissibles ou de vecteurs admissibles qui décrivent le corps entier ou la sous-structure. C'est le cas de la méthode de Rayleigh-Ritz, quand un champ de déplacement décrit entièrement le solide.

3.2.3.4 Modèle des sous-structures

[Wu, Haug 1990] n'ont pas utilisé des modes associés au système global mais des modes qui décrivent seulement une petite partie du solide ou de la structure. Ainsi les sous-structures peuvent entrer en contact entre elles. De ce fait, des modes additionnels sont créés. Les sauts de vitesses sont obtenus en imposant la conservation de la quantité de mouvement aux sous structures.

3.2.4 Modèle utilisé

Comme le souligne [Deck 1992], les auteurs cités précédemment ont appliqué leur théorie à des modèles expérimentaux et théoriques simples pour mieux comprendre leurs comportements. Ces modèles, même simples, prennent un temps important de simulation. Nous devons donc faire un choix de modèles nous permettant d'avoir des résultats en un temps raisonnable.
Dans un premier temps, nous avons établi des modèles complets de pièces, intégrant les jeux (méthode du transfert de la quantité de mouvement) et les élasticités, en vue d'une utilisation dans Matlab. Ces modèles n'ont pas été implémentés. Un exemple est donné en annexe C.
Dans un second temps, au sein des logiciels comme SDS et DADS, nous avons utilisé la formule de Hertz telle quelle ou linéarisée par morceaux suivant les possibilités du logiciel et des différents cas traités.

Comme nous l'avons vu au chapitre sur l'élasticité, une fréquence de résonance est responsable des oscillations de tout le système d'essuie-glace. Étant donné que cette fréquence est obtenue par des systèmes masses-ressorts, elle ne comporte pas d'harmoniques, contrairement au modèle de poutre encastrée que nous verrons au paragraphe 3.3. La modélisation en matière d'élasticité tient compte de ce fait, et l'influence des jeux se fera prioritairement par rapport à cette fréquence.

3.3 PROBLÈMES DE PRÉCISION

3.3.1 Influence des modes hautes fréquences

Dans ce paragraphe nous allons souvent nous référer au modèle de poutre excitée transversalement et limitée, à l'extrémité, par un jeu variable et situé dans un ensemble fermé comportant ou non un couvercle [Deck 1992] (fig. 3.3.1). Ce modèle est en effet particulièrement intéressant pour mettre en évidence les phénomènes que nous allons évoquer.

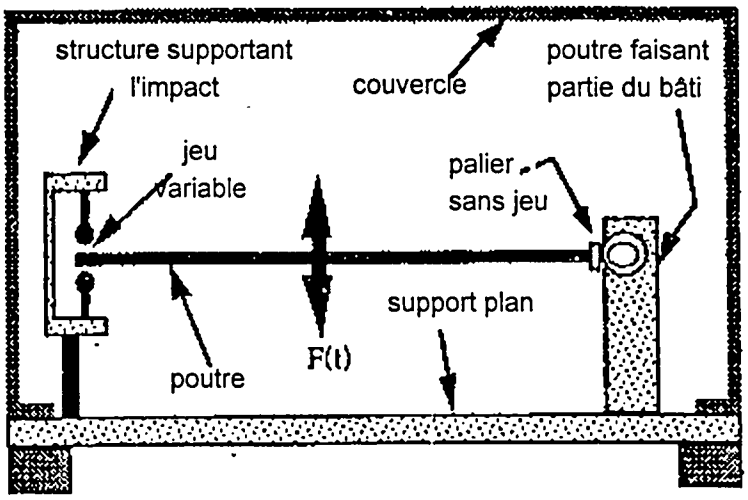


Figure 3.3.1: *Poutre soumise à un jeu transversal [Deck 1992]*

3.3.1.1 Le choc possède une énergie haute fréquence non négligeable

Les forces d'impact contiennent une énergie importante à hautes fréquences qui peut exciter les hautes fréquences de la structure (fig.3.3.2).

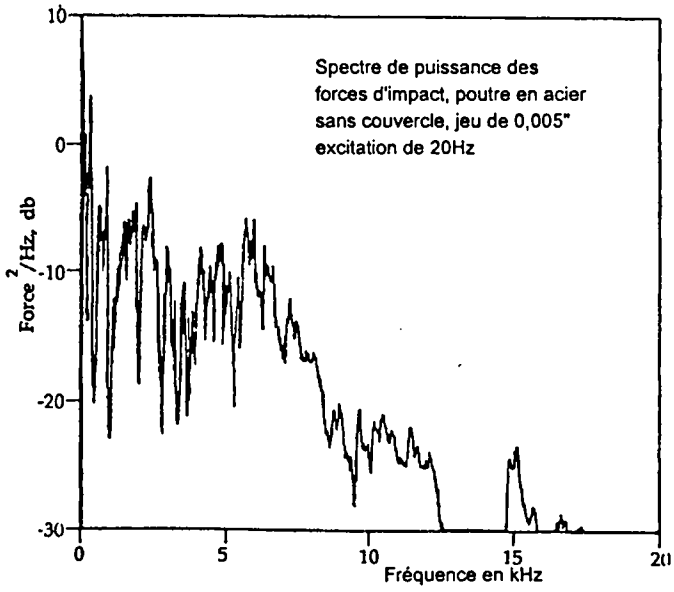


Figure 3.3.2: *Spectre de puissance selon [Deck 1992]*

3.3.1.2 Les forces maximales rencontrées lors du choc présentent une grande sensibilité aux fréquences d'excitation

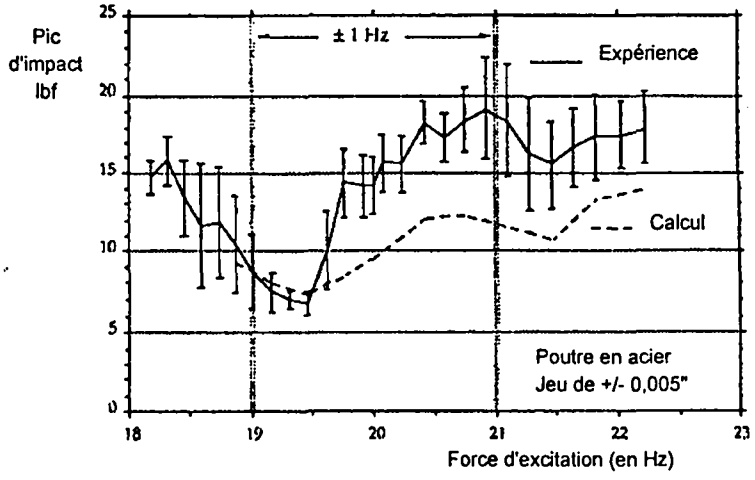


Figure 3.3.3: *Comparaison entre l'expérience et la théorie selon [Deck 1992]*

Cette figure montre la grande sensibilité des chocs aux petits changements de paramètres. Pour de petits changements dans la fréquence d'excitation, de 19,5 à 21 Hz, la moyenne des chocs expérimentaux passe approximativement de 31N à 80N, soit un accroissement de 150%. Il est à noter que la fréquence propre de la poutre de métal est de 430Hz soit, bien au-dessus de la fréquence d'excitation de 20Hz. Dans beaucoup de types de machines familiers du concepteur (comme le cas du système d'essuyage), les excitations de structure sont le résultat de la fréquence fondamentale et des premiers harmoniques de la fréquence d'excitation. Ce n'est pas le cas ici. Les forces générées par les chocs contiennent une énergie spectrale de grande étendue. Les écarts-types des forces d'impact, représentés par les barres d'erreurs, varient tout comme les moyennes. Ils sont de 10% de la moyenne à 19,5Hz contre 33% à 21Hz. Donc à 21Hz, les forces d'impact ne sont non seulement plus importantes, mais aussi plus apériodiques d'un cycle sur l'autre.

3.3.1.3 Sensibilité aux autres éléments annexes comme le couvercle

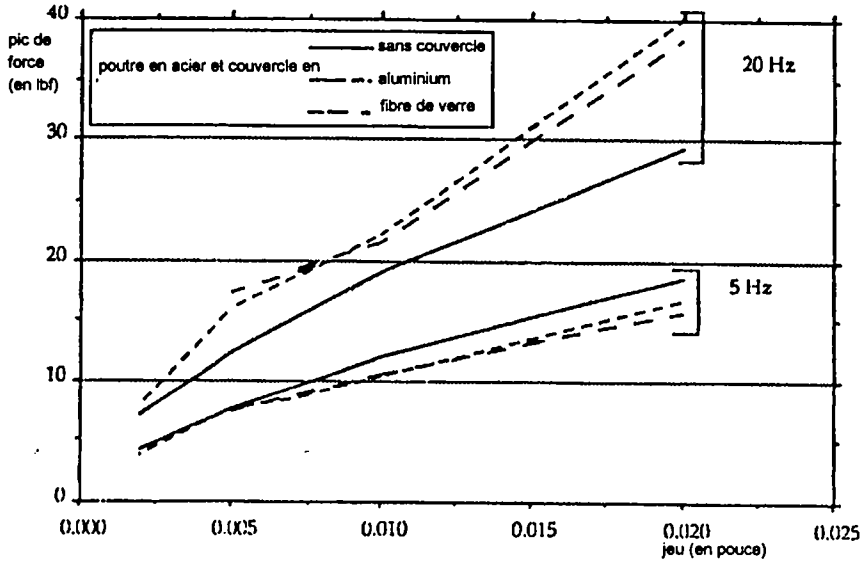


Figure 3.3.4: *Influence du couvercle selon [Deck 1992]*

Les éléments de structure qui ne sont pas liés au système comme le couvercle peuvent jouer un rôle non négligeable comme l'indique bien la figure 3.3.4.

3.3.1.4 Modes hautes fréquences et tolérances de fabrication

Selon [Deck 1992], quand les modes sont si sensibles, qu'ils sont très fortement affectés par une variation de paramètres de l'ordre de grandeur des tolérances de fabrication, il devient impossible de construire un modèle qui représente précisément un exemple physique particulier de la structure.

3.3.2 Modèle chaotique

Selon [Deck 1992] la grande variation des forces d'impact, d'un cycle à l'autre, peut être expliquée par des vibrations structurelles résiduelles qui ne sont pas éliminées entre les chocs. La valeur maximale de la force d'impact est très affectée par la vitesse relative entre les deux pièces, juste avant le choc. Ainsi, si les vibrations de la poutre sont importantes juste avant le choc, les pics de force peuvent avoir des composantes substantielles, dues à la différence de vitesse, causées par les vibrations. Comme ces vibrations n'ont pas une relation simple avec la fréquence d'excitation; le résultat apparaît comme une variation non périodique des forces d'impact.

Nous avons également mis en évidence ce phénomène sur nos simulations de modèles d'essuyage.

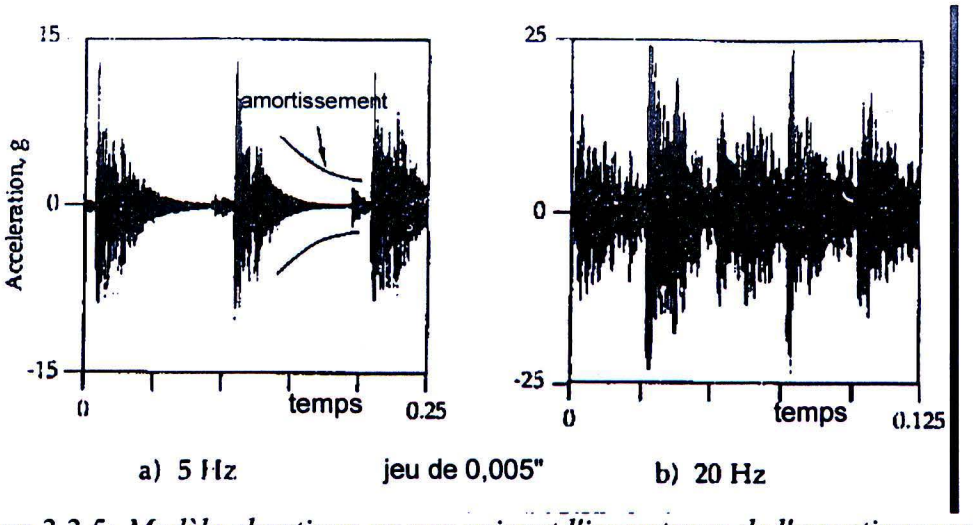


Figure 3.3.5: *Modèle chaotique ou non suivant l'importance de l'amortissement selon [Deck 1992]*

3.3.3 Influence des pas de temps de calcul et d'affichage

3.3.3.1 Pas de temps de calcul interne

Une attention particulière doit être apportée au pas de temps de calcul interne.
Le choc est un phénomène assez bref. Les algorithmes de calcul prévoient la situation au pas suivant en fonction du pas précédent. Si donc au pas précédent les deux solides ne sont pas encore entrés en contact, ou faiblement, et que le pas de temps est important, le programme peut prévoir une interpénétration plus grande que celle rencontrée normalement. Bien sûr, dans ce cas, une force de répulsion importante entre les deux solides apparaît. De plus, si la position du solide est comprise entre deux limites, des phénomènes d'amplification, de 'ping-pong' peuvent survenir (figure 3.3.6). Ces phénomènes peuvent avoir lieu même avec des pas de calcul adaptatifs (utilisé par DADS). Ces effets dépendent évidemment de la raideur de contact, c'est pourquoi sur la figure 3.3.7, pour un même pas de temps, le calcul pour le jeu le plus élevé converge contrairement aux deux autres plus faibles (0,1mm et 0,01mm)

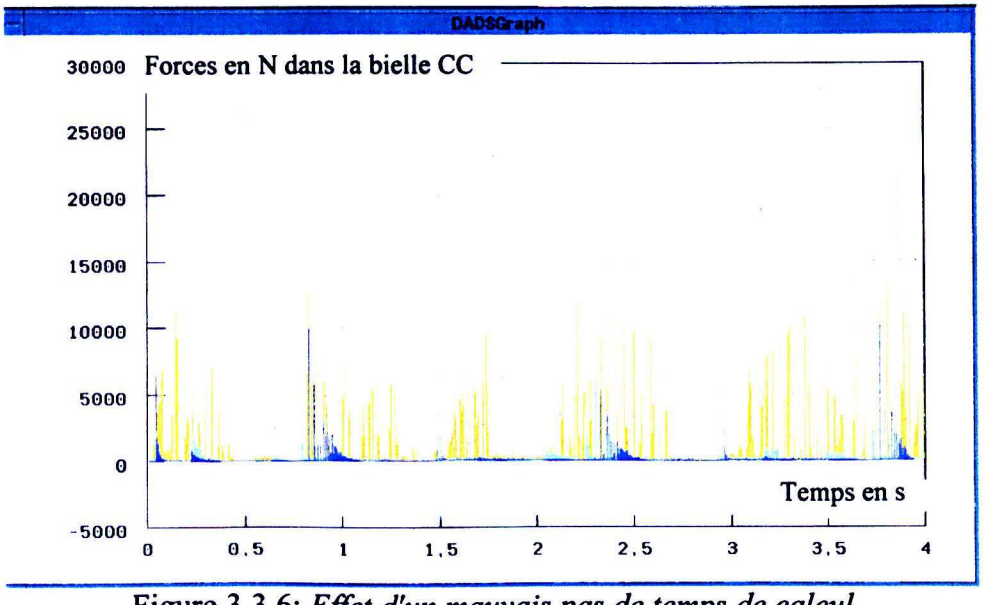


Figure 3.3.6: *Effet d'un mauvais pas de temps de calcul*

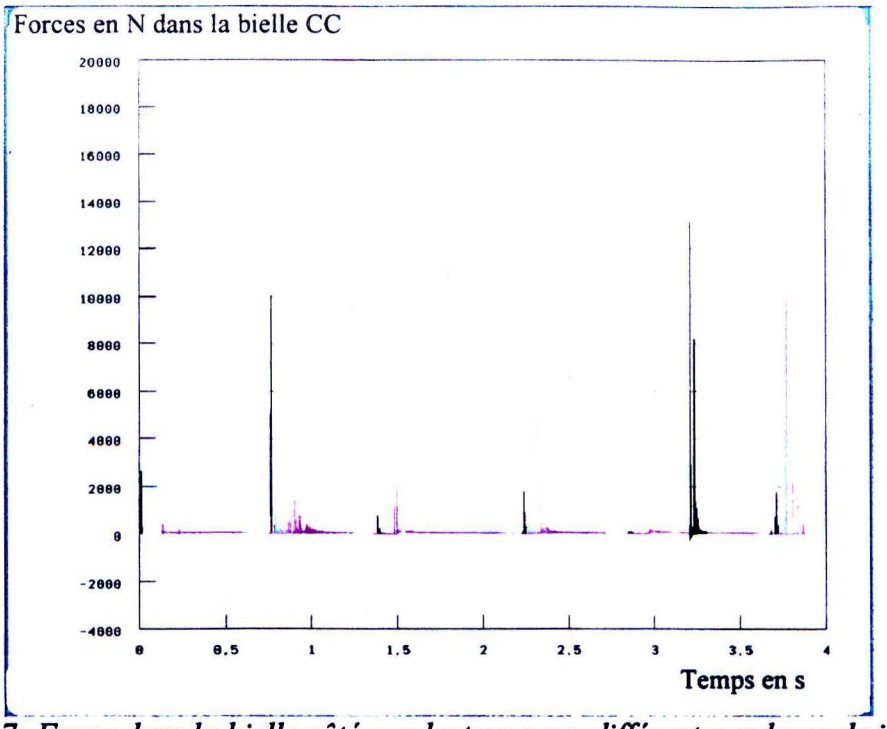


Figure 3.3.7: *Force dans la bielle côté conducteur pour différentes valeurs de jeux (1mm, 0,1mm, 0,01mm) entre la manivelle moteur et la bielle CC pour un même pas de temps. Le signal pour 1 mm est régulier contrairement aux deux autres.*

3.3.3.2 Pas d'affichage

Même si le pas de calcul est correct, il est nécessaire d'avoir des pas de stockage et d'affichage pour pouvoir visualiser correctement le phénomène de choc.

3.3.3.3 Ordre de grandeur de l'interpénétration et précision du modèle général

Les jeux sont, dans notre cas, incorporés dans un système complexe. Pour pouvoir gérer les liaisons, le logiciel dispose d'un critère d'erreurs de positionnement. Il est bien sûr important que l'erreur de positionnement soit inférieure à l'ordre de grandeur des jeux et de l'interpénétration des deux solides, sinon une erreur de positionnement peut générer de grandes forces. Le problème s'est posé à la figure 3.3.8.

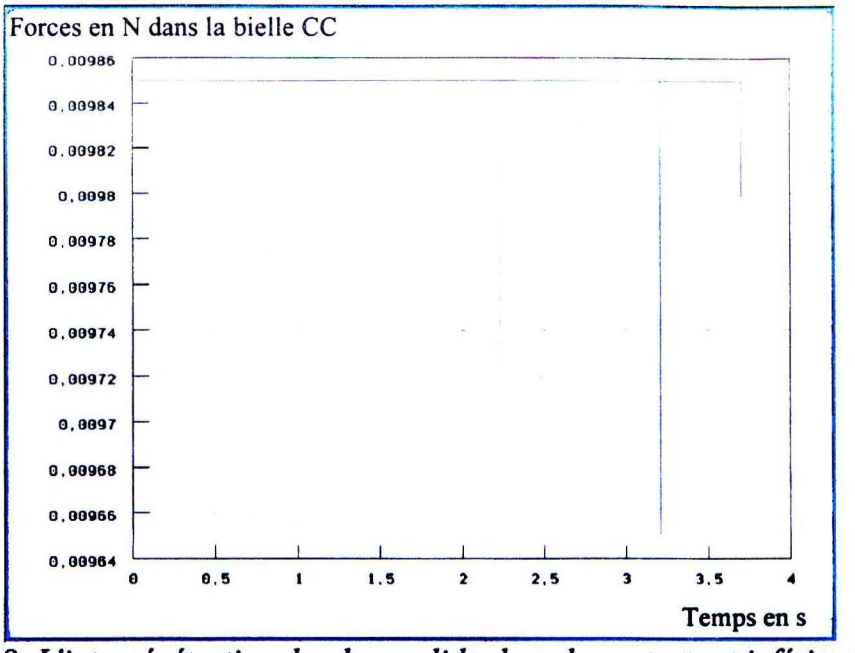


Figure 3.3.8: *L'interpénétration des deux solides lors du contact est inférieure à 1* µm.

3.4 Résultats bibliographiques

3.4.1 Sensibilité à la vitesse

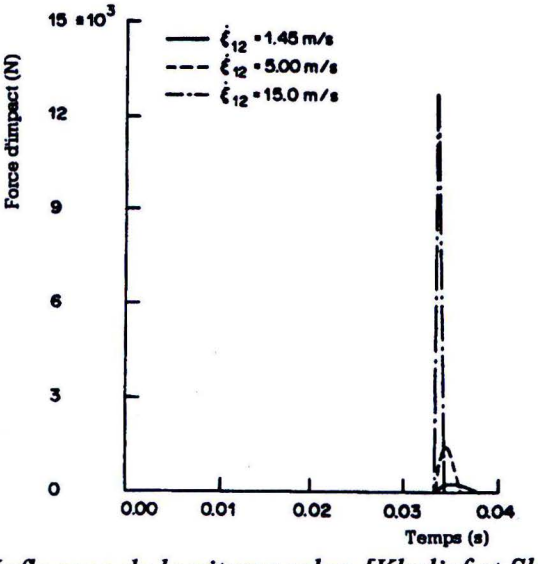


Figure 3.4.1: *Influence de la vitesse selon [Khulief et Shabana 1987]*

La figure 3.4.1 montre le résultat de forces d'impact de deux solides, l'un étant au repos avant le choc et le second à la vitesse indiquée. Cet exemple met bien en évidence la grande sensibilité de la force maximale à la vitesse relative

3.4.2 Surcourses et phénomènes de rattrapage de jeux

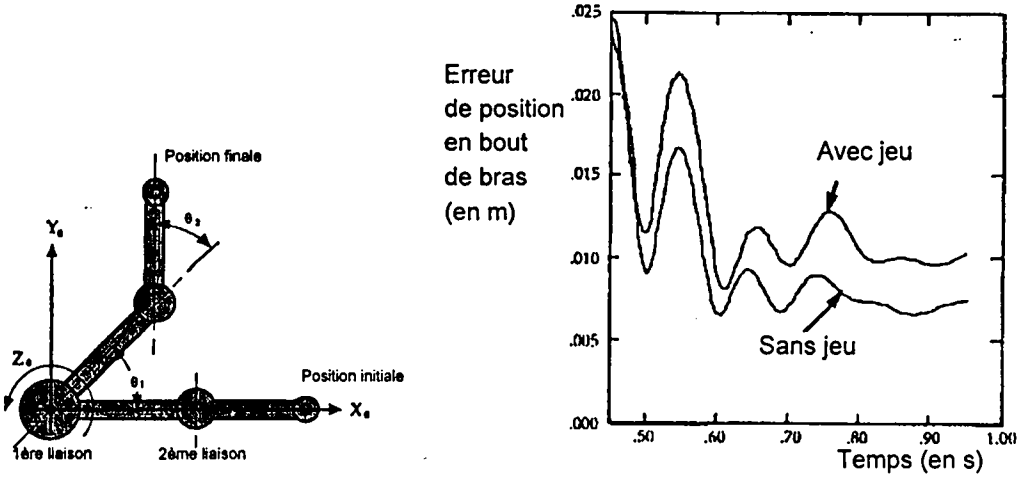


Figure 3.4.2: *Effet d'un jeu dans l'articulation d'un robot selon [Deck 1992]*

En raison de la présence du jeu, il existe une différence entre les positions 'calées'. Cette différence engendre, suivant la nature des liaisons, des surangles et des surcourses. [Deck 1992] l'a bien montré dans le cas d'une articulation de robot (fig. 3.4.2).

3.4.3 Quelques résultats

[Deck 1992] a mis en évidence les résultats suivants

* La force d'impact générée aux liaisons tend à augmenter avec la fréquence d'excitation et l'augmentation de la valeur du jeu.
* Cette tendance est sujette à des variations substantielles et peut être extrêmement sensible à la vitesse d'excitation.
* Les structures annexes du système, comme le socle, où est fixé le système et le couvercle, peuvent affecter la dynamique de celui-ci. Le couvercle peut engendrer une augmentation ou une diminution des impacts selon les fréquences d'excitation.
* Les chocs sont quasiment impulsifs. Cependant ils ont une large bande fréquentielle, avec la faculté d'exciter plusieurs fréquences de résonance de la machine. Ainsi pour être précis, le carter et le socle doivent être décrits avec les tolérances de fabrication.
* L'amplitude des forces d'impact peut être plusieurs fois plus importante que celle des forces nominales. Des amplifications de 20 fois ont été constatées pour ce système et d'autres chercheurs ont rapporté des amplifications encore plus importantes.
* Les systèmes avec chocs n'ont pas forcément un état stationnaire. Des entrées stationnaires peuvent donner des sorties non stationnaires. De tels phénomènes sont impossibles avec des systèmes linéaires.
* Les concepteurs de machines doivent être conscients que les pics de force peuvent se produire lorsqu'il y a des jeux, comme dans les paliers. Les modèles numériques détaillés peuvent donner des estimations brutes. Cependant ces estimations doivent être prises avec précaution. Même dans des systèmes simples, un facteur 2 entre la prédiction et la réalité est tout à fait possible.

3.4.4 Élasticité et flexibilité

Selon [Dubowsky, Perreira 1981], l'élasticité diminue la force d'impact, sauf lorsque la fréquence d'excitation est proche de la fréquence de résonance de la poutre. La figure 3.4.3 montre bien que pour des jeux identiques les déplacements sont moindres pour une poutre

flexible (en pointillé) que pour une poutre rigide (trait continu) sauf lorsque la fréquence d'excitation est proche de la fréquence de résonance de la poutre.

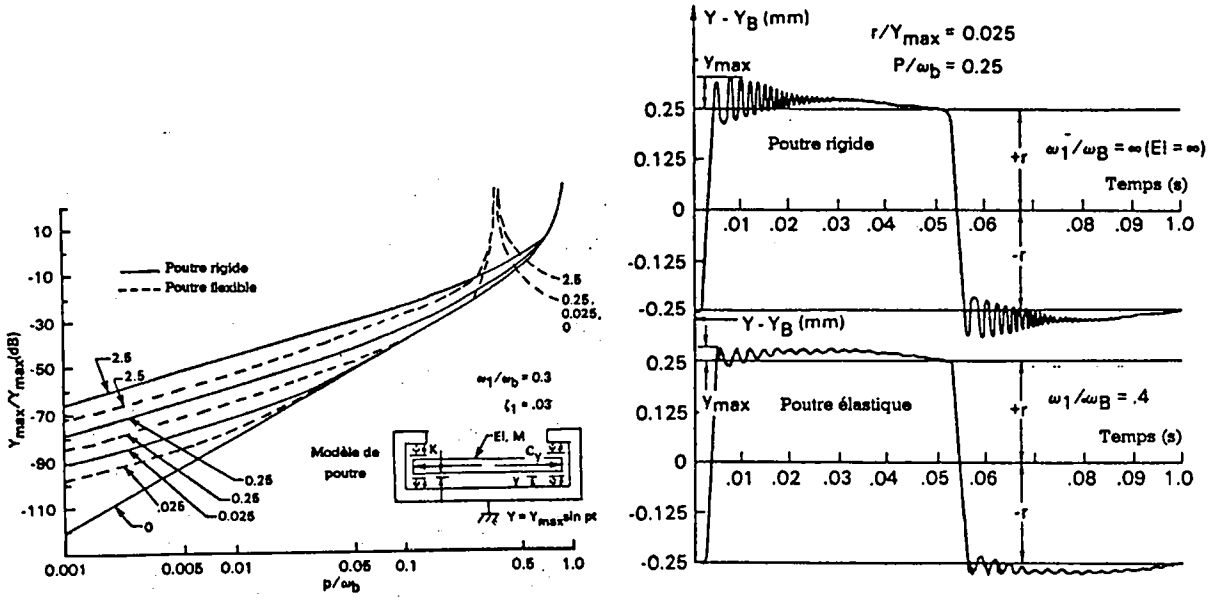


Figure 3.4.3: *Bâti excité transversalement et heurtant une poutre (p: fréquence d'excitation, ω_b fréquence de rebond lorsque la poutre est rigide, r jeu) d'après [Dubowsky, Perreira 1981]*

3.5 CALCUL DES FORCES D'IMPACT POUR LE SYSTÈME D'ESSUYAGE

3.5.1 Cas des rotules

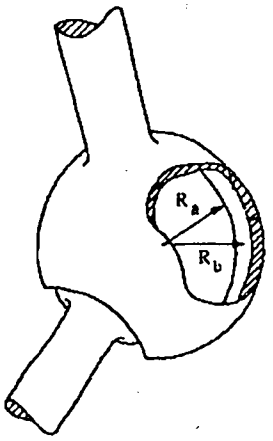


Figure 3.5.1: *Rotule*

Nous allons faire certaines hypothèses afin de déterminer la force maximale de l'impact:
* l'amortissement est négligeable pendant la phase de la première interpénétration,
* le temps de la phase libre est suffisamment bref pour que l'accélération soit constante,

* nous supposerons que les deux corps qui se choquent sont équivalents à deux masses m_1 et m_2.
* les forces extérieures au système sont négligeables devant les forces d'interaction.

L'équation s'écrit alors dans le repère barycentrique de masse réduite

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (3.5.1):$$

$$mx'' + kx^{3/2} = 0 \qquad (3.5.2)$$

avec $x > 0$ interpénétration des deux solides et

$$k = \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)}\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)^{1/2} \qquad (3.5.3)$$

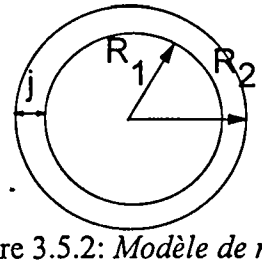


Figure 3.5.2: *Modèle de rotule*

En multipliant par x' et en intégrant nous obtenons :

$$\frac{mx'^2}{2} + \frac{kx^{5/2}}{5/2} = C_{st}, \qquad (3.5.4)$$

où C_{st} est une constante. Pour déterminer cette dernière, nous allons considérer le début de l'impact où x=0 et $x' = V_d$. Nous en déduisons que :

$$mx'^2 + \frac{4kx^{5/2}}{5} = mV_d^2. \qquad (3.5.5)$$

Lorsque l'interpénétration est maximale $x' = 0$ et

$$x = x_m = \left(\frac{5mV_d^2}{4k}\right)^{2/5} \qquad (3.5.6)$$

et la force maximale est égale à:

$$F_m = k\left(\frac{5mV_d^2}{4k}\right)^{3/5} \qquad (3.5.7),$$

soit encore:

$$F_m = k^{2/5}\left(\frac{5mV_d^2}{4}\right)^{3/5} \qquad (3.5.8).$$

La valeur du jeu j est égale à la différence des rayons R_1 et R_2. Remarquons que la différence de diamètre est égale à 2j ou encore que la différence des centres dans une direction est donnée à $\pm j$ (en excluant l'interpénétration).
La formule donnant la raideur k se simplifie alors

$$k = \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)}\frac{R}{\sqrt{j}}. \qquad (3.5.9)$$

Donc, plus le jeu est petit, plus la raideur est importante. En intégrant l'accélération a une première fois pendant la phase libre de durée T_l, puis une seconde fois par rapport au temps, nous obtenons:

$$\begin{cases} V_d = aT_l, \\ 2*j = \frac{1}{2}aT_l^2. \end{cases} \qquad (3.5.10)$$

En éliminant le temps T_l, nous obtenons

$$V_d = 2*\sqrt{j*a} \qquad (3.5.11),$$

que nous pouvons injecter dans 3.5.8:

$$\boxed{F_m = \left[\frac{4}{3}\frac{R}{\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)}\right]^{2/5}(5*m*a)^{3/5}*j^{2/5}} \qquad (3.5.12)$$

Plus le jeu est important, plus la force d'impact est importante. De même, plus l'accélération est importante, plus la force d'impact est importante.

Considérons par exemple un jeu 1mm, une accélération de $1{,}5ms^{-2}$, une masse réduite de 90g, un rayon R de 1cm dans le cas où l'un des solides est en acier et l'autre en plastique ($E=10^9$pa, $\nu = 0{,}5$). Nous obtenons alors un coefficient k de $6.10^8 Nm^{-3/2}$ et une force maximale F_m de 7500N.

3.5.2 Cas des déplacement linéaires

Considérons le cas où les deux pièces en vis à vis ont en leur point de contact des rayons de courbure R_1 et R_2 comme précédemment. Les formules 3.5.8 et 3.5.11 restent valables, nous pouvons donc en déduire que :

$$F_m = \left[\frac{4}{3} \frac{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^{1/2}}{\left(\frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \right)} \right]^{2/5} (5*m*a)^{3/5} * j^{3/5}. \qquad (3.5.13)$$

3.5.3 Cas des déplacements angulaires

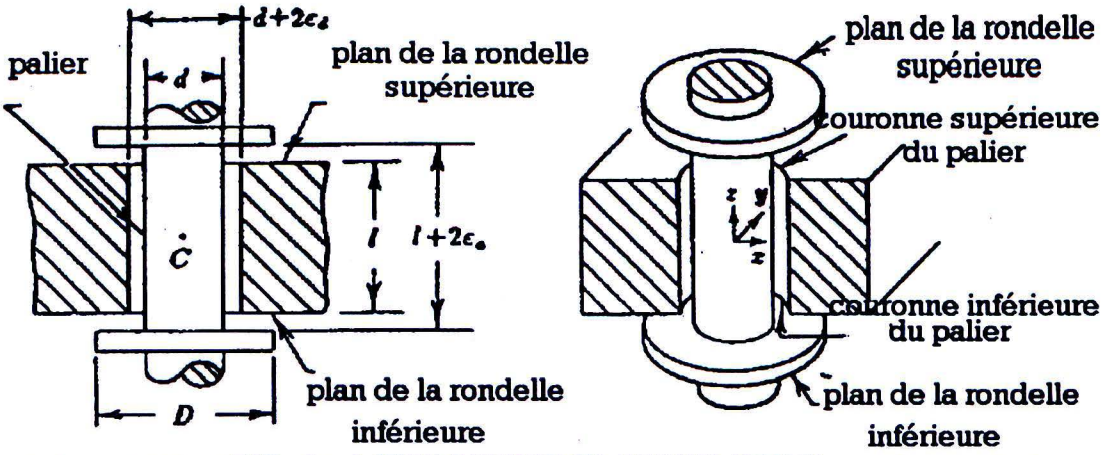


Figure 3.5.3: *Schéma d'un contact entre un axe et son palier en présence de jeux selon [Wang et Roth, 1989]*

[Wang, Roth 1989] ont détaillé tous les points de contact possibles entre un arbre et un palier. (fig. 3.5.3). Les paliers des systèmes d'essuyage disposent d'un ressort (rondelle - ressort) entre la rondelle inférieure et le palier si bien que les deux rondelles, en incluant la rondelle - ressort, sont en contact avec le palier. Essentiellement sous l'effet des forces importantes des bielles, l'axe vient en contact du palier sur la couronne inférieure du palier. De même, les forces et les couples provenant des balais assurent le contact entre l'axe et la couronne supérieure du palier.

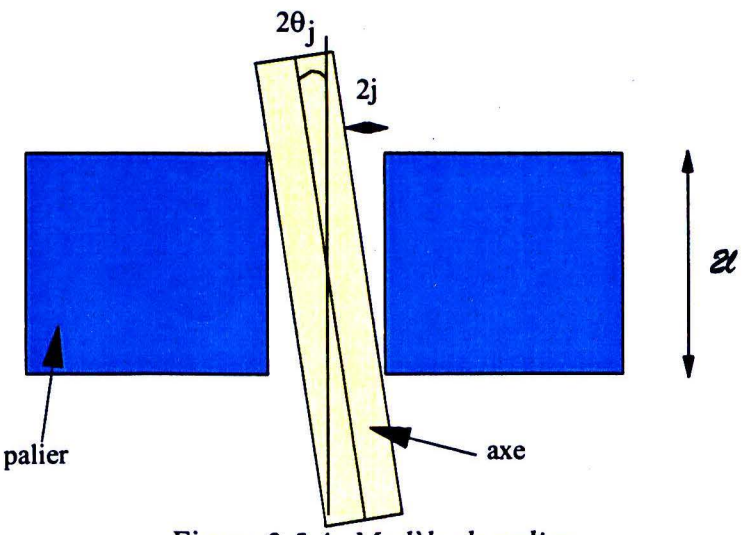


Figure 3.5.4: *Modèle de palier*

Nous considérons dans les calculs qui vont suivre un système axe / palier possédant un jeu angulaire dans une seule direction. Par analogie et de la même façon qu'au 3.5.1, nous définissons une inertie de rotation réduite qui sera égale à l'inertie de rotation des pièces solidaires de l'axe I_{axe}, le palier étant supposé fixe donc d'inertie infinie. L'équation fondamentale de la dynamique nous donne:

$$I_{axe}\theta_p'' + k\left(\frac{\theta_p}{l}\right)^{3/2} l = 0 \qquad (3.5.14),$$

avec θ_p angle d'interpénétration des deux solides, k constante définie par l'équation 3.5.9.

Nous pouvons écrire différemment l'équation:

$$I_{axe}\theta_p'' + C_p\theta_p^{3/2} = 0 \text{ avec } C_p = \frac{k}{l^{1/2}} \qquad (3.5.15)$$

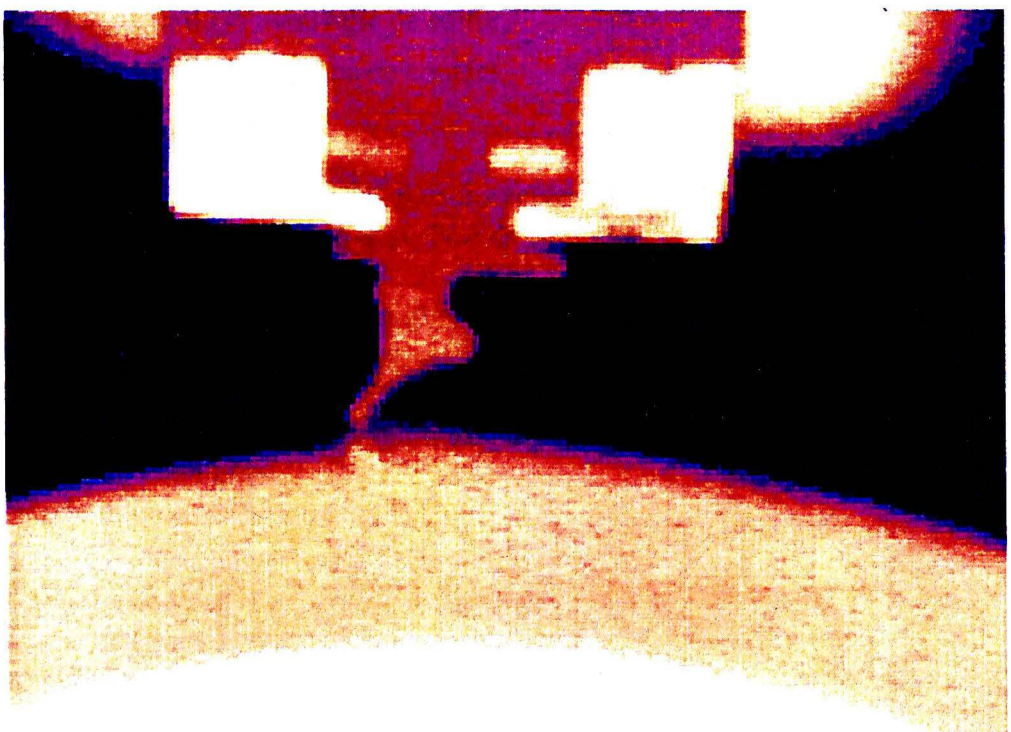
Cette formule est transposable dans l'équation 3.5.2. En transposant également l'équation 3.5.11, nous pouvons écrire:

$$\boxed{C_m = \left[\frac{\frac{4}{3}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)^{1/2}}{\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)l^{1/2}}\right]^{2/5} \left(5*I_{axe}*a_\theta\right)^{3/5}*\theta_j^{3/5}} \qquad (3.5.16)$$

avec C_m couple maximal atteint, a_θ accélération angulaire et θ_j jeu angulaire (fig. 3.5.4)

CHAPITRE 4:

FROTTEMENT



Mesure du coefficient de frottement par thermographie infrarouge selon [Sortais, Lisiecki, Codfert, 1995]

Listes des notations utilisées dans ce chapitre

A: surface de contact,
a: rayon de contact,
a_T: coefficient dépendant de la température (transformation W.L.F.),
C_a: coefficient d'acidité,
C_a^i : coefficient d'acidité du corps i,
C_b: coefficient de basicité,
C_b^i : coefficient de basicité du corps i,
f: coefficient de conversion de l'enthalpie en énergie libre,
E: module d'Young,
F: force de frottement,
F_c : force s'opposant au couple des axes de sortie,
h: hauteur du fluide,
$h_0(t)$: épaisseur du film sur la ligne centrale,
h_1 et h_2: hauteurs initiales et finales du fluide,
K: coefficient dépendant de θ_1 et servant au calcul de la largeur de contact,
K: constante dépendant du type de contact,
L: longueur de la lame,
l_{man_sort} : longueur de la manivelle de sortie,
n: constante dépendant du type de contact,
N: force normale,
N_T : force normale totale,
n_{AB} : concentration superficielle des liaisons acide-base,
p: pression linéique normale à la surface de contact,
P: pression du fluide,
R: rayon de courbure de l'élément glissant,
R_c: rayon des rotules ou des paliers
S: contrainte de cisaillement,
t: temps mis par le film d'eau pour changer de hauteur,
T: température de l'essai,
T_g : température de transition vitreuse,
v: vitesse de glissement,
w: largeur de contact,
w0: largeur de contact pour une force normale nulle,
W_a : énergie d'adhésion,
W_{ls} : énergie d'adhésion entre le liquide et le solide,
W^d : énergie d'adhésion due aux interactions dispersives de Van der Waals,
W^p : énergie d'adhésion due aux interactions polaires,
W^e : énergie d'adhésion due aux interactions électrostatiques,
W : énergie d'adhésion totale,
W^{AB} : énergie d'adhésion due aux interactions acide-base,
x: direction du mouvement,

ΔH^{AB} : enthalpie d'interaction acide-base,
φ : coefficient de frottement,
φ_c : coefficient de frottement de contact dans le palier ou la rotule,
γ_{AB} : énergie interfaciale de A et B,
γ_A : énergie de la surface de A après séparation,
γ_A^d : énergie de la surface de A après séparation due aux interactions dispersives de Van der Waals,
γ_B : énergie de la surface de B après séparation,
γ_B^d : énergie de la surface de B après séparation due aux interactions dispersives de Van der Waals,
γ^d : énergie de surface due aux interactions dispersives de Van der Waals,
γ^p : énergie de surface due aux interactions polaires,
γ^e : énergie de surface due aux interactions électrostatiques,
γ : énergie de surface totale,
γ_l : tension superficielle du liquide,
γ_s : tension superficielle du liquide,
γ_{sl} : énergie interfaciale,
ω : énergie de Dupré,
θ : angle de contact,
μ : viscosité du fluide,
θ_l : angle d'inclinaison de la lame par rapport à la verticale,
σ : contrainte de cisaillement de l'élastomère,

4.1 INTRODUCTION

4.1.1 Préambule

Dans ce chapitre, nous allons examiner successivement les frottements dans les articulations du système d'essuyage puis, étant donné son importance cruciale, nous nous focaliserons sur le frottement généré entre la lame et la vitre.
Le but de cette étude est de montrer le rôle joué par le coefficient de frottement, ainsi que les paramètres l'influençant. A partir de cette étude, nous pourrons dégager les enseignements utiles pour les essais et, déterminer les paramètres et les lois nécessaires aux modèles dynamiques.
Les résultats présentés ci-après, sont en grande partie issus d'une recherche bibliographique. La tribologie, science du frottement (du grec tribein frotter), comme nous pourrons facilement nous en rendre compte, n'est pas une science bien connue et bien établie. C'est pourquoi, nous nous attacherons plus qu'ailleurs à citer les sources des informations.

4.1.2 Bref historique

Selon [J.E.F. 92], les premières informations sur le frottement reposent sur les premiers essais de Léonard de Vinci. Puis R. Hooke a introduit les notions de frottement de roulement, de glissement statique et dynamique. Ensuite c'est Amontons qui a défini le coefficient de frottement, comme le rapport de la force de frottement sur la force normale. Cette loi porte, à tort, le nom de Coulomb car, dans les faits, il en a été le premier détracteur. En fait Amontons a établi que le coefficient de frottement est indépendant de la charge et de la surface et Coulomb a établi une loi donnant l'évolution du coefficient de frottement en fonction de la vitesse.

4.1.3 Tribologie: science contestée du frottement

Selon [J.E.F. 92], au fil des années, sans vérifications sérieuses, des hypothèses relatives à des mécanismes de frottement sont devenues des certitudes. De plus, beaucoup voient le coefficient de frottement comme une propriété intrinsèque d'un matériau. Par exemple, dans le cas du bisulfure de molybdène, MoS_2, au moins trois explications sont avancées: cisaillement intrinsèque dû à Pauling, cisaillement d'adsorbats dû à Finch, cisaillement intercristalin dû a Deaconet Goodman. Ces hypothèses coexistent et sont utilisées en fonction des inspirations ou besoin de l'instant!

4.1.4 Visions modernes de la tribologie

Les théoriciens n'étant pas d'accord entre eux, nous avons choisi de présenter deux visions de la tribologie mais nous ne nions pas l'importance et la validité des autres.

[J.E.F. 92] cite trois points importants contrecarrant des idées fausses:

* l'essai de frottement n'est représentatif que de lui-même;
* le frottement n'est pas une propriété intrinsèque des matériaux: tout résultat d'essais comporte la signature du tribomètre utilisé.

Une vision moderne de la tribologie prend en compte le triplet tribologique, à savoir:

* le mécanisme dans lequel se situe le contact,
* les premiers corps qui sont les massifs qui le bordent,
* le troisième corps qui est l'interface.

La non prise en compte de ce triplet, ainsi que la complexité physique, expliquent qu'en toute bonne foi la bibliographie révèle la chose et son contraire.
Une méthode d'analyse du problème consiste en l'analyse:

* Des phénomènes sous l'angle des disciplines et des échelles mises en jeu. Par exemple les caractéristiques physico-chimiques des premiers corps influent sur le frottement à l'échelle de quelques nanomètres; la géométrie des premiers corps agit mécaniquement à l'échelle du millimètre.
* Des mécanismes d'accommodation (fig. 4.1.1): Ils consistent en la combinaison d'un site (l'endroit où le phénomène se produit) et d'un mode (élastique, rupture ...).
* Du débit (création, évacuation et recirculation) du troisième corps tribologique
* Des surfaces réelles de contact et non de la surface théorique de contact

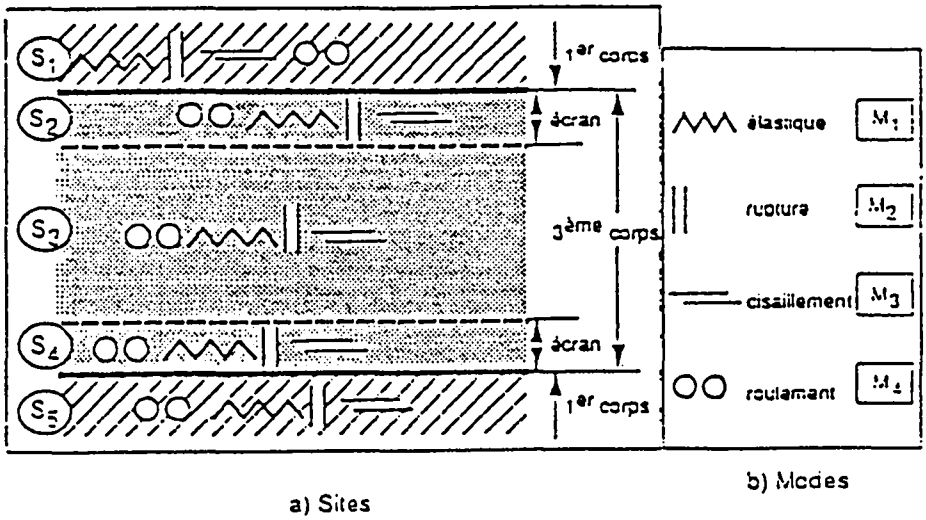


Figure 4.1.1: *Mécanismes d'accommodation de vitesse composés chacun d'un site (l'endroit où le phénomène se produit) et d'un mode (élastique, rupture ...) selon [J.E.F. 92]*

Pour [Blouet, 77], pour chaque contact, il est nécessaire d'identifier les "facteurs", les phénomènes observés et les processus physiques.
Les "facteurs" sont les suivants: le mode de contact (ouvert si le frotteur rencontre constamment une surface vierge et fermé dans le cas contraire), l'état de surface microgéométrique, la charge (force appliquée normale aux surfaces), la vitesse, l'ambiance (y compris la lubrification) et les matériaux (propriétés mécaniques, composants ...).
Les phénomènes observés, comme la résistance au déplacement, les vibrations, les phénomènes thermiques, les transformations superficielles et structurales (modifications géométriques et physico-chimiques) ainsi que les pertes de masse, renseignent sur le comportement des matériaux au frottement.
Les processus physiques comme l'adhésion, l'abrasion mais aussi l'érosion, la déformation, la fatigue et la corrosion sont identifiables par les transformations superficielles et structurales qu'ils génèrent.

4.1.5 Différents modes de lubrification

Selon [Carole, 1996], quatre régimes sont à distinguer.

La lubrification hydrodynamique se caractérise par un film lubrifiant continu, avec des surfaces portantes bien séparées. La force de frottement correspond à la résistance du fluide au cisaillement; elle augmente avec la quantité de fluide à cisailler.
La lubrification élastohydrodynamique apparaît lorsque les pressions sont suffisamment élevées pour entraîner une déformation élastique des aspérités. La portance du fluide est alors très supérieure à celle obtenue en hydrodynamique: le coefficient de frottement diminue.
La lubrification mixte est un régime de transition où la faible épaisseur du film est la cause d'interactions entre les aspérités des deux surfaces. La charge est alors répartie entre le film et les aspérités.
Dans le cas de la lubrification limite, l'épaisseur du film lubrifiant est du même ordre de grandeur que celle des rugosités, de sorte que la charge est entièrement transmise par les aspérités.

4.2 FROTTEMENT DANS LES ARTICULATIONS MECANIQUES

4.2.1 Paliers

Les paliers sont de divers types. Nous traiterons les cas les plus répandus pour le système d'essuyage.

4.2.1.1 Paliers poreux autolubrifiants (cas des paliers des axes de sortie)

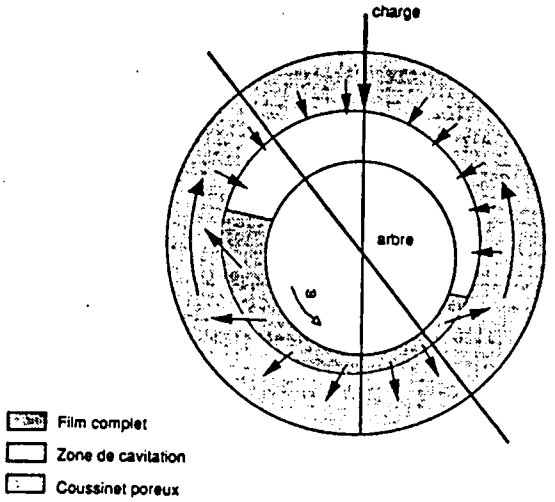


Figure 4.2.1: *Palier poreux autolubrifiant selon [Giudicelli 1993]*

Selon [Giudicelli 1993], dans ce type de palier, le coussinet imbibé d'huile joue le rôle de réservoir de lubrifiant. Ainsi, aucun système annexe n'est nécessaire pour alimenter le palier. En régime hydrodynamique, un film d'huile sépare complètement l'arbre du coussinet. Comme dans tout palier fluide, l'arbre est excentré par rapport au coussinet sous l'effet de la charge appliquée, créant une géométrie convergente - divergente: la rotation de l'arbre entraîne une augmentation de la pression dans la partie convergente, et une diminution dans la partie divergente, jusqu'à une pression limite dite pression de cavitation. Nous distinguons deux zones entre l'arbre et le coussinet: la zone de film complet, où la pression est supérieure à la pression de cavitation, et la zone de cavitation, où le film est rompu en un mélange d'huile et de gaz, et où la pression est uniformément égale à la pression de cavitation.
Dans un palier poreux, l'huile circule non seulement dans le jeu, mais aussi au travers de la surface interne: du coussinet du film, vers le coussinet dans la zone de pression élevée d'une part et du coussinet vers le film dans la zone de pression basse d'autre part.

Les travaux de [Giudicelli 1993] ont supprimé les anomalies des modèles précédents à savoir: des débits de fuite 100 fois supérieurs aux débits d'alimentation. Pour obtenir ce résultat, les éléments suivants ont dû être pris en compte:
- les effets capillaires sur la face externe du coussinet,
- la présence d'une zone où les pores sont bouchés durant le rodage ou le démarrage du palier,
- une bonne définition des zones de cavitation.

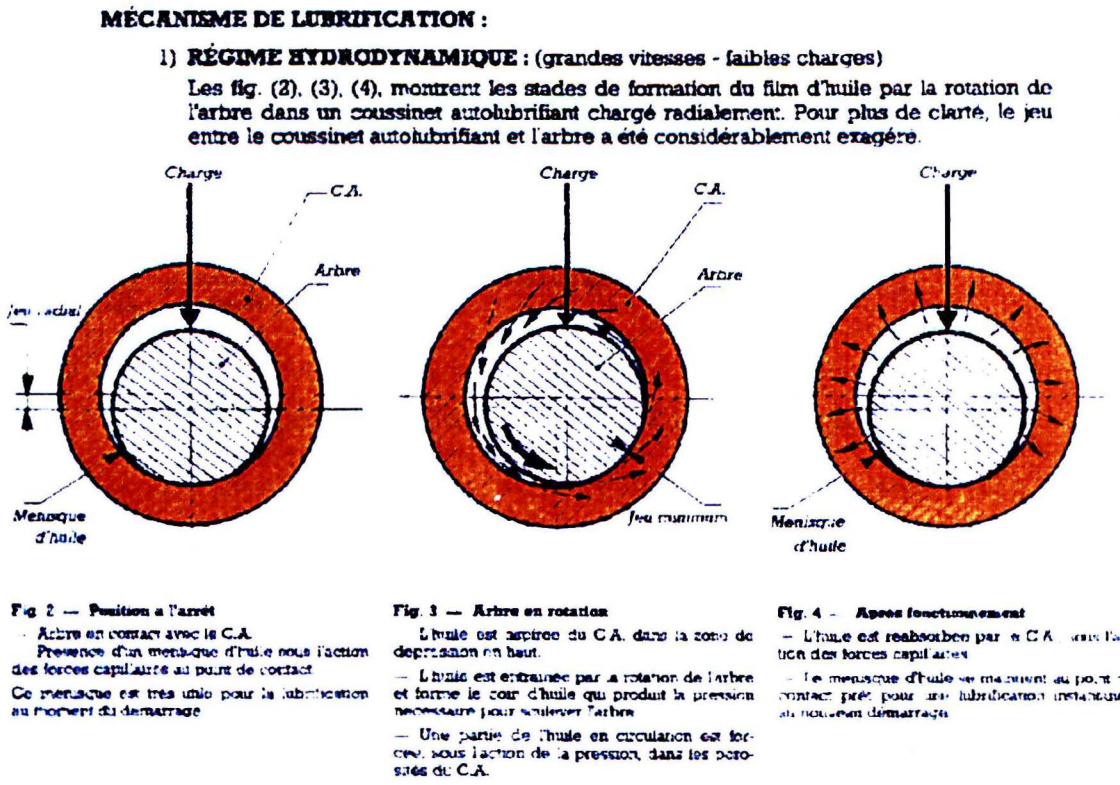


Figure 4.2.2: *Mécanisme de lubrification du palier poreux selon [Métafram]*

Il est à remarquer que ces travaux, faits pour un cas que l'on peut qualifier d'idéal: le régime hydrodynamique, sont assez récents. Dans notre cas le régime hydrodynamique n'est pas atteint en raison des faibles vitesses de rotation et du mouvement alternatif. Le coefficient de frottement est donc situé entre les points A et C de la figure 4.2.3. Dans ce contexte, la lubrification fluide coexiste avec des contacts entre solides. De plus, des phénomènes hystérétiques dépendant du sens du mouvement, peuvent apparaître (fig. 4.2.4).

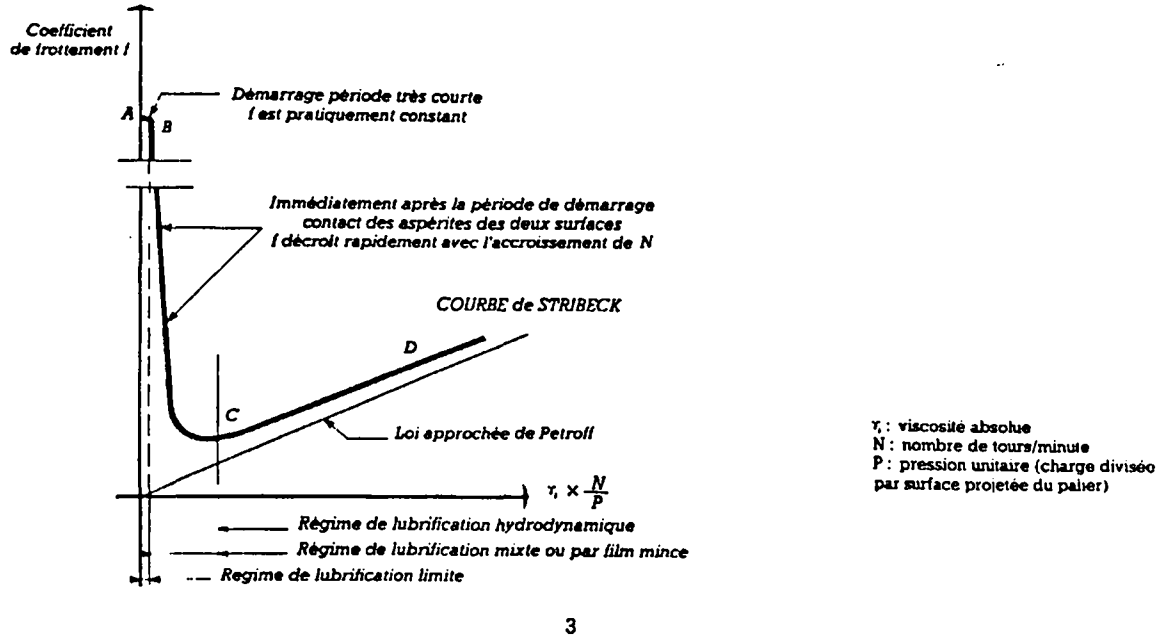
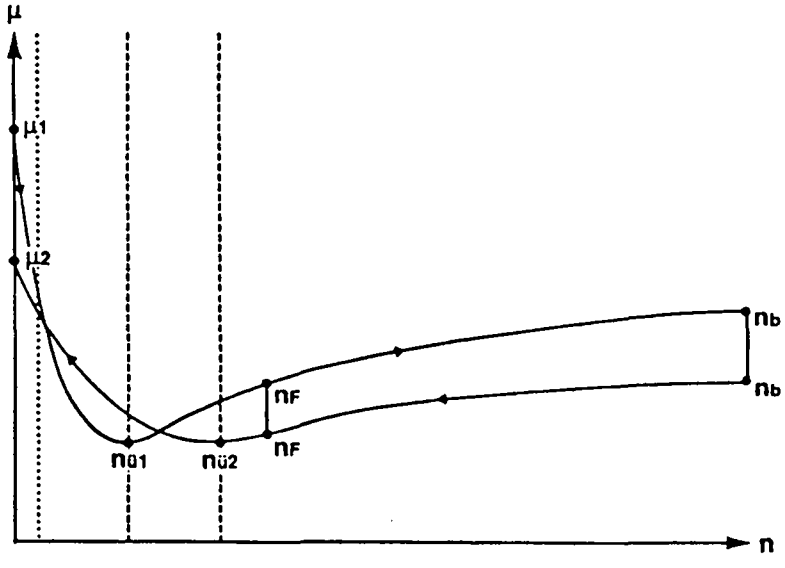


Figure 4.2.3: *Courbe de Stribeck selon [Métafram]*



Frottement en fonction de la vitesse entre le démarrage et le ralentissement (courbe de Stribeck)

μ_1 = *Frottement au démarrage*
μ_2 = *Frottement au ralentissement*
n_F = *Vitesse de fonctionnement pour le frottement liquide*
$n_{ü1}$ = *Vitesse de transition pour le démarrage*
$n_{ü2}$ = *Vitesse de transition pour le ralentissement*

Figure 4.2.4: *Effet hystérétique du coefficient de frottement [Klüber]*

4.2.1.2 Paliers lisses (cas de l'axe entre l'entraîneur et le carter)

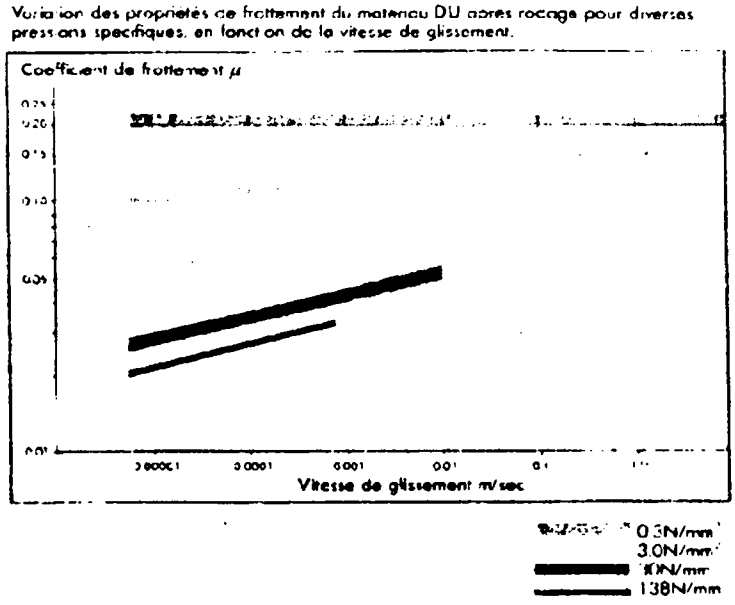


Figure 4.2.5: *Coefficient de frottement en fonction de la vitesse pour différentes charges d'un palier lisse selon [Glacier SIC]*

Selon [Glacier SIC], les valeurs données sur la figure 4.2.2 peuvent varier de ±20% selon les conditions de fonctionnement, et avant rodage le coefficient de frottement peut être jusqu'à 50% plus élevé. Le coefficient de frottement s'accroît également à basse température. Après des périodes d'arrêt sous charge de plus en plus longues, le coefficient statique de frottement en redémarrage peut être entre 3 et 6 fois plus fort.

4.2.2 Rotule

Le dispositif est constitué d'une surface en plastique appartenant à la bielle et partiellement sphérique recouvrant une sphère métallique liée solidairement à la manivelle. Le montage est réalisé sans jeu en jouant sur l'élasticité de la pièce plastique. Une couche de graisse est interposée entre les deux. Le comportement tribologique des rotules, à ma connaissance, n'a pas fait l'objet de travaux scientifiques significatifs.

4.2.3 Raisons de la non prise en compte de ces phénomènes de frottement

Une première raison est que ces dispositifs, même si leurs caractéristiques sont mal connues, sont prévus pour réduire le coefficient de frottement et sont assez répandus.
Une deuxième raison est due à un effet de levier. Supposons, pour être plus clair, que la force F_c nécessaire à générer le couple des axes de sortie soit identique à la force normale du palier ou de la rotule et que le couple utile soit égal à $F_c l_{man_sort}$ avec l_{man_sort} longueur de la manivelle de sortie. Les longueurs des manivelles sont plus grandes que les rayons des rotules ou des paliers que nous noterons R_c. Le couple de frottement est donné par $F_c R_c \varphi_c$ avec φ_c coefficient de frottement. Étant donné que le coefficient de frottement est en général plus petit que 1, nous majorons le couple de frottement par $F_c R_c$ qui est bien inférieur au couple utile.

4.3 Frottement entre le caoutchouc et le verre

4.3.1 Préambule

Le type de caoutchouc utilisé dans les essuie-glaces étant particulier, les différentes études citées par la suite n'utilisent pas obligatoirement cette formulation et n'envisagent pas forcément le même type de contact. Néanmoins nous nous sommes efforcés de dégager les éléments essentiels qui restent valables. Les écarts sont d'ailleurs signalés. Par exemple nous faisons une différence entre le caoutchouc naturel simple et celui qui est chloré.

4.3.2 Frottement entre le caoutchouc et le verre en l'absence d'eau

4.3.2.1 Adhérence et hystérésis

A Définition

L'hystérésis est la composante de frottement qui est due aux déformations mécaniques des aspérités. **L'adhésion** est la composante de frottement due à l'attraction des surfaces en vis à vis.
Selon [Begout, 1979], **l'adhésion** est un phénomène de surface consistant en des jonctions et des ruptures successives de liaison au niveau des premières couches moléculaires de contact. Par contre, les déformations du matériau sont relatives à un effet de volume dont l'importance est principalement fonction de la nature des aspérités en présence, des propriétés viscoélastiques du solide considéré, de la vitesse et de la température : ces phénomènes sont désignés par le terme '**hystérésis**'.

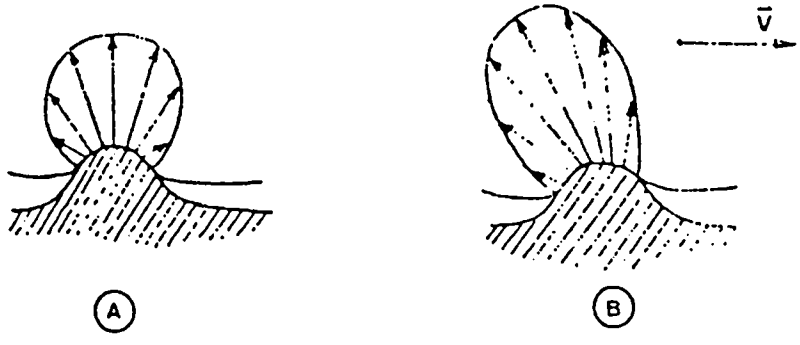


Figure 4.3.1: *Illustration des forces d'hystérésis orientées du fait du mouvement selon [Begout, 1979]*

B Prépondérance de l'adhésion pour notre cas

Selon [Noakes, 1988], le frottement d'hystérésis survient en raison des pertes d'énergie pendant la déformation et la récupération des surfaces en caoutchouc engendrées par leur contact mécanique. Cependant le frottement hystérétique dans le cas d'une lame d'essuie-glace chlorée est secondaire en raison de l'utilisation d'une surface considérée comme lisse (verre). En effet, peu de déformations macroscopiques et de recouvrements de la surface de caoutchouc surviennent.

C Différence adhésion / adhérence

L'adhésion est définie comme l'ensemble des interactions se produisant au contact et l'adhérence comme le résultat d'un essai de séparation.

D Composantes générales de l'adhésion

Selon [Noakes, 1988], le frottement adhésif survient en raison d'interactions physico-chimiques (forces de dispersion, liaison hydrogène, interactions dipolaires,...) (fig.4.3.2) entre les surfaces en contact. De plus, il peut dépendre de la nature chimique des surfaces impliquées.

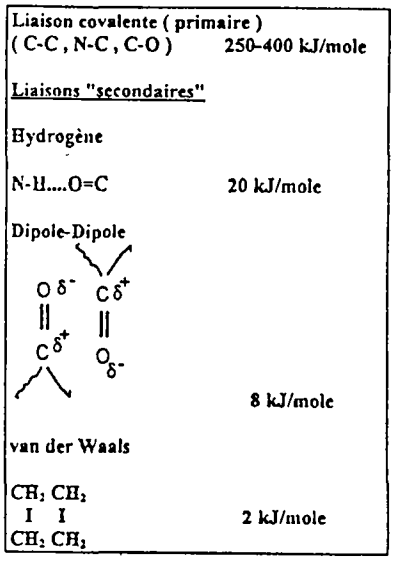


Figure 4.3.2. *Énergies des différentes liaisons selon [Cognard]*

Considérons deux éléments liés l'un à l'autre possédant une énergie interfaciale γ_{AB} (fig. 4.3.3) [Cognard]. Après séparation, nous obtenons deux éléments A et B dont les surfaces respectives possèdent les énergies γ_A et γ_B. La différence entre l'énergie de l'état final et l'énergie de l'état initial est l'énergie d'adhésion, W_a qui est égale à :

$W_a = (\gamma_A + \gamma_B) - \gamma_{AB}$ (équation de Dupré) (4.3.1).

Un solide interagit avec un autre corps par les trois types de liaisons: celles de Van der Waals, les interactions polaires, et les interactions électrostatiques. Nous utiliserons respectivement les indices d, p et e pour s'y rapporter.

L'énergie de surface est égale à la somme de ces différentes contributions : (F. Fowkes 1967)

$\gamma = \gamma^d + \gamma^p + \gamma^e$ (4.3.2).

Le tableau 4.3.1 présente certaines valeurs obtenues pour des polymères.

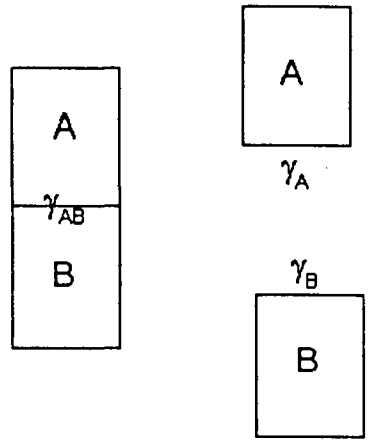


Figure 4.3.3. *Tensions superficielles des surfaces en vis à vis lorsque les solides A et B sont solidaires ou séparés selon [Cognard]*

Polymère	Abréviation	γ_p	γ_p^d	γ_p^p
p. tetrafluoroéthylène	PTFE	16	16	0
	PDMS	21	19,5	1,5
p. isopropylène	PIP	27	27	0
p. éthylène	PE	30	30	0
p.butylméthacrylate	PBMA	31	26	5
p. isobutylène	PIP	31	31	0
p. vinylacétate	PVAc	37	34	3
chlorure de p. vinyle	PVC	39	37,5	1,5
p. methyleméthacrylate	PMMA	40	30	10
p. formaldéhyde	PFA	41	36	5
p. amide	PA6	42	34	8

Tableau 4.3.1: *Valeurs indicatives en N/m pour quelques polymères selon [Cognard]*

L'énergie d'adhésion est la somme de ces différentes contributions:

$$W = W^d + W^p + W^e \qquad (4.3.3).$$

L'énergie des interactions dispersives (Van der Waals) est égale à la moyenne géométrique des composantes dispersives des deux corps en présence (F. Fowkes 1964) :

$$W^d = 2\sqrt{\gamma_A^d \gamma_B^d} \qquad (4.3.4).$$

Cette formule a été étendue aux composantes polaires.

En théorie l'énergie superficielle des polymères est bien définie et calculable à partir de la contribution de chaque groupe constituant la chaîne de polymère (A. Carré 1993). En réalité, la formulation, le mode de mise en oeuvre, la préparation de surface la modifient et les valeurs publiées varient considérablement.

E Intervention des forces cohésives

Selon [Cognard], une rupture de la liaison entre deux corps est "interfaciale" ou "adhésive" si elle a lieu à l'interface et "cohésive" si elle a lieu dans l'un des deux corps. Le lieu de la fracture peut changer avec:

* la vitesse de sollicitation,
* la rugosité de la surface.

F Influence de l'acido-basicité

Selon [Cognard], l'énergie superficielle du polymère dépend, outre de l'énergie de surface, de la surface de contact.

Lorsque les interactions de la surface solide et du liquide sont de type acide-base, il est possible (Drago 1971 - Gutman 1983) de calculer l'énergie de réaction à partir des coefficients d'acido-basicité des deux partenaires. A chaque groupe ou molécule est associé un coefficient C_a d'acidité et C_b de basicité. L'enthalpie d'interaction acide-base entre les deux couples 1 et 2 est obtenue par la relation :

$$\Delta H^{AB} = C_a^1 C_b^2 + C_a^2 C_b^1 \qquad (4.3.5)$$

L'énergie d'adhésion due aux interactions acide-base est déterminée à partir de l'équation suivante:

$$W^{AB} = \sum f n_{AB} \Delta H^{AB} \text{ (F.M. Fowkes 1984)} \qquad (4.3.6)$$

avec n_{AB} concentration superficielle des liaisons acide-base et f coefficient de conversion de l'enthalpie en énergie libre. Des précautions sont néanmoins à prendre quant aux éléments à considérer. Des expériences montrent que des groupements acido-basiques se tournent vers l'extérieur ou vers l'intérieur suivant que l'on a affaire à de l'air ou de l'eau (fig. 4.3.5 et 4.3.6).

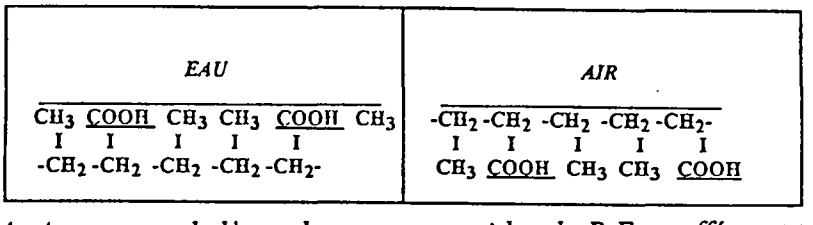


Figure 4.3.4: *Au contact de l'eau, les groupes acides du P.E. greffé sont tournés vers l'extérieur tandis qu'au contact de l'air, ils sont tournés vers l'intérieur selon [Cognard].*

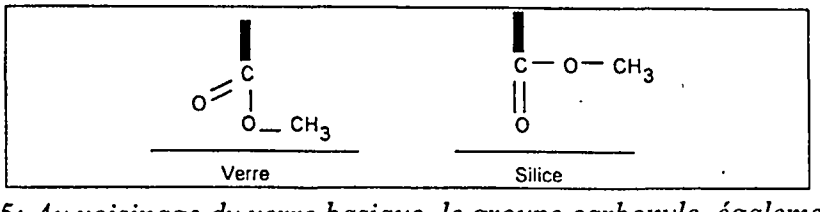


Figure 4.3.5: *Au voisinage du verre basique, le groupe carbonyle, également basique s'éloigne de la surface tandis qu'il se lie aux silanols acides de la silice selon [Cognard].*

Selon [Barquins Roberts, 1987], la plupart des polymères possèdent des sites acides ou basiques qui peuvent augmenter la mouillabilité et l'adhérence. Le caoutchouc naturel (cispolyisoprene) est considéré comme faiblement basique en raison du caractère donateur d'électrons du groupe oléfine. Pour un caoutchouc synthétique du type ENR la présence du groupe époxide augmente fortement le caractère basique. D'ailleurs expérimentalement, la force de frottement est bien plus élevée pour une surface acide que basique (fig. 4.3.6).

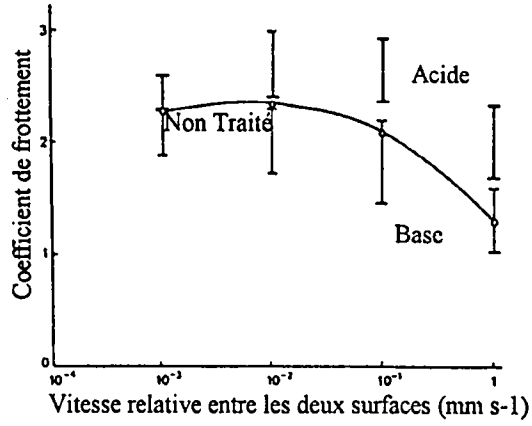


Figure 4.3.6. *Effet du traitement acide ou basique du verre sur le coefficient de frottement d'un caoutchouc synthétique (ENR 70) selon [Barquins et Roberts, 1987]*

G Influence mal connue des charges électriques

Selon [Cognard] et comme nous le verrons dans le 4.3.2.3.D, une séparation des charges électriques se produit dans l'interphase qui devient comparable à un condensateur chargé. Deryagin (1957) a montré que l'énergie de pelage est égale à l'énergie électrique du condensateur. Cette énergie est très supérieure à celle d'adhésion. Ses expériences sont controversées. Retenons que les interactions participent à l'adhésion mais sont difficiles à évaluer.

H Cas des chaînes de caoutchouc

Selon [Barquins, 1993], les extrémités des chaînes moléculaires du caoutchouc naturel sont en agitation thermique à l'interface et la direction de leurs sauts est aléatoire en l'absence de contraintes externes. Une force de frottement dirige les sauts. Ceux-ci s'effectuent de façon à compenser cette force externe pendant le mouvement. Les liaisons moléculaires se détachent du verre et s'y rattachent continuellement. Ainsi les extrémités des chaînes de caoutchouc font des petits sauts (10-60Å) dans le sens du mouvement. Selon Bartenev et El'hin, la fréquence de ces sauts est de l'ordre de 10^5 Hz à 300°K. Le phénomène apparaît donc continu. La force de frottement dépend de la vitesse de glissement et de la température. Ces deux paramètres peuvent être regroupés à l'aide de la transformation W.L.F. (c.f. 4.3.2.3.C.a). Selon [Barquins et Roberts, 1986] le frottement dépend fortement du module d'Young. Il est donc réellement un processus viscoélastique.

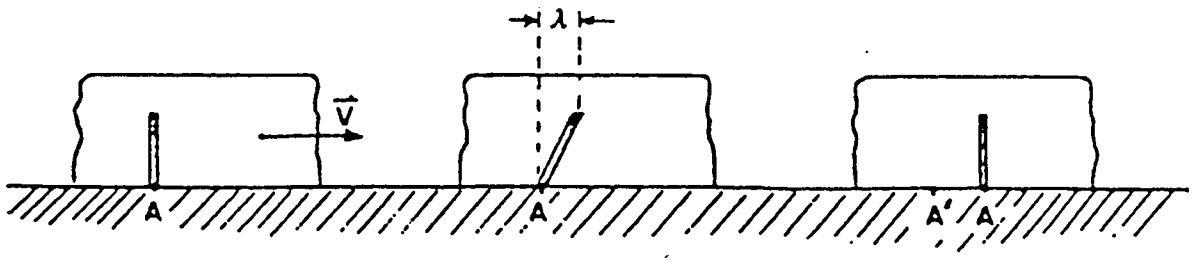


Figure 4.3.7: *Élongation et rupture d'une liaison selon [Begout 1979]*

I Vision récente de l'adhésion

Selon [Ludema], la théorie de l'adhésion a été critiquée pour deux raisons:

* Certains croient que l'adhésion est une force normale aux surfaces en contact alors que le frottement est une force parallèle à ces surfaces.

* La deuxième critique provient de l'expérience courante qui montre que des surfaces sont facilement séparées à l'arrêt, alors que des liens adhésifs demanderaient une force de séparation importante.
Pour l'auteur la réponse à la seconde critique tient au fait que le frottement est principalement dû à l'adhésion générée par les oxydes et les gaz adsorbés présents sur les surfaces pendant le glissement et que ces éléments sont détruit par pelage quand la charge est enlevée.

4.3.2.2 Composition des matériaux

A *Verre*

a Mouillabilité

Selon [Cognard], lorsqu'une goutte de liquide est déposée sur la surface d'un solide, ou bien le liquide s'étale, ou bien il forme une goutte faisant un angle de contact θ avec la surface solide. Si la tension superficielle du liquide est γ_l, celle du solide γ_s et l'énergie interfaciale γ_{sl}, les différents paramètres sont reliés par l'équation de Young (fig. 4.3.8):

$$\gamma_l \cos(\theta) = \gamma_s - \gamma_{sl}. \qquad (4.3.7)$$

La condition pour que la goutte s'étale est :

$$\gamma_l < \gamma_s - \gamma_{sl}, \qquad (4.3.8)$$

soit en négligeant γ_{sl}

$$\gamma_l < \gamma_s. \qquad (4.3.9)$$

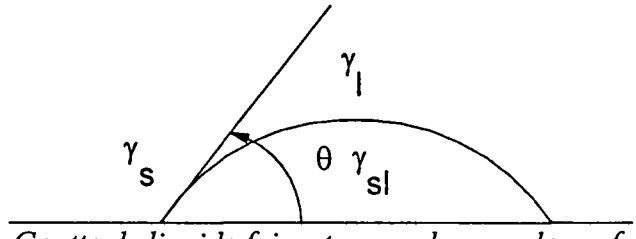


Figure 4.3.8: *Goutte de liquide faisant un angle avec la surface de contact*

b Pare-brise hydrophile et hydrophobe

Comme l'indique [Juran, 1989], les pare-brises actuels sont hydrophiles, c'est à dire que les gouttes d'eau s'étalent sur le verre. L'angle de contact se situe entre 12 et 30°.
En tenant compte de la relation de Dupré (équation 4.3.1), il obtient:

$$W_{ls} = \gamma_l(1 + \cos(\theta)), \qquad (4.3.10)$$

avec W_{ls} énergie d'adhésion entre le liquide (eau) et le solide (verre),
γ_l tension superficielle du liquide,
θ angle de contact.

Les pare-brises hydrophobes permettent de chasser l'eau uniquement sous l'effet aérodynamique à partir d'une certaine vitesse. Pour l'instant ce genre de solutions intégrées directement au pare-brise n'est pas au point et n'est pas utilisé commercialement.

c Salissures du pare-brise

[Begout, 1979] a fait frotté un balai d'essuie-glace à vitesse constante sur une vitre plane circulaire fixe. Le verre flotté devrait présenter une très bonne homogénéité. Cependant, la force de frottement présentait des fluctuations lentes et périodiques. Afin de déceler un éventuel défaut de planéité, un frotteur en téflon a été collé sur l'extrémité d'une

lame flexible. Le dispositif donne un enregistrement similaire à celui du coefficient de frottement. En fait, c'est à l'état de propreté du verre qu'il faut attribuer ces différences de frottement suivant le point de mesure sur la vitre. En effet le nettoyage de la vitre à l'alcool atténue ce phénomène.

B *Caoutchouc*

a Chlore

Selon [Extrand et al, 1990], le fait de chlorer la surface diminue le coefficient de frottement et sa dépendance à la température et à la vitesse (fig.4.3.10). Son comportement se rapproche alors des thermoplastiques.

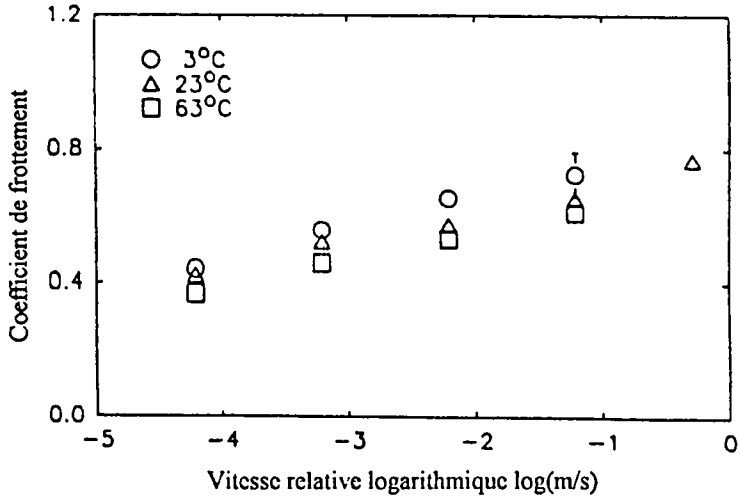


Figure 4.3.9: *Coefficient de frottement d'une lame chlorée en fonction de la vitesse pour différentes températures selon [Extrand et al, 1990]*

[Noakes, 1988] a montré que le coefficient de frottement chute rapidement puis plus lentement en fonction du temps d'exposition à la chloration. La chloration augmente la dureté du caoutchouc. Il en résulte une diminution de la surface réelle de contact et par suite une diminution de la force d'adhérence. Ces travaux ont montré le lien entre la rugosité et le temps de chloration, ainsi que le lien entre le coefficient de frottement et la rugosité. Le second, par contre, montre une bonne relation linéaire entre le coefficient de frottement et la dureté (microdureté).

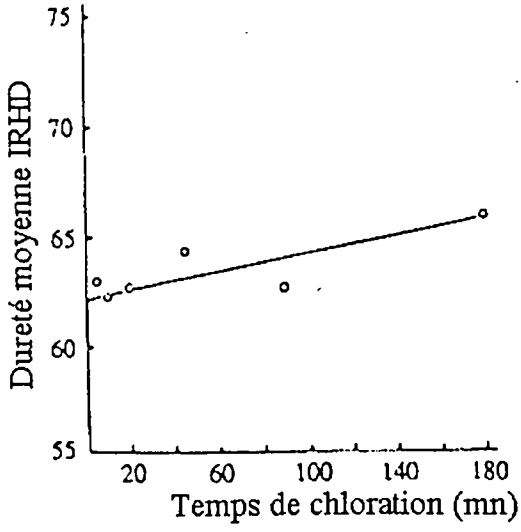


Figure 4.3.10: *Lien entre la dureté moyenne et le temps de chloration selon [Noakes, 1988]*

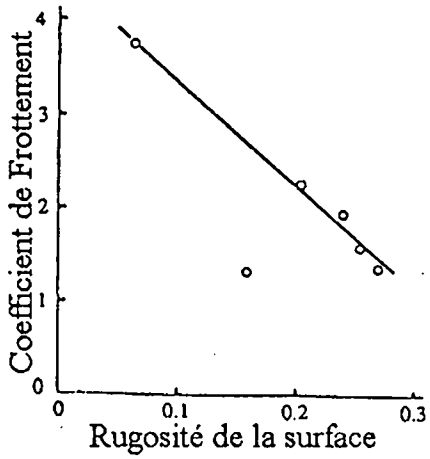


Figure 4.3.11: *Lien entre le coefficient de frottement et la rugosité selon [Noakes, 1988]*

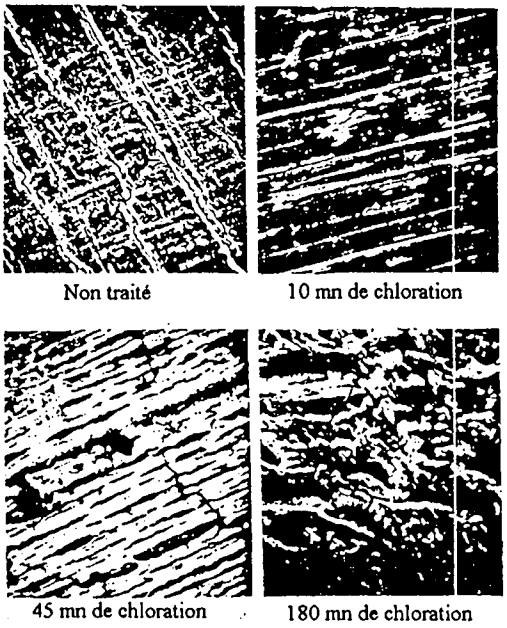


Figure 4.3.12: *Micrographie par balayage électronique de caoutchouc naturel traité ou non selon [Noakes, 1988]*

Le graphique 4.3.10 est quelque peu trompeur car les valeurs ne tiennent pas compte uniquement de la dureté de la surface chlorée mais aussi de celle du matériau du dessous, si bien que la relation entre la microdureté du contact et le coefficient de frottement est diluée.

b Charges lubrifiantes

Selon [Noakes, 1988] (USA) et [Kogure, 1992] (Japon), les lames de caoutchouc utilisées industriellement sont recouvertes de graphite, de PTFE ou de disulfure de molybdène pour diminuer le coefficient de frottement.

- **Graphite**

Selon [Takadoum], c'est un corps à structure lamellaire. La poudre de graphite peut être employée en milieu acqueux. Comme le disulfure de molybdène MoS_2, le graphite est assimilé au frottement lubrifié (c.f. 4.3.3) en raison de sa faible résistance en cisaillement

(composants lamellaires). Déposés sous forme de poudre à la surface des deux solides en contact, ils assurent une lubrification imparfaite et temporaire.

- **PTFE**

Selon [Takadoum] et [Noakes, 1988], le PTFE existe sous forme de poudre, de résine ou de fibre. Il diminue le coefficient de frottement.
Ses propriétés de frottement sont dues à ses très faibles propriétés adhésives et à son fort taux d'usure. Ainsi, si les surfaces en contact ne sont pas renouvelées, les deux surfaces sont recouvertes de PTFE et un frottement PTFE / PTFE survient.

- **Disulfure de molybdène** MoS_2

Selon [Takadoum], Il est comme le graphite à structure lamellaire. Il peut jouer le rôle d'agent de nucléation. Par exemple ajouté à du Nylon 6-6, il permet d'obtenir une peau de moulage semi-cristalline, qui offre un coefficient de frottement plus faible et plus régulier que la surface habituelle amorphe.

c Grain de carbone

Selon [Moore, 1972], les particules de noir de carbone sont nécessaires pour prévenir une usure exagérée de la lame. Il est préférable d'avoir des particules les plus petites possibles.

d Caoutchouc naturel et synthétique

Le terme de caoutchouc synthétique est employé par opposition au terme de caoutchouc naturel. Le caoutchouc synthétique peut être obtenu par transformation du caoutchouc naturel ou directement en employant des produits de synthèse. Ces deux types de caoutchoucs sont utilisés dans les lames d'essuie-glace, parfois ensemble (coextrusion).

e Autres composants et diffusion

- **Charges diverses classiques**

D'après [Kogure, 1992], le caoutchouc naturel (NR) est principalement utilisé pour les lames de caoutchouc. Le Chloroprène (CR) est mélangé avec le caoutchouc naturel dans le but de combler les défauts de résistance à l'ozone. NR + SBR (styrène butadiene rubber) est aussi utilisé pour augmenter la résistance à l'usure.
Selon [Takadoum], ces charges peuvent être des stabilisants, des antioxydants, des anti UV, des ignifugeants, des antistatiques, de la silice, de l'oxyde de titane, des pigments, des colorants, etc. Il est bon de tenir compte de leur présence, car ces composés, malgré leurs faibles concentrations, peuvent avoir une influence importante sur le coefficient de frottement.

- **Diffusion**

Selon [Cognard], les polymères utilisés en pratique sont des mélanges de chaînes de différentes longueurs auxquelles on ajoute des additifs destinés à les protéger ou à modifier leurs propriétés. Les éléments de plus basse énergie superficielle migrent à la surface.

4.3.2.3 Effet de différents paramètres

A Influence de l'état de surface

a *Influence de la rugosité*

[Barquins et Roberts, 1987], ont représenté les variations du coefficient de frottement d'un caoutchouc naturel non chloré suivant le paramètre $a_T v$ (c.f. 4.3.2.3.C.a) pour des surfaces lisses et rugueuses et pour deux types de contact. Le coefficient de frottement est certes différent selon la rugosité mais en outre, son influence varie suivant le contact. Par exemple sur les figures 4.3.13 et 4.3.14 les types de contact assez proches: sphère(s) en verre et patin en caoutchouc. Pourtant ils génèrent des courbes differentes. En effet, l'influence de la rugosité est différente et la valeur maximale de frottement est plus faible dans le cas du verre ondulé. Remarquons cependant que sur ces courbes le maximum de frottement est atteint pour la même abscisse aussi bien pour une lentille de verre que pour du verre ondulé.

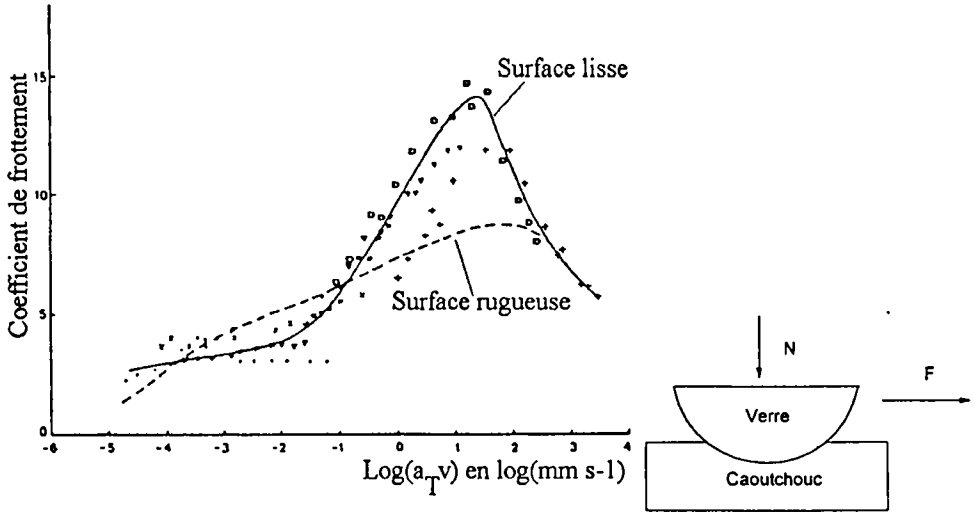


Figure 4.3.13: *Variation du coefficient de frottement pour une sphère en verre selon [Barquins et Roberts, 1987]*

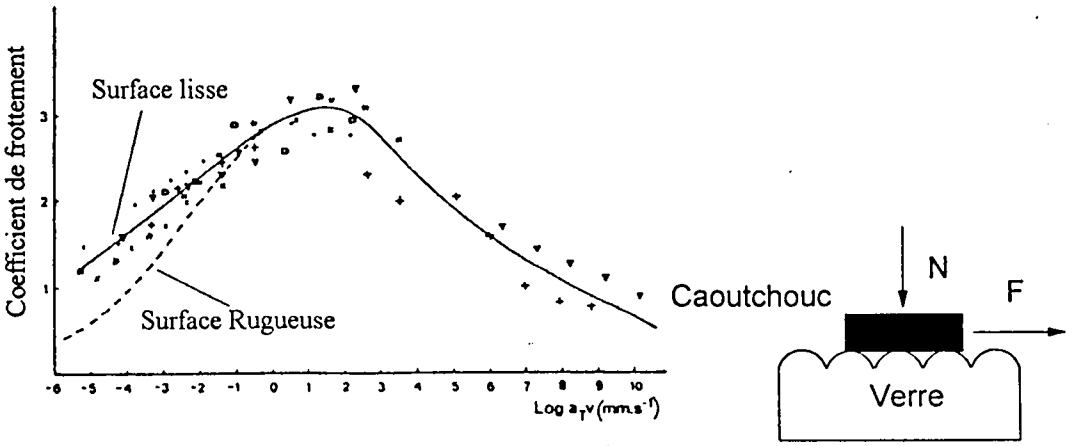


Figure 4.3.14: *Variation du coefficient de frottement pour du verre ondulé selon [Barquins et Roberts, 1987]*

Selon [Barquins et Roberts, 1986], pour connaître l'influence de la rugosité sur le frottement, un patin de caoutchouc naturel a été frotté avec du papier abrasif. La rugosité a réduit le coefficient de frottement au maximum de 25% (tableau 4.3.2).

Vitesse (mm $^{s^{-1}}$)	Vitre lisse (coefficient de frottement)	Vitre rugueuse(coefficient de frottement)
10	1,84	1,79
1	1,62	1,49
0,1	1,47	1,13
0,01	1,22	1,01

Tableau 4.3.2: *Mesures de coefficients de frottement du caoutchouc naturel sur du verre ondulé selon [Barquins et Roberts, 1986]*

B Influence du temps

a *Influence du passé*

Selon [Barquins, 1993], si la vitesse de glissement est annulée, le coefficient de frottement tend, après un temps de relaxation interfacialle non nul, vers une valeur finie qui dépend de la charge normale et du rayon de courbure de la vitre.
Selon [Barquins et Roberts, 1986], comme le montre la figure 4.3.15, il existe une différence entre la surface de contact statique et dynamique. En statique le coefficient de frottement est plus élevé et comme précédemment la théorie de Hertz s'applique relativement bien (fig. 4.3.15).

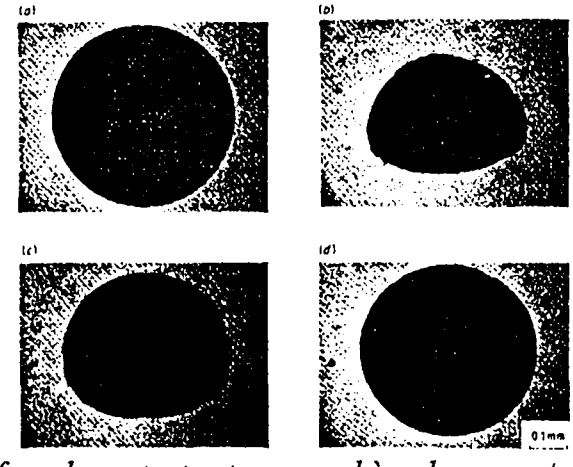


Figure 4.3.15: *Surface de contact entre une sphère de verre et une surface plane de caoutchouc: (a) état de repos initial, (b) glissement constant, (c) 1 seconde après l'arrêt, (d) 24 heures après l'arrêt selon [Barquins et Roberts, 1986]*

Nous pouvons retenir de ces expériences que la réponse à un changement n'est pas instantanée mais que le matériau a un effet mémoire non négligeable à notre échelle de temps. A titre d'exemple, le temps de passage entre les photos b) et c) de la figure 4.3.15 est identique à celui d'un aller-retour d'un essuie-glace.

b ***Influence du vieillissement***

Avec le temps, les liaisons entre les atomes de carbone et de chlore disparaissent en surface sous l'effet de l'oxydation et des attaques d'agents atmosphériques. Quelques résultats sont présentés au 4.3.2.3.F. où le coefficient de frottement augmente avec le temps (vieillissement simulé par exposition à une température élevée).
De plus les chaînes de caoutchouc sont de plus en plus réticulées, le caoutchouc devient ainsi plus dur et son module d'Young augmente.
Sous l'effet de la charge normale et de la température, le caoutchouc flue, changeant ainsi les paramètres géométriques et de contact. Pratiquement la lame de caoutchouc, à l'arrêt, est soumise à la force d'appui du ressort et se couche légèrement du fait de son élasticité et des paramètres géométriques. En fluant, elle se couche davantage, mais cette fois-ci de façon non réversible, engendrant ainsi une dissymétrie qui peut être importante. En outre il a été constaté que le coefficient de frottement peut être multiplié par deux dans le cas d'un pare-brise vieilli et d'une surface mouillée.

c ***Rodage***

[Begout, 1979], a relevé pendant une heure, à intervalles réguliers, le coefficient de frottement. Une diminution continue du frottement au cours du temps a été observée. Le coefficient de frottement perd jusqu'à 40% de sa valeur initiale en une heure de fonctionnement (fig. 4.3.16). Ce phénomène est dû à l'accumulation sur l'échantillon de particules de poussière et de débris d'usure. Le coussin ainsi formé diminue les contacts entre le caoutchouc et le verre. Si la lame est débarrassée de ces particules accumulées, le coefficient de frottement ne retrouve sa valeur initiale qu'à 15% près. Ceci prouve que la surface de contact a été modifiée. Si maintenant, ce procédé est systématiquement répété, c'est à dire si l'échantillon est nettoyé régulièrement avant chaque relevé (fig. 4.3.17), la valeur du coefficient augmente un certain temps avant de se stabiliser: une sorte de rodage s'est effectué.

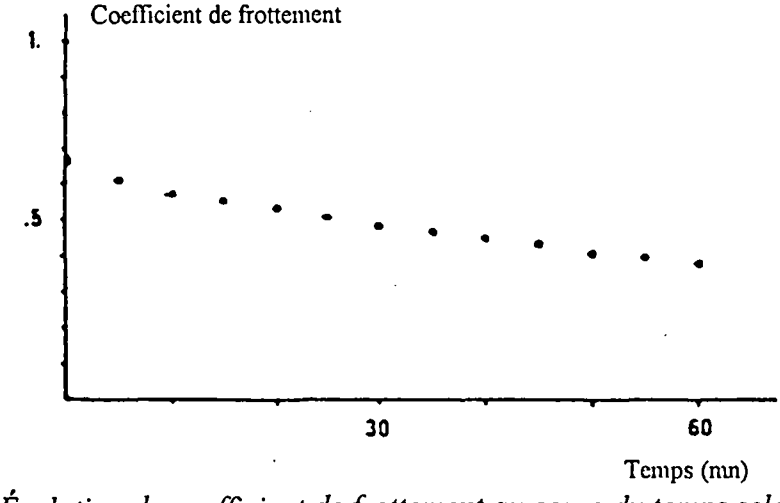


Figure 4.3.16: *Évolution du coefficient de frottement au cours du temps selon [Begout, 1979]*

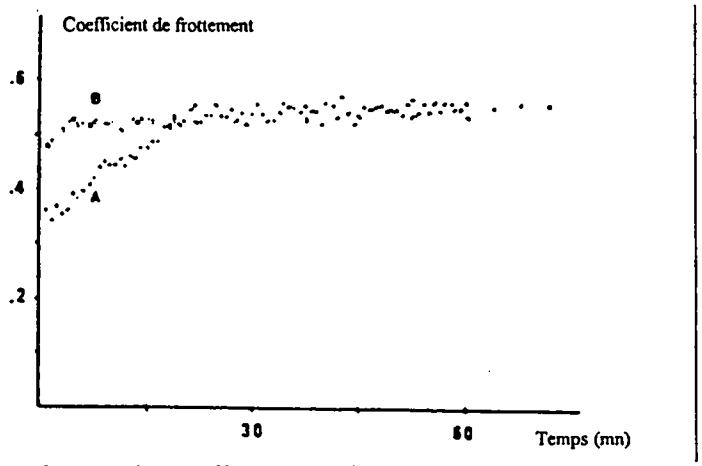


Figure 4.3.17: *Evolution du coefficient de frottement au cours du temps en nettoyant à intervalles réguliers: A: côté avec bavure, B bord arrondi, selon [Begout, 1979]*

C Influence de la température et de la vitesse (paramètre $a_T v$)

a Théorie principale : utilisation du paramètre $a_T v$

Selon [Barquins et Roberts, 1987], le frottement du caoutchouc montre un accroissement avec la vitesse de glissement. Schallamach (1953) montra que pour une force tangentielle constante, la vitesse résultante de glissement était dépendante de la température. Une relation exponentielle fut déduite de ces expériences qui était similaire à la relation entre la fluidité et la température observée dans un fluide visqueux. Il suggéra que le glissement du caoutchouc était un phénomène dépendant de la vitesse et basé sur un mécanisme d'activation. Aucun modèle n'était donné mais l'image générale était celle de molécules de caoutchouc en agitation thermique à l'interface de glissement. La fréquence des sauts qu'elles faisaient dépendait de la température, cependant en l'absence de force externe, la direction des sauts était aléatoire.

Au début des années 60, plus de preuves expérimentales ont été données (Bulgin en 1962, Grosch en 1963, Bartenev et El'kin en 1965, Ludema et Tabor en 1960) sur la dépendance du frottement du caoutchouc, sur la vitesse et la température. Les expériences menées par Grosch en 1963 montrèrent un parallèle étroit entre le frottement et les propriétés viscoélastiques connues du caoutchouc. Ses résultats de frottement ont été assemblés sur une simple courbe à l'aide d'une transformation appelée du nom des initiales de trois auteurs "W.L.F" (Williams, Landel et Ferry) (équation 4.3.11).

Selon [Barquins Roberts, 1987], les données montrent une augmentation graduelle du coefficient de frottement avec le coefficient $a_T v$ jusqu'à ce que la région vitreuse soit atteinte puis il diminue. Précisons que $\log(a_T) = -8.86 \dfrac{T - T_g - 50}{51{,}5 + T - T_g}$, (4.3.11)

avec T : la température de l'essai,

T_g : la température de transition vitreuse,

v : vitesse de glissement.

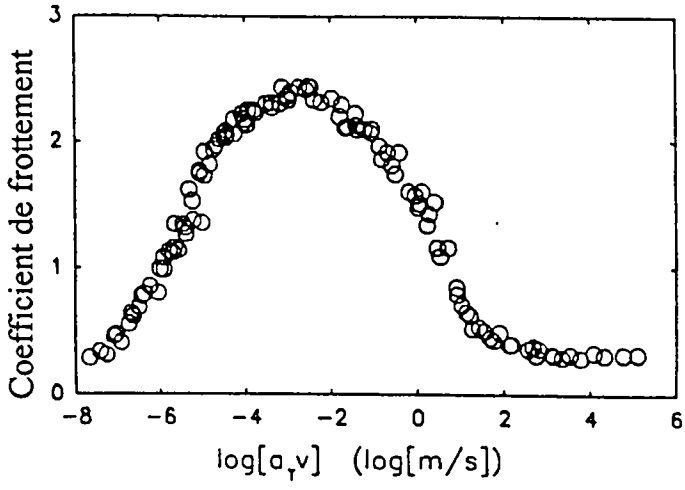


Figure 4.3.18: *Courbe de frottement du caoutchouc naturel obtenue par Grosch selon [Barquins Roberts, 1987].*

[Barquins et Roberts, 1986], n'ont pas tout à fait retrouvé la courbe de Grosch. En effet, les points coïncident sauf aux valeurs plus importantes de $a_T v$, où il trouve un coefficient plus important et assez constant contrairement aux résultats de Grosch. Pourtant, le même matériel et les mêmes matériaux avaient été utilisés. Certaines hypothèses, notamment sur les composantes d'hystérésis, ont été avancées. Cette deuxième composante d'hystérésis qui dépend de l'état de surface pourrait expliquer des écarts entre plusieurs expériences. Ainsi pour un disque de caoutchouc plat, glissant sur un patin plat de métal poli, pour des températures situées 60° au-dessus de la transition vitreuse du caoutchouc, Barteney et El'kin en 1965 ont constaté une diminution du coefficient de frottement lorsque la température était augmentée.

Pour [Begout, 1979], (fig. 4.3.19) le coefficient de frottement est bien la somme de ces composantes. Les composantes d'adhérence et d'hystérésis atteignent leur maxima respectivement pour des vitesses bien inférieures et bien supérieures aux vitesses couramment rencontrées par la lame d'essuie-glace.

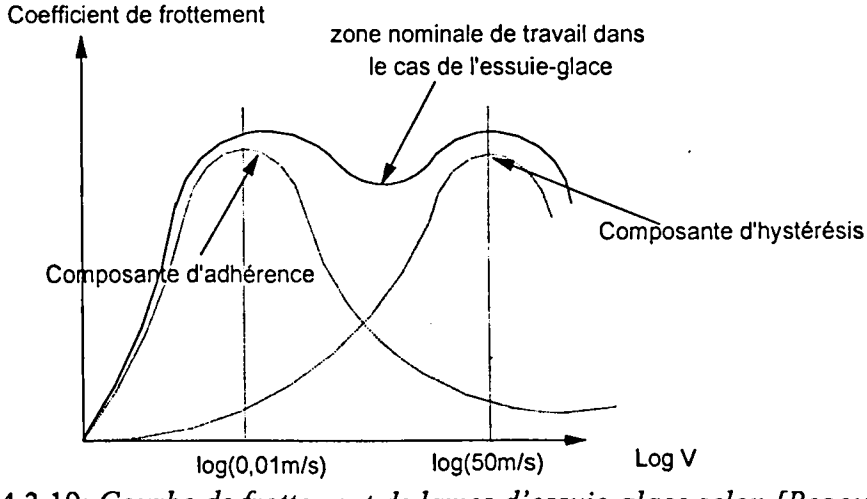


Figure 4.3.19: *Courbe de frottement de lames d'essuie-glace selon [Begout, 1979]*

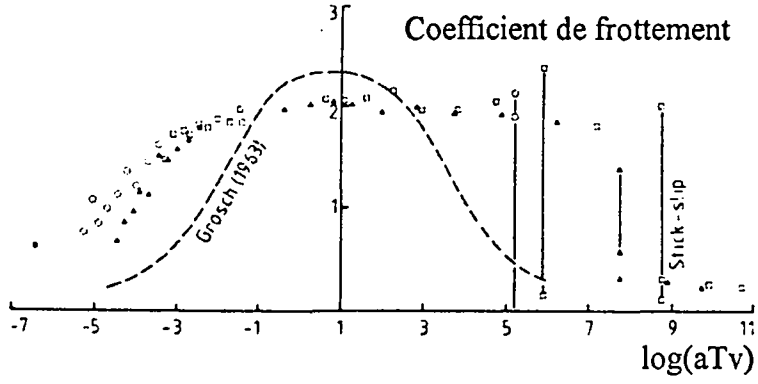


Figure 4.3.20: *Comparaison entre les courbes de frottement obtenues par Grosch et Barquins, Roberts selon [Barquins et Roberts, 1987].*

Des théories ont tenté d'expliquer la courbe de Grosch. Plusieurs sont exposées dans la thèse de [Begout, 1979]. Retenons néanmoins le principe de ces théories concernant les deux phénomènes rentrant en concurrence:

* la force moyenne régnant à une jonction croît avec la vitesse alors que la durée de la liaison décroît.
* le nombre de jonctions décroît de façon continue quand la vitesse croît.

Le lien avec le module d'Young a été effectué en modélisant les pertes visqueuses par un modèle de Voigt (fig. 4.3.21).

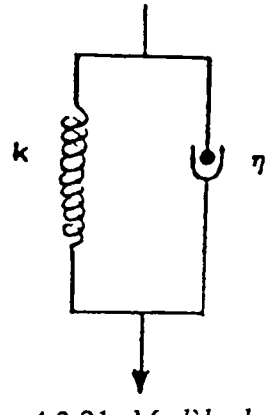


Figure 4.3.21: *Modèle de Voigt*

D Influence mal connue de l'humidité

Selon [Noakes, 1988], le coefficient de frottement varie avec l'humidité mais l'auteur ne donne pas plus de précision. L'influence de l'humidité n'est pas maîtrisée à l'heure actuelle. Nous allons essayer, dans ce paragraphe, de mettre en évidence au travers de la bibliographie son influence électrostatique et chimique qui agissent directement sur le frottement.

Selon [Cognard], lors du contact entre un solide et un liquide, il se produit à l'interface une distribution de charges électriques avec formation d'une double couche composée d'une première couche compacte d'ions suivie d'une couche diffuse. Cette couche diffuse s'étend, dans les liquides contenant peu d'ions, sur une longueur de plusieurs microns. Les charges électriques présentes à la surface du solide et celles distribuées dans le liquide créent un condensateur. Ce condensateur agit sur une grande distance.

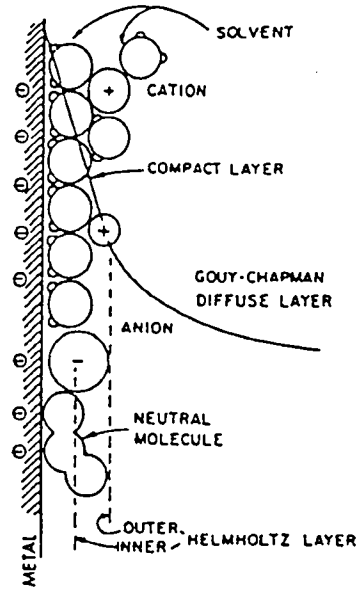


Figure 4.3.22: *A l'interface entre le solide et le liquide, il se produit une distribution de charges électriques avec formation d'une 'double couche' composée d'une première couche compacte d'ions suivie d'une couche diffuse de charges réparties sur une distance qui peut atteindre* 10 μm *selon [Cognard].*

La chimie des surfaces est encore très mal connue et fort complexe. La raison tient au fait que les surfaces réelles sont très hétérogènes et le siège de nombreux échanges. Par exemple, les surfaces inorganiques s'oxydent, adsorbent des éléments atmosphériques, de l'eau qui transforme l'oxyde en hydrate, des hydrocarbures. De plus les oxydes sont des composés réactifs : ils sont utilisés comme catalyseurs. Leurs effets sont visibles mais non expliqués, par exemple ils réagissent avec le liquide utilisé pour la mesure de l'énergie libre de surface parce qu'ils provoquent une variation de la valeur de l'angle de contact selon que le liquide avance sur la surface ou recule. Ce ne sont pas là les seuls effets de l'humidité. En effet, en mesurant l'angle de contact pour différents liquides sur divers substrats solides inorganiques, [Cognard] a constaté toujours la même valeur. La surface se comporte comme un solide moléculaire, ne donnant que des interactions de van der Waals d'énergie apparente $40 mJm^{-2}$. Il s'agit d'une propriété caractéristique de la couche adsorbée par le solide à partir des éléments atmosphériques appelée "couche atmosphérique". L'épaisseur de la couche varie

avec l'humidité relative entre 10 et 120Å. [Ludema] ajoute que dans l'air, une quantité importante de vapeur d'eau est adsorbée par les oxydes et les autres matériaux comme l'or et le plastique qui ne s'oxydent pas rapidement. Les gaz sont également adsorbés et peuvent être de la même épaisseur que le film d'oxyde. L'adsorption est un phénomène très rapide. En effet l'oxygène peut constituer son revêtement à 50% en seulement $1{,}75.10^{-9}$ s. L'analyse n'est pas simple car l'influence sur le frottement de tous les films n'est pas toujours la même. Cependant l'auteur constate que l'eau adsorbée agit normalement comme un lubrifiant.

E Influence du produit de nettoyage

Selon [Barquins et Roberts, 1986], avec le temps, le mélange de caoutchouc naturel développe une 'floraison' due à la diffusion libre des ingrédients vers la surface. Cette floraison peut être éliminée avec de bons solvants. Différents solvants ont été testés sur la surface d'un patin de caoutchouc, ce dernier étant amené à frotter sur du verre ondulé. Les résultats de l'étude (tableau 4.3.3) montrent que différents solvants produisent des niveaux semblables de frottement, et que, paradoxalement, la poussière est un facteur plus important dans la réduction du frottement que la floraison (ingrédients ayant migré vers la surface).

Condition de surface	Coefficient de frottement à différentes vitesses			
	0,001	0,1	1	10
'floraison' présente, pas de poussière	1,08	1,37	1,49	1,64
nettoyé à l'acétone	1,13	1,34	1,61	3,79
nettoyé à l'isopropanol	1,06	1,30	1,61	1,82
nettoyé à l'acétylacétone (sans 'floraison')	1,03	1,25	1,61	1,84

Tableau 4.3.3: *Coefficient de frottement suivant le type de nettoyage selon [Barquins et Roberts, 1986]*

F Influence des produits d'usure

Selon [Barquins et Roberts, 1986], le frottement du caoutchouc sur le verre peut produire un enduit, un produit visqueux issu de la surface de caoutchouc, qui peut influencer le niveau de frottement . Pour évaluer ce facteur, le coefficient de frottement a été mesuré à des nombres de cycles (aller et retour) prédéfinis, pour un patin de caoutchouc naturel frottant contre du verre (tableau 4.3.4). De minuscules morceaux de caoutchouc se déposent sur la vitre. Ainsi, le verre lui-même apparaît collant là où a lieu le frottement. Lorsque ces morceaux de caoutchouc étaient trop important, le parcours a été brossé pour les enlever. Le même comportement se produit que la température soit faible ou forte. Nous remarquons que quelle que soit la température, le coefficient de frottement reste relativement constant même pour les échantillons de caoutchouc vieilli artificiellement (portés à 90°c pendant quelques heures).

Nombre de frottements	âgé thermiquement	nouveaux échantillons		
	20°	20°	65°	90°
10			1,73	1,25
20			1,67	1,21
40			1,62	1,18
100	1,98	1,87	1,54	1,10
200	1,98	1,92	1,47	1,03
300	2,00	1,87		0,96
400	1,98	1,86	1,40	
500		1,96		
600		1,95		

Tableau 4.3.4: *Évolution du frottement au cours des cycles selon [Barquins et Roberts, 1986]*

[Rorrer et Eiss, 1995], ont mis en évidence qu'une partie des chaînes de caoutchouc se séparent en deux lors du glissement (rupture cohésive). Ainsi des éléments restent accrochés au verre. Dans le cas d'un frottement sans eau obtenu avec un caoutchouc naturel, un film de transfert de 50-100 Å est observé par ellipsométrie (projection de lumière polarisée selon un angle donné par rapport à la surface et analysée de l'autre côté selon le même angle). Les auteurs se sont intéressés au frottement entre le caoutchouc et l'epoxy cathodique. Ils ont remarqué que le système peut être vu comme la combinaison de deux surfaces impliquées, une au niveau de la surface de contact et l'autre au niveau de la rupture du caoutchouc (glissement cohésif). Pour des raisons énergétiques, le coefficient de frottement est plus élevé en présence de glissement cohésif. La proportion des deux surfaces intervenant dans le frottement joue donc un rôle important sur la valeur du coefficient de frottement.

G Influence de la force normale

a Relation linéaire entre la surface réelle de contact et la force de frottement

Selon [Extrand et al, 1990], et selon [Noakes, 1988], la force de frottement dépend fortement de la force normale. En fait comme le caoutchouc est assez malléable, la surface réelle de contact augmente avec la force normale, augmentant du même coup la force d'adhérence.

Selon [Barquins et Roberts, 1986], Schallamach (1952) fit frotter des hémisphères de caoutchouc contre une plaque transparente et observa que le diamètre de contact varie avec la charge appliquée selon la formule classique de Hertz (1896). Il en déduisit que le coefficient de frottement varierait à la puissance -1/3 de la charge, supposant que la force de frottement était proportionnelle à l'aire de contact. Il vérifia cette hypothèse, non pas avec des hémisphères, mais avec des patins à lames de caoutchouc moulés, faisant l'hypothèse que les aspérités de surface peuvent être approximées par des hémisphères et trouva une gamme de charges limites pendant laquelle le frottement varierait comme prévu. Des expériences ultérieures (Schallamach 1957) montrèrent qu'en augmentant la charge, les aspérités sont écrasées dans un bloc solide et la surface réelle de contact approchait une valeur de saturation. En conséquence la force de frottement approchait une valeur limite. C'était une preuve supplémentaire de la relation directe entre la force de frottement et l'aire de contact.

Selon [Barquins et Roberts, 1986], si l'aire de contact est donnée comme une fonction de la charge normale N par la théorie de Hertz (1896) et si selon l'hypothèse de Schallamach (1952) la force de frottement est proportionnelle à cette surface de contact (notée $A = \pi a^2$ avec a rayon de contact), alors le coefficient de frottement φ peut être écrit:

$$\varphi = \pi S\left(\frac{9R}{16E}\right)^{2/3} N^{-1/3}, \qquad (4.3.12)$$

avec R: rayon de courbure de l'élément glissant,
S: contrainte de cisaillement,
E: module d'Young,
N: force normale.

Les données effectuées aussi bien avec une sphère de verre qu'avec du verre ondulé ou du papier abrasif ont été tracées sur la figure 4.3.23.

La figure 4.3.24 montre que la relation est bien vérifiée dans le cas statique

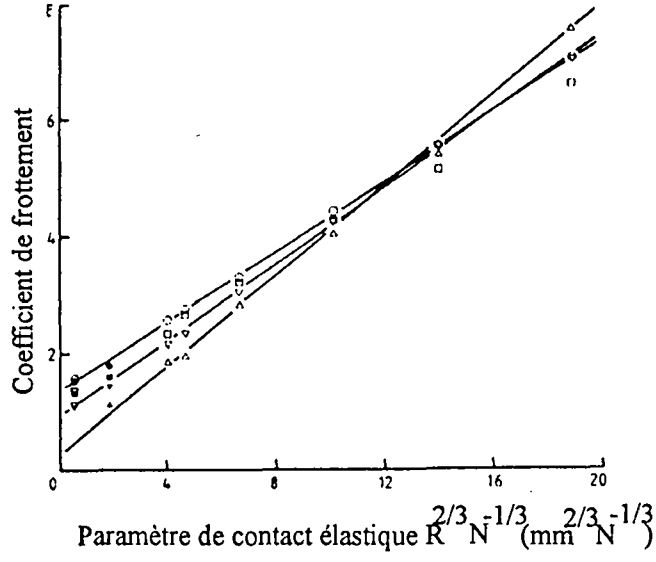


Figure 4.3.23: *Vérification de la loi de Hertz pour le frottement dynamique du caoutchouc dans différentes configurations (sphère de verre, verre ondulé, papier abrasif(SiC)) Les droites tracées sont obtenues pour des vitesses données (0,01 0,1 1 et 10 mm s^{-1}) selon [Barquins et Roberts, 1986]*

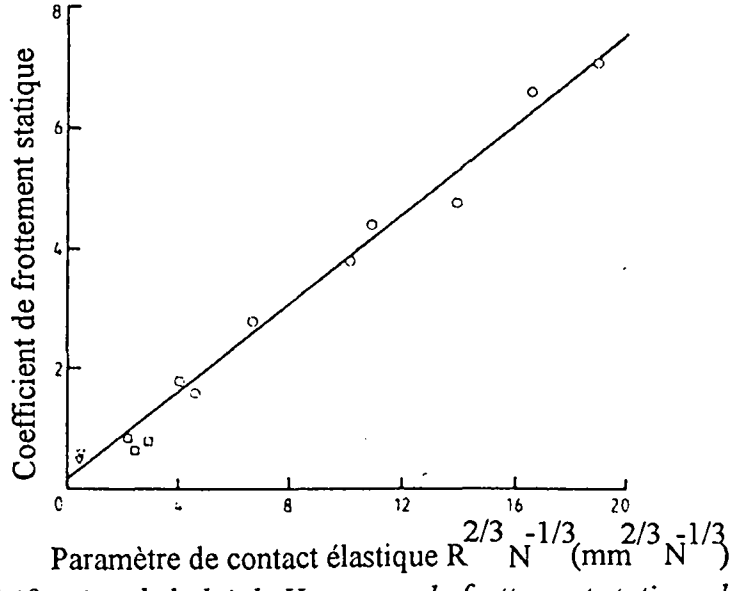


Figure 4.3.24: *Vérification de la loi de Hertz pour le frottement statique du caoutchouc dans différentes configurations (sphère de verre, verre ondulé, papier abrasif(SiC)) selon [Barquins et Roberts, 1986]*

b Composante supplémentaire d'adhésion

Les surfaces en vis à vis s'attirent mutuellement. Selon la théorie de Jonhson, Kendall, Roberts (1971) établie pour une sphère de rayon R sur laquelle on applique une force normale N, la force normale totale N_T au contact est égale à:

$$N_T = N + 3\pi\omega R + \sqrt{(3\pi\omega R)^2 + 6\pi\omega RN}\,, \qquad (4.3.13)$$

avec ω énergie de Dupré évoquée précédemment.
Il est important de tenir compte de cette force dans le calcul du coefficient de frottement car sinon lorsque N est nulle, le coefficient de frottement est infini.

c Léger écart avec la loi de Hertz

Sur la figure 4.3.23, pour une vitesse donnée, pour les trois types de frottement (SiC, lentille de verre simple et verre ondulé), les mesures du coefficient de frottement s'expriment linéairement en fonction de $R^{2/3}N^{-1/3}$. Par contre si la vitesse de glissement change, la droite varie légèrement. Pour [Barquins et Roberts, 1986], la raison pour laquelle ces droites s'éloignent de plus en plus de l'origine lorsque l'on augmente la vitesse, n'est pas clairement établie, mais peut présenter un écart avec la loi de Hertz quand l'aire de contact diminue (c.f. 4.3.15). Cela peut être dû aussi, en partie, aux pertes d'hystérésis de labourage dans le massif de caoutchouc. De faibles valeurs de $R^{2/3}N^{-1/3}$ impliquent de lourdes charges, des aspérités pointues, une condition qui produit des pertes d'hystérésis plus grandes (Zankin et Youdell 1981, Moore et Geyen 1974, Bowden et Tabor 1964). Une estimation du coefficient de frottement dû à l'hystérésis seule a été effectuée en faisant glisser le patin de caoutchouc naturel sur du verre ondulé et du papier abrasif, les deux saupoudrés de talc pour éliminer l'adhésion. Dans les deux cas le coefficient de frottement est moindre, à peu près de 0,2 sur vitre et 0,8 sur papier abrasif. Il apparaît une faible dépendance avec la vitesse de glissement. Selon les auteurs, il n'est pas déraisonnable de supposer que la déviation précédente soit due à ces pertes d'hystérésis.

d Interaction entre les forces adhésives et les contraintes élastiques

Nous avons déjà vu au 4.3.2.3.C qu'il existe des phénomènes viscoélastiques dans les chaînes d'élastomères. [Ludema] a étudié le comportement d'une balle de caoutchouc pressée contre une vitre plate rigide. En diminuant progressivement la charge, l'extérieur du diamètre de contact ne se désolidarise pas facilement. Une traction s'exerce en raison de la liaison adhésive. Finalement la charge normale peut être complètement retirée alors que la balle reste en contact avec la surface. Les bords extérieurs du contact subissent une traction et le centre du contact une compression par réaction. Le champ de contrainte élastique peut donc faire varier les forces de contact de façon importante et doit donc être pris en compte dans certains cas.

BU LILLE I

e Cas de l'essuie-glace

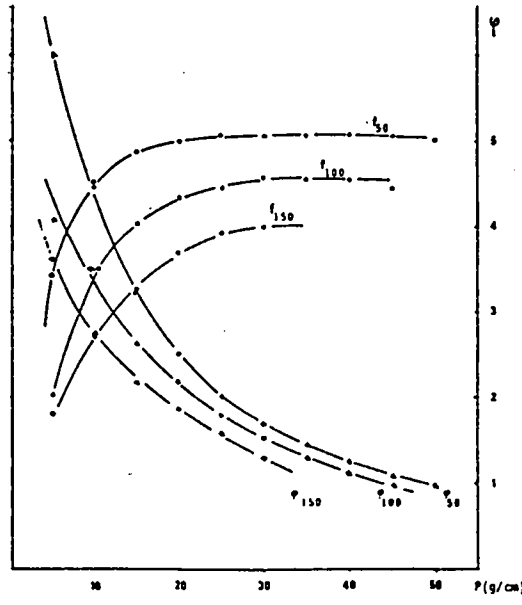


Figure 4.3.25: *Force par unité de longueur et coefficient de frottement en fonction de la pression linéique d'appui pour différentes longueurs de lames selon [Begout, 1979]*

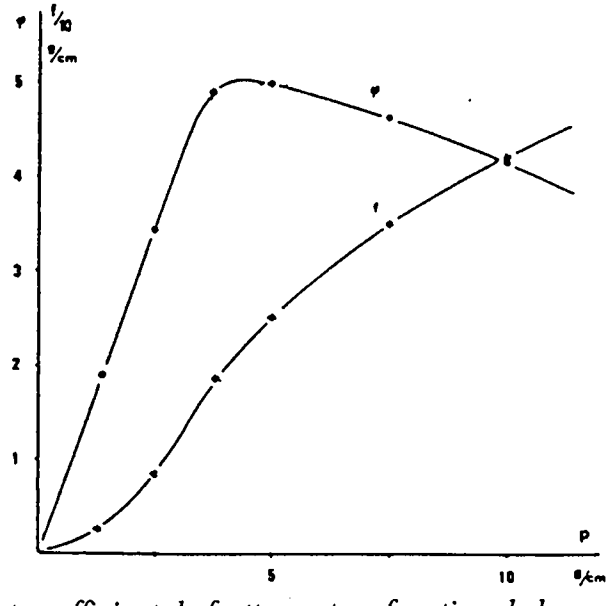


Figure 4.3.26: *Force et coefficient de frottement en fonction de la pression linéaire d'appui (détaillée pour p<10g/cm) selon [Begout, 1979]*

Figure 4.3.27: *Inclinaison de la lame pour une pression linéaire d'appui inférieure à 5 g/cm selon [Begout, 1979]*

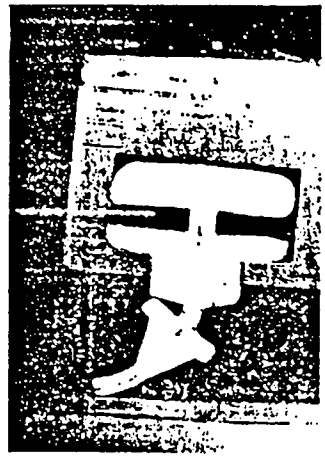


Figure 4.3.28: *Inclinaison de la lame pour une pression linéaire d'appui comprise entre 5 et 20g/cm selon [Begout, 1979]*

Figure 4.3.29: *Inclinaison de la lame pour une pression linéaire d'appui supérieure à 20 g/cm selon [Begout, 1979]*

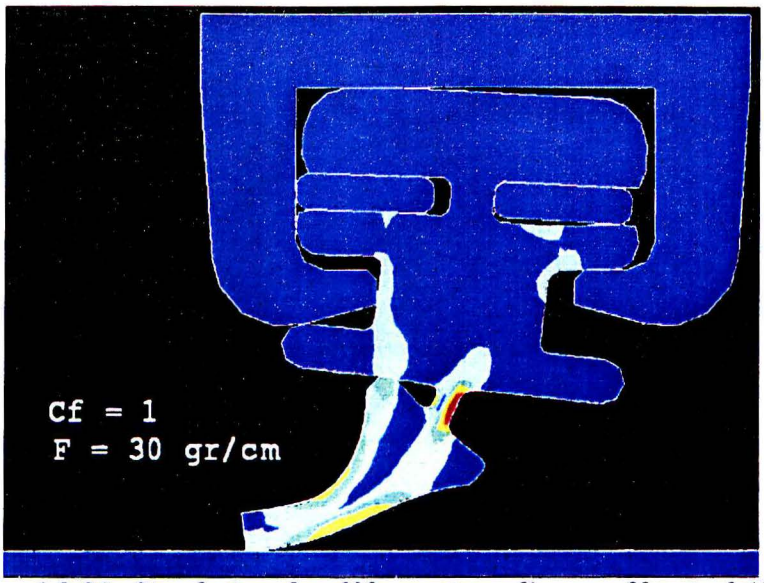


Figure 4.3.30: *Simulation des déformations d'un profil actuel (GC5)*

[Begout, 1979] a effectué des mesures de force de frottement (ramené à l'unité de longueur sur les graphiques des figures 4.3.25 et 4.3.26) et de coefficient de frottement pour différentes longueurs d'échantillon sur une machine rotative de frottement.
Trois zones sont à distinguer:

* $p \leq 5g/cm$ (fig. 4.3.27) avec p: pression linéique normale à la surface de contact. La courbe générale ne donne pas beaucoup de précisions. Néanmoins la tendance générale de la courbe est très claire : le coefficient de frottement croît rapidement pour les valeurs faibles de pression linéique d'appui. Nous serions donc en présence d'aspérités qui s'écrasent sous l'effet de la charge. De plus, le profil ne porte que sur l'arrête de la lame. La longueur de contact augmente rapidement avec la charge.
* $5g/cm \leq p \leq 20g/cm$ (fig. 4.3.28 et 4.3.30) (à l'heure actuelle 30g/cm si l'on considère les résultats d'affaissement des profils utilisés actuellement), le profil s'écrase de plus en plus sous l'action de la charge, augmentant ainsi la largeur de contact. Une estimation montre que l'aire A varie en $N^{0,6}$ soit une relation proche de celle obtenue avec des contacts sphériques.
* $p \geq 20g/cm$ (fig. 4.3.29) (30g/cm c.f. avant), le profil a atteint une inclinaison suffisante pour que la lèvre soit en contact sur toute sa surface avec le verre. A partir de ce moment-là, la forme même du profil présentant un décrochement au niveau de la lèvre, empêche l'aire de contact d'évoluer sensiblement sous la charge. Par la suite, si nous supposons que le frottement est proportionnel à l'aire de contact et que la force de frottement change peu, le coefficient de frottement évolue alors en $\frac{1}{N}$ ou en $\frac{1}{p}$. C'est ce que nous constatons sur la figure 4.3.25, $\varphi = \frac{54}{p}$ avec φ coefficient de frottement.

H Effet de la forme de contact

a Influence de la forme de contact sur la forme de la courbe de frottement

[Extrand et al, 1990] ont utilisé une lame d'essuie-glace frottant sur un cylindre en verre.

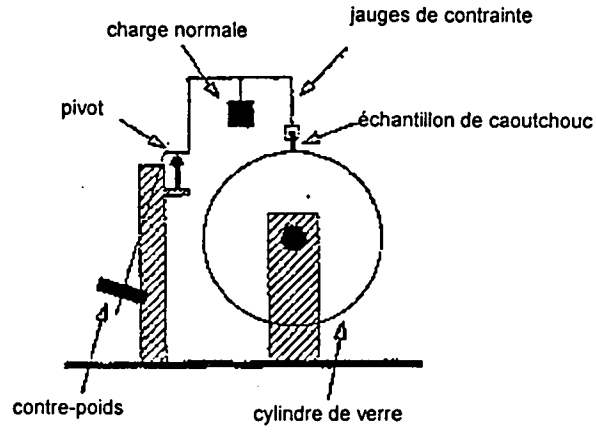


Figure 4.3.31: *Montage expérimental utilisé par [Extrand et al, 1990]*

Les largeurs des échantillons de caoutchouc sont choisies de façon à ce que le frottement porte sur une arrête et non sur un côté. Les auteurs ont montré que le fait d'utiliser des formes aiguisées, comme les lames d'essuie-glace, et non des patins, change la relation entre la pression normale et la surface de contact. Il est à noter que la hauteur de la lame a été ajustée pour que le contact se fasse sur une arrête. Le graphique 4.3.32 repésente la superposition de trois courbes: celle de Grosch ainsi que celles représentant le coefficient de frottement obtenu pour des contacts sphériques et du type de la lame d'essuie-glace. Nous remarquons que pour le même matériau, le caoutchouc naturel, le maximum de frottement est plus élevé et apparaît à des vitesses moins grandes (ou des températures plus élevées) pour la forme de la lame d'essuie-glace que pour une sphère.

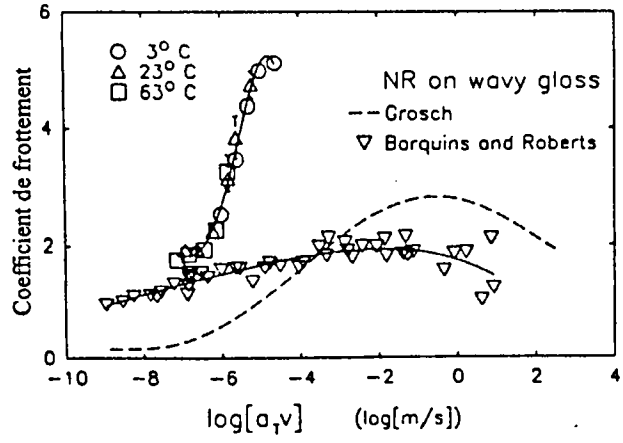


Figure 4.3.32: *Coefficient de frottement du caoutchouc naturel mesuré pour un contact du type de celui des lames d'essuie-glace en comparaison d'autres essais selon [Extrand et al, 1990]*

Les lames sont produites par deux en vis à vis; l'ensemble de ces deux lames s'appelle une jumelle. Selon [Begout, 1979], le cisaillement imposé au caoutchouc lors de la coupe des jumelles arrondit une arrête et laisse sur l'autre une légère bavure. Plusieurs lots d'une trentaine de lames ont été prélevés afin d'en estimer la dispersion (fig. 4.3.33). L'influence des deux côtés se manifeste par deux courbes de Gauss avec des maxima de valeurs différentes. Sur une même série des écarts entre valeurs de frottement peuvent dépasser 30%.

Il n'est donc pas possible de supposer que les lames sont identiques lorsque l'on effectue une série d'essai.

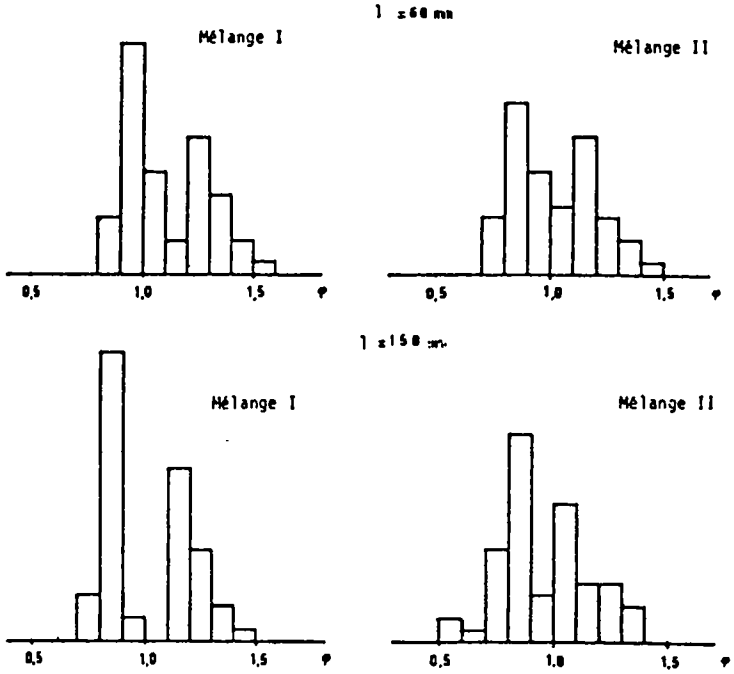


Figure 4.3.33: *Répartition de lames d'essuie-glace suivant leur coefficient de frottement pour différentes longueur d'échantillon selon [Begout, 1979]*

Lors d'essais, nous avons remarqué, que les lames n'étaient pas symétriques mais coupées en biseau. De plus pour des morceaux de lames issus d'une même lame, les coefficients de frottement étaient différents. Nous supposons que les différences constatées sont dues aux oscillations des couteaux qui séparent les jumelles et à un graphitage non uniforme des surfaces.

Selon [Begout, 1979], pour la majorité des solides viscoélastiques, l'aire de contact réelle A est donnée par:

$$A = KN^n \tag{4.3.14}$$

avec N : force normale,

K, n : constantes dépendant du type de contact sachant que $2/3 < n < 0{,}96$.

Si nous supposons que la contrainte est constante à chaque jonction de l'interface entre le verre et le caoutchouc, alors, comme l'indiquent certaines théories simplifiées de l'adhésion, la force de frottement est proportionnelle à la surface de contact: $F = A\sigma$ avec σ contrainte de cisaillement de l'élastomère. Le coefficient de frottement serait donc égal à

$$\frac{F}{N} = \frac{KN^n\sigma}{N} = KN^{n-1}\sigma \tag{4.3.15}$$

et donc le coefficient de frottement varie suivant une puissance de la force normale N^{n-1} avec $-1/3 < n-1 < 0$. Il est utile de rappeler que ce coefficient dépend du type de contact.

En fait cette formule est essentiellement valable pour les forces normales importantes. D'ailleurs les travaux de Roberts (1969) montrent une augmentation du coefficient de frottement avec la charge au départ. Cette différence s'explique par le fait que la charge appliquée est supportée en premier lieu par des petites protubérances du caoutchouc; passée une limite de charge, le reste de la surface vient rapidement en contact donnant ainsi une

augmentation rapide de la surface de contact et donc du coefficient de frottement. En fait les surfaces réelle et géométrique ne sont pas confondues aux faibles valeurs de force normale.

b ***Invariance de la pression de contact***

Selon [Extrand et al, 1990] (fig. 4.3.34), la pression de contact est indépendante de la pression appliquée. En effet la largeur de contact augmente proportionnellement avec la charge.

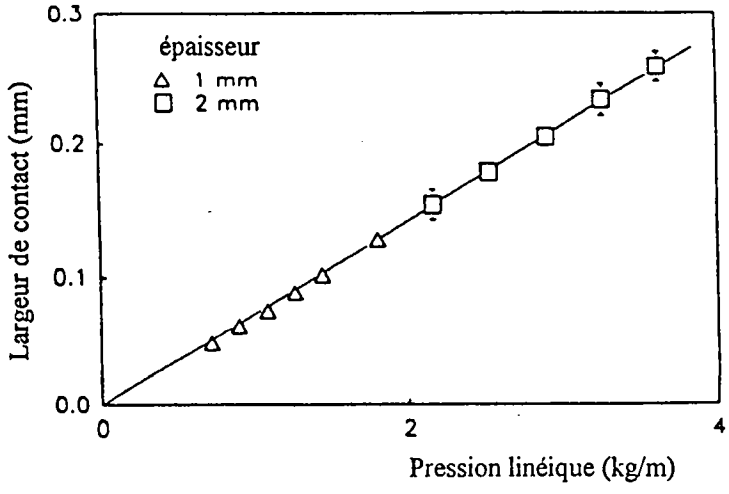


Figure 4.3.34: *Relation quasilinéaire entre la largeur de contact et la pression linéique d'appui selon [Extrand et al, 1990]*

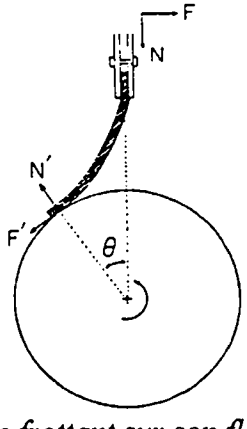


Figure 4.3.35: *Echantillon de lame frottant sur son flan; [Extrand et al, 1990] ont mis en oeuvre leur expérience pour que le contact se fasse toujours sur l'arrête.*

Nous remarquons aux figures 4.3.36 et 4.3.37, que la surface chlorée présente le même type de courbe qu'une surface de caoutchouc naturel.

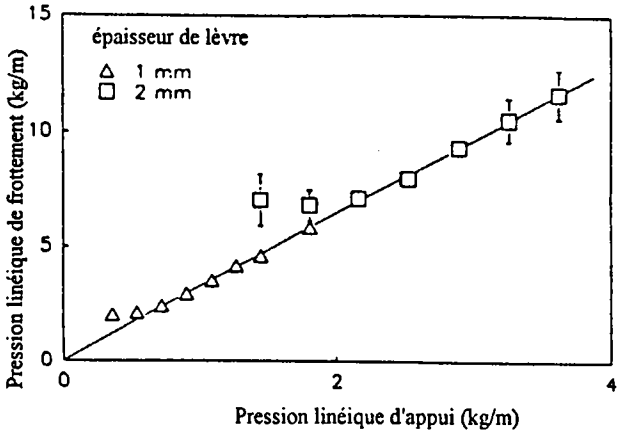


Figure 4.3.36: *Coefficient de frottement quasiconstant pour des lames de caoutchouc naturel selon [Extrand et al, 1990]*

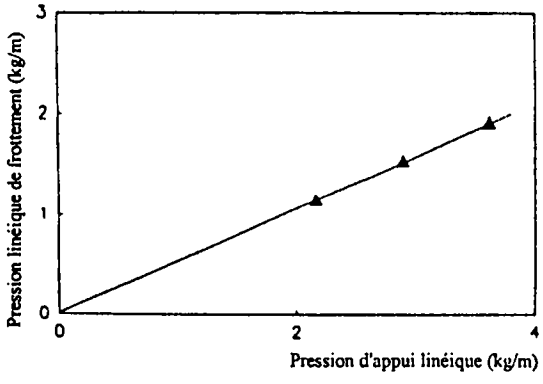


Figure 4.3.37: *Coefficient de frottement quasiconstant pour les lames chlorées selon [Extrand et al, 1990]*

c *Largeur de contact*

[Cummings et al, 1991] (fig. 4.3.38) ont mesuré la largeur de contact pour des pointes de caoutchouc naturel et non des lames. La largeur de contact augmente avec la force normale. Cette évolution (fig. 4.3.39) est rapide au début jusqu'à 50μm parce que la pointe présente à son extrémité une courbure, et ensuite plus lente mais proportionnelle à la charge appliquée. Ainsi la pression de contact moyenne dans les premières étapes de contact est très faible, à peu près 5 à 10% du module d'Young E et devient ensuite constante à peu près 65% de E, pour une large bande de charges appliquées jusqu'à 300N / m.
En exerçant la force méticuleusement, de façon symétrique, contre la glace, les auteurs ont trouvé un résultat similaire à celui obtenu par Roberts :

$$w = 2{,}2\left(\frac{N}{LE}\right) + 50\mu m \qquad (4.3.16)$$

avec w: largeur de contact (mm)
N: force normale exercée (N)
E : module d'Young (N/mm^2)
L: longueur de la lame (mm)

Par contre [Extrand et al, 1990], ont trouvé la formule suivante obtenue en exerçant une force tangentielle (direction de la force de frottement):

$$w = 14\left(\frac{N}{LE}\right) \tag{4.3.17}$$

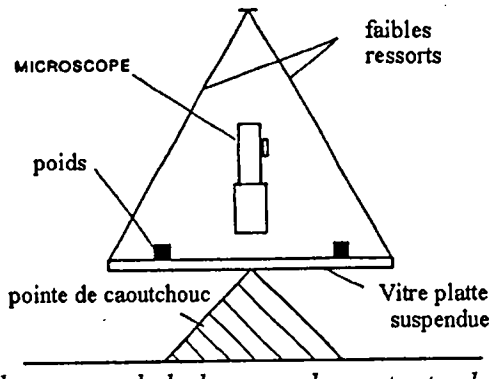


Figure 4.3.38: *Dispositif de mesure de la largeur de contact selon [Cummings et al, 1991].*

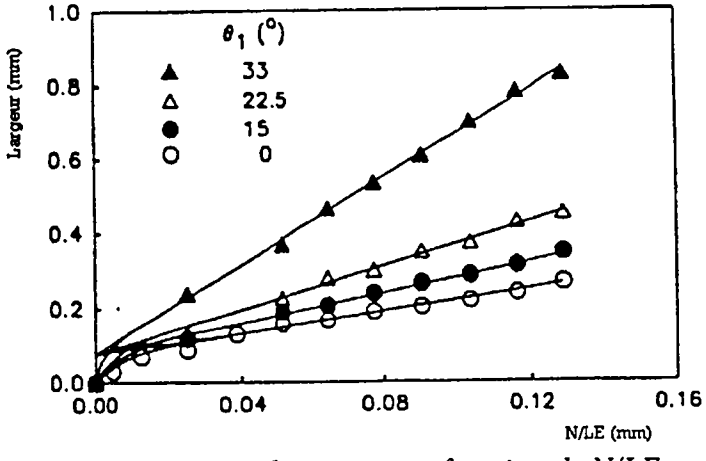


Figure 4.3.39: *Evolution de la largeur de contact en fonction de N/LE pour différents angles selon [Cummings et al, 1991].*

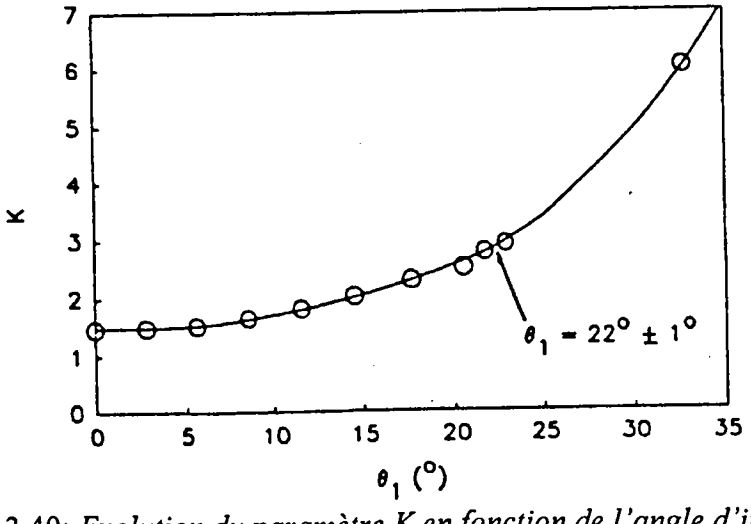


Figure 4.3.40: *Evolution du paramètre K en fonction de l'angle d'inclinaison selon [Cummings et al, 1991]*

En inclinant la lame par rapport à la verticale (angle θ_1 pris nul lorsqu'il n'y a pas d'inclinaison), la largeur de contact augmente. Sur le graphique précédent, le paramètre K est issu de la relation :

$$w = \frac{KF}{LE} + w_0 \qquad (4.3.18)$$

avec $w_0 \approx 50 \mu m$.

On peut noter que K varie de 1,48 à $\theta_1 = 0°$ jusqu'à 6 à $\theta_1 = 32{,}7°$.

Nous pouvons remarquer que la lame d'essuie-glace dans le cas de [Extrand et al, 1990] et comme nous le trouvons naturellement lors de nos essais, est inclinée, donc d'après le graphique précédent, présente une surface de contact plus importante. De plus, dans le cas de [Cummings et al, 1991] nous avons plus affaire à de la compression alors que pour une lame d'essuie-glace, nous nous trouvons en présence de flexion. Il est donc normal d'avoir une différence dans les largeurs de contact.

d ***Influence du rayon de courbure***

Selon [Barquins et Roberts, 1986], le principal résultat qui émerge de son étude, est l'importance de la géométrie de contact, qui, pour des solides élastiques dépend du module d'Young, du rayon de courbure relatif des solides en contact et de la charge normale appliquée. Cela a été clairement mis en évidence par les figures 4.3.23 et 4.3.24 basées sur l'aire de contact de Hertz. Pour le contact sphérique le coefficient de frottement variait en $R^{2/3}$. Le rayon de courbure a donc bien une influence sur le coefficient de frottement.

4.3.3 Frottement entre le caoutchouc et le verre en présence d'eau

4.3.3.1 Explication et équation du phénomène

A ***Préambule***

Nous allons examiner les équations de Reynolds que nous pouvons appliquer sans tenir compte des aspérités lorsque la vitesse est suffisante, puis l'influence des déformations du caoutchouc sous l'effet de la pression et enfin nous examinerons des résultats expérimentaux.

B ***Équation de Reynolds***

[Begout, 1979] a redeveloppé les équations de Reynolds en les appliquant au cas de l'essuie-glace.
Les hypothèses sont les suivantes:
* fluide newtonien,
* viscosité indépendante de la pression,
* la dimension associée à la hauteur du fluide est négligeable par rapport aux deux autres;
* les termes d'inertie sont négligeables par rapport aux termes de viscosités;
* la température reste constante à travers le film,
* écoulement isotherme,
* fluide incompressible,

la relation s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[h^3 \frac{\partial P}{\partial x}\right] = 6\mu V \frac{\partial h}{\partial x} + 6\mu h \frac{\partial V}{\partial x} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t} \qquad (4.3.19)$$

avec : h: hauteur du fluide,
μ : viscosité du fluide,
V: vitesse de glissement,
x: direction du mouvement,
P: pression du fluide.

Trois termes apparaissent dans l'expression (4.3.19) qui ont chacun un sens particulier:

$6\mu V \frac{\partial h}{\partial x}$, l'effet de coin,

$6\mu h \frac{\partial V}{\partial x}$, l'effet de déformation,

$12\mu \frac{\partial h}{\partial t}$, l'effet d'écrasement.

Le deuxième terme, l'effet de déformation, est négligé car seules les déformations globales sont prises en compte. L'intégration de l'équation en prenant en compte uniquement l'effet de coin conduit à une expression du coefficient

$$\varphi = \frac{7}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mu V}{N / L}}, \qquad (4.3.20)$$

L représentant la longueur de l'échantillon, N la force normale

L'intégration de l'équation en prenant en compte uniquement l'effet d'écrasement permet de déterminer le temps mis par le film d'eau pour changer de hauteur.

$$t = \frac{K\mu L_K^4}{N}\left[\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2}\right], \qquad (4.3.21)$$

avec h_1 et h_2 hauteurs initiales et finales.

avec L_K et K deux constantes dépendant uniquement de deux longueurs géométriques.
Begout a évalué ce temps dans un cas concret lié à l'essuyage à

$$t = 10^{-12}\left[\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2}\right]. \qquad (4.3.22)$$

Ainsi le passage de $h_1 = 100\mu m$ à $h_2 = 10\mu m$ est évalué à un centième de seconde. De plus il est apparu clairement que vitesse de glissement et hauteur de film variaient dans le même sens.
Des dispositifs optiques ont été utilisés pour mesurer l'écrasement du film entre des sphères de caoutchouc et des parois de verre. La descente est d'abord rapide et régulière puis plus lente jusqu'à une cinquantaine d'angströms, le film s'effondre alors brusquement. Ce brusque effondrement est probablement dû au rôle non négligeable des forces d'attraction entre solides. De tels comportements sont observés pour beaucoup de fluides : eau, huiles, silicones... Ainsi, dans la majorité des cas, le film est finalement détruit mais du liquide se trouve emprisonné entre les deux solides qui ne présentent alors que des contacts localisés.

C Effet supplémentaire des déformations : élastohydrodynamique

Selon [Moore, 1972], en raison des charges présentes dans la lame et des salissures sur le pare-brise, les effets élastohydrodynamiques prédominent dans la région de frottement mixte. La raison est simple: le caoutchouc a un faible module si bien qu'il aura tendance à se déformer plutôt que de laisser les pressions augmenter. De plus, comme la viscosité du lubrifiant est largement fonction de la pression, nous pouvons considérer la viscosité comme constante. La différence entre le régime hydrodynamique et le régime élastohydrodynamique se traduit par une déformation locale substantielle en régime élastohydrodynamique et un écart de pression au contact. De plus, comme la viscosité est fonction de la pression, elle sera différente pour les deux régimes.
Il existe un lien étroit entre la pression exercée et la forme du contact. Dans la majorité des cas, des calculs par itérations sont nécessaires. A chaque itération l'une des deux inconnues la pression ou le déplacement est calculée à partir de la seconde issue de l'itération précédente. Les équations sont celles de Reynolds pour la partie fluide et celle de l'élasticité classique pour les déformations. Nous allons étudier successivement la composante normale et tangentielle afin de bien déterminer l'effet de chacune d'elles. Comme nous l'avons évoqué dans le paragraphe 4.3.3.1.B la composante temporelle (effet d'écrasement) n'est pas négligeable et sera présente dans les schémas suivants.

a ***Effet de la composante normale***

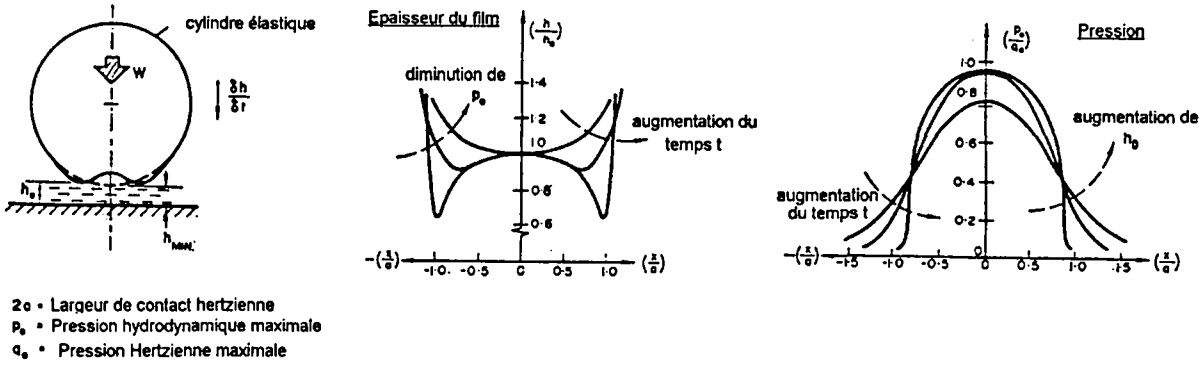


Figure 4.3.41: *Pression et épaisseur du film élastohydrodynamique pour un cylindre élastique approchant une surface rigide plane rugueuse selon [Moore, 1972]*

Selon [Moore, 1972], nous remarquons sur la figure 4.3.41, que la forme de contact change et que la surface se creuse et devient concave. La raison physique est l'importance de la pression au niveau de la ligne centrale du cylindre au départ. Si l'on applique uniquement une force normale, la sphère tend naturellement à s'approcher de la vitre. Pendant cette action d'écrasement, l'épaisseur du film sur la ligne centrale $h_0(t)$ décroît avec le temps. Comme nous l'avons évoqué dans le paragraphe 4.3.3.1.B la composante temporelle (effet d'écrasement) n'est pas négligeable. Vers la fin de l'approche, les pointes du cylindre déformé (fig. 4.3.41) tentent d'obstruer et de piéger le lubrifiant dans la cavité. Pendant une période assez longue, le lubrifiant emprisonné s'écoule latéralement et disparaît complètement après un temps infini selon les calculs.

b ***Effet de la composante tangentielle***

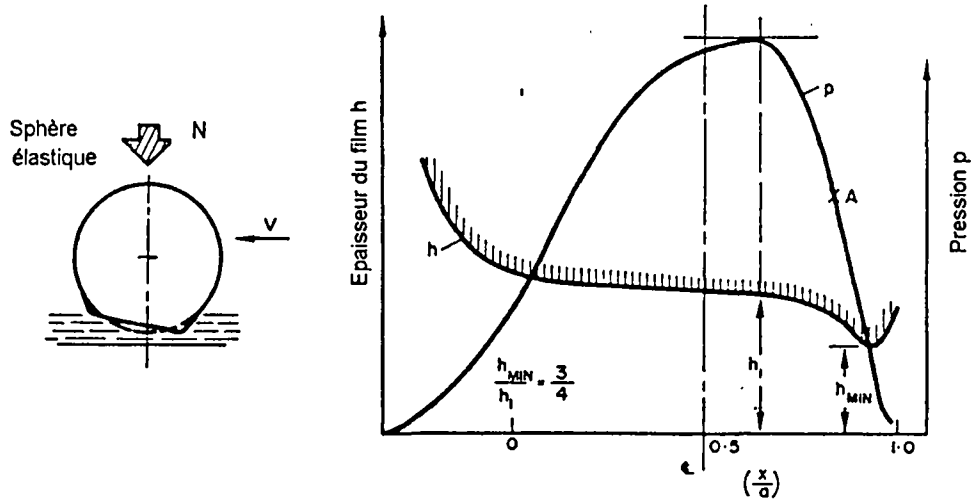


Figure 4.3.42: *Pression et épaisseur du film élastohydrodynamique pour une sphère élastique approchant une surface rigide plane rugueuse selon [Moore, 1972]*

Les résultats des simulations de [Moore, 1972] sont représentés sur la figure 4.3.42. Nous pouvons observer qu'une constriction apparaît vers l'arrière du contact. Celle-ci est expliquée par les conditions de continuité. Ainsi, à la partie avant, l'augmentation de pression est due à la faible épaisseur du film, alors que la chute relativement brusque de la courbe de pression vers l'arrière requiert une pointe étroite pour maintenir la continuité du flot sans cavitation. En augmentant la vitesse relative, le rapport entre l'épaisseur du film à la

constriction par rapport à l'épaisseur au maximum de pression reste quasiment constant (voisin de 3/4).

c *Effet de la rugosité*

La surface peut être vue comme une succession d'aspérités. Les graphiques précédents sont alors adoptés pour chaque aspérité. Selon [Moore, 1972], ces aspérités génèrent une succession de surpressions et de dépressions (fig. 4.3.43). Ces aspérités, bien sûr, participent aussi au frottement hystérétique qui apparaît en régime mixte (fig. 4.3.45).

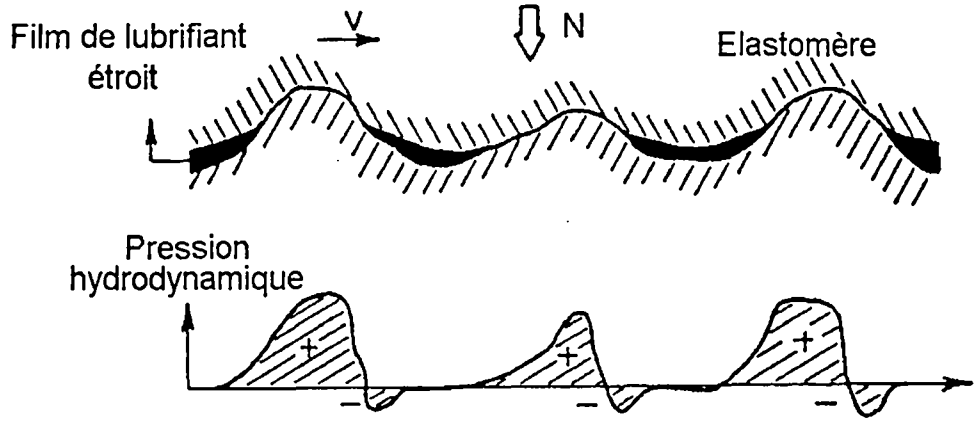


Figure 4.3.43: *Effet élastohydrodynamique sur une surface rugueuse selon [Moore, 1972]*

d *Résultats expérimentaux pour l'essuie-glace*

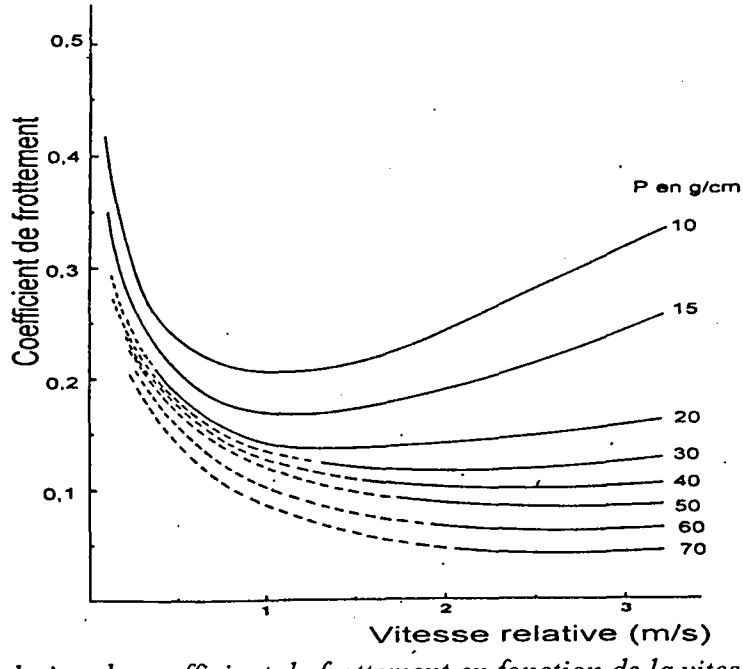


Figure 4.3.44: *Evolution du coefficient de frottement en fonction de la vitesse pour différentes pressions linéaires selon [Begout, 1979]*

[Begout, 1979] a tracé des courbes de frottement obtenues avec de l'eau distillée pour des lames d'essuie-glace. Les traits en pointillé représentent des mesures où est apparu du stick-slip.

4.3.3.2 *Influence de différents paramètres*

A Influence de la quantité d'eau

Selon [Begout, 1979], la quantité d'eau projetée sur le pare-brise ne joue pratiquement aucun rôle. Des essais ont, en effet, montré que seule une différence apparaît entre les fonctionnements en vitre sèche, en vitre humide et en vitre séchante(position intermédiaire où le coefficient de frottement atteint son maximum) mais qu'aucune évolution n'avait lieu lorsqu'on augmentait le débit d'arrosage. En effet, la quantité d'eau nécessaire à la formation d'un film venant s'interposer entre le verre et la lame est très faible (quelques micromètres) et ne dépend pas des quantités d'eau présentes sur le pare-brise.

B Influence restreinte de la composition des matériaux

D'après les résultats obtenus par [Noakes, 1988], la chloration du caoutchouc n'agit pas sur le coefficient de frottement en vitre mouillée.

	Coefficient de frottement	
	Chloré	Non traité
surface mouillée	0,5 - 1	0,5 - 1
surface sèche	1 - 1,5	2,5 - 3,5

Tableau 4.3.5: *Valeurs expérimentales de coefficients de frottement pour l'essuyage selon [Noakes, 1988]*

C Filet d'eau généré en partie par les aspérités

Selon [Moore, 1972], il existe de solides preuves de la présence de petites aspérités à l'extrémité de la lame. Ces aspérités affectent l'écoulement de l'eau entre la lame et le pare-brise. L'eau passant sous la lame est séparée en fins filets par les aspérités ayant comme résultat des traînées d'eau laissées derrière la lame. Ces dernières ont tendance à se séparer en gouttelettes et à gêner la vision du conducteur. La taille et la raideur des aspérités de la surface dépendent de la taille des particules de noir de carbone incorporées dans la matrice de caoutchouc.
La coupe de la lame a également une influence car elle peut générer des "queues de cochons".

D Tensioactif (présent dans le liquide lave-glace)

Comme l'indique [Juran, 1989], les tensio actifs ont pour propriété de diminuer les tensions superficielles des interfaces. Par exemple les savons, les sels d'acides gras ont une extrémité hydrophobe (CH_3) et l'autre extrémité hydrophile (Na^+, $COOH^-$). L'effet est à la fois d'assurer la compatibilité de phases non miscibles et de faire écran à la composante polaire de la tension superficielle de l'eau.
Selon [Begout, 1979], les solutions contenant des tensioactifs et en particulier des traces de savon donnent lieu à des comportements différents (fig. 4.3.45). En effet au lieu des poches de liquide habituelles pour les faibles vitesses, apparaît un film uniforme dont l'épaisseur est d'une vingtaine d'angströms. Ce film est maintenu sous l'action de charges de même polarité engendrées par le tensioactif et existant à la surface de chaque solide.

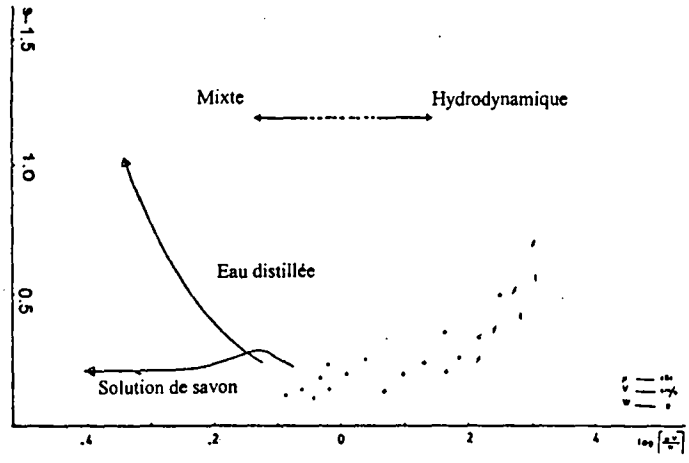
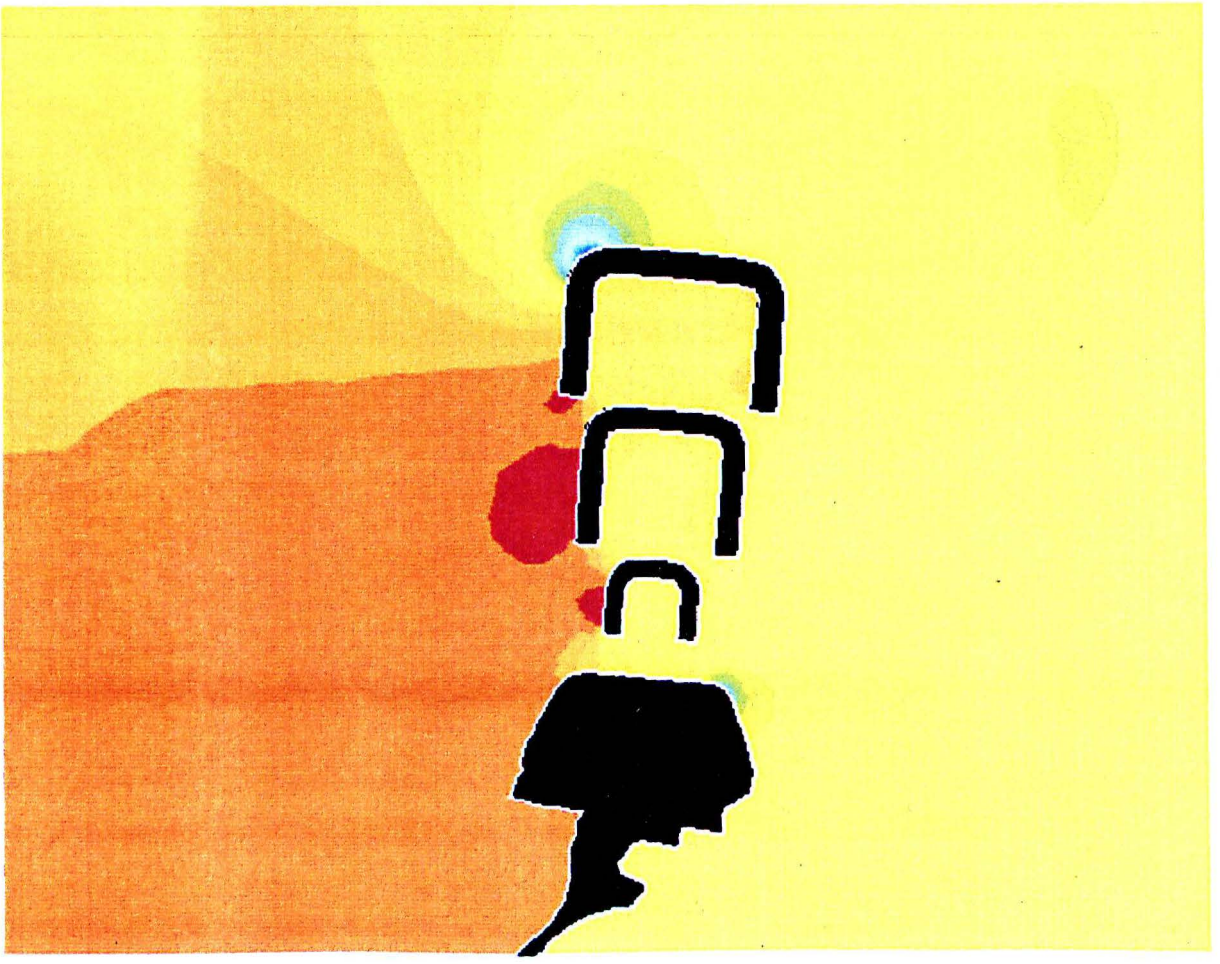


Figure 4.3.45: *Effet des tensioactifs selon [Begout, 1979]*

CHAPITRE 5:

AÉRODYNAMIQUE



Liste des notations utilisées dans ce chapitre:

div: divergence,
Fx: traînée,
Fz: portance,
g: champ de gravité,
grad: gradient,
h: hauteur,
S_e: surface projetée du balai perpendiculairement aux lignes de courant,
t: temps,
v: vecteur vitesse,
Δ: laplacien,
ρ : masse volumique du fluide,
μ : viscosité de cisaillement,

5.1 PREAMBULE

L'aérodynamique est une science relativement bien connue. Les différentes lois en sont bien établies. Par contre la résolution des équations est moins évidente et limite les progrès envisageables dans ce domaine. C'est pourquoi nous allons examiner successivement l'état de l'art phénoménologique, un bref résumé des équations aérodynamiques qui nous concernent puis le modèle employé dans l'essuyage.
La vitesse que nous allons utiliser par la suite est la "vitesse apparente", c'est à dire la différence de vitesse entre la voiture et les filets d'air (fig.5.1.1).

Figure 5.1.1: *La vitesse apparente est la différence entre la vitesse de la voiture et de la vitesse de l'air.*

5.2 CONNAISSANCES PHENOMENOLOGIQUES

5.2.1 Visualisation et caractéristiques des écoulements aérodynamiques

Selon [SFT], plusieurs techniques sont employées pour visualiser les phénomènes aérodynamiques. Chacune d'elles a son avantage propre si bien qu'elles sont complémentaires. L'envoi de particules ou de fumées (fig. 5.2.1) comme celles de kérosène donne de très bons résultats pour les lignes d'écoulement. L'infrarouge est très efficace pour l'étude thermique de certains phénomènes comme le désembuage des vitres et le refroidissement de certains composants (radiateurs freins ...). Les écoulements pariétaux peuvent être visualisés à l'aide d'enduits recouvrant le véhicule. Le laser permet, par effet Doppler, de connaître les champs de vitesse de l'écoulement des particules autour du véhicule. Une technique appelée tomographie numérique est également utilisée. Il s'agit d'un peigne équipé de plusieurs prises de pression et déplacé verticalement pour reconstituer un champ de pression. Un moyen peu onéreux et souvent employé consiste à placer des morceaux de laine sur le véhicule pour indiquer les directions des vecteurs vitesses.

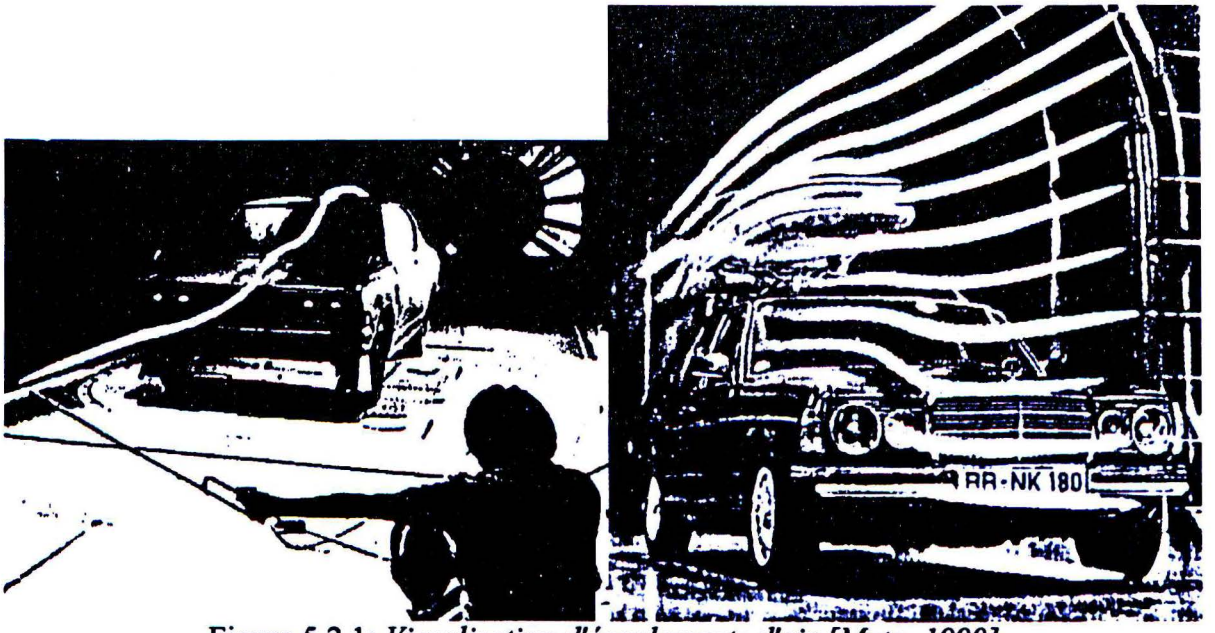


Figure 5.2.1: *Visualisation d'écoulements d'air [Muto, 1990]*

5.2.2 Disposition des filets d'air

5.2.2.1 Disposition des filets d'air autour d'une voiture

Le comportement aérodynamique dépend étroitement du véhicule concerné. Néanmoins quelques tendances ressortent. Par exemple sur le pare-brise avant d'une voiture, les filets d'air s'inclinent sur les côtés (fig.5.2.2), si bien que pour un balayage classique, le balai côté conducteur est quasiment orthogonal aux lignes de courant, alors que celui du côté passager est parallèle aux lignes.

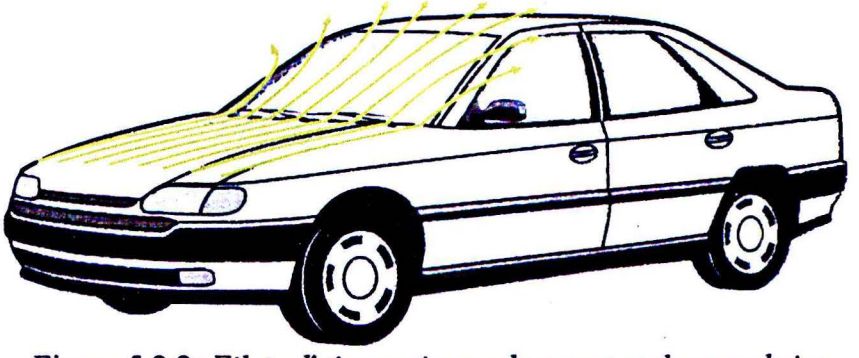


Figure 5.2.2: *Filets d'air au niveau du capot et du pare-brise*

L'air est accéléré au niveau du pare-brise, sauf au niveau d'une zone d'arrêt située au bas du pare-brise. Différents points anguleux classiques comme le haut du capot ou le haut du pare-brise sont sources de vortex (tourbillons) (fig. 5.2.3 et 5.2.4).

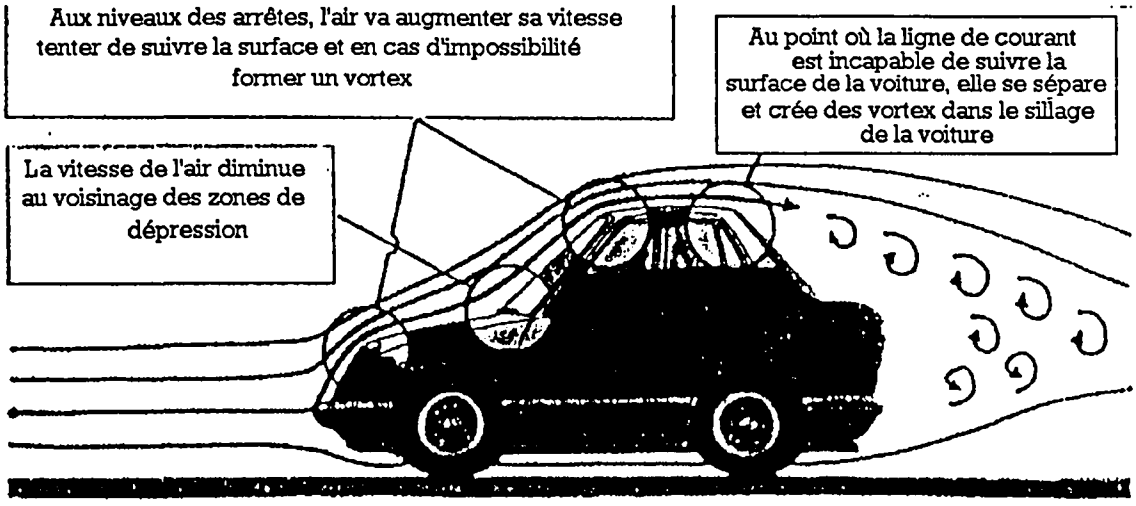


Figure 5.2.3: *Quelques points caractéristiques de la voiture [Muto, 1990]*

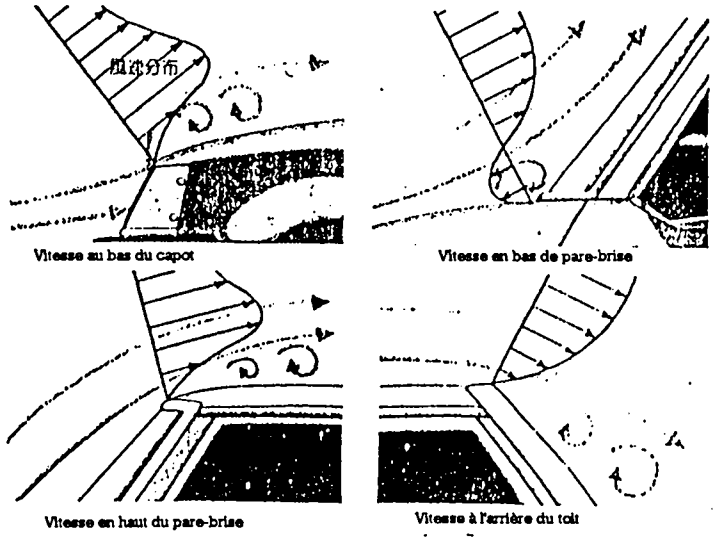


Figure 5.2.4: *Points anguleux qui sont sources de vortex [Muto, 1990]*

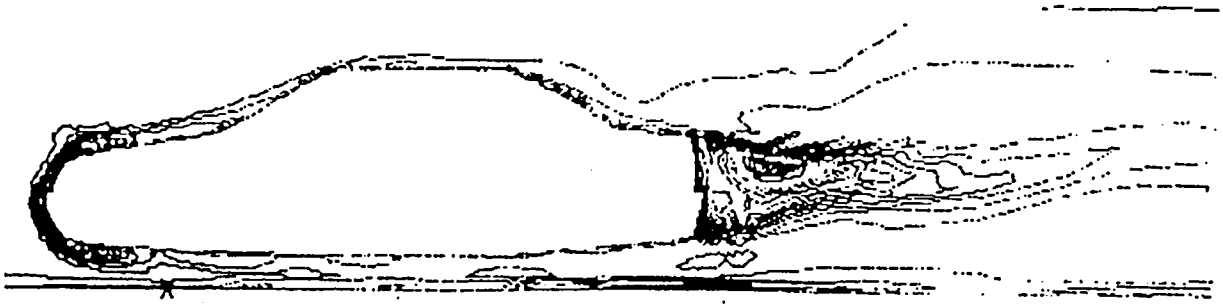


Figure 5.2.5: *Simulation d'écoulements d'air autour d'une Peugeot 405 selon [Bidot et al, 1995]*

Les lignes de courant à l'arrière du véhicule ne présentent pas les mêmes caractéristiques: deux grands vortex sont généralement présents (fig. 5.2.5 et 5.2.6).

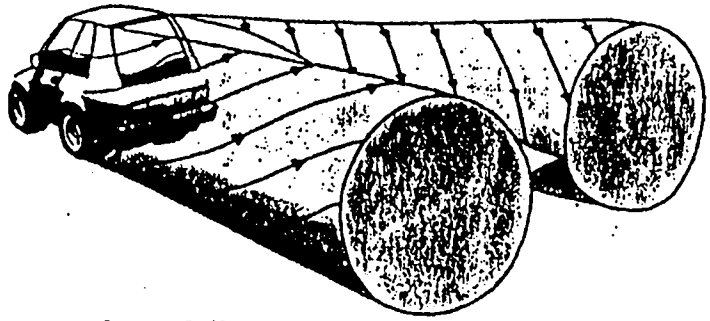


Figure 5.2.6: *Deux grands tourbillons sont présents à l'arrière de la voiture [Muto, 1990]*

5.2.2.2 Influence de l'angle d'inclinaison entre le filet d'air et l'axe du balai

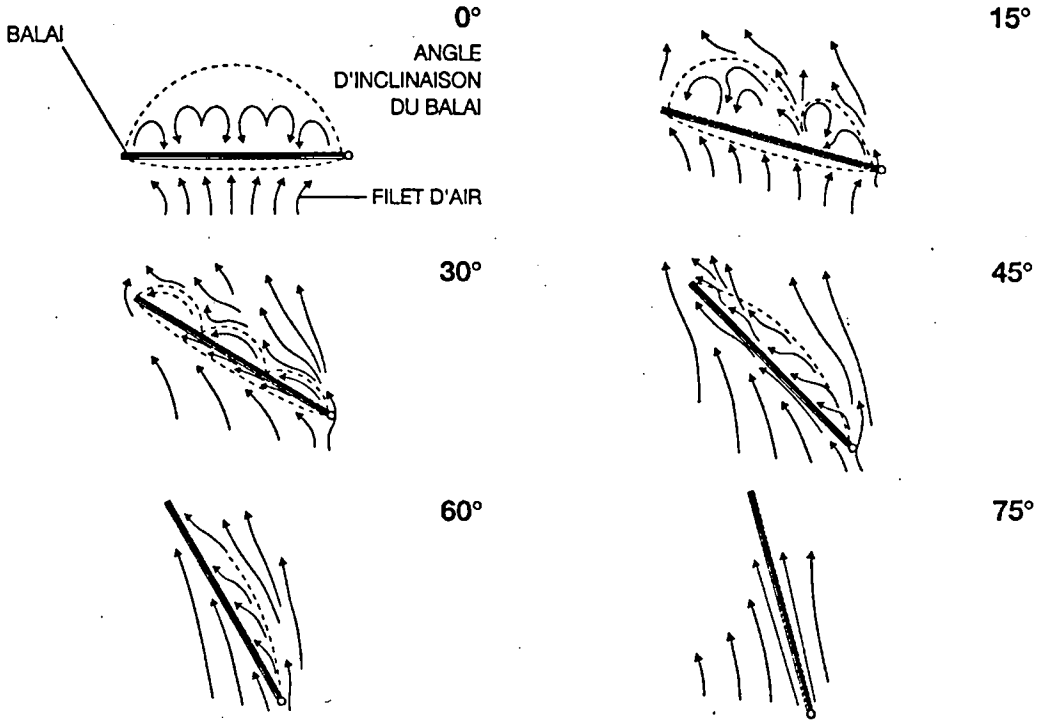


Figure 5.2.7: *Influence de l'angle d'inclinaison du balai par rapport aux filets d'air sur l'écoulement.*

Comme nous le constatons sur la figure 5.2.7, lorsque les balais sont faiblement écartés des filets d'air, ceux-ci arrivent à suivre la direction des balais et peu de perturbations surviennent. Il n'en est pas de même lorsque le balai est quasiment perpendiculaire au flux. En effet, dans ce cas, des tourbillons surviennent à l'arrière des balais ainsi qu'une différence de pression de part et d'autre du balai.

Le problème ne se traite pas en deux mais en trois dimensions, comme le montre la figure 5.2.8. En effet en raison des formes des différents éléments du balai (palonniers montures ...) et des éléments extérieurs de la voiture (capot, boîte à eau, pare-brise ...), les flux d'air présentent des trajectoires complexes.

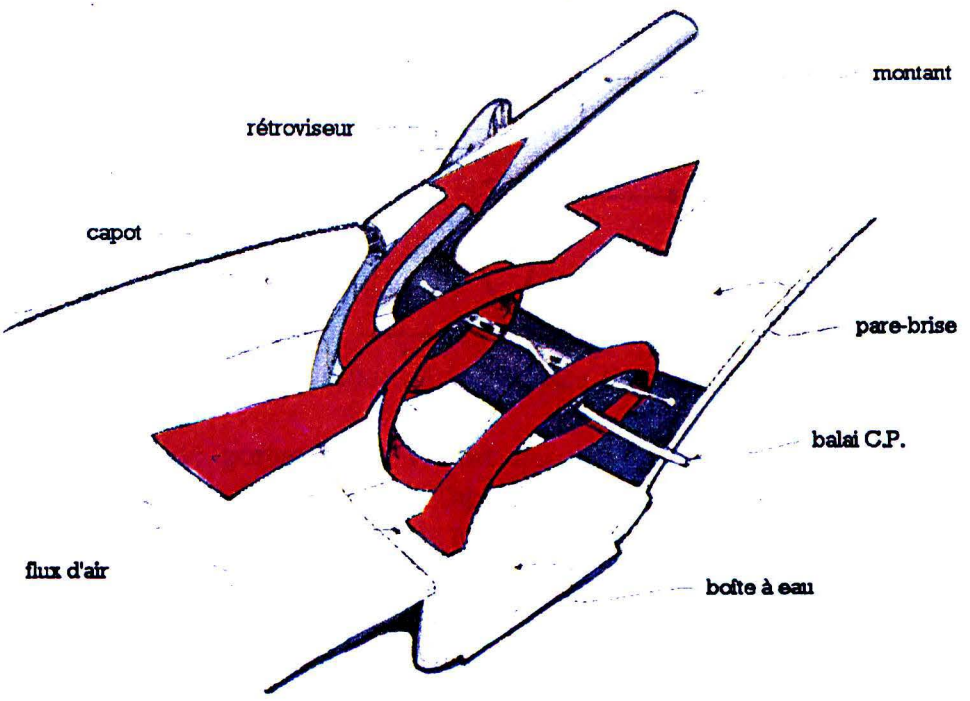


Figure 5.2.8: *Exemple de perturbations subies par le balai d'essuie-glace*

5.2.3 Champ de vitesse sur un pare-brise avant

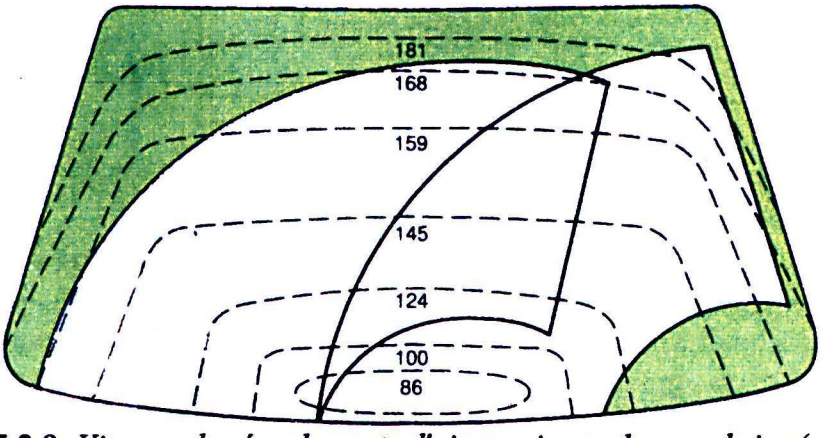


Figure 5.2.9: *Vitesses des écoulements d'air au niveau du pare-brise (en km/h)*

Comme nous le constatons sur la figure 5.2.9, la vitesse au bas de pare-brise est bien inférieure à celle du dessus. A chaque instant, le balai est donc confronté à des gradients de vitesse importants.

5.2.4 Portance et traînées

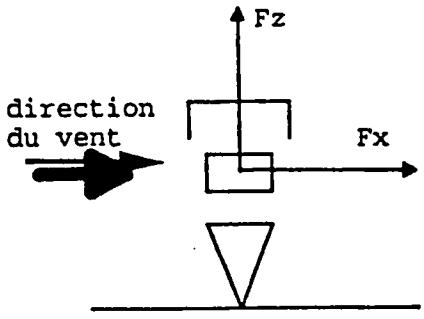


Figure 5.2.10: *Définition de la portance F_z et de la traînée F_x*

L'effort de portance est l'effort qui tend à décoller le balai de la vitre (fig.5.2.10). A l'inverse, la déportance est l'appui aérodynamique. L'effort de traînée est la résistance à l'air du balai dans la direction du mouvement.

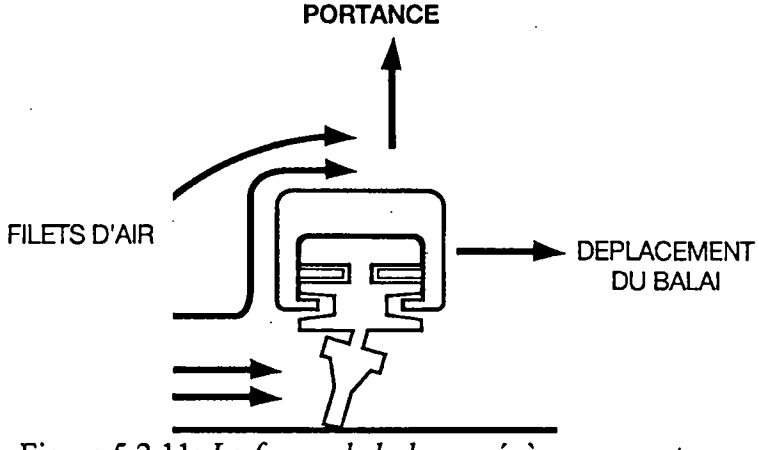


Figure 5.2.11: *La forme de la lame génère une portance*

Du fait de la cartographie de l'écoulement sur la vitre (ligne de courant, distribution de vitesse...), le balai placé dans cet écoulement n'est pas attaqué sur toute sa longueur par des filets d'air de mêmes caractéristiques. De plus, la section du balai n'est pas identique sur toute sa longueur. Nous en déduisons donc que la répartition de portance et traînée n'est pas uniforme sur toute la longueur du balai.

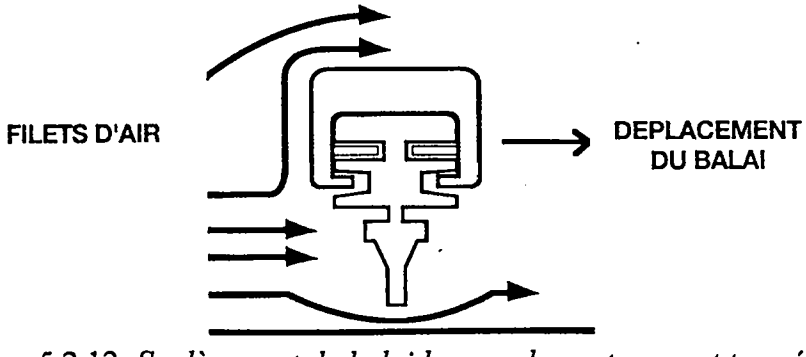


Figure 5.2.12: *Soulèvement du balai lorsque la portance est trop élevée*

Pour un balai seul, plus le véhicule a une vitesse importante, plus ce balai a tendance à se soulever jusqu'au moment, où il décolle (fig. 5.2.11 et 5.2.12). Ce phénomène est gênant car une pression minimale est nécessaire pour essuyer la vitre.

L'effort de traînée est également gênant. En effet il déséquilibre les efforts s'exerçant sur l'essuyage, accélérant le mouvement aller et freinant le retour (fig. 5.2.13). Le mouvement à l'aller a donc tendance à être plus rapide qu'au retour. Lorsque l'effort de traînée est trop important, le moteur ne peut plus fournir l'effort nécessaire et cale. De plus à l'aller, l'effort de traînée a tendance à faire tourner la lame (sapin et lèvre) dans le mauvais sens et ainsi à générer des phénomènes vibratoires (broutement) (fig. 5.2.14).

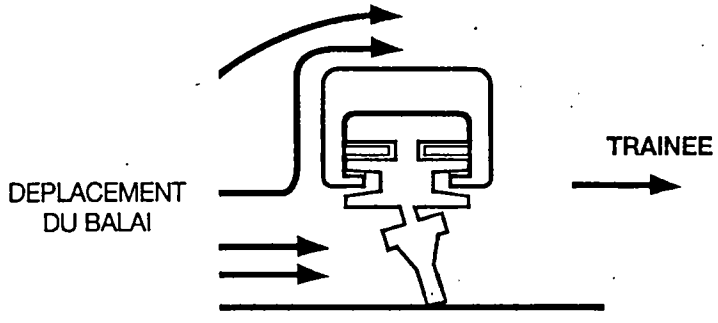


Figure 5.2.13: *Définition de la traînée*

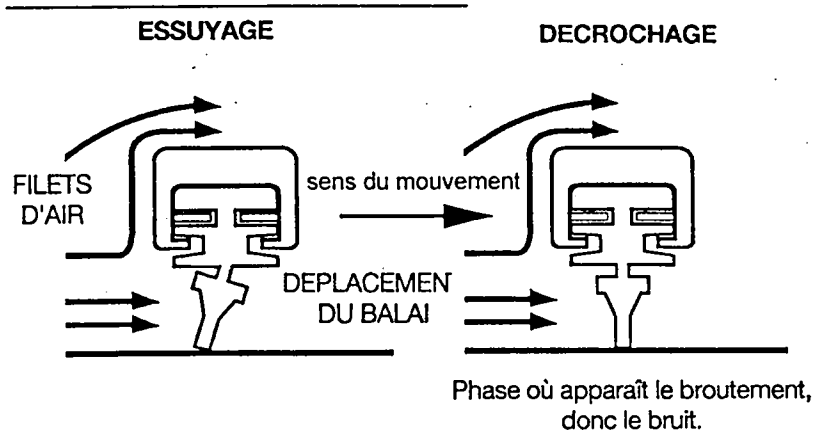


Figure 5.2.14: *Les filets d'air tendent à retourner la charnière à l'aller et peuvent provoquer du broutement.*

5.2.5 Cas du déflecteur (A.L.V. chez Valeo)

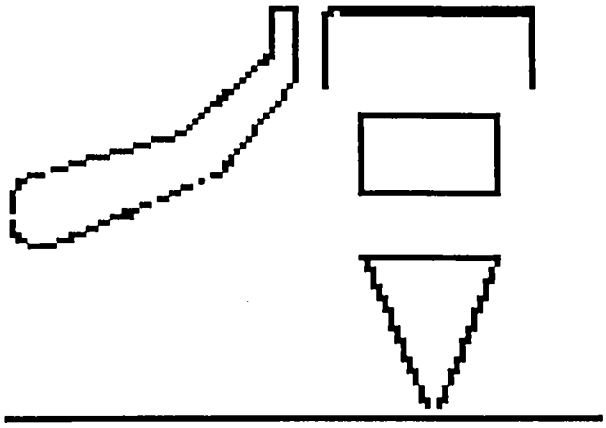


Figure 5.2.15: *Profil d'un A.L.V. classique (en présence du balai)*

L'A.L.V. (Anti Lift Valeo) (fig. 5.2.12, 5.2.13 et 5.2.14) est un 'spoiler', sorte d'aile d'avion renversée, empêchant le balai de décoller et protégeant la lame des surpressions. La face supérieure de l'A.L.V. est en surpression et la partie inférieure en dépression, si bien que la force résultante tend à plaquer le balai sur la vitre.

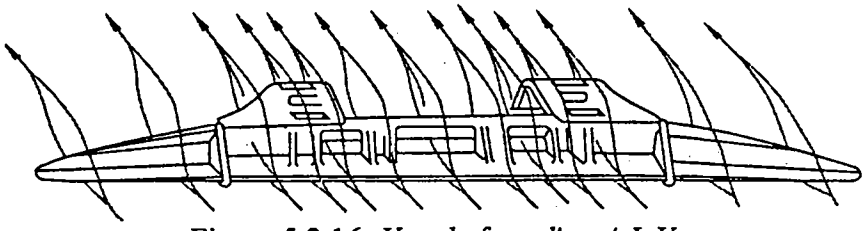


Figure 5.2.16: *Vue de face d'un A.L.V.*

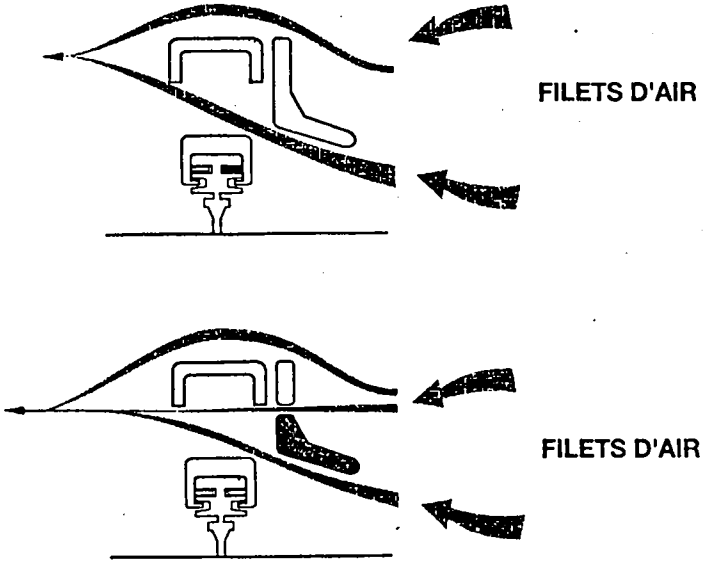


Figure 5.2.17: *Filets d'air autour d'un A.L.V.*

La répartition de pression autour de l'A.L.V. est l'inverse de celle d'une aile d'avion (fig. 5.2.18), à savoir que les faces du dessus reçoivent les pressions les plus élevées, et celles du dessous les plus faibles si bien que l'effet de portance est négatif.

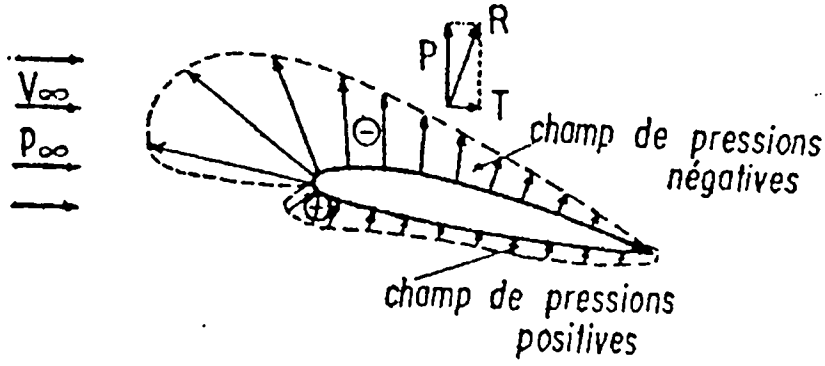


Figure 5.2.18: *Répartition des pressions autour d'un profil d'aile d'avion selon [Comolet, 1982]*

5.2.6 Dépression et surpression

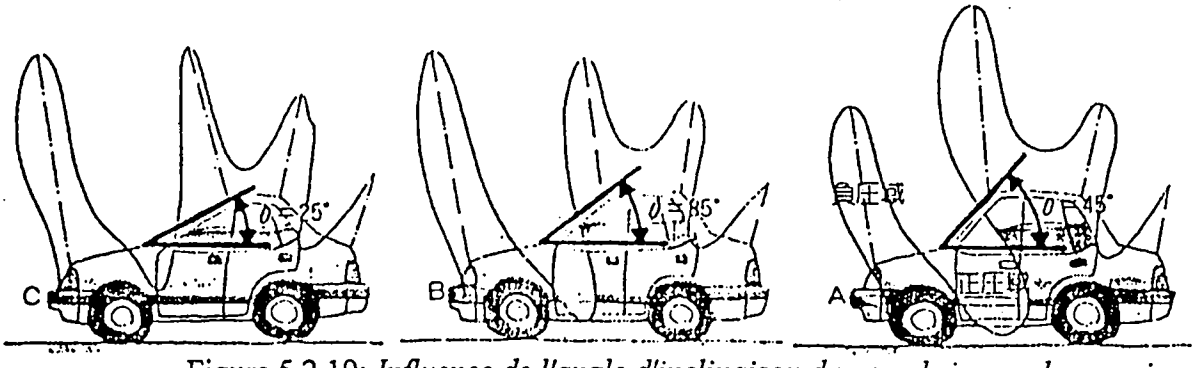


Figure 5.2.19: *Influence de l'angle d'inclinaison du pare-brise sur la pression à la surface du véhicule: les pressions les plus élevées correspondent, sur la courbe, aux points les plus bas (étude Mitsubishi rapportée par [Muto, 1990]).*

En appliquant la loi de Bernouilli (paragraphe 5.3.6) à des fluides incompressibles permanents, sur des lignes de courant, pression et vitesse varient en sens inverse. Étant donné que le fluide est accéléré en haut du pare-brise, il est normal de trouver comme l'indique la figure 5.2.19, des basses pressions en haut du pare-brise et des hautes pressions en bas.

5.3 EQUATIONS CLASSIQUES D'AERODYNAMIQUE

5.3.1 Préambule

Nous allons rappeler dans ce paragraphe quelques résultats classiques de la mécanique des fluides. Les hypothèses classiques de la mécanique des fluides, comme le fait de considérer un fluide newtonien, (les contraintes sont des fonctions linéaires des taux de déformation de leur milieu) ne seront pas rappelées ici. [Comolet, 1982] par exemple donne les démonstrations et de plus amples renseignements sur les résultats qui vont suivre.

5.3.2 Équation de conservation de la masse

A partir d'un bilan de matière sur un volume, nous pouvons établir que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v) = 0, \text{ (point de vue eulérien)} \qquad (5.3.1)$$

avec ρ : masse volumique du fluide

v: vecteur vitesse

ou de façon équivalente, du point de vue lagrangien que:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathrm{div}(v) = 0 \qquad (5.3.2).$$

5.3.3 Fluides incompressibles

Cette hypothèse est généralement adoptée et vérifiée pour les écoulements d'air que nous aurons à traiter.

5.3.4 Équation de Navier-Stokes

Nous supposons que le fluide est incompressible et que les forces de volume dérivent d'un potentiel U. En effectuant un bilan des forces et en appliquant le principe fondamental de la dynamique, nous obtenons l'équation vectorielle suivante:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\rho \mathrm{grad} U - \mathrm{grad} p + \mu \Delta v \text{ (équation de Navier-Stokes)} \qquad (5.3.3)$$

avec μ : viscosité de cisaillement,

p: pression du fluide.

Dans notre cas où les seules forces de volume sont les forces de pesanteur, nous avons $U = gh$ avec g champ de gravité et h hauteur l'équation de Navier-Stokes devient:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\mathrm{grad}(p + \rho g h) + \mu \Delta v \qquad (5.3.4)$$

5.3.5 Fluide parfait

Un fluide est parfait lorsque ses viscosités de cisaillement et de dilatation sont nulles. Les fluides parfaits incompressibles sont particulièrement intéressants. En effet, la répartition des vitesses et des pressions ainsi que la forme des lignes de courant sont déterminées par la géométrie des parois limitant l'écoulement et ils ne dépendent pas de la nature du fluide étudié.

5.3.6 Équation de Bernouilli

Dans le cas où l'écoulement est permanent, c'est à dire si $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, et vérifie les hypothèses du 4.3.1.3, la quantité : $\frac{P}{\rho} + gh + \frac{v^2}{2}$ est constante sur la ligne de courant (ainsi que dans d'autres cas que nous ne détaillerons pas ici).

5.3.7 Couche limite (fluide incompressible)

La théorie de la couche limite est basée sur le constat expérimental que les fluides réels se comportent comme des fluides parfaits pour des zones éloignées des parois, mais d'une manière diffèrente au voisinage de ces dernières en raison de leur viscosité. La figure 5.3.1 illustre bien la différence de comportement. Les équations des fluides parfaits sont plus faciles à traiter. En effet l'équation de Navier Stokes ne comporte plus le terme de viscosité ($\mu \Delta v$) et est donc d'ordre inférieur. Il est donc intéressant de séparer les deux zones. La zone près de la paroi est appelée couche limite. La limite de cette zone est définie lorsque les deux théorie ont des résultats très proches (par exemple lorsque les vitesses parallèles à la paroi dans le cas d'un fluide parfait et dans le cas d'un fluide visqueux sont éloignées de 1%). Différentes théories et approximations permettent de déterminer les vitesses et pressions du système.

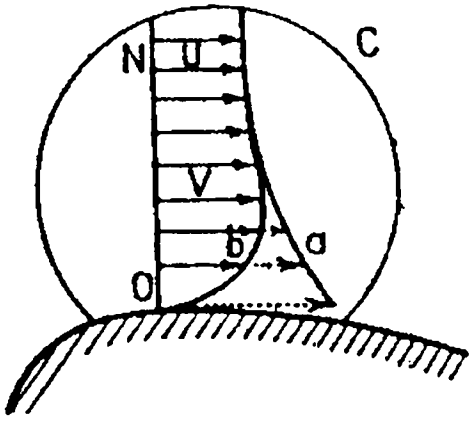


Figure 5.3.1: *Profil de vitesses pour un fluide parfait (a) et un fluide visqueux (b)*

5.4 ÉQUATIONS UTILISEES DANS LA PRATIQUE

Les balais d'essuie-glace sont situés dans la couche limite de l'écoulement d'air près de la paroi du véhicule. Les théories de la couche limite ne sont donc pas applicables dans notre cas et nous devons donc utiliser les équations de Navier Stokes. Un modèle aérodynamique qui prendrait en compte tous les éléments du véhicule agissant sur le système d'essuie-glace serait relativement gourmand en temps de calcul et en place mémoire. De plus ces éléments ne sont pas tous connus au stade de la détermination du système d'essuyage. Nous devons donc nous contenter d'approximations grossières.

Nous supposons que les lignes de courant sont perpendiculaires aux balais du côté conducteur et parallèle du côté passager. Nous considérons le régime permanent. Les efforts aérodynamiques sont calculés du côté conducteur à l'aide de la formule de Bernouilli en négligeant la différence de hauteur. En effet, la différence de pression des deux côtés du balai est égale à: $\rho\frac{v^2}{2}$.

Pour déterminer l'effort de traînée du côté conducteur F_{pCC}, nous utilisons une surface équivalente du balai S_e:

$$F_{pCC} = \rho\frac{v^2}{2}S_e \qquad (5.3.5)$$

Liste des notations utilisées dans ce chapitre:

C_{elm} : couple électromagnétique s'exerçant sur le rotor,
$C_{r\ reduc}$: couple résistant dû au mécanisme appliqué au motoréducteur.
$C_{rt\ rotor}$: couple résistant dû au mécanisme appliqué au rotor.
f_1 et f_2: coefficients de frottement des appuis 1 et 2,
F_1 et F_2: forces algébriques de frottement des appuis 1 et 2,
I_{balai} inertie du balai,
I_{rotor} : inertie du rotor,
N: force d'appui dans le plan du balai,
N_1 et N_2: forces algébriques d'appui perpendiculaires au pare-brise,
r: rapport de réduction du motoréducteur,
α_{P_1}, α_{P_2}, α_{F_1}, α_{F_2}, β_{P_1}, β_{P_2}, β_{F_1}, β_{F_2} constantes dépendant de la géométrie et de la position angulaire du balai,

θ_{balai} : angle de rotation de ce balai,
$\theta''_{reducteur}$: accélération angulaire en sortie du motoréducteur,
θ''_{rotor} : accélération angulaire du rotor,

6.1 PRÉAMBULE

Les courbes présentées dans ce chapitre proviennent de DADS pour la partie simulation, et des essais sur véhicule pour la partie expérimentale.
Nous allons nous intéresser tout d'abord aux différents phénomènes agissant sur le système, puis aux courbes principales d'effort que subissent les pièces, ensuite aux phénomènes vibratoires constatés et enfin à la validation des simulations.

6.2 EXPLICATION DES PHÉNOMÈNES

6.2.1 Inertie

Certaines pièces ont des mouvements plutôt linéaires comme les bielles, alors que d'autres comme les balais, des mouvements plutôt circulaires. Cependant, nous pouvons comparer leurs inerties. En effet, si nous considérons le mouvement en première approximation, comme rigide et unidirectionnel alors nous pouvons comparer les différentes inerties pour ce degré de liberté. Les inerties des pièces du mécanisme qui sont en mouvement, sont négligeables par rapport, par exemple, à celles des balais car, d'une part, leurs masses sont inférieures et d'autre part, en raison de leurs faibles distances de bras de levier, leurs couples d'inertie sont faibles. Deux inerties émergent largement et jouent des rôles différents: l'inertie de rotation du moteur et l'inertie des bras-balais.

6.2.1.1 Inertie moteur

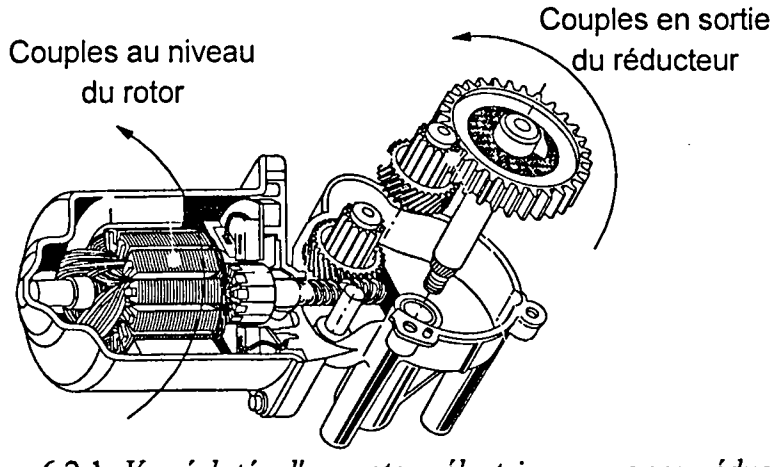


Figure 6.2.1: *Vue éclatée d'un moteur électrique avec son réducteur*

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au rotor du moteur:

$$I_{rotor}\theta''_{rotor} = C_{elm} + C_{r\ rotor}, \qquad (6.2.1)$$

avec I_{rotor} : inertie du rotor,

θ''_{rotor} : accélération angulaire du rotor,

C_{elm} : couple électromagnétique s'exerçant sur le rotor,

$C_{rt\ rotor}$: couple résistant dû au mécanisme appliqué au rotor.

En faisant intervenir le rapport de réduction r du moteur et en négligeant les forces intervenant au niveau du réducteur (frottement et inertie), nous obtenons

$$I_{rotor} r\theta''_{reducteur} = C_{elm} + \frac{C_{r\,reduc}}{r}, \qquad (6.2.2)$$

avec $\theta''_{reducteur}$: accélération angulaire en sortie du motoréducteur qui est identique à l'accélération angulaire de la manivelle moteur et

$C_{r\,reduc}$: couple résistant dû au mécanisme appliqué au motoréducteur.

La relation 6.2.2 peut aussi s'écrire:

$$I_{rotor} r^2\theta''_{reducteur} = rC_{elm} + C_{r\,reduc}. \qquad (6.2.3)$$

Ainsi pour le mécanisme, tout se passe comme si l'inertie du rotor était multipliée par le rapport de réduction au carré. Pour être concret, le moteur utilisé pour la Peugeot 106 ("MFD250") possède une inertie au niveau de son rotor de $60\ 10^{-6}$ kg m^2, le rapport de réduction est de 53,17 si bien que l'inertie perçue par la timonerie est de 0,17 kg m^2.
Cette inertie s'oppose aux variations de mouvement du moteur et tend donc à le rendre plus régulier.

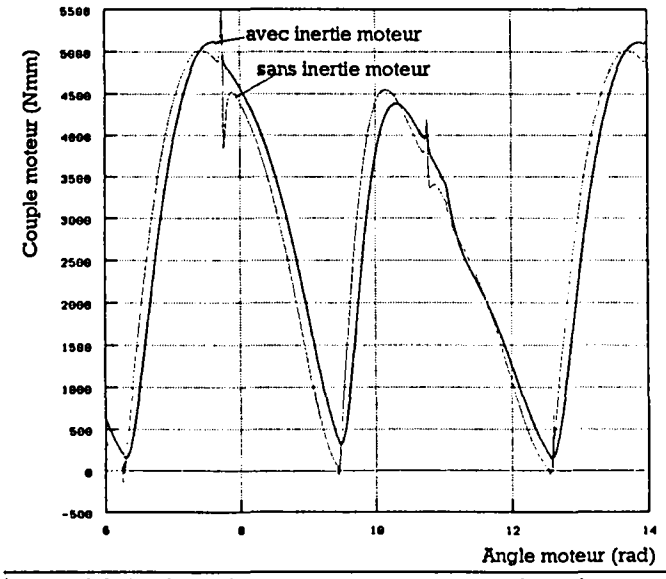


Figure 6.2.2: Couple moteur avec et sans inertie moteur

Les simulations de la figure 6.2.2 et d'autres qui vont suivre comportent des pics ponctuels au cours du balayage. Ils sont dus à une erreur du logiciel DADS de liaison cardan entre les manivelles de sortie et les bielles. Ces pics sont éliminés si nous utilisons une liaison rotule. Cependant cette erreur due au logiciel ne semble pas trop perturber les résultats de simulation.

6.2.1.2 Inertie des bras-balai

Contrairement au moteur qui est animé d'un mouvement de rotation continu, les bras-balais effectuent un mouvement alternatif. A chaque changement de sens, le bras-balai doit être freiné puis accéléré. Dans la phase de freinage, la vitesse et l'accélération angulaires sont opposées si bien que la puissance délivrée par la force d'inertie ($-I_{balai}\theta'_{balai}\theta''_{balai}$ avec I_{balai} inertie du balai considéré et θ_{balai} angle de rotation de ce

balai) est positive et motrice. Lorsque les forces dissipatrices ne sont pas assez importantes, le moteur électrique devient résistant et entraîné par cette force d'inertie.
L'angle parcouru par le balai du côté conducteur est inférieur à celui du côté passager et l'accélération angulaire du côté conducteur est inférieure à celle du côté passager (fig. 6.2.3).

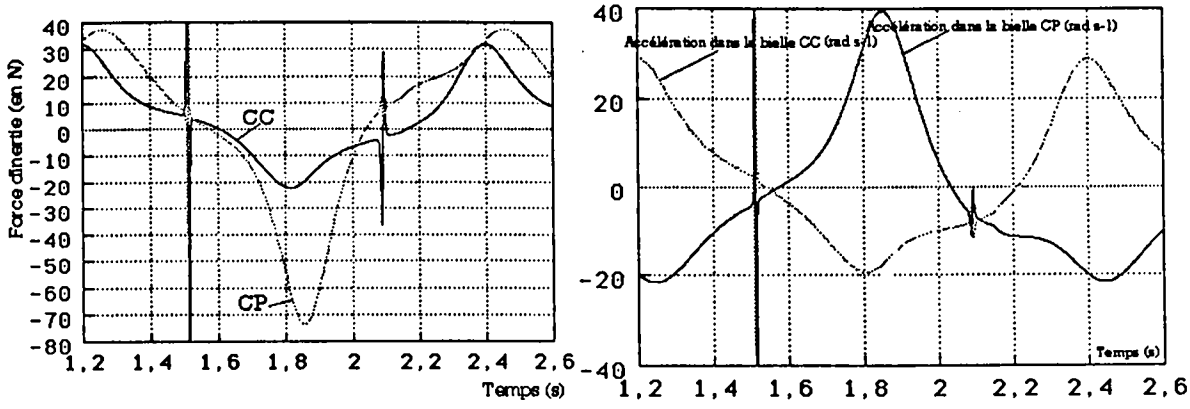


Figure 6.2.3: *Forces d'inertie vues par les bielles et accélérations angulaires des axes de sortie (simulation d'un modèle rigide sans poids et sans frottement)*

L'inertie du balai peut également agir dans une autre direction. Nous avons représenté le balai sur la figure 6.2.4 par une masse ponctuelle. La force d'inertie générée tend à faire décoller le balai. Elle dépend de la vitesse v, et du rayon de courbure R, de la trajectoire du point de contact. Cette force est donc nulle en A.F.(arrêt fixe) et en O.A.F. (opposé arrêt fixe). Elle s'est avérée de peu d'importance pour notre étude mais peut avoir des conséquences plus importantes sur d'autres véhicules. A titre indicatif les rayons de courbure pour le pare-brise de la Peugeot 106 varient de 2 à 19 mètres, les rayons les plus faibles étant sur les côtés où la vitesse est minimale.

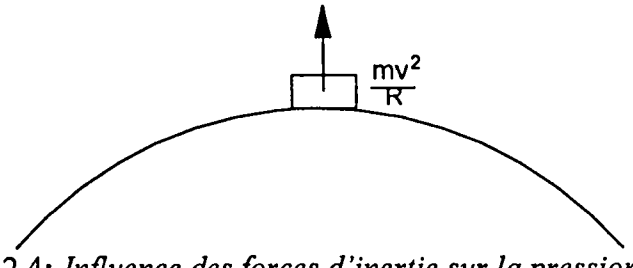


Figure 6.2.4: *Influence des forces d'inertie sur la pression normale*

6.2.2 Poids

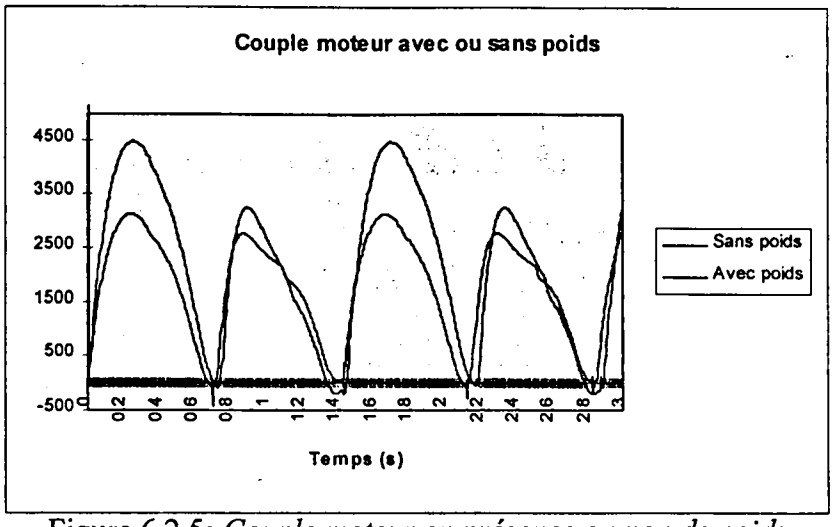


Figure 6.2.5: *Couple moteur en présence ou non de poids*

L'influence du poids se manifeste tout particulièrement au niveau des bras-balais. Dans ce cas, le poids va être équilibré par trois grandes forces: une au niveau du pare-brise, une autre au niveau de la fixation des arbres de sortie et une troisième au niveau des pièces en mouvement (inertie). La prise en compte de tous les paramètres (différentes orientations d'axes...) est lourde à prendre en compte analytiquement. C'est pourquoi nous nous contenterons d'examiner les résultats des simulations.
La figure 6.2.5 montre bien que le poids augmente beaucoup le couple à l'aller, c'est à dire de l'A.F. à l'O.A.F., tout en modifiant peu les valeurs au retour c'est à dire de l'O.A.F. à l'A.F.

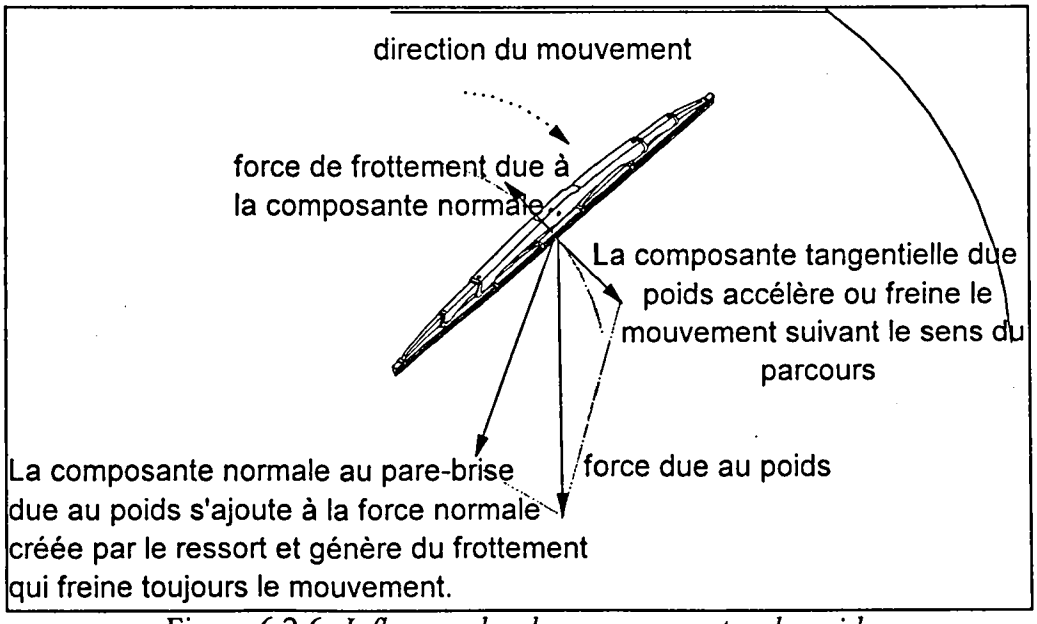


Figure 6.2.6: *Influence des deux composantes du poids*

Deux phénomènes à bien distinguer expliquent ce comportement :
- la composante normale au pare-brise créée par le poids qui augmente la force normale au pare-brise, et par suite la force de frottement.
- la composante tangente au pare-brise créée par le poids aide ou freine le mouvement suivant le sens de parcours.

Ces deux composantes changent avec l'orientation du pare-brise.

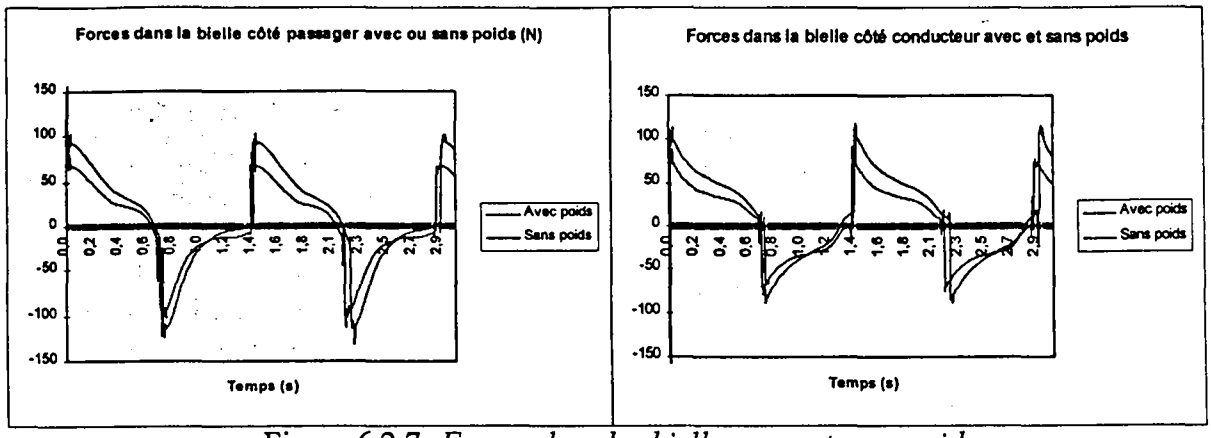


Figure 6.2.7: *Forces dans les bielles avec et sans poids*

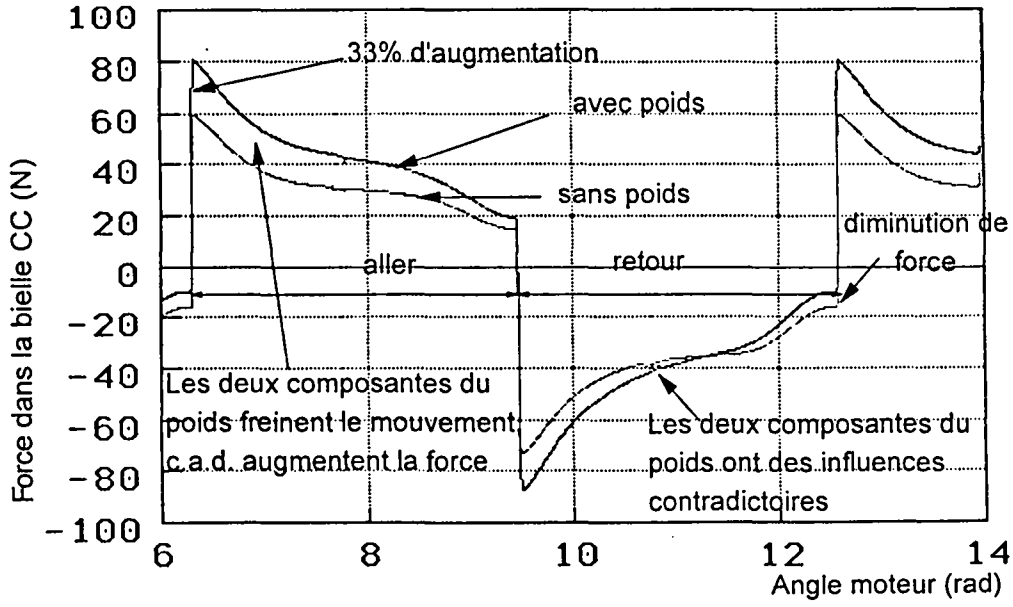


Figure 6.2.8: *Simulation d'un système rigide avec et sans poids sur vitre mouillée.*

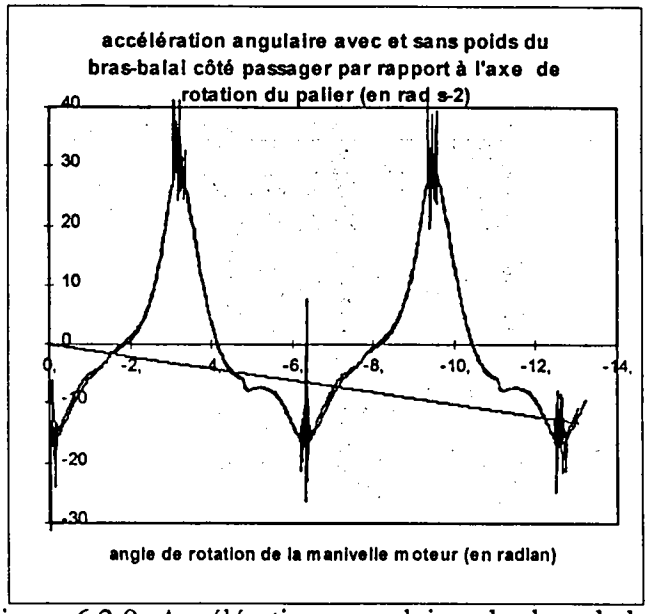


Figure 6.2.9: Accélérations angulaires des bras-balais

Nous remarquons aussi bien du côté conducteur que du côté passager (fig. 6.2.8), une augmentation de la force en A.F. et en O.A.F. Notons que le fait d'ajouter le poids modifie les autres composantes de forces:

- les forces d'inertie: ces dernières sont proportionnelles aux accélérations qui varient légèrement du fait du ralentissement du mouvement à l'aller;
- le frottement: la présence du poids comme nous l'avons signalé précédemment augmente la force normale et tend donc à augmenter la force de frottement.

Sur la figure 6.2.10, nous avons effectué la différence des courbes de la figure 6.2.7 en prenant comme référence la valeur angulaire de la manivelle moteur. En A.F. et en O.A.F., la force dans la bielle présente une croissance assez forte et le moindre écart sur l'abscisse produit une valeur importante en ordonnée. Les valeurs calculées des angles du moteur ne sont pas identiques dans les deux cas et nous devons procéder à une interpolation pour effectuer la différence. C'est pourquoi nous avons des pics en A.F. et en O.A.F. Ceux-ci n'ont pas de réalité physique.

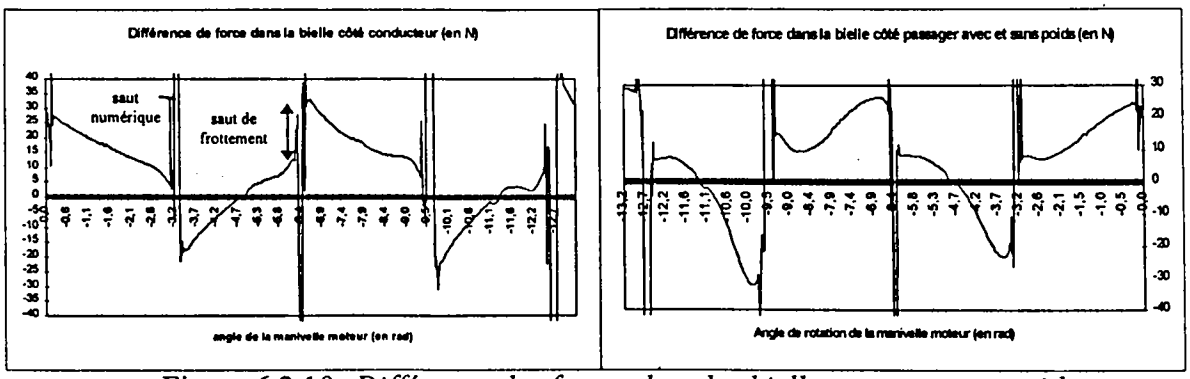


Figure 6.2.10: *Différence des forces dans les bielles avec et sans poids*

Par contre sur cette même figure, il existe des discontinuités de frottement en A.F. et en O.A.F. sur la figure 6.2.10. Elles sont dues à la composante supplémentaire de frottement engendrée par l'augmentation de la force normale au pare-brise.

En isolant une période entre deux positions A.F. et en prenant l'origine des positions angulaires en O.A.F., la composante tangente de poids est identique à l'aller et au retour à la

même position, c'est donc une fonction paire. De la même façon, la composante de frottement supplémentaire est impaire. On en déduit donc l'influence de chacune des composantes par une simple décomposition en fonctions paire et impaire.

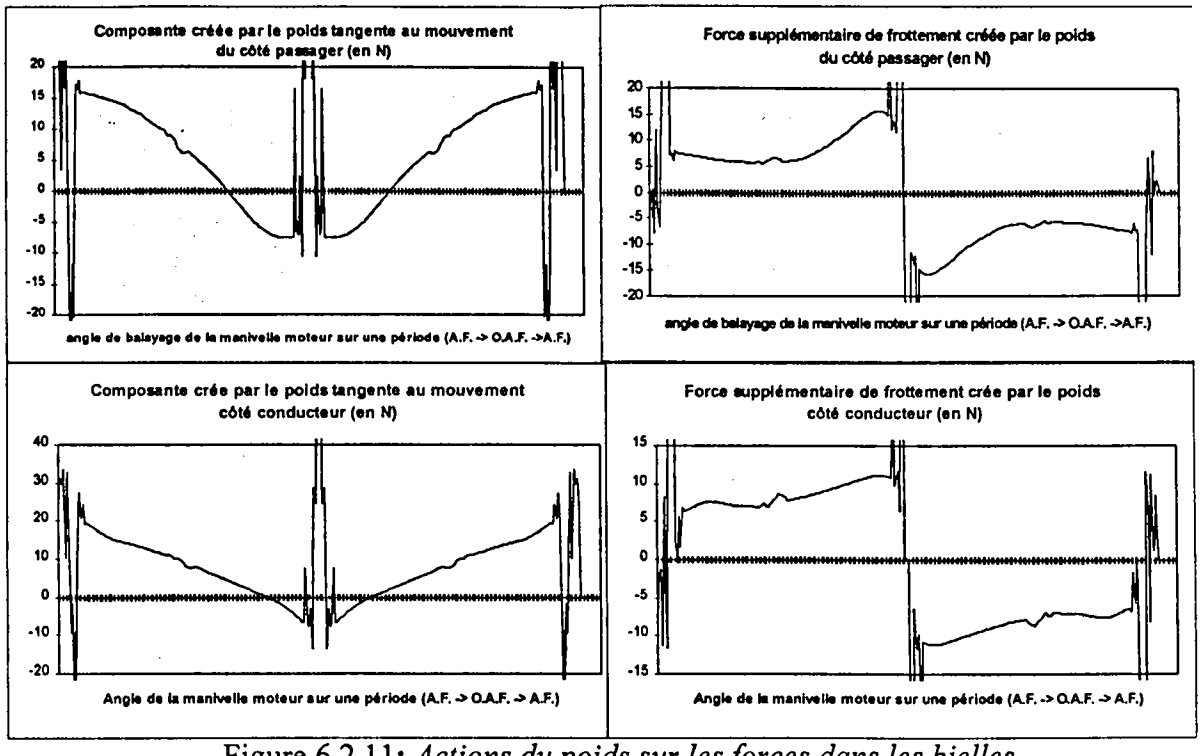
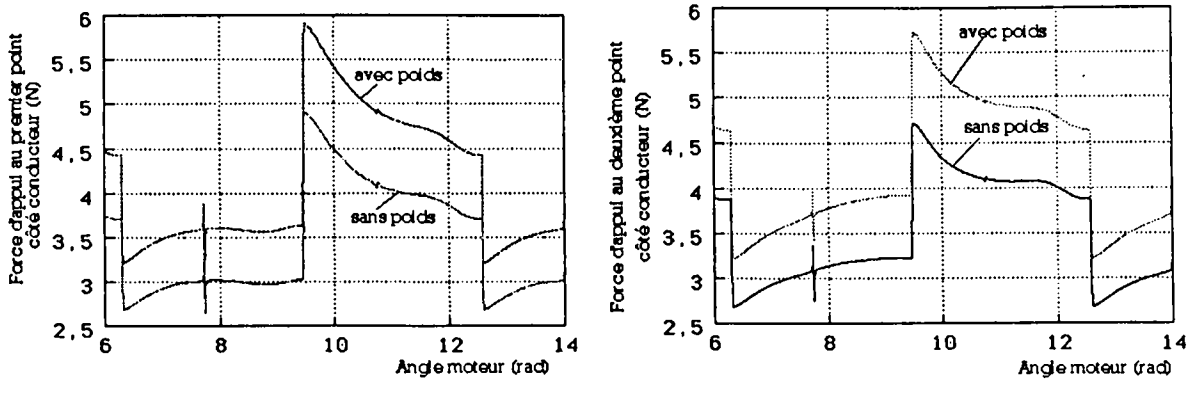


Figure 6.2.11: *Actions du poids sur les forces dans les bielles*

Nous remarquons sur la figure 6.2.11 que la composante de frottement a quasiment une forme de créneau qui s'inverse à chaque changement de mouvement. La force tangentielle du poids décroît continuellement de l'O.A.F. à l'A.F. suivant ainsi la courbure du galbe.

6.2.2.1 Forces normales au pare-brise



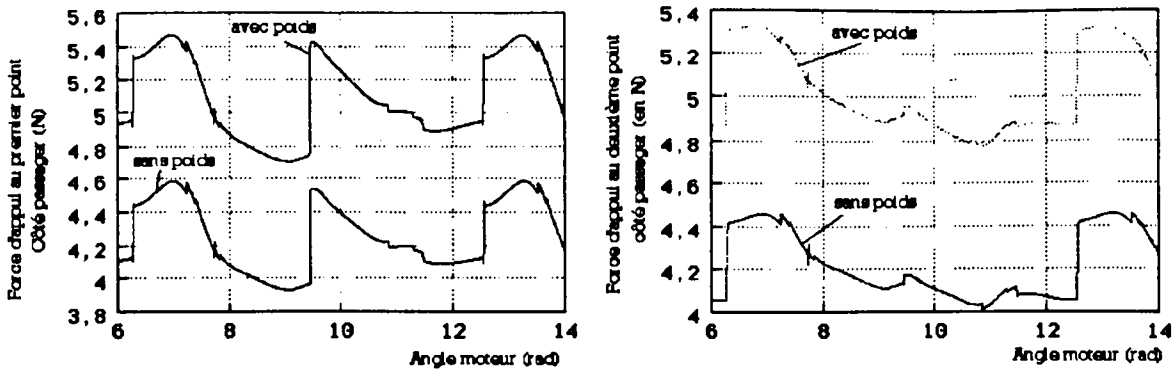


Figure 6.2.12: Différence de forces d'appui sur le pare-brise avec et sans poids

Sur la figure 6.2.12, l'écart entre les courbes de force d'appui est assez constant et s'explique par la composante normale au pare-brise.

6.2.3 Frottement

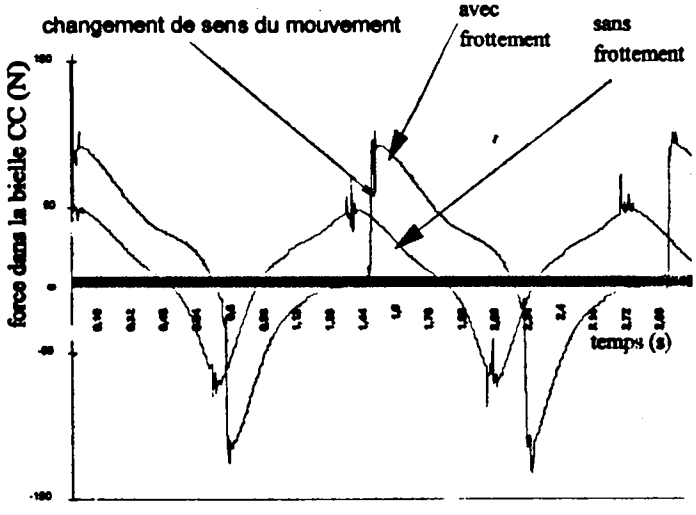


Figure 6.2.13: *Simulation avec et sans frottement*

Nous remarquons sur la figure 6.2.13 que le frottement génère une discontinuité, un saut à chaque changement de sens des balais.

6.2.3.1 Bielles

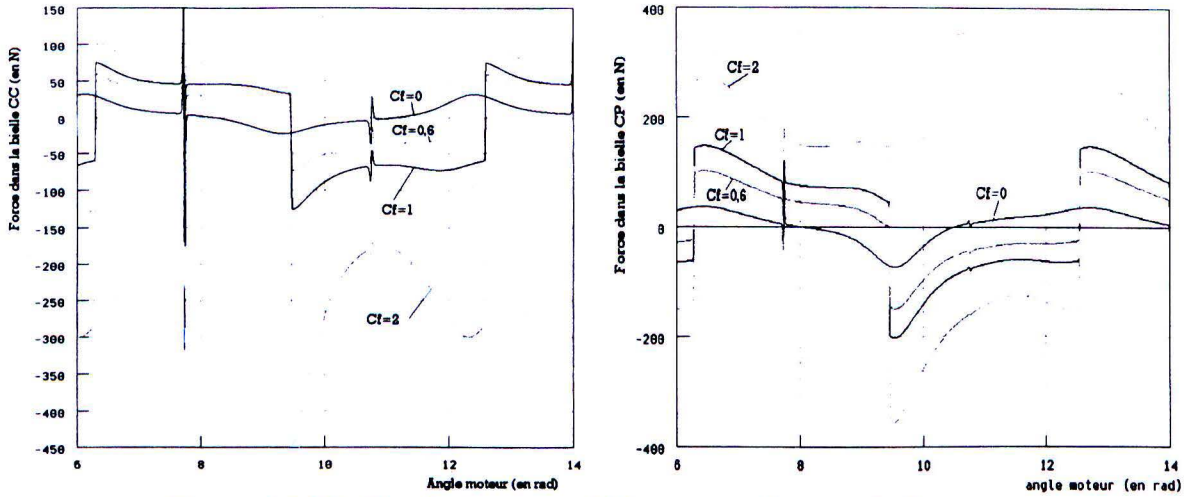


Figure 6.2.14: *Simulation avec différents coefficients de frottement*

Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.2 (figure 2.2.2), pour de faibles valeurs de coefficients de frottement, les coefficients de frottements réel et apparent sont confondus; par contre il existe des différences pour les forts coefficients de frottement. Nous en avons une démonstration évidente sur la figure 6.2.14. En effet, pour un coefficient de frottement de 2, des forces importantes sont générées au retour. Remarquons la différence qui existe entre les courbes de coefficients de frottement différents. Pour un coefficient faible, la courbe est presque triangulaire et présente une valeur maximale entre l'AF et l'OAF.
Remarquons que la présence du frottement peut multiplier les pics de forces par un facteur 10. Le frottement est donc un facteur important.

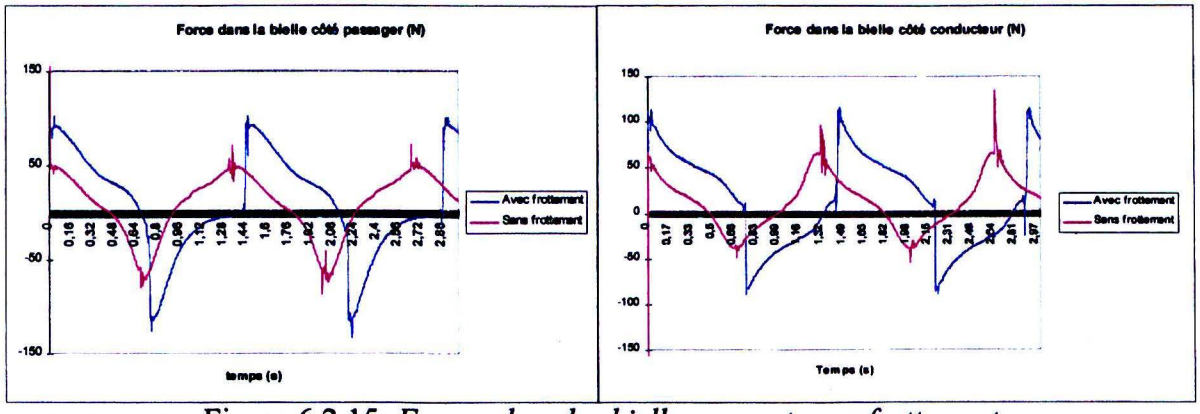


Figure 6.2.15: *Forces dans les bielles avec et sans frottement*

Nous remarquons sur la courbe sans frottement de la figure 6.2.15, qu'il n'y a pas de discontinuité en A.F. et en O.A.F. ce qui démontre bien que le frottement est responsable de ces discontinuités.
Sur la figure 6.2.15, la différence de période, des courbes avec et sans frottement, est faible, autour de 7%. Les seules forces dissipatrices d'énergie sont les forces de frottement. Les autres forces sont issues d'éléments emmagasinant de l'énergie et la restituant comme les inerties et les ressorts, ou possèdent un travail global nul sur une période comme le poids. Il peut apparaître alors surprenant que les deux systèmes aient des périodes comparables. En fait, c'est le moteur qui assure la régulation du système grâce à sa loi entre son couple et sa vitesse comme nous le verrons au paragraphe 6.3.1.2.

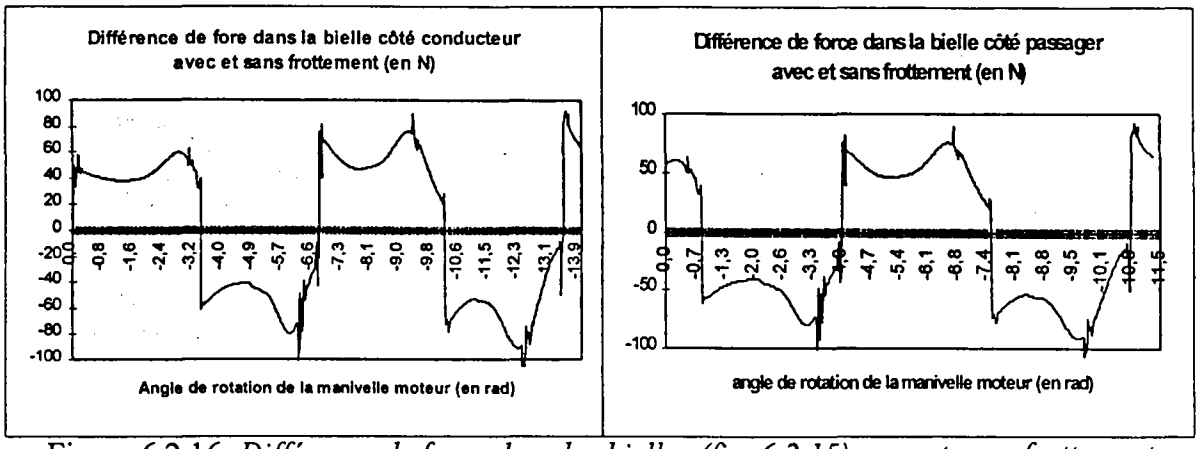


Figure 6.2.16: *Différence de force dans les bielles (fig. 6.2.15) avec et sans frottement*

6.2.3.2 Forces normales au pare-brise

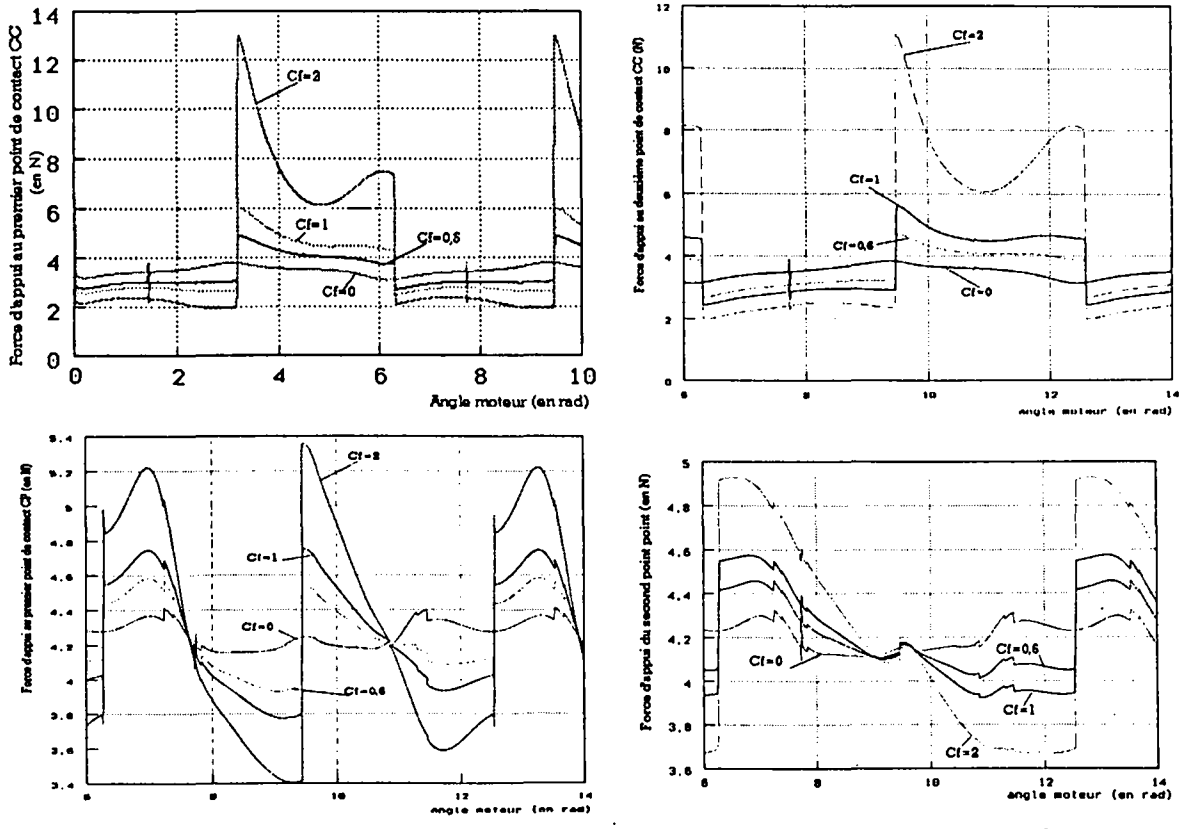


Figure 6.2.17: *Différences de forces normales au pare-brise avec ou sans frottement*

Nous remarquons sur la figure 6.2.17 les discontinuités en A.F. et en O.A.F. Nous pouvons en déduire que le coefficient de frottement joue un rôle sur la force normale. Étant donné que la force de frottement n'est pas parallèle à l'axe de rotation du balai, cette force possède une composante verticale dans le plan du balai qui génère un couple de rotation. Pour bien comprendre le phénomène, nous allons prendre une hypothèse simplificatrice: le balai frotte sur deux points de contact à ses extrémités. Nous utiliserons les indices 1 et 2 pour indiquer ces deux extrémités. Soient N la force d'appui dans le plan du balai, N_1 et N_2 les deux forces algébriques d'appui perpendiculaires au pare-brise, $F_1 = f_1 N_1$ et $F_2 = f_2 N_2$ les deux

forces algébriques de frottement correspondantes. L'équilibre des forces et des moments au point d'attache du balai s'écrit:

$$\begin{cases} P = \alpha_{P_1} P_1 + \alpha_{P_2} P_2 + \alpha_{F_1} F_1 + \alpha_{F_2} F_2 \\ 0 = \beta_{P_1} P_1 + \beta_{P_2} P_2 + \beta_{F_1} F_1 + \beta_{F_2} F_2 \end{cases}, \qquad (6.2.5)$$

avec α_{P_1}, α_{P_2}, α_{F_1}, α_{F_2}, β_{P_1}, β_{P_2}, β_{F_1}, β_{F_2} des constantes dépendant de la géométrie et de la position angulaire du balai.

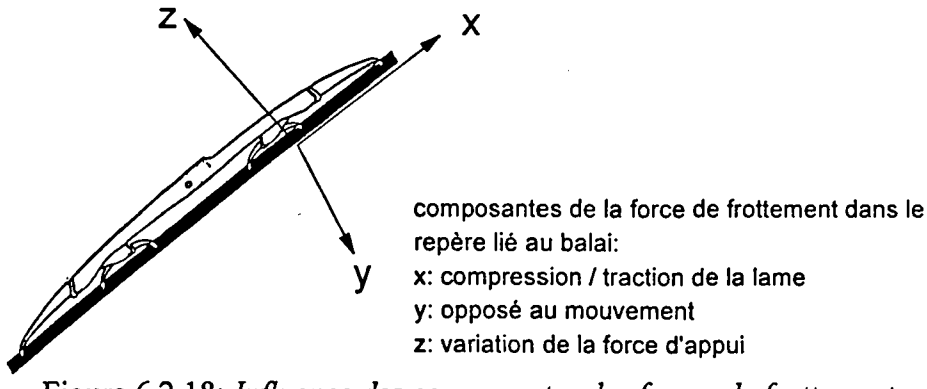


Figure 6.2.18: *Influence des composantes des forces de frottement*

soit encore

$$\begin{cases} P = \left(\alpha_{P_1} + f_1\alpha_{F_1}\right)P_1 + \left(\alpha_{P_2} + f_2\alpha_{F_2}\right)P_2 \\ 0 = \left(\beta_{P_1} + f_1\beta_{F_1}\right)P_1 + \left(\beta_{P_2} + f_2\beta_{F_2}\right)P_2 \end{cases} \qquad (6.2.6)$$

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{P\left(\beta_{P_2} + f_2\beta_{F_2}\right)}{\left(\alpha_{P_1} + f_1\alpha_{F_1}\right)\left(\beta_{P_2} + f_2\beta_{F_2}\right) - \left(\beta_{P_1} + f_1\beta_{F_1}\right)\left(\alpha_{P_2} + f_2\alpha_{F_2}\right)} \\ P_2 = -\dfrac{P\left(\beta_{P_1} + f_1\beta_{F_1}\right)}{\left(\alpha_{P_1} + f_1\alpha_{F_1}\right)\left(\beta_{P_2} + f_2\beta_{F_2}\right) - \left(\beta_{P_1} + f_1\beta_{F_1}\right)\left(\alpha_{P_2} + f_2\alpha_{F_2}\right)} \end{cases} \qquad (6.2.7)$$

Le fait de changer le sens de la force de frottement revient à changer, dans la formule précédente, f_1 et f_2 par leurs opposés. En appliquant ce changement dans l'équation 6.2.7, nous remarquons que P_1 et P_2 subissent une discontinuité. Les forces de frottement sont proportionnelles aux forces d'appui et donc subissent les fluctuations qu'elles ont engendrées de sorte que nous pouvons parler d'automodification du frottement.

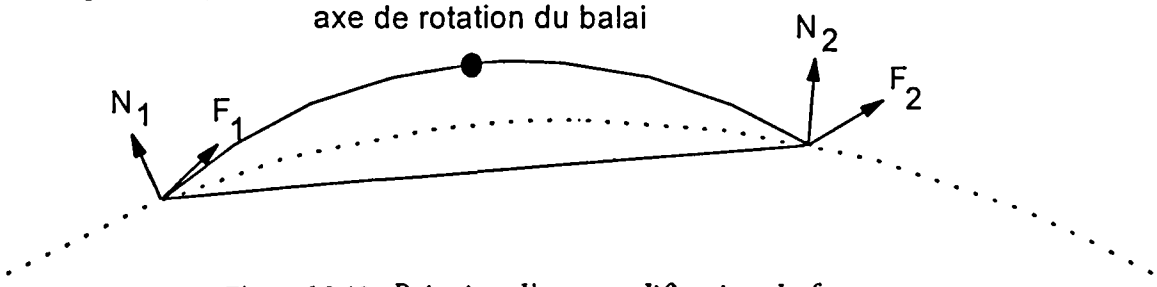


Figure 6.2.19: *Principe d'automodification du frottement*

6.2.4 Aérodynamique

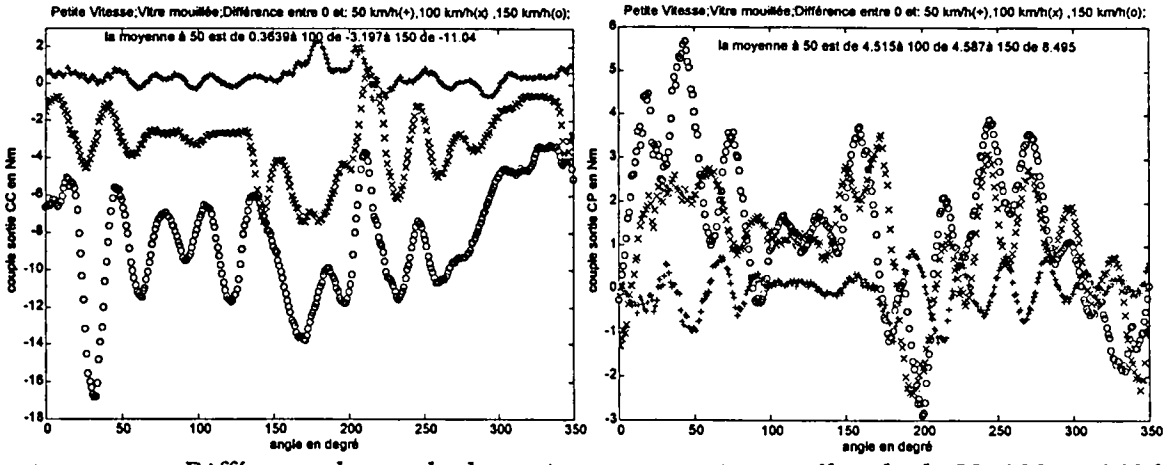


Figure 6.2.20: *Différence de couple de sortie entre une vitesse véhicule de 50, 100 ou 150 km/h et une vitesse nulle (filtrage 500 Hz)*

Les courbes des figures 6.2.20 et 6.2.21 sont obtenues par différence entre des signaux à une vitesse véhicule non nulle donnée et les mêmes signaux lorsque le véhicule est à l'arrêt. La différence entre les deux figures est la fréquence de filtrage. Les oscillations ne sont pas aléatoires mais reproductibles.

6.2.4.1 Différence entre les deux côtés (CC et CP)

Conformément à ce que nous avions indiqué au chapitre 5, le côté conducteur présente des forces aérodynamiques plus importantes que du côté passager (plus de deux fois sur nos courbes).

6.2.4.2 Influence de la vitesse

L'augmentation de la vitesse du véhicule modifie la vitesse et l'accélération des différentes pièces du système, et par suite, les forces d'inertie; cependant ces changements n'ont qu'une incidence relativement faible. Ce qui apparaît très nettement sur la figure 6.2.20, c' est la différence importante de vibration des bras. Sur la figure 6.2.21, ces signaux sont en grande partie filtrés.

6.2.4.3 Faible perturbation de la vitesse relative de l'air

Intéressons-nous aux variations possibles de la vitesse relative de l'air afin de déterminer leur influence sur les forces aérodynamique. La différence de vitesse des balais entre l'aller et le retour est relativement faible, ne dépassant pas 11km/h du côté conducteur et 15 km/h du côté passager. La vitesse d'entraînement du balai est bien supérieure à celle due aux oscillations du bras-balai (fig. 6.3.16), si bien que les oscillations n'ont que peu d'influence sur la vitesse relative avec l'air. Nous pouvons donc penser que l'influence des paramètres du système comme l'élasticité, la masse est faible sur les forces aérodynamiques. Ainsi la forme des pièces par exemple joue un rôle plus important (paragraphe 5.2.5).

Étant donné que le bras vibre à une fréquence constante et que les forces aérodynamiques accélèrent le mouvement aller et freinent le mouvement au retour, les oscillations se trouvent décalées temporellement. Il est donc naturel de les voir apparaître sur la figure 6.2.20.

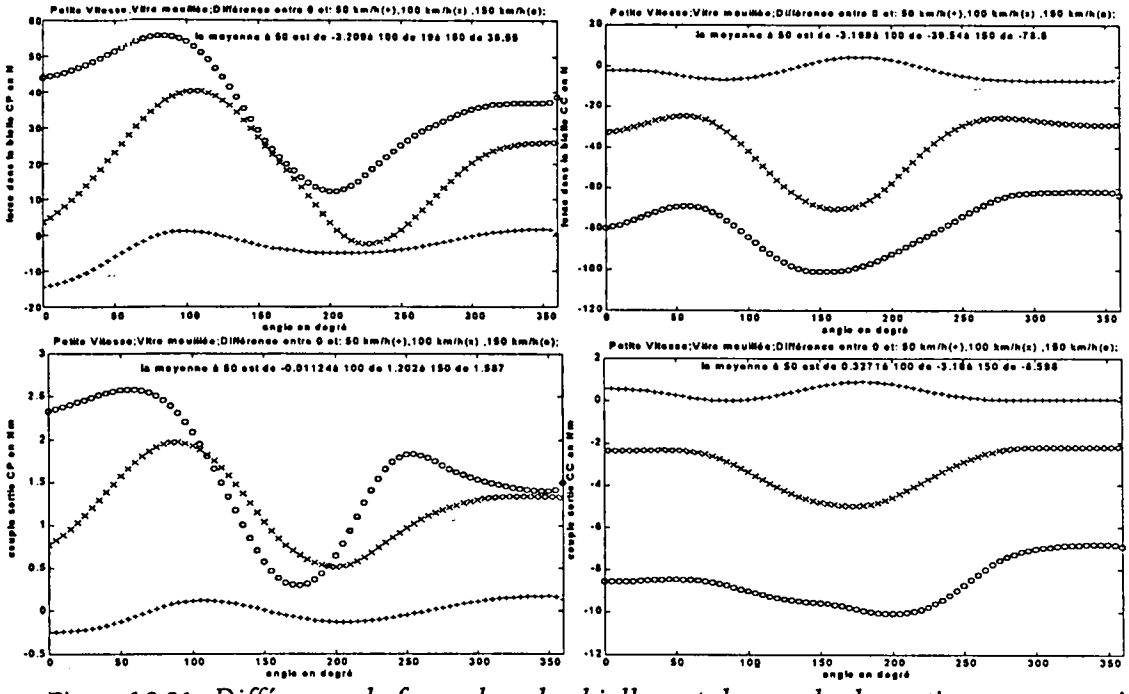


Figure 6.2.21: *Différence de force dans les bielles, et de couple de sortie, entre une vitesse véhicule de 50, 100 ou 150 km/h et une vitesse nulle, relevée par différents capteurs (filtrage 3 Hz)*

6.2.4.4 Influence de l'aérodynamique sur la période

Lorsque le véhicule est à l'arrêt, le temps nécessaire pour passer de l'A.F. (arrêt fixe) à l'OAF (opposé arrêt fixe) est plus long que pour revenir à l'A.F. en raison du poids des bras-balai comme nous l'avons vu au paragraphe 6.2.2. Cette différence s'atténue et s'inverse lorsque la vitesse du véhicule augmente: les forces aérodynamiques poussent le système à la montée et le freinent à la descente. Pour les vitesses de 100 km/h, le temps de montée du balai est moins important que celui de descente. Pour une condition donnée, la durée globale d'un cycle varie peu: la différence ne dépasse pas 15% sur les mesures de temps de cycles effectuées (tableau 6.2.1). Par contre, le rapport du temps d'aller sur celui de retour passe du simple au double. La période globale passe par un minimum pour une vitesse de véhicule comprise entre 0 et 100km/h. Le minimum semble être atteint pour des périodes aller et retour égales.

période	1,47	1.35	1,38	1.57	1.53	1.57	1.08	0.97	1.00	1.46	1.11	1.33
(cc) aller/ total	0.51	0.51	0.47	0.65	0.52	0.49	0.52	0.52	0.48	0.55	0.52	0.49
condition	pvgm	pvgm	pvgm	pvgs	pvgs	pvgs	gvgm	gvgm	gvgm	gvgs	gvgs	gvgs
vitesse	0	50	100	0	50	100	0	50	100	0	50	100

légende : pv: petite vitesse, gv: grande vitesse, gm: glace mouillée, gs: glace sèche

Tableau 6.2.1: *Influence de l'aérodynamique sur la période et sur le ratio temporel entre l'aller et le retour*

6.2.5 Jeux

6.2.5.1 Rattrapage de jeux

Pendant la phase libre du jeu, c'est à dire, lorsque les pièces ne sont plus en contact, aucune force ou couple n'est transmis. Ainsi, sur les courbes de force ou de couple apparaissent des paliers nuls pendant le rattrapage des jeux. Sur la figure 6.2.22, les oscillations dues à l'élasticité du bras et de l'axe, au niveau du couple de sortie sont nombreuses à atteindre le couple nul (fréquent en vitre mouillée en raison des faibles valeurs de frottement), et donc à être écrêtées.

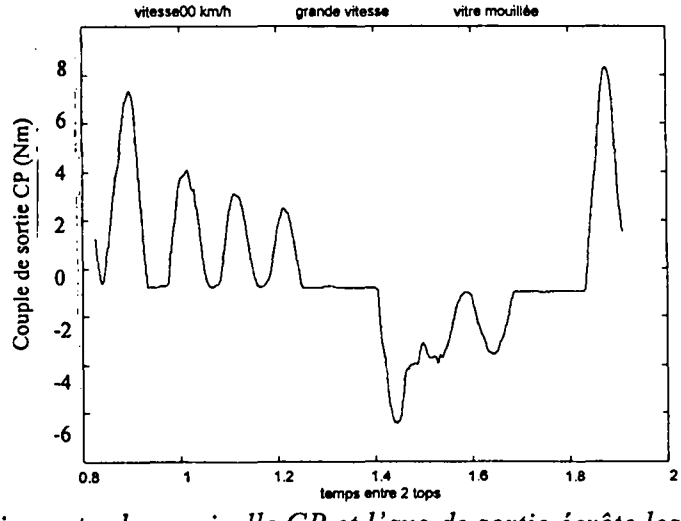


Figure 6.2.22: *Le jeu entre la manivelle CP et l'axe de sortie écrête les oscillations dues à l'élasticité du bras et de l'axe (courbe expérimentale)*

6.2.5.2 Influence de l'amortissement

Sur la figure 6.2.23, nous remarquons que les pics de force restent relativement constants pour des valeurs d'amortissement très différentes. Nous avions fait cette hypothèse au paragraphe 3.5.1. Elle est donc tout à fait raisonnable.

En augmentant l'amortissement, nous constatons sur la figure 6.2.23 que le nombre de rebonds diminue ainsi que la durée globale du choc.

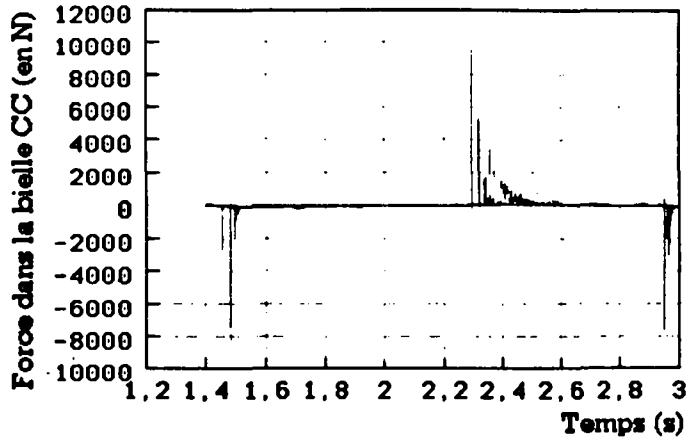


Figure 6.2.23: *Evolution de la force côté conducteur pour un même jeu entre la manivelle moteur et la bielle CC mais pour différents amortissements (0.1 1 10 100 1000)*

6.2.5.3 Equivalence des jeux entre la manivelle moteur et la bielle CC d'une part et entre la manivelle CC et la bielle CC d'autre part

Comme nous le remarquons sur la figure 6.2.24, ces deux jeux produisent les mêmes forces. Ce résultat se comprend aisément car les deux jeux sont du même type, aucune élasticité ou inertie ne vient s'interposer entre les deux rotules, et de plus la bielle transmet intégralement tous ses efforts aux manivelles (seules liaisons).

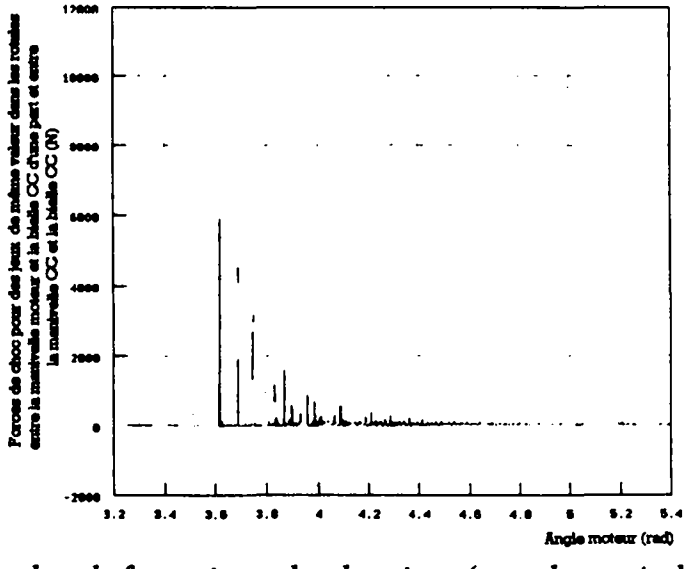


Figure 6.2.24: *Les courbes de forces issus des deux jeux (entre la manivelle moteur et la bielle CC d'une part et entre la manivelle CC et la bielle CC d'autre part) sont pratiquement confondues*

6.2.5.4 Les forces issues des jeux se propagent dans tout le système

Les forces issues des jeux se retrouvent à peu près partout, plus ou moins amorties. Ainsi un jeu entre la manivelle moteur et la bielle conducteur entraînera des chocs sur l'autre bielle (6.2.25) et aux points de contact, entre les deux balais et le pare-brise (6.2.26).

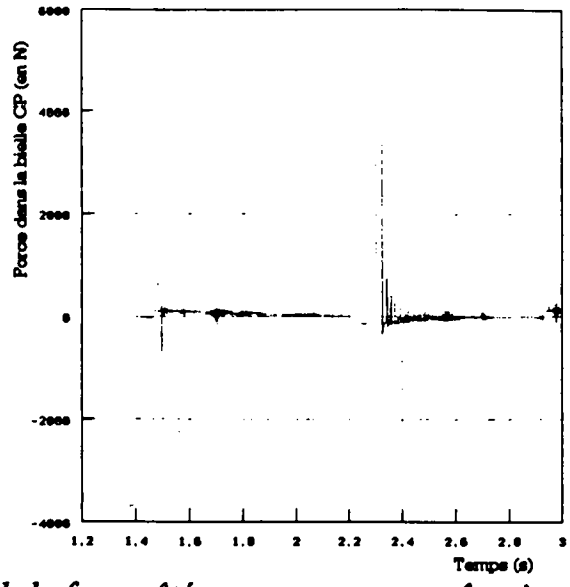


Figure 6.2.25: *Evolution de la force côté passager pour un même jeu entre la manivelle moteur et la bielle côté conducteur et différents amortissements (1 10 100)*

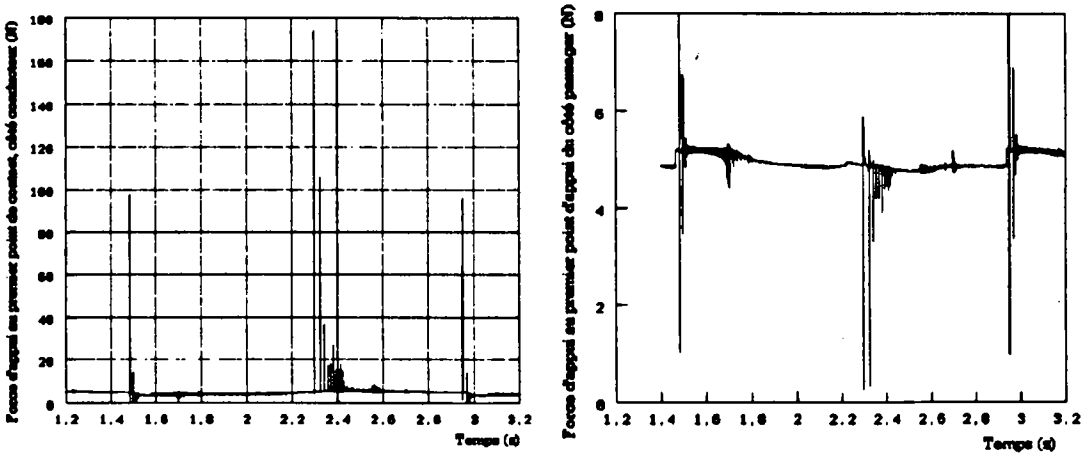


Figure 6.2.26: *Evolution des forces d'appui côté conducteur et passager pour un même jeu entre la manivelle moteur et la bielle côté conducteur*

6.2.6 Elasticité

6.2.6.1 Ressorts

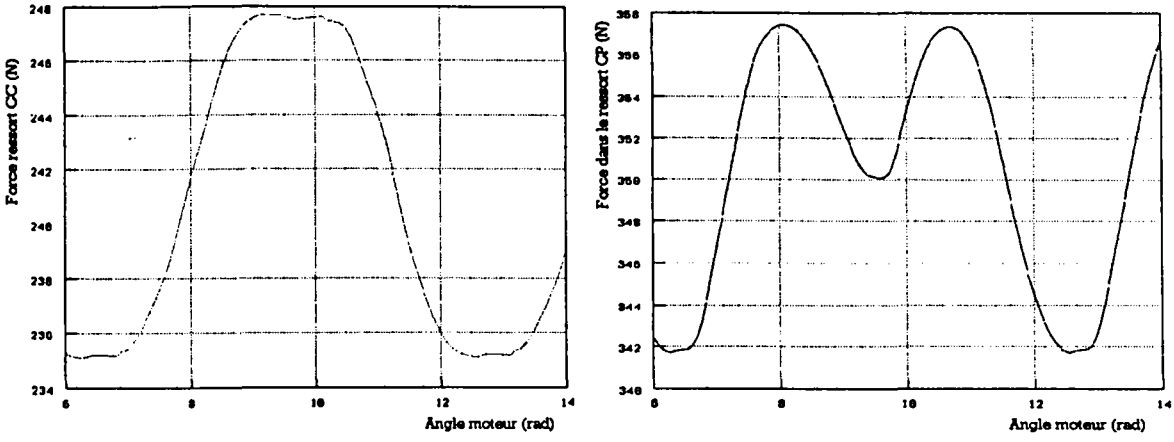


Figure 6.2.26: *Forces des ressorts (côtés passager et conducteur)*

Les variations de force des ressorts sur la figure 6.2.26 correspondent, dans notre cas, à une variation de galbe perçue par l'articulation entre l'entraîneur et le bras, variation qui change la longueur du ressort. Nous remarquons une différence de comportement entre les côtés conducteur et passager. Le maximum de force est presque en OAF du côté conducteur alors qu'il est en milieu de parcours du côté passager. Notons que les variations de forces sont faibles puisque inférieures à 5%.
Les fluctuations des forces d'appui présentent une similitude avec la force exercée par le ressort mais dont les effets sont inversés. Ainsi une augmentation de la longueur du ressort, et donc une augmentation de la force du ressort, correspond à une augmentation de la force d'appui sur la courbe sans frottement (fig. 6.2.17). Ce résultat, comme nous allons le voir, n'est pas automatique.

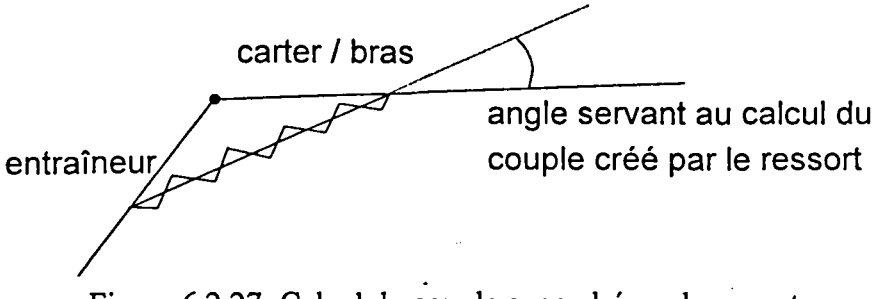


Figure 6.2.27: Calcul du couple engendré par le ressort

Le couple engendré par le ressort est le produit de la force du ressort par le sinus de l'angle entre cette force et la direction du carter au niveau de l'attache (fig. 6.2.27).
Lors de l'augmentation de longueur du ressort, la force augmente, le sinus de l'angle entre cette force et la direction du carter au niveau de l'attache diminue si bien que le couple, peut augmenter ou diminuer. Cette évolution dépend des conditions physiques (raideur du ressort) et géométriques. Ce couple moteur va générer de la même manière une force d'appui sur le balai. L'angle entre d'une part la force d'appui et d'autre part la droite entre l'axe de rotation entraîneur / carter et celui entre le bras et le balai dépend de la forme du pare-brise. Celle-ci évolue au cours du mouvement, changeant la relation entre le couple et la force d'appui. En

résumé, la variation de la force du ressort joue un rôle sur la force d'appui, mais il est imprudent d'appliquer les résultats obtenus ici à tout type de véhicule.

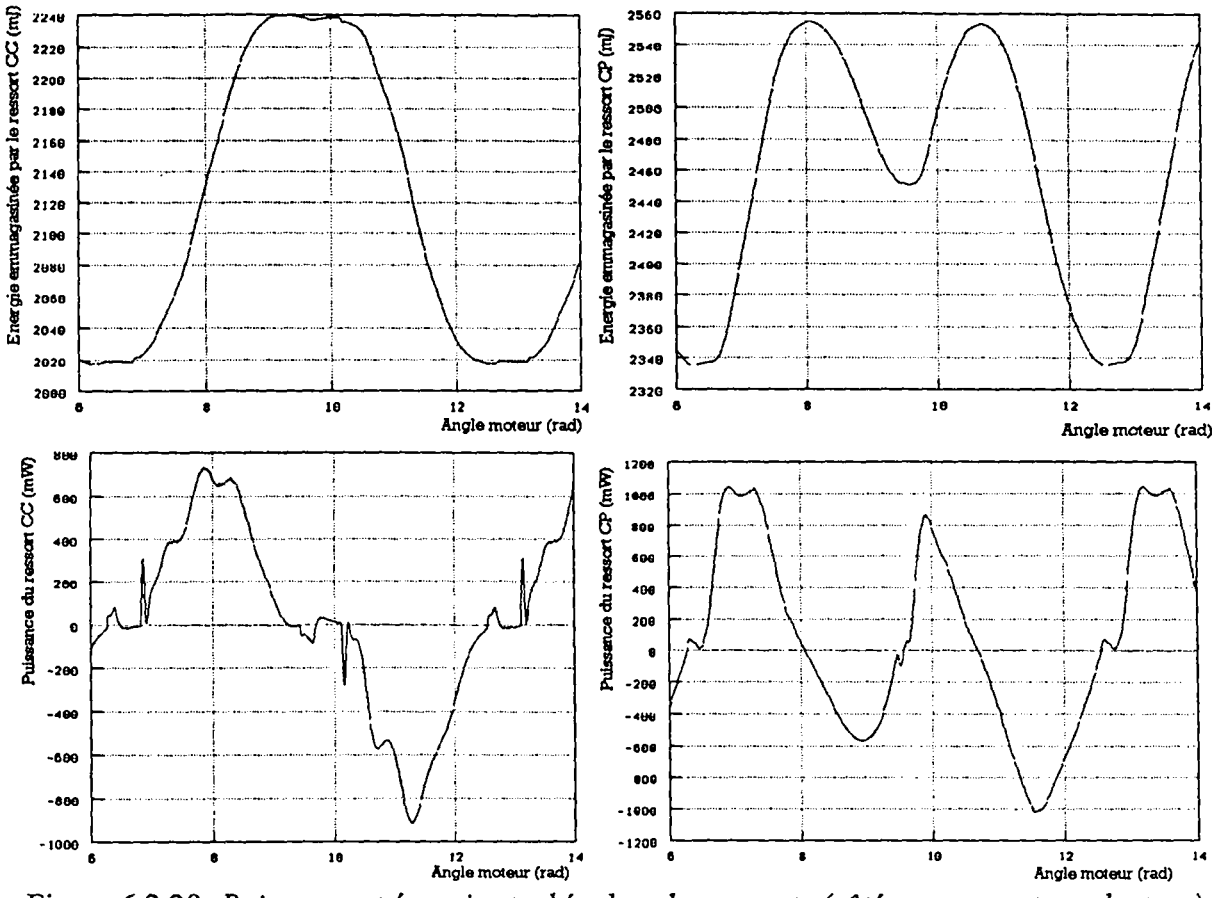


Figure 6.2.28: *Puissance et énergie stockée dans les ressorts (côté passager et conducteur)*

6.2.6.2 Bras et axes

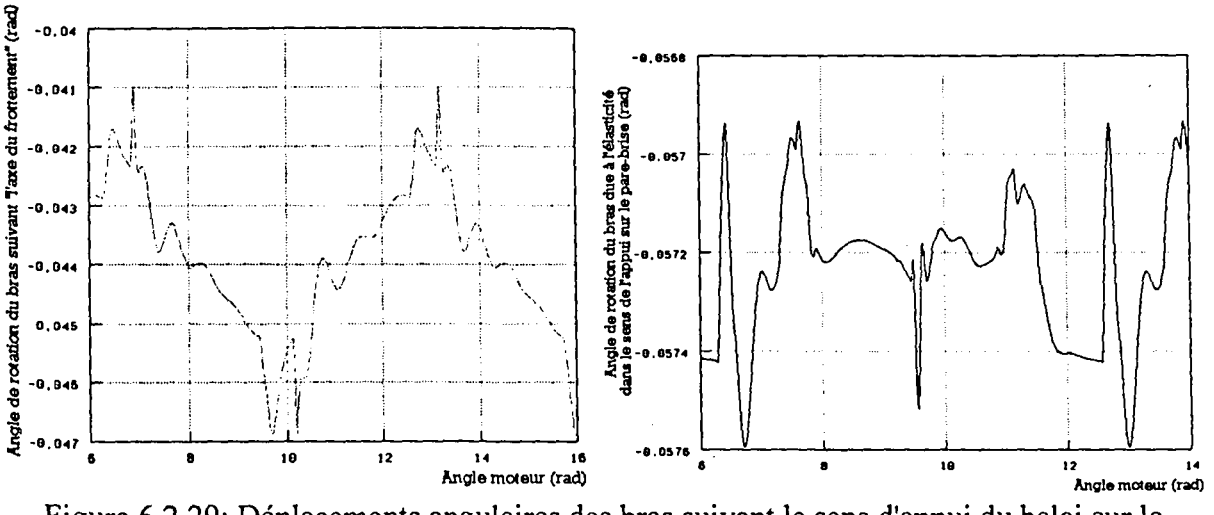


Figure 6.2.29: Déplacements angulaires des bras suivant le sens d'appui du balai sur le pare-brise (CC à gauche et CP à droite).

Sur la figure 6.2.29, nous remarquons que l'angle de déformation présente quelques oscillations qui représentent au maximum 15% de la valeur moyenne.

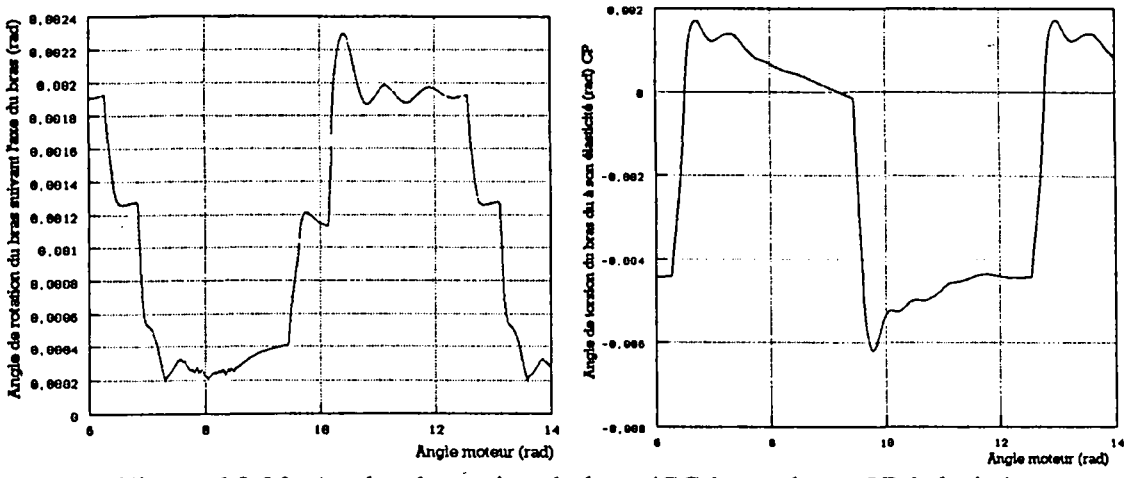


Figure 6.2.30: Angles de torsion du bras (CC à gauche et CP à droite)

Le bras n'est pas droit mais tordu, ainsi la torsion n'est pas due uniquement à la force de frottement mais aussi à la force normale. C'est pourquoi l'angle de torsion du bras côté conducteur (fig. 6.2.30) est toujours positif. De même celui du côté passager est décalé: les valeurs semblent symétriques par rapport à un axe

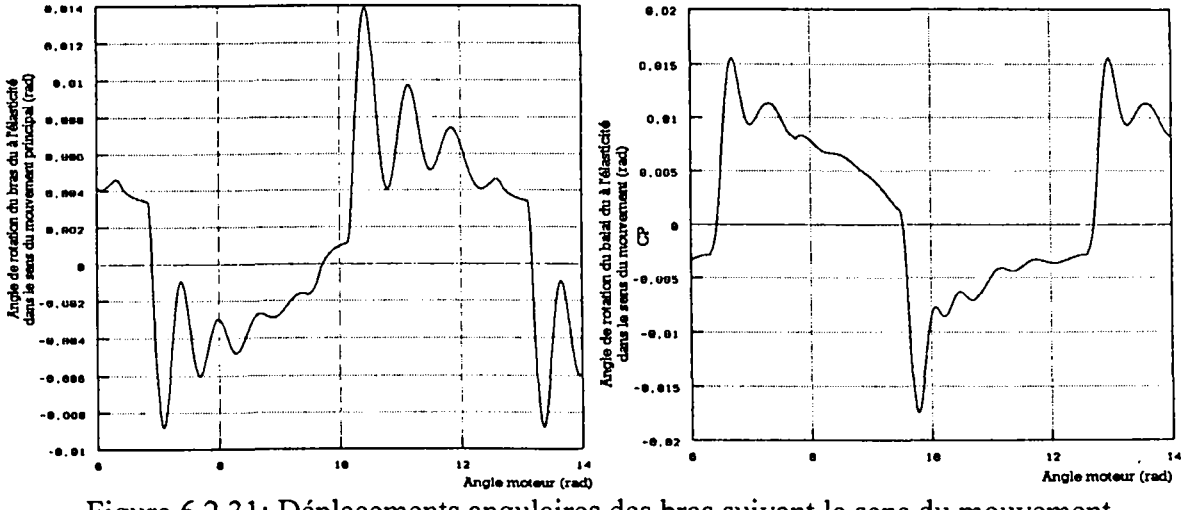


Figure 6.2.31: Déplacements angulaires des bras suivant le sens du mouvement (CC à gauche et CP à droite)

Le déplacement angulaire du bras suivant le sens du mouvement est le reflet des forces dans le sens du mouvement que nous avons déjà eu l'occasion d'examiner.

6.2.6.3 Lame

Les simulations sur un modèle comprenant une lame découpée demandent des temps de calcul importants. Nous avons réussi à simuler le mouvement du balai selon la moitié de la trajectoire dans le sens montant. Nous remarquons sur la figure 6.2.32 que pour une lame calée, la ligne de contact n'est pas coplanaire et que vue également du dessus cette ligne est également curviligne.

Figure 6.2.32: *Balai avec lame CC découpée en 2x8 éléments glissant sur le pare-brise (point de contact rouge)*

Ce modèle gère les contacts et il est normal, dans un premier temps, que le balai rebondisse sur le pare-brise lorsque nous le laissons tomber pour qu'il prenne sa position d'équilibre. Lorsque l'équilibre est atteint, les contacts deviennent permanents et la lame se cale complètement.

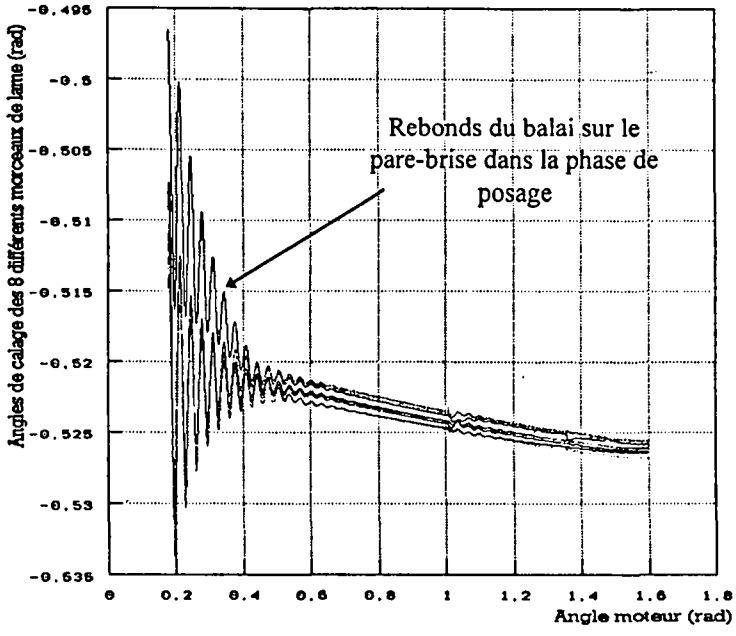


Figure 6.2.33: *Angles de calage des morceaux de lame*

6.3 DIFFÉRENTES COURBES (FORCES, COUPLES, DÉPLACEMENTS, ...) DANS LES PIÈCES

Afin de comparer les courbes entre elles, nous nous sommes placés dans la configuration de référence suivante:
- un coefficient de frottement de 0,6 ,
- un jeu angulaire entre la manivelle côté conducteur et son axe de 0,055 rad,
- l'élasticité des bras et des axes.

Ce cas correspond comme nous le verrons au 6.5 au cas expérimental où la vitre est mouillée.

6.3.1 Moteur (manivelle moteur)

6.3.1.1 Couple moteur

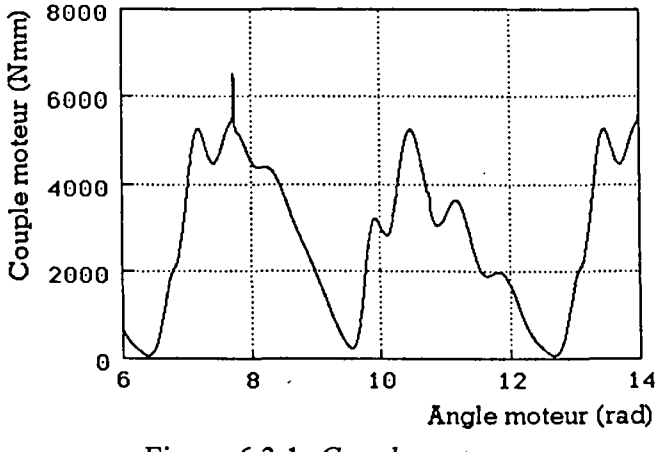


Figure 6.3.1: *Couple moteur*

Le couple moteur (fig. 6.3.1) présente des minima en AF (arrêt fixe) et en OAF (opposé arrêt fixe). En effet, comme nous l'avons vu au paragraphe 6.2.1.2, l'inertie des bras-balais se trouve motrice juste avant l'AF ou l'OAF. Lorsque le coefficient de frottement est fort (vitre sèche) l'énergie d'inertie est absorbée totalement dans ces frottements soulageant le

moteur. Par contre, lorsque ce coefficient est faible, le bras entraîne le moteur via la timonerie. Le "moteur" devient alors générateur. Juste après l'AF ou l'OAF le moteur accélère le système, les bras-balais sont alors résistants. Il lui faut donc fournir un couple plus important. Il est à remarquer que le couple moteur n'est pas le reflet exact des couples de sortie. En effet le système bielle/manivelle change les rapports en fonction des angles (fig. 6.3.2). Ce rapport présente des pics en AF et en OAF.

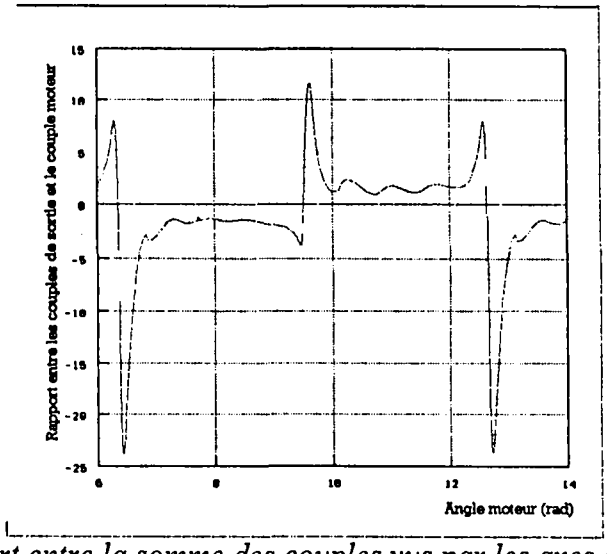


Figure 6.3.2: *Rapport entre la somme des couples vus par les axes de sortie et le couple moteur*

6.3.1.2 Angle et vitesse angulaires du moteur

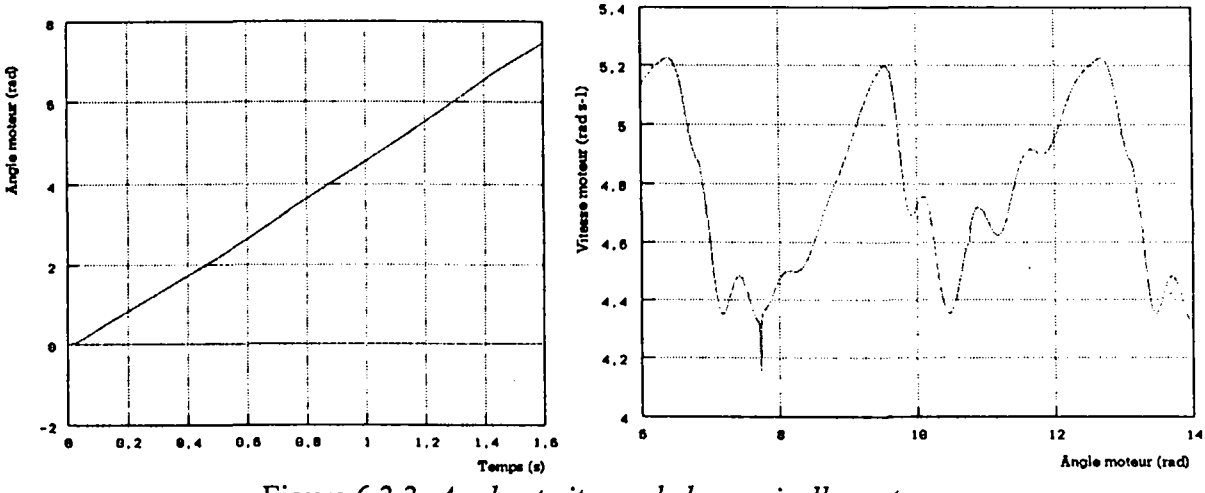


Figure 6.3.3: *Angle et vitesse de la manivelle moteur*

La courbe de l'angle moteur en fonction du temps est presque une droite (fig. 6.3.3). Pour l'autre graphe, la vitesse angulaire présente des pointes en AF et en OAF. Comme nous l'avons vu au 6.3.1.1 le couple résistant est faible pour ces deux positions. D'après la caractéristique du moteur, ce couple faible correspond à une vitesse de rotation élevée. En d'autre terme, la vitesse du moteur augmente lorsque les inerties des bras et des balais lui fournissent de l'énergie. Lorsque le coefficient est faible (vitre mouillée), la courbe de vitesse angulaire présente des maxima avant l'AF et l'OAF lorsque le bras est moteur. Lorsque le moteur a besoin de couple pour accélérer les bras-balais, c'est à dire après ces deux positions,

la courbe précédente présente des minima. La vitesse moteur reste relativement constante. Elle varie sur notre exemple de 4,4 à 5,2 rads^{-1}, soit un écart inférieur à 20%.

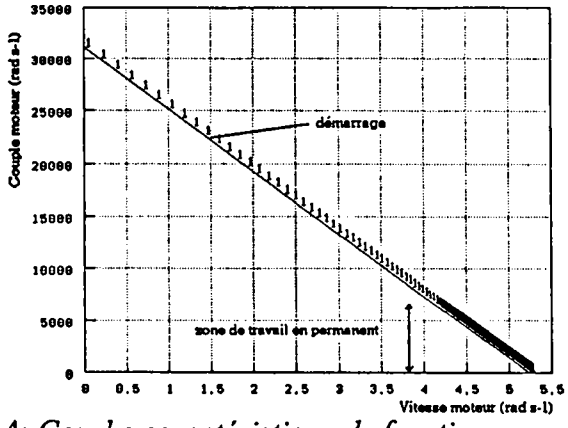


Figure 6.3.4: *Courbe caractéristique de fonctionnement du moteur*

Comme nous le remarquons sur la figure 6.3.4, en régime permanent, seules les faibles valeurs de couples sont utilisées.

6.3.1.3 Puissance moteur

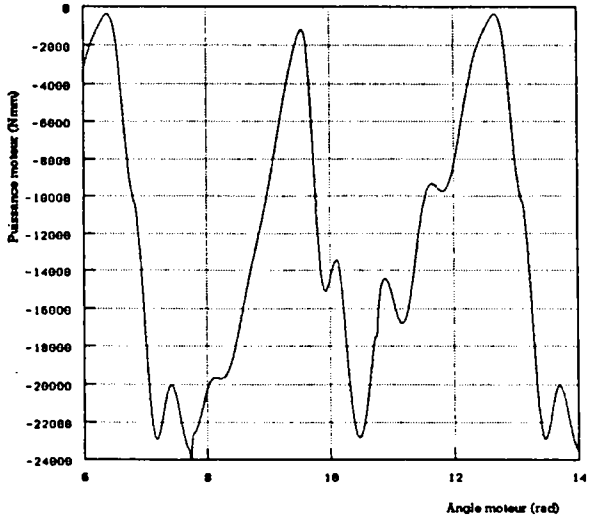


Figure 6.3.5: *Puissance moteur (reçue par la manivelle moteur donc négative)*

La puissance moteur (fig. 6.3.5) est le produit du couple par la vitesse moteur. Ces deux paramètres varient en sens inverse. Cependant, étant donné que la vitesse moteur varie sur une plage moins importante que le couple, c'est surtout l'influence de ce dernier qui est prépondérante.

6.3.1.4 Discontinuité de frottement non perçue par le moteur

La force perçue par la manivelle moteur se décompose essentiellement en deux composantes (fig. 6.3.6), une qui génère le couple résistant du moteur (courbes c etd), et une de traction / compression (courbes a et b). En raison des positions géométriques d'A.F. et d'O.A.F. où les bielles et les manivelles sont alignées, les discontinuités de frottement ne sont pas perçues par le moteur. En effet, la force qui s'exerce sur la manivelle moteur dans ces deux positions est radiale et sa composante tangentielle suceptible de générer un couple résistant est nulle.

En examinant les courbes de force dans les bielles (fig. 6.3.9), nous remarquons que, contrairement au couple moteur, les minima et les maxima sont obtenus en A.F. et en O.A.F. Nous pouvons donc déduire, à partir de ces deux résultats, que la forme de la force dans les bielles est plus dictée par le couple en sortie de timonerie (principalement par les forces d'inertie et de frottement) que par la forme du couple moteur.

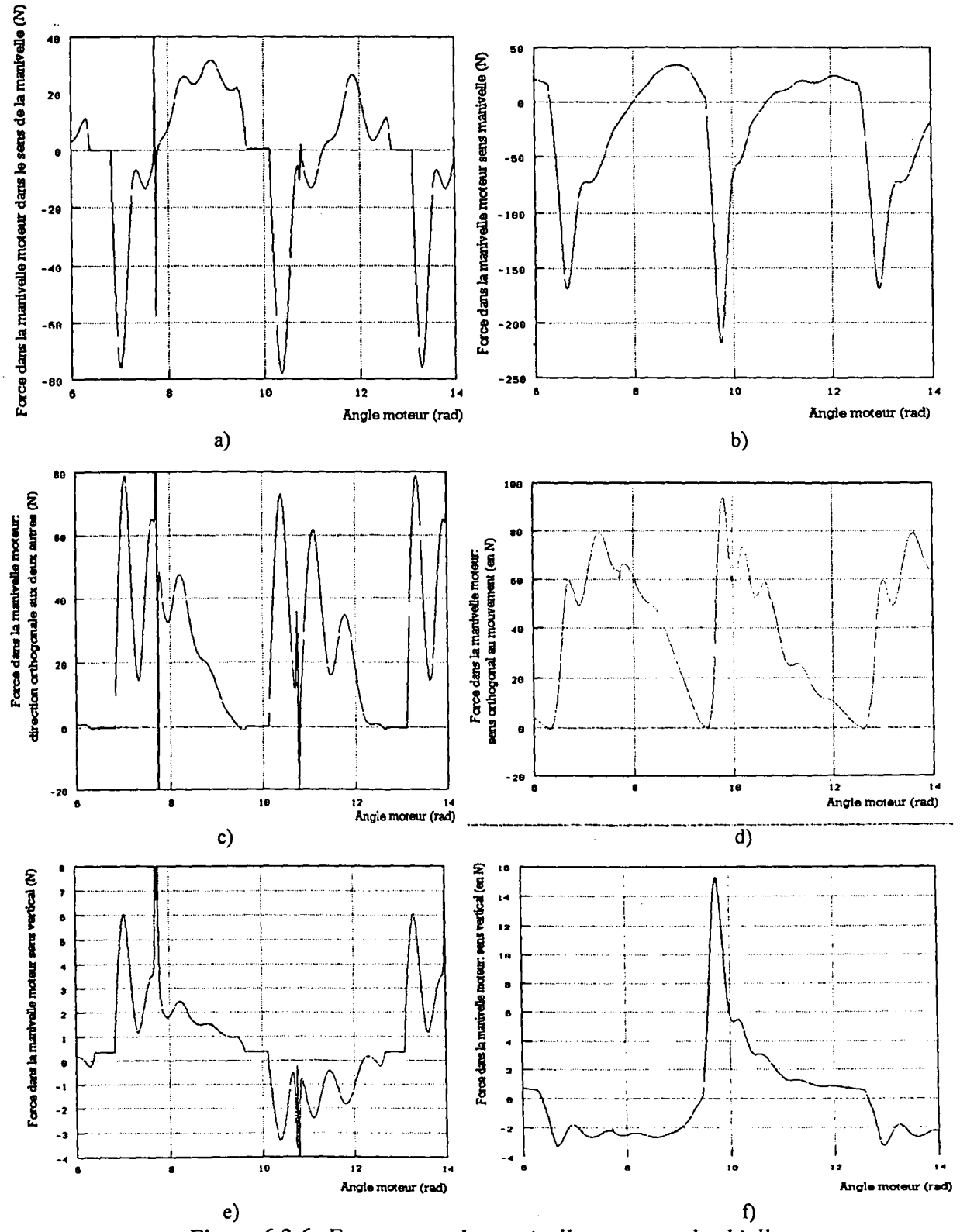


Figure 6.3.6: *Forces entre la manivelle moteur et les bielles (côté conducteur à gauche et côté passager à droite) (en N)*

6.3.1.5 Traction et compression de la manivelle moteur

Le graphique de la figure 6.3.7 exprime la traction / compression de la manivelle moteur qui est le reflet de deux phénomènes :

* le cosinus de l'angle, entre la manivelle et la bielle, change lorsque cet angle atteint $\pi / 2 \pmod{\pi}$, valeur correspondant à peu près au milieu de l'A.F. et l'O.A.F.

* la valeur de la force change prématurément avant l'A.F. et l'O.A.F.

Le changement prématuré du sens de la force n'a pas lieu systématiquement. Par exemple, dans notre cas, il n'a pas lieu avant l'O.A.F. du côté conducteur. Dans ce cas, la compression atteint l'O.A.F. (fig. 6.3.7)

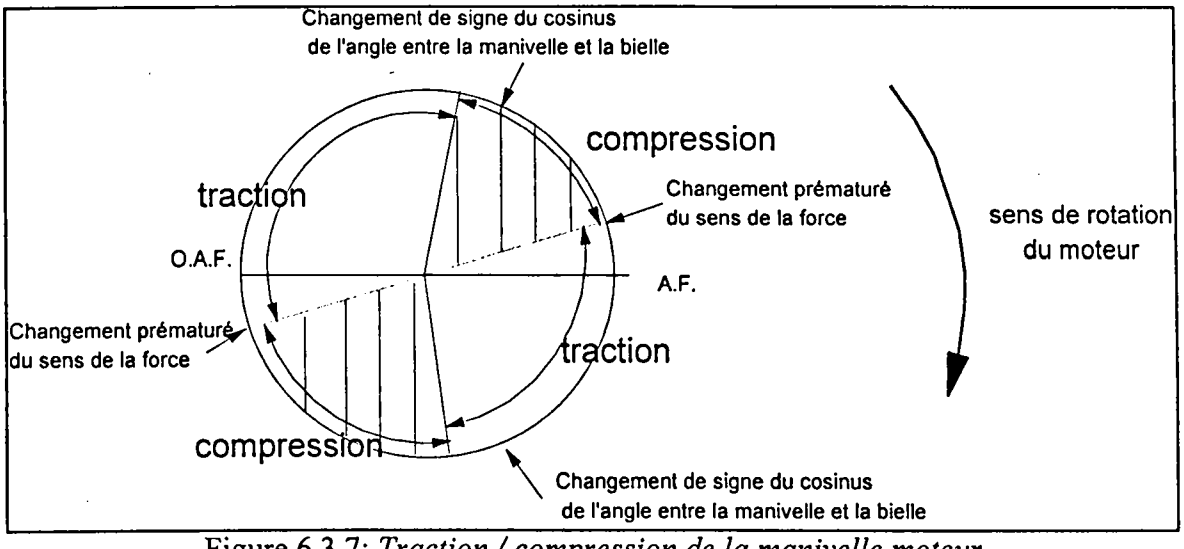


Figure 6.3.7: *Traction / compression de la manivelle moteur*

6.3.1.6 Flexion de la manivelle moteur

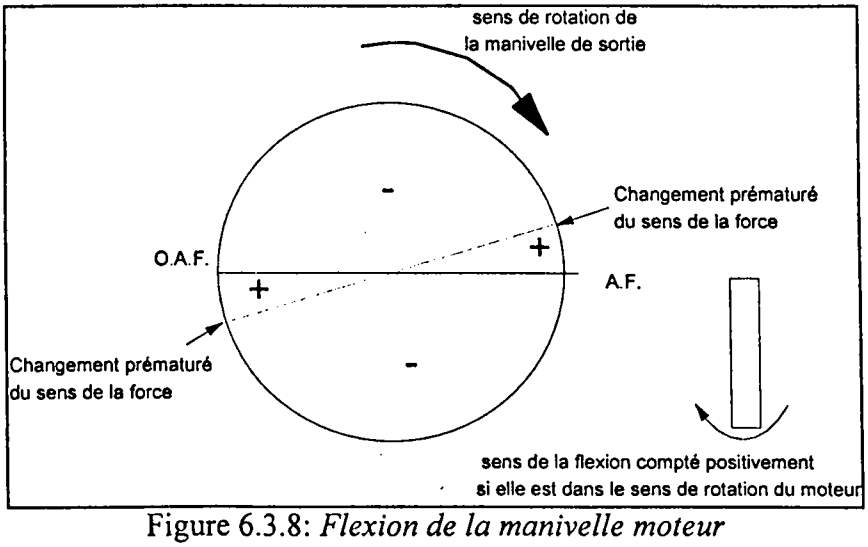


Figure 6.3.8: *Flexion de la manivelle moteur*

Le sens de flexion de la manivelle moteur est presque toujours identique. En effet, sans changement prématuré du sens de la force dans la bielle, le sinus de l'angle manivelle moteur change de signe en même temps que la force. Une autre interprétation consiste à dire que le couple est presque toujours résistant et que le moteur tourne toujours dans le même sens.

6.3.2 Forces dans les bielles

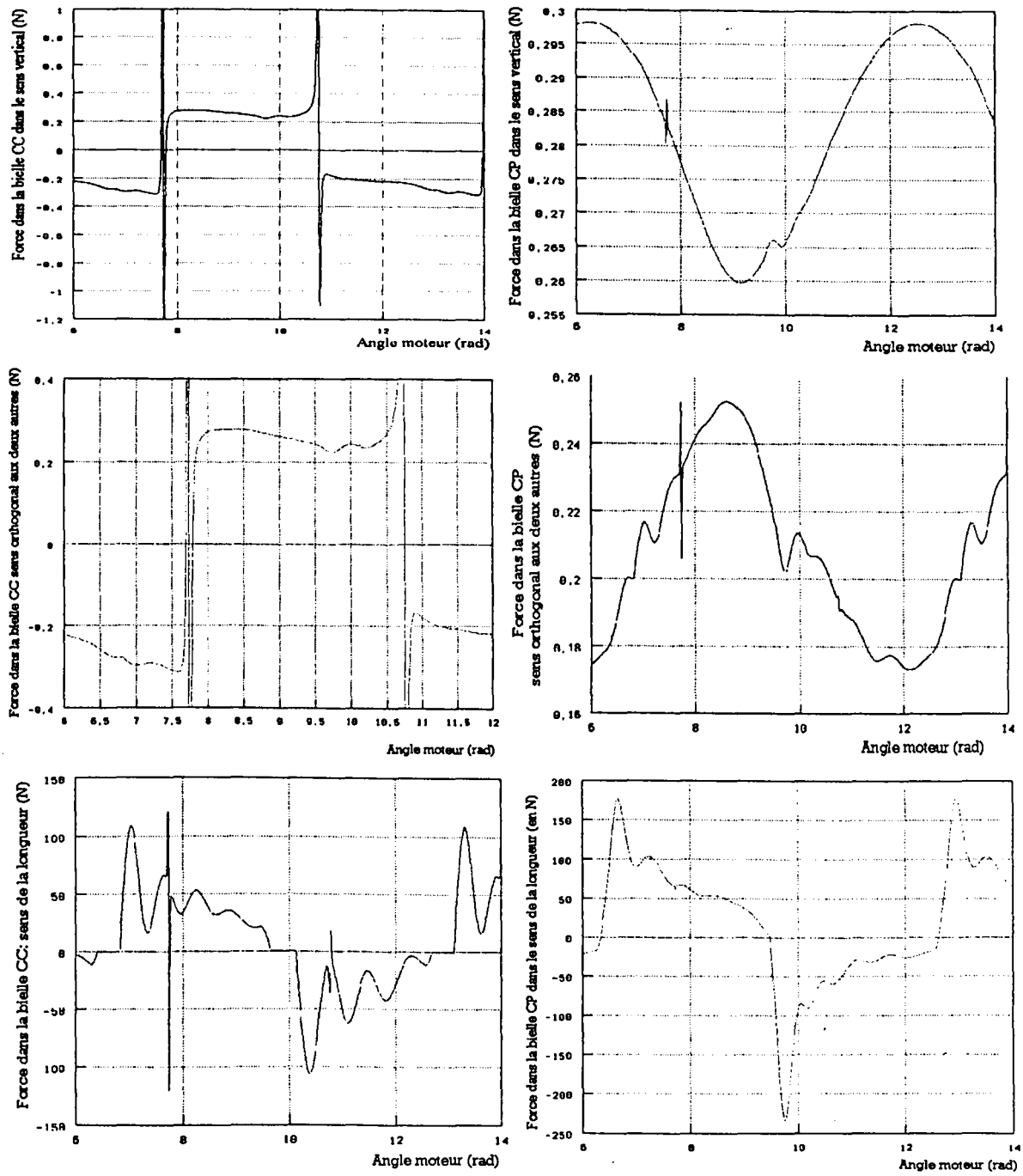


Figure 6.3.9: *Composantes des forces s'exerçant sur les bielles*

La force transmise par la bielle (fig. 6.3.9), est essentiellement dans le sens de sa longueur. Le signe + ou - des valeurs attribuées ne dépend que du repère. Les forces transmises ne s'exercent que dans le sens de la longueur de la bielle si bien que les bielles se trouvent alors soit en traction, soit en compression. Cela montre clairement que l'inertie des bielles ne joue aucun rôle dans ce modèle de base. En effet, les composantes de l'accélération de la bielle dans le sens de la longueur et orthogonale à la fois à la bielle et à l'axe vertical au centre de gravité de la bielle, sont du même ordre de grandeur. Ainsi, leurs maxima respectifs s'élèvent à 1,2 et à 0,6ms^{-2}. Donc si l'une est négligeable, l'autre l'est aussi. De ce fait, les forces s'exerçant entre les bielles et les manivelles de sortie sont identiques à celles s'exerçant entre les bielles et la manivelle moteur.

6.3.3 Sortie du mécanisme (axes et manivelles de sortie)

6.3.3.1 Angles, vitesses et accélérations de sortie

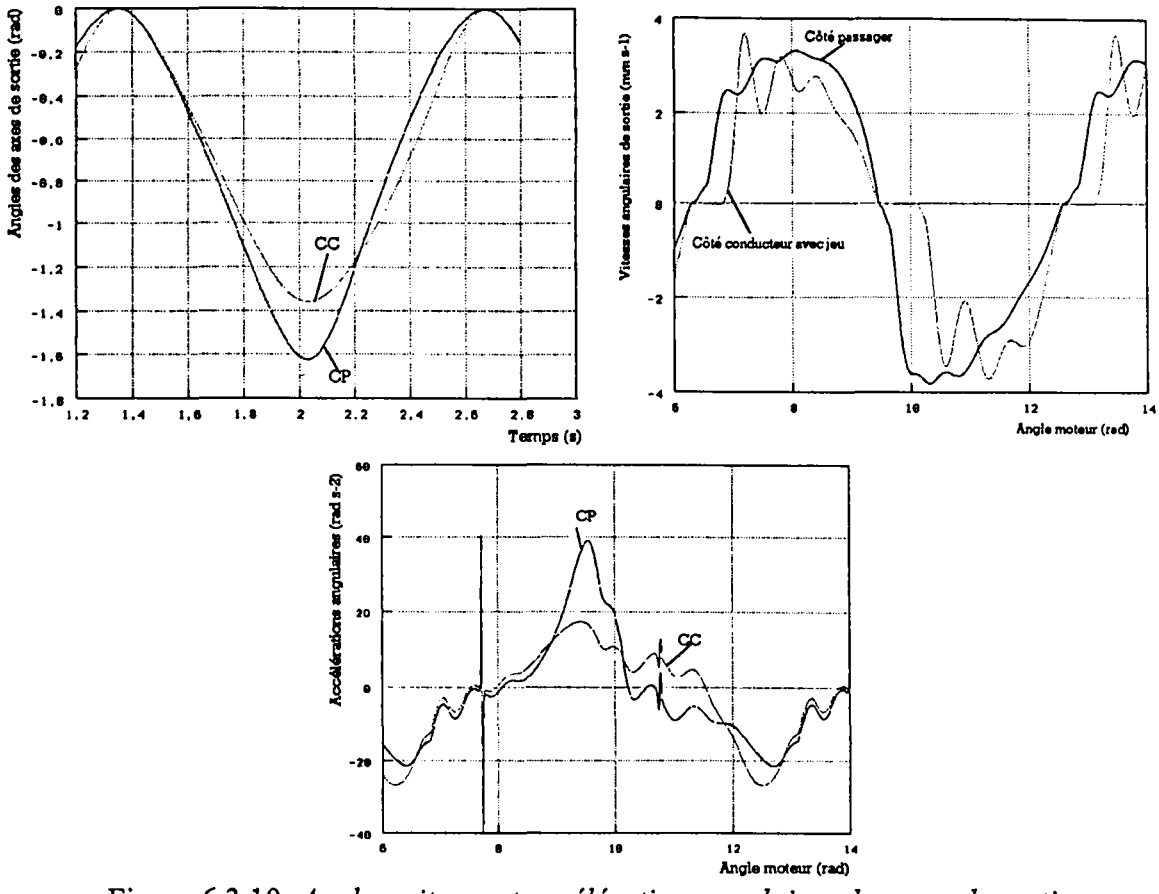


Figure 6.3.10: *Angles, vitesse et accélération angulaires des axes de sortie*

Les courbes des angles de sortie sont pratiquement confondues avec des droites entre l'AF et l'OAF execpté à proximité de ces deux points de retournement du système.
Les vitesses angulaires sont pratiquement sinusoïdales lorsque le coefficient de frottement est faible. Elles prennent la forme de créneaux lorsque le coefficient de frottement est fort (la vitesse est presque constante entre l'AF et l'OAF et varie rapidement en AF et en OAF).
Les accélérations présentent des extrema en AF et en OAF. Lorsque le coefficient de frottement est faible, la courbe a une forme triangulaire. Par contre lorsque le coefficient de frottement est fort, l'accélération est presque nulle entre les deux points et présente deux pics en AF et en OAF. En fait, la différence entre les deux est due au saut de couple résultant du frottement. Lorsque celui-ci est faible, le couple d'inertie impose sa forme à la courbe. Lorsqu'il est fort, les valeurs importantes du couple induit rendent négligeables celles des autres couples.

6.3.3.2 Couple de sortie

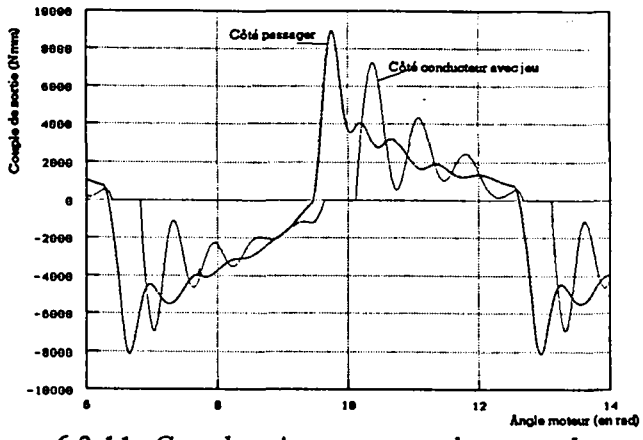


Figure 6.3.11: *Couples s'exerçant sur les axes de sortie*

Sur la figure 6.3.11, nous observons nettement l'influence du jeu sur le couple. Il engendre des paliers nuls en AF et en OAF et permet ainsi une réduction notable des pics de force. Nous remarquons également qu'en présence du jeu les oscillations ont des amplitudes plus importantes.

6.3.3.3 Puissance de sortie

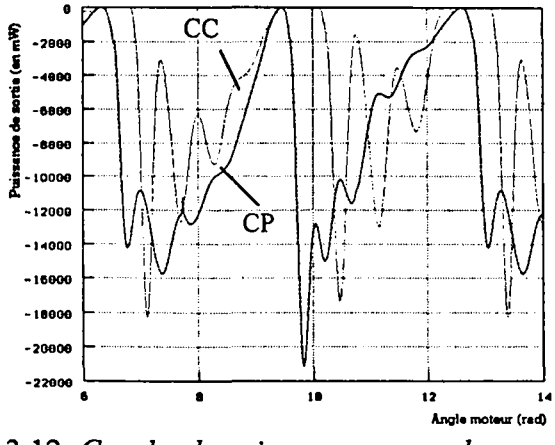


Figure 6.3.12: *Courbe de puissance vue par les axes de sortie*

C'est le produit du couple de sortie par la vitesse angulaire de sortie. Remarquons que les oscillations puissance dues à l'élasticité ne sont pas en phase, ce qui permet de minimiser l'énergie totale.

6.3.3.4 Comportement en flexion et en traction / compression des manivelles de sortie différent de celui de la manivelle moteur

Comme pour la manivelle moteur, nous pouvons établir des graphiques de flexion et de traction / compression des manivelles de sortie qui expliquent bien les courbes obtenues (fig. 6.3.13).

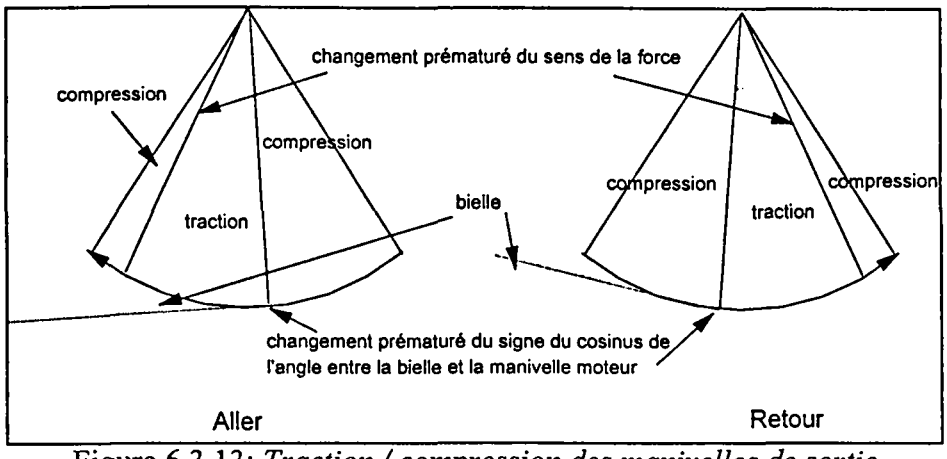


Figure 6.3.13: *Traction / compression des manivelles de sortie*

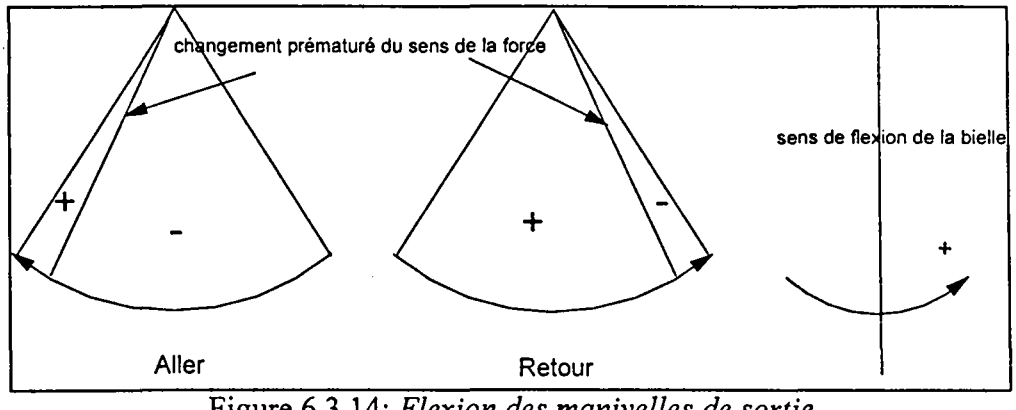


Figure 6.3.14: *Flexion des manivelles de sortie*

Les manivelles de sortie n'ont pas le même comportement que la manivelle moteur. Elles connaissent légèrement plus de compression que de traction. De plus, sur un cycle complet, la flexion qui s'exerce dans un sens puis dans l'autre est équilibré. Du côté conducteur, entre l'A.F. et l'O.A.F., la force dans la bielle conserve le même signe (fig. 6.3.13).
Dans le sens vertical (palier), la composante de force dans la manivelle de sortie est faible, moins de 10% de la force globale. Cette force présente des maxima en A.F. et en O.A.F. dont les valeurs possèdent des signes différents.

6.3.4 Paramètres du balai en contact avec le pare-brise

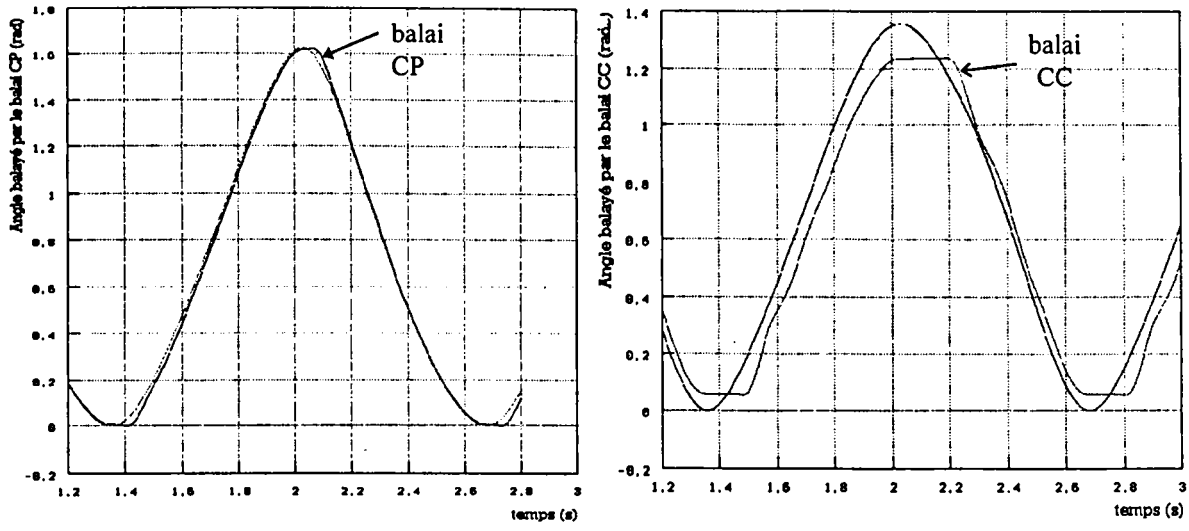


Figure 6.3.15: *Angles de balayage des balais superposés aux angles de sortie*

Sur la figure 6.3.15, nous voyons l'influence de l'élasticité et des jeux sur l'angle de balayage. En effet du côté passager où seule l'élasticité intervient, nous notons l'apparition de brusques variations d'angle en AF et en OAF. Du côté conducteur, le système possède en plus un jeu qui génère un écrétage de la courbe. En effet le balai est immobile sur le pare-brise au moment du rattrapage de jeu, alors que le bras décélère puis accélère. L'introduction du jeu correspond donc à une réduction de l'angle balayé.

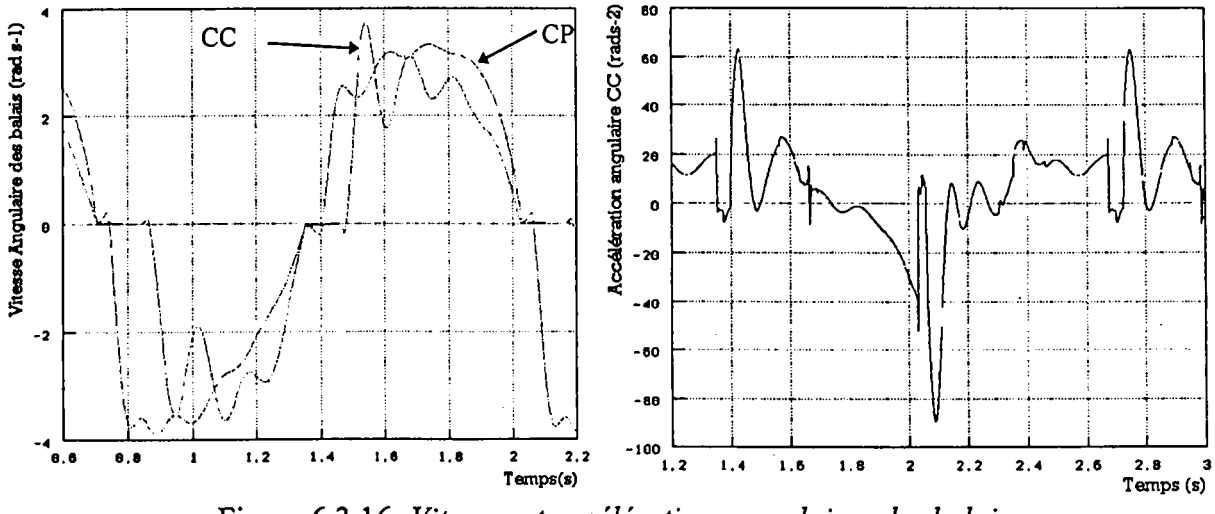


Figure 6.3.16: *Vitesses et accélérations angulaires des balais*

La vitesse du côté conducteur sur la figure 6.3.16 présente des oscillations plus importantes que celle du côté passager en raison du jeu. Les accélérations montrent de grandes variations en AF et en OAF du côté conducteur.

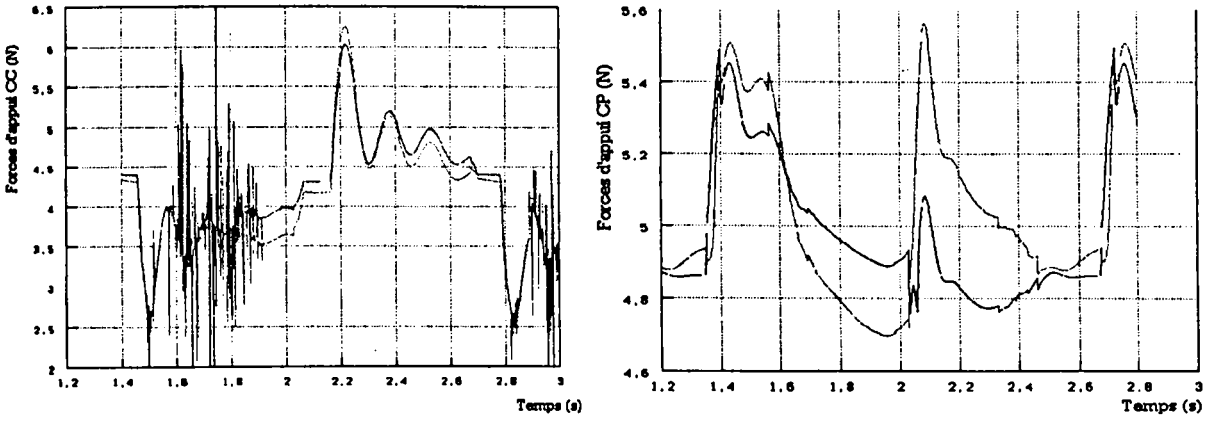


Figure 6.3.17: *Forces d'appui aux contacts du pare-brise (une force d'appui au bout de chaque balai)*

Les courbes de la figure 6.3.17 représentent des forces normales au pare-brise aux extrémités des balais qui servent à déterminer les forces de frottement correspondantes. Les variations maximales sont de l'ordre de 10% de la valeur maximale, donc faibles. L'influence des forces de frottement est visible et a été expliquée au paragraphe 6.2.3.2.

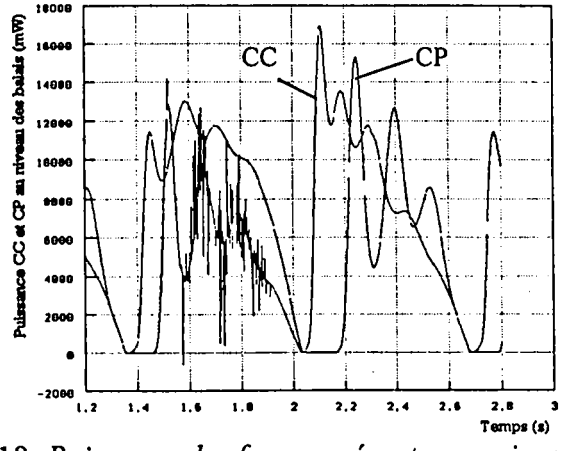


Figure 6.3.18: *Puissance des forces présentes au niveau des balais*

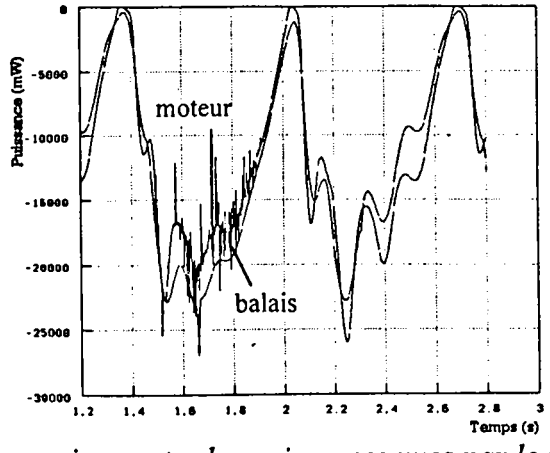


Figure 6.3.19: *Comparaison entre les puissances vues par le moteur et les balais*

Les puissances délivrées par le moteur et reçues par les balais sont très proches. Les faibles différences sont dues aux élasticités et aux inerties du système d'essuyage qui emmagasinent et restituent de l'énergie.

6.4 PHÉNOMENES VIBRATOIRES

6.4.1 Vibration principale transmise dans tout le système

Tous les capteurs que nous avons positionnés sur le système de la Peugeot 106 (paragraphe 1.4) enregistrent des vibrations de fréquence 9,5Hz (fig. 6.4.2 et 6.4.3). Nous avons reproduit ce phénomène vibratoire dans nos simulations. Ces vibrations sont dues aux élasticités des bras et des arbres de sortie couplées avec les inerties des bras-balai et des balais. Dans notre cas, la flexibilité de la bielle n'est pas importante, mais si elle l'avait été, nous l'aurions prise en compte au travers de C_1 (figure 6.4.1). Nous allons examiner un modèle analytique simple reproduisant ce phénomène.

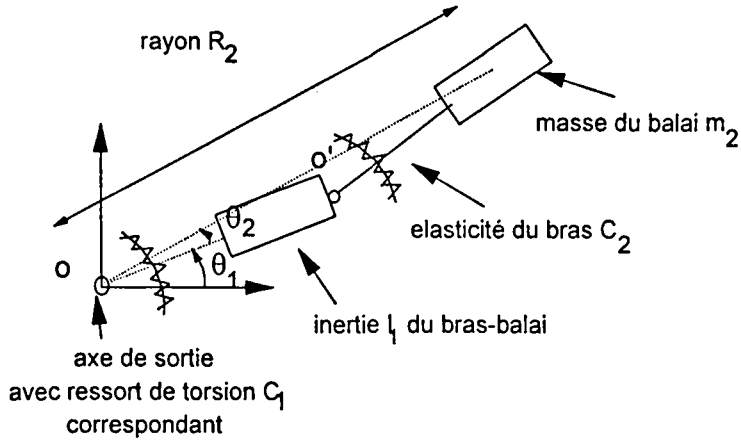


Figure 6.4.1: *Modèle expliquant les vibrations du système*

Soient R_2 le rayon entre l'axe de sortie (fig. 6.4.1) et l'axe de fixation du balai, m_2 la masse du balai, I_1 et I_2 les inerties respectives du bras-balai balai et du balai par rapport à l'axe ($I_2 \approx m_2 R_2^2$), θ_1 et θ_2 les angles de déformation repérant les centres de gravité du bras balai et du balai dans des repères de centre respectifs O et O' (respectivement associées à l'axe de sortie et au bras-balai).

Nous faisons l'hypothèse des petits mouvements. Les équations de la dynamique s'écrivent autour de la position d'équilibre:

$$\begin{cases} I_1\theta_1'' = -C_1\theta_1 + C_2\theta_2 \\ I_2\left(\theta_1'' + \theta_2''\right) = -C_2\theta_2 \end{cases}$$

Cette équation peut être écrite matriciellement :

$$I\theta'' = C\theta,$$

$$\text{avec } I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ I_2 & I_2 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} -C_1 & C_2 \\ 0 & -C_2 \end{bmatrix}$$

Les deux fréquences de résonance sont les racines carrées des valeurs propres de $I^{-1}C$. Dans notre cas, les deux fréquences valent 9,5 et 30Hz.

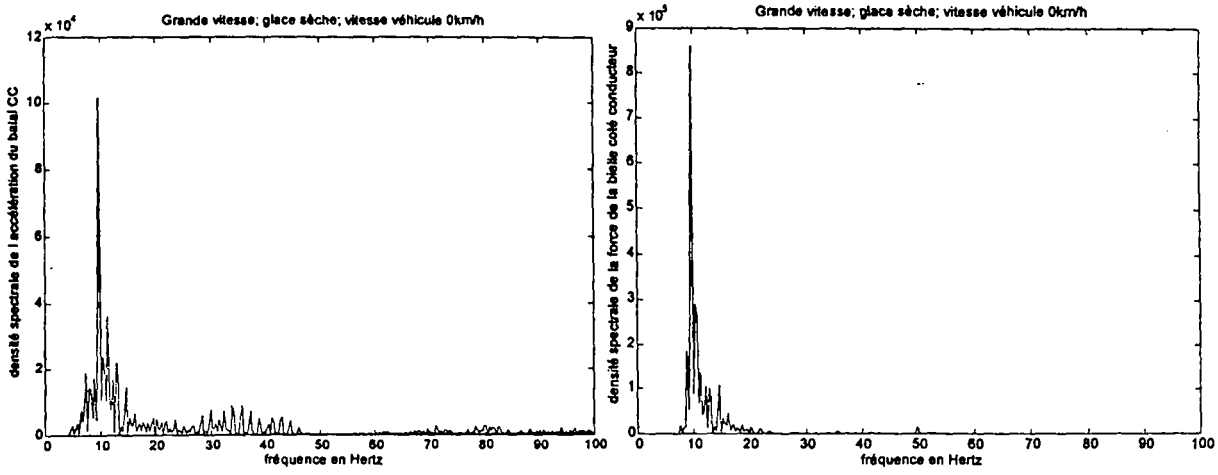


Figure 6.4.2: *Densité spectrale de quelques signaux (accélération angulaire du balai et force dans la bielle CC en unité SI): l'amplitude de vibration des bras et des axes prédomine.*

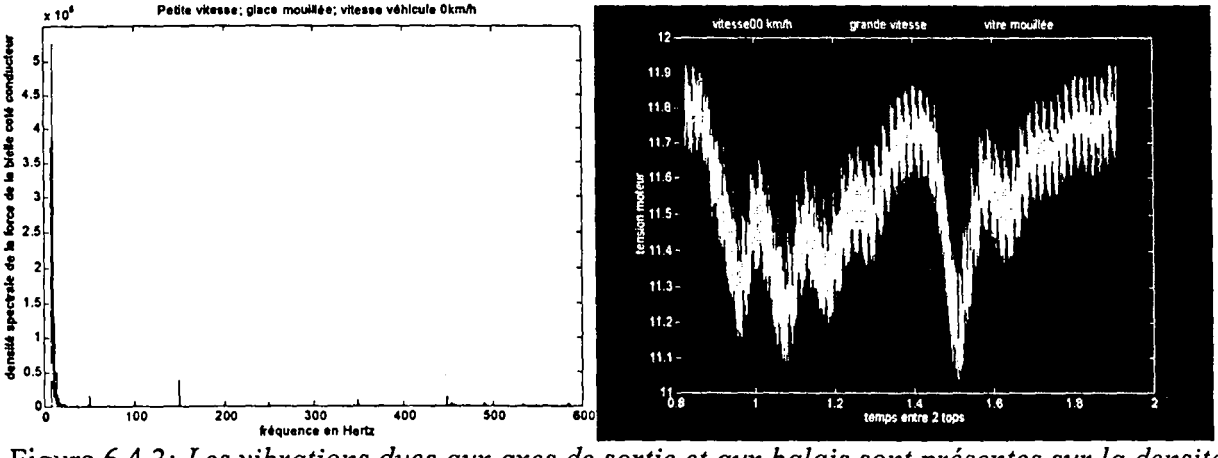


Figure 6.4.3: *Les vibrations dues aux axes de sortie et aux balais sont présentes sur la densité spectrale de la force dans la bielle (unité SI) et sur la courbe de tension du moteur (en volt).*

6.4.2 Vibration platine négligeable

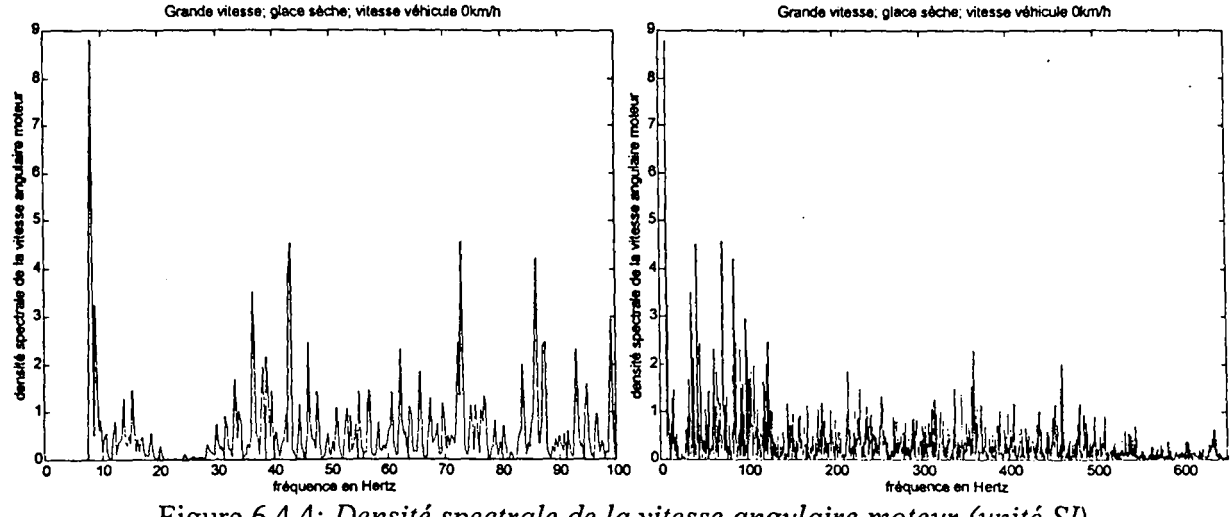


Figure 6.4.4: *Densité spectrale de la vitesse angulaire moteur (unité SI) entre 0 et 100Hz et entre 0 et 700Hz*

Fréquences relevées sur une densité spectrale de vitesse angulaire (grande vitesse glace sèche) entre 0 et 500 Hz										
9,5	43	73	86	93	100	105	108	216	360	461

Tableau 6.4.1: *Valeurs de fréquences*

Au vu des résultats expérimentaux et des calculs d'éléments finis, les fréquences de 73, 93 et 360Hz (tableau 6.4.1) sont imputables aux vibrations de la platine. Elles possèdent des amplitudes plus faibles que les vibrations précédentes et sont uniquement présentes sur les données liées à la manivelle moteur. Nous ne les avons donc pas prises en compte dans notre modèle de simulation.

6.4.3 Vibrations issues du moteur

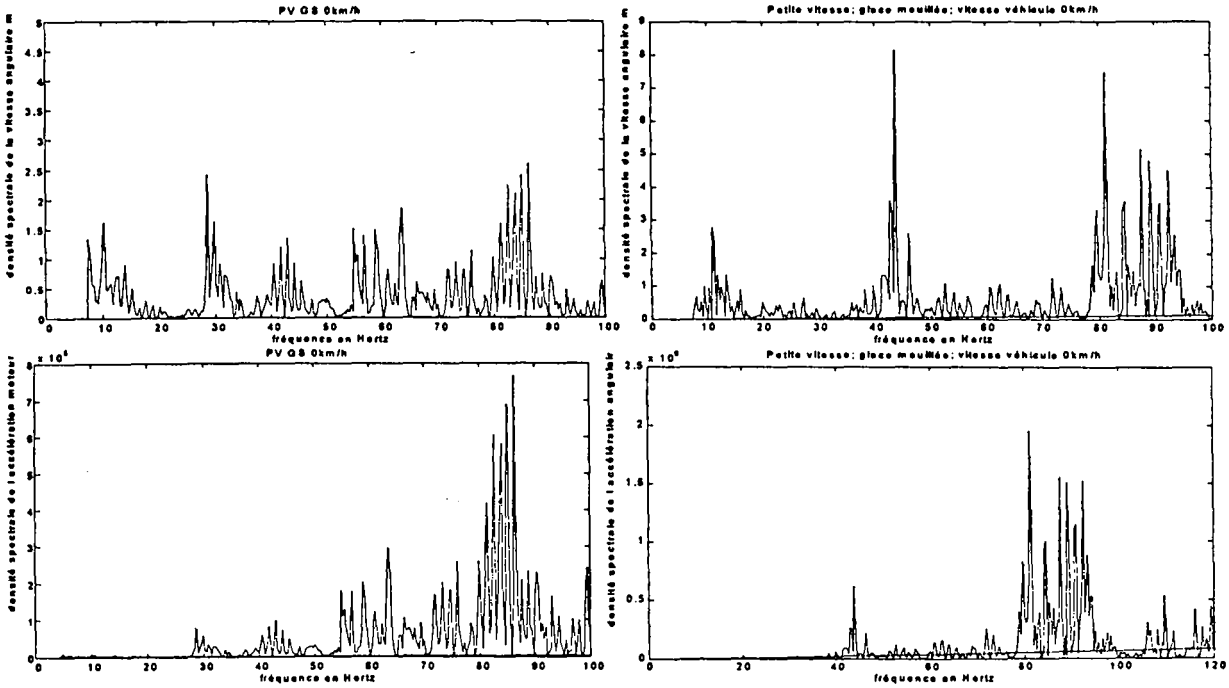


Figure 6.4.5: *Densité spectrale des vitesses et accélérations angulaires moteur entre 0 et 100Hz pour des coefficients de frottement différents (vitre sèche à gauche et humide à droite) (unité SI)*

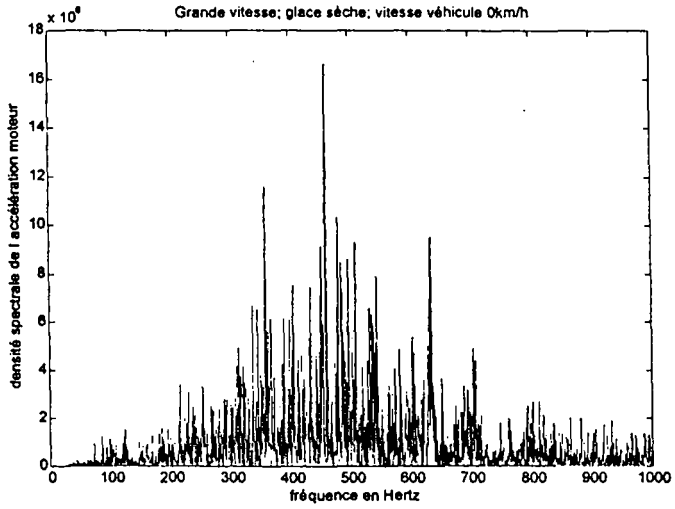


Figure 6.4.6: *Densité spectrale de l'accélération angulaire moteur entre 0 et 1000Hz (unité SI)*

Considérons les fréquences moteur les plus caractéristiques. Le rapport de réduction du moteur est de 53,17, le nombre de pôle est de deux; en prenant comme base de période 1,3s, nous obtenons deux fréquences 82 Hz (variation de pôle moteur) et 41 Hz (non uniformité au cours d'un cycle moteur comme le balourd). Ces valeurs varient avec la vitesse du moteur. Ainsi en petite vitesse, les deux fréquences valent 31 et 66Hz et en grande vitesse 43 et 86Hz.
Sur la figure 6.4.5, la fréquence autour de 80 Hz est la première en raison de son importance au niveau des courbes moteur entre 0 et 120 Hz. Par contre, en extrémité de balai nous avons vu que cette fréquence est presque inexistante (fig. 6.4.2). Le douzième harmonique (491Hz) qui correspond aux passages des lames sur le collecteur est très important sur le spectre de l'accélération angulaire du moteur (fig. 6.4.6). Sa présence est également notée sur celui des forces dans les bielles (fig. 6.4.2) mais faiblement.
Remarquons que les signaux de basses fréquences sont plus visibles sur les courbes de vitesse que sur celles d'accélération (considérer par exemple la vitesse et l'accélération du moteur). En effet, dans le domaine fréquenciel l'intégration d'un signal en notation complexe revient à le multiplier par $\frac{1}{j\omega}$ avec ω pulsation $\left(\text{rad.s}^{-1}\right)$.

6.5 VALIDATION DU MODELE

Nous remarquons que sur la figure 6.5.1 les courbes expérimentales et calculées sont bien corrélées. Les valeurs des extréma sont assez proches, le palier en OAF identique et les fréquences de vibration principales sont semblables. Néanmoins, le rattrapage de jeu se déclenche plus tôt dans la réalité que dans la simulation. Celui-ci se déclenche dès que la force dans la bielle est nulle. Avant de s'annuler, la force a une pente faible (fig. 6.5.1) et donc le moindre écart de force (ordonnée) peut engendrer une annulation précoce de la force. Cet écart est certainement dû d'une part, aux différences sur certains paramètres (valeurs d'amortissement, écart d'inertie, module d'Young, variation du coefficient de frottement ...) et d'autre part très certainement à une variabilité de la valeur du coefficient de frottement. N'oublions pas que ce jeu a été ajouté artificiellement et il est beaucoup plus important que ce qui est toléré dans les cahiers des charges. Nous pouvons donc nous attendre à une bonne représentation du modèle réel. En vitre sèche (fig. 6.5.2), nous remarquons également un léger écart entre l'aller et le retour que nous ne trouvions pas en vitre humide. La différence entre les deux courbes peut s'interpréter par la variabilité du coefficient de frottement. En effet des mesures sur vitre plane (fig. 6.5.3) nous ont montré que ce coefficient n'était pas constant à une vitesse stabilisée.

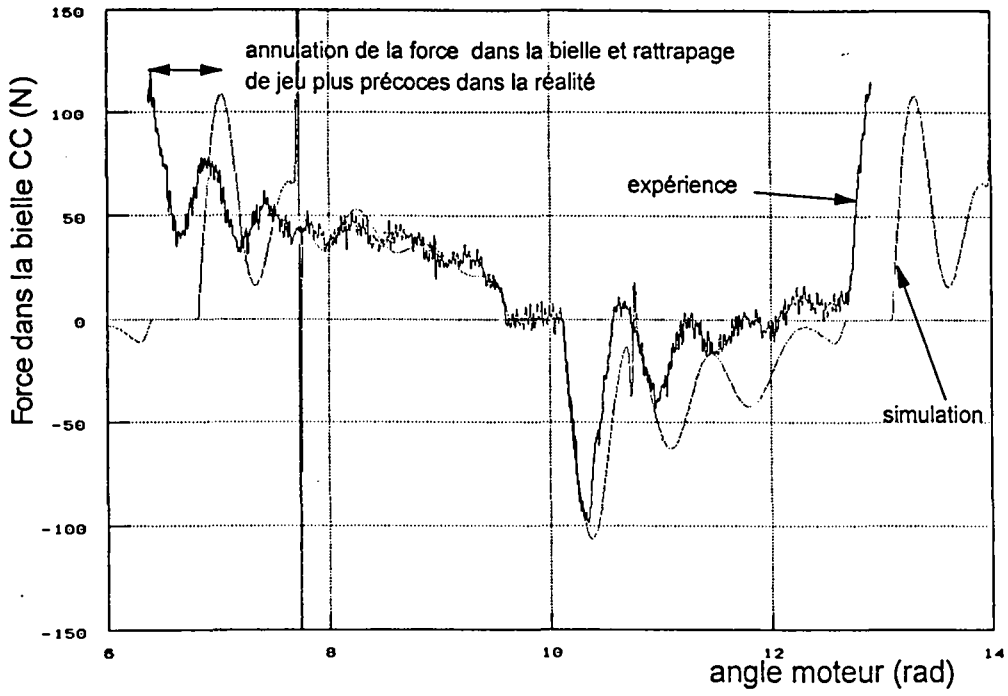


Figure 6.5.1: *Corrélation entre l'expérience et les simulations en vitre mouillée*

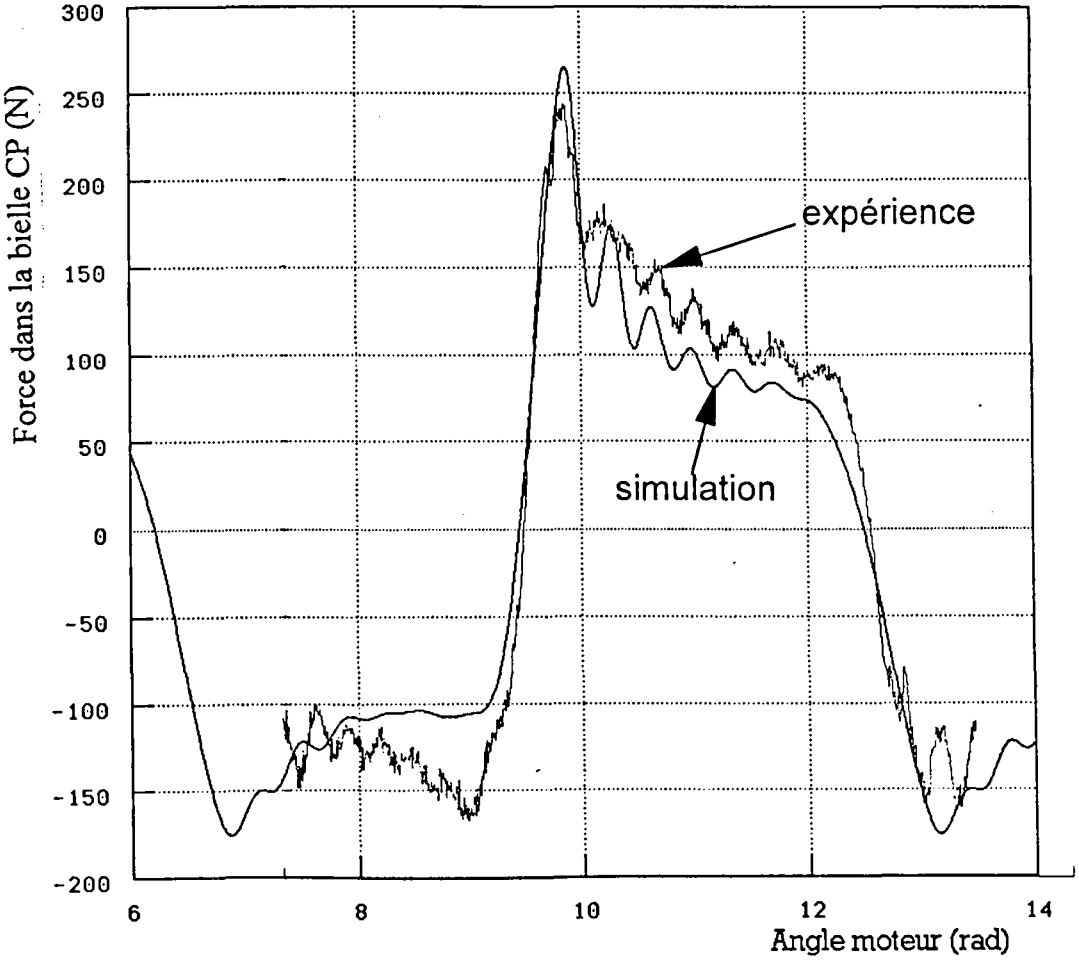


Figure 6.5.2: *Force dans la bielle côté passager en vitre sèche*

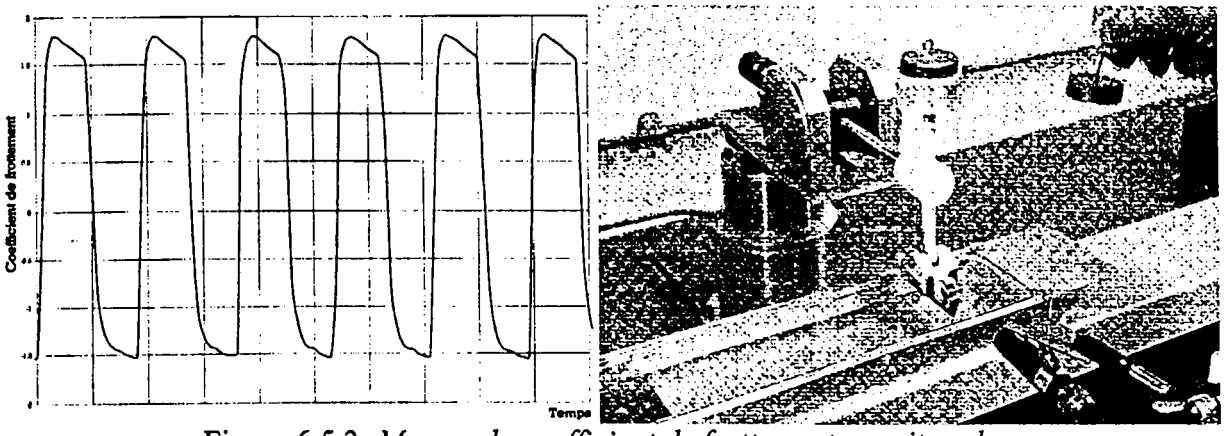


Figure 6.5.3: *Mesure du coefficient de frottement sur vitre plane*

CHAPITRE 7:

CONCLUSION

7.1 *Résultats obtenus*

Nous avons mis en évidence les pièces qui présentaient une élasticité importante pour le système, à savoir: les flexions des bras, la torsion des axes, le flambage des bielles coudées, les flexions des vertèbres et de la lame (charnière et lèvre), la déformation de la platine.

Nous avons réalisé un logiciel, validé par rapport à un code d'éléments finis non linéaire simulant les déformations de la lame. Un algorithme déterminant la pression sous la lame a été proposé. La vibration, de loin la plus importante en amplitude, est engendrée par l'élasticité des bras et des axes couplée avec les inerties de l'ensemble bras-balai et balai. Les vibrations de la platine se sont révélées, dans notre cas, faibles et très localisées. Plusieurs fréquences issues du moteur ont été identifiées et interprétées. Leurs amplitudes s'amortissent à mesure que l'on s'éloigne du moteur et qu'elles s'approchent des balais.

Au travers de l'état de l'art sur le frottement entre le caoutchouc et le verre, nous avons remarqué que le coefficient de frottement entre ces deux éléments présentait une grande variabilité et dépendait d'un nombre important de paramètres (composition des matériaux, température, humidité, vitesse, force d'appui des phénomènes temporels...). Si certains phénomènes comme le rôle de la viscoélasticité des chaînes, semblent compris, plusieurs autres, comme le rôle de l'humidité, restent inexpliqués. Nous avons bien exprimé le fait que pour des coefficients de frottement important, le coefficient de frottement perçu par le système était différent de celui du contact.

Les conséquences les plus notables des jeux sont, dans notre cas, le rattrapage de jeux et les variations d'angle. Des formules approchées des forces d'impact ont été données pour des cas concrets de l'essuie-glace. Elles permettent de bien visualiser l'influence des différents paramètres sur ces forces.

Nous avons étudié les phénomènes aérodynamiques s'appliquant au système d'essuyage. Les équations les régissant sont connues mais sont difficiles à résoudre sur le plan pratique. De plus elles dépendent des formes du véhicule qui ne sont pas totalement connues au stade de la conception. Nous avons, néanmoins, donné des courbes expérimentales et présenté des formules classiques approchées.

Le logiciel mis en place prend réellement en compte les paramètres et phénomènes en trois dimensions comme: les angles d'attaque, ou de site, ou le poids.

Plusieurs phénomènes intervenant sur le système d'essuyage ont été mis en évidence:

- Les inerties du moteur sont importantes de par le rapport de réduction et tendent à réguler la vitesse du moteur.
- Les inerties des bras-balais emmagasinent de l'énergie qu'elles restituent juste avant l'AF et l'OAF entraînant ainsi le système, pouvant générer le changement précoce du signe des forces et faire passer le moteur électrique en élément résistant.
- Le frottement génère des discontinuités, des sauts à chaque changement de sens du mouvement; il modifie la force d'appui et donc s'automodifie.
- Le poids possède deux composantes principales, une première qui par la force de frottement induite freine toujours le mouvement, une seconde qui selon le sens du mouvement pousse ou freine le système.
- La torsion des bras génère des surangles d'attaque.

Nous avons également analysé:

- les forces s'exerçant sur des pièces (manivelles et bielles principalement),

- le rôle important joué par les forces dans les bielles (vision en une seule dimension des phénomènes, forces importantes qui se reflètent dans plusieurs pièces).
Nous avons en outre validé le modèle par rapport à l'expérience et identifié les écarts.

7.2 Perspectives

7.2.1 Logiciel et modèles

Il serait intéressant de disposer d'un logiciel qui puisse traiter séparément les distances issues des jeux, des écarts de liaison mécanique afin de s'affranchir de problèmes numériques. Ce type de modèle existe [Deck, 1992] mais n'est pas encore, à ma connaissance, utilisé dans les logiciels du commerce. De plus, une plus grande puissance de calcul ou des algorithmes plus performants permettraient de simuler en un temps raisonnable les modèles de lames découpées. Des modèles intégrant des matrices modales sont en cours de test.

7.2.2 Capteurs

Le double capteur mesurant la force d'appui et la force de frottement s'est révélé très sensible au couple généré par la lame. Il serait intéressant de disposer d'une mesure fiable de coefficient de frottement dynamique en intégrant, par exemple, la mesure de ce couple et de découpler les résultats.

7.2.3 Évolutions des pièces

Étant donné la compréhension que nous avons des forces et de l'élasticité des composants, il serait intéressant d'optimiser les formes des pièces ce qui pourrait faire l'objet d'une étude plus approfondie.

ANNEXE A : MODÉLISATION ANALYTIQUE DU COMPORTEMENT DE LA LAME D'ESSUIE - VITRE

1 PRÉAMBULE

La partie qui va suivre détaille les calculs utiles au paragraphe 2.2. Nous allons à partir d'hypothèses de matériaux élastiques linéaires approximer un modèle non-linéaire. Ce modèle s'avère néanmoins, comme nous le verrons dans la partie validation, être une bonne approximation des cas les plus courants.

2 BILAN DES FORCES

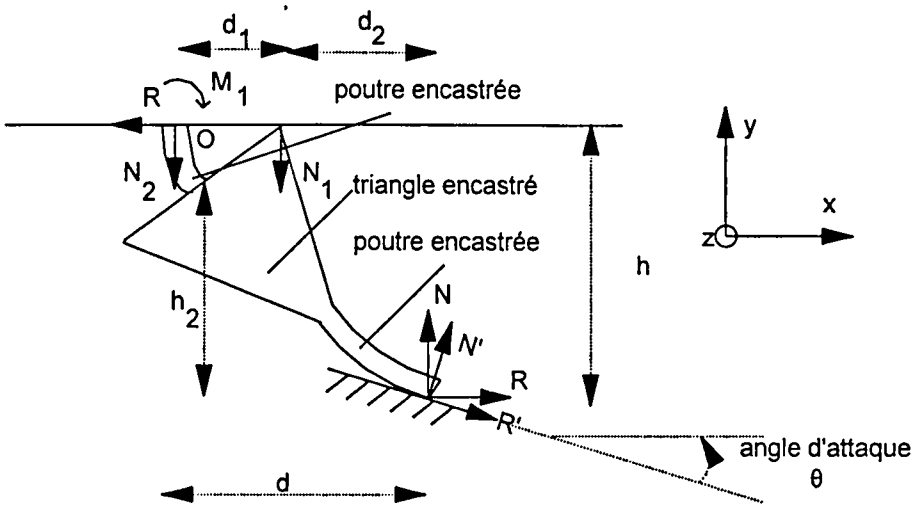


Figure A.1

Nous nous intéresserons au cas statique. En effet ce modèle nous permet de déterminer l'élasticité de la lame dans le modèle dynamique. Ce modèle est néanmoins vrai en dynamique à condition de négliger les forces d'inertie devant les forces d'appui normale au talon N et de frottement R. Le modèle dynamique correspond ainsi au modèle statique. La force N se décompose en N_1 au contact entre le sapin et le talon et N_2 entre la charnière et le talon (fig. A.1). Au niveau de la vitre, la force de réaction présente deux composantes: une force normale à la vitre N' et une force de frottement R'. Dans le repère lié au talon, nous noterons R et N les composantes du vecteur de réaction dans le repère de référence. Nous ferons l'hypothèse qu'au niveau du contact entre le talon et le sapin aucune force de frottement n'agit. Nous noterons O le point de contact entre la charnière et le talon.

Soit M_1 le moment d'encastrement de la charnière exercé par le talon. La distance 'horizontale' (différence d'abscisses) et 'verticale' (différence d'ordonnées) entre le point O et le point de contact avec le vitrage. La distance d se décompose entre d_1 la distance entre O et le point de contact entre le talon et le sapin et d_2 la distance entre le point de contact entre le talon et le sapin et le point de contact avec le vitrage.

Effectuons le bilan en O des forces et des moments en statique ou de façon équivalente en régime permanent:

$$N = N_1 + N_2 \qquad (A.1)$$

$$-N_1 d_1 + Nd + Rh + M_1 = 0 \qquad (A.2)$$

ou encore d'après l'équation A.1

$$-Nd_1 + N_2 d_1 + Nd + Rh + M_1 = 0 \qquad (A.3)$$

De plus R' et N' sont liés par la relation de Coulomb : $R' = f' N'$ (A.4)
En effectuant un changement de repère nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} N \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N' \\ R' \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

en tenant compte de l'équation A.4:

$$\begin{bmatrix} N \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N' \\ f' N' \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

soit encore $\begin{cases} N = (\cos(\theta) - f' \sin(\theta))N' \\ R = (\sin(\theta) + f' \cos(\theta))N' \end{cases}$ (A.7)

D'où $\boxed{\dfrac{R}{N} = \dfrac{\sin(\theta) + f' \cos(\theta)}{\cos(\theta) - f' \sin(\theta)}}$ (A.8)

Nous obtenons donc un coefficient de frottement équivalent.
Nous avons 5 inconnues : M_1, N, N_1, N_2, R et 3 équations : (A.1), (A.2), (A.8). Il nous manque une relation pour que connaissant un paramètre, nous puissions déterminer les autres paramètres. Elle sera déterminée par la R.D.M. En fait, il nous manque la relation de ressort de la lame.

3 RELATIONS DE R.D.M. POUR UNE POUTRE ENCASTRÉE

Nous nous placerons dans l'hypothèse des petits déplacements. Nous allons tout d'abord étudier l'influence de différents types de forces. Nous allons utiliser le théorème de Castigliano : si M(x), N(x), T(x) représentent respectivement le moment, la force normale et transversale au point d'abscisse x et si m(x), n(x), t(x) représentent respectivement le moment, la force normale et transversale d'une force (ou moment) unitaire placée à l'endroit et dans le sens où l'on veut étudier la déformation, alors la déformation est donnée par :

$$\int_{x=0}^{x=l} \left(\frac{M(x)m(x)}{EI} + \frac{N(x)n(x)}{EA} + \frac{T(x)t(x)}{GS_1}\right)dx \quad (A.9)$$

avec E module d'élasticité, I moment d'inertie, S_1 section réduite, A aire de la coupe, G module d'élasticité transversal.

Nous négligerons comme on le fait de façon classique le terme $\dfrac{T(x)t(x)}{GS_1}$ devant $\dfrac{M(x)m(x)}{EI}$ et lorsque le cas se présente $\dfrac{N(x)n(x)}{EA}$ devant $\dfrac{M(x)m(x)}{EI}$.

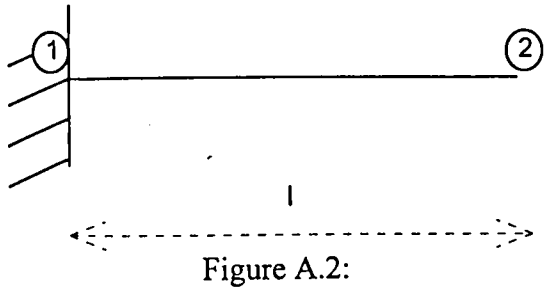


Figure A.2:

Prenons comme point de référence le "début" de la poutre et nous allons regarder les déformations du "bout" de la poutre. Ceci peut se faire soit en calculant l'intégrale soit en utilisant directement les tables de Mohr.

3.1 Effet de la force F seule

Soit F une force exercée à l'extrémité de la poutre suivant x.

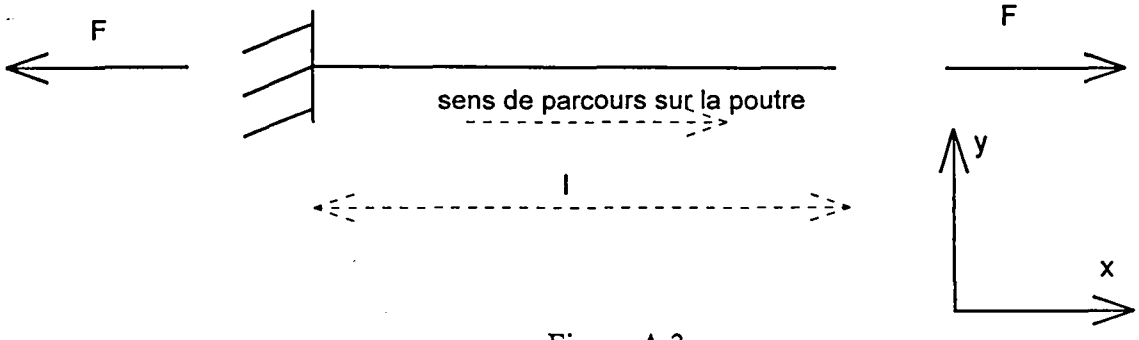


Figure A.3

Aucun moment n'est généré sur la poutre. Suivant le signe de F, la poutre se déformera soit en traction soit en compression.

3.2 Effet de la force T seule

Soit T une force exercée à l'extrémité de la poutre suivant $(-y)$.

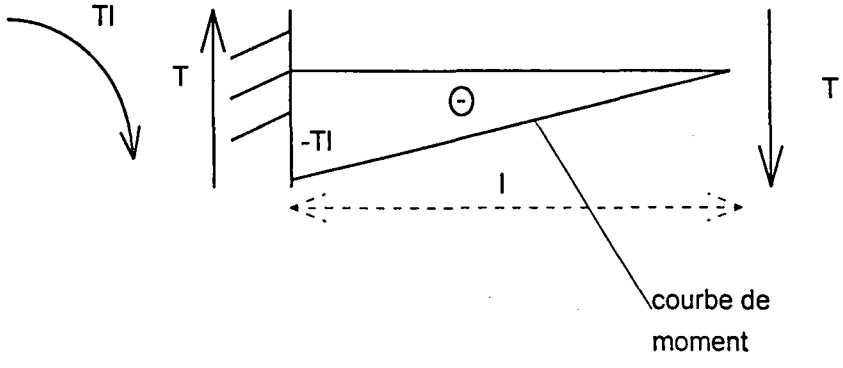


Figure A.4

3.3 Effet de M seul

Soit M un moment exercé en bout de poutre et compté négativement dans le sens trigonométrique.

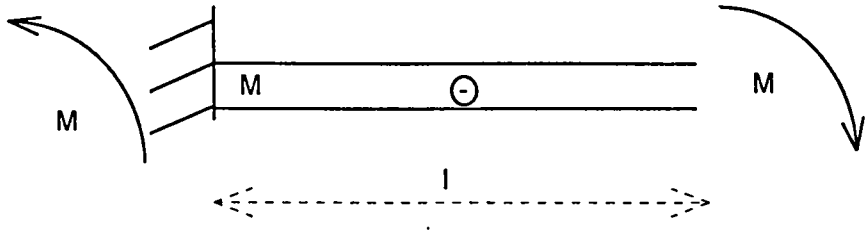


Figure A.5

3.4 Somme de T et M

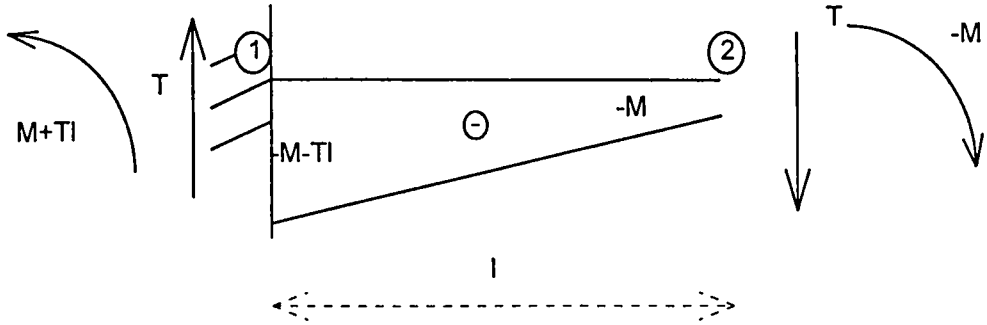


Figure A.6

3.5 Calcul des déplacements

Nous allons utiliser la formule précédente:
Le déplacement angulaire de 2 est égal à :

$$\int_{x=0}^{x=l} \frac{M(x)m(x)}{EI}dx = \int_{x=0}^{x=l} \frac{(-M - Tl + Tx)(+1)}{EI}dx \qquad (A.10)$$

$$= \frac{1}{EI}\left[-Ml - Tl^2 + \frac{Tl^2}{2}\right] = -\frac{Ml}{EI} - \frac{Tl^2}{2EI} \qquad (A.11)$$

Déterminons le déplacement suivant l'ordonnée de 2 est égale à:

$$\int_{x=0}^{x=l} \frac{M(x)m(x)}{EI}dx = \int_{x=0}^{x=l} \frac{(-M - Tl + Tx)(l - x)}{EI}dx$$

$$= \frac{1}{EI}\left[-(M + Tl)l^2 + \left[(M + Tl) + Tl\right]\frac{l^2}{2} - T\frac{l^3}{3}\right]$$

$$= -\frac{Ml^2}{2EI} - \frac{Tl^3}{3EI} \qquad (A.12)$$

Déterminons le déplacement de 2 suivant l'abscisse en traction

$$\int_{x=0}^{x=l} \frac{N(x)n(x)}{EA} dx = \int_{x=0}^{x=l} \frac{F*1}{EA} dx = \frac{Fl}{EA} \qquad (A.13)$$

3.6 Bilan

Nous appellerons M' le moment total généré par l'encastrement en début de poutre 1. Ainsi
$M' = M + Tl$. (A.14)

	formule originelle encastrement	formule modifiée encastrement
déplacement angulaire	$-\frac{Ml}{EI} - \frac{Tl^2}{2EI}$	$-\frac{M'l}{EI} + \frac{Tl^2}{2EI}$ (A.15)
déplacement transversal	$-\frac{Ml^2}{2EI} - \frac{Tl^3}{3EI}$	$-\frac{M'l^2}{2EI} + \frac{Tl^3}{6EI}$ (A.16)
déplacement normal	$\frac{Fl}{EA}$	$\frac{Fl}{EA}$ (A.17)

<u>Applications numériques du profil de lame GC4</u>
Nous prendrons comme longueur de lame de référence 1cm

Inertie charnière $I_c = \frac{le_c^3}{12} = \frac{10^{-2} x \left(0.55.10^{-3}\right)^3}{12} = 1.386.10^{-13}$

Inertie lèvre $I_l = \frac{le_l^3}{12} = \frac{10^{-2} x \left(0.675.10^{-3}\right)^3}{12} = 2.563.10^{-13}$

$e_c = 0.55.10^{-3}$

$e_l = 0.675.10^{-3}$

$$\frac{l_c^3}{EI_c} = 1.355.10^{-3}$$

$$\frac{l_l^3}{EI_l} = 9.644.10^{-3}$$

4 Relation de R.D.M. pour un "triangle" encastré

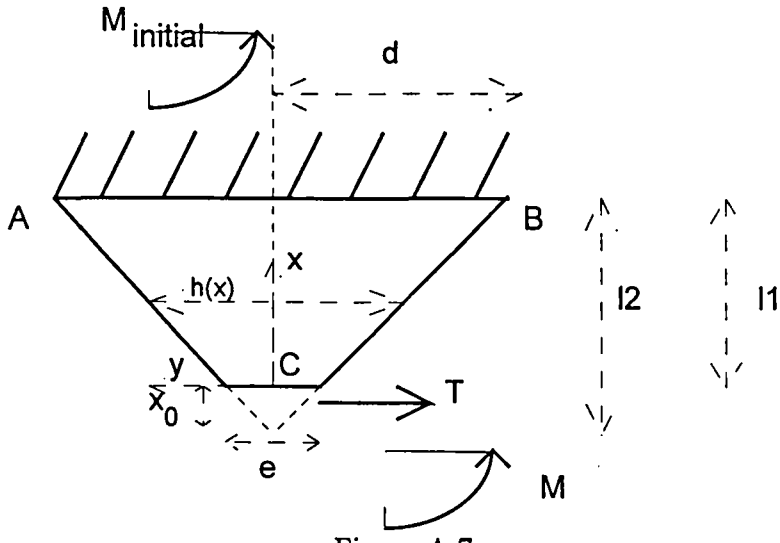


Figure A.7

La force transversale T sera comptée positivement dans le sens opposé à y.
Utilisons comme précédemment le théorème de Castigliano. La poutre de référence sera le triangle présenté sur la figure A.7 débutant en C et parcouru suivant le vecteur x.
Le moment engendré à une distance x dans la poutre égal à :

$$M(x) = -M - Tx \tag{A.18}$$

La distance entre les deux côtés du triangle est égale à:

$$h(x) = 2(x + x_0)\frac{d}{l_2} \tag{A.19}$$

Nous prendrons comme épaisseur du triangle 1cm si bien que le moment d'inertie est égal à:

$$I(x) = \frac{h^3(x) \times 10^{-2}}{12} = \frac{\left(2(x + x_0)\frac{d}{l_2}\right)^3 \times 10^{-2}}{12} = \frac{2 \times 10^{-2}}{3}\frac{(x + x_0)^3 d^3}{l_2^3} \tag{A.20}$$

Calculons le déplacement transversal au bout du triangle en C.

$$\int_{x=0}^{x=l_1} \frac{M(x)m(x)}{EI(x)}dx = \int_{x=0}^{x=l_1} \frac{(M + Tx)x}{E\frac{2 \times 10^{-2}}{3}\frac{(x + x_0)^3 d^3}{l_2^3}}dx = \frac{3l_2^3}{2 \times 10^{-2} Ed^3}\int_{x=0}^{x=l_1} \frac{Mx + Tx^2}{(x + x_0)^3}dx \tag{A.21}$$

Intéressons nous à l'intégrale : $\int_{x=0}^{x=l_1} \frac{Mx + Tx^2}{(x + x_0)^3}dx$, elle est égale à :

$$\int_{x=0}^{x=l_1} \frac{Mx + T(x + x_0)^2 - Tx_0^2 - 2Txx_0}{(x + x_0)^3}dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=l_1}\left[\frac{T}{(x+x_0)} + \frac{(M - 2Tx_0)}{(x+x_0)^2} + \frac{-(M - 2Tx_0)x_0 - Tx_0^2}{(x+x_0)^3}\right]dx$$

$$= T\ln\left(1+\frac{l_1}{x_0}\right)+\frac{\frac{M}{x_0}-3T-\frac{2x_0T}{l_1}}{2\left(1+\frac{x_0}{l_1}\right)^2} \qquad (A.22)$$

Le déplacement est donc égal à:

$$\boxed{\frac{3l_2^3}{2\times10^{-2}Ed^3}\left(T\ln\left(1+\frac{l_1}{x_0}\right)+\frac{\frac{M}{x_0}-3T-\frac{2x_0T}{l_1}}{2\left(1+\frac{x_0}{l_1}\right)^2}\right)} \qquad (A.23)$$

Déterminons maintenant l'angle de rotation

$$\int_{x=0}^{x=l_1}\frac{M(x)m(x)}{EI(x)}dx=\int_{x=0}^{x=l_1}\frac{(M+Tx)\times1}{E\frac{2\times10^{-2}}{3}\frac{(x+x_0)^3d^3}{l_2^3}}dx$$

$$\frac{3l_2^3}{2\times10^{-2}Ed^3}\left[-\frac{T}{x+x_0}-\frac{-Tx_0+M}{2(x+x_0)^2}\right]_{x=0}^{x=l_1}$$

$$\boxed{=\frac{3l_2^3}{2\times10^{-2}Ed^3x_0}\frac{T+\frac{M}{x_0}+2\frac{M}{l_1}}{2\left(1+\frac{x_0}{l_1}\right)^2}} \qquad (A.24)$$

5 Calcul des paramètres de la lame

5.1 Détermination de la position de différents points de la lame

Nous allons utiliser les relations précédentes pour déterminer les déformations de la lame. Nous pourrons ainsi déterminer successivement les points P_2, P_1, P_3, P_4. Nous désignerons par XX_{char} les paramètres concernant la charnière.

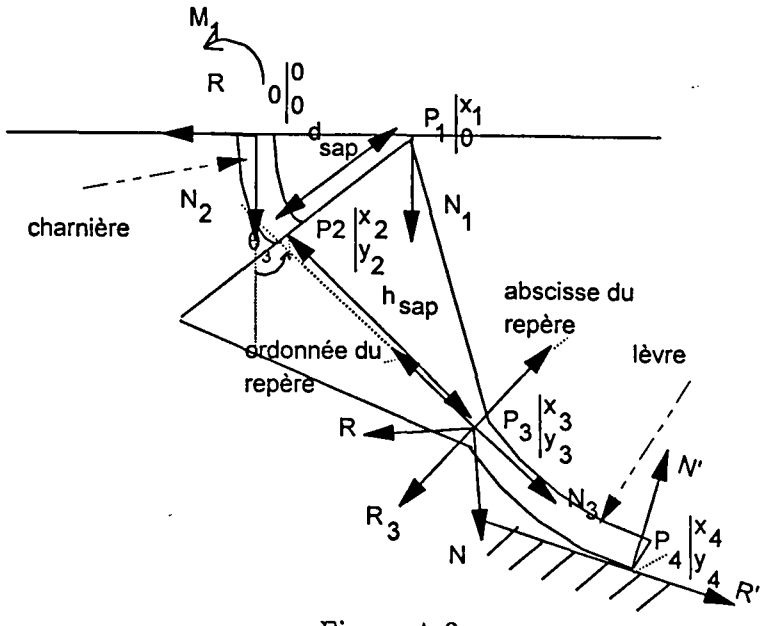


Figure A.8.

Intéressons nous au point P_2. D'après les formules A.16. et A.17. on a :

$$\boxed{\begin{cases} x_2 = -\dfrac{M_1 l_{char}^2}{2E_{char}I_{char}} - \dfrac{R l_{char}^3}{6E_{char}I_{char}} \\ y_2 = -l_{char} + \dfrac{N_2 l_{char}}{E_{char}A_{char}} \end{cases}} \qquad (A.25)$$

$$\theta_2 \approx \sin(\theta 2) = \frac{-y_2}{d_{sap}} = \frac{l_{char} - \dfrac{N_2 l_{char}}{E_{char}A_{char}}}{d_{sap}} = \frac{l_{char}}{d_{sap}}\left(1 - \frac{N_2}{E_{char}A_{char}}\right) \qquad (A.26)$$

Nous avons assimilé θ_2 à $\sin(\theta_2)$. Un majorant de l'erreur est $\dfrac{\theta_2{}^3}{6}$ qui est de l'ordre du pourcent. De plus $\dfrac{N_2}{E_{char}A_{char}}$ est inférieur à 0,01 donc négligeable

On obtient donc :

$$\boxed{\begin{cases} x_2 = -\dfrac{M_1 l_{char}^2}{2E_{char}I_{char}} - \dfrac{R l_{char}^3}{6E_{char}I_{char}} \\ y_2 = -l_{char} \end{cases}} \qquad (A.27)$$

$$\boxed{\theta_2 \approx \frac{l_{char}}{d_{sap}}} \qquad (A.28)$$

Cette valeur de q2 est à rapprocher de celle obtenue par R.D.M. (formule A.15) :

$$\boxed{\theta_2 = -\frac{M_1 l_{char}}{E_{char}I_{char}} - \frac{R l_{char}^2}{2E_{char}I_{char}}} \qquad (A.29)$$

En égalant les deux relations, on obtient :

$$-\frac{M_1}{E_{char}I_{char}}-\frac{Rl_{char}}{2E_{char}I_{char}}=\frac{1}{d_{sap}} \tag{A.30}$$

soit encore : $\boxed{M_1=-\frac{Rl_{char}}{2}-\frac{E_{char}I_{char}}{d_{sap}}}$ (A.31)

En injectant cette relation dans l'expression de x_2 (formule A.25) on obtient:

$$x_2=-\frac{\left(-\frac{Rl_{char}}{2}-\frac{E_{char}I_{char}}{d_{sap}}\right)l_{char}^2}{2E_{char}I_{char}}-\frac{Rl_{char}^3}{6E_{char}I_{char}} \tag{A.32}$$

soit

$$x_2=\frac{l_{char}^2}{2d_{sap}}+\frac{Rl_{char}l_{char}^2}{4E_{char}I_{char}}-\frac{Rl_{char}^3}{6E_{char}I_{char}}=\frac{l_{char}^2}{2d_{sap}}+\frac{Rl_{char}^3}{12E_{char}I_{char}} \tag{A.33}$$

$$x_1=x_2+d_{sap}\cos(\theta 2)\approx\frac{l_{char}^2}{2d_{sap}}+\frac{Rl_{char}^3}{12E_{char}I_{char}}+d_{sap}\left(1-\frac{l_{char}^2}{2d_{sap}^2}\right)=\frac{Rl_{char}^3}{12E_{char}I_{char}}+d_{sap} \tag{A.34}$$

NB. $d_1=x_1$ (A.35)

Pour pouvoir déterminer x_3 et y_3 il nous faut d'abord déterminer les forces en P_2 dans un repère lié à la dernière poutre encastrée dans le sapin. Les forces normale et tangentielle seront respectivement désignées par: N'_2, R'_2.

$$\begin{bmatrix}N'_2\\R'_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta 2) & -\sin(\theta 2)\\ \sin(\theta 2) & \cos(\theta 2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N\\R\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}N\left(1-\frac{l_{char}^2}{2d_{sap}^2}\right)-\frac{l_{char}}{d_{sap}}R\\ R\left(1-\frac{l_{char}^2}{2d_{sap}^2}\right)+\frac{l_{char}}{d_{sap}}N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N-\frac{l_{char}^2N}{2d_{sap}^2}-\frac{l_{char}}{d_{sap}}R\\ R-\frac{l_{char}^2R}{2d_{sap}^2}+\frac{l_{char}}{d_{sap}}N\end{bmatrix} \tag{A.36}$$

Notons M_3 le moment au point P_3 créé par les forces de réaction du verre

$$M_3=N(x_4-x_3)-R(y_4-y_3) \tag{A.37}$$

Nous négligerons les forces de compression du sapin. Le bien fondé de cette hypothèse sera examinée lors de la validation du modèle. Nous allons appliquer les formules (A.23) et (A.24) vues au 4. avec:

$$l_1=h_s \tag{A.38}$$

$$x_0=\frac{\frac{e_1}{2}h_s}{\left(d_s-\frac{e_1}{2}\right)}\ \text{(Thales)} \tag{A.39}$$

$$x_0 = \frac{e_l h_s}{2d_s - e_l} \tag{A.40}$$

$$l_2 = h_s + x_0 = h_s + \frac{e_l h_s}{2d_s - e_l} \tag{A.41}$$

$$\frac{x_0}{l_1} = \frac{e_l h_s}{2d_s - e_l}\frac{1}{h_s} = \frac{e_l}{2d_s - e_l} \tag{A.42}$$

P_2P_3 a pour coordonnées dans le repère lié au talon $\left(P_2, \frac{P_2P_1}{\|P_2P_1\|}, \frac{-P_2P_3}{\|P_2P_3\|}, z\right)$ où z est le vecteur cote du repère de référence.

$$\left[\frac{3\left(h_s + \frac{e_l h_s}{2d_s - e_l}\right)^3}{2\times10^{-2}Ed_s^3}\left(\left(R - \frac{l_{char}^2 R}{2d_{sap}^2} + \frac{l_{char}}{d_{sap}}N\right)\ln\left(1 + \frac{2d_s - e_l}{e_l}\right) + \frac{\frac{M_3(2d_s - e_l)}{e_l h_s} - \left(3 + \frac{2e_l}{2d_s - e_l}\right)\left(R - \frac{l_{char}^2 R}{2d_{sap}^2} + \frac{l_{char}}{d_{sap}}N\right)}{2\left(1 + \frac{e_l}{2d_s - e_l}\right)^2}\right)\right]_{-h_s} \tag{A.43}$$

En remplaçant M_3 par sa valeur

$$= \left[\frac{3\left(\frac{2d_s h_s - e_l h_s + e_l h_s}{2d_s - e_l}\right)^3}{2\times10^{-2}Ed_s^3}\left(\left(R - \frac{l_{char}^2 R}{2d_{sap}^2} + \frac{l_{char}}{d_{sap}}N\right)\ln\left(\frac{2d_s}{e_l}\right) + \frac{\frac{(N(x_4 - x_3) - R(y_4 - y_3))(2d_s - e_l)}{e_l h_s} - \frac{6d_s - 3e_l + 2e_l}{2d_s - e_l}\left(R - \frac{l_{char}^2 R}{2d_{sap}^2} + \frac{l_{char}}{d_{sap}}N\right)}{2\left(\frac{2d_s - e_l + e_l}{2d_s - e_l}\right)^2}\right)\right]_{-h_s} \tag{A.44}$$

$$= \left[\frac{3\left(\frac{2\frac{h_s}{d_{sap}}}{2 - \frac{e_l}{d_{sap}}}\right)^3}{2\times10^{-2}E}\left(N\left(f - \frac{f}{2}\left(\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)^2 + \frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)\ln\left(\frac{2d_s}{e_l}\right) + \frac{N\frac{(x_4 - x_3) - f(y_4 - y_3)}{h_s}\frac{\left(2 - \frac{e_l}{d_s}\right)}{\frac{e_l}{d_s}} - N\frac{6 - \frac{e_l}{d_s}}{2 - \frac{e_l}{d_s}}\left(f - \frac{f}{2}\left(\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)^2 + \frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)}{2\left(\frac{2}{2 - \frac{e_l}{d_s}}\right)^2}\right)\right]_{-h_s} \tag{A.45}$$

Dans le repère de départ, P_2P_3 a pour coordonnées:

$$\begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix}\left[\frac{3\left(\frac{2\frac{-h_s}{d_{sap}}}{2 - \frac{-e_l}{d_{sap}}}\right)^3}{2\times10^{-2}E}\left(N\left(f - \frac{f}{2}\left(\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)^2 + \frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)\ln\left(\frac{2d_s}{e_l}\right) + \frac{N\frac{(x_4 - x_3) - f(y_4 - y_3)}{h_s}\frac{\left(2 - \frac{e_l}{d_s}\right)}{\frac{e_l}{d_s}} - N\frac{6 - \frac{e_l}{d_s}}{2 - \frac{e_l}{d_s}}\left(f - \frac{f}{2}\left(\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)^2 + \frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)}{2\left(\frac{2}{2 - \frac{e_l}{d_s}}\right)^2}\right)\right]_{-h_s} \tag{A.46}$$

soit encore

$$\begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{l_{char}^2}{2d_{sap}^2}\right) & -\frac{l_{char}}{d_{sap}} \\ \frac{l_{char}}{d_{sap}} & \left(1 - \frac{l_{char}^2}{2d_{sap}^2}\right) \end{bmatrix}\left[\frac{3\left(\frac{2\frac{-h_s}{d_{sap}}}{2 - \frac{-e_l}{d_{sap}}}\right)^3}{2\times10^{-2}E}\left(N\left(f - \frac{f}{2}\left(\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)^2 + \frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)\ln\left(\frac{2d_s}{e_l}\right) + \frac{N\frac{(x_4 - x_3) - f(y_4 - y_3)}{h_s}\frac{\left(2 - \frac{e_l}{d_s}\right)}{\frac{e_l}{d_s}} - N\frac{6 - \frac{e_l}{d_s}}{2 - \frac{e_l}{d_s}}\left(f - \frac{f}{2}\left(\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)^2 + \frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)}{2\left(\frac{2}{2 - \frac{e_l}{d_s}}\right)^2}\right)\right]_{-h_s} \tag{A.47}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{l_{char}^2}{2d_{sap}^2}\right) \frac{3\left(\frac{\frac{h_s}{d_{sap}}}{1 - \frac{e_l}{2d_{sap}}}\right)^3}{2 \times 10^{-2} E} \left(N\left(f - \frac{f}{2}\left(\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)^2 + \frac{l_{char}}{d_{sap}}\right) \ln\left(\frac{2d_s}{e_l}\right) + \frac{N\frac{(x_4 - x_3) - f(y_4 - y_3)}{h_s}\frac{\left(2 - \frac{e_l}{d_s}\right)}{\frac{e_l}{d_s}} - N\frac{6 - \frac{e_l}{d_s}}{2 - \frac{e_l}{d_s}}\left(f - \frac{f}{2}\left(\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)^2 + \frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)}{2\left(\frac{2}{2 - \frac{e_l}{d_s}}\right)^2} \right) + \frac{l_{char} h_s}{d_{sap}} \\ \frac{l_{char}}{d_{sap}} \frac{3\left(\frac{\frac{h_s}{d_{sap}}}{1 - \frac{e_l}{2d_{sap}}}\right)^3}{2 \times 10^{-2} E} \left(N\left(f - \frac{f}{2}\left(\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)^2 + \frac{l_{char}}{d_{sap}}\right) \ln\left(\frac{2d_s}{e_l}\right) + \frac{N\frac{(x_4 - x_3) - f(y_4 - y_3)}{h_s}\frac{\left(2 - \frac{e_l}{d_s}\right)}{\frac{e_l}{d_s}} - N\frac{6 - \frac{e_l}{d_s}}{2 - \frac{e_l}{d_s}}\left(f - \frac{f}{2}\left(\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)^2 + \frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)}{2\left(\frac{2}{2 - \frac{e_l}{d_s}}\right)^2} \right) - h_s\left(1 - \frac{l_{char}^2}{2d_{sap}^2}\right) \end{bmatrix} \quad (A.48)$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 N + c_1 N\big((x_4 - x_3) + f(y_4 - y_3)\big) \\ a_2 + b_2 N + c_2 N\big((x_4 - x_3) + f(y_4 - y_3)\big) \end{bmatrix}} \quad (A.49)$$

avec

$$a_1 = \frac{l_{char} h_s}{d_{sap}} \quad (A.50)$$

$$b_1 = \left(1 - \frac{l_{char}^2}{2d_{sap}^2}\right) \frac{3\left(\frac{\frac{h_s}{d_{sap}}}{1 - \frac{e_l}{2d_{sap}}}\right)^3}{2 \times 10^{-2} E} \left[\left(f - \frac{f}{2}\left(\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)^2 + \frac{l_{char}}{d_{sap}}\right) \ln\left(\frac{2d_s}{e_l}\right) - \frac{6 - \frac{e_l}{d_s}}{2 - \frac{e_l}{d_s}} \frac{1}{2\left(\frac{1}{1 - \frac{e_l}{2d_s}}\right)^2} \left(f - \frac{f}{2}\left(\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)^2 + \frac{l_{char}}{d_{sap}}\right) \right] \quad (A.51)$$

$$c_1 = \left(1 - \frac{l_{char}^2}{2d_{sap}^2}\right) \frac{3\left(\frac{\frac{h_s}{d_{sap}}}{1 - \frac{e_l}{2d_{sap}}}\right)^3}{2 \times 10^{-2} E} \frac{1}{h_s} \frac{\frac{\left(2 - \frac{e_l}{d_s}\right)}{\frac{e_l}{d_s}}}{2\left(\frac{2}{2 - \frac{e_l}{d_s}}\right)^2} \quad (A.52)$$

$$a_2 = -h_s\left(1 - \frac{l_{char}^2}{2d_{sap}^2}\right) \quad (A.53)$$

$$b_2 = \frac{l_{char}}{d_{sap}} \frac{3\left(\frac{\frac{h_s}{d_{sap}}}{1-\frac{e_l}{2d_{sap}}}\right)^3}{2\times10^{-2}E} \left[\left(f-\frac{f}{2}\left(\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)^2+\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)\ln\left(\frac{2d_s}{e_l}\right) - \frac{\frac{6-\frac{e_l}{d_s}}{2-\frac{e_l}{d_s}}\left(f-\frac{f}{2}\left(\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)^2+\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)}{2\left(\frac{2}{2-\frac{e_l}{d_s}}\right)^2} \right] \quad (A.54)$$

$$c_2 = \frac{l_{char}}{d_{sap}} \frac{3\left(\frac{\frac{h_s}{d_{sap}}}{1-\frac{e_l}{2d_{sap}}}\right)^3}{2\times10^{-2}E} \frac{\frac{1}{h_s}\frac{\left(2-\frac{e_l}{d_s}\right)}{\frac{e_l}{d_s}}}{2\left(\frac{2}{2-\frac{e_l}{d_s}}\right)^2} \quad (A.55)$$

Déterminons maintenant l'angle de rotation θ_3 du bout du talon par rapport au repère d'origine. Il est la somme de θ_2 et de l'angle calculé au 4 (formule A.24).

$$\theta_3 = \frac{l_{char}}{d_{sap}} + \frac{3\left(\frac{2d_s h_s}{2d_s-e_l}\right)^3}{2\times10^{-2}Ed_s^3\frac{\frac{e_l}{2}h_s}{\left(d_s-\frac{e_l}{2}\right)}} \frac{R-\frac{l_{char}^2R}{2d_{sap}^2}+\frac{l_{char}}{d_{sap}}N+\left(\frac{d_s-\frac{e_l}{2}}{\frac{e_l}{2}h_s}+\frac{2}{h_s}\right)\left(N(x_4-x_3)-R(y_4-y_3)\right)}{2\left(1+\frac{e_l}{2d_s-e_l}\right)^2} \quad (A.56)$$

$$\theta_3 = \frac{l_{char}}{d_{sap}} + N\frac{3\left(\frac{h_s}{d_s}\right)^2\left(f-\frac{f}{2}\left(\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)^2+\frac{l_{char}}{d_{sap}}+\left(1+\frac{2d_s}{e_l}\right)\frac{(x_4-x_3)-f(y_4-y_3)}{h_s}\right)}{2\times10^{-2}Ee_l} \quad (A.57)$$

$$\boxed{\theta_3 = a_3 + b_3N + c_3N\left((x_4-x_3)-f(y_4-y_3)\right)} \quad (A.58)$$

avec

$$\boxed{a_3 = \frac{l_{char}}{d_{sap}}} \quad (A.59)$$

$$\boxed{b_3 = \frac{3\left(\frac{h_s}{d_s}\right)^2\left(f-\frac{f}{2}\left(\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)^2+\frac{l_{char}}{d_{sap}}\right)}{2\times10^{-2}Ee_l}} \quad (A.60)$$

$$\boxed{c_3 = \frac{3\left(\frac{h_s}{d_s}\right)^2\left(1+\frac{2d_s}{e_l}\right)}{2\times10^{-2}Ee_lh_s}} \quad (A.61)$$

Étudions maintenant les déformations de la lèvre.

Comme dans le cas de la charnière les termes d'élongation sont négligeables (de l'ordre du pourcent).
Nous allons nous intéresser aux coordonnées de P_3P_4 dans le repère issu du repère de référence par une rotation d'angle θ_3. Tout d'abord déterminons les forces exercées dans ce repère.

$$\begin{bmatrix} N_3 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ R \end{bmatrix} \tag{A.62}$$

Dans le repère que nous venons d'évoquer P_3P_4 a pour équation:

$$\begin{cases} \dfrac{R_3 l_{lèvre}^3}{3E_{lèvre}I_{lèvre}} = \dfrac{(\sin(\theta_3)N + \cos(\theta_3)R)l_{lèvre}^3}{3E_{lèvre}I_{lèvre}} \\ -l_{lèvre} \end{cases} \tag{A.63}$$

Dans le repère de départ ce vecteur a pour coordonnées :

$$\begin{bmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{(\sin(\theta_3)N + \cos(\theta_3)R)l_{lèvre}^3}{3E_{lèvre}I_{lèvre}} \\ -l_{lèvre} \end{bmatrix} \tag{A.64}$$

$$\begin{bmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(\sin(\theta_3)\cos(\theta_3)N + \cos^2(\theta_3)R\right)l_{lèvre}^3}{3E_{lèvre}I_{lèvre}} + \sin(\theta_3)l_{lèvre} \\ \dfrac{\left(\sin^2(\theta_3)N + \sin(\theta_3)\cos(\theta_3)R\right)l_{lèvre}^3}{3E_{lèvre}I_{lèvre}} - l_{lèvre}\cos(\theta_3) \end{bmatrix} \tag{A.65}$$

Introduisons la variable $X = (x_4 - x_3) - f(y_4 - y_3)$ (A.66)

D'après la formule précédente (A.65):

$$X = \frac{\left(\sin(\theta_3)\cos(\theta_3)N + \cos^2(\theta_3)R\right)l_{lèvre}^3}{3E_{lèvre}I_{lèvre}} + \sin(\theta_3)l_{lèvre} - f\frac{\left(\sin^2(\theta_3)N + \sin(\theta_3)\cos(\theta_3)R\right)l_{lèvre}^3}{3E_{lèvre}I_{lèvre}} + fl_{lèvre}\cos(\theta_3) \tag{A.67}$$

$$X = l_{lèvre}\left(\sin(\theta_3) + f\cos(\theta_3)\right) + \left(\cos(\theta_3) - f\sin(\theta_3)\right)\frac{(\sin(\theta_3)N + \cos(\theta_3)R)l_{lèvre}^3}{3E_{lèvre}I_{lèvre}} \tag{A.68}$$

En introduisant la valeur de θ_3

$$\begin{aligned} X = {} & l_{lèvre}\left(\sin(a_3 + b_3N + c_3NX) + f\cos(a_3 + b_3N + c_3NX)\right) + \\ & \left(\cos(a_3 + b_3N + c_3NX) - f\sin(a_3 + b_3N + c_3NX)\right)\frac{(\sin(a_3 + b_3N + c_3NX)N + \cos(a_3 + b_3N + c_3NX)R)l_{lèvre}^3}{3E_{lèvre}I_{lèvre}} \end{aligned} \tag{A.69}$$

θ_3 n'est pas forcément un angle petit si bien que des simplifications paraissent difficiles. L'avantage de l'introduction de la variable X est d'obtenir une équation scalaire et non vectorielle. A partir de X on en déduit θ_3 puis $(x_4 - x_3)$ et $(y_4 - y_3)$, puis finalement $(x_3 - x_2)$ et $(y_3 - y_2)$.

5.2 Détermination des forces

Nous possédons 2 relations principales :

* une équation d'équilibre de moment : $N(d_2 + fh) + N_2d_1 + M_1 = 0$

* une relation géométrique : $$\boxed{M_1 = -\frac{Rl_{char}}{2} - \frac{E_{char}I_{char}}{d_{sap}}}$$

Réécrivons la première relation en remplaçant d_2 et h par les valeurs calculées précédemment, tout d'abord déterminons d_2 et h :

$$d_2 = x_4 - x_1 = x_4 - x_3 + x_3 - x_1 \tag{A.70}$$

de même

$$h = -y_4 = -(y_4 - y_3) - y_3 \tag{A.71}$$

Remplaçons ces expressions dans l'équation d'équilibre des moments :

$$N(d_2 + fh) + N_2 d_1 - \frac{Rl_{char}}{2} - \frac{E_{char}I_{char}}{d_{sap}} = 0 \tag{A.72}$$

On en déduit la valeur de N2:

$$N_2 d_1 = \frac{fl_{char}N}{2} + \frac{E_{char}I_{char}}{d_{sap}} - N(d_2 + fh) \tag{A.73}$$

$$\boxed{N_2 = \frac{E_{char}I_{char}}{d_{sap}d_1} + N\left(\frac{fl_{char}}{2d_1} - \frac{d_2}{d_1} - \frac{fh}{d_1}\right)} \tag{A.74}$$

ANNEXE B: ÉTUDE DU FLAMBAGE

1 PREAMBULE

Les résultats des calculs exposés dans cette section sont utilisés dans le chapitre 2.3.

2 ÉTUDE D'UNE BIELLE PARFAITEMENT DROITE

Nous supposerons que la bielle a un moment d'inertie I constant.

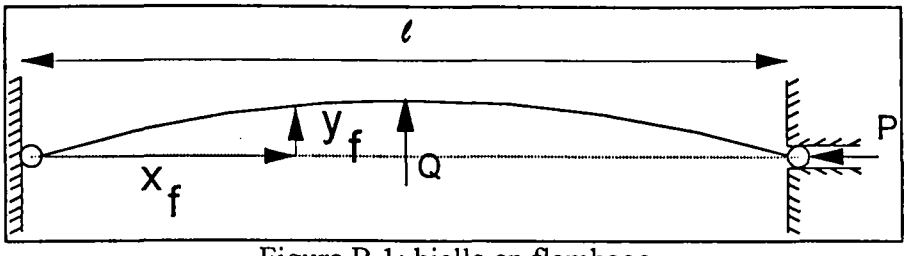


Figure B.1: bielle en flambage

Considérons le cas où la bielle est soumise à une force de compression P. Si cette charge est plus petite qu'une grandeur Pc appelée charge critique, l'équilibre est stable: une légère déformation transversale produite par l'action d'une force Q agissant latéralement disparaît lorsque la force est supprimée. Au-dessus de cette charge critique, la déformation transversale ne disparaît pas. Il est déconseillé d'atteindre cette charge critique sachant que le déplacement transversal n'est pas connu, qu'il engendre un déplacement dans le sens de la bielle et qu'il change l'angle balayé. De plus une force trop grande peut casser la pièce.

2.1 Calcul de Pc dans l'hypothèse des faibles déplacements

Utilisons une équation simplifiée issue des faibles déplacements :

$$\frac{d^2 y_f}{dx_f^2} = \frac{M}{EI} \qquad \text{(B.1)}$$

où y_f est la flèche de coordonnée x.
$m(x_f)$ moment généré par la force unitaire
$M(x_f)$ moment généré par la force P
E module de Young
I moment d'inertie d'une section de barre

Avec $M = -Py_f - \frac{Q}{2}x_f$, (B.2),

l'équation devient:

$$EI\frac{d^2 y_f}{dx_f^2} = -Py_f - \frac{Q}{2}x \qquad \text{(B.3).}$$

L'intégration de (B.3) donne:

$$y_f = A\cos(k_f x_f) + B\sin(k_f x_f) - \frac{Q}{2P}x_f \qquad \text{(B.4)}$$

avec $k_f^2 = \frac{P}{EI}$ (B.5).

La détermination des constantes A et B se fait grâce aux conditions limites: $y_f(0)= y_f(l)=0$ soit :

A=0

$$B = \frac{Q}{2P}\frac{l}{\sin k_f l} \qquad (B.6).$$

L'équation devient alors :

$$X = \frac{Q}{2P}\frac{l\sin k_f x}{\sin k_f l} - \frac{Q}{2P}x \qquad (B.7).$$

Déterminons la flèche maximale soit pour $x = \frac{l}{2}$:

$$y_f = \frac{Q}{2P}\frac{l\sin k_f \frac{l}{2}}{\sin k_f l} - \frac{Q}{2P}\frac{l}{2} = \frac{Ql}{2P}\frac{\sin k_f \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\sin k_f l}{\sin k_f l} \qquad (B.8),$$

soit encore:

$$y_f = \frac{Ql}{4P}\frac{1-\cos k_f \frac{l}{2}}{\cos k_f \frac{l}{2}} \qquad (B.9).$$

Pour $k_f \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2}$, le dénominateur s'annule

En utilisant (B.5), nous obtenons :

$$Pc = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \text{ (loi d'Euler)} \qquad (B.10).$$

2.2 Effet du désalignement de la bielle par rapport à l'axe passant par les deux rotules

Nous supposerons que la bielle est écartée de l'axe passant par les deux rotules d'une distance constante et égale à h_f.

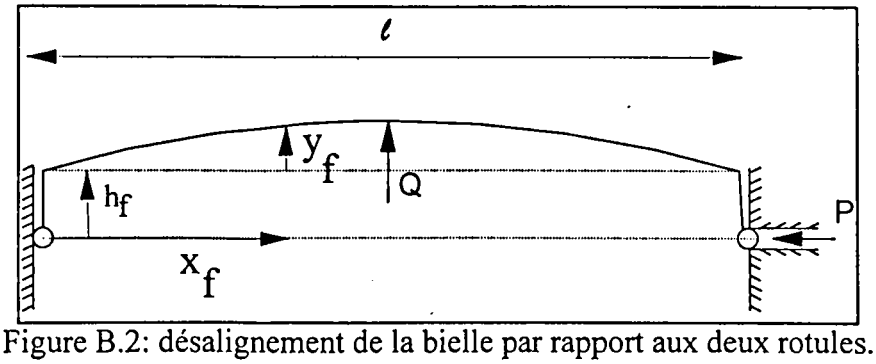


Figure B.2: désalignement de la bielle par rapport aux deux rotules.

Nous reprenons les notations du 1.1. Le moment généré à l'abscisse x est égal à :

$$M = -Py_f - \frac{Q}{2}x_f - Ph_f \qquad (B.11).$$

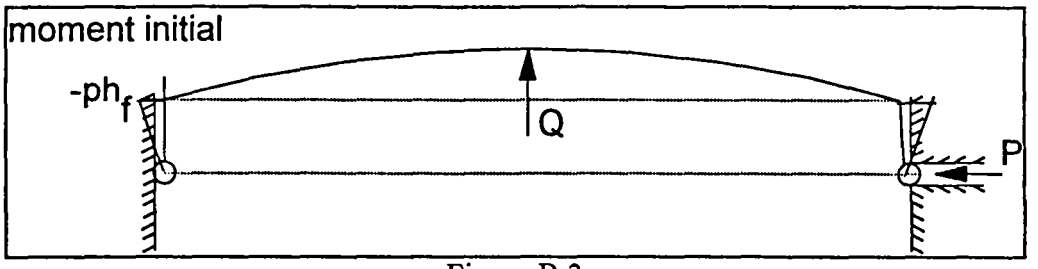


Figure B.3

L'équation de la flèche devient:

$$EI\frac{d^2y_f}{dx^2} = -Py_f - \frac{Q}{2}x_f - Ph_f \qquad \text{(B.12).}$$

Après intégration, il vient :

$$y_f = A\sin(k_f x_f + \lambda) - \frac{Q}{2P}x_f - h_f \qquad \text{(B.13),}$$

avec λ constante dépendant des conditions limites.
Ces conditions limites imposent X(0)=X(l)=0 soit :

$$\begin{cases} y_f(0) = A\sin(\lambda) - h_f = 0 \\ y_f(l) = A\sin(k_f l + \lambda) - \frac{Ql}{2P} - h_f = 0 \end{cases} \qquad \text{(B.14),}$$

ou encore

$$\begin{cases} A\sin(\lambda) = h_f \\ A\cos(\lambda) = \dfrac{\frac{Ql}{2P} + h_f - h_f\cos(k_f l)}{\sin(k_f l)} \text{ si } \sin(k_f l) \neq 0 \end{cases} \qquad \text{(B.15).}$$

On en déduit les valeurs des deux constantes A et λ:

$$\begin{cases} A = \sqrt{h_f^2 + \left(\dfrac{\frac{Ql}{2P} + h_f(1-\cos(k_f l))}{\sin(k_f l)}\right)^2} \\ \tan(\lambda) = \dfrac{h_f\sin(k_f l)}{\frac{Ql}{2P} + h_f(1-\cos(k_f l))} \end{cases} \qquad \text{(B.16).}$$

D'où

$$y_f = \sqrt{h_f^2 + \left(\frac{\frac{Ql}{2P} + h_f(1-\cos(k_f l))}{\sin(k_f l)}\right)^2}\sin\left(k_f x + \operatorname{atan}\left(\frac{h_f\sin(k_f l)}{\frac{Ql}{2P} + h_f(1-\cos(k_f l))}\right)\right) - \frac{Q}{2P}x_f - h_f \qquad \text{(B.17).}$$

Remarques : * pour h_f=0 , nous retrouvons l'équation précédente
* A tendant vers 0 lorsque $k_f l$ tend vers π, la formule d'Euler est donc encore valable.

2.2.1 Influence de h_f sur A

Soit A_0 la valeur de A pour h_f=0,

$$\frac{A}{A_0}=\frac{\sqrt{h_f^2+\left(\frac{\frac{Ql}{2P}+h_f\left(1-\cos(k_f l)\right)}{\sin(k_f l)}\right)^2}}{\frac{\frac{Ql}{2P}}{\sin(k_f l)}}=\sqrt{\frac{2P\sin(k_f l)h_f^2}{Ql}+\left(\frac{\frac{Ql}{2P}+h_f\left(1-\cos(k_f l)\right)}{\frac{Ql}{2P}}\right)^2} \qquad \text{(B.18).}$$

Supposons que $\sin(kl)$ soit proche de zéro, le ratio est alors équivalent à :

$$\frac{A}{A_0}\approx\frac{\frac{Ql}{2P}+2h_f}{\frac{Ql}{2P}}=1+4\frac{P}{Q}\frac{h_f}{l} \qquad \text{(B.19).}$$

Donc le rapport varie linéairement en fonction de h_f.

Les ratios $\frac{P}{Q}$ et $\frac{h_f}{l}$ sont respectivement très fort et très faible, dans le cas où leur produit est très supérieur à 1, $\frac{A}{A_0}\approx 4\frac{P}{Q}\frac{h_f}{l}$, donc $\frac{A}{A_0}$ est proportionnel à h_f.

3 ÉTUDE D'UNE BIELLE PLIEE

Soit le système suivant :

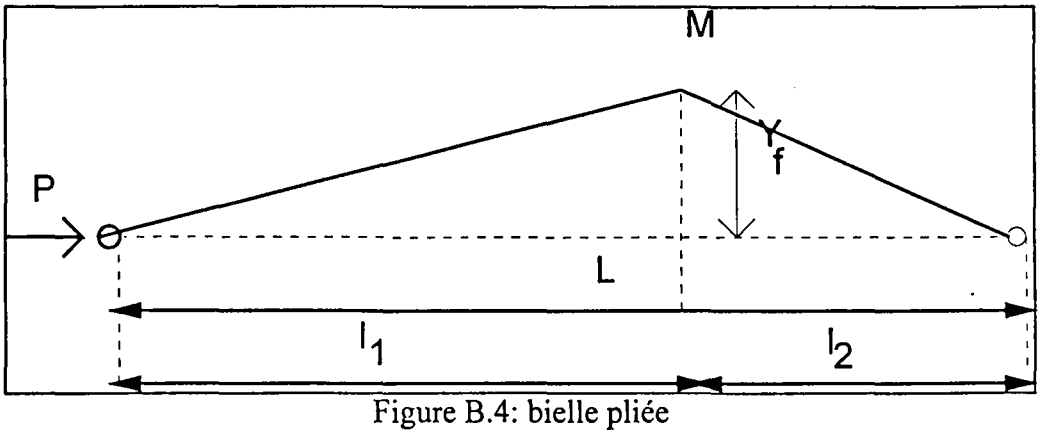


Figure B.4: bielle pliée

Déterminons le moment engendré par la force F dans la bielle :

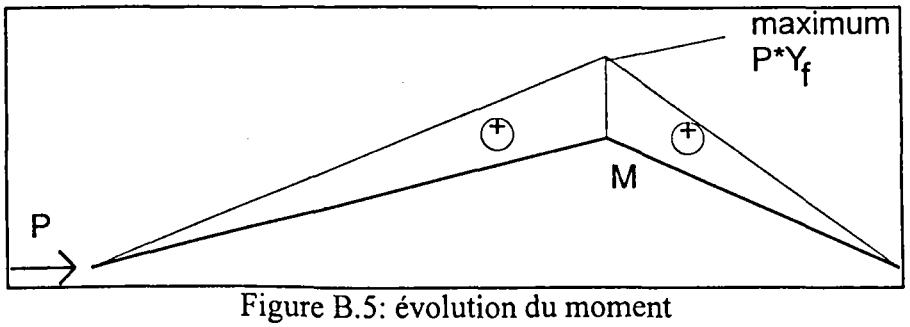


Figure B.5: évolution du moment

Nous allons déterminer le déplacement des rotules l'une par rapport à l'autre, ainsi que la flèche au point M. Pour cela nous allons appliquer le théorème de Castigliano

3.1 Déplacement des rotules

Nous avons besoin du moment engendré par une force unitaire dans le sens de déplacement de la rotule, ici elle est colinéaire à P.

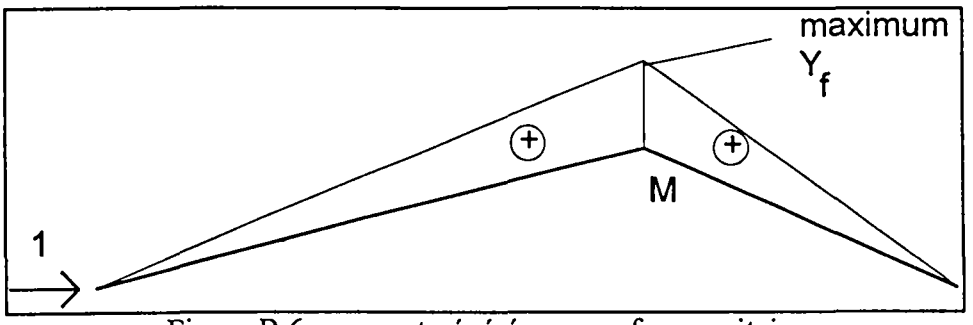


Figure B.6: moment généré par une force unitaire

Soit d_{rotule} le déplacement des rotules dans la direction de la bielle:

$$d_{rotule} = \int_0^L \frac{m(x_f)M(x_f)}{EI} \qquad \text{(B.20)},$$

en négligeant l'effet de la compression

avec m(x) moment généré par la force unitaire
M(x) moment généré par la force P
E module de Young
I moment d'inertie d'une section de barre

Nous en déduisons donc que :

$$\boxed{d_{rotule} = \frac{PY_f^2L}{3EI}} \qquad \text{(B.21)}.$$

3.2 Déplacement de la flèche en M

De même que précédemment intéressons nous à une force unitaire placée en M et dans la direction que nous voulons étudier :

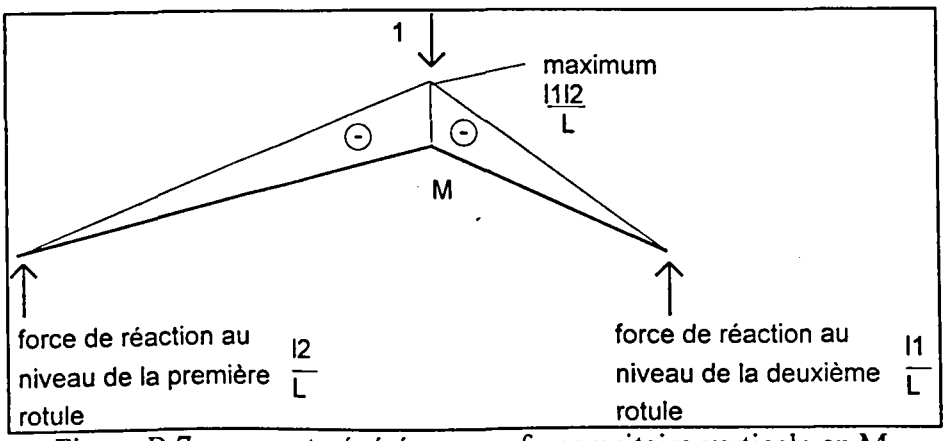


Figure B.7: moment généré par une force unitaire verticale en M.

La force unitaire est équilibrée par des forces de réaction au niveau des rotules.

Avec la même formule que précédemment : $d_M = \int_0^L \frac{m(x)M(x)}{EI}$, nous en déduisons :

$$\boxed{d_M = -\frac{P \cdot Y_f \cdot l1 \cdot l2}{3EI}} \qquad \text{(B.22).}$$

4 CALCUL DES MOMENTS D'INERTIE I

4.1 Calcul du moment d'inertie I_y

Considérons la forme en U suivante :

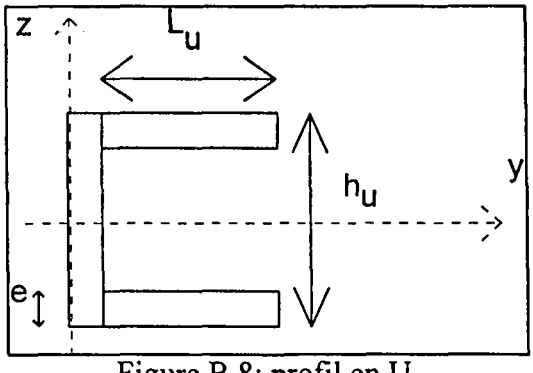


Figure B.8: profil en U.

Déterminons le moment d'inertie suivant l'axe z. Il est la somme des moments d'inertie de chaque élément :

$$I_y = \iint_{surface} z^2 dydz \qquad \text{(B.23).}$$

$$I_y = 2\int_{y=e}^{y=L_u+e}\int_{z=h_u/2-e}^{z=h_u/2} z^2 dydz + \int_{y=0}^{y=e}\int_{z=-h_u/2}^{z=h_u/2} z^2 dydz \qquad \text{(B.24).}$$

$$I_y = 2L_u\left[\frac{z^3}{3}\right]_{h_u/2-e}^{h_u/2} + e\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-h_u/2}^{h_u/2} \qquad \text{(B.25).}$$

Soit : $$\boxed{I_y = eL_u\left(\frac{h_u^2}{2} - eh_u + \frac{2e^2}{3}\right) + \frac{eh_u^3}{12}} \qquad \text{(B.26).}$$

4.2 Calcul du moment d'inertie I_z

Déterminons le moment dans l'autre sens :

$$I_z = \iint_{surface} \left(y - y_g\right)^2 dydz \qquad \text{(B.27),}$$

avec $$\iint_{surface} ydydz = y_g \iint_{surface} dydz \qquad \text{(B.28),}$$

(terme correctif dû au fait que la fibre neutre ne passe pas par y=0)

$$I_z = \iint_{surface} y^2 dydz - y_g^2 \iint_{surface} dydz \qquad (B.29).$$

Calculons d'abord le premier terme du second membre

$$\iint_{surface} y^2 dydz = 2 \int_{y=e}^{y=L_u+e} \int_{z=h_u/2-e}^{z=h_u/2} y^2 dydz + \int_{y=0}^{y=e} \int_{z=-h_u/2}^{z=h_u/2} y^2 dydz \qquad (B.30).$$

$$\iint_{surface} y^2 dydz = 2e\left[\frac{y^3}{3}\right]_e^{L_u+e} + h_u\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^e \qquad (B.31).$$

$$\iint_{surface} y^2 dydz = 2e\frac{L_u^3 + 3L_u^2 e + 3L_u e^2 + e^3 - e^3}{3} + h_u\frac{e^3}{3} \qquad (B.32).$$

$$\iint_{surface} y^2 dydz = 2eL_u\left(\frac{L_u^2}{3} + L_u e + e^2\right) + h_u\frac{e^3}{3} \qquad (B.33).$$

Déterminons le second membre. Pour cela calculons y_g à l'aide de la formule (B.33):

$$\iint_{surface} ydydz = y_g \iint_{surface} dydz \qquad (B.34),$$

$$\iint_{surface} ydydz = 2 \int_{y=e}^{y=L_u+e} \int_{z=h_u/2-e}^{z=h_u/2} ydydz + \int_{y=0}^{y=e} \int_{z=-h_u/2}^{z=h_u/2} ydydz \qquad (B.35),$$

$$= 2e\left[\frac{y^2}{2}\right]_e^{L_u+e} + h_u\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^e \qquad (B.36).$$

$$= eL_u(L_u + 2e) + h_u\frac{e^2}{2} \qquad (B.37).$$

Calculons maintenant $\iint_{surface} dydz$

$$\iint_{surface} dydz = 2\int_{y=e}^{y=L_u+e}\int_{z=h_u/2-e}^{z=h_u/2} dydz + \int_{y=0}^{y=e}\int_{z=-h_u/2}^{z=h_u/2} dydz \qquad (B.38).$$

$$\iint_{surface} dydz = 2L_u e + eh_u \qquad (B.39).$$

On en déduit donc :

$$y_g = \frac{eL_u(L_u+2e)+h_u\frac{e^2}{2}}{2L_u e+eh_u} = \frac{L_u(L_u+2e)+hv\frac{e}{2}}{2L_u+h_u} \qquad (B.40).$$

D'où :

$$y_g^2 \iint_{surface} dydz = \frac{e(L_u(L_u+2e)+h_u\frac{e}{2})^2}{2L_u+h_u} \qquad (B.41).$$

On en déduit donc :

$$\boxed{I_z = 2eL_u\left(\frac{L_u^2}{3}+L_u e+e^2\right)+h_u\frac{e^3}{3}-\frac{e(L_u(L_u+2e)+h_u\frac{e}{2})^2}{2L_u+h_u}} \qquad (B.42).$$

Les formules précédentes (B.26 et B.42) peuvent servir à optimiser le moment d'inertie I .
En effet la bielle flambera dans le sens où elle aura le moment d'inertie le plus faible (valeur plus faible de Iy et Iz). Rien ne sert donc d'avoir un Iy élevé si Iz est faible pour une bielle droite.

5 OPTIMISATION DU PROFIL EN U

Pour une masse de profil, et pour une épaisseur donnée, la longueur de tôle dépliée, égale à

$$C = h_u + 2L_u \qquad (B.43),$$

est constante. Les deux inerties varient en sens opposés, plus h_u est élevé, plus I_y est fort et plus I_z est faible. Pour éviter au maximum le flambage, il est nécessaire d'égaler ces deux valeurs.
Transformons les équations précédentes en faisant apparaître C et un des deux paramètres parmi h_u et L_u.

$$I_y = eL_u\left(\frac{h_u^2}{2}-eh_u+\frac{2e^2}{3}\right)+\frac{eh_u^3}{12} = e\frac{C-h_u}{2}\left(\frac{h_u^2}{2}-eh_u+\frac{2e^2}{3}\right)+\frac{eh_u^3}{12} \qquad (B.44),$$

$$= \frac{eCh_u^2}{4} - \frac{e^2h_uC}{2} + \frac{e^3C}{3} - \frac{eh_u^3}{4} + \frac{e^2h_u^2}{2} - \frac{e^3h_u}{3} + \frac{eh_u^3}{12} \qquad \text{(B.45)},$$

$$= +\frac{e^3C}{3} - \frac{e^3h_u}{3} - \frac{e^2h_uC}{2} + \frac{eCh_u^2}{4} + \frac{e^2h_u^2}{2} - \frac{eh_u^3}{6} \qquad \text{(B.46)}.$$

De même

$$I_Z = 2eL_u\left(\frac{L_u^2}{3} + L_ue + e^2\right) + h_u\frac{e^3}{3} - \frac{e(L_u(L_u+2e)+h_u\frac{e}{2})^2}{2L_u+h_u} \qquad \text{(B.47)},$$

$$= 2e\frac{C-h_u}{2}\left(\frac{C^2-2Ch_u+h_u^2}{12} + \frac{C-h_u}{2}e + e^2\right) + h_u\frac{e^3}{3} - \frac{e(\frac{C^2-2Ch_u+h_u^2}{4} + eC - eh_u + h\frac{e}{2})^2}{C} \qquad \text{(B.48)},$$

$$= \frac{eC^3 + 6e^2C^2 - 12e^2Ch_u - 3eC^2h_u + 3Ceh_u^2 + 6e^2h_u^2 - eh_u^3}{12} + Ce^3 - 2h_u\frac{e^3}{3}$$

$$-\frac{e}{16C}\Big[C^4 + 8C^3e + 16e^2C^2 - 16e^2Ch_u - 4C^3h_u - 16C^2h_ue - 4C^2ehv \qquad \text{(B.49)},$$

$$+8Ch_u^2e + 8h_u^2eC + 4C^2h_u^2 + 2C^2h_u^2 + 4e^2h_u^2 - 4Ch_u^3 - 4h_u^3e + h_u^4\Big]$$

$$= \frac{eC^3}{48} + h_u\left[\frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{4}C\right] + h_u^2\left[-\frac{e^2}{2} - \frac{e}{8}C - \frac{e^3}{4C}\right] + h_u^3\left[\frac{e}{6} + \frac{e^2}{4C}\right] - \frac{eh_u^4}{16C} \qquad \text{(B.50)}.$$

L'optimisation revient à résoudre l'équation suivante:

$$I_y = +\frac{e^3C}{3} - \frac{e^3h_u}{3} - \frac{e^2h_uC}{2} + \frac{eCh_u^2}{4} + \frac{e^2h_u^2}{2} - \frac{eh_u^3}{6} = I_Z =$$

$$\frac{eC^3}{48} + h_u\left[\frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{4}C\right] + h_u^2\left[-\frac{e^2}{2} - \frac{e}{8}C - \frac{e^3}{4C}\right] + h_u^3\left[\frac{e}{6} + \frac{e^2}{4C}\right] - \frac{eh_u^4}{16C} \qquad \text{(B.51)},$$

soit

$$\boxed{\frac{eC^3}{48} - \frac{e^3C}{3} + h_u\left[\frac{2e^3}{3} + \frac{3e^2C}{4}\right] + h_u^2\left[-e^2 - \frac{3eC}{8} - \frac{e^3}{4C}\right] + h_u^3\left[\frac{e}{3} + \frac{e^2}{4C}\right] - \frac{eh_u^4}{16C} = 0} \qquad \text{(B.52)}.$$

6 COMPARAISON AVEC UN PROFIL CIRCULAIRE

Pour pouvoir comparer les deux profils, nous conserverons la même masse, c'est à dire la même surface de profil, ainsi que la même épaisseur de tôle.

Traduisons cela en équation. Soit R_f le rayon extérieur, r_f le rayon intérieur du tube, C la longueur de tôle dépliée, nous avons alors :

$$\begin{cases}\pi\left(R_f^2 - r_f^2\right) = eC \\ R_f - r_f = e\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\pi(R_f + r_f) = C \\ R_f - r_f = e\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}R_f + r_f = \dfrac{C}{\pi} \\ R_f - rv = e\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}R_f = \dfrac{e}{2} + \dfrac{C}{2\pi} \\ r_f = R - e\end{cases} \quad \text{(B.53).}$$

L'inertie est donnée par la formule classique

$$I = \frac{\pi}{16}\left(R_f^4 - r_f^4\right) \quad \text{(B.54).}$$

<u>Remarque :</u>

Ce résultat peut avoir une portée plus générale. En effet

$$I = \frac{\pi}{16}\left(R_f^4 - r_f^4\right) = \frac{\pi}{16}\left(R_f^4 - (R_f - e)^4\right) = \frac{\pi}{16}\left(4eR_f^3 - 6e^2R_f^2 + 4e^3R_f + e^4\right) \quad \text{(B.55).}$$

Or $R_f = \dfrac{e}{2} + \dfrac{C}{2\pi}$ D'où

$$I = \frac{\pi}{16}\left(4e\left(\frac{e}{2} + \frac{C}{2\pi}\right)^3 - 6e^2\left(\frac{e}{2} + \frac{C}{2\pi}\right)^2 + 4e^3\left(\frac{e}{2} + \frac{C}{2\pi}\right) + e^4\right) \quad \text{(B.56).}$$

Compte tenu de la différence entre e et c, le terme le plus important est :

$$\frac{\pi}{16}\frac{4eC^3}{8\pi^3} = \frac{1}{32\pi^2}eC^3 \approx \frac{eC^3}{316} \quad \text{(B.57).}$$

Dans le cas de la 106 ce terme vaut $7{,}6\ 10^{-1}$, soit quasiment I

A titre de comparaison, pour le profil en U, I_y contient un terme en $\dfrac{eC^3}{48}$.

Il est donc avantageux de prendre un profil en U.

Annexe C: Exemple de modèle traité analytiquement

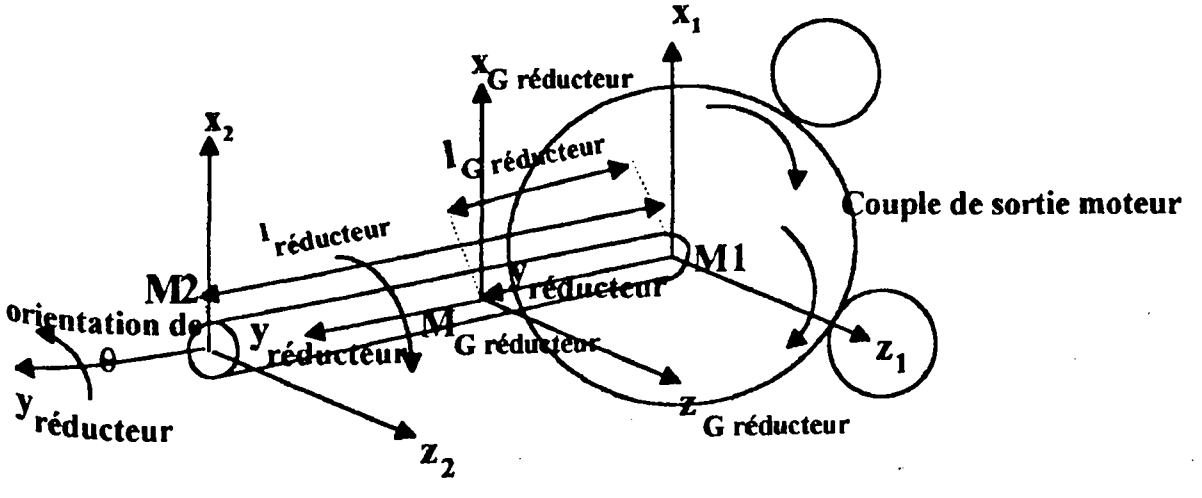
Cette annexe présente une pièce: la grande roue du réducteur traitée analytiquement. Cette méthode est assez lourde [Codfert, Sortais, 1995] et n'a pas été programmé dans un logiciel.

Le réducteur est composé d'un axe et d'une roue (cf. figure suivante)
Nous allons examiner successivement les points suivants : des préliminaires utiles par la suite, les liaisons avec l'extérieure, les équations ainsi que leur bilan.

1. Préliminaires

1.1. Repères propres

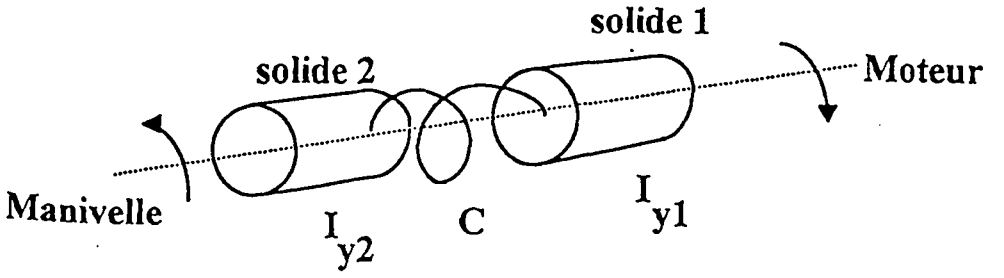
remarque: les sens des flèches du graphique suivant sont donnés à titre indicatif. Il existe en effet 2 types de moteur pour ce qui est des sens de rotation. Ils sont dits "à gauche" où "à droite". Les angles et les couples sont néanmoins orientés de par les repères. Différentes méthodes comme celle du tire - bouchon ou des trois doigts peuvent être utilisées pour connaître le signe. De plus les sens des mouvements peuvent changer en cours d'application.



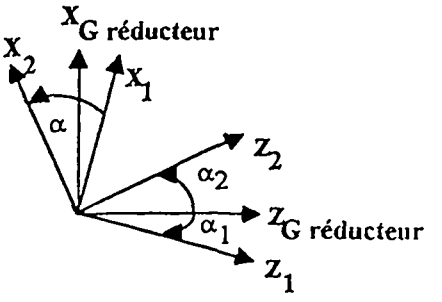
Le repère absolu sera noté R= (O, X, Y, Z). On s'intéressera à trois repères propres : $R_{G\ réducteur} = (M_{G\ réducteur}, x_{G\ réducteur}, y_{réducteur}, z_{G\ réducteur})$, R1= (M1, x1, $y_{réducteur}$, z1) et R2=(M2, x2, $y_{réducteur}$, z2). R2 se déduit de R1 par rotation suivant $y_{réducteur}$ d'un angle de rotation dû à la déformation en torsion.

1.2. Elasticité à prendre en compte

Nous prendrons en compte la torsion, élasticité prédominante révélée lors des calculs d'éléments finis.



1.3. Notations



soient α_1 : l'angle entre $z_{G\ réducteur}$ et z_1 ou de façon équivalente entre $x_{G\ réducteur}$ et x_1

α_2 : l'angle entre $z_{G\ réducteur}$ et z_1 ou de façon équivalente entre $x_{G\ réducteur}$ et x_2

α : l'angle entre z_1 et z_2 ou de façon équivalente entre x_1 et x_2

$I_{x\ réducteur}$, $I_{z\ réducteur}$, I_{y1}, I_{y2} les moments d'inerties respectivement du réducteur par rapport à $x_{G\ réducteur}$ et à $z_{G\ réducteur}$ et des solides 1 et 2 par rapport à $y_{G\ réducteur}$

$m_{réducteur}$ la masse de l'axe

f_1, f_2 les coefficients de frottements entre le réducteur et les bagues 1 et 2

$C_{réducteur}$ la constante de torsion

$$\Omega_{G\ réducteur}\begin{bmatrix}\theta'_{x_{G\ réducteur}}\\ \theta'_{y_{G\ réducteur}}\\ \theta'_{z_{G\ réducteur}}\end{bmatrix}_{R_{G\ réducteur}} \quad \Omega'_{G\ réducteur}\begin{bmatrix}\theta''_{x_{G\ réducteur}}\\ \theta''_{y_{G\ réducteur}}\\ \theta''_{z_{G\ réducteur}}\end{bmatrix}_{R_{G\ réducteur}}$$

vecteur rotation du réducteur par rapport au repère absolu exprimé dans le repère $R_{G\ réducteur}$ ainsi que sa dérivée par rapport au temps exprimée dans le même repère.

$$\Omega_{réducteur1}\begin{bmatrix}\theta'_{x1}\\ \theta'_{y1}\\ \theta'_{z1}\end{bmatrix}_{R1} \quad \Omega'_{réducteur1}\begin{bmatrix}\theta''_{x1}\\ \theta''_{y1}\\ \theta''_{z1}\end{bmatrix}_{R1}$$

vecteur rotation du solide 1 par rapport au

repère absolu exprimé dans le repère R1 ainsi que sa dérivée par rapport au temps exprimée dans le même repère.

$$\Omega_{réducteur2}\begin{bmatrix}\theta'_{x2}\\ \theta'_{y2}\\ \theta'_{z2}\end{bmatrix}_{R2} \quad \Omega'_{réducteur2}\begin{bmatrix}\theta''_{x2}\\ \theta''_{y2}\\ \theta''_{z2}\end{bmatrix}_{R2}$$ vecteur rotation du solide 2 par rapport au

repère absolu exprimé dans le repère R2 ainsi que sa dérivée par rapport au temps exprimée dans le même repère.

1.4. choix du repère

Exprimons $\Omega_{réducteur1}$ avec ses composantes dans R2 :

$$\Omega_{réducteur1} = \begin{bmatrix}\theta'_{x1}\\ \theta'_{y1}\\ \theta'_{z1}\end{bmatrix}_{R1} = \begin{bmatrix}\cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta'_{x1R2}\\ \theta'_{y1R2}\\ \theta'_{z1R2}\end{bmatrix}_{R2}$$

donc θ'_{y1} a la même valeur dans les deux repères R1 et R2.
Les deux membres de l'équation précédente sont exprimés dans le repère R1, même s'il apparaît un terme exprimé dans le repère R2. La dérivation temporelle dans le repère R1 des deux membres de l'équation ne fait donc pas apparaître de termes de changement de repères.

$$\Omega'_{réducteur1} = \begin{bmatrix}\theta''_{x1}\\ \theta''_{y1}\\ \theta''_{z1}\end{bmatrix}_{R1} = \alpha'\begin{bmatrix}-\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha)\\ 0 & 0 & 0\\ -\cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta'_{x1R2}\\ \theta'_{y1R2}\\ \theta'_{z1R2}\end{bmatrix}_{R2} + \begin{bmatrix}\cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta''_{x1R2}\\ \theta''_{y1R2}\\ \theta''_{z1R2}\end{bmatrix}_{R2}$$

θ''_{y1} (dérivation de θ'_{y1} dans le repère R1 mais qui peut être exprimé dans différents repères) a aussi la même valeur dans le repère R2. On peut faire de même avec $R_{G\ réducteur}$ et θ'_{y1} a la même valeur dans ce repère. Or dans les autres directions (rotation suivant x et y), le réducteur peur être considéré comme un seul solide. On se contentera donc d'un seul repère : $R_{G\ réducteur}$.

1.5. Détermination de α"

Intéressons nous à la matrice de passage entre R1 et R2 :

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}_{R2} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{R1} = M_{ch\ 1->2} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{R1}$$

Soit $\Omega_{R2/R1}$ le vecteur rotation du repère R2 par rapport au repère R1.

On a déjà démontré que :

$[\Omega_{R2/R1}\wedge]_{R1} = M'_{ch\ 2->1} M^{-1}_{ch\ 2->1}$ exprimé dans le repère R1

Rappelons la notation : $\begin{bmatrix} p \\ q \wedge \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$

$$[\Omega_{R2/R1}\wedge]_{R1} = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \alpha'$$

avec α' dérivée de α par rapport au temps.

$$[\Omega_{R2/R1}\wedge]_{R1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \alpha'$$

D'où

$$[\Omega_{R2/R1}]_{R1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha'$$ exprimé dans le repère R1

D'après les lois de composition des mouvements

$\Omega_{réducteur2} = \Omega_{réducteur1} + \Omega_{R2/R1}$ exprimé dans le repère absolu

En injectant l'expression de $\Omega_{R2/R1}$, on obtient :

$$\Omega_{réducteur2} = \Omega_{réducteur1} + M_{ch\ 1->absolu} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha' \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dérivons l'expression par rapport au temps dans le repère absolu

$$v_{Ms1} = v_{G\,réducteur} + (v_{M1} - v_{G\,réducteur}) + \Omega_{réducteur1} \wedge \left(\overrightarrow{M_1 G_{réducteur}} + \overrightarrow{G_{réducteur} M_{s1}}\right)$$

En développant :

$$v_{Ms1} = v_{G\,réducteur} + \Omega_{réducteur1} \wedge \overrightarrow{G_{réducteur} M_{s1}} + \Omega_{réducteur1} \wedge \overrightarrow{M_1 G_{réducteur}} + (v_{M1} - v_{G\,réducteur})$$

Le point M_1 reste invariant après la déformation si bien qu'il peut être considéré comme faisant partie du solide lié au centre de gravité :

$$v_{M1} = v_{G\,réducteur} + \Omega_{G\,réducteur} \wedge \overrightarrow{G_{réducteur} M_1}$$

De plus comme $[\Omega_{R1/G\,réducteur}]_{G\,réducteur} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1' \\ 0 \end{bmatrix}$ (expression calquée sur celle de $[\Omega_{R2/R1}]_{R1}$) ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{M_1 G_{réducteur}}$. On a donc :

$$\Omega_{réducteur1} \wedge \overrightarrow{M_1 G_{réducteur}} = (\Omega_{R1/G\,réducteur} + \Omega_{G\,réducteur}) \wedge \overrightarrow{M_1 G_{réducteur}} = \Omega_{G\,réducteur} \wedge \overrightarrow{M_1 G_{réducteur}}$$

Les deux expressions que nous venons de détailler s'opposent si bien que :

$$\boxed{v_{Ms1} = v_{G\,réducteur} + \Omega_{réducteur1} \wedge G_{réducteur} M_{s1}}$$

Tout se passe comme si le solide 1 avait pour centre de gravité $G_{réducteur}$ et de vitesse angulaire $\Omega_{réducteur1}$.

1.7. Détermination de α_1 et α_2

Le repère R2 sera utile par la suite pour exprimer le mouvement de la manivelle moteur. Exprimons la matrice de passage de $R_{G\,réducteur}$ à R2.
D'après l'équation fondamentale de la dynamique appliquée successivement au solide 1, au solide 2, puis à l'ensemble on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{c} I_{y1}\ddot{\theta}_{y_1} = M_{f1} + M_{f\,int} \\ I_{y2}\ddot{\theta}_{y_2} = M_{f2} - M_{f\,int} \\ I_{y\,G\,réducteur}\ddot{\theta}_{y\,G\,réducteur} = M_{f1} + M_{f2} \end{array} \right\}$$

avec M_{f1} moment des forces extérieures exercées sur le solide 1
M_{f2} moment des forces extérieures exercées sur le solide 2

$M_{f\,int}$ moment de la force exercées sur le solide 1 par le solide 2

NB : Les moments sur $y_{réducteur}$ des forces ont la même expression aux centres de gravité des solides 1, 2 et du réducteur. En effet pour passer par exemple du moment exercé par la force F sur le solide 1 à celui du solide 2 on rajoute un terme en : $F \wedge (l_{réducteur}\, y_{réducteur})$ or ce terme est perpendiculaire à $y_{réducteur}$. D'où le résultat.

En sommant les équations, on obtient :

$$\boxed{I_{y\,G\,réducteur}\,\theta''_{y_{G\,réducteur}} = I_{y1}\,\theta''_{y_1} + I_{y2}\,\theta''_{y_2}}$$

De plus, l'expression mathématique des moments d'inertie donne une équation supplémentaire :

$$I_{y\,G\,réducteur} = \int_0^{l_{réducteur}} \left[\iint (x^2 + z^2)\, \rho(x,z,l)\,dxdz \right] dl.$$

avec ρ (x, z, l) : masse volumique au point (x, z, l)

$$= \int_0^{l_{rsolide\,1}} \left[\iint (x^2 + z^2)\, \rho(x,z,l)\,dxdz \right] dl + \int_{l_{rsolide\,1}}^{l_{réducteur}} \left[\iint (x^2 + z^2)\, \rho(x,z,l)\,dxdz \right] dl$$

avec $l_{solide\,1}$ longueur délimitant le premier solide

$$= I_{y1} + I_{y2}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{I_{y\,G\,reducteur} = I_{y1} + I_{y2}}$$

A partir des deux dernières équations encadrées, on obtient :

$$I_{y1}\left(\theta''_{y_1} - \theta''_{y_{G\,réducteur}}\right) + I_{y2}\left(\theta''_{y_2} - \theta''_{y_{G\,réducteur}}\right) = 0$$

En intégrant l'expression précédente, on obtient :

$$I_{y1}\left(\theta'_{y_1} - \theta'_{y_{G\,réducteur}}\right) + I_{y2}\left(\theta'_{y_2} - \theta'_{y_{G\,réducteur}}\right) + constante = 0$$

A l'équilibre, sans force, toutes les vitesses sont nulles. Donc la constante est nulle. On intègre une seconde fois l'équation :

$$I_{y1}\alpha_1 + I_{y2}\alpha_2 + constante = 0$$

Avec le même raisonnement que précédemment, on en déduit que la constante est nulle. D'où

$$I_{y1}\alpha_1 + I_{y2}\alpha_2 = 0 \; or \; \alpha = \alpha_2 - \alpha_1$$

D'où $\boxed{\alpha_2 = \frac{I_{y1}}{I_{y1} + I_{y2}}\alpha}$

La matrice de passage entre le repère $R_{G\ réducteur}$ et le repère R2 est donc égal à :

$$M_{ch\ G\ réducteur \to R2} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{I_{y1}}{I_{y1}+I_{y2}}\alpha) & 0 & -\sin(\frac{I_{y1}}{I_{y1}+I_{y2}}\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\frac{I_{y1}}{I_{y1}+I_{y2}}\alpha) & 0 & \cos(\frac{I_{y1}}{I_{y1}+I_{y2}}\alpha) \end{bmatrix}$$

2. Liaison avec les autres éléments

2.1 Liaison avec le carter moteur (bagues de guidage) :

La liaison avec les bagues (solidaires du carter moteur) n'est pas cylindrique en raison du jeu qui est pris en compte. Suivant les cas on aura affaire à un appui ponctuel, à deux appuis, à un contact linéique, voire même à aucun contact. On supposera que la bague n°1 (respectivement 2) appartient au solide 1(2). Cette hypothèse se comprend si l'on sait que les deux bagues sont proches des extrémités.

Soit $R_{bague} = \left(G_{bague} \begin{vmatrix} x_{G\,bague} \\ y_{G\,bague} \\ z_{G\,bague} \end{vmatrix}, x_{bague}, y_{bague}, z_{bague} \right)$ un repère lié aux bagues du carter. Le vecteur y_{bague} sera choisi de façon à être parallèle à l'axe des bagues. Ce repère est lié solidairement au carter moteur si celui - ci ne se déforme pas.

repère réducteur et $v_{G\,réducteur}$ vitesse de $M_{G\,réducteur}$ dans le repère absolu.

La force de frottement est égale à :

$$-f_1\,|F_{carter\,1}|\,\frac{v_{Mc\,réducteur\,1}}{\|v_{Mc\,réducteur\,1}\|}$$ dans le repère $R_{G\,réducteur}$

La force globale d'action du carter moteur sur l'axe du réducteur est égal à :

$$\begin{bmatrix} -F_{carter\,1}\,\sin(\theta_{1\,bague}) \\ 0 \\ -F_{carter\,1}\,\cos(\theta_{1\,bague}) \end{bmatrix} -f_1\,|F_{carter\,1}|\,\frac{v_{Mc\,réducteur\,1}}{\|v_{Mc\,réducteur\,1}\|}$$

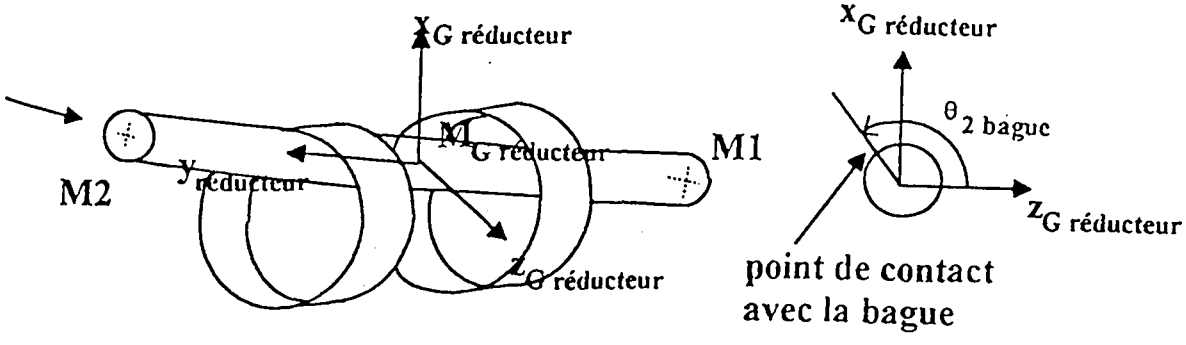
Le moment engendré au niveau du centre de gravité du réducteur par la force globale est égale à :

$$\left(\begin{bmatrix} -F_{carter\,1}\,\sin(\theta_{1\,bague}) \\ 0 \\ -F_{carter\,1}\,\cos(\theta_{1\,bague}) \end{bmatrix} -f_1\,|F_{carter\,1}|\,\frac{v_{Mc\,réducteur\,1}}{\|v_{Mc\,réducteur\,1}\|}\right) \wedge \begin{bmatrix} -R_{axe}\sin(\theta_{1\,bague}) \\ -y_{bague1} \\ -R_{axe}\cos(\theta_{1\,bague}) \end{bmatrix}$$

soit encore :

$$\begin{bmatrix} -y_{bague1}F_{carter\,1}\,\cos(\theta_{1\,bague}) \\ 0 \\ y_{bague1}F_{carter\,1}\sin(\theta_{1\,bague}) \end{bmatrix} -f_1\,|F_{carter\,1}|\,\frac{v_{Mc\,réducteur\,1}}{\|v_{Mc\,réducteur\,1}\|} \wedge \begin{bmatrix} -R_{axe}\sin(\theta_{1\,bague}) \\ -y_{bague1} \\ -R_{axe}\cos(\theta_{1\,bague}) \end{bmatrix}$$

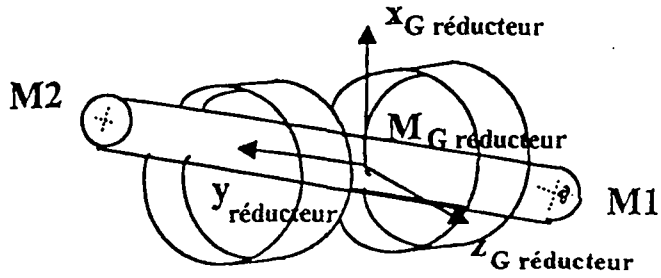
Un seul appui ponctuel sur la bague n°2



Avec des notations similaires au cas précédent, la force et le moment appliqué au centre de gravité du réducteur ont pour expression respective :

$$\begin{bmatrix} -F_{carter\,2}\,\sin(\theta_{2\,bague}) \\ 0 \\ -F_{carter\,2}\,\cos(\theta_{2\,bague}) \end{bmatrix} -f_2\,|F_{carter\,2}|\,\frac{v_{Mc\,réducteur\,2}}{\|v_{Mc\,réducteur\,2}\|}$$ et

Sans contact



Dans ce cas aucune force n'est exercée par les bagues sur l'axe.

2.2. Liaison avec les butées carter

Examinons maintenant le contact entre le point M1 et les butées carter. Dans la réalité l'axe se prolonge en M1 par un petit plot de faible diamètre qui assure le contact en M1. Les butées du carter empêchent les mouvements suivant l'axe y du repère lié aux bagues. Il existe donc une force supplémentaire en cas de contact suivant cet axe.

L'expression de la force d'appui dans le repère lié aux bagues exprimé au centre de gravité a la forme suivante $\begin{bmatrix} 0 \\ -F_{y\,bague} \\ 0 \end{bmatrix}$. Il faut aussi ajouter la force de frottement. Celle - ci est perpendiculaire à la force d'appui. Dans le repère R_{bague} elle a la forme :

$$\begin{bmatrix} F_{xz\,bague}\ \sin(\alpha_{M1\,bague}) \\ 0 \\ F_{xz\,bague}\ \cos(\alpha_{M1\,bague}) \end{bmatrix}$$

Si $F_{xz\,carter} < f_{3\,carter}\ F_{y\,carter}$ alors le point M1 ne bouge pas par rapport au carter. Dans le cas contraire on a : $F_{xz\,carter} = f_{3\,carter}\ F_{y\,carter}$. En réalité le coefficient $f_{3\,carter}$ a une valeur légèrement plus forte dans la première expression (statique) que dans la deuxième (dynamique). Par simplification, nous considérerons cette valeur comme constante. La force de frottement est colinéaire à la vitesse du point M1 et de sens opposé. Cette vitesse est égale à :

$$M^{-1}_{ch\,G\,réducteur->absolu}\ V_{G\,réducteur} + \Omega_{réducteur1} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -l_{G\,réducteur} \\ 0 \end{bmatrix}.\ \text{dans } R_{G\,réducteur}$$

Cette vitesse n'a théoriquement pas de composante orthogonale au plan de contact, sinon il n'y a plus contact. Exprimons ses coordonnées dans le repère bague.

$$V_{M1\ bague} = M_{ch\ absolu->bague}\left(V_{G\ rèducteur} + M_{ch\ G\ rèducteur->absolu}\left(\Omega_{rèducteur} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -l_{G\ rèducteur} \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right)$$

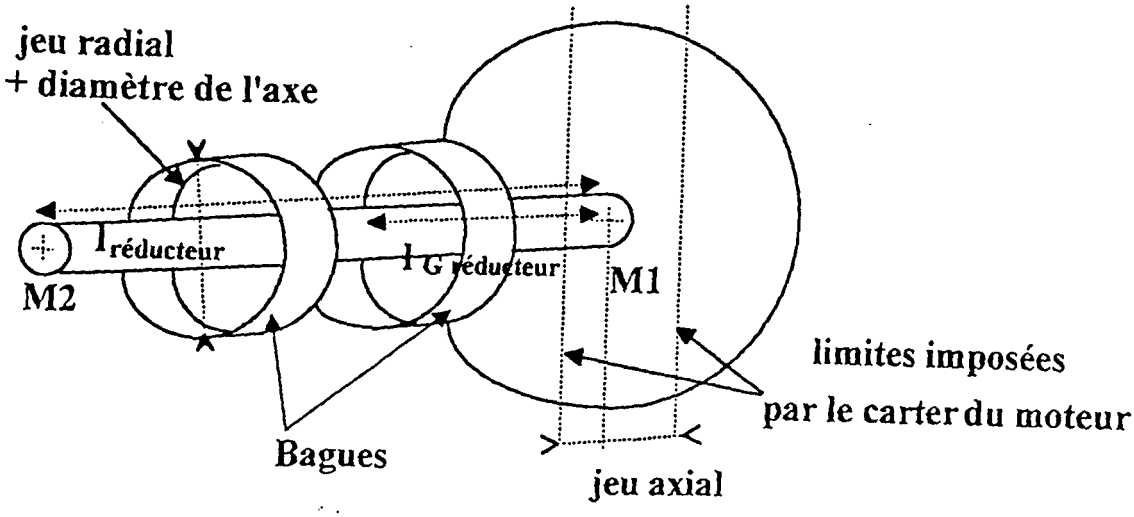
On en déduit facilement une expression de $\alpha_{M1\ bague}$:

$$\cos(\alpha_{M1bague}) = \frac{-V_{M1\ bague}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\|V_{M1\ bague}\|}$$

$$\sin(\alpha_{M1carter}) = \frac{-V_{M1\ bague}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\|V_{M1\ bague}\|}$$ dans le cas où $\cos(\alpha_{M1\ bague}) \neq 0$, on a alors :

$$\alpha_{M1\ bague} = \arctan\left(\frac{V_{M1\ bague}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{V_{M1\ bague}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}\right)(\pi)$$

La valeur à 2π près est donné suivant le signe de $\cos(\alpha_{M1\ bague})$ donc de l'abscisse de $-v_{M1\ bague}$


jeu radial
+ diamètre de l'axe
$l_{réducteur}$
$l_{G\ réducteur}$
M2
M1
limites imposées
par le carter du moteur
Bagues
jeu axial

2.3. Liaison avec la manivelle.

Le nombre de degré de liberté est nul car les deux pièces sont solidaires. L'expression du torseur (matrice composée des deux vecteurs force et moment à un point donné) dans $R_{G\ réducteur}$ au point M2 a la forme suivante

$$\begin{pmatrix} F_{x\ manivelle\ moteur} & M_{x\ manivelle\ moteur} \\ F_{y\ manivelle\ moteur} & M_{y\ manivelle\ moteur} \\ F_{z\ manivelle\ moteur} & M_{z\ manivelle\ moteur} \end{pmatrix}$$

L'expression au point $G_{réducteur}$ comporte en plus un terme en moment :

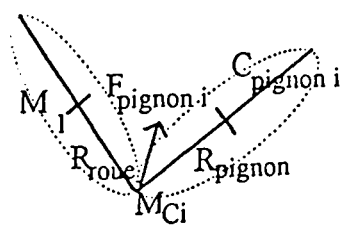
$$\begin{bmatrix} F_{x\ manivelle\ moteur} \\ F_{y\ manivelle\ moteur} \\ F_{z\ manivelle\ moteur} \end{bmatrix} \wedge \overrightarrow{M_2 G_{réducteur}} = \begin{bmatrix} F_{x\ manivelle\ moteur} \\ F_{y\ manivelle\ moteur} \\ F_{z\ manivelle\ moteur} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -(l_{réducteur} - l_{G\ réducteur}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{z\ manivelle\ moteur}(l_{réducteur} - l_{G\ réducteur}) \\ 0 \\ -F_{z\ manivelle\ moteur}(l_{réducteur} - l_{G\ réducteur}) \end{bmatrix}$$

La manivelle moteur étant solidaire du réducteur, il n'y a pas de jeux entre les deux.

2.4. Liaison moteur

Les forces sont transmises via des pignons intermédiaires guidés axialement par rapport au carter.



Déterminons la force exercée par le pignon sur la roue du réducteur. Nous prendrons comme hypothèse que cette force est perpendiculaire aux rayons de la roue et du pignon au point de contact. Dans le repère $R_{G\ réducteur}$ le point $C_{pignon\ i}$ a

pour coordonnées : $\begin{bmatrix} C_{pignon\ i\ x} \\ C_{pignon\ i\ y} \\ C_{pignon\ i\ z} \end{bmatrix}$

En projetant $C_{pignon\,i}$ dans le plan de la roue du réducteur et étant donné que ce point est aligné avec M_1 et $M_{c\,i}$ on en déduit les coordonnées de $M_{c\,i}$ dans $R_{G\ réducteur}$:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{C_{pignon\,i\,x}\,R_{roue}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} \\ y_1 \\ \dfrac{C_{pignon\,i\,z}\,R_{roue}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} \end{bmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_{ci}}$ et $\overrightarrow{C_{pignon\,i}M_{ci}}$ ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{M_1M_{ci}} = \begin{bmatrix} \dfrac{C_{pignon\,i\,x}\,R_{roue}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} \\ 0 \\ \dfrac{C_{pignon\,i\,z}\,R_{roue}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} \end{bmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{C_{pignon\,i}M_{ci}} = \begin{bmatrix} \dfrac{C_{pignon\,i\,x}\,R_{roue}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} - C_{pignon\,ix} \\ y_1 - C_{pignon\,iy} \\ \dfrac{C_{pignon\,i\,z}\,R_{roue}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} - C_{pignon\,iz} \end{bmatrix}$$

La force dans le repère $R_{G\ réducteur}$ est colinéaire au vecteur :

$$\overrightarrow{M_1M_{ci}} \wedge \overrightarrow{C_{pignon\,i}M_{ci}} = \begin{bmatrix} \dfrac{C_{pignon\,i\,x}\,R_{roue}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} \\ 0 \\ \dfrac{C_{pignon\,i\,z}\,R_{roue}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \dfrac{C_{pignon\,i\,x}\,R_{roue}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} - C_{pignon\,ix} \\ y_1 - C_{pignon\,iy} \\ \dfrac{C_{pignon\,i\,z}\,R_{roue}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} - C_{pignon\,iz} \end{bmatrix}$$

qui est colinéaire au vecteur :

$$\begin{bmatrix} C_{pignon\,i\,x} \\ 0 \\ C_{pignon\,i\,z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \dfrac{C_{pignon\,i\,x}\,R_{roue}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} - C_{pignon\,ix} \\ y_1 - C_{pignon\,iy} \\ \dfrac{C_{pignon\,i\,z}\,R_{roue}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} - C_{pignon\,iz} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -C_{pignon\,i\,z}\,(y_1 - C_{pignon\,iy}) \\ C_{pignon\,i\,z}\left(\dfrac{C_{pignon\,i\,x}\,R_{roue}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} - C_{pignon\,ix}\right) - C_{pignon\,i\,x}\left(\dfrac{C_{pignon\,i\,z}\,R_{roue}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} - C_{pignon\,iz}\right) \\ C_{pignon\,i\,x}\,(y_1 - C_{pignon\,iy}) \end{bmatrix}$$

après simplification :

$$\begin{bmatrix} -C_{pignon\,i\,z}\,(y_1 - C_{pignon\,iy}) \\ 0 \\ C_{pignon\,i\,x}\,(y_1 - C_{pignon\,iy}) \end{bmatrix}$$

ce vecteur est colinéaire au vecteur :

$$\begin{bmatrix} -C_{pignon\,i\,z} \\ 0 \\ C_{pignon\,i\,x} \end{bmatrix}$$

La force $F_{pignon\,i}$ a donc la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-C_{pignon\,i\,z}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} \\ 0 \\ \dfrac{C_{pignon\,i\,x}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} \end{bmatrix} \overline{F_{pignon\,i}}$$

En supposant que les deux pignons transmettent, en valeur absolue la même force, la force globale transmise par les deux pignons au réducteur est égale à:

$$\begin{bmatrix} -\left(\dfrac{C_{pignon\,1\,z}}{\sqrt{C^2_{pignon\,1\,x}+C^2_{pignon\,1\,z}}} + \dfrac{C_{pignon\,2\,z}}{\sqrt{C^2_{pignon\,2\,x}+C^2_{pignon\,2\,z}}}\right) \\ 0 \\ \dfrac{C_{pignon\,1\,x}}{\sqrt{C^2_{pignon\,1\,x}+C^2_{pignon\,1\,z}}} \quad \dfrac{C_{pignon\,2\,x}}{\sqrt{C^2_{pignon\,2\,x}+C^2_{pignon\,2\,z}}} \end{bmatrix} \overline{F_{pignon}}$$

Intéressons nous maintenant au couple transmis par chacun des pignons au centre de gravité du réducteur. Pour un pignon ce couple est égal à :

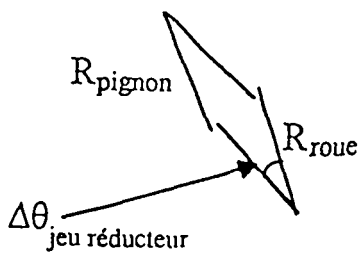
$F_{pignon\,i} \wedge \overrightarrow{M_{ci}M_{G\,réducteur}}$ soit :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-C_{pignon\,i\,z}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{i\,z}}} \\ 0 \\ \dfrac{C_{pignon\,i\,x}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \dfrac{C_{pignon\,i\,z}\,R_{roue}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} \\ -y_1 \\ \dfrac{C_{pignon\,i\,z}\,R_{roue}}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} \end{bmatrix} \overline{F_{pignon}} = \begin{bmatrix} \dfrac{C_{pignon\,i\,x}\,y_1}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} \\ \dfrac{-C^2_{pignon\,i\,x}-C^2_{pignon\,i\,z}}{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}} R_{roue} \\ \dfrac{C_{pignon\,i\,z}\,y_1}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{i\,z}}} \end{bmatrix} \overline{F_{pignon}}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{C_{pignon\,i\,x}\ y_1}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{pignon\,i\,z}}} \\ -R_{roue} \\ \dfrac{C_{pignon\,i\,z}\ y_1}{\sqrt{C^2_{pignon\,i\,x}+C^2_{i\,z}}} \end{bmatrix} \overline{F_{pignon}}$$

Le couple global est égal à : $\begin{bmatrix} \dfrac{C_{pignon\,1\,x}\ y_1}{\sqrt{C^2_{pignon\,1\,x}+C^2_{pignon\,1\,z}}} + \dfrac{C_{pignon\,2\,x}\ y_1}{\sqrt{C^2_{pignon\,2\,x}+C^2_{pignon\,2\,z}}} \\ -2R_{roue} \\ \dfrac{C_{pignon\,1\,z}\ y_1}{\sqrt{C^2_{pignon\,1\,x}+C^2_{pignon\,1\,z}}} + \dfrac{C_{pignon\,2\,z}\ y_1}{\sqrt{C^2_{pignon\,2\,x}+C^2_{pignon\,2\,z}}} \end{bmatrix} \overline{F_{pignon}}$

Exprimons le fait que le système comporte des jeux angulaires. Nous modéliserons l'ensemble de la vis et des deux pignons par une seule pièce équivalente possédant un jeu angulaire.



On définit l'angle de décalage vue par la roue entre la roue du réducteur et le pignon équivalent. Cet angle que l'on nommera : $\Delta\theta_{roue\ pignon}$ est compris entre 0 et $\Delta\theta_{jeu\ réducteur}$. Si l'on considère l'angle de rotation du pignon équivalent : θ_{pignon}

$$\Delta\theta_{roue\ pignon} = \theta_{y1} - \theta_{pignon}\frac{R_{pignon}}{R_{roue}}$$

On saura s'il y a contact ou non suivant le signe de F_{pignon}.

3. Equations

3.1. Les équations fondamentales de la dynamique

Etant donné que l'on considère de la torsion, l'axe sera considéré comme un solide sauf lorsque la rotation suivant y sera considérée. Dans le cas de solides séparés, les indices 1 et 2 seront utilisés pour les désigner.
Les équations fondamentales de la dynamique donnent :

$$\begin{bmatrix} I_{x\,reducteur}\,\ddot{\theta}_{x\,reducteur} \\ I_{y1}\ddot{\theta}_{y1} \\ I_{y2}\ddot{\theta}_{y2} \\ I_{z\,reducteur}\,\ddot{\theta}_{z\,reducteur} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_{bague1}F_{carter\,1}\cos(\theta_{1\,bague}) - y_{bague2}F_{carter\,2}\cos(\theta_{2\,bague}) + M_{z\,manivelle\,moteur} \\ 0 \\ +M_{y\,manivelle\,moteur} + y_{bague2}F_{carter\,2}\sin(\theta_{2\,bague}) \\ y_{bague1}F_{carter\,1}\sin(\theta_{1\,bague}) + M_{z\,manivelle\,moteur} \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_1 \|F_{carter\,1}\| \frac{v_{Mc\,réducteur\,1}}{\|v_{Mc\,réducteur\,1}\|} \wedge \begin{bmatrix} -R_{axe}\sin(\theta_{1\,bague}) \\ -y_{bague1} \\ -R_{axe}\cos(\theta_{1\,bague}) \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_2 \|F_{carter\,2}\| \frac{v_{Mc\,réducteur\,2}}{\|v_{Mc\,réducteur\,2}\|} \wedge \begin{bmatrix} -R_{axe}\sin(\theta_{2\,bague}) \\ -y_{bague2} \\ -R_{axe}\cos(\theta_{2\,bague}) \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} F_{z\,manivelle\,moteur}(l_{réducteur} - l_{G\,réducteur}) + \frac{C_{pignon\,1\,x}\,y_1\overline{F_{pignon}}}{\sqrt{C^2_{pignon\,1\,x}+C^2_{pignon\,1\,z}}} + \frac{C_{pignon\,2\,x}\,y_1\overline{F_{pignon}}}{\sqrt{C^2_{pignon\,2\,x}+C^2_{pignon\,2\,z}}} \\ -2R_{roue}\overline{F_{pignon}} + C_{réducteur}\alpha \\ -C_{réducteur}\alpha \\ -F_{x\,manivelle\,moteur}(l_{réducteur} - l_{G\,réducteur}) + \frac{C_{pignon\,1\,z}\,y_1}{\sqrt{C^2_{pignon\,1\,x}+C^2_{pignon\,1\,z}}} + \frac{C_{pignon\,2\,z}\,y_1}{\sqrt{C^2_{pignon\,2\,x}+C^2_{pignon\,2\,z}}} \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\left(M_{ch\,bague->réducteur}\begin{bmatrix} F_{x\,bague}\sin(\alpha_{M1\,bague}) \\ -F_{y\,bague} \\ F_{x\,bague}\cos(\alpha_{M1\,bague}) \end{bmatrix}\right) \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ l_{G\,réducteur} \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

exprimé dans le repère $R_{réducteur}$

$$\begin{bmatrix} m_{réducteur}\,\ddot{X}_{G\,réducteur} \\ m_{réducteur}\,\ddot{Y}_{G\,réducteur} \\ m_{réducteur}\,\ddot{Z}_{G\,réducteur} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_{réducteur}g \end{bmatrix} + M_{ch\,réducteur->absolu}\begin{bmatrix} F_{x\,manivelle\,moteur} \\ F_{y\,manivelle\,moteur} \\ F_{z\,manivelle\,moteur} \end{bmatrix}$$

$$+M_{ch\,réducteur->absolu}\left(\begin{bmatrix} -F_{carter\,1}\sin(\theta_{1\,bague}) - F_{carter\,2}\sin(\theta_{2\,bague}) \\ 0 \\ -F_{carter\,1}\cos(\theta_{1\,bague}) - F_{carter\,2}\cos(\theta_{2\,bague}) \end{bmatrix} - f_1\|F_{carter\,1}\|\frac{v_{Mc\,réducteur\,1}}{\|v_{Mc\,réducteur\,1}\|} - f_2\|F_{carter\,2}\|\frac{v_{Mc\,réducteur\,21}}{\|v_{Mc\,réducteur\,21}\|}\right)$$

$$+M_{ch\,réducteur->absolu}\begin{bmatrix} -\left(\frac{C_{pignon\,1\,z}}{\sqrt{C^2_{pignon\,1\,x}+C^2_{pignon\,1\,z}}} + \frac{C_{pignon\,2\,z}}{\sqrt{C^2_{pignon\,2\,x}+C^2_{pignon\,2\,z}}}\right) \\ 0 \\ \frac{C_{pignon\,1\,x}}{\sqrt{C^2_{pignon\,1\,x}+C^2_{pignon\,1\,z}}} + \frac{C_{pignon\,2\,x}}{\sqrt{C^2_{pignon\,1\,x}+C^2_{pignon\,1\,z}}} \end{bmatrix}\overline{F_{pignon}} + M_{ch\,carter->absolu}\begin{bmatrix} F_{x\,carter}\sin(\alpha_{M1\,c} \\ -F_{y\,carter} \\ F_{z\,carter}\cos(\alpha_{M1\,c} \end{bmatrix}$$

dans le repère absolu

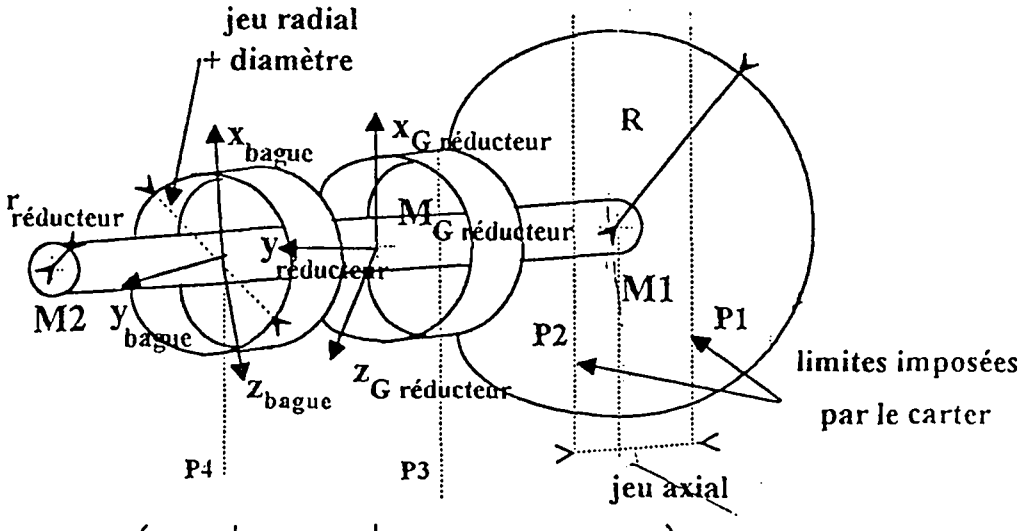
BU LILLE I

Remarque : les termes en X_{carter} ou en f_x ne sont pris en compte suivant les cas que lorsqu'il y a contact axe / bague ou axe / carter

Il est très important de noter que les trois dernières équations sont exprimées dans le repère absolu alors que les précédentes le sont dans le repère propre

3.2. Les équations de contact .

Elles donnent des conditions supplémentaires
Nous ferons comme hypothèse que les formes géométriques sont parfaites et que les deux bagues sont coaxiales.



Soit $R_{bague} = \left(G_{bague} \left| \begin{matrix} x_{G\,bague} \\ y_{G\,bague} \\ z_{G\,bague} \end{matrix} \right| , x_{bague}, y_{bague}, z_{bague} \right)$ un repère lié aux bagues du carter. Le vecteur y_{bague} sera choisi de façon à être parallèle à l'axe des bagues. Ce repère est lié solidairement à celui du carter et on peut passer de l'un à l'autre par une rotation et une translation invariantes au cours du temps. On considérera que les plans limites imposés par le carter du moteur sont perpendiculaires à l'axe des bagues. Dans ce repère les plans auront pour équation $y = p1$ *et* $y = p2$. De même les plans déterminant les extrémités des bagues ont pour équation $y = p3$ *et* $y = p4$.

Soit $M_{ch\ bague\text{->}\ G\ réducteur}$ la matrice de changement de repère entre $R_{G\ réducteur}$ et R_{bague}.
On notera $M_{ch\ bague\text{->}\ G\ réducteur} = [a_{ij\ bague\text{->}réducteur}]$ avec $1 \le i \le 3$ et $1 \le j \le 3$.

Exprimons les conditions de jeux entre le réducteur et les bagues.

Les points extrêmes de l'axe des bagues, notés B3 et B4 sur la figure suivante, ont pour équation dans le repère R_{bague} : $\begin{bmatrix} 0 \\ p_i \\ 0 \end{bmatrix}$ avec $i \in \{3,4\}$. Ils ont donc pour expression dans $R_{G\ réducteur}$:

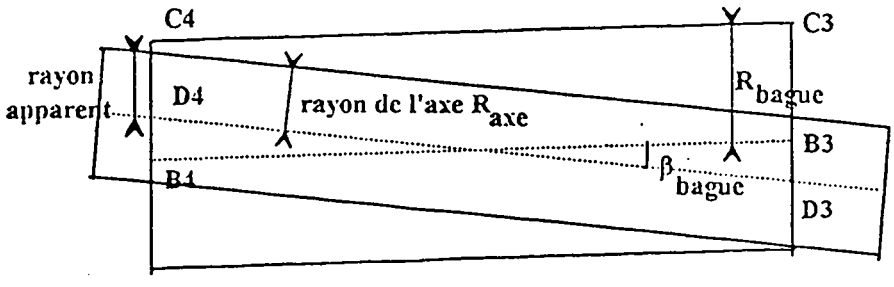
$$M_{ch\ bague\text{->}G\ réducteur} \begin{bmatrix} 0 \\ p_i \\ 0 \end{bmatrix} + [G_{réducteur} G_{bague}]_{R_{ch\ G\ réducteur}}$$

avec : $[G_{réducteur} G_{bague}]_{R_{G\ réducteur}} = M_{ch\ absolu\text{->}G\ réducteur} [G_{réducteur} G_{bague}]_{R_{absolu}}$

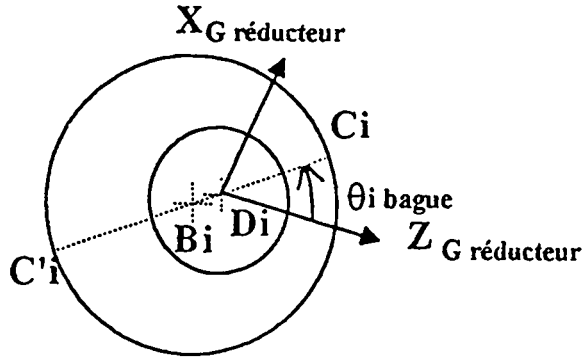
Posons $M_{ch\ absolu\text{->}G\ rèducteue} [G_{réducteur} G_{bague}]_{R_{absolu}} = \begin{bmatrix} x_{\ réducteur\ carter} \\ y_{\ réducteur\ carter} \\ z_{\ réducteur\ carter} \end{bmatrix}$

Les deux points ont donc pour coordonnées :

$$\begin{bmatrix} a_{12\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + x_{\ réducteur\ carter} \\ a_{22\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + y_{\ réducteur\ carter} \\ a_{32\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + z_{\ réducteur\ carter} \end{bmatrix}$$



Afin d'éviter une équation du quatrième degré, nous allons faire une hypothèse vérifiée physiquement dans la réalité. On va supposer que le rayon apparent est identique au rayon de l'axe. Cela revient à assimiler $\cos(\beta_{bague})$ à 1. Or $\cos(\beta_{bague}) = 1 - (\beta_{bague})^2 + o\left((\beta_{bague})^3\right)$. On s'est donc arrêté à l'ordre 1 en β_{bague}. Etant donné la faible valeur de β_{bague}, l'hypothèse est tout à fait acceptable.



L'angle $\theta_{i\ bague}$ est opposé à l'angle que fait B_iD_i avec le vecteur $z_{G\ réducteur}$

D'où si $a_{32\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + z_{réducteur\ carter} \neq 0$

$$\tan(\theta_{i\ bague}) = \tan(\theta_{i\ bague} + \pi) = \frac{a_{12\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + x_{réducteur\ carter}}{a_{32\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + z_{réducteur\ carter}}$$

Dans le cas contraire si $a_{12\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + x_{réducteur\ carter}$ est positif $\theta_{i\ bague} = -\frac{\pi}{2}$, s'il est négatif $\theta_{i\ bague} = \frac{\pi}{2}$, s'il est nul et si $\frac{a'_{12\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + x'_{réducteur\ carter}}{a'_{32\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + z'_{réducteur\ carter}}$ est défini on a

$$\tan(\theta_{i\ bague}) = \frac{a'_{12\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + x'_{réducteur\ carter}}{a'_{32\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + z'_{réducteur\ carter}} \text{ (règle de l'hospital)}$$

dans le cas contraire on peut encore dériver numérateur et dénominateur.

Déterminons l'équation des points C_i dans le repère $R_{G\ réducteur}$. Dans le repère R_{bague}, ils ont pour équation :

$$\begin{bmatrix} R_{bague}\cos(\alpha_{i\ bague}) \\ p_i \\ R_{bague}\sin(\alpha_{i\ bague}) \end{bmatrix}$$ avec $\alpha_{i\ bague}$ angle propre dans le repère bague de la position

de C_i

De la même façon que précédemment, on démontre que dans le repère $R_{G\ réducteur}$, ces points ont pour coordonnées :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \cos(\alpha_{i\ bague}) + a_{12\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + x_{réducteur\ carter} \\ +a_{13\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \sin(\alpha_{i\ bague}) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{21\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \cos(\alpha_{i\ bague}) + a_{22\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + y_{réducteur\ carter} \\ +a_{23\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \sin(\alpha_{i\ bague}) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{31\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \cos(\alpha_{i\ bague}) + a_{32\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + z_{réducteur\ carter} \\ +a_{33\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \sin(\alpha_{i\ bague}) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Exprimons le fait que ces points sont écartés de $\theta_{i\ bague}$:

$$\tan(\theta_{i\ bague}) = \frac{a_{12\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + x_{réducteur\ carter}}{a_{32\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + z_{réducteur\ carter}} =$$

$$\frac{a_{11\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \cos(\alpha_{i\ bague}) + a_{12\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + x_{réducteur\ carter} + a_{13\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \sin(\alpha_{i\ bague})}{a_{31\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \cos(\alpha_{i\ bague}) + a_{32\ bague\text{->}réducteur}\, p_i + z_{réducteur\ carter} + a_{33\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \sin(\alpha_{i\ bague})}$$

Or si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

On en déduit donc :

$$\tan(\theta_{i\ bague}) = \frac{a_{11\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \cos(\alpha_{i\ bague}) + a_{13\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \sin(\alpha_{i\ bague})}{a_{31\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \cos(\alpha_{i\ bague}) + a_{33\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \sin(\alpha_{i\ bague})}$$

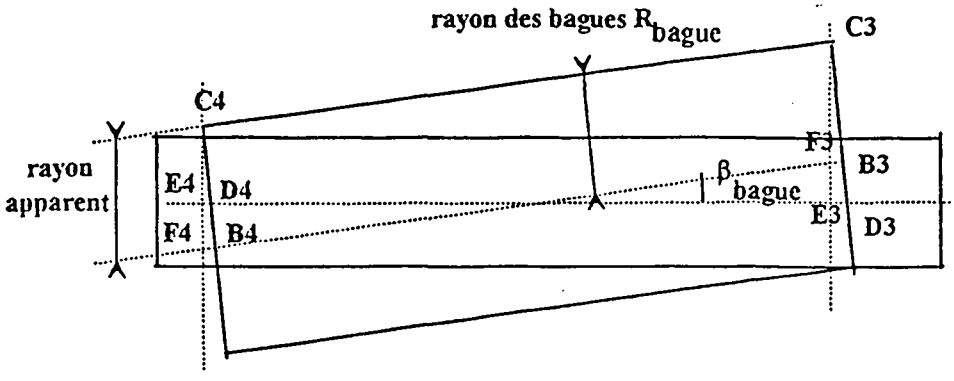
$$\Leftrightarrow \tan(\theta_{i\ bague}) = \frac{a_{11\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} + a_{13\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \tan(\alpha_{i\ bague})}{a_{31\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} + a_{33\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \tan(\alpha_{i\ bague})}$$

$$\Leftrightarrow \tan(\alpha_{i\ bague}) = \frac{-a_{11\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} + a_{31\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \tan(\theta_{i\ bague})}{a_{13\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} - a_{33\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \tan(\theta_{i\ bague})}$$

L'arctangente est définie à π près. On peut donc essayer les deux possibilités et prendre celle qui a le rayon le plus court ou alors prendre la valeur qui donne des abscisses pour C_i et B_i opposées. Une autre solution consiste à remarquer que comme les deux points sont opposés, le signe de a+c (resp. b+d) est opposé à celui de a (resp. b) et que donc les signes de a et c (resp b et d) sont opposés. Il suffit donc de tester que :

$$sgn(\sin(\theta_{i\ bague})) = -sgn(a_{11\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} + a_{13\ bague\text{->}réducteur} R_{bague} \tan(\alpha_{i\ bague}))$$

Intéressons nous maintenant au problème inverse: aux conditions de contact



Pour simplifier le problème, nous prendrons l'approximation faite précédemment, à savoir cos (β_{bague}) ~ 1. Exprimons la différence entre les points Ei et Fi. Dans le repère absolu le vecteur exprimant cette différence est égal à :

$$\left[\overrightarrow{E_iF_i}\right]_{absolu} = M_{ch\ bague->absolu}\begin{bmatrix}0\\p_i\\0\end{bmatrix} - M_{ch\ réducteur->absolu}\begin{bmatrix}0\\y_{Ei}\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur}\\Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur}\\Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur}\end{bmatrix}$$

avec y_{Ei} l'ordonnée du point E_i dans le repère réducteur. Exprimons ce vecteur dans le repère réducteur.

$$\left[\overrightarrow{E_iF_i}\right]_{réducteur} = M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}\, M_{ch\ bague->absolu}\begin{bmatrix}0\\p_i\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\y_{Ei}\\0\end{bmatrix} + M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}\begin{bmatrix}X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur}\\Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur}\\Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur}\end{bmatrix}$$

Le vecteur $\overrightarrow{E_iF_i}$ n'a pas de composante suivant l'ordonnée. On peut donc le multiplier par la matrice $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ sans changement

$$\left[\overrightarrow{E_iF_i}\right]_{réducteur} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\left(M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}\, M_{ch\ bague->absolu}\begin{bmatrix}0\\p_i\\0\end{bmatrix} + M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}\begin{bmatrix}X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur}\\Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur}\\Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur}\end{bmatrix}\right)$$

Exprimons la distance entre les deux points :

$$\left[\overrightarrow{E_iF_i}\right]^T\left[\overrightarrow{E_iF_i}\right]=\left(M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}M_{ch\ bague->absolu}\begin{bmatrix}0\\p_i\\0\end{bmatrix}+M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}\begin{bmatrix}X_{G\ bague}-X_{G\ réducteur}\\Y_{G\ bague}-Y_{G\ réducteur}\\Z_{G\ bague}-Z_{G\ réducteur}\end{bmatrix}\right)^T\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\left(M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}M_{ch\ bague->absolu}\begin{bmatrix}0\\p_i\\0\end{bmatrix}+M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}\begin{bmatrix}X_{G\ bague}-X_{G\ réducteur}\\Y_{G\ bague}-Y_{G\ réducteur}\\Z_{G\ bague}-Z_{G\ réducteur}\end{bmatrix}\right)$$

$$=\left(\begin{bmatrix}0&p_i&0\end{bmatrix}M^T_{ch\ bague->absolu}\left(M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}\right)^T+\begin{bmatrix}X_{G\ bague}-X_{G\ réducteur}\\Y_{G\ bague}-Y_{G\ réducteur}\\Z_{G\ bague}-Z_{G\ réducteur}\end{bmatrix}^T\left(M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}\right)^T\right)$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\left(M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}M_{ch\ bague->absolu}\begin{bmatrix}0\\p_i\\0\end{bmatrix}+M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}\begin{bmatrix}X_{G\ bague}-X_{G\ réducteur}\\Y_{G\ bague}-Y_{G\ réducteur}\\Z_{G\ bague}-Z_{G\ réducteur}\end{bmatrix}\right)$$

Un scalaire est égal à sa transposée d'où en développant :

$$\left[\overrightarrow{E_iF_i}\right]^T\left[\overrightarrow{E_iF_i}\right]=\begin{bmatrix}0&p_i&0\end{bmatrix}M^T_{ch\ bague->absolu}\left(M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}\right)^T\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}M_{ch\ bague->absolu}\begin{bmatrix}0\\p_i\\0\end{bmatrix}$$

$$+2\begin{bmatrix}0&p_i&0\end{bmatrix}M^T_{ch\ bague->absolu}\left(M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}\right)^T\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}\begin{bmatrix}X_{G\ bague}-X_{G\ réducteur}\\Y_{G\ bague}-Y_{G\ réducteur}\\Z_{G\ bague}-Z_{G\ réducteur}\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}X_{G\ bague}-X_{G\ réducteur}\\Y_{G\ bague}-Y_{G\ réducteur}\\Z_{G\ bague}-Z_{G\ réducteur}\end{bmatrix}^T\left(M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}\right)^T\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}M^{-1}_{ch\ réducteur->absolu}\begin{bmatrix}X_{G\ bague}-X_{G\ réducteur}\\Y_{G\ bague}-Y_{G\ réducteur}\\Z_{G\ bague}-Z_{G\ réducteur}\end{bmatrix}$$

Cette expression doit être égale à la différence de rayon au carré avec l'hypothèse que nous avons faite précédemment. Dérivons l'expression par rapport au temps :

$$2\begin{bmatrix}0&p_i&0\end{bmatrix}\left(\left(M^T_{ch\ bague->absolu}\right)'M_{ch\ réducteur->absolu}+M^T_{ch\ bague->absolu}\left(M_{ch\ réducteur->absolu}\right)'\right)$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}M^T_{ch\ reducteur->absolu}M_{ch\ bague->absolu}\begin{bmatrix}0\\p_i\\0\end{bmatrix}$$

$$+2\begin{bmatrix}0&p_i&0\end{bmatrix}\left(\left(M^T_{ch\ bague->absolu}\right)'M_{ch\ réducteur->absolu}+M^T_{ch\ bague->absolu}\left(M_{ch\ réducteur->absolu}\right)'\right)$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}M^T_{ch\ reducteur->absolu}\begin{bmatrix}X_{G\ bague}-X_{G\ réducteur}\\Y_{G\ bague}-Y_{G\ réducteur}\\Z_{G\ bague}-Z_{G\ réducteur}\end{bmatrix}$$

$$+2\begin{bmatrix} 0 & p_i & 0 \end{bmatrix} M^T_{ch\ bague->absolu}\, M_{ch\ réducteur->absolu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\left(M^T_{ch\ réducteur->absolu}\right)' \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix} + M^T_{ch\ réducteur->absolu} \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix}' \right)$$

$$+2\begin{bmatrix} X_{carter} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{carter} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{carter} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix}^T M_{ch\ réducteur->absolu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\left(M^T_{ch\ réducteur->absolu}\right)' \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix} + M^T_{ch\ réducteur->absolu} \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix}' \right)$$

$$= 0$$

En divisant par 2 les membres de l'équation et en dérivant une nouvelle fois on obtient :

$$\begin{bmatrix} 0 & p_i & 0 \end{bmatrix} \Bigg(\left(M^T_{ch\ bague->absolu}\right)'' M_{ch\ réducteur->absolu} + 2\left(M^T_{ch\ bague->absolu}\right)' \left(M_{ch\ réducteur->absolu}\right)'$$

$$+ M^T_{ch\ bague->absolu} \left(M_{ch\ réducteur->absolu}\right)'' \Bigg) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M^T_{ch\ réducteur->absolu}\, M_{ch\ bague->absolu} \begin{bmatrix} 0 \\ p_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & p_i & 0 \end{bmatrix} \left(\left(M^T_{ch\ bague->absolu}\right)' M_{ch\ réducteur->absolu} + M^T_{ch\ bague->absolu} \left(M_{ch\ réducteur->absolu}\right)' \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\left(M^T_{ch\ réducteur->absolu}\right)' M_{ch\ bague->absolu} + M^T_{ch\ réducteur->absolu} M'_{ch\ bague->absolu} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ p_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & p_i & 0 \end{bmatrix} \Bigg(\left(M^T_{ch\ carter->absolu}\right)'' M_{ch\ réducteur->absolu} + 2\left(M^T_{ch\ bague->absolu}\right)' \left(M_{ch\ réducteur->absolu}\right)'$$

$$M^T_{ch\ bague->absolu} \left(M_{ch\ réducteur->absolu}\right)'' \Bigg) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M^T_{ch\ réducteur->absolu} \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & p_i & 0 \end{bmatrix} \left(\left(M^T_{ch\ bague->absolu}\right)' M_{ch\ réducteur->absolu} + M^T_{ch\ bague->absolu} \left(M_{ch\ réducteur->absolu}\right)' \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\left(M^T_{ch\ réducteur->absolu}\right)' \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix} + M^T_{ch\ réducteur->absolu} \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix}' \right)$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & p_i & 0 \end{bmatrix}\left(\left(M^T_{ch\ bague->absolu}\right)' M_{ch\ réducteur->absolu} + M^T_{ch\ bague->absolu} M'_{ch\ réducteur->absolu}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\left(M^T_{ch\ réducteur->absolu}\right)' \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix} + M^T_{ch\ réducteur->absolu} \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix}'\right) +$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & p_i & 0 \end{bmatrix} M^T_{ch\ bague->absolu} M_{ch\ réducteur->absolu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\left(M^T_{ch\ réducteur->absolu}\right)'' \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix} +\right.$$

$$\left. 2\left(M^T_{ch\ réducteur->absolu}\right)' \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix}' + M^T_{ch\ réducteur->absolu} \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix}''\right) +$$

$$\left(\left(\begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix}^T\right)' M_{ch\ réducteur->absolu} + \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix}^T M'_{ch\ réducteur->absolu}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\left(M^T_{ch\ réducteur->absolu}\right)' \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix} + M^T_{ch\ réducteur->absolu} \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix}'\right)$$

$$+\begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix}^T M_{ch\ réducteur->absolu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\left(M^T_{ch\ réducteur->absolu}\right)'' \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix}\right.$$

$$\left. +2\left(M^T_{ch\ réducteur->absolu}\right)' \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix}' + M^T_{ch\ réducteur->absolu} \begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix}''\right)$$

Nous savons que : $M'_{ch\ G\ réducteur->absolu} = M_{ch\ G\ réducteur->absolu}\,[\Omega_{G\ réducteur\wedge}]$
En dérivant l'expression nous obtenons :

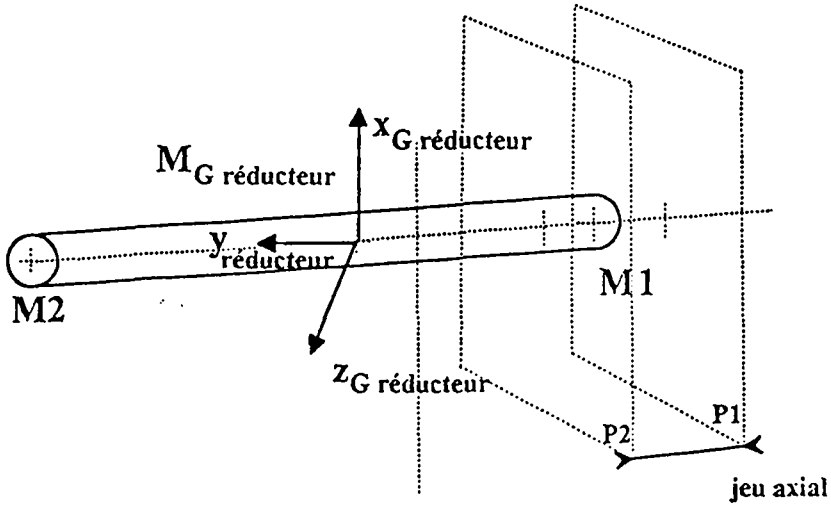
$$M''_{ch\ G\ réducteur->absolu} = M'_{ch\ G\ réducteur->absolu}\,[\Omega_{G\ réducteur\wedge}] + M_{ch\ G\ réducteur->absolu}\,[\Omega_{G\ réducteur\wedge}]'$$

Or $[\Omega_{G\ réducteur\wedge}]'$ est défini à partir des équations fondamentales de la dynamique,

de même que $\begin{bmatrix} X_{G\ bague} - X_{G\ réducteur} \\ Y_{G\ bague} - Y_{G\ réducteur} \\ Z_{G\ bague} - Z_{G\ réducteur} \end{bmatrix}''$.

En injectant dans l'équation précédente, on obtient une expression linéaire en fonction des forces de contact inconnues. Les coefficients sont déterminés à l'aide du vecteur état.

Intéressons nous maintenant au jeu entre le bout de l'axe M1 et le carter du moteur.



Dans $R_{G\ réducteur}$, M1 a pour équation $\begin{bmatrix} 0 \\ -l_{G\ réducteur} \\ 0 \end{bmatrix}$

dans le repère R_{bague} l'équation devient :

$$M_{ch\ G\ réducteur->bague}\begin{bmatrix} 0 \\ -l_{G\ réducteur} \\ 0 \end{bmatrix} + M^{-1}_{ch\ bague->absolu}\begin{bmatrix} X_{réducteur} - X_{G\ bague} \\ Y_{réducteur} - Y_{G\ bague} \\ Z_{réducteur} - Z_{G\ bague} \end{bmatrix}$$

Seule la composante suivant y_{bague} nous intéresse. Elle est égale à :

$$\boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\left(M_{ch\ G\ réducteur->bague}\begin{vmatrix} 0 \\ -l_{G\ réducteur} \\ 0 \end{vmatrix} + M^{-1}_{ch\ bague->absolu}\begin{vmatrix} X_{réducteur} - X_{G\ bague} \\ Y_{réducteur} - Y_{G\ bague} \\ Z_{réducteur} - Z_{G\ bague} \end{vmatrix}\right)}$$

Cette expression doit être comprise entre p1 et p2

Lorsque le contact a lieu l'expression est égale à p1 ou p2. On notera p_i cette dernière valeur.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\left(M^{-1}_{ch\ bague->absolu} M_{ch\ G\ réducteur->absolu}\begin{bmatrix} 0 \\ -l_{G\ réducteur} \\ 0 \end{bmatrix} + M^{-1}_{ch\ bague->absolu}\begin{bmatrix} X_{réducteur} - X_{G\ bague} \\ Y_{réducteur} - Y_{G\ bague} \\ Z_{réducteur} - Z_{G\ bague} \end{bmatrix}\right) = p$$

Comme précédemment nous allons dériver l'expression deux fois afin de faire apparaître les inconnues de contact. Dérivons une première fois.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\left(\left(\left(M^{-1}_{ch\,bague->absolu}\right)' M_{ch\,G\,réducteur->absolu} + M^{-1}_{ch\,bague->absolu} M'_{ch\,G\,réducteur->absolu}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ -l_{G\,réducteur} \\ 0 \end{bmatrix} + \left(M^{-1}_{ch\,bague->absolu}\right)' \begin{bmatrix} X_{réducteur} - X_{G\,bague} \\ Y_{réducteur} - Y_{G\,bague} \\ Z_{réducteur} - Z_{G\,bague} \end{bmatrix} + M^{-1}_{ch\,bague->absolu} \begin{bmatrix} X_{réducteur} - X_{G\,bague} \\ Y_{réducteur} - Y_{G\,bague} \\ Z_{réducteur} - Z_{G\,bague} \end{bmatrix}'\right) = 0$$

Dérivons une seconde fois.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\left[\left[\left(M^{-1}_{ch\,bague->absolu}\right)'' M_{ch\,G\,réducteur->absolu} + \left(M^{-1}_{ch\,bague->absolu}\right)' M'_{ch\,G\,réducteur->absolu} + M^{-1}_{ch\,bague->absolu} M''_{ch\,G\,réducteur->absolu}\right]\begin{bmatrix} 0 \\ -l_{G\,réducteur} \\ 0 \end{bmatrix} + \left(M^{-1}_{ch\,bague->absolu}\right)'' \begin{bmatrix} X_{réducteur} - X_{G\,bague} \\ Y_{réducteur} - Y_{G\,bague} \\ Z_{réducteur} - Z_{G\,bague} \end{bmatrix} + \left(M^{-1}_{ch\,bague->absolu}\right)' \begin{bmatrix} X_{réducteur} - X_{G\,bague} \\ Y_{réducteur} - Y_{G\,bague} \\ Z_{réducteur} - Z_{G\,bague} \end{bmatrix}' + M^{-1}_{ch\,bague->absolu} \begin{bmatrix} X_{réducteur} - X_{G\,bague} \\ Y_{réducteur} - Y_{G\,bague} \\ Z_{réducteur} - Z_{G\,bague} \end{bmatrix}''\right] = 0$$

De même que précédemment, on remplace les valeurs en $M''_{ch\,XX}$ par leur expression.

$$M''_{ch\,G\,réducteur->absolu} = M'_{ch\,G\,réducteur->absolu}\,[\Omega_{G\,réducteur\wedge}] + M_{ch\,G\,réducteur->absolu}\,[\Omega_{G\,réducteur\wedge}]'$$

$$M''_{ch\,G\,bague->absolu} = M'_{ch\,bague->absolu}\,[\Omega_{bague\wedge}] + M_{ch\,bague->absolu}\,[\Omega_{bague\wedge}]'$$

$$M''_{ch\,G\,bague->absolu} = M_{ch\,bague->absolu}\,[\Omega_{bague\wedge}]^2 + M_{ch\,bague->absolu}\,[\Omega_{bague\wedge}]'$$

puis on injecte les valeurs en Ω'_{XX} de façon à faire apparaître les inconnues de contact.

Lorsque M_1 est bloqué, on a une équation très similaire. A ce moment l'égalité ne porte pas seulement sur l'ordonnée mais sur les trois composantes que nous noterons (a_i, p_i, b_i)

$$\left(M^{-1}_{ch\,bague->absolu} M_{ch\,G\,réducteur->absolu}\begin{bmatrix} 0 \\ -l_{G\,réducteur} \\ 0 \end{bmatrix} + M^{-1}_{ch\,bague->absolu}\begin{bmatrix} X_{réducteur} - X_{G\,bague} \\ Y_{réducteur} - Y_{G\,bague} \\ Z_{réducteur} - Z_{G\,bague} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_i \\ p_i \\ b_i \end{bmatrix}$$

La dérivée seconde donne donc :

$$\left[\left[\left(M^{-1}_{ch\,bague->absolu}\right)'' M_{ch\,G\,réducteur->absolu} + \left(M^{-1}_{ch\,bague->absolu}\right)' M'_{ch\,G\,réducteur->absolu}\right.\right.$$

$$\left. M^{-1}_{ch\,bague->absolu} M''_{ch\,G\,réducteur->absolu}\right]\begin{bmatrix} 0 \\ -l_{G\,réducteur} \\ 0 \end{bmatrix} + \left(M^{-1}_{ch\,bague->absolu}\right)'' \begin{bmatrix} X_{réducteur} - X_{G\,bague} \\ Y_{réducteur} - Y_{G\,bague} \\ Z_{réducteur} - Z_{G\,bague} \end{bmatrix}$$

$$\left. + \left(M^{-1}_{ch\,bague->absolu}\right)' \begin{bmatrix} X_{réducteur} - X_{G\,bague} \\ Y_{réducteur} - Y_{G\,bague} \\ Z_{réducteur} - Z_{G\,bague} \end{bmatrix}' + M^{-1}_{ch\,bague->absolu} \begin{bmatrix} X_{réducteur} - X_{G\,bague} \\ Y_{réducteur} - Y_{G\,bague} \\ Z_{réducteur} - Z_{G\,bague} \end{bmatrix}''\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

NB les deux contacts sont indépendants. Par exemple M_1 peut très bien être en contact et donc $F_{y\,carter}$ présent dans les équations alors que l'axe n'est pas en contact sur le cylindre et donc les autres forces de contact absentes des équations.

Intéressons nous maintenant aux équations de matrice de changement de repère. Si $M_{ch\,G\,réducteur\,->\,absolu}$ désigne la matrice de changement de repère entre le repère absolu et $R_{G\,réducteur}$

$$[\Omega_{G\,réducteur\wedge}] = M^{-1}_{ch\,G\,réducteur} M'_{ch\,G\,réducteur}$$

avec

$$[\Omega_{G\,réducteur}\,\wedge] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta'_{z\,G\,réducteur} & \theta'_{y\,G\,réducteur} \\ \theta'_{z\,G\,réducteur} & 0 & -\theta'_{x\,G\,réducteur} \\ -\theta'_{y\,G\,réducteur} & \theta'_{x\,G\,réducteur} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\theta'_{y\,G\,réducteur} = \theta'_{y2} - \frac{I_{z1}}{I_{z1} + I_{z2}}\alpha'$$

La matrice de passage du repère absolu au repère $R_{G\,réducteur}$

$$M_{chG\,réducteur} = \begin{bmatrix} a_{G\,réducteur} & b_{G\,réducteur} & c_{G\,réducteur} \\ -b_{G\,réducteur} & d_{G\,réducteur} & e_{G\,réducteur} \\ -c_{G\,réducteur} & -e_{G\,réducteur} & f_{G\,réducteur} \end{bmatrix}$$

3.3. Bilan des équations

La matrice de changement de repère introduit 6 inconnues. Elles sont déterminées à l'aide de l'équation : $[\Omega_{G\,réducteur\wedge}] = M^{-1}_{ch\,G\,réducteur} M'_{ch\,G\,réducteur}$
L'équation fondamentale de la dynamique introduit, sans compter les forces de contact, 8 inconnues $\theta''_{x\,reducteur}$, θ''_{y1}, α, θ''_{y2}, $\theta''_{z\,reducteur}$, $X''_{G\,réducteur}$, $Y''_{G\,réducteur}$, $Z''_{G\,réducteur}$ et 7 équations. Une 8ème équation est obtenu en sachant que $\alpha'' = \theta''_{y2} - \theta''_{y1}$

Pour ce qui est des forces de contact, il faut savoir que chaque contact introduit des équations géométriques compensant exactement le nombre de paramètres inconnus introduits.

ANNEXE D: METHODE DE VIBRATION CONTINUE

1 INTRODUCTION

Cette annexe est utilisée en complément du paragraphe 2.1. Les formules et les explications de cette annexe s'inspirent très largement de la théorie exposée dans "Mécanique des Vibrations linéaires" aux éditions Masson.

2 TRACTION - COMPRESSION

Nous adopterons les notations suivantes:

u(x,t): déplacement axial,
N: force axiale (force normale au talon de la lame),
N_{ex} : force extérieure par unité de longueur,
S: aire de la section droite,
E: module de Young,
ρ : masse volumique.

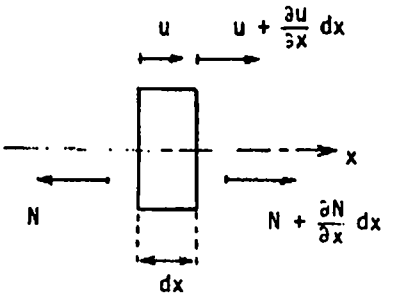


Figure D.1

En effectuant un bilan sur une section de poutre, nous obtenons

$$\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x} + N_{ex}\,. \text{ (D.1)}$$

De plus d'après la loi de Hooke, la force et le déplacement sont reliés par

$$\frac{N}{S} = E\frac{\partial u}{\partial x}, \text{ (D.2)}$$

D'après les deux relations précédentes, nous obtenons:

$$\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES\frac{\partial u}{\partial x}\right) + N_{ex}\,. \text{ (D.3)}$$

En faisant l'hypothèse d'une section constante, nous obtenons:

$$\boxed{\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N_{ex}}\,. \text{ (D.4)}$$

En posant $u(x,t) = \varphi(x)f(t)$ (D.5) et en séparant la variable d'espace de celle de temps, nous obtenons:

$\frac{E}{\rho}\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}=\frac{1}{f(t)}\frac{d^2f(x)}{dt^2}=-\omega^2$ (D.6) où ω^2 est une constante. Le signe - de la constante s'impose si l'on veut que les solutions soient bornées. Il s'en suit que :

$$\begin{cases}\frac{d^2f(x)}{dt^2}+\omega^2 f(t)=0,\\ \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+\omega^2\frac{\rho}{E}\varphi(x)=0.\end{cases} \quad (D.7)$$

La résolution des équations conduit à :

$$u(x,t)=(A\sin\omega t+B\cos\omega t)\left(C\sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}x+D\cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}x\right) \quad (D.8)$$

Les constantes A, B, C, D sont fournies par les conditions limites. Les fréquences propres sont données par le tableau suivant:

conditions limites	formules des fréquences
encastré / libre	$\frac{2n-1}{4L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$
encastré / encastré	$\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$
libre / libre	$\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Tableau D.1: Calcul des fréquences propres en fonction des conditions aux limites

3 TORSION

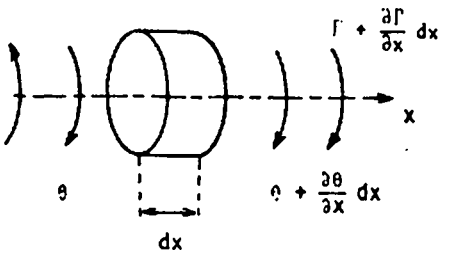


Figure D.2: élément de poutre soumis à la torsion

Soient θ l'angle de torsion, Γ le couple de torsion, Γ_{ex} le couple extérieur par unité de longueur de poutre, I_θ l'inertie de masse par rapport à l'axe x et par unité de longueur, J l'inertie polaire de la section droite, G le module de Coulomb ou de torsion
En effectuant un bilan sur une section de poutre, nous obtenons:

$$I_\theta\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=\frac{\partial\Gamma}{\partial x}+\Gamma_{ex} \quad (D.9)$$

Le couple et l'angle de torsion sont reliés par la relation suivante:

$$\Gamma = GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}. \quad (D.10)$$

En faisant l'hypothèse d'une section constante, nous obtenons:

$$\boxed{I_\theta \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = GJ\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \Gamma_{ex}}. \quad (D.11)$$

Remarquons que l'équation obtenue ici dans le cas de la torsion a la même forme que l'équation obtenue dans le cas de la traction ou de la compression. Les formules établies précédemment sont donc applicables en transposant les termes.

4 FLEXION

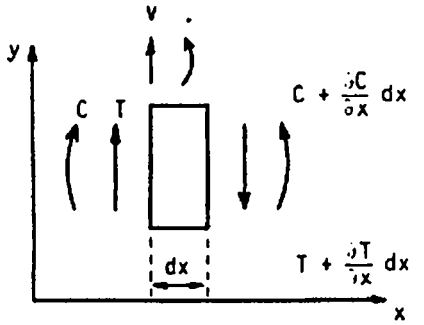


Figure D.3

Notons respectivement v la flèche, ψ la pente due au moment fléchissant, T l'effort tranchant, M le moment fléchissant, T_{ex} la force extérieure par unité de longueur, I l'inertie de section, a le facteur de forme qui est de l'ordre de l'unité pour des sections usuelles.

En effectuant un bilan dynamique sur une section de poutre, nous obtenons

$$\begin{cases} \rho S\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial T}{\partial x} + T_{ex}, \\ \rho I\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \dfrac{\partial M}{\partial x} - T. \end{cases} \quad (D.12)$$

De plus d'après des équations classiques de la résistance des matériaux (Euler-Bernouilli), nous obtenons:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x} = \dfrac{M}{EI}, \\ \psi = \dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \quad (D.13)$$

La section étant supposée constante, nous obtenons:

$$\boxed{EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho S\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - T_{ex} = 0}. \quad (D.14)$$

De la même façon que précédemment, en posant $v(x,t) = \varphi(x)f(t)$ et en séparant les variables d'espace et de temps, nous obtenons:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 f(x)}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0, \\ \dfrac{d^4 \varphi(x)}{dx^4} - \omega^2 \dfrac{\rho S}{EI} \varphi(x) = 0. \end{cases} \quad (D.15)$$

La résolution de ces équations nous conduit à l'expression des fréquences du type:

$f_n = \dfrac{X_n^2}{L^2}\sqrt{\dfrac{EI}{\rho S}}$ (D.16) avec n le numéro d'harmonique et X_n^2 une constante. Pour le premier harmonique (n=1), X_1^2 est donné par le tableau suivant:

Conditions limites	X_1^2
encastré / libre	3,516
appui / appui	9,869
encastré / encastré	22,37
libre / libre	22,37
encastré / appui	15,41
libre / appui	15,41

Tableau D.2: Valeur de la constante X_1^2 en fonction des conditions aux limites

ANNEXE E: MODELISATION DE LA VERTEBRE ET DETERMINATION DE LA REPARTITION D'APPUI

1 Préambule

Cette annexe présente les équations utilisées au paragraphe 2.4.

2 Equation aux trois moments

Considérons le système de répartition d'appuis suivant: une poutre en appui sur plusieurs pivots (fig. E.1).

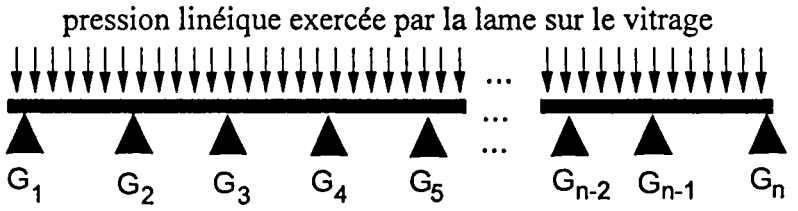


Figure E.1: modèle R.D.M. de répartition d'appui

Le système est hyperstatique d'ordre n-2. Pour résoudre ce système, nous allons construire un modèle équivalent isostatique. Nous ajoutons des pivots et des moments M'_i aux points G_2 à G_{n-1}.

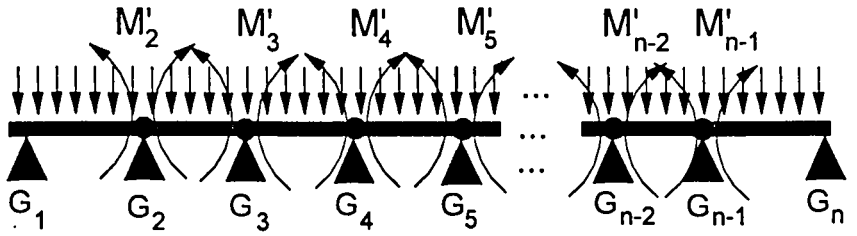


Figure E.2: modèle R.D.M. utilisé pour lever l'hyperstaticité

Nous isolons les travées i-1 et i pour étudier les rotations en G_i. Nous décomposons la vertèbre (fig. E.3) en n-1 poutres avec n points d'appui, n-1 pression linéique q_1 ... q_{n-1} et n-2 moments de coupures M'_2 ... M'_{n-1}. Par commodité d'écriture nous posons: $M'_0 = M'_1 = M'_n = M'_{n+1} = 0$ et $q_0 = q_n = 0$.

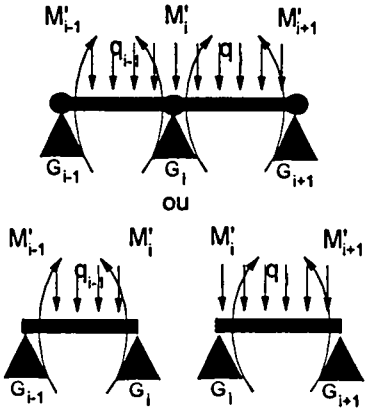


Figure E.3: segmentation de la vertèbre en tronçons de poutres

Nous allons déterminer les moments M'_i à partir de la relation appelée équation aux 3 moments. Soit ω'_i et ω''_i les rotations sur appuis de la travée i isochargée par q_i, q_i étant supposé connu.

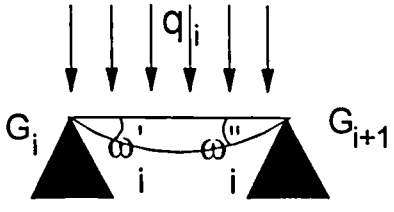


Figure E.4: définition de ω'_i et ω''_i

Soit $M_i^{q_i}(x)$ le moment fléchissant dans la travée i chargée par q_i.

Afin de déterminer ω'_i et ω''_i, nous utilisons le théorème de Castigliano.

La déformation est donnée par :

$$\int_{x=0}^{x=l} \left(\frac{M(x)m(x)}{EI} + \frac{N(x)n(x)}{EA} + \frac{T(x)t(x)}{GS_1}\right)dx \qquad (E.1)$$

avec E module d'élasticité, I moment d'inertie, S_1 section réduite, A aire de la coupe, G module d'élasticité transversal

M(x), N(x), T(x) moment, force normale et transversale au point d'abscisse x

m(x), n(x) et t(x) moment, force normale et transversale d'une force (ou moment) unitaire placée à l'endroit et dans le sens où l'on veut étudier la déformation.

De façon classique, en R.D.M. les termes $\frac{T(x)t(x)}{GS_1}$ et $\frac{N(x)n(x)}{EA}$ sont négligeable et négligés devant $\frac{M(x)m(x)}{EI}$. Nous faisons également cette hypothèse.

Afin d'utiliser le théorème de Castigliano, nous étudions le moment généré par un couple unitaire 1* en G_i pour calculer ω'_i et en G_{i+1} pour calculer ω''_i.

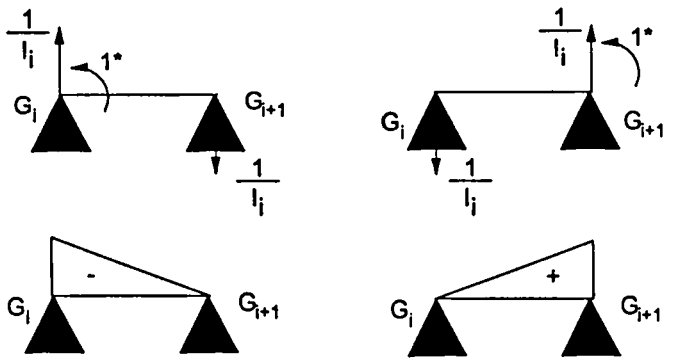


Figure E.5: calcul de $\omega_i^{'}$ et $\omega_i^{''}$

Nous en déduisons donc : $\begin{cases} \omega_i^{'} = \int_0^{l_i} M_i^{q_i}(x)\left(\frac{x}{l_i}-1\right)\frac{dx}{EI_i} \text{ et} \\ \omega_i^{''} = \int_0^{l_i} M_i^{q_i}(x)\frac{x}{l_i}\frac{dx}{EI_i}, \end{cases}$ (E.2) avec l_i longueur de la poutre i.

Soit $\theta_{j/k}^{i}$ la rotation sur appuis de G_j pour la poutre k isochargée par M'_i seul avec : $j \in \{i-1, i, i+1\}$ et $k \in \{i-1, i\}$.

Par exemple

Figure E.6: définition de $\theta_{i/i}^{i}$ et $\theta_{i/i}^{i+1}$.

Pour déterminer $\theta_{i/i-1}^{i-1}$, $\theta_{i/i-1}^{i}$, $\theta_{i/i}^{i}$ et $\theta_{i/i}^{i+1}$, nous utilisons la même méthode que pour calculer $\omega_i^{'}$ et $\omega_i^{''}$ soit :

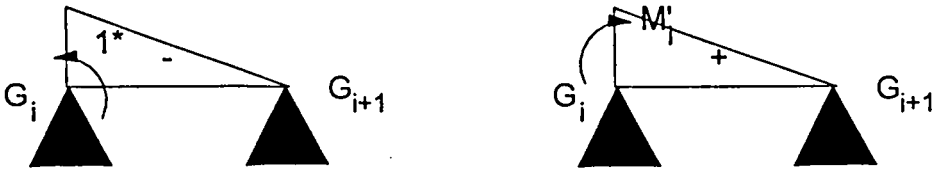


Figure E.7: Calcul de $\theta_{i/i}^{i}$

$$\theta_{i/i}^{i} = \int_0^{l_i} -M_i^{'}\left(1-\frac{x}{l_i}\right)^2 \frac{dx}{EI_i} = -a_i^{'}M_i^{'} \qquad \text{(E.3)}$$

Figure E.8: Calcul de $\theta^{i+}_{i/i}$

$$\theta^{i+1}_{i/i} = \int_0^{l_i} -M'_{i+1}\frac{x}{l_i}\left(\frac{x}{l_i}-1\right)\frac{dx}{EI_i} = -b'_i M'_{i+1} \qquad \text{(E.4)}$$

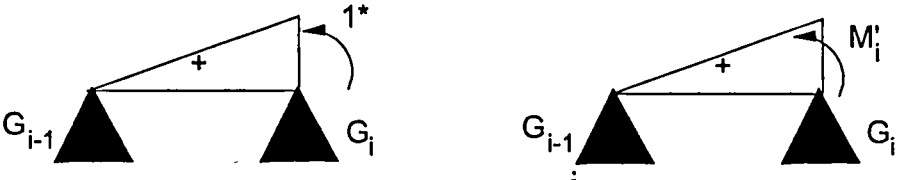


Figure E.9: Calcul de $\theta^{i}_{i/i-}$

$$\theta^{i}_{i/i-1} = \int_0^{l_{i-1}} M'_i\left(\frac{x}{l_{i-1}}\right)^2\frac{dx}{EI_{i-1}} = c'_{i-1}M'_i \qquad \text{(E.5)}$$

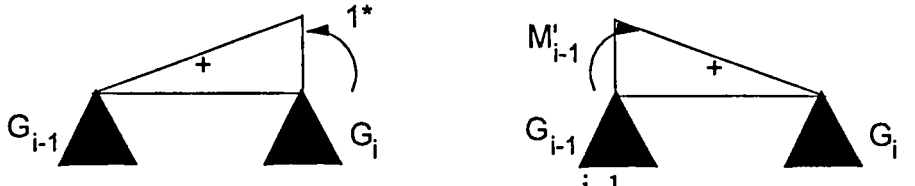


Figure E.10: Calcul de $\theta^{i-1}_{i/i-}$

$$\theta^{i-1}_{i/i-1} = \int_0^{l_{i-1}} M'_{i-1}\left(1-\frac{x}{l_{i-1}}\right)\frac{x}{l_{i-1}}\frac{dx}{EI_{i-1}} = b'_{i-1}M'_{i-1} \qquad \text{(E.6)}$$

$$\text{avec } a'_i = c'_i = 2b'_i = \frac{l_i}{3EI_i} \qquad \text{(E.7)}$$

Pour calculer les différents moments de coupure M'_i, nous allons exprimer la continuité des rotations au niveau des points d'appui G_i.

* Si les points G_i sont à la même altitude nous obtenons :

$$\theta^{i-1}_{i/i-1} + \theta^{i}_{i/i-1} + \omega''_{i-1} = \theta^{i+1}_{i/i} + \theta^{i}_{i/i} + \omega'_i \qquad \text{(E.8)}$$

Cette équation est appelée équation aux 3 moments. Elle peut comporter une variante lorsque les points G_i ne sont pas alignés.

En remplaçant les différents termes par leurs expressions calculées précédemment, nous obtenons : $b'_{i-1}M'_{i-1} + \left(c'_{i-1} + a'_i\right)M'_i + b'_i M'_{i+1} = \omega'_i - \omega''_{i-1}$ (E.9)

L'assemblage de ces équations (E.9) constitue un système à n-2 équations avec n-2 inconnues.

* Lorsque les points G_i n'ont pas la même altitude z_i, nous ajoutons un terme correctif tenant compte de la rotation globale des poutres.

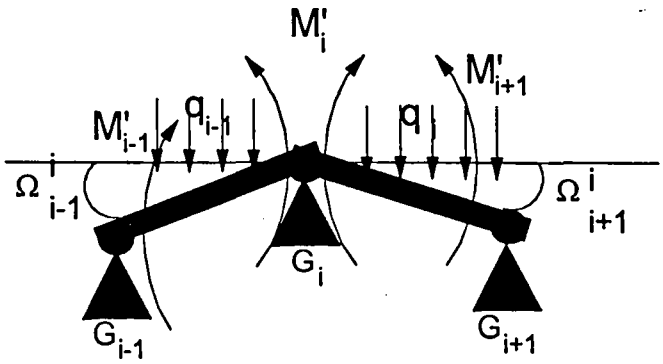


Figure E.11: influence de la différence d'altitude des points d'appui

Nous pouvons alors définir les angles correctifs suivants:

$$\Omega^{i}_{i+1} = \frac{z_{i+1} - z_i}{l_i}$$

$$\Omega^{i}_{i-1} = \frac{z_i - z_{i-1}}{l_{i-1}} \qquad \text{(E.10)}$$

La continuité des rotations en G_i s'écrit :

$$\theta^{i-1}_{i/i-1} + \theta^{i}_{i/i-1} + \omega''_{i-1} + \Omega^{i}_{i-1} = \theta^{i+1}_{i/i} + \theta^{i}_{i/i} + \omega'_i + \Omega^{i}_{i+} \qquad \text{(E.11)}$$

et l'équation des 3 moments :

$$b'_{i-1}M'_{i-1} + \left(c'_{i-1} + a'_i\right)M'_i + b'_i M'_{i+1} = \omega'_i - \omega''_{i-1} + \frac{z_{i+1} - z_i}{l_i} - \frac{z_i - z_{i-1}}{l_{i-1}} \qquad \text{(E.12)}$$

Une autre méthode pour retrouver le résultat consiste à faire travailler 1dans les déplacements réels. Les actions d'appui travaillent de façon à retrouver l'écart de hauteur. L'écriture des travaux sur la travée i et i-1 conduit au même résultat.

L'équation E.12 peut se mettre sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} (c'_1+a'_2) & b'_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & (c'_2+a'_3) & b'_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b'_{n-3} & (c'_{n-3}+a'_{n-2}) & b'_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{n-2} & (c'_{n-2}+a'_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M'_2 \\ M'_3 \\ \dots \\ \dots \\ M'_{n-2} \\ M'_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega'_2 - \omega''_1 + \frac{z_3-z_2}{l_2} - \frac{z_2-z_1}{l_1} \\ \omega'_3 - \omega''_2 + \frac{z_4-z_3}{l_3} - \frac{z_3-z_2}{l_2} \\ \dots \\ \dots \\ \omega'_{n-2} - \omega''_{n-3} + \frac{z_{n-1}-z_{n-2}}{l_{n-2}} - \frac{z_{n-2}-z_{n-3}}{l_{n-3}} \\ \omega'_{n-1} - \omega''_{n-2} + \frac{z_n-z_{n-1}}{l_{n-1}} - \frac{z_{n-1}-z_{n-2}}{l_{n-2}} \end{bmatrix} \qquad \text{(E.13)}$$

soit encore

$$\begin{bmatrix} \frac{l_1+l_2}{3EI} & \frac{l_2}{6EI} & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l_2}{6EI} & \frac{l_2+l_3}{3EI} & \frac{l_3}{6EI} & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & \frac{l_{n-3}}{6EI} & \frac{l_{n-3}+l_{n-2}}{3EI} & \frac{l_{n-2}}{6EI} \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & \frac{l_{n-2}}{6EI} & \frac{l_{n-2}+l_{n-1}}{3EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M'_2 \\ M'_3 \\ - \\ - \\ M'_{n-2} \\ M'_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega'_2-\omega''_1+\frac{z_3-z_2}{l_2}-\frac{z_2-z_1}{l_1} \\ \omega'_3-\omega''_2+\frac{z_4-z_3}{l_3}-\frac{z_3-z_2}{l_2} \\ - \\ - \\ \omega'_{n-2}-\omega''_{n-3}+\frac{z_{n-1}-z_{n-2}}{l_{n-2}}-\frac{z_{n-2}-z_{n-3}}{l_{n-3}} \\ \omega'_{n-1}-\omega''_{n-2}+\frac{z_n-z_{n-1}}{l_{n-1}}-\frac{z_{n-1}-z_{n-2}}{l_{n-2}} \end{bmatrix} \quad \text{(E.14)}$$

3 Relations déterminant les déplacements de la poutre.

3.1 Introduction

Nous allons déterminer les moments générés par q_i (2.4.3.2) puis par M'_i et par M'_{i+1} (2.4.3.3) sur la poutre i. Ces moments nous permettrons de déterminer le déplacement de la poutre $d_i(x)$ en tout point d'abscisse x. Nous procédons à une discrétisation de la poutre en prenant des splines pour q_i.

3.2 Moment généré par la pression linéique de la poutre i: q_i

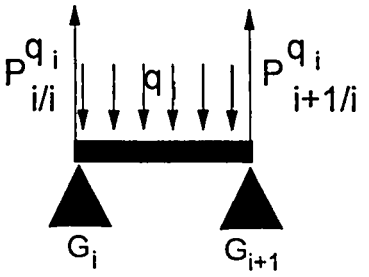


Figure E.12: Forces générées par q_i

Soit $P^{q_i}_{j/k}$ la force d'appui générée en G_j sur la poutre k en présence de q_i seul. Considérons la figure E.12. Le moment en G_i est nul si bien que :

$$l_i P^{q_i}_{i+1/i} - \int_0^{l_i} q_i(x)x\,dx = 0 \quad \text{(E.15)}$$ en comptant q_i positif dans le sens indiquée par la figure 13.

De plus la somme des forces est nulle d'où :

$$P^{q_i}_{i+1/i} + P^{q_i}_{i/i} - \int_0^{l_i} q_i(x)\,dx = 0 \quad \text{(E.16)}$$

Nous pouvons déduire des deux équations précédentes que :

$$\begin{cases} P^{q_i}_{i/i} = \int_0^{l_i} q_i(x)\frac{l_i - x}{l_i}\,dx, \\ P^{q_i}_{i+1/i} = \int_0^{l_i} q_i(x)\frac{x}{l_i}\,dx. \end{cases} \quad \text{(E.17)}$$

Le moment généré à la distance x de Gi est donc égal à :

$$M_i^{q_i}(x) = -x\int_0^x q_i(u)\frac{l_i - u}{l_i}du + \int_0^x q_i(u)udu \qquad (E.18)$$

$$\boxed{M_i^{q_i}(x) = \int_0^x q_i(u)\left(u\left(1+\frac{x}{l_i}\right) - x\right)du} \qquad (E.19)$$

Comme nous l'avons vu au chapitre 2.2, q_i est une fonction de la distance entre la vertèbre et le pare-brise et du coefficient de frottement apparent (prise en compte de l'angle d'attaque). Lorsque la distance atteint un seuil (longueur à vide), q_i est nul et présente un plateau. Si nous prenons des splines classiques du type polynomial pur ou des fonctions de Bézier, nous n'arriverons pas à rendre compte d'un palier nul et de point non nul. En effet les fonctions d'interpolations donneraient des points non nuls (notamment de force négatives) au niveau du palier nul. Ces fonctions sont donc mal adaptés à ce genre de problème. Nous nous contenterons donc de fonctions constantes par morceaux qui ont l'avantage de bien s'intégrer. Nous considérons un partage régulier, c'est à dire que les morceaux sont de longueur constante. Traduisons cette hypothèse en équations. Soient n_i le nombre d'éléments considérés sur la travée i , $e_i = \frac{l_i}{n_i}$ (E.20) et $q_i(x) = q_{ik}$ avec $k = E\left(\frac{x}{l_i}n_i\right) + 1$

où E(x) est la partie entière de x. En d'autre terme sur l'élément de poutre i, la pression q_i varie de q_{i1} à q_{ini}. Nous prenons comme convention que $\sum_{k=i}^{k=i-1} f(k) = 0$ quelque soit la fonction f.

L'expression du moment peut donc s'exprimer sous la forme:

$$M_i^{q_i}(x) = \int_0^x q_i(u)\left(u\left(1+\frac{x}{l_i}\right) - x\right)du \qquad (E.21)$$

$$M_i^{q_i}(x) = \sum_{k=1}^{E(\frac{x}{e_i})} \int_{(k-1)e_i}^{ke_i} q_{ik}\left(u\left(1+\frac{x}{l_i}\right) - x\right)du + \int_{E(\frac{x}{e_i})e_i}^{x} q_{i\left(E(\frac{x}{e_i})+1\right)}\left(u\left(1+\frac{x}{l_i}\right) - x\right)du \qquad (E.22)$$

Pour simplifier les notations nous notons $e_x = E(\frac{x}{e_i})$ (E.23)

$$M_i^{q_i}(x) = \sum_{k=1}^{e_x} q_{ik} \int_{(k-1)e_i}^{ke_i} \left(u\left(1+\frac{x}{l_i}\right) - x\right)du + q_{i(e_x+1)} \int_{e_x e_i}^{x} \left(u\left(1+\frac{x}{l_i}\right) - x\right)du \qquad (E.24)$$

$$M_i^{q_i}(x) = \sum_{k=1}^{e_x} q_{ik} \int_{(k-1)e_i}^{ke_i} \left(u\left(1+\frac{x}{l_i}\right) - x\right)du + q_{i(e_x+1)} \int_{e_x e_i}^{x} \left(u\left(1+\frac{x}{l_i}\right) - x\right)du \qquad (E.25)$$

$$M_i^{q_i}(x) = \sum_{k=1}^{e_x} q_{ik}\left(\frac{u^2}{2}\left(1+\frac{x}{l_i}\right) - xu\right)_{(k-1)e_i}^{ke_i} + q_{i(e_x+1)}\left(\frac{u^2}{2}\left(1+\frac{x}{l_i}\right) - xu\right)_{e_x e_i}^{x} \quad \text{(E.26)}$$

$$M_i^{q_i}(x) = \sum_{k=1}^{e_x} q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2}\left(1+\frac{x}{l_i}\right) - xe_i\right) + q_{i(e_x+1)}\left(\frac{\left(x^2 - e_i^2 e_x^2\right)}{2}\left(1+\frac{x}{l_i}\right) - x(x - e_x e_i)\right) \quad \text{(E.27)}$$

$$\boxed{M_i^{q_i}(x) = \sum_{k=1}^{e_x} q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2} + x\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i} - e_i\right)\right) + q_{i(e_x+1)}\left(\frac{-e_i^2 e_x^2}{2} + x\left(e_x e_i - \frac{e_i^2 e_x^2}{2l_i}\right) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2l_i}\right)} \quad \text{(E.28)}$$

3.3 Influence des moments de coupure M'_i et de M'_{i+1}

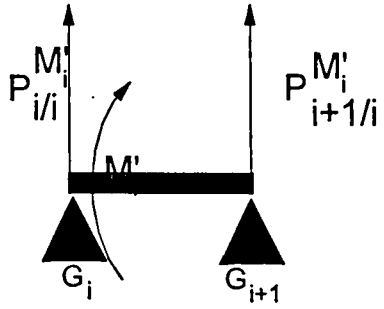


Figure E.13: Forces générées par M'_i

Intéressons nous aux efforts générés par le moment M'_i. Comme précédemment la somme des moments nulle en G_i et la somme des forces nulle impliquent :

$$\left\{\begin{array}{l} P_{i/i}^{M'_i} = -\dfrac{M'_i}{l_i} \\ P_{i+1/i}^{M'_i} = \dfrac{M'_i}{l_i} \end{array}\right\}. \quad \text{(E.29)}$$

Le moment dû à M'_i est égal à : $M_i^{M'_i}(x) = M'_i \dfrac{l_i - x}{l_i}$ (E.30)

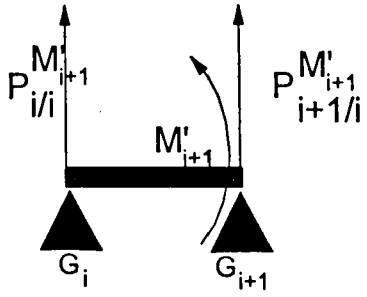


Figure E.14: Forces générées par M'_{i+1}

De même $\left\{ \begin{array}{l} P_{i/i}^{M'_{i+1}} = \dfrac{M'_{i+1}}{l_i} \\ P_{i+1/i}^{M'_{i+1}} = -\dfrac{M'_{i+1}}{l_i} \end{array} \right\}$. (E.31)

Le moment dû à M'_{i+1} est égal à : $\boxed{M_i^{M'_{i+1}}(x) = M'_{i+1}\dfrac{x}{l_i}}$ (E.32)

3.4 Déplacement d'un point de la poutre i

Le moment généré par une force unitaire placée à un point $P_{x/i}$ située à une abscisse x de Gi est représenté par la figure E.15:

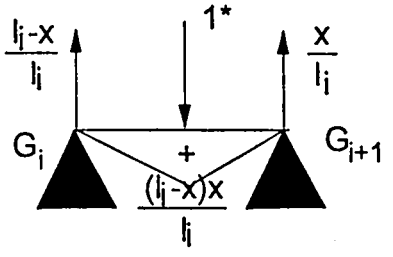


Figure E.15: Forces générées par 1*

D'après le théorème de Castigliano, le déplacement du point $P_{x/i}$ par rapport à G_i dans le sens de 1* est donné par la formule :

$$d(i,x) = \int_0^x \frac{\left(\frac{l_i - x}{l_i}u\right)\left[M'_i \frac{l_i - u}{l_i} + M'_{i+1}\frac{u}{l_i} + M_i^{q_i}(u)\right]}{EI_i}du + \int_x^{l_i} \frac{\left(\frac{l_i - x}{l_i}x - \frac{x}{l_i}u\right)\left[M'_i \frac{l_i - u}{l_i} + M'_{i+1}\frac{u}{l_i} + M_i^{q_i}(u)\right]}{EI_i}du. \quad \text{(E.33)}$$

En injectant la valeur de $M_i^{q_i}(u)$ (E.28), nous obtenons:

$$d(i,x) = \frac{l_i - x}{l_i EI_i}\int_0^x M'_i u \frac{l_i - u}{l_i} + M'_{i+1}\frac{u}{l_i}u + \sum_{k=1}^{e_u} uq_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2} + u\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i} - e_i\right)\right) + uq_i(e_u+1)\left(\frac{-e_i^2 e_u^2}{2} + u\left(e_u e_i - \frac{e_i^2 e_u^2}{2l_i}\right) - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{2l_i}\right)du$$

$$+ \frac{1}{EI_i l_i}\int_x^{l_i}((l_i - x)x - xu)\left[M'_i \frac{l_i - u}{l_i} + M'_{i+1}\frac{u}{l_i} + \sum_{k=1}^{e_u} q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2} + u\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i} - e_i\right)\right) + q_i(e_u+1)\left(\frac{-e_i^2 e_u^2}{2} + u\left(e_u e_i - \frac{e_i^2 e_u^2}{2l_i}\right) - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{2l_i}\right)\right]du \quad \text{(E.34)}$$

Nous allons calculer les déplacements uniquement aux points importants du partage. Nous considérons donc que x est un multiple de e_i .

$$d(i,x)=\frac{l_i-x}{l_iEI_i}\sum_{j=1}^{e_x}\int_{(j-1)e_i}^{je_i} M'_i u\frac{l_i-u}{l_i}+M'_{i+1}\frac{u}{l_i}u+\sum_{k=1}^{j-1}uq_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2}+u\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i}-e_i\right)\right)+uq_{ij}\left(\frac{-e_i^2(j-1)^2}{2}+u\left((j-1)e_i-\frac{e_i^2(j-1)^2}{2l_i}\right)-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{2l_i}\right)du$$

$$+\frac{(l_i-x)x}{EI_il_i}\sum_{e_x}^{n_i}\int_{(j-1)e_i}^{je_i}\left[M'_i\frac{l_i-u}{l_i}+M'_{i+1}\frac{u}{l_i}+\sum_{k=1}^{j-1}q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2}+u\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i}-e_i\right)\right)+q_{ij}\left(\frac{-e_i^2(j-1)^2}{2}+u\left((j-1)e_i-\frac{e_i^2(j-1)^2}{2l_i}\right)-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{2l_i}\right)\right]du$$

$$-\frac{x}{EI_il_i}\sum_{e_x}^{n_i}\int_{(j-1)e_i}^{je_i}\left[M'_i u\frac{l_i-u}{l_i}+M'_{i+1}\frac{u^2}{l_i}+\sum_{k=1}^{j-1}q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2}u+u^2\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i}-e_i\right)\right)+q_{ij}\left(\frac{-e_i^2(j-1)^2}{2}u+u^2\left((j-1)e_i-\frac{e_i^2(j-1)^2}{2l_i}\right)-\frac{u^3}{2}+\frac{u^4}{2l_i}\right)\right]du \qquad \text{(E.35)}$$

$$d(i,x)=\frac{l_i-x}{l_iEI_i}\sum_{j=1}^{e_x}\left[\begin{array}{l}M'_i\left[\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3l_i}\right]+M'_{i+1}\frac{u^3}{3l_i}+\sum_{k=1}^{j-1}q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2}\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i}-e_i\right)\right)+\\ uq_{ij}\left(\frac{-e_i^2(j-1)^2}{2}\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}\left((j-1)e_i-\frac{e_i^2(j-1)^2}{2l_i}\right)-\frac{u^4}{8}+\frac{u^5}{10l_i}\right)\end{array}\right]_{(j-1)e_i}^{je_i}$$

$$+\frac{(l_i-x)x}{EI_il_i}\sum_{e_x}^{n_i}\left[\begin{array}{l}M'_i\left(u-\frac{u^2}{2l_i}\right)+M'_{i+1}\frac{u^2}{2l_i}+\sum_{k=1}^{j-1}q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2}u+\frac{u^2}{2l_i}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i}-e_i\right)\right)+\\ q_{ij}\left(\frac{-e_i^2(j-1)^2}{2}u+\frac{u^2}{2l_i}\left((j-1)e_i-\frac{e_i^2(j-1)^2}{2l_i}\right)-\frac{u^3}{6}+\frac{u^4}{8l_i}\right)\end{array}\right]_{(j-1)e_i}^{je_i}$$

$$-\frac{x}{EI_il_i}\sum_{e_x}^{n_i}\left[\begin{array}{l}M'_i\left[\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3l_i}\right]+M'_{i+1}\frac{u^3}{3l_i}+\sum_{k=1}^{j-1}q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2}\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i}-e_i\right)\right)\\ +uq_{ij}\left(\frac{-e_i^2(j-1)^2}{2}\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}\left((j-1)e_i-\frac{e_i^2(j-1)^2}{2l_i}\right)-\frac{u^4}{8}+\frac{u^5}{10l_i}\right)\end{array}\right]_{(j-1)e_i}^{je_i} \qquad \text{(E.36)}$$

$$d(i,x)=\frac{1}{EI_i}\sum_{j=1}^{e_x}\left[M'_i\left[\frac{2j-1}{2}e_i^2-\frac{3j^2-3j+1}{3l_i}e_i^3\right]+M'_{i+1}\frac{3j^2-3j+1}{3l_i}e_i^3+\sum_{k=1}^{j-1}q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2}\frac{2j-1}{2}e_i^2+\frac{3j^2-3j+1}{3}e_i^3\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i}-e_i\right)\right)\right.$$

$$+\frac{(l_i-x)x}{EI_il_i}\sum_{e_x}^{n_i}\left[M'_i\left(e_i-\frac{u^2}{2l_i}\right)+M'_{i+1}\frac{2j-1}{2l_i}e_i^2+\sum_{k=1}^{j-1}q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2}e_i+\frac{2j-1}{2l_i}e_i^2\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i}-e\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.q_{ij}\left(\frac{-e_i^2(j-1)^2}{2}e_i+\frac{2j-1}{2l_i}e_i^2\left((j-1)e_i-\frac{e_i^2(j-1)^2}{2l_i}\right)-\frac{3j^2-3j+1}{6}+\frac{4j^3-6j^2+4j-1}{8l_i}\right)\right]\right.$$

$$-\frac{x}{EI_il_i}\sum_{j=1}^{n_i}\left[M'_i\left[\frac{2j-1}{2}e_i^2-\frac{3j^2-3j+1}{3l_i}e_i^3\right]+M'_{i+1}\frac{3j^2-3j+1}{3l_i}e_i^3+\sum_{k=1}^{j-1}q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2}\frac{2j-1}{2}e_i^2+\frac{3j^2-3j+1}{3}e_i^3\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i}-e_i\right)\right)+\right.$$

$$\left.q_{ij}\left(\frac{-e_i^2(j-1)^2}{2}\frac{2j-1}{2}e_i^2+\frac{3j^2-3j+1}{3}e_i^3\left((j-1)e_i-\frac{e_i^2(j-1)^2}{2l_i}\right)-\frac{4j^3-6j^2+4j-1}{8}+\frac{5j^4-10j^3+10j^2-5j+1}{10l_i}\right)\right] \qquad \text{(E.37)}$$

L'expression de d(i,x) est la somme, à des facteurs multiplicatifs ne dépendant uniquement de x et de i, des termes M'_i, M'_{i+1}, et $[q_{ij}]_{j=1}^{n_i}$.

Nous pouvons donc écrire $\boxed{d(i,x) = A_d(x,i)\begin{bmatrix} M'_i \\ M'_{i+1} \end{bmatrix} + B_d(x,i)\begin{bmatrix} q_{i1} \\ .. \\ q_{in_i} \end{bmatrix}}$ (E.38)

où $A_d(x,i)$ et $B_d(x,i)$ sont des matrices composées d'une seule ligne et respectivement de deux et n_i colonnes. Les termes s'obtiennent en annulant toutes les termes M'_i, M'_{i+1}, et $[q_{ij}]_{j=1}^{n_i}$ .sauf celui dont nous voulons le coefficient. Par exemple le premier terme de $A_d(x,i)$ relatif à M'_i s'obtient en prenant M'_i égal à 1 et les autres variables: M'_{i+1} et $[q_{ij}]_{j=1}^{n_i}$ nulles.

Cette équation matricielle peut être écrite différemment. En posant pour un entier n, $d^*(i,x) = d(i,ne_i)$, nous obtenons

$$\boxed{d^*(i,n) = A^*_d(n,i)\begin{bmatrix} M_i \\ M_{i+1} \end{bmatrix} + B^*_d(n,i)\begin{bmatrix} q_{i1} \\ .. \\ q_{in_i} \end{bmatrix}} \quad \text{(E.39)},$$

avec

$$A^*_d(n,i) = A_d(ne_i,i) \text{ et } B^*_d(n,i) = B_d(ne_i,i). \quad \text{(E.40)}$$

4 Détermination des rotations aux extrémités de poutre i chargée par q_i

Nous savons que

$$\omega'_i = \int_0^{l_i} M_i^{q_i}(x)\left(\frac{x}{l_i} - 1\right)\frac{dx}{EI_i} \text{ et}$$

$$\omega''_i = \int_0^{l_i} M_i^{q_i}(x)\frac{x}{l_i}\frac{dx}{EI_i}, \quad \text{(E.17)}$$

$$\omega''_i = \int_0^{l_i}\sum_{k=1}^{e_x} q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2} + x\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i} - e_i\right)\right) + q_{i(e_x+1)}\left(\frac{-e_i^2e_x^2}{2} + x\left(e_xe_i - \frac{e_i^2e_x^2}{2l_i}\right) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2l_i}\right)\frac{x}{l_i}\frac{dx}{EI_i}$$

$$\omega''_i = \frac{1}{l_iEI_i}\int_0^{l_i}\sum_{k=1}^{e_x} q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2}x + x^2\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i} - e_i\right)\right) + q_{i(e_x+1)}\left(\frac{-e_i^2e_x^2}{2}x + x^2\left(e_xe_i - \frac{e_i^2e_x^2}{2l_i}\right) - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2l_i}\right) \quad \text{(E.42)}$$

$$\omega''_i = \frac{1}{l_iEI_i}\sum_{j=1}^{n_i}\int_{(j-1)e_i}^{je_i}\sum_{k=1}^{j-1} q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2}x + x^2\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i} - e_i\right)\right) + q_{ij}\left(\frac{-e_i^2(j-1)^2}{2}x + x^2\left((j-1)e_i - \frac{e_i^2(j-1)^2}{2l_i}\right) - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2l_i}\right)dx \quad \text{(E.43)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\omega_i'' = \frac{1}{l_i EI_i}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{j-1} q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2}\frac{2j-1}{2}e_i^2 + \frac{3j^2-3j+1}{3}e_i^3\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i} - e_i\right)\right)\\ +q_{ij}\left(\frac{-e_i^2(j-1)^2}{2}\frac{2j-1}{2}e_i^2 + \frac{3j^2-3j+1}{3}e_i^3\left((j-1)e_i - \frac{e_i^2(j-1)^2}{2l_i}\right) - \frac{4j^3-6j^2+4j-1}{8} + \frac{5j^4-10j^3+10j^2-5j+1}{10l_i}\right)\end{aligned}}$$

(E.44)

ω_i' peut s'exprimer en fonction de ω_i''. En effet:

$$\omega_i' = \int_0^{l_i} M_i^{q_i}(x)\left(\frac{x}{l_i}-1\right)\frac{dx}{EI_i} = \omega_i'' - \frac{1}{EI_i}\int_0^{l_i} M_i^{q_i}(x)dx \qquad \text{(E.45)}$$

Il nous suffit donc de déterminer $\int_0^{l_i} M_i^{q_i}(x)dx$ (E.46)

$$= \int_0^{l_i}\sum_{k=1}^{e_x} q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2} + x\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i} - e_i\right)\right) + q_i(e_x+1)\left(\frac{-e_i^2e_x^2}{2} + x\left(e_xe_i - \frac{e_i^2e_x^2}{2l_i}\right) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2l_i}\right)dx \quad \text{(E.47)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n_i}\int_{(j-1)e_i}^{je_i}\sum_{k=1}^{j-1} q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2} + x\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i} - e_i\right)\right) + q_{ij}\left(\frac{-e_i^2(j-1)^2}{2} + x\left((j-1)e_i - \frac{e_i^2(j-1)^2}{2l_i}\right) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2l_i}\right)dx \quad \text{(E.48)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{j-1} q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2}e_i + \frac{2j-1}{2}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i} - e_i\right)\right) + q_{ij}\left(\frac{-e_i^2(j-1)^2}{2}e_i + \frac{2j-1}{2}\left((j-1)e_i - \frac{e_i^2(j-1)^2}{2l_i}\right) - \frac{3j^2-3j+1}{6} + \frac{4j^3-6j^2+4j-1}{8l_i}\right) \quad \text{(E.49)}$$

Nous en déduisons donc que

$$\boxed{\omega_i' = \omega_i'' - \frac{1}{EI_i}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{j-1} q_{ik}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2}e_i + \frac{2j-1}{2}\left(\frac{(2k-1)e_i^2}{2l_i} - e_i\right)\right) + q_{ij}\left(\frac{-e_i^2(j-1)^2}{2}e_i + \frac{2j-1}{2}\left((j-1)e_i - \frac{e_i^2(j-1)^2}{2l_i}\right) - \frac{3j^2-3j+1}{6} + \frac{4j^3-6j^2+4j-1}{8l_i}\right)} \quad \text{(E.50)}$$

ω_i' et ω_i'' sont linéaires par rapport aux $[q_{ij}]_{j=1}^{n_i}$, nous pouvons donc écrire :

$$\boxed{\omega_i' = A_{\omega_i'}(i)\begin{bmatrix} q_{i1} \\ .. \\ q_{in_i}\end{bmatrix}} \text{ et } \boxed{\omega_i'' = A_{\omega_i''}(i)\begin{bmatrix} q_{i1} \\ .. \\ q_{in_i}\end{bmatrix}} \qquad \text{(E.51)}$$

où $A_{\omega_i'}(i)$ et $A_{\omega_i''}(i)$ sont deux matrices composées d'une seule ligne et de n_i colonnes. Elles ne dépendent que de la poutre.

5 Détermination des forces d'appui

Le point G_i est soumis à une force d'appui P_i appliquée par une extrémité de palonniers. Cette force P_i est la somme des forces d'appui générées sur la poutre i-1 si elle existe, et sur la poutre i par les moments de coupure et par les pressions linéique.
D'après les formules E.17 E.29 et E.31, la force d'appui Pi est égale à:

$$P_i = P_{i/i}^{q_i} + P_{i/i-1}^{q_{i-1}} + P_{i/i}^{M'_i} + P_{i/i-1}^{M'_{i-1}} + P_{i/i}^{M'_{i+1}} + P_{i/i-1}^{M'_i} \qquad \text{(E.52)}$$

$$P_i = \int_0^{l_i} q_i(x)\frac{l_i - x}{l_i}dx + \int_0^{l_{i-1}} q_{i-1}(x)\frac{x}{l_{i-1}}dx - \frac{M'_i}{l_i} + \frac{M'_{i-1}}{l_{i-1}} + \frac{M'_{i+1}}{l_i} - \frac{M'_i}{l_{i-1}} \qquad \text{(E.53)}$$

Comme précédemment, nous allons utiliser les formules de discrétisation:

$$P_i = \sum_{j=1}^{n_i} \int_{(j-1)e_i}^{je_i} q_{ij}\frac{l_i - x}{l_i}dx + \sum_{j=1}^{n_{i-1}} \int_{(j-1)e_i}^{je_i} q_{(i-1)j}\frac{x}{l_{i-1}}dx - \frac{M'_i}{l_i} + \frac{M'_{i-1}}{l_{i-1}} + \frac{M'_{i+1}}{l_i} - \frac{M'_i}{l_{i-1}} \qquad \text{(E.54)}$$

$$P_i = \sum_{j=1}^{n_i} q_{ij}\left(e_i - \frac{2j-1}{2l_i}e_i^2\right) + \sum_{j=1}^{n_{i-1}} q_{(i-1)j}\frac{2j-1}{2l_{i-1}}e_{i-1}^2 - \frac{M'_i}{l_i} + \frac{M'_{i-1}}{l_{i-1}} + \frac{M'_{i+1}}{l_i} - \frac{M'_i}{l_{i-1}} \qquad \text{(E.55)}$$

Nous pouvons écrire ce résultat sous forme matricielle:

$$\boxed{P_i = A_{P_i}\begin{bmatrix} M'_{i-1} \\ M'_i \\ M'_{i+1} \end{bmatrix} + B_{P_i}\begin{bmatrix} q_{i1} \\ .. \\ q_{in_i} \end{bmatrix} + C_{P_i}\begin{bmatrix} q_{(i-1)1} \\ .. \\ q_{(i-1)n_{i-1}} \end{bmatrix}}, \qquad \text{(E.56)}$$

avec A_{P_i}, B_{P_i} et C_{P_i} trois matrices composées d'une seule ligne et respectivement de 3 n_i et n_{i-1} colonnes.

6 Détermination des forces s'exerçant au niveau des palonniers

6.1 Notation

Nous considérons que les palonniers sont sans jeu et indéformables. Ils peuvent tourner les uns par rapport aux autres autour de leur axe respectif de rotation.

Les points de rotation sont numérotés comme une structure d'arbre (père/fils) à partir de la monture. L'indice d'un point fils est obtenu en rajoutant à l'indice du point père le numéro 1 ou 2 suivant que le point fils se trouve à droite ou à gauche du point père (fig. E.16).

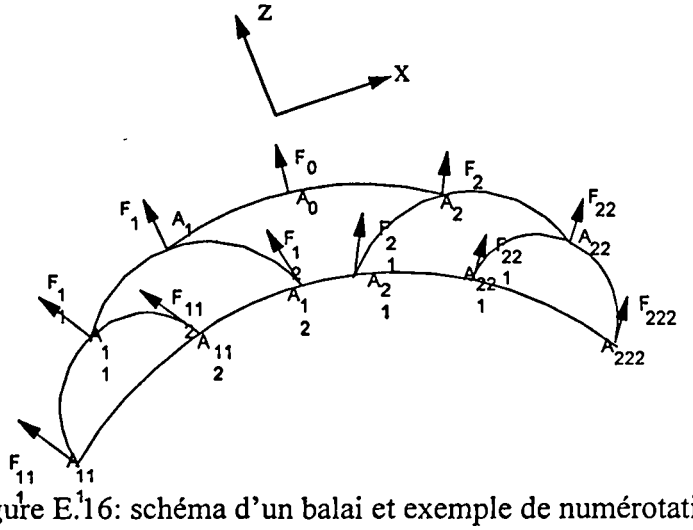


Figure E.16: schéma d'un balai et exemple de numérotation

Considérons un palonnier d'indice l. Son point de rotation est noté A_l. Nous noterons θ_l et R_l l'angle et la rotation angulaire du palonnier en question par rapport à A_l en prenant comme angle de référence, la position sur vitre plane. Ainsi par exemple:

$$\begin{cases} A_{l1} - A_l = R_l\left(A_{l1} - A_l\right)_{in}, \\ A_{l2} - A_l = R_l\left(A_{l2} - A_l\right)_{in}, \end{cases} \tag{E.57}$$

avec $(\ )_{in}$ désignant la position initiale (balai posé à plat) des paramètres entre parenthèse.

Soient F_l, F_{l1}, F_{l2} les forces aux points respectifs A_l, A_{l1}, A_{l2}, Nous ajouterons l'indice m à ces forces pour désigner la valeur absolue de ces forces.

Nous utiliserons un repère lié à la monture (fig. E.16). La direction x sera prise dans le sens de la longueur du balai et z dans le sens vertical.

6.2 Equilibre des moments de façon générale

L'équilibre des moments en A_l impose : $\begin{cases} (A_{l1} - A_l) \wedge F_{l1} + (A_{l2} - A_l) \wedge F_{l2} = 0 \\ F_l = F_{l1} + F_{l2} \end{cases}$ (E.58)

En combinant les équations E.57 et E.58 il vient :

$$\begin{cases} \left(R_1(A_{11}-A_1)_{in}\right)\wedge F_{11}+\left(R_1(A_{12}-A_1)_{in}\right)\wedge F_{12}=0 \\ F_1=F_{11}+F_{12} \end{cases} \tag{E.59}$$

En mettant E.59 sous la forme matricielle, nous obtenons :

$$\begin{cases} [F_{11}\wedge]R_1(A_{11}-A_1)_{in}+[F_{12}\wedge]R_1(A_{12}-A_1)_{in}=0 \\ F_1=F_{11}+F_{12} \end{cases} \tag{E.60}$$

6.3 Equilibre des moments pour un balai plan (non courbe)

Nous nous intéressons au cas d'un balai plan (pour les balais courbes, l'équation E.60 reste valable).

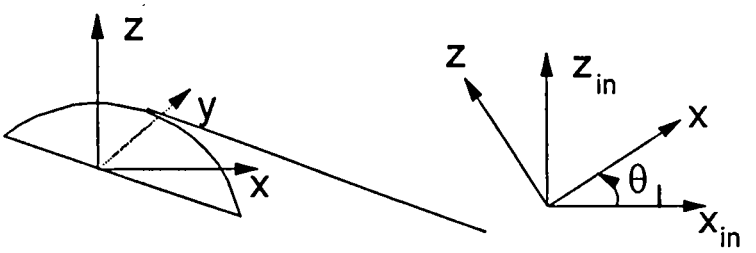


Figure E.17: rotation d'un palonnier par rapport à sa position initiale

Il est à noter que conformément aux règles relatives aux repères, l'angle est compté positivement de z vers x si bien que sur la figure précédente l'angle θ_1 est négatif.

$$R_1=\begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & -\sin(\theta_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) \end{bmatrix} \tag{E.61}$$

$$[F_{11}\wedge]\begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & -\sin(\theta_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{A_{11}}-x_{A_1} \\ 0 \\ z_{A_{11}}-z_{A_1} \end{bmatrix}_{in}+[F_{12}\wedge]\begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & -\sin(\theta_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{A_{12}}-x_{A_1} \\ 0 \\ z_{A_{12}}-z_{A_1} \end{bmatrix}_{in}=0 \tag{E.62}$$

$$[F_{11}\wedge]\begin{bmatrix} \cos(\theta_1)(x_{A_{11}}-x_{A_1})_{in}-\sin(\theta_1)(z_{A_{11}}-z_{A_1})_{in} \\ 0 \\ \sin(\theta_1)(x_{A_{11}}-x_{A_1})_{in}+\cos(\theta_1)(z_{A_{11}}-z_{A_1})_{in} \end{bmatrix}+[F_{12}\wedge]\begin{bmatrix} \cos(\theta_1)(x_{A_{12}}-x_{A_1})_{in}-\sin(\theta_1)(z_{A_{12}}-z_{A_1})_{in} \\ 0 \\ \sin(\theta_1)(x_{A_{12}}-x_{A_1})_{in}+\cos(\theta_1)(z_{A_{12}}-z_{A_1})_{in} \end{bmatrix}=0 \tag{E.63}$$

Projetons l'équation E.63 suivant y:

$$\begin{aligned} &z_{F_{11}}\left(\cos(\theta_1)(x_{A_{11}}-x_{A_1})_{in}-\sin(\theta_1)(z_{A_{11}}-z_{A_1})_{in}\right)-x_{F_{11}}\left(\sin(\theta_1)(x_{A_{11}}-x_{A_1})_{in}+\cos(\theta_1)(z_{A_{11}}-z_{A_1})_{in}\right) \\ &+z_{F_{12}}\left(\cos(\theta_1)(x_{A_{12}}-x_{A_1})_{in}-\sin(\theta_1)(z_{A_{12}}-z_{A_1})_{in}\right)-x_{F_{12}}\left(\sin(\theta_1)(x_{A_{12}}-x_{A_1})_{in}+\cos(\theta_1)(z_{A_{12}}-z_{A_1})_{in}\right)=0 \end{aligned} \tag{E.64}$$

L'équilibre des forces impose: $\begin{cases} z_{F_{11}} + z_{F_{12}} = z_{F_1}, \\ x_{F_{11}} + x_{F_{12}} = x_{F_1}. \end{cases}$ (E.65)

6.4 Approximation des équations

Les longueurs des palonniers sont plus importantes que leurs hauteurs. Nous en déduisons donc que $\left(x_{A_{11}} - x_{A_1}\right)_{in}$ est plus faible que $\left(z_{A_{11}} - z_{A_1}\right)_{in}$. De plus les angles de rotation des palonniers sont généralement faibles, nous en déduisons donc que $\sin(\theta_1) = \theta_1 + o(\theta_1)$ est faible par rapport à $\cos(\theta_1) = 1 + o(\theta_1)$.

Montrons maintenant que $z_{F_{12}}$ est prépondérant par rapport à $x_{F_{12}}$. Les griffes des palonniers peuvent se déplacer longitudinalement par rapport à la vertèbre sauf au point d'arrêt de la lame (harpon). En négligeant le frottement, la force transmises dans le sens du déplacement est nulle. En supposant le bras-balai dans l'axe du balai, les forces de frottement n'ont pas de composante longitudinal à la vertèbre si bien que les seules forces s'exerçant au niveau du point d'arrêt de la lame sont les forces d'inertie de la lame. Etant donné que la lame est de masse faible, nous pouvons négliger cette force devant les forces d'appui et de frottement.

Nous pouvons donc écrire: $\begin{cases} z_{F_1} = F_{1m}\cos(\theta_{F1}) = F_{1m} + o(\theta_{F1}), \\ z_{F_1} = F_{1m}\sin(\theta_{F1}) = F_{1m}\theta_{F1} + o(\theta_{F1}) \end{cases}$ (E.66)

Des notations similaires peuvent être utilisées pour l'écriture des autres forces. En négligeant les termes de second ordre, l'équation d'équilibre des moments devient:

$$F_{11}\left(\left(x_{A_{11}} - x_{A_1}\right)_{in} - \left(\theta_1 + \theta_{F_{11}}\right)\left(z_{A_{11}} - z_{A_1}\right)_{in}\right) + F_{12}\left(\left(x_{A_{12}} - x_{A_1}\right)_{in} - \left(\theta_1 + \theta_{F_{12}}\right)\left(z_{A_{12}} - z_{A_1}\right)_{in}\right) = 0 \quad \text{(E.67)}$$

soit encore

$$F_{11}\left(\left(x_{A_{11}} - x_{A_1}\right)_{in} - \left(\theta_1 + \theta_{F_{11}}\right)\left(z_{A_{11}} - z_{A_1}\right)_{in}\right) + F_{12}\left(\left(x_{A_{12}} - x_{A_1}\right)_{in} - \left(\theta_1 + \theta_{F_{12}}\right)\left(z_{A_{12}} - z_{A_1}\right)_{in}\right) = 0 \quad \text{(E.68)}$$

$$F_{11} = -F_{12}\frac{\left(x_{A_{12}} - x_{A_1}\right)_{in} - \left(\theta_1 + \theta_{F_{11}}\right)\left(z_{A_{12}} - z_{A_1}\right)_{in}}{\left(x_{A_{11}} - x_{A_1}\right)_{in} - \left(\theta_1 + \theta_{F_{12}}\right)\left(z_{A_{11}} - z_{A_1}\right)_{in}} \quad \text{(E.69)}$$

Les termes $\left(x_{A_{12}} - x_{A_1}\right)_{in}$ et $\left(x_{A_{11}} - x_{A_1}\right)_{in}$ d'une part $\left(z_{A_{12}} - z_{A_1}\right)_{in}$ et $\left(z_{A_{11}} - z_{A_1}\right)_{in}$ d'autre part sont opposés dans la configuration la plus répandue de

palonniers symétriques. Dans les autres cas, les rapports $\frac{\left(x_{A_{l2}} - x_{A_l}\right)_{in}}{\left(z_{A_{l2}} - z_{A_l}\right)_{in}}$ et $\frac{\left(x_{A_{l1}} - x_{A_l}\right)_{in}}{\left(z_{A_{l1}} - z_{A_l}\right)_{in}}$ sont assez similaires.

En première approximation, nous pouvons considérer que l'orientation des forces évolue continûment et que $\theta_l + \theta_{F_{l1}} \approx \theta_l + \theta_{F_{l2}}$. D'après E.69, les forces F_{l1} et F_{l2} conservent alors un rapport constant. En raison de l'équilibre des forces, elles sont constantes quelque soit la forme du galbe. Dans le cas d'un palonnier symétrique nous avons $F_{l1} = F_{l2} = \frac{F_{lm}}{2}$.(E.70)

6.5 Equation supplémentaire nécessaire pour résoudre le système

Afin de résoudre le système sans approximation sur la planéité (équation E.60)) ou en faisant l'hypothèse de balai plan sans hypothèse supplémentaire (équations E.64 et E.65), des équations supplémentaires déterminant les forces au niveau des griffes sont nécessaires. Les pressions linéiques sont orthogonales à la vertèbre ainsi que les forces d'appui, il est donc raisonnable de prendre les forces d'appui orthogonale à la vertèbre. Nous pouvons donc écrire dans le cas d'un balai plan $\theta_l = \theta_{F_l}$ pour tous les points A_l au contact de la vertèbre.

Résumé

Cette thèse a pour objet de modéliser et simuler un système d'essuyage complet et d'en expliquer le fonctionnement.

Une étude systématique de chaque composant a permis, dans un premier temps, de mettre en évidence et de hierarchiser les élasticités ayant une influence sur le système puis d'analyser dans un second temps les modes de vibration qui en résultent. Un logiciel basé sur un modèle de la lame issu de la RDM et validé par rapport à un code d'éléments finis non linéaire a été réalisé. Le flambage des bielles droites (désalignées ou non) et coudées a été examiné. Cette étude a conduit à une optimisation de leur profil. Un algorithme déterminant les pressions linéiques et les déformations de la vertèbre a été proposé.

Une étude bibliographique importante a été constituée sur le frottement entre le caoutchouc et le verre précisant le rôle de la composition des matériaux, du temps, de l'humidité, de la vitesse, de la pression d'appui, du comportement viscoélastique, de la découpe de la lame...

Une étude bibliographique sur le jeu est réalisée. Elle précise notamment l'importance des modes hautes fréquences et le rôle de l'élasticité. Des problèmes de couplage entre un système mécanique complexe et un modèle de jeux ont été mis en évidence. Des formules approchées des forces d'impact ont été données. Le rattrapage des jeux s'est avéré le facteur prédominant dans les expériences et les simulations.

Les principaux phénomènes aérodynamiques intervenant sur le système ainsi que des courbes expérimentales sont exposés.

Plusieurs phénomènes sont analysés: différence entre le coefficient de frottement réel et apparent, influence des inerties du moteur et des bras-balais, les deux composantes du poids qui travaillent ensemble ou s'opposent au cours du balayage, les discontinuités dues au frottement, l'influence du frottement sur la force d'appui, la torsion des bras qui génère des surangles d'attaque, le changement prématuré du sens des forces. Nous avons également analysé les forces s'exerçant sur les différentes pièces, les vibrations des bras, des axes de sortie, du moteur et de la platine.

Le modèle a été développé sur un logiciel de corps articulés. Il a été validé aussi bien en vitre mouillée qu'en vitre sèche.

UNIVERSITÉ DES SC. ET TECHN. BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE LILLE