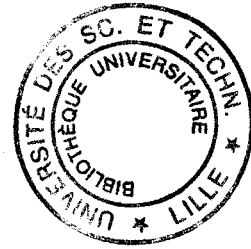




THÈSE



Présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN INFORMATIQUE

par

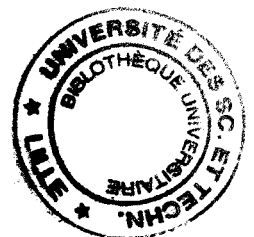
Côme RACZY

Commandes optimales en temps pour des systèmes différentiellement plats

Application aux commandes de satellites et de grues

Thèse soutenue le 14 mars 1997, devant la commission d'examen :

Président :	J.-M. GEIB	LIFL
Directeur de Thèse :	G. JACOB	LIFL
Rapporteurs :	M. FLIESS	LSS-Supélec
	P. ANDRÉ	ENSMM
Examineurs :	G. LASSALLE-BALIER	CNES
	P. ROUCHON	CAS-ENSMP
	W. KHALIL	ECN



DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT
ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS, A. DUBRULLE

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

M. P. LOUIS

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CHAMLEY Hervé	Géotechnique
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du solide
M. FOURET René	Physique du solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. MACKÉ Bruno	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques

M. MIGEON Michel
M. MONTREUIL Jean
M. PARREAU Michel
M. TRIDOT Gabriel

EUDIL
Biochimie
Analyse
Chimie appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BOILLY Bénoni	Biologic
M. BONNELLE Jean Pierre	Chimie-Physique
M. BOSCOQ Denis	Probabilités
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. BRASSELET Jean Paul	Géométrie et topologie
M. BREZINSKI Claude	Analyse numérique
M. BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CARREZ Christian	Informatique
M. CELET Paul	Géologie générale
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. CROSNIER Yves	Electronique
Mme DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	Informatique
M. DEBOURSE Jean Pierre	Gestion des entreprises
M. DEBRABANT Pierre	Géologie appliquée
M. DECLERCQ Roger	Sciences de gestion
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DESCHEPPER Joseph	Sciences de gestion
Mme DESSAUX Odile	Spectroscopie de la réactivité chimique
M. DHAINAUT André	Biologie animale
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie animale
M. DJAFARI Rouhani	Physique
M. DORMARD Serge	Sciences Economiques
M. DOUKHAN Jean Claude	Physique du solide
M. DUBRULLE Alain	Spectroscopie hertzienne
M. DUPOUY Jean Paul	Biologie
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. FOCT Jacques Jacques	Métallurgie
M. FOUQUART Yves	Optique atmosphérique
M. FOURNET Bernard	Biochimie structurale
M. FRONTIER Serge	Ecologie numérique
M. GLORIEUX Pierre	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie-Physique
M. GRANELLE Jean Jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie animale
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. HENRY Jean Pierre	Génie mécanique
M. HERMAN Maurice	Physique spatiale
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LANGRAND Claude	Probabilités et statistiques

M. LATTEUX Michel
M. LAVEINE Jean Pierre
Mme LECLERCQ Ginette
M. LEHMANN Daniel
Mme LENOBLE Jacqueline
M. LEROY Jean Marie
M. LHENAFF René
M. LHOMME Jean
M. LOUAGE Francis
M. LOUCHEUX Claude
M. LUCQUIN Michel
M. MAILLET Pierre
M. MAROUF Nadir
M. MICHEAU Pierre
M. PAQUET Jacques
M. PASZKOWSKI Stéfan
M. PETIT Francis
M. PORCHET Maurice
M. POUZET Pierre
M. POVY Lucien
M. PROUVOST Jean
M. RACZY Ladislav
M. RAMAN Jean Pierre
M. SALMER Georges
M. SCHAMPS Joël
Mme SCHWARZBACH Yvette
M. SEGUIER Guy
M. SIMON Michel
M. SLIWA Henri
M. SOMME Jean
Melle SPIK Geneviève
M. STANKIEWICZ François
M. THIEBAULT François
M. THOMAS Jean Claude
M. THUMERELLE Pierre
M. TILLIEU Jacques
M. TOULOTTE Jean Marc
M. TREANTON Jean René
M. TURRELL Georges
M. VANEECLOO Nicolas
M. VAST Pierre
M. VERBERT André
M. VERNET Philippe
M. VIDAL Pierre
M. WALLART Francis
M. WEINSTEIN Olivier
M. ZEYTOUNIAN Radyadour

Informatique
Paléontologie
Catalyse
Géométrie
Physique atomique et moléculaire
Spectrochimie
Géographie
Chimie organique biologique
Electronique
Chimie-Physique
Chimie physique
Sciences Economiques
Sociologie
Mécanique des fluides
Géologie générale
Mathématiques
Chimie organique
Biologie animale
Modélisation - calcul scientifique
Automatique
Minéralogie
Electronique
Sciences de gestion
Electronique
Spectroscopie moléculaire
Géométrie
Electrotechnique
Sociologie
Chimie organique
Géographie
Biochimie
Sciences Economiques
Sciences de la Terre
Géométrie - Topologie
Démographie - Géographie humaine
Physique théorique
Automatique
Sociologie du travail
Spectrochimie infrarouge et raman
Sciences Economiques
Chimie inorganique
Biochimie
Génétique
Automatique
Spectrochimie infrarouge et raman
Analyse économique de la recherche et développement
Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ABRAHAM Francis	Composants électroniques
M. ALLAMANDO Etienne	Biologie des organismes
M. ANDRIES Jean Claude	Analyse
M. ANTOINE Philippe	Génétique
M. BALL Steven	Biologie animale
M. BART André	Génie des procédés et réactions chimiques
M. BASSERY Louis	Géographie
Mme BATTIAU Yvonne	Systèmes électroniques
M. BAUSIERE Robert	Mécanique
M. BEGUIN Paul	Physique atomique et moléculaire
M. BELLET Jean	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
M. BERNAGE Pascal	Sciences Economiques
M. BERTHOUD Arnaud	Sciences Economiques
M. BERTRAND Hugues	Analyse
M. BERZIN Robert	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. BISKUPSKI Gérard	Algèbre
M. BKOUCHE Rudolphe	Biologie végétale
M. BODARD Marcel	Biochimie métabolique et cellulaire
M. BOHIN Jean Pierre	Mécanique
M. BOIS Pierre	Génie civil
M. BOISSIER Daniel	Spectrochimie
M. BOIVIN Jean Claude	Physique
M. BOUCHER Daniel	Biologie appliquée aux enzymes
M. BOUQUELET Stéphane	Gestion
M. BOUQUIN Henri	Chimie
M. BROCARD Jacques	Paléontologie
Mme BROUSMICHE Claudine	Mécanique
M. BUISINE Daniel	Biologie animale
M. CAPURON Alfred	Géographie humaine
M. CARRE François	Chimie organique
M. CATTEAU Jean Pierre	Sciences Economiques
M. CAYATTE Jean Louis	Electronique
M. CHAPOTON Alain	Biochimie structurale
M. CHARET Pierre	Composants électroniques optiques
M. CHIVE Maurice	Informatique théorique
M. COMYN Gérard	Composants électroniques et optiques
Mme CONSTANT Monique	Psychophysiologie
M. COQUERY Jean Marie	Sciences Economiques
M. CORIAT Benjamin	Paléontologie
Mme CORSIN Paule	Physique nucléaire et corpusculaire
M. CORTOIS Jean	Chimie organique
M. COUTURIER Daniel	Tectonique géodynamique
M. CRAMPON Norbert	Biologie
M. CURGY Jean Jacques	Physique théorique
M. DANGOISSE Didier	Analyse
M. DE PARIS Jean Claude	Composants électroniques et optiques
M. DECOSTER Didier	Electrochimie et Cinétique
M. DEJAEGER Roger	Informatique
M. DELAHAYE Jean Paul	Physiologie animale
M. DELORME Pierre	Sciences Economiques
M. DELORME Robert	Sociologie
M. DEMUNTER Paul	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
Mme DEMUYNCK Claire	Informatique
M. DENEL Jacques	Physique du solide - cristallographie
M. DEPREZ Gilbert	

M. DERIEUX Jean Claude	Microbiologie
M. DERYCKE Alain	Informatique
M. DESCAMPS Marc	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie minérale
M. DEWAILLY Jean Michel	Géographie humaine
M. DHAMELIN COURT Paul	Chimie physique
M. DI PERSIO Jean	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. DUBAR Claude	Sociologie démographique
M. DUBOIS Henri	Spectroscopie hertzienne
M. DUBOIS Jean Jacques	Géographie
M. DUBUS Jean Paul	Spectrométrie des solides
M. DUPONT Christophe	Vie de la firme
M. DUTHOIT Bruno	Génie civil
Mme DUVAL Anne	Algèbre
Mme EVRARD Micheline	Génie des procédés et réactions chimiques
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FARVACQUE Jean Louis	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. FAUQUEMBERGUE Renaud	Composants électroniques
M. FELIX Yves	Mathématiques
M. FERRIERE Jacky	Tectonique - Géodynamique
M. FISCHER Jean Claude	Chimie organique, minérale et analytique
M. FONTAINE Hubert	Dynamique des cristaux
M. FORSE Michel	Sociologie
M. GADREY Jean	Sciences économiques
M. GAMBLIN André	Géographie urbaine, industrielle et démographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOURIEROUX Christian	Probabilités et statistiques
M. GREGORY Pierre	I.A.E.
M. GREMY Jean Paul	Sociologie
M. GREVET Patrice	Sciences Economiques
M. GRIMBLOT Jean	Chimie organique
M. GUELTON Michel	Chimie physique
M. GUICHAOUA André	Sociologie
M. HAIMAN Georges	Modélisation, calcul scientifique, statistiques
M. HOUDART René	Physique atomique
M. HUEBSCHMANN Johannes	Mathématiques
M. HUTTNER Marc	Algèbre
M. ISAERT Noël	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JACOB Pierre	Probabilités et statistiques
M. JEAN Raymond	Biologie des populations végétales
M. JOFFRE Patrick	Vie de la firme
M. JOURNAL Gérard	Spectroscopie hertzienne
M. KOENIG Gérard	Sciences de gestion
M. KOSTRUBIEC Benjamin	Géographie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
Mme KRIFA Hadjila	Sciences Economiques
M. LANGEVIN Michel	Algèbre
M. LASSALLE Bernard	Embryologie et biologie de la différenciation
M. LE MEHAUTE Alain	Modélisation, calcul scientifique, statistiques
M. LEBFEVRE Yannic	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
M. LECLERCQ Lucien	Chimie physique
M. LEFEBVRE Jacques	Physique
M. LEFEBVRE Marc	Composants électroniques et optiques
M. LEFEBVRE Christian	Pétrologie
Melle LEGRAND Denise	Algèbre
M. LEGRAND Michel	Astronomie - Météorologie
M. LEGRAND Pierre	Chimie
Mme LEGRAND Solange	Algèbre
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LEMAIRE Jean	Spectroscopie hertzienne

M. LE MAROIS Henri	Vie de la firme
M. LEMOINE Yves	Biologie et physiologie végétales
M. LESCURE François	Algèbre
M. LESENNE Jacques	Systèmes électroniques
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
Mme LOPES Maria	Mathématiques
M. LOSFELD Joseph	Informatique
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAHIEU François	Sciences économiques
M. MAHIEU Jean Marie	Optique - Physique atomique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MANSY Jean Louis	Géologie
M. MAURISSON Patrick	Sciences Economiques
M. MERIAUX Michel	EUDIL
M. MERLIN Jean Claude	Chimie
M. MESMACQUE Gérard	Génie mécanique
M. MESSELYN Jean	Physique atomique et moléculaire
M. MOCHE Raymond	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. MONTEL Marc	Physique du solide
M. MORCELLET Michel	Chimie organique
M. MORE Marcel	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. MORTREUX André	Chimie organique
Mme MOUNIER Yvonne	Physiologie des structures contractiles
M. NIAY Pierre	Physique atomique,moléculaire et du rayonnement
M. NICOLE Jacques	Spectrochimie
M. NOTELET Francis	Systèmes électroniques
M. PALAVIT Gérard	Génie chimique
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie organique
M. PERROT Pierre	Chimie appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie animale
M. PETIT Daniel	Biologie des populations et écosystèmes
M. PLIHON Dominique	Sciences Economiques
M. PONSOLLE Louis	Chimie physique
M. POSTAIRE Jack	Informatique industrielle
M. RAMBOUR Serge	Biologie
M. RENARD Jean Pierre	Géographie humaine
M. RENARD Philippe	Sciences de gestion
M. RICHARD Alain	Biologie animale
M. RIETSCH François	Physique des polymères
M. ROBINET Jean Claude	EUDIL
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROLLAND Paul	Composants électroniques et optiques
M. ROLLET Philippe	Sciences Economiques
Mme ROUSSEL Isabelle	Géographie physique
M. ROUSSIGNOL Michel	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. ROY Jean Claude	Psychophysiologie
M. SALERNO François	Sciences de gestion
M. SANCHOLLE Michel	Biologie et physiologie végétales
Mme SANDIG Anna Margarete	
M. SAWERYSYN Jean Pierre	Chimie physique
M. STAROSWIECKI Marcel	Informatique
M. STEEN Jean Pierre	Informatique
Mme STELLMACHER Irène	Astronomie - Météorologie
M. STERBOUL François	Informatique
M. TAILLIEZ Roger	Génie alimentaire
M. TANRE Daniel	Géométrie - Topologie
M. THERY Pierre	Systèmes électroniques
Mme TJOTTA Jacqueline	Mathématiques
M. TOURSEL Bernard	Informatique
M. TREANTON Jean René	Sociologie du travail

M. TUREL Georges
M. VANDIJK Hendrik
Mme VAN ISEGHEM Jeanine
M. VANDORPE Bernard
M. VASSEUR Christian
M. VASSEUR Jacques
Mme VIANO Marie Claude
M. WACRENIER Jean Marie
M. WARTEL Michel
M. WATERLOT Michel
M. WEICHERT Dieter
M. WERNER Georges
M. WIGNACOURT Jean Pierre
M. WOZNIAK Michel
Mme ZINN JUSTIN Nicole

Spectrochimie infrarouge et raman

Modélisation, calcul scientifique, statistiques
Chimie minérale
Automatique
Biologie

Electronique
Chimie inorganique
géologie générale
Génie mécanique
Informatique théorique

Spectrochimie
Algèbre

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Jean-Marc GEIB, directeur du Laboratoire d'Informatique de Fondamentals de Lille, qui a bien voulu accepter de présider ce jury.

Que Monsieur Michel FLIESS, Directeur de Recherche du CNRS au Laboratoire des Signaux et Systèmes de Supélec, et Monsieur Pierre ANDRÉ, Professeur à l'école Nationale Supérieure d'ingénieurs de Mécanique et des Microtechniques, soient assurés de toute ma reconnaissance pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

C'est pour moi une très grande joie de voir Monsieur Gérard LASSALLE-BALIER dans ce jury de thèse en tant que représentant du CNES. Je tiens à le remercier d'avoir accordé sa confiance à notre équipe et de nous avoir permis de travailler sur le problème du satellite dans le cadre d'un contrat de recherche avec le CNES.

Je remercie également Monsieur Pierre ROUCHON, Directeur de Recherche au Centre d'Automatique et Systèmes, à l'École des Mines de Paris, pour ses remarques et ses commentaires constructifs. Je lui suis également reconnaissant de participer à ce jury.

Que Monsieur Wisama KHALIL, du Département d'Automatique et de Robotique de l'Institut de Recherche en Cybernétique de Nantes soit assuré de ma gratitude pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ces travaux, en acceptant de participer à ce jury.

Cette thèse a été effectuée sous la direction de Monsieur Gérard JACOB, Professeur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille, que je tiens à remercier vivement pour avoir accepté de m'accueillir dans son équipe.

Tous les membres de cette équipe méritent d'ailleurs mes remerciements pour leur accueil, leurs conseils et leurs remarques. Je tiens à remercier plus particulièrement Nour-Eddine OUSSOUS pour son dévouement et l'aide qu'il a pu m'apporter à bien des égards.

Il serait ingrat de ne pas reconnaître l'importance de l'entourage sur l'évolution d'un tel travail. Qu'il s'agisse des personnes qui contribuent à la vie et à la bonne ambiance du laboratoire, de ma famille, de mes amis et relations, je tiens à leur manifester ma gratitude pour leur soutien au cours de toutes ces années.

Résumé

Pour qu'un dispositif automatique (un robot industriel par exemple) ait un bon rendement, il faut lui fournir des commandes proches des solutions optimales pour « l'index de performance » retenu. Cet index peut représenter par exemple la consommation d'énergie ou la durée nécessaire pour amener le dispositif dans l'état final souhaité. Par ailleurs, pour assurer un bon fonctionnement, le système doit vérifier un ensemble de contraintes qui traduisent la solidité des matériaux employés, la puissance des moteurs, etc.

Bien qu'il existe des méthodes générales pour calculer des commandes optimales, avec des contraintes sur l'état du système, le problème reste ouvert pour de nombreuses applications car certaines notions sont difficiles à prendre en compte. C'est le cas, en particulier, lorsqu'on souhaite produire des commandes lisses pour éviter l'apparition de vibrations parasites.

De plus, les solutions générales sont peu algorithmiques : elles reposent sur des calculs numériques qui pénalisent les temps de calcul et la fiabilité des résultats. Il est donc nécessaire de définir des méthodes qui tirent profit des spécificités des systèmes traités ; c'est ce qui est fait dans cette étude. L'objectif est de proposer une méthode pour calculer des commandes optimales en temps, pour les systèmes différentiellement plats.

Les propriétés de ces systèmes permettent de décomposer le problème en deux étapes distinctes : le choix d'un chemin géométrique pour une variable particulière – la sortie plate – puis le calcul de la trajectoire optimale en temps le long de ce chemin. Ceci simplifie considérablement les calculs car une fois le chemin fixé, tous les calculs sont faits dans un espace de dimension 1.

La méthode proposée est utilisée pour deux applications. La première consiste à orienter un satellite afin d'effectuer des prises de vues de très grande précision. La seconde consiste à déplacer une charge à l'aide d'une grue en maîtrisant le ballant final.

Abstract

To achieve a good efficiency with an automatic device (for instance an industrial robot), it must be provided with controls near to the optimal solutions, with respect to the chosen "performance index". This index represents for instance, the fuel consumption or the time needed to drive the device on the final state. Besides, to keep the device in good working order, its state must satisfy a set of constraints which reflect the solidity of the materials used, the power of the engines, etc.

Although there exists general methods to compute optimal controls, with state constraints, there are many problems where they can't be used, because some notions are difficult to take into account. This is the case in particular when smooth controls are needed, to avoid vibrations.

Moreover, general solutions are not very algorithmic: they depend on numerical computations which penalize the computation time and the reliability of the results. So it is necessary to define less general methods which exploit the specificity of the addressed problems. It is the main topic of this study whose objective is to define a method to compute time optimal controls for differentially flat systems.

Using the properties of these systems, the problem can be split in two independent steps: the choice of a geometric path for a specific variable – the flat output – then the computation of the time optimal trajectory along this path. This considerably simplifies the computations because, once the path is set, all the computations are done in a one dimensional space.

The suggested method is used for two applications. The first one consists in pointing a satellite for high accuracy shots. The second one consists in moving a load with a crane, while controlling accurately the final sway.

Chapitre 1

Introduction générale

Nous nous intéressons ici aux *systèmes dynamiques* en temps continu. Il s'agit de dispositifs, modélisés par des systèmes d'équations différentielles, dans lesquels on distingue deux types de paramètres : l'*état* et la *commande*. L'état $x(t) \in \mathbf{R}^n$ caractérise le système en chaque instant $t \in \mathbf{R}$, alors que la commande $u \in \mathbf{R}^m$ fait évoluer cet état. Le problème de base de l'automatique est de *commander des systèmes* c'est à dire de déterminer les commandes u permettant de contrôler l'évolution de l'état x sur un intervalle de temps $[0, T]$. À ce stade il faut distinguer deux types de solutions, la commande peut être donnée soit :

- en fonction du temps, on a alors $u = u(t)$, $0 \leq t \leq T$ qui est une commande en *boucle ouverte* ;
- en fonction de l'état et du temps, on a alors $u = u(x(t), t)$ qui est une commande en *boucle fermée* ou un *feedback*.

Pour de nombreuses raisons il n'est pas réaliste de chercher à commander un système en boucle ouverte. En effet, de telles commandes ne permettent de prendre en compte ni les approximations faites lors de la modélisation du système dynamique, ni les perturbations extérieures. De plus, elles sont souvent plus difficiles à calculer que les commandes en boucle fermée et peuvent aboutir à des solutions moins stables.

Cependant, le calcul direct des commandes en boucle fermée n'est pas toujours suffisant non plus. Dans ce cas il est alors possible de composer les deux solutions : une *commande de consigne* est calculée en boucle ouverte dont on déduit une *trajectoire de référence* pour certains paramètres dépendant de l'état et du temps ; la commande en boucle fermée a alors pour but de maintenir ces paramètres aussi proches que possible de la trajectoire de référence.

Le soin apporté à la définition de la commande de consigne dépend énormément de l'application. Dans certains cas la commande n'est jamais calculée explicitement, dans d'autres elle est fournie sous une forme simple et approximative, par exemple constante par morceaux. Pour certaines applications, par contre, il peut être nécessaire de la calculer explicitement avec une très grande précision . À titre d'exemple, les situations suivantes entrent dans ce cadre :

- Certains dispositifs de commande en boucle fermée simplifient le problème de la stabilisation autour de la trajectoire de référence en supposant que les diffé-

rences avec la trajectoire réelle restent « faibles ». Des différences trop importantes peuvent avoir des effets désastreux, en particulier amener les dispositifs de commande hors de leurs domaines de fonctionnement normal et aboutir à des comportements imprévisibles.

- De nombreux systèmes dynamiques sont très sensibles aux commandes trop brutales. Celles-ci ont en effet tendance à générer des oscillations qui perturbent le bon fonctionnement du système (satellites d’observation, grues, manipulateurs industriels ...). Dans ce cas, on peut soit ajouter un élément physique qui filtre les commandes effectivement fournies, soit s’assurer que les commandes calculées sont suffisamment lisses pour ne pas perturber le système commandé.
- Pour exploiter au mieux un dispositif on peut être amené à chercher l’enchaînement de commandes le plus rentable, on est alors amené à *planifier les trajectoires* du système avant de le commander, la phase de planification consistant à évaluer plusieurs scénarii pour ne conserver que le plus rentable. Cette démarche exige le calcul de nombreuses commandes dans un cadre où les commandes en boucle fermée ne se justifient pas.

De telles situations ont tendance à être de plus en plus fréquentes car l’amélioration des performances des dispositifs que la technologie actuelle produit, s’accompagne aussi d’un accroissement de leur sensibilité, de leur complexité et de leur coût.

Lorsque les interactions d’un tel système avec l’environnement sont négligeables, le calcul précis des commandes en boucle ouverte devient une étape nécessaire dans le processus de commande. Ceci se vérifie en particulier dans l’industrie spatiale : les satellites d’observation sont de plus en plus performants mais aussi de plus en plus coûteux. Pour réaliser une prise de vue il faut orienter le satellite dans une direction extrêmement précise en s’assurant que les commandes fournies ne nuisent pas à la stabilité de la visée. En particulier il faut éviter les commandes trop brutales car elles excitent des modes vibratoires dans la structure du satellite. Par ailleurs, pour améliorer le rendement du satellite il faut optimiser l’enchaînement des prises de vues. Cette phase d’optimisation consiste à évaluer un grand nombre d’enchaînements différents et à prendre le meilleur. Le rendement final dépendra alors de la qualité de l’évaluation et du nombre total d’enchaînements évalués. Pour ne laisser aucune place au hasard, un enchaînement est évalué en calculant les commandes qui permettent d’effectuer chacune des transitions entre prises de vues ; il est donc nécessaire de *calculer très rapidement des commandes proches de l’optimum*.

Après avoir défini l’objectif fixé, précisons le cadre dans lequel nous nous plaçons. Tout d’abord, définissons le type de représentations utilisées pour modéliser les systèmes dynamiques. Traditionnellement on cherche à mettre en avant l’évolution de l’état du système en le représentant par son *équation d’état* :

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (1.1)$$

Malgré son caractère universel, cette représentation n’est pas forcément la plus adaptée pour effectuer les calculs. Nous avons préféré exploiter un type de représentation différent : nous supposons que l’état x et la commande u peuvent s’exprimer en fonction d’un ensemble de variables *indépendantes* $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbf{R}^m$ et d’un nombre fini de leurs dérivées. Les systèmes vérifiant cette propriété sont appelés *systèmes différentiellement plats* et y est alors la *sortie plate* du système.

Cette représentation des systèmes dynamiques est moins générale que l'équation d'état ; toutefois elle n'est pas trop réductrice car elle s'applique à un grand nombre de systèmes classiques. Lorsque ce nouveau formalisme a été introduit, il a été établi que la planification de trajectoires pour les systèmes plats est extrêmement simple. De tels systèmes peuvent alors être commandés en deux étapes :

- le calcul en *boucle ouverte* d'une trajectoire de référence pour la sortie plate ;
- le suivi en *boucle fermée* de cette trajectoire.

Nous nous sommes intéressé plus particulièrement à la première étape car c'est à ce niveau que l'optimisation peut avoir lieu. Notre travail consiste à calculer, en boucle ouverte, des *trajectoires optimales pour la sortie plate*. Le problème reste complexe, nous avons donc choisi de le décomposer en deux étapes : le calcul du *chemin géométrique* suivi par la sortie plate et le calcul de la *trajectoire optimale* le long de ce chemin. Nous n'avons pas proposé de méthode générale pour optimiser le chemin géométrique, mais des résultats déjà connus permettent de traiter ce point dans certains cas particuliers.

Le but de ce mémoire est de proposer une méthode pour calculer, en boucle ouverte, des commandes optimales en temps, pour des systèmes différentiellement plats, lorsqu'on impose à la sortie plate du système de suivre un chemin géométrique particulier.

Il reste à préciser les outils qui seront utilisés pour résoudre le problème : nous cherchons à réduire au maximum les calculs numériques au profit des calculs symboliques. En choisissant cette approche nous avons à l'esprit deux objectifs principaux : d'une part accélérer les temps de calculs, d'autre part obtenir une méthode fiable qui évite les problèmes mal conditionnés pour les méthodes numériques. Ici, le calcul symbolique est un outil très intéressant car il permet entre autres de décomposer le problème initial en sous-problèmes moins complexes, de précalculer un certain nombre de résultats intermédiaires et de reformuler certaines expressions destinées à des traitements numériques. Chacun de ces points est particulièrement important pour pouvoir définir les algorithmes à mettre en œuvre. De plus ils simplifient l'étape finale de programmation dans un langage de type C++, C ou FORTRAN.

Pour mieux situer notre travail nous commençons par présenter succinctement, dans la partie 1.1, une définition des problèmes de calcul de commandes optimales ainsi que les méthodes permettant de les résoudre. De nombreuses approches sont possibles, nous nous restreignons donc au *Principe du Maximum* (ou du *Minimum*) de *Pontryagin*, qui nous intéresse le plus. Cette mise en situation nous permettra de faire apparaître les difficultés du problème et les insuffisances des méthodes existantes, en particulier pour les problèmes prenant en compte des *contraintes sur l'état du système*.

Dans le cas des systèmes plats, la formulation du problème varie notablement. Nous verrons donc comment ces notions évoluent lorsqu'on cherche à les appliquer à de tels systèmes. Ceci nous amènera à la partie 1.2 qui constitue une introduction détaillée à la méthode générale que nous proposons pour calculer des commandes optimales en temps, lorsqu'on impose le chemin géométrique suivi par la sortie plate du système.

Enfin, en 1.3 et 1.4 nous présenterons les deux applications auxquelles nous nous sommes intéressés : la commande en attitude d'un satellite, pour laquelle la méthode

a été entièrement programmée en C++, et la commande d'une grue, pour laquelle la faisabilité des calculs a été vérifiée à l'aide de programmes MAPLE.

1.1 Calcul de commandes optimales

1.1.1 Index de performance

Lorsqu'on parle d'optimisation il est nécessaire d'indiquer précisément, d'une part, ce qu'on cherche à optimiser, d'autre part, le contexte dans lequel on souhaite effectuer l'optimisation. Nous supposons ici que l'évolution de l'état x du système, sous l'action de la commande u , est décrite par l'équation d'état (1.1), l'état initial $x(0) = x_0$ étant fixé. Le problème de la *commande optimale* d'un tel système revient à chercher u et x , vérifiant (1.1), de façon à minimiser l'index de performance J :

$$J = \int_0^T F(x, u, t) dt + S(x(T), T) \quad (1.2)$$

où les fonctions $F : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}$ et $S : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ sont les fonctions de pondération.

Pour illustrer cette notion, voici les fonctions de pondération utilisées dans certains problèmes classiques :

- minimisation du temps total T : $F = 1$ et $S = 0$;
- minimisation de l'énergie consommée : $F = u^2$ et $S = 0$;
- suivi d'une trajectoire de consigne $x_c(t)$: $F = (x(t) - x_c(t))^2$ et $S = 0$;
- interception d'un point se déplaçant suivant la trajectoire $y(t)$: $F = 0$ et $S = x(T) - y(T)$.

En général, un tel problème d'optimisation n'a de sens que si on précise les conditions dans lesquelles on souhaite voir le système évoluer. Ces conditions sont en fait données sous forme de contraintes et nous les définissons dans ce qui suit.

1.1.2 Contraintes terminales

Contrairement à l'état initial x_0 qui est effectivement donné comme un point de \mathbf{R}^n , l'état final souhaité peut être défini d'une façon plus générale par des *contraintes terminales* :

$$a(x(T), T) \geq 0 \quad (1.3)$$

$$b(x(T), T) = 0 \quad (1.4)$$

En général, on impose aux fonctions $a : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^l$ et $b : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^l$ la condition suivante : les dérivées par rapport à x de chacune des composantes de a et b doivent être linéairement indépendantes.

Il existe de nombreuses méthodes pour résoudre le problème d'optimisation défini par les relations (1.1), (1.2), (1.3) et (1.4), tant dans le cas linéaire que dans le cas non linéaire. Par exemple, on peut construire un nouvel index de performance J' qui *adjoint*

l'équation d'état (1.1) et la contrainte terminale (1.4) à l'ancien index J défini par (1.2). Pour cela, il faut introduire deux nouvelles variables : $\lambda(t) \in \mathbf{R}^n$, qui dépend du temps, pour prendre en compte l'équation d'état, et une constante $\nu \in \mathbf{R}^l$ pour prendre en compte la contrainte terminale. Le nouvel index J' est alors défini de telle sorte que pour x et u vérifiant (1.1) et (1.4) on ait $J = J'$, ce qui nous donne :

$$J' = S(x(T), T) + \nu^T b(x(T), T) + \int_0^T [F(x, u, t) + \lambda^T(t) (f(x, u, t) - \dot{x})] dt$$

On définit alors le *Hamiltonien* H par :

$$H(x, u, \lambda, t) = F(x, u, t) + \lambda^T(t) f(x, u, t) \quad (1.5)$$

L'expression de J' devient alors :

$$J' = S(x(T), T) + \nu^T b(x(T), T) + \int_0^T [H(x, u, t) - \lambda^T(t) \dot{x}] dt \quad (1.6)$$

Où λ^T et ν^T représentent les vecteurs λ et ν transposés.

Selon la théorie de Lagrange, le minimum de J , calculé en tenant compte des contraintes (1.1) et (1.4), est atteint lorsque le minimum de J' est atteint. Pour obtenir ce minimum, il faut calculer la dérivée dJ' de J' . Apportons donc quelques précisions sur les notions de *différentielles* et de *variations* utilisées ici. La figure (1.1) illustre la difficulté qui apparaît : étant donné que $x(t)$ est une fonction continue du temps, les différentielles $dx(t)$ et dt ne sont pas indépendantes. Toutefois, à un instant donné t , on peut définir la variation $\delta x(t)$ induite par $dx(t)$, ce qu'illustre la figure (1.1) pour $t = T$. On a alors la relation suivante :

$$dx(T) = \delta x(T) + \dot{x}(T) dT \quad (1.7)$$

Pour calculer la dérivée de J' on applique la formule de Leibniz sur l'expression (1.6) et on obtient :

$$\begin{aligned} dJ' &= (S_x + b_x^T \nu)^T dx|_T + (S_t + b_t^T \nu) dt|_T + b^T|_T d\nu \\ &+ (H - \lambda^T \dot{x}) dt|_T - (H - \lambda^T \dot{x}) dt|_0 \\ &+ \int_0^T [H_x^T \delta x + H_u^T \delta u - \lambda^T \delta \dot{x} + (H_\lambda - \dot{x})^T \delta \lambda] dt \end{aligned} \quad (1.8)$$

Les lettres x , u , λ et t utilisées en indice représentent une dérivée partielle par rapport à la variable correspondante. Dans cette expression, on peut supprimer la variation $\delta \dot{x}$ en utilisant une intégration par parties :

$$\int_0^T -\lambda^T \delta \dot{x} dt = -\lambda^T \delta x|_T + \lambda^T \delta x|_0 + \int_0^T \dot{\lambda}^T \delta x dt$$

Par ailleurs, conformément à (1.7), on peut aussi procéder aux substitutions suivantes :

$$dx|_0 = (\delta x + \dot{x} dt)|_0 \quad dx|_T = (\delta x + \dot{x} dt)|_T$$

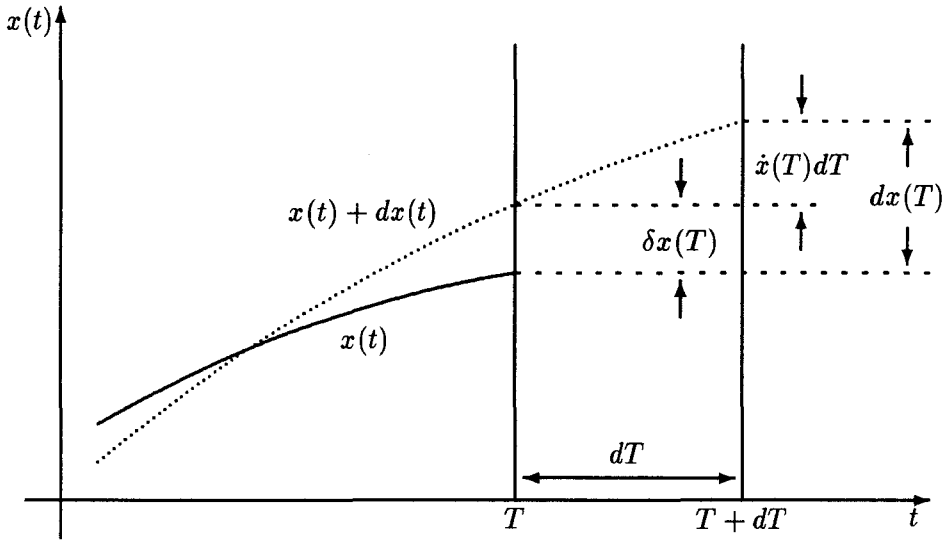


FIG. 1.1 - Relation entre la variation δx et la différentielle dx

Enfin, l'instant initial $t = 0$ étant fixé et l'état initial $x(0) = x_0$ étant précisément défini, les variations $dt|_0$ et $dx|_0$ sont donc toutes deux nulles. L'expression de dJ' devient alors :

$$dJ' = (S_x + b_x^T \nu - \lambda)^T dx|_T + (S_t + b_t^T \nu + H) dt|_T + b^T|_T d\nu + \int_0^T [(H_x + \dot{\lambda})^T \delta x + H_u^T \delta u + (H_\lambda - \dot{x})^T \delta \lambda] dt \quad (1.9)$$

Le minimum est atteint lorsque cette dérivée s'annule. Or les variations δx , δu et $\delta \lambda$ sont indépendantes, il faut donc annuler chacun de leurs coefficients. Par ailleurs, lorsque la solution optimale est atteinte, la relation $b(x(T), T) = 0$ est vérifiée, on aboutit donc aux conditions nécessaires résumées dans le tableau (1.1). Pour résoudre le problème d'optimisation il faut calculer la valeur de ν et les fonctions $x(t)$, $\lambda(t)$ et $u(t)$ qui vérifient ce système d'équations. Il faut ensuite s'assurer qu'il s'agit bien d'un minimum global (les conditions obtenues ici sont nécessaires mais pas suffisantes).

1.1.3 Contraintes sur la commande

Pour de nombreux problèmes de commandes optimales, il manque un élément capital à la définition donnée dans le tableau (1.1) : les *limites physiques* du système commandé ne sont pas prises en compte. Par exemple, dans le cas des commandes optimales en temps d'un système mécanique, on pourrait aboutir à la téléportation si on ne se fixait pas des restrictions sur la puissance des moteurs ou la solidité des matériaux. Il faut donc compléter le problème et pour cela plusieurs approches sont possibles. Celle qui est retenue dans les ouvrages traitant des commandes optimales, tels que [Lewis86] ou [Faurre88], consiste à définir des contraintes supplémentaires sur la commande u . En général ces contraintes imposent à u d'appartenir à un compact \mathcal{U} , par exemple en bornant chacune des m composantes de u . Pour la commodité des calculs, on peut être amené à faire les hypothèses suivantes sur \mathcal{U} :

- \mathcal{U} est fermé par translation : $t \mapsto u(t) \in \mathcal{U} \implies t \mapsto u(t + \tau) \in \mathcal{U}$;

Définition du problème d'optimisation	
Modélisation du système:	$\dot{x} = f(x, u, t) \quad t \geq 0$
Index de performance:	$J = \int_0^T F(x, u, t) dt + S(x(T), T)$
Contrainte terminale:	$b(x(T), T) = 0$
Conditions nécessaires imposées à la commande optimale	
Hamiltonien:	$H(x, u, \lambda, t) = F(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$
Équation d'état:	$\dot{x} = f = H_\lambda \quad t > 0$
Équation adjointe:	$\dot{\lambda} = -f_x^T \lambda - F_x = -H_x \quad t \leq T$
Condition de point fixe:	$0 = f_u^T \lambda + F_u = H_u \quad t \leq T$
Conditions aux limites:	$(S_x + b_x^T \nu - \lambda)^T _T dx(T) + (S_t + b_t^T \nu - H)^T _T dT = 0$

TAB. 1.1 - Commande optimale avec contraintes terminales

- \mathcal{U} est fermé par partition : si un segment de fonction appartient à \mathcal{U} , alors tout sous-segment lui appartient aussi ;
- \mathcal{U} est fermé par réflexion : $t \mapsto u(t) \in \mathcal{U} \implies t \mapsto u(-t) \in \mathcal{U}$;
- \mathcal{U} est fermé par concaténation : si deux segments, définis sur $[t_0, t_1]$ et $[t_1, t_2]$ appartiennent à \mathcal{U} , alors la concaténation des deux segments appartient à \mathcal{U} .

Une commande qui appartient à \mathcal{U} est appelée *commande admissible*.

Cette nouvelle contrainte ne modifie que très peu le problème et [Pontryagin et al.62] établit que les conditions nécessaires résumées dans le tableau (1.1) restent applicables, pour peu que la *condition de point fixe* soit remplacée par la condition plus générale :

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad H(x^*, u^*, \lambda^*, t) \leq H(x^*, u, \lambda^*, t) \quad (1.10)$$

Où x^* , u^* et λ^* représentent les solutions optimales du système. Cette condition nécessaire est le *Principe du Minimum de Pontryagin* (PMP) et elle traduit simplement le fait que le Hamiltonien doit être minimisé par les commandes admissibles u pour les valeurs optimales de l'état x et de l'état adjoint λ .

Pour illustrer ce principe, étudions le problème de la commande optimale en temps, pour un système linéaire, lorsque les contraintes sur la commande sont de la forme $|u_i| \leq 1$ ($1 \leq i < m$). Le problème s'écrit alors :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad J = \int_0^T 1 dt$$

Où A est une matrice carrée $n \times n$ et B une matrice $n \times m$. On en déduit immédiatement l'expression du Hamiltonien et de sa dérivée partielle par rapport à u :

$$H = 1 + \lambda^T (Ax + Bu) \quad \frac{\partial H}{\partial u} = H_u = \lambda^T B$$

La dérivée partielle H_u ne dépend pas de u , il est donc nécessaire d'utiliser directement le PMP énoncé en (1.10) qui se traduit ici par :

$$1 + (\lambda^*)^T(Ax^* + Bu^*) \leq 1 + (\lambda^*)^T(Ax^* + Bu)$$

À ce point nous voyons l'intérêt qu'il y a à faire apparaître les valeurs *optimales* de l'état et de l'état adjoint, des *deux côtés* de l'inégalité. En effet, cela nous permet de la simplifier pour obtenir la condition suivante sur u^* :

$$(\lambda^*)^T Bu^* \leq (\lambda^*)^T Bu$$

Il faut donc trouver la valeur de u qui donne à $(\lambda^*)^T Bu$ la valeur la plus proche de $-\infty$. Soit B^i la i^e colonne de la matrice B , la commande $u(t)$ cherchée doit rendre aussi petite que possible la quantité :

$$\lambda^T(t)Bu(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t)B_i^T\lambda(t)$$

Ceci doit être vérifié pour tout $t \in [0, T]$, on doit donc avoir :

$$u_i(t) = -\text{sgn}(B_i^T\lambda(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } B_i^T\lambda(t) < 0 \\ -1 & \text{si } B_i^T\lambda(t) \geq 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Ainsi, chacune des composantes u_i de u est constante par morceaux et prend ses valeurs sur les bornes de \mathcal{U} ; ce type de commande est appelé *commande bang-bang*.

Les changements de signe coïncident avec les changements de signe de la composante correspondante de $B_i^T\lambda(t)$; pour cette raison, la quantité $B^T\lambda(t)$ est appelée la *fonction de commutation*.

1.1.4 Contraintes sur l'état du système

Le fait d'imposer des contraintes sur la commande n'est pas toujours suffisant. On peut souhaiter prendre en compte des *contraintes sur l'état du système*, ou des contraintes faisant intervenir la *commande et l'état*. Ceci peut s'exprimer par les inégalités suivantes :

$$g(x(t), u(t), t) \geq 0 \quad (1.12)$$

$$h(x(t), t) \geq 0 \quad (1.13)$$

Où les fonctions $g : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^s$ et $h : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^q$ sont continûment différentiables pour chacun de leurs paramètres.

Pour distinguer les *contraintes mixtes*, définies par le système d'inéquations (1.12), des *contraintes pures*, définies en (1.13), on impose aux composantes de g de dépendre explicitement de u . Il est même souhaitable que les dérivées par rapport à u des composantes de g soient linéairement indépendantes.

Bien que cette distinction soit fréquente dans la littérature consacrée à ce sujet, elle est parfois superflue, en particulier lorsqu'une relation est établie entre h et u , par dérivation. Cette démarche, qu'on trouve déjà dans [Leitmann66], consiste à calculer les dérivées successives $h_j^{(i)}$, $i \geq 0$, de chacune des l' composantes h_j ($1 \leq j \leq l'$) de h .

Modélisation du système:	$\dot{x} = f(x, u, t) \quad t \geq 0$	(1.1)
Index de performance:	$J = \int_0^T F(x, u, t)dt + S(x(T), T)$	(1.2)
Contraintes terminales:	$a(x(T), T) \leq 0$	(1.3)
	$b(x(T), T) = 0$	(1.4)
Contraintes mixtes:	$g(x(t), u(t), t) \leq 0$	(1.12)
Contraintes pures:	$h(x(t), t) \leq 0$	(1.13)

TAB. 1.2 - Problème d'optimisation avec contraintes sur l'état du système

À chacune des étapes du calcul on utilise l'équation d'état (1.1) pour remplacer \dot{x} par $f(x, u, t)$. On définit alors l'ordre de la contrainte d'état h par le vecteur $p \in \mathbf{R}^l$, dont les composantes p_j ($1 \leq j \leq l'$) sont définies ainsi :

$$\frac{\partial h_j^{(i)}}{\partial u}(x, u, t) = 0 \quad \forall i, 0 \leq i < p_j, \quad \frac{\partial h_j^{(p_j)}}{\partial u}(x, u, t) \neq 0$$

Avec cette définition de l'ordre des contraintes d'état, on pourrait considérer que les contraintes mixtes sont des contraintes d'ordre 0. Comme pour les autres contraintes, on impose généralement aux dérivées partielles, par rapport à u , de $h_j^{(p_j)}$ ($1 \leq j \leq l'$), d'être linéairement indépendantes.

Exemple 1.1.1 Pour illustrer ce mécanisme, prenons un système dont l'état $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ et la commande $u \in \mathbf{R}$ sont liés par l'équation d'état :

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad \dot{x}_2 = u$$

Imposons alors à l'état du système de vérifier les contraintes pures :

$$|x_1 - c_1| \leq 0 \qquad |x_2 - c_2| \leq 0$$

Où c_1 et c_2 sont des constantes. On a alors $h(x, t) = (|x_1(t) - c_1|, |x_2(t) - c_2|)$. Un calcul direct nous donne la dérivée $\dot{h} = (|\dot{x}_1(t)|, |\dot{x}_2(t)|)$; en utilisant l'équation d'état, on peut remplacer (\dot{x}_1, \dot{x}_2) par (x_2, u) , on obtient alors $\dot{h} = (|x_2|, |u|)$. La deuxième composante de \dot{h} dépend directement de u , mais pas la première, on poursuit le calcul et on obtient $h_1^{(2)} = |u|$. On en déduit que l'ordre de h est $p = (2, 1)$.

On aboutit alors au problème d'optimisation résumé dans le tableau (1.2). Il faut déterminer si une solution existe et, dans ce cas, la calculer effectivement. Plusieurs résultats permettent actuellement de décider de l'existence de solutions, en particulier le théorème classique de Filippov-Cesari dont l'énoncé et la preuve sont donnés dans [Cesari83]. Nous ne développerons pas ce point car nous nous intéressons plutôt au calcul effectif de la solution.

Dans la suite nous ne considérerons que les commandes u et les trajectoires x , de l'état du système, qui vérifient les contraintes, ce qui conduit aux définitions suivantes :

Définition 1.1.1 On appelle $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$ une paire admissible si $x(\cdot)$ et $u(\cdot)$ vérifient

l'équation (1.1) et si les contraintes (1.3), (1.4), (1.12) et (1.13) sont vérifiées. Une paire admissible qui minimise globalement (1.2) est appelée une paire optimale.

Le fait de prendre en compte des contraintes sur l'état du système ne change pas la nature du problème. Par contre, les conditions nécessaires que les solutions doivent vérifier sont beaucoup plus difficiles à établir et leurs expressions sont plus complexes ; par conséquent le calcul des solutions optimales est très coûteux. L'idée de base consiste à définir un *Lagrangien*, L , qui prend en compte les contraintes (1.12) et (1.13), en plus du Hamiltonien, initialement défini par l'équation (1.5). À ce stade, les contraintes pures peuvent être *adjointes* au Lagrangien, soit *directement*, soit *indirectement* par le biais des dérivées de h . On a alors :

$$H^p(x, u, \lambda_0, \lambda^p, t) = \lambda_0 F(x, u, t) + \lambda^p f(x, u, t) \quad (1.14)$$

$$L^p(x, u, \lambda_0, \lambda^p, \mu, \nu^p, t) = H^p(x, u, \lambda_0, \lambda^p, t) + \mu(t)g(x, u, t) + \nu^p(t)h^{(p)}(x, u, t) \quad (1.15)$$

Les multiplicateurs $\mu(t)$ et $\nu^p(t)$ étant des vecteurs lignes de \mathbf{R}^s et \mathbf{R}^q respectivement.

Pour aboutir à la commande optimale u^* , on cherche à nouveau la commande admissible qui minimise le Hamiltonien lorsque l'état du système suit une trajectoire optimale $x^*(t)$. Les conditions nécessaires obtenues dans ce cas présentent toutefois des différences avec celles qui avaient été résumées dans le tableau (1.1). En particulier, l'équation adjointe et les conditions de point fixe ne concernent plus les dérivées de H mais les dérivées de L ; de plus des conditions supplémentaires sont introduites pour définir les multiplicateurs $\mu(t)$ et $\nu(t)$. Nous n'allons pas détailler les théorèmes qui permettent d'établir les conditions nécessaires ; par contre nous allons préciser le rôle attribué au Lagrangien, en montrant comment les multiplicateurs $\mu(t)$ et $\nu(t)$ sont calculés.

Soit $x^*(t)$, une trajectoire optimale, définie sur $[0, T]$. On caractérise des intervalles $[t_1, t_2] \subseteq [0, T]$, par rapport à chacune des composantes h_i de h , avec l'un des critères suivants :

- $\forall t \in]t_1, t_2[, h_i(x^*(t), t) < 0$, il s'agit alors d'un *intervalle intérieur* ;
- $\forall t \in [t_1, t_2], h_i(x^*(t), t) = 0$, il s'agit alors d'un *intervalle limite* ou *intervalle de saturation*. La date t_1 est une *date d'entrée*, si un intervalle intérieur finit en t_1 , et la date t_2 est une *date de sortie*, si un intervalle intérieur commence en t_2 . Lorsqu'une date d'entrée est égale à une date de sortie, on parle de *date de jonction*.

Si on suppose que cette trajectoire optimale admet un nombre fini de dates de jonction, on peut définir une partition finie de $[0, T]$ dont chacun des intervalles est soit un intervalle intérieur, soit un intervalle limite, pour chacune des composantes de $h(x^*, t)$. Un intervalle $]t_1, t_2[$ de cette partition est donc un intervalle limite pour s' composantes de $h(x^*, t)$. On peut alors définir $\nu^p(t) \geq 0$ tel que $\nu^p(t)h(x^*, t) = 0$, pour cela il suffit d'imposer $\nu_i^p = 0$ si $]t_1, t_2[$ est un intervalle intérieur pour h_i . Une démarche similaire permet de définir $\mu(t) \geq 0$ sur $[0, T]$, tel que $\mu(t)g(x^*, u^*, t) = 0$. Ce mécanisme permet de réduire considérablement le coût des calculs puisque le problème se réduit au calcul de la partition de $[0, T]$ et au choix des *contraintes à saturer* sur chacun des intervalles de la partition.

De très nombreux travaux ont été effectués sur ce type de problème et les conditions nécessaires que les solutions doivent vérifier ont été établies pour traiter une grande variété de cas. On peut d'ailleurs trouver une synthèse très complète des applications du Principe du Maximum dans [Hartl et al.95]. De cette synthèse il ressort que, sur le plan théorique, tous les résultats obtenus n'ont pas la rigueur et la clarté que l'on pourrait souhaiter. En fait, de nombreux théorèmes ne sont démontrés que dans des cas particuliers et aucune des approches proposées ne permet de prendre en compte simultanément les contraintes mixtes et des contraintes pures d'ordre quelconque. En pratique, les problèmes ne comportant que des contraintes mixtes sont les plus simples à traiter et la complexité a tendance à augmenter dès que des contraintes pures sont prises en compte ; de plus cette complexité augmente avec l'ordre des contraintes.

En dépit des imperfections décrites, ces résultats présentent un grand intérêt pratique et peuvent être directement utilisées pour calculer des solutions optimales pour une grande variété problèmes.

1.2 Application aux systèmes plats

Il reste de nombreux points pour lesquels l'application du Principe du Maximum, tel qu'il a été présenté précédemment, reste insuffisante. En particulier, il faut noter que les systèmes d'équations qui traduisent les conditions nécessaires sont souvent difficiles à résoudre. En effet, ces systèmes d'équations différentielles contiennent un grand nombre de variables et sont souvent *mal conditionnés*. De ce fait, en dépit de travaux tels que [Teo et al.89], les algorithmes numériques restent inefficaces pour résoudre ces problèmes. Par ailleurs, la façon dont le problème est posé n'est pas toujours satisfaisante. Enfin, dans de nombreux cas, cette approche ne permet pas d'obtenir des commandes indépendantes de l'état.

Parmi les cas difficiles à traiter par l'application du Principe du Maximum nous aimerions souligner le calcul de *commandes lisses*. Dans le cas des systèmes linéaires, avec des contraintes sur la commande uniquement, nous avons obtenu une commande de type *bang-bang*, définie par l'équation (1.11). Pour obtenir des commandes lisses, il est généralement nécessaire d'ajouter des composantes aux variables d'état, ce qui a pour effet d'accroître la complexité des calculs.

Le calcul de *commandes lisses* est particulièrement important dès que des modes vibratoires sont susceptibles d'apparaître. Ces modes sont indésirables pour deux raisons. D'une part, il est difficile de les prendre en compte dans les calculs, comme le montre [Joshi et al.95] dans le cas des câbles de grues. D'autre part, ils provoquent une usure importante du matériel et ils perturbent le fonctionnement du système. Or, [Andre et al.94] et [Kyriakopoulos et al.94] mettent en évidence qu'une borne sur le *jerk* (dérivée de l'accélération) permet de réduire les vibrations, dans le cas des manipulateurs industriels. Il est donc important de pouvoir spécifier explicitement, dans la définition du problème, que des contraintes sont imposées à plusieurs dérivées successives d'une même variable.

Pour ces raisons, nous avons choisi une approche différente. Nous ne représentons plus le système à commander par son équation d'état mais nous supposons que l'état x et la commande u peuvent s'exprimer simplement en fonction de m quantités indépendantes $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbf{R}^m$, et d'un nombre fini de leurs dérivées. Cette situation est celle obtenue avec les systèmes *différentiellement plats*, définis précisément dans la partie 3.2.

Ces systèmes sont très importants car ils permettent de modéliser de très nombreux dispositifs ; les exemples cités dans la partie 3.2.3 en témoignent et mettent en évidence la diversité des champs d'applications concernés.

Pour de tels systèmes, la distinction entre commande et état n'a plus de raisons d'être et on peut confondre contraintes pures et contraintes mixtes. On ne considère plus que des variables du système qui s'expriment en fonction de la *sortie plate* y et de ses dérivées. Chacune des contraintes définies en (1.12) et (1.13) peut alors s'écrire :

$$v(y(t), \frac{d}{dt}y(t), \dots, \frac{d^\beta}{dt^\beta}y(t), t) \geq 0$$

Où $v : (\mathbf{R}^m)^{\beta+1} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est l'une des composantes de g ou de h .

Cette définition des contraintes permet de prendre en compte n'importe quelle variable du système, sans avoir à changer de représentation. En particulier, on peut très facilement ajouter des contraintes sur plusieurs dérivées successives d'une même variable.

Plus généralement, toutes les variables utilisées pour définir le problème, tel qu'il est résumé dans le tableau (1.2), s'expriment en fonction de la sortie plate $y(t)$ et d'un nombre fini de ses dérivées. C'est ce que nous avons fait en 3.3 en nous limitant strictement au cas des commandes optimales en temps.

Cette nouvelle définition ne perd rien en généralité, elle aboutit au contraire à une formulation plus simple qui fait très clairement apparaître deux éléments distincts :

- un *rendez-vous* défini par les *conditions initiales* et les *contraintes terminales* ;
- un *ensemble de bornes* que les variables du système doivent toujours vérifier.

Or, dans le cas des systèmes plats, le problème du rendez-vous est extrêmement simple à résoudre. En effet, les contraintes terminales peuvent être facilement transformées en *conditions de jets* sur y et sur ses dérivées. Étant donné que les composantes de la sortie plate sont indépendantes, on peut très facilement lui imposer de suivre un *chemin géométrique* qui vérifie les conditions de jets. Ce chemin géométrique est une courbe de dimension 1 définie dans \mathbf{R}^m qui peut être calculé par l'un des deux moyens que nous développerons dans la partie 3.4.

La méthode générale que nous proposons a pour objectif de calculer la *trajectoire optimale en temps* le long d'un chemin géométrique imposé, mais elle ne permet pas d'optimiser les chemins. De ce fait elle s'applique plutôt aux problèmes pour lesquels les caractéristiques géométriques de la solution ont peu d'importance, ou aux problèmes pour lesquels on connaît des règles permettant de construire des chemins de « bonne » qualité. Les exemples vérifiant l'une ou l'autre de ces conditions sont assez courants ; citons par exemple [Shiller89], en robotique, qui construit des chemins très proches de la solution optimale.

Le calcul d'une *trajectoire le long d'un chemin* revient à associer une *échelle de temps* à la description géométrique du chemin. Cette approche est assez courante en robotique. On peut citer par exemple [Shiller et al.90] ou [Croft et al.95], qui cherchent à maximiser (ou minimiser) l'accélération le long du chemin choisi, ou [Pledel et al.95], qui cherche la solution d'un problème d'optimisation en temps et en énergie, ou enfin [Jamhour et al.96], qui cherche une approximation de l'échelle de temps optimale, construite avec des *splines cubiques*.

La solution que nous avons retenue généralise les résultats de [Chen et al.90] et [Chen et al.92] qui mettent en évidence que, sur la trajectoire optimale en temps, il y a toujours au moins un *couple* qui est saturé. Pour pouvoir appliquer un principe de ce type, nous commençons par mettre en évidence, dans la partie 3.5, qu'il suffit de connaître l'une des variables du système pour pouvoir recalculer facilement la trajectoire correspondante, le long du chemin imposé.

Il reste alors à définir des conditions sur les variables du système, permettant d'aboutir à la *trajectoire optimale en temps*, ce qui est l'objet de la partie 3.6. Nous commençons par établir, en 3.6.1, qu'une condition nécessaire pour que la trajectoire soit optimale est d'avoir une variable *polynomiale par morceaux*, chacun des polynômes *saturant une contrainte*. Ce résultat est particulièrement intéressant car pour connaître la trajectoire optimale, il suffit de connaître les *dates de commutation* des contraintes saturées. Cela revient à connaître les dates de jonction entre les polynômes et la contrainte saturée par chacun des polynômes.

Pour aboutir effectivement à un algorithme de calcul, nous proposons une méthode de construction, en 3.6.2, qui minimise le nombre de polynômes obtenus et nous montrons que, dans le cas des *fonctions convexes*, cette construction correspond effectivement à la solution optimale.

Ces éléments nous permettent d'établir une méthode de calcul de la trajectoire optimale. Dans la partie 3.7 nous détaillons le cas où les contraintes ne concernent qu'une seule variable et ses dérivées. Le problème d'optimisation se réduit alors au calcul des dates auxquelles il faut commuter d'un polynôme à un autre. Dans les cas les plus favorables, toutes ces dates de commutation sont *solutions d'un système d'équations algébriques*, ce qui est le cas du satellite. Dans les cas les moins favorables, certaines dates de commutation sont des paramètres d'une équation différentielle qui peuvent être calculés numériquement. La méthode est complétée dans la partie 3.8, où nous montrons comment prendre en compte plusieurs variables dans les contraintes.

1.3 Commande en attitude d'un satellite

Nous avons appliqué la méthode de calcul de trajectoires optimales en temps au cas de la commande en attitude d'un satellite, présenté dans le chapitre 4. Le problème complet tient compte de la matrice d'inertie, qui varie dans le temps et dont les coefficients de couplage ne sont pas négligeables. Toutefois, pour simplifier l'exposé, la plus grande partie de la méthode est proposée pour un problème idéalisé dans lequel la matrice d'inertie est constante et diagonale. Cet exemple est directement inspiré d'une étude réalisée à la demande du CNES dans [Jacob et al.94] et [Jacob et al.95b].

Pour traiter ce problème nous faisons un usage abondant des *quaternions* dont nous rappelons la définition et les principales propriétés en 2.2. Traditionnellement les rotations dans l'espace sont représentées par des *quaternions unitaires*, nous rappellerons donc en 2.3 le lien entre les rotations et les quaternions unitaires. Toutefois, il nous a semblé très intéressant d'étendre ces principes au cas des quaternions de norme quelconque pour pouvoir représenter les rotations par des quaternions polynomiaux. Cette nouvelle approche, détaillée en 4.2, nous permet de nous affranchir des radicaux ou des fonctions trigonométriques qui étaient nécessaires dans le cas des quaternions unitaires, ce qui simplifie les expressions manipulées et accélère les calculs.

Après cette présentation des outils utilisés, nous suivons la méthode générale, proposée au chapitre 3. Pour commencer, en 4.3 nous donnons explicitement les expressions permettant de calculer les conditions de jets sur l'attitude à partir des conditions de rendez-vous. Pour ce problème, l'utilisation des *courbes paramétrées* est très commode pour représenter le *chemin suivi en attitude*. Nous proposons donc, en 4.4, plusieurs méthodes pour calculer ces courbes : l'une applique directement le principe proposé en 3.4.3, les autres exploitent des propriétés spécifiques des rotations. Enfin, dans la partie 4.5 nous détaillons l'algorithme complet d'optimisation pour le problème simplifié, puis nous l'étendons au problème complet.

Cet exemple correspond au cas le plus favorable : le fait que le système soit sans dérive se traduit ici par la conservation des intégrales de chacune des composantes du vecteur vitesse instantané de rotation (ou du moment). Ainsi, lorsque la saturation ne porte que sur une seule composante de la vitesse de rotation, il est possible de calculer toutes les dates de commutation en résolvant un système d'équations algébriques. Cette propriété est particulièrement utile puisqu'elle permet de calculer les commandes optimales extrêmement rapidement. Nous nous sommes donc posé la question de l'optimisation du chemin suivi et il se trouve que dans ce cas particulier, plusieurs approches semblent prometteuses. Ce point, initialement abordé en 4.4.3 est approfondi en 4.6 où nous introduisons une condition nécessaire pour que le chemin suivi soit optimal ; de cette condition nécessaire, nous déduisons une méthode itérative pour optimiser le chemin en attitude suivi.

Cet algorithme, déjà présenté dans [Jacob et al.95a] a été programmée en C++. Nous terminerons donc par quelques remarques concernant la programmation de la méthode d'optimisation sur cet exemple. Nous en profitons pour présenter quelques points annexes tels que l'approximation des commandes obtenues par des polynômes de faible degré et la correction des erreurs sur l'attitude finale.

1.4 Commande d'une grue

Ce second exemple a pour objectif de valider la méthode dans un cas moins favorable. Il s'agit d'un problème qui a un grand intérêt, tant sur le plan des perspectives industrielles que sur le plan purement scientifique, et la littérature qui y est consacrée est abondante. Nous commençons donc dans la partie 5.1 par faire le point sur le problème de la *commande de la grue* et sur les difficultés rencontrées.

En 5.2 nous définissons précisément le problème que nous proposons de traiter. Avec les hypothèses simplificatrices retenues, la modélisation obtenue est simple et très classique. Pour le choix des conditions de rendez-vous et des contraintes dynamiques, nous avons cherché à mettre en avant la nécessité de construire des *commandes optimale extrêmement lisses*. Ceci se traduit par des contraintes dynamiques qui portent sur un *nombre important de dérivées successives* des variables concernées. Par conséquent il faudra prendre en compte un *grand nombre de conditions de rendez-vous*.

Pour calculer le chemin que la charge doit suivre nous appliquons, en 5.3, la méthode générale : nous commençons par donner les formules permettant de calculer les conditions de jets à partir des conditions de rendez-vous, puis nous en déduisons le chemin. Contrairement au cas du satellite, les courbes paramétrées ne permettent pas de décrire correctement la géométrie des chemins les plus utiles ; nous mettons donc l'accent sur

les courbes implicites.

Une fois que le chemin suivi par la charge a été calculé, nous indiquons en 5.4 comment calculer la trajectoire optimale le long de ce chemin. Les calculs diffèrent de ceux qui sont proposés pour le satellite, principalement pour les raisons suivantes :

- le chemin est défini par une courbe implicite, en 5.4.1 nous indiquons donc comment calculer directement la trajectoire $(x(t), y(t), z(t))$ sans passer par un paramétrage intermédiaire ;
- l'évolution de l'état du système n'est pas proportionnel à la commande, donc il n'y a pas conservation des intégrales et une étape supplémentaire de calculs numériques est nécessaire pour construire les variables saturées. Ces calculs sont détaillés en 5.4.2 et 5.4.3.

Enfin, pour valider la méthode, un exemple numérique est proposé en 5.5. Cet exemple, calculé à l'aide de MAPLE traite le cas où on déplace une charge d'un point à un autre, tout en effectuant un détour pour éviter un obstacle situé sur la trajectoire.

Chapitre 2

Quaternions

2.1 Introduction

Les *nombre hypercomplexes* ou *quaternions*, découverts en 1843 par Sir William Rowan Hamilton (1805–1865), sont une généralisation des nombres complexes. Abraham de Moivre (1667–1754) et Carl Friedrich Gauss (1777–1855) ayant établi le lien entre les rotations planes et les nombres complexes, Hamilton a cherché à étendre ce concept aux rotations d'axes concourants de l'espace Euclidien à 3 dimensions E_3 . Après avoir vainement cherché des « trinions » il a découvert le quaternion qui associe trois quantités imaginaires i , j et k à une valeur réelle :

$$q = t + ix + jy + kz \quad t, x, y, z \in \mathbf{R} \quad (2.1)$$

L'ensemble des quaternions est généralement noté \mathbf{H} ; il s'agit d'un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension 4 dont la base canonique est $\{1, i, j, k\}$. Par la suite nous allons munir \mathbf{H} d'une structure de corps non commutatif.

Les constantes de structure i , j , k sont toutes trois des racines de -1 : $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Il est possible de faire le lien avec les nombres complexes en privilégiant l'une des constantes, k par exemple, qui sera donnée comme le produit non commutatif des deux autres. La définition (2.1) peut alors s'écrire :

$$q = t + ix + jy + iz = t + jy + i(x + iz) = \alpha + i\beta$$

L'ensemble \mathbf{H} est alors vu comme une algèbre de Clifford construite sur l'espace $E_2 = \mathbf{R}_i \oplus \mathbf{R}_j$ en utilisant la forme quadratique $(i, i) = (j, j) = -1$. Dans la notation donnée ci-dessus, les nombres α et β sont des nombres complexes d'où l'appellation de *nombre hypercomplexes* souvent utilisée pour désigner les quaternions.

L'inconvénient majeur de cette représentation est qu'elle n'est pas symétrique. Dans l'esprit de Hamilton les trois constantes de structure i , j et k ressemblent à trois vecteurs unitaires, orthogonaux deux à deux. Il est alors tentant de les regrouper et de considérer le quaternion $q = (t, \vec{V})$ comme un nombre dont la partie imaginaire serait un vecteur de dimension 3, $\vec{V} = (x, y, z)$, la partie réelle t restant scalaire. Pour faire référence à la partie réelle et à la partie imaginaire du quaternion $q = (t, \vec{V})$ nous utilisons les notations :

$$\Re(q) = t \quad \Im(q) = \vec{V}$$

Ces notations sont très importantes car elles permettent d'introduire sommairement le lien entre les quaternions et les rotations : la partie imaginaire $\Im(q)$ donne l'axe de la rotation et la partie réelle $\Re(q)$ permet de calculer l'angle de la rotation.

Bien qu'ils aient été introduits au siècle dernier, ce n'est que récemment que l'utilisation des quaternions s'est développée, en partie grâce à la *mécanique spatiale* (e.g. [Yang et al.64] et [Sandor68]). Plus récemment, leur importance s'est considérablement accrue dans des domaines variés, par exemple en robotique (e.g. [Huston et al.82]) ou en informatique graphique (e.g. [Barr et al.92], [Hart et al.94] et [Kim et al.95]). Depuis le milieu des années 80, l'usage des quaternions s'est vulgarisé grâce à des ouvrages tels que [dC87] ou [Mccarthy90], grâce à des articles de synthèse tels que [Chou92] et grâce à l'exploration de nouveaux types d'applications (e.g. [Ell93]).

L'utilisation des quaternions pour représenter les rotations dans l'espace à trois dimensions ne s'est pas généralisée plus tôt à cause de la concurrence d'autres outils dont on peut trouver une description dans [Llibre92]. En particulier, ceux qui permettent de décrire les rotations à l'aide de trois paramètres, telles que les *angles d'Euler*, les *angles de Cardan* (ou *angles de Bryant*) ou encore les *paramètres de Rodrigues*, ont l'avantage de nous permettre d'interpréter les coefficients et de « visualiser » la rotation correspondante. Cette interprétation, déjà difficile lorsque les trois paramètres sont non nuls, devient impossible dans le cas des quaternions ou des matrices de rotations.

Bien qu'elles soient commodes pour « visualiser » les rotations, les représentations à trois paramètres ont deux défauts majeurs. D'une part, le calcul des angles qui caractérisent la rotation présente des singularités qui demandent des traitements particuliers. D'autre part, elles ne permettent pas d'effectuer simplement des opérations de base sur les rotations (en particulier les compositions de rotations).

Les quaternions ne présentent aucun de ces deux défauts. On peut même dire que pour chacun de ces deux points ils correspondent à la représentation idéale. D'une part, c'est la plus petite représentation des rotations qui ne présente pas de singularité. D'autre part, les transformations géométriques se traduisent par des opérations de base dans l'algèbre des quaternions. Ces deux atouts sont renforcés par le fait que les quaternions permettent aussi de prendre en compte très facilement les aspects dynamiques des rotations. Ainsi, des éléments tels que le vecteur vitesse de rotation ou l'accélération angulaire peuvent être représentés par des expressions très simples dans l'algèbre des quaternions.

Ces divers avantages deviennent prédominants lorsqu'on cherche à définir des algorithmes et à les programmer. Ceci explique pourquoi les quaternions ont tendance à s'imposer dans des domaines où l'informatique est très présente. Leur principal concurrent reste à l'heure actuelle la matrice de rotation. Ceci est essentiellement dû au fait que l'utilisation des matrices est généralement bien mieux maîtrisée. Toutefois, les matrices de rotations comportent un nombre de paramètres plus importants que les quaternions, ce qui les rend moins intéressantes lorsqu'on cherche à réaliser des programmes performants.

Pour pouvoir exploiter pleinement les ressources des quaternions, nous rappelons les opérations de base en 2.2. Ceci nous permet de définir plus précisément le lien entre les *quaternions unitaires* et les rotations en 2.3.

2.2 Propriétés des quaternions

2.2.1 Opérations de base

Addition de deux quaternions

L'addition de deux quaternions se fait en additionnant les coefficients deux à deux. Ainsi, la somme des quaternions Q_1 et Q_2 définis par :

$$\begin{aligned} Q_1 &= a_1 + ix_1 + jy_1 + kz_1 & Q_1 &= (a_1, \vec{V}_1) \\ Q_2 &= a_2 + ix_2 + jy_2 + kz_2 & Q_2 &= (a_2, \vec{V}_2) \end{aligned}$$

sera définie par :

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 &= a_1 + a_2 + i(x_1 + x_2) & Q_1 + Q_2 &= (a_1 + a_2, \vec{V}_1 + \vec{V}_2) \\ &+ j(y_1 + y_2) + k(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

Cette opération est commutative et correspond à une translation géométrique.

Multiplication de deux quaternions

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	-j	-i	-1

TAB. 2.1 - Table de multiplication

Pour définir la multiplication de deux quaternions il faut au préalable établir la table de multiplication des constantes de structure i , j et k . Cette table de multiplication est obtenue à partir des relations suivantes :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \qquad i \cdot j = k$$

En multipliant chacun des membres de l'équation $i \cdot j = k$ par i , à gauche, on obtient $i \cdot i \cdot j = i \cdot k$. En remplaçant $i \cdot i$ par -1 on obtient $i \cdot k = -j$. En multipliant la même équation par j , à gauche, on obtient $i \cdot j \cdot j = k \cdot j$. En remplaçant $j \cdot j$ par -1 on obtient $k \cdot j = -i$. En itérant le procédé sur chacune des nouvelles équations, on obtient la table de multiplication donnée en (2.1). La multiplication de deux quaternions $Q_1 \cdot Q_2$ est alors effectuée en distribuant le produit, ce qui donne :

$$\begin{aligned} Q_1 \cdot Q_2 &= (a_1 + ix_1 + jy_1 + kz_1)(a_2 + ix_2 + jy_2 + kz_2) \\ &= a_1a_2 + ia_1x_2 + ja_1y_2 + ka_1z_2 + ix_1a_2 + iix_1x_2 \\ &\quad + jx_1y_2 + ikx_1z_2 + jy_1a_2 + jiy_1x_2 + jyy_1y_2 + jky_1z_2 \\ &\quad + kz_1a_2 + kiz_1x_2 + kjz_1y_2 + kkz_1z_2 \end{aligned}$$

En appliquant les règles de multiplication de la table (2.1) on obtient :

$$\begin{aligned}
 Q_1 \cdot Q_2 &= a_1 a_2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) \\
 &\quad + i (a_1 x_2 + x_1 a_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2) \\
 &\quad + j (a_1 y_2 + y_1 a_2 + z_1 x_2 - x_1 z_2) \\
 &\quad + k (a_1 z_2 + z_1 a_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Pour faire apparaître la structure vectorielle du résultat de cette opération, les termes peuvent être réorganisés :

$$\begin{aligned}
 Q_1 \cdot Q_2 &= a_1 a_2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) \\
 &\quad + a_1 (i x_2 + j y_2 + k z_2) + a_2 (i x_1 + j y_1 + k z_1) \\
 &\quad + i (y_1 z_2 - z_1 y_2) + j (z_1 x_2 - x_1 z_2) + k (x_1 y_2 - y_1 x_2)
 \end{aligned}$$

En notant $\vec{V}_1 = i x_1 + j y_1 + k z_1$ et $\vec{V}_2 = i x_2 + j y_2 + k z_2$ on a alors :

$$Q_1 \cdot Q_2 = (a_1 a_2 - \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2, a_1 \vec{V}_2 + a_2 \vec{V}_1 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$$

Les expressions $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ et $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ représentent respectivement le produit scalaire usuel et le produit vectoriel usuel, dont les expressions sont :

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \\
 \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 &= i (y_1 z_2 - y_2 z_1) + j (z_1 x_2 - x_1 z_2) + k (x_1 y_2 - x_2 y_1)
 \end{aligned}$$

Le produit de deux quaternions n'est pas commutatif car il fait intervenir le produit vectoriel des parties vectorielles.

Conjugué d'un quaternion

Soit $Q = (a, \vec{V})$ un quaternion. On définit le *quaternion conjugué* par $\bar{Q} = (a, -\vec{V})$. Soient $Q = (a, \vec{V})$ et $Q' = (a', \vec{V}')$ deux quaternions. On peut calculer le conjugué de leur somme :

$$\overline{Q + Q'} = (a + a', -(\vec{V} + \vec{V}')) = (a + a', -\vec{V} - \vec{V}') = \overline{Q + Q'} = \bar{Q} + \bar{Q}'$$

De même on peut calculer le conjugué de leur produit :

$$\begin{aligned}
 \overline{Q \cdot Q'} &= (aa' - \vec{V} \cdot \vec{V}', - (a\vec{V}' + a'\vec{V} + \vec{V} \wedge \vec{V}')) \\
 &= (aa' - \vec{V} \cdot \vec{V}', -a\vec{V}' - a'\vec{V} - \vec{V} \wedge \vec{V}') \\
 &= (aa' - \vec{V} \cdot \vec{V}', a(-\vec{V}')) + a'(-\vec{V}) + (-\vec{V}') \wedge (-\vec{V})
 \end{aligned}$$

$$\overline{Q + Q'} = \bar{Q} + \bar{Q}' \qquad \overline{Q \cdot Q'} = \bar{Q}' \cdot \bar{Q} \tag{2.3}$$

On vérifie facilement que :

$$\begin{aligned}
 \bar{\bar{Q}} &= Q \\
 Q + \bar{Q} &= (2a, 0) = 2a = 2\Re(Q) \\
 Q - \bar{Q} &= (0, 2\vec{V}) = 2V = 2\Im(Q)
 \end{aligned}$$

Comme pour les nombres complexes on en déduit :

$$\Re(Q) = \frac{1}{2}(Q + \bar{Q}) \quad \Im(Q) = \frac{1}{2}(Q - \bar{Q}) \quad (2.4)$$

Module et inverse d'un quaternion

On définit le *module* du quaternion Q comme étant la racine carrée du produit $Q \cdot \bar{Q}$. En développant ce produit on obtient :

$$\begin{aligned} Q \cdot \bar{Q} &= (a, \vec{V}) \cdot (a, -\vec{V}) = (a^2 + \vec{V} \cdot \vec{V}, \underbrace{a\vec{V} - a\vec{V}}_{=\vec{0}} - \underbrace{\vec{V} \wedge \vec{V}}_{=\vec{0}}) \\ Q \cdot \bar{Q} &= a^2 + x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

On en déduit l'expression du module $|Q|$:

$$|Q| = \sqrt{Q \cdot \bar{Q}} = \sqrt{\bar{Q} \cdot Q} = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

À partir de ces définitions, on déduit l'inverse du quaternion Q :

$$\frac{1}{Q} = Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{|Q|^2} \quad (2.5)$$

De ces deux définitions et de (2.3), on déduit le module et l'inverse du produit $Q \cdot Q'$:

$$|Q \cdot Q'| = |Q| |Q'| \quad (Q \cdot Q')^{-1} = Q'^{-1} \cdot Q^{-1} \quad (2.6)$$

Lorsque le module du quaternion Q est égal à 1 on dit que Q est un *quaternion unitaire*. Dans ce cas son inverse est égal à son conjugué.

Ainsi, l'ensemble des quaternions est un corps non commutatif.

Quaternions purement vectoriels

Lorsque la partie scalaire d'un quaternion est nulle, on obtient un *vecteur* qu'on appelle *quaternion purement vectoriel* ou *quaternion vectoriel* ou encore *quaternion pur*. Il est évident que la somme de deux quaternions purement vectoriels est un quaternion purement vectoriel. Par contre, le produit de deux quaternions purement vectoriels n'est pas un quaternion purement vectoriel.

Par la suite, le vecteur associé à un quaternion vectoriel V sera noté \vec{V} et inversement.

Soient $V_1 = (0, \vec{V}_1)$ et $V_2 = (0, \vec{V}_2)$ deux quaternions purement vectoriels. Alors :

$$V_1 \cdot V_2 = (-\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2, \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \quad V_2 \cdot V_1 = (-\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1, \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1) \quad (2.7)$$

On rappelle que $\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1 = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ et $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 = -\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$. On en déduit les expressions du produit scalaire usuel et du produit vectoriel :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = -\frac{1}{2}(V_1 \cdot V_2 + V_2 \cdot V_1) \quad (2.8)$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \frac{1}{2}(V_1 \cdot V_2 - V_2 \cdot V_1) \quad (2.9)$$

Lemme 2.1 *Le produit d'un quaternion vectoriel V par un quaternion quelconque Q est orthogonal à Q .*

Preuve 2.1.a Soient $Q_1 = (a_1, \vec{V}_1)$ et $Q_2 = (a_2, \vec{V}_2)$ deux quaternions. On définit le produit scalaire des deux quaternions Q_1 et Q_2 par :

$$\langle Q_1, Q_2 \rangle = a_1 a_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$$

Considérons un quaternion quelconque $Q = a + ix + jy + kz$ et un quaternion vectoriel $V = iv_1 + jv_2 + kv_3$. Leur produit est :

$$\begin{aligned} V \cdot Q &= -v_1x - v_2y - v_3z \\ &\quad + i(v_2z - v_3y + av_1) + j(v_3x - v_1z + av_2) + k(v_1y - v_2x + av_3) \end{aligned}$$

Le produit scalaire de Q et de $(V \cdot Q)$ donne :

$$\begin{aligned} \langle Q, (V \cdot Q) \rangle &= a(-v_1x - v_2y - v_3z) + x(v_2z - v_3y + av_1) + y(v_3x - v_1z + av_2) \\ &\quad + z(v_1y - v_2x + av_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Remarque 2.2.1 Soient $V_1 = (0, \vec{V}_1)$ et $V_2 = (0, \vec{V}_2)$ et $V_3 = (0, \vec{V}_3)$. On a :

$$[V_1, V_2] = V_1 \cdot V_2 - V_2 \cdot V_1 = 2 \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

En appliquant directement les propriétés du produit vectoriel, les trois égalités suivantes sont facilement démontrées pour des quaternions purement vectoriels quelconques V_1, V_2 et V_3 :

$$\begin{aligned} [V_1, V_1] &= 0 \\ [V_1, V_2] &= -[V_2, V_1] \\ [[V_1, V_2], V_3] + [[V_2, V_3], V_1] + [[V_3, V_1], V_2] &= 0 \end{aligned}$$

Ce produit fait de l'ensemble des quaternions purement vectoriels une algèbre de Lie (c'est un \mathbf{R} -module muni du crochet de Lie).

2.2.2 Représentation linéaire des quaternions

Soit $q \in \mathbf{H}$ un quaternion. Considérons l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &\xrightarrow{h_q} \mathbf{H} \\ x &\longmapsto q \cdot x \end{aligned}$$

La matrice de cette application linéaire est définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(h_q) = M_q &= [h_q(1) \quad h_q(i) \quad h_q(j) \quad h_q(k)] = [q \cdot 1 \quad q \cdot i \quad q \cdot j \quad q \cdot k] \\ &= \begin{bmatrix} a & -x & -y & -z \\ x & a & -z & y \\ y & z & a & -x \\ z & -y & x & a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En particulier, pour $q_1 = 1$, $q_i = i$, $q_j = j$ et $q_k = k$ on obtient respectivement :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En associant ainsi, à chaque quaternion q l'application linéaire h_q et par conséquent la matrice M_q , on a donc défini une *représentation linéaire* (représentation matricielle) des quaternions. En effet, $\{M_1, M_i, M_j, M_k\}$ est une base d'un sous-espace vectoriel de l'espace des matrices réelles 4×4 . Ces matrices vérifient les mêmes relations que la base $\{1, i, j, k\}$. Ainsi, à tout quaternion $q = a + xi + yj + zk$, on associe la matrice M_q qui s'écrit :

$$M_q = aM_1 + xM_i + yM_j + zM_k$$

On vérifie facilement que :

$$M_{\bar{q}} = {}^t M_q$$

En utilisant la formule du produit de quaternions établie en (2.2) et le produit matriciel, on vérifie immédiatement que :

$$M_{q_1 q_2} = M_{q_1} \cdot M_{q_2}$$

On peut de la même façon associer à tout quaternion q l'application linéaire $f_q : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ telle que, pour tout $x \in \mathbf{H}$, $f_q(x) = x \cdot q$. La matrice associée est définie de la même façon et on a :

$$\mathcal{M}(f_q) = \begin{bmatrix} a & -x & -y & -z \\ x & a & z & -y \\ y & -z & a & x \\ z & y & -x & a \end{bmatrix}$$

Ce qui définit une autre représentation linéaire des quaternions.

2.2.3 Exponentielle d'un quaternion

Définitions

L'*exponentielle* e^Q d'un quaternion Q et le *logarithme* $\log(1+Q)$ sont définis par les séries :

$$e^Q = 1 + \frac{Q}{1!} + \frac{Q^2}{2!} + \frac{Q^3}{3!} + \dots \quad \log(1+Q) = Q - \frac{Q^2}{2} + \frac{Q^3}{3} - \dots$$

La série définissant l'exponentielle est absolument convergente $\forall Q \in \mathbf{H}$; celle définissant le logarithme est absolument convergente pour $|Q| < 1$ (la notation Q^n désigne le produit de quaternions $\underbrace{Q \cdot Q \cdots Q}_{n \text{ facteurs}}$).

Théorème 2.2.1 *Les transformations exp et log sont réciproques, ce qui se traduit par :*

$$\exp(\log(Q)) = \log(\exp(Q)) = Q, \quad Q \in \mathbf{H}. \quad (2.10)$$

Remarque 2.2.2 *Le produit de quaternions n'étant pas commutatif les règles de simplifications usuelles des exposants ne sont plus valides. En particulier on a en général :*

$$e^{Q_1+Q_2} \neq e^{Q_1} \cdot e^{Q_2}$$

Exponentielle d'un quaternion vectoriel

Si V est un quaternion vectoriel, alors V est de la forme $(0, \alpha \vec{u})$ où \vec{u} est un vecteur unitaire quelconque, associé au quaternion vectoriel u , et $\alpha \in \mathbf{R}$. En développant les puissances successives de V on obtient :

$$\begin{aligned} V^2 &= V \cdot V = (-\alpha^2 \vec{u} \cdot \vec{u}, 0) = -\alpha^2 \\ V^3 &= V^2 \cdot V = -\alpha^3 u \quad (u \text{ quaternion associé à } \vec{u}) \\ V^4 &= V^3 \cdot V = \alpha^4 \end{aligned}$$

Plus généralement on obtient les expressions de V^{2n} et de V^{2n+1} :

$$V^{2n} = (-1)^n \alpha^{2n} \quad V^{2n+1} = (-1)^n \alpha^{2n+1} u$$

En substituant ces expressions dans la série définissant e^V on obtient :

$$\begin{aligned} e^V &= 1 + \frac{V}{1!} + \frac{V^2}{2!} + \frac{V^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + \alpha u - \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{\alpha^3}{3!} u + \frac{\alpha^4}{4!} - \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \cdots\right) + \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \cdots\right) u \end{aligned}$$

Le regroupement des termes fait clairement apparaître les développements limités de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$. Le quaternion e^V est donc le *quaternion unitaire* dont l'expression est :

$$e^{\alpha u} = \cos(\alpha) + \sin(\alpha) u \quad (2.11)$$

Exponentielle d'un quaternion quelconque

On pose $Q = a + V$ où V est un quaternion vectoriel et $a \in \mathbf{R}$. En remarquant que a commute avec V , on en déduit que :

$$e^Q = e^a e^V$$

ce qui nous ramène au cas précédent. De cette expression on en déduit très facilement les deux relations suivantes :

$$|e^Q| = e^{\Re(Q)} \quad \overline{e^Q} = e^{\overline{Q}}$$

Théorème 2.2.2 *Les 2 propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. q est un quaternion de module 1 ;
2. q est l'exponentielle d'un quaternion vectoriel.

2.2.4 Dérivées

Définition et propriétés

Soit $Q = (a, \vec{V})$ un quaternion quelconque dont les composantes dépendent d'une variable t (qui peut être le temps). La dérivée de Q par rapport à t est définie par :

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \left(\frac{da}{dt}, \frac{d\vec{V}}{dt} \right) = (\dot{a}, \vec{V}) \quad (2.12)$$

En développant le produit on montre aisément que :

$$\frac{d(Q_1 \cdot Q_2)}{dt} = \frac{dQ_1}{dt} \cdot Q_2 + Q_1 \cdot \frac{dQ_2}{dt} = \dot{Q}_1 \cdot Q_2 + Q_1 \cdot \dot{Q}_2$$

Le produit de quaternions n'étant pas commutatif, la règle usuelle de dérivation des puissances ne s'applique généralement pas :

$$\frac{d(Q^n)}{dt} = \sum_{i=1}^n Q^{i-1} \cdot \dot{Q} \cdot Q^{n-i} \neq n \dot{Q} \cdot Q^{n-1} \quad (2.13)$$

En particulier, on peut calculer la dérivée d'une exponentielle :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^Q &= \frac{d}{dt} \left(1 + \frac{Q}{1!} + \frac{Q^2}{2!} + \frac{Q^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \dot{Q} + \frac{\dot{Q} \cdot Q + Q \cdot \dot{Q}}{2!} + \frac{\dot{Q} \cdot Q^2 + Q \cdot \dot{Q} \cdot Q + Q^2 \cdot \dot{Q}}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Dans le cas très particulier où le quaternion Q commute avec sa dérivée, on pourra toujours remplacer $Q \cdot \dot{Q}$ par $\dot{Q} \cdot Q$, ce qui permet de factoriser l'expression précédente :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^Q &= \dot{Q} + 2 \frac{\dot{Q} \cdot Q}{2!} + 3 \frac{\dot{Q} \cdot Q^2}{3!} + \dots \\ &= \dot{Q} \cdot \left(1 + \frac{Q}{1!} + \frac{Q^2}{2!} + \dots \right) \\ &= \dot{Q} \cdot e^Q \end{aligned}$$

Cette propriété est généralement fautive et nous verrons ci-dessous les conditions dans lesquelles elle peut être vérifiée.

Dérivées d'un quaternion unitaire

Soit V un quaternion vectoriel. On pose $V = (0, \alpha \vec{u})$ avec α et \vec{u} qui dépendent de t et \vec{u} est unitaire. Considérons le quaternion de module 1, $q = e^V$. D'après (2.11), on a :

$$\begin{aligned}
 \dot{q} &= \frac{d}{dt} e^V = \frac{d}{dt} (\cos \alpha + u \sin \alpha) \\
 &= -\dot{\alpha} \sin \alpha + u \dot{\alpha} \cos \alpha + \dot{u} \sin \alpha \\
 &= \dot{\alpha} (-\sin \alpha + u \cos \alpha) + \dot{u} \sin \alpha \\
 &= \dot{\alpha} (u \cdot u \sin \alpha + u \cos \alpha) + \dot{u} \sin \alpha \\
 &= \dot{\alpha} u (\cos \alpha + u \sin \alpha) + \dot{u} \sin \alpha
 \end{aligned}$$

Soit enfin :

$$\dot{q} = \frac{d}{dt} e^{\alpha u} = \dot{\alpha} u q + \dot{u} \sin \alpha \quad (2.14)$$

Si \vec{u} est un *vecteur constant*, on obtient : $\dot{q} = \dot{\alpha} u q$

On peut, de la même façon, calculer la dérivée seconde \ddot{q} :

$$\begin{aligned}
 \ddot{q} &= \frac{d\dot{q}}{dt} = \ddot{\alpha} u q + \dot{\alpha} \dot{u} q + \dot{\alpha} u \dot{q} + \ddot{u} \sin \alpha + \dot{\alpha} \dot{u} \cos \alpha \\
 &= (\ddot{\alpha} u + \dot{\alpha}^2 u^2) q + \dot{\alpha} \dot{u} q + \dot{\alpha} u \dot{u} \sin \alpha + \ddot{u} \sin \alpha + \dot{\alpha} \dot{u} \cos \alpha \\
 &= (\ddot{\alpha} u - \dot{\alpha}^2) q + \dot{\alpha} \dot{u} (\cos \alpha + u \sin \alpha) + \dot{\alpha} u \dot{u} \sin \alpha + \ddot{u} \sin \alpha + \dot{\alpha} \dot{u} \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Soit enfin :

$$\ddot{q} = (\ddot{\alpha} u - \dot{\alpha}^2) q + 2\dot{\alpha} \dot{u} \cos \alpha + \ddot{u} \sin \alpha \quad (2.15)$$

Lemme 2.2 Soit q un quaternion de module 1. Le quaternion $\dot{q} \cdot \bar{q}$ est purement vectoriel et $\dot{q} \cdot \bar{q} = -q \cdot \dot{\bar{q}}$

Preuve 2.2.2.1 En dérivant l'égalité $q \cdot \bar{q} = 1$, on obtient

$$\dot{q} \cdot \bar{q} + q \cdot \dot{\bar{q}} = 0 \implies \dot{q} \cdot \bar{q} = -q \cdot \dot{\bar{q}} = -(\overline{\dot{q} \cdot \bar{q}}).$$

Cas général Soit Q un quaternion quelconque. On peut poser $Q = a + V$ où a est un scalaire et V est un quaternion purement vectoriel. a et V commutent et donc

$$e^Q = e^a e^V$$

En dérivant, on obtient :

$$\frac{d}{dt} e^Q = \frac{d e^a}{dt} e^V + e^a \frac{d e^V}{dt} = \dot{a} e^a e^V + e^a \frac{d e^V}{dt}$$

On se ramène donc au cas précédent. Après simplification, on obtient :

$$\frac{d}{dt} e^Q = \dot{a} e^Q + e^a \frac{d e^V}{dt}$$

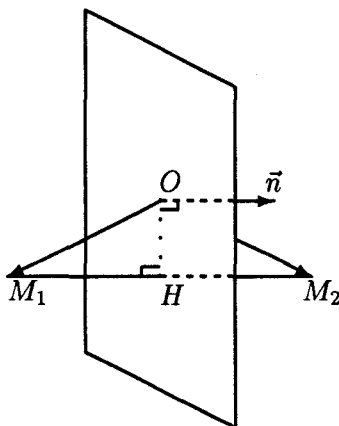


FIG. 2.1 - Quaternions et symétries

2.3 Quaternions unitaires et rotations

2.3.1 Représentation des symétries par des quaternions unitaires

Soit un plan qui passe par l'origine O et soit \vec{n} le vecteur normal à ce plan. Soit M_1 un point et M_2 son symétrique par rapport au plan, comme indiqué en figure (2.1). Soit H le point d'intersection de la droite M_1M_2 et du plan. On peut alors écrire l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{M_1H} = - \left(\overrightarrow{OM_1} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right) \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = - \left(\overrightarrow{OM_1} \cdot \vec{n} \right) \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$$

De même, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + 2\overrightarrow{M_1H} = \overrightarrow{OM_1} - 2 \left(\overrightarrow{OM_1} \cdot \vec{n} \right) \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}$$

Soient V_1 et V_2 les quaternions purement vectoriels associés¹ respectivement aux vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$; et soit n le quaternion unitaire, purement vectoriel, associé au vecteur \vec{n} . On peut écrire :

$$V_2 = V_1 - 2 \left(\overrightarrow{OM_1} \cdot \vec{n} \right) \frac{n}{|n|^2}$$

D'après les équations (2.5) et (2.8), on obtient :

$$V_2 = V_1 - 2 \frac{1}{2} (n \cdot V_1 + V_1 \cdot n) \cdot n^{-1} = V_1 - n \cdot V_1 \cdot n^{-1} - V_1 \cdot n \cdot n^{-1}$$

Les coordonnées du point M_2 , symétrique du point M_1 , sont donc simplement obtenues par le produit de quaternions :

$$V_2 = -n \cdot V_1 \cdot n^{-1} \quad (2.16)$$

1. C'est-à-dire que les composantes de la partie imaginaire du quaternion sont égales aux composantes du vecteur, dans le repère choisi.

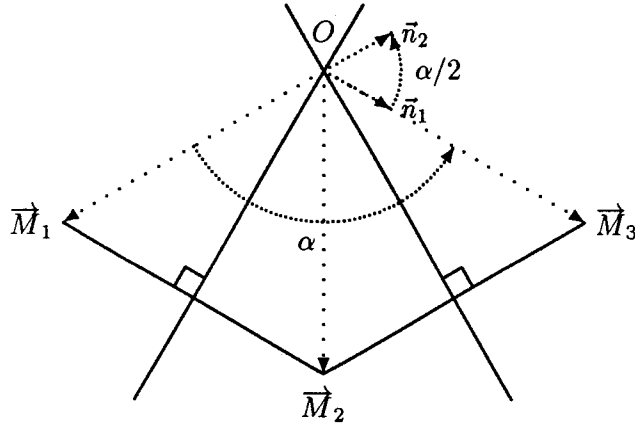


FIG. 2.2 - Quaternions et rotations

2.3.2 Représentation des rotations par des quaternions unitaires

Une rotation dans \mathbf{R}^3 est une application linéaire de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R}^3 qui conserve les distances et l'orientation. Une rotation d'angle α autour d'un axe peut être vue comme le produit de deux symétries par rapport à deux plans qui font un angle $\alpha/2$ et dont l'intersection contient l'axe de la rotation (cf. figure 2.2).

Image d'un vecteur

Soient V_1, V_2, V_3, n_1 et n_2 les quaternions purement vectoriels associés respectivement aux vecteurs $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}, \vec{n}_1$ et \vec{n}_2 . D'après (2.16), on peut écrire :

$$V_2 = -n_1 \cdot V_1 \cdot n_1^{-1} \qquad V_3 = -n_2 \cdot V_2 \cdot n_2^{-1}$$

En développant on peut éliminer V_2 et regrouper les produits $n_2 \cdot n_1$ et $-n_1^{-1} \cdot n_2^{-1}$:

$$V_3 = (-n_2 \cdot n_1) \cdot V_1 \cdot (-n_1^{-1} \cdot n_2^{-1}) = (-n_2 \cdot n_1) \cdot V_1 \cdot (-n_2 \cdot n_1)^{-1}$$

Or n_1 et n_2 sont des quaternions vectoriels, on a donc, d'après l'égalité (2.7) :

$$-n_2 \cdot n_1 = (\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2, -\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2)$$

Soient \vec{u} le vecteur unitaire porté par l'axe de la rotation (axe perpendiculaire au plan défini par les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2) et α l'angle de la rotation. Les vecteurs $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{u}$ sont tous trois unitaires, les expressions du produit scalaire et du produit vectoriel de \vec{n}_1 et de \vec{n}_2 peuvent donc s'écrire :

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \vec{u} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

En notant u le quaternion purement vectoriel associé au vecteur \vec{u} , le produit $-n_2 \cdot n_1$ peut alors s'écrire :

$$-n_2 \cdot n_1 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + u \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Les quaternions \vec{n}_1 et \vec{n}_2 étant tous deux unitaires, leur produit est aussi un quaternion unitaire donc l'inverse du produit $n_1 \cdot n_2$ n'est autre que son conjugué. On a donc :

$$(-n_2 \cdot n_1)^{-1} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - u \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Le quaternion V_3 peut donc s'exprimer en fonction de V_1 et de $q = -n_2 \cdot n_1$:

$$q = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + u \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad V_3 = q \cdot V_1 \cdot \bar{q} \quad (2.17)$$

En comparant avec l'expression (2.11), on a :

$$q = e^{\frac{\alpha}{2}u} \quad (2.18)$$

Ainsi, une rotation peut être définie par un quaternion unitaire construit à partir de l'axe \vec{u} de la rotation et de son angle α . On vérifie facilement que cette transformation conserve la distance. En effet, le module d'un produit de quaternions est égal au produit des modules de chacun des quaternions, on a donc :

$$|\overrightarrow{OM_3}| = |V_3| = |q \cdot V_1 \cdot \bar{q}| = |q| |V_1| |\bar{q}| = |V_1| = |\overrightarrow{OM_1}|$$

Composition de rotations

Soient R_1 la rotation d'angle $\alpha_1/2$ et d'axe \vec{u}_1 , et R_2 la rotation d'angle $\alpha_2/2$ et d'axe \vec{u}_2 . Soient q_1 et q_2 les quaternions représentant les rotations R_1 et R_2 respectivement, comme indiqué en (2.17). Soient \vec{V} , un vecteur quelconque, \vec{U}_1 son image par la rotation R et \vec{U}_2 l'image de \vec{U}_1 par la rotation R_2 . La relation (2.17) nous permet d'exprimer les quaternions U_1 et U_2 , représentant \vec{U}_1 et \vec{U}_2 respectivement dans le repère de référence, en fonction de V , q_1 et q_2 :

$$U_1 = q_1 \cdot V \cdot \bar{q}_1 \quad U_2 = q_2 \cdot U_1 \cdot \bar{q}_2$$

En combinant les deux expressions, on obtient :

$$U_2 = q_2 \cdot q_1 \cdot V \cdot \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2$$

Or $\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 = \overline{q_2 \cdot q_1}$, on peut donc écrire :

$$U_2 = q_2 \cdot q_1 \cdot V \cdot \overline{q_2 \cdot q_1} \quad (2.19)$$

Or \vec{U}_2 est l'image de \vec{V} par la rotation $R = R_2 \circ R_1$. Le produit de quaternions traduit donc directement la composition de rotations.

L'expression (2.17) nous permet d'écrire explicitement les quaternions q_1 et q_2 :

$$q_1 = \cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + u_1 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \quad q_2 = \cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) + u_2 \sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right)$$

On en déduit immédiatement l'expression du quaternion $q = q_2 \cdot q_1$ qui représente la rotation R :

$$q = \left(\cos\frac{\alpha_1}{2} \cos\frac{\alpha_2}{2} - \sin\frac{\alpha_1}{2} \sin\frac{\alpha_2}{2} \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle, \right. \\ \left. \cos\frac{\alpha_1}{2} \sin\frac{\alpha_2}{2} \vec{u}_2 + \cos\frac{\alpha_2}{2} \sin\frac{\alpha_1}{2} \vec{u}_1 + \sin\frac{\alpha_1}{2} \sin\frac{\alpha_2}{2} \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1 \right) \quad (2.20)$$

Dans le cas particulier où $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}$ on a $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = 1$ et $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{0}$, l'expression (2.20) devient alors :

$$q = \cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + u \sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

Soit R une rotation représentée par le quaternion q . De la relation (2.19) on déduit immédiatement que le quaternion qui représente la rotation inverse R^{-1} est le quaternion \bar{q} . En effet, $q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = 1$ représente $R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R = Id$.

Matrice de rotation associée

Soit R une rotation définie par le quaternion unitaire $q = a + ix + jy + kz$ et soit \vec{V} un vecteur auquel est associé le quaternion purement vectoriel V . Les composantes de la matrice de rotation M_R associée à la rotation R sont les images $R(\vec{i})$, $R(\vec{j})$ et $R(\vec{k})$ des vecteurs de base :

$$M_R = \begin{bmatrix} R(\vec{i}) & R(\vec{j}) & R(\vec{k}) \end{bmatrix}$$

Or les composantes de ces vecteurs peuvent être obtenues à partir du quaternion q :

$$R(\vec{i}) = q \cdot i \cdot \bar{q} \qquad R(\vec{j}) = q \cdot j \cdot \bar{q} \qquad R(\vec{k}) = q \cdot k \cdot \bar{q}$$

Ce qui permet de calculer les composantes de la matrice de rotation :

$$M_R = \begin{bmatrix} -z^2 - y^2 + a^2 + x^2 & 2xy + 2az & 2xz - 2ay \\ 2xy - 2az & -x^2 - z^2 + a^2 + y^2 & 2zy + 2ax \\ 2xz + 2ay & 2zy - 2ax & -y^2 - x^2 + a^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

Changement de repères

Soit \mathcal{R} un repère défini par les vecteurs de base \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} respectivement associés aux quaternions purement vectoriels i , j et k . L'image de \mathcal{R} par la rotation R , définie par un quaternion unitaire q , est le repère \mathcal{R}_R dont les vecteurs de base \vec{i}' , \vec{j}' et \vec{k}' sont respectivement associés aux quaternions purement vectoriels $i' = q \cdot i \cdot \bar{q}$, $j' = q \cdot j \cdot \bar{q}$ et $k' = q \cdot k \cdot \bar{q}$. Soient $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ un vecteur, dont les coordonnées sont données dans le repère \mathcal{R} , et V le quaternion purement vectoriel associé à \vec{V} dans ce même repère. Soient (x', y', z') les coordonnées de \vec{V} dans le repère \mathcal{R}_R . Pour calculer x' , y' et z' en fonction de q et V , commençons par poser l'égalité vectorielle :

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

Celle-ci est équivalente à l'égalité entre quaternions :

$$\begin{aligned} xi + yj + zk &= x i' + y j' + z k' \\ xi + yj + zk &= x' q \cdot i \cdot \bar{q} + y' q \cdot j \cdot \bar{q} + z' q \cdot k \cdot \bar{q} \end{aligned}$$

Pour isoler les composantes x' , y' et z' , il faut multiplier chacun des membres à gauche par \bar{q} et à droite par q , puis distribuer le produit dans le membre de droite :

$$\begin{aligned} \bar{q} \cdot (xi + yj + zk) \cdot q &= \bar{q} \cdot (x' q \cdot i \cdot \bar{q} + y' q \cdot j \cdot \bar{q} + z' q \cdot k \cdot \bar{q}) \cdot q \\ \bar{q} \cdot (xi + yj + zk) \cdot q &= x' \bar{q} \cdot q \cdot i \cdot \bar{q} \cdot q + y' \bar{q} \cdot q \cdot j \cdot \bar{q} \cdot q + z' \bar{q} \cdot q \cdot k \cdot \bar{q} \cdot q \end{aligned}$$

Le quaternion q étant unitaire $\bar{q} \cdot q = 1$ et on obtient finalement :

$$\bar{q} \cdot (xi + yj + zk) \cdot q = x' i + y' j + z' k$$

Cette dernière expression nous fournit la formule de changement de repère cherchée puisque les nouvelles coordonnées, qui apparaissent dans le membre de droite sont obtenues en fonction des anciennes coordonnées. En notant $V' = x' i + y' j + z' k$ le quaternion représentant le vecteur \vec{V} dans le repère \mathcal{R}_R , on obtient la formule :

$$V' = \bar{q} \cdot V \cdot q \tag{2.21}$$

2.3.3 Vitesse de rotation

Soit \mathcal{R}_0 un repère fixe et soit \mathcal{R}_1 l'image de \mathcal{R}_0 par la rotation R_t définie par le quaternion unitaire $q(t)$. On veut étudier la vitesse de rotation d'un vecteur \vec{U}_0 fixe dans \mathcal{R}_0 . On a, d'après l'équation (2.17) :

$$\vec{U}_1 = R_t(\vec{U}_0) \quad \text{ce qui peut s'exprimer par :} \quad U_1 = q \cdot U_0 \cdot \bar{q} \quad (2.22)$$

Si on note $\vec{\Omega}$ le vecteur vitesse de rotation instantanée de \mathcal{R}_1 dans \mathcal{R}_0 , alors la vitesse de rotation du vecteur \vec{U}_1 dans \mathcal{R}_0 est :

$$\vec{V} = \left(\frac{d\vec{U}_1}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{U}_1}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega} \wedge \vec{U}_1$$

Or, le vecteur \vec{U}_1 est fixe dans \mathcal{R}_1 , on en déduit :

$$\left(\frac{d\vec{U}_1}{dt} \right)_{\mathcal{R}_1} = 0 \quad \text{et l'expression de } \vec{V} \text{ devient} \quad \vec{V} = \vec{\Omega} \wedge \vec{U}_1$$

En multipliant les deux membres de l'équation (2.22) à gauche par \bar{q} (respectivement à droite par q) et en simplifiant $\bar{q} \cdot q = 1$ (respectivement $q \cdot \bar{q} = 1$), on obtient :

$$\bar{q} \cdot U_1 = \bar{q} \cdot q \cdot U_0 \cdot \bar{q} = U_0 \cdot \bar{q} \quad U_1 \cdot q = q \cdot U_0 \cdot \bar{q} \cdot q = q \cdot U_0$$

Ainsi, lorsqu'on dérive par rapport au temps, dans le repère \mathcal{R}_0 , le quaternion U_1 représentant le vecteur \vec{U}_1 , dans ce repère, on obtient :

$$\left(\frac{d\vec{U}_1}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \dot{U}_1 = \dot{q} \cdot U_0 \cdot \bar{q} + q \cdot U_0 \cdot \dot{\bar{q}} = \dot{q} \cdot \bar{q} \cdot U_1 + U_1 \cdot q \cdot \dot{\bar{q}} \quad (2.23)$$

Par ailleurs, la relation (2.9) nous permet d'exprimer le quaternion représentant le vecteur $\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_1$, dans le repère \mathcal{R}_0 par :

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_1 = \frac{1}{2}(\Omega \cdot U_1 - U_1 \cdot \Omega) \quad (2.24)$$

Or les expressions apparaissant en (2.23) et (2.24) représentent toutes les deux le vecteur \vec{V} dans le repère \mathcal{R}_0 , on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\Omega \cdot U_1 - U_1 \cdot \Omega) - \dot{q} \cdot \bar{q} \cdot U_1 - U_1 \cdot q \cdot \dot{\bar{q}} &= 0 \\ \frac{1}{2}[(\Omega - 2\dot{q} \cdot \bar{q})U_1 - U_1(\Omega + 2q \cdot \dot{\bar{q}})] &= 0 \end{aligned}$$

Le quaternion q est unitaire, donc le lemme (2.2) s'applique et on peut remplacer $q \cdot \dot{\bar{q}}$ par $-\dot{q} \cdot \bar{q}$. On obtient alors :

$$\frac{1}{2}[(\Omega - 2\dot{q} \cdot \bar{q}) \cdot U_1 - U_1 \cdot (\Omega - 2\dot{q} \cdot \bar{q})] = 0$$

En notant $\overrightarrow{\Omega - 2\dot{q} \cdot \bar{q}}$ le vecteur associé au quaternion purement vectoriel $\Omega - 2\dot{q} \cdot \bar{q}$, l'égalité (2.9) s'applique à nouveau et on obtient :

$$(\overrightarrow{\Omega - 2\dot{q} \cdot \bar{q}}) \wedge \vec{U}_1 = 0 \quad \forall \vec{U}_1$$

Pour que cette égalité soit vraie pour tout vecteur \vec{U}_1 , il est nécessaire que le vecteur $\vec{\Omega} - 2\dot{q} \cdot \bar{q}$ soit nul. On en déduit les expressions liant Ω , q et \dot{q} :

$$\Omega = 2\dot{q} \cdot \bar{q} \qquad \dot{q} = \frac{1}{2} \Omega \cdot q \qquad (2.25)$$

Vitesse de rotation exprimée dans le repère mobile

Pour calculer le quaternion Ω_S représentant le vecteur $\vec{\Omega}$ dans le repère mobile, il suffit d'appliquer la formule de changement de repère (2.21) à l'expression (2.25). On obtient alors :

$$\Omega_S = 2\bar{q} \cdot \dot{q} \qquad \dot{q} = \frac{1}{2} q \cdot \Omega_S \qquad (2.26)$$

2.3.4 Accélération angulaire

En dérivant le vecteur vitesse instantanée de rotation, dans le cas où l'attitude est représentée par un quaternion unitaire q , on obtient :

$$\dot{\Omega} = 2\ddot{q} \cdot \bar{q} + 2\dot{q} \cdot \dot{\bar{q}}$$

Or le produit $\dot{q} \cdot \dot{\bar{q}}$ est réel alors que le quaternion $\dot{\Omega}$ est purement vectoriel, puisqu'il représente le vecteur accélération angulaire. On peut donc écrire :

$$\dot{\Omega} = 2 \Im(\ddot{q} \cdot \bar{q}) \qquad (2.27)$$

2.3.5 Vitesse de rotation pour une rotation composée

Nous avons vu en (2.19) que la composition de rotations se traduit par un produit de quaternions. Nous allons maintenant voir comment s'exprime le vecteur vitesse de rotation d'une rotation composée.

Soient \mathcal{R}_0 un repère de référence et soient $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_n$, les repères obtenus en appliquant successivement à \mathcal{R}_0 les rotations R_1, R_2, \dots, R_n , dans cet ordre, comme indiqué sur le schéma suivant :

$$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{R_1} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{R_2} \mathcal{R}_2 \xrightarrow{R_3} \mathcal{R}_3 \dots \mathcal{R}_{n-1} \xrightarrow{R_n} \mathcal{R}_n$$

Soit q_i le quaternion qui représente la rotation R_i ($1 \leq i \leq n$) et soit p_i le quaternion qui représente la rotation composée $R_i \circ R_{i-1} \circ \dots \circ R_2 \circ R_1$. La relation (2.19) nous permet d'établir que $p_i = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_{i-1} \cdot q_i$.

Soit $\vec{\Omega}_i$ le vecteur vitesse de rotation associé à R_i ($1 \leq i \leq n$) et soit $\Omega_i = 2\dot{q}_i \cdot \bar{q}_i$ le quaternion purement vectoriel représentant ce vecteur dans le repère \mathcal{R}_{i-1} . La rotation permettant de passer du repère \mathcal{R}_{i-1} au repère \mathcal{R}_0 est représentée par le quaternion \bar{p}_{i-1} . La formule de changement de repère, établie en (2.21) nous permet alors d'exprimer $\vec{\Omega}_i$ dans le repère \mathcal{R}_0 par la formule :

$$\vec{\Omega}_i = p_{i-1} \cdot \Omega_i \cdot \bar{p}_{i-1} \quad \text{dans } \mathcal{R}_0$$

Soit R la rotation qui transforme directement le repère \mathcal{R}_0 en \mathcal{R}_n . Le quaternion q qui représente cette rotation est le produit de tous les q_i , et on peut écrire :

$$q = \prod_{i=1}^n q_i \qquad \bar{q} = \prod_{i=n}^1 \bar{q}_i$$

En dérivant l'expression de q on obtient :

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^{i-1} q_j \cdot \dot{q}_i \cdot \prod_{j=i+1}^n q_j \right)$$

On peut alors calculer le vecteur vitesse de rotation correspondant $\Omega = 2\dot{q} \cdot \bar{q}$:

$$\Omega = 2 \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^{i-1} q_j \cdot \dot{q}_i \cdot \prod_{j=i+1}^n q_j \cdot \prod_{j=n}^1 \bar{q}_j \right)$$

En décomposant le dernier produit et en considérant chacun des facteurs comme le conjugué d'un produit plutôt qu'un produit de conjugués, on obtient :

$$\Omega = 2 \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^{i-1} q_j \cdot \dot{q}_i \cdot \prod_{j=i+1}^n q_j \cdot \overline{\prod_{j=i+1}^n q_j} \cdot \overline{\prod_{j=1}^{i-1} q_j} \right)$$

Après simplification, en utilisant les expressions $\Omega_i = 2\dot{q}_i \cdot \bar{q}_i$ et les produits partiels $p_{i-1} = q_1 \cdot q_2 \cdots q_{i-1}$ on obtient :

$$\Omega = \sum_{i=1}^n p_{i-1} \cdot \Omega_i \cdot \bar{p}_{i-1} \tag{2.28}$$

Expression dans le repère mobile

La relation (2.21) nous donne immédiatement l'expression du vecteur vitesse de rotation dans le repère mobile :

$$\Omega_S = \bar{q} \cdot \Omega \cdot q = \sum_{i=1}^n \bar{q} \cdot p_{i-1} \cdot \Omega_i \cdot \bar{p}_{i-1} \cdot q \tag{2.29}$$

Chapitre 3

Commande de systèmes plats

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons dans les grandes lignes la méthode générale permettant de *calculer, en boucle ouverte, des commandes optimales en temps pour des systèmes plats*. La solution proposée comporte deux étapes distinctes : d'une part, le calcul d'un chemin permettant de réaliser exactement un rendez-vous, d'autre part, le calcul d'une trajectoire optimale en temps le long de ce chemin. Le problème à résoudre peut alors être défini par les éléments suivants :

- sa *dynamique* : c'est le système d'équations différentielles qui lie toutes les grandeurs physiques du système. Traditionnellement en automatique, la *dynamique* est décrite par un système d'équations de la forme $\dot{x} = f(x, u)$, comme nous l'avons indiqué en (1.1), mais ici nous nous intéresserons aux *systèmes différentiellement plats*, le formalisme sera donc différent.
- les *conditions de rendez-vous* : les conditions que le système doit vérifier à l'instant initial et à l'instant final. Chacune de ces conditions s'énonce de la façon suivante : « la dérivée d'ordre k de la variable $v \in \mathbf{R}$ du système doit avoir la valeur $v_i^{(k)}$ à l'instant initial (ou la valeur $v_f^{(k)}$ à l'instant final) ».
- les *contraintes dynamiques* : les conditions qui doivent être vérifiées en chaque instant. Dans le chapitre précédent nous avons vu que les contraintes se réduisent souvent à des bornes sur les commandes. Nous chercherons à être beaucoup plus général et prendrons en compte des bornes sur n'importe laquelle des variables du système et à n'importe quel ordre de dérivation.

Pour résoudre le problème nous exploitons certaines propriétés des systèmes plats, en particulier le fait que l'une des variables du système, la sortie plate, permet de recalculer toutes les autres variables. En 3.2, nous commencerons donc par *définir les systèmes plats* en introduisant le cadre théorique minimal permettant d'aboutir à une définition rigoureuse. Des exemples seront proposés pour illustrer cette définition.

Une fois établie la définition des systèmes plats, nous présenterons précisément dans la partie 3.3 *les éléments du problème à résoudre*. En particulier nous indiquerons les notations utilisées dans ce chapitre pour décrire le système, les conditions de rendez-vous et les contraintes prises en compte. Quelques remarques supplémentaires seront

faites sur la cohérence de ces divers éléments et sur les propriétés de base des variables prises en compte (en particulier sur leurs domaines de définition, leur continuité et leur dérivabilité).

Ces définitions étant posées, nous pourrions aborder effectivement la méthode de calcul des commandes optimales. La partie 3.4 montrera *comment calculer un chemin*, pour la sortie plate, qui permet de réaliser exactement le rendez-vous imposé. Ce problème est particulièrement simple dans le cas des systèmes plats puisqu'il suffit de transformer les conditions de rendez-vous en conditions sur la sortie plate et ses dérivées, puis d'en déduire un chemin. Nous proposerons deux méthodes pour définir ce chemin : l'une, purement géométrique, le définira comme une courbe implicite ; l'autre le définira comme une courbe paramétrée. Dans les deux cas, nous verrons comment le problème se réécrit en dimension 1, soit en fonction de l'une des coordonnées de la sortie plate (cas d'une courbe implicite), soit en fonction du paramètre utilisé pour définir le chemin (cas d'une courbe paramétrée).

Le reste du chapitre est consacré au *calcul d'une trajectoire le long du chemin choisi*. Initialement, en 3.5, nous montrerons comment calculer une trajectoire à partir d'un chemin, dans le cas d'une courbe implicite et dans le cas d'une courbe paramétrée. En particulier, nous mettrons en évidence qu'il est possible de calculer une trajectoire à partir du chemin suivi par la sortie plate et d'une variable du système à laquelle on impose de coïncider avec une fonction $v(t)$. Par ailleurs, nous décrirons précisément les effets du changement de trajectoire sur les variables du système.

Après avoir vu comment calculer une trajectoire arbitraire, il restera à déterminer les éléments permettant de *calculer la trajectoire optimale en temps pour le chemin imposé* à la sortie plate. Dans la mesure où le calcul d'une trajectoire peut être effectué à partir d'un chemin et d'une variable $v(t)$, nous allons consacrer la partie 3.6 à établir les *conditions que la variable $v(t)$ doit vérifier* pour que la trajectoire obtenue soit effectivement optimale.

Les deux dernières parties de ce chapitre exploitent les résultats de 3.5 et 3.6 pour *construire effectivement la trajectoire optimale*. La première étape, décrite en 3.7, montrera comment procéder lorsque les contraintes prises en compte ne concernent qu'une seule variable. Enfin, en 3.8 nous proposerons un algorithme qui prend en compte toutes les contraintes dynamiques du problème.

3.2 Systèmes plats

3.2.1 Présentation générale

La notion de platitude a été introduite lors de l'étude de la linéarisation par bouclage [Fliess et al.92, Martin93], dans le contexte de l'algèbre différentielle. Cette représentation est particulièrement importante en automatique car elle concerne de nombreux systèmes. En effet, le lien avec les autres systèmes traditionnellement étudiés en automatique peut être fait avec le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 ([Fliess et al.92]) *Un système linéaire est plat si, et seulement si, il est commandable.*

La caractéristique principale des systèmes (différentiellement) plats que nous utiliserons ici est l'existence d'une *sortie linéarisante* (ou sortie plate). Si on considère un système de la forme :

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \mathbf{R}^m \quad (3.1)$$

la platitude implique l'existence d'un ensemble fini de variables différentiellement indépendantes $y = (y_1, \dots, y_m)$ telles que :

- les y_i sont des fonctions de x, u et d'un nombre fini de leurs dérivées ;
- les x_i et les u_i sont des fonctions de y et d'un nombre fini de ses dérivées.

Ainsi, le système est en quelque sorte inversible : on peut calculer la commande et l'état, à partir de la sortie plate y , sans aucune intégration. Comme indiqué dans [Fliess et al.95a, Fliess et al.95b], le problème du motion planning devient alors particulièrement simple à résoudre puisqu'il suffit de se fixer une trajectoire pour y , qui vérifie les conditions de rendez-vous imposées. Par ailleurs de par le formalisme utilisé, les systèmes plats sont plutôt simples à contrôler, puisqu'ils peuvent être linéarisés par bouclage dynamique.

3.2.2 Cadre théorique

La définition des systèmes plats, telle qu'elle est énoncée ci-dessus manque de rigueur. En particulier elle utilise la notion d'*indépendance différentielle* entre les variables y_i ($1 \leq i \leq n$) et elle sous-entend que les *deux représentations du système sont équivalentes*. Par ailleurs, cette définition ne met pas en valeur la portée de la platitude dans le cadre de la commande des systèmes. Pour préciser ces points, nous allons utiliser le cadre théorique mis en œuvre dans [Fliess et al.95b]. Pour cela nous allons commencer par introduire les définitions de base qui vont permettre de formaliser la notion de dépendance entre variables dans le cadre de l'algèbre différentielle. Ensuite, nous énoncerons les définitions précises des *systèmes* et des *dynamiques* qui leur sont associées pour pouvoir énoncer la définition formelle d'un système plat. Enfin, pour situer l'utilité de la notion de platitude en automatique, un lien sera fait avec la notion de commandabilité.

Corps différentiels ordinaires

Dans le cas algébrique, un anneau de polynômes $k[X_1, \dots, X_n]$, à coefficients dans le corps k , avait été défini comme une extension du corps k par les éléments X_1, \dots, X_n (les variables des polynômes). Dans le cas différentiel l'idée est très voisine : un anneau différentiel est un anneau commutatif \mathbf{A} muni d'une opération de dérivation qui vérifie les propriétés suivantes pour tout élément a et b de \mathbf{A} :

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} \in \mathbf{A} \quad \frac{d}{dt}(a + b) = \dot{a} + \dot{b} \quad \frac{d}{dt}(ab) = \dot{a}b + a\dot{b}$$

Si l'anneau est aussi un corps, on parle de corps différentiel.

Comme dans le cas algébrique, on cherche à analyser la structure des corps différentiels. Ainsi, de nombreuses notions sont étendues au cas différentiel, en particulier les

notions énoncées ci-dessous, qui seront utilisées par la suite.

Définition 3.2.1 Une extension de corps différentiel L/K est la donnée de deux corps différentiels L et $K \subseteq L$ tels que la restriction à K de la dérivée dans L coïncide avec la dérivée dans K .

Définition 3.2.2 Un élément ξ d'un corps différentiel $L \supseteq K$ est dit différentiellement K -algébrique si, et seulement si, il satisfait une équation algébrique différentielle sur K , c'est à dire s'il existe un polynôme $\pi \in K[x_0, x_1, \dots, x_v]$, tel que $\pi(\xi, \dot{\xi}, \dots, \xi^{(v)}) = 0$. L'extension L/K est dite différentiellement algébrique si, et seulement si, tout élément de L est différentiellement K -algébrique.

Définition 3.2.3 Un élément $\xi \in L$ est dit différentiellement K -transcendant si, et seulement si, il n'est pas K -algébrique. L'extension L/K est dite différentiellement K -transcendante si, et seulement si, il existe au moins un élément de L qui soit différentiellement K -transcendant.

Définition 3.2.4 Des éléments $\xi_i \in L$, $i \in I \subset \mathbb{N}$, sont dits différentiellement K -algébriquement indépendants si, et seulement si, pour tous les ordres de dérivation $v \geq 0$, les éléments $\xi_i^{(v)} \in L$, $i \in I$, sont K -algébriquement indépendants.

Définition 3.2.5 Une base de transcendance d'une extension L/K est un ensemble d'éléments de L , différentiellement K -algébriquement indépendants, qui est maximal pour l'inclusion. Le degré de transcendance différentielle de L/K est le cardinal d'une base de transcendance. Il est noté $\text{diff tr } d^* L/K$ et est indépendant de la base choisie¹.

Définition 3.2.6 Une extension différentielle L/K est dite purement différentiellement transcendante si, et seulement si, il existe une base de transcendance $\xi = \{\xi_i, i \in I\}$ de L/K telle que $L = K \langle \xi \rangle$.

Cette dernière définition est très importante car elle permet de définir un corps différentiel directement par les éléments de sa base de transcendance, sachant qu'aucune relation n'apparaît entre eux. Les éléments de ce type d'extension différentielle sont alors beaucoup plus simples à manipuler et la définition de l'extension est plus concise puisqu'il suffit d'indiquer le corps K et la base ξ . Si la base de transcendance d'un corps est finie, on dit que le corps est de *type fini*.

Théorème 3.2.2 Pour une extension différentielle L/K de type fini, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) L/K est différentiellement algébrique ;
- (ii) le degré de transcendance (non différentiel) de L/K est fini.

1. Il n'est pas toujours facile de mettre en évidence une relation entre éléments dépendants. Par contre, des méthodes simples permettent de calculer le degré de transcendance $\text{diff tr } d^* L/K$ d'une extension L/K

Systèmes et dynamiques

Dans ce qui suit, nous noterons k le corps différentiel de base², c'est à dire le corps auquel appartiennent les coefficients des équations différentielles. On peut alors définir la notion de *système* :

Définition 3.2.7 Un système est une extension différentielle \mathcal{D}/k de type fini.

Autrement dit, c'est la donnée d'un nombre fini de quantités liées par un nombre fini d'équations différentielles algébriques à coefficients dans k . Nous noterons généralement ces quantités x_1, x_2, \dots, x_n ; intuitivement elles fourniront une description de *l'état du système*. Le degré de transcendance est un élément important pour caractériser un système car il indique le nombre d'entrées indépendantes nécessaires pour le commander.

Exemple 3.2.1 Comme exemple de système on peut prendre \mathcal{D}/\mathbb{R} , le corps différentiel généré par les 4 inconnues x_1, x_2, x_3 et x_4 , auxquelles on impose de vérifier les deux relations :

$$\dot{x}_1 x_1 + \ddot{x}_2 \dot{x}_3 + \ddot{x}_4 = 0 \qquad \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 0$$

Ici, le degré de transcendance est clairement 2. En effet, on peut trouver des ensembles de 2 éléments indépendants : $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_2, x_4\}$ et $\{x_3, x_4\}$. Par contre il n'est pas possible de trouver un ensemble de 3 éléments indépendants : en utilisant la seconde relation pour remplacer \ddot{x}_2 (resp. \dot{x}_3) par $-\ddot{x}_3$ (resp. $-\dot{x}_2$) dans la première, on obtient une relation sur $\{x_1, x_3, x_4\}$ (resp. $\{x_1, x_2, x_4\}$).

Soit $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, où m est un entier fini, on note $k\langle u \rangle$ le corps différentiel engendré par u . Si les indéterminées u_1, u_2, \dots, u_m sont différentiellement k -algébriquement indépendantes (diff tr d° $k\langle u \rangle/k = 0$), alors on peut définir ainsi la notion de *dynamique* :

Définition 3.2.8 Une dynamique est une extension différentielle algébrique $\mathcal{D}/k\langle u \rangle$ de type fini.

Le théorème 3.2.2 nous assure que $\mathcal{D}/k\langle u \rangle$ admet une base de transcendance finie, notée $x = (x_1, \dots, x_n)$, car l'extension $\mathcal{D}/k\langle u \rangle$ est algébrique par définition. Ainsi, tout élément $\xi \in \mathcal{D}$, $\xi \neq x_i$ ($1 \leq i \leq n$), dépend $k\langle u \rangle$ -algébriquement de x , il existe donc un polynôme de $k[\xi, x_1, \dots, x_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}]$ (avec α fini) qui s'annule. Ceci est vrai en particulier pour les éléments de $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned} A_1(\dot{x}_1, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha_1)}) &= 0 \\ &\vdots \\ A_n(\dot{x}_n, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha_n)}) &= 0 \end{aligned}$$

L'entier n est appelé la *dimension* de la dynamique $\mathcal{D}/k\langle u \rangle$.

Exemple 3.2.1 (suite) En posant $u = (u_1, u_2)$, avec $u_1 = \dot{x}_1$ et $u_2 = \dot{x}_2$, l'extension $\mathcal{D}/\mathbb{R}\langle u \rangle$ est différentiellement algébrique et mène à la représentation :

$$\dot{x}_1 = u_1 \qquad \dot{x}_2 = u_2 \qquad \dot{x}_3 = -u_2 \qquad \dot{x}_4 = u_5 \qquad \dot{x}_5 = -u_1 x_1 + \dot{u}_2 u_2$$

2. La situation la plus courante correspond au cas $k = \mathbb{R}$.

Le choix des commandes est très important pour l'expression de la dynamique. Si on avait pris $u_1 = \ddot{x}_2$ et $u_2 = \ddot{x}_4$ on aurait obtenu une dynamique différente :

$$\dot{x}_1 = \frac{u_1 x_5 - u_2}{x_1} \quad \dot{x}_2 = x_5 \quad \dot{x}_3 = -x_5 \quad \dot{x}_4 = x_6 \quad \dot{x}_5 = u_1 \quad \dot{x}_6 = u_2$$

Bien que le nombre de « variables d'état » puisse varier entre dynamiques associées à un même système \mathcal{D}/k , il faut noter que le nombre de commandes indépendantes ne dépend pas du choix de la commande mais uniquement du système associé. Cette remarque nous mène à la notion d'équivalence entre systèmes :

Définition 3.2.9 Deux systèmes \mathcal{D}/k et $\tilde{\mathcal{D}}/k$ sont dits équivalents si, et seulement si, tout élément de \mathcal{D} est algébrique sur $\tilde{\mathcal{D}}$ et inversement. Deux dynamiques $\mathcal{D}/k \langle u \rangle$ et $\tilde{\mathcal{D}}/k \langle \tilde{u} \rangle$ sont dites équivalentes si les systèmes correspondants \mathcal{D}/k et $\tilde{\mathcal{D}}/k$ le sont.

On remarquera que cette définition de l'équivalence entre systèmes conserve le degré de transcendance.

Une fois cette notion d'équivalence introduite, on cherchera à « minimiser » la représentation du système. La définition 3.2.6, appliquée aux systèmes, permet alors de caractériser simplement la platitude :

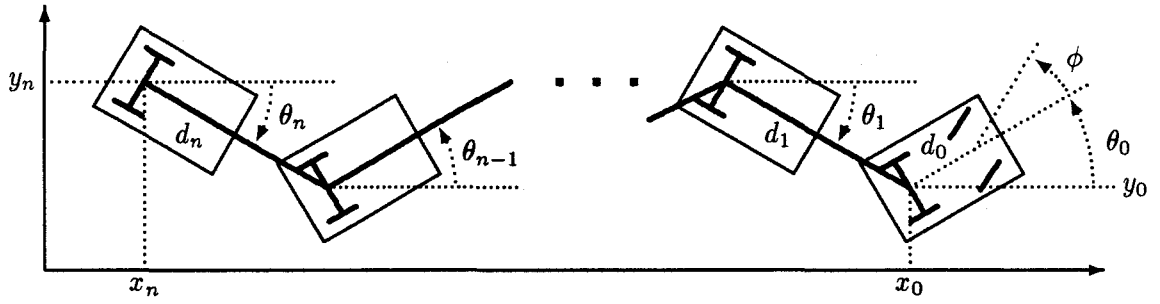
Définition 3.2.10 Un système \mathcal{D}/k est dit différentiellement plat si, et seulement si, il est équivalent à un système L/k purement différentiellement transcendant. Une base de transcendance différentielle $y = (y_1, \dots, y_m)$ de L/k telle que $L = k \langle y \rangle$ est appelée une sortie plate (ou sortie linéarisante) du système \mathcal{D}/k .

Cette définition est différente de celle donnée en 3.2.1, car elle ne fait intervenir que des relations algébriques entre les variables du système, la sortie plate et un nombre fini de ses dérivées. Dans de nombreux cas il est plus commode de travailler sur un système équivalent dans lequel les variables sont données comme des fonctions quelconques de la sortie plate et de ses dérivées. Par exemple elles peuvent faire intervenir des fonctions trigonométriques, des radicaux ou des fractions rationnelles.

Ces deux définitions ne sont pas équivalentes. En effet on pourrait imaginer un système qui vérifie la définition sommaire donnée en 3.2.1 mais qui n'est pas plat selon la définition (3.2.10). Toutefois, la première définition traduit mieux les propriétés des systèmes plats qui nous sont les plus utiles, c'est donc celle que nous retenons pour la suite.

3.2.3 Exemples de systèmes plats

Il n'existe pas de méthode permettant de déterminer la sortie plate d'un système dans le cas général. Le fait d'établir la platitude d'un système ne permet donc pas toujours d'exploiter au mieux ses propriétés. Toutefois, il existe des systèmes particulièrement importants pour lesquels la sortie plate a été trouvée. Hormis le satellite et la grue qui seront développés dans les chapitres suivants, on peut citer à titre d'exemples : la pièce de monnaie, les pendules ([Fliess et al.95b]) et l'avion ([Martin96]). Pour d'autres systèmes, l'utilisation conjointe de modes vibratoires et de la platitude du système permet d'atteindre des points d'équilibre particuliers ; c'est le cas des pendules de Kapista ([Fliess et al.95b]) et des réacteurs chimiques ([Rouchon96]). Ci-dessous, nous détaillons à titre d'exemple deux systèmes plats : le camion à n remorques et le moteur à induction.


 FIG. 3.1 - Le camion à n remorques

Le camion à n remorques

Il s'agit d'un système idéalisé, composé d'un camion auquel sont accrochées n remorques. Le point d'attache de la i^e remorque se situe sur le milieu de l'essieu arrière de la remorque précédente, comme indiqué sur la figure 3.1. Ce système, décrit entre autres dans [Fliess et al.92], peut être commandé par la vitesse du camion et l'orientation de ses roues directrices. On obtient alors la dynamique suivante :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 &= u_1 \cos \theta_0 \\ \dot{y}_0 &= u_1 \sin \theta_0 \\ \dot{\phi} &= u_2 \\ \dot{\theta}_0 &= \frac{u_1}{d_0} \tan \phi \\ \dot{\theta}_i &= \frac{u_1}{d_i} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \cos(\theta_{j-1} - \theta_j) \right) \sin(\theta_{i-1} - \theta_i) \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

où $(x_0, y_0, \phi, \theta_0, \dots, \theta_n) \in \mathbf{R}^2 \times]-\pi/2, \pi/2[\times (S^1)^{n+1}$ est l'état, (u_1, u_2) la commande et d_0, \dots, d_n des constantes positives (la longueur de chacune des remorques).

Les coordonnées (x_i, y_i) de la position du milieu de l'essieu arrière de la remorque i peuvent facilement être calculées :

$$x_i = x_0 - \sum_{j=1}^i d_j \cos \theta_j \qquad y_i = y_0 - \sum_{j=1}^i d_j \sin \theta_j$$

On en déduit les expressions récursives de x_i et y_i :

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i - d_{i+1} \cos \theta_{i+1} & y_{i+1} &= y_i - d_{i+1} \sin \theta_{i+1} \\ x_i &= x_{i+1} + d_{i+1} \cos \theta_{i+1} & y_i &= y_{i+1} + d_{i+1} \sin \theta_{i+1} \end{aligned}$$

On peut donc calculer x_i et y_i à partir de x_{i+1} , y_{i+1} et θ_{i+1} . Or, la remorque i se déplace dans la direction de son timon, on a donc $\tan \theta_i = \dot{y}_i / \dot{x}_i$, on peut donc obtenir x_i et y_i à partir de x_{i+1} , y_{i+1} , \dot{x}_{i+1} et \dot{y}_{i+1} ; la donnée de x_n , y_n et de leurs $i+1$ premières dérivées est donc suffisante pour calculer x_i , y_i et θ_i . Par ailleurs, du système (3.2) on obtient $u_1 = \dot{x}_0 / \cos \theta_0$, on en déduit que $\tan \phi = d_0 \dot{\theta}_0 \cos \theta_0 / \dot{x}_0$, ce qui permet d'obtenir u_2 comme une fonction de \dot{x}_0 , θ_0 et $\dot{\theta}_0$.

Ceci montre que le système est plat puisque les commandes u_1 et u_2 , ainsi que les variables x_i , y_i et θ ; ($0 \leq i \leq n$) peuvent être recalculées à partir de x_n , y_n et leurs $n+2$ premières dérivées.

Le moteur à induction

La commande des moteurs à induction est assez délicate, essentiellement à cause des non linéarités du modèle, des fortes variations de certains paramètres et de la difficulté à mesurer les flux magnétiques et le courant dans le rotor. La mise en évidence de la platitude du système par [Martin et al.96] a permis de réduire considérablement la difficulté du problème.

La description des circuits du rotor et du stator peut être donnée par les équations électriques :

$$R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt} = u_s \qquad R_r i_r + \frac{d\psi_r}{dt} = 0 \qquad (3.3)$$

avec R_s la résistance du stator, i_s son courant, ψ_s son flux et u_s sa tension; R_r la résistance du rotor, i_r son courant, ψ_r son flux. Les courants, flux et tensions sont représentés par des nombres complexes; dans le cas où le moteur est commandé par la tension u_s , on dispose en fait de deux commandes indépendantes $\Re(u_s)$ et $\Im(u_s)$ (les symboles \Re et \Im indiquent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire).

En utilisant un modèle idéalisé des circuits magnétiques, fiable lorsque les courants restent faibles, les flux et les courants sont liés par les relations :

$$\psi_s = L_s i_s + M e^{jn\theta} i_r \qquad \psi_r = L_r i_r + M e^{-jn\theta} i_s \qquad (3.4)$$

avec θ la position du rotor, L_s l'inductance du stator, L_r l'inductance du rotor, M l'induction mutuelle entre le rotor et le stator et n le nombre de paires de pôles.

La loi de Lorenz permet alors d'établir que le couple fourni par le moteur est $n\Im(i_r^* \psi_r)$, ce qui permet d'obtenir le mouvement du rotor par l'expression :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = n\Im(i_r^* \psi_r) - \tau_L \qquad (3.5)$$

avec J le moment d'inertie du rotor et τ_L le couple de la charge (qui dépend généralement de θ et $\dot{\theta}$). En réécrivant le flux du rotor sous la forme module/argument $\psi_r = \rho e^{j\alpha}$, le couple produit par le moteur peut s'exprimer sous la forme :

$$-n\Im(i_r \psi_r^*) = \frac{n}{R_r} \Im(\psi_r^* \frac{d\psi_r}{dt}) = \frac{n}{R_r} \rho^2 \dot{\alpha}$$

Ceci permet de réécrire l'expression (3.5) comme suit :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{n}{R_r} \rho^2 \dot{\alpha} - \tau_L \qquad (3.6)$$

De ce modèle, P. MARTIN et P. ROUCHON ont extrait la sortie plate $y = (\theta, \alpha)$. En effet, de (3.6) on déduit :

$$\rho = \sqrt{\frac{R_r(J\ddot{\theta} + \tau_L)}{n\dot{\alpha}}} \qquad \Rightarrow \qquad \psi_r = A(y, \dot{y}, \ddot{y}) \qquad (3.7)$$

Les expressions (3.3),(3.4) et (3.7) permettent d'exprimer i_r et i_s , ψ_s et u_s :

$$\begin{aligned} i_r &= -\frac{1}{R_r} \frac{d\psi_r}{dt} &= -\frac{1}{R_r} \dot{A}(y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{y}) \\ i_s &= -\frac{1}{M} (\psi_r - L_r i_r) e^{jn\theta} &= B(y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{y}) \\ \psi_s &= L_s i_s + M e^{jn\theta} i_r &= C(y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{y}) \\ u_s &= R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt} &= D(y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{y}, y^{(4)}) \end{aligned}$$

Ainsi, l'angle θ du rotor et l'angle α du champ magnétique permettent de déterminer chacune des autres variables décrivant le moteur.

3.3 Objectif et limites de la méthode

Après avoir défini précisément ce que sont les systèmes plats, nous pouvons préciser l'étude que nous cherchons à réaliser. En 1.1 nous avons évoqué les problèmes de calcul de commandes optimales avec contraintes sur l'état du système, et nous en avons donné une définition rigoureuse, résumée dans le tableau 1.2. Notre *objectif* est de définir une méthode générale pour résoudre des problèmes de ce type, dans le cadre des systèmes plats. Étant donné l'ampleur de la tâche, nous nous limiterons au cas des commandes optimales en temps, lorsque la trajectoire de la sortie plate est imposée.

3.3.1 Définition du problème

Dans le cadre des systèmes plats, un problème de commande optimale en temps s'exprime très simplement. En effet, étant donné que la distinction entre variable d'état et commande n'a plus lieu d'être, le problème est défini par la donnée des *variables du système*, des *contraintes dynamiques* et des *conditions de rendez-vous*. Ce sont ces trois points que nous précisons ici.

Variables du système

Sortie plate : Lors de l'étude d'un système plat, la distinction entre entrée, sortie, variable d'état et commande est artificielle et la seule variable du système qui se distingue est la sortie plate. Dans ce chapitre, elle est systématiquement notée y et ses m composantes scalaires sont notées $y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_m$. Les dérivées de la sortie plate sont notées $\dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(k)}$. De même, les dérivées de la composante y_j de y sont notées $\dot{y}_j, \ddot{y}_j, \dots, y_j^{(k)}$.

Variables du système : Par définition, les variables du système peuvent s'exprimer en fonction de la sortie plate y et de ses dérivées. Si l'ordre de dérivation maximal de y , dont dépend la variable v est noté β_v , alors v peut s'écrire :

$$v = V(y, \dot{y}, \dots, y^{(\beta_v)}) \quad (3.8)$$

Ainsi, V est une application de $(\mathbf{R}^m)^{\beta_v+1}$ dans \mathbf{R} . La dérivée d'ordre k de la variable v notée :

$$v^{(k)} = V^{(k)}(y, \dot{y}, \dots, y^{(\beta_v+k)})$$

L'ensemble des variables du système sera noté Σ ; lorsqu'il sera nécessaire de faire apparaître une seconde variable, elle sera notée w et s'exprimera en fonction de y et de ses β_w premières dérivées par la relation :

$$w = W(y, \dot{y}, \dots, y^{(\beta_w)})$$

Contraintes dynamiques

Ce sont les contraintes qui doivent être vérifiées par les variables du système en chaque instant. Pour chacune des variables v du système soumise à des contraintes, on note γ_v l'ordre de dérivation maximal de v pour lequel une contrainte apparaît. Toutes les contraintes concernant v et ses dérivées sont alors regroupées dans un ensemble noté $\mathcal{C}(v)$ qui s'écrit :

$$\mathcal{C}(v) = \{|v| \leq v_{max}, |\dot{v}| \leq \dot{v}_{max}, \dots, |v^{(\gamma_v)}| \leq v^{(\gamma_v)}\} \quad (3.9)$$

Rendez-vous

Le rendez-vous est défini par un ensemble de conditions à vérifier à l'instant initial $t = 0$ et à l'instant final $t = T$. Ces conditions peuvent porter sur n'importe laquelle des variables du système. Dans la solution proposée nous supposons que pour chacune des variables, toutes les conditions de rendez-vous prises en compte à l'instant initial sont également prises en compte à l'instant final et inversement. Cette hypothèse n'est pas toujours vraie, toutefois il est généralement possible de choisir des valeurs arbitraires, par exemple les bornes imposées par les contraintes dynamiques.

3.3.2 Conditions de continuité et de dérivabilité

Continuité et dérivabilité des variables

Si une variable $v = V(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(\beta_v)})$ est contrainte jusqu'à sa dérivée d'ordre γ_v , cela veut dire que la dérivée d'ordre γ_v de v est bornée et définie presque partout (elle peut être discontinue en un nombre fini de points). Ainsi, la variable v est de classe C^{γ_v} par morceaux.

Continuité et dérivabilité de la sortie plate

Pour ne pas avoir à traiter de singularités nous imposons donc à $y^{(\beta_v)}$ d'être de classe C^{γ_v} par morceaux, ce qui impose à la trajectoire de la sortie plate y d'être de classe $C^{\beta_v+\gamma_v}$ par morceaux. Ceci doit être vérifié pour chacune des variables du système, nous noterons donc $\gamma_y = \max\{\beta_v + \gamma_v, v \in \Sigma\}$. On doit alors imposer à y d'être de classe C^{γ_y} .

3.3.3 Variables admissibles

L'objectif est de calculer des commandes telles que toutes les contraintes dynamiques soient respectées, il est donc souhaitable de définir les variables en conséquence. Le domaine de définition de l'application V permettant de calculer la variable v à partir de la position y de la sortie plate et de ses β_v premières dérivées est noté $\mathcal{U}_v \subseteq (\mathbf{R}^m)^{(\beta_v+1)}$. Cet ensemble est tel qu'en chacun de ses points, la valeur de v obtenue se trouve effectivement entre les bornes qui lui sont imposées.

Ce principe doit être étendu à chacune des γ_v dérivées de v pour lesquelles une contrainte est définie et à chacune des variables du système. Ainsi, pour la dérivée d'ordre k de v , on définira $\mathcal{U}_{v^{(k)}} \subseteq (\mathbf{R}^m)^{(\beta_v+k+1)}$. Le plus « grand » des ensembles ainsi obtenus est alors un sous-ensemble de $(\mathbf{R}^m)^{\gamma_v+1}$.

Finalement, pour que toutes les contraintes dynamiques soient vérifiées, il est nécessaire de prendre un point à « l'intersection » de tous ces ensembles. Comme ils ne sont pas tous de même dimension, ils seront plongés au préalable dans $(\mathbf{R}^m)^{\gamma_v+1}$. On se retrouve finalement avec un domaine de définition pour le système :

$$\mathcal{U} = \bigcap_{\substack{v \in \Sigma \\ 0 \leq k \leq \gamma_v}} \mathcal{U}_{v^{(k)}} \times (\mathbf{R}^m)^{\gamma_v - \beta_v - k} \quad (3.10)$$

Dans ce qui suit, on supposera bien entendu que l'ensemble \mathcal{U} n'est pas vide, et que les valeurs de la sortie plate y et de ses γ_v premières dérivées sont telles que $(y, \dot{y}, \dots, y^{(\gamma_v)}) \in \mathcal{U}$.

3.4 Planification du mouvement

3.4.1 Conditions de rendez-vous et conditions de jets

Les conditions de rendez-vous ne sont pas toujours définies sur la sortie plate et ses dérivées. Il est tout à fait possible, et même probable, qu'elles soient définies sur d'autres variables du système, en particulier sur la commande, l'état et leurs dérivées. La première étape du traitement a pour but de transformer le problème du rendez-vous en un ensemble de conditions de jets sur la sortie plate et ses dérivées, à l'instant initial et à l'instant final. Les conditions initiales sont indépendantes des conditions finales, nous pouvons donc restreindre l'étude aux conditions de rendez-vous à l'instant initial. Pour chacune de ces conditions, la variable concernée est remplacée par son expression en tant que fonction de la sortie plate et de ses dérivées. Ainsi, pour la variable v , vue comme une fonction scalaire des $\beta_v + 1$ vecteurs $y, \dot{y}, \dots, y^{(\beta_v)}$ de \mathbf{R}^m , si une des conditions de rendez-vous lui impose la valeur v_i à l'instant initial, l'équation suivante est introduite :

$$V(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(\beta_v)}) = v_i$$

De même, si une condition de rendez-vous impose à la k^{e} dérivée de la variable v de prendre la valeur $v_i^{(k)}$, ceci sera traduit par l'équation suivante :

$$V^{(k)}(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(\beta_v+k)}) = v_i^{(k)}$$

Une équation de ce type est ajoutée au système pour chacune des conditions de rendez-vous imposées. Ainsi, on obtient un système d'équations dont les inconnues sont $y, \dot{y}, \dots, y^{(\alpha_y)}$; la valeur de α_y dépend des variables prises en compte dans les conditions de rendez-vous et de l'ordre de dérivation auquel elles interviennent. Les conditions de jets sur la sortie plate, à l'instant initial, sont les valeurs $y_i, \dot{y}_i, \dots, y_i^{(\alpha_y)}$ de la sortie plate et de ses dérivées qui sont solutions de ce système. Une remarque s'impose sur le nombre de solutions du système :

- si le système n'admet aucune solution, alors les conditions de rendez-vous demandées ne peuvent pas être remplies ;
- si le système admet une solution unique, ou un nombre fini de solutions, il faut obligatoirement prendre l'une d'entre elles ;
- si le système admet une infinité de solutions, un certain nombre de dérivées de la sortie plate peuvent être choisies arbitrairement, par exemple pour simplifier les calculs ou pour « améliorer » le chemin suivi par la sortie plate.

Exemple 3.4.1 Soit le système à deux variables u et v , $\{u = x, v = \dot{x}y\}$. Les valeurs de chacune de ces deux variables et de leurs dérivées premières sont imposées à l'instant initial (u_i, v_i, \dot{u}_i et \dot{v}_i) et à l'instant final (u_f, v_f, \dot{u}_f et \dot{v}_f). Ces conditions de rendez-vous mènent au système :

$$\begin{array}{cccc} x_i = u_i & \dot{x}_i y_i = v_i & x_f = u_f & \dot{x}_f y_f = v_f \\ \dot{x}_i = \dot{u}_i & \ddot{x}_i y_i + \dot{x}_i \dot{y}_i = \dot{v}_i & \dot{x}_f = \dot{u}_f & \ddot{x}_f y_f + \dot{x}_f \dot{y}_f = \dot{v}_f \end{array}$$

Ce système admet une infinité de solutions; on peut par exemple imposer aux dérivées secondes d'être nulles et prendre comme conditions de jets sur x et y :

$$\begin{aligned} \text{Jets initiaux} &= \{x_i = u_i, y_i = \frac{v_i}{u_i}, \dot{x}_i = \dot{u}_i, \dot{y}_i = \frac{\dot{v}_i}{\dot{u}_i}, \ddot{x}_i = 0, \ddot{y}_i = 0\} \\ \text{Jets finaux} &= \{x_f = u_f, y_f = \frac{v_f}{u_f}, \dot{x}_f = \dot{u}_f, \dot{y}_f = \frac{\dot{v}_f}{\dot{u}_f}, \ddot{x}_f = 0, \ddot{y}_f = 0\} \end{aligned}$$

Les conditions de jets à l'instant final seront construites selon le même procédé. Si on note $t = 0$ l'instant initial et $t = T$ l'instant final, les conditions de jets s'expriment ainsi :

$$\text{Jets initiaux} = \{y(0) = y_i, \dot{y}(0) = \dot{y}_i, \dots, y^{(\alpha_y)}(0) = y_i^{(\alpha_y)}\} \quad (3.11)$$

$$\text{Jets finaux} = \{y(T) = y_f, \dot{y}(T) = \dot{y}_f, \dots, y^{(\alpha_y)}(T) = y_f^{(\alpha_y)}\} \quad (3.12)$$

Les conditions de rendez-vous, qui fixent les valeurs de certaines variables du système à l'instant initial et à l'instant final, peuvent être transformées en conditions de jets qui ne font intervenir que les composantes de la sortie plate et de ses dérivées.

En général on aura plus de conditions de jets sur la sortie plate que de conditions de rendez-vous car chacune des variables apparaissant dans les conditions de rendez-vous peut s'exprimer en fonction de plusieurs ordres de dérivation de la sortie plate.

Ainsi, parmi les conditions de jets un certain nombre de valeurs peuvent être fixées arbitrairement. Le choix de ces paramètres peut avoir une grande importance sur le chemin effectivement obtenu pour la sortie plate. Dans ce cas il est possible d'utiliser ces paramètres pour agir sur la géométrie du chemin. Ce point sera illustré dans le chapitre 4 lors de la planification de la trajectoire en attitude du satellite.

3.4.2 Définition implicite du chemin

Chemin défini sur une variété algébrique

Une fois que les conditions de rendez-vous ont été transformées en conditions de jets, comme indiqué en 3.4.1, il faut choisir le chemin suivi par la sortie plate. Ce chemin est une courbe de dimension 1 dans un espace de dimension m (la sortie plate y est un vecteur de dimension m). La première solution consiste à définir y comme une courbe implicite, par $m - 1$ relations algébriques indépendantes entre ses m coordonnées ; ces relations sont notées $R_1(y) = 0, R_2(y) = 0, \dots, R_{m-1}(y) = 0$. Cette courbe est limitée par des bornes sur certaines composantes de y qui définissent alors un sous-ensemble de \mathbf{R}^m , noté \mathcal{B} . Le chemin suivi par la sortie plate est alors le lieu des points de \mathbf{R}^m vérifiant simultanément toutes ces relations. Dans ce qui suit, nous supposons que le chemin obtenu est une courbe connexe, de dimension 1 dans \mathbf{R}^m . On peut alors écrire :

$$\Gamma = \{y \in \mathbf{R}^m, R_1(y) = 0, R_2(y) = 0, \dots, R_{m-1}(y) = 0\} \cap \mathcal{B} \quad (3.13)$$

Ainsi, chacun des points de Γ pourra être spécifié en affectant une valeur à l'une des composantes, y_m par exemple, et en cherchant les valeurs des autres composantes de telle sorte que toutes les relations imposées soient vérifiées. En faisant décrire \mathbf{R} à y_m on obtient alors tous les points de Γ , après avoir calculé l'intersection avec \mathcal{B} .

Exemple 3.4.2 Un demi-cercle dans \mathbf{R}^3 :

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, y = 0, x^2 + z^2 = 1\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, z \geq 0\}$$

Or, en chaque point y de la trajectoire Γ on peut définir le vecteur tangent à la courbe, $\dot{y} = (\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_m)$. Celui-ci doit vérifier les équations $\dot{R}_1(y) = 0, \dot{R}_2(y) = 0, \dots, \dot{R}_{m-1}(y) = 0$, obtenues en calculant les dérivées respectives de chacune des relations algébriques $R_1(y) = 0, R_2(y) = 0, \dots, R_{m-1}(y) = 0$. Ainsi, pour un point y donné de Γ , on a $m - 1$ relations algébriques entre les m composantes $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_m$ de \dot{y} . L'espace tangent à Γ en y est donc la droite vectorielle définie en y par les $m - 1$ relations différentielles citées ci-dessus.

Exemple 3.4.2 (suite) En dérivant chacune des relations utilisées pour définir le demi-cercle, on obtient l'espace tangent au cercle en chaque point $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$:

$$T_{(x,y,z)}\Gamma = \{(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \in \mathbf{R}^3, \dot{y} = 0, x\dot{x} + z\dot{z} = 0\}$$

Au point $p = (-1, 0, 0)$ on a alors le vecteur tangent défini par $\dot{p} = (0, 0, \dot{z})$ et au point $p = (0, 0, 1)$ on a $\dot{p} = (\dot{x}, 0, 0)$.

Les expressions $R_k(y)$, $1 \leq k < m$ sont des expressions algébriques, on peut donc en calculer les dérivées jusqu'à un ordre α arbitraire. La dérivée d'ordre j de $R_k(y)$

sera alors notée $R_k^{(j)}$. Si on se fixe α m -uplets $y = (y_1, \dots, y_m)$, $\dot{y} = (\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_m)$, \dots , $y^{(\alpha-1)} = (y_i^{(\alpha-1)}, \dots, y_m^{(\alpha-1)})$, choisis parmi les solutions des équations $R_k^{(j)} = 0$ ($1 \leq k < m$, $0 \leq j < \alpha$), alors les $m - 1$ équations $R_k^{(\alpha)} = 0$ ($1 \leq k < m$) forment un système d'équations linéaire dont les inconnues sont les composantes $(y_1^{(\alpha)}, \dots, y_m^{(\alpha)})$ de la dérivée $y^{(\alpha)}$ de Γ au « point » $(y, \dot{y}, \dots, y^{(\alpha-1)})$.

Exemple 3.4.2 (suite) Les dérivées d'ordre 2 des relations algébriques utilisées pour définir le demi-cercle forment le système d'équations :

$$\ddot{y} = 0 \qquad \ddot{x}x + \ddot{z}z = -\dot{x}^2 - \dot{z}^2 \qquad (3.14)$$

Lorsque les valeurs de $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}$ et \dot{z} sont fixées, il s'agit effectivement d'un système d'équations linéaires dont les inconnues sont \ddot{x}, \ddot{y} et \ddot{z} . Au point $p = (-1, 0, 0)$ si on choisit le vecteur tangent $\dot{p} = (0, 0, 1)$, on obtient les composantes suivantes pour la dérivée d'ordre 2 : $\ddot{p} = (1, 0, \ddot{z})$. Pour $p = (0, 0, 1)$ et $\dot{p} = (1, 0, 0)$ on obtient $\ddot{p} = (\ddot{x}, 0, -1)$. Dans les deux cas, on retrouve la décomposition de l'accélération en une composante normale et une composante tangentielle, pour un mouvement circulaire.

Le système obtenu est sous-déterminé, il admet donc une infinité de solutions. En fait, comme pour le vecteur tangent, la solution forme une droite vectorielle de \mathbf{R}^m . Le choix d'une solution spécifique revient à fixer le sens et le module d'un vecteur sur cette droite.

Choix des équations en fonction des conditions de jet

Dans le cadre de la planification de trajectoire, il faut effectuer la démarche inverse : le chemin Γ doit être choisi de façon à vérifier les conditions de jets imposées. Or les conditions de jets telles qu'elles ont été définies en 3.11 et 3.12 imposent effectivement à la trajectoire Γ de passer par les points y_i et y_f et en chacun de ces points un certain nombre de dérivées sont imposées. Il faut donc construire les expressions $R_k(y)$ de telle sorte qu'un nombre suffisant de leurs dérivées soient annulées par les conditions de jets. Notre choix se porte sur des expressions algébriques pour des raisons de commodité, mais en pratique on pourrait choisir tous types d'expressions. La première chose à faire est de choisir le degré d des expressions $R_k(y)$ et de les exprimer sous la forme paramétrée suivante :

$$R_k(y) = \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq d \\ \vdots \\ 0 \leq i_m \leq d}} c_{k, i_1, i_2, \dots, i_m} \prod_{j=1}^m y_j^{i_j} \qquad (3.15)$$

Exemple 3.4.3 Chemin défini dans \mathbf{R}^3 par l'intersection de deux quadriques :

$$\begin{aligned} R_1(x, y, z) &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1x^2 + e_1xy + f_1xz + g_1y^2 + h_1yz + i_1z^2 + j_1 \\ R_2(x, y, z) &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2x^2 + e_2xy + f_2xz + g_2y^2 + h_2yz + i_2z^2 + j_2 \end{aligned}$$

Les 20 paramètres $a_1, \dots, j_1, a_2, \dots, j_2$ fournissent 18 degrés de liberté car ils sont définis à un coefficient multiplicatif près. Ces degrés de liberté pourront en général permettre de prendre en compte jusqu'à 6 conditions de jets, par exemple des conditions de jets jusqu'à l'ordre 2 à l'instant initial et à l'instant final.

Une fois posé le système d'équations, il faut calculer les dérivées jusqu'à un ordre suffisant. Cet ordre sera en fait l'ordre des conditions de jets, soit α_y . Il s'agit là d'un calcul qui ne pose aucune difficulté. Il faut noter que chacune de ces dérivées est une combinaison linéaire des coefficients c_{k,i_1,\dots,i_m} . On formera alors deux systèmes d'équations : l'un, Σ_i , pour les conditions initiales, l'autre, Σ_f pour les conditions finales.

$$\begin{aligned}\Sigma_i &= \{R_k^{(j)}(y_i) = 0, 0 \leq k < m, y^{(j)}(0) = y_i^j \in \text{Jets initiaux}\} \\ \Sigma_f &= \{R_k^{(j)}(y_f) = 0, 0 \leq k < m, y^{(j)}(T) = y_f^j \in \text{Jets finaux}\}\end{aligned}$$

Dans chacun de ces systèmes, les coordonnées de y, \dot{y}, \dots , ont été remplacées par les valeurs imposées par les conditions de jets. En faisant l'union de ces deux systèmes, on obtient un système d'équations linéaires dont les inconnues sont les coefficients c_{k,i_1,i_2,\dots,i_m} des monômes qui apparaissent dans les expressions initiales, définies en (3.15). Trois cas peuvent alors se produire :

- le système n'admet pas de solutions ; il faut alors recommencer avec un autre type d'expressions, par exemple en augmentant le degré des expressions algébriques $R_k(y)$;
- le système admet une infinité de solutions ; on choisira alors, parmi les solutions, des coefficients tels que les $m - 1$ équations $R_k(y) = 0$ ($1 \leq k < m$) définissent effectivement une variété de dimension 1 ;
- le système admet une solution unique ; il faudra s'assurer qu'elle est acceptable ; si elle ne l'est pas, on se retrouve dans le cas sans solution.

Un moyen simple de vérifier qu'une solution est acceptable est de contrôler que les $m - 1$ relations $R_1(y), \dots, R_{m-1}(y)$ sont indépendantes et qu'il est possible d'extraire de la courbe résultante un sous-ensemble connexe reliant le point de départ au point d'arrivée.

Exemple 3.4.3 (suite) Les dérivées de $R_1(x, y, z)$ et $R_2(x, y, z)$ sont :

$$\begin{aligned}\dot{R}_1(x, y, z) &= a_1\dot{x} + b_1\dot{y} + c_1\dot{z} + 2d_1\dot{x}x + e_1(\dot{x}y + x\dot{y}) + f_1(\dot{x}z + x\dot{z}) \\ &\quad + 2g_1\dot{y}y + h_1(\dot{y}z + y\dot{z}) + 2i_1\dot{z}z \\ \dot{R}_2(x, y, z) &= a_2\dot{x} + b_2\dot{y} + c_2\dot{z} + 2d_2\dot{x}x + e_2(\dot{x}y + x\dot{y}) + f_2(\dot{x}z + x\dot{z}) \\ &\quad + 2g_2\dot{y}y + h_2(\dot{y}z + y\dot{z}) + 2i_2\dot{z}z\end{aligned}$$

Si on se fixe maintenant les conditions de jets suivantes :

$$\begin{aligned}\text{Jets initiaux} &= \{(x = -1, y = 0, z = 0), (\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = 1)\} \\ \text{Jets finaux} &= \{(x = +1, y = 0, z = 0), (\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = -1)\}\end{aligned}$$

les coefficients $a_1, \dots, i_1, a_2, \dots, i_2$ doivent alors vérifier les 8 équations suivantes :

$$\begin{aligned}R_1(-1, 0, 0) &= -a_1 + d_1 + j_1 & R_1(1, 0, 0) &= a_1 + d_1 + j_1 \\ R_2(-1, 0, 0) &= -a_2 + d_2 + j_2 & R_2(1, 0, 0) &= a_2 + d_2 + j_2 \\ \dot{R}_1(-1, 0, 0) &= c_1 - f_1 & \dot{R}_1(1, 0, 0) &= -c_1 - f_1 \\ \dot{R}_2(-1, 0, 0) &= c_2 - f_2 & \dot{R}_2(1, 0, 0) &= -c_2 - f_2\end{aligned}$$

Après simplification, on obtient : $a_1 = a_2 = c_1 = c_2 = f_1 = f_2 = 0$, $d_1 = -j_1$, $d_2 = -j_2$. Les 10 coefficients qui n'apparaissent pas dans ces équations peuvent prendre n'importe quelle valeur, ainsi que j_1 et j_2 . Par ailleurs, ces coefficients sont définis à une constante multiplicative près, nous fixerons donc les valeurs de j_1 et j_2 soit à 0 soit à 1. En renommant les constantes on peut alors définir le chemin par l'une des courbes définies par les deux équations :

$$\begin{aligned} x^2 - 1 + y(a + bx + cy + dz) + ez^2 &= 0 \\ y(f + gx + hy + iz) + jz^2 &= 0 \end{aligned}$$

Toutefois, il faudra éviter les cas dégénérés; par exemple $a = b = c = d = e = 0$ définit la réunion de deux plans disjoints dont l'un contient le point de départ et l'autre le point d'arrivée. Par contre, si on pose $e = f = 1$ et $a = b = c = d = g = h = i = j = 0$, on obtient le cercle $\{(x, 0, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + z^2 = 1\}$ qui convient tout à fait.

Dès que le système d'équations algébriques définissant le chemin Γ est connu, on peut introduire des bornes sur les composantes de la sortie plate pour éliminer une partie de la courbe obtenue. La partie de la courbe retenue est celle qui se trouve entre le point de départ et le point d'arrivée. Si plusieurs solutions sont possibles il faut éliminer celles qui ne permettent pas de vérifier toutes les conditions de jets. En particulier, dans le cas d'une courbe fermée on utilisera les jets d'ordre 1 pour orienter le chemin et choisir la partie de la courbe qui convient.

Exemple 3.4.3 (suite) Le cercle $\{(x, 0, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + z^2 = 1\}$ fournit deux chemins permettant de relier le point de départ $(-1, 0, 0)$ au point d'arrivée $(1, 0, 0)$: le demi-cercle des valeurs de z négatives et le demi-cercle des valeurs de z positives. Les jets d'ordre 1 imposent $\dot{z} = 1$ à l'instant initial et $\dot{z} = -1$ à l'instant final. Ainsi, partant du point $(-1, 0, 0)$ avec $\dot{z} > 0$ on doit nécessairement commencer à parcourir le chemin dans le sens des z croissants et on retiendra le demi-cercle pour lequel les valeurs de z sont positives :

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, y = 0, x^2 + z^2 = 1\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, z \geq 0\}$$

Formulation du problème à une dimension

Le fait d'avoir défini le chemin Γ comme étant la solution d'un système d'équations nous permet maintenant de donner une nouvelle formulation du problème initial. Il suffit d'exprimer la solution du système en fonction de l'une des composantes de la sortie plate, par exemple y_1 . Les autres composantes de y s'écrivent alors $y_k = Y_k(y_1)$ ($1 < k \leq m$), où les expressions $Y_k(y_1)$ sont algébriques. L'expression du chemin suivi devient :

$$\Gamma = \{y = (y_1, Y_2(y_1), \dots, Y_m(y_1)), y_1 \in \mathbf{R}\} \cap \mathcal{B} \quad (3.16)$$

Une certaine liberté a été prise pour passer de la formulation initiale (3.13) du chemin à la formulation indiquée ci dessus. En effet, si on fixe la valeur de y_1 , les $m - 1$ équations $R_k(y)$ ($1 \leq k < m$) utilisées en (3.13) sont des équations algébriques en y_2, \dots, y_m et elles n'admettent pas forcément une solution unique (bien qu'on ait autant d'équations que de variables). Le fait que Γ soit la solution du système nous garantit une solution sur un sous-ensemble non vide de \mathbf{R} , mais sur ce sous-ensemble de \mathbf{R} il est possible d'avoir plusieurs solutions. Pour contourner ce problème, il faut choisir la coordonnée de y de façon à avoir un nombre fini de solutions et ensuite prendre Γ comme la réunion de toutes

les solutions qui appartiennent aussi à \mathcal{B} . Le nombre maximum de solutions dépend du degré total du système d'équations utilisé en (3.13). Il faudrait donc considérer chacune des expressions $Y_k(y_1)$ ($1 < k \leq m$) comme l'ensemble des racines d'un polynôme ou exprimer Γ explicitement comme la réunion de plusieurs segments de courbe.

Exemple 3.4.3 (suite) Le demi-cercle $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + z^2 = 1, y = 0, x \geq 0\}$ peut être défini explicitement par chacune des coordonnées :

- Pour x , $\Gamma = \{(x, 0, \sqrt{1-x^2}), x \in [-1, 1]\}$. C'est le cas le plus favorable, la partie négative de la racine carrée est éliminée par la condition $z \geq 0$.
- Pour y on serait obligé de définir la courbe point par point, il est donc inutile de chercher à exprimer les composantes de Γ en fonction de y .
- Pour z , $\Gamma = \{(-\sqrt{1-z^2}, 0, z), z \in [0, 1]\} \cup \{(\sqrt{1-z^2}, 0, z), z \in [0, 1]\}$. C'est le cas général.

À partir de la définition du chemin donnée en 3.16 on peut calculer les dérivées de y et en exprimer les composantes en fonction de y_1 et de ses dérivées. Pour cela il suffit de calculer les dérivées de chacune des expressions $Y_k(y_1)$ ($1 < k \leq m$). La composante k de la dérivée d'ordre j s'écrit alors $y_k^{(j)} = Y_k^{(j)}(y_1)$. C'est donc une expression dépendant de $y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(j)}$. Ainsi, chacune des dérivées $y^{(j)}$ de la sortie plate du système pourra s'exprimer en fonction de l'une de ses composantes y_1 et de ses dérivées $\dot{y}_1, \dots, y_1^{(j)}$. Or, dans la définition du système (3.8), il avait été établi que chacune des variables v du système peut s'exprimer en fonction de la sortie plate et de ses β_v premières dérivées, on peut donc exprimer v en fonction de la composante y_1 et de ses β_v premières dérivées. Dans la suite il sera pratique d'exploiter ce point pour lequel nous introduisons une notation supplémentaire qui complète les notations déjà définies en 3.8. Cette notation consiste à indiquer avec *imp* les expressions construites à partir d'une des coordonnées de la sortie plate y . On a alors un système plat de dimension 1 obtenu à partir de 3.8 en considérant les coordonnées y_2, \dots, y_m comme des variables :

$$y = Y_{imp}(y_1) \text{ et } v = V(y, \dot{y}, \dots, y^{(\beta_v)}) \implies v = V_{imp}(y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(\beta_v)}) \quad (3.17)$$

Le fait d'imposer à la sortie plate de suivre un chemin géométrique défini par des équations implicites permet de réécrire chacune des variables du système, y compris la sortie plate, en fonction d'une unique composante de la sortie plate. Le problème se réduit alors à la commande optimale en temps d'un système plat de dimension 1.

Malgré l'apparente complexité des calculs, cette méthode a de nombreux avantages. D'une part elle permet un contrôle très efficace du chemin effectivement suivi par la sortie plate y . En particulier il est possible de construire le chemin Γ en raisonnant en terme d'intersections de surfaces et de volumes dans \mathbf{R}^m . D'autre part il est possible d'obtenir une grande variété de chemins en ne manipulant que des expressions de très faible degré. Enfin, la description du chemin se fait sans introduire de paramètre supplémentaire.

3.4.3 Définition paramétrique du chemin

Principe du calcul

Plutôt que de représenter le chemin Γ par une courbe implicite, on peut introduire un paramètre s et chercher à exprimer y comme une fonction vectorielle $y(s)$. Dans ce cas le calcul dans son principe est beaucoup plus simple puisque chacune des composantes de y est calculée indépendamment des autres. Pour commencer il faut choisir arbitrairement la valeur initiale et la valeur finale du paramètre s . Par commodité on prendra $s = 0$ comme valeur initiale et on notera $s = S$ la valeur finale. Une fois ce choix effectué il faut choisir pour chacune des composantes y_k de y ($1 \leq k \leq m$) une fonction $y_k(s)$ vérifiant toutes les conditions de jets à l'instant initial et à l'instant final. En reprenant les notations utilisées en (3.11, 3.12) la fonction vectorielle $y(s)$ doit vérifier :

$$\begin{array}{llll} y(0) = y_i & \frac{d}{ds} y(0) = \dot{y}_i & \dots & \frac{d^{\alpha_i}}{ds^{\alpha_i}} y(0) = y_i^{(\alpha_y)} \\ y(S) = y_f & \frac{d}{ds} y(S) = \dot{y}_f & \dots & \frac{d^{\alpha_f}}{ds^{\alpha_f}} y(S) = y_f^{(\alpha_y)} \end{array}$$

Une méthode pratique pour résoudre ce système consiste à prendre des polynômes de degré $2\alpha_y + 1$ comme composantes de $y(s)$; le calcul du chemin initial se réduit alors à l'interpolation polynomiale des conditions de jets.

Exemple 3.4.4 Si on reprend les conditions de jets utilisées dans l'exemple 3.4.3 on doit chercher x , y et z comme des fonctions de s vérifiant :

$$\begin{array}{llllll} x(0) = -1 & y(0) = 0 & z(0) = 0 & \frac{d}{ds} x(0) = 0 & \frac{d}{ds} y(0) = 0 & \frac{d}{ds} z(0) = 1 \\ x(S) = 1 & y(S) = 0 & z(S) = 0 & \frac{d}{ds} x(S) = 0 & \frac{d}{ds} y(S) = 0 & \frac{d}{ds} z(S) = -1 \end{array}$$

Chacune des composantes doit vérifier 4 conditions de jets, on peut donc prendre des polynômes de degré 3 :

$$x(s) = -1 + 6\frac{s^2}{S^2} - 4\frac{s^3}{S^3} \qquad y(s) = 0 \qquad z(s) = s - \frac{s^2}{S}$$

Les courbes implicites correspondantes sont en fait très peu différentes de celles obtenues par la méthode précédente.

L'inconvénient majeur est le degré important des polynômes obtenus. Pour réduire le degré total, il est possible de prendre des fonctions polynomiales par morceaux. Une telle solution est très sensible au choix de la valeur finale S du paramètre d'interpolation et elle ne permet pas d'avoir un contrôle efficace sur le chemin effectivement suivi par la sortie plate. Si ce dernier point est important il faut choisir une méthode d'identification globale plus élaborée, par exemple en utilisant des courbes de Bézier.

Formulation du problème à une dimension

Chacune des composantes de la sortie plate s'exprime en fonction d'une nouvelle variable s . En exploitant la platitude du système nous allons donc chercher à exprimer chacune des variables du système en fonction de s . Pour cela il suffit de calculer

les expressions des dérivées de y en fonction de s et de ses dérivées. Ces expressions paramétriques seront utilisées dans la suite ; nous introduisons donc une notation supplémentaire. Les fonctions utilisées pour exprimer les variables du système ou la sortie plate en fonction de ce nouveau paramètre s sont indicées avec *par*. Chacune des composantes de la sortie plate est alors considérée comme une variable du nouveau système :

$$y = Y_{par}(s) \text{ et } v = V(y, \dots, y^{(\beta_v)}) \implies v = V_{par}(s, \dot{s}, \dots, s^{(\beta_v)}) \quad (3.18)$$

Le fait d'imposer à la sortie plate de suivre une courbe paramétrée par s permet de réécrire chacune des variables du système, y compris les composantes de la sortie plate, en fonction de s et d'un nombre fini de ses dérivées. Le problème se réduit alors à la commande optimale en temps d'un système plat de dimension 1.

Dans cette définition du chemin, si le paramètre s représente le temps, alors on peut directement utiliser la solution obtenue pour calculer les commandes du système.

3.5 Définition d'une trajectoire

3.5.1 Calcul à partir d'une courbe implicite

Le but est de calculer une trajectoire $y(t)$ de la sortie plate, à partir d'un chemin implicite correspondant au cas présenté dans la partie 3.4.2. Transformer un chemin implicite en trajectoire revient à ajouter la notion de temps à la définition du chemin. Pour cela il faut d'une part choisir les bornes de l'intervalle de temps utilisé, d'autre part définir une bijection entre cet intervalle et le chemin Γ . Par commodité nous noterons $[0, T]$ l'intervalle de temps. On doit alors définir y , comme une fonction vectorielle vérifiant :

$$\begin{aligned} y &: [0, T] \longrightarrow \Gamma \\ t &\longmapsto y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)) \end{aligned}$$

Il faudrait donc, en principe définir les m composantes de la fonction vectorielle, y_1, y_2, \dots, y_m , comme des fonctions scalaires du temps. Or il a été établi que le fait d'imposer à la sortie plate de suivre une courbe de dimension 1 dans \mathbf{R}^m permet de recalculer toutes les composantes de la sortie plate en fonction d'une seule. Ainsi, si on peut recalculer en chacun des points de Γ les composantes y_2, y_3, \dots, y_m en fonction de y_1 , il suffit de chercher une fonction scalaire y_1 telle que :

$$\begin{aligned} y_1 &: [0, T] \longrightarrow \Gamma_1 \subset \mathbf{R} \\ t &\longmapsto y_1(t) \end{aligned}$$

L'intervalle $\Gamma_1 \subset \mathbf{R}$ étant la projection du chemin Γ sur la composante y_1 . Il faut noter que y_1 est une application surjective, puisqu'on cherche à décrire l'intégralité du chemin pendant l'intervalle de temps $[0, T]$ par contre cette application n'est pas forcément injective car du fait de la projection, une valeur dans Γ_1 peut correspondre à plusieurs points de Γ . Par contre on pourra toujours partitionner l'intervalle $[0, T]$ de façon à ce que la restriction de y_1 à chacun des intervalles de la partition soit surjective. Il faut

noter que les expressions à utiliser pour recalculer les autres composantes de la sortie plate peuvent varier d'un intervalle de la partition à l'autre.

Exemple 3.5.1 Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la partie du cercle $x^2 + y^2 = 1$ restreinte à $\{x \geq 0\} \cup \{x < 0, y \geq 0\}$. On peut définir une fonction x sur $[0, 3]$ telle que (x, y) décrive Γ :

$$x : [0, 2] \longrightarrow [-1, 1] \quad \text{et} \quad [2, 3] \longrightarrow [0, 1]$$

$$t \longmapsto x(t) = t - 1 \quad \quad \quad t \longmapsto x(t) = 3 - t$$

L'expression à utiliser pour recalculer y dépend de la valeur de t . Pour $t \in [0, 2]$, on est sur la portion de Γ pour laquelle $y = \sqrt{1 - x^2}$, on a donc $y(t) = \sqrt{t(2 - t)}$. Pour $t \in [2, 3]$ on a $y = -\sqrt{1 - x^2}$ d'où $y(t) = -\sqrt{(t - 2)(4 - t)}$.

L'application y_1 ne peut pas être choisie quelconque. Elle doit avant tout être continue et être « suffisamment dérivable » pour les besoins du problème traité, comme cela a été établi en 3.3.2. Par ailleurs, il faut que les conditions de jets à l'instant initial soient vérifiées par y_1 et ses dérivées en $t = 0$; de même les conditions de jets à l'instant final doivent être vérifiées en $t = T$. Entre ces deux dates, plutôt que de choisir arbitrairement les valeurs de y_1 , nous allons chercher à recalculer cette fonction à partir d'une des variables du système. Supposons donc que la variable v est une fonction du temps, $v(t)$, définie sur l'intervalle $[0, T]$. Or le système est plat donc cette variable peut s'exprimer en fonction de la sortie plate et de ses dérivées; en 3.4.2, il a également été établi dans l'équation (3.16) que v peut s'exprimer en fonction de la coordonnée y_1 de la sortie plate. Si v est une fonction du temps connue et si les valeurs initiales de $y_1(0) = y_{1i}$, $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_{1i}$, ..., $y_1^{(\beta_v - 1)}(0) = y_{1i}^{(\beta_v - 1)}$ sont connues alors on peut chercher $y_1(t)$ comme solution du problème suivant sur l'intervalle $[0, T]$:

$$v(t) = V_{imp}(y_1(t), \dot{y}_1(t), \dots, y_1^{(\beta_v)}(t)) \quad (3.19)$$

$$y_1(0) = y_{1i}, \dot{y}_1(0) = \dot{y}_{1i}, \dots, y_1^{(\beta_v - 1)}(0) = y_{1i}^{(\beta_v - 1)} \quad (3.20)$$

Soit Γ le chemin suivi par la sortie plate. Soit $y(t)$ une trajectoire coïncidant avec Γ , définie sur l'intervalle de temps $[0, T]$. Soit $v(t)$ la fonction du temps définie sur $[0, T]$, décrivant la variable v du système lorsque sa sortie plate décrit la trajectoire $y(t)$. Connaissant Γ et $v(t)$ il est possible de recalculer $y(t)$.

Il faut noter que la fonction $v(t)$ ne peut pas être choisie n'importe comment. Il faut d'une part qu'elle permette de vérifier toutes les conditions de jets, d'autre part qu'elle corresponde effectivement à un parcours particulier du chemin Γ . En effet, si aucune trajectoire $y(t)$, associée à Γ ne permet d'obtenir $v(t)$, il est inutile de chercher à calculer $y(t)$ à partir de $v(t)$. Si $v(t)$ vérifie ces conditions, alors l'équation différentielle précédente aura une solution qui vérifiera les conditions de jets et qui permettra de recalculer les autres variables du système, y compris les autres composantes de la sortie plate. Il reste à trouver un moyen d'obtenir une variable $v(t)$ correcte sans connaître au préalable la trajectoire $y(t)$. La construction d'une telle variable sera détaillée dans la partie 3.7.

3.5.2 Calcul à partir d'une courbe paramétrée

Le but est de calculer une trajectoire $y(t)$ de la sortie plate à partir d'un chemin paramétrique Γ correspondant au cas présenté dans la partie 3.4.3. Transformer un

chemin paramétrique en une trajectoire revient à définir le paramètre s , utilisé pour définir le chemin Γ , comme une fonction du temps. Il faut donc à nouveau fixer les bornes 0 et T de l'intervalle de temps et définir une application :

$$\begin{aligned} s &: [0, T] \longrightarrow [0, S] \\ t &\longmapsto s(t) \end{aligned}$$

Dans la définition du chemin paramétrique, on avait établi que pour obtenir les coordonnées de la sortie plate en chaque valeur de s , les coordonnées de la sortie plate étaient données comme des fonctions de s et on avait alors $y = Y_{par}(s)$. Si s est elle-même une fonction du temps t , on peut obtenir les coordonnées de la sortie plate en composant les deux fonctions, on a alors $y(t) = Y_{par}(s(t)) = Y_{par} \circ s(t)$. L'application s doit vérifier plusieurs propriétés :

- elle doit être croissante pour parcourir le chemin dans le sens des valeurs croissantes de s ;
- la croissance doit être stricte pour éviter les points d'arrêt ;
- elle doit vérifier suffisamment de conditions de jets à l'instant initial et à l'instant final pour que les conditions de jets sur la sortie plate restent vraies ;
- elle doit être continue, de classe C^{α_v} par morceaux, comme les composantes de y (voir 3.3.2).

Avec ces propriétés, s est en fait une bijection de $[0, T]$ sur $[0, S]$. Plutôt que de choisir arbitrairement s , nous allons la calculer à partir de l'une des variables du système, comme cela avait été fait dans la partie 3.5.1. Pour cela, utilisons l'expression de la variable v donnée en fonction de s par l'équation (3.17). En y ajoutant les conditions initiales sur s et ses dérivées, s est alors la solution du problème :

$$v(t) = V_{par}(s(t), s'(t), \dots, s^{(\beta_v)}(t)) \quad (3.21)$$

$$s(0) = 0, \dot{s}(0) = 1, s^{(k)}(0) = 0 \forall k, 1 < k < \beta_v + \gamma_v \quad (3.22)$$

On retrouve une situation tout à fait similaire à celle obtenue précédemment, en 3.5.1 : si $v(t)$ décrit effectivement la variable v lorsque la sortie plate suit la trajectoire $y(t)$, définie sur $[0, T]$ et qui coïncide avec Γ , alors la solution $s(t)$ de l'équation différentielle donnée ci-dessus existe et est telle que $y(t) = Y_{par}(s(t))$, $Y_{par}(s)$ étant la fonction vectorielle paramétrique utilisée pour définir le chemin Γ . Le calcul d'une fonction $v(t)$ convenable sera détaillé dans la partie 3.7.

Remarque 3.5.1 *Si s est l'identité, la trajectoire de la sortie plate obtenue n'est autre que $Y_{par}(t)$, il n'y a donc en principe aucune différence entre la notion de définition paramétrique du chemin et la notion de trajectoire. Le calcul d'une trajectoire à partir de la définition paramétrique du chemin est simplement un changement de trajectoire par changement d'échelle de temps tel qu'il est détaillé en 3.5.3.*

3.5.3 Changement de trajectoire

Objectif et notations

Le changement de trajectoire modifie les valeurs des dérivées de la sortie plate le long du chemin Γ . Étant donné que le système est plat, chacune des variables du système

s'exprime comme une fonction de la sortie plate et de ses dérivées. Le changement de trajectoire modifie donc les variables du système. Ce qui nous intéresse ici est de caractériser l'effet du changement de trajectoire; plus particulièrement, nous établissons ici les expressions permettant de *calculer les nouvelles variables en fonction de la trajectoire initiale et du changement de paramétrage* utilisé.

Compte tenu de la remarque 3.5.1 nous pouvons partir du chemin Γ paramétré par s et analyser précisément l'influence de la fonction $s(t)$ sur une variable $v = V(y, \dot{y}, \dots, y^{(\beta_v)})$. Pour distinguer les fonctions utilisées pour représenter les variables du système (y compris la sortie plate) sur chacune des deux trajectoires, les notations suivantes seront utilisées :

Trajectoire initiale : elle est paramétrée par $s \in [0, S]$ et définie par la fonction vectorielle $y(s) = (y_1(s), y_2(s), \dots, y_m(s))$. La valeur de la variable v est obtenue en chaque valeur de s par :

$$v(s) = V(y(s), \frac{d}{ds} y(s), \dots, \frac{d^{(\beta_v)}}{ds^{(\beta_v)}} y(s)) \quad (3.23)$$

Trajectoire finale : elle est paramétrée par $t \in [0, T]$ et définie par la fonction vectorielle $\tilde{y}(t) = (\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t), \dots, \tilde{y}_m(t))$. La valeur de la variable v en chaque instant t est :

$$\tilde{v}(t) = V(\tilde{y}(t), \frac{d}{dt} \tilde{y}(t), \dots, \frac{d^{(\beta_v)}}{dt^{(\beta_v)}} \tilde{y}(t)) \quad (3.24)$$

Le changement de trajectoire, tout en suivant le chemin Γ , se traduit par la relation suivante entre \tilde{y} et y : $\tilde{y}(t) = y(s(t))$. Pour décrire le système après le changement de trajectoire, il faut donc être capable d'exprimer les dérivées successives de la fonction composée $y \circ s$.

Dérivées des fonctions composées

Soient f et g deux applications définies par :

$$\begin{array}{ll} g : U \longrightarrow V & f : V \longrightarrow W \\ x \longmapsto y = g(x) & y \longmapsto z = f(y) \end{array}$$

La dérivée en x de l'application composée $f \circ g$ est alors :

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dy} f(g(x)) \frac{d}{dx} g(x)$$

En utilisant la même règle de dérivation, on peut calculer la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} f(g(x)) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dy} f(g(x)) \right) \frac{d}{dx} g(x) + \frac{d}{dy} f(g(x)) \frac{d^2}{dx^2} g(x) \\ &= \frac{d^2}{dy^2} f(g(x)) \left(\frac{d}{dx} g(x) \right)^2 + \frac{d}{dy} f(g(x)) \frac{d^2}{dx^2} g(x) \end{aligned}$$

En itérant les dérivations, on peut exprimer la dérivée d'ordre k de f par rapport à x , comme une combinaison linéaire des k premières dérivées de f par rapport à y :

$$\frac{d^k}{dx^k} f(g(x)) = \sum_{i=1}^k c_{k,i} \frac{d^i}{dy^i} f(g(x)) \quad (3.25)$$

Les coefficients $c_{i,k}$ sont alors des expressions formées des k premières dérivées de g par rapport à x . Ces coefficients peuvent être calculés par récurrence, en dérivant l'équation (3.25):

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} f(g(x)) &= \sum_{i=1}^k \frac{d}{dx} c_{k,i} \frac{d^i}{dy^i} f(g(x)) + \sum_{i=1}^k c_{k,i} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^i}{dy^i} f(g(x)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{d}{dx} c_{k,i} \frac{d^i}{dy^i} f(g(x)) + \sum_{i=1}^k c_{k,i} \frac{d^{i+1}}{dy^{i+1}} f(g(x)) \frac{d}{dx} g(x) \end{aligned}$$

En posant $c_{k,0} = 0$ et $c_{k,k+1} = 0$, on peut regrouper les termes, on obtient alors:

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} f(g(x)) = \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{d}{dx} c_{k,i} + c_{k,i-1} \frac{d}{dx} g(x) \right) \frac{d^i}{dy^i} f(g(x))$$

On en déduit la formulation permettant de calculer récursivement chacun des coefficients $c_{k,i}$:

$$c_{0,0} = 1 \quad c_{0,i \neq 0} = 0 \quad c_{k+1,i} = \frac{d}{dx} c_{k,i} + c_{k,i-1} \frac{d}{dx} g(x) \quad (3.26)$$

Nouvelles coordonnées de la sortie plate

L'équation (3.24) nous a permis d'établir que les nouvelles coordonnées de la sortie plate s'expriment en fonction des anciennes par la relation $\tilde{y}(t) = y(s(t))$, ce que nous pouvons aussi noter $\tilde{y} = y \circ s$. Pour exprimer les dérivées successives de \tilde{y} par rapport au temps, il suffit d'utiliser les formules (3.25, 3.26) établies pour la dérivée d'ordre $k > 0$ de $f \circ g$. La dérivée d'ordre k de \tilde{y} par rapport au temps s'exprime alors comme une combinaison linéaire des k premières dérivées de y par rapport à s :

$$\frac{d^k}{dt^k} \tilde{y}(t) = \sum_{i=0}^k c_{k,i} \frac{d^i}{ds^i} y(s(t)) \quad (3.27)$$

$$c_{0,0} = 1 \quad c_{0,i \neq 0} = 0 \quad c_{k+1,i} = \frac{d}{dt} c_{k,i} + c_{k,i-1} \frac{d}{dt} s(t) \quad (3.28)$$

Chacun des coefficients $c_{k,i}$ est un polynôme à coefficients entiers, dont les variables sont $s(t)$ et ses k premières dérivées par rapport au temps. On peut donc calculer en chaque point du chemin Γ la matrice $\mathcal{M}_k(t)$ définissant l'application linéaire qui permet d'obtenir les k premières dérivées de $\tilde{y}(t)$ à partir de $y(s)$. Cette matrice est triangulaire

et a la forme suivante :

$$\mathcal{M}_k(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt}s(t) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dt^2}s(t) & \left(\frac{d}{dt}s(t)\right)^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{d^3}{dt^3}s(t) & 3\frac{d^2}{dt^2}s(t)\frac{d}{dt}s(t) & \left(\frac{d}{dt}s(t)\right)^3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}s(t) & c_{k-1,2} & c_{k-1,3} & c_{k-1,4} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{d^k}{dt^k}s(t) & c_{k,2} & c_{k,3} & c_{k,4} & \dots & \left(\frac{d}{dt}s(t)\right)^k \end{bmatrix}$$

Avec l'introduction de cette matrice $\mathcal{M}_k(t)$, on définit la nouvelle trajectoire et ses k premières dérivées, pour tout t , en multipliant à droite les anciennes coordonnées et leurs dérivées par la matrice transposée :

$$\left[\tilde{y}(t), \frac{d}{dt}\tilde{y}(t), \dots, \frac{d^k}{dt^k}\tilde{y}(t) \right] = \left[y(s), \frac{d}{ds}y(s), \dots, \frac{d^k}{ds^k}y(s) \right] \mathcal{M}_k^T(t) \quad (3.29)$$

En chacun des points du chemin Γ , l'application permettant de calculer les k premières dérivées de la nouvelle trajectoire $\tilde{y}(t)$ à partir de l'ancienne trajectoire $y(s)$ est une application linéaire dont la matrice est triangulaire. Les coefficients de cette matrice sont obtenus à partir des k premières dérivées du changement de paramétrage $s(t)$.

En substituant l'expression obtenue en (3.29) dans l'expression (3.24), on peut recalculer directement la nouvelle variable $\tilde{v}(t)$ à partir de l'ancienne trajectoire $y(s)$ et du changement de paramétrage $s(t)$. Ainsi, le changement de trajectoire le long d'un chemin Γ revient à un changement de coordonnées linéaire pour chacune des variables du système. L'effet du changement de trajectoire sur une variable v du système peut alors être illustré par la figure 3.2.

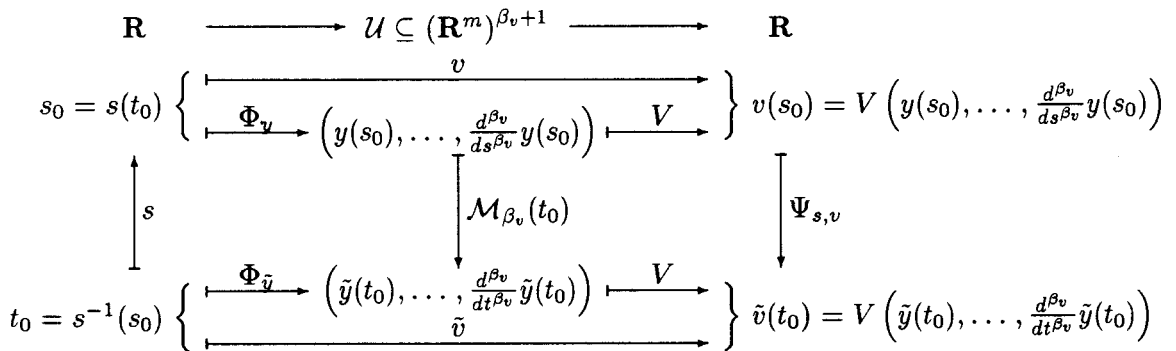


FIG. 3.2 - Effet du changement de trajectoire

Dans cette figure, une fonction $\Phi_{s,v}$ a été introduite, pour caractériser l'effet du changement de paramétrage $s(t)$ pour chacune des variables du système. Il faut noter que ce schéma n'a un sens que si la trajectoire $y(s)$ et le changement de paramétrage $s(t)$ sont suffisamment dérivables.

3.6 Caractérisation des trajectoires optimales

3.6.1 Condition nécessaire

Nous avons précédemment vu comment calculer une trajectoire à partir d'un chemin. La partie 3.5.1 détaillait le cas où la définition du chemin était implicite et la partie 3.5.2 s'intéressait au cas des chemins paramétriques. Dans les deux cas, nous avons mis en évidence qu'il était possible de calculer la trajectoire à partir d'une variable du système dont les valeurs sont imposées à chaque instant. Dans chacun des cas, la trajectoire pouvait être obtenue comme la solution d'une équation différentielle, respectivement (3.19) et (3.21). Il reste à construire « au mieux » la variable $v(t)$ utilisée dans ces équations. Nous proposons donc une *condition nécessaire sur les variables du système pour que la trajectoire calculée soit optimale en temps*. Sa démonstration est très simple, toutefois pour en clarifier l'énoncé commençons par quelques remarques à propos de l'effet du changement de trajectoire sur les variables du système :

Remarque 3.6.1 *La fonction $\Psi_{s,v}$ qui permet de calculer la nouvelle valeur de la variable v , en chacun des points $y(s_0)$ du chemin Γ , après le changement de paramétrage $s(t)$, est continue.*

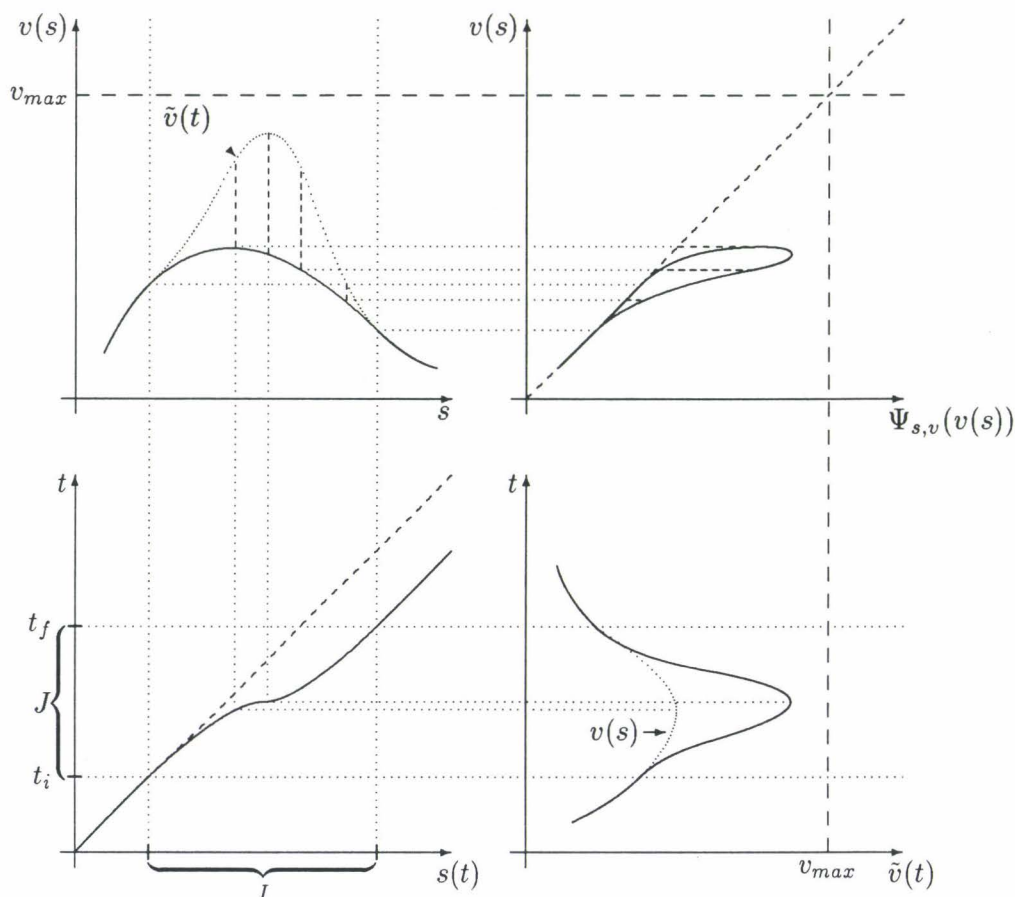
Cette remarque est facile à vérifier à partir de la figure (3.2) où les fonctions représentées sont continues.

Remarque 3.6.2 *Si une trajectoire $\tilde{y}(t)$, définie sur $[0, T]$, est plus rapide qu'une autre trajectoire $y(s)$, définie sur $[0, S]$, le fait de connaître un majorant M de la dérivée d'ordre k du changement de paramétrage $s(t)$ permet de calculer un majorant pour chacune des dérivées de $s(t)$ d'ordre inférieur à k . Le majorant de la dérivée d'ordre i de $s(t)$ est alors $T^{k-i}M$. Si on ne connaît pas T , on peut prendre comme majorant $S^{k-i}M$.*

Il est donc possible de calculer un majorant pour chacun des coefficients de la matrice $\mathcal{M}_{\beta_v}(t) - Id$ sur tout l'intervalle $[0, T]$. Par ailleurs, tous les coefficients de la matrice $\mathcal{M}_{\beta_v}(t) - Id$ sont proportionnels à M , on pourra donc calculer un majorant de la distance entre $\Phi_y(s_0)$ et $\Phi_{\tilde{y}}(t_0)$ qui soit proportionnel à M .

Proposition 3.6.1 *Si une trajectoire, définie sur un chemin donné, est optimale en temps sur l'intervalle $[0, T]$ alors il existe une partition de $[0, T]$ telle que sur chacun de ses intervalles l'une au moins des contraintes est saturée.*

Preuve 3.6.1.1 Soit $y(s)$, $s \in [0, S]$ une trajectoire admissible, définie sur le chemin Γ , qui ne vérifie pas la condition. Soit I un ouvert de $[0, S]$ sur lequel aucune contrainte n'est atteinte. Il suffit de construire une nouvelle trajectoire admissible $\tilde{y}(t)$, définie sur $[0, T]$ par un changement de paramétrage $s(t)$ construit selon le modèle indiqué sur la figure (3.3). Ce changement de paramétrage a une dérivée d'ordre $\beta_v + 1$, ce qui permet de majorer la distance $d(\Phi_{\tilde{y}}, \Phi_y)$ par une quantité proportionnelle à $t_f - t_i$. En prenant un ouvert I suffisamment petit on pourra donc rendre cette distance aussi petite qu'on le souhaite.



Les diagrammes indiqués ci-dessus illustrent l'effet du changement de paramétrage $s(t)$ sur un intervalle $J = [t_i, t_f]$. La fonction $s(t)$ correspond à une accélération du parcours de la trajectoire sur l'intervalle, ce qui se traduit par le fait que le graphe de $s(t)$ se trouve au dessus de l'identité (matérialisé par la diagonale pointillée).

Les valeurs de t , s , $\tilde{v}(t)$, $v(s)$ reliées par des lignes pointillées verticales et horizontales

correspondent toutes au même point du chemin. Les courbes pointillées $\tilde{v}(t)$ et $v(s)$, indiquées respectivement sur les graphes de $v(s)$ et sur le graphe de $\tilde{v}(t)$, mettent en évidence le changement de valeur de la variable en chacun des points du chemin.

Le graphe de $\Psi_{s,v}(v(s))$ permet d'obtenir pour chacune des valeurs de $v(s)$, la valeur de $\tilde{v}(t)$ au point correspondant du chemin.

FIG. 3.3 - Effet du changement de paramétrage sur un ouvert I

3.6.2 Condition suffisante

Nous n'avons pas de critère rigoureux permettant de s'assurer qu'une solution vérifiant la condition nécessaire est effectivement optimale en temps. La difficulté vient du fait que cette condition est globale à la trajectoire, contrairement à la condition nécessaire qui peut être démontrée localement, au voisinage d'un point.

Nous proposons donc ici une stratégie de construction des variables qui respecte la condition nécessaire établie précédemment et qui ne permet jamais de construire localement une solution plus rapide. Ensuite, nous verrons sous quelles conditions cette solution *localement optimale en temps* n'est pas globalement optimale. En analysant ces conditions, nous aboutissons à une *condition suffisante sur les variables du système, pour que la stratégie de calcul proposée soit effectivement optimale.*

Stratégie de construction de la solution de base

En chaque point s_0 de la trajectoire $y(s)$, on peut choisir entre 2 contraintes pour saturer la variable v : une contrainte d'ordre k , $0 \leq k \leq \gamma_v$ et la contrainte d'ordre γ_v de signe opposé. Ce choix est illustré en figure (3.4), d'une part pour le cas $k < \gamma_v$, d'autre part pour le cas $k = \gamma_v$. Pour chacun de ces choix on peut calculer le module du vecteur $\dot{y}(s)$ correspondant. Ceci nous permet de faire la distinction entre une *phase d'accélération* et une *phase de décélération* : on dit que le point s_0 est dans une *phase d'accélération* si la saturation choisie en s_0 est celle qui donne la plus grande valeur de $|\dot{y}(s)|$.

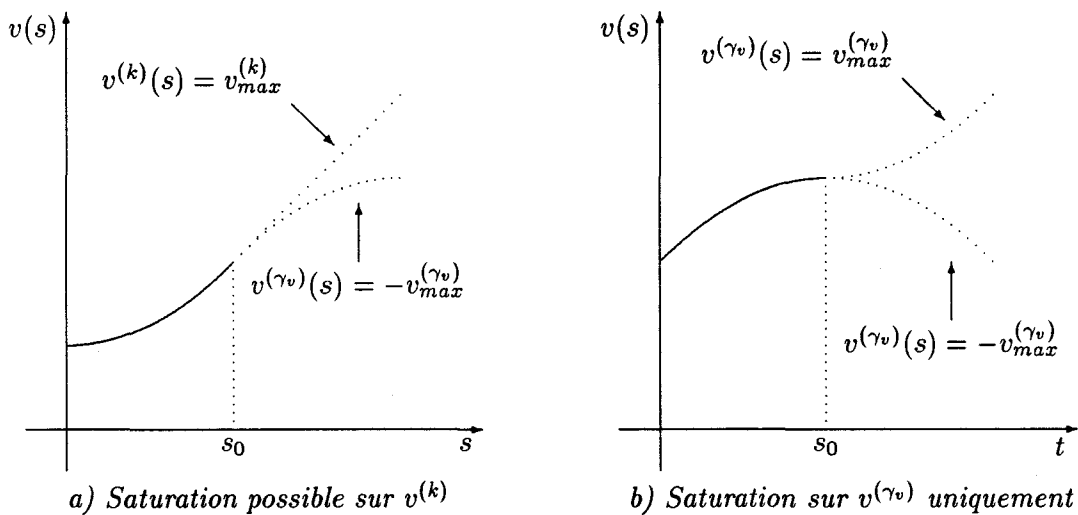


FIG. 3.4 - Choix de la contrainte à saturer en s_0

Pour construire la trajectoire $y(s)$ on enchaînera les phases d'accélération et de décélération, en appliquant la stratégie de choix suivante :

- on ne passera d'une phase d'accélération à une phase de décélération *qu'en cas de nécessité*, c'est à dire lorsque le maintien de l'accélération se traduirait par l'impossibilité de suivre le chemin imposé tout en respectant les contraintes ;

- on passera d'une phase de décélération à une phase d'accélération *dès que possible*, ce qui revient à l'inverse du point précédent.

Cette formulation de la stratégie peut se traduire aussi par le fait qu'on cherche à minimiser le nombre de polynômes utilisés pour construire la variable v .

Une fois la trajectoire $y(s)$ obtenue selon cette stratégie, on peut facilement s'assurer qu'il n'est jamais possible de construire localement sur $y(s)$ un changement de paramétrage $s(t)$ qui soit plus rapide que l'identité. Cela est simplement dû au fait qu'en chaque point $y_0 = y(s_0)$ du chemin Γ , on n'a le choix qu'entre deux possibilités pour saturer une variable v , comme indiqué en figure (3.4). L'un des choix a été utilisé pour construire $y(s)$ au voisinage de y_0 . Si $y(s)$ est déjà en phase d'accélération il n'est pas possible d'aller encore plus vite sans violer au moins une contrainte. Si $y(s)$ est en phase de décélération c'est justement parce qu'en y_0 il n'est pas possible de faire autrement.

Sachant qu'on ne peut pas procéder à des optimisations locales, pour obtenir une trajectoire plus rapide, à partir de $y(s)$, il faut appliquer une autre stratégie. C'est ce que nous détaillons maintenant.

Construction d'une meilleure solution

À partir de $y(s)$, une solution plus rapide $\tilde{y}(t)$ est obtenue par le changement de paramétrage $s(t)$. Il est clair que lorsque $y(s)$ est sur une phase de décélération, il n'est pas possible de changer la saturation appliquée. On doit donc agir lors d'une phase d'accélération. La seule chose qui puisse être faite est de passer en décélération avant que cela ne soit nécessaire.

On en déduit que pour pouvoir avoir une chance d'aller plus vite en un point du chemin, par le changement de paramétrage $s(t)$, il faut commencer par ralentir. Par symétrie on retrouve une situation équivalente en fin de trajectoire, ce qui nous donne un changement de paramétrage $s(t)$ tel que celui de la figure (3.5a).

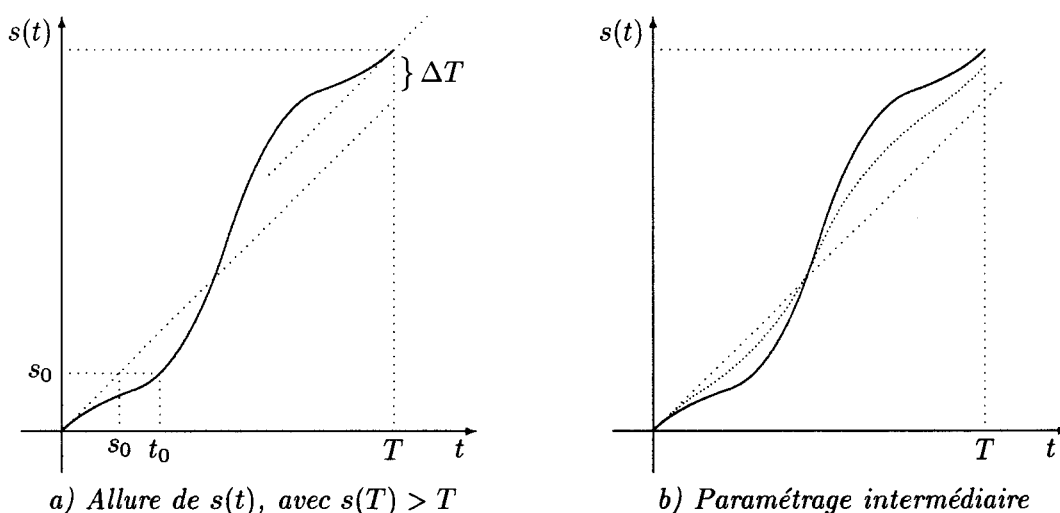


FIG. 3.5 - Changements de paramétrages « plus rapides » que $s(t) = t$

3.6. CARACTÉRISATION DES TRAJECTOIRES OPTIMALES

Il est naturel de se dire que si une telle construction est possible, on peut construire un paramétrage intermédiaire comme celui qui apparaît en pointillés sur la figure (3.5b). Or si c'était le cas, on pourrait s'approcher autant qu'on le souhaite de l'identité, ce qui est contradictoire avec le fait que des accélérations locales ne sont pas possibles. Il doit donc y avoir une borne en dessous de laquelle on ne peut plus descendre.

Si une telle borne existe, on se retrouve dans la situation illustrée par les figures (3.6a) et (3.6b). L'orbite de \ddot{s} en fonction de \dot{s} , indiquée en pointillés sur la figure (3.6a), doit rester dans une *région admissible*, c'est à dire qu'elle doit correspondre à un changement de paramétrage $s(t)$ lui même admissible. Les régions hachurées représentent les *régions interdites*, c'est à dire les régions où les *orbites admissibles* ne doivent pas passer. Or, à l'instant initial $t = 0$ et à l'instant final $t = T$, on doit se retrouver sur le point ($\dot{s} = 1, \ddot{s} = 0$) qui correspond à l'identité. Pour obtenir un changement de paramétrage plus rapide que l'identité, il faut que l'orbite passe derrière la ligne $\dot{s} = 0$. Pour cela, il faut commencer par décélérer (\dot{s} décroît donc $\ddot{s} < 0$), pour ne plus être bloqué par la région interdite, puis accélérer, pour contourner la région interdite.

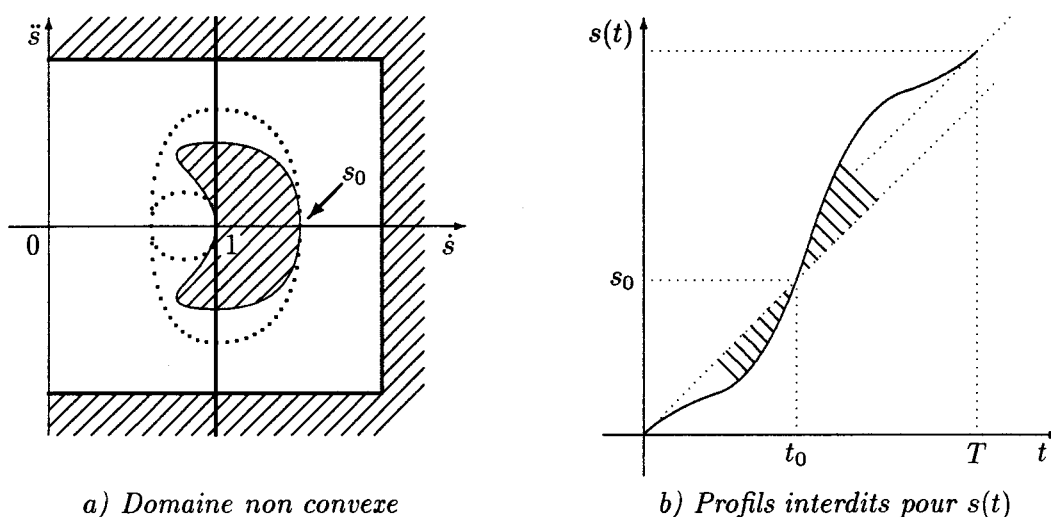


FIG. 3.6 - Cas où le domaine \mathcal{U} n'est pas convexe

La présence de cette région interdite, située à l'intérieur de la région admissible pour l'orbite de \ddot{s} , se traduit sur le changement de paramétrage $s(t)$, par la situation illustrée sur la figure (3.6b). La courbe pleine représente le changement de paramétrage admissible le *plus lent* parmi les changements de paramétrages *plus rapides que l'identité*. Les changements de paramétrage dont le graphe est compris entre la courbe pleine et l'identité ne sont pas des changements de paramétrages admissibles.

Remarque 3.6.3 Une fois que la région interdite a été contournée, on se retrouve dans une situation où on peut à nouveau privilégier les accélérations pour optimiser le parcours du chemin.

La construction de cet exemple illustratif repose essentiellement sur le fait que le domaine admissible pour l'orbite \ddot{s} n'est pas convexe. Cette caractérisation n'est pas la plus commode pour détecter ce type de situations. En effet, si on en restait là, on pourrait penser que le problème est lié au choix du chemin, ou pire au choix de la trajectoire.

Or, ce n'est pas le cas : la *convexité du domaine admissible dépend des variables prises en compte dans la définition des contraintes dynamiques*. C'est ce que nous établissons dans ce qui suit.

Convexité du domaine admissible

La notion de *convexité* joue un très grand rôle dans les problèmes d'optimisation. En particulier, dans le cadre de l'application du Principe du Maximum de Pontryagin, les énoncés et les preuves des théorèmes d'existence, des conditions nécessaires et des conditions suffisantes font généralement appel à des notions de convexité. Celles-ci sont parfois difficiles à vérifier en pratique, notamment lorsque le temps final n'est pas donné, comme l'indique [Seierstad88], mais dans notre cas elles s'expriment très simplement.

Le point principal réside essentiellement dans le choix de l'élément dont la convexité nous intéresse. Ici nous nous intéressons à la *convexité des variables du système*. Avant d'aboutir à cette notion, nous allons définir plus précisément la notion d'*ensembles convexes*.

Définition 3.6.1 Soit E un espace vectoriel sur \mathbf{R} avec $x_1, x_2 \in E$. On appelle *segment d'extrémités* x_1, x_2 l'ensemble des vecteurs x de E , noté $[x_1, x_2]$, tel que :

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Définition 3.6.2 Un sous-ensemble C de E est *convexe* si pour tout couple (x_1, x_2) avec $x_1, x_2 \in C$, le segment $[x_1, x_2] \subseteq C$.

Avec ces définitions, on peut définir l'ensemble des changements de paramétrages admissibles \mathcal{S}_{adm} le sous-ensemble de \mathbf{R}^{γ_y+1} dans lequel on peut prendre les valeurs de $(s, s', \dots, s^{(\gamma_y)})^3$ pour que toutes les contraintes dynamiques soient respectées. De même, on peut construire \mathcal{M}_{adm} le sous-ensemble de $(\mathbf{R}^{\gamma_y+1})^{\gamma_y+1}$ dans lequel on peut prendre les matrices \mathcal{M}_{γ_y} associées aux changements de paramétrages admissibles. L'expression de la matrice \mathcal{M}_{γ_y} , dont les coefficients sont donnés en (3.28), permet d'établir l'implication :

$$\mathcal{S}_{adm} \text{ non convexe} \implies \mathcal{M}_{adm} \text{ non convexe} \quad (3.30)$$

Or, l'ensemble \mathcal{M}_{adm} est l'ensemble des applications linéaires \mathcal{M}_{γ_y} qui transforment $(y, \dot{y}, \dots, y^{(\gamma_y)}) \in \mathcal{U}^3$ en un point de \mathcal{U} . La linéarité permet d'établir l'implication :

$$\mathcal{M}_{adm} \text{ non convexe} \implies \mathcal{U} \text{ non convexe} \quad (3.31)$$

L'ensemble \mathcal{U} avait été défini de façon à ce que toutes les contraintes dynamiques imposées soient respectées. Il reste donc à établir le lien entre la convexité de \mathcal{U} et les variables du système. Pour cela introduisons deux définitions supplémentaires :

Définition 3.6.3 Soit C un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel E et soit f définie de C dans \mathbf{R} . Cette fonction est *convexe* si $\forall x_1, x_2 \in C, \forall t \in [0, 1]$ on a :

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

3. les notations ' et '' indiquent des dérivées par rapport au temps t ; les notations ' et '' indiquent des dérivées par rapport au paramètre s

Définition 3.6.4 On appelle épigraphe de f : $\text{Epi } f = \{(x, \lambda) \in C \times \mathbf{R}, f(x) \leq \lambda\}$

Cette dernière définition permet de caractériser très simplement le domaine \mathcal{U}_v sur lequel la variable v est admissible. En prenant la définition de v donnée en (3.8) et la définition de \mathcal{U}_v donnée en 3.3.3 il est possible d'écrire :

$$\mathcal{U}_v \times \{v_{max}\} = \text{Epi } |V| \cap \left\{ (\mathbf{R}^m)^{\beta_v+1} \times \{v_{max}\} \right\}$$

Cette construction peut être réalisée pour chacune des variables concernées par les contraintes dynamiques. Pour établir la convexité de l'ensemble \mathcal{U}_v , il suffit d'appliquer directement les deux théorèmes donnés ci-dessous.

Théorème 3.6.2 f convexe \iff $\text{Epi } f$ convexe

Théorème 3.6.3 L'intersection d'une famille C_i de convexes est un convexe.

Il faut noter par ailleurs que le produit cartésien et la projection orthogonale conservent la convexité. En appliquant le théorème 3.6.3 on montre facilement que le domaine \mathcal{U} défini en (3.10) est convexe si tous les domaines $\mathcal{U}_{v(k)}$ le sont, c'est à dire si toutes les variables sur lesquelles sont définies les contraintes dynamiques sont convexes. Dans ce cas, en prenant la contraposée des implications (3.30) et (3.31), on en déduit que la stratégie optimale est effectivement celle qui minimise le nombre de polynômes.

Si les contraintes dynamiques ne sont définies que sur des variables convexes, alors la trajectoire optimale est la trajectoire admissible qui vérifie la condition nécessaire et qui minimise le nombre de polynômes. Les variables saturées le long de cette trajectoire sont simples à construire car elles privilégient les accélérations.

3.7 Optimisation pour une seule variable

3.7.1 Vue d'ensemble

Compte tenu de la condition nécessaire d'optimalité, établie en 3.6.1, et de la stratégie de construction proposée en 3.6.2, les variables utilisées pour le calcul de la trajectoire doivent être polynomiales par morceaux ; chacun des morceaux saturant une des contraintes imposées à la variable ou à l'une de ses dérivées. L'optimisation dans ce cas consiste à déterminer :

- la contrainte saturée par chacun des polynômes ;
- les dates de commutation d'un polynôme au suivant.

Il se trouve que la méthode proposée introduit une forte corrélation entre ces deux points. En fait, elle ne permet pas de déterminer *a priori* le nombre de polynômes nécessaire pour construire la variable. Un procédé itératif, répétant alternativement ces deux étapes jusqu'à ce qu'une variable admissible soit obtenue, est donc mis en œuvre. Ceci nous donne le plan de présentation de la phase d'optimisation pour une seule variable :

- la partie 3.7.2 intitulée « Construction d'un modèle » indique les règles à respecter dans l'enchaînement des polynômes ;

- la partie 3.7.3 sera consacrée à la résolution des équations permettant de calculer les dates de commutation d'un modèle ;
- la partie 3.7.4 proposera un algorithme général pour obtenir une variable admissible.

3.7.2 Construction d'un modèle

Le terme de *modèle*, introduit ici, désigne une variable polynomiale par morceaux dont on connaît le nombre de morceaux ainsi que la contrainte à saturer sur chacun des morceaux. Par contre les dates de commutation ne sont pas connues.

Définition 3.7.1 Un modèle est défini par le nombre de polynômes qui le composent et des relations entre les coefficients et les dates de commutation des polynômes. Ces relations traduisent les trois points suivants :

- la contrainte saturée sur chacun des polynômes ;
- les conditions de jets imposées à l'instant initial et à l'instant final ;
- les conditions de continuité des raccords entre les polynômes.

Voyons plus en détail comment s'exprime le modèle associé à une variable v . Soit n le nombre de polynômes qui composent v , et soit p_j ($1 \leq j \leq n$) le j^e polynôme de v . On note d_j le degré de p_j et $a_{j,k}$ ($0 \leq k \leq d_j$) le coefficient de degré k de p_j . Ainsi, la variable v est définie sur l'intervalle $[t_0 = 0, t_n = T]$ par les n polynômes :

$$\forall j, 1 \leq j \leq n, \quad \forall t \in [t_{j-1}, t_j], \quad v(t) = p_j(t) = \sum_{k=0}^{d_j} a_{j,k} (t - t_{j-1})^k \quad (3.32)$$

Le but est d'établir un modèle valide pour la variable $v(t)$. Pour cela nous commencerons par exprimer toutes les relations entre les coefficients $a_{j,k}$ et les dates de commutation t_j , en particulier les relations qui traduisent la saturation, les conditions de jets et les conditions de continuité. Enfin, nous chercherons à évaluer le nombre de polynômes nécessaire pour définir $v(t)$; d'abord dans le cas où on ne tient compte que de la contrainte d'ordre maximal, puis dans le cas où des paliers de saturation sont insérés.

Expression de la saturation

L'ensemble des contraintes imposées à la variable v et à ses γ_v premières dérivées est : $\mathcal{C}(v) = \{|v| \leq v_{max}, |\dot{v}| \leq \dot{v}_{max}, \dots, |v^{(\gamma_v)}| \leq v_{max}^{(\gamma_v)}\}$. Pour que l'une des contraintes d'ordre d soit saturée sur un intervalle, il faut que la variable v soit polynomiale de degré d et que sa dérivée d'ordre d vérifie $v^{(d)} = v_{max}^{(d)}$ ou $v^{(d)} = -v_{max}^{(d)}$ sur tout l'intervalle. On en déduit que la variable v est polynomiale de degré d et on en déduit la valeur de son coefficient de plus haut degré :

$$v^{(d)}(t) = v_{max}^{(d)} \quad \forall t \in [t_{j-1}, t_j] \quad \implies \quad a_{j,d} = \frac{v_{max}^{(d)}}{d!}, \quad \text{et } \forall k > d, a_{j,k} = 0 \quad (3.33)$$

Expression des conditions de jets

Il faut revenir sur les conditions de jets imposées aux variables. En effet, en 3.4.1 nous avons montré comment définir les conditions de jets sur la sortie plate, à partir des conditions de rendez-vous, qui peuvent être définies sur n'importe quelle variable du système. Ici il faut réaliser la démarche inverse : calculer les conditions imposées à la variable v à l'instant initial $t = 0$ et à l'instant final $t = T$. Ces conditions découlent directement des conditions de jets sur la sortie plate, dont les valeurs sont directement utilisées dans les expressions de v et de ses dérivées. Ainsi, pour calculer la valeur imposée, à l'instant initial, à la dérivée d'ordre k de la variable v , il faudra procéder ainsi :

- calculer l'expression de la dérivée d'ordre k de v , notée $v^{(k)}$, en fonction de la sortie plate et de ses dérivées ;
- remplacer la sortie plate et ses dérivées, dans l'expression de $v^{(k)}$, par les valeurs imposées par les jets initiaux.

Pour que cette démarche aboutisse, il faut que toutes les dérivées de la sortie plate qui apparaissent effectivement dans l'expression de $v^{(k)}$ aient une valeur imposée par les conditions de jets à l'instant initial. Dans le cas où les valeurs de y et de ses α_y ⁴ premières dérivées sont toutes imposées à l'instant initial, si la variable v dépend de la dérivée d'ordre β_v ⁵ de y , alors la variable v pourra avoir $\alpha_y - \beta_v + 1$ conditions de jets imposées à l'instant initial. La même démarche permet de calculer les conditions de jets imposées à v à l'instant final.

Une remarque est à faire sur les valeurs relatives de α_y , β_v et γ_v ⁶ :

- si $\alpha_y - \beta_v \geq \gamma_v$, il y a une incohérence entre les conditions de rendez-vous et les contraintes imposées ;
- sinon on impose à toutes les dérivées de v , dont la valeur n'est pas définie par les conditions de jets, de prendre pour valeur la borne imposée par les contraintes dynamiques, jusqu'à l'ordre $\gamma_v - 1$ ⁷.

Finalement, on se retrouve avec $2\gamma_v$ conditions de jets sur v notées :

$$\begin{aligned} \text{Jets initiaux sur } v &= \left\{ v(0) = v_i, \dot{v}(0) = \dot{v}_i, \dots, v^{(\gamma_v-1)}(0) = v_i^{(\gamma_v-1)} \right\} \\ \text{Jets finaux sur } v &= \left\{ v(T) = v_f, \dot{v}(T) = \dot{v}_f, \dots, v^{(\gamma_v-1)}(T) = v_f^{(\gamma_v-1)} \right\} \end{aligned}$$

Voyons maintenant comment ces conditions de jets sur la variable v se traduisent à l'instant initial et à l'instant final.

4. Ordre des conditions de jets de la sortie plate.
 5. Ordre maximal de la dérivée de la sortie plate, dont v dépend effectivement.
 6. Ordre maximal sur lequel v est contrainte.
 7. Si ces conditions ne permettent pas de parcourir le chemin choisi en respectant les contraintes, on pourra choisir des valeurs plus faibles.

À l'instant initial : les conditions de jets donnent directement les valeurs de p_1 et de ses $\gamma_v - 1$ premières dérivées à l'instant $t_0 = 0$:

$$\forall k, 0 \leq k < \gamma_v : p_1^{(k)}(0) = v_i^{(k)} \implies a_{1,k} = \frac{v_i^{(k)}}{k!} \quad (3.34)$$

Par ailleurs, p_1 sature la contrainte d'ordre γ_v , le polynôme p_1 est donc intégralement défini sur $[t_0 = 0, t_1]$ (mais t_1 n'est pas fixé).

À l'instant final : on a le même nombre de conditions de jets mais les expressions des coefficients du polynôme p_n dépendent de la date finale $t_n = T$. On procède alors à un changement de variable, de façon à pouvoir écrire p_n sous la forme :

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{\gamma_v-1} b_{n,k} (t-T)^k + \frac{v_{max}^{(\gamma_v)}}{\gamma_v!} (t-T)^{\gamma_v} \quad (3.35)$$

Il est alors possible de calculer les coefficients $b_{n,k}$ qui permettent de connaître effectivement les coefficients du polynôme en fonction de T :

$$\forall k, 0 \leq k < \gamma_v : p_n^{(k)}(T) = v_f^{(k)} \implies b_{n,k} = \frac{v_f^{(k)}}{k!} \quad (3.36)$$

Pour obtenir l'expression des coefficients $a_{n,k}$, tels qu'ils avaient été définis en (3.32), il suffit de développer l'expression de $p_n(t)$, donnée en (3.35) et de procéder par identification des coefficients des termes de même degré.

Expression des conditions de continuité

Les raccords entre les polynômes doivent respecter les conditions de continuité imposées à la variable v . En 3.3.2 il avait été établi que la variable v devait être de classe C_v^γ par morceaux, donc le raccord entre les polynômes doit être de classe C^{γ_v-1} . Ceci se traduit par les γ_v conditions :

$$p_{j+1}^{(k)}(t_j) = p_j^{(k)}(t_j) \quad k = 0, 1, \dots, \gamma_v - 1 \quad (3.37)$$

Ces conditions doivent être vérifiées pour $1 \leq j < n$, ce qui donne au total $(n-1)\gamma_v$ conditions de continuité.

Nombre minimal de polynômes

Toutes les conditions imposées au modèle, que nous avons présenté jusqu'à présent, sont récapitulées dans la colonne de gauche du tableau (3.1). La colonne de droite de ce même tableau recense tous les degrés de liberté disponibles dans le cas d'un modèle dont tous les polynômes sont de degré γ_v . Pour pouvoir calculer le modèle, il faut qu'il y ait au moins autant de degrés de liberté que de conditions imposées, on doit donc avoir :

$$n(\gamma_v + 1) + \gamma_v \leq n(\gamma_v + 1) + n$$

On en déduit immédiatement que le nombre de polynômes du modèle, n , doit être supérieur ou égal à γ_v .

Conditions imposées		Degrés de liberté	
Saturation	: n	Coefficients	: $n(\gamma_v + 1)$
Jets sur v	: $2\gamma_v$	Dates t_j	: n
Raccords C^{γ_v-1}	: $\gamma_v(n-1)$		
Total	: $n(\gamma_v + 1) + \gamma_v$	Total	: $n(\gamma_v + 1) + n$

TAB. 3.1 - Bilan des conditions imposées et des degrés de liberté

Remarque 3.7.1 En faisant le bilan des conditions imposées et des degrés de liberté apportés on peut observer que l'ajout d'un polynôme de degré γ_v dans la construction de la variable $v(t)$ n'apporte qu'un degré de liberté supplémentaire : le polynôme p_j est défini par ses $\gamma_v + 1$ coefficients et la durée $t_j - t_{j-1}$, mais il doit vérifier les γ_v conditions de raccord C^{γ_v-1} et la condition de saturation.

Cette construction ne tient compte que des jets sur v , or le but est de construire une variable qui permette de suivre le chemin Γ imposé. En particulier, il est nécessaire que toutes les conditions de jets imposées à la sortie plate soient vérifiées à l'instant initial et à l'instant final, ce qui ne sera généralement pas vérifié. En effet, la trajectoire $y(t)$ recherchée sera une solution de l'équation différentielle :

$$v(t) = V(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(\beta_v)}(t))$$

à laquelle seront adjointes les conditions de jet à l'instant initial :

$$y(0) = y_i \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_i \quad \dots \quad y^{(\alpha_i)}(0) = y_i^{(\alpha_i)}$$

Avec ces conditions initiales, la solution de l'équation différentielle, lorsqu'elle existe, est une fonction $y(t)$ qui vérifie effectivement la condition finale :

$$V(y(T), \dot{y}(T), \dots, y^{(\beta_v)}(T)) = V(y_f, \dot{y}_f, \dots, y_f^{(\beta_v)})$$

Mais rien n'impose la correspondance terme à terme $y(T) = y_f, \dots, y^{(\beta_v)}(T) = y_f^{(\beta_v)}$. Pour obtenir cette correspondance terme à terme il faut ajouter β_v conditions indépendantes qui vont nécessiter β_v degrés de liberté supplémentaires sur $v(t)$. Ces degrés de liberté supplémentaires ne pourront être obtenus qu'en ajoutant des polynômes de degré γ_v dans la définition de $v(t)$. Compte tenu de la remarque 3.7.1 il faudra β_v polynômes supplémentaires de degré γ_v .

Lorsque la variable $v(t)$ est construite avec des polynômes de degré γ_v uniquement, il faut au minimum $\gamma_v + \beta_v$ polynômes pour pouvoir suivre la trajectoire Γ imposée et respecter les conditions de jets.

Exemple 3.7.1 Soit v une variable à laquelle sont imposées les contraintes $\mathcal{C}(v) = \{|v| \leq v_{max}, |\dot{v}| \leq \dot{v}_{max}, |\ddot{v}| \leq \ddot{v}_{max}, |\ddot{v}| \leq \ddot{v}_{max}\}$. On a $\gamma_v = 3$, on doit donc avoir 3 conditions de jets sur v , à l'instant initial $t = 0$ et à l'instant final $t = T$:

$$\text{Jets initiaux sur } v = \{v(0) = v_i, \dot{v}(0) = \dot{v}_i, \ddot{v}(0) = \ddot{v}_i\}$$

$$\text{Jets finaux sur } v = \{v(T) = v_f, \dot{v}(T) = \dot{v}_f, \ddot{v}(T) = \ddot{v}_f\}$$

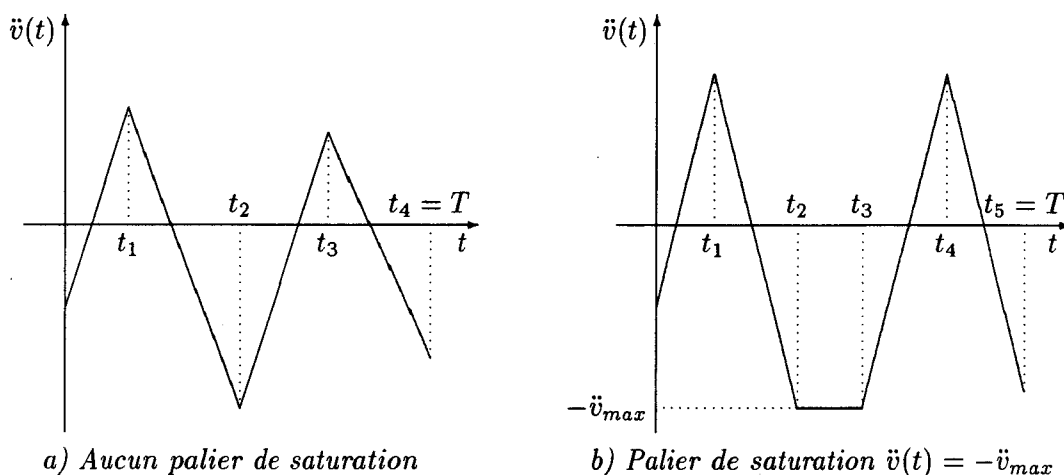


FIG. 3.7 - Saturation sur un modèle de degré 3 sans ajout de raccords

Si v s'exprime en fonction de la sortie plate y et de la dérivée \dot{y} uniquement, $\beta_v = 1$ et il faut au moins 4 polynômes de degré 3 pour construire la variable v . La dérivée seconde a alors l'allure indiquée en figure (3.7a).

Insertion de paliers de saturation

La remarque 3.7.1 peut être complétée en disant que l'insertion d'un polynôme de degré strictement inférieur à $\gamma_v - 1$ crée un déficit de degrés de liberté. En effet, on a toujours les γ_v conditions pour le raccord de classe C^{γ_v-1} mais, le polynôme étant de degré moindre, on dispose de moins de coefficients. Pour combler ce déficit, il faut ajouter un nombre suffisant de polynômes de degré γ_v . En fait, pour compenser le déficit d'un polynôme p_j de degré $d_j < \gamma_v$ il faut ajouter $\gamma_v - d_j - 1$ polynômes de degré γ_v .

Exemple 3.7.1 (suite) La figure (3.7b) montre l'évolution du modèle, par rapport au modèle sans palier de saturation donné en (3.7a), lorsqu'un palier de saturation de degré 2 est ajouté.

La figure (3.8) met en évidence la nécessité d'ajouter des raccords de degré 3 lors de l'insertion de paliers de saturation de degré inférieur à 2. Partant du modèle indiqué en (3.7a), l'insertion d'un palier saturant \dot{v} ajoute un polynôme de degré 1 et un polynôme de degré 3, comme indiqué sur la figure (3.8a); l'insertion d'un palier saturant v ajoute un polynôme constant et deux polynômes de degré 3, comme indiqué sur la figure (3.8b).

3.7.3 Calcul des dates de commutation

Une grande partie des règles de construction des modèles ont été traduites en relations algébriques sur les coefficients des polynômes et sur les dates de commutation. Nous allons maintenant faire un bilan de tous ces éléments puis estimer sous quelles conditions il est possible de réduire le nombre d'indéterminées du système par des relations supplémentaires. Enfin, nous verrons comment calculer effectivement les dates de commutation.

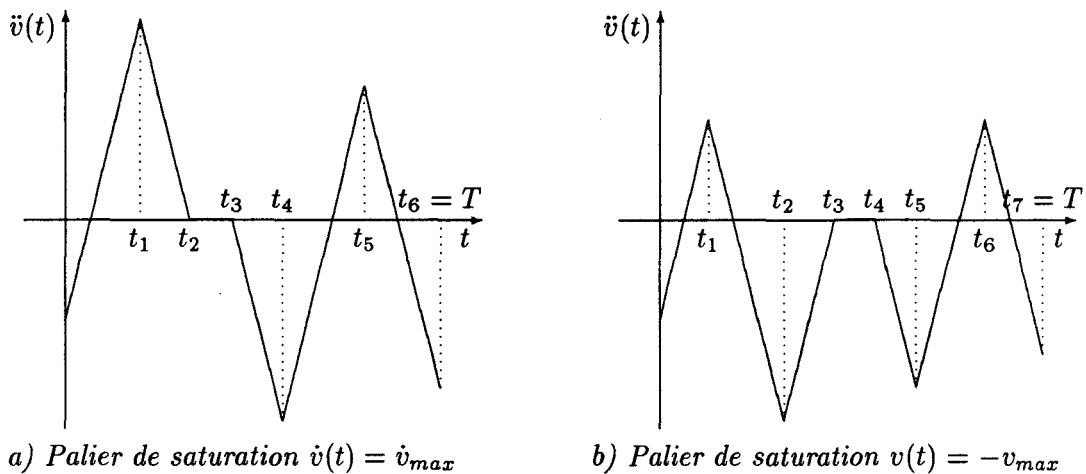


FIG. 3.8 - Saturation dans un modèle de degré 3 avec ajout de raccords

Bilan des degrés de liberté du système

Supposons qu'un modèle ait été construit pour la variable v . On dispose d'une variable polynomiale par morceaux qui peut vérifier toutes les conditions énumérées en 3.7.2. En fait, le modèle est accompagné d'un système d'équations algébriques qui traduit :

- le type de saturation appliquée sur chacun des polynômes ;
- les conditions de jets sur v , à l'instant initial et à l'instant final ;
- les conditions de raccordement de classe C^{γ_v-1} entre les polynômes.

Les seules conditions pour lesquelles aucune relation algébrique n'a été introduite dans le modèle sont celles qui concernent les conditions de jets sur la sortie plate, à l'instant final. Ces conditions sont en fait celles qui font la différence entre une variable quelconque et une variable qui permet effectivement de suivre le chemin imposé à la sortie plate. En définitive, on dispose d'un système d'équations algébriques, dont les inconnues sont les coefficients des polynômes et les dates de saturation. Ce système d'équations est sous-déterminé et nous supposons que les β_v indéterminées sont des dates de commutation.

Exemple 3.7.1 (suite) Pour un modèle en 4 polynômes de degré 3 tel que celui qui apparaît sur la figure 3.7, les polynômes p_1 et p_4 sont entièrement définis (à la valeur de T près) par les conditions de jets sur v et les conditions de saturation :

$$p_1(t) = v_i + \dot{v}_i t + \ddot{v}_i t^2 + \frac{\ddot{v}_{max}}{6} t^3$$

$$p_4(t) = v_f + \dot{v}_f (t - T) + \ddot{v}_f (t - T)^2 - \frac{\ddot{v}_{max}}{6} (t - T)^3$$

Les conditions de saturation imposent en plus : $a_{2,3} = -\ddot{v}_{max}/6$ et $a_{3,3} = \ddot{v}_{max}/6$. Les coefficients $a_{2,0}$, $a_{2,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,0}$, $a_{3,1}$, $a_{3,2}$ et les dates de commutation t_1 , t_2 , t_3 et $t_4 = T$ doivent être tels que les trois conditions de continuité imposées en chacun des instants t_1 , t_2 et t_3 soient vérifiées. On dispose de 10 paramètres et de 9 relations, il y a donc un paramètre qu'on ne sait pas calculer. Si une valeur arbitraire lui est imposée, les conditions de jets sur la sortie plate ne sont pas respectées en général.

Réduction du nombre d'indéterminées

Dans certains cas particuliers il sera possible d'exploiter des relations algébriques supplémentaires pour réduire le nombre d'indéterminées du modèle utilisé. Nous distinguerons deux cas : les relations qui exploitent les propriétés du système initial et les relations qui exploitent des propriétés particulières du chemin choisi.

Systèmes particuliers : les modèles utilisés sont polynomiaux par morceaux, donc très simples à intégrer. Dans tous les cas où la valeur de l'intégrale d'une variable ne dépend que du chemin suivi, et pas de la trajectoire, on peut utiliser cette valeur pour obtenir une relation algébrique supplémentaire entre les inconnues du système. Cette situation apparaît dans tous les cas où la variable est proportionnelle à \dot{y} , ce qui correspond au cas sans dérive.

Exemple 3.7.2 Soit $v(s) = \dot{y}(s) \cdot y(s)$, où l'opération « \cdot » indique un produit non commutatif. Soit le changement de paramétrage $s(t)$, on a alors les nouvelles coordonnées :

$$\tilde{y}(t) = y(s(t)) \qquad \frac{d\tilde{y}}{dt}(t) = \frac{dy}{ds}(s(t)) \frac{ds}{dt}(t)$$

On en déduit la nouvelle variable $\tilde{v}(t)$:

$$\tilde{v}(t) = \frac{dy}{ds}(s(t)) \cdot y(s(t)) \frac{ds}{dt}(t) \qquad \tilde{v}(t) = v(s(t)) \frac{ds}{dt}(t)$$

On a alors $\tilde{v} dt = v ds$ il y a donc conservation de l'intégrale.

Chemins particuliers : lorsque le système initial ne permet pas d'introduire de nouvelles relations algébriques entre les inconnues des modèles, il est possible dans certains cas de choisir un chemin spécifique dont on pourra exploiter les propriétés. Le cas le plus facile est celui des chemins symétriques. Dans ce cas on pourra utiliser des relations du type $t_{j+1} - t_j = t_{n-j} - t_{n-j-1}$.

Calcul effectif des dates de commutation

Lorsqu'on dispose d'un nombre suffisant d'équations on les utilise pour calculer directement les dates de commutation du modèle. Lorsqu'il n'est pas possible d'aboutir à cette situation idéale, il faut calculer certaines dates de commutation par approximations successives. Le nombre d'inconnues concernées est égal à la dimension de l'espace des solutions du système d'équations associé au modèle ; il est de toutes façons inférieur ou égal à β_v .

Le problème se ramène au calcul de $b < \beta_v$ instants de commutation du modèle $v(t)$, définis de façon à ce que la trajectoire $y(t)$, solution de l'équation (3.24), vérifie les conditions de jets (3.11) et (3.12).
Le modèle $v(t)$ étant défini par (3.32), (3.33), (3.34), (3.36) et (3.37).

Pour calculer effectivement ces dates de commutation on peut utiliser par exemple une méthode de calcul par approximations successives. Le principe du calcul est simple et peut être décomposé de la façon suivante :

- attribuer une solution approchée à un nombre suffisant de dates de commutation ;
- utiliser les équations algébriques du modèle pour calculer les autres dates de commutation ;
- résoudre l'équation différentielle :

$$v(t) = V(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(\beta_v)}(t))$$

en prenant comme conditions initiales les conditions de jets sur la sortie plate à l'instant initial.

- évaluer l'erreur commise à l'instant final $t = T$, par rapport aux conditions de jets imposées à la sortie plate, et en déduire une correction de la solution approchée initialement choisie.

Cette démarche est répétée tant que la précision souhaitée n'est pas atteinte. Le choix de la solution initiale est très important car le domaine de convergence reste limité. On peut procéder à l'analyse fine des équations algébriques associées au modèle et en déduire le domaine dans lequel on peut choisir la solution initiale. Une méthode de descente de gradient peut alors être appliquée sur ce domaine.

3.7.4 Obtention d'une variable admissible

Le critère retenu en 3.6.2 indique qu'il faut minimiser le nombre de polynômes. Nous avons vu lors de la construction du modèle que le nombre minimal de polynômes est $\gamma_v + \beta_v$ et que dans ce cas tous les polynômes sont de degré γ_v . En fait, ce modèle minimal ne tient compte que d'une seule contrainte: $|v^{(\gamma_v)}| \leq v_{max}^{(\gamma_v)}$ donc la solution obtenue en effectuant les calculs sur ce modèle n'est peut-être pas admissible : les autres contraintes dynamiques imposées à v n'ont aucune raison d'être respectées. Toutefois, le résultat obtenu donne une idée de l'allure du modèle définitif. Celui-ci est en fait obtenu à partir du modèle initial en insérant les paliers de saturation là où ils sont nécessaires. On aboutit alors à un schéma itératif dans lequel se succèdent les étapes suivantes :

- insertion d'un ou plusieurs paliers de saturation ;
- construction du modèle correspondant ;
- contrôle du respect des contraintes pour chacun des polynômes.

Le contrôle du respect des contraintes ne présente pas de difficultés particulières. En effet, il suffit de calculer les extremums de chacun des polynômes composant le modèle, ainsi que les extremums de leurs $\gamma_v - 1$ premières dérivées. Lorsque plusieurs contraintes ne sont pas respectées sur un modèle, on peut soit chercher à les corriger toutes simultanément, soit les corriger une à une. Les deux méthodes se valent, toutefois il peut être intéressant de quantifier les dépassements de contraintes, avant de choisir une stratégie particulière.

3.8 Extension à plusieurs variables

3.8.1 Vue d'ensemble de la méthode

Après avoir exposé le calcul d'une trajectoire optimale en temps pour une variable du système, nous allons maintenant nous intéresser aux autres variables. L'idée générale consiste à itérer le calcul de trajectoire optimale sur un sous-ensemble du chemin de plus en plus restreint, jusqu'à ce que toutes les contraintes du système soient effectivement respectées. Il faudra donc alterner les étapes suivantes :

- choix de la variable à saturer et de l'intervalle de travail ;
- calcul de la trajectoire optimale en temps correspondante.

La seconde étape a déjà été traitée, il reste donc à déterminer les bornes de l'intervalle sur lequel les calculs doivent être recommencés.

3.8.2 Calcul des bornes de l'intervalle

Une trajectoire $y(t)$ a été définie sur $[0, T]$ et elle est optimale pour la variable v . La fonction $v(t)$ est donc polynomiale par morceaux, mais une autre variable du système, w ne respecte pas les contraintes qui lui sont imposées. Il faut donc recommencer le calcul de trajectoire au moins sur une partie du chemin. La difficulté réside dans le fait qu'il est nécessaire d'anticiper le dépassement des contraintes pour assurer un raccord suffisamment lisse au point de changement d'axe de saturation. Pour cerner cette difficulté, nous allons observer ce qui se passe pour trois types de dépassements :

- un dépassement du type $|w^{(\gamma_w)}(t)| > w_{max}^{(\gamma_w)}$ est corrigé en imposant à w de saturer la contrainte d'ordre γ_w , comme indiqué en figure (3.9a) ;
- un dépassement du type $|w^{(\gamma_w-1)}(t)| > w_{max}^{(\gamma_w-1)}$ est corrigé en imposant à w de saturer la contrainte d'ordre $\gamma_w - 1$ au point où la borne est atteinte, le raccord C^{γ_w-1} est donc assuré, comme on peut le voir en figure (3.9b) ;
- un dépassement du type $|w^{(\gamma_w-2)}(t)| > w_{max}^{(\gamma_w-2)}$ ne peut pas être corrigé directement en imposant à w de saturer la contrainte d'ordre $\gamma_w - 2$ car la dérivée d'ordre $\gamma_w - 1$ ne serait plus continue. Il faut donc anticiper et ajouter un raccord qui permet d'annuler la dérivée d'ordre $\gamma_w - 1$ exactement au moment où la dérivée d'ordre $\gamma_w - 2$ atteint son maximum. Cette construction est illustrée par les figures (3.10a) et (3.10b).

La construction réalisée dans le cas d'un dépassement de la contrainte d'ordre $\gamma_w - 2$ peut être généralisée à tout dépassement de contrainte d'ordre $\gamma_w - k$, $k > 0$. Soit t_d la date à laquelle le dépassement est détecté. On cherche à construire un raccord polynomial, de classe C^{γ_w-1} , en n polynômes p_1, p_2, \dots, p_n , respectivement définis sur les intervalles $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$, tels que :

- en t_0 les valeurs de la variable w et de ses $\gamma_w - 1$ premières dérivées sont celles obtenues en suivant la trajectoire $y(t)$;

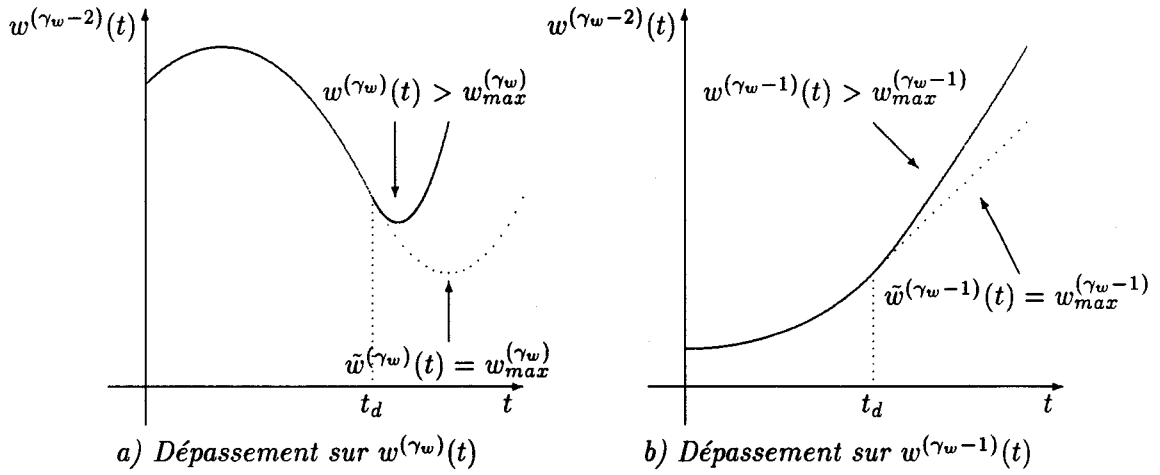


FIG. 3.9 - Correction immédiate des dépassements de contraintes

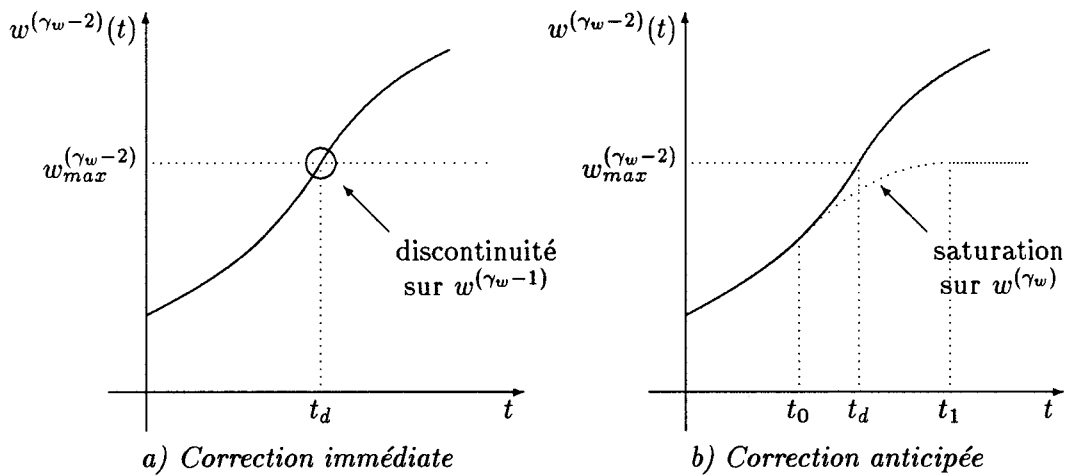


FIG. 3.10 - Correction d'un dépassement de la contrainte d'ordre $\gamma_w - 2$

- chacun des polynômes est de degré γ_w et sature la contrainte d'ordre γ_w associée à w ;
- en t_n la dérivée d'ordre $\gamma_w - k$ de w atteint son maximum et toutes les dérivées d'ordre $\gamma_w - k + 1$ à $\gamma_w - 1$ s'annulent.

La construction rejoint tout à fait celle utilisée dans le cas de la saturation sur une seule variable. Il y a toutefois deux différences :

- on ne connaît pas la valeur de t_0 , les jets initiaux sont donc des paramètres qu'il faudra identifier ;
- on ne cherche plus à contrôler les valeurs de la sortie plate et de ses dérivées en t_n , le système à résoudre est donc purement algébrique.

Pour calculer la valeur de t_0 il suffit alors de prendre une approximation polynomiale de $w(t)$ ($t < t_d$), de degré suffisamment élevé, de façon à avoir une valeur approchée de w et de ses dérivées en t_0 . Ces valeurs approchées permettent alors de calculer de proche en proche tous les coefficients des polynômes en fonction des $n + 1$ dates t_0, t_1, \dots, t_n . Il suffit alors de résoudre le système composé des k équations :

$$p_n^{(\gamma_w - k)}(t_n) = w_{max}^{(\gamma_w - k)} \quad p_n^{(j)}(t_n) = 0, \quad \gamma_w - k < j < \gamma_w$$

On dispose de $n + 1$ inconnues, on doit donc avoir $n = k - 1$ pour pouvoir réaliser un raccord convenable.

Remarque 3.8.1 *Seules les saturations de la contrainte d'ordre γ_w ont été utilisées lors de la construction du raccord permettant un changement d'axe de saturation $C^{\gamma_w - 1}$. En toute rigueur, il faudrait s'assurer que toutes les contraintes imposées à w sont effectivement respectées sur tout l'intervalle $[t_0, t_n]$, et éventuellement introduire des paliers de saturation supplémentaires si ce n'était pas le cas. Toutefois, si ce cas se présentait, il suffirait d'appliquer de façon itérative la méthode.*

Chapitre 4

Commande d'un satellite

4.1 Introduction

Ici, nous utilisons la méthode proposée au chapitre 3 pour planifier la trajectoire en attitude d'un satellite, autrement dit pour calculer en boucle ouverte des commandes qui agiront sur l'orientation d'un solide dans un espace Euclidien de dimension 3. Le satellite est un système plat particulièrement simple : on décrit l'état du satellite par sa position en attitude q , la commande étant le vecteur vitesse instantané de rotation $\overline{\Omega}$. Dans la partie 2.3, nous avons montré comment établir les expressions liant Ω , q et \dot{q} , rappelées ici :

$$\Omega = 2\dot{q} \cdot \bar{q} \qquad \dot{q} = \frac{1}{2} \Omega \cdot q$$

Si on ne prenait en compte que les *conditions de rendez-vous* et les *contraintes dynamiques*, ce problème ne poserait aucune difficulté particulière et de nombreuses méthodes pourraient en venir à bout. Les difficultés surgissent essentiellement parce qu'on cherche à obtenir simultanément des commandes très lisses, une grande précision et un temps de calcul très faible. Le problème réel est en fait défini par les éléments suivants :

- Les **conditions de rendez-vous** : l'attitude q du satellite, sa vitesse de rotation Ω et son accélération $\dot{\Omega}$ sont imposées à l'instant initial $t = 0$ et à l'instant final $t = T$:

Conditions initiales

Conditions finales

$$\begin{array}{ll} q(0) = q_i & q(T) = q_f \\ \Omega(0) = \Omega_i & \Omega(T) = \Omega_f \\ \dot{\Omega}(0) = \dot{\Omega}_i & \dot{\Omega}(T) = \dot{\Omega}_f \end{array} \quad (4.1)$$

- Les **contraintes dynamiques** : les caractéristiques physiques des moteurs et la structure du satellite nécessitent que chacune des composantes du couple C , du moment M et du *jerk* J du satellite soit bornée en chaque instant $0 \leq t \leq T$:

$$\begin{array}{lll} |M_x(t)| \leq M_{m_x} & |C_x(t)| \leq C_{m_x} & |J_x(t)| \leq J_{m_x} \\ |M_y(t)| \leq M_{m_y} & |C_y(t)| \leq C_{m_y} & |J_y(t)| \leq J_{m_y} \\ |M_z(t)| \leq M_{m_z} & |C_z(t)| \leq C_{m_z} & |J_z(t)| \leq J_{m_z} \end{array} \quad (4.2)$$

En première approximation on peut considérer que la matrice d'inertie du satellite est constante et diagonale. Dans ce cas les contraintes dynamiques simplifiées sont :

$$\begin{aligned}
 |\Omega_x(t)| &\leq \Omega_{m_x} & |\dot{\Omega}_x(t)| &\leq \dot{\Omega}_{m_x} & |\ddot{\Omega}_x(t)| &\leq \ddot{\Omega}_{m_x} \\
 |\Omega_y(t)| &\leq \Omega_{m_y} & |\dot{\Omega}_y(t)| &\leq \dot{\Omega}_{m_y} & |\ddot{\Omega}_y(t)| &\leq \ddot{\Omega}_{m_y} \\
 |\Omega_z(t)| &\leq \Omega_{m_z} & |\dot{\Omega}_z(t)| &\leq \dot{\Omega}_{m_z} & |\ddot{\Omega}_z(t)| &\leq \ddot{\Omega}_{m_z}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

L'étape intermédiaire étant le cas où la matrice de rotation est constante mais pas diagonale. Le cas réel étant effectivement une matrice d'inertie pleine et variable.

- Le **temps de calcul** : il doit être très court car le nombre de rendez-vous à calculer est très élevé. En effet, un grand nombre d'enchaînements de prises de vue sont calculés pour pouvoir optimiser le rendement moyen du satellite.
- L'**expression de la commande fournie** doit avoir une forme particulière, en l'occurrence polynomiale par morceaux, de degré 4. Cette contrainte est due en partie à l'électronique de bord qui ne prend en compte que ce type de contraintes. Par ailleurs, le nombre de polynômes doit être aussi faible que possible pour éviter d'encombrer la bande passante.
- La **précision sur l'attitude finale** doit être aussi grande qu'on le souhaite. Cette condition peut être contraignante car le contrôle et la correction de l'erreur sont coûteux en temps de calcul.

Le calcul de commandes en boucle ouverte pour le positionnement en attitude de satellites est un problème pour lequel peu de résultats ont été publiés. Le peu d'intérêt apparent pour ce problème spécifique a plusieurs origines. D'une part d'autres aspects du positionnement en attitude de satellites ont été abondamment traités et les résultats obtenus jusqu'à présent peuvent laisser penser que ce problème est déjà bien maîtrisé. D'autre part, les enjeux de l'industrie spatiale sont tels qu'une certaine confidentialité est nécessaire dans ce domaine. Les nouveaux besoins introduits par l'évolution technologique sont de ce fait relativement peu connus et les résultats obtenus ne sont publiés qu'avec parcimonie et souvent avec un retard important. Il s'agit toutefois d'un problème pour lequel plusieurs types de solutions ont été proposées, en particulier des solutions exploitant implicitement la platitude du système. Ceci nous permet de situer notre méthode par rapport aux solutions existantes.

Nous avons rappelé la définition et les propriétés de base des quaternions en 2.2, et nous avons établi le lien entre les rotations et les quaternions unitaires en 2.3. Bien que leur utilisation ne soit pas systématique en mécanique spatiale, plusieurs études (par exemple [LB87] et [Llibre93]) mettent en évidence leur utilité dès qu'on cherche à *contrôler l'attitude* d'un solide. Nous avons également fixé notre choix sur les quaternions, mais nous ne nous limitons pas aux quaternions unitaires. L'emploi des *quaternions non unitaires*, déjà proposé dans [Llibre94] est généralement limitée au cas des quaternions dont la norme s'éloigne peu de 1. Nous étendons ce concept en 4.2, de façon à pouvoir effectivement utiliser des quaternions de module quelconque.

La partie 4.3 sera consacrée au calcul des conditions de jets, à partir des conditions de rendez-vous, selon la méthode générale, présentée en 3.4.1. Nous commencerons par effectuer les calculs dans le cas de quaternions unitaires, puis nous montrerons comment les expressions doivent être complétées pour obtenir des conditions de jets dans le cas où l'attitude est représentée par des quaternions non unitaires.

En 4.4 montrerons comment traiter le problème du rendez-vous en attitude. Les travaux présentés dans cette partie suivent dans une certaine mesure la démarche développée dans [Llibre95], qui propose une méthode pour calculer des *trajectoires d'attitude*¹ telles que l'accélération angulaire soit continue. Pour illustrer la richesse du problème du calcul des chemins d'attitude, nous proposerons plusieurs solutions permettant de résoudre le problème du rendez-vous. Celle que nous retiendrons finalement est une simple interpolation polynomiale sur les conditions de jets. Pour compléter cette solution nous préciserons le rôle de chacun des paramètres utilisés pour réaliser l'interpolation et nous illustrerons par des exemples leur effet sur la trajectoire obtenue.

Une fois établie la méthode permettant de calculer un *chemin en attitude*, en 4.5 nous mettrons en œuvre l'algorithme permettant de calculer la *trajectoire optimale en temps* le long de ce chemin. Dans un premier temps nous ne traiterons que le cas simple où les contraintes portent directement sur les composantes du vecteur vitesse instantané de rotation et ses dérivées, puis nous montrerons comment adapter l'algorithme pour prendre en compte la matrice d'inertie.

Les deux dernières parties de ce chapitre sortent du cadre général de la méthode exposée au chapitre 3. En 4.6 nous montrerons qu'il est possible d'optimiser le chemin en attitude en exploitant les propriétés spécifiques des rotations. Enfin, en 4.7 nous donnerons des indications pour la programmation de l'algorithme dans un langage tel que C++. D'une part nous indiquerons la structure générale des données manipulées. D'autre part nous aborderons les problèmes liés aux traitements numériques : l'échantillonnage des données, le lissage des commandes et la correction finale des erreurs numériques.

4.2 Rotations et quaternions non unitaires

Dans la partie 2.3 les quaternions utilisés pour représenter les rotations étaient tous des quaternions unitaires. Or, en associant à une rotation un quaternion de module quelconque le modèle gagne une certaine souplesse. En effet, on peut alors choisir des fonctions quelconques pour représenter chacune des composantes du quaternion. Cette liberté permettra en particulier d'utiliser des polynômes à la place des fonctions trigonométriques et des radicaux. Nous allons donc établir dans ce qui suit les nouvelles expressions obtenues pour l'image d'un vecteur, la formule de changement de repère, la vitesse de rotation et l'accélération angulaire. Nous verrons que ces nouvelles expressions sont tout à fait équivalentes aux anciennes.

4.2.1 Image d'un vecteur et changement de repère

Soit R une rotation à laquelle on associe le quaternion $Q = |Q|q$, avec $|Q| > 0$ et $|q| = 1$. Soit \mathcal{R} un repère dont l'image par R est \mathcal{R}_R . Soit \vec{V} un vecteur auquel on associe le quaternion V dans \mathcal{R} et V' dans \mathcal{R}_R . Soient \vec{U} l'image de \vec{V} par R et U le quaternion associé dans le repère \mathcal{R} . Les expressions (2.17) et (2.21), rappelées ici, avaient établi les expressions reliant U à V et V' à V , dans le cas où la rotation R était représentée par

1. Par « trajectoire d'attitude » nous désignons la trajectoire suivie par le quaternion d'attitude dans \mathbf{H} . De même, le « chemin d'attitude » désigne le chemin suivi par le quaternion d'attitude.

le quaternion unitaire q :

$$U = q \cdot V \cdot \bar{q} \qquad V' = \bar{q} \cdot V \cdot q$$

Pour chacune de ces relations on peut multiplier et diviser le membre de droite par $|Q|$. On a alors :

$$U = |Q| q \cdot V \cdot \frac{\bar{q}}{|Q|} \qquad V' = \frac{\bar{q}}{|Q|} \cdot V \cdot |Q| q$$

Or, en utilisant $Q = |Q| q$ on peut écrire :

$$U = Q \cdot V \cdot \frac{\bar{Q}}{|Q|^2} \qquad V' = \frac{\bar{Q}}{|Q|^2} \cdot V \cdot Q$$

En reprenant la définition de l'inverse d'un quaternion, donnée en 2.5 on aboutit aux expressions générales suivantes :

$$U = Q \cdot V \cdot Q^{-1} \qquad V' = Q^{-1} \cdot V \cdot Q \qquad (4.4)$$

4.2.2 Vitesse de rotation et accélération angulaire

En conservant les mêmes notations, supposons maintenant que le quaternion Q varie dans le temps et cherchons à exprimer la vitesse de rotation Ω et l'accélération angulaire $\dot{\Omega}$ en fonction de Q et \dot{Q} . Les expressions (2.25) et (2.27) établies dans le cas de quaternions unitaires nous avaient donné :

$$\Omega = 2\dot{q} \cdot \bar{q} \qquad \dot{\Omega} = 2\Im(\ddot{q} \cdot \bar{q})$$

Pour alléger les calculs intermédiaires, notons $r = |Q|$. On a alors :

$$Q = r q \qquad \dot{Q} = \dot{r} q + r \dot{q} \qquad \ddot{Q} = \ddot{r} q + 2\dot{r} \dot{q} + r \ddot{q}$$

On en déduit les expressions de q , \dot{q} et \ddot{q} :

$$q = \frac{1}{r} Q \qquad \dot{q} = \frac{1}{r} \dot{Q} - \frac{\dot{r}}{r^2} Q \qquad \ddot{q} = \frac{1}{r} \ddot{Q} - 2 \frac{\dot{r}}{r^2} \dot{Q} + \frac{2\dot{r}^2 - r\ddot{r}}{r^3} Q$$

En remplaçant q , \dot{q} et \ddot{q} par ces expressions, dans Ω et $\dot{\Omega}$, on obtient :

$$\Omega = \frac{2}{r^2} \dot{Q} \cdot \bar{Q} - 2 \frac{\dot{r}}{r^2} Q \cdot \bar{Q}$$

$$\dot{\Omega} = 2\Im \left(\frac{1}{r^2} \ddot{Q} \cdot \bar{Q} - 2 \frac{\dot{r}}{r^3} \dot{Q} \cdot \bar{Q} + \frac{2\dot{r}^2 - r\ddot{r}}{r^3} Q \cdot \bar{Q} \right)$$

Or, Ω et $\dot{\Omega}$ sont des quaternions purement vectoriels, les termes réels provenant du produit $Q \cdot \bar{Q}$ disparaissent donc lorsqu'on ne considère que la partie imaginaire. Par ailleurs, $\bar{Q} = r^2 Q^{-1}$, on obtient alors la nouvelle expression de Ω :

$$\Omega = 2\Im(\dot{Q} \cdot Q^{-1}) \qquad (4.5)$$

Ceci nous permet d'exprimer $\dot{\Omega}$ en fonction de \ddot{Q} , Q^{-1} , r , \dot{r} et Ω :

$$\dot{\Omega} = 2\Im(\ddot{Q} \cdot Q^{-1}) - \frac{\dot{r}}{r} \Omega \quad (4.6)$$

Enfin, on peut exprimer le vecteur $\vec{\Omega}$ dans le repère mobile :

$$\Omega_S = 2\Im(Q^{-1} \cdot \dot{Q}) \quad (4.7)$$

4.2.3 Composition de rotations

Les expressions obtenues en (2.28) et (2.29), permettant de calculer le vecteur vitesse de rotation dans le cas des rotations composées, peuvent être très facilement adaptées au cas d'une représentation des rotations par des quaternions non unitaires. Dans ce cas on notera :

- \mathcal{R}_0 le repère de référence et \mathcal{R}_i ($1 \leq i \leq n$) les repères obtenus en appliquant successivement à \mathcal{R}_0 les rotations R_i , chacune représentée par le quaternion Q_i ;
- $P_i = Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_i$ le quaternion représentant la rotation composée $R_i \circ R_{i-1} \circ \cdots \circ R_2 \circ R_1$;
- $\vec{\Omega}_i$ le vecteur vitesse de rotation associé à R_i , $\Omega_i = 2\Im(\dot{Q}_i \cdot Q_i^{-1})$ sa représentation dans \mathcal{R}_{i-1} et $P_i \cdot \Omega_i \cdot P_i^{-1}$ sa représentation dans \mathcal{R}_0 .
- R la rotation permettant de passer directement du repère \mathcal{R}_0 au repère \mathcal{R}_n , $Q = Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_n$ le quaternion qui la représente, $\Omega = 2\Im(\dot{Q} \cdot Q^{-1})$ le quaternion qui représente le vecteur vitesse de rotation associée, $\vec{\Omega}$, dans \mathcal{R}_0 et enfin Ω_S le quaternion représentant $\vec{\Omega}$ dans \mathcal{R}_n .

Avec ces notations on obtient immédiatement :

$$\Omega = \sum_{i=1}^n P_{i-1} \cdot \Omega_i \cdot P_{i-1}^{-1} \quad \Omega_S = \sum_{i=1}^n Q^{-1} \cdot P_{i-1} \cdot \Omega_i \cdot P_{i-1}^{-1} \cdot Q^{-1}$$

4.3 Calcul des conditions de jets

Les conditions de rendez-vous, telles qu'elles ont été données en (4.1) doivent être transformées en conditions de jets. Dans un premier temps nous verrons comment cette transformation se fait pour des quaternions unitaires, puis nous verrons comment modifier les formules obtenues lorsque l'attitude est représentée par des quaternions non unitaires.

4.3.1 Quaternions unitaires

L'expression de $\dot{\Omega}$ telle qu'elle est donnée en (2.27) n'est pas suffisante pour calculer les conditions de jets. En effet, l'extraction de la partie imaginaire nous a fait perdre le

terme réel. Nous allons donc revenir à l'expression complète $\dot{\Omega} = 2\dot{q} \cdot \bar{q} + 2\dot{q} \cdot \bar{q}$. Ceci nous permet d'obtenir l'expression de \ddot{q} en fonction de $\dot{\Omega}$, q et \dot{q} :

$$\ddot{q} = \frac{1}{2} \left(\dot{\Omega} - 2\dot{q} \cdot \bar{q} \right) \cdot q$$

En remplaçant dans le membre de droite, \dot{q} par son expression, donnée en (2.25), on obtient :

$$\ddot{q} = \frac{1}{2} \left(\dot{\Omega} - \frac{1}{2} \Omega \cdot q \cdot \overline{\Omega \cdot q} \right) \cdot q = \frac{1}{2} \left(\dot{\Omega} - \frac{1}{2} \Omega \cdot q \cdot \bar{q} \cdot \overline{\Omega} \right) \cdot q$$

Or, q est unitaire, donc $q \cdot \bar{q} = 1$; par ailleurs, $\Omega \cdot \overline{\Omega} = |\Omega|^2$, l'expression finale de \ddot{q} est donc :

$$\ddot{q} = \frac{1}{2} \left(\dot{\Omega} - \frac{1}{2} |\Omega|^2 \right) \cdot q \quad (4.8)$$

Nous pouvons donc calculer \dot{q} et \ddot{q} en fonction de q , Ω et $\dot{\Omega}$, il suffit d'utiliser les valeurs imposées par les conditions de rendez-vous (4.1) pour obtenir les conditions de jets sur q à l'instant initial et à l'instant final :

Conditions initiales

Conditions finales

$$\begin{aligned} q(0) &= q_i & q(T) &= q_f \\ \dot{q}(0) &= \dot{q}_i = \frac{1}{2} \Omega_i \cdot q_i & \dot{q}(T) &= \dot{q}_f = \frac{1}{2} \Omega_f \cdot q_f \\ \ddot{q}(0) &= \ddot{q}_i = \frac{1}{2} \left(\dot{\Omega}_i - |\Omega_i|^2 \right) \cdot q_i & \ddot{q}(T) &= \ddot{q}_f = \frac{1}{2} \left(\dot{\Omega}_f - |\Omega_f|^2 \right) \cdot q_f \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.3.2 Quaternions non unitaires

Nous avons vu dans la partie 4.2 qu'il est possible de représenter les rotations par des quaternions non unitaires. Dans ce cas, les formules permettant de calculer les conditions de jets changent. Soit $Q = r q$ un quaternion de module r quelconque. Les expressions des deux premières dérivées de Q sont :

$$\dot{Q} = \dot{r} q + r \dot{q} \quad \ddot{Q} = \ddot{r} q + 2\dot{r} \dot{q} + r \ddot{q}$$

En remplaçant dans ces expressions \dot{q} et \ddot{q} données en (2.25) et (4.8), on obtient les expressions de \dot{Q} et \ddot{Q} en fonction de q , Ω et $\dot{\Omega}$:

$$\dot{Q} = \frac{r}{2} \Omega \cdot q + \dot{r} q \quad \ddot{Q} = \frac{r}{2} \left(\dot{\Omega} - \frac{1}{2} |\Omega|^2 \right) \cdot q + \dot{r} \Omega \cdot q + \ddot{r} q$$

Pour obtenir les conditions de jets sur Q , \dot{Q} et \ddot{Q} il suffit de choisir des valeurs arbitraires r_i , \dot{r}_i et \ddot{r}_i (r_f , \dot{r}_f et \ddot{r}_f respectivement) pour r , \dot{r} et \ddot{r} à l'instant initial $t = 0$ (à l'instant final $t = T$ respectivement). On obtient alors les conditions de jets sur Q à l'instant initial :

$$\begin{aligned} Q(0) &= Q_i = r_i q_i \\ \dot{Q}(0) &= \dot{Q}_i = \frac{r_i}{2} \Omega_i \cdot q_i + \dot{r}_i q_i \\ \ddot{Q}(0) &= \ddot{Q}_i = \frac{r_i}{2} \left(\dot{\Omega}_i - \frac{1}{2} |\Omega_i|^2 \right) \cdot q_i + \dot{r}_i \Omega_i \cdot q_i + \ddot{r}_i q_i \end{aligned} \quad (4.10)$$

et les conditions de jets sur Q à l'instant final :

$$\begin{aligned}
 Q(T) &= Q_f = r_f q_f \\
 \dot{Q}(T) &= \dot{Q}_f = \frac{r_f}{2} \Omega_f \cdot q_f + \dot{r}_f q_f \\
 \ddot{Q}(T) &= \ddot{Q}_f = \frac{r_f}{2} \left(\dot{\Omega}_f - \frac{1}{2} |\Omega_f|^2 \right) \cdot q_f + \dot{r}_f \Omega_f \cdot q_f + \ddot{r}_f q_f
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

4.4 Calcul du chemin

4.4.1 Composition de rotations autour d'axes fixes

L'un des cas particuliers où il est possible d'intégrer les équations cinématiques reliant l'attitude à la vitesse de rotation, est celui où l'axe de rotation est fixe. Nous allons donc chercher une méthode, pour calculer successivement chacune des rotations du produit, dans un repère où l'axe de rotation est fixe. Le quaternion utilisé est de la forme:

$$q = q_{ini} \cdot q_{vit} \cdot q_{att}$$

Où les rotations q_{ini} , q_{vit} et q_{att} sont caractérisées comme suit:

- q_{ini} caractérise une rotation d'axe Ω_{ini} , fixe dans le repère \mathcal{R} . Il représente une rotation constante, fixée par le vecteur vitesse instantanée de rotation à l'instant initial.
- q_{vit} caractérise une rotation d'axe Ω_{vit} , fixe dans le repère \mathcal{R}_{ini} obtenu à partir du repère de référence \mathcal{R} par la rotation décrite par le quaternion q_{ini} . Il représente la rotation qui permet de corriger la vitesse instantanée de rotation à l'instant T .
- q_{att} caractérise une rotation d'axe Ω_{att} , fixe dans le repère \mathcal{R}_{vit} obtenu à partir du repère \mathcal{R}_{ini} par la rotation décrite par le quaternion q_{vit} . Il représente la rotation qui permet d'arriver à l'attitude de rendez-vous souhaitée.

Les expressions de q_{ini} , q_{vit} , q_{att} , Ω_{ini} , Ω_{vit} , et Ω_{att} sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{ini} &= 2\dot{\alpha}_{ini} n_{ini} & \Omega_{vit} &= 2\dot{\alpha}_{vit} n_{vit} & \Omega_{att} &= 2\dot{\alpha}_{att} n_{att} \\
 q_{ini} &= e^{\alpha_{ini} n_{ini}} & q_{vit} &= e^{\alpha_{vit} n_{vit}} & q_{att} &= e^{\alpha_{att} n_{att}}
 \end{aligned}$$

avec α_{ini} , α_{vit} et α_{att} des fonctions réelles dépendant du temps et n_{ini} , n_{vit} et n_{att} des quaternions purement vectoriels constants représentant des axes de rotation fixes.

Une fois ces paramètres déterminés, l'expression (2.19) appliquée au cas $n = 3$ nous donne immédiatement le vecteur vitesse instantanée de rotation :

$$\Omega = \Omega_{ini} + q_{ini} \cdot \Omega_{vit} \cdot \bar{q}_{ini} + q_{ini} \cdot q_{vit} \cdot \Omega_{att} \cdot \bar{q}_{vit} \cdot \bar{q}_{ini} \tag{4.12}$$

Les hypothèses faites sur le rôle respectif de chacun des facteurs q_{ini} , q_{vit} et q_{att} peuvent être résumées dans le tableau (4.1).

La méthode consiste alors à déterminer dans l'ordre Ω_{ini} , q_{ini} , Ω_{vit} , q_{vit} , Ω_{att} et enfin q_{att} vérifiant les hypothèses énoncées dans le tableau (4.1). Les conditions de rendez-vous

t	0	T
Ω_{ini}	$\Omega(0)$	$\Omega(0)$
$q_{ini} \cdot \Omega_{vit} \cdot \bar{q}_{ini}$	0	indéfini
$q_{ini} \cdot q_{vit} \cdot \Omega_{att} \cdot \bar{q}_{vit} \cdot \bar{q}_{ini}$	0	indéfini
		$\Omega(T) - \Omega(0)$
		0

 TAB. 4.1 - Rôle des composantes Ω_{ini} , Ω_{vit} et Ω_{att} du vecteur vitesse

en vitesse sont alors explicitement vérifiées. Les conditions de rendez-vous en attitude devront être prises en compte lors de la détermination de Ω_{att} . Dans les calculs nous supposons que le repère lié au satellite coïncide avec le repère inertiel de référence à l'instant initial. Ainsi, $q(0) = 1$, ce qui nous permet de poser arbitrairement: $q_{ini}(0) = q_{vit}(0) = q_{att}(0) = 1$. On peut alors calculer les paramètres correspondant à chacune des étapes.

Trajectoire initiale

De l'équation $\Omega_{ini}(t) = \Omega(0)$ on déduit que pour tout t :

$$\dot{\alpha}_{ini}(t) = \frac{1}{2} |\Omega(0)| \quad \alpha_{ini}(t) = \frac{|\Omega(0)|}{2} t \quad n_{ini} = \frac{1}{|\Omega(0)|} \Omega(0)$$

Correction de la vitesse en fin de rendez-vous

Le quaternion q_{ini} est unitaire, n_{vit} est constant et unitaire, donc pour réaliser la condition initiale, on doit annuler $\dot{\alpha}_{vit}$:

$$\begin{aligned} [q_{ini}(0) \cdot \Omega_{vit}(0) \cdot \bar{q}_{ini}(0) = 0] &\implies [\dot{\alpha}_{vit}(0) = 0] \\ [q_{ini}(T) \cdot \Omega_{vit}(T) \cdot \bar{q}_{ini}(T) = \Omega(T) - \Omega(0)] &\implies \left[\dot{\alpha}_{vit}(T) = \frac{1}{2} |\Omega(T) - \Omega(0)| \right] \end{aligned}$$

Toute fonction qui vérifie ces conditions est acceptable. En particulier, il est possible de prendre $\dot{\alpha}_{vit}$ polynomiale de degré 1 :

$$\dot{\alpha}_{vit}(t) = \frac{|\Omega(T) - \Omega(0)|}{2T} t$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \alpha_{vit}(t) &= \frac{|\Omega(T) - \Omega(0)|}{4T} t^2 \\ n_{vit} &= \bar{q}_{ini}(T) \cdot \left(\frac{\Omega(T) - \Omega(0)}{|\Omega(T) - \Omega(0)|} \right) \cdot q_{ini}(T) \end{aligned}$$

Correction de l'attitude en fin de rendez-vous

Pour la même raison que précédemment, on doit avoir:

$$\dot{\alpha}_{att}(0) = \dot{\alpha}_{att}(T) = 0$$

Comme précédemment, on peut choisir arbitrairement la forme de $\dot{\alpha}_{att}$, si on la choisit polynomiale, tout polynôme du second degré qui s'annule en 0 et en T convient :

$$\dot{\alpha}_{att}(t) = c_{att}(t - T)t$$

On en déduit α_{att} :

$$\alpha_{att}(t) = \frac{c_{att}}{2}t^2 \left(\frac{t}{3} - \frac{T}{2} \right)$$

L'expression du quaternion q_{att} à l'instant $t = T$ doit vérifier :

$$q_{att} = \cos(\alpha_{att}(T)) + \sin(\alpha_{att}(T)) n_{att} = \bar{q}_{vit}(T) \cdot \bar{q}_{ini}(T) \cdot q(T) \quad (4.13)$$

Or nous avons déjà déterminé $\alpha(t)$, on en déduit :

$$\alpha_{att}(T) = -c_{att} \frac{T^3}{12}$$

En remplaçant dans (4.13), on en déduit :

$$c_{att} = -\frac{12}{T^3} \arccos[\Re(\bar{q}_{vit}(T) \cdot \bar{q}_{ini}(T) \cdot q(T))]$$

$$n_{att} = \frac{1}{\sin(\alpha_{att}(T))} \Im(\bar{q}_{vit}(T) \cdot \bar{q}_{ini}(T) \cdot q(T))$$

Expressions dans le repère fixe

En développant l'expression (4.12), on obtient Ω comme combinaison linéaire des six vecteurs fixes \vec{n}_{ini} , \vec{n}_{vit} , \vec{n}_{att} , $\vec{n}_{ini} \wedge \vec{n}_{vit}$, $\vec{n}_{ini} \wedge \vec{n}_{att}$ et $\vec{n}_{vit} \wedge \vec{n}_{att}$. Les composantes sont :

Selon \vec{n}_{ini} :

$$\omega_{ini} + \omega_{vit}(1 - \cos(2\alpha_{ini})) \langle \vec{n}_{ini}, \vec{n}_{vit} \rangle + \omega_{att} (\langle \vec{n}_{ini}, \vec{n}_{vit} \rangle \langle \vec{n}_{vit}, \vec{n}_{att} \rangle (1 - \cos(2\alpha_{vit})) + \langle \vec{n}_{ini}, \vec{n}_{att} \rangle \cos(2\alpha_{vit}) + \langle \vec{n}_{ini}, \vec{n}_{vit} \wedge \vec{n}_{att} \rangle \sin(2\alpha_{vit}) (1 - \cos(2\alpha_{ini})))$$

Selon \vec{n}_{vit} :

$$\omega_{vit} \cos(2\alpha_{ini}) + \omega_{att} (\langle \vec{n}_{ini}, \vec{n}_{att} \rangle \sin(2\alpha_{vit}) \sin(2\alpha_{ini}) + \langle \vec{n}_{vit}, \vec{n}_{att} \rangle (1 - \cos(2\alpha_{vit})) \cos(2\alpha_{ini}))$$

Selon \vec{n}_{att} :

$$\omega_{att} (\cos(2\alpha_{vit}) \cos(2\alpha_{ini}) - \langle \vec{n}_{ini}, \vec{n}_{vit} \rangle \sin(2\alpha_{vit}) \sin(2\alpha_{ini}))$$

Selon $\vec{n}_{ini} \wedge \vec{n}_{vit}$:

$$\omega_{vit} \sin(2\alpha_{ini}) + \omega_{att} \langle \vec{n}_{vit}, \vec{n}_{att} \rangle (1 - \cos(2\alpha_{vit})) \sin(2\alpha_{ini})$$

Selon $\vec{n}_{ini} \wedge \vec{n}_{att}$:

$$\omega_{att} \cos(2\alpha_{vit}) \sin(2\alpha_{ini})$$

Selon $\vec{n}_{vit} \wedge \vec{n}_{att}$:

$$\omega_{att} \sin(2\alpha_{vit}) \cos(2\alpha_{ini})$$

Expressions dans le repère lié au satellite

Dans ce cas particulier, l'expression du vecteur vitesse instantanée de rotation peut être simplifiée, en y effectuant la substitution suivante :

$$\begin{aligned}\Omega_{ini} &= \bar{q}_{ini} \cdot \Omega_{ini} \cdot q_{ini} \\ \Omega_{vit} &= \bar{q}_{vit} \cdot \Omega_{vit} \cdot q_{vit} \\ \Omega_{att} &= \bar{q}_{att} \cdot \Omega_{att} \cdot q_{att}\end{aligned}$$

En effet, le vecteur représenté par Ω_{ini} est sur l'axe de la rotation qui transforme le repère \mathcal{R}_{Ref} en \mathcal{R}_1 . Ses coordonnées sont donc les mêmes dans \mathcal{R}_{Ref} et dans \mathcal{R}_1 . Il est par conséquent représenté par le même quaternion purement vectoriel dans ces deux repères. Or $\bar{q}_{ini} \cdot \Omega_{ini} \cdot q_{ini}$ est justement la formule de changement de repère qui permet d'exprimer ce vecteur dans le repère \mathcal{R}_1 à partir de son expression dans \mathcal{R}_{Ref} , ce qui permet d'établir la première égalité du système ci-dessus. Le même raisonnement s'applique aux deux autres vecteurs, ce qui permet d'établir les deux autres égalités.

L'expression qui nous permettra de calculer la commande cherchée, devient alors:

$$\Omega_S = \bar{q}_{att} \cdot \bar{q}_{vit} \cdot \Omega_1 \cdot q_{vit} \cdot q_{att} + \bar{q}_{att} \cdot \Omega_2 \cdot q_{att} + \Omega_3$$

En développant, on obtiendrait à nouveau Ω_S comme combinaison lineaire des six vecteurs fixes \bar{n}_{ini} , \bar{n}_{vit} , \bar{n}_{att} , $\bar{n}_{ini} \wedge \bar{n}_{vit}$, $\bar{n}_{ini} \wedge \bar{n}_{att}$ et $\bar{n}_{vit} \wedge \bar{n}_{att}$.

4.4.2 Exponentielle d'un vecteur

Pour cette solution, le quaternion utilisé est de la forme $q = e^{\alpha u}$, avec u un quaternion unitaire purement vectoriel, dont l'axe dépend du temps, et α une fonction du temps. Les dérivées première et seconde d'un quaternion de cette forme ont déjà été établies en (2.14) et ont pour expression :

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \dot{\alpha} u \cdot q + \dot{u} \sin \alpha \\ \ddot{q} &= (\ddot{\alpha} u - \dot{\alpha}^2) \cdot q + \ddot{u} \sin \alpha + 2\dot{\alpha} \dot{u} \cos \alpha\end{aligned}$$

Ici, il s'agit d'un quaternion unitaire, nous pourrions donc partir des conditions de jets établies en (4.10) et (4.11), dans le cas d'une représentation de l'attitude par un quaternion unitaire. Toutefois, ce qui nous intéresse ici, ce sont les conditions de jets sur le produit αu . Nous allons commencer par calculer les conditions de jets sur cet exposant, puis utiliser une méthode d'interpolation pour calculer l'exposant et en déduire le quaternion d'attitude.

Calcul des conditions de jets sur l'exposant

Nous allons résoudre ce problème dans le cas particulier où αu est polynomial:

$$\alpha u = v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{k=n} v_k t^k$$

On peut alors exprimer v et ses dérivées en fonction de α , u et de leurs dérivées:

$$v = \alpha u \qquad \dot{v} = \dot{\alpha} u + \alpha \dot{u} \qquad \ddot{v} = \ddot{\alpha} u + 2\dot{\alpha} \dot{u} + \alpha \ddot{u}$$

Pour pouvoir déterminer chacun des coefficients de v , il faut calculer les conditions de jets sur v à l'instant initial et à l'instant final. Pour cela, il faut commencer par établir les relations qui donnent α , $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$, u , \dot{u} et \ddot{u} en fonction de q , \dot{q} et \ddot{q} .

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos(\mathfrak{R}(q)) & u &= \frac{1}{\sin \alpha} \mathfrak{S}(q) \\ \dot{\alpha} &= \frac{\mathfrak{R}(\dot{q})}{\mathfrak{R}(u \cdot q)} & \dot{u} &= \frac{1}{\sin \alpha} (\dot{q} - \dot{\alpha} u \cdot q) \\ \ddot{\alpha} &= \frac{\mathfrak{R}(\ddot{q} + \alpha^2 q)}{\mathfrak{R}(u \cdot q)} & \ddot{u} &= \frac{1}{\sin \alpha} (\ddot{q} - \ddot{\alpha} u \cdot q + \dot{\alpha}^2 q - 2\dot{\alpha} \dot{u} \cos \alpha) \end{aligned}$$

Ces relations nous permettent de calculer α_i , u_i , α_f , u_f , $\dot{\alpha}_i$, \dot{u}_i , $\dot{\alpha}_f$, \dot{u}_f , $\ddot{\alpha}_i$, \ddot{u}_i , $\ddot{\alpha}_f$ et \ddot{u}_f en remplaçant q et ses dérivées par les conditions de jets à l'origine et à l'instant T . On a alors les conditions de jets sur v à l'instant initial et à l'instant final :

$$\begin{aligned} v(0) &= v_i = \alpha_i u_i & v(T) &= v_f = \alpha_f u_f \\ \dot{v}(0) &= \dot{v}_i = \dot{\alpha}_i u_i + \alpha_i \dot{u}_i & \dot{v}(T) &= \dot{v}_f = \dot{\alpha}_f u_f + \alpha_f \dot{u}_f \\ \ddot{v}(0) &= \ddot{v}_i = \ddot{\alpha}_i u_i + 2\dot{\alpha}_i \dot{u}_i + \alpha_i \ddot{u}_i & \ddot{v}(T) &= \ddot{v}_f = \ddot{\alpha}_f u_f + 2\dot{\alpha}_f \dot{u}_f + \alpha_f \ddot{u}_f \end{aligned}$$

Nous pouvons alors appliquer une formule d'interpolation pour obtenir chacun des coefficients de v à partir des conditions de jets déterminées ci-dessus :

$$\begin{aligned} v_0 &= v_i & v_3 &= 10 \frac{v_f - v_i}{T^3} - \frac{4\dot{v}_f + 6\dot{v}_i}{T^2} + \frac{\ddot{v}_f - 3\ddot{v}_i}{2T} \\ v_1 &= \dot{v}_i & v_4 &= -15 \frac{v_f - v_i}{T^4} + \frac{7\dot{v}_f + 8\dot{v}_i}{T^3} - \frac{2\ddot{v}_f - 3\ddot{v}_i}{2T^2} \\ v_2 &= \frac{\ddot{v}_i}{2} & v_5 &= 6 \frac{v_f - v_i}{T^5} - 3 \frac{\dot{v}_f + \dot{v}_i}{T^4} + \frac{\ddot{v}_f - \ddot{v}_i}{2T^3} \end{aligned}$$

Ceci permet alors de reconstruire les éléments qui nous permettront de calculer le vecteur vitesse instantanée de rotation :

$$\begin{aligned} \alpha &= |v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} & u &= \frac{v}{\alpha} \\ \dot{\alpha} &= \frac{\langle v, \dot{v} \rangle}{\alpha} & \dot{u} &= \frac{\dot{v}}{\alpha} - \frac{\langle v, \dot{v} \rangle}{\alpha^3} v \\ u \cdot \dot{u} &= \frac{v \wedge \dot{v}}{\alpha^2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Vitesse de rotation exprimée dans le repère fixe

En reprenant les équations dynamiques, et en remplaçant q et \dot{q} par leurs expressions, on obtient :

$$\Omega = \dot{\alpha} u - \sin(\alpha) \dot{u} \cdot e^{\alpha u}$$

Soit, en développant l'exponentielle :

$$\Omega = 2\dot{\alpha} u + \sin(2\alpha) \dot{u} + (1 - \cos(2\alpha)) u \cdot \dot{u}$$

En utilisant (4.14), on obtient l'expression de Ω à l'aide de v et \dot{v} :

$$\Omega = \frac{\langle v, \dot{v} \rangle}{|v|^2} \left(2 - \frac{1}{|v|} \sin(2|v|) \right) v + \frac{1}{|v|} \sin(2|v|) \dot{v} + \frac{1}{|v|^2} (1 - \cos(2|v|)) v \wedge \dot{v}$$

Vitesse de rotation exprimée dans le repère mobile

Comme précédemment, les équations dynamiques nous donnent:

$$\Omega_S = 2\dot{\alpha}u + \sin(\alpha)\dot{u} - (1 - \cos(2\alpha))u \cdot \dot{u}$$

Soit, en fonction de v :

$$\Omega_S = \frac{\langle v, \dot{v} \rangle}{|v|^2} \left(2 - \frac{1}{|v|} \sin(2|v|) \right) v + \frac{1}{|v|} \sin(2|v|) \dot{v} - \frac{1}{|v|^2} (1 - \cos(2|v|)) v \wedge \dot{v}$$

4.4.3 Quaternion polynomial

Les deux solutions précédentes permettent de définir directement l'attitude du satellite par un quaternion unitaire. Le principal inconvénient de ces solutions est d'introduire des fonctions trigonométriques qui sont assez longues à calculer. Nous proposons donc une troisième méthode qui utilise des quaternions polynomiaux pour représenter les rotations. Nous utiliserons donc les conditions de jets données en (4.10) et en (4.11). Ces conditions sont au nombre de 6, il faudra donc utiliser des polynômes de degré 5 au minimum. L'expression du quaternion d'attitude est alors :

$$Q(t) = Q_0 + Q_1 t + Q_2 t^2 + Q_3 t^3 + Q_4 t^4 + Q_5 t^5 = \begin{pmatrix} Q_a \\ Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}$$

Où Q_a est la partie réelle de Q , et où Q_x, Q_y et Q_z sont respectivement les coefficients de i, j et k ; chacune de ces composantes étant un polynôme de degré 5. Les coefficients Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 et Q_5 sont obtenus en appliquant directement les formules d'interpolation d'Hermite de degré 5. On obtient alors :

$$\begin{aligned} Q_0 &= Q_i & Q_3 &= 10 \frac{Q_f - Q_i}{T^3} - \frac{4\dot{Q}_f + 6\dot{Q}_i}{T^2} + \frac{\ddot{Q}_f - 3\ddot{Q}_i}{2T} \\ Q_1 &= \dot{Q}_i & Q_4 &= -15 \frac{Q_f - Q_i}{T^4} + \frac{7\dot{Q}_f + 8\dot{Q}_i}{T^3} - \frac{2\ddot{Q}_f - 3\ddot{Q}_i}{2T^2} \\ Q_2 &= \frac{\ddot{Q}_i}{2} & Q_5 &= 6 \frac{Q_f - Q_i}{T^5} - 3 \frac{\dot{Q}_f + \dot{Q}_i}{T^4} + \frac{\ddot{Q}_f - \ddot{Q}_i}{2T^3} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Remarque 4.4.1 Lors du calcul des jets, il avait été précisé qu'il fallait fixer des valeurs arbitraires aux paramètres $r_i, \dot{r}_i, \ddot{r}_i, r_f, \dot{r}_f$ et \ddot{r}_f . Dans cette solution, le choix de ces paramètres a une très grande importance sur l'allure finale des composantes de Ω . Lorsqu'aucun élément ne permet de choisir judicieusement ces valeurs, la meilleure solution consiste à poser: $r_i = 1, \dot{r}_i = 0, \ddot{r}_i = 0, r_f = 1, \dot{r}_f = 0, \ddot{r}_f = 0$. De même, la valeur de T est très importante. Pour ce dernier paramètre, le mieux est de chercher à équilibrer l'importance relative de chacun des coefficients.

Vecteur vitesse instantanée de rotation

Pour exprimer Ω , nous ne considérons plus le quaternion d'attitude Q comme un polynôme de quaternions, mais nous considérons chacune de ses composantes $Q_a, Q_x,$

Q_y et Q_z comme des polynômes scalaires. En développant l'expression (4.5), qui exprime le vecteur vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}$ dans le repère fixe, on obtient :

$$\Omega = \frac{2}{Q_a^2 + Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2} \begin{pmatrix} Q_a \dot{Q}_x - \dot{Q}_a Q_x + Q_y \dot{Q}_z - \dot{Q}_y Q_z \\ Q_a \dot{Q}_y - \dot{Q}_a Q_y + Q_z \dot{Q}_x - \dot{Q}_z Q_x \\ Q_a \dot{Q}_x - \dot{Q}_a Q_x + Q_x \dot{Q}_y - \dot{Q}_x Q_y \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

De même, en développant l'expression (4.7), qui exprime le vecteur vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}$ dans le repère mobile, on obtient :

$$\Omega_S = \frac{2}{Q_a^2 + Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2} \begin{pmatrix} Q_a \dot{Q}_x - \dot{Q}_a Q_x - Q_y \dot{Q}_z + \dot{Q}_y Q_z \\ Q_a \dot{Q}_y - \dot{Q}_a Q_y - Q_z \dot{Q}_x + \dot{Q}_z Q_x \\ Q_a \dot{Q}_x - \dot{Q}_a Q_x - Q_x \dot{Q}_y + \dot{Q}_x Q_y \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Choix des paramètres

Nous illustrons ici l'importance du choix des divers paramètres laissés libres jusqu'à présent. Ces paramètres sont de deux types et nous les traitons indépendamment. D'une part, il y a le paramétrage des jets par les valeurs du module du quaternion d'attitude et les valeurs des dérivées de ce module. D'autre part il y a la durée sur laquelle se fait l'interpolation.

Paramétrage des conditions de jets : lorsque nous avons établi les formules (4.10) et (4.11), permettant de transformer les conditions de rendez-vous en conditions de jets dans le cas d'une représentation de l'attitude par des quaternions non unitaires, nous n'avons pas précisé l'influence du choix des valeurs de r_i , \dot{r}_i , \ddot{r}_i , r_f , \dot{r}_f et \ddot{r}_f .

Il est difficile de caractériser formellement l'effet de ces paramètres. Toutefois, de (2.5) et (2.6) on déduit immédiatement :

$$\left| 2 \dot{Q} \cdot Q^{-1} \right| = 2 \frac{|\dot{Q}|}{|Q|}$$

Par ailleurs, un calcul direct nous indique que la partie réelle du produit $2\dot{Q} \cdot Q^{-1}$ est :

$$\Re \left(2 \dot{Q} \cdot Q^{-1} \right) = 2 \left(\dot{Q}_a Q_a + \dot{Q}_x Q_x + \dot{Q}_y Q_y + \dot{Q}_z Q_z \right)$$

On reconnaît dans le membre de droite la dérivée du carré du module de Q . En notant $r = |Q|$, on peut calculer le module de Ω à partir de l'expression (4.5) :

$$|\Omega|^2 = \left| \Im \left(2 \dot{Q} \cdot Q^{-1} \right) \right|^2 = 4 \frac{|\dot{Q}|^2}{r^2} - r^2 \dot{r}^2$$

Pour les valeurs minimales du module du quaternion d'attitude $Q(s)$, les mouvements du satellite seront accentués. Inversement, lorsque $|Q(s)|$ atteint de grandes valeurs (relatives), le vecteur vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}(s)$ variera peu. Ceci s'applique aussi bien à sa direction qu'à son module.

Ainsi, lorsqu'on diminue le module de Q tout en augmentant le module de \dot{Q} , on augmente le module de Ω . Or le choix des jets sur r aura une grande importance sur l'allure de r le long de la trajectoire. D'une manière générale, il faudra s'attendre à ce que les composantes de la commande initiale $\Omega(s)$ subissent de plus fortes variations pour les valeurs de s pour lesquelles $r(s)$ est minimal. Ces variations seront d'autant plus fortes que le minimum de $r(s)$ sera prononcé. Or la méthode d'optimisation proposée applique des algorithmes numériques sur $\Omega(s)$ pour calculer la commande optimale le long de la trajectoire $Q(s)$; il est donc prudent de chercher à obtenir des solutions suffisamment lisses pour que les méthodes numériques ne soient pas mises en défaut. Les jets sur le module de Q doivent donc être tels que le rapport entre les extremums de $q(s)$ restent relativement faibles.

Par ailleurs, sachant que nous nous intéressons à la définition du chemin en attitude, la question pertinente est de savoir si ces variations des composantes de Ω ont un effet sur la trajectoire obtenue. Or, étant donné que le mouvement angulaire du satellite dû à une variation des composantes du quaternion d'attitude est inversement proportionnel au module du quaternion d'attitude, on peut supposer que dans le cas général, les variations subies par la direction de $\vec{\Omega}(s)$ seront inversement proportionnelles à $|Q(s)$.

Ce raisonnement intuitif peut être vérifié expérimentalement. Pour l'illustrer nous avons calculé les chemins obtenus en appliquant la méthode d'interpolation polynomiale au problème de rendez-vous suivant :

$$\begin{array}{ll} q(0) = [1, 0, 0, 0] & q(S) = [0, 1, 0, 0] \\ \vec{\Omega}(0) = [0, 5, 0] & \vec{\Omega}(S) = [0, 5, 0] \\ \dot{\vec{\Omega}}(0) = \vec{0} & \dot{\vec{\Omega}}(S) = \vec{0} \end{array}$$

Globalement on cherche à faire tourner le satellite d'un angle de 180° autour de l'axe x , alors qu'il est animé d'une rotation autour de l'axe y à l'instant initial et à l'instant final.

Ce problème a été résolu d'une part avec les paramètres suivants :

$$r_i = 1 \quad \dot{r}_i = 0 \quad \ddot{r}_i = 0 \quad r_f = 1 \quad \dot{r}_f = 0 \quad \ddot{r}_f = 0 \quad (4.18)$$

Le mouvement obtenu est celui représenté sur la figure (4.1). D'autre part le même problème a été résolu avec les paramètres :

$$r_i = 1 \quad \dot{r}_i = -4.7 \quad \ddot{r}_i = 0 \quad r_f = 1 \quad \dot{r}_f = 4.7 \quad \ddot{r}_f = 0$$

On a alors obtenu le mouvement représenté sur la figure (4.2).

Chacune de ces figures représente la trajectoire des extrémités des vecteurs de base x , y et z . On constate que dans le second cas le mouvement a été notablement amplifié et déformé. Or si on observe les allures obtenues pour le module du quaternion d'attitude, représentées sur la figure (4.3), on constate effectivement que la trajectoire la plus chaotique correspond au cas où $r(s)$ a les valeurs les plus faibles.

L'utilisation de ces paramètres peut être assez délicate si on cherche à ajuster précisément le chemin. Toutefois, certains principes généraux sont facilement applicables. En particulier, il faut augmenter le module là où les contraintes dynamiques risquent d'être violées. Ainsi, si la vitesse de rotation ou l'accélération ont des valeurs importantes sur

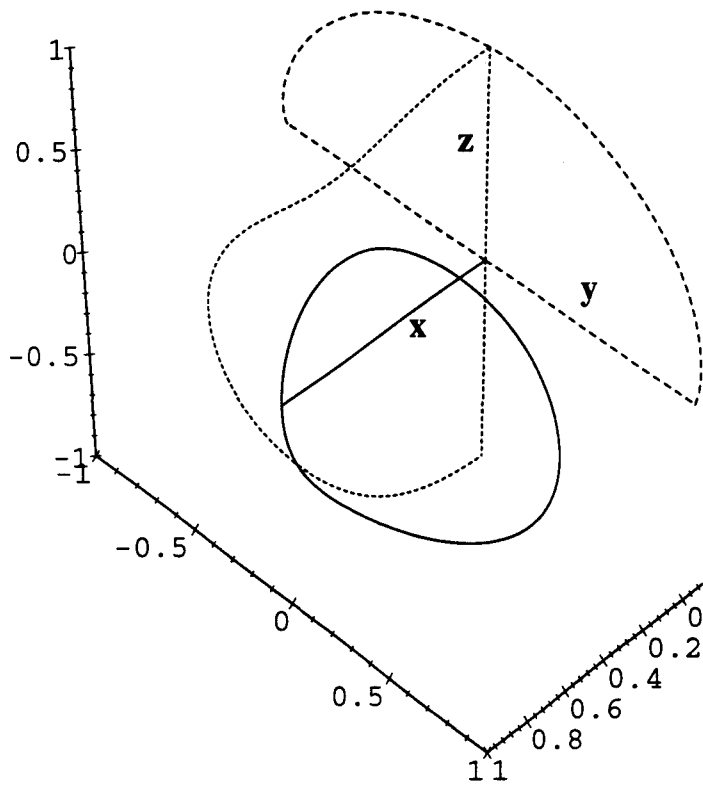


FIG. 4.1 - Effet de \dot{r}_i et \dot{r}_f : $\dot{r}_i = 0$ et $\dot{r}_f = 0$

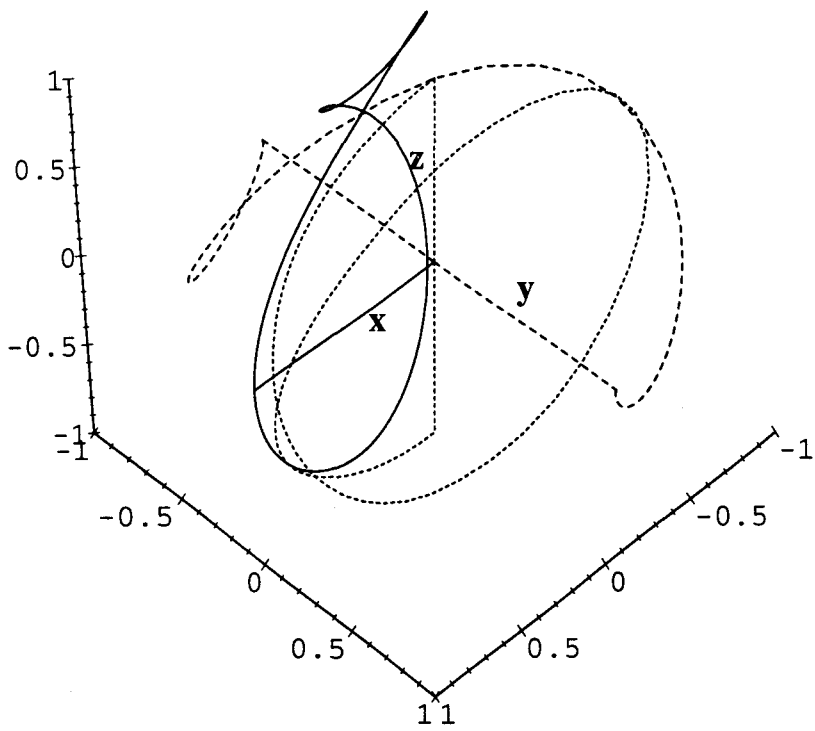


FIG. 4.2 - Effet de \dot{r}_i et \dot{r}_f : $\dot{r}_i = -4.7$ et $\dot{r}_f = 4.7$

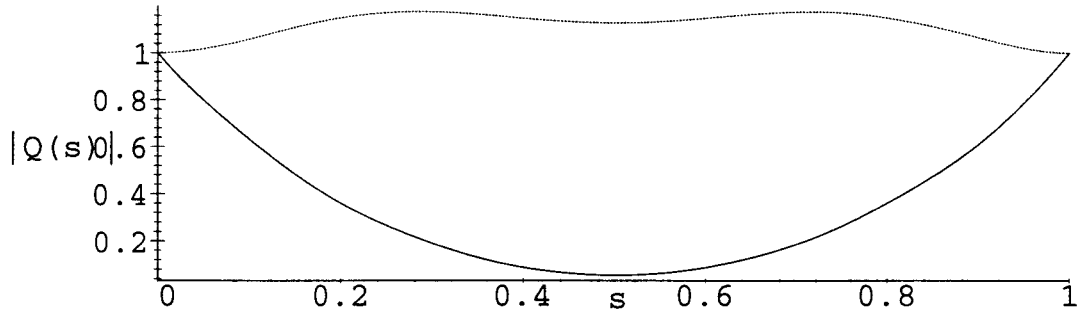


FIG. 4.3 - Allure de $|Q(s)|$ pour $r_i = r_f = 0$ (pointillé) et pour $r_i = -r_f = -4.7$

l'une des bornes, il faudra augmenter la valeur du module sur cette borne. Si elles ont des valeurs importantes sur les deux bornes, il faudra utiliser la dérivée du module pour que r_i et r_f soient les maximums de $|Q(s)|$ sur $[0, S]$. Dans le cas général on peut se contenter des valeurs utilisées en (4.18).

Choix de la durée d'interpolation Ce paramètre joue aussi un rôle important sur l'allure du chemin suivi. Son influence peut se décrire ainsi : plus la durée d'interpolation sera longue, plus les conditions de rendez-vous influenceront la forme de la trajectoire. Lorsque cette durée devient vraiment très petite, les chemins obtenus correspondent de plus en plus à des rotations autour d'axes fixes. Inversement, lorsque cette durée s'allonge, l'importance relative de la vitesse initiale et de l'accélération initiale augmente.

Pour illustrer ce point, reprenons le problème précédent avec les conditions de jet indiquées en (4.18). La figure (4.1) avait été obtenue pour la valeur $S = 1$. En prenant $S = 0.1$, on obtient le mouvement indiqué en figure (4.4), et en prenant $S = 5$, on obtient le mouvement indiqué en figure (4.5). Il apparaît clairement que pour $S = 0.1$ la rotation obtenue est très peu différente d'une rotation autour de l'axe x . Ceci veut dire que la vitesse de rotation autour de l'axe y doit s'annuler très rapidement, ce qui ne sera pas toujours compatible avec les contraintes imposées aux composantes de $\dot{\Omega}$ et $\ddot{\Omega}$. En augmentant la durée d'interpolation, on se ménage une plus grande marge de manœuvre. Cela se traduit par un mouvement important des axes x et z dans le plan perpendiculaire à y , au début et à la fin du mouvement.

Pour certaines conditions de rendez-vous, l'augmentation de la durée d'interpolation n'a pas une très grande importance au delà d'un certain seuil : le mouvement s'arrête, puis la correction d'attitude est effectuée à très faible vitesse, puis le mouvement reprend pour obtenir les conditions correctes sur la vitesse et l'accélération finales. Pour d'autres problèmes, par contre, le chemin obtenu deviendra très mauvais : le mouvement initial est maintenu très longtemps, le satellite fait alors plusieurs tours sur lui même avant que le rendez-vous ne soit obtenu. Il faut donc déterminer expérimentalement les valeurs pour lesquelles on obtient des chemins admissibles.

Ces valeurs dépendent très fortement du type de manœuvre souhaitée, il est donc utile de les déterminer pour plusieurs types de problèmes. De plus, il y a une forte interaction entre le choix des jets sur le module du quaternion d'attitude et la durée d'interpolation : plus la durée d'interpolation est grande, plus les variations sur le module

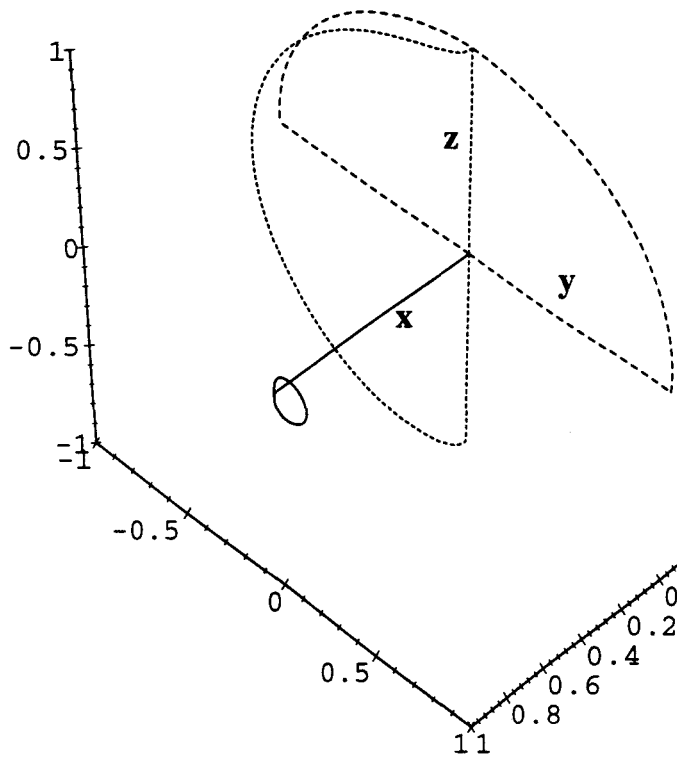


FIG. 4.4 - Effet de la durée d'interpolation : $S = 0.1$

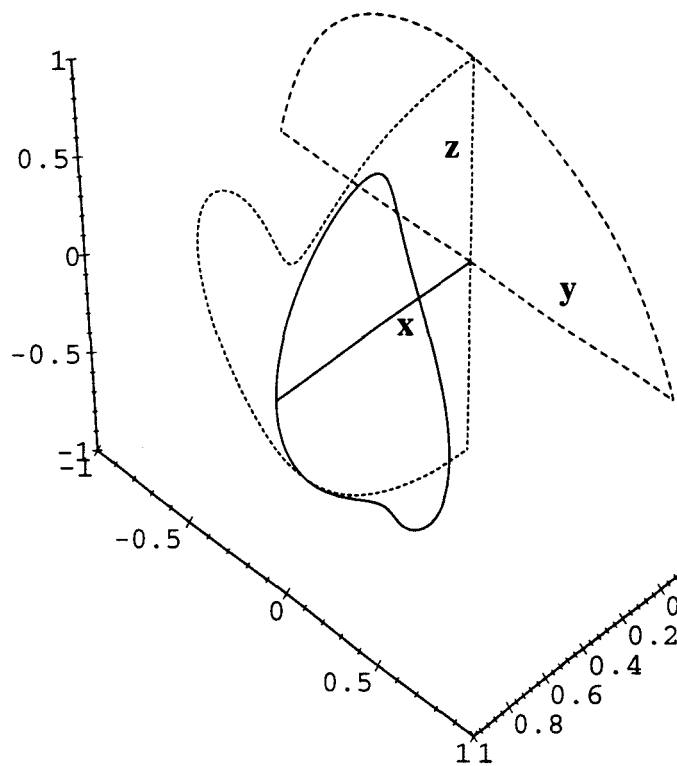


FIG. 4.5 - Effet de la durée d'interpolation : $S = 5$

de $Q(s)$ se feront ressentir. Par exemple, pour commencer à voir les effets de \dot{r}_i et \dot{r}_f dans le cas à $S = 0.1$, il faut choisir des valeurs de l'ordre de $r_i = -30$ et $r_f = 30$.

Enfin, pour la majorité des problèmes, il existe une plage assez étendue, pour lesquelles les trajectoires optimales en temps sont équivalentes en durée. L'ajustement de ces paramètres est donc utile pour obtenir des chemins admissibles mais peu efficace pour optimiser les chemins. Pour ce dernier point, la méthode présentée en 4.6 est beaucoup plus adaptée.

4.5 Optimisation de trajectoire

Pour commencer, nous allons résoudre le problème simplifié, tel qu'il est formulé en (4.3). Pour cela, nous allons appliquer l'algorithme général tel qu'il est présenté en 3. Initialement, nous supposons qu'une trajectoire en attitude $Q(s)$ a été calculée, par exemple comme indiqué en 4.4.3; nous verrons alors comment se traduit le changement de paramétrage $s(t)$ sur ce système particulier. Une fois ces préliminaires établis, nous montrerons comment calculer la trajectoire optimale lorsqu'on ne tient compte que d'une seule composante du vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}$, en appliquant la méthode présentée en 3.7, puis nous verrons comment prendre en compte les autres composantes de $\vec{\Omega}$, en suivant la méthode présentée en 3.8.

Il faut noter que le système décrivant la dynamique du satellite est sans dérive. Nous nous retrouvons donc dans le cas le plus favorable: lors du calcul de la trajectoire optimale pour une seule variable, toutes les dates de commutation sont solutions d'un système d'équations algébriques, on pourra donc les calculer sans aucune intégration. Nous verrons lors de la mise en équation du problème comment construire les équations supplémentaires permettant ce calcul.

4.5.1 Remarques préliminaires

Notations

Dans ce qui suit, nous utilisons les notations suivantes :

- les notations pointées ($\dot{}$, $\ddot{}$ et $\dddot{}$) désignent les dérivées par rapport au paramètre s et les apostrophes (\prime , $\prime\prime$ et $\prime\prime\prime$) désignent les dérivées par rapport au temps;
- la trajectoire en attitude initiale est décrite par le quaternion $Q(s)$, défini sur $[0, S]$, et le vecteur vitesse instantanée de rotation est représenté par le quaternion purement vectoriel $\Omega(s)$ dont les composantes sont notées $\Omega_x(s)$, $\Omega_y(s)$ et $\Omega_z(s)$;
- la trajectoire optimisée est obtenue à partir de la trajectoire initiale en appliquant le changement de paramétrage $s(t)$, l'attitude du satellite est alors décrite par le quaternion $q(t)$, défini sur $[0, T]$. Le vecteur vitesse instantanée de rotation correspondant est représenté par le quaternion purement vectoriel $\omega(t)$ dont les composantes sont notées $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ et $\omega_z(t)$.

Conditions de continuité et de dérivabilité

Dans le problème simplifié, les contraintes dynamiques ne portent que sur les composantes du vecteur vitesse instantanée de rotation Ω , exprimé dans le repère fixe, et ses deux premières dérivées $\dot{\Omega}$ et $\ddot{\Omega}$. En appliquant les remarques faites en 3.3.2, on en déduit que $\Omega(s)$ doit être de classe C^2 par morceaux. Par ailleurs, l'expression de Ω ne dépend que de la sortie plate Q et de sa dérivée \dot{Q} , donc $Q(s)$ et $s(t)$ doivent être de classe C^3 par morceaux.

Changement de trajectoire

À partir de l'expression (3.29) on obtient directement les expressions de $q(t)$ et $q'(t)$:

$$q(t) = Q(s(t)) \qquad q'(t) = \dot{Q}(s(t))s'(t)$$

On en déduit l'expression de $\omega(t)$ à partir de l'expression du vecteur vitesse instantanée de rotation, donnée en (4.5). On obtient alors :

$$\omega(t) = 2\Im(q'(t) \cdot q(t)^{-1}) = 2\Im(\dot{Q}(s(t))s'(t) \cdot Q(s(t))^{-1})$$

Or $s'(t)$ est une quantité scalaire, on peut donc la sortir du produit de quaternions. On reconnaît alors l'expression de $\Omega(s)$ et on peut écrire :

$$\omega(t) = s'(t)\Omega(s(t)) \tag{4.19}$$

Cette relation est particulièrement importante car c'est elle qui nous permet d'obtenir la relation algébrique supplémentaire sur $\omega(t)$. En effet, lorsqu'on intègre, on obtient :

$$\int_0^t \omega(\tau) d\tau = \int_0^{s(t)} \Omega(\sigma) d\sigma \quad \forall t \in [0, T] \tag{4.20}$$

En particulier pour $t = T$ on a :

$$\int_0^T \omega(\tau) d\tau = \int_0^S \Omega(\sigma) d\sigma \tag{4.21}$$

Ainsi, connaissant l'intégrale de chacune des composantes de Ω le long de la trajectoire, on en déduit l'intégrale de ω .

4.5.2 Calcul des modèles

Nous nous intéressons maintenant à la saturation d'une seule composante du vecteur vitesse instantanée de rotation. Pour fixer les choses, supposons qu'il s'agit de ω_x .

Des résultats de la partie 3.7.2 on déduit immédiatement que le modèle sans palier de saturation comportera trois polynômes de degré 2. En effet, on a des contraintes sur la dérivée seconde ($\gamma_v = 2$) et Ω dépend de la dérivée première de la sortie plate ($\beta_v = 1$). Toutefois, la trajectoire choisie peut introduire des conditions supplémentaires. En effet, l'équation (4.19) est vraie pour chacune des composantes, en particulier pour ω_x . Si en un point du chemin, atteint pour la valeur $s = s_0$, Ω_x s'annule, alors quel que soit le changement de paramétrage $s(t)$ choisi, la composante ω_x s'annulera pour la valeur

$t = t_0$ telle que $s_0 = s(t_0)$. Nous allons donc commencer par étudier le cas où Ω_x ne s'annule pas, puis nous verrons comment prendre en compte les points où Ω_x s'annule. Enfin, nous présenterons l'algorithme complet permettant de calculer le modèle optimal pour un intervalle $[0, S]$ sur lequel Ω_x subit un nombre arbitraire de changements de signe.

Saturation lorsque Ω_x ne s'annule pas

Dans ce cas on peut appliquer directement la méthode donnée en 3.7. Le modèle de base (sans palier de saturation) comporte 3 polynômes de degré 2 comme nous l'avons dit ci-dessus. Sur ce modèle de base, on pourra ajouter au plus deux paliers de saturation pour ω'_x et au plus un palier de saturation sur ω_x . L'ensemble des combinaisons possibles nous donne donc 8 modèles différents, illustrés par les figures (4.6a), (4.6b), (4.6c), (4.6d), (4.6e), (4.6f), (4.6g) et (4.6h).

Pour chacun de ces 8 modèles, on peut écrire le système d'équations traduisant la saturation, les conditions imposées à l'instant initial et à l'instant final ainsi que les conditions de continuité imposées aux points de raccordement entre polynomiaux. Les équations correspondant à chacun de ces points sont décrites en (3.33), (3.34), (3.36) et (3.37) respectivement. Le système ainsi obtenu est sous déterminé: il lui manque une équation pour pouvoir calculer chacun des coefficients des polynômes et chacun des instants de commutation.

Pour lever cette indétermination, il suffit d'utiliser l'équation (4.21). Dans le cas du modèle M0, on aboutit à trois polynômes ω_{1x} , ω_{2x} et ω_{3x} définis respectivement sur $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ et $[t_2, t_3]$ par :

$$\begin{aligned}\omega_{1x}(t) &= \omega_{ix} + \omega'_{ix}t + \ddot{\Omega}_{m_x} \frac{t^2}{2} \\ \omega_{2x}(t) &= \omega_{1x}(t_1) + \omega'_{1x}(t_1)(t - t_1) - \ddot{\Omega}_{m_x} \frac{(t - t_1)^2}{2} \\ \omega_{3x}(t) &= \omega_{2x}(t_2) + \omega'_{2x}(t_2)(t - t_2) + \ddot{\Omega}_{m_x} \frac{(t - t_2)^2}{2}\end{aligned}$$

Pour calculer les dates de commutation t_1 , t_2 et t_3 , il suffit de résoudre :

$$\omega_{3x}(t_3) = \omega_{fx} \quad \omega'_{3x}(t_3) = \omega'_{fx} \quad \sum_{k=1}^3 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \omega_{kx}(\tau) d\tau = \int_0^{s_n} \Omega_x(\sigma) d\sigma \quad (4.22)$$

Les systèmes simplifiés correspondant à chacun des modèles M0 à M8 peuvent alors être calculés; nous en fournissons la liste en annexe A.1. Si aucun de ces systèmes n'admet de solution², c'est que les diverses conditions imposées sont incompatibles. S'il y a plusieurs solutions, une seule respectera toutes les bornes imposées à ω_x et ω'_x .

Prise en compte des points où Ω_x s'annule

Chacun des points où Ω_x s'annule introduit un polynôme supplémentaire dans le modèle de base. En effet, si Ω_x change de signe en s_n , alors, quel que soit le changement

2. les solutions d'un modèle à n polynômes doivent vérifier $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$

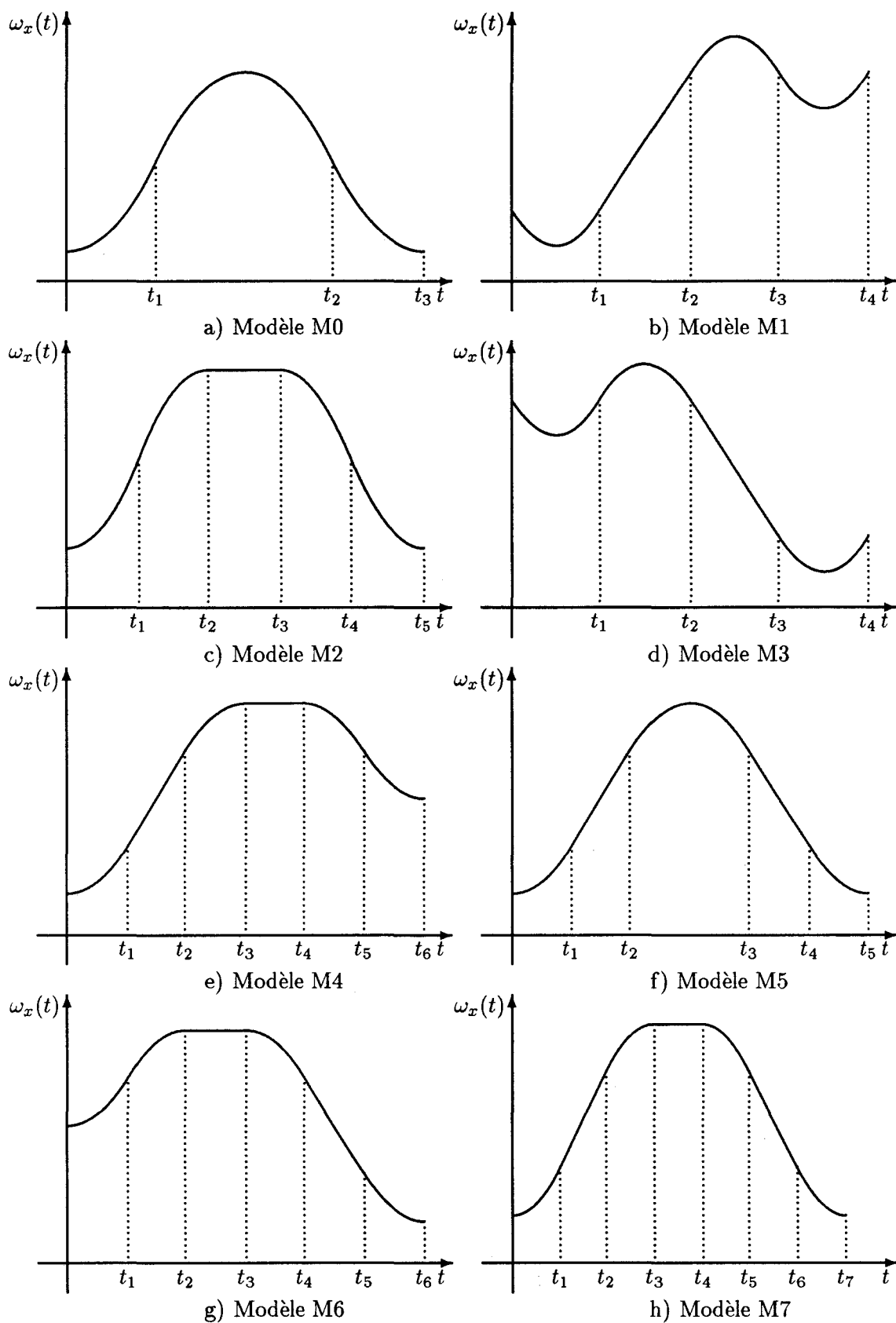


FIG. 4.6 - Modèles obtenus lorsque $\omega(0)$, $\omega'(0)$, $\omega(T)$ et $\omega'(T)$ sont imposés

de paramétrage $s(t)$ choisi, ω_x changera de signe en t_n , tel que $s(t_n) = s_n$. L'équation (4.21) est alors remplacée par les deux équations suivantes :

$$\int_0^{t_n} \omega_x(\tau) d\tau = \int_0^{s_n} \Omega_x(\sigma) d\sigma \qquad \int_{t_n}^T \omega_x(\tau) d\tau = \int_{s_n}^S \Omega_x(\sigma) d\sigma$$

Dans ce cas, plutôt que de chercher à calculer directement le modèle de base, nous décomposons la trajectoire de façon à s'affranchir des changements de signe. L'intérêt immédiat est de ne pas multiplier le nombre de modèles. En effet, chaque fois qu'un polynôme est ajouté au modèle de base (chaque fois que Ω_x s'annule), on multiplie par deux le nombre de modèles possibles. Par contre le fait de restreindre le calcul des modèles aux segments de la trajectoire où Ω_x ne change pas de signe, n'ajoute qu'un petit nombre de modèles supplémentaires.

La différence entre ces modèles et ceux qui sont illustrés en figure (4.6) réside dans le fait que l'accélération $\dot{\omega}_x$ n'est pas forcément connue pour les points où Ω_x s'annule. L'idée intuitive consiste alors à maximiser l'accélération (en valeur absolue) en ces points, de façon à rester un minimum de temps à des vitesses faibles. Si on suppose que la vitesse initiale ω_{i_x} et l'accélération initiale $\dot{\omega}_{i_x}$ sont imposées ($\omega_{i_x} \geq 0$) et que la vitesse finale ω_{f_x} s'annule, on peut chercher un modèle de base en deux polynômes $\omega_{1_x}(t)$ et $\omega_{2_x}(t)$, comme indiqué en figure (4.6a). Ces deux polynômes sont alors définis respectivement sur $[t_0 = 0, t_1]$ et $[t_1, t_2]$ par :

$$\omega_{1_x}(t) = \omega_{i_x} + \dot{\omega}_{i_x} t + \ddot{\Omega}_{m_x} \frac{t^2}{2} \qquad \omega_{2_x}(t) = \omega_{1_x}(t_1) + \dot{\omega}_{1_x}(t_1)(t - t_1) - \ddot{\Omega}_{m_x} \frac{(t - t_1)^2}{2}$$

Pour calculer les dates de commutation t_1 et t_2 , il suffit de résoudre le système :

$$\omega_{2_x}(t_2) = 0 \qquad \int_0^{t_1} \omega_{1_x}(\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \omega_{2_x}(\tau) d\tau = \int_0^{s_n} \Omega_x(\sigma) d\sigma \qquad (4.23)$$

Si on suppose maintenant que la vitesse initiale et la vitesse finale sont toutes les deux nulles, et que ni l'accélération initiale ni l'accélération finale ne sont connues, on peut construire un modèle avec un seul polynôme comme indiqué sur la figure (4.7b). Ce polynôme est alors défini ainsi :

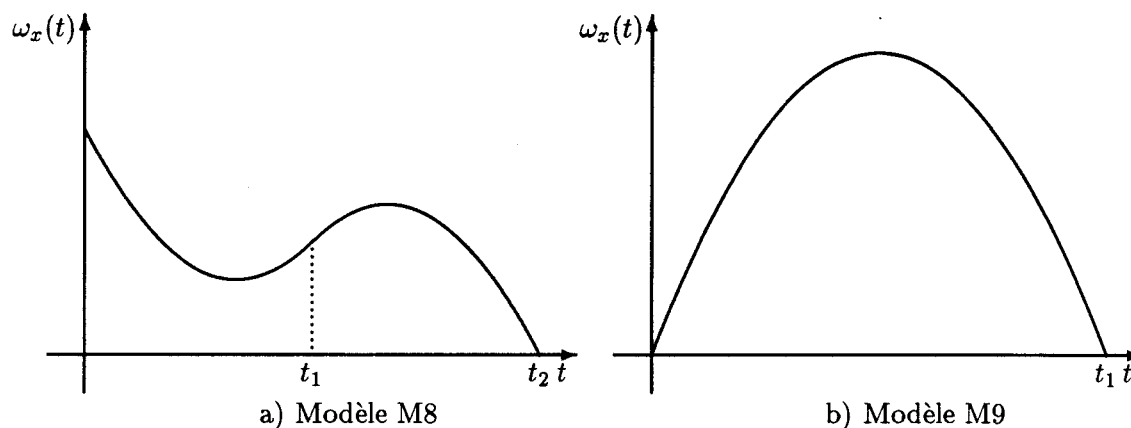
$$\omega_{1_x}(t) = -\ddot{\Omega}_{m_x} \frac{t}{2} (t - t_1)$$

Pour calculer la valeur de t_1 il suffit de résoudre l'équation :

$$\int_0^{t_1} \omega_{1_x}(\tau) d\tau = \int_0^{s_n} \Omega_x(\sigma) d\sigma$$

Il faut noter que ce modèle admet toujours une solution.

Pour ces nouveaux modèles de base, on ne considèrera pas les cas où des paliers de saturation sont insérés. En effet, dans le cas où un palier de saturation en accélération apparaît on se ramène à l'un des modèles présentés en figure (4.6). Par ailleurs, on suppose que si un palier de saturation en vitesse est inséré, alors il y en a forcément un en accélération, ce qui nous ramène au cas précédent.

FIG. 4.7 - Modèles obtenus lorsque Ω_x s'annule

Cas des systèmes n'admettant pas de solution

Nous abordons maintenant le cas où l'un des systèmes décrivant l'un des modèles n'admet pas de solution. Dans ce cas, on va chercher à modifier les paramètres utilisés pour calculer le modèle, de façon à ce que le système correspondant admette une solution. Les seuls paramètres qui puissent être modifiés sont les conditions initiales (ω_{i_x} et ω'_{i_x}) et les conditions finales (ω_{f_x} et ω'_{f_x}). Nous avons vu que le problème ne se pose pas pour le modèle M9. Par ailleurs, pour que l'un des modèles M0 à M7 admette une solution, il est nécessaire que le modèle M0 en admette une. Nous allons donc nous restreindre aux deux seuls modèles M0 et M8.

Correction d'un modèle M0 : on peut chercher soit à corriger les conditions initiales, dans ce cas on imposera $t_2 = t_3$ comme indiqué sur le figure (4.8a), soit à corriger les conditions finales, dans ce cas on imposera $t_1 = 0$ comme indiqué sur le figure (4.8b). Ces deux cas sont tout à fait symétriques, on se limitera donc à la correction des conditions initiales.

Le modèle est alors réduit à deux polynômes ω_{1_x} et ω_{2_x} définis respectivement sur $[0, t_1]$ et $[t_1, t_2]$. Ces polynômes s'écrivent :

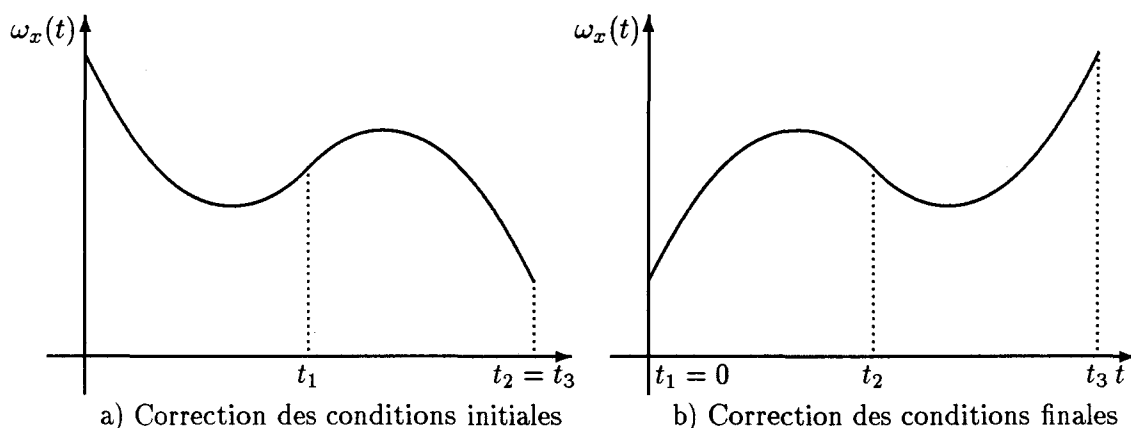
$$\omega_{2_x} = \omega_{f_x} + \omega'_{f_x}(t - t_2) + \ddot{\Omega}_{m_x} \frac{(t - t_2)^2}{2} \quad \omega_{1_x} = \omega_{2_x}(t_1) + \omega'_{2_x}(t_1)(t - t_1) - \ddot{\Omega}_{m_x} \frac{(t - t_1)^2}{2}$$

Pour calculer les deux dates t_1 et t_2 , il suffit alors de résoudre l'équation :

$$\int_0^{t_1} \omega_{1_x}(\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \omega_{2_x}(\tau) d\tau = \int_0^{s_n} \Omega_x(\sigma) d\sigma \quad (4.24)$$

et de prendre la solution qui minimise t_2 .

Correction d'un modèle M8 : pour ce modèle, on ne peut modifier que les conditions initiales puisque la vitesse finale est forcément nulle. Si on se situe sur l'intervalle compris entre l'instant initial et le premier changement de signe de Ω_x , les conditions initiales ω_{i_x} et ω'_{i_x} sont imposées donc le problème n'a pas de solution. Par contre, si on se trouve entre deux changements de signe de Ω_x , on peut agir sur l'accélération initiale. Dans ce cas il suffit de calculer le modèle M9 qui résout le problème.


 FIG. 4.8 - Correction des conditions aux bornes sur un modèle $M0$

Détail de l'algorithme

Maintenant que nous avons présenté les divers cas de figure possibles, voyons l'algorithme effectif de calcul des modèles que nous proposons. Nous le présentons en deux étapes: d'abord le calcul pour un seul modèle, cette étape est schématisée dans les tableaux (4.2) et (4.3), puis la méthode à appliquer dans le cas où plusieurs modèles s'enchaînent sur un intervalle, schématisée dans le tableau (4.4).

Soient s_1, s_2, \dots, s_{n-1} les instants pour lesquels $\Omega_x(s)$ s'annule, pris dans l'ordre chronologique sur $[s_0 = 0, s_n = S]$. On note I_k l'intégrale de Ω_x sur l'intervalle $[s_{k-1}, s_k]$ ($0 < k \leq n$). Soit $s(t)$, le changement de paramétrage cherché, et soient $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ et $t_n = T$, les instants tels que $s(t_k) = s_k$ ($0 \leq k \leq n$). On note m_k la restriction de ω_x à l'intervalle $[t_{k-1}, t_k]$ ($0 < k \leq n$). L'objectif est de déterminer à quel modèle correspond chacun des m_k .

Calcul d'un seul modèle m_k : soient s_{k-1} et s_k deux dates telles qu'on cherche à calculer un modèle m_k sur $[s_{k-1}, s_k]$. Deux cas de figure peuvent apparaître dans l'algorithme général: soit $s_k = S$; dans ce cas les valeurs finales de la vitesse et de l'accélération sont connues et on doit calculer l'un des modèles présentés en figure (4.6); soit $s_k < S$; dans ce cas la vitesse finale est nulle et l'accélération finale est inconnue, m_k est alors un modèle de type M8. Les algorithmes correspondant à chacun de ces cas sont respectivement présentés dans les tableaux (4.2) et (4.3).

Il faut noter qu'il est possible de tester l'existence de solutions pour les systèmes (4.22) et (4.23) en calculant effectivement m_k et en testant la validité de la solution obtenue ($0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$). Par ailleurs, une optimisation très efficace peut être introduite à ce niveau en calculant directement un modèle de type M7 lorsque la valeur de I_x dépasse un certain seuil. D'une part on évite de calculer des modèles inadaptés, d'autre part, le calcul du modèle M7 est extrêmement rapide

Calcul de tous les modèles de l'intervalle $[0, S]$: l'idée est d'enchaîner le calcul des modèles tel qu'il a été décrit ci-dessus en respectant l'ordre chronologique. Ainsi, les conditions finales du modèle m_{k-1} servent de conditions initiales au modèle m_k .

Toutefois, le fait que les conditions initiales d'un modèle puissent être modifiées

<p>Si le système (4.22) n'admet pas de solution pour $\omega_{i_x}, \omega'_{i_x}, \omega_{f_x}, \omega'_{f_x}$ et I_x</p> <p>Alors</p> <p> Si $s_{k-1} = 0$</p> <p> Alors</p> <p> Arrêt : il n'y a pas de solution</p> <p> Sinon</p> <p> Corriger les conditions initiales comme indiqué en (4.24)</p> <p> Fin Si</p> <p>Sinon</p> <p> Calculer m_k comme un modèle M0</p> <p>Fin Si</p> <p>Tant que toutes les contraintes dynamiques ne sont pas respectées</p> <p> Corriger m_k en y insérant un palier de saturation et calculer le modèle correspondant parmi M1, M2, M3, M4, M5, M6 et M7</p> <p>Fin Tant que</p>

TAB. 4.2 - Calcul d'un modèle complet

pour pouvoir poursuivre les calculs pose un problème : à l'issue du calcul du modèle m_k , les conditions initiales du modèle m_k peuvent différer des conditions finales du modèle m_{k-1} . Dans ce cas les conditions de continuité ne sont plus vérifiées. Pour résoudre ce problème il faut ajouter une étape supplémentaire pour corriger les conditions finales des modèles pour lesquels la continuité avec le modèle suivant n'est plus vérifiée.

Cette étape de correction est faite dans le sens chronologique inverse. En effet, le fait de corriger les conditions finales d'un modèle peut nous amener à modifier les conditions initiales de ce même modèle ; dans ce cas il faudra propager les corrections au modèle précédent. On aboutit alors à l'algorithme présenté dans le tableau (4.4). Si au terme de ce calcul, les conditions initiales du modèle m_1 ne correspondent plus aux conditions initiales imposées en $t = 0$, c'est que le problème n'admet pas de solution.

4.5.3 Calcul de la trajectoire et des nouvelles variables

À l'issue de l'étape précédente, on dispose d'une variable ω_x , polynomiale par morceaux, définie sur un intervalle $[0, T]$, dont chacun des morceaux sature l'une des contraintes imposées à cette composante. Pour en déduire la trajectoire, il faut calculer le changement de paramétrage $s(t)$. Nous avons vu dans la partie 3.5.2 que le changement de paramétrage cherché, $s(t)$, est la solution de l'équation différentielle (3.21), avec les conditions initiales (3.22). Ici, cela se traduit par le système :

$$\omega_x(t) = \Omega_x(s)s'(t) \quad s(0) = 0 \quad s'(0) = 1 \quad s''(0) = 0$$

Or, $\omega_x(t)$ est justement le modèle qui a été calculé à l'étape précédente, et $\Omega_x(s)$

<p>Si le système (4.23) n'admet pas de solution pour $\omega_{i_x}, \omega'_{i_x}, \omega_{f_x}$ et I_x</p> <p>Alors</p> <p> Si $s_{k-1} = 0$</p> <p> Alors</p> <p> Arrêt : il n'y a pas de solution</p> <p> Sinon</p> <p> Calculer le modèle de type M9 correspondant et corriger les conditions initiales</p> <p> Fin Si</p> <p> Sinon</p> <p> Calculer m_k comme un modèle de type M8</p> <p> Fin Si</p> <p>Si l'accélération en t_2 dépasse la borne</p> <p>Alors</p> <p> Calculer m_k comme un modèle de type M0 avec $\omega_{f_x} = 0$ et $\omega_{f_x} = \dot{\Omega}_{m_x}$;</p> <p> Tant que toutes les contraintes dynamiques ne sont pas respectées</p> <p> Corriger m_k en y insérant un palier de saturation et calculer le modèle correspondant parmi M1, M2, M3, M4, M5, M6 et M7</p> <p> Fin Tant que</p> <p>Fin Si</p>
--

TAB. 4.3 - Calcul d'un modèle de type M8

est la commande initialement calculée le long du chemin paramétré $Q(s)$. On se ramène donc à une équation différentielle du premier ordre, en s et s' , avec les conditions initiales indiquées.

Ce problème se résout très facilement par des méthodes numériques. Une fois que le changement de paramétrage $s(t)$ est connu sur l'intervalle $[0, T]$, on peut recalculer $q(t) = Q(s(t))$ et $q'(t) = \dot{Q}(s(t))s'(t)$. De même, on peut calculer les deux autres composantes du vecteur vitesse instantanée de rotation, $\omega_y(t) = \Omega_y(s(t))s'(t)$ et $\omega_z(t) = \Omega_z(s(t))s'(t)$.

4.5.4 Changement d'axe de saturation

Jusqu'à présent, l'optimisation ne concernait que la composante ω_x . Supposons maintenant que la trajectoire obtenue en 4.5.3 est telle que la variable $\omega_y(t)$ obtenue ne respecte pas toujours toutes les contraintes qui lui sont imposées. Dans ce cas, il suffit de calculer l'intervalle $[t_i, t_f] \subset [0, T]$ sur lequel ω_y sera saturée. En reprenant les principes énoncés en 3.8, deux cas peuvent se présenter :

- seules les contraintes sur $\dot{\Omega}_{m_y}$ et sur $\ddot{\Omega}_{m_y}$ sont dépassées, dans ce cas, il suffit de recommencer le calcul de trajectoire sur $q(t)$, $t \in [t_i, t_f]$ en cherchant à saturer ω_y ;

<p>Pour $k = 1, 2, \dots, n - 1$</p> <p> Calculer m_k comme un modèle de type M8 selon l'algorithme présenté en (TAB. 4.3)</p> <p>Fin Pour</p> <p>Calculer m_n comme un modèle de type M0 selon l'algorithme présenté en (TAB. 4.2);</p> <p>Pour $k = n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$</p> <p> Si les conditions finales de m_k diffèrent des conditions initiales de m_{k-1}</p> <p> Alors</p> <p> Imposer comme conditions finales à m_k les conditions initiales de m_{k-1};</p> <p> Calculer m_k comme un modèle de type M0 selon l'algorithme présenté en (TAB. 4.2)</p> <p> Fin Si</p> <p>Fin Pour</p>
--

TAB. 4.4 - Calcul des modèles pour la composante ω_x

- la contrainte sur Ω_{m_y} est dépassée, dans ce cas il faut recalculer les bornes de l'intervalle sur lequel les calculs doivent être recommencés, comme indiqué en 3.8.2. Ce point est détaillé ci-dessous.

Pour calculer la borne inférieure t_0 de l'intervalle sur lequel c'est la composante ω_y qui doit être saturée, on cherche à construire une nouvelle variable polynomiale par morceaux selon le procédé illustré en figure (3.10). C'est à dire qu'on recherche un instant $t_0 < t_i$ et un instant $t_1 > t_i$ tels qu'on puisse construire sur $[t_0, t_1]$ un polynôme de degré 2 $p(t)$ vérifiant :

$$p(t_0) = \omega_y(t_0) \qquad p'(t_0) = \omega'_y(t_0) \qquad p''(t) = -\ddot{\Omega}_{m_y} \qquad (4.25)$$

$$p(t_1) = \Omega_{m_y} \qquad p'(t_1) = 0 \qquad (4.26)$$

On en déduit immédiatement l'expression de $p(t)$, en fonction de t_0 :

$$p(t) = \omega_y(t_0) + \omega'_y(t_0)(t - t_0) - \ddot{\Omega}_{m_y} \frac{(t - t_0)^2}{2}$$

Or le calcul des nouvelles variables est à priori un calcul numérique, donc on ne connaît pas exactement $\omega_y(t)$. On prend donc une approximation $\omega_y(t) \approx v(t)$ par exemple une approximation parabolique :

$$v(t) = \omega_y(t_i) + \omega'_y(t_i)(t - t_i) + \omega''_y(t_i) \frac{(t - t_i)^2}{2}$$

Dans ce cas, en utilisant (4.25), le polynôme $p(t)$ s'écrit :

$$p(t) = \omega_y(t_i) + \omega'_y(t_i)(t_0 - t_i) + \omega''_y(t_i) \frac{(t_0 - t_i)^2}{2} + (\omega'_y(t_i) + \omega''_y(t_i)(t_0 - t_i)) (t - t_0) - \ddot{\Omega}_{m_y} \frac{(t - t_0)^2}{2}$$

Les équations (4.26) nous permettent alors de calculer t_1 :

$$t_1 = t_i + \frac{\omega'_y(t_i) + \omega''_y(t_i)(t_0 - t_i)}{\ddot{\Omega}_{m_y}}$$

Il suffit alors de résoudre $p(t_1) = \Omega_{m_y}$ pour obtenir la valeur de t_0 . Une démarche identique peut être appliquée pour calculer la borne supérieure de l'intervalle.

4.5.5 Prise en compte de la matrice d'inertie

Le problème initial avait été simplifié pour pouvoir appliquer la méthode générale. En fait, jusqu'à présent, nous avons considéré que la matrice d'inertie du satellite était diagonale et constante. Or ce n'est généralement pas le cas : des termes de couplage apparaissent, il y a donc des termes extra diagonaux dans la matrice d'inertie ; de plus il peut y avoir des parties mobiles, donc la matrice n'est pas forcément constante. Nous allons montrer ici comment adapter la méthode présentée pour résoudre le problème (4.2).

Soit I , la matrice d'inertie du satellite. Les bornes ne portent plus sur la vitesse de rotation et ses deux dérivées mais sur le moment, le couple et sa dérivée (que nous appellerons toujours *jerk*). Le moment $\vec{M}(s)$ peut alors être représenté comme un vecteur de \mathbf{R}^3 défini pour toute valeur du paramètre $s \in [[0, S]]$ par :

$$\vec{M}(s) = I(s) \cdot \vec{\Omega}(s)$$

Si la matrice I était constante, il suffirait de remplacer Ω par M dans tout ce qui a été fait jusqu'à présent et le problème serait résolu. Le fait que I varie avec le temps nous empêche d'appliquer directement cette méthode. En effet, la méthode présentée pour le problème simplifié exploite l'équation (4.19). En notant $m(t)$ le moment après le changement de paramétrage $s(t)$, cette équation se réécrit :

$$m(t) = s'(t)M(s(t)) = s'(t)I(s) \cdot \Omega(s)$$

Or, les variations de I sont dues à une évolution de la dynamique du système indépendante de la commande. En l'occurrence, les variations de I sont dues au changement d'orientation d'un panneau solaire et elles ne dépendent que de la position du satellite sur son orbite. Ainsi, nous ne connaissons pas $I(s)$. Par contre nous pouvons calculer $\tilde{I}(t)$ qui représente la matrice d'inertie en chaque instant $t \geq 0$. Pour calculer $I(s)$, il est nécessaire de connaître le changement de paramétrage $s(t)$; on a alors $I(s(t)) = \tilde{I}(t)$. Or $s(t)$ est justement l'inconnue, il faut donc contourner le problème. Pour cela nous proposons deux solutions : une méthode itérative qui utilise des approximations successives de $I(s)$ et une méthode qui recalcule directement $I(s)$ mais qui n'exploite plus la conservation de l'intégrale.

Approximations successives de $I(s)$

Commençons par étudier l'effet de cette matrice sur la solution finale que nous apporterons au problème : la commande que nous calculons est $\vec{\Omega}$, qui ne dépend que de l'attitude q et de sa dérivée. Or, nous avons calculé un chemin en attitude tel que le rendez-vous soit réalisé exactement, par exemple par la méthode proposée en 4.4.3. Le

changement de paramétrage $s(t)$ que nous choisirons ne modifiera pas le chemin suivi ; par contre il aura une influence sur les maximums atteints par les diverses variables du système. De plus il déterminera le temps nécessaire pour réaliser le rendez-vous. Un mauvais choix pour ce paramétrage pourra soit nous faire perdre du temps par rapport à la solution optimale, soit nous faire calculer une solution qui ne respecte pas les contraintes dynamiques. C'est précisément à ce niveau que se répercuteront les erreurs faites sur $I(s)$.

Or, toutes ces quantités ne sont que de bonnes approximations et on peut estimer l'erreur sur les contraintes dynamiques et sur $\tilde{I}(t)$. Il est alors inutile de calculer $I(s)$ avec une plus grande précision. La méthode est alors très simple : il suffit de construire une suite de changements de paramétrages s_0, s_1, \dots, s_n , ainsi que la suite de matrices $I_0(s), I_1(s), \dots, I_n(s)$, de la façon suivante :

- initialement, on pose $s_0(t) = t$ et $I_0(t) = \tilde{I}(t)$;
- à l'étape $k+1$, on calcule le changement de paramétrage s_{k+1} en utilisant la matrice I_k et on en déduit $I_{k+1}(s_{k+1}(t)) = \tilde{I}(t)$, ce qui nous permet de calculer la variable $m_{k+1}(t) = s'_{k+1}(t)I_{k+1}(s_{k+1}(t)) \cdot \Omega(s_k(t))$;
- finalement on arrête les calculs à l'étape n lorsque la variable $m_n(t)$ et ses deux premières dérivées vérifient toutes les contraintes dynamiques tout en étant proches des conditions optimales.

Pour que cette méthode fonctionne, il est nécessaire que les variations de $\tilde{I}(t)$ soient « faibles ». Ce sera effectivement le cas lorsqu'il s'agira du mouvement d'un panneau solaire puisque la période du mouvement est égale à la durée de rotation du satellite autour de la Terre, et l'amplitude est relativement faible puisque la masse du panneau est faible par rapport à la masse du satellite. Si l'amplitude des variations augmente, la convergence risque d'être plus lente. Par contre, une augmentation exagérée de la fréquence des variations peut être très pénalisante.

Pour accélérer la convergence et diminuer les temps de calculs il est possible de conserver les calculs effectués à l'étape k au début du chemin. En effet, initialement l'erreur est nulle, ce n'est qu'au bout d'une certaine durée qu'elle deviendra significative.

Calcul direct de $I(s)$

Pour les cas où le calcul de $I(s)$ par approximations successives ne serait pas adapté (variations très rapides de la géométrie du satellite) il reste la possibilité d'effectuer le calcul d'optimisation sans tenir compte de la conservation de l'intégrale. Dans ce cas le calcul des modèles ne peut plus se faire en calculant la solution d'un système d'équations algébriques car il manque une équation. On se retrouve dans le cas le plus général, où il faut calculer l'une des dates de commutations du modèle, par approximations successives. Il faut alors choisir arbitrairement l'une des dates de commutation, effectuer les calculs et corriger le modèle en fonction de l'erreur sur l'attitude finale. Pour avoir une valeur approchée de la date de commutation inconnue, on peut toujours commencer par résoudre le problème simplifié qui ne tient pas compte des variations de la matrice de rotation.

4.6 Optimisation des chemins

Pour optimiser les chemins nous allons exploiter le fait qu'une rotation autour de l'axe \mathbf{x} (respectivement \mathbf{y} ou \mathbf{z}) peut être obtenue en composant des rotations autour des axes \mathbf{y} et \mathbf{z} (respectivement \mathbf{z} et \mathbf{x} , ou \mathbf{x} et \mathbf{y}). Cette approche rejoint le problème de la commande de satellites avec deux moteurs. Plusieurs solutions ont déjà été présentées, soit en boucle fermée comme dans [Siguerdidjane93] ou en boucle ouverte, comme dans [Leonard et al.93]. La solution itérative que nous proposons ici exploite à nouveau le fait que les solutions optimales correspondent au cas où les commandes sont saturées.

Pour commencer, en 4.6.1 nous allons établir les relations qui permettent d'obtenir une telle rotation dans le cas général et dans le cas où les rotations sont représentées par des quaternions polynomiaux. Puis en 4.6.2 nous déduirons de ce principe une condition nécessaire pour que le chemin soit optimal. Cette condition peut être directement exploitée pour optimiser les chemins en attitude.

4.6.1 Principe de base

Solution générale

L'expression (2.19) avait permis de mettre en évidence que la composition de rotations se traduit par un produit de quaternions ; or les règles de multiplication données dans la table (2.1) nous indiquent que $i = j \cdot k$. Cherchons donc un quaternion $q = a + ix + jy + kz$, défini sur $[0, T]$, tel que :

- $q(0) = 1$ et $q(T) = \cos(\alpha/2) + i \sin(\alpha/2)$;
- la composante \mathbf{x} de $\Omega = 2 \Im(q^{-1} \cdot \dot{q})$ est nulle pour tout $t \in [0, T]$.

Pour que la composante \mathbf{x} de Ω soit nulle, il suffit que l'équation différentielle suivante soit vérifiée :

$$a\dot{x} - \dot{a}x - y\dot{z} + \dot{y}z \quad (4.27)$$

Si on restreint les angles de rotation à $]-\pi/2, \pi/2[$, la partie réelle de q ne s'annule pas et la solution de cette équation différentielle est :

$$x(t) = a(t) \int_0^t \frac{y(\tau)\dot{z}(\tau) - \dot{y}(\tau)z(\tau)}{a(\tau)^2} d\tau$$

Pour s'affranchir des cas où $a(t)$ s'annule, il suffit de choisir a et z de façon à ce qu'ils ne s'annulent pas simultanément. L'intervalle $[0, T]$ peut alors être partitionné de façon à ce que les zéros de a soient isolés des zéros de x . Si on note $[t_i, t_{i+1}] \subseteq [0, T]$ un intervalle sur lequel a ne s'annule jamais et $[t_j, t_{j+1}] \subseteq [0, T]$ un intervalle sur lequel x ne s'annule jamais, on peut poser :

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_i, t_{i+1}] \quad x(t) &= \frac{a(t)x(t_i)}{a(t_i)} + a(t) \int_{t_i}^t \frac{y(\tau)\dot{z}(\tau) - \dot{y}(\tau)z(\tau)}{a(\tau)^2} d\tau \\ \forall t \in [t_j, t_{j+1}] \quad a(t) &= \frac{x(t)a(t_j)}{x(t_j)} + x(t) \int_{t_j}^t \frac{\dot{y}(\tau)z(\tau) - y(\tau)\dot{z}(\tau)}{x(\tau)^2} d\tau \end{aligned}$$

Cette solution générale n'est pas très facile à utiliser. En effet, si on souhaite calculer formellement x (respectivement a) il faut choisir a , y et z (respectivement x , y et z) de façon à pouvoir calculer l'intégrale du second membre.

Cas des quaternions polynomiaux

Dans le cas particulier des quaternions polynomiaux on peut s'affranchir de l'intégration. Toutefois, pour réaliser un rendez-vous particulier il est généralement nécessaire d'utiliser plusieurs polynômes. En effet, pour un quaternion Q_1 , dont les composantes notées a_1 , x_1 , y_1 et z_1 sont polynomiales de degré d , la condition (4.27) revient à chercher les coefficients de a_1 , x_1 , y_1 et z_1 de façon à ce que le polynôme $P_1 = a_1\dot{x}_1 - \dot{a}_1x_1 + \dot{y}_1z_1 - y_1\dot{z}_1$ soit nul. Il faut donc que chacun des coefficients de P_1 soit nul. Or P_1 est de degré $2d - 2$, ce qui impose $2d - 1$ relations entre les coefficients de a_1 , x_1 , y_1 et z_1 . Ces relations s'ajoutent à celles qui sont imposées par les conditions de jets, ce qui augmente fortement le degré des polynômes. À titre d'exemple, en restant dans les cas où l'attitude, la vitesse de rotation et l'accélération angulaire sont imposées à l'instant initial $t = 0$ et à l'instant final $t = T$, on aboutit à des polynômes de degré 9. Il est donc préférable d'utiliser des quaternions polynomiaux par morceaux pour manipuler des polynômes de degré plus faible.

Pour donner un aperçu des restrictions apportées lorsqu'on impose à l'une des composantes de la vitesse de rotation d'être nulle, détaillons maintenant les cas des quaternions de degré 1 et 2. Nous ne nous intéresserons qu'au problème du rendez-vous en attitude, sans tenir compte de la vitesse et de l'accélération à l'instant initial et à l'instant final. Nous noterons $q_i = 1$ l'attitude initiale et $q_f = a_f + x_f i$ l'attitude finale.

Quaternions de degré 1 On cherche à enchaîner plusieurs rotations, décrites par des quaternions polynomiaux de degré 1, telles que :

- la composante selon x de chacun des vecteurs vitesse de rotation correspondant soit nulle ;
- le chemin en attitude correspondant soit de classe C^0 (on ne cherche pas à obtenir la continuité sur les composantes de la vitesse) ;
- l'attitude finale est de la forme $\cos(\alpha/2) + i \sin(\alpha/2)$.

En posant les équations du mouvement, on obtient une solution en utilisant 3 quaternions. Si on définit le quaternion $Q_1(s)$ sur $[0, 1]$, $Q_2(s)$ sur $[1, 2]$ et $Q_3(s)$ sur $[2, 3]$, les solutions sont de la forme :

$$Q_1(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ as \\ bs \end{pmatrix} \quad Q_2(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ (bc - ad)(1 - s) \\ a - c(1 - s) \\ b - d(1 - s) \end{pmatrix} \quad Q_3(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ ad - bc \\ (a + c)(3 - s) \\ (b + d)(3 - s) \end{pmatrix}$$

Il suffit alors de choisir un changement de paramétrage $s(t)$ tel que les vitesses de rotations et les accélérations angulaires soient nulles sur les points de discontinuité. Ainsi, si on note t_1 et t_2 les instants définis par $s(t_1) = 1$ et $s(t_2) = 2$, s doit vérifier : $\dot{s}(t_1) = 0$, $\dot{s}(t_2) = 0$, $\ddot{s}(t_1) = 0$ et $\ddot{s}(t_2) = 0$.

Cette solution montre qu'il est possible d'effectuer une rotation autour de l'axe x en n'utilisant que les composantes y et z de la commande. De plus, les expressions obtenues montrent clairement que le mouvement peut être réalisé en bornant les écarts par rapport à la position initiale ; pour cela il suffit de borner les valeurs de a , b , c et d . Par contre, techniquement elle n'est pas très satisfaisante car pour obtenir une commande lisse, on est obligé de s'arrêter 2 fois pour négocier les singularités du chemin. Pour obtenir de « meilleures » solutions, il faut augmenter le degré des polynômes et éventuellement leur nombre.

4.6.2 Condition nécessaire d'optimalité du chemin

Énoncé de la condition nécessaire

Intuitivement, on peut dire que si la trajectoire optimale ne sature qu'une seule composante, x par exemple, sur un intervalle de temps, c'est qu'on n'exploite pas au mieux les rotations autour des deux autres axes. En effet, une partie de la rotation qui a été effectuée autour de x aurait pu être faite en composant des rotations autour de y et z .

Soient Γ un chemin permettant de réaliser un rendez-vous, q , définie sur $[0, T]$, la trajectoire optimale obtenue pour Γ , et Ω la vitesse de rotation calculée à partir de q . Une condition nécessaire pour que le chemin Γ soit un chemin optimal est qu'il existe une partition de $[0, T]$ telle que sur chacun des intervalles de la partition, Ω sature au moins deux de ses composantes.

Pour démontrer cette condition nécessaire nous allons nous restreindre au problème simplifié pour lequel les contraintes dynamiques s'appliquent directement aux composantes du vecteur vitesse instantanée de rotation et à ses dérivées, comme indiqué en (4.3). L'idée générale est alors de montrer que si la vitesse de rotation ne sature qu'une seule composante, sur un intervalle $[0, T]$, alors il est possible de construire un chemin Γ_1 vérifiant les mêmes conditions de jets aux bornes de l'intervalle, pour lequel la trajectoire optimale est plus rapide. L'étape intermédiaire consistera en fait à construire une trajectoire, définie sur $[0, T]$, le long de Γ_1 , qui ne sature aucune contrainte.

Preuve de la condition nécessaire

Soit Γ_0 le chemin en attitude suivi par le satellite. Soit $q_0(t)$ la trajectoire optimale définie le long de ce chemin, calculée en appliquant la méthode proposée en 4.5. Soit enfin $\Omega_0(t)$ le quaternion représentant le vecteur vitesse instantanée de rotation, $\vec{\Omega}_0(t)$, dans le repère lié au satellite. Soit enfin, $[0, T]$ un intervalle de temps pour lequel la saturation ne concerne que la composante x de Ω_0 . Pour la commodité des notations, nous supposons que cette composante ne change pas de signe sur $[0, T]$ et nous restreignons le problème à cet intervalle.

La composante x joue un rôle particulier ici puisque c'est l'unique composante de Ω_0 qui soit saturée. Décomposons donc Ω_0 afin d'isoler cette composante. Pour cela, considérons le quaternion q_0 comme le produit de deux quaternions $q_0 = q_{0_{yz}} \cdot q_{0_x}$ définis comme suit :

- q_{0_x} est un quaternion dont les composantes selon y et z sont nulles ;

– $q_{0_{yz}}$ est tel que la composante \mathbf{x} du vecteur vitesse de rotation associé est nulle.

Les vitesses de rotation associées à chacun de ces quaternions ont alors les expressions suivantes, dans le repère mobile correspondant :

$$\Omega_{0_x} = 2 \bar{q}_{0_x} \cdot \dot{q}_{0_x} \qquad \Omega_{0_{yz}} = 2 \bar{q}_{0_{yz}} \cdot \dot{q}_{0_{yz}}$$

En appliquant la formule de composition des rotations établie en (2.29), on obtient :

$$\Omega_0 = \Omega_{0_x} + \bar{q}_{0_x} \cdot \Omega_{0_{yz}} \cdot q_{0_x} \qquad (4.28)$$

Or, la composante selon \mathbf{x} de $\Omega_{0_{yz}}$ est nulle ; ceci reste vrai pour toute rotation de ce vecteur autour de l'axe \mathbf{x} . Cette dernière décomposition est donc toujours possible et elle est très facile à obtenir. En faisant le changement de repère adéquat, on peut avoir $q_{0_x}(0) = 1$; dans ce cas, à l'instant $t = T$, $q_{0_x}(T)$ représente une rotation autour de \mathbf{x} d'un angle α_0 . Cet angle est directement obtenu à partir de l'intégrale de la composante \mathbf{x} de Ω_0 .

Soit Γ_1 , un nouveau chemin réalisant le même rendez-vous que Γ_0 . Soit q_1 une trajectoire définie le long de Γ_1 , sur l'intervalle $[0, T]$. On décompose le quaternion q_1 comme un produit $q_1 = q_{1_{yz}} \cdot q_{1_x}$ en appliquant le même principe que précédemment, l'angle représenté par le quaternion $q_{1_x}(T)$ étant noté α_1 . On a alors les vitesses de rotations associées à chacun des termes :

$$\Omega_{1_x} = 2 \bar{q}_{1_x} \cdot \dot{q}_{1_x} \qquad \Omega_{1_{yz}} = 2 \bar{q}_{1_{yz}} \cdot \dot{q}_{1_{yz}}$$

La vitesse de rotation associée à q_1 a alors l'expression suivante :

$$\Omega_1 = \Omega_{1_x} + \bar{q}_{1_x} \cdot \Omega_{1_{yz}} \cdot q_{1_x} \qquad (4.29)$$

Étant donné que \tilde{q}_0 et \tilde{q}_1 réalisent le même rendez-vous, dans le même temps, le fait que $\Omega_{1_x}(t)$ ne sature aucune contrainte lorsque t décrit $[0, T]$ implique que l'intégrale de Ω_{1_x} est inférieure, en valeur absolue, à l'intégrale de Ω_{0_x} , sur $[0, T]$. Or ces intégrales correspondent aux angles de rotation α_1 et α_0 . La condition nécessaire et suffisante pour pouvoir construire q_1 de telle sorte que Ω_{1_x} n'atteigne aucune contrainte est que α_1 soit strictement inférieur à α_0 .

Il reste donc à chercher les conditions pour que les composantes de $\Omega_{1_{yz}}$ n'atteignent pas les contraintes qui leur sont imposées. Pour cela définissons $q_{1_{yz}}$ à partir de $q_{0_{yz}}$: soient e , le quaternion défini sur $[0, T]$ tel que $q_{1_{yz}}(t) = e(t) \cdot q_{0_{yz}}(t)$, et $\mathcal{E} = 2 \bar{e} \cdot \dot{e} = v_x \mathbf{x} + v_y \mathbf{y} + v_z \mathbf{z}$ le vecteur vitesse de rotation associé à e , exprimé dans le repère mobile. On peut alors exprimer $\Omega_{1_{yz}}$ ainsi :

$$\Omega_{1_{yz}} = \bar{q}_{0_{yz}} \cdot \mathcal{E} \cdot q_{0_{yz}} + \Omega_{0_{yz}} \qquad (4.30)$$

De même, on peut exprimer q_{1_x} à partir de q_{0_x} en introduisant le quaternion f vérifiant $q_{1_x} = q_{0_x} \cdot f$. Ce nouveau quaternion définit une rotation autour de \mathbf{x} uniquement, donc la vitesse de rotation $\mathcal{F} = 2 \bar{f} \cdot \dot{f}$ qui lui est associée n'a qu'une seule composante non nulle : sa composante selon \mathbf{x} . On peut alors détailler les expressions de Ω_{1_x} et $\bar{q}_{1_x} \cdot \Omega_{1_{yz}} \cdot q_{1_x}$:

$$\Omega_{1_x} = \Omega_{0_x} + \mathcal{F} \qquad \bar{q}_{1_x} \cdot \Omega_{1_{yz}} \cdot q_{1_x} = \bar{f} \cdot (\bar{q}_0 \cdot \mathcal{E} \cdot q_0 + \bar{q}_{0_x} \cdot \Omega_{0_{yz}} \cdot q_{0_x}) \cdot f$$

En substituant ces expressions dans l'équation (4.29) on obtient :

$$\Omega_1 = \Omega_{0_x} + \mathcal{F} + \bar{f} \cdot (\bar{q}_0 \cdot \mathcal{E} \cdot q_0 + \bar{q}_{0_x} \cdot \Omega_{0_{yz}} \cdot q_{0_x}) \cdot f$$

En comparant cette expression avec celle de Ω_0 , établie en (4.28), et en tenant compte des hypothèses, on sait que le produit $\bar{q}_{0_x} \cdot \Omega_{0_{yz}} \cdot q_{0_x}$ ne sature aucune des contraintes sur y et z (sa composante x étant nulle). Par ailleurs, si on impose des bornes sur $|\dot{e}|$, $|\ddot{e}|$ et $|\ddot{e}'|$, on peut en déduire des bornes sur $|\mathcal{E}|$, $|\dot{\mathcal{E}}|$ et $|\ddot{\mathcal{E}}|$, et par conséquent on en déduit des bornes sur $|\bar{q}_0 \cdot \mathcal{E} \cdot q_0|$ et ses deux premières dérivées. Ainsi, on peut garantir que le produit $\bar{q}_{0_x} \cdot \Omega_{1_{yz}} \cdot q_{0_x}$ ne sature aucune contrainte, si on s'assure que les valeurs de $|\dot{e}|$, $|\ddot{e}|$ et $|\ddot{e}'|$ restent suffisamment faibles. De même, le produit $\bar{q}_{1_x} \cdot \Omega_{1_{yz}} \cdot q_{1_x}$ ne sature aucune contrainte si les valeurs de $|1 - f|$, $|\dot{f}|$ et $|\ddot{f}|$ restent suffisamment faibles.

Pour calculer les bornes qu'il faut imposer au module des dérivées de e , il faut développer le produit $\bar{q}_0 \cdot \mathcal{E} \cdot q_0$. Si q_0 est un quaternion unitaire tel que $q_0 = a + xi + yj + zk$, la composante x du produit est nulle si la relation suivante est vérifiée :

$$v_x = \frac{-2}{1 - 2y^2 - 2z^2} ((xy + az) v_y + (xz - ay) v_z) \quad (4.31)$$

Cette expression est définie lorsque $1 - 2y^2 - 2z^2 \neq 0$, dans ce cas on obtient :

$$\bar{q}_{0_x} \cdot \mathcal{E} \cdot q_{0_x} = \frac{1}{1 - 2y^2 - 2z^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1 - 2x^2 - 2y^2) v_y + 2(ax - yz) v_z \\ (1 - 2x^2 - 2z^2) v_z - 2(ax + yz) v_y \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Lorsque $1 - 2y^2 - 2z^2 = 0$ et $xy + az \neq 0$, on a :

$$v_y = \frac{ay - xz}{xy + az} v_z \quad \bar{q}_{0_x} \cdot \mathcal{E} \cdot q_{0_x} = \frac{1}{xy + az} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (x^2 - z^2) v_y + (ay + xz) v_z \\ (ax + yz) v_y + (az - xy) v_z \end{pmatrix}$$

Enfin, si $1 - 2y^2 - 2z^2 = 0$ et $xy + az = 0$, on a :

$$v_z = 0 \quad \bar{q}_{0_x} \cdot \mathcal{E} \cdot q_{0_x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z\sqrt{2 - 4z^2} v_x + (1 - 4z^2) v_y \\ 2z\sqrt{2 - 4z^2} v_y + (1 - 4z^2) v_x \end{pmatrix}$$

Ces trois cas sont tout à fait similaires et ils permettent de calculer des bornes sur deux des composantes de \mathcal{E} . Pour préciser ce point nous nous restreignons au cas général, décrit par les équations (4.31) et (4.32). Nous allons légèrement simplifier les notations en écrivant ces équations sous la forme :

$$v_x = b_y v_y + b_z v_z \quad \bar{q}_{0_x} \cdot \mathcal{E} \cdot q_{0_x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_y v_y + c_z v_z \\ d_y v_y + d_z v_z \end{pmatrix}$$

Soient M_y et M_z des majorants imposés aux composantes y et z du produit $\bar{q}_{0_x} \cdot \mathcal{E} \cdot q_{0_x}$. Ces majorants doivent vérifier :

$$M_y \leq \Omega_{m_y} - \left| (\bar{q}_{0_x} \cdot \Omega_{0_{yz}} \cdot q_{0_x})_y \right| \quad M_z \leq \Omega_{m_z} - \left| (\bar{q}_{0_x} \cdot \Omega_{0_{yz}} \cdot q_{0_x})_z \right|$$

On peut alors imposer aux composantes v_y et v_z de \mathcal{E} les inégalités suivantes :

$$|c_y v_y| + |c_z v_z| < M_y \quad |d_y v_y| + |d_z v_z| < M_z$$

Ce qui nous permet de définir une borne V_m telle que :

$$V_m = \min \left(\frac{M_y}{|c_y| + |c_z|}, \frac{M_z}{|d_y| + |d_z|} \right) \quad |v_y| < V_m \quad |v_z| < V_m$$

Il n'est pas utile de tenir compte de la troisième composante v_x de \mathcal{E} puisqu'elle est entièrement déterminée dès que v_y et v_z sont fixés.

En appliquant le même principe, on peut calculer les majorants \dot{M}_y et \dot{M}_z imposés aux composantes y et z de la dérivée du produit $\bar{q}_{0_x} \cdot \mathcal{E} \cdot q_{0_x}$. Les dérivées \dot{v}_y et \dot{v}_z doivent alors vérifier :

$$|c_y \dot{v}_y| + |c_z \dot{v}_z| + |\dot{c}_y v_y| + |\dot{c}_z v_z| < \dot{M}_y \quad (4.33)$$

$$|d_y \dot{v}_y| + |d_z \dot{v}_z| + |\dot{d}_y v_y| + |\dot{d}_z v_z| < \dot{M}_z \quad (4.34)$$

Pour résoudre ce système il faut éliminer v_y et v_z . On commence par contrôler la cohérence entre les diverses valeurs. En particulier, si $(|\dot{c}_y| + |\dot{c}_z|) V_m \geq \dot{M}_y$ ou $(|\dot{d}_y| + |\dot{d}_z|) V_m \geq \dot{M}_z$ on commence par réduire la valeur de V_m en prenant par exemple :

$$V_m = \min \left(\frac{\dot{M}_y}{2|\dot{c}_y| + 2|\dot{c}_z|}, \frac{\dot{M}_z}{2|\dot{d}_y| + 2|\dot{d}_z|} \right) \quad |v_y| < V_m \quad |v_z| < V_m$$

Il suffit alors de remplacer v_y et v_z par V_m dans (4.33) et (4.34). Ceci nous amène au système :

$$|c_y \dot{v}_y| + |c_z \dot{v}_z| < \dot{M}_y - (|\dot{c}_y| + |\dot{c}_z|) V_m \quad |d_y \dot{v}_y| + |d_z \dot{v}_z| < \dot{M}_z - (|\dot{d}_y| + |\dot{d}_z|) V_m$$

On en déduit immédiatement une borne sur \dot{v}_y et \dot{v}_z :

$$\dot{V}_m = \min \left(\frac{\dot{M}_y - (|\dot{c}_y| + |\dot{c}_z|) V_m}{2|\dot{c}_y| + 2|\dot{c}_z|}, \frac{\dot{M}_z - (|\dot{d}_y| + |\dot{d}_z|) V_m}{2|\dot{d}_y| + 2|\dot{d}_z|} \right) \quad |\dot{v}_y| < \dot{V}_m \quad |\dot{v}_z| < \dot{V}_m$$

En dérivant à nouveau et en appliquant le même procédé on peut alors déterminer une borne \ddot{V}_m sur \ddot{v}_y et \ddot{v}_z , ce qui nous donne une condition suffisante pour que $\bar{q}_{0_x} \cdot \Omega_{1_{yz}} \cdot q_{0_x}$ ne sature aucune contrainte :

$$\begin{array}{lll} |v_y| < V_m & |\dot{v}_y| < \dot{V}_m & |\ddot{v}_y| < \ddot{V}_m \\ |v_z| < V_m & |\dot{v}_z| < \dot{V}_m & |\ddot{v}_z| < \ddot{V}_m \end{array}$$

Il reste à reporter ces contraintes sur e . Les expressions de \mathcal{E} et de ses deux premières dérivées sont :

$$\mathcal{E} = 2e \cdot \dot{e} \quad \dot{\mathcal{E}} = 2e \cdot \ddot{e} + 2\dot{e}^2 \quad \ddot{\mathcal{E}} = 2e \cdot \ddot{\ddot{e}} + 4\dot{e} \cdot \ddot{e} + 2\ddot{e} \cdot \dot{e}$$

Si on note \dot{m} , \ddot{m} et \dddot{m} les majorants respectifs de $|\dot{e}|$, $|\ddot{e}|$ et $|\dddot{e}|$, on peut écrire :

$$|\mathcal{E}| \leq 2\dot{m} \quad \dot{\mathcal{E}} \leq 2\ddot{m} + 2\dot{m}^2 \quad \ddot{\mathcal{E}} \leq 2\ddot{m} + 6\dot{m}\ddot{m}$$

Ceci nous permet enfin d'établir une condition suffisante sur \dot{m} , \ddot{m} et \ddot{m} pour que le produit $\bar{q}_{0_x} \cdot \Omega_{1_{yz}} \cdot q_{0_x}$ ne sature aucune contrainte :

$$\dot{m} = \min \left(\frac{M}{2}, \sqrt{\frac{\dot{M}}{4}}, \sqrt{\frac{\ddot{M}}{12}} \right) \quad \ddot{m} = \min \left(\dot{M} - \dot{m}, \sqrt{\frac{\ddot{M}}{12}} \right) \quad \ddot{m} = \ddot{M} - 3\dot{m}\ddot{m} \quad (4.35)$$

Soient \dot{m} , \ddot{m} et \ddot{m} des majorants définis par (4.35). Soit e un quaternion unitaire vérifiant les trois inégalités $|\dot{e}| < \dot{m}$, $|\ddot{e}| < \ddot{m}$ et $|\ddot{e}| < \ddot{m}$. Si la composante x du vecteur vitesse associé $\mathcal{E} = 2\bar{e} \cdot \dot{e}$ est nulle, alors le quaternion $q_{1_{yz}} = e \cdot q_{0_{yz}}$ est tel que le vecteur vitesse associé $\Omega_{1_{yz}} = 2\bar{q}_{1_{yz}} \cdot \dot{q}_{1_{yz}}$ vérifie :

- la composante selon x de $\bar{q}_{0_x} \cdot \Omega_{1_{yz}} \cdot q_{0_x}$ est nulle ;
- les composantes selon y et z de $\bar{q}_{0_x} \cdot \Omega_{1_{yz}} \cdot q_{0_x}$ ne saturent aucune contrainte.

Les quaternions q_{0_x} et $q_{0_{yz}}$ correspondent à la décomposition donnée par l'équation (4.28).

Il reste alors à calculer les conditions sur le quaternion f pour que le produit $\bar{q}_{1_x} \cdot \Omega_{1_{yz}} \cdot q_{1_x}$ ne sature aucune contrainte. Soient ω_y et ω_z les composantes selon y et z de $\bar{q}_{0_x} \cdot \Omega_{1_{yz}} \cdot q_{0_x}$. Soit ϕ l'angle de la rotation représentée par le quaternion unitaire f . Un calcul direct nous donne, après simplification :

$$\bar{q}_{1_{yz}} \cdot \Omega_{1_{yz}} \cdot q_{1_{yz}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_y \cos \phi + \omega_z \sin \phi \\ \omega_z \cos \phi - \omega_y \sin \phi \end{pmatrix}$$

On en déduit immédiatement un majorant ϕ_m de $|\phi|$:

$$\phi_m = \min \left(\arcsin \frac{\Omega_{m_y} - |\omega_y|}{|\omega_z|}, \arcsin \frac{\Omega_{m_z} - |\omega_z|}{|\omega_y|} \right)$$

Il faut noter que si l'une des deux composantes ω_y ou ω_z s'annule, alors toute valeur de ϕ convient.

Soient $\dot{\omega}_y$ et $\dot{\omega}_z$ les composantes selon y et z de la dérivée de $\bar{q}_{0_x} \cdot \Omega_{1_{yz}} \cdot q_{0_x}$. En dérivant l'expression de $\bar{q}_{1_x} \cdot \Omega_{1_{yz}} \cdot q_{1_x}$, on obtient les inégalités :

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_y \cos \phi + \dot{\omega}_z \sin \phi + \dot{\phi} (\omega_z \cos \phi - \omega_y \sin \phi) &< \dot{\Omega}_{m_y} \\ \dot{\omega}_z \cos \phi - \dot{\omega}_y \sin \phi - \dot{\phi} (\omega_y \cos \phi - \omega_z \sin \phi) &< \dot{\Omega}_{m_z} \end{aligned}$$

On se retrouve dans une situation équivalente à celle rencontrée avec les inégalités (4.33) et (4.34), on peut donc être amené à réduire la valeur de ϕ_m . Moyennant cette précaution, on peut prendre $\dot{\phi}_m$ comme majorant de $|\dot{\phi}|$, $\dot{\phi}_m$ étant défini par :

$$\dot{\phi}_m = \min \left(\frac{\dot{\Omega}_{m_y} - |\dot{\omega}_y| - |\dot{\omega}_z| \sin \phi_m}{|\omega_z| + |\omega_y| \sin \phi_m}, \frac{\dot{\Omega}_{m_z} - |\dot{\omega}_z| - |\dot{\omega}_y| \sin \phi_m}{|\omega_y| + |\omega_z| \sin \phi_m} \right)$$

En dérivant à nouveau, on pourrait aussi définir un majorant $\ddot{\phi}_m$ pour $|\ddot{\phi}|$. Toute fonction $\phi(t)$, définie sur $[0, T]$, qui respecte ces trois majorations en chaque instant permet de définir le quaternion f par l'expression $f(t) = \cos \phi(t)/2 + \sin \phi(t)/2$. Ce quaternion est tel que si $\bar{q}_{0_x} \cdot \Omega_{1_{yz}} \cdot q_{0_x}$ ne sature pas les contraintes sur y et z , alors $\bar{q}_{1_x} \cdot \Omega_{1_{yz}} \cdot q_{1_x}$ ne les sature pas non plus.

Ainsi, si on impose des bornes sur $|\Omega_{1_{yz}} - \Omega_{0_{yz}}|$ et ses deux premières dérivées, on peut en déduire des bornes sur chacune des composantes des \mathcal{E} ; par conséquent on en déduit une borne sur les composantes de \dot{e} d'où une borne sur l'angle final donné par $e(T_0)$. En prenant α_1 strictement inférieur à cette borne, on a une trajectoire $q_1(t)$ définie sur $[0, T_0]$ qui ne sature aucune des contraintes, donc la trajectoire optimale pour le chemin Γ_1 permettra de réaliser le rendez-vous en un temps $T_1 < T_0$.

4.7 Programmation de l'algorithme

L'algorithme de calcul de trajectoires optimales en temps a été programmé en C++. Partant des conditions de rendez-vous données sous la forme indiquée en (4.1), on applique les formules (4.10) et (4.11) pour obtenir les conditions de jets. On en déduit directement l'expression du chemin en appliquant les formules d'interpolation (4.15).

Le calcul de la trajectoire optimale est plus délicat à programmer efficacement, nous apportons donc ici quelques éléments importants pour la mise en œuvre de cette étape. L'objectif à atteindre est de fournir une commande *polynomiale par morceaux*, dont chacun des morceaux est de *degré 4*, telle que l'erreur sur l'attitude finale soit inférieure à ϵ (de l'ordre de 10^{-6} rad), les autres conditions de rendez-vous étant exactement vérifiées. Dans les parties 4.7.1 à 4.7.7 nous détaillons point par point les étapes du programme qui réalise cet objectif à partir du chemin en attitude.

En 4.7.8 nous faisons un bilan général sur la programmation de cet algorithme. Nous y évoquons des éléments aussi diversifiés que les difficultés concernant la structure du programme, les problèmes liés aux méthodes numériques employées et les performances générales.

4.7.1 Échantillonnage

Pour effectuer les calculs il est nécessaire de passer par des étapes numériques, il faut donc échantillonner le chemin suivi. La liste d'échantillons centralise toutes les informations décrivant le chemin, la commande, le changement de paramétrage et la trajectoire. Ainsi, chacun des échantillons devrait comporter les données indiquées dans le tableau (4.5). Pour des commodités de calcul, cette structure de base pourrait être complétée, par exemple elle pourrait aussi inclure $\ddot{Q}(s_i)$, $\dot{\Omega}(s_i)$ et $\dot{\omega}(t_i)$.

Nom	s_i	$Q(s_i)$	$\dot{Q}(s_i)$	$\Omega(s_i)$	$\int_{s_i}^{s_{i+1}} \Omega(\sigma) d\sigma$	t_i	$\omega(t_i)$	$s'_i(t_i)$
Ensemble	\mathbf{R}	\mathbf{H}	\mathbf{H}	\mathbf{R}^3	\mathbf{R}^3	\mathbf{R}	\mathbf{R}^3	\mathbf{R}

TAB. 4.5 - Description d'un échantillon

L'échantillonnage des s_i est arbitraire. L'élément que nous proposons d'utiliser pour

Si $s_i = S$
Alors
Terminé
Fin Si
Calculer une valeur approchée de l'intégrale de Ω sur $[s_i, s_{i+1}]$ par une méthode directe
Si l'erreur sur l'intégrale est trop importante
Alors
Créer un nouvel échantillon en $s = (s_i + s_{i+1})/2$ et l'insérer dans la liste après l'échantillon s_i
Initialiser les valeurs de $Q(s)$, $\dot{Q}(s)$, $\Omega(s)$ pour le nouvel échantillon
Mettre à jour l'intégrale pour l'échantillon s_i (appel récursif)
Sinon
Mettre à jour l'intégrale pour l'échantillon suivant dans la liste (appel récursif)
Fin Si

TAB. 4.6 - Mise à jour de l'intégrale pour l'échantillon s_i

le choix de la fréquence d'échantillonnage est l'intégrale des composantes de Ω entre deux échantillons. Cette intégrale doit être calculée numériquement, on peut donc choisir une méthode directe pour calculer une approximation de cette intégrale sur un intervalle $[s_i, s_{i+1}]$ et évaluer l'erreur correspondante. Dans ce cas, l'échantillonnage peut être fait récursivement comme indiqué dans le tableau (4.6). L'initialisation consiste à créer les deux échantillons en $s = 0$ et en $s = S$ à partir des conditions de jets et des conditions de rendez-vous.

Remarque 4.7.1 Lors de l'échantillonnage il est utile de repérer les dates auxquelles les composantes de Ω s'annulent. Pour chacune de ces dates il faut créer un échantillon et pour chacune des composantes de Ω on gèrera la liste des dates auxquelles elle s'annule.

Au terme de cette opération, on dispose d'une liste de $n + 1$ échantillons, illustrée par la figure (4.7), où chacun des échantillons s_i est initialisé avec les valeurs de $Q(s_i)$, $\dot{Q}(s_i)$, $\Omega(s_i)$ et $\int_{s_i}^{s_{i+1}} \Omega(\sigma) d\sigma$; le reste des données étant encore inconnu.

$s_0 = 0$...	$s_i = 0$...	$s_n = S$
$Q(s_0)$...	$Q(s_i)$...	$Q(s_n)$
$\dot{Q}(s_0)$...	$\dot{Q}(s_i)$...	$\dot{Q}(s_n)$
$\Omega(s_0)$...	$\Omega(s_i)$...	$\Omega(s_n)$
$\int_{s_0}^{s_1} \Omega(\sigma) d\sigma$...	$\int_{s_i}^{s_{i+1}} \Omega(\sigma) d\sigma$...	0

TAB. 4.7 - Liste d'échantillons au terme du processus d'échantillonnage

4.7.2 Calcul des modèles pour une variable

Au terme de l'étape d'échantillonnage, détaillée en 4.7.1, on dispose des informations suffisantes pour pouvoir calculer les modèles associés à l'une des variables. Nous supposons ici qu'il s'agit de la composante Ω_x et nous notons X_j l'intégrale de Ω_x sur l'intervalle $[s_j, s_{j+1}]$. Enfin, nous ne considérons plus forcément l'intégralité du chemin : le calcul des modèles peut être limité à un sous-ensemble $[S_i, S_f]$ de l'intervalle $[0, S]$; on suppose que les valeurs de ω et ω' sont connues en chacune des bornes S_i et S_f .

Un modèle est entièrement spécifié par les données indiquées dans le tableau (4.8). Les conditions aux bornes v_i et a_i représentent respectivement la vitesse ω et l'accélération ω' en S_i , de même, v_f et a_f représentent respectivement la vitesse ω et l'accélération ω' en S_f .

Modèle		Polynôme	
v_i, a_i, v_f, a_f :	conditions aux bornes	degré:	degré du polynôme
Échantillons:	premier échantillon	coefs:	liste des coefficients
Intégrale:	valeur totale de l'intégrale	t:	date de commutation
Polynômes:	liste de polynômes		

TAB. 4.8 - Description d'un modèle

Pour initialiser l'étape de calcul des modèles, on crée une liste comprenant un modèle pour chacun des échantillons où la composante s'annule et un modèle pour chacun des échantillons situés aux extrémités. Pour construire cette liste, il suffit d'indiquer pour chacun des modèles m_0, m_1, \dots, m_m et m_{m+1} le premier échantillon qui le concerne. Pour le modèle m_0 il s'agit de l'échantillon $s = S_i$, pour le modèle m_{m+1} il s'agit de l'échantillon $s = S_f$ et pour chacun des modèles intermédiaires il s'agit des échantillons pour lesquels la composante Ω_x s'annule. On obtient alors la configuration illustrée par le tableau (4.9).

Modèle m_0		Modèle m_1		...	Modèle m_m		Modèle final
Intégrale = I_0		Intégrale = I_1		...	Intégrale = I_m		Intégrale = 0
$s = S_i$...	$s = s_{j_1}$	$s = s_{j_m}$...	$s = S_f$
$\omega_x = v_i$...	$\omega_x = 0$	$\omega_x = 0$...	$\omega_x = v_f$
X_{j_0}	...	X_{j_1}	X_{j_m}	...	0

TAB. 4.9 - Construction de la liste de modèles sur la liste d'échantillons

Le calcul de l'intégrale totale associée au modèle est simplement réalisé en additionnant toutes les intégrales X_k de tous les échantillons s_k associés au modèle. Une fois que ces intégrales sont connues, on dispose de tous les éléments pour calculer itérativement les modèles de m_0 jusqu'à m_m .

Si la composante Ω_x ne s'annule pas sur l'intervalle $[S_i, S_f]$ alors $m_m = m_1$ et le modèle cherché est l'un des modèles donnés en figure (4.6). Pour calculer ce modèle, il suffit de remplacer $\omega(0), \omega'(0), \omega(T)$ et $\omega'(T)$ par v_i, a_i, v_f et a_f respectivement; on cherche alors parmi les 8 modèles possibles celui qui admet une solution³, pour la valeur de l'intégrale calculée. Si aucun des systèmes n'admet de solution c'est que les conditions données à l'instant initial $s = S_i$ et à l'instant final $s = S_f$ ne permettent pas de suivre le chemin imposé en respectant les contraintes dynamiques.

3. Les systèmes d'équations algébriques correspondant à chacun de ces modèles sont donnés en A.1

Si la composante Ω_x s'annule sur l'intervalle $[S_i, S_f]$, il faut itérer le calcul des modèles. Pour chacun des modèles qui précèdent le modèle m_m , il faut commencer par calculer l'un des modèles donnés en figure (4.7) (M8 pour m_1 et M9 pour les autres). Si l'accélération finale dépasse les contraintes imposées, on recommence les calculs avec les modèles de la figure (4.6), en prenant la borne sur l'accélération comme pente à l'instant final. Lorsque le calcul d'un modèle est terminé, il faut utiliser les conditions finales du modèle courant pour initialiser le modèle suivant. On peut ainsi itérer le calcul des modèles du premier au dernier.

Au cours des calculs, il peut arriver que l'un des systèmes à résoudre n'ait pas de solution. Dans ce cas il faut corriger les conditions initiales en utilisant l'équation (4.24). Lorsque tous les modèles ont été calculés dans le sens croissant des valeurs de s , il faut recommencer en sens inverse, comme indiqué dans le tableau (4.4), pour prendre en compte les éventuelles corrections.

4.7.3 Calcul du changement de paramétrage

On suppose maintenant que tous les modèles ont été calculés pour la composante Ω_x , sur l'intervalle $[S_i, S_f]$. Chacun des modèles est une liste de polynômes dont on connaît les coefficients et les dates de commutation. Pour chacun des modèles on a la situation illustrée par le tableau (4.10): au modèle m_i sont associés, d'une part, une liste d'échantillons dont les informations sont connues en fonction de s , d'autre part, une liste de polynômes qui décrit l'évolution de l'une des composantes de la commande en fonction du temps.

Polynôme p_{i_1}	...	Polynôme p_{i_p}	Polynôme p_{j_1}	...	Polynôme p_{j_p}
Modèle m_i			Modèle m_j		
$s = s_{k_i}$...		$s = s_{k_j}$...	
X_{k_i}	...		X_{k_j}	...	

TAB. 4.10 - Liste des polynômes décrivant un modèle

Le calcul de la loi horaire revient dans ce cas à *synchroniser les deux listes*, c'est à dire à établir clairement le lien entre le paramétrage s utilisé pour les échantillons et le paramétrage t utilisé pour les polynômes. Pratiquement, cela revient à mettre à jour le champ t_i pour chacun des échantillons.

Pour calculer la date t_i associée à chacun des échantillons on utilise à nouveau l'équation (4.20); cette fois-ci, on cherche à résoudre:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega_x(\tau) d\tau = X_i$$

Or ω_x est connue puisque c'est justement la fonction polynomiale par morceaux décrite par le modèle. De la valeur de t_i on peut donc déduire le polynôme $p_i(t)$ qui représente $\omega_x(t)$ sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. L'intégrale de p_i sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ est un polynôme en t_{i+1} ; ceci nous permet donc de calculer la date t_{i+1} telle que $s(t_{i+1}) = s_{i+1}$. Ainsi, on peut calculer itérativement les dates de tous les échantillons d'un modèle.

Remarque 4.7.2 Les dates de commutation entre les polynômes du modèle n'ont aucune raison de coïncider avec un échantillon de la liste. Il faut donc ajouter un test pour

s'assurer que la date t_{i+1} obtenue n'est pas supérieure à la prochaine date de commutation. Lorsque c'est le cas, on passe au polynôme suivant et on crée un nouvel échantillon qui coïncide avec la date de commutation.

En réitérant le processus sur chacun des modèles on peut calculer les dates t_i de chacun des échantillons s_i créés sur l'intervalle $[S_i, S_f]$. Ainsi on sait exactement quels sont les échantillons associés à chacun des modèles; le tableau (4.10) peut être modifié pour mettre en évidence la « synchronisation » entre les deux échelles de temps; on aboutit alors au tableau (4.11).

Modèle m_i				Modèle m_j					
Polynôme p_{i_1}		...	Polynôme p_{i_p}		Polynôme p_{j_1}		...	Polynôme p_{j_p}	
$s = s_{k_1}$	$s = s_{k_p}$...	$s = s_{l_1}$	$s = s_{l_q}$...
$t = t_{k_1}$	$t = t_{k_p}$...	$t = t_{l_1}$	$t = t_{l_q}$...

TAB. 4.11 - Synchronisation entre le paramètre s et le temps t

4.7.4 Échantillonnage des commandes

Au terme de l'étape 4.7.3 on connaît le changement de paramétrage $s(t)$ sous forme échantillonnée. Pour obtenir le maximum de précision dans les calculs, il faudrait lisser $s(t)$, et utiliser $q(t) = Q(s(t))$ pour calculer la commande $\omega(t)$. Toutefois, on peut aboutir au résultat beaucoup plus rapidement, avec une erreur faible, en calculant la valeur de s' sur chacun des échantillons. Cette valeur est très facile à obtenir puisque l'équation (4.19) nous donne directement $s'(t) = \omega_x(t)/\Omega_x(s)$. Ainsi, pour l'échantillon s_i , on connaît la date t_i et on en déduit $\omega_{x_i} = \omega_x(t_i)$. On dispose donc de tous les éléments pour calculer $s'_i = s'(t_i)$ pour chacun des échantillons.

Toujours en appliquant l'équation (4.19) on peut alors calculer les valeurs de ω_y et ω_z pour chacun des échantillons.

4.7.5 Lissage des commandes

On souhaite obtenir des commandes polynomiales par morceaux, de degré 4. Il faut donc lisser la commande échantillonnée calculée au cours des étapes précédentes. Nous allons commencer par « simplifier » la forme de la composante illustrée dans le tableau (4.11). Cette simplification consiste à combiner le dernier polynôme d'un modèle et le premier polynôme du modèle suivant, lorsqu'ils saturent la même contrainte. On va alors lisser les deux autres composantes en utilisant les mêmes dates de commutation. Un algorithme de lissage de type *moindres carrés* est tout à fait adapté à cette situation. Il faut toutefois prendre en compte les conditions de continuité de classe C^1 imposées à la commande; on n'utilise donc que 3 coefficients pour la minimisation de l'erreur due au lissage, les 2 autres coefficients étant utilisés pour l'interpolation.

Pour limiter les erreurs numériques et augmenter la commodité des calculs, on définit le polynôme p_i sur l'intervalle $[0, t_i]$. Le polynôme p_{i+1} est alors défini sur l'intervalle $[0, t_{i+1}]$ et les conditions de continuité imposent :

$$p_{i+1}(t) = p_i(t_i) + p'_i(t_i)t + b_2t^2 + b_3t^3 + b_4t^4$$

Les paramètres libres b_2 , b_3 et b_4 sont alors calculés par la méthode des moindres carrés. Pour le dernier polynôme l'interpolation doit se faire sur 4 paramètres car il faut tenir compte de la vitesse et de l'accélération qui sont aussi imposées à l'instant final.

De nombreuses variantes peuvent être appliquées en tirant profit du fait que certains morceaux subissent de plus amples variations que d'autres. Par exemple, on pourrait utiliser les 5 paramètres pour lisser un morceau sur deux, les raccords se faisant par interpolation. On pourrait aussi chercher à faire une minimisation globale de l'erreur au lieu de faire une minimisation locale. Toutefois, les essais que nous avons effectués n'ont pas permis de mettre en évidence un gain notable, ni sur la précision ni sur le nombre de polynômes. De plus ces raffinements augmentent les temps de calcul et peuvent introduire une certaine instabilité numérique ; nous nous en tiendrons donc à la solution la plus simple. Les seules précautions à prendre consistent à scinder l'intervalle lorsque l'erreur obtenue est trop importante sur l'une des composantes.

4.7.6 Changement d'axe de saturation

Dès que les commandes ω_y et ω_z sont connues, soit sous leur forme échantillonnée, soit sous leur forme lissée, on peut contrôler si ces deux composantes vérifient bien toutes les contraintes qui leur sont imposées. Le fait d'effectuer ce contrôle sur les commandes échantillonnées nous fait économiser l'étape de lissage ; par contre cela nous oblige à évaluer localement ω' et ω'' sur chacun des échantillons.

Si l'une des composantes (ω_y , pour fixer les idées) ne vérifie pas toutes les contraintes, il faut identifier l'intervalle $[S'_i, S'_f] \subset [S_i, S_f]$ sur lequel il faut recommencer les calculs. S'il s'agit de dépassements des contraintes sur ω'_y et ω''_y , il suffit de prendre pour S'_i et S'_f les dates auxquelles la contrainte dépassée est atteinte. S'il s'agit d'un dépassement sur ω_y , il faut étendre cet intervalle, comme indiqué en 4.5.4.

Remarque 4.7.3 *Comme dans le cas des commutations entre polynômes ou entre modèles, il n'y a aucune raison que le changement d'axe de saturation ait lieu sur un échantillon déjà existant. Pour simplifier l'algorithme il est commode de créer un échantillon pour chacune des dates S'_i et S'_f .*

Une fois que l'intervalle $[S'_i, S'_f]$ est connu il faut recommencer tous les calculs à partir de l'étape 4.7.2.

4.7.7 Correction de l'erreur sur l'attitude finale

Le lissage de la commande introduit une erreur sur l'attitude finale. Lorsque cette erreur est suffisamment faible (de l'ordre de 10^{-2} rad) il existe une méthode de correction qui converge très rapidement. Elle consiste à calculer l'erreur sur l'attitude finale et à en déduire la correction à apporter sur la commande en appliquant les formules de composition de rotations.

Soit $q_c(t)$ l'attitude de consigne définie sur $[0, T]$. Soit ω_0 une commande peu différente de la commande de consigne $\omega_c = 2\bar{q}_c \cdot \dot{q}_c$. Par un procédé numérique (la méthode de Runge-Kutta par exemple) on calcule l'attitude $q_0(T)$ atteinte lorsque la commande ω_0 est appliquée sur l'intervalle de temps $[0, T]$. On en déduit alors l'erreur finale $\epsilon_0(T)$:

$$\epsilon_0(T) = \bar{q}_0(T) \cdot q_c(T)$$

Cette erreur est convertie en une direction u_0 et un angle $\alpha_0(T)$ vérifiant :

$$\epsilon_0(T) = \cos \frac{\alpha_0(T)}{2} + u_0 \sin \frac{\alpha_0(T)}{2}$$

Supposons maintenant que la direction de l'erreur reste constante et que l'angle α_0 croît linéairement sur tout l'intervalle $[0, T]$. On a alors l'expression de $\epsilon_0(t)$ en chaque instant :

$$\alpha_0(t) = \alpha_0(T) \frac{t}{T} \qquad \epsilon_0(t) = \cos \frac{\alpha_0(t)}{2} + u_0 \sin \frac{\alpha_0(t)}{2}$$

On obtient alors un nouveau quaternion d'attitude $q_1 = q_0 \cdot \epsilon_0$ et une nouvelle commande $\omega_1 = 2\bar{q}_1 \cdot \dot{q}_1$ qui peut s'exprimer en fonction de ω_0 et ϵ_0 :

$$\omega_1 = \bar{\epsilon}_0 \cdot \omega_0 \cdot \epsilon_0 + 2\bar{\epsilon}_0 \cdot \dot{\epsilon}_0$$

En appliquant cette nouvelle commande ω_1 on corrige effectivement l'erreur en attitude, mais on introduit une erreur sur la vitesse et l'accélération à l'instant final $t = T$. L'idée est donc de n'appliquer la correction que sur un intervalle $[a > 0, b < T]$. Par exemple, pour une commande polynomiale par morceaux, chacun des polynômes est défini par ses jets en chacune de ses extrémités. Dans ce cas on peut calculer ω_1 en ne modifiant que les jets intermédiaires de ω_0 .

Si on pouvait faire la correction sur tout l'intervalle, on pourrait s'arrêter là car la correction serait exacte. Étant donné que ce n'est pas le cas, il faut poursuivre itérativement l'algorithme de correction tant que l'erreur résiduelle est trop importante.

Remarque 4.7.4 *Bien que cette méthode permette de corriger l'attitude finale, rien ne garantit que l'attitude de consigne q_c sera respectée sur l'intervalle $[0, T]$.*

Cette méthode dépend de la validité de l'hypothèse faite sur l'erreur (axe fixe et croissance linéaire de l'angle). Elle convient tout à fait pour des erreurs faibles et dans ce cas elle est très rapide. Il faut noter qu'elle reste applicable même lorsque l'attitude de consigne $q_c(t)$ n'est pas connue. Dans notre cas, nous connaissons l'attitude de consigne, nous pouvons donc appliquer la même méthode *sans faire aucune hypothèse sur la forme de l'erreur*. Il nous suffit de *mesurer l'erreur ϵ_0 en chaque instant*. La principale restriction vient alors du fait qu'on modifie la commande, risquant par là de dépasser les contraintes.

4.7.8 Évaluation globale de la méthode

Maintenant que tous les éléments du programme ont été donnés, il reste à mettre en avant ceux qui nécessitent une attention particulière. Plusieurs étapes font appel à des méthodes numériques de calcul ; nous ne les détaillerons pas car elles font partie des méthodes les plus courantes et elles sont accessibles dans des ouvrages de référence tels que [Nougier93]. Par contre nous discuterons de leur fiabilité s'il y a lieu.

L'échantillonnage initial, tel qu'il a été présenté en 4.7.1, ne pose aucune difficulté particulière. Il faut effectivement utiliser une méthode numérique pour calculer l'intégrale de la commande. Ce type de calcul est particulièrement fiable dès que les fonctions à intégrer ne varient pas trop vite. Ce point peut facilement être contrôlé car nous avons

le choix du paramétrage initial. Une méthode naïve telle que l'approximation des composantes de Ω par des polynômes de degré 3 est suffisante. Le nombre d'échantillons obtenu est de l'ordre d'une centaine.

Pour calculer un modèle il faut résoudre un système d'équations polynomiales. Les modèles M0 et M8 se ramènent à des systèmes de 2 équations de degré 3 ; ils ne peuvent donc pas être résolus formellement et il faut appliquer une méthode numérique. En général la convergence est rapide et le choix des valeurs initiales n'a pas réellement d'importance. Nous avons toutefois observé plusieurs cas pour lesquels les solutions n'ont pas été obtenues. Ces problèmes de convergence semblent apparaître lorsque la valeur de l'intégrale est très faible, donc lorsque les dates de commutation restent dans un domaine restreint. Dans ce cas on peut soit choisir un autre chemin, soit passer plus de temps à rechercher la solution. Pour les autres modèles, il est tentant de chercher à calculer formellement les dates de commutation. C'est peut-être une erreur pour tous les modèles qui ne se ramènent pas à un polynôme de degré 2 ou moins. En fait nous avons choisi de calculer numériquement les modèles M0, M1, M3 et M8, les autres sont calculés symboliquement.

Pour fiabiliser et accélérer le calcul des modèles, nous commençons toujours par nous assurer qu'une solution existe. Pour cela on calcule le modèle minimal qui vérifie les conditions aux extrémités, mais sans tenir compte de la valeur de l'intégrale. Ce modèle existe toujours et il est très rapide à calculer. Le modèle minimal correspondant à M0 est obtenu en imposant soit $t_1 = 0$ soit $t_3 = t_2$; le modèle minimal correspondant à M8 est obtenu en imposant $t_2 = t_1$. Sur ce modèle minimal, on calcule l'intégrale et on la compare avec l'intégrale souhaitée. Ceci permet en plus de calculer une borne sur les dates de commutation.

L'enchaînement du calcul des modèles ne pose pas de difficultés particulières. Il suffit de définir soigneusement les structures de données en suivant les indications données dans les tableaux (4.7) à (4.11), en particulier les éléments qui font le lien entre la liste d'échantillons, la liste de polynômes et la liste de modèles. L'essentiel des traitements se ramène alors à la manipulation de trois listes imbriquées. Une fois que tous les modèles sont connus, le calcul du changement de paramétrage et le calcul des commandes échantillonnées se fait en un unique parcours de la liste d'échantillons.

Le troisième point où il est nécessaire d'appliquer un algorithme numérique est le lissage des commandes. Nous avons indiqué en 4.7.5 que la méthode des moindres carrés, combinée avec une méthode d'interpolation convenait parfaitement. Étant donné que trois paramètres seulement sont concernés par le lissage, les risques d'instabilité de la méthode sont négligeables. De plus, la commande initiale est lisse, ainsi que le changement de paramétrage (bien qu'on ne le calcule pas effectivement), on se retrouve donc dans des conditions idéales.

En ce qui concerne l'évaluation générale du programme, il est assez difficile d'indiquer des performances brutes sans éléments de comparaison. Par ailleurs, les temps de calculs varient énormément en fonction du type de rendez-vous à réaliser et de la « qualité » du chemin en attitude. Les deux éléments les plus désastreux pour les performances sont :

- le suréchantillonnage dont la cause principale est une diminution excessive du module du quaternion d'attitude lorsqu'on choisit de calculer le chemin initial par la méthode proposée en 4.4.3 ;
- les changements d'axe de saturation trop fréquents. Bien qu'il soit très facile de

construire un chemin en attitude qui ait ce défaut, il suffit de privilégier très légèrement une direction de rotation pour qu'il disparaisse.

Le temps de calcul varie aussi de façon importante avec la valeur de l'intégrale des commandes (la variation est quasiment linéaire). Pour donner une idée des temps de calcul, il faut prendre en compte tous ces éléments. À titre indicatif, pour des rendez-vous donnant lieu à des rotations de 90° privilégiant nettement les rotations autour d'un axe, avec des vitesses et des accélérations faibles (10% du maximum) aux points de rendez-vous, le temps de calcul moyen est inférieur à 0.4s sur une station de travail Sun SPARC 5 à 110MHz. Cette évaluation a été faite sur un échantillon de 500 000 problèmes différents.

Chapitre 5

Commande d'une grue

5.1 Introduction

Le second exemple que nous avons choisi est inspiré d'un problème abondamment traité dans la littérature : la commande d'une grue. L'intérêt qu'il suscite a principalement deux sources : d'une part, les enjeux économiques liés à l'automatisation des grues et, d'autre part, l'intérêt théorique du problème. Une grue est en fait un pendule, le problème étant de déplacer la masse suspendue en agissant sur la position du point de suspension et sur la longueur du câble. La difficulté vient du fait que dès qu'on déplace le point de suspension, le pendule a tendance à osciller, l'objectif étant bien entendu de contrôler les oscillations à l'instant final (en pratique on cherche à les supprimer). Ce problème se résoud très bien dans le cas de commandes manuelles, tant qu'on ne cherche pas à optimiser le rendement de la grue. L'automatisation des commandes pose de nombreuses difficultés et nous essayons d'en donner un aperçu ici.

Une première approche consiste à partir du principe que si les oscillations sont faibles pendant le mouvement, elles seront faibles à l'arrivée, ce qui est généralement vrai si on évite les accélérations trop brutales. On trouve de nombreuses solutions de ce type, citons à titre d'exemple [Sakawa et al.82], qui ne traite que la minimisation des oscillations, ou [AG et al.95] qui montre qu'il est aussi possible de minimiser le temps final. Cette dernière solution prend en compte des contraintes sur la vitesse et l'accélération du chariot et du dévidoir. Il s'agit d'un problème d'optimisation avec des contraintes sur l'état du système, résolu en appliquant le principe du maximum, tel qu'il a été présenté en 1.1.4. Pour résoudre le problème, de très nombreuses hypothèses sont faites sur le type de bouclage utilisé. Il faut remarquer que le modèle obtenu est assez lourd : il comporte 10 variables d'état.

Pour réduire la complexité des calculs, une solution consiste à rechercher des solutions moins générales. Une restriction efficace en terme de calculs consiste à imposer à la charge de rester dans un plan vertical et à séparer les commandes de déplacement horizontal des commandes de déplacement vertical. Par exemple [Li et al.93] réalise la commande en trois étapes : montée, transport avec une longueur de câble constante et descente. Une commande plus douce, en cinq étapes est proposée par [Hamalainen et al.95] mais elle est plus coûteuse en calculs.

Ces méthodes laissent entrevoir l'importance qu'il y a à contrôler le *chemin suivi par la charge*. Cette idée a été approfondie dans [Yu et al.95] qui utilise deux boucles imbri-

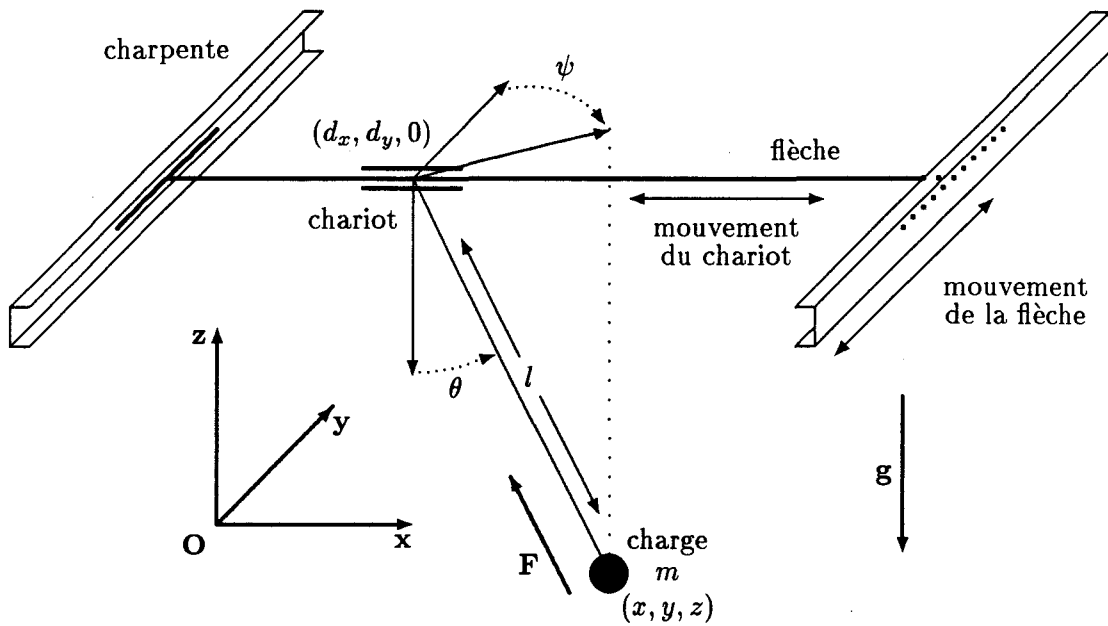
quées pour produire la commande : l'une lente pour que la charge suive une trajectoire imposée ; l'autre rapide pour stabiliser les oscillations. Toutefois, c'est avec l'introduction de la *platitude* dans [Fliess et al.92] et [Martin92] que le rôle primordial des coordonnées cartésiennes de la charge a pu être pleinement exploité. En particulier, [Fliess et al.95b] et [Rouchon94] montrent comment calculer des commandes robustes à partir de la *trajectoire de la charge*, sans aucune intégration. Cette dernière méthode ne prend pas en compte les *contraintes sur l'état du système* telles que les limites de puissance des moteurs ou la solidité de la structure. C'est justement le problème que nous allons résoudre en montrant comment notre méthode de calcul de commandes optimales peut être appliqué à ce problème.

Étant donné que les commandes en boucle ouverte ont souvent été considérées comme inapplicables dans le cas de la grue, il est nécessaire de préciser les conditions d'utilisation de notre méthode. Il faut que deux conditions soient réunies : le modèle utilisé doit être fiable et les interactions avec l'environnement doivent être faibles. Ces deux conditions sont généralement vérifiées par les *ponts roulants* utilisés dans des espaces clos (hangars, ateliers, ...). Les dispositifs de ce type sont suffisamment rigides pour que les déformations de la structure puissent être négligées. De plus, notre méthode permettant facilement de produire des *commandes lisses*, nous pouvons nous arranger pour que les commandes obtenues ne génèrent pas de vibrations parasites dans la structure. Des études pratiques, telles que [Backhouse et al.94], ont d'ailleurs mis en évidence que sous ces conditions, les commandes en boucle ouverte peuvent être robustes et fournir de bonnes performances. Enfin, lorsqu'une erreur trop importante apparaît entre la trajectoire de consigne et la trajectoire suivie, il est toujours possible de recalculer une nouvelle commande en boucle ouverte qui prend en compte cette erreur et la corrige.

L'étude est limitée à un cas idéalisé de pont roulant. Nous supposons que le point de suspension se déplace dans un plan horizontal, et qu'il est commandé selon deux directions orthogonales. Par ailleurs, nous ne tenons pas compte des frottements et nous négligeons la dynamique du câble. Sous ces conditions, les commandes que nous calculons vérifient les conditions suivantes :

- elles font suivre à la charge un chemin imposé ;
- elles respectent les conditions de rendez-vous imposées ;
- elles sont continues, quitte à les remplacer ultérieurement par une commande discrète équivalente comme indiqué en [Desantis et al.94] ;
- elles sont minimales en temps pour le chemin imposé à la charge ;
- elles sont telles qu'en chaque instant les majorations imposées sur les variables du système (toute fonction de la commande, de l'état et de leurs dérivées) sont respectées.

Dans la partie 5.2 nous établissons le modèle de la grue qui permet d'exploiter la platitude du système. Ceci nous permet de mettre en évidence que les coordonnées de la charge sont effectivement une sortie plate du système. Ce modèle peut alors être utilisé pour poser précisément le problème que nous cherchons à résoudre : l'expression des conditions de rendez-vous et la nature des contraintes dynamiques.

FIG. 5.1 - *Système de coordonnées du pont roulant*

Nous voyons alors en 5.3 comment définir le chemin suivi par la charge. Les courbes paramétrées, qui convenaient parfaitement dans le cas du satellite, présentent ici quelques inconvénients. Nous restreignons donc l'étude du calcul de la trajectoire optimale, faite en 5.4, aux chemins définis par des courbes implicites. Enfin, pour expliciter et valider l'application de la méthode générale sur ce problème, nous proposons en 5.5 un exemple numérique.

5.2 Définition du problème

5.2.1 Modélisation de la grue

Dans le cas de la grue, la sortie plate est la position de la charge. Nous nous plaçons dans un repère cartésien dont l'origine est notée O . Les vecteurs de base \mathbf{x} et \mathbf{y} sont dans un plan horizontal, le vecteur de base \mathbf{z} , vertical, est orienté vers le haut. Si nous notons x , y et z les coordonnées cartésiennes de la charge, on peut en déduire immédiatement la force \mathbf{F} exercée sur la charge et son module F . D'une part, il y a l'accélération due au mouvement, d'autre part il y a l'accélération de la pesanteur g . Si on note m la masse de la charge, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m (\ddot{x}\mathbf{x} + \ddot{y}\mathbf{y} + (\ddot{z} - g)\mathbf{z}) \\ F &= m \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + (\ddot{z} - g)^2} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Nous négligerons la dynamique du câble ; \mathbf{F} est donc colinéaire au câble et le chariot évolue dans le plan horizontal $z = 0$. Il se trouve donc à l'intersection de ce plan avec la droite de direction \mathbf{F} , passant par la masse m . Nous en déduisons les coordonnées d_x

et d_y du chariot :

$$d_x = x - z \frac{\ddot{x}}{\ddot{z} - g} \qquad d_y = y - z \frac{\ddot{y}}{\ddot{z} - g} \qquad (5.2)$$

Connaissant la position du chariot et la position de la charge, on en déduit la longueur l du câble :

$$l = \frac{-z}{\ddot{z} - g} \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + (\ddot{z} - g)^2} \qquad (5.3)$$

On en déduit enfin θ et ψ représentant respectivement l'angle du câble avec la verticale et l'angle de la projection du câble dans le plan horizontal avec la direction y :

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{l}\right) \qquad \psi = \arccos\left(-\frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}}\right) \qquad (5.4)$$

Toutes ces expressions nous permettent de faire le lien avec une représentation habituelle du système sous la forme $\dot{X} = F(X, U)$ (par exemple [AG et al.95]) où la commande U a pour composantes :

$$U_1 = \ddot{d}_x \qquad U_2 = \ddot{d}_y \qquad U_3 = \ddot{l}$$

et où l'état X admet les 10 composantes suivantes :

$$\begin{array}{ll} X_1 = d_x & X_2 = \dot{d}_x \\ X_3 = d_y & X_4 = \dot{d}_y \\ X_5 = \theta & X_6 = \dot{\theta} \\ X_7 = \psi & X_8 = \dot{\psi} \\ X_9 = l & X_{10} = \dot{l} \end{array}$$

Ainsi, la commande U et l'état X sont bien des fonctions de la sortie plate $Y = (x, y, z)^T$ et d'un nombre fini de ses dérivées (précisément 4). Inversement, on peut exprimer les composantes de la sortie plate en fonction de X , \dot{X} , U et \dot{U} . En effet, de (5.4) on déduit directement :

$$z = l \cos \theta \qquad (5.5)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$z = X_9 \cos(X_5) \qquad (5.6)$$

On peut utiliser les expressions de θ et de ψ , établies en (5.4), pour calculer \ddot{x} et \ddot{y} :

$$\ddot{x}^2 = \tan^2 \theta \sin^2 \psi (\ddot{z} - g)^2 \qquad \ddot{y}^2 = \tan^2 \theta \cos^2 \psi (\ddot{z} - g)^2$$

Ceci nous permet d'éliminer \ddot{x} , \ddot{y} et \ddot{z} dans les expressions de d_x et d_y , établies en (5.2). On obtient alors :

$$d_x = x - l \sin \theta \sin \psi \qquad d_y = y - l \sin \theta \cos \psi$$

	Instant initial $t = 0$	Instant final $t = T$
Charge		
<i>Position</i>	$x(0) = x_i \quad y(0) = y_i \quad z(0) = z_i$	$x(T) = x_f \quad y(T) = y_f \quad z(T) = z_f$
<i>Vitesse</i>	$\dot{x}(0) = \dot{x}_i \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_i \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_i$	$\dot{x}(T) = \dot{x}_f \quad \dot{y}(T) = \dot{y}_f \quad \dot{z}(T) = \dot{z}_f$
Chariot		
<i>Position</i>	$d_x(0) = d_{x_i} \quad d_y(0) = d_{y_i}$	$d_x(T) = d_{x_f} \quad d_y(T) = d_{y_f}$
<i>Vitesse</i>	$\dot{d}_x(0) = \dot{d}_{x_i} \quad \dot{d}_y(0) = \dot{d}_{y_i}$	$\dot{d}_x(T) = \dot{d}_{x_f} \quad \dot{d}_y(T) = \dot{d}_{y_f}$
<i>Accélération</i>	$\ddot{d}_x(0) = \ddot{d}_{x_i} \quad \ddot{d}_y(0) = \ddot{d}_{y_i}$	$\ddot{d}_x(T) = \ddot{d}_{x_f} \quad \ddot{d}_y(T) = \ddot{d}_{y_f}$
Câble		
<i>Accélération</i>	$\ddot{l}(0) = \ddot{l}_i$	$\ddot{l}(T) = \ddot{l}_f$

TAB. 5.1 - Conditions de rendez-vous

On en déduit les expressions de x et de y en fonction des composantes de X :

$$x = X_1 + X_9 \sin(X_5) \sin(X_7) \quad y = X_3 + X_9 \sin(X_5) \cos(X_7) \quad (5.7)$$

Ainsi, les équations (5.6) et (5.7) donnent explicitement les expressions de x , y et z en fonction des composantes de la variable d'état X , ce qui permet de passer facilement de l'un des formalismes à l'autre.

5.2.2 Définition du rendez-vous

Dans le cas de la grue, les éléments les plus susceptibles d'apparaître dans la définition du rendez-vous sont : la position de la charge (x, y, z), la position du chariot (d_x, d_y) et la longueur l du câble. On peut imposer les valeurs de chacun de ces éléments, à l'instant initial $t = 0$ et à l'instant final $t = T$, mais aussi les valeurs de leurs deux premières dérivées.

Pour assurer la cohérence de l'ensemble des conditions de rendez-vous, il ne faut pas imposer simultanément toutes ces conditions. Notre choix, résumé dans le tableau (5.1) s'est porté sur des éléments faciles à mesurer : d'une part, la position et la vitesse de la charge, selon chacune des directions x , y et z , d'autre part, la position, la vitesse et l'accélération du chariot, et enfin, la dérivée seconde de la longueur du câble.

D'autres choix auraient pu être faits, l'essentiel étant de respecter la cohérence de l'ensemble des conditions de rendez-vous. Par exemple, dans le tableau (5.1) nous n'avons pas fait apparaître l et \dot{l} car leurs valeurs sont imposées par les valeurs données à la position et à la vitesse de la charge et du chariot.

5.2.3 Définition des contraintes dynamiques

Dans la plupart des travaux réalisés sur la commande optimale de la grue, seule la commande est bornée. Pour les modèles les plus proches des réalisations industrielles, les contraintes concernent alors la vitesse du chariot et du treuil ([Hamalainen et al.95] et [Li et al.93]). Lorsque le modèle utilisé privilégie la précision de la commande, les contraintes concernent plutôt les accélérations ([Marttinen et al.87]). Dans les cas où

Centre de gravité selon la direction x			
$ x_G \leq M_x$	$ \dot{x}_G \leq \dot{M}_x$	$ \ddot{x}_G \leq \ddot{M}_x$	$ \ddot{x}_G \leq \ddot{M}_x$
Centre de gravité selon la direction y			
$ y_G \leq M_y$	$ \dot{y}_G \leq \dot{M}_y$	$ \ddot{y}_G \leq \ddot{M}_y$	$ \ddot{y}_G \leq \ddot{M}_y$
Tension du câble			
$0 < F \leq M_F$	$ \dot{F} \leq \dot{M}_F$	$ \ddot{F} \leq \ddot{M}_F$	$ \ddot{F} \leq \ddot{M}_F$

TAB. 5.2 - Contraintes dynamiques

des contraintes sur l'état du système sont prises en compte, on aboutit à des solutions qui bornent les vitesses et les accélérations ([AG et al.95]).

Or, des contraintes de ce type ne sont pas toujours suffisantes pour aboutir à une commande efficace et fiable. D'une part elles ne prennent pas réellement en compte les limitations matérielles de la grue, d'autre part les mouvements du chariot restent encore trop brusques et ils risquent d'engendrer des vibrations dans le câble. Bien que des solutions aient été proposées pour stabiliser de telles perturbations, entre autres dans [dN et al.94] et [Joshi et al.95], il s'agit d'un problème difficile à résoudre et la stabilisation n'est effective que si l'angle θ reste faible. Cette dernière condition n'étant pas toujours cohérente avec l'idée de commande optimale en temps, nous préférons faire en sorte de ne pas générer de vibrations en commandant le système.

Pour prendre en compte ces éléments, introduisons deux variables supplémentaires x_G et y_G définies ainsi :

- x_G est la position, selon x du centre de gravité de l'ensemble chariot/masse ;
- y_G est la position, selon y du centre de gravité de l'ensemble flèche/chariot/masse.

Les expressions de ces deux nouvelles variables sont faciles à établir. Si on note m_x la masse du chariot et m_y la masse totale du chariot et de la flèche, on obtient :

$$x_G = \frac{m x + m_x d_x}{m + m_x} \qquad y_G = \frac{m y + m_y d_y}{m + m_y}$$

En développant les expressions de d_x et d_y données en (5.2), on obtient :

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{m_x}{m + m_x} & c_y &= \frac{m_y}{m + m_y} \\ x_G &= x + c_x \frac{z \ddot{x}}{\ddot{z} - g} & y_G &= y + c_y \frac{z \ddot{y}}{\ddot{z} - g} \end{aligned} \qquad (5.8)$$

Les deux constantes c_x et c_y ayant été introduites pour alléger les expressions. Si nous nous reportons aux expressions de d_x et d_y données en (5.2), nous constatons qu'elles sont semblables, à une constante près (c_x et c_y) aux expressions obtenues pour x_G et y_G . Cette remarque met en évidence le fait qu'il est équivalent, du point de vue des calculs, de prendre en compte les contraintes dynamiques sur la position du chariot et ses dérivées, ou sur la position du centre de gravité de l'ensemble chariot/masse, comme nous avons choisi de le faire.

Avec ces deux nouvelles variables, on peut définir les contraintes dynamiques résumées dans le tableau (5.2). Il faut noter que les valeurs des maximums indiqués peuvent dépendre des valeurs de m , m_x et m_y . N'importe quelle autre variable aurait pu être prise en compte. En particulier, la longueur du câble l ou l'angle qu'il fait avec la verticale.

Remarque 5.2.1 *Les variables du système prises en compte dans les contraintes dynamiques ne doivent pas nécessairement être accessibles à la mesure. Il n'est pas nécessaire non plus qu'elles soient directement commandables. Il suffit qu'elles soient représentatives des limites physiques du système. Il n'est même pas nécessaire de savoir les évaluer précisément. En particulier, les calculs peuvent être effectués avec une approximation pessimiste de la valeur de m : si sa valeur est sur-estimée on ne fera que diminuer le rendement de la grue.*

5.2.4 Continuité et dérivabilité

Les contraintes dynamiques, telles qu'elles sont définies dans le tableau (5.2), imposent aux variables x_G , y_G et F d'être de classe C^3 par morceaux. Or chacune de ces variables dépend explicitement de la sortie plate (x, y, z) et de sa dérivée seconde ; il faut donc que les dérivées secondes de la sortie plate, \ddot{x} , \ddot{y} et \ddot{z} , soient elles-mêmes de classe C^3 par morceaux, donc x , y et z doivent être C^5 par morceaux.

Il faut noter que toutes les variables qui ont été définies en 5.2.1 dépendent de la sortie plate et de sa dérivée seconde, elles seront donc toutes de classe C^3 par morceaux.

5.3 Planification de trajectoire

5.3.1 Calcul des conditions de jets

Les conditions de rendez-vous, données dans le tableau (5.1), ne fixent pas toutes directement des conditions sur les coordonnées de la charge et de ses dérivées. Nous allons donc établir les relations permettant de calculer les jets sur x , y et z , à partir des conditions de rendez-vous.

Commençons par établir les expressions de \ddot{x} , $\dot{\ddot{x}}$ et $\ddot{\ddot{x}}$ à partir de l'expression de d_x , donnée en (5.2), et de ses deux premières dérivées \dot{d}_x et \ddot{d}_x :

$$\ddot{x} = (x - d_x) \frac{\ddot{z} - g}{z} \quad (5.9)$$

$$\dot{\ddot{x}} = (\dot{x} - \dot{d}_x) \frac{\ddot{z} - g}{z} + (x - d_x) \frac{\dot{\ddot{z}}}{z} - \ddot{x} \frac{\dot{z}}{z} \quad (5.10)$$

$$\ddot{\ddot{x}} = (\ddot{x} - \ddot{d}_x) \frac{\ddot{z} - g}{z} + 2(\dot{x} - \dot{d}_x) \dot{\ddot{z}} + (x - d_x) \frac{\ddot{\ddot{z}}}{z} - 2\dot{z}\ddot{x} - \ddot{z}\dot{x} \quad (5.11)$$

De même, on peut établir les expressions de \ddot{y} , $\dot{\ddot{y}}$ et $\ddot{\ddot{y}}$ à partir de l'expression de d_y et de ses deux premières dérivées \dot{d}_y et \ddot{d}_y :

$$\ddot{y} = (y - d_y) \frac{\ddot{z} - g}{z} \quad (5.12)$$

$$\dot{\ddot{y}} = (\dot{y} - \dot{d}_y) \frac{\ddot{z} - g}{z} + (y - d_y) \frac{\dot{\ddot{z}}}{z} - \ddot{y} \frac{\dot{z}}{z} \quad (5.13)$$

$$\ddot{\ddot{y}} = (\ddot{y} - \ddot{d}_y) \frac{\ddot{z} - g}{z} + 2(\dot{y} - \dot{d}_y) \dot{\ddot{z}} + (y - d_y) \frac{\ddot{\ddot{z}}}{z} - 2\dot{z}\ddot{y} - \ddot{z}\dot{y} \quad (5.14)$$

Conditions initiales				
$x(0) = x_i$	$\dot{x}(0) = \dot{x}_i$	$\ddot{x}(0) = \ddot{x}_i$	$\overset{\cdot\cdot}{x}(0) = \overset{\cdot\cdot}{x}_i$	$\overset{\cdot\cdot\cdot}{x}(0) = \overset{\cdot\cdot\cdot}{x}_i$
$y(0) = y_i$	$\dot{y}(0) = \dot{y}_i$	$\ddot{y}(0) = \ddot{y}_i$	$\overset{\cdot\cdot}{y}(0) = \overset{\cdot\cdot}{y}_i$	$\overset{\cdot\cdot\cdot}{y}(0) = \overset{\cdot\cdot\cdot}{y}_i$
$z(0) = z_i$	$\dot{z}(0) = \dot{z}_i$	$\ddot{z}(0) = \ddot{z}_i$		
Conditions finales				
$x(T) = x_f$	$\dot{x}(T) = \dot{x}_f$	$\ddot{x}(T) = \ddot{x}_f$	$\overset{\cdot\cdot}{x}(T) = \overset{\cdot\cdot}{x}_f$	$\overset{\cdot\cdot\cdot}{x}(T) = \overset{\cdot\cdot\cdot}{x}_f$
$y(T) = y_f$	$\dot{y}(T) = \dot{y}_f$	$\ddot{y}(T) = \ddot{y}_f$	$\overset{\cdot\cdot}{y}(T) = \overset{\cdot\cdot}{y}_f$	$\overset{\cdot\cdot\cdot}{y}(T) = \overset{\cdot\cdot\cdot}{y}_f$
$z(T) = z_f$	$\dot{z}(T) = \dot{z}_f$	$\ddot{z}(T) = \ddot{z}_f$		

TAB. 5.3 - Conditions de jets

Par ailleurs, la longueur l du câble est calculée en fonction de la position de la charge et de la position du chariot, par l'expression :

$$l = \sqrt{(x - d_x)^2 + (y - d_y)^2 + z^2} \quad (5.15)$$

En dérivant, on obtient l'expression de \dot{l} et de \ddot{l} :

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \frac{1}{l} \left((x - d_x)(\dot{x} - \dot{d}_x) + (y - d_y)(\dot{y} - \dot{d}_y) + z\dot{z} \right) \\ \ddot{l} &= \frac{1}{l} \left((\dot{x} - \dot{d}_x)^2 + (\dot{y} - \dot{d}_y)^2 + \dot{z}^2 - \ddot{d}_x(x - d_x) - \ddot{d}_y(y - d_y) \right) \\ &\quad + \frac{1}{l} \left(\ddot{x}(x - d_x) + \ddot{y}(y - d_y) + z\ddot{z} - \dot{l}^2 \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

En remplaçant, dans l'expression de \ddot{l} , \ddot{x} et \ddot{y} par les expressions (5.9) et (5.12) respectivement, et en utilisant (5.15), on obtient :

$$\begin{aligned} \ddot{l} &= \frac{1}{l} \left((\dot{x} - \dot{d}_x)^2 + (\dot{y} - \dot{d}_y)^2 + \dot{z}^2 - \ddot{d}_x(x - d_x) - \ddot{d}_y(y - d_y) \right) \\ &\quad + \frac{gz - \dot{l}^2}{l} + \frac{\ddot{z} - g}{z} l \end{aligned} \quad (5.17)$$

Or, les conditions de rendez-vous permettent de calculer l et \dot{l} à l'instant initial $t = 0$ et à l'instant final $t = T$. Étant donné que les valeurs de \ddot{l} sont imposées en chacun de ces instants, l'expression (5.17) nous permet de calculer les valeurs de $\ddot{z}(0) = \ddot{z}_i$ et $\ddot{z}(T) = \ddot{z}_f$ en utilisant la relation :

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= g + z \frac{\ddot{l}}{l} + \frac{z}{l^2} \left(\ddot{d}_x(x - d_x) + \ddot{d}_y(y - d_y) - gz + \dot{l}^2 \right) \\ &\quad - \frac{z}{l^2} \left((\dot{x} - \dot{d}_x)^2 + (\dot{y} - \dot{d}_y)^2 + \dot{z}^2 \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ainsi, les expressions (5.9), (5.12) et (5.18) montrent que les conditions de rendez-vous définissent entièrement les conditions de jets sur la sortie plate, jusqu'à l'ordre 2. Les jets d'ordre 3 et 4 sont partiellement définis : les relations (5.10), (5.11), (5.13) et (5.14) définissent les valeurs de $\overset{\cdot\cdot}{x}$, $\overset{\cdot\cdot}{y}$, $\overset{\cdot\cdot\cdot}{x}$ et $\overset{\cdot\cdot\cdot}{y}$ en fonction de \ddot{z} et $\overset{\cdot\cdot}{z}$; il faut donc

choisir les valeurs de $\ddot{z}(0) = \ddot{z}_i$, $\dot{\ddot{z}}(0) = \dot{\ddot{z}}_i$, $\ddot{z}(T) = \ddot{z}_f$ et $\dot{\ddot{z}}(T) = \dot{\ddot{z}}_f$, pour que les jets d'ordre 4 soient entièrement définis. Les conditions de rendez-vous du tableau (5.1) se traduisent donc par les conditions de jets indiquées dans le tableau (5.3), ces conditions devant être complétées avec les jets d'ordre 3 et 4 sur z .

5.3.2 Calcul d'un chemin paramétrique

Une fois que les conditions de rendez-vous ont toutes été converties en conditions de jets sur la sortie plate, il suffit de choisir une trajectoire de la charge qui vérifie ces conditions de jets. Cette solution proposée par [Rouchon94, Fliess et al.95b] a un léger inconvénient : le degré des polynômes est relativement élevé. En effet, les conditions de jets sont à l'ordre quatre ; pour réaliser le rendez-vous avec un seul polynôme pour chacune des composantes x , y et z , il faut chercher une solution de degré 9.

Pour réduire le degré de la solution, on peut définir le chemin en prenant x , y et z polynomiaux par morceaux. Dans ce cas, il faut des polynômes de degré supérieur ou égal à 4. Cette solution s'impose d'ailleurs pour obtenir un mouvement de la charge qui soit réellement vertical. L'avantage d'une telle solution est de permettre une définition très précise du chemin suivi par la charge. En particulier, on peut très facilement construire des chemins composés de segments de droite raccordés par des courbes très régulières.

Nous ne détaillons pas cette solution car la méthode est très proche de celle employée dans le cas du satellite.

5.3.3 Calcul d'un chemin implicite

Les conditions de jets indiquées dans le tableau (5.3) vont jusqu'à l'ordre 4, il faut donc définir un chemin implicite qui prenne en compte les dérivées de x , y et z jusqu'à l'ordre 4. Ce chemin est défini par deux expressions algébriques en x , y et z , notées $A = \lambda a$ et $B = \lambda b$, où λ est un vecteur ligne $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ de monomes en x , y et z ; $a \in \mathbf{R}^n$ et $b \in \mathbf{R}^n$ étant les vecteurs colonnes de coefficients inconnus.

Pour prendre en compte les conditions de jets jusqu'à l'ordre 4, il faut dériver 4 fois chacune de ces expressions, on aboutit donc à 10 équations qui doivent être vérifiées à l'instant initial et 10 autres qui doivent être vérifiées à l'instant final. Au total on a donc 20 équations, il faut donc que chacune des expressions A et B soit définie avec 10 paramètres, ce qui est possible avec des quadriques. On a alors :

$$\lambda = (1, x, y, z, xy, xz, yz, x^2, y^2, z^2) \quad (5.19)$$

$$a = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9) \quad (5.20)$$

$$b = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9) \quad (5.21)$$

Ainsi, les relations A et B s'écrivent :

$$A = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x^2 + a_8y^2 + a_9z^2$$

$$B = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4xy + b_5xz + b_6yz + b_7x^2 + b_8y^2 + b_9z^2$$

Il faut alors calculer les dérivées successives λ :

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= (0, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{x}y + x\dot{y}, \dot{x}z + x\dot{z}, \dot{y}z + y\dot{z}, 2\dot{x}x, 2\dot{y}y, 2\dot{z}z) \\ \ddot{\lambda} &= (0, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{x}y + x\ddot{y} + 2\dot{x}\dot{y}, \ddot{x}z + x\ddot{z} + 2\dot{x}\dot{z}, \ddot{y}z + y\ddot{z} + 2\dot{y}\dot{z}, \\ &\quad 2\ddot{x}x + 2\dot{x}^2, 2\ddot{y}y + 2\dot{y}^2, 2\ddot{z}z + 2\dot{z}^2) \\ \dddot{\lambda} &= (0, \dddot{x}, \dddot{y}, \dddot{z}, \dddot{x}y + x\dddot{y} + 3\ddot{x}\dot{y} + 3\dot{x}\ddot{y}, \dddot{x}z + x\dddot{z} + 3\ddot{x}\dot{z} + 3\dot{x}\ddot{z}, \\ &\quad \dddot{y}z + y\dddot{z} + 3\ddot{y}\dot{z} + 3\dot{y}\ddot{z}, 2\ddot{x}x + 6\dot{x}\dot{x}, 2\ddot{y}y + 6\dot{y}\dot{y}, 2\ddot{z}z + 6\dot{z}\dot{z}) \\ \lambda^{(4)} &= (0, \lambda^{(4)}_x, \lambda^{(4)}_y, \lambda^{(4)}_z, \lambda^{(4)}_{xy} + x\lambda^{(4)}_y + 4\ddot{x}\dot{y} + 6\dot{x}\ddot{y} + 4\dot{x}\ddot{y}, \\ &\quad \lambda^{(4)}_{xz} + x\lambda^{(4)}_z + 4\ddot{x}\dot{z} + 6\dot{x}\ddot{z} + 4\dot{x}\ddot{z}, \lambda^{(4)}_{yz} + y\lambda^{(4)}_z + 4\ddot{y}\dot{z} + 6\dot{y}\ddot{z} + 4\dot{y}\ddot{z}, \\ &\quad 2\lambda^{(4)}_{xx} + 8\dot{x}\dot{x} + 6\dot{x}^2, 2\lambda^{(4)}_{yy} + 8\dot{y}\dot{y} + 6\dot{y}^2, 2\lambda^{(4)}_{zz} + 8\dot{z}\dot{z} + 6\dot{z}^2)\end{aligned}$$

On peut alors définir les 5 vecteurs $\lambda_i \in \mathbf{R}^{10}$, $\dot{\lambda}_i \in \mathbf{R}^{10}$, $\ddot{\lambda}_i \in \mathbf{R}^{10}$, $\ddot{\lambda}_i \in \mathbf{R}^{10}$ et $\lambda^{(4)}_i \in \mathbf{R}^{10}$, obtenus à partir de λ , $\dot{\lambda}$, $\ddot{\lambda}$, $\ddot{\lambda}$ et $\lambda^{(4)}$, respectivement, en y remplaçant x , y , z et leurs dérivées par les conditions de jets à l'instant initial. De même, on peut définir λ_f , $\dot{\lambda}_f$, $\ddot{\lambda}_f$, $\ddot{\lambda}_f$ et $\lambda^{(4)}_f$ à partir des conditions de jets à l'instant final. Avec ces 10 vecteurs numériques, on définit les matrices suivantes :

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \dot{\lambda}_i \\ \ddot{\lambda}_i \\ \ddot{\lambda}_i \\ \lambda^{(4)}_i \\ \lambda_i \end{pmatrix} \quad \Lambda_f = \begin{pmatrix} \lambda_f \\ \dot{\lambda}_f \\ \ddot{\lambda}_f \\ \ddot{\lambda}_f \\ \lambda^{(4)}_f \\ \lambda_f \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_i \\ \Lambda_f \end{pmatrix}$$

Pour calculer les coefficients a_i et b_i , il suffit de résoudre les deux systèmes d'équations linéaires $\Lambda a = 0$ et $\Lambda b = 0$. Ces systèmes n'admettent pas nécessairement une solution unique, en particulier dans les cas où la charge est immobile à l'instant initial et à l'instant final. Il faut donc une méthode qui permette de choisir « correctement » les paramètres libres, par exemple celle suggérée en 3.5.1, qui consiste à fixer un maximum de coefficients à 0, tout en conservant une composante connexe qui relie les deux points.

Lorsque la charge est immobile à l'instant initial, on souhaite généralement que la direction initiale du mouvement soit verticale, pour éviter de traîner la charge au sol, or ceci n'apparaît pas dans les équations. Ce point peut être réglé en supposant que les valeurs de \ddot{z} et \ddot{z} ne sont pas toutes les deux nulles. Dans ce cas, en tenant compte du fait que toutes les dérivées de x et y sont nulles, l'équation $\ddot{\lambda} a = 0$ devient :

$$a_3 \ddot{z} + a_5 x \ddot{z} + a_6 y \ddot{z} + 2a_9 z \ddot{z} = 0$$

De même, l'équation $\lambda^{(4)} a = 0$ peut s'écrire :

$$a_3 \ddot{z} + a_5 x \ddot{z} + a_6 y \ddot{z} + 2a_9 z \ddot{z} = 0$$

Si on suppose que $\ddot{z} \neq 0$ ou $\ddot{z} \neq 0$, on peut remplacer ces équations par :

$$a_3 + a_5 x + a_6 y + 2a_9 z = 0$$

Une démarche identique peut être appliquée pour les équations $\ddot{\lambda} b = 0$ et $\lambda^{(4)} b = 0$.

En définitive, pour traduire le fait que la direction initiale du mouvement de la charge est verticale, alors que la charge est initialement immobile, il suffit d'ajouter au système d'équations (5.3.3) les équations :

$$\begin{aligned} a_3 + a_5x_i + a_6y_i + 2a_9z_i &= 0 \\ b_3 + b_5x_i + b_6y_i + 2b_9z_i &= 0 \end{aligned}$$

De même, pour traduire la situation analogue, à l'instant final, il faut ajouter au système les équations :

$$\begin{aligned} a_3 + a_5x_f + a_6y_f + 2a_9z_f &= 0 \\ b_3 + b_5x_f + b_6y_f + 2b_9z_f &= 0 \end{aligned}$$

Les autres coefficients peuvent être obtenus de différentes façons, en particulier en fixant des conditions supplémentaires sur le chemin suivi. Par exemple, on peut imposer au chemin d'atteindre son altitude maximale en un point donné, ou chercher à contourner des obstacles. La dernière solution consiste à choisir arbitrairement les valeurs des coefficients restants. Ceci est particulièrement intéressant pour linéariser chacune des équations $\lambda a = 0$ et $\lambda b = 0$, par rapport à une ou deux variables, ce qui réduit considérablement la complexité des calculs. Une fois que tous les coefficients ont été fixés, il reste à choisir la partie de la courbe qui convient, ce qui se fait en imposant des bornes sur x , y et z . Un exemple complet est étudié en 5.5 pour illustrer cette démarche.

5.4 Trajectoire optimale

5.4.1 Calcul de la trajectoire

Les deux équations $\dot{\lambda}a = 0$ et $\dot{\lambda}b = 0$ sont linéaires en \dot{x} , \dot{y} et \dot{z} , on peut donc facilement exprimer deux de ces variables en fonction de la troisième, si la matrice jacobienne correspondante n'est pas singulière. Supposons que ce soit le cas et qu'on puisse exprimer \dot{x} et \dot{y} en fonction de \dot{z} , on obtient alors :

$$\dot{x} = \frac{P_x(x, y, z)}{D(x, y, z)} \dot{z} \quad \dot{y} = \frac{P_y(x, y, z)}{D(x, y, z)} \dot{z}$$

où $P_x(x, y, z)$, $P_y(x, y, z)$ et $D(x, y, z)$ sont des polynômes de degré 2 en x , y et z .

De même, les équations $\ddot{\lambda}a = 0$ et $\ddot{\lambda}b = 0$ sont linéaires en \ddot{x} , \ddot{y} et \ddot{z} ; en prenant les précautions suffisantes, on peut donc écrire :

$$\ddot{x} = \frac{Q_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{D(x, y, z)} + \frac{P_x(x, y, z)}{D(x, y, z)} \ddot{z} \quad \ddot{y} = \frac{Q_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{D(x, y, z)} + \frac{P_y(x, y, z)}{D(x, y, z)} \ddot{z} \quad (5.22)$$

où $Q_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ et $Q_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ sont des polynômes de degré 3 en x , y , z , \dot{x} , \dot{y} et \dot{z} .

On peut alors utiliser ces relations pour calculer la trajectoire de la sortie plate $(x(t), y(t), z(t))$, à partir de l'une des variables du système, x_G par exemple. Pour cela, il suffit de réaliser les calculs de proche en proche de la façon suivante :

- on suppose que $x_G(t_0)$ et $x_G(t_0 + \epsilon)$ sont connus ;

- de même, on suppose que la position, la vitesse et l'accélération de la charge sont connues en t_0 ;
- en utilisant une formule d'approximation, on calcule la position et la vitesse de la charge en $t_0 + \epsilon$;
- les expressions données en (5.22) permettent alors de calculer \ddot{x} et \ddot{y} , en fonction de \ddot{z} en t_0 ;
- en remplaçant dans l'expression de x_G , donnée en (5.8), x par $x(t_0 + \epsilon)$, z par $z(t_0 + \epsilon)$, et \ddot{x} par son expression en fonction de \ddot{z} , on obtient une équation linéaire dont l'inconnue est $\ddot{z}(t_0 + \epsilon)$ qui peut ainsi être calculée ;
- on peut alors calculer $\ddot{x}(t_0 + \epsilon)$ et $\ddot{y}(t_0 + \epsilon)$ en remplaçant \ddot{z} par $\ddot{z}(t_0 + \epsilon)$ dans (5.22).

Il suffit donc de savoir calculer x_G en chaque instant pour pouvoir obtenir la trajectoire souhaitée. C'est le problème que nous abordons maintenant.

5.4.2 Saturation d'une seule variable

La première étape du calcul de la loi horaire optimale, consiste à se restreindre à une seule variable du système, et à calculer la loi horaire optimale pour cette variable uniquement. Pour présenter la méthode dans le cas de la grue, nous introduisons une notation qui permet de prendre en compte n'importe laquelle des contraintes dynamiques indiquées dans le tableau (5.2). Nous noterons $v(t)$, une fonction du temps représentant l'une des variables x_G , y_G ou F . Les bornes imposées à ces variables seront alors traduites par les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \min_0 &\leq v(t) \leq \max_0 \\ \min_i &\leq \frac{d^i}{dt^i} v(t) \leq \max_i \quad 1 < i < 3 \end{aligned}$$

où les valeurs de \min_i et \max_i sont les bornes qui apparaissent dans le tableau (5.2).

Dans ce qui suit, nous cherchons à calculer une trajectoire de la sortie plate telle que la fonction $v(t)$ soit polynomiale par morceaux. En particulier, chacun des polynômes sera tel que sa dernière dérivée non nulle soit égale à l'une des contraintes imposées à la variable, pour cet ordre de dérivation. Ainsi, pour un polynôme de degré i , sa dérivée d'ordre i sera égale à \min_i ou à \max_i , comme nous l'avons établi en 3.6.1.

Globalement, la démarche est la même que celle déjà présentée dans le cas du satellite : on commence par construire un modèle polynomial par morceaux qui ne sature que les contraintes sur la dérivée 3^e, puis on insère des paliers de saturation d'ordre inférieur, là où c'est nécessaire. Deux difficultés supplémentaires apparaissent par rapport au cas du satellite : les polynômes utilisés sont de degré 3, au lieu de 2, et les variables ne sont plus proportionnelles à la vitesse le long du chemin choisi.

Contraintes sur la dérivée 3^e

Pour commencer, nous construisons une variable $v(t)$, polynomiale par morceaux, telle que chacun des polynômes soit de degré 3, la dérivée 3^e de chacun des polynômes étant égale à min_3 ou à Max_3 . La variable $v(t)$ doit être telle que :

1. les conditions de rendez-vous définies dans le tableau (5.1) sont vérifiées ;
2. les raccords entre les polynômes sont de classe C^2 ;
3. la charge suit effectivement le chemin imposé.

S'il n'y avait que les deux premiers éléments, nous en déduirions facilement que le nombre minimal de polynômes nécessaires pour définir $v(t)$ est 3. Or le fait que la trajectoire suivie par la charge soit imposée introduit de nouvelles contraintes ; la méthode de calcul donnée en 3.7.2 nous indique qu'il faut ajouter 2 polynômes pour tenir compte du fait que chacune des variables x_G , y_G et F dépend de la dérivée seconde de la sortie plate.

Contraintes sur les autres dérivées

La construction précédente ne tient compte que des contraintes sur la dérivée 3^e de la fonction $v(t)$. Il faut donc s'attendre à ce que les contraintes sur les dérivées d'ordre $i < 3$ ne soient pas vérifiées. Pour traiter ce cas, il suffit d'ajouter des polynômes de degré moindre comme indiqué en 3.7.2.

Dans ce cas particulier, on peut avoir trois types de paliers de saturation : en « position » (saturation sur $v(t)$), en « vitesse » (saturation sur $\dot{v}(t)$) ou en « accélération » (saturation sur $\ddot{v}(t)$). Au total on peut donc avoir 16 modèles différents. La méthode qui consiste à tous les calculer et à ne retenir que celui qui convient est fort coûteuse. Il est donc particulièrement rentable ici de mettre en place une stratégie de calcul qui permette d'aboutir le plus rapidement possible au modèle correct.

Calcul des coefficients des polynômes

Supposons que la variable $v(t)$ soit composée de m polynômes p_k ($1 \leq k \leq m$), définis sur des intervalles $[t_{k-1}, t_k]$. Soit p_0 le polynôme tel que $p_0(0) = v(0)$, $\dot{p}_0(0) = \dot{v}(0)$ et $\ddot{p}_0(0) = \ddot{v}(0)$. Pour calculer les coefficients des polynômes p_k , $1 \leq k \leq m$, il suffit de résoudre itérativement les systèmes d'équations :

$$p_k^{(i)}(t_{k-1}) = p_{k-1}^{(i)}(t_{k-1}) \quad 0 \leq i < 3 \quad (5.23)$$

$$p_k^{(i)}(t_{k-1}) = sat_i \quad i = \deg(p_k) \quad (5.24)$$

Où sat_i prend pour valeur soit min_i , soit Max_i .

Les équations (5.23) traduisent les conditions de continuité de classe C^2 et en réalité elles introduisent des relations entre les dates de commutation lorsque $\deg p_k < i$. Les équations (5.24) indiquent le type de saturation appliqué sur l'intervalle $[t_{k-1}, t_k]$ et fixent la valeur du coefficient de plus haut degré de p_k .

Polynômes de degré 3 Nous ne construirons pas tous les modèles possibles, nous allons simplement donner les équations permettant de construire le modèle pour lequel la saturation ne concerne que les contraintes d'ordre 3. On a alors 5 polynômes de degré 3, notés p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 , $v(t)$ étant alors définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, t_1] \quad v(t) &= p_1(t) = p_{10} + p_{11}t + p_{12}t^2 + \frac{Max_3}{6}t^3 \\ \forall t \in [t_1, t_2] \quad v(t) &= p_2(t) = p_{20} + p_{21}(t - t_1) + p_{22}(t - t_1)^2 + \frac{min_3}{6}(t - t_1)^3 \\ \forall t \in [t_2, t_3] \quad v(t) &= p_3(t) = p_{30} + p_{31}(t - t_2) + p_{32}(t - t_2)^2 + \frac{Max_3}{6}(t - t_2)^3 \\ \forall t \in [t_3, t_4] \quad v(t) &= p_4(t) = p_{40} + p_{41}(t - t_3) + p_{42}(t - t_3)^2 + \frac{min_3}{6}(t - t_3)^3 \\ \forall t \in [t_4, T] \quad v(t) &= p_5(t) = p_{50} + p_{51}(t - t_4) + p_{52}(t - t_4)^2 + \frac{Max_3}{6}(t - t_4)^3 \end{aligned}$$

Connaissant $v(0)$, $\dot{v}(0)$ et $\ddot{v}(0)$, on en déduit :

$$p_{10} = v(0) \qquad p_{11} = \dot{v}(0) \qquad p_{12} = \frac{\ddot{v}(0)}{2}$$

On en déduit alors les valeurs de $v(t_1)$, $\dot{v}(t_1)$ et $\ddot{v}(t_1)$ en fonction de t_1 :

$$\begin{aligned} v(t_1) &= v(0) + \dot{v}(0)t_1 + \frac{\ddot{v}(0)}{2}t_1^2 + \frac{Max_3}{6}t_1^3 \\ \dot{v}(t_1) &= \dot{v}(0) + \ddot{v}(0)t_1 + \frac{Max_3}{2}t_1^2 \\ \ddot{v}(t_1) &= \ddot{v}(0) + Max_3t_1 \end{aligned}$$

En itérant ce procédé on peut facilement calculer les coefficients de p_2, p_3, p_4 et p_5 en fonction des instants de commutation t_1, t_2, t_3 et t_4 .

Calcul des instants de commutation

Il reste à calculer les instants de commutation t_k ($1 \leq k \leq m$). Pour cela nous utilisons les contraintes qui n'ont pas été prises en compte dans les m systèmes donnés en (5.23, 5.24) :

- les valeurs imposées à v, \dot{v} et \ddot{v} à l'instant final $t = t_m$;
- les 2 conditions finales dues au fait que le chemin suivi par la sortie plate est imposé.

Soient $v_f, \dot{v}_f, \ddot{v}_f$ les conditions imposées à $v(t)$ et à ses dérivées à l'instant final $t = t_m$. Ces conditions se traduisent par les équations suivantes :

$$p_m(t_m) = v_f \qquad \dot{p}_m(t_m) = \dot{v}_f \qquad \ddot{p}_m(t_m) = \ddot{v}_f \qquad (5.25)$$

Après avoir résolu les systèmes d'équations (5.23), (5.24) et (5.25), il ne doit rester (par construction) que deux inconnues et il s'agit de deux dates de commutation. On peut même supposer que l'une de ces deux dates est l'instant final $t = T$; l'autre sera

notée t_0 . Ainsi, la fonction $v(t)$ peut être vue comme une fonction paramétrée par t_0 et T , que nous notons $v(t; t_0, T)$. Si on se place dans les cas où v représente la variable x_G , le problème peut se réécrire ainsi :

Trouver les *valeurs* de t_0 et T telles que :

$$v(t; t_0, T) = x(t) - c_x z(t) \frac{\ddot{x}(t)}{\ddot{z}(t) - g} \quad \lambda(t)a = 0 \quad \lambda(t)b = 0$$

et telles que les conditions suivantes soient vérifiées en $t = 0$ et en $t = T$:

$$\begin{array}{llllll} x(0) = x_i & \dot{x}(0) = \dot{x}_i & \ddot{x}(0) = \ddot{x}_i & \ddot{\ddot{x}}(0) = \ddot{\ddot{x}}_i & \ddot{\ddot{\ddot{x}}}(0) = \ddot{\ddot{\ddot{x}}}_i & \\ x(T) = x_f & \dot{x}(T) = \dot{x}_f & \ddot{x}(T) = \ddot{x}_f & \ddot{\ddot{x}}(T) = \ddot{\ddot{x}}_f & \ddot{\ddot{\ddot{x}}}(T) = \ddot{\ddot{\ddot{x}}}_f & \end{array}$$

λ , a et b étant définis respectivement en (5.19), (5.20) et (5.21).

Pour calculer les valeurs de ces 2 paramètres t_0 et T , plusieurs méthodes sont possibles, par exemple :

- fixer des valeurs arbitraires à t_0 et T , calculer la trajectoire $(x(t), y(t), z(t))$ correspondante puis procéder par approximations successives ;
- fixer une trajectoire arbitraire, par exemple polynomiale par morceaux, et la corriger pour minimiser l'erreur sur $v(t)$;
- choisir pour la sortie plate du système, un chemin qui permet d'exploiter des relations supplémentaires. Par exemple, une trajectoire symétrique nous permettra de poser des relations supplémentaires de la forme $t_i - t_{i-1} = t_{m-i+1} - t_{m-i}$ ($0 < i < m/2$).

Les deux premières solutions sont les plus générales, mais elles sont plus longues à calculer que la troisième. Il est possible de combiner ces solutions, comme l'exemple traité en 5.5 le montre : le chemin retenu pour la sortie plate ne nous permet d'établir qu'une seule relation indépendante supplémentaire ; l'un des instants de commutation doit donc être calculé par approximations successives.

5.4.3 Pour plusieurs variables

Maintenant que nous avons vu comment calculer la trajectoire optimale en ne tenant compte que d'une seule variable, nous allons voir comment agencer les calculs pour prendre en compte les autres variables.

À partir de la trajectoire obtenue, on peut calculer toutes les variables du système et détecter s'il y a des contraintes dynamiques qui ne sont pas respectées. Lorsque c'est le cas, cela signifie que sur la portion du chemin de la sortie plate correspondante on a incorrectement choisi la variable à saturer. Il faut alors identifier précisément le point du chemin pour lequel la saturation passe d'une variable à une autre ; pour cette étape nous appliquons la méthode générale proposée en 3.8.

Si les contraintes qui ne sont pas respectées ne concernent que \ddot{w} et $\ddot{\ddot{w}}$, la solution est immédiate : on *change de variable de saturation* exactement à l'instant où le dépassement

est détecté. S'il y a un dépassement des contraintes sur \dot{w} ou sur w , il faut anticiper et prévoir un raccord à l'aide d'un ou deux polynômes de degré 3, pour assurer une jonction de classe C^2 avec le palier de saturation.

Dans ce qui suit, on note t_d l'instant auquel on a détecté le dépassement pour \dot{w} , ou pour w . Les bornes min_0 , et Max_0 désignent maintenant les bornes imposées à w ; min_1 et Max_1 désignent les bornes imposées à \dot{w} . On suppose que le dépassement de la contrainte concerne la borne supérieure, le raisonnement étant identique pour la borne inférieure.

Dépassement sur \dot{w} : Il faut trouver l'instant $t_0 \leq t_d$ pour lequel on peut construire le polynôme p_1 défini par :

$$p_1(t) = w(t_0) + \dot{w}(t_0)(t - t_0) + \frac{\ddot{w}(t_0)}{2} (t - t_0)^2 + \frac{min_3}{6} (t - t_0)^3$$

tel qu'à l'instant t_1 , défini par $\dot{p}_1(t_1) = Max_1$, on ait la condition $\ddot{p}_1(t_1) = 0$, ce qui se réduit à :

$$t_1 = t_0 - \frac{\ddot{w}(t_0)}{min_3} \quad \dot{w}(t_0) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{w}(t_0)}{min_3} = Max_1 \quad (5.26)$$

Pour pouvoir effectuer ce calcul, on prend une approximation de w au voisinage de t_d , par exemple :

$$w(t) \approx \tilde{w}(t) = w(t_d) + \dot{w}(t_d)(t - t_d) + \frac{\ddot{w}(t_d)}{2} (t - t_d)^2 + \frac{\dddot{w}(t_d)}{6} (t - t_d)^3$$

On obtient alors les expressions approchées de $\dot{w}(t_0)$ et $\ddot{w}(t_0)$:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t_0) &= \dot{w}(t_d) + \ddot{w}(t_d)(t_0 - t_d) + \frac{\dddot{w}(t_d)}{2} (t_0 - t_d)^2 \\ \ddot{w}(t_0) &= \ddot{w}(t_d) + \dddot{w}(t_d)(t_0 - t_d) \end{aligned}$$

En reportant ces expressions approchées dans (5.26), on obtient alors une expression approchée de t_0 qui pourra éventuellement être corrigée.

Dépassement sur w : Il faut trouver l'instant $t_0 \leq t_d$ pour lequel on peut construire les deux polynômes p_1 et p_2 définis par :

$$\begin{aligned} p_1(t) &= w(t_0) + \dot{w}(t_0)(t - t_0) + \frac{\ddot{w}(t_0)}{2} (t - t_0)^2 + \frac{min_3}{6} (t - t_0)^3 \\ p_2(t) &= p_1(t_1) + \dot{p}_1(t_1)(t - t_0) + \frac{\ddot{p}_1(t_1)}{2} (t - t_0)^2 + \frac{min_3}{6} (t - t_0)^3 \end{aligned}$$

tel qu'à l'instant t_2 , défini par $p_2(t_2) = Max_0$, on ait les conditions $\dot{p}_2(t_2) = 0$ et $\ddot{p}_2(t_2) = 0$. Une fois ces conditions posées, la démarche est exactement la même que précédemment.

5.5 Exemple

5.5.1 Choix du chemin

Dans cet exemple, nous cherchons à déplacer une charge en lui faisant faire un détour pour contourner un obstacle situé entre le point de départ et le point d'arrivée. Notre objectif est principalement de pouvoir décrire le chemin par des expressions simples, tout en conservant une solution suffisamment générale. Par ailleurs, pour mettre en évidence l'importance du choix du chemin sur la complexité des calculs, nous prenons une courbe symétrique par rapport au plan yz . Cette courbe est l'intersection d'un ellipsoïde et d'un parabolôïde, dont les équations sont :

$$x^2 + z_a^2(z - z_0)^2 = R^2 \quad \text{l'ellipsoïde} \quad (5.27)$$

$$x^2 + y_a y = R^2 \quad \text{le parabolôïde} \quad (5.28)$$

Cette solution pratique permet d'obtenir une grande variété de chemins différents en agissant sur les paramètres suivants :

- R pour faire varier l'amplitude du mouvement selon la direction x ;
- y_a pour faire varier la courbure de la parabole dans le plan xy ;
- z_a qui est inversement proportionnel à l'axe de l'ellipse dessinée dans le plan xz ;
- z_0 qui est l'altitude initiale de la charge (le chariot se déplace dans le plan $z = 0$).

Lorsque le chemin est restreint à la partie $z \geq z_0$, alors y et z peuvent être donnés en fonction de x :

$$y = \frac{R^2 - x^2}{y_a} \quad z = z_0 + \frac{1}{z_a} \sqrt{(R^2 - x^2)} \quad (5.29)$$

On en déduit les expressions des dérivées \dot{y} et \ddot{y} en fonction de x , \dot{x} et \ddot{x} :

$$\dot{y} = -2 \frac{x\dot{x}}{y_a} \quad \ddot{y} = -\frac{2}{y_a} (x\ddot{x} + \dot{x}^2) \quad (5.30)$$

De même, on peut établir les expressions de \dot{z} et \ddot{z} :

$$\dot{z} = -\frac{x\dot{x}}{z_a \sqrt{R^2 - x^2}} \quad \ddot{z} = \frac{-1}{z_a \sqrt{R^2 - x^2}} \left(x\ddot{x} + \frac{\dot{x}^2 R^2}{R^2 - x^2} \right) \quad (5.31)$$

Il suffit d'utiliser ces expressions dans les formules établies en (5.1) et (5.8) pour obtenir les expressions des variables qui nous intéressent x_G , y_G et F .

Nous noterons que pour que la dérivée \dot{z} soit définie en $x = R$, il est nécessaire qu'en ces points $\dot{x} = 0$. Dans ce cas on a aussi $\dot{y} = 0$, ce qui nous assure que la trajectoire est verticale en ces points. Plus généralement, si on souhaite que les n premières dérivées de z soient définies en $x = R$, il est nécessaire que les n premières dérivées de x (donc de y) soient nulles.

5.5.2 Calcul de la trajectoire

Étant donné que les mécanismes permettant de faire passer la saturation d'une variable à une autre ne posent aucune difficulté et qu'ils sont très proches de ceux qui permettent de construire une variable saturée, nous limitons le calcul de la trajectoire optimale au cas de la variable x_G . Pour cette variable, nous montrons comment construire la variable polynomiale par morceaux qui sature les contraintes, comment calculer la trajectoire correspondante et comment insérer des paliers de saturation lorsque des contraintes ne sont pas respectées sur un modèle.

Pour pouvoir effectuer les calculs, nous utilisons les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 g = 10 & m = 1000 & m_x = 1000 \\
 c_x = 0.5 & z_0 = -10 & z_a = 2 \\
 R = 10 & \ddot{M}_x = 1 & \ddot{\dot{M}}_x = 1
 \end{array}$$

La première étape consiste à calculer la trajectoire optimale en supposant que la saturation ne concerne que la dérivée troisième \ddot{x}_G . Dans ce cas, $x_G(t)$ est une fonction polynomiale par morceaux, comportant 5 polynômes de degré 3, tels que $|\ddot{x}_G(t)| = \ddot{\dot{M}}_x$. Ces 5 polynômes, notés x_{1G} , x_{2G} , x_{3G} , x_{4G} et x_{5G} sont définis respectivement sur les intervalles $[t_0 = 0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, $[t_3, t_4]$ et $[t_4, t_5]$ par :

$$\begin{aligned}
 x_{iG}(t) &= a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2 - (-1)^i \frac{\ddot{\dot{M}}_x}{6} t^3 \\
 \dot{x}_{iG}(t) &= a_{i1} + 2a_{i2}t - (-1)^i \frac{\ddot{\dot{M}}_x}{2} t^2 \\
 \ddot{x}_{iG}(t) &= 2a_{i2} - (-1)^i \ddot{\dot{M}}_x t
 \end{aligned}$$

Le polynôme x_{1G} est déterminé par les conditions initiales. À l'instant initial, le câble est vertical, la masse et le chariot ont une vitesse et une accélération nulles, on a donc :

$$\tilde{x}_{1G}(t) = -R + \frac{1}{6} \ddot{\dot{M}}_x t^3$$

Pour déterminer les 12 autres coefficients a_{i0} , a_{i1} et a_{i2} ($1 < i \leq 5$), nous utilisons le fait que les raccords entre les polynômes doivent être de classe C^2 . Ceci nous donne les 12 relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_{iG}(t_{i-1}) &= \tilde{x}_{i-1G}(t_{i-1}) & 1 < i \leq 5 \\
 \tilde{x}'_{iG}(t_{i-1}) &= \tilde{x}'_{i-1G}(t_{i-1}) \\
 \tilde{x}''_{iG}(t_{i-1}) &= \tilde{x}''_{i-1G}(t_{i-1})
 \end{aligned}$$

Après résolution du système, en posant $a_{10} = -R$, $a_{11} = 0$ et $a_{12} = 0$, on obtient les coefficients $a_{i0} = -R$, $a_{i1} = 0$ et $a_{i2} = 0$, en fonction des t_{i-1} ($1 < i \leq 5$) :

$$\begin{aligned}
 a_{i0} &= a_{i-10} + \frac{(-1)^i}{3} \ddot{\dot{M}}_x t_{i-1}^3 \\
 a_{i1} &= a_{i-11} - (-1)^i \ddot{\dot{M}}_x t_{i-1}^2 \\
 a_{i2} &= a_{i-12} + (-1)^i \ddot{\dot{M}}_x t_{i-1}
 \end{aligned}$$

Il reste à établir les relations qui permettent de calculer les instants de commutation t_1, t_2, t_3, t_4 et t_5 . D'une part, nous utilisons les trois conditions finales :

$$\tilde{x}_{5G}(t_5) = x_{Gf} \quad \tilde{x}'_{5G}(t_5) = \dot{x}_{Gf} \quad \tilde{x}''_{5G}(t_5) = \ddot{x}_{Gf}$$

et d'autre part, nous utilisons la symétrie du chemin :

$$t_5 - t_4 = t_1 - t_0 \quad t_4 - t_3 = t_2 - t_1$$

Malheureusement, ce système est redondant et il reste un paramètre libre (nous choisissons arbitrairement t_1). Les trois derniers instants de commutation sont facilement obtenus en fonction de t_1 et t_2 :

$$t_3 = 3t_2 - 4t_1 \quad t_4 = 4t_2 - 5t_1 \quad t_5 = 4t_2 - 4t_1 \quad (5.32)$$

La valeur de t_2 est obtenue à partir de t_1 par l'équation $\tilde{x}_{5G}(t_5) = R$. Compte tenu des valeurs établies pour t_3, t_4 et t_5 , cette équation devient :

$$\ddot{M}_x(t_1 - t_2)(5t_1^2 - 5t_2t_1 + t_2^2) - R = 0 \quad (5.33)$$

Cette équation en t_2 n'admet des racines réelles positives ($0 \leq t_1 \leq t_2$) que si la condition suivante est vérifiée :

$$5\ddot{M}_x t_1^6 + 54\ddot{M}_x R t_1^3 - 27R^2 \leq 0 \quad (5.34)$$

L'équation (5.34) nous permet de choisir une valeur initiale de t_1 , nous en déduisons les valeurs possibles de t_2 à partir de l'équation (5.33) et de la condition $0 \leq t_1 \leq t_2$. Connaissant t_1 et t_2 , nous pouvons utiliser les équations (5.32) pour calculer les autres instants de commutation t_3, t_4 et t_5 . Ces instants de commutation nous permettent de calculer x_G en chaque instant et donc de calculer la trajectoire de la charge correspondante, selon la méthode proposée en 5.4.1. En exploitant la symétrie du problème on peut restreindre les calculs à l'intervalle $[0, t_5/2]$.

La valeur initiale de t_1 a été choisie arbitrairement, sans tenir compte du chemin imposé à la charge ; la trajectoire calculée ne coïncide donc pas avec le chemin choisi. Pour que la trajectoire convienne, il faut en fait réunir les deux conditions suivantes :

$$x\left(\frac{t_5}{2}\right) = 0 \quad \ddot{x}\left(\frac{t_5}{2}\right) = 0$$

Nous pouvons donc évaluer l'erreur par rapport à cet objectif et la corriger en agissant sur la valeur de t_1 . Avec les valeurs numériques retenues, nous obtenons en trois itérations les dates de commutation suivantes :

$$t_1 = 1.75 \quad t_2 = 4.37 \quad t_3 = 6.13 \quad t_4 = 8.76 \quad t_5 = 10.50$$

La fonction $x_G(t)$ obtenue avec cette solution, ainsi que ses deux dérivées $\dot{x}_G(t)$ et $\ddot{x}_G(t)$ sont représentés en figure (5.2). Les lignes en pointillés, qui représentent respectivement $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$, montrent que le mouvement de la charge, le long de la trajectoire qui lui est imposée, est très saccadé. En effet, sa vitesse s'annule à mi-parcours, entraînant des accélérations assez importantes.

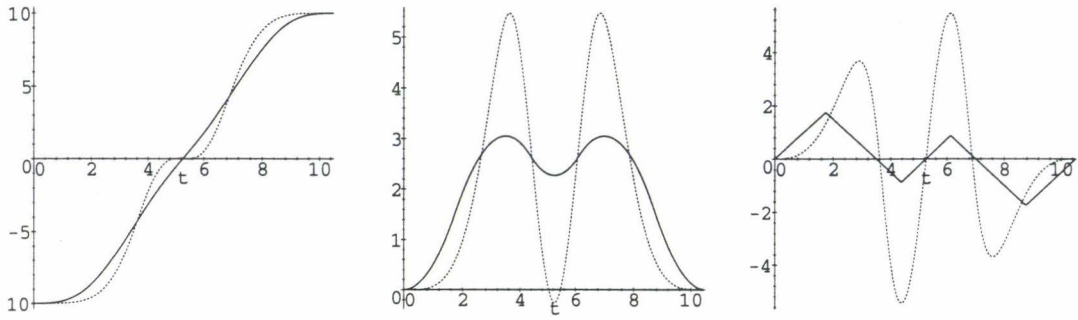


FIG. 5.2 - x_G , \dot{x}_G et \ddot{x}_G sans palier de saturation.

Or, l'accélération obtenue en t_1 dépasse la contrainte \ddot{M}_x imposée. Pour connaître la date $t_d \in [t_0 = 0, t_1]$ à partir de laquelle \ddot{x}_G ne vérifie plus les contraintes, il suffit de chercher t_d vérifiant $x_{1G}(t_d) = \ddot{M}_x$. On obtient alors $t_d = \ddot{M}_x / \ddot{\ddot{M}}_x$. Par symétrie, on en déduit que le même type de dépassement apparaît en $t_5 - t_d$.

Il faut donc reconstruire un nouveau modèle, en insérant, à celui-ci, deux paliers de saturation en accélération. On se retrouve donc avec une commande polynomiale par morceaux composée de sept polynômes x_{1G} , x_{2G} , x_{3G} , x_{4G} , x_{5G} , x_{6G} et x_{7G} définis respectivement sur les intervalles $[t_0 = 0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, $[t_3, t_4]$, $[t_4, t_5]$, $[t_5, t_6]$ et $[t_6, t_7]$. Les polynômes x_{2G} et x_{6G} sont de degré 2 et leurs dérivées secondes sont respectivement \ddot{M}_x et $-\ddot{M}_x$. Tous les autres polynômes sont de degré 3 comme pour le modèle à 5 polynômes calculé précédemment. Le calcul des dates de commutations est similaire à ce qui a déjà été fait, à la différence près que l'on connaît les valeurs de t_1 et $t_7 - t_6$, toutes deux égales à $t_d = \ddot{M}_x / \ddot{\ddot{M}}_x$.

En utilisant les nouvelles conditions de continuité entre les divers polynômes, on peut alors calculer les expressions de t_4 , t_5 , t_6 et t_7 en fonction de t_2 et t_3 :

$$\begin{aligned} t_4 &= -2 \frac{\ddot{M}_x}{\ddot{\ddot{M}}_x} + 3t_3 - 2t_2 & t_5 &= -2 \frac{\ddot{M}_x}{\ddot{\ddot{M}}_x} + 4t_3 - 3t_2 \\ t_6 &= -3 \frac{\ddot{M}_x}{\ddot{\ddot{M}}_x} + 4t_3 - 2t_2 & t_7 &= -2 \frac{\ddot{M}_x}{\ddot{\ddot{M}}_x} + 4t_3 - 2t_2 \end{aligned}$$

Pour obtenir la valeur de t_3 , il suffit de résoudre l'équation $x_{7G}(t_7) = R$. Il ne reste alors plus qu'une seule indéterminée t_2 que nous calculons en appliquant la même méthode que dans le cas à 5 polynômes. On aboutit alors aux valeurs suivantes pour les dates de commutations de ce modèle :

$$t_1 = 1.00 \quad t_2 = 3.03 \quad t_3 = 4.73 \quad t_4 = 6.13 \quad t_5 = 7.83 \quad t_6 = 9.86 \quad t_7 = 10.86$$

La variable $x_G(t)$ correspondante, et ses dérivées $\dot{x}_G(t)$ et $\ddot{x}_G(t)$, ont alors l'allure indiquée en figure (5.3). Les lignes pointillées qui apparaissent sur chacun des trois graphes représentent à nouveau les fonctions $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ respectivement.

Le fait d'introduire les paliers de saturation en accélération a très peu modifié la durée totale nécessaire pour réaliser le mouvement. En effet, on est passé de 10.50 à 10.86, ce qui représente une augmentation de moins de 3.5%. Par contre si on compare

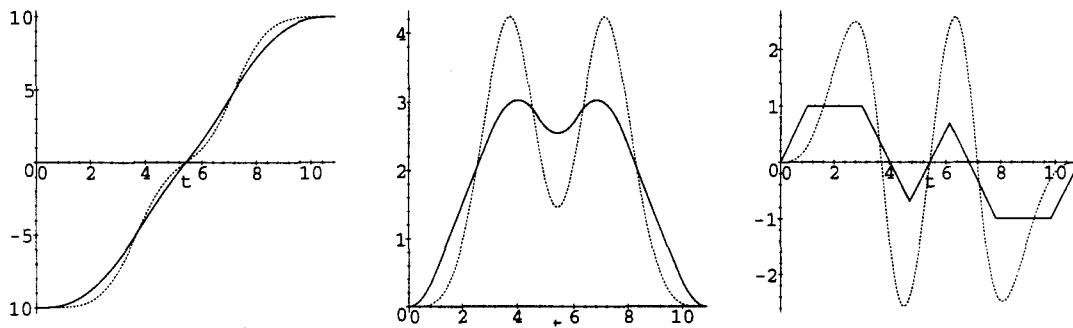


FIG. 5.3 - x_G , \dot{x}_G et \ddot{x}_G avec paliers de saturation.

les figures (5.2) et (5.3) on peut constater que le mouvement de la charge, le long du chemin imposé, varie énormément. Sa vitesse à mi-parcours ne s'annule plus, bien qu'elle diminue encore fortement ; cela se ressent énormément au niveau des accélérations maximales puisqu'elles diminuent de moitié.

Pour avoir une idée plus précise des résultats, on peut se reporter aux figures (5.4) et (5.5), qui donnent une représentation en trois dimensions du pont roulant, et aux figures (5.6) et (5.7), qui sont les projections de la figure (5.5) respectivement dans les plans yz , xz et xy . Sur ces figures, la courbe dans le plan $z = 0$ représente la trajectoire du chariot, la seconde courbe représente la trajectoire de la charge et les traits obliques représentent la position du câble à des intervalles réguliers (0.1s).

En comparant les figures (5.4) et (5.5), on peut noter que l'insertion des paliers de saturation en accélération dans le modèle utilisé a très nettement « adouci » les trajectoires du chariot et de la charge. Dans le cas du chariot, cela se traduit par un net changement dans le chemin suivi : il est beaucoup plus régulier, en particulier pour les valeurs de x voisines de ± 5 .

Les figures (5.6) et (5.7) mettent clairement en évidence la structure géométrique du chemin suivi par la charge : la projection dans le plan xz fait apparaître une demi-ellipse et la projection dans le plan xy fait apparaître une parabole.

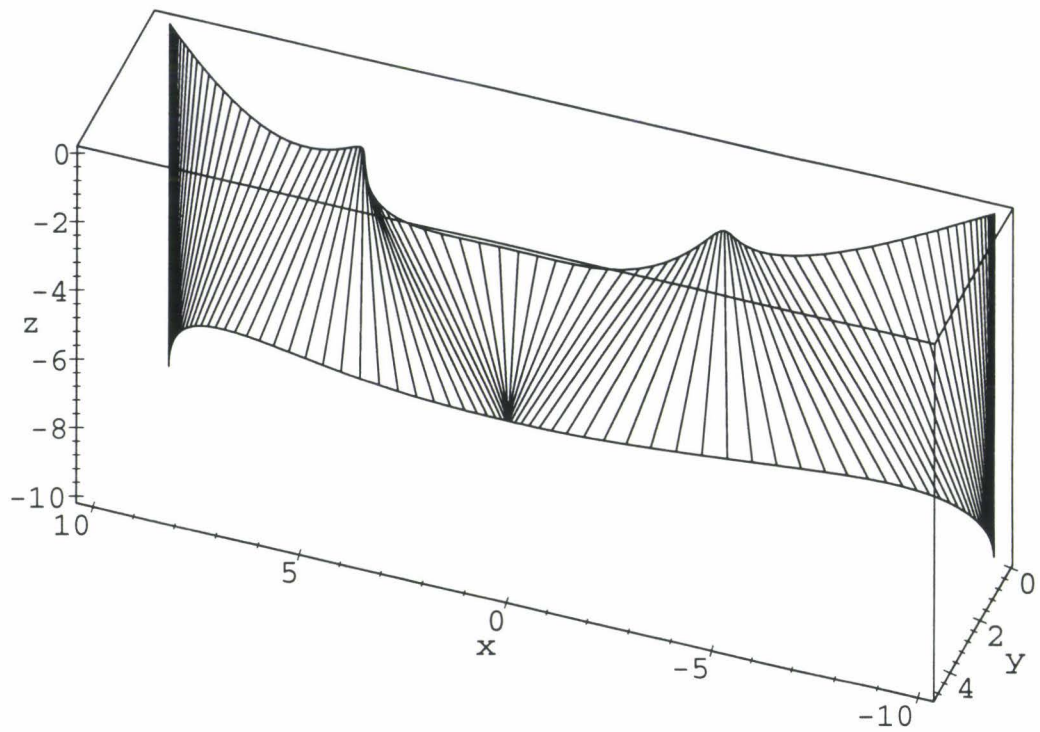


FIG. 5.4 - Trajectoires du chariot et de la charge : solution sans palier de saturation.

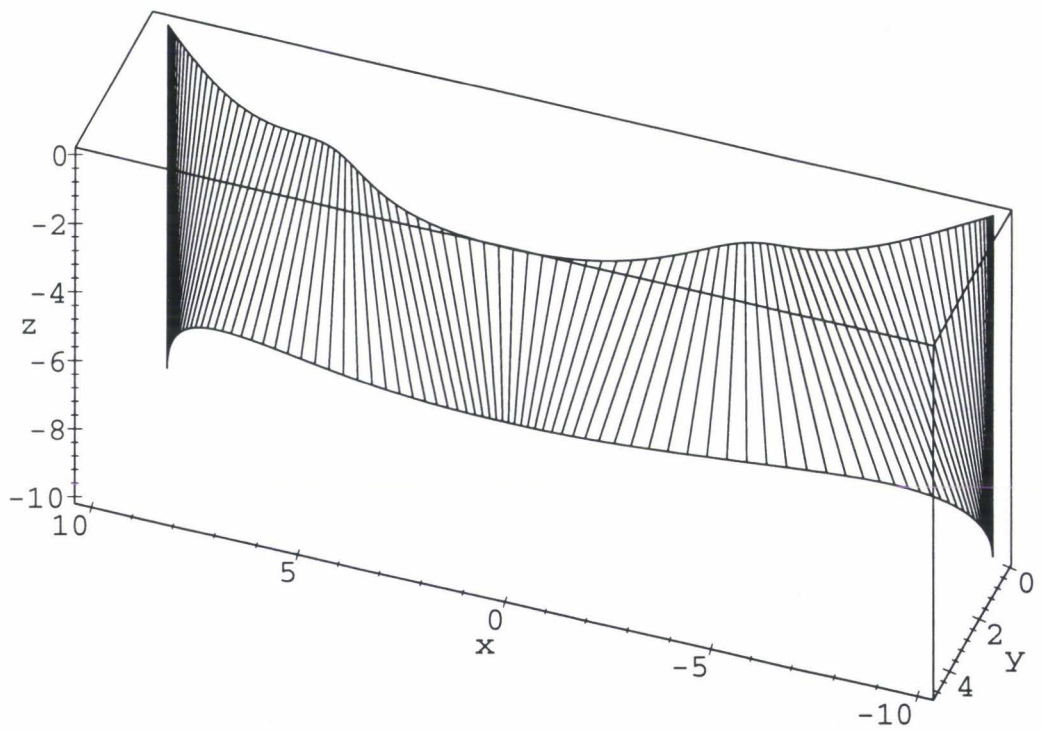
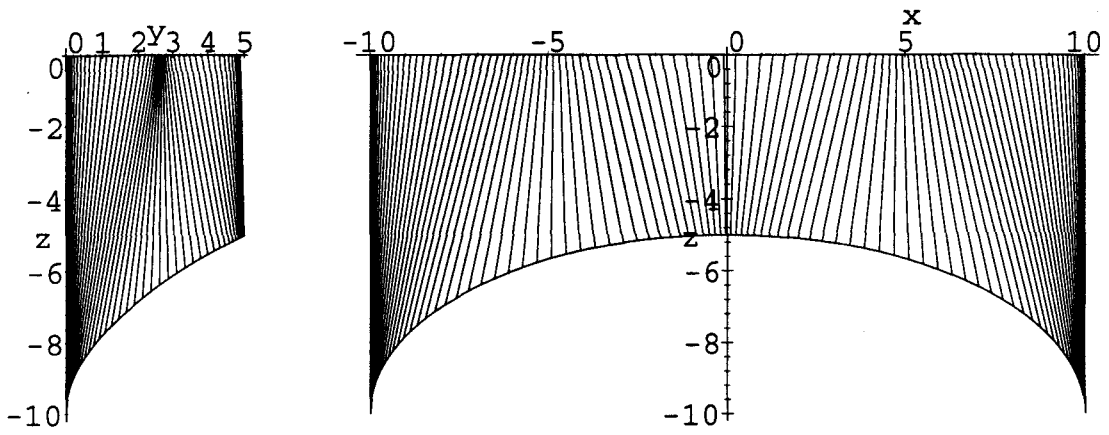
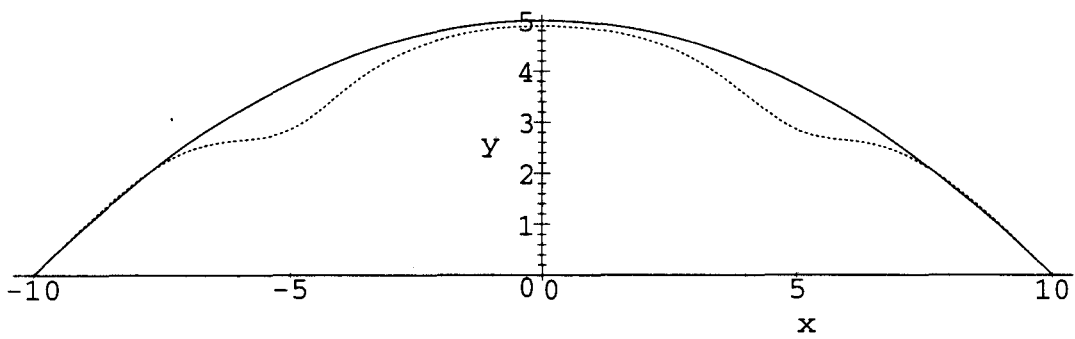


FIG. 5.5 - Trajectoires du chariot et de la charge : solution avec paliers de saturation.

FIG. 5.6 - Trajectoires du chariot ($z = 0$) et de la charge.FIG. 5.7 - Trajectoires du chariot (ligne pointillée) et de la charge dans le plan xy .

Conclusion

Bilan

Le problème de la commande optimale est très difficile à résoudre dans le cas général, surtout si des contraintes sont imposées sur les commandes et sur les variables d'état. Des difficultés surviennent à tous les niveaux : lors de la formulation du problème, dans les énoncés des conditions vérifiées par les solutions optimales et dans le calcul effectif des commandes. Ces difficultés sont dues en partie aux relations qui existent entre les composantes de la variable d'état ; il est donc souhaitable de s'affranchir de cet inconvénient lorsque c'est possible. C'est le cas en particulier pour les systèmes plats puisque les composantes de la sortie plate sont indépendantes entre elles. Cette caractéristique avait d'ailleurs permis de mettre en évidence que la planification de trajectoire des systèmes plats est extrêmement simple.

Nous avons effectivement pu constater que le problème de la commande optimale s'exprime plus simplement dans le cas des systèmes plats que dans le cas général. Cette première simplification se traduit par la suppression de la distinction entre *contraintes pures* et *contraintes mixtes*, ce qui est une conséquence directe du fait que la *variable d'état* et la *commande* ne sont plus que *des variables quelconques* du système. Cette simplification n'enlève rien à la généralité des problèmes traités. Au contraire, cette nouvelle formulation permet de prendre en compte des éléments difficiles à exprimer avec le formalisme plus traditionnel des équations d'état, par exemple la notion de *commandes lisses*. De plus le problème est mieux structuré et il apparaît clairement que pour le résoudre on peut procéder en deux étapes que nous proposons de traiter indépendamment l'une de l'autre : le calcul du *chemin géométrique* suivi par la sortie plate et le calcul de la *trajectoire optimale le long de ce chemin*.

Un chemin géométrique qui satisfait les *conditions de rendez-vous* peut être donné sous deux formes différentes, soit comme une *courbe paramétrée*, soit comme une *courbe implicite*. Dans chacun de ces cas le calcul du chemin est très simple : pour les courbes paramétrées il suffit d'appliquer des *formules d'interpolation*, pour les courbes implicites il suffit de *résoudre un système d'équations linéaire*. Bien entendu, ces solutions ne permettent pas d'obtenir le chemin optimal, mais pour de nombreuses applications, des règles de construction propres à la nature du problème traité permettront d'aboutir à des chemins proches de la solution optimale.

Une fois que le chemin suivi par la sortie plate est imposé il ne reste plus qu'à calculer la trajectoire optimale le long de ce chemin, ce qui est nettement plus simple que le problème initial. En effet, l'*algorithme permettant de calculer la solution* découle directement d'une condition nécessaire imposée aux variables du système, cette condition indiquant simplement qu'en chaque instant, l'une des contraintes est *saturée*. Bien que

cette condition ait des points communs avec les conditions nécessaires obtenues dans le cadre de l'application du Principe du Maximum de Pontriagyne, son énoncé est beaucoup plus concis, il n'introduit pas de variables supplémentaires et il n'ajoute pas de nouvelles équations différentielles. Dans les cas les plus favorables, en particulier pour les *systèmes sans dérive*, la solution est obtenue en calculant les solutions d'un petit nombre de systèmes d'équations algébriques de faibles degrés. Dans les cas moins favorables on se ramène à un problème d'équations différentielles aux limites, dont la solution est connue à un petit nombre de paramètres près ; on est donc passé d'un problème en *dimension infinie* à un problème en *dimension finie*.

Deux exemples ont été traités par cette méthode : la commande en attitude d'un satellite et la commande d'une grue. Le premier exemple correspond à un cas réel pour lequel il est effectivement nécessaire de pouvoir planifier efficacement l'exploitation du satellite. La platitude de ce système est évidente lorsqu'on utilise des quaternions pour représenter la dynamique de ce système ; la sortie plate étant l'attitude du satellite. Il s'agit d'un système sans dérive, la saturation des contraintes imposées à une variable se traduit donc par un système d'équations algébriques qui est très simple à résoudre. Les performances de cet algorithme, mesurées sur un programme développé en C++, sont encourageantes. Une certaine souplesse est laissée dans le paramétrage des chemins, nous indiquons d'ailleurs les bases d'un algorithme itératif permettant d'optimiser les chemins obtenus.

Le second exemple traite le cas d'un système avec dérive. Il existe de très nombreuses formulations différentes du problème de la grue, aussi avons-nous fixé nos choix sur des points qui illustrent bien la richesse de la méthode. En particulier nous avons cherché, d'une part, à traduire réellement les limitations physiques du système (dimensions, puissance des moteurs et résistance de la structure) sans trop compliquer les calculs, d'autre part, à produire des commandes suffisamment lisses pour empêcher l'apparition de vibrations et d'oscillations parasites. Plusieurs simulations, effectuées à l'aide du logiciel MAPLE ont permis de valider la méthode sur ce second exemple.

Perspectives

Au terme de ce mémoire, de nombreux points mériteraient une étude complémentaire. D'une part, les exemples traités à titre d'illustration pourraient être approfondis et complétés ; d'autre part, la méthode pourrait être appliquée à d'autres systèmes. Enfin, la méthode générale elle-même mériterait des améliorations et des compléments.

Pour ce qui est du satellite, il faudrait affiner la démarche proposée pour optimiser le chemin en attitude, voire exploiter le fait que deux des composantes du vecteur vitesse (ou du moment) sont saturées pour calculer directement un chemin proche de la solution optimale. Une fois ces points réglés, il serait intéressant de faire des comparaisons avec d'autres méthodes.

Pour approfondir l'exemple de la grue, il faudrait analyser en détail les besoins réels de industriels intéressés par l'automatisation des grues. Les déformations de la structure devraient sans doute être prises en compte, ce qui introduirait des notions de dérivées partielles qui ne sont pas traitées par notre méthode.

Le principe de base, qui consiste à dissocier le calcul du chemin géométrique du calcul de la trajectoire optimale le long de ce chemin, se justifie pleinement dans tous les cas où

des critères géométriques donnent des indices sur l'allure de la solution optimale. Cette situation se retrouve dans plusieurs types d'applications industrielles, par exemple le contrôle de la température dans les réacteurs chimiques (voir [Bonnard et al.95]), mais le domaine le plus approprié à l'application de ce principe semble être la robotique. En effet, dans ce domaine, les systèmes utilisés sont plats et les solutions s'expriment souvent en terme géométrique. En particulier, lorsqu'il s'agit de contrôler des robots mobiles ou des bras articulés en présence d'obstacles, l'évitement des obstacles est prédominant et il se traduit par des règles géométriques de construction des chemins. D'ailleurs, plusieurs solutions de ce type ont déjà été proposées dans ce domaine et cette démarche a tendance à se généraliser.

Notre méthode ne s'applique pas aux applications pour lesquelles l'optimisation repose essentiellement sur le choix de la géométrie du chemin suivi par la sortie plate. En effet, dans notre démarche, nous supposons que l'élément important est la vitesse de parcours du chemin et que de nombreux chemins sont équivalents et proches de la solution optimale. Il serait donc intéressant de déterminer s'il est possible de dégager des principes généraux qui permettraient de distinguer un « bon chemin » d'un « mauvais chemin ».

Cette première étape de la commande optimale, dans le cadre spécifique des systèmes plats, semble prometteuse ; il est donc tentant de chercher à adapter ces résultats pour prendre en compte d'autres types de critères d'optimisation. De même, on pourrait chercher à résoudre des problèmes où l'état final n'est pas précisément défini. Dans chacun de ces cas il serait intéressant de faire un parallèle avec les résultats proposés par des méthodes plus générales telles que l'application du Principe du Maximum de Pontryagine.

Annexe A

Description des modèles

Nous donnons ci-dessous les systèmes d'équations permettant de calculer les valeurs numériques des dates de commutation sur les différents modèles rencontrés en 4.5. Nous utilisons les notations suivantes :

- v_i : la valeur imposée au modèle à l'instant initial ;
- v_f : la valeur imposée au modèle à l'instant final ;
- a_i : la dérivée imposée au modèle à l'instant initial ;
- a_f : la dérivée imposée au modèle à l'instant final ;
- s : l'intégrale du modèle entre l'instant initial et l'instant final ;
- v_m : la valeur maximale autorisée ;
- a_m : la pente maximale autorisée ;
- j_m : la dérivée seconde maximale autorisée ;

On note p_1, \dots, p_n les n polynômes qui composent le modèle. Pour chacun de ces polynômes, on effectue une translation de l'origine des temps, pour que le polynôme p_j soit défini sur l'intervalle $[0, x_j]$. La date à laquelle le modèle commute du polynôme p_j au polynôme p_{j+1} est alors $t_j = \sum_{i=1}^j x_i$.

Dans ce qui suit, nous indiquons comment calculer chacune des valeurs x_j pour les modèles M0 à M9.

A.1 Modèles complets

Les modèles représentés ici sont les modèles M0 à M7 indiqués sur la figure (4.6). Pour chacun de ces modèles, les valeurs de v_i, v_f, a_i, a_f et s sont imposées.

A.1.1 Modèle M0

Polynôme	p_1	p_2	p_3
Degré du polynôme	2	2	2
Coefficient de tête	$\frac{j_m}{2}$	$-\frac{j_m}{2}$	$\frac{j_m}{2}$

$$x_1 = -\frac{1}{4} \frac{4x_2 a_i j_m - 2j_m^2 x_2^2 + 2v_i j_m - a_i^2 + a_f^2 - 2v_f j_m}{j_m^2 x_2}$$

$$x_3 = \frac{1}{4} \frac{2j_m^2 x_2^2 + 4j_m x_2 a_f + 2v_i j_m - a_i^2 + a_f^2 - 2v_f j_m}{j_m^2 x_2}$$

La valeur de x_2 est obtenue en calculant numériquement la solution de l'équation :

$$s = \sum_{i=1}^3 \int_0^{x_i} p_i(t) dt$$

ce qui revient à calculer les racines d'un polynôme de degré 4 dont les coefficients c_0 , c_1 , c_2 , c_3 et c_4 sont :

$$c_0 = -3(a_f^2 - 2v_f j_m + 2v_i j_m - a_i^2)^2 - 48j_m^3 x_2 s$$

$$c_1 = -16j_m(3j_m v_i a_i - 3j_m v_f a_f - a_i^3 + a_f^3)$$

$$c_2 = 24j_m^2(2v_f j_m + 2v_i j_m - a_i^2 - a_f^2)$$

$$c_3 = 0$$

$$c_4 = 12j_m^4$$

A.1.2 Modèle M1

Polynôme	p_1	p_2	p_3	p_4
Degré du polynôme	2	1	2	2
Coefficient de tête	$\frac{j_m}{2}$	a_m	$-\frac{j_m}{2}$	$\frac{j_m}{2}$

$$x_1 = \frac{a_m - a_i}{j_m}$$

$$x_2 = \frac{v_f - v_i}{a_m} + \frac{a_i^2 - a_f^2}{2a_m j_m} - 2x_3 + \frac{j_m}{a_m} x_3^2$$

$$x_4 = \frac{a_f - a_m}{j_m} + x_3$$

La valeur de x_3 est obtenue en calculant numériquement la solution de l'équation :

$$s = \sum_{i=1}^4 \int_0^{x_i} p_i(t) dt$$

A.1.3 Modèle M2

Polynôme	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
Degré du polynôme	2	2	0	2	2
Coefficient de tête	$\frac{\dot{j}_m}{2}$	$-\frac{\dot{j}_m}{2}$	v_m	$-\frac{\dot{j}_m}{2}$	$\frac{\dot{j}_m}{2}$

$$x_1 = x_2 - \frac{a_i}{\dot{j}_m} \qquad x_2 = \sqrt{\frac{a_i^2}{2\dot{j}_m^2} + \frac{v_m - v_i}{\dot{j}_m}}$$

$$x_4 = \sqrt{\frac{a_f^2}{2\dot{j}_m^2} + \frac{v_m - v_f}{\dot{j}_m}} \qquad x_5 = x_4 - \frac{a_f}{\dot{j}_m}$$

On en déduit l'expression de x_3 (on peut calculer p_4 car $p_3(t) = v_m$) :

$$x_3 = \frac{1}{v_m} \left(s - \int_0^{x_1} p_1(t) dt - \int_0^{x_2} p_2(t) dt - \int_0^{x_4} p_4(t) dt - \int_0^{x_5} p_5(t) dt \right)$$

A.1.4 Modèle M3

Polynôme	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
Degré du polynôme	2	1	2	0	2	2
Coefficient de tête	$\frac{\dot{j}_m}{2}$	a_m	$-\frac{\dot{j}_m}{2}$	v_m	$-\frac{\dot{j}_m}{2}$	$\frac{\dot{j}_m}{2}$

$$x_1 = \frac{a_m - a_i}{\dot{j}_m} \qquad x_2 = \frac{v_m - v_i}{a_m} - \frac{2a_m^2 - a_i^2}{2a_m\dot{j}_m} \qquad x_3 = \frac{a_m}{\dot{j}_m}$$

$$x_5 = \sqrt{\frac{a_f^2}{2\dot{j}_m^2} + \frac{v_m - v_f}{\dot{j}_m}} \qquad x_6 = x_5 - \frac{a_f}{\dot{j}_m}$$

On en déduit l'expression de x_4 (on peut calculer p_5 car $p_4(t) = v_m$) :

$$x_4 = \frac{1}{v_m} \left(s - \int_0^{x_1} p_1(t) dt - \int_0^{x_2} p_2(t) dt - \int_0^{x_3} p_3(t) dt - \int_0^{x_5} p_5(t) dt - \int_0^{x_6} p_6(t) dt \right)$$

A.1.5 Modèle M4

Polynôme	p_1	p_2	p_3	p_4
Degré du polynôme	2	2	1	2
Coefficient de tête	$\frac{\dot{j}_m}{2}$	$-\frac{\dot{j}_m}{2}$	$-a_m$	$\frac{\dot{j}_m}{2}$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_2 - \frac{a_m + a_i}{j_m} \\
 x_3 &= \frac{v_i - v_f}{a_m} + \frac{a_f^2 - a_i^2}{2a_m j_m} - 2x_2 + \frac{j_m}{a_m} x_2^2 \\
 x_4 &= \frac{a_f + a_m}{j_m}
 \end{aligned}$$

La valeur de x_2 est obtenue en calculant numériquement la solution de l'équation :

$$s = \sum_{i=1}^4 \int_0^{x_i} p_i(t) dt$$

A.1.6 Modèle M5

Polynôme	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
Degré du polynôme	2	1	2	1	2
Coefficient de tête	$\frac{j_m}{2}$	a_m	$-\frac{j_m}{2}$	$-a_m$	$\frac{j_m}{2}$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{a_m - a_i}{j_m} & x_2 &= \frac{v_f - v_i}{a_m} + \frac{a_i^2 - a_f^2}{2a_m j_m} + x_4 \\
 x_3 &= 2 \frac{a_m}{j_m} & x_5 &= \frac{a_m - a_f}{j_m}
 \end{aligned}$$

La valeur de x_4 est obtenue en calculant symboliquement ou numériquement la solution de l'équation :

$$s = \sum_{i=1}^5 \int_0^{x_i} p_i(t) dt$$

A.1.7 Modèle M6

Polynôme	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
Degré du polynôme	2	2	0	2	1	2
Coefficient de tête	$\frac{j_m}{2}$	$-\frac{j_m}{2}$	v_m	$-\frac{j_m}{2}$	$-a_m$	$\frac{j_m}{2}$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_2 - \frac{a_i}{j_m} & x_2 &= \sqrt{\frac{a_i^2}{2j_m^2} + \frac{v_m - v_i}{j_m}} \\
 x_4 &= \frac{a_m}{j_m} & x_5 &= \frac{v_m - v_f}{a_m} + \frac{a_f^2 - 2a_m^2}{2a_m j_m} & x_6 &= \frac{a_m + a_f}{j_m}
 \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de x_3 (on peut calculer p_4 car $p_3(t) = v_m$) :

$$x_3 = \frac{1}{v_m} \left(s - \int_0^{x_1} p_1(t) dt - \int_0^{x_2} p_2(t) dt - \int_0^{x_4} p_4(t) dt - \int_0^{x_5} p_5(t) dt - \int_0^{x_6} p_6(t) dt \right)$$

A.1.8 Modèle M7

Polynôme	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
Degré du polynôme	2	1	2	0	2	1	2
Coefficient de tête	$\frac{j_m}{2}$	a_m	$-\frac{j_m}{2}$	v_m	$-\frac{j_m}{2}$	$-a_m$	$\frac{j_m}{2}$

$$x_1 = \frac{a_m - a_i}{j_m} \quad x_2 = \frac{v_m - v_i}{a_m} - \frac{2a_m^2 - a_i^2}{2a_m j_m} \quad x_3 = \frac{a_m}{j_m}$$

$$x_5 = \frac{a_m}{j_m} \quad x_6 = \frac{v_m - v_f}{a_m} - \frac{2a_m^2 - a_f^2}{2a_m j_m} \quad x_7 = \frac{a_m - a_f}{j_m}$$

On en déduit l'expression de x_4 (on peut calculer p_5 car $p_4(t) = v_m$) :

$$x_4 = \frac{1}{v_m} \left(s - \int_0^{x_1} p_1(t) dt - \int_0^{x_2} p_2(t) dt - \int_0^{x_3} p_3(t) dt - \int_0^{x_5} p_5(t) dt - \int_0^{x_6} p_6(t) dt - \int_0^{x_7} p_7(t) dt \right)$$

A.2 Modèles réduits

Le modèles représentés ici sont les modèles M8 et M9 indiqués sur la figure (4.7).

A.2.1 Modèle M8

Pour ce modèle, la valeur de a_f n'est pas imposée et on a $v_f = 0$. Il est composé de deux polynômes définis par :

$$p_1(t) = \frac{j_m}{2} t^2 + a_i t + v_i$$

$$p_2(t) = -\frac{j_m}{2} t^2 + (a_i + j_m x_1) t + \frac{j_m}{2} x_1^2 + a_i x_1 + v_i$$

Pour obtenir les valeurs de x_1 et x_2 , il faut résoudre numériquement le système d'équations :

$$p_2(x_2) = 0$$

$$s = \int_0^{x_1} p_1(t) dt + \int_0^{x_2} p_2(t) dt$$

A.2.2 Modèle M9

Pour ce modèle les valeurs de a_i et a_f ne sont pas imposées ; les valeurs de v_i et v_f sont : $v_i = v_f = 0$. Il est composé d'un seul polynôme. La valeur de x_1 est :

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{12s}{j_m}}$$

Le polynôme p_1 s'écrit alors :

$$p_1(t) = \sqrt[3]{\frac{3j_m^2s}{2}}t - \frac{j_m}{2}t^2$$

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	Calcul de commandes optimales	4
1.1.1	Index de performance	4
1.1.2	Contraintes terminales	4
1.1.3	Contraintes sur la commande	6
1.1.4	Contraintes sur l'état du système	8
1.2	Application aux systèmes plats	11
1.3	Commande en attitude d'un satellite	13
1.4	Commande d'une grue	14
2	Quaternions	17
2.1	Introduction	17
2.2	Propriétés des quaternions	19
2.2.1	Opérations de base	19
2.2.2	Représentation linéaire des quaternions	22
2.2.3	Exponentielle d'un quaternion	23
2.2.4	Dérivées	25
2.3	Quaternions unitaires et rotations	27
2.3.1	Représentation des symétries par des quaternions unitaires	27
2.3.2	Représentation des rotations par des quaternions unitaires	28
2.3.3	Vitesse de rotation	31
2.3.4	Accélération angulaire	32
2.3.5	Vitesse de rotation pour une rotation composée	32
3	Commande de systèmes plats	35
3.1	Introduction	35
3.2	Systèmes plats	36
3.2.1	Présentation générale	36
3.2.2	Cadre théorique	37

TABLE DES MATIÈRES

3.2.3	Exemples de systèmes plats	40
3.3	Objectif et limites de la méthode	43
3.3.1	Définition du problème	43
3.3.2	Conditions de continuité et de dérivabilité	44
3.3.3	Variables admissibles	45
3.4	Planification du mouvement	45
3.4.1	Conditions de rendez-vous et conditions de jets	45
3.4.2	Définition implicite du chemin	47
3.4.3	Définition paramétrique du chemin	52
3.5	Définition d'une trajectoire	53
3.5.1	Calcul à partir d'une courbe implicite	53
3.5.2	Calcul à partir d'une courbe paramétrée	54
3.5.3	Changement de trajectoire	55
3.6	Caractérisation des trajectoires optimales	59
3.6.1	Condition nécessaire	59
3.6.2	Condition suffisante	61
3.7	Optimisation pour une seule variable	65
3.7.1	Vue d'ensemble	65
3.7.2	Construction d'un modèle	66
3.7.3	Calcul des dates de commutation	70
3.7.4	Obtention d'une variable admissible	73
3.8	Extension à plusieurs variables	74
3.8.1	Vue d'ensemble de la méthode	74
3.8.2	Calcul des bornes de l'intervalle	74
4	Commande d'un satellite	77
4.1	Introduction	77
4.2	Rotations et quaternions non unitaires	79
4.2.1	Image d'un vecteur et changement de repère	79
4.2.2	Vitesse de rotation et accélération angulaire	80
4.2.3	Composition de rotations	81
4.3	Calcul des conditions de jets	81
4.3.1	Quaternions unitaires	81
4.3.2	Quaternions non unitaires	82
4.4	Calcul du chemin	83
4.4.1	Composition de rotations autour d'axes fixes	83
4.4.2	Exponentielle d'un vecteur	86

4.4.3	Quaternion polynomial	88
4.5	Optimisation de trajectoire	94
4.5.1	Remarques préliminaires	94
4.5.2	Calcul des modèles	95
4.5.3	Calcul de la trajectoire et des nouvelles variables	101
4.5.4	Changement d'axe de saturation	102
4.5.5	Prise en compte de la matrice d'inertie	104
4.6	Optimisation des chemins	106
4.6.1	Principe de base	106
4.6.2	Condition nécessaire d'optimalité du chemin	108
4.7	Programmation de l'algorithme	113
4.7.1	Échantillonnage	113
4.7.2	Calcul des modèles pour une variable	115
4.7.3	Calcul du changement de paramétrage	116
4.7.4	Échantillonnage des commandes	117
4.7.5	Lissage des commandes	117
4.7.6	Changement d'axe de saturation	118
4.7.7	Correction de l'erreur sur l'attitude finale	118
4.7.8	Évaluation globale de la méthode	119
5	Commande d'une grue	123
5.1	Introduction	123
5.2	Définition du problème	125
5.2.1	Modélisation de la grue	125
5.2.2	Définition du rendez-vous	127
5.2.3	Définition des contraintes dynamiques	127
5.2.4	Continuité et dérivabilité	129
5.3	Planification de trajectoire	129
5.3.1	Calcul des conditions de jets	129
5.3.2	Calcul d'un chemin paramétrique	131
5.3.3	Calcul d'un chemin implicite	131
5.4	Trajectoire optimale	133
5.4.1	Calcul de la trajectoire	133
5.4.2	Saturation d'une seule variable	134
5.4.3	Pour plusieurs variables	137
5.5	Exemple	139
5.5.1	Choix du chemin	139

TABLE DES MATIÈRES

5.5.2	Calcul de la trajectoire	140
Annexes		150
A	Description des modèles	151
A.1	Modèles complets	151
A.1.1	Modèle M0	152
A.1.2	Modèle M1	152
A.1.3	Modèle M2	153
A.1.4	Modèle M3	153
A.1.5	Modèle M4	153
A.1.6	Modèle M5	154
A.1.7	Modèle M6	154
A.1.8	Modèle M7	155
A.2	Modèles réduits	155
A.2.1	Modèle M8	155
A.2.2	Modèle M9	156

Table des figures

1.1	Relation entre la variation δx et la différentielle dx	6
2.1	Quaternions et symétries	27
2.2	Quaternions et rotations	28
3.1	Le camion à n remorques	41
3.2	Effet du changement de trajectoire	58
3.3	Effet du changement de paramétrage sur un ouvert I	60
3.4	Choix de la contrainte à saturer en s_0	61
3.5	Changements de paramétrages « plus rapides » que $s(t) = t$	62
3.6	Cas où le domaine \mathcal{U} n'est pas convexe	63
3.7	Saturation sur un modèle de degré 3 sans ajout de raccords	70
3.8	Saturation dans un modèle de degré 3 avec ajout de raccords	71
3.9	Correction immédiate des dépassements de contraintes	75
3.10	Correction d'un dépassement de la contrainte d'ordre $\gamma_w - 2$	75
4.1	Effet de \dot{r}_i et \dot{r}_f : $\dot{r}_i = 0$ et $\dot{r}_f = 0$	91
4.2	Effet de \dot{r}_i et \dot{r}_f : $\dot{r}_i = -4.7$ et $\dot{r}_f = 4.7$	91
4.3	Allure de $ Q(s) $ pour $r_i = r_f = 0$ (pointillé) et pour $r_i = -r_f = -4.7$	92
4.4	Effet de la durée d'interpolation : $S = 0.1$	93
4.5	Effet de la durée d'interpolation : $S = 5$	93
4.6	Modèles obtenus lorsque $\omega(0)$, $\omega'(0)$, $\omega(T)$ et $\omega'(T)$ sont imposés	97
4.7	Modèles obtenus lorsque Ω_x s'annule	99
4.8	Correction des conditions aux bornes sur un modèle M0	100
5.1	Système de coordonnées du pont roulant	125
5.2	x_G , \dot{x}_G et \ddot{x}_G sans palier de saturation.	142
5.3	x_G , \dot{x}_G et \ddot{x}_G avec paliers de saturation.	143
5.4	Trajectoires du chariot et de la charge : solution sans palier de saturation.	144
5.5	Trajectoires du chariot et de la charge : solution avec paliers de saturation.	144

TABLE DES FIGURES

5.6	Trajectoires du chariot ($z = 0$) et de la charge.	145
5.7	Trajectoires du chariot (ligne pointillée) et de la charge dans le plan xy .	145

Liste des tableaux

1.1	Commande optimale avec contraintes terminales	7
1.2	Problème d'optimisation avec contraintes sur l'état du système	9
2.1	Table de multiplication	19
3.1	Bilan des conditions imposées et des degrés de liberté	69
4.1	Rôle des composantes Ω_{ini} , Ω_{vit} et Ω_{att} du vecteur vitesse	84
4.2	Calcul d'un modèle complet	101
4.3	Calcul d'un modèle de type M8	102
4.4	Calcul des modèles pour la composante ω_x	103
4.5	Description d'un échantillon	113
4.6	Mise à jour de l'intégrale pour l'échantillon s_i	114
4.7	Liste d'échantillons au terme du processus d'échantillonnage	114
4.8	Description d'un modèle	115
4.9	Construction de la liste de modèles sur la liste d'échantillons	115
4.10	Liste des polynômes décrivant un modèle	116
4.11	Synchronisation entre le paramètre s et le temps t	117
5.1	Conditions de rendez-vous	127
5.2	Contraintes dynamiques	128
5.3	Conditions de jets	130

LISTE DES TABLEAUX

Bibliographie

- [AG et al.95] Al-Garni (A. Z.), Moustafa (K. A. F.) et Javeed Nizami (S. S. A. K.). – Optimal control of overhead cranes. *Control Engineering Practice*, vol. 3, n° 9, September 1995, pp. 1277–1284.
- [Andre et al.94] André (P.), Jamhour (E.) et Taillard (J.-P.). – Planification de trajectoires douces pour manipulateurs industriels. *APII*, vol. 28, n° 5, 1994, pp. 455–463.
- [Backhouse et al.94] Backhouse (C.J.), Price (R.A.) et Moore (P.R.). – Crane automation. *Industrial Robot*, vol. 21, n° 4, 1994, pp. 22–25.
- [Barr et al.92] Barr (A.H.), Currin (B.), Gabriel (S.) et Hughes (J.F.). – Smooth interpolation of orientations with angular velocity constraints using quaternions. *Computer Graphics*, vol. 26, n° 2, July 1992, pp. 313–320.
- [Bonnard et al.95] Bonnard (B.) et De Morant (J.). – Toward a geometric theory in the time-minimal control of chemical batch reactors. *SIAM Journal of Control & Optimization*, vol. 33, n° 5, September 1995, pp. 1279–1311.
- [Cesari83] Cesari (L.). – *Optimization Theory and Applications: Problems with Ordinary Differential Equations*. – New York, Springer-Verlag, 1983.
- [Chen et al.90] Chen (Y.) et Desrochers (A. A.). – A proof of the structure of the minimum-time control law of robotic manipulators using a hamiltonian formulation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 6, n° 3, 1990, pp. 388–393.
- [Chen et al.92] Chen (Yaobin), Chien (Stanley Y.-P) et Desrochers (Alan A.). – General structure of time-optimal control of robotic manipulators moving along prescribed paths. *International Journal of Control*, vol. 56, n° 4, October 1992, pp. 767–782.
- [Chou92] Chou (J.C.K.). – Quaternion kinematic and dynamic differential equations. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 8, n° 1, February 1992, pp. 53–64.
- [Croft et al.95] Croft (E. A.), Benhabib (B.) et Fenton (R. G.). – Near-time optimal robot motion planning for on-line applications. *Journal of Robotic Systems*, vol. 12, n° 8, 1995, pp. 553–567.

BIBLIOGRAPHIE

- [dC87] de Casteljou (Paul). – *Les quaternions*. – Paris, Hermès, 1987.
- [Desantis et al.94] DeSantis (R.M.) et Krau (S.). – Bang bang motion control of a cartesian crane. *Robotica*, vol. 12, 1994, pp. 449–454.
- [dN et al.94] d'Andréa Novel (B.), Boustany (F.), Conrad (F) et Rao (B. P.). – Feedback stabilization of a hybrid pde-ode system: Application to an overhead crane. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 7, 1994, pp. 1–22.
- [Ell93] Ell (T.A.). – Quaternion-fourier transforms for analysis of two-dimensional linear time-invariant partial differential systems. *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 1830–1841. – San Antonio, TX, USA, 15–17 December 1993.
- [Faurre88] Faurre (Pierre). – *Analyse Numérique, notes d'Optimisation*, chap. IV. – École Polytechnique, 1988.
- [Fliess et al.92] Fliess (Michel), Lévine (Jean), Martin (Philippe) et Rouchon (Pierre). – Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *Académie des Sciences*, vol. 315, n° I, 1992, pp. 619–624.
- [Fliess et al.95a] Fliess (Michel), Lévine (Jean), Martin (Philippe) et Rouchon (Pierre). – Design of trajectory stabilizing feedback for driftless flat systems. *3rd European Control Conf.* – Rome, 1995.
- [Fliess et al.95b] Fliess (Michel), Lévine (Jean), Martin (Philippe) et Rouchon (Pierre). – Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *Int. J. Control*, vol. 61, n° 6, 1995, pp. 1327–1361.
- [Hamalainen et al.95] Hämäläinen (J.J.), Marttinen (A.), Baharova (L.) et Virkkunen (J.). – Optimal path planning for a trolley crane: fast and smooth transfer of load. *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 142, January 1995, pp. 51–57.
- [Hart et al.94] Hart (J.C.), Francis (G.K.) et Kauffman (L.H.). – Visualizing quaternion rotations. *ACM Transactions on Graphics*, vol. 13, n° 3, July 1994, pp. 256–276.
- [Hartl et al.95] Hartl (Richard F.), Sethi (Suresh P.) et Vickson (Raymond G.). – A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. *SIAM Review*, vol. 37, n° 2, June 1995, pp. 181–218.
- [Huston et al.82] Huston (R. L.) et Kelly (F. A.). – The development of equations of motion of single-arm robots. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. SMC-12, n° 3, May/June 1982, pp. 259–266.
- [Jacob et al.94] Jacob (Gérard), Oussous (Nour-Eddine), Petitot (Michel) et Raczy (Côme). – *Étude du guidage d'un satellite pour des*

- rendez-vous en attitude, vitesse et accélération, afin de réaliser des prises de vue.* – Contrat n° 873/93/CNES/0786, CNRS, Mars 1994.
- [Jacob et al.95a] Jacob (G.), Lassalle-Balier (G.) et Raczy (C.). – Guidage en attitude de satellites par changement de loi horaire le long d'une trajectoire. *Spaceflight Dynamics*. CNES, pp. 711–719. – Toulouse, France, June 1995.
- [Jacob et al.95b] Jacob (Gérard), Oussous (Nour-Eddine), Petitot (Michel) et Raczy (Côme). – *Positionnement en Attitude par Calcul d'une Trajectoire Exacte.* – Contrat n° xxx/94/CNES/xxxx, CNRS, Novembre 1995.
- [Jamhour et al.96] Jamhour (E.) et André (P.). – Planning smooth trajectories along parametric paths. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 41, 1996, pp. 615–626.
- [Joshi et al.95] Joshi (Sandeep) et Rahn (Christopher D.). – Position control of a flexible cable gantry crane: theory and experiment. *Proceedings of the 1995 American Control Conference*. pp. 2820–2824. – Seattle, WA, USA, 21–23 June 1995.
- [Kim et al.95] Kim (Myung-Soo) et Nam (Kee-Won). – Interpolating solid orientations with circular blending quaternion curves. *Computer Aided Design*, vol. 27, n° 5, May 1995, pp. 385–398.
- [Kyriakopoulos et al.94] Kyriakopoulos (K.J.) et Saridis (G.N.). – Minimum jerk for trajectory planning and control. *Robotica*, vol. 12, 1994, pp. 109–113.
- [LB87] Le Borgne (Michel). – *Quaternions et contrôle sur l'espace des rotations.* – Rapport de Recherche n° 751, Rocquencourt, France, INRIA, Novembre 1987.
- [Leitmann66] Leitmann (G. J.). – *An Introduction to Optimal Control.* – New York, McGraw-Hill, 1966.
- [Leonard et al.93] Leonard (Naomi Ehrich) et Krishnaprasad (P. S.). – Averaging for attitude control and motion planning. *Proceedings of the 32nd Conference on decision and Control*, éd. par IEEE. IEEE, pp. 3098–3104. – San Antonio, Texas, December 1993.
- [Lewis86] Lewis (Frank L.). – *Optimal Control.* – Wiley-Interscience, 1986.
- [Li et al.93] Li (W.) et Cheng (X.). – Computer control of high speed cranes. *Proceedings of the 1993 American Control Conference*. pp. 2562–2566. – San Francisco, CA, USA, 2–4 June 1993.
- [Llibre92] Llibre (M.). – *Génération de trajectoires de consigne d'attitude*. – Rapport Dera n° 2/7805.00, Toulouse, Onera/Cert Dera, Juin 1992.

BIBLIOGRAPHIE

- [Llibre93] Llibre (M.). – *Génération de trajectoires de consigne d'attitude*. – Rapport Dera n° 2/7852.00, Toulouse, Onera/Cert Dera, Juin 1993.
- [Llibre94] Llibre (M.). – *Génération de trajectoires de consigne d'attitude*. – Rapport Dera n° 1/7889.00, Toulouse, Onera/Cert Dera, Février 1994.
- [Llibre95] Llibre (M.). – Définition de trajectoires d'attitude continues en accélération. *Spaceflight Dynamics*. CNES, pp. 793–813. – Toulouse, France, June 1995.
- [Martin et al.96] Martin (Philippe) et Rouchon (Pierre). – Two remarks on induction motors. *CESA '96 IMACS Multiconference – Symposium on Control, Optimization and Supervision*. École Centrale de Lille, pp. 76–79. – Gerf EC Lille, 9–12 July 1996. Lille – France.
- [Martin92] Martin (Ph.). – *Contribution à l'étude des systèmes différentiellement plats*. – Thèse de PhD, École des Mines de Paris, 1992.
- [Martin93] Martin (Philippe). – A geometric sufficient condition for flatness of systems with m inputs and $m+1$ states. *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 3431–3436. – San Antonio, TX, USA, 15–17 December 1993.
- [Martin96] Martin (Philippe). – Aircraft control using flatness. *CESA '96 IMACS Multiconference – Symposium on Control, Optimization and Supervision*. École Centrale de Lille, pp. 194–199. – Gerf EC Lille, 9–12 July 1996. Lille – France.
- [Marttinen et al.87] Marttinen (A.) et Virkkunen (J.). – Modelling and analysis of a trolley crane. *Proceedings of the International AMSE Conference on Modelling and Simulation*, pp. 15–26. – Pomona, CA, USA, 1987.
- [Mccarthy90] McCarthy (J. M.). – *Theoretical kinematics*, chap. 4, pp. 53–66. – Massachusetts Institute of technology, 1990.
- [Nougier93] Nougier (J. P.). – *Méthodes de calcul numérique*. – Paris, France, MASSON, 1993.
- [Pledel et al.95] Pledel (Patrick) et Bestaoui (Yasmina). – An optimal motion planning algorithm for manipulators. *Proceedings of the 1995 American Control Conference*. pp. 1894–1895. – Seattle, WA, USA, 21–23 June 1995.
- [Pontryagin et al.62] Pontryagin (L. S.), Boltyanskii (V. G.), Gamkrelidze (R.V.) et Mishchenko (E. F.). – *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. – New York, Wiley-Interscience, 1962.

- [Rouchon94] Rouchon (Pierre). – *Flatness and robust control of pendulum mechanical systems*. – Rapport technique n° 469, École des Mines de Paris, Centre Automatique et Systèmes, 1994.
- [Rouchon96] Rouchon (Pierre). – Vibrational control and flatness of chemical reactors. *CESA'96 IMACS Multiconference – Symposium on Control, Optimization and Supervision*. École Centrale de Lille, pp. 211–212. – Gerf EC Lille, 9–12 July 1996. Lille – France.
- [Sakawa et al.82] Sakawa (Y.) et Shindo (Y.). – Optimal control of cranes. *Automatica*, vol. 18, 1982, pp. 257–266.
- [Sandor68] Sandor (G. N.). – Principles of general quaternion-operator method of spatial kinematic synthesis. *ASME Journal of Applied Mechanics and Engineering*, vol. 35, n° 1, March 1968, pp. 40–46.
- [Seierstad88] Seierstad (Atle). – Sufficient conditions in free final time optimal control problems. *SIAM Journal of Control & Optimization*, vol. 26, n° 1, January 1988, pp. 155–167.
- [Shiller et al.90] Shiller (Z.) et Lu (H. H.). – Robust computation of path constrained time optimal motion. *Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. pp. 144–149. – Cincinnati, OH, May 1990.
- [Shiller89] Shiller (Z.). – Interactive time optimal robot motion planning and work-cell layout design. *Proceedings of the 1989 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. pp. 964–969. – Scottsdale, AZ, May 1989.
- [Siguerdidjane93] Siguerdidjane (H. B.). – Some solutions of a rigid body attitude under one failure mode. *Proceedings of the 32nd Conference on decision and Control*, éd. par IEEE. IEEE, pp. 1478–1479. – San Antonio, Texas, December 1993.
- [Teo et al.89] Teo (K.L.) et Jennings (L. S.). – Nonlinear optimal control problems with continuous state inequality constraints. *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 63, n° 1, January 1989, pp. 1–22.
- [Yang et al.64] Yang (A. T.) et Fraudenstein (F.). – Application of dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms. *ASME Journal of Applied Mechanics and Engineering*, vol. 31, n° 2, June 1964, pp. 300–308.
- [Yu et al.95] Yu (J.), Lewis (F.L.) et Huang (T.). – Nonlinear feedback control of a gantry crane. *Proceedings of the 1995 American Control conference*. pp. 4310–4315. – Seattle, WA, USA, 21–23 June 1995.

