

gen 20006543

N° d'ordre: 2225

Thèse

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

de l'Université des Sciences et Technologies de Lille

*en Productique:
Automatique et Informatique Industrielle*

par

David DUBOIS



Introduction à la commande non entière des systèmes linéaires par la transformée de Mellin.

soutenue le 30 avril 1998 devant le jury:

- Président:* J.-P. RICHARD, Professeur (EC, Lille I)
- Rapporteurs:* A. OUSTALOUP, Professeur (ENSERB, Bordeaux I)
J.-C. TRIGEASSOU, Professeur (ESIP, Poitiers)
- Examineurs:* J.-P. RICHARD, Professeur (EC, Lille I)
H. BAUSSART, Professeur (IAAL, Lille I)
L. POVY, Professeur (EUDIL, Lille I)
J.-P. BRIENNE, Maître de conférences (IAAL, Lille I)
- Directeur de thèse:* L. POVY

*Université des Sciences et Technologies de Lille, U.F.R. d' I.E.E.A
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, FRANCE.*

Avant propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Centre d'Automatique de Lille et à l'Institut Agricole et Alimentaire de Lille, sous la direction de Monsieur le Professeur Lucien Povy.

Je tiens à remercier tout d'abord Monsieur le Professeur Lucien Povy de m'avoir permis d'intégrer son équipe de recherche afin de préparer cette thèse. Fort de son expérience, il a su me guider lors de ces travaux, me transmettre sa passion pour la recherche par sa motivation et l'ampleur de ses connaissances dans le domaine de l'automatique.

Quant à Monsieur Jean-Paul Brienne, je suis très touché de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de me suivre au quotidien tout au long de ce travail. Que ce soit par son enthousiasme lors de multiples discussions, son humanisme, ses conseils avertis et sérieux, sa sincère collaboration et sa volonté de progresser dans la recherche, il a toujours été un soutien continu.

Qu'il me soit ensuite possible de remercier, Ô combien, Monsieur le Professeur Alain Oustaloup qui, en plus des lourdes charges auxquelles ses fonctions l'obligent, a accepté d'être rapporteur de ce mémoire et l'intérêt qu'il m'a témoigné pour ce travail.

J'exprime également ma très vive reconnaissance à Monsieur Le Professeur Jean-Claude Trigeassou pour ses précieux conseils, l'intérêt qu'il a montré pour ce travail, et d'avoir accepté d'être rapporteur afin de juger ce mémoire.

Je suis honoré de l'attention que Monsieur le Professeur Hervé Baussart a porté à ce travail par sa grande expérience de la recherche, de m'avoir accueilli chaleureusement dans son institut et d'accepter de participer au jury.

Que Monsieur le Professeur Jean-Pierre Richard soit remercié avec toute la sympathie et la reconnaissance que je lui accorde pour sa participation au jury.

D'autre part, je remercie l'ensemble du personnel de L'IAAL pour l'accueil cordial et chaleureux qu'il m'a réservé au sein de l'Institut.

Qu'il me soit permis de remercier les proches les plus chers à mes yeux, ma famille, avec tout le respect et l'amour que je leur dois, pour m'avoir soutenu sans aucune mesure et me permettre de réaliser ces études qui m'ont amenées jusqu'à cette thèse qui clôture une longue formation et qui m'ouvre, je l'espère, de formidables perspectives futures.

Enfin, j'aimerais terminer sur cette réflexion philosophique d'Albert Einstein qui, je suppose, méditait sur la Recherche:

"C'est une erreur de croire que nous élaborons des théories sur la base des observations, c'est plutôt la théorie qui détermine ce qu'on peut observer".

Sommaire

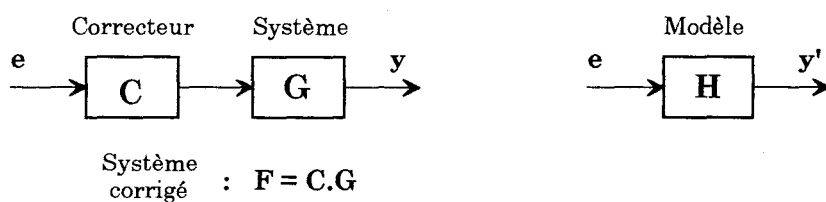
Glossaire	7
Introduction	13
Chapitre 1: Les moments temporels & les systèmes	19
Chapitre 2: Les moments temporels & la commande entière des systèmes	47
Chapitre 3: La transformée de Mellin & la commande non entière des systèmes .	77
Chapitre 4: Les moments temporels & l'identification d'un système	105
Chapitre 5: La commande & son application à un système	133
Conclusion générale	167
Annexes	171
Références bibliographiques	195
Table des matières	203

Glossaire

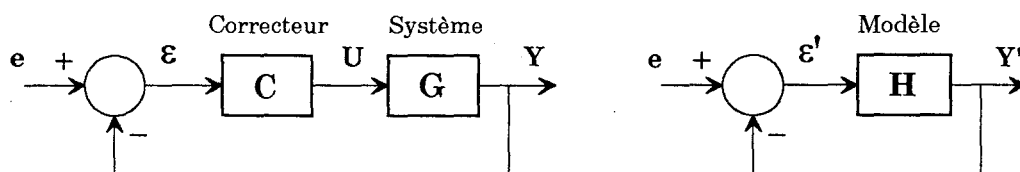
Glossaire

Notation des fonctions de transfert intervenant dans la commande:

Boucle ouverte



Boucle fermée



Fonctions

(domaine de Laplace)

Correcteur	$C(p)$
Système	$G(p)$
Modèle	$H(p)$
Systeme corrigé	$F(p)=C(p).G(p)$

Transformées inverses

(réponse impulsionnelle)

	$c(t)$
	$g(t)$
	$h(t)$
	$f(t)=L^{-1}[C(p).G(p)]$

Correcteur de type P.I.D entier

$$C(p) = C_0 + \frac{C_1 \cdot p}{(1 + \mu \cdot p)^m} + \frac{C_2}{p}$$

Correcteur de type P.I.D non entier

$$C(p) = C_0 + \frac{C_1 \cdot p^\sigma}{(1 + \mu \cdot p)^x} + \frac{C_2}{p^v}$$

Système de type TDI (G) ou TDIR (Gr)

$$G(p) = \frac{k}{(1 + \tau \cdot p)^\alpha} \quad Gr(p) = \frac{k}{(1 + \tau \cdot p)^\alpha} \cdot e^{-T \cdot p}$$

Fonctions de transfert des modèles utilisés

Modèle 1: TDI/P (Transmittance à Dérivée Implicite avec intégrateur)

$$H_1(p) = \frac{\lambda}{p \cdot (1 + \delta \cdot p)^\beta}$$

Modèle 2: TDE/P (Transmittance à Dérivée Explicite avec intégrateur)

$$H_2(p) = \frac{\lambda}{p \cdot [1 + (\delta \cdot p)^\beta]}$$

Modèle 3: 2dO/P (Second ordre Oscillant avec intégrateur)

$$H_3(p) = \frac{\lambda \cdot \Omega_n^2}{p \cdot [p^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \Omega_n \cdot p + \Omega_n^2]}$$

Modèle 4: TDI (Transmittance à Dérivée Implicite)

$$H_4(p) = \frac{\lambda}{(1 + \delta.p)^\beta}$$

Modèle 5: TDE (Transmittance à Dérivée Explicite)

$$H_5(p) = \frac{\lambda}{1 + (\delta.p)^\beta}$$

Modèle 6: 2dO (Second ordre Oscillant)

$$H_6(p) = \frac{\lambda.\Omega_n^2}{p^2 + 2.\zeta.\Omega_n.p + \Omega_n^2}$$

Modèle 7: TDIR/P (modèle 1 avec retard)

$$H_7(p) = \frac{\lambda.e^{-T.p}}{p.(1 + \delta.p)^\beta}$$

Avec:

Correcteur: C_0, C_1 et $C_2 \in \mathfrak{R}^3$ $\mu \in \mathfrak{R}^{**}$, $m \in N^*$ x, σ et $\nu \in \mathfrak{R}^{3+*}$

Système: k, α et $\tau \in \mathfrak{R}^{3+*}$

Modèles: λ, δ et $\beta \in \mathfrak{R}^{3+*}$ $\Omega_n \in \mathfrak{R}^{+*}$ $0 < \zeta < 1$

Autres notations utilisées

p	variable de Laplace,
n	ordre (entier) du moment temporel,
s	ordre (non entier) de la transformée de Mellin,
ω	pulsation (en rad.s^{-1}) $\omega = 2.\pi.f$,
M_n^h & A_n^h	Moment temporel d'ordre n de la fonction h ,
$M(h,s)$ & $B(h,s)$	Mellin d'ordre s de la fonction h ,
Γ	fonction gamma $\Gamma(n) = (n - 1)!$,
$\frac{d^\sigma}{dt^\sigma}[h(t)]$	dérivée non entière d'ordre σ de la fonction h en t ,
$I^\nu[h(t)]$	intégrale non entière d'ordre ν de la fonction h en t ,
$e(t)$	entrée temporelle (Dirac ou échelon),
$y(t)$	sortie temporelle du système corrigé en boucle ouverte,
$y'(t)$	sortie temporelle du modèle en boucle ouverte,
$Y(t)$	sortie temporelle du système corrigé en boucle fermée,
$Y'(t)$	sortie temporelle du modèle en boucle fermée,
$\varepsilon(t)$	erreur temporelle du système corrigé en boucle fermée,
$\varepsilon'(t)$	erreur temporelle du modèle en boucle fermée,
$U(t)$	signal de commande.

Introduction

Introduction

Bon nombre d'approches mathématiques sont à la disposition de l'automaticien qui s'intéresse à la commande des systèmes linéaires continus. Des méthodes classiques comme des approches fréquentielles, algébriques ou par retour d'état ont fait l'objet d'innombrables études [1]-[2]-[3]-[4]-[5]-[6]. Chacune de ces méthodes porte un intérêt particulier quant à sa mise en oeuvre suivant le système étudié.

Concernant les méthodes de commande basée sur l'analyse fréquentielle, très largement développées par A. Oustaloup, la notion de dérivée non entière est utilisée en commande robuste à travers la commande CRONE de première, deuxième et troisième génération [7]-[8]. Une autre philosophie est la commande algébrique qui nécessite obligatoirement la connaissance d'un modèle particulier de type rationnel. Il y a alors modélisation du processus avec toute la difficulté d'établir soit un modèle de connaissance ou un modèle de comportement dont les caractéristiques (réponses indicielles, impulsionnelles ou fréquentielles) correspondent au mieux à celles du système à étudier [9]-[10]. Une autre approche, développée par J.-C. Trigeassou, consiste à utiliser la théorie des moments temporels dans la commande des systèmes [11]. Cette approche, caractérisant le système sous la forme d'un développement en série entière dans le domaine de Laplace est plus rigoureuse que des modélisations de type rationnel dans l'élaboration d'une commande ultérieure. La condition nécessaire dans l'utilisation de cette méthode impose obligatoirement que le système à étudier puisse être modélisé par une série entière dans le domaine de Laplace. La limitation arrive lorsque l'automaticien s'intéresse à des systèmes ayant des comportements similaires à des systèmes décrits par des modèles ne possédant

pas de développement en série entière. Quant aux commandes par retour d'état [12], la limitation intervient dans le fait que les variables d'états deviennent en nombre infini dans le cas où les systèmes linéaires sont d'ordre non entier.

L'apport des travaux présentés dans ce rapport est basé sur la commande des systèmes possédant ou non un développement en série entière dans le domaine de Laplace par l'utilisation de la théorie des moments temporels [13] et de la transformée de Mellin [14]. La transformée de Mellin encore peu utilisée en automatique ouvre de nombreuses applications dans le domaine de la modélisation des systèmes et dans la commande de ceux-ci. En effet, elle s'adapte très facilement dans la commande des systèmes pour les rendre équivalent à la réponse pile d'un modèle de type Cole & Cole. L'utilisation de cet opérateur permet également de commander des systèmes à retard pur.

Les travaux présentés dans ce mémoire sont donc consacrés à l'introduction de la commande non entière des systèmes linéaires par la transformée de Mellin. La commande élaborée utilise des opérateurs mathématiques de dérivation et d'intégration d'ordre non entier appliqués à des systèmes continus linéaires mono entrée, mono sortie, ainsi qu'à des systèmes possédant un retard pur.

Le premier chapitre est consacré à de brefs rappels sur la théorie des moments temporels: développement en série entière des transformées de Laplace des systèmes, définition des moments temporels, détermination théorique des moments temporels. De plus, deux méthodes permettant d'obtenir de façon expérimentale les moments temporels des systèmes à partir de leur réponse indicielle sont élaborées.

La commande entière des systèmes par l'utilisation des moments temporels est abordée au deuxième chapitre. Le correcteur utilisé est de type proportionnel,

intégral et dérivé. Une relation de récurrence faisant intervenir les moments temporels du modèle à ceux du système à corriger en fonction des paramètres du correcteur est déterminée par deux méthodes. La résolution de cette récurrence permet alors de déterminer les paramètres du correcteur fixé. Enfin, les moments temporels de trois modèles fréquemment utilisés en automatique sont donnés. Il s'agit des modèle de type Transmittance à Dérivée Implicite (TDI), Transmittance à Dérivée Explicite (TDE) et Second ordre Oscillant (2dO).

Le troisième chapitre aborde la notion de la transformée de Mellin. L'étude d'un correcteur de type proportionnel, intégral et dérivé avec des opérateurs d'ordre non entier montre la non utilité des moments temporels et la nécessité de passer par la transformée de Mellin. Celle-ci permet alors d'obtenir une relation de récurrence, à pas non constant, entre les Mellin du modèle à ceux du système à corriger en fonction des paramètres du correcteur. Cette transformée de Mellin pose néanmoins des problèmes au niveau du domaine de convergence de sa transformée. L'identification des paramètres du correcteur est d'abord effectuée dans le domaine temporel par une minimisation de l'erreur quadratique entre les réponses impulsionnelles du système corrigé et du modèle pour ensuite, dans le domaine de Mellin, trouver l'intersection des intervalles de convergence du système corrigé et du modèle.

Le quatrième chapitre est consacré à l'identification par la méthode des moments temporels. Un système physique, le processus thermique, est sollicité par une entrée de type échelon afin d'obtenir la réponse indicielle. Celle-ci permet alors de modéliser le système par un modèle de Strejc puis d'appliquer les méthodes de détermination des moments temporels élaborées au premier chapitre. Les moments temporels ainsi déterminés permettent de modéliser de nouveau le système par deux types de modèles. Des relations sont élaborées permettant alors de passer d'une modélisation à une autre.

Enfin, le cinquième chapitre applique la commande entière et non entière élaborées aux deuxième et troisième chapitres. La commande entière est appliquée sur les différents modèles caractérisant le processus thermique étudié au quatrième chapitre. La commande non entière est étudiée sur un type de système particulier (TDI et TDIR) et pour différents modèles imposés. Enfin, ce chapitre clôture l'étude de la commande non entière par une vérification des résultats obtenus dans le domaine fréquentiel. Cette étude permet de valider à posteriori les résultats de la commande non entière élaborée dans le domaine de Mellin et de définir le domaine de validité fréquentiel de la commande élaborée.

CHAPITRE 1

Les moments temporels & les systèmes



CHAPITRE 1

Les moments temporels & les systèmes

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des moments temporels et leurs liens avec les fonctions de transfert des systèmes. De ce fait, les principales définitions faisant intervenir la notion des moments temporels sont rappelées [13]-[15]. Ces différentes définitions montrent que les moments temporels, lorsqu'ils existent, caractérisent les systèmes linéaires continus. L'étude entreprise ici est basée sur des systèmes dont la fonction de transfert, dans le domaine de Laplace, possède un développement en série entière en p^n dont les coefficients sont les moments temporels. Après avoir établi toutes les définitions fondamentales relatives aux moments temporels, il est montré comment il est possible de les déterminer théoriquement. En premier lieu, la transmittance du système possédant éventuellement une intégration d'ordre k , une dérivation d'ordre k ou un retard pur est supposé connue. Des relations entre les moments temporels issus de la boucle ouverte et de la boucle fermée sont donnés afin de reconstituer les moments temporels du système. Ensuite, deux méthodes pratiques de détermination des moments temporels sont proposées [11]-[16]. Ces méthodes reposent sur la connaissance de la réponse du système pour une sollicitation donnée (entrée de surface finie, entrée de type échelon). Ces systèmes peuvent posséder entre autres un retard pur, une intégration ou une dérivation. Les

moments temporels ainsi déterminés peuvent être selon le type de système soit convergents soit divergents.

1.2 Définition des moments temporels

Cette partie est consacrée aux principales définitions relatives aux moments temporels utilisés dans toute cette étude [13]. De façon générale, un système peut être décrit soit par sa fonction de transfert, soit par une série entière où les coefficients du développement ne sont autres que ses moments temporels lorsque ceux-ci existent. Les moments temporels s'appuient sur plusieurs définitions développées dans ce paragraphe.

1.2.1 Existence des moments temporels d'un système

Les signaux étudiés, qu'ils caractérisent soit l'entrée, le système ou la sortie de celui-ci, représentés par la fonction f , sont supposés continus ou continus par morceaux et vérifient les conditions suivantes:

• f est une fonction causale:

$$t < 0, f(t) = 0$$

• f est une fonction majorée par une fonction exponentielle décroissante:

$$\exists \beta \in \mathfrak{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) \cdot e^{-\beta t}| \cdot dt < \infty$$

(1.1)

Si ces deux conditions sont vérifiées, alors le moment temporel d'ordre n de la fonction f existe.

1.2.2 Les moments temporels

Le moment temporel d'ordre n d'une fonction f vérifiant les conditions définies en (1.1) est:

$$M_n^f = \int_0^{+\infty} t^n \cdot f(t) \cdot dt \tag{1.2}$$

Dans le cas où la fonction f n'est pas majorée par une fonction d'ordre exponentiel décroissant, l'intégrale (1.2) devient alors divergente. Il est alors possible de modifier cette définition afin d'assurer sa convergence. Cette modification pourra soit intervenir sur la fonction elle-même si par exemple

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = C^{ste} > 0,$$

soit sur l'intégrale en tronquant la borne infinie. Donc dans ces deux cas, les moments temporels seront définis totalement ou partiellement.

1.2.3 Les moments temporels partiels

Dans le cas où l'intégrale (1.2) se calcule numériquement, une troncature sur la borne infinie est nécessaire. Le résultat obtenu s'appelle alors le moment temporel partiel d'ordre n de la fonction. Cette troncature est déterminante dans le cas où les moments temporels calculés ont des valeurs divergentes. Dans le cas contraire, la troncature est alors négligeable:

$$\int_0^{+\infty} t^n \cdot f(t) dt \equiv \int_0^T t^n \cdot f(t) dt \quad \text{avec} \quad \exists \varepsilon > 0, \int_T^{+\infty} t^n \cdot f(t) dt < \varepsilon$$

Soit une fonction f définie suivant les conditions (1.1) et soit f^* la fonction construite à partir de la fonction f telle que:

- $f^*(t) = f(t)$ si $t \in [0; T]$
- $f^*(t) = 0$ ailleurs

alors le moment temporel d'ordre n de f^* est toujours défini quelle que soit la fonction f et il s'exprime par:

$$M_{n,T}^* = \int_0^T t^n \cdot f(t) \cdot dt$$

(1.3)

1.2.4 Les moments temporels et la transformée de Laplace

Un signal f vérifiant les conditions (1.1) admet alors une transformée de Laplace F , de variable complexe p , caractérisée par:

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt$$

avec

$$p = x + j \cdot y, \quad x \geq 0, \text{ la variable de Laplace.}$$

Les moments temporels peuvent être alors reliés à la transformée de Laplace. Dans le cas où les moments temporels existent, la transformée de Laplace peut s'exprimer sous forme d'une série entière.

La définition de la transformée de Laplace fait apparaître dans l'intégrale le terme $e^{-p \cdot t}$ qui peut être développé en série entière de rayon infini. La fonction de transfert devient alors:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \left[1 - p \cdot \frac{t}{1!} + p^2 \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots + (-1)^n \cdot p^n \cdot \frac{t^n}{n!} + \dots \right] \cdot dt$$

ou encore en utilisant la linéarité de l'intégrale:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot dt - \frac{p}{1!} \int_0^{+\infty} t \cdot f(t) \cdot dt + \frac{p^2}{2!} \int_0^{+\infty} t^2 \cdot f(t) \cdot dt + \dots + (-1)^n \cdot \frac{p^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n \cdot f(t) \cdot dt + \dots$$

En utilisant la définition des moments temporels donnée en (1.2), la fonction F peut alors s'écrire de la façon suivante:

$$F(p) = M_0^f - \frac{p}{1!} M_1^f + \frac{p^2}{2!} M_2^f + \dots + (-1)^n \frac{p^n}{n!} M_n^f + \dots$$

La transformée de Laplace F peut donc se représenter par un développement en série entière où les coefficients sont les moments temporels de l'original f de F . La fonction F peut donc s'écrire:

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot \frac{M_n^f}{n!}$$

(1.4)

Par commodité de calcul, il est possible d'intégrer le terme $n!$ issu du développement de l'exponentiel dans la définition des moments temporels. Le développement en série entière de la transformée de Laplace se note alors:

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_n^f$$

(1.5)

avec:

$$A_n^f = \frac{M_n^f}{n!}$$

(1.6)

Par abus de langage, ce coefficient défini en (1.6) est également appelé le moment temporel d'ordre n de f . Ces moments temporels ont donc pour nouvelle définition:

$$A_n^f = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot f(t) \cdot dt$$

(1.7)

1.2.5 Les moments temporels et la dérivée de la transformée de Laplace

Soit une fonction f définie suivant les conditions (1.1) et de transformée de Laplace F . Le développement de F en série de Mac Laurin au voisinage de $p=0$ s'écrit:

$$F(p) = F(0) + \frac{p}{1!} \left[\frac{dF(p)}{dp} \right]_{(p=0)} + \frac{p^2}{2!} \left[\frac{d^2F(p)}{dp^2} \right]_{(p=0)} + \dots + \frac{p^n}{n!} \left[\frac{d^n F(p)}{dp^n} \right]_{(p=0)} + \dots$$

En identifiant F terme à terme avec son développement en série donné par la relation (1.4), il est alors possible d'obtenir une nouvelle expression des moments temporels d'ordre n de l'original f . Ces coefficients sont fonctions des dérivées énièmes de sa transformée de Laplace F :

$$M_n^f = (-1)^n \cdot \left[\frac{d^n F(p)}{dp^n} \right]_{(p=0)}$$

(1.8)

1.2.6 Les moments temporels et les approximants de Padé de la transformée de Laplace

Soit une fonction f définie suivant les conditions (1.1) et de transformée de Laplace F représentée par une fraction rationnelle du type:

$$F(p) = \frac{b_0 + b_1.p + b_2.p^2 + \dots + b_k.p^k}{1 + a_1.p + a_2.p^2 + \dots + a_m.p^m}, \quad k \leq m$$

En effectuant la division terme à terme en puissance croissante du numérateur par le dénominateur, la fonction F peut se mettre sous la forme:

$$F(p) = C_0 + C_1.p + C_2.p^2 + \dots + C_n.p^n + \dots$$

où les coefficients C_n , appelés approximants de Padé, sont calculés à partir des coefficients b_k et a_m [17][18]. En identifiant F terme à terme avec son développement en série entière donné par la relation (1.4), une nouvelle définition du moment temporel d'ordre n de f s'écrit:

$$M_n^f = (-1)^n \cdot C_n \cdot n!$$

(1.9)

1.3 Détermination théorique des moments temporels d'un système

Dans ce paragraphe, le système noté G, de transmittance connue dans le domaine de Laplace, est supposé développable en série entière dont les coefficients sont ses moments temporels.

1.3.1 Détermination des moments temporels d'un système

Soit le système de transmittance G, et dont la transformée de Laplace inverse g est connue. La connaissance de l'expression analytique de g dans le domaine temporel permet donc de déterminer parfaitement tous ses moments temporels d'ordre n par l'utilisation des expressions (1.2), (1.7) ou (1.8) dans la mesure où ils existent. L'existence des moments temporels montre que le système peut se mettre sous la forme d'une série entière. Le calcul des expressions (1.2) et (1.7) peut être fait en utilisant les tables d'intégrales indéfinies. Il est également possible de calculer ces intégrales par une méthode de discrétisation de type trapèze ou Simpsons.

1.3.2 Détermination des moments temporels d'un système possédant une intégration d'ordre k

Un système possédant une intégration pure d'ordre k se met sous la forme suivante:

$$\frac{G(p)}{p^k}$$

Le calcul des moments temporels revient à déterminer les moments temporels de la transmittance G dont l'entrée est de la forme $\frac{1}{p^k}$:

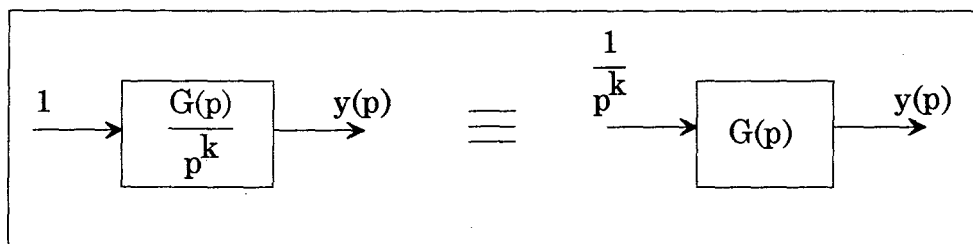


Figure 1.1:
Equivalence d'un système possédant une intégration d'ordre k

Dans le domaine de Laplace, la sortie y s'écrit:

$$y(p) = \frac{1}{p^k} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_n^g$$

Il est possible de construire une fonction G^* , transformée de Laplace de g^* , tels que les moments temporels de g s'expriment en fonction des moments temporels de g^* :

$$G^*(p) = y(p) - \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \cdot \frac{A_n^g}{p^{k-n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+k} \cdot p^n \cdot A_{n+k}^g$$

et

$$G^*(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_n^{g^*}$$

Les moments temporels de g^* peuvent donc s'exprimer en fonction de ceux de g par la relation suivante:

$$A_n^{g^*} = (-1)^k A_{n+k}^g \quad \text{pour } n \geq 0 \text{ et } k \geq 1$$

(1.10)

De même, cette précédente relation peut s'écrire:

$$M_n^{g^*} = (-1)^k \cdot \frac{n!}{(n+k)!} M_{n+k}^g \quad \text{pour } n \geq 0 \text{ et } k \geq 1$$

(1.11)

La construction de la fonction G^* à partir de la réponse y permet donc de déduire les moments temporels de g . En effet, ceux-ci s'obtiennent par identification avec les moments temporels de g^* avec un décalage d'ordre k . Seuls les moments temporels de g d'ordre compris entre 0 et $k-1$ ne peuvent être déterminés par cette relation. Cela prouve qu'un système possédant une intégration ne peut pas s'écrire seulement sous la forme d'un développement en série entière car le développement comporte des termes supplémentaires en $\frac{1}{p^n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Le développement en série entière d'une transmittance sans intégration est inclus dans un développement en série de cette même transmittance possédant une intégration d'ordre k .

1.3.3 Détermination des moments temporels d'un système possédant une dérivation d'ordre k

Le calcul des moments temporels de

$$p^k \cdot G(p)$$

revient à déterminer les moments temporels de la transmittance G de dérivée d'ordre k de son original g :

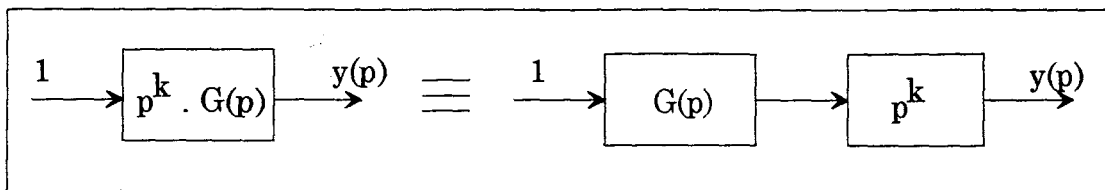


Figure 1.2:
Système possédant une dérivation d'ordre k

Dans le domaine de Laplace, $p^k \cdot G(p)$ peut se mettre sous la forme:

$$p^k \cdot G(p) = p^k \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_n^g = G^*(p)$$

ou s'écrire encore:

$$G^*(p) = \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n p^n \times 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_{n-k}^g$$

Cette formulation montre que dans le développement en série de G^* , les k premiers termes sont nuls. Le développement de G^* peut se mettre sous la forme d'une série entière de ses moments temporels d'ordre n :

$$G^*(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_n^{g^*} = A_0^{g^*} - p \cdot A_1^{g^*} + p^2 \cdot A_2^{g^*} + \dots$$

Par identification de cette relation avec la précédente, les moments temporels de g^* s'expriment en fonction de ceux de g :

$$\begin{aligned} A_0^{g^*}, A_1^{g^*}, \dots, A_{k-1}^{g^*} &\equiv 0 \\ A_n^{g^*} &= (-1)^k \cdot A_{n-k}^g \text{ pour } n \geq k \end{aligned}$$

(1.12)

De même, cette précédente relation peut s'écrire:

$$\begin{aligned} M_0^{g^*}, M_1^{g^*}, \dots, M_{k-1}^{g^*} &\equiv 0 \\ M_n^{g^*} &= (-1)^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot M_{n-k}^g \text{ pour } n \geq k \end{aligned}$$

(1.13)

En pratique, un tel système devra être sollicité par une entrée de type $\frac{1}{p^k}$ afin d'avoir directement les moments temporels de la réponse impulsionnelle.

1.3.4 Détermination des moments temporels d'un système à retard pur

Soient un système de transmittance G et un système de transmittance Gr construit à partir de G et possédant un retard pur noté T . Il est donc possible d'écrire dans le domaine de Laplace la relation liant ces deux transmittances par:

$$Gr(p) = G(p).e^{-T.p}$$

Chacune de ces deux transmittances G et Gr peuvent s'exprimer par un développement en série entière en fonction des moments temporels de leurs originaux respectifs g et gr :

$$G(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . p^n . A_n^g$$

$$Gr(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . p^n . A_n^{gr}$$

et

$$Gr(p) = e^{-T.p} . \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . p^n . A_n^g$$

En utilisant le développement en série entière de $e^{-T.p}$, il est possible d'exprimer Gr en fonction des moments temporels de g :

$$Gr(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . p^n . A_n^g . \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m . \frac{(T.p)^m}{m!}$$

Le développement des premiers termes de cette précédente relation donne:

$$Gr(p) = A_0^g - p . [A_1^g + T A_0^g] + p^2 . \left(A_2^g + T A_1^g + \frac{T^2}{2!} A_0^g \right) + \dots$$

$$\dots + (-1)^n . p^n . \sum_{i=0}^n \frac{T^i}{i!} A_{n-i}^g + \dots$$

En identifiant cette expression de G_r avec celle de G , les moments temporels de g_r peuvent se déduire des moments temporels de g . Le moment temporel d'ordre n d'une transmittance possédant un retard pur s'exprime donc en fonction d'une somme récurrente des moments temporels de cette même transmittance sans retard pur par:

$$A_n^{gr} = \sum_{i=0}^n \frac{T^i}{i!} A_{n-i}^g$$

(1.14)

Remarque: Seuls les moments d'ordre 0 de g et g_r sont égaux: $A_0^g = A_0^{gr}$

1.3.5 Détermination des moments temporels d'un système en boucle fermée

Soit le système G suivant en boucle fermée:

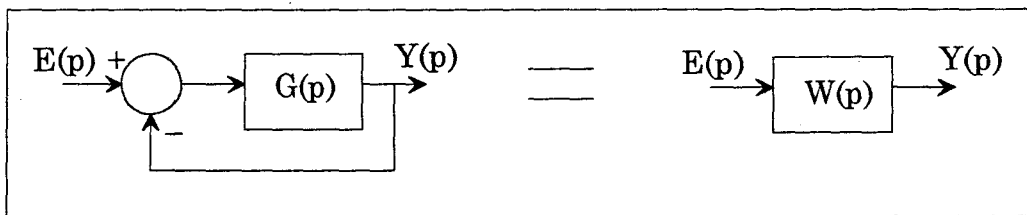


Figure 1.3:
Système G en boucle fermée.

Le système G peut s'exprimer sous forme d'une série entière en fonction des moments temporels de son original g :

$$G(p) = A_0^g - A_1^g \cdot p + A_2^g \cdot p^2 + \dots + (-1)^n A_n^g \cdot p^n + \dots$$

Soit W la fonction de transfert en boucle fermée. Alors W s'écrit:

$$W(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}$$

(1.15)

W peut s'exprimer également en fonction des moments temporels de son original w sous forme d'une série entière [19]. Ses moments temporels ne sont autres que les moments temporels de g en boucle fermée.

$$W(p) = A_0^w - A_1^w \cdot p + A_2^w \cdot p^2 + \dots + (-1)^n \cdot A_n^w \cdot p^n + \dots$$

En effectuant la division en puissance croissante de p du rapport (1.15), il est possible d'exprimer les moments temporels de w en fonction de ceux de g par la relation suivante:

$$\begin{aligned} A_0^w &= \frac{A_0^g}{1 + A_0^g} \\ A_n^w &= \frac{1}{1 + A_0^g} \left(\frac{A_n^g}{1 + A_0^g} - \sum_{i=1}^{n-1} A_i^w \cdot A_{n-i}^g \right) \end{aligned}$$

(1.16)

A partir de ces deux précédentes relations, il est alors possible d'exprimer les moments temporels de g en fonction de ceux de w afin de reconstituer le système à partir de ses moments en boucle fermée:

$$\begin{aligned} A_0^g &= \frac{A_0^w}{1 - A_0^w} \\ A_n^g &= \frac{1}{1 - A_0^w} \left(\frac{A_n^w}{1 - A_0^w} + \sum_{i=1}^{n-1} A_i^w \cdot A_{n-i}^g \right) \end{aligned}$$

(1.17)

Pour reconstituer les moments temporels de g en boucle ouverte, il est nécessaire que le moment temporel d'ordre 0 de w soit différent de 1. C'est à dire que le gain en boucle fermée soit différent de l'unité. Pour cela, le système G en boucle ouverte ne doit pas avoir de gain infini ou ne doit pas posséder une intégration pure.

1.4 Détermination pratique des moments temporels d'un système

Il est supposé également tout au long de ce paragraphe que le système noté G possède un développement en série entière où les coefficients sont ses moments temporels.

1.4.1 Le système possède un retard

Dans la détermination pratique des moments, il se peut que le système possède un retard pur T. Alors, le calcul des moments temporels prendra donc en compte ce retard éventuel. Les moments obtenus seront donc les moments de la transmittance avec un retard. Pour reconstituer les moments temporels réels du système sans le retard, il faut dans l'équation (1.14) exprimer les moments temporels du système g en fonction des moments temporels du système à retard gr. Les moments temporels du système réel sans le retard ne pourront être connus si et seulement si le retard T est connu.

Les moments temporels d'un système g peuvent se déduire des moments temporels du même système possédant un retard T par les relations de récurrence suivantes:

$$\begin{aligned}
 A_0^g &= A_0^{gr} \\
 A_n^g &= A_n^{gr} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T^{n-i}}{(n-i)!} A_i^g
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

1.4.2 Entrée de surface finie

Le système est sollicité par une entrée de type surface finie correspondant généralement à une impulsion de Dirac. La sortie obtenue correspond alors à la

réponse impulsionnelle, image de sa transformée de Laplace. En pratique, solliciter des modèles par ce type d'entrée est très délicat voire impossible. Il faut alors le solliciter par une entrée de surface finie suffisamment importante pour qu'il puisse répondre et qu'il retrouve ensuite sa position initiale d'équilibre au bout d'un certain temps. Le système est supposé ici stable.

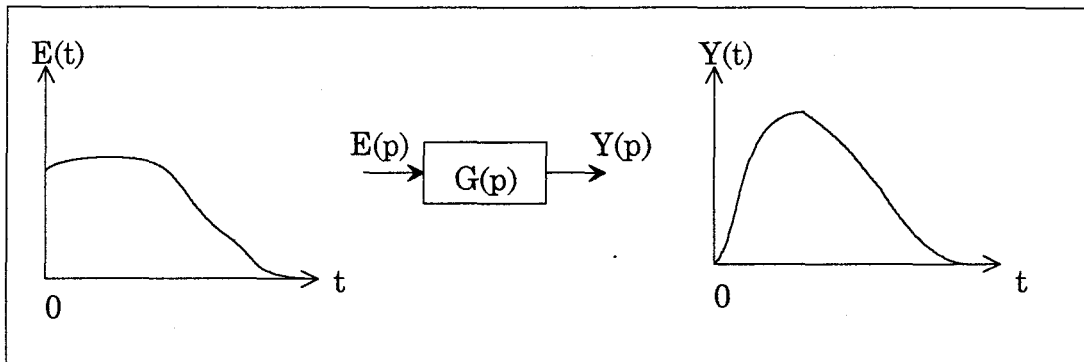


Figure 1.4:
Entrée de surface finie sollicitant le système

Il est possible d'obtenir des relations entre les moments temporels de l'entrée et de la sortie du système en présence de conditions initiales nulles. L'entrée, la sortie et le système peuvent s'écrire respectivement dans le domaine de Laplace par un développement en série entière dont les coefficients sont les moments temporels:

$$E(p) = A_0^e - A_1^e \cdot p + A_2^e \cdot p^2 + \dots + (-1)^n \cdot A_n^e \cdot p^n + \dots$$

$$Y(p) = A_0^y - A_1^y \cdot p + A_2^y \cdot p^2 + \dots + (-1)^n \cdot A_n^y \cdot p^n + \dots$$

$$G(p) = A_0^g - A_1^g \cdot p + A_2^g \cdot p^2 + \dots + (-1)^n \cdot A_n^g \cdot p^n + \dots$$

Par linéarité, il est possible d'écrire:

$$Y(p) = E(p) \cdot G(p)$$

Le moment temporel d'ordre n de la sortie y s'exprime par la relation de convolution suivante:

$$A_n^y = \sum_{i=0}^n A_{n-i}^g \cdot A_i^e$$

ou bien

$$A_n^y = \sum_{i=0}^n A_{n-i}^e \cdot A_i^g$$

L'identification des moments temporels de g est alors faite par une déconvolution des moments temporels de l'entrée et de la sortie:

$$A_n^g = \frac{1}{A_0^e} \left(A_n^y - \sum_{i=0}^{n-1} A_i^g \cdot A_{n-i}^e \right)$$

(1.19)

ou bien

$$A_n^g = \frac{1}{A_0^e} \left(A_n^y - \sum_{i=0}^{n-1} A_{n-i}^g \cdot A_i^e \right)$$

1.4.3 Entrée de type échelon

Comme il n'est pas possible de créer expérimentalement une entrée de type Dirac, il est montré dans cette partie comment obtenir les moments temporels du système pour une entrée de type échelon.

La réponse indicielle est utilisée ici pour déterminer les moments temporels dans trois cas:

- **Cas 1:** Le système est caractérisé par la transmittance G , d'original g et de réponse indicielle y . Sa réponse indicielle est apériodique ou pseudo périodique et $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = C^{ste} \neq 0$. Cette constante n'est autre que son gain statique. Le système sera dit modèle à transmittance ne possédant ni intégration ni dérivation.

- **Cas 2:** Le système possède une intégration de premier ordre. Il est caractérisé par la transmittance G^i , d'original g^i et de réponse indicielle y^i . Sa réponse indicielle à l'infini tend vers une droite asymptote à savoir $\lim_{t \rightarrow +\infty} y^i(t) = a.t + b$. G^i peut s'exprimer en fonction de la transmittance G précédente par $G^i(p) = \frac{G(p)}{p}$.

- **Cas 3:** Le système possède une dérivation de premier ordre. Il est caractérisé par la transmittance G^d , d'original g^d et de réponse indicielle y^d . Sa réponse indicielle à l'infini tend vers zéro, c'est à dire $\lim_{t \rightarrow +\infty} y^d(t) = 0$. G^d peut s'exprimer en fonction de la transmittance G précédente par $G^d(p) = p.G(p)$.

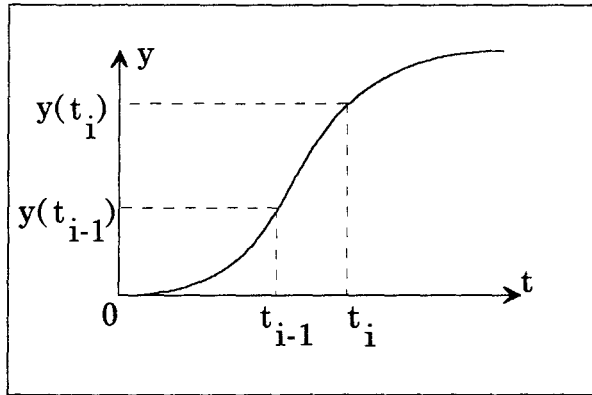
1.4.3.1 Cas d'un système ne possédant ni intégration, ni dérivation

Un système G ne possédant ni intégration, ni dérivation, s'écrit dans le domaine de Laplace sous forme d'une série entière où les coefficients sont les moments temporels de son original g . Deux méthodes sont proposées afin d'obtenir les moments temporels de g à partir de sa réponse indicielle. La première méthode consiste à reconstruire la réponse impulsionnelle en assimilant la réponse indicielle à une série de segments de droite. La seconde méthode consiste à construire une nouvelle fonction, à partir de la réponse indicielle, qui permet d'obtenir les moments temporels de la réponse impulsionnelle.

Première méthode:

assimilation de la réponse indicielle à une série de segments de droite

Cette méthode consiste à assimiler la réponse indicielle d'un système par une série de segments de droite [16]. A partir de la connaissance des pentes de ces segments de droite, il est possible d'obtenir les moments temporels de la transmittance. Considérons la réponse indicielle suivante d'un système G:



*Figure 1.5:
Réponse indicielle de type aperiodique d'un système G*

Cette réponse peut être assimilée à une suite de segments de droite dont la pente d'ordre (i-1) s'écrit:

$$\frac{\hat{a}_{i-1}}{\Delta t} = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$$

où $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ est la période d'échantillonnage.

La transformée de Laplace Y de la réponse indicielle y s'écrit alors:

$$Y(p) = \frac{1}{p^2} \left(\hat{a}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\hat{a}_i - \hat{a}_{i-1}) \cdot e^{-i \cdot \Delta t \cdot p} \right)$$

En utilisant le développement en série du terme exponentiel, l'expression de Y devient:

$$Y(p) = \frac{1}{\Delta t \cdot p^2} \hat{a}_0 + \frac{1}{\Delta t \cdot p^2} (\hat{a}_1 - \hat{a}_0) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(\Delta t \cdot p)^n}{n!} +$$

$$\dots + \frac{1}{\Delta t \cdot p^2} (\hat{a}_m - \hat{a}_{m-1}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(m \cdot \Delta t \cdot p)^n}{n!} + \dots$$

En posant $X_i = \hat{a}_i - \hat{a}_{i-1}$, la relation précédente devient:

$$Y(p) = \frac{1}{\Delta t \cdot p^2} \left(\hat{a}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} X_i - \Delta t \cdot p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot X_i + \frac{(\Delta t \cdot p)^2}{2!} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot X_i \right) + \dots + \frac{1}{\Delta t \cdot p^2} \left((-1)^n \frac{(\Delta t \cdot p)^n}{n!} \sum_{i=1}^{\infty} i^n \cdot X_i + \dots \right)$$

Etant donné que:

$$\hat{a}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} X_i = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\hat{a}_i - \hat{a}_{i-1}) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \hat{a}_i = 0$$

l'expression précédente devient enfin:

$$Y(p) = \frac{1}{\Delta t \cdot p^2} \left(-\Delta t \cdot p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot X_i + \frac{(\Delta t \cdot p)^2}{2!} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot X_i \right) + \dots + \frac{1}{\Delta t \cdot p^2} \left((-1)^n \frac{(\Delta t \cdot p)^n}{n!} \sum_{i=1}^{\infty} i^n \cdot X_i + \dots \right)$$

Or, d'après la linéarité du système, G s'écrit:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

avec $U(p) = \frac{U_0}{p}$ l'entrée de type échelon d'amplitude U_0 .

Le système G devient:

$$G(p) = \frac{1}{U_0} \left(- \left[\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot X_i \right] \cdot p^0 + \left[\frac{\Delta t}{2!} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot X_i \right] \cdot p^1 + \dots + (-1)^n \left[\frac{\Delta t^{n-1}}{n!} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i^n \cdot X_i \right] \cdot p^{n-1} + \dots \right)$$

En identifiant l'expression précédente à celle de G en fonction des moments temporels, les moments temporels de g s'expriment alors:

$$A_n^g = \frac{-\Delta t^n}{U_0 \cdot (n+1)!} \sum_{i=1}^{\infty} i^{n+1} \cdot X_i$$

avec $X_i = y(t_{i+1}) - 2 \cdot y(t_i) + y(t_{i-1})$

(1.20)

Le calcul numérique de cette relation nécessite une troncature sur la borne infinie du signe somme. Celle-ci fait l'objet d'une étude au quatrième chapitre.

Seconde méthode:

Construction d'une fonction spécifique à partir de la réponse indicielle

Dans le cas où le système G, d'original g, ne possède ni intégration, ni dérivation, la réponse indicielle notée y amène le système dans un état stationnaire tel que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = C^{ste}$$

En posant $z(t) = y(+\infty) - y(t)$ [11], la fonction y s'écrit:

$$y(t) = y(+\infty) - z(t)$$

La fonction z possède les propriétés suivantes:

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$
- la fonction z est d'ordre exponentiel: ($|z(t)| < e^{-\beta.t}$, $\beta > 0$, $t \rightarrow \infty$)

La transformée de Laplace de y s'écrit alors:

$$Y(p) = \int_0^{+\infty} y(+\infty).e^{-p.t}.dt - \int_0^{+\infty} z(t).e^{-p.t}.dt$$

En calculant la première intégrale et en développant le terme exponentiel en série entière dans la seconde intégrale, Y s'exprime par:

$$Y(p) = \frac{y(+\infty)}{p} - \left[\int_0^{+\infty} z(t).dt - p. \int_0^{+\infty} t.z(t).dt + \dots + (-1)^n . p^n . \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} . z(t).dt + \dots \right]$$

ou encore:

$$Y(p) = \frac{1}{p} . \left[y(+\infty) - p. \int_0^{+\infty} z(t).dt + p^2 . \int_0^{+\infty} t.z(t).dt + \dots + (-1)^{n+1} . p^{n+1} . \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} . z(t).dt + \dots \right]$$

Cette série fait apparaître la définition des moments temporels de z:

$$Y(p) = \frac{1}{p} . \left[y(+\infty) - p.A_0^z + p^2 . A_1^z + \dots + (-1)^{n+1} . p^{n+1} . A_n^z + \dots \right]$$

La fonction Y se met également sous forme d'une série de la forme:

$$Y(p) = \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot p^i \cdot A_i^g$$

Par identification, les moments temporels de g s'écrivent:

$$A_0^g = y(+\infty)$$

$$A_n^g = \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot [y(+\infty) - y(t)] \cdot dt$$

(1.21)

Les moments temporels de g sont donc déterminés en utilisant une méthode de discrétisation de l'intégrale. La méthode des trapèzes suffit pour obtenir une bonne approximation de l'intégrale avec une erreur négligeable.

$$A_n^g = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta t \cdot \frac{f(i \cdot \Delta t) + f((i+1) \cdot \Delta t)}{2}$$

avec $f(i \cdot \Delta t) = \frac{(i \cdot \Delta t)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot [y(+\infty) - y(i \cdot \Delta t)]$

(1.22)

1.4.3.2 Cas d'une transmittance possédant une dérivation

Soit le système suivant:

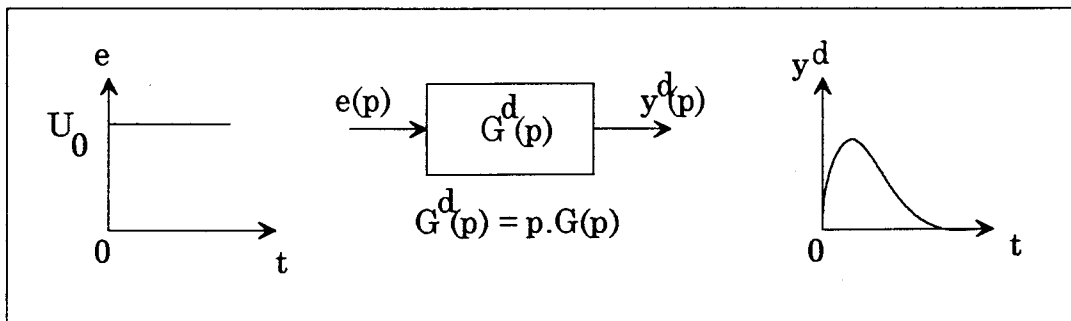


Figure 1.6:

Réponse indicielle d'un système possédant une dérivation de premier ordre

La réponse indicielle peut être assimilée à une série de segments de droite comme pour une transmittance classique. La relation issue de la première méthode:

$$\hat{a}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} X_i = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\hat{a}_i - \hat{a}_{i-1}) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \hat{a}_i = 0$$

est également vérifiée dans ce cas et la fonction de transfert G^d s'écrit:

$$G^d(p) = \frac{1}{U_0} \left(-p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot X_i + \frac{\Delta t}{2!} \cdot p^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot X_i + \dots + (-1)^n \frac{\Delta t^{n-1}}{n!} \cdot p^n \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i^n \cdot X_i + \dots \right)$$

Par identification, les moments temporels de g^d s'expriment en fonction des moments temporels de g :

$$A_0^{g^d} = 0$$

$$A_n^{g^d} = -A_{n-1}^g = \frac{\Delta t^{n-1}}{U_0 \cdot n!} \sum_{i=1}^{\infty} i^n \cdot X_i$$

avec $X_i = y(t_{i+1}) - 2 \cdot y(t_i) + y(t_{i-1}))$

(1.23)

La seconde méthode n'est pas utilisée ici car $\lim_{t \rightarrow +\infty} y^d = 0$. Il n'est donc pas nécessaire de construire une fonction spécifique à partir de y^d .

1.4.3.3 Cas d'une transmittance possédant une intégration

Soit le système suivant:

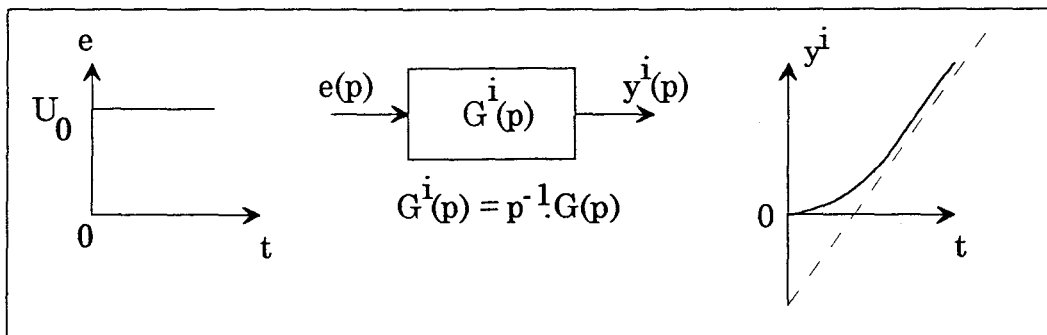


Figure 1.7:

Réponse indicielle d'un système possédant une intégration de premier ordre

La réponse indicielle ne peut plus être assimilée à une série de segments de droite comme pour une transmittance classique. La relation

$$\hat{a}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} X_i = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\hat{a}_i - \hat{a}_{i-1}) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \hat{a}_i = 0$$

n'est plus vérifiée dans ce cas. Il est alors nécessaire d'utiliser la seconde méthode. Il faut donc construire une fonction spécifique à partir de la réponse indicielle. Cette fonction spécifique vérifiera les conditions qui permettent le calcul des moments temporels.

En posant $z(t) = (a.t + b) - y^i(t)$, la fonction y^i s'écrit: $y^i(t) = (a.t + b) - z(t)$

La fonction z possède alors les propriétés suivantes:

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$
- z est une fonction d'ordre exponentiel: $(|z(t)| < e^{-\beta.t}, \beta > 0, t \rightarrow \infty)$

La transformée de Laplace de y^i s'écrit alors:

$$Y^i(p) = \int_0^{+\infty} (a.t + b).e^{-p.t}.dt - \int_0^{+\infty} z(t).e^{-p.t}.dt$$

En calculant la première intégrale et en développant le terme exponentiel en série entière dans la seconde intégrale, Y^i devient:

$$Y^i(p) = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{p} - \left[\int_0^{+\infty} z(t).dt - p \cdot \int_0^{+\infty} t.z(t).dt + \dots + (-1)^n \cdot p^n \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} .z(t).dt + \dots \right]$$

ou encore:

$$Y^i(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \left(a + b.p - p^2 \cdot \int_0^{+\infty} z(t).dt + p^3 \cdot \int_0^{+\infty} t.z(t).dt + \dots + (-1)^{n+1} \cdot p^{n+2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} .z(t).dt + \dots \right)$$

Ce précédent développement fait apparaître les moments temporels:

$$Y^i(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \left[a + b.p - p^2 \cdot A_0^z + p^3 \cdot A_1^z + \dots + (-1)^{n+1} \cdot p^{n+2} \cdot A_n^z + \dots \right]$$

Y^i peut alors s'écrire sous forme d'une série entière dont les coefficients sont les moments temporels de g :

$$Y^i(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_n^g$$

Par identification, les moments temporels de g s'écrivent:

$$A_0^g = a,$$

$$A_1^g = -b,$$

$$A_{n \geq 2}^g = - \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \cdot [(a \cdot t + b) - y^i(t)] \cdot dt$$

(1.24)

Les moments temporels de g sont donc déterminés en utilisant une méthode de discrétisation de l'intégrale. La méthode des trapèzes suffit pour obtenir une bonne approximation de l'intégrale avec une erreur négligeable.

$$A_{n \geq 2}^g = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta t \cdot \frac{f(k \cdot \Delta t) + f((k+1) \cdot \Delta t)}{2},$$

$$\text{avec } f(k \cdot \Delta t) = \frac{(k \cdot \Delta t)^{n-2}}{(n-2)!} \cdot [a \cdot k \cdot \Delta t + b - y^i(k \cdot \Delta t)]$$

(1.25)

1.5 Conclusion

Ce chapitre est consacré aux développements théoriques des moments temporels des systèmes linéaires. Il est montré comment il est possible de déterminer les moments temporels d'un système sans avoir à le modéliser. Cette détermination est faite dans l'hypothèse où le système peut se mettre sous la forme d'une série entière dont les coefficients sont ses moments temporels. Deux

méthodes sont élaborées afin de déterminer les moments temporels directement à partir de la réponse indicielle du système. Au quatrième chapitre, ces méthodes sont appliquées sur la réponse indicielle d'un processus réel afin de déterminer leur domaine de validité. Les moments temporels du système ainsi déterminés peuvent alors faire l'objet d'une utilisation dans la commande entière des systèmes (chapitre 5).

Le chapitre suivant décrit comment déterminer les paramètres d'un correcteur dans le cadre d'une commande entière d'un système par la méthode des moments temporels. Une méthodologie de résolution est effectuée en fonction des caractéristiques dynamiques imposées au système à corriger.

CHAPITRE 2

Les moments temporels & la commande entière des systèmes

CHAPITRE 2

Les moments temporels & la commande entière des systèmes

2.1 Introduction

L'adjonction d'un correcteur à un système permet de commander celui-ci de telle manière que son comportement soit équivalent à un modèle fixé quel que soit le type de l'entrée [20]-[21]-[22]. Les correcteurs peuvent être modélisés dans le domaine de Laplace soit par une transmittance ou alors être donné sous forme de série entière où les coefficients sont ses moments temporels. Dans l'étude suivante, il est considéré que les moments temporels du correcteur, du système et du modèle existent. C'est à dire que leur développement en série entière existe. Les moments temporels du correcteur sont calculés et exprimés en fonction des moments temporels du système et du modèle.

Après avoir décrit le principe de la commande dans le cas où le correcteur est donné par un développement en série où tous les termes existent, l'intérêt est porté sur un correcteur de type PID étant donné qu'en pratique industrielle, il est utilisé couramment. Une relation de récurrence est mise en place faisant intervenir les moments temporels du système à corriger et ceux du modèle en fonction des paramètres du correcteur [13]-[23]. La résolution de cette équation permet donc d'identifier les paramètres du correcteur. Cette identification fait l'objet d'une étude approfondie selon que le modèle choisi possède ou non une

intégration pure. Enfin, les moments temporels de différents modèles usuels représentatifs des systèmes rencontrés en automatique sont donnés.

2.2 Représentation du correcteur par une série entière

Le correcteur est donné ici sous sa forme la plus générale, c'est à dire sous forme d'une série entière de p où tous les coefficients, qui ne sont autres que les moments temporels de son original, existent.

L'étude suivante n'est que théorique car ce genre de correcteur n'est pas réalisable pratiquement.

2.2.1 Présentation du correcteur

D'une manière générale, le correcteur, noté C , peut se mettre sous forme de série entière dont les coefficients sont, à un facteur multiplicatif près, les moments temporels de l'original de C :

$$C(p) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot p^n$$

(2.1)

Les coefficients C_n peuvent se déduire du calcul des moments temporels du correcteur:

$$C_n = (-1)^n \cdot A_n^c$$

(2.2)

2.2.2 Détermination matricielle des moments temporels du système corrigé

Soit le système G associé au correcteur C suivant:

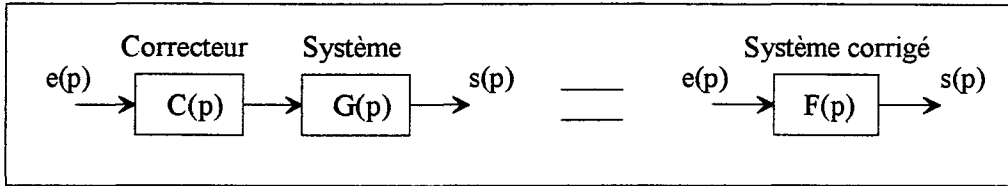


Figure 2.1:
Notation du système corrigé en boucle ouverte.

L'expression de G peut s'écrire dans le domaine de Laplace en fonction des moments temporels de son original g, sous forme de série entière par:

$$G(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_n^g$$

Le système corrigé, noté F, se met donc sous la forme suivante:

$$F(p) = C(p) \cdot G(p)$$

Il est alors possible d'écrire, en utilisant l'expression du correcteur donné précédemment, le système corrigé sous forme d'un produit de deux séries entières définies par:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_n^f = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_n^c \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_n^g$$

Le développement de cette formulation donne le moment temporel d'ordre n de f en fonction d'une somme de produit de moments temporels de c et de g:

$$A_n^f = \sum_{i=0}^n A_{n-i}^g \cdot A_i^c$$

ou encore

$$A_n^f = \sum_{i=0}^n A_n^g \cdot A_{n-i}^c$$

Sous forme matricielle, les moments temporels de f s'expriment par:

$$\underline{F} = \underline{G} \cdot \underline{C}$$

En développant, l'expression matricielle devient:

$$\begin{pmatrix} A_0^f \\ A_1^f \\ A_2^f \\ \dots \\ A_n^f \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^g & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ A_1^g & A_0^g & 0 & \dots & 0 & \dots \\ A_2^g & A_1^g & A_0^g & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n^g & \dots & \dots & \dots & A_0^g & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^c \\ A_1^c \\ A_2^c \\ \dots \\ A_n^c \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\underline{F} \qquad \qquad \underline{G} \qquad \qquad \underline{C}$$

2.2.3 Relation liant le système corrigé au modèle

Cette formulation matricielle permet à son tour d'isoler les moments temporels du correcteur et de les exprimer en fonction du modèle et du système:

$$\underline{C} = \underline{G}^{-1} \cdot \underline{F}$$

Dans l'absolu, la résolution de cette relation matricielle n'est valable que si il y a autant de moments temporels calculés que de coefficients du correcteur. C'est à dire un nombre infini de moments temporels donc un nombre infini de coefficients. Dans le cas pratique, le nombre de coefficients du correcteur est limité. Il est en général inférieur au nombre de moments temporels. Il faut donc résoudre l'égalité matricielle par la méthode des moindres carrés:

$$\underline{C} = \left(\underline{G}^T \cdot \underline{G} \right)^{-1} \cdot \underline{G}^T \cdot \underline{F}$$

Dans la réalisation pratique d'un correcteur de type PID, il faut également utiliser cette méthode des moindres carrés car le nombre de coefficients à déterminer (trois ici) est bien inférieur au nombre de moments temporels pouvant être calculés.

2.2.4 Détermination des paramètres du correcteur

La détermination des paramètres du correcteur implique que le système corrigé F doit être équivalent à un modèle fixé H dont le développement en série entière existe.

But de la commande :	$F(p) \equiv H(p)$ Le système corrigé en boucle ouverte doit être équivalent au modèle imposé
Données :	$F(p) = C(p).G(p)$ Les moments temporels de G sont connus ainsi que ceux du modèle H imposé
Objectif :	$C(p) ?$ Déterminer les paramètres du correcteur C

Figure 2.2:
Objectif de la commande entière

En supposant qu'il y ait autant de paramètres du correcteur que de moments temporels calculés, la relation (2.3) suivante donne les moments temporels du correcteur en fonction de ceux du système et du modèle:

$$\begin{aligned}
 A_0^c &= \frac{A_0^h}{A_0^g} \\
 A_{n>0}^g &= \frac{1}{A_0^g} \left(A_n^h - \sum_{k=0}^{n-1} A_k^c \cdot A_{n-k}^g \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

et les coefficients du correcteur se déduisent en utilisant l'expression (2.2).

2.3 Etude du correcteur de type PID par la méthode des moments temporels

La formulation du correcteur sous forme d'une série entière est trop générale et mal adaptée. En effet, une modélisation du correcteur sous forme d'une transmittance s'impose en vue d'une réalisation pratique. Il est d'usage de se fixer une forme particulière de correcteur. Le correcteur choisi dans cette étude est du type Proportionnel, Intégral et Dérivé (PID). Cette formulation est de réalisation pratique simple et ce correcteur a l'avantage d'être utilisé en grande majorité dans la commande de processus industriels.

2.3.1 Présentation du correcteur PID

Soit le système G commandé par un correcteur C de telle manière que l'ensemble soit équivalent au modèle H :

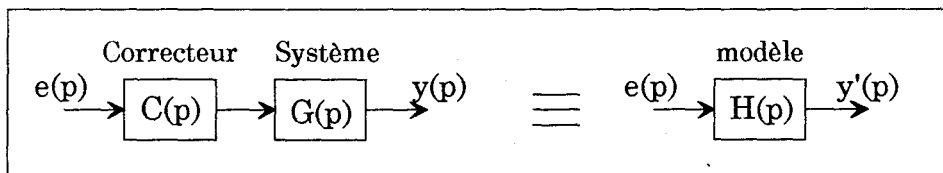


Figure 2.3:
Commande: Equivalence du système corrigé au modèle

où le correcteur s'écrit:

$$C(p) = C_0 + \frac{C_1 \cdot p}{(1 + \mu \cdot p)^m} + \frac{C_2}{p}$$

$$m \in \mathbb{N}, m \geq 1$$

(2.4)

Le modèle, dont les caractéristiques dynamiques sont connues, est fixé et possède un développement en série entière. Les coefficients C_0 , C_1 et C_2 sont les

paramètres du correcteur à déterminer. Le système est, quant à lui, supposé inconnu mais dont les moments temporels sont calculables et déterminés par les relations du premier chapitre.

2.3.2 Obtention des moments temporels du système corrigé

Le but est de déterminer les moments temporels du système corrigé en fonction des moments temporels du système et des paramètres du correcteur. L'utilisation de cette relation ainsi obtenue permet alors d'identifier les paramètres du correcteur lorsque les moments du modèle sont connus. Le système corrigé se met donc sous la forme d'une fonction F définie par:

$$F(p) = C(p).G(p)$$

ou encore, en reprenant l'expression (2.4), la fonction F s'écrit:

$$F(p) = C_0.G(p) + \frac{C_1}{(1 + \mu.p)^m} p.G(p) + C_2 \cdot \frac{G(p)}{p} \quad (2.5)$$

Deux méthodes sont développées pour déterminer la relation qui donne les moments temporels du système corrigé. La première méthode s'appuie sur la définition des moments temporels d'un système possédant une intégration ou une dérivation (résultats du premier chapitre) et la seconde méthode utilise les développements en série des fonctions. Afin de simplifier les calculs, il est supposé que la valeur $\mu \rightarrow 0$ (disparition du terme filtrant de la dérivée).

2.3.2.1 Première méthode

En appliquant la transformée inverse de Laplace à la relation (2.5), l'original f de F , n'est autre que la réponse impulsionnelle du système corrigé:

$$f(t) = C_2 \cdot \int_0^t g(\theta) \cdot d\theta + C_0 \cdot g(t) + C_1 \cdot \frac{dg(t)}{dt}$$

(2.6)

Cette fonction f est définie continue sur l'intervalle des réels positifs. Elle est composée d'une somme de trois fonctions issues du système G:

- g(t), l'original de G(p),
- dg(t)/dt, la dérivée de g(t),
- $\int g(t) \cdot dt$, l'intégrale de g(t).

La condition de la limite infinie de ces trois fonctions donne:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dg(t)}{dt} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t g(\theta) \cdot d\theta = k$$

Cette fonction f ne vérifie donc pas entièrement les conditions (1.1) du premier chapitre. Seules la fonction g et sa dérivée sont majorées par une fonction d'ordre exponentiel. Par contre, la limite de l'intégrale de g est une constante k qui est ici le gain statique de G. Il n'est donc pas possible de calculer directement les moments temporels de F. Pour cela, il faut utiliser la définition des moments temporels d'une fonction possédant un intégrateur. Afin de calculer les moments temporels du système corrigé, il est nécessaire de poser les fonctions suivantes:

$$f^*(t) = f(t) - C_2 \cdot k \quad \text{ou encore} \quad F^*(p) = F(p) - \frac{C_2 \cdot k}{p}$$

et

$$g^*(t) = \int_0^t g(\theta) \cdot d\theta - k$$

En reprenant la relation (2.6), il est possible d'écrire:

$$f^*(t) = C_2 \cdot \int_0^t g(\theta) \cdot d\theta - C_2 \cdot k + C_0 \cdot g(t) + C_1 \cdot \frac{dg(t)}{dt}$$

ou encore:

$$f^*(t) = C_2 \cdot g^*(t) + C_0 \cdot g(t) + C_1 \cdot \frac{dg(t)}{dt}$$

La fonction f^* est maintenant une fonction majorée par une fonction d'ordre exponentiel vérifiant les conditions (1.1). Il est donc possible de calculer les moments temporels de f^* par la relation:

$$A_n^{f^*} = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot f^*(t) \cdot dt$$

ou encore:

$$A_n^{f^*} = C_0 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot g(t) \cdot dt + C_1 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot \frac{dg(t)}{dt} \cdot dt + C_2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot g^*(t) \cdot dt$$

(2.7)

Cette expression fait apparaître les moments temporels de la fonction g , de sa dérivée et de son intégrale. En reprenant les définitions du premier chapitre concernant les moments temporels d'un système possédant une intégration ou une dérivation, les moments temporels s'expriment par:

• *Moments temporels de la dérivée $dg(t)/dt$ d'une fonction $g(t)$:*

$$A_0^{dg(t)/dt} = 0$$

$$A_n^{dg(t)/dt} = -A_{n-1}^g \text{ pour } n \geq 1$$

• *Moments temporels d'une intégrale transformée: $g^*(t) = \int_0^t g(\theta) d\theta - k$*

$$A_n^{g^*} = -A_{n+1}^g$$

L'expression (2.7) peut donc s'écrire en fonction des moments temporels de g. Cette expression fait apparaître les moments du système à corriger en fonction des coefficients du correcteur:

$$\begin{aligned} A_0^r &= -C_2.A_1^g + C_0.A_0^g \\ A_n^r &= -C_2.A_{n+1}^g + C_0.A_n^g - C_1.A_{n-1}^g \quad \text{pour } n \geq 1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.3.2.2 Seconde méthode

Cette seconde méthode s'appuie directement sur le développement en série entière du système G:

$$G(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . p^n . A_n^g$$

L'expression de F dans la relation (2.5) devient en associant la relation (2.4):

$$\begin{aligned} F(p) = C_2 . \left(\frac{A_0^g}{p} - A_1^g + p.A_2^g - p^2.A_3^g + \dots \right) + C_0 . \left(A_0^g - p.A_1^g + p^2.A_2^g + \dots \right) \\ + C_1 . \left(0 + p.A_0^g - p^2.A_1^g + p^3.A_2^g + \dots \right) \end{aligned}$$

En regroupant les termes en puissance de p, il est possible de faire apparaître un développement en série entière dont les coefficients sont une somme de moments temporels de g avec un terme supplémentaire en $\frac{1}{p}$:

$$\begin{aligned} F(p) = \frac{C_2.A_0^g}{p} + \left(C_0.A_0^g - C_2.A_1^g - C_1.0 \right) - p . \left(C_0.A_1^g - C_2.A_2^g - C_1.A_0^g \right) \\ + p^2 . \left(C_0.A_2^g - C_2.A_3^g - C_1.A_1^g \right) + \dots \end{aligned}$$

Cette expression de F peut donc se mettre sous la forme suivante:

$$F(p) = \frac{C_2.A_0^g}{p} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . p^n . \left(C_2.A_{n+1}^g - C_0.A_n^g + C_1.A_{n-1}^g \right) \quad \text{avec } A_n^g \equiv 0 \quad \text{si } n < 0.$$

Cette relation fait donc apparaître une série entière dont les coefficients sont une combinaison des coefficients du correcteur et des moments temporels de g auquel s'ajoute un terme supplémentaire.

En posant la fonction:

$$F^*(p) = F(p) - \frac{C_2}{p} A_0^g$$

il est alors possible de représenter la fonction F^* , transformée de Laplace de f^* , en fonction de ses moments temporels de g sous forme d'une série:

$$F^*(p) = F(p) - \frac{C_2 A_0^g}{p} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p^n \left(-C_2 A_{n+1}^g + C_0 A_n^g - C_1 A_{n-1}^g \right)$$

$$\text{et } F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p^n A_n^f$$

En faisant l'analogie avec la première méthode, il est facile de s'apercevoir que la constante k du système n'est autre que le moment temporel d'ordre 0 de g . Ce moment temporel d'ordre 0 est le gain statique du système G :

$$k = A_0^g = L^{-1} \left(\frac{A_0^g}{p} \right)$$

La relation de récurrence liant les moments temporels du système corrigé aux paramètres du correcteur s'écrit donc:

$$\boxed{\begin{aligned} A_0^f &= -C_2 A_1^g + C_0 A_0^g \\ A_n^f &= -C_2 A_{n+1}^g + C_0 A_n^g - C_1 A_{n-1}^g \text{ pour } n \geq 1 \end{aligned}} \quad (2.9)$$

Les deux méthodes ainsi proposées donnent les moments temporels du système corrigé en fonction de ceux du système et des coefficients du correcteur.

[13]-[44]

2.3.3 Relation de récurrence entre les moments temporels du modèle et du système corrigé

Afin de trouver les relations de récurrence liant le système corrigé au modèle, la condition de faisabilité immédiate est que le modèle possède lui-même un intégrateur pur séparable. Sinon, le coefficient C_2 du correcteur est identiquement nul et le correcteur devient un correcteur de type proportionnel dérivé. La relation de récurrence s'obtient en faisant l'équivalence du système corrigé F au modèle H:

$$H(p) \equiv F(p)$$

Cette équivalence est résolue par l'égalité des moments temporels du système corrigé et ceux du modèle:

$$A_n^h = A_n^f \quad \text{pour tout } n \in N$$

(2.10)

L'identification des paramètres du correcteur proposée ci-après est faite dans un premier temps avec un modèle possédant une intégration pure puis dans un second temps, un modèle sans intégration.

2.3.3.1 Modèle possédant une intégration

Le modèle H peut s'écrire sous la forme d'un produit d'une série entière et d'un terme intégrateur en $\frac{1}{p}$. Il s'écrit:

$$H(p) = \frac{1}{p} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_n^h$$

ou encore:

$$H(p) = \frac{A_0^h}{p} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_{n+1}^h$$

Afin d'identifier les moments temporels du modèle à ceux du système corrigé, il faut comme pour la fonction f , construire une fonction H^* issue de H qui s'exprime par:

$$H^*(p) = H(p) - \frac{A_0^h}{p} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot (-A_{n+1}^h)$$

La résolution de la relation (2.10) pour $n=0$ donne la condition suivante pour le paramètre C_2 du correcteur:

$$C_2 \cdot A_0^g = A_0^h$$

(2.11)

Ensuite, la relation (2.8) donnant les moments temporels du système corrigé, est combinée à la relation (2.10) pour conduire à une relation de récurrence entre les moments temporels de h et ceux de g :

$$\begin{aligned} n = 0, A_1^h &= C_2 \cdot A_1^g - C_0 \cdot A_0^g \\ n \geq 1, A_{n+1}^h &= C_2 \cdot A_{n+1}^g - C_0 \cdot A_n^g + C_1 \cdot A_{n-1}^g \end{aligned}$$

(2.12)

2.3.3.2 Modèle sans intégration

Soit H le modèle ne possédant pas d'intégrateur pur et équivalent au système corrigé. Cette fonction peut s'écrire sous la forme d'une série entière en fonction de ses moments temporels caractérisée par:

$$H(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_n^h$$

Pour identifier l'expression de H à F^* , il faut donc respecter la condition suivante:

$$C_2 = 0$$

(2.13)

Cette condition implique que C_0 devient alors le coefficient proportionnel du correcteur et doit vérifier:

$$C_0 A_0^g = A_0^h$$

(2.14)

Il est alors facile d'en déduire une relation de récurrence pouvant donner les paramètres du correcteur en fonction des moments temporels du système à corriger et ceux du modèle:

$$n \geq 1, A_n^h = C_0 A_n^g - C_1 A_{n-1}^g$$

(2.15)

2.3.4 Identification des paramètres du correcteur

Dans l'identification des paramètres du correcteur [24]-[25], deux cas doivent être étudiés suivant la détermination des moments temporels du système. Si ceux-ci convergent vers zéro, l'identification est faite par la méthode des moindres carrés [26]-[27]-[28]. Dans le cas contraire, c'est à dire si les moments temporels du système divergent vers l'infini, une méthode de programmation non linéaire doit être employée. Cette méthode utilise, pour se ramener à des valeurs convergentes vers zéro, les moments temporels inverses. L'identification est également faite dans deux configurations de modèle. Un modèle possédant un intégrateur et un modèle n'en possédant pas.

2.3.4.1 Modèle possédant une intégration

La relation (2.11) donne la condition sur le coefficient C_2 :

$$C_2 = \frac{A_0^h}{A_0^g}$$

(2.16)

Ce coefficient C_2 sera toujours correctement défini car il est le rapport des deux moments temporels d'ordre 0 du modèle et du système à corriger.

1er cas: Convergence des moments temporels du système

Cette valeur du coefficient (2.16) est alors reportée dans les relations de récurrence (2.12). Comme ces relations font apparaître deux coefficients à déterminer pour une infinité de moments temporels, il faut résoudre ces équations par la méthode des moindres carrés.

En posant:

$$Y_{n+1} = A_{n+1}^h - \frac{A_0^h}{A_0^g} A_{n+1}^g$$

il faut alors résoudre l'équation suivante:

$$n \geq 1, Y_{n+1} + C_0 \cdot A_n^g - C_1 \cdot A_{n-1}^g = 0$$

La méthode des moindres carrés nécessite la minimisation du critère J suivant:

$$J = \sum_{n=1}^{+\infty} [Y_{n+1} + C_0 \cdot A_n^g - C_1 \cdot A_{n-1}^g]^2$$

Les dérivées partielles de J par rapport à chacun des deux coefficients permettent d'exprimer deux relations:

$$\frac{\partial J}{\partial C_0} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (Y_{n+1} + C_0 \cdot A_n^g - C_1 \cdot A_{n-1}^g) \cdot A_n^g$$

$$\frac{\partial J}{\partial C_1} = -2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (Y_{n+1} + C_0 \cdot A_n^g - C_1 \cdot A_{n-1}^g) \cdot A_{n-1}^g$$

La minimisation de ces deux dérivées partielles permettent de déterminer les coefficients C_0 et C_1 .

$$\frac{\partial J}{\partial C_0} = 0 \quad \& \quad \frac{\partial J}{\partial C_1} = 0$$

Le coefficient C_1 s'exprime par:

$$C_1 = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} (Y_{n+1} \cdot A_{n-1}^g) + C_0 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^g \cdot A_{n-1}^g)}{\sum_{n=1}^{+\infty} (A_{n-1}^g)^2}$$

(2.17)

Le coefficient C_0 s'exprime par:

$$C_0 = \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} (Y_{n+1} \cdot A_n^g) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (A_{n-1}^g)^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} (Y_{n+1} \cdot A_{n-1}^g) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^g \cdot A_{n-1}^g)}{\left[\sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^g \cdot A_{n-1}^g) \right]^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n^g)^2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (A_{n-1}^g)^2}$$

(2.18)

2nd cas: Divergence des moments temporels du système

La relation (2.12) doit être inversée afin d'obtenir les moments temporels inverses:

$$n = 0, \quad \frac{1}{A_1^h} = \frac{1}{C_2 \cdot A_1^g - C_0 \cdot A_0^g}$$

$$n \geq 1, \quad \frac{1}{A_{n+1}^h} = \frac{1}{C_2 \cdot A_{n+1}^g - C_0 \cdot A_n^g + C_1 \cdot A_{n-1}^g}$$

La valeur du coefficient donnée en (2.16) est reportée dans ces deux relations. Ces relations de récurrence sont alors résolues par une méthode de

programmation non linéaire de type Powell en utilisant le critère de minimisation suivant:

$$\lambda = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{A_{n+1}^h} - \frac{1}{C_2 A_{n+1}^g - C_0 A_n^g + C_1 A_{n-1}^g} \right]^2$$

2.3.4.2 Modèle sans intégration

La relation (2.14) donne la condition sur le coefficient C_0 :

$$C_0 = \frac{A_0^h}{A_0^g}$$

(2.19)

1er cas: Convergence des moments temporels du système

Cette valeur du coefficient (2.19) est alors reportée dans la relation de récurrence (2.15).

Comme pour le cas précédent, il faut résoudre cette relation de récurrence par la méthode des moindres carrés.

En posant:

$$Y_n = A_n^h - \frac{A_0^h}{A_0^g} A_n^g$$

il faut alors résoudre:

$$n \geq 1, Y_n + C_1 A_{n-1}^g = 0$$

La méthode des moindres carrés nécessite la minimisation du critère J suivant:

$$J = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(Y_n + C_1 A_{n-1}^g \right)^2$$

et la dérivé partielle de J par rapport à C_1 permet d'obtenir la relation suivante:

$$\frac{\partial J}{\partial C_1} = -2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(Y_n + C_1 \cdot A_{n-1}^g \right) \cdot A_{n-1}^g$$

La minimisation de cette dérivée partielle permet de déterminer le coefficient C_1 .

$$\frac{\partial J}{\partial C_1} = 0$$

Le coefficient C_1 s'exprime alors par la relation suivante:

$$C_1 = \frac{-\sum_{n=1}^{+\infty} \left(Y_n \cdot A_{n-1}^g \right)}{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_{n-1}^g \right)^2}$$

(2.20)

2nd cas: Divergence des moments temporels du système

Comme pour le modèle avec intégration, il faut utiliser ici les moments temporels inverses. Une méthode de programmation non linéaire permet d'obtenir le paramètre C_1 minimisant un nouveau critère λ' tenant compte que le coefficient C_2 est nul:

$$\lambda' = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{A_n^h} + \frac{1}{C_0 \cdot A_n^g - C_1 \cdot A_{n-1}^g} \right)^2$$

2.4 Moments temporels de différents modèles usuels

Les modèles étudiés dans ce paragraphe sont représentatifs en général de l'évolution des systèmes rencontrés couramment en automatique dont les caractéristiques dynamiques sont connues. Deux classes de modèles sont mises en évidence correspondant aux modèles à réponse indicielle apériodique et les modèles à réponse indicielle pseudo périodique.

Les modèles ayant une réponse indicielle apériodique peuvent être représentés dans le domaine de Laplace par une transmittance à dérivée implicite ou par une transmittance à deux constantes de temps. Les modèles à réponse indicielle pseudo périodique peuvent être représentés par une transmittance à dérivée explicite ou par un modèle de type second ordre avec un coefficient d'amortissement.

2.4.1 Modèle de type Transmittance à Dérivée Implicite (TDI)

Le modèle H de type transmittance à dérivée implicite dans le domaine de Laplace se met sous la forme:

$$H(p) = \frac{k}{(1 + \tau.p)^\alpha}$$

(2.21)

où:

- k: gain statique,
- τ : constante de temps ($\tau > 0$)
- α : ordre réel ($\alpha > 0$).

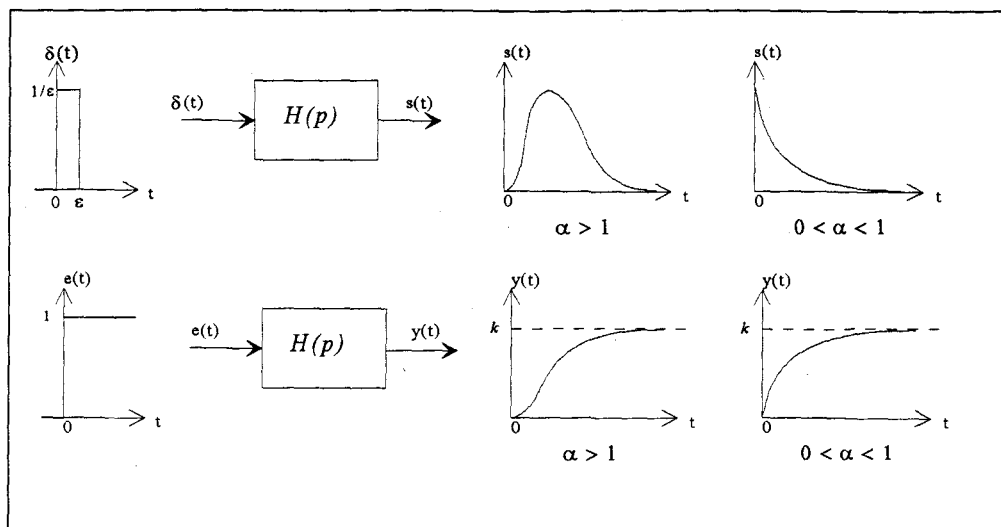


Figure 2.4:
Exemples de réponses impulsionnelles et indicielles du modèle de type TDI

La transformée de Laplace inverse à H , qui n'est autre ici que sa réponse impulsionnelle, notée h , a pour expression analytique:

$$h(t) = \frac{k}{\Gamma(\alpha) \cdot \tau^\alpha} \cdot t^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

où Γ est la fonction gamma:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} \cdot e^{-u} \cdot du = (\alpha - 1)!$$

Etant donnée que h est une fonction définie continue sur l'intervalle des réels positifs et d'ordre exponentiel de telle manière que sa limite à l'infinie peut être majorée, le moment temporel d'ordre n de h est défini de la façon suivante:

$$A_n^h = \int_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot h(t) \cdot dt$$

En reportant l'expression analytique de h dans la précédente expression, le moment temporel d'ordre n de h devient:

$$A_n^h = \int_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot \frac{k}{\Gamma(\alpha) \cdot \tau^\alpha} \cdot t^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt$$

ou encore:

$$A_n^h = \frac{k}{\Gamma(\alpha) \cdot \tau^\alpha \cdot n!} \int_0^\infty t^{\alpha+n-1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt$$

En utilisant les tables de résolution d'intégrales indéfinies [30]-[31]-[32], il advient que:

$$\int_0^\infty t^{\alpha+n-1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt = \left(\frac{1}{\tau}\right)^{-(n+\alpha)} \cdot \Gamma(n+\alpha) \text{ pour } \tau > 0$$

D'où la formulation du moment temporel d'ordre n de h:

$$A_n^h = k \cdot \tau^n \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(n+1)}$$

(2.22)

Les moment temporels définis en (2.22) sont représentés ci-après en fonction de n. Ses variations dépendent essentiellement de la valeur de la constante de temps. En effet, si celle-ci est inférieure à l'unité, la fonction converge vers zéro sinon elle diverge vers l'infini. Dans le cas où cette valeur est unitaire, la variation sera fixée par la valeur de l'ordre. La condition de continuité des moments temporels est que $n > -\alpha$. Cette condition est toujours vérifiée ici car l'ordre du système est strictement positif.

L'évolution des moments temporels est donnée figures 2.5 à 2.7 pour différentes valeurs de la constante de temps en fonction de l'ordre n afin de constater la convergence ou non des moments temporels d'ordre élevé.

Les courbes représentées ci-après donnent l'évolution des moments temporels en fonction de leur ordre n. Chaque point représente un ordre entier n. Entre ces points, l'interpolation des moments temporels est faite par continuité.

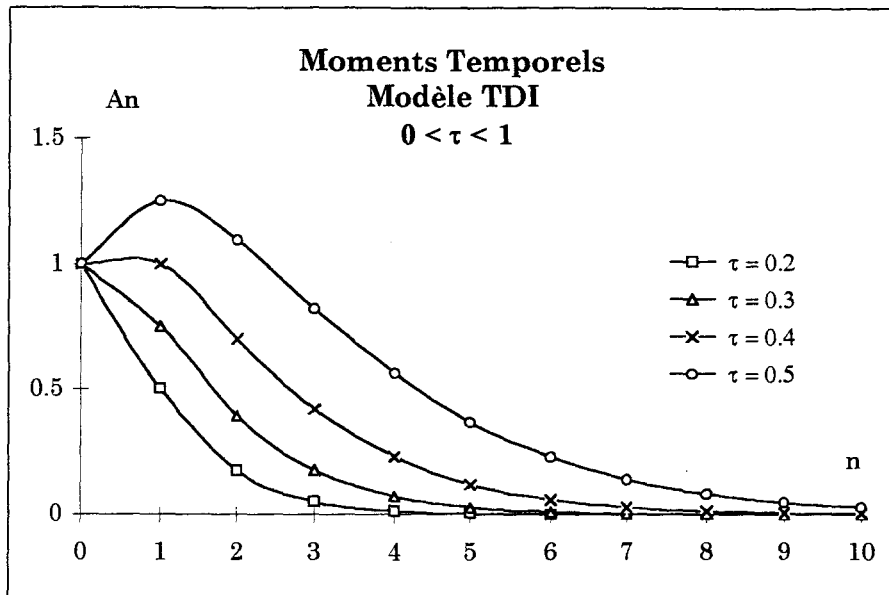


Figure 2.5:
Moments temporels d'un modèle TDI ($k, \alpha \in \mathcal{R}^{+*2}, \tau < 1$)

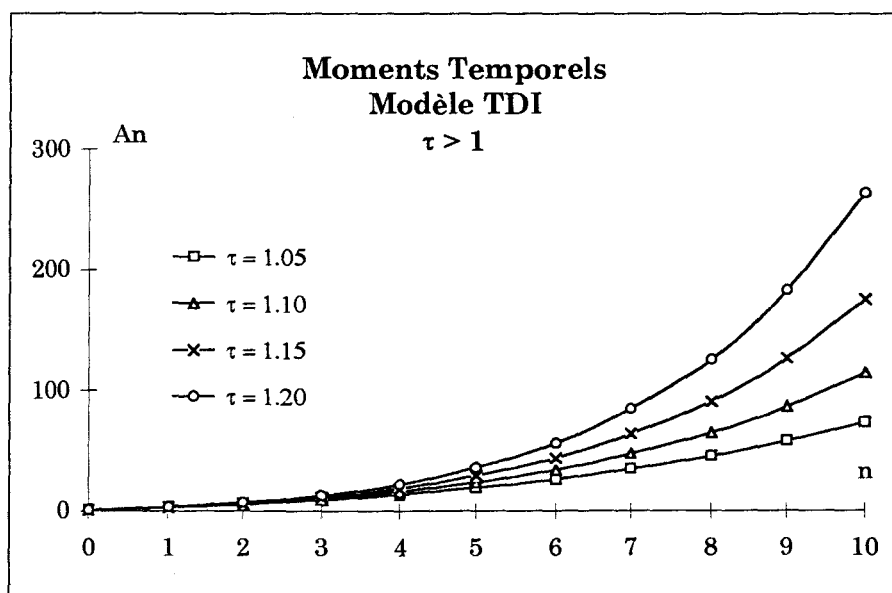


Figure 2.6:
Moments temporels d'un modèle TDI ($k, \alpha \in \mathcal{R}^{+*2}, \tau > 1$)

2.4.2 Modèle de type Transmittance à Dérivée Explicite (TDE)

La fonction de transfert H du modèle de type Transmittance à Dérivée Explicite (TDE ou modèle Cole & Cole) [12]-[33] se met sous la forme dans le domaine de Laplace:

$$H(p) = \frac{k}{1 + (\tau.p)^\alpha} \tag{2.23}$$

où:

- k : gain statique,
- τ : constante de temps ($\tau > 0$),
- α : l'ordre réel ($\alpha > 0$).

Les systèmes représentés par ce type de fonction font parties de la classe des systèmes stables si $\alpha \in]0; 2[$.

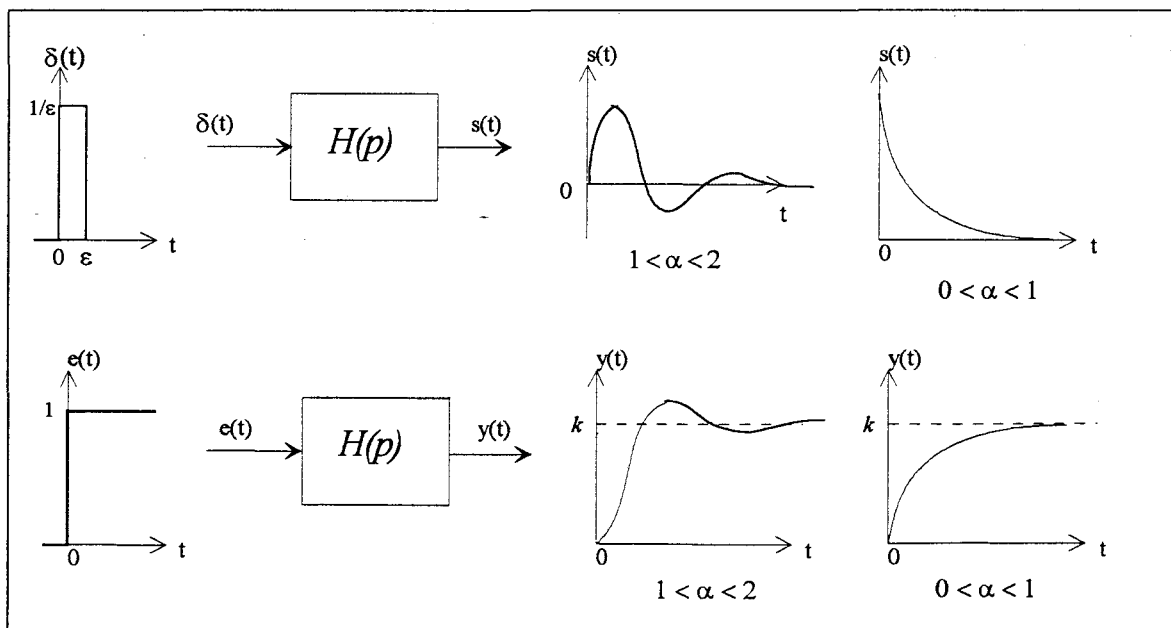


Figure 2.7:
Réponses impulsionnelle et indicielle du modèle de type TDE

La transformée de Laplace inverse de H [43], qui n'est autre ici que sa réponse impulsionnelle h , a pour expression analytique:

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{(n+1)\alpha-1}}{\tau^{(n+1)\alpha} \Gamma[(n+1)\alpha]}$$

Cette expression analytique est difficilement exploitable en vue du calcul des moments temporels. Pour les calculer [13], l'utilisation de la relation (1.8) de la dérivée de la transformée de Laplace s'impose:

$$M_n^h = (-1)^n \cdot \left[\frac{d^n H(p)}{dp^n} \right]_{(p=0)}$$

Le calcul des moments temporels donne donc:

$$M_0^h = [H(p)]_{p=0} = k$$

si $0 < \alpha < 1$, M_n^h n'existent pas.
 $n \geq 1$

si $1 < \alpha < 2$, $M_1^h = 0$, M_n^h n'existent pas.
 $n \geq 2$

(2.24)

Ce calcul démontre que le développement en série entière d'une TDE n'existe pas. L'étude précédente concernant la commande ne peut être utilisée dans ce cas. Pour ce type de modèle, il faut que le système corrigé ne possède pas de développement en série entière. Le tracé des moments temporels d'une TDE n'a aucune utilité dans ce cas.

2.4.3 Modèle de type second ordre oscillant (2dO)

La fonction de transfert H du modèle du second ordre oscillant (2dO) peut se mettre sous sa forme la plus générale:

$$H(p) = \frac{k \cdot \Omega_n^2}{p^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \Omega_n \cdot p + \Omega_n^2}$$

(2.25)

où:

- k : gain statique,
- Ω_n : pulsation naturelle,
- ζ : amortissement ($0 < \zeta < 1$).

La figure 2.8 ci-après montre l'évolution temporelle du modèle soumis à deux types d'entrées (entrée de type Dirac et échelon):

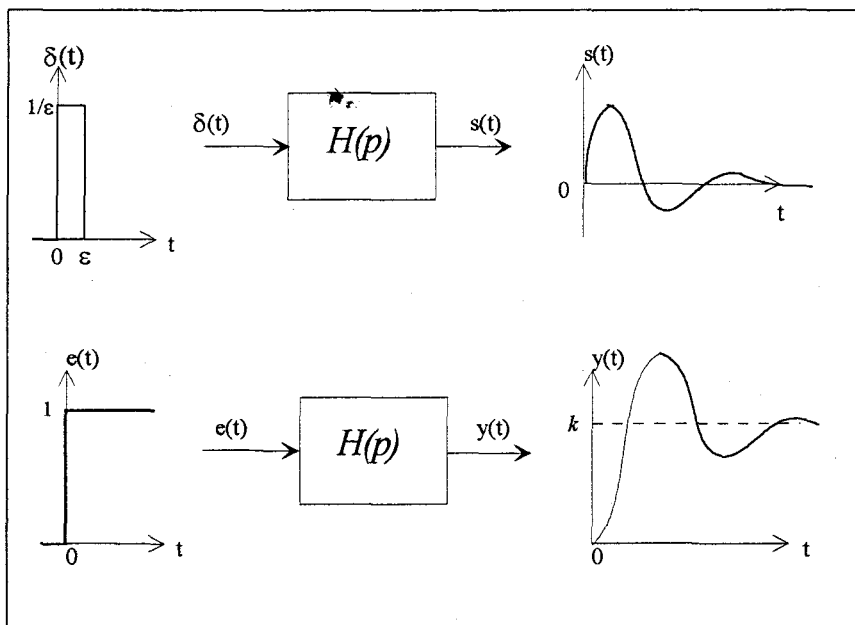


Figure 2.8:
Réponses impulsionnelle et indicielle d'un modèle de type 2d0

La transformée de Laplace inverse de H conduit à la réponse impulsionnelle h du système qui est de la forme:

$$h(t) = \frac{k \cdot \Omega_n}{\Omega_p} \exp(-\zeta \cdot \Omega_n \cdot t) \cdot \sin(\Omega_p \cdot t) \quad \text{avec} \quad \Omega_p = \Omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Le calcul des moments temporels de h est donné par la relation suivante:

$$A_n^h = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot h(t) \cdot dt$$

Pour calculer cette intégrale, il faut faire appel aux tables de résolution des intégrales complexes [30]-[31]-[32]:

$$\int_0^{+\infty} x^{\mu-1} \cdot \exp(-\beta \cdot x) \cdot \sin(\delta \cdot x) \cdot dx = \frac{\Gamma(\mu)}{(\beta^2 + \delta^2)^{\frac{\mu}{2}}} \sin \left[\mu \cdot \arctan \left(\frac{\delta}{\beta} \right) \right]$$

avec les conditions $Re(\mu) > -1$, $Re(\beta) > |Im(\delta)|$ qui sont respectées dans ce cas. La résolution de l'intégrale donne les moments temporels de h:

$$A_n^h = \frac{k}{(\Omega_n)^n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left[(n+1) \cdot \arctan \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right] \quad (2.26)$$

Les moments temporels définis en (2.26) sont représentés ci-dessous en fonction de n. Ses variations ne dépendent que du coefficient pulsation naturelle. Deux cas se présentent: si celle-ci est supérieure à l'unité alors les moments temporels sont convergents sinon ils sont divergents. L'évolution des moments temporels est donnée figures 2.9 et 2.10:

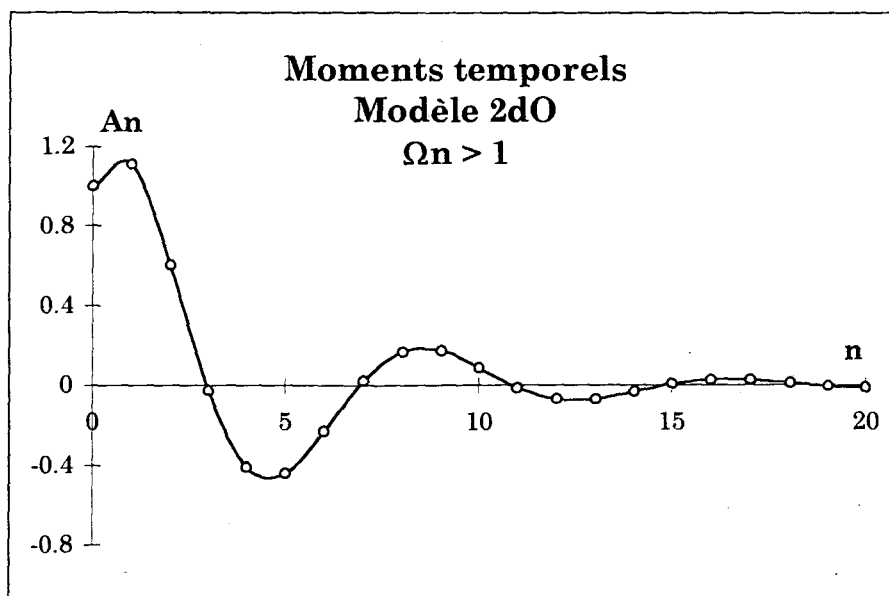


Figure 2.9: Moments temporels du modèle de type 2dO ($k \in \mathbb{R}^{++}$, $0 < \zeta < 1$, $\Omega_n > 1$)

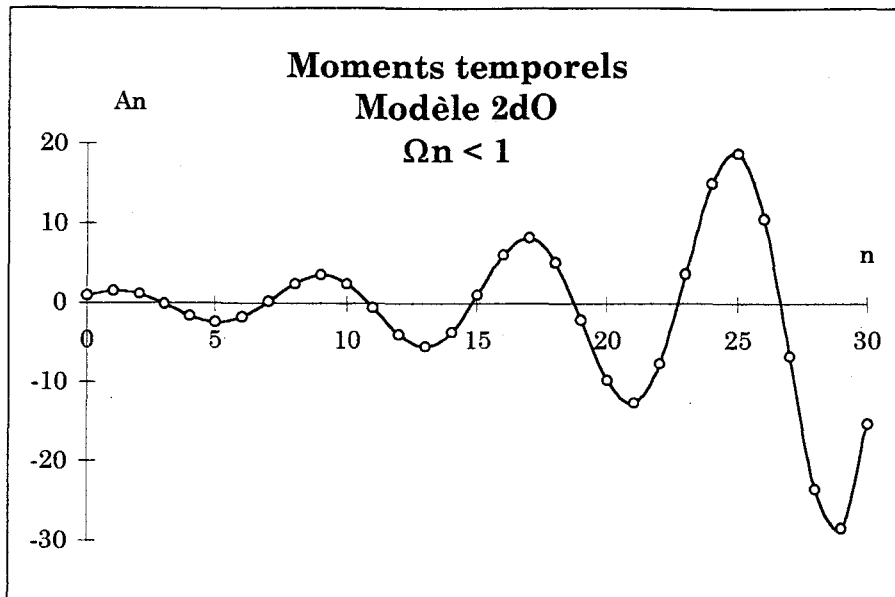


Figure 2.10:
Moments temporels du modèle de type 2dO ($k \in \mathbb{R}^{++}$, $0 < \zeta < 1$, $\Omega_n < 1$)

2.5 Conclusion

Les moments temporels, lorsqu'ils existent, sont utilisés ici dans la commande entière des systèmes linéaires. Lorsque le correcteur est du type PID, il est alors facile d'obtenir des relations de récurrence qui donnent les moments temporels du système corrigé en fonction de ceux du modèle et des paramètres du correcteur.

L'étude apportée ici n'est valable que si le modèle de référence choisi pour la commande possède un développement en série entière où tous les moments temporels existent. Ce n'est pas le cas, comme il a été vu, pour la transmittance à dérivée explicite. Ce type de fonction de transfert ne peut donc être utilisé dans ce genre de commande. L'utilisation d'une loi de correction par la méthode des moments temporels n'est alors plus possible. Lorsque les modèles ne possèdent pas un développement en série entière, il n'est plus possible de corriger le système avec des correcteurs de type PID classique d'ordre entier. Il faut alors faire appel à d'autres types de correcteurs à savoir un PID généralisé d'ordre non entier.

Dans le chapitre suivant, l'étude proposée définit une structure de correcteur généralisé utilisant des opérateurs d'ordre non entier. Le système corrigé par ce genre de correcteur peut alors posséder un développement en série faisant apparaître des termes en puissance non entière.

CHAPITRE 3

La transformée de Mellin & la commande non entière des systèmes

CHAPITRE 3

La transformée de Mellin & la commande non entière des systèmes

3.1 Introduction

Le chapitre précédent a mis en évidence que la commande des systèmes possédant un développement en série entière peut être résolue par la méthode des moments temporels. La commande est réalisable à condition que le système corrigé et le modèle soient tous deux développables en série entière. Comme il a été vu précédemment, il existe des modèles qui ne possèdent pas de développement en série entière. C'est le cas, par exemple, de la transmittance à dérivée explicite.

Le but de ce chapitre est de montrer qu'il est possible de commander de tels systèmes possédant ou non un développement en série entière. La commande proposée ici utilise des opérateurs fractionnaires pour faire apparaître des termes d'un développement en série d'ordre quelconque [7]-[8]-[34]-[35]-[36]. La notion des moments temporels abordée jusqu'ici [11]-[13] sera étendue à la transformée de Mellin qui permet de calculer des "moments temporels" d'ordre fractionnaire. Ils sont appelés les Mellin de la fonction [31].

Dans un premier temps, l'étude du correcteur abordée au deuxième chapitre est reprise en utilisant des opérateurs d'ordre fractionnaire. Les Mellin d'un système sont parfaitement déterminés à partir de la connaissance de la réponse

impulsionnelle de celui-ci. Dans la pratique, cette réponse n'est pas directement accessible par rapport à une réponse de type échelon. La réponse à l'échelon, exploitée dans le cadre de la détermination des moments temporels vu au premier chapitre, peut également être utilisée pour le calcul des Mellin (cf. annexe G). Les Mellin sont ensuite utilisés afin d'obtenir les paramètres du correcteur.

Enfin, les transformées de Mellin de trois modèles usuels sont données au paragraphe 3.4.

3.2 Etude du correcteur avec des opérateurs fractionnaires par la méthode des moments temporels

3.2.1 Présentation du correcteur

L'étude porte sur le comportement d'un système commandé par un correcteur utilisant des opérateurs proportionnels, intégrales et dérivées d'ordre fractionnaire. L'ensemble (système corrigé) doit donc être équivalent à un modèle imposé dont les caractéristiques dynamiques sont fixées a priori. La commande du système est établie selon le schéma suivant:

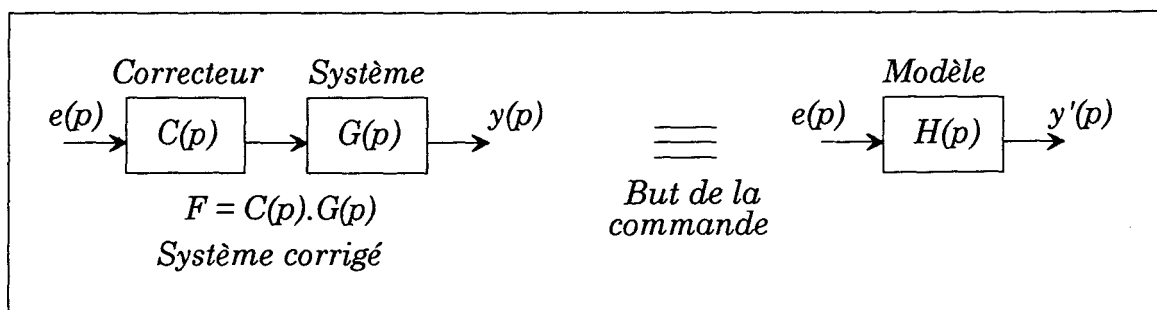


Figure 3.1:
Commande du système. Equivalence au modèle.

Le correcteur utilisé est de type P.I.D avec des opérateurs d'intégration et de dérivation non entiers. Dans le domaine de Laplace, ce correcteur se met sous la forme:

$$C(p) = C_0 + \frac{C_1 \cdot p^\sigma}{(1 + \mu \cdot p)^x} + \frac{C_2}{p^\nu}$$

(3.1)

où

- σ et ν : coefficients non entier de dérivation et d'intégration,
- C_0, C_1 et C_2 : paramètres du correcteur,
- μ et x : paramètres de l'action filtrante du terme dérivé ($x \geq \sigma$).

Remarques:

Pour des valeurs particulières des coefficients de dérivation et d'intégration (valeurs entières), le correcteur devient un correcteur classique faisant intervenir des opérateurs proportionnel, intégral et dérivé d'ordre entier. Le tableau ci-après donne différents types de correcteurs possibles:

σ/ν	0	1	2
0	P	P.I	P.I ²
1	P.D	P.I.D	P.I ² .D
2	P.D ²	P.I.D ²	P.I ² .D ²

Tableau 3.1:

Différents types de correcteurs pour des valeurs entières de σ et ν

Il est facile de constater que l'évolution de la valeur de l'ordre de l'intégration fait évoluer le correcteur vers une correction intégrateur et que l'évolution de la valeur de l'ordre de dérivation fait évoluer le correcteur vers une correction dérivateur. Le fait que ces coefficients soient non entiers permet donc de moduler le poids de l'intégrateur ou du dérivateur.

3.2.2 Relation liant les moments temporels du système à corriger aux paramètres du correcteur

Le but est de déterminer une relation liant les moments temporels du système à corriger et les paramètres du correcteur. Le système, corrigé par le correcteur C, se met sous la forme d'une fonction F définie par:

$$F(p) = C(p).G(p)$$

(3.2)

En reprenant l'expression du correcteur C donnée en (3.1), l'écriture du système corrigé F devient:

$$F(p) = C_0.G(p) + \frac{C_1}{(1 + \mu.p)^x} . p^\sigma . G(p) + C_2 . \frac{G(p)}{p^\nu}$$

Pour déterminer les moments temporels du système corrigé, il faut connaître l'original f de F, et ensuite utiliser la définition de la détermination du moment temporel d'ordre n. Cette étude préliminaire est faite en supposant que le paramètre μ tend vers 0 et afin de simplifier les calculs. Cette approximation est vérifiée dans l'étude fréquentielle du chapitre 5. De ce fait, en première approximation, le système corrigé se met sous la forme:

$$F(p) \approx C_0.G(p) + C_1.p^\sigma.G(p) + C_2.\frac{G(p)}{p^\nu}$$

(3.3)

En appliquant la transformée inverse de Laplace à la relation (3.3), l'original f de F devient la réponse impulsionnelle du système corrigé où apparaissent la dérivée non entière et l'intégrale non entière de la fonction g, original de G:

$$f(t) = C_0.g(t) + C_1.\frac{d^\sigma}{dt^\sigma}[g(t)] + C_2.I^\nu[g(t)]$$

(3.4)

Les moments temporels de f , en faisant la supposition de leur existence, sont définis par la relation suivante:

$$A_n^f = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} f(t).dt$$

Le moment temporel d'ordre n de f s'exprime donc par:

$$A_n^f = C_0 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot g(t).dt + C_1 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot \frac{d^\sigma}{dt^\sigma} [g(t)].dt + C_2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot I^\nu [g(t)].dt$$

(3.5)

3.2.3 Problème posé par les moments temporels

Afin de résoudre la relation (3.5) permettant de déterminer le moment temporel d'ordre n du système corrigé f , il faut faire appel aux règles opératoires des tables de résolutions des intégrales indéfinies [31]. Les deux définitions nécessaires à cette résolution sont:

- L'intégrale indéfinie de la dérivée non entière de la fonction g est:

$$\int_0^{+\infty} t^n \cdot \frac{d^\sigma}{dt^\sigma} [g(t)].dt = \frac{\Gamma[-n + \sigma]}{\Gamma[-n]} \cdot \int_0^{+\infty} t^{n-\sigma} \cdot g(t).dt$$

(3.6)

- L'intégrale indéfinie de l'intégrale non entière de la fonction g est:

$$\int_0^{+\infty} t^n \cdot I^\nu [g(t)].dt = \frac{\Gamma[-n - \nu]}{\Gamma[-n]} \cdot \int_0^{+\infty} t^{n+\nu} \cdot g(t).dt$$

(3.7)

Ces relations (3.6) et (3.7) montrent que le moment temporel d'ordre n de la dérivée ou de l'intégrale non entière de la fonction g est toujours nul à cause de la fonction gamma. En effet, celles-ci nécessitent le calcul de $\Gamma^{-1}[-n]$ pour n entier.

Or ces valeurs sont toutes nulles. Les moments temporels du système g corrigé par un correcteur d'ordre non entier n'apportent aucune information (tous les moments temporels sont nuls). Le système corrigé ne peut alors se mettre sous forme d'une série entière où tous les coefficients existent.

3.3 Résolution de la commande avec des opérateurs non entiers par la transformée de Mellin

Le paragraphe précédent a mis en évidence que l'application de la méthode des moments temporels dans la commande utilisant des opérateurs d'ordre non entier est inexploitable. Cette méthode est en effet basée sur le développement en série entière des fonctions. Or ici, les moments temporels du système corrigé ne sont pas définis. En revanche, il est facile de s'apercevoir que les précédentes relations (3.6) et (3.7) peuvent donner des résultats si l'ordre n des moments temporels prend des valeurs non entières. En fait, cette extension à l'ordre non entier n'est autre que la définition de la transformée de Mellin avec un décalage d'ordre unitaire. La transformée de Mellin est définie pour des ordres s complexes et se limite ici à des ordres réels pour notre étude.

3.3.1 La transformée de Mellin

3.3.1.1 Définition

La transformée de Mellin [14]-[31] d'une fonction f est donnée par la relation suivante:

$$M(f, s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \cdot f(t) \cdot dt$$

avec $s = x + j \cdot y$, complexe

(3.8)

La transformée de Laplace est une transformation unilatérale de la forme:

$$L_I(f, p) = \int_0^{+\infty} e^{-p.t} . f(t) . dt$$

La transformée de Mellin est directement reliée à la transformation de Laplace bilatérale. En effet, il est facilement vérifiable que:

$$M(f, p) = L_{II}[f(e^{-t})]$$

avec $L_{II}(f, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p.t} . f(t) . dt$

Il est à noter que la définition de la transformée de Mellin est une extension des moments temporels. En effet, si s est entier, alors le Mellin d'ordre $s+1$ d'une fonction f est le moment temporel d'ordre n de cette même fonction f :

$$M(f, s + 1) \equiv M_n^f \quad \text{pour} \quad s+1 = n$$

(3.9)

Comme pour les moments temporels notés A_n au premier chapitre, il est possible de définir le Mellin d'ordre s en intégrant un terme factoriel:

$$B(f, s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)} . f(t) . dt$$

(3.10)

$$B(f, s) = \frac{M(f, s)}{\Gamma(s)}$$

(3.11)

Par extension, $B(f, s)$ sera appelé Mellin d'ordre s de f .

3.3.1.2 Propriétés de la transformée de Mellin

L'intégrale définie en (3.8) ne converge que si le point figuratif de la variable complexe s se trouve à l'intérieur de la bande délimitée par deux parallèles à l'axe imaginaire, c'est à dire pour $x_1 < x < x_2$. Dans certains cas, l'un

des deux nombres est infini. Le domaine de convergence est alors un demi-plan ou un plan.

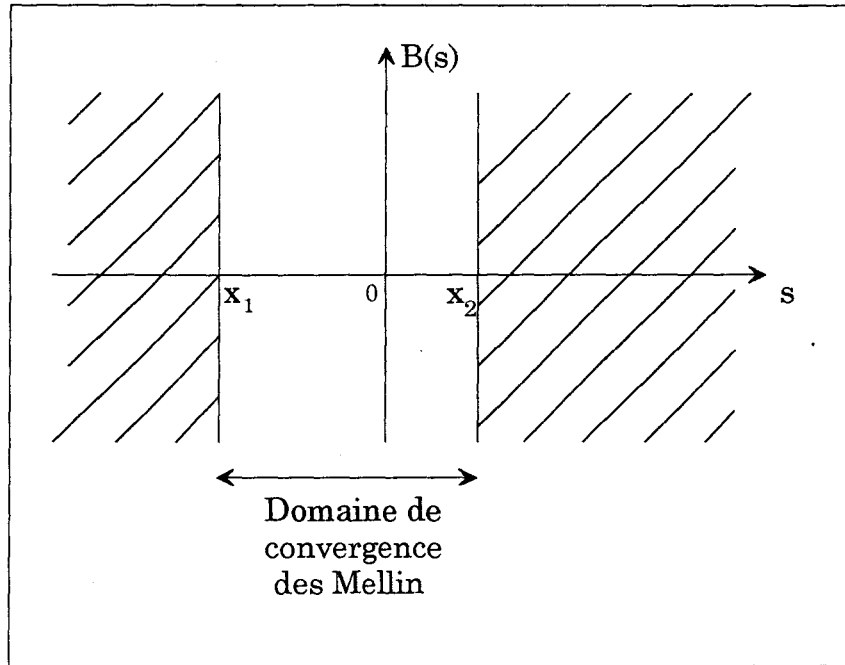


Figure 3.2:
Domaine de convergence des Mellin d'une fonction.

D'autre part, la transformée de Mellin respecte les propriétés de linéarité à savoir:

$$M(\lambda.c + \mu.g, s) = \lambda.M(c, s) + \mu.M(g, s) \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$$

3.3.1.3 Règles opératoires usuelles de la transformée de Mellin

Seules les règles opératoires utilisées dans ce chapitre sont données ici. Les autres règles sont fournies en annexe A.

- Le Mellin d'ordre s de la dérivée $\sigma^{\text{ième}}$ ($\sigma \in \mathfrak{R}^+$) d'une fonction f s'obtient à partir du calcul du Mellin d'ordre $s - \sigma$:

$$M\left(\frac{d^\sigma f}{dt^\sigma}, s\right) = \frac{\Gamma[1 - (s - \sigma)]}{\Gamma(1 - s)} M(f, s - \sigma)$$

$$B\left(\frac{d^\sigma f}{dt^\sigma}, s\right) = \frac{\Gamma[s - \sigma] \cdot \Gamma[1 - (s - \sigma)]}{\Gamma(s) \cdot \Gamma(1 - s)} B(f, s - \sigma)$$

(R1)

- Le Mellin d'ordre s de l'intégrale $\nu^{\text{ième}}$ ($\nu \in \mathfrak{R}^+$) d'une fonction f s'obtient à partir du calcul du Mellin d'ordre $s + \nu$:

$$M(I^\nu f, s) = \frac{\Gamma[1 - (s + \nu)]}{\Gamma(1 - s)} M(f, s + \nu)$$

$$B(I^\nu f, s) = \frac{\Gamma[s + \nu] \cdot \Gamma[1 - (s + \nu)]}{\Gamma(s) \cdot \Gamma(1 - s)} B(f, s + \nu)$$

(R2)

3.3.2 Relation liant les Mellin du système à corriger aux paramètres du correcteur

Les Mellin du système corrigé f , en faisant la supposition de leurs existences, sont définis par la relation (3.10) :

$$B(f, s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)} f(t) dt$$

En utilisant la linéarité de la transformée de Mellin et l'expression de f donnée par la relation (3.4), les Mellin du système corrigé f se mettent donc sous la forme:

$$B(f, s) = C_0 \cdot B(g, s) + C_1 \cdot B(d^\sigma g, s) + C_2 \cdot B(I^\nu g, s)$$

Cette précédente relation fait donc intervenir le Mellin d'une dérivée non entière d'une part et le Mellin d'une intégrale non entière d'autre part [23]. En introduisant les règles opératoires (R1) et (R2) vues précédemment, l'expression devient:

$$B(f, s) = \alpha.B(g, s) + \beta.B(g, s - \sigma) + \gamma.B(g, s + \nu)$$

avec les paramètres pondérés du correcteur (PPC):

$$\alpha = C_0$$

$$\beta = C_1 \cdot \frac{\Gamma(s - \sigma)\Gamma(1 - (s - \sigma))}{\Gamma(s)\Gamma(1 - s)}$$

$$\gamma = C_2 \cdot \frac{\Gamma(s + \nu)\Gamma(1 - (s + \nu))}{\Gamma(s)\Gamma(1 - s)}$$

(3.12)

Cette expression (3.12) ainsi obtenue donne les Mellin du système corrigé f. Les Mellin de f font intervenir d'une part les Mellin de la fonction g en trois points simultanément et d'autre part les trois PPC faisant intervenir des fonctions gamma de la variable s.

Afin de déterminer les Mellin de f, il faut donc tenir compte de son domaine de définition et d'autre part des conditions d'existences des PPC, α , β et γ .

3.3.3 Relation de récurrence entre les Mellin du modèle et du système à corriger

Afin de trouver la relation de récurrence liant les Mellin du système à corriger à ceux du modèle, la condition est que le modèle choisi possède une transformée de Mellin et qu'il existe une intersection entre le domaine de convergence des Mellin du système corrigé et ceux du modèle.

La représentation ci-après montre l'intersection des domaines de convergence des Mellin:

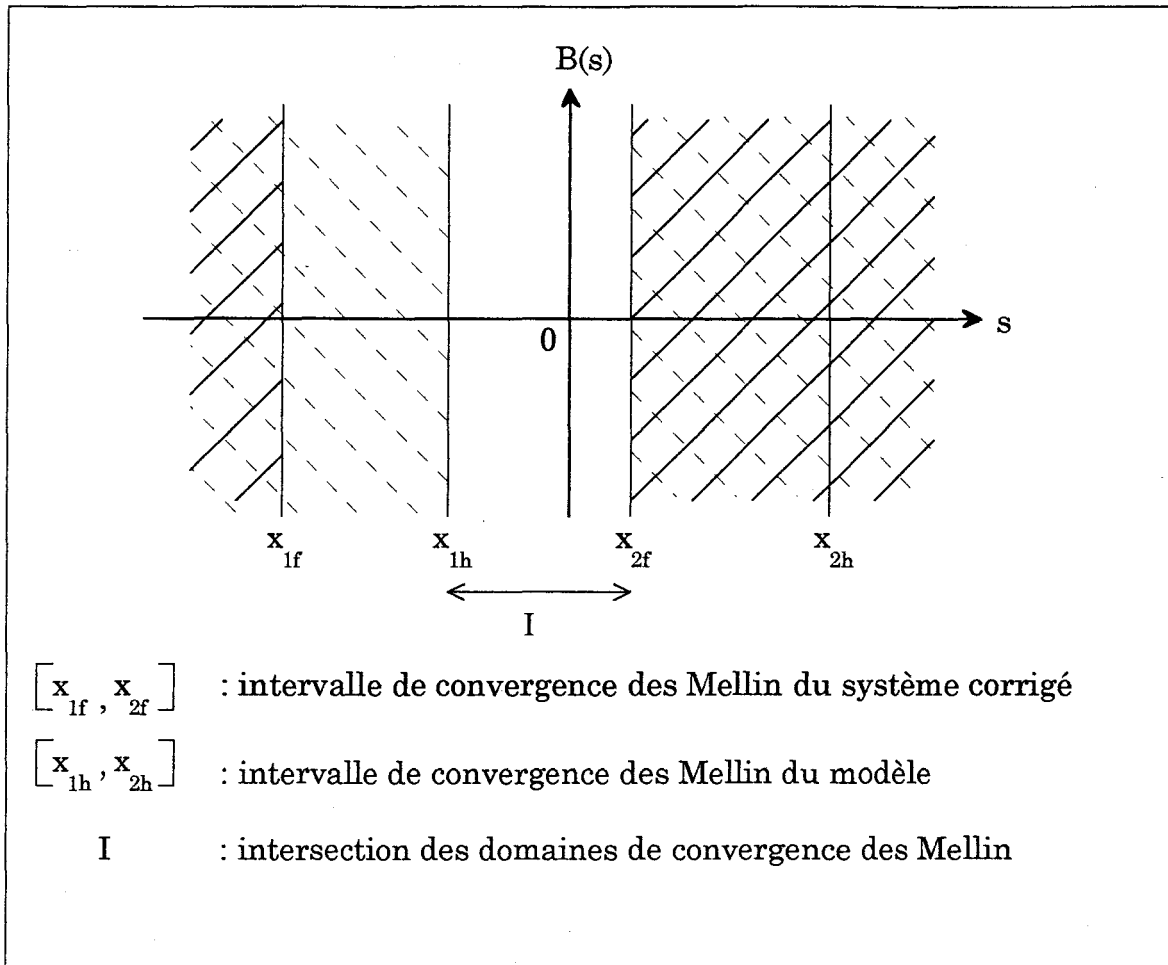


Figure 3.3:

Domaine de convergence des Mellin du système corrigé et du modèle

Soit H le modèle équivalent au système corrigé F:

$$H(p) \equiv F(p)$$

La fonction H possède une transformée inverse de Laplace qui donne son original h. Il est supposé que les Mellin de h existent. Ils s'expriment alors par:

$$B(h, s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)} \cdot h(t) \cdot dt$$

L'équivalence des Mellin du modèle et du système corrigé est faite dans un domaine de convergence commun entre les Mellin afin de résoudre la relation suivante:

$$B(h, s) = B(f, s)$$

Il faut donc résoudre la relation de récurrence suivante liant les Mellin du système, les Mellin du modèle et les paramètres du correcteur. Ceci afin de déterminer les valeurs des paramètres du correcteur.

$$\alpha.B(g, s) + \beta.B(g, s - \sigma) + \gamma.B(g, s + \nu) = B(h, s)$$

avec

$$\alpha = C_0$$

$$\beta = C_1 \cdot \frac{\Gamma(s - \sigma)\Gamma(1 - (s - \sigma))}{\Gamma(s)\Gamma(1 - s)}$$

$$\gamma = C_2 \cdot \frac{\Gamma(s + \nu)\Gamma(1 - (s + \nu))}{\Gamma(s)\Gamma(1 - s)}$$

(3.13)

3.3.4 Identification des paramètres du correcteur

3.3.4.1 Problèmes posés par la résolution de la relation donnant les paramètres du correcteur

Afin d'identifier les paramètres du correcteur, il faut donc résoudre l'équation (3.13) dans le domaine de validité des Mellin de g et de h :

$$I = \{D_g^B \cap D_h^B\}$$

avec

- D_g^B le domaine où les Mellin du système G sont définis,
- D_h^B le domaine où les Mellin du modèle H sont définis,

et tenir compte du domaine de définition des coefficients β et γ .

L'équation (3.13) montre en effet la restriction sur le choix des valeurs de la variable s sur le calcul des PPC. Ces paramètres font intervenir entre autres le calcul de:

$$\Gamma(s).\Gamma(1 - s)$$

Ce calcul n'est défini que pour des valeurs de s appartenant au domaine des réels $]k, k + 1[$, $k \in \mathbb{Z}$. Il apparaît donc des discontinuités au niveau de l'évolution des coefficients β et γ en fonction de la variation de la variable s .

De plus, de façon pratique, la détermination des Mellin ne peut être obtenue à partir des méthodes précédentes mise en œuvre pour les moments temporels. Ceci est dû à la variable s qui n'est plus entière et qui peut prendre une infinité de valeurs. C'est pourquoi une modélisation du système s'impose pour connaître analytiquement sa réponse impulsionnelle afin de calculer ses Mellin. Ceux-ci sont ensuite utilisés dans la relation de récurrence liant le système à corriger au modèle pour déterminer les paramètres du correcteur.

3.3.4.2 Problème posé par la démarche de résolution de la relation

Dans la démarche de l'identification des paramètres du correcteur, il faut choisir en premier lieu le cas à résoudre en fonction du type du modèle choisi: correcteur dont l'action intégration est supérieure à l'action dérivation ou inversement. Puis, pour des valeurs fixées de l'ordre des paramètres de dérivation σ et d'intégration ν , la méthode des moindres carrés est utilisée pour la détermination des paramètres du correcteur. Ensuite, une méthode de programmation non linéaire est employée sur la détermination des coefficients des opérateurs de dérivation et d'intégration. La minimisation d'un critère quadratique du type

$$J = \int_I [B(h, s) - B(f, s)]^2 . ds$$

fixe alors la valeur des ordres des opérateurs et des coefficients. La démarche à adopter est illustrée figure 3.4 suivante:

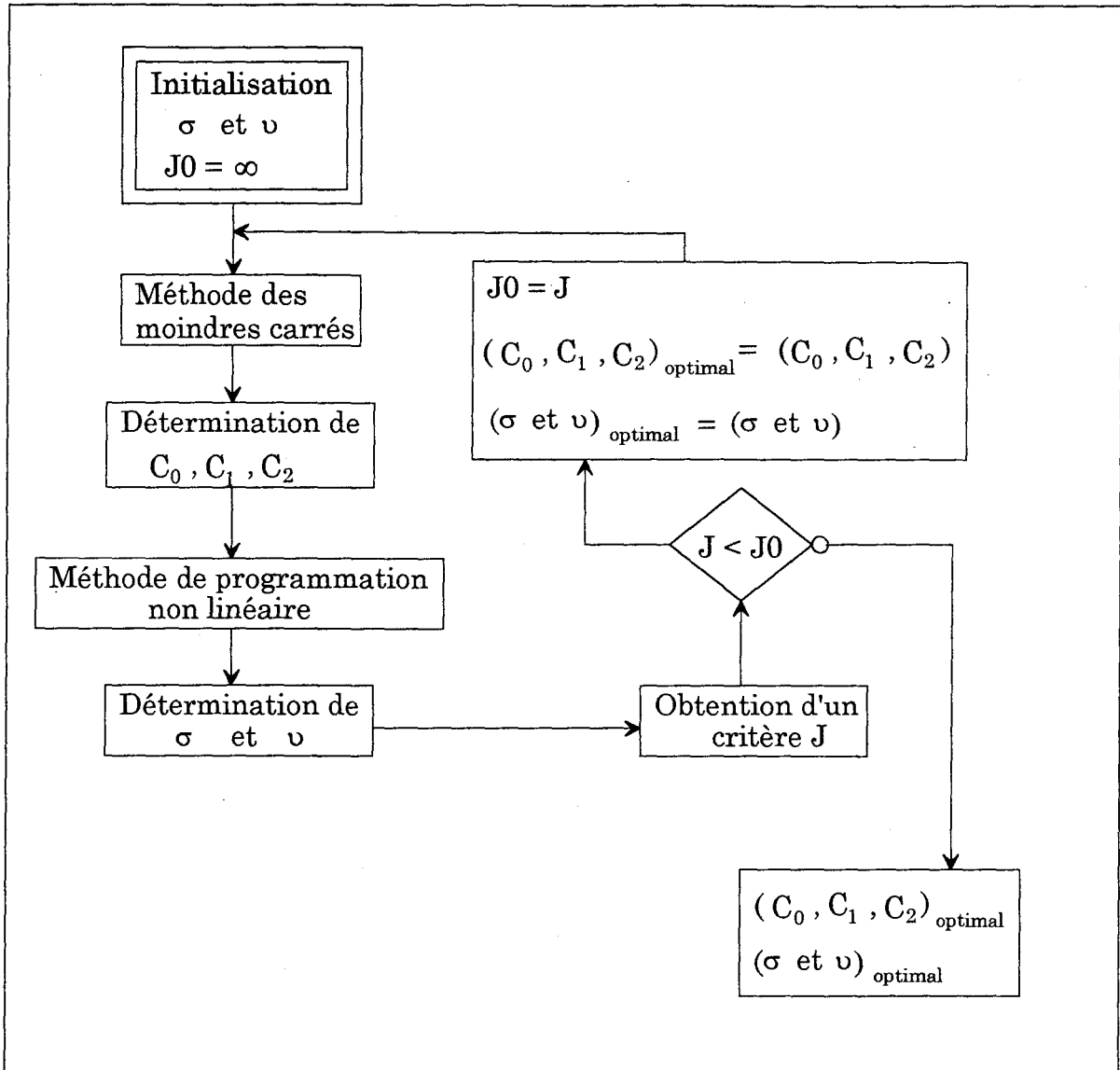


Figure 3.4:

Démarche de résolution permettant d'identifier les paramètres du correcteur

Mais la résolution demande un choix sur l'évolution de la variable s qui, comme le montre le paragraphe 3.3.4.1, peut prendre une infinité de valeurs non entières et fait apparaître des discontinuités. Le domaine de définition I des Mellin du système g et du modèle h peut couvrir l'ensemble des réels. Mais, les variations des coefficients β et γ ne sont pas continues.

Le problème qui se pose est donc de savoir s'il faut identifier globalement ou bien choisir un domaine d'identification restrictif où n'interviendrait pas de

discontinuité. Deux hypothèses sur l'évolution de la variable s peuvent être faites:

$$\bullet s \in [a, b] \subset I$$

$$\bullet s = \lambda + k.\delta \text{ où } \lambda, \delta \in \mathbb{R}^2 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Le problème est alors comment choisir les coefficients a et b ou k, λ et δ .

Afin de faire une identification sur un domaine restrictif de la variable s , une nouvelle démarche d'identification des paramètres du correcteur et de l'ordre des opérateurs de dérivation et d'intégration est entreprise. Elle est basée sur la réponse impulsionnelle du système corrigé et du modèle.

3.3.4.3 Démarche adoptée pour résoudre la relation

Cette méthode est basée sur la correspondance des réponses impulsionnelles du système corrigé et du modèle [3]. Cette correspondance qui ne pose aucune difficulté de mise en œuvre étant donnée la connaissance des formes analytiques du modèle et du système corrigé [37]-[38].

Afin que le système corrigé F soit équivalent au modèle H , il faut donc résoudre ici en temporel la relation:

$$f(t) = h(t) \text{ pour } t \in [0; +\infty]$$

Cette résolution se fait par la méthode des moindres carrés associée à une méthode de programmation non linéaire afin de déterminer les coefficients du correcteur et l'ordre des opérateurs de dérivation et d'intégration. Le principe de la résolution est identique à la figure 3.4 précédente. Le critère de minimisation est:

$$J_t = \int_0^{+\infty} [f(t) - h(t)]^2 . dt$$

Il faut donc résoudre en temporel la relation suivante:

$$C_0.g(t) + C_1.\frac{d^\sigma}{dt^\sigma}[g(t)] + C_2.I^\nu[g(t)] = h(t)$$

Cette relation fait intervenir la dérivée et l'intégrale non entière du système H. La définition de ces opérateurs est la suivante:

- Dérivée non entière d'une fonction f pour $t \geq 0$:

$$\frac{d^\sigma}{dt^\sigma}[f(t)] = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-y)^{-\sigma}}{\Gamma(1-\sigma)} \cdot f(y) \cdot dy$$

(3.14)

- Intégrale non entière d'une fonction f pour $t > 0$:

$$I^\nu[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \int_0^t (t-y)^{\nu-1} \cdot f(y) \cdot dy$$

(3.15)

Pour des fonctions particulières (polynomiales, exponentielles), ces opérateurs sont calculables analytiquement [39] (voir Annexe C). Dans le cas contraire, le calcul de la dérivée (3.14) ou de l'intégrale (3.15) non entière se fait numériquement par la discrétisation de l'intégrale ou par une résolution de type trapèze.

Une fois la correspondance faite entre la réponse impulsionnelle du système corrigé et celle du modèle, les paramètres du correcteur et l'ordre des opérateurs σ et ν sont parfaitement connus. Ensuite, la relation (3.13) liant les Mellin du système corrigé et ceux du modèle peut alors être simulée pour des valeurs de s couvrant tout le domaine de définition I. La correspondance entre les Mellin du système corrigé et ceux du modèle apparaît alors clairement. Cette correspondance donnera le domaine de définition de l'identification dans le domaine de Mellin. La démarche adoptée est illustrée par la figure 3.5 suivante:

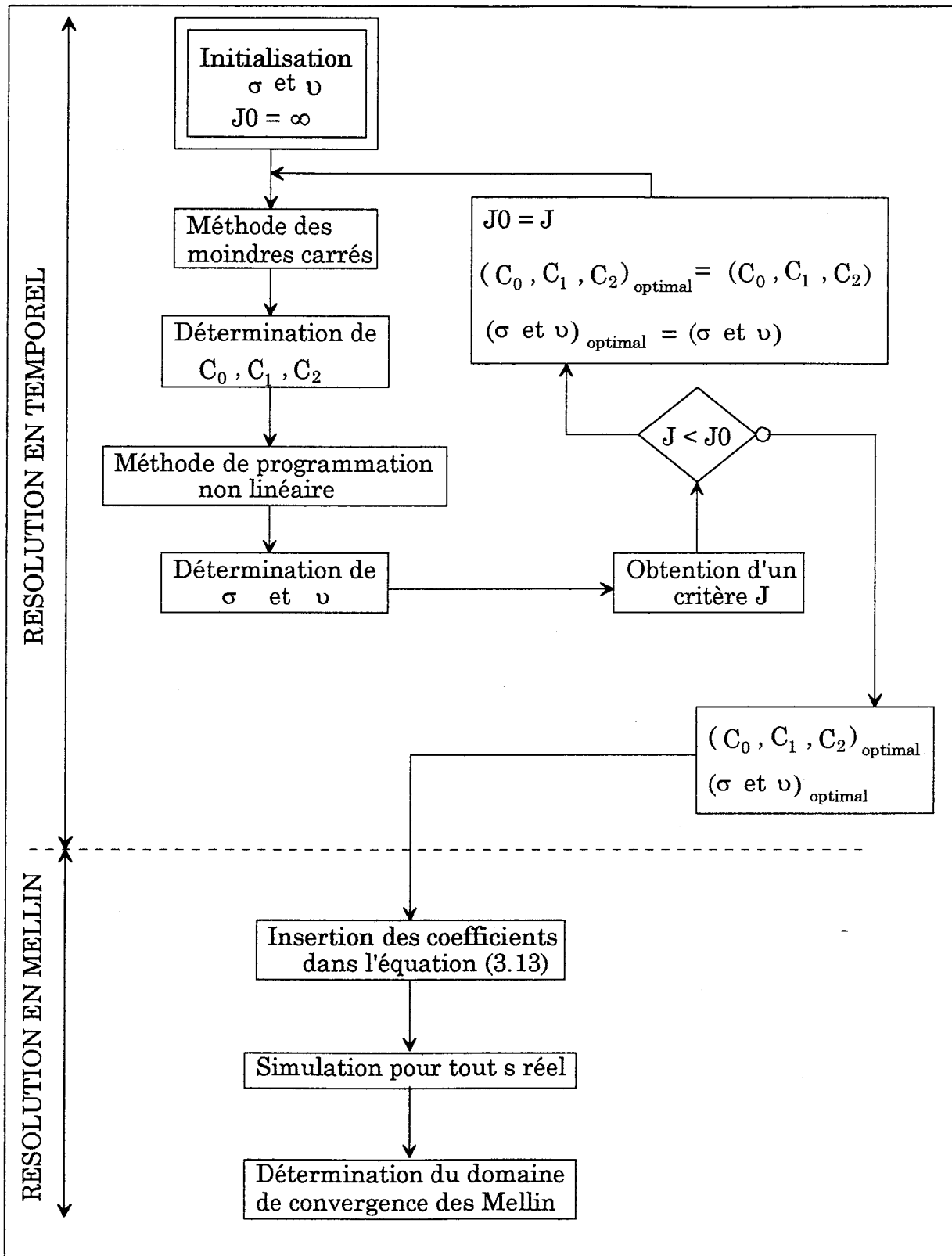


Figure 3.5:
Identification des paramètres du correcteur

3.4 Transformée de Mellin de différents modèles usuels

Les modèles étudiés au chapitre précédent, dont il a été déterminé leurs moments temporels, sont repris ici afin de calculer leur transformée de Mellin. Une représentation graphique de la transformée de Mellin de chaque modèle est donné. D'autres courbes sont données en annexe E.

3.4.1 Modèle de type Transmittance à Dérivée Implicite (TDI)

Le modèle de type Transmittance à Dérivée Implicite s'écrit:

$$H(p) = \frac{k}{(1 + \tau.p)^\alpha}$$

avec $k \in \mathfrak{R}^{**}$, $\tau \in \mathfrak{R}^+$ et $\alpha \in \mathfrak{R}^{**}$ et a pour original:

$$h(t) = \frac{k}{\Gamma(\alpha).\tau^\alpha} . t^{\alpha-1} . e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La transformée de Mellin de h se met donc sous la forme suivante:

$$B(h, s) = \frac{k}{\Gamma(\alpha).\tau^\alpha} . \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)} . t^{\alpha-1} . e^{-\frac{t}{\tau}} . dt$$

En utilisant les tables de résolution d'intégrales indéfinies de Mellin [30]-[31]-[32], il advient que:

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1+s-1} . e^{-\frac{t}{\tau}} . dt = \left(\frac{1}{\tau}\right)^{-(s-1+\alpha)} . \Gamma[s-(1-\alpha)] \text{ pour } s > 1-\alpha \text{ et } \tau > 0$$

Le Mellin d'ordre s de ce modèle H est donc:

$$B(h, s) = k . \tau^{s-1} . \frac{\Gamma(s+\alpha-1)}{\Gamma(s).\Gamma(\alpha)}$$

$$s > 1 - \alpha$$

(3.16)

Cette relation (3.16) est tout à fait similaire à la définition du moment temporel d'ordre n du modèle TDI calculé au chapitre précédent lorsque s est

entier et que $s-1=n$. La fonction Mellin est définie et représentée ci-après pour $s \in]1-\alpha, +\infty[$. La condition de continuité se pose pour $s = 0$:

$$\text{si } \alpha \neq 1, \lim_{s \rightarrow 0} B(h, s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(s)} = 0 \quad \& \quad \text{si } \alpha = 1, \lim_{s \rightarrow 0} B(h, s) = \frac{k}{\tau}$$

Les variations de la fonction à l'infini dépendent du coefficient τ :

$$\text{Si } \tau < 1 \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} B(h, s) = 0 \quad \lim_{s \rightarrow (1-\alpha)^+} B(h, s) = \pm \infty \quad (\text{figure 3.6})$$

$$\text{Si } \tau > 1 \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} B(h, s) = +\infty \quad \lim_{s \rightarrow (1-\alpha)^+} B(h, s) = \pm \infty \quad (\text{figure 3.7})$$

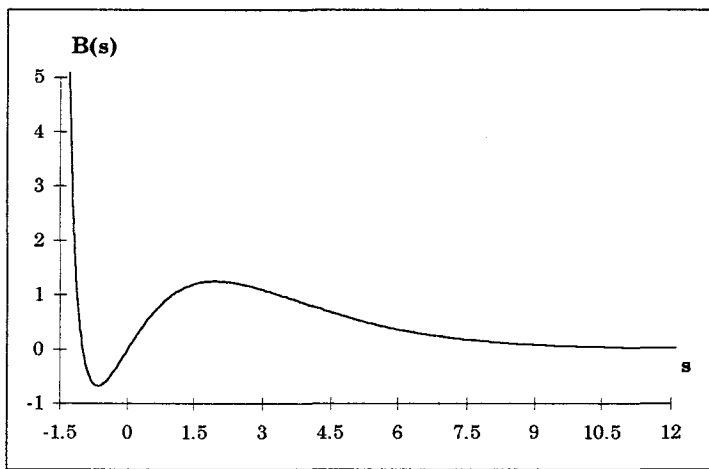


Figure 3.6:
Mellin du modèle de type TDI ($k = 1, \alpha = 2.5$ et $\tau = 0.5$)

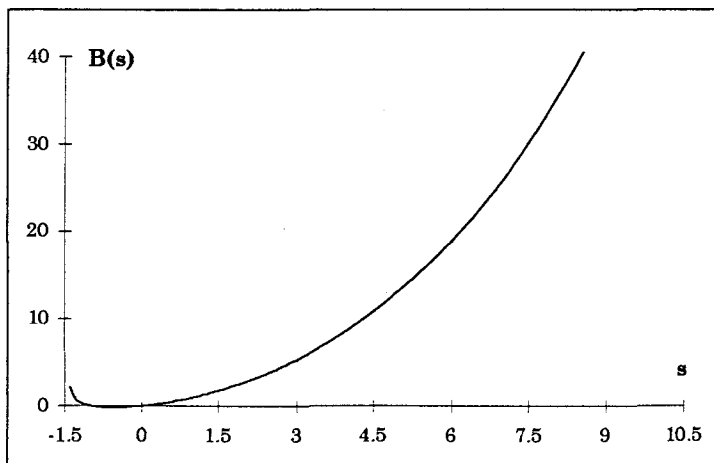


Figure 3.7:
Mellin du modèle de type TDI ($k = 1, \alpha = 2.5$ et $\tau = 1.1$)

3.4.2 Modèle de type Transmittance à Dérivée Explicite (TDE)

Le modèle de type Transmittance à Dérivée Explicite s'écrit:

$$H(p) = \frac{k}{1 + (\tau.p)^\alpha}$$

avec $k \in \mathfrak{R}^{**}$, $\tau \in \mathfrak{R}^+$ et $\alpha \in]0, 2[- \{1\}$ et a pour original:

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{(n+1)\alpha-1}}{\tau^{(n+1)\alpha} \cdot \Gamma[(n+1)\alpha]}$$

Le chapitre précédent a mis en évidence qu'un modèle représenté par une transmittance à dérivée explicite ne possède pas de développement en série entière. Comme pour le calcul des moments temporels, l'original h donnée sous forme d'une somme est également mal adaptée pour le calcul des Mellin. Il est possible d'utiliser une relation permettant de trouver directement les Mellin d'une fonction de transfert dans le domaine de Laplace sans passer par son expression temporel. Cette relation, dont la démonstration est donnée en annexe B, est définie comme:

$$M(h(t), s) = \frac{1}{\Gamma(1-s)} M(H(p), p > 0, 1-s)$$

(3.17)

En appliquant cette relation au modèle TDE, il faut résoudre:

$$M(h(t), s) = \frac{1}{\Gamma(1-s)} M\left(\frac{k}{1 + (\tau.p)^\alpha}, p > 0, 1-s\right)$$

En utilisant les deux règles opératoires suivantes:

$$M\left(\frac{k}{1 + (\tau.p)^\alpha}, s\right) = k \cdot \tau^{-s} \cdot M\left(\frac{k}{1 + p^\alpha}\right)$$

et

$$M\left(\frac{k}{1 + p^\alpha}\right) = \frac{\pi}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi.s}{\alpha}\right)} \quad \text{pour } \alpha \neq 1$$

alors le Mellin d'ordre s de h s'écrit:

$$M(h, s) = \frac{k \cdot \pi \cdot \tau^{s-1}}{\Gamma(1-s) \cdot \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi(1-s)}{\alpha}\right)}$$

avec la condition suivante pour la convergence des Mellin: $1 - \alpha < s < 1 + \alpha$

D'où le Mellin d'ordre s de h s'écrit donc:

$$B(h, s) = \frac{k \cdot \pi \cdot \tau^{s-1}}{\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s) \cdot \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi(1-s)}{\alpha}\right)}$$

$$1 - \alpha < s < 1 + \alpha$$



(3.18)

Le cas $\alpha = 1$ est ignoré ici car le problème serait réduit à une étude d'une TDI d'ordre unitaire vu au paragraphe précédent. Le problème de continuité se traite de la façon suivante pour les limites aux bornes:

$$s = 0: \quad \lim_{s \rightarrow 0} B(h, s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(s)} = 0$$

$$s = 1: \quad \lim_{s \rightarrow 1} B(h, s) = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{k \cdot \pi}{\Gamma(1-s) \cdot \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi(1-s)}{\alpha}\right)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{k \cdot \pi}{\Gamma(1-s) \cdot \alpha \cdot \frac{\pi(1-s)}{\alpha}} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{k \cdot \pi}{\Gamma(2-s) \cdot \alpha \cdot \frac{\pi}{\alpha}} = k$$

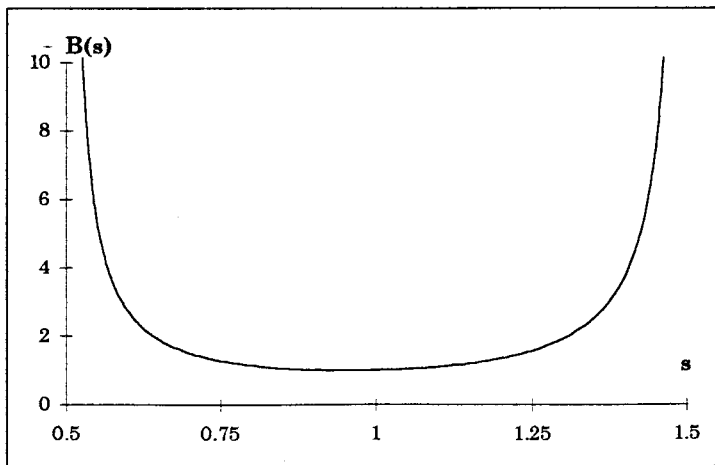


Figure 3.8:
Mellin du modèle de type TDE ($k = 1, \tau = 1.5, \alpha = 0.5$)

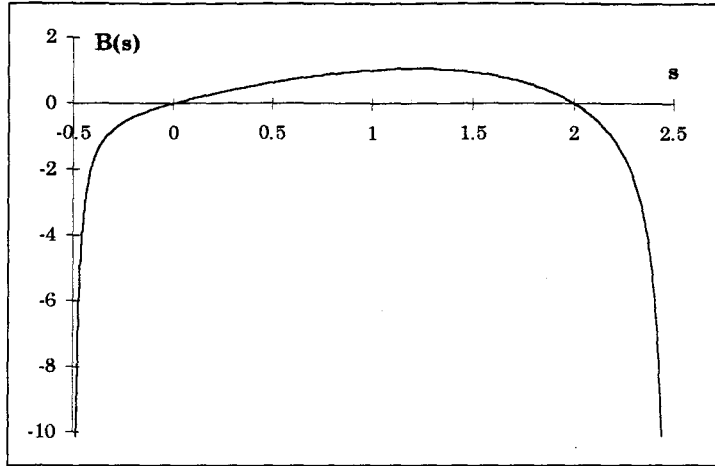


Figure 3.9:
Mellin du modèle de type TDE ($k = 1, \tau = 1.5, \alpha = 1.5$)

3.4.3 Modèle de type second ordre oscillant (2dO)

Le modèle de type second ordre oscillant (2dO) se met sous sa forme la plus générale:

$$H(p) = \frac{k \cdot \Omega_n^2}{p^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \Omega_n \cdot p + \Omega_n^2}$$

avec $k \in \mathfrak{R}^{**}$, $\Omega_n \in \mathfrak{R}^{**}$ et $\zeta \in]0, 1[$ dont son original est:

$$h(t) = \frac{k \cdot \Omega_n}{\Omega_p} \exp(-\zeta \cdot \Omega_n \cdot t) \cdot \sin(\Omega_p \cdot t) \quad \text{avec } \Omega_p = \Omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$$

En faisant appel également aux tables de résolution d'intégrales complexes, il advient que le Mellin d'ordre s de h s'écrit:

$$B(h, s) = \frac{k}{\Omega_n^{s-1} \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left[s \cdot \arctan \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \right]$$

$$s > -1$$

(3.19)

La fonction Mellin est représentée ci-après pour $s \in]-1, +\infty[$.

Ses variations aux limites ne dépendent que de la valeur du coefficient Ω_n .

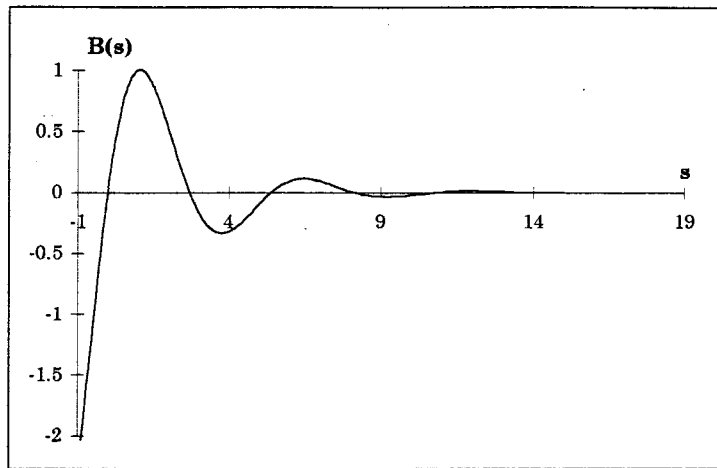


Figure 3.10:
Mellin du modèle de type 2dO ($k = 1, \zeta = 0.4, \Omega_n = 1.5$)

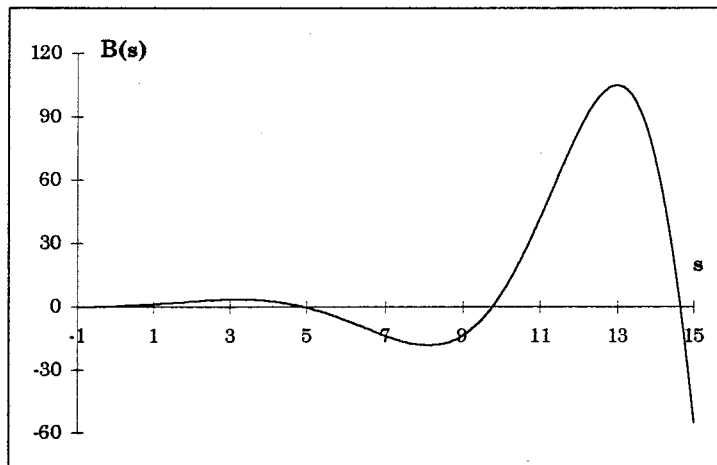


Figure 3.11:
Mellin du modèle de type 2dO ($k = 1, \zeta = 0.8, \Omega_n = 0.7$)

3.4.4 Modèle possédant un retard pur. Domaine de validité

La relation (1.14) du premier chapitre donnant les moments temporels d'un modèle h possédant un retard pur T ne peut être généralisée ici. Cette relation fait intervenir en effet l'opérateur somme pour des valeurs entières positives. La généralisation pour des valeurs réelles n'est pas possible. Le calcul des Mellin de

modèles possédant un retard pur est à traiter cas par cas. Le cas le plus fréquemment utilisé correspond à des modèles apériodiques. Ces modèles sont décrits par une transmittance à dérivée implicite avec retard caractérisé par.

$$H(p) = \frac{k.e^{-T.p}}{(1 + \tau.p)^\alpha}$$

La détermination des Mellin de h, original de H, s'effectue par l'utilisation de la relation (3.17) comme pour le modèle TDE. Il faut donc déterminer l'intégrale suivante:

$$\int_0^{+\infty} p^{1-s}.H(p).dp = \int_0^{+\infty} p^{1-s}.\frac{k.e^{-T.p}}{(1 + \tau.p)^\alpha}.dp$$

Les tables de transformées d'intégrales [30]-[31]-[32] donnent:

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}.\frac{k.e^{-a.x}}{(x + \beta)^\alpha}.dx = \frac{k}{\Gamma(\alpha)}.\Gamma(s).\beta^{s-1}.e^{a.\beta}.\Gamma(1 - s + \alpha, a.\beta)$$

où intervient la fonction gamma incomplète:

$$\Gamma(u, x) = \int_x^{+\infty} e^{-t}.t^{u-1}.dt$$

La résolution donne donc le Mellin d'ordre s de h:

$$M(h, s) = \frac{k}{\Gamma(\alpha)}e^{\frac{T}{\tau}}.\tau^{s-1}.\Gamma\left(s + \alpha - 1, \frac{T}{\tau}\right)$$

d'où:

$$B(h, s) = \frac{k}{\Gamma(\alpha)}e^{\frac{T}{\tau}}.\tau^{s-1}.\frac{\Gamma\left(s + \alpha - 1, \frac{T}{\tau}\right)}{\Gamma(s)}$$

(3.20)

Cette fonction est définie pour $s > 1 - \alpha$. Elle est représenté ci-après. Ses variations à la limite infinie dépendent de la valeur du coefficient τ .

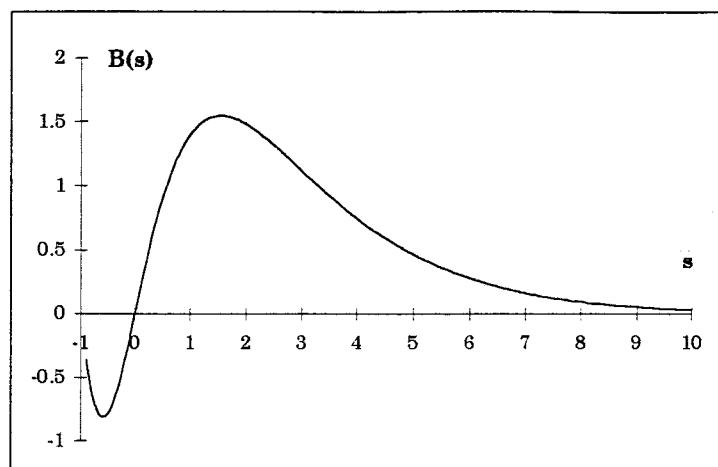


Figure 3.12:
Mellin du modèle de type TDIR ($k = 1$, $\alpha = 2$, $\tau = 0.5$, $T = 0.2$)

3.5 Conclusion

Les Mellin sont utilisés ici pour la commande non entière des systèmes linéaires où le correcteur PID généralisé fait intervenir des opérateurs de dérivation et d'intégration d'ordre non entier.

Il est mis en évidence l'obtention d'une relation de récurrence entre les Mellin du modèle de référence pour la commande et les Mellin du système où apparaissent les paramètres du correcteur (coefficients multiplicateurs et ordre des opérateurs). La résolution de cette récurrence permet de déterminer les paramètres du correcteur. Comme il n'est pas facile de déterminer le domaine de validité des Mellin du système corrigé et du modèle, une simulation dans le domaine temporel s'avère nécessaire pour déterminer les paramètres du correcteur. Ensuite une simulation de la récurrence entre les Mellin du modèle et du système oblige de faire un choix sur la variation de la variable s de Mellin.

Par la suite, pour d'autre correction, le choix de s peut être intuitif. La simulation dans le domaine temporel n'est plus nécessaire car la détermination des paramètres du correcteur peut se faire directement sur la récurrence des Mellin. La récurrence dans le domaine de Mellin peut être utilisée directement

si le domaine de validité des Mellin est connu et si l'expérience montre que la restriction à un intervalle donné donne de bons résultats.

Ce genre de correcteur étudié peut être utilisé dans le cas où le modèle imposé pour la commande est de type TDE. Ce genre de modèle, ne possédant pas de développement en série entière ne convient pas dans une étude avec les moments temporels mais au contraire dans une étude avec les Mellin.

Le chapitre suivant est consacré aux moments temporels et leur application à l'identification d'un système. Les deux méthodes élaborées au premier chapitre permettant de déterminer les moments temporels à partir de la réponse indicielle du système sont mise en oeuvre sur un système réel afin de déterminer leur domaine de validité.

CHAPITRE 4

Les moments temporels & l'identification d'un système

CHAPITRE 4

Les moments temporels & l'identification d'un système

4.1 Introduction

Le premier chapitre a développé deux méthodes de détermination des moments temporels d'un système dont la réponse indicielle est connue. Ces deux méthodes élaborées permettent donc théoriquement de définir parfaitement le système par une série entière en p^n dans le domaine de Laplace où les coefficients sont les moments temporels déterminés.

Dans la première partie de ce chapitre, une étude est menée parallèlement sur la réponse indicielle réelle d'un processus et sur la réponse indicielle analytique de celui-ci modélisé. Ce processus modélisé fournit des moments temporels théoriques. Ils sont alors comparés à ceux obtenus par l'utilisation des méthodes sur la réponse indicielle réelle du processus. Cette comparaison permet de fixer les conditions dans lesquelles ces méthodes de détermination des moments temporels doivent être utilisées (échantillonnage et troncature sur la borne infinie). Le domaine de validité et la performance des deux méthodes peuvent alors être donnés. La seconde partie de ce chapitre donne des relations permettant d'identifier les paramètres d'un modèle de type TDI à partir de la connaissance de ses moments temporels. Il est montré également qu'il existe des relations entre les moments temporels qui permettent de modéliser un système

soit sous une forme de type TDI ou sous forme TDIR. Les relations permettant de passer d'un modèle à l'autre sont données dans ce cas.

4.2 Etude du processus thermique

L'étude menée ici utilise un système physique: le processus thermique. Ce système donne une réponse indicielle dont son exploitation est aisée. Cette réponse indicielle réelle obtenue peut alors être exploitée. Elle permet d'une part l'utilisation des deux méthodes de détermination des moments temporels et d'autre part de modéliser le processus par un modèle simple.

Dans un premier temps, la forme de la réponse indicielle permet de modéliser ce système par un modèle de Strejc. Les expressions analytiques des réponses impulsionnelle et indicielle sont parfaitement connues. Il est alors possible d'obtenir les moments temporels théoriques de ce modèle et de les comparer, dans un premier temps, à ceux obtenus par l'utilisation des deux méthodes élaborées au premier chapitre.

Dans un second temps, les deux méthodes élaborées sont testées sur la réponse indicielle réelle du système. Il est alors possible de conclure sur le domaine de validité des méthodes élaborées.

4.2.1 Présentation du processus

Le processus thermique est un processus de chauffage à air chaud représenté par la figure 4.1. Le processus de base se compose d'un ventilateur à ouverture réglable qui souffle dans un tube supposé sans capacité calorifique. A l'entrée du tube se trouve une résistance de chauffage commandée par un amplificateur de puissance. La température de l'air ainsi réchauffé est mesurée par une thermistance qu'il est possible de placer en plusieurs endroits du tube. Lorsqu'une variation est appliquée à l'entrée, deux phénomènes sont constatés:

- l'inertie thermique de la résistance qui fait qu'une variation brusque de tension se traduit par une évolution plus lente de la température de la résistance. Ce phénomène est caractérisé par la constante de temps du système.
- le retard de la mesure de la température dû à la distance entre la résistance et la thermistance de mesure. Ce phénomène se traduit par un retard pur dans la fonction de transfert du modèle de ce processus.

L'obtention de la réponse indicielle réelle permet de modéliser simplement le processus par un modèle de Strejc. Le processus peut être décrit par une fonction de transfert de type TDIR d'ordre m avec retard pur de la forme:

$$G(p) = \frac{k.e^{-T.p}}{(1 + \tau.p)^m}$$

- où:
- k: le gain statique du système,
 - T: le retard pur du système,
 - τ : la constante de temps du système,
 - m: l'ordre du système (m entier).

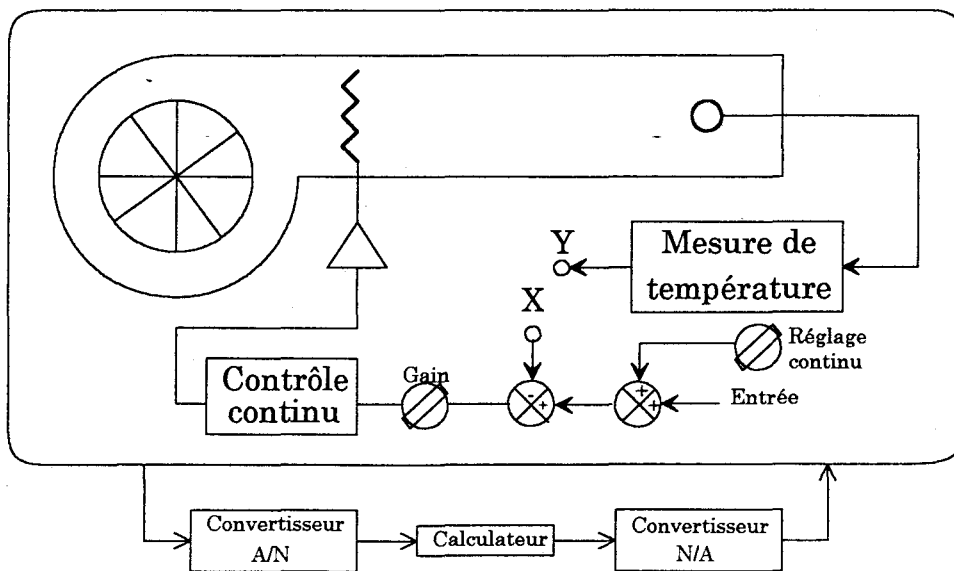
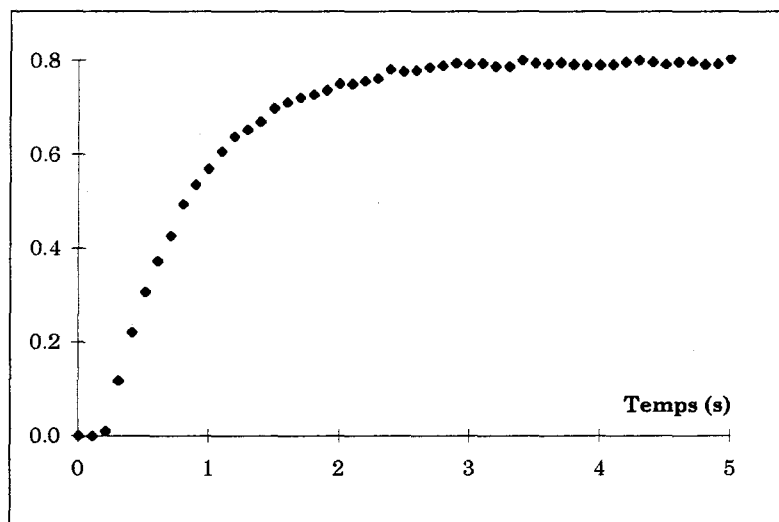


Figure 4.1:
Le processus thermique

Le processus thermique est couplé à un ordinateur. Le couplage est réalisé avec une carte industrielle de conversion Analogique/Numérique. Le ordinateur permet de solliciter le processus thermique par une entrée de type échelon et de recueillir la réponse indicielle réelle du système avec un pas d'échantillonnage variable. Cette réponse indicielle peut alors être exploitée afin de déterminer les moments temporels du système.

4.2.2 Relevé de la réponse indicielle et modélisation du processus

La réponse indicielle est obtenue par sollicitation du processus avec une entrée de type échelon pendant cinq secondes avec un pas d'échantillonnage de 10^{-2} s. La représentation ci-après donne la réponse indicielle du processus thermique avec un pas d'échantillonnage de 10^{-1} s.



*Figure 4.2:
Réponse indicielle du processus thermique*

Cette courbe montre de façon significative le bruit sur la mesure. La réponse indicielle ainsi obtenue permet de modéliser le système par une fonction de transfert de type TDIR par la méthode de Strejc. Cette méthode lie les coefficients T , τ et m . Leur détermination est réalisée à partir du nomogramme de détermination des transmittances [20][45][46].

La modélisation du processus par un modèle de Strejc et l'identification des paramètres donne, après approximations, le modèle Gr du premier ordre suivant:

$$Gr(p) = \frac{0,8}{1 + 0,64.p} e^{-0,2.p} \tag{4.1}$$

Considérons le modèle G issu du modèle Gr dont le retard est ignoré:

$$G(p) = \frac{0,8}{1 + 0,64.p} \tag{4.2}$$

Ce modèle G, de type TDI, permet de calculer analytiquement les moments temporels de son original g par l'utilisation de la relation (2.22) du chapitre 2. De plus, l'utilisation de la relation existante entre les moments temporels d'un modèle de type TDI et ceux d'un modèle de type TDIR, relation (1.14), permet de déduire les moments temporels théoriques de l'original gr du modèle Gr du processus. Les moments temporels de gr ainsi que le rapport des moments temporels successifs sont donc obtenus par les relations suivantes:

$$A_n^{gr} = \sum_{i=0}^n \frac{(0,2)^i}{i!} \cdot [0,8 \times (0,64)^{n-i}] \quad R_n^{gr} = \frac{A_{n+1}^{gr}}{A_n^{gr}}$$

Les moments temporels théoriques du modèle Gr du processus ainsi que le rapport des moments temporels successifs sont donnés dans le tableau suivant:

n	An	Rn	n	An	Rn
0	0.80	0.84	10	1.2607.10 ⁻²	0.64
1	0.6720	0.6638	11	8.0684.10 ⁻³	0.64
2	0.4461	0.6424	12	5.1638.10 ⁻³	0.64
3	0.2865	0.6402	13	3.3048.10 ⁻³	0.64
4	0.1834	0.64	14	2.1151.10 ⁻³	0.64
5	0.1171	0.64	15	1.3537.10 ⁻³	0.64
6	7.5143.10 ⁻²	0.64	16	8.6634.10 ⁻⁴	0.64
7	4.8091.10 ⁻²	0.64	17	5.5446.10 ⁻⁴	0.64
8	3.0779.10 ⁻²	0.64	18	3.5485.10 ⁻⁴	0.64
9	1.9698.10 ⁻²	0.64	19	2.2710.10 ⁻⁴	0.64

Tableau 4.1:
Moments temporels théoriques du modèle Gr du processus

4.2.3 Détermination des moments temporels du modèle du processus

La forme analytique dans le domaine de Laplace du modèle Gr du processus donne la réponse impulsionnelle gr et la réponse indicielle yr qui ont pour expression:

$$gr(t) = 1,25 \cdot \exp\left(\frac{-(t-0,2)}{0,64}\right) \quad yr(t) = 0,8 \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-(t-0,2)}{0,64}\right)\right)$$

La détermination des moments temporels par chacune des deux méthodes élaborées nécessite de fixer la période d'échantillonnage et la troncature sur la borne infinie. Afin de déterminer cette troncature, il est intéressant de regarder le tracé de l'intégrale donnant les moments temporels en fonction de l'ordre n . Les moments temporels de gr peuvent être calculés par la relation suivante:

$$A_n^{gr} = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot gr(t) \cdot dt$$

Afin de calculer cette intégrale numériquement, il faut faire apparaître une troncature sur la borne infinie:

$$A_n^{gr} = \int_0^\lambda \frac{t^n}{n!} \cdot gr(t) \cdot dt + \int_\lambda^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot gr(t) \cdot dt$$

Il faut donc que cette troncature λ ait une valeur minimale de telle façon que la deuxième partie de l'intégrale soit majorée:

$$\exists x > 0, \exists \varepsilon > 0, \forall \lambda > x, \left| \int_\lambda^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot gr(t) \cdot dt \right| < \varepsilon$$

Cela signifie encore que la fonction z suivante :

$$z : t \rightarrow \frac{t^n}{n!} \cdot gr(t)$$

soit représentée entièrement sur un domaine de définition qui est fonction de l'ordre n . La représentation de cette fonction z est une "cloche" à partir de $n=1$ qui se décale sur l'axe des abscisses en fonction de l'ordre n .

Il est donc nécessaire d'avoir une troncature variable qui soit fonction de l'ordre n afin de déterminer correctement les moments temporels. Les figures 4.3 et 4.4

suivantes montrent l'évolution de la fonction z définie précédemment en fonction de l'ordre n :

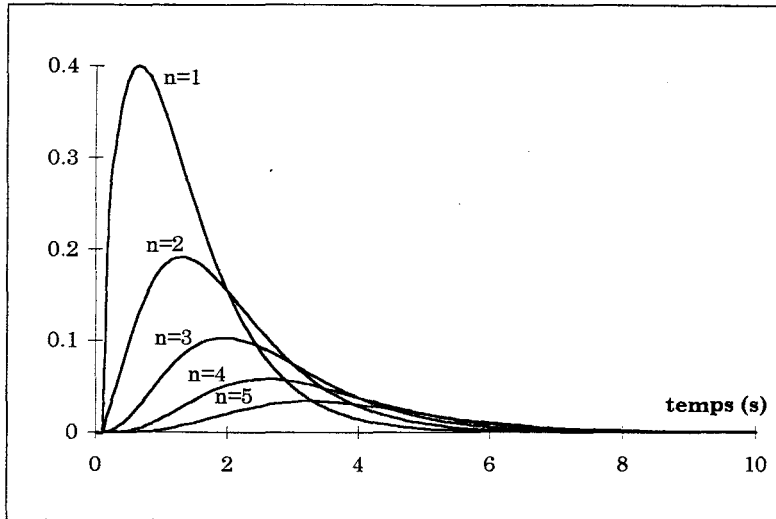


Figure 4.3

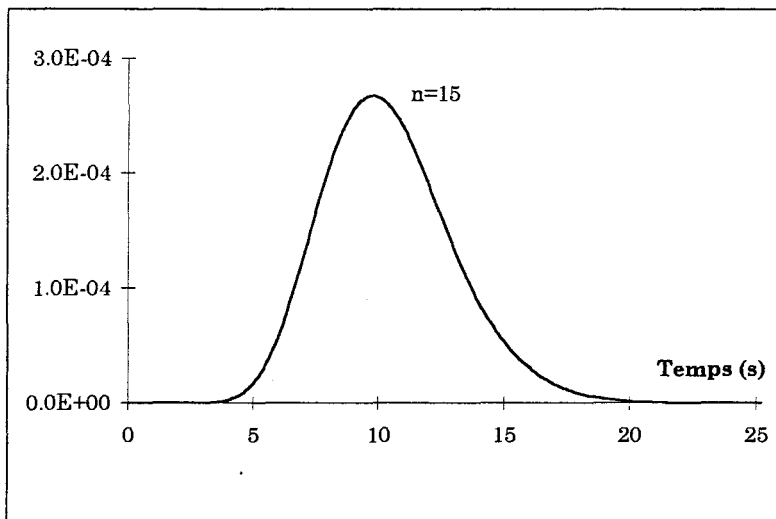


Figure 4.4:
Evolution de la fonction z pour différentes valeurs de l'ordre n

L'évolution de cette fonction z montre que la troncature qui doit être faite sur la borne infinie est fonction de l'ordre n du moment temporel calculé. De ce fait, pour obtenir une bonne approximation des moments temporels calculés par les deux méthodes, il faut tronquer la borne infinie en fonction de l'ordre n du moment temporel qui doit être déterminé.

Le tableau 4.2 donne la troncature λ minimale à adopter pour déterminer de façon correcte le moment temporel d'ordre n par les deux méthodes.

ordre n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ (s)	4	5	6	7	8	9	10	13	15	17
ordre n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
λ (s)	19	21	23	24	25	26	27	28	29	30

*Tableau 4.2:
Valeur minimale de la troncature λ pour l'obtention
d'un moment temporel d'ordre n donné*

Ce tableau montre donc qu'il faut regarder l'évolution de la fonction gr du modèle sur un temps d'observation minimum de 30 secondes pour obtenir les vingt premiers moments temporels. Le tableau ci-dessous montre les valeurs obtenues par l'utilisation des deux méthodes pour un échantillonnage de 10^{-2} s avec une troncature $\lambda=30$ s.

n	Théorique		1ère méthode		2ème méthode	
	An	Rn	An	Rn	An	Rn
0	0.80	0.84	0.80	0.8413	0.80	0.8413
1	0.6720	0.6638	0.6730	0.6641	0.6730	0.6621
2	0.4461	0.6424	0.4469	0.6424	0.4456	0.6431
3	0.2865	0.6402	0.2871	0.64	0.2865	0.6401
4	0.1834	0.64	0.1838	0.64	0.1834	0.64
5	0.1741	0.64	0.1176	0.64	0.1174	0.64
6	$7.5143 \cdot 10^{-2}$	0.64	$7.5296 \cdot 10^{-2}$	0.64	$7.5143 \cdot 10^{-2}$	0.64
7	$4.8091 \cdot 10^{-2}$	0.64	$4.8149 \cdot 10^{-2}$	0.64	$4.8091 \cdot 10^{-2}$	0.64
8	$3.0779 \cdot 10^{-2}$	0.64	$3.0841 \cdot 10^{-2}$	0.64	$3.0778 \cdot 10^{-2}$	0.64
9	$1.9698 \cdot 10^{-2}$	0.64	$1.9738 \cdot 10^{-2}$	0.64	$1.9698 \cdot 10^{-2}$	0.64
10	$1.2607 \cdot 10^{-2}$	0.64	$1.2633 \cdot 10^{-2}$	0.64	$1.2607 \cdot 10^{-2}$	0.64
11	$8.0684 \cdot 10^{-3}$	0.64	$8.0848 \cdot 10^{-3}$	0.64	$8.0684 \cdot 10^{-3}$	0.64
12	$5.1638 \cdot 10^{-3}$	0.64	$5.1743 \cdot 10^{-3}$	0.64	$5.1638 \cdot 10^{-3}$	0.64
13	$3.3048 \cdot 10^{-3}$	0.64	$3.3115 \cdot 10^{-3}$	0.64	$3.3048 \cdot 10^{-3}$	0.64
14	$2.1151 \cdot 10^{-3}$	0.64	$2.1194 \cdot 10^{-3}$	0.64	$2.1151 \cdot 10^{-3}$	0.64
15	$1.3537 \cdot 10^{-3}$	0.64	$1.3564 \cdot 10^{-3}$	0.64	$1.3536 \cdot 10^{-3}$	0.64
16	$8.6634 \cdot 10^{-4}$	0.64	$8.6808 \cdot 10^{-4}$	0.64	$8.6632 \cdot 10^{-4}$	0.64
17	$5.5446 \cdot 10^{-4}$	0.64	$5.5556 \cdot 10^{-4}$	0.64	$5.5443 \cdot 10^{-4}$	0.64
18	$3.5485 \cdot 10^{-4}$	0.64	$3.5554 \cdot 10^{-4}$	0.6399	$3.5481 \cdot 10^{-4}$	0.6399
19	$2.2710 \cdot 10^{-4}$	0.64	$2.2751 \cdot 10^{-4}$	0.6398	$2.2705 \cdot 10^{-4}$	0.6398

*Tableau 4.3:
Moments temporels issus des deux méthodes*

Les résultats obtenus montrent que les deux méthodes donnent des résultats identiques sur la détermination des moments temporels du modèle du processus. De plus, ces valeurs sont identiques aux valeurs théoriques. Cela prouve que la troncature sur la borne infinie est déterminante sur le résultat obtenu.

Néanmoins, à partir de l'ordre 18, la détermination du moment temporel devient erronée par le fait que le rapport R_n n'est plus constant. Ceci est dû en particulier à la perte de précision des chiffres significatifs du calculateur pour des ordres élevés.

Quant à la période d'échantillonnage à adopter, les résultats sont meilleurs avec un pas de 10^{-2} s par rapport à un pas de 10^{-1} s.

La figure 4.5 ci-dessous montre l'évolution des moments temporels théoriques du modèle du processus.

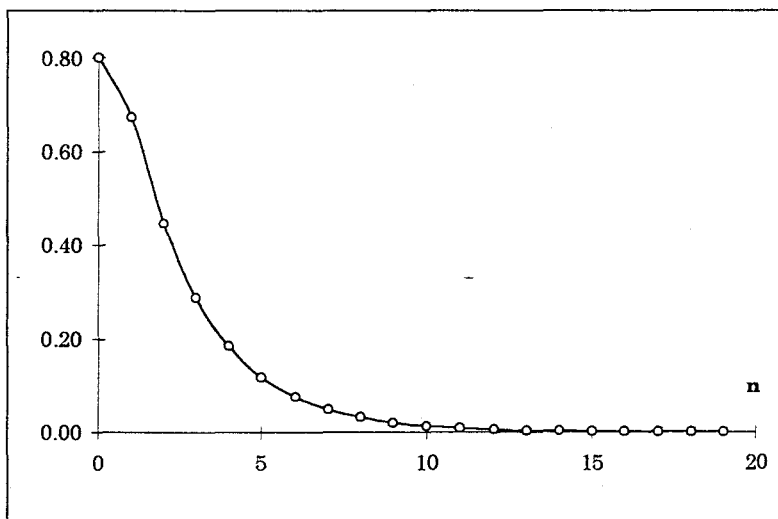


Figure 4.5:
Variation des moments temporels théoriques
du modèle du processus en fonction de l'ordre n

4.2.4 Détermination des moments temporels du système réel

Dans cette partie, les deux méthodes permettant de déterminer les moments temporels sont appliquées directement sur la réponse indicielle réelle du processus.

En référence au tableau 4.2, il faudrait faire une acquisition de la réponse indicielle du processus pendant un temps minimum de 30 secondes pour vouloir calculer les vingt premiers moments temporels. Or, pour des raisons de dérive statique, le processus ne peut être sollicité que pendant 10 secondes. De ce fait, il n'est possible de calculer que les moments temporels du système jusqu'à l'ordre $n=6$. Les moments temporels d'ordre supérieur ont alors aucune valeur significative étant donnée la troncature qui est faite.

Pour les deux méthodes, deux acquisitions de la réponse indicielle du système sont faites pendant un temps d'observation de 10 secondes avec une période d'échantillonnage de 0.05, 0.1 et 0.2 seconde.

• Résultats avec la première méthode:

n	Moments temporels Modèle de Streje		Moments temporels du système réel (première méthode) (deux acquisitions par échantillonnage)					
	An	Rn	An ($\Delta t=0.05s$)		An ($\Delta t=0.1s$)		An ($\Delta t=0.2s$)	
0	0.80	0.84	1.20	1.17	1.02	1.09	0.94	0.95
1	0.6720	0.6638	2.70	2.54	1.89	2.23	1.36	1.40
2	0.4461	0.6424	7.20	6.59	4.87	6.10	2.67	2.81
3	0.2865	0.6402	17.10	15.45	12.32	15.66	5.65	6.02
4	0.1834	0.64	33.60	30.10	26.37	33.64	10.50	11.34
5	0.1741	0.64	55.40	49.30	47.57	60.80	16.60	18.20
6	0.0751	0.64	78.60	62.50	73.77	94.40	22.73	25.10

Tableau 4.4:

Moments temporels du système calculés par la première méthode

Les valeurs obtenues par cette première méthode ne peuvent être exploitées étant donnée la divergence des valeurs à l'infini et l'écart existant entre deux acquisitions différentes et quelle que soit la période d'échantillonnage choisie. Ceci s'explique par le fait que le bruit de la mesure ajoute à la valeur du moment

temporel théorique une valeur qui diverge vers l'infinie plus l'ordre n est grand. Comme cette méthode est basée sur la convergence des pentes des segments de droite à l'infini, cette condition n'est effectivement plus vérifiée à cause du bruit de mesure. C'est pourquoi, il n'est pas possible d'appliquer cette méthode sur une réponse indicielle réelle.

• Résultats avec la seconde méthode:

n	Moments temporels Modèle de Strejc		Moments temporels pour trois acquisitions par la seconde méthode			Moyenne des trois acquisitions et calcul du rapport		Ecart relatif An M. Strejc An calculés
	An	Rn	An ($\Delta t=0.1s$)			An	Rn	Ecart
0	0.80	0.84	0.8001	0.8050	0.8040	0.8030	0.8433	0.375 %
1	0.6720	0.6638	0.6741	0.6797	0.6778	0.6772	0.6832	0.77 %
2	0.4461	0.6424	0.4481	0.4770	0.4631	0.4627	0.7350	3.7 %
3	0.2865	0.6402	0.2979	0.3856	0.3370	0.3401	0.9691	19 %
4	0.1834	0.64	0.2306	0.4248	0.3336	0.3296	1.3319	80 %
5	0.1741	0.64	0.2517	0.5953	0.4702	0.4390	1.5059	152 %
6	0.0751	0.64	0.3774	0.8682	0.7378	0.6611	X	780 %

Tableau 4.5:
Moments temporels du système calculés par la seconde méthode

Concernant cette méthode de détermination, les trois premiers moments temporels sont calculés avec une erreur inférieure à 4%. Le moment temporel d'ordre 0 est calculé par la moyenne des dix dernières valeurs de la réponse indicielle. Les valeurs obtenues sont également divergentes comme pour la première méthode mais plus proche des valeurs théoriques. Les moments temporels d'ordre 1 et 2 sont déterminés de façon satisfaisante. La seconde méthode étant basée sur le calcul d'une intégrale, le bruit de mesure est partiellement lissé. C'est pourquoi, l'écart existant avec les résultats de la première méthode est important. Quant à l'influence de la période d'échantillonnage (0.1 ou 0.01 s), les différences sur les valeurs obtenues sont négligeables et de ce fait n'apparaissent pas dans le tableau 4.5 ci-dessus.

4.2.5 Conclusion

Lorsque le système est défini par une fonction de transfert, les deux méthodes élaborées permettant de déterminer les moments temporels donnent de bons résultats. Les vingt premiers moments sont déterminés facilement avec une période d'échantillonnage de 10^{-2} s sur un intervalle de temps de 30s.

En revanche, la fiabilité de ces deux méthodes appliquées directement sur la réponse indicelle du système ne peut être validée. En effet, elles sont très sensibles au bruit. Les valeurs obtenues sur les moments temporels sont divergentes. Cependant, la seconde méthode, basée sur le calcul d'une intégrale donne, avec un faible pourcentage d'erreur, les trois premiers moments temporels du système.

4.3 Modélisation du processus et identification des paramètres

Deux modélisations du système sont proposées dans ce paragraphe. La première consiste à le modéliser sous la forme d'une Transmittance à Dérivée Implicite (TDI) et la seconde le modélise sous la forme d'une même transmittance en y ajoutant un retard pur T (TDIR). Les paramètres des modèles caractérisant le processus sont ici déterminés par la méthodes des moments temporels [39]. Les deux modélisations du processus qui sont faites sont de la forme:

- Première modélisation:
$$H(p) = \frac{k}{(1 + \tau.p)^\alpha}$$
- Seconde modélisation:
$$H_R(p) = \frac{k.e^{-T.p}}{(1 + \tau.p)^\alpha}$$

où k , α , τ et T sont des réels positifs.

4.3.1 Modélisation par un modèle de type TDI

La première modélisation du système qui est faite est de type TDI:

$$H(p) = \frac{k}{(1 + \tau.p)^\alpha}$$

où:

- k : le gain statique du système,
- τ : la constante de temps du système ($\tau > 0$),
- α : l'ordre du système ($\alpha > 0$).

Les moments temporels théoriques de l'original h de H , sont donnés par la relation (2.22) du deuxième chapitre:

$$A_n^h = k.\tau^n \cdot \frac{\Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(\alpha).\Gamma(n + 1)}$$

L'étude du rapport de deux moments successifs a pour expression:

$$R_n^h = \frac{A_{n+1}^h}{A_n^h} = \tau \cdot \frac{n + \alpha}{n + 1}$$

Ce rapport est tracé en figure 4.6 en fonction de n et pour deux valeurs de α :

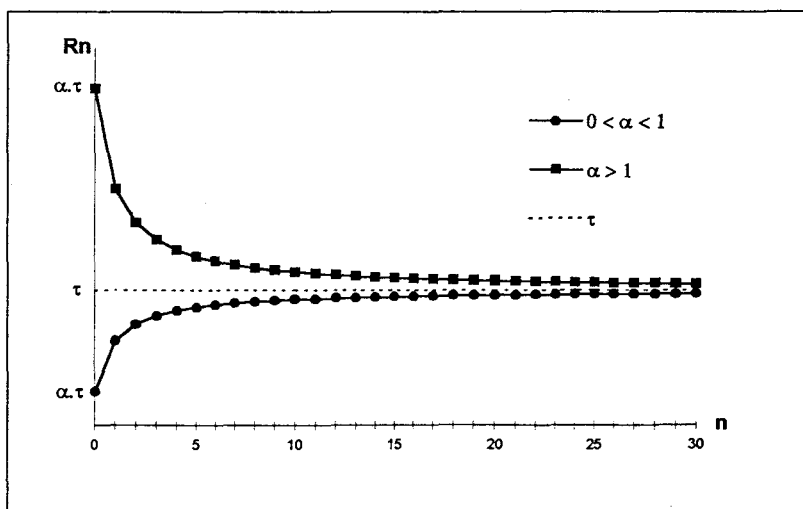


Figure 4.6:
Evolution du rapport de deux moments successifs d'une TDI

Le calcul des rapports R_n permet l'identification des paramètres du modèle. Ceux-ci s'obtiennent par les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
 k &= A_0^h \\
 \tau &= \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^h \\
 \text{ou } \tau &= (n+2).R_{n+1}^h - (n+1).R_n^h \quad \forall n \\
 \alpha &= \frac{(n+1)^2.R_n^h - n.(n+2).R_{n+1}^h}{(n+2).R_{n+1}^h - (n+1).R_n^h} \quad \forall n
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Ces relations permettent donc d'identifier les paramètres du système connaissant les moments temporels. Le rapport de deux moments successifs à l'infini donne la constante de temps et l'utilisation de trois moments successifs donnent l'ordre et la constante de temps. Expérimentalement, la constante de temps ne peut être obtenue à l'infini car le rapport de deux moments temporels successifs divergent à partir de l'ordre $n=3$ (système réel) et à partir de l'ordre $n=20$ (modélisation du système).

4.3.2 Modélisation par un modèle de type TDIR

La seconde modélisation du système qui est faite est de type TDIR:

$$Hr(p) = \frac{k.e^{-T.p}}{(1 + \tau.p)^\alpha}$$

avec

- k : le gain du système,
- τ : la constante de temps du système ($\tau > 0$),
- α : l'ordre du système ($\alpha > 0$),
- T : le retard pur du système ($T > 0$).

L'utilisation de la transformée de Laplace inverse à Hr conduit à la réponse impulsionnelle hr du système:

$$hr(t) = \frac{k}{\Gamma(\alpha) \cdot \tau^\alpha} \cdot (t - T)^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{t-T}{\tau}} \cdot U(t - T)$$

où

$$U(t - T) = 0 \text{ si } t < T$$

$$U(t - T) = 1 \text{ si } t > T$$

La fonction hr est une fonction continue sur l'intervalle des réels positifs et d'ordre exponentiel. Le moment temporel de hr s'écrit alors:

$$A_n^{hr} = \int_T^{+\infty} \frac{x^n \cdot k \cdot (x - T)^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x-T}{\tau}} \cdot U(x - T) \cdot dx}{\Gamma(\alpha) \cdot \tau^\alpha \cdot n!}$$

En effectuant le changement de variable $t = x - T$, cette expression devient:

$$A_n^{hr} = \frac{k}{\Gamma(\alpha) \cdot \tau^\alpha \cdot n!} \int_0^{+\infty} (t + T)^n \cdot t^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt$$

Cette expression fait apparaître un produit remarquable où son développement en série de Newton est:

$$(t + T)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot t^{n-i} \cdot T^i \quad \text{avec} \quad C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

L'expression du moment temporel d'ordre n de hr s'écrit alors:

$$A_n^{hr} = \frac{k}{\Gamma(\alpha) \cdot \tau^\alpha \cdot n!} \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^n C_n^i \cdot t^{n-i} \cdot T^i \right) \cdot t^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot dt$$

Cette expression fait apparaître l'intégrale d'une fonction définie continue et majorée sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Le moment temporel d'ordre n de hr est donc:

$$A_n^{hr} = \frac{k \cdot \tau^n}{\Gamma(\alpha) \cdot n!} \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot \left(\frac{T}{\tau}\right)^i \cdot \Gamma(n + \alpha - i)$$

(4.4)

4.3.3 Relation entre les moments temporels des deux modèles

Le développement à l'ordre n des moments temporels de hr dans l'expression (4.4) permet de faire apparaître une relation de récurrence liant ses moments temporels à ceux de h . Elle s'exprime par:

$$A_n^{hr} = \sum_{i=0}^n \frac{T^i}{i!} A_{n-i}^h$$

(4.5)

avec:

$$A_{n-i}^h = k \cdot \tau^{n-i} \cdot \frac{\Gamma(n-i+\alpha)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(n-i+1)}$$

Le rapport de deux moments successifs de hr est donné par la relation:

$$R_n^{hr} = \frac{A_{n+1}^{hr}}{A_n^{hr}} = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} \frac{T^i}{i!} A_{n+1-i}^h}{\sum_{i=0}^n \frac{T^i}{i!} A_{n-i}^h}$$

et celui de h est:

$$R_n^h = \frac{A_{n+1}^h}{A_n^h} = k \cdot \frac{n+\alpha}{n+1}$$

Leurs évolutions sont donnés par les deux figures 4.7 et 4.8 suivantes:

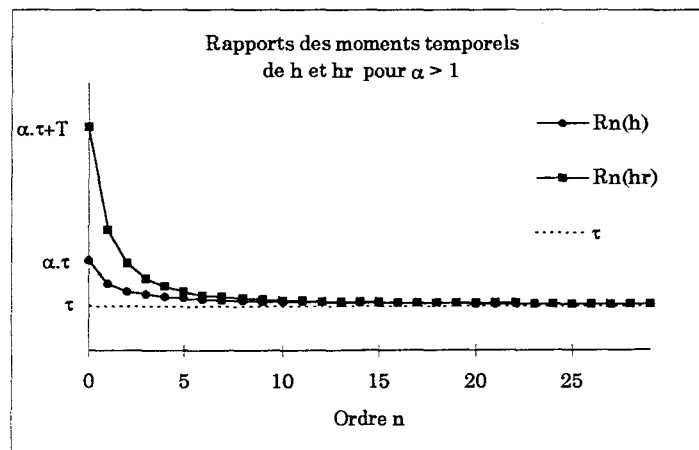


Figure 4.7:

Evolution du rapport des moments temporels de h et hr pour $\alpha > 1$

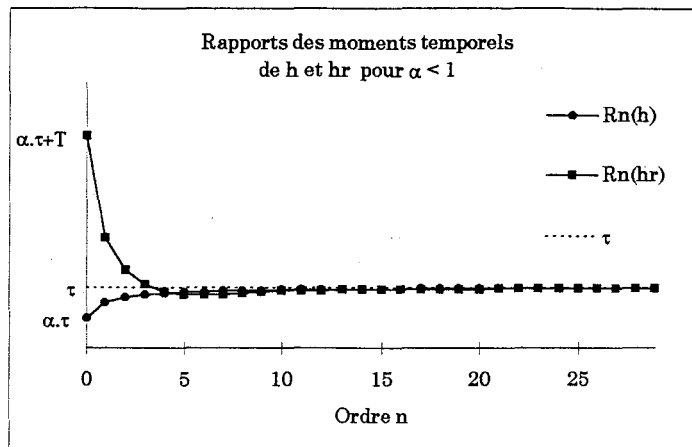


Figure 4.8:

Evolution du rapport des moments temporels de h et hr pour $\alpha < 1$

Les évolutions de ces deux rapports en fonction de n montre qu'ils convergent tous les deux vers la même valeur correspondant à la constante de temps τ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^{hr} = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^h = \tau$$

(4.6)

De plus la différence des rapports d'ordre zéro des moments temporels est égale au retard pur T:

$$R_0^{hr} - R_0^h = T$$

(4.7)

4.3.4 Passage du modèle TDIR au modèle TDI

Une fonction de transfert de type transmittance à dérivée implicite avec retard pur peut être assimilé à une transmittance de même type sans retard pur:

$$F(p) = \frac{k \cdot e^{-T \cdot p}}{(1 + \tau \cdot p)^\alpha} \quad \Rightarrow \quad F'(p) = \frac{k'}{(1 + \tau' \cdot p)^{\alpha'}}$$

avec F et F' les transformées de Laplace respectives de f et f'.

Ces fonctions temporels sont d'ordre exponentiel et continues sur l'intervalle des réels positifs. Sous forme de développement en série entière, F et F' s'expriment par:

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_n^f$$

$$F'(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot p^n \cdot A_n^{f'}$$

où A_n^f et $A_n^{f'}$ sont les moments temporels de f et f'.

Leurs expressions sont:

$$A_n^{f'} = k' \cdot (\tau')^n \cdot \frac{\Gamma(n + \alpha')}{\Gamma(\alpha') \cdot n!}$$

$$A_n^f = \sum_{i=0}^n \frac{T^i}{i!} \cdot k \cdot \tau^{n-i} \cdot \frac{\Gamma(n - i + \alpha)}{\Gamma(\alpha) \cdot (n - i)!}$$

L'identification de F à F' implique l'égalité de leurs moments temporels:

$$A_n^f = A_n^{f'}$$

Cette égalité des moments temporels permet donc d'obtenir des relations liant les paramètres k' , α' et τ' en fonction de k , α , τ et T.

L'identification, dont la démonstration figure en annexe D, donne:

$$\begin{aligned} k' &= k \\ \alpha' &= \frac{(\alpha \cdot \tau + T)^2}{\alpha \cdot \tau^2} \\ \tau' &= \frac{\alpha \cdot \tau^2}{(\alpha \cdot \tau + T)} \end{aligned}$$

(4.8)

4.3.5 Passage du modèle TDI au modèle TDIR

Une fonction de transfert de type transmittance à dérivée implicite sans retard pur peut être assimilée à une transmittance de même type avec retard pur:

$$F'(p) = \frac{k'}{(1 + \tau' \cdot p)^{\alpha'}} \quad \Rightarrow \quad F(p) = \frac{k \cdot e^{-T \cdot p}}{(1 + \tau \cdot p)^{\alpha}}$$

Le passage d'un modèle TDI à un modèle TDIR peut se justifier de plusieurs façons:

- diminution de l'ordre du système,
- réduction d'un système d'ordre réel à un ordre entier,
- adjonction d'un retard.

Il faut cependant faire un choix quand au résultat à obtenir. En effet, le passage d'un modèle TDI à un modèle TDIR nécessite l'évaluation de quatre paramètres à partir de trois. Il est donc nécessaire de fixer soit le retard, soit l'ordre du système. Il peut être envisagé également de se fixer la constante de temps.

1er choix: l'ordre α est fixé.

Il faut imposer un ordre α tel que $0 < \alpha < \alpha'$ afin que la nouvelle constante de temps obtenue soit supérieure à la précédente car une diminution de l'ordre implique obligatoirement une augmentation de la constante de temps.

• $k = k'$,

• le calcul de τ est d'abord effectué: $\tau = \tau' \cdot \sqrt{\frac{\alpha'}{\alpha}}$

• puis celui de T : $T = \alpha' \cdot \tau' - \alpha \cdot \tau$

S'il existe déjà un retard pur, celui s'ajoute à celui qui vient d'être calculé.

2ème choix: Le retard pur T est fixé.

La condition nécessaire est $T < \alpha' \cdot \tau'$ pour obtenir une constante de temps positive.

- $k = k'$

- le calcul de τ est d'abord effectué: $\tau = \frac{\alpha' \cdot \tau'^2}{\alpha' \cdot \tau' - T}$

- puis celui de α : $\alpha = \frac{(\alpha' \cdot \tau' - T)^2}{\alpha' \cdot \tau'^2}$

3ème choix: La constante de temps τ est fixée.

La condition nécessaire est que $\tau > \tau'$ afin que le retard obtenu soit positif.

- $k = k'$

- le calcul de α est d'abord effectué: $\alpha = \frac{\alpha' \tau'^2}{\tau}$

- puis celui de T : $T = \alpha' \cdot \tau' - \alpha \cdot \tau$

4.3.6 Application numérique

Les trois premiers moments temporels du système sont déterminés de façon correcte par l'utilisation de la seconde méthode (tableau 4.5). Ces trois moments temporels ainsi obtenus permettent de modéliser le système sous forme TDI et d'en identifier ses paramètres. Cette modélisation de type TDI permet à son tour de modéliser de nouveau le système sous forme TDIR en imposant soit l'ordre, soit le retard ou alors la constante de temps.

Ce paragraphe traite donc de la modélisation du processus par une TDI et une TDIR. L'identification des paramètres de la modélisation TDI est réalisé par

les relations (4.3). Le passage à la modélisation TDIR se fait en imposant le retard pur puis l'ordre du modèle.

• Moments temporels issus de la seconde méthode:

$$A_0 = 0.803 \quad A_1 = 0.6772 \quad A_2 = 0.4627$$

• Rapports de ces moments temporels:

$$R_0 = \frac{A_1}{A_0} = 0.8433 \quad R_1 = \frac{A_2}{A_1} = 0.6832$$

4.3.6.1 Modélisation du système par une TDI

Le système est modélisé ici par une fonction de transfert G_1 de type TDI. L'identification des paramètres est réalisée par l'intermédiaire des relations (4.3) et pour les trois premiers moments temporels issus de la seconde méthode qui sont rappelés ci-dessus.

L'identification donne:

$$k = A_0 \approx 0.8$$

$$\tau = 2.R_1 - R_0 \approx 0.523$$

$$\alpha = \frac{R_0}{2.R_1 - R_0} \approx 1.62$$

Le système, modélisé par la fonction de transfert G_1 de type TDI s'écrit:

$$G_1(p) = \frac{0,8}{(1 + 0,52.p)^{1,62}}$$

(4.9)

Cette première modélisation obtenue permet de passer à une modélisation de type TDIR en se fixant à priori le retard ou l'ordre du modèle.

4.3.6.2 Modélisation du système par une TDIR

Le système est modélisé ici par deux fonctions de transfert G_2 et G_3 qui sont de type TDI. A partir de G_1 , la fonction G_2 est construite en fixant à priori le retard pur et la fonction G_3 en fixant à priori l'ordre. Les paramètres sont identifiés en utilisant les relations établies au paragraphe 4.3.5.

- Modélisation G_1 (paragraphe 4.3.6.1)

$$k' = 0.8 \quad \tau' = 0.523 \quad \alpha' = 1.62$$

- Modélisation G_2 (le retard T est fixé à 0.2s):

$$k = 0.8 \quad \alpha = 0.95 \quad \tau = 0.68$$

- Modélisation G_3 (l'ordre α est fixé à 1):

$$k = 0.8 \quad \tau = 0.66 \quad T = 0.187$$

Les deux modélisations TDIR du système sont:

$$G_2(p) = \frac{0,8}{(1 + 0,68.p)^{0,95}} \cdot e^{-0,2.p}$$

(4.10)

$$G_3(p) = \frac{0,8}{1 + 0,66.p} \cdot e^{-0,187.p}$$

(4.11)

Les figures (4.9) à (4.11) représentent la réponse indicielle du processus en comparaison avec celle obtenue par chacune des modélisations qui est faite (Modèle de Strejc, modèle TDI et modèles TDIR).

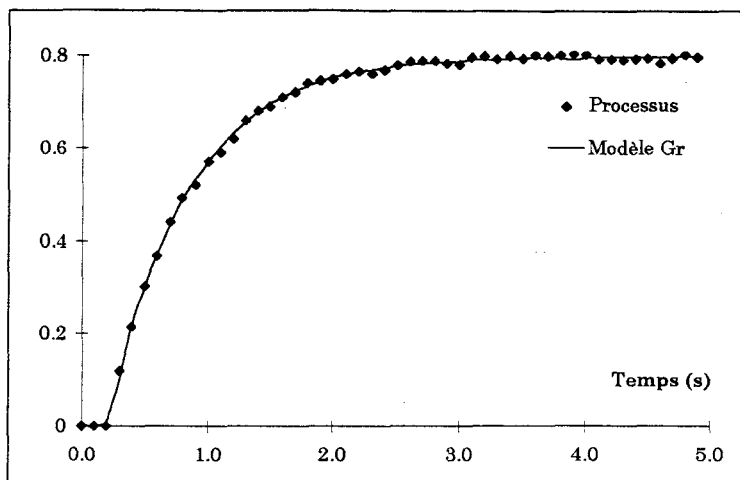


Figure 4.9:
Réponses indicielles du processus et du modèle Gr (Strejc)

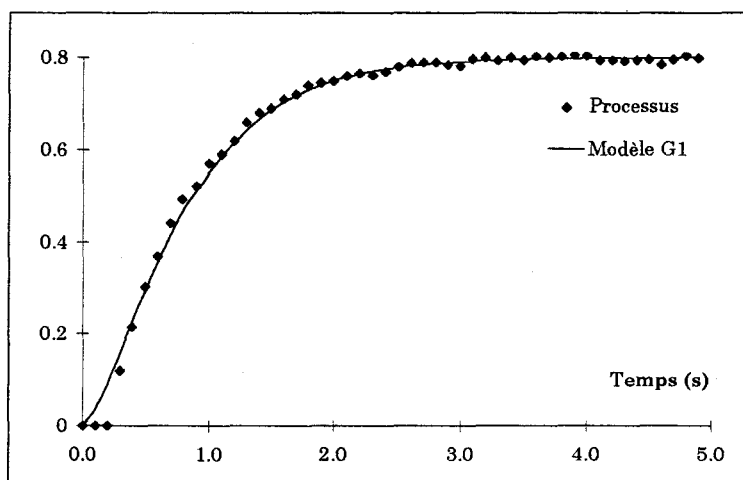


Figure 4.10:
Réponses indicielles du processus et du modèle G_1 (TDI)

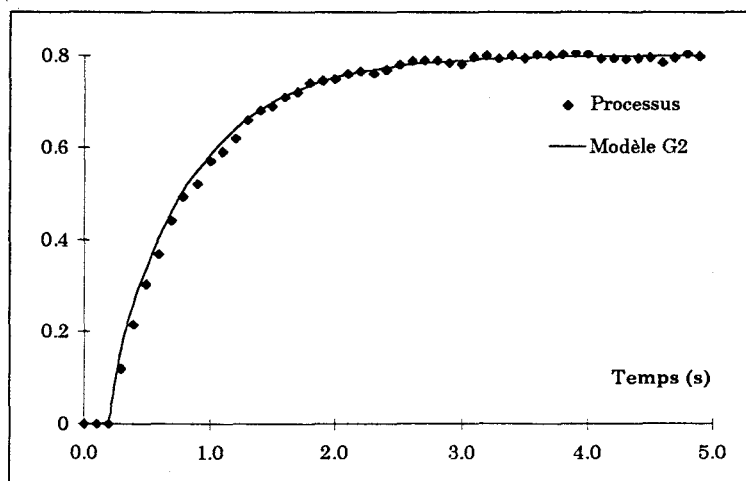


Figure 4.11:
Réponses indicielles du processus et du modèle G_2 (TDIR)

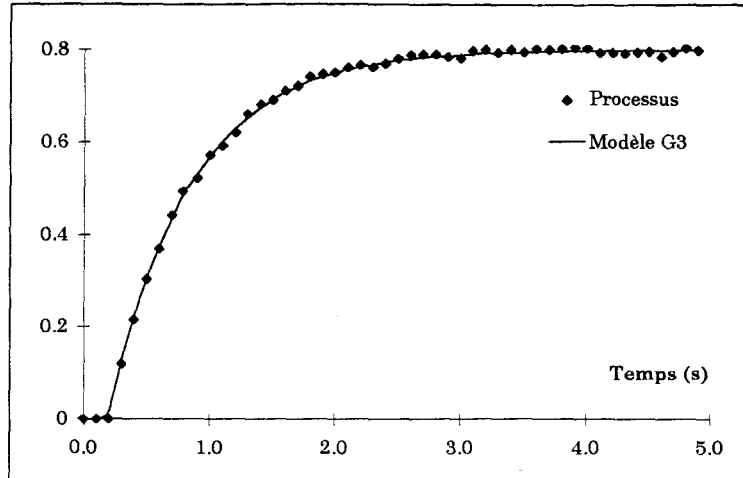


Figure 4.12:
Réponses indicielles du processus et du modèle G_3 (TDIR)

Le modèle de Strejc et les modèles de type TDIR sont une bonne approximation du processus. En effet, les réponses indicielles de ces trois modèles coïncident, avec une erreur très faible, avec la réponse indicielle du processus. Quant à la modélisation TDI qui est faite, une erreur importante apparaît en début de phase dynamique. Ceci est dû au fait que le modèle de type TDI ne possède pas de retard par rapport au processus.

4.4 Conclusion

Ce chapitre a fait l'objet de l'étude du processus thermique par la méthode des moments temporels. La réponse indicielle du processus permet dans un premier temps de modéliser ce système par un modèle de Strejc afin d'obtenir un modèle de référence.

Les deux méthodes de détermination des moments temporels élaborées au premier chapitre sont appliquées d'une part sur la réponse indicielle analytique issue du modèle de Strejc et d'autre part sur la réponse indicielle réelle issue directement du processus.

Il apparaît que ces méthodes sont utilisables sur la réponse indicielle analytique du modèle de Strejc. En revanche, ces méthodes ne sont pas transportables sur la réponse indicielle réelle du processus. Ceci est dû en particulier au bruit de la mesure qui fausse le calcul des moments temporels. Néanmoins, la seconde méthode donne les trois premiers moments temporels avec une bonne approximation. Ces trois premiers moments temporels suffisent à modéliser de nouveau le système par deux modèles de type TDI et TDIR et d'identifier les paramètres. Des relations sont établies permettant de passer d'une modélisation à une autre.

Le chapitre suivant utilise ces différentes modélisations du processus dans le cadre d'une commande de type PID classique d'ordre entier. Cette commande, dont l'étude figure au chapitre 2, est élaborée à partir des moments temporels de chacun de ces modèles. Comme le troisième chapitre a montré l'existence de modèles ne possédant pas de moments temporels, la commande de type PID généralisé d'ordre non entier est appliquée également au chapitre suivant.

CHAPITRE 5

La commande & son application à un système

CHAPITRE 5

La commande & son application à un système

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'application des commandes entières et non entières élaborées aux précédents chapitres. Le système à commander est le processus thermique. Tout d'abord, la commande entière de type PID étudiée dans le deuxième chapitre est abordée par la méthode des moments temporels. Comme le système est modélisé, celui-ci peut être caractérisé par son développement en série entière. Les moments temporels sont alors utilisés afin d'identifier les paramètres du correcteur [11]-[13]-[19]. Ensuite, l'étude est consacrée à la commande avec un correcteur de type PID d'ordre non entier dont la théorie figure au troisième chapitre. Cette étude, nécessitant des simulations temporelles, apporte des résultats sur la commande non entière dans le domaine de Mellin [39]-[41]. Puis une vérification, dans le domaine fréquentiel des résultats obtenus, est réalisée. Une étude en boucle ouverte du système corrigé (marge de gain, marge de phase, stabilité) permet de définir les caractéristiques en boucle fermée. Le domaine de validité fréquentiel du système corrigé est déterminé, pour chacun des sept modèles, autour de la fréquence au gain unité en boucle ouverte [8]. Une étude de la sensibilité de la commande en boucle fermée est réalisée de façon à déterminer les valeurs du filtre à associer à l'action dérivée du correcteur. Celle-ci permet de majorer la sensibilité de l'entrée du

système sans affecter les performances dynamiques. Enfin, dans le domaine temporel, une comparaison de la commande du système et du modèle est réalisée pour une entrée de type échelon. Cette vérification à posteriori valide les résultats obtenus lors de l'étude de la commande non entière du système en boucle ouverte.

5.2 Commande entière

L'étude de la commande entière est définie, en boucle ouverte, de la façon suivante: le processus est caractérisé par ses modèles (Strejc, TDI et TDIR) qui sont issus de la réponse indicielle de ce système. Le modèle imposé est de type TDI/P et le correcteur est de type PID. Le but est de déterminer les paramètres du correcteur de telle sorte que les moments temporels du système corrigé soient équivalents à ceux du modèle imposé. Le principe de cette commande est illustrée par la figure 5.1 suivante:

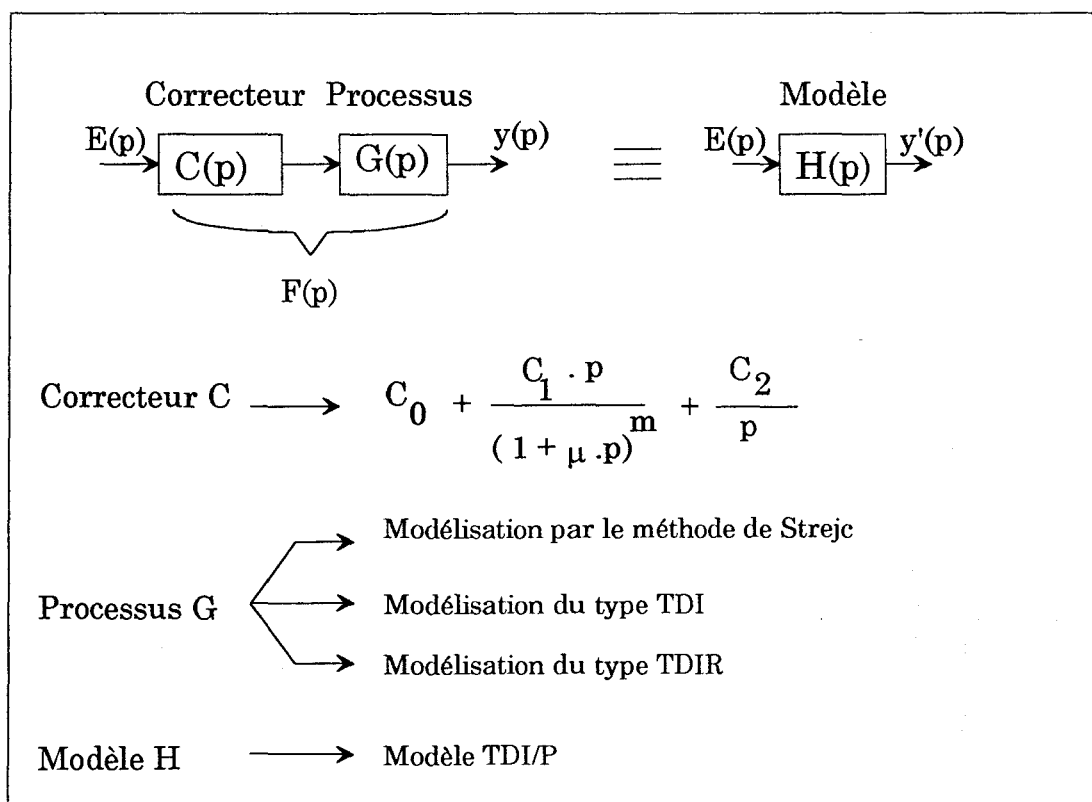


Figure 5.1:
Principe de la commande entière par correcteur PID

Le chapitre précédent a permis de modéliser le processus à partir de sa réponse indicielle. Les modèles obtenus sont de type Strejc, TDI et TDIR. Chacun de ces modèles fournit alors des moments temporels. Le modèle imposé pour la commande est parfaitement défini et les moments temporels de celui-ci sont également connus. Il s'agit ici d'un modèle de type TDI/P.

L'application des relations du deuxième chapitre permettent alors d'identifier les paramètres du correcteur. Comme le modèle imposé possède une intégration et qu'il y a convergence des moments temporels du système, les relations (2.16) à (2.18) sont nécessaires afin d'identifier les paramètres du correcteur.

Le modèle imposé H est de type TDI/P dont les paramètres valent:

- Gain: $\lambda = 0.8$
- Ordre: $\beta = 1.4$
- Constante de temps: $\delta = 0.6$

La commande a donc pour but d'identifier les trois paramètres du correcteur de telle sorte que le système corrigé F soit équivalent à H :

$$H(p) = \frac{0.8}{p \cdot (1 + 0.6p)^{1.4}}$$

Le tableau 5.1 ci-après donne les valeurs des moments temporels des quatre modèles représentant le système (G_r , G_1 , G_2 et G_3) ainsi que les moments temporels du modèle H imposé.

Moments temporels					
n	Gr	G ₁	G ₂	G ₃	H
0	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
1	0.672	0.666	0.677	0.678	0.672
2	0.446	0.450	0.462	0.461	0.484
3	0.287	0.281	0.309	0.305	0.329
4	0.183	0.168	0.207	0.202	0.217
5	0.117	0.098	0.139	0.133	0.141
6	7.514.10-2	5.593.10-2	9.396.10-2	8.778.10-2	9.005.10-2
7	4.809.10-2	3.157.10-2	6.341.10-2	5.793.10-2	5.712.10-2
8	3.077.10-2	1.765.10-2	4.283.10-2	3.823.10-2	3.598.10-2
9	1.969.10-2	9.790.10-3	2.896.10-2	2.523.10-2	2.255.10-2
10	1.260.10-2	5.396.10-3	1.959.10-2	1.665.10-2	1.407.10-2
11	8.068.10-3	2.959.10-3	1.326.10-2	1.099.10-2	8.750.10-3
12	5.163.10-3	1.615.10-3	8.978.10-3	7.255.10-3	5.425.10-3
13	3.304.10-3	8.790.10-4	6.081.10-3	4.788.10-3	3.355.10-3
14	2.115.10-3	4.766.10-4	4.120.10-3	3.160.10-3	2.070.10-3
15	1.353.10-3	2.577.10-4	2.792.10-3	2.085.10-3	1.275.10-3
16	8.663.10-4	1.390.10-4	1.892.10-3	1.376.10-3	7.844.10-4
17	5.544.10-4	7.487.10-5	1.283.10-3	9.086.10-4	4.817.10-4
18	3.548.10-4	4.023.10-5	8.700.10-4	5.996.10-4	2.954.10-4
19	2.271.10-4	2.158.10-5	5.900.10-4	3.957.10-4	1.810.10-4

Tableau 5.1:
Moments temporels des modèles du système et du modèle imposé

Il faut déterminer trois coefficients du correcteur à partir des vingt premiers moments temporels de chacun des modèles du processus.

Le coefficient C_2 est déterminé par la relation (2.16), C_0 par la relation (2.18) et C_1 par la relation (2.17). Les résultats, pour chaque modèle du processus, sont rassemblés dans le tableau 5.2 suivant:

Paramètres de C	Modèles du processus			
	Gr	G ₁	G ₂	G ₃
C_0	0.1201	0.3696	-0.0639	0.0040
C_1	0.1477	0.3441	-0.0264	0.0322
C_2	1.00	1.00	1.00	1.00

Tableau 5.2:
Identification des paramètres du correcteur pour chaque modèle du processus

Chaque modèle du processus donne une commande particulière puisque les paramètres du correcteur sont différents d'un modèle à l'autre. La seule constante est la valeur du coefficient C_2 .

Le tableau 5.3 suivant donne les moments temporels du modèle H en comparaison à ceux du système corrigé F pour les quatre modèle du processus. De plus, pour chacun de ces modèles, l'erreur quadratique entre le moment temporel d'ordre n du modèle et celui du système corrigé est également donnée.

n	Moments temporels de H	Moments temporels de chaque système corrigé et erreur quadratique avec ceux de H							
		Gr		G1		G2		G3	
0	0.80	0.80	0.00%	0.80	0.00%	0.80	0.00%	0.80	0.00%
1	0.6720	0.5759	14.29%	0.3699	44.96%	0.7279	8.32%	0.6743	0.35%
2	0.4840	0.4835	0.06%	0.4792	0.96%	0.4842	0.06%	0.4842	0.08%
3	0.3290	0.3322	0.98%	0.3435	4.39%	0.3207	2.52%	0.3252	1.16%
4	0.2170	0.2149	1.03%	0.2189	0.82%	0.2148	1.07%	0.2151	0.93%
5	0.1410	0.1377	2.14%	0.1323	5.96%	0.1445	2.70%	0.1420	0.92%
6	0.0901	0.0881	2.13%	0.0776	13.88%	0.0974	8.16%	0.0937	4.08%
7	0.0571	0.0564	1.25%	0.0446	22.01%	0.0657	15.09%	0.0618	8.30%
8	0.0360	0.0361	0.32%	0.0252	29.90%	0.0444	23.42%	0.0408	13.45%
9	0.0226	0.0231	2.45%	0.0141	37.34%	0.0300	33.16%	0.0269	19.49%
10	0.0141	0.0148	5.08%	0.0078	44.21%	0.0203	44.36%	0.0178	26.38%
11	0.0088	0.0095	8.15%	0.0043	50.48%	0.0138	57.13%	0.0117	34.14%
12	0.0054	0.0061	11.64%	0.0024	56.15%	0.0093	71.60%	0.0078	42.80%
13	0.0034	0.0039	15.53%	0.0013	61.25%	0.0063	87.93%	0.0051	52.39%

Tableau 5.3:

Moments temporels jusqu'à l'ordre $n=13$ de chaque système corrigé en comparaison avec ceux du modèle H imposé.

Les valeurs des moments temporels corrigés montrent une fois de plus que les modélisations de type Strejc et TDIR donnent des résultats meilleurs que la modélisation de type TDI. En effet, l'écart quadratique entre le moment temporel d'ordre n du modèle et du système corrigé est minimal pour les modèles Gr, G_2 et G_3 . La figure 5.2 ci-après montre l'évolution des moments temporels pour chaque système corrigé en comparaison avec le modèle H. L'erreur minimale sur l'ensemble des dix premiers moments temporels est réalisée pour le système G_3 .

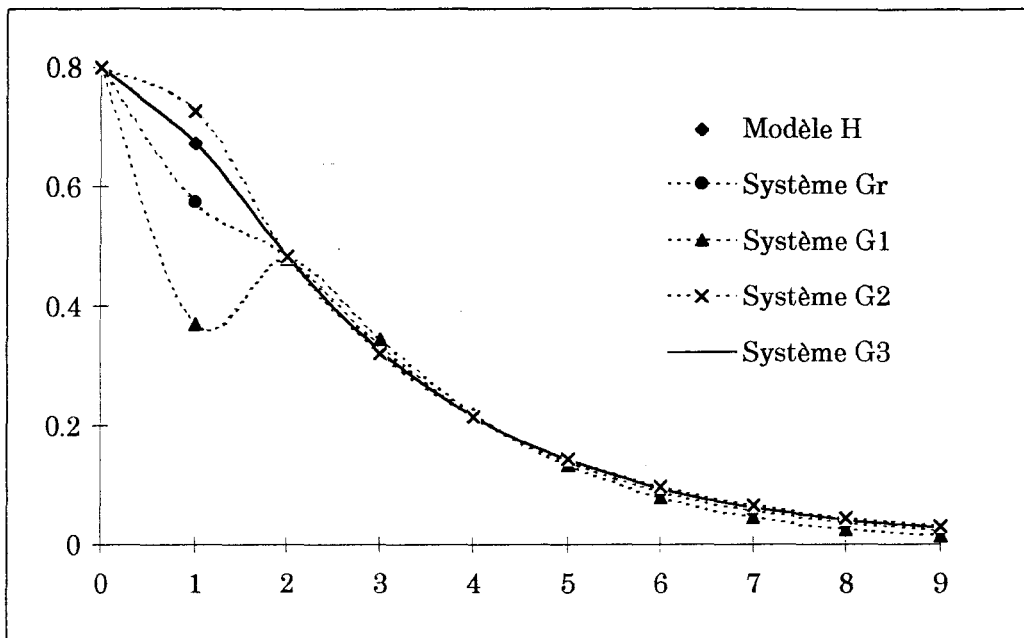


Figure 5.2:
Moments temporels de chaque système corrigé
en comparaison avec ceux du modèle H

Cette partie consacrée à la commande entière de type PID par la méthode des moments temporels confirme que les moments temporels d'ordre élevé ne peuvent être utilisés de part leur imprécision (l'erreur quadratique atteint des proportions de l'ordre de 50% à partir de l'ordre $n=12$). En fait, les meilleurs résultats se trouvent à proximité du moment temporel d'ordre 0 (gain statique). Il semblerait donc que seuls les tous premiers moments auraient une réelle signification. La commande non entière abordée ensuite confirme, par l'utilisation des Mellin, que l'information nécessaire se trouve autour du gain statique (Mellin d'ordre 1 qui équivaut au moment temporel d'ordre 0).

5.3 Commande non entière par la transformée de Mellin

La commande non entière par la transformée de Mellin est ici étudiée pour le système modélisé par une fonction de transfert de type TDI ou TDIR. Le correcteur est un correcteur de type proportionnel, intégral et dérivé d'ordre non entier. L'étude de la commande est faite pour sept modèles imposés.

• Système (TDI):

$$G(p) = \frac{k}{(1 + \tau.p)^\alpha}$$

• Système (TDIR):

$$G_R(p) = \frac{k.e^{-T.p}}{(1 + \tau.p)^\alpha}$$

• Modèles:

$$\text{TDI/P: } H_1(p) = \frac{\lambda}{p.(1 + \delta.p)^\beta}$$

$$\text{TDE/P: } H_2(p) = \frac{\lambda}{p.(1 + (\delta.p)^\beta)}$$

$$\text{2dO/P: } H_3(p) = \frac{\lambda.\Omega_n^2}{p.(p^2 + 2.\xi.\Omega_n.p + \Omega_n^2)}$$

$$\text{TDI: } H_4(p) = \frac{\lambda}{(1 + \delta.p)^\beta}$$

$$\text{TDE: } H_5(p) = \frac{\lambda}{1 + (\delta.p)^\beta}$$

$$\text{2dO: } H_6(p) = \frac{\lambda.\Omega_n^2}{p^2 + 2.\xi.\Omega_n.p + \Omega_n^2}$$

$$\text{TDIR/P: } H_7(p) = \frac{\lambda.e^{-T.p}}{p.(1 + \delta.p)^\beta}$$

• Correcteur:

$$C(p) = C_0 + \frac{C_1.p^\sigma}{(1 + \mu.p)^x} + \frac{C_2}{p^v}$$

L'étude de la commande est présentée de la façon suivante:

• 1er partie (§ 5.3.1):

Correcteur C système G modèles TDI/P, TDE/P, 2dO/P,

• 2ème partie (§ 5.3.2):

Correcteur C système G modèles TDI, TDE, 2dO,

• 3ème partie (§ 5.3.3):

Correcteur C système G_R modèle TDIR/P.

Remarque: Le correcteur réellement utilisé pour cette étude ne possède pas d'action filtrante sur le terme dérivée. Celle-ci fait l'objet de l'étude menée au chapitre 6. De ce fait, le correcteur se met sous la forme simplifiée suivante:

$$C(p) = C_0 + C_1 \cdot p^\sigma + \frac{C_2}{p^\nu} = \frac{C_0 \cdot p^\nu + C_1 \cdot p^{\nu+\sigma} + C_2}{p^\nu}$$

Des valeurs particulières sont données aux paramètres des fonctions de transfert afin de déterminer les valeurs des paramètres du correcteur. L'identification des paramètres du correcteur s'effectue en premier lieu avec la simulation temporelle des réponses impulsionnelles du système corrigé f et du modèle h [39]-[41]-[42]. Une méthode axe par axe associée à la méthode des moindres carrés permet d'identifier l'ordre de l'opérateur de dérivation ainsi que les coefficients du correcteur. Ensuite, la simulation est réalisée dans le domaine de Mellin en utilisant les paramètres identifiés pour déterminer l'intervalle de convergence des Mellin. Une comparaison des résultats avec un correcteur entier de type PID est donnée par l'utilisation d'un critère quadratique:

$$J_i = \sum_{k \in N} [h(k, \Delta t) - f(k, \Delta t)]^2$$

avec $i = 1$ (correcteur entier) & $i = 2$ (correcteur non entier)

5.3.1 Commande non entière avec un modèle possédant une intégration

Le principe de la commande non entière en imposant un modèle avec une intégration pure impose donc des conditions sur les coefficients et l'ordre d'intégration du correcteur comme le montre la figure 5.3:

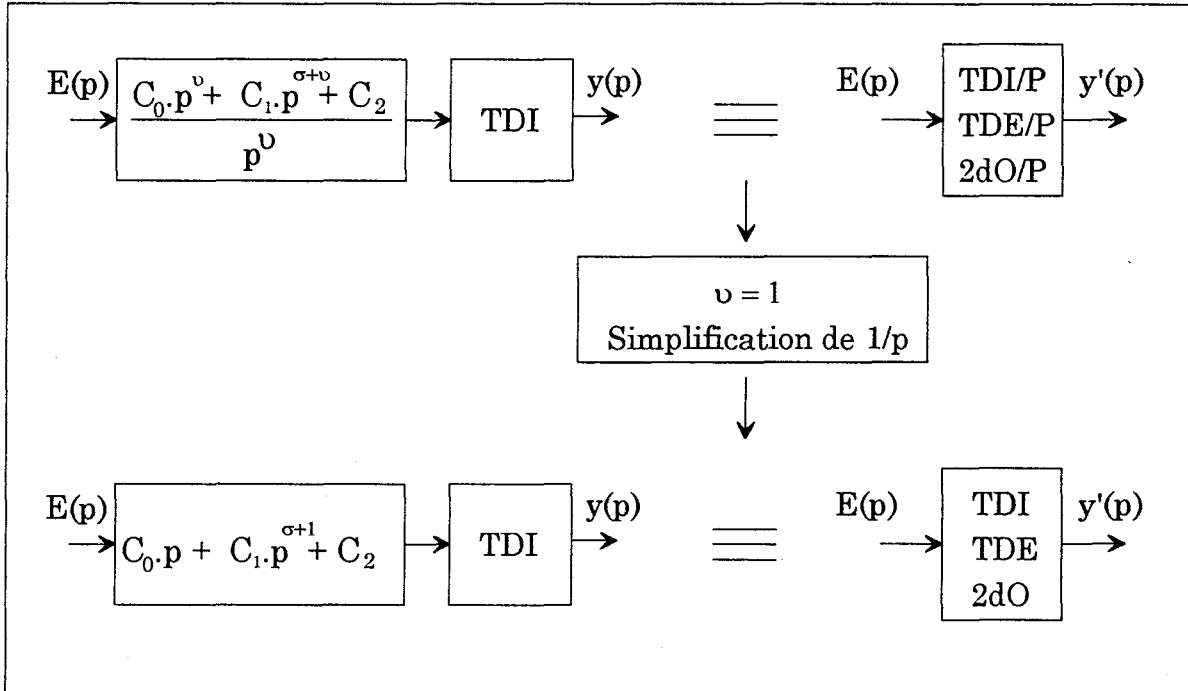


Figure 5.3:
Commande non entière avec des modèles possédant une intégration

Après simplification, C_2 devient le coefficient proportionnel, C_0 le coefficient de la dérivée première et C_1 le coefficient de la dérivée non entière d'ordre $\sigma+1$.

Dans l'identification des coefficients, le système et le modèle imposé ont un gain statique unitaire. Ce qui impose la valeur du coefficient C_2 à 1.

5.3.1.1 Modèle 1: TDI/P

Le modèle imposé est ici un modèle de type TDI/P. Le système est de type TDI. Plusieurs essais sont réalisés pour des valeurs de paramètres différents du système et du modèle. Les résultats de l'identification des paramètres du correcteur sont donnés par le tableau 5.4.

N° Essai	Système TDI ($k=1$)		Modèle TDI/P ($\lambda=1$)		Coefficients du Correcteur			Critères	
	α	τ	β	δ	C_0	C_1	σ	J_1	J_2
1	2.00	0.50	1.50	0.50	0.00	0.30	-0.20	> 100.0	0.1386
2	2.00	0.50	2.00	1.00	0.00	-0.50	-0.70	> 100.0	0.4225
3	2.00	1.00	2.00	0.50	0.00	0.90	-0.30	> 100.0	0.3951
4	2.50	0.50	2.00	0.50	0.30	-0.10	0.30	> 100.0	0.0909
5	3.00	0.50	2.50	0.50	0.30	-0.10	0.30	0.9516	0.0777
6	3.00	1.00	3.00	0.50	1.70	-0.30	-0.70	0.3625	0.1595

Tableau 5.4:
Commande non entière avec le modèle TDI/P

Ces résultats montrent que les meilleures valeurs du critères sont obtenus pour le correcteur non entier. Le coefficient de dérivation prend des valeurs comprises entre -0.7 et 0.3, c'est à dire que la dérivation effective dans le correcteur (figure 5.3) est comprise entre 0.3 et 1.3. Ceux sont donc des valeurs non entières qui donnent de meilleurs résultats.

La figure 5.4 ci-après montre la comparaison entre la réponse impulsionnelle du modèle et celle du système corrigé pour l'essai n°5.

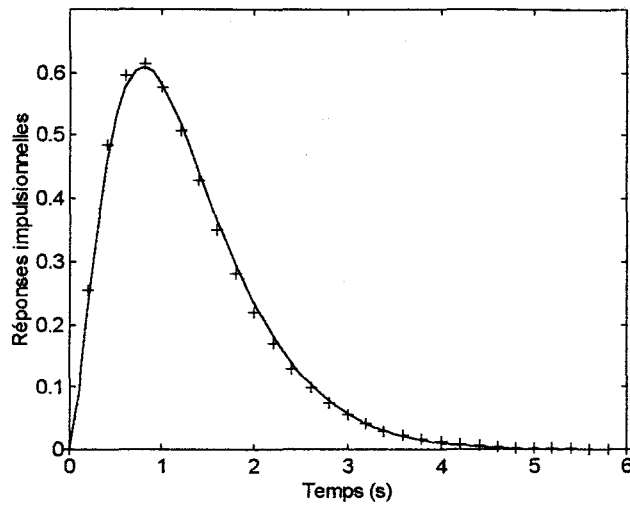


Figure 5.4:
Réponses impulsionnelles (+ : modèle, ___ : système corrigé), essai n°5

La figure 5.5 montre le tracé des Mellin du système corrigé et du modèle pour $s \in [-1, 7]$.

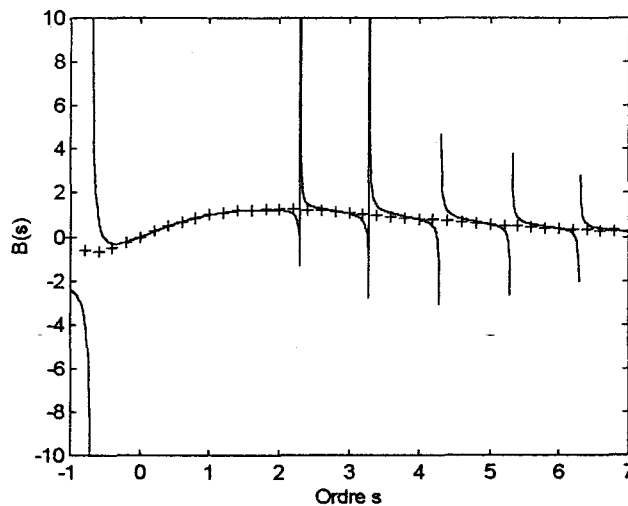


Figure 5.5:
Tracé des Mellin (+ : modèle, ___ : système corrigé), essai n°5

Il apparaît d'une part les discontinuité dans le domaine de Mellin dû aux fonctions gamma et que la minimisation dans le domaine de Mellin est optimale dans un intervalle centré autour de 1.

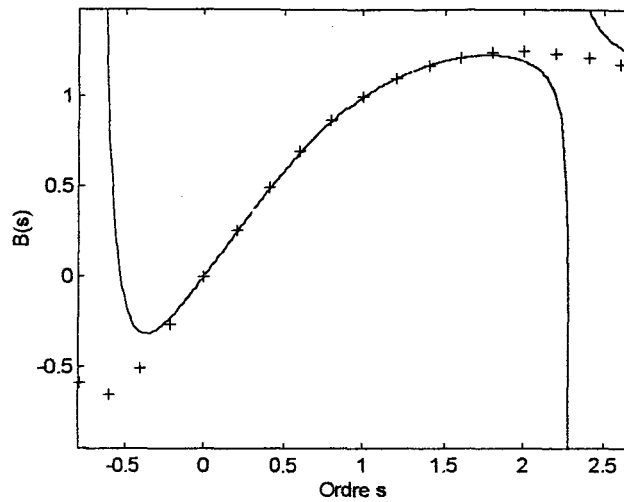


Figure 5.6:
Tracé des Mellin (+ : modèle, ___ : système corrigé), essai n°5

Cette figure 5.6 montre effectivement que la minimisation est optimale entre les tracés des Mellin du modèle et du système corrigé autour du point $s=1$

5.3.1.2 Modèle 2: TDE/P

La commande non entière permet ici de traiter des modèles qui ne possèdent pas de développement en série entière comme le modèle de type TDE. Cette commande était impossible avec les moments temporels. Les résultats de l'identification sont données tableau 5.5 ci-après:

N° Essai	Système TDI ($k=1$)		Modèle TDE/P ($\lambda=1$)		Coefficients du correcteur			Critères	
	α	τ	β	δ	C_0	C_1	σ	J_1	J_2
1	2.00	0.50	1.30	0.50	0.00	0.60	-0.30	> 100.0	0.3589
2	2.50	0.50	1.30	0.50	1.60	-0.70	0.10	> 100.0	0.2116
3	3.00	0.50	1.30	0.50	1.30	0.10	0.90	0.8062	0.1828

Tableau 5.5:
Commande non entière avec le modèle TDE/P

Le critère du correcteur non entier est ici meilleur que celui du correcteur entier.

La figure 5.7 ci-dessous montre la comparaison entre la réponse impulsionnelle du modèle et celle du système corrigé pour l'essai n°3.

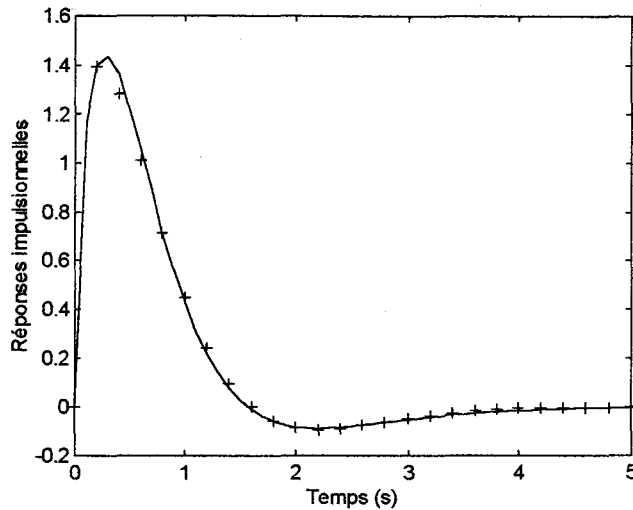


Figure 5.7:
Réponses impulsionnelles (+ : modèle, ___ : système corrigé), essai n°3

Les figures 5.8 et 5.9 montrent pour ce même essai les courbes du système corrigé et du modèle dans le domaine de Mellin. La minimisation optimale a lieu dans l'intervalle $1 - \beta < s < 1 + \beta$ qui est ici $-0.3 < s < +1.3$

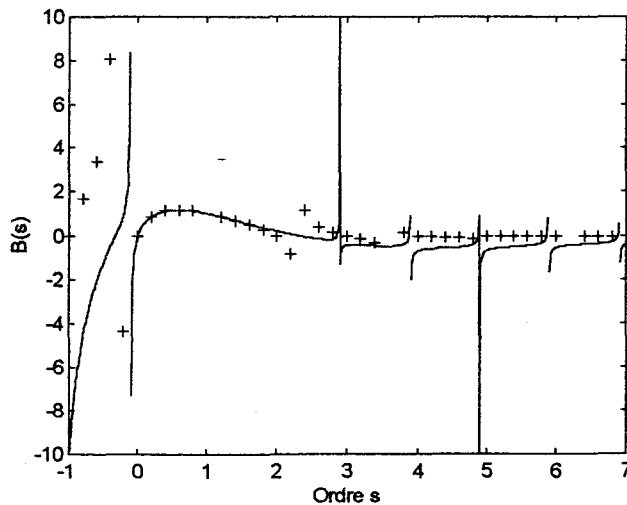


Figure 5.8:
Tracé des Mellin (+ : modèle, ___ : système corrigé), essai n°3

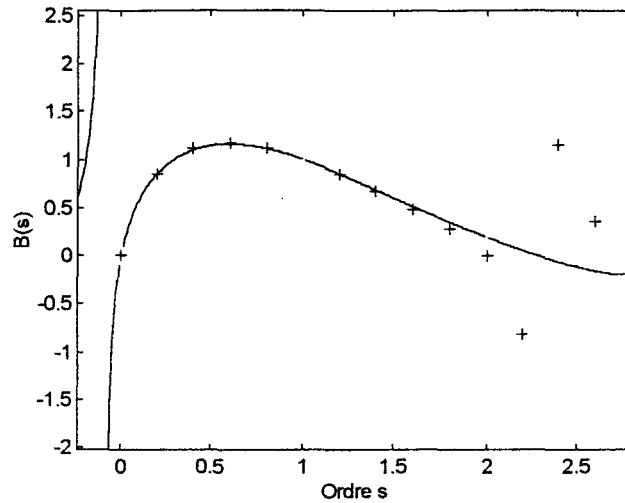


Figure 5.9:
Tracé des Mellin (+ : modèle, ___ : système corrigé), essai n°3

Cette figure 5.9 montre également pour ce modèle TDE que la minimisation est optimale entre les tracés des Mellin autour du point $s=1$

5.3.1.3 Modèle 3: 2dO/P

Le troisième modèle imposé est ici un modèle du second ordre oscillant avec intégration. Les résultats de l'identification sont donnés tableau 5.6 ci-après:

N° Essai	Système TDI (k=1)		Modèle 2dO ($\lambda=1$)		Coefficients de C			Critères	
	α	τ	ζ	Ω_n	C_0	C_1	σ	J_1	J_2
1	2.00	0.50	$1/\sqrt{2}$	2.00	0.00	0.20	-0.80	> 100.0	0.3818
2	2.00	1.00	$1/\sqrt{2}$	2.00	-0.10	1.40	-0.30	> 100.0	0.7513
3	2.50	0.50	$1/\sqrt{2}$	2.00	-1.00	1.40	-0.10	> 100.0	0.2353
4	2.50	1.00	$1/\sqrt{2}$	2.00	1.30	0.80	-0.10	> 100.0	0.5589
5	3.00	0.50	$1/\sqrt{2}$	2.00	1.00	-0.30	0.30	0.9491	0.1725
6	3.00	1.00	$1/\sqrt{2}$	2.00	1.20	2.00	0.30	1.1003	0.3497

Tableau 5.6:
Commande non entière avec le modèle 2dO/P

Le critère du correcteur non entier est meilleur que celui du correcteur entier.

La figure 5.10 ci-après montre la comparaison entre la réponse impulsionnelle du modèle et celle du système corrigé pour l'essai n°6.

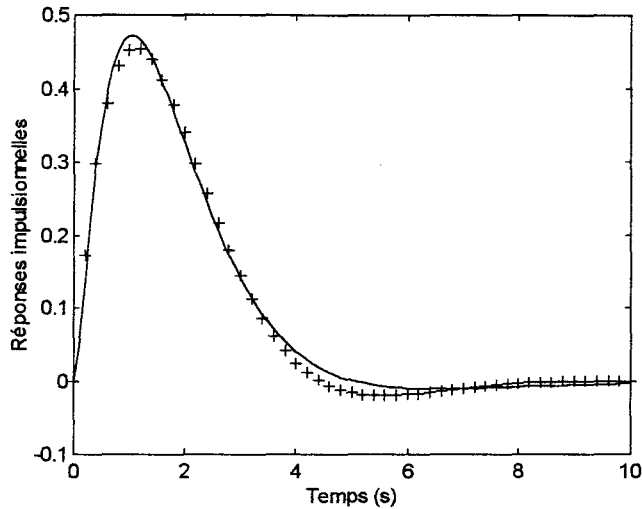


Figure 5.10

Réponses impulsionnelles (+ : modèle, ___ : système corrigé), essai n°6

Les figures 5.11 et 5.12 montrent pour ce même essai les courbes du système corrigé et du modèle dans le domaine de Mellin. La minimisation optimale a lieu dans un intervalle autour de $s=1$.

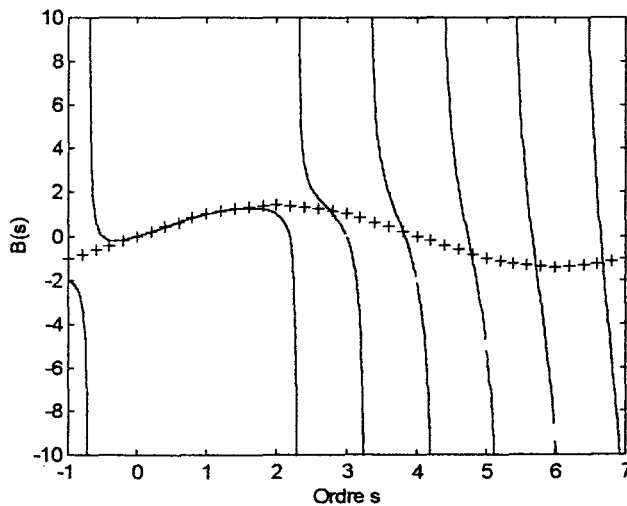


Figure 5.11:

Tracé des Mellin (+ : modèle, ___ : système corrigé), essai n° 6

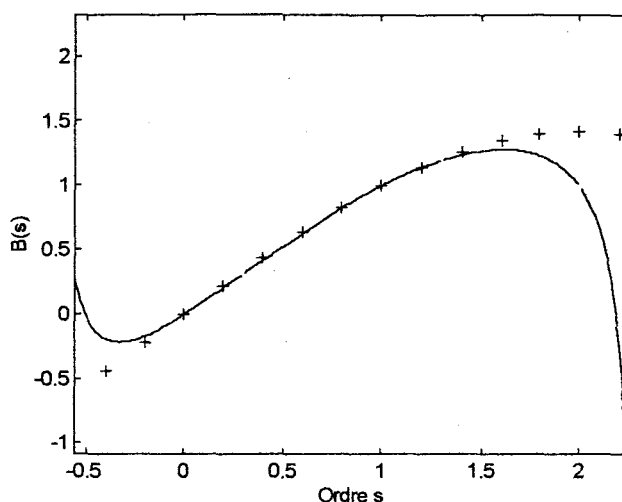


Figure 5.12:
Tracé des Mellin (+ : modèle, ___ : système corrigé), essai n° 6

Pour ce modèle également, la minimisation optimale a lieu autour du point de Mellin d'ordre $s=1$.

5.3.1.4 Conclusion

La commande non entière du processus G modélisé par une TDI vient d'être réalisée pour trois types de modèles équivalents différents avec une intégration (TDI/P, TDE/P et 2dO/P). Le critère est toujours meilleur pour le correcteur d'ordre non entier. L'erreur quadratique entre les réponses impulsionnelles du système corrigé et du modèle est donc toujours minimale pour ce type de correcteur. Le coefficient de dérivation identifié prend des valeurs non entières. Le passage dans le domaine de Mellin montre que l'erreur quadratique entre les courbes est toujours minimale autour du point $s=1$ pour les trois modèles utilisés. Ce point est en effet une valeur particulière de l'ordre s de Mellin car il donne le gain statique du modèle et du système corrigé (ici le gain est unitaire).

5.3.2 Commande non entière avec un modèle sans intégration

Le principe de la commande non entière en imposant un modèle sans intégration pure impose des conditions sur les coefficients et l'ordre d'intégration du correcteur comme le montre la figure 5.13 suivante:

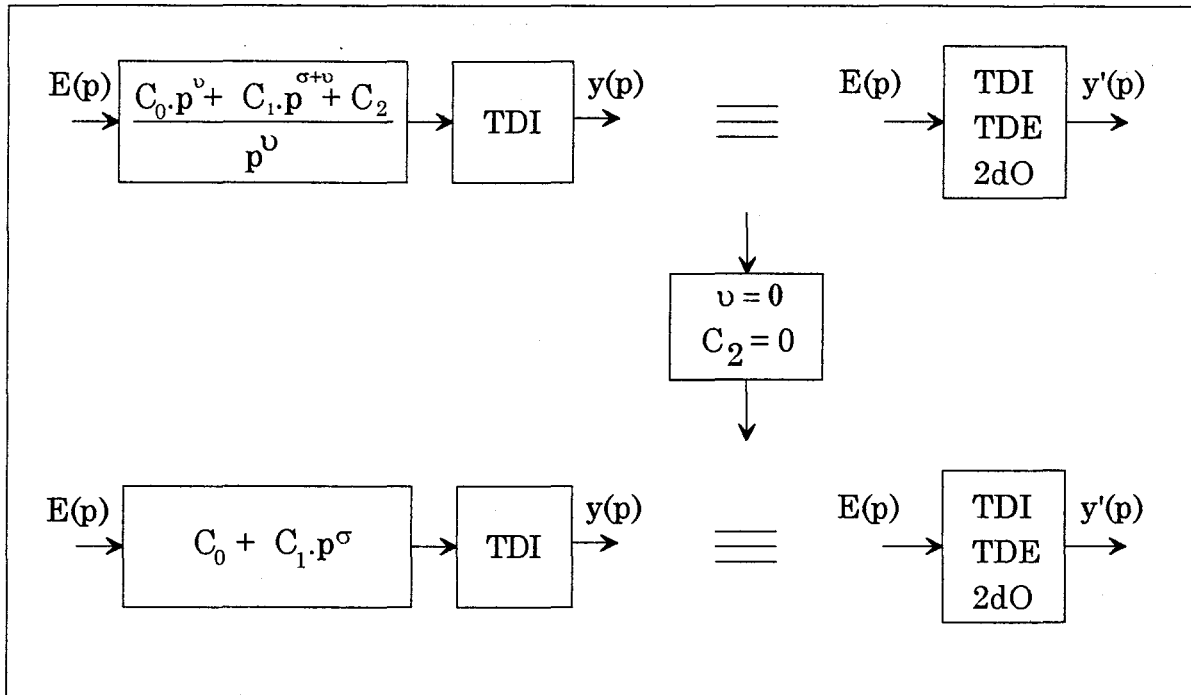


Figure 5.13:

Commande non entière avec un modèle ne possédant pas d'intégration

C_2 devient nul, C_0 est le coefficient proportionnel et C_1 , le coefficient de la dérivée non entière. Dans l'identification des coefficients comme pour l'étude précédente, le système et le modèle imposé ont un gain statique unitaire. Ce qui impose la valeur du coefficient C_0 à 1.

5.3.2.1 Modèle 4: TDI

Le modèle imposé est ici du type TDI. Plusieurs essais sont réalisés pour des valeurs de paramètres différents du système et du modèle. Les résultats de

l'identification des paramètres du correcteur sont données dans le tableau 5.7 ci-après:

N° Essai	Système TDI ($k=1$)		Modèle TDI ($\lambda=1$)		Coefficients de C		Critères	
	α	τ	β	δ	C_1	σ	J_1	J_2
1	1.50	0.50	2.00	0.50	-0.30	0.40	> 100.0	0.3354
2	2.00	0.50	2.00	1.00	-0.50	0.30	2.7304	0.4225
3	2.00	0.50	1.50	0.50	0.30	0.80	1.2556	0.1386
4	2.00	1.00	2.00	0.50	0.90	0.70	1.1869	0.4376
5	2.50	0.50	2.00	0.50	0.20	0.90	0.1798	0.1354
6	3.00	0.50	2.50	0.50	0.20	0.90	0.1342	0.1048
7	3.00	0.50	3.00	1.00	-0.70	0.40	1.6552	0.4419
8	3.00	1.00	3.00	0.50	1.60	0.90	0.3372	0.2728

Tableau 5.7:
Commande non entière avec le modèle TDI

Ces résultats montrent également un critère J_2 meilleur que J_1 , c'est à dire un correcteur non entier mieux adapté pour la commande qu'un correcteur entier. La figure 5.14 ci-dessous montre la comparaison entre la réponse impulsionnelle du modèle et celle du système corrigé pour l'essai n°6.

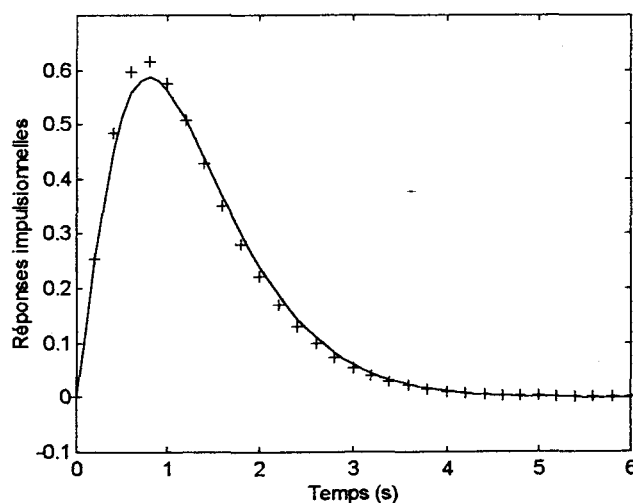


Figure 5.14:
Réponses impulsionnelles (+ : modèle, ___ : système corrigé), essai n°6

La figure 5.15 montre pour ce même essai les courbes du système corrigé et du modèle dans le domaine de Mellin.

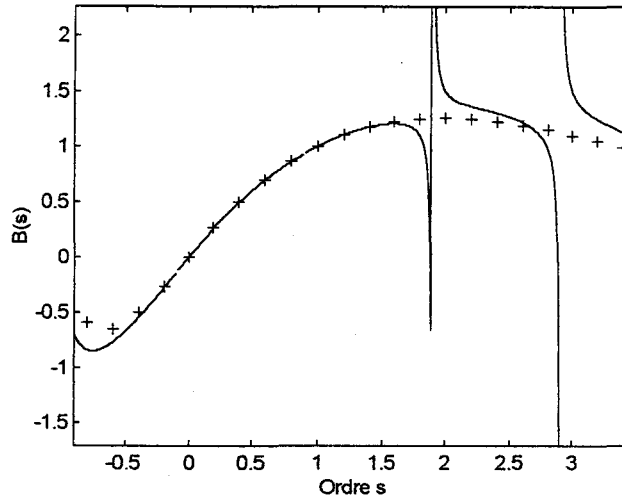


Figure 5.17:
Tracé des Mellin (+ : modèle, ___ : système corrigé), essai n°6

La minimisation optimale a lieu dans un intervalle autour de $s=1$.

5.3.2.2 Modèle 5: TDE

Le modèle TDE peut être utilisé ici de nouveau. Les résultats de l'identification sont données dans le tableau 5.8 ci-après:

N° Essai	Système TDI ($k=1$)		Modèle TDE ($\lambda=1$)		Coefficients de C		Critères	
	α	τ	β	δ	C_1	σ	J_1	J_2
1	2.00	0.50	1.30	0.50	0.60	0.70	2.6937	0.3589
2	2.50	0.50	1.30	0.50	1.00	0.90	0.5970	0.2317
3	3.00	0.50	1.30	0.50	1.20	1.10	0.6771	0.3973

Tableau 5.8:
Commande non entière avec le modèle TDE

Pour ce modèle TDE sans intégration, le meilleur critère obtenu se confirme pour un correcteur d'ordre non entier. La figure 5.16 ci-après montre la

comparaison entre la réponse impulsionnelle du modèle et celle du système corrigé pour l'essai n°2.

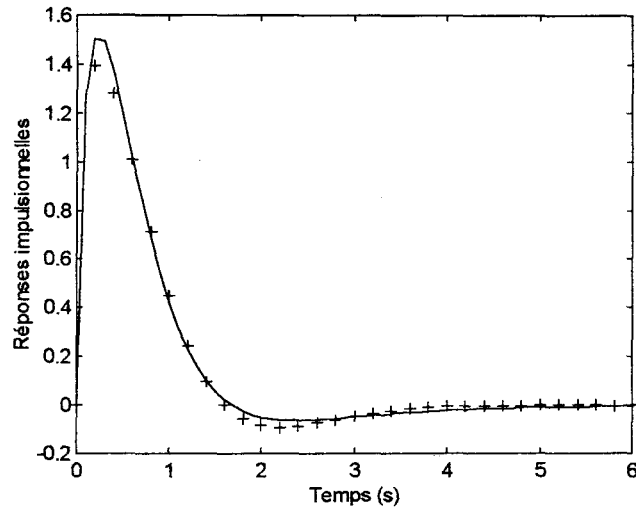


Figure 5.16:
Réponses impulsionnelles (+ : modèle, ___ : système corrigé), essai n°2

La figure 5.17 montre pour ce même essai les courbes du système corrigé et du modèle dans le domaine de Mellin. La minimisation optimale a lieu dans l'intervalle $-0.3 < s < 1.3$.

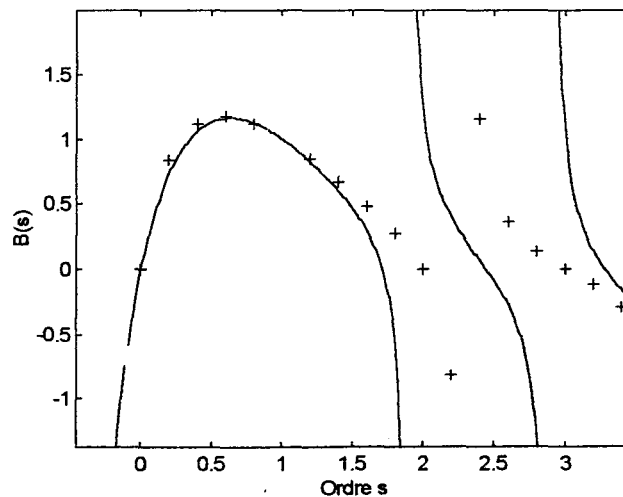


Figure 5.17:
Tracé des Mellin (+ : modèle, ___ : système corrigé), essai n°2

5.3.2.3 Modèle 6: 2dO

Toujours dans le cadre d'un modèle sans intégration, le troisième modèle imposé est un modèle de type second ordre oscillant (2dO). Les résultats de l'identification des paramètres du correcteur sont données dans le tableau 5.9 ci-après pour six essais:

N° Essai	Système TDI (k=1)		Modèle 2dO ($\lambda=1$)		Coefficients de C		Critères	
	α	τ	ζ	Ω_n	C_1	σ	J_1	J_2
1	2.00	0.50	1/√2	2.00	0.20	0.20	2.6215	0.3882
2	2.00	1.00	1/√2	2.00	1.30	0.70	0.9468	0.7555
3	2.50	0.50	1/√2	2.00	0.50	0.60	0.8310	0.2894
4	2.50	1.00	1/√2	2.00	2.00	1.00	0.5880	0.5880
5	3.00	0.50	1/√2	2.00	0.80	0.90	0.3879	0.2352
6	3.00	1.00	1/√2	2.00	0.20	1.20	1.3027	0.9504

Tableau 5.9:
Commande non entière avec le modèle 2dO

La comparaison des critères montre une fois de plus que le correcteur d'ordre non entier est mieux adapté à la commande pour ces modèles qu'un correcteur entier. La figure 5.18 ci-dessous montre la comparaison entre la réponse impulsionnelle du modèle et celle du système corrigé pour l'essai n°6.

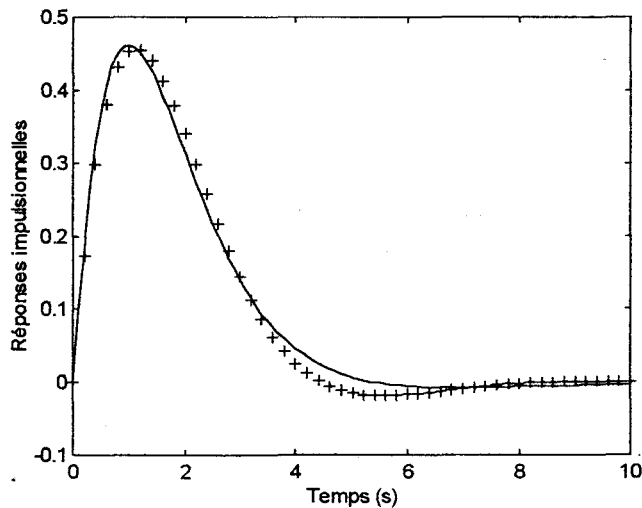


Figure 5.18:
Réponses impulsionnelles (+ : modèle, ___ : système corrigé), essai n°6

La figure 5.19 montre pour ce même essai les courbes du système corrigé et du modèle dans le domaine de Mellin.

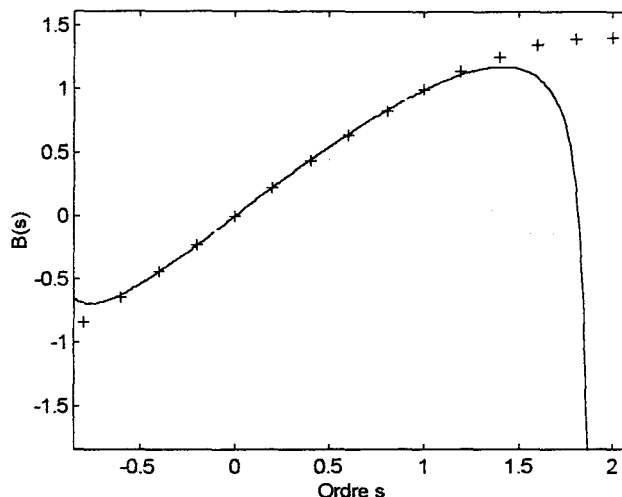


Figure 5.19:
Tracé des Mellin (+ : modèle, — : système corrigé), essai n°6

La minimisation optimale a lieu dans l'intervalle ici autour de $s=0.5$.

5.3.2.4 Conclusion

La commande non entière du processus H modélisé par une TDI vient d'être réalisée pour trois types de modèles équivalents différents sans intégration (TDI, TDE et 2dO). Comme pour les modèles avec intégration, le critère est toujours meilleur pour le correcteur d'ordre non entier. Le coefficient de dérivation identifié prend également des valeurs non entières. Le passage dans le domaine de Mellin montre une fois de plus que l'erreur quadratique entre les courbes est toujours minimale autour du point $s=1$ pour les trois modèles utilisés.

5.3.3 Commande non entière du système TDIR avec un modèle TDIR/P

L'étude se limite ici à la commande non entière du modèle TDIR avec un modèle équivalent imposé de même type avec intégrateur avec des coefficients différents. Le but ici est d'étudier l'influence du retard pur du modèle sur l'évolution des paramètres du correcteur. En effet, les paramètres du système (ordre, constante de temps et retard) restent constant ainsi que l'ordre et la constante de temps du modèle imposé. Pour ce dernier, seul le retard varie. Le tableau 5.10 ci-après montrent les résultats pour cinq essais:

Système TDIR: $\lambda = 1$, $\alpha = 3$, $\tau = 0.5$, $T = 0.2$

N° Essai	Modèle TDIR/P			Coefficients de C			Critères	
	β	δ	T	C_0	C_1	σ	J_1	J_2
1	2.00	0.50	0.20	0.60	-0.20	0.60	0.6453	0.1264
2	2.00	0.50	0.30	0.30	-0.20	0.80	0.4862	0.2478
3	2.00	0.50	0.40	0.50	-0.40	0.40	0.7802	0.3069
4	2.00	0.50	0.50	0.60	-0.60	0.20	2.9720	0.3678
5	2.00	0.50	0.60	0.80	-0.90	0.10	4.6885	0.4433

*Tableau 5.10:
Commande non entière avec le modèle TDIR/P*

La première conclusion est identique à celle apportée pour les autres modèles étudié à savoir que le correcteur d'ordre non entier donne de meilleurs résultats (critère plus petit) que le correcteur d'ordre entier. Pour ce correcteur non entier, le meilleur critère est obtenu pour des valeurs identiques du retard du système et du modèle. Lorsque le retard du système est égal à celui du modèle imposé, le critère obtenu est le meilleur. C'est à dire que la correction apporté est mieux adaptée dans ce cas.

Les figures 5.20 et 5.21 ci-après montrent les réponses impulsionnelles et les tracés dans le domaine de Mellin du modèle et du système corrigé dans le cas de l'essai n°2.

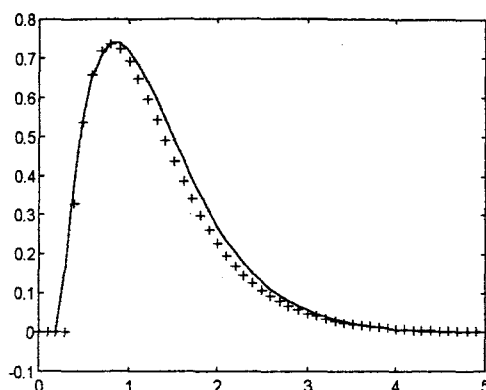


Figure 5.20:
Réponses impulsionnelles (+ : modèle, ___ : système corrigé), essai n°2

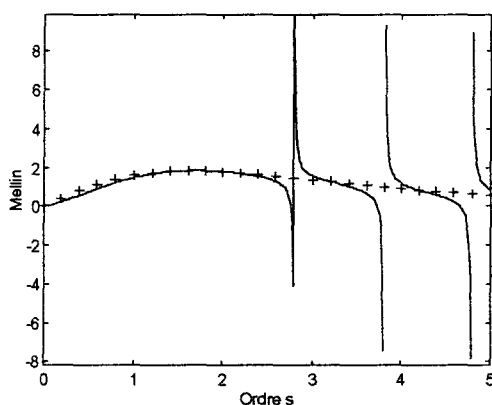


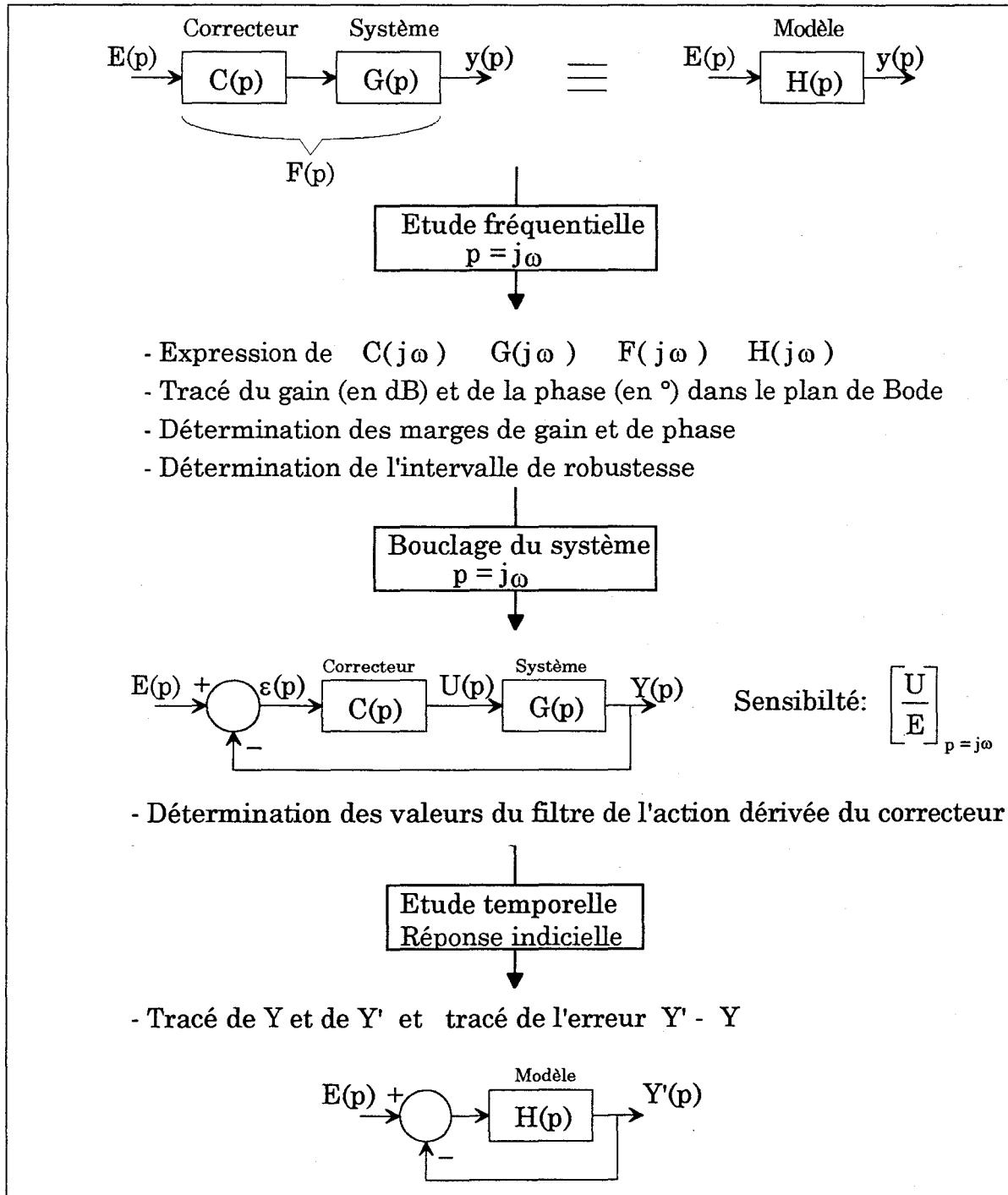
Figure 5.21:
Tracé des Mellin (+ : modèle, ___ : système corrigé), essai n°2

Cet exemple montre que la minimisation se fait à proximité du point $s=1$ mais pas de part et d'autre. L'intervalle de minimisation est ici plus délicat à déterminer que les autres exemples étudiés aux paragraphes précédents.

5.4 Etude fréquentielle

Cette étude consiste à observer les caractéristiques du système corrigé et du modèle, en boucle ouverte, dans le domaine fréquentiel puis de déterminer les valeurs du filtre agissant sur l'action dérivée du régulateur. Les formes analytiques du correcteur C , du système G et des modèles M_i sont établies pour

la variable de Laplace $p = j\omega$. Le gabarit fréquentiel du système corrigé, les marges de gain et de phase et les valeurs de l'action filtrante de la dérivée sont déterminés pour chaque modèle. La démarche élaborée ci-après:



5.4.1 Expressions fréquentielles

Les expressions fréquentielles du correcteur C, du système G et des modèles H_i ($i = 1$ à 7) sont données ci-après. Le correcteur est du type proportionnel, intégral et dérivé d'ordre non entier, le système est de type TDI et les modèles sont de type TDI/P, TDE/P, 2dO/P ainsi que de type TDI, TDE, 2dO et TDIR/P. Les expressions du correcteur C, de sa partie réelle et imaginaire, du système G, de son module et son argument ainsi que celles système corrigé F ont la forme suivante:

- Correcteur C:

$$\begin{aligned}
 C(j\omega) &= C_0 + \frac{C_1 \cdot (j\omega)^\sigma}{(1 + \mu \cdot j\omega)^x} + \frac{C_2}{(j\omega)^v} \\
 \text{Re}[C(j\omega)] &= C_0 + \frac{C_1 \cdot \omega^\sigma}{\rho} \cdot \cos\left(\frac{\sigma \cdot \pi}{2} - \theta\right) + \frac{C_2}{\omega^v} \cdot \cos\left(\frac{v \cdot \pi}{2}\right) \\
 \text{Im}[C(j\omega)] &= \frac{C_1 \cdot \omega^\sigma}{\rho} \cdot \sin\left(\frac{\sigma \cdot \pi}{2} - \theta\right) - \frac{C_2}{\omega^v} \cdot \sin\left(\frac{v \cdot \pi}{2}\right) \\
 \text{avec } \rho &= (1 + \mu^2 \cdot \omega^2)^{\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad \theta = x \cdot \arctan(\mu \cdot \omega)
 \end{aligned}$$

(6.1)

- Système G (pour l'étude des modèles 1 à 6 et Gr pour le modèle 7):

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \frac{k}{(1 + \tau \cdot j\omega)^\alpha} \\
 |G(j\omega)| &= k \cdot (1 + \tau^2 \cdot \omega^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \\
 \arg[G(j\omega)] &= -\alpha \cdot \arctan(\tau \cdot \omega)
 \end{aligned}$$

(6.2)

- Système Gr: $Gr(p) = G(p) \cdot e^{-T \cdot p}$

• Système corrigé F:

$$F(j\omega) = C(j\omega).G(j\omega)$$

$$|F(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2[C(j\omega)] + \text{Im}^2[C(j\omega)]} \cdot |G(j\omega)|$$

$$\arg [F(j\omega)] = \arctan \left(\frac{\text{Im}[C(j\omega)]}{\text{Re}[C(j\omega)]} \right) + \arg [G(j\omega)]$$

(6.3)

Les expressions du module et de l'argument des modèles définis dans le chapitre précédent sont données ci-dessous:

<u>Modèle</u>	<u>Module</u>	<u>Argument</u>
1	$\lambda.\omega^{-1}.(1 + \delta^2.\omega^2)^{-\frac{\beta}{2}}$	$-\beta.\arctan(\delta.\omega) - \frac{\pi}{2}$
2	$\lambda.\omega^{-1}.(a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}$	$-\arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{\pi}{2}$
3	$\lambda.\omega^{-1}.(c^2 + d^2)^{-\frac{1}{2}}$	$-\arctan\left(\frac{d}{c}\right) - \frac{\pi}{2}$
4	$\lambda.(1 + \delta^2.\omega^2)^{-\frac{\beta}{2}}$	$-\beta.\arctan(\delta.\omega)$
5	$\lambda.(a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}$	$-\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
6	$\lambda.(c^2 + d^2)^{-\frac{1}{2}}$	$-\arctan\left(\frac{d}{c}\right)$
7	$\lambda.\omega^{-1}.(1 + \delta^2.\omega^2)^{-\frac{\beta}{2}}$	$-\beta.\arctan(\delta.\omega) - \frac{\pi}{2} - T.\omega$

avec:

$$a = 1 + (\omega.\delta)^\beta \cdot \cos\left(\frac{\beta.\pi}{2}\right) \qquad b = (\omega.\delta)^\beta \cdot \sin\left(\frac{\beta.\pi}{2}\right)$$

$$c = 1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_n}\right)^2 \qquad d = 2.\zeta.\frac{\omega}{\Omega_n}$$

(6.4)

Enfin, en boucle fermée, l'expression de la sensibilité S est de la forme:

$$S(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{C(j\omega)}{1 + C(j\omega).H(j\omega)}$$

(6.5)

5.4.2 Détermination des paramètres

Cette partie est consacrée à la détermination du gabarit fréquentiel du système corrigé ainsi que les valeurs des paramètres du filtre de l'action dérivée du correcteur.

5.4.2.1 Détermination du gabarit fréquentiel

Le gabarit fréquentiel est déterminé pour trois valeurs:

- ω_U : pulsation à gain unité,
- ω_A et ω_B : gabarit fréquentiel centré géométriquement autour de ω_U :

$$\omega_U^2 = \omega_A \cdot \omega_B \quad \omega_A < \omega_U < \omega_B$$

La valeur de ω_B correspond à la pulsation pour laquelle l'écart relatif entre le modèle et le système corrigé est supérieur à 10%. L'écart est déterminé sur le gain et la phase et c'est le premier qui atteint la valeur de 10% qui fixe la valeur de ω_B :

$$\max \left(\left| \frac{|F| - |H_i|}{|H_i|} \right|_{\omega=\omega_B}, \left(\frac{\arg(F) - \arg(H_i)}{\arg(H_i)} \right)_{\omega=\omega_B} \right) \geq 10\%$$

La valeur de ω_A est déterminée par:

$$\omega_A = \frac{\omega_U^2}{\omega_B}$$

5.4.2.2 Détermination des paramètres du filtrage de l'action dérivée du correcteur

Les valeurs de μ et x sont déterminés par une méthode de programmation non linéaire. Ces valeurs ne doivent pas modifier le système corrigé (gain et phase) dans le gabarit fréquentiel et doit assurer la convergence du gain de la sensibilité pour des valeurs de pulsations élevées:

- si $\omega \in [\omega_A, \omega_B]$

$$\text{alors } |F(j.\omega)|_{dB} \equiv |H_i(j.\omega)|_{dB}$$

$$\text{et } \arg [F(j.\omega)] \equiv \arg [H_i(j.\omega)]$$

- si $\omega \rightarrow +\infty$

$$\text{alors } \lim_{\omega \rightarrow \infty} |S(j.\omega)|_{dB} = \text{constante}$$

5.4.3 Résultats

Pour chacun des modèles H_i ($i = 1$ à 7), le seul essai retenu pour l'étude fréquentielle est l'essai qui donne le meilleur critère J_2 (cf. chapitre 5, § 5.3). En effet, cet essai donne les meilleurs coefficients du correcteur pour des valeurs particulières du système et du modèle donné.

Les résultats donnant le gabarit fréquentiel du système corrigé, l'erreur faite sur sa détermination à $\omega = \omega_B$, les marges de gain et de phase et les paramètres du filtrage de l'action dérivée du correcteur sont regroupés dans le tableau 6.1 suivant pour chaque modèle.

Pour chaque modèle, les courbes de gain et de phase du système corrigé (avec et sans filtrage) et du modèle sont données en annexe F dans le plan de Bode de même pour les courbes de la sensibilité (gain et phase également).

Le tableau ci-dessous donne les résultats de l'identification des paramètres de l'étude fréquentielle menée pour chaque modèle dans l'essai considéré.

i	Modèle	Gabarit (rad.s ⁻¹)			Ecart (%)		Marges		Filtrage	
		ω_A	ω_U	ω_B	Gain	Phase	Gain (dB)	Phase (°)	μ (s)	α
1	TDI/P	0.02	0.82	36.80	3%	10%	7.20	32.00	10 ⁻³	0.30
2	TDE/P	0.05	1.12	24.50	4%	10%	19.00	73.00	10 ⁻²	1.90
3	2dO/P	0.00	0.97	∞	5.6%	8,1%	9.60	44.00	10 ⁻¹	1.0
4	TDI	0.04	1.13	36.00	4.6%	10%	∞	172.00	2.10 ⁻²	1.90
5	TDE	0.78	1.86	4.44	6.2%	10%	∞	131.00	2.10 ⁻²	1.90
6	2dO	0.30	2.00	13.70	5.5%	10%	∞	129.00	10 ⁻²	1.90
7	TDIR/P	0.28	0.84	3.00	7.8%	10%	12.00	35.00	0.015	1.60

Tableau 6.1:
Valeurs des paramètres identifiés

5.4.4 Simulation du système corrigé

La fonction de transfert en boucle ouverte du système corrigé est caractérisée par:

$$F(p) = \left(C_0 + \frac{C_1 p^\sigma}{(1 + \mu p)^x} + \frac{C_2}{p^\nu} \right) \cdot G(p)$$

Dans les résultats du cinquième chapitre, l'ordre d'intégration ν est unitaire. De plus, pour simplifier les relations suivantes, il est supposé que la constante μ tend vers zéro (suppression de l'action filtrante de la dérivée). La fonction de transfert s'écrit alors:

$$F(p) = (C_0 p + C_1 p^{\sigma+1} + C_2) \cdot \frac{G(p)}{p}$$

La forme analytique de l'original g de G , est connue dans le domaine temporel. Elle permet donc la détermination de l'original f de F correspondant à la réponse impulsionnelle du système corrigé en boucle ouverte.

La fonction dérivée première de la réponse impulsionnelle du système corrigé a pour expression:

$$\frac{d}{dt}[f(t)] = C_0.g(t) + C_1.\frac{d^{\sigma+1}}{dt^{\sigma+1}}[g(t)] + C_2.g(t)$$

(6.6)

La simulation de cette expression ne pose pas de problème étant données la connaissance analytique de la fonction g et les définitions permettant d'obtenir la dérivée d'ordre $\sigma+1$ de g (cf. annexe C). Ce qui donne:

$$g(t) = \frac{k}{\Gamma(\alpha).\tau^\alpha} (t-T)^{\alpha-1} . e^{-\frac{t-T}{\tau}}$$

$$\frac{d^{\sigma+1}}{dt^{\sigma+1}} \left[g(t) \right]_{t \geq T} = \frac{k}{\Gamma(\alpha).\tau^\alpha} \cdot \left[\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha+i)}{\Gamma(\alpha-\nu+i)} \cdot \frac{\alpha-1+\nu+i}{(-\tau)^i . i!} (t-T)^{\alpha-2+\nu+i} \right]$$

La fonction f est alors obtenue en intégrant l'équation (6.6) par la méthode des trapèzes avec un pas d'échantillonnage de 10^{-2} s. Il est alors possible de déterminer l'évolution de la sortie Y du système en boucle fermée pour une entrée de type échelon par l'utilisation de l'intégrale de convolution définie par:

$$Y(t) = \int_0^t f(t-x) \cdot [e(t-x) - Y(tx)] \cdot dx$$

L'expression discrète de Y est obtenue également par la méthode des trapèzes avec un pas d'échantillonnage de 10^{-2} s. Cette intégrale de convolution est également appliquée au modèle pour obtenir la fonction Y' qui est la réponse indicielle du modèle en boucle fermée. Cela permet de comparer les deux réponses indiciaires et d'en déterminer l'écart $Y'-Y$.

Les courbes des réponses indiciaires du système corrigé et du modèle et de l'erreur entre ces deux réponses sont données en annexe F.

5.5 Conclusion

Pour la commande non entière, l'utilisation de la transformée de Mellin dans la détermination des coefficients du correcteur montre que les calculs

peuvent être réalisés sur un domaine réel très restreint centré autour d'un point. Ce point n'est autre que le gain statique du système corrigé et du modèle (la valeur de s vaut 1). L'utilisation de cette transformée par rapport à celle des moments temporels est donc évidente dans le sens où l'étude se réalise sur un domaine restreint et applicable numériquement à tout type de correcteur. L'utilisation de cette transformée de Mellin montre que la commande d'ordre non entier apporte dans tous les exemples traités une amélioration de la commande par rapport à un correcteur d'ordre entier.

La vérification à posteriori, dans le domaine fréquentiel, clôture l'étude de la commande non entière. Celle-ci permet d'une part de valider les résultats obtenus, dans le domaine fréquentiel et d'autre part, de définir le domaine de validité fréquentiel du système corrigé en fonction des modèles choisis. Les résultats obtenus montrent que le modèle le mieux adapté pour la commande est le modèle de type second ordre oscillant avec intégration. Pour les autres modèles, le domaine de validité fréquentiel est au minimum d'une décade autour de la fréquence unitaire ω_u . La simulation temporelle en boucle fermée pour une entrée de type échelon permet également de valider les résultats de la commande issus de la boucle ouverte, ainsi que les marges de gain et de phase issues de l'analyse fréquentielle.

Conclusion
générale

Conclusion générale

L'étude élaborée tout au long de cette thèse a été de montrer qu'il était possible d'arriver à une commande d'ordre non entier à partir de la notion mathématique des moments temporels très largement utilisés en automatique.

Il était nécessaire, dans un premier temps, de rappeler les définitions de base des moments temporels ainsi que leurs déterminations pratiques. Ces moments temporels ainsi obtenus ont été utilisés pour la détermination d'une commande particulière de type PID d'ordre entier. Les limitations de cette méthode élaborée sont apparues lorsque le système à commander ne possédait pas de développement en série entière ou lorsque la commande faisait intervenir des opérateurs d'ordre non entier. Alors, la solution a été de trouver un opérateur similaire à celui des moments temporels qui acceptait l'ordre non entier: la transformée de Mellin s'imposait donc.

Les travaux utilisant la transformée de Mellin dans la commande de processus sont peu courants voire inexistant. Alors, la mise en oeuvre d'une méthode correcte de commande par cet outil a été empirique:

"Comment déterminer une commande correcte à partir d'un opérateur dont son domaine de validité et ses performances ne sont pas connus a priori".

De ce fait, la détermination de la commande s'est faite dans un premier temps dans le domaine temporel. Après avoir déterminé correctement la loi de commande, il était alors plus aisé de passer dans le domaine de Mellin. Ce passage a permis de tirer des conclusions quant à l'utilisation de la transformée

de Mellin, ses limites et ses performances. De plus, cette transformée de Mellin a contribué à l'élaboration d'une commande peu classique: la commande d'ordre non entier dans le domaine temporel.

Les apports originaux de cette thèse semblent donc être de deux natures différentes: La commande d'ordre non entier dans le domaine temporel et l'approche de la commande d'ordre non entier dans le domaine de Mellin. Cette commande dans le domaine de Mellin apporte une solution aux problèmes que pose la commande classique faisant appel aux moments temporels. En effet, il n'est plus utile de chercher à déterminer correctement les moments temporels sachant que les moments temporels d'ordre élevé sont difficiles à déterminer et peu significatifs. Il suffit de s'intéresser à la transformée de Mellin de la fonction à étudier autour du point caractéristique d'ordre $s=1$. Ce point est en effet le gain statique du système. Toutes les études qui sont réalisées (identification, commande...) sont dépendantes de la détermination du gain statique qui est un des paramètres, sinon le paramètre le plus important d'un système. La vérification de la commande élaborée a été effectuée dans le domaine fréquentiel. Cette vérification à posteriori a permis de déterminer le domaine de validité fréquentiel de la commande obtenue.

Bien entendu, la méthode de commande élaborée n'est pas sans souci: elle nécessite du calcul analytique d'intégrale complexe, du calcul numérique d'intégrale assez long et des restrictions quant au domaine d'application. Il serait intéressant de connaître le coût de réalisation de ce type de commande (coût financier matériel et coût du temps de calcul) pour appliquer ou non cette méthode de commande à l'avenir.

Annexes



ANNEXE A

La transformation de Mellin

$$M(f, s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \cdot f(x) \cdot dx \quad \text{avec } s \text{ complexe: } s = u + i \cdot v$$

Règles opératoires de la transformée de Mellin:

$$M(x^a \cdot f(x), s) = M(f(x), s + a)$$

$$M(f_a, s) = a^{-s} \cdot M(f, s + a) \quad \text{avec } f_a(x) = f(ax)$$

$$M(f_b, s) = \frac{1}{b} \cdot M\left(f, \frac{1}{b}\right) \quad \text{avec } f_b(x) = f(x^b)$$

$$M(d^n f, s) = (-1)^n \cdot \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)} \cdot M(f, s-n) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

$$M(d^\sigma f, s) = \frac{\Gamma[1-(s-\sigma)]}{\Gamma(1-s)} \cdot M(f, s-\sigma) \quad \text{avec } \sigma \in \mathfrak{R}$$

$$M(I^n f, s) = (-1)^n \cdot \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+n)} \cdot M(f, s+n) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

$$M(I^\nu f, s) = \frac{\Gamma[1-(s+\nu)]}{\Gamma(1-s)} \cdot M(f, s+\nu) \quad \text{avec } \nu \in \mathfrak{R}$$

Transformées de Mellin de fonctions usuelles:

$$M(\cos(x), s) = \Gamma(s) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot s}{2}\right) \quad \text{avec } 0 < s < 1$$

$$M(\sin(x), s) = \Gamma(s) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot s}{2}\right) \quad \text{avec } 0 < s < 1$$

$$M\left(\frac{1}{(1+x)^{m+s}}, s\right) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(s)}{\Gamma(m+s)}$$

$$M((1+x)^{-a}, s) = \frac{\Gamma(s) \cdot \Gamma(a-s)}{\Gamma(a)} \quad \text{avec } 0 < s < a$$

$$M\left((1+x^a)^{-b}, s\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{a}\right) \cdot \Gamma\left(b - \frac{s}{a}\right)}{a \cdot \Gamma(b)} \quad \text{avec } 0 < s < a \cdot b$$

$$M\left((1+x^a)^{-1}, s\right) = \frac{\pi}{a} \cdot \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi \cdot s}{a}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi \cdot s}{a}\right)}$$

avec $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi \cdot s}{a}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi \cdot s}{a}\right)}$
et $0 < s < a$

$$M\left((1-x)^{-1}, s\right) = \pi \cdot \cotan(\pi \cdot s) \quad \text{avec } 0 < s < 1$$

Définition pratique de la transformée de Mellin:

$$B(f, s) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{(s-1)!} \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} \cdot f(x) \cdot dx = \frac{M(f, s)}{\Gamma(s)}$$

ANNEXE B

Equivalence entre la transformée de Mellin d'une fonction et sa transformée de Laplace

Soit la fonction h suivante définie par l'intégrale suivante:

$$h(t) = t^\alpha \cdot \int_0^{+\infty} \tau^\beta \cdot f_1(\tau \cdot t) \cdot f_2(\tau) \cdot d\tau$$

Alors la transformée de Mellin d'ordre s de h est:

$$M(h, s) = F_1(s + \alpha) \cdot F_2(1 - s - \alpha + \beta)$$

avec

$$F(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \cdot f(t) \cdot dt$$

En posant $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ l'expression de la fonction h devient:

$$h(t) = \int_0^{+\infty} f_1(\tau \cdot t) \cdot f_2(\tau) \cdot d\tau$$

et sa transformée de Mellin s'écrit:

$$M(h, s) = F_1(s) \cdot F_2(1 - s)$$

Comme la transformée de Laplace de h s'écrit:

$$L(h, p) = H(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p.t} . h(t) . dt$$

alors la transformée de Mellin de h peut s'exprimer de la façon suivante:

$$M(h, s) = M(e^{-p.t}, s) . M(h, 1 - s)$$

D'où la transformée de Mellin de h en $1-s$:

$$M(h(t), 1 - s) = \frac{M(H(p), \operatorname{Re}(p) > 0, s)}{\Gamma(s)}$$

Avec le changement de variable $s = 1 - s$, la transformée de Mellin de h en s est:

$$M(h(t), s) = \frac{M(H(p), p > 0, 1 - s)}{\Gamma(1 - s)}$$

Remarque:

Cette relation trouve son intérêt pour le calcul des Mellin de la transmittance à dérivée explicite (TDE). Il n'est pas utile de passer par l'expression temporelle de sa réponse impulsionnelle.

ANNEXE C

La dérivée et l'intégrale non entière

Soit la fonction Φ définie par: $\Phi : [0, t] \rightarrow \mathfrak{R}$
 $t \rightarrow \Phi(t)$

alors sa dérivée $\nu^{\text{ième}}$ pour $0 < \nu < 1$ est définie de la façon suivante:

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} [\Phi(t)] = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-\theta)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \cdot \Phi(\theta) \cdot d\theta$$

En utilisant la loi de composition de la dérivation:

$$\frac{d^\alpha(f)}{dt^\alpha} = \left[\frac{d^n}{dt^n} \circ \frac{d^\beta}{dt^\beta} \right] (f) \quad \text{avec } \alpha = n + \beta$$

La dérivée non entière D d'ordre $n + \nu$ de la fonction Φ sur l'intervalle $[0, t]$ est:

$$D_{[0,t]}^{n+\nu} [\Phi] = \frac{d^{n+\nu}}{dt^{n+\nu}} [\Phi(t)] = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \int_0^t \frac{(t-\theta)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \cdot \Phi(\theta) \cdot d\theta$$

avec $n \in N$ et $0 < \nu < 1$

La définition de l'intégrale non entière est similaire à la précédente. L'intégrale non entière I d'ordre μ de la fonction Φ sur l'intervalle $[0, t]$ est :

$$I_{[0,t]}^\mu [\Phi(t)] = \int_0^t \frac{(t-\theta)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \cdot \Phi(\theta) d\theta$$

avec $\mu > 0$

Exemple 1: $\Phi(t) = t^\alpha$

Les tables de transformées d'intégrales donnent:

$$\int_0^u x^{\nu-1} \cdot (u-x)^{\lambda-1} \cdot dx = u^{\lambda+\nu-1} \cdot B(\lambda, \nu)$$

avec $\lambda > 0$, $\nu > 0$ et $B(\lambda, \nu) = \int_0^1 x^{\lambda-1} \cdot (1-x)^{\nu-1} \cdot dx = \frac{\Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(\nu)}{\Gamma(\lambda + \nu)}$

alors la dérivée $\nu^{\text{ième}}$ de Φ est:

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} (t^\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - \nu + 1)} \cdot t^{\alpha - \nu}$$

Exemple 2: $\Phi(t) = t^{\alpha-1} \cdot e^{-at}$ pour $\alpha \neq -1, -2, -3, \dots$ et $a > 0$

Les tables de transformées d'intégrales donnent:

$$\int_0^u x^{\nu-1} \cdot e^{\beta \cdot x} (u-x)^{\mu-1} \cdot dx = B(\mu, \nu) \cdot u^{\mu+\nu-1} \cdot {}_1F_1(\nu, \mu + \nu, \beta \cdot u)$$

avec $Re(\nu) > 0$, $Re(\mu) > 0$ et

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, u) = \frac{2^{1-\gamma}}{B(\alpha, \gamma - \alpha)} \cdot \exp\left(\frac{u}{2}\right) \cdot \int_{-1}^{+1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} \cdot (1+t)^{\alpha-1} \cdot \exp\left(\frac{u \cdot t}{2}\right) \cdot dt$$

avec $0 < Re(\alpha) < Re(\gamma)$ ou encore

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, u) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+i)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+i)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{u^i}{i!}$$

D'où la dérivée D d'ordre ν de la fonction Φ est:

$$\frac{D^\nu}{[0, a]} [\Phi] = \frac{d^\nu}{dt^\nu} [\Phi(t)] = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot t^{\alpha-1-\nu}}{\Gamma(\alpha - \nu)} \cdot {}_1F_1(\alpha, \alpha - \nu, -at)$$

Ce qui donne

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} [t^{\alpha-1} \cdot e^{-at}] = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha+i)}{\Gamma(\alpha - \nu + i)} \cdot \frac{(-a)^i}{i!} \cdot t^{\alpha-1-\nu+i}$$

ANNEXE D

Equivalence du modèle TDIR au modèle TDI

L'équivalence d'un modèle TDIR à un modèle TDIR se fait par la méthode des moments temporels en utilisant le développement en série.

$$F(p) = \frac{k \cdot e^{-T \cdot p}}{(1 + \tau \cdot p)^\alpha} \quad \equiv \quad F'(p) = \frac{k'}{(1 + \tau' \cdot p)^{\alpha'}}$$

Le terme en exponentiel peut également se développer en série entière de rayon infini. Ce qui donne pour le développement des deux fonctions:

$$F(p) = k \cdot \left(1 - T \cdot p + \frac{T^2}{2!} \cdot p^2 - \frac{T^3}{3!} \cdot p^3 + \dots \right) \cdot \left(1 - \alpha \cdot \tau \cdot p + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \tau^2}{2!} \cdot p^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot \tau^3}{3!} \cdot p^3 + \dots \right)$$

$$F'(p) = k' \cdot \left(1 - \alpha' \cdot \tau' \cdot p + \frac{\alpha'(\alpha'-1) \cdot \tau'^2}{2!} \cdot p^2 - \frac{\alpha'(\alpha'-1)(\alpha'-2) \cdot \tau'^3}{3!} \cdot p^3 + \dots \right)$$

L'équivalence de F à F' impose donne les relations suivantes:

- Ordre 0: $k = k'$
- Ordre 1: $k \cdot (\alpha \cdot \tau + T) = k' \cdot \alpha' \cdot \tau'$
- Ordre 2: $k \cdot \left(\frac{T^2}{2!} + \alpha \cdot \tau \cdot T + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \tau^2}{2!} \right) = k' \cdot \frac{\alpha' \cdot (\alpha'-1) \cdot \tau'^2}{2!}$
- Ordre 3: $k \cdot \left(\frac{T^3}{3!} + \frac{T^2}{2!} \cdot \alpha \cdot \tau + T \cdot \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \tau^2}{2!} + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \tau^3}{3!} \right) = k' \cdot \frac{\alpha' \cdot (\alpha'-1) \cdot (\alpha'-2) \cdot \tau'^3}{3!}$
- Ordre n: $k \cdot \sum_{i=0}^n \frac{T^{n-i}}{(n-i)!} \cdot \frac{\tau^i}{i!} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-i+1)} = k' \cdot \frac{\Gamma(\alpha'+1)}{\Gamma(\alpha'-n+1)} \cdot \frac{\tau'^n}{n!}$

Le passage de F à F' impose donc des relations entre les coefficients:

- Ordre 0: $k' = k$
- Ordre 1: $\alpha' \cdot \tau' = \alpha \cdot \tau + T$
- Ordre 2: $(\alpha' \cdot \tau')^2 = \alpha \cdot \tau^2$
- Ordre 3: $\tau' = \tau$
- Ordre 4: $T = 0$
- Ordre > 4: $\alpha' = \alpha$

A partir de l'ordre 3, les résultats ne sont plus utilisables pour identifier F à F'. En effet, le retard pur T n'est plus pris en compte. L'utilisation de l'équivalence à l'ordre 0, 1 et 2 implique:

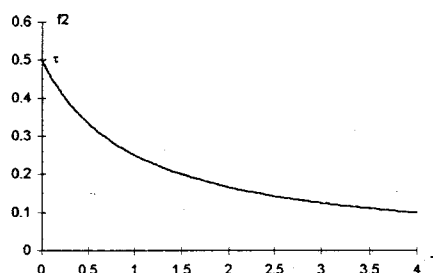
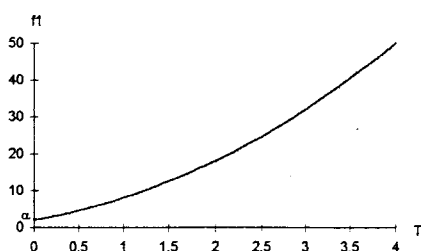
$$k' = k \quad \alpha' = \frac{(\alpha \cdot \tau + T)^2}{\alpha \cdot \tau^2} \quad \tau' = \frac{\alpha \cdot \tau^2}{\alpha \cdot \tau + T}$$

La détermination du retard peut être empirique. Il est alors intéressant de regarder l'évolution des variations de l'ordre et la constante de temps en fonction du retard T et de l'erreur commise sur la lecture.

Soient les fonctions suivantes:

$$\begin{aligned} f_1: [0, +\infty] &\rightarrow \mathfrak{R} & f_2: [0, +\infty] &\rightarrow \mathfrak{R} \\ t \rightarrow f_1(t) &= \alpha'(T) & t \rightarrow f_2(t) &= \tau'(T) \end{aligned}$$

dont les variations sont pour $\alpha = 2$ et $\tau = 0.5$:



Plus le retard T est important, plus l'ordre est grand tandis que la constante de temps tend vers zéro. Lors de la lecture du retard, il faut déterminer en premier lieu la constante de temps τ' puis déterminer l'ordre par la relation:

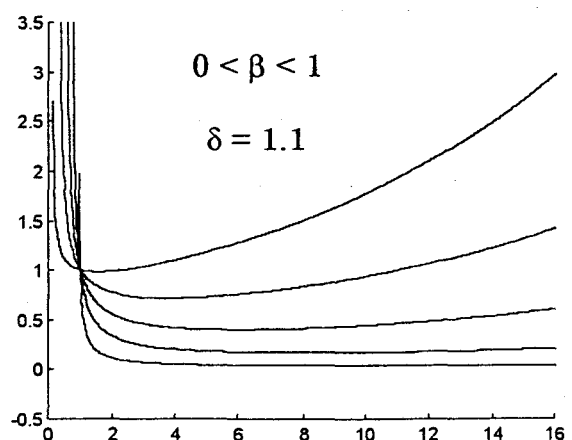
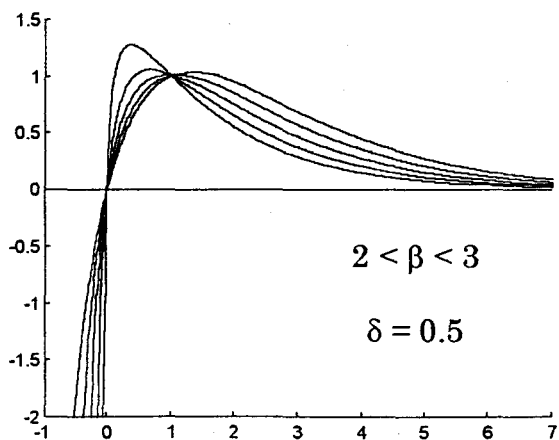
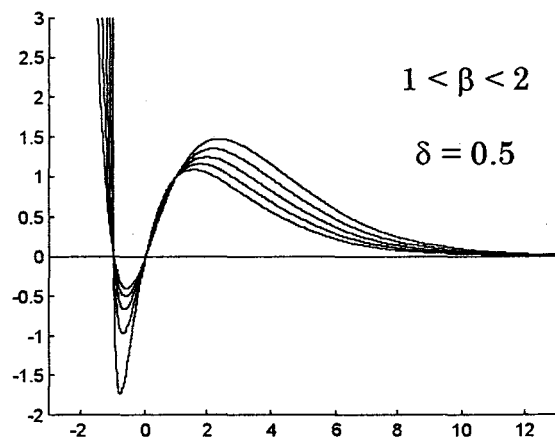
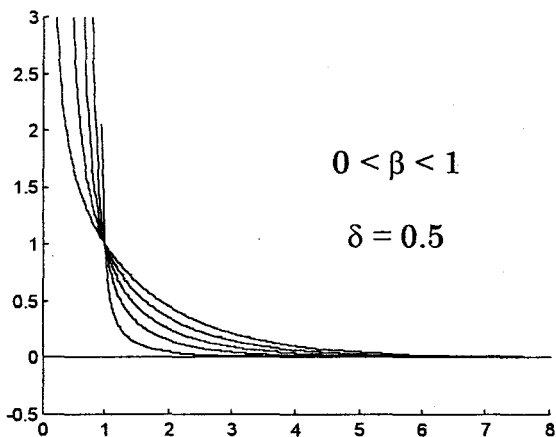
$$\alpha' = \frac{\alpha \cdot \tau + T}{\tau'}$$

ANNEXE **E**

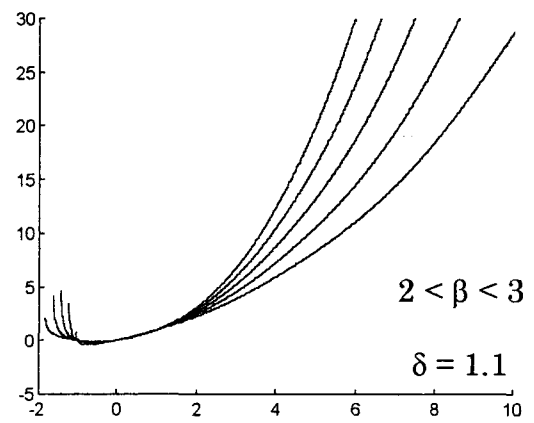
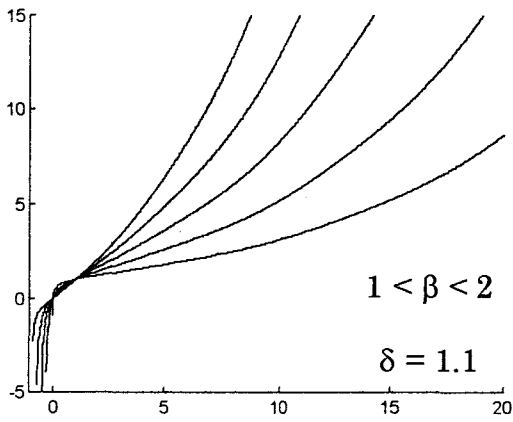
Graphes de transformée de Mellin de modèles usuels

Les graphes ci-après représentent le tracé des Mellin pour les différents modèles H_i (cf. glossaire) en fonction de la variable s (le gain λ est unitaire).

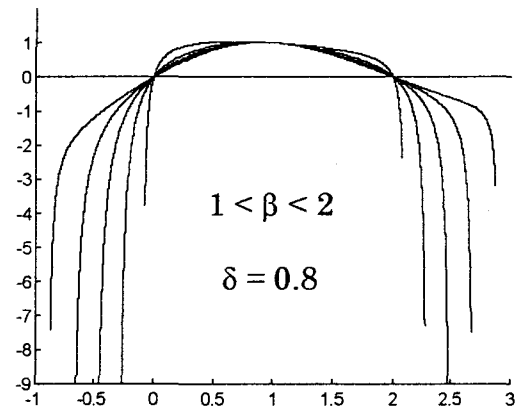
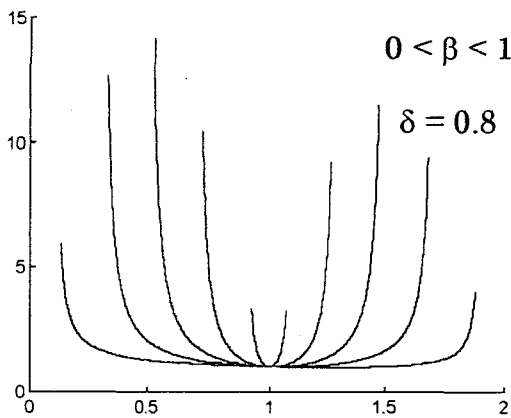
· Modèle TDI



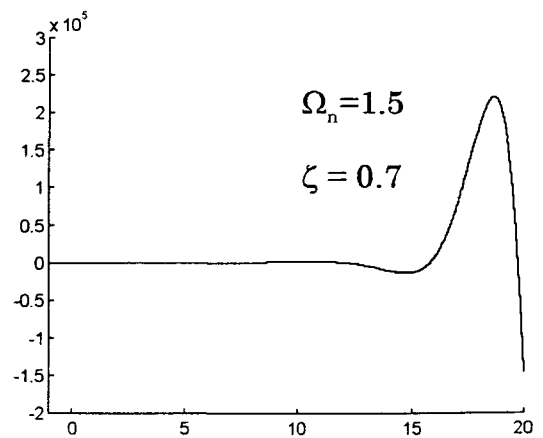
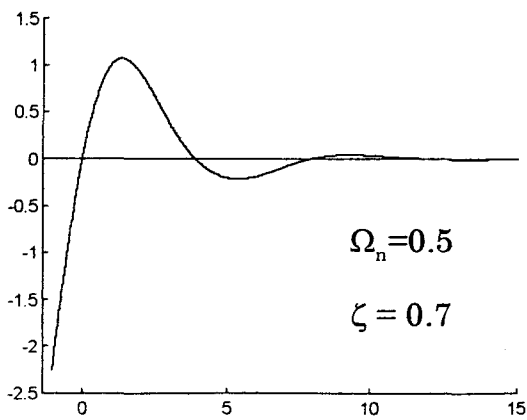
• Modèle TDI



• Modèle TDE



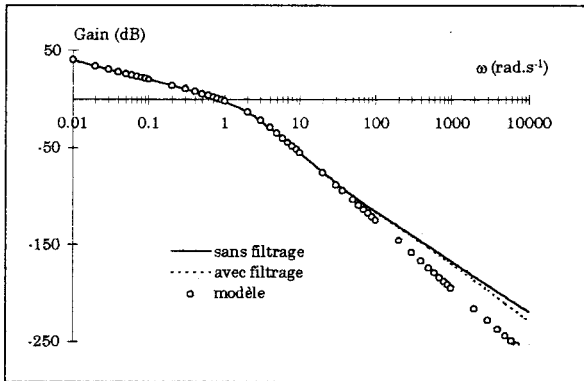
• Modèle 2d0



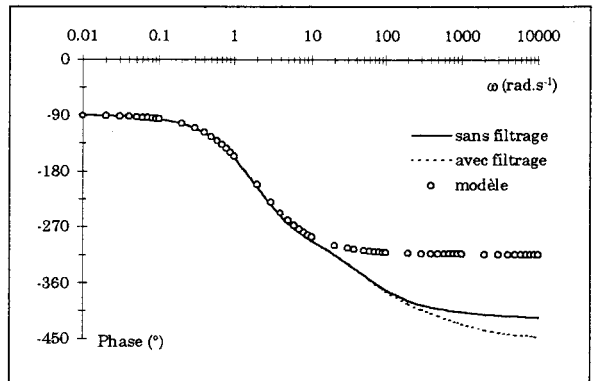
ANNEXE F

**Graphiques de
l'étude fréquentielle
du système corrigé
(chapitre 5, paragraphe 5.4)**

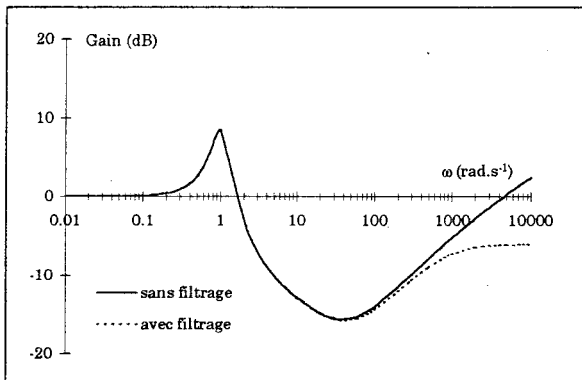
Modèle TDI/P, essai n°5



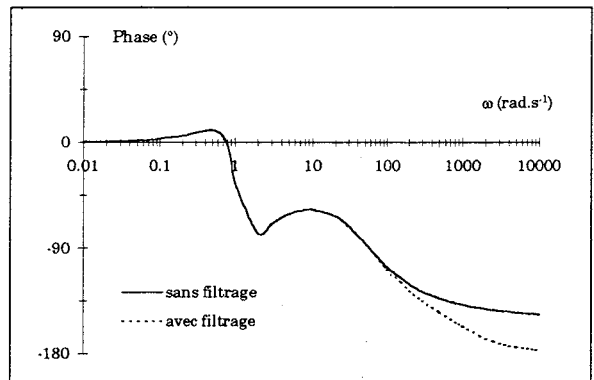
Gain du système corrigé et du modèle



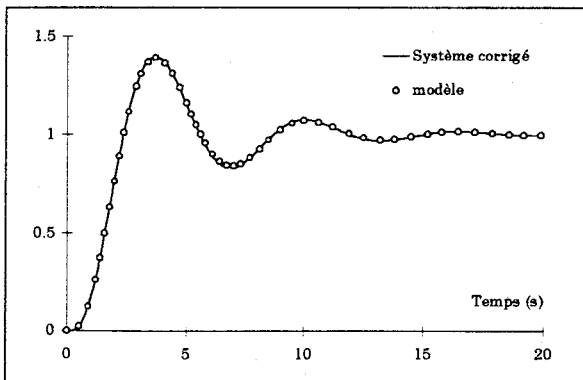
Phase du système corrigé et du modèle



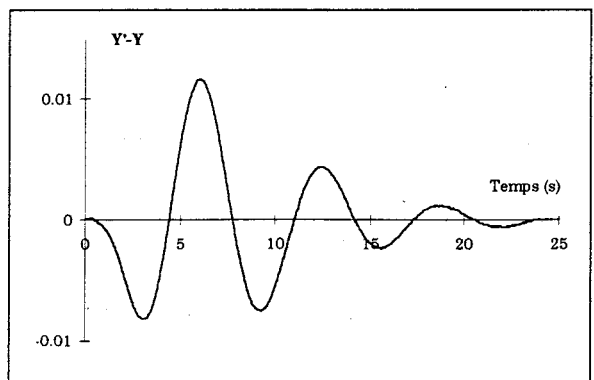
Gain de la sensibilité



Phase de la sensibilité

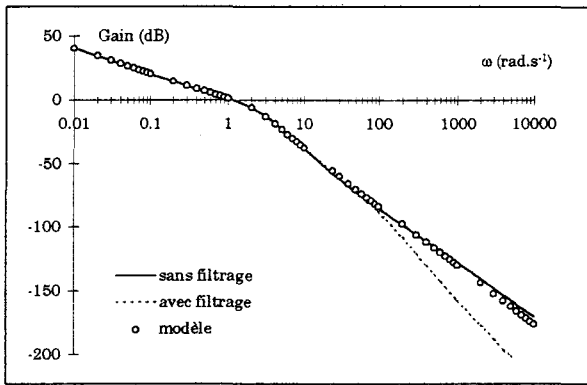


Réponses indicielles du système corrigé et du modèle en boucle fermée

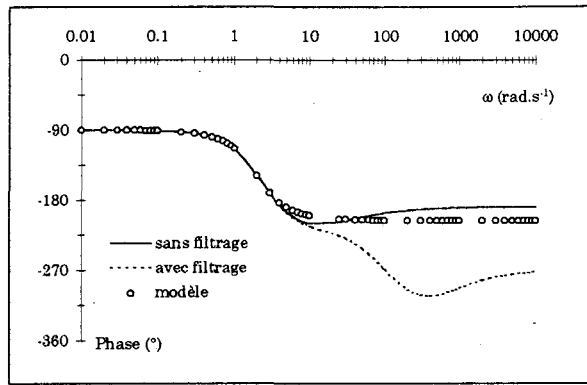


Ecart entre les réponses indicielles du système corrigé et du modèle

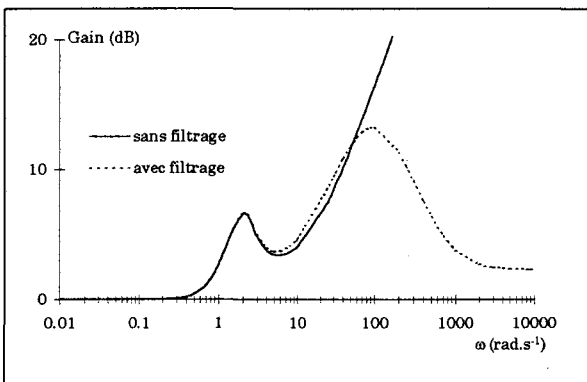
Modèle TDE/P, essai n°3



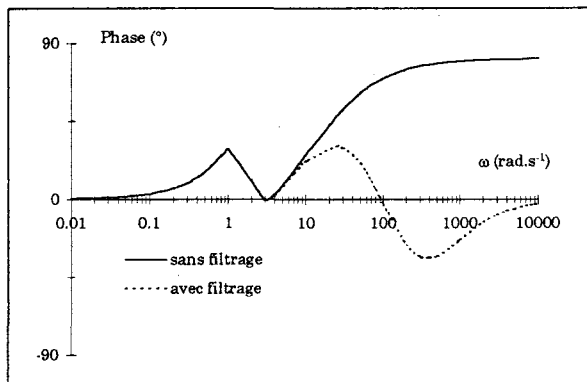
Gain du système corrigé et du modèle



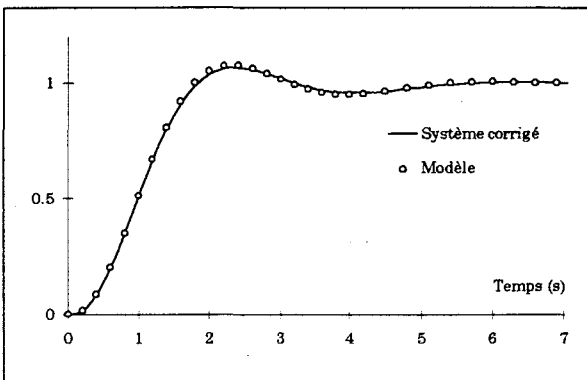
Phase du système corrigé et du modèle



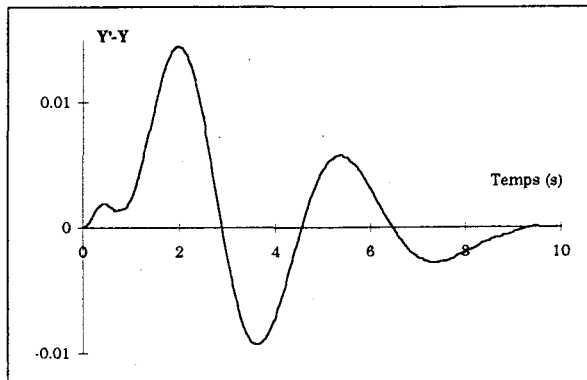
Gain de la sensibilité



Phase de la sensibilité

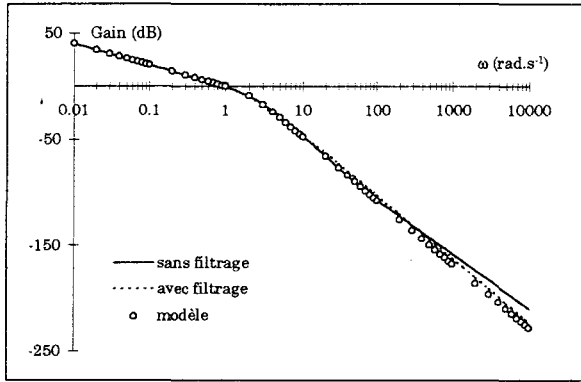


Réponses indicielles du système corrigé et du modèle en boucle fermée

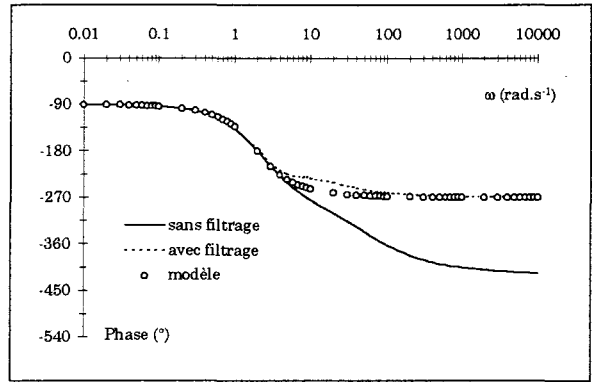


Ecart entre les réponses indicielles du système corrigé et du modèle

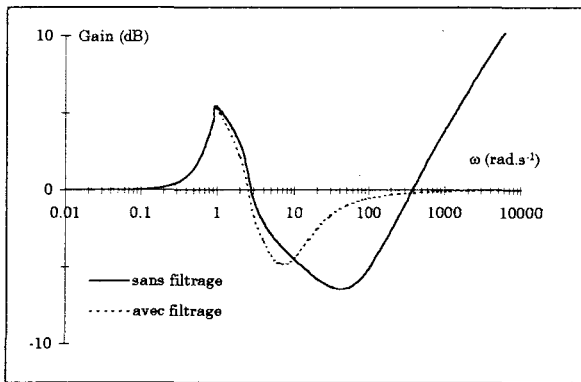
Modèle 2dO/P, essai n°5



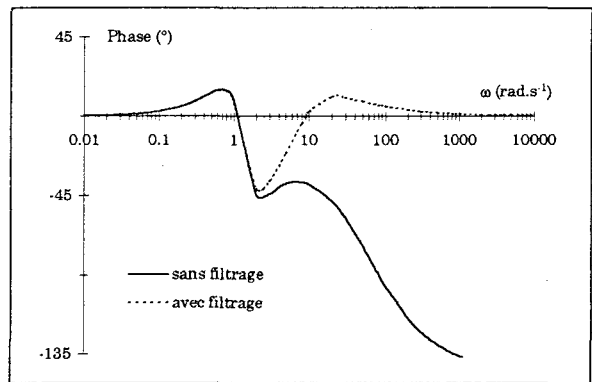
Gain du système corrigé et du modèle



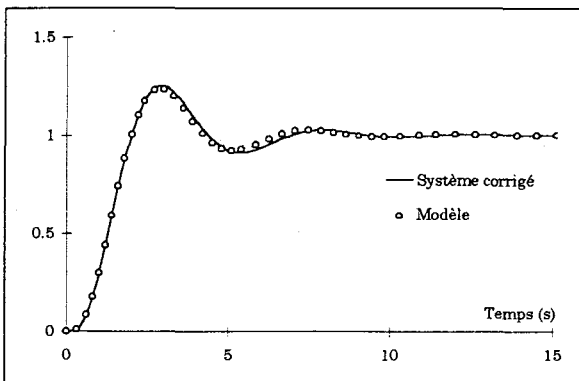
Phase du système corrigé et du modèle



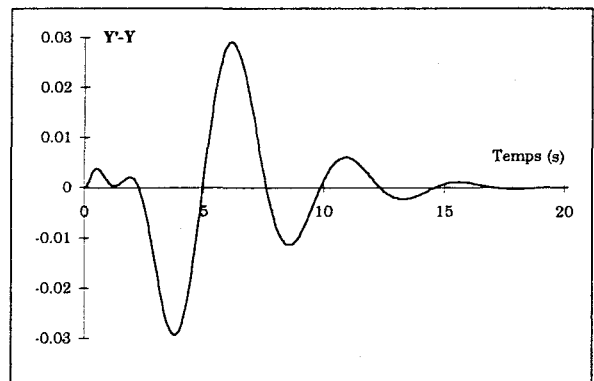
Gain de la sensibilité



Phase de la sensibilité

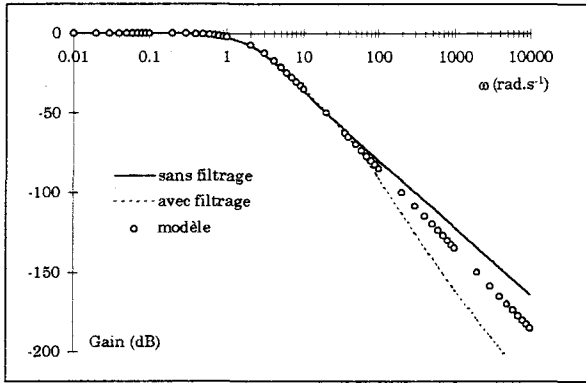


Réponses indicielles du système corrigé et du modèle en boucle fermée

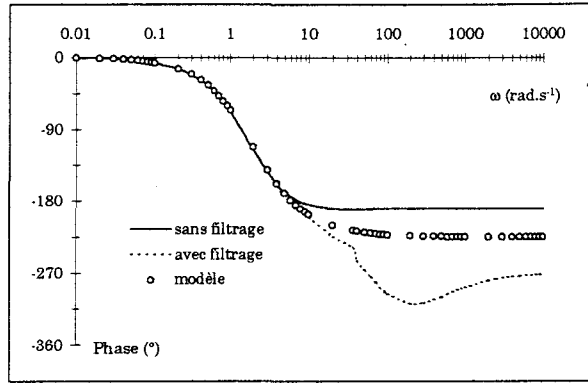


Ecart entre les réponses indicielles du système corrigé et du modèle

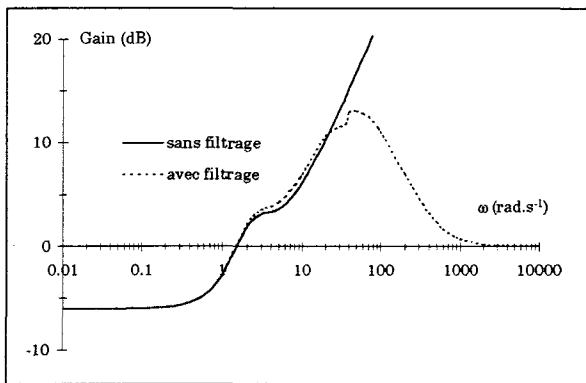
Modèle TDI, essai n°6



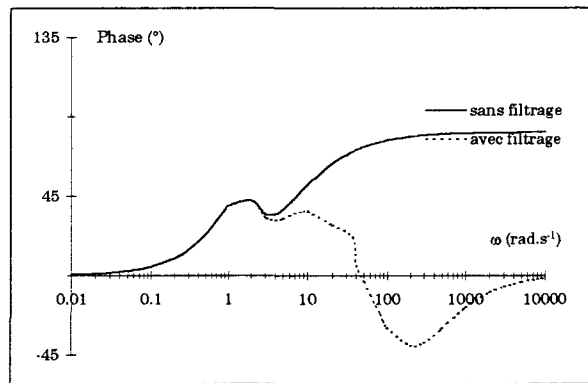
Gain du système corrigé et du modèle



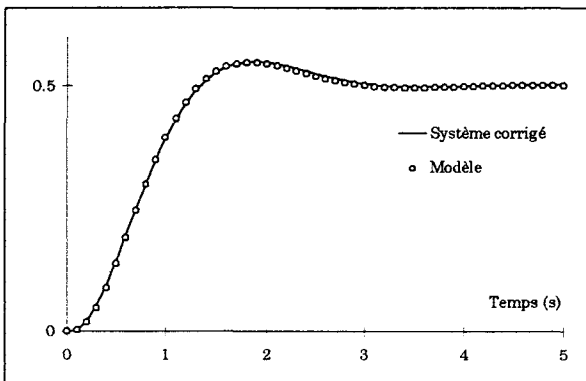
Phase du système corrigé et du modèle



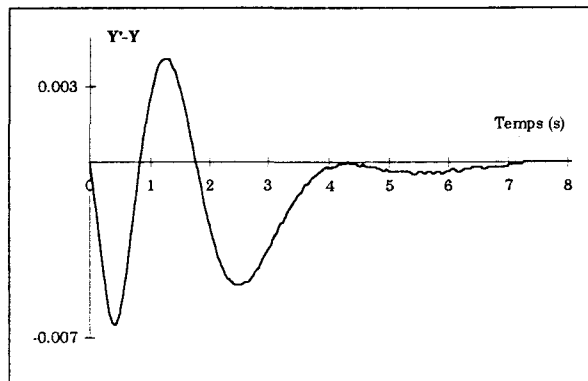
Gain de la sensibilité



Phase de la sensibilité

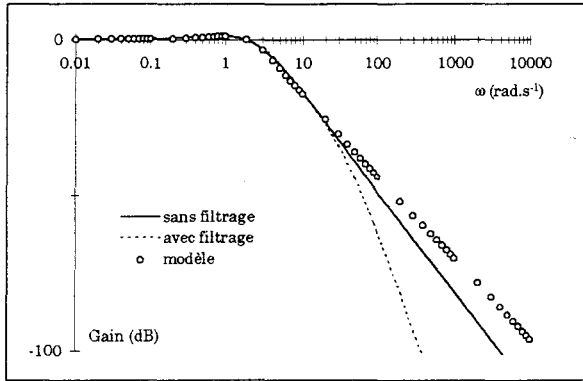


Réponses indicielles du système corrigé et du modèle en boucle fermée

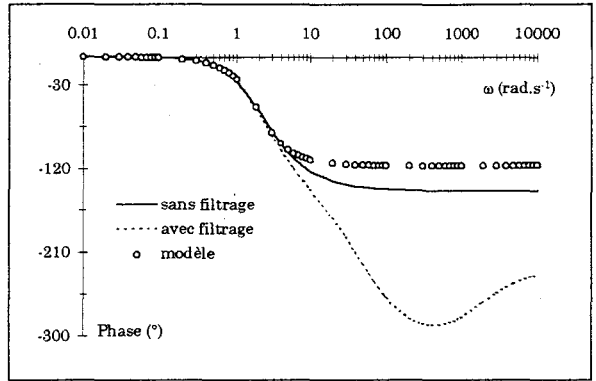


Ecart entre les réponses indicielles du système corrigé et du modèle

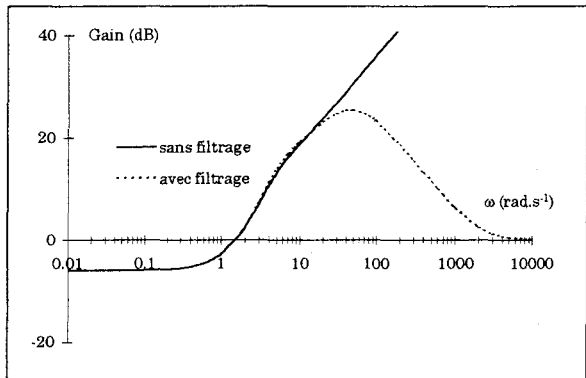
Modèle TDE, essai n°2



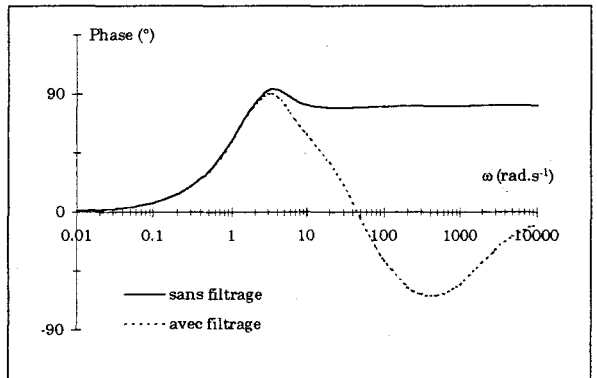
Gain du système corrigé et du modèle



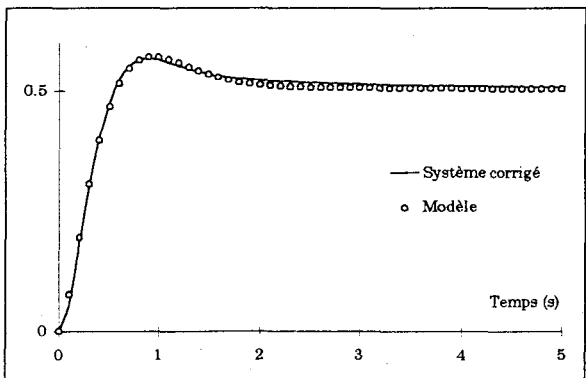
Phase du système corrigé et du modèle



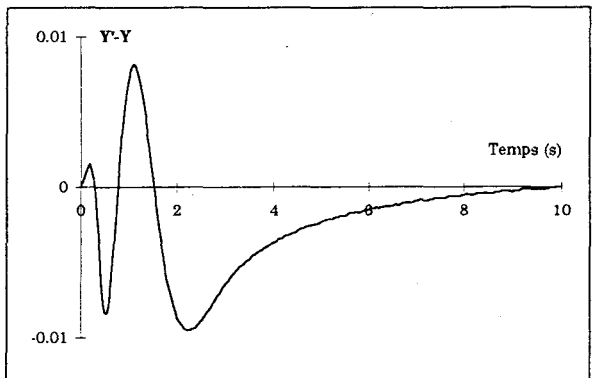
Gain de la sensibilité



Phase de la sensibilité

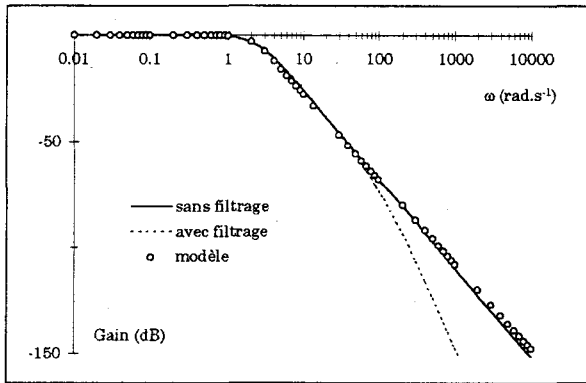


Réponses indicielles du système corrigé et du modèle en boucle fermée

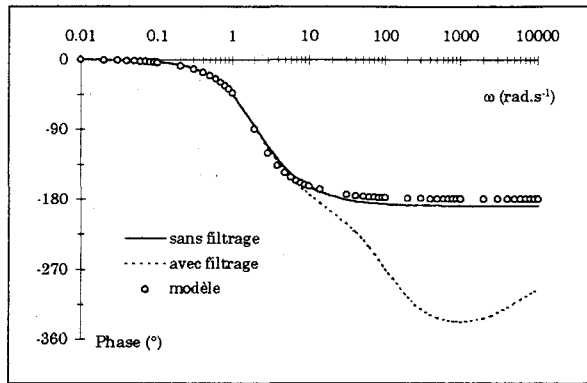


Écart entre les réponses indicielles du système corrigé et du modèle

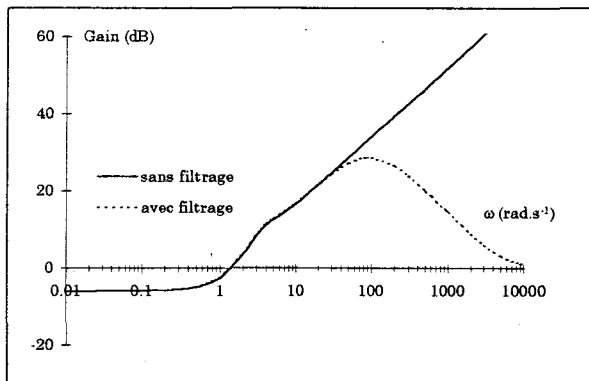
Modèle 2dO, essai n°6



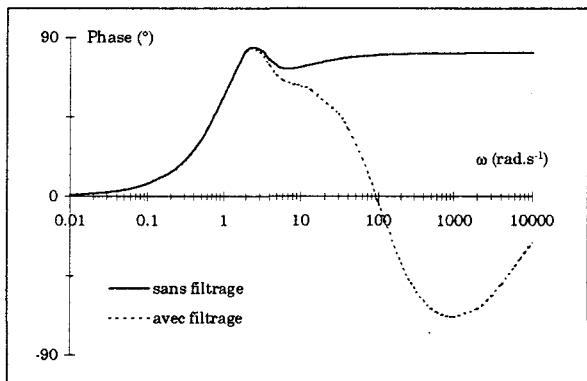
Gain du système corrigé et du modèle



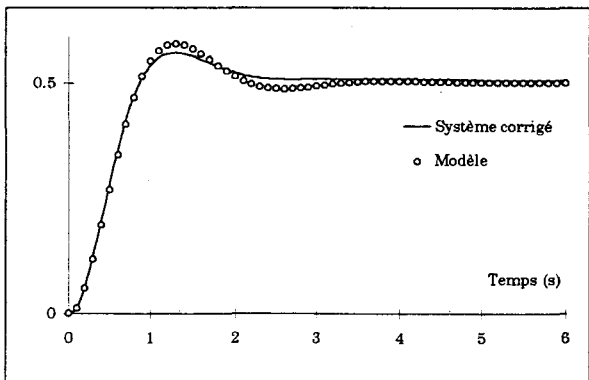
Phase du système corrigé et du modèle



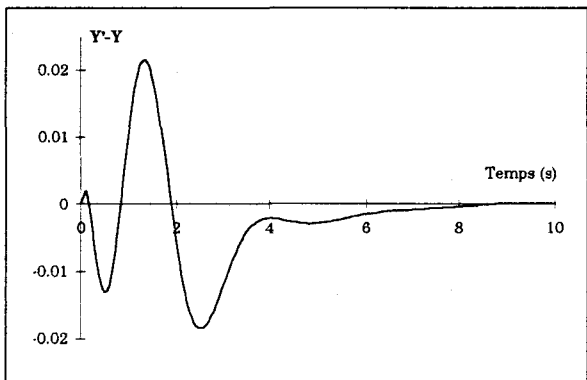
Gain de la sensibilité



Phase de la sensibilité

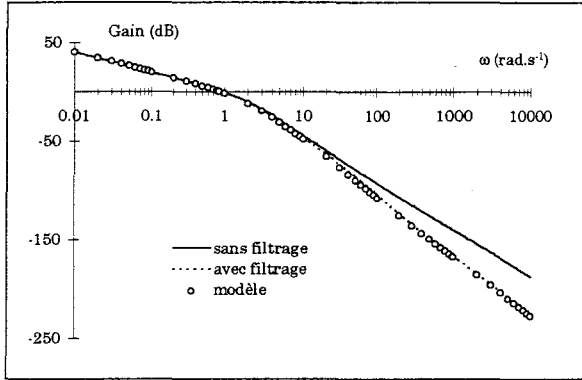


Réponses indicielles du système corrigé et du modèle en boucle fermée

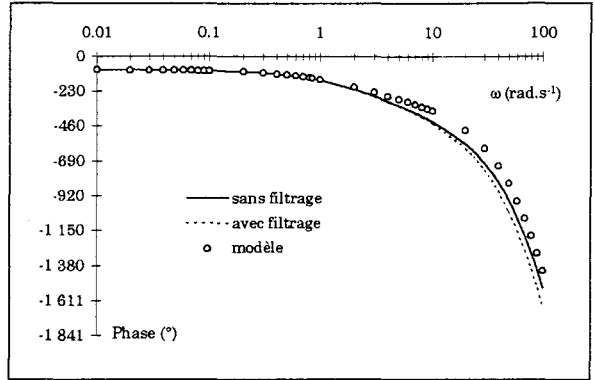


Ecart entre les réponses indicielles du système corrigé et du modèle

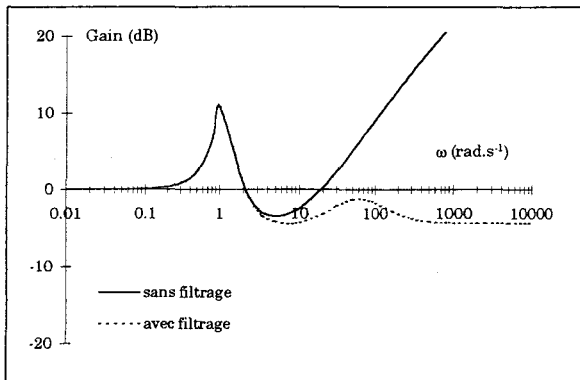
Modèle TDIR/P, essai n°3



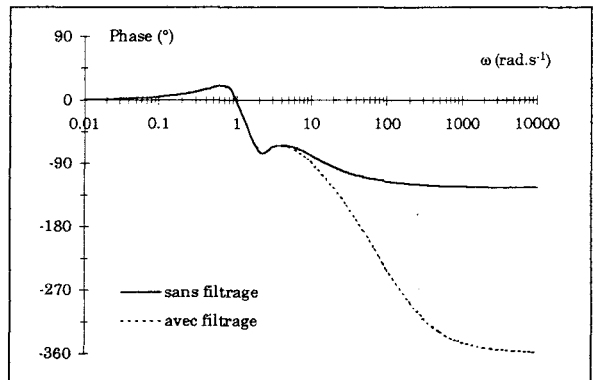
Gain du système corrigé et du modèle



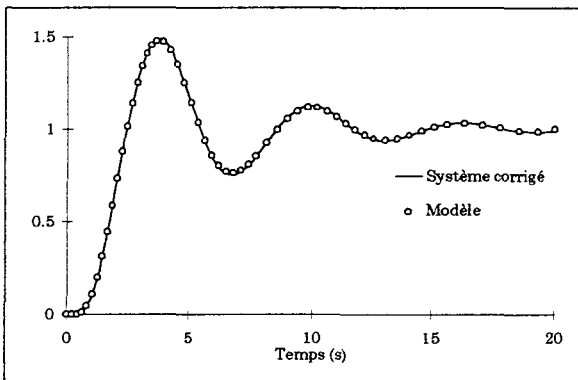
Phase du système corrigé et du modèle



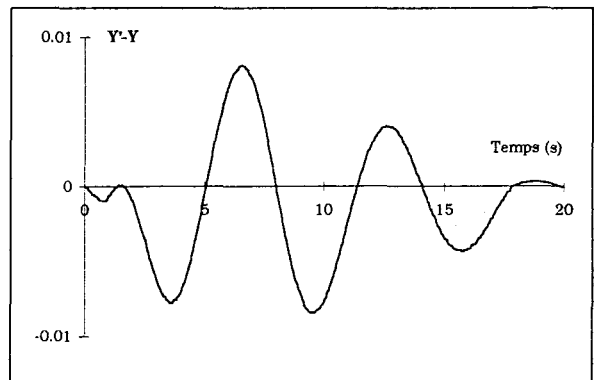
Gain de la sensibilité



Phase de la sensibilité



Réponses indicielles du système corrigé et du modèle en boucle fermée

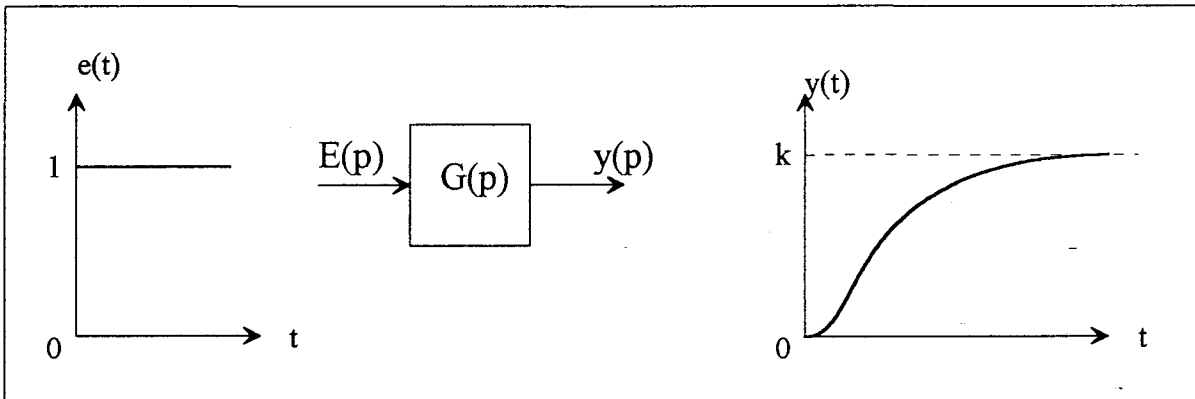


Écart entre les réponses indicielles du système corrigé et du modèle

ANNEXE G

Détermination pratique des Mellin

La commande non entière est élaborée à partir de la connaissance des Mellin du système à commander. La théorie impose l'obtention des Mellin du système, donc les Mellin de sa réponse impulsionnelle. Or, la réponse impulsionnelle ne peut être obtenue en pratique. En revanche, la réponse indicielle du système est souvent accessible. Comme pour le premier chapitre qui montre deux méthodes de détermination des moments temporels à partir de la réponse indicielle, il existe une méthode permettant de déterminer les Mellin d'un système à partir de sa réponse indicielle. Celle-ci utilise une fonction spécifique construite à partir de la réponse indicielle. Soit le système G sollicité par une entrée de type échelon unitaire:



Réponse indicielle d'un système G

Le théorème de convolution permet d'exprimer la sortie y en fonction de la réponse impulsionnelle de g par:

$$y(t) = \int_0^t e(t-\theta).g(t).dt$$

L'entrée du système étant un échelon supposé unitaire alors $e(t-\theta) = 1$.

Donc la réponse indicielle y s'écrit:

$$y(t) = \int_0^t g(t).dt$$

$$y(+\infty) = k \text{ (gain statique)}$$

Soit la fonction z construite à partir de y telle que:

$$z(t) = k - y(t)$$

Il est supposé que cette fonction z peut être majorée par une fonction d'ordre exponentiel décroissant. Donc, les Mellin de cette fonction z peuvent donc être calculés par l'intégrale suivante:

$$M(z, s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} .z(t).dt$$

La dérivée de la fonction z est liée à la réponse impulsionnelle de g :

$$\frac{d}{dt}[z(t)] = \frac{d}{dt}[k - y(t)] = -g(t)$$

Les Mellin de la dérivée $dz(t)/dt$ peuvent s'exprimer en fonction des Mellin de la fonction $g(t)$ par la relation:

$$M(dz(t)/dt, s) = -M(g, s)$$

En appliquant les règles opératoires de la transformée de Mellin (cf. annexe A), les Mellin de la dérivée $dz(t)/dt$ s'exprime en fonction de la fonction $z(t)$ par:

$$M(dz(t)/dt, s) = -(s - 1).M(z, s - 1)$$

Donc, les Mellin de g peuvent être déterminés à partir des Mellin de z :

$$M(g, s) = (s - 1).M(z, s - 1)$$

ou encore, en divisant par $\Gamma(s)$:

$$B(g, s) = B(z, s - 1)$$

Il est donc possible de déterminer les Mellin de la réponse impulsionnelle g à partir de la réponse indicielle y du système. Il suffit donc de calculer les Mellin de la fonction z construite à partir de y afin de déterminer les Mellin de la réponse impulsionnelle g du système. Les Mellin de g sont donc définis par:

$$M(g, s) = (s - 1) \cdot \int_0^{+\infty} t^{s-2} \cdot [k - y(t)] \cdot dt$$

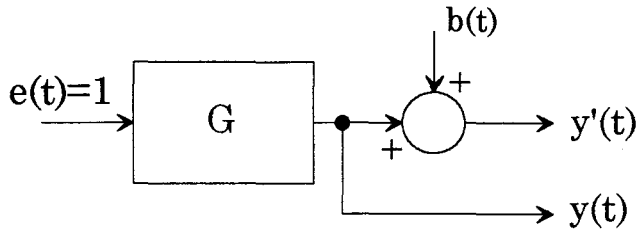
$$M(g, 1) = y(+\infty) = k$$

Cette formulation est similaire (décalage d'un ordre entier) à la relation (1.21) donnant le moment temporel d'ordre n de g . Elle est ici utilisable pour s réel supérieur à l'unité. Cependant, il est nécessaire de déterminer de façon correcte le gain statique du système qui entre dans la détermination des Mellin de g . Afin de calculer cette intégrale, soit la réponse indicielle analytique du système est connue, soit il est possible d'utiliser la méthode des trapèzes pour obtenir les Mellin de façon numérique. Dans ce cas, seuls les Mellin jusqu'à l'ordre $s=3$ sont significatifs (conclusions similaires à la théorie des moments temporels à cause du bruit de mesure).

Afin de valider en partie cette méthode de détermination des Mellin, un modèle de type TDI est sollicité par une entrée de type échelon unitaire afin d'obtenir la réponse indicielle à laquelle il est ajouté un bruit blanc $b(t)$ représentant 10% de la valeur finale.

Soit le système G suivant:

$$G(p) = \frac{k}{(1 + \tau \cdot p)^\alpha} \quad \text{avec} \quad k = 1, \tau = 0.5, \alpha = 2$$



e : entrée de type échelon
 b : bruit blanc
 y : réponse indicielle
 y' : réponse indicielle bruitée

Les Mellin de g sont calculés de façon numérique par discrétisation de l'intégrale (méthode des trapèzes) avec quatre pas d'échantillonnage différents. Ils sont alors comparés aux valeurs théoriques déterminées de façon analytique par la relation (3.16) du chapitre 3:

$$M(g, s) = k \cdot \tau^{s-1} \cdot \frac{\Gamma(s + \alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)} = (0, 5)^{s-1} \cdot \Gamma(s + 1)$$

s	Théorique	Mellin pour 4 pas d'échantillonnage				Ecart relatif par rapport à la valeur théorique			
		0.1	0.01	0.001	0.0001	0.1	0.01	0.001	0.0001
1.1	0.9764	1256.2	125.98	13.063	1.8571	128553%	12802%	1238%	90%
1.2	0.9592	631.36	63.702	7.0461	1.4498	65721%	6541%	635%	51%
1.3	0.9477	238.26	24.510	3.2210	1.1335	25041%	2486%	240%	20%
1.4	0.9414	80.252	8.7801	1.6886	1.0026	8425%	833%	79%	7%
1.5	0.9400	25.712	3.3671	1.1690	0.9593	2635%	258%	24%	2%
1.6	0.9432	8.3145	1.6576	1.0106	0.9495	782%	76%	7%	0.67%
1.7	0.9509	3.0450	1.1485	0.9735	0.9549	220%	21%	2%	0.42%
1.8	0.9629	1.5126	1.0121	0.9706	0.9664	57%	5%	0.80%	0.36%
1.9	0.9793	1.0798	0.9843	0.9826	0.9832	10%	0.51%	0.34%	0.40%
2.0	1.0000	0.9792	1.0066	1.0048	1.0053	2.1%	0.66%	0.48%	0.53%
2.1	1.0252	0.9868	1.0227	1.0312	1.0339	3.7%	0.24%	0.59%	0.85%
2.2	1.0551	1.0448	1.0651	1.0614	1.0623	0.98%	0.95%	0.60%	0.68%
2.3	1.0898	1.1139	1.0737	1.1013	1.1009	2.21%	1.48%	1.06%	1.02%
2.4	1.1297	1.1609	1.1253	1.1327	1.1412	2.76%	0.39%	0.27%	1.02%
2.5	1.1750	1.2305	1.1627	1.1900	1.1911	8.98%	1.05%	1.28%	1.37%
2.6	1.2262	1.2807	1.2761	1.2410	1.2431	4.44%	4.07%	1.21%	1.38%
2.7	1.2837	1.2270	1.2536	1.3135	1.3056	4.42%	2.34%	2.32%	1.71%
2.8	1.3480	1.4687	1.3817	1.3646	1.3805	8.95%	2.50%	1.23%	2.41%
2.9	1.4199	1.3863	1.3824	1.4629	1.4492	2.37%	2.64%	3.03%	2.06%

Résultats obtenus

Conclusion:

Pour être proche des valeurs théoriques, il est nécessaire de discrétiser l'intégrale avec une petite période d'échantillonnage.

Références
bibliographiques

Références bibliographiques

- [01] **D. Vrančić, Y. Peng, S Strmčnik and R. Hanus,**
A new tuning method for PI controllers based on a process step response,
CESA'96 IMACS Multiconference. Symposium on Control, Optimization
and Supervision, vol. 2, pages 790-794, juillet 1996.
- [02] **K. K. Tan, T. H. Lee and Q. G. Wang,**
*Enhanced Automatic Tuning Procedure for Process Control of PI/PID
Controllers,*
AIChE Journal, vol. 42, n° 9, pages 2555-2562, septembre 1996.
- [03] **K. J. Åström, T. Hägglund, C. C. Hang and W. K. Ho,**
Automatic Tuning and Adaptation for PID Controllers - A Survey,
Control Eng. Practice, vol. 1, n° 4, pages 699-714, 1993.
- [04] **A. A. Voda and I. D. Landau,**
A method for the Auto-calibration of PID Controllers,
Automatica, vol. 31, n° 1, pages 41-53, 1995.
- [05] **T. Hägglund and K. J. Åström,**
*Industrial Adaptive Controllers Based on Frequency Response
Techniques,*
Automatica, vol. 27, n° 4, pages 599-609, 1991.
- [06] **N. A. Khier, K. J. Aström, D. Auslander, K. C. Cheok, G. F. Franklin,
M. Masten and M. Rabins,**
Control Systems Engineering Education,
Automatica, vol. 32, n° 2, pages 147-166, 1996.
- [07] **A. Oustaloup,**
La dérivation non entière, théorie, synthèse et applications,
Traité des nouvelles technologies série automatique. Editions Hermes,
Paris, 1995.

- [08] **A. Oustaloup**,
La commande crone,
Editions Hermes, Paris, 1991.
- [09] **P. de Larminat**,
Automatique. Commande des systèmes linéaires,
Collection automatique, Editions Hermes, Paris, 1996.
- [10] **P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.-P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis**,
Analyse et régulation des processus industriels, Tome 1, Régulation continue,
Méthodes et pratiques de l'ingénieur, Editions Technip, Paris, 1993.
- [11] **J.-C. Trigeassou**,
Identification et commande des processus mono-entrée mono-sortie par la méthode des moments. Expérimentation sur calculatrice programmable,
Thèse de 3^{ème} cycle, Nantes, 1980.
- [12] **A. Oustaloup**,
Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire. Théorie et pratique,
Editions Masson, Paris, 1983.
- [13] **J. C. Trigeassou**,
Contribution à l'extension de la méthode des moments en automatique. Application à l'identification des systèmes linéaires,
Thèse d'Etat en Sciences fondamentale et appliquée, Poitiers, 1987.
- [14] **S. Colombo**,
Les Transformations de Mellin et de Hankel,
Applications à la Physique Mathématique, CNRS, 1959.
- [15] **P. Dréano**,
Identification des systèmes à représentation continue par moments partiels,
Thèse de Doctorat en Automatique, Poitiers, 1993.
- [16] **D. Dubois, J.-P. Brienne, L. Povy, H. Baussart**,
Parameters identification methods of a system described by an implicit derivative transmittance,
Proceeding of the International ICSC Symposia on Intelligent Industrial Automation and Soft Computing, pages A16-A20, Reading (GB), 1996.
- [17] **K. C. Daly and A. Colebourn**,
Padé approximation for State Space Models,
Int. J. Control, vol. 30, pages 37-47, 1979.

- [18] **D. V. Bandekas and D. P. Papadopoulos,**
Time Moment and Padé Approximation Methods Applied to the Order Reduction of MIMO Linear Systems,
 Journal of the Franklin Institute, vol. 329, n° 3, pages 521-538, 1992.
- [19] **P. Marques Da Costa,**
Identification par surparamétrisation et commande de processus par placement de moments,
 Thèse de Doctorat en Automatique, Poitiers, 1995.
- [20] **G. Davoust,**
Etude Industrielle des systèmes de réglage,
 Automatisme, tome X, n° 4, avril 1965.
- [21] **H. Rake,**
Step Response and Frequency Response Methods,
 Automatica, vol. 16, pages 519-526, 1980.
- [22] **A. Rachid,**
Systèmes de régulation,
 Automatique, Editions Masson, Paris, 1996.
- [23] **J.-P. Brienne, D. Dubois, L. Povy, H. Baussart,**
The use of the time moments and the Mellin transform for obtaining the parameters of any order type controller,
 Proceedings of the Second International ICSC Symposium on Intelligent Industrial Automation and Soft Computing, pages 124-128, Nîmes, 1997.
- [24] **H. Unbehauen and G. P. Rao,**
Continuous-time Approaches to System Identification - A Survey,
 Automatica, vol. 36, n° 1, pages 23-35, 1990.
- [25] **R. Isermann,**
Practical Aspects of Process Identification,
 Automatica, vol. 16, pages 575-587, 1980.
- [26] **L. Povy,**
Identification des processus,
 Editions Bordas, Paris, 1975.
- [27] **J. Richalet,**
Pratique de l'identification
 Traité de nouvelles technologies, série Automatique, 1991.

-
- [28] **Landau**
Identification et commande des systèmes,
2ème édition, Hermès, Paris, 1993.
- [29] **O. Laafia**,
Contribution à l'étude d'identification des systèmes non linéaires.
Application aux systèmes biologiques.
Thèse de 3eme cycle, Lille USTL, 1983.
- [30] **V. Diktin, A. Proudnikov**,
Transformations intégrales et calcul opérationnel,
Editions Mir, Paris, 1978.
- [31] **I. N. Sneddon**,
The use of Integral Transforms,
TMH Edition, 1974.
- [32] **I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik**,
Table of Integrals, Series and Products,
Academic Press, New York, 1980.
- [33] **A. M. A. El-Sayed**,
Linear Differential Equations of Fractional Orders,
Applied Mathematics and Computation 55, pages 1-12, 1993.
- [34] **M. Axtel and M. E. Bise**,
Fractional Calculus Applications in Control Systems,
Proceeding of the IEEE 1990, Naecon, vol. 2, pages 563-566, 1990.
- [35] **B. Bergon**,
*Commandes dynamiques robustes d'un système mécanique articulé: Une
approche par les systèmes d'ordre non-entier*,
Thèse de Doctorat, Bordeaux, 1986.
- [36] **P. Melchior**,
La dérivation généralisée en automatique à travers la commande crone,
Thèse de Doctorat en Automatique, Toulouse, 1989.
- [37] **B. Mbodje and G. Montseny**,
Boundary Fractional Derivative Control of the Wave Equation,
IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, n° 2, février 1995.
- [38] **B. Mbodje and G. Montseny**,
*Optimal Models of Fractional Integrators and Application to Systems with
Fading Memory*,
IEEE/SMC, pages 65-70, juillet 1993.
-

- [39] **J.-L. Lavoie, R. Tremblay,**
Fundamental properties of fractional derivatives via Pochhammer integrals,
 Proceedings of the International Conference on Fractional Calculus and its applications, pages 323-356, 1974.
- [40] **D. Dubois, J.-P. Brienne, L. Povy, H. Baussart,**
Study of a system described by an implicit derivative transmittance of non integer with or without time delay,
 Proceeding of the Cesa '96 IMACS Multiconference Symposia on Control, Optimization and supervision, vol. 2, pages 826-830, Lille, 1996.
- [41] **K. Hashimoto, S. Takahashi and H. Amano,**
Realization of a Noninteger-Order Integrator,
 Electrical Engineering, vol. 89, n° 11, pages 94-101, 1969.
- [42] **M. Ichise, Y. Nagayanagi and T. Kojima,**
An Analog Simulation of Non-Integer Order Transfer Functions for Analysis of Electrode Processes,
 J. Electroanal. Chem., 33, pages 253-265, 1971.
- [43] **F. L. N-Nagy, A. Uraz and S. Takahashi,**
Generalized exponential functions for system analysis and synthesis,
 Int. J. Systems Sci., vol. 5, n° 7, pages 655-671, 1974.
- [44] **J.-P. Brienne, D. Dubois, L. Povy, H. Baussart,**
Time method to control systems described by an implicit derivative transmittance,
 Proceeding of the Conference IFAC on Control of Industrial System, vol. 1, pages 627-630, Belfort, 1997.
- [45] **V. Strejc,**
Approximation des réponses transitoires apériodiques,
 Revue du courant faible n° 18, 1957.
- [46] **J.-F. Quentin,**
De quelques perfectionnements apportés à la méthode d'identification de V. Strejc,
 Automatisme, tome XII, mai 1967.

Table
des
matières



Table des matières

AVANT PROPOS	3
SOMMAIRE	5
GLOSSAIRE	7
INTRODUCTION	13
CHAPITRE 1: LES MOMENTS TEMPORELS & LES SYSTEMES	19
1.1 Introduction	21
1.2 Définition des moments temporels	22
1.2.1 Existence des moments temporels d'un système	22
1.2.2 Les moments temporels	23
1.2.3 Les moments temporels partiels	23
1.2.4 Les moments temporels et la transformée de Laplace	24
1.2.5 Les moments temporels et la dérivée de la transformée de Laplace ..	26
1.2.6 Les moments temporels et les approximants de Padé de la transformée de Laplace	26
1.3 Détermination théorique des moments temporels d'un système	27

1.3.1	Détermination des moments temporels d'un système connaissant la transmittance	27
1.3.2	Détermination des moments temporels d'un système possédant une intégration d'ordre k	27
1.3.3	Détermination des moments temporels d'un système possédant une dérivation d'ordre k	29
1.3.4	Détermination des moments temporels d'un système à retard pur ..	31
1.3.5	Détermination des moments temporels d'un système en boucle fermée	32
1.4	Détermination pratique des moments temporels d'un système	34
1.4.1	Le système possède un retard	34
1.4.2	Entrée de surface finie	34
1.4.3	Entrée de type échelon	36
1.4.3.1	Cas d'un système ne possédant ni intégration, ni dérivation	37
1.4.3.2	Cas d'une transmittance possédant une dérivation	41
1.4.3.3	Cas d'une transmittance possédant une intégration	42
1.5	Conclusion	44
 CHAPITRE 2: LES MOMENTS TEMPORELS & LA COMMANDE ENTIERE DES SYSTEMES		47
2.1	Introduction	49
2.2	Représentation du réseau correcteur par une série entière	50
2.2.1	Présentation du correcteur	50
2.2.2	Détermination matricielle des moments temporels du système corrigé	51
2.2.3	Relation liant le système corrigé au modèle	52
2.2.4	Détermination des paramètres du correcteur	53
2.3	Etude du correcteur de type PID par la méthode des moments temporels ..	54
2.3.1	Présentation du correcteur PID	54
2.3.2	Obtention des moments temporels du système corrigé	55
2.3.2.1	Première méthode	55
2.3.2.2	Seconde méthode	58

2.3.3	Relation de récurrence entre les moments temporels du modèle et du système corrigé	60
2.3.3.1	Modèle possédant une intégration	60
2.3.3.2	Modèle sans intégration	61
2.3.4	Identification des paramètres du correcteur	62
2.3.4.1	Modèle possédant une intégration	62
2.3.4.2	Modèle sans intégration	65
2.4	Moments temporels de différents modèles usuels	67
2.4.1	Modèle de type Transmittance à Dérivée Implicite (TDI)	67
2.4.2	Modèle de type Transmittance à Dérivée Explicite (TDE)	71
2.4.3	Modèle de type second ordre oscillant (2dO)	72
2.5	Conclusion	73
 CHAPITRE 3: LA TRANSFORMEE DE MELLIN & LA COMMANDE NON ENTIERE DES SYSTEMES		77
3.1	Introduction	79
3.2	Etude du correcteur avec des opérateurs fractionnaires par la méthode des moments temporels	80
3.2.1	Présentation du correcteur	80
3.2.2	Relation liant les moments temporels du système à corriger aux paramètres du correcteur	82
3.2.3	Problème posé par les moments temporels	83
3.3	Résolution de la commande avec des opérateurs non entiers par la transformée de Mellin	84
3.3.1	La transformée de Mellin	84
3.3.1.1	Définition	84
3.3.1.2	Propriétés de la transformée de Mellin	85
3.3.1.3	Règles opératoires usuelles de la transformée de Mellin	86
3.3.2	Relation liant les Mellin du système à corriger aux paramètres du correcteur	87
3.3.3	Relation de récurrence entre les Mellin du modèle et du système à corriger	88
3.3.4	Identification des paramètres du correcteur	90

3.3.4.1	Problèmes posés par la résolution de la relation donnant les paramètres du correcteur	90
3.3.4.2	Problème posé par la démarche de résolution de la relation ..	91
3.3.4.3	Démarche adoptée pour résoudre la relation	93
3.4	Transformée de Mellin de différents modèles usuels	96
3.4.1	Modèle de type Transmittance à Dérivée Implicite (TDI)	96
3.4.2	Modèle de type Transmittance à Dérivée Explicite (TDE)	98
3.4.3	Modèle de type second ordre oscillant (2dO)	100
3.4.4	Modèle possédant un retard pur. Domaine de validité	101
3.5	Conclusion	103
 CHAPITRE 4: LES MOMENTS TEMPORELS & L'IDENTIFICATION D'UN SYSTEME		105
4.1	Introduction	107
4.2	Etude du processus thermique	108
4.2.1	Présentation du processus	108
4.2.2	Relevé de la réponse indicielle et modélisation du processus	110
4.2.3	Détermination des moments temporels du modèle du processus	112
4.2.4	Détermination des moments temporels du système réel	116
4.2.5	Conclusion	118
4.3	Modélisation du processus et identification des paramètres	118
4.3.1	Modélisation par un modèle de type TDI	119
4.3.2	Modélisation par un modèle de type TDIR	120
4.3.3	Relation entre les moments temporels des deux modèles	122
4.3.4	Passage du modèle TDIR au modèle TDI	123
4.3.5	Passage du modèle TDI au modèle TDIR	125
4.3.6	Application	126
4.3.6.1	Modélisation du système par une TDI	127
4.3.6.2	Modélisation du système par une TDIR	128
4.4	Conclusion	130

CHAPITRE 5: LA COMMANDE & SON APPLICATION A UN SYSTEME	133
5.1 Introduction	135
5.2 Commande entière	135
5.3 Commande non entière par la transformée de Mellin	140
5.3.1 Commande non entière avec un modèle possédant une intégration ..	142
5.3.1.1 Modèle 1: TDI/P	143
5.3.1.2 Modèle 2: TDE/P	145
5.3.1.3 Modèle 3: 2dO/P	147
5.3.1.4 Conclusion	149
5.3.2 Commande non entière avec un modèle sans intégration	150
5.3.2.1 Modèle 4: TDI	150
5.3.2.2 Modèle 5: TDE	152
5.3.2.3 Modèle 6: 2dO	154
5.3.2.4 Conclusion	155
5.3.3 Commande non entière du système TDIR avec un modèle TDIR/P ..	156
5.4 Etude fréquentielle	158
5.4.1 Expressions fréquentielles	160
5.4.2 Détermination des paramètres	162
5.4.2.1 Détermination du gabarit fréquentiel	162
5.4.2.2 Détermination des paramètres du filtrage de l'action dérivée du correcteur	163
5.4.3 Résultats	163
5.4.4 Simulation du système corrigé	164
5.5 Conclusion	165
 CONCLUSION GENERALE	 167

ANNEXES	171
Annexe A: La transformation de Mellin	173
Annexe B: Equivalence entre la transformée de Mellin d'une fonction et sa transformée de Laplace	175
Annexe C: La dérivée non entière	177
Annexe D: Equivalence du modèle TDIR au modèle TDI	179
Annexe E: Graphes de transformée de Mellin de modèles usuels	181
Annexe F: Graphiques de l'étude fréquentielle du système corrigé	183
Annexe G: Détermination pratique des Mellin	191
 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	 195
 TABLE DES MATIERES	 203

