N° d'ordre : 2184

THÈSE DE DOCTORAT

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ: MATHÉMATIQUES

par

Abderrahim YACHOU

Titre de la thèse: SUR LES VARIÉTÉS SEMI-KÄHLÉRIENNES

Soutenue le 9 janvier 1998 devant la commission d'Examen:

Président	A . Verjovsky	*Université de Lille I*
Directeur de Thèse	F . Lescure	*Université de Lille I*
Rapporteurs	P . Gauduchon	*Ecole Polytechnique, Palaiseau*
	K . Oeljeklaus	*Université d'Aix-Marseille I*
Membres	A . Hanani	*Université de Lille I*
	L . Gruson	*Université de Versailles*
	S . Ivachkovitch	*Université de Lille I*
	Y. Hantout	*Université de Lille I*

A mes parents

A ma femme

A ma famille

A mes amis

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Remerciements

Je remercie très vivement mon directeur de thèse F. Lescure qui m'a initié à la géométrie hermitienne, et a guidé mes débuts de jeune chercheur avec une attention constante et sincère. Ce travail lui doit beaucoup.

Je tiens à remercier Monsieur A. Verjovsky d'avoir accepté de présider le jury de soutenance de cette thèse.

J'adresse mes sincères remerciements à Messieurs les Professeurs P. Gauduchon et K. Oeljeklaus qui ont bien voulu juger ce travail. Leurs suggestions m'ont permis d'améliorer la rédaction de ce travail.

Je souhaite exprimer mes profonds remerciements à Messieurs A. Hanani, L. Gruson, S. Ivachkovitch et Y. Hantout, d'avoir accepté d'examiner le travail final.

Mes remerciements vont également au service de reprographie de l'U.F.R. de Mathématiques pour la réalisation matérielle de ce travail.

TABLE DES MATIERES

§0. Introduction

Soient M une variété complexe compacte, de dimension complexe $m \geq 2$, et $\tilde{g}$ une métrique riemannienne *hermitienne* sur M; qui s'écrit en coordonnées locales holomorphes $\tilde{g} = \sum g_{\alpha,\bar{\beta}} dz^\alpha \otimes dz^{\bar{\beta}} + \sum g_{\bar{\beta},\alpha} dz^{\bar{\beta}} \otimes dz^\alpha$, où la $m \times m$- matrice $g = (g_{\alpha,\bar{\beta}})$ est hermitienne et définie positive. On dira quelquefois abusivement que g elle même est la métrique riemannienne hermitienne. Dans ce contexte, on appelle "forme de Kähler" (bien qu'elle ne soit pas nécessairement fermée) la $(1,1)$-forme d'expression locale $F = ig_{\alpha,\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}}$.

A ces données on associe classiquement la 1-*forme de torsion* θ de la connexion de Chern, dont on trouvera une étude systématique dans [2]. Soit $\Phi = \dfrac{1}{2^r}\displaystyle\int_M |\theta|^{2r} v_g$ la fonctionnelle définie sur l'espace $\mathcal{M}_1$ des métriques hermitiennes de volume total égal à 1. L'étude de cette fonctionnelle pour $r = 1$ a été faite en [2]. On y montre que lorsque la variété M est une *surface* complexe, les points critiques éventuels de Φ sont exactement les métriques semi-kählériennes (notion qui pour une surface coïncide avec celle de métrique kählérienne). A la fin de cette étude, on se pose ([2, p. 512]) la question de savoir si ce résultat reste toujours vrai lorsque la dimension complexe est supérieure ou égale à trois.

Notre objet consiste ici précisément à répondre positivement à cette question par l'énoncé suivant (Théorème 12) : *Soit M une variété complexe, compacte, hermitienne, de dimension complexe égale à m, si r est un nombre réel tel que : $1 \leq r \leq m$, les points critiques de la fonctionnelle Φ sont exactement les métriques semi-kählériennes.*

Notre méthode consiste, comme dans [2], à construire deux inégalités en sens contraire. Cette construction toutefois diffère sensiblement de celle faite en [2] : En effet nous explicitons ici la variation à l'ordre 1 de la forme de torsion par changement de métrique, alors que l'ingénieuse méthode de [2] permet de s'en dispenser au moyen d'un artifice qui n'est utilisable qu'en dimension 2. Enfin on doit observer des propriétés de positivité (au sens de P. Lelong) pour certaines (q,q)-formes qui apparaissent; propriétés qui sont immédiates en dimension 2.

Ce travail a donné lieu à un article à paraître dans le journal "Indagationnes Mathematicae" ([10]).

Le second travail dans cette thèse est consacré à la caractérisation des métriques hermitiennes standard introduites par P.Gauduchon ([2, p.502]) qui en a prouvé l'existence et l'unicité (à un facteur multiplicatif constant près) dans chaque classe conforme de métriques hermitiennes. Nous en donnons deux caractérisations : La première (Proposition 13) est qu'elles sont les seules qui réalisent le minimum de la fonctionnelle $G(F) = \int_M (\partial^* \vartheta)^r v_g$, avec r un entier pair, définie sur $\mathcal{M}_1$.

La deuxième (Proposition 15) est qu'elles sont aussi les seules qui réalisent le minimum dans une classe conforme de $\mathcal{M}_1$ de la même fonctionnelle G et avec $r \leq m$. Ce travail a donné lieu à une note à paraître aux C.R. Acad. sci. de Paris ([11]).

Enfin la dernière partie de cette thèse est consacrée à l'étude des variétés parallélisables $M = G/\Gamma$, où G est un groupe de Lie complexe et Γ un sous-groupe discret de G; elles sont semi-kählériennes (Proposition 17). Si de plus G est semi-simple, nous montrons que la $(m-1, m-1)$-forme F^{m-1} est d-exacte (Proposition 18).

Une des premières conséquences de ce dernier résultat est déjà que l'annulation du deuxième nombre de Betti ne saurait être élémentairement une obstruction cohomologique à la semi-kählériannité comme c'est évidemenent le cas pour la kählériannité. Comme seconde conséquence, on retrouve un résultat ancien démontré par H.Grauert et R.Remmert [4] par une voie toute différente : *Il n'existe pas d'hypersurfaces complexes (singulières ou non) dans $M = G/\Gamma$ dès lors que G est un groupe de Lie complexe semi-simple* . Enfin une dernière conséquence est que le degré associé à tout fibré en droites complexes par Paul Gauduchon, est toujours nul. Ce travail a fait l'objet d'une publication ([9]).

§1 Rappels, notations et définitions

Soit M une variété analytique complexe M. Son fibré tangent réel TM est naturellement doté d'un opérateur de multiplication complexe J. Une métrique riemannienne g que l'on sait toujours exister avec cette propriété (*cf* [7]), est dite hermitienne si et seulement si J est un opérateur orthogonal pour g, *i.e.* ,

$$g(\mathrm{J}X, \mathrm{J}Y) = g(X, Y),$$

pour tout champ de vecteurs X, Y de M. On dira alors plus brièvement que le triplet (M, g, J), ou tout simplement M, est une variété hermitienne.

Dans toute la suite nous supposerons et sauf mention expresse du contraire, que $\dim_{\mathbb{C}} M = m$. La métrique hermitienne g, ainsi que la structure complexe J se prolongent sur le complexifié $T^{\mathbb{C}}M$ du fibré tangent TM respectivement en une forme $\mathbb{C}$-bilinéaire et en un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire; et ceci de manière unique. Nous noterons ces prolongements respectivement, encore par g et J. A la forme $\mathbb{C}$-bilinéaire g, on associe canoniquement une 2-forme F sur M définie par :

$$g(X, Y) = F(X, \mathrm{J}Y),$$

pour tout X, Y du fibré tangent complexifié. Cette 2-forme F, qui est réelle et invariante par la structure complexe J, est appelée la forme de Kähler associée à la métrique hermitienne g.

Dans tous ce qui suivra nous utiliserons les conventions (et notamment celle d'Einstein) et notations du calcul différentiel absolu holomorphe au moyen des coordonnées locales telles exposées dans [5]; en particulier les indices grecs varieront de 1 à m et les indices grecs conjugués varieront de $\bar{1}$ à $\bar{m}$; ainsi, la métrique hermitienne g et la forme de Kähler F s'exprimeront localement par :

$$\tilde{g} = \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz^{\alpha} \otimes dz^{\bar{\beta}} + \sum g_{\bar{\alpha}\beta} dz^{\bar{\alpha}} \otimes dz^{\beta},$$

et

$$F = i g_{\alpha\bar{\beta}} dz^{\alpha} \wedge dz^{\bar{\beta}}.$$

où $g_{\alpha\bar{\beta}} = g(\dfrac{\partial}{\partial z^{\alpha}}, \dfrac{\partial}{\partial z^{\bar{\beta}}})$ et $(g_{\alpha,\bar{\beta}})$ est une $m \times m$-matrice hermitienne définie positive.

Il est évidemment clair que la variété M est orientée par la (m,m)-forme $v_g = \dfrac{F^m}{m!}$ et il est connu que cette forme se trouve alors être aussi la forme volume riemannien (*cf* [7]) d'expression locale :

$$v_g = i^m \det(g_{\alpha\bar{\beta}}) dz^1 \wedge dz^{\bar{1}} \wedge \ldots \wedge dz^m \wedge dz^{\bar{m}}.$$

On note encore J son opérateur "contragrédient" sur les formes qui consiste donc à multiplier une (p,q)-forme par le nombre complexe i^{q-p}. Nous désignons par $\langle , \rangle$ le produit scalaire hermitien ponctuel sur l'espace des formes différentielles de M classiquement défini comme dans [5] et [6] explicité comme suit :

Désignons par $(g^{\bar{\alpha},\beta})$ l'inverse de la matrice $(g_{\alpha,\bar{\beta}})$, *i.e.* , supposons vérifiées les égalités :

$$g^{\bar{\alpha}\beta} g_{\beta\bar{\gamma}} = \delta^{\bar{\alpha}}_{\bar{\gamma}}, \qquad g_{\alpha,\bar{\beta}} g^{\bar{\beta},\gamma} = \delta^{\gamma}_{\alpha},$$

alors si ω et ψ deux (p,q)-formes sur M, respectivement d'expressions locales :

$$\omega = \frac{1}{p!q!} \omega_{\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\bar{\beta}_1,\cdots,\bar{\beta}_q} dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_p} \wedge dz^{\bar{\beta}_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\bar{\beta}_q}$$

et

$$\psi = \frac{1}{p!q!} \psi_{\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\bar{\beta}_1,\cdots,\bar{\beta}_q} dz^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_p} \wedge dz^{\bar{\beta}_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\bar{\beta}_q},$$

le produit scalaire hermitien ponctuel $\langle \omega, \psi \rangle$ de ω et ψ, est donné par l'expression suivante :

$$\langle \omega, \psi \rangle = \frac{1}{p!q!} g^{\alpha_1\bar{\lambda}_1} \ldots g^{\alpha_p\bar{\lambda}_p} g^{\bar{\beta}_1\mu_1} \ldots g^{\bar{\beta}_q\mu_q} \omega_{\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\bar{\beta}_1,\cdots,\bar{\beta}_q} \overline{\psi_{\lambda_1,\cdots,\lambda_p,\bar{\mu}_1,\cdots,\bar{\mu}_q}}.$$

Nous désignons par $|.|$ la norme associée au produit scalaire hermitien ponctuel $\langle , \rangle$ et, si ω est une (p,q)-forme, par $i(\omega)$ l'opérateur produit intérieur par la forme ω, *i.e.* , tel que pour toute (r,s)-forme ψ et toute $(p+r, q+s)$-forme φ, nous ayons l'égalité :

$$\langle i(\omega)\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \omega \wedge \psi \rangle,$$

ce qui s'exprime en disant que $i(\omega)$ est l'adjoint de l'opérateur $\omega \wedge \bullet$ pour le produit scalaire hermitien ponctuel. Nous noterons Λ le produit intérieur par la forme de Kähler. Enfin, l'opérateur $*$ de Hodge est alors caractérisé par l'identité :

$$\omega \wedge *\bar{\psi} = \langle \omega, \psi \rangle v_g.$$

Avec ces définitions, nous rappelons que si η est une 2-forme sur M, la trace de η (désignée par $\operatorname{tr}(\eta)$) est la fonction scalaire sur M définie par : $\operatorname{tr}(\eta) = \langle \eta, F \rangle$.

Les données qui précèdent permettent de définir un produit scalaire hermitien global sur l'espace des formes différentielles : $(,) = \int_M \langle , \rangle v_g$ et donc de définir les opérateurs d^*, ∂^* et $\bar{\partial}^*$ adjoints respectifs des opérateurs d, ∂ et $\bar{\partial}$ par rapport à ce produit scalaire hermitien global.

1.1. Connexion de Chern. Soit g une métrique hermitienne, alors il existe une connexion linéaire $\overset{C}{\nabla}$ sur le fibré tangent telle que : $\overset{C}{\nabla} g = 0$, $\overset{C}{\nabla} \mathrm{J} = 0$ et que la torsion soit de type $(2,0)$:

$$\overset{C}{T}(\mathrm{J}X, Y) = \mathrm{J}\overset{C}{T}(X, Y),$$

pour tous champ de vecteurs X, Y de M. Une telle connexion, unique avec ces propriétés, s'appelle connexion de Chern. Une connexion qui vérifie uniquement les deux premières conditions s'appelle connexion hermitienne. Dans la terminologie de A. Lichnerowicz, la connexion de Chern est la "deuxième connexion hermitienne canonique". Il est classique que les symboles de Christoffel de la connexion hermitienne de Chern $\overset{C}{\nabla}$ ne sont non nuls que si leurs trois indices sont tous les trois des indices grecs ou tous les trois des indices grecs conjugués. Un calcul classique explicite alors ces symboles par les formules :

$$\overset{C}{\Gamma}{}_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta} = g^{\gamma\overline{\mu}} \partial_\alpha g_{\overline{\mu}\beta},$$

Soit encore sous forme covariante :

$$\overset{C}{\Gamma}_{\alpha\overline{\mu}\beta} = \partial_\alpha g_{\overline{\mu}\beta}.$$

A l'instar des composantes des symboles de Christoffel, les composantes de la torsion $\overset{C}{T}$ ne sont non nulles que lorsque tous leurs indices sont soit simultanément grecs, soit simultanément grecs conjugués . Ainsi, par exemple :

$$\overset{C}{T}{}^{\gamma}_{\alpha\,\beta} = \overset{C}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\alpha\,\beta} - \overset{C}{\Gamma}{}^{\gamma}_{\beta\,\alpha} = g^{\gamma\overline{\mu}}(\partial_\alpha g_{\overline{\mu}\beta} - \partial_\beta g_{\overline{\mu}\alpha}). \tag{1}$$

En fait, il est souvent intéréssant d'utiliser les composantes covariantes de la torsion $\overset{C}{T}$ permettant par exemple d'écrire ∂F en fonction de la torsion :

$$\partial F = \frac{i}{2}\overset{C}{T}_{\alpha\overline{\gamma}\beta} dz^\alpha \wedge dz^\beta \wedge dz^{\overline{\gamma}} \tag{2}$$

où $\overset{C}{T}_{\alpha\overline{\gamma}\beta} = \overset{C}{\Gamma}_{\alpha\overline{\gamma}\beta} - \overset{C}{\Gamma}_{\beta\overline{\gamma}\alpha}$.

1.2. Métriques hermitiennes kählériennes. Une métrique hermitienne est dite kählérienne si la forme de kähler qui est lui associée vérifie l'une des propriétés suivantes :

(i) la forme de kähler est fermée,

(ii) $\overset{C}{T}_{\alpha\overline{\gamma}\beta} = 0$, pour tous indices α, γ, β dans l'ensemble $\{1, \cdots, m\}$,

(iii) La connexion de Levi-Civita classiquement associée à la métrique hermitienne g et la connexion de Chern coincident.

Tout ce qui a été dit au paragraphe 1.1 montre que ces trois propriétés sont équivalentes entre elles. On dira plus brièvement, lorsqu'elles sont vérifiées, que M est kählérienne.

1.3. La 1-forme de torsion sur M. La 1-forme de torsion, que nous noterons θ, est la 1-forme différentielle sur M définie par :

$$\theta(X) \overset{def}{=} \operatorname{tr}(Y \mapsto \overset{C}{T}(X, Y)),$$

où X et Y désignent des vecteurs tangents. Cette 1-forme est réelle, on la décompose en $\theta = \vartheta + \overline{\vartheta}$, où ϑ (*resp.* $\overline{\vartheta}$) est une $(1,0)$-forme (*resp.* $(0,1)$-forme) dont les composantes sont $\vartheta_\alpha = \overset{c}{T}{}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\beta}$ (*resp.* $\vartheta_{\bar{\alpha}} = \overline{\vartheta_\alpha}$) Un calcul (*cf* [2]) nous montre que :

$$\theta = \Lambda(dF).$$

Enfin on peut montrer (*cf* . [3]) que

$$\vartheta = -i\bar{\partial}^* F, \tag{3}$$

ou encore

$$\theta = Jd^* F. \tag{3$'$}$$

Observons que l'avant dernière formule (3) montre que la quantité scalaire $\partial^*\vartheta = -i\partial^*\bar{\partial}^* F$ est réelle et vaut donc la moitié de $d^*\theta$, puisque F est une forme réelle et que l'opérateur de Levi $i\partial\bar{\partial}$ est réel. La 1-forme de torsion, ainsi définie, nous permet de caractériser géométriquement certaines variétés complexes. Ainsi, introduisons :

1.4. Métriques semi-kählériennes et standard. Une métrique hermitienne est dite semi-kählérienne (ou parfois $\frac{1}{2}$-kählérienne) si la forme de Kähler est cofermée $d^*F = 0$, *i.e.* la 1-forme de torsion est identiquement nulle; ceci est équivalent à dire que la $(m-1, m-1)$-forme F^{m-1} est fermée comme il est possible de le voir au moyen de l'identité suivante (*cf* . [3]) :

$$dF^{m-1} = \theta \wedge F^{m-1}. \tag{4}$$

Une variété complexe qui possède une telle métrique hermitienne, est dite semi-kählérienne. Toujours au moyen de l'identité (4), nous voyons que les variétés kählériennes sont semi-kählériennes; de plus, lorsque la variété est une surface complexe (*i.e.* $m = 2$), les métriques kählériennes et semi-kählériennes coincident; mais en dimension supérieure $m \geq 3$, il existe des variétés semi-kählériennes qui ne sont pas kählériennes.

Une métrique hermitienne est dite standard si et seulement si la 1-forme de torsion est cofermée $d^*\theta = 0$ (ou encore $\partial^*\vartheta = 0$), ce qui est équivalent encore à dire que la $(m-1,m-1)$-forme F^{m-1} est dd^c-fermée. P.Gauduchon prouve l'existence et "l'unicité" de ces métriques. Plus précisement rappelons le théorème [2, p.502] : "*Dans chaque classe hermitienne conforme sur M, il existe une métrique standard sur M, unique à proportionnalité constante près*".

1.6. Formules d'adjonction. Soit M une variété différentiable orientée par une forme v_M de degré maximum $n \overset{def}{=} \dim_{\mathbb{R}} M$. Si X est un champ de vecteurs sur M, on appelle *divergence* de X sur M le scalaire $\mathrm{div}(X)$ tel que : $\mathrm{div}(X)v_M = \mathcal{L}_X v_M$. Nous désignerons enfin par ∇ une connexion linéaire sur M et par θ sa forme de torsion. Enonçons alors :

Proposition 1. *Soit v_M, ∇ et θ comme plus haut, alors :*

(i) La divergence d'un champ de vecteurs X a une intégrale nulle.

(ii) Si $\nabla v_M = 0$ la divergence s'exprime, en coordonnées locales, par : $\mathrm{div}(X) = \nabla_k X^k + \theta_k X^k$.

Démonstration : (i) est classique et immédiat. Pour montrer (ii) , soit $x^1, \dots, x^n$ un système de coordonnées locales au voisinage d'un point $m_0 \in M$, v_M s'interprète alors comme un tenseur de composantes complétement antisymétriques $v_{i_1,\dots,i_n}$ et ∇ est définie par ses symboles de Christoffel $\overset{C}{\Gamma}{}_{i\,k}^{\,j}$. Mais alors $\nabla v = 0$ s'écrit $\partial_\ell v_{1,\dots,n} - \sum_k \overset{C}{\Gamma}{}_{\ell\,k}^{\,j} v_{1,..,k-1,j,k+1,..,n} = \partial_\ell v_{1,\dots,n} - \overset{C}{\Gamma}{}_{\ell\,j}^{\,j} v_{1,\dots,n} = 0$. Cette formule permet de conclure, puisque $(\mathcal{L}_X v)_{1,\dots,n} = X^k \partial_k v_{1,\dots,n} + \sum_k \partial_k X^j v_{1,..,k-1,j,k+1,..,n} = X^k \partial_k v_{1,\dots,n} + \partial_k X^k v_{1,\dots,n}$, et que : $\theta_k = \overset{C}{\Gamma}{}_{k\,j}^{\,j} - \overset{C}{\Gamma}{}_{j\,k}^{\,j}$.

Nous allons maintenant utiliser cette expression de la divergence pour démontrer une formule d'adjonction (*cf* [3, p. 138]).

Proposition 2. *Soit ω une $(1,q)$-forme sur M, d'expression locale :* $\omega = \dfrac{1}{q!}\omega_{\alpha\bar\beta_1\dots\bar\beta_q}$ $dz^\alpha \wedge dz^{\bar\beta_1} \wedge \dots \wedge dz^{\bar\beta_q}$, *alors $\partial^*\omega$ est la $(0,q)$-forme sur M dont les composantes antisymétriques sont données par la formule :*

$$(\partial^*\omega)_{\bar\beta_1\dots\bar\beta_q} = -\overset{C}{\nabla}{}^\alpha \omega_{\alpha,\bar\beta_1,\dots,\bar\beta_q} - \vartheta^\alpha \omega_{\alpha,\bar\beta_1,\dots,\bar\beta_q}. \tag{5}$$

Démonstration : Soit ψ une $(0,q)$-forme quelconque sur M, nous avons :

$$(\partial\psi,\omega) = \int_M \frac{1}{q!}(\partial\psi)_{\alpha,\bar\beta_1,\dots,\bar\beta_q}\overline{\omega}^{\alpha,\bar\beta_1,\dots,\bar\beta_q} v_M = \int_M \frac{1}{q!}\nabla_\alpha\psi_{\bar\beta_1,\dots,\bar\beta_q}\overline{\omega}^{\alpha,\bar\beta_1,\dots,\bar\beta_q} v_M.$$

L'expression, donnée plus haut, de la divergence du champ de (1,0)-vecteurs X de composantes $X^\alpha = \psi_{\bar\beta_1,\dots,\bar\beta_q}\overline{\omega}^{\alpha,\bar\beta_1,\dots,\bar\beta_q}$, permet (Prop 1 (i)) "d'intégrer par parties" pour voir que :

$$(\partial\psi,\omega) = -\frac{1}{q!}\int_M \psi_{\bar\beta_1,\dots,\bar\beta_q}\left(\nabla_\alpha\overline{\omega}^{\alpha,\bar\beta_1,\dots,\bar\beta_q} + \vartheta_\alpha\overline{\omega}^{\alpha,\bar\beta_1,\dots,\bar\beta_q,}\right)v_M = (\psi,\partial^*\omega).$$

Ainsi, on tire : $\overline{(\partial^*\omega)^{\beta_1,\dots,\beta_q}} = -\nabla_\alpha\overline{\omega}^{\alpha,\bar\beta_1,\dots,\bar\beta_q} - \theta_\alpha\overline{\omega}^{\alpha,\bar\beta_1,\dots,\bar\beta_q}$. Comme la métrique riemannienne hermitienne, est parallèle par rapport à la connexion de Chern, nous avons immédiatement la proposition par conjugaison. Toujours par conjugaison, nous voyons comment exprimer $\bar\partial^*$ évalué sur une $(p,1)$-forme. Observons que pour une (1,0)-forme ω la formule précédente s'écrit :

$$\partial^*\omega = \mathrm{tr}(i\bar\partial\omega + i\boldsymbol{\vartheta}\wedge\omega). \tag{6}$$

Donnons enfin ici quelques formules d'adjonction, toujours utiles dans ce qui suivra :

lemme 3. *Pour toutes formes ψ et toutes fonctions f de classe C^1 nous avons*

(i) $d^*(f\psi) = fd^*\psi - i(d\bar f)\psi$

(ii) $\partial^*(f\psi) = f\partial^*\psi - i(\partial\bar f)\psi$

(iii) $\bar\partial^*(f\psi) = f\bar\partial^*\psi - i(\bar\partial\bar f)\psi$

Démonstration : Démontrons par exemple la première. Pour toutes formes ω et ψ on obtient $(\omega, d^*f\psi) = (d\omega, f\psi) = (\bar f d\omega,\psi) = (d(\bar f\omega) - d\bar f\wedge\omega,\psi) = (\omega, fd^*\psi - i(d\bar f)\psi)$.

§2 Variation de la métrique

2.1. Opérateurs de Lichnerowicz. Soient M comme ci-dessus et Φ un automorphisme de $T^{\mathbb{C}}M$ et $\check\Phi$ sa contragrédiente sur $T^{*\mathbb{C}}M$. Alors l'automorphisme $\mathbf{j} = \Phi\oplus\check\Phi$ sur $T^{\mathbb{C}}M\oplus T^{*\mathbb{C}}M$ s'étend naturellement en un automorphisme encore noté $\mathbf{j}$ sur tous les tenseurs. la version "infinitésimale" de cette notion consiste à associer à tout endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire[1] B de l'espace tangent complexifié $T^{\mathbb{C}}M$, un opérateur $\mathbf{j}_*(B)$, qui, à un tenseur T sur M de type (r,s), fait corres-

[1] Pour la structure complexe d'élargissement des scalaires

pondre un tenseur $\mathbf{j}_*(B)T$ de même type, et dont les composantes sont données par la formule qui suit :

$$\begin{aligned}(\mathbf{j}_*(B)T)^{i_1,\dots,i_r}{}_{j_1,\dots,j_s} = & \sum_{\ell=1}^{\ell=r} B^{i_\ell}_{d_\ell} T^{i_1,\dots,i_{\ell-1},d_\ell,i_{\ell+1},\dots,i_r}{}_{j_1,\dots,j_s} \\ & - \sum_{\ell=1}^{\ell=s} B^{d_\ell}_{j_\ell} T^{i_1,\dots,i_r}{}_{j_1,\dots,j_{\ell-1},d_\ell,j_{\ell+1},\dots,j_s}.\end{aligned}$$

où i_ℓ, j_ℓ varient dans l'ensemble $\{1,\dots,m,\bar{1},\dots,\bar{m}\}$. Lorsque T est un tenseur complétement antisymétrique identifié à une forme, comme dans [1], cet opérateur n'est rien d'autre à un facteur multiplicatif $-\frac{1}{2}$ près que l'opérateur défini en [6, p.9]. Cet opérateur n'est alors rien d'autre qu'une dérivation intérieure de degré 0 (*cf*. [1, p.331]) au sens de Fröhlicher-Nijenhuis *i.e.* nous avons : $\mathbf{j}_*(B)(\omega \wedge \psi) = \mathbf{j}_*(B)\omega \wedge \psi + \omega \wedge \mathbf{j}_*(B)\psi$, et $\mathbf{j}_*$ est aussi une représentation d'algèbre de Lie : $\mathbf{j}_*[B, B'] = [\mathbf{j}_*(B), \mathbf{j}_*(B')]$ car $\mathbf{j}$ est une représentation de groupe.

Dans ce qui suivra S sera un opérateur réel[2] J-linéaire et autoadjoint pour la métrique riemanienne ce qui aura pour conséquences que $\mathbf{j}_*(S)$ conservera le type des formes et que nous aurons :

$$\langle \mathbf{j}_*(S)\omega, \psi\rangle = \langle \omega, \mathbf{j}_*(S)\psi\rangle.$$

2.2. Variation de la connexion hermitienne. Rappelons les choses suivantes : Si S est un endomorphisme de l'espace tangent réel qui est J-linéaire, il est représenté en coordonnées locales par un champ de tenseurs tel que : $S^\alpha{}_{\bar\beta} = S^{\bar\beta}{}_\alpha = 0$ (J-linéarité) et $\overline{S^\alpha{}_\beta} = S^{\bar\alpha}{}_{\bar\beta}$ (réalité). En contractant S avec le tenseur métrique g on en obtient la forme covariante désignée encore par S et avec seulement des composantes mixtes vérifiant $S_{\bar\beta,\alpha} = \overline{S_{\beta,\bar\alpha}}$. Avec cette écriture dire que S est autoadjoint pour g est équivalent à dire que sa forme covariante est symétrique *i.e.* que : $S_{\bar\beta,\alpha} = S_{\alpha,\bar\beta}$. Dans un tel contexte on notera (abusivement) par S la $m \times m$-matrice $S = (S^\alpha{}_\beta)$ et par $\bar S$ la matrice $(S^{\bar\alpha}{}_{\bar\beta})$ conjuguée de la précédente,

[2] *i.e.* qui envoie vecteurs tangents réels sur vecteur tangents réels

si bien que ${}^tSg = g\bar{S}$. Nous désignons par $\mathrm{tr}(S)$ la trace (d'ailleurs réelle avec nos hypothèses) de la $(m \times m)$-matrice S, *i.e.* encore la trace du $\mathbb{C}$-endomorphisme de l'espace tangent réel (muni de la structure complexe J) qui est aussi la demi-trace du $\mathbb{R}$-endomorphisme sous-jacent.

Un cas particulièrement important est celui où S est de surcroît un endomorphisme auto-adjoint *positif* Φ pour la métrique g. Nous définissons alors une nouvelle métrique riemanienne hermitienne g_Φ par la formule :

$$g_\Phi(X,Y) = g(\Phi X, Y) = g(X, \Phi Y).$$

La métrique g_Φ peut aussi être interprètée comme la forme covariante de Φ. Si nous considérons la forme hermitienne g_Φ associée à cette nouvelle métrique, ses composantes sont données par la formule :

$$(g_\Phi)_{\alpha,\bar\beta} = g_{\alpha,\bar\gamma}\Phi^{\bar\gamma}{}_{\bar\beta} = \Phi^{\gamma}{}_{\alpha} g_{\gamma,\bar\beta},$$

que nous écrivons plus brièvement $g_\Phi = g\bar\Phi = {}^t\Phi g$. Réciproquement toute métrique hermitienne sur M s'obtient à partir de g au moyen d' un endomorphisme positif (pour g) , d'ailleurs unique, par le procédé qui précède. On voit alors que la forme de connexion ω_Φ de Chern associée à g_Φ est donnée par :

$$\begin{aligned}\omega_\Phi &= \Phi^{-1}\bar g^{-1}\partial(\bar g\Phi)\\ &= \bar g^{-1}\partial\bar g + \Phi^{-1}(\partial\Phi + \bar g^{-1}\partial\bar g\Phi - \Phi\bar g^{-1}\partial\bar g)\\ &= \omega + \Phi^{-1}\nabla\Phi.\end{aligned}$$

Considérons maintenant une famille g_s de métriques hermitiennes sur M dépendant de manière C^∞ d' un paramètre réel s défini au voisinage de 0 et telle que $g_0 = g$. En vertu de ce qui précède cela revient à considérer des automorphismes positifs Φ_s tels que $\Phi_0 = \mathrm{Id}$. En désignant par $\dot\Phi$ la dérivée en $s = 0$ de Φ_s, on voit que $\dot\Phi$ est un homomorphisme autoadjoint B (non nécessairement positif), et qu'alors, en désignant par $\dot\omega$ (*resp.* $\dot{\overset{c}{\Gamma}}{}^{\beta}_{\alpha\,\gamma}$), la dérivée de la forme de connexion de Chern (*resp.* de son symbole de Christoffel) de la métrique g_s en $s = 0$, on a, puisque la dérivée covariante de l'identité est nulle, les formules :

(7) $$\dot\omega = \nabla B \quad i.e. \text{ aussi : } \quad \dot{\overset{c}{\Gamma}}{}^{\beta}_{\alpha\,\gamma} = \nabla_\alpha B^{\beta}_{\gamma}.$$

2.3. Variation à l'ordre 1 du produit scalaire ponctuel. Nous désignons par $\langle\, ,\rangle_s$ (*resp.* $(\, ,)_s$) le produit scalaire hermitien ponctuel (*resp.* le produit scalaire hermitien global) par rapport à la métrique hermitienne g_s sur l'espace des formes différentielles sur M. Alors :

Lemme 4. *La dérivée de $\langle\omega,\psi\rangle_s$ en $s=0$ est donnée par la formule :*

$$\frac{d}{ds}(\langle\omega,\psi\rangle_s)_{|s=0} = \langle \mathbf{j}_*(B)\omega,\psi\rangle \tag{8}$$

où ω et ψ sont des (p,q)-formes sur M, fixées (i.e. indépendantes du paramètre s)

Démontration : En effet en écrivant la définition même du produit scalaire ponctuel $\langle\omega,\psi\rangle_s$ associé à la métrique g_s, on obtient aisément la formule :

$$\langle\omega,\psi\rangle_s = \langle \mathbf{j}(\Phi_s)\omega,\psi\rangle;$$

mais alors on conclut immédiatement en dérivant en $s=0$, puisque, par définition, $\dot{\Phi} = B$.

Observons que l'opérateur $\mathbf{j}_*$ a été défini de telle manière que cette formule de dérivation du produit scalaire ponctuel soit vraie pour tous les tenseurs (même contravariants ou non antisymétriques). Pour le produit scalaire global, il en résulte que :

$$\frac{d}{ds}(\omega,\psi)_{|s=0} = (\mathbf{j}_*(B)\omega + \mathrm{tr}(B)\omega,\psi).$$

2.4. Variation de la $(1,0)$-forme de torsion . Considèrons g_s, s au voisinage de 0 comme précédemment, et sa $(1,0)$-forme de torsion $\boldsymbol{\vartheta}_s = -i\bar{\partial}_s^* F_s$ où $\bar{\partial}_s^*$ est l'adjoint de l'opérateur $\bar{\partial}$ par rapport au produit scalaire hermitien défini par la métrique g_s ; $\dot{\boldsymbol{\vartheta}}$ désignant alors la dérivée en $s=0$ de cette $(1,0)$-forme de torsion.

Proposition 5. *La variation de la $(1,0)$-forme de torsion est donnée par la formule :*

$$\dot{\boldsymbol{\vartheta}} = \partial\mathrm{tr}(\dot{F}) + i\bar{\partial}^*\dot{F} - i(\mathrm{J}\bar{\boldsymbol{\vartheta}})\dot{F}. \tag{9}$$

Démonstration : En utilisant la variation à l'ordre 1 de la connexion de Chern donnée par la formule (7) nous avons :

$$\dot{\vartheta}_\alpha = \dot{\overset{c}{\Gamma}}{}^{\beta}_{\alpha\,\beta} - \dot{\overset{c}{\Gamma}}{}^{\beta}_{\beta\,\alpha} = \nabla_\alpha B^{\beta}_{\ \beta} - \nabla_\beta B^{\beta}_{\ \alpha} = \partial_\alpha \mathrm{tr}(\dot{F}) - \nabla_\beta B^{\beta}_{\ \alpha}.$$

D'une part la formule (5) permet d'écrire : $-\nabla_\beta B^{\beta}_{\ \alpha} = (i\bar{\partial}^*\dot{F})_\alpha + \vartheta_\lambda B^{\lambda}_{\ \alpha}$, et d'autre part $\vartheta_\lambda B^{\lambda}_{\ \alpha} = -(\mathrm{j}_*(B)\vartheta)_\alpha$, nous pouvons alors écrire :

$$\dot{\vartheta}_\alpha = \partial_\alpha \mathrm{tr}(\dot{F}) + (i\bar{\partial}^*\dot{F})_\alpha + \vartheta_\lambda B^{\lambda}_{\ \alpha} = \partial_\alpha \mathrm{tr}(\dot{F}) + (i\bar{\partial}^*\dot{F})_\alpha - (\mathrm{j}_*(B)\vartheta)_\alpha.$$

En d'autres termes :

$$\dot{\vartheta} = \partial \mathrm{tr}(\dot{F}) + i\bar{\partial}^*\dot{F} - \mathrm{j}_*(B)\vartheta.$$

Enfin, il est aisé de voir que : $\mathrm{j}_*(B)\vartheta = i(\mathrm{J}\bar{\vartheta})\dot{F}$, et il en résulte :

$$\dot{\vartheta} = \partial \mathrm{tr}(\dot{F}) + i\bar{\partial}^*\dot{F} - i(\mathrm{J}\bar{\vartheta})\dot{F}.$$

2.5. Variation des adjoints. Soit Φ un endomorphisme autoadjoint positif pour la métrique hermitienne. Par $\mathbb{C}$-linéarité on prolonge Φ en un endomorphisme sur le complexifié encore noté $\widetilde{\Phi}$, et donné dans une base adaptée par la matrice $\widetilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \overline{\Phi} \end{pmatrix}$. $\widetilde{\Phi}$ est un automorphisme orthogonal pour $\widetilde{g}$; ce qui en terme matriciel s'exprime par l'égalité de $2m \times 2m$-matrices : ${}^t\widetilde{\Phi}\widetilde{g} = \widetilde{g}\widetilde{\Phi}$, elle même équivalente à l'égalité de $m \times m$-matrices : ${}^t\Phi g = g\overline{\Phi}$. Supposons maintenant que Φ dépende d'un paramètre s (et même éventuellement que $\Phi_s = e^{sB}$ où ici B est un endomorphisme autoadjoint pour la métrique g). On pose $g_s = {}^t\Phi_s g$

En appelant F_s la forme de Kähler associée à la métrique g_s, et en posant $\dot{F} \overset{\text{def}}{=} \left[\dfrac{dF_s}{dt}\right]_{|s=0}$ nous avons : $\dot{F} = iB_{\overline{\beta},\alpha} dz^\alpha \wedge dz^{\overline{\beta}}$.

Par un tel changement de métrique, il est facile de voir que la forme volume est multipliée par $\sqrt{\det(\widetilde{\Phi}_s)} = \det(\Phi_s)$ (il s'agit ici du déterminant du $\mathbb{C}$- endomorphisme Φ_s) , si bien que l'expression du produit ponctuel associé à la métrique g_s permet d'exprimer le produit hermitien global $(\,,\,)_s$ associé à cette métrique g_s par la formule :

$$(\omega, \psi)_s = (\mathrm{j}(\widetilde{\Phi}_s)\omega, \det(\Phi_s)\psi)_0. \tag{10}$$

D'où pour le nouvel adjoint de l'opérateur d :

$$d_s^* = \mathbf{j}(\widetilde{\Phi}_s^{-1})\det(\Phi^{-1})d^*\mathbf{j}(\widetilde{\Phi})\det(\Phi). \tag{11}$$

Mais alors par le lemme $3, (i)$ ceci vaut :

$$d_s^* = \mathbf{j}(\widetilde{\Phi}_s^{-1})d^*\mathbf{j}(\widetilde{\Phi}_s) - i\big(\ln(\det(\Phi))\big).$$

En supposant maintenant que $g_0 = g$ *i.e.* que : $\Phi_0 = \mathrm{Id}$ et en posant donc : $\dot{\Phi}|_{s=0} = B$, nous voyons au moyen de l'identité (10) que la dérivée en $s = 0$ de $(\omega, \psi)_s$ est donc :

$$(\mathbf{j}_*(B)\omega + \mathrm{tr}(B)\omega, \psi).$$

De la même manière, la formule (11) montre que la dérivée en $s = 0$ de $\bar{\partial}_s^*$ est :

$$\dot{\overbrace{\bar{\partial}^*}} = [\bar{\partial}^*, \mathbf{j}_*(B) + \mathrm{tr}(B)]. \tag{12}$$

2.6. Variations de certains tenseurs. Afin de préciser quelles sont les déformations à l'ordre 1 des métriques standards, commençons par exprimer la déformation à l'ordre 1 de la quantité : $\partial^*\boldsymbol{\vartheta} = \frac{1}{2}d^*\boldsymbol{\theta}$.

Proposition 6. *la variation à l'ordre* 1 *de la quantité scalaire* $\partial^*\boldsymbol{\vartheta}$ *est donnée par la formule suivante :*

$$\dot{\overbrace{\partial^*\boldsymbol{\vartheta}}} = \partial^*\partial\mathrm{tr}(B) + i\partial^*\bar{\partial}^*\dot{F} - \langle\boldsymbol{\vartheta}, \partial\mathrm{tr}(B)\rangle. \tag{13}$$

Démonstration : Rappelons que la variation à l'ordre 1 de la $(1,0)$-forme de torsion, donnée par la proposition (5), est :

$$\dot{\boldsymbol{\vartheta}} = \partial\mathrm{tr}(B) + i\bar{\partial}^*\dot{F} - i(\mathrm{J}\bar{\boldsymbol{\vartheta}})\dot{F}.$$

De même, la variation à l'ordre 1 de l'opérateur ∂^* est donnée à l'aide de la formule (12) à conjugaison près par :

$$\dot{\partial}^* = [\partial^*, \mathbf{j}_*(B) + \mathrm{tr}(B)],$$

En l'appliquant à la $(1,0)$-forme de torsion nous avons :

$$\dot{\partial}^* \boldsymbol{\vartheta} = \partial^* \mathbf{j}_*(B)\boldsymbol{\vartheta} - \imath(\partial \mathrm{tr}(B))\boldsymbol{\vartheta}.$$

En remarquant que : $\dot{\overbrace{\partial^* \boldsymbol{\vartheta}}} = \dot{\partial}^* \boldsymbol{\vartheta} + \partial^* \dot{\boldsymbol{\vartheta}}$ et en reportant les expressions de $\dot{\partial}^* \boldsymbol{\vartheta}$ et $\partial^* \dot{\boldsymbol{\vartheta}}$ données par les formules ci-dessus, nous avons sans difficulté la proposition.

Cette formule nous sera utile plus bas pour caractériser les métriques hermitiennes standards comme points stationnaires de certaines fonctionnelles. On voudrait toutefois dire ici pour quelle question naturelle cette formule de variation présente peut-être un intérêt; à cette fin rappelons d'abord que le théorème de Gauduchon affirme que dans chaque classe conforme de métriques hermitiennes sur la variété complexe compacte M, il existe une métrique, unique à proportionalité près, pour laquelle $d^* \boldsymbol{\theta} = 2\bar{\partial}^* \overline{\boldsymbol{\vartheta}} = 0$.

Comme par ailleurs la théorie de Hodge du complexe elliptique $\left(\mathcal{E}^{0,\bullet}(M), \bar{\partial}\right)$ permet d'écrire la décomposition orthogonale : $\overline{\boldsymbol{\vartheta}} = \bar{h} + \bar{w}$ où $\bar{w}$ est $\bar{\partial}^*$-exacte et où $\bar{h}$ est $\Delta_{\bar{\partial}}$-harmonique (ce qui signifie aussi que $\bar{\partial}\bar{h} = \bar{\partial}^* \bar{h} = 0$), on voit qu'on a associé à chaque classe conforme une classe de cohomologie de Dolbeault, ,à savoir la classe $[\bar{h}] \in H^1(M, \mathcal{O}_M)$ de la $(0,1)$-forme $\bar{\partial}$-fermée $\bar{h}$. On peut aussi décomposer orthogonalement $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{H} + d^* \psi^2$ où maintenant $d\mathbf{H} = d^* \mathbf{H} = 0$ pour associer, à chaque classe conforme, la classe de cohomologie de de Rham $[\mathbf{H}] \in H^1(M, \mathbb{R})$ de la 1-forme réelle d-fermée $\mathbf{H}$. Aussi pouvons nous poser la question suivante :

Question naturelle.

(i) Quelles relations entretiennent les classes $[\bar{h}] \in H^1(M, \mathcal{O}_M)$ et $[\mathbf{H}] \in H^1(M, \mathbb{R})$, en particulier la première est elle l'image de la seconde par le morphisme $H^1(M, \mathbb{R}) \to H^1(M, \mathcal{O}_M)$ qui provient de l'inclusion de faisceaux $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{O}_M$?

(ii) Quand on déforme la classe conforme comment se déforme les classes $[\bar{h}]$ et $[\mathbf{H}]$. En particulier quand on considère la totalité des métriques standards quels sont les lieux respectifs, dans $H^1(M, \mathcal{O}_M)$ et $H^1(M, \mathbb{R})$, de ces deux classes ?

On peut voir facilement que la réponse à la question (i) est positive lorsque la $(1,1)$-forme $i\bar{\partial}h$ est réelle.

Par ailleurs si la métrique est standard, dire qu'elle le reste dans la variation, s'exprime à l'ordre 1 par l'égalité suivante :

$$\partial^*(\partial \mathrm{tr}\dot{F} + i\bar{\partial}^*\dot{F} + \mathrm{tr}\dot{F}\vartheta) = 0$$

Afin, par exemple, de préciser ce que signifie l'annulation de la classe $[\bar{h}] \in H^1(M, \mathcal{O}_M)$, réinterprétons la en disant qu'il existe une $(m, m-2)$-forme Ψ telle que $\Psi + F^{m-1} + \bar{\Psi}$ est d-fermée. Cette condition a déja une conséquence géométrique que possédent les variétés semi-kählériennes :

Proposition 7. *Si une variété M posséde une métrique telle que la classe $[\bar{h}]$ soit nulle, alors il n'y a pas de diviseurs effectifs qui soient topologiquement triviaux i.e. tel que le $2m-2$-cycle singulier qu'il définit soit un bord.*

Cela fournit immédiatement un exemple de variété pour laquelle il n'existe aucune métrique pour laquelle cette classe soit nulle à savoir la surface de Hopf homogène $H_\lambda \overset{def}{=} \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence $(z_1, z_2) \sim (\lambda^n z_1, \lambda^n z_2)$ avec $|\lambda| \neq 1$.

En effet H_λ est une surface complexe fibrée en courbes elliptiques au dessus de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui sont des diviseurs effectifs topologiquement équivalents à zéro.

§3 Problème aux variations .

3.1. Points critiques pour l'intégrale d'une puissance de la norme de la forme de torsion. Soit $\mathcal{M}_1$ l'ensemble des métriques hermitiennes de volume total, égale à 1. Un point de $\mathcal{M}_1$ sera désigné indifféremment par la métrique g ou par la forme de Kähler F qui lui est naturellement associée. On considére la fonctionnelle Φ de $\mathcal{M}_1$ dans $\mathbb{R}$ définie dans l'introduction par :

$$\Phi(F) = \frac{1}{2^r}\int_M |\theta|^{2r}\, v_g = \int_M |\vartheta|^{2r} v_g,$$

où r est un nombre réel tel que $1 \leq r \leq m$. Soit maintenant, pour un paramètre réel s défini au voisinage de zéro, une métrique F_s qui en dépende de manière $\mathcal{C}^\infty$;

on pose $F = F_0$ et $\dot{F} = \dfrac{d}{ds} F_{s|s=0}$. L'hypothèse que la variation se fait à volume constant s'écrit alors :

$$(\dot{F}, F) = \int_M \operatorname{tr}(\dot{F}) v_g = 0. \tag{14}$$

On est donc naturellement amené à la définition :

Définition 8. *On appelle point critique de la fonctionnelle* Φ *une métrique hermitienne* F *de* $\mathcal{M}_1$ *telle que la dérivée directionnelle :* $\dot{\Phi}(F)\dot{F} = \dfrac{d}{ds}\Phi(F_s)_{|_{s=0}}$ *soit nulle pour toute 2-forme* $\dot{F}$ *vérifiant* (14) .

3.2. Condition d'extremum pour la fonctionnelle Φ. La variation à l'ordre 1 de la fonctionnelle Φ s'écrit :

$$\dot{\Phi} = \int_M r\langle \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\vartheta}\rangle^{r-1} \overset{\cdot}{\overbrace{\langle \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\vartheta}\rangle}} + |\boldsymbol{\vartheta}|^{2r} \operatorname{tr}(\dot{F}) v_g.$$

Posons alors : $\varphi = \langle \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\vartheta}\rangle^{r-1} = |\boldsymbol{\vartheta}|^{2r-2}$, (8) donne alors :

$$\begin{aligned} \overset{\cdot}{\overbrace{\langle \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\vartheta}\rangle}} &= 2\Re\langle \dot{\boldsymbol{\vartheta}}, \boldsymbol{\vartheta}\rangle + \langle \mathrm{j}_*(B)\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\vartheta}\rangle \\ &= 2\Re\langle \dot{\boldsymbol{\vartheta}}, \boldsymbol{\vartheta}\rangle + \langle i(\mathrm{J}\bar{\boldsymbol{\vartheta}})\dot{F}, \boldsymbol{\vartheta}\rangle. \end{aligned}$$

Si bien que :

$$\dot{\Phi} = \int r\Big(2\Re\langle \dot{\boldsymbol{\vartheta}}, \varphi\boldsymbol{\vartheta}\rangle + \langle i(\mathrm{J}\bar{\boldsymbol{\vartheta}})\dot{F}, \varphi\boldsymbol{\vartheta}\rangle\Big) + |\boldsymbol{\vartheta}|^{2r}\operatorname{tr}(\dot{F})\, v_g.$$

Mais alors (9) permet d'écrire :

$$\dot{\Phi} = \int_M r\Big(2\Re\langle \partial \operatorname{tr}(\dot{F}) + i\bar{\partial}^* \dot{F}, \varphi\boldsymbol{\vartheta}\rangle - \langle i(\mathrm{J}\bar{\boldsymbol{\vartheta}})\dot{F}, \varphi\boldsymbol{\vartheta}\rangle\Big) + |\boldsymbol{\vartheta}|^{2r}\operatorname{tr}(\dot{F})\, v_g,$$

car $\langle i(\mathrm{J}\bar{\boldsymbol{\vartheta}})\dot{F}, \varphi\boldsymbol{\vartheta}\rangle$ est en fait réel; comme il est égal à $-\langle \dot{F}, i\varphi\boldsymbol{\vartheta}\wedge\bar{\boldsymbol{\vartheta}}\rangle$, nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= r(\dot{F}, i\partial\,(\varphi\bar{\boldsymbol{\vartheta}}) - i\bar{\partial}(\varphi\boldsymbol{\vartheta}) + i\varphi\boldsymbol{\vartheta}\wedge\bar{\boldsymbol{\vartheta}}) \\ &\quad + \int_M \Big(r(\partial^*(\varphi\boldsymbol{\vartheta}) + \bar{\partial}^*(\varphi\bar{\boldsymbol{\vartheta}})) + |\boldsymbol{\vartheta}|^{2r}\Big)\operatorname{tr}(\dot{F})\, v_g. \end{aligned}$$

Ainsi, F est un point critique de Φ si et seulement si pour toute 2-forme réelle $\dot{F}$ vérifiant (14) nous avons :

$$
(15)\qquad \begin{aligned}
&r(\dot F, i\partial(\varphi\bar{\boldsymbol\vartheta}) - i\bar\partial(\varphi\boldsymbol\vartheta) + i\varphi\boldsymbol\vartheta\wedge\bar{\boldsymbol\vartheta})\\
&+\int_M \left(r(\partial^*(\varphi\boldsymbol\vartheta) + \bar\partial^*(\varphi\bar{\boldsymbol\vartheta})) + |\boldsymbol\vartheta|^{2r}\right)\mathrm{tr}(\dot F)\ v_g = 0.
\end{aligned}
$$

L'égalité : $(\dot F, i\partial(\varphi\bar{\boldsymbol\vartheta}) - i\bar\partial(\varphi\boldsymbol\vartheta) + i\varphi\boldsymbol\vartheta\wedge\bar{\boldsymbol\vartheta}) = 0$ pour toute 2-forme réelle $\dot F$ à trace nulle, entraîne l'existence d'une fonction scalaire réelle λ sur M telle que :

$$
(16)\qquad i\partial(\varphi\bar{\boldsymbol\vartheta}) - i\bar\partial(\varphi\boldsymbol\vartheta) + i\varphi\boldsymbol\vartheta\wedge\bar{\boldsymbol\vartheta} = \lambda F,
$$

ou encore :

$$
(16)'\qquad d(\mathrm{J}\varphi\boldsymbol\theta)^{(1,1)} + \frac{1}{2}\varphi\boldsymbol\theta\wedge\mathrm{J}\boldsymbol\theta = \lambda F.
$$

L'égalité (15) devient donc :

$$
\int_M \left(r(\partial^*(\varphi\boldsymbol\vartheta) + \bar\partial^*(\varphi\bar{\boldsymbol\vartheta}) + \lambda) + |\boldsymbol\vartheta|^{2r}\right)\mathrm{tr}(\dot F)\ v_g = 0.
$$

pour toute 2 - forme réelle $\dot F$ vérifiant (14), si bien qu'il existe une constante réelle k telle que :

$$
(17)\qquad r\lambda + r(\partial^*(\varphi\boldsymbol\vartheta) + \bar\partial^*(\varphi\bar{\boldsymbol\vartheta})) + |\boldsymbol\vartheta|^{2r} = k.
$$

Or, en vertu de la formule (6) nous avons donc :

$$
(18)\qquad \begin{aligned}
\partial^*(\varphi\boldsymbol\vartheta) + \bar\partial^*(\varphi\bar{\boldsymbol\vartheta}) &= \mathrm{tr}(i\bar\partial(\varphi\boldsymbol\vartheta) - i\partial(\varphi\bar{\boldsymbol\vartheta}) - 2i\varphi\boldsymbol\vartheta\wedge\bar{\boldsymbol\vartheta})\\
&= -\mathrm{tr}(\lambda F) - |\boldsymbol\vartheta|^{2r}\\
&= -\lambda m - |\boldsymbol\vartheta|^{2r}.
\end{aligned}
$$

Le premier membre étant une divergence, l'intégration sur M du dernier membre permet de voir que : $\Phi = -m\int_M \lambda v_g$. La même observation montre alors que l'égalité (17) a, par intégration, comme conséquence : $(r-m)\int_M \lambda v_g = k$ et donc aussi $k = \dfrac{m-r}{m}\Phi$. Ainsi, k est ≥ 0 dès que $r \leq m$. Cette observation va nous permettre de donner un énoncé crucial pour tout ce qui va suivre.

Lemme 9. *Considérons la fonctionnelle Φ comme ci-dessus avec l'hypothèse $1 \leq r \leq m$, alors la fonction $-\lambda$ qui apparaît dans la condition d'extrêmum (16) est partout ≥ 0. De plus elle n'est identiquement nulle que si $\boldsymbol{\theta}$ l'est aussi i.e. encore si cette extremum est une métrique semi-kählérienne.*

Démonstration : En effet, en reportant dans (17) l'expression de $\partial^*(\varphi\boldsymbol{\vartheta}) + \bar{\partial}^*(\varphi\bar{\boldsymbol{\vartheta}})$ donnée dans (18) on trouve l'égalité :

$$-\lambda = \frac{k + (r-1)|\boldsymbol{\vartheta}|^{2r}}{r(m-1)},$$

d'où le résultat puisque $k \geq 0$.

Considérons maintenant la 2-forme exacte $d(i\varphi\boldsymbol{\vartheta} - i\varphi\bar{\boldsymbol{\vartheta}})$. Nous désignons par $\omega = i\bar{\partial}\varphi\boldsymbol{\vartheta} - i\partial\varphi\bar{\boldsymbol{\vartheta}}$ sa partie $(1,1)$ et par $\eta = i\partial\varphi\boldsymbol{\vartheta} - i\bar{\partial}\varphi\bar{\boldsymbol{\vartheta}}$ sa $(2,0)+(0,2)$-partie; la condition d'extremum (16) implique l'égalité :

$$\omega = -\lambda F + i\varphi\boldsymbol{\vartheta} \wedge \bar{\boldsymbol{\vartheta}}.$$

Enonçons donc :

Lemme 10. *En définissant les formes ω et η comme ci-dessus on a, lorsque la métrique g est un extremum pour la fonctionnelle Φ, l'inégalité : $\int \omega^m \geq 0$.*

Démonstration : En effet, les égalités :

$$\begin{aligned}\int \omega^m &= \int (-\lambda F + i\varphi\boldsymbol{\vartheta} \wedge \bar{\boldsymbol{\vartheta}})^m = \int (-\lambda)^m F^m + m(-\lambda)^{m-1} i\varphi\boldsymbol{\vartheta} \wedge \bar{\boldsymbol{\vartheta}} \wedge F^{m-1} \\ &= m! \int (-\lambda)^m + (-\lambda)^{m-1} \mathrm{tr}(i\varphi\boldsymbol{\vartheta} \wedge \bar{\boldsymbol{\vartheta}}) v_g = m! \int (-\lambda)^m + (-\lambda)^{m-1} |\boldsymbol{\vartheta}|^{2r} v_g,\end{aligned}$$

montrent que le résultat résulte de $-\lambda \geq 0$.

Lemme 11. *Pour toute $(q,0)$-forme ξ, avec q un entier naturel inférieur ou égal à m, la forme "volume" $i^{q^2} \xi \wedge \bar{\xi} \wedge F^{m-q}$ est positive ou nulle .*

Démonstration : Le résultat étant ponctuel, on peut supposer que :

$$F = i \sum_{1 \leq \alpha \leq m} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\alpha}}.$$

Si $K = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{m-q}\}$ est une suite croissante de $(m-q)$ entiers inférieurs ou égaux à m, posons :

$$w^K = i^{m-q} dz^{\alpha_1} \wedge dz^{\bar{\alpha}_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\alpha_{m-q}} \wedge dz^{\bar{\alpha}_{m-q}},$$

nous avons donc :

$$\frac{F^{m-q}}{(m-q)!} = \sum_K w^K.$$

Si $I = \{\beta_1, \cdots, \beta_q\}$ est une suite strictement croissante de q entiers, posons :

$$dz^I = dz^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\beta_q},$$

la $(q,0)$-forme ξ s'écrit donc :

$$\xi^{q,0} = \sum_I a_I dz^I,$$

il vient alors :

$$i^{q^2} \xi^{q,0} \wedge \overline{\xi^{q,0}} \wedge \frac{F^{m-q}}{(m-q)!} = i^{q^2} \sum_{I,J} \sum_K a_I \overline{a_J} dz^I \wedge \overline{dz^J} \wedge w^K. \tag{19}$$

Chaque fois qu'un dz^α apparaît dans le "monôme" w^K, son conjugué $dz^{\bar{\alpha}}$ y apparaît aussi, si bien que le deuxième membre de (19) ne comporte que les termes pour lesquels $I = J$; il s'écrit donc :

$$i^{q^2} \sum_{K,J} a_J \overline{a_J} dz^J \wedge \overline{dz^J} \wedge w^K,$$

où K et J sont complémentaires dans l'ensemble $\{1, \cdots, m\}$. Or,

$$i^{q^2} dz^J \wedge \overline{dz^J} = i^q dz^{\beta_1} \wedge dz^{\bar{\beta}_1} \wedge \cdots \wedge dz^{\beta_q} \wedge dz^{\bar{\beta}_q},$$

ce qui montre que :

$$i^{q^2} \xi^{q,0} \wedge \overline{\xi^{q,0}} \wedge \frac{F^{m-q}}{(m-q)!} = \left(\sum_J a_J \overline{a_J}\right) \frac{F^m}{m!} \geq 0.$$

Théorème 12. *Soit M une variété complexe, compacte, hermitienne, de dimension complexe égale à m, les points critiques de la fonctionnelle Φ définie sur $\mathcal{M}_1$ par : $\Phi(F) = \frac{1}{2^r}\int |\theta|^{2r} v_g = \int |\vartheta|^{2r} v_g$, où r est un nombre réel tel que : $1 \leq r \leq m$, sont exactement les métriques semi-kählériennes.*

Démonstration : L'expression donnée plus haut de η montre, qu'avec des coefficients $a_{k,\ell} = C_m^k C_k^\ell > 0$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}(\omega+\eta)^m &= \sum_{k=0}^{k=m} C_m^k\ \omega^{m-k} \wedge \eta^k \\ &= \omega^m + \sum_{k=1}^{k=m}\sum_{\ell=0}^{l=k} i^{2\ell-k} a_{k,\ell}\omega^{m-k} \wedge (\partial\varphi\vartheta)^\ell \wedge \overline{\partial\varphi\vartheta}^{k-\ell}.\end{aligned}$$

Mais une étude immédiate du type des formes qui apparaissent dans cette somme montre que ne sont à prendre en considération que les termes avec coefficients : $b_\ell \overset{\text{def}}{=} a_{2\ell,\ell} = C_m^{2\ell} C_{2\ell}^\ell > 0$ ce qui permet, en posant $p = [\frac{m}{2}]$ de reécrire la somme qui précède sous la forme simplifiée :

$$(\omega+\eta)^m = \omega^m + \sum_{\ell=1}^{\ell=p} b_\ell \omega^{m-2\ell} \wedge (\partial\varphi\vartheta)^\ell \wedge (\overline{\partial\varphi\vartheta})^\ell.$$

Mais la condition d'extremum (16) montre que :

$$\begin{aligned}\omega^{m-2\ell} &= (-\lambda F + \varphi i\vartheta \wedge \bar{\vartheta})^{m-2\ell} \\ &= (-\lambda)^{m-2\ell} F^{m-2\ell} + (m-2\ell)(-\lambda)^{m-2\ell-1}\varphi i\vartheta \wedge \bar{\vartheta} \wedge F^{m-2\ell-1},\end{aligned}$$

si bien que :

$$\begin{aligned}(\omega+\eta)^m = \omega^m &+ \sum_{\ell=1}^{\ell=p} b_\ell(-\lambda)^{m-2\ell} F^{m-2\ell} \wedge (\partial\varphi\vartheta)^\ell \wedge \overline{(\partial\varphi\vartheta)^\ell} \\ &+ \sum_{l=1}^{l=p} (2m-2\ell) b_\ell (-\lambda)^{m-2\ell-1} F^{m-2\ell-1} \wedge i\varphi\vartheta \wedge (\partial\varphi\vartheta)^l \wedge \overline{\vartheta \wedge (\partial\varphi\vartheta)^l}.\end{aligned}$$

La positivité des quantités φ, $-\lambda$ et b_ℓ permet alors d'appliquer le lemme 11 pour voir que les deux derniers termes du deuxième membre de cette égalité sont des (m,m)-formes positives ou nulles puisque $(\partial\varphi\vartheta)^\ell$ et $\vartheta \wedge (\partial\varphi\vartheta)^\ell$ sont respectivement des $(2\ell, 0)$ et des $(2\ell+1, 0)$-formes. La d-exactitude du premier membre montre aussi que l'intégrale sur M du deuxième membre est nulle, ce qui n'est alors possible que si l'intégrale $\int_M \omega^m$ est ≤ 0 et donc par le lemme 10, elle est égale à zéro; mais l'expression de cette intégrale donnée dans la démonstration du lemme 10, montre, puisque $-\lambda \geq 0$ (lemme 9) que cette annulation n'est possible que si λ et $\boldsymbol{\vartheta}$ sont nuls.

Nous avons donc bien démontré, que s'il est atteint, le minimum de la fonctionnelle Φ est zéro, et qu'il n'est atteint que par les métriques semi-kählériennes.

Observons que nous montrons aussi que le maximum de Φ (d'ailleurs probablement égal à $+\infty$) n'est pas atteint.

3.3. Points stationnaires de la fonctionnelle $G(F) = \int_M (\partial^* \boldsymbol{\vartheta})^r v_g$ sur $\mathcal{M}_1$. Considérons la fonctionnelle $G(F) = \int_M (\partial^* \boldsymbol{\vartheta})^r v_g$ définie dans $\mathcal{M}_1$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, où r est un entier pair positif. Comme dans chaque classe conforme de métriques hermitiennes, il existe une métrique standard, unique à homothetie près (*cf* [2, p.502]); le minimum de cette fonctionnelle est donc zéro et il est atteint par ces métriques standard. On se demande s'il y a d'autres métriques hermitiennes qui soient des points stationnaires pour la fonctionnelle G. Nous répondons, ici, négativement à cette question en montrant que les métriques standard sont les seuls points stationnaires de la fonctionnelle G.

La variation à l'ordre 1 de la fonctionnelle G s'écrit :

$$\dot{G} = \int_M r(\partial^* \boldsymbol{\vartheta})^{r-1} \dot{\widehat{\partial^* \boldsymbol{\vartheta}}} + \mathrm{tr}(B)(\partial^* \boldsymbol{\vartheta})^r v_g,$$

Posons $\varphi = (\partial^* \boldsymbol{\vartheta})^{r-1}$.

La variation de $\partial^* \boldsymbol{\vartheta}$ est donnée par la formule (8) :

$$\dot{\widehat{\partial^* \boldsymbol{\vartheta}}} = \partial^* \partial \mathrm{tr}(B) + i \partial^* \bar{\partial}^* \dot{F} - \langle \boldsymbol{\vartheta}, \partial \mathrm{tr}(B) \rangle,$$

si bien que :

$$\begin{aligned} \dot{G} &= \int_M r\varphi \Big(\partial^* \partial \mathrm{tr}(B) + i \partial^* \bar{\partial}^* \dot{F} - \langle \boldsymbol{\vartheta}, \partial \mathrm{tr}(B) \rangle \Big) + \varphi \mathrm{tr}(B) \partial^* \boldsymbol{\vartheta} v_g \\ &= \int_M \mathrm{tr}(B) \Big(r \partial^* \partial \varphi - r \partial^* (\varphi \boldsymbol{\vartheta}) + \varphi \partial^* \boldsymbol{\vartheta} \Big) + r i \varphi \partial^* \bar{\partial}^* \dot{F} v_g. \end{aligned}$$

Ainsi, F est un point critique de G si et seulement si $\dot{G} = 0$ pour toute $(1,1)$-forme réelle $\dot{F}$ vérifiant

$$\int_M \mathrm{tr}(\dot{F}) v_g = 0.$$

L'égalité $\int_M r\varphi\partial^*\bar{\partial}^*\dot{F} v_g = 0$ pour toute $(1,1)$-forme réelle $\dot{F}$ à trace nulle, entraîne l'existence d'une fonction scalaire μ telle que :

$$-ir\bar{\partial}\partial\varphi = \mu F. \tag{20}$$

La variation de G se reécrit donc :

$$\dot{G} = \int_M \mathrm{tr}(B)\Big(\mu + r\partial^*\partial\varphi - r\partial^*(\varphi\boldsymbol{\vartheta}) + \varphi\partial^*\boldsymbol{\vartheta}\Big) v_g.$$

Ainsi, F est un point critique de G si et seulement si il existe une constante k telle que :

$$\mu + r\partial^*\partial\varphi - r\partial^*(\varphi\boldsymbol{\vartheta}) + \varphi\partial^*\boldsymbol{\vartheta} = k. \tag{21}$$

Mais à l'aide de la formule (6) nous avons :

$$\begin{aligned} r\partial^*\partial\varphi &= r\mathrm{tr}(i\bar{\partial}\partial\varphi + i\bar{\boldsymbol{\vartheta}} \wedge \partial\varphi) \\ &= r\mathrm{tr}(-\frac{\mu}{r}F + i\bar{\boldsymbol{\vartheta}} \wedge \partial\varphi) \\ &= -m\mu - r\langle\partial\varphi, \boldsymbol{\vartheta}\rangle. \end{aligned}$$

L'égalité (21) devient donc :

$$(1-m)\mu - (r-1)\varphi\partial^*\boldsymbol{\vartheta} + r\langle\boldsymbol{\vartheta}, \partial\varphi\rangle - r\langle\partial\varphi, \boldsymbol{\vartheta}\rangle = k. \tag{22}$$

On prend l'intégrale de chaque membre de l'égalité (22), en utilisant le fait que $\partial^*\boldsymbol{\vartheta}$ et φ sont réelles nous avons :

$$k = (1-r)G + (1-m)\int_M \mu v_g.$$

La trace des deux membres de l'égalité (20) étant égale, leur intégration sur M donne :

$$\int_M \mu v_g = -\frac{r}{m} G.$$

On trouve ainsi l'expression de k, $k = \dfrac{m-r}{m} G$.

L'expression du (20) s'écrit encore :

$$d(-i\partial\varphi + i\bar{\partial}\varphi) = \frac{2\mu}{r} F, \tag{23}$$

ainsi μF est fermée; ceci a pour conséquence que μ est soit partout positive, soit partout négative, soit identiquement nulle (*cf* [2, p. 503]); comme son intégrale est nègative, elle est donc partout négative.

En élevant chaque membre de l'égalité (23) à la puissance m, puis en intégrant nous avons :

$$\int_M \mu^m v_g = 0. \tag{24}$$

Ainsi, de (24) nous concluons que $\mu^m = 0$ et par conséquent $\mu = 0$, ce qui est équivalent à $\partial^* \vartheta = 0$, si bien que :

Proposition 13. *Les seules métriques hermitiennes critiques pour la fonctionnelle $G(F) = \int_M (\partial^*\vartheta)^r v_g$ définie sur $\mathcal{M}_1$, avec r pair, sont les métriques standard.*

Nous avons démontré de plus que le maximum de la fonctionnelle Φ (qui vaut probablement $+\infty$) n'est pas atteint.

3.4. Variation de la fonctionnelle : $G(F) = \int_M (\partial^*\vartheta)^r v_g$ dans une classe conforme de $\mathcal{M}_1$. Considérons à nouveau la fonctionnelle $G(F) = \int_M (\partial^*\vartheta)^r v_g$ avec r un entier pair et inférieur ou égal à m, que nous restreignons à une famille conforme $\mathcal{F}_1$ de métriques hermitiennes, dans $\mathcal{M}_1$ *i.e.* aux métriques de la forme :

$$g = e^{\varphi} g_0$$

où g_0 est une métrique hermitienne fixée et φ est une fonction numérique réelle de classe C^∞, vérifiant la condition du volume constant :

$$\int_M e^{m\varphi} v_{g_0} = 1 \tag{25}$$

Avant de donner la variation de G à l'ordre 1, donnons d'abord celle de $\partial^*\boldsymbol{\vartheta}$.

Proposition 14. *La variation de $\partial^*\boldsymbol{\vartheta}$ dans la classe conforme est :*

$$\dot{\overbrace{\partial^*\boldsymbol{\vartheta}}} = -\dot{\varphi}\partial^*\boldsymbol{\vartheta} - (m-1)\langle i\partial\bar{\partial}\dot{\varphi}, F\rangle - 2(m-1)\Re\langle\partial\dot{\varphi}, \boldsymbol{\vartheta}\rangle. \tag{26}$$

Démonstration : A l'aide de la formule d'adjonction, l'expression de $\partial^*\boldsymbol{\vartheta}$ est :

$$\partial^*\boldsymbol{\vartheta} = -g^{\bar{\mu}\alpha}(\partial_{\bar{\mu}}\boldsymbol{\vartheta}_\alpha - \boldsymbol{\vartheta}_{\bar{\mu}}\boldsymbol{\vartheta}_\alpha).$$

En remarquant que dans la classe conforme, les variations à l'ordre 1 de $g^{\bar{\mu}\alpha}$ et de $\boldsymbol{\vartheta}_\alpha$ sont données respectivement par $-\dot{\varphi}g^{\bar{\mu}\alpha}$ et par $(m-1)\partial_\alpha\dot{\varphi}$, on trouve pour la variation de $\partial^*\boldsymbol{\vartheta}$ dans la classe conforme :

$$\begin{aligned}\dot{\overbrace{\partial^*\boldsymbol{\vartheta}}} &= \dot{\varphi}g^{\bar{\mu}\alpha}(\partial_{\bar{\mu}}\boldsymbol{\vartheta}_\alpha - \boldsymbol{\vartheta}_{\bar{\mu}}\boldsymbol{\vartheta}_\alpha) - g^{\bar{\mu}\alpha}((m-1)\partial_{\bar{\mu}}\boldsymbol{\vartheta}_\alpha \\ &\quad - (m-1)\partial_{\bar{\mu}}\dot{\varphi}\boldsymbol{\vartheta}_\alpha - (m-1)\boldsymbol{\vartheta}_{\bar{\mu}}\partial_\alpha\dot{\varphi}) \\ &= -\dot{\varphi}\partial^*\boldsymbol{\vartheta} - (m-1)\langle i\partial\bar{\partial}\dot{\varphi}, F\rangle - 2(m-1)\Re\langle\partial\dot{\varphi}, \boldsymbol{\vartheta}\rangle.\end{aligned}$$

La variation de G à l'ordre 1 s'écrit :

$$\dot{G} = \int_M r(\partial^*\boldsymbol{\vartheta})^{r-1}\dot{\overbrace{\partial^*\boldsymbol{\vartheta}}} + m(\partial^*\boldsymbol{\vartheta})^r\dot{\varphi}v_g.$$

En posant $\psi = (\partial^*\boldsymbol{\vartheta})^{r-1}$, en reportant l'expression de $\dot{\overbrace{\partial^*\vartheta}}$ donnée par la proposition ci-dessus dans $\dot{G}$, et aprés un calcul simple nous avons :

$$\dot{G} = \int_M \dot{\varphi}\Big((m-r)(\partial^*\boldsymbol{\vartheta})^r - r(m-1)i\partial^*\bar{\partial}^*\psi F - 2r(m-1)\Re\partial^*\psi\boldsymbol{\vartheta}\Big)v_g.$$

Une métrique hermitienne $\boldsymbol{g}$ dans $\mathcal{F}_1$ est critique pour G si et seulement si $\dot{G} = 0$ pour toute fonction $\dot{\varphi}$ vérifiant la condition :

$$\int_M \dot{\varphi}v_g = 0.$$

Ainsi g est critique pour G si et seulement si il existe une constante k telle que :

$$(27)\qquad (m-r)(\partial^*\vartheta)^r - r(m-1)i\partial^*\bar{\partial}^*\psi F - 2r(m-1)\Re\partial^*\psi\vartheta = k.$$

A l'aide des formules d'adjonction nous avons :

$$-i\partial^*\bar{\partial}^*\psi F = \partial^*\psi\vartheta + \partial^*\partial\psi$$

$$\partial^*\psi\vartheta = \psi\partial^*\vartheta - \langle\vartheta, \partial\psi\rangle.$$

En appliquant ces deux formules, l'expression (27) devient :

$$(28)\ r(m-1)\partial^*\partial\psi + (1-r)m(\partial^*\vartheta)^r - r(m-1)\langle\vartheta,\partial\psi\rangle + 2r(m-1)\Re\langle\vartheta,\partial\psi\rangle = k.$$

En prenant 2-fois la partie réelle de chaque membre de l'égalité (28), nous obtenons enfin, l'égalité :

$$(29)\qquad r(m-1)\Delta\psi + 2m(1-r)(\partial^*\vartheta)^r + 2r(m-1)\Re\langle\vartheta,\partial\psi\rangle = 2k,$$

où $\Delta = dd^* + d^*d$ est le Laplacien riemannien.

En se rappellons que : $(\partial^*\vartheta)^r = \psi\partial^*\vartheta$ et que, par intégration de l'égalité (27), $k = (m-r)\int_M (\partial^*\vartheta)^r v_g$, on voit que cette dernière quantité est une constante positive.

Si maintenant un point $m_0 \in M$ est un minimum pour la fonction ψ, $\Delta\psi$ y est négatif et $\partial\psi$ est y nulle. Par l'égalité (29) nous en déduisons donc : $(\partial^*\vartheta)^r(m_0) \leq \dfrac{-2k}{2m(r-1)} \leq 0$ et donc aussi : $(\partial^*\vartheta)^r(m_0) = 0$, puisque r est pair, et donc encore $\psi(m_0) = 0$. Il s'en suit que ψ est une fonction positive, et comme $r-1$ est impair, $\partial^*\vartheta$ est alors partout positive, ce qui est équivalent à $\partial^*\vartheta = 0$. Si bien que :

Proposition 15. *Les seules métriques hermitiennes critiques pour la fonctionnelle $G(F) = \int_M (\partial^*\vartheta)^r v_g$ définie dans $\mathcal{F}_1$, avec r un entier pair et inférieur ou égal à m, sont les métriques standard.*

§4 Variétés semi-kählériennes

4.1. Généralités sur les variétés parallélisables. Considérons un groupe de Lie complexe G, ce qui signifie que son espace tangent est muni d'un opérateur de multiplication complexe J (*i.e.* tel que $J^2 = -1$) qui provienne d'une structure $\mathbb{C}$-analytique sur G pour laquelle le produit du groupe et l'inversion soient des transformations holomorphes. On sait alors classiquement que l'espace tangent $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie et que l'opérateur de multiplication complexe J en fait une algèbre de Lie *complexe* *i.e.* que l'on a : $[\mathbf{u}, J\mathbf{v}] = [J\mathbf{u}, \mathbf{v}] = J[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$.

Considérons maintenant l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ des $\mathbb{R}$-formes linéaires de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Il se décompose classiquement en une somme directe $\mathfrak{g}^* \oplus \overline{\mathfrak{g}^*}$ où le premier terme est l'espace des formes $\mathbb{C}$-linéaires et le deuxième l'espace des formes $\mathbb{C}$-antilinéaires sur l'espace $\mathfrak{g}$ lorsque muni de la structure d'espace vectoriel complexe qui provient de J.

Parmi les $(p+q)$-cochaînes de l'algèbre de Lie *réelle*[3] $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathfrak{g}$-module avec l'action triviale, on considère celles, $\omega^{p,q} \in C^{p,q}(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \stackrel{def}{=} (\wedge^p \mathfrak{g}^*) \wedge (\wedge^q \overline{\mathfrak{g}^*}) \subset C^{p+q}(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \stackrel{def}{=} \bigwedge^{p+q}(\mathfrak{g}^* \oplus \overline{\mathfrak{g}^*})$, et on les appelle *les (p,q)-cochaines de l'algèbre de Lie (réelle) $\mathfrak{g}$ à valeurs dans (le $\mathfrak{g}$-module trivial) $\mathbb{C}$.*

Rappelons maintenant, qu'à ces données, on associe classiquement le complexe de Koszul au moyen d'une différentielle $\delta : C^n(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \to C^{n+1}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$. L'intérêt de la graduation donnée plus haut provient de ce que si $\omega^{p,q}$ est une (p,q)-cochaîne alors on peut écrire $\delta\omega^{p,q} = \delta'\omega^{p,q} + \delta''\omega^{p,q}$ avec : $\delta'\omega^{p,q} \in C^{p+1,q}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ et $\delta''\omega^{p,q} \in C^{p,q+1}(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$. En faisant la somme directe de toutes ces décompositions on obtient l'écriture $\delta = \delta' + \delta''$, qui fait de l'espace des cochaînes un double complexe. Observons que : $\big(C^{\bullet,0}(\mathfrak{g}, \mathbb{C}), \delta'\big)$ a pour cohomologie la cohomologie de l'algèbre de Lie *complexe* $\mathfrak{g}$.

Ces préliminaires achevés, considérons maintenant un sous-groupe discret co-compact $\Gamma \subset G$ *i.e.* tel que le quotient $M \stackrel{\text{def}}{=} G/\Gamma$ soit compact. Les objets invariants à droite (champ de vecteurs, formes, métriques hermitiennes etc...) sont évidemment projetables sur G/Γ. Si $\mathbf{u} \in \mathfrak{g}$ nous désignerons par $\mathbf{u}_M$ le projeté sur M du champ invariant à droite qui prend la valeur $-\mathbf{u}$ en l'origine

[3]Qui sont aussi, par un procédé trivial d'extension des scalaires, les cochaînes de l'algèbre de Lie *complexe* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (pour la structure complexe d'élargissement des scalaires) à valeurs dans le $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module trivial $\mathbb{C}$.

de manière à avoir : $[\mathbf{u},\mathbf{v}]_M = [\mathbf{u}_M,\mathbf{v}_M]$. Si $m \in M$ on rappelle que $\mathbf{u}_M(m) = [\frac{d}{ds}\exp(-s\mathbf{u})m]_{|s=0}$, et que, de plus, l'holomorphie de l'action implique que $J\mathbf{u}_M = (J\mathbf{u})_M$. Ces champs globaux définissent une trivialisation holomorphe globale du fibré tangent et le principe du maximum (M compact) permet d'affirmer qu'on obtient ainsi tous les champs holomorphes globaux sur M. De la même manière, si $\alpha \in C^p(\mathfrak{g},\mathbb{C})$, est une p-cochaîne de l'algèbre de Lie *réelle* à valeurs dans $\mathbb{C}$, on désignera par α_M la forme globale sur M à coefficients complexes qui, évaluée sur $\mathbf{u}_{1,M},\cdots,\mathbf{u}_{p,M}$, vaut la quantité constante : $\alpha(\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_p)$. Enonçons alors :

Proposition 16. *Par la transformation $\alpha \mapsto \alpha_M$ donnée ci-dessus :*

(i) L'espace $C^n(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ des n-cochaînes de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est biunivoquement envoyé sur l'espace des formes (à valeurs complexes) projetées sur M des formes (à valeurs complexes) qui sont invariantes à droite sur G. Plus précisément cette transformation envoie les (p,q)-cochaînes sur les projetées de (p,q)-formes invariantes à droite.

(ii) Toujours par cette transformation, les $(p,0)$-cochaînes sont envoyées biunivoquement sur l'espace des formes holomorphes globales sur M.

(iii) Enfin, toujours par cette transformation, les opérateurs δ,δ',δ'' sont transformés respectivement en les opérateurs $d,\partial,\bar{\partial}$.

Indication sur la démonstration : Les projetés des champs invariants à droite *i.e.* les champs de Killing $\mathbf{u}_M$ permettant de définir une trivialisation globale $TM \sim M \times \mathfrak{g}$, les n-formes projetées de formes invariantes à droite sont celles qui s'évaluent de manière constante sur les n-uplets de champs de Killing, *i.e.* les formes α_M, ce qui montre (i). Enfin la trivialisation $TM \sim M \times \mathfrak{g}$ étant holomorphe les $(p,0)$-cochaînes sont transformées en formes holomorphes; réciproquement, par ce procédé, on obtient la totalité des p-formes holomorphes car l'évaluation d'une telle forme sur un p-uplet de champs de Killing est une quantité holomorphe qui est donc constante en vertu du principe du maximum puisque M est compacte; d'où (ii). Enfin on montre (iii) en utilisant le fait que $[\mathrm{Ad}(g)\alpha]_M = \gamma(g)\alpha_M$, où

$\gamma(g)$ désigne l'opérateur de transformation à gauche sur les formes au dessus de M qui résulte de la G-action à gauche sur M.

Considérons maintenant une $(1,1)$-forme positive non nécessairement fermée, invariante à droite sur G, et donc projetable en une $(1,1)$ forme F positive sur M. Sa définition même montre que, dans la trivialisation *holomorphe* du fibré tangent donnée plus haut, la métrique hermitienne qui lui est associée est donnée par une matrice autoadjointe g *constante*, si bien que, dans cette trivialisation holomorphe, la connexion de Chern $\overset{C}{\nabla}$ est définie par la 1-forme de connexion qui est à valeurs matricielles : $\omega = \bar{g}^{-1}\partial\bar{g}$ qui est alors nulle, ce qui signifie l'égalité $\overset{C}{\nabla}\mathbf{u}_M = 0$. Mais la torsion est donnée par :

$$\overset{C}{T}(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M) = \overset{C}{\nabla}_{\mathbf{u}_M}\mathbf{v}_M - \overset{C}{\nabla}_{\mathbf{v}_M}\mathbf{u}_M - [\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M] = \big(-\mathrm{ad}(\mathbf{u})\mathbf{v}\big)_M.$$

Or l'hypothèse de compacité de M a classiquement pour conséquence que le groupe de Lie G est unimodulaire *i.e.* que $\det(\mathrm{Ad}) = 1$ *i.e.* encore que $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}) = 0$, Si bien que l'expression de la torsion donnée plus haut implique que $\theta(\mathbf{u}_M) = \mathrm{tr}\big(\mathbf{v}_M \mapsto \overset{C}{T}(\mathbf{u}_M, \mathbf{v}_M)\big)$ est nul , ce qui permet donc d'affirmer :

Proposition 17. *Toute métrique hermitienne invariante à droite sur G se projette sur $M = G/\Gamma$ compact en une métrique semi kählérienne.*

On remarque à ce propos que toutes ces connexions hermitiennes de métriques invariantes à droite projetées ont la même torsion. Enfin on rappelle que notre énoncé affirme, si $F = -2Im(g)$ est la forme de "Kähler", que la $(m-1, m-1)$ forme positive F^{m-1} est d-fermée. On sait qu'elle peut être non cohomologue à zéro (par exemple si G est commutatif). Dans ce qui suit nous allons au contraire considérer le cas "le moins commutatif" possible.

4.2. Le cas semi-simple. Le cas où G est semi-simple présente un intérêt tout particulier car nous avons :

Proposition 18. *Dans le contexte qui précède, si G est semi-simple, alors F^{m-1} est d-exacte.*

Afin de démontrer cette proposition commençons par rappeler que le lemme de Whitehead combiné avec la dualité de Poincaré pour la cohomologie des algèbres de Lie unimodulaire (On consultera à ce sujet avec profit la partie "rappels" de l'ouvrage de Borel et Wallach "continuous cohomology and discrete subgroups" [8]) permet d'affirmer :

Rappel. $\mathfrak{g}$ *étant une algèbre de Lie semi-simple complexe avec* $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g} = m$, *nous avons :* $H^m(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ *et* $H^{m-1}(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = 0$.

Mais, via l'isomorphisme de complexes: $\left(C^{(\bullet,0)}(\mathfrak{g}, \mathbb{C}), \delta'\right) \sim \left(H^0(M, \Omega^\bullet), \partial\right)$ donné plus haut, ce résultat s'interprète en disant que :

Lemme 19. *Toutes les* $(m-1, 0)$*-formes holomorphes globales sur* $M = G/\Gamma$ *sont exactes, et même plus précisément sont différentielles extérieures d'une* $(m-2, 0)$*-forme holomorphe globale.*

Si maintenant $\omega_M^1, \cdots, \omega_M^m$ est une base pour l'espace $H^0(M, \Omega_M^{m-1})$, le fait que F^{m-1} s'obtienne par projection sur M d'une forme G-invariante à droite sur G a pour conséquence qu'elle s'écrit :

$$F^{m-1} = i^{(m-1)^2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq m} a_{k\bar{\ell}} \omega_M^k \wedge \overline{\omega_M^\ell}.$$

Cette écriture a l'avantage de pouvoir exprimer la positivité de la $(m-1, m-1)$-forme au moyen de celle de la matrice hermitienne $(a_{k\bar{\ell}})$. Mais alors l'exactitude des formes ω_M^k ainsi évidemment que celles de leurs conjuguées $\overline{\omega_M^\ell}$ a pour conséquence celle de F^{m-1}; ce qui achève de démontrer la proposition (18).

Une des premières conséquences est déjà que l' annulation du 2^{eme} nombre de Betti ne saurait être élémentairement une obstruction cohomologique à la semi-kählériannité comme c'est évidemment le cas pour la kählériannité.

Une seconde conséquence est aussi un résultat ancien démontré par H.Grauert et R. Remmert par une voie toute différente (*cf* [4]) :

Proposition 20. *"Si* Γ *est un sous-groupe discret cocompact d'un groupe de Lie complexe semi-simple* G*, il n'existe pas d'hypersurfaces complexes (singulières ou non) dans* $M = G/\Gamma$*".*

En effet, si D était un tel diviseur il définirait un $2m-2$-cycle en homologie singulière, et $\int_D F^{m-1}$ devrait être à la fois nulle (exactitude de F^{m-1}) et strictement positif (positivité de F^{m-1}); contradiction.

Enfin une dernière conséquence est que pour ces variétés semi-kählériennes l'invariant numérique associé par P.Gauduchon à tout fibrés en droites complexes $\xi \to M$ appelé le degré du fibré, et défini par la formule :

$$e(\xi) = \int_M c_1(\xi) \wedge \frac{F^{m-1}}{(m-1)!}$$

est toujours nul dans le cas $M = G/\Gamma$ lorsque G est semi-simple.

Bibliographie

[1] J. DIEUDONNÉ. *Cours d'analyse Volume 3* Gauthier-Villars

[2] P. GAUDUCHON : *La 1-forme de torsion d'une variété hermitienne, compacte.* Math. Ann., 267,495–518 (1984)

[3] P. GAUDUCHON : *Fibrés hermitiens à endomorphisme de Ricci non - négatif.* Bull. Soc. Math. France . 105, 18 – 140 (1977)

[4] H. GRAUERT & R.REMMERT : *Über kompakte homogene komplexe Mannigfaltigkeiten* Arch. der Math. 13, 498 – 507 (1962)

[5] A. LICHNEROWICZ : *théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie.* Roma : Edizioni Cremonese (1963)

[6] A. LICHNEROWICZ : *"Variétés kählériennes à première classe de Chern non négative et situation analogue dans le cas riemannien.* Symposia Mathematica Volume 10 Istituto nazionale di Alta Matematica, Academic Press 1972.

[7] J. MORROW & K. KODAIRA : *Complex Manifolds* Holt : Interscience (1971)

[8] A. BOREL & N. WALLACH *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups.* Princeton university press & University of tokyo press (1980)

[9] A. YACHOU : *Une classe de variétés semi-kählériennes.* C.R. Acad. Sci. de Paris, t 321, série 1, p.763-765, (1995).

[10] A. YACHOU : *La variation de la L^{2r}-norme de la 1-forme de torsion sur une variété hermitienne compacte.* A paraître au journal Indag. Math. (North Holland).

[11] A. YACHOU : *Caractérisation des métriques hermitiennes standards sur une variété complexe compacte.* A paraître aux C.R. Acad. Sci. de Paris.

Résumé

Cette thèse comprend trois parties. Dans la première partie, nous nous intéressons au problème de P. Gauduchon posé en 1984 : "Les métriques semi-kählériennes sont-elles les seuls points critiques de la L^2-norme de la 1-forme de torsion θ définie dans l'ensemble des métriques hermitiennes de volume total constant, désigné par $\mathcal{M}_1$". Nous répondons positivement à cette question, en montrant de manière un peu plus générale que ces métriques semi-kählériennes sont les seuls points critiques de la L^{2r}-norme de la 1-forme de torsion dans $\mathcal{M}_1$, où r est un nombre réel tel que : $1 \leq r \leq m$.

Dans la deuxième partie, nous donnons deux caractérisations des métriques standards. La première est qu'elles sont les seules qui réalisent le minimum de la L^r-norme de la fonction réelle $\partial^*\vartheta$, lorsque r est un entier pair, définie sur $\mathcal{M}_1$. La deuxième est qu'elles sont aussi les seules qui réalisent le minimum dans une classe conforme de $\mathcal{M}_1$ de la même fonctionnelle et avec $r \leq m$.

Enfin la dernière partie est consacrée à l'étude des variétés parallélisables $M = G/\Gamma$, où G est un groupe de Lie complexe et Γ un sous-groupe discret de G; elles sont semi-kählériennes. Si de plus G est semi-simple, nous montrons que la $(m-1, m-1)$-forme F^{m-1} est d-exacte.

Une des premières conséquences de ce dernier résultat est déjà que l'annulation du deuxième nombre de Betti ne saurait être élémentairement une obstruction cohomologique à la semi-kählériannité comme c'est évidemenent le cas pour la kählériannité. Comme seconde conséquence, on retrouve un résultat ancien démontré par H.Grauert et R.Remmert par une voie toute différente : Il n'existe pas d'hypersurfaces complexes (singulières ou non) dans $M = G/\Gamma$ dès lors que G est un groupe de Lie complexe semi-simple. Enfin une dernière conséquence est que le degré associé à tout fibré en droites complexes par P. Gauduchon, est toujours nul.