

T
N° d'ordre : 1975

gen 20003998
50576
1997
69

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

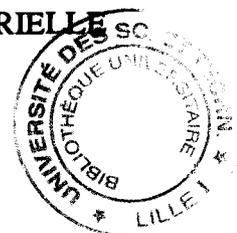
en

**PRODUCTIQUE,
AUTOMATIQUE et INFORMATIQUE INDUSTRIELLE**

par

Hervé CAMUS

Ingénieur Ecole Centrale de Lille



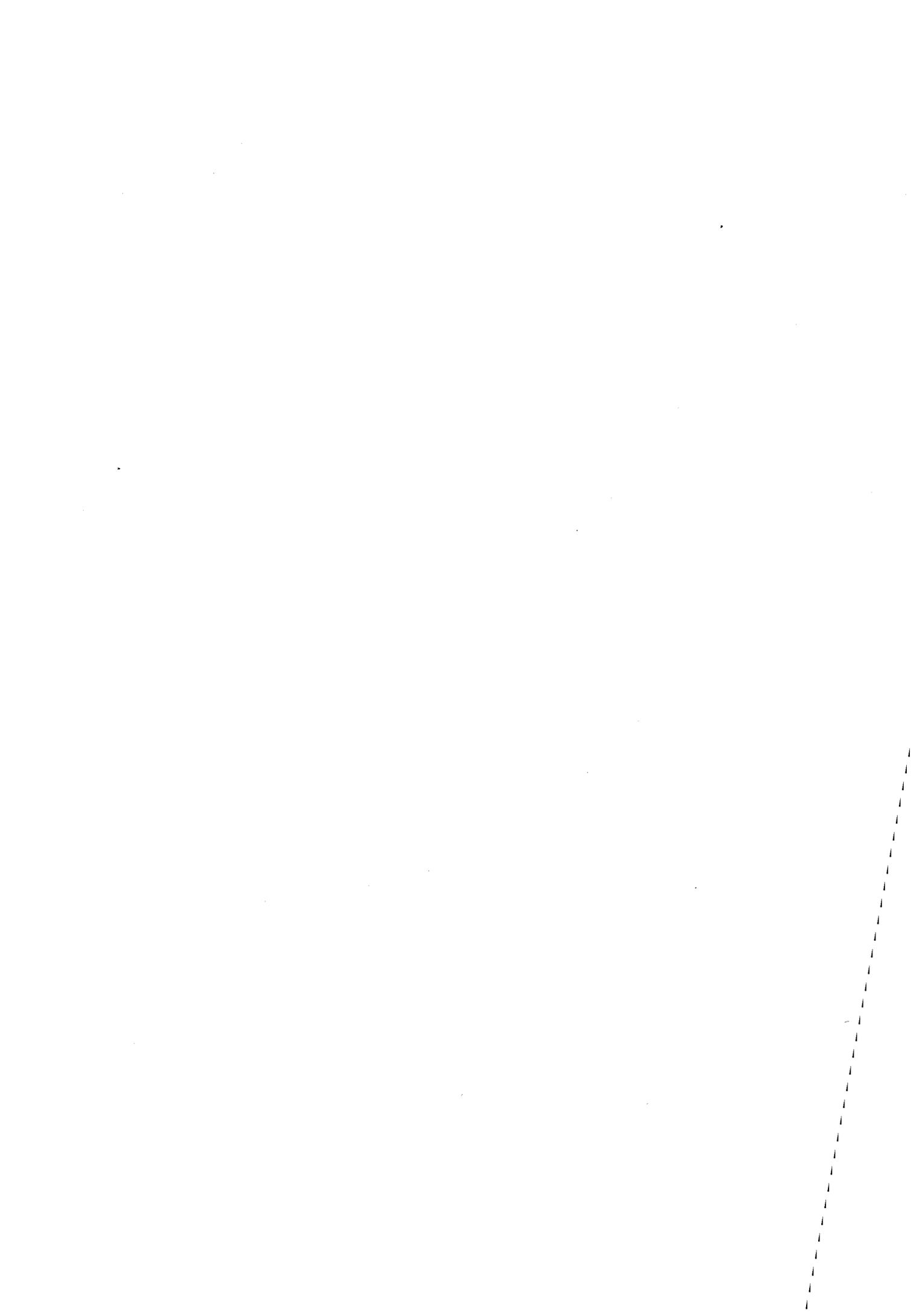
**CONDUITE DE SYSTEMES FLEXIBLES DE PRODUCTION
MANUFACTURIERE PAR COMPOSITION DE REGIMES
PERMANENTS CYCLIQUES : MODELISATION ET EVALUATION
DE PERFORMANCES A L'AIDE DES RESEAUX DE PETRI**

Soutenu le 18 mars 1997

devant la Commission d'examen :

M. J. ERSCHLER	Rapporteur	Professeur à l'INSA de Toulouse
M. C. PROUST	Rapporteur	Professeur à l'E3I de Tours
M. M. SILVA	Rapporteur	Professeur à l'Université de Saragosse
M. J.-C. GENTINA	Directeur de thèse	Professeur à l'Ecole Centrale de Lille
M. M. STAROSWIECKI	Examineur	Professeur à l'Université de Lille I, Président du jury
M. E. CASTELAIN	Examineur	Maître de conférences, H.d.R., à l'EC Lille
M. Y. FREIN	Examineur	Professeur à l'INP de Grenoble
M. F. ROUBELLAT	Examineur	Directeur de recherche au LAAS Toulouse
M. H. OHL	Invité	Docteur, Ingénieur à Andersen Consulting

Thèse préparée au Laboratoire d'Automatique et Informatique industrielle de Lille
L.A.I.L. URA CNRS D1440 - Ecole Centrale de Lille.



Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille (LAIL) dans le pôle Production Flexible Manufacturière (PFM) à l'Ecole Centrale de Lille (EC Lille) sous la direction scientifique de Monsieur le Professeur **J.-C. Gentina**, Directeur de l'EC Lille. Je tiens à le remercier très vivement pour l'accueil, l'encadrement, le soutien et les précieux conseils dont j'ai bénéficié tout au long de ce travail. J'ai ainsi pu acquérir une très enrichissante expérience aussi bien d'un point de vue professionnel que personnel. Je le remercie particulièrement du soutien moral et de sa disponibilité quasi permanente, malgré sa très importante charge de travail.

Je remercie également Madame **G. Dauphin-Tanguy**, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille et Directeur du LAIL, de m'avoir accueilli dans ce laboratoire.

Je suis très reconnaissant à :

Monsieur J. Erschler, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse,

Monsieur C. Proust, Professeur au Laboratoire d'Informatique à l'E3I, Tours,

Monsieur M. Silva, Professeur au Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas, Universidad de Zaragoza,

pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'examiner ce travail et d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je tiens également à remercier :

Monsieur E. Castelain, Maître de conférences, H.d.R. à l'EC Lille,

Monsieur Y. Frein, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, Laboratoire d'Automatique de Grenoble.

Monsieur F. Roubellat, Professeur au L.A.A.S. de Toulouse,

Monsieur M. Staroswiecki, Professeur à l'Université de Lille I,

pour l'honneur qu'ils me font en examinant ce travail et en acceptant de participer à mon jury de thèse.

Je suis particulièrement flatté de la présence à ce jury de Monsieur **H. Ohl**, Docteur, Ingénieur à Andersen Consulting, qui est, somme toute, à l'origine de ces travaux, puisqu'il fut le premier à travailler sur ce sujet au LAIL et de l'intérêt qu'il porte à mes travaux.

Je tiens également à adresser une pensée toute particulière à tous les membres du LAIL, qui, par leur bonne humeur, leur disponibilité et leurs conseils m'ont grandement aidé dans le développement de mes recherches. Qu'ils trouvent ici le témoignage de toute ma reconnaissance. Je veux absolument remercier tous les thésards du LAIL : aussi bien les « anciens » (Jean-Pierre, Lyes, Rousseau, Slimane, ...) que les « nouveaux » (Philippe, Pascal, Fatim, Khalid, Arnaud, Matthieu, William, Régis, Stéphane, David, François,...) pour leur sympathie, leur aide spontanée et désintéressée et leur soutien et, plus particulièrement, dans le petit groupe Evaluation de Performances du pôle PFM : **Harald Ohl** et **Ouajdi Korbaa** où le *Travail de Groupe* et l'*Amitié* ont pris pleinement leur sens.

Enfin, je remercie très sincèrement Monsieur **M. Vangreveninge** pour la reprographie de ce mémoire ainsi que Mme **E. Vérin** pour sa gentillesse et sa disponibilité.

Table des matières

Introduction Générale :

Choix de l'élaboration d'une commande prévisionnelle pour la conduite de Systèmes Flexibles de Production Manufacturière

I. Choix d'un ordonnancement a priori permettant une évaluation a posteriori des performances	2
II. Intégration d'une commande prévisionnelle, déterministe et cyclique utilisant les Réseaux de Petri dans le cadre du projet CASPAIM	2
II.1 Justification de l'utilisation du modèle Réseau de Petri.....	2
II.2 Intégration d'un tel type d'ordonnancement au sein du projet CASPAIM	3
III. Plan de la thèse	6

Chapitre I :

Une nouvelle approche de planification fine : Analyse de flux, Regroupement de produits et Optimisation discrète des performances du système

I.1 Positionnement du problème.....	9
I.1.1 Contexte de Production : les hypothèses	10
I.1.2 Enoncé du Problème	16
I.2 Première manière d'appréhender le problème : les travaux présentés dans [OHL 95a]	22
I.2.1 Conduite de SFPM par des commandes cycliques et déterministes soumises à des ratios de production fixés par une étape de planification fine	22
I.2.2 Première Etape : Modélisation du système flexible considéré	32
I.2.3 Deuxième Etape : Analyse de flux et Optimisation discrète	36
I.2.4 Discussion.....	52
I.3 Proposition d'une approche de planification fine prenant en compte la quasi totalité des critères d'optimisation (quantitatifs et qualitatifs)	53
I.3.1 Rappel sur la gestion de production.....	54
I.3.2 Problème de l'analyse du regroupement de types de produits.....	56
I.3.3 Formulation du problème	61
I.3.4 Résolutions	67
I.4 Conclusion.....	73

Chapitre II :

Elaboration de la commande d'un régime permanent cyclique et déterministe

II.1	Caractéristiques du problème restant, sa modélisation et sa résolution.....	77
II.1.1	Introduction	77
II.1.2	Modélisation du problème restant et description de l'exemple illustratif.....	78
II.1.3	Périodicité et notion d'en-cours	81
II.1.4	L'approche retenue : celle développée dans [OHL 95a] : dualité entre la transformation progressive du système et la « résolution » des différents degrés de liberté disponibles	84
II.2	Transformation progressive du modèle vers un modèle déterministe représentatif de la commande prévisionnelle, cyclique et déterministe	86
II.2.1	Détermination des ensembles de ratios de routages admissibles	86
II.2.2	Linéarisation des gammes opératoires	90
II.2.3	Détermination des charges de travail des machines de transformation.....	97
II.2.4	Formation des Regroupements cycliques.....	98
II.2.5	Développement d'une approche évitant la recherche exhaustive	109
II.3	Le problème d'ordonnancement cyclique proprement dit	116
II.3.1	Différentes spécifications du problème d'ordonnancement cyclique et leurs conséquences	117
II.3.2	Rappel des propriétés des Réseaux de Petri T-temporisés déterministes : les Graphes d'Événements (temporisés).....	121
II.3.3	Position du problème	126
II.3.4	Seule référence d'optimalité : Atteignabilité de la borne inférieure fine d'en-cours $B(Rc_i)$ d'un regroupement cyclique	127
II.3.5	Analyse de trois heuristiques d'ordonnancement cyclique	129
II.3.6	Essai de synthèse des trois approches : développement d'une nouvelle heuristique.....	139
II.4	Conclusion	164

Chapitre III :

Complexité et justification de l'approche structurée et progressive de l'élaboration de la commande

III.1 Etude de la complexité des différentes parties de cette étape	168
III.1.1 Phase 1 : Détermination et choix d'ensembles de routages admissibles.....	172
III.1.2 Phase 2 : Extraction des chemins ou dépliage des gammes.....	185
III.1.3 Phase 3 : Prise en compte des flexibilités de permutation ou la fin de la linéarisation des gammes opératoires.....	192
III.1.4 Phase 4 : Détermination des charges des machines	197
III.1.5 Phase 5 : Partition de l'ensemble des gammes.....	207
III.1.6 Phase 6 : Regroupement cyclique des gammes.....	212
III.1.7 Parcours de l'espace de recherche : application à l'exemple illustratif	217
III.1.8 Phase 7 : Ordonnancement cyclique des opérations sur les ressources.....	218
III.1.9 Comparaison des résultats entre l'exemple illustratif et l'horizon double de production $E_2 = \{6A, 4B, 4C\}$	221
III.1.10 Phase 8 : Recherche des en-cours (niveau et positionnement).....	222
III.1.11 Résolution du problème NP-difficile de l'ordonnancement cyclique des opérations sur les machines tout en minimisant l'en-cours du système par le développement d'heuristique	223
III.2 Synthèse de cette étape	224
III.2.1 Liens entre les différentes étapes de l'élaboration de la commande	224
III.2.2 L'approche retenue : cas particulier de la méthode générale d'élaboration de la commande : séquentialisation des différentes étapes	227
III.2.3 Formalisation des deux approches d'élaboration de la commande : méthode globale et méthode progressive	228
III.3 Conclusion	232

Chapitre IV : Conclusion et perspectives

IV.1 Conclusion	235
IV.2 Perspectives sur la méthode d'élaboration de la commande.....	237

Chapitre V : Références bibliographiques 241

Annexes :

Annexe A : Influence de la prise en compte des opérations de transport sur l'ordonnancement déterministe et répétitif : en-cours et temps de cycle

Annexe B : Exemple particulier de système de production pour lequel le meilleur ordonnancement est issu du regroupement cyclique associé à la plus grande borne inférieure d'en-cours

Annexe B.1 : Modélisation du système de production, présentation du régime permanent et étude des performances de productivité	B-1
Annexe B.2 : Ensemble des regroupements cycliques issus de ce système de production avec l'horizon de production $E(RP_p) = \{A, B\}$	B-2
Annexe B.3 : Parcours de l'espace des regroupements cycliques et recherche de l'ordonnancement qui minimise l'en-cours	B-5
Annexe B.4 : Recherche du niveau optimal d'en-cours obtenu avec Rc_1	B-7
Annexe B.5 : Ordonnancement optimal trouvé avec Rc_2	B-10

Annexe C : Utilisation de notre approche afin d'optimiser les autres critères d'optimisation portant sur l'en-cours : application à l'exemple de [ERS 82]

Annexe D : Démonstrations des propositions du chapitre III

Annexe D.1 : Dénombrement des solutions d'une équation linéaire en nombres entiers.....	D-1
Annexe D.2 : Nombres de k-partitions, au sens mathématique du terme, d'un ensemble à n éléments distincts	D-2
Annexe D.3 : Nombre de partitions d'un ensemble à n éléments	D-4
Annexe D.4 : Dénombrement de l'ensemble des regroupements cycliques possibles à partir d'une partition P	D-5

Introduction Générale :

Choix de l'élaboration d'une commande prévisionnelle pour la conduite de Systèmes Flexibles de Production Manufacturière

La mondialisation de l'économie et l'ouverture des marchés ont poussé un grand nombre d'entreprises à abandonner la production de masse au profit de la production de moyennes voire de petites séries, afin de répondre au mieux aux exigences toujours croissantes et variées des clients. Ce bouleversement a contraint ces mêmes entreprises à envisager la production simultanée de plusieurs séries, soit pour décliner un produit selon plusieurs versions, soit pour réaliser des types de produit différents de façon plus réactive.

Ces évolutions requièrent des moyens de production flexibles pouvant gérer effectivement ce parallélisme au niveau de la production et permettant également la gestion des modifications de la production en fonction de la demande, qui évolue dans le temps. C'est notamment le cas des Systèmes Flexibles de Production Manufacturière (SFPM), objet de l'étude dans ce mémoire.

Cependant certains industriels demeurent encore assez réticents vis-à-vis de ces systèmes flexibles, parce que leur mise en place nécessite des investissements considérables aussi bien sur le plan matériel que sur le plan de la conception, analyse et implantation du système de contrôle / commande. En effet, l'étude et la mise au point du système de commande est une opération coûteuse à cause de la trop grande complexité du fonctionnement potentiel de ces SFPM. La réduction du coût de la commande passe par l'automatisation de la démarche. Plusieurs travaux ont été menés dans ce sens au sein de la communauté de recherche avec notamment le développement d'une méthodologie de Conception Assistée depuis la spécification jusqu'à l'implantation sur site des Systèmes de Production Automatisés en Industrie Manufacturière (CASPAIM) au sein du groupe Production Flexible Manufacturière au Laboratoire d'Automatique et d'Informatique industrielle de Lille (L.A.I.L.) : cf. [GEN 88], [KAP 88], [BOI 91], [CRU 91], [HAM 91], [TOG 92], [BOU 93a], [ELK 93], [AMA 94], [AUS 94], [CRA 94], [HUV 94], [OHL 95a], [TAW 95], [CAS 96] et [KER 96].

Les travaux présentés dans ce mémoire relèvent de l'Elaboration de la commande des SFPM avec une partie Analyse des Performances, en phase de conception et une partie gestion de production : Planification, Ordonnancement en phase d'exploitation. Le problème, auquel nous nous sommes attachés, consiste à essayer d'utiliser toutes les flexibilités que recèlent ces systèmes de production et la demande qui est à réaliser (flexibilités des gammes de fabrication), afin d'optimiser la production : élaboration d'une commande qui permettra d'atteindre les niveaux de performances évalués lors de l'étape d'analyse des Performances. Cette évaluation s'effectuera dans l'intention de respecter les délais de livraison des commandes aux clients et de faire face aux aléas inhérents à tout système de production, avec notamment des défaillances au niveau des ressources de l'atelier flexible de production.

I. Choix d'un ordonnancement a priori permettant une évaluation a posteriori des performances

Deux types d'approches peuvent être envisagés pour commander ces systèmes de production : la conduite réactive du système, dans laquelle les conflits sont résolus en utilisant des règles de décisions, cf. [MAN 96], ou conduite temps réel, cf. [ERS 76], [BIL 93], [ROU 94], [BIL 95] et [ART 96], et l'approche prédictive : utilisation de tous les indéterminismes du système afin de dégager une commande optimisant les différents critères. Puisque nous avons choisi de nous situer dans un contexte comportant peu de perturbations, il s'agira d'élaborer un ordonnancement au sein duquel les conflits seront résolus de manière prévisionnelle. La commande obtenue après ordonnancement sera par conséquent déterministe. Nous associerons à cet ordonnancement déterministe et cyclique de la commande une modélisation par Réseaux de Petri ⁽¹⁾, ce qui rend l'implantation plus aisée. De plus, nous avons à notre disposition, grâce aux différentes représentations (par diagrammes de Gantt et l'outil de modélisation : les Graphes d'Événements), des indicateurs de performances. Ils peuvent être simplement utilisés par un module de supervision afin de comparer les performances théoriques du système (comportement prévisionnel) et les performances du processus physique soumis à la commande du module de pilotage. Il est ainsi possible d'envisager des boucles de rétroaction afin de corriger, si besoin est, la commande prédictive en tenant compte des contraintes sur le processus physique (écarts sur les durées opératoires), voire même temporaires (défaillances de ressources de l'atelier nécessitant une nouvelle évaluation de la commande).

II. Intégration d'une commande prévisionnelle, déterministe et cyclique utilisant les Réseaux de Petri dans le cadre du projet CASPAIM

II.1 Justification de l'utilisation du modèle Réseau de Petri

Au sein du projet CASPAIM, nous travaillons aussi bien en conception, qu'en analyse (évaluation des performances et ordonnancement) ou qu'en implantation. Il est donc intéressant de pouvoir utiliser le même outil de modélisation : ce qui est tout à fait possible avec les RdP. En effet, à l'aide des Réseaux de Petri, outil générique de modélisation des Systèmes à Événements Discrets, cf. [SIL 96a et b], nous pouvons raffiner plus ou moins le modèle du système de production selon le degré de détails souhaité.

La primitive de synchronisation, propre au fonctionnement des systèmes à événements discrets pour représenter les problèmes d'assemblage et aussi la prise en compte de ressources de transfert, de transformation ou même virtuelles, comme les ressources modélisant les capacités finies des processus de stockage du système de production, est implicite avec les RdP.

L'utilisation d'un outil de modélisation graphique tel que les RdP pour résoudre des problèmes d'ordonnancement reste encore assez rare dans la littérature. Mais l'intérêt de pouvoir représenter les gammes de fabrication avec les contraintes de précedence entre opérations et les contraintes de ressources partagées a déjà suscité quelques approches telles que [RIC 95].

¹ Noté par la suite RdP.

Le développement du modèle Réseau de Petri sur lequel va reposer notre ordonnancement prédictif cyclique est basé sur la connaissance des gammes de fabrication. Elles occupent en effet une place importante dans les modèles utilisés dans le cadre du projet CASPAIM et nous nous appuyons ici sur les modèles et terminologies développés dans [CRU 91], [AMA 92] et [AMA 94] avec notamment le raffinement progressif de ces gammes : passage d'une gamme logique en une gamme opératoire avec la prise en compte des informations relatives au procédé afin de spécifier sur quelle ressource une opération est affectée. Par la connaissance des ressources de transformation et des liens physiques associés, nous pouvons commencer à envisager les opérations de transfert entre ces ressources.

Cette dualité entre les ressources et les produits (gammes), notion fondamentale développée dans CASPAIM II, est parfaitement mise en évidence avec le modèle RdP. Il est aussi possible de caractériser deux types de circuits concernant respectivement les produits et les machines du Graphe d'Événements (modélisant la commande prédictive déterministe de l'atelier).

Il existe déjà dans la littérature des méthodes éprouvées d'analyse mathématique et d'évaluation des performances des systèmes modélisés développées à l'aide de l'outil graphique et d'analyse RdP selon deux approches : déterministe et stochastique. C'est dans le cadre déterministe que les résultats concernant la recherche d'un meilleur ordonnancement sont assez nombreux dans le contexte P.F.M.

A un certain degré de raffinement, notamment au cours de l'ordonnancement des opérations sur les ressources du système, il devient nécessaire de pouvoir visualiser le comportement individuel de chaque marque qui représente aussi bien les produits que les ressources : c'est l'un des principaux avantages des RdP.

Dans la suite de ce mémoire, les modèles RdP utilisés vont servir d'interface à d'autres modules, notamment la supervision. Il s'agit de réseaux simples ordinaires temporisés, qui sont facilement intégrables dans tous les autres types de modélisations.

II.2 Intégration d'un tel type d'ordonnancement au sein du projet CASPAIM

En raison du caractère prévisionnel de l'ordonnancement, il est nécessaire de disposer d'une couche de commande de plus bas niveau, réactive vis-à-vis de l'évolution asynchrone du processus physique réel. Ceci correspond à une partie du rôle du module de supervision. Ainsi le type de la commande proposé s'intègre assez simplement dans le cadre du projet CASPAIM développé au LAIL. Un premier module de pilotage sera utilisé pour amener la production réelle au comportement déterministe optimal élaboré au niveau de l'ordonnancement cyclique.

En fait, nous prenons en compte deux types différents de perturbation de production.

En premier lieu, nous considérons une perturbation externe à l'atelier, telle que l'arrivée d'une commande urgente, qui nécessite un changement de production. En raison du caractère cyclique de la production, nous pouvons retarder cette commande, le temps d'optimiser son intégration dans la production en-cours de réalisation pour arriver ensuite à la date optimale d'insertion de ce régime transitoire. Nous pouvons représenter globalement la réaction temporelle envisagée de la commande par ce schéma :

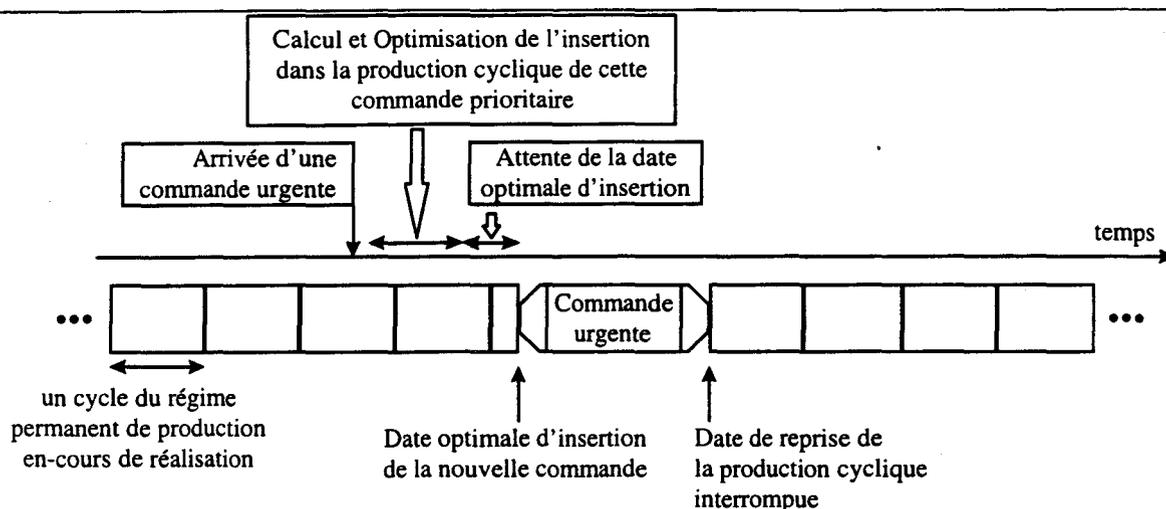


Figure 1 : Réactivité envisagée par rapport à l'arrivée d'une commande urgente

Il s'agira de minimiser le temps de perturbation occasionné par l'insertion de cette commande prioritaire ainsi que la phase de calcul et l'implantation de la nouvelle commande.

En second lieu, en cas d'écarts de la production réelle par rapport à la commande prévisionnelle, les temps opératoires peuvent être dégradés du fait par exemple de l'usure d'un outil. Dans ce cas, la détection d'une baisse de performance pourra conduire à donner au système de surveillance une indication suffisamment précise pour qu'il puisse en diagnostiquer la cause et adapter éventuellement le pilotage. Suite à cette détection, il peut être également décidé de lancer une nouvelle évaluation de la commande prévisionnelle pour prendre en compte ces nouvelles données.

Dans le cas d'une détection de défaillances d'une ou plusieurs ressources du système de production, il est nécessaire que le système réagisse en temps réel. C'est au recouvrement - cf. [BER 96] pour la définition exacte - à déterminer une nouvelle organisation du système afin d'assurer la sécurité et le maintien d'un taux de production acceptable, la gestion des modes gérant les transitoires entre l'état courant et le nouvel état. En parallèle, dès la détection, un feedback est prévu, si nécessaire, depuis la surveillance vers le module d'élaboration de la commande prévisionnelle afin d'évaluer une nouvelle commande respectant les nouvelles contraintes de production et, au niveau planification fine, afin de prévenir des modifications de fabrication pour que la planification puisse réagir et modifier en conséquence les productions déjà planifiées.

Dès la fin du calcul de cette nouvelle commande, le module de pilotage peut à nouveau utiliser les recommandations de l'ordonnancement prédictif.

Le recouvrement est nécessaire, dans le sens où il réagit en temps réel, contrairement à l'ordonnancement prédictif, qui nécessite un calcul hors-ligne, face à des défaillances. Mais l'évaluation de la nouvelle commande reste nécessaire pour optimiser le fonctionnement dégradé de la production. Ceci est surtout intéressant dans le cas d'une défaillance de longue durée.

Nous présentons sur la figure suivante l'intégration possible du module d'ordonnancement prédictif que nous allons développer au sein du projet CASPAIM. Ce schéma permet de mettre en évidence surtout les interfaces entre les modules amont tels que la planification et la maintenance préventive et les modules aval de l'élaboration de cette commande, avec notamment les systèmes de supervision et de maintenance.

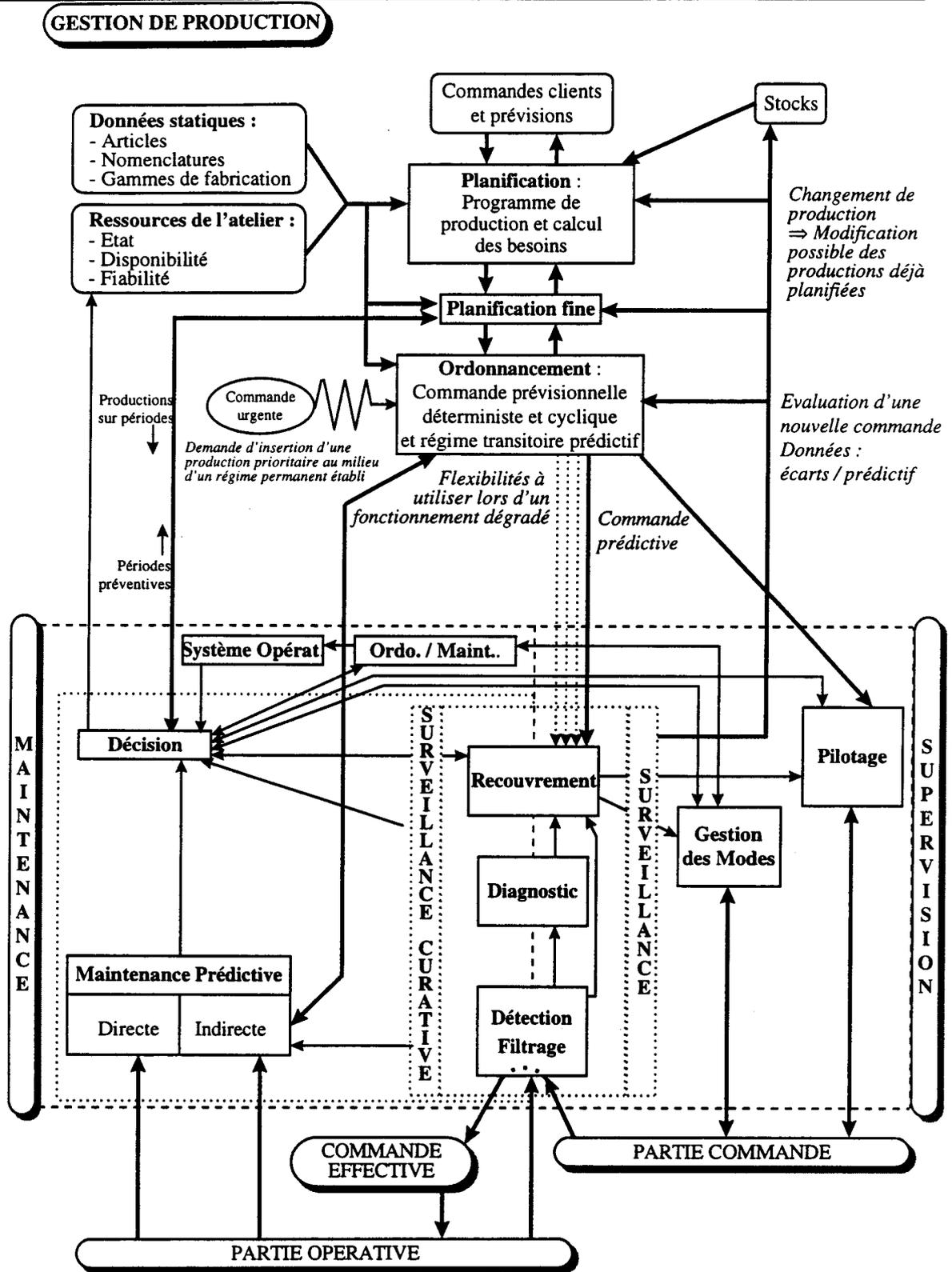


Figure 2 : Interface du module de Planification - Ordonnancement avec les autres modules du contrôle / commande ⁽¹⁾

¹ Pour les phases de supervision et de maintenance développées au sein du L.A.I.L. et évoquées sur cette figure, nous renvoyons le lecteur à l'ensemble de ces travaux : [TOG 92], [ELK 93], [CRA 94], [TAW 95], [KER 96] et [BER 96].

III. Plan de la thèse

Nous avons donc présenté la façon d'envisager l'intégration de notre module de planification fine et d'ordonnancement prédictif dans le cadre du projet CASPAIM.

Après avoir établi notre contribution dans le contexte du projet CASPAIM, y compris de façon prospective pour ce qui concerne la surveillance du comportement dynamique du système, nous précisons le cadre plus restrictif de ce travail qui s'intéresse à l'optimisation de la production en l'absence de perturbations. Notre but sera de calculer une production à l'aide d'une ou plusieurs commandes prédictives de type déterministe et cyclique, afin de proposer au module de pilotage le comportement idéal de l'atelier flexible pour réaliser la production souhaitée.

Nous avons décomposé le problème d'élaboration de la commande en plusieurs étapes, ce que reflète le plan de ce mémoire.

Nous supposons que la demande par produit sur cette période est issue d'un programme de production élaboré à partir des informations provenant des prévisions de vente (Plan Industriel et Commercial), des demandes réelles des clients et de l'état des stocks.

La première étape, au **Chapitre I**, concerne la **planification fine** et s'attache à décomposer cette demande en une ou plusieurs productions réalisables. Dans le contexte de production que nous fixons dans ce chapitre, nous supposons pouvoir travailler avec des commandes déterministes, cycliques et prédictives, qui représentent le plus possible le comportement réel de l'atelier. L'objectif principal de cette recherche est évidemment la minimisation du makespan de la production pour pouvoir faire face à des perturbations non prévues. Cependant d'autres critères d'optimisation sont présents et semblent a priori d'égale importance. L'optimisation simultanée de tous ces critères est d'une telle complexité que seules des heuristiques peuvent permettre de fournir de bons compromis. Il est aussi possible d'envisager une hiérarchisation des différents critères. Après avoir discuté des différentes approches déjà développées dans la littérature, notamment celle de [OHL 95a] qui recherche, à ratios fixés, le meilleur horizon de production, nous proposons une nouvelle méthode qui permet d'établir précisément les caractéristiques de ces commandes, c'est-à-dire, pour **chaque régime permanent**, la production à réaliser au cours d'un cycle de fonctionnement (appelé **horizon de production**) et la durée d'un cycle (**temps de cycle**).

Ensuite, pour chaque régime permanent ainsi déterminé, nous procédons au **Chapitre II** à une étape dite d'**ordonnancement cyclique** (puisque nous nous occupons ici d'une commande répétitive). Nous cherchons la meilleure allocation des ressources et le meilleur séquençement de ces opérations sur les machines de l'atelier flexible afin de respecter les contraintes imposées par l'étape antérieure de planification fine tout en optimisant le critère restant, c'est-à-dire l'en-cours maximal présent dans le système de production. La méthode utilisée consiste à **tenir compte progressivement de chaque degré de liberté** présent dans le système de production pour ne conserver, à chaque phase de notre approche, que les solutions admissibles. A chaque étape, nous associons un **modèle graphique à l'aide de l'outil RdP**. Ainsi à la fin de l'analyse, nous avons à notre disposition une modélisation de notre commande prédictive ainsi que la représentation de son comportement temporel à l'aide de **Diagrammes de Gantt**. Comme il est impossible d'évaluer, pour chaque solution, la valeur exacte de l'indice de performance qui nous intéresse sans développer l'analyse complète (jusqu'à la détermination de l'ordonnancement cyclique définitif), nous devons conserver toutes les solutions admissibles jusqu'au problème de séquençement des

opérations sur les machines avec minimisation d'en-cours. Nous nous sommes efforcés de **rechercher la solution optimale de ce problème d'ordonnancement cyclique**.

Cependant nous voulons pouvoir appliquer cette approche en **phase d'exploitation** de l'atelier de production. Des contraintes assez fortes sur les temps de calcul, surtout pour des ordonnancements de type hors-ligne, limitent cette recherche d'optimalité. C'est pourquoi de **nouvelles heuristiques** ont été développées afin d'obtenir de « bonnes » solutions en un temps de calcul limité. En parallèle, au **Chapitre III**, toujours dans l'optique de conduite de l'atelier par une commande prédictive, déterministe et cyclique, nous évaluerons la taille de l'espace de recherche ainsi que le nombre total de solutions admissibles sur l'exemple illustratif utilisé au chapitre précédent. En effet, puisque nous sommes a priori obligés, à chaque étape, de générer de nouvelles solutions à partir des solutions de l'étape précédente, nous pourrons en déduire, après l'étude de chaque problème lié à la prise en compte d'une flexibilité du système de production, une éventuelle borne pour le temps de calcul. Nous justifierons notamment la nécessité, dès l'étape de planification fine, de limiter la taille de l'horizon de production pour conserver des temps de calcul raisonnables. Nous démontrerons également l'intérêt d'une approche progressive par rapport à une résolution simultanée de tous les indéterminismes de l'atelier.

Nous terminerons ce mémoire par une rapide synthèse des extensions apportées par rapport à l'approche développée dans [OHL 95a] et par les perspectives de recherche qui sont en cours d'étude au sein du L.A.I.L. sur le problème d'élaboration d'une commande prévisionnelle cyclique.

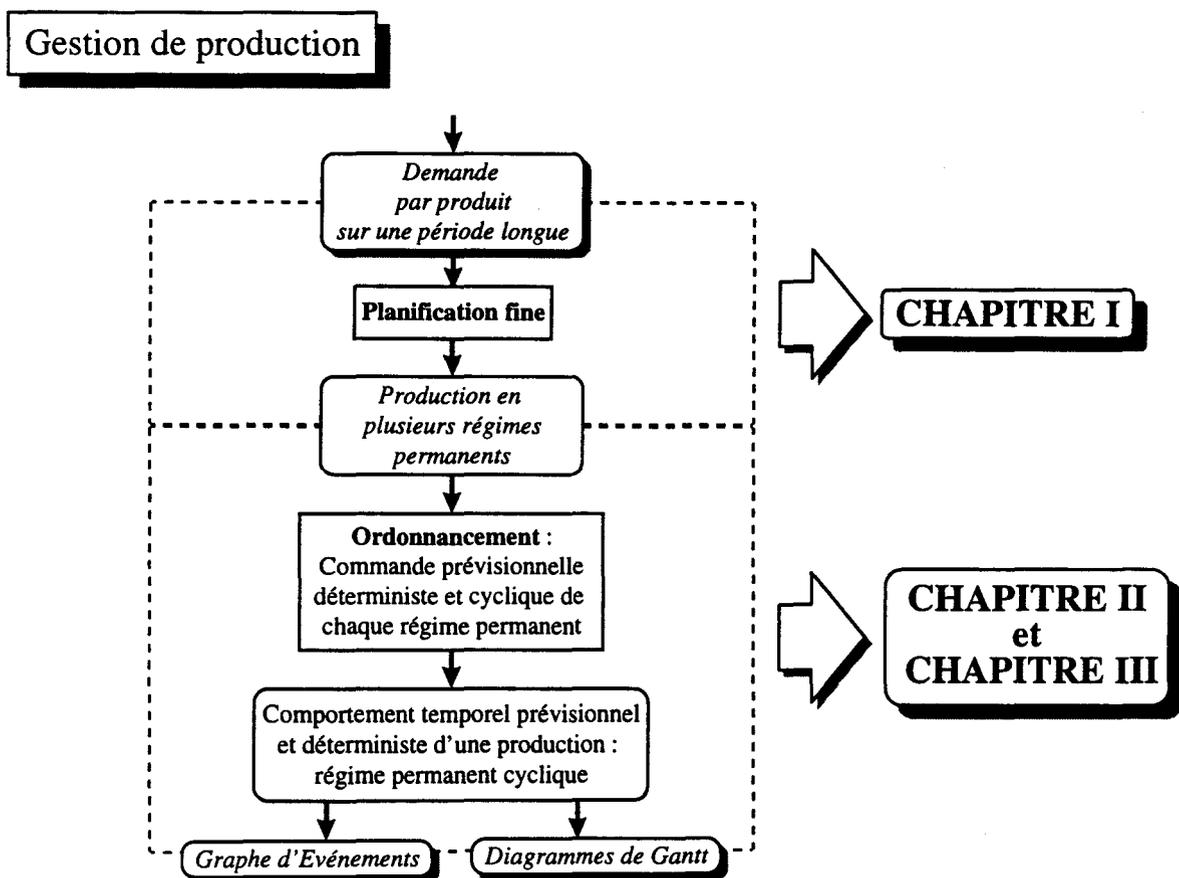
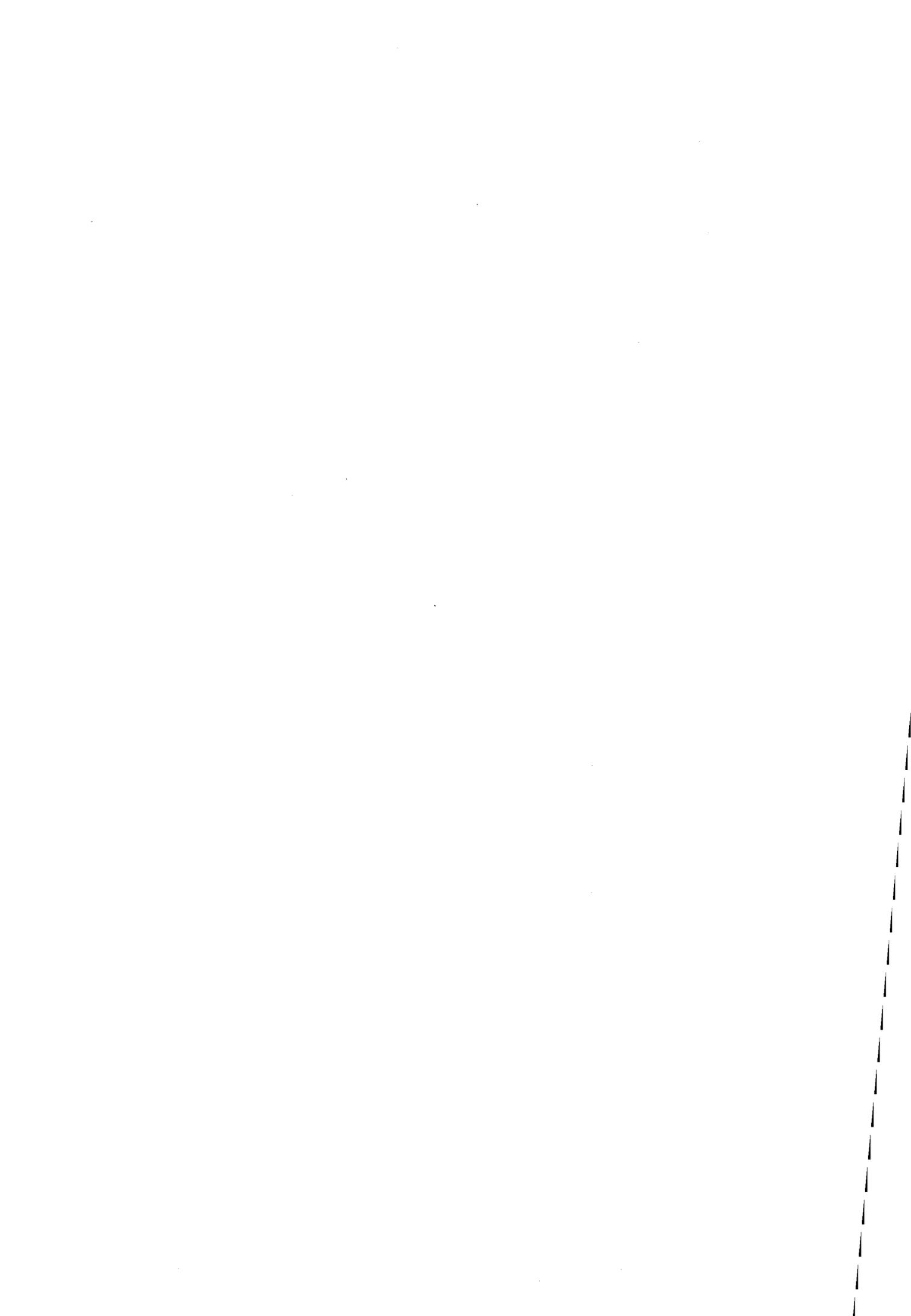


Figure 3 : Plan schématisé du mémoire de thèse



Chapitre I

I. Une nouvelle approche de planification fine : Analyse de flux, Regroupement de produits et Optimisation discrète des performances du système

I.1 Positionnement du problème

L'objectif principal de cette thèse est la recherche d'une commande prévisionnelle dans un système de production manufacturière de type atelier flexible. Avant de présenter l'approche structurée que nous avons développée et qui se veut générale (¹), il est nécessaire de souligner, dans un premier temps, les principales caractéristiques du système de production considéré, ainsi que les propriétés de l'atelier de fabrication. Nous définissons ainsi toutes les notions (gammes flexibles de production, ressources de transport, ...) que nous utiliserons par la suite.

Il faut également prendre garde de ne pas oublier certaines hypothèses évidentes et implicites telles que les flexibilités au niveau des gammes de fabrication, par exemple. Cependant, en prenant un peu de recul et en considérant le problème général de contrôle - commande des systèmes à événements discrets, ces mêmes propriétés peuvent ne plus sembler aussi implicites. Nous introduisons dans ce chapitre la formulation exacte des notions utilisées.

Dans une première partie de ce chapitre (paragraphe § I.1.1), nous précisons le contexte de l'étude. Nous présentons ensuite une classification des différents degrés de liberté qu'offre ce type d'atelier flexible de production au § I.1.2.2. Les objectifs, en terme de critères d'optimisation, sont ensuite dégagés au § I.1.2.3 pour fixer la formulation du problème abordé. L'une des solutions possibles, qui consiste à élaborer une commande prévisionnelle déterministe et répétitive à l'aide des Réseaux de Petri, méthode développée par M. Ohl dans son mémoire de thèse [OHL 95a] au sein du L.A.I.L., est reprise ici au § I.2 pour en faire ressortir les avantages et inconvénients. Cette approche est progressive puisqu'elle tient compte successivement des différents degrés de liberté que possède le système considéré. Suite à cette discussion, notamment sur la détermination des ratios de production par l'étape de planification fine, apparaît la nécessité d'améliorer l'approche qui établit les différents fonctionnements répétitifs du système afin de réaliser la production à court terme (évaluation des performances et optimisation). C'est cette extension que nous présentons à la fin de ce chapitre au § I.3. Le terme extension est le plus approprié puisque nous voulons conserver le même fil conducteur : structuration générale de la méthode et utilisation des Réseaux de Petri comme outil de modélisation de systèmes discrets et aussi outil d'évaluation de performances par analyse mathématique.

¹ Dans les limites de validité des hypothèses posées.

I.1.1 Contexte de Production : les hypothèses

I.1.1.1 Type de production dans un atelier flexible

Les ateliers flexibles sont dédiés à la production de petites et moyennes séries, cf. Figure I-1. Ils présentent le meilleur compromis entre flexibilité et productivité.

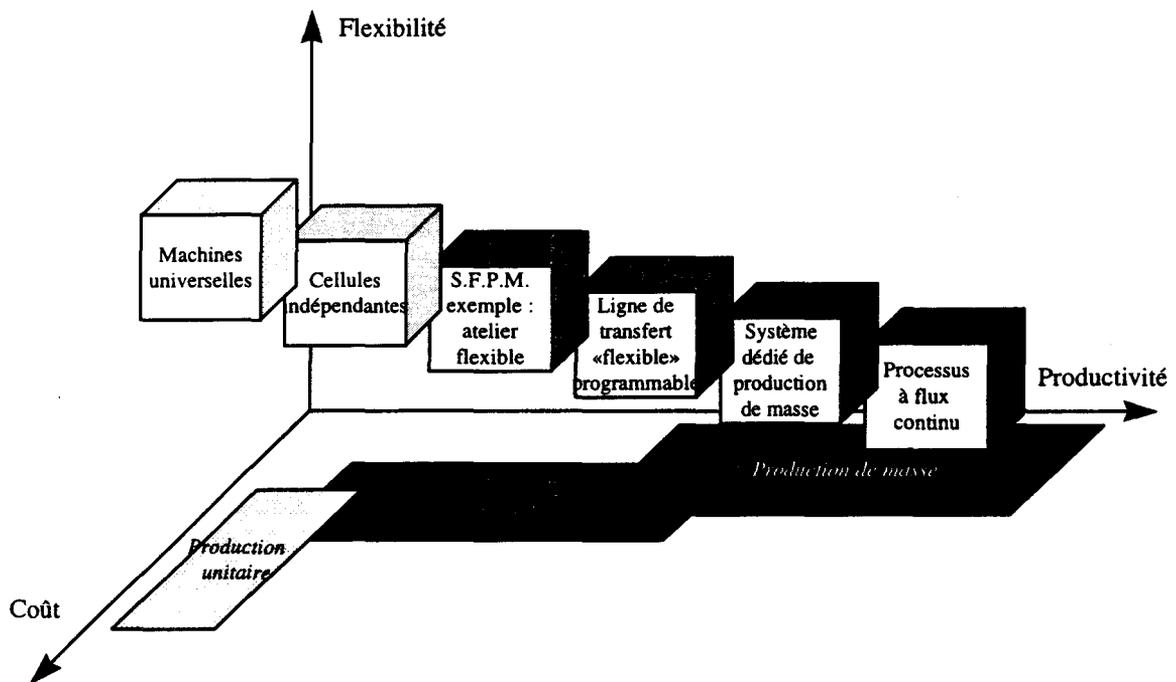


Figure I-1 : Productivité, Flexibilité et Coût [KER 96]

I.1.1.2 Différences entre ateliers d'usinage et d'assemblage

Nous nous intéressons ici à des ateliers flexibles où les opérations de transformation réalisées sur les pièces sont de type **usinage** (fraisage, perçage, tournage, ...). En aucune façon, nous ne considérons des opérations d'**assemblage** complexe, bien que l'extension de notre étude à ce type de production soit envisageable. Il existe deux principales différences entre ces deux types de production.

Concernant l'assemblage, il existe des **problèmes de synchronisation inter-pièces** afin d'en permettre l'assemblage effectif, problèmes qu'il faut ajouter à ceux déjà présents dans les systèmes d'usinage où la synchronisation porte principalement sur les pièces en relation avec leur machine de transformation. Si, plus spécifiquement, l'assemblage correspond à un assemblage de composants sur circuits imprimés, les composants ne circulent pas alors dans l'atelier, mais sont stockés au niveau des machines d'assemblage. Ce sont donc les circuits imprimés qui sont transportés au sein de l'atelier. Il faut alors considérer les problèmes d'approvisionnement des machines et de répartition des types de composants sur les machines. En effet les machines d'assemblage peuvent en général réaliser tout type de tâches. Il n'existe pas vraiment d'ordre entre les différents composants à placer. La production est dans ce cas très flexible. C'est plus un problème d'**open-shop** qu'un

problème de **job-shop généralisé** ⁽¹⁾. Cependant la capacité des stocks de composants est limitée pour chaque machine d'assemblage : le nombre de types distincts de composants présents dans le stock est borné. Ce type de problème se rapproche davantage d'un problème de répartition des outils sur les centres d'usinages dont les stocks sont eux aussi limités. Il s'agit alors de regrouper judicieusement les outils de façon à minimiser les déplacements des pièces dans l'atelier.

La deuxième distinction porte quant à elle sur le **rapport entre les temps de transport d'une machine à l'autre et les temps de transformation**. Les durées des opérations d'usinage sont en général d'un ordre de grandeur supérieur à celles des opérations de transferts. Le système de transport ne peut être alors considéré comme la ressource goulet d'étranglement qui impose sa vitesse au système. Ce sont donc ici les machines de transformation qui sont critiques. C'est pour cette raison qu'en général, dans un premier temps, les temps de transport ne seront pas considérés et nous supposons que les opérations de transferts sont réalisées en temps masqué. C'est souvent après l'ordonnancement des opérations de transformation que les opérations de transfert sont à nouveau considérées pour vérifier la vivacité ⁽²⁾ de la commande. Dans le cas contraire, comme nous le verrons par la suite, il sera nécessaire d'envisager l'ajout d'en-cours dans le système afin de garantir la vitesse maximale de production de l'atelier. Pour les systèmes d'assemblage, les opérations de transformation sont plus rapides et leur durée de l'ordre de celle des opérations de transfert de machine à machine. Il est donc nécessaire de prendre en compte toutes les opérations d'assemblage et de transfert puisque nous ne savons pas lesquelles de ces ressources seront critiques.

1.1.1.3 La production de pièces

Nous considérons une production simultanée de différents types de pièces dans l'atelier flexible. Le principe de fabrication de chacun de ces types de pièces peut ne pas être unique. C'est pourquoi nous envisageons certains degrés de liberté au niveau des gammes de fabrication de chaque type de pièces, cf. § I.1.2.2 pour distinguer les différentes flexibilités de production.

1.1.1.4 Hypothèse concernant les opérations à réaliser dans cet atelier de production

Nous supposons qu'il n'y a pas de préemption des tâches en mode de fonctionnement normal du système. Une opération de transformation sur une pièce conserve la ressource machine associée jusqu'à la fin de l'usinage de cette pièce.

Nous approximations les durées opératoires par des valeurs déterministes. Certes cette hypothèse est assez restrictive et semble inappropriée face à des opérations dont la durée peut plus ou moins varier autour d'une valeur moyenne. Mais les autres lois d'approximation de ces durées qui sont à notre disposition ont elles aussi leurs avantages et inconvénients. Les lois de type exponentielles, par exemple, permettent aussi d'effectuer une évaluation analytique des performances du système de production, puisque nous n'utilisons dans ce cas que les valeurs moyennes (écart type égal à la moyenne). Cependant l'approximation par de telles lois est à notre avis moins réaliste étant donné l'écart type de cette loi. De plus il semble difficile de pouvoir intégrer ces notions de variation dans un problème d'ordonnancement si ce n'est en surestimant la valeur moyenne. Dans ce cas,

¹ Cf. [GOT 93] pour les définitions précises de ces deux termes.

² Le problème de vivacité ne se pose pas grâce à notre approche d'élaboration de la commande.

nous risquons de perdre en terme de productivité parce que le système ne fonctionnera pas à vitesse de production maximale. Mais même dans ce cas, il existera toujours des exemples de distributions qui remettront en cause l'ordonnancement trouvé. De plus nous travaillons avec des systèmes de production où toutes les opérations sont a priori automatisées. Il existe peu ou pas du tout d'opérations dont la durée peut être représentée par une variable aléatoire, comme pourraient l'être, par exemple, les opérations réalisées par des opérateurs humains. Ainsi nous pouvons considérer que l'écart type des durées opératoires est faible. Notamment l'utilisation des machines à commande numérique tend à rendre les durées opératoires plus déterminées.

Dans le contexte de l'évaluation préliminaire des performances, nous travaillons exclusivement avec les valeurs moyennes des durées opératoires. Toutes les lois de distribution peuvent être alors considérées. Par contre, au niveau de l'ordonnancement, nous sommes obligés de travailler avec des valeurs déterministes censées représenter exactement la durée des opérations. Nous sommes tout à fait conscients que nous risquons de connaître des écarts entre la commande prévisionnelle, que nous allons ainsi établir, et le fonctionnement réel de l'atelier flexible, soumis à cette même commande. Mais pour le moment, c'est la meilleure solution que nous ayons trouvée pour estimer de manière assez exacte le makespan de la production et pour atteindre la vitesse optimale de production.

La commande prévisionnelle, que nous voulons établir, pourra servir de référence optimale pour la phase de pilotage du système. Il s'agit pour celle-ci d'approcher au mieux cette commande.

1.1.1.5 *Les pannes des ressources du système de production*

Nous envisageons de commander le système de production de façon prédictive. Il faut pour cela supposer que **les pannes des machines soient assez rares**. Il doit exister des intervalles de temps suffisamment longs pendant lesquels la commande prévisionnelle pourra être pleinement exploitée sans pratiquement aucune interruption pour pouvoir atteindre les performances optimales prévues par cette même commande. Il est donc impératif de bien connaître les fréquences de pannes. « ⁽¹⁾ Pour justifier cette simplification nous adoptons les hypothèses sur les échelles temporelles des événements pris en compte, énoncées dans [KIM 83] et connues sous le nom d'**hypothèses de Gershwin**.

Ces hypothèses ne concernent pas seulement les échelles temporelles des événements, mais également d'autres aspects du processus comme par exemple les lois qui régissent les pannes des machines. Elles sont fréquemment retenues à cause de leur caractère réaliste, surtout dans le cas des ateliers flexibles avec des machines relativement fiables. Selon ces hypothèses, les fréquences d'occurrences des événements dans les quatre niveaux identifiés diffèrent d'au moins un ordre de grandeur. La notion de *période* caractérise ici un intervalle de temps moyen entre deux événements atomiques d'un niveau hiérarchique considéré :

1. La plus petite période est celle d'une préparation machine (set-up) entre deux opérations pour lesquelles une machine a été préconfigurée.

¹ Dans ce premier chapitre, certains passages, entre « », indiquent explicitement les passages repris du mémoire [OHL 95a]. Ils reprennent les notations et les hypothèses utilisées par l'équipe d'Evaluation de Performances du LAIL. Nous n'avons pas jugé nécessaire de reformuler ces hypothèses puisque les principales n'ont pas été modifiées pour le moment.

2. La période du niveau opératoire correspond à la durée d'une opération de transformation représentative.
3. La période du niveau sûreté de fonctionnement est définie entre une fin de réparation (MTTR, temps moyen pour réparer ou Mean Time To Repair) et une défaillance d'une ressource du système (MTTF, temps moyen pour tomber en panne ou Mean Time To Fail).
4. La plus grande période est celle pour laquelle les besoins de fabrication ont été spécifiés.

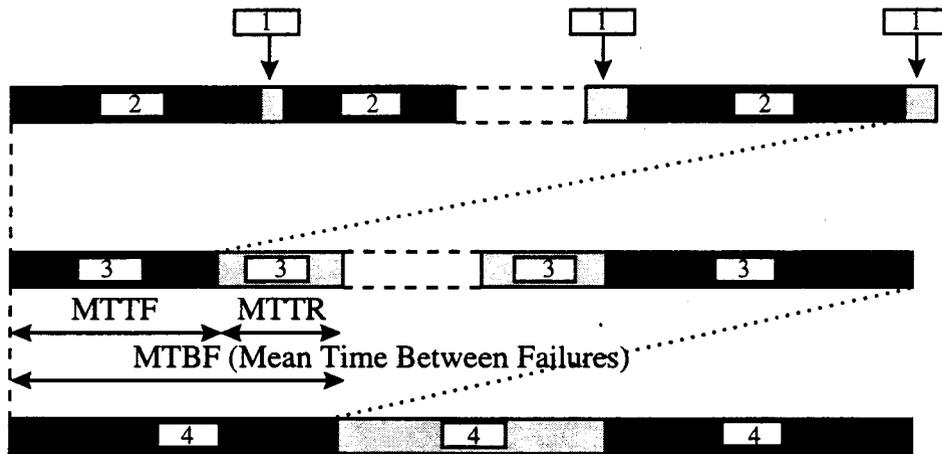


Figure I-2 : Echelles temporelles des différentes classes d'événements

Pour fixer les idées, des ordres de grandeur réalistes pour les quatre niveaux sont respectivement de quelques secondes, quelques minutes, quelques heures et quelques jours ou une semaine. »

La différence de l'ordre de grandeur entre les périodes de (1) et (2) permet de négliger les temps de changement d'outil (set-up times) des machines pour une configuration donnée. En ce qui concerne l'ordre de grandeur des périodes de (2) et (3), l'hypothèse des pannes rares par rapport au nombre d'opérations permet de supposer l'existence d'un régime de production stable entre des événements qui caractérisent des débuts ou fins de pannes.

Si au cours de la production, certaines défaillances du système apparaissent, le module de supervision est a priori là pour gérer les modes de marche dégradés. Si le respect de la commande prévisionnelle devient totalement impossible à suivre, il faut alors envisager le calcul d'une nouvelle commande déterministe. C'est dans ce contexte que nous allons travailler avec un ordonnancement, certes hors-ligne, mais cependant assez réactif pour pouvoir faire face rapidement à des défaillances graves (panne d'une des machines critiques, par exemple). En phase d'exploitation, nous devons donc faire face à des contraintes temporelles de calcul assez strictes.

Il semble certes un peu ambitieux de rendre le fonctionnement d'un atelier flexible totalement déterministe parce qu'il est difficile de connaître parfaitement tous les paramètres caractéristiques de l'état du système. Cependant nous tenons à conserver cette notion de commande prévisionnelle afin de conserver la maîtrise des vitesses de production et surtout la maîtrise de la production à tout moment par la connaissance précise de l'état du système à tout instant.

I.1.1.6 Les ressources de transformation du système de production

Au niveau des ressources de transformation, nous considérons à la fois des ressources simples et multiples, c'est à dire composées de machines identiques capables d'effectuer les mêmes opérations dans le même temps opératoire. Nous n'envisageons pas d'étudier le cas des ressources imbriquées, afin d'éviter de traiter certains problèmes de blocages structurels. Nous pouvons cependant être confrontés à d'éventuels blocages dus à la saturation de ressources par des en-cours, cf. travaux de [AUS 94]. Mais les critères d'optimisation que nous considérons ainsi que le principe d'élaboration de la commande vont en fait permettre d'éviter ces problèmes (détermination d'un ordonnancement déterministe donc vivant). Par contre si une conduite réactive du système est à envisager en présence de ressources imbriquées, il est nécessaire d'effectuer une étude préalable des blocages potentiels du système ⁽¹⁾.

I.1.1.7 Les ressources de transport de l'atelier flexible : affectation d'une palette par pièce présente dans le système de production

« Pour justifier les choix effectués dans ce mémoire, nous détaillons la modélisation d'exemples de deux types de ressources de transport, en considérant tout d'abord un convoyeur avec des palettes, puis un système de chariots guidés automatiquement.

Dans le cas d'un système de transport réalisé par un convoyeur, nous supposons qu'il peut y avoir différents types de palettes dans le système. Ces palettes peuvent être dédiées à un type de produit particulier ou au contraire être universelles et capables de transporter des produits de types différents. Une première politique de gestion des palettes consiste à supposer qu'une palette vide est immédiatement rechargée avec une pièce brute et qu'elle reste affectée à cette pièce jusqu'à ce que la pièce quitte le système. Si la pièce est dépalettisée pour un usinage, la palette lui reste réservée. Dans cette hypothèse de modélisation, l'en-cours et le nombre de palettes sont confondus et la limitation des deux peut être modélisée de la même façon.

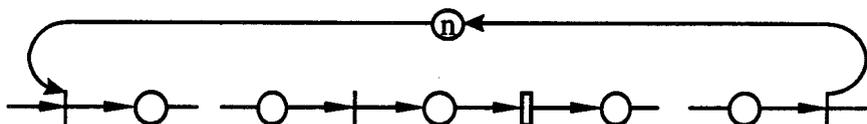


Figure I-3 : Bouclage commun pour l'en-cours et les palettes

Une autre politique de gestion des palettes consiste à libérer la palette pendant l'usinage de la pièce. Avec une telle politique, les palettes apparaissent explicitement comme des ressources de transport et l'en-cours doit être contrôlé de façon indépendante des palettes.

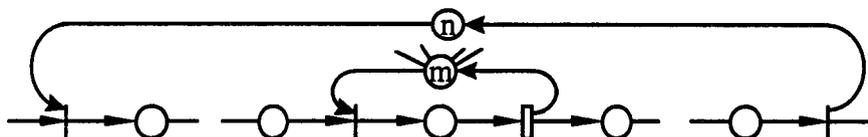


Figure I-4 : Contrôle séparé de l'en-cours et des ressources de transport

¹ Pour ce qui concerne cette recherche et un moyen d'éviter ces blocages structurels (utilisation de places de contrôle), nous renvoyons au mémoire de thèse [BEN 96]. D'ailleurs une extension de notre méthode aux ressources imbriquées est envisagée avec notamment l'étude de l'influence et de l'utilité de ces places de contrôle sur le problème d'ordonnancement.

L'avantage apparent de cette deuxième approche réside dans la meilleure utilisation des palettes et permet d'espérer un fonctionnement avec un nombre plus restreint de palettes. Cette utilisation plus intensive peut cependant induire des retards et ainsi nuire au débit de production. En effet, puisque les palettes sont explicitement modélisées comme des ressources, elles peuvent s'avérer critiques et limiter ainsi le débit maximal de l'atelier.

Le modèle de la Figure I-4 peut également être utilisé pour des transports effectués par chariots (généralement disponibles en nombre limité). Au niveau de la modélisation pour une analyse quantitative, la caractérisation de différents systèmes de transport dépend ainsi essentiellement de l'assimilation ou non de l'en-cours aux ressources de transport. Deux classes d'hypothèses sont donc à considérer:

1. les ressources de transport et l'en-cours sont liés de manière définitive durant une production ;
2. les ressources de transport et l'en-cours sont gérés séparément.

Cette distinction est a priori sans rapport avec le fait de négliger ou d'estimer les durées des transports. Il est néanmoins nécessaire de prendre en compte les temps de transport dans le deuxième cas. »

Nous avons retenu dans ce mémoire un transport de type palettes et nous supposons qu'il existe H types différents de palettes ($h \in \{1..H\}$). Ces **palettes restent dédiées à une pièce** au cours de sa fabrication dans l'atelier flexible, même si elles peuvent être momentanément séparées. Notons S_h l'ensemble des produits que les ressources de transport de type h peuvent supporter. Nous supposons de plus que deux types différents de palettes ne peuvent transporter le même type de produits : $\forall h, \forall h' \neq h, S_h \cap S_{h'} = \emptyset$. Ainsi la considération des ressources de transport associées à chaque type de produits permet ici d'obtenir une partition mathématique de l'ensemble des types de pièces à fabriquer dans l'atelier flexible.

1.1.1.8 Le système de transport : les opérations de transfert

Nous ne considérerons pas dans ce mémoire le problème posé par le choix et la conception de l'architecture de transport, bien qu'il soit possible de l'envisager ultérieurement.

Dans le cas du système de production de type usinage, nous considérons que l'architecture du transport est fixée et que le système de transport ne constitue pas une ressource critique pour le système de production. Il ne sera donc pas nécessaire de tenir compte des opérations de transfert lors de l'évaluation préliminaire des performances du système et de la détermination de la machine critique. Nous verrons par la suite comment il sera possible d'intégrer les opérations de transfert dans la phase d'ordonnancement. Nous étudierons notamment la conséquence de l'hypothèse souvent implicite de la réalisation des opérations de transfert en temps masqué.

Il reste cependant que le système de transport est un élément clé dans un atelier flexible de fabrication automatisé. Il relie les ressources de transformation et détermine ainsi les relations d'accessibilité. Dans ce qui suit nous supposons toujours que le système de transport permet de transférer toute pièce d'un point à un autre de l'atelier flexible, ce qui implique que le modèle graphique associé au transport soit fortement connexe.

Nous supposons de plus l'existence potentielle de flexibilités de chemins pour accéder aux différentes machines ou transférer un produit d'une machine à une autre. Cette hypothèse n'est pas nécessaire en elle-même pour l'élaboration de la commande, mais elle permet de pallier certaines défaillances du système de transport, ce qui peut éviter l'arrêt total de la production. Nous supposons de plus que le système de transport considéré autorise la présence de buffers d'entrée (voire de sortie) pour chaque machine, permettant l'attente devant une machine et donc l'utilisation de cette ressource dès sa libération par la pièce précédente. Ceci est d'autant plus intéressant pour la ou les machine(s) critique(s) de l'atelier, pour lesquelles une saturation d'utilisation (taux d'occupation = 100%) est envisageable afin de permettre l'optimisation de la production de l'atelier.

1.1.2 Enoncé du Problème

1.1.2.1 Recherche d'une commande d'un SFPM

L'objectif principal de ce mémoire est d'élaborer une commande prévisionnelle optimisée d'un SFPM. Cette commande peut, par hypothèse, être soumise à des contraintes de production fixées par l'étape de planification : ratios de production imposés pour la méthode développée dans [OHL 95a]. Nous avons choisi de partir de l'étape de planification fine pour disposer d'une plus grande liberté dans le choix de la commande à déterminer. La commande que nous évaluons est, de plus, supposée avoir un comportement cyclique, ce qui tend à réduire la complexité du problème abordé. Nous terminons l'étude par l'ordonnancement déterministe des opérations.

Deux domaines d'application sont à envisager :

La conception a priori en vue de l'évaluation des performances de système de production : étant donné le caractère assez éloigné de cette étape par rapport à la phase d'exploitation, il existe peu de contraintes pour les temps de calcul et une recherche de l'optimalité (aussi bien du point de vue productivité qu'économique) est en général envisagée. Il est cependant possible de déterminer plusieurs types de commande (aussi bien réactive que prédictive) pour les comparer. Puisque nous ne sommes pas confrontés directement à des contraintes de production (délais des commandes passées, ...), il n'est pas nécessaire de développer l'élaboration de la commande jusqu'à la détermination exacte des régimes transitoires. L'établissement d'une borne de la durée de ces régimes sera a priori suffisant. L'idée principale est donc de rechercher les performances optimales potentielles de l'atelier flexible.

Si nous envisageons maintenant le problème de l'élaboration de commande d'un atelier **en phase d'exploitation**, dans le contexte d'une commande prévisionnelle et déterministe (ordonnancement dit « hors ligne »), nous sommes contraints par le temps. Les temps de calcul doivent alors être relativement faibles (de l'ordre de quelques minutes) en regard des temps de production. Dans ce cas, il faut envisager un ordonnancement, intégrant une phase de réactivité, de l'entrée des pièces à court terme et prévoir la mise en œuvre de l'implantation réelle de la commande sur le système en prenant en compte les régimes transitoires.

1.1.2.2 Les variables de décision : degrés de liberté du système

« Une des difficultés rencontrées dans l'analyse des systèmes de production réside dans le fait que leurs performances dépendent autant de leurs caractéristiques physiques que des

procédures d'exploitation. Ce très fort couplage entre le système physique et sa commande est une caractéristique des systèmes à événements discrets, ce qui complique fortement leur analyse. Pour les systèmes de production, la commande se traduit à la fois par des décisions d'affectation au niveau ressource et des décisions de séquençement ou positionnement dans le domaine temporel. Les conséquences de chacune de ces décisions peuvent avoir des répercussions importantes sur le comportement du système.

En toute rigueur, il faudrait résoudre tous les indéterminismes qui existent dans un système pour analyser avec précision tous les aspects de son comportement. Une résolution simultanée de tous les indéterminismes est de fait pratiquement impossible pour des systèmes de tailles importantes en raison de l'explosion combinatoire du nombre de solutions envisageables. Il faut aussi considérer les incertitudes qui peuvent exister en fonctionnement. Dans certains cas, lors d'une conception préliminaire, une analyse approximative peut suffire. Si, par contre, l'objectif est d'effectuer une analyse précise pour élaborer une commande optimisée, le seul moyen d'appréhender la complexité consiste à utiliser une décomposition en niveaux hiérarchiques. A chacun de ces niveaux hiérarchiques correspond alors un modèle adapté ainsi que des hypothèses spécifiques associées. Pour les systèmes de production que nous considérons, ces hypothèses concernent notamment l'horizon temporel, la finesse de la modélisation et la manière de traiter les conflits (¹). »

Pour une démarche allant d'un niveau de planification fine jusqu'à la détermination d'une commande déterministe, nous regroupons selon [OHL 95a] les décisions en rapport avec les indéterminismes en classes distinctes. Certaines de ces classes existent dans tout système de production, tandis que d'autres sont spécifiques aux ateliers flexibles.

- **Classe D₁ : Choix des produits à fabriquer simultanément**

Le paramètre lié à cette classe de décision est :

I_{max} nombre de types de produits à réaliser, $i \in \{1..I_{max}\}$.

Comme nous l'avons constaté lors de la comparaison de différentes approches de planification fine, le choix des produits peut être imposé par des contraintes extérieures. Il est également possible que des contraintes de faisabilité, liées par exemple aux capacités limitées des magasins d'outils, interdisent certaines combinaisons de types de produits. Il est clair que le choix de produire simultanément tels ou tels autres types de produits a une influence capitale sur les performances du système.

- **Classe D₂ : Choix des ratios de production**

Les variables liées à cette classe de décision sont :

r_i ratio de production du type de produits i ,

f_i le plus petit entier positif proportionnel au ratio de production du

¹ Extrait de [OHL 95a].

$$\text{type de produit } i : r_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^{i_{\max}} f_j} \text{ avec } \underset{\forall i \in \{1..i_{\max}\}}{\text{pgcd}}(f_i) = 1,$$

Les valeurs des ratios de production peuvent être soumises à des contraintes extérieures, pour tenir compte par exemple d'une demande dépendante. D'une manière générale, les ratios doivent répondre aux besoins de fabrication, mais dans le contexte particulier d'une approche de type *regroupement dynamique* (cf. §I.2.1.1. pour le rappel de la définition de cette notion), les ratios de production peuvent également être utilisés pour équilibrer la charge des machines. De ce fait, ils influencent directement les performances du système.

- **Classe D₃ : Résolution des flexibilités de gamme**

Cette classe peut être décomposée en trois sous-classes, D_{3a}, D_{3b} et D_{3c}, en rapport avec trois types différents de flexibilité.

- ◆ Le premier type de flexibilité existe si les gammes ne sont que partiellement ordonnées. Dans ce cas nous parlons de *flexibilité de permutation* et affectons les décisions en rapport à la sous-classe D_{3a}.
- ◆ Le deuxième type de flexibilité existe si une même opération peut être affectée à des ressources de types différents. Nous parlons alors de *flexibilité d'affectation* et regroupons les décisions en rapport dans la classe D_{3b}.
- ◆ Un troisième type de flexibilité représente la possibilité de substituer une opération ou une suite d'opérations par une autre opération ou une autre suite d'opérations, éventuellement sur des ressources de types différents. Nous parlerons alors de *flexibilité de procédé* et affecterons les décisions en rapport avec la classe D_{3c}.

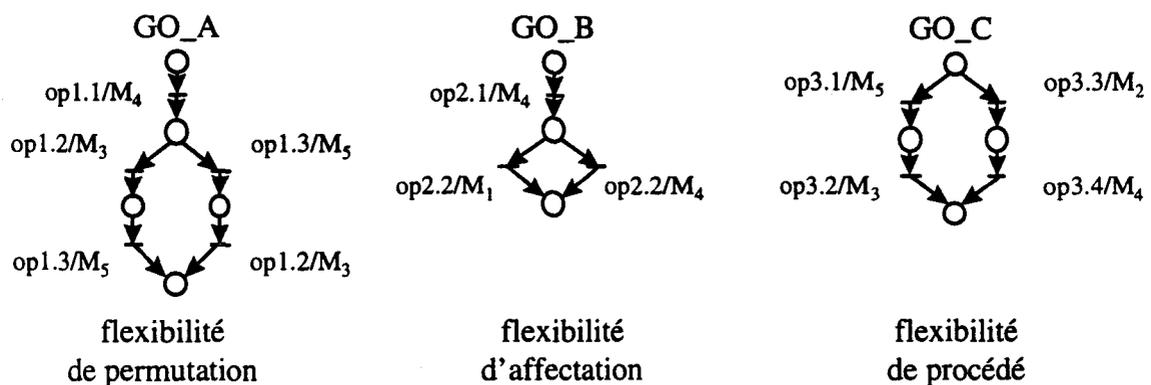


Figure I-5 : Modélisation des trois types de flexibilités de gammes opératoires

Nous pouvons déjà indiquer que les flexibilités de permutation n'ont pas d'influence sur la charge moyenne des machines pendant un calcul de flux. En revanche, les charges des différents types de machines sont évidemment influencées par la façon de résoudre les indéterminismes en rapport avec les classes D_{3b} et D_{3c}.

A chaque branche issue des conflits de gammes opératoires, nous associons une variable représentant le ratio de routage : α_{ijk} , ratio de routage de la k -ème branche du j -ème conflit du i -ème type de produits. D'après le calcul des ratios de routage, il découle que ce seront des rationnels. C'est pourquoi nous utiliserons la notation en fraction irréductible : $\alpha_{ijk} = \frac{p_{ijk}}{q_{ij}}$ avec $(p_{ijk}, q_{ij}) \in \mathbb{N}^2$.

Au delà de ces flexibilités « simples », nous pouvons évoquer des flexibilités plus complexes de deux sortes : les flexibilités enchaînées et les flexibilités imbriquées, cf. Figure I-6, seules ou composées.

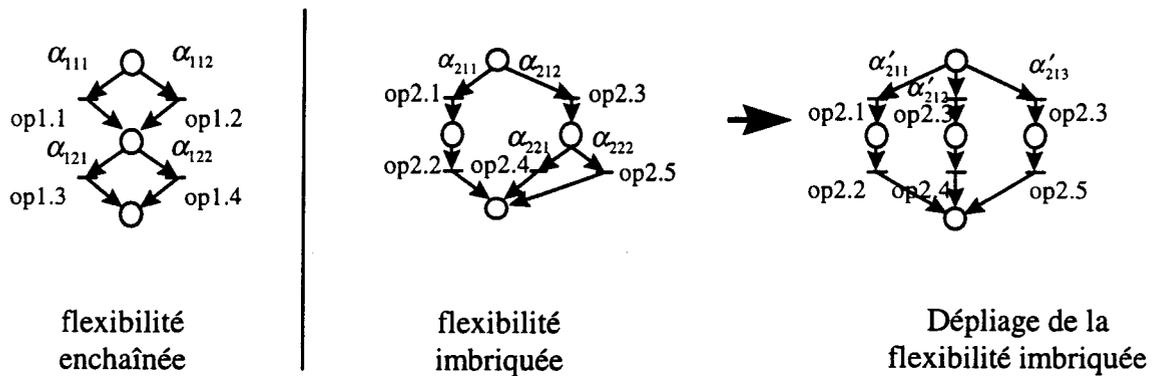


Figure I-6 : Exemples de flexibilités complexes au niveau des gammes opératoires

Pour simplifier l'analyse de flux de l'approche développée dans [OHL 95a] (problème de programmation linéaire), nous proposons de n'utiliser que des combinaisons linéaires des ratios de routages au niveau des flux dans les différentes branches. C'est pourquoi, en considérant la flexibilité imbriquée dans les systèmes étudiés, il faut déplier cette flexibilité avant de pousser plus avant l'analyse, cf. [CAM 96c]. Nous verrons par contre avec la nouvelle approche de planification fine développée dans ce mémoire que ce type de flexibilité ne pose aucun problème pour sa prise en compte dans la phase d'évaluation des performances en discret.

- **Classe D₄ : Affectation d'une opération à une machine particulière**

Dans le cas des ressources multiples, après affectation d'une opération à une ressource, chaque opération doit être affectée à une machine particulière si la ressource est multiple.

Les variables liées à cette classe de décision sont :

R nombre de ressources de transformation, $r \in \{1..R\}$,

M_r nombre de machines identiques de la ressource multiple r ,
 $m \in \{1..M_r\}$,

O_{t-r} nombre d'opérations de durée t affectées à la ressource r pour un cycle de fonctionnement,

$O_{t-r,m}$ nombre d'opérations affectées à la m -ème machine de la r -ème ressource multiple pour un cycle de fonctionnement,

- Z_r charge de travail affectée à la ressource r ,
- $Z_{r,m}$ charge de travail répartie sur la m -ème machine de la r -ème ressource (multiple).

- **Classe D_5 : Ordonnancement**

Cette classe représente la problématique visant à déterminer le séquençement des produits sur les machines. Dans le chapitre II, nous précisons un autre type de décisions associé à la classe D_5 dans le contexte d'un fonctionnement répétitif.

- **Classe D_6 : En-cours**

Cette classe comporte deux sous-classes.

Il s'agit à la fois de déterminer le niveau de l'en-cours (sous-classe D_{6a}), noté *WIP*, et de décider sa répartition dans le système (sous-classe D_{6b}). Dans le contexte d'une modélisation par Réseaux de Petri, il s'agit de déterminer le marquage initial du réseau qui garantit la meilleure performance (du point de vue flux de production) ainsi que la vivacité du modèle et la politique de tir des transitions (dynamique du système discret).

L'ordre dans lequel ces classes ont été présentées peut paraître naturel, il n'est cependant pas imposé. Il est toujours possible d'envisager une résolution simultanée de plusieurs classes successives, voire de toutes les classes à la fois. Pour des systèmes de tailles réelles, une démarche progressive est cependant recommandée pour réduire la complexité du problème. C'est d'ailleurs le principe de base de la méthode développée dans ce mémoire, même si l'ordre présenté ici est parfois modifié. Ces degrés de liberté apparaîtront plus clairement lorsque le système de production sera modélisé.

1.1.2.3 Les critères d'optimisation

La commande doit répondre à des objectifs de production imposés. Il est très difficile de classer ces objectifs en terme d'importance les uns par rapport aux autres. Nous pouvons cependant les distinguer selon la nature : quantitative et qualitative.

- **objectifs quantitatifs :**

- ◆ **Domaine de la productivité : minimisation du temps total de production** (ou par abus de langage *makespan*), ou la maximisation du flux de production,
- ◆ **Domaine mixte économique et productif : minimisation de l'en-cours du système** (Work In Process),
- ◆ **Point de vue économique : il existe deux types de coûts liés à l'en-cours :**
 - Il existe le coût de conception puis de fabrication des supports de bridage des pièces appartenant aux différents types de palettes (dédiées à une ou plusieurs gammes opératoires ou universelles). Ce coût est lié directement à la **minimisation de l'en-cours maximal du système**.
 - Il faut prendre aussi en compte le coût théorique d'immobilisation d'un produit fini dans l'évaluation financière. En effet, le coût d'immobilisation

d'un produit brut est en général inférieur à celui d'une pièce semi-finie, lui-même inférieur à celui d'un produit fini. Ce coût augmente avec la valeur ajoutée à la pièce, lors de ces différents usinages. Ce coût est donc fonction de la **minimisation** plus ou moins efficace **de l'en-cours moyen du système**.

- **critères qualitatifs :**

- ◆ **simplicité de la détermination de la commande.** Il faut à la fois que le temps de calcul de la commande prévisionnelle soit rapide (contraintes strictes en phase d'exploitation) et que la commande soit facile à déterminer et à implanter.
- ◆ envisager une relative **robustesse de la commande** vis à vis des écarts possibles de temps opératoires entre les durées déterministes retenues par la commande prévisionnelle et le fonctionnement réel du système (utilisation des marges de gammes).
- ◆ **réactivité de la commande :** face à des perturbations propres au système de production, telles que des défaillances des ressources de l'atelier et des perturbations au niveau de la production, en considérant, par exemple, l'arrivée de commandes non planifiées jugées prioritaires. Il faut que la production puisse réagir rapidement face à de tels événements qui doivent être pris en compte.
- ◆ facilités d'implantation de la commande (élaboration d'une modélisation de commande directement implantable, par exemple).
- ◆ minimiser le coût d'implantation hardware (capteurs, calculateurs), software (programmes), personnel (si besoin de personnes qualifiées, ajouter le coût de la formation) : installation, mise en œuvre, maintenance. Pour ce facteur économique, il est difficile de maîtriser et d'évaluer de manière correcte le coût de l'implantation. C'est pour cela que nous avons décidé de placer cet objectif dans les critères qualitatifs. Pour l'instant, ce type de question n'est pas encore envisagé au L.A.I.L.
- ◆ compatibilité de la production au niveau de l'atelier flexible avec la gestion des stocks et les types de gestion respectifs en amont et en aval de la production considérée ici.

1.1.2.4 Questions :

Tous ces points de vue nous amènent à poser la question de la quantification des critères qualitatifs afin d'envisager une résolution analytique des objectifs d'optimisation de la production.

Dans tous les cas, il ne sera pas possible, en général, de résoudre simultanément tous ces critères. Il est alors nécessaire d'envisager une approche hiérarchique de ces différents objectifs, même si cela paraît au premier abord assez difficile, notamment dans le choix des priorités entre ces différents objectifs.

De plus certains objectifs vont apparaître contradictoires. Il conviendrait mieux alors de rechercher un compromis convenable, plutôt que de résoudre les critères d'optimisation de manière séparée.

I.2 Première manière d'appréhender le problème : les travaux présentés dans [OHL 95a]

Rappelons les principes retenus dans l'approche proposée par [OHL 95a] qui détermine une commande prévisionnelle et cyclique soumise à des ratios de production fixes. Nous justifierons dans un premier temps la production par ratios dans un contexte d'atelier flexible et ensuite la conduite de système à travers une commande prédictive, déterministe et répétitive (§ I.2.1). Puis nous présenterons la méthode de calcul des caractéristiques principales de la commande (§ I.2.3) après avoir modélisé dans un premier temps le système de production avec les Réseaux de Petri.

I.2.1 Conduite de SFPM par des commandes cycliques et déterministes soumises à des ratios de production fixés par une étape de planification fine

I.2.1.1 Rappel sur la planification fine pour une production par ratios

Dans [OHL 95a], une étude approfondie des différentes modes de gestion de production a été effectuée, notamment avec [DAU 92]. Il en est ressorti que l'approche la plus adaptée aux cas des ateliers flexibles consiste à employer une gestion par ratios de production afin de rentabiliser les coûts de développement de supports de bridage des systèmes de transport et les coûts de préparations d'un atelier flexible à une production. Cette approche se justifie lorsque la production est suffisante pour dépasser le seuil de rentabilité.

- *Approches par flux continu*

Au niveau de la planification fine, plusieurs approches ont été étudiées et discutées par H. Ohl.

Une première approche par flux est envisagée afin d'éviter la complexité d'une approche discrète. D'après les *hypothèses de Gershwin* énoncées dans [KIM 83], la différence d'ordre de grandeur entre les périodes du niveau opératoire et celles du niveau sûreté de fonctionnement nous permet de supposer des pannes rares et l'existence d'un régime de production stable, ce qui justifie une approche par flux continu et l'utilisation de ratios de production.

Une conduite optimale de flux en présence de pannes a ensuite été considérée. Une méthode de détermination des taux de production, si les niveaux de stocks doivent être contrôlés, a été développée dans [KIM 83]. Cette approche a été analysée par différents auteurs, par exemple dans une approche de conduite d'atelier utilisant la modélisation par Réseaux de Petri [LON 93]. Des extensions de la méthode concernant notamment la prise en compte de gammes flexibles et une différenciation des pannes selon leurs fréquences d'apparition ont été envisagées, cf. [XIE 89] et [XIE 91].

L'approche développée par M. Gershwin a tendance à considérer une production simultanée de toutes les pièces avec les ratios adéquats. Ce qui semble peu réaliste. En effet une production de plus d'une dizaine de types différents de pièces simultanément dans le système peut être souvent difficilement réalisable compte tenu des limitations des stocks d'outils par machines de transformation, des palettes, etc.

En théorie cette méthode de conduite en continu permet d'atteindre les objectifs fixés de respect de niveaux de stocks, mais le passage en discret avec les problèmes d'approximation des ratios réels calculés au cours de cette étape de planification, de partages de ressources, des régimes transitoires pour mettre en place les régimes permanents voulus ne garantissent ni la faisabilité de cette commande, ni l'atteignabilité des performances théoriques calculées en flux continu. Ceci est d'autant plus vrai qu'il faudrait considérer un nombre important de changements de ratios de production et donc de commande.

- *Approches de regroupement*

« Les travaux de K. Stecke [STE 88], [STE 91] et [STE 92] proposent de limiter le nombre de pièces simultanément produites dans le système en considérant les stocks des magasins d'outils et un nombre fini de palettes. Selon [STE 88], la problématique de regroupement prend en considération les cinq points suivants :

1. la sélection des produits à fabriquer simultanément,
2. le regroupement des machines en groupes de configurations identiques,
3. la détermination des ratios de production des différents produits,
4. l'allocation des palettes et supports de bridage,
5. l'allocation des outils aux magasins des machines. »

Plusieurs types d'approche de regroupement peuvent être distingués.

- les approches de regroupement en familles, ou *batching*, cf. [HWA 86] et [MAZ 89]. Elles consistent à regrouper les différents types de produits à fabriquer simultanément selon les outils nécessaires à leur réalisation. L'objectif commun de toutes ces approches est la minimisation du nombre de familles différentes, et ainsi du nombre de reconfigurations. L'équilibrage des charges des machines est cependant considéré comme un critère secondaire dans toutes les approches de regroupement comparées. Il est alors possible que cette charge soit mal équilibrée à l'intérieur d'une famille.
- « Dans [STE 91] une nouvelle approche de sélection de types de pièces et de détermination des ratios est proposée. Cette approche, qualifiée de *regroupement dynamique*, tient compte des contraintes sur les capacités de magasins d'outils et tente en même temps d'équilibrer la charge des machines afin de maximiser la production. L'idée de base est de permettre des reconfigurations partielles de l'atelier. Les machines qui ne sont pas concernées par une reconfiguration peuvent continuer à produire pendant ce temps. Une reconfiguration avec une nouvelle détermination des types à produire et des ratios de production associés est effectuée si :
 - ◆ les besoins de fabrications pour un type de produits sont satisfaits,
 - ◆ une machine tombe en panne,
 - ◆ une machine est remise en service,
 - ◆ une commande urgente arrive,
 - ◆ une maintenance préventive est effectuée.

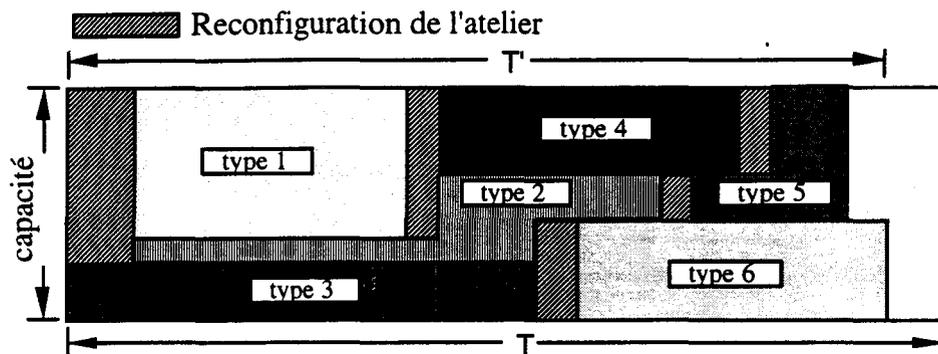


Figure I-7 : Regroupement dynamique [STE 91]

Contrairement aux approches de regroupement en familles, l'optimisation est effectuée chaque fois qu'un de ces événements a lieu. Cette optimisation ne concerne alors que la période de temps allant jusqu'au prochain événement et une optimalité globale ne peut donc être espérée. Nous allons illustrer l'approche de regroupement en familles en adaptant les notations utilisées par [STE 91], afin de les rendre compatibles avec celles que nous avons introduites dans ce mémoire :

- I_{\max} nombre de types de produits, $i = 1..I_{\max}$
- R nombre de types de machines (ressources), $r = 1..R$
- M_r nombre de machines de type r , $m = 1..M_r$
- C nombre d'outils, $c = 1..C$
- t_{ir} temps opératoire d'un produit de type i sur une machine de type r
- tw_{ir} temps opératoire d'un produit de type i réparti régulièrement sur toutes les M_r machines de type r : $tw_{ir} = t_{ir} / M_r$
- e_{cr} nombre d'emplacements pour un outil de type c sur une machine de type r
- $v_{icr} = 1$, si l'usinage d'un produit de type i sur une machine de type r requiert un outil de type c ,
 $c, = 0$, sinon
- e_r nombre d'emplacements d'un magasin d'outils d'une machine de type r
- C_{r1} pondération pour une surcharge des machines de type r
- C_{r2} pondération pour une sous-charge des machines de type r
- f_i entier proportionnel au ratio de production pour les produits de type i , représente le nombre de fois qu'un produit de type i apparaît pendant la période considérée ici
- F_i borne supérieure pour f_i
- W_r charge de référence pour une machine de type r (en unité de temps)
- X_{r1} surcharge d'une machine de type r (en unité de temps)
- X_{r2} sous-charge d'une machine de type r (en unité de temps)

$y_{cr} = 1$, si l'outil c est chargé sur une machine de type r
 $= 0$, sinon.

Le problème de sélection des types de produit et de leur ratios associés se présente alors sous la forme d'un problème de programmation en variables entières :

Equation I-1 :

$$\text{minimiser } \sum_r C_{r1} \cdot X_{r1} + \sum_r C_{r2} \cdot X_{r2}$$

$$\text{sous les contraintes : } \sum_i f_i \cdot t w_{ir} - X_{r1} + X_{r2} = W_r \quad r = 1..R \quad (1)$$

$$v_{icr} \cdot f_i \leq F_i \cdot y_{cr} \quad i = 1..I_{\max}, r = 1..R, c = 1..C \quad (2)$$

$$\sum_c e_{cr} y_{cr} \leq e_r \quad r = 1..R \quad (3)$$

$$f_i \leq F_i \quad i = 1..I_{\max} \quad (4)$$

$$f_i \geq 0 \quad i = 1..I_{\max} \quad (5)$$

$$X_{r1}, X_{r2} \geq 0 \quad r = 1..R \quad (6)$$

Parmi les paramètres utilisés, les termes W_r jouent des rôles particuliers. Ils indiquent une charge de référence exprimée en temps pour chaque type de machine. La minimisation de la fonction de coût consiste alors à déterminer les entiers f_i de sorte que les charges de toutes les ressources soient équilibrées. Avec $W_r = W$, $r = 1..R$, tous les types de machines ont la même charge de référence, ce qui correspond à un équilibrage entre les différents types de machines. Si nous supposons que les variables d'écart X_{r1} et X_{r2} sont petites, les W_r sont à peu près proportionnels aux f_i qui sont les variables de décision à déterminer. Ces variables f_i correspondent au nombre de fois qu'un produit de type i apparaît pendant la période de durée W_r .

Les contraintes de type (2) imposent que si un produit de type i est effectivement sélectionné, alors les machines, par lesquelles ces produits passent, doivent contenir les outils nécessaires ⁽¹⁾. Les contraintes de type (3) expriment la limitation du nombre d'emplacements dans les magasins d'outils. Les valeurs possibles pour les f_i sont limitées par les contraintes de type (4) et (5) et la positivité des variables d'écart est imposée par les contraintes (6). Une variante du problème pour tenir compte d'une demande dépendante entre certains types de produits consiste à ajouter des contraintes de proportionnalité du type :

$$f_i = \alpha_{ij} f_j \quad i, j \in I' \quad (7)$$

Une autre variante de cette approche [STE 92] consiste à remplacer, dans les contraintes de type (5), les inégalités larges par des inégalités strictes :

$$f_i > 0 \quad i \in I'' \quad (8)$$

Cette formulation impose la production simultanée de certains types de produits. Elle peut être appropriée dans des situations où, pour des raisons diverses, la sélection des types de produits doit être contrôlée (cas de priorités par exemple). Remarquons que les

¹ Dans [STE 88], la formulation initialement donnée est : $v_{icr} \cdot f_i \leq M \cdot y_{cr}$, avec un paramètre M qui doit être « suffisamment » grand. Nous l'avons remplacé ici par les F_i car ils sont définis.

contraintes du type (8) peuvent être tellement fortes, que le problème (Equation I-1) ne possède plus aucune solution.

Pour la résolution du problème il faut commencer par fixer les paramètres C_{r1} , C_{r2} et W_r . En ce qui concerne les deux premiers, seul leur rapport est significatif et peut être pris égal à 1 dans un premier temps. Pour les W_r , il est suggéré d'essayer des valeurs différentes. Plus les W_r sont grands, plus il y a de combinaisons de f_i qui vérifient les contraintes de type (1). L'espace des solutions devenant plus large, le temps de calcul augmente également. Pour limiter le temps de calcul d'une résolution en nombres entiers, une relaxation des contraintes de $f_i \in \mathbb{N}$ à $f_i \in \mathbb{R}$, avec un arrondi des valeurs obtenues est proposée dans [STE 91]. Cette approximation donne des résultats acceptables par rapport à une résolution directe dans le domaine des entiers.

Les valeurs maximales des f_i sont toutefois limitées par les paramètres F_i dans les contraintes de type (4). Dans [STE 91] et [STE 92], ces contraintes sont utilisées pour exprimer la limitation du nombre de palettes disponibles. Cette interprétation des contraintes de type (4) est liée au fait que les auteurs envisagent une réalisation des ratios avec un nombre de palettes proportionnel aux f_i . » H. Ohl a déjà montré que cette corrélation entre les ratios et le nombre de palettes n'est pas justifiée, mais les contraintes de type (4) peuvent cependant avoir une autre utilité : la limitation du nombre de produits réalisés au cours d'un cycle de fabrication pour le problème d'élaboration d'une commande répétitive.

- *Conclusion sur les différentes approches de planification fine pour une production par ratios*

Une comparaison de l'approche par regroupement dynamique avec l'approche de conduite optimale de flux, cf. [KIM 83], présentée précédemment est difficile car les objectifs des deux approches sont différents. La première cherche à maximiser la production, ou au moins à satisfaire un besoin de production le plus rapidement possible sans tenir compte des niveaux de stocks. L'objectif de la deuxième approche est de minimiser une fonction de coût intégrant des coûts de stock et de rupture. Malgré cette différence dans les objectifs poursuivis, nous retrouvons des considérations caractéristiques d'une comparaison entre une commande robuste et une commande optimale en automatique.

L'approche par regroupement dynamique ne nécessite pas d'hypothèses précises sur les occurrences et durées des pannes. En effet elle est capable de s'accommoder de perturbations très différentes. Elle consiste à effectuer une optimisation sur un horizon court parce que les incertitudes interdisent de toute façon d'effectuer des prévisions détaillées sur un horizon long. En revanche, l'approche de conduite optimale de flux requiert des hypothèses explicites sur la loi des pannes et des réparations. Elle intègre ces informations dans le calcul de la commande en anticipant les pannes de machines par le contrôle du niveau d'un stock de sécurité.

Il apparaît alors que l'approche par regroupement dynamique permet une formulation réaliste du problème de planification fine, car elle est capable de tenir compte d'une demande dépendante et surtout des contraintes sur les capacités des magasins d'outils. Un autre avantage de l'approche par regroupement dynamique est de pouvoir influencer les valeurs numériques des ratios obtenus, grâce aux contraintes de type (4).

En revanche, la formulation telle qu'elle a été présentée dans l'Equation I-1 ne permet pas de tenir compte de flexibilités autres que celles relatives à l'ordre des opérations. Toutes les gammes opératoires sont considérées comme étant linéaires. En prenant en compte les flexibilités au niveau des gammes opératoires, il n'est plus possible d'estimer la durée opératoire d'un produit sur une machine sans calculer au préalable les ratios optimaux de routage maximisant le flux de production.

Il faut de plus que ces ratios soient compatibles avec les ratios de production puisque nous allons travailler sur des ensembles de produits représentant la quantité de chaque type de produits à réaliser au cours d'un cycle de fabrication. Il faut donc que ces quantités entières soient proportionnelles à la fois aux ratios de production et aux ratios de routage.

De plus équilibrer les charges des machines en supposant que les durées des opérations peuvent se répartir équitablement sur les différentes machines d'un même type (tw_{ir} temps opératoire d'un produit de type i réparti régulièrement sur toutes les m_r machines de type r) n'est pas a priori le meilleur moyen d'obtenir un bon équilibrage des charges sur les machines. En effet, en considérant le processus discret, c'est-à-dire en tenant compte du fait qu'il n'est pas possible de partager une opération sur plusieurs machines, les charges des machines sont alors modifiées et les charges ne seront plus réellement équilibrées au niveau des machines. Il serait plus intéressant de s'attacher à équilibrer tout de suite les charges discrètes des machines.

Dans l'approche proposée par [OHL 95a], les ratios de production sont supposés déterminés lors de l'étape précédente de planification fine. L'approche de regroupements dynamiques semble proche de nos préoccupations, en considérant l'optimisation de la vitesse de production et donc du makespan de la production totale à réaliser à court terme.

Il s'agit maintenant d'effectuer une étude fine intégrant le caractère discret afin d'obtenir des résultats plus précis. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser une modélisation plus détaillée pour évaluer les performances réelles du système de production.

1.2.1.2 Hypothèses sur la production :

Nous considérons que toute la production requise au niveau de l'atelier flexible, soumise à des ratios de production, se réalise lors d'un seul régime permanent caractérisé par la répétition d'un cycle de fonctionnement déterministe. Nous nous limitons à des fonctionnements de type 1-périodique, nous verrons par la suite que cette restriction ne limite en rien les performances de productivité que le système de production peut atteindre, cf. [COM 71] et [RAM 80].

Pour obtenir un ordonnancement déterministe du système, il est obligatoire de supposer que les opérations sur les différentes pièces sont clairement définies. Il est donc nécessaire de considérer des temps opératoires déterministes.

1.2.1.3 Avantages d'une méthode d'élaboration d'une commande cyclique et déterministe

La décomposition temporelle du problème liée à la répétitivité de la commande permet de réduire la complexité du problème pour l'élaboration et l'implantation de la commande.

La connaissance parfaite de l'état du système à tout moment du fonctionnement normal de la production à l'aide de la commande prévisionnelle sert d'**indicateur de**

performances *a posteriori* pour la production réelle sur le processus physique et facilite ainsi la surveillance en temps réel pour la détection de défaillances de machines.

Les performances en terme de productivité, que peut atteindre le système, s'il suit la commande prévisionnelle, représentent l'optimalité pour ce type de fonctionnement cyclique avec les ratios de production imposés. Cependant ce type de commande ne se justifie que dans un contexte de production relativement peu perturbé. Pour le problème de robustesse de la commande prédictive face à des aléas, nous renvoyons à [KHA 96] qui étudie les limites de robustesse d'une commande modélisée sous forme d'un Graphe d'Evénements temporisé déterministe.

Cette maîtrise de l'état du système facilite cependant la détection d'un comportement anormal de la production en regard de la commande prévisionnelle.

1.2.1.4 Inconvénients

Nous travaillons ici avec un ordonnancement dit « hors-ligne ». La commande que nous élaborons est donc moins insensible aux aléas qu'une commande réactive et nécessite le développement d'une composante supervision pour gérer les modes de marche dégradés en cas de défaillances de machines pendant qu'une nouvelle commande prévisionnelle déterministe est calculée.

Il est nécessaire de développer une composante de pilotage du système de production pour faire face aux écarts des durées opératoires par rapport aux valeurs déterministes utilisées pour l'élaboration de la commande et pour rapprocher le comportement de l'atelier du fonctionnement prévisionnel de la commande.

Il est difficile d'évaluer le coût d'implantation du hardware (capteurs, actionneurs, ...) et du software (implantation de la commande prévisionnelle et supervision du système de production). Mais il est probable que le coût d'implantation d'une commande prévisionnelle soit plus importante que celle d'une commande réactive qui nécessite une centralisation des informations et de la commande moins importante.

Puisque le système a un comportement périodique, il faut s'assurer du fonctionnement répétitif effectif de la commande à implanter.

Indiquons enfin qu'il ne sert à rien d'élaborer une commande pseudo-cyclique, si au bout du compte, il n'est pas possible de répéter un nombre suffisant de fois cette commande pour pouvoir atteindre les vitesses de production théoriques calculées pour ce type de commande. Il convient de rappeler que nous ne tenons pas compte dans cette méthode des problèmes de mise en route et de fin de ces régimes 1-périodiques (périodes transitoires).

1.2.1.5 Etude des approches de conduite prévisionnelle par ratios de production

- *Définitions et notations liées à la détermination d'une commande soumise à des ratios de production*

Soit E_1 l'ensemble minimal de produits (ou, par abus de langage, horizon minimal cyclique de travail) qui respecte en discret les ratios de production. D'après la définition

sur les f_i (plus petits entiers proportionnels aux ratios de production r_i), nous avons

$$\text{card}(E_1) = \sum_{i=1}^{I_{\max}} f_i.$$

Nous désignons par $E_v = \bigcup_{v \text{ fois}} E_1$ **l'horizon multiple** de l'horizon minimal de production caractérisé par son facteur multiplicatif v de l'horizon E_1 , caractérisant ainsi le nombre total de pièces à produire lors d'un cycle de production.

Une commande cyclique est caractérisée à la fois par son horizon répétitif de production et par le temps de cycle optimal que le fonctionnement de l'atelier peut atteindre pour réaliser cet horizon de travail. Soit C_v **le temps de cycle optimal pour un horizon donné** E_v . Dans le but de comparer les performances de productivité de ces différents horizons, nous ramenons ce temps de cycle à la fabrication virtuelle d'un horizon minimal de travail. Nous définissons ainsi $C_v^1 = \frac{C_v}{v}$ et notons C_1^* , le meilleur temps de cycle possible ramené à la fabrication de E_1 .

- *Intérêt de considérer cet horizon minimal de production*

La commande est réduite au contrôle du suivi des ratios de production, nous avons de plus restreint le problème d'élaboration de la commande à l'ordonnancement de l'horizon cyclique de travail. Par conséquent ce dernier doit lui aussi respecter les ratios de production. Puisque nous prenons en compte le caractère discret du problème, l'horizon de production que nous considérons est fini. Il doit donc de plus respecter en discret les ratios de production. Comme, de plus, nous cherchons à élaborer une commande simple, nous devons d'abord considérer l'horizon minimal de travail E_1 , horizon le plus court.

- *Intérêt des horizons multiples : cas des flexibilités des gammes opératoires*

Cependant l'un de nos critères d'optimisation concerne la maximisation de la productivité. Il est donc nécessaire d'utiliser au maximum les **flexibilités des gammes opératoires** pour équilibrer les charges de travail sur les ressources et pour minimiser l'influence de la machine la plus lente. Cette optimisation nécessite le plus souvent de fixer les valeurs de certains ratios de routage associés à ces flexibilités, comme nous l'illustrons sur l'exemple de la Figure I-8.

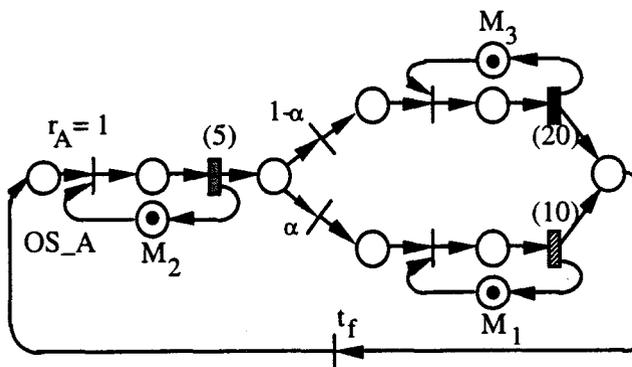


Figure I-8 : Exemple de SFPM avec des flexibilités de gammes opératoires, cf. [CAM 96b]

Les paramètres α et $1 - \alpha$ sont les deux ratios de routage de cet exemple. Si nous ne considérons que l'ensemble minimal E_1 de produits respectant les ratios de production : $E_1 = \{A\}$, les seules valeurs possibles pour le ratio de routages α est 0 ou 1 afin de respecter E_1 . La meilleure productivité est obtenue lorsque la ressource M_3 ne travaille pas. Le temps de cycle du système est alors donné par la ressource critique M_1 et $C_1 = 10$ u.t.

Cette solution ne conduit pas à la plus grande vitesse de production. En effet si nous considérons les horizons multiples, afin de toujours respecter les contraintes des ratios de production, le système de production peut atteindre de meilleures performances. Une évaluation des performances montre que le flux optimal est obtenu pour $\alpha = 2 / 3$. Il faut donc considérer un horizon triple (E_3) de E_1 . Le temps de cycle est alors fixé par les deux machines équilibrées en charge de travail et vaut $C_3 = 20$ u.t. pour fabriquer E_3 , soit un temps de cycle ramené à E_1 égal à $C_3^1 = 20 / 3 = 6,67$ u.t.

• Intérêt des horizons multiples : cas des ressources multiples

Nous obtenons les mêmes conclusions concernant la prise en compte des ressources multiples. Pour optimiser la production du système, il est nécessaire de considérer dans certains cas des horizons multiples de l'horizon minimal afin de répartir équitablement les charges de travail des ressources sur les machines identiques qui la composent, cf. Figure I-9 et Figure I-10.

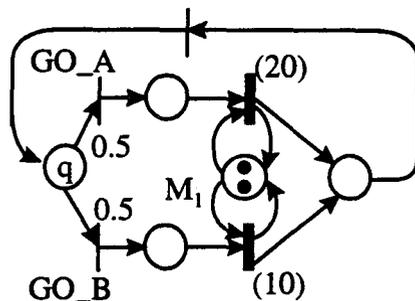


Figure I-9 : Exemple de SFPM avec une ressource , cf. [CAM 96a]

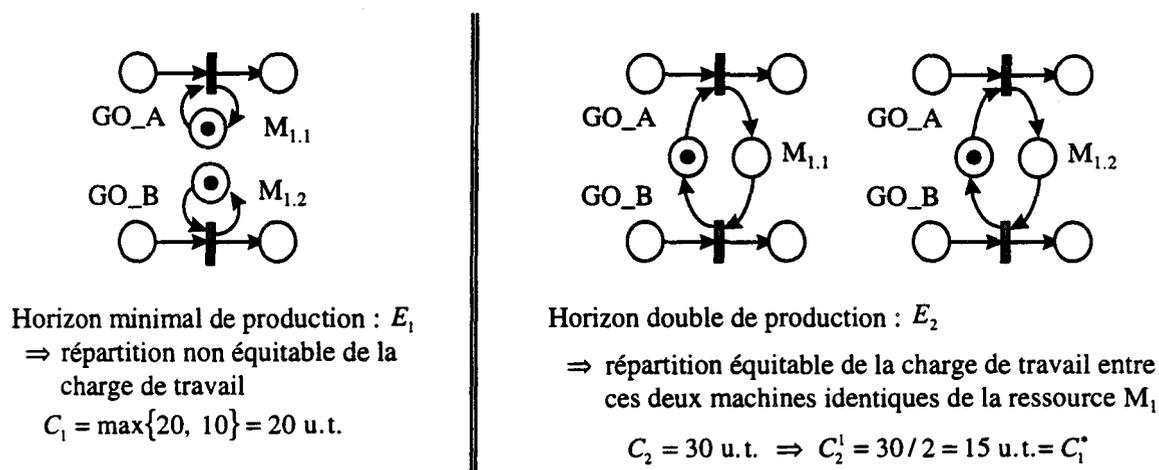


Figure I-10 : Influence de l'horizon multiple de travail retenu sur le temps de cycle

- *Regroupement des principaux critères qualitatifs en un critère quantitatif : l'ensemble des produits réalisés au cours d'un cycle de production*

La notion d'horizon de production découle naturellement de l'approche cyclique et de la prise en compte discrète du problème. La notion d'horizon multiple est, quant à elle, inhérente à la production par ratios de production imposés.

Pour cette approche, nous pouvons considérer l'horizon multiple de production comme un nouveau critère quantitatif d'optimisation. Il permet de regrouper plusieurs critères qualitatifs.

Ainsi le respect, lors de l'implantation de la commande, du fonctionnement périodique de la commande dépend directement des quantités de produits requises et de la taille de l'horizon cyclique de production. Puisque nous ne pouvons a priori remettre en cause les quantités à réaliser sans reprendre les étapes antérieures de la gestion de production (Planification à long terme, programmation et planification fine) ⁽¹⁾, ce critère est donc lié exclusivement à la taille de l'horizon. Plus l'horizon de travail retenu sera petit, plus il sera nécessaire de le répéter et plus il y a de chances d'atteindre les performances théoriques de ces régimes périodiques en phase d'implantation.

Il en est de même pour les critères de simplification de la commande calculée, la réactivité du système soumis à une commande cyclique ainsi que la compatibilité de la production au niveau de l'atelier flexible avec la gestion des stocks et les types de gestion respectifs en amont et en aval de la production considérée. En effet il peut être intéressant de prévoir en amont de cet atelier un stock de sécurité équivalent à un ensemble de produits devant être fabriqués au cours d'un cycle de production. Pour ces trois critères, leur optimisation est équivalente à la minimisation de la taille de l'horizon de travail (et donc du facteur v , multiplicatif de l'horizon minimal respectant les ratios de production, caractéristique de l'horizon retenu).

C'est pourquoi, nous supposons que le problème revient donc à optimiser trois critères de performances : l'horizon cyclique de travail, le temps de cycle et l'en-cours du système.

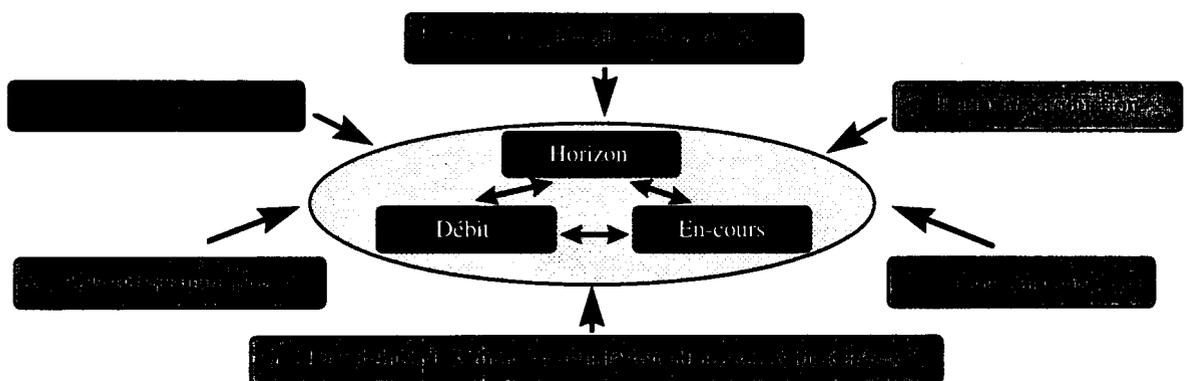


Figure I-11 : Indices de performances et facteurs d'influence [OHL 95a]

¹ Il devient nécessaire de remonter effectivement dans la hiérarchie de la gestion de production et de relaxer les contraintes des étapes de précédence quand celles-ci sont trop dures de sorte que, à ce niveau, il soit impossible de trouver une solution compatible, c'est-à-dire respectant les délais de livraison, par exemple. Nous allons supposer que ce n'est pas le cas, ici. Les quantités requises sont donc considérées comme fixes.

I.2.2 Première Etape : Modélisation du système flexible considéré

I.2.2.1 Rappel sur les différents outils de modélisation et méthodes utilisées pour l'évaluation des performances des systèmes à événements discrets

L'approche par **simulation** permet en premier lieu d'évaluer, au sens expérimental, le comportement d'un système réel, cf. [PRO 87], [CER 88]. Cependant la simulation n'est pas un outil d'évaluation analytique de performances. De plus, en présence de routages probabilistes ou de systèmes avec un grand nombre d'états, l'absence de complétude de la simulation ne permet pas de valider formellement des propriétés qualitatives du système telles que l'absence de blocage. Le choix de la durée de simulation pose aussi problème s'il existe des événements rares à simuler, tels que des pannes de machines. Il s'agit alors de simuler sur une durée très importante pour rencontrer suffisamment d'occurrences de ces événements pour qu'elles soient représentatives des principales caractéristiques de la fonction de distribution. Il peut être plus intéressant de simuler un régime stable, mais tous les événements ne sont pas alors gérés. Donc plusieurs simulations avec des durées différentes doivent être envisagées. Le coût en temps de calcul peut être élevé. L'optimisation de plusieurs paramètres entraîne, en général, une explosion combinatoire du nombre de simulations à effectuer, cf. [HO 83], [HO 87] et [SUR 89]. Néanmoins les simulateurs basés sur des **Réseaux de File d'Attente -RdFA-** (QNAP, ...), ou de **Réseaux de Petri -RdP-** (Simnet, ...) permettent de combiner une phase préliminaire d'évaluation analytique à partir de ces outils de modélisation et d'évaluation par simulation permettant en fait de confirmer les résultats trouvés pour la commande calculée sur un modèle simulé, en général plus détaillé, avant de l'implanter sur le système réel.

Les approches de modélisation les plus couramment utilisées associées à l'analyse de systèmes à événements discrets sont les RFA et les RdP.

L'utilisation de la modélisation par RFA peut être considérée comme une sous-classe des RdP : les RdP Stochastiques, cf. [MOL 82], [FLO 85] et [MAR 89]. Les conflits de routage sont résolus de manière probabiliste et les durées opératoires sont généralement supposées suivre le plus souvent des lois exponentielles. Cela revient à résoudre un processus Markovien à l'aide de la détermination du graphe de Markov associé. Cette approche, efficace du point de vue de l'évaluation des performances, cf. [SOL 79], ne permet pas, en général, de rechercher une commande déterministe optimisée. Elle ne peut donc être utilisée que dans le cadre d'une analyse préliminaire de dimensionnement d'un système de production, cf. [BAS 75], [MAR 79], [DAL 84], [BAC 89], [FDI 89], [DIM 92], [BOU 93], [DEA 93] et [HSU 93].

L'utilisation des RdP permet de représenter à tout moment l'état du système de production en régime dynamique [VAL 86], [DIA 87], [SIL 89], [DUB 90], [PRO 95], [GUI 96], [SIL 96a] et [SIL 96b]. Ils permettent de prendre en compte de plus les problèmes de synchronisation, d'asynchronisme et de communication. C'est pourquoi dans le projet CASPAIM cet outil de modélisation a été choisi. Il permet l'évaluation des performances des systèmes. Plusieurs méthodes d'analyse ont été développées, notamment l'algèbre (max., +), cf. [COH 85], [COH 89] et [GAU 90], qui permet de représenter le problème sous forme d'une équation d'état similaire à celle des systèmes linéaires pour les Graphes d'Evénements. Cette approche est réservée à des systèmes sans conflit. La méthode utilisée dans ce mémoire utilise l'optimisation de flux par programmation linéaire développée dans [FRE 88], au niveau des charges des P-semiflots du graphe RdP qui sont

associés aux ressources du système étudié, cf. [SIF 80], [CAM 90]. Parallèlement des études ont été menées dans le sens inverse pour représenter de tels problèmes par RdP, cf. [RIC 96], prouvant une fois de plus l'intérêt indéniable de cet outil de modélisation.

Dans ce mémoire, nous utilisons les RdP ordinaires, étendus aux temporisations déterministes des transitions pour modéliser le comportement dynamique supposé déterministe d'un atelier flexible. Nous avons développé une approche de modélisation, présente à chaque étape de la méthode progressive que nous avons développée, qui transforme progressivement un Réseau de Petri, modélisant le système de production avec toutes ses flexibilités en un modèle entièrement déterministe de la commande élaborée. Nous supposons que le lecteur est familier avec les principales propriétés des RdP, cf. [MUR 89], [DIC 93] et [DES 95]. Nous introduisons les notations suivantes :

Soit N un RdP. Il est caractérisé par $N = \langle P, T, W^-, W^+ \rangle$, où

$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ représente l'ensemble des places,

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ représente l'ensemble des transitions du graphe,

$W = W^+ - W^-$ est la matrice d'incidence du réseau.

$M(P_i)$ indique le marquage de la place P_i et $M_0(P_i)$ est le marquage initial de la place P_i .

Soit σ une séquence de tirs de transitions. $\bar{\sigma}$ est le vecteur caractéristique (de Parikh) de σ , dont la i -ème composante correspond au nombre d'occurrences de la transition t_i dans la séquence σ .

$R(N, M_0)$ est l'ensemble des marquages accessibles des places du RdP N à partir du marquage initial M_0 et $L(N, M_0)$ est l'ensemble des séquences de transitions tirables à partir de M_0 .

Soit $\sigma_n \in L(N, M_0)$ et $M_{\sigma_n} \in R(N, M_0)$ le marquage obtenu après le tir de la séquence σ_n . Nous avons alors $M_{\sigma_n} = M_0 + W \cdot \bar{\sigma}_n$, équation d'évolution du réseau appelée parfois équation d'état et noté $M_0[\sigma_n > M_{\sigma_n}$.

Y est appelé P-semiflot du RdP N , si et seulement si (ssi) $Y^T \cdot W = 0$, $Y \neq 0$ et $Y \in \mathbb{N}^n$, c'est-à-dire que Y exprime la conservation de la somme (éventuellement pondérée) des marques présentes dans ce P-semiflot :

$$\forall M \in R(N, M_0), Y^T \cdot M = Y^T \cdot M_0 + Y^T \cdot W \cdot \bar{\sigma} = Y^T \cdot M_0.$$

De manière semblable, X est appelé T-semiflot du RdP N , ssi $W \cdot X = 0$, $X \neq 0$ et $X \in \mathbb{N}^m$, c'est-à-dire que X est une composante consistante du RdP : $M_X = M_0 + W \cdot X = M_0$.

Une extension a été apportée à ces Réseaux de Petri par l'intégration du facteur temps qui peut être effectuée par une temporisation des places ou des transitions. Dans la suite de ce mémoire, nous n'utilisons que la temporisation au niveau des transitions qui représente ainsi le délai de tir des transitions (activité), les places représentant des états. L'équivalence entre ces différentes approches de temporisation a été montrée dans [SIF 80]. A chaque transition temporisée, nous associons la valeur de la fonction : $\mu : T \rightarrow \mathbb{Q}^+$, temporisation déterministe des transitions.

1.2.2.2 Modélisation des différentes composantes du SFPM

La première étape de la méthode consiste à modéliser toutes les contraintes du système de production pour pouvoir lancer l'étape d'évaluation des performances. Pour cela, nous considérons progressivement les gammes opératoires, les ressources de transformation, les ressources de transport avec leurs flexibilités respectives ainsi que les contraintes de production telles que le respect des ratios de production. Nous considérons en :

Phase 1 : les **séquences opératoires** des différents produits à fabriquer : modélisation des contraintes de précedence pour les opérations appartenant à la fabrication du même type de produit et des flexibilités de gammes de fabrication (cf. [AMA 94] pour les modèles de plus en plus détaillés utilisés : Gammes logiques, Gammes opératoires restreintes et enfin Gammes opératoires restreintes temporisées ⁽¹⁾ et les terminologies présentés dans le cadre du projet CASPAIM). Nous avons également introduit la temporisation des transitions modélisant les opérations pour faire apparaître les durées opératoires.

Phase 2 : les **ressources de transformation** (R types de ressources). En ajoutant ce type de ressources, nous introduisons dans le modèle précédent les contraintes d'exclusion mutuelle entre les opérations appartenant au même type de ressources. Il convient toutefois de rappeler que certaines de ces ressources peuvent être multiples. Afin de conserver une bonne lisibilité du modèle, nous avons hachuré les transitions liées aux opérations. A titre d'illustration, nous reprenons ici l'exemple du mémoire de thèse [OHL 95a]. Nous remarquons la flexibilité enchaînée, au niveau des gammes opératoires de type B, de deux flexibilités simples d'affectation.

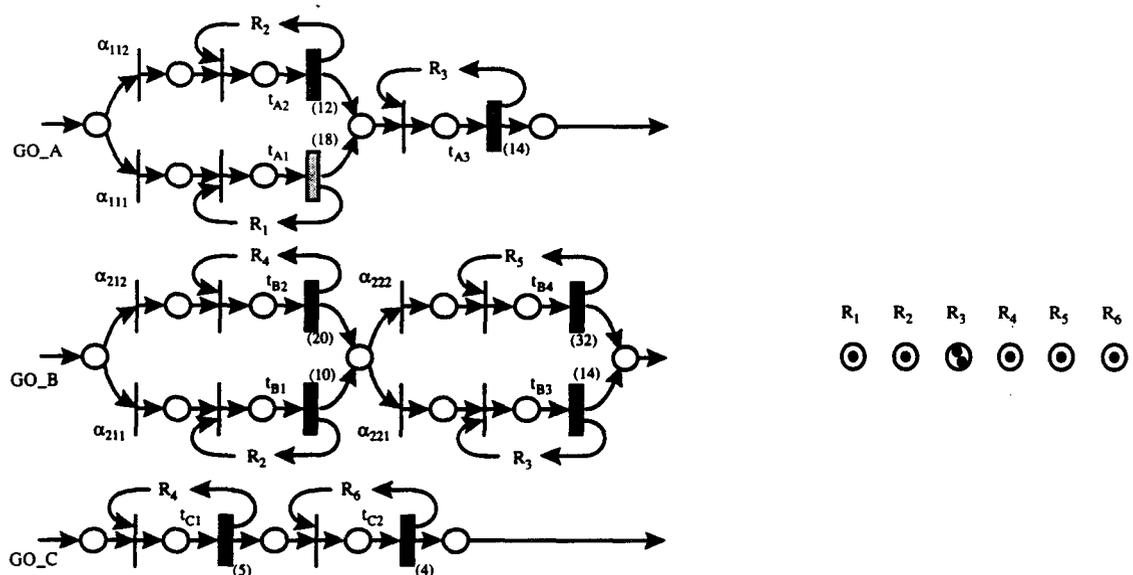


Figure I-12 : Modélisation des Gammes opératoires restreintes temporisées avec les ressources de transformation associées

Phase 3 : les **ressources de transport** (H types différents de palettes). Nous modélisons ici les contraintes technologiques apportées par les types de palettes utilisées dans l'atelier flexible étudié. Elles apparaissent sous forme de rebouclage des gammes opératoires afin de représenter la conservation des palettes au niveau du système (P-semiflots). Pour

¹ Pour cette dernière modélisation, cf. [OHL 95a].

l'exemple illustratif, nous avons, d'après les hypothèses, deux types de palettes : la première associée aux gammes de type A et B (place de rebouclage associée P_{r1}) et la deuxième dédiée exclusivement à la gamme de type C (place de rebouclage associée P_{r2}). En rappelant que nous avons supposé que les pièces restent attachées à leur palette au cours de leur fabrication dans l'atelier et que les palettes vides repartent immédiatement vers le stock d'entrée pour charger une nouvelle pièce, l'ensemble des marques présentes dans ces P-semiflats, représente à la fois les ressources de transport et l'en-cours (maximum) présents dans l'atelier.

Phase 4 : respect des ratios de production. Nous transformons le modèle initial en un modèle fortement connexe à l'aide du rebouclage extérieur (transition associée t_f). Il devient ainsi possible d'indiquer les ratios de production fixes r_i sur les arcs partant de la place de rebouclage vers le début des séquences opératoires. Nous avons, dans un premier temps, modélisé ces ratios comme de simples fractions. Puisque nous n'avons pas encore déterminé l'horizon cyclique de production, il n'est pas possible de modéliser plus fidèlement les règles de décision de routage. Dans un second temps, dès que l'horizon sera fixé, nous pourrions exprimer une contrainte de respect des ratios de production sur un horizon discret. Nous travaillons pour l'instant au niveau flux. Les fractions permettent d'exprimer le respect en moyenne des ratios.

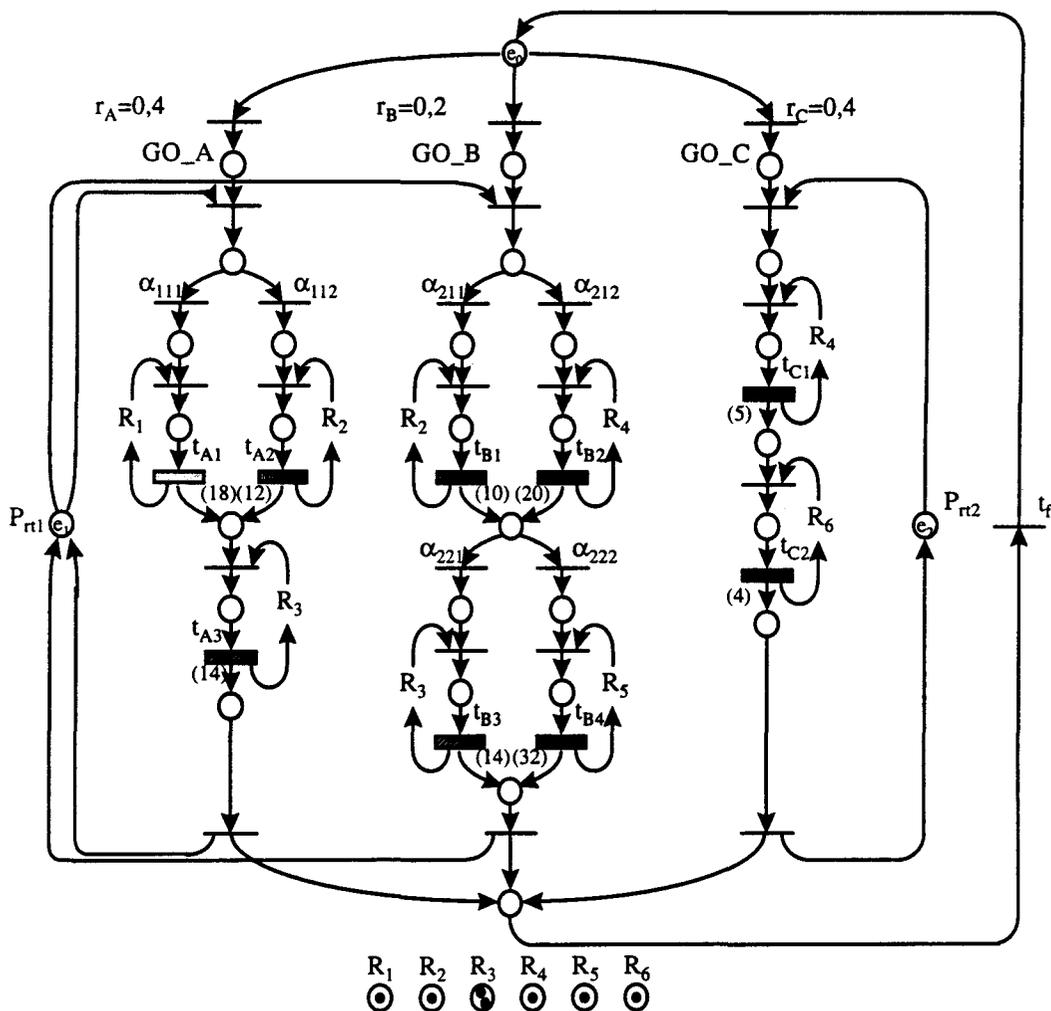


Figure I-13 : Modélisation du système de production considéré dans [OHL 95a] soumis aux contraintes de ratios de production fixés

Les marques de cette boucle principale n'ont pas d'existence physique. Le bouclage est une commodité usuelle en théorie des graphes donnant au modèle de bonnes propriétés, notamment de forte connexité. Il permet ici de représenter le fonctionnement répétitif de la commande avec respect de ratios de production. Nous supposons de plus qu'au moment de l'analyse, le nombre de ces marques est suffisant pour que la charge associée à ce P-semiflot ne soit pas la ressource critique du système.

Le modèle de RdP obtenu appartient à la classe des Réseaux de Petri à T-semiflotts librement reliés (Free Related T-semiflows, ou FRT-nets, définis par J. Campos dans [CAM 90]). Ces FRT-nets possèdent de bonnes propriétés telles que la vivacité, et la finitude. Ceci permet de considérer que toutes les commandes vivantes sont réalisables sur ce système.

I.2.3 Deuxième Etape : Analyse de flux et Optimisation discrète

I.2.3.1 Optimisation simultanée des trois critères d'optimisation : complexité et approche développée

- Etude des relations entre les trois critères d'optimisation

- ◆ Relations entre le temps de cycle et l'en-cours maximum présent dans le système

Nous étudions d'abord la relation existante entre le temps de cycle (en fait le débit de production), que le système de production peut atteindre tout en respectant un horizon cyclique de travail fixé E_v , et l'en-cours maximum présent dans l'atelier flexible. La courbe obtenue à la Figure I-14 est issue de l'analyse (évaluation des performances, optimisation et simulation de la commande élaborée sur un modèle détaillé du SFPM) d'un exemple de SFPM utilisé dans le cadre du projet EOWYN, cf. [EOW 95]. Cette courbe est caractéristique de la relation qui unit ces deux paramètres.

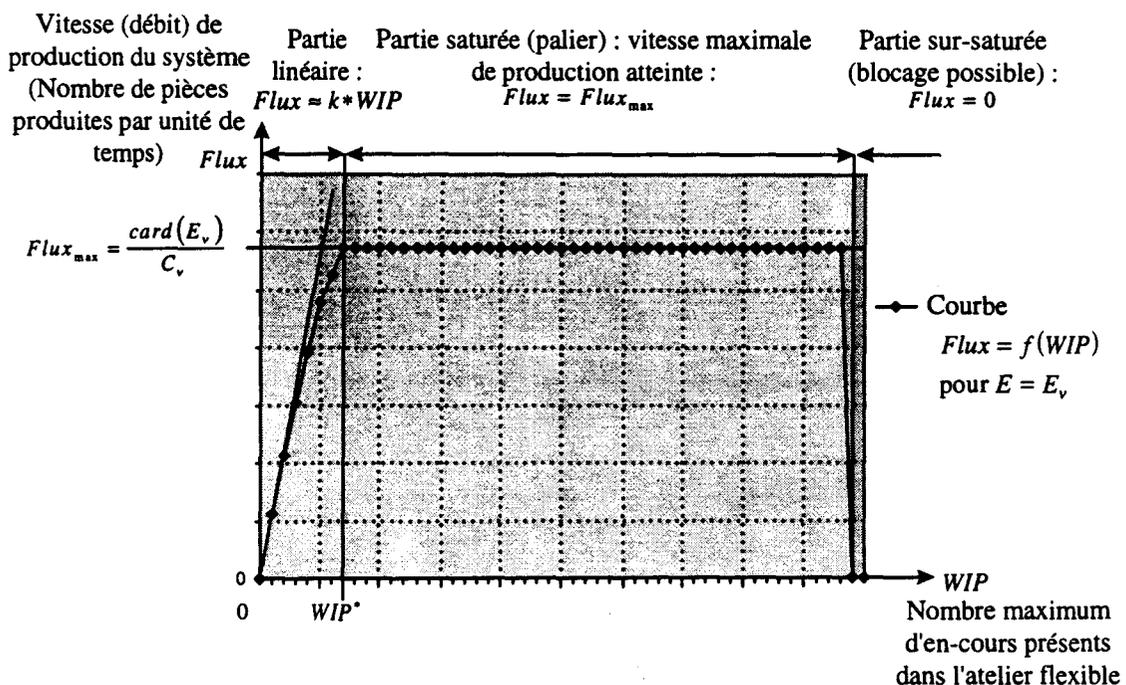


Figure I-14 : Relation entre flux de production et en-cours maximum du système

La relation entre le temps de cycle et l'en-cours, à horizon de production fixé, n'est pas une fonction linéaire. Cependant jusqu'à la saturation du système, c'est-à-dire avant les problèmes de blocage structurel dû aux capacités finies des stocks de l'atelier, la relation reste monotone et presque linéaire par morceaux. Ainsi pour atteindre le temps de cycle optimal, il faut considérer un nombre nécessaire et suffisant d'en-cours (WIP^*).

◆ *Relations entre le temps de cycle optimal et l'horizon cyclique de travail et entre l'en-cours optimal présent dans le système et l'horizon*

Afin d'illustrer les relations possibles entre les deux paramètres : temps de cycle et en-cours et l'horizon de travail, nous travaillons sur l'exemple simple décrit à la Figure I-15. Nous allons ainsi démontrer sur cet exemple qu'il existe une relation monotone (croissante) entre le temps de cycle optimal pour produire E_v et l'horizon. Cependant il n'existe aucune monotonie entre le temps de cycle ramené à la production de E_1 et l'horizon cyclique de production et entre l'en-cours nécessaire et suffisant pour respecter le temps de cycle optimal et l'horizon de travail.

En ce qui concerne la monotonie de la relation entre le temps de cycle C_v et l'horizon caractérisé par le facteur multiplicatif de l'horizon minimal de production, elle est évidente. Une démonstration par l'absurde suffit à la démontrer.

Si nous supposons que $\exists v$ et v' tel que $v < v'$ et $C_v > C_{v'}$, alors à partir de l'ordonnancement trouvé avec l'horizon $E_{v'}$, il est facile de trouver sur cet exemple un ordonnancement de E_v avec un temps de cycle inférieur ou égal à $C_{v'}$. Donc pour le temps de cycle optimal, nous avons $C_v \leq C_{v'}$. Ainsi nous avons démontré que $\forall (v, v') \in \mathbb{N}^2, v \leq v' \Rightarrow C_v \leq C_{v'}$.

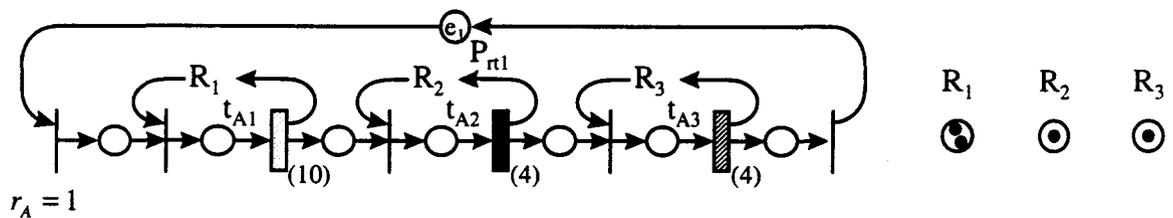


Figure I-15 : Exemple illustrant les relations entre le temps de cycle, l'en-cours et l'horizon de travail

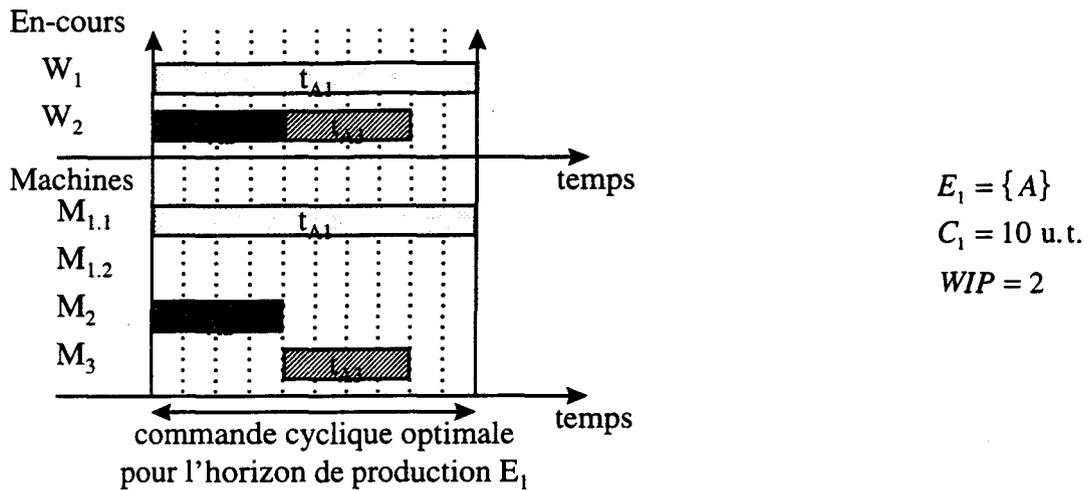


Figure I-16 : Performances obtenues avec l'horizon minimal de production respectant les ratios de production

Pour montrer la non monotonie entre le temps de cycle ramené à la fabrication de E_1 , C_v^1 , et l'horizon E_v , caractérisé par v et entre l'en-cours minimal pour atteindre le temps de cycle optimal C_v et le facteur v , nous développons l'exemple illustratif et nous évaluons ces deux paramètres pour trois horizons multiples distincts : E_1 , E_2 , et E_3 . Pour chaque horizon, nous avons déterminé la vitesse maximale de production du système tout en respectant l'horizon cyclique de travail. Puis nous avons trouvé une des commandes optimales par ordonnancement qui minimise l'en-cours tout en conservant l'horizon fixé et en respectant le temps de cycle optimal.

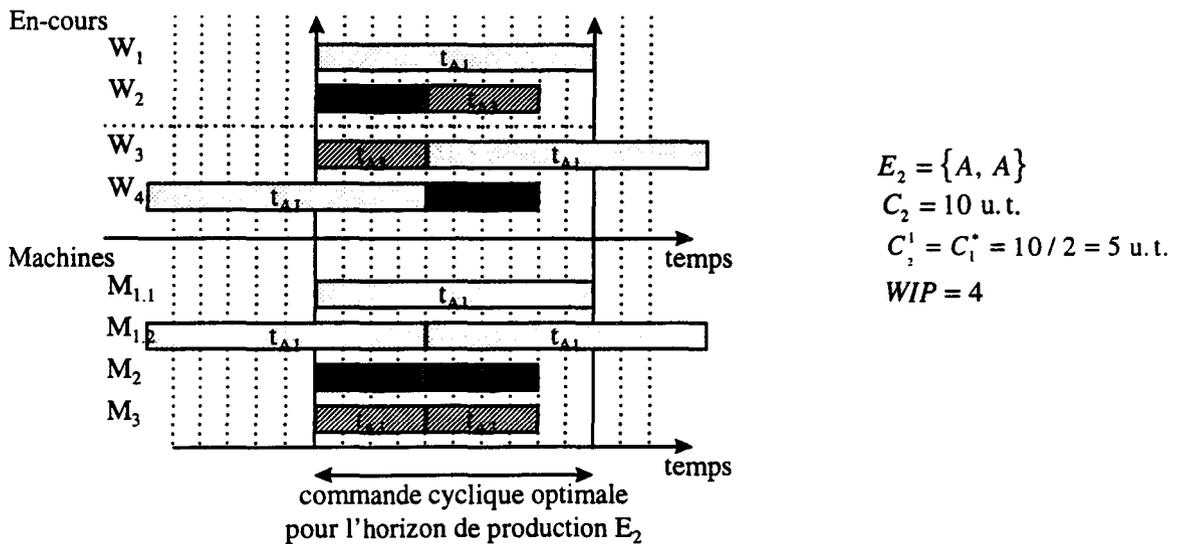


Figure I-17 : Performances obtenues avec l'horizon E_2

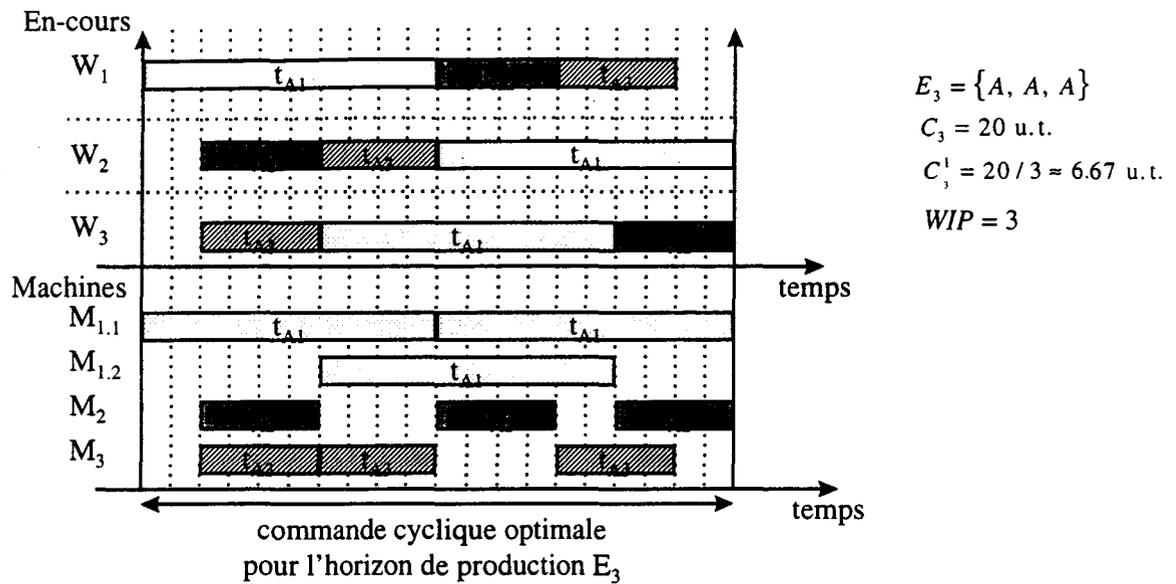


Figure I-18 : Performances obtenues avec l'horizon E_3

La Figure I-19 permet de saisir facilement la propriété de non monotonie qui caractérise les relation étudiées. Nous remarquons également au passage le cas particulier où nous avons $C_2 = C_1$.

Relations entre le temps de cycle et l'horizon de production et entre l'en-cours et l'horizon de production

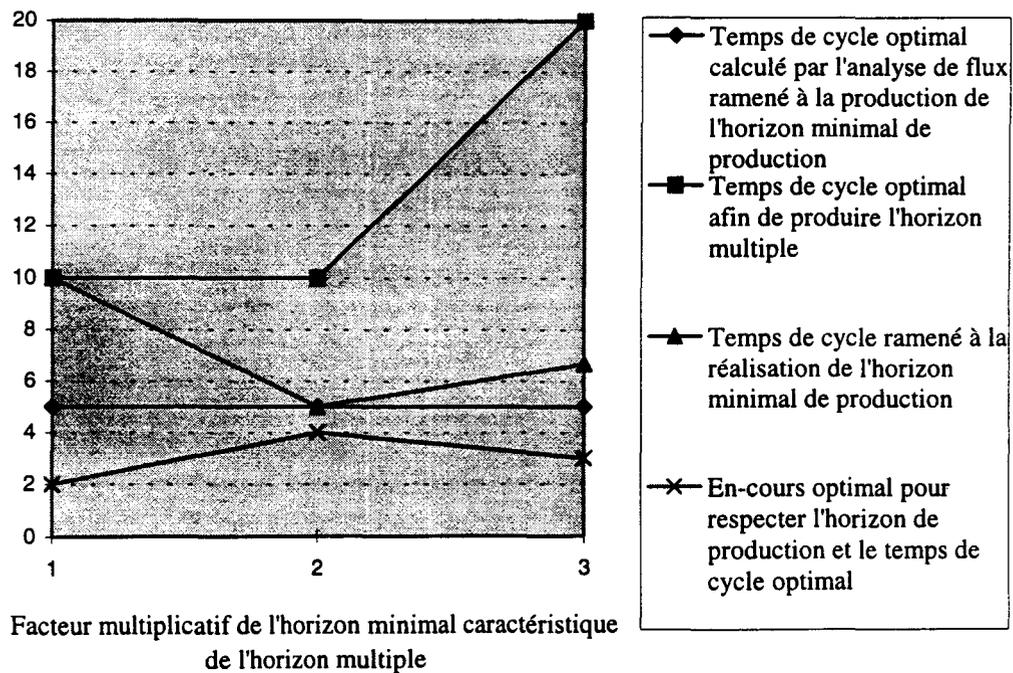


Figure I-19 : Récapitulatif des performances obtenues avec les différents horizons multiples

- *Optimisation simultanée des trois critères de performances ou Approche hiérarchique de l'optimisation*

Ces trois critères peuvent être donc dans certains cas contradictoires. La minimisation de l'en-cours s'oppose en général à la minimisation du temps de cycle (débit de production fonction croissante du nombre d'en-cours dans le système, jusqu'au point de saturation, cf. Figure I-14). Quant à l'horizon de production, la minimisation de la taille de cet horizon (ou du facteur multiplicatif v) peut être difficilement apparentée à l'un des deux autres critères d'optimisation.

L'optimisation simultanée de ces trois critères pour des exemples plus importants est d'une complexité trop grande. Nous proposons de réduire cette complexité en hiérarchisant l'optimisation.

L'en-cours peut être considéré d'une part comme un indice de performance et d'autre part comme une donnée qui fait partie de la commande du système et qui doit être fixée pour obtenir une commande déterministe. Nous avons donc une influence directe sur cet indice de performance, tandis que les deux autres indices, l'horizon et le débit, ne sont pas « accessibles » directement. Ils apparaissent comme des conséquences plus ou moins lointaines des choix effectués. Nous remarquons que l'aspect commande de l'en-cours comporte deux caractéristiques selon que nous considérons sa valeur en nombre ou sa répartition sur les différents postes de production ou système de transport, tandis que l'aspect indice de performance ne s'intéresse qu'à l'aspect niveau de l'en-cours requis pour respecter l'horizon et le temps de cycle.

D'un point de vue économique, il est plus intéressant de mettre au second plan le coût dû au niveau d'en-cours. Le surcoût créé par l'ajout de quelques ressources de transport et donc d'en-cours dans le système risque d'être minime par rapport à celui que représenteraient la baisse de vitesse de production due à une limitation du niveau d'en-cours et les possibles retards de livraison engendrés par cette diminution de la productivité.

C'est pourquoi nous proposons de prendre en considération en premier lieu le conflit lié à l'optimisation du temps de cycle et de l'horizon de travail, en supposant dans un premier temps l'existence d'un nombre suffisant d'en-cours. Dans un deuxième temps, nous élaborerons la commande prévisionnelle du système en optimisant le critère relatif à la minimisation du niveau d'en-cours qui devra respecter l'horizon et le temps de cycle fixés préalablement.

L'optimisation simultanée de ces deux critères se justifie aussi par le fait qu'un trop grand horizon cyclique de travail peut interdire le fonctionnement répétitif de la commande à implanter. De plus si la commande n'est pas suffisamment répétée, le système risque de ne pas atteindre les performances théoriques calculées lors de l'élaboration de la commande cyclique en raison du régime transitoire de mise en place du régime permanent cyclique. De plus la complexité de l'ordonnancement doit être pris en compte. Nous adopterons ce découpage hiérarchique de façon générale y compris pour la nouvelle méthode de planification fine développée dans ce mémoire. En effet la minimisation de la taille de l'horizon de travail reprend plusieurs critères qualitatifs d'optimisation. Il serait trop compliqué d'introduire le dernier critère dans l'optimisation, en effet il nécessite de considérer l'ordonnancement des opérations sur les machines, phase ultime de l'élaboration de la commande.

Le principe de cette méthode est donc de considérer progressivement chaque degré de liberté du système pour ne garder que les solutions qui aboutiront à un ordonnancement respectant l'horizon cyclique de travail et son temps de cycle optimal associé. Cette approche devrait nous permettre de réduire sensiblement la complexité et en particulier l'espace de recherche des solutions sans toutefois réduire l'espace des solutions possibles afin de garantir l'optimalité de la recherche.

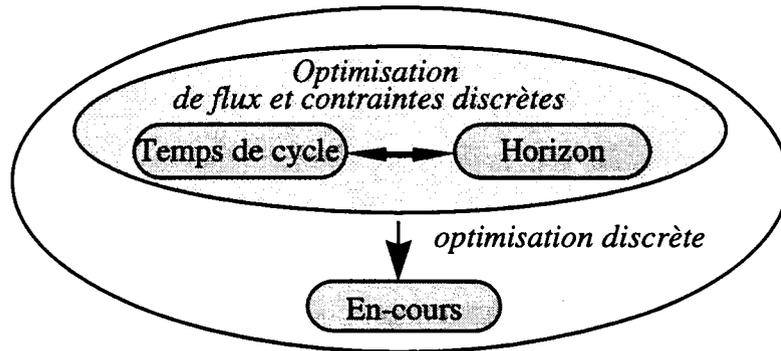


Figure I-20 : Approche hiérarchique retenue de l'optimisation [OHL 95a]

I.2.3.2 Recherche des valeurs optimales

Il s'agit donc d'abord de trouver le meilleur compromis possible entre la vitesse de production du système (représenté par le temps de cycle) et la cardinalité de l'ensemble des produits fabriqués au cours d'un cycle de fonctionnement. Nous allons dans un premier temps rechercher les valeurs optimales de chaque indice. Ces valeurs constitueront des références de comparaison nous permettant de plus d'analyser sur l'autre indice l'impact d'un choix déterminé.

- **Temps de cycle :**

L'optimum du temps de cycle ou du débit de production est obtenu par une **analyse de flux** du système à partir du modèle Réseaux de Petri obtenu ci-dessus et à l'aide de l'étude des invariants du modèle (et plus particulièrement des P-semiflots ou invariants de places) et des bornes développées par Sifakis [SIF 80] et par Campos [CAM 90]. Chaque P-semiflot modélise une ressource de l'atelier en exceptant le rebouclage externe. La vitesse maximale de production est donnée par la **machine critique** dite encore **goulet d'étranglement du système**, c'est-à-dire celle dont la charge de travail est la plus importante. Nous obtenons un problème de **programmation linéaire**, cf. [FRE 88], résolu à l'aide de la **méthode du simplexe**.

D'après [CAM 90], le problème de maximisation du débit revient à calculer et minimiser la charge de la ressource critique. Celle-ci est donnée par :

$$x = \max_{\forall i \in \{1, \dots, R+H+1\}} \left\{ \frac{Y_i^T \cdot W^- \cdot Z_i^{(f)}}{Y_i^T \cdot M_0} \right\}, \text{ avec } Y_i^T \text{ le P-semiflot modélisant une ressource du}$$

système.

$Z_i^{(f)}$ représente le vecteur des charges des transitions pondérées par les taux de visite normalisés par rapport à un tir de la transition de rebouclage t_f . Ainsi $Y_i^T \cdot W^- \cdot Z_i^{(f)}$ représente la charge totale de la ressource alors que $\frac{Y_i^T \cdot W^- \cdot Z_i^{(f)}}{Y_i^T \cdot M_0}$ représente la charge moyenne de travail ramenée à une composante de la ressource, si cette dernière est multiple, en supposant une **répartition équilibrée**. Nous verrons avec le passage en discret les conséquences qu'engendre cette hypothèse sur l'horizon minimum à considérer pour atteindre les performances obtenues ainsi en continu.

Nous considérons ici, du fait de nos hypothèses, que seules les ressources de transformation (et de transfert) sont en quantité limitée, c'est donc effectivement l'une de ces ressources, la (ou les) plus critique(s), qui va donc fixer la vitesse maximale de production, si nous décidons de travailler à flux maximal ou à saturation de ressource critique. Nous pouvons donc, de façon préliminaire, limiter la recherche des charges de travail aux P-semiflots des ressources de transformation. Il n'est pas nécessaire à ce niveau d'étudier les charges des ressources du système de transport, puisque nous avons supposé, ce qui est valide pour les ateliers d'usinage, que ces ressources ne peuvent être critiques au vu de la différence d'ordre entre les durées des opérations de transfert et de transformation. Il faut donc supposer qu'il existe un nombre suffisant de marques (e_0) pour éviter de rendre critique cette ressource fictive due au bouclage. Si nous notons $\frac{Z''}{e_0}$ la charge moyenne du

P-semiflot associé à ce rebouclage, il vient la condition nécessaire : $\frac{Z''}{e_0} \leq x$. Ainsi la

condition sur e_0 devient : $e_0 \geq \left\lceil \frac{Z''}{x} \right\rceil$. Nous limitons donc notre recherche de la (ou les) ressource(s) critique(s) aux ressources de transformation caractérisées ici par leur P-semiflot $Y_i, \forall i \in \{1, \dots, R\}$:

$$x = \max_{\forall i \in \{1, \dots, R\}} \left\{ \frac{Y_i^T \cdot W^- \cdot Z_i^{(f)}}{Y_i^T \cdot M_0} \right\}$$

Le temps de cycle optimal du système, qui représente pour le RdP, le temps moyen entre deux tirs successifs de la transition t_f peut ainsi facilement être calculé. En effet nous connaissons le temps de cycle x de la machine menante. Il reste donc à minimiser celui-ci pour trouver les performances optimales en terme de productivité du système. La fonction de coût du problème est donc égal à x . Les seuls paramètres dont nous disposons à cet étape sont les ratios de routage α_{ijk} . En effet, d'après l'étape de planification fine, les classes de décision D_1 et D_2 ont été fixés. Les ratios de production y ont été déterminés. Il reste encore cependant les degrés de liberté relevant des flexibilités de gammes opératoires pour modifier les charges de travail des différentes ressources. Les α_{ijk} sont des réels positifs tels que leur somme pour un conflit donné soit égale à 1.

Equation I-2 : Problème de programmation linéaire caractéristique de l'analyse de flux du système de production :

$$\left| \begin{array}{l} \text{minimiser } x \\ x \geq \frac{Y_r^T \cdot PRE \cdot Z_i^{(f)}}{Y_r^T \cdot M_0}, \forall r \in \{1, \dots, R\} \\ \alpha_{ijk} \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, I_{\max}\}, \forall j \in \{1, \dots, J_i\}, \forall k \in \{1, \dots, K_{ij}\} \\ \sum_{\forall k \in \{1, \dots, K_{ij}\}} \alpha_{ijk} = 1, \forall i \in \{1, \dots, I_{\max}\}, \forall j \in \{1, \dots, J_i\} \end{array} \right.$$

Soit, pour l'exemple développé dans [OHL 95a], :

$$\left| \begin{array}{l} \text{minimiser } x \\ \text{pour } R_1 : Z_{Y_{R_1}}^{(f)} = \frac{7,2 * \alpha_{111}}{1} \leq x \\ \text{pour } R_2 : Z_{Y_{R_2}}^{(f)} = \frac{4,8 * \alpha_{112} + 2 * \alpha_{211}}{1} \leq x \\ \text{pour } R_3 : Z_{Y_{R_3}}^{(f)} = \frac{5,6 + 2,8 * \alpha_{221}}{2} \leq x \\ \text{pour } R_4 : Z_{Y_{R_4}}^{(f)} = \frac{4 * \alpha_{212} + 2}{1} \leq x \\ \text{pour } R_5 : Z_{Y_{R_5}}^{(f)} = \frac{6,4 * \alpha_{222}}{1} \leq x \\ \text{pour } R_6 : Z_{Y_{R_6}}^{(f)} = \frac{1,6}{1} \leq x \\ \text{avec } \{\alpha_{111}, \alpha_{112}, \alpha_{211}, \alpha_{212}, \alpha_{221}, \alpha_{222}\} \in IR^6 \text{ tels que} \\ \alpha_{111} + \alpha_{112} = 1 \\ \alpha_{211} + \alpha_{212} = 1 \\ \alpha_{221} + \alpha_{222} = 1 \end{array} \right.$$

Nous obtenons ainsi une formulation semblable à celle obtenue dans [FRE 88]. L'avantage de cette approche est qu'elle découle directement de l'analyse des invariants de place du graphe. Le problème général de programmation linéaire est résolu par la méthode du simplexe, cf. [KAR 84] et [CAM 93] pour un exemple d'utilisation. Les résultats obtenus correspondent à la valeur minimale de la fonction de coût, et donnent le temps de cycle optimal, les ressources menantes ainsi que les valeurs des ratios de routage.

$$\left| \begin{array}{l} x = 3,6 = Z_{Y_{R_1}}^{(f)} = Z_{Y_{R_2}}^{(f)} = Z_{Y_{R_4}}^{(f)} \left(= Z_{Y_{R_3}}^{(f)} \text{ pour } \alpha_{221} = \frac{7}{16} \text{ et } = Z_{Y_{R_5}}^{(f)} \text{ pour } \alpha_{221} = \frac{7}{16} \right) \\ \alpha^1 = \{\alpha_{111}, \alpha_{112}, \alpha_{211}, \alpha_{212}\} \text{ avec } \alpha_{111} = \alpha_{112} = 0,5 = \frac{1}{2} \\ \alpha_{211} = 0,6 = \frac{3}{5} \text{ et } \alpha_{212} = 0,4 = \frac{2}{5} \\ \alpha^{21} = \{\alpha_{221}, \alpha_{222}\} \text{ avec } \frac{7}{16} \leq \alpha_{221} \leq \frac{4}{7} \text{ et } \alpha_{221} + \alpha_{222} = 1 \end{array} \right.$$

Conséquences sur l'horizon de production :

Afin de respecter ces ratios de routage, il peut être nécessaire de considérer un nouvel horizon de production. Puisque l'horizon minimal de production E_1 qui respecte les ratios de production fixés est déjà évalué, nous devons conserver cette contrainte et envisager les horizons multiples de E_1 pour trouver celui qui permet au système de production d'atteindre les performances théoriques ainsi calculées. Il faudra donc trouver l'horizon de travail qui minimise le facteur multiplicatif associé.

♦ *Horizon respectant les ratios de routage fixés (α^1) :*

L'analyse de flux a en partie résolu les routages sur les gammes et les ratios associés regroupés dans l'ensemble α^1 . Il est nécessaire de respecter ces valeurs pour atteindre la vitesse maximale de production. Soit v_{α^1} le plus petit facteur multiplicatif de l'horizon répondant à ce problème. La première idée pour respecter les ratios de routage de α^1 est de prendre v_{α^1} égal au plus petit commun multiple des dénominateurs des ratios de routage ⁽¹⁾ de α^1 : $v'_{\alpha^1} = ppcm\{q_{ij}\}_{(i,j) \text{ tq } \exists k, \alpha_{ijk} \in \alpha^1}$, soit pour l'exemple illustratif $v'_{\alpha^1} = ppcm(2,5) = 10$.

Cependant ce facteur n'est pas la solution optimale. Il est en effet possible que les ratios de production f_i et les ratios de routage interagissent. Si, par exemple, les ratios de routage obligent à considérer des horizons de travail avec un nombre pair de produits de type A ($r_1 = 2/5$). S'il existe des ratios de routage de α^1 lié à ce type de produits sous forme : $\alpha_{111} = \alpha_{112} = 1/2$, il n'est pas nécessaire d'envisager de travailler avec des horizons multiples et des facteurs multiplicatifs pairs, puisque le ratio de routage est compatible avec le ratio de production. Il est alors possible d'établir la valeur optimale du facteur

multiplicatif v_{α^1} : $v_{\alpha^1} = ppcm_{i \in \{1, \dots, I_{\max}\}} \left(\frac{ppcm \left(f_i, \{q_{ij}\}_{(i,j) \text{ tq } \exists k, \alpha_{ijk} \in \alpha^1} \right)}{f_i} \right)$. Soit pour l'exemple

$$\text{illustratif } v_{\alpha^1} = ppcm \left(\frac{ppcm(2,2)}{2}, \frac{ppcm(1,5)}{1} \right) = 5.$$

♦ *Horizon respectant les ratios de routage non fixés par la méthode du simplexe (α^2) :*

Les ratios de routage restant non encore déterminés, regroupés dans l'ensemble α^2 , ne sont pas totalement déterminés et sont en général soumis à des contraintes de type appartenance à un intervalle, par exemple $\alpha_{221} \in \left[\frac{7}{16}, \frac{4}{7} \right]$. Il n'est pas toujours possible de trouver des valeurs pour ces ratios respectant l'horizon discret $E_{v_{\alpha^1}}$, c'est à dire des valeurs rationnelles ayant pour dénominateur $v_{\alpha^1} \cdot f_i$ et appartenant à l'intervalle fixé par la résolution du problème de programmation linéaire. Il faut alors envisager un horizon de production de cardinalité plus importante, c'est-à-dire avec un facteur multiplicatif v_{α^2} tel

¹ Comme les durées opératoires sont des entiers (elles pourraient être également rationnelles) et les ratios de production des rationnels, il est très facile de démontrer que les valeurs optimales des ratios de routage obtenues par le simplexe sont eux aussi des rationnels et peuvent donc s'écrire sous la forme $\alpha_{ijk} = p_{ijk} / q_{ij}$ avec $(p_{ijk}, q_{ij}) \in \mathbb{N}^2$.

que $v_{\alpha^2} = \lambda \cdot v_{\alpha^1}$, $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Il est facile de démontrer l'existence d'au moins une solution répondant à tous les ratios de routage de α^2 . Il s'agit cependant de trouver le facteur multiplicatif minimal. Tout dépend des contraintes imposées par la résolution du problème de programmation linéaire. Pour le cas de l'exemple illustratif, la meilleure solution est obtenue pour $\lambda = 2$. Ainsi $\alpha_{221} = \frac{5}{\lambda \cdot v_{\alpha^1} \cdot f_2} = \frac{5}{2 \cdot 5 \cdot 1} = 1/2 \in \left[\frac{7}{16}, \frac{4}{7} \right]$. Mais, dans ce cas, il n'est plus obligatoire de considérer par la suite un multiple de cet horizon. λ n'est alors qu'une borne minimale qu'il est nécessaire de respecter (en général ce n'est pas suffisant).

- ◆ *Horizon respectant la distribution équitable des charges de travail des ressources multiples sur les machines identiques qui les composent :*

L'analyse de flux a implicitement supposé une répartition équitable de la charge de travail sur les différentes machines identiques d'une même ressource. En raison de la nature discrète du problème, il est nécessaire de vérifier cette hypothèse. En général les opérations sur une même ressource ne sont pas toutes identiques et en quantité égale à un multiple du nombre de machines identiques ; plus généralement, il n'est pas possible de trouver une distribution discrète équitable de la charge de travail sur les machines identiques en considérant l'horizon de production $E_{v_{\alpha^2}}$. Toutes les répartitions inégales n'entraînent pas forcément une modification du temps de cycle du système due à la formation de machine(s) plus critique(s) que celle(s) trouvée(s) par analyse de flux. Il suffit de restreindre le problème aux ressources ⁽¹⁾ pour lesquelles la répartition sur les machines identiques crée de nouvelles ressources critiques (temps de cycle modifié) et trouver un facteur λ' (vérifiant au moins $\lambda' \geq \lambda$) tel que sur l'horizon de production $E_{\lambda' \cdot v_{\alpha^1}}$, il y ait une répartition équitable des charges de travail, ou tout au moins une répartition suffisamment fine pour ne plus créer de nouvelles machines critiques. A ce propos, H. Ohl a établi une valeur ξ telle que l'horizon de production $E_{\xi \cdot v_{\alpha^2}}$ soit compatible avec le respect de tous les ratios (production et routage) et une répartition équitable de la charge de travail sur les ressources nécessaires. Cette valeur tient compte du nombre de machines identiques, noté M_r , par type r de ressources multiples, et du nombre d'opérations dédiées à une ressource r et ayant la même durée opératoire t (soit O_{t-r} , ce nombre pour l'horizon $E_{\xi \cdot v_{\alpha^2}}$). Ainsi pour

avoir une répartition discrète équilibrée, il suffit de prendre $\xi = \text{ppcm}_{\forall r \in \Pi} \left(\frac{M_r}{\text{pgcd}(M_r, O_{t-r}|_{v_t})} \right)$.

Cette valeur peut être affinée en tenant compte des regroupements entre opérations, elle donne cependant une bonne approximation de la valeur optimale, puisque, comme nous l'avons déjà rappelé, un des critères d'optimisation est la minimisation de l'horizon de production. Ainsi pour l'exemple illustratif, nous avons :

$$\xi = \text{ppcm}_{r=3} \left(\frac{M_3}{\text{pgcd}(M_3, O_{14-R_3})} \right) = \frac{2}{\text{pgcd}(2,25)} = 2. \text{ L'horizon cyclique de travail } E_{20}$$

suffit donc pour atteindre les performances théoriques de l'analyse de flux. Cependant, comme nous le verrons par la suite, **la meilleure solution est obtenue avec E_{15}** , soit

¹ Notons Π l'ensemble de ces ressources.

$\lambda' = 3 (\geq \lambda = 2)$. Par la suite, nous allons considérer que les quantités de produits réellement à fabriquer sont respectivement pour les produits de type A, B et C de 400, 200 et 400. Si nous voulons conserver les performances théoriques calculées par l'analyse de flux et se rapprocher de la production, nous devons au maximum répéter 13 fois la commande répétitive basée sur l'horizon cyclique de production E_{15} . L'implantation physique de cette commande avec un tel horizon risque de ne pas aboutir au makespan escompté par l'analyse de flux. De plus le problème d'ordonnement lié à cet horizon (75 gammes opératoires) est d'une taille trop importante pour calculer dans des délais raisonnables la commande cyclique prévisionnelle. Il apparaît aussi des problèmes au niveau de la réactivité du système : le temps de cycle est alors de $C_{15} = 15 * card(E_1) * 3,6 = 15 * 5 * 3,6 = 270$ à comparer au temps de cycle $C_1 = 28$ de l'horizon minimal soit une baisse de près de 90% de la réactivité temporelle de la commande, correspondant ainsi au temps maximal nécessaire de réaction du système si nous ne surveillons le comportement du système qu'une fois par cycle, exprimée par le rapport $\frac{C_1}{C_{20}}$. De même la taille du stock de sécurité atteint aussi une valeur trop importante (30 pièces de type A, 15 de B et 30 de C) pour être facilement compatible avec la production en amont.

- **Horizon de production :**

La seule contrainte liée à ce critère pour en exprimer la valeur optimale est le respect des ratios fixés de production. La valeur optimale de l'horizon est donc E_1 .

Conséquence sur le temps de cycle :

Nous constatons en général une dégradation assez importante des performances de productivité par rapport au temps de cycle optimal, due à l'impossibilité de respecter sur un horizon discret de si petite cardinalité des ratios de routage optimaux fixés par la résolution du Problème de Programmation Linéaire (PPL) ainsi qu'à l'impossibilité de répartir équitablement la charge de travail sur les machines identiques. Pour résoudre le problème, il s'agit de trouver les ratios de production qui minimisent le temps de cycle, avec comme contrainte l'horizon de travail fixé, soit des dénominateurs de ces ratios de production fixés et égaux à $q_{ij} = f_i$ (pour les ratios de routage liés à des conflits de flexibilités non complexes de type imbriquées). Le problème obtenu devient alors un problème de programmation linéaire en nombres entiers, comme nous le verrons par la suite. Pour l'exemple illustratif, nous obtenons un temps de cycle $C_1 = 28$ u.t. à comparer au temps de cycle optimal calculé par l'analyse de flux et ramené à la fabrication de E_1 : soit $C_1^* = card(E_1) * x = 5 * 3,6 = 18$, ce qui correspond à une diminution de 35,7% de la productivité du système de production. Il peut apparaître dans ce cas des retards importants de production par rapport à ce que la planification avait envisagé, et donc des retards de livraison possibles de commande.

- **Conclusion :**

En général aucune de ces deux valeurs n'est satisfaisante. Le respect du temps de cycle optimal fixé par une analyse des performances du système oblige à considérer un ensemble de pièces à réaliser lors d'un cycle de production qui peut être en totale incompatibilité avec la notion de fonctionnement répétitif de la commande. Pour les autres critères

qualitatifs que la minimisation de la taille de l'horizon cyclique de production représente, il apparaît également d'autres problèmes qui conduisent à ne pouvoir conserver cet horizon pour l'élaboration de la commande prévisionnelle. A l'opposé, la recherche de l'horizon minimal de production aboutit en général à une dégradation trop importante des performances en terme de productivité du système. Il est donc nécessaire de rechercher un compromis entre ces deux valeurs extrêmes.

1.2.3.3 Optimisation discrète

- *Formulation du PPL en nombres entiers : Application à l'exemple illustratif*

Nous venons de voir que les horizons cycliques de travail E_1 et $E_{\xi, v_{\alpha_2}}$ ⁽¹⁾ n'apparaissent pas aboutir à un compromis raisonnable entre les différents critères d'optimisation considérés dans cette étape. C'est pourquoi il est nécessaire d'étudier les horizons de production intermédiaires.

A ce propos il est intéressant de chercher la valeur minimale de v pour laquelle l'horizon de production E_v maximise la vitesse de production. Nous savons déjà que $\lambda \cdot v_{\alpha_1} < v \leq \xi \cdot \lambda \cdot v_{\alpha_1}$ et que ce facteur multiplicatif se met sous la forme $v = \lambda' \cdot v_{\alpha_1}$, avec $\lambda' \geq \lambda$. Le choix est en général limité.

Il s'agit pour chaque horizon ainsi considéré d'évaluer le temps de cycle optimal que peut atteindre le système de production soumis à une commande répétitive caractérisée par l'ensemble des produits fabriqués au cours d'un cycle de fonctionnement. Il est impératif de passer en revue tous les horizons possibles entre ces deux valeurs extrêmes puisque d'après l'étude réalisée au § I.2.3.1, il n'y a pas de relation monotone entre le temps de cycle optimal de E_v : C_v^1 et le facteur multiplicatif v associé à E_v . Nous tenons alors compte du caractère discret de la commande, c'est-à-dire à la fois des contraintes au niveau du choix des valeurs des ratios de routage et de la prise en compte de la répartition discrète des charges sur les machines, pour l'optimisation du temps de cycle. Nous transformons ainsi un PPL présenté pour une analyse de flux en continu par **un PPL en nombres entiers**.

La fonction de coût (auparavant x) ne correspond plus au temps moyen entre deux tirs consécutifs de la transition de rebouclage t_f . Nous ramenons logiquement le temps de cycle à la réalisation de l'horizon cyclique de travail E_v . L'unité de temps est choisie par hypothèses de telle sorte que les durées opératoires soient toutes entières, le temps de cycle à minimiser est lui aussi entier. Nous ne considérons donc plus x mais $C_v = (v \cdot \text{card}(E_1)) \cdot x$.

Pour les **ratios de routage** (et pour les **taux de visite**), nous allons supposer dans un premier temps qu'il n'y a pas de flexibilités de gammes imbriquées ou qu'elles ont été dépliées au préalable pour qu'elles n'apparaissent plus sur le modèle. Ainsi tous les ratios de routage α_{ijk} ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs, cf. Figure I-21.

¹ Les deux horizons extrêmes sont : E_1 minimisant la taille de l'ensemble des produits à fabriquer au cours d'un cycle de fabrication et $E_{\xi, v_{\alpha_2}}$, borne supérieure de l'horizon maximisant le flux de production.

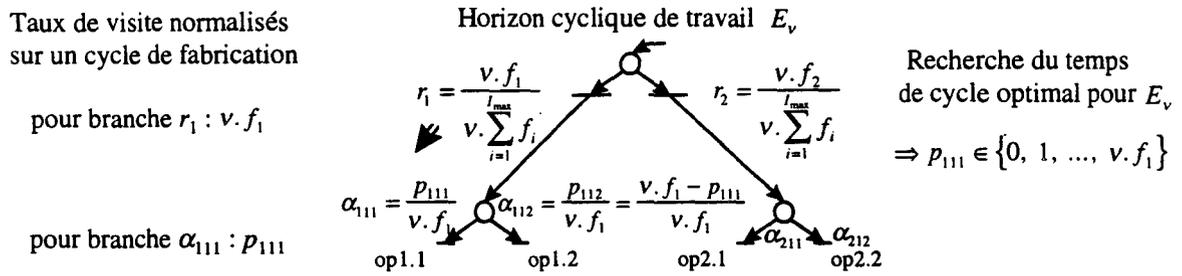


Figure I-21 : Contraintes sur les ratios de routage imposées par l'étude sur un horizon cyclique de travail fixé E_v et taux de visite associés

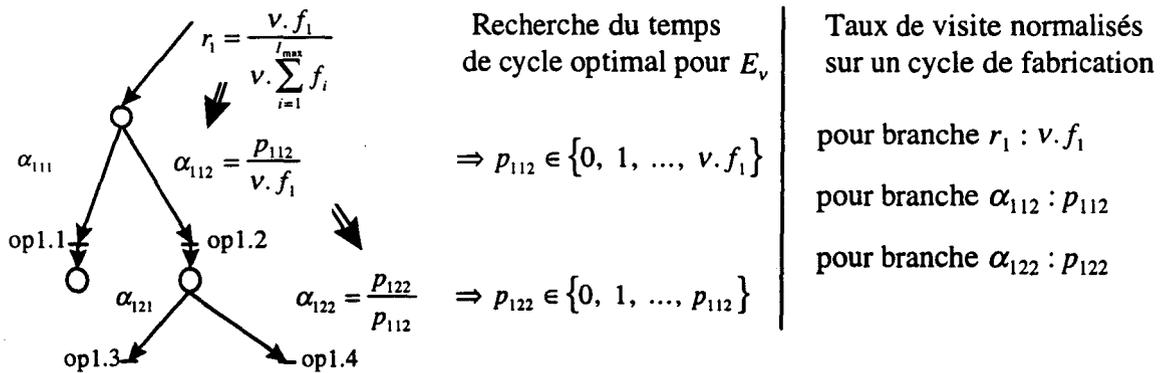


Figure I-22 : Contraintes sur les ratios de routage des flexibilités imbriquées imposées par l'étude sur un horizon cyclique de travail fixé E_v et taux de visite associés

Remarque : dans le cas de flexibilités imbriquées, cf. Figure I-22 , les contraintes changent quelque peu pour les ratios de routage des conflits de la flexibilité imbriquée. En effet le dénominateur n'est plus égal au numérateur du ratio de production mais est égal au numérateur du ratio de routage de la branche où se situe cette flexibilité imbriquée. Nous voyons aussi que la prise en compte des flexibilités imbriquées n'entraîne plus l'apparition de termes non linéaires au niveau des taux de visite, mais seulement des nouvelles contraintes sur les valeurs des ratios de routage et des taux de visite.

Dans le cas de **ressources simples**, le calcul de la **charge de travail** associée n'est pas modifiée. Par contre pour les ressources multiples, nous ne nous contentons plus d'une charge moyenne équilibrée sur les machines identiques qui composent cette ressource multiple, nous prenons en compte la **répartition discrète des charges de travail sur les machines**. Pour cela, nous regroupons toutes les opérations ayant la même durée opératoire : soit O_{t-r} le nombre d'opérations de durée t affectées à la ressource r . Puis nous les répartissons sur les machines identiques. C'est pourquoi il est nécessaire d'introduire de nouvelles variables : $O_{t-r,m}$ représente le nombre d'opérations de durée t affectées à la m -ème machine de la r -ème ressource multiple. Le problème de programmation linéaire de l'Equation I-2 appliqué à l'exemple illustratif s'écrit maintenant sous la forme :

Equation I-3 : PPL en nombres entiers obtenus pour l'exemple illustratif : Minimisation du temps de cycle pour un horizon de travail donné

$$\begin{aligned}
 & \forall v \in \{1, \dots, \xi \cdot v_{\alpha^2}\} \\
 & \text{minimiser } C_v \\
 & \text{sous les contraintes :} \\
 & \left. \begin{aligned}
 & \text{pour } R_1 : C_v \geq Z_1 = 18 \cdot p_{111} \\
 & \text{pour } R_2 : C_v \geq Z_2 = 12 \cdot p_{112} + 10 \cdot p_{211} \\
 & \text{pour } R_3, M_{3,1} : C_v \geq Z_{3,1} = 14 \cdot O_{14-3,1} \\
 & \quad \quad \quad M_{3,2} : C_v \geq Z_{3,2} = 14 \cdot O_{14-3,2} \\
 & \text{pour } R_4 : C_v \geq Z_4 = 20 \cdot p_{212} + 5 \cdot (v \cdot f_3) \\
 & \text{pour } R_5 : C_v \geq Z_5 = 32 \cdot p_{222} \\
 & \text{pour } R_6 : C_v \geq Z_6 = 6 \cdot (v \cdot f_3) \\
 & (p_{111}, p_{112}, p_{211}, p_{212}, p_{221}, p_{222}) \in \mathbb{N}^6 \\
 & p_{111} + p_{112} = v \cdot f_1 \\
 & p_{211} + p_{212} = p_{221} + p_{222} = v \cdot f_2 \\
 & (O_{14-3,1}, O_{14-3,2}) \in \mathbb{N}^2 \\
 & O_{14-3,1} + O_{14-3,2} = v \cdot f_1 + p_{221}
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Remarque : pour la résolution complète par programmation sous contraintes du PPL en nombres entiers, nous avons ajouté cette contrainte supplémentaire : $O_{14-3,1} \geq O_{14-3,2}$ afin de supprimer les solutions équivalentes (permutation des charges de $M_{3,1}$ et $M_{3,2}$). A ce propos, nous préférons résoudre le PPL en nombres entiers à l'aide de la programmation sous contraintes plutôt qu'utiliser la recherche exhaustive de l'ensemble des valeurs possibles des ratios de routage, comme le préconise [OHL 95a], en raison des gains de temps appréciables apportés par cette méthode de résolution. La seule valeur qui nous intéresse ici est la valeur du temps de cycle optimal C_v associé à l'horizon de production E_v . Les différentes valeurs possibles des ratios de routage seront reprises et utilisées ultérieurement comme les différentes répartitions possibles des charges sur les machines identiques.

- *Performances obtenues sur les différents horizons de travail*

Nous présentons dans le tableau suivant, les résultats de l'étude de chaque horizon de travail entre les deux horizons extrêmes pour l'exemple illustratif. Rappelons que la minimisation du temps de cycle et de la taille de l'horizon de production ne sont pas les seuls critères d'optimisation, nous avons donc tenté de quantifier les critères qualitatifs afin de faciliter le choix de l'horizon de travail associé à son temps de cycle optimal. Nous

avons ainsi défini une **réactivité d'un horizon** comme le rapport entre C_1 et C_v pour comparer la différence de durée de cycle et caractériser ainsi la possibilité d'une périodicité de contrôle plus ou moins faible. Nous avons aussi calculé le **nombre de pièces produites** au cours d'un cycle pour approcher une évaluation de la complexité de l'ordonnancement à effectuer par la suite et dimensionner encore de façon approximative les capacités de stock d'entrée amont (stock de sécurité d'un horizon). Nous n'avons retenu qu'un seul ensemble de routages pour chaque horizon, mais il peut en exister plusieurs. Dans ce cas, la répartition des charges peut être différente, ce qui peut entraîner l'apparition (et la disparition) de certaines machines critiques (cases grisées).

v	$Z_{2.1}$ criti	$Z_{2.2}$ criti	$Z_{3.1}$ ≈criti	$Z_{3.2}$ ≈criti	$Z_{4.1}$ criti	Z_5 ≈criti	Z_6	Temps de cycle C_v^i	Performance de production $\frac{C_1^*}{C_v^i}$ (%)	Réactivité : $\frac{C_1}{C_v^i}$ (%)	Cardinalité de E_v
1	18	22	14	22	10	0	8	28	64,3	100	5
2	36	34	22	42	40	0	16	21	85,7	66,7	10
3	54	56	56	56	50	32	24	18,7	96,4	50	15
4	72	78	70	70	60	64	32	19,5	92,3	35,9	20
5	90	90	84	84	90		40	19,2	93,8	29,2	25
6	108	112	112	112	100	64	48	18,7	96,4	18,7	30
7	126	124	126	112		128	56	18,6	96,9	21,2	35
8	144		140	140	140	128	64	18,3	98,7	19,2	40
9	162	160	168	168	150	96	72	18,7	96,4	16,7	45
10	180	180		182	180	128	80	18,2	98,9	15,4	50
11	198	202	196	196	190	160	88	18,4	98	13,9	55
12	216	214	210	210	220		96	18,3	98,2	12,7	60
13	234		224	224	230	224	104	18,2	99,2	11,9	65
14	252		252	252	240	192	112	18,4	97,7	10,9	70
			266	266		224	120			10,4	75
16	288		280	266	280	288	128	18,3	98,6	9,6	80
17	306	304	308	308		224	136	18,2	98,7	9	85
18	324		322	322	320	256	144	18,1	99,4	8,6	90
19	342		336	336	330	288	152	18,3	98,3	8	95
			350	350		320	160			7,8	100

Tableau I-1 : Tableau des performances des différents horizons de production

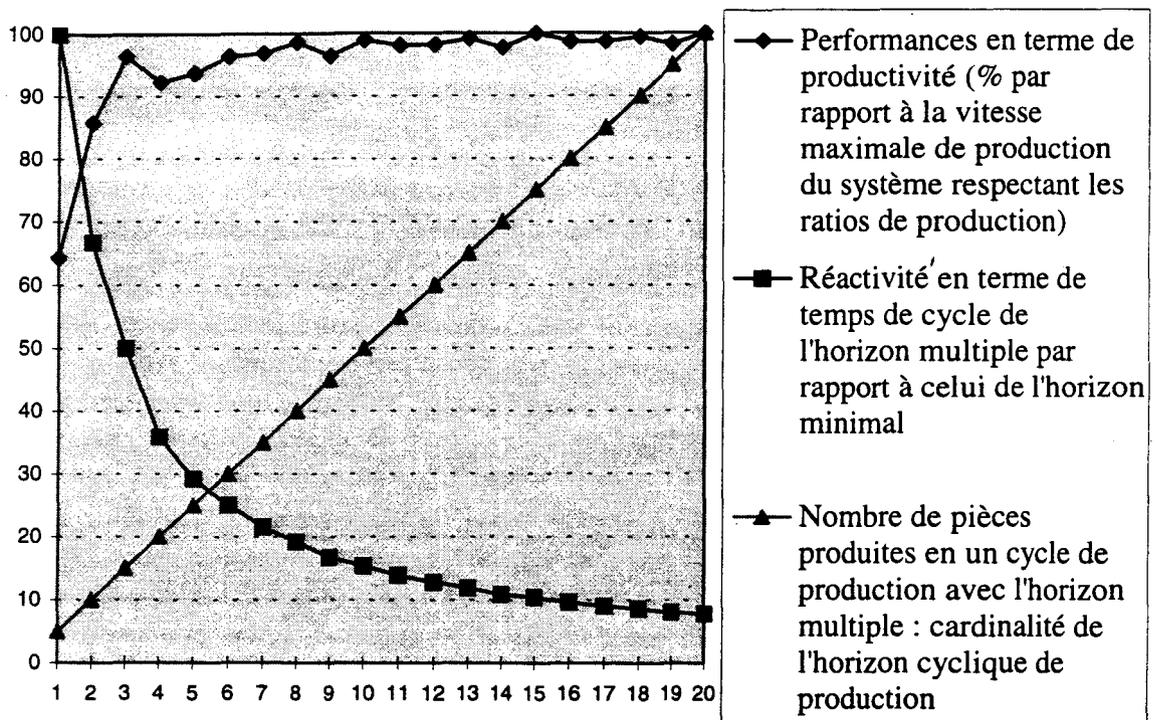


Figure I-23 : Comparaison des principaux critères en fonction du facteur multiplicatif de l'horizon de production considéré

En raison de la non monotonie de la relation entre le temps de cycle optimal et la taille de l'horizon de production, il est possible d'extraire certaines solutions meilleures que d'autres, c'est-à-dire celles pour qui cette relation devient monotone strictement croissante : $v \in \{1, 2, 3, 7, 8, 10, 13, 15\}$. Le choix du meilleur horizon est donc fortement restreint.

- *Choix de l'horizon cyclique de travail à partir duquel l'élaboration de la commande déterministe, prévisionnelle et répétitive sera effectuée*

Il ne reste plus alors qu'à reprendre les valeurs des différentes contraintes imposées au système, notamment les quantités de pièces à produire, le makespan estimé par l'étape de planification ainsi que les temps moyens entre deux pannes de machines (MTBF) pour connaître les durées moyennes des régimes permanents sans perturbation, et évaluer la solution offrant le meilleur compromis entre les différents critères qualitatifs et quantitatifs au vu de toutes ces données.

Ce compromis performance de productivité / horizon de production doit tenir compte de critères qualitatifs que nous avons associés au critère quantitatif « l'horizon de production », tels que la simplicité du calcul de la commande, le fonctionnement répétitif de la commande (nombre minimal de répétitions de cycles), la gestion des stocks, la réactivité relative de la commande. D'un autre côté, il faut garder des performances de productivité « raisonnables » et donc tenir compte de l'intervalle temporel de production dont nous disposons.

Ce choix étant réalisé, nous savons qu'il existe au moins une commande déterministe, cyclique et prévisionnelle respectant l'horizon de production et le temps de cycle optimal

associé. Il « ne reste plus alors qu'à » élaborer la (ou les) commande(s) qui minimise(ent) le dernier critère d'optimisation : le niveau maximal d'en-cours. Ce sera l'objet du Chapitre II.

I.2.4 Discussion

Nous sommes obligés de tenir compte de critères qualitatifs pour pouvoir effectuer un choix. Nous proposons maintenant d'évoquer l'idée d'introduire individuellement ces critères dans la formulation du problème.

Nous n'avons à ce stade de l'approche, aucune maîtrise a priori sur le choix des ratios de production. Dans la phase de planification fine, seule une contrainte de type $f_i \leq F_i$ a été prise en compte. Qu'en est-il pour E_1 où $\text{card}(E_1) = \sum f_i$? Nous avons également peu de maîtrise sur l'horizon de production qui sera pris en compte pour rechercher un ordonnancement. En effet nous savons qu'il est un « multiple » de cet horizon minimal E_1 de production qui doit respecter les ratios de production. De plus l'optimisation de flux calculée, puis le passage au discret, avec notamment les valeurs finies que peuvent prendre les ratios de routage, dépendent toujours des ratios de production. Avant même l'évaluation préliminaire des performances, l'horizon de production que nous allons retenir est presque implicitement fixé par les valeurs des ratios de production. Ne risquons-nous pas de tomber sur un exemple où la considération même de l'horizon minimal de production E_1 respectant les ratios de production soit incompatible avec le fonctionnement cyclique de la commande étant donné le nombre de produits à réaliser ? Cette analyse des performances ne servirait alors que de référence d'optimalité. En effet, pour pouvoir implanter une commande répétitive respectant ces performances de productivité, il faudrait considérer des productions de très grandes quantités et non plus les petites ou moyennes séries que nous supposons dans ce problème. Cependant les contraintes de pannes de machines, par exemple, peuvent nous interdire d'envisager de telles commandes.

Au final, le problème revient à la résolution d'une série de problèmes de programmation linéaire en nombres entiers afin d'évaluer et de comparer les performances puis de choisir entre les différents horizons discrets. A ce niveau de notre étude, nous posons ainsi la question préliminaire de savoir si la résolution du problème d'optimisation globale prenant en compte la quasi totalité des critères et contraintes ne peut être envisagée malgré sa taille.

I.3 Proposition d'une approche de planification fine prenant en compte la quasi totalité des critères d'optimisation (quantitatifs et qualitatifs)

Nous avons vu au paragraphe précédent §I.2 que l'approche développée dans [OHL 95a] avait a priori choisi l'approche de regroupement dynamique pour l'étape de planification fine. Mais nous avons remarqué aussi que le choix de ce type d'approche n'est pas pour autant la meilleure solution qui puisse exister. En effet il est dommageable d'utiliser pour évaluer la commande déterministe les ratios de production dont les valeurs sont issues d'un équilibrage a priori, et éventuellement faux, des charges. En effet, puisque le caractère discret n'a pas été intégré, les ratios de production trouvés au cours de la phase de planification fine n'optimisent pas toujours la productivité réelle du système flexible de production manufacturière. Il est d'ailleurs nécessaire de détailler la modélisation afin d'obtenir des résultats plus précis et d'introduire des approches de modélisation et d'évaluation de performances qui prennent en compte l'aspect discret du système.

Pour rester dans la logique de l'approche développée par [OHL 95a], il aurait été préférable de considérer des regroupements par familles où l'équilibrage des charges n'est qu'un critère secondaire. En effet, la première étape de cette approche consiste à évaluer les performances théoriques maximales que peut atteindre le système de production soumis à des contraintes de ratios de production fixés, c'est-à-dire les performances issues d'une analyse du flux. Malheureusement dans ce cas, il existe alors au niveau planification peu de recherche d'optimisation, et peu de maîtrise, des temps de production (makespan de la production à réaliser à court terme). Ce n'est pas alors en optimisant la production, en terme de productivité, au niveau de l'élaboration de la commande qu'il sera possible de récupérer des retards intrinsèques au choix des ratios de routages.

C'est pourquoi est apparue la nécessité de rechercher une nouvelle approche de planification fine permettant de prendre en compte très en amont dans l'analyse des performances les caractéristiques discrètes du système physique de production afin de déterminer les valeurs optimales des ratios (entiers : les f_i) qui optimisent la vitesse de production. Cela permet également de proposer une extension à l'approche développée dans [STE 91] aux systèmes de production en présence de flexibilités au niveau des gammes opératoires, extension qui est devenue indispensable pour élaborer la commande des ateliers flexibles que nous étudions. Nous en profitons également pour introduire les nouveaux critères d'optimisation introduits au paragraphe §I.1. Ces critères n'ont pas encore été abordés dans l'approche de K. Stecke.

Nous rappelons dans le premier paragraphe (§ I.3.1) les caractéristiques de la gestion de production afin de déterminer ce que les étapes antérieures à la planification fine apportent comme contraintes minimales à respecter. Puis nous présentons aux paragraphes §I.3.2 et §I.3.3 la nouvelle approche de planification fine.

Pour cela, il s'agit, dans un premier temps, d'intégrer la phase d'évaluation préliminaire des performances dans le problème de programmation de l'Equation I-1 (cf. I.2.1.1) afin

d'utiliser les flexibilités des gammes opératoires ⁽¹⁾ en vue d'une optimisation du makespan de la production à réaliser.

Dans un second temps, le caractère discret du système de production (notamment la répartition discrète de la charge d'une ressource multiple aux machines identiques qui la composent) doit lui aussi être intégré dans ce problème mathématique (Equation I-3).

Au final, le problème auquel nous sommes effectivement confrontés est un problème d'une complexité qui semble difficilement maîtrisable : problème de programmation multicritère et multilinéaire en nombres entiers. Cette première approche a cependant le mérite de formuler le problème général de détermination des regroupements de types de produits (classe de décision D_1) avec les ratios de production correspondants (classe de décision D_2) tout en recherchant le meilleur compromis possible entre les principaux critères d'optimisation qui ont pris place dans ce problème de planification fine. La minimisation de l'en-cours est reportée à la fin de l'élaboration de la commande pour ne pas gêner l'optimisation simultanée des autres critères. Le critère économique lié aux en-cours est considéré comme un facteur secondaire par rapport aux coûts financiers liés à la réalisation à temps (ou « juste à temps ») de la production (respect des délais de livraison). Il faut donc supposer qu'il existe suffisamment d'en-cours et de ressources de transport pour pouvoir atteindre les performances calculées par la planification. Il s'agira ensuite de trouver un ordonnancement qui respecte les contraintes déterminées par cette étape sur les commandes cycliques (i.e. l'horizon répétitif de travail et le temps de cycle optimal) tout en cherchant à minimiser le dernier critère restant : l'en-cours du système de production (Chapitre II).

I.3.1 Rappel sur la gestion de production

I.3.1.1 L'approche hiérarchisée de la gestion de production

« Afin d'une part de maîtriser la complexité des problèmes rencontrés et d'autre part de tenir compte des incertitudes, la gestion de production est généralement abordée suivant une approche scindée en différents niveaux hiérarchiques [HAR 92]. Dans une telle décomposition descendante, les horizons temporels deviennent de plus en plus courts et les données de plus en plus précises. Aussi, les données issues d'un niveau supérieur sont traitées comme des contraintes par le niveau inférieur. Il peut arriver que ces contraintes soient trop dures de sorte qu'un niveau ne puisse pas trouver de solution compatible. Dans ce cas il faut remonter dans la hiérarchie et relaxer les contraintes au niveau supérieur. Ceci conduit alors naturellement à des approches dans lesquelles la cohérence entre les niveaux consécutifs est assurée par des techniques itératives ⁽²⁾.

Une méthode de gestion de production répandue dans le milieu industriel et qui utilise les concepts mentionnés ci-dessus est MRP II (*Manufacturing Resource Planning*). Dans un environnement de ce type, le plus haut niveau est celui de la planification sur un horizon long, un an par exemple. Ce niveau tient compte des commandes fermes, des prévisions de ventes ainsi que des stocks existants et souhaités. Le résultat de cette étape est un *Plan*

¹ Tout au moins celles qui ont une influence directe sur les charges de travail des machines, c'est-à-dire les classes de décision D_{3b} et D_{3c} .

² Cf. [DAU 92], par exemple, pour une étude de cohérence entre les niveaux de planification et d'ordonnancement pour une fabrication de type atelier.

Directeur de Production (PDP) qui est ensuite validé par rapport aux ressources critiques. Pour établir ce plan, les nomenclatures des produits finis sont éclatées et les charges induites sur les ressources critiques sont calculées sur une période d'un mois par exemple. A ce stade des ajustements à long terme peuvent être entrepris pour équilibrer des variations saisonnières.

Ces ajustements peuvent concerner la demande, la capacité de production ou les deux à la fois. La demande est influençable à travers des actions commerciales, le prix des produits, ou la renégociation des dates de livraison. En revanche, l'ajustement de la capacité peut se faire par la sous-traitance, l'extension de la production ou une meilleure utilisation des ressources disponibles en travaillant en 3x8 par exemple. Cette problématique consistant à ajuster la capacité et la demande nécessite évidemment la prise en compte des niveaux de stocks. La tenue d'un stock à plus long terme peut également être envisagée bien que cette option soit généralement peu prisée.

La programmation se situe à un niveau inférieur à la planification. Elle est effectuée sur un horizon plus court (deux mois par exemple) et avec une période plus courte (une semaine par exemple). De la même manière comme au niveau supérieur, les nomenclatures des produits finis sont éclatées mais à ce niveau les charges induites sont calculées pour toutes les ressources du système. Là aussi, des ajustements peuvent être nécessaires, car des surcharges ponctuelles peuvent subsister, même si la charge moyenne, étalée sur le mois, est admissible ⁽¹⁾.

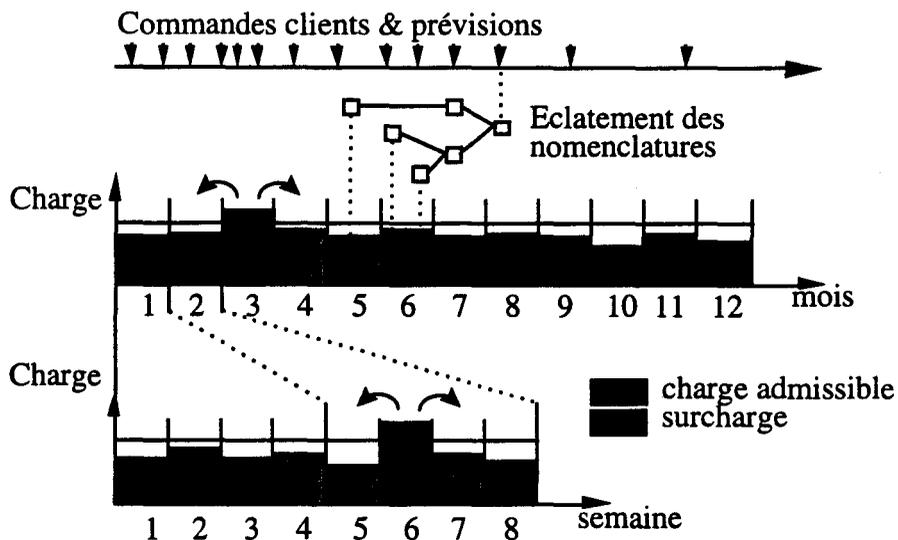


Figure I-24 : Planification à long terme et programmation

I.3.1.2 Les données issues du niveau supérieur à la planification fine

Le résultat de cette étape est un programme prévisionnel de production dans lequel les données sont figées sur un certain horizon. Ces données figées sont ensuite utilisées pour la génération des commandes d'approvisionnement et servent aussi de référence au niveau inférieur. Ce niveau inférieur peut être réalisé par la détermination soit de lots de

¹ Cf. [MAZ 89] pour une formulation en problème de programmation avec des variables binaires.

fabrication, soit de ratios de production. Mais nous avons retenu cette dernière approche, parce qu'elle répond mieux aux contraintes des ateliers flexibles. »

Nous supposons que les données issues du niveau programmation sont les quantités absolues (besoins nets en termes de MRP) des différents types de produits à fabriquer sur une période figée, par exemple d'une semaine.

I.3.2 Problème de l'analyse du regroupement de types de produits

I.3.2.1 Nouveaux paramètres :

Nous ne sommes maintenant plus contraints par des ratios de production fixé par une étape antérieure de gestion de production ; nous pouvons donc envisager ici **plusieurs productions successives avec des ratios de production différents** fixés par cette étape de planification afin d'utiliser au maximum les flexibilités du système. Il n'est pas raisonnable d'envisager des régimes pendant lesquels tous les types de produits seraient fabriqués. Nous verrons par la suite avec un exemple illustratif qu'il peut être parfois plus intéressant de travailler sur plusieurs régimes permanents plutôt qu'un seul. Il est également possible de favoriser certains regroupements de types de pièces, permettant ainsi d'améliorer de façon sensible la productivité du système et ainsi de minimiser le makespan de la production.

Nous ne travaillons plus sur des horizons a priori infinis pour atteindre les performances théoriques optimales des systèmes de production, c'est-à-dire des horizons cycliques qui doivent pour cela respecter à la fois les ratios de production, fixés au préalable, les ratios de routages, obtenus après la résolution d'un problème de programmation linéaire (analyse de flux) et l'équilibrage des charges entre les machines d'une même ressource multiple. Nous étudions **directement les performances des horizon discrets** sur lesquels nous sommes sûrs d'obtenir les commandes cycliques en un temps de calcul raisonnable. Nous éliminons d'office de notre espace de recherche les horizons de production de taille trop importante afin de respecter le fonctionnement cyclique de la future commande et la simplicité d'élaboration de la commande et conserver un stock de sécurité de taille raisonnable en amont de l'atelier, bref en raison des principaux critères qualitatifs que nous avons regroupés dans la précédente approche avec le critère de minimisation du facteur multiplicatif de l'horizon minimal. Nous justifierons au chapitre III cette simplification après le dénombrement de l'ensemble des solutions admissibles.

L'étape antérieure a fixé les **quantités des différents types de pièces à réaliser** sur un **intervalle temporel** donné, dont nous disposons pour réaliser la production. En plus de l'optimisation totale que nous envisageons ici ⁽¹⁾, il pourrait être intéressant de trouver des solutions non optimales mais proches de l'optimum que nous pourrions proposer au module de recouvrement, en cas de détection de défaillances par la surveillance, pour aider le module de gestion des modes de marche à gérer plus facilement les modes dégradés : élimination de la commande déterministe, suppression des solutions qui ne sont plus possibles à réaliser, et utilisation de solutions réalisables. Il faut tout de même rappeler que nous envisageons ici une commande prévisionnelle du système et que cette recherche d'ordonnancement se fait en général « off-line » étant donné les temps de calcul nécessaires

¹ c'est-à-dire l'utilisation de tous les indéterminismes du système afin d'élaborer une commande prévisionnelle cyclique et surtout déterministe (sans aucun degré de flexibilité) que nous cherchons à rendre optimal.

pour son élaboration. C'est pour cette raison que ce type de commande est peu robuste face à des défaillances machines puisque nous ne pouvons réagir en temps réel. Il faudrait en fait arrêter totalement la production pour permettre de calculer une nouvelle commande déterministe à partir d'un état connu du système. C'est la grande faiblesse de ce type d'approche face aux approches dites réactives qui peuvent s'accommoder de telles perturbations du système. C'est aussi la raison pour laquelle il est peut être intéressant d'envisager de développer en parallèle cette recherche de solutions quasi optimales, mais conservant certains degrés de liberté.

1.3.2.2 Nouveaux critères d'optimisation :

- **minimiser le makespan de la production** totale à réaliser à court terme : pour respecter au moins la période de production qui a été assignée à cette production par l'étape de planification. De plus l'optimisation du makespan permet de respecter plus facilement les horizons temporels pendant lesquels il n'y a pas de panne (ou peu de chances qu'il y en ait) (recherche d'une fenêtre temporelle correspondant à la période de MTTF de toutes les machines présentes dans l'atelier) et donc pendant lesquels la production en mode de fonctionnement normal peut et surtout doit avoir lieu. La marge de temps restante peut servir pour faire face à des perturbations (défaillances du système) non prévues, de la maintenance ou des commandes urgentes, ...
- **minimiser la taille des horizons cycliques** de production : pour simplifier l'élaboration de la commande cyclique, pour augmenter la réactivité temporelle de la commande, minimiser la taille des stocks de sécurité, garantir le fonctionnement cyclique des régimes permanents. Bref nous regroupons ici les principaux critères qualitatifs d'optimisation que nous avons considérés pour l'instant et que nous avons regroupés dans le critère qualitatif de minimisation du facteur multiplicatif de l'horizon minimal de production respectant les contraintes dans la méthode précédente de recherche d'horizon cyclique et discret de production. Il existe une certaine similitude entre les deux problèmes. Cependant nous retrouvons le critère qualitatif associé à un autre critère quantitatif d'optimisation. Nous ne retrouvons plus exclusivement ces critères groupés entre eux, puisque le problème que nous considérons ici est plus large. Il y a plus de paramètres différents dont l'optimisation peut être associée à ces critères qualitatifs (¹).
- **minimiser le nombre de régimes permanents** à mettre en œuvre pour limiter la durée de tous les régimes de configuration et le nombre et la durée des régimes transitoires pendant lesquels le système ne fonctionne pas à flux optimal.
- **maximiser la production de pièces pendant les régimes permanents**. Ce problème est directement lié à la recherche de minimisation de la durée des régimes transitoires. En effet si nous ne pouvons effectuer toute la production pendant les différents régimes permanents, le reste de la production devra être réalisée effectivement pendant ces phases de transition. Néanmoins nous ne pouvons pas forcer la fabrication de toutes les pièces au cours des régimes permanents sous

¹ A ce propos, pour le critère de simplification de l'élaboration, nous verrons par la suite qu'il est peut être plus intéressant de considérer un autre critère d'optimisation tel que la minimisation du nombre d'opérations à effectuer au cours d'un cycle de production. Dans ce cas, ce critère n'a plus le même rapport avec les autres critères qualitatifs d'optimisation, ce qui éclaire encore plus le premier regroupement obtenu lors de la première méthode présentée.

peine de supprimer certaines solutions qui permettraient d'obtenir un makespan intéressant. Nous pouvons tout de même envisager une certaine production au cours de ces régimes transitoires. Mais cela ne doit représenter qu'une fraction de la production totale (aussi bien en quantité qu'en temps de production que nous ne pouvons malheureusement pas encore évaluer à ce niveau).

- **minimiser le temps de cycle** pour chaque régime permanent. Ce n'est qu'un sous-problème de la minimisation du makespan. Ce critère revient exactement au même que celui de la méthode précédente. Il s'agit, à ratios de production fixés, de rechercher le temps de cycle optimal obtenu en équilibrant au mieux les charges des machines à l'aide des flexibilités de gammes. Nous avons ici élargi l'horizon sur lequel la production (ici à court terme) doit être réalisée.
- **maximiser le nombre de répétitions de chaque commande cyclique** au cours d'un régime permanent : pour garantir le fonctionnement cyclique des régimes permanents et permettre un contrôle de la production plus fréquent.
- envisager la **gestion du parc des outils**, cf. [STE 91], **et les capacités finies des magasins d'outils des machines**. Ce point correspond plus à une contrainte qu'à un problème d'optimisation. En effet la prise en compte de l'utilisation d'outils de types différents, nécessaires à la réalisation des différentes opérations possibles présentes lors d'un régime permanent de production donné, ainsi que des capacités finies des magasins d'outils de chaque machine empêche le regroupement de certains types de produits pour une production simultanée, s'ils utilisent des types différents d'outils qui entraîneraient le dépassement de la capacité des magasins d'outils des machines.

1.3.2.3 Notations

Soient

$T(I)$ la quantité de pièces de type i à réaliser, donnée fournie par l'étape supérieure à la planification fine de la gestion de production, $i \in \{1, \dots, I_{\max}\}$.

MP^* temps nécessaire pour réaliser la production demandée (makespan).

RP_{\max} le **nombre de régimes permanents** à considérer pour réaliser la production. Nous limitons notre recherche à un nombre fini de régimes permanents, borné par I_{\max} le nombre de types différents de pièces à fabriquer. Au pire, nous pouvons envisager la fabrication d'un seul type de pièce par régime permanent considéré. C'est ce qui représente, pour nous, le cas limite. Nous privilégions les regroupements de types de pièces selon différents critères : optimisation des magasins d'outils, optimisation du makespan. Mais nous devons envisager tout de même le cas de production mono-produit, si elle permet d'optimiser également ces critères (très grande flexibilité des gammes opératoires).

RP_p le p -ème régime permanent, $p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}$. Il est caractérisé par :

$E(RP_p)$ l'horizon cyclique discret de travail ou ensemble de produits à réaliser au cours d'un cycle de fabrication. Il est lui même caractérisé par :

$I(p)$ le nombre de pièces de type i à réaliser, $i \in \{1, \dots, I_{\max}\}$.

N_{\max} nombre maximum de pièces à réaliser en un cycle de fabrication

$N_{i-\max}$ ou $N_{i-\max}(p)$ nombre maximum de pièces de type i à produire sur n'importe quel régime permanent ou sur le p -ème régime permanent

$E(RP_p)$ peut donc se mettre sous la forme :

$$E(RP_p) = \{I(p).I, \forall i \in \{1, \dots, I_{\max}\}\}$$

$CT(RP_p)$ Temps de cycle optimal associé à cet horizon $E(RP_p)$.

$X(p)$ nombre de répétitions de l'horizon cyclique $E(RP_p)$ pendant le régime permanent RP_p

NC_{\min} nombre minimum de répétitions de cycles pour considérer un fonctionnement réel cyclique de n'importe quel régime permanent

$r_i(p)$ ratio de production de la pièce de type i dans le p -ème régime permanent

$\alpha_{ijk}(p)$ ratio de routage associé à la k -ème branche du j -ème conflit du i -ème type de pièces du p -ème régime permanent. Nous préférons utiliser maintenant la notation ratio de routage entier : $I_{jk}(p)$ qui représente mieux le travail sur des horizons discrets et qui est égal aussi au taux de visite de la branche associée normalisé sur la réalisation d'un cycle de fabrication, cf. Figure I-25.

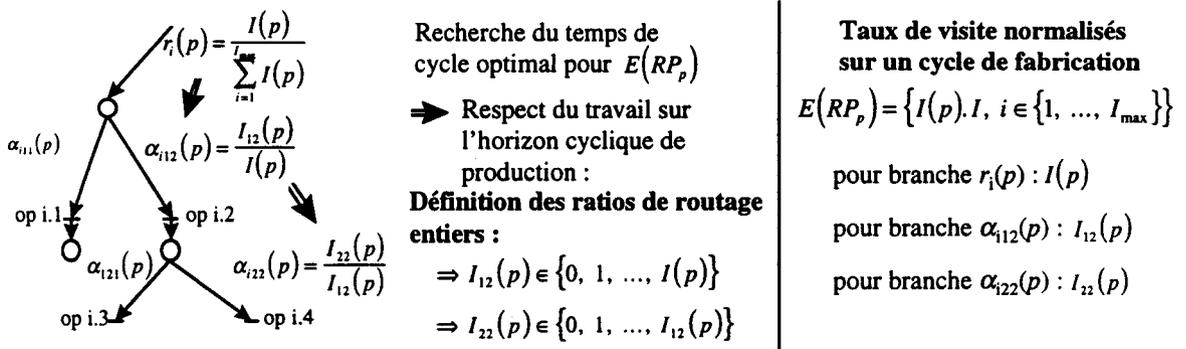


Figure I-25 : Définitions des ratios de routage entiers et notation des taux de visite normalisés sur la réalisation du cycle de fabrication

$O_{t-r}(p)$ nombre d'opérations de durée t affectées à la ressource multiple r , $\forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}$, $\forall r \in \{1, \dots, R\}$, $\forall t$. Associées à ce paramètre, nous définissons pour la prise en compte de la répartition discrète des charges de travail des ressources multiples sur les machines identiques qui les composent :

$O_{t-r,m}(p)$ nombre d'opérations de durée t affectées à la m -ème machine de la r -ème ressource, $m \in \{1, \dots, M_r\}$

$Z_{r-m}(p)$ charge de travail affectée à la m -ème machine de la r -ème ressource du p -ème régime permanent. Nous pouvons la définir ainsi : $Z_{r-m}(p) = \sum_{\forall t} t \cdot O_{t-r,m}(p)$. C'est la machine la plus chargée pour un régime permanent donné qui est la machine menante qui va fixer la vitesse de production du système. A flux maximum de production, cette machine fonctionnera à saturation.

Pour la gestion des stocks d'outil, l'usinage d'un produit de type i peut requérir ou non un certain outil selon la flexibilité de gammes opératoires choisies. Ce n'est donc plus au niveau des gammes mais au niveau des opérations effectivement retenues que nous connaissons les outils nécessaires aux machines pour leur réalisation. De plus avec la répartition des charges sur les machines identiques des ressources multiples, seules les machines auxquelles sont affectées les opérations nécessitant un outil spécifique doivent posséder dans leur magasin cet outil, contrairement à K. Stecke qui suppose que toutes les machines d'un même type participe à la fabrication de la pièce et nécessitent donc de posséder cet outil en magasin. Par contre, pour les autres machines, ce n'est pas nécessaire. Ainsi nous limitons les flexibilités au niveau ordonnancement de la commande, puisque toutes les opérations seront presque affectées à une machine spécifique. De plus, à partir de ce moment, les machines ne sont plus identiques puisqu'elles n'ont pas les mêmes stocks d'outils et ne peuvent donc plus réaliser les mêmes opérations. Une autre possibilité serait d'affecter d'office les mêmes outils aux machines identiques pour conserver ce degré de liberté de répartition des charges sur les machines identiques pour une étape ultérieure ou pour pallier une défaillance temporaire d'une des machines. Etant donné les capacités limitées des magasins d'outils, il ne sera pas possible de considérer un grand nombre d'opérations de types différents sur les ressources multiples.

C nombre d'outils

e_{cr} nombre d'emplacements pour un outil de type c sur une machine de type r

e_r nombre d'emplacements d'un magasin d'outils d'une machine de type r

$v_{ijkcr} = 1$, si l'usinage d'une opération de la k -ème branche du j -ème conflit des gammes de produits de type i requiert sur une machine de la ressource r un outil de type c ,

$= 0$ sinon,

$$\begin{aligned} b_{ijk}(p) &= 1, \text{ si } I_{jk}(p) \neq 0, b_{ijk}(p) \text{ indique pour le régime permanent considéré } RP_p \\ &\text{ si au moins une séquence d'opérations de la branche associée à ce ratio} \\ &\text{ entier de routage } I_{jk}(p) \text{ a été retenue} \\ &= 0, \text{ sinon} \\ y_{cr}(p) &= 1, \text{ si l'outil de type } c \text{ est chargé sur les machines de la ressource } r, \\ &= 0, \text{ sinon} \end{aligned}$$

I.3.3 Formulation du problème

I.3.3.1 Modélisation

Nous utilisons le même modèle avec l'outil de modélisation Réseau de Petri (FRT-net) que celui développé dans l'approche précédente. Nous modélisons aussi pour un régime permanent toutes les gammes opératoires des différents types de pièces susceptibles de se trouver simultanément dans l'atelier avec leurs flexibilités. Les ratios de production ne sont plus fixés a priori mais considérés comme des variables.

I.3.3.2 Principe

Comme pour la recherche des temps de cycle optimaux des horizons discrets, nous réutilisons le problème de programmation linéaire obtenu à partir de l'analyse des charges des différentes ressources. Dans un premier temps, nous devons dupliquer ce problème autant de fois que nous envisageons de régimes permanents différents. Dans un second temps, pour chaque RP_p , nous le modifions pour l'adapter à notre problème, c'est-à-dire nous ne considérons plus ici le temps moyen entre deux tirs de la transition commune de rebouclage mais le temps moyen entre $card(E(RP_p))$ tirs de cette même transition, représentant ainsi le temps de cycle pour réaliser la production discrète à effectuer au cours d'un cycle ($E(RP_p)$). De plus nous ne calculons plus les charges au niveau des ressources de transformation mais au niveau des machines, i.e. nous prenons en compte immédiatement la répartition discrète de la charge de travail d'une ressource multiple sur les machines identiques qui la composent. Les résultats que nous obtenons, c'est-à-dire les différents horizons de production associés à leur temps de cycle optimal, ne seront pas modifiés ultérieurement puisqu'ils répondent aux critères d'optimisation que nous avons fixés pour ce problème. De plus considérer tout de suite le caractère discret du problème nous permet d'affirmer qu'il existe au moins une commande déterministe cyclique représentant un ordonnancement des opérations à réaliser pour fabriquer la production $E(RP_p)$ tout en respectant le temps de cycle optimal fixé $CT(RP_p)$. Il ne reste plus qu'à déterminer tous les ordonnancements possibles et ne conserver que celui (ou ceux) qui optimise(ent) l'en-cours, dernier critère d'optimisation.

1.3.3.3 Formulation du problème de programmation multicritère bilinéaire en nombres entiers

- *Fonctions de coût : les critères d'optimisation et contraintes associées*

- **Minimisation du makespan de la production** : nous ne tenons compte ici que de la production en régime permanent. Les temps de reconfigurations de machines et les durées des périodes de régimes transitoires ne sont pas encore pris en compte parce que nous n'avons pas évalué, à ce jour, l'influence des régimes transitoires par rapport aux régimes permanents qui ne sont caractérisés pour le moment que par leur horizon cyclique et discret de production ainsi que le temps de cycle optimal associé. A ce stade des recherches menées au sein du L.A.I.L. dans le cadre du projet CASPAIM, nous ne commençons à saisir l'influence en terme de durée de ces régimes transitoires qu'en présence d'une commande cyclique complètement établie d'un régime permanent. D'où l'expression de ce critère :

minimiser MP^*

avec $MP^* = \sum_{p=1}^{RP_{\max}} X(p).CT(RP_p)$ + estimation d'une borne supérieure du temps de production des pièces restant à réaliser en régimes transitoires

- **Limitation et minimisation du nombre de régimes permanents.** En effet les régimes transitoires sont créés par la nécessité, pour chaque régime permanent, de passer par une phase intermédiaire de mise en place du régime et une phase d'arrêt. Nous ne maîtrisons pas encore suffisamment les durées minimales des régimes transitoires et les temps de reconfiguration des machines en fonction des régimes permanents. C'est pourquoi nous cherchons à réduire leur influence en minimisant le nombre des différents régimes permanents. Nous limitons le nombre de régimes permanents à I_{\max} (limitation de l'espace de recherche). A cette valeur maximale correspond la solution qui consiste à produire par régime permanent considéré un seul type de pièces. Nous supposons que cela représente le cas limite.

minimiser RP_{\max}

avec $RP_{\max} \in \mathbb{N}$ et $RP_{\max} \leq I_{\max}$

- **Limitation et minimisation de la taille des horizons cycliques.** Il est également possible de favoriser le regroupement de produits ou au contraire d'autoriser une fabrication mono-produit dans l'atelier flexible grâce aux $N_{I-\max}(p)$. Nous limitons volontairement nos recherches à un nombre limité de valeurs parce que, par expérience, nous savons qu'il n'est pas nécessaire de pousser plus avant la recherche. En effet pour les horizons discrets de trop grande taille, il n'est pas possible de calculer rapidement l'ordonnancement optimal. De plus la commande ainsi obtenue n'est pas facilement réalisable.

$$\forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}, \text{ minimiser } \text{card}(E(RP_p)) = \sum_{i=1}^{I_{\max}} I(p)$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}, \forall i \in \{1, \dots, I_{\max}\}, I(p) \in \mathbb{N} \\ \text{et } \sum_{i=1}^{I_{\max}} I(p) \leq N_{\max} (= 10) \\ \text{et } I(p) \leq N_{I-\max}(p) \text{ ou } N_{I-\min} \end{array} \right.$$

- **Maximisation de la production au cours des régimes permanents** avec respect (relatif) de la production imposée : la production ne doit pas être obligatoirement entièrement effectuée durant les régimes permanents. Les régimes transitoires peuvent être entre autres utilisés pour terminer et ajuster les productions non réalisables pendant les régimes permanents. Mais il faut maximiser la production pendant les régimes permanents. Nous proposons pour l'exemple 99,5% de la production totale effectuée durant ces régimes permanents. Nous limitons ainsi le plus possible la taille des régimes transitoires en évitant le plus possible la production de gammes opératoires entières durant ces transitoires. Ajoutons de plus que nous pourrons contrôler plus facilement la production durant les régimes permanents que pendant les régimes transitoires qui ne sont qu'une conséquence directe du choix et de l'ordonnancement des différents régimes permanents.

$$\text{maximiser } \sum_{p=1}^{RP_{\max}} X(p) \cdot \left(\sum_{i=1}^{I_{\max}} I(p) \right)$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}, X(p) \in \mathbb{N} \\ \sum_{p=1}^{RP_{\max}} X(p) \cdot \left(\sum_{i=1}^{I_{\max}} I(p) \right) \geq \left\lceil \frac{99,5}{100} \cdot \left(\sum_{i=1}^{I_{\max}} T(I) \right) \right\rceil \\ \sum_{p=1}^{RP_{\max}} X(p) \cdot I(p) \leq T(I), \forall i \in \{1, \dots, I_{\max}\} \end{array} \right.$$

- **Maximisation du nombre de répétitions de chaque commande cyclique** en vue du respect du fonctionnement répétitif de ces régimes permanents. Nous limitons aussi notre espace de recherche en fixant une borne inférieure qui indique le nombre minimum de répétitions de chaque commande qu'il faut considérer pour supposer un fonctionnement effectivement cyclique de la commande du régime permanent.

$$\forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}, \text{ maximiser } X(p)$$

$$\text{avec } \forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}, X(p) \neq 0 \text{ et } X(p) \geq NC_{\min} (= 10)$$

- **Minimisation du temps de cycle du système pour chaque régime permanent** ou définition du temps de cycle du système de production comme celui de la machine la plus lente : nous cherchons la saturation de la machine la plus critique afin d'atteindre les performances optimales du système. Ce système d'inéquations découle directement des inéquations établies pendant l'analyse de flux. Le système est supposé fonctionner à débit maximal.

$$\forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}, \text{ minimiser } CT(RP_p)$$

$$\text{avec } \forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}, \forall r \in \{1, \dots, R\}, \forall m \in \{1, \dots, M_r\} CT(RP_p) \geq Z_{r-m}(p)$$

- *Prise en compte du caractère discret du problème*
 - **Respect par les ratios entiers de routage des horizons discrets de production** de chaque régime permanent RP_p , $\forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}$, caractérisé par les ratios entiers de production, cf. définition des ratios entiers de routage $I_{jk}(p)$.
 - **Respect des répartitions discrètes et totales de charge** sur les machines identiques qui composent une ressource multiple :

$$\forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}, \forall r \in \{1, \dots, R\}, \forall t, \sum_{m=1}^{M_r} O_{t-r,m}(p) = O_{t-r}(p)$$

avec $O_{t-r}(p)$ et $O_{t-r,m}(p)$, le nombre d'opérations de durée t affectées respectivement à la r -ème ressource et à la m -ème machine de la ressource r , pour un cycle du régime permanent RP_p .

- *Prise en compte des capacités finies des magasins d'outils des machines*
 - **Chargement des outils** correspondants aux opérations réellement effectuées sur les machines pendant le régime permanent RP_p :

$$\forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}, \forall r \in \{1, \dots, R\}, \forall c \in \{1, \dots, C\},$$

$$y_{cr}(p) = \max_{\forall i, \forall j, \forall k} (v_{ijkcr} \cdot b_{ijk}(p))$$

- **Respect des capacités finies des magasins d'outils des machines** de transformation :

$$\forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}, \forall r \in \{1, \dots, R\},$$

$$e_r \geq \sum_{c=1}^C e_{cr} \cdot y_{cr}(p)$$

1.3.3.4 Application à un exemple illustratif : l'exemple de [OHL 95a]

Afin de simplifier le problème étudié, nous ne conservons plus, à titre d'illustration, qu'un seul critère d'optimisation : la minimisation de la durée totale de production (makespan). Pour les autres critères d'optimisation nous n'allons conserver que les contraintes que nous venons d'introduire en rapport avec ceux-ci pour conserver de bonnes solutions respectant les hypothèses que nous avons fixées et limiter l'espace de recherche. Nous nous focalisons volontairement sur les problèmes de durées de réalisation d'une production afin de souligner les gains que peut apporter la considération de plusieurs régimes permanents par rapport à la conduite d'une production avec un seul régime permanent.

Nous reprenons l'exemple de système de production développé dans les travaux de la thèse [OHL 95a] avec les trois types différents de pièces à fabriquer : A, B et C, cf. Figure I-13. Nous ne sommes plus contraints au niveau des régimes permanents à des ratios de production fixés. Cependant afin de pouvoir effectuer une comparaison avec la précédente méthode, nous avons décidé de garder des quantités de pièces réellement à produire qui respectent les anciens ratios de production. Ceci permet de calculer facilement le makespan pour une commande établie selon l'approche d'H. Ohl.

La production à réaliser pour les trois types de pièces est la suivante :

$$T(A) = T(C) = 400 \text{ et } T(B) = 200.$$

Pour permettre tous les regroupements possibles entre les différents types de pièces, nous supposons que la gestion des outils est simplifiée et qu'ils sont a priori toujours disponibles.

Le problème que nous cherchons à résoudre peut donc se formuler ainsi :

minimiser MP^*

avec $MP^* = \sum_{p=1}^{RP_{\max}} X(p) \cdot CT(RP_p)$ estimation d'une borne supérieure du temps de production des pièces restant à réaliser en régimes transitoires

- **Limitation du nombre de régimes permanents :**

$$RP_{\max} \in IN \text{ et } RP_{\max} \leq I_{\max} = 3$$

- **Limitation de la taille des horizons cycliques :**

$$\forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}, \forall i \in \{1, \dots, I_{\max}\}, I(p) \in IN$$

$$\text{et } \sum_{i=1}^{I_{\max}} I(p) \leq N_{\max} = 10$$

$$\text{et } I(p) \leq N_{I-\max} = 10$$

- **Respect d'un minimum de la production au cours des régimes permanents :**

$$\forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}, X(p) \in IN$$

$$\sum_{p=1}^{RP_{\max}} X(p) \cdot \left(\sum_{i=1}^{I_{\max}} I(p) \right) \geq \left\lceil \frac{99,5}{100} \cdot \left(\sum_{i=1}^{I_{\max}} T(I) \right) \right\rceil = \lceil 0,995 \cdot (400 + 200 + 400) \rceil = 995$$

$$\sum_{p=1}^{RP_{\max}} X(p) \cdot A(p) \leq T(A) = 400$$

$$\sum_{p=1}^{RP_{\max}} X(p) \cdot B(p) \leq T(B) = 200$$

$$\sum_{p=1}^{RP_{\max}} X(p) \cdot C(p) \leq T(C) = 400$$

- **Respect du fonctionnement répétitif des régimes permanents :**

$$\forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}, X(p) \neq 0 \text{ et } X(p) \geq NC_{\min} = 10$$

- **Minimisation du temps de cycle du système pour chaque régime permanent**

$$\forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}, \text{ minimiser } CT(RP_p)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } R_1 : CT(RP_p) \geq Z_1(p) = 18 * A_{11}(p) \\ \text{pour } R_2 : CT(RP_p) \geq Z_2(p) = 10 * B_{11}(p) + 12 * A_{12}(p) \\ \text{pour } R_3 : M_{3.1} : CT(RP_p) \geq Z_{3.1}(p) = 14 * O_{14-3.1}(p) \\ \quad \quad \quad M_{3.2} : CT(RP_p) \geq Z_{3.2}(p) = 14 * O_{14-3.2}(p) \\ \text{pour } R_4 : CT(RP_p) \geq Z_4(p) = 5 * C(p) + 20 * B_{12}(p) \\ \text{pour } R_5 : CT(RP_p) \geq Z_5(p) = 32 * B_{22}(p) \\ \text{pour } R_6 : CT(RP_p) \geq Z_6(p) = 4 * C(p) \end{array} \right.$$

- *Prise en compte du caractère discret du problème*
- **Respect par les ratios entiers de routage des horizons discrets de production de chaque régime permanent :**

$$\forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}, (A_{11}(p), A_{12}(p), B_{11}(p), B_{12}(p), B_{21}(p), B_{22}(p)) \in IN^6$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11}(p) + A_{12}(p) = A(p) \\ B_{11}(p) + B_{12}(p) = B(p) \\ B_{21}(p) + B_{22}(p) = B(p) \end{array} \right.$$

- **Respect des répartitions discrètes et totales de charge sur les machines identiques, $M_{3.1}$ et $M_{3.2}$, qui composent la seule ressource multiple R_3 :**

$$\forall p \in \{1, \dots, RP_{\max}\}, \exists (O_{14-3.1}, O_{14-3.2}) \in IN^2 \text{ tel que}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Répartition discrète de la charge de travail de la ressource multiple } R_3, \text{ composée} \\ \text{exclusivement d'opérations de durée 14 u.t., provenant des branches de conflit} \\ \text{associées aux routages entiers } A_{11}, A_{12} \text{ et } B_{21}, \text{ sur les machines identiques :} \\ O_{14.3} : O_{14-3.1} + O_{14-3.2} = A_{11}(p) + A_{12}(p) + B_{21}(p) = A(p) + B(p) \end{array} \right.$$

Il est facile de trouver de nouvelles contraintes afin de limiter l'espace de recherche sans pour autant supprimer des classes de solution.

En effet nous savons qu'au final nous devons respecter plus ou moins les ratios de production en réunissant les productions des différents régimes permanents. Donc soit nous

ne gardons qu'un seul régime permanent et nous respectons immédiatement les ratios de production, soit nous considérons plusieurs régimes et nous devons alors avoir :

$$\forall i \in \{1, \dots, I_{\max}\}, \exists (p, p') \in \{1, \dots, RP_{\max}\}^2 \text{ tel que : } \frac{I(p)}{\sum_{j=1}^{I_{\max}} J(p)} \leq \frac{T(I)}{\sum_{j=1}^{I_{\max}} T(I)} \leq \frac{I(p')}{\sum_{j=1}^{I_{\max}} J(p')}.$$

Nous pouvons aussi trouver des contraintes sur la répartition discrète des charges de travail sur les machines identiques afin de supprimer quelques solutions équivalentes (seul l'ordre entre les différents régimes permanents change).

Il est possible de trouver d'autres contraintes dans le but de limiter les temps de calcul. Néanmoins cela n'empêche pas l'explosion combinatoire inhérente à ce type de problème. Nous pouvons cependant améliorer quelque peu les temps de calcul. Ces contraintes sont issues du bon sens, en général. Il faut donc les formuler explicitement afin de limiter l'espace de recherche. Il faut toutefois éviter de saturer le problème par de trop nombreuses contraintes redondantes afin d'éviter les saturations possibles de mémoire.

Puisque nous limitons nos recherches à des commandes répétitives caractérisées par une **taille limitée de l'horizon cyclique de production** : $\sum_{i=1}^{I_{\max}} I(p) \leq N_{\max} = 10$, nous reprenons

les mêmes contraintes au niveau de la recherche d'une seule commande cyclique pour réaliser la production, c'est-à-dire au niveau de la recherche du facteur multiplicatif de l'horizon minimal respectant les ratios de production imposés. Ainsi d'après l'ancienne méthode, nous avons comme solution optimale la commande cyclique avec un horizon $E_2 = \{4A, 2B, 4C\}$, un temps de cycle optimal $C_2 = 42$ u.t., cf. Tableau I-1, soit pour une production totale de pièces :

$$T(A) = T(C) = 400 \text{ et } T(B) = 200,$$

$$\text{un makespan égal à } MP_{\substack{\text{ancienne} \\ \text{méthode}}} = X(1).C_2 = 100 \cdot 42 = 4200 \text{ u.t.}$$

I.3.4 Résolutions

I.3.4.1 Complexité

En général, le problème que nous obtenons est d'une complexité telle qu'il est impossible de chercher la solution optimale, qui plus est si nous considérons plusieurs critères d'optimisation, qui sont pour certains contradictoires, conduisant de fait à une optimisation multicritère. Le seul moyen envisageable est donc de recourir à des heuristiques.

De plus, pour le problème spécifique de la minimisation du makespan, nous ne connaissons pas a priori la valeur optimale de ce paramètre. C'est pourquoi nous avons décidé de calculer quelques références théoriques. C'est le cas de la vitesse de production obtenue d'après une analyse de flux. Les valeurs de référence, souvent non atteignables, permettent de juger de la qualité d'une heuristique.

1.3.4.2 Développement d'une heuristique

Nous calculons ici quelques références de comparaison. Nous n'avons malheureusement aucun moyen d'approcher a priori la valeur optimale du makespan. Ces références sont issues de productions particulières.

- *Première référence* : **Production d'un seul type de pièces à la fois dans le système (P^1)** : un régime permanent par type de pièces à produire :

La solution triviale consiste à prendre comme horizon de travail le minimum de pièces possibles. La production se décompose ainsi : $400 * (E(RP_1) = \{A\})$ puis $200 * (E(RP_2) = \{B\})$ et $400 * (E(RP_3) = \{C\})$. Nous n'avons pas ici à étudier un simple problème de flow-shop ordinaire. En effet dans le système qui nous intéresse, nous sommes confrontés à des flexibilités au niveau de la gamme opératoire avant l'élaboration de la commande. Il est tout à fait possible qu'une même ressource soit utilisée pour deux opérations différentes. Pour ce type de production, trois cas sont à envisager : soit il ne reste aucune flexibilité (affectation réglée), soit il subsiste une flexibilité résiduelle (conflits d'affectation / produit correspondant) soit il existe une totale flexibilité (cas théorique : machines universelles).

Les avantages d'une telle production sont nombreuses :

- ♦ simplicité de l'élaboration de la commande,
- ♦ peu de problèmes au niveau gestion des stocks des magasins d'outils des machines (pas de contraintes sur les regroupements).

Cependant les inconvénients auxquels nous devons faire face sont plus nombreux et plus importants.

En effet, en choisissant ce type de production, nous atteignons ici la borne supérieure que nous nous étions fixés pour le nombre de régimes permanents différents en prenant comme valeur le nombre de types de pièces à réaliser. Nous ne limitons pas le nombre de régimes transitoires et nous risquons d'avoir un temps de production hors régime permanent assez important même si aucune fabrication de pièces n'est a priori prévue en régimes transitoires : en effet la réalisation de toute la production est possible en régimes permanents.

Le fait de ne produire qu'un seul type de pièces à la fois a d'importantes conséquences sur la gestion des stocks et crée des contraintes assez fortes sur la production amont et aval de cet atelier. Il devient presque nécessaire en amont et forcément en aval de produire de la même façon. Ce type de production peut être parfois incompatible avec la production en amont ou en aval : problème de la demande dépendante : si un atelier en aval doit assembler des pièces de type A et B, il faut soit utiliser des stocks, soit produire simultanément (il est possible d'introduire de telles contraintes dans le système).

En général les performances en terme de productivité sont mauvaises. En effet dans l'exemple illustratif que nous étudions ici, nous considérons l'horizon optimal de production ($card(E(RP_p)) = 1, \forall p \in \{1, 2, 3\}$). De ce fait, nous ne profitons plus des flexibilités de gammes opératoires et de la répartition possible des charges de travail sur les machines. En considérant des horizons de production plus importants, il est possible

d'améliorer de manière significative la productivité de l'atelier flexible en utilisant la production en parallèle des machines tout en conservant la production d'un seul type de pièces. Cependant dans les problèmes rencontrés en production, nous ne considérons pas en général un grand nombre de flexibilités par types de pièces à produire et les performances en terme de productivité restent relativement faibles. Il est toutefois possible d'envisager des productions avec un seul type de pièces si nous avons à notre disposition de nombreuses flexibilités au niveau des gammes opératoires d'un type de pièces, comme dans l'exemple développé dans [MAN 96].

Dans tous les cas, ce type de production particulière nous permet de mettre en évidence des références de vitesse de production permettant de comparer les vitesses de production de différents horizons cycliques.

- ◆ Définition des **vitesse de production de références pour les régimes permanents** pour chaque type de pièces : soient

$$CT_{\max}(A) = CT(RP_1 | E(RP_1) = \{A\}) = 14,$$

$$CT_{\max}(B) = CT(RP_2 | E(RP_2) = \{B\}) = 14$$

et $CT_{\max}(C) = CT(RP_3 | E(RP_3) = \{C\}) = 5.$

Il devient alors possible de comparer les vitesses relatives de production de différents horizons cycliques de production en références aux performances obtenues avec ces horizons particuliers.

- ◆ Définition du makespan associé à cette production unitaire :

$$MP_1(\text{production}) = \sum_{\forall i} T(i) * CT_{\max}(i) = T(A) * CT_{\max}(A) + T(B) * CT_{\max}(B) + T(C) * CT_{\max}(C)$$

- ◆ *Définition :*

Pour un horizon discret fixe de production $E(RP_p)$, nous pouvons calculer facilement le meilleur temps de cycle $CT(RP_p)$ que le système de production peut atteindre en respectant cet horizon (problème simple de programmation linéaire en nombres entiers). Nous pouvons ainsi définir la notion de **vitesse brute de production d'un regroupement de produits** $E(RP_p)$ par rapport à cette première référence de vitesse de production. La comparaison avec les autres regroupements devient alors possible.

Afin de comparer la vitesse de production de cet horizon avec ce premier type de production, nous ramenons cette dernière production à la réalisation de l'horizon cyclique de travail associé au régime permanent étudié ici. Nous définissons ainsi :

$$V_{brute}(E(RP_p)) = \frac{CT(RP_p)}{\sum_{i=1}^{I_{max}} I(p) * CT_{max}(I)}$$

Nous sommes sûrs alors que $V_{brute}(E(RP_p)) \leq 1$.

- ◆ Définition de la **borne supérieure pour la durée de la production hors régime permanent** des pièces restant à fabriquer pour réaliser la production demandée :

$$\begin{array}{l} \text{Borne supérieure de la durée de la production} \\ \text{hors régime permanent des pièces pour réaliser} \\ \text{la production requise} \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} TP_{max}(A) \cdot \left(T(A) - \sum_{p=1}^{RP_{max}} A(p) \right) + \\ TP_{max}(B) \cdot \left(T(B) - \sum_{p=1}^{RP_{max}} B(p) \right) + \\ TP_{max}(C) \cdot \left(T(C) - \sum_{p=1}^{RP_{max}} C(p) \right) \end{array} \right.$$

avec $TP_{max}(I)$ le temps nécessaire pour réaliser une (et une seule) pièce de type i , en supposant qu'il n'y a pas de conflit d'accès à une ressource partagée, et que la pièce est produite seule dans l'atelier et avec une seule ressource de transport (palette ou en-cours).

Nous obtenons ainsi $TP_{max}(A) = 26$, $TP_{max}(B) = 24$ et $TP_{max}(C) = 9$ u.t.

- *Deuxième référence* : l'**approche analyse de flux** (approche [OHL 95a])

Nous recherchons le flux maximal (ou du temps de cycle minimal) pour une production respectant les ratios de production (production P^2 caractérisée par son horizon cyclique de production $E^2 = \{T(A)*A, T(B)*B, T(C)*C\}$) : ce qui revient à chercher un seul régime permanent et un unique ordonnancement où tous les types de pièces sont fabriqués en même temps. Les contraintes de capacités limitées des magasins d'outils des machines peuvent parfois empêcher une telle production. Les ratios de production sont donnés par :

- ◆ De manière générale : $r_i = \frac{T(I)}{\sum_{\forall j} T(J)}$.

- ◆ Pour l'exemple illustratif, nous retrouvons bien les ratios imposés pour la méthode précédente : $r_A = r_C = \frac{400}{1000} = 0,4$ et $r_B = \frac{200}{1000} = 0,2$.

Le problème obtenu revient exactement à celui de [OHL 95a] : problème classique de programmation linéaire avec des ratios de routage de type réel (et non plus recherche sur un ensemble fini de valeurs) typiquement résolu à l'aide de la méthode du simplexe. Seulement pour [OHL 95a], la vitesse optimale de production obtenue (temps de cycle C^*) est la référence que nous cherchons à atteindre en considérant des horizons multiples de l'horizon minimal E_1 respectant les ratios de production fixés (r_A, r_B, r_C).

Pour notre approche, nous cherchons dans un premier temps le makespan théorique associé à ce type de production :

$$MP_2(\text{production}) = C^* \cdot (T(A) + T(B) + T(C)).$$

Ce temps n'est donné a priori qu'à titre indicatif, puisque comme nous ne sommes pas confinés aux horizons multiples de l'horizon minimal de production respectant les ratios de production se rapportant à la production totale à réaliser, nous pouvons de ce fait envisager une succession de régimes permanents caractérisés par des ratios de production a priori quelconques. Il est possible qu'avec les contraintes assez fortes portant sur la limitation de la taille des horizons cycliques de travail le makespan obtenu par analyse de flux ne soit jamais atteignable. En effet si la production à réaliser est par exemple : 500 pièces de type A, 355 de type B et 444 de type C, l'horizon minimal de production respectant effectivement des ratios de production est $E_1 = \{500.A, 355.B, 444.C\}$. Il est donc impossible de conserver une telle solution qui ne respecte pas les contraintes de fonctionnement périodique d'un régime (un seul cycle !) ni celles liées à la simplicité de l'élaboration de la commande. Les performances de productivité ainsi obtenues par analyse de flux peuvent très bien ne pas être atteintes par des régimes permanents avec des horizons de taille limitée. Dans tous les cas, ce temps total de production obtenu par analyse de flux représente une borne minimale du makespan réel que peut atteindre la commande cyclique et déterministe à élaborer.

Par exemple, nous pouvons définir :
$$V_{brute}(E^*) = \frac{C^* \cdot \left(\sum_{\forall i} T(I) \right)}{\sum_{\forall i} T(I) \cdot CT_{max}(I)}.$$

Avec la méthode précédente, nous pouvons conserver, si elles existent, les solutions qui respectent les contraintes que nous avons fixées pour trouver la meilleure. Mais si nous voulons nous rapprocher au mieux de cette borne minimale, il faut considérer, suivant une règle du bon sens, dans le cas de plusieurs régimes permanents, des premiers régimes répétitifs ayant une vitesse brute importante (voire supérieure à $V_{brute}(E^*)$), tout en sachant que, pour rattraper le déséquilibre de production engendré par de telles commandes, il sera nécessaire d'en considérer d'autres associées à des vitesses brutes de production inférieures à $V_{brute}(E^*)$. Ainsi pour l'exemple illustratif, si nous recherchons de bonnes solutions, nous devons forcément avoir pour certains des régimes permanents à prendre en compte :

$\exists p \in \{1, \dots, RP_{max}\}$ tel que $V_{brute}(RP_p) \leq V_{brute}(E^*)$, contrainte supplémentaire à ajouter à celle déjà définie pour le PPL en nombres entiers.

- Troisième référence : **approche optimale discrète**

Nous limitons la cardinalité de l'ensemble des produits à réaliser au cours d'un cycle de fonctionnement et recherchons l'horizon de production associé à la vitesse brute maximale de production. Cette vitesse n'est donnée qu'à titre de référence, puisqu'en général la commande du système avec un seul régime permanent de fonctionnement répétitif caractérisé par le cycle précédemment calculé ne respecte pas les quantités requises de chaque type de pièces à fabriquer. Même si la solution optimale utilise l'horizon cyclique de production associé à la vitesse brute maximale de production, tandis que cet horizon ne respecte pas les ratios de production, il faut alors considérer d'autres régimes permanents

avec des vitesses brutes de production plus faibles. La vitesse moyenne brute de production obtenue sera, en général, inférieure à l'optimum théorique. Nous pouvons cependant garder cette valeur à titre de référence.

- *Approximations* : différentes heuristiques possibles

L'optimisation quantitative des différents critères peut être résolue par la définition d'une somme pondérée de chaque critère. Il semble néanmoins que la minimisation du makespan avec le respect de certaines contraintes pour les autres critères d'optimisation soit ici nettement préférable, aussi bien d'un point de vue temps de calcul que de celui de la qualité de la solution à trouver. Cependant, ce problème d'optimisation est en général trop complexe pour arriver à une solution optimale dans des temps raisonnables. Seul le développement d'heuristiques peut permettre de trouver de bonnes solutions en temps limité. Nous présentons ici quelques exemples d'heuristiques que nous pouvons utiliser pour rechercher des solutions de bonnes qualités.

- ◆ Pour le premier régime permanent, en général, nous ne disposons pas de beaucoup de temps pour calculer la commande. L'idée est d'extrapoler une première solution en approximant les ratios continus obtenus avec une seule production en fractions simples. Nous essayons ainsi de nous rapprocher des performances basées sur l'hypothèse d'un flot continu. Il existe plusieurs solutions possibles selon l'horizon recherché et selon les types d'approximation utilisés : $\lfloor \cdot \rfloor$, $\lceil \cdot \rceil$ (¹). Parmi toutes ces solutions, nous ne retenons pour le premier régime permanent que celui qui donne la plus grande vitesse brute de production. Une fois la commande de ce premier régime permanent déterminée et implantée, nous pourrions calculer les autres régimes permanents nécessaires à la réalisation de la production demandée.
- ◆ Nous pouvons aussi limiter notre recherche à des regroupements dont la vitesse brute de production serait supérieure à celle obtenue par analyse de flux ou même n'envisager que les regroupements les plus rapides.
- ◆ Nous pouvons également utiliser une approche pragmatique : garder en mémoire un grand nombre d'ordonnements en fonction de l'horizon de production et choisir seulement l'ordonnement convenable en cas de changement de production (nouveaux ratios de production dus à l'introduction de nouvelles commandes plus ou moins prioritaires, pannes, etc.). S'il n'existe pas d'ordonnement convenable, il est alors calculé, utilisé et ajouté à la base d'ordonnement qui s'enrichit alors au fur et à mesure.

1.3.4.3 Résultats sur l'exemple illustratif

Nous avons pu résoudre l'étape de planification fine caractérisé par le problème de programmation linéaire en nombres entiers de l'exemple illustratif de manière optimale en raison de la relative simplicité du système de production évoqué. Nous obtenons ainsi un temps minimum pour le makespan avec des commandes répétitives associées à des

¹ L'opérateur $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à l'argument, tandis que l'opérateur $\lceil \cdot \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à l'argument.

horizons cycliques de taille inférieure à 10 pièces produites au cours d'un cycle de fonctionnement.

L'une des productions optimales trouvées correspond à :

$$MP_{optimal}^* = 4000 < 4200 = MP_{ancienne\ méthode}$$

avec $RP_{max} = 2$, et pour chaque régime permanent :

$$RP_1 : E(RP_1) = \{4A, 3B, 3C\}, CT(RP_1) = 44 \text{ u.t.}, X(1) = 50 \geq 10$$

$$RP_2 : E(RP_2) = \{4A, 1B, 5C\}, CT(RP_2) = 36 \text{ u.t.}, X(2) = 50 \geq 10$$

$$\text{avec } V_{brute}(RP_1) = 0,389 \leq V_{brute}(E_2) \text{ et } V_{brute}(RP_2) = 0,379 \leq V_{brute}(E_2)$$

Nous obtenons donc, pour cet exemple, avec notre nouvelle production, un gain de 4,8% sur le makespan par rapport à une production utilisant une seule commande cyclique, avec des temps de cycle du même ordre de grandeur. Ce qui peut paraître peu, mais rapporté à la production totale à court terme, cela représente près de 200 unités de temps soit près de 5 cycles de production. De plus, comme nous avons vu qu'il était a priori possible de réaliser toutes la production en deux régimes permanents, nous avons réduit a priori au maximum le nombre des régimes transitoires.

I.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté et formalisé la problématique de l'optimisation des différents critères aussi bien quantitatifs (débit de production, ...) que qualitatifs (réactivité du système de production, simplicité de détermination de la commande prévisionnelle, ...). Cette étude a abouti à la formulation d'un problème de programmation multilinéaire (bilinéaire pour être plus précis) et multicritère (dépendant du nombre de fonctions de coût à optimiser dans le problème : minimisation du makespan, minimisation du nombre de changements d'outils) en nombres entiers. La minimisation de l'en-cours, qui nécessite le développement jusqu'à son terme de l'analyse, n'est pas prise en compte à ce stade de la méthode. Le résultat majeur de cette étape concerne la décomposition de la production prévue en une succession de régimes permanents cycliques prévisionnels, chacun caractérisé par les valeurs numériques des deux indices représentatifs :

- l'horizon de production correspondant aux types de pièces et leurs quantités respectives produites durant un cycle de fonctionnement du régime permanent ;
- le temps de cycle (optimal) associé à cet horizon de production. Nous cherchons ici à atteindre les performances optimales de l'atelier flexible en terme de productivité afin d'être sûr de respecter les délais impartis et, en deuxième lieu, de pouvoir faire face à d'éventuelles défaillances du système de production.

Ce temps de cycle obtenu pour chaque régime permanent déterminé par l'étape de planification fine n'est pas issu d'une évaluation préliminaire des performances du système avec calcul de flux contrairement à la méthode développée dans la thèse [OHL 95a] (optimisation en continu d'un problème de programmation linéaire).

Nous rappelons brièvement que cette dernière approche conduisait à la définition des performances théoriques du système de production du point de vue productivité : débit

maximal que l'atelier peut atteindre sous contrainte de ratios de production fixés par l'étape supérieure de planification. La prise en compte du caractère discret du problème nous obligeait à considérer dans un premier temps l'horizon minimal de production respectant les ratios de production fixés. Afin d'atteindre effectivement les performances optimales du système, il est nécessaire ensuite de respecter à la fois les ratios de routage obtenus par la résolution du problème de programmation linéaire par le simplexe et des répartitions discrètes équitables des charges de travail sur les machines identiques pour les ressources, en général seulement les plus critiques (hypothèse implicite de l'optimisation continue). Ce sont deux conditions qui nous obligent à considérer des horizons multiples de l'horizon minimal de production. Finalement le respect de ce débit maximal nous conduit à considérer des horizons de production le plus souvent incompatibles avec le caractère répétitif de la commande prévisionnelle que nous cherchons à obtenir. Il est donc nécessaire de trouver un compromis entre la productivité de l'atelier flexible et l'horizon multiple de production caractérisé par le facteur multiple de l'horizon minimal de production. La seule façon de négocier ce compromis est de considérer le problème discret en cherchant pour différents horizons (entre l'horizon minimal de production et l'horizon multiple atteignant le débit maximal de production), le temps de cycle optimal. Il faut alors choisir l'horizon de travail ayant de bonnes performances, respectant le fonctionnement cyclique de la commande et optimisant la réactivité du système (minimisant le nombre de pièces produites lors d'un cycle de production).

Nous avons donc ainsi justifié l'approche développée dans cette thèse qui considère ici immédiatement le problème discret. Il n'est donc pas nécessaire d'envisager la notion d'horizon minimal de production ainsi que les horizons multiples puisque, en général, le problème consiste à effectuer une optimisation discrète. L'autre intérêt important de cette méthode réside dans la décomposition de la production en plusieurs régimes permanents au lieu d'un seul avec ratios de production fixés. Cette considération peut entraîner un gain au niveau du makespan de la production totale par rapport à la solution qui fixe les ratios de production au niveau de la planification. En effet dans certains cas, le simple respect des ratios de production peut impliquer la considération d'un horizon de production incompatible avec le fonctionnement répétitif de la commande prévisionnelle. Il est donc nécessaire de pouvoir maîtriser la taille des horizons de travail. Il faut cependant noter qu'en considérant la méthode de planification fine développée par Stecké dans [STE 91], il est possible de limiter le nombre de pièces produites lors d'un cycle de production et ainsi de restreindre la taille de l'horizon de production.

L'intérêt principal de notre approche réside dans le calcul exact des charges de travail de toutes les machines (pas seulement les ressources) au niveau planification fine et non en une estimation de la charge moyenne équilibrée ou maximale des ressources. C'est sur ce point que cette méthode peut être vue comme une généralisation du calcul moyen de flux développé dans [OHL 95a] avec prise en compte des classes de décision de type D_1 (choix des produits regroupés pour leur fabrication simultanée) et D_2 (leurs ratios de production).

L'approche proposée ici permet également d'intégrer les conditions développées dans [STE 91]. Mais a priori notre démarche se situe bien en amont puisqu'elle prend comme hypothèses les quantités de pièces requises pour la production au lieu des ratios de production ainsi qu'une estimation du temps de production ou tout au moins des délais de fabrication à respecter.

En contrepartie, la considération immédiate du problème discret ne fixant pas les ratios de production nous conduit à un problème qui serait très difficile à résoudre en raison de sa complexité. Il est possible de rajouter de nouvelles contraintes concernant, par exemple, la minimisation des changements d'outils afin d'une part d'un point de vue productivité d'optimiser la solution (moins de changement d'outils, donc moins de perte de temps machine, réduction du nombre de régimes transitoires) et d'autre part de limiter la taille de l'espace des solutions par l'ajout de ces nouvelles contraintes.

La seule possibilité de résolution semble donc, à ce point de nos réflexions, le développement d'heuristiques. Il convient donc de rechercher une solution qui soit à la fois « réalisable » et facile à calculer. La minimisation du makespan des régimes permanents de production devient donc un critère d'optimisation secondaire par rapport à la recherche d'une solution. Plusieurs heuristiques ont été présentées dans ce chapitre. Notamment la restriction de la production à un seul régime permanent peut être tout à fait satisfaisant si les ratios de production associés respectent les critères d'optimisation qualitatives (fonctionnement cyclique du régime permanent, réactivité du système, ...). Mais comme nous l'avons vu sur l'exemple illustratif de [OHL 95a], la décomposition de la production en une succession de deux régimes permanents plus restreints aboutit à une meilleure solution du point de vue productivité. Le temps d'élaboration de la commande reste une difficulté importante. Pour l'instant la programmation sous contrainte est utilisée pour le moment pour résoudre ce problème avec en particulier le langage Prolog III. Une implantation de l'approche avec le langage ILOG Solveur sur P.C. est envisagée pour résoudre ce problème de programmation multilinéaire, multicritère en nombres entiers. Nous sommes actuellement à la recherche de méthodes plus efficaces de résolution (utilisation du caractère bi-linéaire du problème de programmation). Nous pouvons également penser que ces approches très combinatoires ne sont pas suffisamment rapides pour obtenir une solution optimale, approches non compatibles, en général, avec les contraintes temporelles lors de l'exploitation du système de production. A ce propos, il est important de signaler l'apparition d'une nouvelle problématique qui concerne l'ordonnancement des régimes permanents entre eux.

A ce niveau de notre étude, nous supposons que nous disposons des résultats issus de la planification fine concernant chaque régime permanent caractérisé par l'horizon cyclique de travail et le temps de cycle optimal que le système peut atteindre quand il est soumis à une telle commande répétitive. Il reste donc à déterminer un ordonnancement précis et à optimiser le niveau d'en-cours nécessaire et suffisant pour respecter les contraintes de cette commande cyclique.

Chapitre II :

II. Elaboration de la commande d'un régime permanent cyclique et déterministe

II.1 Caractéristiques du problème restant, sa modélisation et sa résolution

II.1.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons présenté une nouvelle approche de planification fine qui décompose la production à réaliser en une succession de régimes permanents selon des critères d'optimisation aussi bien quantitatifs (productivité de l'atelier flexible) que qualitatifs (réactivité du système, simplicité de calcul, ...). Chaque régime permanent est caractérisé par son horizon de production et son temps de cycle. Il n'est plus question dans ce chapitre de remettre en cause les horizons de production en considérant des horizons multiples de celui-ci afin de trouver de meilleures performances en terme de productivité. La planification fine a établi par calcul des régimes permanents pour lesquels nous sommes sûrs que les makespan (temps total de production) associés sont suffisamment faibles pour être compatibles avec les contraintes temporelles (délais de fabrication) que nous nous étions fixés ou qui nous avaient été fournies comme hypothèses strictes de départ à respecter. Il est certain qu'il peut exister des solutions plus rapides, mais notre solution a au moins le mérite d'exister et de répondre aux contraintes formulées précédemment dans le problème de programmation multilinéaire en nombres entiers concernant la réactivité du système, la simplicité de calcul des commandes, la production souhaitée et le fonctionnement répétitif de chaque régime permanent. Notre dernier critère d'optimisation concerne la minimisation de l'en-cours du système de production. Le but de ce chapitre est de trouver pour chaque régime permanent une commande prévisionnelle déterministe et répétitive respectant les caractéristiques précédentes et minimisant l'en-cours.

Comme nous le verrons par la suite, il est possible d'approcher la valeur optimale de l'en-cours par une borne inférieure de plus en plus fine au fur et à mesure de la résolution des degrés de liberté. Cependant le seul moyen d'obtenir la valeur exacte est de résoudre tous les indéterminismes afin d'établir une commande déterministe. C'est la raison principale pour laquelle ce critère d'optimisation a été repoussé en dernière phase. Il n'était pas possible de l'intégrer dans le problème de programmation multilinéaire en nombres entiers pour des questions évidentes de complexité.

Cependant il n'existe pas une unique solution. En effet plusieurs partitions de la charge de travail durant un cycle de fonctionnement peuvent respecter l'horizon de production et le temps de cycle d'un régime permanent RP_p . De plus la prise en compte des autres flexibilités du système de production engendrent de nouvelles solutions distinctes. Au final pour la minimisation de l'en-cours, il existe de nombreuses solutions qu'il va falloir évaluer en développant l'analyse jusqu'à son terme, c'est-à-dire jusqu'à déterminer l'ordonnancement des gammes opératoires entre elles et des opérations sur les machines ainsi que l'en-cours associé (niveau et positionnement) pour pouvoir comparer leur performance au sens niveau d'en-cours. La combinatoire liée à la considération de toutes ces flexibilités est d'ailleurs analysée dans cette thèse au chapitre suivant dans le but de

préciser la taille importante de l'espace de recherche constitué de toutes les solutions à évaluer afin de dégager celle (ou celles) qui minimise(ent) l'en-cours.

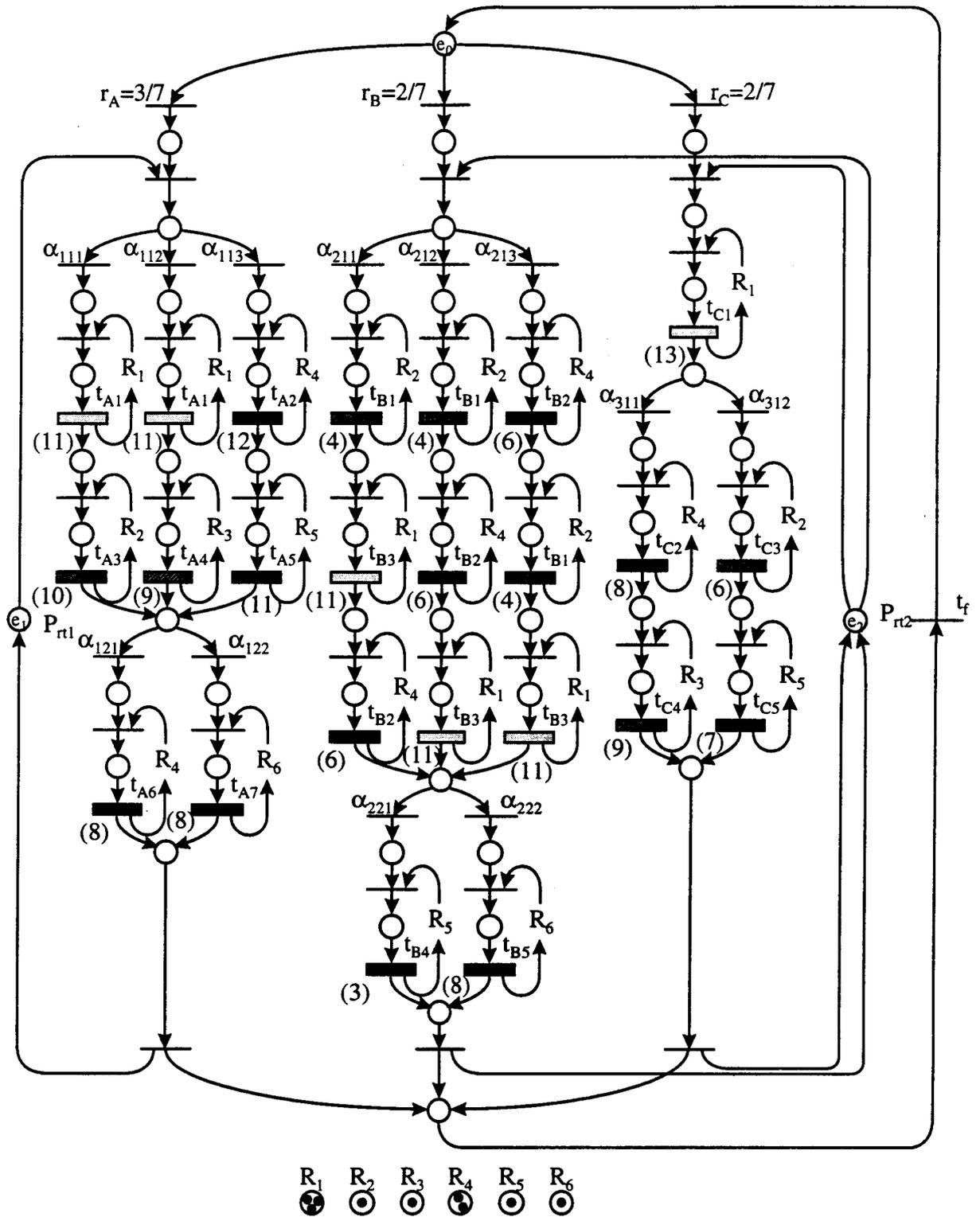
Comme il est impossible de laisser de côté certaines possibilités sans risque de perte d'optimalité, il est donc impératif dans ce cas soit de limiter la taille de l'espace de recherche en perdant sur l'optimalité de la solution trouvée mais avec un gain notable sur les temps de calcul (très intéressant pour la phase d'exploitation dont les contraintes temporelles sont strictes), soit de trouver un sens de parcours de l'espace de recherche qui en évite le parcours exhaustif. C'est cette dernière piste qui a été privilégiée dans cette étude avec le développement d'une approche qui, d'un point de vue théorique, n'apporte pas de vrai gain puisqu'il existe des cas extrêmes pour lesquels la recherche exhaustive demeure la seule solution, mais qui, en pratique, apporte des gains significatifs dans un très grand nombre de cas.

II.1.2 Modélisation du problème restant et description de l'exemple illustratif

La commande déterministe à établir peut être représentée sous forme de Réseau de Petri par un Graphe d'Evénements. Or nous avons vu que l'atelier flexible considéré initialement était représenté au départ par la classe des Réseaux de Petri à T-semiflots librement reliés (ou FRT-nets). Le problème d'ordonnancement peut donc être perçu comme la transformation progressive graphique du réseau initial avec tous ses degrés de liberté en un Réseau de Petri temporisé déterministe avec un marquage adéquat représentant l'en-cours de l'atelier pour lequel tous les indéterminismes du système auront été résolus.

Pour la modélisation de départ du problème, nous pouvons réutiliser la modélisation du chapitre I. Le respect de l'horizon de production fixé par l'étape antérieure de planification fine apporte les premières contraintes sur le regroupement de produits à réaliser durant l'un des régimes permanents. Les ratios de production sont ainsi fixés. Tous les types de pièces ne sont pas fabriqués en même temps. Il est donc possible de retirer du modèle de production les gammes opératoires liées aux types de pièces non réalisées au cours du régime permanent considéré. Une deuxième simplification du modèle initial peut être envisagée avec les contraintes engendrées par le respect du temps de cycle optimal associé à l'horizon de production et calculé par l'étape précédente. En effet comme pour le problème de programmation linéaire résolu par le simplexe, le respect du temps de cycle optimal conduit à fixer certains ratios de routage afin de saturer les machines critiques. Donc certains des ratios de routage ont une valeur donnée. Ces propriétés sont à indiquer si possible sur le modèle représentatif du régime permanent considéré. Nous retrouvons cette étude dans le paragraphe concernant le calcul des partitions de charge de travail compatibles avec le temps de cycle fixé.

Pour illustrer ce chapitre, nous développerons l'approche proposée sur un exemple. Nous supposons que l'étape de planification fine a choisi, pour le régime permanent RP_p , un fonctionnement répétitif comportant par cycle la fabrication de 3 pièces de type A, 2 de type B et 2 de type C. L'atelier flexible de production considéré ici dans cet exemple comporte 6 types de ressources différents. En particulier, les ressources R_1 et R_4 sont multiples et se composent respectivement de 3 et 2 machines identiques.



RP_p caractérisé par :

- ♦ l'horizon de production : $E_p = \{3A, 2B, 2C\}$
- ♦ le temps de cycle associé : $CT_p = 24 \text{ u.t.}$

Figure II-1 : Modélisation du système de production sous le régime permanent RP_p

Au niveau du système de transport, nous supposons qu'il existe deux types de ressources de transport de type palettes. Le système de bridage des premières n'acceptent que les pièces de type A, tandis que les secondes peuvent transporter à la fois les pièces de type B et celles de C.

Nous n'avons représenté sur la Figure II-1 que les gammes opératoires concernant les trois seuls types de pièces qui nous intéressent dans ce régime permanent. Les pièces brutes destinées à produire des pièces de type A doivent subir 3 opérations différentes de transformation. La fabrication des pièces de type A possède une flexibilité de procédé, concernant les deux premières opérations, enchaînée à une flexibilité d'affectation liée à la dernière opération. Les pièces de type B subissent quant à elles 4 opérations. Les gammes opératoires associées se présentent sous la forme d'un enchaînement de flexibilité de permutation et de flexibilité d'affectation. Pour ce qui concerne la flexibilité de permutation, nous considérons qu'il existe deux contraintes de précédence : l'opération t_{B1} précède t_{B3} et l'ensemble des opérations $\{t_{B1}, t_{B2}, t_{B3}\}$ précède la dernière opération de transformation. Pour le dernier type de pièces à fabriquer (C), il ne comporte qu'une flexibilité de procédé au niveau des deux dernières opérations de transformation.

Le modèle de la Figure II-1 présente le système simplifié contraint par l'horizon $E(RP_p)$ de production de ce régime permanent avec les ratios de production fixés. Pour être totalement en accord avec les hypothèses, il faudrait ajouter sur le modèle les contraintes imposant le fonctionnement répétitif par cycle discret $E(RP_p)$, c'est à dire que nous ne pouvons envisager une quatrième production de pièces de type A sans que deux pièces de type B et C ne soient au préalable lancées. En ce qui concerne les Réseaux de Petri, l'analyse de cette situation fait appel à la notion de **distance synchronique** entre des tirs de transitions, cf. [GOL 86] et [SIL 87]. [OHL 94a] a présenté un dispositif de respect des ratios de production sur un horizon discret de production en conservant toutes les possibilités de permutation entre les gammes opératoires. Si nous appliquons ce bouclage à notre exemple, nous obtenons, au niveau de la séparation du flux entre les différents types de pièces à fabriquer selon les ratios de production, le dispositif décrit à la Figure II-2. De tels dispositifs ont été étudiés dans un contexte général dans [OHL 94a] : avec des poids associés aux arcs et avec des marques variables, ils permettent d'imposer des taux de routage quelconques avec des possibilités de permutation variables.

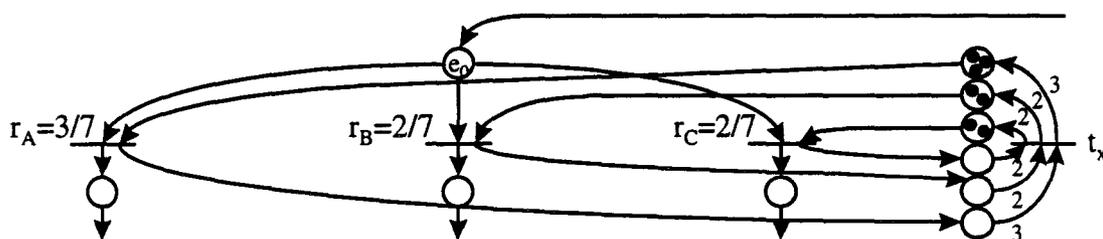


Figure II-2 : Modélisation du respect des ratios de production sur l'horizon de production

II.1.3 Périodicité et notion d'en-cours

II.1.3.1 Fonctionnement de type 1-périodique

Le but de ce chapitre est de trouver un ordonnancement qui respecte, pour chaque régime permanent déterminé par l'étape préliminaire de planification fine, l'horizon de production et son temps de cycle associé tout en minimisant l'en-cours (dernier critère d'optimisation). Il faut rappeler qu'ici seul le fonctionnement répétitif de type **1-périodique** est considéré (contrairement au fonctionnement k-périodique issu des travaux de recherche de MM. Carlier et Chrétienne [CAR 88], [CHR 85] et de A. Munier [MUN 91]).

A propos de cette notion de 1-périodicité, nous situons celle-ci au niveau de la ressource et non à celui des palettes considérées individuellement. En effet cela ne présente aucun intérêt de différencier les palettes identiques. De plus considérer la périodicité comme la répétition d'une opération fixée sur la même ressource de transport entraîne un allongement artificiel et inutile de l'horizon de production (horizon multiple de celui à considérer réellement). La notion de périodicité correspond à la répétition dans le temps d'un même comportement temporel au niveau des ressources de transformation (et plus précisément des machines). Les études de Commoner [COM 71] et Ramamoorthy [RAM 80] ont démontré que sous certaines hypothèses de fonctionnement du système (recherche des dates de début adéquates de chaque opération : il ne faut plus considérer exclusivement le fonctionnement au plus tôt) il existe au moins une commande 1-périodique respectant ces contraintes. Pour respecter un temps de cycle fixé (supérieur au temps de cycle optimal) avec un fonctionnement de type 1-périodique, il est nécessaire d'utiliser un en-cours suffisant. En contrepartie, notre critère d'optimisation consiste toujours à minimiser l'en-cours du système de production.

II.1.3.2 Les différents critères d'optimisation liés à la notion d'en-cours

Dans la littérature, plusieurs notions sont rattachées à l'optimisation de l'en-cours du système.

Nous pouvons tout d'abord considérer la taille moyenne des buffers devant chaque machine sur un cycle de production, ou de façon plus intéressante, la taille maximale des buffers. Ainsi minimiser l'en-cours revient en fait à minimiser les capacités des buffers d'entrée des machines (dimensionnement des stocks d'entrée des machines), cf. [ERS 82].

Nous pouvons assimiler l'en-cours du système à sa valeur moyenne durant un cycle de production. Si nous appelons $WIP(t)$ la fonction représentant le nombre de pièces dans l'atelier à l'instant t , il peut être défini ainsi :

$$WIP_{moyen} = \frac{1}{CT(p)} \int_0^{CT(p)} WIP(t) \cdot dt .$$

Dans ce mémoire, nous préférons utiliser la notion de **maximum d'en-cours** du système durant un cycle de production :

$$WIP = \max_{\forall t \in [0, CT(p)]} (WIP(t)) .$$

Par abus de langage, nous confondons la notion de minimisation de l'en-cours avec celle de la minimisation du nombre maximum de l'en-cours du système durant un cycle de

production. D'après les hypothèses formulées au chapitre I paragraphe 2.1.1, nous supposons que les pièces arrivées dans le système restent attachées à leur ressource de transport (des palettes par exemple) tout au long de leur production dans l'atelier, jusqu'à la sortie de la pièce finie du système vers le stock de sortie. Même si, pour des contraintes technologiques, il est parfois nécessaire de dissocier physiquement la pièce de sa palette, nous supposons que cette dernière lui reste dédiée. Cette hypothèse signifie qu'à tout instant, le nombre de pièces présentes dans l'atelier est contraint par le nombre de palettes. La minimisation de l'en-cours revient, en conséquence, à minimiser le **nombre de ressources de transport** disponibles dans le système.

C'est cette hypothèse qui a été implicitement utilisée dans les approches développées par MM. Hillion et Proth dans [HIL 87], [HIL 89a] et [HIL 89b]. Mais, comme nous le verrons par la suite, cette notion n'a pas été utilisée de manière optimale puisque des contraintes fortes de modélisation ont été introduites de manière artificielle, limitant ainsi l'espace de recherche et excluant très souvent de fait la solution optimale (ordonnancement avec un minimum d'en-cours). A l'étape de modélisation du système, un bouclage individuel de chaque gamme opératoire a été envisagé. Ceci sous-entend qu'une ressource de transport liée à une gamme opératoire ne peut réaliser plus d'une gamme au cours d'un cycle de fonctionnement, même si le temps de cycle le permet. Donc une palette reste dédiée à sa gamme opératoire, ou plutôt à un mode particulier de fabrication d'un type de pièces et en quantité unitaire. Par exemple comme l'horizon de production considéré dans notre exemple illustratif est $E(RP_p) = \{3A, 2B, 2C\}$, avant de commencer à résoudre le problème d'ordonnancement, nous partons sur l'hypothèse qu'il faille au minimum 7 palettes ou plus exactement un minimum d'en-cours égal à 7. Il est facile de voir sur un exemple simple que cette contrainte imposée au modèle est trop restrictive et ne peut que fournir de mauvais résultats en ce qui concerne la minimisation de l'en-cours du système.

Dans le cas des travaux de recherche présentés par C. Valentin [VAL 94] concernant les systèmes hybrides, les processus discrets et continus sont étroitement liés : notamment lors de la modélisation de la fabrication de ramettes de papiers. Pour rester au plus près du modèle développé, il faut définir des ressources de transport virtuelles dédiées à un seul type de gamme opératoire. En effet il est difficile d'imaginer des ressources de transport capables de s'occuper de la matière continue (fluide, de la pâte à papier par exemple) et des pièces discrètes (les feuilles de dessin) et toutes les pièces issues des étapes intermédiaires. Même en conservant cette hypothèse (dédier une palette virtuelle à une gamme opératoire très précise), qui reste somme toute assez restrictive, il apparaît qu'il existe de meilleures solutions que celles obtenues avec la modélisation employée par C. Valentin. Nous présenterons par la suite dans le paragraphe II.3.6 une heuristique capable d'exprimer de meilleures solutions (optimales dans certains cas).

Nous montrerons par la suite que la solution choisie de minimiser le nombre maximum d'en-cours du système durant un cycle de production présente d'autres intérêts concrets, puisque dans la plupart des cas, cette optimisation revient implicitement à minimiser la taille des buffers des machines (taille moyenne et capacité maximale) : cela revient donc à considérer le problème de dimensionnement des stocks d'entrée des machines de transformation, cf. travaux de Erschler [ERS 82]. Il est également possible de mettre en évidence les implications de cette optimisation sur la minimisation de l'en-cours moyen du système (moyennant l'application d'un algorithme assez simple utilisant les marges des

opérations dans les macro-gammes pour l'ordonnancement considéré afin de se rapprocher encore plus de la valeur optimale).

Nous verrons ultérieurement que cette minimisation se justifie encore, par exemple, pour diminuer le nombre de conflits possibles au niveau de l'accès à un tronçon du système de transport.

La relation entre en-cours du système et débit de production du système est représentée à la Figure II-3. Nous avons indiqué au chapitre précédent qu'au delà d'un certain seuil d'en-cours, seuil établi en fonction des capacités finies des ressources par les travaux de thèse de M. Ausfelder [AUS94], le fonctionnement du système pouvait aboutir à des deadlocks dus à la saturation de certaines ressources, entraînant l'arrêt de la production par blocage de toutes les pièces. C'est l'une des raisons pour laquelle nous envisageons aussi de minimiser l'en-cours du système. Les fonctionnements que nous voulons établir doivent être vivants, donc sans blocage. Nous devons par conséquent considérer la limite supérieure du nombre d'en-cours garantissant la vivacité du système soumis à nos commandes. Toutefois cette borne ne sera jamais atteinte. D'après la Figure II-3, le point de fonctionnement de la commande recherchée se situe bien en deçà, à la limite entre la partie linéaire et la partie saturée pour obtenir l'en-cours minimal et du côté palier pour atteindre la vitesse de production optimale. De plus la construction progressive développée dans ce mémoire de l'ordonnancement avec la représentation sur diagramme de Gantt garantit la vivacité de la solution trouvée par notre approche. Avec un système fortement connexe (utilisation par exemple d'un système de transport de type anneau), nous pouvons affirmer que toute commande avec un tel en-cours est vivante.

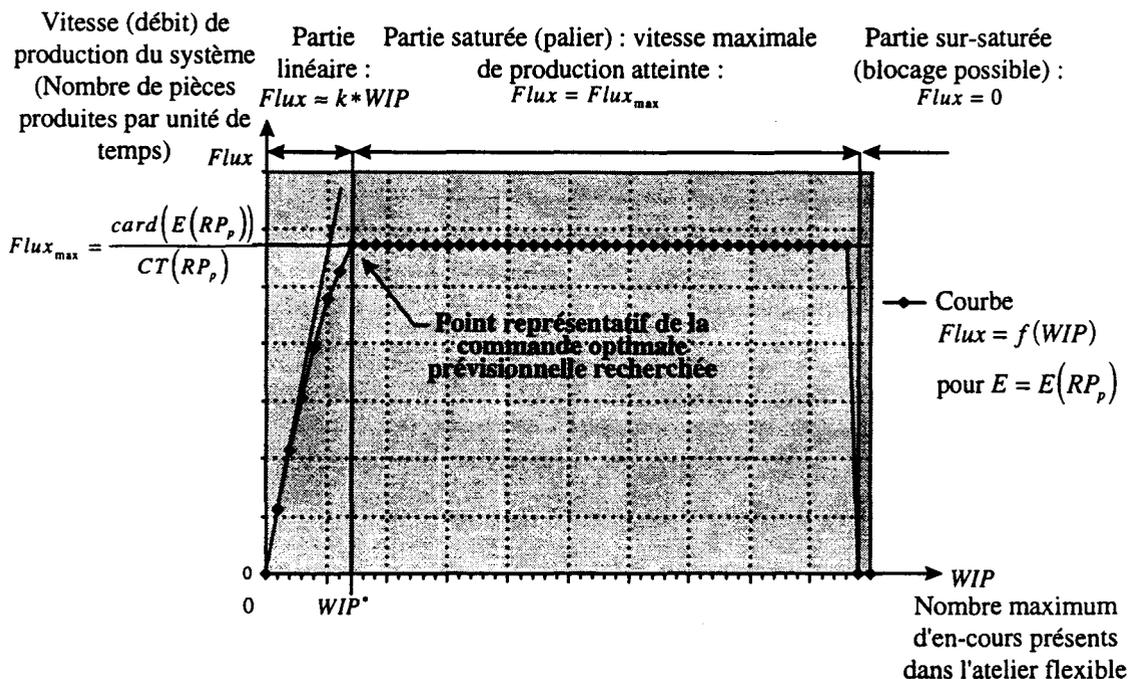


Figure II-3 : Point de fonctionnement de la commande prévisionnelle optimale recherchée sur la courbe Vitesse de production fonction du Nombre maximum d'en-cours pour un horizon de production donné

II.1.4 L'approche retenue : celle développée dans [OHL 95a] : dualité entre la transformation progressive du système et la « résolution » des différents degrés de liberté disponibles

Nous avons vu en introduction de ce chapitre qu'il est indispensable de conserver toutes les solutions afin de développer l'analyse jusqu'à son terme, c'est-à-dire d'établir une commande déterministe, pour pouvoir évaluer, pour chaque commande, son niveau d'en-cours et donc pour trouver la (ou les) solution(s) optimale(s) qui minimise(ent) l'en-cours du système de production. Or selon le degré de liberté considéré, de nouvelles possibilités apparaissent, toutes différentes. Il serait trop compliqué de prendre simultanément en compte tous les indéterminismes potentiels du système. De plus nous verrons par la suite, dans le chapitre suivant, que la résolution des indéterminismes ne s'effectue pas de manière aléatoire. Il existe des contraintes de précédence entre certaines flexibilités. Seule une approche structurée prenant en compte progressivement les différents indéterminismes restant de l'atelier flexible peut permettre de nous assurer la recherche de toutes les solutions, garantissant ainsi l'obtention de la meilleure performance de production.

L'approche de résolution du problème d'ordonnancement, que nous présentons par la suite, est issue de la thèse de M. Ohl, cf. [OHL 95a]. Nous en reprenons les grandes lignes et portons notamment notre attention sur les questions se rapportant à l'analyse de la complexité et de la synthèse, que nous allons largement approfondir afin de justifier de manière théorique la méthode développée. En ce qui concerne l'ordre dans lequel les différents degrés de liberté restant sont pris en compte, nous avons amené la réflexion esquissée dans [OHL 95a] jusqu'à son terme afin d'établir clairement les différents liens les unissant. Il est aussi très important de souligner le parallélisme entre la prise en compte progressive des indéterminismes et la transformation, tout aussi progressive, du modèle graphique associé, qui s'approche au fur et à mesure d'un modèle totalement déterministe appartenant à la classe des Graphes d'Événements, représentatif de la commande prévisionnelle du régime permanent étudié. C'est dans le chapitre suivant que l'apport de chaque degré de liberté sur le modèle graphique déterministe sera pleinement explicité, puisqu'il requiert les propriétés sur les modèles Réseaux de Petri T-temporisés déterministes qui seront évoquées au paragraphe II.3.

Nous présentons ici les grands points caractéristiques de notre méthode.

En premier lieu, il n'existe pas un seul ensemble de ratios de routage et donc de répartition des charges de travail sur les différentes ressources respectant l'horizon de travail et le temps de cycle caractéristiques du régime permanent RP_p . Pour la *détermination des ensembles de routages admissibles*, nous avons à résoudre un système d'équations et d'inéquations linéaires en nombres entiers. Cette étape utilise les degrés de liberté qui relèvent des flexibilités de gammes opératoires d'affectation et de procédé et non de permutation puisque ces dernières ne jouent aucun rôle dans la répartition de la charge de travail.

En second lieu, pour chaque ensemble de ratios de routage, une autre problématique est engendrée par la manière de *linéariser les gammes opératoires* en dépliant d'abord les gammes, étape d'extraction des chemins de gamme, puis en considérant spécifiquement les flexibilités de permutation.

Les gammes opératoires étant linéarisées, il est alors possible de distinguer les opérations de transformation entre elles et ainsi de *partager les charges de travail des ressources sur les machines* qui la composent en respectant le temps de cycle du régime permanent.

Il reste encore à éliminer les indéterminismes de routages liés au conflit de partage des ressources de transport entre les différentes gammes opératoires soumises à la même contrainte sur le transport de leur type de pièces. En tenant compte de ce degré de liberté, il est possible de regrouper de différentes manières les gammes opératoires soumises aux mêmes contraintes de support de bridage des ressources de transport. De plus pour chaque regroupement obtenu, il faut tenir compte de l'ordre dans lequel les gammes auront été associées. Le caractère répétitif du fonctionnement de la commande prévisionnelle que nous voulons obtenir nous amène ainsi à considérer des *regroupements cycliques de ces gammes*.

Afin d'éviter la recherche exhaustive de l'ensemble des solutions que nous venons de dégager, nous associons à chaque modèle appelé maintenant « ordonnançable » une borne fine inférieure de l'en-cours minimum nécessaire à ce système pour respecter le temps de cycle fixé. Ceci nous permet de présenter notre *approche de parcours de l'ensemble des solutions* suivant la valeur croissante de cette borne. Nous verrons que même si en théorie cette méthode n'apporte pas de gain, en pratique dans une grande partie des cas, elle évite l'analyse d'un grand nombre de solutions.

Le problème de détermination des ordonnancements des opérations sur les machines et du niveau d'en-cours optimum ainsi que son positionnement, reste toutefois un problème NP-difficile. Le seul moyen possible de le résoudre est le développement d'une heuristique. Après une brève étude des principaux algorithmes existant dans la littérature nous proposons une approche nouvelle qui tente d'allier les principales caractéristiques de chacune.

Au final nous obtiendrons le Graphe d'Événements qui représente la commande déterministe, cyclique et prévisionnelle du régime permanent que nous étudions dans ce chapitre. Cependant au niveau de la représentation graphique sous forme de Réseaux de Petri de cette commande, une nouvelle problématique apparaît sur le positionnement de l'en-cours dans ce modèle.

Après la présentation détaillée de notre méthode, nous justifions de manière théorique, au chapitre suivant (Chapitre III), les liens qui unissent les différents degrés de liberté afin de garantir la validité de notre approche. Nous évoquons pour clore cette étape d'élaboration de la commande d'un régime permanent les axes de recherche qu'il sera nécessaire d'aborder dans l'avenir afin d'améliorer encore cette méthode.

II.2 Transformation progressive du modèle vers un modèle déterministe représentatif de la commande prévisionnelle, cyclique et déterministe

Dans cette première phase, nous allons conserver toutes les solutions possibles pour chaque étape dans le but de rechercher l'ordonnancement optimal qui minimise l'en-cours. Nous allons créer au fur et à mesure une arborescence de plus en plus profonde. Ainsi à la fin de ce paragraphe, nous obtiendrons toutes les branches terminales rangées selon un certain ordre : suivant une borne inférieure du nombre d'en-cours (ou de ressources de transport) nécessaire pour atteindre les performances en terme de productivité requises par la planification fine : temps de cycle associé au regroupement de produits choisi pour ce régime permanent cyclique.

II.2.1 Détermination des ensembles de ratios de routages admissibles

II.2.1.1 Résolution d'un système d'équations et d'inéquations en nombres entiers pour connaître les ensembles de ratios de routage

Il peut exister plusieurs solutions de routages équivalentes au niveau des gammes opératoires ainsi que des distributions équivalentes de charge de travail entre les machines identiques d'une même ressource respectant le même horizon de production et le même temps de cycle associé (liées aux indéterminismes de classes D_{3b} et D_{3c}). Les flexibilités de permutation (D_{3a}) n'y jouent aucun rôle. Elles ne sont donc pas explicitées ici (pour l'exemple, les routages associés α_{211} , α_{212} , α_{213} n'apparaissent pas).

L'étape de planification fine peut ne fournir, pour un régime permanent, que l'horizon cyclique de travail exprimé en nombre de pièces ainsi que le temps de cycle associé. Seuls ces deux paramètres sont importants et utiles à ce niveau. Il n'est pas nécessaire que cette étape recherche toutes les solutions possibles répondant à ces contraintes. D'autant plus que cette proposition de régime permanent aurait pu ne pas être retenue.

Il est maintenant nécessaire de trouver tous les ensembles de routages répondant à ces conditions. Pour cela, il n'est plus obligatoire de relancer la résolution complète du problème de programmation multilinéaire en nombres entiers. Une version allégée peut facilement en être dégagée ciblant de manière précise cette recherche exhaustive des routages admissibles, permettant ainsi une résolution aisée plus rapide.

La recherche des **ensembles de routages admissibles** est contrainte en partie par l'horizon cyclique de production et par le temps de cycle imposés : existence d'une répartition discrète des charges des ressources sur les différentes machines identiques qui les composent limitant le maximum des charges des machines de transformation du système par la borne supérieure que représente le temps de cycle $CT(RP_p)$.

Il reste finalement un système d'équations et d'inéquations linéaires en nombres entiers où les variables sont les ratios de routages entiers et les paramètres $O_{i-r,m}$ liés à la distribution discrète des charges de travail sur les machines. Nous reprenons ainsi les notations utilisées au chapitre précédent en définissant une variable par type d'opération affectée à une machine identique des ressources multiples. Dans ce paragraphe, nous considérons un type d'opérations comme le regroupement des opérations appartenant à la

même ressource multiple et de durée opératoire égale. Ainsi $O_{t-r,m}$ représente le nombre d'opérations de durée t affectée à la m -ème machine identique de la r -ème ressource multiple.

Le but reste de trouver les ensembles de ratios de routages entiers $\alpha = (A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, B_{21}, B_{22}, C_{11}, C_{12}) \in \mathbb{N}^9$ soumis à plusieurs types de contraintes :

(Equation II-1)

- respect de l'horizon de production $E(RP_p)$:

→ ratios (entiers) de production : $A = 3, B = 2, C = 2$ (fixés par $E(RP_p)$)

$$\rightarrow \text{ratios (entiers) de routages : } \begin{cases} A_{11} + A_{12} + A_{13} = A = 3 \\ A_{21} + A_{22} = A = 3 \\ B_{21} + B_{22} = B = 2 \\ C_{11} + C_{12} = C = 2 \end{cases}$$

- conservation lors de la répartition discrète des charges de travail sur les machines identiques des ressources multiples du nombre d'opérations de même durée affectées à la même ressource :

$\exists (O_{11-1.1}, O_{11-1.2}, O_{11-1.3}, O_{13-1.1}, O_{13-1.2}, O_{13-1.3}, O_{6-4.1}, O_{6-4.2}, O_{8-4.1}, O_{8-4.2}, O_{12-4.1}, O_{12-4.2}) \in \mathbb{N}^{12}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } R_1 : \\ O_{11-1} : O_{11-1.1} + O_{11-1.2} + O_{11-1.3} = A_{11} + A_{12} + B_{11} + B_{12} + B_{13} = A_{11} + A_{12} + B = A_{11} + A_{12} + 2 \\ O_{13-1} : O_{13-1.1} + O_{13-1.2} + O_{13-1.3} = C_{11} + C_{12} = C = 2 \\ \text{pour } R_4 : \\ O_{6-4} : O_{6-4.1} + O_{6-4.2} = B_{11} + B_{12} + B_{13} = B = 2 \\ O_{8-4} : O_{8-4.1} + O_{8-4.2} = A_{21} + C_{11} \\ O_{12-4} : O_{12-4.1} + O_{12-4.2} = A_{13} \end{array} \right.$$

- respect du temps de cycle de production $CT(RP_p) = 24$ u.t. du p -ème régime permanent établi par l'étape de planification fine :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } R_1 : M_{1.1} : CT(RP_p) = 24 \geq Z_{1.1} = 11*O_{11-1.1} + 13*O_{13-1.1} \\ M_{1.2} : CT(RP_p) = 24 \geq Z_{1.2} = 11*O_{11-1.2} + 13*O_{13-1.2} \\ M_{1.3} : CT(RP_p) = 24 \geq Z_{1.3} = 11*O_{11-1.3} + 13*O_{13-1.3} \\ \text{pour } R_2 : CT(RP_p) = 24 \geq Z_2 = 4*B + 6*C_{12} + 10*A_{11} \\ \text{pour } R_3 : CT(RP_p) = 24 \geq Z_3 = 9*(A_{12} + C_{11}) \\ \text{pour } R_4 : M_{4.1} : CT(RP_p) = 24 \geq Z_{4.1} = 6*O_{6-4.1} + 8*O_{8-4.1} + 12*O_{12-4.1} \\ M_{4.2} : CT(RP_p) = 24 \geq Z_{4.2} = 6*O_{6-4.2} + 8*O_{8-4.2} + 12*O_{12-4.2} \\ \text{pour } R_5 : CT(RP_p) = 24 \geq Z_5 = 3*B_{21} + 7*C_{12} + 11*A_{13} \\ \text{pour } R_6 : CT(RP_p) = 24 \geq Z_6 = 8*(A_{22} + B_{22}) \end{array} \right.$$

Deux types de résolution sont à envisager : la recherche exhaustive de toutes les solutions avec la sauvegarde de celles qui respectent toutes les contraintes, et la programmation sous contraintes (avec un langage type Prolog III).

Pour l'exemple illustratif, nous obtenons 6 ensembles de routages admissibles comme nous le verrons dans le chapitre suivant. Nous avons modélisé à la Figure II-4 le système avec l'ensemble des routages :

$$\alpha_4 = (A_{11} = 1, A_{12} = 1, A_{13} = 1, A_{21} = 1, A_{22} = 2, B_{21} = 2, B_{22} = 0, C_{11} = 1, C_{12} = 1)$$

puisque c'est à partir de celui-ci qu'une commande optimale de ce régime permanent cyclique RP_p est déterminée. Cet ordonnancement est optimal puisqu'il minimise l'en-cours du système. Les valeurs des routages fixées par la résolution du système d'équations ont été indiquées sur le modèle de la Figure II-4. Seuls les routages liés aux flexibilités de permutation des gammes opératoires restent libres (soit α_{211} , α_{212} et α_{213}).

II.2.1.2 Calcul d'une borne minimale sur l'en-cours nécessaire à chaque ensemble de routages admissibles

Afin d'éviter le parcours exhaustif de toutes les solutions obtenues après la considération des indéterminismes de classe 1, 2, 3 et 4, un parcours de l'espace de recherche est proposé par notre méthode selon les valeurs croissantes d'une borne inférieure de l'en-cours. Pour effectuer cette comparaison, nous avons besoin d'introduire quelques définitions pour calculer à cette étape une première valeur de cette borne. Une deuxième valeur, plus fine, sera déterminée par la suite quand toutes les gammes opératoires auront été linéarisées et quand les regroupements cycliques de ces gammes auront été considérés.

Définition : La durée associée à un T-semiflot X , notée $\mu(X)$, est la somme des durées des transitions appartenant au support de X .

$$\mu(X) = \sum_{t \in |X|} \mu(t)$$

Hormis les flexibilités de permutation, tous les routages ont été déterminés. Toutes les opérations du cycle de fonctionnement de ce régime permanent sont donc maintenant connues. Or le cycle de production est caractérisé par la réalisation de chaque opération une et une seule fois. Au niveau du modèle graphique du système cela correspond à la détermination du T-semiflot global du système modélisant le cycle de production. Soit $X_{cp}(\alpha_i)$ le T-semiflot global associé au système avec l'ensemble des routages admissibles α_i . Nous pouvons lui associer la valeur $\mu(X_{cp}(\alpha_i))$ qui représente ici le temps nécessaire pour effectuer toutes les opérations du cycle séquentiellement ou encore avec seulement un en-cours égal à un. La commande que nous cherchons doit respecter le temps de cycle optimal associé à l'horizon de production $E(RP_p)$. Il est donc nécessaire de considérer un

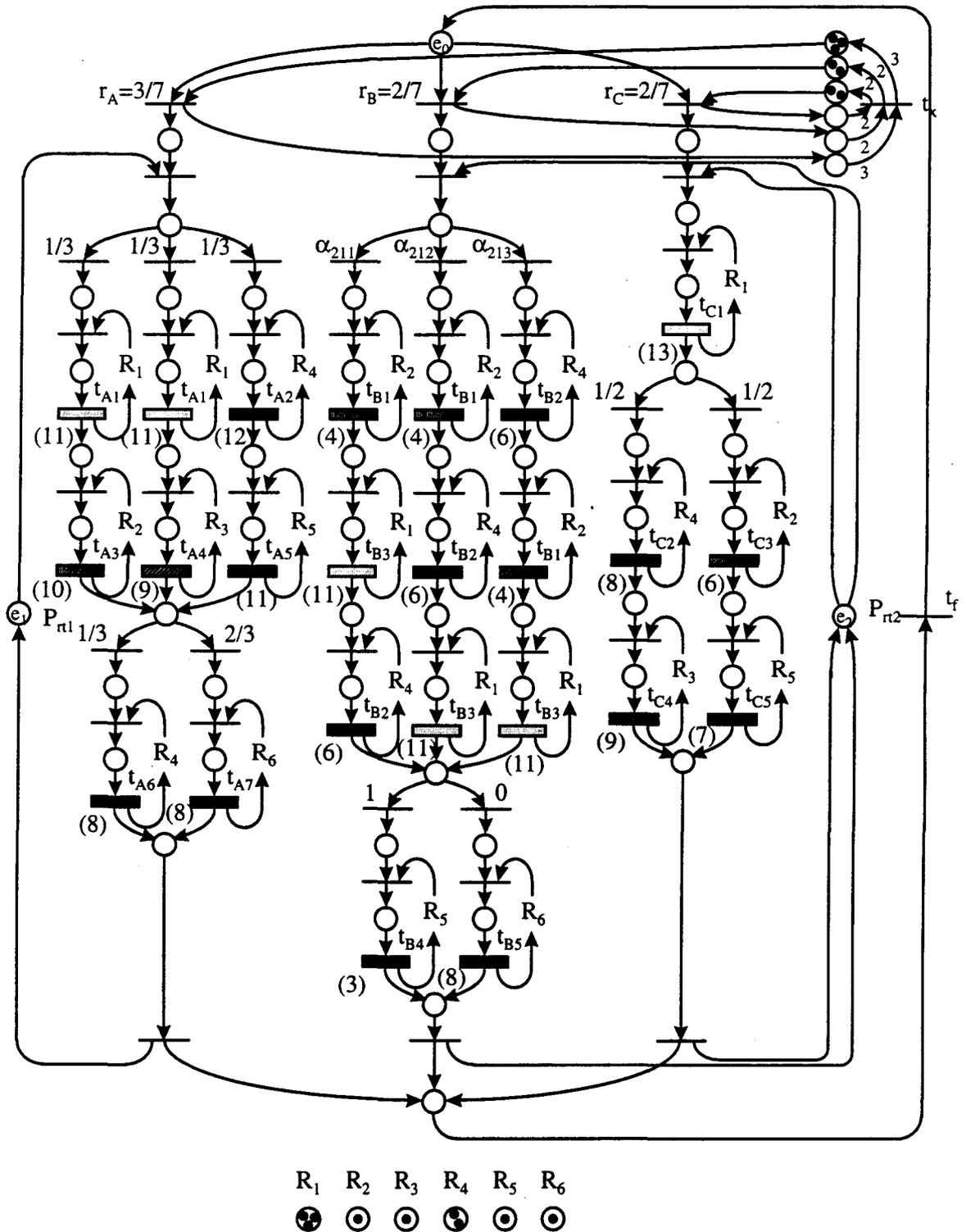


Figure II-4 : Modèle de la charge de travail d'un cycle de production du régime permanent RP_p associé à l'ensemble des routages admissibles $\alpha_4 = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 0, 1, 1)$

niveau d'en-cours suffisant. Comme la valeur doit être entière, cette valeur est égale à

$$B_0 = \left\lceil \frac{\mu(X_{cp}(\alpha_i))}{CT(RP_p)} \right\rceil = \left\lceil \frac{194}{24} \right\rceil = 9 \text{ (}^1\text{)}.$$

Il est cependant possible d'affiner cette borne inférieure d'en-cours. En effet le T-semiflot global peut être décomposé en plusieurs T-semiflots $X_n(h)$ regroupant les gammes opératoires suivant les types h de palettes ($h \in \{1..H\}$) qui sont capables de les supporter. Les gammes opératoires ne sont peut-être pas encore totalement déterminées mais ces T-semiflots peuvent être plus simplement définis comme le regroupement, pour un type de palette h , de toutes les opérations du cycle de production associées à ce type de palettes. Soit $op_j(h)$ une opération j associée à une palette de type h et $\mu(t_j(h))$ son temps opératoire associé. De la même façon que $X_{cp}(\alpha_i)$, nous associons à chaque nouveau T-semiflot $X_n(h)$ une borne sur le minimum d'en-cours (en fait ici il serait plus approprié de parler de ressources de transport du type considéré dans ce T-semiflot) nécessaire pour respecter le temps de cycle $CT(RP_p)$.

$$\text{Soit } B_h^*(\alpha_i) = \left\lceil \frac{\sum_{\forall j | t_j(h) \in X_n(h)} \mu(t_j(h))}{CT(RP_p)} \right\rceil \text{ cette valeur.}$$

Nous pouvons ainsi définir une deuxième borne plus fine pour chaque ensemble de routages admissibles α_i : $B^*(\alpha_i) = \sum_{h=1}^H B_h^*(\alpha_i)$ qui représente la somme de toutes les palettes nécessaires de tout type, équivalente au nombre maximum d'en-cours.

Nous définissons aussi $B^* = B^*(RP_p) = \min_{\forall_i} (B^*(\alpha_i))$, comme la borne inférieure pour le régime permanent considéré.

En l'appliquant à notre exemple illustratif avec le choix de l'ensemble des routages admissibles α_4 , la borne vaut :

$$B^*(\alpha_4) = \left\lceil \frac{88}{24} \right\rceil + \left\lceil \frac{106}{24} \right\rceil = B^*(RP_p) = 9.$$

II.2.2 Linéarisation des gammes opératoires

Dans ce paragraphe, nous proposons de linéariser les gammes. En effet l'étape précédente de détermination de charges des ressources a certes établi l'ensemble des opérations à réaliser lors d'un cycle de production. Néanmoins pour un ensemble de routages admissibles, il existe plusieurs regroupements possibles entre ces opérations suivant l'association des branches des différents conflits appartenant aux gammes opératoires d'un même type de pièces. Ce problème est lié aux indéterminismes de classe

¹ L'opérateur $\lceil \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à l'argument.

D_{3b} et D_{3c} . De plus l'ordre des opérations à l'intérieur d'une même gamme n'a pas encore été fixé puisque tel n'était pas le but de la phase antérieure de notre méthode. Ceci est directement lié à la résolution des flexibilités de permutation (D_{3a}). A la fin de cette étape, le modèle ne comporte plus que des gammes linéaires.

II.2.2.1 Extraction de chemins

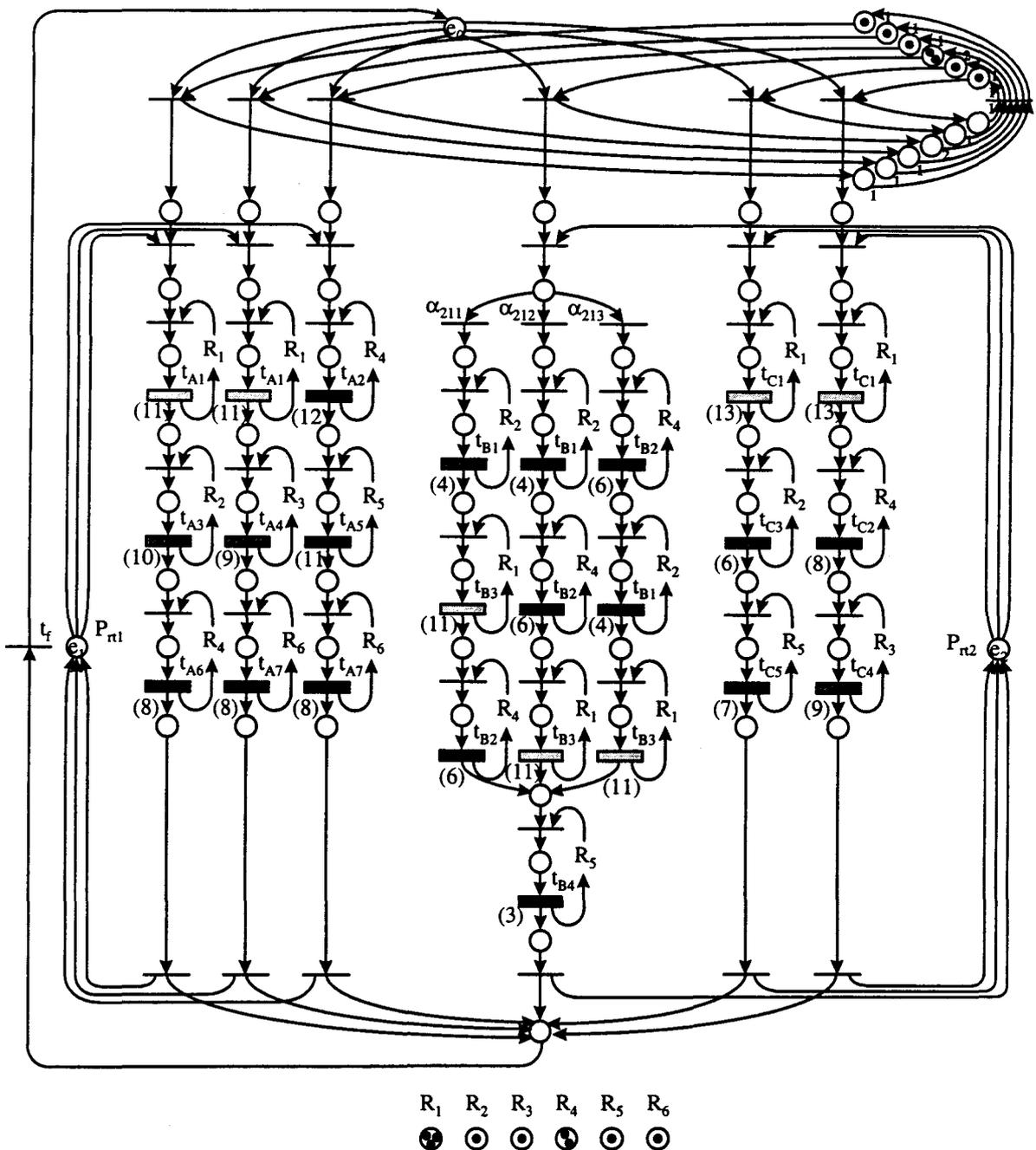


Figure II-5 : Modèle déplié du système après extraction d'un des chemins issus de l'ensemble des routages admissibles $\alpha_4 = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 0, 1, 1)$

Les routages liés aux flexibilités d'affectation et de procédé ont été entièrement déterminés par l'étape précédente avec les α_i . Leurs valeurs sont fixées définitivement. Cependant pour un α_i donné, il existe plusieurs façons de regrouper les branches issues de flexibilités enchaînées, comme c'est le cas pour les gammes de fabrication des pièces de type A de l'exemple illustratif. Avec α_4 , cf. Figure II-4, pour les trois gammes produisant du A du cycle répétitif de fonctionnement, toutes les branches du premier conflit sont utilisées une et une seule fois lors du cycle de fonctionnement, formant chacune le début distinct d'une des trois gammes opératoires linéaires de A. Mais, en ce qui concerne le deuxième et dernier conflit, la branche liée au routage entier A_{22} est employée deux fois contre une seule pour la branche liée à A_{21} . Cette dernière branche peut être indifféremment regroupée dans n'importe quelle des trois gammes opératoires de la pièce A et chaque nouveau regroupement de cette branche avec l'une des trois gammes engendre une solution différente. Nous conservons bien entendu chacune des nouvelles solutions engendrées par la prise en compte des différents indéterminismes toujours en vue d'atteindre l'optimalité du problème posé de minimisation d'en-cours. Nous ne connaissons pas encore les implications créées par l'association de la branche liée à A_{21} avec celle liée à A_{11} ou A_{12} ou A_{13} sur le niveau d'en-cours.

Dans tous les cas, ce genre de problèmes est rencontré dès qu'il s'agit de « déplier » les flexibilités complexes où se trouvent des flexibilités enchaînées. En effet si, à partir d'un des degrés de liberté liés aux gammes opératoires, nous cherchons le nombre de chemins distincts générés, nous constatons que pour la flexibilité enchaînée cette valeur est égale au produit du nombre de branches des différents conflits composant cette flexibilité contrairement à celles imbriquées pour lesquelles le nombre de branches est égal à un terme près à la somme des nombres de branches des différents conflits. Nous le verrons plus en détail dans le chapitre suivant, cf. III.1.1.4.

Nous avons représenté le système après le « dépliage » de la flexibilité enchaînée sur la Figure II-5 avec le regroupement de la branche liée à A_{11} avec celle liée à A_{21} . Nous avons de plus commencé à linéariser les gammes opératoires quand cela était possible en dupliquant les opérations appartenant à différentes gammes, comme par exemple l'opération associée à la transition t_{C1} . Ainsi nous obtenons pour les produits de type A et C les 5 gammes linéaires recherchées. Il est obligatoire d'explicitier chaque gamme opératoire pour connaître exactement le contexte de production des différentes opérations qui vont composer la commande déterministe et aussi pour que chaque gamme représentée sur le modèle n'apparaisse exactement qu'une fois par cycle de fonctionnement.

II.2.2.2 Fin de la linéarisation des gammes opératoires

Les regroupements des opérations dans les gammes opératoires ont été déterminés. Il ne reste plus qu'à considérer les flexibilités de permutation pour résoudre les problèmes d'ordre au niveau des gammes opératoires pour obtenir enfin des gammes totalement linéaires. Pour l'exemple illustratif, nous ne connaissons pour le moment qu'un ordre partiel entre les trois premières opérations des gammes de fabrication des pièces de type B. Sur le modèle graphique de la Figure II-5, pour chaque gamme opératoire fabricant des pièces de type B, trois façons d'ordonnancer les trois premières opérations $\{t_{B1}, t_{B2}, t_{B3}\}$ sont explicitées :

(FP1) : $t_{B1}-t_{B3}-t_{B2}$ appartenant à la branche associée au routage entier B_{11} ,

(FP2) : $t_{B1}-t_{B2}-t_{B3}$ appartenant à la branche associée au routage entier B_{12} , et

(FP3) : $t_{B2}-t_{B1}-t_{B3}$ appartenant à la branche associée au routage entier B_{13} .

La dernière opération est identique sur les deux gammes (opération t_{B4}). Il existe donc 6 ensembles différents de 2 gammes opératoires produisant B (contre 9 si les dernières opérations avaient été différentes). Les 6 possibilités sont {FP1, FP1}, {FP2, FP2}, {FP3, FP3}, {FP3, FP2}, {FP3, FP1} et {FP1, FP2}. C'est cette dernière solution qui a été modélisée à la Figure II-9.

A ce niveau de la méthode, sur le modèle graphique du système, chaque opération modélisée est réalisée une et une seule fois au cours du cycle de fonctionnement. Le dispositif utilisé précédemment (cf. Figure II-4) servait à faire respecter en discret la réalisation des gammes opératoires suivant les ratios de production adéquats sur l'horizon de production qui a été fixé par la planification. Il faut maintenant affiner le dispositif afin d'interdire deux tirs consécutifs d'une même transition pour prendre la précaution de réaliser complètement les autres tâches une et une seule fois. Pour cela [OHL 95a] préconise l'utilisation du dispositif présenté à la Figure II-6, qui est la généralisation du modèle précédent. Au lieu d'appliquer le dispositif au (début de) lancement des gammes opératoires de chaque type de pièces, il est utilisé sur les tirs des transitions modélisant les opérations.

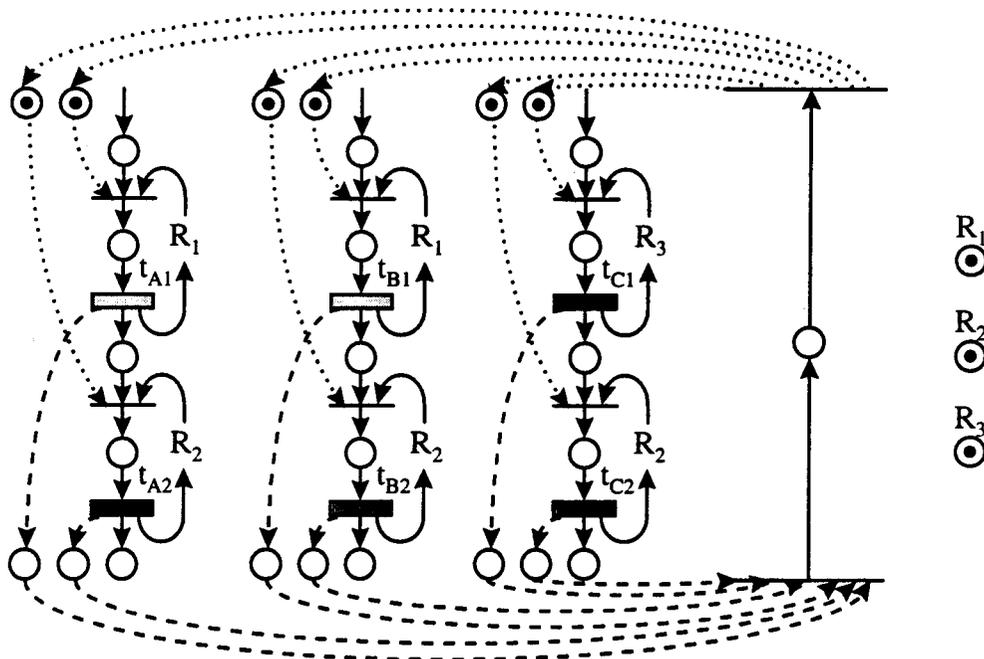


Figure II-6 : Modélisation du dispositif développé dans [OHL 95a] imposant le tir des transitions une et une seule fois au cours du cycle de production

Mais ce modèle reste à la fois lourd et incomplet. Il n'est utilisé que pour représenter les ordonnancements déterministes sans chevauchement entre les cycles de fonctionnement, c'est-à-dire pour lesquels toutes les opérations commencées durant un cycle se terminent au cours de ce même cycle. Ainsi l'ordonnancement de la Figure II-7 effectué sur l'horizon de

production caractérisé par les gammes opératoires linéaires définies à la Figure II-6 ne peut être représenté (ou tout au moins difficilement) à partir de ce modèle. Quelle que soit la date de début du cycle de fonctionnement, il existe toujours une opération en cours de réalisation. Il est donc impossible de garantir que les opérations soient effectuées entièrement à l'intérieur d'un même cycle.

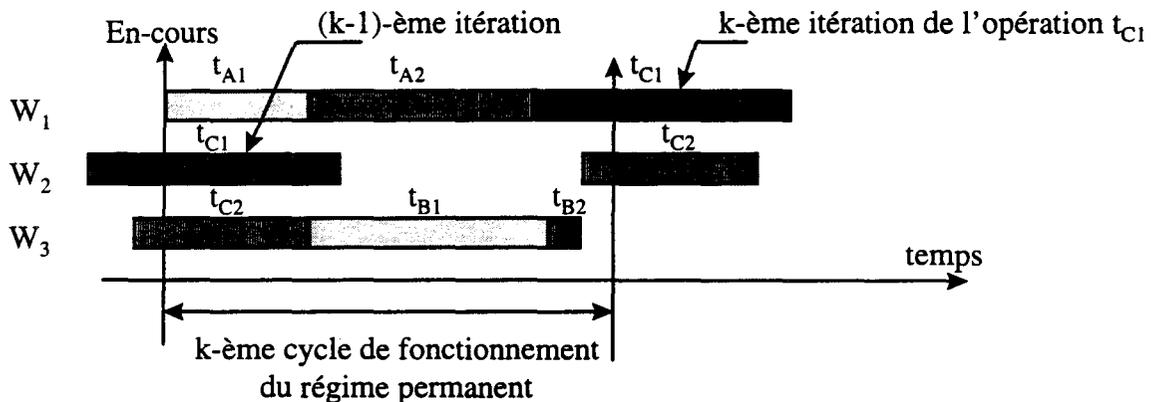


Figure II-7: Exemple d'ordonnancement représenté par un diagramme de Gantt ne pouvant être modélisé par le dispositif développé à la Figure II-6

Le modèle n'est pas adéquat car le dispositif introduit une contrainte de précédence entre le début de l'opération et sa fin. Or pour l'ordonnancement, cette hypothèse n'est pas obligatoire. Ainsi pour l'exemple de la Figure II-7 pendant le k -ème cycle de production du régime permanent un premier en-cours termine l'opération de l'itération précédente, $(k-1)$ -ème itération (W_2 termine la $(k-1)$ -ème opération de type t_{C1}), tandis que le deuxième en-cours commence l'opération de l'itération actuelle, k -ème itération (W_1 commence la k -ème opération de type t_{C1}).

Il est donc nécessaire de développer un dispositif permettant de prendre en compte les ordonnancements avec chevauchement de cycles. C'est ce qui a été fait avec le dispositif utilisé à la Figure II-8. Dans ce cas, il n'y a plus de contrainte de précédence entre le début et la fin d'une opération (en fait un type d'opération) au cours d'un cycle de fonctionnement. La seule contrainte réside dans l'obligation de tirer le début et la fin de chaque opération du modèle graphique (représentant la production au cours d'un cycle) une et une seule fois avant de recommencer une nouvelle itération du fonctionnement périodique.

Le seul problème est qu'il n'existe aucune garantie de l'accomplissement entier d'un type d'opération lors d'un cycle. Il est facile d'imaginer un exemple de commande périodique pour laquelle pendant un cycle sur deux un certain type d'opération n'est pas complètement réalisé. Le temps opératoire restant est réalisé durant le deuxième cycle. Ainsi la commande obtenue serait de type 2-périodique (voire k -périodique). Or d'après les hypothèses de travail, l'ordonnancement recherché est de type 1-périodique.

Le dispositif que nous avons développé dans cette partie permet donc de modéliser non seulement les commandes voulues mais aussi d'autres non conformes aux hypothèses. Pour y remédier, il devrait être nécessaire d'introduire de nouvelles contraintes au niveau du

dispositif graphique. Il faudrait décomposer une opération en tâches unitaires et imposer la contrainte de tir du début et de la fin de chaque tâche durant un cycle de fonctionnement. Ce qui alourdirait encore un modèle déjà bien chargé. C'est la raison pour laquelle nous conservons cette représentation. Elle a le mérite de modéliser graphiquement toutes les commandes que nous voulons obtenir, ce qui n'était pas le cas auparavant.

La Figure II-9 devrait théoriquement comporter ce dispositif. Cependant pour garder une certaine lisibilité au modèle graphique, la première boucle externe de respect en continu des ratios de production a été conservée. Le dispositif de respect du tir de chaque transition une et une seule fois lors d'un cycle de production est implicitement conservé.

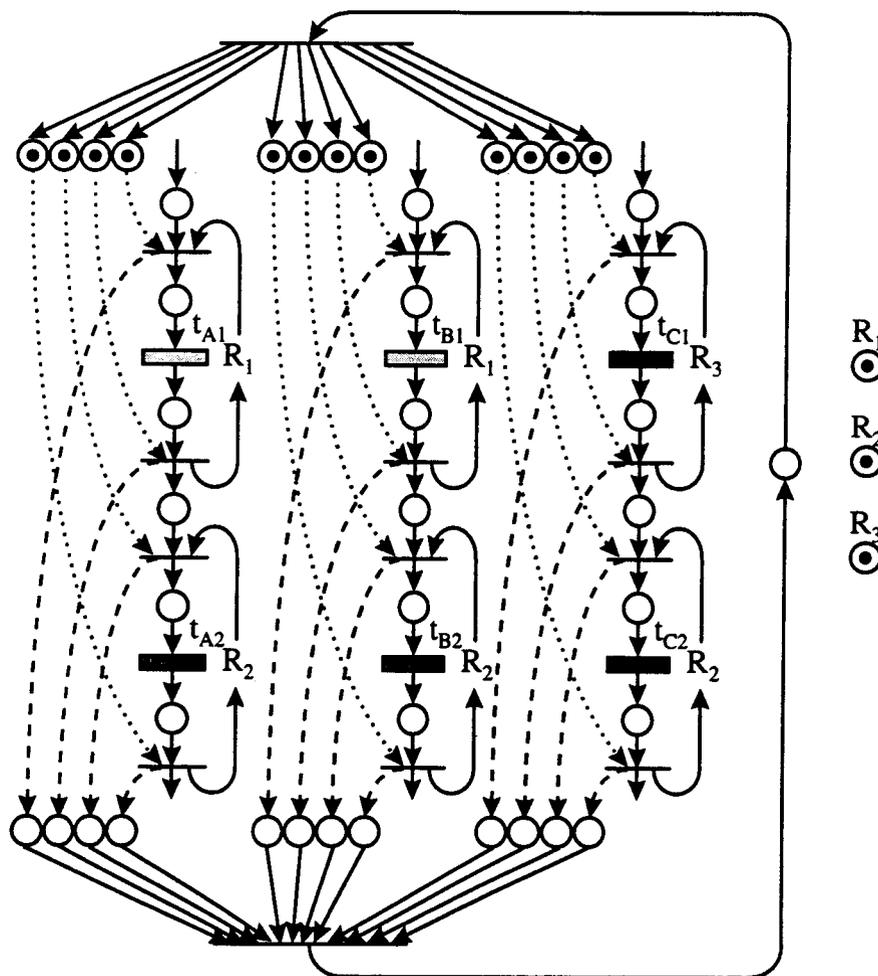


Figure II-8 : Nouveau dispositif proposé pour modéliser le respect en discret du tir de chaque transition une et une seule fois lors d'un cycle de production

Une dernière remarque doit être apportée concernant la modélisation graphique : lorsque le dispositif est introduit sur le modèle du système de production, il n'est alors plus nécessaire de conserver le bouclage externe. En effet le dispositif impose de lui-même le respect des ratios de production. Il est donc plus approprié de remplacer l'ancien bouclage par le nouveau système.

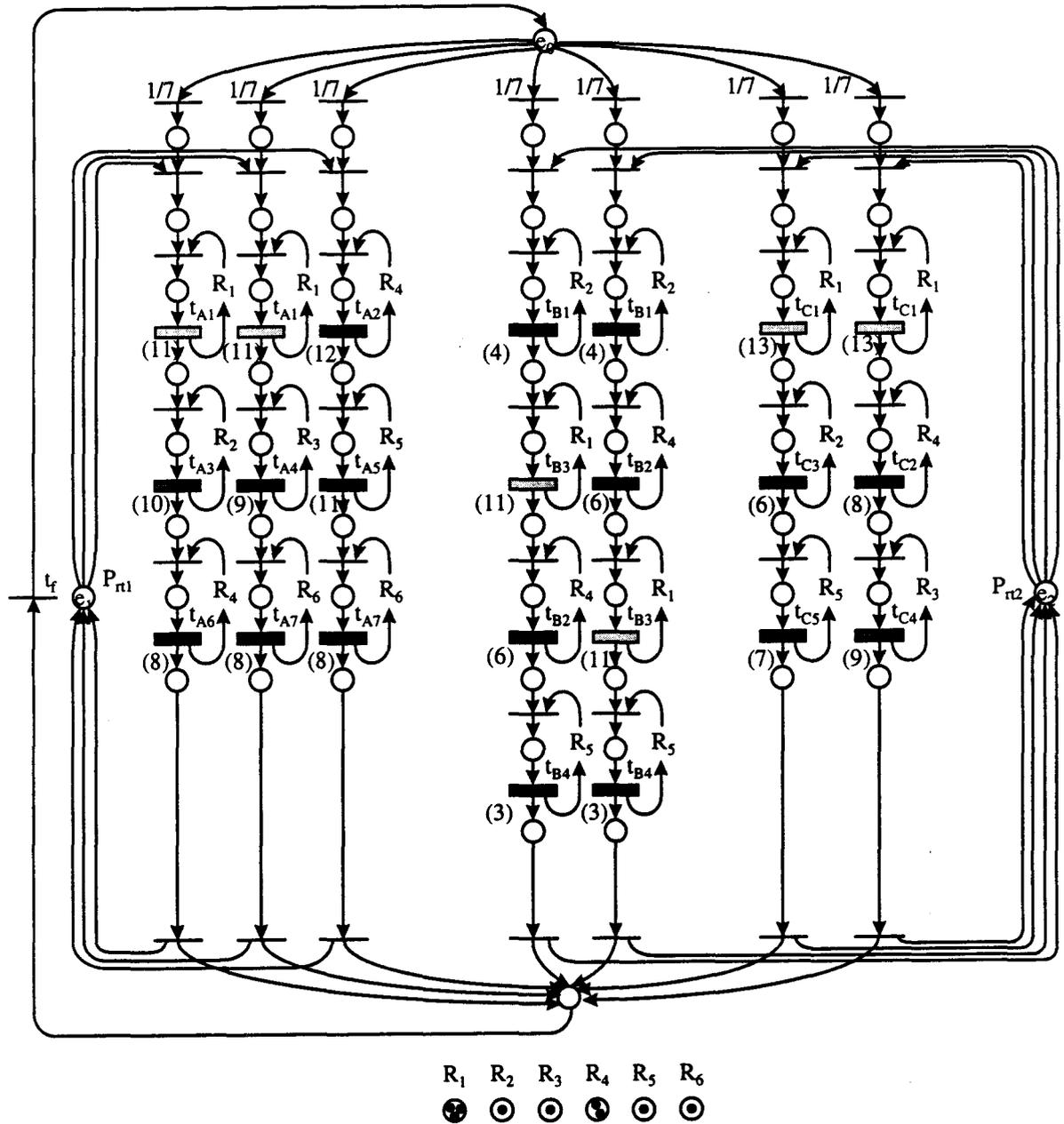


Figure II-9 : Modèle linéarisé du système de production

II.2.3 Détermination des charges de travail des machines de transformation

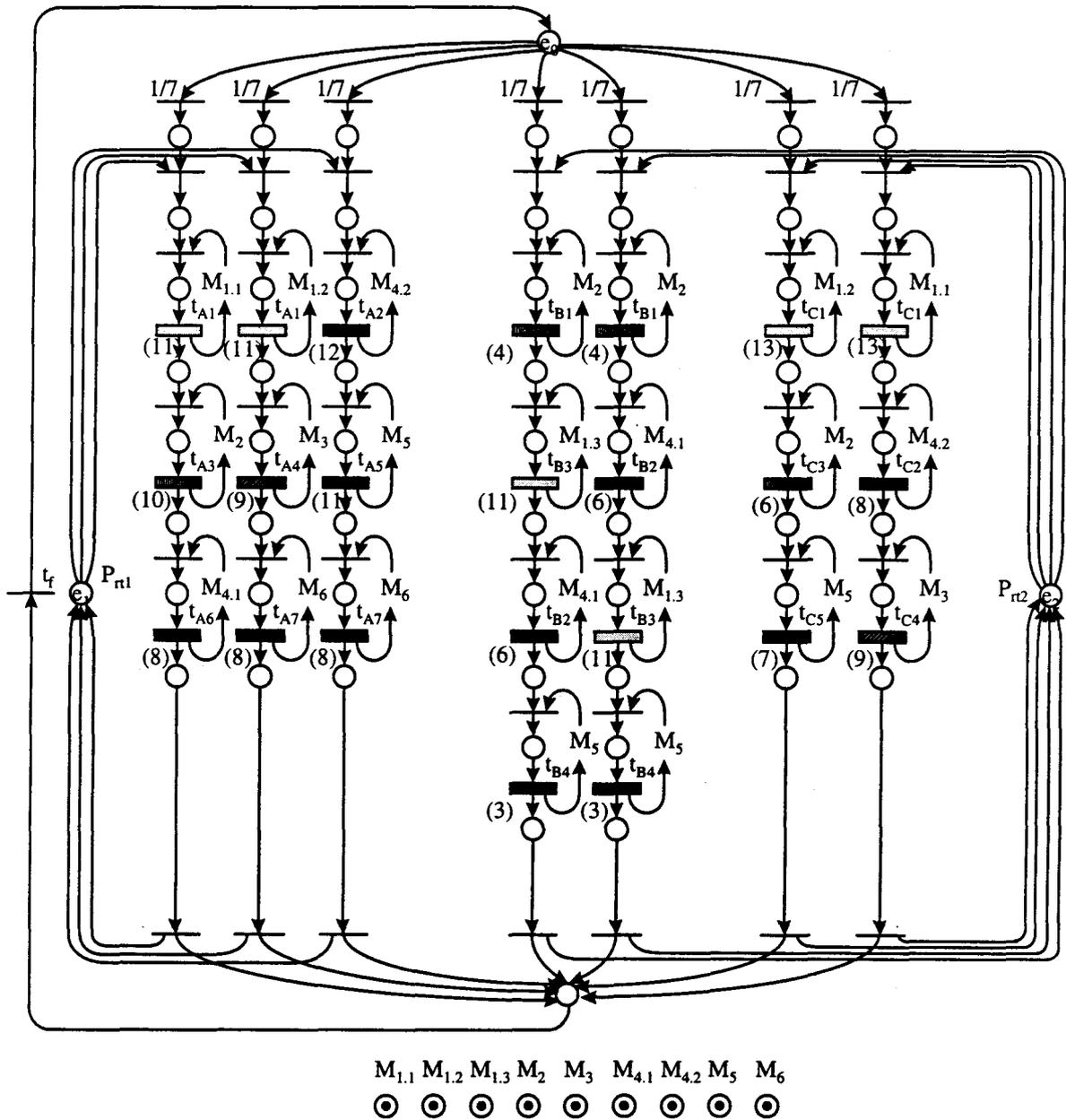


Figure II-10 : Modèle du système de production avec les charges de travail définies sur les différentes machines

Les charges des ressources de transformation ont été fixées au paragraphe II.2.1 par la résolution d'un système d'équations et d'inéquations linéaires en nombres entiers. Dans ces dernières, il a fallu prendre en compte la répartition discrète des charges des ressources multiples sur les machines identiques qui les composent afin de garantir le respect pour chaque machine et donc pour le système entier du temps de cycle optimal. D'ailleurs le

temps de cycle est souvent donné par la décomposition non équitable des charges de ces ressources multiples, ce qui justifie l'emploi de plusieurs machines identiques.

Cependant les indéterminismes de classe D_4 n'ont pas été entièrement résolus. En effet la résolution du système d'équations et d'inéquations a permis de montrer qu'il existe au moins une partition discrète de la charge associée aux types de ressources. Mais toutes les solutions possibles n'ont pas été étudiées. C'est ce que nous proposons de résoudre maintenant. Chaque partition ainsi obtenue engendre des contraintes d'exclusion entre les différentes opérations selon que ces dernières appartiennent ou non à la même machine de transformation. Ainsi au niveau de l'ordonnancement, les résultats ne seront pas équivalents. Il est donc nécessaire de conserver toutes les décompositions possibles.

Dans notre exemple, cette problématique se limite à la répartition de la charge associée aux deux ressources multiples R_1 et R_4 . Nous notons $CR(r)$ l'ensemble des opérations du cycle de fonctionnement affectées à la ressource R_r et $CM(r,m)$ l'ensemble des opérations affectées à la machine $M_{r,m}$. Rappelons qu'avec le choix de l'ensemble de routages admissibles α_4 , les charges de ces deux ressources ont été fixées et valent :

$$CR(1) = \{t_{A1}, t_{A1}, t_{B3}, t_{B3}, t_{C1}, t_{C1}\} \text{ et } CR(4) = \{t_{A2}, t_{A6}, t_{B2}, t_{B2}, t_{C2}\}$$

avec $\mu(t_{B2}) = 6$ u.t., $\mu(t_{A6}) = \mu(t_{C2}) = 8$ u.t., $\mu(t_{A1}) = \mu(t_{B3}) = 11$ u.t., $\mu(t_{A2}) = 12$ u.t. et $\mu(t_{C1}) = 13$ u.t. (cf. Figure II-9).

Plusieurs partitions conviennent pour respecter un temps de cycle $CT(RP_p)$ de 24 u.t. Nous verrons au chapitre suivant une méthode simple pour obtenir toutes les solutions. Celle que nous avons retenue et modélisée à la Figure II-10 est ainsi formée :

$$CM(1.1) = \{t_{A1}, t_{C1}\} \text{ et } CM(1.2) = \{t_{A1}, t_{C1}\} \text{ soit } Z_{1.1} = Z_{1.2} = 24 \leq CT(RP_p),$$

$$CM(1.3) = \{t_{B3}, t_{B3}\} \text{ soit } Z_{1.3} = 22 \leq CT(RP_p),$$

$$CM(4.1) = \{t_{A6}, t_{B2}, t_{B2}\} \text{ et } CM(4.2) = \{t_{A2}, t_{C2}\} \text{ soit } Z_{4.1} = Z_{4.2} = 20 \leq CT(RP_p).$$

II.2.4 Formation des Regroupements cycliques

A ce niveau de modélisation du système sous forme de Réseau de Petri, cf. Figure II-10, il subsiste encore un type d'indéterminismes à résoudre avant d'aborder le problème d'ordonnancement des opérations sur les machines ainsi que la minimisation de l'en-cours. Il s'agit des conflits liés au respect en discret des ratios entiers de routage (nouveau dispositif introduit au paragraphe II.2.2 ou bouclage externe). Nous ne connaissons pas l'ordre dans lequel les gammes opératoires linéaires sont réalisées au cours du cycle de production. Il faut ajouter à cela le problème similaire des bouclages (internes) liés aux ressources de transport. En effet les palettes qui viennent de décharger les produits finis repartent vides jusqu'au stock d'entrée de l'atelier flexible afin de charger une nouvelle pièce brute. Il n'existe pour l'instant que peu de contraintes sur le type de pièces que cette palette vide va transporter, et encore moins sur le type de gammes opératoires linéaires suivies par cette pièce brute.

La problématique ne se situe pas au niveau de la composition de ce stock avec la présence ou non des différents types de pièces à produire. Nous avons supposé, dans les hypothèses de travail, soit que le stock d'entrée dispose à tout moment de tous les types de pièces possibles, soit, qu'après détermination de la commande, l'ordonnancement des pièces brutes a été établi et doit être respecté par la gestion de l'approvisionnement de ce stock d'entrée. Dans les deux cas, une gestion rigoureuse des stocks doit être effectuée, quitte à modifier le séquençement des opérations au niveau de l'atelier de transformation précédent si nous travaillons à stock proche de zéro entre les différents ateliers.

Plusieurs solutions doivent être envisagées pour résoudre ces conflits.

- La production peut être réalisée en effectuant les gammes opératoires simultanément (en parallèle).
- A l'opposé, les gammes peuvent être accomplies les unes à la suite des autres (de manière séquentielle).
- En complément de ces deux cas extrêmes, il existe des solutions intermédiaires utilisant partiellement cette **parallélisation** des gammes ou cette **séquentialisation**.

Toutes ces possibilités, appelées **regroupements cycliques** en raison de la séquentialisation (totale, partielle, voire même inexistante) des gammes opératoires et du fonctionnement répétitif de la commande, sont à retenir puisqu'elles engendrent des ordonnancements différents en raison des contraintes de précédence générées ou non par cette séquentialisation des gammes opératoires. L'ordre de ces regroupements joue donc un rôle important. De plus une borne inférieure plus fine sur l'en-cours minimum nécessaire à l'ordonnancement pour respecter le temps de cycle imposé par la machine de transformation la plus critique est définie. En effet le choix de telle ou telle solution impose des contraintes sur l'en-cours qu'il ne sera malheureusement pas possible d'appréhender avant le développement complet de l'analyse de chaque cas, i.e. la détermination complète de la commande déterministe. Par contre cette nouvelle valeur de la borne inférieure nous servira à proposer un sens de parcours de l'espace de recherche constitué par la réunion de tous les regroupements cycliques obtenus au cours de cette étape, parcours permettant assez souvent d'éviter une recherche exhaustive.

II.2.4.1 Partition de l'ensemble des gammes opératoires

Dans cette première partie d'analyse, à ce stade de développement de la méthode, cf. Figure II-10, nous cherchons tous les regroupements possibles entre les gammes opératoires. La seule contrainte imposée par les hypothèses réside dans le respect pour chaque type de ressources de transport de n'accepter que les types de pièces que nous leur avons assignés. Il n'est donc pas possible de regrouper n'importe comment les gammes opératoires entre elles. Un regroupement entre deux gammes n'est donc possible que si leurs types de ressource de transport sont identiques.

Cette contrainte étant respectée, il est alors possible de regrouper n'importe quelle gamme opératoire avec n'importe quelle autre. Il s'agit alors d'effectuer toutes les partitions au sens mathématique du terme au sein de chaque ensemble G^h , $h \in \{1..H\}$, se composant chacun des gammes opératoires que seules les ressources de transport de type h peuvent accepter. Les solutions générales sont obtenues en combinant toutes ces partitions partielles en raison de l'absence d'interaction entre les sous-ensembles de gammes

opérateurs. Sur le dessin de la Figure II-11, nous avons représenté de façon schématique, sans utiliser les bouclages internes et externes du fonctionnement cyclique de la commande, une des partitions possibles avec les regroupements pour chaque ensemble G^h .

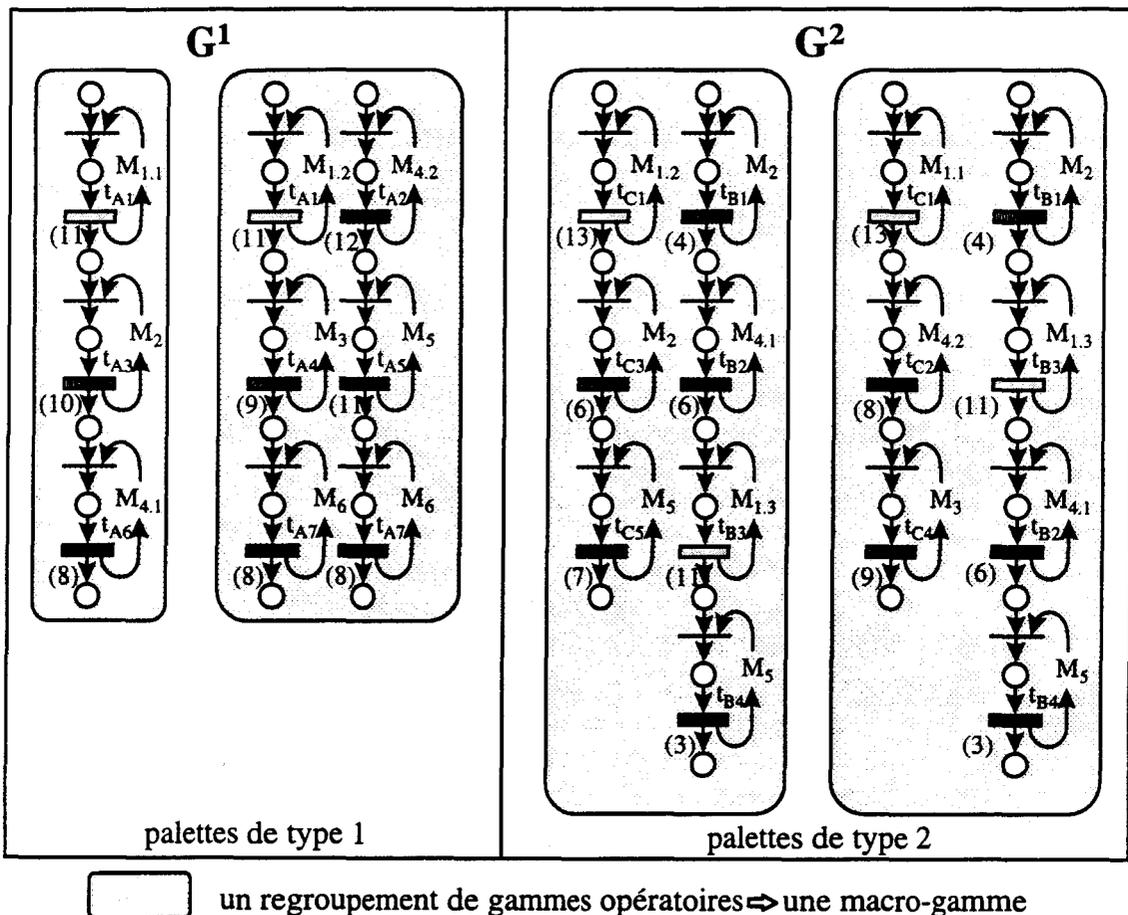


Figure II-11 : Une partition possible \mathcal{P} , de l'ensemble des gammes opératoires du cycle de production

Ces regroupements, qui partitionnent les ensembles $G^h : G^h = \bigcup_k G_k^h, h \in \{1..H\}$, forment de nouveaux T-semiflots du modèle Réseau de Petri déduit. Par la suite ils deviennent les **macro-gammes** du système avec la prise en compte de l'ordre entre les gammes puis les circuits de procédé du Graphe d'Evénements de la commande déterministe (cf. paragraphe II.3). La partition retenue pour l'exemple illustratif décrite à la Figure II-12 est l'une des plus simples, puisqu'elle consiste à regrouper dans un seul ensemble toutes les gammes possédant la même contrainte de ressources de transport (séquentialisation totale). A ce propos il faut signaler que la séquentialisation totale de gammes entraîne une production séquentielle de ces gammes par les en-cours ou palettes dédiées à ce regroupement lors du cycle de fonctionnement. A partir de deux ressources de transport, une production simultanée sur cette future macro-gamme peut être toutefois effectuée.

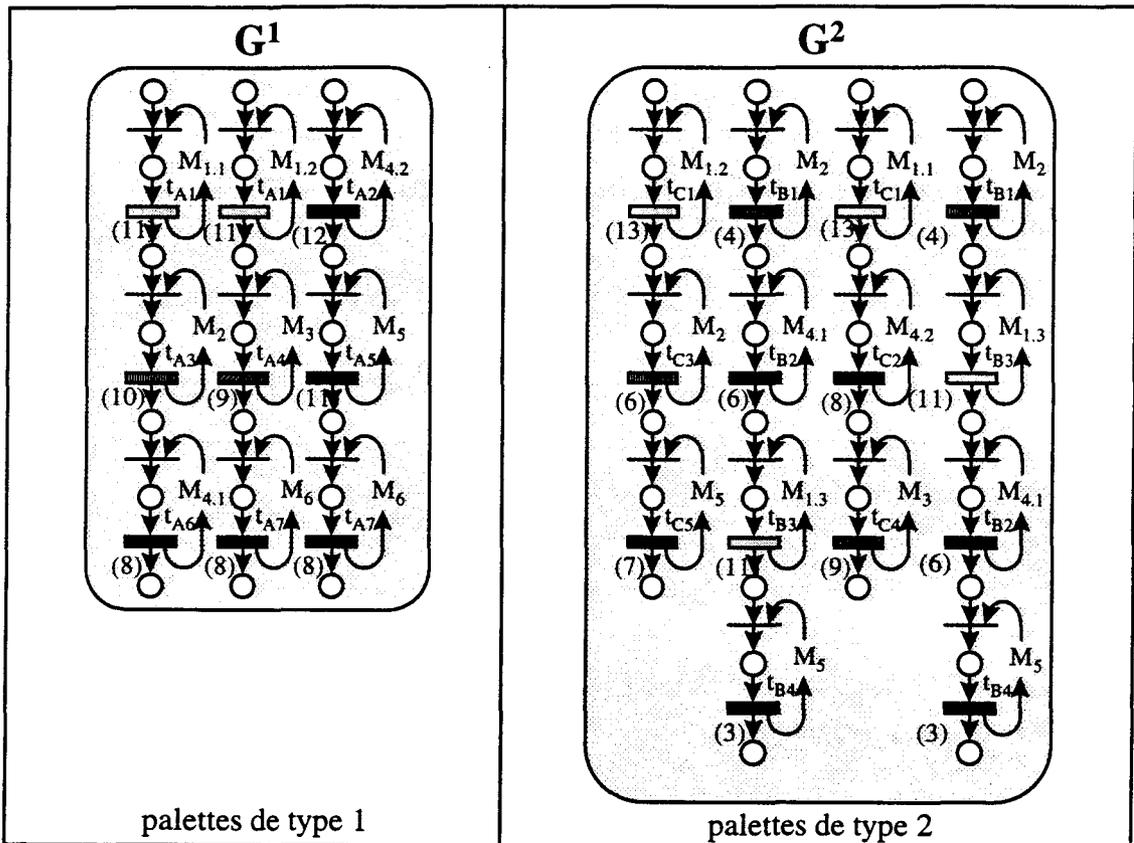


Figure II-12 : Partition \mathcal{P}_s , retenue pour l'exemple illustratif : Séquentialisation totale des gammes opératoires obtenues avec l'ensemble de routages α_4

A l'opposé, en ce qui concerne la parallélisation totale (un sous-ensemble pour une gamme opératoire), il faut rappeler que reboucler une gamme sur elle-même revient à dédier au moins une palette à la fabrication de cette gamme. *A priori* plus les gammes sont séparées, plus il est nécessaire de considérer de ressources de transport. C'est bien à cette constatation que nous arrivons avec le calcul d'une borne inférieure plus fine de l'en-cours nécessaire pour chaque partition ainsi obtenue. En effet la première borne calculée représente en fait le cas le plus favorable, c'est-à-dire la séquentialisation des gammes. Avec la parallélisation (partielle ou même totale) de celles-ci avec les partitions \mathcal{P}_j , plus de ressources de transport sont requises pour valider notre hypothèse selon laquelle l'en-cours ne constitue jamais un facteur limitatif pour un fonctionnement répétitif avec un temps de cycle $CT(RP_p)$.

Nous avons vu qu'avec les partitions sont apparus de nouveaux T-semiflots. Il serait plus exact de parler de pseudo-T-semiflots $G_k^h, \forall k, \forall h \in \{1..H\}$, puisqu'aucun ordre n'a encore été défini dans ces regroupements. Cependant ils en possèdent toutes les propriétés. Ainsi un temps de cycle $C_{G_k^h}$ associé à G_k^h peut être défini. Il est donné par le rapport entre la somme des durées des transitions qui le composent et le nombre virtuel de marques (ici

ce sont des ressources de transport ou des palettes) dans celui-ci : $C_{G_k^h} = \frac{\mu(G_k^h)}{M(G_k^h)}$. Comme nous voulons que l'en-cours ne soit pas une contrainte quant aux performances de productivité du système (nous supposons qu'il en existe suffisamment), G_k^h ne doit pas avoir un temps de cycle qui fixe la vitesse du système. Il faut donc que $C_{G_k^h} \leq CT(RP_p)$.

D'où la contrainte sur l'en-cours présent dans G_k^h devient $M(G_k^h) \geq \left[\frac{\mu(G_k^h)}{CT(RP_p)} \right]$.

A chaque partition \mathcal{P}_j , nous pouvons donc associer une nouvelle borne plus fine que la première : $\forall \mathcal{P}_j, B(\alpha_i, \mathcal{P}_j) \geq B^*(\alpha_i)$ avec $B(\alpha_i, \mathcal{P}_j) = \sum_{\forall h \in \{1..H\}} \left(\sum_{\forall k} \left[\frac{\mu(G_k^h)}{CT(RP_p)} \right] \right)$.

Soient \mathcal{P}_{st} , une partition issue de la séquentialisation totale des gammes et \mathcal{P}_{pt} , une partition issue de la parallélisation totale des gammes. Alors d'après les propriétés venant des opérateurs du type $\lceil \cdot \rceil$, i.e. $\lceil a + b \rceil \leq \lceil a \rceil + \lceil b \rceil$, nous pouvons définir un ordre partiel entre les différentes partitions :

$$\forall i, \forall j, B(\alpha_i, \mathcal{P}_{st}) \leq B(\alpha_i, \mathcal{P}_j) \leq B(\alpha_i, \mathcal{P}_{pt}).$$

Nous pouvons aussi définir $B_0 = B_0(RP_p) = \max_{\forall i, \forall j} (B(\alpha_i, \mathcal{P}_j))$ pour le régime permanent RP_p . Cette borne correspond toujours à une partition de type parallélisation totale d'un ensemble de routages admissibles.

Pour l'exemple illustratif, nous avons $B(\alpha_4, \mathcal{P}_{st}) = B^*(\alpha_4) = 9$ d'après la remarque sur les bornes pour les séquentialisations totales des gammes opératoires et $B_0 = 14$.

Cet avantage a priori de la séquentialisation sur la parallélisation, obtenu avec le calcul des bornes inférieures d'en-cours, se confirme le plus souvent avec la détermination du niveau d'en-cours nécessaire et suffisant à l'implantation de la commande cyclique. Cependant, du point de vue de la supervision, en phase d'exploitation, lors de défaillances du système, et notamment de défaillances complètes de machines de transformation ou de ressources du système de transport, les macro-gammes, pour lesquelles une opération de la séquence est affectée à l'une de ces machines, sont alors bloquées. Ainsi si nous voulons conserver la plus grande disponibilité pour le pilotage en cas de défaillances avant de lancer le calcul d'un nouvel ordonnancement, c'est-à-dire garder le plus grand nombre de gammes réalisables en mode dégradé, il est préférable de découpler le plus possible les gammes opératoires et donc de considérer des partitions de gammes de type parallélisation totale.

Les deux critères, i.e. minimisation de l'en-cours du système et disponibilité des gammes opératoires vis-à-vis de pannes, ne sont pas pour autant toujours contradictoires, comme nous le verrons au paragraphe II.2.5 avec le développement d'un cas particulier pour lequel ce sont les macro-gammes issues de la parallélisation totale des gammes

linéaires qui conduisent à un ordonnancement minimisant l'en-cours du système. Nous privilégions cependant dans notre approche la minimisation de l'en-cours. Nous ne cherchons pas ici de compromis entre ces deux critères.

II.2.4.2 Composition des macro-gammes, prise en compte de l'ordre à l'intérieur d'un même regroupement

Dans la partie précédente, nous avons partitionné les ensembles G^h , $h \in \{1..H\}$. Les sous-ensembles G_k^h obtenus ne sont pas encore des macro-gammes. Il reste encore à résoudre le problème de l'ordre dans lequel les gammes opératoires sont séquentialisées dans ces regroupements. De plus il faut tenir compte du fait que le fonctionnement de la production est cyclique : rebouclage des sous-ensembles pour modéliser le fait que les palettes utilisées ici sont dédiées à la fabrication de leur macro-gamme. Toutes les combinaisons ne sont donc pas à retenir car elles peuvent être équivalentes au sens cyclique du terme. Prenons le cas le plus simple avec deux gammes a et b regroupées dans le même sous-ensemble $G_k^h = \{GO_a, GO_b\}$. Il est a priori possible d'obtenir deux macro-gammes différentes : $M_{k_1}^h = (GO_a - GO_b)$ et $M_{k_2}^h = (GO_b - GO_a)$, cependant au vu de la modélisation graphique, il apparaît qu'elles sont équivalentes, cf. Figure II-13.

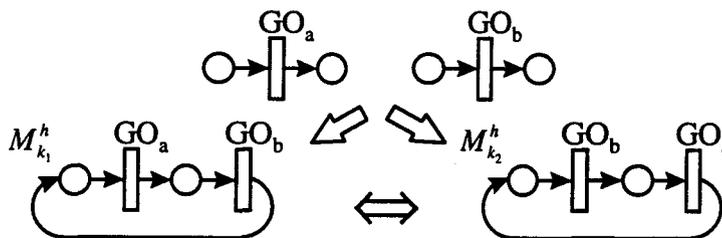


Figure II-13 : Macro-gamme obtenue avec le regroupement de deux gammes opératoires distinctes

Nous obtenons donc plusieurs macro-gammes différentes à partir du moment qu'un regroupement se compose soit de plus de trois types différents de gammes, soit de deux types différents, chacun apparaissant au moins deux fois, cf. Figure II-14 et Figure II-15.

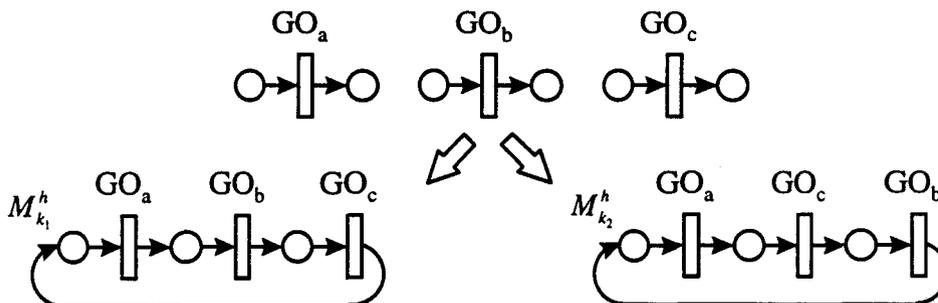


Figure II-14 : Macro-gammes obtenues à partir d'un regroupement comportant trois types différents de gammes opératoires

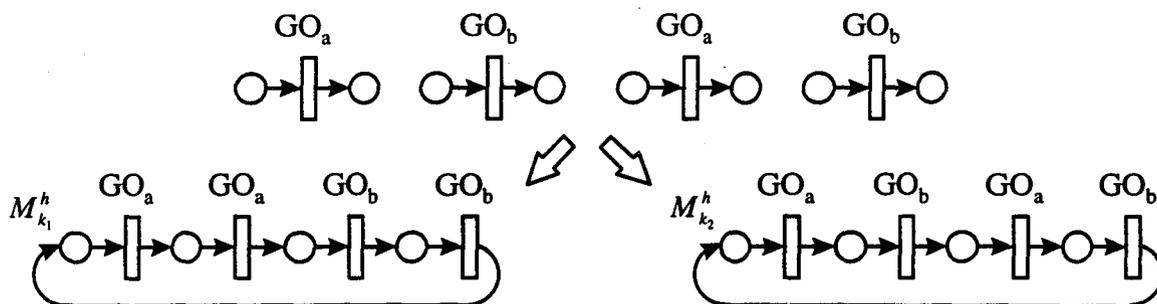


Figure II-15 : Macro-gammes obtenues à partir d'un regroupement de deux types différents de gammes opératoires, chacun étant représenté deux fois

L'association des macro-gammes d'un cycle de fonctionnement est appelée regroupement cyclique et est notée Rc_i . Ces derniers conservent les valeurs des bornes inférieures calculées précédemment puisque la prise en compte de l'ordre des gammes opératoires dans les différentes partitions n'intervient pas dans l'évaluation des bornes.

Afin d'illustrer cette étape, nous ne présentons ici que la solution qui a permis d'aboutir à l'une des commandes optimales. Pour les besoins de la méthode proposée, il faudra cependant conserver toutes les possibilités afin de garantir l'optimalité de notre approche.

La solution retenue, modélisée à la Figure II-16, présente l'ordre dans lequel les macro-gammes ont été engendrées.

Si nous référençons la gamme opératoire linéaire du type de pièces A passant par la branche associée au routage entier A_{11} à l'aide du raccourci GO_{A11} et de même pour GO_{A12} , GO_{A13} , GO_{B11} , GO_{B12} , GO_{C11} et GO_{C12} (¹), nous pouvons caractériser le regroupement cyclique choisi par :

$$Rc = \{M_1^1 = (GO_{A11} - GO_{A12} - GO_{A13}), M_1^2 = (GO_{B11} - GO_{B12} - GO_{C11} - GO_{C12})\}$$

avec la borne inférieure d'en-cours associée :

$$B(Rc) = B^*(RP_p) = 9.$$

¹ Toutes ces notations sont possibles puisque l'ensemble de routages admissibles α_4 considéré dans cet exemple illustratif associé à la résolution de la flexibilité de permutation retenue au paragraphe II.2.2.2 se caractérise par la valeur unique de ces routages entiers de production : $A_{11} = A_{12} = A_{13} = B_{11} = B_{12} = C_{11} = C_{12} = 1$. Etant donné leur unicité et leur présence une et une seule fois dans toutes les gammes linéaires, ces paramètres peuvent effectivement caractériser chacune des gammes opératoires du système.

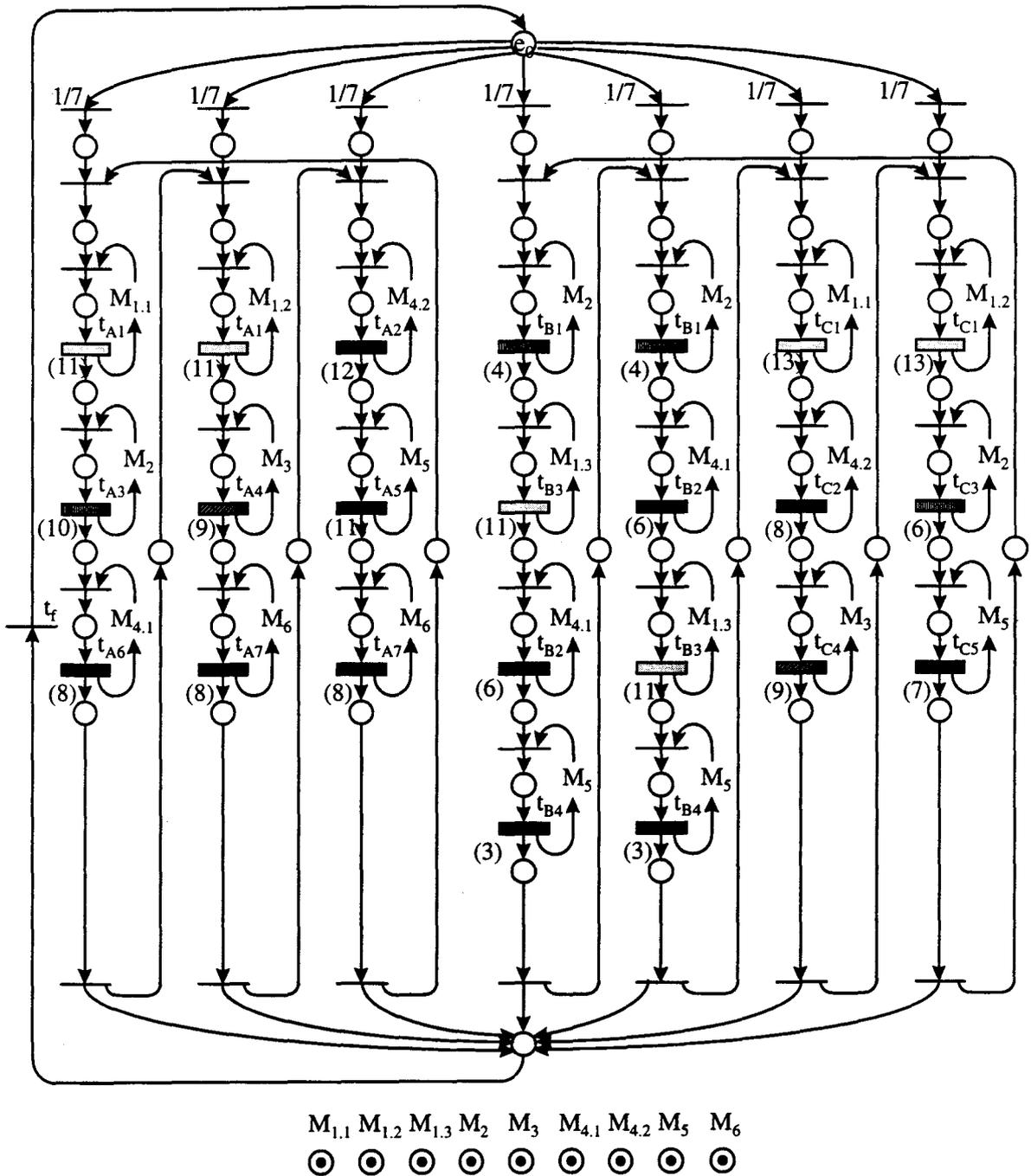


Figure II-16 : Modèle appelé ordonnançable du système de production sous le régime permanent RP_p

II.2.4.3 Prise en compte du système de transport

Avant de développer le sens de parcours de l'espace de recherche dans le but d'éviter une recherche exhaustive et de mener jusqu'à son terme l'analyse des différentes solutions obtenues dans les étapes précédentes avec la considération des différents types d'indéterminismes, nous proposons d'évoquer ici le système de transport et sa prise en compte dans le système modélisé par Réseau de Petri. En effet pour l'instant celui-ci n'a pas été envisagé dans le modèle. Nous avons émis cependant la contrainte qu'il devait

permettre de relier n'importe quelle ressource de transformation, stock d'entrée ou de sortie à n'importe quelle autre. Il faut conserver la forte connexité du graphe dans le routage. L'exemple le plus simple à considérer reste l'anneau flexible de transport avec mise en place de dérivation pour atteindre les machines. Sauf à considérer les problèmes de saturation, ce type de système de transport permet d'éviter les blocages structurels de l'atelier.

Une première étude a été réalisée par [OHL 95a]. Nous ne cherchons toujours pas à développer exhaustivement cette recherche qui ne reste encore pour l'instant qu'à l'état d'étude prospective et fait l'objet d'une thèse menée par M. Korbaa au sein du L.A.I.L. Cependant nous affinons certains points pour mieux cerner les problèmes d'intégration du système de transport dans notre méthode.

Nous dégageons deux moments dans l'approche présentée pour aborder les questions relatives au routage.

Une première solution consiste à ne pas en tenir compte en phase de conception pour éviter d'augmenter la complexité du problème d'ordonnancement, qui est au demeurant déjà NP-difficile, jusqu'à la détermination complète de la commande. C'est au moment de l'exploitation qu'il sera pris en compte, laissant à la supervision la tâche d'assurer la conduite en temps réel du système de routage en respectant au mieux la commande déterministe et prévisionnelle trouvée par notre méthode. Il s'agira notamment de trouver les chemins optimaux entre les ressources de transformation en fonction des défaillances du système de transport, cf. les travaux de thèse [TAW 95]. C'est l'objet du module de pilotage qui intègre une forte réactivité de la commande vis-à-vis de l'évolution asynchrone du système physique.

Cependant cela ne peut tout le temps suffire : l'ordonnancement ainsi trouvé exige implicitement des opérations de transport en temps masqué. Ceci n'est parfois réalisable que dans le cas extrême où le système de transport est infiniment rapide : il est alors effectivement possible de négliger les opérations de transfert inter-machines.

Même si, comme nous le supposons, nous travaillons avec des ateliers de transformation et non d'assemblage, les temps effectifs des opérations machines sont d'un ordre supérieur à ceux des opérations de transfert. Cependant les synchronismes stricts imposés par l'ordonnancement peuvent n'autoriser aucune insertion de durée de transport, aussi minime soit elle, sans remise en cause complète des performances de productivité du système. Il faut alors envisager d'augmenter l'en-cours présent dans l'atelier pour atteindre la vitesse de production recommandée par l'étape de planification afin d'éviter des retards de fabrication absolus ou engendrés après des défaillances de l'atelier. L'ajout d'en-cours permettra de remplir les stocks d'entrée des machines afin de répondre aux contraintes fortes de synchronicité entre les machines de transformation et les pièces à réaliser établies par l'ordonnancement. Afin de respecter le plus possible la commande prévisionnelle établie, l'insertion d'en-cours sera réalisée de telle sorte que l'ordonnancement des tâches sur les différentes machines ne sera pas remis en cause (cette condition est toujours réalisable). Dans ce cas, la recherche de l'en-cours optimal n'a plus beaucoup de sens. Il vaut mieux trouver un ordonnancement qui respecte le temps de cycle de l'horizon de travail et qui garde des marges entre les opérations de transformation afin d'y insérer si possible les bribes des opérations de transfert qui n'auront pu être effectuées en temps masqué.

L'autre possibilité consiste à intégrer cette composante du système à l'intérieur de notre approche. Cela ne peut s'effectuer qu'à la fin de cette étape. En effet nous cherchons une commande déterministe. Donc toutes les opérations doivent y être définitivement fixées, y compris ces « nouvelles » opérations de transfert. Mais pour cela il faut connaître au préalable l'ordre dans lequel les ressources de transport réalisent les gammes opératoires (et ainsi les opérations) afin de savoir quelles opérations de transport ont lieu durant le cycle de production. A ce stade de la méthode, tous les liens entre les opérations ont été définies avec les différents regroupements cycliques. Tous les transferts de machine à machine à travers les liens entre opérations de transformation sont donc maintenant parfaitement fixés. Il est ainsi possible d'introduire les opérations de transfert dans les gammes opératoires si le système de transport garantit la réalisation de ce type d'opérations en un temps fini. Comme nous cherchons un ordonnancement déterministe, les opérations de transfert que nous introduisons dans notre modèle doivent, de la même façon que les opérations de transformation, avoir des durées fixes représentant soit une valeur moyenne soit une borne supérieure. Comme dans toute estimation, toute simplification du processus réel provoquera quelques problèmes de synchronisation entre la commande calculée à partir du modèle de l'atelier et le comportement temporel effectif du système de production. Une surestimation systématique des durées de transport tendra à augmenter l'en-cours nécessaire ainsi que la taille des buffers des machines, tandis qu'une sous-estimation pourra dégrader les performances réelles de productivité atteintes par le système en phase d'exploitation.

Comme le dernier critère à optimiser de notre méthode consiste à minimiser l'en-cours du système, il est donc nécessaire de minimiser si possible les temps de transfert entre les différentes machines puisque plus les charges des gammes opératoires sont importantes, plus important est le niveau minimum d'en-cours nécessaire pour respecter le temps de cycle $CT(RP_p)$. Il faut donc trouver les chemins optimaux pour passer d'une ressource (ou plutôt ici machine) de transformation vers une autre ou tout autre lieu susceptible de stocker ou transformer les pièces circulant dans l'atelier rentrant en compte dans les gammes opératoires, donc en minimisant les temps de transfert.

Deux solutions sont alors possibles. Nous pouvons d'abord introduire dans le modèle une seule « opération » globale de transfert entre deux opérations de transformation de temps égal à celui calculé en trouvant le chemin optimal. Cette possibilité permet de conserver une relative simplicité du modèle considéré. Mais ceci suppose implicitement qu'il n'existera pas de conflit d'accès entre deux pièces à une partie quelconque du système de transport (pas d'attente au niveau du transfert). Sur le modèle Réseau de Petri, ces opérations apparaissent associées soit à aucune ressource soit à une ressource commune partagée de capacité infinie modélisant ainsi l'absence de conflit d'accès au système de transport. Cette hypothèse permet une fois de plus de justifier la nécessité de minimiser l'en-cours du système : plus le niveau d'en-cours sera faible, moins il existe de chance d'avoir un conflit d'accès à une des ressources du système de transport.

L'autre solution consiste à décomposer le système de transport en ressources élémentaires : ressources de capacité unitaire telle que des robots de transfert et ressources de capacité multiple telles que les tronçons (pour ce dernier type, il existe un conflit d'accès à l'entrée de cette ressource si celle-ci est gérée comme une file d'attente). « Dans le cadre du projet CASPAIM, la problématique relevant de la prise en compte de ces aspect

a été étudiée dans [AMA 94]. La notion de lieu physique a été différenciée selon qu'il s'agisse d'un :

- lieu mobile, désigné par T (ressource de transport),
- lieu actif, désigné par M (machine),
- lieu statique, désigné par S (stock).

Selon cette approche, il existe donc 9 types de transferts. Selon l'interprétation choisie pour caractériser le transport et les hypothèses formulées, plusieurs types de modèles peuvent être proposés agissant ainsi sur les durées de transfert.

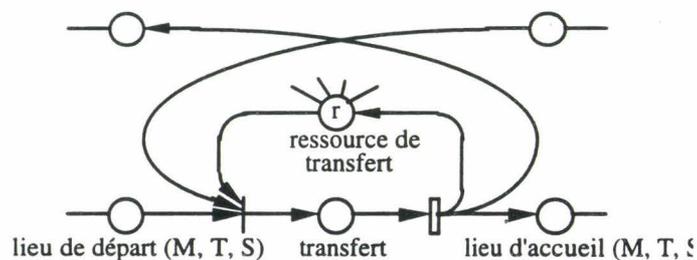


Figure II-17 : Exemple de modèle de transfert entre deux lieux physiques »

Ceci permettra de tenir compte, au moment de l'ordonnancement des opérations sur les machines et de la détermination de l'en-cours, d'éventuels conflits d'accès à l'une des ressources dus à sa capacité limitée et son occupation par une ou plusieurs autres pièces ou à la politique de gestion des files d'attente : p.e.p.s. (premier entré, premier sorti ou fifo), lifo, etc. Il faudra aussi tenir compte de l'imbrication possible de ces ressources pour certaines opérations. Il sera alors nécessaire de s'occuper des problèmes de blocages structurels éventuels. Nous n'aborderons pas cette classe de problèmes dans ce mémoire mais elle reste toutefois d'actualité.

L'un des désavantages majeurs de cette approche est qu'elle rend obsolètes toutes les valeurs précédentes des bornes inférieures d'en-cours nécessaires. En effet comme au niveau des gammes opératoires, de nouvelles opérations (de transfert) ont été ajoutées, les durées associées aux macro-gammes, égales à la somme des temps de toutes les opérations de toutes les gammes qui les composent, ont donc été augmentées. Les nouvelles valeurs des bornes inférieures de l'en-cours sont par conséquent plus grandes, donc plus précises.

A la lumière de cette étude prospective sur le système de transport, il apparaît que la commande d'un système de production ne peut être totalement déterminée au niveau de l'ordonnancement prévisionnel. Nous vérifions ici l'utilité d'un module de pilotage en aval de la détermination de la commande prévisionnelle pour mener à bien les opérations de transfert entre machines de transformation. Néanmoins cela n'empêche pas, au niveau de l'élaboration de la commande, d'extraire les chemins optimaux de transfert. Le fonctionnement ainsi trouvé représente le cas idéal qu'il faut a priori suivre en mode normal et sert, dans tous les cas, de référence d'optimalité.

Par souci de lisibilité, nous n'intégrerons pas dans l'exemple illustratif la composante système de transport de notre atelier flexible. Une nouvelle opération (au moins) devrait

être créée entre deux opérations de transformation afin de modéliser le transfert entre les machines. Le système multiplierait donc par deux le nombre d'opérations à modéliser, mais aussi à ordonnancer. Cela évite par la même occasion de modifier les valeurs déjà calculées des bornes inférieures du niveau minimal d'en-cours nécessaire pour respecter le temps de cycle $CT(RP_p)$.

II.2.5 Développement d'une approche évitant la recherche exhaustive

II.2.5.1 Le double problème de la minimisation de l'en-cours pour un regroupement cyclique donné et pour un régime permanent donné caractérisé par son horizon $E(RP_p)$

Nous sommes confrontés à un double problème.

En premier lieu, nous devons rechercher pour un regroupement cyclique donné Rc_i l'en-cours minimum nécessaire et suffisant pour respecter le temps de cycle. Nous disposons au départ d'une borne inférieure donnée par $B(Rc_i)$.

En second lieu, il reste à résoudre le problème général de recherche du regroupement cyclique optimal, c'est-à-dire celui qui minimise l'en-cours pour le régime permanent considéré. Nous rappelons que ce régime a été calculé et fixé par l'étape antérieure de planification fine. Il est caractérisé par son horizon cyclique de production, son temps de cycle associé et maintenant par sa borne inférieure d'en-cours nécessaire associée $B^* = B^*(RP_p)$ calculée dans la phase de détermination des différents routages possibles liés à ce régime permanent répétitif.

Pour le premier problème, nous ne disposons que d'une borne inférieure du critère d'optimisation pour chaque regroupement cyclique Rc_i . La valeur optimale du nombre d'en-cours nécessaire et suffisant ne peut être obtenue qu'à la fin de l'analyse complète du système associé à Rc_i (résolution de tous les indéterminismes du système). Ceci est vrai en théorie. Cependant le problème, bien que grandement simplifié par la levée des nombreux indéterminismes considérés lors des étapes précédentes, reste NP-difficile.

Pour pallier cette complexité, nous avons développé une heuristique qui garantit l'obtention d'une solution mais pas nécessairement l'optimalité de l'ordonnancement trouvé, comme nous le verrons dans la prochaine section. Le seul moyen théorique sûr mis à notre disposition pour affirmer que la solution est optimale est l'éventuelle atteignabilité de la borne inférieure du nombre d'en-cours ($B(Rc_i)$), cf. paragraphe II.3.4 pour de plus amples explications. Malheureusement la valeur de l'en-cours optimal ne coïncide pas tout le temps avec sa borne inférieure. Il existe donc des cas pour lesquels la borne inférieure n'est jamais atteignable par un ordonnancement. Nous pouvons cependant affirmer que, dans une grande partie des cas que nous avons étudiés jusqu'ici, l'optimum est atteint avec l'application de cette heuristique même s'il ne correspond pas toujours à la valeur de la borne inférieure.

En ce qui concerne le problème de recherche de l'ordonnancement optimal du régime permanent répétitif considéré, les bornes calculées pour chaque ensemble de macro-gammes n'ont donc en général qu'un rôle d'indicateur. Nous ne pouvons à partir de la comparaison des bornes inférieures de chaque regroupement cyclique déterminer a priori

lequel donnera la meilleure solution après la dernière étape d'ordonnancement. Par conséquent la seule approche possible consiste à effectuer la recherche exhaustive de toutes les solutions possibles. C'est la raison pour laquelle il est obligatoire de conserver en théorie tous les regroupements possibles, même si le problème devient combinatoire. L'optimalité théorique du problème en dépend. Il faudrait donc rechercher pour chaque regroupement cyclique l'ordonnancement optimal. Puis il faudrait comparer les solutions entre elles pour déterminer celle qui minimise l'en-cours.

II.2.5.2 Présentation du parcours de l'ensemble des regroupements cycliques évitant la recherche exhaustive

Cette approche reste très théorique puisqu'elle suppose implicitement le développement d'un algorithme exact de recherche d'un ordonnancement minimisant l'en-cours pour un problème demeurant NP-difficile et l'application systématique de celui-ci pour chaque regroupement cyclique. Il est évidemment intéressant de limiter si possible cette recherche exhaustive. Pour cela considérons les différentes caractéristiques du système. La seule borne inférieure du problème dont nous disposons est $B^* = B^*(RP_p) = \min_{\forall i} (B^*(\alpha_i))$. En outre une borne inférieure plus fine de l'en-cours nécessaire pour chaque ensemble de macro-gammes a été définie : $B(Rc_i)$. C'est à partir de ces deux indicateurs que nous avons développé une approche de parcours de l'espace de recherche.

Cette approche permet dans certains cas de limiter la recherche d'ordonnancement à seulement une partie des regroupements cycliques obtenus dans les étapes précédentes. Elle consiste à parcourir les ensembles de macro-gammes selon la valeur croissante de leur borne inférieure fine d'en-cours. Ainsi, si durant le parcours une solution est trouvée telle que l'en-cours calculé soit inférieur ou égal à la valeur de la prochaine borne, il est certain qu'il n'est pas nécessaire de parcourir les autres regroupements cycliques associés aux bornes restant à examiner. En effet tous les ordonnancements issus de ces solutions peuvent au mieux être obtenus avec un en-cours égal à celui qui vient d'être trouvé. Il faut tout de même étudier les regroupements cycliques associés à cette même borne au cas où il existerait une meilleure solution. Dans le cas particulier où un ensemble de macro-gammes fournit un ordonnancement avec un en-cours égal à sa borne inférieure, il n'est plus alors nécessaire de poursuivre la recherche puisqu'une des meilleures solutions a été trouvée. Un algorithme associé à cette méthode peut ainsi être proposé :

- Initialiser $Rc_{\text{restant}} = \{Rc_i, \forall i\}$ /* Rc_{restant} représente l'espace de recherche des regroupements cycliques qui n'ont pas encore été examinés, espace initialisé à tous les regroupements trouvés avec notre méthode */
- Initialiser $Rc_{\text{déjà utilisé}} = \emptyset$ /* $Rc_{\text{déjà utilisé}}$ représente l'espace de recherche déjà parcouru, initialisé à l'ensemble vide */
- Initialiser $WIP = \infty$ /* ∞ est le plus grand entier possible */
- Initialiser $B_{\text{courant}} = B^*$ /* B_{courant} représente la borne associée au sous-espace de recherche en cours d'étude, initialisé à la plus petite borne B^* puisque le parcours de l'espace de recherche s'effectue selon les valeurs croissantes de cette borne */

- Initialiser $Rc(B_{\text{courant}}) = \{Rc_i \mid B(Rc_i) = B_{\text{courant}}\}$ /* $Rc(B_{\text{courant}})$ représente le sous-espace de recherche actuellement à l'étude. Il se compose de tous les regroupements cycliques associés à la borne courante B_{courant} */
- **Répéter**
 - | • **Pour(1)** tous les $Rc_i \in Rc(B_{\text{courant}})$, Faire
 - | | • Rechercher l'ordonnancement lié à Rc_i minimisant l'en-cours et retourner la valeur $WIP(Rc_i)$ du minimum d'en-cours obtenu.
 - | | • Si $WIP(Rc_i) < WIP$ alors $WIP = WIP(Rc_i)$
 - | | • Si $WIP(Rc_i) = B_{\text{courant}}$, alors Sortir de **Pour(1)** et de **Répéter**
 - | | /* Première condition de sortie : si un des ordonnancements trouvés a utilisé un en-cours égal à sa borne, c'est l'une des meilleures solutions. La recherche est donc terminée */
 - | • **Fin Pour(1)**
 - | • $Rc_{\text{déjà utilisé}} = Rc_{\text{déjà utilisé}} \cup Rc(B_{\text{courant}})$
 - | • $Rc_{\text{restant}} = Rc_{\text{restant}} \setminus Rc(B_{\text{courant}})$
 - | • Si $Rc_{\text{restant}} \neq \emptyset$, alors $B_{\text{courant}} = \min_{\forall Rc_i \in Rc_{\text{restant}}} (B(Rc_i))$
- **Tant que** $(WIP > B_{\text{courant}})$ ou $(Rc_{\text{restant}} \neq \emptyset)$.

/ Autres conditions de sortie de la boucle principale ou de fin de recherche de la solution optimale : soit l'espace de recherche restant à étudier ne peut contenir une meilleure solution à celle déjà trouvée ($WIP \leq B$), soit il a été nécessaire d'effectuer le parcours exhaustif de l'espace des regroupements cycliques parce que la meilleure solution utilise un nombre de ressources de transport supérieur à la moins bonne de toutes les bornes associées aux différents ensembles de macro-gammes ($Rc_{\text{restant}} = \emptyset$). Dans tous les cas, WIP est la variable qui contient à la fin de l'algorithme le nombre minimum d'en-cours nécessaire et suffisant à l'élaboration de la commande du régime permanent cyclique considéré ici. */*

- Retourner l'ensemble des solutions = $\{Rc_i \mid WIP(Rc_i) = WIP\}$ /* optionnel */

Il faut préciser que l'approche proposée pour parcourir l'espace de recherche des regroupements cycliques n'est nullement restrictive. Elle ne supprime aucune solution, ce qui garantit l'optimalité de la recherche, si bien entendu la minimisation de l'en-cours pour

un regroupement donné est respectée (c'est-à-dire dans les limites de garantie d'optimalité de l'algorithme d'ordonnancement utilisé).

Puisque le sens de parcours proposé s'effectue suivant les valeurs croissantes de la borne inférieure de l'en-cours, au vu du calcul de cette borne, nous déduisons que la recherche commence par les solutions issues des ensembles de routages fournissant au système les plus faibles charges de travail des regroupements. Dans un deuxième temps, parmi tous les regroupements cycliques issus d'un même ensemble de routages, il traite d'abord les partitions de type séquentialisation par rapport à celles de type parallélisation (ordre partiel entre les regroupements cycliques défini au § II.2.4.1). Nous pouvons représenter ce concept dans le schéma récapitulatif de la Figure II-18.

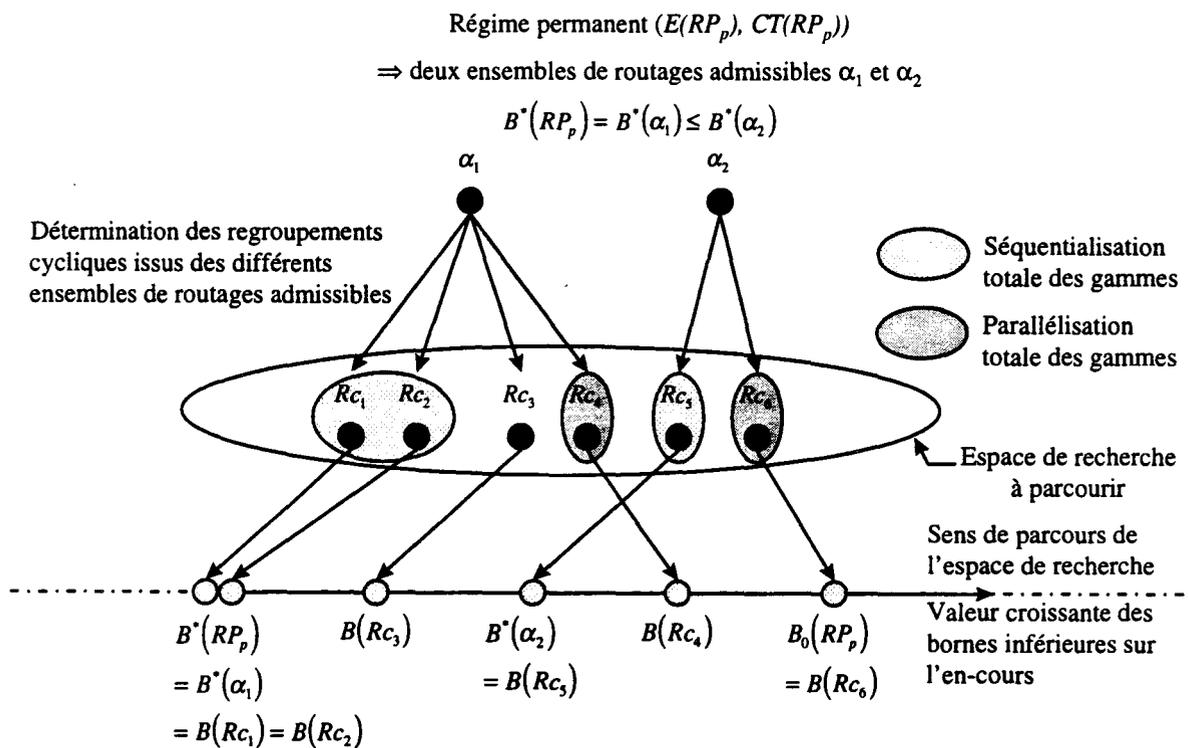


Figure II-18 : Sens de parcours de l'espace de recherche en fonction des valeurs de la borne associée aux routages admissibles et aux regroupements de gammes opératoires

Néanmoins il peut être nécessaire de parcourir dans certains cas tout l'espace de recherche si le minimum d'en-cours à obtenir finalement est supérieur à la plus mauvaise borne calculée (égale à B_0) associée à un ensemble de macro-gammes. D'après les exemples développés, il est assez rare d'étudier tout l'espace des regroupements cycliques pour trouver la meilleure solution. Cependant nous affirmons dans la proposition qui suit que le meilleur ordonnancement peut même provenir du cas le plus défavorable, au sens valeur de la borne associée, des parallélisations totales des gammes.

Proposition (II-1): *La meilleure solution pour le problème d'ordonnancement considéré, i.e. la recherche d'un ordonnancement respectant un horizon de production et*

son temps (optimal) de cycle associé avec comme objectif la minimisation de l'en-cours, peut être issue du regroupement cyclique le plus défavorable des gammes en terme de borne inférieure d'en-cours nécessaire.

Démonstration : par l'absurde.

Hypothèse : le regroupement cyclique associé à la plus grande borne (B_0) inférieure de l'en-cours nécessaire ne peut jamais donner le meilleur ordonnancement vis-à-vis de la minimisation du nombre de ressources de transport.

Soit l'exemple de système de production modélisé avec les FRT-nets à la Figure II-19 à l'aide de l'outil Réseau de Petri ⁽¹⁾. Ce système se caractérise par deux gammes linéaires fixées : GO_A , GO_B (liées respectivement aux produits de type A et B) à réaliser avec les ratios associés identiques et égaux à 0,5. Nous supposons que la fabrication doit être effectuée sur deux ressources simples (machines M_1 et M_2). De plus les deux types de pièces à réaliser peuvent être transportés par le même type de ressource de transport (par exemple des palettes universelles). Nous ne considérerons ni le système de transport ni les opérations de transfert pour préserver la simplicité du problème.

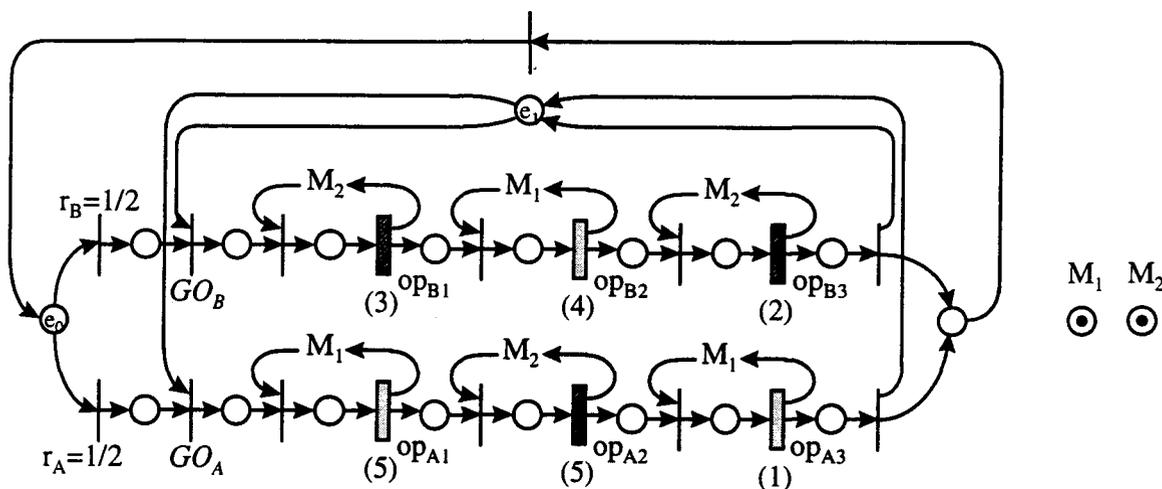


Figure II-19 : Modèle FRT-nets de l'exemple illustrant l'intérêt de la recherche exhaustive

Une analyse de flux du système nous indique que les charges de travail sont équitablement réparties sur les deux machines de transformation. Les machines M_1 et M_2 sont donc toutes les deux critiques. De plus la restriction du problème, du point de vue taille de l'ensemble des produits à réaliser lors d'un cycle, à l'horizon minimal E_1 respectant les ratios de production $r_A = r_B = \frac{1}{2}$: $E_1 = \{A, B\}$ ne réduit en rien les performances du système en terme de productivité. C'est donc sur cet horizon que nous travaillons. Le temps de cycle minimal C_1 associé à E_1 est $C_1 = C_1^* = 10$ u.t.

¹ Il s'agit d'un cas d'école illustrant la véracité de la proposition formulée ci-dessus.

Comme le type de palettes utilisé est universel, nous pouvons envisager plusieurs partitions de gammes créant ainsi pour les palettes, qui sont dédiées à ces regroupements, des contraintes de production et pour les gammes, des contraintes de précedence entre opérations appartenant à des gammes opératoires différentes. Pour l'exemple les deux seules possibilités de regroupement cyclique sont $Rc_{st} = \{M_1^1 = (GO_A - GO_B)\}$, correspondant à une séquentialisation totale des gammes et $Rc_{pt} = \{M_1^1 = (GO_A), M_2^1 = (GO_B)\}$, correspondant à une parallélisation totale de ces deux mêmes gammes.

D'après la démarche que nous avons développée, nous pouvons associer une borne sur l'en-cours minimum à chaque regroupement cyclique obtenu (en fait dès l'étape de partition des gammes opératoires, ainsi tous les regroupements cycliques obtenus à partir d'une partition donnée possèdent la même borne). Nous retrouvons bien dans ce cas particulier l'ordre partiel défini au § II.2.4.1 sur les regroupements cycliques :

$$B(Rc_{st}) = B^* = \left\lceil \frac{(5+5+1+3+4+2)}{10} \right\rceil = 2 \text{ et}$$

$$B(Rc_{pt}) = B_0 = \left\lceil \frac{(5+5+1)}{10} \right\rceil + \left\lceil \frac{(3+4+2)}{10} \right\rceil = 3 \text{ avec } B(Rc_{st}) = 2 \leq B(Rc_{pt}) = 3.$$

L'espace de recherche de l'exemple est donc constitué de deux éléments : $Rc_{restant} = \{Rc_{st}, Rc_{pt}\}$. D'après le sens de parcours de l'ensemble des solutions proposé au début de ce paragraphe, il faut commencer la recherche de l'ordonnancement qui minimise l'en-cours avec le regroupement cyclique associé à la plus petite borne inférieure d'en-cours, donc avec Rc_{st} ($B(Rc_{st}) = 2$), puisque c'est le regroupement cyclique issu de la séquentialisation totale des gammes opératoires formées à partir de l'ensemble des routages admissibles associé à la plus petite borne inférieure. Le parcours se termine donc logiquement par l'analyse complète du regroupement cyclique Rc_{pt} ($B(Rc_{pt}) = 3$) issu de la parallélisation totale des gammes opératoires associée à la plus grande borne inférieure.

Pour revenir à notre démonstration, nous montrons qu'avec le regroupement Rc_{st} et sa borne associée $B(Rc_{st}) = 2$, les ordonnancements optimaux calculés ont un en-cours égal à 4⁽¹⁾. Ce qui représente bien la limite fixée :

$$WIP = \min_{\forall Rc_i \in Rc_{d\grave{e}j\grave{a} \text{ utilis\acute{e}}} (WIP(Rc_i)) = WIP(Rc_{st}) = 4 > \min_{\forall Rc_i \in Rc_{restant}} (B(Rc_i)) = B(Rc_{pt}) = 3$$

Finalement en considérant le regroupement cyclique suivant (Rc_{pt}), i.e. le dernier, nous montrons que l'ordonnancement optimal issu de Rc_{pt} a un niveau d'en-cours égal à sa

¹ Pour des raisons de simplicité, nous n'avons pas explicité dans ce mémoire les différentes démonstrations se rapportant aux calculs des ordonnancements optimaux pour les différents regroupements cycliques trouvés Rc_{st} et Rc_{pt} . Toutefois nous renvoyons le lecteur à l'annexe II où ce cas particulier est complètement développé.

borne inférieure : $WIP(Rc_{pt}) = B(Rc_{pt}) = 3$, cf. Figure II-20. Il représente aussi la commande optimale du système de production sous un régime permanent caractérisé par l'horizon de production $E_1 = \{A, B\}$ et son temps de cycle associé $C_1 = 10$ u.t.

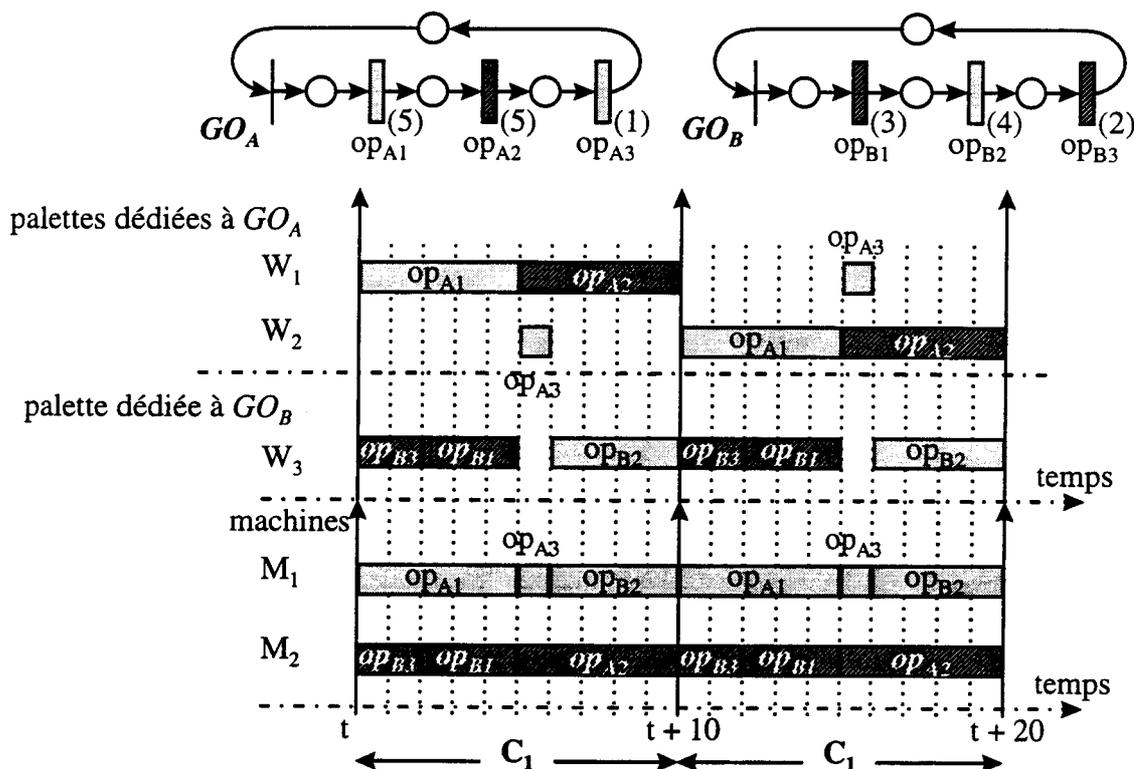


Figure II-20 : Ordonnement optimal trouvé avec Rc_{pt} : niveau d'en-cours égal à 3

Sur l'exemple que nous considérons ici, nous venons de démontrer que non seulement il est nécessaire de parcourir tout l'espace de recherche car le niveau d'en-cours optimal est supérieur ou égal à la plus grande valeur des bornes inférieures calculées : $B_0 = \max_{vi} (B(Rc_i))$, mais aussi que le meilleur ordonnancement possible au sens minimisation de l'en-cours est obtenu avec le regroupement associé à la plus mauvaise borne, donc correspondant à une parallélisation totale des gammes opératoires.

L'hypothèse de départ est donc fautive et la proposition est ainsi démontrée. ■

Nous venons donc de développer un exemple particulier pour lequel notre parcours de l'espace de recherche ne permet aucun gain par rapport à la recherche exhaustive. C'est pour cette raison que nous ne pouvons pas montrer de manière théorique l'apport de ce parcours, bien qu'en pratique, les gains soient en général significatifs : la recherche sur les regroupements cycliques associés à la plus petite borne inférieure d'en-cours suffit le plus souvent pour trouver la commande qui minimise l'en-cours.

L'exemple considéré a été présenté dans le but d'illustrer cette première phase de l'étape d'élaboration de la commande, notamment l'intérêt de conserver en mémoire l'ensemble des regroupements cycliques. L'une des explications possibles concernant l'obtention d'une solution qui minimise l'en-cours avec l'ensemble de macro-gammes le plus défavorable vis-à-vis de la borne inférieure associée est l'apparition de contraintes fortes de précedence entre les opérations de gammes différentes (ici entre celles de la gamme GO_A et celles de GO_B) réunies dans une même macro-gamme. Ce qui n'est pas le cas pour des regroupements de type parallélisation de gammes. De plus le fait de dissocier physiquement ces gammes opératoires en leur associant des palettes dédiées augmente leur disponibilité en cas de défaillances du système de production. Le désavantage de ces derniers réside bien évidemment dans la nécessité de considérer un nombre nécessaire d'en-cours (fixé par la borne $B(Rc_i)$) plus important que les autres. Ce sont malheureusement ces cas que notre approche ne favorise pas. En effet notre méthode privilégie les regroupements cycliques associés à de petites valeurs de la borne inférieure. Elle avantage donc les ensembles de macro-gammes issus des séquentialisations totales des gammes au détriment de ceux issus des parallélisations totales associées certes à des valeurs plus grandes de la borne mais n'imposant aucune contrainte de précedence entre les différentes gammes opératoires. Il existe cependant des cas où ces regroupements fournissent l'une des meilleures solutions.

Dans certains cas, pour des contraintes de temps de calcul ou d'élaboration d'une commande limitée (en phase d'exploitation par exemple) ou pour des raisons de simplicité (combinatoire trop importante), il peut être nécessaire de déterminer une commande, même si celle-ci n'est pas optimale. L'une des nombreuses possibilités consiste à retenir de cette partie uniquement un regroupement cyclique associé à la plus petite borne inférieure de l'en-cours (B^*). Certes l'existence d'une commande déterministe respectant le temps de cycle fixé par l'étape de planification est garantie par le développement de l'heuristique présentée ci-après de recherche d'ordonnancement mais rien n'assure l'optimalité de la solution en terme de niveau d'en-cours. Cependant au vu des différents exemples déjà traités, nous pouvons affirmer que les solutions obtenues avec les regroupements cycliques associés à la meilleure borne sur l'en-cours B^* sont en général proches de l'optimum.

Pour cette étape d'élaboration de la commande, il reste à résoudre les derniers degrés de liberté restant sur le modèle ordonnançable. C'est l'objet de ce dernier paragraphe du chapitre II.

II.3 Le problème d'ordonnancement cyclique proprement dit

Avant d'obtenir la commande prévisionnelle déterministe, il reste encore à résoudre deux types d'indéterminismes relevant des classes D_5 et D_6 . C'est en général le point de départ des analyses d'ordonnancement répétitifs qui sont abordés dans la littérature.

En effet sur les quatre approches : [ERS 82], [HIL 87], [MUN 91] et [VAL 94], représentatives des différents types d'ordonnancement que nous rencontrons dans la littérature, nous constatons des différences parfois significatives au niveau des spécifications de ce type de problème (§ II.3.1).

Ensuite une étude théorique des propriétés des Graphes d'Événements est effectuée au § II.3.2 afin d'évaluer la complexité du problème de transformation du modèle ordonnançable obtenu à l'étape précédente vers le modèle totalement déterministe représentatif de la commande prévisionnelle et pour rapprocher ce problème avec celui du système physique de production.

Au vu de la complexité (NP-difficile) de la résolution de l'ordonnancement cyclique des opérations sur les machines et de la minimisation de l'en-cours, seul le développement d'une heuristique est le bon compromis entre l'optimalité de la solution et le temps de calcul (§ II.3.3) malgré le développement d'une condition suffisante d'optimalité (§ II.3.4).

Après l'étude des principales heuristiques présentes dans la littérature (§ II.3.5), nous allons en proposer une nouvelle qui se voudra la synthèse des apports positifs de chacune (§ II.3.6).

II.3.1 Différentes spécifications du problème d'ordonnancement cyclique et leurs conséquences

II.3.1.1 Contraintes inhérentes au contexte de production

Pour les différentes spécifications du problème d'ordonnancement cyclique rencontrées dans la littérature, une partie des hypothèses formulées peut se justifier pleinement par la considération de systèmes de production distincts : par exemple pour [MUN 91], l'hypothèse « On suppose que deux exécutions d'une même tâche générique T_i ne peuvent être exécutées en même temps sur deux machines différentes. » peut être vérifiée dans un contexte informatique. Cette contrainte de précédence entre les itérations d'un même type de tâches peut être due à la contrainte implicite d'utilisation d'une ressource commune partagée. Ainsi dans un calcul par récurrence des termes d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$, il n'est pas possible de lancer la tâche de la $(n+1)$ -ème itération sans connaître la valeur de u_n , donc avant la fin de la n -ème itération (et aussi de toutes les précédentes). Dans ce contexte particulier, il est donc tout à fait possible de considérer de telles contraintes:

Pour des lecteurs non spécialistes des problèmes d'ordonnancement cycliques dans le domaine informatique, cela peut paraître étrange d'introduire de telles contraintes de précédence entre opérations du même type. Dans les systèmes de production discrets que nous considérons ce type de contraintes est tout à fait artificiel et conduirait à des solutions non optimales (notamment dans le calcul du temps de cycle optimal).

Il est également vrai que les systèmes discrets de production engendrent des contraintes également spécifiques qui ne sont pas toujours explicitées. L'une des principales caractéristiques est le type d'utilisation d'une machine de transformation. Lorsqu'une opération utilise une ressource, elle ne la partage pas (pas de mode processor sharing comme en informatique). De plus dans les hypothèses de travail spécifiées ici, nous avons supposé qu'il n'existait pas de préemption de machines (ce qui semble a priori assez logique pour des opérations de type fraisage, perçage ou de tournage). Dans tous les cas, il s'agit dans la mesure du possible de bien les spécifier.

Avant de généraliser une méthode d'ordonnancement, il est donc nécessaire au préalable de connaître les spécificités du domaine d'approche abordé afin de savoir si elles sont génériques. L'approche développée dans ce mémoire est a priori spécifique des systèmes de productions discrètes.

II.3.1.2 Conséquences de la prise en compte de tel ou tel critère d'optimisation

Les objectifs de l'ordonnancement sont parfois différents de ceux que nous avons définis. Par exemple, avec [ERS 82], le critère porte non sur la minimisation du maximum de l'en-cours présent dans le système, mais sur la minimisation de la taille moyenne et maximale des buffers des différentes machines. De plus le principe qui consiste à ordonnancer d'abord les tâches de la machine critique semble assez intéressant, même si dans le cas de la minimisation d'en-cours, les ordonnancements de toutes les autres machines de transformations et de transfert ont aussi une influence sur le niveau final d'en-cours minimal nécessaire et suffisant. De plus la généralisation de cette approche à plusieurs machines critiques n'a pas été abordée. Ce cas se présente assez souvent (pour l'exemple illustratif, il existe quatre machines ($M_{1,1}$, $M_{1,2}$, M_2 et M_5) simultanément critiques) lorsque le système de production fonctionne à flux maximal (¹).

Dans [MUN 91], l'objectif de minimisation de l'en-cours n'est pas abordé (et même la notion d'en-cours). Les contraintes ne sont pas les mêmes. Le routage des en-cours d'un système informatique ne nécessite pas de ressources de transport utilisant des supports de bridage coûteux. Dans ce contexte particulier, l'en-cours correspond aux emplacements mémoire nécessaires pour stocker les résultats intermédiaires. Cette ressource étant peu coûteuse, sa minimisation n'est pas recherchée.

De plus, afin de résoudre le problème de distribution discrète de charges de travail sur les ressources multiples, en utilisant la notion de k-périodicité de [CHR 85], chaque machine appartenant à ce type de ressources de transformation reçoit toute la production à réaliser au cours d'une période du cycle de production sur ce type de ressource. Ainsi la répartition des charges sur les machines identiques est garantie. Cependant cela a pour conséquence l'accroissement du facteur de périodicité du système. D'après [CHR 85] avec un fonctionnement de type tir au plus tôt des transitions, l'ordonnancement proposé dans [MUN 91] est K-périodique stable avec un facteur de périodicité $K = \text{ppcm}(m_j)_{\forall j \in \{1..m\}}$, m_j

représentant le nombre de machines composant la ressource multiple de transformation de type j. Avec l'exemple illustratif de ce chapitre, cela nous obligerait à considérer l'horizon multiple $E_v = \{18, 12, 12\}$ de facteur multiplicatif $v = \text{ppcm}(3, 2, 1) = 6$ de l'horizon minimal $E(RP_p)$ que nous considérons pour ce régime permanent. Cet horizon dépasse largement la taille limite que nous nous sommes fixés à l'étape de planification pour garantir un comportement répétitif du système sous la commande prévisionnelle et assurer une certaine simplicité de la recherche (temps de calcul, complexité) du fonctionnement souhaité.

De plus, dans [MUN 91], l'ordre de regroupement des opérations pour chaque machine est fixé d'avance par le choix d'une liste topologique de la restriction du « graphe de précedence sans circuit qui définit un ordre partiel sur ces tâches et qui doit être vérifié pour toutes les tâches d'une même occurrence » aux seules opérations du type correspondant de ressource. En d'autres termes, l'ordonnancement des opérations sur une ressource doit respecter les contraintes de précedence engendrées par les gammes opératoires. Il a été démontré que, bien que cette liste soit fixée, l'ordonnancement obtenu

¹ C'est même le but des ateliers flexibles de rendre le plus grand nombre de machines critiques à travers de la recherche de la répartition la plus équitable possible de la charge de travail sur les différentes machines.

est optimal. Cependant avec nos critères d'optimisation, nous ne pouvons plus utiliser cette méthode d'ordonnement des opérations sur les machines même si nous considérons un fonctionnement k-périodique de la commande et nous le démontrons à l'aide d'un exemple développé de la Figure II-21 à la Figure II-23.

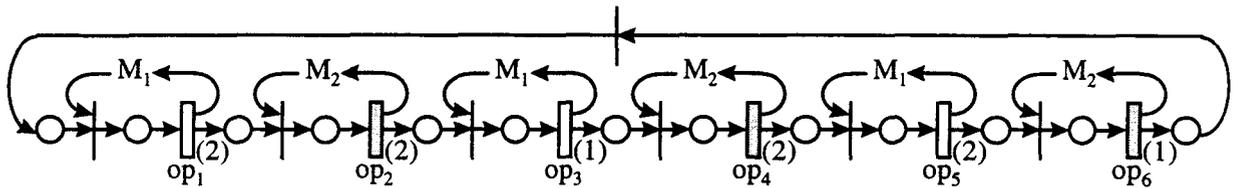


Figure II-21 : Exemple illustrant l'intérêt de conserver l'indéterminisme sur l'ordonnement des opérations sur les machines

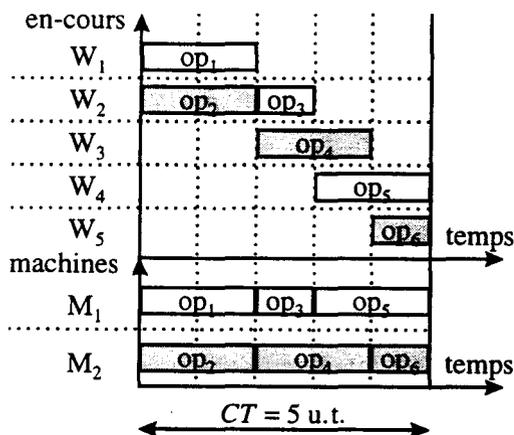


Figure II-22 : Meilleur ordonnancement possible obtenu avec l'approche [MUN 91] : conservation des ordres partiels intra-gammes sur chaque machine

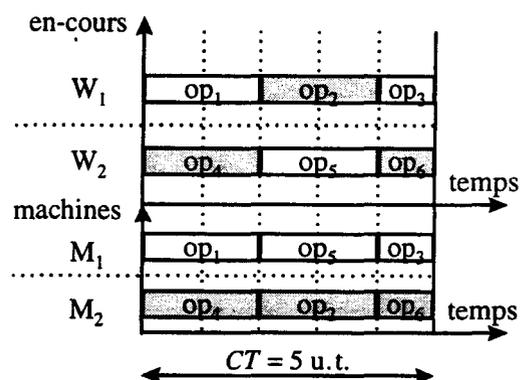


Figure II-23 : Le meilleur ordonnancement (en-cours égal à 2) : suppression des contraintes de précédence intra-gammes à l'aide d'en-cours

Il s'agit de la production d'une gamme linéaire au cours du cycle de production. Deux ressources simples sont utilisées pour réaliser les pièces et ces deux machines sont critiques. Le principe même de l'utilisation de plusieurs en-cours pour la réalisation de gammes opératoires est de supprimer les contraintes de précédence présentes à l'intérieur de ces gammes (ou intra-gammes). La conservation de ces liens au niveau de l'ordonnement des opérations sur une machine est donc inutile voire même aberrant puisqu'elle oblige à utiliser plus d'en-cours que nécessaire (il devient même impossible d'atteindre l'optimalité, cf. Figure II-22 et Figure II-23). Cette approche sous-entend également qu'au cours d'un cycle de fonctionnement, ce sont les premières opérations des gammes qui débutent alors qu'avec cette notion d'ordonnement cyclique, il n'y a pas a priori de date de début d'un cycle. La répétitivité du comportement se caractérise plutôt par une fenêtre temporelle de durée le temps de cycle du régime permanent et qui se translate

dans le temps. De même les périodes transitoires développées dans [MUN 91] ont implicitement des durées égales à des multiples du temps de cycle. Nous verrons au chapitre de Conclusion qu'il vaut mieux encore une fois conserver tout l'indéterminisme de ces régimes transitoires et des « débuts de cycle » pour minimiser la durée de ces transitoires.

II.3.1.3 Principales hypothèses retenues dans la littérature

Nous essayons dans ce paragraphe de souligner un des intérêts de notre approche en indiquant les principales caractéristiques des systèmes de production, que nous avons prises en compte, et absentes dans la plupart des autres travaux de recherche portant sur l'ordonnancement cyclique :

- La notion de ressources de transport n'est que très rarement évoquée. Si nous considérons que le modèle utilisé représente le plus fidèlement possible le système réel de production, il faut alors supposer des palettes dédiées à un type de pièces (pour éviter les regroupements) puisque la plupart des cas envisagent de dédier les palettes au maximum à la fabrication d'une seule pièce d'un seul type. Mais comme nous ne possédons aucune indication, toutes les hypothèses peuvent être a priori envisagées. C'est ce qui peut entraîner de grandes disparités des solutions trouvées.
- Les ressources multiples sont rarement utilisées et dans le cas contraire, le problème de distribution discrète de charges sur les machines équivalentes est simplifié.
- Les ratios de production sont implicitement fixés pas une étape antérieure de planification fine. Mais les systèmes avec des indéterminismes opératoires (ratios de routage), ou ateliers flexibles, ne sont pas traités en général : absence en général de flexibilité de production au niveau des gammes opératoires (pas de flexibilité de procédé, d'affectation ou de permutation). Il n'existe donc pas plusieurs ensembles de routages admissibles ; ni plusieurs chemins de gammes extraits à partir d'un ensemble de routages donné. Les gammes opératoires sont par hypothèses linéaires. La complexité des problèmes étudiés bien qu'encore NP-difficile avec le problème d'ordonnancement des opérations sur les machines en est donc fortement réduite.

Ces hypothèses reflètent cependant la réalité de certains systèmes de production réels considérés dans différents travaux de recherche, cf. [HIL 87], [HAN 89], [MUN 91] et [VAL 94] par exemple.

II.3.1.4 Importance de la recherche de tous les regroupements cycliques : conséquence sur la minimisation de l'en-cours

Ce qui peut paraître plus restrictif en terme d'optimalité, c'est l'apparition dans certains travaux de recherche ayant les mêmes objectifs que notre méthode, cf. [HIL 88] et [VAL 94], au niveau du modèle graphique du système de production, de contraintes a priori artificielles au niveau du regroupement cyclique des gammes opératoires, comme sur la Figure II-25.

En général le problème de partition des gammes opératoires puis de regroupement cyclique n'est pas abordé. Dans la plupart des cas, la solution implicitement retenue consiste à paralléliser totalement les gammes, puisque pour respecter sur un horizon discret les ratios de production, les gammes concernées sont dupliquées autant de fois que nécessaire pour représenter la production réelle du système au cours d'un cycle de

fonctionnement et puisque chaque gamme opératoire ainsi obtenu est rebouclé individuellement. Certes cela n'entraîne pas l'apparition de contraintes fortes de précédence entre différentes gammes opératoires, contrairement à la séquentialisation partielle ou totale des gammes. Mais, comme nous avons déjà pu l'apprécier dans le paragraphe précédent, ce type de solution retenu possède la plus grande borne inférieure d'en-cours. De plus ce sont rarement ces regroupements qui fournissent l'ordonnancement optimal minimisant l'en-cours du système. Donc la restriction implicite de l'espace entier de recherche des regroupements cycliques à une solution unique (parallélisation totale des gammes opératoires) ne permet pas, dans un grand nombre de cas, de trouver la solution optimale.

Pour l'exemple illustratif, avec l'ensemble des routages admissibles α_4 , la borne associée à la solution de parallélisation totale des gammes opératoires est égale à $\max_{\forall j} (B(\alpha_4, \mathcal{P}_j)) = 12$, c'est-à-dire qu'au mieux les ordonnancements trouvés à partir de cette solution ont un en-cours égal à 12. Or avec notre méthode, il est possible de trouver une des commandes optimales, comme nous le verrons par la suite, et le niveau minimal d'en-cours vaut alors 9. Nous voyons bien sur cet exemple les conséquences sur l'en-cours que peut entraîner la restriction de l'espace de recherche à un seul regroupement cyclique (comme c'est le cas dans les travaux de [HIL 87] et [VAL 94]).

La seule justification qui peut être apportée à cette restriction de l'espace de recherche est la nécessité de trouver une commande prévisionnelle dans des temps de calcul impartis au cours de la phase d'exploitation du système de production. Avec cette approche, les problèmes de combinatoire liés au regroupement cyclique des gammes opératoires n'existent plus ainsi que le parcours de l'espace de recherche qui se réduit à un seul regroupement cyclique. Nous rappelons tout de même que pour le cas particulier où des contraintes de temps nous empêchent de calculer la commande optimale, nous avons proposé de retenir une des solutions liées à la plus petite borne d'en-cours, donc issue de la séquentialisation totale des gammes, solution qui, au vu des différents exemples déjà traités, fournit très souvent un meilleur ordonnancement que la parallélisation totale au sens niveau d'en-cours à introduire dans l'atelier flexible pour mettre en œuvre la commande prévisionnelle. Un autre point de vue serait de considérer la nécessité d'une certaine « robustesse » du système vis à vis de défaillances. Certaines gammes de fabrication ne peuvent plus alors être utilisées. Dans ce cas, la parallélisation totale permet d'isoler ces gammes devenues non réalisables et de maintenir un fonctionnement dégradé du système de production au détriment, dans un grand nombre de cas, de la minimisation de l'en-cours. Cette conduite de l'atelier permettrait de pallier en partie le problème temporaire de l'absence de nouvelle commande pendant le calcul de réordonnancement hors ligne que nous proposons par notre méthode. Le module de supervision peut aussi compléter cette commande tronquée par l'apport de nouvelles gammes opératoires réalisables respectant, si possible, les horizons de travail cycliques et augmentant le flux de production.

II.3.2 Rappel des propriétés des Réseaux de Petri T-temporisés déterministes : les Graphes d'Événements (temporisés)

Nous cherchons à déterminer une commande prévisionnelle et cyclique du système. Nous savons qu'il est possible de modéliser cette commande grâce à une sous-classe de

Réseaux de Petri, déterministes et T-temporisés avec des temporisations déterministes (T-timed Petri Nets) : les Graphes d'Evénements.

Un rapide rappel repris de [OHL 95a] sur les principales caractéristiques de cette sous-classe de Réseaux de Petri s'impose afin de dégager les indéterminismes restant au niveau modèle graphique, i.e. modèle dit ordonnançable, cf. Figure II-16, pour atteindre le modèle déterministe et afin de les rapprocher des éléments physiques du système de production.

II.3.2.1 Propriétés des Graphes d'Evénements

« Dans les Graphes d'Evénements, chaque place possède exactement une seule transition d'entrée et une seule transition de sortie, c'est-à-dire $card(^{\circ}P) = card(P^{\circ}) = 1$. De plus les poids de tous les arcs sont égaux à 1. Les graphes d'événements sont donc ordinaires et sans conflit au niveau de leur structure.

Un Graphe d'Evénements est *fortement connexe*, s'il existe au moins un circuit reliant tout sommet (place ou transition) à tout autre. Dans la suite nous ne considérons que des graphes d'événements fortement connexes. Rappelons qu'un *circuit élémentaire* est un circuit qui ne passe pas plus d'une fois par le même sommet.

Pour un Graphe d'Evénements GE , nous désignons par

- $\gamma = (t_i, P_i, \dots, t_k, P_k)$, un circuit élémentaire de GE ,
- $\Gamma = \{\gamma / \gamma \in GE\}$, l'ensemble des circuits élémentaires de GE ,
- $M(\gamma) = \sum_{p_i \in \gamma} M(p_i)$, la somme des marques dans les places de γ ,
- $\mu(\gamma) = \sum_{t_i \in \gamma} \mu(t_i)$, la somme des temporisations des transitions de γ ,
- $C(\gamma) = \frac{\mu(\gamma)}{M(\gamma)}$, le temps de cycle associé à γ ,
- $S_t(k)$, la date de début du k-ème tir de la transition t .

Les théorèmes suivants ont été énoncés dans [COM 71]. Ils sont valables pour des Graphes d'Evénements avec ou sans temporisation :

- Le nombre de marques dans chaque circuit élémentaire est constant,

$$\text{i.e. } \forall M \in R(GE, M_0), \forall \gamma \in \Gamma, M(\gamma) = M_0(\gamma).$$

- Un graphe d'événements est vivant si et seulement si chaque circuit élémentaire est marqué,

$$\text{i.e. } GE \text{ vivant} \Leftrightarrow \forall \gamma \in \Gamma, M(\gamma) > 0.$$

Les graphes d'événements temporisés ont été étudiés dans [RAM 80] et [CHI 93] et les résultats suivants ont été établis :

- Le temps de cycle C_Γ d'un graphe d'événements est supérieur ou égal au temps de cycle du circuit le plus lent,

$$\text{i.e. } C_\Gamma \geq C^* = \max_{\gamma \in \Gamma} \{C(\gamma)\}.$$

- Si les dates des premiers tirs des transitions sont convenablement choisies, il existe un régime de fonctionnement *périodique* (1-périodique) avec des dates de tir des transitions données par :

$$\forall t \in T, \forall n \in \mathbb{IN}, S_i(n+1) = S_i(n) + C^*.$$

Le mode de fonctionnement de *tir au plus tôt* a été étudié dans [CHR 85]. Comme le nom l'indique, chaque transition est tirée dès que possible. Dans un mode de fonctionnement de tir au plus tôt, un régime permanent K-périodique est atteint après un temps transitoire fini,

$$\text{i.e. } \exists K \in \mathbb{IN}, \exists n_0 \in \mathbb{IN}, \forall t \in T, \forall n \geq n_0, S_i(n+K) = S_i(n) + KC^*.$$

Le rapprochement entre les circuits et les P-semiflots d'un graphe d'événements est évident. Les circuits élémentaires correspondent aux P-semiflots élémentaires du réseau et peuvent alors être déterminés par des algorithmes développés pour le calcul des invariants [MAR 82]. En ce qui concerne les T-semiflots, la propriété suivante nous sera utile par la suite :

Un graphe d'événements fortement connexe possède un T-semiflot élémentaire unique donné par $X = (1, 1, \dots, 1)^T$.

II.3.2.2 Modélisation de systèmes flexibles avec des Graphes d'Evénements

Puisque les graphes d'événements ne permettent pas de représenter les conflits, leur domaine d'application est naturellement limité. Les seules variables libres existant dans un graphe d'événements sont relatives aux dates de tir des transitions et la position du marquage initial. Avec des temporisations déterministes et un mode de tir des transitions défini (*tir au plus tôt* ou *périodique*) le fonctionnement d'un graphe d'événements est entièrement spécifié pour un marquage donné. La modélisation d'ateliers flexibles par des graphes d'événements suppose donc que tous les conflits représentatifs des flexibilités de ces systèmes aient été résolus. Au vue de la démarche allant d'une planification, via une programmation et une planification fine vers un ordonnancement, un modèle de graphe d'événements représente alors bien le *résultat* d'un processus d'élaboration d'une commande qui exécute un ordonnancement spécifique.

La modélisation par graphes d'événements fortement connexes est particulièrement adaptée pour représenter des fonctionnements *cycliques*, appelés aussi fonctionnements *répétitifs*. Dans ces modes de fonctionnement, la commande de l'atelier est spécifiée sur un horizon limité puis répétée un certain nombre de fois. Evidemment, dès que la commande est modifiée, le modèle associé n'est plus valable. Chaque graphe correspond donc à une production et un ordonnancement spécifiques.

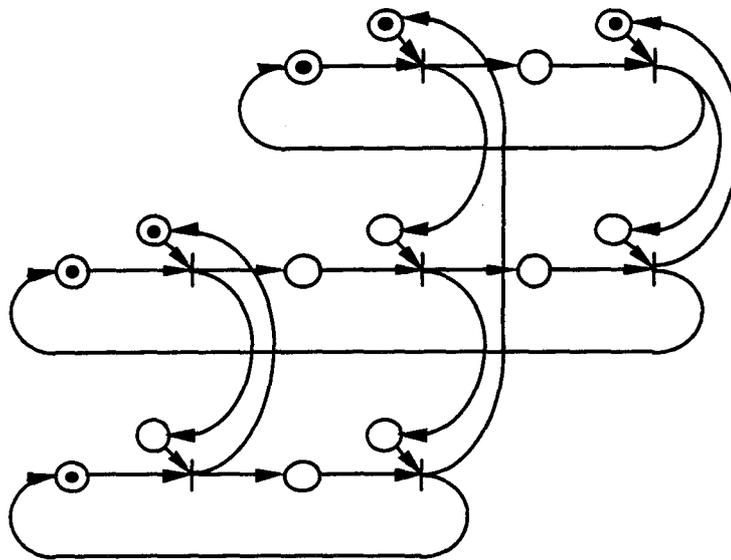


Figure II-24 : Graphe d'Evénements et fonctionnement répétitif [DUB 83]

Un modèle graphe d'événements représentatif d'un fonctionnement répétitif d'un atelier flexible a été présenté dans [DUB 83] (cf. Figure II-24), s'appuyant sur des gammes bouclées et des circuits représentatifs du comportement des ressources. Dans cet article est également évoquée la possibilité de tenir compte de temps de reconfiguration (set-up time) des machines de transformation et de temps de transport en ajoutant des transitions temporisées pour les premiers dans les circuits modélisant les ressources et pour les deuxièmes dans les circuits correspondant aux gammes bouclées.

Cette approche de modélisation a été poursuivie dans [HIL 89a] et [HIL 89b] en formalisant la démarche de construction du modèle graphe d'événements. L'approche part d'un ensemble de gammes de fabrication, représentant un ordre total entre les opérations. Ces gammes sont *dupliquées* autant de fois que nécessaire pour réaliser les ratios de production spécifiés (1/4, 1/4 et 1/2 pour l'exemple de la Figure II-25). Les désavantages de ce type d'approche avec la conservation d'un seul regroupement cyclique ont été présentés au paragraphe II.3.1.4.

Par le bouclage individuel des gammes (places r_i) des *circuits de fabrication* (ou circuits de procédés) sont créés. Les marques dans ces circuits correspondent aux produits bridés sur leurs palettes. Les transitions qui représentent les opérations sont ensuite liées par des *circuits de commande* (ou circuits de machines) modélisant chacun une machine et l'ordre dans lequel cette machine traite les différents produits.

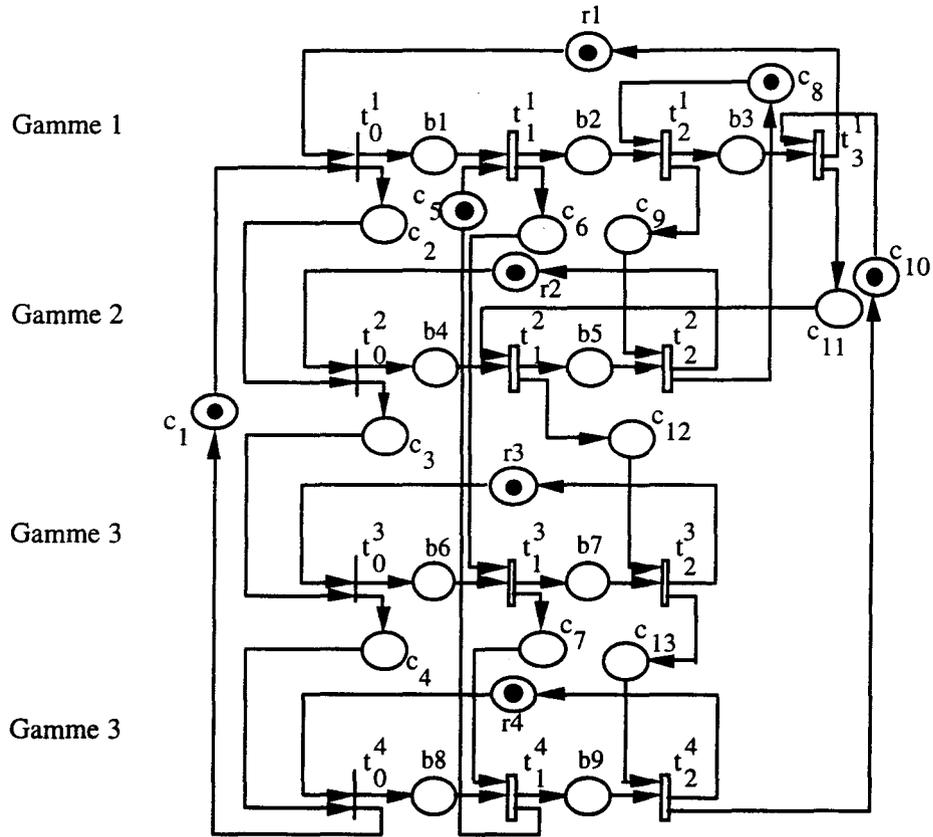


Figure II-25 : Modèle Graphe d'Événements d'un job-shop [HIL 89a]

En plus des circuits de fabrication et de commande, il est fait référence à un troisième type de circuits, appelé *circuits mixtes*, mis en évidence par [HIL 89b] :

par exemple $\gamma = (c_8, t_2^1, b_3, t_3^1, c_{11}, t_1^2, b_5, t_2^2)$ dans le réseau de la Figure II-25.

Ces circuits mixtes contiennent des places des deux autres types de circuits et résultent alors des choix des circuits de commande. Nous distinguons a priori les circuits mixtes dits « externes », i.e. passant par une place de reboilage de l'une des gammes opératoires, des autres circuits mixtes appelés « internes ».

Les résultats concernant la vivacité et le temps de cycle des graphes d'événements s'appliquent donc également à ce type de circuits. L'absence de marques dans ces circuits mixtes permet alors d'expliquer les blocages de certaines configurations de la commande. De même, les conditions sur le nombre de marques nécessaires pour obtenir un temps de cycle imposé par le plus lent des circuits de commande portent alors sur les circuits de fabrication et les circuits mixtes.

Divers algorithmes de minimisation du nombre de marques dans un contexte de temporisations déterministes et stochastiques ont été proposés s'appuyant sur des modèles obtenus par l'approche de modélisation présentée dans [HIL 89b], [LAF 91] et [LAF 92]. »

II.3.3 Position du problème

Après avoir étudié les propriétés théoriques des Graphes d'Evénements, nous faisons le rapprochement entre la transformation du modèle graphique avec le système physique, c'est-à-dire la résolution des deux dernières classes d'indéterminismes D_5 et D_6 . Puis nous envisageons la meilleure façon de les résoudre, étant donné leur complexité.

II.3.3.1 Les indéterminismes restant

En ce qui concerne notre approche d'élaboration de commande, nous avons déjà considéré et résolu un grand nombre d'indéterminismes. Le modèle associé tend à se rapprocher fortement du Graphe d'Evénements. Ce dernier comporte trois types différents de circuits.

Avec la détermination des regroupements cycliques à la dernière étape évoquée au paragraphe II.2.4, nous avons implicitement créé les circuits de fabrication du graphe de la commande déterministe, chaque macro-gamme du regroupement représentant un circuit de procédé.

Nous connaissons à cette étape de la méthode les invariants de places (ou P-semiflots) associés aux machines (de transformation et de transfert) et non plus seulement ceux liés aux ressources (simples ou multiples), c'est-à-dire que la charge des ressources multiples a été répartie entre les différentes machines identiques. Ces dernières sont considérées maintenant individuellement puisque toutes les opérations liées à une même machine sont définies d'un point de vue discret. Même si deux machines ont la même charge de travail (mêmes opérations issues des mêmes gammes linéaires de fabrication), il est possible de les différencier par leur accessibilité au niveau du système de transport. Cependant l'ordonnancement des opérations sur ces machines n'a pas encore été fixé. Les circuits de commande du graphe, bien que partiellement connus avec leur P-semiflot associé, ne sont donc pas encore totalement déterminés. En conséquence, les circuits mixtes du Graphe d'Evénements ne sont pas encore connus.

Il reste aussi à déterminer l'en-cours du système, c'est-à-dire le marquage initial du graphe d'événements, et la politique de tir des transitions qui déterminent de façon unique le comportement périodique et optimal du modèle. Les deux classes d'indéterminismes restant à résoudre sont donc D_5 et D_6 . Ce problème général d'ordonnancement cyclique est connu pour être NP-difficile, cf. [CAR 88].

II.3.3.2 Deux approches à envisager : la séparation ou la résolution simultanée des deux degrés de liberté D_5 et D_6

Nous disposons donc d'un modèle ordonnançable ; la dernière phase de la transformation en graphe d'événements peut alors être appréhendée de différentes manières. Une première possibilité consiste à fixer arbitrairement un ordonnancement. Sur la structure du graphe d'événements ainsi obtenu, il s'agit alors de déterminer l'en-cours nécessaire pour que le temps de cycle souhaité, ici $CT(RP_p)$, soit effectivement respecté. Cette approche a été développée dans [HIL 89a], [LAF 91] et [LAF 92] où des algorithmes de minimisation de marques dans un graphe d'événements ont été présentés. Dans les termes de notre classification, ceci revient à séparer la résolution des conflits associés aux classes D_5 et D_6 .

Cependant, bien que cette approche semble assez intéressante puisqu'elle simplifie la complexité du problème en fixant les circuits de commande, elle n'en demeure pas moins insatisfaisante pour l'approche développée dans ce mémoire qui recherche la minimisation de l'en-cours d'une commande dont nous connaissons l'horizon de production et le temps de cycle associé. Fixer arbitrairement les circuits de machine revient à perdre le degré de liberté que représente la classe de décision D_5 , et ne permet pas d'atteindre l'en-cours optimal du système. Se restreindre à une seule solution de l'espace de recherche qui se compose de l'ensemble des ordonnancements possibles sur les machines conduit à des solutions sous-optimales. Cela ne signifie pas cependant que l'heuristique que nous présentons garantisse l'optimalité de la recherche. Nous essayons néanmoins d'utiliser tous les degrés de liberté pour se rapprocher le plus possible de l'optimum, sinon l'atteindre.

Il n'est pas non plus raisonnable d'envisager de dénombrer pour chaque regroupement cyclique tous les ordonnancements possibles sur les différentes machines (problème NP-difficile) et pour chaque graphe d'événements ainsi obtenu, de rechercher la commande qui minimise l'en-cours. Comme [HIL 89a] l'a démontré, la minimisation du nombre de marques dans un graphe d'événements nécessite la connaissance préalable de tous les circuits minimaux qui composent ce graphe. Cette recherche exhaustive de l'ensemble des circuits minimaux est un problème dont la combinatoire explose aussi bien en temps qu'en espace, cf. [ALA 82], [MAR 82], [TOU 82], [ALA 89], [HIL 89a] et [KOR 95]. La minimisation de l'en-cours qui respecte un temps de cycle admissible donné reste alors un problème NP-difficile, cf. [HIL 89a], [LAF 91] et [LAF 92]. Il n'y a donc aucun intérêt à scinder un problème NP-difficile en deux sous-problèmes eux-mêmes NP-difficiles.

C'est la raison pour laquelle nous retenons l'idée de résoudre conjointement les deux classes de décision D_5 et D_6 . Ce problème d'ordonnement cyclique est NP-difficile et seul le développement d'une heuristique peut conduire à une bonne solution en un temps de calcul raisonnable. L'optimalité de la recherche du minimum d'en-cours pour un modèle ordonnançable associé à un regroupement cyclique n'est donc pas garantie.

II.3.4 Seule référence d'optimalité : Atteignabilité de la borne inférieure fine d'en-cours $B(Rc_i)$ d'un regroupement cyclique

Nous ne pouvons donc garantir a priori l'optimalité de la recherche pour un regroupement cyclique donné, il est par contre intéressant de savoir si le niveau d'en-cours que nous obtenons finalement avec notre heuristique est minimal ou non. La seule indication qui se trouve à notre disposition est la borne inférieure d'en-cours nécessaire au respect du temps de cycle du régime permanent considéré. Il n'est pas possible d'obtenir la valeur optimale de cet en-cours : en effet le calcul de cette borne a été établi à partir de la connaissance des regroupements cycliques des gammes opératoires, soit en transposant dans le domaine des Réseaux de Petri, des circuits de fabrication du graphe d'événements. Pour connaître la valeur exacte, il est nécessaire de connaître tous les circuits minimaux du graphe. Nous avons vu que les circuits mixtes n'étaient pas encore définis, en raison de l'absence provisoire d'ordonnement cyclique des tâches sur les machines. La valeur optimale de l'en-cours ne peut donc être déterminée par avance.

La seule condition suffisante d'optimalité d'une solution que nous pouvons établir aisément par démonstration est donc l'atteignabilité de la borne inférieure par le niveau d'en-cours de l'ordonnement trouvé. Nous prendrons pour référence la valeur de la borne inférieure fine de l'en-cours du système puisque c'est celle qui, dans l'état actuel de nos connaissances, se rapproche le plus de la valeur effective du minimum d'en-cours. Plus

la borne inférieure établie est éloignée de l'optimum, moins il y a de chances de trouver des cas répondant à cette condition, donc plus souvent nous restons dans l'incertitude.

Le problème est de savoir maintenant s'il existe des cas où effectivement, la borne inférieure est atteinte. Dans le cas favorable, il est possible de trouver des sous-classes de problèmes où cette condition est toujours remplie : l'optimalité est donc garantie.

Pour savoir si les bornes sont atteignables dans tous les cas de figure, nous devons considérer les différentes classes de circuits élémentaires d'un graphe d'événements modélisant un fonctionnement répétitif. En effet, les circuits élémentaires ont été partagés en trois classes distinctes (cf. II.4.5) :

- circuits de commande, modélisant l'ordonnancement des ressources,
- circuits de fabrication, correspondant aux regroupements cycliques,
- circuits mixtes, passant par des places des deux autres classes de circuits.

Puisque nous voulons que la (ou les) machine(s) critique(s), i.e. le (ou les) plus lent(s) des circuits de commande, impose(ent) le temps de cycle, nous devons faire en sorte que les deux autres types de circuits ne ralentissent pas le fonctionnement. Les considérations précédentes sur l'en-cours nécessaire pour différents regroupements de gammes ne concernaient de fait que les circuits de fabrication. Tant que l'ordonnancement n'est pas fixé nous ne connaissons pas les circuits mixtes. Par conséquent, à ce stade de l'analyse, il est impossible de décider de l'atteignabilité des bornes dans le cas général. Cependant au vu des exemples déjà étudiés, cf. Annexe II, nous savons que la borne inférieure d'en-cours n'est pas toujours atteinte.

Par contre, il existe effectivement des cas particuliers où le niveau d'en-cours de l'ordonnancement obtenu atteint sa borne inférieure. Nous pouvons en effet facilement prouver que pour les graphes d'événements qui ne possèdent pas de circuits mixtes, il existe au moins un ordonnancement dont le niveau d'en-cours atteint sa borne inférieure (¹).

Nous pouvons donc affirmer que les bornes sont atteignables dans certains cas. Il est également possible de trouver certaines classes de sous-problèmes pour lesquels nous assurons l'atteignabilité de la borne et donc l'optimalité de la recherche. Nous savons que les problèmes, pour lesquels le graphe d'événements représentatif de la commande ne possède pas de circuits mixtes, répondent à ce critère. Ils correspondent, par exemple, à des systèmes de production pour lesquels il existe soit une seule machine, donc un seul circuit de commande, soit une seule gamme opératoire linéaire, donc un seul circuit de fabrication. Il existe cependant d'autres cas qui ne donnent aucun circuit mixte au niveau du graphe d'événements.

¹ Effectivement tous les circuits élémentaires du graphe sont alors marqués. En ce qui concerne les circuits de commande, la présence réelle des machines physiques de l'atelier assure leur marquage (unitaire). Quant aux circuits de fabrication, leur durée opératoire totale est supérieure à une unité de temps, il faut donc au minimum un en-cours ou une marque dans chaque circuit de fabrication. La condition nécessaire et suffisante de vivacité du graphe est alors respectée. De plus si nous respectons au plus juste le marquage apporté par le calcul de la borne inférieure, nous sommes sûrs que le temps de cycle des circuits de procédé est moins lent que celui de la machine la plus critique. Comme il n'existe pas d'autres circuits (mixtes), il n'est pas nécessaire d'augmenter. Nous avons ainsi démontré qu'il existe un ordonnancement dans ce type de graphes qui atteint sa borne inférieure.

Comme la condition suffisante d'optimalité n'est pas forcément nécessaire, nous ne pourrions pas garantir l'optimalité de la solution trouvée par l'heuristique d'ordonnement cyclique.

II.3.5 Analyse de trois heuristiques d'ordonnement cyclique

Avant de développer notre propre heuristique, une recherche bibliographique nous a permis de recenser dans la littérature trois heuristiques caractéristiques de recherche d'ordonnement cyclique : [HIL 89b], [VAL 94] et [OHL 94b] qui a été développée au sein du L.A.I.L., qui minimisent l'en-cours du système de production tout en résolvant simultanément les deux classes de décision D_5 et D_6 .

Aucune des trois approches ne semble satisfaisante, puisqu'avec l'exemple illustratif développé tout au long de ce chapitre, en appliquant chacune de ces trois méthodes il est impossible de trouver l'une des solutions optimales. Pour cet exemple particulier, nous connaissons le niveau d'en-cours minimal puisque nous avons obtenu une solution optimale à l'aide de notre heuristique. Il a été inutile de parcourir exhaustivement tout l'espace des regroupements cycliques puisque, en suivant le parcours de l'espace de recherche présenté, nous avons trouvé un ordonnancement avec un niveau d'en-cours égal à sa borne inférieure pour le regroupement cyclique modélisé à la Figure II-16 associé à la borne inférieure minimale de l'en-cours $B^*(RP_p) = 9$. La commande obtenue est donc bien optimale.

Pour les approches de [HIL 89b] et [VAL 94], il suffit de calculer la borne inférieure d'en-cours nécessaire au respect du temps de cycle pour s'apercevoir qu'il n'est pas possible d'atteindre l'optimum. Dans le meilleur des cas, les ordonnancements ont un en-cours égal à leur borne inférieure, donc égal à 12, qui représente la valeur minimale des bornes associées aux regroupements cycliques issus des différentes parallélisations totales des gammes opératoires obtenues avec les différents ensembles de routages admissibles. Ceci est dû principalement aux contraintes artificielles de restriction de l'espace de recherche au regroupement cyclique lié à la parallélisation totale des gammes opératoires linéaires. Mais d'autres problèmes sont apparus à l'étude de ces heuristiques notamment au niveau des marges de ressources et du respect des temps de cycle. Dans l'approche proposée par [OHL 94b], il est impossible a priori de conclure après le calcul des bornes inférieures. C'est au regard de l'exemple développé dans son mémoire de thèse que nous avons constaté les limites de cette heuristique : il est assez facile de dégager, même à la main, une solution optimale que l'heuristique est incapable d'atteindre.

Cependant chaque heuristique possède des avantages spécifiques que nous proposons de regrouper dans une nouvelle heuristique permettant d'atteindre des solutions plus proches de l'optimum. Il est même a priori possible de formuler l'algorithme exact de recherche du minimum d'en-cours à partir de la nouvelle heuristique développée en fixant les paramètres, que nous avons définis, à leur valeur limite.

II.3.5.1 L'heuristique développée dans [HIL 89b]

Il est difficile de présenter ici en quelques lignes une heuristique qui représente une bonne partie du mémoire de thèse [HIL 89b]. Pour toute description ou explication, nous renvoyons donc à l'original.

Le principe général de l'algorithme consiste essentiellement au placement progressif et en parallèle des opérations des différentes gammes du cycle de production. La fonction de placement permet de déterminer à partir de quelle gamme sera tirée la prochaine opération. Quand une gamme est choisie, deux cas s'offrent à nous : soit la gamme n'a jamais été utilisée, il est alors possible de prendre l'opération qui offre le plus grand degré de liberté, soit une ou plusieurs opérations de celle-ci ont déjà été placées et, dans ce cas, les contraintes de précédence des gammes linéaires imposent le placement de l'opération qui suit directement la dernière provenant de cette gamme déjà ordonnancée sur le diagramme.

Le critère de choix est basé sur la comparaison pour chaque gamme de la valeur du degré de liberté qui est, à un facteur additif près, égal à l'opposé du rapport entre la charge opératoire de la gamme restant à placer et le temps disponible pour la placer. En effet plus le degré de liberté est important, plus la charge à placer est faible par rapport à l'intervalle disponible. Si, d'une autre façon, la charge restant à réaliser est soustraite de l'intervalle disponible pour la placer, ce critère est alors appelé marge de gammes, cf. [OHL 94b]. Celui-ci semble nettement plus intéressant puisqu'il évite d'envisager les cas réels de division par zéro auxquels nous avons été confrontés quand, à la fin de placement d'une opération, l'intervalle disponible disparaît. La notion de marge de machines est définie de manière similaire.

Toutefois dans [HIL 89b], il n'est jamais question de charge de machines. Cette approche se contente d'une vision partielle du problème à travers les gammes de fabrication. En occultant le point de vue machine, c'est-à-dire en négligeant le contrôle des marges des machines, il est possible d'arriver à des cas dits « d'ordonnements non réalisables » où une opération, au moins, ne peut être placée sur l'intervalle de temps qui représente le cycle de production. Le cas le plus illustratif correspond à celui de la (ou les) machine(s) qui fixe(ent) le temps de cycle du système. Par définition, cette machine travaille 100% du temps : la marge associée est donc nulle. Il suffit alors de placer des opérations telles que la marge de cette machine soit consommée ; la marge de celle-ci devient ainsi négative, ce qui signifie que durant un certain temps, la machine critique reste inoccupée. Nous sommes alors sûrs qu'aucun ordonnancement ne sera alors possible à trouver si nous voulons respecter le temps de cycle. C'est ce type de problème que cette heuristique est incapable de contrôler.

Afin de pallier ces blocages au niveau de l'heuristique, il est alors nécessaire de « relaxer la contrainte du temps de cycle » et de l'allonger, provisoirement, de 15% par exemple. Si la nouvelle application de l'heuristique avec ces nouvelles données n'aboutit toujours pas, il faut continuer à itérer le processus. Quand un ordonnancement est trouvé après plusieurs itérations, il est logique de ne pas conserver le niveau et le placement de l'en-cours ainsi obtenus sous peine de non respect du temps de cycle fixé par l'étape de planification. Il est alors nécessaire de ne garder de cette première étape que l'ordonnement des opérations sur les machines, i.e. les circuits de commande. Afin de trouver un ordonnancement répondant aux critères initiaux, il est alors nécessaire d'appliquer l'heuristique de minimisation de l'en-cours dans un graphe d'événements donné pour respecter un temps de cycle.

En procédant de cette façon, il est évident que cette heuristique scinde le problème général d'ordonnement cyclique en deux sous-problèmes eux-mêmes NP-difficiles. Nous avons déjà donné notre point de vue sur les risques que peuvent entraîner de telles considérations. Nous pouvons ajouter aussi qu'il n'est pas alors possible de garantir un

résultat dans un temps imparti. De plus, l'intérêt de la première phase est remise fortement en cause puisque le choix arbitraire d'un ordonnancement sur les machines aboutirait à des solutions similaires.

La raison principale pour laquelle l'heuristique peut aboutir à un ordonnancement non réalisable tient au fait que la fonction de placement d'une opération dans un système partiellement ordonné ne tient pas compte des intervalles perdus pour la machine correspondante. En effet des intervalles peuvent apparaître durant lesquels une machine ne travaille pas. Ce cas correspond à la juxtaposition d'opérations au niveau gammes afin de minimiser les pertes de marges de gammes. Cependant aucun contrôle n'est effectué sur la possibilité de réutiliser cet intervalle plus tard, c'est-à-dire comparer la durée de cet intervalle avec les durées des opérations restant à placer. Ainsi des intervalles indisponibles pour les opérations restantes peuvent apparaître et rendre ainsi l'ordonnancement non réalisable, cf. Figure II-26. Malheureusement c'est cette politique de placement que cette heuristique privilégie.

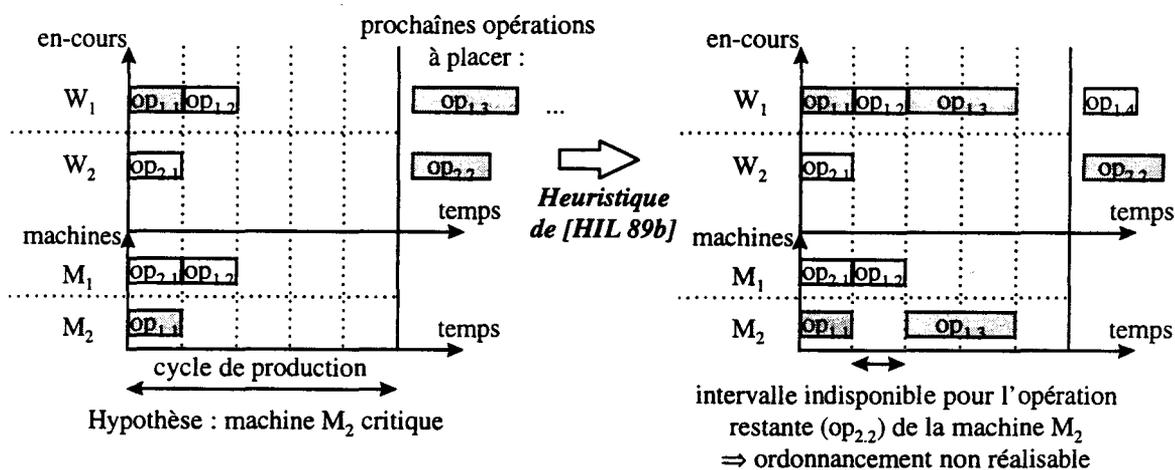


Figure II-26 : Exemple d'ordonnancement non réalisable obtenu avec l'heuristique développé dans [HIL 89b]

II.3.5.2 Amélioration de l'heuristique précédente [VAL 94]

C'est la raison pour laquelle [VAL 94] a tenté d'introduire dans le critère de choix, i.e. le degré de liberté défini pour chaque gamme opératoire, la notion d'intervalles de disponibilités de ressources pour une opération. Il s'agit de recenser sur la fenêtre temporelle qui représente le cycle de production, l'ensemble des intervalles pendant lesquels les machines restent inoccupées. A une machine donnée est associé l'ensemble des intervalles pendant lesquels cette machine n'est pas utilisée. Pour obtenir finalement les intervalles de disponibilité, il suffit de comparer la taille de ces intervalles avec la durée des opérations restant à placer sur cette machine.

Cependant une anomalie est apparue inopinément dans cette notion d'intervalle car nous travaillons sur des ordonnancements cycliques. Ainsi, lorsque la première opération est placée dans un intervalle, qui est initialement le cycle de production, elle modifie cet intervalle sans pour autant le partager en deux nouveaux intervalles, comme indiqué sur la Figure II-27.

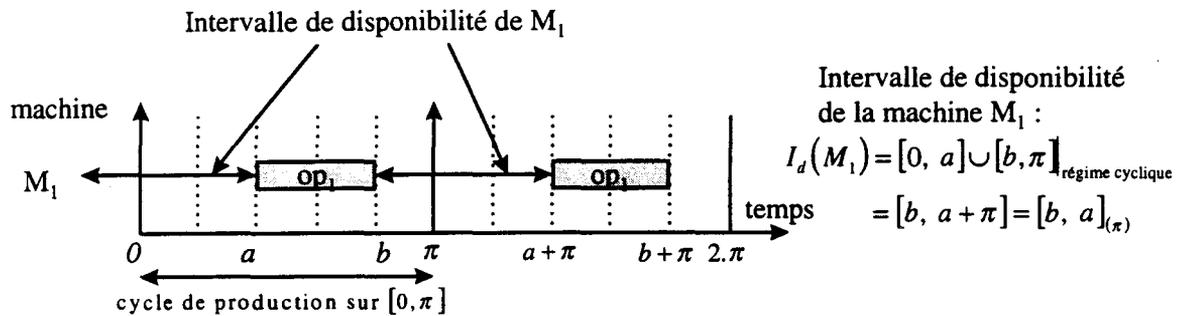


Figure II-27 : Définition exacte de l'intervalle de disponibilité d'une machine

Certes cette notion est intéressante, mais elle n'intervient dans le critère de choix que pour calculer une valeur plus restreinte et donc plus exacte de la longueur de la plage disponible pour placer une opération. Cela ne retire nullement la possibilité d'aboutir à des ordonnancements non réalisables puisque l'heuristique ne tient pas compte du critère marge des machines. Comme la fonction de placement d'une opération n'a pas changé, il existe toujours la possibilité de perdre de la marge de machines puisque le placement qui minimise la perte de marge de gammes est privilégié et donc, sans contrôle explicite de la contrainte « marge de machines toujours positive », les cas de blocages de l'ordonnancement, dus à l'absence d'intervalle disponible pour placer une opération, sont toujours possibles.

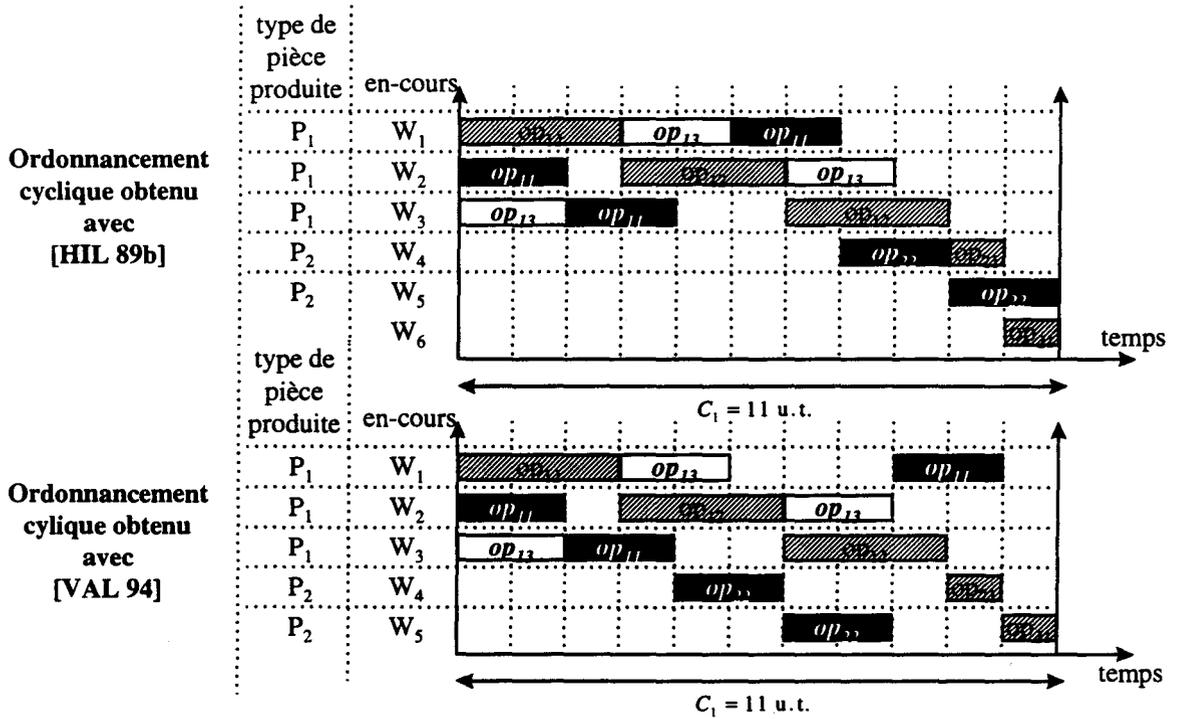
Nous renvoyons le lecteur à [VAL 94] pour de plus amples explications sur la démarche présentée.

Pour comparer les performances que peuvent atteindre les deux approches que nous venons d'étudier par rapport à l'optimum, nous reprenons l'exemple développé dans [VAL 94]. Nous faisons abstraction de la phase de modélisation d'un système hybride : la première partie du processus est continue, la deuxième discrète. Les champs d'application de ce type de procédé concernent l'industrie de l'agro-alimentaire, la papeterie et les processus chimiques. Afin de résoudre le problème d'ordonnancement pour trouver la commande du système, une transformation du premier modèle obtenu sous forme de Réseau de Petri Hybride temporisé déterministe (timed HPN model) est proposé pour aboutir finalement à un système de type discret plus facile à résoudre. Il s'agit alors de rechercher un graphe d'événements représentatif de la commande qui maximise la vitesse de production tout en minimisant l'en-cours. Nous sommes ainsi ramenés à un problème analogue à ceux qui nous intéressent dans ce mémoire de thèse.

Le processus se décompose en deux types de production P_1 et P_2 , cf. Figure II-28 pour la description du modèle, à réaliser simultanément selon les ratios de production imposés 3/5 et 2/5. Les gammes opératoires sont linéaires et les ressources sont simples. L'étude sur l'horizon minimal de production respectant les ratios $E_1 = E(RP_p) = \{3P_1, 2P_2\}$ suffit donc pour atteindre les performances optimales de productivité, c'est-à-dire $C_1 = C^1 = CT(RP_p) = 11$ u.t. Comme les types de ressources de transport n'ont pas été précisés dans les hypothèses, nous supposons qu'il existe un type de palette dédié à chaque type de production. Cela permet d'éviter des regroupements de gammes trop importants

deux premières approches à un seul regroupement cyclique (appelé ici $Rc_{par.tot.}$), due à la parallélisation totale des gammes opératoires linéaires. En effet la valeur de la borne inférieure d'en-cours associée à $Rc_{par.tot.}$ est égale à :

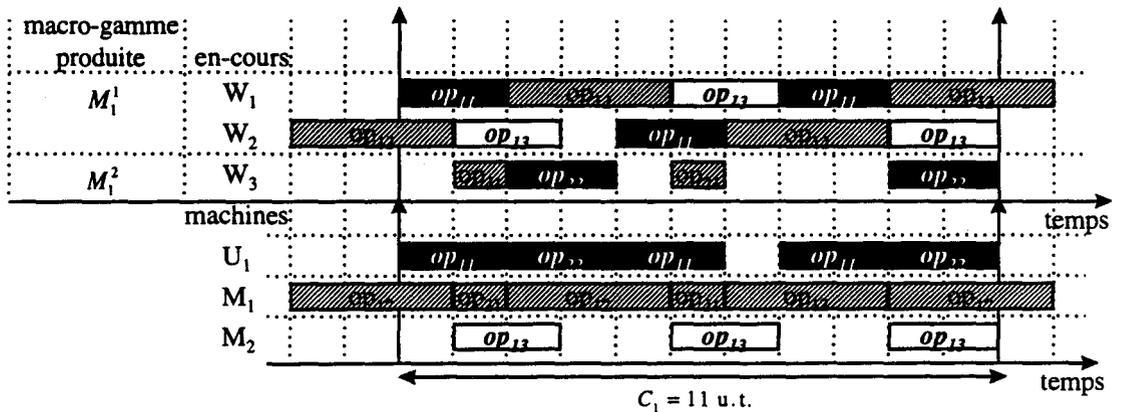
$$B(Rc_{par.tot.}) = 3 * \left\lceil \frac{2+3+2}{C_1} \right\rceil + 2 * \left\lceil \frac{2+1}{C_1} \right\rceil = 3 * 1 + 2 * 1 = 5.$$



Ordonnancement cyclique optimal obtenu avec notre heuristique

Ordonnancement du regroupement cyclique issu de la séquentialisation totale des gammes opératoires :

$$Rc_{seq.tot.} = \{M_1^1 = (GO_{P1} - GO_{P1} - GO_{P1}), M_1^2 = (GO_{P2} - GO_{P2})\}$$



W_1 et W_2 sont dédiées à la macro-gamme : $M_1^1 = (GO_{P1} - GO_{P1} - GO_{P1})$

W_3 est dédiée à la macro-gamme : $M_1^2 = (GO_{P2} - GO_{P2})$

Figure II-29 : Performances des différentes heuristiques sur l'exemple de [VAL 94]

Par conséquent, dans ce cas particulier, pour [VAL 94] il est intrinsèquement impossible de trouver une meilleure solution. Il faut remarquer par ailleurs que l'une des solutions optimales trouvée provient du regroupement cyclique issu de la séquentialisation totale des gammes ($Rc_{seq.tot.}$), cf. Figure II-29.

Une extension de l'approche de [VAL 94] ou même de [HIL 89b] pourrait donc être envisagée avec la prise en compte de tout l'espace de recherche constitué des différents regroupements cycliques. Cependant, comme nous l'avons déjà constaté, la notion de marge de machines est soit esquissée soit totalement ignorée. La fonction de placement des opérations ne respecte pas du tout la contrainte fondamentale du respect du temps de cycle qui, comme nous l'avons déjà précisé, est fixé par la machine la plus lente de l'atelier. Ainsi ces heuristiques peuvent aboutir à des cas particuliers d'ordonnements non réalisables pour lesquels une nouvelle heuristique doit être appliquée. Afin d'éviter une approche avec un nombre d'itérations a priori inconnu ainsi qu'un réajustement de l'en-cours après la phase d'ordonnement, une nouvelle heuristique a été proposée dans [OHL 94b] afin de respecter le temps de cycle donné.

II.3.5.3 *Le développement d'un nouveau type d'heuristique dans [OHL 94b]*

L'intérêt majeur de cette approche réside dans la considération conjointe du point de vue macro-gammes avec les charges des en-cours et les marges de gammes et du point de vue commande avec les marges de machines. Il devient alors possible de garantir l'existence d'un ordonnancement qui respecte le temps de cycle en une seule itération avec le respect, à tout moment, du développement de l'algorithme de la contrainte principale : marge de machines toujours positive.

Les points essentiels de cette approche qui servent de base au développement de la nouvelle heuristique sont présentés dans ce mémoire de thèse et sont tirés de [OHL 95a].

L'algorithme que nous avons développé est une heuristique basée sur le principe d'une **construction progressive avec une recherche dite par faisceaux des séquences de placement des opérations**.

Après la phase d'initialisation, l'ordonnement est construit de manière progressive en plaçant une opération par itération. Pour placer une opération, une arborescence d'une profondeur π est parcourue, arborescence qui contient toutes les séquences possibles des π prochaines opérations. Deux séquences de placements sont dites équivalentes si seul l'ordre, dans lequel les opérations de machines distinctes sont effectuées, diffère. Les résultats des placements des opérations de deux de ces séquences équivalentes sont alors identiques. Nous nous contentons de ne générer qu'un seul représentant de chaque classe d'équivalence. Un coût est associé à chaque séquence prévisionnelle et la première opération de la séquence de coût minimal est ordonnancée. Pendant la construction d'une séquence prévisionnelle, toutes les opérations sont placées au plus tôt. La date de début d'une opération est alors donnée par la plus grande des dates de disponibilité du produit et de la ressource associées à cette opération. Supposons que ces deux dates ne coïncident pas et appelons Δ la différence. Deux cas peuvent se produire :

1. Si Δ est dû à l'indisponibilité de la machine, le produit reste inutilisé pendant Δ en attendant la machine. L'opération peut seulement commencer à la date de disponibilité de la machine et nous perdons Δ de la marge de gammes, sans perdre de la marge de machines.

2. Si Δ est dû à l'indisponibilité du produit, la machine reste inutilisée pendant Δ en attendant le produit. Si nous plaçons l'opération à la date de disponibilité du produit, nous perdons Δ de la marge de machines, sans perdre de la marge de gammes.

Puisque nous ne considérons pas le cas où des opérations peuvent être insérées ultérieurement dans des intervalles d'attente des machines, toute consommation de la marge d'une machine est irrévocable. Il apparaît alors que si nous voulons respecter le temps de cycle, il faut absolument éviter qu'une marge de machines ne devienne négative.

Si nous nous trouvons dans le cas (2) et si la marge de machines est inférieure à Δ , nous ne pouvons placer l'opération à la date de disponibilité du produit, parce que dans ce cas la marge de machines deviendrait négative. En introduisant un autre produit, disponible immédiatement, nous pouvons éviter cette perte de marge de machines. Nous pouvons toujours procéder de cette manière, ce qui nous permet de garantir que le temps de cycle puisse être respecté. Puisque nous voulons minimiser l'en-cours, il faut cependant veiller à n'ajouter un produit qu'en cas d'absolue nécessité. L'algorithme place alors l'opération avec éventuellement un nouvel en-cours. Les marges sont mises à jour et l'algorithme itère.

Au vue de la description de l'algorithme il est possible de dégager les paramètres de la fonction de coût pour une évaluation des différentes séquences prévisionnelles. Une fonction de coût doit pénaliser l'ajout d'en-cours et la consommation des marges de machines et des marges de gammes. Puisqu'un grand nombre d'opérations à placer nécessite généralement une marge plus importante, nous avons pondéré dans le calcul du coût d'une séquence, la marge de chaque machine et de chaque gamme par le nombre d'opérations restantes.

La profondeur des séquences prévisionnelles est paramétrable, ce qui permet de garantir l'existence d'une solution dans des temps de calcul raisonnables. Si en phase d'exploitation, la commande prévisionnelle doit être générée dans des délais très courts, il suffit de limiter la profondeur de l'arbre de recherche au détriment de la minimisation de l'en-cours bien que les solutions obtenues s'en rapprochent fortement. Pour le savoir, nous comparons la valeur de l'en-cours obtenu avec la borne inférieure minimale. Comme déjà précisé, rappelons que cette valeur ne représente pas toujours la valeur optimale de l'en-cours puisque nous ne savons pas si cette borne est atteignable. Il se peut donc que nous ayons pu trouver une commande optimale. Par contre si une solution optimale est recherchée, il est a priori possible de l'obtenir avec cette méthode si la profondeur de recherche est fixée initialement au nombre total d'opérations à placer durant le cycle de production. Au vu de la complexité du problème, aucun temps de réponse n'est alors garanti.

Cependant dans certains cas, avec cette méthode développée dans [OHL 94b] ainsi que pour les deux autres méthodes étudiées précédemment, une solution optimale ne peut être trouvée même si un temps infini était à notre disposition. Nous mettons en évidence ce problème avec la reprise partielle de l'exemple développé dans [OHL 95a], cf. Figure II-30. Nous ne tenons compte effectivement que des gammes opératoires linéaires liées à la première ressource de transport. Le problème d'ordonnancement reste cependant semblable puisque les gammes du deuxième type de ressource de transport sont associées à des machines différentes du premier type.

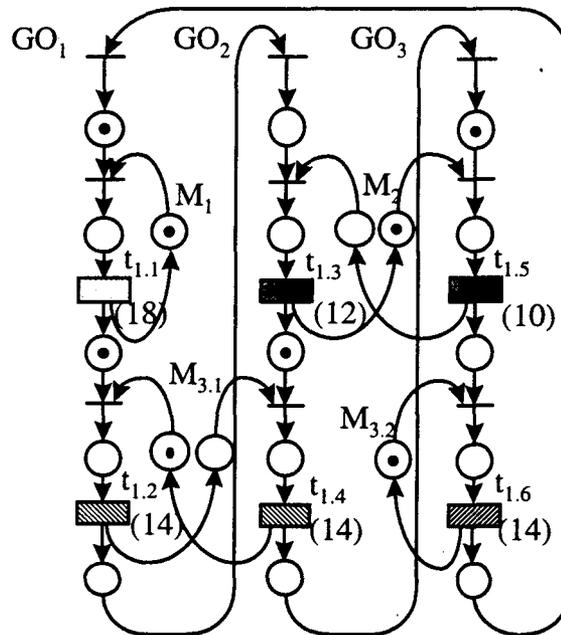


Figure II-30 : Modélisation des gammes opératoires liées au premier type de ressource de transport de l'exemple développé dans [OHL 95a]

La solution dite optimale, trouvée avec cette méthode et décrite à la Figure II-31, a un en-cours égal à 4, alors que la borne inférieure d'en-cours associé est égale à $B(Rc_{seq.tot.}) = 3$. Pour ce cas particulier, cette borne est atteignable, comme le montre l'ordonnement développé à la Figure II-32. Ceci est dû à un problème de non-chevauchement des cycles de fonctionnement, commun aux trois approches que nous venons d'étudier. En effet pour chacune d'entre elles une opération commencée durant un cycle doit obligatoirement se terminer pendant le même cycle. Prenons par exemple l'opération op_{12} de la Figure II-30. Avec la méthode [OHL 94b], c'est la même itération de cette opération qui est réalisée lors du cycle de production. Par contre, à la Figure II-32, une première itération termine cette opération alors que l'itération suivante achève (ou plutôt commence) la réalisation de ladite opération (ou plutôt du même type d'opérations à effectuer au cours d'un cycle).

Nous avons déjà vu qu'un des intérêts de l'ajout d'en-cours est de supprimer, du point de vue gammes, les contraintes de précédence reliant des opérations d'une même gamme opératoire linéaire. Nous voyons ici que l'ajout d'en-cours permet également de supprimer partiellement, du point de vue gamme et machine, les contraintes de précédence entre le début d'une opération et la fin de cette même opération (en fait du même type d'opération) sur un cycle de fabrication. Au niveau de l'opération, la réalisation reste toutefois effectuée en une seule fois comme les hypothèses l'ont spécifié : pas de préemption de tâche, il n'existe donc pas d'opération partiellement réalisée circulant dans l'atelier pour être reprise et terminée ultérieurement en mode de marche normal tout au moins (application de la commande prévisionnelle).

Ordonnement cyclique optimal pour l'heuristique de [OHL 94b] obtenu avec le regroupement cyclique :

$$R_{c_{seq.tot.}} = \{M_1^1 = (OP_1 - OP_2 - OP_3)\}$$

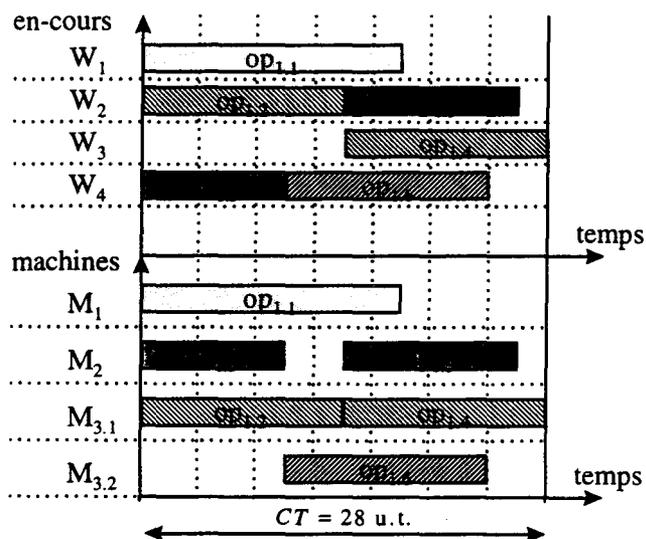


Figure II-31 : Diagramme de Gantt d'une des meilleures commandes obtenues avec l'heuristique [OHL 94b]

Ordonnement cyclique optimal obtenu avec le regroupement cyclique :

$$R_c = \{M_1^1 = (OP_1 - OP_3), M_2^1 = (OP_2)\}$$

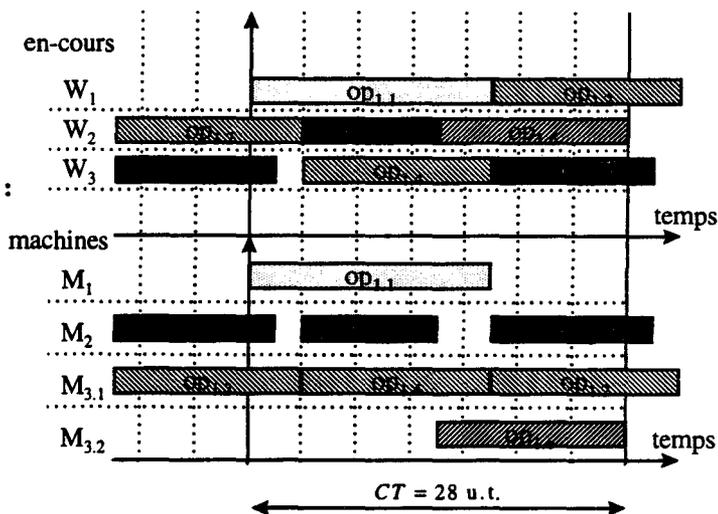


Figure II-32 : Diagramme de Gantt d'une des commandes optimales

Ce problème est dû à l'oubli de la caractéristique principale de l'ordonnement à effectuer : la répétitivité de la production. Il aurait été préférable de considérer tout de suite, au niveau du diagramme de Gantt modélisant l'ordonnement, une fenêtre temporelle de durée le temps de cycle, que nous pouvons translater dans le temps, sans référence temporelle unique pour toutes les gammes.

Au demeurant cette restriction aux ordonnancements, que nous appellerons maintenant « à cycles disjoints », même si elle n'était pas voulue, apparaissait au niveau de la représentation du modèle ordonnançable : cf. paragraphe II.2.2.2 et Figure II-6 pour la modélisation du dispositif de respect du tir de chaque transition une et une seule fois au

cours d'un cycle de fonctionnement. La contrainte de précédence entre le début et la fin de chaque opération inhérente à ce type de dispositif empêche la considération des ordonnancements avec chevauchement de cycles.

C'est pour toutes ces raisons que nous avons dû modifier certains points de l'heuristique en prenant en compte cette fois-ci la notion d'intervalle de disponibilité de machine esquissée dans [VAL 94] et en modifiant la fonction de placement des opérations sur un ordonnancement partiel en conséquence. C'est la description de l'ensemble de ces modifications qui fait l'objet du paragraphe suivant.

II.3.6 Essai de synthèse des trois approches : développement d'une nouvelle heuristique

Nous rappelons ici que nous essayons d'étendre l'heuristique de [OHL 94b] afin de prendre en compte le problème général de l'ordonnancement cyclique avec chevauchement des cycles. Pour cela nous proposons d'utiliser la notion d'intervalle de disponibilité des machines développée dans [VAL 94].

Nous rappellerons, dans un premier temps, au § II.3.6.1, les principales propriétés issues de l'étude de l'existant que doit vérifier en général une telle approche.

Au § II.3.6.2, les paramètres, ainsi que leurs propriétés, caractéristiques du problème d'ordonnancement cyclique que nous considérons, sont détaillés suivant les trois points de vue : en-cours, gammes de fabrication (ou macro-gammes) et machines de transformation.

Nous présentons ensuite au § II.3.6.3 la nouvelle heuristique en précisant les principales différences avec celle de [OHL 94b]. En prévision de l'utilisation de cette approche de façon réactive en phase d'exploitation, nous proposons deux pistes prospectives pour limiter les temps de calcul au § II.3.6.4.

Nous pouvons alors représenter le fonctionnement périodique de la commande à l'aide d'un diagramme de Gantt. Cependant, en vue d'automatiser l'implantation de la commande cyclique déterministe, il est préférable de disposer d'un Graphe d'Événements, cf. § II.3.6.5. Avec ce type de modélisation graphique, nous saisissons vite les limites de la convivialité en terme d'interface Homme-Machine si nous voulons utiliser ce modèle pour surveiller en temps réel le comportement et les performances du système de production.

II.3.6.1 Principes de l'heuristique

La principale caractéristique que doit posséder une heuristique d'ordonnancement cyclique, d'après l'étude précédente de l'existant, est de **garantir la résolution d'un ordonnancement en une seule itération de l'heuristique**. Pour éviter de recourir à d'autres méthodes qui scindent le problème en deux sous-problèmes NP-difficiles, il faut donc pouvoir garantir l'existence d'un ordonnancement réalisable respectant le temps de cycle imposé à tout moment du déroulement de notre heuristique.

De plus il faut éviter l'explosion combinatoire pour garantir l'existence d'une commande prévisionnelle dans des délais relativement courts en phase d'exploitation (de l'ordre de quelques minutes). Nous avons vu qu'avec l'heuristique de [OHL 94b], il était possible de paramétrer la profondeur des séquences prévisionnelles pour maîtriser le temps de calcul. Avec la limitation du nombre d'intervalles de disponibilité de chaque machine, nous avons alors deux moyens nous assurant la maîtrise du temps de calcul. Il nous faudra **trouver un bon compromis afin d'aboutir à de bons résultats**.

Enfin, au vu des trois méthodes étudiées, il semble de bon sens de retenir la **méthode de placement progressif des opérations**, quitte à autoriser le placement de plus d'une opération de la séquence prévisionnelle retenue d'après la fonction de coût.

II.3.6.2 Caractéristiques du problème d'ordonnancement cyclique à prendre impérativement en compte

- Parmi tous les paramètres à prendre impérativement en compte, l'**en-cours**⁽¹⁾ reste le plus important puisqu'il représente le critère terminal d'optimisation retenu dans notre approche. Nous retrouvons cette variable dans la fonction de coût afin de déterminer la meilleure des séquences prévisionnelles trouvées à une étape de l'heuristique. Etant donnée l'importance de cette notion, il est évident que c'est le niveau d'en-cours qui doit influencer le choix de telle ou telle séquence prévisionnelle. C'est pourquoi le **coefficient de pondération lié à cette variable** ($C_{par} = 180$, d'après [OHL 94b]) **est à prendre en considération face la marge de macro-gammes** ($C_{slack_pro} = 1$) **et la marge de machines** ($C_{slack_res} = 8$). Il s'agit de limiter le plus possible le niveau d'en-cours afin de le minimiser et n'autoriser l'ajout d'un en-cours que lorsque cela est strictement nécessaire pour assurer le respect du temps de cycle de production.

- *Au niveau gamme opératoire*, le **paramètre essentiel est la marge de macro-gammes**. Cette variable, contrairement aux deux autres apparaissant dans la fonction de coût, peut atteindre des valeurs négatives. D'ailleurs c'est en raison de cette marge de gammes que la fonction de coût n'est pas une fonction monotone et qu'il est impossible d'utiliser la méthode Branch and Bound de parcours d'une arborescence de recherche, car un échec ne peut être considéré dans ces conditions comme totalement définitif.

- *Au niveau ressource*, nous avons vu l'intérêt, pour les fonctionnements cycliques, d'utiliser les **notions d'intervalles de disponibilité des machines et des marges de machines**. Elles sont nécessaires au respect de la contrainte forte du temps de cycle imposé par la machine la plus lente de l'atelier.

En prenant en considération la possibilité de chevauchements des cycles de production, la contrainte **marge de machines toujours positive** n'est plus une condition suffisante pour garantir l'existence d'un ordonnancement qui respecte le temps de cycle. Il est donc nécessaire de la redéfinir pour une machine. Elle correspondait auparavant à la différence entre la charge des opérations restant à placer et la durée de l'intervalle situé entre la date de disponibilité de la machines et la fin du cycle, cf. Figure II-33. Avec la prise en compte de l'aspect cyclique de la commande, il est tout à fait possible de placer des opérations antérieurement à cette date de disponibilité. C'est la raison pour laquelle nous avons défini la notion d'intervalles de disponibilité de machines. La marge des machines devient alors la somme des durées des intervalles de disponibilité dans lesquels au moins une opération peut être ordonnancée.

¹ ou plus exactement le nombre maximum d'en-cours possible présents dans le système de production à un moment donné ou encore le nombre de palettes disponibles dans l'atelier.

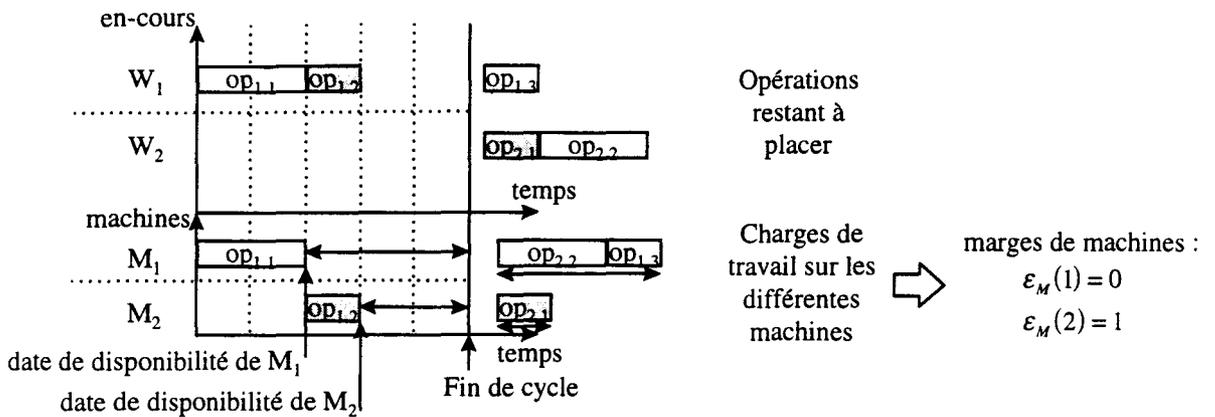


Figure II-33 : Ancienne définition de la marge de machines, cf. [OHL 94b]

Ainsi la condition marge de machines positive ne suffit plus pour assurer l'existence d'un ordonnancement comme nous l'illustrons sur la Figure II-34. En effet la marge de machines peut se répartir de telle sorte qu'il soit impossible de placer toutes les opérations à réaliser sur une machine durant le cycle de production dans les différents intervalles de disponibilité de cette machine.

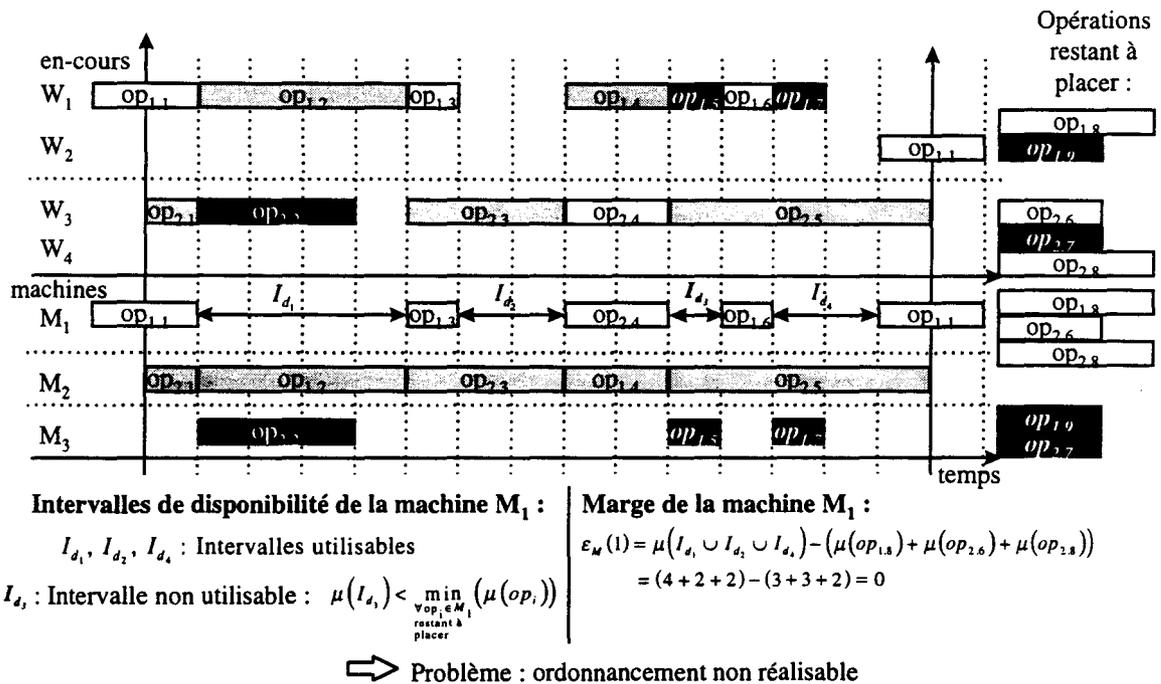


Figure II-34 : Définition de la nouvelle marge de machines et exemple d'ordonnancement non réalisable malgré la condition marge de machines toujours positive

La condition nécessaire et suffisante d'existence d'un ordonnancement réalisable réside dans la possibilité à chaque étape de l'heuristique de placer **toutes les opérations** restantes dans les intervalles de disponibilité des machines correspondantes. Ce problème peut

s'énoncer sous la forme d'un problème d'existence d'une solution d'un système d'équations et d'inéquations linéaires en nombres entiers. Pour cela nous définissons les termes suivants :

- $OP_{restant}$, l'ensemble des opérations à placer dans le cycle de production,
- Soit $OP(j,k)$ la k -ème opération de la j -ème macro-gamme, $OPM(j,k)$ la machine associée à cette opération et $\mu(OP(j,k))$ la durée de cette opération.
- Pour toute machine M_i , nous considérons l'ensemble de ses intervalles de disponibilités $I_{d_i}(M_i)$, $l \in \{1..NID(i)\}$, avec $NID(i)$ le nombre d'intervalles disponibles pour cette machine M_i . Chaque intervalle est caractérisé par sa date de début $d_d(i,l)$ et sa durée $\mu(I_{d_i}(M_i))$.
- Soit $Pl(j,k,l)$ un entier naturel binaire, égal à 0 ou à 1, représentant le placement virtuel ou non de l'opération $OP(j,k) \in OP_{restant}$ dans le l -ème intervalle de disponibilité de la machine associée $OPM(j,k)$.

Le système à résoudre est donc la recherche d'une solution s'exprimant sous la forme :

Condition nécessaire et suffisante d'existence d'un ordonnancement réalisable :

$\exists (Pl(j,k,l)) \in \{0,1\}^{\sum_{\forall M_i} \text{card}(OP_{restant} |_{OP(j,k) \in M_i}) * NID(i)}$ telle que :

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^{NID(OPM(j,k))} (Pl(j,k,l)) = 1, & \forall OP(j,k) \in OP_{restant} \quad (1) \\ \sum_{\substack{\forall OP(j,k) \in OP_{restant} \\ \& OPM(j,k) = M_i}} (Pl(j,k,l) * \mu(OP(j,k))) \leq \mu(I_{d_i}(M_i)), & \forall M_i, \forall l \in \{1..NID(i)\} \quad (2) \end{cases}$$

L'équation (1) décrit la nécessité de placer virtuellement toutes les opérations restantes **une et une seule fois** dans le cycle au niveau des intervalles de disponibilité de leur machine associée. Alors que l'équation (2) indique que les opérations placées dans un intervalle de leur machine associée ne peuvent représenter une charge de travail supérieure à la durée de cet intervalle. Ainsi si les deux contraintes (1) et (2) sont respectées, nous pouvons affirmer qu'il est encore possible de trouver au moins un ordonnancement réalisable : un de ceux qui consistent à effectivement placer toutes les opérations restantes $OP(j,k) \in OP_{restant}$ dans l'intervalle l , telles que $Pl(j,k,l) = 1$, de la machine correspondante $OPM(j,k)$, soit au plus tôt, soit au plus tard dans cet intervalle afin d'éviter de créer de nouveaux intervalles de disponibilités et de rendre dans ce cas l'ordonnancement non réalisable.

II.3.6.3 Présentation de la nouvelle heuristique d'ordonnancement cyclique

- *Présentation succincte du principe du placement d'opérations développé dans [OHL 94b]*

Avec la nouvelle définition de la marge de gammes et la détermination de la nouvelle condition nécessaire et suffisante d'existence d'ordonnancement réalisable, nous avons réuni l'ensemble des éléments nécessaires à la spécification de l'algorithme d'ordonnancement. Cet algorithme remplace la procédure de placement ainsi que l'algorithme de placement définis dans [OHL 95a]. Cette procédure plaçait au plus tôt la k -ème opération de la j -ème gamme.

Si la marge de machines était suffisante, l'opération était placée directement à la date de disponibilité de sa machine associée. Il était donc nécessaire de consommer de la marge de ressource pour éviter l'ajout d'en-cours.

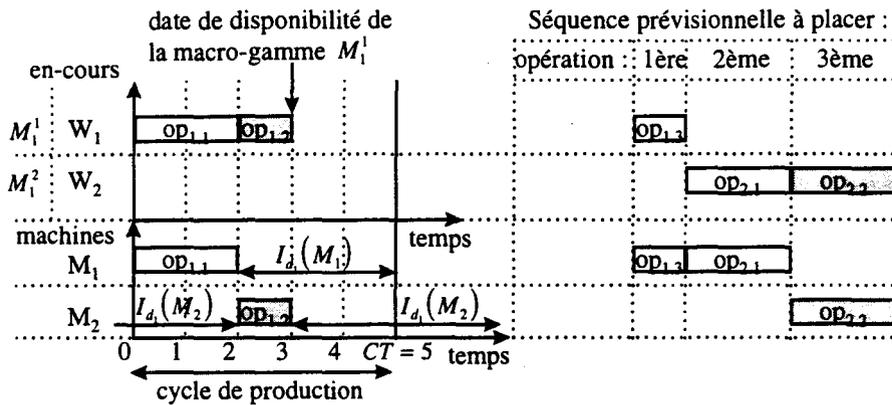
Dans le cas contraire, afin d'éviter d'atteindre des valeurs négatives pour les marges de machines et donc de ne plus respecter le temps de cycle imposé $CT(RP_p)$, un nouvel en-cours était ajouté et l'opération commençait alors juste à la date de disponibilité de la machine, évitant la consommation de la marge de machines, mais modifiant en général la marge de gammes (accroissement ou diminution).

- *Les nouvelles façons de placer les opérations*

Avec notre approche, nous proposons **plusieurs façons** de placer les opérations (dans la méthode préconisée par H. Ohl, un seul placement était envisagé par opération). Nous développons un exemple d'illustration des différentes solutions de placement d'une opération sur un ordonnancement répétitif en-cours d'élaboration. Nous en déduisons les avantages et inconvénients.

L'ordonnancement proposé en exemple est supposé presque terminé et il ne reste plus à placer sur le cycle de production que les trois dernières opérations $op_{1,3}$, $op_{2,1}$ et $op_{2,2}$. Elles sont toutes les trois réunies dans une séquence prévisionnelle donnée, comme le montre la Figure II-35, dont il faut évaluer la fonction de coût. Il existe a priori plusieurs séquences prévisionnelles non équivalentes au niveau ordonnancement des opérations sur les machines (2 pour être exact). Nous n'en étudions qu'une seule qui permet de passer en revue tous les types de placement.

Puisque nous proposons plusieurs modes de placement pour une seule opération, il y a donc plus d'une façon d'ordonnancer une séquence prévisionnelle. Toutes ne seront cependant pas retenues car elles conduisent parfois à des ordonnancements non réalisables. C'est grâce à la nouvelle condition nécessaire et suffisante d'existence d'ordonnancement réalisable que nous allons pouvoir détecter les placements d'opérations qui n'aboutiront à aucune solution. Nous pourrons donc éliminer, dès leur naissance, les branches dont la ramification ne peut arriver jusqu'aux feuilles terminales. Il est également nécessaire de garantir l'existence d'au moins une solution conduisant à un ordonnancement réalisable.



<p>marges de machines :</p> $\varepsilon_M(1) = \mu(I_d(M_1)) - (\mu(op_{1,3}) + \mu(op_{2,1})) = 3 - (1 + 2) = 0$ $\varepsilon_M(2) = \mu(I_d(M_2)) - \mu(op_{2,2}) = 4 - 2 = 2$	<p>marges de macro-gammes :</p> $\varepsilon_G(M_1^1) = 2 - 1 = 1$ $\varepsilon_G(M_1^2) = CT(RP_p) - (\mu(op_{2,1}) + \mu(op_{2,2})) = 5 - 4 = 1$	<p>en-cours :</p> <p style="text-align: center;">WIP = 2</p>
--	---	---

Figure II-35 : Exemple illustrant les différents modes de placement possibles d'une opération sur un ordonnancement cyclique en-cours d'élaboration

- *Distinction entre les différentes politiques de placement d'opérations*

Parmi tous les placements possibles, nous avons dégagé principalement deux types.

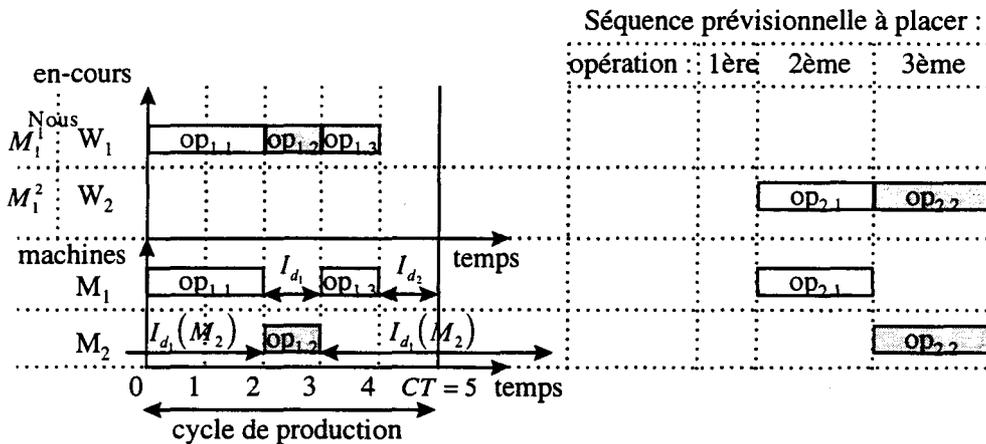
- ◆ *Placement avec accroissement du nombre d'intervalles de disponibilités de machines*

La première possibilité de placement permet de scinder un des intervalles précédents de disponibilité de machines en deux en ordonnant l'opération suivante de la séquence prévisionnelle a priori n'importe où dans cet intervalle de disponibilité de la machine associée à cette opération. Le choix de l'intervalle parmi ceux de la machine importe a priori peu. Il faut cependant que la durée de l'intervalle soit au moins supérieure ou égal à la durée opératoire pour réaliser cette opération en une seule fois (pas de préemption de machine). Pour arriver à la solution optimale, tous les placements doivent être a priori envisagés. Il reste impossible de balayer tous les cas en raison de l'explosion combinatoire.

C'est pourquoi nous n'allons retenir parmi les placements que celui qui **ordonne l'opération**, si possible, **à la date de disponibilité de la macro-gamme**, pour éviter de consommer la marge de macro-gammes et donc d'ajouter un en-cours supplémentaire. La condition nécessaire et suffisante de placement de l'opération réside dans la recherche de l'inclusion de l'intervalle, correspondant au placement envisagé de la nouvelle opération dans le cycle, dans l'un des intervalles de disponibilité de la machine associée.

Pour l'exemple développé à la Figure II-35, il s'agit d'essayer de placer la prochaine opération $op_{1,3}$ le plus tôt possible sur la macro-gamme associée (M_1^1). Cet intervalle de placement programmé débute donc à la date de disponibilité de la macro-gamme correspondante, c'est-à-dire à $t = 3$, sa durée est égale à la durée opératoire $\mu(op_{1,3}) = 1$. Il s'agit donc de trouver un intervalle de disponibilité de la

machine correspondante (M_1) contenant cet intervalle. Le seul intervalle disponible pour cette machine $I_{d_1}(M_1) = [2,5]$ contient effectivement le premier intervalle : $[3,4]_{CT} \subset [2,5]_{CT}$. Il est donc possible de placer $op_{1,3}$ au plus tôt de la macro-gamme M_1^1 , cf. Figure II-36.



$I_{d_1}(M_1)$ et $I_{d_2}(M_1)$ sont des intervalles de disponibilités de la machine M_1 non utilisables :

$$\mu(I_{d_1}(M_1)) = \mu(I_{d_2}(M_1)) = 1 < \min_{\substack{\forall OP(j,k) \in OP_{max} \\ \text{et } OPM(j,k) = M_1}} \mu(OP(j,k)) = \mu(op_{2,1}) = 2$$

marges de machines :

$$\epsilon_M(1) = 0 - \mu(op_{2,1}) = -2 < 0$$

$$\epsilon_M(2) = \mu(I_{d_1}(M_2)) - \mu(op_{2,2}) = 4 - 2 = 2$$

marges de macro-gammes :

$$\epsilon_G(M_1^1) = 1$$

$$\epsilon_G(M_1^2) = CT(RP_p) - (\mu(op_{2,1}) + \mu(op_{2,2})) = 5 - 4 = 1$$

en-cours :

$$WIP = 2$$

⇒ Ordonnancement non réalisable

Figure II-36 : Placement de l'opération $op_{1,3}$ au plus tôt au niveau de l'en-cours ou à la date de disponibilité de la macro-gamme correspondante : pas de perte de marge de gammes

Le placement de l'opération $op_{1,3}$ à la date de disponibilité de la macro-gamme a engendré une nouvelle branche. Nous appliquons alors la condition nécessaire et suffisante d'existence d'ordonnancement réalisable pour savoir si cette branche aboutit à une commande du système. Malheureusement la scission de l'intervalle en deux :

$$I_{d_1}(M_1) = [2,5] + \text{placement de } op_{1,3} \text{ sur } [3,4] \rightarrow I_{d_1}(M_1) = [2,3] \text{ et } I_{d_2}(M_1) = [4,5]$$

empêche le placement de l'opération $op_{2,1}$ de durée $\mu(op_{2,1}) = 2$. L'ordonnancement est devenu donc non réalisable à cause du placement de $op_{1,3}$ à cet endroit. Il ne sert à rien de poursuivre le placement des autres opérations de la séquence prévisionnelle, nous sommes sûrs de ne pouvoir au final aboutir à une solution ⁽¹⁾.

¹ D'après la Figure II-36, il n'était pas nécessaire dans ce cas de tester la condition nécessaire et suffisante d'existence d'ordonnancement réalisable pour savoir qu'un tel ordonnancement n'était pas viable. Il suffit en effet de considérer

Cette approche d'ordonnancement des tâches tente de minimiser l'en-cours en séquençant les opérations directement les unes à la suite des autres sur les macro-gammes, donc en interdisant la consommation de marge de macro-gammes. Cependant cela se fait au détriment de la consommation de marge de machines ou plutôt des intervalles de disponibilité de la machine associée, ce qui peut rendre l'ordonnancement non réalisable.

Au niveau des machines, l'intervalle de disponibilité de la machine, quand il existe, contenant celui de placement de la nouvelle opération est en général découpé en deux sous-intervalles. Pour le cas particulier où la date de disponibilité de la macro-gamme correspond à la date de début d'un intervalle de disponibilité de la machine, comme au final il reste un seul intervalle, ce dernier est regroupé avec l'autre mode de placement des opérations.

◆ *Placement d'une opération avec conservation du nombre d'intervalles de disponibilités de machines*

Avec la méthode développée précédemment, nous ne sommes pas certains d'aboutir à une solution. Il faut donc trouver un moyen de placer les opérations pour garantir l'existence d'un ordonnancement réalisable à la fin du placement de la séquence prévisionnelle. Cette approche consiste à interdire tout découpage des intervalles de disponibilité des différentes machines. Pour cela il faut et il suffit de placer les nouvelles opérations soit au début d'un tel intervalle, cf. Figure II-37, soit à la fin, cf. Figure II-38.

Nous rappelons simplement à titre de remarque qu'il est tout à fait possible que la fin d'un intervalle se situe au niveau temporel, dans le cycle de production, antérieurement au début de ce même intervalle. Cela est dû à la prise en compte des chevauchements de cycles et des intervalles de disponibilité dits cycliques. Ce qui permet d'affirmer que nous sommes certains de trouver au moins une solution. En effet **au départ, chaque machine dispose d'un seul intervalle de disponibilité**. En utilisant uniquement la politique de placement soit au début d'un intervalle soit à la fin, nous préservons cet intervalle unique et par la même, nous garantissons à tout moment l'ordonnancement de toutes les opérations sur le cycle de production si nous limitons, pour chaque nouveau placement d'opérations, notre recherche aux solutions associées à un ordonnancement réalisable.

les marges de machines : comme la marge de M_1 devient négative, nous savons que l'ordonnancement de toutes les opérations restantes sur la machine M_1 est impossible. Cette condition, même si elle ne peut plus servir à déterminer si l'ordonnancement est réalisable, demeure cependant une condition suffisante pour déterminer la non-viabilité de la solution liée à un placement d'opération.

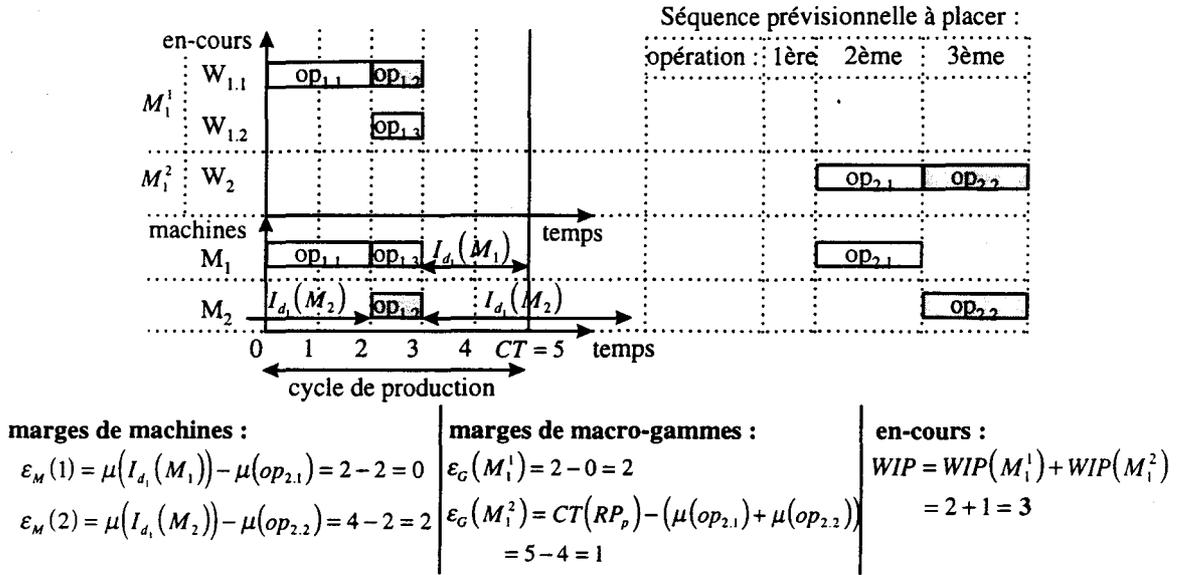


Figure II-37 : Placement de l'opération $op_{1,3}$ au début de l'intervalle de disponibilité $I_{d_1}(M_1)$

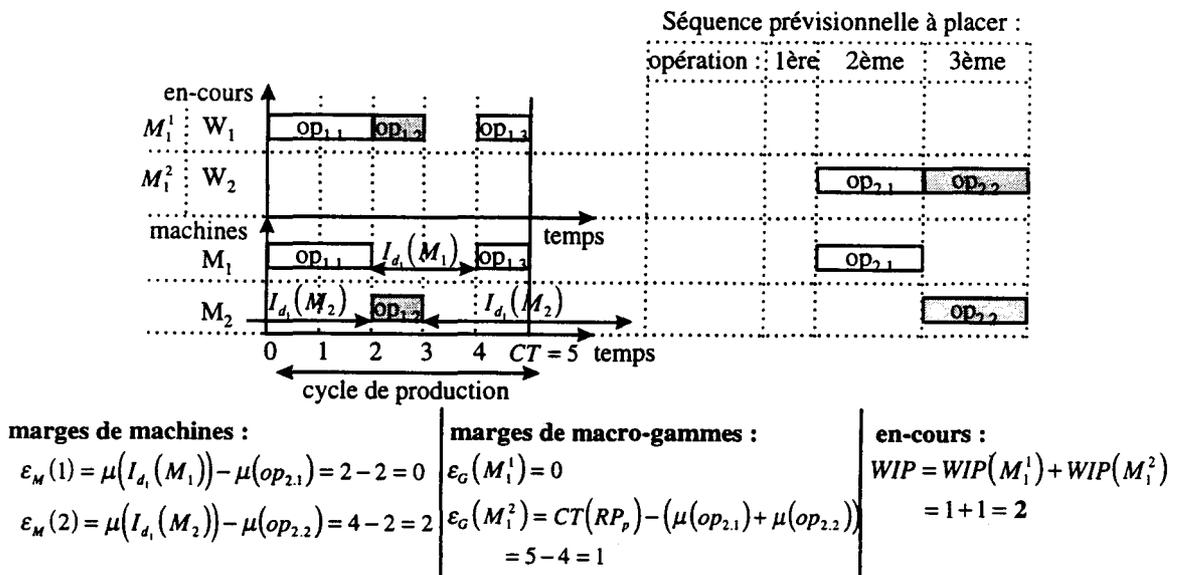


Figure II-38 : Placement de l'opération $op_{1,3}$ à la fin de l'intervalle de disponibilité $I_{d_1}(M_1)$

Pour revenir à la méthode précédente de placement, le cas particulier du synchronisme parfait entre la date de disponibilité de la macro-gamme, sur laquelle nous voulons placer au plus tôt la prochaine opération, et le début d'un intervalle de disponibilité, associé à la même machine et capable de supporter cette charge de travail, correspond en fait au placement au début d'un intervalle, pour lequel aucune perte de marge de macro-gammes ne serait à déplorer. Il représente en fait le cas idéal de placement d'une opération.

Une opération peut a priori se placer dans n'importe quel intervalle de disponibilité appartenant à la même ressource et de durée supérieure à la durée opératoire. Un problème de complexité se pose alors puisqu'il faut a priori essayer

de placer toutes les opérations dans les différents intervalles qui leur sont alloués. Plus le nombre d'intervalles est important, plus complexe est l'arborescence de recherche du meilleur ordonnancement de la meilleure séquence prévisionnelle. Même si un grand nombre de branches n'aboutissent pas aux feuilles terminales et que nous détruisons toutes ces branches dès leur naissance, cela n'évite pas leur dénombrement et l'accroissement du temps de calcul (l'algorithme est basé sur un processus récursif). Il semble donc raisonnable d'essayer de contrôler le nombre d'intervalles de disponibilité pour chaque ressource. Il s'agit donc de limiter le nombre de placements au plus tôt sur la macro-gamme des opérations de la séquence prévisionnelle.

Mais cela n'empêche pas le fait qu'en présence, à un moment donné, de plusieurs intervalles de disponibilité pour une même ressource, il se pose le problème d'existence d'un ordonnancement réalisable après placement d'une opération selon l'une de ces deux méthodes. En effet les intervalles obtenus précédemment peuvent aboutir à un ordonnancement réalisable avec une répartition précise des opérations sur les différents intervalles. Il suffit alors d'ordonnancer une « mauvaise » opération dans un intervalle de disponibilité autre que celui qui lui avait été prévu pour aboutir à un ordonnancement non réalisable. Il est donc impératif, pour cette politique de placement, d'appliquer également la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un ordonnancement réalisable afin d'éliminer les branches mortes issues de cette approche.

Au vu des Figure II-37 et Figure II-38 nous remarquons que ce type de placement évite l'accroissement du nombre d'intervalles de disponibilité pour chaque machine sans pour autant stabiliser la marge de gammes. En effet l'ordonnancement d'une opération sur un intervalle au début ou à la fin peut rendre ledit intervalle inutilisable pour les opérations restantes sur cette machine, et donc diminuer la marge des machines. Nous dégageons également deux possibilités : soit la marge de macro-gammes croît avec le placement d'une opération, dû à l'utilisation d'un nouvel en-cours pour réaliser la macro-gamme correspondante, cf. Figure II-37, soit il y a diminution de la marge avec ou non ajout d'en-cours, cf. Figure II-38. Le cas le plus défavorable (ajout d'en-cours, perte de marge de machines, et perte de marge de macro-gammes) reste cependant possible.

Dans la perspective de réduire l'explosion combinatoire, il est possible de limiter ce type de placement à un seul intervalle, appelé « le plus proche disponible », capable d'accueillir une telle opération et minimisant à la fois la consommation de marges de macro-gammes et/ou l'ajout d'en-cours.

- *Présentation de l'algorithme d'ordonnancement cyclique des opérations sur les machines avec minimisation de l'en-cours*

Nous pouvons ainsi proposer l'algorithme d'ordonnancement cyclique en pseudo-code sous la forme d'un algorithme récursif de placement progressif d'opérations après avoir présenté les variables et paramètres nécessaires à la transcription de l'heuristique (rappel et définition), ainsi que la procédure de recherche du meilleur ordonnancement d'une séquence donnée d'opérations :

Paramètres de l'algorithme :

- $OP(j,k)$ k -ème opération de la j -ème macro-gamme,
- $OPM(op_i)$ machine associée à l'opération op_i ,
- $OPMG(op_i)$ macro-gamme associée à l'opération op_i ,
- $\mu(op_i)$ durée de l'opération op_i ,
- M nombre de machines, (variable associée : i)
- H nombre de types de ressources de transport, (variable associée : h)
- K_h nombre de macro-gammes pour le h -ème type de ressource de transport (variable associée : a),
- π^* profondeur maximale de l'arbre de recherche,
- $CT = CT(RP_p)$ temps de cycle à respecter,
- C_{WIP} coût associé au placement d'un en-cours,
- $C_{macr.}$ coût associé à la perte d'une unité de marge de macro-gammes,
- $C_{mach.}$ coût associé à la perte d'une unité de marge de machines.

Variables de l'algorithme :

- **$ESTG, EST, ESC$ variables de type état de l'ordonnement en-cours :**
ce type est à champ multiple.
 ESC est la variable courante,
 $ESTG$ est la variable utilisée pour conserver l'état de l'ordonnement avant le placement des séquences prévisionnelles d'opérations,
 EST est une variable locale utilisée pour conserver les états d'ordonnement au cours de la récursivité.
Les différentes caractéristiques de cet état sont :
 $.OP_{placé}$: l'ensemble des opérations déjà placées,
 $.OP_{restant}$: l'ensemble des opérations restantes,
 $.e_M(M_i)$: la marge de la machine M_i , $\forall i$,
 $.NID(M_i)$: nombre d'intervalles de disponibilité de la machine M_i , $\forall i$,
 $.I_{d_i}(M_i)$: l -ème intervalle de disponibilité de la machine M_i , $\forall i, \forall l$
 $.d_a(i,l)$: date de début de l'intervalle de disponibilité $I_{d_i}(M_i)$, $\forall i, \forall l$,
 $.μ(I_{d_i}(M_i))$: durée de l'intervalle de disponibilité $I_{d_i}(M_i)$, $\forall i, \forall l$,
 $.WIP(M_a^h)$: niveau d'en-cours utilisé pour placer les opérations déjà ordonnancées sur la macro-gamme M_a^h , $\forall h, \forall a$,
 $.d_a(M_a^h)$: date de disponibilité de la macro-gamme M_a^h , $\forall h, \forall a$,
 $.e_G(M_a^h)$: marge totale de la macro-gamme M_a^h , $\forall h, \forall a$.
- π profondeur effective de l'arbre de recherche,

- σ séquence prévisionnelle (initialisée à π opérations à placer),
avec $\sigma(s)$: la s -ème opération de la séquence σ ,
- $\Omega(\pi)$ ensemble des séquences prévisionnelles non équivalentes de
profondeur associée égale à π , avec, pour chaque opération, la
politique de placement utilisée.
- $\Omega(\pi)(1)$ première séquence de $\Omega(\pi)$ avec les politiques de placement
de chaque opération.
- $pré(\Omega(\pi))$ première séquence d'opérations de $\Omega(\pi)$,
- $compteur$ nombre de feuilles terminales atteintes pour un
ensemble $\Omega(\pi)$,
- $Cout_1$ coût associé à l'en-cours déjà utilisé,
- $Cout_2$ coût associé à la marge de machines,
- $Cout_3$ coût associé à la marge de macro-gammes,
- $Cout_{total}$ somme des trois coûts précédents : coût associé à un état de
l'ordonnancement d'une feuille terminale,
- $Cout_{meilleur}$ meilleur coût retenu des feuilles terminales issues de $\Omega(\pi)$,
- $\sigma_{meilleur}$ séquence associée à $Cout_{meilleur}$ (initialisée à \emptyset) avec pour
chaque opération la politique de placement.

Procédure Rechercher_meilleur_ordo_de_la_séquence (σ, ESC)

- **Si(1)** $\sigma = \emptyset$
- **alors(1)**
 - | */* S'il n'y a plus d'opérations à placer, une nouvelle feuille terminale vient
d'être atteinte. Il faut évaluer le coût de l'état d'ordonnancement pour
éventuellement le retenir s'il représente le meilleur coût pour le moment. */*
 - | $compteur = compteur + 1$
 - | $Cout_1 = C_{WIP} * \sum_{\forall h, \forall a} ESC.WIP(M_a^h)$
 - | $Cout_2 = C_{mach.} * \sum_{i=1}^M card(ESC.OP_{restant} |_{OP(j,k)=M_i}) * ESC.\epsilon_M(M_i)$
 - | $Cout_3 = C_{macr.} * \sum_{\forall h, \forall a} card(ESC.OP_{restant} |_{OP(j,k) \in M_a^h}) * ESC.\epsilon_G(M_a^h)$
 - | $Cout_{total} = Cout_1 + Cout_2 + Cout_3$
 - | **Si(2)** $Cout_{total} < Cout_{meilleur}$
 - | **alors(2)**
 - | | $Cout_{meilleur} = Cout_{total}$
 - | | $\sigma_{meilleur} = \Omega(\pi)(1)$
 - | **Fin alors(2)**
- **Sinon(1)**
 - | */* Il reste encore des opérations de la séquence σ à placer. Il faut ordonnancer
la prochaine opération suivant les différentes politiques de placement. */*

Si(2) $ESC.OP_{placé} \Big|_{OPM(\sigma(1))} = \emptyset,$

alors(2)

/ Si aucune opération de la machine associée à la prochaine opération à placer n'a encore été ordonnancée, cette opération est placée directement à la date de disponibilité de la macro-gamme correspondante pour éviter de perdre de la marge de macro-gammes et d'augmenter inutilement l'en-cours. Ce placement modifie la date de début et la durée de l'unique intervalle de disponibilité de la machine associée */*

$ESC.OP_{restant} = ESC.OP_{restant} - \{\sigma(1)\}$

$ESC.OP_{placé} = ESC.OP_{placé} \cup \{\sigma(1)\}$

Modifier $ESC.d_d(OPM(\sigma(1)),1)$ */* date de début du seul intervalle de disponibilité de la machine associée à l'opération $\sigma(1)$ */*

Modifier $ESC.\mu(I_{d_i}(OPM(\sigma(1))))$ */* durée de l'intervalle de disponibilité */*

Modifier $ESC.d_d(OPMG(\sigma(1)))$ */* date de disponibilité de la macro-gamme associée à $\sigma(1)$ */*

Ajouter si nécessaire un en-cours dans $ESC.WIP(OPMG(\sigma(1)))$

Indiquer la politique de placement de $\sigma(1)$ dans $pré(\Omega(\pi))$

Rechercher_meilleur_ordo_de_la_séquence ($\sigma \setminus \sigma(1), ESC$)

Fin alors(2)

Sinon(2)

/ Politique de placement, si c'est possible, de la prochaine opération de la séquence prévisionnelle à la date de disponibilité de la macro-gamme associée. Si cela conduit à un ordonnancement réalisable, placement de l'opération suivante de la séquence à l'aide de la récurrence */*

$EST = ESC$

Si(3) il existe un intervalle de disponibilité ($ESC.I_{d_i}(OPM(\sigma(1)))$) de la

machine $OPM(\sigma(1))$ comprenant l'opération $\sigma(1)$ placée à la date de

disponibilité de la macro-gamme associée $OPMG(\sigma(1))$ et dont la date de

début ne coïncide pas avec la date de disponibilité de $OPMG(\sigma(1))$ ou dont

la date de fin ne coïncide pas avec la date de fin de l'opération $\sigma(1)$,

alors(3)

$ESC.OP_{restant} = ESC.OP_{restant} - \{\sigma(1)\}$

$ESC.OP_{placé} = ESC.OP_{placé} \cup \{\sigma(1)\}$

Incrémenter $ESC.NID(OPM(\sigma(1)))$ */* nombre d'intervalles de disponibilité de la machine $OPM(\sigma(1))$ */*

Créer un nouvel intervalle terminant l'ancien $ESC.I_{d_i}(OPM(\sigma(1)))$ (date de début et durée)

Modifier $ESC.\mu(I_{d_i}(OPM(\sigma(1))))$

Modifier $ESC.d_d(OPMG(\sigma(1)))$

```

| | Modifier si nécessaire  $ESC.\varepsilon_M(OPM(\sigma(1)))$ 
| | Ajouter si nécessaire un en-cours dans  $ESC.WIP(OPMG(\sigma(1)))$ 
| | Indiquer la politique de placement de  $\sigma(1)$  dans  $pré(\Omega(\pi))$ 
| | Si(4) la condition CNS d'existence d'un ordonnancement réalisable est
| | vérifiée,
| | alors(4)
| | Rechercher_meilleur_ordo_de_la_séquence ( $\sigma \setminus \sigma(1), ESC$ )
| | Fin alors(4)
| |  $ESC = EST$ 
| | Fin alors(3)
| | /* Placement de l'opération  $\sigma(1)$  dans tous les intervalles pouvant
| | l'accueillir selon deux façons : au plus tôt et au plus tard */
| | Pour(1) tous les intervalles  $ESC.I_{d_i}(OPM(\sigma(1)))$  tels que
| |  $ESC.\mu(I_{d_i}(OPM(\sigma(1)))) \geq \mu(\sigma(1))$ , faire
| | /* Politique de placement de la prochaine opération au début de
| | l'intervalle de disponibilité  $ESC.I_{d_i}(OPM(\sigma(1)))$  de la machine associée.
| | Après vérification de la CNS d'existence d'un ordonnancement
| | prévisionnel, placement de l'opération suivante de la séquence avec la
| | récurrence */
| |  $ESC.OP_{restant} = ESC.OP_{restant} - \{\sigma(1)\}$ 
| |  $ESC.OP_{placé} = ESC.OP_{placé} \cup \{\sigma(1)\}$ 
| | Modifier  $ESC.d_d(OPM(\sigma(1)), l)$ 
| | Modifier  $ESC.\mu(I_{d_i}(OPM(\sigma(1))))$ 
| | Si  $ESC.\mu(I_{d_i}(OPM(\sigma(1)))) = 0$  alors supprimer  $ESC.I_{d_i}(OPM(\sigma(1)))$ 
| | Modifier  $ESC.d_d(OPMG(\sigma(1)))$ 
| | Modifier si nécessaire  $ESC.\varepsilon_G(OPMG(\sigma(1)))$ 
| | Modifier si nécessaire  $ESC.\varepsilon_M(OPM(\sigma(1)))$ 
| | Ajouter si nécessaire un en-cours dans  $ESC.WIP(OPMG(\sigma(1)))$ 
| | Indiquer la politique de placement de  $\sigma(1)$  dans  $pré(\Omega(\pi))$ 
| | Si(3) la condition CNS d'existence d'un ordonnancement réalisable est
| | vérifiée,
| | alors(3)
| | Rechercher_meilleur_ordo_de_la_séquence ( $\sigma \setminus \sigma(1), ESC$ )
| | Fin alors(3)
| |  $ESC = EST$ 
| | /* Politique de placement de la prochaine opération à la fin de l'intervalle
| | de disponibilité  $ESC.I_{d_i}(OPM(\sigma(1)))$  de la machine associée. Après
| | vérification de la CNS d'existence d'un ordonnancement prévisionnel,
| | placement de l'opération suivante de la séquence avec la récurrence */

```

- | | | $ESC.OP_{\text{restant}} = ESC.OP_{\text{restant}} - \{\sigma(1)\}$
- | | | $ESC.OP_{\text{placé}} = ESC.OP_{\text{placé}} \cup \{\sigma(1)\}$
- | | | Modifier $ESC.\mu(I_{d_i}(OPM(\sigma(1))))$
- | | | Si $ESC.\mu(I_{d_i}(OPM(\sigma(1)))) = 0$ alors supprimer $ESC.I_{d_i}(OPM(\sigma(1)))$
- | | | Modifier $ESC.d_d(OPMG(\sigma(1)))$
- | | | Modifier si nécessaire $ESC.\varepsilon_G(OPMG(\sigma(1)))$
- | | | Modifier si nécessaire $ESC.\varepsilon_M(OPM(\sigma(1)))$
- | | | Ajouter si nécessaire un en-cours dans $ESC.WIP(OPMG(\sigma(1)))$
- | | | Indiquer la politique de placement de $\sigma(1)$ dans $pré(\Omega(\pi))$
- | | | Si la condition CNS d'existence d'un ordonnancement réalisable est vérifiée,
- | | | **alors(3)**
- | | | Rechercher_meilleur_ordo_de_la_séquence $(\sigma \setminus \sigma(1), ESC)$
- | | | **Fin alors(3)**
- | | | $ESC = EST$
- | | | **Fin Pour(1)**
- | | **Fin Sinon(2)**
- **Fin Sinon(1)**

Initialisation

- $ESC.OP_{\text{placé}} = \emptyset$
- $ESC.OP_{\text{restant}} = \{OP(j, k), \forall j, \forall k\}$
- $\forall i \in \{1..M\}, ESC.NID(M_i) = 1, ESC.d_d(i, 1) = 0$ et $ESC.\mu(I_{d_i}(M_i)) = CT$
- $\forall h \in \{1..H\}, \forall a \in \{1..K_h\}, ESC.d_d(M_a^h) = 0, ESC.WIP(M_a^h) = 1$
- Calculer $ESC.\varepsilon_M(M_i), \forall i \in \{1..M\}$
- Calculer $ESC.\varepsilon_G(M_a^h), \forall h \in \{1..H\}, \forall a \in \{1..K_h\}$

Algorithme de placement

- **Tant que(1)** $card(OP_{\text{restant}}) \neq \emptyset$, faire
 - | Déterminer la profondeur π des séquences prévisionnelles :
 - | $\pi = \min(\pi^*, card(OP_{\text{restant}}))$
 - | Calculer l'ensemble des séquences prévisionnelles σ représentant de chaque classe d'équivalence : $\Omega(\pi)$

```

|   compteur = 0
|   Coutmeilleur = ∞
|   ESTG = ESC
|   Tant que(2) card( $\Omega(\pi)$ ) ≠ ∅, faire
|       |   ESC = ESTG
|       |   Rechercher meilleur_ordo_de_la_séquence ( $\sigma = \text{pré}(\Omega(\pi)), \text{ESC}$ )
|       |    $\Omega(\pi) = \Omega(\pi) - \{\Omega(\pi)(1)\}$ 
|   Fin Tant que(2)
|   ESC = ESTG
|   Placer réellement la première opération de la meilleure séquence  $\sigma_{\text{meilleur}}$  avec
|   la politique de placement précisé et modifier ESC en conséquence.
•   Fin Tant que(1)

```

L'aspect codage n'a pas été approfondi dans ce mémoire dans le souci de ne pas alourdir davantage la présentation de l'algorithme. Pour les mêmes raisons, nous n'avons pas introduit les différents paramètres évoqués précédemment permettant de contrôler de manière relative le temps de calcul :

- limitation du nombre d'intervalles de disponibilité pour chaque machine,
- limitation du nombre d'intervalles sur lesquels la prochaine opération de la séquence prévisionnelle peut être ordonnancée,
- augmentation du nombre d'opérations effectivement placées à partir d'une séquence prévisionnelle retenue.

Le plus important à retenir est qu'il est a priori possible de trouver avec cet algorithme, pour un problème d'ordonnancement cyclique donné, la meilleure solution, c'est-à-dire celle qui minimise l'en-cours, en fixant la profondeur de recherche π dès le départ au nombre total d'opérations à placer sur le cycle et en autorisant toutes les politiques de placement sur les différents intervalles de disponibilité de machines.

De fait, sans chercher à nous limiter à des cas particuliers d'ordonnancement, nous avons a priori réussi à spécifier et résoudre le problème général de l'ordonnancement cyclique en production manufacturière.

II.3.6.4 Suggestions pour une mise en œuvre de l'algorithme en phase d'exploitation

Nous avons manqué de temps pour aller jusqu'à une réalisation informatique de l'algorithme et pouvoir en apprécier les performances. Cependant, nous nous sommes assurés qu'avec cet algorithme nous pouvons atteindre pour l'exemple illustratif de ce chapitre, mais aussi pour d'autres exemples, l'une des solutions optimales, ce que ne permettent pas les heuristiques développées dans la littérature. En effet nous avons obtenu l'ordonnancement d'une des commandes optimales, cf. Figure II-43 et Figure II-44 en suivant fidèlement le principe de cet algorithme.

Il est fort probable que l'application de cet algorithme soit très coûteuse en temps de calcul, en raison de la complexité de l'imbrication des deux arbres de recherche :

premier lié aux séquences prévisionnelles générées de profondeur π et le deuxième lié aux différentes politiques de placement d'une opération et de la recherche, pour chaque politique de placement d'une opération, de l'existence d'un ordonnancement réalisable à partir de ce placement. C'est la raison pour laquelle nous proposons maintenant d'analyser quelques pistes pour limiter les temps de réponse en conservant de relatives bonnes performances et ceci dans le souci de pouvoir utiliser cette approche de façon réactive lors de l'exploitation d'un S.F.P.M.

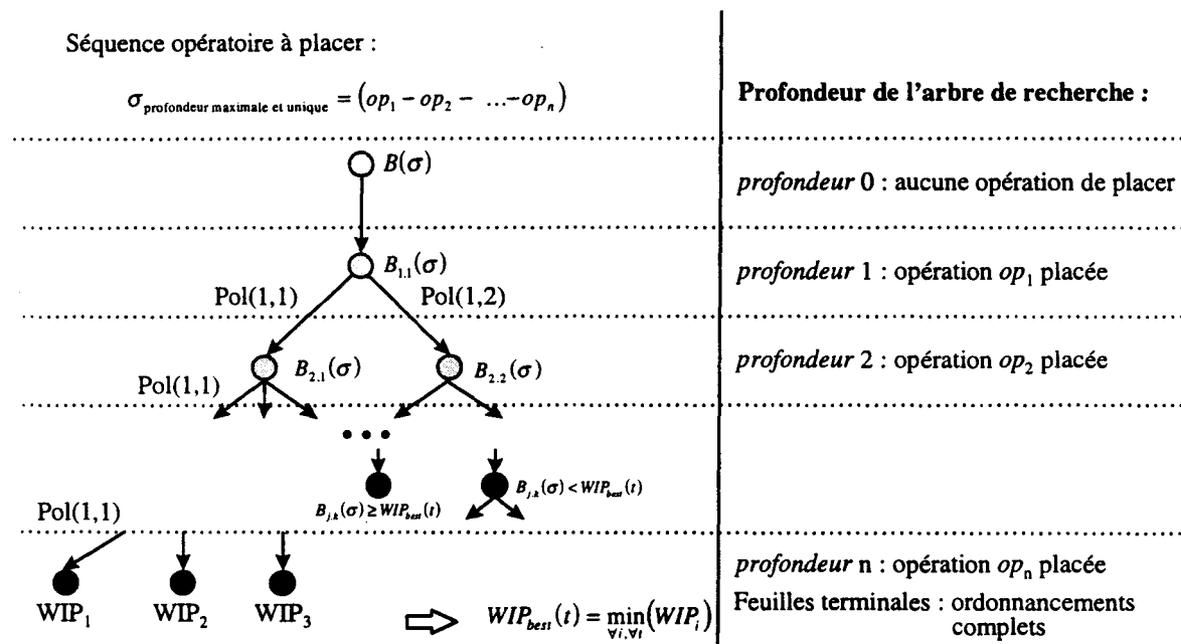
- *Première piste : l'utilisation de la méthode Branch and Bound*

La première approche, en cours d'élaboration, reprend les principales caractéristiques de l'algorithme précédent. Cependant afin de diminuer la complexité du problème, une séquence prévisionnelle est fixée définitivement pendant la phase d'initialisation pour ensuite rechercher tous les ordonnancements possibles générés à partir des différentes combinaisons possibles entre les politiques de placement d'opération développées dans l'algorithme précédent. Cette solution évite ainsi l'imbrication des deux arbres de recherche en supprimant la possibilité d'utiliser d'autres séquences prévisionnelles non équivalentes du point de vue placement des opérations sur une même machine. De plus nous proposons dans ce cas de **ne plus tester la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un ordonnancement réalisable**, fonction a priori très coûteuse en temps.

Il fallait donc trouver un autre moyen de garantir l'existence d'une solution. Pour cela nous utilisons l'approche de parcours exhaustif de l'arbre de recherche selon la méthode Branch and Bound avec pour **fonction de coût monotone croissante : le niveau d'en-cours** requis à tout moment pour ordonnancer les opérations déjà placées sur le cycle de production. Nous obtenons un premier ordonnancement complet avec son niveau final d'en-cours associé en appliquant à la séquence prévisionnelle uniquement la politique de placement d'opération au plus tôt (ou au plus tard, peu importe puisque ces deux politiques de placement appliquées à toutes les opérations conduisent obligatoirement à un ordonnancement réalisable) sur le seul intervalle de disponibilité de la machine correspondante, i.e. la première solution est obtenue après un parcours en profondeur de l'arborescence avec la même politique de placement d'une opération).

A chaque noeud de l'arborescence de recherche, nous calculons la borne inférieure d'en-cours associée au placement des opérations non encore ordonnancées dans le cycle de production sans tenir compte des conflits d'accès aux machines partagées. Ainsi les opérations restantes sont virtuellement séquencées directement sur leur macro-gamme respective sans se soucier des machines auxquelles elles appartiennent. Nous obtenons ainsi une borne inférieure de l'en-cours nécessaire. Au départ, avant le placement de toute opération, cette borne correspond en fait à la borne inférieure fine du niveau d'en-cours requis pour les circuits de fabrication contraints de respecter le temps de cycle donné $CT(RP_p)$.

Le principe général de la méthode consiste alors à parcourir les différentes branches de l'arbre de recherche, en éliminant au fur et à mesure les branches dont l'estimateur associé du niveau d'en-cours est supérieur ou égal au meilleur niveau d'en-cours obtenu pour le moment pour un ordonnancement complet et de mettre à jour cette dernière valeur dès qu'une ramification terminale est atteinte avec un niveau d'en-cours inférieur. La Figure II-39 illustre cette démarche.



Notation : $Pol(l, m)$: $l = 0 \rightarrow$ placement à la date de disponibilité de la macro-gamme correspondante
 $l \neq 0, m = 1 \rightarrow$ placement au début du l -ème intervalle de disponibilité de la machine associée
 $m = 2 \rightarrow$ placement à la fin du l -ème intervalle de disponibilité de la machine associée

Suppression des branches dont la borne inférieure associée $B_{j,k}(\sigma) \geq WIP_{best}(t)$

Figure II-39 : Principe de la méthode Branch and Bound avec comme fonction de coût le niveau d'en-cours

L'intérêt d'une telle méthode réside dans le fait que nous ne sommes pas contraints d'attendre la fin de l'application pour exprimer une solution. A tout moment, l'algorithme peut être arrêté et une solution correspondant à la meilleure solution actuelle est alors disponible. Il demeure néanmoins que les solutions obtenues par cette heuristique risquent d'être en général sous-optimales puisque nous ne considérons pas toutes les séquences possibles, et retenons dès le départ une séquence pour toutes les opérations dont nous ne pouvons juger les performances relatives.

Cependant après avoir effectué quelques tests préliminaires sur plusieurs exemples types et en appliquant « à la main » le principe de cet algorithme, nous avons obtenu des résultats tout à fait satisfaisants. Les expériences menées utilisaient la séquence d'opérations particulière correspondant au placement macro-gamme par macro-gamme rangées par ordre croissant de la valeur de leur marge initiale. Ce classement a été retenu dans le but d'essayer d'ordonnancer le plus facilement et rapidement possible les macro-gammes les plus contraintes, c'est-à-dire dont la marge est faible. Elles sont donc susceptibles de requérir l'ajout d'en-cours supplémentaire pour pallier les contraintes trop fortes engendrées par les opérations déjà placées et le respect du temps de cycle imposé. Nous avons choisi d'ordonnancer pour chaque début de nouvelle macro-gamme une des opérations appartenant à une machine critique ou tout au moins à la machine la plus critique de cette macro-gamme.

Les résultats de ces tests paraissent répondre à notre cahier des charges visant à appliquer cette heuristique en phase d'exploitation, c'est-à-dire trouver un « bon » compromis entre le temps de calcul imparti à l'élaboration de la commande et un niveau d'en-cours relativement correct. Une étude plus approfondie de la complexité d'un tel type d'algorithme semble maintenant nécessaire. Il en est de même pour la réalisation d'une maquette informatique avec plusieurs applications sur des exemples types afin de connaître un ordre de grandeur des temps de réponse.

- *Deuxième piste : l'utilisation du principe du recuit simulé*

La deuxième approche est à l'état d'ébauche mais nous paraît avoir de bonnes perspectives. Elle se distingue des autres méthodes d'ordonnancement cyclique à ce jour développées. Nous pouvons comparer cette approche avec la méthode du recuit simulé. Nous disposons en effet de deux paramètres d'évaluation : le temps de cycle et le niveau d'en-cours.

Le temps de cycle permet de savoir si un ordonnancement réalisable est atteint, c'est-à-dire une solution sous-optimale. Si le temps de cycle de production est supérieur à $CT(RP_p)$, la solution est dite dégradée. Par contre si elle respecte effectivement $CT(RP_p)$, nous avons alors atteint une solution appelée sous-optimale.

Le deuxième paramètre peut être utilisé pour comparer les performances de ces solutions sous-optimales selon le niveau d'en-cours associé à cet ordonnancement cyclique respectant le temps de cycle $CT(RP_p)$.

Nous reprenons dans ce sens le principe du recuit simulé :

1. Nous « plongeons » directement vers une solution sous-optimale, en général, c'est une solution évidente. Elle représente pour l'instant la meilleure solution.
2. Nous dégradons ensuite cette solution en relâchant quelques contraintes pour nous éloigner de ce sous-optimum.
3. Puis nous resserrons les contraintes afin de revenir à un sous-optimum.
4. Si les performances de cette nouvelle solution sont meilleures que la dernière retenue, nous conservons momentanément cette nouvelle solution.
5. Si l'optimum est atteint, l'algorithme s'arrête. Sinon, nous retournons à l'étape 2 (¹).

A tout moment, l'algorithme peut être arrêté et c'est la meilleure solution sous-optimale actuelle qui est retenue.

Nous avons besoin d'une première solution d'ordonnancement cyclique respectant la contrainte de temps de cycle. Pour cela, nous avons divers moyens pour obtenir rapidement une première solution : par exemple par l'utilisation exclusive (ou combinée) de la

¹ Cette étape n'apparaît pas dans la méthode du recuit simulé puisque nous ne connaissons ni la valeur de l'optimum, ni une condition suffisante d'optimalité de la solution trouvée.

politique de placement au plus tôt (et / ou au plus tard) des opérations sur l'intervalle unique de disponibilité de leur machine associée.

A la différence des autres approches d'ordonnancement cyclique, nous proposons de continuer le placement des opérations avec l'ordonnancement d'un nouveau cycle de production. Avec l'ajout d'une nouvelle opération, nous supprimons l'ancienne itération de cette opération pour ne garder à tout moment que toutes les opérations d'un seul cycle de production. Ainsi la fenêtre temporelle qui modélise la commande du système sur un cycle de production, sur le diagramme de Gantt par exemple, se décale (parfois) sur l'axe temporel vers le « futur » ⁽¹⁾ : un nouveau cycle est créé. Il faut éviter de retomber sur le même motif, c'est-à-dire sur les mêmes cycles de commande ou bien les mêmes ordonnancements sur les machines. Pour cela nous pouvons permuter de manière cyclique chaque nouvelle macro-gamme à ordonnancer.

Il existe plusieurs façons de placer ces nouvelles opérations. Elles peuvent être ordonnancées directement à la fin de la macro-gamme précédente : il n'y a pas de consommation de marge de macro-gammes ni d'augmentation d'en-cours mais cela peut entraîner le non respect du temps de cycle : nous obtenons alors une solution dégradée.

Il existe d'autres moyens de dégrader une solution sous-optimale. Ces types de placements relâchent certaines des contraintes d'ordonnancement. Il est nécessaire cependant de respecter les contraintes de précédence des opérations appartenant à une même macro-gamme tant que nous demeurons sur le même en-cours. C'est par l'ajout d'un nouvel en-cours que nous pouvons «supprimer» ces contraintes. Le seul problème provient alors du fait qu'il est a priori impossible de placer une nouvelle opération sur l'ancien en-cours pour respecter le lien unissant les palettes effectuant les mêmes tâches, à un ou plusieurs cycles de production près, donc dédiées à la même macro-gamme. Ce sont des placements dits négatifs. Nous pouvons caractériser la dégradation de l'ordonnancement par l'augmentation du temps de cycle et le nombre de placements.

La troisième phase de l'approche consiste à forcer le respect du temps de cycle pour obtenir finalement une nouvelle solution sous-optimale. Pour cela, nous connaissons au moins une solution. Cette solution évidente consiste à placer les prochaines opérations au plus tôt sur leur machine respective, évitant ainsi toute perte de marge de machines. Nous sommes sûrs alors qu'en plaçant au maximum un horizon entier de production, c'est-à-dire toutes les opérations d'un cycle, nous retrouvons alors une solution sous-optimale. Il doit exister d'autres façons d'assurer le respect du temps de cycle plus performantes en terme de minimisation d'en-cours. Nous appellerons ces types de placements « positifs ».

Dès l'obtention d'une nouvelle solution sous-optimale, nous devons comparer son niveau d'en-cours au meilleur en-cours obtenu jusque là avec les précédentes solutions sous-optimales. Si le niveau d'en-cours est moindre, nous avons atteint une meilleure solution.

Contrairement au recuit simulé, il existe une condition suffisante permettant d'arrêter l'algorithme. En effet si l'en-cours d'une des solutions sous-optimales atteint la borne inférieure de l'en-cours minimal nécessaire aux circuits de fabrication pour respecter le

¹ Il est possible de placer le nouveau cycle de production à partir de la fin de l'ancien (vers le « futur »), comme à son début (vers le « passé »).

temps de cycle $CT(RP_p)$ que nous avons déjà calculée, nous savons qu'elle caractérise nécessairement une commande optimale. Cependant nous avons déjà vu que l'atteignabilité de cette borne n'était pas systématique. L'algorithme peut donc reboucler indéfiniment sur lui-même : nous ne pouvons alors jamais savoir si nous avons atteint l'optimum.

Bien que l'étude théorique soit relativement approfondie, il reste cependant encore un travail important de mise en œuvre effective. Nous avons cependant une idée assez précise sur l'évolution d'un ordonnancement cyclique, qui reprend le principe du recuit simulé, comme le montre les Figure II-40, Figure II-41 et Figure II-42.

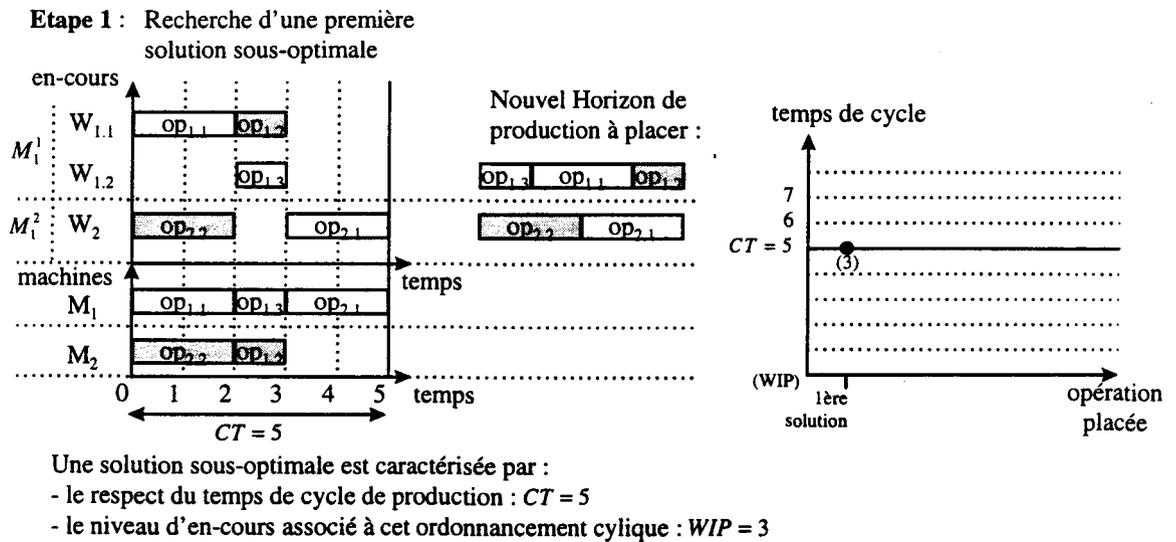


Figure II-40 : Recherche dans la première partie d'un ordonnancement cyclique simple respectant le temps de cycle imposé

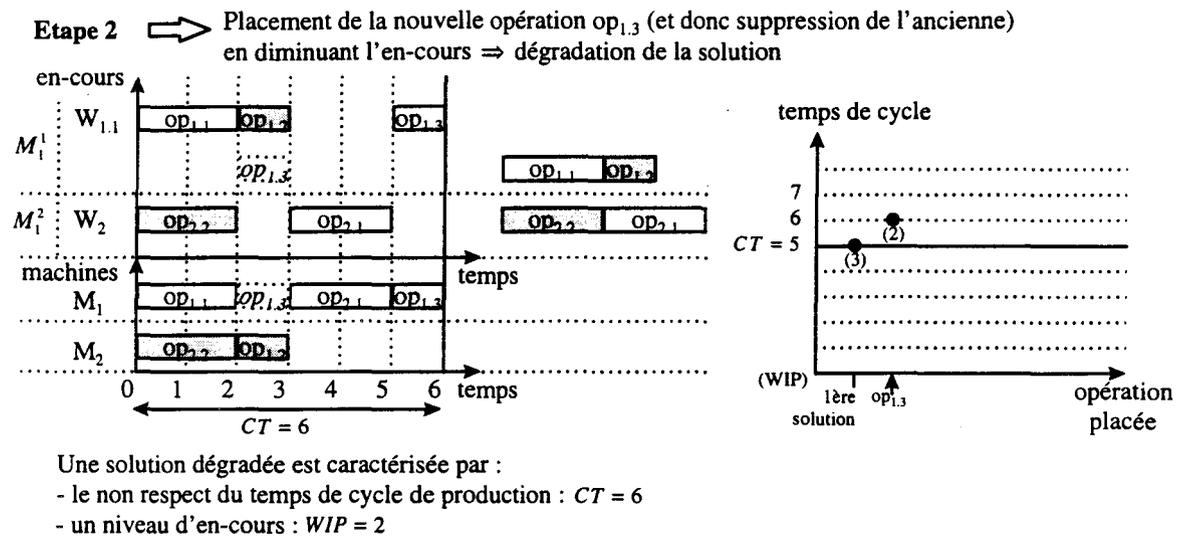


Figure II-41 : Etape 2 : Dégradation d'une solution sous-optimale

Etapes 2, 3 et 4 → Placement de $op_{2,2}$, $op_{1,1}$ et $op_{1,2}$ pour ne pas augmenter l'en-cours (dégradation)
 Placement de $op_{2,1}$ au plus tôt de la machine (pour commencer à revenir à une solution sous-optimale)
 ⇒ Nouvelle solution sous-optimale et meilleure solution

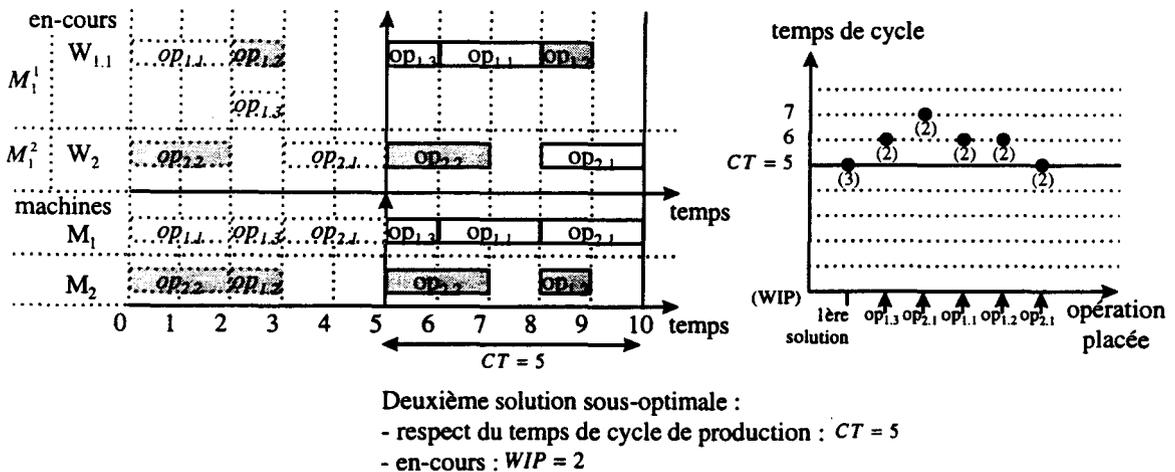


Figure II-42 : Exemple a priori possible d'évolution d'un ordonnancement cyclique caractérisé par son en-cours et son temps de cycle avec la méthode similaire au recuit simulé

II.3.6.5 La modélisation de la commande

L'ordonnancement cyclique étant obtenu, il est maintenant nécessaire de l'exploiter en tant que commande déterministe à implanter sur le système (avec l'aide éventuel du modèle Graphe d'Evénements). La commande prévisionnelle peut également servir à surveiller les performances réelles de production du système et éventuellement à détecter les défaillances de certaines ressources de l'atelier flexible (utilisation de la représentation sous forme de diagramme de Gantt ou de la modélisation par Graphe d'Evénements).

Nous présentons sur la Figure II-43 le diagramme de Gantt modélisant l'une des commandes optimales déterministes et prévisionnelles du système de production pendant le régime permanent RP_p . Cet ordonnancement cyclique a été obtenu en appliquant les principes de l'heuristique présentée au paragraphe II.3.6.3. Il est de plus optimal pour le problème d'ordonnement cyclique de ce régime permanent RP_p , puisque le niveau d'en-cours associé à cette solution atteint la borne inférieure minimale que nous avons calculée précédemment : $WIP(M_1^1) + WIP(M_1^2) = 4 + 5 = 9 = B^*(RP_p)$. La politique de lancement des opérations choisie correspond au tir au plus tôt des opérations pour être compatible avec le modèle Réseau de Petri.

En plus du diagramme de Gantt, nous avons remarqué que nous pouvions modéliser cette commande déterministe et répétitive à l'aide d'une sous-classe de Réseaux de Petri : les Graphes d'Événements, cf. Figure II-44. Nous avons rencontré ici quelques problèmes pour représenter de manière compréhensible à chaque instant l'état dans lequel le système se trouve. En ce qui concerne le tir d'une transition temporisée, il existe diverses façons de modéliser un système en-cours de tir d'une de ses transitions.

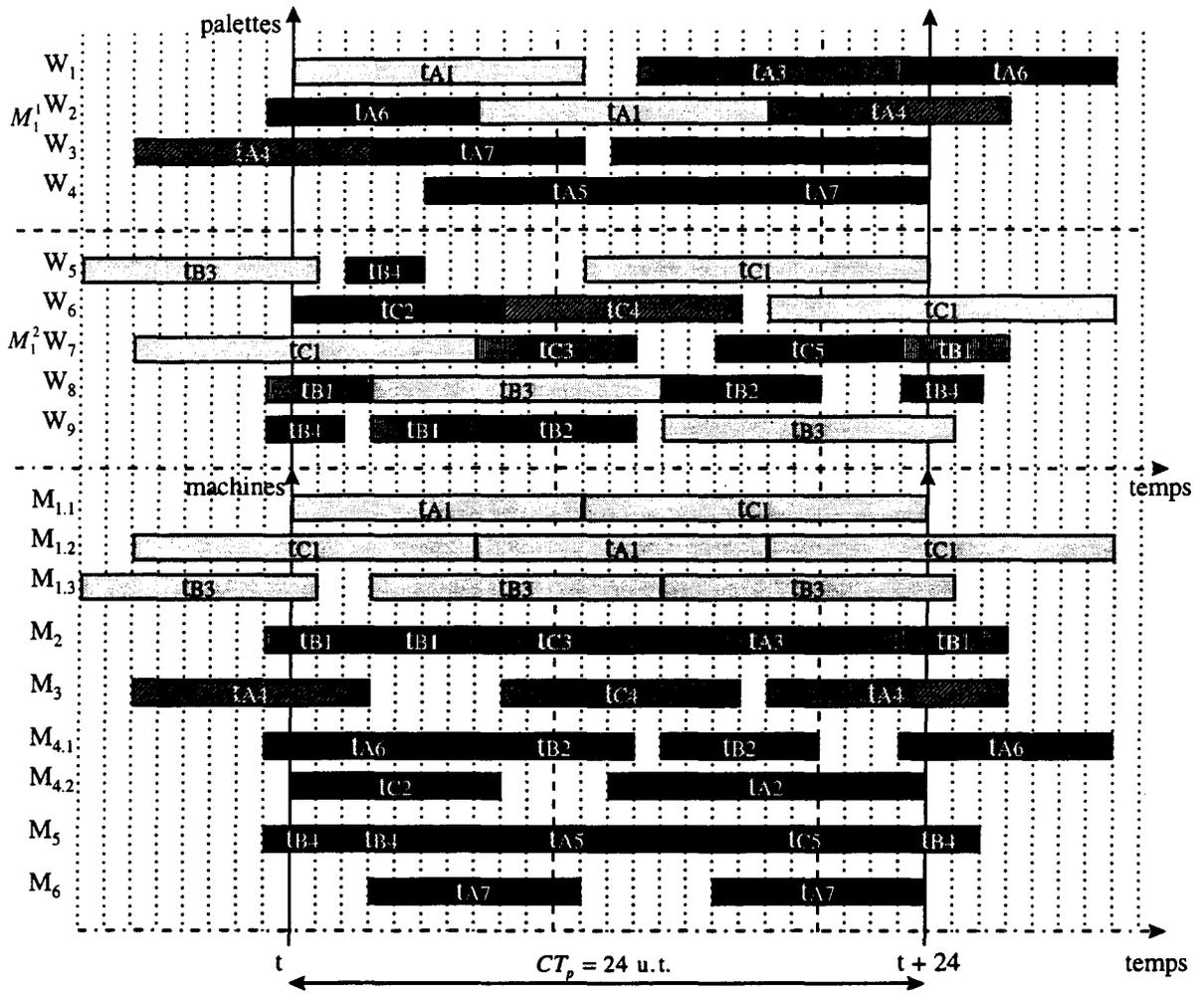
Nous avons opté pour le blocage temporaire (pendant la durée de tir de la transition) de la marque associée à ce tir dans la place précédant cette transition afin de conserver à chaque instant sur le modèle le nombre de ressources de transport présentes dans le système : jeton blanc pour indiquer que la marque est bloquée par le tir de la transition suivante (réalisation d'une opération en cours) et jeton noir pour indiquer que la marque est libre (en-cours et machine de transformation). Cela ne signifie pas pour autant que la préemption de tâche soit autorisée.

Il faudrait de plus pouvoir associer une variable à cette marque pour indiquer en permanence les temps résiduels de tir afin d'indiquer la durée restante avant la fin de tir de la transition pour cette marque (opération terminée).

Sans remettre en cause le fonctionnement des Réseaux de Petri T-temporisés nous proposons d'ajouter certains outils graphiques afin d'améliorer la convivialité et la compréhension d'un tel modèle de commande à implanter sur le système de production, par exemple dans le but d'utiliser cette modélisation à des fins de surveillance.

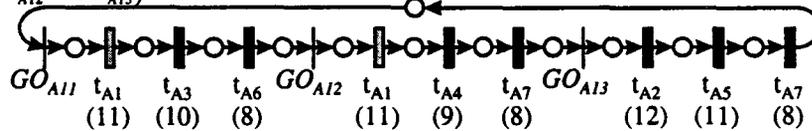
Nous remarquons ainsi les limites graphiques réelles de ce type de modélisation. Même dans le cas d'un exemple relativement simple, il devient vite difficile de bien comprendre, de surveiller et donc d'exploiter la commande modélisée par Graphe d'Événements à appliquer au système. Notons toutefois que la modélisation représente fidèlement le comportement temporel de ce fonctionnement répétitif et que sa réelle complexité justifie celle du Graphe d'Événements obtenu. D'autres interfaces facilitant l'exploitation devront donc être développées afin de faciliter l'exploitation de ce résultat.

Nous disposons finalement de trois vues complémentaires, cf. Figure II-43 et Figure II-44. Les deux premières sont représentées sous forme de diagramme de Gantt, illustrant bien pour notre exemple le caractère de densité de notre ordonnancement optimisé. Ces deux représentations soulignent clairement la dualité entre les séquences opératoires avec les contraintes de précédence entre les opérations et les machines avec les contraintes d'exclusion mutuelle des opérations d'une même machine partagée. La troisième et dernière vue donne de façon complémentaire un modèle de type Réseau de Petri, susceptible de générer et donc de programmer cet ordonnancement cyclique.



Comportement cyclique des ressources de transport de type 1 (séquentialisation totale des gammes) : W_1, W_2, W_3 et W_4

$$M_1^1 = (GO_{A11} - GO_{A12} - GO_{A13})$$



Comportement cyclique des ressources de transport de type 2 (séquentialisation totale des gammes) : W_5, W_6, W_7, W_8 et W_9

$$M_1^2 = (GO_{B11} - GO_{B12} - GO_{C11} - GO_{C12})$$

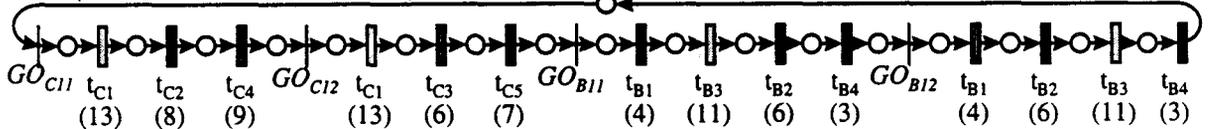


Figure II-43 : Modélisation par diagramme de Gantt d'un des ordonnancements optimaux trouvés par notre méthode

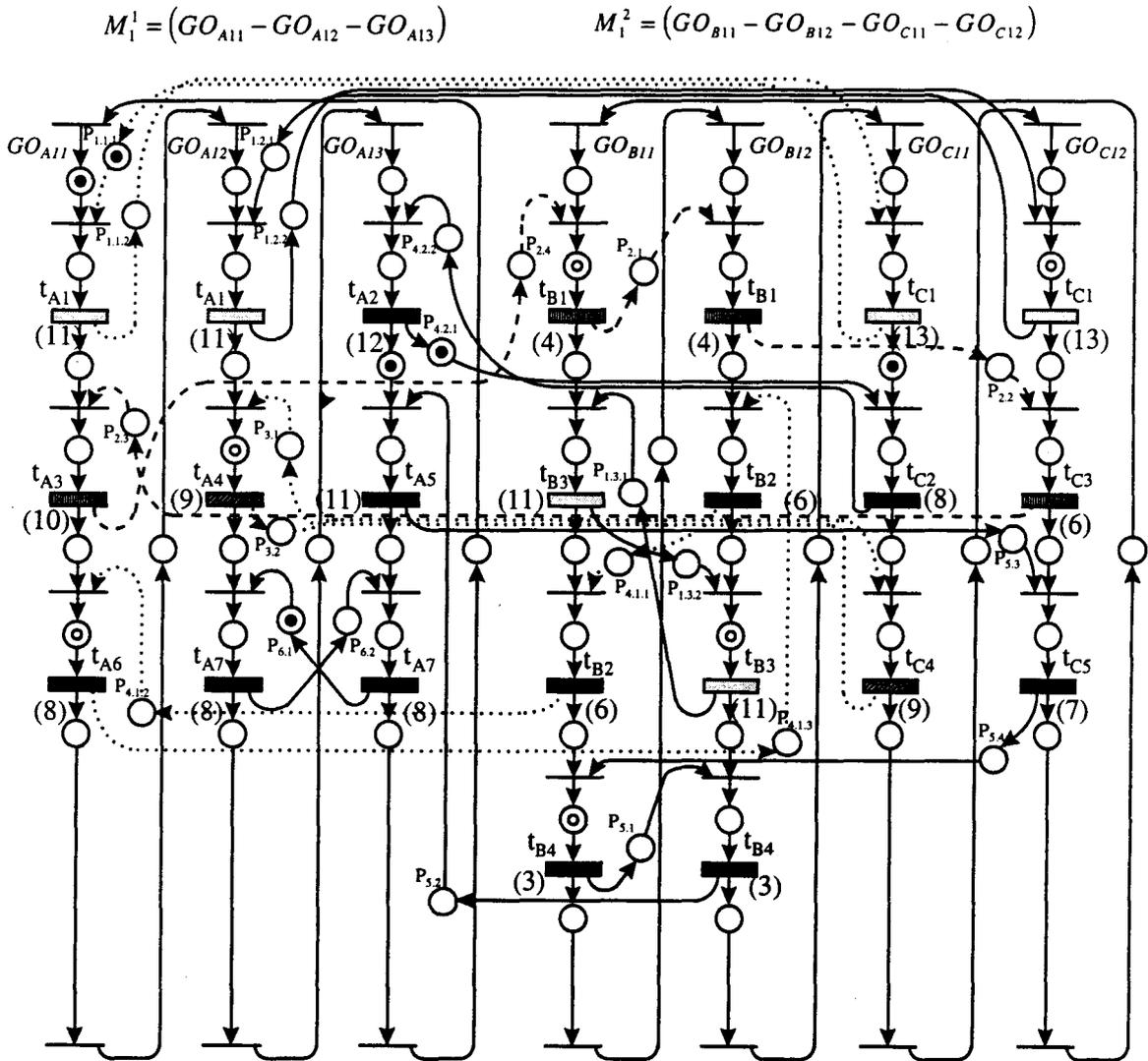


Figure II-44 : Graphe d'événements modélisant la commande prévisionnelle, cyclique et déterministe du système de production pendant le régime permanent RP_p à l'instant t

II.4 Conclusion

Au chapitre précédent, l'étape de planification fine a décomposé la production à réaliser à court ou moyen terme selon un ou plusieurs régimes permanents répétitifs caractérisés pour chacun d'eux par un horizon cyclique de production et un temps de cycle optimal calculé.

Au cours de ce chapitre, nous avons élaboré, pour chaque régime permanent RP_p , la commande cyclique déterministe et prévisionnelle qui respecte les deux paramètres caractéristiques : $E(RP_p)$ et $CT(RP_p)$ de chaque régime en minimisant l'en-cours du système, dernier critère d'optimisation à résoudre. Pour cela, nous avons développé une méthode qui prend en compte progressivement tous les indéterminismes présents dans l'atelier flexible.

A chaque nouveau degré de liberté considéré, nous engendrons de nouvelles solutions à partir de celles trouvées à l'étape précédente. Comme le but de notre méthode est d'atteindre la solution optimale, nous conservons toutes les solutions, en effet qu'il n'est pas possible d'en écarter certaines sans avoir développé l'analyse complète. Il est important à chaque étape de disposer d'un modèle graphique simple et facile à analyser du système de production qui présente son état avec les indéterminismes déjà résolus et les degrés de liberté restant. Les Réseaux de Petri qui se sont révélés être l'outil de modélisation le plus approprié. Il faut souligner le rapprochement entre la résolutions des flexibilités du système physique et la transformation progressive du modèle vers un Réseau de Petri totalement déterministe, un Graphe d'Evénements, modélisant la commande cyclique prévisionnelle qui peut être ainsi facilement implantée.

Avec la définition de la borne fine inférieure d'en-cours nécessaire pour respecter les ratios de production, nous avons défini un sens de parcours de recherche de l'ensemble des regroupements cycliques juste avant de s'occuper des deux derniers types d'indéterminismes : ordonnancement des opérations sur leur machine respective et détermination du niveau et du positionnement d'en-cours (classes D_5 et D_6). Bien que les gains apportés ne puissent être évalués de manière formelle, en pratique ce sens de parcours évite le plus souvent une recherche exhaustive.

Si nous choisissons d'arrêter la recherche dès qu'une solution optimale est trouvée, nous conservons une commande issue d'un regroupement cyclique de gammes ayant, en général, séquentialisé le plus possible les gammes opératoires linéaires, au vu du sens de parcours défini. Nous avons remarqué que, plus les gammes sont parallélisées, plus elles sont susceptibles de rester disponibles en cas de défaillances du système de production. Si la contrainte temporelle sur les temps de calcul n'est pas trop forte, il peut être intéressant d'envisager une **optimisation secondaire basée sur la parallélisation des gammes opératoires**. Le but ici serait de rechercher, parmi l'ensemble des regroupements cycliques qui conduisent à un ordonnancement avec un minimum d'en-cours, celui ou ceux qui parallélisent le plus les gammes linéaires. Ces deux critères d'optimisation sont souvent contradictoires, il est donc difficile de résoudre simultanément la minimisation de l'en-cours et la parallélisation des gammes sans chercher un compromis. C'est pourquoi nous proposons de considérer ce nouveau problème après l'optimisation de l'en-cours.

Pour résoudre le problème NP-difficile des deux dernières classes de degrés de liberté, nous avons décidé de les regrouper, afin de développer une seule heuristique d'ordonnancement cyclique, au lieu de le subdiviser en deux sous-problèmes NP-difficiles, pour lesquels, entre l'étape d'ordonnancement sur les machines et celle de détermination de l'en-cours, il est nécessaire de calculer tous les circuits mixtes du graphe d'événements caractérisé par ces circuits de fabrication et de commande. Avec l'exemple illustratif, nous pouvons juger de la qualité que peut atteindre cette heuristique : les machines à ordonnancer étaient lourdement chargées. Sur les 9 machines de transformation, 4 étaient critiques, tandis que la moins chargée (M_6) était au 2/3 de son utilisation maximale. Il a été cependant possible de trouver l'ordonnancement qui minimise l'en-cours maximal du système ⁽¹⁾. Deux autres qualités de cette heuristique sont à signaler : en premier lieu la garantie d'aboutir à une solution qui respecte le temps de cycle fixé et, en second lieu, la possibilité d'adapter le temps de calcul en vue d'une utilisation en phase d'exploitation en modifiant, si besoin, la profondeur et la largeur de l'arborescence de recherche.

En phase ultime de cette analyse, nous disposons de trois visions différentes de la commande cyclique, prévisionnelle et déterministe du régime permanent considéré :

- le point de vue machines de transformation dans le diagramme de Gantt pour connaître l'ordonnancement des opérations sur les machines et visualiser les marges éventuelles de machines,
- le point de vue gammes (ou plutôt macro-gammes) dans le diagramme de Gantt, pour connaître le comportement temporel des en-cours et des palettes dans le système et visualiser les marges éventuelles de gammes,
- un point de vue général de modélisation de la commande à l'aide d'un Graphe d'Événements : en vue de son implantation et de sa surveillance.

¹ Il existe d'autres recherches portant sur les problèmes d'ordonnancement cyclique avec un critère d'optimisation se rapportant à l'en-cours du système mais différent de la minimisation de l'en-cours maximal présent dans le système de production : par exemple la minimisation de l'en-cours moyen du système ou la minimisation de la taille des buffers d'entrée des machines. Nous renvoyons à l'Annexe III pour une utilisation possible de notre heuristique avec de tels critères d'optimisation.

Chapitre III :

III. Complexité et justification de l'approche structurée et progressive de l'élaboration de la commande

La présentation de la méthode d'élaboration de la commande de chaque régime permanent a été abordée au chapitre précédent.

Dans ce chapitre, nous proposons, dans un premier temps, d'étudier la complexité de l'approche développée en terme de taille de l'espace de recherche et nombre total de solutions admissibles⁽¹⁾. En effet nous avons suggéré de conserver toutes les solutions qui respectent l'horizon de travail et le temps de cycle du régime permanent jusqu'au développement complet de l'analyse dans le but d'une recherche optimale. Cette recherche doit toutefois aboutir à la détermination d'une commande déterministe prévisionnelle dans les temps de calcul impartis (en phase d'exploitation nous savons que les délais sont assez courts). C'est pour cette raison qu'il est important de connaître, ou au moins d'évaluer afin d'en déduire une borne du temps de calcul, le nombre de solutions que chaque étape va engendrer. Nous allons ainsi justifier l'utilisation d'une heuristique à partir de la détermination des regroupements cycliques, justifiant l'explosion combinatoire liée à la flexibilité d'ordonnancement des opérations sur les machines.

Comme nous le verrons par la suite, la complexité de certaines phases de la méthode dépend directement de la taille de l'horizon cyclique de production retenu. Ainsi il devient facile de justifier la limitation imposée a priori, par une règle du bon sens, à l'étape de planification fine sur la taille de l'horizon de travail, mais aussi de préciser davantage les valeurs limites que nous sommes capables de traiter à l'heure actuelle pour conserver des temps de calculs raisonnables.

En marge de cette étude, il est nécessaire de préciser, dans la mesure du possible, les méthodes générales connues actuellement pour résoudre chaque sous-problème⁽²⁾.

La dernière raison de cette étude de complexité porte sur la justification de l'utilisation d'une méthode progressive qui prend en compte au fur et à mesure les différents indéterminismes du système de production. Nous montrerons ainsi qu'il est préférable d'utiliser cette méthode plutôt que de regrouper tous les degrés de liberté et de résoudre le problème général d'ordonnancement cyclique, ce qui conduirait au parcours d'un espace de recherche de taille très importante.

¹ Nous distinguons, dans ce mémoire, les ordres de complexité de chaque problème de résolution d'une ou plusieurs flexibilités, tout en respectant l'horizon de travail et le temps de cycle, et la complexité d'un problème en tant que nombre de solutions admissibles trouvées à partir d'un ensemble de recherche.

² Les algorithmes, que nous présentons succinctement pour résoudre ces problèmes, sont l'objet de formalisation, pour les rendre compatibles avec l'analyse des performances des différents horizons de production, en amont, et avec l'heuristique d'ordonnancement cyclique, en aval, en vue d'une implantation informatique de la méthode globale.

Puis dans un deuxième temps, au vu de l'analyse effectuée, nous justifions la structure de la méthode employée et par la même nous garantissons l'optimalité potentielle de la recherche effectuée.

III.1 Etude de la complexité des différentes parties de cette étape

En raison de la complexité, de type NP-difficile, du problème d'ordonnement cyclique, il est réellement impossible d'établir une méthode générique d'évaluation de la combinatoire inhérente au problème et donc à notre méthode, puisque celle-ci a pour but la recherche d'une solution optimale. Nous proposons d'illustrer cette affirmation sur un exemple.

La démarche d'analyse, que nous allons effectuer, est très générale : il s'agit de prendre en compte, à chaque nouvelle étape, une flexibilité particulière du système et d'estimer dans chaque cas, le nombre de possibilités. Au delà de l'exemple considéré, nous proposerons une généralisation des résultats obtenus dans le cadre des applications concernant les S.F.P.M.

Nous allons dans ce paragraphe développer l'exemple considéré dans le but d'illustrer l'étape d'élaboration de la commande et d'évaluer la complexité du problème étudié en raison du grand nombre de degrés de liberté présents. Nous supposons résolue a priori la tâche de planification fine.

A la lumière des rappels fournis en préambule de la résolution du problème d'ordonnement proprement dit, c'est-à-dire la description et les propriétés dégagées se rapportant à la sous-classe de Réseaux de Petri temporisés déterministes : les Graphes d'Evénements, nous justifions dans un deuxième temps l'approche progressive de notre démarche par la prise en compte ordonnée et regroupée des différentes flexibilités que comprend l'atelier de production contraint à un certain type de production (horizon cyclique de travail et temps de cycle fixé). Cette méthode s'intègre de façon logique et cohérente dans la démarche de conception assistée CASPAIM, développée par le L.A.I.L., utilisant notamment les mêmes types de modèle graphique que celui retenu dans notre approche : les Réseaux de Petri de type FRT-nets.

Au fur et à mesure de la considération progressive des différents degrés de liberté du système et leur détermination, nous réduisons les indéterminismes du modèle associé pour aboutir à la fin de la méthode à un modèle complètement déterministe sous la forme d'un Graphe d'Evénements représentatif de la commande élaborée. A chaque étape de la démarche correspond une transformation du modèle. Nous nous sommes efforcés de décomposer le problème général en parties élémentaires considérant à chaque phase un et un seul degré de liberté. Cela revient à considérer un nombre plus important de modules que dans la démarche présentée jusqu'ici.

Nous avons représenté à la Figure III-1 la décomposition de notre approche en phases élémentaires. Nous trouvons ainsi toutes les points qui vont être abordés par ce premier paragraphe III.1, mis à part le §III.1.7, qui rappelle le sens de parcours de l'espace de recherche, que représente l'ensemble des regroupements cycliques obtenus à la phase 6, et l'intérêt que peut apporter ce parcours par rapport au parcours exhaustif. Pour chaque

phase que nous allons étudier en détails, nous en reprendrons globalement les caractéristiques principales ainsi que le modèle graphique associé.

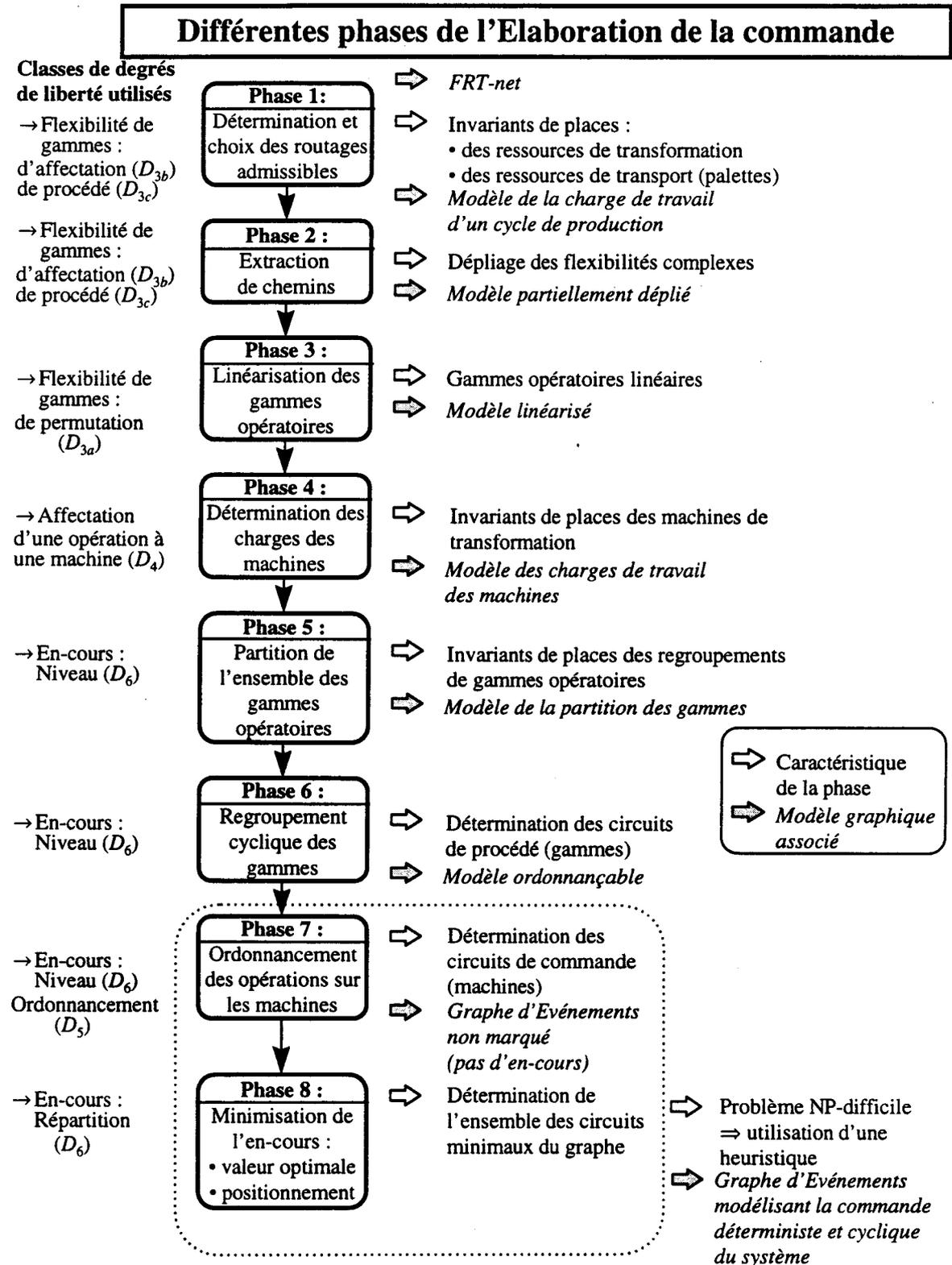


Figure III-1 : Décomposition de l'approche développée au chapitre précédent en phases élémentaires

De plus, nous nous efforçons, à chaque étape, de faire ressortir les gains apportés par l'application de cette démarche. Nous comparons notamment la taille de l'espace de recherche de deux méthodes radicalement différentes.

Avec la méthode développée dans ce mémoire, seule la première phase de détermination des ensembles de routages admissibles doit parcourir, dans son espace de recherche, des solutions qui ne respectent pas les conditions requises pour la commande de ce régime permanent (respect de l'horizon cyclique et temps de cycle de production). Pour les autres phases, les solutions de la phase précédente génèrent, à chaque nouvelle étape, de nouvelles solutions qui tiennent compte du degré de liberté correspondant.

A titre de comparaison une autre approche consiste à supposer que nous n'avons pas résolu d'indéterminismes et que nous regroupons toutes les flexibilités des phases précédentes avec celle de l'étape actuelle afin de les résoudre simultanément.

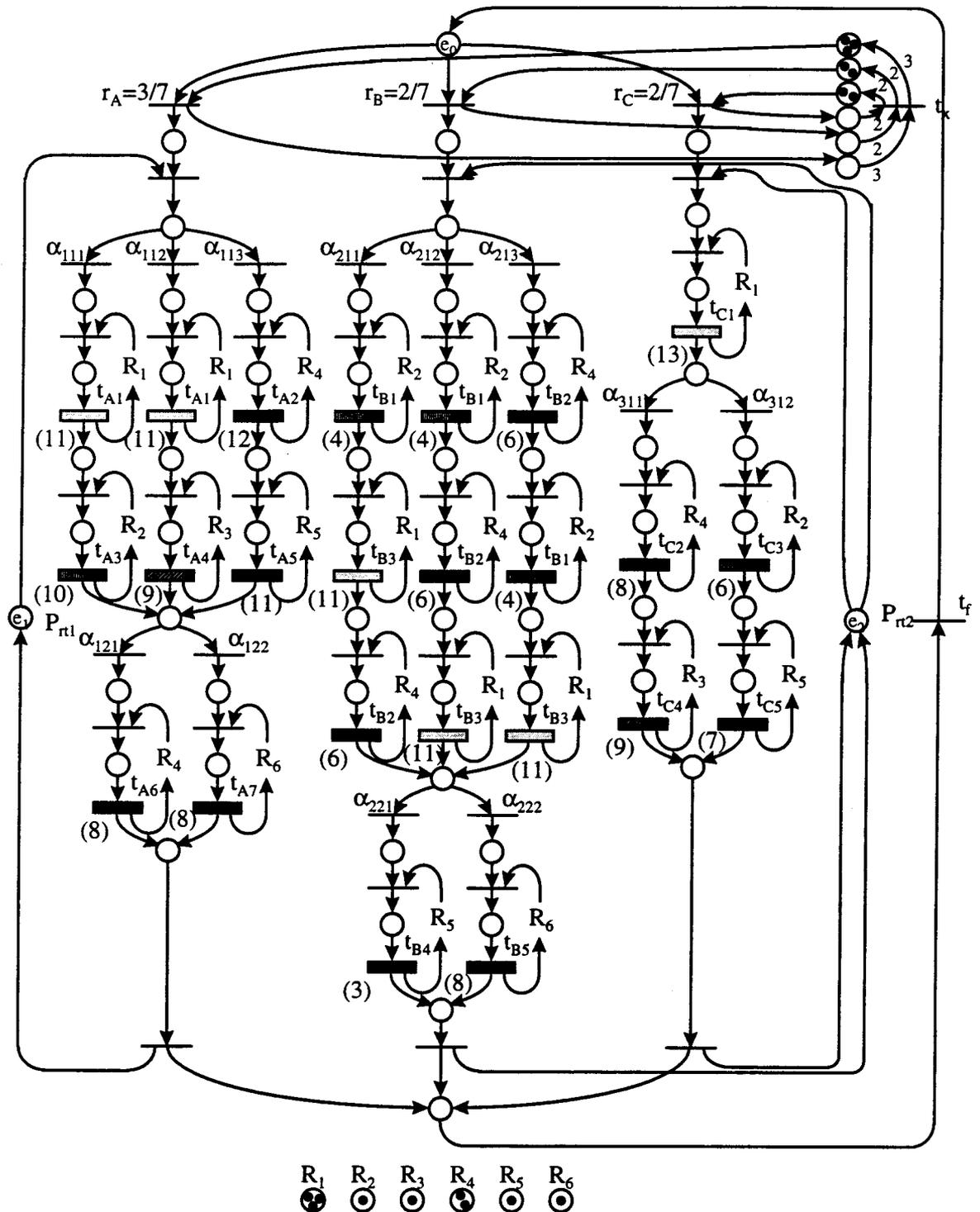
Ainsi plus nous avancerons dans la démarche, plus grande sera la différence de taille entre ces deux espaces de recherche. En effet, pour la deuxième approche, l'espace de recherche est constitué de toutes les solutions possibles. La seule condition que nous imposons dans les deux cas est le respect de l'horizon de travail. Il est constaté en général des réductions importantes de l'espace de recherche (notamment au niveau de l'ensemble des regroupements cycliques) sans perte d'optimalité.

Nous proposons donc de reprendre les différentes sous-étapes de la méthode proposée pour en évaluer la complexité et illustrer, dans la mesure du possible, ce que notre approche peut apporter en terme de simplification et de réduction de complexité du problème général.

Nous travaillerons principalement avec le support de l'exemple illustratif développé au cours du chapitre II. Afin d'éviter un retour systématique au chapitre II, pour consulter les différents modèles associés aux différentes phases de la méthode, nous reprendrons à la fin de chaque partie le modèle graphique retenu au chapitre II, modèle qui a servi à l'élaboration d'une commande optimale.

De plus nous présenterons, à l'aide d'une figure en en-tête de chaque nouvelle phase, un bref résumé rappelant les principaux résultats obtenus aux différentes phases précédentes, les caractéristiques de chaque nouvelle étape ainsi que le nombre de solutions admissibles qui ont été créées en considérant ce nouveau degré de liberté.

Nous commencerons le rappel par la modélisation à la Figure III-2 du système de production soumis à un régime permanent caractérisé par son horizon de production qui sera réalisé lors de chaque cycle de fonctionnement durant ce régime et son temps de cycle (optimal) associé que la commande à élaborer doit respecter.



RP_p caractérisé par :

- l'horizon de production : $E_p = \{3A, 2B, 2C\}$
- le temps de cycle associé : $CT_p = 24 \text{ u.t.}$

Figure III-2 : Modèle FRT-net de l'atelier flexible respectant en discret l'horizon cyclique E_p de production du régime permanent RP_p

III.1.1 Phase 1 : Détermination et choix d'ensembles de routages admissibles

Complexité de l'analyse du régime permanent RP_p caractérisé par : - $E(RP_p) = \{3A, 2B, 2C\}$ - $CT(RP_p) = 24$ u.t.		Différentes phases de l'élaboration de la commande d'un régime permanent	
Taille de l'espace de recherche respectant $E(RP_p)$ jusqu'à la Phase	Nombre de solutions à la fin la Phase	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> Phase 1: Détermination et choix des routages admissibles </div>	⇒ Invariants de places : • des ressources de transformation • des ressources de transport (palettes) ⇒ <i>Modèle de la charge de travail d'un cycle de production</i>
360 routages	⇒ 6 routages admissibles		

III.1.1.1 Premier degré de liberté pris en compte : les ratios de routage

Il s'agit, dans un premier temps, de déterminer tous les routages compatibles avec l'horizon cyclique de production et le temps de cycle associé. Nous analysons ce problème sur l'exemple que nous avons utilisé pendant cette étape (cf. Figure III-2). La complexité du problème, pris dans sa globalité, est NP-difficile, nous allons donc évaluer l'importance et l'influence de chaque degré de liberté sur le système global.

Dans le cadre du choix des routages admissibles, il est impossible a priori d'évaluer le nombre de solutions que nous allons obtenir en considérant le système d'équations et d'inéquations linéaires en nombres entiers de l'Equation II-1. Nous ne pouvons donc connaître le nombre d'ensembles de routages admissibles respectant les contraintes sans devoir effectuer la résolution complète de ce système.

III.1.1.2 Etude du cas particulier : l'exemple illustratif : évaluation de la complexité et comparaison avec l'analyse en continu de flux

Pour l'exemple illustratif, nous avons trouvé **6 ensembles de routages** différents respectant $E(RP_p) = \{3A, 2B, 2C\}$ et $CT(RP_p) = 24$ unités de temps. Dans le Tableau III-1, nous avons représenté, pour chaque ensemble de routages admissibles calculé, la valeur des charges de travail des différentes ressources (simples uniquement) de transformation durant un cycle de production. En ce qui concerne les ressources multiples, les charges de travail ne sont pas forcément fixées, vu les différentes répartitions discrètes possibles entre les machines identiques. Nous avons seulement indiqué, quand cela était possible, combien de machines de chaque ressource multiple étaient effectivement critiques ou susceptibles de l'être. Cependant aucune répartition concrète n'est fournie, vu qu'il peut exister plusieurs distributions discrètes des opérations sur ces machines. Le regroupement de ces opérations sera étudié ultérieurement avec la détermination complète des charges de toutes les machines.

Nous pouvons remarquer que, comme pour le problème de programmation linéaire de l'étape d'évaluation préliminaire des performances, obtenu après une analyse de flux dans la thèse de M. Ohl [OHL 95a] et résolu par le simplexe, certains des routages obtenus deviennent totalement déterministes pour que l'atelier flexible atteigne la vitesse maximale de production. C'est le cas, pour l'exemple illustratif, des 5 ratios entiers de routages :

$$A_{11} = A_{12} = A_{13} = C_{11} = C_{12} = 1.$$

Il est donc possible de les regrouper dans l'ensemble α^1 des routages fixés. Les autres routages, moins contraints, sont regroupés dans l'ensemble α^2 . C'est d'ailleurs dans ce dernier ensemble que nous pouvons placer les ratios de routages entiers (pour l'exemple : B_{11} , B_{12} et B_{13}) liés aux flexibilités de permutation puisque ce degré de liberté ne joue aucun rôle dans la détermination des charges des ressources. Ces notions proviennent de l'analyse de flux.

	A ₁₁	A ₁₂	A ₁₃	A ₂₁	A ₂₂	B ₂₁	B ₂₂	C ₁₁	C ₁₂	R ₁ Ressource multiple (3)	R ₂	R ₃	R ₄ Ressource multiple (2)	R ₅	R ₆	CT (RP _p)
α_1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2 des 3 machines sont critiques	Z ₂ = 24	Z ₃ = 18	l'une des 2 machines peut être critique	Z ₅ = 21	Z ₆ = 24	24
α_2	1	1	1	2	1	1	1	1	1	2 des 3 machines sont critiques	Z ₂ = 24	Z ₃ = 18	les deux machines sont critiques	Z ₅ = 21	Z ₆ = 16	24
α_3	1	1	1	2	1	0	2	1	1	2 des 3 machines sont critiques	Z ₂ = 24	Z ₃ = 18	les deux machines sont critiques	Z ₅ = 18	Z ₆ = 24	24
α_4	1	1	1	1	2	2	0	1	1	2 des 3 machines sont critiques	Z ₂ = 24	Z ₃ = 18	l'une des 2 machines peut être critique	Z ₅ = 24	Z ₆ = 16	24
α_5	1	1	1	2	1	2	0	1	1	2 des 3 machines sont critiques	Z ₂ = 24	Z ₃ = 18	les deux machines sont critiques	Z ₅ = 24	Z ₆ = 8	24
α_6	1	1	1	0	3	2	0	1	1	2 des 3 machines sont critiques	Z ₂ = 24	Z ₃ = 18	l'une des 2 machines peut être critique	Z ₅ = 24	Z ₆ = 24	24

Tableau III-1 : Ensemble des routages admissibles respectant l'horizon de production et le temps de cycle optimum et répartition associée des charges de travail sur les différentes ressources de transformation

Les seules différences qui peuvent être faites entre l'analyse préliminaire de flux, cf. [OHL 95a] et l'analyse complète en discret développée dans ce mémoire sont, d'une part, l'ensemble de recherche : IN pour ce qui nous concerne et IR pour l'analyse de flux et, d'autre part, les contraintes sur les routages non fixés : contraintes de type discret $A_{2i} = 0, 1$ ou 2 (appartenance à un ensemble fini) pour notre approche et de type appartenance à un intervalle réel pour le problème continu. Ces différences sont dues à la restriction, pour notre approche, à un horizon de travail fixe et à la considération discrète des répartitions de charge sur les machines et, pour l'analyse en continu, à la recherche de la répartition optimale de charge du système sur les ressources sans horizon fixé et sans considérer la distribution des charges sur les machines identiques.

Contrairement au nombre exact de solutions, il est tout à fait possible de calculer, avant la résolution de ce type de problème, la taille de l'espace de recherche d'un système d'équations et d'inéquations en nombres entiers, c'est-à-dire le nombre d'ensembles de routages possibles respectant un horizon de production spécifié (¹). En effet il est a priori nécessaire d'effectuer le parcours exhaustif de cet espace afin de déterminer les solutions qui respectent un temps de cycle fixé (ici temps de cycle optimal). Nous obtenons donc ainsi la complexité de cette étape (²). Pour cela, il est nécessaire de calculer pour chaque conflit de gammes (seulement ceux se rapportant aux flexibilités de procédés et d'affectation sans considérer les flexibilités de permutation) toutes les possibilités respectant le cycle de production. Puis les combinaisons entre les différents routages obtenus pour chaque conflit sont envisagées pour estimer la complexité de ce problème.

Considérons dans un premier temps l'exemple d'illustration. Pour le premier conflit des gammes de fabrication de type A, nous devons donc résoudre le problème suivant :

$A_{11} + A_{12} + A_{13} = 3$ avec $\forall i \in \{1,2,3\}, A_{1i} \in IN$ et $A_{1i} \leq 3$. C'est un problème classique de dénombrement (³) : recherche de l'ensemble des occurrences d'une équation : somme de k

¹ Comme nous considérons immédiatement le problème discret, le système d'équations et d'inéquations à résoudre ne comporte pas uniquement les variables qui nous intéressent ici, i.e. les ratios de routages, mais aussi celles qui permettent de répartir en discret une charge de travail d'une ressource multiple entre les machines identiques. Ce sont les variables de type $U_{t-r,m}$ qui indiquent le nombre d'opérations de durée t affectées à la m -ème machine de la r -ème ressource. A l'aide de ces variables, il est possible d'obtenir les différentes distributions de charges admissibles entre les machines. Or pour cette étape, seule l'existence d'une répartition discrète respectant le temps de cycle suffit pour valider la charge de travail de chaque ressource. Plus le problème sera détaillé (différenciation des opérations) plus le nombre de variables du système à résoudre sera important, et plus l'ordre de complexité du problème augmentera, pour aboutir finalement aux mêmes résultats. C'est la raison pour laquelle nous avons limité le plus possible le nombre de ces variables en regroupant les opérations à réaliser sur une ressource suivant leur durée opératoire.

² Nous avons volontairement omis les variables liées à la distribution discrète dans ce calcul de complexité, même si elles sont nécessaires à la détermination des ensembles de routages admissibles. Elles interviennent forcément dans le calcul de l'ordre de complexité du système d'équations et d'inéquations et donc sur le temps de calcul pour la résolution du problème (d'ailleurs c'est pour cette raison que nous avons limité leur nombre). Mais le but de cette étude ici est de connaître la fraction des ensembles de routages qui respectent le temps de cycle par rapport à tous ceux dont l'horizon de production est $E(RP_p)$. Quant à une estimation de l'ordre de complexité du problème et surtout du temps de calcul, nous ne poursuivons pas la recherche car c'est un problème classique de résolutions d'équations et d'inéquation en nombres entiers. Pour le moment, nous résolvons le système à l'aide de la programmation sous contrainte avec Prolog III. Nous recherchons actuellement des moyens plus performants de résolution complète de tels systèmes. De toute façon quelle que soit la méthode employée, continue ou discrète, il est nécessaire, quand un horizon de production est fixé, de calculer tous les ensembles de charges possibles sur les ressources (toujours dans la perspective de la détermination de l'optimalité). Nous sommes donc toujours obligés de considérer la résolution d'un tel système d'équations et d'inéquations en nombres entiers.

³ Pour tous les problèmes d'ordonnancement étudiés dans ce mémoire, nous renvoyons le lecteur à l'une des principales références en la matière : [KAU 68] et [COM 74].

paramètres en nombres entiers naturels égale à n . Si $k = 2$, le nombre de solutions est $n + 1$. L'extension à 3 variables en découle et la cardinalité vaut alors $\frac{(n+1).(n+2)}{2}$. Pour le problème considéré, le nombre de solutions est donc égal à 10.

Pour le deuxième conflit de type $A_{21} + A_{22} = 3$ avec $\forall i \in \{1,2\}, A_{i1} \in \mathbb{N}$ et $A_{i1} \leq 3$, il y a 4 solutions et pour les autres conflits $B_{21} + B_{22} = 2$ avec $\forall i \in \{1,2\}, B_{i1} \in \mathbb{N}$ et $B_{i1} \leq 2$ et $C_{21} + C_{22} = 2$ avec $\forall i \in \{1,2\}, C_{i1} \in \mathbb{N}$ et $C_{i1} \leq 2$, il existe 3 solutions différentes pour chaque cas.

Comme il n'y a pas de flexibilités imbriquées mais seulement (au plus) des flexibilités enchaînées, les choix des routages entre plusieurs conflits sont totalement indépendants. La cardinalité de l'ensemble des routages pour l'horizon $E(RP_p)$ est donc obtenue par le produit du nombre de solutions trouvées pour chaque cas précédemment étudié et est égale à $10 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 360$. Seuls ont été retenus les 6 routages qui respectent le temps de cycle $CT(RP_p) = 24$ u.t.

III.1.1.3 Etude du cas général : décomposition du dénombrement de l'ensemble des solutions admissibles suivant les conflits de routage existant au niveau des gammes opératoires

Le problème général considère le c -ème conflit de routages sur des gammes de fabrication des pièces de type i (flexibilité de procédés ou d'affectation). Nous supposons qu'il y a C_i conflits de ce genre pour le type de produit i à fabriquer, qu'il existe de plus K_{ic} branches différentes représentant l'indéterminisme de ce problème, et de plus qu'il n'existe pas de flexibilités imbriquées ou que celles-ci ont été modifiées au préalable en flexibilités simples, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant III.1.1.4. A chaque branche est associé un ratio de routage I_{ck} , $k \in \{1, \dots, K_{ic}\}$. La dernière hypothèse porte sur le nombre d'opérations à exécuter pour produire les pièces de type i sur un cycle de production du p -ème régime permanent. Il est supposé que

$E(RP_p) = \left\{ \underbrace{1, \dots, 1}_{N_1}, \dots, \underbrace{i, \dots, i}_{N_i}, \dots, \underbrace{T, \dots, T}_{N_T} \right\}$. La recherche porte sur le nombre de solutions de :

(Equation III-1) :

$$\sum_{k=1}^{K_{ic}} I_{ck} = N_i \text{ avec } I_{ck} \in \mathbb{N}.$$

Soit $N_{e.r.}(i, c)$ ce nombre.

Proposition (III-1) ⁽¹⁾ : Le nombre de solutions de l'équation $\sum_{k=1}^{K_{ic}} I_{ck} = N_i$ est

$$N_{e.r.}(i, c) = C_{N_i + K_{ic} - 1}^{K_{ic} - 1}.$$

¹ Les démonstrations de ce chapitre III ont été renvoyées en annexe IV dans un souci de simplicité et de lisibilité de la démarche.

Ainsi pour le premier cas étudié sur l'exemple illustratif, nous avons $N_1 = 3$ et $K_{11} = 3$, d'où le nombre de solutions est donc égal à $C_{3+3-1}^{3-1} = C_5^2 = 10 = N_{e.r.}(1,1)$.

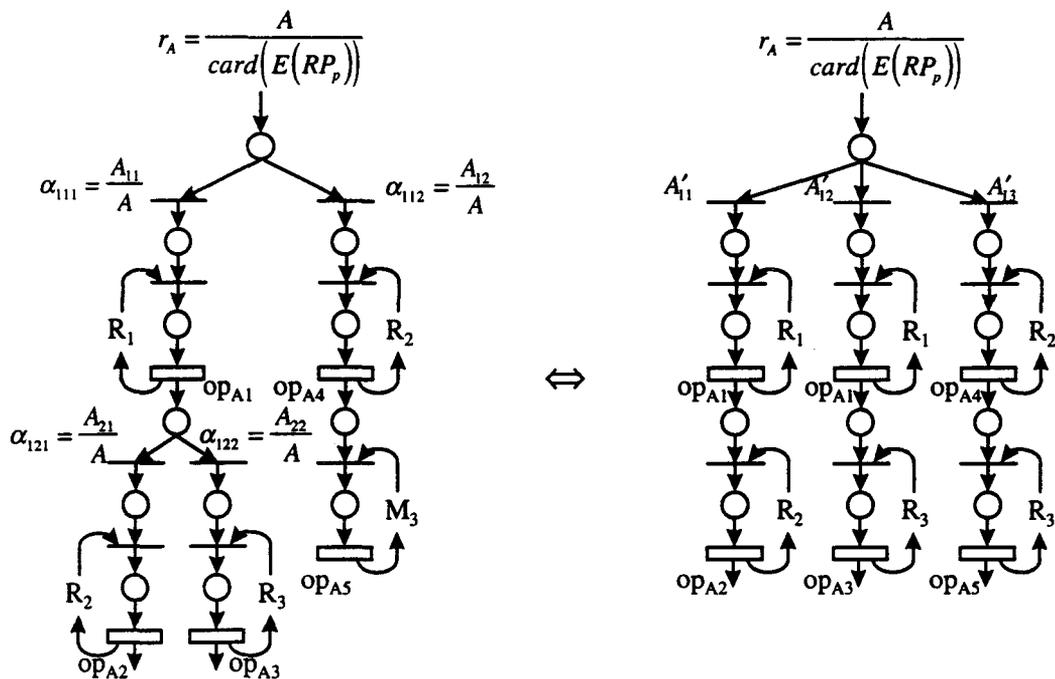
La complexité de cette étape est facilement déduite dans ce cas, puisque les gammes opératoires ne possèdent aucune flexibilité imbriquée. Il n'y a donc aucune interaction entre la résolution des différents conflits de routage. La taille de l'espace de recherche vaut donc :

$$\prod_{i=1}^I \left(\prod_{c=1}^{C_i} C_{N_i + K_{ic} - 1}^{K_{ic} - 1} \right) = N_{e.r.}(1,1) * N_{e.r.}(1,2) * N_{e.r.}(2,2) * N_{e.r.}(3,1) = 10 * 4 * 3 * 3 = 360.$$

III.1.1.4 Cas des indéterminismes complexes : flexibilités de gammes opératoires imbriquées, enchaînées ou les deux à la fois

Dans le cas de flexibilités de gammes imbriquées, il est possible de distinguer deux cas.

- S'il n'existe que des flexibilités simples (voire imbriquées) de type procédé ou d'affectation au niveau des branches d'un conflit, il n'existe aucune différence entre le modèle plié et le modèle déplié de la flexibilité imbriquée, comme l'indique la Figure III-3 : le nombre de gammes linéaires est égal à $b_1 = 3$. Il est alors très facile de revenir au problème précédent. Les séquences d'opérations sont déterminées avec la modélisation pliée par la seule connaissance des taux de routage.



Contraintes liées au modèle plié de la flexibilité imbriquée :

$$\begin{aligned} A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} &\in \mathbb{N} \\ A_{11} + A_{12} &= A \\ A_{21} + A_{22} &= A_{11} \end{aligned}$$

Contraintes liées au modèle déplié de la même flexibilité :

$$\begin{aligned} A'_{11}, A'_{12}, A'_{13} &\in \mathbb{N} \\ A'_{11} + A'_{12} + A'_{13} &= A \end{aligned}$$

Figure III-3 : Transformation de flexibilités imbriquées en flexibilité simple

- Par contre quand il existe des flexibilités d'affectation ou de procédé enchaînées dans une branche de cette flexibilité imbriquée, le problème est plus complexe, comme le montre la Figure III-4.

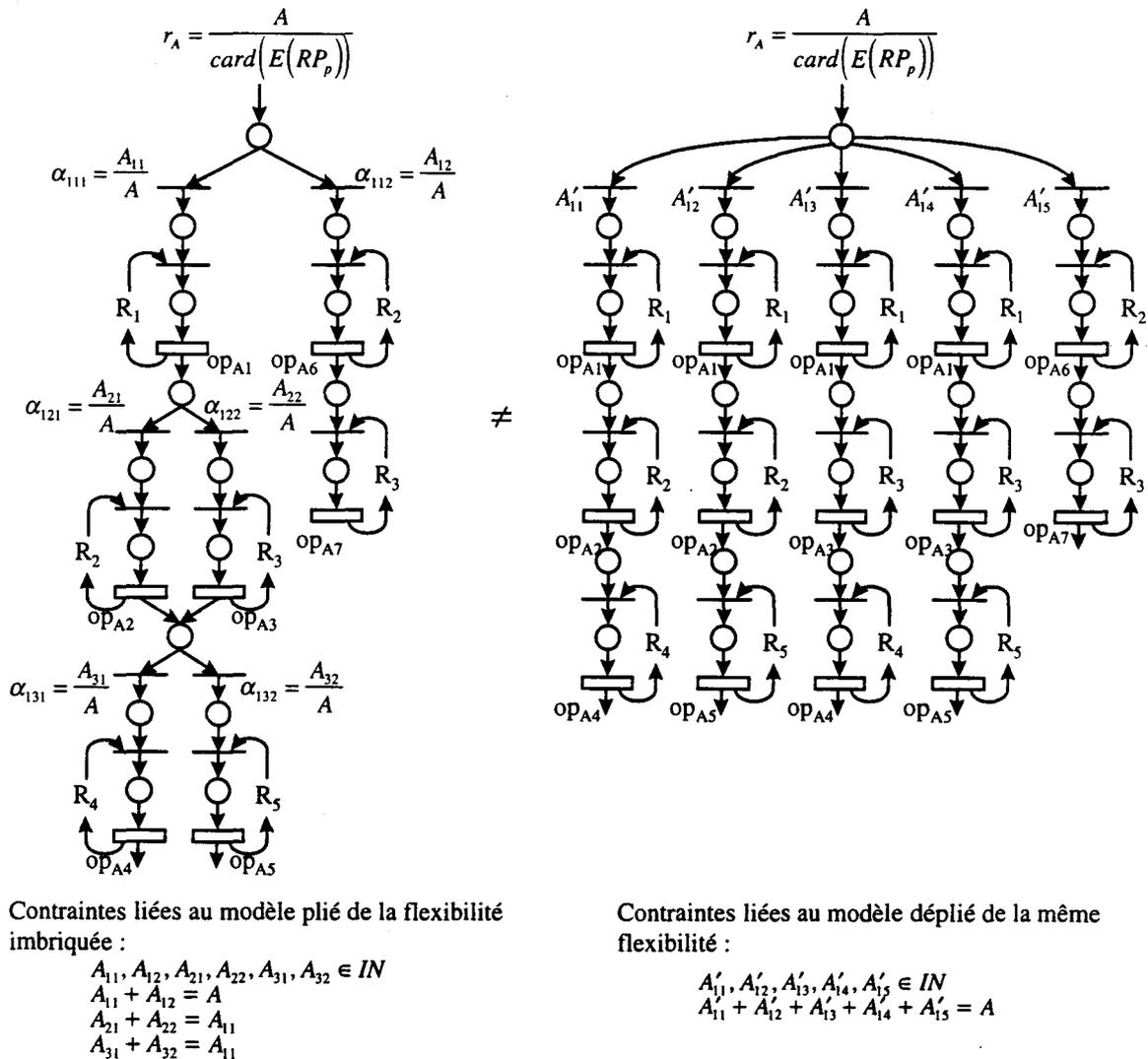


Figure III-4 : Modèle plié et déplié d'une flexibilité imbriquée complexe

En effet le modèle déplié envisage déjà toute ou une partie de l'extraction des chemins en plus des routages admissibles (linéarisation des gammes opératoires). Plusieurs séquences peuvent être déterminées avec un même ensemble de taux de routage, donc avec la même répartition des charges induites sur les ressources. Ce qui ne correspond pas au but de ce paragraphe. Nous recherchons seulement les différentes charges possibles sur les ressources respectant le temps de cycle (rappel : un seul indéterminisme par étape). Par exemple, il n'est pas nécessaire de savoir quelle sera l'opération qui suivra l'opération op_{A2} sur la Figure III-4 : op_{A4} ou op_{A5} . Seule nous importe la détermination des valeurs des différents routages ($A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32}$). L'évaluation de la complexité est donc différente si le modèle déplié ou le modèle plié est étudié. Ne voulant pas introduire d'interférence entre les étapes de la méthode, nous garderons le modèle plié afin de ne pas empiéter sur le prochain module. Nous pouvons cependant évaluer, sur un exemple tiré de la Figure III-4, les deux valeurs de la taille de l'espace de recherche afin de

montrer qu'effectivement le modèle déplié engendre plus de possibilités que le modèle plié. De plus cela permet d'explicitier le calcul lié aux flexibilités imbriquées pour lesquelles la résolution de certains conflits dépend de la détermination de routages provenant d'autres conflits.

Soit K_{11} , K_{12} et K_{13} les nombres de branches liés aux conflits respectifs 1, 2 et 3 des gammes opératoires fabriquant des pièces de type A pour le modèle plié du système et b_1 le nombre de gammes linéaires de A obtenues en dépliant ces flexibilités. La résolution des conflits de la flexibilité enchaînée caractérisée par les routages A_{21} , A_{22} , A_{31} et A_{32} est directement liée à celle du conflit précédent et plus particulièrement au choix du routage A_{11} . Il vient dans ce cas :

$$N_{e.r.}(1, \{1,2,3\}) = \sum_{A_{11}=0}^A \underbrace{C_{A-A_{11}-K_{11}-2}^{K_{11}-2}}_{\substack{\text{résolution du problème} \\ A_{12} + \dots + A_{1K_{11}} = A - A_{11} \\ \text{avec } A_{11} \text{ fixé}}} \cdot \underbrace{C_{A_{11}+K_{12}-1}^{K_{12}-1}}_{\substack{\text{résolution du problème} \\ A_{21} + \dots + A_{2K_{12}} = A_{11}}} \cdot \underbrace{C_{A_{11}+K_{13}-1}^{K_{13}-1}}_{\substack{\text{résolution du problème} \\ A_{31} + \dots + A_{3K_{13}} = A_{11}}}$$

Application numérique : avec $K_{11} = K_{12} = K_{13} = 2$ et $A = 4$, l'espace de recherche a une taille égale à :

$$N_{e.r.}(1, \{1,2,3\}) = \sum_{a=0}^4 C_{4-a}^0 \cdot C_{a+1}^1 \cdot C_{a+1}^1 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$$

Dans le cas du modèle déplié, la complexité du problème est très facile à évaluer puisque $N_{e.r.}(1,1)_{\text{déplié}} = C_{A+K_{11}-1+K_{12} \cdot K_{13}-1}^{K_{11}-1+K_{12} \cdot K_{13}-1}$. Cela revient à remplacer la branche du premier conflit dont le routage associé est A_{11} par toutes les gammes linéaires obtenues à partir des flexibilités enchaînées. Il ne reste plus alors qu'un seul conflit de routages. D'un point de vue mathématique, le nombre de paramètres en général augmente puisque le produit du nombre de conflits des flexibilités enchaînées est envisagé pour obtenir le nombre de nouveaux paramètres qui remplacent A_{11} . Il existe donc plus de solutions qu'avec le modèle plié.

C'est le constat qui a déjà été fait du point de vue procédé puisque nous avons fait remarquer que considérer ce modèle c'est opter pour la résolution supplémentaire du problème d'extraction de chemins. Nous pouvons aussi le constater avec l'application numérique : avec $K_{11} = K_{12} = K_{13} = 2$ et $A = 4$, l'espace de recherche a une taille égale à $N_{e.r.}(1,1)_{\text{déplié}} = C_8^4 = \frac{8!}{4! * 4!} = 70$. Il est possible d'écrire de manière différente la formule liée au modèle déplié en prenant en compte le fait que la branche liée au routage A_{11} est remplacé par $K_{12} \cdot K_{13}$ nouvelles branches pour se rapprocher de la formule utilisée pour évaluer la complexité de l'espace de recherche du modèle plié. Il existe ainsi $b_1 = K_{11} - 1 + K_{12} \cdot K_{13} = 4$ gammes linéaires opératoires fabriquant des pièces de type A. D'où la formulation :

$$N_{e.r.}(1,1)_{\text{déplié}} = C_{A+K_{11}-1+K_{12} \cdot K_{13}-1}^{K_{11}-1+K_{12} \cdot K_{13}-1} = C_{A+b_1-1}^{b_1-1} = \sum_{A_{11}=0}^A C_{A-A_{11}+K_{11}-2}^{K_{11}-2} \cdot C_{A_{11}+K_{12} \cdot K_{13}-1}^{K_{12} \cdot K_{13}-1}$$

Ainsi il est possible maintenant de comparer le nombre de solutions obtenues à partir des deux modèles en fonction de la valeur du routage clé du problème : A_{11} , cf. Tableau III-2.

	Nombre de solutions obtenues à partir du modèle plié	Nombre de solutions obtenues à partir du modèle déplié
valeur théorique	$C_{A_{11}+K_{12}-1}^{K_{12}-1} \cdot C_{A_{11}+K_{13}-1}^{K_{13}-1}$ lié à $\begin{cases} A_{21} + A_{22} = A_{11} \\ A_{31} + A_{32} = A_{11} \end{cases}$	$C_{A_{11}+K_{12}+K_{13}-1}^{K_{12} \cdot K_{13}-1}$ lié à $A'_{11} + A'_{12} + A'_{13} + A'_{14} = A_{11}$
$A_{11} = 0$	1	1
$A_{11} = 1$	4	4
$A_{11} = 2$	9 Pour le modèle plié, avec $A_{21} = A_{22} = A_{31} = A_{32} = 1$, il existe une seule solution.	10 Pour le modèle déplié, il en existe deux : $A'_{11} = A'_{14} = 1$ et $A'_{12} = A'_{13} = 0$ et $A'_{12} = A'_{13} = 1$ et $A'_{11} = A'_{14} = 0$. Pour ces deux cas, mêmes opérations, même charge de travail pour les ressources.
$A_{11} = 3$	16	20
$A_{11} = 4$	25	35

Tableau III-2 : Dénombrement du nombre de solutions obtenues selon le modèle choisi : plié ou déplié et suivant les valeurs du routage entier A_{11}

Nous avons donc pu évaluer, pour chaque type de produits à fabriquer, la complexité de l'étape de détermination des ensembles de routages admissibles, dans le cas de flexibilités imbriquées complexes, à partir du modèle plié des gammes opératoires, afin de conserver la bonne répartition des complexités entre chaque module. Comme il n'existe pas d'interaction entre gammes opératoires de types différents de pièces, la taille de l'espace de recherche, composé d'ensembles de routages respectant l'horizon de production $E(RP_p)$, est donnée par le produit de chaque évaluation respective par type de pièces. Parmi ces ensembles, la résolution du système d'équations et d'inéquations en nombres entiers ne garde que les ensembles des routages admissibles respectant le temps de cycle $CT(RP_p)$, c'est-à-dire les bonnes répartitions discrètes des charges de travail des ressources. Il est cependant impossible d'évaluer, avant résolution, le nombre d'ensembles de routages admissibles.

III.1.1.5 Performances des horizons multiples : non uniformité des fonctions débit de production et nombre de répartitions de charge admissibles par rapport au paramètre taille de l'horizon de travail

A titre indicatif, nous allons montrer sur un exemple que le nombre de solutions du système d'équations et d'inéquations en nombres entiers n'est pas une fonction monotone de la taille de l'horizon de production. Reprenons dans ce sens l'exemple illustratif avec l'horizon de production du régime permanent RP_p et considérons des horizons multiples de

cet horizon $E(RP_p) = \{3A, 2B, 2C\}$. Cet horizon $E(RP_p)$ est considéré comme l'horizon minimal de production puisqu'il est le plus petit horizon discret de travail qui respecte les ratios réels de production : $r_A = 3/7$, $r_B = 2/7$ et $r_C = 2/7$.

Avec la méthode développée dans la thèse [OHL 95a], nous avons déjà démontré que le débit de production n'est pas une fonction monotone de l'horizon de production caractérisé ici par le facteur multiplicatif v de l'horizon minimal. Pour ce qui nous concerne, nous reprenons la même approche pour prouver sur cet exemple que le nombre d'ensembles de routages admissibles n'est pas non plus une fonction monotone de ce facteur v . Par contre la taille de l'espace de recherche, uniquement contraint par le respect de l'horizon de production, dans lequel nous dégageons les solutions particulières respectant en plus le temps de cycle optimal, est bien une fonction strictement croissante de la taille de l'horizon de production et donc dépend du facteur v .

Dans l'hypothèse d'une analyse continue de flux du système de production (problème de programmation linéaire résolu par le simplexe), nous pouvons évaluer la vitesse optimale de production de l'atelier flexible, lorsqu'il est contraint par de tels ratios de production (ici $r_A = 3/7$, $r_B = 2/7$ et $r_C = 2/7$). Le passage à des horizons de production discrets amène, en général, des pertes de performances en terme de productivité de l'atelier flexible étudié. Mais seuls ces horizons de travail ont un intérêt pratique, puisqu'ils répondent à la propriété fondamentale de cette étude que représente le fonctionnement périodique. Pour chaque horizon de travail, il est donc nécessaire de calculer la répartition optimale de la charge de travail durant un cycle entre les machines de transformation. La machine la plus chargée, donc la plus lente, fixe le temps de cycle du système entier et donc sa vitesse de production.

Le but de cette étude est de comparer les performances des différents horizons multiples de l'horizon minimal, ici $E(RP_p)$, en terme de productivité, de taille de l'espace de recherche et du nombre des ensembles de routages entiers admissibles respectant le débit maximal de production qui vient d'être calculé. Le calcul du nombre de solutions respectant le temps de cycle optimal est obtenu en modifiant légèrement le système d'équations et d'inéquations (Equation III-1), établi lors de la détermination des ensembles de routages entiers admissibles. Il suffit simplement d'indiquer la bonne valeur de l'horizon de production, ainsi que son temps de cycle associé.

Les résultats de la comparaison entre les performances des différents horizons multiples de production sont relevés sur le Tableau III-3. Pour une meilleure compréhension du tableau, il est indispensable de rappeler les quelques notions définies dans [OHL 95a], concernant les caractéristiques à considérer de chaque horizon multiple.

Ainsi chaque horizon est représenté, comme nous venons de le voir, par le facteur multiplicatif v de l'horizon minimal de travail.

Le temps de cycle est appelé C_v , tandis que le temps de cycle ramené à l'horizon minimal de travail a été défini ainsi : $C_v^1 = C_v / v$. Cet indicateur relatif permet de comparer plus facilement les vitesses de production entre les horizons et le débit optimal obtenu par calcul de flux.

Enfin la réactivité du système, soumis à une commande à vitesse maximale de production et caractérisée par son horizon multiple de production, par rapport à l'horizon

$E_1 = E(RP_p)$ est définie comme le rapport des temps de cycle : $\frac{C_1}{C_v}$.

Facteur v multiplicatif de l'horizon minimal $E_1 = E(RP_p)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temps de cycle optimal (calcul de flux)	22,113									
C_v	24	48	69	90	114	136	156	180	200	223
$C_v^1 = \frac{C_v}{v}$	24	24	23	22,5	22,8	22,67	22,29	22,5	22,22	22,3
Performances en terme de productivité	92,14%	92,14%	96,14%	98,28%	96,98%	97,56%	99,22%	98,28%	99,51%	99,16%
Taille de l'espace de recherche	360	4.900	26.950	95.823	$2,6 \cdot 10^5$	$6,1 \cdot 10^5$	$1,3 \cdot 10^6$	$2,3 \cdot 10^6$	$4,1 \cdot 10^6$	$6,8 \cdot 10^6$
Nombre d'ensembles de routages admissibles	6	58	1	13	63	24	11	87	3	6
Nombre de pièces de type A produites lors d'un cycle	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
idem pour B	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
idem pour C	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Cardinalité de l'horizon de production	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
Réactivité de l'horizon par rapport à l'horizon E_1	100%	50%	34,8%	26,7%	21,1%	17,6%	15,4%	13,3%	12%	10,8%

Tableau III-3 : Comparaison des performances des différents horizons multiples suivant les différents critères à partir de l'exemple illustratif pris ici comme horizon minimal

Les résultats obtenus, cf. Tableau III-3 et Figure III-5, nous indiquent la non monotonie de la vitesse de production du système et du nombre d'ensembles de ratios entiers de routages admissibles en fonction de la valeur du facteur multiplicatif de l'horizon minimal.

Quant à la stricte monotonie de la taille de l'espace de recherche, la démonstration est évidente au regard de la cardinalité de l'ensemble des routages possibles : $C_{N_i+K_{ic}-1}^{K_{ic}-1}$

provenant d'un conflit mis sous forme d'équation : $\sum_{k=1}^{K_{ic}} I_{ck} = N_i$ avec $I_{ck} \in \mathbb{N}$. La valeur dépend bien du nombre de produits du type auquel appartient ce conflit. Mais ce n'est pas une fonction forcément linéaire : tout dépend du nombre de branches associés à chaque conflit.

Performances des différents horizons multiples

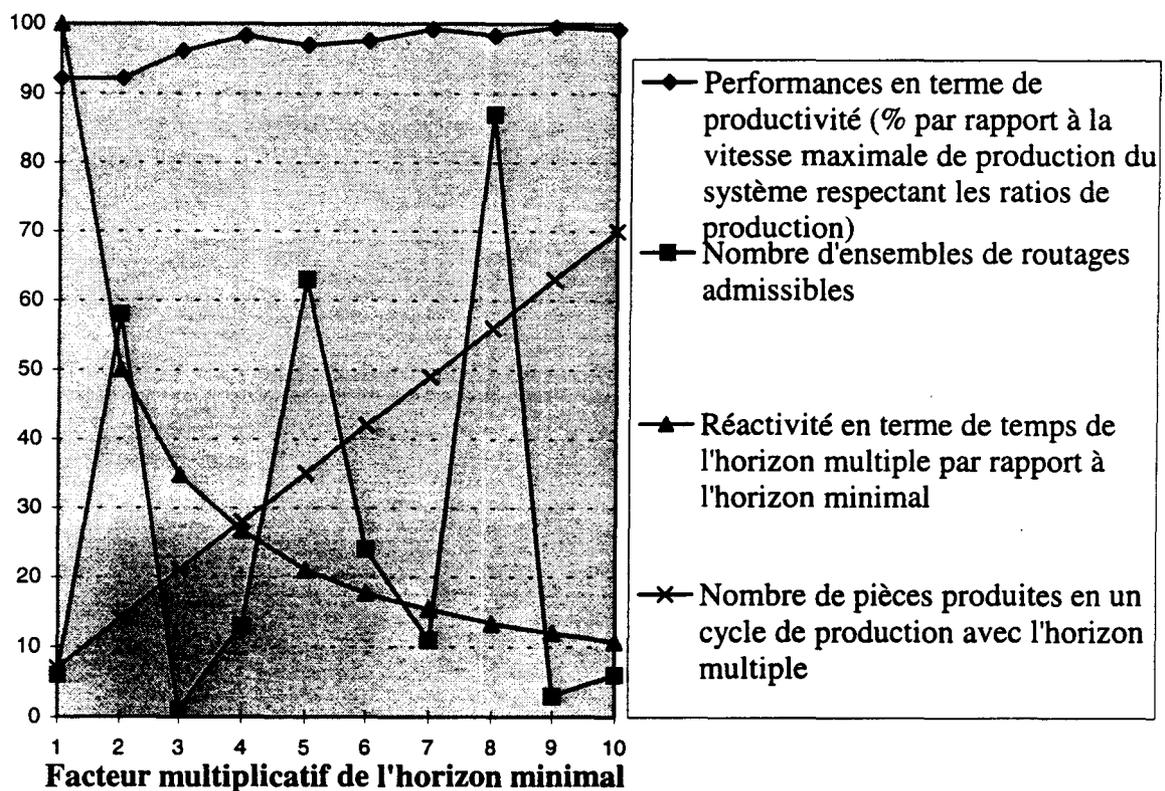


Figure III-5 : Graphique des performances des différents horizons multiples de l'horizon minimal de production $E_1 = E(RP_p)$

Par la suite, nous ne comparerons plus les tailles des espaces de recherche, ni le nombre de solutions trouvées pour chaque type d'indéterminisme considéré avec les valeurs trouvées pour des horizons multiples de celui retenu $E_1 = E(RP_p)$. Plusieurs raisons ont motivé ce choix.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer au début du chapitre précédent, à cette étape, nous ne remettons pas en cause les résultats obtenus à l'étape antérieure de planification fine, c'est-à-dire la composition et le séquençement des régimes permanents cycliques. Cette solution répond aux critères d'optimisation que nous avons établis. De plus un changement d'horizon de production, en considérant par exemple un horizon multiple, peut certes augmenter (parfois) la productivité du système de production, mais il peut entraîner aussi des temps de calcul plus importants avec l'augmentation de l'espace de recherche, et le non respect éventuel du critère fonctionnement répétitif de chaque régime permanent.

Une deuxième raison tient au fait que la comparaison devient de plus en plus difficile, puisque le nombre de solutions engendrées à chaque prise en compte d'un degré de liberté est conditionné par la complexité évaluée à l'étape précédente. Le seul point intéressant serait la comparaison des espaces de recherche. Mais celle-ci reprend le principe évoqué ici, puisque la détermination de la cardinalité repose toujours sur le principe élémentaire du dénombrement des solutions d'une équation en nombres entiers.

La suite de l'étude est illustrée par le développement complet de l'exemple illustratif caractérisé par $E_p = \{3A, 2B, 2C\}$ et $CT(RP_p) = 24$ u.t. et par celui de l'horizon double $E'_p = \{6A, 4B, 4C\}$ et $CT'(RP_p) = 48$ u.t. Les résultats de cet horizon double seront explicités lors de la comparaison des deux horizons au paragraphe III.1.9.

Ces deux horizons ont été conservés afin de montrer qu'à vitesse de production égale ($C_2^1 = C_1 = 24$), la complexité peut être tout à fait différente si l'un des horizons est considéré plutôt qu'un autre. Le temps de cycle seul ne suffit pas pour le choix de l'horizon de production. Il était donc bien nécessaire d'introduire d'autres critères d'optimisation afin de limiter la taille de cet horizon et par la même le temps de calcul d'une commande (optimale). Il est nécessaire finalement de trouver un « bon » compromis entre les performances de productivité du système (caractérisée par le temps de cycle) et la complexité de la recherche (caractérisée essentiellement par la taille de l'horizon de travail).

A la fin de cette étape, les invariants de place liés aux ressources de transformation et ceux liés aux types de ressource de transport (palettes) sont connus, puisque toutes les opérations de transformation du cycle de production ont été déterminées avec le choix des routages liés aux flexibilités de procédé ou d'affectation au niveau gamme opératoire. La Figure III-6 reprend le modèle FRT-net en précisant les valeurs des routages entiers admissibles qui ont conduit à des charges de travail sur les ressources qui respectent le temps de cycle. Les flexibilités de permutation ne rentrent pas encore en compte puisqu'elles ne jouent aucun rôle dans le choix de telle ou telle opération. Elles contraignent « simplement » certaines séquences d'opérations. Les gammes opératoires ne sont pas linéaires. Ce sont les deux étapes suivantes qui vont les linéariser.

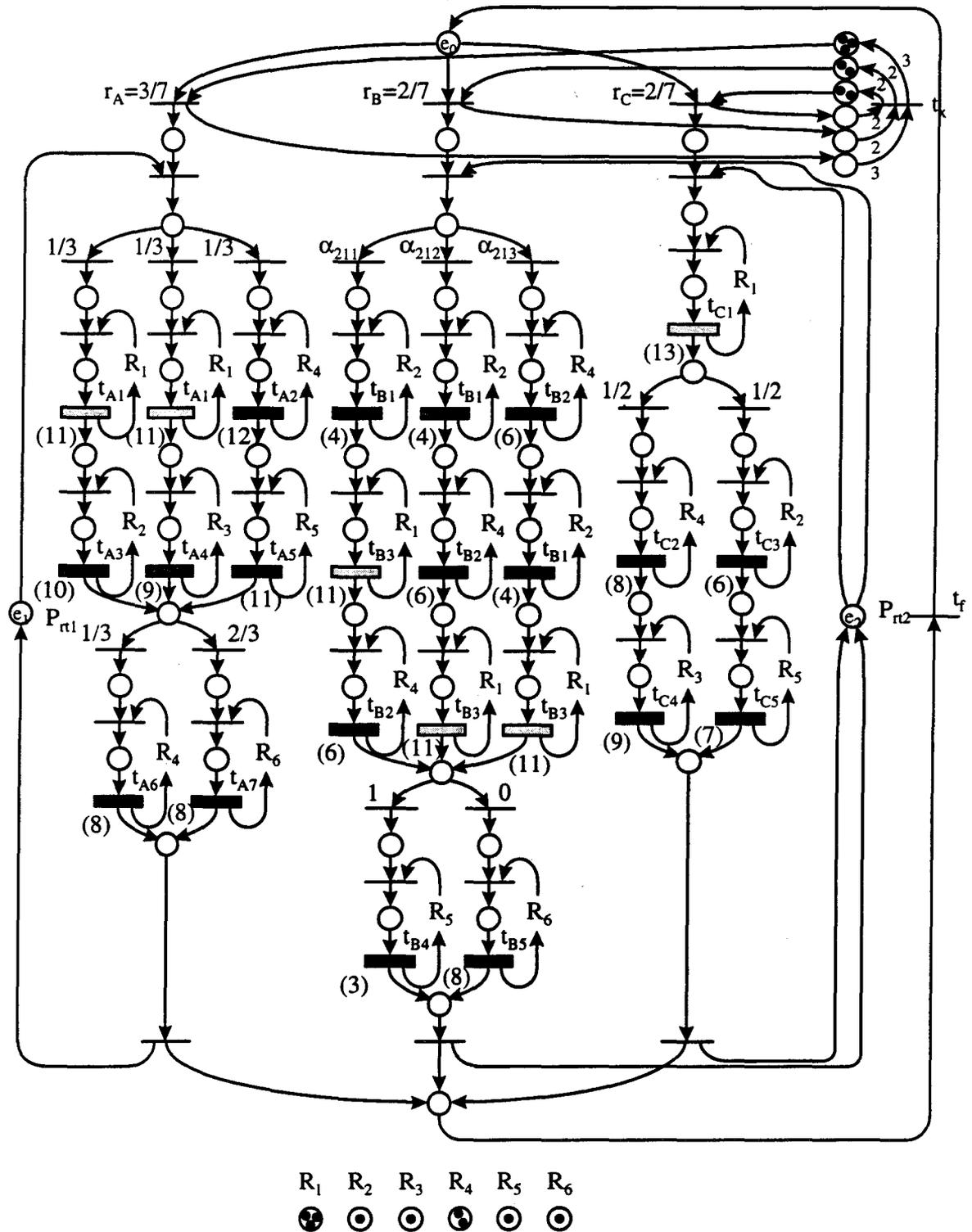


Figure III-6 : Modèle de la charge de travail d'un cycle de production du régime permanent RP_p associé à l'ensemble des routages admissibles α_4

III.1.2 Phase 2 : Extraction des chemins ou dépliage des gammes

Complexité de l'analyse du régime permanent RP_p caractérisé par : - $E(RP_p) = \{3A, 2B, 2C\}$ - $CT(RP_p) = 24$ u.t.		Différentes phases de l'élaboration de la commande d'un régime permanent	
Taille de l'espace de recherche respectant $E(RP_p)$ jusqu'à la Phase	Nombre de solutions à la fin la Phase	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> Phase 1: Détermination et choix des routages admissibles </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> Phase 2 : Extraction de chemins </div>	⇒ Invariants de places : • des ressources de transformation • des ressources de transport (palettes) ⇒ <i>Modèle de la charge de travail d'un cycle de production</i>
360 routages ⇒	6 routages admissibles ↓		⇒ Dépliage des flexibilités complexes ⇒ <i>Modèle partiellement déplié</i>
504 ensembles de chemins extraits ⇒	16 ensembles de chemins extraits admissibles		

Cette étape a pour but principal de déplier les modèles des systèmes retenus avec leur ensemble de routages admissibles, afin de « résoudre » les flexibilités imbriquées et enchaînées. En effet les charges des ressources sont maintenant définies avec les résolutions des indéterminismes de type D_{3b} et D_{3c} . Mais les conflits liés aux flexibilités de procédé ou d'affectation ne sont pas totalement résolus puisqu'il est possible de regrouper de plusieurs manières les opérations issues des flexibilités enchaînées. Ainsi pour l'exemple illustratif, seules sont concernées les gammes opératoires issues de la fabrication du produit de type A, puisqu'elles seules possèdent des flexibilités enchaînées. Ainsi que nous l'avons vu à l'étape précédente, au moment du dépliage de flexibilités, seules les flexibilités enchaînées engendrent plus de solutions que celles trouvées lors de la détermination des routages respectant le temps de cycle fixé par la planification fine. Toutes les autres gammes n'ont que des flexibilités simples de procédés ou d'affectation. Elles vont donc engendrer les mêmes solutions que pour celles de la recherche des routages. Nous rappelons qu'à ce niveau, les flexibilités de permutation ne sont pas encore prises en compte.

III.1.2.1 Cardinalité de l'espace de recherche des phases 1 et 2 réunies

En ce qui concerne l'exemple, nous étudions d'abord la taille de l'espace de recherche lié à la dernière étape et à celle-ci. Pour cela, deux approches peuvent être utilisées.

La première consiste à dénombrer « à la main » toutes les solutions possibles afin de distinguer les différents cas que nous aurons à étudier par la suite avec la prise en compte des autres indéterminismes du système de production. Ainsi, pour la fabrication de pièces de type A, il existe 6 gammes opératoires toutes différentes les unes des autres (appelées ici GO_{A1} , GO_{A2} , GO_{A3} , GO_{A4} , GO_{A5} et GO_{A6}) : 3 routages possibles pour le premier conflit et 2 routages pour le deuxième, les deux conflits se situant sur des flexibilités enchaînées, ils sont donc indépendants et le nombre de solutions est égal à $3 \times 2 = 6$. Il s'agit de rechercher le nombre d'ensembles différents de 3 gammes opératoires prises parmi les 6 gammes opératoires possibles.

Il existe pour le cas considéré ici trois types de solutions :

- les ensembles comportant une seule gamme, de type $\{GO_{A1}, GO_{A1}, GO_{A1}\}$. Cela revient à choisir un type de gamme opératoire parmi 6. La combinatoire est donc de $C_6^1 = 6$.
- les ensembles se composant de deux gammes différentes, l'une est doublée l'autre reste simple, de type $\{GO_{A1}, GO_{A1}, GO_{A2}\}$. Le problème revient à rechercher deux éléments dans un ensemble de six avec ordre. Il existe donc $A_6^2 = 6*5 = 30$ solutions.
- les ensembles à 3 gammes différentes, de type $\{GO_{A1}, GO_{A2}, GO_{A3}\}$. L'ordre n'a pas d'importance. Il s'agit juste de trouver des ensembles de 3 gammes différentes parmi 6. Il y en a exactement $C_6^3 = \frac{6*5*4}{3*2} = 20$.

Soit au total 56 ensembles de chemins différents se composant de trois gammes opératoires de type A.

La deuxième méthode découle immédiatement des formules établies à l'étape précédente dans le dépliage des flexibilités enchaînées. Pour notre exemple nous avons donc deux flexibilités enchaînées avec, pour le premier conflit, un nombre de branches possibles à suivre égal à $K_{11} = 3$, et pour le deuxième, $K_{12} = 2$. Le nombre de pièces de type A à produire lors d'un cycle est égal à $A = 3$. La taille de l'espace de recherche est donc égal à : $C_{A+K_{11}, K_{12}-1}^{K_{11}, K_{12}-1} = C_8^5 = C_8^3 = 56$.

En prenant en compte les gammes opératoires des produits de type B et C, nous obtenons une cardinalité de $56*3*3 = 504$ solutions.

Une comparaison entre les deux étapes a déjà été réalisée sur un petit exemple, cf. Tableau III-2. Il n'est donc pas nécessaire de la développer une seconde fois.

III.1.2.2 Dénombrement du nombre de solutions engendrées par la prise en compte du degré de liberté lié à l'extraction des chemins

Il existe aussi deux méthodes pour obtenir le nombre de solutions à partir de la prise en compte de l'extraction des chemins admissibles.

Le premier cas exploite directement les propriétés obtenues à l'étape précédente. En effet il s'agit de résoudre le système d'équations et d'inéquations linéaires en nombres entiers non pas à partir du modèle plié, cf. Figure II-1, mais plutôt à partir de celui pour lequel les flexibilités imbriquées, enchaînées ou complexes des flexibilités de gammes opératoires d'affectation et de procédé ont été dépliées, cf. Figure III-7. L'avantage d'une telle approche réside dans la résolution simultanée de plusieurs degrés de liberté. Elle représente aussi un inconvénient puisqu'il faut considérer dans ce cas tout l'espace de recherche créé par la prise en compte simultanée de ces deux types d'indéterminismes.

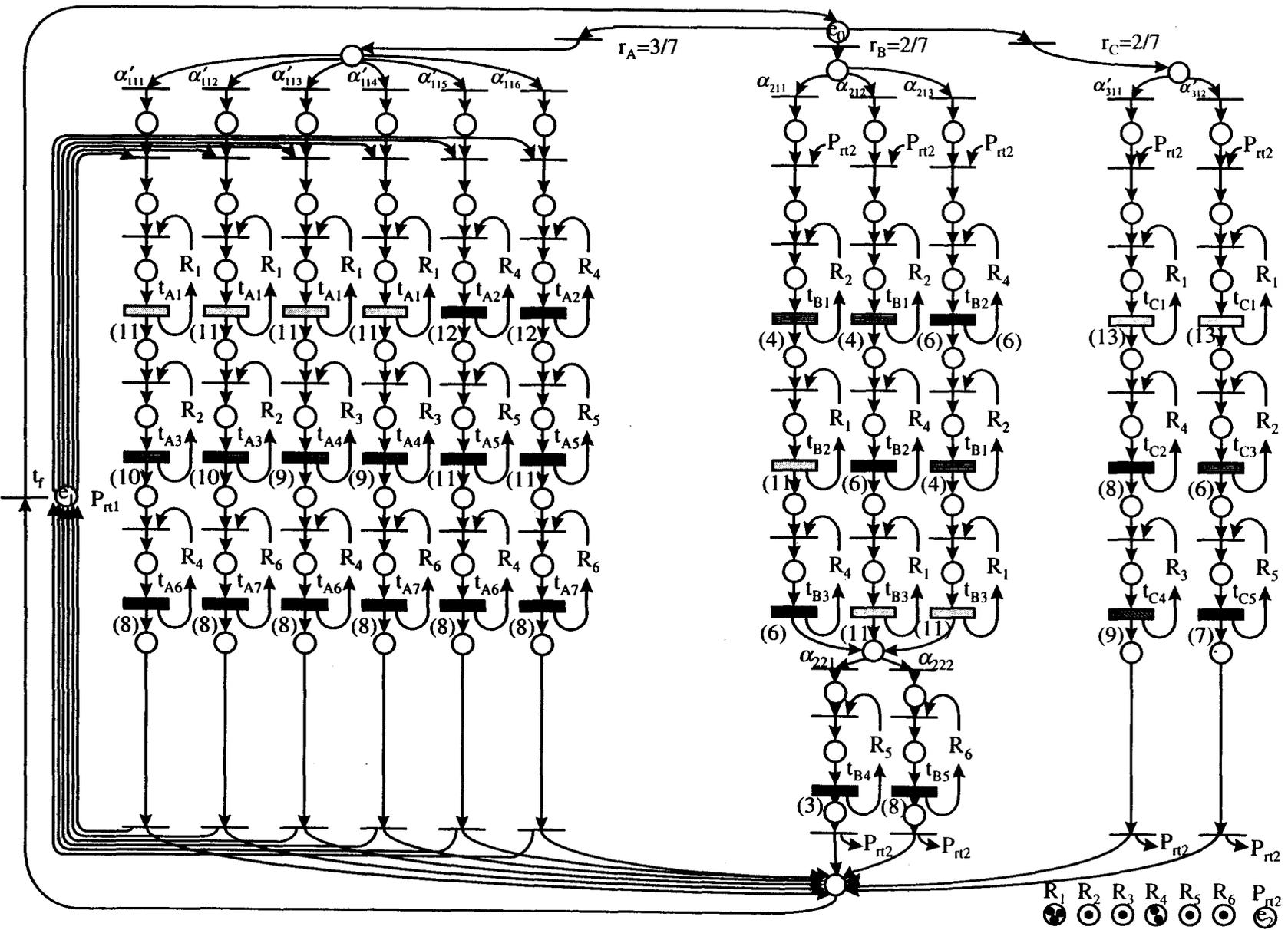


Figure III-7 : Modèle déplié des flexibilités de gamme opératoire de type affectation et procédé

Le deuxième cas utilise les ensembles de routages admissibles déterminés dans le paragraphe précédent pour en dégager toutes les nouvelles possibilités. Cette approche nécessite bien évidemment le développement de l'étape de détermination des charges admissibles des ressources. Au regard de la taille de l'espace de recherche regroupant cette étape et la précédente, il paraît plus intéressant d'utiliser cette méthode puisque l'espace de recherche à parcourir est finalement plus restreint. Contrairement au premier cas, toutes les solutions ne sont pas conservées lors de la considération du deuxième degré de liberté (extraction de chemin).

Il est maintenant nécessaire de s'occuper des cas respectant le temps de cycle $CT(RP_p)$. En ce qui concerne les solutions admissibles de l'exemple illustratif, il faut reprendre un par un les ensembles de routages obtenus précédemment et procéder au cas par cas. Quand nous considérons un ensemble de routages pour calculer les nouvelles solutions qu'il va engendrer, toutes les branches d'une flexibilité ne sont plus toutes accessibles. Les valeurs K_{ic} ne sont donc plus valables mais peuvent servir de bornes supérieures du nombre maximal de solutions.

Avec l'ensemble de routages (et par abus de langage le routage) $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1)$, pour les trois gammes opératoires des pièces de type A du cycle de fonctionnement, il existe trois débuts de gammes différents ($A_{11} = A_{12} = A_{13} = 1$) et deux fins de gammes différentes ($A_{21} = 1$ et $A_{22} = 2$). Il existe donc seulement trois arrangements possibles, ce qui correspond au choix de la première partie de la gamme opératoire qui termine la fin de fabrication de la pièce à l'aide de l'opération t_{A6} .

Pour le routage $\alpha_4 = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 0, 1, 1)$, le problème est identique. Pour les routages :

$$\alpha_2 = (1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1),$$

$$\alpha_3 = (1, 1, 1, 2, 1, 0, 2, 1, 1)$$

et $\alpha_5 = (1, 1, 1, 2, 1, 2, 0, 1, 1)$, idem (il suffit d'inverser les rôles des opérations t_{A6} et t_{A7}).

Quand au routage $\alpha_6 = (1, 1, 1, 0, 3, 2, 0, 1, 1)$, il ne fournit qu'une seule solution puisque pour le conflit des gammes opératoires des produits de type A, seules les opérations t_{A7} ont été retenues ($A_{22} = 3$). Tous les regroupements début - fin de gammes sont identiques.

Il est tout de même possible de formaliser ce problème. Tous les indéterminismes liés à des conflits de routages dépendants (donc flexibilités de type complexes) sont regroupés entre eux. Ces derniers sont déterminés par la **résolution d'un système très simplifié d'équations en nombres entiers**. Puis les solutions globales sont trouvées en permutant tous les cas obtenus dans ces sous-problèmes.

Considérons pour l'exemple illustratif, l'extraction des chemins issus des gammes opératoires produisant des pièces de type A. Le problème consiste à déterminer toutes les façons possibles d'extraire des gammes de fabrication des pièces de type A, pour obtenir trois gammes partiellement linéaires, sachant que, pour le premier conflit, il faut passer une

et une seule fois sur chaque branche du conflit (tous les routages sont ici fixés et nous avons $A_{11} = A_{12} = A_{13} = 1$ pour tous les ensembles de routages admissibles), et pour le deuxième conflit, cela dépend de l'ensemble de routages retenu (parmi les 6). Il existe 6 chemins différents susceptibles d'être utilisés. Ils correspondent à toutes les associations possibles entre les 3 branches du premier conflit et les 2 du deuxième. Six variables sont alors utilisées dans le système d'équations, afin de caractériser le nombre de fois que chaque gamme est utilisée lors du cycle de production. Soit $X_1^{k,k'}$ ce nombre caractérisant la gamme passant par la k -ème branche du premier conflit et la k' -ème du deuxième. La production de 3 pièces (ratio de production) de type A nous permet d'obtenir la première équation :

(Equation III-2)

$$X_1^{1,1} + X_1^{1,2} + X_1^{2,1} + X_1^{2,2} + X_1^{3,1} + X_1^{3,2} = A = 3.$$

Le respect des routages admissibles au niveau des différentes branches des différents conflits provenant des gammes opératoires de type A nous fournit les cinq dernières contraintes permettant la résolution du problème :

$$\begin{cases} X_1^{1,1} + X_1^{1,2} = A_{11} = 1 \\ X_1^{2,1} + X_1^{2,2} = A_{12} = 1 \\ X_1^{3,1} + X_1^{3,2} = A_{13} = 1 \\ X_1^{1,1} + X_1^{2,1} + X_1^{3,1} = A_{21} \\ X_1^{1,2} + X_1^{2,2} + X_1^{3,2} = A_{22} \end{cases}$$

Seule la résolution complète de tous les systèmes d'équations en nombres entiers (un par type de produit à fabriquer pour un ensemble de routages admissibles donné), obtenus en appliquant les différentes valeurs possibles des routages provenant des différents ensembles admissibles, permet de déterminer toutes les solutions engendrées par les phases 1 et 2.

La généralisation est alors immédiate. Par hypothèse, il n'existe pas de flexibilités d'opérations liant des gammes opératoires produisant des types différents de pièces. Si nous ne tenons pas compte d'éventuelles flexibilités de permutation, le nombre de chemins X_i^m (suites déterministes d'opérations correspondant aux T-semiflots du Réseau de Petri) pour fabriquer un produit fini de type i est supposé égal à b_i (égal au nombre de gammes linéaires obtenues après dépliage partiel des gammes, cf. paragraphe III.1.1.4 pour le calcul). A chaque chemin est associé $g(X_i^m)$, le nombre de fois que ce chemin X_i^m est utilisé effectivement lors du cycle de production. Les équations du système à résoudre sont données à la fois :

- par le respect, pour chaque type de produit, du nombre de pièces réalisées pendant un cycle, fourni par l'horizon de production :

$$\sum_{m=1}^{b_i} g(X_i^m) = \text{card}(E(RP_p)_i) = I$$

- et par le respect des ratios de routage obtenus à la phase 1 :

$$\sum g(X_i^m) = I_{jk}, \quad \forall X_i^m \mid \exists \text{branche}(\alpha_{jk}) \in X_i^m$$

pour tous les ratios de routage de type I_{jk} liés aux flexibilités de type affectation ou procédé.

Avec ce système, il y a redondance d'informations puisque avec le dépliage, même partiel des gammes, nous avons maintenant $\sum_{\forall k} I_{jk} = I$ pour chaque conflit j des gammes opératoires produisant le type i de pièces.

Ce système d'équations est à résoudre pour tous les ensembles de ratios de routages admissibles obtenus à l'étape précédente. Nous obtenons ainsi toutes les solutions liées à la phase 2 d'extraction de chemins.

Il existe donc $5*3+1 = 16$ ensembles différents de chemins extraits du système initial de la Figure II-1 modélisant l'atelier flexible parmi les 504 possibles qui respectent l'horizon $E(RP_p)$ mais qui se distinguent par leur atteignabilité du temps de cycle optimum $CT(RP_p) = 24$ u.t. et leur modèle déplié.

A ce niveau de l'étude, les gammes opératoires apparaissant dans le cycle de production sont devenues quasi-linéaires, dans le sens où toutes les flexibilités d'affectation ou de procédé imbriquées, enchaînées ou les deux à la fois ont été résolues en développant les modèles. Le modèle partiellement déplié, cf. Figure III-8, peut être associé à chaque ensemble de gammes opératoires représentant la charge du système lors d'un cycle de production.

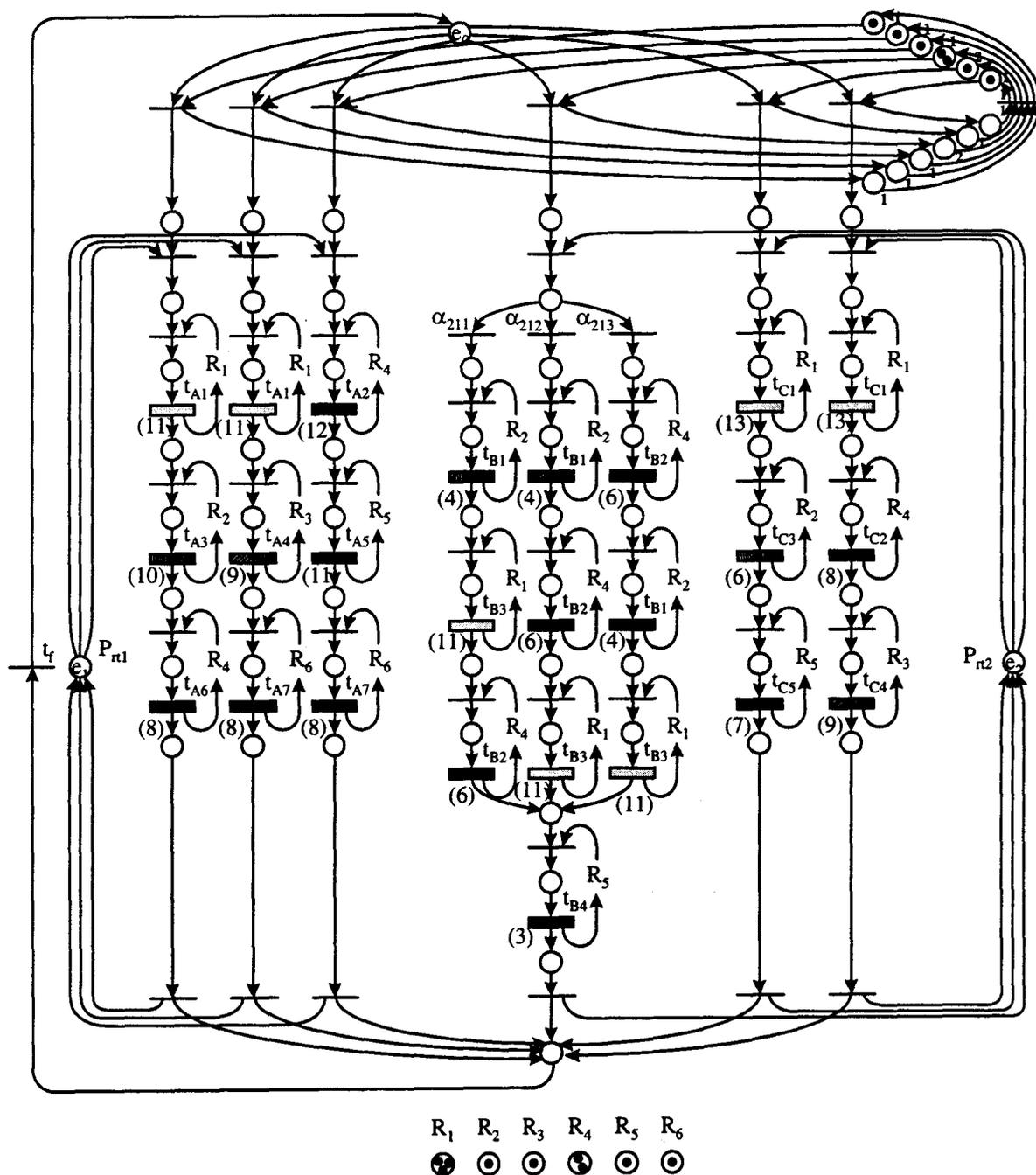


Figure III-8 : Modèle partiellement déplié du système de production après extraction de l'un des 16 chemins issus de l'ensemble des ratios de routage admissibles α_4

III.1.3 Phase 3 : Prise en compte des flexibilités de permutation ou la fin de la linéarisation des gammes opératoires

Complexité de l'analyse du régime permanent RP_p caractérisé par : - $E(RP_p) = \{3A, 2B, 2C\}$ - $CT(RP_p) = 24$ u. t.		Différentes phases de l'élaboration de la commande d'un régime permanent	
Taille de l'espace de recherche respectant $E(RP_p)$ jusqu'à la Phase	Nombre de solutions à la fin la Phase	Phase 1 : Détermination et choix des routages admissibles	⇒ Invariants de places : • des ressources de transformation • des ressources de transport (palettes) ⇒ <i>Modèle de la charge de travail d'un cycle de production</i>
360 routages	6 routages admissibles		
504 ensembles de chemins extraits	16 ensembles de chemins extraits admissibles	Phase 2 : Extraction de chemins	⇒ Dépliage des flexibilités complexes ⇒ <i>Modèle partiellement déplié</i>
3.528 ensembles de gammes linéaires	114 ensembles de gammes linéaires admissibles	Phase 3 : Linéarisation des gammes opératoires	⇒ Gammes opératoires linéaires ⇒ <i>Modèle linéarisé</i>

Ne subsistent plus que les flexibilités de permutation, au niveau gamme opératoire, pour fixer définitivement les séquences linéaires d'opérations sur les différentes gammes.

III.1.3.1 Nombre de solutions engendrées par la prise en compte du degré de liberté lié aux flexibilités de classe D_{3a} sur l'exemple illustratif

Seules les gammes produisant les pièces de type B possèdent une telle flexibilité. En raison des contraintes de précédence liant t_{B1} à t_{B3} et $\{t_{B2}, t_{B3}\}$ à $\{t_{B4}, t_{B5}\}$, trois routages seulement sont disponibles (B_{11} , B_{12} et B_{13}) pour chaque gamme opératoire. Comme le cycle de production comporte deux gammes opératoires produisant des pièces de type B, il existe a priori $3^2 = 9$ regroupements possibles pour chaque cas. Ceci est vrai si les deux gammes sont distinctes. Ce qui n'est pas toujours le cas.

Pour l'exemple développé jusqu'ici, deux cas sont à distinguer :

- les ensembles de chemins extraits issus des ensembles de routages :

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1) \text{ et } \alpha_2 = (1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1),$$

pour lesquels les deux gammes opératoires à considérer sont effectivement distinctes, puisque l'une comprend l'opération t_{B4} et l'autre t_{B5} . Il existe donc, dans ce cas, 9 solutions différentes d'utiliser la flexibilité de permutation.

- ceux issus des ensembles de routages :

$$\alpha_3 = (1, 1, 1, 2, 1, 0, 2, 1, 1), \alpha_4 = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 0, 1, 1),$$

$$\alpha_5 = (1, 1, 1, 2, 1, 2, 0, 1, 1) \text{ et } \alpha_6 = (1, 1, 1, 0, 3, 2, 0, 1, 1),$$

pour lesquels 6 solutions seulement sont à considérer. En effet l'utilisation de la même opération (t_{B4} pour α_4, α_5 et α_6 ou t_{B5} pour α_3) sur les deux gammes opératoires produisant du B supprime la distinction de ces deux gammes, ce qui retire trois solutions pour chaque cas, correspondant à :

- ◆ $B_{11} = B_{12} = 1, B_{13} = 0,$
- ◆ $B_{11} = B_{13} = 1, B_{12} = 0,$
- ◆ $B_{12} = B_{13} = 1, B_{11} = 0.$

Associées au deuxième conflit, elles constituent une flexibilité enchaînée. Dans le cas où les deux branches retenues du deuxième conflit sont différentes ($B_{21} = B_{22} = 1$), deux solutions peuvent être dégagées pour chaque cas : par exemple la branche B_{11} associée à B_{21} et B_{12} associée à B_{22} ou B_{11} associée à B_{22} et B_{12} associée à B_{21} , contre une seule quand les deux branches du deuxième conflit sont identiques : la branche B_{11} associée à B_{21} et B_{12} associée à B_{21} , par exemple.

A la fin cette partie, toutes les gammes opératoires sont linéaires. Un premier modèle linéarisé peut en être déduit comme nous pouvons le voir à la Figure III-9. Pour l'exemple, nous avons dégagé pour le moment $9*6 + 6*10 = 114$ solutions admissibles. Il est encore possible, dans ce cas, de comparer cette valeur à la cardinalité exacte de l'ensemble des solutions, au vu de la faible complexité du dénombrement des possibilités issues des gammes opératoires produisant des pièces de type B.

III.1.3.2 Cardinalité de l'espace de recherche des étapes 1, 2, 3 réunies

D'après l'étape précédente, l'espace de recherche avait une taille égale à :

$$\underbrace{C_{A+K_{11}.K_{12}-1}^{K_{11}.K_{12}-1}}_{\text{Complexité des gammes fabricant des pièces de type A}} \cdot \underbrace{C_{B+K_{22}-1}^{K_{22}-1}}_{\text{Complexité des gammes fabricant des pièces de type B}} \cdot \underbrace{C_{C+K_{31}-1}^{K_{31}-1}}_{\text{Complexité des gammes fabricant des pièces de type C}} = 56*3*3 = 504.$$

Il faut distinguer les cas où la résolution du deuxième conflit, venant des gammes opératoires de type B, amène à considérer deux branches identiques. Parmi les trois solutions possibles, il y a deux cas où les branches retenues sont similaires. Les quatrième opérations de chacune de ces deux gammes sont alors identiques (soit l'opération t_{B4} , soit t_{B5}). Ce qui conduit, comme nous l'avons vu précédemment, à la création de 6 nouvelles solutions pour chaque cas. Par contre, pour le troisième cas, 9 nouvelles solutions peuvent en être dégagées. Comme les autres types de produit ne comportent pas de flexibilités de permutation, le nouvel espace de recherche à considérer ici à cette étape et pour l'exemple illustratif a une taille de :

$$\underbrace{C_{A+K_{11}, K_{12}-1}^{K_{11}, K_{12}-1}}_{\text{Complexité des gammes fabricant des pièces de type A}} \cdot \underbrace{(2*6 + 1*9)}_{\substack{\text{Complexité des gammes} \\ \text{produisant des pièces de} \\ \text{type B avec prise en compte} \\ \text{de flexibilité de permutation}}} \cdot \underbrace{C_{C+K_{31}-1}^{K_{31}-1}}_{\text{Complexité des gammes fabricant des pièces de type C}} = 56*21*3 = 3.528.$$

$$= C_{B+K_{21}, K_{22}-1}^{K_{21}, K_{22}-1} = C_{B+b_2-1}^{b_2-1}$$

(correspond au dépliage complet des gammes produisant du B)

Ce qui correspond au nombre de solutions à étudier jusqu'à cette étape si le parcours exhaustif de l'espace de recherche était envisagé.

III.1.3.3 Généralisation de la méthode d'obtention des nouvelles solutions

Dans cette étape, de manière tout à fait similaire à la précédente, il existe ici aussi deux méthodes pour obtenir les solutions après considération du degré de liberté : flexibilité de permutation des gammes opératoires.

Si les deux étapes antérieures n'ont pas encore été développées, il suffit de résoudre le système d'équations et d'inéquations linéaires en nombres entiers obtenus à la phase 1 (Equation III-1) à partir ni du modèle plié, cf. Figure III-2, ni du modèle déplié partiellement, en ne tenant compte que des flexibilités de type affectation et procédé, cf. Figure III-7, mais à partir du modèle déplié généralisé, cf. Figure III-16, qui prend en compte tous les types de flexibilités des gammes opératoires. Le modèle ainsi obtenu ne contient plus que des gammes linéaires correspondant aux T-semiflots du Réseau de Petri. C'est à partir de ce modèle que le calcul de l'espace de recherche est effectué.

La deuxième approche consiste à utiliser les solutions trouvées après extraction de chemins, pour créer les nouvelles solutions, qui prennent en compte les flexibilités de permutation. Le problème général est identique à celui du paragraphe précédent. La seule différence réside dans les contraintes associées aux ratios de routage des flexibilités de permutation. Comme leurs valeurs n'ont pas été fixées par le calcul des charges des ressources, elles restent seulement bornées par le nombre de pièces du type auquel elles appartiennent, ou mieux, par la valeur du ratio de routage correspondant à la branche à laquelle elles appartiennent dans le cas de flexibilités imbriquées. Pour l'exemple illustratif, au niveau des gammes opératoires de B, nous avons deux flexibilités enchaînées avec trois branches pour le premier conflit, lié à la flexibilité de permutation, et deux pour le deuxième, lié à la flexibilité d'affectation. Il existe donc 6 ($=b_2$) gammes linéaires différentes. Nous utiliserons donc 6 variables, notées $g(X_2^{k,k'})$, pour caractériser la gamme linéaire passant par la k -ème branche du premier conflit et la k' -ème branche du deuxième, caractérisant le nombre de fois que la gamme linéaire correspondante $X_2^{k,k'}$ est utilisée lors du cycle de production.

Le respect des ratios de production nous amène la première équation :

(Equation III-3)

$$g(X_2^{1,1}) + g(X_2^{1,2}) + g(X_2^{2,1}) + g(X_2^{2,2}) + g(X_2^{3,1}) + g(X_2^{3,2}) = B = 2.$$

Ensuite le respect des ratios de routage, liés aux flexibilités de type D_{3b} et D_{3c} (ici B_{21} et B_{22}), fixés par le choix de l'ensemble de routages admissibles, nous fournit deux autres équations :

$$\begin{cases} g(X_2^{1,1}) + g(X_2^{2,1}) + g(X_2^{3,1}) = B_{21} \\ g(X_2^{1,2}) + g(X_2^{2,2}) + g(X_2^{3,2}) = B_{22} \end{cases}$$

Nous remarquons que les trois équations ainsi obtenues ne sont pas indépendantes puisque nous avons $B_{21} + B_{22} = B = 2$.

Enfin, pour les branches du premier conflit, donc de la flexibilité de permutation, seul le respect du nombre de pièces de type B permet d'obtenir non pas les trois dernières équations comme au paragraphe précédent, mais trois inéquations, dû à l'indéterminisme au niveau des ratios de routage correspondant :

$$\begin{cases} g(X_2^{1,1}) + g(X_2^{1,2}) \leq B = 2 \\ g(X_2^{2,1}) + g(X_2^{2,2}) \leq B = 2 \\ g(X_2^{3,1}) + g(X_2^{3,2}) \leq B = 2 \end{cases}$$

Elles n'ont pas un grand intérêt ici puisqu'elles n'apportent pas de nouvelles contraintes.

Ce système d'équations et d'inéquations est à résoudre pour chaque ensemble de routages admissibles. Ces solutions, combinées avec celles trouvées à la deuxième étape lors de l'extraction de chemins, permettent d'obtenir toutes les possibilités à explorer à la fin de cette troisième étape.

Nous remarquons que pour $B_{21} = 0$ ($B_{22} = 2$) (ou $B_{21} = 2$ ($B_{22} = 0$)), c'est à dire pour les cas où les quatrièmes opérations des deux futures gammes linéaires produisant des pièces de type B sont identiques, le système se réduit à la résolution de l'équation : $g(X_2^{1,2}) + g(X_2^{2,2}) + g(X_2^{3,2}) = B_{22} = B = 2$, type de problème résolu à la phase 1. Nous savons qu'il existe alors $C_{2+3-1}^{3-1} = C_4^2 = 6$ solutions différentes.

Pour le cas $B_{21} = B_{22} = 1$, nous avons alors à résoudre deux équations indépendantes du point de vue variables, mais similaires du type : $g(X_2^{1,2}) + g(X_2^{2,2}) + g(X_2^{3,2}) = B_{22} = 1$. Les résultats obtenus à la phase 1 permettent d'obtenir le nombre total de solutions : $C_{1+3-1}^{3-1} * C_{1+3-1}^{3-1} = C_3^1 * C_3^1 = 3*3 = 9$. Nous retrouvons bien les résultats escomptés.

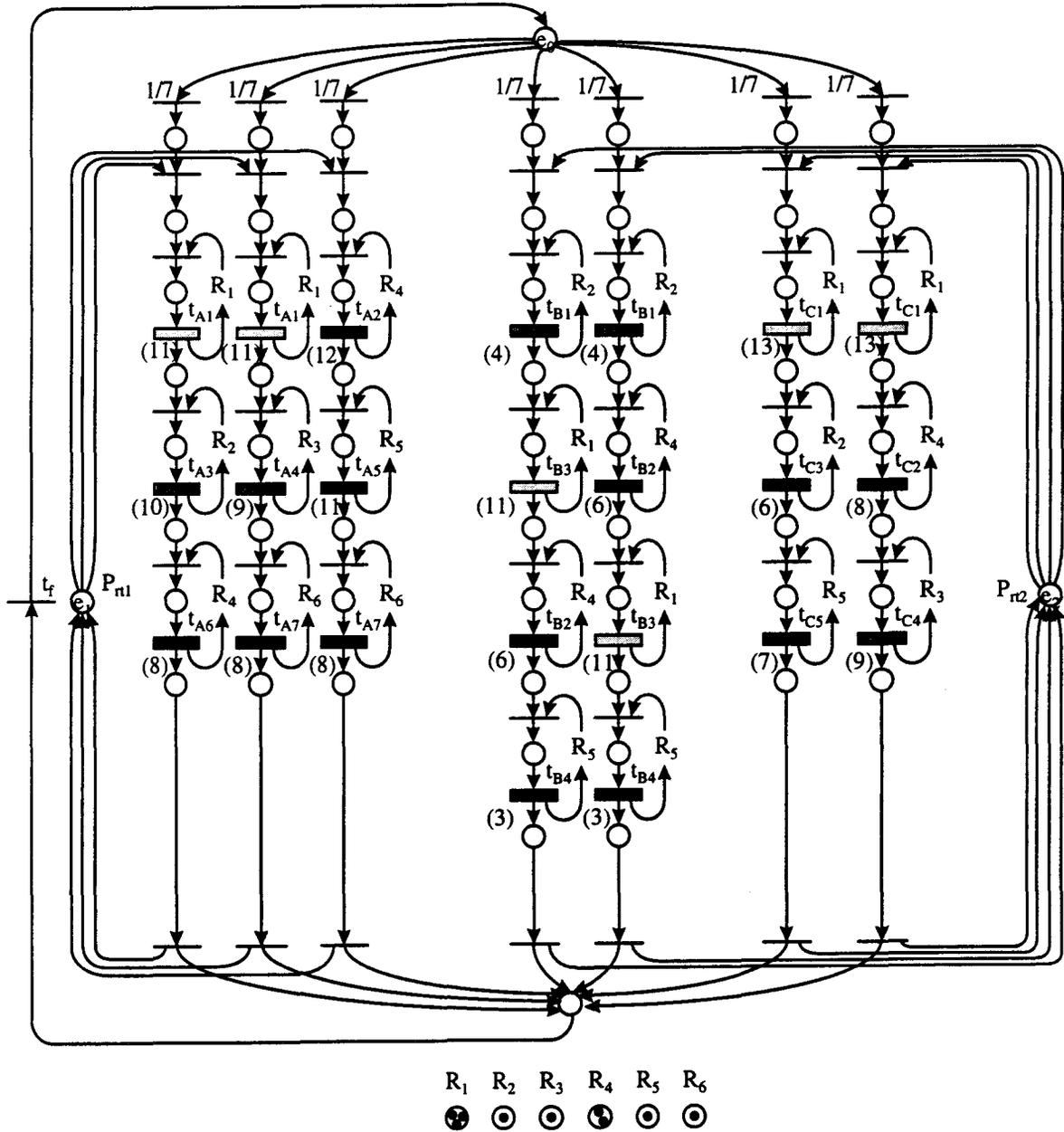


Figure III-9 : Modèle totalement linéarisé du système de production : toutes les flexibilités de la classe D_3 ont été résolues

III.1.4 Phase 4 : Détermination des charges des machines

Complexité de l'analyse du régime permanent RP_p caractérisé par : - $E(RP_p) = \{3A, 2B, 2C\}$ - $CT(RP_p) = 24$ u. t.		Différentes phases de l'élaboration de la commande d'un régime permanent	
Taille de l'espace de recherche respectant $E(RP_p)$ jusqu'à la Phase	Nombre de solutions à la fin la Phase	Phase 1 : Détermination et choix des routages admissibles	⇒ Invariants de places : • des ressources de transformation • des ressources de transport (palettes) ⇒ <i>Modèle de la charge de travail d'un cycle de production</i>
360 routages	6 routages admissibles	Phase 2 : Extraction de chemins	⇒ Dépliage des flexibilités complexes ⇒ <i>Modèle partiellement déplié</i>
504 ensembles de chemins extraits	16 ensembles de chemins extraits admissibles	Phase 3 : Linéarisation des gammes opératoires	⇒ Gammes opératoires linéaires ⇒ <i>Modèle linéarisé</i>
3.528 ensembles de gammes linéaires	114 ensembles de gammes linéaires admissibles	Phase 4 : Détermination des charges des machines	⇒ Invariants de places des machines de transformation ⇒ <i>Modèle des charges de travail des machines</i>
$\approx 6,59.10^8$ (*) répartitions de charge sur machines	3.342 répartitions de charge admissibles sur les machines		

(*) cette valeur est une borne supérieure

III.1.4.1 Différenciation des opérations de transformation

Les gammes opératoires étant devenues entièrement linéaires, il est possible de déterminer celles qui sont identiques. Ainsi les différentes opérations sont identifiables : les opérations identiques de type t_{A7} par exemple appartiennent à des gammes différentes. Elles doivent donc être séparées puisqu'elles ne se trouvent pas dans le même contexte de production (séquences opératoires différentes). Au vu de ces informations, il est enfin possible de rechercher les partitions des charges de travail des ressources multiples sur les machines identiques qui les composent. En effet, jusque là, les solutions trouvées supposaient implicitement l'existence d'une distribution discrète de la charge de travail, mais leur dénombrement n'était pas envisagé en raison du manque d'information disponible, notamment sur la différenciation des opérations.

III.1.4.2 Similitudes entre ce problème de répartition des charges sur les machines identiques et le Problème Mathématique de k -Partitions d'un ensemble (PMKP)

Ce problème de répartition discrète d'opérations sur des machines identiques est à rapprocher de celui du calcul du nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k classes non vides, avec k fixé. Certes les deux problèmes diffèrent quelque peu :

- le problème mathématique (PMKP) ne possède pas de contraintes sur le respect du temps de cycle imposé, donc certains regroupements possibles n'auront aucune raison d'être pour le cas qui nous préoccupe ici ;

- dans le domaine de dénombrement, et des problèmes combinatoires, il n'existe pas de généralisation de ce problème au cas où certains éléments de l'ensemble sont identiques, comme nous avons à le considérer ici ; ce qui a pour effet de diminuer la combinatoire en raison des permutations possibles entre ces mêmes éléments.

Mais ils ont suffisamment de points communs pour en tenir compte :

- toutes les classes sont non vides, ce qui est indispensable du point de vue productique, si nous cherchons une répartition relativement équilibrée, ou tout au moins suffisamment bonne, entre les machines pour respecter le temps de cycle, dans le cas où la ressource est critique, ou encore si la répartition discrète non équitable des opérations entraîne la criticité de certaines des machines identiques (sinon une autre solution est aussi envisageable) ;
- dans un premier temps, les sous-ensembles obtenus par la répartition ne sont pas ordonnés, ce qui correspond parfaitement au problème mathématique rappelé précédemment ; il est toutefois possible de prendre en compte cet ordre dans les deux cas, comme nous le verrons par la suite ;
- il existe des cas (extrêmes) pour lesquels les opérations à considérer pour un type de ressource sont toutes distinctes.

Dans tous les cas, le résultat, trouvé dans le contexte du problème mathématique (PMKP), représente une borne supérieure du nombre de distributions différentes de charges possibles entre les machines. Il sert d'ordre de grandeur, mais il peut exister de grandes différences avec les résultats exacts, étant donné que les contraintes que nous considérons sont beaucoup plus strictes (respect du temps de cycle).

Ce problème mathématique a été résolu et le résultat est le nombre de Stirling de seconde espèce, noté $S(n,k)$. Il représente le nombre de partitions d'un ensemble de n éléments en k classes distinctes. Par exemple, les partitions de l'ensemble $S = \{a,b,c\}$ en deux classes non vides sont :

$$\{\{a,b\},c\}, \{\{a,c\},b\} \text{ et } \{\{b,c\},a\}, \text{ d'où } S(3,2) = 3.$$

Plusieurs notations et propriétés ont été établies :

- pour $n \geq 1$, $S(n,0) = 0$, $S(n,1) = 1$, $S(n,n) = 1$ et $S(n,k) = 0$ si $n < k$;
- par convention, pour $n = 0$, $S(0,k) = 0$ pour $k > 0$ et $S(0,0) = 1$.

Il existe plusieurs façons de déterminer les valeurs des $S(n,k)$, cf. Annexe IV, mais la solution la plus intéressante demeure la détermination par récurrence :

Proposition (III-2) : $S(n,k) = S(n-1,k-1) + k.S(n-1,k)$, pour n et k supérieurs ou égaux à 1.

Dans le cas de l'horizon minimal E_1 de l'exemple illustratif, les nombres de Stirling les plus importants à considérer sont $S(10,2)$ et $S(7,3)$, et pour l'horizon double $S(20,2)$ et

$S(14,3)$. Il est donc nécessaire de calculer tous les prédécesseurs de $S(20,2)$. Nous regroupons les valeurs des $S(n,k)$ pour $n \leq 20$ dans un tableau, cf. Annexe IV, ce qui permet de faciliter les calculs à l'aide de la formule de récurrence.

Il reste encore le cas où les k -partitions de l'ensemble ne sont pas forcément non vides. Pour garder un ordre de grandeur avec une borne supérieure facilement calculable, il suffit de considérer toutes les k -partitions pour j compris entre 1 et k : $\sum_{j=1}^k S(n, j)$.

III.1.4.3 Application à l'exemple illustratif sur les deux ressources multiples : R_1 et R_4

Nous utilisons tout d'abord les résultats du problème mathématique, afin d'établir une borne supérieure de la taille de l'espace de recherche qui correspond au problème à étudier, si l'approche est développée à partir de ce point, sans avoir, au préalable, appliqué les phases 1, 2 et 3. Pour cela, le cas le plus défavorable est envisagé en considérant le nombre maximum d'opérations, qui peuvent être affectées à la ressource multiple, tout en respectant l'horizon de production et le temps de cycle et en supposant que les opérations ainsi trouvées sont toutes distinctes (cas mathématique PMKP).

Ainsi pour l'exemple illustratif, il est possible d'avoir jusqu'à 7 opérations sur la ressource R_1 à répartir sur ses 3 machines identiques et 10 opérations sur R_4 avec 2 machines identiques. Ces résultats ont été obtenus en comparant les opérations affectées aux ressources avec les différents ensembles de routages respectant l'horizon de production. Nous avons donc besoin des valeurs de $\sum_{j=1}^3 S(7, j) = 1 + 63 + 301 = 365$ pour R_1

et de $\sum_{j=1}^2 S(10, j) = 1 + 511 = 512$ pour R_4 , parce que nous devons tenir compte dans

l'espace de recherche de toutes les répartitions possibles entre machines, y compris celles aboutissant à des charges nulles pour certaines machines. La borne est alors obtenue par le produit de l'espace de recherche de la phase 3 avec ces deux valeurs : soit $3528 \cdot 365 \cdot 512 = 659.312.640$. Cette borne est un peu grossière : elle ne correspond pas à un cas susceptible d'être atteint (il est impossible d'avoir simultanément 7 opérations sur R_1 et 10 sur R_4 et de plus toutes distinctes). Elle permet cependant d'évaluer assez rapidement l'ordre de grandeur de la complexité du problème.

III.1.4.4 Recherche de l'ensemble des solutions issues de la phase 3 et prenant en compte les différentes répartitions de charges possibles pour l'exemple illustratif

Nous allons calculer maintenant le nombre exact de distributions différentes de charge de travail sur les machines des ressources multiples afin de pouvoir apprécier la qualité de la borne que nous proposons. Pour l'exemple illustratif, cette partie ne concerne que les ressources R_1 et R_4 .

En premier lieu nous étudions le cas des ensembles de gammes opératoires issues de l'ensemble de routages admissibles $\alpha_1 = (1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1)$. Quels que soient le chemin extrait et la permutation choisie, toutes les gammes utilisées durant le cycle sont distinctes. Toutes les opérations qui sont considérées ici sont toutes distinctes, même si, de manière individuelle, elles sont équivalentes. Elles appartiennent à des gammes opératoires



toutes différentes. Le contexte opératoire n'est pas le même. Il faut donc distinguer ces opérations.

- Considérons la ressources multiple R_1 . Les opérations à réaliser sur R_1 sont :
 - ◆ t_{A1} de durée 11 associé à la gamme opératoire issue du routage A_{11} ,
 - ◆ t_{A1} de durée 11 associé à la gamme opératoire issue du routage A_{12} ,
 - ◆ t_{B3} de durée 11 associé à la gamme opératoire issue du routage B_{21} ,
 - ◆ t_{B3} de durée 11 associé à la gamme opératoire issue du routage B_{22} ,
 - ◆ t_{C1} de durée 13 associé à la gamme opératoire issue du routage C_{11} ,
 - ◆ t_{C1} de durée 13 associé à la gamme opératoire issue du routage C_{12} .

La contrainte inhérente au respect du temps de cycle $CT(RP_p) = 24$ u.t. nous oblige à ne considérer qu'un seul type de configurations pour les machines identiques de la ressource R_1 :

Charge de travail 1	Charge de travail 2	Charge de travail 3
t_7 (durée 13) + t_7 (durée 11)	t_7 (durée 13) + t_7 (durée 11)	t_7 (durée 11) + t_7 (durée 11)

Tableau III-4 : Type de répartition de charge de la ressource R_1 issue du routage α_1 sur les différentes machines identiques compatible avec le respect du temps de cycle

Il faut distinguer deux cas :

- ◆ Les machines identiques sont parfaitement équivalentes.
- ◆ Elles se différencient par leur disposition géographique au sein de l'atelier flexible. Ainsi, quand les opérations de transport seront prises en compte, il ne sera plus nécessaire de chercher toutes les possibilités.

Ce sont évidemment deux cas extrêmes. Il est tout à fait possible de trouver des cas intermédiaires avec des îlots constitués de machines identiques « disséminés » à travers l'atelier. Nous ne considérons que les deux cas précités.

Si les machines sont équivalentes, l'ordre de regroupement des opérations n'a aucune importance. Pour le problème qui nous intéresse, il s'agit de trouver deux opérations de durée 11 à associer aux opérations de durée 13. Puisque ces deux dernières opérations sont différenciées, il existe donc $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$ solutions. Comparons cette valeur à celle calculée par la borne supérieure : il existe 6 opérations à regrouper sur 3 machines différentes, la borne vaut donc : $S(6,3) = 90$. Nous ne considérerons pas les partitions d'ordre inférieur, car cette ressource est suffisamment critique pour empêcher l'existence d'une machine non chargée. La différence entre la valeur exacte et la borne est due à la contrainte forte du temps de cycle qui impose une seule configuration des charges des machines.

Par contre, si les machines ne se situent pas au même endroit dans l'atelier, l'ordre des regroupements doit être pris en compte. Il existe donc plus de

répartitions. Puisque toutes les opérations liées à R_1 sont distinctes, à partir d'une configuration obtenue dans le cas précédent, il est possible de dégager 6 nouvelles répartitions vu que les machines $M_{1,1}$, $M_{1,2}$ et $M_{1,3}$ sont « différentes ». Soit au total $6 * 12 = 72$ configurations possibles. La même démarche est utilisée pour la borne et la valeur obtenue vaut donc $90 * 6 = 540$.

- Pour la ressource R_4 , la procédure est identique. Nous cherchons toutes les opérations liées à cette ressource :
 - ◆ t_{A2} de durée 12 associée à la gamme opératoire issue du routage A_{13} ,
 - ◆ t_{A6} de durée 8 associée à la gamme opératoire issue du routage A_{21} ,
 - ◆ t_{B2} de durée 6 associée à la gamme opératoire issue du routage B_{21} ,
 - ◆ t_{B2} de durée 6 associée à la gamme opératoire issue du routage B_{22} ,
 - ◆ t_{C2} de durée 8 associée à la gamme opératoire issue du routage C_{11} .

Les opérations sont encore toutes distinctes. Le respect du temps de cycle nous amène à ne considérer que certains types de configuration :

Charge de travail 1	Charge de travail 2
t_7 (durée 12) + t_7 (durée 6)	t_7 (durée 8) + t_7 (durée 8) + t_7 (durée 6)
t_7 (durée 12) + t_7 (durée 8)	t_7 (durée 8) + t_7 (durée 6) + t_7 (durée 6)
t_7 (durée 12) + t_7 (durée 6) + t_7 (durée 6)	t_7 (durée 8) + t_7 (durée 8)

Tableau III-5 : Types de répartition de charge de la ressource R_4 issue du routage α_1 sur les différentes machines identiques compatible avec le respect du temps de cycle

Dans le cas de machines équivalentes, nous obtenons ainsi 5 répartitions différentes de la charge de travail et 10 quand les machines sont distinctes. Il faut comparer ces valeurs à celles obtenues si aucune contrainte de respect de temps de cycle n'existait. Dans le cas des machines identiques, la borne supérieure vaut $S(5,3) = 15$ contre 30 si les machines ne se trouvent pas sur le même lieu géographique de l'atelier.

Soit un total de 60 configurations possibles (ou 720 si les machines identiques sont distinctes) sont obtenues à partir d'un ensemble de gammes linéaires issu du routage α_1 . Pour obtenir cette valeur, il suffit de multiplier le nombre de configurations obtenues avec la ressource R_1 par celui obtenu avec R_4 . En effet ces deux recherches sont indépendantes, donc le nombre total de combinaisons est donné par le produit des deux valeurs calculées.

Pour les autres résultats, nous renvoyons au Tableau III-6. Nous y avons fait apparaître les deux cas extrêmes : machines identiques équivalentes et non équivalentes. Pour conserver une relative simplicité au problème de cette étape, nous avons gardé l'hypothèse machines identiques équivalentes. Nous avons ainsi explicité, pour ce cas, le nombre total de solutions obtenues suivant les ensembles de routages admissibles, dont elles sont issues, et selon l'équivalence des deux gammes opératoires linéaires fabricant des pièces de type B.

	Horizon de production avec les Gammes linéaires de type B distinctes				Horizon de production avec les Gammes linéaires de type B identiques										
	Machines identiques équivalentes		Machines identiques non équivalentes		Machines identiques équivalentes		Machines identiques non équivalentes								
	Nombre initial (étapes 1,2,3)	R ₁	R ₄	Total	Nombre initial (étapes 1,2,3)	R ₁	R ₄	Total	Nombre initial (étapes 1,2,3)	R ₁	R ₄	Total			
α_1	27	*12	*5	1.620	27	*72	*10		0			0	0		
α_2	27	*12	*1	324	27	*72	*2		0			0	0		
α_3	9	*12	*1	108	9	*72	*2		9	*7	*1	63	9	*42	*2
α_4	9	*12	*5	540	9	*72	*10		9	*7	*4	252	9	*42	*8
α_5	9	*12	*1	108	9	*72	*2		9	*7	*1	63	9	*42	*2
α_6	3	*12	*5	180	3	*72	*10		3	*7	*4	84	3	*42	*8
Total				2.880								462			3.342

Tableau III-6 : Regroupement et dénombrement des différentes répartitions de charge sur les machines identiques selon leur routage associé, l'existence ou non de gammes opératoires identiques et l'équivalence ou non de ces machines

Le cas que nous avons détaillé est le plus combinatoire, puisque non seulement il conjugue le plus grand nombre de types de configuration possibles (pour la ressource R₄), mais aussi toutes les opérations à réaliser sur les ressources multiples jouent des rôles différents (temps opératoire différent, ou appartenance à des gammes distinctes). En tout cas, quel que soit l'ensemble de routages admissibles retenu, les valeurs fixes des routages A₁₁, A₁₂, A₁₃, C₁₁ et C₁₂ entraînent d'office une différenciation des gammes opératoires de type A et C. Les seules gammes susceptibles d'être identiques proviennent de la fabrication des pièces de type B. C'est la raison pour laquelle sur le Tableau III-6, les solutions ont été distinguées selon que les deux gammes de type B sont identiques ou non. Nous remarquons aussi que c'est en présence d'opérations identiques que le nombre de répartitions différentes est le plus faible (la borne associée reste cependant inchangée : même cardinalité de l'ensemble et même nombre de partitions ; la borne ne tient pas compte des éléments identiques). Par exemple, à partir d'un ensemble de gammes issues du routage α_1 , le nombre de répartitions de charges obtenues est égal à $5 \times 12 = 60$ (hypothèse : machines identiques équivalentes) contre seulement $7 \times 1 = 7$ à partir de ceux issus de α_5 (même hypothèse et prise en compte du cas gammes de type B identiques).

III.1.4.5 Formalisation du problème de répartition de charges sur les machines

Nous devons déterminer, *dans un premier temps*, l'ensemble des charges admissibles de travail sur les machines identiques pour un ensemble de routages donné (α_1 par exemple). Pour cela, nous distinguons, de la charge de travail fourni par l'ensemble de routages fixé, les opérations n'ayant pas la même durée. Nous définissons alors une variable, par valeur différente de durée opératoire et par ressource affectée, comme le nombre d'opérations de durées égales à réaliser sur le type de ressource correspondant. Ainsi pour la ressource R_1 , nous définissons O_{11-4} comme le nombre d'opérations sur la ressource R_1 de durée 11 u.t. Par exemple, nous avons pour R_1 , $O_{11-1} = 4$ et $O_{13-1} = 2$ avec α_1 . Toutes ces variables sont fixées par le choix de l'ensemble de routages admissibles.

Les différentes charges admissibles recherchées des machines identiques sont alors solutions d'un système d'équations et d'inéquations en nombres entiers reprenant les contraintes liées à cette répartition discrète de la charge de travail de chaque ressource multiple sur ses machines identiques. Nous décrivons ce système sur l'exemple illustratif avec la ressource multiple R_1 et l'ensemble de routages admissibles α_1 . La généralisation de ce problème devient alors immédiate.

Pour cela, nous définissons au préalable pour chaque machine identique qui compose la ressource multiple et pour chaque type d'opérations différant par leur durée opératoire, la variable $O_{t-r,m}$ caractérisant le nombre d'opérations de durée t à réaliser sur la m -ème machine de la ressource multiple R_r . Ainsi pour notre exemple, comme il existe trois machines identiques pour la ressource R_1 et deux types différents d'opérations (de durée 11 et 13 u.t.), nous définissons 6 nouvelles variables : $O_{11-1,1}$, $O_{11-1,2}$, $O_{11-1,3}$, $O_{13-1,1}$, $O_{13-1,2}$ et $O_{13-1,3}$.

Les premières inéquations obtenues sont issues du respect, après répartition de la charge de travail de la ressource multiple R_1 sur ses machines identiques, du temps de cycle de production du système $CT(RP_p)$ pour toutes les charges des machines :

(Equation III-4)

$$\begin{cases} Z_{1,1} = 11*O_{11-1,1} + 13*O_{13-1,1} \leq CT(RP_p) = 24 \\ Z_{1,2} = 11*O_{11-1,2} + 13*O_{13-1,2} \leq CT(RP_p) = 24 \\ Z_{1,3} = 11*O_{11-1,3} + 13*O_{13-1,3} \leq CT(RP_p) = 24 \end{cases}$$

Les équations de ce système proviennent du partage discret et total de la charge de travail de la ressource multiple R_1 sur ses machines identiques, pour chaque type d'opérations :

$$\begin{cases} O_{11-1,1} + O_{11-1,2} + O_{11-1,3} = O_{11-1} = 4 \\ O_{13-1,1} + O_{13-1,2} + O_{13-1,3} = O_{13-1} = 2 \end{cases}$$

Avec cette mise en équation, il est possible de distinguer les machines identiques. Par contre, dans le cas de machines équivalentes, il ne faudra retenir que les ensembles distincts de charges sur les trois machines identiques pour éviter toute répétition. Avec la résolution du système, une seule répartition de charges respectant le temps de cycle est trouvée pour la ressource R_1 . Un système semblable doit être a priori appliqué à la ressource multiple R_4 ainsi que pour tous les ensembles de routages admissibles.

Après la détermination de l'ensemble des charges admissibles des machines identiques des différentes ressources multiples, nous avons maintenant à déterminer précisément, pour chaque ensemble de charges admissibles trouvé, le nombre de façons d'associer les opérations à réaliser au cours d'un cycle pour atteindre ces niveaux de charge. C'est le but de *cette deuxième partie*. Il faut tout d'abord différencier les opérations entre elles. Nous avons regroupé dans un premier temps les opérations ayant la même durée opératoire, pour éviter d'obtenir de trop nombreuses solutions semblables. Il s'agit maintenant de toutes les expliciter. Sont considérées comme différentes toutes opérations associées à des durées différentes ou de même durée, mais appartenant à un contexte de production différent (appartenance à des gammes linéaires de production différentes). Pour chaque nouveau type d'opérations, nous définissons de nouvelles variables caractérisant toujours le nombre d'opérations de ce type à réaliser sur la ressource correspondante ainsi que celles liées aux machines identiques qui composent la ressource multiple.

Pour l'exemple considéré, nous avons donc, pour un ensemble de routages donné (ici α_1) et un ensemble de gammes opératoires linéaires s'y rapportant (ici avec le choix de α_1 , nous sommes sûrs que toutes les opérations liées à la ressource R_1 sont toutes distinctes), six types différents d'opérations. Soient

- $O_{11-1}(A_{11})$ (= 1 pour l'exemple), le nombre d'opérations de durée 11 à réaliser sur R_1 issu de la branche associée au routage discret A_{11} ,
- $O_{11-1}(A_{12})$ (= 1 pour l'exemple), le nombre d'opérations de durée 11 à réaliser sur R_1 issu de la branche associée au routage discret A_{12} ,
- $O_{11-1}(B_{21})$ (= 1 pour l'exemple), le nombre d'opérations de durée 11 à réaliser sur R_1 issu de la branche associée au routage discret B_{21} ,
- $O_{11-1}(B_{22})$ (= 1 pour l'exemple), le nombre d'opérations de durée 11 à réaliser sur R_1 issu de la branche associée au routage discret B_{22} ,
- $O_{13-1}(C_{11})$ (= 1 pour l'exemple), le nombre d'opérations de durée 13 à réaliser sur R_1 issu de la branche associée au routage discret C_{11} ,
- $O_{13-1}(C_{12})$ (= 1 pour l'exemple), le nombre d'opérations de durée 11 à réaliser sur R_1 issu de la branche associée au routage discret C_{12} .

Comme nous avons déjà déterminé l'ensemble des répartitions de charge admissibles (de type $\{Z_{1,1}^{a_k}, Z_{1,2}^{a_k}, Z_{1,2}^{a_k}\}$), nous pouvons remplacer les inéquations par des équations et le système à résoudre devient alors :

(Equation III-5)

- respect des répartitions discrètes des charges sur les machines identiques :

$$\begin{cases} 11*(O_{11-1.1}(A_{11}) + O_{11-1.1}(A_{12}) + O_{11-1.1}(B_{21}) + O_{11-1.1}(B_{22})) + 13*(O_{13-1.1}(C_{11}) + O_{13-1.1}(C_{12})) = Z_{1.1}^{a_k} \\ 11*(O_{11-1.2}(A_{11}) + O_{11-1.2}(A_{12}) + O_{11-1.2}(B_{21}) + O_{11-1.2}(B_{22})) + 13*(O_{13-1.2}(C_{11}) + O_{13-1.2}(C_{12})) = Z_{1.2}^{a_k} \\ 11*(O_{11-1.3}(A_{11}) + O_{11-1.3}(A_{12}) + O_{11-1.3}(B_{21}) + O_{11-1.3}(B_{22})) + 13*(O_{13-1.3}(C_{11}) + O_{13-1.3}(C_{12})) = Z_{1.3}^{a_k} \end{cases}$$

et

- répartition discrète et totale de la charge de travail de la ressource (donc des différentes opérations) sur les machines identiques :

$$\begin{cases} O_{11-1.1}(A_{11}) + O_{11-1.2}(A_{11}) + O_{11-1.3}(A_{11}) = O_{11-1}(A_{11}) = 1 \\ O_{11-1.1}(A_{12}) + O_{11-1.2}(A_{12}) + O_{11-1.3}(A_{12}) = O_{11-1}(A_{12}) = 1 \\ O_{11-1.1}(B_{21}) + O_{11-1.2}(B_{21}) + O_{11-1.3}(B_{21}) = O_{11-1}(B_{21}) = 1 \\ O_{11-1.1}(B_{22}) + O_{11-1.2}(B_{22}) + O_{11-1.3}(B_{22}) = O_{11-1}(B_{22}) = 1 \\ O_{13-1.1}(C_{11}) + O_{13-1.2}(C_{11}) + O_{13-1.3}(C_{11}) = O_{13-1}(C_{11}) = 1 \\ O_{13-1.1}(C_{12}) + O_{13-1.2}(C_{12}) + O_{13-1.3}(C_{12}) = O_{13-1}(C_{12}) = 1 \end{cases}$$

Ce système est à résoudre pour toutes les ressources multiples du système et pour tous les ensembles de gammes opératoires linéarisées obtenues après les phases 1, 2 et 3 afin de trouver toutes les solutions à la fin de la phase 4 de détermination des charges de travail sur les différentes machines de transformation.

A l'issue de cette étape, les charges des machines sont parfaitement définies. Ce qui peut se traduire en termes de Réseaux de Petri par la connaissance de tous les P-semiflotts liés aux machines de transformation. Nous pouvons représenter cette étape par un modèle linéarisé (bis) en remplaçant les ressources par les machines qui correspondent à la répartition déterminée des charges (cf. Figure II-9).

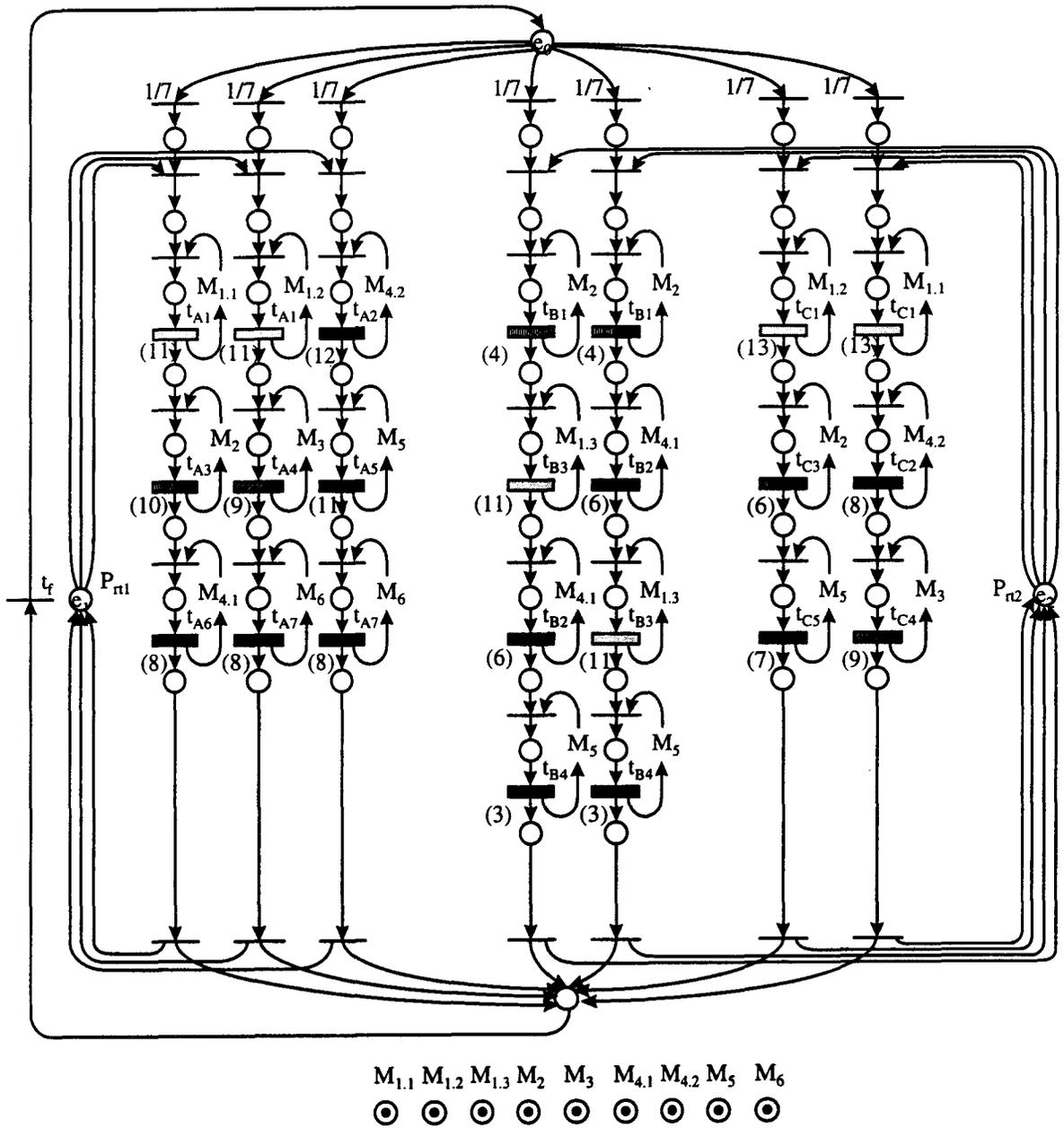


Figure III-10 : Modèle du système de production avec les charges de travail définies sur les différentes machines

III.1.5 Phase 5 : Partition de l'ensemble des gammes

Complexité de l'analyse du régime permanent RP_p caractérisé par : - $E(RP_p) = \{3A, 2B, 2C\}$ - $CT(RP_p) = 24$ u.t.		Différentes phases de l'élaboration de la commande d'un régime permanent	
Taille de l'espace de recherche respectant $E(RP_p)$ jusqu'à la Phase	Nombre de solutions à la fin la Phase	Phase 1 : Détermination et choix des routages admissibles	⇒ Invariants de places : • des ressources de transformation • des ressources de transport (palettes) ⇒ <i>Modèle de la charge de travail d'un cycle de production</i>
360 routages	6 routages admissibles		
504 ensembles de chemins extraits	16 ensembles de chemins extraits admissibles	Phase 2 : Extraction de chemins	⇒ Dépliage des flexibilités complexes ⇒ <i>Modèle partiellement déplié</i>
3.528 ensembles de gammes linéaires	114 ensembles de gammes linéaires admissibles	Phase 3 : Linéarisation des gammes opératoires	⇒ Gammes opératoires linéaires ⇒ <i>Modèle linéarisé</i>
$\approx 6,59 \cdot 10^8$ (*) répartitions de charge sur machines	3.342 répartitions de charge admissibles sur les machines	Phase 4 : Détermination des charges des machines	⇒ Invariants de places des machines de transformation ⇒ <i>Modèle des charges de travail des machines</i>
$\approx 4,94 \cdot 10^{10}$ (*) partitions de l'ensemble des gammes opératoires	241.410 partitions admissibles de l'ensemble des gammes linéaires	Phase 5 : Partition de l'ensemble des gammes opératoires	⇒ Invariants de places des regroupements de gammes opératoires ⇒ <i>Modèle de la partition des gammes</i>

(*) ces valeurs sont des bornes supérieures

Pour obtenir la commande déterministe modélisée par un Graphe d'Evénements, il reste encore de nombreux indéterminismes à prendre en compte : il s'agit de déterminer les circuits de gammes et les circuits de machines et de résoudre le problème d'optimisation d'en-cours.

Nous nous intéressons d'abord à la formation des circuits de procédé (ou macro-gammes). Une macro-gamme représente le travail cyclique ordonné et affecté aux palettes dédiées. Elle se compose d'un ensemble de gammes opératoires (d'où son nom). Seules les gammes pouvant être associées au même type de ressources de transport peuvent être regroupées. En effet une palette ne peut supporter que des pièces compatibles avec son système de bridage. De plus le regroupement de gammes opératoires entraîne la création de fortes contraintes de précédence entre les gammes, ce qui peut interdire l'accès à la solution optimale. Il est donc nécessaire d'envisager toutes les possibilités afin de garantir l'optimalité de la recherche.

III.1.5.1 Le problème mathématique de partitions d'ensemble : les nombres de Bell

Le but de cette première étude est d'évaluer le nombre de partitions possibles (au sens mathématique du terme) à partir d'une solution trouvée précédemment au vu des différentes ressources de transport. L'ordre des regroupements n'est pas encore pris en compte. Remarquons que ce problème de partition des gammes est indépendant de la répartition des charges des machines identiques, mais nécessite, au préalable, la détermination du routage, de l'extraction des gammes ainsi que la résolution des flexibilités de permutation, afin de dégager les gammes linéaires identiques. Par contre il est intéressant de rapprocher ces deux problèmes vu leur similitude. Le problème de partition de l'ensemble des gammes opératoires est néanmoins moins contraint que celui de la détermination des charges des machines, puisque le nombre de ressources de transport n'est pas fixé à l'avance, contrairement aux machines de transformation. La contrainte du respect du temps de cycle $CT(RP_p)$ est toujours présente. Il n'est cependant plus nécessaire d'en tenir compte, puisque, pour un regroupement donné de gammes opératoires, il suffit de considérer un nombre suffisant de ressources de transport permettant de respecter le temps de cycle de production. Donc toutes les partitions mathématiques sont possibles. Ce problème a été résolu analytiquement pour le cas d'un ensemble contenant des éléments tous différents et il est donné par le nombre de Bell.

Le nombre de Bell, noté B_n , représente le nombre de partitions (ensemble \mathcal{P}_j de sous-ensembles disjoints et non vides) d'un ensemble à n éléments. Il est pris par convention que $B_0 = 1$. Ainsi :

$$B_1 = 1 ;$$

$$B_2 = 2, \mathcal{P}_1 = \{\{1, 2\}\}, \mathcal{P}_2 = \{\{1\}, \{2\}\} ;$$

$$B_3 = 5, \mathcal{P}_1 = \{\{1, 2, 3\}\}, \mathcal{P}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \mathcal{P}_3 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \mathcal{P}_4 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \mathcal{P}_5 = \{\{2, 3\}, \{1\}\}$$

Il existe différentes manières pour le calculer, notamment par récurrence :

Proposition (III-3) :
$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot B_k .$$

III.1.5.2 Partition de l'ensemble des gammes de l'exemple illustratif

Pour l'exemple illustratif, il existe deux types de ressources de transport ($H = 2$). Le premier est dédié aux gammes opératoires de fabrication des pièces de type A, le second aux pièces de type B et C. Les recherches des partitions peuvent se décomposer en deux sous-parties indépendantes, portant sur la détermination des regroupements possibles des gammes opératoires pour chaque type de ressource de transport. Ceci est dû au fait que l'intersection entre les types de gammes, susceptibles d'être transportés par l'un ou l'autre type de palettes, est vide, c'est-à-dire qu'à un type de gamme opératoire est associé à un et un seul type de ressource de transport.

La résolution du problème général de dénombrement des répartitions possibles obtenues à partir d'un ensemble à plusieurs éléments (pouvant être multiples) est encore du domaine de la recherche. La seule solution réside donc dans le calcul au cas par cas. Le nombre de Bell nous fournit la borne supérieure en considérant des opérations toutes différentes.

- Pour le premier système de transport, il s'agit de dénombrer les regroupements d'un ensemble à 3 éléments distincts : les trois gammes opératoires liées à la fabrication de pièces de type A. Elles sont identifiées par le nom de leur variable de routage associé au niveau du premier conflit $G^1 = \{GO_{A11}, GO_{A12}, GO_{A13}\}$. Il existe différents types de solutions :
 - ◆ les regroupements formés d'un ensemble à 3 éléments. Il n'y a évidemment qu'un seul cas : $G_1^1 = \{GO_{A11}, GO_{A12}, GO_{A13}\}$.
 - ◆ les regroupements formés de deux ensembles, l'un à 2 éléments et l'autre à 1 élément. Il existe 3 solutions :
 - $G_1^1 = \{GO_{A11}, GO_{A12}\}, G_2^1 = \{GO_{A13}\}$
 - $G_1^1 = \{GO_{A11}, GO_{A13}\}, G_2^1 = \{GO_{A12}\}$
 - $G_1^1 = \{GO_{A12}, GO_{A13}\}, G_2^1 = \{GO_{A11}\}$
 - ◆ et les regroupements formés de trois ensembles à 1 élément. Un seul cas existe :

$$G_1^1 = \{GO_{A11}\}, G_2^1 = \{GO_{A12}\}, G_3^1 = \{GO_{A13}\}$$

Il existe donc 5 (= B_3) regroupements possibles différents liés au premier type de palettes.

- En ce qui concerne le deuxième type de ressource de transport, deux cas (toujours les mêmes) sont à considérer :
 - ◆ les deux gammes de type B sont identiques. Le nombre de partitions possibles avec trois gammes différentes, dont l'une est doublée, est égal à 11.
 - ◆ les deux gammes de type B sont distinctes. Il existe alors 15 (= B_4) regroupements différents issus de l'ensemble composé de 4 éléments distincts.

En effet certaines configurations du type :

$$G^2 = \left\{ G_1^2 (= \{GO_{B11}\}) \cup G_2^2 (= \{GO_{B11}, GO_{C11}\}) \cup G_3^2 (= \{GO_{C12}\}) \right\}$$

ne fournissent qu'une seule solution dans le premier cas et deux pour le deuxième. Il existe 4 configurations distinctes de ce type, d'où la différence entre les deux valeurs.

Le nombre total de regroupements, créés à partir d'une des solutions trouvées dans la partie précédente (ensemble de gammes opératoires linéaires + répartition de charges sur les machines identiques), est obtenu par le produit des deux termes que nous venons de calculer (premier et second type de palettes).

Pour l'exemple illustratif : nous avons déjà distingué, à l'étape précédente, les solutions comportant deux gammes opératoires identiques et distinctes produisant des pièces de type B, le nombre de nouvelles solutions obtenues est donc égal à :

$$\begin{aligned} & \text{Nombre}_{\substack{\text{anciennes solutions} \\ \text{avec gammes linéaires} \\ \text{de type B identiques}}} * \underbrace{5}_{\substack{\text{nombre} \\ \text{de solutions} \\ \text{pour } h=1}} * \underbrace{11}_{\substack{\text{nombre} \\ \text{de solutions} \\ \text{pour } h=2}} + \text{Nombre}_{\substack{\text{anciennes solutions} \\ \text{avec gammes linéaires} \\ \text{de type B distinctes}}} * \underbrace{5}_{\substack{\text{nombre} \\ \text{de solutions} \\ \text{pour } h=1}} * \underbrace{15}_{\substack{\text{nombre} \\ \text{de solutions} \\ \text{pour } h=2}} \\ & = 462*5*11 + 2880*5*15 = \mathbf{241.410} \end{aligned}$$

En ce qui concerne la taille de l'espace de recherche, comme à l'étape précédente, une borne supérieure est calculée en n'évaluant que le pire des cas, soit celui où toutes les gammes linéaires sont distinctes. Pour l'ensemble des 3 gammes opératoires linéaires du premier type de ressource de transport, il existe alors B_3 façons de le partitionner et B_4 façons pour l'ensemble des 4 gammes du second type de ressource de transport. La borne vaut donc :

$$\text{Borne}_{\text{précédente}} * B_3 * B_4 = 659.312.640 * 5 * 15 = \mathbf{4,9448 * 10^{10}}.$$

Le rapport de complexité entre, d'une part, l'approche globale et, d'autre part, notre méthodologie est donc, pour l'exemple illustratif, considérable au vu de la borne supérieure que nous avons réussi à calculer ($2 \cdot 10^5$).

III.1.5.3 Le problème général de partition d'ensembles de gammes linéaires

Il est au demeurant possible de formaliser le problème sous forme de résolution d'un système d'équations en nombres entiers. Nous décomposons le système selon l'appartenance des gammes linéaires à un type de ressource h de transport. Les sous-systèmes obtenus étant indépendants les uns des autres, aucune solution n'est perdue et les solutions générales seront trouvées en envisageant toutes les combinaisons possibles des regroupements d'une solution de chaque sous-système.

Prenons le premier type de ressource de transport, par exemple. Il s'agit, dans un premier temps, de considérer le nombre maximum de sous-ensembles différents que nous pouvons obtenir après partition. Le cas d'une gamme linéaire par sous-ensemble est toujours envisageable (parallélisation totale des gammes opératoires). Il est donc nécessaire d'avoir un nombre de sous-ensembles égal au nombre de gammes linéaires appartenant à l'ensemble $G^1 : G'_k, k \in \{1, \dots, \text{card}(G^1)\}$, en sachant que certains de ces regroupements peuvent être vides.

Les gammes linéaires identiques sont ensuite regroupées entre elles et nous définissons pour chaque type j de gamme $NG(j)$, le nombre de gammes de type j , et un nombre égal à $\text{card}(G^1)$ de variables : $NG_k^1(j), k \in \{1, \dots, \text{card}(G^1)\}$, indiquant le nombre de gammes de type j regroupées dans le sous-ensemble G'_k .

Ainsi le système à résoudre devient alors :

$$\sum_{\forall k \in \{1, \dots, \text{card}(G^1)\}} NG_k^1(j) = NG(j), \forall \text{type } j \text{ de gammes linéaires.}$$

Des solutions trouvées, nous ne conservons, en réalité, qu'un seul représentant de chaque classe d'équivalence caractérisée par la relation : « égal à une permutation des regroupements G_k^1 près ». En effet l'ordre dans lequel les gammes sont regroupées ainsi que celui des regroupements entre eux n'ont pas d'importance : d'où la restriction au niveau des solutions.

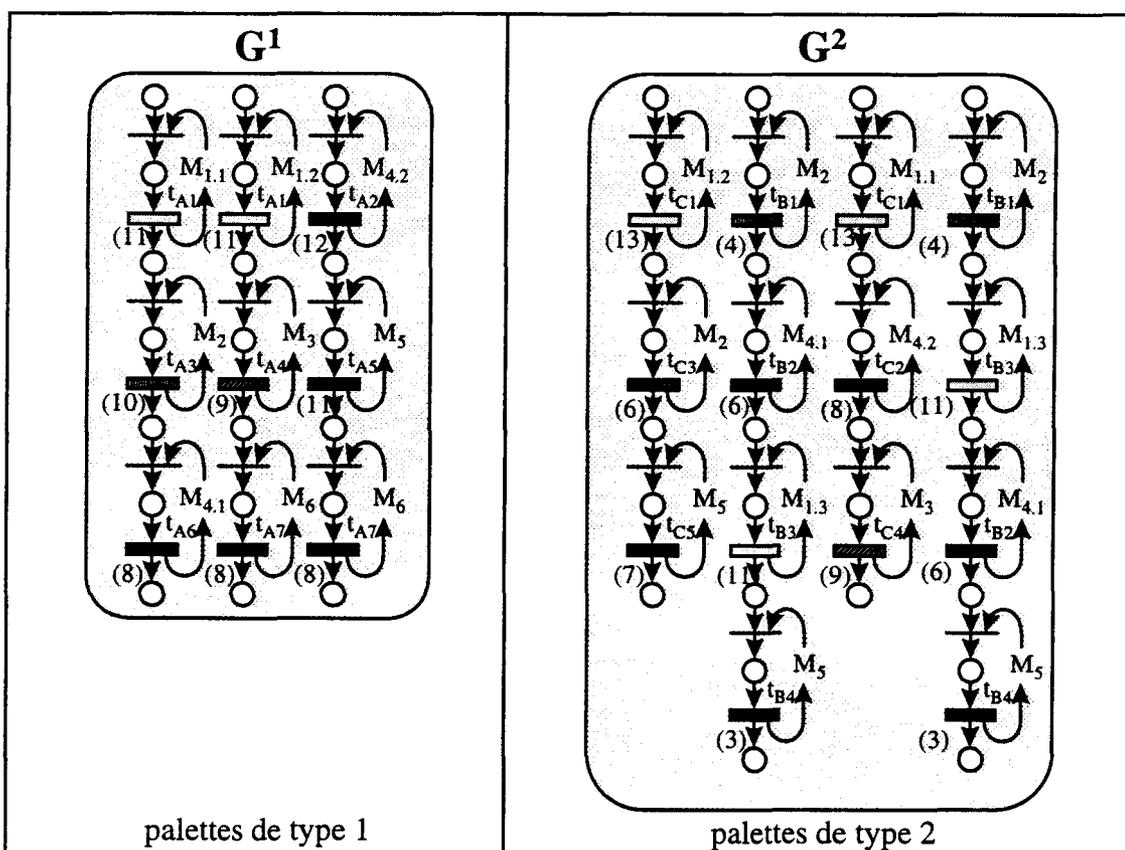


Figure III-11 : Partition \mathcal{P}_{st} retenue pour l'exemple illustratif : séquentialisation totale des gammes opératoires linéaires obtenues avec l'ensemble de routages admissibles α_4

III.1.6 Phase 6 : Regroupement cyclique des gammes

Complexité de l'analyse du régime permanent RP_p caractérisé par : - $E(RP_p) = \{3A, 2B, 2C\}$ - $CT(RP_p) = 24$ u.t.		Différentes phases de l'élaboration de la commande d'un régime permanent	
Taille de l'espace de recherche respectant $E(RP_p)$ jusqu'à la Phase	Nombre de solutions à la fin la Phase	Phase 1 : Détermination et choix des routages admissibles	⇒ Invariants de places : • des ressources de transformation • des ressources de transport (palettes) ⇒ <i>Modèle de la charge de travail d'un cycle de production</i>
360 routages	6 routages admissibles	↓	
504 ensembles de chemins extraits	16 ensembles de chemins extraits admissibles	Phase 2 : Extraction de chemins	⇒ Dépliage des flexibilités complexes ⇒ <i>Modèle partiellement déplié</i>
3.528 ensembles de gammes linéaires	114 ensembles de gammes linéaires admissibles	↓	
≈ 6,59.10 ⁸ (*) répartitions de charge sur machines	3.342 répartitions de charge admissibles sur les machines	Phase 3 : Linéarisation des gammes opératoires	⇒ Gammes opératoires linéaires ⇒ <i>Modèle linéarisé</i>
≈ 4,94.10 ¹⁰ (*) partitions de l'ensemble des gammes opératoires	241.410 partitions admissibles de l'ensemble des gammes linéaires	↓	
≈ 9,49.10 ¹⁰ (*) regroupements cycliques	453.528 regroupements cycliques admissibles	Phase 4 : Détermination des charges des machines	⇒ Invariants de places des machines de transformation ⇒ <i>Modèle des charges de travail des machines</i>
		↓	
		Phase 5 : Partition de l'ensemble des gammes opératoires	⇒ Invariants de places des regroupements de gammes opératoires ⇒ <i>Modèle de la partition des gammes</i>
		↓	
		Phase 6 : Regroupement cyclique des gammes	⇒ Détermination des circuits de procédé (gammes) ⇒ <i>Modèle ordonnançable</i>

(*) ces valeurs sont des bornes supérieures

III.1.6.1 Notion de cycle dans les regroupements

La deuxième problématique liée au regroupement des gammes en macro-gammes concerne l'ordre dans lequel l'association s'effectue. En effet dès qu'au moins trois gammes différentes sont regroupées dans une macro-gamme ou deux gammes seulement mais chacune doublée, la notion d'ordre prend toute son importance. Cela s'explique par le fait que les contraintes de précedence sont différentes, si les trois gammes de fabrication issues de A sont regroupées selon l'une ou l'autre des 2 séquences : $(GO_{A11} - GO_{A12} - GO_{A13})$ ou $(GO_{A11} - GO_{A13} - GO_{A12})$.

Rappelons de plus que nous voulons établir un fonctionnement périodique du système en régime permanent. Donc deux regroupements de gammes sont équivalents s'il existe une permutation cyclique des gammes pour passer de l'une à l'autre, c'est à dire que, par exemple, $(GO_{A11} - GO_{A12} - GO_{A13})$ est équivalent à $(GO_{A13} - GO_{A11} - GO_{A12})$. Un regroupement cyclique est défini comme un ensemble de macro-gammes composant l'horizon de production. Cette étape est aussi l'objet d'une recherche d'évaluation générale de la complexité. Le calcul du dénombrement s'effectue macro-gammes par macro-gammes. Le nombre total de regroupements cycliques est obtenu en multipliant les valeurs obtenues pour chaque macro-gamme qui compose une partition.

III.1.6.2 Problème général de regroupement cyclique

Considérons le problème général. Soit \mathcal{P} une partition donnée d'un des ensembles des gammes opératoires linéaires de l'horizon de production, ensembles obtenus après les étapes précédentes : détermination des routages admissibles, extraction de chemins, prise en compte des flexibilités de permutation et détermination des charges des machines. Soit G_a^h le **a-ème regroupement lié au type h de ressource de transport pour cette partition** \mathcal{P} . Il comprend un certain nombre de gammes linéaires (G_1, \dots, G_n) qui peuvent se trouver

en plusieurs exemplaires. Soit $G_a^h = \left\{ \underbrace{G_1, \dots, G_1}_{\lambda_1 \text{ fois}}, \underbrace{G_2, \dots, G_2}_{\lambda_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{G_n, \dots, G_n}_{\lambda_n \text{ fois}} \right\}$. A partir de

G_a^h , plusieurs macro-gammes (notées $M_{a,j}^h$) peuvent être déduites. Soit $\xi(a, h)$ le **nombre de macro-gammes obtenues à partir de G_a^h** .

Lemme (III-4) : Si $\text{pgcd}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 1$, alors $\xi(a, h) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)!}{\prod_{i=1}^n (\lambda_i)!} * \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)}$.

Lemme (III-5) : Si $\text{pgcd}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda$ avec λ **nombre premier**, alors $\xi(a, h) = \xi_\lambda + \xi_1$,

avec ξ_λ le nombre de classes d'équivalences des permutations cycliques d'ordre $\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{\lambda}$

exactement et ξ_1 celui des permutations cycliques d'ordre $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$ exactement.

$$\xi_\lambda = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda}\right)!}{\prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)!} * \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda}} \text{ et } \xi_1 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)!}{\prod_{i=1}^n (\lambda_i)!} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda}\right)!}{\prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)!} * \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

Il est ainsi facile de démontrer que si $\text{pgcd}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda$ et si l'ensemble des diviseurs de λ est $\{d_{\lambda_1} = \lambda, \dots, d_{\lambda_k} = 1\}$, alors le nombre total de macro-gammes obtenus à partir de G_a^h est donné par $\xi(a, h) = \sum_{i=1}^k \xi_{d_{\lambda_i}}$, où $\xi_{d_{\lambda_i}}$ représente le nombre de classes d'équivalences

d'ordre $\frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k}{d_{\lambda_i}}$ et vaut :

$$\xi_{d_{\lambda_i}} = \left(\begin{array}{l} \text{nombre de permutations ordonnés pour } G_a^h \Big|_{d_{\lambda_i}} \\ - \text{nombre de permutations ordonnés pour } G_a^h \Big|_{d_{\lambda_j}} \text{ pour tous les } d_{\lambda_j} \text{ multiples de } d_{\lambda_i} \end{array} \right) * \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{d_{\lambda_i}}}$$

III.1.6.3 Application à l'exemple illustratif

Appliquons ce que nous avons démontré à l'exemple illustratif. Prenons le cas particulier où une partition \mathcal{P}_i a donné ce type de regroupement :

$\mathcal{P}_i = \left\{ \{GO_{A11}, GO_{A12}, GO_{A13}\}, \{GO_B, GO_B, GO_{C11}, GO_{C12}\} \right\}$, soit un seul regroupement par type de ressource de transport, ce qui correspond à une séquentialisation totale des gammes.

- Considérons d'abord le premier regroupement, soit $G_1^1 = \{GO_{A11}, GO_{A12}, GO_{A13}\}$. Les trois gammes opératoires linéaires qui le composent sont toutes distinctes, donc $\lambda_{A11} = \lambda_{A12} = \lambda_{A13} = \text{pgcd}(\lambda_{A11}, \lambda_{A12}, \lambda_{A13}) = 1$. Le nombre de macro-gammes distinctes obtenues à partir de G_1^1 est donc égal à $\xi(1,1) = \frac{3!}{1!*1!*1!} * \frac{1}{3} = 2$. Les deux macro-gammes sont :

$$M_{1,1}^1 : (GO_{A11} - GO_{A12} - GO_{A13}) \text{ et } M_{1,2}^1 : (GO_{A11} - GO_{A13} - GO_{A12}).$$

- Pour le deuxième regroupement ($G_1^2 = \{GO_B, GO_B, GO_{C11}, GO_{C12}\}$), nous avons $\lambda_B = 2$ et $\lambda_{C11} = \lambda_{C12} = 1$, donc $\text{pgcd}(\lambda_B, \lambda_{C11}, \lambda_{C12}) = 1$. Le nombre de macro-gammes formées à partir de G_1^2 est donc égal à $\xi(1,2) = \frac{4!}{2!*1!*1!} * \frac{1}{4} = 3$.

Les 3 macro-gammes sont : $M_{1,1}^2 : (GO_B - GO_B - GO_{C11} - GO_{C12})$, $M_{1,2}^2 : (GO_B - GO_{C11} - GO_B - GO_{C12})$ et $M_{1,3}^2 : (GO_B - GO_B - GO_{C12} - GO_{C11})$. Toutes les autres sont équivalentes à l'une de celles-ci, à une permutation cyclique près.

A partir de la partition \mathcal{P}_i , il est donc possible de considérer 6 regroupements cycliques différents :

- $RC_1(\mathcal{P}_i) = \left\{ (GO_{A11} - GO_{A12} - GO_{A13}), (GO_B - GO_B - GO_{C11} - GO_{C12}) \right\}$,

- $Rc_2(\mathcal{P}_i) = \{(GO_{A11} - GO_{A12} - GO_{A13}), (GO_B - GO_B - GO_{C12} - GO_{C11})\}$,
- $Rc_3(\mathcal{P}_i) = \{(GO_{A11} - GO_{A12} - GO_{A13}), (GO_B - GO_{C11} - GO_B - GO_{C12})\}$,
- $Rc_4(\mathcal{P}_i) = \{(GO_{A11} - GO_{A13} - GO_{A12}), (GO_B - GO_B - GO_{C11} - GO_{C12})\}$,
- $Rc_5(\mathcal{P}_i) = \{(GO_{A11} - GO_{A13} - GO_{A12}), (GO_B - GO_B - GO_{C12} - GO_{C11})\}$,
- $Rc_6(\mathcal{P}_i) = \{(GO_{A11} - GO_{A13} - GO_{A12}), (GO_B - GO_{C11} - GO_B - GO_{C12})\}$.

Pour obtenir le nombre total de solutions à la fin de cette étape, nous reprenons les anciennes solutions de l'étape précédente (phase 5). Le problème est décomposé suivant le type de ressources de transport.

Pour le premier type ($h=1$), il existe trois gammes linéaires distinctes issues des gammes opératoires de A. A partir du regroupement $G_1^1 = \{GO_{A11}, GO_{A12}, GO_{A13}\}$, nous obtenons deux macro-gammes différentes, c'est-à-dire : $M_{1.1}^1 : (GO_{A11} - GO_{A12} - GO_{A13})$ et $M_{1.2}^1 : (GO_{A11} - GO_{A13} - GO_{A12})$. Par contre pour les quatre autres regroupements obtenus à l'étape précédente, les conditions ne sont pas remplies pour dégager plusieurs solutions à partir d'un seul regroupement. Donc au lieu de multiplier par 5 les solutions issues de la détermination des charges sur les machines, en ce qui concerne les gammes appartenant à la première ressource de transport, il faut multiplier par 6.

Les résultats du deuxième type de transport sont regroupés dans le Tableau Annexe IV-3. Il faut distinguer les cas où les deux gammes produisant des pièces de type B sont distinctes où pour une solution provenant de la phase 4, au lieu de 15 nouvelles solutions engendrées à la phase 5, cette étape en détermine 24 nouvelles, de ceux où ils sont identiques où au lieu de multiplier par 11, il faut maintenant multiplier par 14.

Le nombre de solutions à la fin de cette étape est égale à :

$$\begin{aligned} & \text{Nombre}_{\text{anciennes solutions (phase 4) avec gammes linéaires de type B identiques}} * \underbrace{6}_{\text{nombre de solutions pour h=1}} * \underbrace{14}_{\text{nombre de solutions pour h=2}} + \text{Nombre}_{\text{anciennes solutions (phase 4) avec gammes linéaires de type B distinctes}} * \underbrace{6}_{\text{nombre de solutions pour h=1}} * \underbrace{24}_{\text{nombre de solutions pour h=2}} \\ & = 462 * 6 * 14 + 2880 * 6 * 24 = \mathbf{453.528} \end{aligned}$$

En ce qui concerne la taille de l'espace de recherche, comme à l'étape précédente, une borne supérieure est calculée en n'évaluant que le plus mauvais cas, soit celui où toutes les gammes linéaires sont distinctes. La borne vaut donc :

$$\text{Borne}_{\text{phase 4}} * 6 * 24 = \mathbf{9,4941 * 10^{10}}.$$

Le rapport de complexité, à l'issue de cette phase, reste, pour l'exemple illustratif, de l'ordre de 10^5 , mettant ainsi en évidence le gain très important qu'apporte notre approche en amont de l'ordonnancement final.

Une méthode d'obtention systématique de tous les regroupements cycliques à partir des regroupements est actuellement à l'étude.

A la fin de cette étape, les circuits de macro-gammes sont déterminés. Ce sont les différentes macro-gammes formées pour l'horizon de production. Le modèle correspondant est dit ordonnançable cf. Figure III-12.

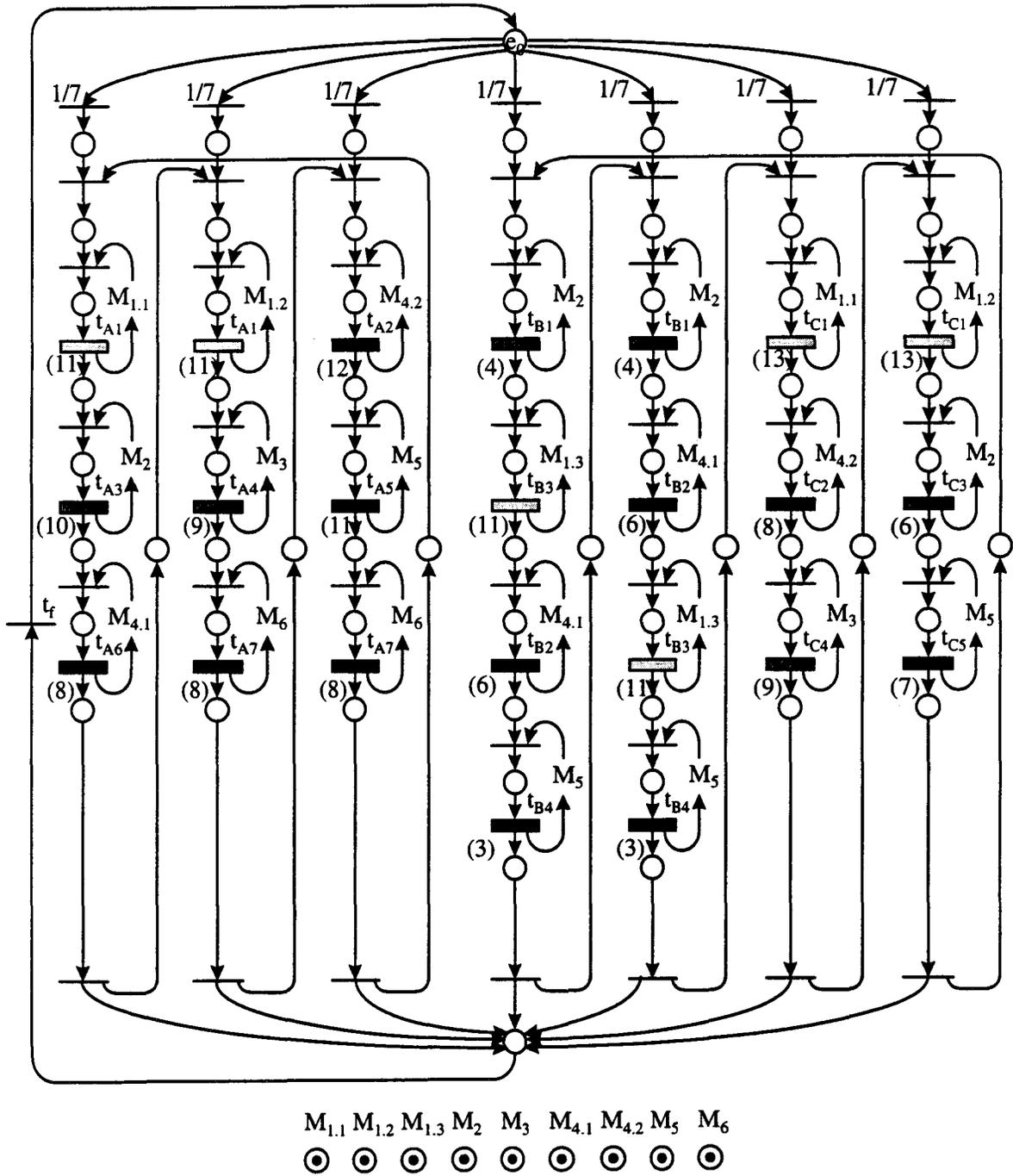


Figure III-12 : Modèle ordonnançable du système de production sous le régime permanent RP_p

III.1.7 Parcours de l'espace de recherche : application à l'exemple illustratif

Nous constatons sur l'exemple illustratif avec le Tableau III-7 qu'il reste encore de très nombreuses solutions équivalentes au sens niveau minimum d'en-cours nécessaire pour respecter le temps de cycle. La question qui reste en suspens concerne la meilleure façon de parcourir chaque sous-ensemble obtenu. Nous n'avons malheureusement pas encore de réponse précise à fournir. Le parcours complet, même d'un sous-ensemble, reste tout à fait inenvisageable, en particulier dans le cadre de la phase d'exploitation du système de production.

Ensemble de routages admissibles associé	Gammes opératoires de type B	$B(\alpha_i, \mathcal{P}_j)$ = $B^*(RP_p)$ = 9	$B(\alpha_i, \mathcal{P}_j)$ = 10	$B(\alpha_i, \mathcal{P}_j)$ = 11	$B(\alpha_i, \mathcal{P}_j)$ = 12	$B(\alpha_i, \mathcal{P}_j)$ = 13	$B(\alpha_i, \mathcal{P}_j)$ = $B_0(RP_p)$ = 14	Total
α_1	distinctes	25.920	77.760	84.240	38.880	6.480	0	233.280
α_2	distinctes	5.184	15.552	16.848	7.776	1.296	0	46.656
α_3	distinctes	1.296	4.320	5.508	3.348	972	108	15.552
	égales	378	1.323	1.827	1.260	441	63	5.292
α_4	distinctes	12.960	32.400	25.920	6.480	0	0	77.760
	égales	3.528	8.820	7.056	1.764	0	0	21.168
α_5	distinctes	2.592	6.480	5.184	1.296	0	0	15.552
	égales	882	2.205	1.764	441	0	0	5.292
α_6	distinctes	4.320	10.800	8.640	2.160	0	0	25.920
	égales	1.176	2.940	2.352	588	0	0	7.056
	Total :	58.236	162.600	159.339	63.993	9.189	171	453.528

Tableau III-7 : Répartition des ensembles ordonnancables suivant leur ensemble de routages associé, suivant les deux gammes opératoires linéaires de type B et suivant leur borne inférieure d'en-cours $B(\alpha_i, \mathcal{P}_j)$

Toutefois nous avons pu montrer ici qu'il est possible de trouver l'une des solutions optimales avec une complexité maîtrisée. Remarquons cependant que nous n'avons pas eu besoin de parcourir tout l'espace des regroupements cycliques dont la borne fine associée est minimale et égale à 9. La démarche utilisée reste encore expérimentale et nécessite des recherches complémentaires avant d'être généralisée.

Nous avons pu vérifier qu'en choisissant, parmi les modèles ordonnancables, une solution, dont la borne inférieure d'en-cours associée est minimale, l'ordonnancement trouvé (au moyen de l'heuristique) définit une commande satisfaisante, c'est-à-dire établissant un compromis « raisonnable » entre temps de calcul de la commande prévisionnelle déterministe et cyclique et niveau d'en-cours requis pour mettre en place la commande et respecter le temps de cycle optimal sous la contrainte horizon de production fixé. Nous garantissons aussi le fonctionnement répétitif de la commande selon l'horizon de production retenu au cours de l'étape planification fine.

III.1.8 Phase 7 : Ordonnancement cyclique des opérations sur les ressources

Complexité de l'analyse du régime permanent RP_p caractérisé par : - $E(RP_p) = \{3A, 2B, 2C\}$ - $CT(RP_p) = 24$ u.t.		Différentes phases de l'élaboration de la commande d'un régime permanent	
Taille de l'espace de recherche respectant $E(RP_p)$ jusqu'à la Phase	Nombre de solutions à la fin la Phase	Phase 1 : Détermination et choix des routages admissibles	⇒ Invariants de places : • des ressources de transformation • des ressources de transport (palettes) ⇒ <i>Modèle de la charge de travail d'un cycle de production</i>
360 routages	6 routages admissibles		
504 ensembles de chemins extraits	16 ensembles de chemins extraits admissibles	Phase 2 : Extraction de chemins	⇒ Dépliage des flexibilités complexes ⇒ <i>Modèle partiellement déplié</i>
3.528 ensembles de gammes linéaires	114 ensembles de gammes linéaires admissibles	Phase 3 : Linéarisation des gammes opératoires	⇒ Gammes opératoires linéaires ⇒ <i>Modèle linéarisé</i>
$\approx 6,59 \cdot 10^8$ (*) répartitions de charge sur machines	3.342 répartitions de charge admissibles sur les machines	Phase 4 : Détermination des charges des machines	⇒ Invariants de places des machines de transformation ⇒ <i>Modèle des charges de travail des machines</i>
$\approx 4,94 \cdot 10^{10}$ (*) partitions de l'ensemble des gammes opératoires	241.410 partitions admissibles de l'ensemble des gammes linéaires	Phase 5 : Partition de l'ensemble des gammes opératoires	⇒ Invariants de places des regroupements de gammes opératoires ⇒ <i>Modèle de la partition des gammes</i>
$\approx 9,49 \cdot 10^{10}$ (*) regroupements cycliques	453.528 regroupements cycliques admissibles	Phase 6 : Regroupement cyclique des gammes	⇒ Détermination des circuits de procédé (gammes) ⇒ <i>Modèle ordonnançable</i>
$\approx 7,41 \cdot 10^{27}$ (*) ordonnancements d'opérations sur l'ensemble des machines	La complexité de cette phase, réunie avec la suivante, est difficilement chiffrable en raison du sens de parcours des regroupements cycliques et de l'heuristique	Phase 7 : Ordonnancement des opérations sur les machines	⇒ Détermination des circuits de commande (machines) ⇒ <i>Graphe d'Evénements non marqué (pas d'en-cours)</i>

(*) ces valeurs sont des bornes supérieures

Il reste à déterminer les circuits de commande du Graphe d'Evénements. Les invariants

de places des machines sont connus : toutes les opérations sur les machines sont définies (cf. partition des charges des ressources multiples). Il s'agit de créer les séquences, ou mieux d'ordonnancer de manière cyclique les opérations sur les machines. Cette étape est similaire à la précédente. Cependant nous pouvons remarquer qu'il n'est pas nécessaire de connaître les solutions engendrées par les deux étapes précédentes, puisque seules comptent les répartitions des charges des machines. Les résultats établis sont valables et doivent être utilisés pour évaluer la complexité de cette partie.

Nous n'illustrons pas cette étape sur notre exemple, en raison du grand nombre de cas à considérer, i.e. les ensembles d'invariants de places des machines issus des répartitions discrètes des charges de travail. A priori toutes, les opérations sont différenciées, sauf dans le cas particulier de l'équivalence des deux gammes opératoires produisant des pièces de type B, où dans ce cas, il existe deux opérations identiques sur M_2 (t_{B1}), soit sur M_5 (t_{B4}) soit sur M_6 (t_{B5}) suivant le routage retenu, et suivant la répartition choisie des charges sur les machines identiques ou sur l'une des machines de la ressource R_1 (t_{B3}) ou sur l'une des machines de la ressource R_4 (t_{B2}). Tous ces cas ont déjà été étudiés à l'étape précédente.

Il existe cependant entre le problème de regroupements cycliques et l'ordonnancement des opérations sur les machines une différence importante. La phase 6 s'occupe de l'ordre entre les gammes opératoires, tandis que cette phase 7 s'intéresse à l'ordre entre opérations. Le nombre de solutions générées à partir d'une solution de l'étape précédente est donc plus important pour la phase 7, d'autant plus que le nombre de solutions créées ne dépend pas linéairement mais plutôt factoriellement, pour la phase 6, du nombre de gammes opératoires, et, pour la phase 7, du nombre d'opérations à réaliser. De plus nous savons que le problème d'ordonnancement des opérations sur les machines est un problème NP-difficile.

Le nombre exact de solutions à la fin de cette étape n'est cependant pas calculé pour notre approche. En effet l'ordonnancement des opérations sur les machines et la détermination des en-cours (niveau et positionnement) seront résolus par une heuristique regroupant deux problèmes NP-difficiles. Comme nous résolvons simultanément ces deux indéterminismes, nous ne différencions pas les solutions provenant de la détermination du séquençement des opérations sur les machines de celles venant de la minimisation de l'en-cours.

Une borne supérieure de l'espace de recherche peut être par contre évaluée en prenant en compte le cas le plus défavorable pour chaque machine produisant la plus importante combinatoire. Ainsi pour chaque machine, nous cherchons le nombre maximal d'opérations, qui peuvent lui être affectées, en passant en revue les différents ensembles de routages respectant l'horizon de production, et en supposant que les opérations ainsi trouvées sont toutes distinctes les unes des autres pour se cantonner au cas le plus défavorable. Dans le cas des ressources multiples, le cas le plus défavorable consiste à attribuer à une seule machine toutes les opérations de la charge de la ressource, cf. Tableau III-8. Il est certain que ce cas n'existe certainement pas en réalité, mais il n'est pas encore possible de calculer une borne plus fine.

A la fin de cette phase, nous connaissons tous les circuits du Graphe d'Evénements qui va modéliser la commande du système : les circuits de fabrication ont été déterminés à la phase 5 et nous venons d'ordonnancer les opérations sur les machines à la phase 6 (circuits de commande). Implicitement les circuits mixtes de ce graphe sont aussi connus. Nous avons modélisé comme exemple, à la Figure III-13, le graphe non marqué de la commande optimale que nous avons obtenue.

Type de ressources (nombre de machines identiques)	R_1 (3)	R_2 (1)	R_3 (1)	R_4 (2)	R_5 (1)	R_6 (1)
Nombre maximal d'opérations	7 sur 3 machines	7	5	10 sur 2 machines	7	5
Complexité : Nombre maximal d'ordonnements différents possibles par type de ressources	$6!$ = 720 répartition: 7 - 0 - 0)	$6!$ = 720	$4!$ = 24	$9!$ = 362.880 (répartition: 10 - 0)	$6!$ = 720	$4!$ = 24

Tableau III-8 : Complexité engendrée par la considération du problème d'ordonnement des opérations sur les machines, complexité répartie suivant le type de ressources (pour les ressources multiples nous n'avons gardé que les répartitions les plus combinatoires)

$$M_1^1 = (GO_{A11} - GO_{A12} - GO_{A13})$$

$$M_1^2 = (GO_{B11} - GO_{B12} - GO_{C11} - GO_{C12})$$

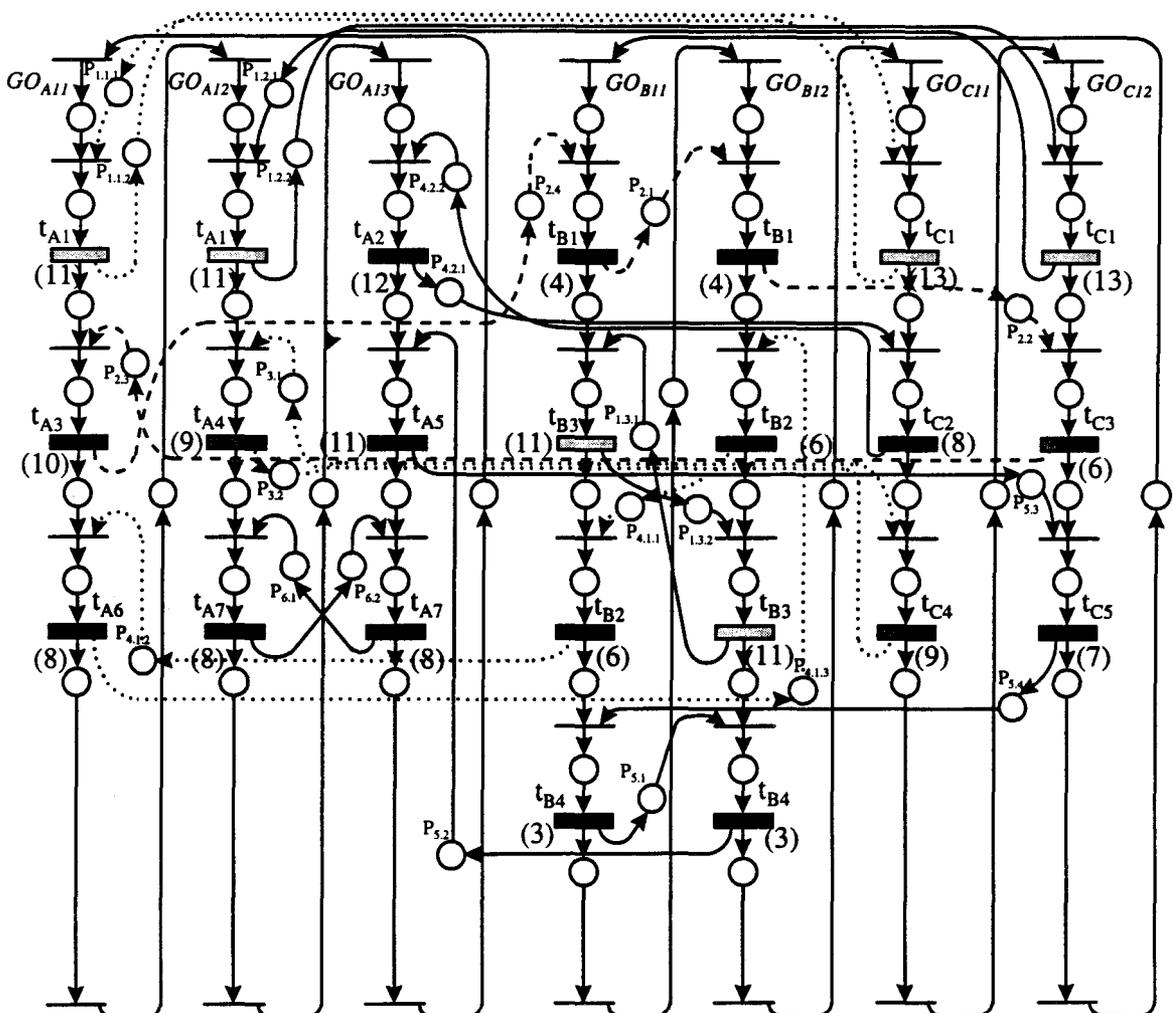


Figure III-13 : Graphe d'Événements non marqué : connaissance des circuits de fabrication, de commande et aussi des circuits mixtes

III.1.9 Comparaison des résultats entre l'exemple illustratif et l'horizon double de production $E_2 = \{6A, 4B, 4C\}$

La comparaison des résultats de ces deux horizons démontre que la taille de l'espace de recherche et le nombre de solutions finalement trouvées peuvent varier de manière considérable selon l'horizon. Cependant, en raison de la non-monotonie du nombre d'ensembles de routages admissibles, solutions du système d'équations et d'inéquations en nombres entiers, il n'est pas possible d'affirmer, d'un point de vue complexité, que le nombre final de regroupements cycliques est une fonction monotone de la taille de l'horizon. Il existe pourtant des cas particuliers, c'est le cas de notre exemple illustratif, pour lesquels, en considérant des horizons multiples E_1 et E_2 , les vitesses maximales de production restent les mêmes. Nous sommes alors sûrs que le nombre de solutions engendrées par E_2 est plus important que pour E_1 , puisque les solutions de E_1 sont aussi solutions de E_2 .

L'espace de recherche qui caractérise l'ordre de complexité du problème global, regroupant plusieurs premières phases, est une fonction croissante de la taille de l'horizon. De manière générale, le problème de recherche d'une solution à chaque phase a un ordre de complexité qui croît très fortement avec la taille de l'horizon. Ainsi plus l'horizon de travail considéré est grand, plus il est coûteux en temps de calcul de trouver la ou les solutions engendrées par une solution de la phase précédente.

C'est une des raisons pour lesquelles nous avons décidé de limiter la taille de l'horizon cyclique de production au moment de son choix à l'étape de planification fine. Il faut en effet trouver un compromis entre les performances du système qu'il sera possible d'atteindre, la complexité du problème à résoudre par la suite en tenant compte du choix d'un horizon de production et du temps de calcul.

	Horizon de production	Phase 1	Phase 2	Phase 3	Phase 4	Phase 5	Phase 6	Phase 7
Nombre de solutions	E_1	6	16	114	3.342	241.410	453.528	-
	E_2	58	266	6.873	$\leq 1,7 \cdot 10^9$ $\geq 1,1 \cdot 10^6$ ⁽¹⁾	-	-	-
	E_2 / E_1	9,7	16,6	60,3	> 329	-	$9,49 \cdot 10^{10}$	$7,41 \cdot 10^{27}$
Taille de l'espace de recherche	E_1	360	504	3.528	$\approx 6,59 \cdot 10^8$	$\approx 4,94 \cdot 10^{10}$	$\approx 9,49 \cdot 10^{10}$	$\approx 7,41 \cdot 10^{27}$
	E_2	4.900	11.550	291.060	$\approx 1,22 \cdot 10^{17}$	$\approx 1,02 \cdot 10^{23}$	$\approx 3,53 \cdot 10^{24}$	$\approx 4,6 \cdot 10^{78}$
	E_2 / E_1	13,6	22,9	82,5	$1,8 \cdot 10^8$	$2,1 \cdot 10^{12}$	$3,7 \cdot 10^{13}$	$6,2 \cdot 10^{50}$

Tableau III-9 : Comparaison des résultats pour l'horizon retenu $E(RP_p)$ et l'horizon double E_2 , deux horizons à même temps de cycle de production optimal

¹ Pour l'horizon double E_2 de production, nous avons cessé de calculer le nombre exact de solutions à partir de la phase 4, parce que, à ce stade de l'analyse, nous obtenons plus de solutions que de regroupements cycliques (phase 6) avec l'horizon minimal de production $E_1 = E(RP_p)$. Comme nous avons déjà remarqué que la vitesse optimale de production est identique pour ces deux horizons, et comme il est facile de constater, par le calcul des bornes inférieures sur l'en-cours, que $B^*(E_2) = B^*(E_1) = 9$, il n'est pas possible d'obtenir une meilleure commande avec l'horizon double de production. Il n'est donc pas nécessaire de poursuivre plus avant l'étude, puisque, à performances égales, la complexité est nettement plus importante pour l'horizon double de production.

III.1.10 Phase 8 : Recherche des en-cours (niveau et positionnement)

Complexité de l'analyse du régime permanent RP_p caractérisé par : - $E(RP_p) = \{3A, 2B, 2C\}$ - $CT(RP_p) = 24$ u.t.		Différentes phases de l'élaboration de la commande d'un régime permanent	
Taille de l'espace de recherche respectant $E(RP_p)$ jusqu'à la Phase	Nombre de solutions à la fin la Phase	Phase 1 : Détermination et choix des routages admissibles	⇒ Invariants de places : • des ressources de transformation • des ressources de transport (palettes) ⇒ <i>Modèle de la charge de travail d'un cycle de production</i>
360 routages	6 routages admissibles	↓	
504 ensembles de chemins extraits	16 ensembles de chemins extraits admissibles	Phase 2 : Extraction de chemins	⇒ Dépliage des flexibilités complexes ⇒ <i>Modèle partiellement déplié</i>
3.528 ensembles de gammes linéaires	114 ensembles de gammes linéaires admissibles	↓	
≈ 6,59.10 ⁸ (*) répartitions de charge sur machines	3.342 répartitions de charge admissibles sur les machines	Phase 3 : Linéarisation des gammes opératoires	⇒ Gammes opératoires linéaires ⇒ <i>Modèle linéarisé</i>
≈ 4,94.10 ¹⁰ (*) partitions de l'ensemble des gammes opératoires	241.410 partitions admissibles de l'ensemble des gammes linéaires	↓	
≈ 9,49.10 ¹⁰ (*) regroupements cycliques	453.528 regroupements cycliques admissibles	Phase 4 : Détermination des charges des machines	⇒ Invariants de places des machines de transformation ⇒ <i>Modèle des charges de travail des machines</i>
≈ 7,41.10 ²⁷ (*) ordonnancements d'opérations sur l'ensemble des machines	La complexité de cette phase, réunie avec la suivante, est difficilement chiffrable en raison du sens de parcours des regroupements cycliques et de l'heuristique	↓	
non déterminé		Phase 5 : Partition de l'ensemble des gammes opératoires	⇒ Invariants de places des regroupements de gammes opératoires ⇒ <i>Modèle de la partition des gammes</i>
		↓	
		Phase 6 : Regroupement cyclique des gammes	⇒ Détermination des circuits de procédé (gammes) ⇒ <i>Modèle ordonnançable</i>
		↓	
		Phase 7 : Ordonnancement des opérations sur les machines	⇒ Détermination des circuits de commande (machines) ⇒ <i>Graphe d'Evénements non marqué (pas d'en-cours)</i>
		↓	
		Phase 8 : Minimisation de l'en-cours : • valeur optimale • positionnement	⇒ Détermination des circuits minimaux du système ⇒ <i>Graphe d'Evénements modélisant la commande déterministe et cyclique du système</i>

(*) ces valeurs sont des bornes supérieures

La dernière inconnue du système à résoudre pour assurer un comportement déterministe est l'en-cours. Nous cherchons à minimiser cet en-cours tout en respectant l'horizon de

travail et le temps de cycle établis dans l'étape de planification fine (critère d'optimisation). Il a été établi, dans nos hypothèses, que l'étude sur l'en-cours est équivalente à celle qui concerne les ressources de transport, puisque nous avons supposé que les pièces présentes dans l'atelier flexible de production restent attachées à leur ressource de transport de type palettes tout au long de la fabrication.

Les travaux de [HIL 89b], [LAF 92] et de [PLU 94] ont porté sur la recherche de conditions optimales assurant un temps de cycle donné tout en minimisant le nombre total de ressources de transport utilisées. Le cas général envisage un temps de cycle quelconque. Mais, comme c'est le cas dans cette étude, si nous voulons que le système de production fonctionne à productivité maximale, tout en utilisant un nombre minimal de palettes, il suffit d'imposer un temps de cycle égal au temps de cycle de la (ou les) machine(s) menante(s). En utilisant le formalisme Réseau de Petri, ce but s'exprime de manière équivalente sous la forme suivante : Rechercher un état « initial » minimisant le nombre de marques dans un graphe d'événements fortement connexe tout en respectant un temps de cycle donné.

Il a été démontré que ce problème de minimisation se ramène à un problème de programmation linéaire en nombre entiers où les variables prennent des valeurs booléennes. Cette méthode de résolution passe obligatoirement par une étape préliminaire d'énumération de tous les circuits d'un graphe. D'après les travaux de [MAR 82] et de [HIL 89b], c'est un problème NP-difficile qui croît rapidement avec le nombre de produits à fabriquer. La recherche exhaustive des circuits d'un graphe d'événements fortement connexe reste limitée à des cas de taille relativement faible en raison de l'explosion aussi bien en temps qu'en espace, cf. [KOR 95]. Il est alors indispensable de développer des heuristiques qui permettent d'obtenir de « bonnes solutions » en un temps acceptable cf. travaux de [HIL 89b] et [LAF 92] pour des exemples d'heuristiques.

III.1.11 Résolution du problème NP-difficile de l'ordonnancement cyclique des opérations sur les machines tout en minimisant l'en-cours du système par le développement d'heuristique

En raison de la complexité précédemment évoquée dans la recherche de l'en-cours, nous avons proposé pour les phases 7 et 8 une heuristique de recherche justifiée par le caractère NP complet de cette optimisation.

Nous utilisons le degré de liberté, concernant l'ordonnancement cyclique des opérations sur les machines, pour développer une approche de construction progressive du graphe d'événements par le placement successif des opérations du cycle de production. L'approche que nous avons proposée au Chapitre II permet d'affirmer qu'une solution est trouvée dès la première passe de notre algorithme.

Par ailleurs notre heuristique offre l'avantage à tout moment du choix de la profondeur de l'arbre de recherche ou de la longueur des séquences d'opérations à placer. Ceci permet de maîtriser en partie la complexité, ainsi que le temps de calcul nécessaire à l'expression d'une solution. De plus, l'optimalité de la recherche est garantie dans le cas de la recherche exhaustive de toutes les branches de l'arbre. Ainsi, nous avons réussi à formuler de manière générale le problème, NP-complet, d'ordonnancement cyclique et à trouver une méthode de recherche cohérente avec le problème (complétude de la recherche) mais tout de même paramétrable afin de nous permettre d'atteindre des solutions même non optimales en un temps fini. Pendant la phase de conception du système de production, il est

possible de rechercher une solution optimale en fixant à la première itération une longueur de séquence d'opérations à placer égale à la somme totale des opérations à ordonnancer pendant le cycle de production. Cette recherche d'optimalité s'effectuera sur des problèmes de taille « raisonnable » car la combinatoire est toujours présente. Par contre en phase d'exploitation, les contraintes de temps sont très strictes. Il est donc avantageux de diminuer cette profondeur de recherche pour limiter le temps de calcul et d'assurer ainsi l'obtention d'une commande en un temps relativement court (de l'ordre de quelques minutes puisque nous travaillons sur des problèmes d'ordonnancement prévisionnel). Dans ce cas, l'optimalité n'est plus garantie, mais nous pouvons espérer disposer encore d'un ordonnancement de (très) bonne qualité (avec un en-cours proche de l'optimum).

III.2 Synthèse de cette étape

Dans l'analyse de la complexité et de l'influence des différents modules que nous venons d'étudier, les apports de chaque sous-partie à la transformation du modèle initial sous forme d'un FRT-net vers le Graphe d'Événements représentatif de la commande déterministe et cyclique ont été mis en évidence, notamment en terme de formation de sous-ensembles d'éléments du graphe temporisé déterministe.

III.2.1 Liens entre les différentes étapes de l'élaboration de la commande

Cette étape de synthèse souligne maintenant les rapports (notamment de type contraintes de précédence) qui relient les différents modules composant l'étape d'élaboration de la commande d'un régime permanent RP_p , afin d'en dégager la structure générale. Ainsi cette analyse, combinée à l'étude de la complexité du problème général, conduit à la justification théorique de l'approche que nous avons développée et décrite dans ce chapitre.

Il est intéressant de revenir en arrière, à la fin de la phase 1 (détermination et choix des ensembles de routages admissibles), les invariants de place liés aux **ressources de transformation** (ressources simples et multiples) et ceux liés aux différents types de **ressources de transport** (palettes) y sont alors fixés.

Ensuite à la fin de la phase 3 qui considère les flexibilités de permutation, toutes les opérations sont définies et toutes les gammes opératoires sont devenues linéaires. Nous insistons sur la similarité de la démarche qui conduit à la **formation des circuits de procédé et de commande**. Il est d'ailleurs nécessaire de rapprocher ces notions de ressources relatives au procédé et à la commande.

Les hypothèses imposent le nombre de ressources de transformation et donc **le nombre de marques dans les circuits de commande**. C'est la raison pour laquelle le temps de cycle de la commande optimisée est obtenu par la saturation de la (ou des) machine(s) critique(s) de transformation.

A l'opposé l'en-cours, ou les ressources de transport, relève d'un critère à minimiser. En terme de Réseaux de Petri, cela revient à **minimiser le nombre de marques dans les circuits de procédé**. Les regroupements de gammes sont seulement contraints par leur appartenance au même type de ressources de transport.

Les contraintes sont donc plus fortes au niveau des ressources de transformation qu'au niveau des ressources de transport. La combinatoire semble donc plus importante du côté recherche de partitions de l'ensemble des gammes linéaires opératoires (pas de contraintes temporelles) que de la recherche des répartitions discrètes des charges de travail des ressources multiples sur les machines identiques avec respect du temps de cycle. Nous nous sommes intéressés à un système de production relativement simple avec des gammes composées de 3 à 4 opérations. Il est cependant possible de considérer des problèmes d'ordonnancement cycliques avec des gammes de 8 à 10 (maximum) opérations, alors que le nombre de gammes opératoires reste limitée par l'étape de planification fine a priori de la même façon ⁽¹⁾.

Nous avons remarqué de plus, au début de l'étape de partition de l'ensemble des gammes d'un cycle de production (phase 5), que l'étape antérieure de détermination des charges des machines (phase 4) n'imposait aucune contrainte relative aux gammes opératoires. Il n'existe pas de contrainte de précédence entre ces deux parties. Par contre, comme il a été précisé précédemment, il est nécessaire, avant de commencer l'un de ces deux modules, de travailler avec des gammes entièrement linéarisées afin de pouvoir différencier les gammes et les opérations. La séquence des trois premières phases est donc un préalable indispensable avant la formation de tout type de circuit. Il est ensuite possible de travailler de manière simultanée en parallèle sur la formation des circuits de fabrication ou de commande.

Nous avons déjà défini les premières étapes respectives de chaque branche. Mais à la fin de celles-ci, les seuls résultats, auxquels nous avons accès, sont des invariants de place affinés, c'est-à-dire ceux qui vont directement fournir les circuits du graphe d'événements. Il reste un problème d'ordonnancement aussi bien du point de vue gammes appartenant à un même regroupement que de celui des opérations affectées à la même machine de fabrication. D'ailleurs les deux étapes correspondantes : formation des regroupements cycliques où une macro-gamme représente un circuit de procédé et ordonnancement des opérations sur les machines où une machine fournit un circuit de commande, ont été traitées de manière similaire. Le traitement en parallèle de ces solutions peut donc continuer.

A la fin de ces deux étapes, une synchronisation s'impose afin de combiner chaque solution trouvée de part et d'autre, puisque les possibilités trouvées sont indépendantes les unes des autres. C'est seulement à partir de là que la phase de minimisation d'en-cours peut être lancée, d'après les études théoriques sur les graphes d'événements, car les circuits de gammes, de machines et en conséquence les circuits mixtes sont définis ou susceptibles d'être trouvés. La Figure III-14 synthétise la structure de la méthode d'élaboration de la commande que nous venons d'établir.

¹ D'ailleurs, à ce sujet, il serait intéressant, d'un point de vue complexité, de savoir s'il ne vaut pas mieux limiter le nombre total d'opérations réalisées au cours d'un cycle de production lors de l'étape de planification plutôt que le nombre de gammes opératoires lors d'un cycle (taille de l'horizon cyclique de travail), pour pouvoir travailler avec des problèmes plus complexes d'ordonnancement cyclique tout en conservant le compromis souhaité entre horizon de travail, complexité du problème et temps de calcul nécessaire à l'élaboration d'une commande. La notion de nombre d'opérations réalisées semble cependant plus floue que la taille de l'horizon de production, parce que la taille d'un horizon de travail ne dépend pas des flexibilités de gammes opératoires. Si nous fixons le nombre d'opérations, il sera plus difficile de rechercher les ensembles de routages admissibles (respect du nombre d'opérations total ?). De plus le même problème se pose à propos de la limitation possible du nombre d'opérations par ressources de transformation (en vue du problème d'ordonnancement cyclique des opérations sur les machines de transformation), que pour les gammes (en vue du regroupement cyclique des gammes linéaires opératoires).

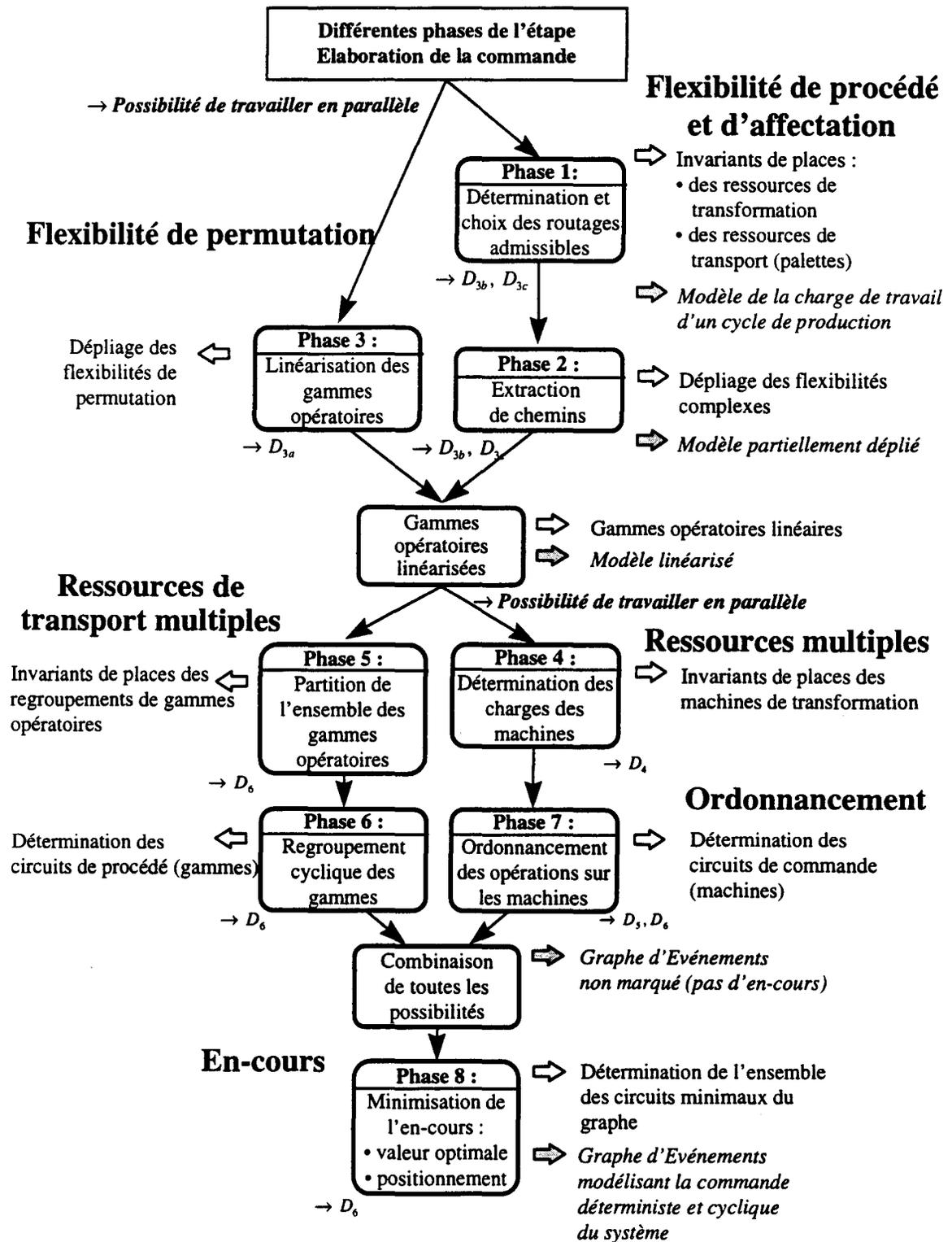


Figure III-14 : Structure générale de l'étape d'élaboration de la commande avec la position relative de chaque module et leur contribution à la transformation progressive du modèle en Graphe d'Evénements représentatif de la commande à établir.

III.2.2 L'approche retenue : cas particulier de la méthode générale d'élaboration de la commande : séquentialisation des différentes étapes

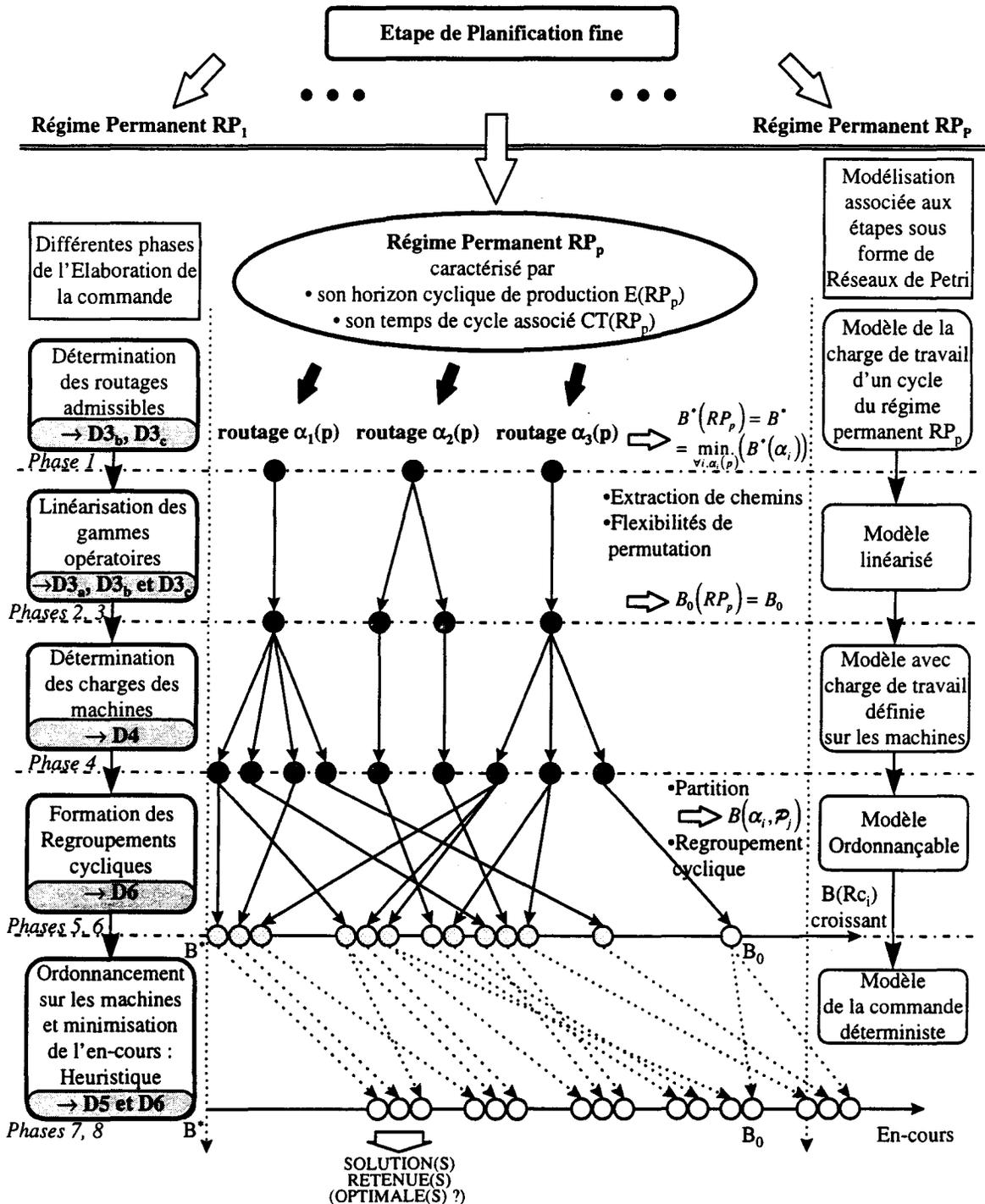


Figure III-15 : Séquencement des différentes phases de l'étape d'élaboration de la commande pour un régime permanent cyclique et déterministe retenu par l'approche développée.

Sur la Figure III-15, nous présentons le séquençement des différents modules retenus par l'approche que nous avons développée au Chapitre II. Par rapport à la structure générale de l'étape d'élaboration de la commande, notre approche ne représente qu'une solution possible pour déterminer la commande déterministe.

La solution retenue a privilégié une approche qui consiste à travailler séparément sur les circuits de fabrication et les circuits de commande. La méthode développée est structurée et progressive, dans le sens où, à chaque étape, un nouveau degré de liberté du système est pris en compte et étudié, pour en dégager toutes les possibilités utilisant l'indéterminisme correspondant, tout en respectant de manière impérative les deux données fondamentales que sont l'ensemble des produits à réaliser lors du cycle de production $E(RP_p)$ lié au régime permanent RP_p et le temps de cycle optimum $CT(RP_p)$.

L'une des justifications principales de cette méthode réside dans l'utilisation d'une méthode particulière de parcours de l'espace de recherche, ainsi que l'heuristique originale développée pour la recherche d'un ordonnancement admissible qui utilise les degrés de liberté restant sur les séquences d'opérations sur les machines afin de minimiser l'en-cours tout en respectant le temps de cycle donné.

III.2.3 Formalisation des deux approches d'élaboration de la commande : méthode globale et méthode progressive

III.2.3.1 Méthode regroupant les premières phases pour résoudre simultanément les indéterminismes

Le rapprochement de l'étape d'élaboration des charges des machines avec les premières étapes de détermination des charges opératoires d'un cycle de production et de linéarisation totale des gammes opératoires se justifie par le fait qu'il est tout à fait possible de générer l'ensemble des solutions, jusqu'à (y compris) cette étape de distribution de charges sur les machines identiques, avec la résolution du système d'équations et d'inéquations linéaires en nombres entiers, qui, au départ, n'était a priori utilisé que pour la détermination des ensembles de routages admissibles. Cette généralisation du problème peut s'effectuer de manière systématique.

La première moitié de la démarche progressive de détermination d'une commande déterministe pour le régime permanent RP_p est donc facilement informatisable. Pour cela il suffit, d'une part, de considérer le modèle partiellement déplié du système et non plus le système plié, afin d'inclure, dans le problème, l'étape d'extraction des chemins à partir des ensembles de routages admissibles. La phase 3 de prise en compte des indéterminismes liés aux flexibilités de permutation (pour notre méthode, ce module est intrinsèquement lié à la phase 2) peut s'inclure dans le problème en généralisant le dépliage des gammes opératoires à ce type de flexibilités. Le modèle ainsi obtenu se compose uniquement de gammes linéaires, les conflits se situant en entrée de gammes pour chaque type différent de pièces à produire.

Considérant l'exemple illustratif, le modèle déplié généralisé initial comporterait ainsi 14 gammes opératoires linéaires en parallèle : 6 ($= 3 * 2 = b_1$) gammes opératoires provenant du dépliage des deux flexibilités de procédé et d'affectation enchaînées des gammes produisant des pièces de type A, 6 ($= 3 * 2 = b_2$) issus du dépliage des flexibilités de permutation et d'affectation enchaînées des gammes fabricant des pièces de type B et 2

(= b_j) venant directement de la flexibilité de procédé des gammes réalisant les pièces de type C, cf. Figure III-16.

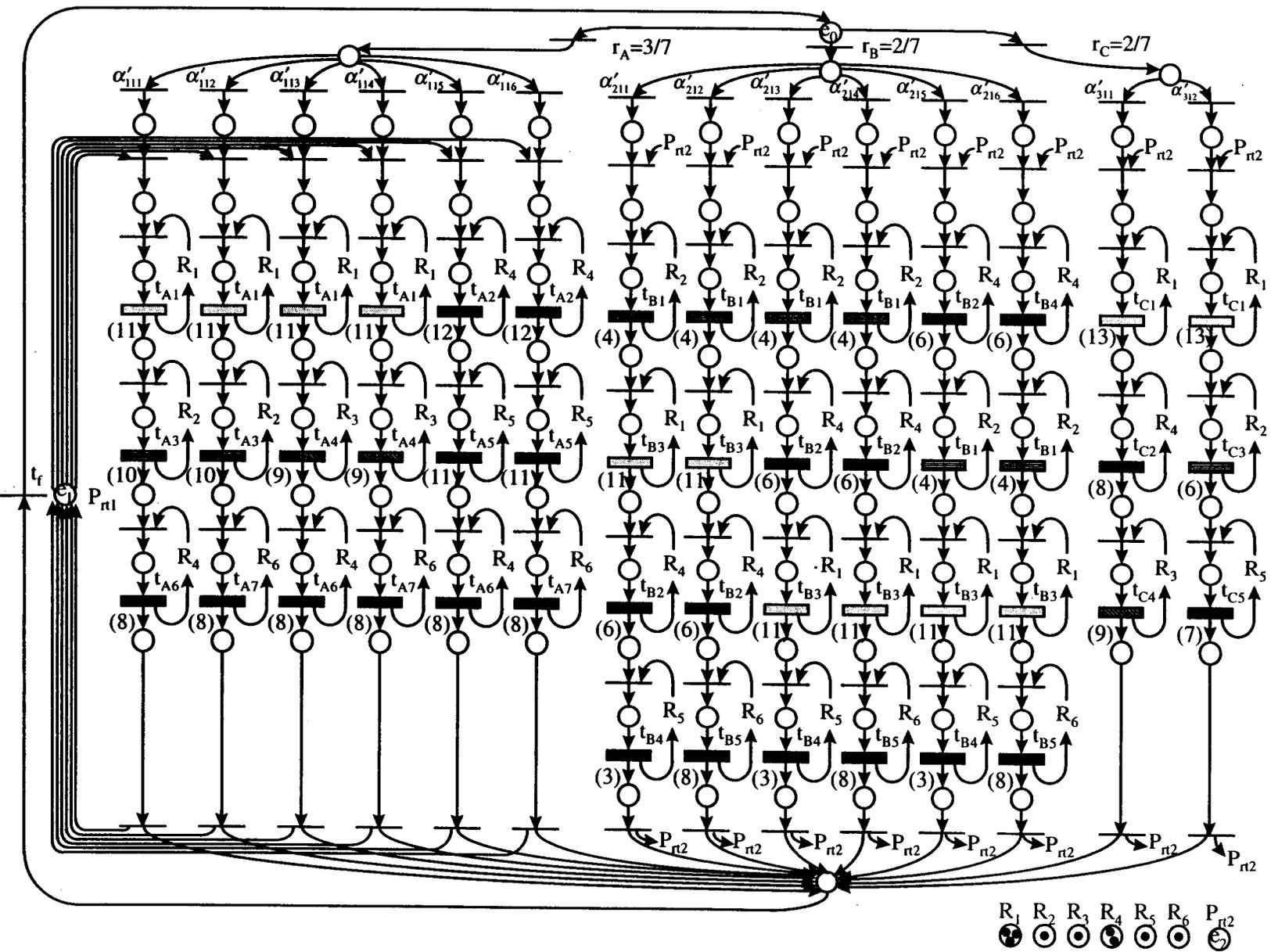


Figure III-16 : Modèle déplié généralisé du système de production respectant $E(RP_p)$

L'intégration de la phase de détermination des charges des machines dans le système d'équations et d'inéquations linéaires en nombres entiers s'effectue au niveau des équations de charges des différentes machines identiques. Au lieu de regrouper toutes les opérations ayant le même temps opératoire dans une seule variable, il suffit au contraire d'associer, pour chaque opération issue des nouvelles gammes opératoires linéaires, une variable indiquant le nombre de fois que celle-ci est utilisée au cours du cycle de production. Soit, par exemple, $O_{12-4.1}(A'_{15})$ la variable associée à l'opération de durée 12 u.t., effectuée sur la machine $M_{4.1}$, et provenant de la (ou des) gamme(s) linéaire(s) opératoire(s) issue(s) de la branche du premier (et seul) conflit sur les gammes fabricant des pièces de type A associée au routage entier A'_{15} (ou plus exactement α'_{115}), puisque nous avons vu que sur ce modèle, les conflits se cantonnent en entrée de gammes et que, de plus, toutes les gammes sont linéaires.

En effet, nous sommes sûrs, dans ce cas, que toutes ces opérations sont distinctes, puisque la linéarisation des gammes opératoires a été réalisée au préalable, permettant ainsi de distinguer toutes les opérations. Les seules opérations identiques proviendront de la répétition d'une de ces gammes lors d'un cycle de fonctionnement. Avec cette nouvelle mise en équation, nous sommes certains de trouver toutes les partitions possibles des charges sur les machines identiques. Nous illustrons ce cas en développant les nouvelles équations de charge des machines identiques ($M_{4.1}$ et $M_{4.2}$), liées à la ressource multiple R_4 , obtenues avec le modèle déplié du système et avec les nouvelles variables liées aux opérations :

(Equation III-6)

$$\begin{aligned} Z_{4.1} &= 12*O_{12-4.1}(A'_{15}) + 12*O_{12-4.1}(A'_{16}) + 8*O_{8-4.1}(A'_{11}) + 8*O_{8-4.1}(A'_{13}) + 8*O_{8-4.1}(A'_{15}) + 8*O_{8-4.1}(C'_{11}) \\ &\quad + 6*O_{6-4.1}(B'_{11}) + 6*O_{6-4.1}(B'_{12}) + 6*O_{6-4.1}(B'_{13}) + 6*O_{6-4.1}(B'_{14}) + 6*O_{6-4.1}(B'_{15}) + 6*O_{6-4.1}(B'_{16}) \\ Z_{4.2} &= 12*O_{12-4.2}(A'_{15}) + 12*O_{12-4.2}(A'_{16}) + 8*O_{8-4.2}(A'_{11}) + 8*O_{8-4.2}(A'_{13}) + 8*O_{8-4.2}(A'_{15}) + 8*O_{8-4.2}(C'_{11}) \\ &\quad + 6*O_{6-4.2}(B'_{11}) + 6*O_{6-4.2}(B'_{12}) + 6*O_{6-4.2}(B'_{13}) + 6*O_{6-4.2}(B'_{14}) + 6*O_{6-4.2}(B'_{15}) + 6*O_{6-4.2}(B'_{16}) \end{aligned}$$

sous les contraintes de trois types :

- respect en discret de l'horizon de production $E(RP_p) = \{A, A, A, B, B, C, C\}$, pour les ratios entiers de routage I'_{jk} (ratio de routage lié à la k -ème branche du j -ème conflit des gammes fabricant des pièces de type i) :

$$\begin{aligned} &(A'_{11}, A'_{12}, A'_{13}, A'_{14}, A'_{15}, A'_{16}, B'_{11}, B'_{12}, B'_{13}, B'_{14}, B'_{15}, B'_{16}, C'_{11}, C'_{12}) \in IN^{14} \\ &\begin{cases} A'_{11} + A'_{12} + A'_{13} + A'_{14} + A'_{15} + A'_{16} = A = 3 \\ B'_{11} + B'_{12} + B'_{13} + B'_{14} + B'_{15} + B'_{16} = B = 2 \\ C'_{11} + C'_{12} = C = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

- principe de conservation du nombre d'opérations après répartition de ces dernières sur les différentes machines identiques :

soit $O_{t-r,m}(\alpha'_{ijk})$ le nombre d'opérations de durée t issues de la branche associée au ratio de routage α'_{ijk} affectées à la m -ème machine identique appartenant à la ressource de type r . Nous supposons implicitement (et à juste titre pour cet exemple illustratif) qu'il n'existe pas deux types différents d'opérations de même durée et appartenant à la même ressource sur une même gamme linéaire (dans le cas contraire, il faudrait changer de notation).

Avec le dépliage complet des gammes et après la répartition discrète des charges, nous avons :

$$\sum_{\forall m} O_{t-r,m}(\alpha'_{ijk}) = I'_{jk}, \text{ pour tous les types distincts d'opération du système.}$$

- respect du temps de cycle :

$$\begin{cases} CT(RP_p) = 24 \geq Z_{4,1} \\ CT(RP_p) = 24 \geq Z_{4,2} \end{cases}$$

Deux remarques sont à apporter à propos de cette méthode.

Nous avons implicitement distingué les machines provenant de la même ressource multiple avec la distinction des charges de travail associées. Il faudrait rajouter des contraintes pour supprimer les cas indésirables (quand cela est nécessaire).

La deuxième remarque porte sur le nombre de paramètres du système d'équations et d'inéquations en nombres entiers. En passant au modèle déplié, le nombre de routages à considérer est plus important, en raison du dépliage des flexibilités enchaînées. Dans ce cas, comme nous l'avons vu au paragraphe concernant l'étape d'extraction de chemins, il ne faut plus envisager la somme des variables de routage du modèle plié, mais bien le produit de ces paramètres, pour obtenir le nombre total de routages entiers. Pour l'exemple illustratif, sur les gammes opératoires fabricant des pièces de type A et B, le passage au modèle déplié, fait passer le nombre de paramètres de 5 ($= 3 + 2$) à 6 ($= 3 * 2 = b_1 = b_2$). Enfin la linéarisation des gammes opératoires accroît aussi le nombre de variables représentant les différentes opérations effectuées sur les machines. En effet les gammes sont plus nombreuses. Elles sont toutes différentes. Il est donc nécessaire d'associer un paramètre à chaque opération apparaissant sur ces gammes.

La considération du modèle déplié généralisé permet donc de résoudre les 4 premiers modules de la méthode : détermination des ensembles de routages admissibles, extraction des chemins, prise en compte des flexibilités de permutation des gammes opératoires et la répartition discrète des charges de travail sur les machines identiques.

III.2.3.2 Méthode progressive développée dans ce mémoire

L'avantage de la résolution simultanée des quatre premières étapes réside dans la facilité de systématiser cette procédure. L'inconvénient principal de cette approche tient intrinsèquement à la réunion de plusieurs degrés de liberté, afin de les résoudre simultanément. En effet plus le regroupement des indéterminismes est important, plus la taille de l'espace

de recherche, qu'il faut parcourir, augmente (de manière non linéaire), cf. Tableau III-9 pour comparer les valeurs croissantes de la taille de l'espace de recherche en fonction du regroupement progressif des différents indéterminismes sur l'exemple illustratif.

Au contraire notre méthode, qui prend en compte progressivement les différents indéterminismes du système, cherche à éviter cette explosion combinatoire. Le problème avec ce type de regroupement de plusieurs phases tient dans le fait que l'espace de recherche qu'il faut parcourir ne possède qu'une partie infime de solutions qui aboutiront à un modèle ordonnançable. La seule contrainte est le respect de l'horizon de production. La plupart des éléments de l'espace de recherche ne respectent pas le temps de cycle du système. C'est pourquoi, avec la détermination dès le départ des ensembles de charges admissibles, nous n'avons conservé que les solutions qui donneront finalement une (ou plusieurs) commande(s) qui respecte(ent) le temps de cycle de production. Au fur et à mesure de la prise en compte des autres indéterminismes, de nouvelles solutions ont été créées à partir de ces premières solutions. Cependant, nous sommes toujours certains que ces solutions respectent la vitesse de production requise. De plus la taille de ces ensembles reste toujours faible par rapport à l'espace de recherche qu'il faudrait parcourir de façon exhaustive.

C'est cette approche qui semble la moins coûteuse en temps de recherche. C'est pourquoi nous nous sommes efforcés, dans la mesure du possible, de formaliser et de généraliser la méthode d'obtention de nouvelles solutions à chaque étape. Sauf peut-être pour l'étape 6, la généralisation de l'approche ne semble pas poser de problème. Contrairement à la première approche, celle-ci est plus difficile à implanter mais elle semble plus prometteuse en raison des gains de temps résultant du parcours d'un espace de recherche de taille nettement plus faible.

Il serait bien sûr plus intéressant de disposer de la valeur minimale de l'en-cours plutôt que d'une borne inférieure pour éviter de maintenir trop longtemps des solutions qui, d'après la comparaison de la valeur de leur borne associée avec le niveau minimal d'en-cours nécessaire et suffisant, ne peuvent donner intrinsèquement une commande optimale.

III.3 Conclusion

Pour la méthode d'élaboration de la commande cyclique et déterministe d'un régime permanent, nous nous sommes attachés, dans ce chapitre, à déterminer, pour chaque étape et donc pour chaque résolution d'un type d'indéterminisme, le nombre total de solutions admissibles engendrées, appelé **ordre de complexité** de l'approche utilisée à ce stade de l'analyse. Il dépend bien évidemment de l'exemple étudié. Nous n'avons pas recherché le calcul de **complexité** des problèmes de génération, à chaque étape, des solutions à partir des solutions trouvées durant la précédente phase. Nous avons cependant réussi, en général, à formuler les problèmes en terme de résolution d'un système plus ou moins contraint d'équations et / ou d'inéquations en nombres entiers.

Nous rappelons que, dans cette partie de la méthode d'élaboration de la commande prévisionnelle et déterministe, nous cherchons à minimiser le dernier critère d'optimisation relatif à l'en-cours maximal présent dans le système. Nous sommes a priori obligés de conserver toutes les solutions admissibles puisqu'il est impossible d'établir la valeur minimale exacte du niveau d'en-cours nécessaire et suffisant sans développer l'analyse complète de chaque solution. Il est donc nécessaire de résoudre tous les degrés de liberté pour calculer la commande déterministe qui minimise l'en-cours.

Nous avons dégagé deux orientations pour générer les solutions dites ordonnançables, pour lesquels il ne reste plus qu'à ordonnancer les opérations sur les machines et à minimiser l'en-cours.

La première solution consiste à regrouper tous les indéterminismes possibles du système et à rechercher ainsi toutes les solutions d'un système d'équations et d'inéquations linéaires en nombres entiers. Le problème réside dans la taille de l'espace de recherche à parcourir a priori pour trouver toutes les solutions admissibles. Plus les degrés de liberté sont regroupés, et plus nous considérons des horizons cycliques de production de grande cardinalité, plus la taille de cet espace de recherche croît, et de façon non linéaire, donc plus la recherche des solutions ordonnançables est longue.

La deuxième approche retenue consiste à considérer progressivement les degrés de flexibilité du système de production. Pour le premier type d'indéterminisme, les ratios de routage, nous devons également résoudre un système d'équations et d'inéquations linéaires en nombres entiers. Cependant l'espace de recherche est nettement plus restreint. A la fin de cette étape, nous obtenons plusieurs ensembles de ratios de routage qui répondent aux contraintes fixées : respect de l'horizon discret de travail et du temps de cycle optimal associé. Ensuite, à chaque nouvelle étape, nous tenons compte d'un nouveau degré de flexibilité et générons à partir des solutions trouvées à l'étape précédente de nouvelles solutions qui respectent toujours les contraintes fixées caractéristiques du régime permanent sur lequel nous cherchons une commande cyclique prévisionnelle et qui fixent l'indéterminisme considéré à cette étape. Nous avons identifié, à chaque phase de notre approche, la démarche qu'il faut utiliser pour trouver les nouvelles solutions admissibles : en général, nous avons à résoudre un « petit » système d'équations et / ou d'inéquations linéaires en nombres entiers. Au contraire de l'autre méthode, nous limitons le plus possible notre espace de recherche, pour ne travailler toujours qu'avec des solutions admissibles. Nous avons au départ de chaque phase, des solutions admissibles. Pour chaque « ancienne » solution, nous résolvons le même système afin de générer à partir de cette solution les nouvelles, qui sont elles aussi admissibles, mais qui fixent ici un nouveau degré de flexibilité. A la fin de cette méthode, nous obtenons aussi tous les systèmes ordonnançables.

Nous avons étudié dans ce chapitre, l'influence de chaque degré de liberté, et donc indirectement de la taille de l'horizon répétitif de travail sur le nombre final de solutions créées. Mis à part la résolution du système à la phase 1, pour lequel nous n'avons aucune maîtrise sur le nombre de solutions trouvées, nous avons constaté que pour un indéterminisme donné, plus l'horizon de production étudié a une grande taille, plus le nombre de solutions admissibles engendrées à partir d'une solution de l'étape précédente est important. La fonction n'est certes pas linéaire. Mais, plus l'horizon est important en général, plus il existe de flexibilités pour un degré donné de flexibilité.

Avec notre méthode, nous avons réussi à formuler le problème général d'ordonnancement cyclique avec minimisation de l'en-cours et proposé un algorithme exact pour le résoudre. Cependant le problème demeure NP-difficile malgré le développement d'un sens de parcours des solutions ordonnançables. C'est pourquoi nous avons eu recours à de nouvelles heuristiques qui ne cherchent plus l'optimalité de la solution, mais trouvent de « bonnes » solutions dans des contraintes temporelles données en vue de l'implantation en phase d'exploitation. Nous justifions aussi le fait de limiter, dès la phase de planification fine, la taille de l'horizon cyclique de travail pour ne conserver que des solutions que nous pourrions effectivement étudiés dans les temps de calcul impartis.

Chapitre IV :

IV. Conclusion et perspectives

IV.1 Conclusion

Nous proposons tout d'abord de reprendre les perspectives de recherche du mémoire de thèse [OHL 95a] pour apprécier les apports de notre travail.

Dans les perspectives de conclusion de son mémoire de thèse, Harald Ohl indiquait que :

« La prise en compte de décisions dépendantes permettrait d'une part d'inclure les ratios de production dans l'optimisation du système et d'autre part de tenir compte de certains types d'associations de flexibilités que nous avons écartés de notre étude. »

Partant de cette idée, nous avons intégré dans l'étape de planification fine les classes de décisions D_1 : choix des produits à fabriquer simultanément au cours d'un régime permanent et D_2 : choix des ratios de production. Pour cela, nous avons transformé le problème de programmation linéaire, obtenu après analyse de flux du système de production soumis à des ratios fixés et utilisé pour résoudre une partie des flexibilités de gammes opératoires, en un problème de programmation multicritère et multilinéaire en nombres entiers afin de résoudre simultanément les classes D_1 et D_2 .

Puisque le problème intègre déjà des termes multilinéaires avec, par exemple pour la minimisation du makespan théorique : $\sum_{p=1}^{RP_{\max}} X(RP_p) * CT(RP_p)$, nous pouvons a priori facilement intégrer les flexibilités complexes de gammes opératoires de type flexibilités imbriquées. Cependant, comme nous avons pu le voir précédemment, l'introduction de flexibilités imbriquées n'apporte pas de termes multilinéaires mais plutôt de nouvelles variables (ratios entiers de routage), qui sont contraintes par des valeurs d'autres variables (ratios entiers de routage).

Nous intégrons dans ce problème des critères de performances de productivité, de limitation de la taille des horizons cycliques de production pour limiter la complexité de la recherche de la commande dans une deuxième étape. Mais il est tout à fait possible d'introduire d'autres contraintes, de type limitation de la taille des stocks d'outils sur les machines à commande numérique, cf. [STE 91]. Ainsi à la fin de cette étape de planification fine, nous avons décomposé la production à réaliser à moyen voire court terme en une succession d'un nombre fini de régimes permanents cycliques caractérisés par l'horizon cyclique de production $E(RP_p)$ et le temps de cycle optimal $CT(RP_p)$. Nous aboutissons également à la définition d'une première borne inférieure du makespan de la production totale à réaliser. Nous ne calculons effectivement qu'une borne inférieure en raison du fait que nous ne tenons pas compte des régimes transitoires de mise en place et de fin de la commande cyclique du régime permanent considéré.

H. Ohl indiquait d'autre part que :

« En premier lieu il paraît nécessaire de rechercher des algorithmes adaptés à la résolution de certains sous-problèmes identifiés dans ce mémoire. Cette remarque concerne notamment la détermination des taux de routage ainsi que celle de la répartition des charges associées à tout type de ressources multiples. En effet, les résultats obtenus pour ces sous-problèmes influencent directement les valeurs du couple débit - horizon. A cet effet, une évaluation de la complexité de ces problèmes peut être utile afin de déterminer dans quelle mesure une éventuelle recherche exhaustive est envisageable. »

Dans la deuxième partie de notre méthode : au cours de l'étape d'élaboration de la commande d'un régime permanent, cyclique et déterministe, nous avons détaillé cette approche en phases élémentaires qui considèrent un seul type de flexibilités par phase. Nous avons ainsi pu évaluer la complexité de chacune de ces étapes et ainsi justifier cette résolution progressive des indéterminismes par rapport à un regroupement de plusieurs degrés de liberté avec une résolution simultanée. L'influence de certains paramètres tels que la taille de l'horizon de production a pu être précisée pour chacune de ces phases afin d'affiner les limites des tailles des horizons de production des différents régimes permanents que nous pouvons considérer au niveau de l'étape de planification fine pour arriver à des temps de calcul raisonnables. A chaque phase de cette étape, nous avons réussi à associer une modélisation sous forme de Réseau de Petri. Ainsi le modèle FRT-net se transforme progressivement vers un modèle Graphe d'Evénements de la commande déterministe.

En ce qui concerne la résolution des deux dernières classes de décisions : D_5 et D_6 , nous avons formulé précisément le problème général d'ordonnancement cyclique des opérations sur les machines avec minimisation de l'en-cours. Cette formulation nous a permis de trouver une nouvelle heuristique qui peut servir d'algorithme exact à ce problème NP-complet selon les contraintes apportées (ou non) à certains paramètres de cette heuristique.

H. Ohl faisait également état de l'intérêt d'analyser les régimes transitoires dans une démarche globale d'optimisation :

« L'analyse des régimes transitoires entre fonctionnements répétitifs doit être appréhendée dans la perspective d'une implantation réelle de la commande. En effet, dans une approche d'optimisation globale il faut également considérer le potentiel d'optimisation lié à cette problématique. »

Des travaux de recherche sont actuellement en cours sur l'étude des régimes transitoires. Nous avons déjà justifié l'intérêt de cette étude et mis en valeur l'apport possible d'une optimisation des régimes transitoires sur la minimisation du makespan de la production, sur la maximisation de la durée du régime permanent et sur la minimisation de la durée des régimes transitoires à partir du développement d'un exemple. Nous cherchons les différents paramètres qui influent sur les durées des différents régimes transitoires pour maîtriser et minimiser leur importance, puisque notre premier but est de réaliser la production lors des régimes permanents que nous avons choisis et donc que nous connaissons parfaitement. Nous profitons également de cette étude pour comparer les performances théoriques de

l'ordonnancement cyclique, a priori simplificateur, et de l'ordonnancement général (ici au plus tôt) au niveau du makespan, paramètre le plus important de notre étude avec la réalisation effective de la production demandée.

Enfin, H. Ohl faisait référence aux systèmes d'assemblage en terme de nouvelle complexité à étudier :

« L'extension aux systèmes d'assemblage est également à considérer. Cette extension entraînerait alors des modifications sensibles au niveau de la modélisation et de l'analyse, en particulier en ce qui concerne l'en-cours et le système de transport. »

L'extension de notre méthode, se rapportant au système de production de type usinage où les opérations de transfert sont d'un ordre inférieur à celles des opérations de transformation, au système de production de type assemblage, où ces deux types d'opérations sont d'un même ordre reste une perspective très intéressante. En effet, dans ce cas, il devient possible que l'une des ressources du système de transport devienne une machine critique. Il est donc impératif de tenir compte de ce type d'opérations dès le départ et de détailler finement les opérations de transfert.

Lorsque les opérations d'assemblage concernent au moins deux pièces circulant dans l'atelier flexible, des problèmes de synchronisation vont apparaître entre pièces au niveau des ordonnancements. Pour l'assemblage de type placement de composants sur des circuits imprimés, il est nécessaire de résoudre un premier problème d'optimisation de la répartition des composants sur les machines universelles afin de limiter les transferts de pièces (ici les circuits imprimés) entre les machines. Ceci tient au fait que la capacité de ces machines d'assemblage est limitée en nombre de composants différents (ce problème est presque équivalent à la capacité limitée des stocks d'outil des machines à commandes numériques).

Globalement nous avons pu améliorer de manière sensible les résultats de l'analyse quantitative développée dans [OHL 95a], dans l'esprit de la démarche de conception CASPAIM, notamment en ce qui concerne l'utilisation des Réseaux de Petri comme outil de modélisation ainsi que l'approche hiérarchisée associée.

IV.2 Perspectives sur la méthode d'élaboration de la commande

L'étape de synthèse du chapitre III peut servir de point de départ à des projets de développement de nouvelles extensions de l'heuristique dans l'optique d'une diminution du temps de calcul. Nous pensons notamment à regrouper certaines des dernières phases de l'étape d'élaboration de la commande dans le module global d'ordonnancement cyclique. Nous voulons pouvoir conserver certaines flexibilités pour faciliter l'ordonnancement cyclique et éviter également l'explosion combinatoire des systèmes dits ordonnançables. Le principal inconvénient de ces approches provient de la diminution parfois trop importante de l'espace de recherche des solutions pouvant entraîner l'apparition de contraintes fortes

empêchant l'accès à la solution optimale. Rappelons toutefois que notre démarche se caractérise par la conservation, le plus longtemps possible, de toutes les possibilités engendrées par la prise en compte progressive des différents degrés de liberté du système de production afin d'être certain de garder la solution optimale et de n'avoir recours, qu'au dernier moment, à une heuristique en limitant la complexité (NP-difficile) du dernier problème (ordonnancement des opérations sur les machines avec la minimisation de l'en-cours). Même si l'optimalité n'est plus totalement garantie (sauf dans certains cas), les résultats trouvés sur les différents exemples traités nous amènent à penser que l'heuristique fournit le plus souvent des solutions très proches de l'optimum. Il est malheureusement impossible de prétendre à l'optimalité sauf lorsque le nombre d'en-cours est égal à la borne inférieure associée au regroupement cyclique.

C'est dans ce sens que de nouveaux axes de recherche peuvent être proposés :

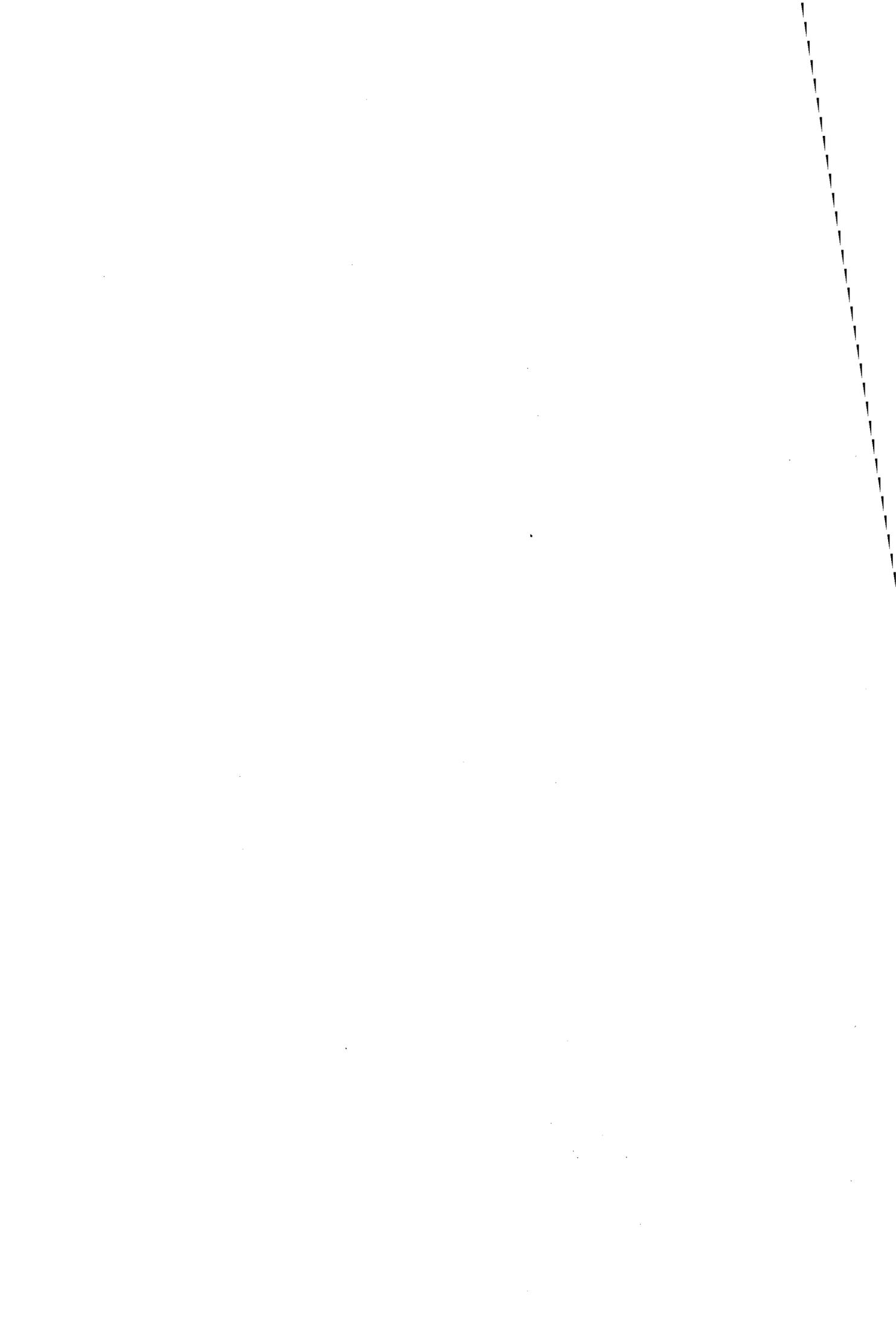
- Il serait intéressant de pouvoir affiner encore la borne minimale d'en-cours, afin de trouver de nouvelles conditions d'optimalité.
- Le seul paramètre, dont nous disposons pour l'instant pour permettre « d'évaluer » une solution avant l'application de l'heuristique et donc avant sa détermination complète, demeure la borne inférieure de l'en-cours. Est-il possible de dégager d'autres paramètres significatifs ?
- La méthode de parcours ordonné de l'espace de recherche reste encore assez générale puisqu'elle laisse de nombreux regroupements cycliques, ayant la même borne inférieure, sur un même pied d'égalité. L'ordre, dans lequel ces différentes solutions sont étudiées, relève encore en général du hasard. Il est difficile de juger de l'effet de tel regroupement ou de telles répartitions de charges sans envisager l'ordonnancement proprement dit des opérations avec la détermination de l'en-cours. Il est vrai qu'il n'existe pas en général une seule solution. Il devrait être intéressant soit d'envisager l'intégration d'autres modules dans l'heuristique (en évitant les pièges que nous venons d'évoquer), soit de développer des méthodes plus fines de parcours de l'espace de recherche. Même s'il n'est pas possible de chiffrer de manière théorique les gains apportés par ces approches, au bout du compte, à l'application de ces méthodes sur des cas concrets, les gains sont significatifs, cf. l'exemple développé tout au long de ce chapitre. En général ce sont des méthodes qui relèvent du bon sens.
- Il reste aussi un travail encore assez important de formalisation des problèmes rencontrés (combinatoire, dénombrement) pour pouvoir plus facilement les implanter (ou les résoudre ?).

Une question reste fondamentalement de s'interroger sur l'intérêt réel de la recherche de la valeur optimale de l'en-cours. L'intérêt principal de cette approche réside dans la formalisation originale du problème général d'ordonnancement cyclique avec respect du temps de cycle optimal et recherche de l'optimisation du niveau d'en-cours maximal. Mais, comme nous avons pu le voir, notamment par l'intermédiaire du nouvel algorithme d'ordonnancement et l'étude de la complexité des différentes étapes de la méthode d'élaboration de la commande, la recherche de l'optimalité reste surtout un problème théorique, difficilement applicable en phase d'exploitation d'un système de production. Les temps de calcul sont trop contraignants pour pouvoir conduire à l'optimalité de façon relativement réactive. Même si les ordinateurs sont capables de traiter de plus en plus vite les informations, il reste que certains problèmes restent trop complexes pour envisager une

éventuelle recherche exhaustive de toutes les solutions. Il faut donc arriver à un « bon » compromis entre tous ces paramètres. Notre méthode, avec quelques éventuelles améliorations peut représenter une bonne solution à ce problème général de recherche d'ordonnement cyclique et déterministe des régimes permanents.

C'est pourquoi nous avons envisagé des variantes de l'heuristique proposée dans ce mémoire pour résoudre le problème NP-difficile de l'ordonnement des opérations sur les machines tout en minimisant l'en-cours maximal. Ces nouvelles heuristiques devraient permettre d'arriver à un meilleur compromis entre performances du système (niveau d'en-cours, temps de cycle) et temps de calcul. D'ailleurs, il ne semble pas raisonnable de travailler avec un ordonnancement prévisionnel qui minimise l'en-cours ne prenant pas en compte les opérations de transport, puisque la considération des opérations de transfert entre machines risque d'augmenter le niveau d'en-cours, s'il n'est pas possible de réaliser ces opérations en temps masqué.

Concernant enfin les régimes transitoires, pour l'instant, seuls les régimes permanents ont été optimisés. Il subsiste le problème d'implantation de la commande. Il est donc nécessaire de trouver et d'évaluer la période de mise en régime de la production (phase transitoire de pré-production) et de fin de production (phase transitoire de post-production) pour un régime permanent simple puis pour une succession de régimes avec notamment l'utilisation des travaux [LOP 92] et [CAR 96]. Il s'agira alors de minimiser l'influence de ces régimes transitoires intermédiaires. Puis, la solution trouvée, le problème consistera à faire le lien entre ces différents régimes à l'aide de l'outil de modélisation les Réseaux de Petri.



Chapitre V

V. Références bibliographiques

- [ALA 82] ALAIWAN H. et MEMMI G.
Algorithmes de recherche des solutions entières positives d'un système linéaire d'équations homogènes, *Revue technique Thomson-CSF*, 1982, Vol. 14, n° 2, pp.125-135.
- [ALA 89] ALAIWAN H. et TOUDIC J.M.
Recherche des semi-flots, des verrous et des trappes dans les Réseaux de Petri, *Technique et Science Informatiques*, 1989, Vol. 4, n° 1, pp.103-112.
- [AMA 92] AMAR S., CRAYE E. et GENTINA J.-C.
A method of hierarchical specification and prototyping of FMS, *IEEE-ETFA 92, Melbourne, Australie, 1992*.
- [AMA 94] AMAR S.
Systèmes automatisés et flexibles de production manufacturière: méthode de conception du système de coordination par prototypage orienté objet de la partie procédé, *Thèse de Doctorat en Productique, Automatique et Informatique Industrielle, Université de Lille 1, 1994*.
- [ART 96] ARTIGUES C. et ROUBELLAT F.
Characterization of a set of schedules in a job shop with sequence-dependent setup times, *Symposium on Discrete Events and Manufacturing Systems, CESA '96 IMACS Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications, Lille, France, juillet 1996, pp.455-460*.
- [AUS 94] AUSFELDER C.
Contribution à la conception d'un système de conduite pour les systèmes flexibles de production manufacturière : modélisation et validation de la commande, *Thèse de Doctorat, Université de Lille 1, 1994*.
- [BAC 89] BACELLI F. et MAKOWSKI A.
Queueing models for systems with synchronization constraints, *Proceedings of the IEEE, janvier 1989, Vol. 77, n° 1, pp.138-160*.
- [BAS 75] BASKETT F., CHANDY K.M., MUNTZ R.R. et PALACIOS F.G.
Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers, *J. ACM, avril 1975, Vol. 22, n° 2, pp.248-260*.

-
- [BEN 96] BEN ABDALLAH I.
Méthodes d'allocation de ressources dans les Systèmes Flexibles de Production Manufacturière fondées sur l'analyse structurelle des Réseaux de Petri, *Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Paris, juillet 1996.*
- [BER 96] BERRUET P. et LY F.
Terminologie et Approche fonctionnelle de la Supervision, *Note Interne NI/96/3, Laboratoire d'Automatique et d'Informatique industrielle de Lille, septembre 1996.*
- [BIL 93] BILLAUT J.-C. et ROUBELLAT F.
Significant States and Decision Making for Real Time Workshop Scheduling, *Proceedings of the 7th Annual European Computer Conference on Computers in Design, Manufacturing and Production, Paris-Evry, France, mai 1993, pp.493-500.*
- [BIL 95] BILLAUT J.-C., ROUBELLAT F. et VILLAUMIE M.
Prise en compte de l'affectation dans le logiciel d'ordonnancement Temps Réel Ordo, *Journées d'Etude du GdR Automatique, Affectation et Ordonnancement, Tours, France, septembre 1995, pp.113-131.*
- [BOI 91] BOIS S.
Intégration de la gestion des modes de marche dans le pilotage d'un système automatisé de production, *Thèse de Doctorat, Université de Lille 1, 1991.*
- [BOU 93a] BOUREY J.-P.
Méthode de conception de la commande de systèmes flexibles de production manufacturière, *Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Lille 1, 1993.*
- [BOU 93] BOUHCHOUC A., FREIN Y. et DALLERY Y.
Evaluation de performances de lignes de production bouclées par une méthode analytique, *APII, Vol. 27, n° 3, pp.315-342.*
- [CAM 90] CAMPOS J.
Performance bounds for synchronized queueing networks, *Ph.D. thesis, Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas, Universidad de Zaragoza, Espagne, décembre 1990.*
- [CAM 93] CAMUS H.
Optimisation du routage des pièces dans un atelier flexible par la méthode du simplexe, *mémoire de DEA de Productique, Université de Lille 1, juin 1993.*

-
- [CAM 96a] CAMUS H., OHL H., KORBAA O. et GENTINA J.-C.
Cyclic schedules in Flexible Manufacturing Systems with groups of identical machines, *Rensselaer's Fifth International Conference on Computer Integrated Manufacturing and Automation Technology, CIMAT'96, Grenoble, France, mai 1996, Vol. 1, pp.345-350.*
- [CAM 96b] CAMUS H., OHL H., KORBAA O. et GENTINA J.-C.
Cyclic schedules in Flexible Manufacturing Systems with flexibilities in operating sequences, *First International Workshop on Manufacturing and Petri Nets, 17th International conference on Application and Theory of Petri Nets, Osaka, Japon, juin 1996, pp.97-116.*
- [CAM 96c] CAMUS H., OHL H., KORBAA O. et GENTINA, J.-C.
Petri Net Modeling of flexible Operating Sequences in a F.M.S. and Implications for the search of cyclic schedules, *Symposium on Discrete Events and Manufacturing Systems, CESA'96 IMACS Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications, Lille, France, juillet 1996, pp.218-225.*
- [CAR 88] CARLIER J. et CHRETIENNE P.
Problèmes d'ordonnancement: modélisation / complexité / algorithmes, *Editions Masson, Paris, France, 1988.*
- [CAR 96] CARLIER J., PERIDY L. et PINSON E.
Recent developments on the Job-shop scheduling problem, *Rensselaer's Fifth International Conference on Computer Integrated Manufacturing and Automation Technology, CIMAT'96, Grenoble, France, mai 1996, Vol. 1, pp.249-254.*
- [CAS 96] CASTELAIN E.
Contribution à la conduite des systèmes flexibles de production manufacturière, *Habilitation à diriger des recherches, Université de Lille 1, juillet 1996.*
- [CER 88] CERNAULT A.
La simulation des systèmes de production, *Cepadues-Editions, Toulouse, France, 1988.*
- [CHI 93] CHIOLA G., ANGLANO C., CAMPOS J., COLOM J.M. et SILVA M.
Operational analysis of timed Petri Nets and applications to the computation of performance bounds, *Proceedings of 5th International Workshop on Petri Nets and Performance Models, PNPM 93, Toulouse, France, pp.128-137.*

-
- [CHR 85] CHRETIENNE P.
Analyse des régimes transitoire et asymptotique d'un graphe d'événements temporisé, *Technique et Science Informatiques*, 1985, Vol. 4, n° 1, pp.127-142.
- [COH 85] COHEN G., DUBOIS D., QUADRAT J.-P. et VIOT M.
A linear system theoretic view of discrete-event processes and its use for performance evaluation in manufacturing, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, Vol. AC-30, n° 3, pp.210-220.
- [COH 89] COHEN G., MOLLER P., QUADRAT J.-P. et VIOT M.
Algebraic tools for the performance evaluation of discrete event systems, *Proceedings of the IEEE*, 1989, Vol. 77, pp.39-56.
- [COM 71] COMMONER F., HOLT A.W., EVEN S. et PNUELI A.
Marked directed graphs, *Journal of Computer and System Sciences*, 1971, Vol. 5, n° 5, pp.511-523.
- [COM 74] COMTET L.
Advanced Combinatorics : The Art of Finite and Infinite Expansions, *D. Reidel*, 1974.
- [CRA 94] CRAYE E.
Contribution au contrôle / commande de Systèmes Flexibles de Production Manufacturière, *Habilitation à diriger des recherches, Université de Lille 1, décembre 1994*.
- [CRU 91] CRUETTE D.
Méthodologie de conception des systèmes complexes à événements discrets : application à la conception et à la validation de la commande de cellules flexibles de production dans l'industrie manufacturière, *Thèse de Doctorat, Université de Lille 1, 1991*.
- [DAL 84] DALLERY Y.
Une méthode analytique pour l'évaluation des performances d'un atelier flexible, *Thèse de Doctorat en Automatique, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1984*.
- [DAU 92] DAUZERE-PERES S.
Planification et ordonnancement de la production: une approche intégrée cohérente, *Thèse de Doctorat en Automatique, Université Paul Sabatier de Toulouse, 1992*.

-
- [DEA 93] DE ARAUJO S.L., BOUHCHOUCH A., DI MASCOLO M. et FREIN Y.
On the Analysis of a Stochastic Petri Net Modeling a Ressource Sharing Situation, *IEEE Conference on Systems, Man et Cybernetics, Octobre 1993, Le Touquet, France, Vol. 1, pp.301-306.*
- [DES 95] DESEL J. et ESPARZA J.
Free choice Petri Nets, *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Cambridge University Press, 1995.*
- [DIA 87] DIAZ M.
Applying Petri Net based models in the design of systems, in *Concurrency et Nets*, K. Voss et G.Rozenberg, Springer Verlag, Berlin, 1987, pp.435-460.
- [DIC 93] DI CESARE F., HARHALAKIS G., PROTH J.-M., SILVA M. et VERNADAT F.B.
Practice of Petri Nets in manufacturing, *Chapman et Hall, London, 1993.*
- [DIM 92] DI MASCOLO M., FREIN Y. et DALLERY Y.
Queueing Network Modeling and Analysis of Kanban Systems, *IEEE*, pp.202-211.
- [DUB 83] DUBOIS D. et STECKE K.E.
Using Petri Nets to represent production processes, *Proceedings of the 22nd Conference on Decision and Control, San Antonio, Texas, U.S.A., décembre 1983, pp.1062-1067.*
- [DUB 90] DUBOIS D. et STECKE K.E.
Dynamic analysis of repetitive decision-free discrete-event processes : applications to production systems, *Annals of Operations Research, 1990, Vol. 26, pp.323-347.*
- [ELK 93] ELKHATTABI S.
Intégration de la surveillance de bas niveau dans la conception des systèmes à événements discrets: application aux systèmes de production flexibles, *Thèse de Doctorat, Université de Lille 1, 1993.*
- [EOW 95] EOWYN (LABesançon, LAI Lille, LITours)
Intégration des différents niveaux de commande dans le pilotage d'un système de production : de la planification prédictive au pilotage réactif et à la supervision, *Projet MESR DSPT8 1995 - 1996.*

-
- [ERS 76] ERSCHLER J., ROUBELLAT F. et VERNHES J.P.
A decision making process for the real time control of process unit,
International Journal of Production Research, 1976, Vol. 14, n° 2.
- [ERS 82] ERSCHLER J., LEVEQUE D. et ROUBELLAT F.
Periodic loading of Flexible Manufacturing Systems, *IFIP Congress*,
APMS, Bordeaux, France, 1982, pp.327-339.
- [FDI 89] FDIDA S. et PUJOLLE G.
Modèles de systèmes et de réseaux, Performances et Files d'Attentes,
Editions Eyrolles, Paris, France, 1989.
- [FLO 85] FLORIN G. et NATKIN S.
Les Réseaux de Petri stochastiques, *Technique et Science Informatiques*,
1985, Vol. 4, n° 1, pp.143-159.
- [FRE 88] FREIN Y., DALLERY Y., PIERRAT J.-J. et DAVID R.
Optimisation du routage des pièces dans un atelier flexible par des
méthodes analytiques, *APII, 1988*, Vol. 2, n° 5, pp.489-508.
- [GAU 90] GAUBERT S.
An algebraic method for optimizing resources in timed event graphs,
Lecture Notes in Control and Information, Springer Verlag, 1990, n° 144,
pp.957-966.
- [GEN 88] GENTINA J.-C., BOUREY J.-P. et KAPUSTA M.
Colored adaptive structured Petri Nets - a tool for the automatic synthesis
of hierarchical control of Flexible Manufacturing Systems, *Computer
Integrated Manufacturing Systems, Butterworth Heinemann, February
1988*, Vol. 1, n° 1, pp.39-47.
- [GOL 86] GOLTZ, U.
Synchronic distance, *Advances in Petri Nets, LNCS n° 254, 1986*,
pp.338-358.
- [GOT 93] GOTHA
Les problèmes d'ordonnancement, *Recherche opérationnelle, 1993*,
Vol. 27, n° 1, pp.77-150.
- [GIU 96] GIUA A.
Petri Nets techniques for Supervisory Control of Discrete Event Systems,
*First International Workshop on Manufacturing and Petri Nets, 17th
International conference on Application and Theory of Petr Nets, Osaka,
Japon, juin 1996*, pp.1-30.

-
- [HAM 91] HAMMADI S.
Une méthode d'ordonnancement minimisant les temps d'attente et de transit dans les systèmes de production flexible de type job-shop, *Thèse de Doctorat, Université de Lille 1, 1991.*
- [HAN 89] HANEN C.
Optimizing microprograms for recurrent loops on pipelined architectures using timed Petri Nets, in *Advances in Petri Nets, LNCS 424, 1989, Springer Verlag, New York, U.S.A., pp.236-261.*
- [HAR 92] HARHALAKIS G., NAGI R. et PROTH J.-M.
Hierarchical modeling approach for production planning, *Proceedings of the IFAC-INCOM 1992, pp.21-26.*
- [HIL 87] HILLION H.P., PROTH J.-M. et XIE X.L.
A heuristic algorithm for the periodic scheduling and sequencing job-shop problem, *IEEE, 26th Conference on Decision and Control, Los Angeles, U.S.A., 1987, pp.612-617.*
- [HIL 89a] HILLION H.P. et PROTH J.-M.
Performance evaluation of job-shop systems using timed event-graphs, *IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, Vol. 34, n° 1, pp.3-9.*
- [HIL 89b] HILLION H.
Modélisation et analyse des systèmes de production discrets par les Réseaux de Petri temporisés, *Thèse de Doctorat en Mathématiques, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1989.*
- [HO 83] HO Y.C. et CASSANDRAS C.
A new approach to the analysis of discrete event dynamic systems, *Automatica, 1983, Vol. 19, n° 2, pp.149-167.*
- [HO 87] HO Y.C.
Performance evaluation and perturbation analysis of discrete event dynamic systems, *IEEE Transactions on Automatic Control, juillet 1987, Vol. AC-32, n° 7.*
- [HSU 93] HSU L.F., TAPIERO C.S. et LIN C.
Network of queues modeling in Flexible Manufacturing Systems : a survey. *Recherche opérationnelle / Operations research, AFCET-Gauthiers-Villars, 1993, Vol. 27, n° 2, pp.201-248.*

-
- [HUV 94] HUVENOIT B.
De la conception à l'implantation de la commande modulaire et hiérarchisée de systèmes flexibles de production manufacturière, *Thèse de Doctorat en Productique, Université de Lille 1, 1994.*
- [HWA 86] HWANG S.
Part selection problems in Flexible Manufacturing Systems planning stage, *Proceedings of the second ORSA TIMS Conference on Flexible Manufacturing Systems, Ann Arbor, Michigan, USA, Elsevier, 1986, pp.297-309.*
- [KAP 88] KAPUSTA M.
Génération assistée d'un graphe fonctionnel destiné à l'élaboration structurée du modèle de la partie commande pour les cellules de production flexibles dans l'industrie manufacturière, *Thèse de Doctorat, Université de Lille 1, 1988.*
- [KAR 84] KARMARKAR N.
A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica, 1984, n° 4, pp.373-395.*
- [KAU 68] KAUFMANN A.
Introduction à la combinatoire en vue de ses applications, *Dunod, Paris France, 1968.*
- [KER 96] KERMAD L.
Contribution à la supervision et à la gestion des modes et des configurations des Systèmes Flexibles de Production Manufacturière, *Thèse de Doctorat, Université de Lille 1, janvier 1996.*
- [KHA 96] KHANSA W., DENAT J.-P. et COLLART DUTILLEUL S.
Analysis of Robustness using the periodic functioning of timed Event Graphs, *Rensselaer's Fifth International Conference on Computer Integrated Manufacturing and Automation Technology, CIMAT'96, Grenoble, France, mai 1996, Vol. 1, pp.180-185.*
- [KIM 83] KIMEMIA J. et GERSHWIN S.B.
An algorithm for the computer control of a Flexible Manufacturing System, *IIE Transactions, Vol. 15, n° 4, 1983, pp.353-362.*
- [KOR 95] KORBAA, W.
Recherche des circuits élémentaires dans un flow-shop, *mémoire de DEA de Productique, Université de Lille 1, juin 1995.*

-
- [LAF 91] LAFTIT S.
Graphes d'événements déterministes et stochastiques: application aux systèmes de production, *Thèse de Doctorat en Mathématiques, Paris IX Dauphine, 1991.*
- [LAF 92] LAFTIT S., PROTH J.-M. et XIE X.L.
Optimization of invariant criteria for event graphs, *IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, Vol. 37, n° 5, pp.547-555.*
- [LON 93] LONG J.
Sur la conduite hiérarchisée des systèmes flexibles de production, *Thèse de Doctorat en Productique, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1993.*
- [LOP 92] LOPEZ P., ERSCHLER J. et ESQUIROL P.
Ordonnancement de tâches sous contraintes : une approche énergétique, *R.A.I.R.O. APII, 1992, Vol. 26, n° 5-6, pp.453-481.*
- [MAN 96] MANIER H. et BAPTISTE P.
The Influence of the Lay-out on the Performances of a Few Methods of Control of a Flexible Manufacturing Ring, *Symposium on Discrete Events and Manufacturing Systems, CESA'96 IMACS Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications, Lille, France, juillet 1996, pp.570-574.*
- [MAR 79] MARIE R.
An approximate analytical method for general queueing networks, *IEEE Transactions on Software Engineering, 1979, Vol. SE-5, n° 5, pp.530-538.*
- [MAR 82] MARTINEZ J. et SILVA M.
A simple and fast algorithm to obtain all invariants of a generalized Petri Net, in *Application and Theory of Petri nets, Eds. C. Girault et. W. Reisig, Springer Verlag, New York, 1982, pp.301-310.*
- [MAR 89] MARSAN A.
Stochastic Petri Nets: an elementary introduction, *Lecture Notes in Computer Science, LNCS 424, Springer Verlag, 1989, Vol. 424, pp.1-29.*
- [MAZ 89] MAZZOLA J.B., NEEBE A. et DUNN C.V.R.
Production planning of a Flexible Manufacturing System in a material requirements environment, *The International Journal of Flexible Manufacturing Systems, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1989, Vol. 1, pp.115-142.*

-
- [MOL 82] MOLLOY M.K.
Performance analysis using stochastic Petri Nets, *IEEE Transactions on Computers*, 1982, Vol. 31, n° 9, pp.913-917.
- [MUN 91] MUNIER A.
Résolution d'un problème d'ordonnancement cyclique à itérations indépendantes et contraintes de ressources, *RAIRO, Recherche Opérationnelle*, 1991, Vol. 25, n° 2, pp.161-182.
- [MUR 89] MURATA T.
Petri Nets: properties, analysis and application, *Proceedings of the IEEE*, 1989, Vol. 77, n° 4, pp.541-580.
- [OHL 94a] OHL H., CASTELAIN E. et GENTINA J.-C.
Synchrony theory applied to control problems in Flexible Manufacturing Systems, *IEEE Conference on Systems, Man and Cybernetics*, octobre 1994, San Antonio, Texas, U.S.A., Vol. 2, pp.1689-1694.
- [OHL 94b] OHL H., CAMUS H., CASTELAIN E. et GENTINA J.-C.
A heuristic algorithm for the computation of cyclic schedules and the necessary WIP to obtain optimal cycle time, *Rensselaer's Fourth International Conference on Computer Integrated Manufacturing and Automation Technology, CIMAT 1994*, octobre 1994, Troy, New York, U.S.A., Vol. 1, pp.339-344.
- [OHL 95a] OHL H.
Fonctionnements répétitifs de systèmes flexibles de production manufacturière : Analyse et Optimisation des performances à l'aide des Réseaux de Petri, *Thèse de Doctorat, Université de Lille 1*, septembre 1995.
- [OHL 95b] OHL H., CAMUS H., CASTELAIN E. et GENTINA J.-C.
Petri Net modeling of ratio-driven Flexible Manufacturing Systems and implications on the WIP for cyclic schedules, *IEEE Conference on Systems, Man and Cybernetics*, octobre 1995, Vancouver, British Columbia, Canada, Vol. 4, n° 5, pp.3081-3086.
- [PLU 94] PLUS O.
Minimisation du nombre de marques dans les graphes d'événements, *mémoire de DEA de Productique, Université de Lille 1*, septembre 1994.
- [PRO 87] PROTH J.-M. et CAVAILLE J.B.
Pratique de la simulation en production discontinue, *Siprodis, Editions EC2, Collection Novotique, Paris, France*, 1987.

-
- [PRO 95] PROTH J.-M. et XIE X.L.
Les Réseaux de Petri pour la conception et la gestion des systèmes de production, *Editions MASSON*, 1995.
- [RAM 80] RAMAMOORTHY C.V. et HO G.S.
Performance evaluation of asynchronous concurrent systems using Petri Nets, *IEEE Transactions on Software Engineering*, 1980, Vol. SE-6, n° 5, pp.440-449.
- [RIC 95] RICHARD P., JACQUET N., CAVALIER C. et PROUST C.
Solving scheduling problems using Petri Nets and constraint logic programming, *INRIA IEEE Symposium on Emerginig Technologies and Factory Automation, Paris, France, 1995, Vol. 1/3, pp.59-67.*
- [RIC 96] RICHARD P. et PROUST C.
Petri Nets for modelling linear programs, *Symposium on Discrete Events and Manufacturing Systems, CESA'96 IMACS Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications, Lille, France, juillet 1996, pp.36-41.*
- [ROU 94] ROUBELLAT F., BILLAUT J.-C. et VILLAUMIE M.
Ordonnancement d'atelier en temps réel : d'ORABAID à ORDO, *Journées d'Etude du GT3, Ordonnancement et Entreprise, Applications Concrètes et Outils pour le Futur, Toulouse, France, juin 1994.*
- [SIF 80] SIFAKIS J.
Performance evaluation of system using Nets, in *Net theory and Applications, LNCS, Springer Verlag, Berlin, 1980, pp.307-319.*
- [SIL 87] SILVA M.
Towards a synchrony theory for p/t nets, in *Concurrency and Nets, Eds K. Voss, Springer Verlag, Berlin, 1987, pp.435-460.*
- [SIL 89] SILVA M. et VALETTE R.
Petri Nets and Flexible Manufacturing, in *Advances in Petri Nets, LNCS 424, Springer Verlag, New York, 1989, pp.374-417.*
- [SIL 96a] SILVA M. et TERUEL E.
Petri Nets for the Design and Operation of Manufacturing Systems, *Rensselaer's Fifth International Conference on Computer Integrated Manufacturing and Automation Technology, CIMAT'96, Grenoble, France, mai 1996, Vol. 1, pp.330-343.*

-
- [SIL 96b] SILVA M. et TERUEL E.
A Systems Theory Perspective of Discrete Event Dynamic Systems : The Petri Net Paradigm, *Symposium on Discrete Events and Manufacturing Systems, CESA '96 IMACS Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications, Lille, France, juillet 1996, pp.1-12.*
- [SOL 79] SOLBERG J.J.
Analytical performance evaluation of Flexible Manufacturing Systems, *Proceedings IEEE, Conference on Decision and Control, San Diego, U.S.A., 1979, pp.640-644.*
- [STE 88] STECKE K.E. et ILYONG K.
A study of FMS part type selection approaches for short-term production planning, *The International Journal of Flexible Manufacturing Systems, 1988, Vol. 1, n° 1, pp.7-29.*
- [STE 91] STECKE K.E. et KIM I.
A flexible approach to part type selection in flexible flow systems using part mix ratios, *Int. J. Prod. Res., 1991, Vol. 29, n° 1, pp.53-75.*
- [STE 92] STECKE K.E.
Procedures to determine part mix ratios for independent demands in Flexible Manufacturing Systems, *IEEE Transactions on Engineering Management, 1992, Vol. 39, n° 4, pp.359-369.*
- [SUR 89] SURI R.
Perturbation analysis: the state of the art and research issues explained via the GI/G/1 queue, *Proceedings of the IEEE, janvier 1989, Vol. 77, n° 1.*
- [TAW 95] TAWEGOUM R.
Contrôle temps réel de déroulement des opérations dans les systèmes de production flexibles, *Thèse de Doctorat, Université de Lille I - Ecole Centrale de Lille, avril 1995.*
- [TOG 92] TOGUYENI A.
Surveillance et diagnostic en ligne dans les ateliers flexibles de l'industrie manufacturière, *Thèse de Doctorat, Université de Lille 1, 1992.*
- [TOU 82] TOUDIC J.M.
Algorithmes d'algèbre linéaire pour l'analyse structurelle des Réseaux de Petri, *Revue technique Thomson-CSF, 1982, Vol. 14, n° 1, pp.137-155.*

-
- [VAL 94] VALENTIN C.
Modeling and analysis methods for a class of hybrid dynamic systems, *Symposium Automatisation des processus mixtes : Les systèmes dynamiques hybrides, ADPM'94, Bruxelles, Belgique, novembre 1994*, pp.221-226.
- [VAL 86] VALETTE R.
Nets in production systems, *Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, 1986, Vol. 255, pp.191-217*.
- [XIE 89] XIE X.L.
Real time scheduling and routing for Flexible Manufacturing Systems with unreliable machines, *RAIRO, Recherche Opérationnelle, 1989, Vol. 23, n° 4, pp.355-374*.
- [XIE 91] XIE X.L.
Hierarchical production control of a Flexible Manufacturing System, *Applied Stochastic Models and Data Analysis, 1991, Vol. 7, pp.343-360*.

ANNEXES

Annexe A :

Influence de la prise en compte des opérations de transport sur l'ordonnancement déterministe et répétitif : en-cours et temps de cycle

Nous développons, dans cette annexe I, un exemple simple montrant les limites d'implantation d'une commande prévisionnelle établie à partir d'un ordonnancement des seules opérations de transformation sur un système physique. L'exemple est décrit à la Figure Annexe A-1. Il se compose de deux gammes opératoires linéaires : GO_A et GO_B . Nous n'avons pas, dans un premier temps, introduit les opérations de transfert parce que nous supposons que ces dernières s'effectuent en temps masqué.

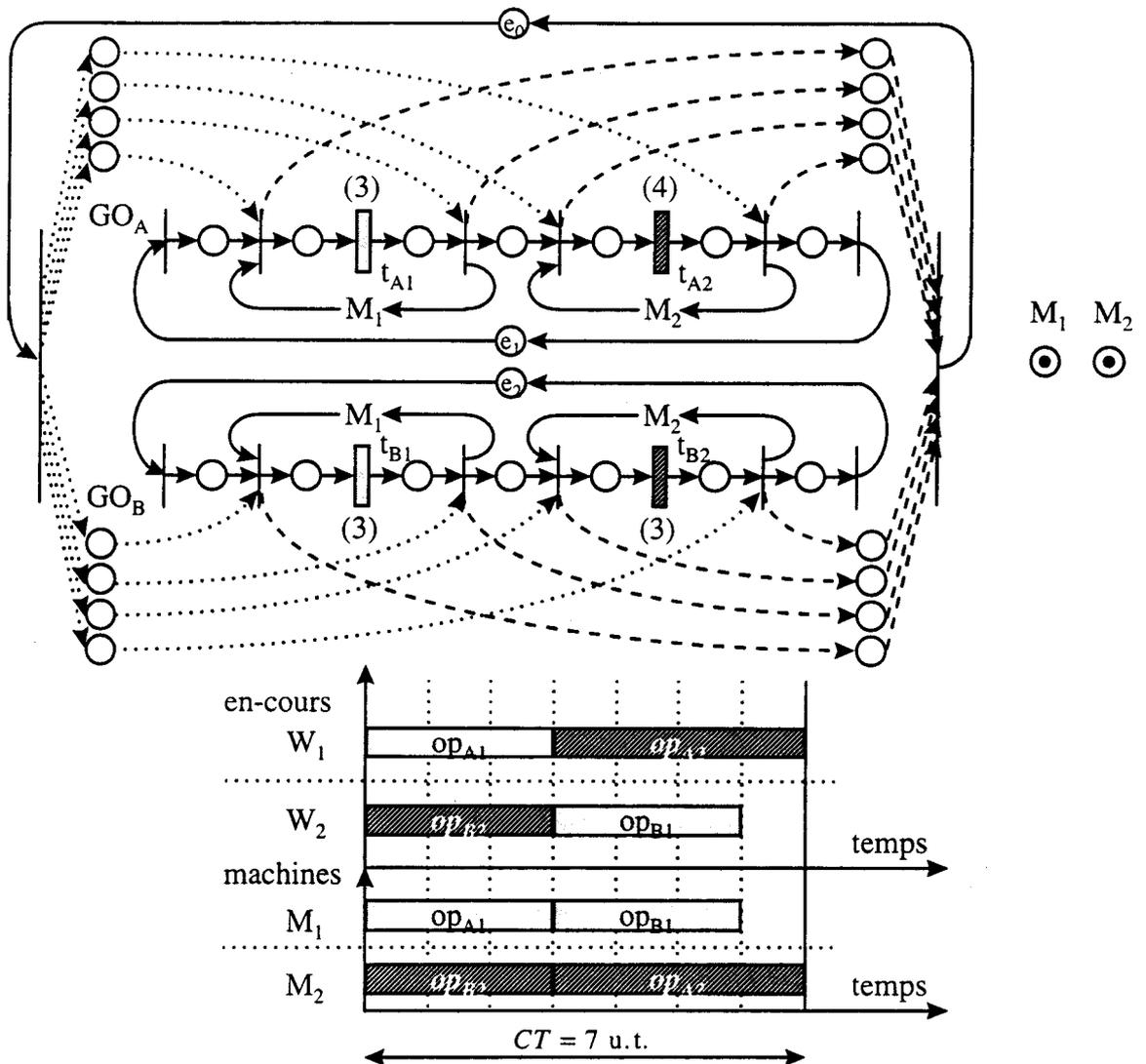


Figure Annexe A-1 : Exemple simple d'ordonnancement avec minimisation de l'en-cours dans le cas où le transport n'est pas pris en compte (supposé effectué en temps masqué)

Nous avons présenté sur cette même figure un des ordonnancements optimaux. Nous constatons qu'il n'existe pas de marge de gammes au niveau de l'ordonnancement des opérations de la gamme GO_A . Donc les opérations de transfert de la machine M_1 à M_2 doivent être effectuées en un temps nul, ce qui est impossible.

En phase d'exploitation, il existe deux moyens pour résoudre ce problème, c'est-à-dire relaxer les conditions strictes de synchronisation et de précedence imposées par l'ordonnancement prévisionnel, tout en respectant l'ordonnancement des opérations sur les machines :

- augmenter le temps de cycle du système pour laisser aux en-cours le temps d'effectuer les opérations de transfert ; nous n'avons cependant a priori aucune maîtrise de l'augmentation du temps de cycle et donc de la diminution de performances de productivité ;
- augmenter l'en-cours du système afin d'effectuer réellement ces opérations en temps masqué ; nous ne connaissons cependant ni le nombre (minimal) ni le positionnement des en-cours à ajouter dans le système de production pour arriver à respecter ce temps de cycle.

Nous pouvons, à ce stade de développement, envisager deux possibilités pour aider le pilotage en phase d'exploitation.

Nous pouvons estimer le nombre d'en-cours nécessaire en intégrant des opérations de transfert entre chaque opération de transformation. Nous avons à notre disposition plusieurs façons de modéliser plus ou moins finement ce type d'opérations, comme nous avons pu le faire remarquer au chapitre II, § II.2.4.3.

Comme nous disposons, dans ce cas là, de nouvelles gammes opératoires linéaires, il est intéressant de réordonnancer complètement les charges des machines pour effectivement minimiser l'en-cours du système. Selon le degré de finesse de la modélisation du système de transport et l'approximation des temps de transport, nous obtiendrons un ordonnancement qui modélisera plus ou moins le comportement réel de l'atelier flexible. Cependant, plus le modèle sera détaillé, plus difficile sera le problème d'ordonnancement cyclique. De toute façon, à cause des défaillances du système de production, il faut toujours envisager un module de pilotage pour l'implantation de la commande.

Nous avons considéré dans cet exemple que le système de transport pouvait être modélisé par une ressource de capacité infinie (nous n'avons pas tenu compte des éventuels conflits d'accès à des ressources partagées du système de transport). Nous avons supposé aussi que les opérations de transfert avaient des durées déterministes et égales, quel que soit le trajet entre machines, de 1 u.t. Nous présentons à la Figure Annexe A-2 une modélisation possible des opérations de transport et l'ordonnancement obtenu.

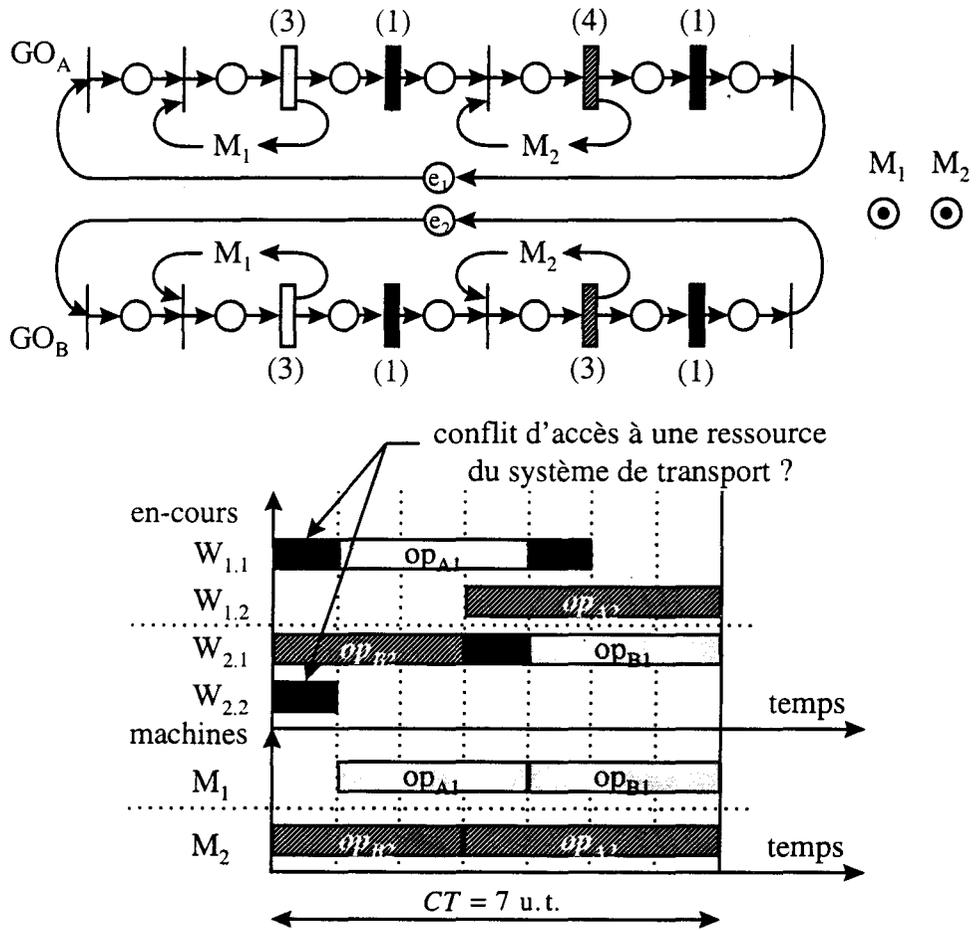
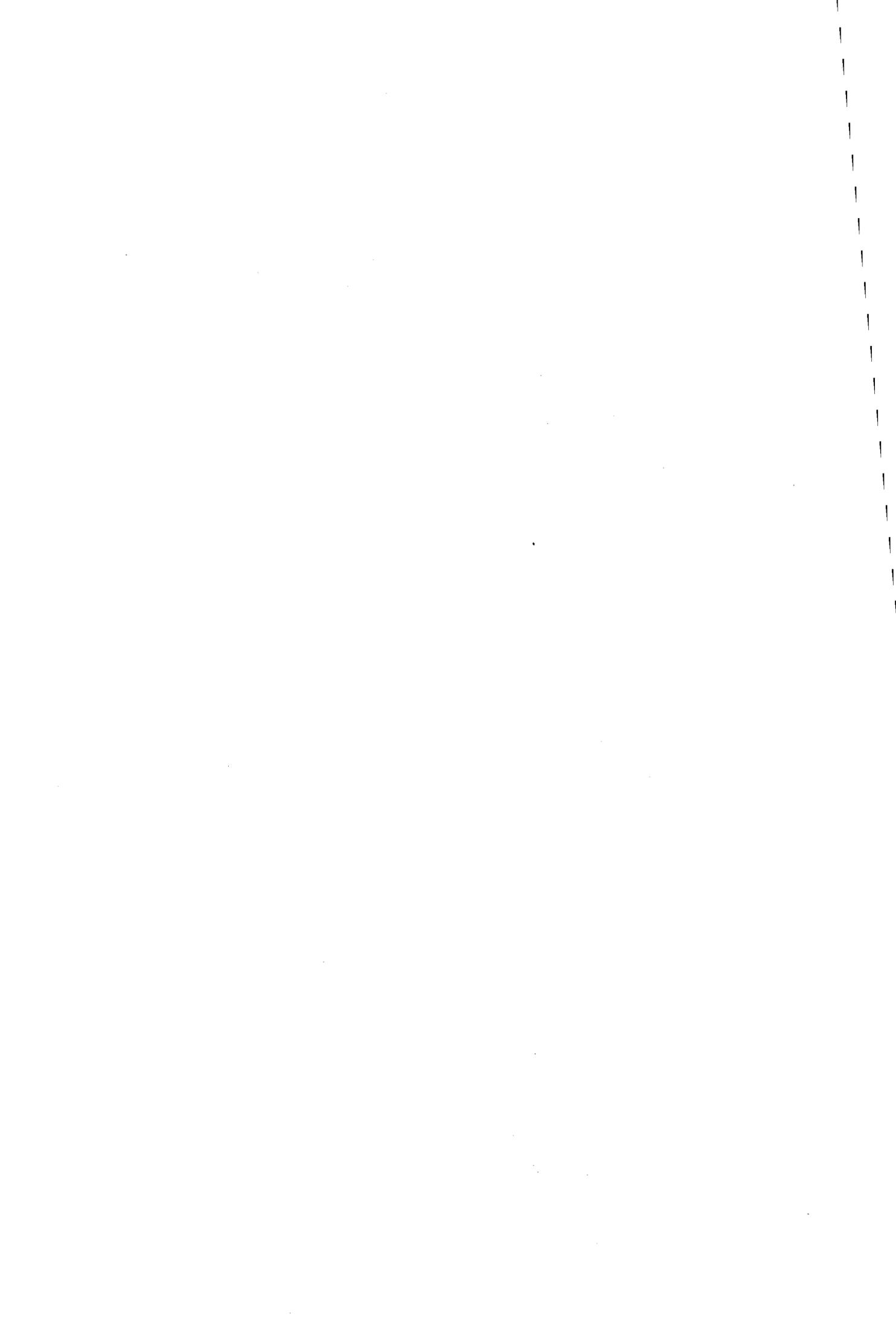


Figure Annexe A-2 : Réordonnement de l'horizon de production en prenant maintenant en compte les opérations de transfert



Annexe B :

Exemple particulier de système de production pour lequel le meilleur ordonnancement est issu du regroupement cyclique associé à la plus grande borne inférieure d'en-cours

Annexe B.1 : Modélisation du système de production, présentation du régime permanent et étude des performances de productivité

Considérons l'exemple de système de production modélisé avec les FRT-nets à la Figure Annexe B-1 à l'aide de l'outil Réseau de Petri.

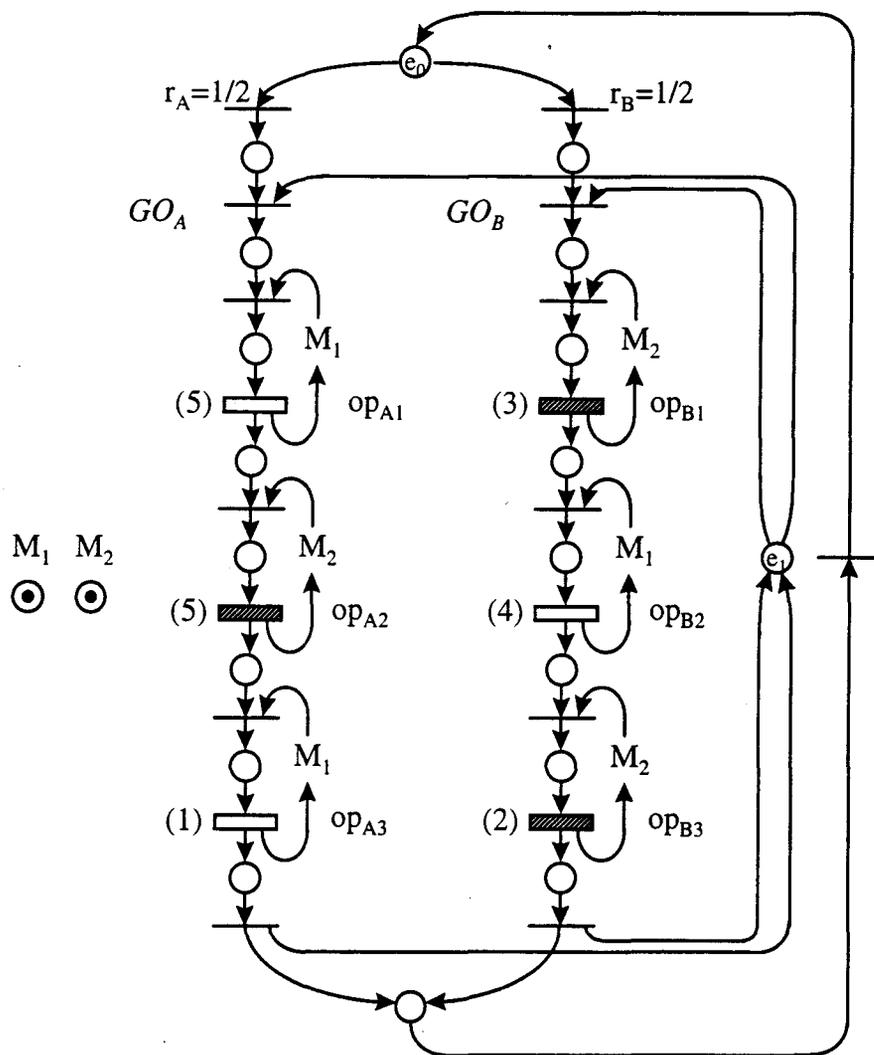


Figure Annexe B-1 : Modèle FRT-nets de l'exemple illustrant l'intérêt de la recherche exhaustive

Il s'agit d'un cas d'école illustrant la véracité de la proposition formulée au § II.2.5.2 :

Proposition (II-1) : *La meilleure solution pour le problème d'ordonnancement considéré, i.e. la recherche d'un ordonnancement respectant un horizon de production et son temps (optimal) de cycle associé, avec comme objectif la minimisation de l'en-cours, peut être issue du plus mauvais regroupement cyclique des gammes en terme de borne inférieure d'en-cours nécessaire.*

Ce système se caractérise par deux gammes linéaires fixées : GO_A , GO_B (liées respectivement aux produits de type A et B) à réaliser avec les ratios associés identiques et égaux à 0,5. Nous supposons que la fabrication doit être effectuée sur deux ressources simples (machines M_1 et M_2). De plus les deux types de pièces à réaliser peuvent être transportés par le même type de ressource de transport (par exemple des palettes universelles). Nous ne considérerons ni le système de transport ni les opérations de transfert pour préserver la simplicité du problème.

Une analyse de flux du système nous indique que les charges de travail sont équitablement réparties sur les deux machines de transformation. Elles sont donc toutes les deux critiques. De plus la restriction du problème, du point de vue taille de l'ensemble des produits à réaliser lors d'un cycle, à l'horizon minimal E_1 , respectant les ratios de production $r_A = r_B = \frac{1}{2}$: $E_1 = E(RP_p) = \{A, B\}$, ne réduit en rien les performances du système en terme de productivité. C'est donc sur cet horizon que nous limitons la recherche de la commande. Pour le temps de cycle, nous voulons toujours travailler à la vitesse maximale de l'atelier flexible. Nous obtenons donc le flux maximal en saturant les machines critiques. Le temps de cycle minimal C_1 associé à E_1 est alors $C_1 = CT(RP_p) = C^{1*} = 10$ u.t. Dans ce cas, les deux machines M_1 et M_2 sont encore critiques : $Z_1 = Z_2 = 10$.

Annexe B.2 : Ensemble des regroupements cycliques issus de ce système de production avec l'horizon de production $E(RP_p) = \{A, B\}$

Comme le type de palettes utilisé est universel, nous pouvons envisager plusieurs partitions de gammes créant ainsi pour les palettes, qui sont dédiées à ces regroupements, des contraintes de production (suivant la présence ou l'absence de réunion de plusieurs gammes dans une même macro-gamme) et pour les gammes, des contraintes de précedence entre opérations appartenant à des gammes opératoires différentes. Pour une partition donnée, il subsiste un degré de liberté sur l'ordonnancement cyclique des gammes regroupées entre elles, afin de former différentes macro-gammes et donc différents regroupements cycliques. De nouvelles contraintes de précedence apparaissent alors entre les opérations de début et de fin de gammes différentes (ou non suivant les regroupements obtenus). Pour l'exemple, les deux seules possibilités de regroupement cyclique sont $Rc_1 = Rc_{st} = \{M_1^1 = (GO_A - GO_B)\}$, associé au modèle représenté à la Figure Annexe B-2 correspondant à une séquentialisation totale des gammes et

$Rc_2 = Rc_{pt} = \{M_1^1 = (GO_A), M_2^1 = (GO_B)\}$ avec la modélisation du système à la Figure Annexe B-3, correspondant à une parallélisation totale de ces deux mêmes gammes.

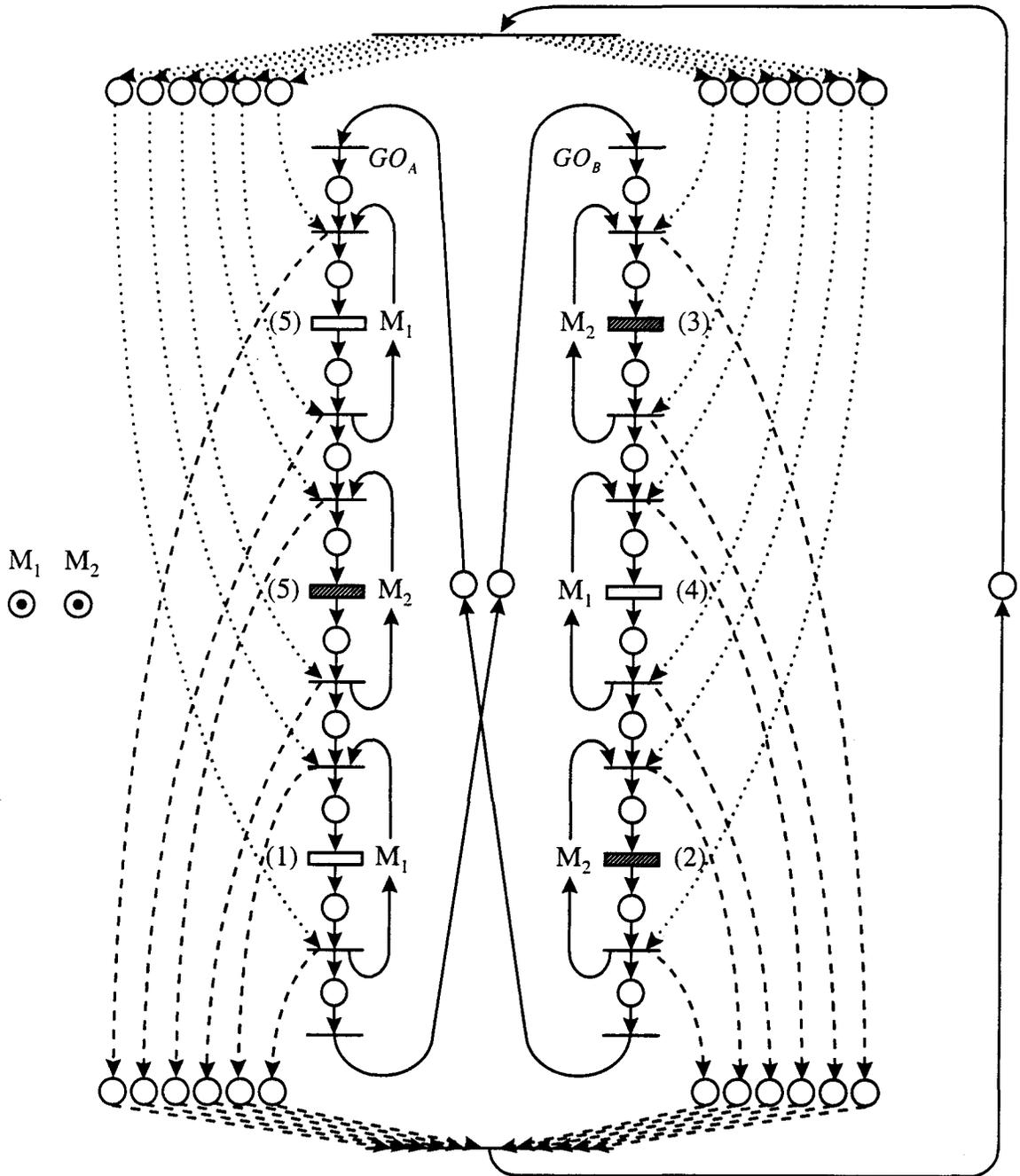


Figure Annexe B-2 : Modèle ordonnannçable du système avec le regroupement cyclique Rc_1

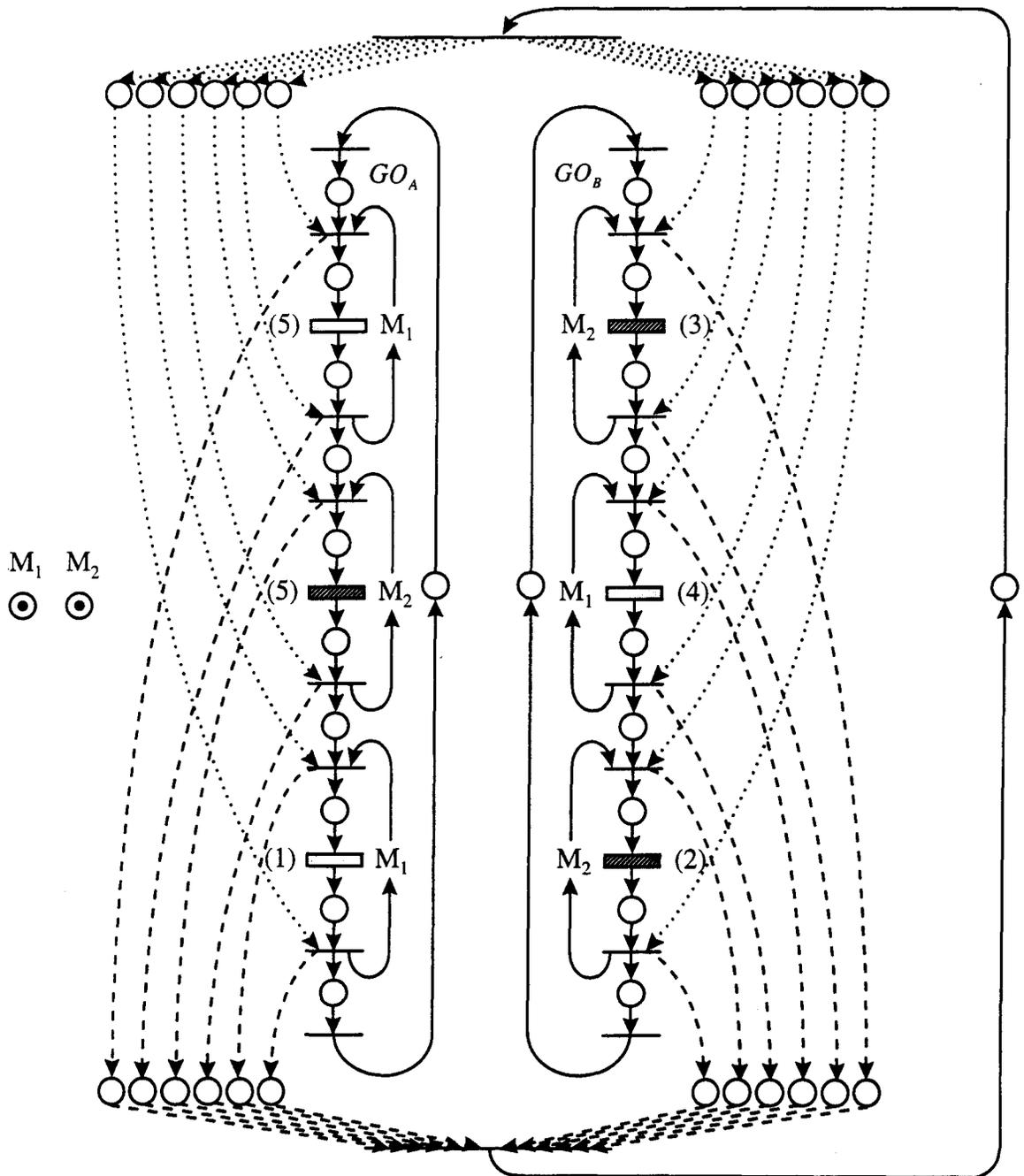


Figure Annexe B-3 : Modèle ordonnançable du système avec le regroupement cyclique Rc_2

Une ressource de transport associée à un regroupement effectue chaque gamme linéaire de fabrication le composant durant la production. Cependant une seule palette peut ne pas être suffisante si la charge de la macro-gamme dépasse le temps de cycle requis $CT(RP_p)$. C'est le rôle de la borne inférieure de l'en-cours de fournir comme indications le nombre minimal de ressources de transport nécessaires à considérer pour respecter le temps de cycle de production. D'après la démarche que nous avons développée, nous pouvons

associer une borne sur l'en-cours minimum à chaque regroupement cyclique obtenu (en fait dès l'étape de partition des gammes opératoires, ainsi tous les regroupements cycliques obtenus à partir d'une partition donnée possèdent la même borne). Ici deux bornes peuvent être calculées. Nous avons déjà remarqué que, pour un ensemble de routages admissibles donné, plus les gammes étaient parallélisées, plus la borne associée était grande. Nous retrouvons bien dans ce cas particulier l'ordre partiel défini au § II.2.4.1 sur les regroupements cycliques :

$$B(R_{C_1}) = B(R_{C_{st}}) = B^* = \left\lceil \frac{(5+5+1+3+4+2)}{10} \right\rceil = 2 \text{ et}$$

$$B(R_{C_2}) = B(R_{C_{pt}}) = B_0 = \left\lceil \frac{(5+5+1)}{10} \right\rceil + \left\lceil \frac{(3+4+2)}{10} \right\rceil = 3 \text{ avec } B(R_{C_{st}}) = 2 \leq B(R_{C_{pt}}) = 3.$$

Annexe B.3 : Parcours de l'espace des regroupements cycliques et recherche de l'ordonnancement qui minimise l'en-cours

L'espace de recherche pour l'exemple est donc constitué de deux éléments : $R_{C_{\text{restant}}} = \{R_{C_1}, R_{C_2}\}$. D'après le sens de parcours de l'ensemble des solutions défini (suivant les valeurs croissantes des $B(R_{C_i})$), il faut commencer la recherche de l'ordonnancement qui minimise l'en-cours avec le regroupement cyclique associé à la plus petite borne inférieure d'en-cours, donc avec R_{C_1} ($B(R_{C_1}) = 2$), puisque c'est le regroupement cyclique issu de la séquentialisation totale des gammes opératoires formées à partir de l'ensemble des routages admissibles associé à la plus petite borne inférieure (dans notre exemple, il existe un seul ensemble de routages admissibles). Le parcours se termine donc logiquement par l'analyse complète du regroupement cyclique R_{C_2} ($B(R_{C_2}) = 3$), issu de la parallélisation totale des gammes opératoires associée à la plus grande borne inférieure.

Nous rappelons ici un des cas susceptibles d'être rencontrés lors du parcours des différentes solutions. Si la meilleure solution obtenue avec tous les regroupements cycliques associés à une même valeur de la borne ne permet pas d'être certain d'avoir la meilleure solution, c'est-à-dire si l'en-cours optimal nécessaire et suffisant à l'établissement de cet ordonnancement est supérieur ou égal à $\min_{\forall R_{C_i} \in R_{C_{\text{restant}}}} (B(R_{C_i})) + 1$, il faut alors considérer la borne immédiatement supérieure à celle que nous venons de considérer et développer l'analyse complète des regroupements cycliques associés. Sur cet exemple, nous allons démontrer que non seulement il est nécessaire de parcourir tout l'espace de recherche, car le niveau d'en-cours optimal est supérieur ou égal à la plus grande valeur des bornes inférieures calculées : $B_0 = \max_{\forall i} (B(R_{C_i}))$, mais aussi que le meilleur ordonnancement possible, au sens minimisation de l'en-cours, est obtenu avec le regroupement associé à la plus mauvaise borne, donc correspondant à une parallélisation totale des gammes opératoires. Nous développons cet exemple pour démontrer, du point de vue optimisation de l'en-cours, l'intérêt et l'utilité de garder lors de ces différentes étapes

l'ensemble de toutes les solutions (c'est-à-dire au final tous les regroupements cycliques possibles) malgré le risque d'explosion combinatoire de cette méthode.

Pour revenir à notre démonstration, nous considérons, dans un premier temps, les regroupements cycliques associés à la plus petite borne inférieure d'en-cours $B^* = B(Rc_1) = 2$, i.e. l'unique regroupement Rc_1 . Nous montrons qu'avec ce regroupement Rc_1 et sa borne associée $B(Rc_1) = 2$, le meilleur ordonnancement obtenu a un niveau d'en-cours égal à 4. Comme il est impossible de garantir l'optimalité de la recherche d'un ordonnancement cyclique avec une heuristique, nous devons démontrer « à la main » qu'un ordonnancement avec un en-cours égal à 2 puis à 3 n'est pas réalisable avec ce regroupement cyclique Rc_1 tout en respectant le temps de cycle $CT(RP_p) = 10$ u.t. En effet l'heuristique développée ne recherche pas, pour un en-cours fixé, s'il est possible de trouver un ordonnancement compatible avec les hypothèses (horizon production et temps de cycle associé respectés). Par l'application de notre algorithme, nous avons trouvé des ordonnancements avec un niveau d'en-cours égal à 4. Ainsi nous sommes sûrs d'avoir trouvé le niveau optimal d'en-cours avec Rc_1 . Nous remarquons dans ce cas, que l'en-cours optimal obtenu n'atteint pas sa borne inférieure d'en-cours :

$$WIP(Rc_1) = 4 > B(Rc_1) = 2.$$

Ce qui représente bien la limite fixée :

$$WIP = \min_{\forall Rc_i \in Rc_{\text{déjà utilisé}}} (WIP(Rc_i)) = WIP(Rc_1) = 4 > \min_{\forall Rc_i \in Rc_{\text{restant}}} (B(Rc_i)) = B(Rc_2) = 3.$$

Il est donc nécessaire d'effectuer l'analyse complète des regroupements cycliques associés à la borne suivante d'en-cours, i.e. le dernier regroupement cyclique Rc_2 avec $B(Rc_2) = 3$.

Finalement en considérant le regroupement Rc_2 , nous trouverons une solution d'ordonnancement avec un en-cours de 3 en appliquant notre heuristique, ce qui représente bien un ordonnancement optimal du système considéré sous les contraintes que nous avons fixées. En effet, comme cette solution a un niveau d'en-cours qui atteint sa borne inférieure, la condition suffisante d'optimalité est remplie et nous savons que l'ordonnancement trouvé est optimal pour le regroupement Rc_2 , mais aussi pour l'horizon cyclique de travail $E(RP_p) = \{A, B\}$.

Annexe B.4 : Recherche du niveau optimal d'en-cours obtenu avec Rc_1

Annexe B.4.1 : Ordonnement cyclique obtenu avec le regroupement Rc_1 et un en-cours égal à 2

Considérons d'abord le regroupement cyclique Rc_1 . Sa borne associée est égale à $B(Rc_1) = 2$. Nous allons donc, dans un premier temps, rechercher s'il est possible de trouver un ordonnancement avec un en-cours, ou mieux, un nombre de ressources de transport, égal à 2, appelées dans notre exemple W_1 et W_2 . Puisque le temps de cycle est de 10 unités de temps et puisque le temps opératoire des deux gammes réunies est égal à 20 unités de temps, chaque palette aura une charge maximale de travail de 10 u.t. S'il existe un ordonnancement, il n'y aura donc pas d'intervalle de temps pendant lequel les pièces associées à leur palette attendront une machine de transformation. La marge de gammes est initialement nulle et doit le rester pour empêcher un ajout d'en-cours.

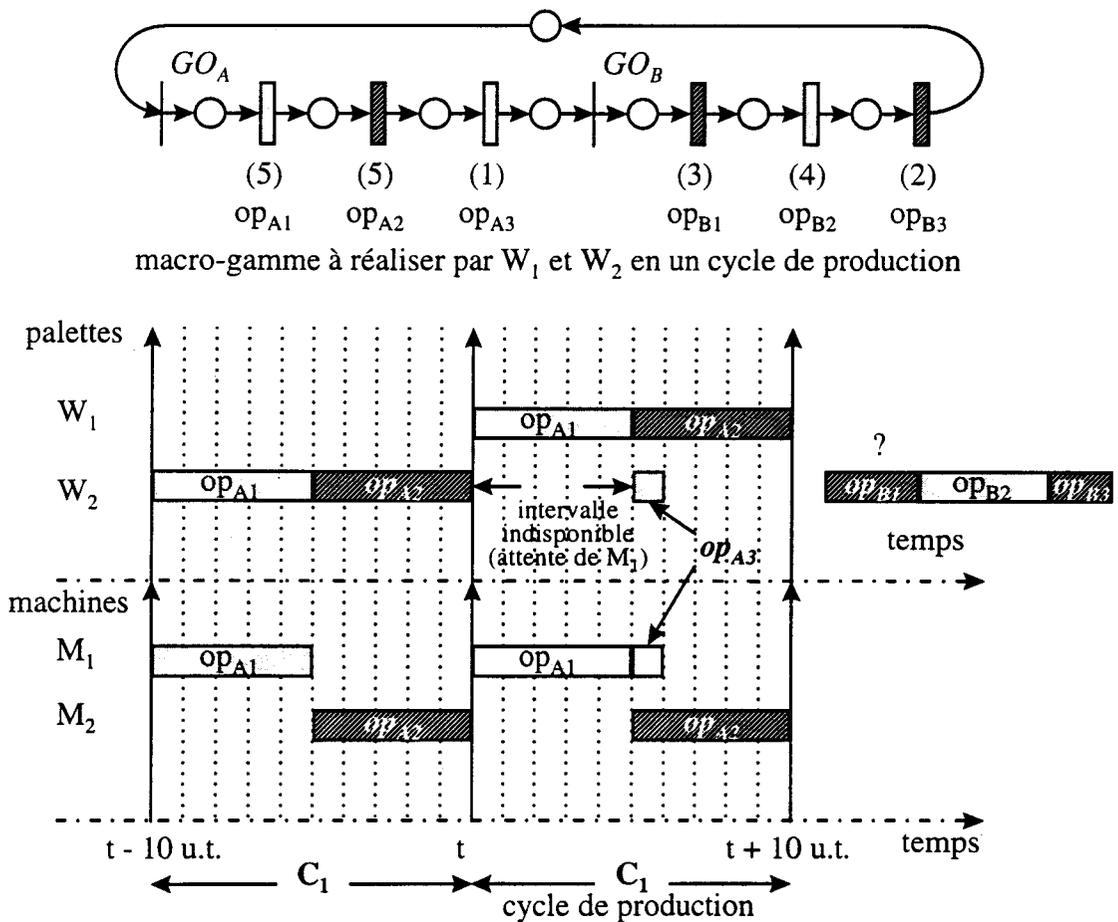


Figure Annexe B-4 : Ordonnement du regroupement cyclique Rc_1 avec un en-cours égal à 2

Le problème n'est nullement restreint si nous faisons coïncider la fenêtre temporelle de 10 u.t. représentant le cycle de production avec la fabrication des opérations op_{A1} et op_{A2} sur la palette W_1 , cf. Figure Annexe B-4 pour le diagramme de Gantt associé. Ces deux

opérations sont séquentielles, dû à la contrainte de précédence entre ces deux opérations et à l'absence de marges de gammes. La prochaine opération à réaliser sur la gamme du produit de type A est op_{A3} . Seule la palette W_2 reste disponible durant le cycle de production puisque la palette W_1 a atteint sa charge maximale de travail possible durant un cycle. De plus op_{A3} est la première opération à devoir être accomplie par la palette W_2 , puisqu'en raison du fonctionnement cyclique et du regroupement cyclique des gammes en séquentialisation totale, durant le cycle précédent c'est sur la pièce associée à W_2 que les opérations op_{A1} et op_{A2} avaient été réalisées. Donc à l'instant t , sur W_2 se trouve une pièce semi-finie de type A qui n'a plus qu'une seule opération à réaliser : op_{A3} . Etant donné les contraintes de ressource partagées de la machine M_1 , op_{A3} ne peut être lancée qu'à l'instant $t + 5$ u.t. L'intervalle de temps entre t et $t + 5$ devient alors indisponible : il existe donc un problème d'attente de la libération de la machine M_1 pour la pièce se trouvant sur W_2 . Il n'est donc pas possible de placer toutes les autres opérations durant ce cycle de production avec seulement deux en-cours. L'ordonnancement d'un tel système est donc impossible avec un niveau d'en-cours égal à 2, si nous voulons respecter le temps de cycle.

Annexe B.4.2 : Ordonnancement cyclique avec Rc_1 et un niveau d'en-cours égal à 3

Le deuxième problème reste toujours la recherche d'un ordonnancement avec Rc_1 . Mais ici l'en-cours fixé a été augmenté (et est égal à 3) afin d'accroître les marges de gammes et d'autoriser, si cela est maintenant possible, un ordonnancement des tâches. Nous rappelons que nous nous intéressons à des ordonnancements de type 1-périodique du point de vue machine. Mais du point de vue palette prise individuellement, étant donné la séquentialisation totale des gammes et le nombre de ressources de transport fixé à 3, le fonctionnement du système sera 3-périodique : tous les trois cycles de fonctionnement, une palette, par exemple W_1 , recommence les mêmes opérations. Ainsi pour respecter cette périodicité au niveau des ressources de transformation, le cycle de production réalisé par W_1 dans l'intervalle $[t, t + 10]$ est repris par une autre palette, W_2 par exemple, pendant $[t + 10, t + 20]$, lui-même repris par la troisième ressource de transport (W_3 en l'occurrence) durant le cycle $[t + 20, t + 30]$.

Nous cherchons ici à placer les opérations que doit effectuer la palette W_1 sur les trois cycles de production représentant la périodicité pour une palette individuelle : les deux gammes opératoires doivent donc être entièrement effectuées à la fin du troisième cycle. Nous pouvons supposer sans aucune restriction que l'opération op_{A1} commence à la date t sur la palette W_1 , cf. Figure Annexe B-5 pour la représentation du diagramme de Gantt associé à ce problème. En conséquence, un même type d'opération op_{A1} commence à la date $t + 10$ sur W_2 et une autre à $t + 20$ sur W_3 . Les intervalles de disponibilité pour placer les deux opérations (op_{A3} et op_{B2}) liées à la même machine M_1 et à la palette W_1 sont ici recherchés. Au départ, les trois intervalles disponibles sont $[t + 5, t + 10]$, $[t + 15, t + 20]$ et $[t + 25, t + 30]$. Comme entre op_{A1} et op_{A3} , il existe une opération op_{A2} de 5 u.t., l'intervalle $[t + 5, t + 10]$ disparaît à la fois pour op_{A3} et op_{B2} , vu la contrainte de précédence qui relie ces deux opérations depuis le regroupement cyclique des deux gammes de production. Il en est de même pour l'intervalle $[t + 25, t + 30]$, étant donné que les deux opérations op_{B2} et op_{B3} de durée totale 6 u.t. ne peuvent y être placées simultanément. Il ne reste donc plus

que $[t+15, t+20]$, intervalle où les deux opérations considérées peuvent se retrouver (durée totale égale à 5), mais la présence entre celles-ci d'une opération op_{B1} de durée 3 empêche ce placement. Nous avons donc démontré que l'ordonnancement de Rc_1 avec un en-cours de 3 est aussi impossible à réaliser, si le temps de cycle optimal $CT(RP_p) = 10$ u.t. de l'horizon de production $E(RP_p)$ doit être respecté.

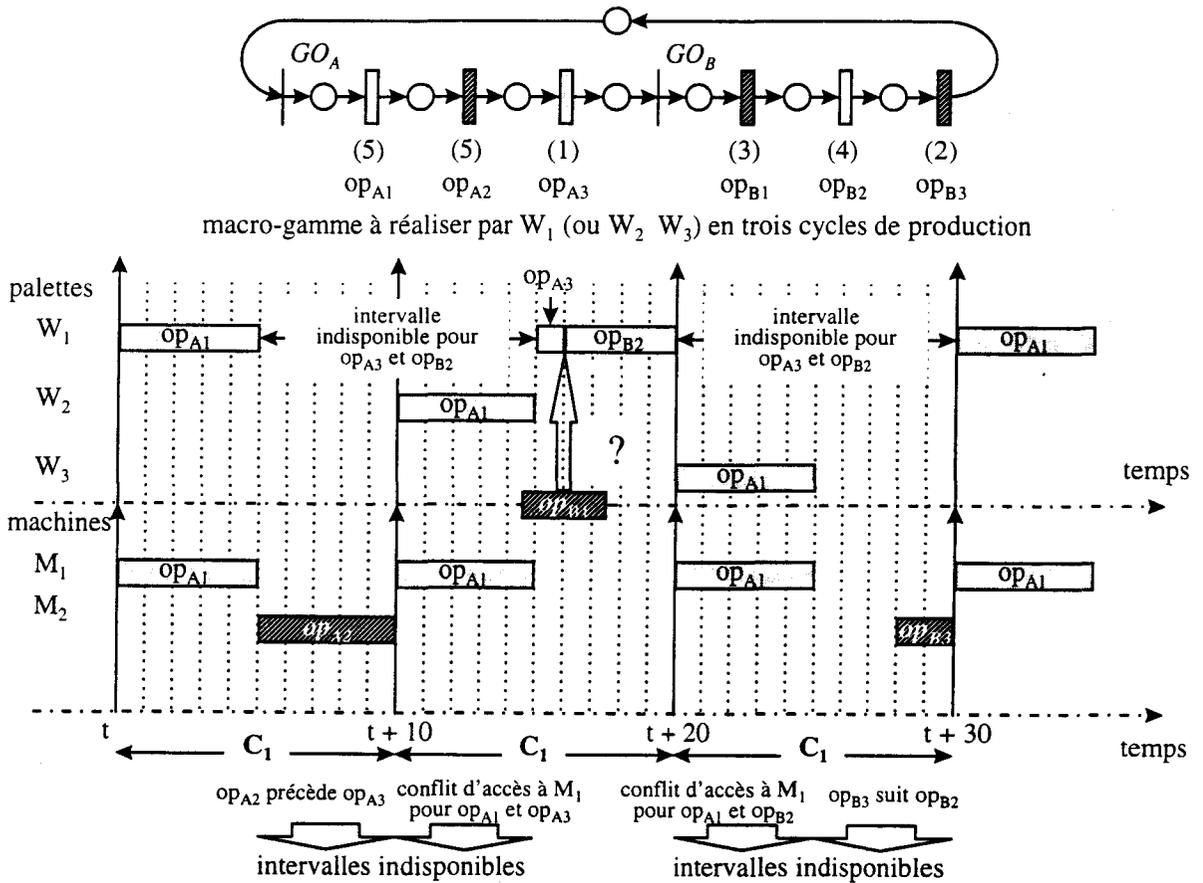


Figure Annexe B-5 : Ordonnancement de Rc_1 avec un en-cours égal à 3

Annexe B.4.3 : Ordonnancement optimal obtenu avec le regroupement cyclique Rc_1

Nous avons représenté à la Figure Annexe B-6 un des ordonnancements qui minimisent l'en-cours avec le regroupement cyclique $Rc_1 = Rc_{sr}$.

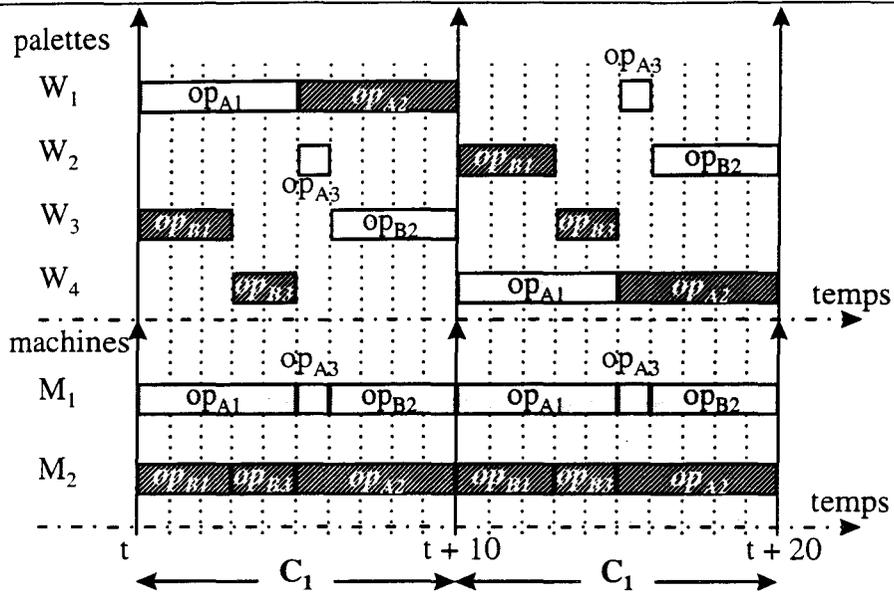


Figure Annexe B-6 : Ordonnancement optimal obtenu avec le regroupement cyclique R_{c1}

Annexe B.5 : Ordonnancement optimal trouvé avec R_{c2}

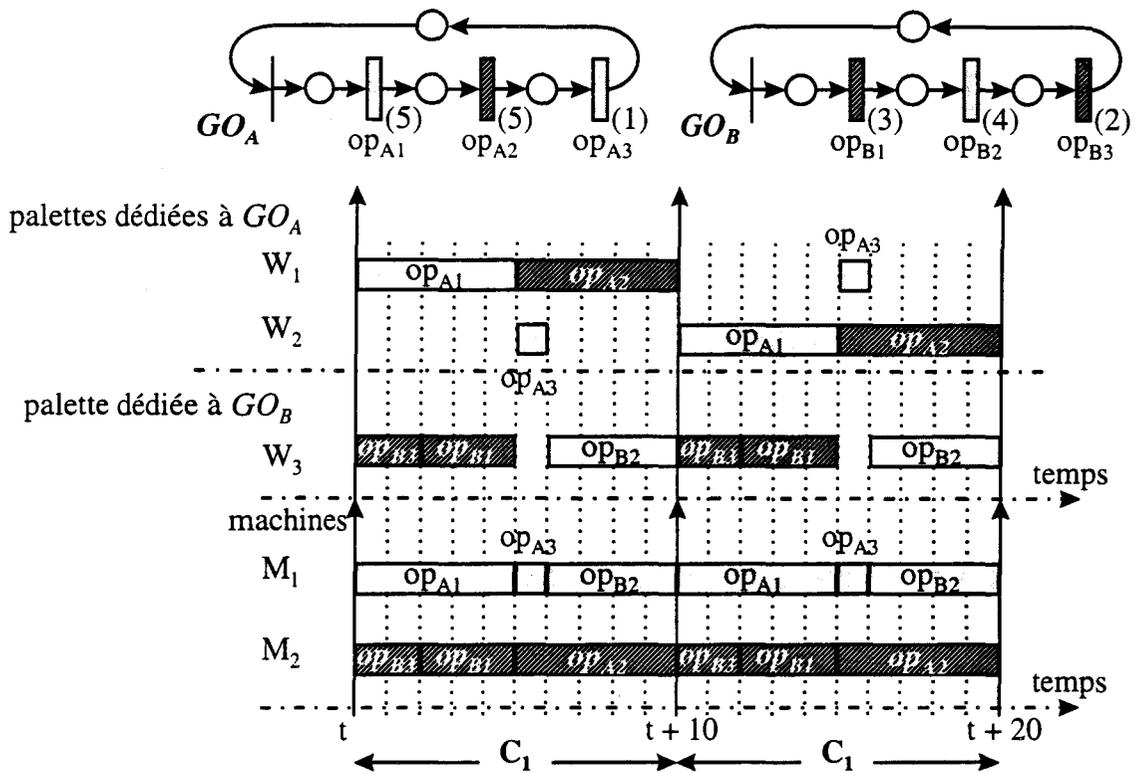


Figure Annexe B-7 : Ordonnancement optimal trouvé avec R_{c2} et un en-cours égal à 3

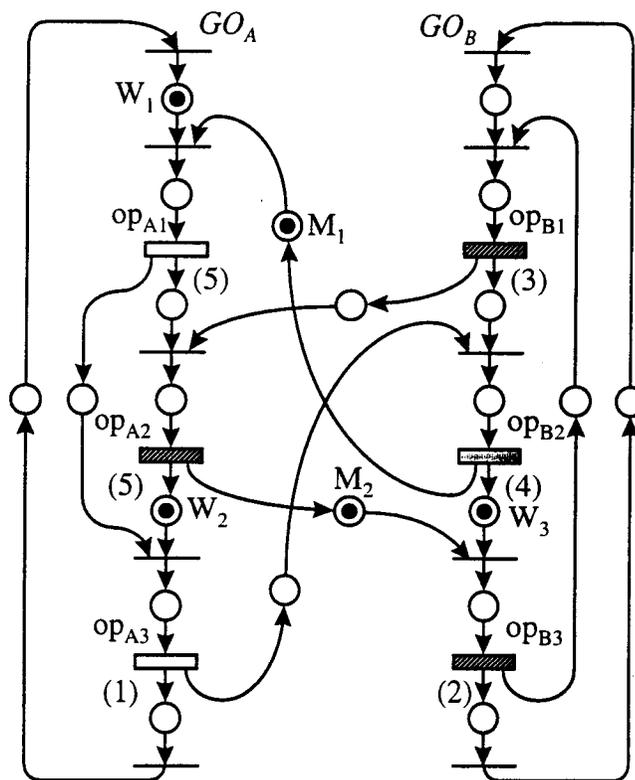
La dernière étape de cette démonstration consiste à trouver un ordonnancement lié au regroupement cyclique Rc_2 . Nous n'allons pas détailler ici la méthode d'obtention puisqu'elle est développée au paragraphe II.3. Cette solution est représentée à la Figure Annexe B-7.

Comme la solution trouvée ici a un en-cours égal à sa borne inférieure :

$WIP(Rc_2) = 3 = B(Rc_2)$, nous savons que c'est l'ordonnancement cyclique qui minimise l'en-cours avec le regroupement Rc_2 .

C'est donc bien l'une des solutions optimales de ce régime permanent, puisque nous avons déjà démontré l'impossibilité d'ordonnancer l'horizon de production $E(RP_p) = \{A, B\}$ en respectant $CT(RP_p) = 10$ avec un en-cours inférieur ou égal à 3.

Pour être tout à fait complet dans la démarche, nous avons représenté à la Figure Annexe B-8 le Graphe d'Événements, modélisant l'état du système soumis à la commande déterministe et cyclique, que nous venons d'obtenir, à l'instant t , ou toute autre date équivalente à cette dernière modulo le temps de cycle de production.



Machine M_1 représentée par le circuit passant par les opérations op_{A1} , op_{A3} et op_{B2}

Machine M_2 représentée par le circuit passant par les opérations op_{B1} , op_{A2} et op_{B3}

Figure Annexe B-8 : Graphe d'Événements de la commande cyclique prévisionnelle associée à l'ordonnancement optimal trouvé avec Rc_2 à la date t

Nous avons représenté à la Figure Annexe B-9 le parcours de l'espace de recherche constitué des deux regroupements cycliques Rc_{st} et Rc_{pt} . Nous avons donc trouvé un cas particulier qui non seulement oblige à parcourir tout l'espace de recherche, parce que le niveau d'en-cours minimum est supérieur ou égal à la plus grande borne inférieure, mais qui obtient aussi l'en-cours optimal avec le regroupement issu de la parallélisation totale des gammes opératoires.

Nous venons donc de développer un exemple particulier pour lequel notre parcours de l'espace de recherche ne permet aucun gain par rapport à la recherche exhaustive.

C'est pour cette raison que nous ne pouvons pas montrer de manière théorique l'apport de ce parcours, bien qu'en pratique, les gains soient en général significatifs : la recherche sur les regroupements cycliques associés à la plus petite borne inférieure d'en-cours suffit le plus souvent pour trouver la commande qui minimise l'en-cours.

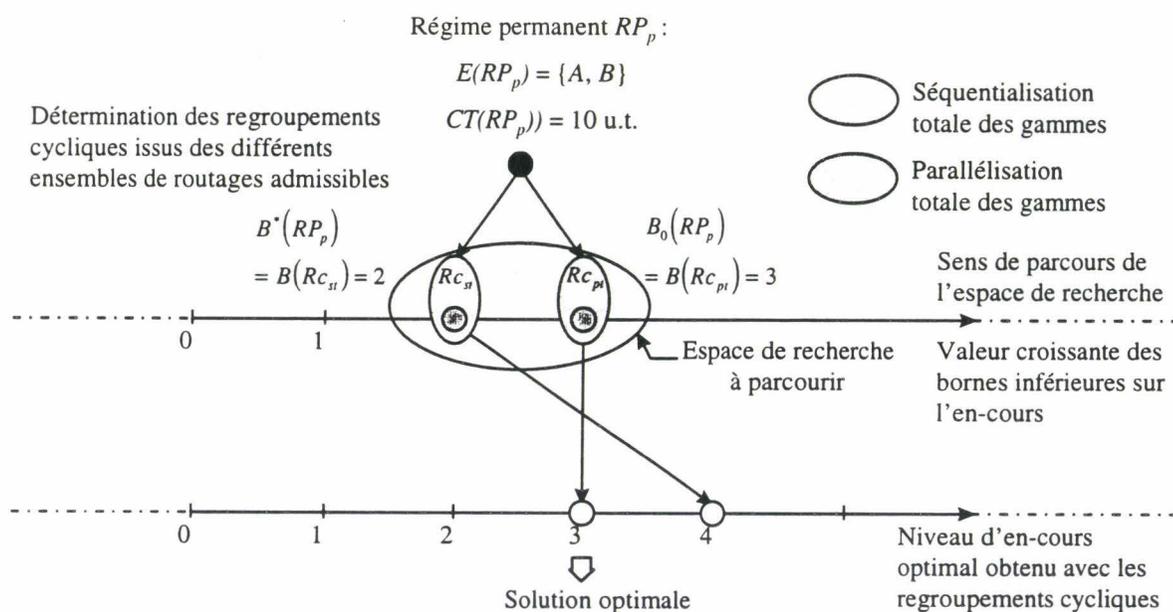


Figure Annexe B-9 : Parcours de l'espace de recherche avec cet exemple particulier

Annexe C :

Utilisation de notre approche afin d'optimiser les autres critères d'optimisation portant sur l'en-cours : application à l'exemple de [ERS 82]

L'un des objectifs que nous nous sommes fixés concerne la minimisation du maximum de l'en-cours présent dans le système de production.

Certaines recherches ont considéré la minimisation de la taille des buffers cf. travaux de [ERS 82] ou la minimisation de l'en-cours moyen du système. En fait, toutes ces notions sont proches. Cependant minimiser la taille des buffers devant les machines et minimiser l'en-cours moyen du système ne sont pas totalement équivalents. En effet les stocks d'entrée des machines ne sont pas les seuls lieux où l'en-cours peut être provisoirement placé. Il peut exister des buffers de sortie de machines, le stock de sortie de l'atelier, mais surtout le système de transport est, en lui-même, un lieu de stockage implicite et complexe en raison de sa dynamique. Dans le cas de l'anneau flexible, par exemple, des pièces partiellement fabriquées peuvent circuler à travers l'atelier en permanence dans l'attente de libération d'une ressource de transformation.

A notre avis, la recherche de la minimisation de l'en-cours maximal du système est une problématique très proche de celles que nous venons d'évoquer. Dans l'exemple particulier développé dans [ERS 82], cf. Figure Annexe C-1, nous trouvons un cas spécifique où les deux notions : minimisation de la taille des buffers et minimisation de l'en-cours moyen sont confondues, puisque les seuls lieux de stockage possible dans ce type d'atelier sont les buffers d'entrée des machines de transformation.

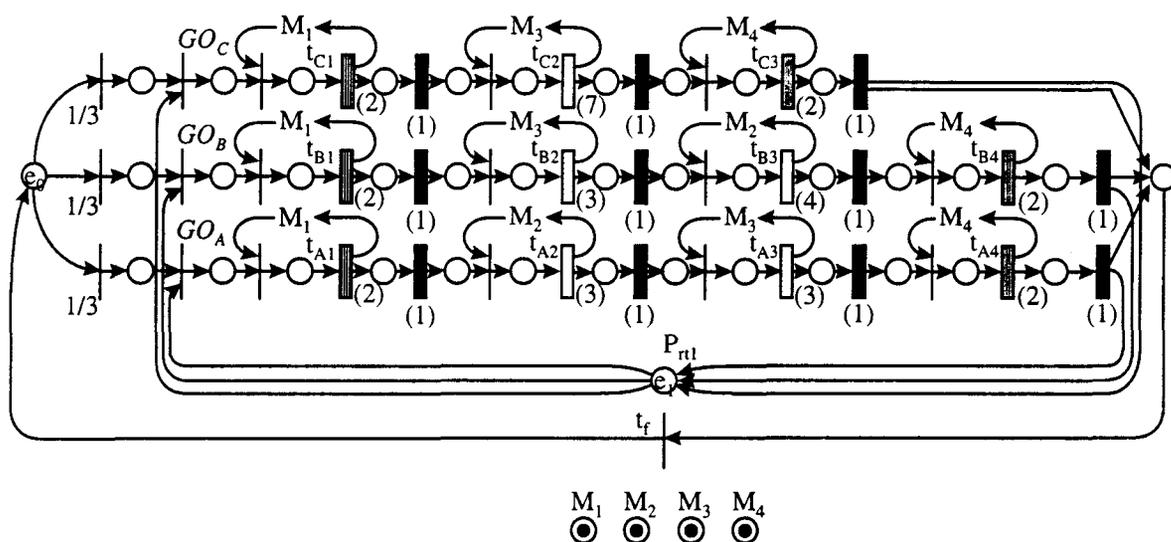


Figure Annexe C-1 : Exemple développé dans [ERS 82]

Supposons que nous travaillons sur l'horizon de production $E(RP_p) = \{A, B, C\}$ caractérisé par son temps de cycle optimal $CT(RP_p) = 13$ u.t. fixé par la machine critique M_4 .

De plus pour cet exemple, introduisons une notion de transport des pièces entre les machines en insérant entre deux opérations appartenant à des machines différentes un délai fixe représentant le temps de transport entre ces deux machines. Ce temps de transport a été supposé fixe et identique quel que soit le déplacement de machine à machine. Nous pouvons supposer également que le système de transport peut être a priori considéré comme une ressource de capacité infinie, pour éviter les conflits possibles de ressource partagée. Cependant, d'après les ordonnancements obtenus à la Figure Annexe C-2 et Figure Annexe C-3, nous n'avons à chaque instant qu'une seule palette transportant une pièce en cours de réalisation dans le système de transport, évitant ainsi tout problème de conflit, si nous supposons que les palettes vides sont bloquées en attente de chargement au niveau du stock d'entrée de l'atelier.

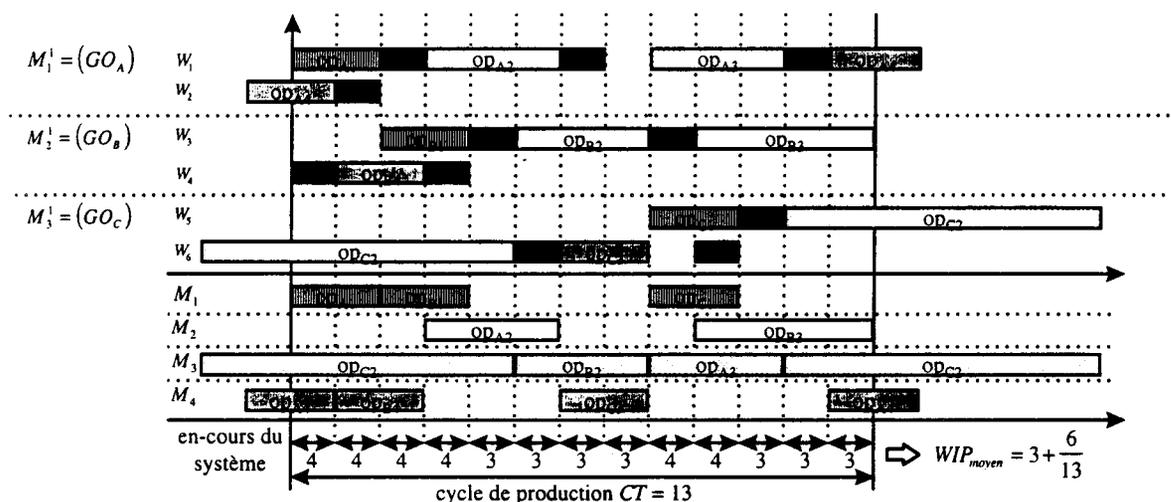


Figure Annexe C-2 : Ordonnancement cyclique obtenu par [ERS 82] qui minimise à la fois la taille des buffers et l'en-cours moyen du système

Au niveau des gammes (ou macro-gammes) opératoires, point de vue non représenté graphiquement par [ERS 82], mais aussi important que l'aspect machine pour la compréhension du problème, moins il existe de marge de gammes consommée entre le début et la fin d'une gamme, moins il y aura d'en-cours. En effet les pièces resteront moins longtemps dans l'atelier. En moyenne, l'en-cours est diminué. Pour cet exemple, nous constatons effectivement qu'il existe très peu de perte de marge. Donc au moment du calcul de l'en-cours moyen, alors que le critère d'optimisation portait originellement sur la taille des buffers, nous obtenons une bonne valeur de l'en-cours moyen :

$$WIP_{moyen} = \frac{1}{CT} \int_{t=0}^{t=CT} WIP(t).dt = 3 + \frac{6}{13}.$$

Nous constatons d'ailleurs qu'elle représente a priori la meilleure valeur. Nous avons donc à notre disposition une bonne référence de comparaison pour les performances que nous recherchons en appliquant le principe de notre méthode, cf. Figure Annexe C-3.

Pour minimiser l'en-cours moyen du système à partir d'un (ou des) ordonnancement(s) optimal(aux), sans modifier les contraintes de précédence entre opérations appartenant à la même machine, soit, en passant à la terminologie Réseau de Petri, sans changer les circuits de commande du graphe d'événements associé, nous utilisons les marges des opérations entre elles, c'est-à-dire les marges de macro-gammes consommées pendant l'élaboration d'une pièce, dans la mesure du possible. En effet, si de la marge a été consommée pour atteindre un intervalle de disponibilité de la machine correspondante, il ne sera pas possible d'utiliser cette marge, tout au moins pour cette opération. Il peut être possible de décaler l'opération précédente. Cela dépend des intervalles de disponibilité des machines. Il doit y avoir coïncidence entre la marge de macro-gammes et un intervalle de disponibilité de machine.

Ainsi pour l'ordonnancement cyclique modélisé à la Figure Annexe C-3, optimal du point de vue minimisation de l'en-cours maximum du système, quand nous calculons le niveau d'en-cours moyen :

$$WIP_{moyen} = \frac{1}{CT} \int_{t=0}^{t=CT} WIP(t).dt = 3 + \frac{10}{13}$$
, nous constatons que nous n'avons pas atteint la valeur optimale.

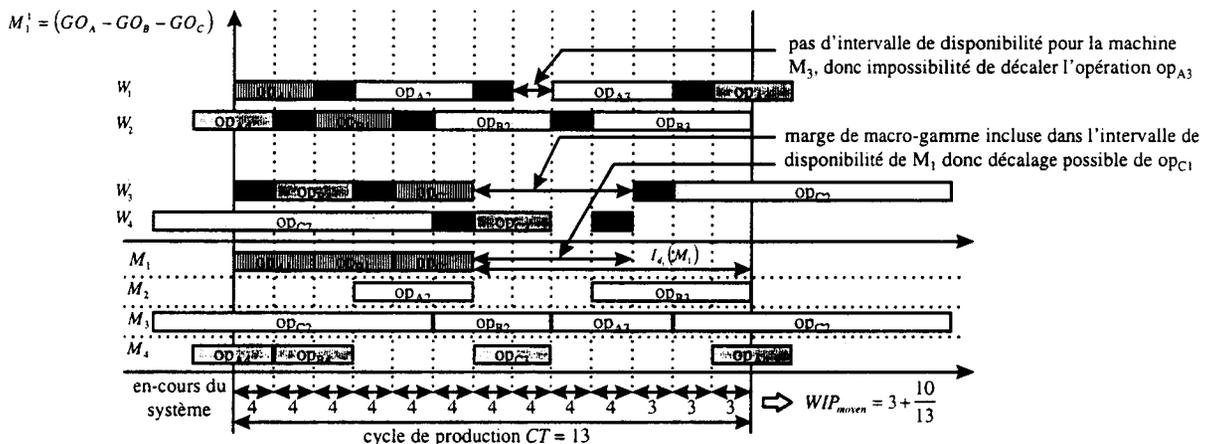


Figure Annexe C-3 : Ordonnancement cyclique obtenu en minimisant l'en-cours maximal du système en utilisant le principe de l'heuristique développée dans ce mémoire

Nous allons donc essayer d'utiliser les marges des macro-gammes pour décaler les opérations afin de diminuer les temps de séjour des pièces dans l'atelier. Pour l'opération op_{A3} , il existe bien un intervalle disponible : [7, 8], du point de vue macro-gamme, mais comme la machine associée (M_3) est une machine critique, il n'y a donc pas d'intervalle de disponibilité et il est impossible de décaler cette opération.

Par contre, nous constatons pour l'opération op_{C1} appartenant à la machine M_1 qu'il existe de la marge de macro-gammes à la fin de son élaboration (intervalle [6, 10] a priori disponible). Au niveau des machines, nous constatons qu'il existe un intervalle de

disponibilité de la machine correspondante M_1 : $I_{d_1}(M_1) = [6,13]$ incluant totalement le premier intervalle. Il est donc possible de décaler cette opération op_{C1} n'importe où dans cet intervalle sans jamais interférer sur l'ordonnancement cyclique, sauf sur la politique de lancement des opérations (nous avons opté pour l'instant pour un tir au plus tôt des opérations, ce qui ne sera plus possible si nous modifions le placement de op_{C1}). Comme cette opération est la première de la gamme opératoire GO_C , il semble donc tout à fait judicieux de la rapprocher de l'opération suivante pour retarder la rentrée de cette pièce dans l'atelier, et donc pour diminuer l'en-cours moyen. Si nous calons effectivement cette opération à la fin de l'intervalle disponible au niveau macro-gamme, nous obtenons alors le même ordonnancement que celui obtenu par [ERS 82]. Il n'est donc pas possible dans ce cas de faire mieux.

Annexe D :

Démonstrations des propositions du chapitre III

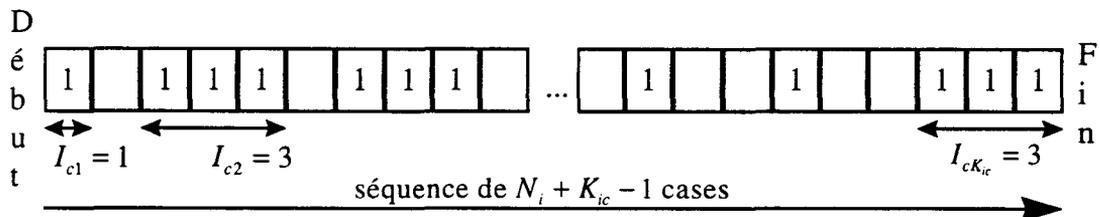
Annexe D.1 : Dénombrement des solutions d'une équation linéaire en nombres entiers

Proposition (III-1) : *Le nombre de solutions de l'équation $\sum_{k=1}^{K_{ic}} I_{ck} = N_i$ est*

$$N_{e.r.}(i, c) = C_{N_i + K_{ic} - 1}^{K_{ic} - 1}.$$

Démonstration :

Considérons une séquence ordonnée à $N_i + K_{ic} - 1$ cases. Marquons N_i cases d'entre elles (en mettant un nombre 1 par exemple dans chacune des cases marquées). Le problème consiste à calculer le nombre de façons différentes de marquer ces cases. Il s'agit donc de choisir N_i éléments parmi $N_i + K_{ic} - 1$ sans que l'ordre dans lequel les cases ont été choisies ait une importance. Il existe donc $C_{N_i + K_{ic} - 1}^{N_i}$ façons différentes.



N_i cases marquées (avec 1) et $K_{ic} - 1$ laissées vides

Nous avons donc : $\sum_{k=1}^{K_{ic}} I_{ck} = N_i$

Figure Annexe D-1 : Modélisation graphique du problème de dénombrement de cette partie

Or si nous appelons I_{c1} , comme sur la Figure Annexe D-1, le nombre de cases remplies entre le début de la séquence et la première case vide, etc. jusqu'à $I_{cK_{ic}}$ celui entre la $(K_{ic} - 1)$ -ème case vide et la fin de la séquence, la démonstration est terminée puisque la formulation initiale du problème a été retrouvée ($\sum_{k=1}^{K_{ic}} I_{ck} = N_i$ avec $I_{ck} \in \mathbb{N}$). De plus l'une des propriétés des combinaisons indique que $C_{N_i + K_{ic} - 1}^{N_i} = C_{N_i + K_{ic} - 1}^{N_i - (N_i + K_{ic} - 1)} = C_{N_i + K_{ic} - 1}^{K_{ic} - 1}$. ■

Annexe D.2 : Nombres de k-partitions, au sens mathématique du terme, d'un ensemble à n éléments distincts

Le problème mathématique a été résolu et le résultat est le nombre de Stirling de seconde espèce, noté $S(n, k)$. Il représente le nombre de partitions d'un ensemble de n éléments en k classes distinctes. Par exemple, les partitions de l'ensemble $S = \{a, b, c\}$ en deux classes non vides sont :

$$\{\{a, b\}, c\}, \{\{a, c\}, b\} \text{ et } \{\{b, c\}, a\}, \text{ d'où } S(3, 2) = 3.$$

Plusieurs notations et propriétés ont été établies :

- pour $n \geq 1$, $S(n, 0) = 0$, $S(n, 1) = 1$, $S(n, n) = 1$ et $S(n, k) = 0$ si $n < k$;
- par convention, pour $n = 0$, $S(0, k) = 0$ pour $k > 0$ et $S(0, 0) = 1$.

Il existe plusieurs façons de déterminer les valeurs des $S(n, k)$:

- par la formule d'inclusion, d'exclusion : $S(n, k) = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \cdot C_k^j \cdot j^n$;
- par la fonction génératrice exponentielle des nombres $S(n, k)$ à k fixé :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n, k) \cdot \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \cdot (e^x - 1)^k ;$$
- la solution la plus intéressante demeure cependant la détermination par récurrence :

Proposition (III-2) : $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$, pour n et k supérieurs ou égaux à 1.

Démonstration : pour mémoire,

Soit un des éléments de l'ensemble $S = \{1, \dots, n\}$, n par exemple. L'ensemble des k-partitions de S est une réunion disjointe de l'ensemble des k-partitions dont une classe est réduite au singleton $\{n\}$, ce qui revient à chercher l'ensemble des (k-1)-partitions de $S / \{n\} = \{1, \dots, n-1\}$ (le nombre de tels ensembles est $S(n-1, k-1)$), et de l'ensemble des k-partitions dans lesquelles l'élément n appartient à une partition d'au moins deux éléments. Pour cela, il suffit de rechercher, l'ensemble des k-partitions de $S / \{n\}$. Pour chaque k-partition trouvée, il suffit de placer l'élément n dans n'importe quelle partition pour trouver une k-partition de S . Toutes les solutions sont possibles et distinctes. Il en existe donc $k \cdot S(n-1, k)$. D'où la formule de récurrence que nous venons de présenter. ■

Le nombre de Stirling le plus important à considérer dans l'exemple illustratif est $S(10,2)$ et $S(7,3)$, pour l'horizon minimal E_1 , et $S(20,2)$ et $S(14,3)$, pour l'horizon double. Puisqu'il est nécessaire de calculer tous les prédécesseurs, et puisque certains de ces résultats sont aussi recherchés, nous regroupons les valeurs des $S(n,k)$ pour $n \leq 20$ dans le Tableau Annexe D-1, ce qui permet de faciliter les calculs à l'aide de la formule de récurrence.

$S(n,k)$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
$n=1$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$n=2$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$n=3$	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0
$n=4$	1	7	6	1	0	0	0	0	0	0
$n=5$	1	15	25	10	1	0	0	0	0	0
$n=6$	1	31	90	65	15	1	0	0	0	0
$n=7$	1	63	301	350	140	21	1	0	0	0
$n=8$	1	127	966	1.701	1.050	266	28	1	0	0
$n=9$	1	255	3.025	7.770	6.951	2.646	462	35	1	0
$n=10$	1	511	9.330	34.105	42.525	22.827	5.880	707	42	1
$n=11$	1	1.023	28.501	$-(^1)$	-	-	-	-	-	-
$n=12$	1	2.047	86.526	-	-	-	-	-	-	-
$n=13$	1	4.095	261.625	-	-	-	-	-	-	-
$n=14$	1	8.191	788.970	-	-	-	-	-	-	-
$n=15$	1	16.383	2.375.101	-	-	-	-	-	-	-
$n=16$	1	32.767	7.141.686	-	-	-	-	-	-	-
$n=17$	1	65.535	21.457.825	-	-	-	-	-	-	-
$n=18$	1	131.071	64.439.010	-	-	-	-	-	-	-
$n=19$	1	262.143	193.448.101	-	-	-	-	-	-	-
$n=20$	1	524.287	580.606.446	-	-	-	-	-	-	-

Tableau Annexe D-1 : Table des nombres de Stirling de deuxième espèce jusqu'à $n = 20$

¹ Nous n'avons pas explicité les valeurs des nombres de Stirling de deuxième espèce pour $n \geq 11$ et $k \geq 4$, pour conserver une certaine lisibilité de ce tableau et aussi parce que nous n'avons pas besoin de ces valeurs pour l'exemple illustratif que nous étudions ici.

Annexe D.3 : Nombre de partitions d'un ensemble à n éléments

Ce problème a été résolu analytiquement pour le cas d'un ensemble contenant des éléments tous différents et il est donné par le nombre de Bell.

Le nombre de Bell, noté B_n , représente le nombre de partitions (ensemble de sous-ensembles disjoints non vides) d'un ensemble à n éléments. Il est pris par convention que $B_0 = 1$. Ainsi :

$$B_1 = 1 ;$$

$$B_2 = 2, \mathcal{P}_1 = \{\{1, 2\}\}, \mathcal{P}_2 = \{\{1\}, \{2\}\} ;$$

$$B_3 = 5, \mathcal{P}_1 = \{\{1, 2, 3\}\}, \mathcal{P}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \mathcal{P}_3 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \mathcal{P}_4 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \mathcal{P}_5 = \{\{2, 3\}, \{1\}\}$$

Il existe différentes manières pour le calculer :

- par l'utilisation des séries génératrices exponentielles :

$$B_n = \frac{1}{e} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

- par l'utilisation des nombres de Stirling de seconde espèce :

$$B_n = \sum_{k=1}^n S(n, k)$$

- et par récurrence :

Proposition (III-3): $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot B_k .$

Démonstration : pour mémoire,

Dans une partition donnée d'un ensemble S à $(n+1)$ éléments ($S = \{1, 2, \dots, n+1\}$), soient $\bar{1}$ le sous-ensemble contenant l'élément 1 et k le nombre d'éléments n'appartenant pas à $\bar{1}$. Il existe $C_n^{n+1-k-1} = C_n^k$ façons de choisir les $n-k$ éléments (1 compris) de $\bar{1}$. Il s'agit ensuite de partitionner un ensemble à k éléments, soit B_k façons d'y arriver par définition ($B_0 = 1$), pour compléter la partition de S . Nous obtenons donc bien

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot B_k . \blacksquare$$

Les premières valeurs sont :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4.140	21.147	115.975

Tableau Annexe D-2 : Table des premières valeurs des nombres de Bell

Annexe D.4 : Dénombrement de l'ensemble des regroupements cycliques possibles à partir d'une partition \mathcal{P}

Considérons le problème général. Soit \mathcal{P} une partition donnée d'un des ensembles des gammes opératoires linéaires de l'horizon de production, ensembles obtenus après les étapes précédentes : détermination des routages admissibles, extraction de chemins, prise en compte des flexibilités de permutation et détermination des charges des machines. Soit G_a^h le a-ème regroupement lié au type h de ressource de transport pour cette partition \mathcal{P} . Il comprend un certain nombre de gammes linéaires (G_1, \dots, G_n) qui peuvent se trouver en

plusieurs exemplaires. Soit $G_a^h = \left\{ \underbrace{G_1, \dots, G_1}_{\lambda_1 \text{ fois}}, \underbrace{G_2, \dots, G_2}_{\lambda_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{G_n, \dots, G_n}_{\lambda_n \text{ fois}} \right\}$. A partir de G_a^h ,

plusieurs macro-gammes (notées $M_{a,j}^h$) peuvent être déduites. Soit $\xi(a,h)$ le nombre de macro-gammes obtenues à partir de G_a^h .

Annexe D.4.1 : Cas particulier : tous les nombres caractérisant la répétition des gammes linéaires de type G_i sont premiers entre eux

Lemme (III-4) : Si $\text{pgcd}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 1$, alors $\xi(a,h) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)!}{\prod_{i=1}^n (\lambda_i)!} * \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)}$.

Démonstration :

1. Si toutes les gammes étaient distinctes, le nombre de regroupements ordonnés serait égal à $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)!$, ce qui correspond à évaluer le nombre d'arrangements de n éléments pris dans un ensemble à n éléments : soit $A_n^n = n!$.

2. Puisqu'il existe λ_1 gammes G_1 identiques, il faut retirer toutes les permutations possibles entre ces éléments. Il faut donc diviser par $(\lambda_1)!$. La prise en

compte de tous les types de gammes nous amène donc à diviser par $\prod_{i=1}^n (\lambda_i)!$, pour ne garder que les regroupements ordonnés distincts.

3. Considérons la relation d'équivalence \mathcal{R} : « est équivalent à une permutation cyclique près ». Les solutions appartenant à la même classe d'équivalence donnent le même regroupement cyclique. Comme $\text{pgcd}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 1$, il ne peut pas y avoir de permutation interne, c'est à dire des permutations d'ordre inférieur à $\sum_{i=1}^n \lambda_i$. Par exemple, si $G_a^h = \{G_1, G_1, G_2, G_2\}$, $\text{pgcd}(\lambda_1, \lambda_2) = \text{pgcd}(2, 2) = 2$. Il existe une permutation interne du type $(G_1 - G_2 - G_1 - G_2)$. La classe d'équivalence associée à cette solution ne comporte que deux éléments $(G_1 - G_2 - G_1 - G_2)$ et $(G_2 - G_1 - G_2 - G_1)$, contrairement aux autres classes qui ont 4 regroupements ordonnés (nombre de permutations cycliques équivalentes) : par exemple la classe d'équivalence de type $(G_1 - G_2 - G_2 - G_1)$ possède 4 éléments :

$(G_1 - G_2 - G_2 - G_1)$, $(G_2 - G_2 - G_1 - G_1)$, $(G_2 - G_1 - G_1 - G_2)$ et $(G_1 - G_1 - G_2 - G_2)$. Donc toutes les classes d'équivalence considérées ont une

cardinalité égale à $\sum_{i=1}^n \lambda_i$. Par conséquent, le nombre de classes d'équivalences ou de macro-gammes obtenues à partir du regroupement

$G_a^h = \left\{ \underbrace{G_1, \dots, G_1}_{\lambda_1 \text{ fois}}, \underbrace{G_2, \dots, G_2}_{\lambda_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{G_n, \dots, G_n}_{\lambda_n \text{ fois}} \right\}$ est égal à :

$$\xi(a, h) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)!}{\prod_{i=1}^n (\lambda_i)!} * \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)}. \blacksquare$$

Annexe D.4.2 : Deuxième cas particulier : les λ_i ont un diviseur commun premier

Lemme (III-5) : Soit $G_a^h = \left\{ \underbrace{G_1, \dots, G_1}_{\lambda_1 \text{ fois}}, \underbrace{G_2, \dots, G_2}_{\lambda_2 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{G_n, \dots, G_n}_{\lambda_n \text{ fois}} \right\}$. Si

$\text{pgcd}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda$ avec λ nombre premier, alors $\xi(a, h) = \xi_\lambda + \xi_1$, avec ξ_λ le nombre de

classes d'équivalences des permutations cycliques d'ordre $\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{\lambda}$ exactement et ξ_1 celui des

permutations cycliques d'ordre $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)$ exactement.

$$\xi_\lambda = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda}\right)!}{\prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)!} * \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda}} \text{ et } \xi_{\lambda'} = \left(\frac{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)!}{\prod_{i=1}^n (\lambda_i)!} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda}\right)!}{\prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)!} \right) * \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}.$$

Démonstration :

1. Contrairement au cas étudié précédemment, il existe ici des classes d'équivalence dont la cardinalité est inférieure à $\sum_{i=1}^n \lambda_i$. En effet celles-ci sont liées

à des permutations cycliques d'ordre inférieur à $\sum_{i=1}^n \lambda_i$. Comme ici

$\text{pgcd}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda$ avec λ premier, les seules autres permutations cycliques à

étudier sont celles d'ordre $\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{\lambda}$. La cardinalité de ces classes d'équivalences est

donc égal à $\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{\lambda}$. Ces classes viennent de celles trouvées sur l'ensemble

$$G_a^h|_\lambda = \left\{ \underbrace{G_1, \dots, G_1}_{\lambda_1/\lambda \text{ fois}}, \underbrace{G_2, \dots, G_2}_{\lambda_2/\lambda \text{ fois}}, \dots, \underbrace{G_n, \dots, G_n}_{\lambda_n/\lambda \text{ fois}} \right\}.$$

Comme λ est premier, nous sommes sûrs de ne pas trouver dans les regroupements ordonnés $M_a^h|_\lambda$ de

permutations internes, c'est à dire des classes d'équivalence des permutations cycliques d'ordre inférieur à $\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{\lambda}$. Le nombre de classes d'équivalences est donc

$$\text{donné par le lemme (III-4). D'où } \xi_\lambda = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda}\right)!}{\prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)!} * \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda}}.$$

2. Nous recherchons maintenant les classes d'équivalence des permutations cycliques d'ordre $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ exactement. Pour cela, il faut retirer de l'ensemble des

regroupements ordonnés ceux considérés précédemment, c'est à dire ceux des

classes d'équivalence des permutations cycliques d'ordre égal à $\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{\lambda}$. La

cardinalité de ces ensembles est donc $\frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda}\right)!}{\prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)!}$. L'ensemble des regroupements

ordonnés a pour cardinalité $\frac{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)!}{\prod_{i=1}^n (\lambda_i)!}$. Donc quand nous ôtons les regroupements

ordonnés considérés précédemment, il reste $\frac{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)!}{\prod_{i=1}^n (\lambda_i)!} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda}\right)!}{\prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)!}$ regroupements

ordonnés appartenant à des classes d'équivalence de cardinalité égale exactement à $\sum_{i=1}^n \lambda_i$. D'où le nombre de classes d'équivalences des permutations est donc bien

$$\text{égal à } \xi = \left(\frac{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)!}{\prod_{i=1}^n (\lambda_i)!} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda}\right)!}{\prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)!} \right) * \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}. \blacksquare$$

Annexe D.4.3 : Généralisation

Il est ainsi facile de démontrer que si $\text{pgcd}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda$ et si l'ensemble des diviseurs de λ est $\{d_{\lambda_1} = \lambda, \dots, d_{\lambda_k} = 1\}$, alors le nombre total de macro-gammes obtenus à partir de

G_a^h est donné par $\xi(a, h) = \sum_{i=1}^k \xi_{d_{\lambda_i}}$, où $\xi_{d_{\lambda_i}}$ représente le nombre de classes d'équivalences

d'ordre $\frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k}{d_{\lambda_i}}$ et vaut :

$$\xi_{d_{\lambda_i}} = \left(\begin{array}{l} \text{nombre de permutations ordonnés pour } G_a^h|_{d_{\lambda_i}} \\ - \text{nombre de permutations ordonnés pour } G_a^h|_{d_{\lambda_j}} \text{ pour tous les } d_{\lambda_j} \text{ multiples de } d_{\lambda_i} \end{array} \right) * \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{d_{\lambda_i}}}$$

Annexe D.4.4 : Proposition d'algorithme afin de dénombrer l'ensemble des regroupements cycliques engendrés par une partition donnée

Nous avons vu que, pour un ensemble de gammes linéaires regroupées par une partition, la détermination des classes d'équivalence des permutations cycliques passe obligatoirement par la connaissance de $\lambda = \text{pgcd}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et de ses diviseurs $\{d_{\lambda_1} = \lambda, \dots, d_{\lambda_k} = 1\}$.

Nous construisons alors le graphe qui relie tous les diviseurs entre eux et nous calculons, à chaque niveau (pour chaque diviseur d_{λ_i}) du graphe, le nombre de classes différentes d'équivalences : $\xi_{d_{\lambda_i}}$. Les liens orientés entre deux diviseurs d_{λ_i} et d_{λ_j} signifient que d_{λ_i} est un multiple de d_{λ_j} . Il est donc nécessaire de retirer tous les éléments des classes d'équivalence liés à d_{λ_i} parmi ceux dénombrés avec d_{λ_j} avant de déterminer le nombre exact de classes différentes d'équivalences liées à d_{λ_j} , cf. Figure Annexe D-2.

Nous pouvons ainsi proposer un algorithme de calcul du nombre de regroupements cycliques obtenus à partir d'un regroupement donné de gammes opératoires linéaires.

Algorithme :

- ```

/* Calcul intermédiaire */
• Déterminer $\lambda = \text{pgcd}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
• Déterminer les diviseurs de λ et les classer dans l'ordre : $d_{\lambda_1} > d_{\lambda_2} > \dots > d_{\lambda_k}$.
/* Construction du graphe */
• Pour (1) $i = 1$ à k , Faire
 | $F[i] = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{d_{\lambda_i}}$
 | $P[i] = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j}{d_{\lambda_i}} \right)!$
 | $\delta[i] = \frac{(F[i])!}{P[i]}$
 | $W[i] = \delta[i]$
 | Pour (2) $j = 1$ à $(i-1)$ Faire
 | Si d_{λ_j} est un multiple de d_{λ_i} alors $W[i] = W[i] - W[j]$
 | Fin Pour (2)
 | $\xi[i] = \frac{W[i]}{F[i]}$
• Fin Pour (1)
• $\xi(a, h) = 0$
• Pour $i = 1$ à k , Faire $\xi(a, h) = \xi(a, h) + \xi[i]$.

```

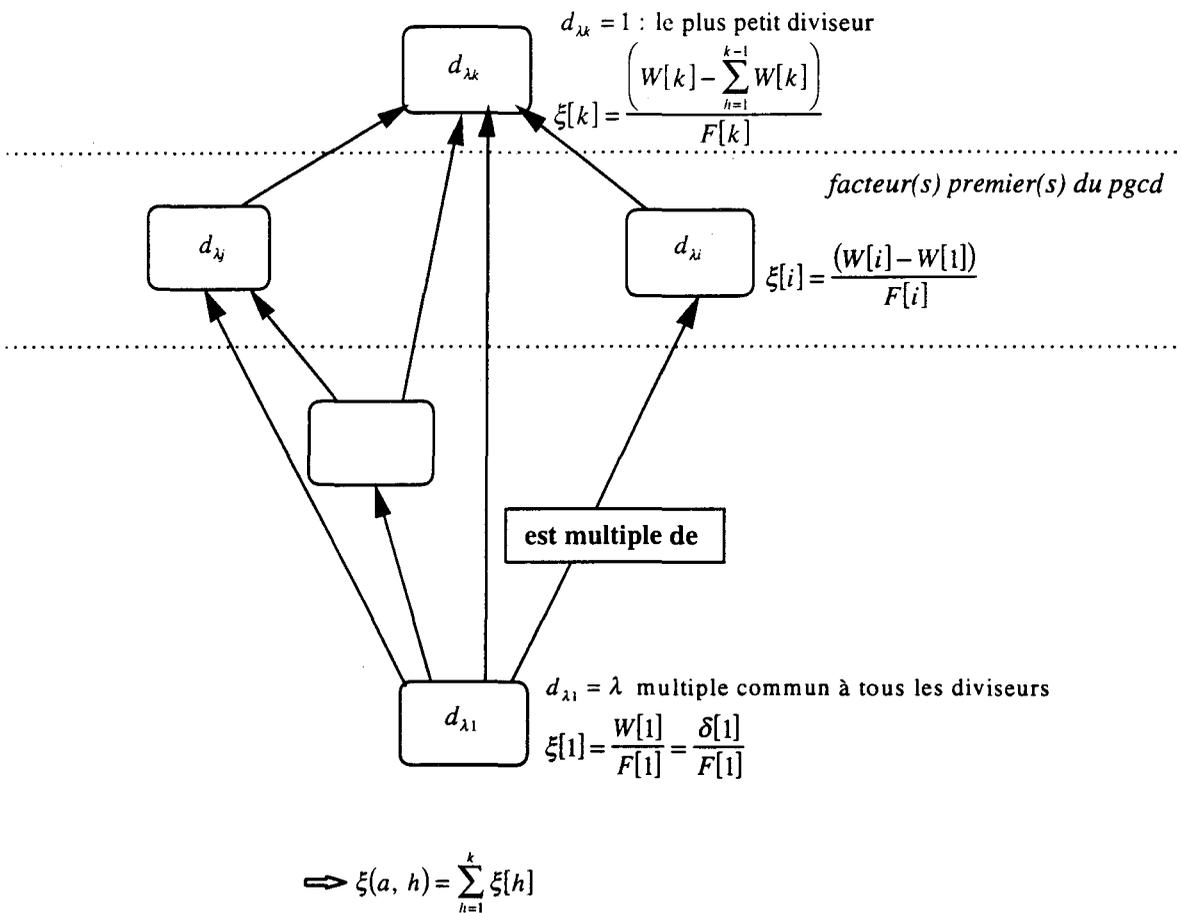


Figure Annexe D-2 : Schéma d'analyse de dénombrement de l'ensemble des regroupements cycliques obtenus à partir d'un regroupement de gammes opératoires linéaires

### Annexe D.4.5 : Passage du problème de dénombrement des regroupements à celui des regroupements cycliques appliqué à l'exemple illustratif

Pour obtenir le nombre total de regroupements cycliques, nous reprenons les anciennes solutions créées à l'étape précédente (phase 5), pour savoir combien de nouvelles peuvent être créées à partir des premières. Le problème est décomposé suivant le type de ressources de transport.

Pour le premier type ( $h = 1$ ), il existe trois gammes linéaires distinctes issues des gammes opératoires de A. A partir du regroupement  $G^1 = \{G_1^1 = \{GO_{A11}, GO_{A12}, GO_{A13}\}\}$ , nous obtenons deux macro-gammes différentes, c'est-à-dire :  $M_{1,1}^1 : (GO_{A11} - GO_{A12} - GO_{A13})$  et  $M_{1,2}^1 : (GO_{A11} - GO_{A13} - GO_{A12})$ . Par contre pour les quatre autres regroupements obtenus à l'étape précédente, les conditions ne sont pas remplies pour dégager plusieurs solutions à partir d'un seul regroupement. Donc au lieu de multiplier par 5 les solutions issues de la détermination des charges sur les machines (phase 4), en ce qui concerne les gammes appartenant à la première ressource de transport, il faut multiplier par 6.

Les résultats du deuxième type de transport sont regroupés dans le Tableau Annexe D-3. Il faut distinguer les cas où les deux gammes produisant des pièces de type B sont distinctes où pour une solution provenant de l'étape 4, au lieu de 15 nouvelles solutions engendrées à l'étape 5, cette étape en détermine 24 nouvelles, de ceux où ils sont identiques où au lieu de multiplier par 11, il faut maintenant multiplier par 14.

| Evolution d'une solution obtenue à la fin de l'étape 4 avec les deux gammes différentes de type B, solution de type : $\{B_1, B_2, C_1, C_2\}$ |                                   |                                  | Evolution d'une solution obtenue à la fin de l'étape 4 avec les deux gammes identiques de type B, solution de type : $\{B_1, B_1, C_1, C_2\}$ |                                   |                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| Regroupements engendrés<br>$G^2$                                                                                                               | Nombre de regroupements (phase 5) | Nombre de macro-gammes (phase 6) | Regroupements engendrés<br>$G^2$                                                                                                              | Nombre de regroupements (phase 5) | Nombre de macro-gammes (phase 6) |
| $G_1^2 = \{B_1\}, G_2^2 = \{B_2\},$<br>$G_3^2 = \{C_1\}, G_4^2 = \{C_2\}$                                                                      | 1                                 | 1                                | $G_1^2 = \{B_1\}, G_2^2 = \{B_1\},$<br>$G_3^2 = \{C_1\}, G_4^2 = \{C_2\}$                                                                     | 1                                 | 1                                |
| $G_1^2 = \{B_1, B_2\}, G_2^2 = \{C_1\},$<br>$G_3^2 = \{C_2\}$                                                                                  | 1                                 | 1                                | $G_1^2 = \{B_1, B_1\}, G_2^2 = \{C_1\},$<br>$G_3^2 = \{C_2\}$                                                                                 | 1                                 | 1                                |
| $G_1^2 = \{B_1, C_1\}, G_2^2 = \{B_2\},$<br>$G_3^2 = \{C_2\}$                                                                                  | 1                                 | 1                                | $G_1^2 = \{B_1, C_1\}, G_2^2 = \{B_1\},$<br>$G_3^2 = \{C_2\}$                                                                                 | 1                                 | 1                                |
| $G_1^2 = \{B_1, C_2\}, G_2^2 = \{B_2\},$<br>$G_3^2 = \{C_1\}$                                                                                  | 1                                 | 1                                | $G_1^2 = \{B_1, C_2\}, G_2^2 = \{B_1\},$<br>$G_3^2 = \{C_1\}$                                                                                 | 1                                 | 1                                |
| $G_1^2 = \{B_2, C_1\}, G_2^2 = \{B_1\},$<br>$G_3^2 = \{C_2\}$                                                                                  | 1                                 | 1                                | -                                                                                                                                             | 0                                 | 0                                |
| $G_1^2 = \{B_2, C_2\}, G_2^2 = \{B_1\},$<br>$G_3^2 = \{C_1\}$                                                                                  | 1                                 | 1                                | -                                                                                                                                             | 0                                 | 0                                |
| $G_1^2 = \{C_1, C_2\}, G_2^2 = \{B_1\},$<br>$G_3^2 = \{B_2\}$                                                                                  | 1                                 | 1                                | $G_1^2 = \{C_1, C_2\}, G_2^2 = \{B_1\},$<br>$G_3^2 = \{B_1\}$                                                                                 | 1                                 | 1                                |
| $G_1^2 = \{B_1, B_2\}, G_2^2 = \{C_1, C_2\}$                                                                                                   | 1                                 | 1                                | $G_1^2 = \{B_1, B_1\}, G_2^2 = \{C_1, C_2\}$                                                                                                  | 1                                 | 1                                |
| $G_1^2 = \{B_1, C_1\}, G_2^2 = \{B_2, C_2\}$                                                                                                   | 1                                 | 1                                | $G_1^2 = \{B_1, C_1\}, G_2^2 = \{B_1, C_2\}$                                                                                                  | 1                                 | 1                                |
| $G_1^2 = \{B_1, C_2\}, G_2^2 = \{B_2, C_1\}$                                                                                                   | 1                                 | 1                                | -                                                                                                                                             | 0                                 | 0                                |
| $G_1^2 = \{B_1, B_2, C_1\}, G_2^2 = \{C_2\}$                                                                                                   | 1                                 | 2                                | $G_1^2 = \{B_1, B_1, C_1\}, G_2^2 = \{C_2\}$                                                                                                  | 1                                 | 1                                |
| $G_1^2 = \{B_1, B_2, C_2\}, G_2^2 = \{C_1\}$                                                                                                   | 1                                 | 2                                | $G_1^2 = \{B_1, B_1, C_2\}, G_2^2 = \{C_1\}$                                                                                                  | 1                                 | 1                                |
| $G_1^2 = \{B_1, C_1, C_2\}, G_2^2 = \{B_2\}$                                                                                                   | 1                                 | 2                                | $G_1^2 = \{B_1, C_1, C_2\}, G_2^2 = \{B_1\}$                                                                                                  | 1                                 | 2                                |
| $G_1^2 = \{B_2, C_1, C_2\}, G_2^2 = \{B_1\}$                                                                                                   | 1                                 | 2                                | -                                                                                                                                             | 0                                 | 0                                |
| $G_1^1 = \{B_1, B_2, C_1, C_2\}$                                                                                                               | 1                                 | 6                                | $G_1^1 = \{B_1, B_1, C_1, C_2\}$                                                                                                              | 1                                 | 3                                |
| Total                                                                                                                                          | 15                                | 24                               | Total                                                                                                                                         | 11                                | 14                               |

Tableau Annexe D-3 : Comparaison du nombre de solutions engendrées par une solution obtenue à la fin de l'étape 4 suivant l'étape 5 et 6 (seules les gammes appartenant au type  $h = 2$  de ressources de transport sont retenues dans ce tableau)

# Table des figures

Page

## Introduction :

|                                                                                                                      |   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| Figure 1 : Réactivité envisagée par rapport à l'arrivée d'une commande urgente .....                                 | 4 |
| Figure 2 : Interface du module de Planification - Ordonnancement avec les autres modules du contrôle / commande..... | 5 |
| Figure 3 : Plan schématisé du mémoire de thèse.....                                                                  | 7 |

## Chapitre I :

|                                                                                                                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figure I-1 : Productivité, Flexibilité et Coût [KER 96] .....                                                                                                                       | 10 |
| Figure I-2 : Echelles temporelles des différentes classes d'événements.....                                                                                                         | 13 |
| Figure I-3 : Bouclage commun pour l'en-cours et les palettes .....                                                                                                                  | 14 |
| Figure I-4 : Contrôle séparé de l'en-cours et des ressources de transport.....                                                                                                      | 14 |
| Figure I-5 : Modélisation des trois types de flexibilités de gammes opératoires .....                                                                                               | 18 |
| Figure I-6 : Exemples de flexibilités complexes au niveau des gammes opératoires .....                                                                                              | 19 |
| Figure I-7 : Regroupement dynamique [STE 91].....                                                                                                                                   | 24 |
| Figure I-8 : Exemple de SFPM avec des flexibilités de gammes opératoires, cf. [CAM 96b].....                                                                                        | 29 |
| Figure I-9 : Exemple de SFPM avec une ressource , cf. [CAM 96a].....                                                                                                                | 30 |
| Figure I-10 : Influence de l'horizon multiple de travail retenu sur le temps de cycle .....                                                                                         | 30 |
| Figure I-11 : Indices de performances et facteurs d'influence.....                                                                                                                  | 31 |
| Figure I-12 : Modélisation des Gammes opératoires restreintes temporisées avec les ressources de transformation associées .....                                                     | 34 |
| Figure I-13 : Modélisation du système de production considéré dans [OHL 95a] soumis aux contraintes de ratios de production fixés.....                                              | 35 |
| Figure I-14 : Relation entre flux de production et en-cours maximum du système .....                                                                                                | 36 |
| Figure I-15 : Exemple illustrant les relations entre le temps de cycle, l'en-cours et l'horizon de travail.....                                                                     | 37 |
| Figure I-16 : Performances obtenues avec l'horizon minimal de production respectant les ratios de production .....                                                                  | 38 |
| Figure I-17 : Performances obtenues avec l'horizon $E_2$ .....                                                                                                                      | 38 |
| Figure I-18 : Performances obtenues avec l'horizon $E_3$ .....                                                                                                                      | 39 |
| Figure I-19 : Récapitulatif des performances obtenues avec les différents horizons multiples.....                                                                                   | 39 |
| Figure I-20 : Approche hiérarchique retenue de l'optimisation.....                                                                                                                  | 41 |
| Figure I-21 : Contraintes sur les ratios de routage imposées par l'étude sur un horizon cyclique de travail fixé $E_v$ et taux de visite associés.....                              | 48 |
| Figure I-22 : Contraintes sur les ratios de routage des flexibilités imbriquées imposées par l'étude sur un horizon cyclique de travail fixé $E_v$ et taux de visite associés ..... | 48 |
| Figure I-23 : Comparaison des principaux critères en fonction du facteur multiplicatif de l'horizon de production considéré.....                                                    | 51 |
| Figure I-24 : Planification à long terme et programmation .....                                                                                                                     | 55 |
| Figure I-25 : Définitions des ratios de routage entiers et notation des taux de visite normalisés sur la réalisation du cycle de fabrication.....                                   | 59 |

## Chapitre II :

|                                                                                                                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figure II-1 : Modélisation du système de production sous le régime permanent $RP_p$ .....                                                                                                                  | 79  |
| Figure II-2 : Modélisation du respect des ratios de production sur l'horizon de production .....                                                                                                           | 80  |
| Figure II-3 : Point de fonctionnement de la commande prévisionnelle optimale recherchée sur la courbe Vitesse de production fonction du Nombre maximum d'en-cours pour un horizon de production donné..... | 83  |
| Figure II-4 : Modèle de la charge de travail d'un cycle de production du régime permanent $RP_p$ associé à l'ensemble des routages admissibles $\alpha_4 = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 0, 1, 1)$ .....              | 89  |
| Figure II-5 : Modèle déplié du système après extraction d'un des chemins issus de l'ensemble des routages admissibles $\alpha_4 = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 0, 1, 1)$ .....                                       | 91  |
| Figure II-6 : Modélisation du dispositif développé dans [OHL 95a] imposant le tir des transitions une et une seule fois au cours du cycle de production .....                                              | 93  |
| Figure II-7: Exemple d'ordonnancement représenté par un diagramme de Gantt ne pouvant être modélisé par le dispositif développé à la Figure II-6 .....                                                     | 94  |
| Figure II-8 : Nouveau dispositif proposé pour modéliser le respect en discret du tir de chaque transition une et une seule fois lors d'un cycle de production .....                                        | 95  |
| Figure II-9 : Modèle linéarisé du système de production.....                                                                                                                                               | 96  |
| Figure II-10 : Modèle du système de production avec les charges de travail définies sur les différentes machines .....                                                                                     | 97  |
| Figure II-11 : Une partition possible $\mathcal{P}_j$ de l'ensemble des gammes opératoires du cycle de production .....                                                                                    | 100 |
| Figure II-12 : Partition $\mathcal{P}_{st}$ retenue pour l'exemple illustratif : Séquentialisation totale des gammes opératoires obtenues avec l'ensemble de routages $\alpha_4$ .....                     | 101 |
| Figure II-13 : Macro-gamme obtenue avec le regroupement de deux gammes .....                                                                                                                               | 103 |
| Figure II-14 : Macro-gammes obtenues à partir d'un regroupement comportant trois types différents de gammes opératoires .....                                                                              | 103 |
| Figure II-15 : Macro-gammes obtenues à partir d'un regroupement de deux types différents de gammes opératoires, chacun étant représenté deux fois .....                                                    | 104 |
| Figure II-16 : Modèle appelé ordonnançable du système de production sous le régime permanent $RP_p$ .....                                                                                                  | 105 |
| Figure II-17 : Exemple de modèle de transfert entre deux lieux physiques.....                                                                                                                              | 108 |
| Figure II-18 : Sens de parcours de l'espace de recherche en fonction des valeurs de la borne associée aux routages admissibles et aux regroupements de gammes opératoires.....                             | 112 |
| Figure II-19 : Modèle FRT-nets de l'exemple illustrant l'intérêt de la recherche exhaustive .....                                                                                                          | 113 |
| Figure II-20 : Ordonnancement optimal trouvé avec $Rc_{pt}$ : niveau d'en-cours égal à 3.....                                                                                                              | 115 |
| Figure II-21 : Exemple illustrant l'intérêt de conserver l'indéterminisme sur l'ordonnancement des opérations sur les machines.....                                                                        | 119 |
| Figure II-22 : Meilleur ordonnancement possible obtenu avec l'approche [MUN 91] : conservation des ordres partiels intra-gammes sur chaque machine .....                                                   | 119 |

|                                                                                                                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figure II-23 : Le meilleur ordonnancement (en-cours égal à 2) : suppression des contraintes de précédence intra-gammes à l'aide d'en-cours .....                                             | 119 |
| Figure II-24 : Graphe d'Événements et fonctionnement répétitif [DUB 83] .....                                                                                                                | 124 |
| Figure II-25 : Modèle Graphe d'Événements d'un job-shop [HIL 89a] .....                                                                                                                      | 125 |
| Figure II-26 : Exemple d'ordonnancement non réalisable obtenu avec l'heuristique développé dans [HIL 89b] .....                                                                              | 131 |
| Figure II-27 : Définition exacte de l'intervalle de disponibilité d'une machine .....                                                                                                        | 132 |
| Figure II-28 : Modèle discret du système de production développé dans [VAL 94] .....                                                                                                         | 133 |
| Figure II-29 : Performances des différentes heuristiques sur l'exemple de [VAL 94] ....                                                                                                      | 134 |
| Figure II-30 : Modélisation des gammes opératoires liées au premier type de ressource de transport de l'exemple développé dans [OHL 95a] .....                                               | 137 |
| Figure II-31 : Diagramme de Gantt d'une des meilleures commandes obtenues avec l'heuristique [OHL 94b] .....                                                                                 | 138 |
| Figure II-32 : Diagramme de Gantt d'une des commandes optimales.....                                                                                                                         | 138 |
| Figure II-33 : Ancienne définition de la marge de machines, cf. [OHL 94b] .....                                                                                                              | 141 |
| Figure II-34 : Définition de la nouvelle marge de machines et exemple d'ordonnancement non réalisable malgré la condition marge de machines toujours positive .....                          | 141 |
| Figure II-35 : Exemple illustrant les différents modes de placement possibles d'une opération sur un ordonnancement cyclique en-cours d'élaboration .....                                    | 144 |
| Figure II-36 : Placement de l'opération $op_{1,3}$ au plus tôt au niveau de l'en-cours ou à la date de disponibilité de la macro-gamme correspondante : pas de perte de marge de gammes..... | 145 |
| Figure II-37 : Placement de l'opération $op_{1,3}$ au début de l'intervalle de disponibilité $I_{d_1}(M_1)$ .....                                                                            | 147 |
| Figure II-38 : Placement de l'opération $op_{1,3}$ à la fin de l'intervalle de disponibilité $I_{d_1}(M_1)$ .....                                                                            | 147 |
| Figure II-39 : Principe de la méthode Branch and Bound avec comme fonction de coût le niveau d'en-cours .....                                                                                | 156 |
| Figure II-40 : Recherche dans la première partie d'un ordonnancement cyclique simple respectant le temps de cycle imposé .....                                                               | 159 |
| Figure II-41 : Etape 2 : Dégradation d'une solution sous-optimale .....                                                                                                                      | 160 |
| Figure II-42 : Exemple a priori possible d'évolution d'un ordonnancement cyclique caractérisé par son en-cours et son temps de cycle avec la méthode similaire au recuit simulé .....        | 160 |
| Figure II-43 : Modélisation par diagramme de Gantt d'un des ordonnancements optimaux trouvés par notre méthode.....                                                                          | 162 |
| Figure II-44 : Graphe d'événements modélisant la commande prévisionnelle, cyclique et déterministe du système de production pendant le régime permanent $RP_p$ à l'instant t.....            | 163 |

### Chapitre III :

|                                                                                                                                                                                                                                                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Figure III-1 : Décomposition de l'approche développée au chapitre précédent en phases élémentaires.....                                                                                                                                                  | 169 |
| Figure III-2 : Modèle FRT-net de l'atelier flexible respectant en discret l'horizon cyclique $E_p$ de production du régime permanent $RP_p$ .....                                                                                                        | 171 |
| Figure III-3 : Transformation de flexibilités imbriquées en flexibilité simple .....                                                                                                                                                                     | 176 |
| Figure III-4 : Modèle plié et déplié d'une flexibilité imbriquée complexe .....                                                                                                                                                                          | 177 |
| Figure III-5 : Graphique des performances des différents horizons multiples de l'horizon minimal de production $E_1 = E(RP_p)$ .....                                                                                                                     | 182 |
| Figure III-6 : Modèle de la charge de travail d'un cycle de production du régime permanent $RP_p$ associé à l'ensemble des routages admissibles $\alpha_4$ .....                                                                                         | 184 |
| Figure III-7 : Modèle déplié des flexibilités de gamme opératoire de type affectation et procédé .....                                                                                                                                                   | 187 |
| Figure III-8 : Modèle partiellement déplié du système de production après extraction de l'un des 16 chemins issus de l'ensemble des ratios de routage admissibles $\alpha_4$ .....                                                                       | 191 |
| Figure III-9 : Modèle totalement linéarisé du système de production : toutes les flexibilités de la classe $D_3$ ont été résolues .....                                                                                                                  | 196 |
| Figure III-10 : Modèle du système de production avec les charges de travail définies sur les différentes machines .....                                                                                                                                  | 206 |
| Figure III-11 : Partition $P_{st}$ retenue pour l'exemple illustratif : séquentialisation totale des gammes opératoires linéaires obtenues avec l'ensemble de routages admissibles $\alpha_4$ .....                                                      | 211 |
| Figure III-12 : Modèle ordonnançable du système de production sous le régime permanent $RP_p$ .....                                                                                                                                                      | 216 |
| Figure III-13 : Graphe d'Evénements non marqué : connaissance des circuits de fabrication, de commande et aussi des circuits mixtes .....                                                                                                                | 220 |
| Figure III-14 : Structure générale de l'étape d'élaboration de la commande avec la position relative de chaque module et leur contribution à la transformation progressive du modèle en Graphe d'Evénements représentatif de la commande à établir ..... | 226 |
| Figure III-15 : Séquencement des différentes phases de l'étape d'élaboration de la commande pour un régime permanent cyclique et déterministe retenu par l'approche développée .....                                                                     | 227 |
| Figure III-16 : Modèle déplié généralisé du système de production respectant $E(RP_p)$ .....                                                                                                                                                             | 229 |

## Annexes :

|                                                                                                                                                                           |      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Figure Annexe A-1 : Exemple simple d'ordonnancement avec minimisation de l'en-cours dans le cas où le transport n'est pas pris en compte .....                            | A-1  |
| Figure Annexe A-2 : Réordonnancement de l'horizon de production en prenant maintenant en compte les opérations de transfert .....                                         | A-3  |
| Figure Annexe B-1 : Modèle FRT-nets de l'exemple illustrant l'intérêt de la recherche exhaustive.....                                                                     | B-1  |
| Figure Annexe B-2 : Modèle ordonnançable du système avec le regroupement cyclique $R_{c_1}$ .....                                                                         | B-3  |
| Figure Annexe B-3 : Modèle ordonnançable du système avec le regroupement cyclique $R_{c_2}$ .....                                                                         | B-4  |
| Figure Annexe B-4 : Ordonnancement du regroupement cyclique $R_{c_1}$ avec un en-cours égal à 2.....                                                                      | B-7  |
| Figure Annexe B-5 : Ordonnancement de $R_{c_1}$ avec un en-cours égal à 3 .....                                                                                           | B-9  |
| Figure Annexe B-6 : Ordonnancement optimal obtenu avec le regroupement cyclique $R_{c_1}$ .....                                                                           | B-10 |
| Figure Annexe B-7 : Ordonnancement optimal trouvé avec $R_{c_2}$ et un en-cours égal à 3 .....                                                                            | B-10 |
| Figure Annexe B-8 : Graphe d'Evénements de la commande cyclique prévisionnelle associée à l'ordonnancement optimal trouvé avec $R_{c_2}$ à la date $t$ .....              | B-11 |
| Figure Annexe B-9 : Parcours de l'espace de recherche avec cet exemple particulier..                                                                                      | B-12 |
| Figure Annexe C-1 : Exemple développé dans [ERS 82].....                                                                                                                  | C-1  |
| Figure Annexe C-2 : Ordonnancement cyclique obtenu par [ERS 82] qui minimise à la fois la taille des buffers et l'en-cours moyen du système.....                          | C-2  |
| Figure Annexe C-3 : Ordonnancement cyclique obtenu en minimisant l'en-cours maximal du système en utilisant le principe de l'heuristique développée dans ce mémoire ..... | C-3  |
| Figure Annexe D-1 : Modélisation graphique du problème de dénombrement de cette partie.....                                                                               | D-1  |
| Figure Annexe D-2 : Schéma d'analyse de dénombrement de l'ensemble des regroupements cycliques obtenus à partir d'un regroupement de gammes opératoires linéaires.....    | D-10 |

