

Numéro d'ordre 2299

THESE

présentée à

l'Université des Sciences et Technologies de Lille

par

Ahmed ELGHAOUTY

pour obtenir le titre de

DOCTEUR en MECANIQUE**CONTRIBUTION A LA MODELISATION DE LA DIFFUSION
ACOUSTIQUE DANS LE DOMAINE TEMPOREL PAR LA
METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES****Soutenue le 15 juillet 1998 devant la commission d'examen :**

Président	A. MERLEN	Professeur
Rapporteurs	A. KABBAJ	Professeur
	F. LUPPE	Professeur
Examineurs	J. ASSAAD	Maître de conférences
	J. C. DEBUS	Professeur
	B. DUBUS	Chargé de recherche
	T. HA DUONG	Professeur
	A. LAVIE	Maître de conférences

Cette thèse a été préparée à
l'**Institut d'Electronique et de Microélectronique du Nord**
(UMR - CNRS 9929),
au sien de l'équipe d'Acoustique du département **ISEN**
(Institut Supérieur d'Electronique du Nord)



Les codes **EQI** et **ATILA** qui ont permis cette étude ont été développés avec le soutien de
DCN - Toulon (Direction des Constructions Navales)
et **DRET** (Direction des Recherches, Etudes et Techniques)

REMERCIEMENTS

Les travaux présentés dans cette thèse ont été effectués au laboratoire d'acoustique de l'ISEN qui est une composante de l'IEMN (Institut d'Electronique et de Microélectronique du Nord - CNRS UMR 9929).

L'existence de ce travail et son achèvement sont dus pour une grande part à B. DUBUS, chargé de recherche à l'IEMN et à A. LAVIE, maître de conférences à l'Université d'Artois à BETHUNE. J'exprime toute ma gratitude à ces deux personnalités qui ont orienté, guidé, montré comment être chercheur par leur exigence scientifique stimulante. Leur questions éclairantes ont été pour moi une aide très précieuse. J'ajoute aussi leur grande gentillesse qui m'a permis de surmonter bien des moments "stressants". Par leurs nombreuses suggestions, leurs compétences largement reconnue, leurs disponibilités journalières et la rigueur de leurs esprits, ils m'ont été d'un grand soutien constant tout au long de cette étude et m'ont formé aux méthodes qui y sont développées.

Je remercie Monsieur le Professeur J. C. DEBUS, responsable du Département acoustique d'avoir accepté d'être directeur de cette thèse.

Je remercie vivement Monsieur A. KABBAJ, Professeur à la Faculté des Sciences de Rabat (Maroc) et Madame F. LUPPE, Professeur à l'Université du Havre, qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir juger ce travail en qualité de rapporteurs.

Je remercie également pour l'examen de ma thèse et pour leur participation au jury Monsieur J. ASSAAD, Professeur à l'Université de Valenciennes, Monsieur T. HA DUONG, Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne, et A. MERLEN, Professeur à l'Université USTL.

J'assure de ma reconnaissance tous les membres du laboratoire pour leur disponibilité et leur aide, et plus particulièrement R. BOSSUT pour ses conseils informatiques, C. GRANGER pour ses conseils expérimentaux et A.-C. HLADKY et P. LANGLET pour leurs gentillesse. Merci également à vous, mes compagnons de bureau : les thésards : Didace, Hassan, Jocelyne et Solofo, qui m'ont toujours aidé par une présence constante, ponctuée par des encouragements qui m'ont poussé à aller toujours plus loin. Je suis ici témoin de vos grandes qualités humaines. Je désire également à remercier Christelle FOUQUE pour sa gentillesse et ses capacités humaines qui ont permis de souder quelques relations au sein de l'équipe acoustique.

Amal, tu as été depuis 04/07/1996 la personne qui, par ses lumières m'a aidé à me mettre sur les rails sur tous les niveaux.

SOMMAIRE

Sommaire	1
Introduction	5
Chapitre 1	
Analyse théorique et mise en équation du problème de diffraction des ondes acoustiques .. 9	
I. Description du problème acoustique et mise en équation	10
I.1. Généralités	10
I.2. Description du problème	10
I.3. Equation de Helmholtz-Kirchhoff	12
II. Equations intégrales dans le domaine fréquentiel	14
II.1. Formulation intégrale de Helmholtz	14
II.2. Fréquences irrégulières et traitement	14
II.2.1. Méthode de Burton et Miller	15
II.2.2. Méthode de Schenck	16
II.2.3. Méthode de Jones	16
III. Equations intégrales dans le domaine temporel	17
III.1. Formulation intégrale de Kirchhoff	17
III.1.1. Mise en équation	17
III.1.2. Discussion sur la formulation intégrale de Kirchhoff	19
III.2. Traitement du problème des instabilités	20
IV. Autres méthodes dans le domaine temporel	22
IV.1. Méthode basée sur la transformée de Fourier discrète de la réponse en fréquence ..	22
IV.2. Méthode des éléments finis	23
IV.3. Méthode des différences finies	25
Conclusion	26
Chapitre 2	
Résolution numérique du problème de diffraction dans le domaine temporel	
27	
I. Discrétisation des variables	28
I.1. Discrétisation spatiale	28
I.1.1. Principe des éléments finis de surface	28
I.1.2. Eléments et fonctions d'interpolation spatiale utilisées	30
I.2. Discrétisation Temporelle	32
I.2.1. Méthodes antérieures	33
I.2.2. Méthodes de différences finies utilisées	35
a) <i>Méthode d'interpolation linéaire ML</i>	35
b) <i>Méthode d'interpolation semi-linéaire MSL1</i>	36
c) <i>Méthode d'interpolation semi-linéaire MSL2</i>	36

d) <i>Méthode de collocation MC</i>	37
I.2.3. Méthode d'interpolation quadratique	37
II. Discrétisation de l'équation intégrale de Kirchhoff	40
II.1. Obtention de l'équation intégrale de Kirchhoff discrétisée	40
II.1.1. Cas des méthodes de différences finies	40
a) <i>Méthode d'interpolation linéaire ML</i>	40
b) <i>Méthode semi-linéaire MSL1</i>	41
c) <i>Méthode semi-linéaire MSL2</i>	43
d) <i>Méthode de collocation MC</i>	43
II.1.2. Cas de la méthode d'interpolation quadratique	44
II.2. Discussion sur les modèles proposés	45
II.3. Calcul des intégrales	46
II.3.1. Méthode de Gauss-legendre.	47
II.3.2. Méthode analytique	49
III. Algorithme de calcul	51
III.1. Code EQI	51
III.2. Structure du code EQI.	51
III.2.1. Pré-traitement	52
III.2.2. Noyau de calcul	52
III.2.3. Post-traitement	52
Conclusion.	53
Chapitre 3	
Validation des développements dans le cas de la diffraction rigide	56
I. Présentation du problème de référence	57
I.1. Diffraction d'une onde plane par une sphère rigide.	57
I.1.1. Description	57
I.1.2. Modèle semi-analytique	58
II. Tests de validation	60
II.1. Analyse des résultats	60
II.1.1. Présentation des résultats pour les différentes méthodes.	60
II.1.2. Analyse physique des résultats	71
II.1.3. Discussion sur l'origine des ondes parasites	79
II.1.4. Conclusion	80
II.2. Etude et traitement des instabilités.	80
II.2.1. Présentation des instabilités.	80
II.2.2. Analyse des résultats pour les méthodes de différences finies	86
II.2.2.1. Présentation des résultats	86
a) <i>Influence du signal</i>	86
b) <i>Influence du pas de temps</i>	87
a) <i>Influence du maillage</i>	88
II.2.2.2. Application de la méthode de moyennage	92
II.2.3. Analyse des résultats pour la méthode d'interpolation quadratique.	96

Sommaire.

III. Exemple d'application : diffraction d'une onde plane par une structure LINE rigide	101
III.1. Description du problème	101
III.2. Analyse des résultats	101
Conclusion	107
Chapitre 4	
Description de la diffusion acoustique par une cible élastique dans le domaine temporel à l'aide d'une méthode couplée éléments finis - équations intégrales	109
I. Introduction	110
II. Formulation théorique du couplage éléments finis-équations intégrales	110
II.1. Formulation du problème élastique	110
II.1.1. Equations du problème	111
II.1.2. Discrétisation spatiale	112
II.1.3. Discrétisation temporelle	112
II.2. Couplage fluide-structure	114
II.2.1. Couplage éléments finis-équations intégrales	114
II.2.2. Algorithme de résolution	116
III. Validation	116
III.1. Présentation du problème de référence et du modèle analytique	116
III.2. Présentation des résultats	117
Conclusion	119
Conclusion générale	129
Bibliographie	131
Liste des symboles	143
Légendes des figures et tableaux	147
Annexe A1 : Obtention de l'équation de Helmholtz	151
Annexe A2 : Calcul des intégrales de Kirchhoff	157
Annexe A3 : Obtention d'une formulation intégrale espace-temps à partir de la formulation de Burton et Miller dans le domaine fréquentiel	161

Introduction.

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION

La description vibratoire d'une structure immergée dans un fluide d'extension infinie et celle des ondes acoustiques générées par cette vibration ou génératrices de cette vibration sont susceptibles de nombreuses applications, en particulier dans le domaine de l'acoustique sous-marine [1]. Les problèmes de diffusion acoustique par des cibles présentent un intérêt aussi bien du point de vue fondamental, en ce qui concerne la description physique de la formation des échos et des ondes mises en jeu, que du point de vue des applications (prévision de l'index de cibles sonar, constitution de catalogues de signatures acoustiques, problèmes liés à la reconnaissance de forme). Une bonne compréhension de la diffusion acoustique s'avère donc indispensable pour classifier et identifier correctement l'objet diffusant. Ces dernières décennies, la diffusion acoustique a fait l'objet de nombreuses études pour des applications de détection ou de discrétion. Si les phénomènes semblent à peu près bien identifiés pour des formes simples d'objets telle que la sphère ou le cylindre infini [2], de nombreux problèmes restent à résoudre dans le cas d'objets de forme quelconque. En effet, en ce qui concerne les approches théoriques, les méthodes analytiques deviennent difficilement applicables et laissent place aux méthodes numériques. Parmi celles-ci, on peut citer la méthode des équations intégrales [3-4] et la méthode des éléments finis [5-6].

Pour modéliser une structure immergée dans un fluide d'extension infinie et soumise à une onde incidente, un outil numérique de simulation du couplage fluide-structure a été conçu et développé au sein du laboratoire d'acoustique de l'ISEN. Cet outil est particulièrement bien adapté au calcul de la diffusion acoustique par des structures sous-marines vibrantes hétérogènes de forme quelconque en régime harmonique à basse et moyenne fréquences [7-8]. La modélisation de la propagation des ondes dans un domaine fluide d'extension infinie est basée sur la méthode des équations intégrales développée dans le code EQI [9]. La modélisation du comportement élastique de la structure est basée sur la méthode des éléments finis développée dans le code ATILA [10]. Le couplage entre ces deux méthodes permet la résolution du problème fluide-structure. Le développement d'un nouvel outil de modélisation numérique dans le

Introduction.

domaine temporel constitue l'objectif de ce travail. Dans le cas de signaux large bande pour des cibles comportant de nombreuses résonances, cette méthode doit être plus performante numériquement pour prédire l'écho temporel diffusé par cette cible qu'une méthode utilisant réponse en fréquence et transformée de Fourier discrète.

Initiées en 1962 par Friedman et Shaw [11], les méthodes des équations intégrales dans le domaine temporel ont été appliquées avec succès par la suite au problème de diffraction des ondes en acoustique [11-21], en électromagnétisme [22-25] et en élastodynamique [26-27]. Ces méthodes présentent deux avantages : elles contiennent implicitement dans leurs formulations la condition de rayonnement de Sommerfeld; la discrétisation spatiale conduit à un simple maillage de la surface mouillée de la structure qui permet d'augmenter la largeur de bande des signaux modélisés en terme de ka (k : nombre d'onde, a : taille caractéristique de diffuseur). Ainsi, ces méthodes ont bénéficié de riches développements mathématiques [28-31] et sont adaptées à une grande variété de problèmes. La plupart de ces méthodes reposent sur la représentation intégrale espace-temps de Helmholtz-Kirchhoff [32-33]. Dans la littérature, la plupart des travaux portent sur des cibles rigides [11, 13, 15, 17, 19-21] ou des cibles fluides ou molles [14, 18, 23]. Dans certaines publications, la prise en compte de l'élasticité est présentée dans des cas simplifiés [27, 34-35]. Quelques rares travaux traitent du problème fluide-structure modélisé par un couplage éléments finis-équations intégrales [36]. Généralement, l'équation intégrale est discrétisée par une méthode de collocation en espace et par une méthode de différences finies en temps [13]. Cette formulation conduit à un système linéaire d'équations reliant la solution à l'instant t_n ($t_n = n\Delta t$) aux valeurs obtenues aux instants précédents. Ce système est résolu de manière itérative au fur et à mesure que le temps progresse (en anglais "marching in time"). Lorsque le pas de temps est diminué, cette méthode souffre d'instabilité numérique se manifestant sous la forme d'oscillations exponentiellement croissantes [25].

Dans cette thèse, la résolution du problème de diffusion par la méthode des équations intégrales repose sur la représentation de Helmholtz-Kirchhoff. La discrétisation de cette dernière est effectuée par éléments finis de frontière isoparamétriques à variation quadratique. Deux types de discrétisations sont utilisés : une discrétisation spatiale et une discrétisation temporelle. Dans le cas de l'approche dite "explicite", le problème est traité par la méthode des éléments finis en espace et la méthode des différences finies en temps. Pour l'approche dite "implicite", le problème est traité par la méthode des éléments finis en espace et en temps.

Introduction.

Cette représentation intégrale permet de calculer la pression sur la surface de la structure étudiée, puis d'obtenir la pression en tout point du fluide. La précision des résultats et leur stabilité sont discutées dans chaque cas. Dans le cas explicite, la stabilisation des résultats par une méthode de moyennage est également présentée.

Cette thèse est découpée en quatre chapitres. Le premier présente la formulation théorique du problème de diffraction et sa mise en équation. Il expose les principales difficultés liées aux formulations intégrales : les fréquences irrégulières dans le domaine fréquentiel et les instabilités numériques dans le domaine temporel. Dans le second chapitre, la discrétisation de l'équation de Kirchhoff est décrite pour deux approches : l'approche classique basée sur la discrétisation spatiale par éléments finis et la discrétisation temporelle par différences finies et l'approche basée sur la discrétisation spatio-temporelle par éléments finis. Le troisième chapitre est consacré à la validation des développements dans le cas de la diffraction rigide. Le dernier chapitre concerne la validation du modèle couplé ATILA-EQI pour le calcul de la diffusion acoustique par des cibles élastiques.

Chapitre 1

Analyse théorique et mise en équation du problème de diffraction des ondes acoustiques

Résumé. L'objet de ce chapitre est la mise en équation du problème de diffraction acoustique qu'on se propose de résoudre. Partant de la théorie de la mécanique des fluides, on obtient l'équation des ondes de Helmholtz et les conditions aux limites qui gouvernent l'évolution temporelle du champ de pression acoustique en tout point du fluide.

Nous présentons également les formulations intégrales (représentation de Helmholtz dans le domaine fréquentiel, représentation de Kirchhoff dans le domaine temporel) qui permettent de modéliser la diffraction par une structure immergée dans un milieu fluide d'extension infinie insonifiée par une onde incidente.

Enfin, nous discutons des principales difficultés liées à ces formulations intégrales : les fréquences irrégulières pour la représentation de Helmholtz et l'instabilité numérique pour la représentation de Kirchhoff.

I. DESCRIPTION DU PROBLEME ACOUSTIQUE ET MISE EN EQUATION

I.1. Généralités

L'acoustique étudie la production, la transmission et les effets des sons. Un vaste champ d'application, en recherche fondamentale et technologique, exploite le fait que le phénomène sonore transmis porte la signature du milieu dans lequel il se propage et qu'il contient en conséquence des informations sur ce milieu, ses hétérogénéités, son anisotropie. Les effets du son sur les substances et les corps avec lesquels il interagit ouvrent encore un terrain de recherches et d'applications dans de nombreux domaines de la science moderne. On peut citer [37] :

1 - Le contrôle non destructif : l'échographie vise à repérer des fissures ou des défauts dans des matériaux de formes diverses.

2 - L'imagerie médicale : on recherche les parois des organes, la présence de tumeurs de calcifications, de calculs rénaux ou vésiculaires.

3 - L'acoustique sous-marine : les applications peuvent être civiles ou militaires selon les buts recherchés :

- la mesure du fond de la mer (sondeurs),
- la détection et la localisation de bancs de poissons (sonar de pêche) ou de sous-marins (sonar militaire) (Figure 1.1),
- la prospection pétrolière à l'aide d'antennes linéaires,
- le repérage des mines et des objets enfouis dans les sédiments,
- le guidage d'une arme sous-marine (torpille).

De manière générale, le problème physique peut se ramener à l'interaction d'une onde acoustique incidente avec un corps immergé : il s'agit d'un problème de diffusion acoustique.

I.2. Description du problème

Soit Ω_f un domaine fluide ouvert infini de \mathcal{R}^3 , Ω_i un corps élastique immergé et Γ sa frontière fermée. On note par \underline{n} le vecteur unitaire normal à Γ orienté vers l'extérieur.

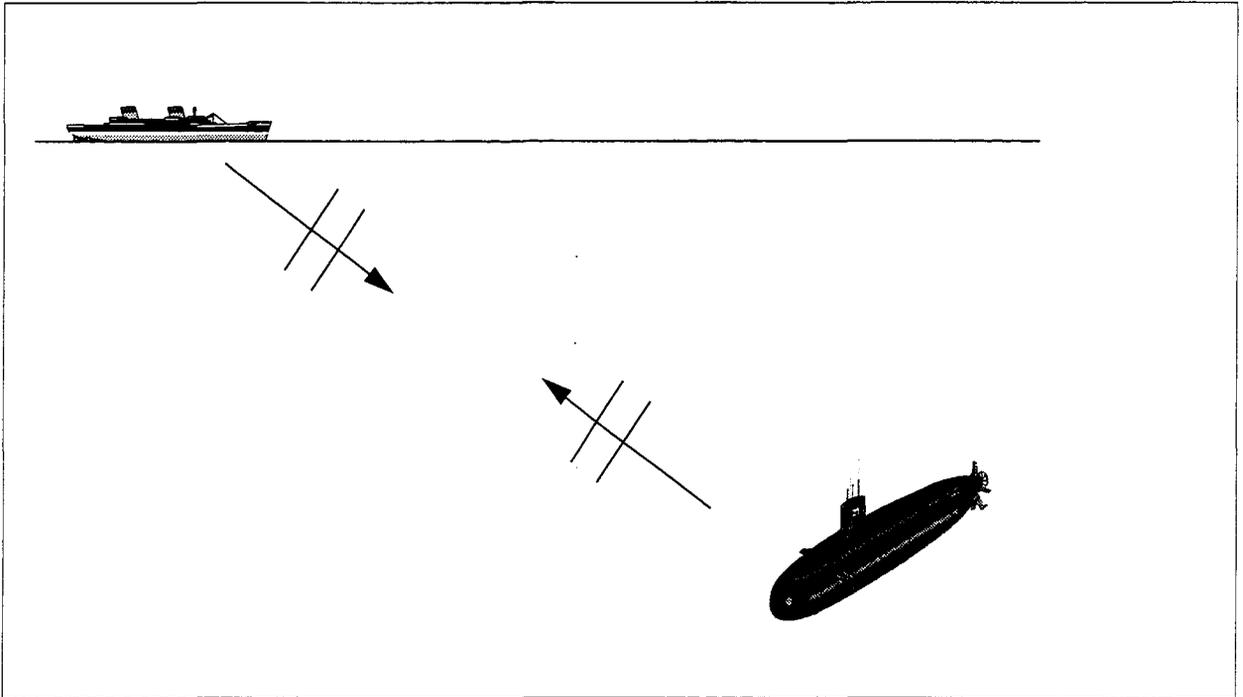


figure 1.1 : détection acoustique de sous-marin

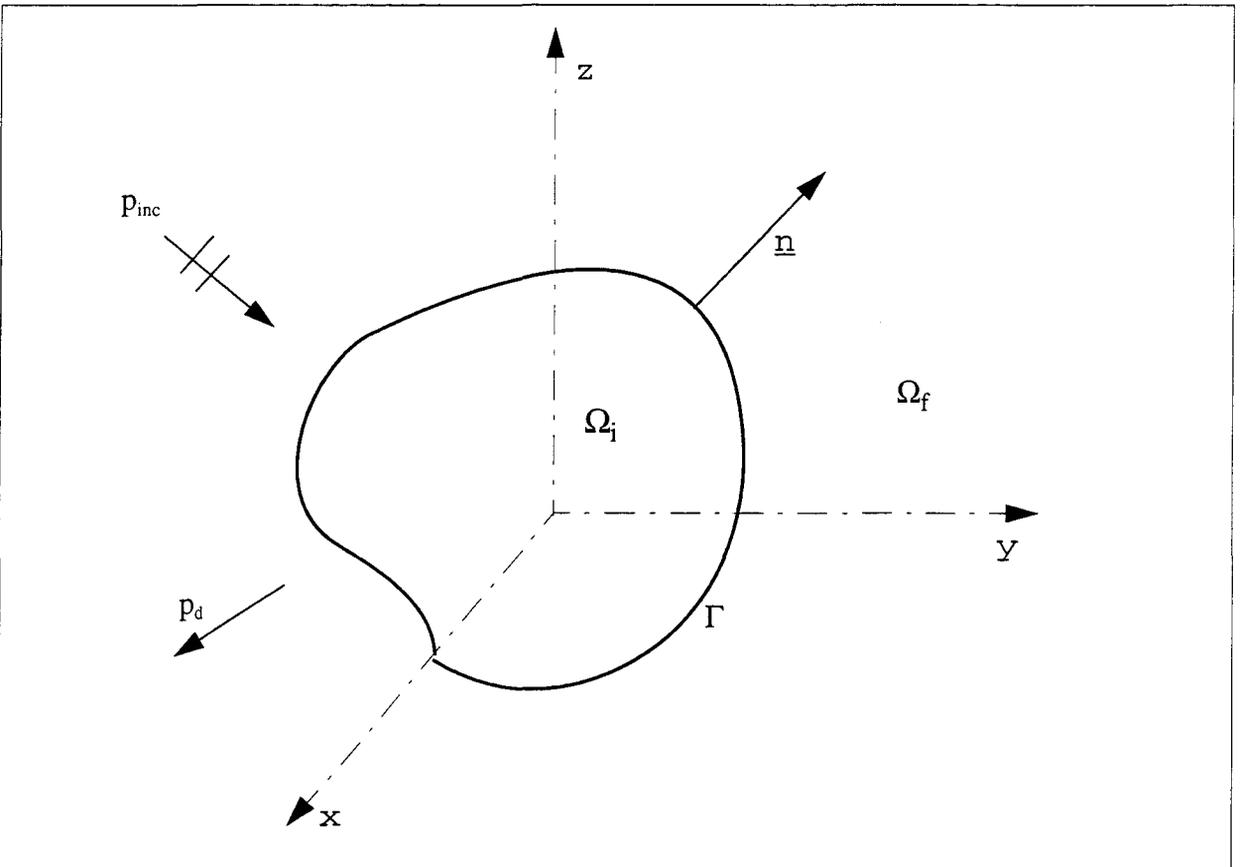


figure 1.2 : domaine acoustique

Le milieu acoustique fluide est supposé homogène et isotrope de densité ρ et de vitesse du son c . Dans le domaine des fréquences étudiées, l'amortissement associé aux dissipations d'énergie sous forme de chaleur peut être négligé. Le fluide est supposé idéal, barotrope, irrotationnel, de vitesse d'écoulement nulle.

L'onde incidente p_{inc} est généralement supposée plane, engendrée par une source ponctuelle placée au loin. On suppose que l'introduction de la structure diffusante dans le milieu fluide ne perturbe en rien les caractéristiques de cette source.

L'onde acoustique considérée peut être décrite par une grandeur scalaire notée $p(\underline{r}, t)$ représentant la surpression, c'est-à-dire l'écart par rapport à la pression d'équilibre statique, au point $\underline{r}(x,y,z)$ et à l'instant t . Elle peut se décomposer de la façon suivante :

$$p = p_{inc} + p_d \quad (1.1)$$

où, à une fréquence donnée, p_{inc} est la pression incidente et p_d la pression diffusée.

I.3. Equation de Helmholtz

Partant des équations de conservation et de l'équation d'état du fluide, la linéarisation au premier ordre de toutes les variables du problème [7, 38-39] conduit à l'équation de Helmholtz (ou équation des ondes) qui gouverne l'évolution temporelle du champ de pression acoustique en tout point du fluide Ω_f à tout instant :

$$\Delta p(\underline{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\underline{r}, t)}{\partial t^2} = -\gamma(\underline{r}, t) \quad \underline{r} \in \Omega_f \quad (1.2)$$

où Δ est l'opérateur laplacien et γ contient l'effet de la source génératrice du signal incident.

A cette équation, il faut ajouter les conditions aux limites sur la surface Γ . Dans le cas d'une structure élastique, on a les conditions de continuité dynamique :

$$T_{ij}(\underline{r}, t)n_j = -p(\underline{r}, t)n_i \quad (1.3)$$

et cinématique :

$$n_i \frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} = -\rho n_i \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (1.3a)$$

où la notation d'Einstein est utilisée. n_i désigne les composantes du vecteur normal à Γ orienté vers le fluide. T_{ij} est la contrainte et u_i le déplacement.

Deux conditions idéales sont également considérées. Quand la pression acoustique est donnée sur la surface, il s'agit du problème de Dirichlet :

$$p(\mathbf{r}, t) = f_1(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (1.4)$$

Quand la vitesse normale (ou la dérivée normale de la pression) est donnée sur la surface, il s'agit du problème de Neumann :

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial n} = f_2(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (1.4a)$$

f_1 et f_2 sont des fonctions connues. Une dernière condition à imposer est la condition de rayonnement de Sommerfeld :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \left(\frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \right) = 0 \quad r - ct = K \quad (1.5)$$

où r est le rayon reliant le point \mathbf{r} à l'origine de l'espace et K une constante.

En régime harmonique, la dépendance temporelle des variables est de la forme $e^{i\omega t}$ où ω est la pulsation. L'équation de Helmholtz (1.2) devient [39] :

$$\Delta p(\mathbf{r}) + k^2 p(\mathbf{r}) = -v(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \Omega_f \quad (1.6)$$

où $k = \omega/c$ est le nombre d'onde et v contient l'effet de l'onde incidente. Pour les équations écrites en régime harmonique, la dépendance temporelle est systématiquement omise dans la suite de ce mémoire. La solution d'un problème de diffusion acoustique implique donc la résolution des équations (1.2) à (1.5). La solution analytique de ces équations n'existe que pour des structures de forme canonique. Pour des structures réelles, la solution du problème posé implique une résolution numérique. Cette résolution ne repose pas sur les équations mentionnées

précédemment mais sur une forme intégrale qui en découle et qui est présentée aux paragraphes suivants.

II. EQUATIONS INTEGRALES DANS LE DOMAINE FREQUENTIEL

II.1. Formulation intégrale de Helmholtz

L'analyse théorique des problèmes de diffraction acoustique en régime harmonique et l'obtention de l'équation intégrale de Helmholtz extérieure sont détaillées dans les thèses [7] et [40]. Cette représentation intégrale s'écrit dans sa forme générale [41] :

$$p_{\text{inc}}(\underline{r}) + \iint_{\Gamma} \left(p(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') \right) d\underline{r}' = \begin{cases} p(\underline{r}) & \underline{r} \in \Omega_f & \text{(a)} \\ \frac{\alpha(\underline{r})}{4\pi} p(\underline{r}) & \underline{r} \in \Gamma & \text{(b)} \\ 0 & \underline{r} \in \Omega_i & \text{(c)} \end{cases} \quad (1.7)$$

où \underline{r} est le point de calcul, \underline{r}' le point courant sur Γ , $\frac{\partial}{\partial n'}$ la dérivée normale au point \underline{r}' orientée positivement vers le fluide et $\alpha(\underline{r})$ est l'angle solide normé à 4π . $g(\underline{r}, \underline{r}')$ est la fonction de Green associée à l'espace infini. Dans l'espace tridimensionnel, cette fonction est une onde sphérique divergente donnée par :

$$g(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \quad (1.8)$$

Cette formulation intégrale de Helmholtz est opérationnelle au laboratoire d'acoustique de l'ISEN dans le code numérique EQI [7, 9, 40]. Les applications traitées portent sur des calculs de rayonnement et de diffusion par des corps rigides et élastiques [8, 42-45].

II.2. Fréquences irrégulières et traitement

La représentation de Helmholtz extérieure est très employée pour le calcul de la diffraction acoustique. Elle se développe numériquement sans difficulté mais souffre du problème

de l'existence de fréquences irrégulières, pour lesquelles existe une infinité de solutions. La non-unicité de la solution est un problème mathématique, qui n'a aucune réalité physique. Il est une conséquence du choix de la fonction de Green $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ qui ne vérifie pas les conditions aux limites sur Γ .

Ce problème pourrait être ignoré si le domaine où la solution est recherchée se trouvait entre deux fréquences irrégulières bien séparées. Cependant, pour une géométrie arbitraire, la validité de la solution ne serait pas garantie car les valeurs des fréquences critiques ne sont a priori pas connues. De plus, autour de chaque valeur critique, il existe une zone d'incertitude numérique. Il est à souligner que plus la fréquence s'élève, plus la densité de fréquences irrégulières augmente [29], de telle sorte qu'à partir d'une certaine fréquence, les plages d'incertitude se chevauchent et l'indétermination devient permanente. Pour assurer l'unicité de la solution aux fréquences irrégulières de la représentation intégrale de Helmholtz extérieure avec la condition de Neumann sur la surface, plusieurs méthodes sont possibles. On peut citer celles de Burton et Miller [46], de Schenck [47] et de Jones [48].

II.2.1. Méthode de Burton et Miller

Burton et Miller [46] ont proposé une formulation intégrale qui repose sur la représentation de Helmholtz extérieure et sa forme différenciée. On différencie l'équation (1.7b) au point \mathbf{r} :

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(p_{\text{inc}}(\mathbf{r}) + \iint_{\Gamma} \left\{ p(\mathbf{r}') \frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial p(\mathbf{r}')}{\partial n'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} d\mathbf{r}' \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\alpha(\mathbf{r})}{4\pi} p(\mathbf{r}) \right) \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (1.9)$$

La formulation de Burton et Miller résulte de la somme membre à membre de l'équation (1.7b) et de l'équation (1.9) après avoir multiplié cette dernière par un coefficient complexe C . La solution est unique pour toute valeur de k à condition que le coefficient C soit strictement complexe. Les résultats obtenus [49-50], en particulier des calculs de diffraction sur une sphère, soulignent les difficultés rencontrées lors de l'utilisation de cette méthode. Les résultats sont sensibles au choix de la valeur de C et aucun choix précis ne semble donner entière satisfaction. Un problème d'intégration numérique intervient quand on veut estimer correctement la valeur de la première intégrale de (1.9) qui fait intervenir un noyau très fortement singulier.

II.2.2. Méthode de Schenck

Pour une fréquence irrégulière f , c'est-à-dire quand $k=(2\pi f)/c$ est la valeur propre du problème intérieur de Dirichlet homogène correspondant, l'équation (1.7b) admet une infinité de solutions de la forme $p(\underline{r})+Au(\underline{r})$ où $u(\underline{r})$ est une solution non nulle de l'équation homogène associée à (1.7b) et A une constante arbitraire.

Schenck [47] a associé à l'équation (1.7b) la représentation intégrale de Helmholtz intérieure (1.7c) afin d'obtenir une solution unique sur la surface. Il a démontré qu'une solution de (1.7b) est également solution de (1.7c), à condition que le point intérieur \underline{r} ne soit pas situé sur l'une des surfaces nodales de la fonction propre du problème intérieur de Dirichlet homogène correspondant. Dans le cas contraire, l'équation (1.7c) est triviale.

Dans cette condition, le système surdéterminé par une ou plusieurs équations (1.7c) assure l'unicité de la solution aux fréquences critiques. Cette technique de surdétermination présente plusieurs difficultés. En effet, on ne connaît pas la position des surfaces nodales sauf dans le cas particulier où la solution analytique du problème intérieur est connue. Pour la n -ième fréquence irrégulière, les surfaces nodales découpent le domaine intérieur en au plus n sous-domaines [29]. Par conséquent, il est nécessaire d'imposer plusieurs points intérieurs pour qu'au moins, l'un d'entre eux ne soit pas sur une surface nodale ou en soit suffisamment éloigné. Le nombre de ces points et leur position sont alors soumis au hasard et ce choix devient de plus en plus aléatoire quand la fréquence augmente car la densité de ces surfaces croît avec la fréquence. Pour les basses ou moyennes fréquences, cette technique a été utilisée avec succès [47, 49], en particulier dans le code CHIEF [51].

II.2.3. Méthode de Jones

Jones [48] propose une méthode de surdétermination de la représentation de Helmholtz extérieure qui garantit l'unicité de la solution aux fréquences irrégulières de calcul. Cette méthode s'appuie sur le fait que pour une fréquence irrégulière seule une des solutions que possède l'équation (1.7b) vérifie les équations de champ nul :

$$\iint_{\Gamma} p(\underline{r}') \frac{\partial \psi_m^l(\underline{r}')}{\partial n'} d\underline{r}' = \iint_{\Gamma} \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} \psi_m^l(\underline{r}') d\underline{r}' - 4\pi c_m^l \quad \begin{array}{l} m = 0, \dots, M \\ |l| \leq m \end{array} \quad (1.10)$$

où ψ_m^1 est une onde sphérique divergente et c_m^1 est un coefficient de la décomposition de la pression incidente en série d'ondes sphériques convergentes régulières à l'origine.

Il s'agit donc de surdéterminer le système d'équations intégrales (1.7b) par une ou plusieurs équations de champ nul afin d'assurer l'unicité de la solution. Jones a établi un critère fixant le nombre d'équations de champ nul à utiliser pour que la méthode soit efficace : si la pression p satisfait l'équation (1.7b) et les $(M+1)^2$ premières équations de champ nul, alors les $(M+1)$ premières fréquences irrégulières sont supprimées.

Cette condition est suffisante mais non nécessaire car les surfaces nodales de la M -ième fonction propre, associées à la M -ième fréquence irrégulière, divisent Ω_i en, au plus M sous-domaines [29]. En pratique, le nombre de sous-domaines est nettement plus petit que M , ce qui signifie que le nombre d'équations de champ nul nécessaire peut être beaucoup plus petit que M . Par rapport à la méthode de Schenck, cette technique est théoriquement plus avantageuse car elle fournit une condition suffisante pour assurer l'unicité de la solution. La méthode de Jones peut être optimisée :

- par l'utilisation simultanée des équations de champ nul en plusieurs origines de l'objet afin de réduire le degré maximal M [40],
- par l'utilisation d'autres fonctions d'ondes solutions de l'équation de Helmholtz dans un système de coordonnées mieux adapté à la forme de l'objet.

Cette méthode est utilisée dans le code EQI [7, 40, 52].

III. EQUATIONS INTEGRALES DANS LE DOMAINE TEMPOREL

III.1. Formulation intégrale de Kirchhoff

III.1.1. Mise en équation

Historiquement, les études acoustiques utilisant les techniques des équations intégrales ont été pour une large part menées dans le domaine fréquentiel, la variable temps n'apparaissant pas explicitement dans la formulation. Dans le domaine temporel, l'objectif du développement d'un outil de modélisation numérique pour décrire la diffusion acoustique est de rapprocher les modèles des conditions d'utilisation réelles, c'est à dire de prédire l'écho temporel renvoyé par

une cible exposée à un signal réel. Le choix d'une méthode numérique directe, par pas de temps, plutôt qu'une méthode spectrale (de type Transformée de Fourier) réside dans les contraintes physiques du signal à analyser : nécessité de décrire un signal large bande contenant un grand nombre de résonances dont la largeur peut être faible. Dès lors, les méthodes spectrales s'avèrent beaucoup plus coûteuses en temps de calcul que la méthode directe.

L'évolution de la pression acoustique $p(\underline{r}, t)$ en fonction du temps, au point d'observation \underline{r} , est régie par l'équation des ondes (1.2). A partir de cette équation, on peut dériver la formulation espace-temps de potentiel retardé de Kirchhoff [32-33, 41] comme décrit en annexe A1 :

$$\begin{aligned}
 p_{inc}(\underline{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{-1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}', \tau) + \frac{\underline{n}' \cdot (\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \left(\frac{p(\underline{r}', \tau)}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2} + \frac{1}{c|\underline{r}-\underline{r}'|} \frac{\partial}{\partial \tau} p(\underline{r}', \tau) \right) \right] d\underline{r}' \\
 = \begin{cases} p(\underline{r}, t) & \underline{r} \in \Omega_f \\ \frac{\alpha(\underline{r})}{4\pi} p(\underline{r}, t) & \underline{r} \in \Gamma \\ 0 & \underline{r} \in \Omega_i \end{cases} \quad (1.11)
 \end{aligned}$$

où τ est le temps retardé : $\tau = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$,

$p_{inc}(\underline{r}, t)$ est la pression incidente au point \underline{r} au temps de calcul t ,

$p(\underline{r}, t)$ est la pression au point \underline{r} au temps de calcul t ,

$p(\underline{r}', \tau)$ est la pression au point \underline{r}' à l'instant retardé τ ,

$\frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}', \tau)$ est la dérivée normale de la pression au point \underline{r}' à l'instant retardé τ ,

$\frac{\partial}{\partial \tau} p(\underline{r}', \tau)$ est la dérivée temporelle de la pression au point \underline{r}' à l'instant retardé τ ,

$|\underline{r}-\underline{r}'|$ est la distance entre le point courant \underline{r}' et le point de calcul \underline{r} ,

et \underline{n}' est la normale à Γ au point \underline{r}' de la structure dirigée positivement vers l'extérieur.

L'angle solide $\alpha(\mathbf{r})$ est donné par la formule suivante [53] :

$$\alpha(\mathbf{r}) = 4\pi + \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} d\mathbf{r}' \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (1.12)$$

Dans le cas du problème considéré, on suppose les conditions initiales suivantes :

$$p(\mathbf{r}, t) = 0 \quad t \leq 0 \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} p(\mathbf{r}, t) = 0 \quad t \leq 0 \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{r}, t) = 0 \quad t \leq 0 \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (1.15)$$

III.1.2. Discussion sur la formulation intégrale de Kirchhoff

Depuis de nombreuses années, plusieurs auteurs se sont intéressés au calcul de la diffraction en acoustique et en électromagnétisme à partir de la formulation intégrale de Kirchhoff (1.11).

En 1962, Friedman et Shaw [11] ont introduit une discrétisation de l'équation intégrale de Kirchhoff pour décrire la diffraction d'impulsions planes par des obstacles cylindriques. L'équation intégrale de Kirchhoff est discrétisée suivant une formulation d'éléments de frontières dépendant du temps. Les résultats obtenus sont en accord avec des solutions analytiques.

Shaw [12, 15-16, 54] poursuit l'étude de la diffraction d'impulsions par des obstacles cylindriques avec différentes conditions surfaciques. Il obtient un bon accord avec les solutions analytiques tant que le nombre de pas de temps reste petit. Si l'étude est menée sur un intervalle de temps de longueur supérieure à une valeur limite, la solution numérique tend à devenir oscillatoire et instable.

En 1967, Mitzner [13] étudie la diffraction des impulsions par des sphères rigides. Il compare ses résultats avec des solutions analytiques et remarque une déviation de la solution dans la zone cachée par rapport aux résultats exacts. Mitzner propose d'améliorer la solution en zone cachée

par une discrétisation spatiale irrégulière, peu dense en zone éclairée et dense en zone cachée.

Le schéma "successif en temps" qu'ils ont initié pour résoudre l'équation intégrale du potentiel retardé est devenu un choix standard. Ce choix peut être résumé comme suit : l'axe des temps est découpé en intervalles de même longueur Δt : $t_n = n\Delta t$, la pression et sa dérivée temporelle à l'instant τ sont données par une approximation linéaire.

En 1978, Neilson et al. [17] étudient la diffraction d'impulsions par des structures à symétrie de révolution en utilisant la méthode des équations intégrales dans le domaine temporel. Bien que la comparaison de leurs résultats avec des solutions analytiques soit satisfaisante, ils observent après un certain temps une instabilité de leur solution qu'ils attribuent à une évaluation inexacte des intégrales singulières.

T. Ha Duong [19], Y. Ding [21] et M. Filipe [35] ont travaillé sur l'analyse mathématique et numérique des instabilités et de la divergence de la méthode des équations intégrales. Ils proposent un critère de stabilité associé à la condition de Courant -Friedrichs-Lewy (CFL) [55] habituellement utilisée en différences finies. Cette condition est donnée par :

$$\Delta t < \frac{\Delta x_{\min}}{c} \quad (1.16)$$

où Δx_{\min} est la taille minimale entre deux noeuds.

Contrairement aux prédictions de Friedman et Shaw [11], les méthodes de différences finies restent utilisées pour les calculs en acoustique [56], ainsi qu'en électromagnétisme [57-58]. Néanmoins, la méthode des équations intégrales demeure intéressante parce qu'elle permet la diminution de l'ordre de la dimension du problème (l'utilisation d'un maillage de la seule surface et non pas du domaine fluide tridimensionnel) et donc l'augmentation de la fréquence de calcul. De plus, les conditions en champ lointain et de causalité sont naturellement satisfaites. En dépit des divers avantages énumérés, la technique des équations intégrales reste limitée par les instabilités inhérentes à la méthode.

III.2. Traitement du problème des instabilités

Depuis de nombreuses années, plusieurs auteurs ont concentré leurs efforts sur l'étude

de la nature des instabilités associées à la méthode des équations intégrales et à leur traitement. Plusieurs hypothèses peuvent expliquer l'origine de ces instabilités :

- l'existence des résonances internes [59-64],
- l'accumulation d'erreurs dues aux discrétisations spatiale et temporelle et aux évaluations des quantités intermédiaires (intégrales, dérivée en temps....) [17, 61-65],
- l'influence des interpolations lors du calcul des termes : $p(\tau)$, $\frac{\partial p(\tau)}{\partial \tau}$ et $\frac{\partial p(\tau)}{\partial n'}$.

Les modèles ont été améliorés en modifiant les interpolations spatiale et temporelle [66-68] afin de réduire les instabilités.

Rynne [67] observe la croissance exponentielle des erreurs qui changent de signe après chaque pas de temps. Il en conclut que la source principale des erreurs réside dans l'évaluation numérique du terme dérivée en temps $\frac{\partial p}{\partial \tau}$ et déclare qu'une évaluation approfondie de ce terme est nécessaire. Il suggère de remplacer l'interpolation linéaire :

$$\frac{\partial p(\tau)}{\partial \tau} = \frac{P(t_m) - P(t_{m-1})}{\Delta t} \quad (1.17)$$

par une approximation de type différences centrées :

$$\frac{\partial p(\tau)}{\partial \tau} = \frac{P(t_{m+1}) - P(t_{m-1})}{2\Delta t} \quad (1.18)$$

où le temps retardé τ est compris entre les instants t_m et t_{m-1} .

L'année suivante, Rynne [68] affirme que les instabilités sont liées aux fréquences associées aux résonances internes et soumet de nouvelles procédures spatiale et temporelle afin de supprimer ces instabilités. La discrétisation temporelle est moyennée sous la forme :

$$\tilde{P}(t_n) = \frac{1}{4}(\tilde{P}(t_{n-1}) + 2P(t_n) + P(t_{n+1})) \quad (1.19)$$

où $\tilde{P}(t_n)$ est la pression moyennée à l'instant t_n . Cette formule tend à limiter la croissance des instabilités. Smith [60] propose une variante de (1.19) :

$$\tilde{P}(t_n) = \frac{1}{4}(P(t_{n-1}) + 2P(t_n) + P(t_{n+1})) \quad (1.20)$$

Analysant l'évolution des instabilités il montre que celles-ci croissent exponentiellement selon

l'expression à l'instant $t = n\Delta t$:

$$C_p(-1)^n e^{\alpha n \Delta t} \quad (1.21)$$

En général, la valeur de α est constante et proche de 0.48 alors que $\text{Ln}|C_p|$ varie entre -15 et -11. La faible valeur de $|C_p|$ confirme l'hypothèse selon laquelle l'instabilité est générée par l'amplification des erreurs numériques. Ces instabilités résultent de l'existence des fréquences irrégulières rencontrées lors de la résolution de l'équation intégrale dans le domaine fréquentiel [47]. L'auteur conclut ainsi que la méthode de moyennage stabilise la solution mais dégrade les résultats de quelques %.

Ces auteurs utilisant des formulations explicites ont proposé l'application de la méthode de moyennage pour éliminer les instabilités dont souffre la méthode des équations intégrales [59-62, 64, 67-71]. La méthode de moyennage peut être considérée comme un filtrage fréquentiel à la fréquence $1/2\Delta t$. D'autres filtres ont été proposés : un filtre passe-bas numérique à réponse impulsionnelle filtrée [64], une modélisation de la réponse temporelle comme somme d'exponentielles complexes [45].

Comme alternative aux méthodes explicites, S. P. Walker et al [72-74] ont proposé une formulation implicite stable pour toutes les applications traitées. Il s'agit d'une approche isoparamétrique curvilinaire spatiale et temporelle. Le pas de temps Δt peut être aussi grand que l'on souhaite sans être limité par la condition de CFL liée à la propagation de l'information (équation I.16).

IV. AUTRES METHODES DANS LE DOMAINE TEMPOREL

Dans ce paragraphe, sont listées les principales méthodes numériques de résolution du problème de diffraction acoustique en régime temporel autres que la représentation intégrale. On peut citer la méthode basée sur la Transformée de Fourier Discrète de la réponse en fréquence, la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies. Leurs principes, domaines d'application, avantages et limites sont rapidement donnés

IV.1. Méthode basée sur la Transformée de Fourier Discrète de la réponse en fréquence

Les relations (1.7) et (1.11) présentent la représentation de Helmholtz-Kirchhoff, respectivement dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel. Il est clair que ces deux

formulations sont équivalentes et peuvent être déduites l'une de l'autre par la Transformée de Fourier. La distinction entre ces deux formulations est d'ordre pratique et n'intervient qu'au niveau des algorithmes de calcul.

Pour calculer la diffraction acoustique en régime transitoire, il est possible de résoudre le problème dans le domaine fréquentiel (régime harmonique), puis d'utiliser la Transformée de Fourier Discrète. L'utilisation de cette méthode indirecte permet d'éviter l'instabilité numérique décrite précédemment [75-79]. Cependant, cette approche indirecte s'avère peu efficace pour l'étude de la diffusion acoustique dans une large bande de fréquence. En effet, en régime harmonique la solution est calculée pour chaque valeur de fréquence. Afin de reconstituer précisément la forme du signal temporel, il est donc nécessaire d'itérer plusieurs fois le calcul. Les formulations intégrales en régime harmonique souffrent du problème de l'existence des k à problème (fréquences irrégulières) [47], qui rendent nécessaire un processus de surdétermination assez coûteux en temps de calcul [7]. De plus, pour des structures élastiques, la densité importante de résonances étroites rend nécessaire un calcul harmonique avec un pas de fréquence très faible. Pour ces raisons, le développement d'une méthode de calcul directe dans le domaine temporel semble préférable.

IV.2. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est de loin la méthode la plus utilisée en ingénierie. Son succès s'explique par sa facilité de mise en oeuvre pour la résolution d'une grande variété de problèmes [5] (stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires,...).

Elle a été reconnue comme étant une procédure générale des approximations numériques à tous les problèmes physiques pouvant être régis par une description d'équations différentielles tels que : le calcul des structures, la mécanique des fluides, la mécanique des solides, la biomécanique, les problèmes de diffusion (chaleur, pollution), les problèmes d'interaction fluide-solide, l'électromagnétisme, la microélectronique....

De grands programmes généraux, basés sur la méthode des éléments finis, ont été développés et sont actuellement utilisés dans l'industrie. Les références [5-6] donnent un aperçu général de cette méthode. Elle est notamment opérationnelle au Laboratoire d'Acoustique de l'I.S.E.N

sous la forme du code de calcul ATILA [80-84] pour la modélisation de problèmes d'acoustique et de vibration.

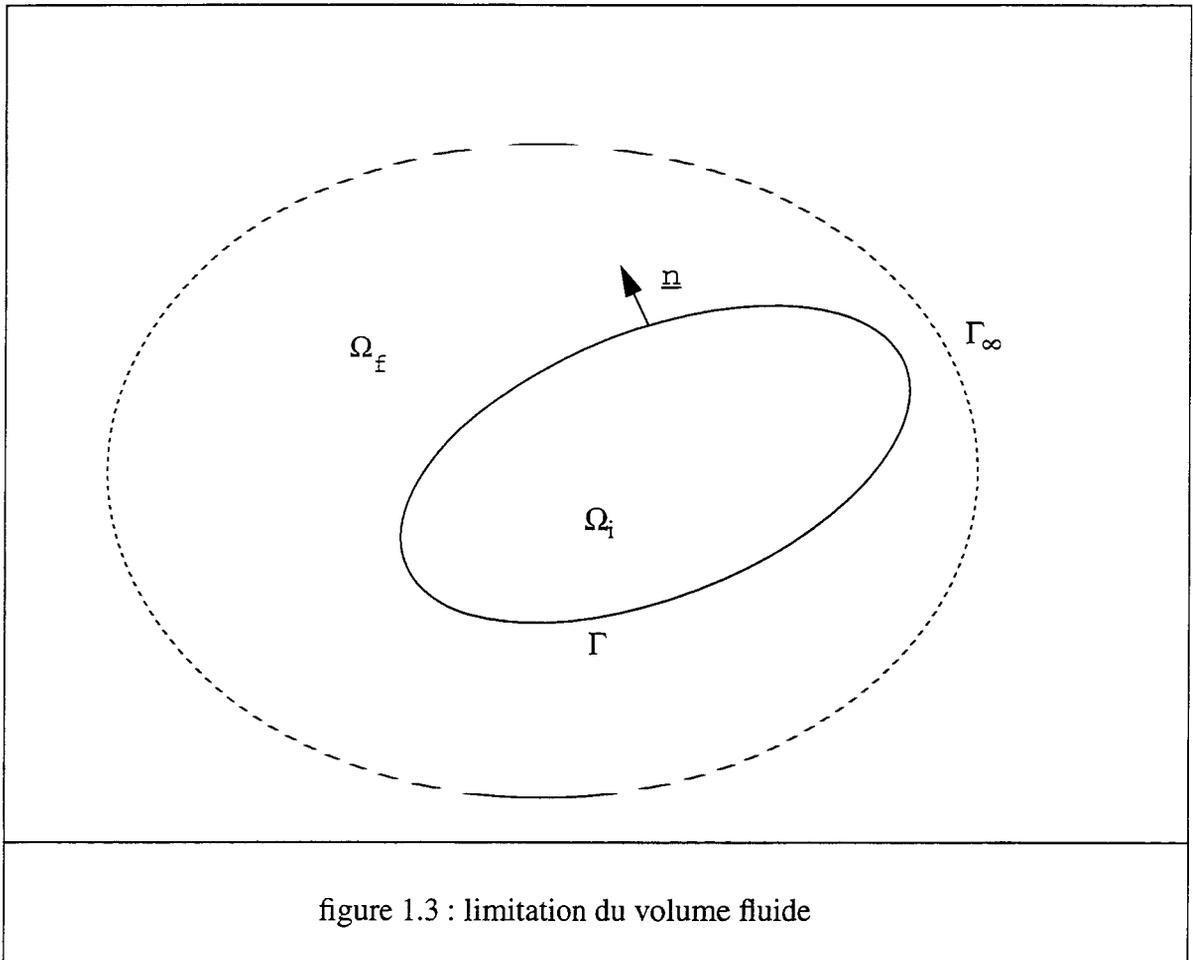
Le principe général de la méthode des éléments finis consiste à :

- découper le domaine continu à étudier en un certain nombre d'éléments connectés par des noeuds,
- remplacer les inconnues du problème par une approximation en tout point de chaque élément en fonction des inconnues nodales et de fonctions d'interpolation,
- transformer les systèmes d'équations aux dérivées partielles en une série d'équations algébriques discrètes,
- programmer les matrices élémentaires correspondant aux systèmes d'équations algébriques et appliquer les algorithmes numériques d'intégration et de résolution.

Les résultats disponibles suite à une modélisation acoustique par éléments finis sont classiquement les champs de déplacement et de pression en tous les noeuds du maillage. En plus de leur capacité à décrire des géométries complexes, les méthodes à base d'éléments finis présentent l'avantage d'être robustes, bien documentées et numériquement performantes. Cependant, la prise en compte de la condition de Sommerfeld (1.5) est un problème délicat car il faut limiter le fluide à un volume intérieur d'une surface Γ_∞ qui peut, suivant les applications, être assez proche de la structure (Figure 1.3).

La principale limite des méthodes d'éléments finis réside dans la nécessité de conserver une densité de maillage suffisante pour décrire les variations spatiales des champs étudiés. En acoustique le critère généralement retenu limite la taille d'un élément au quart de la longueur d'onde la plus petite. L'augmentation de la fréquence de travail entraîne l'utilisation d'un maillage plus dense, le choix d'un pas de temps plus faible et l'augmentation de la taille du système à résoudre. Cet effet est amplifié par l'éloignement de la surface Γ_∞ quand la fréquence augmente. Les méthodes à base d'éléments finis apparaissent donc comme des méthodes "basse fréquence". Les applications traitées concernent à la fois des géométries canoniques [85] et des structures plus complexes [86-89].

Dans le chapitre 4 de cette thèse, on utilise la méthode des éléments finis pour modéliser le comportement élastique du diffuseur, le fluide restant décrit par la méthode des équations intégrales.



IV.3. Méthode des différences finies

Depuis son introduction par K.S.Yee [91] en 1966, la méthode des différences finies (MDF) est utilisée avec succès en électromagnétisme [92-93] et en acoustique [56]. C'est une technique générale pour intégrer les équations dans le domaine temporel, en procédant pas à pas. En bref, la méthode consiste à remplacer les dérivées dans le temps et dans l'espace par des quotients de différences finies et, ce faisant, à transformer la trajectoire «lisse» d'un point en ligne brisée. Par rapport aux éléments finis, la MDF est beaucoup plus simple à développer et la description des conditions initiales à l'origine de l'axe des temps ne pose aucun problème.

L'appellation Méthode des Différences Finies provient du remplacement des dérivées conti-

nues $\frac{\partial^2}{\partial t^2}P(x_i, t_n)$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x_i, t_n)$ par des quotients de différences finies [56] :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}P(x_i, t_n) = \frac{P(x_i, t_n) - 2P(x_i, t_{n-1}) + P(x_i, t_{n-2})}{\Delta t^2} \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x_i, t_n) = \frac{P(x_i, t_n) - 2(P(x_{i-1}, t_n)) + P(x_{i-2}, t_n)}{\Delta x^2} \quad (1.23)$$

où x_i désigne le point de calcul et $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.

La méthode des différences finies est utilisée dans de nombreux domaines ; électromagnétisme [57-58], acoustique [56], géoacoustique [94].... En général, cette méthode est utilisée pour traiter le problème intérieur (domaine borné). Comme auparavant, l'augmentation de la fréquence de travail entraîne l'utilisation d'un maillage plus dense, le choix d'un pas de temps plus faible et l'augmentation de la taille du système à résoudre.

V. CONCLUSION

La résolution par méthode intégrale du problème de diffraction des ondes acoustiques dans le domaine temporel repose sur la représentation de Helmholtz-Kirchhoff. Les méthodes de discrétisation de cette représentation sont décrites au chapitre 2.

Cette représentation permet de calculer la pression sur la surface de la structure étudiée, puis d'obtenir la pression en tout point du fluide. Elle est particulièrement bien adaptée aux problèmes traités puisqu'elle rend inutile le maillage de fluide et ramène un problème tridimensionnel à un maillage bidimensionnel. Elle présente néanmoins un problème d'instabilité numérique qui se traduit par des oscillations parasites de l'écho calculé. La formulation numérique de l'équation intégrale de Kirchhoff est présentée au chapitre 2. Les instabilités qui lui sont associées sont étudiées en détail dans le chapitre 3.

Chapitre 2

Résolution numérique du problème de diffraction

dans le domaine temporel

Résumé. Le traitement numérique des équations de Kirchhoff obtenues dans le premier chapitre est présenté dans le cas de la symétrie axiale. Le principe de la discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis est rappelé. Les principales méthodes d'interpolation applicables à la discrétisation temporelle sont répertoriées. Après avoir établi une distinction entre les méthodes explicites et implicites, l'équation intégrale de Kirchhoff est discrétisée pour chaque méthode. Le calcul des intégrales est effectué par la quadrature de Gauss-Legendre. Les intégrales singulières sont calculées par un traitement analytique spécial basé sur l'emploi d'intégrales elliptiques.

Enfin, nous présentons la structure du code EQI dans lequel sont effectués les développements, en donnant un arbre programmatique qui schématise les principales fonctions de ce code.

I. DISCRETISATION DES VARIABLES

Toutes les méthodes numériques de résolution par la méthode des équations intégrales s'articulent en trois étapes : recherche d'une formulation; discrétisation spatiale et temporelle de l'équation intégrale; résolution d'un système linéaire d'équations présenté sous forme matricielle.

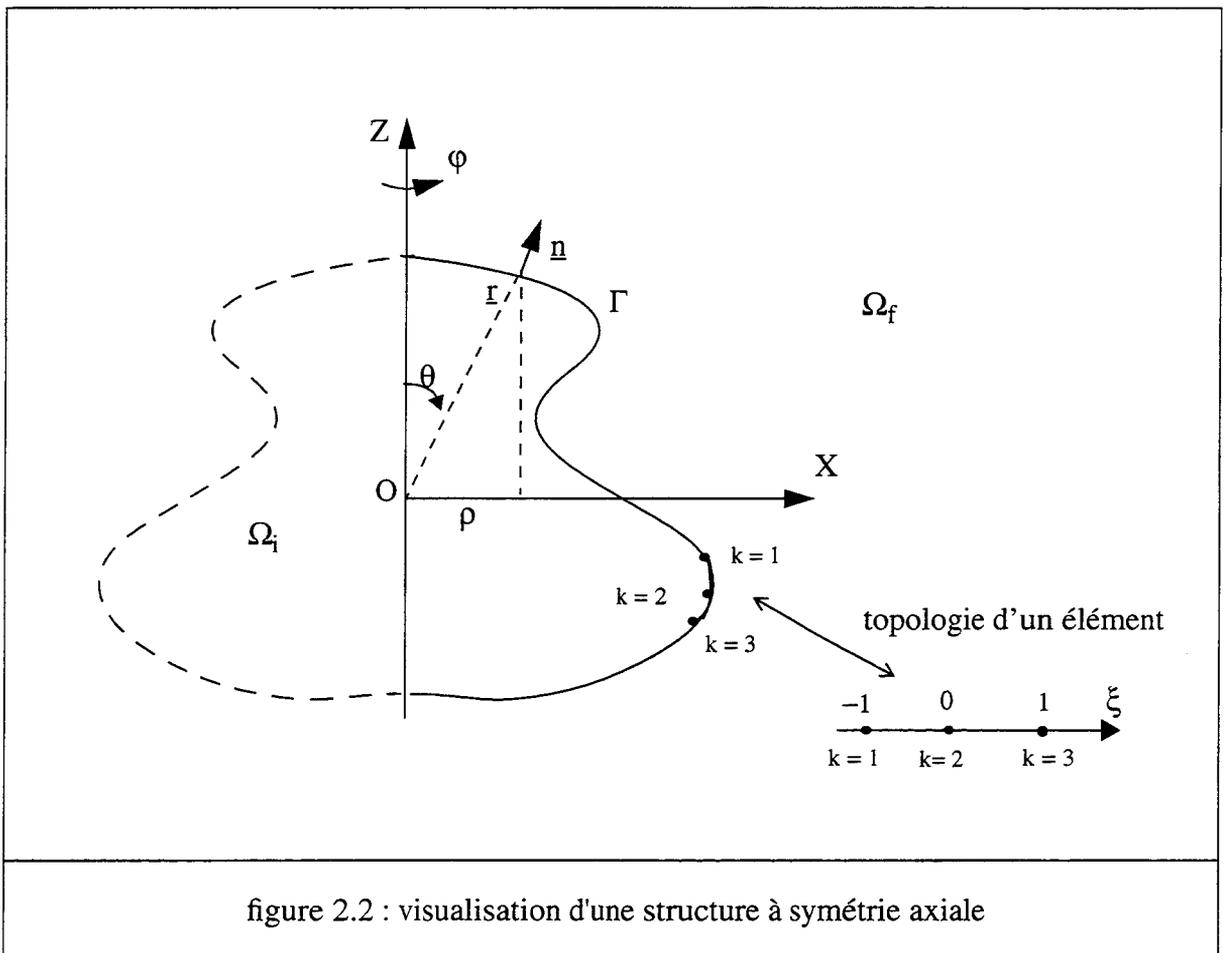
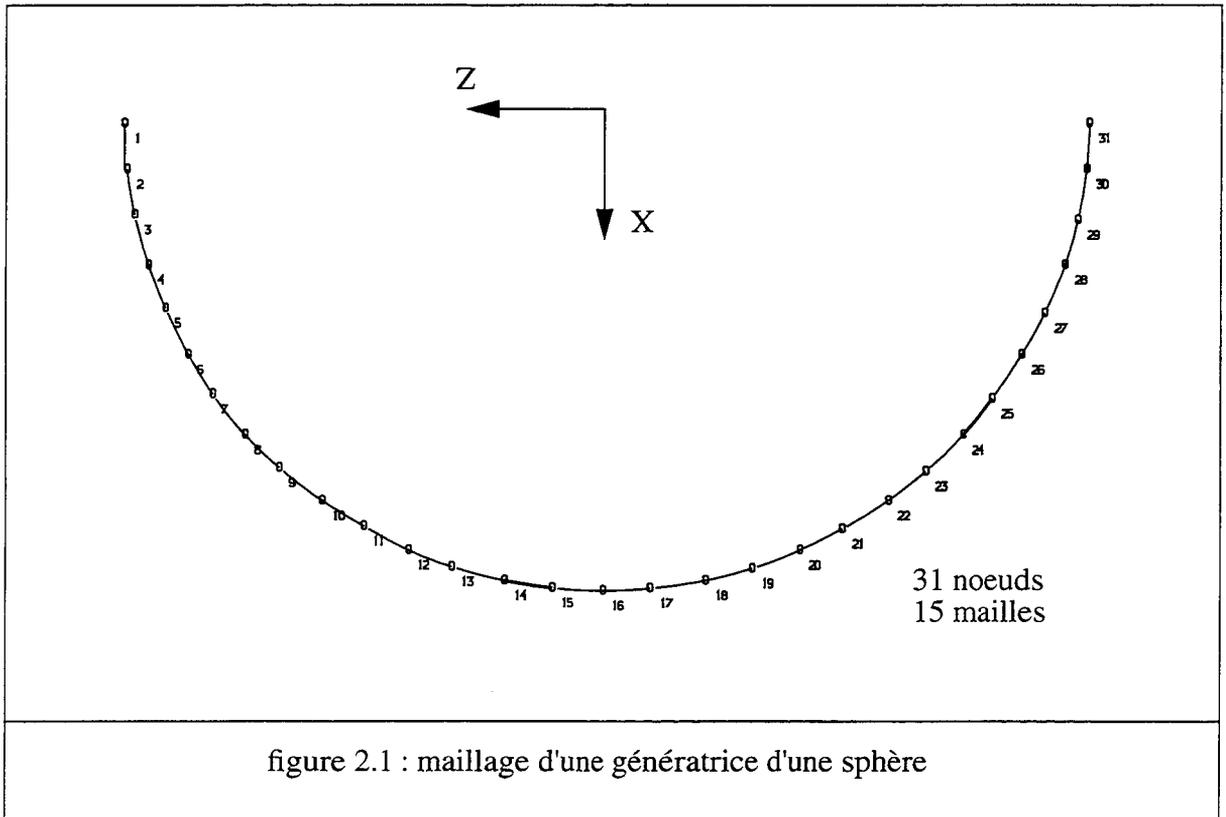
La représentation intégrale de Helmholtz-Kirchhoff constitue le point de départ de la plupart des études concernant le calcul de la diffraction des ondes en régime fréquentiel et temporel. La discrétisation de cette équation intégrale aboutit au calcul numérique de la pression en chaque point du domaine fluide et à chaque pas de temps. Ce traitement numérique impose deux niveaux de discrétisation :

- une discrétisation de la surface Γ du diffuseur en éléments de surface,
 - une discrétisation sur le temps, autrement dit, un échantillonnage de la réponse acoustique.
- On cherche alors les valeurs $p(\underline{r}, t_n)$ de la pression surfacique aux temps $t_n = n\Delta t$, où Δt est la période d'échantillonnage.

I.1. Discrétisation spatiale

I.1.1. Principe des éléments finis de surface

L'utilisation des éléments finis de surface [5, 7, 40, 45, 90, 95] est classique pour mener à bien la résolution de l'équation (1.11). Il s'agit de ramener la solution du problème à la détermination d'un nombre fini d'inconnus. L'approche la plus courante consiste à diviser la surface Γ en domaines surfaciques élémentaires reliés entre eux par un nombre fini de points appelés noeuds. Un tel découpage forme un maillage (Figure 2.1). L'approximation nodale [5] consiste à exprimer, sur chaque élément Γ_j , les variables du problème, c'est-à-dire la pression et sa dérivée normale, comme des fonctions algébriques dont les coefficients dépendent des valeurs nodales des variables. La méthode des éléments finis de surface utilise ce type d'approximation. Un cas particulier est celui où l'on considère que la pression et sa dérivée normale ont des valeurs uniformes sur chaque élément de surface. Il s'agit alors d'une méthode de collocation par points [96]. Dans l'élément, les valeurs de ces variables sont fournies par l'intermédiaire des fonctions de forme ou d'interpolation, qui dépendent, elles, des coordonnées.



I.1.2. Éléments et fonctions d'interpolation spatiales utilisées

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse uniquement à des structures présentant une symétrie axiale (Figure 2.2). Le repère global (O,X,Y,Z) est fixé de telle sorte que l'axe (OZ) soit confondu avec l'axe de symétrie. La symétrie axiale permet de ne mailler qu'une génératrice. Pour simplifier le problème, on place cette génératrice dans le plan (OXZ). La totalité de la surface est alors décrite par rotation autour de l'axe (OZ) en faisant varier l'angle azimuthal φ , compté à partir de (OX), de 0 à 2π . La génératrice est découpée en arcs de parabole qui sont des éléments isoparamétriques Γ_j à 3 noeuds [5, 7, 10, 90] (Figure 2.2).

La pression, sa dérivée temporelle et sa dérivée normale sur un élément Γ_j comportant 3 noeuds sont approchées à l'aide des fonctions de forme N_k , suivant les relations [5] :

$$p(\underline{r}, t) = \sum_{k=1}^3 N_k(\xi) P_{jk}(t) \quad \underline{r} \in \Gamma_j \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\underline{r}, t) = \sum_{k=1}^3 N_k(\xi) \frac{\partial}{\partial t} P_{jk}(t) \quad \underline{r} \in \Gamma_j \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} p(\underline{r}, t) = \sum_{k=1}^3 N_k(\xi) \frac{\partial}{\partial n} P_{jk}(t) \quad \underline{r} \in \Gamma_j \quad (2.3)$$

où ξ est la coordonnée réduite associée à l'élément de surface Γ_j et les coefficients P_{jk} et $\frac{\partial P_{jk}}{\partial n}$ sont les valeurs de la pression et de sa dérivée normale au noeud numéro k de l'élément Γ_j . Sur chaque élément, le nombre de fonctions de forme est égal au nombre de noeuds.

Pour faciliter le couplage entre le code EQI [9] et le code éléments finis ATILA [10], on utilise les mêmes interpolations quadratiques en espace. Les fonctions de forme quadratiques permettent de décrire toute géométrie complexe et d'effectuer les calculs avec une bonne précision sous réserve de respecter un critère de maillage lié aux variations spatiales des champs étudiés. Pour des applications acoustiques, le critère généralement admis est le "critère en $\lambda/4$ " [5, 80]. Ce critère signifie que les dimensions latérales des éléments de surface doivent être inférieures ou égales au quart de la longueur d'onde de l'onde la plus lente à la fréquence de calcul. Pour un maillage donné, ce critère fixe ainsi la fréquence maximale d'utilisation :

$$f_{\max} \leq \frac{c_{\min}}{4d_{\max}} \quad (2.4)$$

où d_{\max} est la taille maximale d'un élément.

Les fonctions de forme dépendent uniquement de la variable ξ :

$$\begin{cases} N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\ N_2(\xi) = 1 - \xi^2 \\ N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \end{cases} \quad (2.5)$$

Soit un élément Γ_j de la génératrice, les coordonnées des trois noeuds sont données par $(x_{jk}, 0, z_{jk})$ où $k = 1, 2, 3$. Un point courant $r'(x', y', z')$ de Γ_j est représenté par :

$$\begin{cases} x'(\xi, \varphi) = \sum_{k=1}^3 N_k(\xi) x_{jk} \cos \varphi \\ y'(\xi, \varphi) = \sum_{k=1}^3 N_k(\xi) x_{jk} \sin \varphi \\ z'(\xi) = \sum_{k=1}^3 N_k(\xi) z_{jk} \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ -1 \leq \xi \leq 1 \end{matrix} \quad (2.6)$$

où l'indice jk indique le k ième noeud du j ième élément. La normale à la surface au point r' de Γ a pour expression :

$$\mathbf{n}'(\xi, \varphi) = \frac{1}{\mathcal{R}(\xi)} \begin{cases} -\frac{dz'(\xi)}{d\xi} \cos \varphi \\ -\frac{dz'(\xi)}{d\xi} \sin \varphi \\ \frac{dx'(\xi, 0)}{d\xi} \end{cases} \quad (2.7)$$

avec

$$\mathcal{R}(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx'(\xi, 0)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz'(\xi)}{d\xi}\right)^2} \quad (2.8)$$

L'élément de surface est :

$$d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) = w(\xi) d\xi d\varphi \quad (2.9)$$

où

$$w(\xi) = x'(\xi, 0)\mathcal{R}(\xi) \quad (2.10)$$

En reportant ces dernières équations dans la représentation intégrale espace-temps de Kirchhoff (1.11) à l'instant t au point \mathbf{r}_i de la surface Γ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_i}{4\pi} P_i(t) - P_i^{\text{inc}}(t) &= \frac{-1}{4\pi} \sum_j^{\text{NE}} \sum_k^3 \iint_{\Gamma_j} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_k(\xi, \varphi)|} \frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial n'} N_k(\xi) d\mathbf{r}' \\ &+ \frac{1}{4\pi} \sum_j^{\text{NE}} \sum_k^3 \iint_{\Gamma_j} \frac{\mathbf{n}' \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_k(\xi, \varphi))}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_k(\xi, \varphi)|^2} \left(\frac{P_{jk}(\tau)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_k(\xi, \varphi)|} + \frac{\partial P_{jk}(\tau)}{c \partial \tau} \right) N_k(\xi) d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (2.11)$$

où NE est le nombre d'éléments sur Γ , P_i et P_i^{inc} sont la pression et la pression incidente au noeud i .

Pour alléger l'écriture des équations, dans la suite de ce document, on remplace le vecteur $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_k(\xi, \varphi))$ par \mathbf{R}_{ik} , la distance $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_k(\xi, \varphi)|$ par R_{ik} , la fonction de forme $N_k(\xi)$ par N_k et

la double sommation $\sum_j^{\text{NE}} \sum_k^3$ par $\sum_{j,k}$. On obtient alors :

$$\frac{\alpha_i}{4\pi} P_i(t) - P_i^{\text{inc}}(t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j,k} \iint_{\Gamma_j} \left\{ \frac{-1}{R_{ik}} \frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial n'} + \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{R}_{ik}}{R_{ik}^2} \left(\frac{P_{jk}(\tau)}{R_{ik}} + \frac{\partial P_{jk}(\tau)}{c \partial \tau} \right) \right\} N_k d\mathbf{r}' \quad (2.12)$$

où j désigne l'élément et k désigne le noeud de l'élément Γ_j . Il faut remarquer que les grandeurs indicées par i correspondent à une numérotation globale alors que celles indicées par jk correspondent à une numérotation locale. En général, le temps retardé τ ne correspond pas à un pas

de temps, il est donc nécessaire d'interpoler les valeurs de $P_{jk}(\tau)$, $\frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial n'}$ et $\frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial \tau}$.

1.2. Discrétisation Temporelle

Nous proposons dans ce paragraphe, les différents schémas d'interpolation pour la discrétisation temporelle des paramètres $P_{jk}(\tau)$, $\frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial n'}$ et $\frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial \tau}$ qui apparaissent dans

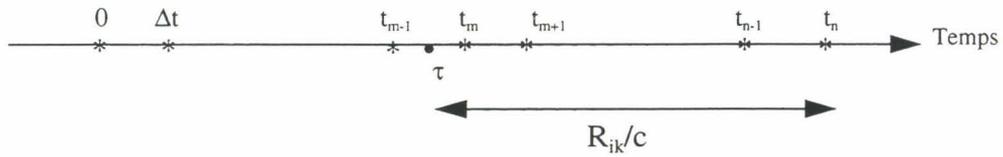
l'équation de Kirchhoff (2.12). On fixe à priori le pas de temps Δt et on découpe l'axe des temps en intervalles $[t_{n-1}, t_n]$ de même longueur Δt :

$$t_n = t_{n-1} + \Delta t = n\Delta t \quad (2.13)$$

Le temps retardé $\tau = t_n - \frac{R_{ik}}{c}$ est relié à ce découpage suivant la valeur de R_{ik} . Si

$R_{ik} \neq 0$ et $\tau > 0$ alors il existe un nombre entier naturel m tel que :

$$m \leq n \text{ et } t_{m-1} < \tau \leq t_m \quad (2.14)$$



Deux classes générales de schémas d'intégration numérique sont employées en analyse transitoire. Les méthodes explicites sont celles pour lesquelles la réponse de la pression courante dépend uniquement des valeurs aux instants passés. Les méthodes implicites sont celles pour lesquelles la réponse de la pression courante dépend à la fois des valeurs aux instants passés et de sa valeur à l'instant de calcul.

Traditionnellement, en éléments finis ou en différences finies, les solutions explicites peuvent devenir instables si le pas de temps est trop grand. Les solutions implicites sont fondamentalement stables [5, 55].

I.2.1. Méthodes antérieures

Dans la littérature, les méthodes de collocation sont souvent utilisées pour les équations de potentiel retardé. Il s'agit soit d'une discrétisation par collocation en espace et par différence finies en temps soit d'une discrétisation par collocation en espace et en temps [13, 19, 21]. Pour étudier la diffraction par des sphères rigides, Mitzner [13] utilise une interpolation linéaire sur la pression $P(\tau)$ et sur sa dérivée temporelle :

$$P_{jk}(\tau) = (P_{jk}^m - P_{jk}^{m-1})\mu + P_{jk}^{m-1} \quad (2.15)$$

$$\dot{P}_{jk}(\tau) = (\dot{P}_{jk}^m - \dot{P}_{jk}^{m-1})\mu + \dot{P}_{jk}^{m-1} \quad (2.16)$$

où m est un entier naturel tel que $(m-1)$ soit égal à la partie entière de $\frac{\tau}{\Delta t}$, $\dot{P}_{jk}(\tau)$ est la dérivée de la pression par rapport à τ , P_{jk}^m est la pression à l'instant t_m et μ le taux de variation temporel tel que :

$$\mu = \frac{\tau - t_{m-1}}{\Delta t} \quad (2.17)$$

avec $t_{m-1} = (m-1)\Delta t$. La dérivée temporelle de la pression \dot{P}_{jk}^m à l'instant t_m est donnée par une méthode de collocation d'ordre 2 [34, 97] :

$$\dot{P}_{jk}^m = \frac{3P_{jk}^m - 4P_{jk}^{m-1} + P_{jk}^{m-2}}{2\Delta t} \quad (2.18)$$

Cette interpolation est devenue la référence de nombreux auteurs qui ont utilisé la méthode des équations intégrales pour le calcul de la diffraction acoustique.

T. Ha Duong [19], Y. Ding [21] et M. Filipe [35] ont appliqué des méthodes de collocation avec un schéma de différence décentrée d'ordre supérieur ou égal à 2, ainsi que la méthode de Galerkin. Ils ont comparé les propriétés de convergence et de stabilité de ces différentes méthodes. Leurs résultats sont soumis par la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [55]. L'incrément Δt est choisi selon la formule :

$$\Delta t = \alpha \frac{\Delta x_{\min}}{c} \quad (2.19)$$

où α est le coefficient de CFL qu'on appellera dans la suite CFL et Δx_{\min} est la distance minimale entre deux noeuds. Pour avoir des résultats stables et convergents, le coefficient α doit théoriquement être inférieur à 1. Pratiquement, les résultats sont stables pour des valeurs de α telles que $\alpha_{\lim} < \alpha < 1$ où α_{\lim} dépend du maillage. Il est également constaté que plus le centrage est grand, plus le schéma est stable [21]. T. Ha Duong [19] indique que cette méthode de collocation provoque une onde parasite dans la zone cachée de la structure. C'est une onde numérique qui se propage à l'intérieur de l'objet (alors que les conditions aux limites sont parfaitement réfléchissantes) et atteint le point situé dans l'ombre avant l'arrivée de l'onde réelle [98].

Toutes les formulations décrites précédemment sont basées sur la méthode des éléments finis

en espace et la méthode des différences finies en temps. Elles souffrent d'instabilités numériques.

En électromagnétisme, R. Mittra [99] a employé une formule d'interpolation de Lagrange suivant trois pas de temps :

$$P_{jk}(\tau) = P_{jk}(t_m + \theta\Delta t) = \frac{\theta(\theta-1)}{2}P_{jk}^{m-1} + (1-\theta^2)P_{jk}^m + \frac{\theta(\theta+1)}{2}P_{jk}^{m+1} \quad (2.20)$$

$$\dot{P}_{jk}(\tau) = \dot{P}_{jk}(t_m + \theta\Delta t) = \frac{2\theta-1}{2\Delta t}P_{jk}^{m-1} - \frac{2\theta}{\Delta t}P_{jk}^m + \frac{2\theta+1}{2\Delta t}P_{jk}^{m+1} \quad (2.21)$$

avec : $t_m = m\Delta t$ et $-1 \leq \theta \leq 1$.

Il a indiqué que les instabilités sont liées aux discrétisations par différences finies.

Plus récemment, S.P Walker et M. J. Bluck [72-74] ont développé également en électromagnétisme une méthode de discrétisation de l'équation intégrale de Helmholtz-Kirchhoff employant la méthode des éléments finis en espace et en temps. Cette méthode, qui donne des résultats satisfaisants en terme de précision et de stabilité, a été étendue aux applications acoustiques dans le cadre de cette thèse, comme décrit au paragraphe I.2.3.

I.2.2. Méthodes des différences finies utilisées

Dans ce paragraphe, on développe les principales méthodes d'interpolation que nous appliquerons à la discrétisation temporelle dans le cadre de ce travail.

a) Méthode d'interpolation linéaire ML

Cette méthode semble la plus simple pour le calcul des pressions à l'instant retardé τ [90, 95]. La pression et sa dérivée normale sont données par les équations suivantes :

$$P_{jk}(\tau) = (P_{jk}^m - P_{jk}^{m-1})\mu + P_{jk}^{m-1} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial n'} = \left(\frac{\partial P_{jk}^m}{\partial n'} - \frac{\partial P_{jk}^{m-1}}{\partial n'} \right) \mu + \frac{\partial P_{jk}^{m-1}}{\partial n'} \quad (2.23)$$

où μ est le taux de variation temporel :

$$\mu = n - m + 1 - \frac{R_{jk}}{c\Delta t} \quad (2.24)$$

La dérivée temporelle de la pression est obtenue par la dérivation directe de (2.22) :

$$\frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial \tau} = \frac{P_{jk}^m - P_{jk}^{m-1}}{\Delta t} \quad (2.25)$$

Si $cn\Delta t \leq R_{jk}$ alors $\tau \leq 0$, $P_{jk}(\tau) = 0$, $\frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial \tau} = 0$ et $\frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial n'} = 0$.

b) Méthode d'interpolation semi-linéaire MSL1

Dans cette méthode, la pression et sa dérivée normale sont données par les formules (2.22) et (2.23). Si $R_{jk} \neq 0$ et $\tau > 0$, il existe un entier naturel m tel que :

$$\tau = t_m + \theta\Delta t \quad \text{avec} \quad \theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (2.26)$$

et $1 \leq m \leq n$. Dans ce cas, la dérivée temporelle de la pression est donnée par une interpolation de différence centrée d'ordre 2 [68] :

$$\frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial \tau} = \frac{P_{jk}^{m+1} - P_{jk}^{m-1}}{2\Delta t} \quad (2.27)$$

Si $R_{jk} = 0$, on a alors $\tau = t_n$, $P_{jk}(\tau) = P_{jk}^n$ et $\frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial n'} = \frac{\partial P_{jk}^n}{\partial n'}$. On choisit de décrire $\frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial \tau}$ par une interpolation de différence à gauche d'ordre 2 [13, 34, 97, 99] :

$$\frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial \tau} = \frac{3P_{jk}^n - 4P_{jk}^{n-1} + P_{jk}^{n-2}}{2\Delta t} \quad (2.28)$$

c) Méthode d'interpolation semi-linéaire MSL2

Dans cette méthode, la pression et sa dérivée normale sont données par les formules (2.22) et (2.23). Herman [18, 27] propose d'éliminer les instabilités en utilisant la dérivée temporelle suivante :

$$\frac{\partial P_{jk}}{\partial \tau}(\tau) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial P_{jk}^m}{\partial \tau} + \frac{\partial P_{jk}^{m-1}}{\partial \tau} \right) \quad (2.29)$$

où $\frac{\partial P_{jk}^m}{\partial \tau}$ et $\frac{\partial P_{jk}^{m-1}}{\partial \tau}$ sont interpolées par la formule standard de différences à gauche sur trois points [97] :

$$\frac{\partial P_{jk}^m}{\partial \tau} = \frac{3P_{jk}^m - 4P_{jk}^{m-1} + P_{jk}^{m-2}}{2\Delta t} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial P_{jk}^{m-1}}{\partial \tau} = \frac{3P_{jk}^{m-1} - 4P_{jk}^{m-2} + P_{jk}^{m-3}}{2\Delta t} \quad (2.31)$$

La variation temporelle de la pression peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial P_{jk}}{\partial \tau}(\tau) = \frac{3P_{jk}^m - P_{jk}^{m-1} - 3P_{jk}^{m-2} + P_{jk}^{m-3}}{4\Delta t} \quad (2.32)$$

Si $R_{jk} = 0$, la dérivée temporelle de la pression est donnée par la formule (2.28).

d) Méthode de collocation MC

Si $R_{jk} \neq 0$ et $0 < \tau \leq t_{n-1}$, Y. Ding [21] propose un schéma centrage d'ordre q où la pression, sa dérivée normale et sa dérivée temporelle sont données par :

$$P_{jk}(\tau) = \frac{P_{jk}^{m+q-1} + P_{jk}^{m-q}}{2} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial P_{jk}}{\partial n'}(\tau) = \frac{\frac{\partial P_{jk}^{m+q-1}}{\partial n'} + \frac{\partial P_{jk}^{m-q}}{\partial n'}}{2} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial P_{jk}}{\partial \tau}(\tau) = \frac{P_{jk}^{m+q-1} - P_{jk}^{m-q}}{(2q-1)\Delta t} \quad (2.35)$$

Le choix de $q > 1$ n'est justifié que si Δt est suffisamment faible ($CFL < 1$). Si $t_{n-1} < \tau \leq t_n$, on utilise la méthode ML.

1.2.3. Méthodes d'interpolation quadratique [72-74]

Lors de l'application des méthodes des équations intégrales en régime transitoire, la principale difficulté rencontrée réside dans l'instabilité de la méthode. Presque tous les auteurs

qui ont étudié et analysé les instabilités [59-64, 67-71] ont utilisé des formulations dont la discrétisation temporelle par différences finies est contrainte par la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) [55] donnée par la formule (2.19). Ces approches sont appelées explicites.

Nous proposons dans ce paragraphe une discrétisation temporelle qui emploie des éléments isoparamétriques quadratiques avec un ordre élevé de quadrature de Gauss. Cette formulation réduit fortement les instabilités observées dans les traitements explicites et permet un libre choix du paramètre Δt . Les équations qui en suivent sont alors dites implicites [72-74].

La variation temporelle de la pression est discrétisée par des fonctions quadratiques de Lagrange avec une séparation nodale de Δt . Nous définissons ainsi les fonctions de forme temporelle par :

$$T_\beta(\theta) \quad \beta = 1, 2, 3 \quad (2.36)$$

où θ est un paramètre temporel intrinsèque :

$$-1 \leq \theta \leq 1$$

L'expression des fonctions de forme T_β est donnée par :

$$\begin{cases} T_1(\theta) = \frac{1}{2}\theta(\theta - 1) \\ T_2(\theta) = 1 - \theta^2 \\ T_3(\theta) = \frac{1}{2}\theta(\theta + 1) \end{cases} \quad (2.37)$$

Pour chaque temps réel t_n , l'élément temporel Θ_L et le paramètre temps θ qui lui correspondent sont calculés par les expressions suivantes :

$$L = \text{int} \left\{ \frac{t_n}{2\Delta t} \right\} + 1 \quad (2.38)$$

$$\theta = \frac{t_n}{\Delta t} - 2L + 1 \quad (2.39)$$

où **int** désigne la partie entière.

Les arguments dans l'équation intégrale de Kirchhoff (2.12) font intervenir le temps retardé τ .

On a ainsi :

$$L = \text{int} \left\{ \frac{t_n - R_{ik}/c}{2\Delta t} \right\} + 1 \quad \theta = \frac{t_n - R_{ik}/c}{\Delta t} - 2L + 1 \quad (2.40)$$

Sur l'élément Γ_j la pression $P_{jk}(\tau)$ au point \underline{r}_k à l'instant retardé τ , sa variation temporelle et sa dérivée normale sur un élément temporel Θ_L sont approchées par les fonctions de forme T_β , suivant les relations :

$$P_{jk}(\tau) = \sum_{\beta=1}^3 T_\beta(\theta) P_{jk}^{L\beta} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P_{jk}(\tau) = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\dot{T}_\beta(\theta)}{\Delta t} P_{jk}^{L\beta} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} P_{jk}(\tau) = \sum_{\beta=1}^3 T_\beta(\theta) \left[\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}'} \right]_{jk}^{L\beta} \quad (2.43)$$

où $\dot{T}_\beta(\theta)$ est la dérivée temporelle de $T_\beta(\theta)$ par rapport à θ et $P_{jk}^{L\beta}$ est la pression au noeud k de l'élément spatial Γ_j au pas de temps β de l'élément temporel Θ_L . On obtient pour la pression, sa dérivée temporelle et sa dérivée normale :

$$\left\{ \begin{array}{l} p(\underline{r}, \tau) = \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 N_k(\xi) T_\beta(\theta) P_{jk}^{L\beta} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} p(\underline{r}, \tau) = \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 N_k(\xi) \frac{\dot{T}_\beta(\theta)}{\Delta t} P_{jk}^{L\beta} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} p(\underline{r}, \tau) = \sum_{k=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 N_k(\xi) T_\beta(\theta) \left[\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}'} \right]_{jk}^{L\beta} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \underline{r} \in \Gamma_j \\ \tau \in \Theta_L \end{array} \quad (2.44)$$

En général, les formulations qui emploient des méthodes d'interpolation temporelles par éléments finis avec une relaxation de la valeur de Δt par rapport à $\Delta x_{\min}/c$, sont dites implicites.

II. DISCRETISATION DE L'EQUATION INTEGRALE DE KIRCHHOFF

Après avoir donné les discrétisations spatiale et temporelle et défini les différentes méthodes d'interpolation, nous allons écrire la forme générale discrétisée de l'équation intégrale espace-temps de Kirchhoff pour l'introduire dans le code EQI.

II.1. Obtention de l'équation intégrale de Kirchhoff discrétisée

II.1.1. Cas des méthodes des différences finies

a) Méthode d'interpolation linéaire ML

On note les intégrales suivantes:

$$I_{0ijk} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma_j} N_k d\mathbf{r}' \quad (2.45)$$

$$I_{1ijk} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma_j} \frac{N_k}{R_{ik}} d\mathbf{r}' \quad (2.46)$$

$$I'_{1ijk} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma_j} \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{R}_{ik}}{R_{ik}^2} N_k d\mathbf{r}' \quad (2.47)$$

$$I_{2ijk} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma_j} \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{R}_{ik}}{R_{ik}^3} N_k d\mathbf{r}' \quad (2.48)$$

Pour alléger l'écriture des équations, on remplace $P_i(t_n)$ par P_i^n et la pression incidente

$P_i^{\text{inc}}(t_n)$ par P_{in}^{inc} . Si $\tau > 0$ alors il existe un nombre entier naturel m tel que :

$$t_{m-1} < \tau \leq t_m \quad (2.49)$$

Le report des équations (2.22), (2.23) et (2.25) dans la représentation intégrale de Kirchhoff (2.12), et l'introduction des intégrales (2.45) à (2.48) conduisent au système :

$$[H]\{P|_{t_n}\} = [G]\left\{\frac{\partial P}{\partial n'}\Big|_{t_n}\right\} - \{Q|_{t_n}\} \quad (2.50)$$

avec

$$H_{ik} = \delta_{ik} \left(\frac{\alpha(\underline{r}_i)}{4\pi} - \frac{I'_{1ijk}}{c\Delta t} \right) - \sum_{j,k} \delta_{mn} I_{2ijk} \quad (2.51)$$

$$G_{ik} = - \sum_{j, k \neq i} \delta_{mn} \left(I_{1ijk} - \frac{I_{0ijk}}{c\Delta t} \right) - \delta_{ik} I_{1ijk} \quad (2.52)$$

ou δ_{ik} désigne le symbole de Kronecker.

Le vecteur $\{Q|_{t_n}\}$ contient les valeurs nodales de la pression incidente à l'instant t_n ainsi que l'ensemble des termes associés aux valeurs nodales de la pression et de sa dérivée normale aux instants précédents (t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) :

$$\begin{aligned} Q_{in} = & -P_{in}^{inc} + \delta_{ik} \frac{I'_{1ijk}}{c\Delta t} P_{jk}^{n-1} \\ & - \sum_{j, k \neq i} \left\{ (1 - \delta_{mn})(n - m + 1) I_{2ijk} P_{jk}^m + (m - n) I_{2ijk} P_{jk}^{m-1} \right\} + \\ & + \sum_{j, k \neq i} \left\{ (1 - \delta_{mn}) \left[(n - m + 1) I_{1ijk} - \frac{I_{0ijk}}{c\Delta t} \right] \frac{\partial P_{jk}^m}{\partial n'} + \left[(m - n) I_{1ijk} + \frac{I_{0ijk}}{c\Delta t} \right] \frac{\partial P_{jk}^{m-1}}{\partial n'} \right\} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Le vecteur $\{P|_{t_n}\}$ contient les pressions nodales à l'instant t_n , le vecteur $\{\partial P / (\partial n')|_{t_n}\}$ contient les valeurs nodales de la dérivée normale de la pression à l'instant t_n . Q_{in} et P_{in}^{inc} désignent la i ème ligne des vecteurs $\{Q|_{t_n}\}$ et $\{P^{inc}|_{t_n}\}$. La résolution est itérative par pas de temps. On note que les matrices $[H]$ et $[G]$ sont indépendantes de l'instant de calcul. La pression en un point du domaine fluide est obtenue de manière similaire en déplaçant le point \underline{r} dans le fluide.

b) Méthode semi-linéaire MSLI

Si $\tau > 0$, on a deux positions possibles de τ par rapport à t_m et t_{m-1} :

$$i) \text{ si } t_{m-1} < \tau \leq t_m - \frac{\Delta t}{2} \text{ ou } t_{n-1} < \tau \leq t_n \text{ alors on identifie } \frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial \tau} \text{ et } \frac{\partial P_{jk}^{m-1}}{\partial \tau}$$

D'après la formule (2.27), la variation temporelle est donnée par :

$$\frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial \tau} = \frac{P_{jk}^m - P_{jk}^{m-2}}{2\Delta t} \quad (2.54)$$

Après report des équations (2.22), (2.23) et (2.54) et des intégrales (2.45) à (2.48) dans la représentation intégrale de Kirchhoff à l'instant t_n , on a :

$$H_{ik} = \delta_{ik} \left(\frac{\alpha(\underline{r}_i)}{4\pi} - I_{2ijk} - \frac{3I'_{1ijk}}{2c\Delta t} \right) - \sum_{j, k \neq i} \delta_{mn} \left(I_{2ijk} - \frac{I'_{1ijk}}{2c\Delta t} \right) \quad (2.55)$$

$$G_{ik} = -\delta_{ik} I_{1ijk} - \sum_{j, k \neq i} \delta_{mn} \left(I_{1ijk} - \frac{I_{0ijk}}{c\Delta t} \right) \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} Q_{in} = & -P_{in}^{inc} + \delta_{ik} \frac{2I'_{1ijk}}{c\Delta t} P_{jk}^{n-1} - \delta_{ik} \frac{I'_{1ijk}}{2c\Delta t} P_{jk}^{n-2} \\ & - \sum_{j, k \neq i} (1 - \delta_{mn}) \left[(n - m + 1) I_{2ijk} - \frac{I'_{1ijk}}{2c\Delta t} \right] P_{jk}^m \\ & - \sum_{j, k \neq i} \left\{ \left[(m - n) I_{2ijk} + \frac{I'_{1ijk}}{c\Delta t} \right] P_{jk}^{m-1} - \frac{I'_{1ijk}}{2c\Delta t} P_{jk}^{m-2} \right\} \\ & + \sum_{j, k \neq i} \left\{ (1 - \delta_{mn}) \left[(n - m + 1) I_{1ijk} - \frac{I_{0ijk}}{c\Delta t} \right] \frac{\partial P_{jk}^m}{\partial n'} + \left[(m - n) I_{1ijk} + \frac{I_{0ijk}}{c\Delta t} \right] \frac{\partial P_{jk}^{m-1}}{\partial n'} \right\} \end{aligned} \quad (2.57)$$

ii) si $t_m - \frac{\Delta t}{2} < \tau \leq t_m$ et $t_m < t_n$ alors on identifie $\frac{\partial}{\partial \tau} P_{jk}(\tau)$ et $\frac{\partial P_{jk}^m}{\partial \tau}$. Dans ce cas on

exprime la dérivée temporelle comme :

$$\frac{\partial P_{jk}(\tau)}{\partial \tau} = \frac{P_{jk}^{m+1} - P_{jk}^{m-1}}{2\Delta t} \quad (2.58)$$

Après report des équations (2.22), (2.23) et (2.58) et introduction des intégrales (2.45) à (2.48), on a :

$$H_{ik} = \delta_{ik} \left(\frac{\alpha(\underline{r}_i)}{4\pi} - I_{2ijk} - \frac{3I'_{1ijk}}{2c\Delta t} \right) - \sum_{j, k \neq i} \frac{\delta_{(m+1)n} I'_{1ijk}}{2c\Delta t} \quad (2.59)$$

$$G_{ik} = -\delta_{ik} I_{1ijk} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned}
Q_{in} = & -P_{in}^{inc} + \delta_{ik} \frac{2\Gamma'_{1ijk}}{c\Delta t} P_{jk}^{n-1} - \delta_{ik} \frac{\Gamma'_{1ijk}}{2c\Delta t} P_{jk}^{n-2} \\
& + \sum_{j, k \neq i} \left\{ \left[(n-m+1)I_{1ijk} - \frac{I_{0ijk}}{c\Delta t} \right] \frac{\partial P_{jk}^m}{\partial n'} + \left[(m-n)I_{1ijk} + \frac{I_{0ijk}}{c\Delta t} \right] \frac{\partial P_{jk}^{m-1}}{\partial n'} \right\} \\
& - \sum_{j, k \neq i} \left\{ \left[(n-m+1)I_{2ijk} - \frac{\Gamma'_{1ijk}}{c\Delta t} \right] P_{jk}^m + \left[(m-n)I_{2ijk} + \frac{\Gamma'_{1ijk}}{c\Delta t} \right] P_{jk}^{m-1} + \delta_{(m+1)n} \frac{\Gamma'_{1ijk}}{2c\Delta t} P_{jk}^{m+1} \right\}
\end{aligned} \tag{2.61}$$

c) Méthode semi-linéaire MSL2

Si $\tau > 0$, après simplification et introduction des équations (2.22), (2.23), (2.32) et (2.45) à (2.48) dans l'équation de Kirchhoff (2.12), on a :

$$H_{ik} = \delta_{ik} \left(\frac{\alpha(\underline{r}_i)}{4\pi} - I_{2ijk} - \frac{3\Gamma'_{1ijk}}{2c\Delta t} \right) - \sum_{j, k \neq i} \delta_{mn} \left(I_{2ijk} - \frac{\Gamma'_{1ijk}}{2c\Delta t} \right) \tag{2.62}$$

$$G_{ik} = -\delta_{ik} I_{1ijk} - \sum_{j, k \neq i} \delta_{mn} \left(I_{1ijk} - \frac{I_{0ijk}}{c\Delta t} \right) \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}
Q_{in} = & -P_{in}^{inc} + \delta_{ik} \frac{2\Gamma'_{1ijk}}{c\Delta t} P_{jk}^{n-1} - \delta_{ik} \frac{\Gamma'_{1ijk}}{2c\Delta t} P_{jk}^{n-2} \\
& - \sum_{j, k \neq i} \left\{ (1 - \delta_{mn}) \left[(n-m+1)I_{2ijk} - \frac{\Gamma'_{1ijk}}{4c\Delta t} \right] P_{jk}^m \right\} \\
& - \sum_{j, k \neq i} \left\{ \left[(m-n)I_{2ijk} + \frac{3\Gamma'_{1ijk}}{4c\Delta t} \right] P_{jk}^{m-1} - \frac{3\Gamma'_{1ijk}}{4c\Delta t} P_{jk}^{m-2} + \frac{\Gamma'_{1ijk}}{4c\Delta t} P_{jk}^{m-3} \right\} \\
& + \sum_{j, k \neq i} \left\{ (1 - \delta_{mn}) \left[(n-m+1)I_{1ijk} - \frac{I_{0ijk}}{c\Delta t} \right] \frac{\partial P_{jk}^m}{\partial n'} + \left[(m-n)I_{1ijk} + \frac{I_{0ijk}}{c\Delta t} \right] \frac{\partial P_{jk}^{m-1}}{\partial n'} \right\}
\end{aligned} \tag{2.64}$$

d) Méthode de collocation MC

Si $0 < \tau \leq t_{n-1}$, on reporte les équations (2.33), (2.34) et (2.35) dans l'équation (2.12). Après simplification et l'introduction des intégrales (2.45) à (2.48), on aboutit a :

$$H_{ik} = \delta_{ik} \left(\frac{\alpha(\underline{r}_i)}{4\pi} - I_{2ijk} - \frac{3\Gamma'_{1ijk}}{2c\Delta t} \right) - \sum_{j, k \neq i} \delta_{(m+q-1)n} \left(\frac{I_{2ijk}}{2} + \frac{\Gamma'_{1ijk}}{(2q-1)c\Delta t} \right) \tag{2.65}$$

$$G_{ik} = -\delta_{ik}I_{1ijk} - \sum_{j, k \neq i} \delta_{(m+q-1)n} I_{1ijk} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} Q_{in} = & -P_{in}^{inc} + \delta_{ik} \frac{2I'_{1ijk}}{c\Delta t} P_{jk}^{n-1} - \delta_{ik} \frac{I'_{1ijk}}{2c\Delta t} P_{jk}^{n-2} \\ & + \sum_{j, k \neq i} \left\{ \left[(1 - \delta_{(m+q-1)n}) \frac{I_{1ijk}}{2} \right] \frac{\partial P_{jk}^{m+q-1}}{\partial n'} + \frac{I_{1ijk}}{2} \frac{\partial P_{jk}^{m-q}}{\partial n'} \right\} \\ & - \sum_{j, k \neq i} \left\{ (1 - \delta_{(m+q-1)n}) \left[\frac{I_{2ijk}}{2} + \frac{I'_{1ijk}}{(2q-1)c\Delta t} \right] P_{jk}^{m+q-1} + \left[\frac{I_{2ijk}}{2} - \frac{I'_{1ijk}}{(2q-1)c\Delta t} \right] P_{jk}^{m-q} \right\} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Si $t_{n-1} < \tau \leq t_n$, la pression, sa dérivée normale et sa dérivée temporelle sont données par les formules (2.22), (2.23) et (2.25). Dans ce cas, on retrouve les mêmes équations que (2.51), (2.52) et (2.53). Dans cette étude, nous avons choisi $q=2$.

II.1.2. Cas de la méthode d'interpolation quadratique

Les intégrales sont calculées au fur et à mesure des itérations par méthode de Gauss. On introduit les expressions de l'équation (2.44) dans l'équation intégrale de Kirchhoff (2.12) :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_i}{4\pi} P_i^n - P_{in}^{inc} = & \frac{-1}{4\pi} \sum_j \iint_{\Gamma_j} \left\{ \sum_{k=1}^3 \frac{1}{R} N_k \sum_{\beta=1}^3 T_{\beta}(\theta(R, \tau)) \left[\frac{\partial P}{\partial n'} \right]_{jk}^{L\beta} \right\} d\mathbf{r}' \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_j \iint_{\Gamma_j} \left\{ \left[\sum_{k=1}^3 \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{R}}{R^3} N_k \sum_{\beta=1}^3 T_{\beta}(\theta(R, \tau)) P_{jk}^{L\beta} \right] \right\} d\mathbf{r}' \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_j \iint_{\Gamma_j} \left\{ \left[\sum_{k=1}^3 \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{R}}{c\Delta t R^2} N_k \sum_{\beta=1}^3 \dot{T}_{\beta}(\theta'(R, \tau)) P_{jk}^{L\beta} \right] \right\} d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (2.68)$$

Notons que le temps intrinsèque $\theta(R, \tau)$ auquel on évalue les intégrales est une fonction de $R(\xi, \varphi)$, qui est fonction des coordonnées intrinsèques ξ et φ . Le changement de variable :

$$\varphi = \pi(\eta + 1) \quad (2.69)$$

permet de situer la variable η entre -1 et 1. L'élément de surface devient :

$$d\mathbf{r}'(\xi, \varphi) = \pi w(\xi) d\xi d\eta \quad (2.70)$$

On emploie la technique de quadrature de Gauss-Legendre d'ordre $NG1 \times NG2$ sur les deux variables ξ et η . L'équation intégrale (2.68) s'écrit:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_i}{4\pi} P_i^n - P_{inc}^{inc} = & - \sum_j \sum_{q=1}^{NE} \sum_{r=1}^{NG1} \sum_{k=1}^{NG2} \left\{ \sum_{\beta=1}^3 \frac{1}{4R} N_k(\xi_q) w(\xi_q) T_\beta(\theta(R, \tau)) \left[\frac{\partial p}{\partial n'} \right]_{jk}^{L\beta} \right\} W_q W_r \\ & + \sum_j \sum_{q=1}^{NE} \sum_{r=1}^{NG1} \sum_{k=1}^{NG2} \left\{ \left[\sum_{\beta=1}^3 \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{R}}{4R^3} N_k(\xi_q) w(\xi_q) T_\beta(\theta(R, \tau)) P_{jk}^{L\beta} \right] \right\} W_q W_r \\ & + \sum_j \sum_{q=1}^{NE} \sum_{r=1}^{NG1} \sum_{k=1}^{NG2} \left\{ \left[\sum_{\beta=1}^3 \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{R}}{4c\Delta t R^2} N_k(\xi_q) w(\xi_q) \dot{T}_\beta(\theta(R, \tau)) P_{jk}^{L\beta} \right] \right\} W_q W_r \end{aligned} \quad (2.71)$$

W_q et W_r sont les poids de Gauss.

II.2. Discussion sur les modèles proposés

Quand on réduit le pas de temps Δt , les matrices $[H]$ et $[G]$ de l'équation (2.50) tendent vers une forme diagonale, avec des valeurs h_{ii} et g_{ii} indépendantes du temps. Leur calcul ne s'effectue qu'une seule fois. Dans ce cas, on retrouve une formulation explicite (équation 2.72).

$$\begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 & & & 0 \\ & & h_{33} & & & \\ \dots & & & \dots & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & h_{NN} & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & & & 0 \\ & & g_{33} & & & \\ \dots & & & \dots & & \\ & & & & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & g_{NN} & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial n'} \\ \dots \\ \frac{\partial P_N}{\partial n'} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_N \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Pour une approche implicite, les matrices $[H]$ et $[G]$ se remplissent petit à petit de valeurs h_{ij} et g_{ij} hors diagonale. Ces valeurs sont calculées à chaque pas de temps. L'équation est résolue de manière itérative :

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \dots & h_{1N} \\ & h_{22} & & & h_{2N} \\ & & h_{33} & & \\ \dots & & & \dots & \\ h_{N1} & \dots & & & h_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \dots & g_{1N} \\ \dots & g_{22} & g_{23} & & g_{2N} \\ & & g_{33} & & \\ \dots & & & \dots & \\ g_{N1} & \dots & & & g_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial n'} \\ \dots \\ \frac{\partial P_N}{\partial n'} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_N \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Les caractéristiques principales de ces deux méthodes sont résumées dans le tableau suivant :

Méthodes explicites	Méthodes implicites
<ul style="list-style-type: none"> . $\Delta t < \frac{\Delta x_{min}}{c}$ (CFL < 1) . matrices [H] et [G] : bandes diagonales, . discrétisation temporelle par différences finies . discrétisation spatiale par éléments finis 	<ul style="list-style-type: none"> . $\Delta t > \frac{\Delta x_{min}}{c}$ (CFL > 1) . matrices [H] et [G] non diagonales, . discrétisation spatio-temporelle par éléments finis
tableau 2.1 : différences entre les méthodes explicites et implicites	

Dans la suite de ce document, pour les deux méthodes de discrétisation :

- discrétisation spatiale par éléments finis et temporelle par différences finies,
- discrétisation spatio-temporelle par éléments finis,

nous allons calculer la diffraction pour différentes valeurs du pas de temps (soit CFL < 1 soit CFL > 1).

II.3. Calcul des intégrales

La précision des résultats et le temps de calcul sont étroitement liés à la méthode de calcul des intégrales (2.45) à (2.48) et (2.71). Toutes les intégrations numériques utilisées reposent sur la technique de Gauss-Legendre.

II.3.1. Méthode de Gauss-Legendre

Dans le cas de la méthode implicite, les intégrales à calculer sont de type :

$$I = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 F(\underline{r}_i, \underline{r}_k'(\xi, \varphi)) d\xi d\varphi \quad (2.74)$$

Pour placer la variation selon φ entre -1 et 1, on effectue le changement de variable suivant :

$$\varphi' = \frac{\varphi}{\pi} - 1 \quad (2.75)$$

En tenant compte de la symétrie par rapport au plan XOZ ($\varphi = 0$), l'intégrale (2.74) devient :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\underline{r}_i, \underline{r}_k'(\xi, \varphi')) d\xi d\varphi' \quad (2.76)$$

Ces intégrales sont calculées directement par la quadrature de Gauss-Legendre avec NG1 points de Gauss suivant ξ et NG2 points de Gauss par longueur d'onde suivant φ . Quand le noeud de calcul \underline{r}_i appartient à l'élément, on évalue la contribution de la singularité en augmentant le nombre de points de Gauss au voisinage \underline{r}_i . D'après Abramowitz [103], l'augmentation du nombre de points de Gauss se traduit par un accroissement de leur densité aux extrémités de l'intervalle d'intégration. Le calcul des intégrales est effectué suivant deux cas [7, 40] :

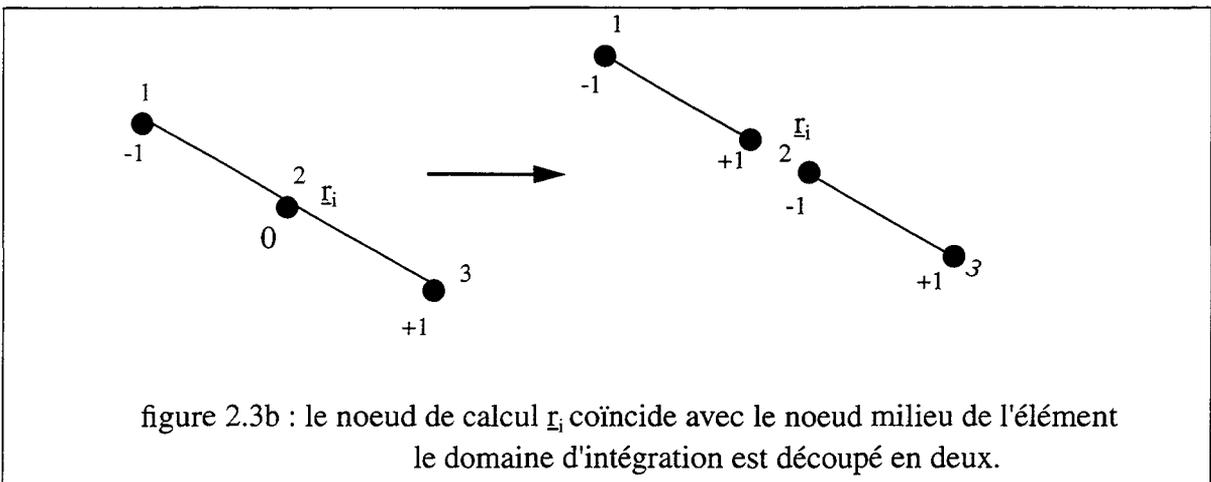
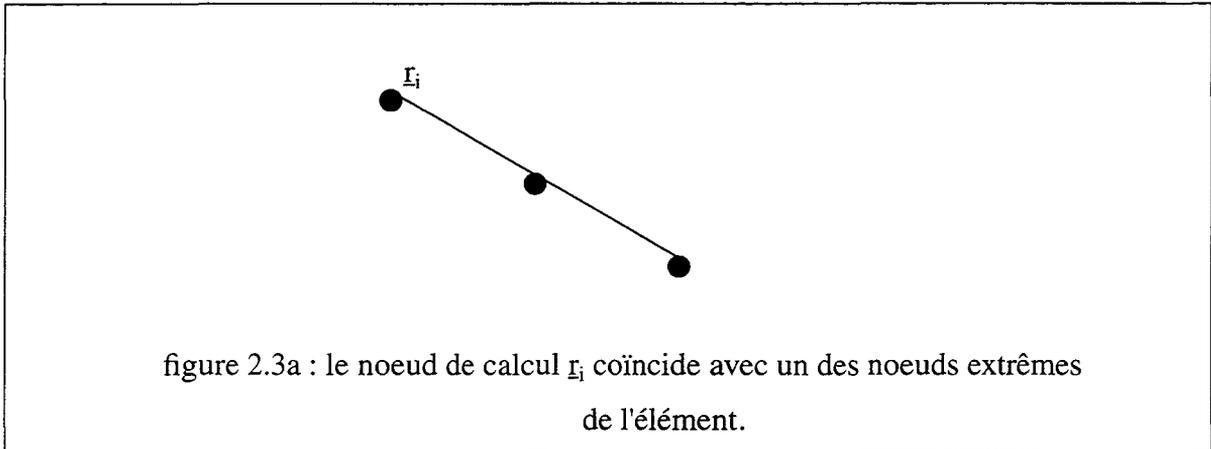
- quand le noeud de calcul coïncide avec l'un des noeuds extrêmes de l'élément (Figure 2.3a),
- quand le noeud de calcul coïncide avec le noeud milieu de l'élément (Figure 2.3b).

Dans le premier cas, le calcul est effectué avec $2*NG1$ point de Gauss, ce qui entraîne une augmentation de leur densité au voisinage de \underline{r}_i et permet une meilleure description de la singularité. Par ailleurs, la densité des points de Gauss est également augmentée autour de l'autre extrémité. Dans le second cas, on découpe le domaine d'intégration en deux parties suivant ξ de telle sorte que l'extrémité commune soit \underline{r}_i . Ce découpage permet une augmentation de la densité des points de Gauss au voisinage de \underline{r}_i .

L'intégrale (2.76) est donc décomposée en 2 intégrales $I = I_1 + I_2$ respectivement sur le domaine gauche d'intégration et sur le domaine droit d'intégration. On a ainsi :

$$I_1 = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^0 f(\underline{r}_i, \underline{r}'_k(\xi, \varphi')) d\xi \right) d\varphi' \quad (2.77)$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 f(\underline{r}_i, \underline{r}'_k(\xi, \varphi')) d\xi \right) d\varphi' \quad (2.78)$$



Afin de pouvoir appliquer la quadrature de Gauss-Legendre à ces deux domaines, il faut procéder à des changements de variables pour que les bornes des intégrales doubles soient -1 et +1. Concernant le domaine gauche d'intégration, le changement de variable se fait par l'intermédiaire de :

$$\xi = \frac{\xi'}{2} - \frac{1}{2} \quad (2.79)$$

et I_1 devient :

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(r_i, r'_k(\xi', \varphi')) d\xi' \right) d\varphi' \quad (2.80)$$

L'intégrale en ξ (2.80) devient par la quadrature de Gauss-Legendre :

$$\int_{-1}^1 f(r_i, r'_k(\xi', \varphi')) d\xi' = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{NI} w_n f(\xi_n(\xi_n')) \quad (2.81)$$

Concernant le domaine droit d'intégration, le changement de variable se fait par l'intermédiaire de :

$$\xi = \frac{\xi'}{2} + \frac{1}{2} \quad (2.82)$$

et I_2 devient :

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(r_i, r'_k(\xi', \varphi')) d\xi' \right) d\varphi' \quad (2.83)$$

L'intégrale en ξ' de l'équation (2.83) devient par la quadrature de Gauss-Legendre :

$$\int_{-1}^1 f(r_i, r'_k(\xi', \varphi')) d\xi' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k w_i f(\xi_i(\xi_i')) \quad (2.84)$$

Cette technique permet donc de déplacer la singularité vers l'extrémité des domaines d'intégration et rend possible son traitement par augmentation de la densité de points de Gauss [7, 40, 104].

II.3.2. Méthode analytique

Une autre technique de calcul des intégrales (2.46) à (2.48) consiste à isoler les singularités de l'intégrande, puis à les calculer analytiquement. Une notation allégée permet de décomposer ces intégrales de telle sorte que les singularités soient isolées. La partie qui ne contient pas de singularités est calculée par la méthode de Gauss-Legendre. On a :

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 N_k(\xi) x'(\xi, 0) \mathcal{R}(\xi) A_1 d\xi \quad (2.85)$$

$$I'_1 = \frac{-1}{4\pi} \int_{-1}^1 N_k(\xi) x'(\xi, 0) \mathcal{R}(\xi) A'_1 d\xi \quad (2.86)$$

$$I_2 = \frac{-1}{4\pi} \int_{-1}^1 N_k(\xi) x'(\xi, 0) \mathcal{R}(\xi) A_2 d\xi \quad (2.87)$$

avec

$$A_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} d\varphi \quad (2.88)$$

$$A'_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\underline{n}' \cdot (\underline{r}'_k - \underline{r}'_i)}{R^2} d\varphi \quad (2.89)$$

$$A_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\underline{n}' \cdot (\underline{r}'_k - \underline{r}'_i)}{R^3} d\varphi \quad (2.90)$$

Quand R est petit, les intégrales A_1 , A'_1 et A_2 sont fortement singulières, mais peuvent cependant être évaluées analytiquement à l'aide d'intégrales elliptiques [103, 105-106]. A partir des développements formulés dans l'annexe (A2), on trouve [7, 40, 45, 90] :

$$A_1 = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F\left(\frac{\pi}{2}, D\right) \quad (2.91)$$

$$A'_1 = \frac{-2\beta}{b} \pi + \left(\alpha + \frac{a\beta}{b}\right) \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (2.92)$$

$$A_2 = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left(\frac{\alpha + (a\beta)/b}{a-b} E\left(\frac{\pi}{2}, D\right) + \frac{\beta}{b} F\left(\frac{\pi}{2}, D\right) \right) \quad (2.93)$$

où a , b , α , β et D sont des grandeurs fonctions de ξ . F et E sont respectivement les intégrales elliptiques complètes de première et seconde espèces. Ces intégrales elliptiques sont calculées avec une bonne précision à l'aide des approximations suivantes [103] :

$$\begin{aligned}
 F\left(\frac{\pi}{2}, D\right) &= \sum_{n=0}^N a_n m^n - \sum_{n=0}^N b_n m^n \log(m) + \varepsilon_k \\
 E\left(\frac{\pi}{2}, D\right) &= 1 + \sum_{n=0}^N a'_n m^n - \sum_{n=0}^N b'_n m^n \log(m) + \varepsilon_E
 \end{aligned}
 \tag{2.94}$$

le calcul est fait avec $N = 10$:

$$m = \frac{a-b}{a+b} \quad |\varepsilon_k|, |\varepsilon_E| \leq 2 \cdot 10^{-8}$$

On termine le calcul des intégrales A_1 , A'_1 et A_2 par l'intégration suivant ξ des relations (2.85) à (2.87) par la méthode de Gauss-Legendre avec un nombre invariant NG de point de Gauss sur chaque élément de surface Γ_j .

III. ALGORITHME DE CALCUL

III.1. Code EQI

Les développements numériques sont effectués en Fortran 77 au sein du code de calcul EQI. EQI est un code équations intégrales utilisé pour simuler le comportement acoustique de structures immergées dans un fluide d'extension infinie. Trois types d'analyse harmonique sont possibles : le rayonnement à partir d'un champ de déplacement donné; la diffraction d'une onde incidente par un objet rigide; l'interaction fluide-structure par couplage avec le code éléments finis ATILA. EQI évalue la pression sur la surface et dans le fluide extérieur. Le développement de ce logiciel dans le régime fréquentiel a été mis en oeuvre dans des thèses précédentes [7, 40]. Dans le cadre de ce travail, on développe ce logiciel pour le calcul de la diffusion acoustique en régime temporel.

III.2. Structure du code EQI

En régime temporel, le code EQI est divisé en trois parties :

- le pré-traitement, qui permet de lire les données et préparer les calculs ;
- le noyau de calcul qui évalue les intégrales et les paramètres intermédiaires et résout le système d'équations ;

- le post-traitement, qui détermine la pression dans le fluide et termine l'exécution.

L'arbre programatique détaillé est reproduit à la figure 2.4 dans le cas de la diffraction par un objet rigide dans le domaine temporel.

III.2.1. Pré-traitement

Pour un problème physique donné, le fichier de données sert à décrire le problème à résoudre. Il détermine la géométrie de la structure, le fluide environnant, la fréquence centrale du signal incident, le type de signal, le pas de temps, le nombre de pas de temps ... A ce stade, il est possible d'estimer la taille du problème qui est principalement fonction du nombre de noeuds du maillage.

La génération du maillage consiste à décrire précisément la géométrie de la surface de la structure avec les éléments disponibles dans le code. Pour cela, il est nécessaire de définir les noeuds par leur numérotation et leurs coordonnées et de les associer en éléments en respectant un ordre précis appelé topologie. Il est important de trouver le meilleur compromis entre la taille du maillage et la précision des résultats. Dans la plupart des cas, la génération du maillage peut être effectuée partiellement ou complètement à l'aide d'un générateur de maillage. L'utilisation d'un tel outil simplifie considérablement le travail. Le code MOSAIQUE (associé à ATILA) est le générateur de maillage habituellement employé.

III.2.2. Noyau de calcul

Durant l'exécution de code, sont évalués successivement les paramètres intermédiaires temporels, les intégrales (par méthode de Gauss ou méthode analytique), la pression incidente et l'angle solide, les coefficients des matrices $[H]$ et $[G]$ et le vecteur $\{Q\}_n$. Après factorisation de la matrice $[H]$ par la méthode des pivots de Gauss, le système (2.50) est résolu. Les résultats sont stockés sur disque. Cette opération est répétée pour chaque itération temporelle.

III.2.3. Post-traitement

A partir de la pression sur la surface de la structure, la pression dans le fluide est évaluée. Le système de résolution est analogue à (2.50) à condition de remplacer l'angle solide α_i

par 4π et de positionner le point de calcul \underline{r}_j dans le fluide. Les intégrales sont calculées par la double quadrature de Gauss-Legendre sur chacune des variables réduites ξ et φ .

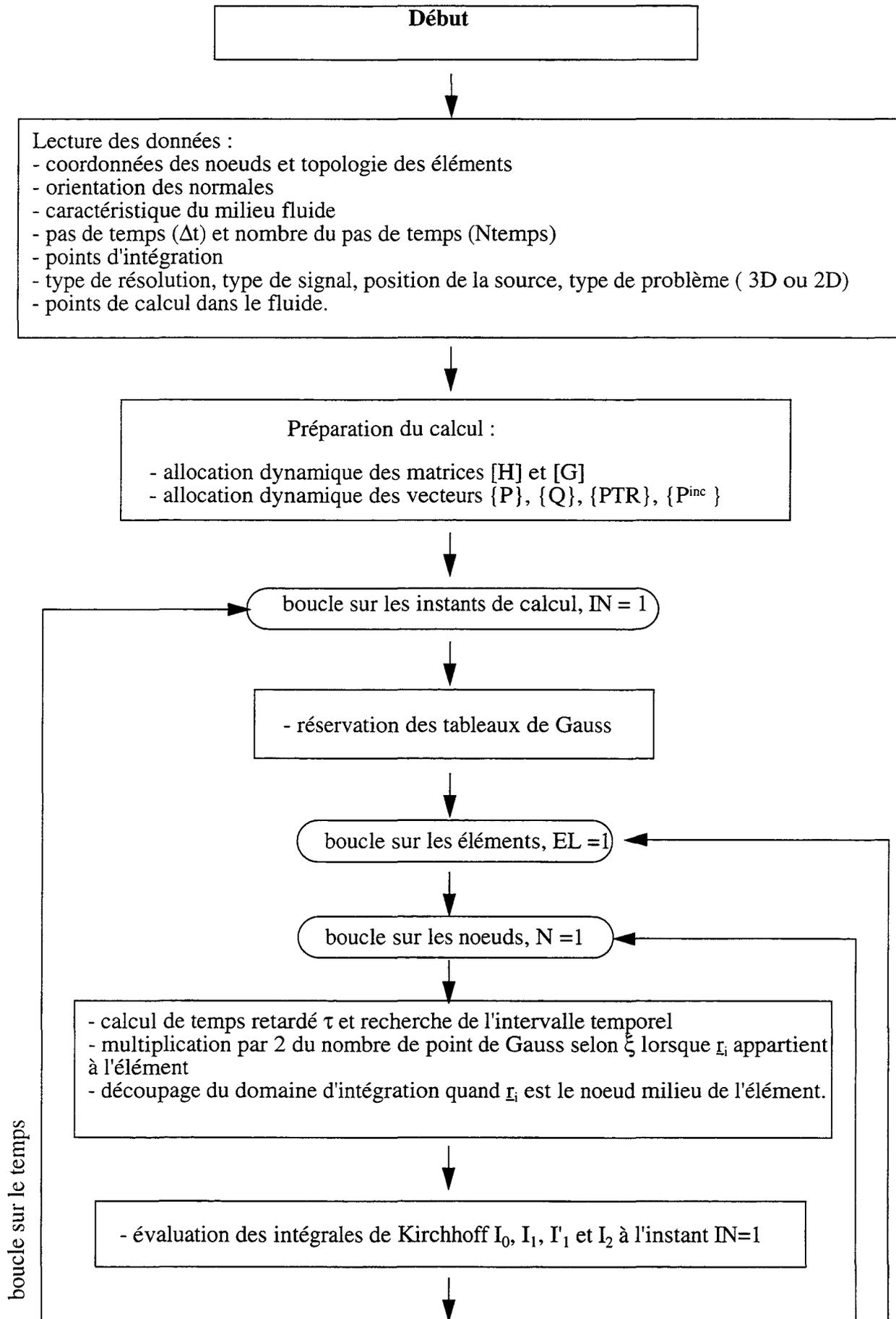
IV. CONCLUSION

Ce chapitre présente le traitement numérique développé pour résoudre l'équation intégrale de Helmholtz-Kirchhoff par éléments de frontières. La discrétisation de cette équation est effectuée dans le cas de structures à symétrie axiale. Deux types de discrétisation ont été utilisés :

- Discrétisation spatiale,
- Discrétisation temporelle.

Dans le cas de l'approche explicite, le problème est traité par la méthode des éléments finis en espace et des différences finies en temps. Quatre types d'interpolation temporelle par différences finies ont été choisis. Dans le cas de l'approche implicite, la méthode des éléments finis est employée en espace et en temps.

Dans chaque cas, la discrétisation permet l'obtention d'un système linéaire d'équations dont la résolution aboutit à la détermination des pressions sur la surface de la structure, puis de la pression dans le fluide. La validation de ces développements est présentée dans le chapitre 3.



boucle sur le temps

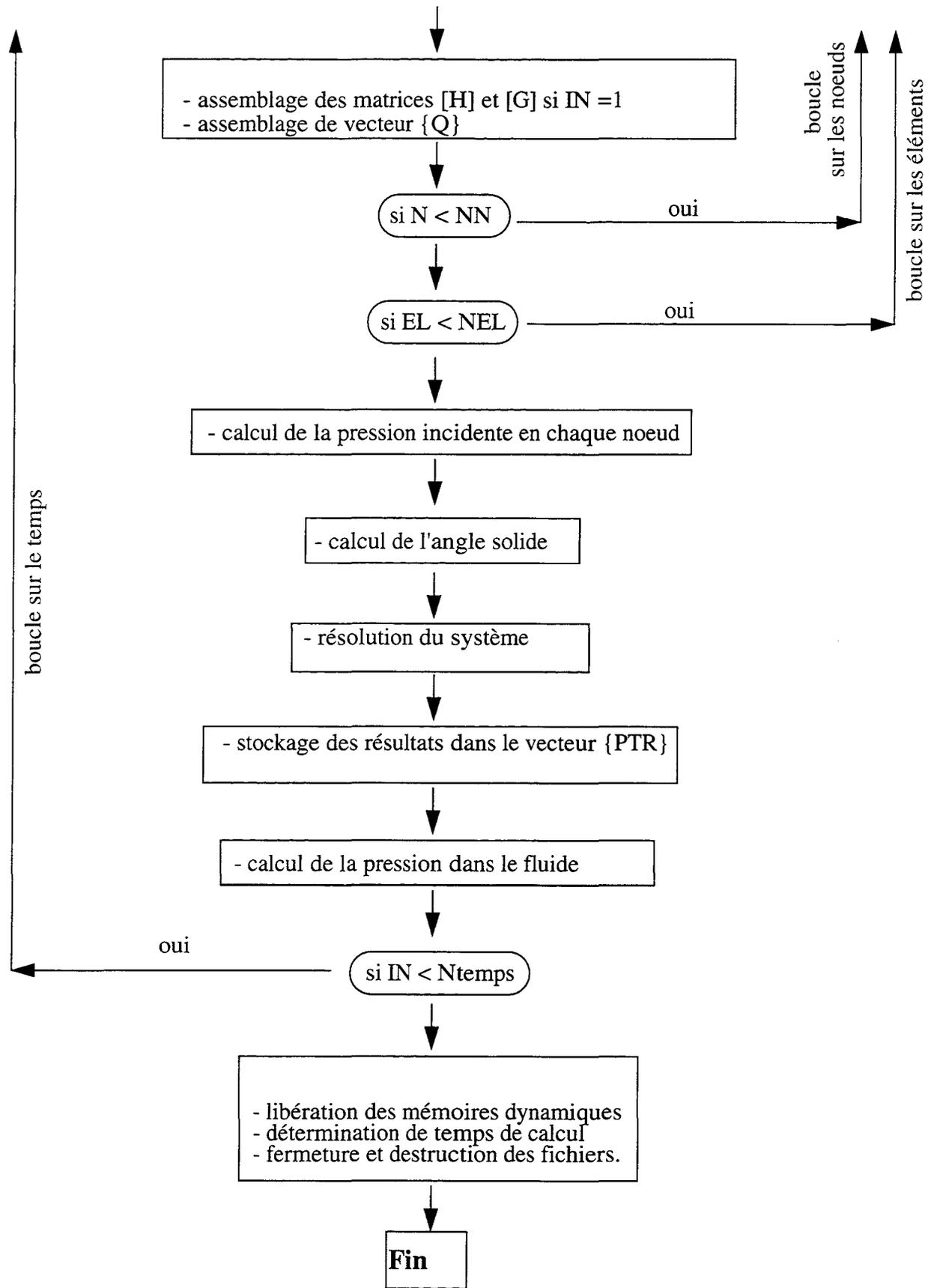


figure 2.4 : arbre programmatique de code EQI dans le cas de la diffraction rigide

Chapitre 3

Validation des développements dans le cas de la diffraction rigide

Résumé. Ce chapitre présente la validation du calcul de la diffraction acoustique par la méthode des équations intégrales en régime transitoire développée dans les chapitres précédents. Cette validation est effectuée par comparaison systématique des résultats de calcul avec les solutions analytiques existantes.

Dans un premier temps, les résultats numériques dans la zone stable et convergente sont présentés pour les deux approches explicite et implicite. La réponse du signal est analysée dans la zone éclairée et dans la zone cachée. Ensuite, l'instabilité et la divergence des résultats sont analysées pour les deux approches. Dans le cas explicite, sont déterminées les limites de stabilité des quatre méthodes d'interpolations ML, MSL1, MSL2 et MC, ainsi que l'origine principale des instabilités. Les comparaisons sont faites en fonction du pas de temps, du maillage et du signal incident. Les performances de la méthode de moyennage sont évaluées. Nous donnons également les résultats numériques de la méthode implicite. Nous proposons une méthode qui permet, pour un problème donné, de déterminer le maillage spatio-temporel garantissant la stabilité.

I. PRESENTATION DU PROBLEME DE REFERENCE

I.1. Diffraction d'une onde plane par une sphère rigide

I.1.1. Description

Le développement présenté au chapitre précédent permet la modélisation de la diffraction acoustique par un corps rigide à symétrie de révolution. La diffraction acoustique d'une onde plane par une sphère rigide possède une solution semi-analytique et nous sert de test de référence. L'origine O du repère est confondue avec le centre de la sphère (Figure 3.1). L'onde incidente se propage suivant l'axe (Oz) suivant z croissant. L'origine des temps est définie telle que le signal incident atteigne la coordonnée $z = -3a$ à l'instant $t = 0$. Les points servant à la validation du modèle sont représentés sur la figure 3.1 : les points P_1 (point amont ou éclairé) et P_2 (point aval ou caché) situés sur la surface de la sphère et, les points P_3 et P_4 situés dans le fluide sur l'axe (Oz) (choisi comme axe de révolution) ayant comme coordonnées respectives $z = -10a$ et $z = 10a$.

La génératrice de la sphère est maillée à l'aide d'arcs de parabole (éléments isoparamétriques à trois noeuds) de longueur identique. Les maillages considérés possèdent 31, 61, 91, 181 et 361 noeuds. Pour chaque maillage, on définit le paramètre adimensionnel $c\Delta t/a$ qui correspond à un pas d'échantillonnage temporel réduit. On trace l'évolution en temps des valeurs de la pression diffractée sur les quatre points de calcul (P_1, P_2, P_3 et P_4). Pour évaluer la précision des résultats, on définit alors l'erreur quadratique moyenne notée EQM et donnée en chaque point de calcul par la formule suivante :

$$EQM = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \left\| \frac{P_{i(\text{numérique})}^2 - P_{i(\text{analytique})}^2}{P_{i(\text{analytique})}^2} \right\|^2} \quad (3.1)$$

où N est le nombre de pas de temps.

Dans toutes les simulations, le "critère de maillage en $\lambda/4$ " présenté au chapitre 2 (où λ désigne la longueur d'onde) est respecté [80]. L'origine des temps est fixée de façon à ce que la pression totale soit nulle en tout noeud à $t \leq 0$ afin de respecter la causalité.

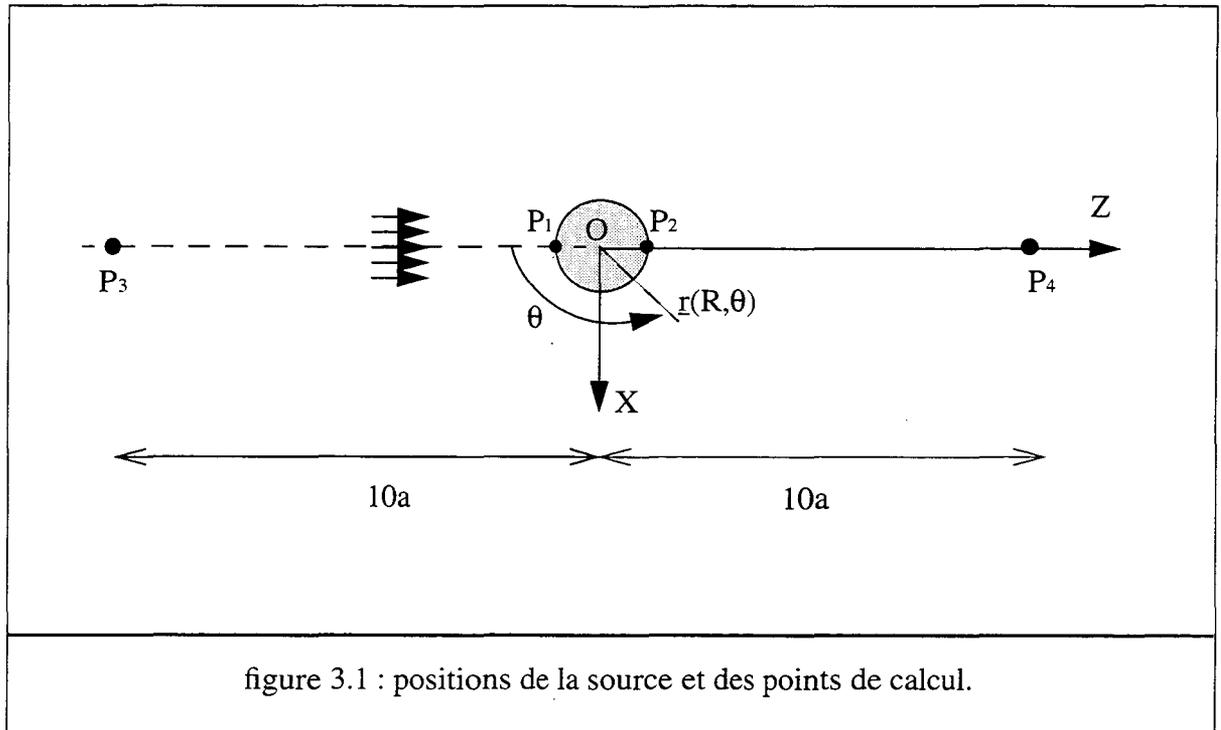


figure 3.1 : positions de la source et des points de calcul.

I.1.2. Modèle semi-analytique

Le modèle analytique utilisé pour les tests de validation repose sur le calcul de la réponse harmonique du système étudié et l'obtention de la réponse temporelle à l'aide d'un algorithme de type Transformée de Fourier Discrète (TFD). Le calcul est effectué en quatre étapes :

- **1er étape** : la pression diffractée $P_d(\underline{r}, \omega)$ au point de calcul \underline{r} est calculée analytiquement pour une excitation harmonique (onde incidente) $P_i(\omega)$ de pulsation ω ayant la même distribution spatiale que l'excitation temporelle. On peut écrire :

$$P_d(\underline{r}, \omega) = H(\underline{r}, \omega) \cdot P_i(\omega) \quad (3.2)$$

où $H(\underline{r}, \omega)$ désigne une fonction de transfert.

- **2ème étape** : le spectre de l'excitation harmonique $\bar{P}_i(\omega)$ est calculé en effectuant une TFD du signal temporel d'excitation $P_i(t)$:

$$\bar{P}_i(\omega) = \text{TFD}(P_i(t)) \quad (3.3)$$

- **3ème étape** : le spectre de la réponse $\overline{P}_d(\underline{r}, \omega)$ est obtenu en effectuant le produit du spectre de l'excitation par la fonction de transfert :

$$\overline{P}_d(\underline{r}, \omega) = H(\underline{r}, \omega) \cdot \overline{P}_i(\omega) \quad (3.4)$$

- **4ème étape** : la pression temporelle diffractée est calculée à l'aide d'une simple TFD inverse :

$$P_d(\underline{r}, t) = \text{TFD}^{-1}(\overline{P}_d(\underline{r}, \omega)) \quad (3.5)$$

Il est à noter que l'utilisation d'une TFD (au lieu d'une Transformée de Fourier) pose quelques problèmes spécifiques. A partir du nombre d'échantillons NF utilisés dans la TFD et de la borne supérieure ω_{sup} utilisée dans le calcul de la fonction de transfert, il est possible de déterminer la pulsation maximale ω_{max} décrite correctement dans la réponse temporelle (critère de Shannon) :

$$\omega_{\text{max}} = \frac{\omega_{\text{sup}}}{2} \quad (3.6)$$

ainsi que l'horizon temporel d'observation t_{max} :

$$t_{\text{max}} = \frac{NF - 1}{\omega_{\text{sup}}} \quad (3.7)$$

La méthode utilisée n'est valable que si la réponse recherchée est nulle (ou quasiment nulle) lorsque l'horizon temporel est atteint. On notera également que la fonction de transfert

$H(\underline{r}, \omega)$ est calculée pour $\omega \leq \frac{\omega_{\text{sup}}}{2}$ et complétée à l'aide de la relation :

$$H(\underline{r}, \omega_{\text{sup}} - \omega) = H^*(\underline{r}, \omega) \quad \text{pour} \quad \omega > \frac{\omega_{\text{sup}}}{2} \quad (3.8)$$

où $H^*(\underline{r}, \omega)$ est la fonction conjuguée de $H(\underline{r}, \omega)$. Ceci nous permet d'éviter la troncature du spectre qui conduit à une réponse non déterministe.

Dans le cas de la diffraction acoustique d'une onde plane par une sphère rigide de rayon a , la fonction de transfert est donnée au point $\underline{r}(R, \theta)$ pour le champ proche par [28, 107] :

$$H(\underline{r}, \omega) = - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n P_n(\cos\theta) \frac{j'_n(ka)}{h'_n(ka)} h_n(kR) \quad (3.9)$$

En champ lointain, la fonction de transfert est donnée par :

$$H(\underline{r}, \omega) = \frac{ie^{ikR}}{kR} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\theta) \frac{j'_n(ka)}{h'_n(ka)} \quad (3.10)$$

où P_n , h_n , j'_n et h'_n désignent respectivement le polynôme de Legendre, la fonction de Hankel sphérique de première espèce et les dérivées des fonctions de Bessel et de Hankel sphériques de première espèce.

II. TESTS DE VALIDATION

II.1. Analyse des résultats

II.1.1. Présentation des résultats pour les différentes méthodes

Les différentes formes des signaux d'excitation utilisées dans ce document sont présentées dans le tableau (3.1). L'onde incidente est plane et de vecteur d'onde suivant Oz. z_0 est la position sur l'axe Oz atteint par le signal à $t = 0$. k est le nombre d'onde et P_0 est l'amplitude de la pression incidente. Il est également possible de définir un "signal externe" qui correspond à une onde décrite par l'opérateur et qui est fournie au programme sous forme d'un fichier.

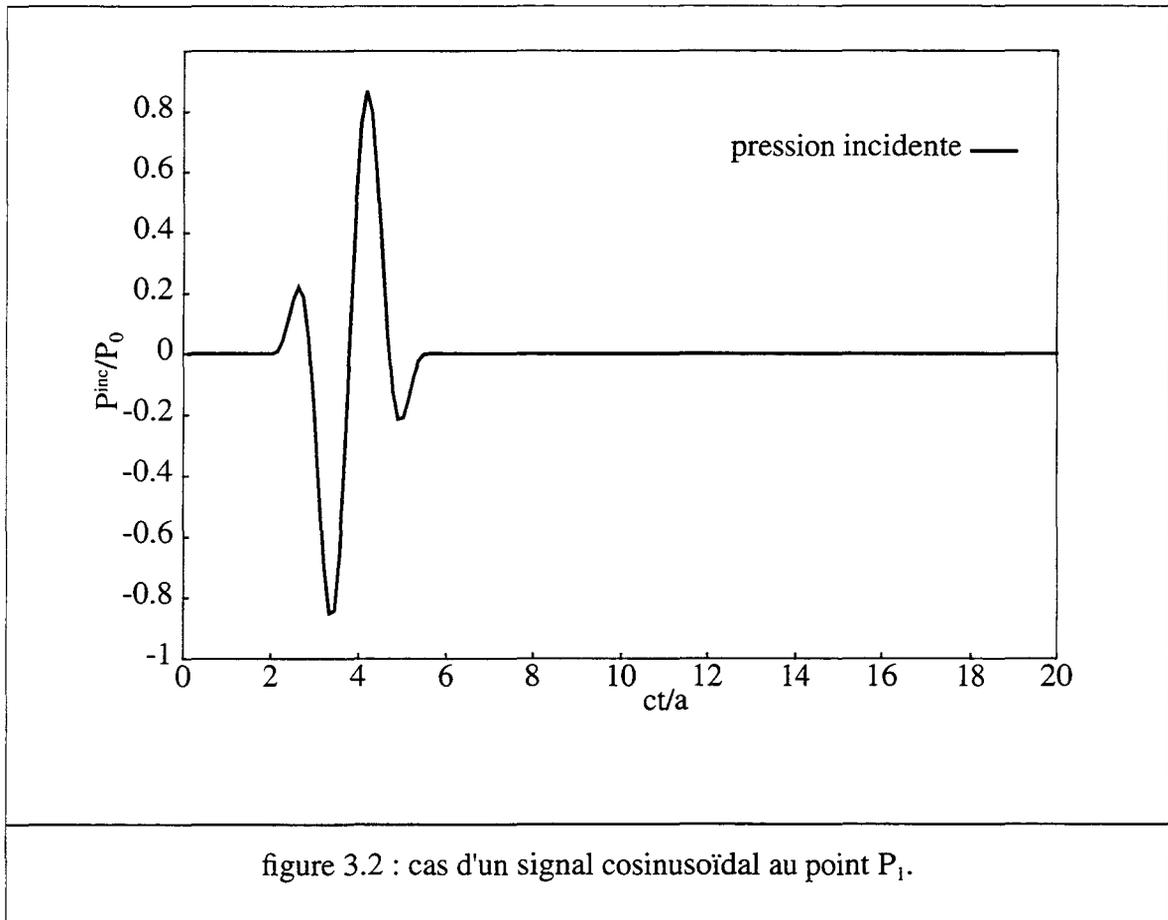
Les premiers résultats analysés concernent la diffraction par la sphère rigide insonifiée par un signal de type cosinusoidal (Figure 3.2). Ce signal a une durée de deux périodes que l'on décompose sur N pas temporels ($N/2$ pas de temps pour chaque période). Pour une période décomposée en 30 intervalles temporels de longueur Δt , les paramètres du calcul sont :

$$c\Delta t/a = 0.238 \quad f = 2/(30\Delta t) \quad ka = 1.757 \quad (3.11)$$

Le signal incident atteint la cible au point P_1 à l'instant $ct/a = 2$.

signal	t	$p^{inc}(t)$
cosinusoidal	$\frac{z-z_0}{c} \leq t \leq \frac{1}{f} + \frac{z-z_0}{c}$	$P_0 \sin(\omega t - k(z-z_0)) \left(1 - \cos\left(\frac{\omega t - k(z-z_0)}{2}\right)\right)$
	$t < \frac{z-z_0}{c}$ ou $t > \frac{1}{f} + \frac{z-z_0}{c}$	0
sinusoidal	$\frac{z-z_0}{c} \leq t \leq \frac{1}{f} + \frac{z-z_0}{c}$	$P_0 \sin(\omega t - k(z-z_0))$
	$t < \frac{z-z_0}{c}$ ou $t > \frac{1}{f} + \frac{z-z_0}{c}$	0
gaussien	$0 \leq t$	$P_0 \exp\left(-5\left(\frac{t - (z-z_0)/c}{t_f}\right)^2\right)$ avec $t_f = 3a/c$ [65]
	$t < 0$	0

tableau 3.1 : différentes formes temporelles de l'onde incidente.



Les figures 3.3 à 3.10 représentent l'évolution de la pression diffractée normée à P_0 au cours du temps. Pour les quatre méthodes d'interpolation par différences finies ML, MSL1, MSL2 et MC, on constate une relative concordance entre le modèle analytique et la solution numérique au point éclairé P_1 avec une perte de précision en fin de signal (Figure 3.3). Les mêmes remarques s'imposent pour le point P_3 dans le fluide (Figure 3.5). Par contre, pour les points avals P_2 et P_4 , les comparaisons montrent un décalage temporel (Figures 3.4 et 3.6) et une perte de précision au niveau des amplitudes pour les méthodes MSL2 et MC.

Pour la méthode implicite, sur la surface (points P_1 et P_2) et en tout point du fluide (points P_3 et P_4), les résultats numériques sont en très bonne concordance avec le calcul analytique (Figure 3.7 à 3.10).

Les valeurs de l'EQM sont données au point éclairé et au point caché dans les tableaux 3.2 et 3.3 pour trois valeurs de $c\Delta t/a$ différentes. Leur évolution suivant la génératrice de la sphère $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ est donnée sur la figure 3.11. Dans la zone éclairée $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, la valeur de $c\Delta t/a = 0.238$ donne une EQM inférieure à 5%. Dans la zone cachée $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, l'EQM des quatre méthodes explicites est très élevée. Dans les cas $c\Delta t/a = 0.148$ et $c\Delta t/a = 0.119$, l'EQM (non représentée) est élevée tout le long de la génératrice.

La figure 3.12 montre l'évolution de l'erreur quadratique moyenne pour la méthode implicite. On constate que sa valeur maximale est inférieure à 2%

Pour comparer les méthodes d'interpolation par différences finies (MC) et la méthode implicite en terme de temps CPU, on se choisit un maillage fixe de 31 éléments et on fait varier la valeur du pas de temps. Le nombre d'itérations est choisi pour correspondre au même temps de calcul $ct/a = 50$. Les résultats sont regroupés dans le tableau 3.4.

On constate que la méthode d'interpolation temporelle par éléments finis (méthode implicite) conduit à des temps de calcul entre 2 et 4 fois plus élevés que pour la méthode d'interpolation par différences finies MC.

EQM (en %)	$c\Delta t/a = 0.238$	$c\Delta t/a = 0.148$	$c\Delta t/a = 0.119$
Méthode ML	1.3	32.0	14.1
Méthode MSL1	1.3	11.9	13.1
Méthode MSL2	2.3	12.8	15.3
Méthode MC	1.5	12.6	13.8
Méthode implicite	0.05	3.3	1.8

tableau 3.2 : erreur quadratique moyenne au point P_1 .

EQM (en %)	$c\Delta t/a = 0.238$	$c\Delta t/a = 0.148$	$c\Delta t/a = 0.119$
Méthode ML	16.5	22.5	21.9
Méthode MSL1	11.1	22.1	27.0
Méthode MSL2	92.7	16.6	18.4
Méthode MC	19.3	13.5	29.5
Méthode implicite	0.2	3.3	0.14

tableau 3.3 : erreur quadratique moyenne au point P_2 .

		temps CPU (en s)	
$c\Delta t/a$	ka	méthode MC	méthode implicite
0.238	1.75	105.75	238.8
0.148	2.81	201.2	509.7
0.119	3.51	281.8	745.1
0.089	4.68	438.5	1277.2
0.040	5.2	1021.0	3054.3
0.029	7.02	1686.5	5358.3

tableau 3.4 : temps CPU en fonction de $c\Delta t/a$
(station HP, 715 / 75MHz, 32 Mo)

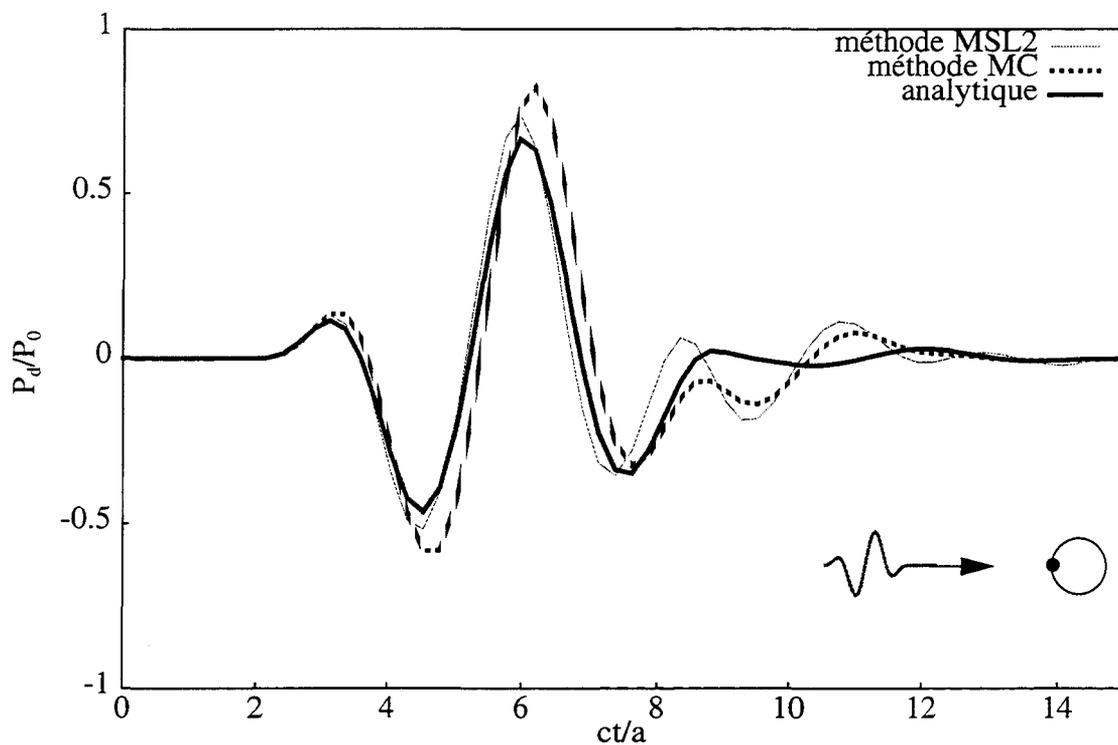
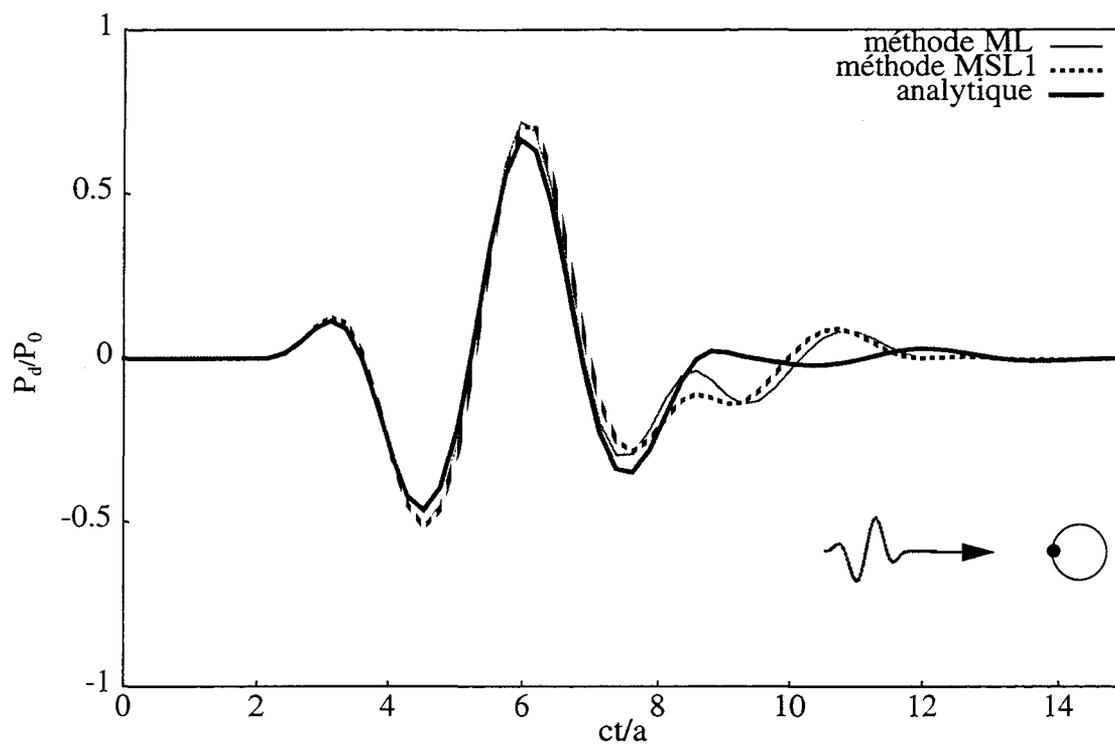


figure 3.3 : pression diffractée par la sphère rigide au point P_1 dans le cas d'un signal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, CFL = 2.27

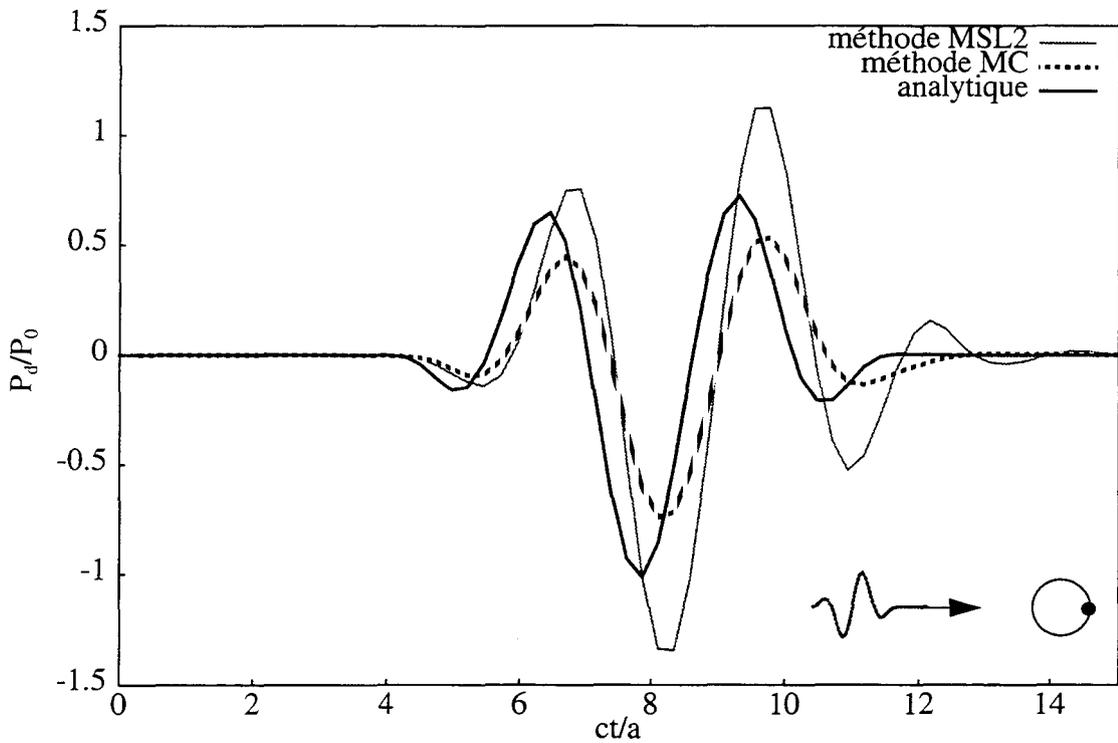
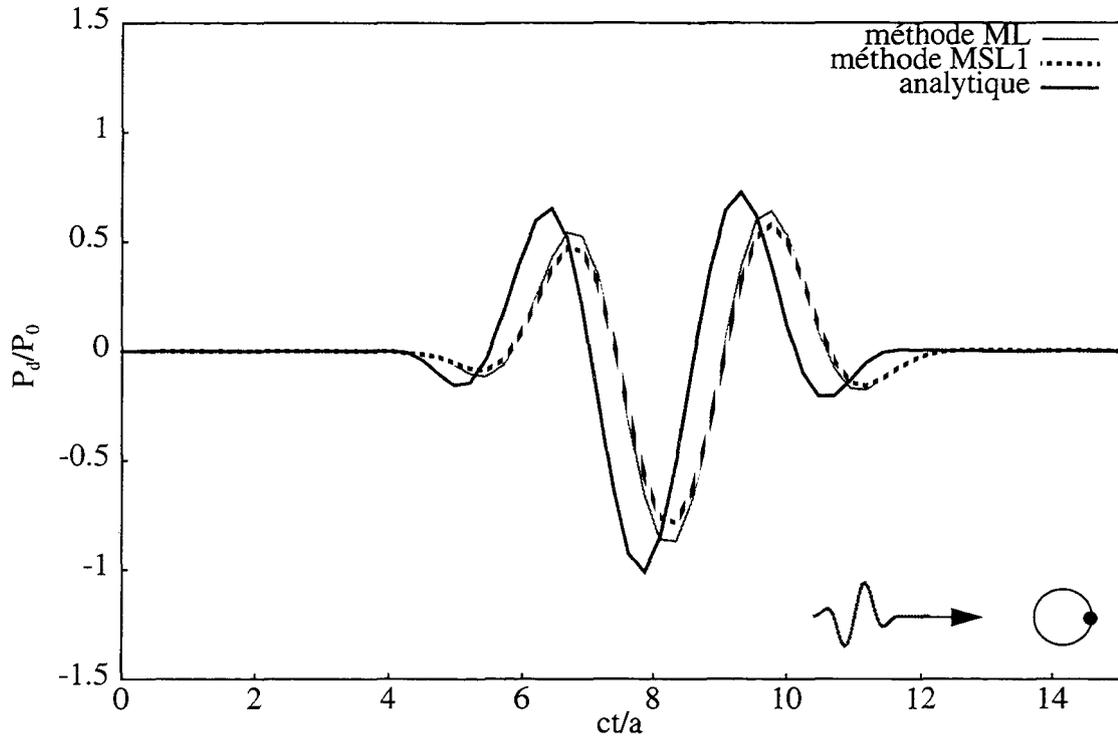


figure 3.4 : pression diffractée par la sphère rigide au point P_2 dans le cas d'un signal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$.

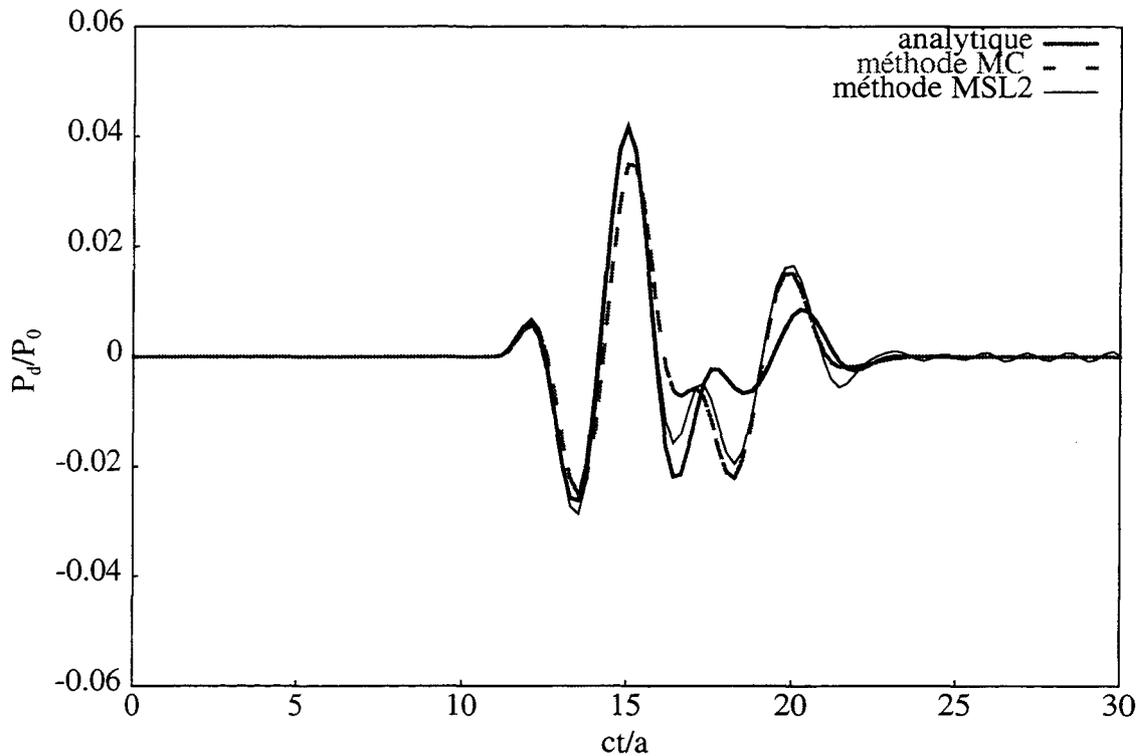
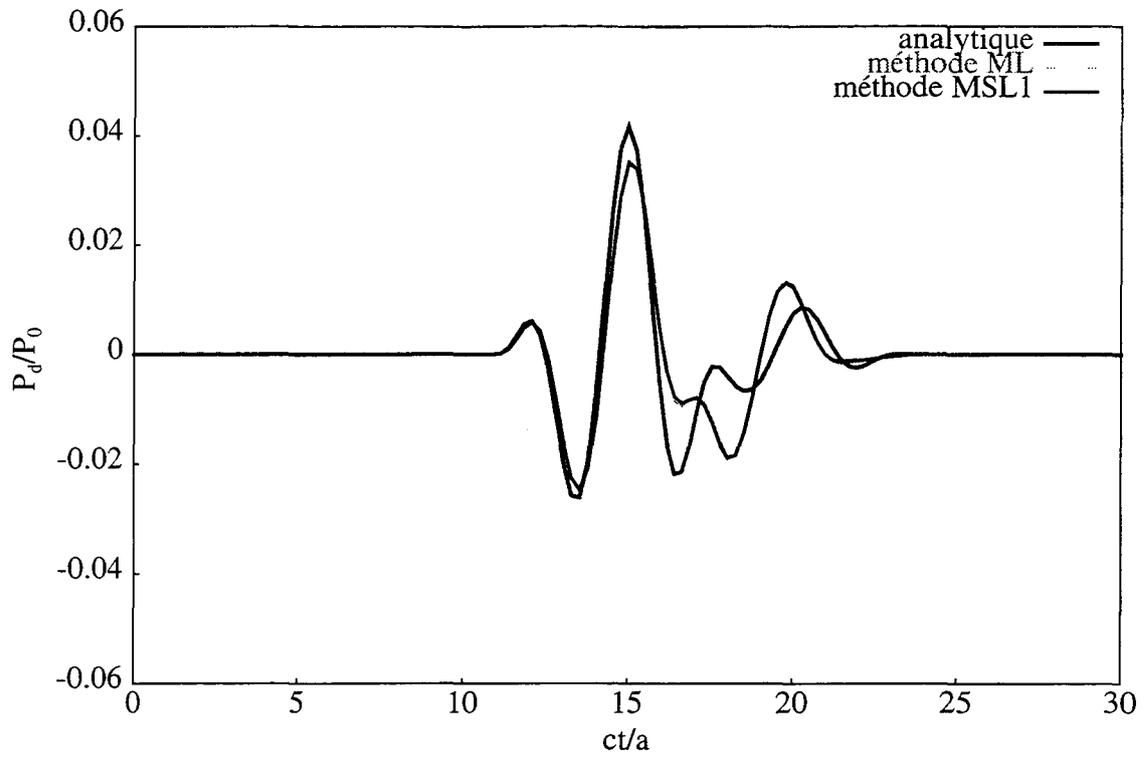


figure 3.5 : pression diffractée par la sphère rigide au point P_3 dans le cas d'un signal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$

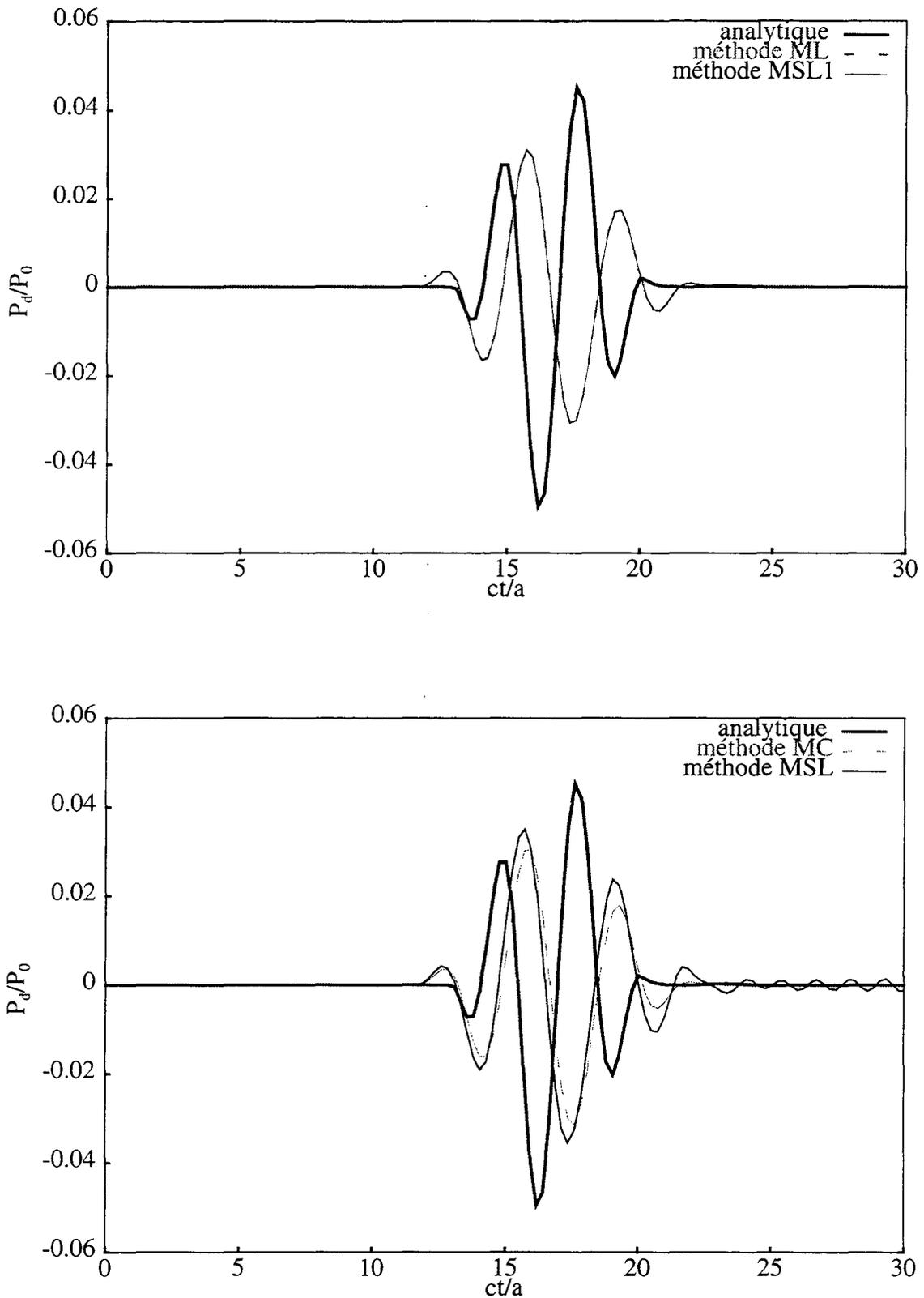


figure 3.6 : pression diffractée par la sphère rigide au point P_4 dans le cas d'un signal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$

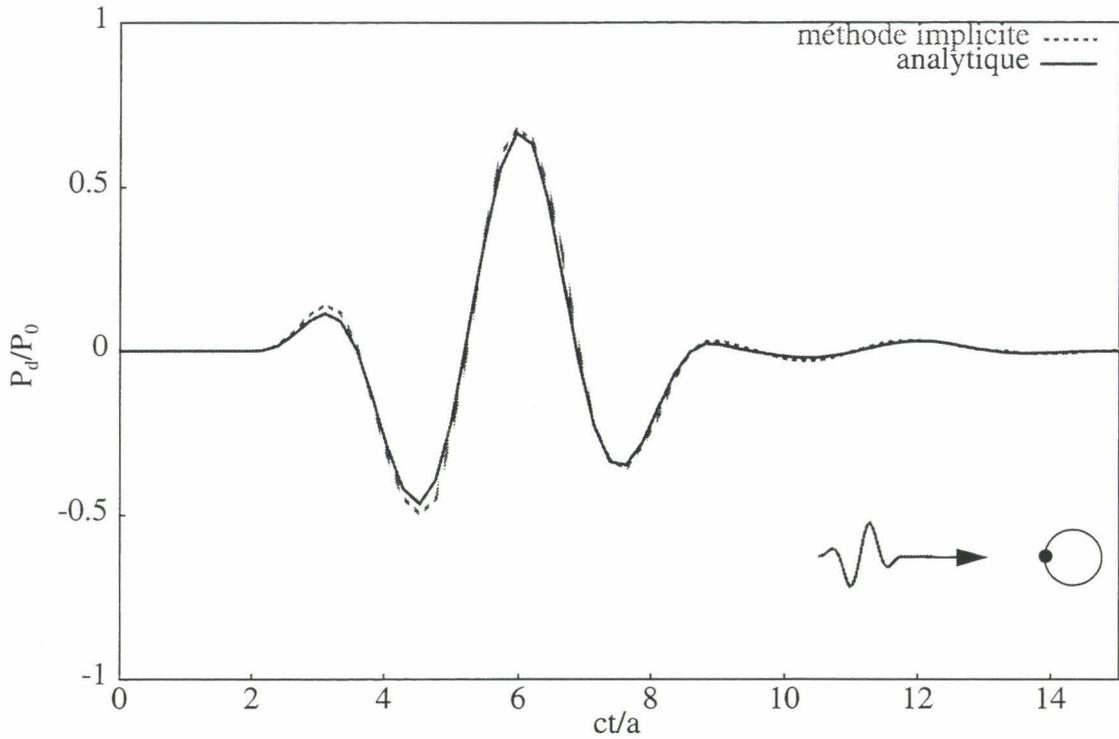


figure 3.7 : pression diffractée par la sphère rigide au point P_1 dans le cas de la méthode implicite : $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$

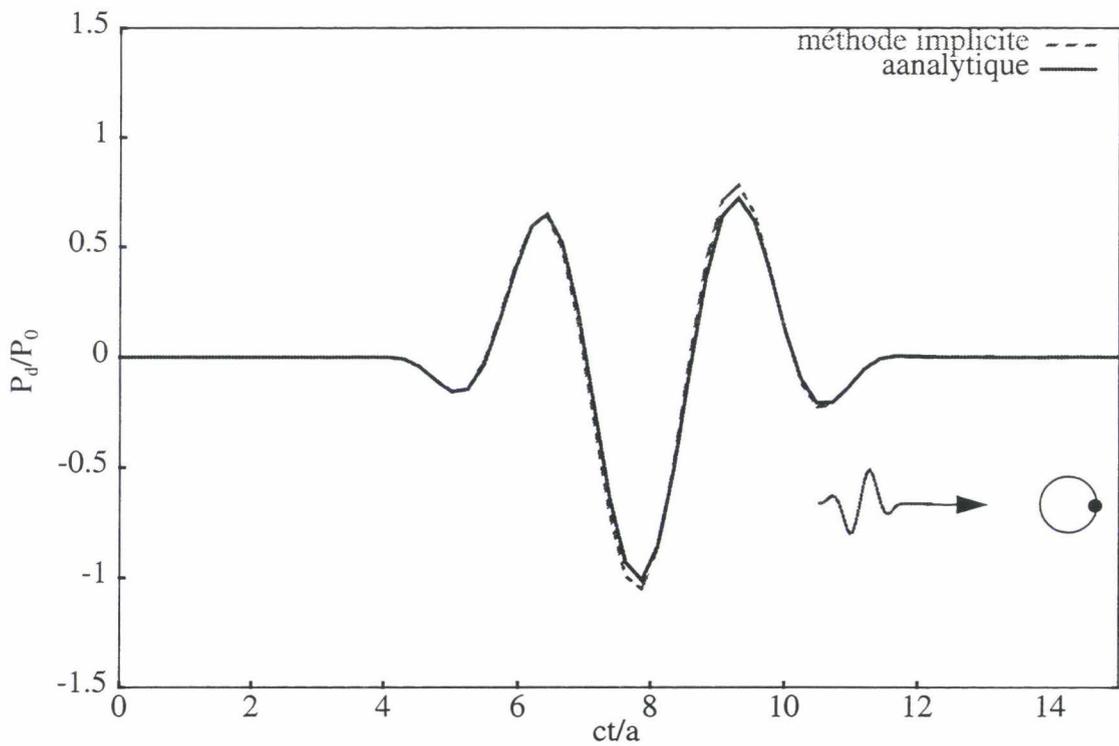


figure 3.8 : pression diffractée par la sphère rigide au point P_2 dans le cas de la méthode implicite : $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$.

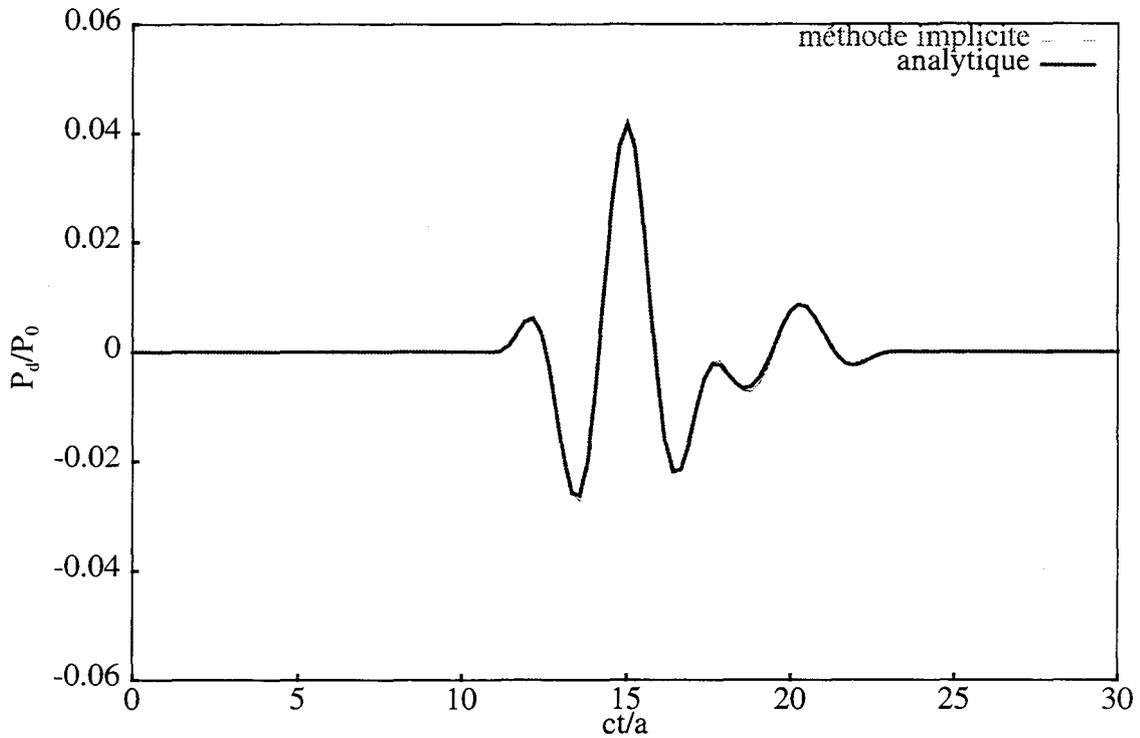


figure 3.9 : pression diffractée par la sphère rigide au point P_3 dans le cas de la méthode implicite : $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$

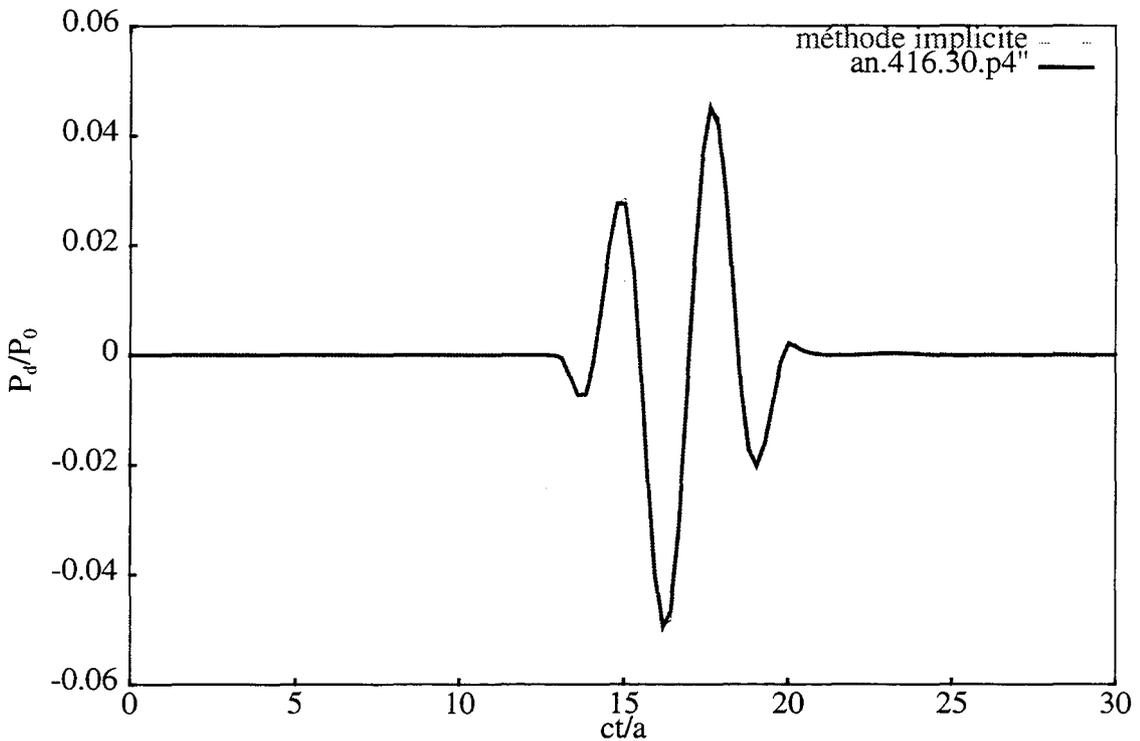


figure 3.10 : pression diffractée par la sphère rigide au point P_4 dans le cas de la méthode implicite : $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$

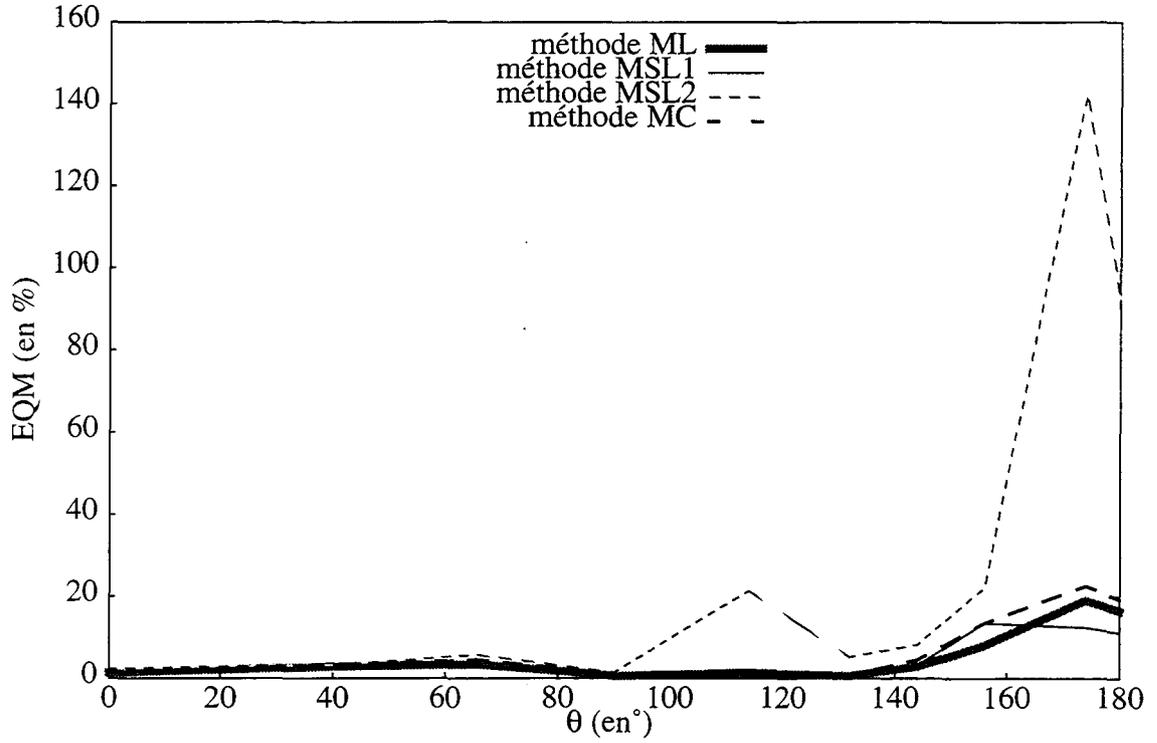


figure 3.11 : EQM dans le cas du signal cosinusoidal pour les méthodes de différences finies : $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$

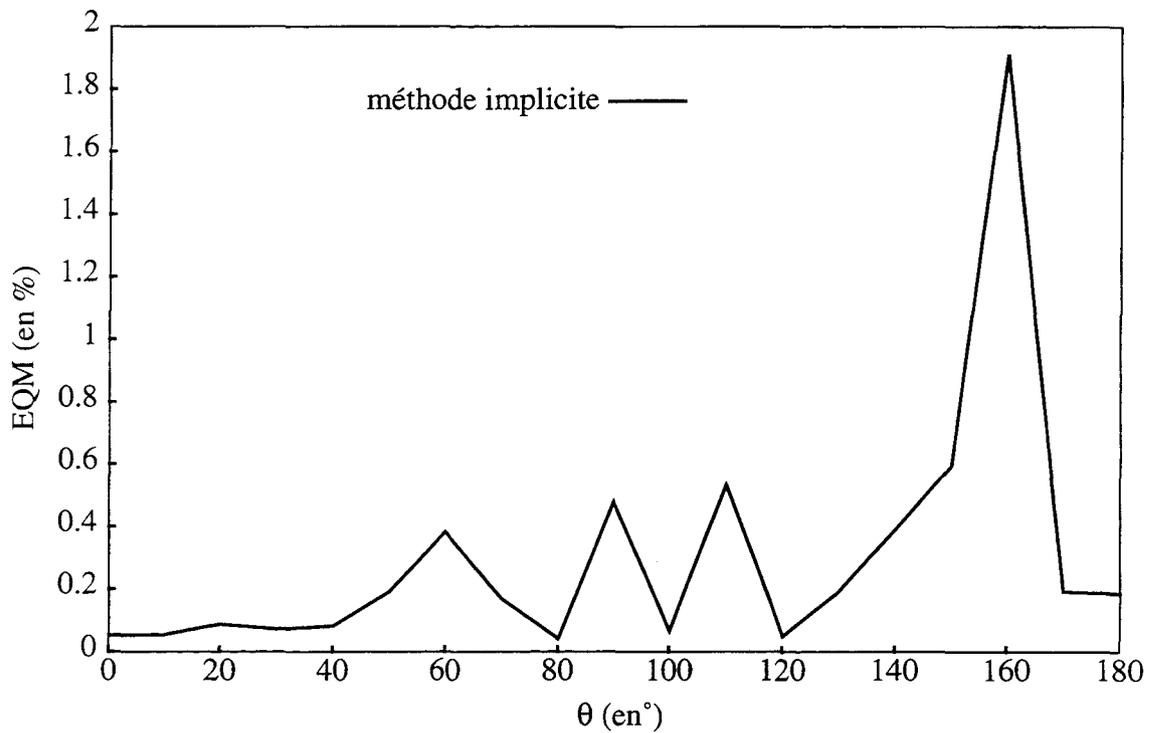


figure 3.12 : EQM dans le cas du signal cosinusoidal pour la méthode implicite $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$

II.1.2. Analyse physique des résultats

Le champ de pression total en présence de la sphère peut être décrit comme la somme d'une onde géométrique (correspondant à la solution de l'optique géométrique) et d'une onde rampante se propageant à la surface de la sphère [2]. A cause des ondes rampantes, un champ acoustique non nul peut être observé dans la zone d'ombre géométrique $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. Dans cette écriture, on suppose que l'onde rampante se propage à la vitesse c dans le fluide, ce qui constitue une approximation raisonnable [41].

L'onde incidente atteint le point amont P_1 à l'instant T_1 tel que $cT_1/a = 2$. Pour atteindre le point P_2 , l'énergie du front d'onde est transportée par l'onde géométrique jusqu'au point P'_1 puis par l'onde rampante jusqu'au point P_2 (Figure 3.13). Le temps correspondant à l'arrivée de l'onde en P_2 est $\overline{T}_2 = T_1 + T_2 + T_3$: ($c\overline{T}_2/a \approx 4.57$). Pour $T < \overline{T}_2$, aucune onde de pression ne peut théoriquement atteindre P_2 . De même, l'onde revient au point P_1 après un temps $\overline{T}_1 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ ($c\overline{T}_1/a \approx 7.71$).

Quand on raccourcit la durée du signal incident, pour les quatre méthodes d'interpolation temporelle par différences finies, le décalage entre les résultats numériques et analytiques dans la zone cachée (point P_2) est très clair (Figures 3.14 et 3.15). Ces méthodes de différences finies donnent une onde parasite qui arrive au point P_2 à l'instant T tel que $cT/a = 4$ ($T < \overline{T}_2$), comme si l'onde incidente traversait la sphère [19]. De la même façon, on observe que l'onde rampante revient au point P_1 à l'instant T tel que $cT/a = 6$ (figure 3.19). Celui-ci correspond à l'onde géométrique traversant la sphère et se réfléchissant en P_2 . Pour la méthode implicite, nous constatons que dans la zone cachée (point P_2 et P_4) l'onde arrive aux instants prévus (Figures 3.8 et 3.10). La figure 3.16 illustre la différence de temps d'arrivée entre l'onde physique et l'onde parasite.

Les figures 3.17 et 3.18 présentent l'évolution temporelle des pressions totales sur toute la génératrice de la sphère en fonction du temps. Dans la zone cachée, pour les méthodes d'interpolation par différences finies, l'onde calculée se propage plus vite que l'onde physique (Figure 3.17). Pour la méthode implicite, l'onde se propage à la vitesse prévue par la théorie (Figure 3.18).

Quand on réduit la durée du signal incident, avec les paramètres de calcul suivants :

$$c\Delta t/a = 0.014 \quad f = 2/(120\Delta t) \quad CFL = 0.14$$

Contrairement aux méthodes ML, MSL1 et MSL2, la méthode de collocation MC donne aux points P_1 et P_3 dans la première partie temporelle du signal, des résultats en très bonne concordance avec le calcul analytique et avec ceux obtenus aux références [19, 21, 35] (Figure 3.19). On note cependant que l'onde parasite numérique revient au point P_1 à l'instant T tel que $cT/a = 6$ ($T < \overline{T}_1$). Dans la zone cachée, le problème du décalage temporel des résultats et de l'onde parasite est toujours présent (Figure 3.20).

Quand on affine le maillage, les résultats montrent des améliorations de précision au point P_1 dans les premiers instants (figure 3.20a). En zone cachée, les résultats sont toujours inexacts et non physiques (figure 3.20b).

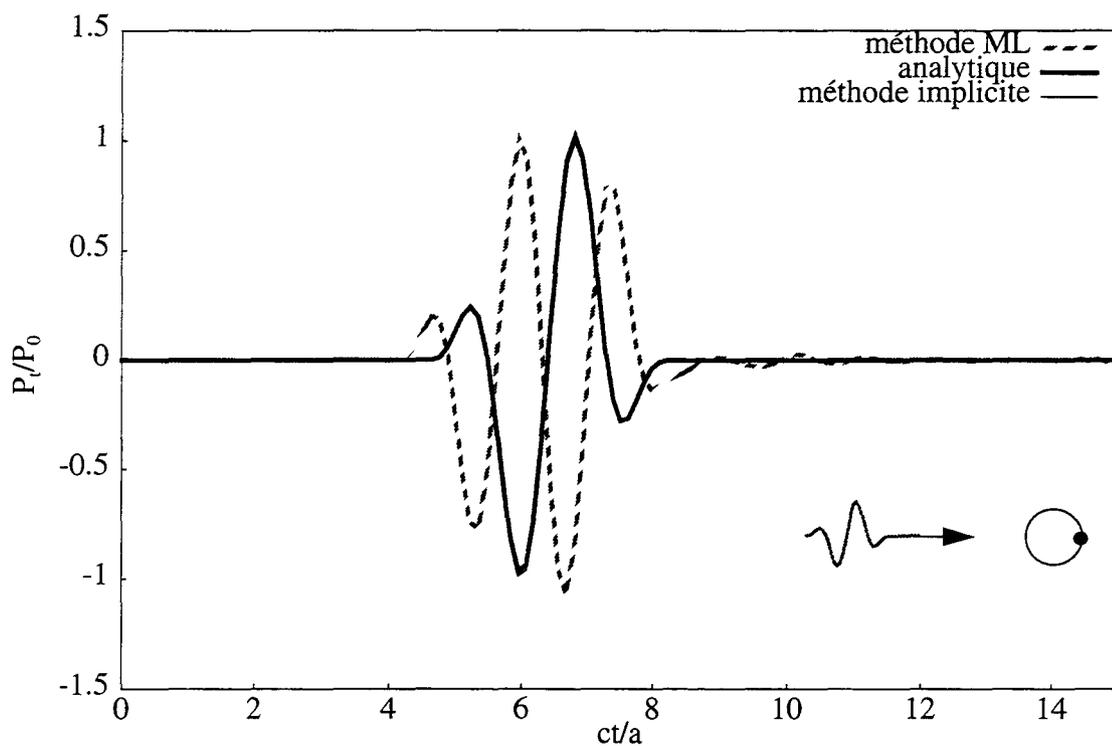
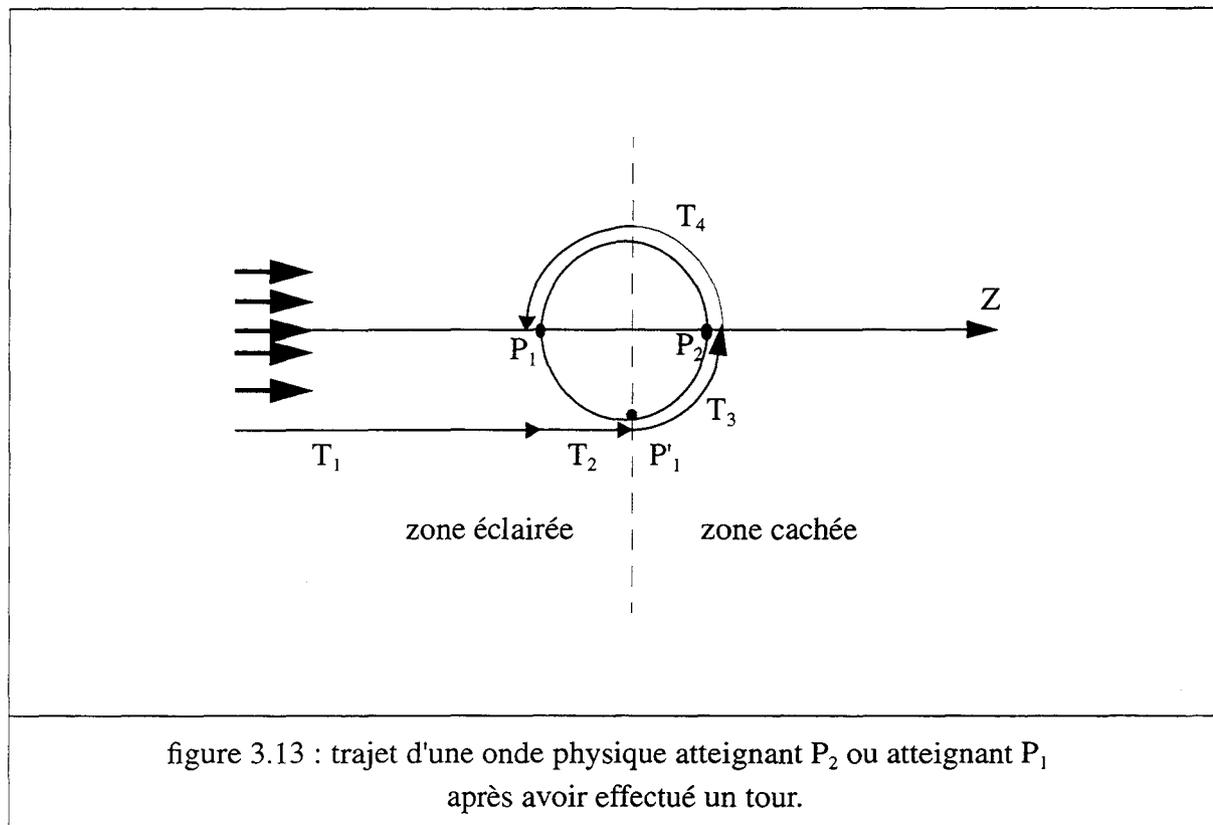
Pour des maillages et des pas de temps fixes, on étudie l'influence des différents signaux. Le second cas considéré concerne la diffraction par la même sphère rigide éclairée par un signal sinusoïdal. Ce signal incident est limité à une période décomposée en 25 intervalles temporels de même longueur Δt . Les paramètres du calcul sont :

$$c\Delta t/a = 0.148 \quad f = 1/(25\Delta t) \quad (3.12)$$

Le troisième cas s'intéresse à la diffraction par la même sphère rigide éclairée par un signal de type gaussien. L'origine des temps est telle que le signal incident atteint la coordonnée $z = -5a$ en $t = 0$. Les paramètres du calculs sont :

$$c\Delta t/a = 0.148 \quad (3.13)$$

Après observation, on constate que l'onde calculée se propage toujours trop rapidement en zone cachée (Figures 3.21 et 3.22). Le signal sinusoïdal présente des variations brutales qui entraînent des erreurs en début et en fin du signal (Figure 3.21). Les résultats obtenus par méthode implicite coïncident avec le calcul analytique en zone éclairée et en zone cachée.



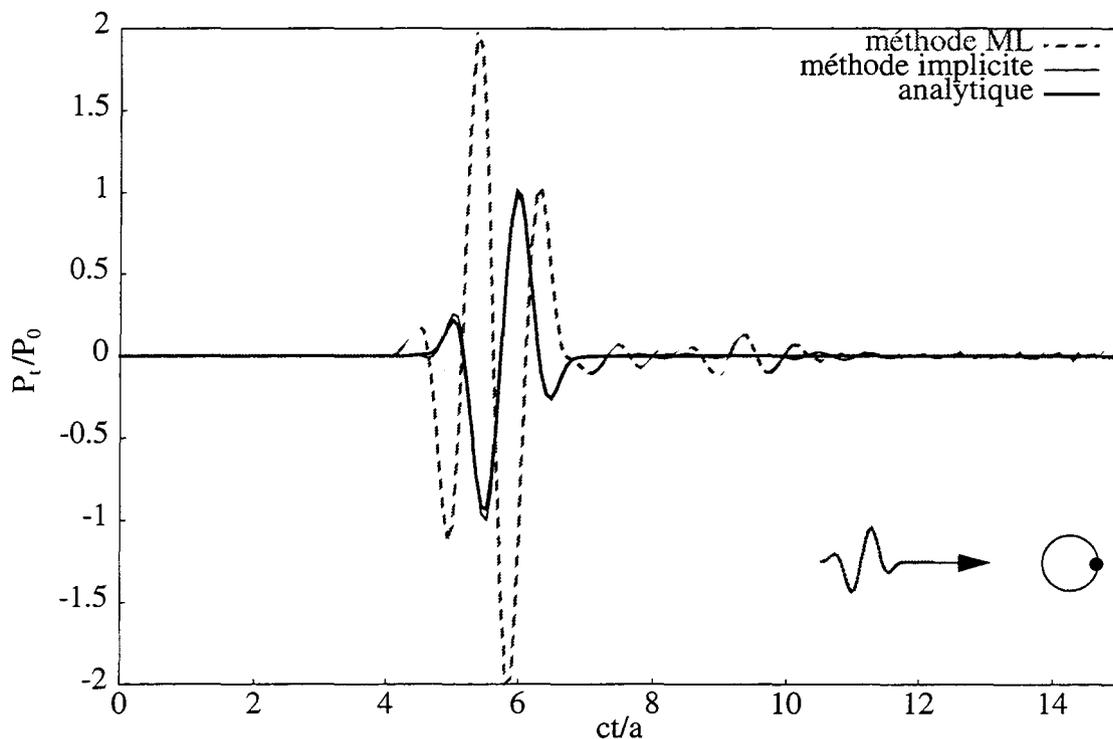


figure 3.15 : pression totale au point P_2 dans le cas d'un signal cosinusoidal :

$$c\Delta t/a = 0.074, f = 2/(30\Delta t), CFL = 0.70$$

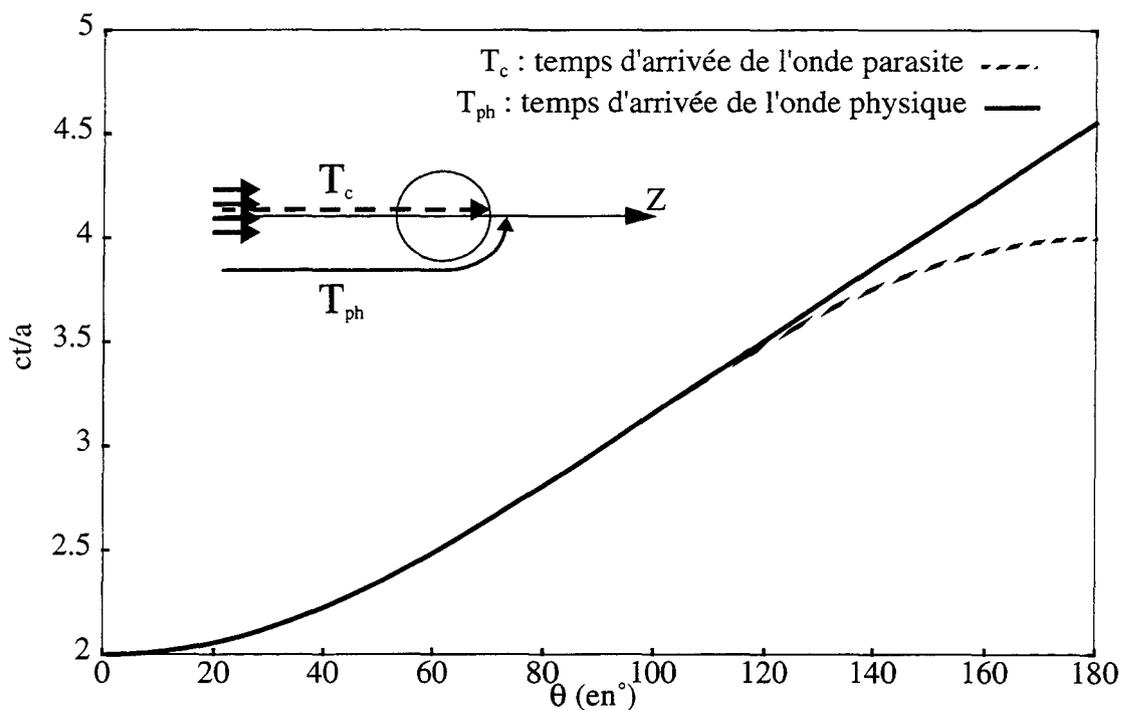
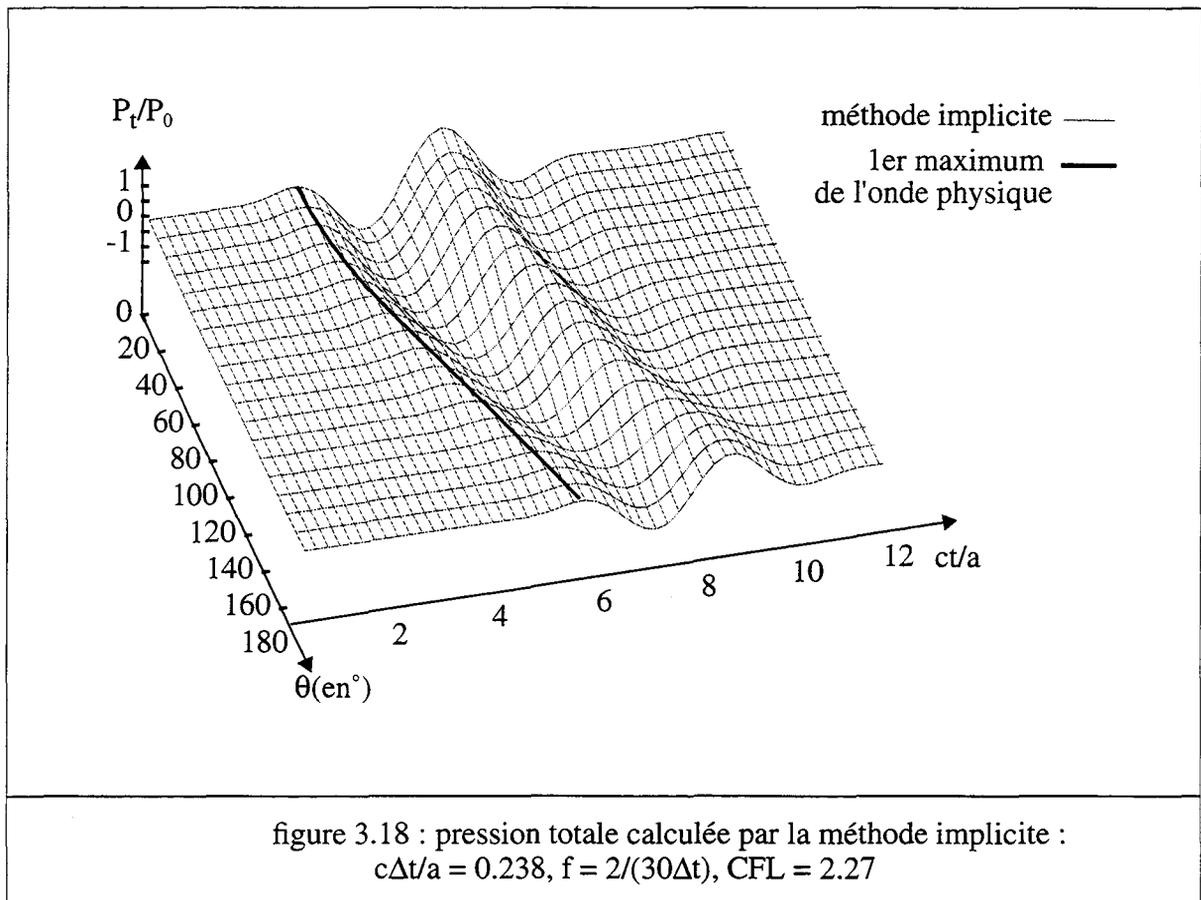
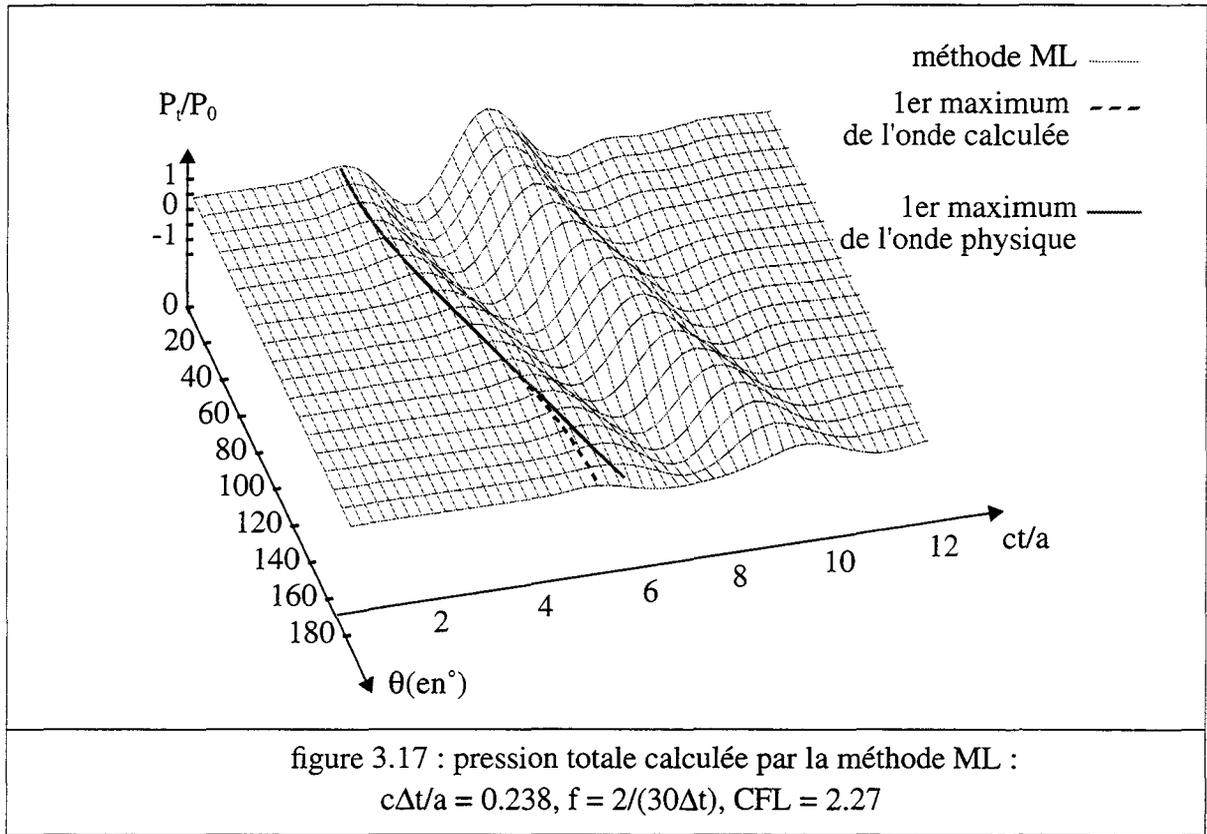


figure 3.16 : temps d'arrivée des ondes physique et parasite dans l'espace $(\theta, ct/a)$



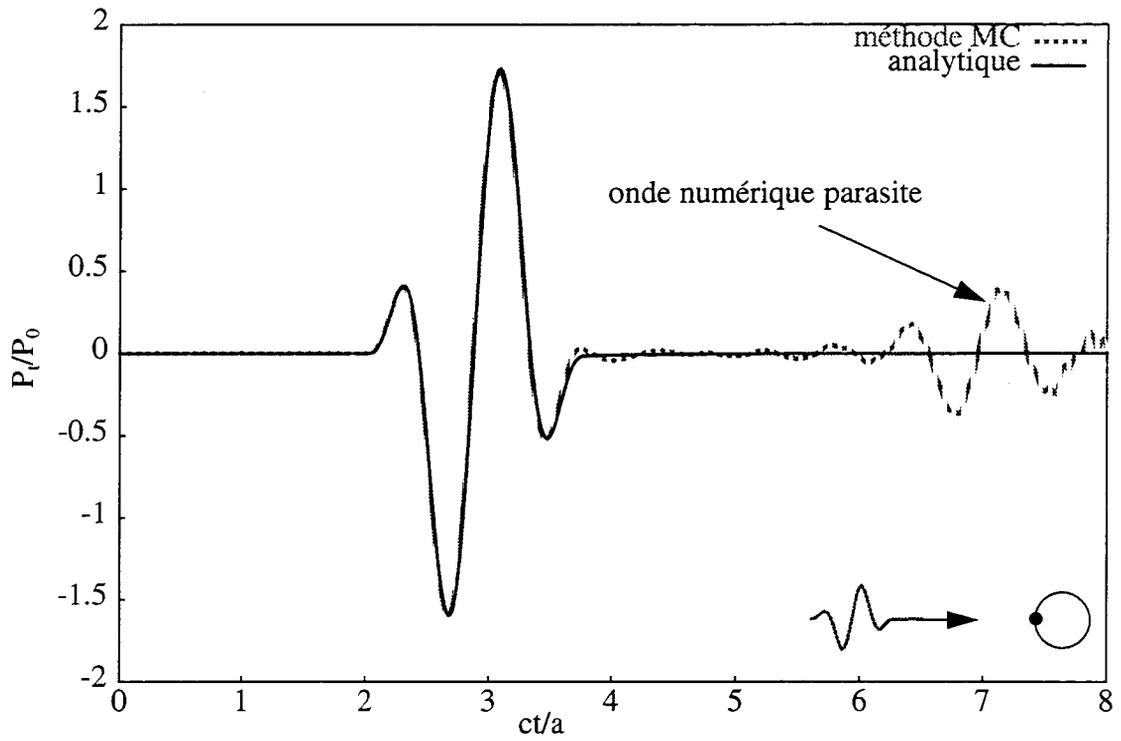


figure 3.19 : pression totale au point P_1 dans le cas d'un signal cosinusoidal :
 $c\Delta t/a = 0.014$, $f = 2/(120\Delta t)$, $CFL = 0.14$

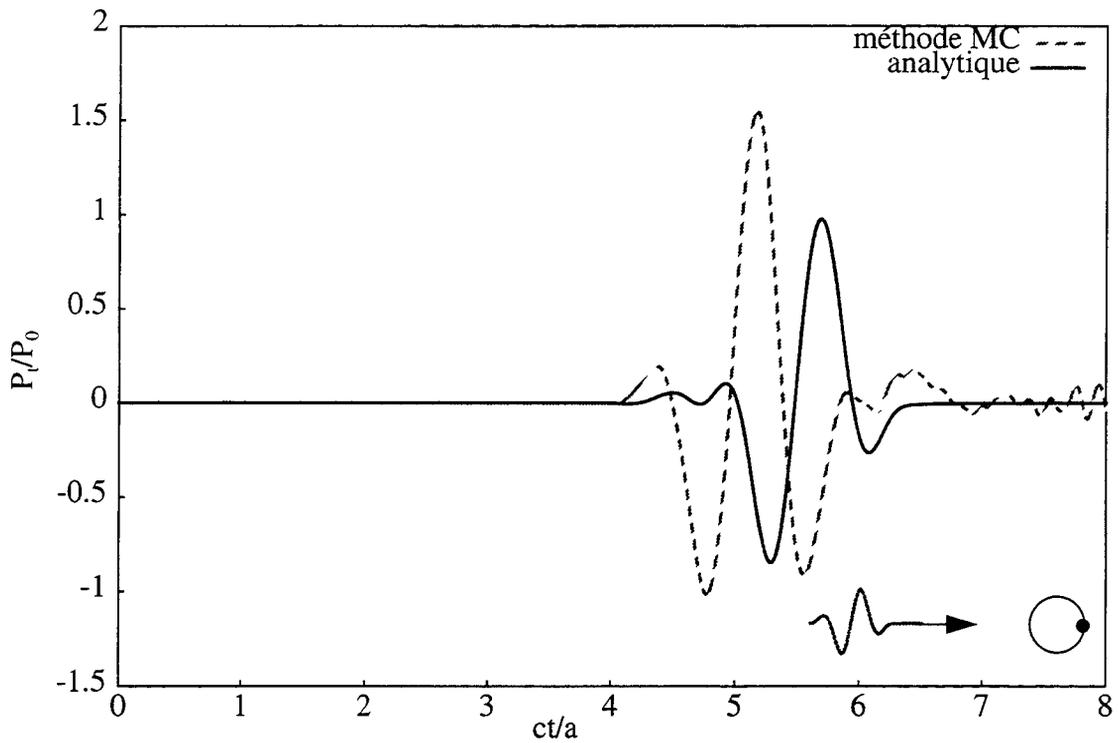


figure 3.20 : pression totale au point P_2 dans le cas d'un signal cosinusoidal :
 $c\Delta t/a = 0.014$, $f = 2/(120\Delta t)$, $CFL = 0.14$

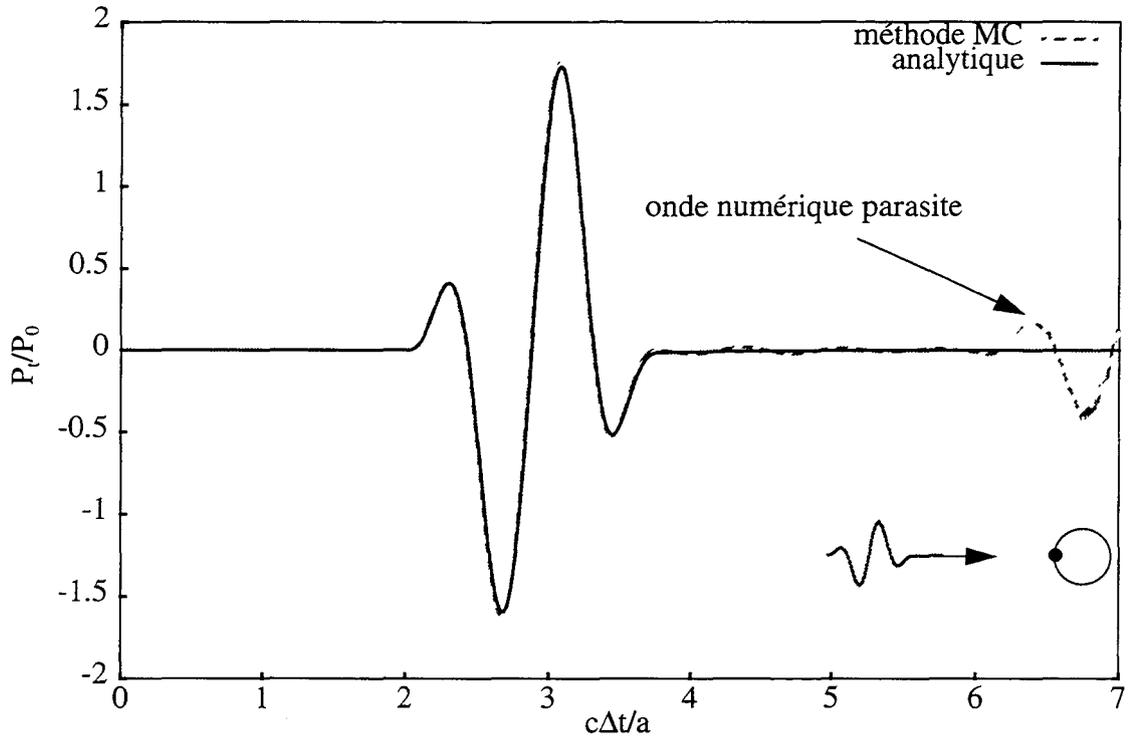


figure 3.20a : pression totale au point P_1 dans le cas d'un signal cosinusoidal :
 $c\Delta t/a = 0.014$, $f = 2/(120\Delta t)$, $CFL = 0.42$

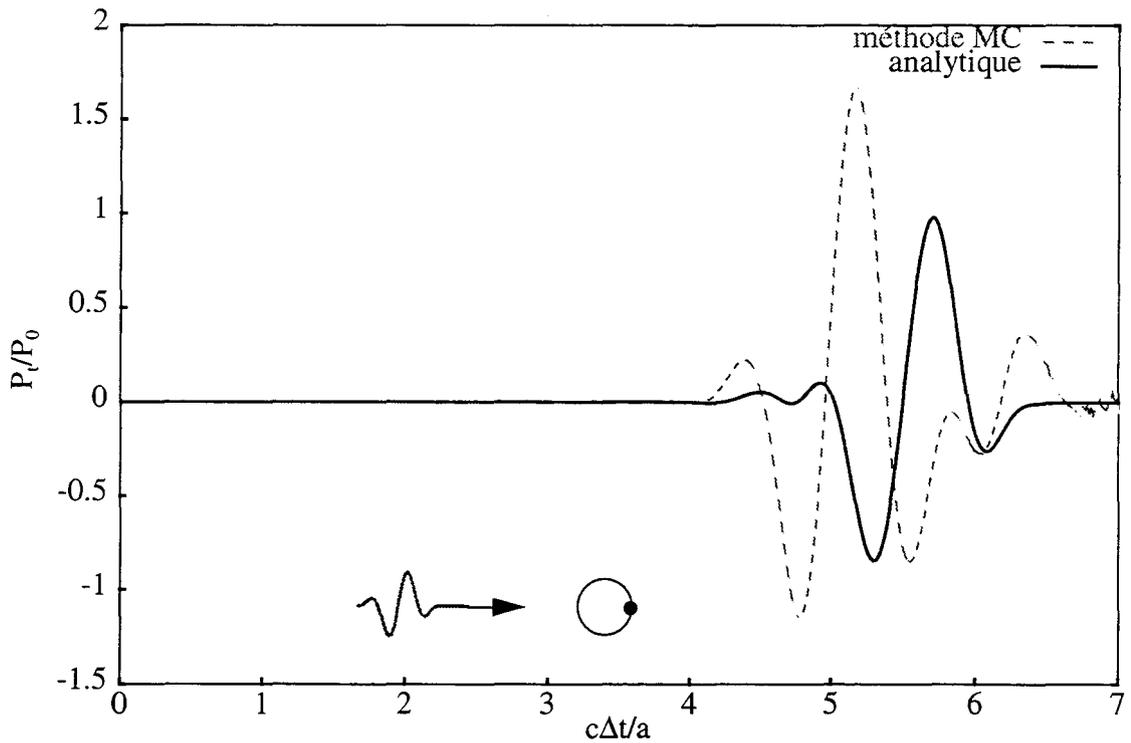


figure 3.20b : pression totale au point P_2 dans le cas d'un signal cosinusoidal :
 $c\Delta t/a = 0.014$, $f = 2/(120\Delta t)$, $CFL = 0.42$.

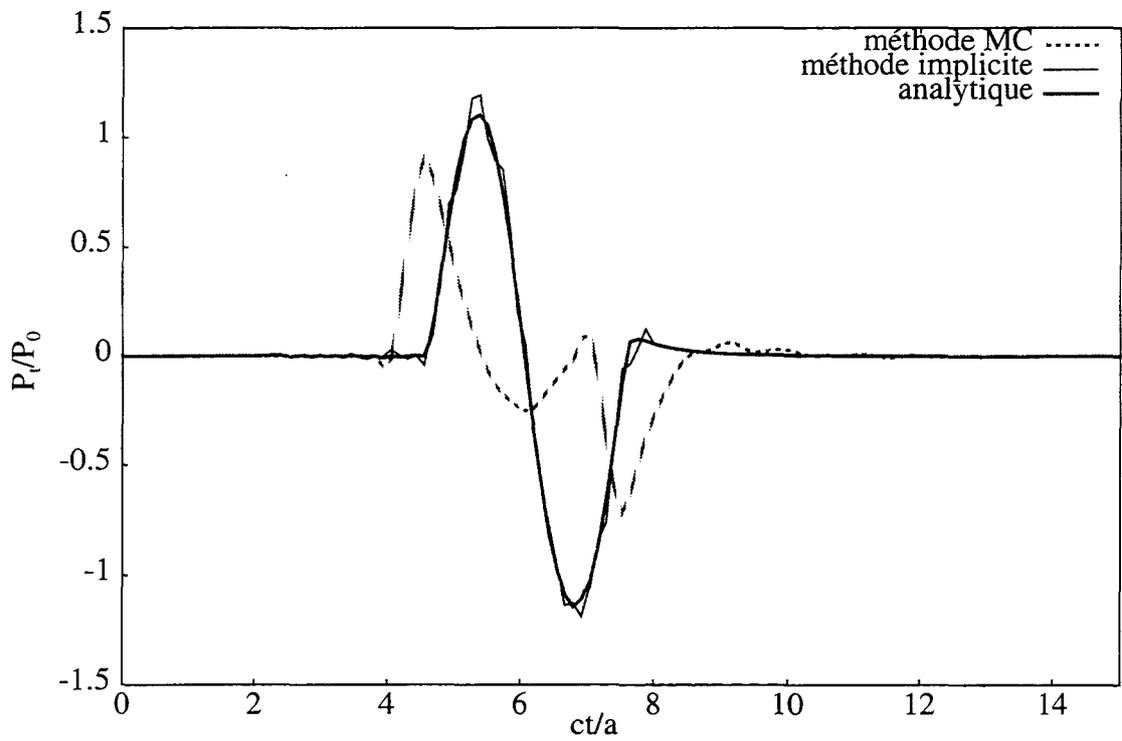


figure 3.21 : pression totale au point P_2 dans le cas d'un signal sinusoïdal :
 $c\Delta t/a = 0.148$, $f = 2/(25\Delta t)$, $CFL = 1.41$

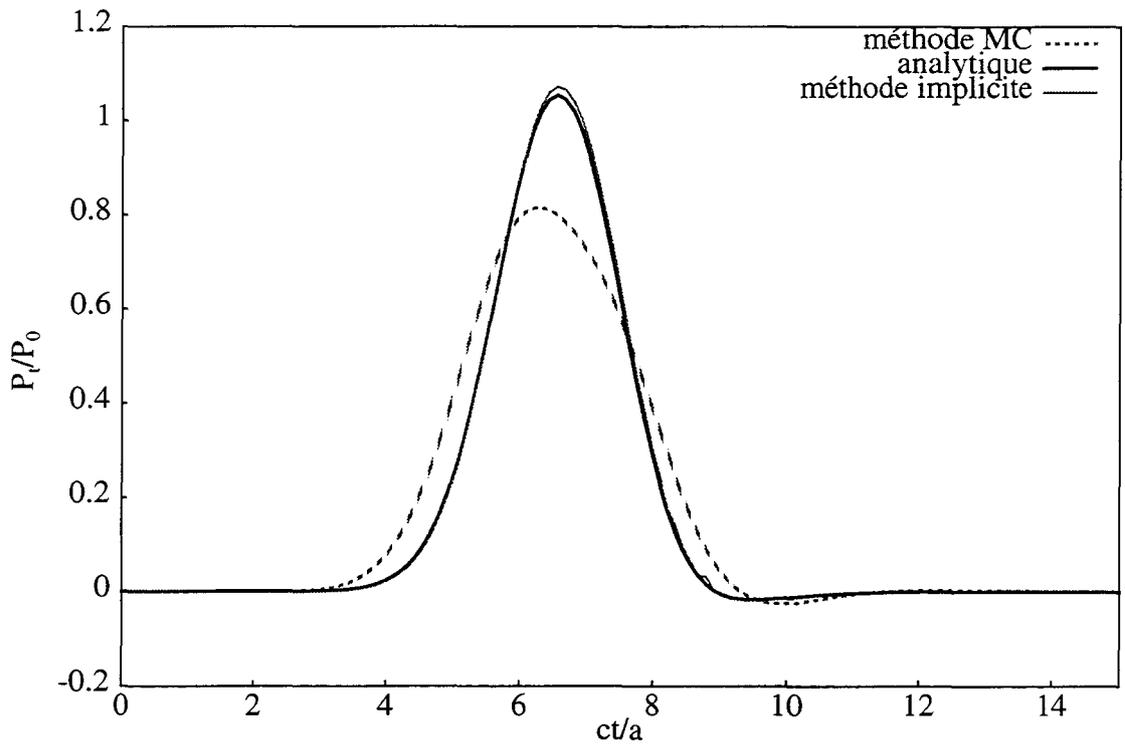


figure 3.22 : pression totale au point P_2 dans le cas d'un signal gaussien :
 $c\Delta t/a = 0.148$, $CFL = 1.41$

II.1.3. Discussion sur l'origine des ondes parasites

Le choix d'une discrétisation basée sur une hypothèse de variables spatiales et temporelles séparables pose problème car la variable temps retardé intervenant dans les intégrales associe espace et temps. Comme illustration de ce phénomène, considérons la méthode d'interpolation linéaire ML, sur un élément de surface Γ_j . Pour tout point \underline{r}' de cet élément vérifiant $t_{m-1} < \tau \leq t_m$, la pression s'écrit :

$$p(\underline{r}', \tau) = \mu_1 \sum_k N_k P_k(t_m) + (1 - \mu_1) \sum_k N_k P_k(t_{m-1}) \quad (3.14)$$

$$\text{où } \mu_1 = \frac{\tau - t_{m-1}}{\Delta t}.$$

Si pour le même élément, un autre point courant \underline{r}' vérifiant $t_m < \tau \leq t_{m+1}$, on a :

$$p(\underline{r}', \tau) = \mu_2 \sum_k N_k P_k(t_{m+1}) + (1 - \mu_2) \sum_k N_k P_k(t_m) \quad (3.15)$$

$$\text{où } \mu_2 = \frac{\tau - t_m}{\Delta t}.$$

Les lignes définies par $\tau = t_m$, c'est à dire :

$$ct = |\underline{r} - \underline{r}'| + mc\Delta t \quad (3.16)$$

apparaissent donc comme des lignes de discontinuité de la variable $p(\underline{r}', \tau)$ (Figure 3.23). Les intégrandes à évaluer sur un élément de surface Γ_j sont donc discontinus ce qui conduit à une évaluation imprécise de l'intégrale. Il est vraisemblable que l'apparition des ondes parasites dans les résultats numériques résulte de cette évaluation imprécise. Quand Δt décroît, le nombre de lignes de discontinuité traversant Γ_j augmente, ce qui accentue l'erreur sur l'évaluation des intégrales et donc l'amplitude des ondes parasites essentiellement visibles à faible Δt en zone cachée [114]. Plusieurs références [61-65] ont déjà mentionné cette imprécision dans le calcul des intégrales sans en préciser ni l'origine, ni les conséquences sur la nature non-physique des résultats obtenus.

II.1.4. Conclusion

Les résultats obtenus avec les méthodes de différences finies en temps (ML, MSL1, MSL2 et MC) mettent en évidence l'existence d'une onde parasite, correspondant à une propagation directe à travers l'objet diffractant (sphère). Cet effet, particulièrement visible en zone cachée, résulte du choix d'une discrétisation temporelle par différences finies qui rend discontinues les intégrandes des intégrales à évaluer. La méthode implicite, qui repose sur une discrétisation spatio-temporelle par éléments finis, garantit cette continuité et produit dans tous les cas testés des résultats très satisfaisants.

II.2. Etude et traitements des instabilités

II.2.1. Présentation des instabilités

Bien qu'ayant fait l'objet de nombreux travaux, essentiellement en acoustique [19, 21] et en électromagnétisme [59-60, 70], la question de l'origine et du traitement des instabilités présentes dans les formulations discrétisées d'équations intégrales de potentiel retardé (de type équation de Kirchhoff), n'est pas encore clairement tranchée aujourd'hui.

Comme illustration de ce phénomène, la figure 3.24 montre l'évolution de la pression diffractée au point P_1 . Les paramètres du calcul sont :

$$c\Delta t/a = 0.208 \quad f = 2/(30\Delta t) \quad (3.16)$$

Pour cette valeur de Δt , les résultats oscillent exponentiellement au fur et à mesure que le temps progresse. Pour repérer ces oscillations qui peuvent être de très faible niveau, on trace le logarithme de la valeur absolue de la pression en fonction du temps. Le modèle est instable si la pente obtenue est croissante et stable si la pente est nulle ou décroissante. Suivant l'onde incidente considérée, l'instabilité peut apparaître pour de grandes valeurs de ct/a et ainsi, ne pas perturber le calcul dans la zone "utile". Sur la figure 3.25 l'instabilité n'apparaît pas pour des ct/a inférieurs à 100. Cependant, le tracé du logarithme népérien de la valeur absolue de la pression montre clairement la présence de l'instabilité (Figure 3.26).

Les figures 3.27 et 3.28 montrent l'évolution de la pression diffractée sur la surface de la structure aux instants $ct/a = 44$ et $ct/a = 60$, les paramètres de calculs sont donnés par (3.16). On constate que la distribution de pression sur la surface est structurée. Pour tous les instants où les instabilités sont prépondérantes, la solution obtenue présente une distribution spatiale de pression identique dont l'amplitude croît dans le temps. L'instabilité semble donc provoquée par une résonance parasite dont l'amplitude croît exponentiellement avec le temps. Ces résultats sont cohérents avec les observations de Rynne et Smith [59-60]. Les aspects numériques liés à la discrétisation de l'équation ou à sa résolution influent sûrement sur la croissance de l'instabilité. Cependant, ils n'en constituent pas l'origine.

Il semble que les résonances associées au problème intérieur soient à l'origine principale de ces instabilités [59-60]. Ces résonances, dues au choix de la fonction de Green de l'espace infini qui ne vérifie pas les conditions aux limites sur la surface de l'objet, se manifestent, dans le domaine fréquentiel, sous forme de fréquences irrégulières pour lesquelles l'équation intégrale admet une infinité de solutions [47]. Ces résonances correspondent à des pôles de la fonction de forme localisés sur l'axe réel du plan complexe des fréquences (car solutions du problème de Dirichlet intérieur). Dans la méthode utilisée, la discrétisation temporelle et spatiale du problème ne permet qu'une évaluation approchée de ces pôles. Ceci est particulièrement vrai pour les pôles associés à des fréquences de résonance élevées dont les variations temporelles et spatiales ne peuvent être correctement décrites. Par accumulation des erreurs dues aux discrétisations spatiale et temporelle et aux discontinuités des intégrandes, quelques pôles peuvent se déplacer et se situer numériquement dans le quadrant inférieur du plan complexe des fréquences (Figure 3.29). Ces pôles correspondent alors à des résonances qui croissent de façon exponentielles.

Deux paramètres caractérisent l'instabilité : la position de la droite (en représentation logarithmique) et sa pente. Nous adoptons une mesure de stabilité qui incorpore ces deux caractéristiques. On calcule le temps T nécessaire pour que le champ des pressions instables atteigne l'amplitude de l'onde incidente. L'inverse de ce temps $1/T$ nous donne une mesure de l'instabilité (Figure 3.30). La stabilité définie auparavant correspond à une valeur nulle de cette mesure.

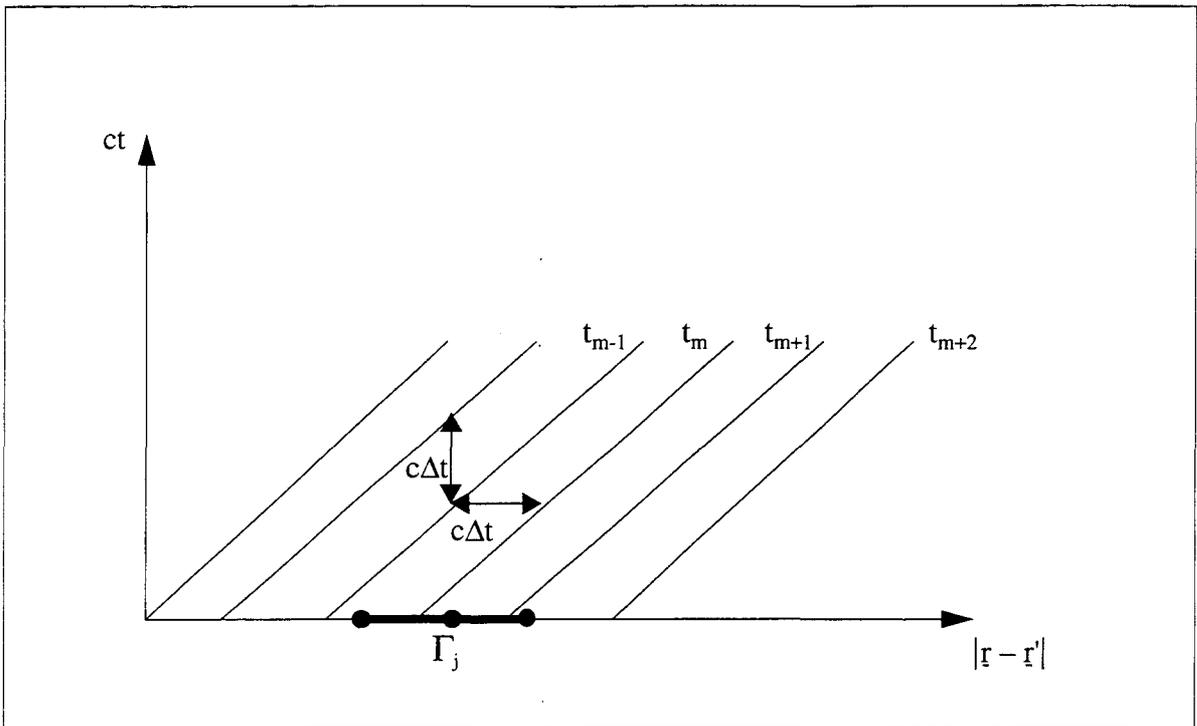


figure 3.23 : représentation de l'interpolation de la pression dans l'espace ($|r - r'|$, ct).

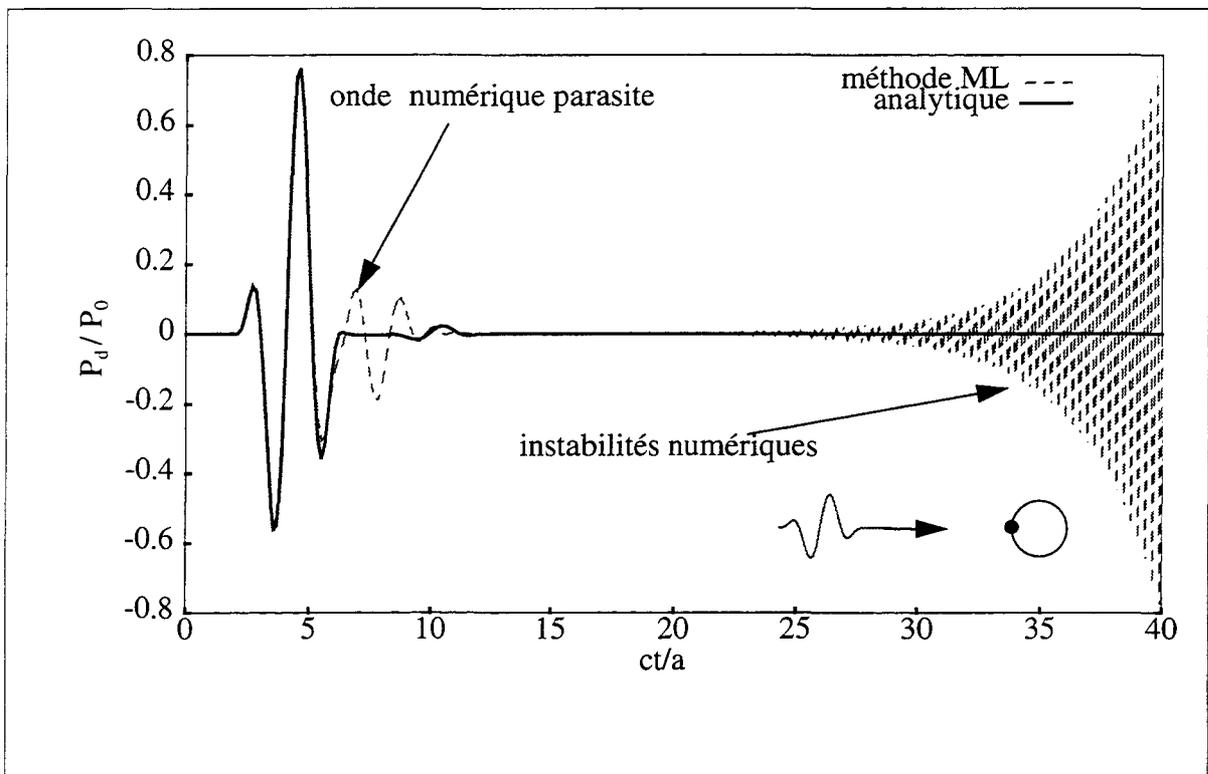


figure 3.24 : pression diffractée au point P_1 dans le cas du signal cosinusoidal
cosinusoidal : $c\Delta t/a = 0.208$, $f = 2/(30\Delta t)$

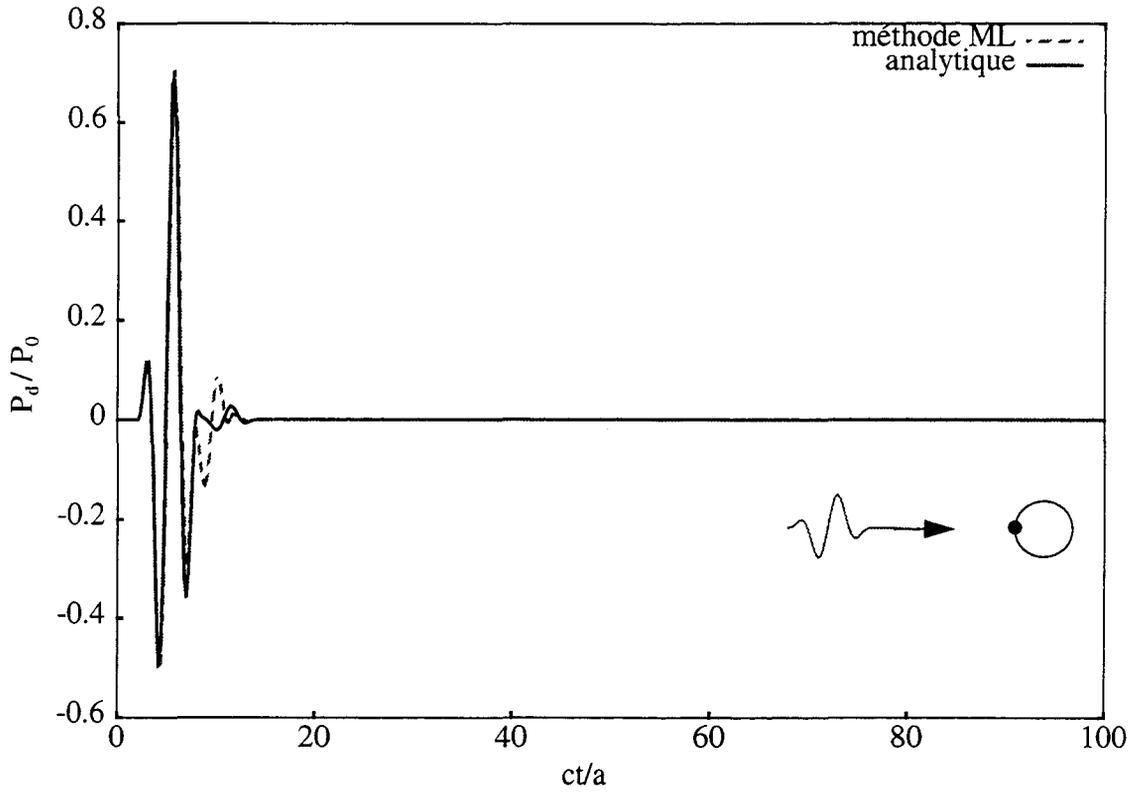


figure 3.25 : pression diffractée au point P_1 dans le cas du signal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$

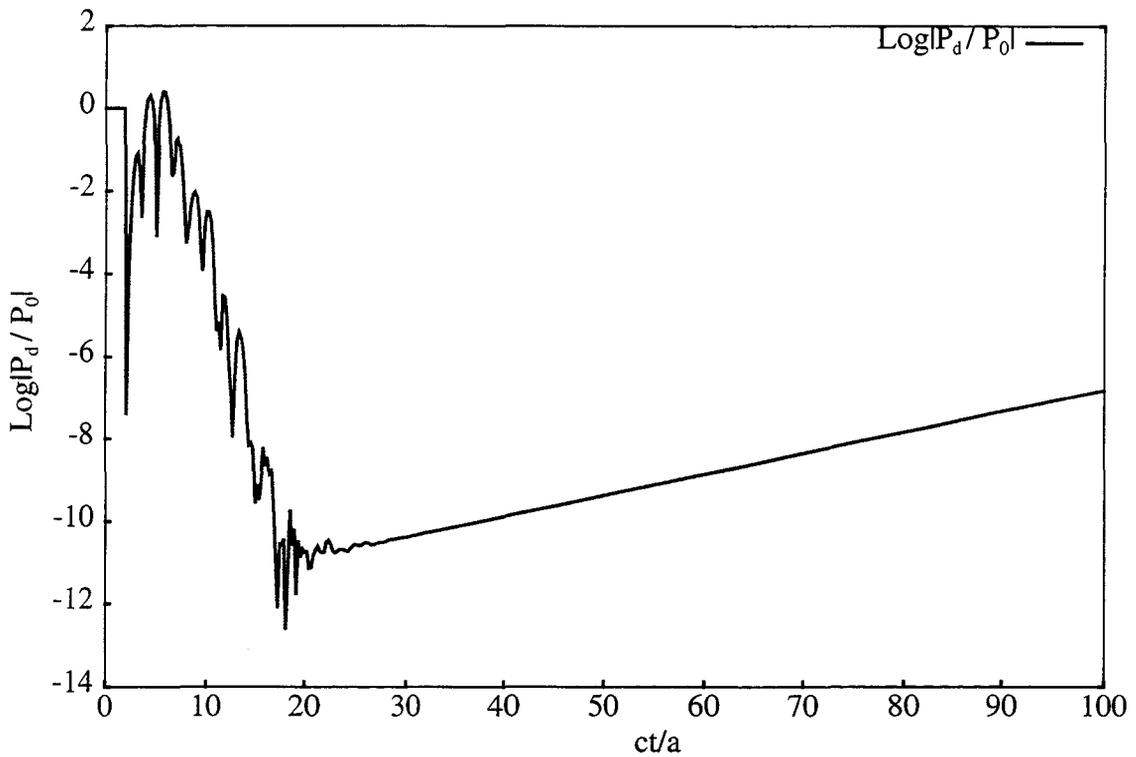


figure 3.26 : tracé du logarithme népérien de la valeur absolue de la pression présentée à la figure 3.25

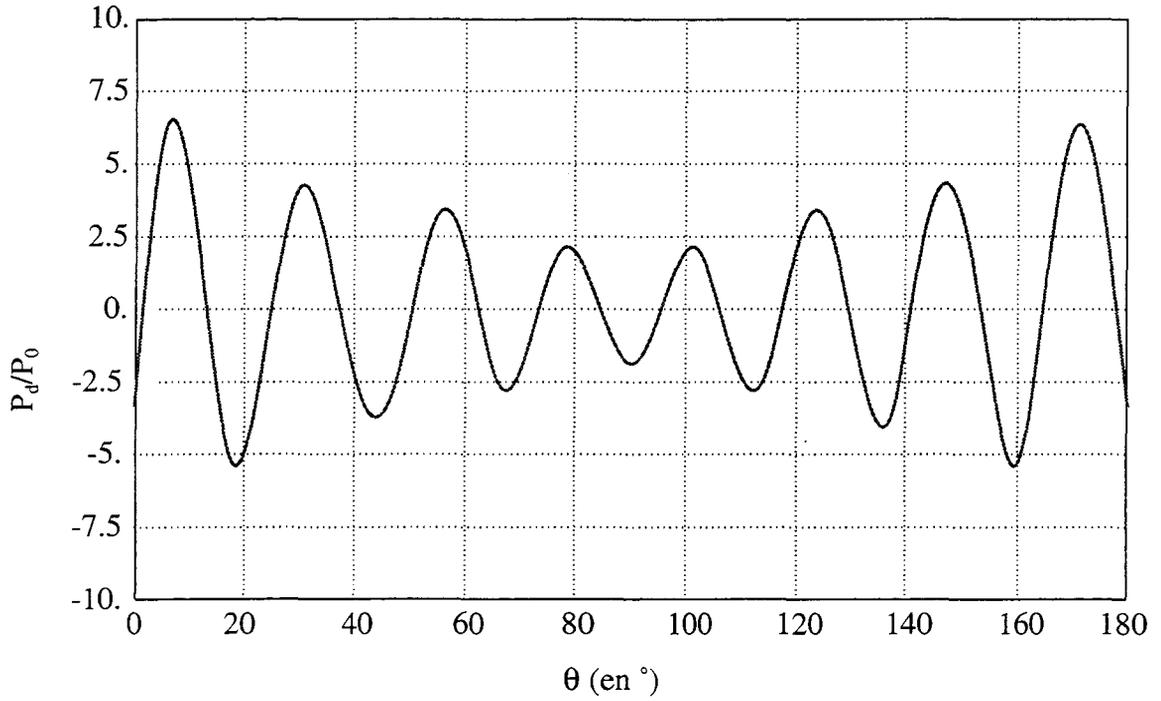


figure 3.27 : pression diffractée dans la zone d'instabilité à l'instant $ct/a = 44$: $c\Delta t/a=0.208$, $f = 2/(30\Delta t)$, CFL = 1.9

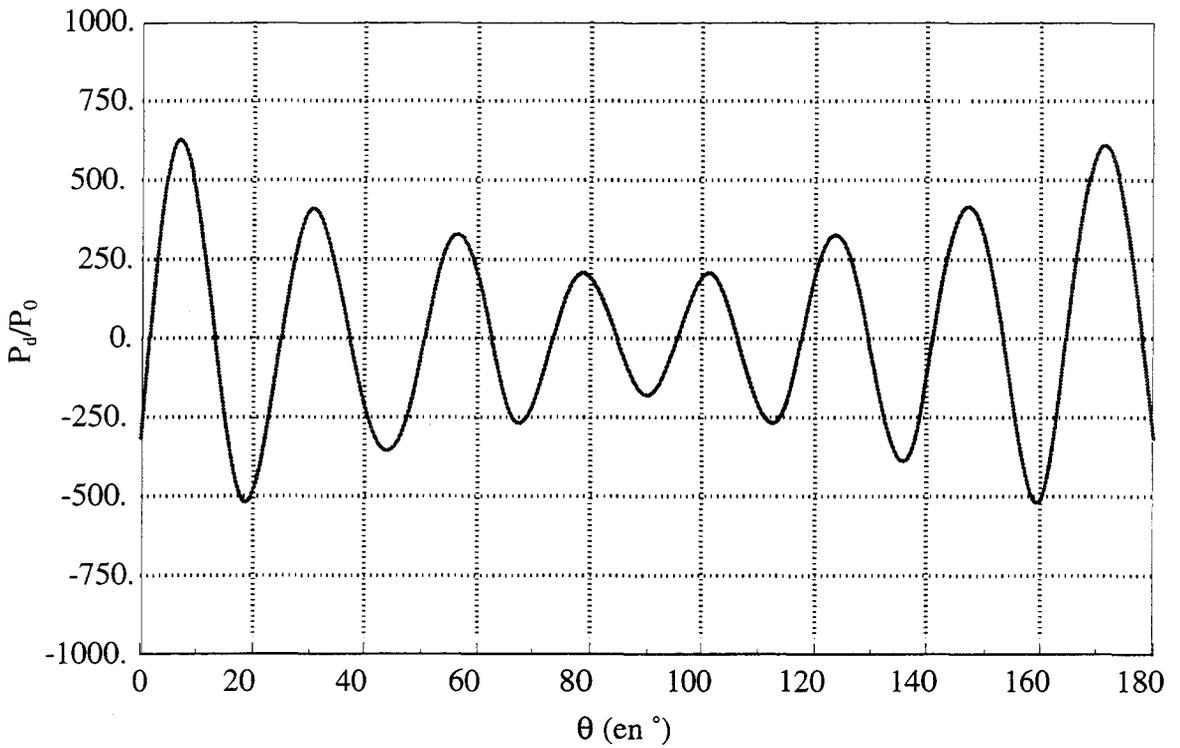


figure 3.28 : pression diffractée dans la zone d'instabilité à l'instant $ct/a = 60$: $c\Delta t/a=0.208$, $f = 2/(30\Delta t)$, CFL = 1.9

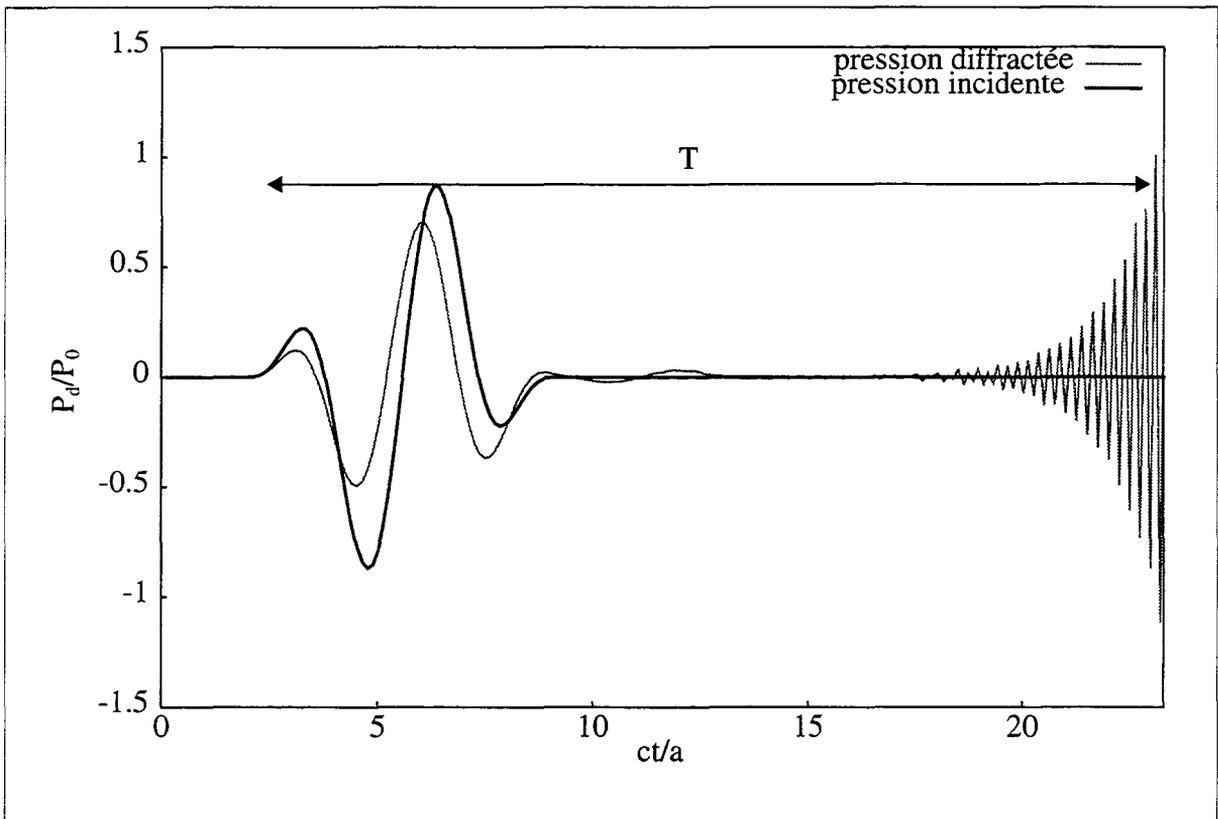
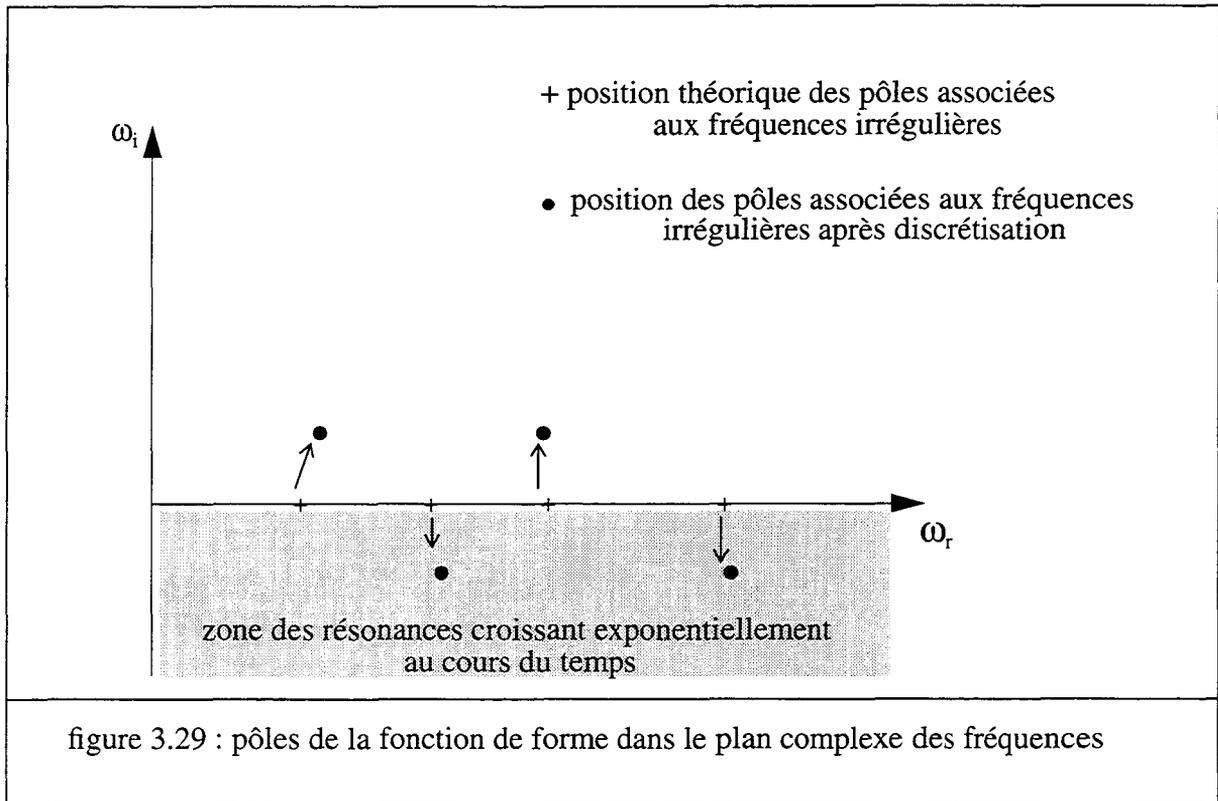


figure 3.30 : mesure de critère de stabilité.

II.2.2. Analyse des résultats pour les méthodes de différences finies

Pour chaque méthode, l'instabilité numérique de la formulation intégrale de Kirchhoff discrétisée est analysée. La réponse de la sphère au signal de type cosinusoidal est calculée en fonction de la valeur de Δt . Le point de calcul est P_1 .

II.2.2.1. Présentation des résultats

a) *Influence du signal*

De nombreux tests ont été effectués sur la sphère rigide avec une discrétisation temporelle constante Δt mais avec un découpage de signal entre 24 et 120 pas temporels. La fréquence des signaux incidents est diminuée (ka diminue). On constate une diminution de l'instabilité lorsque ka décroît. Cependant les instabilités demeurent (Figures 3.31 et 3.32). Ce résultats peut être expliqués par la diminution de l'énergie du signal dans la gamme des fréquences irrégulières lorsque ka diminue. L'énergie est donc transmise moins rapidement à la résonance produisant l'instabilité. On note que le signal sinusoïdal (non représenté) de spectre plus large produit des résultats plus instables.

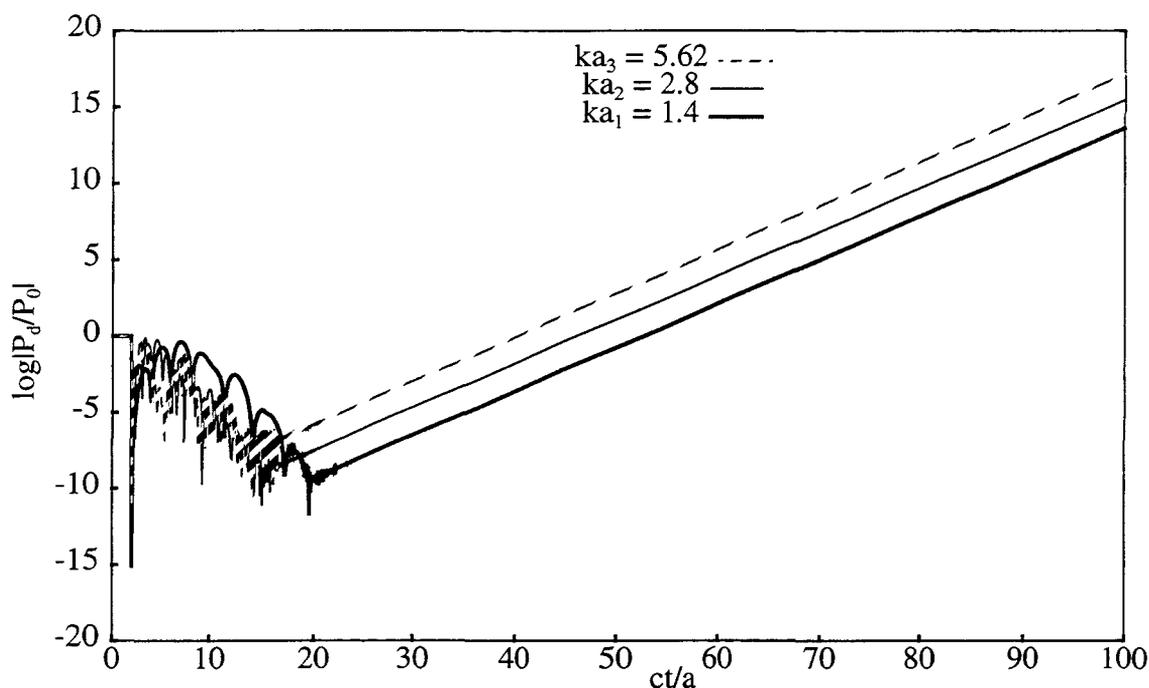


figure 3.31 : tracé du logarithme népérien de la valeur absolue de la pression diffractée pour trois valeurs de ka :

$ka_1 = 1.4, ka_2 = 2.8, ka_3 = 5.62$ avec $c\Delta t/a = 0.074, CFL = 0.71$

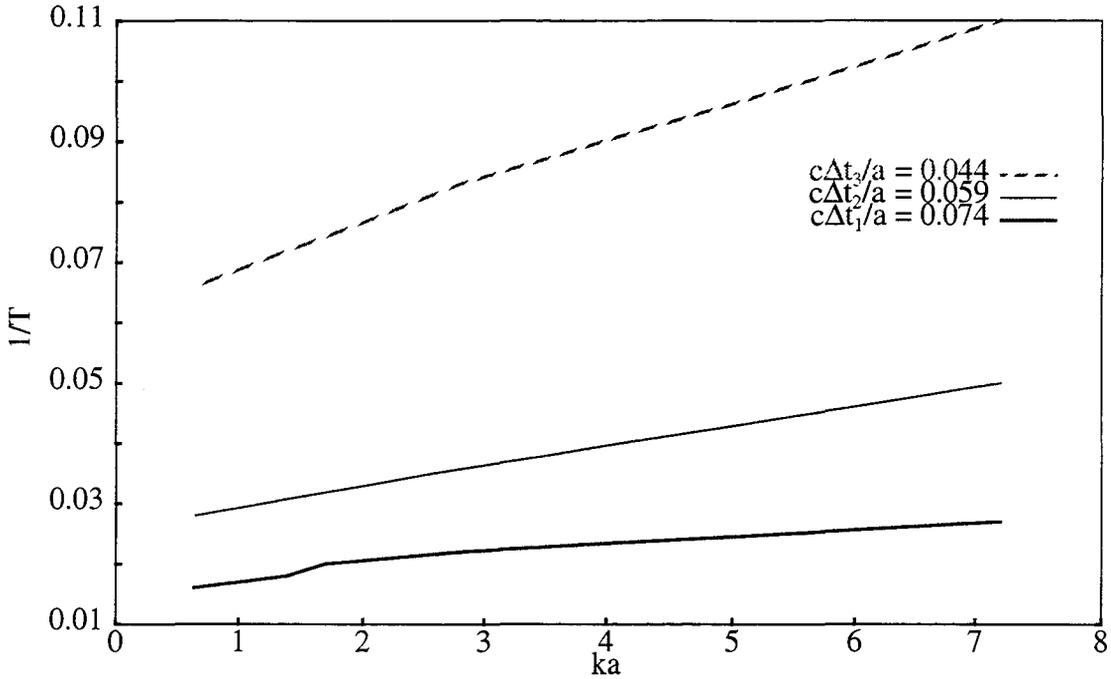


figure 3.32 : mesure de stabilité en fonction du ka pour la méthode MC
 $c\Delta t_1/a = 0.07$, $c\Delta t_2/a = 0.059$, $c\Delta t_3/a = 0.044$

b) Influence du pas de temps (Δt)

Pour un même signal incident et la même fréquence, on étudie les instabilités en fonction de la valeur de Δt . Les figures 3.33 à 3.35 présentent l'évolution temporelle de la pression diffractée par la sphère rigide calculée par la méthode MC avec différentes valeurs de Δt . Les paramètres de calculs sont :

$$c\Delta t/a = 0.059 \quad f = 2/(30\Delta t) \quad ka = 7.02 \quad CFL = 0.56 \quad (3.17)$$

$$c\Delta t/a = 0.014 \quad f = 2/(120\Delta t) \quad ka = 7.02 \quad CFL = 0.14 \quad (3.18)$$

$$c\Delta t/a = 0.007 \quad f = 2/(240\Delta t) \quad ka = 7.02 \quad CFL = 0.07 \quad (3.19)$$

On constate que la méthode MC donne une très bonne concordance avec le calcul analytique et avec les références [19, 21] dans la zone stable. Quand on réduit la valeur de Δt , le nombre de discontinuité des intégrandes augmente. L'évaluation des intégrales devient de plus en plus imprécise et l'instabilité augmente.

La figure 3.36 montre la mesure de stabilité en fonction de la valeur de $c\Delta t/a$, pour trois ka différents, on constate que l'instabilité augmente quand ka croît.

Les quatre méthodes d'interpolations temporelles par différences finies donnent des résultats semblables, à savoir : qu'il existe pour chaque méthode une valeur Δt_{\min} , telle que si $\Delta t < \Delta t_{\min}$, le modèle numérique est instable. Ces valeurs sont :

$$\text{méthode ML : } c\Delta t_{\min}/a = 0.239$$

$$\text{méthode MSL1 : } c\Delta t_{\min}/a = 0.216$$

$$\text{méthode MSL2 : } c\Delta t_{\min}/a = 0.155$$

$$\text{méthode MC : } c\Delta t_{\min}/a = 0.104$$

Il est à noter que toutes ces valeurs correspondent à des CFL supérieurs à 1.

c) Influence du maillage

Pour une discrétisation temporelle et un signal cosinusoidal constants, les calculs sont effectués avec la méthode MC sur la sphère rigide avec des maillage à 31, 91, 181 et 361 éléments (Figure 3.37). Les résultats montrent la persistance des instabilités quelque soit le maillage utilisé (figure 3.38). On en conclut que le paramètre CFL n'est pas un paramètre pertinent pour mesurer l'instabilité dans le cas des méthodes de différences finies appliquées à l'équation du potentiel retardé.

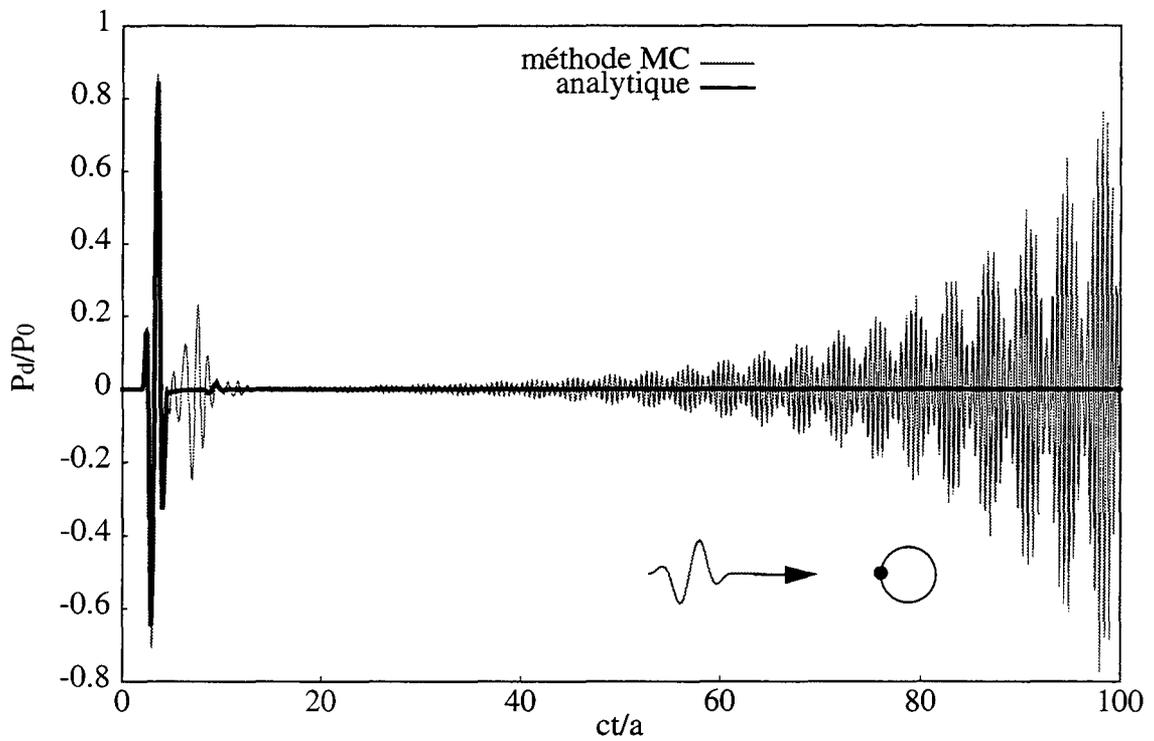


figure 3.33 : pression diffractée au point P_1 dans le cas du signal cosinusoidal :
 $c\Delta t/a = 0.089$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 0.56$

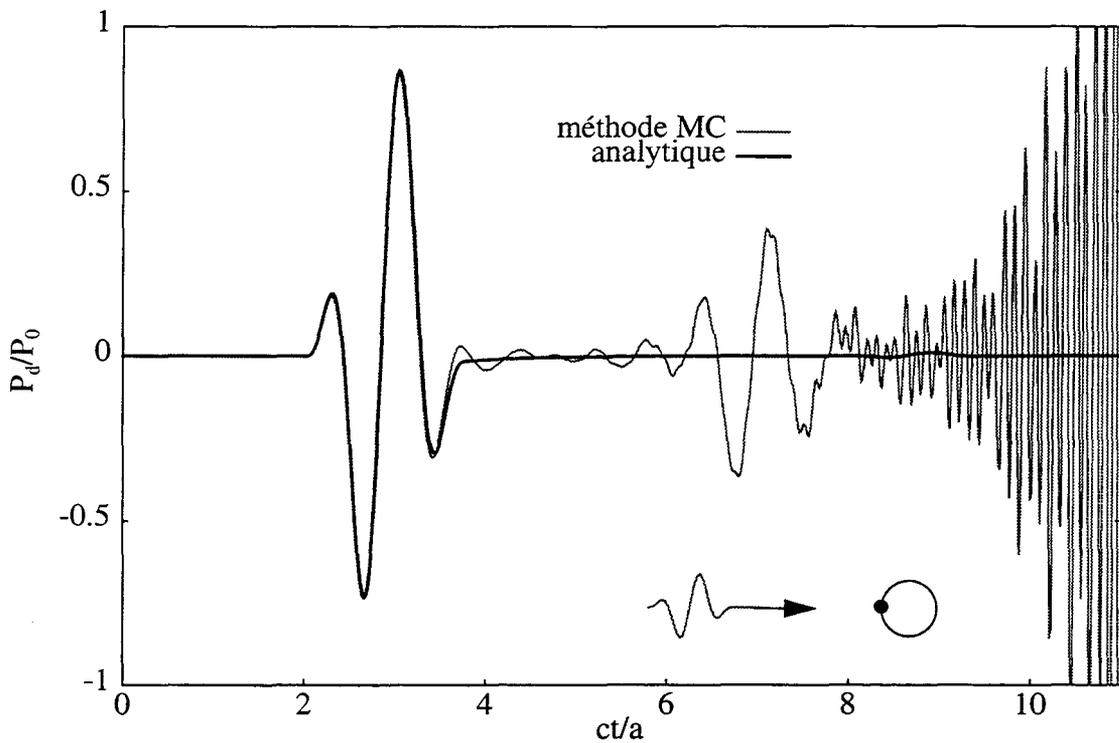


figure 3.34 : pression diffractée au point P_1 dans le cas du signal cosinusoidal :
 $c\Delta t/a = 0.014$, $f = 2/(120\Delta t)$, $CFL = 0.14$

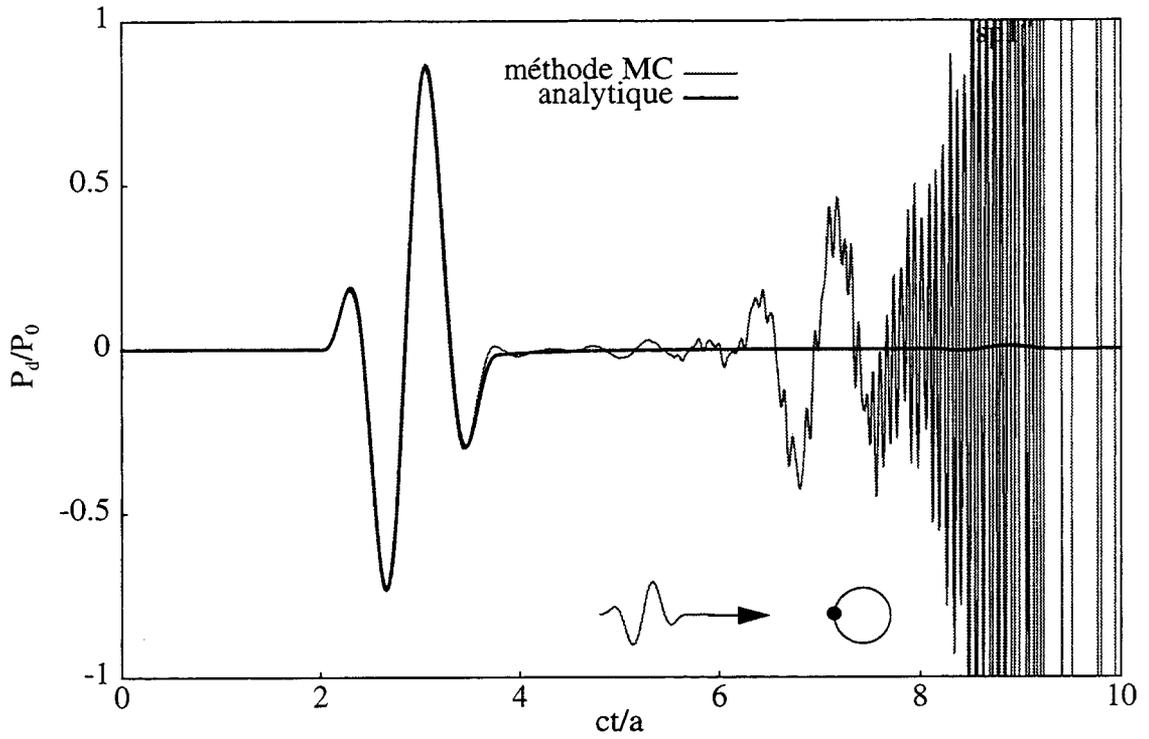


figure 3.35 : pression diffractée au point P_1 dans le cas du signal cosinusoidal :
 $c\Delta t/a = 0.007$, $f = 2/(240\Delta t)$, $CFL = 0.07$

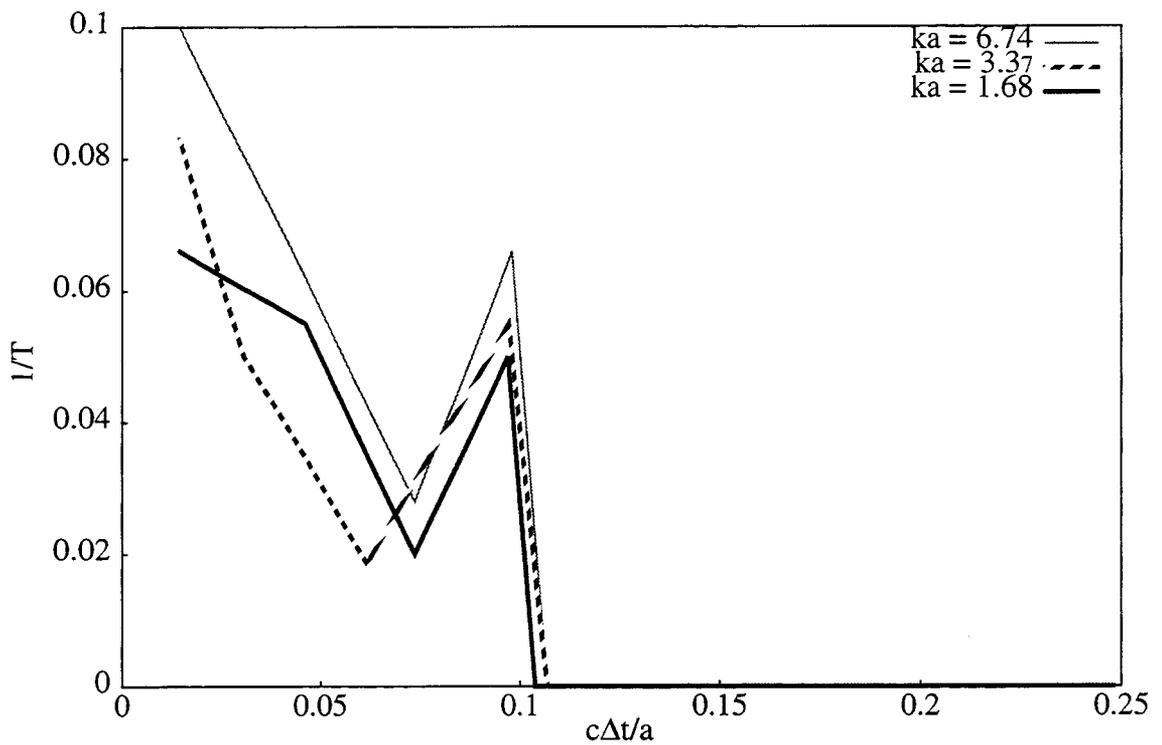


figure 3.36 : mesure de stabilité en fonction du $c\Delta t/a$ pour la méthode MC

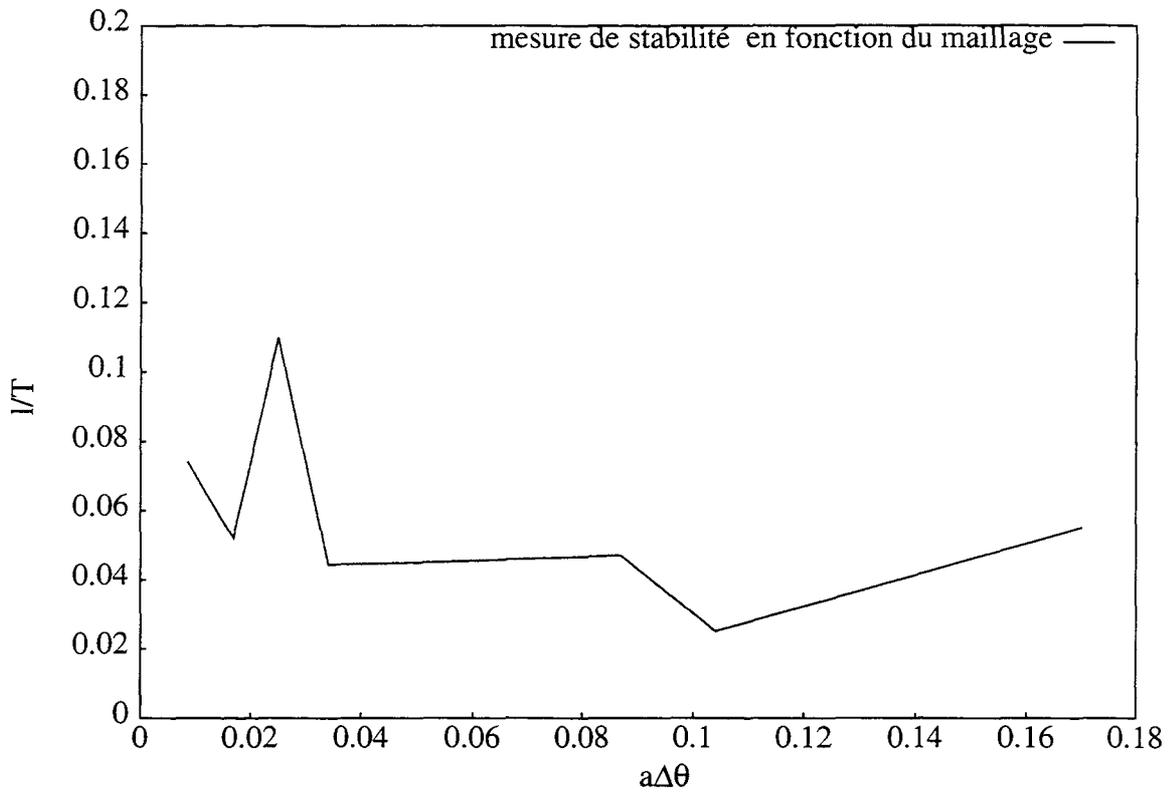


figure 3.37 : mesure de stabilité en fonction du maillage : $c\Delta t/a = 0.074$, $ka = 5.62$

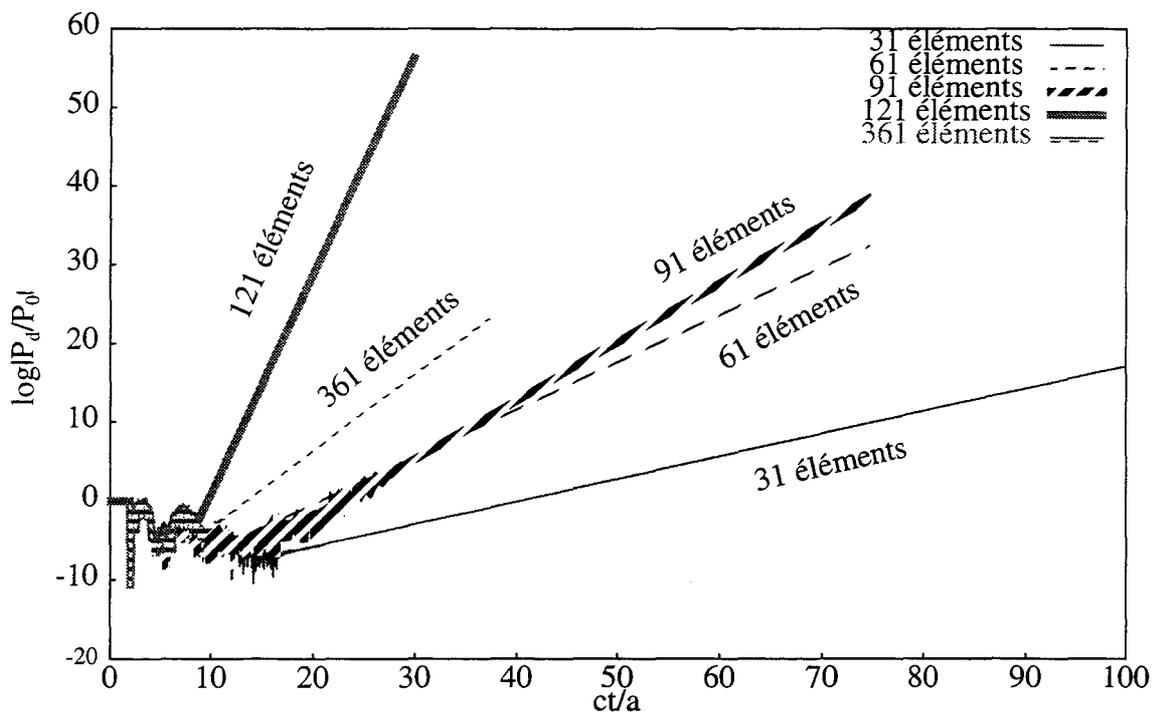


figure 3.38 : tracés des logarithmes népériens des valeurs absolues des pressions diffractées en fonction du maillage : $c\Delta t/a = 0.074$, $ka = 5.62$, $CFL = 0.71$

II.2.2.2. Application de la méthode de moyennage

En électromagnétisme, plusieurs auteurs ont cherché à traiter ces instabilités en filtrant l'oscillation d'amplitude croissante à la fréquence $1/2\Delta t$. La méthode la plus ancienne [59-61] vise à corriger l'instabilité en moyennant la réponse sur plusieurs instants successifs. Un filtrage plus sophistiqué utilisant un filtre passe-bas à réponse impulsionnelle finie a également été proposé [64]. Classiquement, la discrétisation temporelle est moyennée sous la forme [59-64, 70, 102] :

$$\tilde{P}(t_n) = \frac{1}{4}(\tilde{P}(t_{n-1}) + 2P(t_n) + P(t_{n+1})) \quad (3.20)$$

où $\tilde{P}(t_n)$ est la pression moyennée à l'instant t_n , $P(t_{n+1})$ est la pression calculée à l'instant t_{n+1} . La méthode de moyennage est appliquée au problème de référence (avec signal incident cosinusoidal) dans le cas des méthodes d'interpolations ML et MC. Les figures 3.39 et 3.41 présentent la pression totale au point P_1 . Les paramètres de calcul sont :

$$c\Delta t/a = 0.074 \quad f = 2/(30\Delta t) \quad ka = 5.6 \quad CFL = 0.71 \quad (3.21)$$

Les figures 3.40 et 3.42 donnent le tracé du logarithme népérien des valeurs absolues des pressions présentées aux figures 3.39 et 3.41. Pour les deux applications, on trouve des résultats qui sont en très bonne concordance avec le calcul analytique dans la zone stable. Avec la méthode de moyennage, la stabilité est obtenue jusqu'à une valeur de $c\Delta t/a = 0.059$. Comme précédemment, il existe des valeurs Δt_{\min} minimales en dessous desquelles le modèle devient instable et les résultats divergent (Figure 3.43 et 3.44). Pour une sphère à 31 éléments, cette valeur est telle que :

$$\text{méthode ML moyennée : } c\Delta t_{\min}/a = 0.059 \text{ (CFL = 0.57)}$$

$$\text{méthode MC moyennée : } c\Delta t_{\min}/a = 0.052 \text{ (CFL = 0.49)}$$

La valeur de Δt_{\min} est deux fois plus faible que dans le cas non-moyenné. Il faut cependant noter que ces méthodes de filtrage présentent l'inconvénient de limiter la bande passante de la réponse et donc de ne pouvoir décrire des effets transitoires rapides.

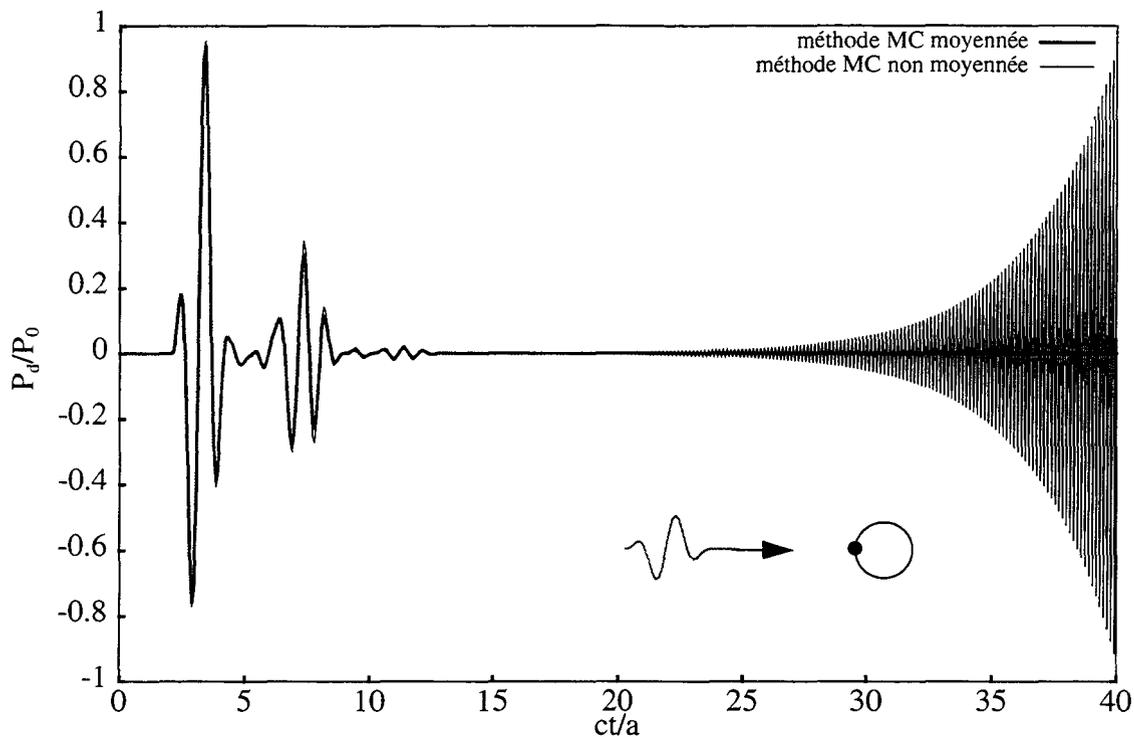


figure 3.39 : effet du moyennage sur la pression diffractée au point P_1
 $c\Delta t/a = 0.074$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 0.71$

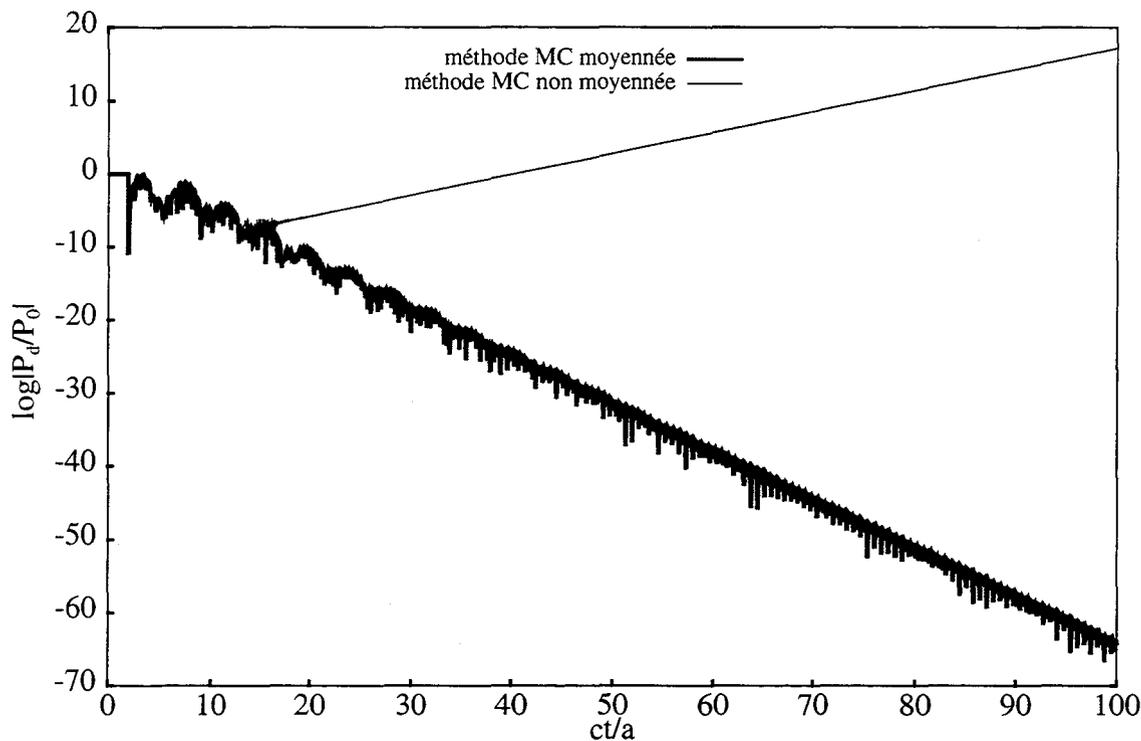


figure 3.40 : tracé du logarithme népérien des valeurs absolues des pressions présentées à la figure 3.39

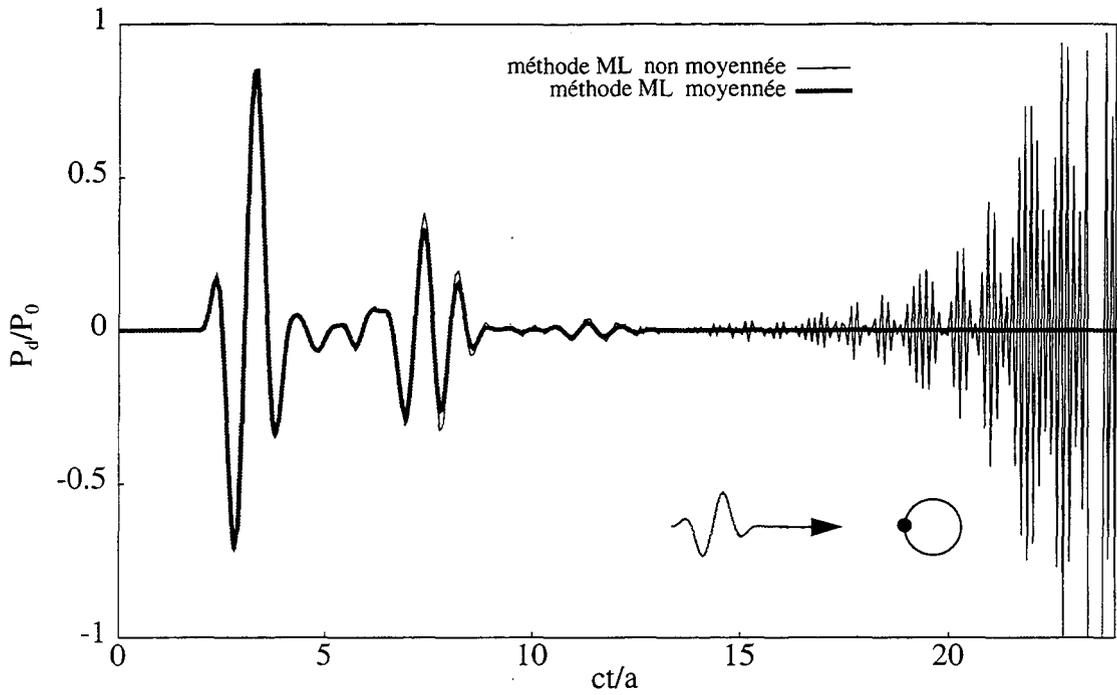


figure 3.41 : effet de moyennage sur la pression diffractée au point P_1
 $c\Delta t/a = 0.074$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 0.71$

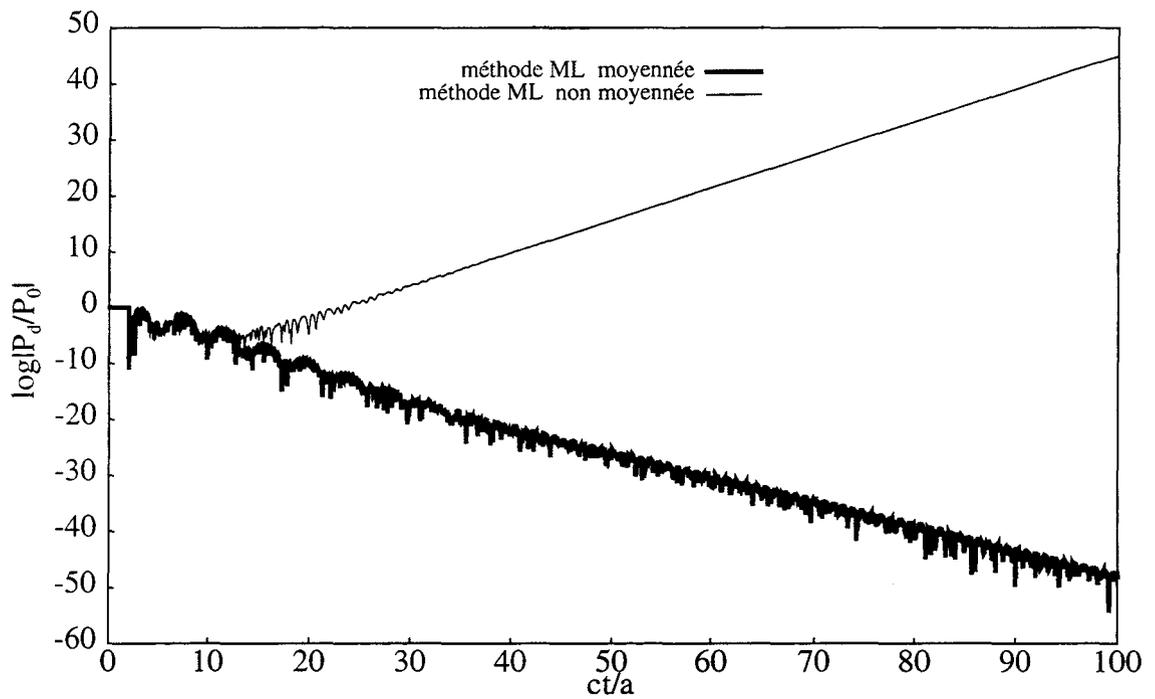


figure 3.42 : tracé du logarithme népérien des valeurs absolues des pressions
 présentées à la figure 3.41

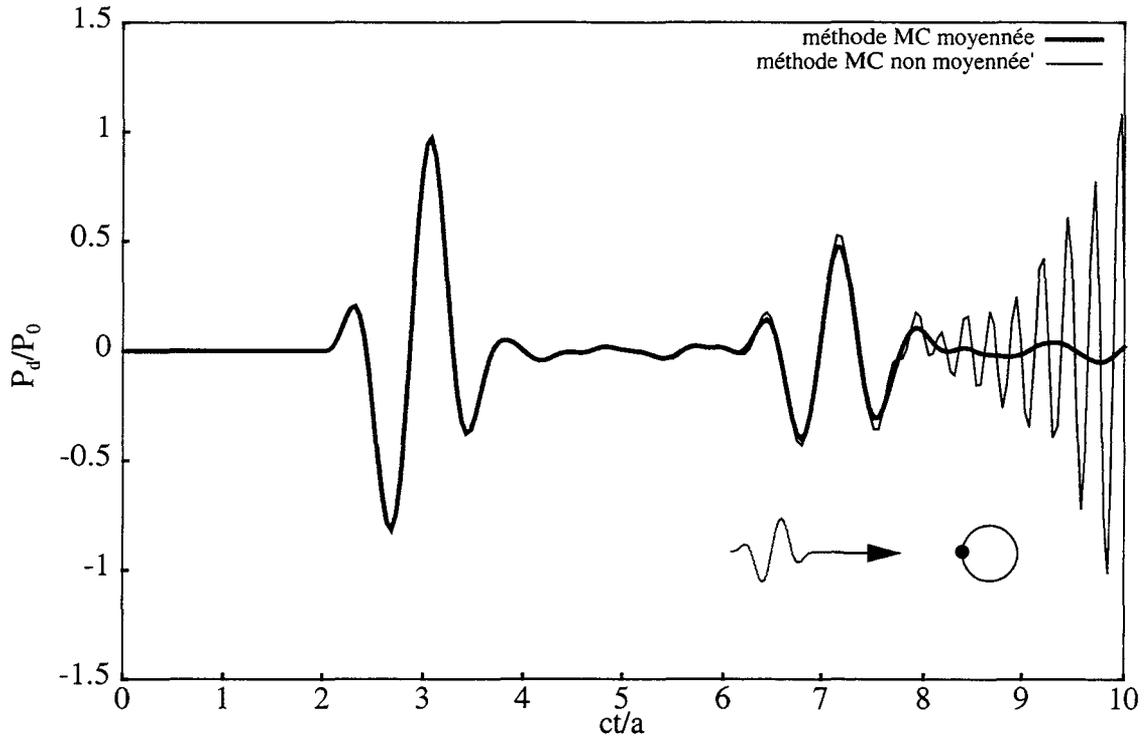


figure 3.43 : méthode de moyennage dans la zone d'instabilité
 $c\Delta t/a = 0.044$, $f = 2/(40\Delta t)$, $CFL = 0.42$

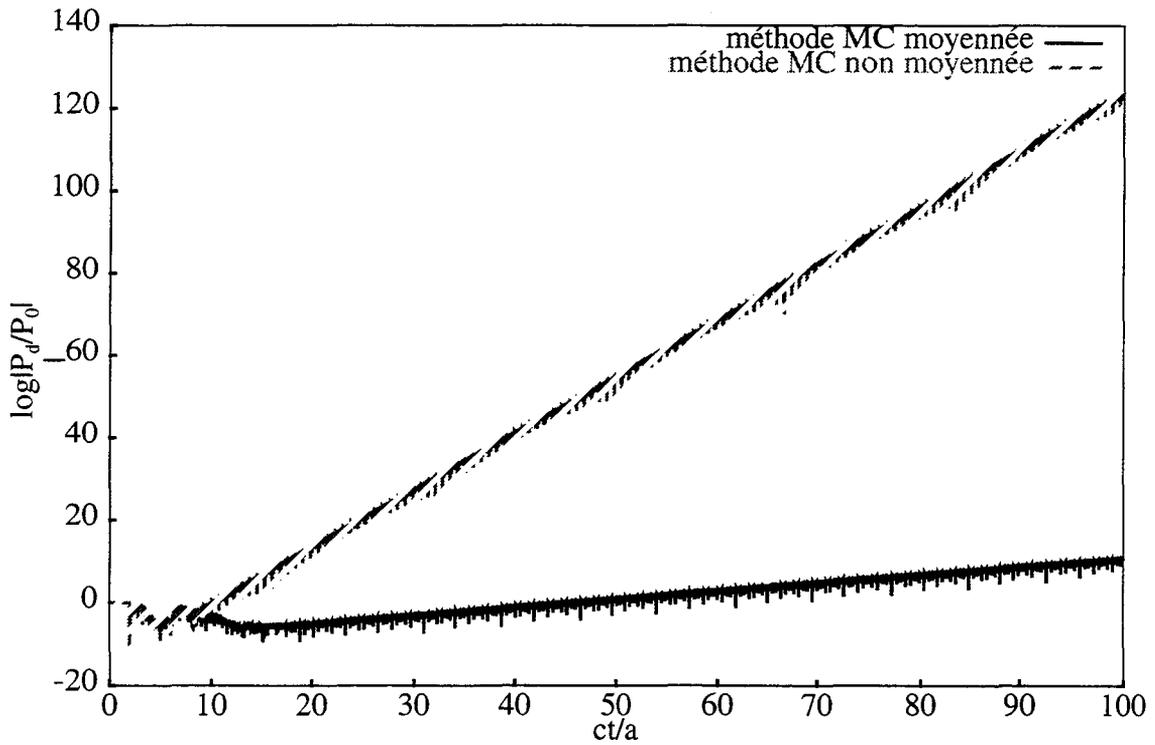


figure 3.44 : tracé du logarithme népérien des valeurs absolues des pressions
 présentées à la figure 3.43

II.2.3. Analyse des résultats pour la méthode d'interpolation quadratique

Concernant l'approche implicite, les modèles correspondent à des valeurs de CFL supérieures à 1. En général, les résultats numériques sont convergents et stables et en très bonne concordance avec le calcul analytique. En effet, l'interpolation spatio-temporelle par la méthode des éléments finis garantit une meilleure évaluation des intégrales, ce qui permet aux pôles associés aux fréquences irrégulières de rester très proches de l'axe réel du plan complexe des fréquences.

Cependant, certaines valeurs particulières de Δt peuvent produire des oscillations. La figure 3.45 montre le logarithme népérien de l'amplitude des pressions au point éclairé P_1 d'une sphère discrétisée en 31 éléments, pour deux pas de temps différents $c\Delta t_1/a = 0.198$ et $\Delta t_2/a = 0.119$ ($ka = 3.5$). Pour Δt_1 , les résultats sont stables et convergents, alors que pour Δt_2 , les résultats sont instables. Si on fait varier la fréquence du signal incident (ka varie), pour une même valeur de $c\Delta t_1/a = 0.119$, les résultats sont stables pour $ka = 7.2$, instables pour $ka = 4.3$ (Figure 3.46). De même, pour une configuration donnée : ka , Δt fixes ($ka = 3.5$, $c\Delta t/a = 0.198$), si on fait varier le maillage, on constate que les résultats sont stables pour $\Delta\theta = 0.104$, et instables pour $\Delta\theta = 0.08$ (Figure 3.47). On en conclut que ka et le maillage sont aussi des facteurs limitatifs du modèle développé. Il est donc important de définir une méthode permettant de sélectionner pour une configuration donnée les paramètres Δt et $\Delta\theta$ garantissant la précision et la stabilité des résultats.

Les courbes 3.48 et 3.50 présentent l'évolution de $1/T$ en fonction de $1/f\Delta t$, $c\Delta t/a$ et de $a\Delta\theta/c\Delta t$.

On peut résumer les résultats obtenus en 2 observations :

i - Pour une configuration donnée (ka fixé), la stabilité dépend du nombre N de pas de temps par période de l'onde incidente. Pour $\Delta\theta = 0.104$, la stabilité est obtenue dans les cas suivants (figure 3.48) :

- $c\Delta t/a = 0.238$	$3 \leq ka \leq 5.5$	$4.75 \leq N \leq 8.75$
- $c\Delta t/a = 0.148$	$4.2 \leq ka \leq 7.5$	$5.6 \leq N \leq 10.1$
- $c\Delta t/a = 0.119$	$4.5 \leq ka \leq 9$	$6.6 \leq N \leq 11.75$

Pour $\Delta\theta = 0.078$, la stabilité est obtenue dans les cas suivants (figure 3.49) :

- $c\Delta t/a = 0.238$	$3.1 \leq ka \leq 5.27$	$5 \leq N \leq 8.5$
- $c\Delta t/a = 0.148$	$4.21 \leq ka \leq 6.48$	$6.5 \leq N \leq 10$
- $c\Delta t/a = 0.119$	$5.54 \leq ka \leq 9.58$	$6 \leq N \leq 9.5$
- $c\Delta t/a = 0.104$	$6.68 \leq ka \leq 12$	$6 \leq N \leq 9$

La condition retenue est $7 \leq N \leq 9$. On remarque que la condition $N \approx 8$ est la transposition du critère en $\lambda/4$ dans le domaine spatial.

ii- Pour différents cas où la condition du paragraphe précédent est vérifiée, la figure 3.50 présente l'effet de la densité de maillage sur la stabilité. Les meilleurs résultats sont obtenus pour :

$$0.5 \leq \frac{a\Delta\theta}{c\Delta t} \leq 0.9$$

Les deux conditions obtenues conduisent à l'inégalité :

$$9.6 \leq \frac{\lambda}{a\Delta\theta} \leq 16$$

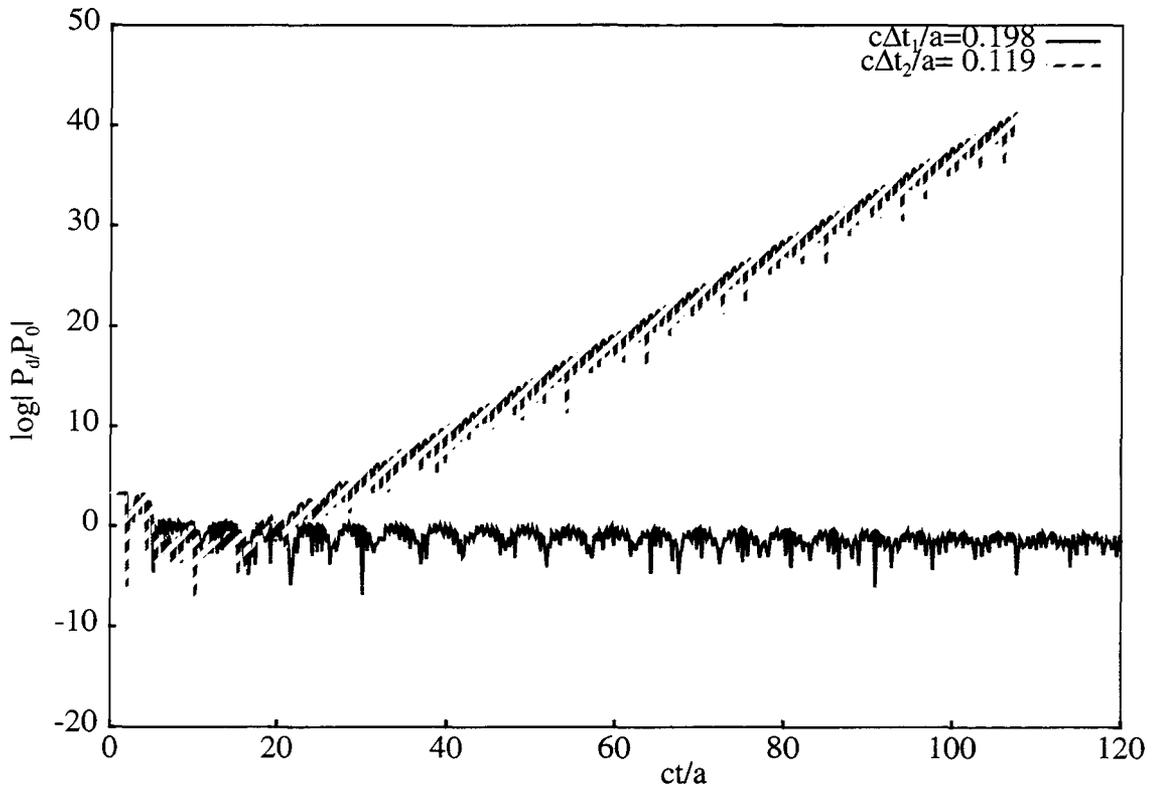


figure 3.45 : logarithme népérien de l'amplitude de la pression au point P_1
 $c\Delta t_1/a=0.198$, $c\Delta t_2/a= 0.119$, $ka = 3.5$

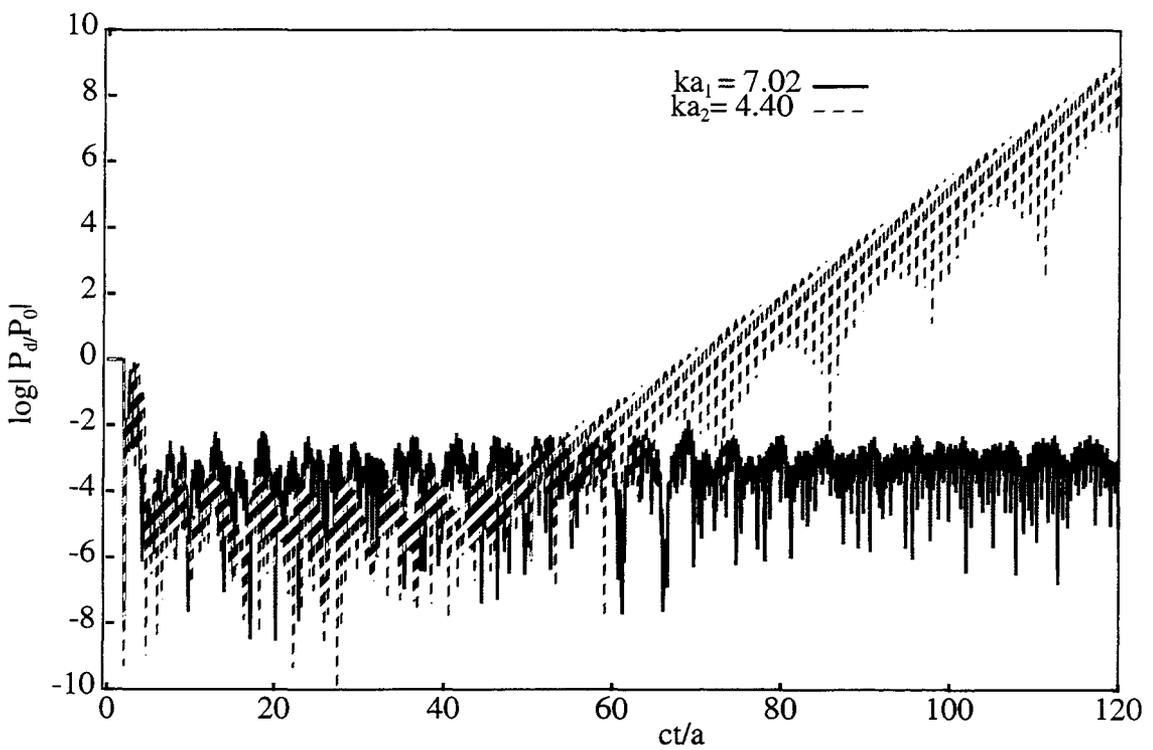


figure 3.46 : logarithme népérien de l'amplitude de la pression au point P_1
 $ka_1=7.02$, $ka_2 = 4.40$: $c\Delta t/a= 0.119$

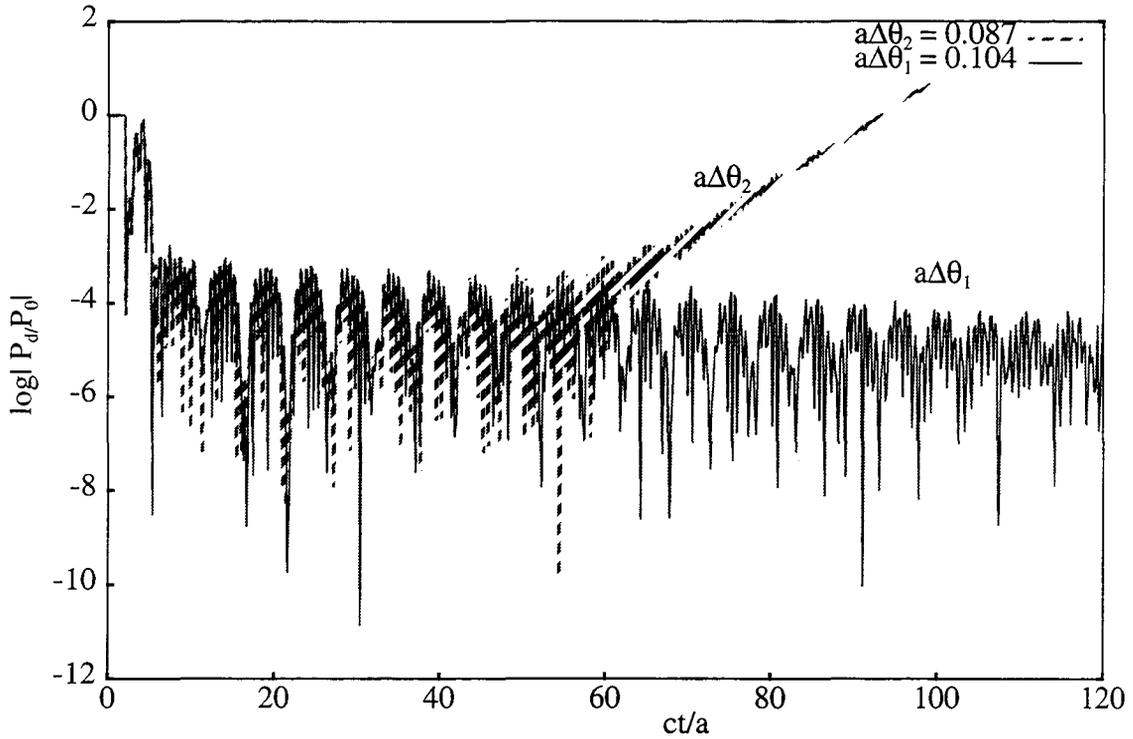


figure 3.47 : logarithme népérien de l'amplitude de la pression au point P_1 pour différents maillage $a\Delta\theta_1 = 0.104$, $a\Delta\theta_2 = 0.087$: $ka = 3.5$, $c\Delta t/a = 0.198$

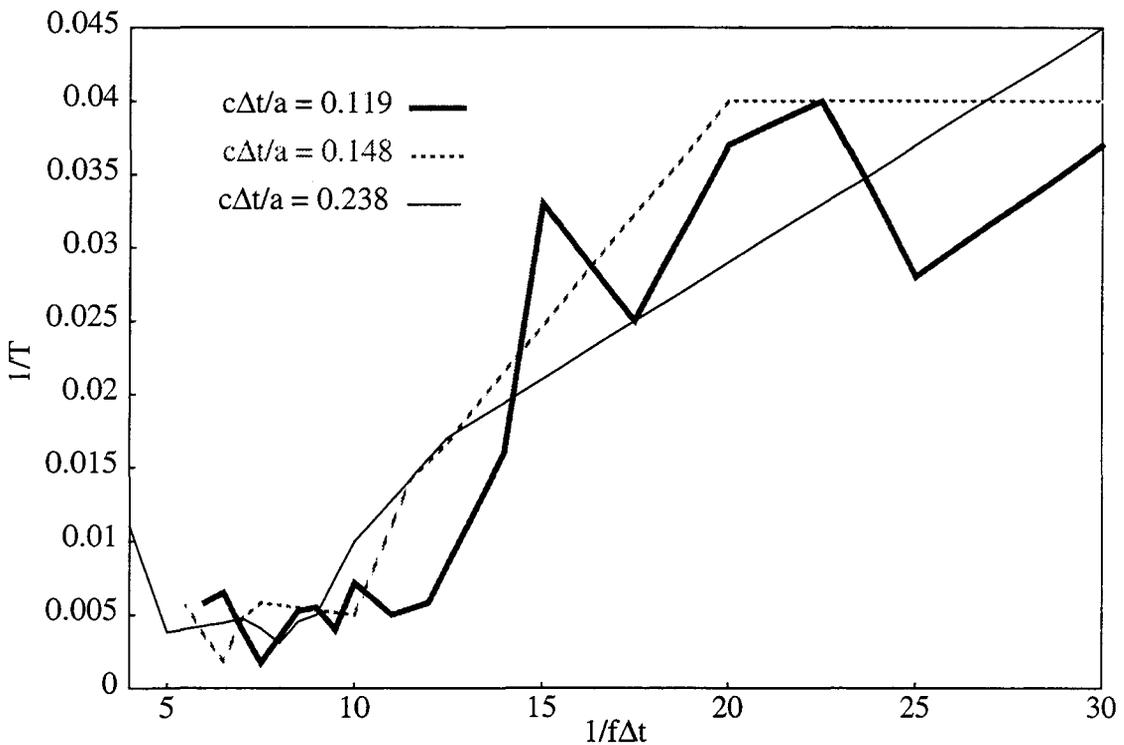


figure 3.48 : critère de stabilité en fonction du $1/f\Delta t$ dans le cas d'un signal cosinusoidal pour différents pas du temps ($\Delta\theta = 0.104$)

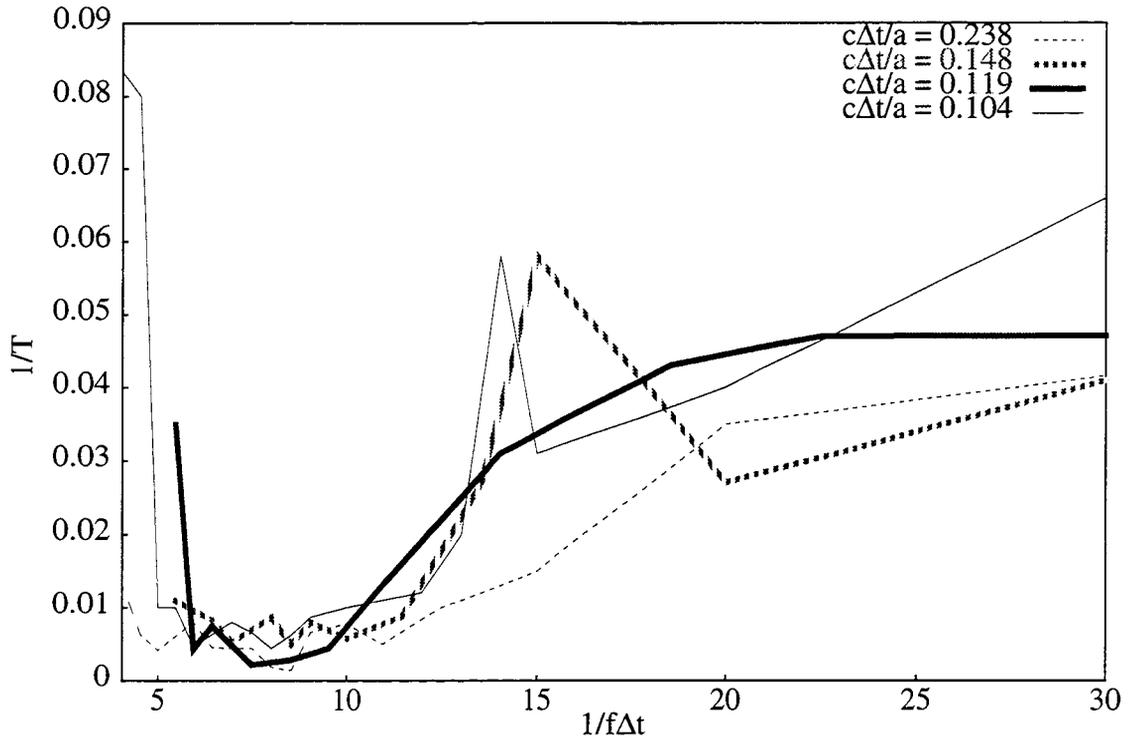


figure 3.49 : critère de stabilité en fonction du $1/f\Delta t$ dans le cas d'un signal cosinusoidal pour différents pas du temps ($\Delta\theta = 0.078$)

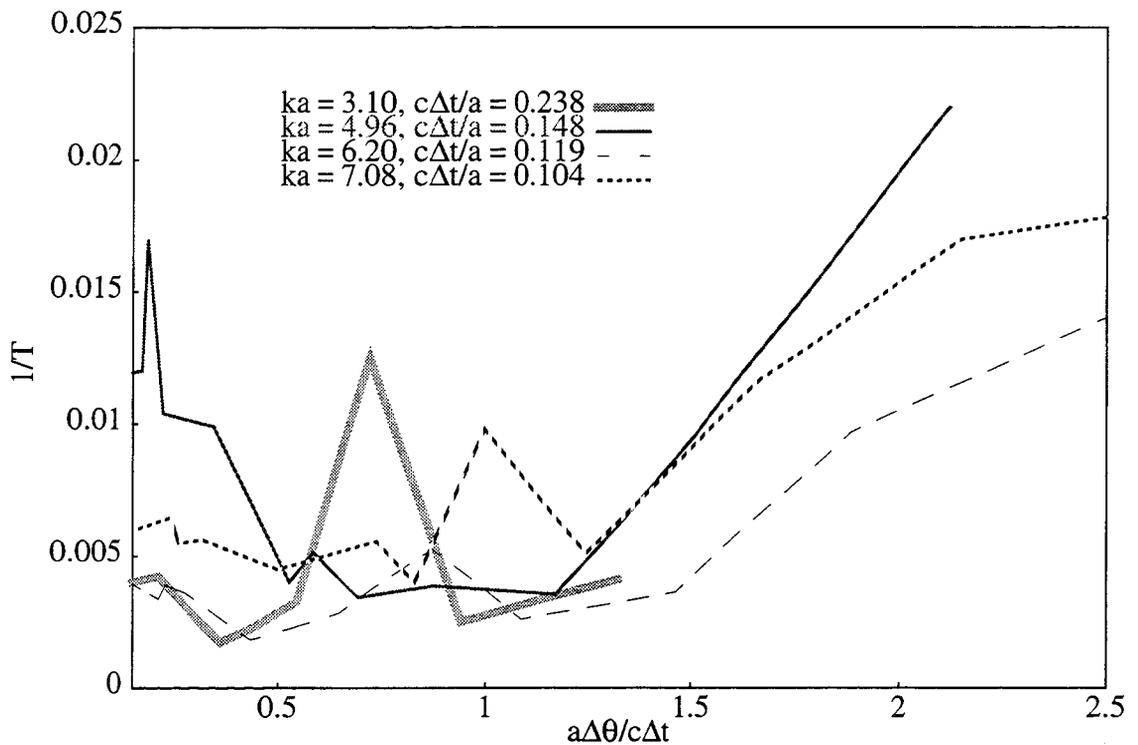


figure 3.50 : critère de stabilité en fonction de $a\Delta\theta/c\Delta t$ pour différents ka

III. EXEMPLE D'APPLICATION : DIFFRACTION D'UNE ONDE PLANE PAR UNE STRUCTURE LINE RIGIDE

Les résultats présentés dans ce paragraphe ont été obtenus avec la méthode de discrétisation temporelle de l'équation intégrale de Kirchhoff par éléments finis (méthode implicite).

III.1. Description du problème

La structure LINE est constituée d'un cylindre fermé à chaque extrémité par une demi-sphère (figure 3.51). La géométrie retenue pour cette étude est telle que le rapport $L/2a$ soit égal à 2 (L est longueur totale de la structure, a est le rayon). Le maillage comporte 131 noeuds, soit 65 éléments. La fréquence centrale du signal incidente est $f = 2222.22$ Hz, soit $ka = 9.37$. Les points de calculs sont représentés sur la figure 3.51 : les points P_1 (point amont ou éclairé) et P_2 (point aval ou caché) situés sur la surface de la LINE, les points P_3 et P_4 situés dans le fluide sur l'axe de révolution ayant comme coordonnées respectives $z = -10a$ et $z = 10a$ et le point P_5 situé dans le fluide ayant comme coordonnées polaires $R = 10a$ et $\theta = 11\pi/10$. Le front d'onde incident à $t = 0$ correspond au plan $z = -4a$ dont les points sont dénotés P'_0 .

III.2. Analyse des résultats

Les résultats analysés concernent la diffraction par une structure LINE insonifiée par un signal cosinusoidal. Les paramètres de calcul sont :

$$c\Delta t/a = 0.044 \qquad ka = 9.37 \qquad CFL = 1.13$$

Les figures 3.52 à 3.57 représentent l'évolution de la pression totale normée à P_0 au cours du temps pour les cinq points de calcul. Sur chaque figure, sont indiqués les trajets et les temps de parcours théoriques. Les trajets effectués sous forme d'onde rampante sont soulignés. De manière générale, on notera P'_r et P''_r les origines de rayonnement de l'onde rampante. Dans ces évaluations, on suppose à nouveau que l'onde rampante est non dispersive et se propage à la vitesse de l'onde de volume dans le fluide.

Point P_1 (figure 3.52) : l'onde géométrique de trajet P'_0P_1 est suivie par les ondes rampantes engendrées par la diffraction de l'onde incidente aux points P'_1 et P''_1 de trajets $P'_0P'_1P_1$ et $P'_0P''_1P_1$. Sont également repérées les ondes de volume engendrées aux points P'_2 et P''_2 dont les trajets sont $P'_0P'_2P'_1P_1$ et $P'_0P''_2P''_1P_1$. La réflexion des ondes rampantes précédentes en P'_1 et P''_1 ($P'_0P'_1P''_1P_1$ et $P'_0P''_1P'_1P_1$) est peu visible. Les trajet $P'_0P'_2P''_2P''_1P_1$ et $P'_0P''_2P'_2P'_1P_1$ cor-

respondant à un tour au retour de la LINE (sous formes successives d'ondes de volume et de d'ondes rampantes) sont également indiqués. On remarque la présence d'un signal suivant immédiatement l'onde géométrique et dont la signification physique n'a pas été identifiée.

Point P2 (figure 3.53) : on observe les ondes rampantes engendrées aux points $P'2$ et $P''2$ par l'onde incidente de trajets $P'0P'2P2$ et $P'0P''2P2$. Le temps d'arrivé associée à la réflexion de ces ondes rampantes en $P'2$ et $P''2$ et à leur retour en $P2$ sont également indiqués (trajets $P'0P'2P''2P2$ et $P'0P''2P'2P2$). Le signal suivant immédiatement le trajet $P'0P'2P2$ peut être dû au caractère dispersif de l'onde rampante.

Point P3 (figure 3.54) : après l'écho spéculaire $P'0P1P3$, apparaissent les ondes converties en ondes rampantes en points $P'1$ et $P''1$ puis rayonnées suivant la tangente à la demi-sphère (points $P'r$ et $P''r$). D'autres trajets incluant plusieurs conversions d'ondes sont également indiqués.

Point P4 (figure 3.55) : dans la zone cachée, on ne remarque que l'énergie transportée par les ondes rampantes engendrées aux points $P'2$ et $P''2$ et rayonnées aux points $P'r$ et $P''r$.

Point P5 (figures 3.56 et 3.57) : après l'onde incidente, deux ondes de volumes sont engendrées aux points $P'1$ et $P'2$. L'énergie transportée par l'onde géométrique jusqu'au point $P''2$ puis par l'onde rampante jusqu'au point $P''r$ (où la droite ($P5P''r$) est la tangente à la demi-sphère au point $P''r$) atteint le point $P5$ à l'instant T : $cT/a = 16.07$.

Pour les premiers résultats sur une géométrie non canonique, l'origine physique de la plupart des signaux calculés a pu être justifiée en termes d'ondes de volume, d'ondes rampante, de conversion d'ondes aux discontinuités de courbe et de rayonnement de l'onde rampante.

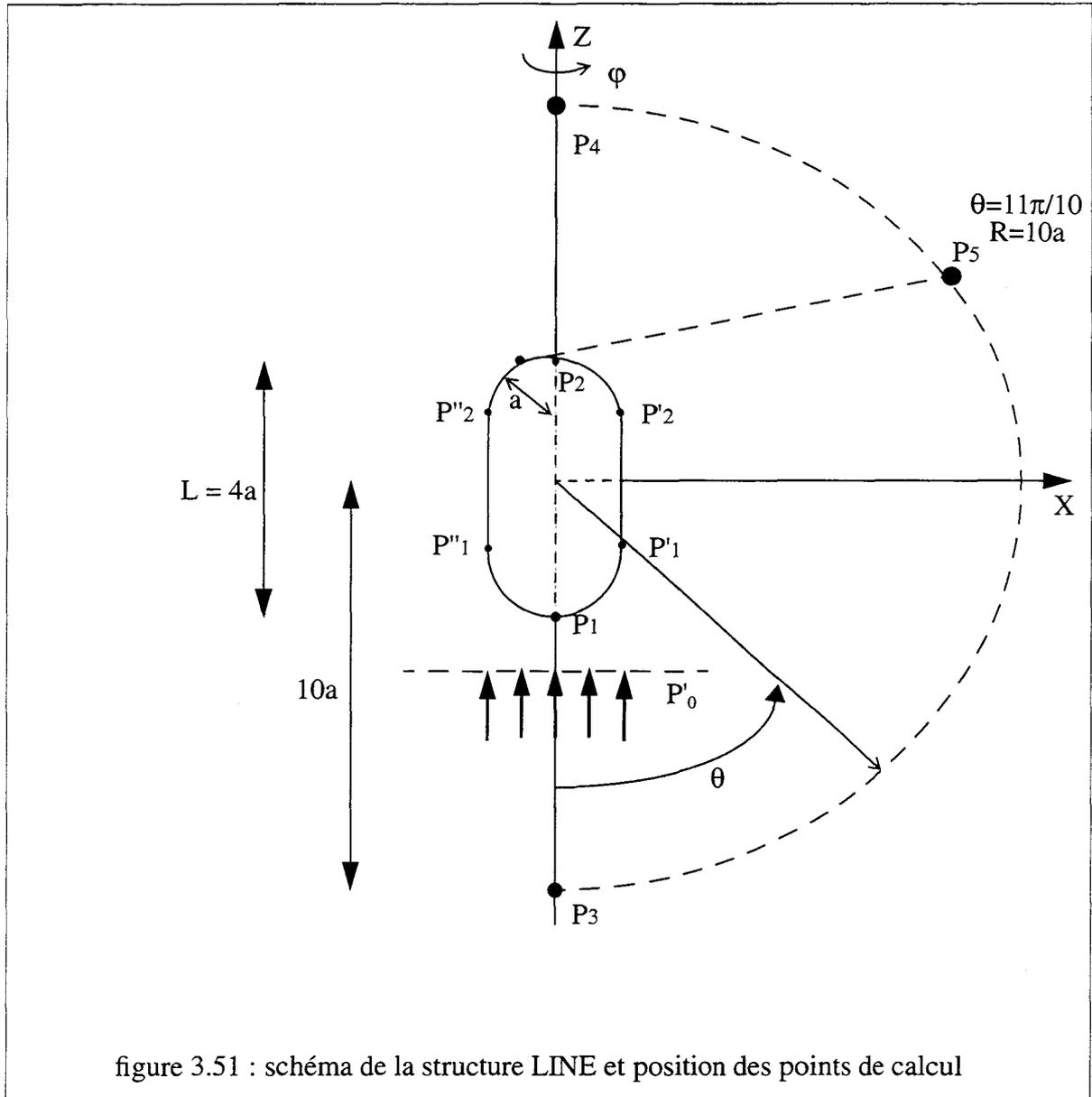


figure 3.51 : schéma de la structure LINE et position des points de calcul

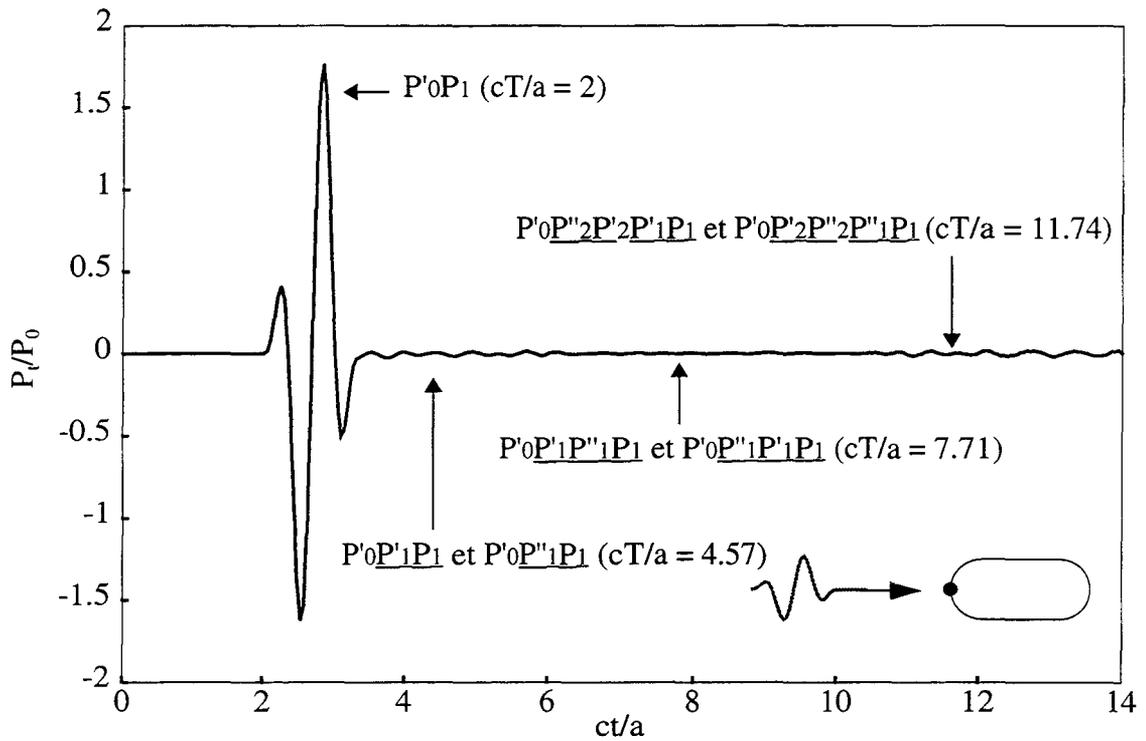


figure 3.52 : pression totale au point P_1 dans le cas d'un signal cosinusoidal
 $c\Delta t/a = 0.044$, $ka = 9.37$, $CFL = 1.13$

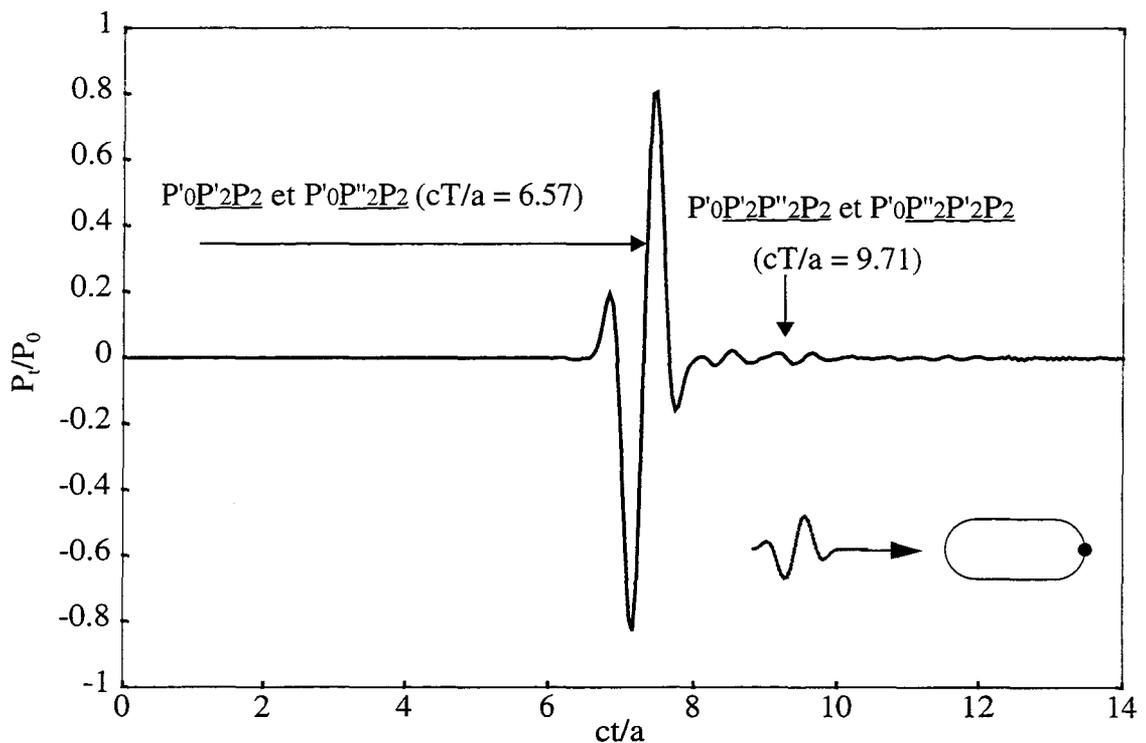


figure 3.53 : pression totale au point P_2 dans le cas d'un signal cosinusoidal
 $c\Delta t/a = 0.044$, $ka = 9.37$, $CFL = 1.13$

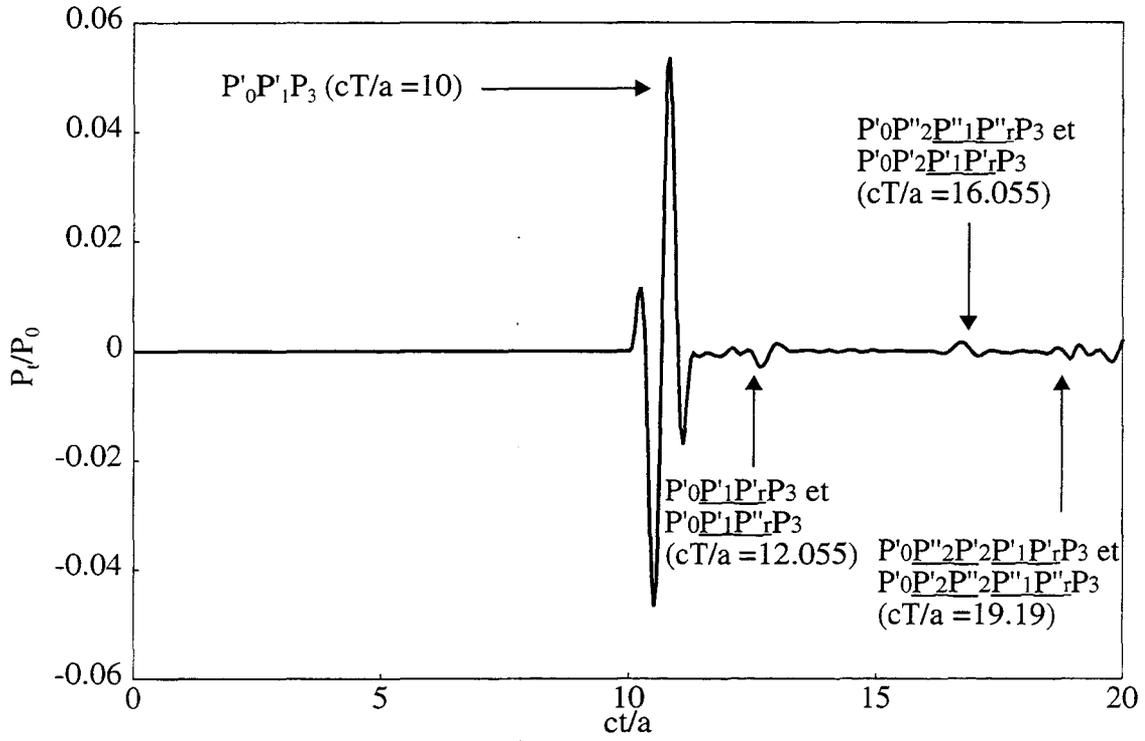


figure 3.54 : pression totale au point P₃ dans le cas d'un signal cosinusoidal
 $c\Delta t/a = 0.044$, $ka = 9.37$, $CFL = 1.13$

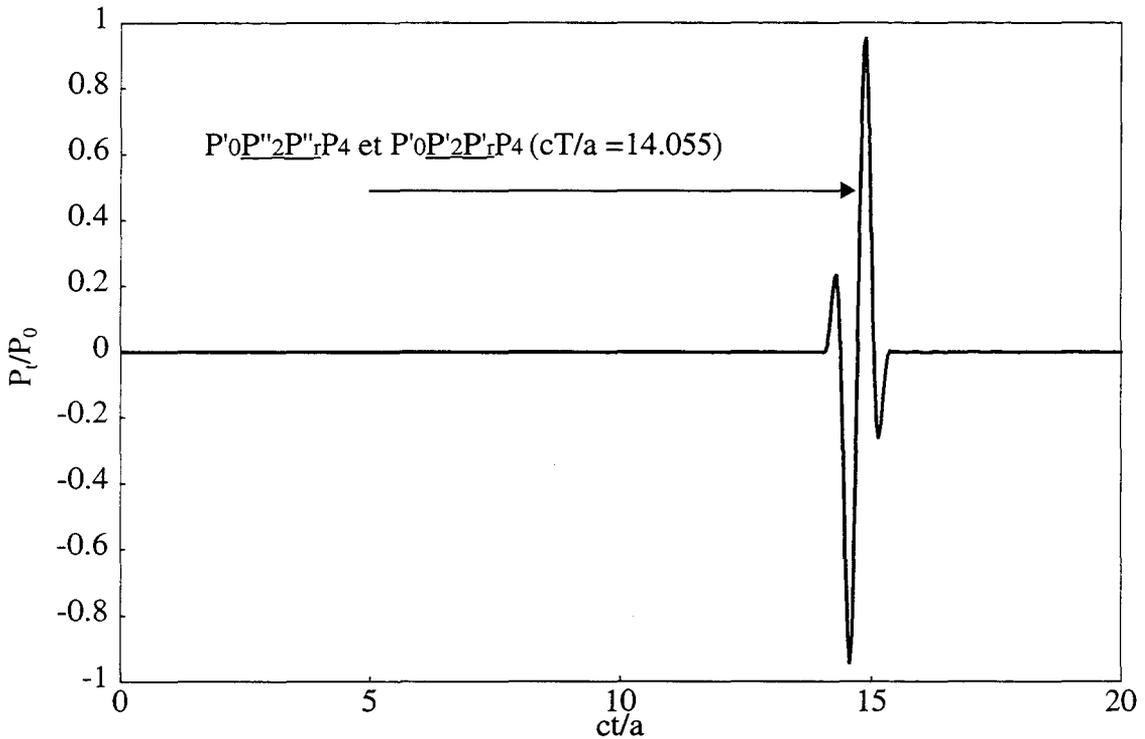


figure 3.55 : pression totale au point P₄ dans le cas d'un signal cosinusoidal
 $c\Delta t/a = 0.044$, $ka = 9.37$, $CFL = 1.13$

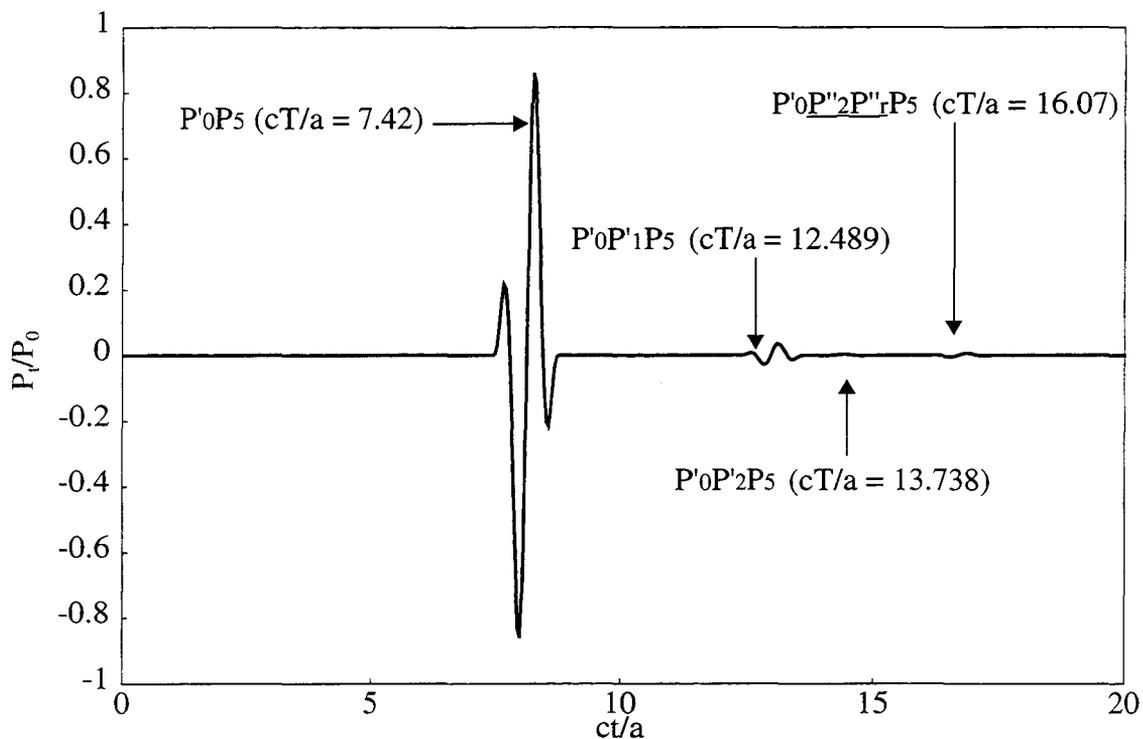


figure 3.56 : pression totale au point P₅ dans le cas d'un signal cosinusoidal
 $c\Delta t/a = 0.044$, $ka = 9.37$, $CFL = 1.13$

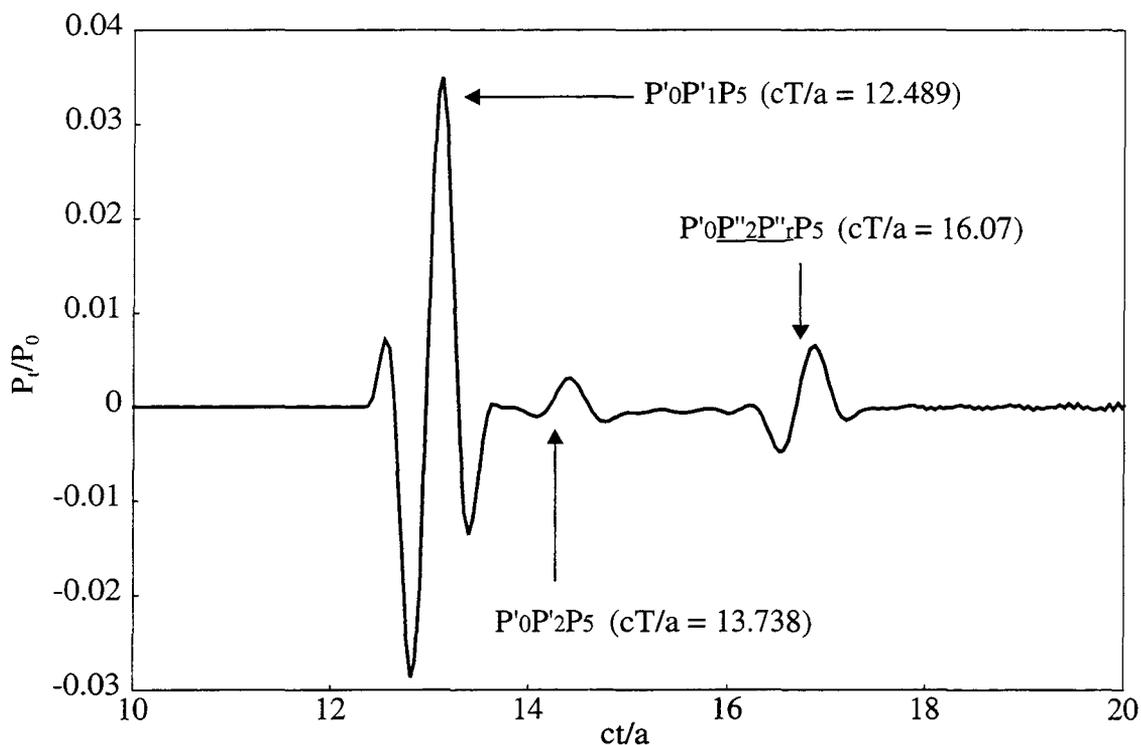


figure 3.57 : pression totale présentée à la figure 3.57 pour $ct/a > 10$
 $c\Delta t/a = 0.044$, $ka = 9.37$, $CFL = 1.13$

III. CONCLUSION

Les applications présentées dans ce chapitre valident les développements effectués dans le cas de la diffraction rigide. Les résultats sont présentés pour deux approches : une méthode d'interpolation spatiale par éléments finis et temporelle par différences finies (méthode "explicite"), une méthode d'interpolation spatio-temporelle par éléments finis (méthode "implicite").

La qualité des résultats obtenus est directement liée à la précision dans l'évaluation des intégrales associées à la formulation. Une évaluation imprécise des intégrales entraîne :

i) l'existence d'ondes non physiques traversant l'objet diffractant ;

ii) l'apparition d'oscillations de la solution, associées aux fréquences irrégulières, croissant exponentiellement dans le temps.

Les méthodes d'interpolation temporelles par différences finies sont affectées par ces deux phénomènes parasites. Quelque soit la méthode (ML, MSL1, MSL2 ou MC) considérée, il existe une valeur de discrétisation temporelle minimale Δt_{\min} en dessous de laquelle la méthode est toujours instable.

Les résultats de la méthode implicite sont généralement stables, et en très bonne concordance avec le calcul analytique. Pour une configuration donnée, la stabilité des résultats dépend des densités de maillage temporelle et spatiale. De bons résultats ont été obtenus pour :

$$\Delta t \approx \frac{1}{8f} \quad 9.6 \leq \frac{\lambda}{a\Delta\theta} \leq 16$$

où f et λ désignent respectivement la fréquence et la longueur d'onde centrale du signal incident.

Chapitre 4

Description de la diffusion acoustique par une cible élastique dans le domaine temporel à l'aide d'une méthode couplée éléments finis-équations intégrales

Résumé. Ce chapitre s'intéresse à la diffusion acoustique dans le domaine temporel par des cibles élastiques immergées. Le modèle numérique repose sur le couplage entre la méthode des équations intégrales pour décrire le fluide et la méthode des éléments finis pour décrire la structure. Le couplage est obtenu en imposant au système discrétisé les conditions de continuité cinématique et dynamique sur la surface mouillée.

Les développements relatifs à la méthode des éléments finis, déjà présentés et validés par ailleurs, sont rappelés. Le principe du modèle couplé éléments finis-équations intégrales est décrit. Historiquement, ce couplage a été effectué avant le développement de la discrétisation temporelle de l'équation intégrale de Kirchhoff par éléments finis présenté au chapitre précédent. Les résultats présentés dans ce chapitre ont donc été obtenus avec une discrétisation temporelle de l'équation intégrale de Kirchhoff par différences finies (méthode ML).

La validation est effectuée par comparaison à des résultats analytiques sur une coque mince sphérique. Les problèmes d'instabilité dans le cas du modèle couplé sont également discutés.

I. INTRODUCTION

La diffusion d'une onde incidente par des cibles élastiques immergées de forme géométrique complexe est un problème très actuel dans le domaine de la discrétion ou de la détection acoustique. Étant donné la complexité du problème, un modèle numérique couplant la méthode des équations intégrales et la méthode des éléments finis est bien adapté dans le domaine des basses et moyennes fréquences. Il a été appliqué à l'étude de la diffusion des structures LINE soumises à une onde incidente plane de direction axiale, normale ou oblique dans le régime harmonique [8, 42-45]. Ce chapitre aborde l'extension de la formulation décrite précédemment au cas des cibles élastiques.

La propagation des ondes dans le fluide est simulée par la représentation intégrale de Kirchhoff décrite dans les chapitres précédents. Le comportement élastique du diffuseur est modélisé par la méthode des éléments finis (méthode explicite ML). La résolution du problème fluide-structure est alors obtenue par couplage entre ces deux méthodes.

II. FORMULATION THEORIQUE DU COUPLAGE ELEMENTS FINIS-EQUATIONS INTEGRALES

II.1. Formulation du problème élastique

La méthode des éléments finis est une technique éprouvée pour décrire le comportement dynamique des structures de géométrie complexe [5-6]. Les développements relatifs à l'élasticité dynamique dans le domaine temporel sont repris des références [90, 108]. Ces développements sont issus du code ATILA [10] développé au laboratoire d'acoustique de l'ISEN, pour permettre la modélisation de transducteurs rayonnant dans un fluide. Le code ATILA peut être utilisé pour effectuer l'analyse statique, modale et harmonique de structures élastiques, piézoélectriques ou magnétostrictives immergées ou non. Il peut décrire des géométries à symétrie axiale, bidimensionnelles ou tridimensionnelles. Son aptitude à décrire le comportement de différents transducteurs et la précision des résultats obtenus ont été vérifiées grâce à la modélisation de nombreuses structures différentes et à la comparaison entre résultats numériques et expérimentaux [80-84].

La bibliothèque d'ATILA possède en majorité des éléments isoparamétriques à interpolation quadratique qui permettent une description simple des surfaces de courbes.

II.1.1 Equations du problème

Soit un corps élastique Ω_f limité par une frontière Γ orientée vers l'extérieur. Les équations à résoudre sont :

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} \quad (4.1)$$

et la relation fondamentale de la dynamique dans Ω_f :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.2)$$

où T_{ij} , S_{kl} , c_{ijkl} et ρ désignent respectivement les termes des tenseurs des contraintes [T], du tenseur des déformations [S], du tenseur des rigidités élastiques et la masse volumique.

A ces équations peuvent être associées des conditions aux limites de type déplacement imposé sur la surface (type Dirichlet) :

$$u_i = u_i^0 \quad (4.3)$$

ou de type densité surfacique de force f_0 imposée sur la surface (type Neumann) :

$$T_{ij} n_j = f_i^0 \quad (4.4)$$

On suppose que le solide n'est soumis à aucune force volumique à distance.

Les équations (4.1) et (4.2) peuvent être combinées pour exprimer l'équation du mouvement en fonction des composantes du déplacement $\{u\}$:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial S_{kl}}{\partial x_j} = c_{ijkl} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k} \right) \quad (4.5)$$

L'application de la méthode des résidus pondérés [5] à l'équation (4.5) conduit à la formulation suivante :

$$- \iiint_{\Omega_f} \left[T_{ij} \delta S_{ij} + \rho \delta u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right] d\Omega_f + \iint_{\Gamma} \delta u_i n_j T_{ij} d\Gamma = 0 \quad (4.6)$$

où $\underline{\delta u}$ est un déplacement élémentaire généralisé.

II.1.2. Discrétisation spatiale

La discrétisation effectuée repose sur une hypothèse de séparation des variables spatiale et temporelle. Sur un élément de surface Γ_j , le vecteur déplacement $\{u\}$ en un point situé à l'intérieur de cet élément est relié aux valeurs nodales du déplacement à l'aide de fonctions d'interpolation [5] :

$$\{u\} = [N_j]\{U\}_j \quad (4.7)$$

où $[N_j]$ est la matrice des fonctions d'interpolation des déplacements. Le tenseur condensé des déformations $\{S\}$ est donné par :

$$\{S\} = [B_j]\{U\}_j \quad (4.8)$$

où $[B_j]$ est la matrice des dérivées des fonctions d'interpolation.

Le vecteur accélération en un point de l'élément Γ_j peut s'écrire :

$$\{\ddot{u}\} = [N_j]\{\ddot{U}\}_j \quad (4.9)$$

où $\{\ddot{U}\}_j$ est le vecteur des valeurs nodales de l'accélération.

Le report des équations (4.7) à (4.9) dans (4.6) et l'assemblage permettent d'obtenir à l'instant t un système linéaire du second ordre :

$$[M]\{U''(t)\} + [K]\{U(t)\} = \{F(t)\} \quad (4.10)$$

où $\{U''(t)\}$ et $\{U(t)\}$ sont les vecteurs des accélérations et déplacements nodaux et $\{F(t)\}$ est le vecteur des forces nodales extérieures appliquées à la structure. Ces vecteurs dépendent du temps. Les matrices $[M]$ et $[K]$ sont les classiques matrices de masse et de rigidité que l'on rencontre également en analyse harmonique par éléments finis. On remarque que cette équation ne fait pas intervenir de temps retardé τ .

II.1.3. Discrétisation temporelle

L'équation différentielle à résoudre étant de degré 2, les fonctions d'interpolation temporelles utilisées pour le déplacement doivent être au moins du second ordre (paraboliques) pour que l'accélération soit définie. On écrit donc pour $(n - 1)\Delta t \leq t \leq n\Delta t$:

$$\{U(t)\} = \frac{\xi(1+\xi)}{2}\{U|_{t_n}\} + (1-\xi)(1+\xi)\{U|_{t_{n-1}}\} - \frac{\xi(1-\xi)}{2}\{U|_{t_{n-2}}\} \quad (4.11)$$

ou encore :

$$\{U(t)\} = N_n\{U|_{t_n}\} + N_{n-1}\{U|_{t_{n-1}}\} + N_{n-2}\{U|_{t_{n-2}}\} \quad (4.12)$$

avec :

$$\xi = \frac{t}{\Delta t} \quad (4.13)$$

Dans l'équation (4.12), les vecteurs $\{U|_{t_{n-1}}\}$ et $\{U|_{t_{n-2}}\}$ sont supposés connus. Cette supposition correspond à la nécessité de connaître deux conditions initiales pour pouvoir résoudre une équation du second degré. L'interpolation choisie implique pour l'accélération :

$$\{U''(t)\} = \frac{1}{\Delta t^2}\{U|_{t_n}\} - \frac{2}{\Delta t^2}\{U|_{t_{n-1}}\} + \frac{1}{\Delta t^2}\{U|_{t_{n-2}}\} \quad (4.14)$$

La méthode des résidus pondérés est alors appliquée en limitant l'intégrale à l'élément temporel considéré (absence de temps retardé) :

$$\int_{-1}^1 W([M](N''_n\{U|_{t_n}\} + N''_{n-1}\{U|_{t_{n-1}}\} + N''_{n-2}\{U|_{t_{n-2}}\}) + [K](N_n\{U|_{t_n}\} + N_{n-1}\{U|_{t_{n-1}}\} + N_{n-2}\{U|_{t_{n-2}}\}) + \{F(t)\})d\xi = 0 \quad (4.15)$$

où W représente les fonctions de pondération. Les différentes fonctions de pondération habituellement employées sont représentées dans la figure 4.1. On pose :

$$\gamma = \int_{-1}^1 W\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)d\xi / \int_{-1}^1 Wd\xi \quad (4.16)$$

$$\beta = \int_{-1}^1 W\frac{\xi}{2}(1 + \xi)d\xi / \int_{-1}^1 Wd\xi \quad (4.17)$$

$$\{\bar{F}\} = \int_{-1}^1 W\{F\}d\xi / \int_{-1}^1 Wd\xi \quad (4.18)$$

Les valeurs de γ et β correspondant aux pondérations usuelles sont également indiquées sur la figure 4.1. Si l'interpolation temporelle utilisée pour $\{U\}$ est également utilisée pour $\{F\}$, on obtient :

$$\{\bar{F}\} = \beta\{F|_{t_n}\} + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma\right)\{F|_{t_{n-1}}\} + \left(\frac{1}{2} + \beta - \gamma\right)\{F|_{t_{n-2}}\} \quad (4.19)$$

Le système d'équations à résoudre s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} ([M] + \beta\Delta t^2[K])\{U|_{t_n}\} &= \left(2[M] - \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma\right)\Delta t^2[K]\right)\{U|_{t_{n-1}}\} \\ &- \left([M] + \left(\frac{1}{2} + \beta - \gamma\right)\Delta t^2[K]\right)\{U|_{t_{n-2}}\} + \{\bar{F}\} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Cette équation correspond à l'algorithme classique de Newmark. Pour assurer la stabilité numérique de l'algorithme, il suffit de vérifier les inégalités suivantes :

$$4\beta \geq \left(\frac{1}{2} + \gamma\right)^2 \quad (4.21)$$

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{2} + \gamma + \beta \geq 0 \quad (4.23)$$

Lorsque $\gamma > 1/2$, la méthode introduit un amortissement parasite. Dans le cadre de ce travail, le couple $(\gamma, \beta) = (1/2, 1/4)$, généralement appelé "accélération moyenne" est utilisé.

II.2. Couplage fluide-structure

II.2.1. Couplage éléments finis-équations intégrales

Le couplage entre les méthodes des équations intégrales et des éléments finis nécessite l'emploi des conditions de continuité imposées au système d'équations discrétisées :

- continuité dynamique :

$$\{F|_{t_n}\} = -[L]\{p|_{t_n}\} \quad (4.24)$$

où $[L]$ est la matrice de connectivité. Le signe négatif provient de l'orientation de la normale qui est orientée positivement vers le fluide dans EQI et vers l'intérieur dans ATILA.

- continuité cinématique :

$$\left\{ \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{t_n} \right\} = -\rho \left\{ \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \Big|_{t_n} \right\} \quad (4.25)$$

où ρ est la masse volumique du fluide et $\left\{ \partial^2 u_n / \partial t^2 \Big|_{t_n} \right\}$ le vecteur des accélérations normales

à l'instant t_n (dérivée seconde par rapport au temps du déplacement normal à l'instant t_n).

Le problème de la duplicité des normales dû à la discrétisation par des éléments isoparamétriques à variation quadratique a déjà été résolu dans une étude antérieure [42]. Il s'agit de projeter les normales aux noeuds de la surface sur chaque composante du repère cartésien. La dernière relation peut alors être remplacée par :

$$\left\{ \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{t_n} \right\} = \rho [n] \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{t_n} \right\} \quad (4.26)$$

où $[n]$ est la matrice de projection et $\left\{ \partial^2 u / \partial t^2 \Big|_{t_n} \right\}$ le vecteur des accélérations à l'instant t_n .

L'équation matricielle obtenue par la méthode des équations intégrales s'écrit (équation 2.50) :

$$[H] \{P|_{t_n}\} = [G] \left\{ \frac{\partial P}{\partial n'} \Big|_{t_n} \right\} - \{Q|_{t_n}\} \quad (4.27)$$

Le principe du couplage consiste à coupler les expressions matricielles (4.27) et (4.10) à l'aide des conditions (4.24) et (4.26) pour éliminer $\{p|_{t_n}\}$. Pour ce faire, le vecteur des pressions nodales est extrait de l'équation (4.27) après la prise en compte de l'équation (4.26) :

$$\{p|_{t_n}\} = \rho [H]^{-1} [G] [n] \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{t_n} \right\} - [H]^{-1} \{Q|_{t_n}\} \quad (4.28)$$

On introduit cette dernière expression dans l'équation (4.24) qui est ensuite injectée dans

l'équation (4.10). Après inclusion de $\left\{ \partial^2 u / \partial t^2 \Big|_{t_n} \right\}$ dans $\{U''|_{t_n}\}$, il vient :

$$([M] + \rho [L][H]^{-1}[G][n]) \{U''|_{t_n}\} + [K] \{U|_{t_n}\} = [L][H]^{-1} \{Q|_{t_n}\} \quad (4.29)$$

La résolution est effectuée par la méthode de Newmark explicitée dans le paragraphe II.1.3.

Après résolution, l'équation (4.28) fournit la pression à partir de $\left\{ \partial^2 u / \partial t^2 \Big|_{t_n} \right\}$.

II.2.2. Algorithme de résolution

La résolution complète du problème fluide-structure se décompose en quatre étapes :

- Exécution du code EQI.
 1. Calcul des données nécessaire à l'assemblage.
 2. Calcul des pressions incidentes.
 3. Assemblage de $[H]^{-1}[G]$ et de $[H]^{-1}\{Q|_{t_n}\}$
- Exécution du code EQIATI assurant l'interface entre EQI et ATILA.
 1. Projection de $[H]^{-1}[G]$
 2. Calcul de $[H]^{-1}\left\{P^{inc}\Big|_{t_n}\right\}$
- Exécution du code ATILA
 1. Assemblage de (4.29).
 2. Résolution de (4.29) et obtention de $\{U|_{t_n}\}$ et $\{U''|_{t_n}\}$
- Exécution du code EQI.
 1. Calcul de la pression sur la surface
 2. Calcul des pressions dans le fluide.

III. VALIDATION

III.1. Présentation du problème de référence et du modèle analytique

Le test de validation choisi concerne l'étude de la diffraction d'une onde plane par une coque sphérique vide telle que $b/a = 0.97$ (Figure 4.2). Les caractéristiques du fluide extérieur (eau de mer à 10°C) sont :

$$c = 1490 \text{ m/s} \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Le matériau constituant la coque est en aluminium de module de Young E , de coefficient de Poisson ν et de masse volumique ρ_s tels que :

$$E = 7,14 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \quad \nu = 0,344 \quad \rho_s = 2780 \text{ kg/m}^3$$

Les conditions de continuité sur la surface sont :

$$r = b \quad T_{ij}(b, t) = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.30)$$

$$r = b \quad T_{ij}(a, t) = -p(a, t)n_i$$

$$n_i \frac{\partial p(a, t)}{\partial x_i} = -\rho n_i \frac{\partial^2 u_i(a, t)}{\partial t^2} \quad (4.31)$$

Les points servant à la validation de ce modèle sont le point amont P_1 , le point aval P_2 et le point P_3 situé sur l'axe de révolution à la coordonnée $z = -10a$.

La solution analytique est obtenue à l'aide de la méthode décrite dans le chapitre 3 (paragraphe I.1.2.). La fonction de transfert est donnée par [16] :

$$H(r, \omega) = - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^{n-1} P_n(\cos\theta) \sin\eta_n e^{-i\eta_n} h_n(kR) \quad (4.32)$$

en champ proche et par :

$$H(r, \omega) = \frac{e^{ika}}{ka} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\theta) \sin\eta_n e^{-i\eta_n} \quad (4.33)$$

pour le champ à l'infini ramené à la distance a . P_n est le polynôme de Legendre et η_n est donné par :

$$\tan\eta_n = - \frac{\frac{\rho}{\rho_s} j_n(ka) F_n - ka j'_n(ka)}{\frac{\rho}{\rho_s} n_n(ka) F_n - ka n'_n(ka)} \quad (4.34)$$

où j_n , n_n , j'_n et n'_n désignent respectivement les fonctions de Bessel et de Neumann sphériques de première espèce et les dérivées des fonctions de Bessel et de Neumann sphériques de première espèce. F_n est le rapport des déterminants des matrices liées aux conditions de continuité, ces matrices sont explicitées dans la référence [109].

III.2. Présentation des résultats

La modélisation numérique prend en compte la symétrie de révolution de la structure et du chargement, limitant ainsi le maillage à une génératrice. Le maillage de la structure est composé de 40 éléments coques à 3 noeuds et de 40 éléments interfaces à 3 noeuds pour un total de 41 noeuds et 119 degrés de liberté (Figure 4.3). Le maillage de l'interface fluide-struc-

ture est confondu avec celui de la structure. Cette discrétisation spatiale est suffisante pour garantir la précision des calculs jusqu'à $ka = 20$ suivant le critère en $\lambda/4$ [42]. Trois enveloppes temporelles sont considérées pour l'onde plane incidente : (i) une fonction sinusoïdale d'une période (figure 4.4) (ii) une fonction sinusoïdale quasi-harmonique (figure 4.-) (iii) une fonction cosinusoïdale d'une période. Les paramètres de calcul des configurations (i) et (ii) sont :

$$c\Delta t/a = 2.235 \quad f = 1/(20\Delta t)$$

et la fréquence réduite correspondante est $ka = 0.141$. Les paramètres de la configuration (iii) sont :

$$c\Delta t/a = 2.235 \quad f = 2/(30\Delta t)$$

et la fréquence réduite correspondante est $ka = 0.187$.

Les figures 4.5 à 4.15 présentent l'évolution temporelle des pressions incidente et diffusée pour les points P_1 , P_2 et P_3 .

Plusieurs résultats peuvent être soulignés :

- la méthode utilisée est instable pour des incréments temporels inférieurs à une valeur minimale Δt_{\min} (figure 4.13). La valeur de Δt_{\min} est environ 10 fois plus importante que dans le cas rigide. La méthode utilisée (Newmark $\beta = 1/2$, $\gamma = 1/4$) est inconditionnellement stable en éléments finis. Cette instabilité est donc introduite par l'équation intégrale discrétisée et amplifiée par le couplage fluide-structure. La diffusion d'une onde incidente de faible fréquence centrale par un objet élastique transfère une partie de l'énergie vers les fréquences plus élevées associées aux modes de résonances de la cible. L'énergie est donc plus facilement transférée aux fréquences irrégulières, ce qui entraîne un accroissement des instabilités numériques dans le domaine temporel.

- la limitation en fréquence de la réponse introduite par Δt_{\min} ne permet pas de décrire précisément les composantes hautes fréquences de la réponse dues aux ondes élastiques de surface (Figures 4.5 à 4.11). La pression diffusée est correctement prédite dans le cas de la cosinusoïde pour lequel le spectre de la réponse est plus limité en fréquence.

Le problème des instabilités de la formulation intégrale discrétisée apparaît donc encore plus critique dans le cas des cibles élastiques. La modélisation temporelle des ondes élastiques de surface pour une structure LINE dans la gamme de fréquence usuelle nécessite l'emploi d'incrément temporels inférieurs d'au moins deux ordres de grandeur à la limite actuelle.

VI. CONCLUSION

Un outil numérique dédié à la modélisation de la diffusion acoustique dans le régime transitoire a été développé et validé. Il est basé sur l'interfaçage des codes ATILA et EQI. Les ondes parasites dans la zone cachée constatées dans le cas rigide n'ont pas été observées. Certaines ondes élastique portées par la structure se propagent plus vite que les ondes portées par le fluide et occultent par conséquent les ondes parasites précédemment observées. L'instabilité rencontrée dans le cas de la diffraction rigide se produit pour des pas temporels beaucoup plus élevés et limite le développement actuel aux applications très basse fréquence. Pour atteindre une gamme de fréquences raisonnable, il est nécessaire de faire évoluer le couplage ATILA-EQI vers une méthode éléments finis-équations intégrales (formulation implicite). Une autre approche possible consiste à remplacer la formulation de Helmholtz-Kirchhoff par une formulation intégrale espace-temps exempte des fréquences irrégulières. Cette formulation peut être obtenue à partir de la formulation de Burton et Miller [46] comme décrit en annexe A3.

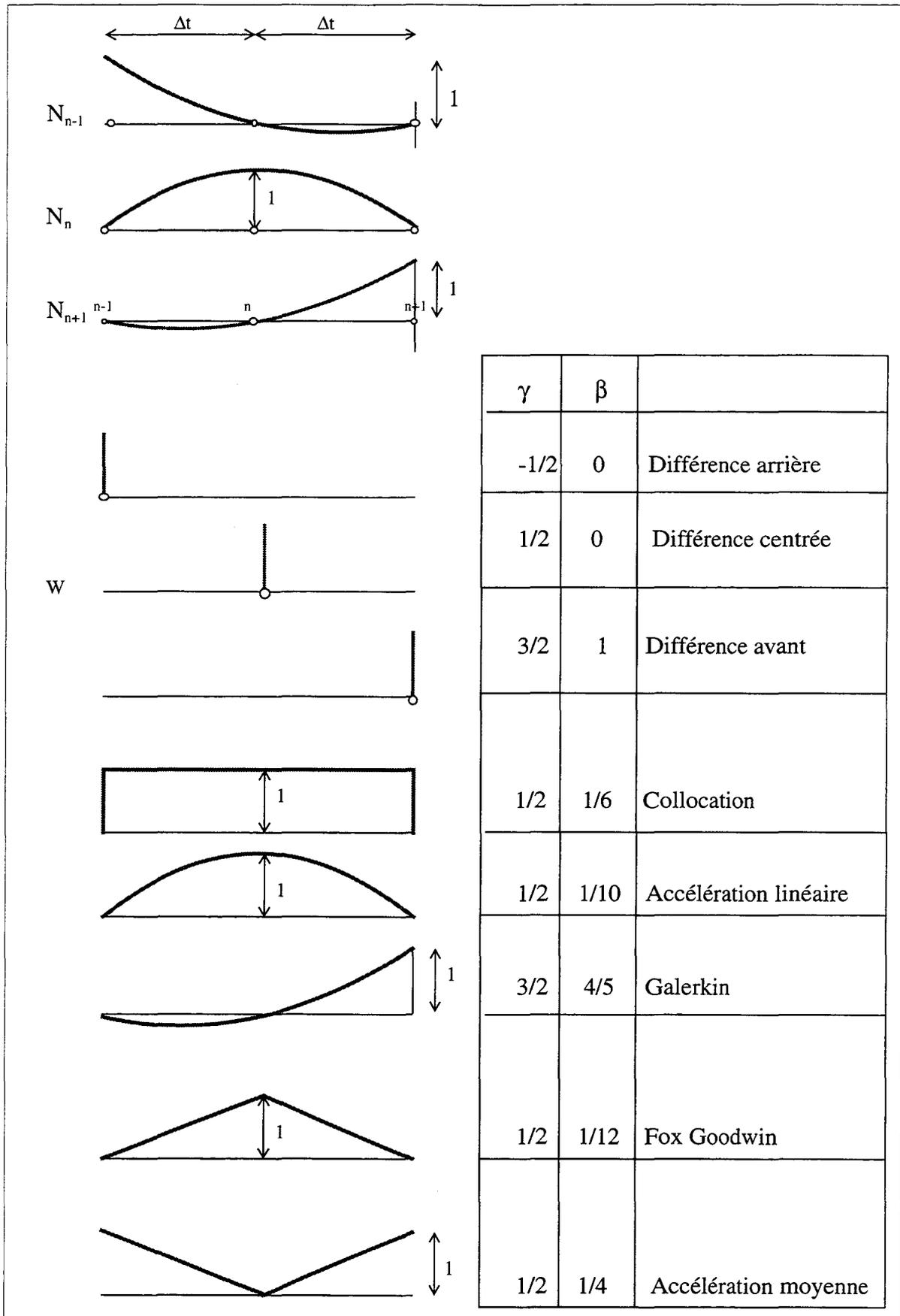


figure 4.1 : fonctions d'interpolation et de pondération d'après la référence [5]

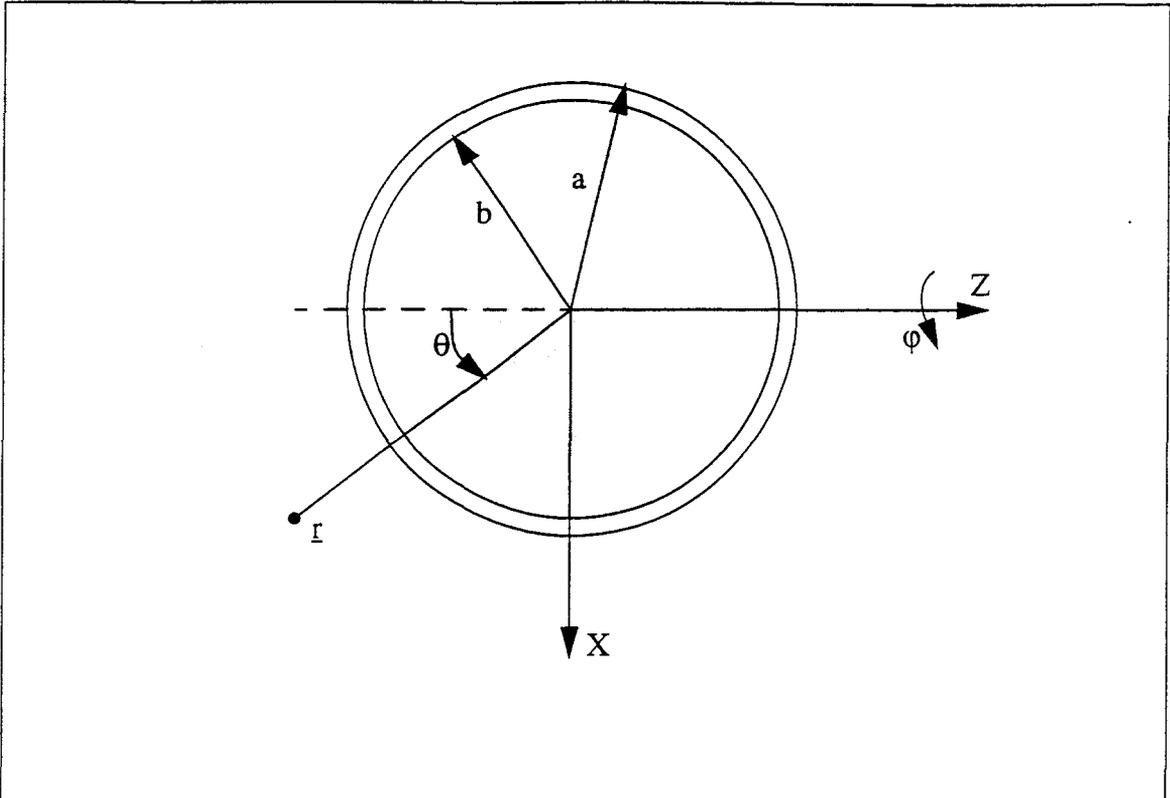


figure 4.2 : coque sphérique, $b/a = 0.97$

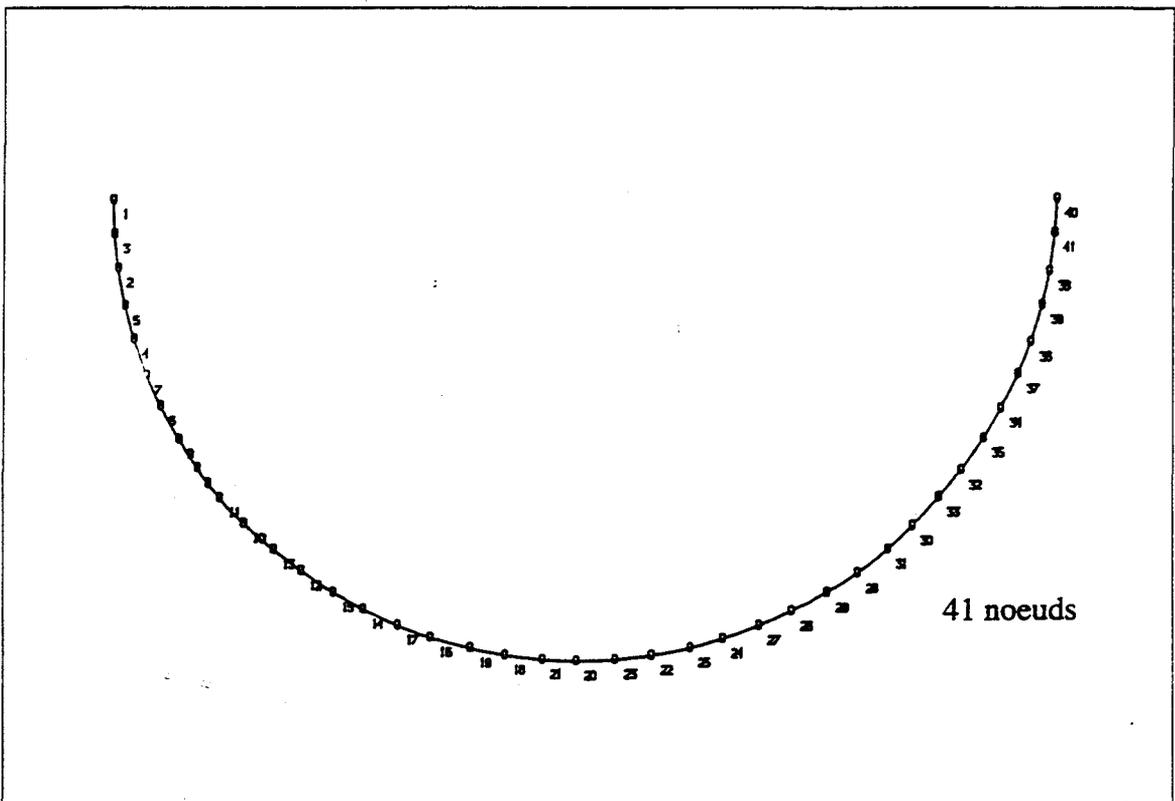


figure 4.3 : maillage de la coque sphérique.

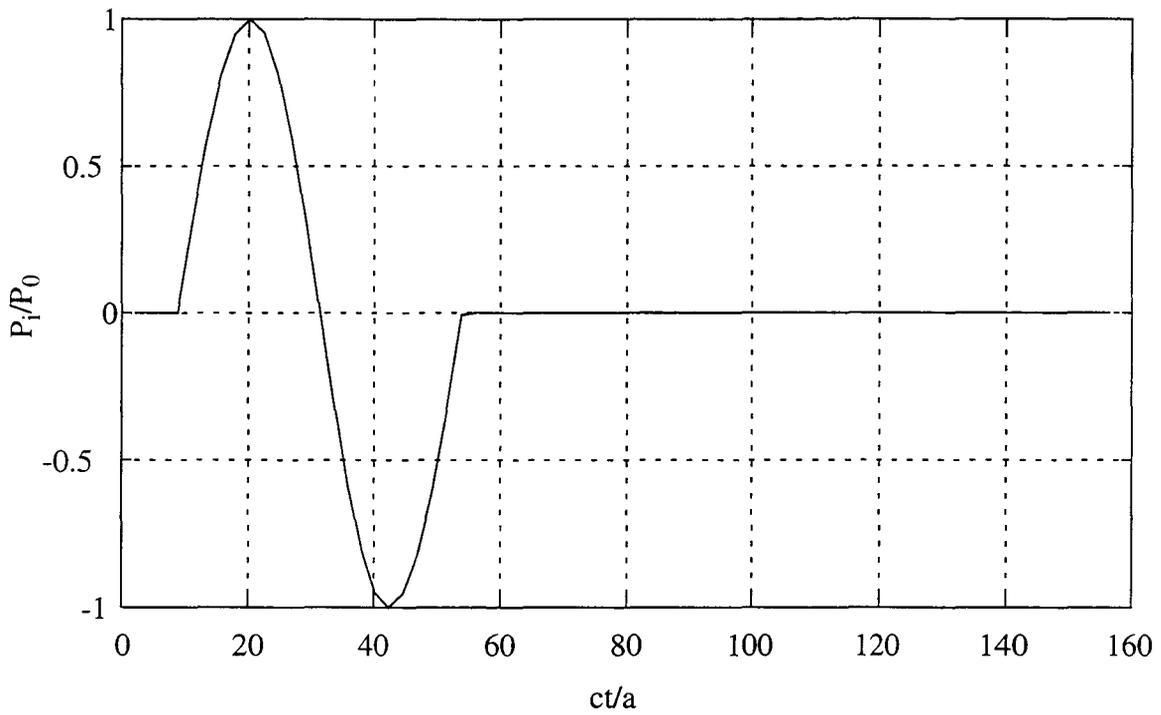


figure 4.4: signal sinusoïdal au point P_1 : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 1/(20\Delta t)$

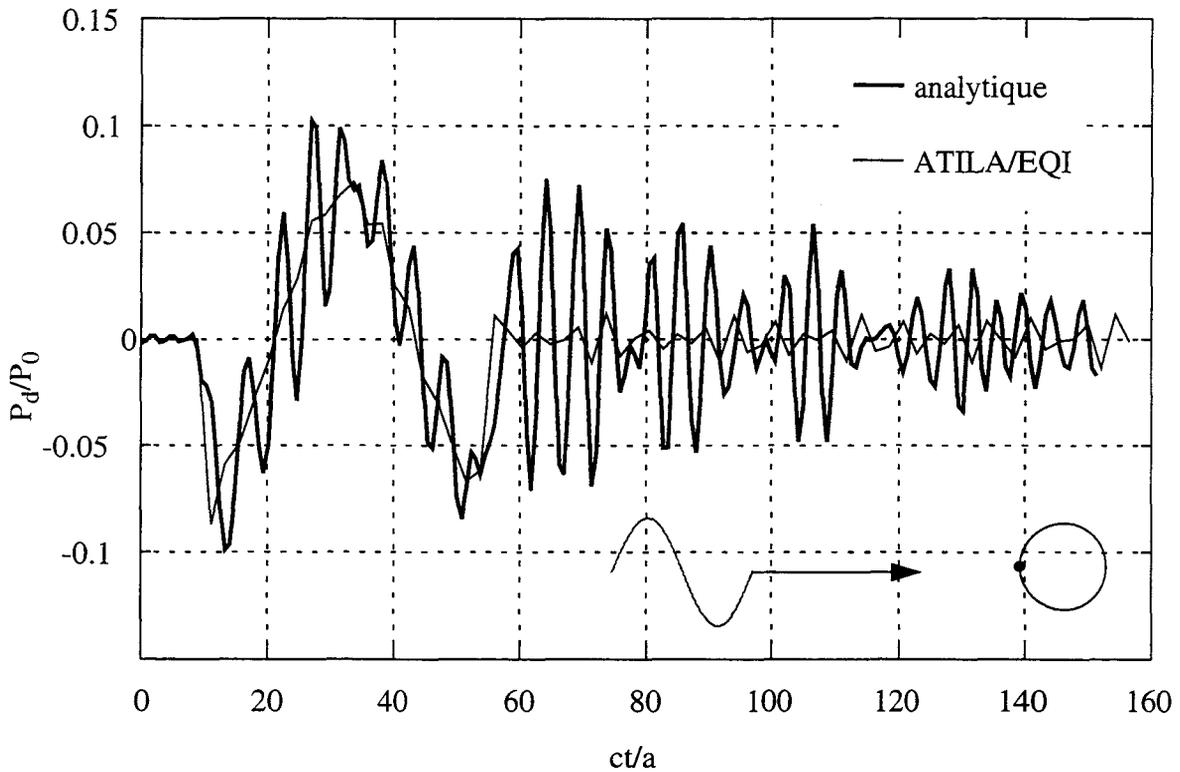


figure 4.5 : pression diffusée par la coque sphérique au point P_1 dans le cas d'un signal sinusoïdal : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 1/(20\Delta t)$

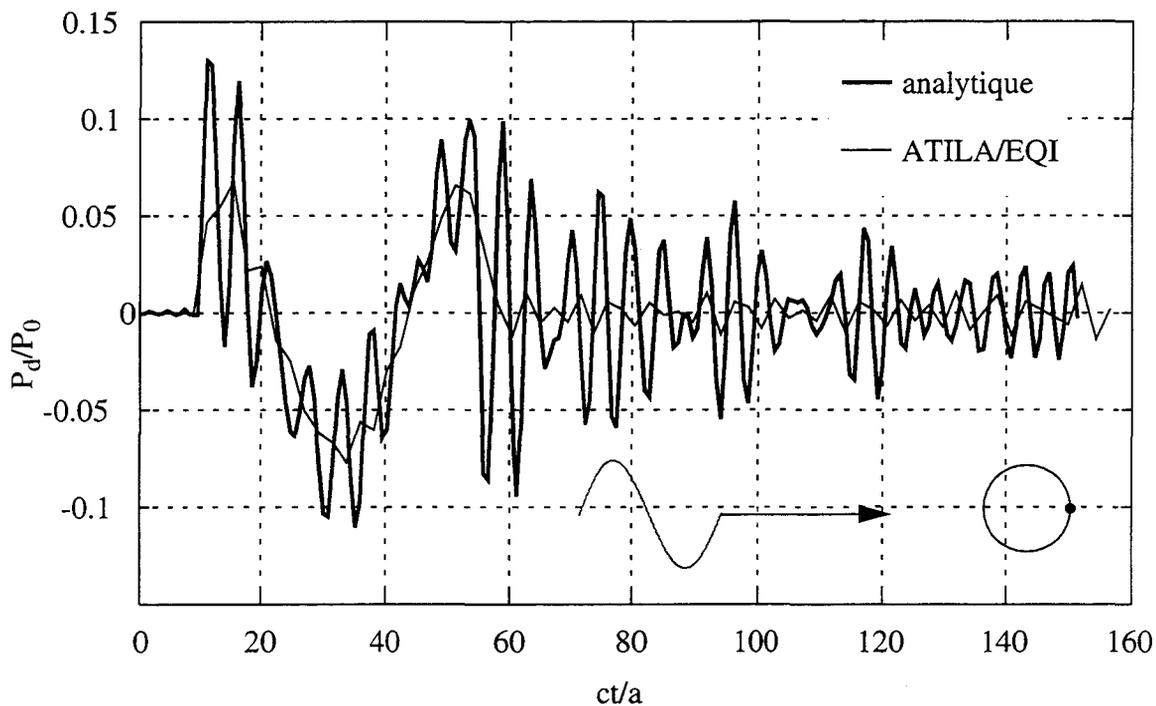


figure 4.6 : pression diffusée par la coque sphérique au point P_2 dans le cas d'un signal sinusoïdal : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 1/(20\Delta t)$

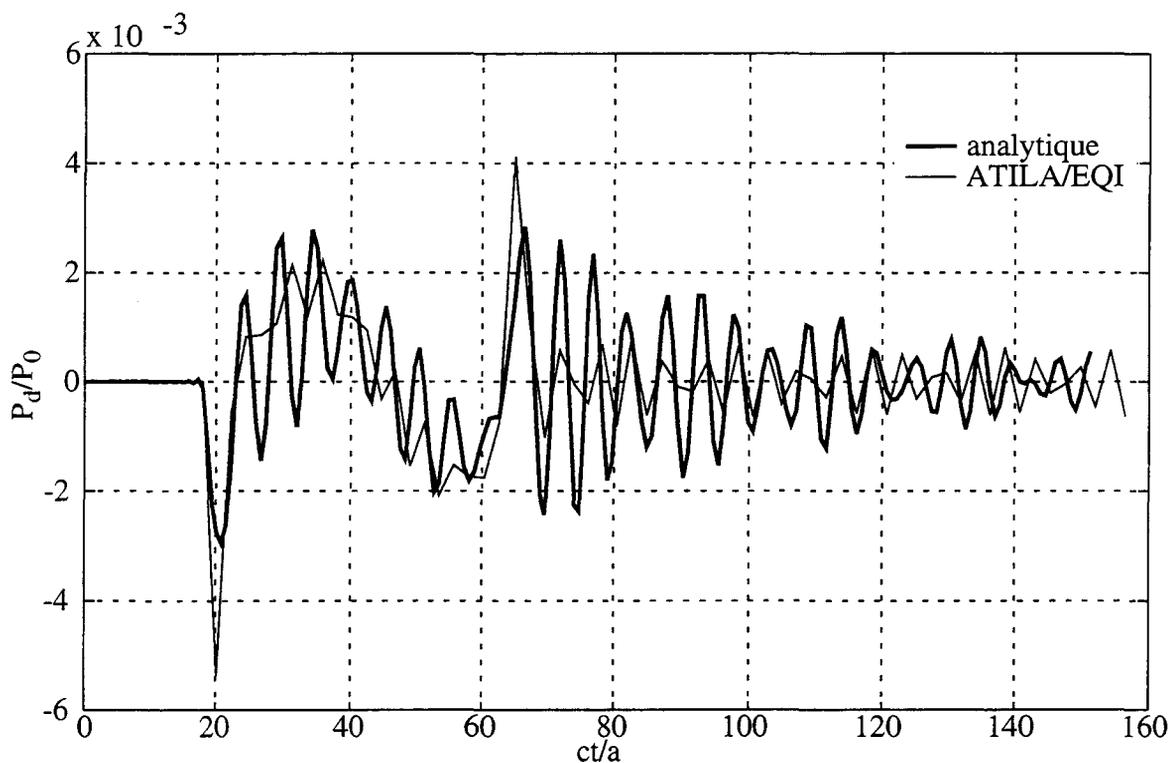


figure 4.7 : pression rétrodiffusée par la coque sphérique au point P_3 dans le cas d'un signal sinusoïdal : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 1/(20\Delta t)$

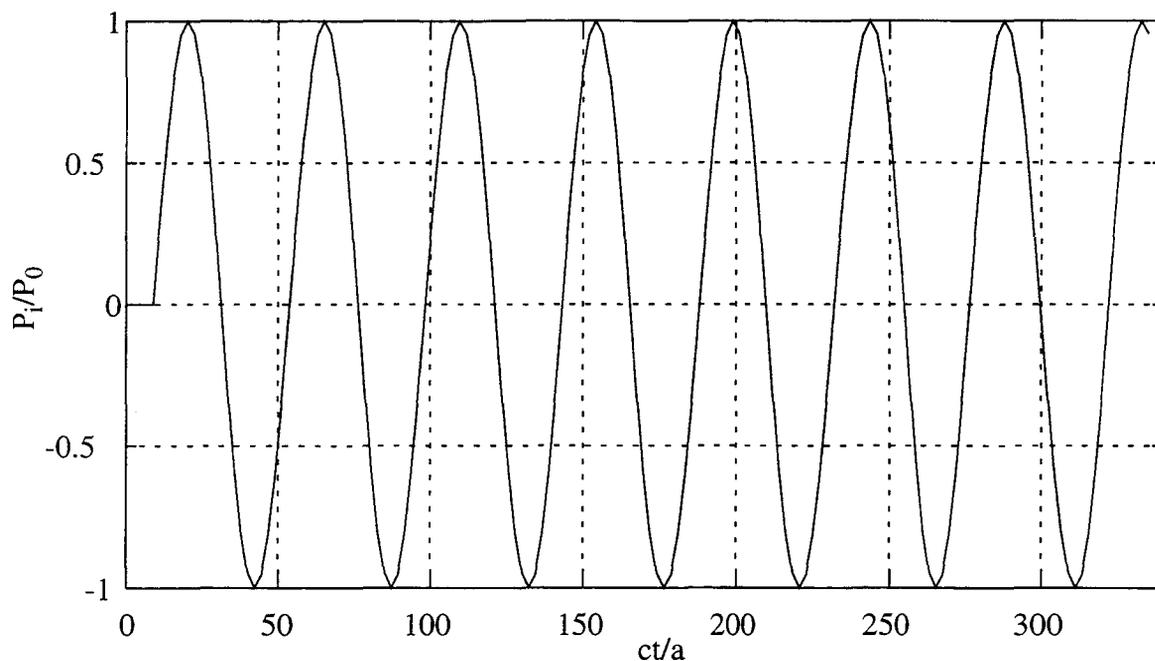


figure 4.8 : pression incidente dans le cas d'un signal sinusoïdal quasi-harmonique

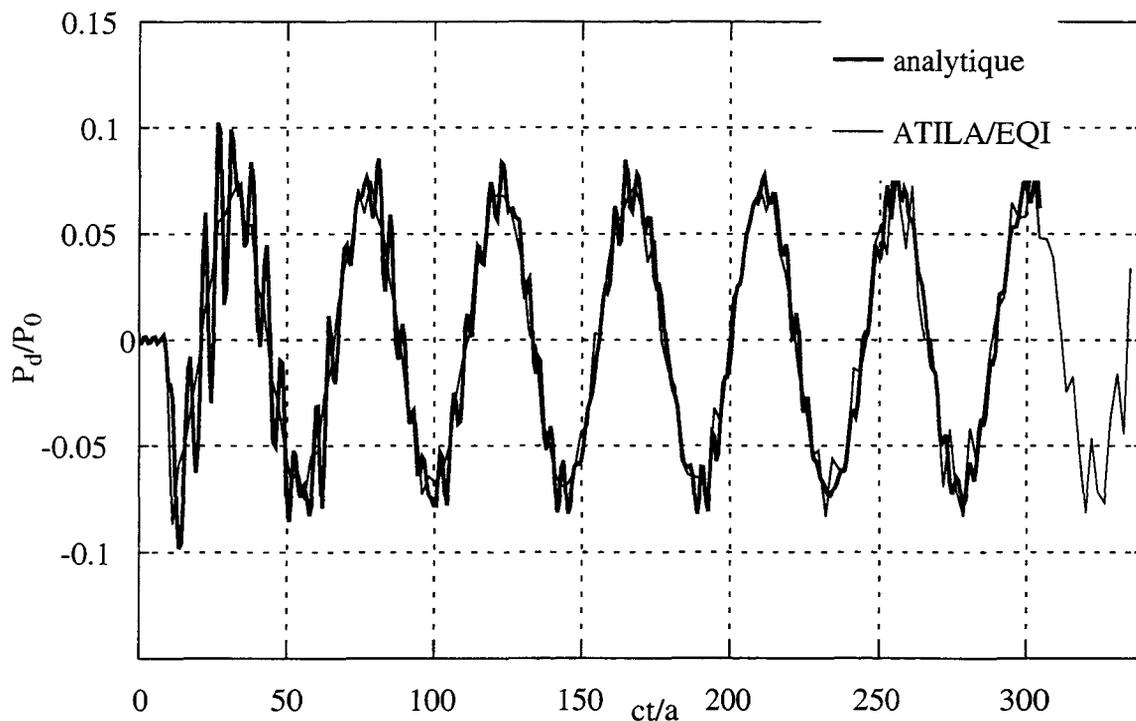


figure 4.9 : pression diffusée par la coque sphérique au point P_1 dans le cas d'un signal sinusoïdal quasi-harmonique : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 1/(20\Delta t)$.

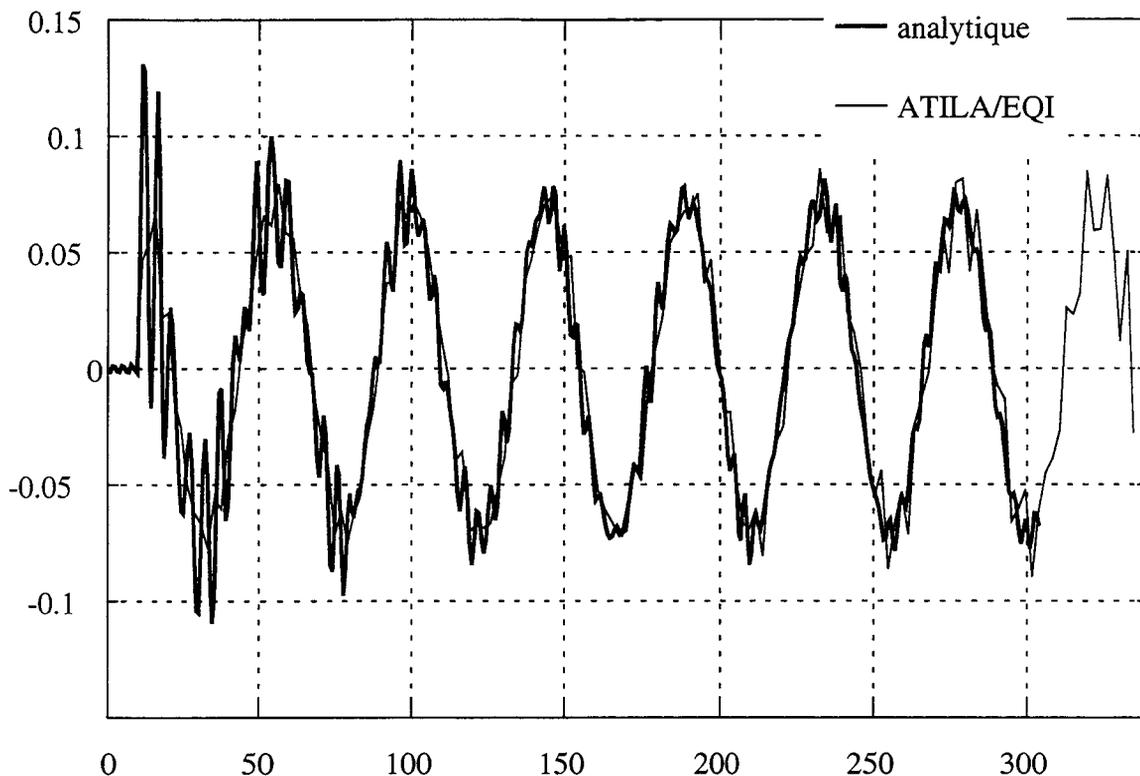


figure 4.10 : pression diffusée par la coque sphérique au point P_2 dans le cas d'un signal sinusoïdal quasi-harmonique : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 1/(20\Delta t)$.

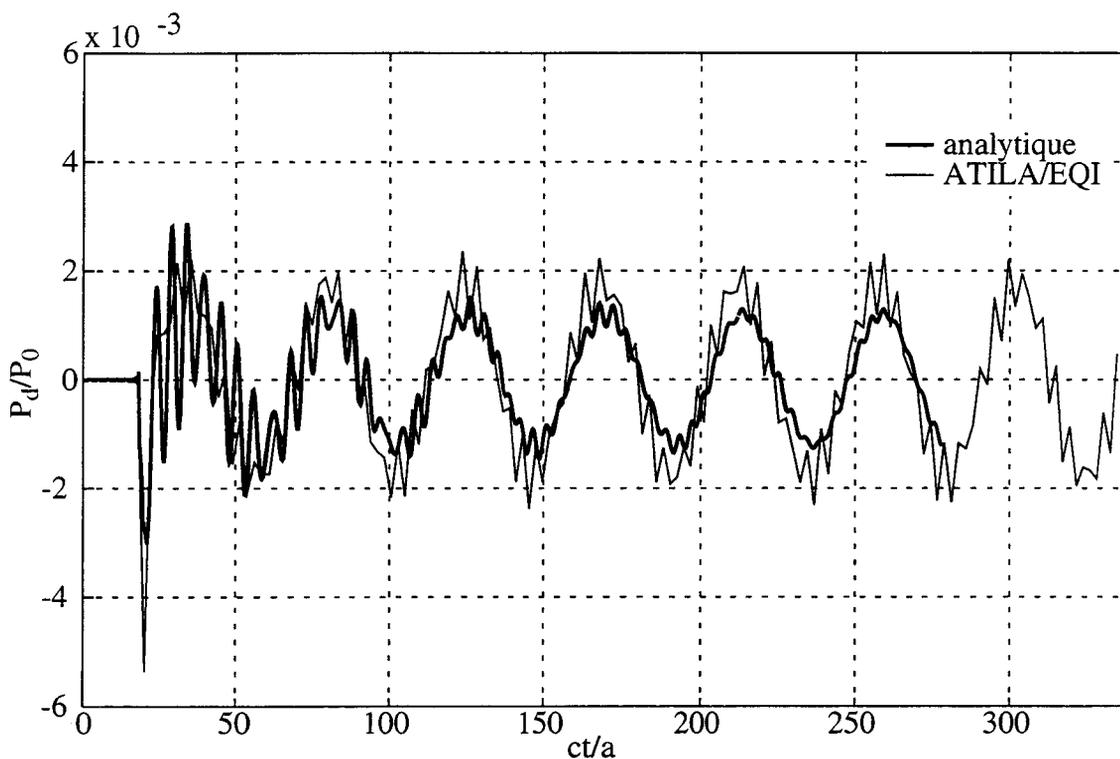


figure 4.11 : pression rétrodiffusée par la coque sphérique au point P_3 dans le cas d'un signal sinusoïdal quasi-harmonique : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 1/(20\Delta t)$

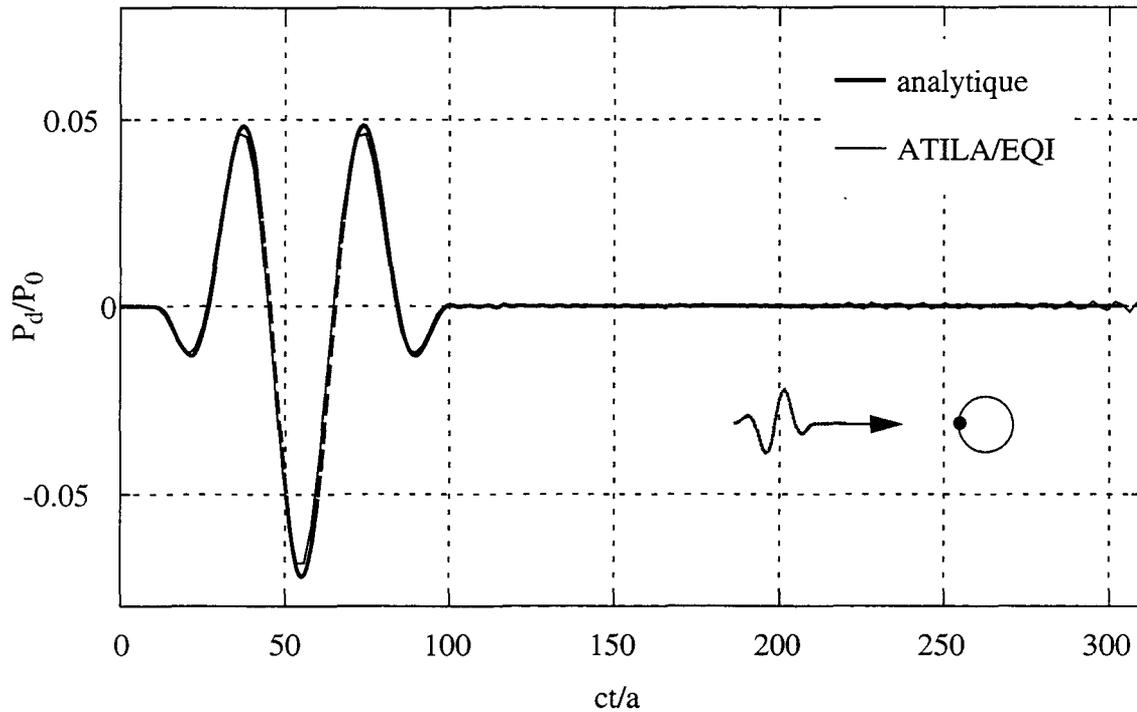


figure 4.12 : pression diffusée par la coque sphérique au point P_1 dans le cas d'un signal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 2/(30\Delta t)$

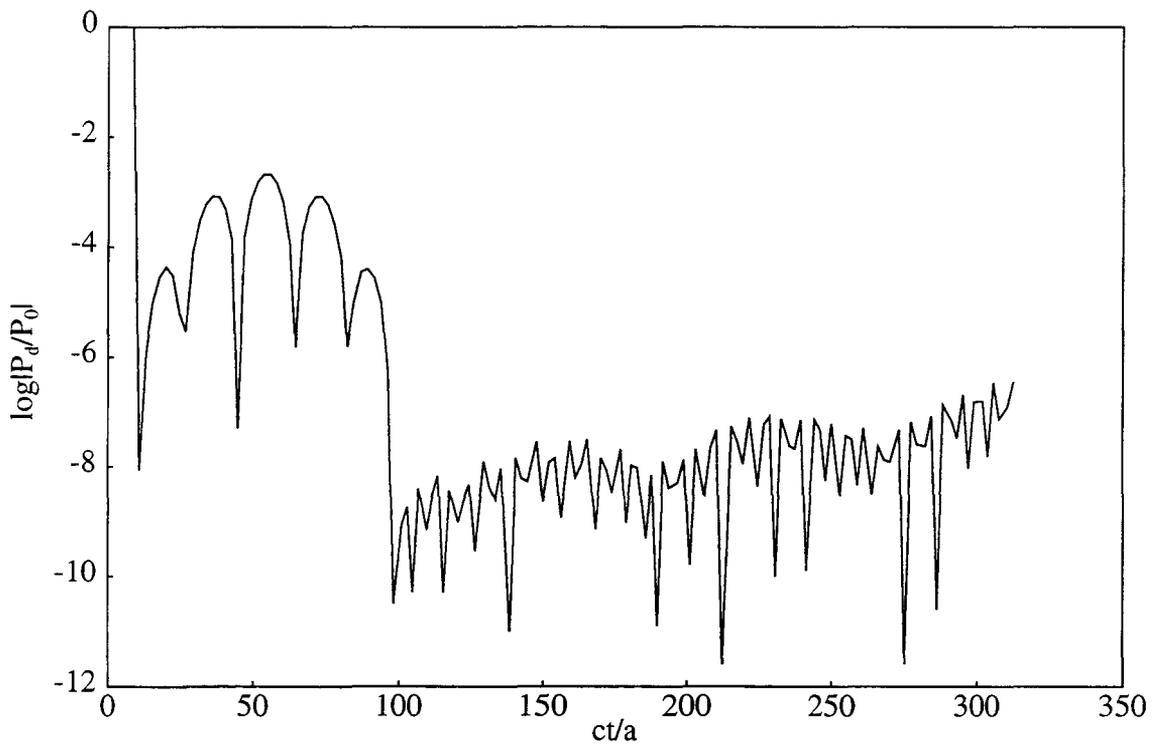


figure 4.13 : tracé du logarithme népérien de la valeur absolue de pression présentée à la figure 4.12.

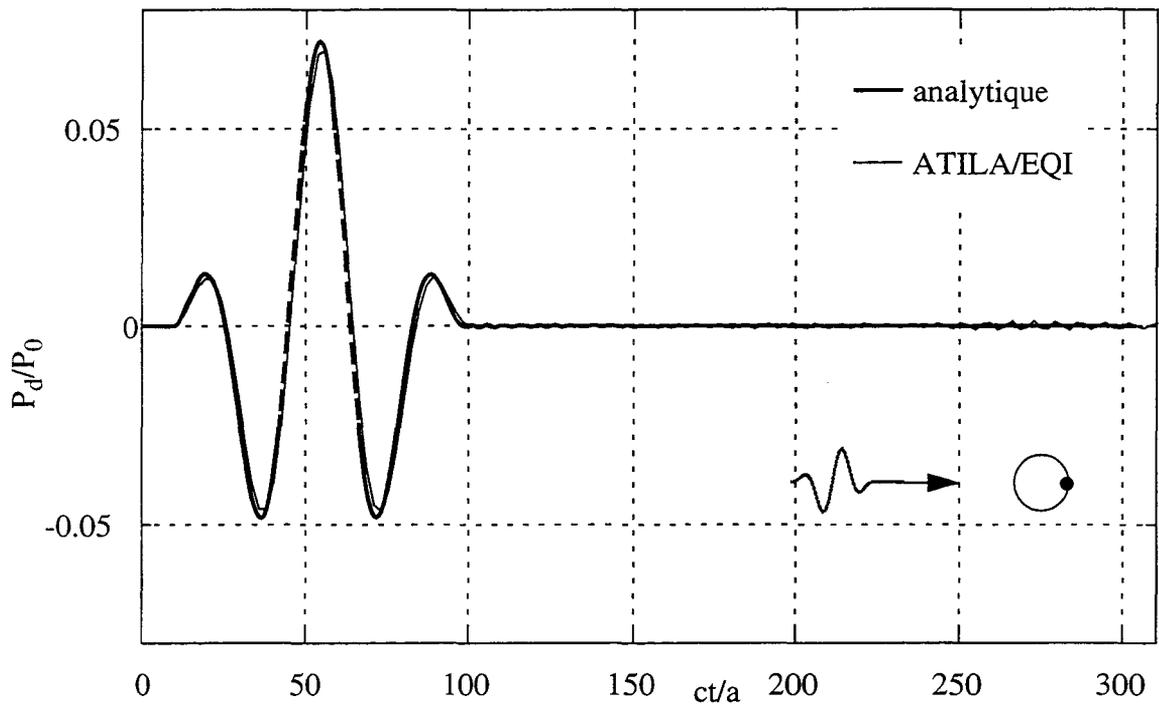


figure 4.14 : pression diffusée par la coque sphérique au point P_2 dans le cas d'un signal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 2/(30\Delta t)$

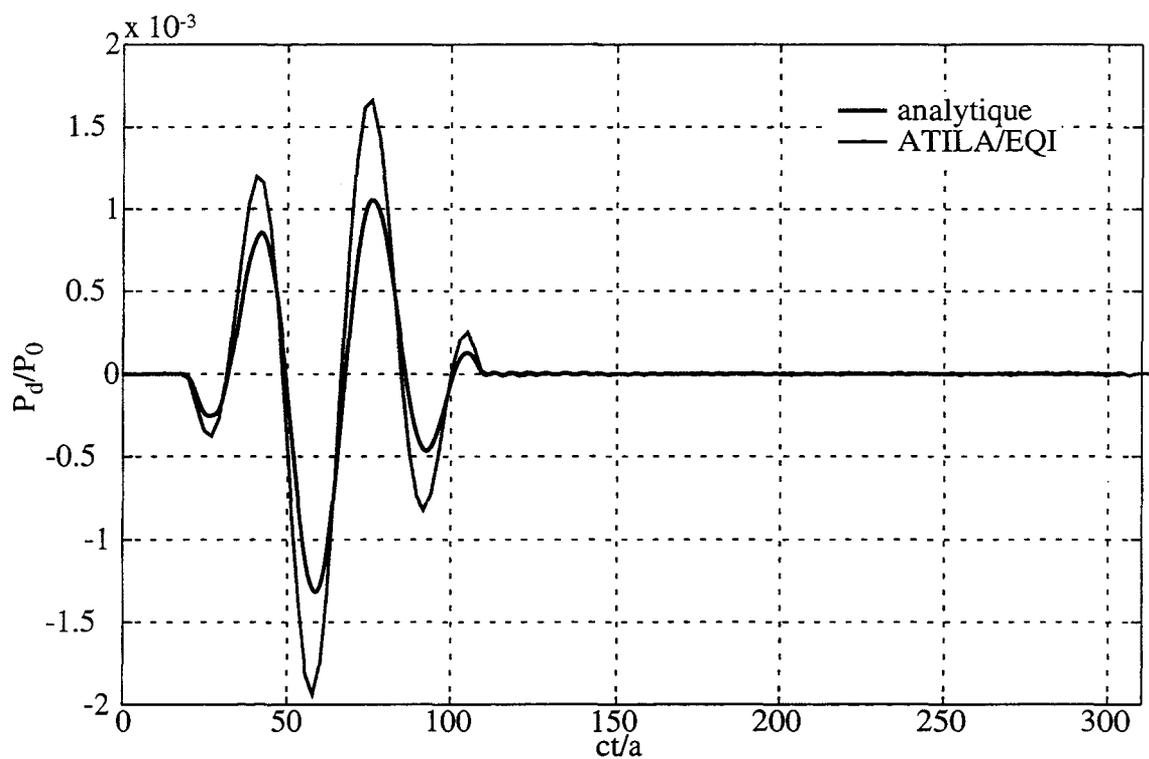


figure 4.15: pression rétrodiffusée par la coque sphérique au point P_3 dans le cas d'un signal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 2/(30\Delta t)$

Conclusion générale.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale.

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse concerne le développement d'un outil numérique permettant la modélisation de la diffraction acoustique en régime transitoire par la méthode des équations intégrales. Le modèle numérique développé est basé sur la représentation intégrale espace-temps de Helmholtz-Kirchhoff. La discrétisation du problème considéré est menée par l'emploi de plusieurs méthodes d'interpolation spatiale par éléments finis et temporelle par différences finies (approches "explicites") et une méthode d'interpolation spatio-temporelle par éléments finis (approche "implicite"). Les résultats sont présentés dans les deux cas.

Dans le cas de l'approche explicite, les résultats sont affectés par deux phénomènes : i) l'existence d'ondes non physiques traversant l'objet diffractant; ii) l'existence d'instabilités numériques qui se traduisent par des oscillations parasites de l'écho calculé, l'amplitude de ces oscillations croissant exponentiellement au fur et à mesure que le temps progresse. Le premier phénomène résulte du choix des discrétisations temporelles par différences finies qui rendent discontinues les intégrandes des intégrales associées à la formulation. Le deuxième phénomène a pour origine les résonances parasites associées aux fréquences irrégulières (dues au choix de la fonction de Green associée à l'espace infini) et est accentué par l'évaluation imprécise des intégrales.

La méthode implicite proposée, originale en acoustique, garantit la continuité des intégrandes, et donne des résultats stables, dans une gamme de fréquence raisonnable, en très bonne concordance avec les solutions analytiques disponibles. Avec cette méthode, la condition de causalité du paramètre CFL appliquée quasi-universellement lors de calcul de la diffraction par la méthode des équations intégrales, est relaxée. Ainsi, pour chaque configuration (k_a donné) un choix quasi-systématique de Δt et du maillage donnant des résultats précis et stables est possible.

Pour résoudre les problèmes de couplage fluide-structure, une interface entre le code EQI (méthode explicite) et le code ATILA a été réalisée en collaboration avec l'équipe du laboratoire. Les valeurs normales du déplacement sont calculées par la partie éléments finis. Les pressions sur la surface puis dans le fluide sont obtenues par la partie équations intégrales. Ce modèle a été validé par des solutions analytiques disponibles. L'utilisation de ce modèle est restreinte pour l'instant à des signaux basses fréquences ($k_a \approx 1$).

Conclusion générale.

Les perspectives envisagées visent, à court terme, à valider les modèles développés sur des cibles non canoniques et à moyen terme, à rendre le modèle développé applicable aux structures et signaux utilisés pratiquement en acoustique sous-marine.

Pour atteindre le premier objectif, l'étude détaillée des structures LINE 2 (coque cylindrique avec embouts hémisphériques) est un choix évident. Cette géométrie a été complètement analysée dans le domaine fréquentiel [110-111] et de nombreux résultats expérimentaux sont disponibles pour les cas rigide (mesures dans l'air) [112] et élastique (mesures dans l'eau) [113]. La comparaison calcul-mesure dans le cas élastique suppose de faire évoluer le couplage ATILA-EQI vers une méthode éléments finis-équations intégrales "implicite" pour atteindre une gamme de fréquences susceptible de laisser apparaître des résonances élastiques.

Pour le deuxième objectif, plusieurs points doivent être résolus. Le premier point a trait à l'extension des modèles aux géométries complètement tridimensionnelles et ne pose a priori aucun problème de principe. La question de la stabilité des résultats à ka élevé constitue le second point. Bien que la méthode implicite proposée semble donner satisfaction en électromagnétisme pour des structures à ka élevé [73], il n'est pas évident que ce résultat soit généralisable au cas élastique, beaucoup plus sensible aux instabilités. La solution pourrait alors reposer sur le remplacement de la formulation de Helmholtz-Kirchhoff par une nouvelle formulation intégrales espace-temps exemptée de modes parasites. Cette solution pourrait être obtenue à partir de la formulation de Burton et Miller [46] comme décrit en annexe A3. Enfin le dernier point concerne l'efficacité numérique du modèle développé qui devra se montrer plus performant qu'une méthode basée sur un calcul numérique dans le domaine fréquentiel associé à l'emploi d'une transformée de Fourier Discrète.

Bibliographie.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie.

1. **R. J. URICK,**
"Principles of underwater sound", Mc Graw-Hill ed., (1975).
2. **N. GESPA,**
"La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple-théories et expériences", Cedocar, Paris, (1987).
3. **D. COLTON et R. KRESS,**
"Integral equation methods in scattering theory", Chap. 3, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, (1983).
4. **A. F. SEYBERT, B. SOENARKO, F. J. RIZZO et D. J. SHIPPY,**
"An advanced computational method for radiation and scattering of acoustic waves in three dimensions", J. Acoust. Soc. Am., **77**, 362-368, (1985).
5. **O. C. ZIENKIEWICZ,**
"The finite element method in engineering science", Mc Graw-Hill, (1977).
6. **G. DHATT et G. TOUZOT,**
"Introduction aux éléments finis", Collection Université de Compiègne, Maloine ed., (1982).
7. **A. LAVIE,**
"Modélisation du rayonnement ou de la diffraction acoustique par une méthode mixte équations intégrales-champ nul", Thèse de Doctorat en Mécanique, Université des Sciences et Technologies de Lille, (1989).
8. **B. DUBUS, A. LAVIE et G. MAZE,**
"Coupled finite element/boundary element method for the analysis of the acoustic scattering from elastic structures", ASME 15th biennial conference on vibration and noise, Acoustics of submerged structures and transduction for systems, 3, Part B, Boston, (1995).
9. **EQI, Versioin 5.01,** manuel d'utilisation, ISEN, Lille, (1996).
10. **ATILA, Version 5.1.1.,** User's manual, ISEN, Lille, (1997).
11. **M. B. FRIEDMAN et R. P. SHAW,**
"Diffraction of pulses by cylindrical obstacles of arbitrary cross section", J. Appl. Mech., **29**, 40-46, (1962).
12. **R. P. SHAW,**
"Diffraction of acoustic pulses obstacles of arbitrary shape with a robin boundary condi-

Bibliographie.

- tion", J. Acoust. Soc. Am., **41**, 855-859, (1967).
13. **K. M. MITZNER**,
"Numerical solution for transient scattering from a hard surface of arbitrary shape-retarded potential technique", J. Acoust. Soc. Am., **42**, 391-397, (1967).
 14. **R. P. SHAW et J. A. ENGLISH**,
"Transient acoustic scattering by a free (pressure release) sphere", J. Sound Vibr., **20**, 321-331, (1972).
 15. **R. P. SHAW**,
"Transient scattering by a circular cylinder", J. Sound Vibr., **42**, 295-304, (1975).
 16. **R. P. SHAW**,
"An outer boundary integral equation applied to transient wave scattering in an inhomogeneous medium", J. Appl. Mech., **3**, 147-152, (1975).
 17. **H. C. NEILSON, Y. P. LU et Y. F. WANG**,
"Transient scattering by arbitrary axisymmetric surfaces ", J. Acoust. Soc. Am., **63**, 1719-1727, (1978).
 18. **G. C. HERMAN**,
"Scattering of transient acoustic waves by an inhomogeneous obstacle", J. Acoust. Soc. Am., **69**, 909-915, (1981).
 19. **T. HA DUONG**,
"Equations integrales pour la résolution numerique de problemes de diffraction d'ondes acoustiques dans R³", Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Mathématique, Université de Paris 6, (1987).
 20. **Y. DING, A. FORESTIER et T. HA DUONG**,
"A Galerkin scheme for the time domain integral equation of acoustic scattering from a hard surface", J. Acoust. Soc. Am., **86**, 1566-1572, (1989).
 21. **Y. DING**,
"Méthodes numériques sur l'équation intégrale aux bords pour le problème des ondes acoustiques diffractées par une surface rigide en 3D", Thèse de Doctorat en Sciences, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, (1989).
 22. **C. L. BENNETT et W. L. WEEKS**,
"Transient scattering from conducting cylinders", IEEE Trans. Antennas Propagation, **18**,

Bibliographie.

627-633, (1970).

23. **C. L. BENNETT**,
"Time-domain electromagnetics and its applications", Proc. IEEE, **66**, 299-318, (1978).
24. **E. K. MILLER et J. A. LANDT**,
"Direct time-domain techniques for transient radiation and scattering-wires", Proc. IEEE, **68**, 1396-1423, (1980).
25. **C. L. BENNETT et H. MIERAS**,
"Time domain integral equation solution for acoustic scattering from fluid targets", J. Acoust. Soc. Am., **69**, 1261-1265, (1981).
26. **D. M. COLE, D. D. KOSLOFF et J. B. MINSTER**,
"A numerical boundary integral-equation method for elastodynamics", Bull. Seismol. S. A., **68**, 1331-1357, (1978).
27. **G. C. HERMAN**,
"Scattering of transient elastic waves by an inhomogeneous obstacle : contrast in volume density of mass", J. Acoust. Soc. Am., **71**, 264-272, (1982).
28. **P. M. MORSE**,
"Vibration and sound", Mc Graw-Hill, New York, (1948).
29. **R. COURANT et D. HILBER**,
"Methods of mathematical physics", Interscience, **1**, (1953).
30. **L. G. COPLEY**,
"Integral equation method for radiation vibrating bodies", J. Acoust. Soc. Am., **41**, 807-816, (1966).
31. **O. D. KELLOG**,
"Foundations of potential theory", Springer-Verlag ed., (1967).
32. **W. R. MORGANS**,
"The Kirchhoff formula extended to a moving surface", Philos. Mag., **9**, 141-161, (1930).
33. **J. A. STRATTON**,
"Electromagnetic theory", Mc Graw-Hill, (1941).
34. **J. L. DOHNER, R. SHOURESHI et R. J. BERNHARD**,

Bibliographie.

- "Transient analysis of three-dimensional wave propagation using the boundary element method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **24**, 621-634, (1987).
35. **M. FILIPE**,
"Etude mathématique et numérique d'un problème d'interaction fluide - structure dépendant du temps par la méthode de couplage éléments finis-équations intégrales ", Thèse de Doctorat en Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique Paris, (1994).
36. **O. VON ESTORFF et H. ANTES**,
"On FEM-BEM coupling for fluid-structure interaction analyses in the time domain", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **31**, 1151-1168, (1991).
37. **J. P. MARAGE**,
"Sonars et acoustique sous-marine", Thomson-Sintra ASM, Sophia Antipolis, (1990).
38. **A. DYMENT**,
"Introduction à la mécanique des fluides", Cours, U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1976-1977).
39. **M. BRUNEAU**,
"Introduction aux théories de l'acoustique", Publication de l'Université du Maine (1983).
40. **C. VANHILLE**,
"Optimisation d'une combinaison équations intégrales-champ nul appliquée à la diffusion acoustique", Thèse de Doctorat en Mécanique, Université des Sciences et Technologies de Lille, (1996).
41. **A. D. PIERCE**,
"Acoustics, an introduction to its physical principals and applications", Mc Graw-Hill, (1981).
42. **B. DUBUS et A. LAVIE**,
"Modélisation de la diffusion acoustique par une cible élastique de forme géométrique complexe", Convention : 91.34.067.00.470.75.01 passée par la DRET-Paris, (DRET/SDR/G. 06.03), (1992).
43. **A. LAVIE et B. DUBUS**,
"Modélisation de la diffraction acoustique d'une onde incidente plane par une structure élastique à l'aide d'une méthode mixte éléments finis-équations intégrales", Deuxième Congrès Français d'Acoustique de la SFA, Supplément au Journal de Physique III, **4**, Colloque 1, 957-960, Arcachon, (1992).

Bibliographie.

44. **A. LAVIE et B. DUBUS,**
"Diffusion acoustique par une cible élastique immergées de forme géométrique simple ou complexe", Convention : 93.34.085.00.470.75.01 passée par la DRET, rapport final, (1995).
45. **A. LAVIE, B. DUBUS et C. VANHILLE,**
"Diffusion acoustique par des cibles élastiques immergées de forme géométrique simple ou complexe", Convention : 93.34.085.00.470.75.01, passée par la DRET,(DRET/SDR/G.06.03), (1995).
46. **A. J. BURTON et G. F. MILLER,**
"The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary value problems ", Proc. R. Soc. London Ser. A, **323**, 201-210, (1971).
47. **H. A. SCHENCK,**
"Improved integral formulation for acoustic radiation problems", J. Acoust. Soc. Am., **44**, 41-58, (1968).
48. **D. S. JONES,**
"Integral equation for the exterior acoustic problem", Q. J. Mech. Appl. Math., XXVII, 129-142, (1974).
49. **W. TOBOCMAN,**
"Extension of the Helmholtz integral equation method to shorter wavelengths", J. Acoust. Soc. Am., **80**, 1828-1837, (1986).
50. **I. C. MATHEWS,**
"Numerical techniques for three-dimensional steady-state fluid-structure interaction", J. Acoust. Soc. Am., **79**, 1317-1325, (1986).
51. **CHIEF,** User's manual, Naval Ocean Systems Center, San Diego, (1988).
52. **B. STUPFEL, A. LAVIE et J. N. DECARPIGNY,**
"Combined integral equation formulation and null-field method for the exterior acoustic problem", J. Acoust. Soc. Am., **83**, 927-941, (1988).
53. **A. F. SEYBERT, B. SOENARKO, F. J. RIZZO et D. J. SHIPPY,**
"An advanced computational method for radiation and scattering of acoustic waves in three dimensions", J. Acoust. Soc. Am., **77**, 362-368, (1985).
54. **R. P. SHAW,**
"Comments on numerical solution for transient scattering from a hard surface of arbitrary

Bibliographie.

- shape-retarded potential technique", *J. Acoust. Soc. Am.*, **43**, 638-639, (1968).
55. **R. D. RICHTMYER et K. W. MORTON**,
"Difference methods for initial-value problems", *Problems*, John Wiley et Sons, (1967).
56. **S. WANG**,
"Finite-difference time-domain approach to underwater acoustic scattering problems", *J. Acoust. Soc. Am.*, **99**, 1924-1931, (1996).
57. **J. FANG et K. K. MEI**,
"A super-absorbing boundary algorithm for solving electromagnetic problems by time-domain finite difference method", *Proc. IEEE*, 472-475, (1988).
58. **A. TAFLOVE et M. E. BRODWIN**,
"Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations", *IEEE Trans. Microwave Theory Technol.*, **23**, 623-630, (1975).
59. **B. P. RYNNE et P. D. SMITH**,
"Stability of time marching algorithms for the electric field integral equation", *J. Electro. Waves Applic.*, **4**, 1181-1205, (1990).
60. **P. D. SMITH**,
"Instabilities in time marching methods for scattering : cause and rectification", *Electromagnetics*, **10**, 439-451, (1990).
61. **D. A. VECHINSKI et S. M. RAO**,
"Stable procedure to calculate the transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape", *IEEE Trans. Antennas Propagation*, **40**, 661-665, (1992).
62. **D. A. VECHINSKI et S. M. RAO**,
"Transient scattering by conducting cylinders-transverse electric case", *IEEE Trans. Antennas Propagation*, **40**, 1103-1106, (1992).
63. **D. A. VECHINSKI et S. M. RAO**,
"Transient scattering from two-dimensional dielectric cylinders of arbitrary shape", *IEEE Trans. Antennas Propagation*, **40**, 1054-1060, (1993).
64. **A. SADIGH et E. ARVAS**,
"Treating the instabilities in marching-on-in-time method from a different perspective", *IEEE Trans. Antennas Propagation*, **41**, 1695-1702, (1993).

Bibliographie.

65. **G. C. HERMAN, et P. M VAN DEN BERG,**
"A least-square iterative technique for solving time-domain", *J. Acoust. Soc. Am.*, **72**, 1947-1953, (1982)
66. **A. G. TIJHUIS,**
"Toward a stable marching-on-in-time method for two-dimensional transient electromagnetic scattering problems", *Radio Science*, **19**, 1311-1317, (1984).
67. **B. P. RYNNE,**
"Stability and convergence of time marching methods in scattering problems", *IMA J. Appl. Math.*, **35**, 297-310, (1985).
68. **B. P. RYNNE,**
"Instabilities in time marching methods for scattering problems", *Electromagnetics*, **6**, 129-144, (1986).
69. **P. D. SMITH,**
"Stable numerical methods for integral equations governing the scattering of transients", *Bull. IMA*, **24**, 166-170, (1988).
70. **B. P. RYNNE,**
"Time domain scattering from arbitrary surfaces using the electric field integral equation", *J. Electro. Waves Applic.*, **5**, 93-112, (1991).
71. **B. P. RYNNE,**
"Comments on stable procedure to calculate the transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape", *IEEE Trans. Antennas Propagation*, **41**, 517-520, (1993).
72. **M. J. BLUCK et S. P. WALKER,**
"Analysis of three-dimensional transient acoustic wave propagation using the boundary integral equation method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **39**, 1419-1431, (1996).
73. **S. P. WALKER,**
"Development in time-domain integral-equation modeling at imperial college", *IEEE Trans. Antennas Propagation Magazine*, **39**, 7-19, (1997).
74. **M. J. BLUCK et S. P. WALKER,**
"Time-domain BIE analysis of large three-dimensional electromagnetic scattering problems", *IEEE Trans. Antennas Propagation*, **45**, 894-901, (1997).

Bibliographie.

75. **E. O. BRIGHAM et R. E. MORROW,**
"The fast Fourier transform", IEEE Spectrum, **4**, 63-70, (1967).
76. **G. D. BERGLAND,**
"A guided tour of the fast Fourier transform", IEEE Spectrum, **6**, 41-52, (1969).
77. **E. O. BRIGHAM,**
"The fast Fourier transform and its applications", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1988).
78. **S. F. WU,**
"Transient sound radiation from impulsively accelerated bodies ", J. Acoust. Soc. Am., **94**, 542-553, (1993).
79. **S. F. WU et Z. WANG,**
"A fast Fourier transformation algorithm for the Kirchhoff integral formation", J. Acoust. Soc. Am., **97**, 108-115, (1995).
80. **J. N. DECARPIGNY,**
"Application de la méthode des éléments finis à l'étude de transducteurs piézoélectriques", Thèse de Doctorat d'Etat, Université des Sciences et Techniques de Lille, (1984).
81. **R. BOSSUT,**
"Modélisation de transducteurs piézoélectriques annulaires immergés par la méthode des éléments finis", Thèse de Doctorat-Ingénieur, Université de Valenciennes et du Haïnaut Cambrésis, (1985).
82. **J. N. DECARPIGNY, J. C. DEBUS, B. TOCQUET et D. BOUCHER,**
"In-air analysis of piezoelectric tonpiliz transducers in a wide frequency band using a mixed finite element-plane wave method", J. Acoust. Soc. Am. **78**, 1499-1507, (1985).
83. **R. BOSSUT et J. N. DECARPIGNY,**
"Finite element modeling of radiating structures using dipolar damping elements", J. Acoust. Soc. Am. **86**, 1234-1244, (1989).
84. **J. ASSAAD,**
"Modélisation des transducteurs piézoélectriques haute fréquence à l'aide de la méthode des éléments finis", Thèse de Doctorat en Electronique, Université de Valenciennes et du Haïnaut-Cambresis, (1992).

Bibliographie.

85. **L. L. THOMPSON,**
"A space-time finite element method for exterior acoustics problem", *J. Acoust. Soc. Am.* **99**, 3297-3311, (1996).
86. **T. J. R. HUGHES et G. M. HULBERT,**
"Space-time finite element methods for elastodynamics : formulations and error estimates", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, **66**, 339-363, (1988).
87. **G. M. HULBERT et T. J. R. HUGHES,**
"Space-time finite element methods for second-order hyperbolic equations", *Comp. Methods. Appl. Mech. Eng.*, **84**, 327-384, (1990).
88. **P. M. PINSKY et N. N. ABBOUD,**
"Transient finite element analysis of the exterior structural acoustics problem", *ASME J. Vib. Acoust.*, **112**, 245-256, (1990).
89. **L. F. KALLIVOKAS et J. BIELAK,**
"Time-domain analysis of transient structural acoustics problems based on the finite element method and a novel absorbing boundary element", *J. Acoust. Soc. Am.*, **94**, 3480-3492, (1993).
90. **A. LAVIE, B. DUBUS, A. ELGHAOUTY et R. BOSSUT,**
"Modélisation numérique de la diffusion acoustique par ligne 2 en régime transitoire", *Convention : 95.34.469.00.470.75.01* passée par la DRET, (DRET/STRDT/G.06.03), (1996).
91. **K. S. YEE,**
"Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media", *IEEE Trans. Antennas Propagation*, **14**, 302-307, (1966).
92. **A. TAFLOVE et K. R. UMASHANKAR,**
"Review of FD-TD numerical modeling of electromagnetic wave scattering and radar cross section", *Proc. IEEE*, **77**, 682-699, (1989).
93. **P. A. TIRKAS, C. A. BALANIS, M. P. PURCHINE et G. C. BARBER,**
"Finite- difference time-domain method for electromagnetic radiation, interference, and interaction with complex structures", *IEEE Trans. Electromag. Compat.*, **35**, 192-203, (1993).
94. **M. E. DOUGHERTY et R. A. STEPHEN,**
"Geoacoustic scattering from seafloor features in the rose area", *J. Acoust. Soc. Am.*, **82**, 293-256, (1987).

Bibliographie.

95. **A. LAVIE, B. DUBUS et A. ELGHAOUTY,**
"Diffusion en régime transitoire à l'aide d'un couplage éléments finis-équations intégrales"
GESPA, Bordeaux, (1996).
96. **G. H. KOOPMANN et H. BENNER,**
"A method for computing the sound power of machines based on the Helmholtz integral", J.
Acoust. Soc. Am., **71**, 78-89, (1982).
97. **F. B. HILDEBRAND,**
"Introduction to numerical analysis", Mc-Graw-Hill, (1956).
98. **C. BERRIAUD et P. VERPEAUX,**
"Calculation of the wall pressure field generated on a group of buildings by external explosion", Rapport CENS/DEMT/SMTS, (1981).
99. **R. MITTRA,**
"Transient electromagnetic field", Topics in Applied Physics, **10**, 73-182, (1976).
100. **S. M. RAO et D. R. WILTON,**
"Transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape", IEEE Trans. Antennas Propagation, **39**, 56-61, (1991).
101. **S. M. RAO et T. K. SARKAR,**
"An alternative version of the time-domain electric field integral equation for arbitrarily shaped conductors", IEEE Trans. Antennas Propagation, **41**, 831-834, (1993).
102. **D. A. VECHINSKI et S. M. RAO,**
"Transient scattering from three-dimensional arbitrarily shaped dielectric bodies", J. Opt. Soc. Am., **11**, 1458-1470, (1994).
103. **M. ABRAMOWITZ et I. A. STEGUN,**
"Handbook of mathematical functions", Dover Publications, (1972).
104. **D. LANGE et A. CHAUDOUET,**
"Application de la méthode des équations intégrales à la mécanique", Cours Dpt. Mécanique du solide, CETIM, Senlis.
105. **I. S. GRADSHTEYN et I. M. RYZHIK,**
"Table of integrals series and products", Academic Press ed., (1965).
106. **A. F. SEYBERT, B. SOENARKO, F. J. RIZZO et D. J. SHIPPY,**

Bibliographie.

"A special integral equation formulation for acoustic radiation and scattering for axisymmetric bodies and boundary conditions", *J. Acoust. Soc. Am.*, **80**, 1241-1247, (1986).

107. M. C. JUNGER et D. FEIT,

"Sound, structures, and their interaction", MIT Press, Cambridge, 2ème ed., (1986).

108. R. BOSSUT,

"Modélisation en transitoire pour moteurs piézoactifs", Convention : MRE 92T0822, (1995).

109. R. HICKLING,

"Analysis of echoes from a hollow metallic sphere in water", *J. Acoust. Soc. Am.*, **36**, 1124-1137, (1964).

110. D. DECULTOT,

"Diffusion acoustique par des objets axi-symétriques immergés. Cas des cylindres limités par des hémisphériques", Thèse de Doctorat, Université du Havre, (1993).

111. B. DUBUS, A. LAVIE et N. VEKSLER,

"Frequency derivative approach for identification of the wave resonances on immersed elastic bodies", *J. Acoust. Soc. Am.*, **102**, 3523-3529, (1997).

112. R. HAZEBROUCK,

"Etude expérimentale de la diffraction acoustique par une cible rigide : cylindre terminé par deux hémisphères", *Journal de Physique*, 2, coll. 1, Supl. JP III n° 4, 705-708, (1992).

113. J. CHIUMIA, E. M. AASIF, N. TOURAINE et D. DECULTOT,

"Acoustic scattering from a cylindrical shell bounded by two hemispherical endcaps : case of axial incidence", *Acte du 4e congrès Français d'Acoustique*, vol. 2, 793-796, (1997).

114. A. ELGHAOUTY, A. LAVIE et B. DUBUS,

"Méthode des équations intégrales appliquée à la diffraction acoustique en régime temporel", GAPSUS, Lyon, (1998).

Bibliographie.

LISTE DES SYMBOLES

Nous présentons ci-dessous, pour la commodité du lecteur, la liste des principales notations utilisées dans ce document, notations qui sont d'ailleurs redéfinies dans le texte au fur et à mesure de leur introduction.

c	: vitesse de son
c_{ijkl}	: termes du tenseur des rigidités élastiques $[c]$,
CFL	: condition de Courant-Friedrichs-Lewy
div	: opérateur divergence,
$d\mathbf{r}'$: élément de surface des intégrales de Helmholtz-Kirchhoff,
dV	: élément de volume,
$d\Gamma$: élément de surface,
EQM	: erreur quadratique moyenne
f	: fréquence centrale du signal incident,
\underline{F}	: champ des forces volumiques,
g	: fonction de Green associée à l'espace infini,
grad	: opérateur gradient,
i	: nombre complexe de carré -1,
k	: nombre d'onde,
$[K]$: matrice de rigidité,
$[M]$: matrice de masse cohérente pour la structure,
$M-1$: degré maximum des équations de champ nul,
\underline{n}	: normale au point \underline{r} à la surface orientée positivement vers l'extérieur,
\underline{n}'	: normale au point \underline{r}' à la surface orientée positivement vers l'extérieur,
N_j	: fonction de forme,
NE	: nombre d'éléments Γ_j du maillage,
NN	: nombre de noeuds du maillage,

Symboles.

NNE	: nombre de noeuds par élément Γ_j ,
NG1	: nombre de points de Gauss suivant la première direction
NG2	: nombre de points de Gauss suivant la seconde direction
O, X,Y,Z	: repère global cartésien,
p	: pression totale,
p_d	: pression diffusée,
p_{inc}	: pression incidente,
p_r	: pression rayonnée,
r	: distance entre l'origine du repère et le point \underline{r} ,
r'	: distance entre l'origine du repère et le point \underline{r}' ,
\underline{r}	: point de calcul,
\underline{r}'	: point courant sur la surface,
R	: distance $ \underline{r} - \underline{r}' $ entre les points \underline{r} et \underline{r}' ,
t	: variable temps,
Δt	: pas de temps,
T_{ij}	: termes des tenseurs des contraintes [T],
S_{kl}	: termes des tenseurs des déformations [S],
u	: déplacement,
u_i	: composante normale du déplacement,
τ	: variable temps retardé,
x,y,z	: coordonnées cartésiennes,
\underline{v}	: champ des vitesses,
α	: angle solide,
Γ	: surface de la structure,
Γ_j	: élément du maillage,
Δ	: opérateur Laplacien,

Symboles.

ξ, φ	: coordonnées réduites en symétrie axiale,
λ	: longueur d'onde,
v	: effet de l'onde incidente en régime fréquentiel,
γ	: effet de l'onde incidente en régime transitoire,
ρ	: masse volumique de fluide,
ω	: pulsation,
Ω_f	: domaine fluide d'extention infinie,
Ω_i	: structure,
$\frac{\partial}{\partial n}$: dérivée normale au point \underline{r} à la surface,
$\frac{\partial}{\partial n'}$: dérivée normale au point \underline{r}' à la surface,
$\frac{\partial}{\partial t}$: dérivée temporelle,
[]	: matrice,
{ }	: vecteur,

Symboles.

LÉGENDES DES FIGURES ET TABLEAUX

Chapitre 1 :

figure 1.1	: détection acoustique de sous-marin	11
figure 1.2	: domaine acoustique	11
figure 1.3	: limitation du volume fluide	25

Chapitre 2 :

figure 2.1	: maillage d'une génératrice d'une sphère	29
figure 2.2	: visualisation d'une structure à symétrie axiale	29
tableau 2.1	: différences entre les méthodes explicites et implicites	46
figure 2.3a	: le noeud de calcul Γ_i coïncide avec un des noeuds extrêmes de l'élément	48
figure 2.3b	: le noeud de calcul Γ_i coïncide avec le noeud milieu de l'élément le domaine d'intégration est découpé en deux	48
figure 2.4	: arbre programmatique de code EQI dans le cas de la diffraction rigide	54

Chapitre 3 :

figure 3.1	: positions de la source et des points de calcul	58
tableau 3.1	: différentes formes temporelles de l'onde incidente	61
figure 3.2	: cas d'un signal cosinusoidal au point P_1	61
tableau 3.2	: erreur quadratique moyenne au point P_1	63
tableau 3.3	: erreur quadratique moyenne au point P_2	63
tableau 3.4	: temps CPU en fonction de $c\Delta t/a$	63
figure 3.3	: pression diffractée par la sphère rigide au point P_1 dans le cas d'un signal cosinusoidal $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$	64
figure 3.4	: pression diffractée par la sphère rigide au point P_2 dans le cas d'un signal cosinusoidal $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$	65
figure 3.5	: pression diffractée par la sphère rigide au point P_3 dans le cas d'un signal cosinusoidal $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$	66
figure 3.6	: pression diffractée par la sphère rigide au point P_4 dans le cas d'un signal cosinusoidal $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$	67
figure 3.7	: pression diffractée par la sphère rigide au point P_1 dans le cas de la méthode implicite $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$	68
figure 3.8	: pression diffractée par la sphère rigide au point P_2 dans le cas de la méthode implicite $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$	68

Légendes.

figure 3.9	: pression diffractée par la sphère rigide au point P_3 dans le cas de la méthode implicite $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$	69
figure 3.10	: pression diffractée par la sphère rigide au point P_4 dans le cas de la méthode implicite $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$	69
figure 3.11	: EQM dans le cas du signal cosinusoidal pour les méthodes de différences finies $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$	70
figure 3.12	: EQM dans le cas du signal cosinusoidal pour la méthode implicite $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$	70
figure 3.13	: trajet d'une onde physique atteignant P_2 ou atteignant P_1 après avoir effectué un tour.	73
figure 3.14	: pression totale au point P_2 dans le cas d'un signal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 0.119$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 1.13$	73
figure 3.15	: pression totale au point P_2 dans le cas d'un signal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 0.074$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 0.70$	74
figure 3.16	: temps d'arrivée des ondes physique et parasite dans l'espace $(\theta, ct/a)$	74
figure 3.17	: pression totale calculée par la méthode ML : $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$	75
figure 3.18	: pression totale calculée par la méthode implicite : $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 2.27$	75
figure 3.19	: pression totale au point P_1 dans le cas d'un signal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 0.014$, $f = 2/(120\Delta t)$, $CFL = 0.14$	76
figure 3.20	: pression totale au point P_2 dans le cas d'un signal cosinusoidal : $\Delta t/a = 0.014$, $f = 2/(120\Delta t)$, $CFL = 0.14$	76
figure 3.20a	: pression totale au point P_1 dans le cas d'un signal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 0.014$, $f = 2/(120\Delta t)$, $CFL = 0.42$	77
figure 3.20b	: pression totale au point P_2 dans le cas d'un signal cosinusoidal : $\Delta t/a = 0.014$, $f = 2/(120\Delta t)$, $CFL = 0.42$	77
figure 3.21	: pression totale au point P_2 dans le cas d'un signal sinusoidal : $c\Delta t/a = 0.148$, $f = 2/(25\Delta t)$, $CFL = 1.41$	78
figure 3.22	: pression totale au point P_2 dans le cas d'un signal gaussien : $\Delta t/a = 0.148$, $CFL = 1.41$	78
figure 3.23	: représentation de l'interpolation de la pression dans l'espace $(r-r' , ct)$	82
figure 3.24	: pression diffractée au point P_1 dans le cas du signal cosinusoidal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 0.208$, $f = 2/(30\Delta t)$	82
figure 3.25	: pression diffractée au point P_1 dans le cas du signal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 0.238$, $f = 2/(30\Delta t)$	83
figure 3.26	: tracé du logarithme népérien de la valeur absolue de la pression présentée à la figure 3.25	83
figure 3.27	: pression diffractée dans la zone d'instabilité à l'instant $ct/a = 44$: $c\Delta t/a = 0.208$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 1.9$	84
figure 3.28	: pression diffractée dans la zone d'instabilité à l'instant $ct/a = 60$: $c\Delta t/a = 0.208$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 1.9$	84
figure 3.29	: pôles de la fonction de forme dans le plan complexe des fréquences	85
figure 3.30	: mesure de critère de stabilité.	85
figure 3.31	: tracé du logarithme népérien de la valeur absolue de la pression diffractée pour trois valeurs de ka : $ka_1 = 1.4$, $ka_2 = 2.8$, $ka_3 = 5.62$	

Légendes.

	avec $c\Delta t/a = 0.074$, $CFL = 0.71$	86
figure 3.32	: mesure de stabilité en fonction du ka pour la méthode MC : $c\Delta t_1/a = 0.07$, $c\Delta t_2/a = 0.059$, $c\Delta t_3/a = 0.044$	87
figure 3.33	: pression diffractée au point P_1 dans le cas du signal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 0.089$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 0.56$	89
figure 3.34	: pression diffractée au point P_1 dans le cas du signal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 0.014$, $f = 2/(120\Delta t)$, $CFL = 0.14$	89
figure 3.35	: pression diffractée au point P_1 dans le cas du signal cosinusoidal : $c\Delta t/a = 0.007$, $f = 2/(240\Delta t)$, $CFL = 0.07$	90
figure 3.36	: mesure de stabilité en fonction du $c\Delta t/a$ pour la méthode MC	90
figure 3.37	: mesure de stabilité en fonction du maillage : $c\Delta t/a = 0.074$, $ka = 5.62$	91
figure 3.38	: tracés des logarithmes népériens des valeurs absolues des pressions diffractées en fonction du maillage : $c\Delta t/a = 0.074$, $ka = 5.62$, $CFL = 0.71$	91
figure 3.39	: effet du moyennage sur la pression diffractée au point P_1 $c\Delta t/a = 0.074$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 0.71$	93
figure 3.40	: tracé du logarithme népérien des valeurs absolues des pressions présentées à la figure 3.39	93
figure 3.41	: effet de moyennage sur la pression diffractée au point P_1 $c\Delta t/a = 0.074$, $f = 2/(30\Delta t)$, $CFL = 0.71$	94
figure 3.42	: tracé du logarithme népérien des valeurs absolues des pressions présentées à la figure 3.41	94
figure 3.43	: méthode de moyennage dans la zone d'instabilité $c\Delta t/a = 0.044$, $f = 2/(40\Delta t)$, $CFL = 0.42$	95
figure 3.44	: tracé du logarithme népérien des valeurs absolues des pressions présentées à la figure 3.43	95
figure 3.45	: logarithme népérien de l'amplitude de la pression au point P_1 $c\Delta t_1/a = 0.198$, $c\Delta t_2/a = 0.119$, $ka = 3.5$	98
figure 3.46	: logarithme népérien de l'amplitude de la pression au point P_1 $ka_1 = 7.02$, $ka_2 = 4.40$ $c\Delta t/a = 0.119$	98
figure 3.47	: logarithme népérien de l'amplitude de la pression au point P_1 pour différents maillage $a\Delta\theta_1 = 0.104$, $a\Delta\theta_2 = 0.087$: $ka = 3.5$, $c\Delta t/a = 0.198$	99
figure 3.48	: critère de stabilité en fonction du $1/f\Delta t$ dans le cas d'un signal cosinusoidal pour différents pas du temps ($\Delta\theta = 0.104$)	99
figure 3.49	: critère de stabilité en fonction du $1/f\Delta t$ dans le cas d'un signal cosinusoidal pour différents pas du temps ($\Delta\theta = 0.078$)	100
figure 3.50	: critère de stabilité en fonction de $a\Delta\theta/c\Delta t$ pour différents ka	100
figure 3.51	: schéma de la structure LINE et position des points de calcul	103
figure 3.52	pression totale au point P_1 dans le cas d'un signal cosinusoidal $c\Delta t/a = 0.044$, $ka = 9.37$, $CFL = 1.13$	104
figure 3.53	: pression totale au point P_2 dans le cas d'un signal cosinusoidal $c\Delta t/a = 0.044$, $ka = 9.37$, $CFL = 1.13$	104
figure 3.54	: pression totale au point P_3 dans le cas d'un signal cosinusoidal $c\Delta t/a = 0.044$, $ka = 9.37$, $CFL = 1.13$	105
figure 3.55	: pression totale au point P_4 dans le cas d'un signal cosinusoidal $c\Delta t/a = 0.044$, $ka = 9.37$, $CFL = 1.13$	105
figure 3.56	: pression totale au point P_5 dans le cas d'un signal cosinusoidal $c\Delta t/a = 0.044$, $ka = 9.37$, $CFL = 1.13$	106
figure 3.57	: pression totale présentée à la figure 3.57 pour $ct/a > 10$: $c\Delta t/a = 0.044$, $ka = 9.37$, $CFL = 1.13$	106

Chapitre 4 :

figure 4.1	: fonctions d'interpolation et de pondération d'après la référence [5]	120
figure 4.2	: coque sphérique, $b/a = 0.97$	121
figure 4.3	: maillage de la coque sphérique.	121
figure 4.4	: signal sinusoïdal au point P_1 : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 1/(20\Delta t)$	122
figure 4.5	: pression diffusée par la coque sphérique au point P_1 dans le cas d'un signal sinusoïdal : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 1/(20\Delta t)$	122
figure 4.6	: pression diffusée par la coque sphérique au point P_2 dans le cas d'un signal sinusoïdal : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 1/(20\Delta t)$	123
figure 4.7	: pression rétrodiffusée par la coque sphérique au point P_3 dans le cas d'un signal sinusoïdal : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 1/(20\Delta t)$	123
figure 4.8	: pression incidente dans le cas d'un signal sinusoïdal quasi-harmonique	124
figure 4.9	: pression diffusée par la coque sphérique au point P_1 dans le cas d'un signal sinusoïdal quasi-harmonique : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 1/(20\Delta t)$	124
figure 4.10	: pression diffusée par la coque sphérique au point P_2 dans le cas d'un signal sinusoïdal quasi-harmonique : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 1/(20\Delta t)$	125
figure 4.11	: pression diffusée par la coque sphérique au point P_3 dans le cas d'un signal sinusoïdal quasi-harmonique : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 1/(20\Delta t)$	125
figure 4.12	: pression diffusée par la coque sphérique au point P_1 dans le cas d'un signal cosinusoïdal : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 2/(30\Delta t)$	126
figure 4.13	: tracé du logarithme népérien de la valeur absolue de pression présentée à la figure 4.12.	126
figure 4.14	: pression diffusée par la coque sphérique au point P_2 dans le cas d'un signal cosinusoïdal : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 2/(30\Delta t)$	127
figure 4.15	: pression diffusée par la coque sphérique au point P_3 dans le cas d'un signal cosinusoïdal : $c\Delta t/a = 2.235$ et $f = 2/(30\Delta t)$	127

Annexe A1:

figure A1.1	: domaine de solution	152
-------------	---------------------------------	-----

ANNEXES

Annexe A1 : Obtention de l'équation de Helmholtz

Annexe A2 : Calcul des intégrales de Kirchhoff

Annexe A3 : Obtention d'une formulation intégrale espace-temps à partir de la formulation de Burton et Miller dans le domaine fréquentiel

ANNEXE A1

REPRESENTATION INTEGRALE DE KIRCHHOFF

Dans cette étude, on détaille les démarches qui conduisent à la représentation intégrale de Kirchhoff.

L'évolution de la pression acoustique $p(\underline{r}, t)$ en fonction du temps, au point d'observation \underline{r} , est régie par l'équation des ondes :

$$\Delta p(\underline{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\underline{r}, t)}{\partial t^2} = -\gamma(\underline{r}, t) \quad \underline{r} \in \Omega_f \quad (\text{A1.1})$$

où Δ est l'opérateur laplacien et γ contient l'effet de la source génératrice du signal incident.

A partir de cette équation, on peut dériver la formulation espace-temps de potentiel retardé de Kirchhoff [32-33, 41]. Pour aboutir à cette représentation de Kirchhoff, il est nécessaire d'introduire une fonction $G(\underline{r}, t | \underline{r}', t')$. Celle-ci doit satisfaire, en particulier, à l'équation de Helmholtz inhomogène :

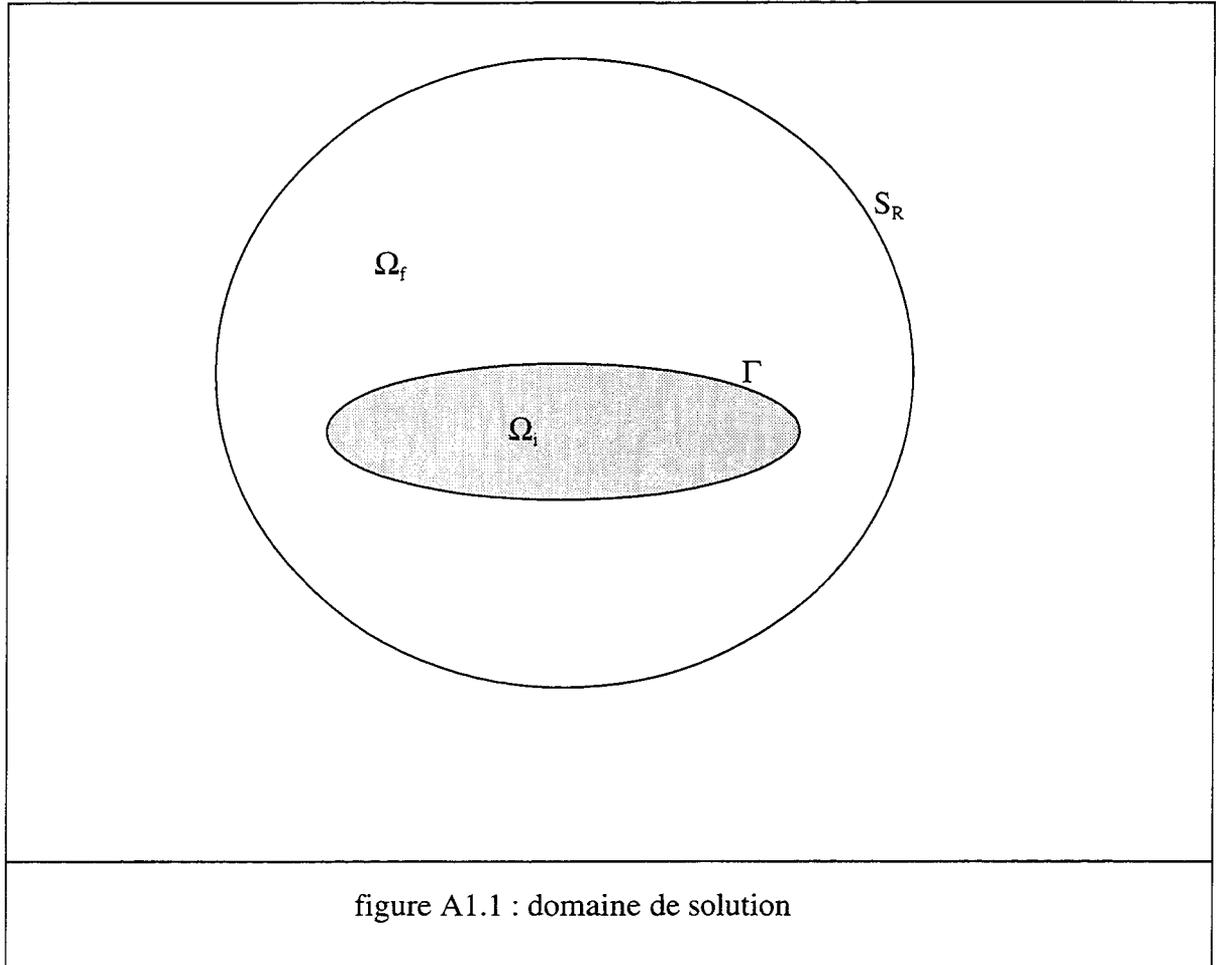
$$\Delta G(\underline{r}, t | \underline{r}', t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\underline{r}, t | \underline{r}', t')}{\partial t^2} = -\delta(\underline{r} - \underline{r}') \delta(t - t') \quad (\text{A1.2})$$

La condition de Sommerfeld, qui traduit le caractère divergent de l'onde aux limites de l'espace d'étude, permet d'extraire la solution physique de l'équation (A1.2). Ainsi, la fonction $G(\underline{r}, t | \underline{r}', t')$ associée à l'espace infini s'écrit :

$$G(\underline{r}, t | \underline{r}', t') = \frac{\delta(R/c - (t - t'))}{4\pi R} \quad (\text{A1.3})$$

avec $R = |\underline{r} - \underline{r}'|$. Dans ce cas, $G(\underline{r}, t | \underline{r}', t')$ est la fonction de Green de l'espace libre.

On peut schématiser l'espace de travail de la manière suivante :



Le volume Ω_f est l'espace compris à l'intérieur de la sphère S_R auquel on soustrait le volume Ω_i intérieur à Γ (Figure A1.1).

L'intégration dans l'espace et dans le temps t' de la différence du produit de l'équation (A1.1) par la fonction $G(\underline{r}, t|\underline{r}', t')$ et de l'équation (A1.2) par la fonction $p(\underline{r}', t')$ donne l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_f} p(\underline{r}', t') \delta(\underline{r} - \underline{r}') \delta(t - t') d\underline{r}' dt' - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_f} \gamma(\underline{r}', t') G(\underline{r}, t|\underline{r}', t') d\underline{r}' dt' \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_f} \{ G(\underline{r}, t|\underline{r}', t') \Delta p(\underline{r}', t') - p(\underline{r}', t') \Delta G(\underline{r}, t|\underline{r}', t') \} d\underline{r}' dt' \quad (\text{A1.4}) \\
 &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_f} \left\{ p(\underline{r}', t') \frac{\partial^2 G(\underline{r}, t|\underline{r}', t')}{c^2 \partial t'^2} - G(\underline{r}, t|\underline{r}', t') \frac{\partial^2 p(\underline{r}', t')}{c^2 \partial t'^2} \right\} d\underline{r}' dt'
 \end{aligned}$$

Examinons les différents termes de cette équation :

Dans le premier membre, la première intégrale se réduit à $p(\underline{r}, t)$ et la seconde intégrale tient le rôle de la pression incidente :

$$p_{\text{inc}}(\underline{r}, t) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_f} \gamma(\underline{r}', t') G(\underline{r}, t | \underline{r}', t') d\underline{r}' dt' \quad (\text{A1.5})$$

Pour le second membre de (A1.4), on écrit :

$$p(\underline{r}', t') \frac{\partial^2 G(\underline{r}, t | \underline{r}', t')}{c^2 \partial t'^2} - G(\underline{r}, t | \underline{r}', t') \frac{\partial^2 p(\underline{r}', t')}{\partial t'^2} = \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ p(\underline{r}', t') \frac{\partial G(\underline{r}, t | \underline{r}', t')}{c^2 \partial t'} - G(\underline{r}, t | \underline{r}', t') \frac{\partial p(\underline{r}', t')}{c^2 \partial t'} \right\} \quad (\text{A1.6})$$

L'application du second théorème de Green aux fonctions $G(\underline{r}, t | \underline{r}', t')$ et $p(\underline{r}', t')$ dans le volume Ω_f de surfaces Γ et S_R donne :

$$\int_{\Omega_f} \{ G(\underline{r}, t | \underline{r}', t') \Delta p(\underline{r}', t') - p(\underline{r}', t') \Delta G(\underline{r}, t | \underline{r}', t') \} d\underline{r}' = \int_{\Gamma \cup S_R} \left\{ G(\underline{r}, t | \underline{r}', t') \frac{\partial p(\underline{r}', t')}{\partial n'} - p(\underline{r}', t') \frac{\partial G(\underline{r}, t | \underline{r}', t')}{\partial n'} \right\} d\underline{r}' \quad (\text{A1.7})$$

En combinant les équations (A1.4) à (A1.7), on obtient :

$$p(\underline{r}, t) - p_{\text{inc}}(\underline{r}, t) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma \cup S_R} \left\{ G(\underline{r}, t | \underline{r}', t') \frac{\partial p(\underline{r}', t')}{\partial n'} - p(\underline{r}', t') \frac{\partial G(\underline{r}, t | \underline{r}', t')}{\partial n'} \right\} d\underline{r}' dt' + \int_{\Omega_f} \left[p(\underline{r}', t') \frac{\partial G(\underline{r}, t | \underline{r}', t')}{c^2 \partial t'} - G(\underline{r}, t | \underline{r}', t') \frac{\partial p(\underline{r}', t')}{c^2 \partial t'} \right]_{t_1}^{t_2} d\underline{r}' \quad (\text{A1.8})$$

Par la causalité de la fonction $G(\underline{r}, t | \underline{r}', t')$ on a [33] :

$$\lim_{\substack{t_2 \rightarrow \infty \\ t_1 \rightarrow -\infty}} \left[p(\underline{r}', t') \frac{\partial G(\underline{r}, t | \underline{r}', t')}{c^2 \partial t'} - G(\underline{r}, t | \underline{r}', t') \frac{\partial p(\underline{r}', t')}{c^2 \partial t'} \right]_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (\text{A1.9})$$

Lorsque le rayon R tend vers l'infini, l'intégrale sur S_R s'annule. On obtient finalement :

$$p(\underline{r}, t) - p_i(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\delta(R/c - (t - t'))}{R} \frac{\partial p(\underline{r}', t')}{\partial n'} - p(\underline{r}', t') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{\delta(R/c - (t - t'))}{R} \right\} d\underline{r}' dt' \quad (\text{A1.10})$$

Pour simplifier le second membre de l'équation (A1.10), on note que :

$$p(\underline{r}', t') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{\delta(R/c - (t - t'))}{R} \right) = p(\underline{r}', t') \delta(R/c - (t - t')) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) + p(\underline{r}', t') \frac{1}{R} \frac{\partial \delta(R/c - (t - t'))}{\partial n'} \quad (\text{A1.11})$$

et que [33] :

$$\frac{\partial \delta(R/c - (t - t'))}{\partial n'} = \frac{\partial \delta(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial n'} = \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial n'} \frac{\partial \delta(R/c - (t - t'))}{\partial t'} \quad (\text{A1.12})$$

avec : $u = R/c - (t - t')$. Une intégration par partie donne [33] :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{p(\underline{r}', t')}{R} \frac{\partial}{\partial n'} (\delta(R/c - (t - t'))) dt' = -\frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial n'} \int_{t_1}^{t_2} \delta(R/c - (t - t')) \frac{\partial p(\underline{r}', \tau)}{\partial t'} dt' \quad (\text{A1.13})$$

En introduisant le temps retardé $\tau = t - R/c$, l'équation (A1.10) devient :

$$p(\underline{r}, t) - p_{inc}(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\delta(t' - \tau)}{R} \frac{\partial p(\underline{r}', t')}{\partial n'} \right\} d\underline{r}' dt' - \frac{1}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \left\{ p(\underline{r}', t') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) \delta(t' - \tau) \right\} d\underline{r}' dt' + \frac{1}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial n'} \delta(t' - \tau) \frac{\partial}{\partial t'} p(\underline{r}', t') \right\} d\underline{r}' dt' \quad (\text{A1.14})$$

Après l'intégration suivant t' , on trouve :

$$p(\underline{r}, t) - p_{inc}(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial p(\underline{r}', \tau)}{\partial n'} - \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{R} \right) p(\underline{r}', \tau) + \frac{1}{cR} \frac{\partial R}{\partial n'} \frac{\partial p(\underline{r}', \tau)}{\partial \tau} \right\} d\underline{r}' \quad (\text{A1.15})$$

La normale \underline{n}' à Γ au point \underline{r}' de la structure est dirigée positivement vers le fluide. On aboutit finalement à l'équation :

$$p(\underline{r}, t) - p_{inc}(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{-1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \frac{\partial p(\underline{r}', \tau)}{\partial n'} \right\} d\underline{r}' + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\underline{n}' \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^2} \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} p(\underline{r}', \tau) + \frac{1}{c} \frac{\partial p(\underline{r}', \tau)}{\partial \tau} \right\} d\underline{r}' \quad (\text{A1.16})$$

Cette formule est connue sous le nom de représentation intégrale espace-temps de Kirchhoff. Elle donne la pression dans le fluide. Quand \underline{r} est un point de la frontière Γ , on introduit l'angle solide $\alpha(\underline{r})$ vu de l'extérieur normé à 4π dans l'équation intégrale sur Γ . L'angle solide est donné par la formule suivante [53] :

$$\alpha(\underline{r}) = 4\pi + \iint_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n'} \left\{ \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right\} d\underline{r}' \quad \underline{r} \in \Gamma \quad (\text{A1.17})$$

La formulation espace-temps du potentiel retardé de Kirchhoff devient donc :

$$p_{inc}(\underline{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left[\frac{-1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}', \tau) + \frac{\underline{n}' \cdot (\underline{r} - \underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|^2} \left(\frac{p(\underline{r}', \tau)}{|\underline{r} - \underline{r}'|} + \frac{1}{c|\underline{r} - \underline{r}'|} \frac{\partial}{\partial \tau} p(\underline{r}', \tau) \right) \right] d\underline{r}' = \begin{cases} p(\underline{r}, t) & \underline{r} \in \Omega_f \\ \frac{\alpha(\underline{r})}{4\pi} p(\underline{r}, t) & \underline{r} \in \Gamma \\ 0 & \underline{r} \in \Omega_i \end{cases} \quad (\text{A1.18})$$

ANNEXE A2

CALCUL DES INTEGRALES DE KIRCHHOFF

Cette annexe présente le calcul des intégrales singulières qui apparaissent lors du traitement de l'équation intégrale espace-temps de Kirchhoff dans le cas d'un problème à symétrie axiale. Les trois intégrales en question sont les équations (2.88), (2.89) et (2.90) :

$$A_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} d\varphi \quad (\text{A2.1})$$

$$A'_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\underline{n}' \cdot (\underline{r}' - \underline{r})}{R^2} d\varphi \quad (\text{A2.2})$$

$$A_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\underline{n}' \cdot (\underline{r}' - \underline{r})}{R^3} d\varphi \quad (\text{A2.3})$$

où R est la distance entre le noeud de calcul \underline{r} et \underline{r}' . Ces intégrales sont singulières et nécessitent un traitement spécial basé sur l'emploi d'intégrales elliptiques.

Calcul de l'intégrale A_1 :

On note respectivement $(x, 0, z)$ et (x', y', z') les coordonnées du noeud de calcul \underline{r} et du point d'intégration. x' et y' sont fonctions de ξ et φ alors que z' est uniquement fonction de ξ . En se référant à (2.6), on a la relation entre x' et y' :

$$x'^2(\xi, \varphi) + y'^2(\xi, \varphi) = x'^2(\xi, 0) \quad (\text{A2.4})$$

Cette relation permet d'écrire que :

$$R = \sqrt{a - b \cos(\varphi)} \quad (\text{A2.5})$$

avec :

$$\begin{aligned} a(\xi) &= (z - z'(\xi))^2 + x^2 + x'^2(\xi, 0) \\ b(\xi) &= 2xx'(\xi, 0) \end{aligned} \quad (\text{A2.6})$$

où a , b , α et β sont des grandeurs fonctions de ξ . Les variables a et b sont positives. D'après [105] on a :

$$A_1 = \frac{4}{\sqrt{a+b}} [F(\delta, D)]_0^\pi \quad (\text{A2.7})$$

avec :

$$D = \sqrt{\frac{2b}{a+b}} \quad (\text{A2.8})$$

F est l'intégrale elliptique de première espèce. Sachant que :

$$\delta(0) = 0 \quad \delta(\pi) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{A2.9})$$

et que :

$$F(0, D) = 0 \quad (\text{A2.10})$$

on a :

$$A_1 = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F\left(\frac{\pi}{2}, D\right) \quad (\text{A2.11})$$

Calcul de l'intégrale A_2 :

Le produit scalaire $(\underline{r}'(\xi, \varphi) - \underline{r}) \cdot \underline{n}'(\xi, \varphi)$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$(\underline{r}'(\xi, \varphi) - \underline{r}) \cdot \underline{n}'(\xi, \varphi) = \alpha(\xi) + \beta(\xi) \cos(\varphi) \quad (\text{A2.12})$$

avec:

$$\begin{aligned} \alpha(\xi) &= \frac{1}{\mathcal{R}(\xi)} \left((z'(\xi) - z) \frac{dx'(\xi, 0)}{d\xi} - x'(\xi, 0) \frac{dz'(\xi)}{d\xi} \right) \\ \beta(\xi) &= \frac{x}{\mathcal{R}(\xi)} \frac{dz'(\xi)}{d\xi} \end{aligned} \quad (\text{A2.13})$$

Il vient alors:

$$A_2 = 2\alpha \int_0^\pi \frac{1}{R^3} d\varphi + 2\beta \int_0^\pi \frac{\cos(\varphi)}{R^3} d\varphi \quad (\text{A2.14})$$

On sait que [105] :

$$\int_0^\pi \frac{1}{R^3} d\varphi = \frac{2}{(a-b)\sqrt{a+b}} [E(\delta, D)]_0^\pi \quad (\text{A2.15})$$

où E est l'intégrale elliptique complète de seconde espèce, et que :

$$E(0, D) = 0 \quad (\text{A2.16})$$

on a donc :

$$\int_0^\pi \frac{1}{R^3} d\varphi = \frac{2}{(a-b)\sqrt{a+b}} E\left(\frac{\pi}{2}, D\right) \quad (\text{A2.17})$$

On impose le changement de variable :

$$t = a - b \cos(\varphi) \quad (\text{A2.18})$$

sur la deuxième intégrale de (A2.14). Après calcul on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos(\varphi)}{R^3} d\varphi &= \frac{a}{b} \int_{a-b}^{a+b} \frac{dt}{\sqrt{t^3(t-a+b)(a+b-t)}} \\ &\quad - \frac{1}{b} \int_{a-b}^{a+b} \frac{dt}{\sqrt{t(t-a+b)(a+b-t)}} \end{aligned} \quad (\text{A2.19})$$

Après introduction des intégrales elliptiques [105], l'équation (A2.19) devient :

$$\int_0^\pi \frac{\cos(\varphi)}{R^3} d\varphi = \frac{a}{b} \frac{2}{(a-b)\sqrt{a+b}} [E(\chi, D)]_{a-b}^{a+b} - \frac{1}{b} \frac{2}{\sqrt{a+b}} [F(\lambda, D)]_{a-b}^{a+b} \quad (\text{A2.20})$$

avec :

$$\begin{aligned} \chi(a-b) &= 0 & \chi(a+b) &= \frac{\pi}{2} \\ \lambda(a-b) &= \frac{\pi}{2} & \lambda(a+b) &= 0 \end{aligned}$$

donc :

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(\varphi)}{R^3} d\varphi = \frac{2a}{b(a-b)\sqrt{a+b}} E\left(\frac{\pi}{2}, D\right) + \frac{1}{b} \frac{2}{\sqrt{a+b}} F\left(\frac{\pi}{2}, D\right) \quad (\text{A2.21})$$

Finalement:

$$A_2 = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left(\frac{\alpha + (a\beta)/b}{a-b} E\left(\frac{\pi}{2}, D\right) + \frac{\beta}{b} F\left(\frac{\pi}{2}, D\right) \right) \quad (\text{A2.22})$$

Calcul de l'intégrale A'₁ :

A partir de l'équation (A2.12), on peut écrire l'intégrale A'₁ sous la forme :

$$A'_1 = 2 \int_0^{\pi} \frac{\alpha + \beta \cos(\varphi)}{R^2} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \frac{\alpha}{R^2} d\varphi + 2 \int_0^{\pi} \frac{\beta \cos(\varphi)}{R^2} d\varphi \quad (\text{A2.23})$$

D'après la référence [105], A'₁ peut s'écrire :

$$A'_1 = \frac{-2\beta}{b} \pi + 2 \frac{\alpha b + a\beta}{b} \int_0^{\pi} \frac{1}{a - \beta \cos(\varphi)} d\varphi \quad (\text{A2.24})$$

comme $a^2 > b^2$, on a [105] :

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a - \beta \cos(\varphi)} d\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (\text{A2.25})$$

Finalement :

$$A'_1 = \frac{-2\beta}{b} \pi + \left(\alpha + \frac{a\beta}{b} \right) \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (\text{A2.26})$$

Les développements en série des équations (2.94) terminent le calcul des intégrales A₁, A'₁ et A₂.

ANNEXE A3

Obtention d'une formulation espace-temps a partir de la formulation de Burton et Miller en fréquentiel

En domaine fréquentiel, Burton et Miller [46] ont proposé une formulation intégrale qui résulte de la somme membre à membre de l'équation (1.7b) et de sa forme différenciée après multiplication de cette dernière par un coefficient complexe C :

$$\begin{aligned}
 p_i(\underline{r}) + \iint_{\Gamma} \left(p(\underline{r}') \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} g(\underline{r}, \underline{r}') \right) d\underline{r}' \\
 + C \left(\frac{\partial p_i(\underline{r})}{\partial n} + \iint_{\Gamma} \left\{ p(\underline{r}') \frac{\partial^2 g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n \partial n'} - \frac{\partial p(\underline{r}')}{\partial n'} \frac{\partial g(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n} \right\} d\underline{r}' \right) \quad (A3.1) \\
 = \frac{1}{2} p(\underline{r}) + \frac{C}{2} \frac{\partial p(\underline{r})}{\partial n} \quad \underline{r} \in \Gamma
 \end{aligned}$$

où \underline{r} est le point de calcul, \underline{r}' le point courant sur Γ , $\frac{\partial}{\partial n'}$ la dérivée normale au point \underline{r}' et, $\frac{\partial}{\partial n}$ la dérivée normale au point \underline{r} . La solution est unique pour toute valeur de k à condition que le coefficient C soit strictement complexe.

En régime transitoire, la dépendance temporelle des variables est de la forme $e^{+i\omega t}$. Par transformation de Fourier inverse de l'équation (A3.1), on obtient une formulation intégrales en domaine temporel (équation (A3.2)). Il est à noter que cette formulation présente des singularités très fortes qui demandent un traitement particulier.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}p(\underline{r}, t) + \frac{C}{2} \frac{\partial p(\underline{r}, t)}{\partial n} = p_i(\underline{r}, t) + C \frac{\partial p_i(\underline{r}, t)}{\partial n} \\
& + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left[\frac{-1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \frac{\partial}{\partial n'} p(\underline{r}', \tau) + \frac{\underline{n}' \cdot (\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \left(\frac{p(\underline{r}', \tau)}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2} + \frac{1}{c|\underline{r}-\underline{r}'|} \frac{\partial}{\partial \tau} p(\underline{r}', \tau) \right) \right] d\underline{r}' \\
& + \frac{C}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\underline{n}' \cdot (\underline{r}'-\underline{r}) \underline{n} \cdot (\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'| |\underline{r}-\underline{r}'| |\underline{r}-\underline{r}'|^3} p(\underline{r}', \tau) d\underline{r}' \\
& + \frac{3C}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\underline{n}' \cdot (\underline{r}'-\underline{r}) \underline{n} \cdot (\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'| |\underline{r}-\underline{r}'|} \frac{\partial}{\partial \tau} p(\underline{r}', \tau)}{c|\underline{r}-\underline{r}'|^2} d\underline{r}' \\
& + \frac{C}{4\pi} \iint_{\Gamma} \left[\frac{\underline{n}' \cdot \underline{n}}{c|\underline{r}-\underline{r}'|^2} + \frac{\underline{n}' \cdot \underline{n}}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} p(\underline{r}', \tau) d\underline{r}' + \\
& + \frac{C}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\underline{n}' \cdot (\underline{r}'-\underline{r}) \underline{n} \cdot (\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'| |\underline{r}-\underline{r}'|} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} p(\underline{r}', \tau)}{c^2 |\underline{r}-\underline{r}'|} d\underline{r}' \\
& + \frac{C}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\underline{n} \cdot (\underline{r}-\underline{r}')}{c|\underline{r}-\underline{r}'|^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial p(\underline{r}', \tau)}{\partial n'} \right) d\underline{r}' + \frac{C}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{\underline{n} \cdot (\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \frac{\partial p(\underline{r}', \tau)}{\partial n'} d\underline{r}'
\end{aligned} \tag{A3.2}$$

Résumé de thèse

La description vibratoire d'une structure immergée dans un fluide d'extension infinie et celle des ondes acoustiques générées par cette vibration ou génératrices de cette vibration sont susceptibles de nombreuses applications, en particulier dans le domaine de l'acoustique sous-marine. En régime temporel, la méthode des équations intégrales est couramment utilisée pour modéliser la diffusion acoustique.

Le travail décrit dans cette thèse concerne l'implantation dans le code EQI de la représentation intégrale espace-temps de Helmholtz-Kirchhoff. Les champs de pression dans le fluide environnant sont évalués à partir du simple maillage de la surface du corps. La discrétisation du problème considéré est menée par l'emploi de plusieurs méthodes d'interpolation. Les instabilités dont souffre la méthode des équations intégrales ont pour origine les résonances parasites associées aux fréquences irrégulières dans le domaine fréquentiel. Elles sont accentuées par l'évaluation imprécise des intégrales résultant du choix des discrétisations temporelles par différences finies qui rendent discontinues les intégrandes. La méthode basée sur une discrétisation spatio-temporelle par éléments finis, originale en acoustique, garantit la continuité des intégrandes et donne des résultats stables, dans une gamme de fréquence raisonnable, en très bonne concordance avec les solutions analytiques. Pour résoudre les problèmes de couplage fluide-structure, une interface entre le code EQI et le code éléments finis ATILA a été réalisée. Les valeurs nodales du déplacement sont calculées par la partie éléments finis. Les pressions sur la surface puis dans le fluide sont obtenues par la partie équations intégrales. Ce modèle a été validé par des solutions analytiques disponibles. Cette thèse aboutit à une nouvelle version du code EQI capable de modéliser la diffusion acoustique par des cibles immergées en régime temporel.

Mots-clefs

Diffusion / Diffraction acoustique
Acoustic scattering

Domaine temporel
Time domain

Instabilité numérique
Numerical instability

Méthode de moyennage
Averaging method

Méthode des éléments de frontière
Boundary element method

Modélisation numérique
Numerical modeling

Méthode des équations intégrales
Integral equation method

Interpolation quadratique
Quadratic interpolation

Fréquences irrégulières
Irregular frequencies

Thesis abstract

The vibrational description of immersed targets in fluid of infinite extension has many applications, particularly in underwater acoustics. In the time domain, the integral equation method is usually used to model the acoustic scattering.

This work is devoted to the implantation of the Helmholtz-Kirchhoff space-time integral formulation in the EQI code. Several interpolation techniques are used in order to achieve space-time discretization. Numerical instabilities are studied. They are basically due to spurious resonances which are associated to irregular frequencies in the frequency domain. These resonances are accentuated by an inaccurate evaluation of the integrals due to the finite-difference time discretization which causes discontinuities in the integrands. On the other hand, the use of a space-time finite-element discretization method, guarantees the integrand continuity and provides stable and accurate results in a sufficiently wide band of frequencies. In order to solve the fluid-structure problem, a coupling method between EQI and the finite element code ATILA is developed. The structure is described using the finite-element method and the surrounding fluid by the foreseen integral equation method. The coupling is obtained by prescribing kinematic and dynamic continuity conditions on the interface for the discretized set of equations.

The model is validated by comparison with existing analytical solutions. This work provides a new version of the EQI code for time domain modelling of acoustic scattering by immersed targets.

Keywords

Acoustic scattering

Time domain

Numerical instability

Averaging method

Boundary element method

Numerical modeling

Integral equation method

Quadratic interpolation

Irregular frequencies

