

Jan 2006972

50376
1998
217

Université des Sciences et Technologies de Lille

Numéro d'ordre : 2356



THÈSE

pour obtenir

le titre de Docteur de l'université de Lille I
Spécialité : Mathématiques

par

LAURENT MEERSSEMAN

Titre de la thèse : *Un procédé géométrique de construction de variétés compactes, complexes, non algébriques, en dimension quelconque.*

Directeur de Thèse : **Alberto VERJOVSKY**

soutenue le 14 décembre 1998 devant la commission d'examen :

<i>Président</i>	A. Haefliger	<i>Université de Genève</i>
<i>Rapporteurs</i>	E. Ghys	<i>E.N.S. de Lyon</i>
	M.S. Narasimhan	<i>I.C.T.P., Trieste</i>
<i>Examineurs</i>	M. Nicolau	<i>U.A.B., Barcelone</i>
	F. Lescure	<i>Université de Lille I</i>
	J.J. Loeb	<i>Université d'Angers</i>
	S. López de Medrano	<i>U.N.A.M., Mexico</i>

Cette thèse représente l'aboutissement de deux ans et demi de travail assidu, ayant fait suite au choix volontaire de délaissier le monde de l'entreprise pour celui de la recherche. Ni ce travail, ni ce choix ne furent faciles. Dans les deux cas, quelques personnes m'ont aidé, m'ont conseillé ou tout simplement soutenu. Sans elles ce travail ne serait pas ce qu'il est, et n'existerait peut-être même pas. Je tiens à les remercier ici.

Jean-Pierre Bourguignon et François Laudenbach m'ont initié à la géométrie moderne, Yvette Kosmann Schwarzbach m'a fait découvrir le métier de chercheur en mathématiques. Je les remercie vivement de m'avoir transmis leur passion.

En arrivant à Lille, je suis directement allé voir Alberto Verjovsky, sur les conseils de Jean-Pierre Bourguignon. Je n'ai toujours eu qu'à me féliciter de l'avoir comme directeur de thèse, et comme ami.

J'ai fait mes premiers pas en complexe sous la direction de Frank Loray. Je lui dois mathématiquement beaucoup.

Etienne Ghys et Santiago López de Medrano ont suivi mes travaux depuis le début et m'ont inspiré bien des idées essentielles de cette thèse. Ils m'ont également donné confiance quant à la valeur de mon travail. Je les remercie de plus d'avoir accepté d'être respectivement rapporteur et examinateur de ce travail.

Je suis très touché par la présence de Jean-Jacques Loeb et Marcel Nicolau dans ce jury. Ils ont manifesté très tôt leur intérêt pour ce que je faisais, et j'ai puisé certaines idées et résultats dans leurs articles communs.

Ma rencontre avec François Lescure m'a donné un autre point de vue sur la construction présentée dans cette thèse, qui m'a permis d'obtenir certains résultats, inespérés jusque là. Je tiens à le remercier pour les merveilleuses explications qu'il a su me donner de points particulièrement obscurs pour moi, et pour avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie vivement M.S. Narasimhan d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse ; c'est pour moi un grand honneur. Notre rencontre à Trieste a changé mon avenir mathématique, et m'a ouvert de nouveaux horizons insoupçonnés.

Je suis très honoré de la présence d'André Haefliger comme président de ce jury, lui qui est à l'origine de cette chaîne mathématique qui, passant par Jean-Jacques Loeb et Marcel Nicolau, Santiago López de Medrano et Alberto Verjovsky, a inspiré cette thèse.

Michel Belliard, Gérard Cœuré, Octavian Cornea, Youssef Hantout, et Sergueï Ivachkovitch sont venus régulièrement à mon secours pour m'expliquer ce que je ne comprenais pas. Isabelle Liousse a suivi ce travail en l'absence d'Alberto. A eux, ainsi qu'à tous ceux à qui j'ai pu poser des questions et qui m'ont toujours sympathiquement répondu, j'adresse mes sincères remerciements.

Une pensée pour mon ami Bruno Beauflis qui m'a régulièrement aidé à me sortir des pièges de l'informatique.

Je remercie également le service de reprographie de l'U.F.R. de mathématiques pour la réalisation matérielle des copies et reliures.

Notations

Dans cette thèse, nous avons utilisé le principe de numérotation des énoncés mathématiques suivant :

- (i) Les théorèmes sont numérotés de 1 à 15 tout au long du texte, sans aucune référence à la partie dans laquelle ils se trouvent.
- (ii) La numérotation des propositions se fait à l'intérieur d'une partie : après changement de partie, la première proposition de la nouvelle partie prend le nom de proposition 1. Les renvois sont faits sous la forme : proposition 1 de la cinquième partie, ou simplement proposition 2, lorsque l'on renvoie à une proposition de la partie dans laquelle l'on se trouve.
- (iii) La numérotation des lemmes suit la même règle que celle des propositions. Elle en est indépendante.
- (iv) Enfin, les corollaires d'un théorème ou d'une proposition sont numérotés par des lettres majuscules, et ce uniquement si le théorème ou la proposition en question possède plus d'un corollaire. Les renvois prennent la forme : corollaire de la proposition 3 de la deuxième partie, ou corollaire B du théorème 4.

Par ailleurs, les notations suivantes sont utilisées dans toute la thèse :

- (i) On désignera par $\mathbb{C}P^n$ l'espace projectif complexe de dimension n .
- (ii) On notera les coordonnées projectives entre crochets : $[z]$ signifie l'image dans $\mathbb{C}P^n$ d'un point z de \mathbb{C}^{n+1} par la projection canonique $\mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$.
- (iii) De façon plus générale, on utilisera la même notation entre crochets pour représenter une classe quotient, lorsqu'une projection d'un espace sur son quotient par une action aura été préalablement définie.
- (iv) Dans \mathbb{C}^n , la notation $\langle -, - \rangle$ désigne le **produit scalaire et non hermitien**. Pour deux vecteurs $U = (u_1, \dots, u_n)$ et $V = (v_1, \dots, v_n)$ de \mathbb{C}^n , on pose :

$$\langle U, V \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i .$$

- (v) On désignera par $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$ les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe z , la notation $|z|$ désignant, quant à elle, le module de ce nombre.
- (vi) La notation $\|-\|$ désigne la norme euclidienne standard de \mathbb{C}^n . Pour un vecteur $U = (u_1, \dots, u_n)$ de \mathbb{C}^n , on a :

$$\|U\|^2 = \sum_{i=1}^n |u_i|^2 .$$

- (vii) Pour $K = \mathbb{C}$, \mathbb{R} ou \mathbb{Z} , on note $M_n(K)$ l'espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans K , et $GL_n(K)$ le sous-espace des éléments inversibles de $M_n(K)$. Pour A une matrice de $M_n(K)$, on note $\det A$ son déterminant et ${}^t A$ sa transposée. De plus, $SL_n(K)$ désigne le sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ constitué des éléments de déterminant 1, et $PSL_n(K)$ le sous-espace des éléments dont le déterminant est de module 1. Enfin, pour A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, on note $\operatorname{rg}_{\mathbb{R}} A$ son rang réel (i.e. le rang de ses vecteurs colonnes vus comme vecteurs de \mathbb{R}^{2n}), et $\operatorname{rg}_{\mathbb{C}} A$ son rang complexe (i.e. le rang de ses colonnes vues comme vecteurs de \mathbb{C}^n).

- (viii) Pour (U_1, \dots, U_p) un ensemble de vecteurs de \mathbb{C}^n (respectivement \mathbb{R}^n), on appelle $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(U_1, \dots, U_p)$ (respectivement $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(U_1, \dots, U_p)$) le sous-espace vectoriel complexe (respectivement réel) engendré par ces vecteurs.
- (ix) Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel et soit $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Alors $\dim_K E$ désigne la dimension de E comme K -espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriel de E , on notera $\text{cod}_K F$, la codimension de F dans E , lorsque ces espaces sont considérés comme K -espaces vectoriels.
- (x) On note S^n la sphère de dimension n , et T^n le tore réel $(S^1)^n$, et enfin $T_{\mathbb{C}}^n$ un tore réel de dimension $2n$ muni d'une structure complexe.
- (xi) Pour X une variété lisse (respectivement holomorphe), on désigne par TX son fibré tangent différentiable (respectivement holomorphe). Dans les deux cas, pour x point de X , l'espace tangent en x est désigné par $T_x X$. Pour ξ un champ de vecteurs de X et ω une forme, on note $L_{\xi}\omega$ la dérivée de Lie de ω par rapport à ξ et $i_{\xi}\omega$ le produit intérieur de ω par ξ . Enfin, pour deux champs de vecteurs ξ_1 et ξ_2 de X , on notera $[\xi_1, \xi_2]$ leur crochet de Lie.
- (xii) Pour X une variété, on note $\pi_i(X)$ son i -ème groupe d'homotopie et $H_i(X, *)$ (respectivement $H^i(X, *)$) le i -ème groupe d'homologie (respectivement de cohomologie) de X à valeurs dans $*$.
- (xiii) On désigne par $X \# Y$ la somme connexe de deux variétés lisses sans bord de même dimension X et Y .
- (xiv) Soit M une variété. L'identité de M dans M est notée Id .
- (xv) Sauf mention explicite du contraire, nous employons le terme variété algébrique dans le sens de **variété complexe projective algébrique** (cf Introduction).

Cette thèse a été tapée en $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\text{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$, les diagrammes commutatifs utilisent le package de Paul Taylor.

INTRODUCTION.

L'objet de cette thèse est de présenter une construction de variétés compactes complexes en dimension quelconque, généralisant celle de Santiago López de Medrano et Alberto Verjovsky [LdM-Ve], d'étudier les propriétés de cette classe de variétés, et d'exhiber de nouvelles familles d'exemples explicites provenant de cette classe. Par dimension quelconque, nous pensons en particulier à des exemples en dimension strictement supérieure à deux. En effet, les surfaces de Riemann sont bien connues et il ne manque pas de procédés pour les construire (cf [Gu1]). Les surfaces complexes, en dépit de la classification de Kodaira (voir [B-P-V]), ne sont pas toutes "facilement constructibles" ; cependant, elles posent des problèmes bien spécifiques et nous ne nous intéressons pas à elles dans cette thèse (même si nous obtiendrons quelques exemples classiques de surfaces).

Rappelons tout d'abord qu'une variété compacte complexe de dimension complexe n peut être définie comme (voir [We]) :

- un espace topologique compact séparé X muni d'un atlas $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ où :
 - (i) les ouverts U_α recouvrent X .
 - (ii) les cartes $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ sont des homéomorphismes.
 - (iii) les changements de cartes :

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n$$

sont des biholomorphismes.

- une variété différentiable X de dimension réelle $2n$ dont le fibré tangent TX est muni d'une application, disons C^∞ , donnée localement par :

$$J : (x, u) \in X \times \mathbb{R}^{2n} \longmapsto (x, J_x \cdot u) \in X \times \mathbb{R}^{2n}$$

vérifiant :

- (i) $J^2 \equiv -Id$. On dit alors que (X, J) est une variété *presque complexe*.
- (ii) Pour tous champs de vecteurs Y et Z de classe C^∞ sur X , on a :

$$[JZ, JY] = [Z, Y] + J[JZ, Y] + J[Z, JY] .$$

On dit alors que la structure presque complexe J est *intégrable*.

l'équivalence des deux définitions étant assurée par le théorème de Newlander-Nirenberg [N-N].

Ces définitions étant rappelées, nous allons, dans cette introduction, justifier de la difficulté à réaliser l'objet de cette thèse, i.e. de la difficulté à exhiber des exemples explicites de variétés compactes complexes (non algébriques - voir plus loin) en dimension strictement supérieure à deux. Nous expliquerons d'une part les problèmes spécifiques posés par cette recherche et détaillerons d'autre part les résultats existants.

Mais, avant cela, et pour fixer les idées sur les différences entre le cas réel et le cas complexe, citons brièvement les résultats d'existence de structures complexes sur les sphères (cf [Su]).

Théorème (Steenrod). *Les seules sphères de dimension paire qui admettent une structure presque complexe sont S^2 et S^6 .*

Bien entendu, la sphère S^2 admet une unique structure complexe en tant qu'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^1$. Par contre, les structures presque complexes que l'on sait construire sur S^6 ne sont pas intégrables, de telle sorte que l'on a :

Problème ouvert. *La sphère S^6 admet-elle une structure de variété complexe?*

Ce problème représente, à coup sûr, la question non résolue la plus importante de ce domaine. Bien que l'opinion générale soit de répondre négativement à cette question, et que, depuis plus de trente ans, plusieurs "démonstrations" en ce sens aient été publiées (voir par exemple [M-K] p.18), aucune preuve décisive n'a encore été apportée.

Plongements de variétés compactes complexes et formulation du problème.

L'existence de deux manières bien distinctes de définir une variété compacte complexe suggère l'existence de deux voies de réalisations de tels exemples. La deuxième voie, qui consiste à construire, sur une variété différentiable donnée, une structure presque complexe intégrable, ne sera pas abordée dans ce travail.

Nous allons nous concentrer ici sur l'utilisation de la première définition et les manières directes de construire un tel objet. En réel, une technique standard consiste, pour montrer qu'un certain espace admet une structure de variété lisse, à le réaliser comme sous-variété de \mathbb{R}^n , plutôt que d'élaborer directement un atlas. Le théorème de plongement de Whitney assure en effet que cela est toujours possible (même si, dans certains cas, le plongement en question puisse s'avérer très compliqué et donc inutilisable). En complexe, tout est très différent. Par application du principe du maximum, une fonction holomorphe globale sur une variété complexe compacte est constante (cf [We]), ce qui a pour corollaire :

Proposition. *Une variété compacte complexe non réduite à un point ne peut se plonger holomorphiquement dans \mathbb{C}^n (pour n quelconque).*

Ceci incite à contourner ce problème en considérant les plongements holomorphes d'une variété complexe dans la compactification naturelle de \mathbb{C}^n , à savoir l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$. Néanmoins, l'espace $\mathbb{C}P^n$ possède des propriétés bien particulières, ce qui induit des restrictions quant aux variétés holomorphes admettant un plongement projectif. Afin de préciser cela, rappelons quelques définitions et faits que l'on trouvera dans [M-K].

- Soit N une variété compacte complexe de dimension complexe n , et soit g une métrique hermitienne sur N (qui existe forcément, cf [M-K]). Alors la 2-forme réelle donnée dans une carte locale (z_1, \dots, z_n) par :

$$\omega = \frac{i}{2} \left(\sum_{i,j=1}^n \phi_{i,j} dz_i \wedge d\bar{z}_j \right) \quad \text{pour} \quad g = \sum_{i,j=1}^n \phi_{i,j} dz_i \otimes d\bar{z}_j$$

est appelée *forme fondamentale* de la métrique g .

- Une variété compacte complexe N est dite *kählérienne* si et seulement si elle possède une métrique hermitienne g dont la forme fondamentale associée ω est fermée. La forme ω est alors nécessairement non exacte et représente donc une classe non triviale du groupe de cohomologie de de Rham $H^2(N, \mathbb{R})$.
- Plus encore, les puissances extérieures de ω (jusqu'à la n -ième) représentent toutes des classes non nulles de cohomologie. Ainsi tous les nombres de Betti pairs de N sont strictement positifs. De plus, la forme ω est une forme fermée non exacte, dont la n -ième puissance extérieure est une forme volume, donc la forme ω et la variété N sont symplectiques.

L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ muni de la métrique de Fubini-Study est l'exemple standard de variété kählérienne. Il est alors clair que les variétés possédant un plongement holomorphe dans le projectif complexe vont jouir de propriétés bien particulières. En particulier, comme sous-variétés compactes de $\mathbb{C}P^n$, elles sont kählériennes ([We] p.182), la forme kählérienne étant donnée par la restriction au plongement de la 2-forme kählérienne standard de $\mathbb{C}P^n$. Ceci a pour conséquence immédiate que tous les nombres de Betti pairs de la variété plongée sont strictement positifs, ce qui est assurément une restriction topologique très forte. On peut dire en fait beaucoup plus :

Théorème (Chow). *Toute sous-variété holomorphe compacte de $\mathbb{C}P^n$ est algébrique, i.e. est lieu des zéros, dans $\mathbb{C}P^n$, d'un nombre fini de polynômes homogènes complexes de $n + 1$ variables.*

Ainsi, les seules variétés compactes complexes qui admettent un plongement dans le projectif complexe sont très particulières et très faciles à construire, et pour ces deux raisons ne nous intéressent pas ; de telle sorte que nous pouvons reformuler le but de cette thèse en :

Problème.

- *Développer un procédé de construction de variétés compactes, complexes, non algébriques, en dimension quelconque (et plus spécialement en dimension complexe strictement supérieure à deux).*
- *Étudier les propriétés principales de cette classe de variétés, à savoir fonctions méromorphes, formes holomorphes, champs de vecteurs holomorphes, espaces de déformations, ...*
- *Exhiber de cette classe des familles d'exemples explicites de nouvelles variétés compactes complexes, et donner des éléments de classification, à difféomorphisme près, des variétés appartenant à cette classe.*

Variétés compactes complexes et variétés algébriques.

Avant de passer à l'étude des résultats existants en relation avec ce problème, posons nous la question de savoir s'il existe "beaucoup" de variétés compactes, complexes, non algébriques.

En dimension un, toute surface de Riemann est algébrique, suivant le profond résultat de Riemann lui-même. En dimension deux, en utilisant la classification de Kodaira (voir [B-P-V]), l'on s'aperçoit qu'il existe des variétés non algébriques mais difféomorphes à un modèle algébrique (cas des tores complexes), des variétés non algébriques sans modèle algébrique (cas des surfaces de type VII), mais que de toute

façon la classification des surfaces entretient des liens étroits avec la classification des surfaces algébriques.

Tout change, au contraire, à partir de la dimension trois. Alors qu'il existe une classification partielle des 3-variétés algébriques similaire au cas des surfaces (programme de Mori, voir [C-K-M]), le résultat suivant, corollaire d'un théorème de Taubes [Ta] :

Théorème (Taubes). *Tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'une 3-variété complexe compacte.*

prouve que l'on ne peut espérer donner une classification des variétés compactes complexes de dimension plus grande ou égale à trois. En effet, l'existence d'une telle classification pour les groupes de présentation finie est indécidable (savoir si un mot précis appartient à un groupe précis, sa présentation étant donnée, est indécidable). Dès lors, dans le problème posé précédemment, et ainsi que nous l'avions laissé entendre dans l'avant-dernier paragraphe, l'hypothèse *non algébriques*, loin d'être une restriction, traduit uniquement le fait que nous nous intéressons au problème général.

Action de groupes. Variétés de Hopf.

Le premier exemple de variétés compactes complexes non algébriques (si l'on excepte le cas des tores complexes non algébriques) est dû à Hopf en 1948 (voir [Ho]). Il utilise le fait suivant, dont l'on pourra trouver une démonstration dans [M-K] et [We] :

Fait 1. *Soit G un groupe agissant holomorphiquement et totalement discontinûment sur une variété complexe X . Alors l'espace quotient X/G admet une unique structure de variété complexe telle que la projection naturelle $X \rightarrow X/G$ soit un revêtement holomorphe (non ramifié).*

Rappelons que l'action de G sur X est dite :

- *holomorphe* si pour tout g de G , l'application :

$$x \in X \longmapsto g.x \in X$$

est holomorphe.

- *totalement discontinue* si aucun élément de G ne possède de point fixe, et si, pour tous compacts K_1 et K_2 de X , l'ensemble :

$$\{g \in G \mid g.K_1 \cap K_2 \neq \emptyset\}$$

est fini.

Notons que, dans le fait 1, le groupe G n'est rien d'autre qu'un sous-groupe du groupe d'automorphismes de X . Dans ces conditions, Hopf considère l'action de \mathbb{Z} sur $\mathbb{C}^n - \{0\}$ (pour $n \geq 2$) donnée par :

$$(m, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^n - \{0\} \longmapsto (z_1.r^m, \dots, z_n.r^m) \in \mathbb{C}^n - \{0\}$$

pour r un réel strictement inférieur à un (en fait, dans [Ho], Hopf traite l'exemple où n vaut 2 et r vaut $1/2$). On vérifie immédiatement que cette action est holomorphe

et totalement discontinue, donc, par application du fait cité plus haut, que l'espace quotient X est une variété complexe. Par ailleurs, tout point de la boule unité est envoyé, après un nombre fini d'itérations positives (i.e. pour $m \geq 0$) à l'intérieur de la boule de centre 0 de rayon r . Inversement tout point de cette boule est envoyé par l'action, pour un $m < 0$, en dehors de cette boule mais dans la boule unité ; de telle sorte qu'un domaine fondamental pour cette action est constitué par la partie de \mathbb{C}^n comprise entre la sphère unité et la sphère centrée en 0 et de rayon r , à condition de recoller ces deux sphères par l'homothétie de centre 0 de rapport r . De ce fait, l'espace X est difféomorphe au produit de sphères $S^1 \times S^{2n-1}$.

De plus, il résulte de cette identification que le deuxième groupe de cohomologie de de Rham $H^2(X, \mathbb{R})$ est nul, donc (cf les rappels faits précédemment) que X n'est pas symplectique, donc pas kählérienne et finalement pas algébrique. Ce caractère non symplectique est à souligner, car un théorème de Gromov [Gro] affirme qu'au contraire, toute variété presque complexe **non** compacte est symplectique.

Les variétés de Hopf ont été intensément étudiées (voir, par exemple, [Ma1], [Ma2], [Ma3], voir aussi les travaux de Kodaira résumés dans [B-P-V] pour le cas particulier de $S^3 \times S^1$) et généralisées. En particulier, Haefliger [Ha] a montré que toute action holomorphe totalement discontinue de \mathbb{Z} sur $\mathbb{C}^n - \{0\}$ a pour quotient une variété complexe difféomorphe à un produit de sphères de dimension impaire. Il obtient ainsi une plus large classe de structures complexes sur $S^1 \times S^{2n-1}$ et peut calculer l'espace de déformations de Kuranishi de ces variétés (voir aussi [Bor]).

En fait, l'assertion 1 ne donne pas facilement beaucoup d'exemples de variétés compactes complexes, puisqu'elle nécessite de connaître un revêtement de ces variétés, et le groupe d'automorphismes de ce revêtement. On ne peut ainsi l'utiliser pour construire des structures complexes sur des produits $S^{2p-1} \times S^{2n-1}$ pour p et n strictement supérieurs à un, par simple connexité. Par ailleurs, les deux résultats suivants (voir [Has] et [Su] respectivement) :

Théorème (Hasegawa). *Soit X une variété compacte complexe ayant pour revêtement universel $\mathbb{C}^n - \{0\}$. Alors X est un quotient fini d'une variété de Hopf.*

Théorème. *Soit X une variété compacte complexe ayant pour revêtement universel un domaine borné de \mathbb{C}^n . Alors X est algébrique.*

illustrent ces difficultés. Notons pour terminer ce paragraphe qu'en revanche Brieskorn et Van de Ven [B-V] ont utilisé le fait 1 pour construire des structures complexes sur $S^1 \times \Sigma^{2n-1}$ pour Σ une sphère d'homotopie (voir aussi [Mor] pour la classification des structures complexes ainsi obtenues). Enfin, d'autres exemples sont donnés dans [Od] (p.169) en appliquant le fait 1 à des ouverts de variétés toriques.

Variétés de Calabi-Eckmann.

Calabi et Eckmann donnent dans [C-E] un procédé de construction de structures complexes sur les produits de sphères de dimension impaire $S^{2p-1} \times S^{2n-1}$. La technique employée consiste à montrer que l'on peut munir les fibres en $S^1 \times S^1$ de la fibration :

$$S^{2p-1} \times S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{C}P^{p-1} \times \mathbb{C}P^{n-1}$$

d'une structure complexe de façon à faire de $S^{2p-1} \times S^{2n-1}$ une variété compacte complexe, non algébrique pour la même raison que les variétés de Hopf. Il s'agit

en quelque sorte d'une extension continue du fait 1, puisque ce fait repose sur l'utilisation d'un revêtement, i.e. d'un fibré à fibres discrètes.

Notons qu'au contraire il n'existe même pas de structures presque complexes sur les produits de sphères de dimension paire autres que $S^2 \times S^4$ et les produits faisant intervenir S^2 et S^6 (voir [D-S]). La structure presque complexe sur $S^2 \times S^4$ vient de ce que l'on peut plonger $S^2 \times S^4$ dans \mathbb{R}^7 , et que toute 6-variété lisse orientable plongée dans \mathbb{R}^7 admet une structure presque complexe (voir [Ca]).

Variétés transverses à un feuilletage holomorphe.

Les constructions de Hopf, Haefliger, et Calabi-Eckmann ont été unifiées par Loeb et Nicolau dans [L-N1] grâce au fait suivant :

Fait 2. *Soit X une variété différentiable plongée dans Z , variété complexe, transversalement à un feuilletage holomorphe \mathcal{F} de Z . Alors ce feuilletage holomorphe induit sur X une structure complexe.*

Ici transversalement signifie que, localement, X rencontre chaque feuille de \mathcal{F} en au plus un point, et qu'en un tel point z , on a :

$$T_z \mathcal{F} \oplus T_z X = T_z Z$$

où $T_z *$ désigne l'espace tangent réel de $*$ en z . La démonstration de ce fait est immédiate : étant donné un atlas holomorphe feuilleté de Z , les changements de cartes transverses au feuilletage donnent un atlas holomorphe de X . Remarquons qu'il s'agit d'une propriété locale, i.e. que l'on peut considérer un germe de feuilletage holomorphe.

Loeb et Nicolau considère un germe de champ de vecteurs holomorphe en $0 \in \mathbb{C}^n$ dont la partie linéaire est sous forme canonique de Jordan, et dont les valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ satisfont à la condition de Poincaré : 0 n'appartient pas à leur enveloppe convexe (lorsqu'on les voit comme n vecteurs de \mathbb{R}^2). Ils montrent que, sous une condition dite d'hyperbolicité faible (m, n) portant sur les valeurs propres, l'on peut plonger le produit de sphères $S^{2m-1} \times S^{2n-2m-1}$ transversalement au flot induit par le champ de vecteurs. Par application du fait 2, l'on récupère ainsi une structure complexe sur ce produit de sphères. Ils obtiennent de cette manière une classe de structures complexes sur ce produit de sphères beaucoup plus large que celle formée par les variétés de Hopf et Calabi-Eckmann. Ils font également une étude très détaillée de ces structures, calculant en particulier leurs déformations et leur cohomologie de Dolbeault.

Remarquons que le fait 2 semble propice à la construction d'un beaucoup plus grand nombre d'exemples que le fait 1. En regard des restrictions que nous avons faites à ce sujet pour le fait 1, citons la conjecture suivante, à trouver dans [Bo] :

Conjecture (Bogomolov). *Toute variété compacte complexe peut être obtenue comme sous-variété différentiable transverse à un feuilletage holomorphe d'une variété algébrique, et munie de la structure complexe héritée de ce feuilletage.*

Variétés de López de Medrano-Verjovsky.

La dernière construction que nous allons exposer maintenant, celle de Santiago López de Medrano et Alberto Verjovsky [LdM-Ve], forme le point de départ de cette thèse, qui consiste en sa généralisation. On considère sur \mathbb{C}^n le champ de vecteurs :

$$\xi : (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \in T_z \mathbb{C}^n$$

dont les valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ vérifient :

- (i) la condition de Siegel : 0 appartient à l'enveloppe convexe de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, vus comme vecteurs de \mathbb{R}^2 .
- (ii) la condition d'hyperbolicité faible : 0 n'appartient pas au segment $[\lambda_i, \lambda_j]$, pour i et j deux entiers quelconques entre 1 et n .

Sous ces hypothèses, l'union S des feuilles fermées du flot induit par ξ (dites feuilles de Siegel) est un ouvert dense de \mathbb{C}^n , et la projectivisation de l'espace des feuilles pour le feuilletage restreint à cet ouvert dense est une variété compacte complexe, non symplectique et donc non algébrique sauf dans un cas particulier.

Remarquons que cette construction utilise à la fois les faits 1 et 2 des sections précédentes. En effet, l'on montre dans [LdM-Ve] que, en restriction à l'ouvert S , le flot possède une transversale globale différentiable, qui, par application du fait 2, est une variété complexe. Ainsi cette construction peut être vue comme un cas particulier du fait 2, dans lequel la variété transverse X coïncide avec l'espace des feuilles.

D'un autre côté, cette construction se rapproche du fait 1 en ce sens que la variété compacte complexe obtenue provient du quotient d'un ouvert dense de $\mathbb{C}^n - \{0\}$ par l'action :

$$(\alpha, T, z) \in (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}) \times S \longmapsto (\alpha z_1 e^{\lambda_1 \cdot T}, \dots, \alpha z_n e^{\lambda_n \cdot T}) \in S$$

analogue "continu" de l'action discrète de Hopf. Plus encore, nous montrons dans la partie II que les variétés construites dans le cas López de Medrano-Verjovsky sont compactification de groupes de Lie complexes obtenus en prenant le quotient de \mathbb{C}^n par une action holomorphe totalement discontinue de \mathbb{Z}^{n+1} .

Variétés complexes et somme connexe.

Avant de passer au résumé du contenu de cette thèse, nous voulons nous attarder sur le problème des chirurgies en complexe (cf [M-K]), et plus spécifiquement sur le problème posé par les sommes connexes. En effet, un des résultats importants de cette thèse est l'obtention de structures complexes sur des exemples explicites de sommes connexes de produits de sphères, et nous voulons ici expliquer en quoi ce résultat est non trivial.

Il existe très peu d'exemples explicites de variétés compactes complexes difféomorphes à une somme connexe de variétés en dimension strictement supérieure à deux. Kato et Yamada (voir [Ka] et [K-Y]) ont donné de tels exemples en dimension complexe trois. Lu-Tian et Friedman (voir [L-T] et [Fr]) ont construit des

structures complexes sur la somme connexe d'un nombre quelconque de $S^3 \times S^3$ avec la propriété supplémentaire d'avoir fibré canonique trivial.

La raison de ce nombre très faible d'exemples consiste en ce qu'il n'existe pas de moyen canonique de mettre une structure complexe sur une somme connexe de variétés complexes (en dimension strictement supérieure à un). En bref, la somme connexe complexe n'existe pas en plusieurs variables. Afin d'illustrer cette assertion, nous allons prouver deux propositions qui rendent compte de cette impossibilité d'abord du point de vue presque complexe, puis du point de vue complexe. Premièrement, nous avons :

Proposition (cf [Au]). *Soient X et Y deux variétés presque complexes de même dimension réelle $2m$. Alors, si m est différent de 1 et de 3, les structures presque complexes de X et de Y ne s'étendent pas à la somme connexe $X \sharp Y$.*

Preuve. La somme connexe de X et Y est obtenue de la manière suivante : on plonge dans X et dans Y un disque D^{2m} , que nous noterons D_X ou D_Y lorsque nous le considérerons comme sous-variété de X ou, respectivement, de Y . On enlève alors de X et Y un sous-disque D' inclus dans D^{2m} (que nous noterons selon la même convention D'_X ou D'_Y) et on recolle les deux variétés le long de l'anneau $D - D'$, difféomorphe à $S^{2m-1} \times [1/2, 1]$, (plus précisément on recolle l'anneau $D_X - D'_X$ avec l'anneau $D_Y - D'_Y$) par un difféomorphisme ϕ qui inverse les bords, de manière à récupérer une variété orientable. On montre alors que cette construction est indépendante des plongements de disques et du difféomorphisme choisis (cf [Hir]).

De cette construction, il ressort clairement que si les structures presque complexes de X et Y s'étendent à $X \sharp Y$, il est nécessaire que la restriction de la structure presque complexe de X au disque D_X coïncide par ϕ , sur l'anneau $D' - D$, avec la restriction de la structure presque complexe de Y au disque D_Y . Mais alors, ceci permet de recoller les deux disques le long de leur anneau par le difféomorphisme ϕ , en respectant les structures presque complexes. On obtient ainsi une structure presque complexe sur la sphère S^{2m} produit du recollement, donc l'on doit avoir m égal à un ou trois. \square

Si maintenant nous nous plaçons au niveau des structures complexes, nous avons :

Proposition. *Soient X et Y deux variétés complexes de même dimension complexe $m > 1$. Alors il n'existe pas de structure complexe naturelle sur la somme connexe $X \sharp Y$.*

Preuve. Pour qu'il y ait une structure complexe naturelle sur $X \sharp Y$ il faut réussir à rendre la construction de somme connexe, rappelée dans la preuve de la proposition précédente, holomorphe. En particulier, cela nécessite l'existence d'un biholomorphisme d'un anneau $S^{2m-1} \times [1/2, 1]$ qui renverse les bords. Plongeons cet anneau comme la partie de \mathbb{C}^m comprise entre la sphère unité et la sphère de rayon $1/2$; nous cherchons un biholomorphisme de cette région qui inverse les deux sphères qui en forment le bord. Pour $m > 1$, le théorème d'élimination des singularités compactes de Hartogs implique qu'un tel biholomorphisme s'étend en un biholomorphisme de la boule unité de \mathbb{C}^m . Mais un tel biholomorphisme envoie la sphère unité à l'intérieur de la boule unité, donc viole le principe du maximum. \square

Par ailleurs, il existe des exemples de variétés presque complexes dont la somme connexe ne possède aucune structure presque complexe (cf [Au], [B-P-V]). En par-

ticulier, nous avons l'exemple suivant (je remercie Claude Lebrun pour m'avoir indiqué cet exemple) :

Proposition. *Soit k un entier strictement supérieur à un. Soit X la somme connexe de k copies de variétés de Hopf $S^1 \times S^3$. Alors X ne possède aucune structure presque complexe.*

Preuve. Supposons le contraire. Alors, on a la formule de l'indice (cf [B-P-V], p.18) :

$$c_1^2(X) - 2c_2(X) = 3\tau(X)$$

où $c_1^2(X)$ et $c_2(X)$ désignent l'intégrale sur X du carré (pour le produit extérieur) de la première classe de Chern, et de la deuxième classe de Chern, $\tau(X)$ la signature. Comme nous avons $H^2(X, \mathbb{R})$ nul, la première classe de Chern et la signature sont nulles. De plus, l'intégrale de la seconde classe de Chern est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré, donc est égale à la somme alternée des nombres de Betti. Mais, pour $k > 0$, celle-ci n'est pas nulle, d'où contradiction. \square

Au contraire, nous construisons dans cette thèse (partie VII) des exemples de variétés complexes somme connexe de variétés qui n'admettent aucune structure presque complexe.

Description des résultats obtenus.

Nous finissons cette introduction en donnant le résumé des résultats obtenus en réponse au problème posé précédemment. Les sept points suivants décrivent les sept parties de cette thèse.

Résumé.

- *Nous adaptons la construction de [LdM-Ve] au cas de m champs de vecteurs agissant sur \mathbb{C}^n (avec $n > 2m$).*
- *Nous montrons que, dans le cas $2m + 1$, nous obtenons des tores complexes, et que nous pouvons obtenir par ce procédé tous les tores complexes de toutes les dimensions. Au contraire, pour $n > 2m + 1$, nous montrons que les variétés obtenues ne sont pas symplectiques, donc pas algébriques.*
- *Nous montrons que, pour $n > 2m + 1$, les variétés obtenues n'admettent pas de désingularisée kählérienne. Nous calculons, dans certains cas, le degré de transcendance du corps des fonctions méromorphes. Nous calculons, sous une condition générique (H), dont nous donnons l'interprétation géométrique, la dimension de l'espace des 1-formes holomorphes globales.*
- *Nous calculons, sous certaines conditions, la dimension de l'espace des champs de vecteurs holomorphes globaux. Généralisant [L-N2], nous montrons qu'il existe sur ces variétés un feuilletage holomorphe régulier de dimension m transversalement kählérien. Ceci nous permet de donner une description complète des sous-variétés holomorphes et ensembles analytiques de grande dimension, sous la condition (H). Nous montrons que, sous une condition rationnelle (K), l'espace des feuilles de ce feuilletage transversalement kählérien est une orbifold kählérienne.*
- *Nous donnons quelques éléments de classification des variétés à difféomorphisme près. En particulier, nous exhibons une application qui, à chaque variété, associe un polytope convexe simple, comparable à l'application-moment en géométrie symplectique. Nous montrons que cette application est inversible.*

- *Nous généralisons les résultats de [LdM-Ve] sur l'espace de déformation de ces variétés. Nous montrons que, dans certains cas, les variétés sont biholomorphes si et seulement si les valeurs propres des champs de vecteurs linéaires à l'origine de ces variétés sont affinement conjuguées. Nous construisons un espace de déformation lisse, et montrons, que, sous certaines conditions supplémentaires, il est universel.*
- *Nous donnons des exemples explicites de ces variétés, en particulier une famille infinie d'exemples de sommes connexes de produits de sphères.*

Une partie de ces résultats est présentée, avec des esquisses de démonstration, dans [Me1] ; tous les résultats importants sont par ailleurs explicités dans [Me2], qui forme la version article de cette thèse. Enfin, un exemple particulier de ces variétés, à propriétés spéciales, est décrit dans [Le-Me].

Liens avec Geometric Invariant Theory.

Lors d'un voyage à l'I.C.T.P. de Trieste en septembre 98, alors que cette thèse était déjà écrite, M.S. Narasimhan et A.D. King nous ont appris que la construction utilisée dans cette thèse présentait, tout en étant différente de par le caractère non algébrique de nos variétés et des actions considérées, de troublantes ressemblances avec Geometric Invariant Theory (cf [Ne]). Ce rapprochement imprévu semble permettre des généralisations importantes de ce travail de thèse. Néanmoins, ce point de vue ne sera pas abordé dans cette thèse, qui a été écrite dans l'ignorance totale de ces faits.

I. CONSTRUCTION DES VARIÉTÉS.

Système diagonal de champs de vecteurs linéaires holomorphes.

Nous allons généraliser la construction de [LdM-Ve] au cas de plusieurs champs de vecteurs.

Soient m champs de vecteurs holomorphes linéaires commutants de \mathbb{C}^n , pour $m < n$:

$$1 \leq i \leq m \quad \xi_i : (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mapsto A_i \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

où $\xi_i(z)$ est donné dans la base canonique de \mathbb{C}^n :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right)$$

et où les A_i sont des matrices $n \times n$ commutant deux à deux. Chacun de ces champs de vecteurs donne naissance à un flot complet. Comme les matrices A_i commutent, l'on peut définir l'action holomorphe globale de \mathbb{C}^m sur \mathbb{C}^n comme composée des flots de chacun des ξ_i .

Nous voulons obtenir, à partir de cette action, un feuilletage dont la partie régulière soit de dimension m , et dont l'espace des feuilles fermées soit une variété complexe. Nous commençons par nous restreindre au cas diagonal, cas le plus simple :

Hypothèse. Dans toute la suite, nous supposerons les matrices A_i diagonales.

Par ailleurs, nous faisons des hypothèses de rang sur les matrices A_i . Posons :

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_1^i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda_j = \begin{pmatrix} \lambda_j^1 \\ \vdots \\ \lambda_j^m \end{pmatrix}$$

pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Hypothèse. Nous supposerons que les Λ_j sont tous non nuls et que la matrice $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ est de rang réel $2m$, donc de rang maximal.

Remarque. On a donc $n \geq 2m$.

Dans ces conditions, l'action globale est explicitement donnée par :

$$\Phi : (T, (w_1, \dots, w_n)) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \mapsto (e^{\langle \Lambda_1, T \rangle} w_1, \dots, e^{\langle \Lambda_n, T \rangle} w_n) \in \mathbb{C}^n$$

et l'on a le résultat suivant :

Lemme 1. *L'action Φ engendre un feuilletage singulier de \mathbb{C}^n . Les feuilles de dimension maximale sont de dimension m et leur union \tilde{S} est un ouvert dense de \mathbb{C}^n contenant $(\mathbb{C}^*)^n$.*

Preuve. Soit k un entier compris entre 0 et n et soit $J = (j_1, \dots, j_k)$ un k -uplet d'entiers vérifiant $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$. Posons :

$$U_J = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq 0 \text{ pour } i \in J, \quad z_i = 0 \text{ sinon}\}.$$

Alors il est clair que Φ préserve les U_J et que, sur chaque U_J , les ξ_i forment un ensemble involutif de dimension constante, donc, par le théorème de Frobenius (cf [C-LN]), définissent un feuilletage régulier.

La dimension du feuilletage est donnée par le rang de la matrice $(\Lambda_{j_1}, \dots, \Lambda_{j_k})$. Dès lors, cette dimension est m pour $U_{(1, \dots, n)} = (\mathbb{C}^*)^n$ et l'union des feuilles de dimension m est réunion d'ensembles U_J dont $(\mathbb{C}^*)^n$, donc dense et ouverte (son complémentaire est un ensemble analytique). \square

Existence de feuilles de Siegel.

De tels feuilletages ont été étudiés dans [C-K-P], [Ku]. En particulier, deux types de feuilles interviennent.

Définition. Une feuille dont l'adhérence contient $0 \in \mathbb{C}^n$ est appelée feuille de Poincaré. Dans le cas contraire, on parle de feuille de Siegel.

Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ un n -uplet de \mathbb{C}^m . Nous noterons $\mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ son enveloppe convexe réelle dans \mathbb{C}^m .

Proposition 1. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ un n -uplet de \mathbb{C}^m vérifiant l'hypothèse précédente et soit \mathcal{F} le feuilletage correspondant. Alors :*

(i) *il existe des feuilles de Siegel si et seulement si 0 appartient à l'enveloppe convexe $\mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$.*

(ii) *Dans ce cas, on a $n > 2m$.*

Preuve. Soit $(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$. Ce m -uplet détermine une feuille. Voyons à quelle(s) condition(s) cette feuille passe par un point non nul minimum de la fonction distance sur la feuille :

$$z \in \mathbb{C}^n \longmapsto \|z\|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Calculons pour cela les points critiques de $\|z\|^2$ en restriction à cette feuille (cf [C-K-P]). Il vient :

$$d\left(\sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j\right) = 0$$

$$\text{soit : } \sum_{j=1}^n (z_j d\bar{z}_j + \bar{z}_j dz_j) = 0$$

et en remplaçant z par sa valeur (voir l'expression de Φ page précédente) :

$$\sum_{j=1}^n (z_j d(\bar{w}_j e^{\langle \Lambda_j, T \rangle}) + \bar{z}_j d(w_j e^{\langle \Lambda_j, T \rangle})) = 0$$

ou encore :

$$\sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j ((\lambda_j^1 dT_1 + \dots + \lambda_j^m dT_m) + (\bar{\lambda}_j^1 d\bar{T}_1 + \dots + \bar{\lambda}_j^m d\bar{T}_m)) = 0 .$$

Cela donne le système :

$$(1) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j \lambda_j^1 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n z_j \bar{z}_j \lambda_j^m = 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi un système de m équations complexes à n inconnues réelles, soit $2m$ équations réelles à n inconnues réelles. Le système équivaut au système d'intersection de $2m$ quadriques dans \mathbb{R}^n (cf [LdM1] et [LdM2]).

Remarque. Comme nous cherchons à caractériser les feuilles de Siegel, nous voulons des solutions non nulles de (1). Comme le système est de rang réel $2m$, il y a des feuilles de Siegel seulement si $n > 2m$.

De (1), nous concluons que, si le feuilletage contient des feuilles de Siegel, alors :

$$\text{il existe } (z_1, \dots, z_n) \text{ non tous nuls tels que } \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \Lambda_i = 0$$

et donc 0 appartient à l'enveloppe convexe $\mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$.

Réciproquement, si 0 appartient à cette enveloppe convexe,

$$\text{il existe } a_1, \dots, a_n \geq 0, \text{ tels que } \sum_{i=1}^n a_i = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^n a_i \Lambda_i = 0 .$$

Ceci implique que $n > 2m$. Par ailleurs, la feuille passant en $T = 0$ par le point $(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$ possède en vertu du calcul précédent un point critique pour la fonction $\|z\|^2$. Vérifions que c'est un minimum.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}^*$. Pour $T_0 \in \mathbb{C}$, le flot :

$$(2) \quad (e^{(\alpha_1 \lambda_1^1 + \dots + \alpha_m \lambda_1^m) T_0} \cdot \sqrt{a_1}, \dots, e^{(\alpha_1 \lambda_n^1 + \dots + \alpha_m \lambda_n^m) T_0} \cdot \sqrt{a_n})$$

est une courbe tracée sur cette feuille, qui peut être vue comme feuille du feuilletage induit par le champ unique :

$$\chi = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_m \xi_m .$$

Un calcul identique à celui fait plus haut montre que cette courbe admet également un point critique aux mêmes coordonnées. D'après [C-K-P] ce point est un minimum. Ainsi toutes les courbes tracées sur la feuille de départ de la manière

indiquée ci-dessus possède un minimum pour la fonction $\|z\|^2$ en le point critique de cette feuille. En utilisant l'exponentielle comme carte, on peut localement redresser la feuille en un plan affine de dimension m de \mathbb{C}^n autour du point critique, ayant la propriété que toutes les droites concourantes en ce point tracées sur le plan y trouve là un minimum pour la fonction $\log \|z\|^2$. On en déduit donc qu'il s'agit également d'un minimum pour ladite fonction sur la feuille.

Remarquons que si l'on suppose que w a pour coordonnées non nulles uniquement $(w_{i_1}, \dots, w_{i_k})$, alors le système (1) montre qu'en fait $0 \in \mathcal{H}(\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_k})$. \square

L'on en déduit immédiatement le corollaire suivant, qui sera utile dans la suite :

Corollaire. *Une feuille de Siegel contient un unique point critique de la fonction $\|z\|^2$ et c'est un minimum.*

Preuve. L'existence du minimum découle de la définition. Par ailleurs, la démonstration précédente nous assure de l'unicité de ce minimum par feuille (sinon il y aurait une courbe du type (2) contenant les deux minima ce qui est absurde d'après [C-K-P]). \square

Condition d'hyperbolicité faible.

Les feuilles de Siegel nous intéressent en cela que, sous de bonnes conditions, elles coïncident avec les feuilles fermées. Au contraire, les feuilles de Poincaré, ayant un point commun dans leur adhérence, ne sont pas séparées dans l'espace quotient (pour la topologie quotient). Reprenons le système :

$$\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \Lambda_i = 0 .$$

En chaque point (z_1, \dots, z_n) solution de ce système passe une feuille de Siegel. Nous allons demander que ce système soit non dégénéré en chaque point solution.

La condition naturelle de non-dégénérescence est de demander que tout système carré extrait du système originel ne possède pas de solution autre que 0. Cela revient à interdire les combinaisons linéaires à coefficients positifs entre $2m$ vecteurs choisis parmi $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$. D'où la condition :

Condition d'hyperbolicité faible. Pour tout $2m$ -uplet d'entiers (i_1, \dots, i_{2m}) vérifiant $1 \leq i_1 < \dots < i_{2m} \leq n$, nous demandons que $0 \notin \mathcal{H}(\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_{2m}})$.

Cette condition a une signification géométrique. Considérons en effet les vecteurs $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ comme des vecteurs réels de \mathbb{R}^{2m} . Alors l'enveloppe convexe de ces vecteurs constitue un polytope convexe. L'existence de feuilles de Siegel découle de la présence de 0 à l'intérieur de ce polytope. Maintenant remarquons que par $2m$ vecteurs de \mathbb{R}^{2m} linéairement indépendants, il passe un unique hyperplan. Il en résulte que la condition d'hyperbolicité faible demande que 0 n'appartienne à aucune face externe ni interne, i.e. à aucun hyperplan passant par $2m$ sommets arbitraires du polytope convexe. La condition obtenue est ainsi la généralisation naturelle de celle demandée dans [LdM-Ve].

Définition. Nous appellerons configuration admissible un n -uplet $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ de vecteurs de \mathbb{C}^m vérifiant :

- (i) la condition de Siegel : $0 \in \mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$.
- (ii) la condition d'hyperbolicité faible.

Remarque. Un tel ensemble est linéairement indépendant dans \mathbb{C}^n et l'action linéaire est ainsi bien définie. Plus précisément, nous montrons le lemme suivant.

Lemme 2. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible. Alors :

- (i) il existe un $(2m + 1)$ -uplet d'entiers, appelons-le (i_1, \dots, i_{2m+1}) tel que l'on ait $0 \in \mathcal{H}(\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_{2m+1}})$.
- (ii) Le système $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ est de rang réel $2m$, donc de rang complexe m .
- (iii) Pour tout k -uplet d'entiers (i_1, \dots, i_k) tel que $0 \in \mathcal{H}(\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_k})$, le système $(\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_k})$ est de rang réel $2m$.
- (iv) Soient $\Lambda'_i = (\Lambda_i, 1)$ vecteurs de \mathbb{C}^{m+1} . Pour tout k -uplet d'entiers (i_1, \dots, i_k) tel que $0 \in \mathcal{H}(\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_k})$, le système $(\Lambda'_{i_1}, \dots, \Lambda'_{i_k})$ est de rang réel $2m + 1$.

Preuve. (i) Considérons le polytope convexe de \mathbb{C}^m formé par l'enveloppe convexe de $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$. Par hypothèse de Siegel, 0 appartient à ce polytope, donc appartient à un simplexe composant ce polytope, donc à l'enveloppe convexe de $2m + 1$ des Λ_i .

(ii) Supposons que le système $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ ne soit pas de rang $2m$. Alors, d'après (i), il existe un $(2m + 1)$ -uplet d'entiers tel que $0 \in \mathcal{H}(\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_{2m+1}})$, et par ailleurs, il existe une combinaison linéaire réelle entre $(\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_{2m}})$. En combinant linéairement ces deux relations, l'on trouve facilement une relation de dépendance linéaire à coefficients positifs entre $2m$ de ces vecteurs, ce qui viole la condition d'hyperbolicité faible.

(iii) La preuve est identique à celle de (ii) en considérant que $(\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_k})$ forme une configuration admissible pour une action dans \mathbb{C}^k .

(iv) Prouvons d'abord le résultat pour $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$. D'après le (i), il existe une sous-configuration admissible de $2m + 1$ vecteurs, que nous supposons, pour simplifier, être $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m+1}$.

Réolvons le système :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2m+1} a_i \Lambda_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{2m+1} a_i = 0 \end{cases}$$

Regardons la première équation de ce système. Nous savons qu'il existe une solution non nulle de ce système à coordonnées toutes positives, puisqu'il s'agit d'une configuration admissible. Comme $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m+1})$ est de rang réel $2m$ (cf (iii)), l'espace des solutions de la première équation est de dimension un, engendré par la solution à coefficients tous positifs. De ce fait, les solutions non nulles de cette première équation correspondent à des (a_1, \dots, a_n) tous positifs, ou négatifs, et non tous nuls, donc ne satisfont pas à la seconde équation. Dès lors, la seule solution de ce système est 0 , ce qui prouve le (iv) pour $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$. Maintenant, de même que pour le (iii) ceci prouve le résultat pour toute sous-configuration. \square

On a alors :

Proposition 2. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible et soit \mathcal{F} le feuilletage associé. Alors :

(i) les feuilles de Siegel sont exactement les feuilles fermées de \mathcal{F} sur \mathbb{C}^n (en exceptant la feuille singulière 0).

(ii) L'union des feuilles de Siegel est un ouvert S dense dans \mathbb{C}^n vérifiant $S = \mathbb{C}^n - E$ avec E ensemble analytique.

(iii) Plus précisément, on a :

$$S = \{z \in \mathbb{C}^n \mid 0 \in \mathcal{H}((\Lambda_i)_{i \in I_z} \text{ avec } i \in I_z \iff z_i \neq 0)\}.$$

Preuve. (i) Soit une feuille de Siegel L , passant par le point w et que nous paramètrerons par :

$$(e^{\langle \Lambda_1, T \rangle w_1}, \dots, e^{\langle \Lambda_n, T \rangle w_n}).$$

Quitte à remplacer $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ par une sous-configuration, nous supposons les w_i tous non nuls. Les seuls points d'adhérence possibles sont ceux où l'une au moins des exponentielles tend vers zéro, par exemple la première. On a alors $\lim |T| = \infty$ selon un chemin γ tel que $\text{Re}(\langle \Lambda_1, T \rangle)$ tende vers $-\infty$. Mais comme $0 \in \mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$, l'on peut toujours trouver un Λ_k tel que la partie réelle de $\langle \Lambda_k, T \rangle$ le long de ce même chemin tende vers $+\infty$, donc tel que $e^{\langle \Lambda_k, T \rangle}$ diverge. En effet, la condition de Siegel implique qu'il existe des réels positifs a_1, \dots, a_n tels que :

$$a_1 \Lambda_1 + \dots + a_n \Lambda_n = 0.$$

Comme Λ_1 est non nul, et quitte à remplacer $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ par une sous-configuration, on peut toujours supposer $a_1 > 0$. Dès lors, pour tout $T \in \mathbb{C}^m$:

$$a_1 \text{Re} \langle \Lambda_1, T \rangle + \dots + a_n \text{Re} \langle \Lambda_n, T \rangle = 0$$

ce qui implique que, lorsque T suit γ , il existe k tel que la partie réelle de $\langle \Lambda_k, T \rangle$ le long de γ tende vers $+\infty$. La feuille L est donc fermée.

Réciproquement, si L est une feuille fermée de \mathbb{C}^n différente de la feuille singulière 0, son adhérence ne contient pas 0, donc c'est une feuille de Siegel.

(ii) Reprenons les conventions du lemme 1 et notons :

$$U_J = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq 0 \text{ pour } i \in J, z_i = 0 \text{ sinon}\} \quad \text{pour } J = (j_1, \dots, j_k)$$

un k -uplet d'entiers vérifiant $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$. Alors nous prétendons que S est réunion d'ensembles U_J , plus précisément de ceux tels que $0 \in \mathcal{H}(\Lambda_{j_1}, \dots, \Lambda_{j_k})$.

En effet, d'après la proposition 1, si $0 \in \mathcal{H}(\Lambda_{j_1}, \dots, \Lambda_{j_k})$, alors il existe une feuille de Siegel F dans U_J , que nous supposons passer par le point w . Soit une autre feuille L de U_J , passant par un point y . Alors l'application :

$$z \in \mathbb{C}^n \longmapsto (z_1, \dots, z_{i_1} \cdot \frac{y_{i_1}}{w_{i_1}}, \dots, z_{i_k} \cdot \frac{y_{i_k}}{w_{i_k}}, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

est un biholomorphisme de \mathbb{C}^n qui envoie F sur L . De ce fait, L est fermée, donc d'après (i) est une feuille de Siegel, et U_J ne contient que des feuilles de Siegel.

Il en résulte que S contient par hypothèse $U_{(1, \dots, n)} = (\mathbb{C}^*)^n$ donc est dense dans \mathbb{C}^n , et que le complémentaire de S est un ensemble analytique, réunion de plans $\{z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\}$, pour $0 \notin \mathcal{H}(\Lambda_{j_1}, \dots, \Lambda_{j_{n-k}})$, où (j_1, \dots, j_{n-k}) est l'ensemble d'indices complémentaire de (i_1, \dots, i_k) .

Ceci prouve du même coup le (iii). \square

Notation. On notera par S l'union des feuilles de Siegel, et par E l'ensemble analytique tel que $S = \mathbb{C}^n - E$.

Remarque. L'ouvert des feuilles de Siegel est inclus, mais généralement distinct de l'ouvert des feuilles de dimension m (il suffit pour cela qu'il existe un k -uplet de Λ_i ne contenant pas 0 dans leur enveloppe convexe avec $k > 2m$ et il y aura des feuilles de Poincaré de dimension m).

Nous terminons ce paragraphe par une définition qui sera utile pour la suite.

Définition (cf [LdM1] et [LdM2]). Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible. Soit l'ouvert S correspondant. Nous dirons que la coordonnée z_i est point indispensable de la configuration si l'ouvert S est contenu dans l'ouvert :

$$U_i = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq 0\}.$$

Dans le cas contraire, on parle de point éliminable.

Nous noterons k le nombre de points indispensables d'une configuration.

Construction de variétés complexes compactes.

Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible. Deux actions commutantes sont définies naturellement sur S : l'action linéaire définissant le feuilletage précédent et une action de \mathbb{C}^* par simple homothétie. L'action globale, composée de ces deux actions est donnée explicitement par :

$$\Phi : (\alpha, T, w) \in (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m) \times \mathbb{C}^n \longmapsto (\alpha e^{\langle \Lambda_1, T \rangle w_1}, \dots, \alpha e^{\langle \Lambda_n, T \rangle w_n}) \in \mathbb{C}^n.$$

Nous allons exhiber une variété compacte complexe dans l'espace des feuilles de cette action. En fait :

Proposition 3. *Soit N le quotient de S par cette action globale. Alors N est une variété complexe, compacte, de dimension complexe $n - m - 1$.*

Preuve. La proposition découlera des quelques lemmes suivants. En fait, nous allons montrer plus que nécessaire, car cela sera utile pour la suite.

Notation. On notera par M l'union des feuilles de Siegel quotientée par l'action linéaire de \mathbb{C}^m seule.

On a alors :

Lemme 3. *M est une variété complexe, qui admet un plongement C^∞ dans \mathbb{C}^n transverse au feuilletage induit par les champs (ξ_1, \dots, ξ_m) .*

Preuve. D'après le corollaire de la proposition 1, l'espace quotient M s'identifie à :

$$\mathcal{T} = \{(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n - \{(0, \dots, 0)\} \mid \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \Lambda_i = 0\}.$$

Cela définit M comme sous-ensemble de \mathbb{R}^{2n} par $M = \phi^{-1}(0)$ pour :

$$\phi : (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \longmapsto \left(\sum_{i=1}^n A_i(x_i^2 + y_i^2), \sum_{i=1}^n B_i(x_i^2 + y_i^2) \right) \in \mathbb{R}^{2m}$$

avec $\Lambda_j = A_j + iB_j$.

Vérifions que ϕ est une submersion en tout point $w = x + iy$ de M .

$$d\phi(x, y) : (u, v) \in \mathbb{R}^{2n} \longmapsto \left(2 \sum_{i=1}^n A_i(x_i \cdot u_i + y_i \cdot v_i), 2 \sum_{i=1}^n B_i(x_i \cdot u_i + y_i \cdot v_i) \right) \in \mathbb{R}^{2m}.$$

Il y a au moins $2m + 1$ coordonnées w_i non nulles, sinon la condition d'hyperbolicité faible est violée. Les vecteurs (A_i, B_i) correspondants sont de rang $2m$ d'après le lemme 2, donc $d\Phi$ est surjective.

Ceci fait de M une variété différentiable plongée dans \mathbb{C}^n . En particulier M est séparée. Montrons maintenant que ce plongement est transverse au feuilletage. On a :

$$T_z \mathcal{T} = \left\{ u \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n \Lambda_i \cdot \operatorname{Re}(\bar{z}_i u_i) = 0 \right\}$$

et il suffit de vérifier qu'en tout point de \mathcal{T} , aucune combinaison linéaire complexe non nulle $\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_m \xi_m$ entre les champs de vecteurs ξ_i définissant le feuilletage n'appartient à cet espace tangent. Cherchons donc à résoudre :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \Lambda_i \cdot \operatorname{Re}(\bar{z}_i (\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_m \xi_m)_i) = 0 \\ \text{i.e. : } & \sum_{i=1}^n \Lambda_i \cdot \operatorname{Re}(\bar{z}_i z_i (\alpha_1 \lambda_i^1 + \dots + \alpha_m \lambda_i^m)) = 0 \end{aligned}$$

ce qui n'est autre que :

$$\sum_{i=1}^n \Lambda_i |z_i|^2 \operatorname{Re}(\langle \alpha, \Lambda_i \rangle) = 0$$

Il résulte de cela que le produit scalaire de ce vecteur par α est nul, à savoir :

$$\begin{aligned} & \langle \alpha, \sum_{i=1}^n \Lambda_i |z_i|^2 \operatorname{Re}(\langle \alpha, \Lambda_i \rangle) \rangle = 0 \\ & \sum_{i=1}^n \langle \alpha, \Lambda_i \rangle |z_i|^2 \operatorname{Re}(\langle \alpha, \Lambda_i \rangle) = 0 \end{aligned}$$

en particulier :

$$\sum_{i=1}^n \left(\operatorname{Re}(\langle \alpha, \Lambda_i \rangle) \right)^2 |z_i|^2 = 0.$$

Le point z possède, par hyperbolicité faible, au moins $2m + 1$ coordonnées non nulles. Quitte à remplacer les n vecteurs Λ_i par les $2m + 1$ correspondants aux coordonnées non nulles de z , nous pouvons toujours supposer :

$$\text{pour tout } 1 \leq i \leq n, \quad \operatorname{Re}(\langle \alpha, \Lambda_i \rangle) = 0.$$

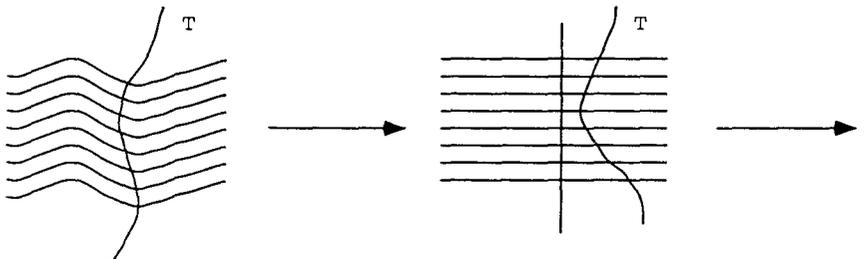
Mais ceci n'est autre qu'une combinaison réelle entre les $2m$ lignes de la matrice réelle $2m \times n$ formée par les vecteurs $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ vus comme vecteurs de

\mathbb{R}^{2m} . D'après le lemme 2, cette matrice est de rang réel maximal, donc l'équation précédente implique $\alpha = 0$ et la transversalité est démontrée.

Nous allons enfin munir M d'une structure complexe. Soit (U_α, ϕ_α) un recouvrement de \mathcal{T} par des cartes feuilletées pour le feuilletage de S induit par les champs ξ_i , avec $\phi_\alpha = (\psi_\alpha, \chi_\alpha)$ et χ_α cartes transverses. Nous redressons $\phi_\alpha(\mathcal{T})$ en poussant le long des feuilles :

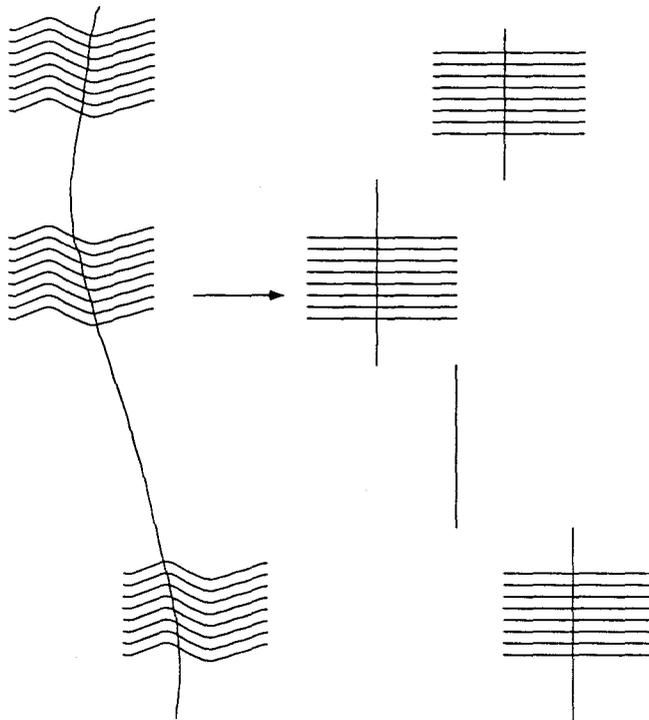
$$U_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha} V_1 \times V_2 \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m} \xrightarrow{pF} V_2 .$$

La figure ci-dessous illustre cela.



Alors $(U_\alpha \cap \mathcal{T}, pF \circ \phi_\alpha)$ forment un atlas de M dont les changements de cartes sont donnés par les $\chi_{\alpha\beta}$, les changements de cartes transverses du feuilletage linéaire, donc un atlas holomorphe (cf fait 2 de l'introduction). \square

Remarque. En redressant l'atlas feuilleté le long de \mathcal{T} , nous gagnons la structure complexe, mais perdons le plongement, i.e. \mathcal{T} n'est pas un plongement holomorphe (cf figure ci-dessous).



Remarque (je remercie Dan Zaffran pour cette remarque). Si \mathcal{T} n'était pas transverse au feuilletage, l'on pourrait toutefois, par le même procédé, munir M d'une structure complexe. Cependant la structure C^∞ sous-jacente ne coïnciderait pas alors forcément avec celle de \mathcal{T} .

Notation. On définit $M_1 = \mathcal{T} \cap S^{2n-1}$.

Lemme 4. M_1 est une variété différentiable compacte.

Preuve. En regardant la définition de \mathcal{T} , l'on voit que \mathcal{T} est un cône époiné en 0. Il intersecte transversalement la sphère, ce qui assure que M_1 est bien une variété différentiable compacte. \square

Enfin, pour montrer que N est une variété complexe, il suffit de reprendre la démonstration du lemme 3, en se plaçant cette fois dans $\mathbb{C}P^{n-1}$ et en redressant les cartes feuilletées pour le feuilletage global le long du plongement différentiable transverse au feuilletage de N :

$$\mathcal{N} = \{[w_1, \dots, w_n] \in \mathbb{C}P^{n-1} \mid \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \Lambda_i = 0\}.$$

La dimension du feuilletage global étant $m+1$, la dimension complexe de N est $n-m-1$. \square

Remarque. La projectivisation peut être vue comme l'action induite sur S par le champ de vecteurs :

$$R = \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

qui commute avec les ξ_j .

Compactification équivariante.

Nous donnons maintenant une description différente de cette construction, dont un cas particulier est développé dans [Le-Me].

Soit l'action naturelle du tore algébrique $(\mathbb{C}^*)^n$ sur \mathbb{C}^n :

$$T : (u, z) \in (\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}^n \longmapsto (u_1.z_1, \dots, u_n.z_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Cette action T laisse S invariant, puisque S est l'union disjointe de sous-ensembles du type :

$$\{(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n \mid w_1 \neq 0, \dots, w_p \neq 0, w_{p+1} = 0, \dots, w_n = 0\}$$

qui sont des orbites de l'action. Par ailleurs, elle commute avec l'action de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ sur S , donc passe au quotient sur N selon le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*)^n \times S & \xrightarrow{T} & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{C}^*)^{n-1} / \mathbb{C}^m \times N & \xrightarrow{\tilde{T}} & N \end{array}$$

Remarquons que T aussi bien que \tilde{T} possède une orbite dense, biholomorphe à $(\mathbb{C}^*)^n$ et respectivement à $(\mathbb{C}^*)^{n-1}/\mathbb{C}^m$ (cette notation désigne le quotient de $(\mathbb{C}^*)^n$ par l'action de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$), tous deux groupes de Lie complexes abéliens connexes. Ainsi (cf [Lel]), N est une compactification équivariante du groupe de Lie $(\mathbb{C}^*)^{n-1}/\mathbb{C}^m$. Nous noterons ce groupe G .

Remarque. On peut pareillement dire qu'il existe une action du groupe de Lie complexe $(\mathbb{C}^*)^n/\mathbb{C}^m$ sur M , avec une orbite dense. Nous noterons ce groupe \tilde{G} .

Applications projections.

Nous démontrons dans ce paragraphe une proposition sur les applications projections $\pi_0 : S \rightarrow M$ et $\pi : S \rightarrow N$.

Proposition 4. (i) Soit la projection $\pi_0 : S \rightarrow M$. Alors (S, π_0, M) est un fibré holomorphe principal de groupe structural \mathbb{C}^m , différentiablement trivial, mais holomorphiquement non trivial.

(ii) Soit la projection $\pi : S \rightarrow N$. Alors (S, π, N) est un fibré holomorphe principal de groupe structural $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$, ne possédant aucune section holomorphe. Par ailleurs, si la configuration possède un point indispensable, alors il est différentiablement trivial.

Remarque. Nous montrerons dans la partie deux que le fibré (S, π, N) ne possède pas de section différentiable s'il n'y a pas de point indispensable. Cette alternative (différentiablement trivial ou pas de section différentiable) n'est guère surprenante puisque le fibré (S, π, N) , de même que le fibré (S, π_0, M) , est un fibré principal (cf [St]).

Preuve. Nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 5. Il existe un atlas feuilleté holomorphe (U_α, ϕ_α) de S pour le feuilletage induit par l'action linéaire de \mathbb{C}^m vérifiant :

(i) Les cartes sont : $U_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha = (\psi_\alpha, \chi_\alpha)} \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m}$.

(ii) Les changements de cartes vérifient :

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : (T, z) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m} \mapsto (T + a(z), \chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m}$$

avec a holomorphe à valeurs dans \mathbb{C}^m .

Preuve. Considérons l'application :

$$V \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m} \xrightarrow{\phi_\alpha^{-1}} U_\alpha \subset S$$

$$(T, z) \mapsto (e^{-\langle \Lambda_1, T \rangle}, \dots, e^{-\langle \Lambda_m, T \rangle}, z_{m+1} \cdot e^{-\langle \Lambda_{m+1}, T \rangle}, \dots, z_n \cdot e^{-\langle \Lambda_n, T \rangle})$$

À condition de prendre V suffisamment petit, et de supposer $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$ de rang complexe m , cette application est un biholomorphisme. Par ailleurs, par hyperbolicité faible, tout point de S possède m coordonnées non nulles, correspondant à un m -uplet de Λ_i de rang complexe m , de telle sorte qu'en permutant les indices, l'on peut recouvrir S par de telles cartes.

Calculons maintenant les changements de cartes. Pour simplifier, nous calculerons uniquement $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$, avec le ϕ_α précédent et ϕ_β faisant intervenir le m -uplet de vecteurs $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{m-1}, \Lambda_{m+1})$:

$$\phi_\beta^{-1}(T, z) = (e^{-\langle \Lambda_1, T \rangle}, \dots, z_{m+1} \cdot e^{-\langle \Lambda_m, T \rangle}, e^{-\langle \Lambda_{m+1}, T \rangle}, \dots, z_n \cdot e^{-\langle \Lambda_n, T \rangle})$$

$$\phi_\beta^{-1}(T, z) = (e^{-\langle \Lambda_1, T+a(z_{m+1}) \rangle}, \dots, e^{-\langle \Lambda_m, T+a(z_{m+1}) \rangle}, \dots, z_n \cdot e^{-\langle \Lambda_n, T \rangle})$$

où nous avons simplement réécrit la formule précédente en introduisant $a(z_{m+1})$ tel que :

$$e^{-\langle \Lambda_1, a(z_{m+1}) \rangle} = 1, \dots, e^{-\langle \Lambda_{m-1}, a(z_{m+1}) \rangle} = 1, e^{-\langle \Lambda_m, a(z_{m+1}) \rangle} = z_{m+1}.$$

Alors, pour un bon choix de $a(z_{m+1})$ (qui n'est défini que modulo addition de $2ik\pi$ sur chaque coordonnée) :

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(T, z) = (T + a(z_{m+1}), e^{\langle \Lambda_{m+1}, a(z_{m+1}) \rangle}, \dots, z_n \cdot e^{\langle \Lambda_n, a(z_{m+1}) \rangle})$$

ce qui achève la preuve. \square

Lemme 6. *Il existe un atlas feuilleté holomorphe (U_α, ϕ_α) de S pour le feuilletage induit par l'action globale de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$ vérifiant :*

$$(i) \text{ Les cartes sont : } U_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha = (\psi_\alpha, \chi_\alpha)} (\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*) \times \mathbb{C}^{n-m-1}.$$

(ii) *Les changements de cartes vérifient :*

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : (\alpha, T, z) \mapsto (a(z) \cdot \alpha, T + b(z), \chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m-1}$$

avec (a, b) holomorphe à valeurs dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$.

Preuve. Elle est identique à celle du lemme 5, en considérant les cartes :

$$V \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m-1} \xrightarrow{\phi_\alpha^{-1}} U_\alpha \subset S$$

$$(\alpha, T, z) \mapsto (\alpha e^{-\langle \Lambda_1, T \rangle}, \dots, \alpha z_{m+2} e^{-\langle \Lambda_{m+2}, T \rangle}, \dots, \alpha z_n e^{-\langle \Lambda_n, T \rangle})$$

et en déduisant les changements de cartes du feuilletage. \square

(i) Différentiablement, d'après le lemme 3, on a $M \simeq \mathcal{T}$, ainsi que $S \simeq \mathcal{T} \times \mathbb{C}^m$ et $\pi_0 : \mathcal{T} \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathcal{T}$ simple projection.

Soit (U_α, ϕ_α) l'atlas feuilleté de S du lemme 5. On a :

$$U_\alpha \xrightarrow{\phi_\alpha = (\psi_\alpha, \chi_\alpha)} \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m}.$$

Un atlas holomorphe de M est dans ces conditions $(U_\alpha \cap \mathcal{T}, p_F \circ \phi_\alpha)$ où :

$$p_F : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m} \rightarrow \mathbb{C}^{n-m}$$

est la projection du feuilletage. Les changements de cartes sont les changements de cartes transverses $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}$ du feuilletage.

Localement, l'application π_0 est la projection p_F , donc est holomorphe. Ceci permet de définir, par restriction aux U_α , les trivialisations locales holomorphes suivantes :

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha & \xrightarrow{h_\alpha} & U_\alpha \cap \mathcal{T} \times \mathbb{C}^m \\ & \searrow \pi_0 & \swarrow p_1 \\ & & U_\alpha \cap \mathcal{T} \end{array}$$

Enfin, par le lemme 5, le cocycle correspondant à ce fibré est :

$$h_{\alpha\beta} : z \in U_\alpha \cap U_\beta \mapsto a(z) \in \mathbb{C}^m$$

donc le fibré est principal.

Maintenant le fibré π_0 n'est pas holomorphiquement trivial. En fait, la restriction de π_0 à $(\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \tilde{G}$ ne l'est pas. En effet (cf [Mom]), le groupe de Lie abélien complexe connexe \tilde{G} est isomorphe (au sens de Lie) à :

$$\tilde{G} \simeq \mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^q \times C \quad \text{pour } p \text{ et } q \text{ deux entiers}$$

où C est la composante de Cousin de \tilde{G} , i.e. un groupe de Lie abélien complexe qui ne possède pas de fonctions holomorphes globales non constantes.

Supposons maintenant que $(\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \tilde{G}$ soit holomorphiquement trivial. Alors il existe un biholomorphisme :

$$(\mathbb{C}^*)^n \simeq \tilde{G} \times \mathbb{C}^m \simeq \mathbb{C}^{m+p} \times (\mathbb{C}^*)^q \times C .$$

En particulier, ceci implique qu'il existe un plongement holomorphe de C dans $(\mathbb{C}^*)^n$. Comme C ne possède pas de fonctions holomorphes globales non constantes, cela implique que C est en fait le groupe trivial $\{0\}$ et le biholomorphisme précédent devient :

$$(\mathbb{C}^*)^n \simeq \tilde{G} \times \mathbb{C}^m \simeq \mathbb{C}^{m+p} \times (\mathbb{C}^*)^{n-m-p}$$

ce qui est absurde.

(ii) Le début de la preuve est identique à celle du (i), en utilisant l'atlas feuilleté donné par le lemme 6. On montre ainsi que (S, π, N) est un fibré holomorphe principal à groupe structural $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$.

L'absence de section holomorphe est évidente par compacité de N et inclusion de S dans \mathbb{C}^n . Reste donc à démontrer le point sur l'existence sous conditions de sections différentiables. Pour cela, considérons le diagramme commutant de fibrés :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\pi_0} & M \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_1 \\ & & N \end{array}$$

où le fibré (M, π_1, N) est défini différemment de façon naturelle par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathbb{C}P^{n-1} \end{array}$$

De ce fait, π possède une section différentiable si et seulement si π_1 en possède une, donc si et seulement si $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{N}$ en possède une.

Considérons alors le fibré unitaire de $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{N}$. Ce fibré n'est autre que le fibré $M_1 \rightarrow \mathcal{N}$, de telle sorte que π possède une section différentiable si et seulement si ce dernier fibré est trivial. S'il existe un point indispensable, par exemple z_1 , l'action de S^1 qui définit le fibré peut être concentrée sur la coordonnée indispensable selon le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (e^{i\theta}, z) \in S^1 \times M_1 & \longrightarrow & w = (e^{i\theta} \cdot z_1, \dots, e^{i\theta} \cdot z_n) \in M_1 \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ (e^{i\theta} \frac{z_1}{|z_1|}, w = |z_1| (1, \frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_n}{z_1})) \in S^1 \times M_1 & \longrightarrow & (e^{i\theta} \frac{z_1}{|z_1|}, [w]) \in S^1 \times \mathcal{N} \end{array}$$

et le fibré est différemment trivial. \square

Corollaire A. *Le fibré $(\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \tilde{G}$, restriction de π_0 à \tilde{G} est différemment trivial mais non holomorphiquement trivial.*

Preuve. C'est en fait ce que nous avons montré dans la preuve de la proposition 4, (i). \square

Corollaire B. *Le fibré $(\mathbb{C}^*)^{n-1} \rightarrow G$, restriction de $\tilde{\pi}_0 : V = S/\mathbb{C}^* \rightarrow N$ à G , est différemment trivial mais holomorphiquement non trivial.*

Preuve. Il suffit de remarquer que $\tilde{\pi}_0$ est la projectivisation de π_0 , de même le fibré $(\mathbb{C}^*)^{n-1} \rightarrow G$ celle de $(\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \tilde{G}$ et d'appliquer le corollaire précédent. \square

Corollaire C. *Différemment, on a $S \simeq M \times \mathbb{C}^m \simeq M_1 \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$ et, s'il y a un point indispensable, $N \simeq M \times \mathbb{C}^* \simeq M_1 \times S^1$.*

Preuve. C'est exactement dire que π_0 est différemment trivial et π également s'il existe un point indispensable. \square

Corollaire D. *La variété M n'est pas une variété de Stein.*

Preuve. Supposons M de Stein. Alors (cf [G-R]), on a :

$$H^1(M, \mathcal{O}_M) = 0 \quad \text{et donc} \quad H^1(M, \mathcal{O}_M^{\oplus m}) = 0$$

où \mathcal{O}_M est le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur M . Ceci a pour conséquence que tout \mathbb{C}^m -fibré principal au-dessus de M est holomorphiquement trivial, en particulier π_0 est holomorphiquement trivial, ce qui contredit la proposition 4. \square

Polytope associé de M_1 .

La variété M_1 est définie par :

$$M_1 = \{(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \Lambda_i = 0, \sum_{i=1}^n |w_i|^2 = 1\}.$$

Ainsi M_1 est invariante par l'action naturelle du tore réel T^n :

$$A : (z, \theta) \in \mathbb{C}^n \times (S^1)^n \mapsto (z_1.e^{i\theta_1}, \dots, z_n.e^{i\theta_n}) \in \mathbb{C}^n$$

qui correspond à l'action T de $(\mathbb{C}^*)^n$ sur S restreinte à $(S^1)^n$, le sous-groupe compact maximal de $(\mathbb{C}^*)^n$ (cf le paragraphe intitulé compactification équivariante).

Proposition 5. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible de valeurs propres. Soit la variété M_1 correspondante. Alors :*

(i) *L'espace quotient de M_1 par l'action A du tore T^n est un polytope convexe plein de dimension $n - 2m - 1$, à $n - k$ hyperfaces. Chaque point de l'intérieur de ce polytope correspond à une orbite T^n , chaque point d'une hyperface à une orbite T^{n-1} et ainsi de suite.*

(ii) *Ce polytope contient l'information nécessaire pour calculer l'homologie de M_1 .*

Définition. Nous appellerons ce polytope quotient le polytope associé de M_1 .

Preuve. (i) M_1 est donnée par :

$$M_1 = \{(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \Lambda_i = 0, \sum_{i=1}^n |w_i|^2 = 1\}.$$

De ce fait, l'espace quotient de M_1 par l'action A s'identifie à :

$$K = \{(r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_{i=1}^n r_i \Lambda_i = 0, \sum_{i=1}^n r_i = 1\}.$$

L'espace quotient K est un polytope convexe plein (résultat classique : il s'agit très exactement des coefficients définissant l'enveloppe convexe de $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$). Le polytope K est l'ensemble des solutions positives d'un système de $2m + 1$ équations linéaires à n inconnues de rang maximal (de par le lemme 2, (iv)), donc est de dimension $n - 2m - 1$. La fibre au-dessus de K est un T^n qui dégénère au-dessus des différentes faces, i.e. des points où l'un au moins des r_i est nul. En particulier, chaque hyperface correspond à l'annulation d'une coordonnée, donc il y a $n - k$ hyperfaces.

(ii) Le corollaire C de la proposition 4 indique que l'homologie de M_1 est donnée par celle de S . Les différentes faces du polytope K expriment les différents couples, triplets, ... de coordonnées qui peuvent s'annuler, donc le polytope caractérise complètement S . \square

II. LA VARIÉTÉ N EST SOIT UN TORE COMPLEXE,
SOIT UNE VARIÉTÉ NON SYMPLECTIQUE.

Le cas $n = 2m + 1$.

La condition d'hyperbolicité faible implique que $n > 2m$. Dans ce paragraphe, nous supposons $n = 2m + 1$. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m+1})$ une configuration admissible. Nous allons montrer que, dans ce cas, N est un tore complexe, et que l'on obtient ainsi tous les tores complexes de toutes les dimensions (résultat à comparer avec [LdM-Ve] où seuls les tores de dimension complexe 1 sont obtenus).

L'hypothèse d'hyperbolicité faible a, pour $n = 2m + 1$, des conséquences techniques fortes sur le rang de certains ensembles de vecteurs, conséquences que nous détaillons maintenant. Posons $\Lambda'_i = (1, \lambda_i^1, \dots, \lambda_i^m)$ pour i variant de 1 à $2m + 1$.

Sous-lemme. Soit (u_1, \dots, u_{2m}) un $2m$ -uplet de vecteurs de \mathbb{C}^m de rang réel $2m$. Soit $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq 2m$ et soit (j_1, \dots, j_m) l'ensemble d'indices complémentaires. Alors si $(u_{i_1}, \dots, u_{i_m})$ est de rang complexe m , l'ensemble complémentaire $(u_{j_1}, \dots, u_{j_m})$ est également de rang complexe m .

Preuve. Pour simplifier, nous raisonnerons avec (u_1, \dots, u_m) . Supposons ce m -uplet de rang complexe m . Alors ce m -uplet génère $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^m \oplus i\mathbb{R}^m$ et l'on peut supposer qu'il engendre réellement la partie \mathbb{R}^m . Comme l'ensemble des vecteurs est de rang réel $2m$, la partie (u_{m+1}, \dots, u_{2m}) engendre réellement $i\mathbb{R}^m$, donc, en complexifiant, engendre également \mathbb{C}^m . \square

Ceci va nous permettre de démontrer :

Lemme 1. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m+1})$ une configuration admissible. Alors,
(i) pour tout $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq 2m + 1$, l'ensemble $(\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_m})$ est de rang complexe m .
(ii) le système $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_{2m+1})$ est de rang réel $2m + 1$.
(iii) pour tout $1 \leq i_1 < \dots < i_{m+1} \leq 2m + 1$, l'ensemble $(\Lambda'_{i_1}, \dots, \Lambda'_{i_{m+1}})$ est de rang complexe $m + 1$.

Preuve. (i) La démonstration du lemme 2, (ii), de la première partie prouve qu'en fait $(\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_{2m}})$ est de rang réel $2m$, pour tout $1 \leq i_1 < \dots < i_{2m} \leq 2m + 1$ (sinon l'on pourrait trouver une combinaison linéaire à coefficients positifs entre ces vecteurs, violant la condition d'hyperbolicité faible). Par ailleurs, ce même lemme implique que $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m+1})$ est de rang complexe m . Par exemple, $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$ est de rang complexe m .

Alors, par le sous-lemme, tout m -uplet de vecteurs issu de $(\Lambda_{m+1}, \dots, \Lambda_{2m+1})$ est de rang complexe m . De nouveau par le sous-lemme, il en résulte que la configuration $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{m-1}, \Lambda_p)$ est également de rang complexe m , pour $m+1 \leq p \leq 2m+1$ quelconque. En continuant ce procédé, il est clair que l'on montre que tout m -uplet est de rang complexe m .

(ii) C'est une application directe du lemme 2 de la première partie.

(iii) Par souci de simplification, nous montrons que $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_{m+1})$ est de rang complexe $m + 1$. D'après le (i), le sous-ensemble $(\Lambda_{m+2}, \dots, \Lambda_{2m+1})$ est de rang complexe m , donc il en va de même pour $(\Lambda'_{m+2}, \dots, \Lambda'_{2m+1})$. Une simple adaptation du sous-lemme montre alors le résultat. \square

Posons maintenant :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_2^1 - \lambda_1^1 & \dots & \lambda_2^m - \lambda_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m+1}^1 - \lambda_1^1 & \dots & \lambda_{m+1}^m - \lambda_1^m \end{pmatrix}$$

et $(A)_{i,j}$ les mineurs associés à la matrice A . Notons enfin :

$$\alpha_i = \left(\frac{\sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} \det (A)_{i,j} (\lambda_{m+1+p}^j - \lambda_1^j)}{\det A} \right)_{p=1}^m$$

vecteurs de \mathbb{C}^m qui sont bien définis d'après le lemme 1.

Théorème 1. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m+1})$ une configuration admissible. Alors :*

- (i) *La variété N est un tore complexe de dimension complexe m .*
- (ii) *Le réseau du tore est $(e_1, \dots, e_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ avec e_i vecteurs de la base canonique de \mathbb{C}^m et les α_i définis précédemment.*
- (iii) *Tous les tores complexes de toute dimension peuvent être obtenus de cette manière.*

Preuve. (i) Dans le cas $n = 2m + 1$, la condition d'hyperbolicité faible implique que $S = (\mathbb{C}^*)^{2m+1}$. De ce fait, l'action T de compactification équivariante de $(\mathbb{C}^*)^n$ sur S de la première partie est transitive, et donc l'action quotient \tilde{T} sur N l'est également. Ceci implique que N est biholomorphe à une orbite de dimension m de cette action, donc à $(\mathbb{C}^*)^m / \Gamma$, où Γ est un sous-groupe multiplicatif discret de $(\mathbb{C}^*)^m$. Par compacité de N , ce sous-groupe est maximal et N est ainsi un tore complexe de dimension m .

Une autre façon de dire les choses est de constater que, dans la présentation de N comme compactification équivariante de G , la compactification se réduit ici à l'égalité $N = G$. Dès lors, N est un groupe de Lie connexe, compact, complexe; abélien, donc un tore complexe.

(ii) Nous allons calculer la trace laissée par une feuille sur un plan transverse de dimension $m + 1$. L'action est donnée par :

$$(\alpha, T, w) \in (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m) \times S \longmapsto (\alpha e^{\langle \Lambda_1, T \rangle} w_1, \dots, \alpha e^{\langle \Lambda_{2m+1}, T \rangle} w_{2m+1}) \in S$$

Soit $w \in S = (\mathbb{C}^*)^{2m+1}$. Voyons quel sous-groupe de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ fixe les m premières coordonnées de w .

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha e^{\langle \Lambda_1, T \rangle} w_1 = w_1 \\ \vdots \\ \alpha e^{\langle \Lambda_{m+1}, T \rangle} w_{m+1} = w_{m+1} \end{array} \right.$$

soit :

$$\begin{cases} e^{\langle \Lambda_2 - \Lambda_1, T \rangle} = 1 \\ \vdots \\ e^{\langle \Lambda_{m+1} - \Lambda_1, T \rangle} = 1 \end{cases}$$

Cela nous amène au système suivant :

$$\begin{cases} \langle \Lambda_2 - \Lambda_1, T \rangle = 2i\pi k_1 \\ \vdots \\ \langle \Lambda_{m+1} - \Lambda_1, T \rangle = 2i\pi k_m \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de Cramer dont le déterminant est non nul d'après le lemme 1. Soit A_i le déterminant de la matrice obtenue de A en supprimant la i -ème colonne et en ajoutant comme dernière colonne le m -uplet $(2i\pi k_1, \dots, 2i\pi k_m)$. La solution est alors, avec les notations introduites dans la proposition :

$$\begin{cases} T_1 = (-1)^{m-1} \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\sum_{j=1}^m 2i\pi k_j (-1)^{j+1} \det (A)_{j,1}}{\det A} \\ \vdots \\ T_m = \frac{\det A_m}{\det A} = \frac{\sum_{j=1}^m 2i\pi k_j (-1)^{j+m} \det (A)_{j,m}}{\det A} \end{cases}$$

Ainsi la feuille de S passant par w intersecte le "plan" :

$$\{(w_1, \dots, w_{m+1}) \times (\mathbb{C}^*)^m\} \subset S$$

selon un réseau (multiplicatif) donné par les points :

$$(w_1, \dots, w_{m+1}, w_{m+2} \cdot e^{\langle \Lambda_{m+2} - \Lambda_1, T \rangle}, \dots, w_{2m+1} \cdot e^{\langle \Lambda_{2m+1} - \Lambda_1, T \rangle})$$

pour T vérifiant les équations ci-dessus. En redressant par l'exponentielle, l'on trouve ainsi que l'exponentielle $e^{2i\pi}$ réalise un biholomorphisme (en fait un isomorphisme de Lie) entre N et le tore complexe de dimension m de réseau :

$$(e_1, \dots, e_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

avec e_i vecteurs de la base canonique et :

$$\alpha_i = \left(\frac{\sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} \det (A)_{i,j} (\lambda_{m+1+p}^j - \lambda_1^j)}{\det A} \right)_{p=1}^m$$

On peut donner une forme plus simple de ce réseau. Remarquons pour cela que :

$${}^t A = (\Lambda_2 - \Lambda_1, \dots, \Lambda_{m+1} - \Lambda_1) .$$

Posons alors de même :

$${}^t B = (\Lambda_{m+2} - \Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m+1} - \Lambda_1) .$$

Le résultat précédent s'écrit :

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = B A^{-1} .$$

(iii) Il nous reste à montrer maintenant que nous obtenons tous les tores de dimension m par ce procédé.

Nous allons montrer que nous obtenons tous les réseaux. Par une transformation affine de \mathbb{C}^m , tout réseau peut s'écrire $(e_1, \dots, e_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ensemble de vecteurs \mathbb{R} -linéairement indépendants de \mathbb{C}^m avec (e_1, \dots, e_m) base canonique de \mathbb{C}^m (voir [M-K], p.22). Il s'agit de trouver une configuration admissible qui donne ce réseau.

Posons $\Lambda_2 = e_1, \dots, \Lambda_{m+1} = e_m$. Maintenant, $\det A$ et $\det (A)_{i,j}$ sont des fonctions de Λ_1 uniquement. Posons $a_{i,j} = (-1)^{i+j} \det (A)_{i,j} = a_{i,j}(\Lambda_1)$ et considérons la fonction :

$$\Phi : (\lambda_1^1, \dots, \lambda_1^m) \in \mathbb{C}^m \longmapsto \det ((a_{i,j}(\Lambda_1))_{i,j=1}^m) \in \mathbb{C} .$$

C'est un polynôme en $(\lambda_1^1, \dots, \lambda_1^m)$ non identiquement nul ($\Phi(0, \dots, 0) = 1$) donc, pour presque tout Λ_1 , on a $\det ((a_{i,j}(\Lambda_1))_{i,j=1}^m)$ non nul, donc $\det A$ non nul (de par la formule des cofacteurs).

Soit alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \det A \times \alpha_1 = \left(\sum_{i=1}^m a_{1,i} (\lambda_{m+1+p}^i - \lambda_1^i) \right)_{p=1}^m \\ \vdots \\ \det A \times \alpha_m = \left(\sum_{i=1}^m a_{m,i} (\lambda_{m+1+p}^i - \lambda_1^i) \right)_{p=1}^m \end{array} \right.$$

Fixons Λ_1 tel que $\Phi(\Lambda_1)$ et $\det A$ soient non nuls. Il s'agit d'un système vectoriel linéaire $m \times m$ d'inconnues $(\Lambda_{m+1}, \dots, \Lambda_{2m+1})$, à déterminant non nul, donc avec une solution unique. Utilisant la forme simplifiée du réseau, on peut écrire cette solution :

$$(\Lambda_{m+2} - \Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m+1} - \Lambda_1) = {}^t A \cdot {}^t (\alpha_1, \dots, \alpha_m) .$$

Comme $(e_1, \dots, e_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ est de rang réel $2m$, l'on obtient une solution de rang $2m$. En jouant ensuite sur Λ_1 si nécessaire, l'on peut trouver une configuration admissible. \square

Remarque. Le lemme 1 prouve que le réseau peut s'exprimer à partir de n'importe quel m -uplet de vecteurs de $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m+1})$. Nous avons simplement fait un choix arbitraire.

Remarque. D'après le lemme 2 de la première partie, toute configuration admissible possède une sous-configuration admissible de $2m + 1$ vecteurs. Il résulte de cela que toute variété N contient un tore de dimension m comme sous-variété holomorphe.

Remarque. Soit E_m l'ensemble des configurations admissibles pour $n = 2m + 1$. À partir de l'expression explicite du réseau, l'on peut théoriquement calculer le groupe H tel que E_m/H s'identifie à l'espace des modules des tores complexes de dimension m (espace de Siegel). On obtient ainsi une nouvelle interprétation de cet espace de modules. De la même manière, on peut théoriquement calculer le groupe \tilde{H} tel que E_m/\tilde{H} s'identifie à l'espace des modules des tores algébriques cette fois.

Exemples.

Pour $m = 1$ et $m = 2$, l'expression du réseau du tore est suffisamment simple pour être décrite explicitement.

Exemple. Supposons $m = 1$. Alors le cas torique correspond à une action de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^3 donnée par une configuration admissible $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de vecteurs de \mathbb{C} et l'on obtient un tore de dimension complexe 1 et de réseau (cf [LdM-Ve]) :

$$\left(1, \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) = (1, \tau) .$$

Exemple. Le cas $m = 2$ correspond à une action de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C}^5 , à une configuration :

$$\left(\left(\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{array}\right), \dots, \left(\begin{array}{c} \lambda_5 \\ \mu_5 \end{array}\right)\right)$$

et à un tore de dimension complexe 2 de réseau $((1, 0), (0, 1), (\alpha_5, \alpha_4), (\beta_5, \beta_4))$ avec :

$$\alpha_i = \frac{-(\lambda_i - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1) + (\mu_i - \mu_1)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_3 - \mu_1) - (\lambda_3 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)}$$

$$\beta_i = \frac{(\lambda_i - \lambda_1)(\mu_3 - \mu_1) - (\mu_i - \mu_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_3 - \mu_1) - (\lambda_3 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)}$$

pour $i = 4, 5$.

Action libre.

Comme corollaire du théorème 1, nous prouvons la liberté de l'action globale de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ sur S définissant le feuilletage.

Lemme 2. *Soit \mathcal{F} le feuilletage de S donné par l'action de \mathbb{C}^m seule définie par une configuration admissible quelconque. Soit F une feuille de ce feuilletage. Alors F ne contient pas deux points appartenant à la même droite vectorielle complexe.*

Preuve. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ la configuration admissible. L'action de \mathbb{C}^m est explicitement donnée par :

$$(T, w) \in \mathbb{C}^m \times S \longmapsto (e^{\langle \Lambda_1, T \rangle} w_1, \dots, e^{\langle \Lambda_n, T \rangle} w_n) \in S .$$

Soit F une feuille de \mathcal{F} et soit w un point de F . Nous cherchons les points $(w'_1, \dots, w'_n) \in S$ vérifiant :

$$\text{il existe } \alpha \in \mathbb{C}^* \text{ tel que } (w'_1, \dots, w'_n) = \alpha(w_1, \dots, w_n)$$

i.e. il existe $T \in \mathbb{C}^m - \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tels que :

$$(e^{\langle \Lambda_1, T \rangle} w_1, \dots, e^{\langle \Lambda_n, T \rangle} w_n) = \alpha(w_1, \dots, w_n) .$$

Soient α et T solutions de cette équation. Soit $(w_{i_1}, \dots, w_{i_k})$ les coordonnées non nulles de w . Alors il est clair que (α, T) fixe également tous les points de :

$$\{z \in \mathbb{C}^n \mid z_j = 0 \text{ si } j \notin (i_1, \dots, i_k)\}$$

ensemble qui correspond à la configuration admissible $(\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_k})$. Cette configuration contient une sous-configuration admissible de $2m + 1$ vecteurs d'après le lemme 2 de la première partie. Supposons, pour simplifier, qu'il s'agisse de $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m+1})$. Alors tous les points de $S \cap \{z_{2m+2} = \dots = z_n = 0\}$, ensemble non vide, sont fixés par (α, T) . Montrons que ce n'est pas possible.

$$\begin{cases} e^{\langle \Lambda_1, T \rangle} = \alpha \\ \vdots \\ e^{\langle \Lambda_{2m+1}, T \rangle} = \alpha \end{cases}$$

En éliminant l'exponentielle :

$$\begin{cases} \langle \Lambda_2 - \Lambda_1, T \rangle = 2ik_1\pi \\ \vdots \\ \langle \Lambda_{2m+1} - \Lambda_1, T \rangle = 2ik_{2m}\pi \end{cases}$$

Ce système est de rang complexe m par le lemme 1. Supposons que les m premières équations soient indépendantes et reprenons le calcul du réseau du tore. Ces m premières équations forcent T à varier dans un réseau de \mathbb{C}^m .

Le quotient de $S \cap \{z_{2m+2} = \dots = z_n = 0\}$ par l'action trace est un tore complexe de dimension m . Le réseau de ce tore vaut, comme calculé dans le théorème 1 :

$$(\langle \Lambda_{m+2} - \Lambda_1, T \rangle, \dots, \langle \Lambda_{2m+1} - \Lambda_1, T \rangle)$$

pour les T déterminés précédemment. Mais les équations restantes prouvent que ce réseau se réduit aux m vecteurs de la base canonique, donc qu'il n'est pas maximal. Cela contredit la compacité. Il n'y a donc pas deux points de la même feuille joints par une droite vectorielle. \square

Ce lemme technique a pour conséquence l'important corollaire suivant :

Proposition 1. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible quelconque. L'action globale de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ sur S associée est libre.*

Groupe G .

Dans cette section, nous reprenons le calcul du réseau fait dans la preuve du théorème 1 pour l'appliquer à G . Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible. Nous supposons, pour simplifier, que $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m+1})$ est une sous-configuration admissible (rappelons -cf lemme 2 de la première partie- qu'il existe toujours une telle sous-configuration de $2m + 1$ vecteurs). On peut alors définir, de même que pour le théorème 1, la matrice A dont le déterminant est non nul, ainsi que :

$$1 \leq i \leq m \quad \alpha_i = \left(\frac{\sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} \det(A)_{i,j} (\lambda_{m+1+p}^j - \lambda_1^j)}{\det A} \right)_{p=1}^{n-m-1}$$

qui sont cette fois des vecteurs de \mathbb{C}^{n-m-1} et non de \mathbb{C}^m . On a alors :

Proposition 2. *Le groupe $G = (\mathbb{C}^*)^{n-1}/\mathbb{C}^m$ est isomorphe (au sens de Lie) à $\mathbb{C}^{n-m-1}/\Gamma$, où Γ est le réseau de $n - 1$ vecteurs de \mathbb{C}^{n-m-1} engendré par la base canonique e_1, \dots, e_{n-m-1} et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.*

Preuve. Rappelons que, conformément à la condition d'hyperbolicité faible (lemme 2 de la première partie), nous avons supposé que $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m+1})$ est une sous-configuration admissible, et donc d'après le lemme 1, $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_{m+1})$ est de rang complexe $m + 1$ (avec $\Lambda'_i = (1, \Lambda_i)$). Dès lors, le calcul du réseau du théorème 1 reste valide et l'on obtient ainsi que G est isomorphe à $\mathbb{C}^{n-m-1}/\Gamma$, avec Γ réseau engendré par les $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ définis précédemment et la base canonique de \mathbb{C}^{n-m-1} .

Remarquons que l'on peut obtenir ce même résultat en considérant l'homomorphisme :

$$e^{2i\pi} : z \in \mathbb{C}^n \longmapsto e^{2i\pi z} \in (\mathbb{C}^*)^n .$$

Le feuilletage sur $(\mathbb{C}^*)^n \subset S$ donne par image réciproque un feuilletage sur \mathbb{C}^n induit par l'action :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}^{m+1} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (\alpha, T, z) \longmapsto (z_1 + \frac{1}{2i\pi} \langle \Lambda_1, T \rangle + \alpha, \dots, z_n + \frac{1}{2i\pi} \langle \Lambda_n, T \rangle + \alpha) \end{array} \right.$$

ce qui permet d'identifier G à l'espace des feuilles de ce feuilletage quotienté par le réseau engendré par la base canonique de \mathbb{C}^n , noyau de l'application $e^{2i\pi}$, que l'on vérifie immédiatement être $\mathbb{C}^{n-m-1}/\Gamma$, avec Γ défini plus haut. \square

De même, l'on peut obtenir une identification similaire pour le groupe \tilde{G} .

Corollaire A. *Le groupe $G = (\mathbb{C}^*)^{n-1}/\mathbb{C}^m$ est isomorphe (au sens de Lie) à :*

$$(\mathbb{C}^*)^p \times C \text{ pour un entier } p \geq 0 \text{ et un groupe de Cousin } C \text{ non réduit à } \{0\} .$$

Preuve. Rappelons que (cf [Mom]), en tant que groupe de Lie complexe abélien, G est isomorphe (au sens de Lie) à :

$$(\mathbb{C}^*)^p \times \mathbb{C}^q \times C$$

pour p et q deux entiers. La présence de la base canonique dans le réseau définissant G dans le modèle de la proposition 2 implique que $q = 0$. En effet tout isomorphisme entre G et un groupe de Lie abélien complexe G' , mis tous les deux sous la forme de \mathbb{C}^{n-m-1} quotienté par un réseau, se relève en une unique (modulo les symétries du réseau) application linéaire inversible Ξ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n-m-1} & \xrightarrow{\Xi} & \mathbb{C}^{n-m-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & G' \end{array}$$

envoyant le réseau définissant G sur le réseau définissant G' . Supposons alors que G' soit du type $\mathbb{C} \times G''$, alors le réseau qui le définit est de rang complexe strictement inférieur à $n - m - 1$, ce qui est impossible puisqu'il est l'image, par une application linéaire inversible, d'un réseau contenant la base canonique de \mathbb{C}^{n-m-1} . Par le même type de raisonnement, la présence de vecteurs \mathbb{R} -linéairement indépendants de la base canonique dans le réseau prouve que G est différent de $(\mathbb{C}^*)^{n-m-1}$, donc que C est non trivial. \square

Corollaire B. *Le groupe \tilde{G} est isomorphe (au sens de Lie) à :*

$$G \times \mathbb{C}^* \simeq (\mathbb{C}^*)^{p+1} \times C$$

pour p et C définis dans le corollaire précédent.

Preuve. Le fibré $\pi_1 : M \rightarrow N$ est un \mathbb{C}^* -fibré principal dont la restriction à G est $\tilde{G} \rightarrow G$. Maintenant, dans le diagramme commutant de fibrés :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\mathbb{C}^*} & V = S/\mathbb{C}^* \\ \pi_0 \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi}_0 \\ M & \xrightarrow{\pi_1} & N \end{array}$$

le fibré $S \rightarrow V$ est image réciproque par $\tilde{\pi}_0$ du fibré π_1 . Dès lors, le fibré trivial $(\mathbb{C}^*)^n \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{n-1}$ est image réciproque de $\tilde{G} \rightarrow G$, qui est donc également holomorphiquement trivial, ce qui donne le premier isomorphisme, le second étant alors conséquence directe du corollaire A. \square

Remarque. Une légère adaptation de ce corollaire montre que le fibré $M_1 \rightarrow N$ est différentiablement trivial si et seulement si la configuration admet un point indispensable. Nous en donnerons une démonstration directe un peu plus loin au cours de cette partie.

Corollaire C. Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors pour tout groupe de Lie abélien connexe complexe G de dimension p isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^{p'} \times C$, avec C partie de Cousin non réduite à $\{0\}$, il existe $q < p$ et une configuration admissible de $p + q$ vecteurs de \mathbb{C}^q tels que la variété N correspondante soit compactification équivariante de G .

En particulier, pour tout groupe de Cousin G , il existe une variété N qui soit compactification équivariante de ce groupe.

Preuve. Un tel groupe de Lie G est isomorphe à \mathbb{C}^p quotienté par un réseau engendré par la base canonique de \mathbb{C}^p et q autres vecteurs pour un entier q donné, et est ainsi susceptible d'être associé à une variété N pour une configuration admissible de $p + q$ vecteurs de \mathbb{C}^q de par la proposition 1. Maintenant une légère adaptation de la preuve du (iii) du théorème 1 prouve que l'on peut obtenir tous les réseaux de ce type, donc tous les groupes de ce type. \square

Nous répondrons, dans la partie III, à la question de savoir sous quelle(s) condition(s) la variété N est compactification équivariante d'un groupe de Cousin et verrons que ses propriétés sont alors différentes.

Le cas $n > 2m + 1$.

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant :

Théorème 2. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) La variété N est symplectique.
- (ii) La variété S est de Stein.
- (iii) On a $S = \mathbb{C}^n - E$ avec E ensemble analytique de codimension complexe 1 en tout point.
- (iv) La variété N est un tore complexe de dimension complexe $n - m - 1$.

Avant de démontrer ce théorème, donnons-en un corollaire immédiat.

Corollaire A. Pour $n \neq 2m + 1$, la variété N n'est pas symplectique, donc pas algébrique.

Preuve. Le cas $n = 2m + 1$ est justement le cas où N est un tore complexe. Il en résulte immédiatement d'après le théorème 2 que pour $n \neq 2m + 1$, N n'est pas symplectique, donc pas kählérienne. Par ailleurs, si N est algébrique, elle admet un plongement holomorphe propre dans un projectif complexe et est kählérienne comme sous-variété fermée du projectif (cf [We] p.189). \square

Remarque. On a immédiatement (iii) \Leftrightarrow (iv). En effet, N est un tore complexe si et seulement si M_1 est un tore réel, c'est-à-dire si et seulement si $S = (\mathbb{C}^*)^n$, ce qui arrive si et seulement si la configuration des valeurs propres ne contient pas de point éliminable, et :

$$E = \bigcup_{i=1}^n \{z_i = 0\} .$$

De ce fait, l'équivalence entre (iii) et (iv) découle du lemme suivant.

Lemme 3. Posons $S = \mathbb{C}^n - E$ avec E ensemble analytique. Alors E est partout de codimension complexe 1 si et seulement si la configuration des valeurs propres ne contient pas de point éliminable.

Preuve. Suite à la remarque, il suffit de montrer que, s'il y a un point éliminable, E contient une composante de codimension au moins 2.

Soit k le nombre de points indispensables, que nous supposons être, pour simplifier, les k premières coordonnées. S'il y a au moins un point éliminable, on a :

$$S = (\mathbb{C}^*)^k \times (\mathbb{C}^{n-k} - F)$$

avec F ensemble analytique de codimension complexe au moins 2 et $n - k$ non nul. On a :

$$E = \bigcup_{i=1}^k \{z_i = 0\} \times F$$

donc la seule possibilité pour que E soit partout de codimension 1 est que F soit vide. Cela signifie :

$$0 \in \mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_k) .$$

Mais, d'après le lemme 4, démontré ci-après, on a $k \leq 2m$, puisque nous ne sommes pas dans le cas des tores. Ceci viole l'hypothèse d'hyperbolicité faible. \square

Lemme 4. *Soit k le nombre de points indispensables de la configuration. Alors $k \leq 2m + 1$ et l'égalité n'est possible que lorsque N est un tore complexe.*

Preuve. Le tore T^n agit sur M_1 et le quotient est un polytope convexe plein de dimension $n - 2m - 1$ avec $n - k$ hyperfaces (voir la proposition 5 de la première partie). Un tel polytope a au moins $n - 2m$ hyperfaces (cas du simplexe) sauf en dimension 0, i.e. pour $n = 2m + 1$. \square

Une fois ce lemme établi, l'équivalence entre (iii) et (iv) est démontrée et la preuve du théorème se fait en deux parties, à l'aide de deux propositions.

Proposition 3. *La variété S est de Stein si et seulement si la configuration ne contient pas de point éliminable.*

Preuve. C'est une simple application de deux propositions sur les variétés de Stein, que l'on trouvera dans [G-R], et dont nous adaptions les notations au cas qui nous intéresse.

Proposition A (cf [G-R], p.128). *Si E est de codimension plus grande ou égale à deux en au moins un point, alors $S = \mathbb{C}^n - E$ n'est pas un domaine d'holomorphic, donc n'est pas de Stein.*

Proposition B (cf [G-R], p.130). *Si E est partout de codimension 1 et si E peut être défini localement comme zéro d'une seule fonction holomorphic, alors S est de Stein.*

Le lemme 3 associé à la proposition A prouve que S ne peut être de Stein que s'il n'existe pas de point éliminable. Dans ce cas, $E = \bigcup_{i=1}^n \{z_i = 0\}$ et la proposition B permet de conclure. \square

Pour achever la démonstration du théorème, il reste maintenant à prouver la proposition suivante.

Proposition 4. *Si N est symplectique, alors N est un tore complexe.*

Plusieurs lemmes préparatoires vont nous être nécessaires pour démontrer cette proposition.

Lemme 5. Soit $S = \mathbb{C}^n - E$. Posons $d = \min(\text{cod}_{\mathbb{C}} E)$. Alors S est $(2d - 2)$ -connexe.

Preuve. Soit $1 \leq i \leq 2d - 2$. Soit $S^i \xrightarrow{j} S$ une application continue. On peut voir j comme une inclusion continue de la sphère S^i dans \mathbb{C}^n qui évite l'ensemble analytique E . Nous allons montrer que j s'étend en une application de D^{i+1} dans $\mathbb{C}^n \times I$ qui évite $E \times I$.

Comme S est ouvert et $j(S^i)$ compact, il existe un voisinage tubulaire de $j(S^i)$ inclus dans S . Soit $j_1 : D^{i+1} \rightarrow \mathbb{C}^n \times I$ telle que $j_1|_{S^i} = j$. On a :

$$\text{cod}_{\mathbb{C}}(E \times I) \geq d \text{ dans } \mathbb{C}^n \times I \quad \text{donc} \quad \text{cod}_{\mathbb{R}}(E \times I) \geq 2d .$$

De ce fait, l'on peut trouver, par application du théorème global de transversalité, une application j'_1 aussi proche que l'on veut de j_1 et transverse à $E \times I$, donc, pour raison de dimensions, dont l'image est disjointe de $E \times I$.

Pour j'_1 suffisamment proche de j_1 , $j'_1(S^i)$ vit dans le voisinage tubulaire de j décrit précédemment, donc l'on peut homotoper j'_1 à $j' : D^{i+1} \rightarrow S \times I$ avec $j'_1|_{S^i} = j$. Il résulte de cela que la classe de j dans $\pi_i(S)$ est nulle, et donc que S est $(2d - 2)$ -connexe. \square

Lemme 6. Soit k le nombre de points indispensables de la configuration. Alors M_1 est difféomorphe à $(S^1)^k \times M_0$ avec M_0 variété différentiable 2-connexe.

Preuve. On a :

$$M_1 \simeq \{(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n - \{0\} \mid \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \Lambda_i = 0, \sum_{i=1}^n |w_i|^2 = 1\}$$

La variété M_1 est invariante par l'application multiplicative de T^n . Supposons que (w_1, \dots, w_k) soient les points indispensables. Alors, par définition, $S = (\mathbb{C}^*)^k \times S_0$ et les (w_1, \dots, w_k) ne peuvent s'annuler.

Soit alors le difféomorphisme :

$$\begin{aligned} \phi : M_1 &\longrightarrow (S^1)^k \times M_0 \\ w &\longmapsto \left(\frac{w_1}{|w_1|}, \dots, \frac{w_k}{|w_k|}, |w_1|, \dots, |w_k|, w_{k+1}, \dots, w_n \right) \end{aligned}$$

La variété différentiable M_0 est définie par :

$$\begin{aligned} M_0 \simeq \{ &(r_1, \dots, r_k) \in (\mathbb{R}_*^+)^k, (w_{k+1}, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^{n-k} \mid \\ &\sum_{i=1}^k r_i \Lambda_i + \sum_{i=k+1}^n |w_i|^2 \Lambda_i = 0, \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=k+1}^n |w_i|^2 = 1 \} \end{aligned}$$

Il s'agit d'une variété puisque, par hyperbolicité faible, les équations qui la définissent forment un système non dégénéré (cf proposition 3 de la première partie). Il suffit maintenant de vérifier que M_0 est 2-connexe. Pour cela, regardons le fibré $\tilde{\pi}_1 : S \rightarrow M_1$. Comme la fibre est contractile (il s'agit de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}_*^+$), la suite exacte en homotopie de la fibration donne $\pi_*(S) \simeq \pi_*(M_1)$.

$$\text{Or, on a : } \begin{cases} \pi_*(S) \simeq \pi_*((S^1)^k) \oplus \pi_*(S_0) \\ \pi_*(M_1) \simeq \pi_*((S^1)^k) \oplus \pi_*(M_0) \end{cases}$$

d'où $\pi_*(M_0) \simeq \pi_*(S_0)$. Mais $S_0 = \mathbb{C}^{n-k} - F$ avec F ensemble analytique de codimension complexe au moins 2, puisqu'il ne contient aucun point indispensable. Donc le lemme 5 s'applique et montre que S_0 , et par suite M_0 sont 2-connexes. \square

Lemme 7 (cf [LdM-Ve]). *Soit $S = \mathbb{C}^n - E$ et $d = \min(\text{cod}_{\mathbb{C}} E)$. Alors l'on a une inclusion de S^1 -fibrés :*

$$\begin{array}{ccccccc} S^{2d-1} & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & S^{2d-1} & \longrightarrow & S^{2n-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}P^{d-1} & \longrightarrow & N & \xrightarrow{j} & \mathbb{C}P^{d-1} & \longrightarrow & \mathbb{C}P^{n-1} \end{array}$$

et la composition des flèches du bas est homotope à l'inclusion.

Preuve. Nous suivons la démonstration de [LdM-Ve].

(i) Comme M_1 est $(2d-2)$ -connexe, le fibré $M_1 \xrightarrow{S^1} N$ est universel pour les espaces de dimension inférieure ou égale à $2d-2$ (cf [St], §19), d'où la flèche classifiante :

$$\begin{array}{ccc} S^{2d-1} & \longrightarrow & M_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}P^{d-1} & \longrightarrow & N \end{array}$$

(ii) Comme d minore la codimension complexe de E , il existe une composante de codimension d dans E , par exemple $\{z_1 = \dots = z_d = 0\}$. De ce fait S , et par conséquent M_1 ne contient aucun point dont les d premières coordonnées sont nulles. Il résulte de cela que le plongement réel de N dans $\mathbb{C}P^{n-1}$ est recouvert par les d premières cartes de $\mathbb{C}P^{n-1}$. Plus précisément, soit :

$$U_i = \{[z_1, \dots, z_n] \in \mathbb{C}P^{n-1} \mid z_i \neq 0\}.$$

Alors le plongement \mathcal{N} est inclus dans $\bigcup_{i=1}^d U_i$.

Identifions alors $\mathbb{C}P^{d-1}$ avec :

$$\{[z_1, \dots, z_d, 0, \dots, 0] \in \mathbb{C}P^{n-1}\}.$$

Il existe une rétraction forte de $\bigcup_{i=1}^d U_i$ sur $\mathbb{C}P^{d-1}$ donnée par :

$$H : ([z_1, \dots, z_n], t) \in \bigcup_{i=1}^d U_i \times I \longmapsto ([z_1, \dots, z_d, tz_{d+1}, \dots, tz_n]) \in \bigcup_{i=1}^d U_i.$$

Ceci donne la seconde flèche.

(iii) Enfin, la composition des flèches du bas est encore une application classifiante, donc homotope à l'inclusion, puisque l'inclusion est classifiante. \square

Lemme 8. Soit k le nombre de points indispensables de la configuration. Supposons $k > 0$. Alors N est difféomorphe à $M_0 \times (S^1)^{k-1}$.

Preuve. La variété N est donnée difféomorphiquement comme quotient de M_1 , variété plongée dans S^{2n-1} , par l'action naturelle multiplicative de S^1 sur S^{2n-1} . On a :

$$M_1 = \{(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n - \{0\} \mid \sum_{i=1}^n |w_i|^2 \Lambda_i = 0, \sum_{i=1}^n |w_i|^2 = 1\}.$$

Il y a, par hypothèse, au moins un point indispensable, par exemple z_1 . Ceci donne naissance au difféomorphisme suivant :

$$\Psi : z \in M_1 \longmapsto \left(\frac{z_1}{|z_1|}, \frac{z_2}{z_1}, \dots, \frac{z_n}{z_1} \right) \in S^1 \times N$$

où nous avons identifié la variété N avec le plongement différentiable :

$$\mathcal{N}' = \{(w_1, \dots, w_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} \mid \Lambda_1 + \sum_{i=2}^n \Lambda_i |w_i|^2 = 0\}.$$

qui s'obtient de façon évidente du plongement \mathcal{N} de la première partie. L'action de S^1 sur M_1 peut alors être concentrée sur la première coordonnée, selon le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (e^{i\theta}, z) \in S^1 \times M_1 & \xrightarrow{\Phi} & (e^{i\theta} \cdot z_1, \dots, e^{i\theta} \cdot z_n) \in M_1 \\ \downarrow (Id, \Psi) & & \downarrow \Psi \\ (e^{i\theta}, w) \in S^1 \times S^1 \times \mathcal{N}' & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & (e^{i\theta} \cdot w_1, w_2, \dots, w_n) \in S^1 \times \mathcal{N}' \end{array}$$

Maintenant le lemme 6 nous donne une identification :

$$M_1 \simeq (S^1)^k \times M_0$$

qui est compatible avec l'identification précédente, i.e. l'on vérifie aisément que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\simeq} & M_0 \times (S^1)^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{N}' & \xrightarrow{\simeq} & M_0 \times (S^1)^{k-1} \end{array}$$

commute, ce qui achève la preuve. \square

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 4, et donc le théorème.

Preuve de la proposition 4.

Soit k le nombre de points indispensables de la configuration.

(i) On suppose $k > 0$.

Les lemmes 6 et 8 impliquent que N est difféomorphe à $M_0 \times (S^1)^{k-1}$, avec M_0 2-connexe. Par le théorème de Hurewicz, on a $H^2(M_0, \mathbb{R}) = 0$, et donc :

$$H^2(N, \mathbb{R}) \simeq H^2((S^1)^{k-1}) \otimes H^0(M_0) \simeq H^2((S^1)^{k-1}, \mathbb{R})$$

par la formule de Künneth.

Supposons N symplectique et soit ω une forme symplectique sur N . Alors la forme ω^{n-m-1} est une forme volume sur N de degré $2n-2m-2$. Mais l'identification précédente implique que ceci n'est possible que si :

$$2n - 2m - 2 \leq k - 1 .$$

Or, par le lemme 4, on a $k \leq 2m + 1$ et $n \geq 2m + 1$, donc il faut que :

$$2m \geq k - 1 \geq 2n - 2m - 2 \geq 2m .$$

Le seul cas possible est le cas $k = 2m + 1 = n$ et donc, d'après le lemme 4, N est un tore complexe.

(ii) On suppose cette fois $k = 0$.

Dans ce cas, la démonstration de [LdM-Ve] s'applique. Comme il n'y a pas de point indispensable, d est supérieure ou égale à 2, et le lemme 5 implique que S et donc M_1 sont 2-connexes. La suite exacte de Gysin pour le fibré $M_1 \rightarrow N$ s'écrit à l'ordre 1 :

$$H^1(M_1, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(N, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\wedge e} H^2(N, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M_1, \mathbb{Z})$$

où e est la classe d'Euler du fibré. Mais, par Hurewicz, $H^1(M_1) = H^2(M_1) = 0$ et donc $H^2(N) = H^0(N) = \mathbb{Z}$, engendré par la classe d'Euler. Or le lemme 7 implique

$$e^d = (j^* e_0)^d = j^*(e_0^d) = 0 \text{ avec } e_0 \text{ classe d'Euler du fibré } S^{2d-1} \longrightarrow \mathbb{C}P^{d-1}$$

la première égalité traduisant la functorialité de la classe d'Euler (cf [B-T]). Par ailleurs, E contient au moins, par hyperbolicité faible, tous les plans définis par l'annulation de $n - 2m$ coordonnées, donc contient, au pire, une composante de codimension complexe $n - 2m$. De ce fait, $d \leq n - 2m \leq n - m - 1$ donc la classe d'Euler e n'engendre pas de forme volume sur N et N n'est pas symplectique. \square

Comme corollaire de ce théorème et des lemmes associés, nous pouvons préciser les résultats de la proposition 4 de la première partie sur les applications projections.

Corollaire B (cf proposition 4, partie I). *Le fibré $\pi : S \rightarrow N$ et donc le fibré $M_1 \rightarrow N$ sont différentiablement triviaux si et seulement s'il existe un point indispensable.*

Preuve. L'implication a été faite dans la proposition 4 de la première partie. Maintenant, s'il n'y a pas de point indispensable, d'après le lemme 5, l'ouvert S est 2-connexe, donc le fibré ne peut être différentiablement trivial. \square

Donnons enfin un corollaire au lemme 7 :

Corollaire C. *Soit e la classe d'Euler du fibré $M_1 \rightarrow N$. Alors :*

$$e^{d-1} \neq 0 \quad \text{mais} \quad e^d = 0$$

Preuve. Supposons $d = 1$. Alors le fibré $M_1 \rightarrow N$ est trivial, de par le corollaire précédent, donc la classe d'Euler est triviale.

Supposons alors $d > 1$. Nous avons prouvé dans la démonstration du théorème 2 que dans ce cas $e^d = 0$. Maintenant en appliquant le lemme 7, le fibré $S^{2d-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{d-1}$ s'obtient comme image réciproque de $M_1 \rightarrow N$, donc par functorialité de la classe d'Euler, la classe d'Euler de ce fibré s'obtient comme image réciproque de e^{d-1} qui ne peut être triviale. \square

III. FONCTIONS MÉROMORPHES ET FORMES HOLOMORPHES SUR N .

Nous nous intéressons dans un premier temps aux propriétés algébriques de la variété N . Dans la seconde partie, nous avons montré que pour $n > 2m + 1$, celle-ci n'est pas algébrique. Nous cherchons maintenant à préciser jusqu'à quel point elle ne l'est pas, en particulier en regardant les fonctions méromorphes.

Caractère algébrique réel de la variété N .

De par la construction de N , il apparaît immédiatement que N est projective algébrique réelle, c'est-à-dire qu'elle est zéro de polynômes réels homogènes dans l'espace projectif complexe. On a :

Proposition 1.

(i) La variété N est algébrique réelle, i.e. est difféomorphe à une variété donnée comme zéros de polynômes homogènes réels dans $\mathbb{C}P^{n-1}$.

(ii) La structure complexe de N est obtenue comme structure complexe induite sur une sous-variété réelle transverse à un feuilletage algébrique de $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Preuve. Elle est immédiate en considérant le plongement réel de N :

$$\mathcal{N} = \{[w_1, \dots, w_n] \in \mathbb{C}P^{n-1} \mid \sum_{i=1}^n \Lambda_i |w_i|^2 = 0\}.$$

et le feuilletage projectivisé donné par l'action de \mathbb{C}^m sur $V = S/\mathbb{C}^*$. \square

Remarque. Le plongement \mathcal{N} est à fibré normal trivial dans $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Remarque. Cette proposition, et en particulier le (ii) portant sur la structure transverse de N , ne peuvent laisser supposer que N soit en un certain sens "presque algébrique" complexe. Tout-au-contraire, une conjecture de F. Bogomolov [Bo], rappelée en introduction, affirme que toute structure complexe sur une variété compacte peut être réalisée comme structure complexe sur une variété réelle transverse à un feuilletage holomorphe d'une variété algébrique. Si cette conjecture s'avère exacte, la construction exposée ici est en fait un exemple de la procédure générale de construction de variétés compactes complexes.

La variété N n'est pas Moishezon.

Une généralisation naturelle des variétés algébriques est la notion de variété de Moishezon que nous rappelons maintenant.

Définition (voir [Mo]). Une variété de Moishezon est une variété compacte complexe dont le degré de transcendance du corps des fonctions méromorphes (la dimension algébrique) est égal à sa dimension complexe, i.e. qui possède autant de fonctions méromorphes globales algébriquement indépendantes que sa dimension complexe.

Rappelons également (voir [Mo]) qu'une telle variété s'obtient après un nombre fini de transformations élémentaires (désingularisations) d'une variété complexe algébrique, et qu'elle est algébrique si et seulement si elle est kählérienne.

Il est alors naturel de se demander si la variété N est Moishezon. La réponse est non.

Théorème 3.

(i) Pour $n > 2m + 1$, la variété N n'est pas Moishezon.

(ii) Pour $n = 2m + 1$, la variété N est Moishezon si et seulement si elle est algébrique.

Preuve.

(i) Ainsi que nous l'avons démontré dans la seconde partie (proposition 2), nous avons le diagramme commutatif suivant d'actions multiplicatives :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*)^n \times S & \longrightarrow & S \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (\mathbb{C}^*)^{n-1}/\mathbb{C}^m \times N & \longrightarrow & N \end{array}$$

Ceci fait de N une compactification équivariante du groupe de Lie complexe commutatif connexe $G = (\mathbb{C}^*)^{n-1}/\mathbb{C}^m$ (cf [Le1]). Soit :

$$h^{1,0} = \dim_{\mathbb{C}} H^0(N, \Omega^1) \quad \text{et} \quad h^{0,1} = \dim_{\mathbb{C}} H^1(N, \mathcal{O})$$

où Ω^1 est le faisceau des germes de 1-formes holomorphes sur N , et \mathcal{O} le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur N . Soit enfin $\text{Alb}(N)$ la variété d'Albanese de N .

Théorème (voir théorème 2.4 de [Le1]). *La variété N est Moishezon si et seulement si $h^{1,0} = h^{0,1}$ et $\text{Alb}(N)$ est une variété abélienne.*

Nous allons montrer que $h^{1,0}$ est strictement inférieur à $h^{0,1}$, ce qui nous donnera, par application du théorème cité, le résultat voulu. Calculons d'abord $h^{0,1}$.

Soit $V = S/\mathbb{C}^*$, c'est-à-dire l'ouvert des feuilles de Siegel projectivisé, et considérons la suite exacte courte de faisceaux suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_V^{inv} \longrightarrow \mathcal{O}_V \xrightarrow{L_{\tilde{\xi}_1} \oplus \dots \oplus L_{\tilde{\xi}_m}} \mathcal{O}_{etr} \longrightarrow 0$$

où \mathcal{O}_V est le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur V , et \mathcal{O}_V^{inv} le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur V constantes le long du feuilletage linéaire engendré par les champs de vecteurs $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_m$, projetés sur V des champs ξ_i . Par ailleurs, $L_{\tilde{\xi}_i}$ désigne la dérivée de Lie par rapport à $\tilde{\xi}_i$ et \mathcal{O}_{etr} est l'image dans $\mathcal{O}_V^{\oplus m}$ de \mathcal{O}_V par l'opérateur linéaire $L = L_{\tilde{\xi}_1} \oplus \dots \oplus L_{\tilde{\xi}_m}$.

On a alors :

$$\text{pour tout } i \in \mathbb{N}, \quad H^i(N, \mathcal{O}) \simeq H^i(V, \mathcal{O}_V^{inv})$$

Pour $i = 1$, cet isomorphisme se comprend de la manière suivante : l'espace $H^1(N, \mathcal{O})$ est l'espace des classes de cocycles de \mathbb{C} -fibrés principaux holomorphes au-dessus de N , classes s'entendant à isomorphisme de fibrés près. L'image réciproque d'un tel cocycle par la projection $\tilde{\pi}_0 : V \rightarrow N$ donne un élément :

$$((V_\alpha)_{\alpha \in A}, (g_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in A})$$

avec $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert (fini puisqu'issu de N , compacte) de V et :

$$g_{\alpha\beta} : V_\alpha \cap V_\beta \longrightarrow \mathbb{C}$$

fonctions holomorphes vérifiant :

$$(C) \quad \begin{cases} g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha} \equiv 0 \text{ sur } V_\alpha \cap V_\beta \\ g_{\alpha\beta} + g_{\beta\gamma} + g_{\gamma\alpha} \equiv 0 \text{ sur } V_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma \\ L_{\tilde{\xi}_1} \cdot g_{\alpha\beta} = \dots = L_{\tilde{\xi}_m} \cdot g_{\alpha\beta} = 0 \end{cases}$$

Un tel élément représente une classe de $H^1(V, \mathcal{O}_V^{inv})$. Réciproquement, toute classe de cet espace peut être représentée par un recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de V et un cocycle $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ vérifiant les conditions (C). En particulier, la troisième condition entraîne que l'on peut projeter les $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ sur N , i.e. qu'il existe :

$$g_{\alpha\beta} : \tilde{\pi}_0(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \mathbb{C}$$

avec $\tilde{\pi}_0 \circ \tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$; ainsi le couple $(\tilde{\pi}_0(U_\alpha), g_{\alpha\beta})$ représente une classe de $H^1(N, \mathcal{O})$, i.e. une classe d'équivalence de fibrés principaux au-dessus de N . Remarquons que, par cette construction, une classe de $H^1(V, \mathcal{O}_V^{inv})$ est triviale si et seulement si le fibré principal de base N correspondant est trivial.

Nous allons construire m cocycles de ce type et montrer qu'aucune combinaison linéaire non nulle de ces cocycles n'égale le cocycle trivial, ce qui prouvera que $h^{0,1}$ est supérieur à m .

Soit $\tilde{\chi} = a_1 \tilde{\xi}_1 + \dots + a_m \tilde{\xi}_m$ combinaison linéaire non nulle quelconque des champs de vecteurs $\tilde{\xi}_i$ sur V .

Lemme 1. *Il existe un champ linéaire $\chi = \mu_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + \mu_n z_n \frac{\partial}{\partial z_n}$ sur \mathbb{C}^n tel que :*

(i) *La projection de χ sur V est égale à $\tilde{\chi}$.*

(ii) *(μ_1, \dots, μ_n) est une configuration admissible.*

(iii) *L'ouvert des feuilles de Siegel S' de χ contient l'ouvert des feuilles de Siegel S de $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$.*

Preuve. Posons :

$$\chi_0 = a_1 \xi_1 + \dots + a_m \xi_m = \sum_{i=1}^n \chi_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Ce champ de vecteurs de S vérifie le (i) et par ailleurs, les valeurs propres associées à ce champ sont :

$$1 \leq i \leq n \quad \chi_i = a_1 \lambda_i^1 + \dots + a_m \lambda_i^m$$

Mais alors, comme $0 \in \mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$, on a immédiatement que (χ_1, \dots, χ_n) vérifie la condition de Siegel. Montrons que l'enveloppe convexe $\mathcal{H}(\chi_1, \dots, \chi_n)$ dans \mathbb{C} est un polygone non aplati. Dans le cas contraire, en effet, l'on aurait :

$$(\chi_1, \dots, \chi_n) = \chi_1 \cdot (1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \quad \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \text{ réels}$$

Mais dans ces conditions :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}_{\mathbb{R}}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n) &= \operatorname{rg}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} \chi_1 & \dots & \chi_n \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^m & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix} = \operatorname{rg}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^m & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rg}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \operatorname{Re}(\lambda_1^2) & & \dots & \operatorname{Re}(\lambda_n^2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \operatorname{Im}(\lambda_1^m) & & \dots & \operatorname{Im}(\lambda_n^m) \end{pmatrix} < 2m \end{aligned}$$

ce qui contredit la condition d'hyperbolicité faible (cf lemme 2 de la première partie).

Maintenant, nous voulons vérifier la condition de Siegel, la condition d'hyperbolicité faible et avoir S' contenant S . La proposition 2, (iii) de la première partie indique que :

$$S' = \{z \in \mathbb{C}^n \mid 0 \in \mathcal{H}((\chi_i)_{i \in I_z}) \text{ avec } i \in I_z \iff z_i \neq 0\}$$

et il y a une définition analogue pour S . Mais :

$$(P) \quad 0 \in \mathcal{H}((\Lambda_i)_{i \in I}) \implies 0 \in \mathcal{H}((\chi_i)_{i \in I}).$$

De ce fait, la seule condition qui pose problème est la condition d'hyperbolicité faible : il est possible que χ_0 ne la respecte pas. Si la condition d'hyperbolicité faible n'est pas vérifiée, 0 appartient à une arête du polygone $\mathcal{H}((\chi_i)_{i \in I})$. Comme $\mathcal{H}(\chi_1, \dots, \chi_n)$ est un polygone non aplati, en considérant le champ :

$$a \in \mathbb{C} \quad \chi = \chi_0 + aR = \sum_{i=1}^n \mu_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

(remarquons en effet que par projection sur V ce champ donne également le champ $\tilde{\chi}$) et en faisant varier a dans \mathbb{C} , l'on peut placer 0 où l'on veut dans ce polygone. En considérant alors le champ χ pour une valeur de a bien choisie, de manière à déplacer 0 à l'intérieur du polygone, on obtient une configuration admissible, qui satisfera également (P). \square

Remarque. Insistons bien sur le fait que, en général, S' est différent de S . Ceci va compliquer techniquement la suite de la preuve.

On peut dès lors appliquer les résultats de la première partie au champ de vecteurs χ . Il existe un ouvert $V' = S'/\mathbb{C}^*$ de $\mathbb{C}P^{n-1}$ de feuilles de Siegel projectivisé correspondant. Remarquons que cet ouvert contient V , puisque S' contient S . Il résulte de la proposition 3 de la première partie que l'action de $\tilde{\chi}$ (le projeté de χ sur V') sur V' a comme espace quotient une variété compacte complexe $W'_{\tilde{\chi}}$ et de la proposition 4 que la projection naturelle $V' \rightarrow W'_{\tilde{\chi}}$ est un \mathbb{C} -fibré holomorphe

principal non trivial. Remarquons que le cocycle représentant ce fibré, lorsqu'il est restreint à V , descend en un cocycle sur N , par commutation de $\tilde{\chi}$ avec les champs $\tilde{\xi}_i$. De ce fait ce cocycle réduit peut être représenté par un élément de $H^1(V, \mathcal{O}_V^{inv})$ de la manière explicitée ci-dessus.

À tout champ $\tilde{\chi} = a_1\xi_1 + \dots + a_n\xi_n$, nous associons ainsi un cocycle réduit correspondant au fibré $V' \rightarrow W'_{\tilde{\chi}}$ restreint à V et un représentant d'une classe de $H^1(V, \mathcal{O}_V^{inv})$.

Lemme 2. *Ce cocycle réduit est non nul, i.e. la restriction du fibré $V' \rightarrow W'_{\tilde{\chi}}$ à V est un fibré principal non trivial.*

Preuve. Toujours de par les résultats de la première partie, la variété compacte complexe $W'_{\tilde{\chi}}$ est la compactification équivariante d'un groupe de Lie complexe $G_{\tilde{\chi}}$. Soit $W_{\tilde{\chi}}$ le sous-ensemble de $W'_{\tilde{\chi}}$ base du fibré principal restreint à V . On a les inclusions :

$$G_{\tilde{\chi}} \subset W_{\tilde{\chi}} \subset W'_{\tilde{\chi}}$$

Ceci nous donne le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{C}^*)^n & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G_{\tilde{\chi}} & \longrightarrow & W_{\tilde{\chi}} & \longrightarrow & W'_{\tilde{\chi}} \end{array}$$

Or, d'après le corollaire B de la proposition 4 de la première partie, le fibré restreint $(\mathbb{C}^*)^{n-1} \rightarrow G_{\tilde{\chi}}$ est holomorphiquement non trivial, donc le fibré $V \rightarrow W_{\tilde{\chi}}$ l'est également. \square

En particulier, il existe un recouvrement $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ de V et m cocycles non triviaux :

$$1 \leq i \leq m \quad g_{\alpha\beta}^i : V_\alpha \cap V_\beta \longrightarrow \mathbb{C}$$

vérifiant (C), qui caractérisent les fibrés $V \rightarrow W_{\tilde{\xi}_i}$. Ces cocycles représentent m classes de $H^1(V, \mathcal{O}_V^{inv})$ et toute classe de cet espace combinaison linéaire de ces m classes est représentée par la combinaison linéaire correspondante de cocycles.

Soit $h_{\alpha\beta} = a_1g_{\alpha\beta}^1 + \dots + a_mg_{\alpha\beta}^m$ une telle combinaison linéaire.

Lemme 3. *Le cocycle $h_{\alpha\beta}$ peut être obtenu comme image réciproque du cocycle du fibré principal réduit $V \xrightarrow{p} W_{\tilde{\chi}}$ par p , où :*

$$\tilde{\chi} = b_1.\tilde{\xi}_1 + \dots + b_m.\tilde{\xi}_m \text{ avec } \begin{cases} b_i = \frac{1}{a_i} \text{ si } a_i \neq 0 \\ b_i = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Preuve. Appliquons les résultats des lemmes 5 et 6 de la première partie pour donner un atlas feuilleté de l'action de $\tilde{\xi}_i$ sur V . Les applications :

$$\begin{cases} W \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-2} \xrightarrow{\phi_\alpha^{-1}} U_\alpha \subset V \\ (t, z) \longmapsto [w] = [e^{-\lambda_1^i t}, e^{-\lambda_2^i t}, z_3 e^{-\lambda_3^i t}, \dots, z_n e^{-\lambda_n^i t}] \end{cases}$$

forment un atlas feuilleté de $V \cap [w_1 \neq 0, w_2 \neq 0]$, que l'on étend en un atlas feuilleté de V en ajoutant les applications analogues pour le reste de V . De ce fait, inversement, par ϕ_α , la valeur de t est donnée par :

$$t_\alpha = \frac{\log\left(\frac{w_1}{w_2}\right)}{\lambda_2^i - \lambda_1^i} + \frac{2ik\pi}{\lambda_2^i - \lambda_1^i}$$

où \log représente le logarithme complexe. Quitte à prendre le recouvrement V_α ou le recouvrement U_α plus fin, l'on peut supposer que ces deux recouvrements sont identiques, de telle sorte que, suivant les résultats des lemmes 5 et 6, le cocycle vaut, pour U_β carte feuilletée de $V \cap [w_1 \neq 0, w_3 \neq 0]$:

$$g_{\alpha\beta}^i[w] = t_\alpha - t_\beta = \frac{\log\left(\frac{w_1}{w_2}\right)}{\lambda_2^i - \lambda_1^i} + \frac{2ik\pi}{\lambda_2^i - \lambda_1^i} - \frac{\log\left(\frac{w_1}{w_3}\right)}{\lambda_3^i - \lambda_1^i} + \frac{2ik'\pi}{\lambda_3^i - \lambda_1^i}$$

ou une expression analogue faisant intervenir deux autres coordonnées. Remarquons que les constantes k qui interviennent représentent seulement l'adaptation du logarithme complexe à la carte, et qu'ainsi elles sont identiques pour chaque $\tilde{\xi}_i$. Dans ces conditions on a :

$$\begin{cases} V_\alpha \cap V_\beta \xrightarrow{h_{\alpha\beta}} \mathbb{C} \\ [w] \longmapsto \sum_{j=1}^n a_j \left(\frac{\log\left(\frac{w_1}{w_2}\right)}{\lambda_2^j - \lambda_1^j} + \frac{2ik\pi}{\lambda_2^j - \lambda_1^j} - \frac{\log\left(\frac{w_1}{w_3}\right)}{\lambda_3^j - \lambda_1^j} + \frac{2ik'\pi}{\lambda_3^j - \lambda_1^j} \right) \end{cases}$$

et expressions analogues. Autrement dit :

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta}[w] = & \frac{a_1(\mu_2 \dots \mu_m) + \dots + a_m(\mu_1 \dots \mu_{m-1})}{\mu_1 \dots \mu_m} \cdot \left(\log\left(\frac{w_1}{w_2}\right) + 2ik\pi \right) \\ & - \frac{a_1(\mu'_2 \dots \mu'_m) + \dots + a_m(\mu'_1 \dots \mu'_{m-1})}{\mu'_1 \dots \mu'_m} \cdot \left(\log\left(\frac{w_1}{w_3}\right) + 2ik'\pi \right) \end{aligned}$$

avec :

$$1 \leq j \leq m \quad \mu_j = \lambda_2^j - \lambda_1^j \quad \text{et} \quad \mu'_j = \lambda_3^j - \lambda_1^j$$

Mais ceci est le cocycle correspondant au champ :

$$\tilde{\chi} = b_1 \cdot \tilde{\xi}_1 + \dots + b_m \cdot \tilde{\xi}_m \quad \text{avec} \quad \begin{cases} b_i = \frac{1}{a_i} \text{ si } a_i \neq 0 \\ b_i = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

ce qui achève la preuve. \square

En application des lemmes 2 et 3, tout cocycle $h_{\alpha\beta}$ combinaison linéaire non nulle des cocycles $g_{\alpha\beta}^i$ est non trivial, ce qui prouve que ces éléments forment un système libre dans $H^1(V, \mathcal{O}_V^{inv}) \simeq H^1(N, \mathcal{O})$ et donc que $h^{0,1}$ est supérieur ou égal à m .

Par ailleurs, remarquons que les 1-formes sur N sont fermées (conséquence du fait qu'elles le sont en restriction au groupe de Lie G , voir [Le1], p.94). Dès lors (cf [Bl]), on a :

$$(I_1) \quad 2h^{1,0} \leq b_1(N)$$

avec $b_1(N)$ premier nombre de Betti de N . Or nous affirmons que :

$$(I_2) \quad b_1(N) \leq 2m - 1 .$$

En effet, d'après le lemme 8 de la deuxième partie, si $d = 1$, on a $b_1(N) = k - 1$ (avec k nombre de points indispensables), donc par le lemme 4 de la même partie, $b_1(N) \leq 2m - 1$.

Si maintenant l'on suppose $d > 1$, le lemme 5 de la deuxième partie assure que $\pi_1(M_1) = \{0\}$, donc par la suite exacte de la fibration $M_1 \rightarrow N$, que $\pi_1(N) = \{0\}$, et finalement que $b_1(N) = 0$.

Combinant (I₁) et (I₂), on a alors $h^{1,0} < m$. En fin de compte $h^{1,0} < h^{0,1}$ et conformément au théorème cité plus haut, la variété N n'est pas Moishezon.

(ii) Pour $n = 2m + 1$, d'après le théorème 1, la variété N est un tore complexe, donc est kählérienne, et la conclusion voulue est une conséquence de la propriété rappelée plus haut sur les variétés de Moishezon. \square

Remarque. Dans la suite exacte utilisée au théorème 3, le faisceau \mathcal{O}_{etr} peut être identifié avec un sous-faisceau de :

$$\mathcal{C}^1(\mathfrak{G}, \mathcal{O}) = \mathcal{C}^1(\mathfrak{G}, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}$$

pour \mathfrak{G} l'algèbre de Lie du groupe de Lie G et $\mathcal{C}^1(\mathfrak{G}, \mathbb{C})$ les applications linéaires de \mathfrak{G} dans \mathbb{C} (voir [Le2]).

Rappelons que N admet une modification kählérienne si et seulement si l'on peut trouver une variété N' kählérienne, un ensemble analytique A' de N' et un ensemble analytique A de N , tous deux de codimension complexe au moins deux en tout point et une application holomorphe :

$$\Phi : N' \longrightarrow N$$

qui soit un biholomorphisme de $N' - A'$ dans $N - A$.

Corollaire A. *Si $n > 2m + 1$, la variété N ne possède pas de modification kählérienne.*

Preuve. Le théorème 2.4 de [Le1], cité partiellement plus haut, affirme que dans le cas d'une compactification équivariante, l'existence d'une modification kählérienne est équivalente à l'égalité $h^{1,0} = h^{0,1}$. \square

Corollaire B (je remercie Alastair King pour ce corollaire). Si $n > 2m + 1$, la variété N n'est pas algébrique, au sens cette fois de variété algébrique abstraite.

Preuve. Une telle variété est Moishezon (cf [Har]). \square

Fonctions méromorphes de N .

Le théorème 3 a pour conséquence que le degré de transcendance du corps des fonctions méromorphes sur N est strictement inférieur à sa dimension complexe. En fait nous pouvons calculer plus précisément ce degré.

Rappelons que d est la codimension complexe minimale de E , où $S = \mathbb{C}^n - E$ et appelons a la dimension sur \mathbb{Q} de l'espace vectoriel des solutions rationnelles de :

$$(S) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n s_i \Lambda_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n s_i = 0 \end{cases}$$

On a alors :

Théorème 4. Si $d > 1$, le degré de transcendance du corps des fonctions méromorphes sur N est égal à a .

Preuve. Commençons par construire, dans le cas $a > 0$, les fonctions méromorphes sur N qui forment une base du corps des fonctions méromorphes. Soit :

$$s^\delta = (s_1^\delta, \dots, s_n^\delta)$$

pour δ variant de 1 à a , une base de l'espace des solutions du système (S) vérifiant :

$$\begin{cases} s_i^\delta \in \mathbb{N} \text{ pour tout } i \text{ et tout } \delta \\ \text{PGCD}(s_1^\delta, \dots, s_n^\delta) = 1 \text{ pour tout } \delta \end{cases}$$

À cette base, associons les fonctions méromorphes monômes $M_\delta = z_1^{s_1^\delta} \dots z_n^{s_n^\delta}$, pour $1 \leq \delta \leq a$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $T \in \mathbb{C}^m$, on a :

$$\begin{aligned} M_\delta(\alpha z_1 \cdot e^{\langle \Lambda_1, T \rangle}, \dots, \alpha z_n \cdot e^{\langle \Lambda_n, T \rangle}) &= \alpha^{s_1^\delta + \dots + s_n^\delta} \cdot z_1^{s_1^\delta} \dots z_n^{s_n^\delta} \times e^{s_1^\delta \Lambda_1 + \dots + s_n^\delta \Lambda_n} \\ &= M_\delta(z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

puisque les s^δ sont solutions du système (S). Dès lors, les M_δ se projettent en des fonctions méromorphes sur N . Nous allons montrer que toute fonction méromorphe sur N se relève en une fonction méromorphe sur \mathbb{C}^n algébriquement dépendante de ces monômes. L'indépendance rationnelle des exposants s^δ impliquant l'indépendance algébrique des monômes M_δ , ceci achèvera la preuve pour $a > 0$. La même preuve montrera que, dans le cas $a = 0$, toute fonction méromorphe sur N est constante.

Soit f_0 fonction méromorphe sur N . Elle se relève en f méromorphe sur S constante le long des feuilles. Comme $d > 1$, on a $S = \mathbb{C}^n - E$ avec E de codimension complexe supérieure à deux en tout point, donc par le théorème de Levi, f s'étend à \mathbb{C}^n tout entier comme fonction méromorphe, et par continuité, f est constante le long des feuilles du feuilletage singulier défini sur \mathbb{C}^n tout entier. La constance sur le feuilletage revient à dire que :

$$\forall z \in \mathbb{C}^n, \forall \alpha \in \mathbb{C}^*, \forall T \in \mathbb{C}^m, \quad f(\alpha e^{\langle \Lambda_1, T \rangle} z_1, \dots, \alpha e^{\langle \Lambda_n, T \rangle} z_n) = f(z_1, \dots, z_n)$$

La fonction f vérifie en particulier $f(\alpha z_1, \dots, \alpha z_n) = f(z_1, \dots, z_n)$ pour tout α non nul. De ce fait, f passe au quotient et définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}P^{n-1}$. Mais d'après un résultat classique, on a alors $f = P/Q$ avec P, Q polynômes homogènes de même degré g à n variables.

Posons :

$$\begin{cases} P(z) = \sum_{|p|=g} a_p z^p \\ Q(z) = \sum_{|p|=g} b_p z^p \end{cases}$$

où nous écrivons z pour (z_1, \dots, z_n) , ainsi que p pour (p_1, \dots, p_n) et z^p pour $z_1^{p_1} \dots z_n^{p_n}$. Enfin $|p|$ signifie $p_1 + \dots + p_n$. Remarquons de plus que, dans cette écriture, les a_p et b_p couvrent tous les indices et certains d'entre eux peuvent être nuls. Les polynômes P et Q doivent encore vérifier :

$$\frac{P}{Q}(z) = \frac{P}{Q}(e^{\langle \Lambda_1, T \rangle} z_1, \dots, e^{\langle \Lambda_n, T \rangle} z_n)$$

c'est-à-dire :

$$Q(z)P(\langle e^{\Lambda_1, T} z_1, \dots, e^{\Lambda_n, T} z_n \rangle) - Q(\langle e^{\Lambda_1, T} z_1, \dots, e^{\Lambda_n, T} z_n \rangle)P(z) \equiv 0$$

ou encore :

$$\sum_{|p|=g} (a_p Q(z) - P(z) b_p) z^p e^{\langle p\Lambda, T \rangle} \equiv 0 \quad (\text{E})$$

où $p\Lambda = p_1\Lambda_1 + \dots + p_n\Lambda_n$. Nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 4. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible. Soit P un ensemble fini de n -uplets entiers.

Pour tout $p^0 \in P$, posons $P_0 = \{p \in P \mid \sum_{i=1}^n p_i \Lambda_i = \sum_{i=1}^n p_i^0 \Lambda_i\}$.

Alors :

$$\sum_{p \in P} \alpha_p e^{\langle p\Lambda, T \rangle} \equiv 0 \quad \iff \quad \forall p^0 \in P, \sum_{p \in P_0} \alpha_p = 0.$$

Preuve. Définissons sur P la relation d'équivalence :

$$p \sim q \quad \iff \quad \sum_{i=1}^n p_i \Lambda_i = \sum_{i=1}^n q_i \Lambda_i.$$

On peut alors décomposer P en classes d'équivalence $P = P_0^1 \sqcup \dots \sqcup P_0^h$, engendrées par p^1, \dots, p^h . On a alors :

$$\sum_{p \in P} \alpha_p e^{\langle p\Lambda, T \rangle} = \sum_{i=1}^h \left(\sum_{p \in P_0^i} \alpha_p \right) e^{\langle p^i \Lambda, T \rangle} = 0$$

Ceci prouve immédiatement la deuxième implication. Pour le sens direct, nous ferons une récurrence sur h , le nombre de classes.

Pour $h = 1$, le résultat est immédiat. Supposons-le vrai à l'ordre h , et posons :

$$\sum_{i=1}^{h+1} \left(\sum_{p \in P_0^i} \alpha_p \right) e^{\langle p^i \Lambda, T \rangle} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^h \left(\sum_{p \in P_0^i} \alpha_p \right) e^{\langle (p^i - p^{h+1}) \Lambda, T \rangle} = - \sum_{p \in P_0^{h+1}} \alpha_p$$

Considérons le système affine suivant :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^h A_i e^{\langle (p^i - p^{h+1}) \Lambda, T \rangle} = c & (1) \\ \sum_{p \in P_0^i} \alpha_p = A_i \quad 1 \leq i \leq h & (2) \\ - \sum_{p \in P_0^{h+1}} \alpha_p = c \quad c \in \mathbb{C} & (3) \end{cases}$$

où l'on résout d'abord (1) en A_i , puis (2) et (3) en α_p . Il est clair qu'en faisant varier $c \in \mathbb{C}$, l'on obtient toutes les solutions de l'équation de départ.

L'équation (1) est affine en A_i . Par hypothèse de récurrence, la solution homogène vérifie $A_1 = \dots = A_h = 0$, donc (1) possède, pour chaque c , au plus une solution.

Supposons $c \neq 0$, on doit alors avoir $A_i \neq 0$ pour au moins un i , et, pour ce i , on doit avoir $\Lambda(p^i - p^h) = 0$ (sinon la solution de (1) ne serait pas unique), ce qui est absurde.

Il résulte de cela que (1) possède l'unique solution :

$$A_1 = \dots = A_h = c = 0$$

et les équations (2) et (3) donnent alors le résultat attendu. \square

Revenons à l'équation (E) :

$$\sum_{|p|=g} \left(a_p Q(z) - P(z) b_p \right) z^p e^{\langle p\Lambda, T \rangle} \equiv 0 \quad (E)$$

et définissons l'ensemble fini :

$$P = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n \mid |p| = g\}$$

muni de la relation d'équivalence définie dans la preuve du lemme 4.

En application du lemme 4, il vient :

$$\forall p^0 \in P, \quad \sum_{p \in P_0} (a_p Q(z) - b_p P(z)) z^p \equiv 0.$$

pour P_0 classe d'équivalence de p^0 , ce qui peut encore s'écrire :

$$\frac{P}{Q}(z) = \frac{\sum_{p \in P_0} a_p z^p}{\sum_{p \in P_0} b_p z^p} \quad (\text{F})$$

pour un p^0 satisfaisant $b_{p^0} \neq 0$.

Si $a = 0$, la classe d'équivalence d'un élément ne contient que lui-même, donc (F) implique :

$$\frac{P}{Q}(z) = \frac{a_{p^0}}{b_{p^0}} = \text{const.}$$

Si $a > 0$, rappelons qu'une base entière des solutions rationnelles de (S) est donnée par (s^1, \dots, s^a) . Dans l'équation (F), chaque classe d'équivalence P_0 est constituée de termes :

$$p^0 + \text{combinaison linéaire entière de } (s^1, \dots, s^a).$$

Cela signifie que si l'on factorise z^{p^0} au numérateur et au dénominateur de (F), l'on peut trouver P_1 et Q_1 éléments de $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ tels que :

$$f(z) = \frac{P}{Q}(z) = \frac{\sum_{p \in P_0} a_p z^{(p-p^0)}}{\sum_{p \in P_0} b_p z^{(p-p^0)}} = \frac{P_1(M_1, \dots, M_a)}{Q_1(M_1, \dots, M_a)}$$

Ceci entraîne que f est algébriquement dépendante de M_1, \dots, M_a , ce qui achève la preuve. \square

Nous allons maintenant énoncer quelques corollaires sur l'existence de fonctions méromorphes sur N , et dégager ainsi une classe de variétés N "plus algébriques" que les autres.

Définition. Nous dirons qu'une configuration admissible $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ vérifie la condition (H) si elle satisfait à :

$$(H) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n \Lambda_i s_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n s_i = 0 \\ s_i \in \mathbb{Q} \text{ pour tout } i \end{cases} \implies s_1 = \dots = s_n = 0.$$

Remarque. Il s'agit d'une condition générique.

Corollaire A. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ configuration admissible. Si $d > 1$ et si la configuration vérifie la condition (H), alors toute fonction méromorphe sur N est constante.

Preuve. On a $a = 0$. \square

Remarque. Ceci apporte une correction au théorème 4 de [Me1] où la condition générique n'était pas citée.

Corollaire B. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ admissible et $d > 1$. Alors la dimension algébrique de N est comprise entre 0 et $\dim_{\mathbb{C}} N - m$, ces deux valeurs pouvant être atteintes.

Preuve. Le système (S) a au plus $n - 2m - 1$ solutions. Comme la dimension complexe de N vaut $n - m - 1$, on a la majoration souhaitée. Enfin le degré de transcendance est nul pour une configuration vérifiant la condition (H), et égal à $\dim_{\mathbb{C}} N - m$ pour une configuration à coordonnées toutes rationnelles (i.e. pour des λ_i^j avec parties réelle et imaginaire rationnelles). \square

Corollaire C. Pour $d > 1$, une base algébrique des fonction méromorphes sur N est donnée explicitement par les monômes M_1, \dots, M_a .

Preuve. C'est la démonstration du théorème 4. \square

Exemple. Prenons $n = 5$ et $m = 1$, et définissons :

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = i \quad \lambda_3 = -1 - i \quad \lambda_4 = \frac{3}{2}i + 1 \quad \lambda_5 = -i - \frac{1}{2}$$

On vérifie facilement (cf [LdM1] et [LdM2]) qu'il n'y a pas de point indispensable, donc que $d > 1$. Par ailleurs la dimension complexe de N est 3, et la dimension algébrique vaut, d'après le théorème précédent, 2. En effet,

$$\begin{cases} f(z) = \frac{z_1^5 z_2^5 z_3^2}{z_4^6 z_5^6} \\ g(z) = \frac{z_1 z_2^2}{z_3 z_4^2} \end{cases}$$

sont méromorphes algébriquement indépendantes sur N et toute fonction méromorphe sur N dépend algébriquement de (f, g) .

Corollaire D. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ admissible, d étant quelconque. Alors :

(i) le degré de transcendance des fonctions méromorphes sur N est supérieur ou égal à a .

(ii) cette inégalité peut-être stricte si $d = 1$.

Preuve. (i) On peut toujours définir les monômes M_1, \dots, M_a .

(ii) D'après le corollaire précédent, on a : $a \leq n - 2m - 1$. Dans le cas des tores, cela donne $a = 0$. Pourtant, d'après le théorème 1, nous obtenons tous les tores, donc en particulier les tores de dimension algébrique non nulle. \square

Le théorème 4, ainsi que les corollaires que nous venons d'énoncer, nous permettent de répondre à la question posée au début de cette partie : pour $n > 2m + 1$, les variétés N sont "loin d'être algébriques", puisqu'elles ne sont pas Moishezon et n'admettent pas de modification kählérienne. Cependant parmi celles-ci, l'on peut

dégager une classe "plus algébrique", car possédant des fonctions méromorphes rationnelles non constantes, à savoir la classe des variétés N issues d'une configuration ne satisfaisant pas la condition (H), en particulier d'une configuration à coefficients rationnels. Au contraire, sous la condition (H), les variétés N n'ont pas de fonctions rationnelles. Nous donnons dans le paragraphe suivant la signification géométrique de cette condition.

Citons enfin un dernier corollaire :

Corollaire E. *Une variété $S^{2j-1} \times S^{2l-1}$ munie d'une structure de Loeb-Nicolau linéaire (voir [L-N1]), avec $j > 1$ et $l > 1$ et de dimension complexe p a un degré de transcendance des fonctions méromorphes compris entre 0 et $p-1$, ces deux bornes pouvant être atteintes.*

Preuve. C'est une conséquence directe des corollaires précédents et du fait que toute variété de Loeb-Nicolau linéaire peut être obtenue à partir d'une configuration admissible avec $d > 1$ et $m = 1$ (voir [LdM-Ve]). \square

Groupe de Cousin et condition (H).

Nous donnons dans ce paragraphe la signification géométrique de la condition (H). Rappelons que la variété N est compactification d'un groupe de Lie complexe G , et qu'en particulier tout groupe de Cousin peut intervenir comme un tel groupe G (corollaire C de la proposition 2 de la première partie).

Or, le théorème 4 nous dit que le fait que G soit un groupe de Cousin est étroitement lié à la condition (H). En effet, si une configuration admissible ne vérifie pas la condition (H), d'après ce théorème, la variété N correspondante possède des fonctions méromorphes rationnelles non constantes. Ces fonctions, restreintes à G , vont donner des fonctions holomorphes non constantes sur G (cf exemple du paragraphe précédent), qui ne peut ainsi être un groupe de Cousin.

Indépendamment de cette observation, nous montrons :

Proposition 2. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible. Soit N la variété compacte complexe correspondante et G le groupe de Lie complexe dont celle-ci est compactification équivariante. Alors G est un groupe de Cousin si et seulement si $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ vérifie la condition (H).*

Preuve. Nous allons utiliser comme définition de G le modèle donné par la proposition 2 de la deuxième partie, à savoir \mathbb{C}^{n-m-1} quotienté par le réseau engendré par la base canonique (e_1, \dots, e_{n-m-1}) de \mathbb{C}^{n-m-1} et $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. De ce fait, nous supposons que $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m+1})$ est une sous-configuration admissible. Soit G' un groupe de Lie complexe isomorphe à G . Nous pouvons également supposer G' défini comme le quotient de \mathbb{C}^{n-m-1} par un certain réseau Γ' (cf [Mom]). On a alors le diagramme suivant, par passage au revêtement universel :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n-m-1} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^{n-m-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{f} & G' \end{array}$$

où f est un isomorphisme de Lie et F l'unique (modulo symétries du réseau) application linéaire de \mathbb{C}^{n-m-1} qui envoie le réseau de G sur celui de G' . Remarquons que le réseau Γ' est ainsi un réseau de $n-1$ vecteurs \mathbb{R} -linéairement indépendants et de rang complexe $n-m-1$. Nous pouvons supposer, quitte à composer par une autre transformation linéaire que :

$$\Gamma' = (e_1, \dots, e_{n-m-1}, \beta_1, \dots, \beta_m) .$$

La propriété selon laquelle F envoie le réseau de G sur Γ' s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(e_1) = a_{1,1}e_1 + \dots + a_{n-1,1}\beta_m \\ \vdots \\ F(e_{n-m-1}) = a_{1,n-m-1}e_1 + \dots + a_{n-1,n-m-1}\beta_m \\ F(\alpha_1) = a_{1,n-m}e_1 + \dots + a_{n-1,n-m}\beta_m \\ \vdots \\ F(\alpha_m) = a_{1,n-1}e_1 + \dots + a_{n-1,n-1}\beta_m \end{array} \right.$$

où :

$$Z = \left(a_{i,j} \right)_{i,j=1}^{n-1}$$

est une matrice à coefficients entiers. Mieux encore, comme F est inversible, Z est inversible, et par le même raisonnement son inverse est à coefficients entiers, ce qui implique que Z est une matrice de $PSL_{n-1}(\mathbb{Z})$. La matrice caractérise de façon unique, et réciproquement est caractérisée de façon unique, par l'automorphisme F . Posons $\alpha_s = (\alpha_s^1, \dots, \alpha_s^{n-m-1})$ et écrivons :

$$\begin{aligned} 1 \leq s \leq m \quad F(\alpha_s) &= F(\alpha_s^1 e_1 + \dots + \alpha_s^{n-m-1} e_{n-m-1}) \\ &= \alpha_s^1 F(e_1) + \dots + \alpha_s^{n-m-1} F(e_{n-m-1}) \end{aligned}$$

qui donne, pour tout s entre 1 et m :

$$\begin{aligned} \alpha_s^1 (a_{1,1}e_1 + \dots + a_{n-1,1}\beta_m) + \dots + \alpha_s^{n-m-1} (a_{1,n-m-1}e_1 + \dots + a_{n-1,n-m-1}\beta_m) \\ = a_{1,n-m-1+s}e_1 + \dots + a_{n-1,n-m-1+s}\beta_m \end{aligned}$$

En particulier, si nous supposons que G n'est pas un groupe de Cousin, alors il est isomorphe (cf corollaire A de la proposition 2 de la deuxième partie) à $\mathbb{C}^* \times G''$, ce qui implique (quitte, une fois de plus, à composer par une transformation linéaire) que, dans le réseau Γ' , les β_i sont des vecteurs dont la première coordonnée est nulle. La projection des égalités précédentes sur la première coordonnée donne dans ce cas :

$$1 \leq s \leq m \quad \alpha_s^1 a_{1,1} + \dots + \alpha_s^{n-m-1} a_{1,n-m-1} = a_{1,n-m-1+s}$$

ce qui, en remplaçant α_s par sa valeur, devient pour tout s entre 1 et m :

$$(R) \quad \sum_{p=1}^{n-m-1} a_{1,p} \left(\sum_{j=1}^m (-1)^{s+j} \det(A)_{s,j} (\lambda_{m+1+p}^j - \lambda_1^j) \right) = a_{1,n-m-1+s} \cdot \det A$$

Réciproquement, si une telle relation (R) est vérifiée pour tout s entre 1 et m , alors, en supposant $a_{1,1}$ non nul, la matrice :

$$Z = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

définit une application linéaire inversible de \mathbb{C}^{n-m-1} qui passe au quotient en un épimorphisme entre G et un groupe de Lie $\mathbb{C}^* \times G''$ (épimorphisme parce que $a_{1,1}$ n'est pas forcément égal à un ou à moins un, donc Z n'est pas forcément inversible, comme matrice entière). Cet épimorphisme est un revêtement holomorphe fini. Mais dès lors, de par les résultats de [Mom], il existe un revêtement fini G_1 de G'' et un isomorphisme cette fois entre $G_1 \times \mathbb{C}^*$ et G . En somme, G n'est pas un groupe de Cousin si et seulement si l'on peut trouver des entiers $a_{1,1}, \dots, a_{1,n-1}$ non tous nuls vérifiant, pour tout s entre 1 et m , la relation (R).

Posons alors :

$$1 \leq j \leq m \quad B_j = \begin{pmatrix} (-1)^{1+j} \det(A)_{1,j} \\ \vdots \\ (-1)^{m+j} \det(A)_{m,j} \end{pmatrix}$$

Remarquons que la matrice (B_1, \dots, B_m) , étant l'inverse de la transposée de la matrice A (modulo division par $\det A$), est inversible. Posons de plus :

$$C = \begin{pmatrix} a_{1,n-m} \\ \vdots \\ a_{1,n-1} \end{pmatrix}$$

Le système (R) se réécrit :

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{p=1}^{n-m-1} a_{1,p} (\lambda_{m+1+p}^j - \lambda_1^j) \right) B_j = \det A \times C$$

ou encore :

$$(R') \quad \sum_{j=1}^m c_j B_j = \det A \times C$$

avec :

$$1 \leq j \leq m \quad c_j = \sum_{p=1}^{n-m-1} a_{1,p} (\lambda_{m+1+p}^j - \lambda_1^j).$$

Il s'agit d'un système affine $m \times m$ avec pour inconnues c_j , de rang m d'après la remarque précédente, donc avec une solution unique pour tout C .

Lemme 5. *Le système (R') a pour solution unique :*

$$1 \leq j \leq m \quad c_j = \sum_{r=1}^m a_{1,n-m-1+r} (\lambda_{r+1}^j - \lambda_1^j) .$$

Preuve. Il s'agit d'un calcul direct. Comme nous savons que le système (R') possède une unique solution, il suffit de vérifier que la solution proposée est correcte. Or :

$$S = \sum_{j=1}^m c_j B_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{r=1}^m a_{1,n-m-1+r} (\lambda_{r+1}^j - \lambda_1^j) \right) B_j .$$

En passant en coordonnées (on pose $S = (S_1, \dots, S_m)$) :

$$\begin{aligned} S_s &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{r=1}^m a_{1,n-m-1+r} (\lambda_{r+1}^j - \lambda_1^j) \right) (-1)^{s+j} \det(A)_{s,j} \\ &= \sum_{r=1}^m a_{1,n-m-1+r} \left(\sum_{j=1}^m (-1)^{s+j} \det(A)_{s,j} (\lambda_{r+1}^j - \lambda_1^j) \right) \end{aligned}$$

pour tout s entre 1 et m . Fixons s . Lorsque r est égal à s , on a :

$$\sum_{j=1}^m (-1)^{s+j} \det(A)_{s,j} (\lambda_{s+1}^j - \lambda_1^j) = \det A$$

et de même, pour $r \neq s$, il vient :

$$\sum_{j=1}^m (-1)^{s+j} \det(A)_{s,j} (\lambda_{r+1}^j - \lambda_1^j) = \det(A)_r$$

où $(A)_r$ est la matrice obtenue de A en remplaçant la s -ième ligne par la r -ième ligne. Mais cette matrice possède alors, comme r et s sont distincts, deux lignes identiques, donc son déterminant est nul, ce qui achève la preuve. \square

Par application du lemme 5, la solution du système (R) est donc la solution de :

$$\sum_{p=1}^{n-m-1} a_{1,p} (\Lambda_{m+1+p} - \Lambda_1) = \sum_{s=1}^m a_{1,n-m-1+s} (\Lambda_{s+1} - \Lambda_1)$$

avec les $a_{1,p}$ entiers. De ce fait le système (R) possède une solution non nulle si et seulement si la condition (H) n'est pas vérifiée. \square

Corollaire. *Le groupe G est isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^a \times C$, avec C groupe de Cousin, et a défini au théorème 4.*

Preuve. En adaptant la démonstration précédente, on montre que G est isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^p \times G'$ pour $p > 0$ si et seulement s'il existe p relations entières indépendantes de type (R), donc si et seulement s'il existe p relations entières linéairement indépendantes entre les $\Lambda_i - \Lambda_1$. Dès lors, G est isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^a \times C$ et C ne comporte pas de facteur \mathbb{C}^* dans sa décomposition, donc C est de Cousin. \square

Formes holomorphes de N .

Nous calculons maintenant $h^{1,0}$, de manière plus précise que nous ne l'avons fait dans le théorème 3. Comme signalé dans l'introduction, on trouve dans [Le-Me] un exemple d'une des variétés N possédant une 1-forme holomorphe globale. Plus précisément, on montre dans [Le-Me] la proposition suivante :

Proposition (cf [Le-Me]). *Il existe une variété N vérifiant :*

(i) $m = 2$ et $n = 6$.

(ii) $\dim_{\mathbb{C}} N = 3$.

(iii) $k = 4$.

(iv) $h^{1,0} = 1$.

(v) $\text{Alb}(N) = 0$.

(vi) $h^{0,1} \geq 2$.

De façon générale, pour k suffisamment grand, on peut explicitement construire des 1-formes holomorphes globales sur N . En effet une telle forme est en fait la projection d'une 1-forme ω basique sur S , c'est-à-dire vérifiant :

$$\begin{cases} i_{\xi_j} \omega = L_{\xi_j} \omega = 0, & 1 \leq j \leq m \\ i_R \omega = L_R \omega = 0 \end{cases}$$

où $R = \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ engendre l'action de \mathbb{C}^* .

Posons alors :

$$S = (\mathbb{C}^*)^k \times (\mathbb{C}^{n-k} - F) \quad \text{et} \quad \omega = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{z_{j_i}} dz_{j_i}$$

les a_i étant des constantes complexes et (j_1, \dots, j_k) étant les indices des points indispensables. Cette 1-forme étant fermée, elle est basique si et seulement si les produits intérieurs du système précédent sont nuls, à savoir si et seulement si :

$$(SI) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^k a_i \Lambda_{j_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^k a_i = 0 \end{cases}$$

qui admet une solution non nulle pour $k \geq m + 2$.

Inversement, toute 1-forme holomorphe sur N donne par restriction une 1-forme holomorphe sur G . Si nous supposons que la condition (H) est vérifiée, alors G étant un groupe de Cousin d'après la proposition 2, les seules 1-formes sur G sont les projections par :

$$p : \mathbb{C}^{n-m-1} \longrightarrow G \simeq \mathbb{C}^{n-m-1} / \Gamma$$

où Γ est le réseau de la proposition 2, des 1-formes $\sum_{i=1}^n \alpha_i dz_i$ sur \mathbb{C}^{n-m-1} , avec α_i constantes complexes.

Or, ces 1-formes ne sont rien d'autre que l'image réciproque par $e^{2i\pi}$ des 1-formes :

$$\omega = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{z_i} dz_i$$

sur $(\mathbb{C}^*)^n$, pour a_i satisfaisant au système (S) cette fois :

$$(S) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i \Lambda_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n a_i = 0 \end{cases}$$

Maintenant, les seules formes de ce type qui se prolongent à S vérifient :

$$a_i = 0 \quad \text{si} \quad z_i \text{ point éliminable.}$$

Nous venons de prouver :

Théorème 5. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible et soit N la variété compacte complexe correspondante. Supposons que $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ vérifie la condition (H). Alors :*

(i) *On a $h^{1,0} = \max(0, k - m - 1)$.*

(ii) *Une base de l'espace $H^0(N, \Omega^1)$ est explicitement donnée par la projection par $\pi : S \rightarrow N$ des 1-formes holomorphes sur S :*

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{z_{j_i}} dz_{j_i}$$

avec les a_i solutions du système (SI) et (j_1, \dots, j_k) représentant les indices des points indispensables.

Corollaire A. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible et soit N la variété compacte complexe correspondante. Alors $h^{1,0} \geq \max(0, k - m - 1)$.*

Preuve. On peut toujours définir les 1-formes du théorème 5. \square

Corollaire B. *Dans les cas suivants :*

(i) *$n > 2m + 1$ et $k < 3$,*

(ii) *$(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ vérifie la condition (H) et $k < m + 2$,*

la variété N ne possède aucune forme holomorphe globale de quelque degré que ce soit, i.e. :

$$\forall 1 \leq p \leq n - m - 1, \quad H^0(N, \Omega^p) = 0 .$$

Preuve. On a $H^0(N, \Omega^1) = 0$ par le théorème 5 dans le cas (ii), et par l'inégalité (I₁) du théorème 3 dans le cas (i). Maintenant, dans le cas d'une compactification équivariante, cela implique $H^0(N, \Omega^p) = 0$ (voir [Le1], p.94). \square

Corollaire C. *Sous les hypothèses du corollaire B, on a :*

$$\forall 0 \leq p \leq n - m - 2, \quad H^{n-m-1}(N, \Omega^p) = 0 .$$

Preuve. C'est une conséquence du lemme précédent et de la dualité de Serre (cf [We], p.179). \square

Corollaire D. *Sous les hypothèses du corollaire B, le fibré canonique de N est non trivial.*

Preuve. D'après le corollaire B, il n'y a pas de forme volume holomorphe. \square

Corollaire E. *Sous les hypothèses du corollaire B, la variété d'Albanese de N est nulle.*

Preuve. La variété d'Albanese est de dimension inférieure à $h^{1,0}$ (cf [Bl]). \square

Remarque. Dans le cas $m = 1$ (celui de [LdM-Ve]), l'hypothèse $k < 3$ est automatiquement satisfaite.

IV. CHAMPS DE VECTEURS, FEUILLETAGES
ET SOUS-VARIÉTÉS HOLOMORPHES DE N .

Dans cette partie, nous généralisons au cas $m > 1$ et complétons les résultats de [L-N2] quant aux propriétés géométriques (complexes) des variétés N .

Champs de vecteurs holomorphes sur N .

Nous appellerons Θ le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur N .

Théorème 6. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible et soit N la variété compacte, complexe associée. Alors :*

(i) *La variété N possède au moins $n - m - 1$ champs de vecteurs holomorphes globalement linéairement indépendants, i.e. la dimension complexe de $H^0(N, \Theta)$ est supérieure ou égale à $n - m - 1$.*

(ii) *Si $d > 1$ et si de plus on a $\Lambda_i \neq \Lambda_j$ pour $i \neq j$, alors il y a égalité : la dimension complexe de $H^0(N, \Theta)$ est égale à $n - m - 1$.*

Preuve. (i) Par commutation avec ξ_1, \dots, ξ_m et R , tout champ linéaire diagonal :

$$\chi = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

de \mathbb{C}^n descend en un champ holomorphe global $\tilde{\chi}$ sur N .

Appelons \mathcal{F} le feuilletage induit par ξ_1, \dots, ξ_m et R sur S et considérons la décomposition du fibré tangent de S en fibrés tangent et normal au feuilletage :

$$TS = T\mathcal{F} \oplus N\mathcal{F}$$

où ces trois fibrés sont, en restriction à $(\mathbb{C}^*)^n$, holomorphiquement triviaux (remarquons que $T\mathcal{F}$ et TS sont globalement triviaux). Attardons nous un peu sur $N\mathcal{F}$. Si on le définit comme quotient de TS par $T\mathcal{F}$, c'est un fibré holomorphe au-dessus de S . Néanmoins il ne se réalise pas comme sous-fibré holomorphe de TS , en clair il n'y a pas en général de plongement holomorphe de $N\mathcal{F}$ dans TS . Dans la somme directe précédente, nous avons identifié **différentiablement** $N\mathcal{F}$ à l'orthogonal, pour la métrique hermitienne standard de \mathbb{C}^n , de $T\mathcal{F}$. Dans toute la suite, nous distinguerons $TS/T\mathcal{F}$ fibré holomorphe mais non plongé dans TS de $N\mathcal{F}$ fibré normal différentiable plongé dans TS . Dans notre cas particulier, comme $TS/T\mathcal{F}|_{(\mathbb{C}^*)^n}$ est holomorphiquement trivial, on a de plus que $N\mathcal{F}|_{(\mathbb{C}^*)^n}$ est un sous-fibré **holomorphe** de TS .

Soient $(\chi_1, \dots, \chi_{n-m-1})$ des champs de vecteurs holomorphes linéaires diagonaux trivialisant $N\mathcal{F}|_{(\mathbb{C}^*)^n}$ (de telle sorte que $(\xi_1, \dots, \xi_m, R, \chi_1, \dots, \chi_{n-m-1})$ trivialisent $TS|_{(\mathbb{C}^*)^n}$), et appelons $(\tilde{\chi}_1, \dots, \tilde{\chi}_{n-m-1})$ leurs projetés sur N .

Ces champs projetés sont des champs holomorphes globaux sur N . De par la fibration $\pi : S \rightarrow N$, il y a un isomorphisme :

$$N_z\mathcal{F} \simeq T_{\pi(z)}N \quad \text{pour tout } z \in S.$$

Pour $z \in (\mathbb{C}^*)^n$, l'indépendance linéaire de $(\xi_1, \dots, \xi_m, R, \chi_1, \dots, \chi_{n-m-1})(z)$ implique l'indépendance linéaire de $(\chi_1, \dots, \chi_{n-m-1})(z)$ dans $N_z\mathcal{F}$ vu comme l'espace quotient $T_zS/T_z\mathcal{F}$, donc l'indépendance linéaire des projetés sur $T_{\pi(z)}N$. Ainsi les champs $\tilde{\chi}_j$ sont globalement linéairement indépendants sur N .

(ii) Soit $\tilde{\chi}$ un champ holomorphe sur N . Reprenons les mêmes notations qu'au (i). Nous affirmons que, dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} TS/T\mathcal{F} & \longrightarrow & TN \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\pi} & N \end{array}$$

le fibré $TS/T\mathcal{F} \rightarrow S$ est isomorphe à l'image réciproque du fibré tangent $TN \rightarrow N$ par π . En effet, soit (U_α, ϕ_α) un atlas feuilleté de S , dont $\chi_{\alpha\beta}$ représente les changements de coordonnées transverses. Alors par définition :

$$T\chi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL_{n-m-1}(\mathbb{C})$$

est le cocycle qui détermine le fibré $TS/T\mathcal{F} \rightarrow S$. Maintenant, on a :

$$\chi_{\alpha\beta}(z) = \chi_{\alpha\beta}(z') \quad \text{dès que} \quad \pi(z) = \pi(z')$$

par définition d'un atlas feuilleté, ce qui revient à dire que $\chi_{\alpha\beta}$ ne dépend que des coordonnées transverses, donc :

$$T\chi_{\alpha\beta}(z) = T\chi_{\alpha\beta}(z') \quad \text{dès que} \quad \pi(z) = \pi(z')$$

Si nous posons alors $V_\alpha = \pi(U_\alpha)$ on peut définir les fonctions $g_{\alpha\beta}$ grâce au diagramme :

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \cap U_\beta & \xrightarrow{T\chi_{\alpha\beta}} & GL_{n-m-1}(\mathbb{C}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow Id \\ V_\alpha \cap V_\beta & \xrightarrow{g_{\alpha\beta}} & GL_{n-m-1}(\mathbb{C}) \end{array}$$

Ceci fait de $g_{\alpha\beta}$ le cocycle définissant le fibré $TN \rightarrow N$, ce qui revient à dire que l'image réciproque de ce fibré par π est le fibré $TS/T\mathcal{F} \rightarrow S$. Cette propriété nous permet de relever $\tilde{\chi}$ en une section holomorphe χ_0 de $TS/T\mathcal{F}$; par ailleurs, elle nous permet de relever $\tilde{\chi}$ en un champ de vecteurs χ de S , **différentiable**. Maintenant, en restriction à $(\mathbb{C}^*)^n$, comme $N\mathcal{F}$ est holomorphe, le champ χ et la section χ_0 coïncident, de telle sorte que l'on a ainsi relevé $\tilde{\chi}$ en un champ χ différentiable de S , holomorphe en restriction à l'ouvert dense $(\mathbb{C}^*)^n \subset S$. Mais dès lors, par prolongement analytique, χ est en fait holomorphe sur S , et nous avons relevé $\tilde{\chi}$ en χ champ holomorphe de S .

Comme $d > 1$, ce champ s'étend sur \mathbb{C}^n tout entier et y vérifie :

$$[\chi, R] = [\chi, \xi_1] = \dots = [\chi, \xi_m] = 0 .$$

En particulier, la nullité de $[\chi, R]$ implique que χ descend en un champ projectif global, donc (cf [C-K-P]) que χ est linéaire.

Posons par ailleurs :

$$\chi = \sum_{i=1}^n a_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

(avec donc les a_i linéaires) ; cela donne le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i(z) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial a_i}{\partial z_j}(z) \\ \Lambda_i a_i(z) = \sum_{j=1}^n \Lambda_j z_j \frac{\partial a_i}{\partial z_j}(z) \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq n .$$

Multipliant la première équation par Λ_i et soustrayant les deux équations, l'on obtient :

$$\sum_{j=1}^n (\Lambda_j - \Lambda_i) z_j \frac{\partial a_i}{\partial z_j}(z) = 0 .$$

Comme les Λ_j sont tous distincts et les $\frac{\partial a_i}{\partial z_j}$ constants, il vient :

$$\frac{\partial a_i}{\partial z_j}(z) \equiv 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \neq j \leq n .$$

Dès lors, on a $a_i(z) = \alpha_i z_i$, ce qui montre que χ est linéaire diagonal, donc que c'est l'un des champs décrits au (i). \square

Corollaire. *Si $d > 1$ et si les Λ_i sont tous distincts, alors N n'est pas holomorphiquement parallélisable.*

Preuve. D'après le lemme 2 de la première partie, il existe $z \in S$ avec seulement $2m + 1$ coordonnées non nulles. En un tel point, il ne peut y avoir que m champs de vecteurs linéaires diagonaux χ_1, \dots, χ_m tels que $(\chi_1, \dots, \chi_m, R, \xi_1, \dots, \xi_m)$ sont linéairement indépendants, donc il ne peut y avoir plus de m sections holomorphes globales linéairement indépendantes en tout point du fibré tangent TN . \square

Feuilletage transversalement kählérien.

La preuve du précédent corollaire nous montre que, dans le cas général, on ne peut espérer rencontrer plus que m champs de vecteurs holomorphes linéairement indépendants en tout point de N . Par contre, nous allons montrer, suivant en cela [L-N2], que dans tous les cas, N possède un feuilletage régulier de dimension m provenant de champs globaux, et que par ailleurs ce feuilletage jouit de propriétés très particulières. Rappelons pour cela la notion suivante.

Définition (voir [L-N2]). Soit N une variété complexe munie d'un feuilletage holomorphe régulier \mathcal{G} . Soit ω une 2-forme réelle sur N . Alors \mathcal{G} est dit transversalement kählérien par rapport à ω si :

- (i) ω est fermée et J -invariante (où J est la structure presque complexe de N).
- (ii) $\text{Ker } \omega_z = T_z \mathcal{G}$ pour tout z de N , avec :

$$\text{Ker } \omega_z = \{ \xi \in T_z N \mid (i_\xi \omega)(z) \equiv 0 \} .$$

- (iii) La forme quadratique :

$$h(u_1, u_2) = \omega(Ju_1, u_2) + i\omega(u_1, u_2)$$

est définie positive sur $N\mathcal{G}$, fibré normal au feuilletage.

Fort de cette définition, nous énonçons alors, généralisant le résultat correspondant de [L-N2] :

Théorème 7. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible et soit N la variété compacte, complexe associée. Alors il existe sur N un feuilletage \mathcal{G} holomorphe régulier de dimension m , transversalement kählérien par rapport à la classe d'Euler du fibré $M_1 \xrightarrow{\pi_1} N$.

Preuve. Nous suivons la démonstration de [L-N2].

- (i) Considérons sur S :

$$1 \leq j \leq m \quad \eta_j = \sum_{i=1}^n \text{Re} (\lambda_i^j) z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

et montrons qu'ils définissent, par projection sur N , un feuilletage holomorphe régulier de dimension m de N , i.e. qu'en tout point de S , les champs de vecteurs $(R, \xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_m)$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{C} , i.e. que la matrice :

$$\begin{pmatrix} z_1 & \lambda_1^1 z_1 & \dots & \lambda_1^m z_1 & \text{Re} (\lambda_1^1) z_1 & \dots & \text{Re} (\lambda_1^m) z_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n & \lambda_n^1 z_n & \dots & \lambda_n^m z_n & \text{Re} (\lambda_n^1) z_n & \dots & \text{Re} (\lambda_n^m) z_n \end{pmatrix}$$

est de rang complexe $2m + 1$ en tout point z de S . Mais, par hyperbolicité faible (lemme 2 de la première partie), chaque point de S possède au moins $2m + 1$ coordonnées non nulles, que nous supposons être toujours, par souci de simplification, les $2m + 1$ premières. De ce fait, cette hypothèse implique que $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m+1})$ est une sous-configuration admissible (conséquence du lemme 2, (i), de la première partie). Il suffit alors de prouver :

$$\text{rgc} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1^1 & \dots & \lambda_1^m & \text{Re} (\lambda_1^1) & \dots & \text{Re} (\lambda_1^m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_{2m+1}^1 & \dots & \lambda_{2m+1}^m & \text{Re} (\lambda_{2m+1}^1) & \dots & \text{Re} (\lambda_{2m+1}^m) \end{pmatrix} = 2m + 1$$

ou encore :

$$\operatorname{rg}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Lambda_1 & \dots & \Lambda_{2m+1} \\ \operatorname{Re}(\Lambda_1) & \dots & \operatorname{Re}(\Lambda_{2m+1}) \end{pmatrix} = 2m + 1$$

or ce rang est égal à :

$$\operatorname{rg}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \operatorname{Im}(\Lambda_1) & \dots & \operatorname{Im}(\Lambda_{2m+1}) \\ \operatorname{Re}(\Lambda_1) & \dots & \operatorname{Re}(\Lambda_{2m+1}) \end{pmatrix}$$

qui vaut $2m + 1$ par le lemme 2 de la première partie. Nous avons ainsi construit un feuilletage holomorphe \mathcal{G} sur N , engendré par $\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_m$, les projetés de (η_1, \dots, η_m) .

(ii) Nous construisons maintenant la 2-forme ω par rapport à laquelle le feuilletage \mathcal{G} ainsi construit va être transversalement kählérien.

Soit :

$$\Omega = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i$$

la forme kählérienne standard de \mathbb{C}^n et soit Ω_{M_1} sa restriction à la variété M_1 . On a :

$$\Omega_{M_1}(u, v) = -\operatorname{Im} \langle u, \bar{v} \rangle \text{ pour } (u, v) \in TM_1 \times TM_1 .$$

Montrons que Ω_{M_1} se projette en une 2-forme réelle sur N . Comme Ω_{M_1} est réelle, fermée et que l'action de S^1 sur M_1 dont le quotient est N , est engendrée par le flot réel de iR , il suffit de montrer que :

$$i_{iR}\Omega_{M_1} = 0 .$$

Mais, pour $u \in TM_1$:

$$i_{iR}\Omega_{M_1} = -\operatorname{Im} \langle iR, \bar{u} \rangle = -\operatorname{Re} \langle R, \bar{u} \rangle = -\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(z_i \bar{u}_i) .$$

Or, on a :

$$M_1 = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n \Lambda_i |z_i|^2 = 0, \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = 1 \right\}$$

donc, pour $z \in M_1$:

$$T_z M_1 = \left\{ u \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n \Lambda_i \operatorname{Re}(\bar{u}_i z_i) = 0, \sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(\bar{u}_i z_i) = 0 \right\}$$

et l'on en conclut que $i_{iR}\Omega_{M_1} = 0$. On récupère ainsi, par projection, une 2-forme holomorphe fermée i -invariante sur N .

(iii) Montrons que \mathcal{G} est transversalement kählérien par rapport à ω . Posons :

$$1 \leq j \leq m \quad \left\{ \begin{array}{l} U_j = i\eta_j \\ V_j = i \sum_{i=1}^n \operatorname{Im} (\lambda_i^j) z_i \frac{\partial}{\partial z_i} = \xi_j - \eta_j \end{array} \right.$$

On peut écrire :

$$T_z M_1 = \{u \in \mathbb{C}^n \mid \operatorname{Im} \langle U_j, \bar{u} \rangle = 0 \\ \operatorname{Im} \langle V_j, \bar{u} \rangle = \operatorname{Im} \langle iR, \bar{u} \rangle = 0, \quad 1 \leq j \leq m\}$$

donc :

$$T_z M_1 = \{u \in \mathbb{C}^n \mid \Omega(U_j, u) = \Omega(V_j, u) = \Omega(iR, u) = 0, \quad 1 \leq j \leq m\}$$

ce qui signifie :

$$\operatorname{Ker} \Omega_{M_1} = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(U_1, \dots, U_m, V_1, \dots, V_m, iR) .$$

En effet, dans le cas contraire, il y aurait un élément W de $\operatorname{Ker} \Omega_{M_1}$ indépendant de U_i et V_i et iR . Mais, étant donné que ces vecteurs forment un ensemble de $2m+1$ vecteurs \mathbb{R} -linéairement indépendants qui n'appartient pas à TM_1 , ils constituent une base du fibré normal de M_1 ; de telle sorte que l'on pourrait alors supposer, quitte à remplacer W par une combinaison linéaire de (U_i, V_i, iR, W) , que W appartient à TM_1 . Mais ceci est impossible, puisque l'on aurait :

$$\Omega(w, w) = \operatorname{Im} \langle w, \bar{w} \rangle = 0 .$$

De plus, ces vecteurs se projettent sur N en $(-\tilde{\eta}_1, \dots, -\tilde{\eta}_m, i\tilde{\eta}_1, \dots, i\tilde{\eta}_m)$, donc :

$$\operatorname{Ker} \omega = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(-\tilde{\eta}_1, \dots, -\tilde{\eta}_m, i\tilde{\eta}_1, \dots, i\tilde{\eta}_m) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_m) = T\mathcal{G} .$$

Soit maintenant $T_{\mathbb{C}}M_1 = TM_1 \cap iTM_1$ le sous-fibré maximal holomorphe de TM_1 . On a :

$$(T_{\mathbb{C}}M_1)_z = \{u \in \mathbb{C}^n \mid \langle iR, \bar{u} \rangle = \langle U_j, \bar{u} \rangle = \langle V_j, \bar{u} \rangle = 0, \quad 1 \leq j \leq m\}$$

c'est-à-dire :

$$(T_{\mathbb{C}}M_1)_z = \{u \in \mathbb{C}^n \mid \langle R, \bar{u} \rangle = \langle \xi_j, \bar{u} \rangle = \langle \eta_j, \bar{u} \rangle = 0, \quad 1 \leq j \leq m\}$$

Mais $T_{\mathbb{C}}M_1$ est un sous-fibré holomorphe de TM_1 de dimension (complexe) $n - 2m - 1$ et invariant par l'action de U_j , de V_j et de iR définissant \mathcal{G} , donc est isomorphe à $N\mathcal{G}$ sur N . Par restriction, la forme hermitienne associée à Ω_{M_1} est définie positive sur $T_{\mathbb{C}}M_1$, donc la forme hermitienne associée à ω est définie positive sur $N\mathcal{G}$.

Il reste à montrer que ω est la classe d'Euler e du fibré $M_1 \xrightarrow{\bar{\pi}_1} N$. Mais ce fibré est l'image réciproque du fibré $S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ par le plongement différentiable de N dans $\mathbb{C}P^{n-1}$ (voir la proposition 1 de la troisième partie), donc sa classe d'Euler

n'est rien d'autre que l'image réciproque par ce plongement de la classe d'Euler e_0 de $S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$. Autrement dit, en utilisant le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{\tilde{j}} & S^{2n-1} \\ \bar{\pi}_1 \downarrow & & \downarrow p \\ (N, e) & \xrightarrow{j} & (\mathbb{C}P^{n-1}, e_0) \end{array}$$

la classe d'Euler e est la projection par $\bar{\pi}_1$ de $j^*p^*e_0$, qui n'est autre que la restriction à M_1 de 2Ω , la forme kählerienne standard de \mathbb{C}^n . De ce fait, cette classe d'Euler vaut 2ω . \square

Remarque. D'après le corollaire C du théorème 2 de la deuxième partie, on a $\omega^d = 0$.

Sous-variétés holomorphes de N .

Comme dans [L-N2], le théorème 7 va nous permettre de décrire les sous-variétés holomorphes et ensembles analytiques de N de grande dimension dans un cas générique. Nous commençons par généraliser la proposition 1 de [L-N2]

Proposition 1. *Soit \mathcal{G} un feuilletage transversalement kählerien de dimension m sur N , une variété compacte complexe. Soit ω la forme associée. Supposons ω^d exacte pour d un entier fixé. Soit Y un ensemble analytique de N de dimension supérieure ou égale à $d + m - 1$. Alors Y est tangent à \mathcal{G} , i.e. pour tout point régulier y de Y , on a $T_y\mathcal{G} \subset T_yY$.*

Remarque. La proposition 1 est énoncée sous des conditions générales ; en particulier, dans cette proposition N désigne n'importe quelle variété compacte complexe supportant un feuilletage transversalement kählerien, et non forcément une variété issue d'une configuration admissible.

Preuve. La 2-forme ω étant fermée, l'hypothèse ω^d exacte implique que $\omega^{d'}$ est exacte pour $d' \geq d$, de telle sorte qu'il suffit de montrer le résultat pour Y de dimension $d + m - 1$.

Soit \bar{Y} la partie régulière de Y . Posons :

$$h = \min_{y \in \bar{Y}} (\dim(T_yY \cap T_y\mathcal{G})) .$$

Localement, autour d'un point $y \in \bar{Y}$, on peut construire h combinaisons linéaires indépendantes de champs holomorphes locaux de $T\bar{Y} \cap T\mathcal{G}$. Ainsi, l'on peut trouver une distribution holomorphe K de h -plans sur $T\bar{Y}$ incluse dans $T\mathcal{G}$.

Si $h = m$, alors $K = T\mathcal{G}|_{\bar{Y}}$ et la proposition est démontrée. Supposons $h < m$. La distribution K étant holomorphe, elle possède une forme volume V . Posons :

$$\omega_1 = \omega^{d+m-1-h} \wedge V .$$

Comme $m - 1 - h$ est positif ou nul, et V fermée, ω est exacte. Remarquons par ailleurs qu'elle est de dimension $d + m - 1$ sur Y de dimension $d + m - 1$, et que nous pouvons donc identifier $\omega_1(y)$ à un réel. Soit $y \in \bar{Y}$.

1^{er} cas : $\dim_{\mathbb{C}}(T_y Y \cap T_y \mathcal{G}) > h$.

Alors :

$$(T_y Y \cap T_y \mathcal{G})/K_y \neq \{0\}$$

et $\omega(y)$ s'annule sur ce sous-espace vectoriel. Soit u un vecteur de ce sous-espace vectoriel. On a alors :

$$i_u \omega_1(y) = ((i_u \omega^{d+m-1-h}) \wedge V + \omega^{d+m-1-h} \wedge i_u V)(y) = 0$$

et donc $\omega_1(y) = 0$.

2^{ème} cas : $\dim_{\mathbb{C}}(T_y Y \cap T_y \mathcal{G}) = h$. Dans ce cas, $\omega(y)$ est non dégénérée sur $T_y Y/K_y$, donc $\omega^{d+m-1-h}(y)$ est une forme volume sur ce même sous-espace, et $\omega_1(y)$ est produit extérieur de deux formes volumes à supports distincts mais complémentaires en y , donc $\omega_1(y) > 0$.

Appliquons maintenant le théorème de Stokes pour les ensembles analytiques à ω_1 . Par exactitude :

$$\int_Y \omega_1 = 0 \quad \text{donc} \quad \forall y \in \bar{Y}, \quad \omega_1(y) = 0.$$

Mais ceci est absurde puisqu'en au moins un point $y \in \bar{Y}$, le minimum h est atteint, donc en au moins un point, $\omega_1(y) > 0$. Donc on a en fait $h = m$ et la proposition est démontrée. \square

Remarque. Géométriquement, cette proposition signifie que les "grandes" sous-variétés holomorphes de N sont feuilletées par le feuilletage \mathcal{G} .

Remarque. En un point singulier y de Y , on a $T_y \mathcal{G} \subset CT_y Y$, où $CT_y Y$ est cette fois le cône tangent de Y en y , i.e. le cône obtenu comme ensemble des limites des plans tangents en y' pour y' tendant vers y et y' dans la partie régulière de Y .

Cette proposition est la clef pour décrire les sous-variétés holomorphes de N de dimension supérieure à $d + m - 1$. Rappelons que N possède des sous-variétés "naturelles" : toute sous-configuration admissible de $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ donne une sous-variété holomorphe de N . En particulier, toute variété N contient ainsi un tore complexe comme sous-variété.

Définition. Nous appellerons sous-variété standard de N une sous-variété holomorphe de N obtenue par restriction à une sous-configuration de $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$.

Comme dans [L-N2], on a alors :

Théorème 8. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible vérifiant la condition (H). Alors toute sous-variété holomorphe (respectivement ensemble analytique) de N de dimension supérieure ou égale à $d + m - 1$ est une sous-variété standard (respectivement une union de sous-variétés standard)*

Preuve. Nous suivons la démonstration par induction de [L-N2]. Soit Y un ensemble analytique de N de dimension supérieure ou égale à $d + m - 1$. La preuve du théorème peut être esquissée de la manière suivante : on se restreint à une sous-configuration telle que Y intersecte la sous-variété standard correspondante en au moins un point appartenant au groupe de Lie complexe dont celle-ci est compactification. On utilise

alors le fait que Y contient la feuille de \mathcal{G} passant par ce point d'après la proposition précédente, et donc l'adhérence de cette feuille de \mathcal{G} . Sous la condition (H), on montre que les feuilles de \mathcal{G} sont ouvertes et que leur adhérence est une sous-variété lisse. Comme Y est holomorphe, il contient le "complexifié" (en un sens que nous ne voulons pas préciser maintenant) de cette sous-variété lisse. On montre enfin que ce "complexifié" s'identifie à la sous-variété standard intersectant Y .

(i) Supposons que Y contienne un point de G . Alors nous montrerons au (iii) que $Y \cap G = G$, et donc, comme N est l'adhérence de G , que Y est égal à N tout entier. Dans le cas contraire, Y contient un point de G_0 , groupe de Lie complexe associé à une sous-variété standard de N , correspondant à une sous-configuration admissible d'espace des feuilles de Siegel $S' = \mathbb{C}^p - E'$, avec $p < n$. Remarquons que E' s'obtient de E en supprimant au pire tous les sous-espaces de dimension comprise entre $n - d$, dimension maximale de E et $n - d - p$, de telle sorte que la dimension maximale de E' est ainsi supérieure ou égale à $n - d - p$ dans \mathbb{C}^p . Ceci assure que la codimension minimale de E' est inférieure ou égale à d . Remarquons par ailleurs que la sous-configuration admissible correspondant à S' vérifie la condition (H) également. Dès lors, l'on peut reprendre le même raisonnement avec le groupe G_0 correspondant à cette sous-configuration.

(ii) Soit K la projection par π du sous-groupe compact maximal $(S^1)^n$ de $(\mathbb{C}^*)^n$ ouvert dense de S . Le sous-groupe de Lie K est en fait isomorphe (différentiablement) à $(S^1)^{n-1}$. En effet, d'après ce qui a été dit dans le paragraphe sur le polytope associé de la première partie, le sous-groupe $(S^1)^n$ agit sur M_1 , et cette action commute avec l'action de S^1 sur M_1 donnant le fibré $M_1 \xrightarrow{\bar{\pi}_1} N$. Dès lors, on récupère une action de :

$$\pi((S^1)^n) = \bar{\pi}_1((S^1)^n) \simeq (S^1)^{n-1}$$

sur N .

Appelons j l'injection naturelle de $(S^1)^n$ dans S , et r la restriction de S à M_1 . En fait, r n'est rien d'autre que $\bar{\pi}_1$, mais ici la structure de fibré ne nous intéresse pas. On a alors :

$$\begin{array}{ccc} (S^1)^n \subset (\mathbb{C}^*)^n & \xrightarrow{j} & S \\ \downarrow r & & \downarrow r \\ (S^1)^n & \xrightarrow{\tilde{j}} & M_1 \\ \downarrow \bar{\pi}_1 & & \downarrow \bar{\pi}_1 \\ K \subset G & \xrightarrow{\bar{j}} & N \end{array}$$

Considérons alors l'application exponentielle de l'algèbre de Lie \mathbb{C}^n au groupe de Lie $(\mathbb{C}^*)^n$. Cette algèbre de Lie se décompose en :

$$\mathbb{C}^n = \text{Lie}((S^1)^n) \oplus i \cdot \text{Lie}((S^1)^n) = i \cdot \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$$

qui induit la décomposition différentiable (avec $e = (1, \dots, 1)$) :

$$(D) \quad T_e G = T_e K + i.T_e K .$$

Remarquons que cette fois il ne s'agit pas d'une somme directe. Posons :

$$\mathfrak{H} = T_e K \cap i.T_e K$$

sous-espace holomorphe de l'algèbre de Lie $T_e K$. Les champs $i.\eta_1, \dots, i.\eta_m$ d'une part, et $\xi_1 - \eta_1, \dots, \xi_m - \eta_m$ d'autre part appartiennent à $\text{Lie}((S^1)^n)$, donc, par projection les champs de vecteurs $i.\tilde{\eta}_1, \dots, i.\tilde{\eta}_m$ d'une part, et $-\tilde{\eta}_1, \dots, -\tilde{\eta}_m$ d'autre part appartiennent à $T_e K$. Mais un rapide calcul de dimensions prouve que :

$$\dim_{\mathbb{C}}(T_e G) = n - m - 1 \text{ et } \dim_{\mathbb{R}} T_e K = n - 1, \text{ donc } \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{H} = m .$$

Dès lors, on a :

$$\mathfrak{H} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_m)$$

Cela signifie que \mathfrak{H} est une sous-algèbre de Lie et donne donc naissance à un sous-groupe H de G . Ce sous-groupe H n'est rien d'autre que la feuille de \mathcal{G} passant par e .

(iii) Nous prouvons maintenant que H (et donc la feuille de \mathcal{G} passant par e) n'est pas fermé, et donc n'est pas un sous-groupe de Lie. En fait, nous allons prouver que l'adhérence de H est K tout entier. Pour cela, il suffit de montrer que toute fonction \hat{f} continue de K dans \mathbb{C} invariante sur H est constante. Une telle fonction se relève en une fonction f continue de $(S^1)^n$ dans \mathbb{C} invariante le long du feuilletage réel engendré par $(i\eta_1, \dots, i\eta_m)$ et $(\xi_1 - \eta_1, \dots, \xi_m - \eta_m)$ et iR . Soient $\hat{f}(p)$ les coefficients de Fourier de f (avec $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$). Cette invariance se traduit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{f}(p) e^{<iT, \sum_{j=1}^n \text{Re}(\Lambda_j)p_j>} = \hat{f}(p) \\ \vdots \\ \hat{f}(p) e^{<iT, \sum_{j=1}^n \text{Im}(\Lambda_j)p_j>} = \hat{f}(p) \\ \hat{f}(p) e^{i\theta} = \hat{f}(p) \end{array} \right. \quad T \in \mathbb{C}^m, \theta \in \mathbb{R}$$

pour tout p de \mathbb{Z}^n . Mais ceci implique pour tout p tel que $\hat{f}(p) \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \text{Re}(\Lambda_i)p_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n \text{Im}(\Lambda_i)p_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n p_i = 0 \end{array} \right.$$

Comme la configuration admissible vérifie la condition (H), ceci a pour conséquence que tous les coefficients de Fourier de f sont nuls, donc que f et par conséquent \tilde{f} sont constantes.

(iii) Supposons que Y contienne un point de G , et supposons pour simplifier que e appartienne à Y . Alors, d'après la proposition 1, l'ensemble analytique Y contient la feuille de \mathcal{G} passant par e , donc son adhérence, donc l'ensemble K . Mais Y étant holomorphe contient également le sous-groupe (non fermé) K' de sous-algèbre de Lie $i.T_e K$, donc en vertu de l'égalité (D), contient en fait G lui-même, ce qui achève la preuve. \square

Espace quotient N/\mathcal{G} .

Nous continuons cette partie par une brève étude du quotient N/\mathcal{G} , où \mathcal{G} est le feuilletage transversalement kählérien du théorème 7. Cette étude ne figure pas dans [L-N2]. Nous nous contenterons ici de prouver le théorème principal sans aller plus loin dans l'étude, car nous avons l'intention d'écrire sur ce sujet un article indépendant de cette thèse.

Lorsque la condition (H) est vérifiée, la preuve du théorème 8 utilise le fait que les feuilles du feuilletage transversalement kählérien \mathcal{G} sont ouvertes, et donc l'espace quotient N/\mathcal{G} est certainement très loin d'être une variété. Nous allons voir au contraire que, dans le cas rationnel, cet espace se comporte bien. Donnons pour commencer la définition suivante :

Définition. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible. Nous dirons que la configuration $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ vérifie la condition (K) si et seulement si a est maximal, i.e. si et seulement si l'espace des solutions du système :

$$(S) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n s_i \Lambda_i \\ \sum_{i=1}^n s_i = 0 \end{cases}$$

possède une base rationnelle.

Remarque. Rappelons que la condition (H) peut s'énoncer : a est égal à 0, i.e. le système (S) ne possède aucune solution rationnelle.

Nous énonçons :

Théorème 9. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible, soit N la variété compacte complexe correspondante et soit \mathcal{G} le feuilletage transversalement kählérien sur N défini au théorème 7. Supposons de plus que $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ vérifie la condition (K). Alors :

- (i) Chaque feuille de \mathcal{G} est un tore complexe de dimension m .
- (ii) L'espace quotient N/\mathcal{G} est une orbifold kählérienne.

Plus encore, la condition (K) est optimale respectivement à ces deux propriétés, en ce sens que, sous les mêmes conditions, si $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ ne vérifie pas la condition (K), le feuilletage transversalement kählérien \mathcal{G} possède des feuilles ouvertes.

Preuve. (i) Rappelons que \mathcal{G} est engendré par les projections par π des champs de vecteurs :

$$1 \leq j \leq m \quad \eta_j = \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} (\lambda_i^j) z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

sur S . Remarquons alors que le type biholomorphe des feuilles de \mathcal{G} sur N peut être calculé de la manière suivante. Considérons sur S l'action de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{2m}$ engendrée par :

$$(R, \xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_m)$$

et qui s'écrit explicitement :

$$((\alpha, T, U), z) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \times S \xrightarrow{\Xi} \left(\alpha e^{\langle \Lambda_i, T \rangle + \langle \operatorname{Re} (\Lambda_i), U \rangle} \cdot z_i \right)_{i=1}^n \in S .$$

Soit z un point de S . Soit :

$$\Gamma_z = \{(\alpha, T, U) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \mid \Xi(\alpha, T, U, z) = z\}$$

le groupe d'isotropie de z . Étant donné que l'action engendrée par (R, ξ_1, \dots, ξ_m) seuls est libre (proposition 1 de la deuxième partie) et commute avec l'action induite par les η_i , la feuille de \mathcal{G} passant par $\pi(z)$ s'identifie biholomorphiquement à :

$$((\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m) / \Gamma_z) / (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m) \simeq \mathbb{C}^m / \Gamma_z .$$

Soit donc $z \in S$. Un élément (α, T, U) appartient à Γ_z si et seulement il vérifie :

$$\begin{cases} \alpha e^{\langle \Lambda_1, T \rangle + \langle \operatorname{Re} (\Lambda_1), U \rangle} \cdot z_1 = z_1 \\ \vdots \\ \alpha e^{\langle \Lambda_n, T \rangle + \langle \operatorname{Re} (\Lambda_n), U \rangle} \cdot z_n = z_n \end{cases}$$

Supposons que z appartienne à $(\mathbb{C}^*)^n$:

$$\begin{cases} \alpha e^{\langle \Lambda_1, T \rangle + \langle \operatorname{Re} (\Lambda_1), U \rangle} = 1 \\ \vdots \\ \alpha e^{\langle \Lambda_n, T \rangle + \langle \operatorname{Re} (\Lambda_n), U \rangle} = 1 \end{cases}$$

Quotientant chaque équation par la première et redressant l'exponentielle, il vient :

$$2 \leq j \leq n \quad \langle \Lambda_j - \Lambda_1, T \rangle + \langle \operatorname{Re} (\Lambda_j) - \operatorname{Re} (\Lambda_1), U \rangle = 2i\pi k_j$$

pour (k_2, \dots, k_n) des entiers relatifs arbitraires, ou encore :

$$2 \leq j \leq n \quad \langle \operatorname{Re} (\Lambda_j) - \operatorname{Re} (\Lambda_1), P \rangle + \langle \operatorname{Im} (\Lambda_j) - \operatorname{Im} (\Lambda_1), Q \rangle = 2i\pi k_j$$

pour j compris entre $2m + 2$ et n et les k_j bien choisis. En conséquence, pour tout (k_2, \dots, k_{2m+1}) de \mathbb{Z}^{2m} , il existe une solution au système (B), et le groupe Γ s'identifie à \mathbb{Z}^{2m} , de telle sorte que la feuille de \mathcal{G} passant par z est biholomorphe à :

$$((\mathbb{C}^{2m} \times \mathbb{C}^*)/\Gamma_z)/(\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{C}^m/\mathbb{Z}^{2m}$$

i.e. à un tore complexe de dimension m . Enfin, lorsque z n'est pas un point de $(\mathbb{C}^*)^n$, il possède de toute façon $2m + 1$ coordonnées non nulles (lemme 2 de la première partie) et le même raisonnement fonctionne.

(ii) Comme conséquence directe du (i) et du théorème d'Ehresmann (voir [Ee-Ve]), l'espace N/\mathcal{G} est une orbifold. Maintenant la 2-forme transversalement kählérienne respectivement à \mathcal{G} se projette en une 2-forme kählérienne sur l'orbifold.

Enfin, l'optimalité de la condition (K) provient du fait que, si elle n'est pas vérifiée, alors il existe une sous-configuration admissible d'au moins $2m + 2$ vecteurs qui vérifie la condition (H) et comme conséquence de la preuve du théorème 8, les feuilles de \mathcal{G} sur le sous-ensemble correspondant à cette sous-configuration sont ouvertes. \square

Corollaire A. *Sous les mêmes conditions que celles du théorème, l'espace N/\mathcal{G} admet comme désingularisée une variété kählérienne.*

Preuve. L'espace N/\mathcal{G} étant une orbifold kählérienne, il suffit d'appliquer le théorème de désingularisation d'Hironaka (voir [Hi]). \square

De ce fait, le théorème 9 permet de construire une famille de variétés kählériennes. Nous comptons étudier cette famille dans un prochain article, indépendant de cette thèse. Par ailleurs, il permet de montrer :

Corollaire B. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible ne vérifiant pas la condition (H). Alors la variété N correspondante contient une infinité de sous-variétés holomorphes de dimension supérieure ou égale à m qui ne sont pas des sous-variétés standard.*

Preuve. Comme la condition (H) n'est pas vérifiée, il existe une sous-configuration admissible d'au moins $2m + 2$ vecteurs qui vérifie la condition (K). Appliquant le théorème 9, l'on obtient que la restriction de \mathcal{G} à un sous-ensemble de N est un feuilletage par tores complexes de dimension m , donc qu'il existe une infinité de tores complexes plongés holomorphiquement dans N . Or, seul un nombre fini d'entre eux peut être une sous-variété standard. Plus encore, en prenant le produit de ces tores par des sous-variétés standard d'intersection vide, on génère d'autres sous-variétés holomorphes non standard de plus grande dimension. \square

Ainsi, si $k = 1$, ce corollaire montre que le théorème 8 n'est plus vérifié lorsque la condition (H) ne l'est pas.

Dans quelques cas exceptionnels, nous pouvons décrire plus précisément l'espace N/\mathcal{G} sans investigation supplémentaire. Dans le cas particulier où $n = 2m + 1$, la condition (K) est automatiquement satisfaite (ainsi d'ailleurs que la condition (H)), et le feuilletage transversalement kählérien du théorème 7 possède une seule feuille qui est le tore complexe N lui-même (cf théorème 1), de telle sorte que l'espace N/\mathcal{G} se réduit à un point. Par ailleurs, rappelons que le projectif à poids (p_1, \dots, p_{r+1})

(entiers tous strictement positifs) désigne le quotient de $\mathbb{C}^{r+1} - \{0\}$ par l'action induite par le champ de vecteurs :

$$R_{(p_1, \dots, p_{r+1})} = \sum_{i=1}^{r+1} p_i \cdot z_i \frac{\partial}{\partial z_i} .$$

On a alors :

Corollaire C. *Sous les hypothèses du théorème 9, si $m = 1$ et $k = 2$, alors N est difféomorphe à $S^1 \times S^{2p-1}$ pour un p strictement supérieur à un et l'espace N/G est biholomorphe à un projectif à poids de dimension $p - 1$.*

De même, pour $m = 1$ et $k = 1$, la variété N est difféomorphe à $S^{2p-1} \times S^{2q-1}$ pour p et q strictement supérieurs à un, N/G s'identifie à un produit de deux projectifs à poids de dimensions respectives $p - 1$ et $q - 1$.

Preuve. Lorsque $m = 1$ et $k = 2$ le théorème de classification de [LdM-Ve] implique que N est difféomorphe à $S^1 \times S^{2p-1}$ pour un p strictement supérieur à un et que S est égal à :

$$\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^p - \{0\} .$$

On a par ailleurs :

$$\xi = \sum_{i=1}^{p+2} \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \quad \text{et} \quad \eta = \sum_{i=1}^{p+2} \operatorname{Re}(\lambda_i) z_i \frac{\partial}{\partial z_i} .$$

Considérons alors l'action conjuguée de ξ et η sur S . Nous affirmons que le quotient de S par cette action est biholomorphe à $\mathbb{C}^p - \{0\}$. L'action est en effet donnée par :

$$(s, t, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times S \longmapsto (z_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot s + \operatorname{Re}(\lambda_1) \cdot t}, \dots, z_{p+2} \cdot e^{\lambda_{p+2} \cdot s + \operatorname{Re}(\lambda_{p+2}) \cdot t}) .$$

Remarquons maintenant que le sous-espace :

$$\{z_4 = \dots = z_{p+2} = 0, \quad (z_1, z_2, z_3) \in (\mathbb{C}^*)^3\}$$

appartient à S et constitue une sous-configuration admissible correspondant au cas des tores, donc d'après le lemme 1 de la deuxième partie, la paire (λ_1, λ_2) est de rang réel 2. Considérons alors le système :

$$(W) \quad \begin{cases} e^{\lambda_1 \cdot s + \operatorname{Re}(\lambda_1) \cdot t} = \frac{1}{z_1} \\ e^{\lambda_2 \cdot s + \operatorname{Re}(\lambda_2) \cdot t} = \frac{1}{z_2} \end{cases}$$

En adaptant les calculs effectués dans la preuve du théorème 9, l'on obtient que, pour tout (z_1, z_2) appartenant à $(\mathbb{C}^*)^2$, la solution du système précédent est unique modulo addition par un élément d'un réseau entier isomorphe à \mathbb{Z}^2 . Mais la condition (K) assure que le p -uplet :

$$(e^{\lambda_3 \cdot s + \operatorname{Re}(\lambda_3) \cdot t}, \dots, e^{\lambda_{p+2} \cdot s + \operatorname{Re}(\lambda_{p+2}) \cdot t})$$

est indépendant du choix de (s, t) solution du système (W). Ainsi l'application :

$$z \in S = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^p - \{0\}) \longmapsto w \in \mathbb{C}^p - \{0\}$$

avec :

$$w = (z_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot s + \operatorname{Re}(\lambda_3) \cdot t}, \dots, z_{p+2} \cdot e^{\lambda_{p+2} \cdot s + \operatorname{Re}(\lambda_{p+2}) \cdot t})$$

pour (s, t) une solution quelconque du système (W), définit un biholomorphisme entre le quotient X de S par l'action conjuguée de ξ et η et $\mathbb{C}^p - \{0\}$. Maintenant le quotient de X par l'action projective de \mathbb{C}^* est égal à N/\mathcal{G} . Le biholomorphisme précédent envoie cette action sur l'action projective modulo des poids entiers de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{C}^p - \{0\}$ d'où :

$$N/\mathcal{G} = \text{projectif à poids de dimension } p - 1 .$$

Le cas $m = 1$ et $k = 1$ est fort semblable. Par [LdM-Ve] l'on sait que N est difféomorphe à $S^{2p-1} \times S^{2q-1}$ pour p et q deux entiers strictement plus grands que un, et que S vaut :

$$S = \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^p - \{0\}) \times (\mathbb{C}^q - \{0\}) .$$

En considérant l'action conjuguée de η et ξ sur chaque sous-espace :

$$\begin{aligned} S^i &= \mathbb{C}^* \times (\{z_i \neq 0\} \subset \mathbb{C}^p - \{0\}) \times (\mathbb{C}^q - \{0\}) \\ &\simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{p-1} \times (\mathbb{C}^q - \{0\}) \end{aligned}$$

pour i allant de 1 à p , et en refaisant le calcul précédent, l'on identifie chacun des S_i quotienté par l'action conjuguée de ξ et η à $\mathbb{C}^{p-1} \times (\mathbb{C}^q - \{0\})$ munis de recollement qui identifie X à :

$$\text{projectif à poids} \times (\mathbb{C}^q - \{0\})$$

qu'il ne reste plus qu'à quotienter par l'action projective à poids de \mathbb{C}^* pour identifier N/\mathcal{G} à un produit de projectifs à poids. \square

Pour un choix plus judicieux des Λ_i , on peut tomber exactement sur le projectif. En fait :

Corollaire D. *Soit $m = 1$ et $k = 2$. Alors la variété N est une variété de Hopf (i.e. la structure complexe de N peut s'obtenir par une action linéaire de \mathbb{Z} sur $\mathbb{C}^p - \{0\}$ - cf [Ho]) si et seulement si la configuration vérifie la condition (K) et l'espace N/\mathcal{G} est exactement $\mathbb{C}P^{p-1}$.*

De même, soit $m = 1$ et $k = 1$. Alors la variété N est une variété de Calabi-Eckmann si et seulement si la configuration vérifie la condition (K) et l'espace N/\mathcal{G} est exactement $\mathbb{C}P^{p-1} \times \mathbb{C}P^{q-1}$.

Preuve. C'est une application immédiate du corollaire C et du fait que N est dans ces conditions une variété de Loeb-Nicolau linéaire. Or il est prouvé dans [L-N1] que les seules variétés de Loeb-Nicolau linéaires qui fibrent en courbes elliptiques sur le projectif sont les variétés de Hopf, idem pour les variétés de Calabi-Eckmann, qui sont les seules variétés de Loeb-Nicolau linéaires à fibrer en courbes elliptiques sur un produit de projectifs complexes. \square

Nous pouvons ainsi particulariser les variétés de Hopf et de Calabi-Eckmann parmi nos variétés. Remarquons que, comme la propriété de ne pas vérifier la condition (K) est une propriété générique, il s'ensuit que ceci illustre le fait que presque aucune variété N difféomorphe à un produit de sphères de dimension impaire (tore exclus) n'est une variété de Hopf ou de Calabi-Eckmann (fait prouvé dans [L-N1] - nous obtenons toutes les structures de Loeb-Nicolau linéaires).

V. ÉLÉMENTS DE CLASSIFICATION DES VARIÉTÉS N À DIFFÉOMORPHISME PRÈS.

Configurations équivalentes.

Nous allons maintenant définir la notion de configurations équivalentes, qui sera le cadre dans lequel nous étudierons la classification de N à difféomorphisme près.

Définition. Soient $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ et $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ deux configurations admissibles de même dimension. On dira qu'elles sont équivalentes si et seulement s'il existe $H : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{C}^m)^n$ continue, telle que :

- (i) $H(0) = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$.
- (ii) $H(1) = (\Lambda''_1, \dots, \Lambda''_n)$, où $(\Lambda''_1, \dots, \Lambda''_n)$ est une permutation quelconque de $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$.
- (iii) Pour tout $t \in [0, 1]$, l'ensemble $H(t)$ est une configuration admissible.

Géométriquement, cela signifie que l'on peut passer continûment de $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ à (une permutation quelconque de) $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$, sans qu'à aucun moment $0 \in \mathbb{C}^m$ ne traverse une face interne ou externe de l'enveloppe convexe des vecteurs, donc de telle sorte que 0 reste toujours dans la même "chambre" de l'enveloppe convexe. Le lemme suivant retraduit exactement cette propriété :

Lemme 1. Soient $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ et $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ deux configurations admissibles. Alors il y a équivalence entre :

- (i) les configurations $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ et $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ sont équivalentes.
- (ii) il existe une permutation de $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$, disons $(\Lambda''_1, \dots, \Lambda''_n)$, vérifiant : pour tout entier p compris entre 2 et n , pour toute suite d'indices $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$, on a :

$$0 \in \mathcal{H}(\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_p}) \iff 0 \in \mathcal{H}(\Lambda''_{i_1}, \dots, \Lambda''_{i_p})$$

- (iii) il existe une permutation de $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$, disons $(\Lambda''_1, \dots, \Lambda''_n)$, vérifiant : pour toute suite d'indices $1 \leq i_1 < \dots < i_{2m+1} \leq n$, on a :

$$0 \in \mathcal{H}(\Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_{2m+1}}) \iff 0 \in \mathcal{H}(\Lambda''_{i_1}, \dots, \Lambda''_{i_{2m+1}})$$

Preuve. Suite à la remarque géométrique précédente, il suffit de montrer que (iii) implique (ii). Mais c'est une simple conséquence de la condition d'hyperbolicité faible. \square

On a alors :

Proposition 1. Soient $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ et $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ deux configurations équivalentes, et soient M_1 et M'_1 d'une part, N et N' d'autre part, les variétés correspondant à ces configurations. Alors M_1 et M'_1 sont difféomorphes, de même que N et N' .

Preuve. Quitte à prendre une permutation de $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$, nous pouvons supposer qu'il existe $H : [0, 1] \rightarrow (\mathbb{C}^m)^n$ un chemin continu de configurations admissibles entre les deux configurations. Posons $H(t) = (\Lambda_1(t), \dots, \Lambda_n(t))$ et :

$$M_1(t) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n \Lambda_i(t) |z_i|^2 = 0, \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = 1\} .$$

Par définition, $H(t)$ est une configuration admissible, donc $M_1(t)$ est une variété différentiable pour tout t . L'union de ces variétés fibre sur l'intervalle, et cette fibration est une submersion en tout point de l'intervalle, donc est localement triviale par le lemme d'Ehresmann (voir [M-K] p.19-21 pour une démonstration directe), donc $M_1(0)$ et $M_1(1)$ sont difféomorphes.

La démonstration est identique pour N en prenant son plongement réel dans $\mathbb{C}P^{n-1}$. \square

Corollaire. *Sous les mêmes hypothèses, on a M et M' difféomorphes, S et S' difféomorphes.*

Preuve. On combine la proposition 1 et le corollaire C de la proposition 4 de la première partie. \square

De ce fait, dans le cadre des configurations équivalentes, les classifications à difféomorphisme près de N et de M_1 coïncident. C'est ce dernier point de vue que nous adopterons dorénavant.

Polytopes associés combinatoirement équivalents.

Nous commençons par rappeler quelques propriétés générales des polytopes convexes, avec, comme références, [Gr] et [B-L].

Soit P un polytope convexe de dimension p . L'ensemble $L(P)$ de ses faces ordonné par inclusion est un ensemble partiellement ordonné (poset), et même un treillis (lattice). Deux polytopes P et P' sont dits combinatoirement équivalents si et seulement si leurs posets $L(P)$ et $L(P')$ sont isomorphes, i.e. reliés par une bijection qui préserve l'inclusion. Deux polytopes P et P' sont dits duaux si et seulement si leurs posets $L(P)$ et $L(P')$ sont anti-isomorphes, i.e. reliés par une bijection qui renverse l'inclusion. Enfin, l'on distingue deux classes particulières de polytopes convexes : les polytopes simples qui vérifient que de chaque sommet part exactement p arêtes (où p est la dimension du polytope), et les polytopes simpliciaux dont les faces de dimension $p - 1$ sont des simplexes. On vérifie aisément que ces deux classes sont en dualité.

Lemme 2. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible. Le polytope associé à cette configuration est un polytope simple.*

Preuve. Soit p la dimension du polytope associé. L'on peut numéroter les faces du polytope de la manière suivante : les faces de dimension $p - 1$ sont numérotés de 1 à q disons, et toute autre face, qui peut s'obtenir comme intersection de r faces de dimension $p - 1$, par le r -uplet correspondant. D'après la proposition 5 de la première partie, il existe une numérotation de ce type du polytope associé qui vérifie que (i_1, \dots, i_r) est une face du polytope si et seulement si :

$$\{z_{i_1} = \dots = z_{i_r} = 0\} \cap S \neq \emptyset.$$

Ainsi le passage d'une face à une face de dimension immédiatement inférieure correspond à l'annulation supplémentaire d'une coordonnée. En particulier, les sommets du polytope correspondent à des sous-espaces minimaux :

$$\{z_{i_1} = \dots = z_{i_p} = 0, \quad z_j \neq 0, \quad j \notin (i_1, \dots, i_p)\} \cap S \neq \emptyset$$

et sont donc attachés à exactement p arêtes. \square

Les notions de configurations équivalentes et polytopes associés combinatoirement équivalents sont en fait fortement reliées.

Proposition 2. Soient $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ et $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ deux configurations admissibles, et soient P et P' les polytopes associés respectifs. Notons également k et k' le nombre de points indispensables respectifs. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) les configurations $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ et $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ sont équivalentes.
- (ii) $S = S'$.
- (iii) les polytopes P et P' sont combinatoirement équivalents et $k = k'$.

Preuve. L'équivalence entre (i) et (ii) est une simple application du lemme 1. Pour que :

$$U = \{z_{i_1} = \dots = z_{i_p} = 0\}$$

appartienne à E (avec $S = \mathbb{C}^n - E$), il faut et il suffit que :

$$0 \in \mathcal{H}(\Lambda_j \mid j \notin \{i_1, \dots, i_p\})$$

donc, par le lemme 1, U appartient également à E' (avec $S' = \mathbb{C}^n - E'$).

L'implication de (ii) à (iii) provient de la proposition 5 de la première partie et de la numérotation des faces des polytopes utilisée dans la preuve du lemme 2. Enfin $k = k'$ puisque, par le corollaire de la proposition 1, on a S difféomorphe à S' et que $H^1(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^k$.

Réciproquement, si P et P' sont combinatoirement équivalents, alors ils sont de même dimension $n - 2m - 1 = n' - 2m' - 1$, et ont le même nombre $n - k = n' - k'$ de faces de dimension maximale. Comme en plus $k = k'$, l'on en déduit que $n = n'$ et $m = m'$, donc que les configurations correspondantes sont de même dimension. On conclut par la proposition 5 de la première partie. \square

Corollaire. Sous les mêmes hypothèses, si P et P' sont combinatoirement équivalents et $k = k'$, alors M_1 et M'_1 sont difféomorphes.

Preuve. On associe les propositions 1 et 2. \square

Remarque. La réciproque de ce corollaire est fautive : on peut avoir M_1 et M'_1 difféomorphes et P et P' non équivalents. Un exemple de cette situation se trouve dans [LdM1], p.242. Plus précisément on a le résultat suivant :

Proposition 3. Soient $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ et $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_{n'})$ deux configurations admissibles (pas forcément de la même taille), et soient N et N' les variétés compactes complexes correspondantes. Supposons N et N' difféomorphes. Alors :

- (i) M_1 et M'_1 sont difféomorphes.
- (ii) S et S' sont difféomorphes.
- (iii) S et S' peuvent être distincts (i.e. les composantes de E et E' peuvent être distinctes).

Preuve. (i) Une fois donnée la variété N , la connaissance de la classe d'Euler du fibré $M_1 \rightarrow N$ suffit à décrire M_1 à difféomorphisme près. Maintenant cette classe d'Euler n'est rien d'autre que la restriction de la classe d'Euler du fibré $S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ pour l'injection lisse de N dans $\mathbb{C}P^{n-1}$. Dès lors, si N et N' sont difféomorphes, les deux classes d'Euler correspondantes vont coïncider et les deux variétés M_1 et M'_1 vont être difféomorphes.

(ii) C'est une application directe du corollaire C de la proposition 4 de la première partie.

(iii) Nous allons utiliser la classification complète des variétés M_1 pour le cas $m = 1$ donnée dans [LdM-Ve]. Nous renvoyons à la partie VII où nous reproduisons ce résultat. Prenons l'exemple de $m = 1$ et $n = 13$ et considérons les deux actions caractérisées, conformément aux résultats de [LdM-Ve], par les multiplicités des valeurs propres suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} n_1 = 1 & n_2 = 4 & n_3 = 2 & n_4 = 2 & n_5 = 4 \\ \text{et } n'_1 = 3 & n'_2 = 3 & n'_3 = 2 & n'_4 = 2 & n'_5 = 3 \end{array}$$

On vérifie immédiatement que les variétés M_1 et M'_1 associées sont difféomorphes. Par contre, les deux configurations ne sont pas équivalentes, donc, en vertu de la proposition 2, les ouverts S et S' sont distincts. \square

Théorème de réduction.

Notation. Nous appellerons configuration admissible (m, n, k) une configuration admissible de n vecteurs de \mathbb{C}^m avec k points indispensables.

Théorème 10. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible (m, n, k) , et soit M_1 la variété correspondante. Supposons $k > 1$ et $m > 1$. Posons $k = 2q + r$, avec r valant 0 ou 1. Alors il existe une configuration admissible réduite $(m - q, n - 2q, r)$ telle que la variété M_1 soit difféomorphe à $M'_1 \times (S^1)^{2q}$, où M'_1 est la variété correspondant à la configuration réduite.

Réciproquement, soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible et soit M_1 la variété correspondante. Alors, pour tout $r > 0$, il existe une configuration admissible dont la variété associée M'_1 est difféomorphe à $M_1 \times (S^1)^{2r}$.

Ce théorème est un théorème de réduction en ce sens qu'il permet de restreindre les configurations à étudier pour donner une classification à difféomorphisme près de M_1 . Le corollaire immédiat suivant précise cela :

Corollaire A. Pour établir la classification à difféomorphisme près des variétés M_1 , il suffit d'utiliser les configurations avec un ou sans point indispensable.

Ce corollaire motive la définition suivante :

Définition. On appellera configuration admissible réduite une configuration admissible à un ou sans point indispensable.

Preuve du théorème. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible (m, n, k) . On a alors :

$$M = \{w \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n \Lambda_i |w_i|^2 = 0\}.$$

Par ailleurs, on a $k = 2q + r$ et nous supposons, pour simplifier, que les $2q$ premières coordonnées sont des points indispensables. Adaptant le lemme 6 de la deuxième partie, nous pouvons écrire l'égalité à difféomorphisme près suivante :

$$M \simeq (S^1 \times S^1)^q \times \{w \in \mathbb{C}^n, r \in (\mathbb{R}_*^+ \mid \sum_{i=1}^{2q} \Lambda_i r_i + \sum_{i=2q+1}^n \Lambda_i |w_i|^2 = 0\}.$$

Appelons M' la variété du membre de droite de cette expression. Il suffit alors de montrer qu'elle est donnée par une configuration admissible $(m - q, n - 2q, r)$.

En fait, M' est donnée par le système suivant de $2m$ équations réelles à n inconnues réelles (où il faut dédoubler chaque équation en partie réelle et partie imaginaire) :

$$\begin{cases} r_1 \lambda_1^1 + \dots + r_{2q} \lambda_{2q}^1 + |w_{2q+1}|^2 \lambda_{2q+1}^1 + \dots + |w_n|^2 \lambda_n^1 = 0 \\ \vdots \\ r_1 \lambda_1^m + \dots + r_{2q} \lambda_{2q}^m + |w_{2q+1}|^2 \lambda_{2q+1}^m + \dots + |w_n|^2 \lambda_n^m = 0 \end{cases}$$

Or, par hyperbolicité faible, ce système est de rang maximal, et l'on peut ainsi exprimer r_1, \dots, r_{2q} comme fonctions linéaires de $|w_{2q+1}|^2, \dots, |w_n|^2$, ramenant le système à :

$$|w_{2q+1}|^2 \Lambda'_1 + \dots + |w_n|^2 \Lambda'_{n-2q} = 0$$

où les Λ'_i sont des vecteurs de \mathbb{C}^{m-q} . Par construction, $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_{n-2q})$ est une configuration $(m - q, n - 2q, r)$. Il faut maintenant vérifier qu'elle est admissible.

Remarquons pour cela que nous pouvons définir un polytope associé K' et un ouvert S' pour $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$, même si cette configuration n'est pas admissible (cf les définitions données dans les propositions 2 et 5 de la première partie). Nous affirmons que les polytopes associés à M et M' sont combinatoirement équivalents et s'identifient à :

$$K = \{r \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_{i=1}^n r_i \Lambda_i = 0, \sum_{i=1}^n r_i = 1\}.$$

C'est en effet évident pour M . Pour M' , le polytope s'écrit :

$$K' = \{r \in (\mathbb{R}^+)^{n-2q} \mid \sum_{i=1}^{n-2q} r_i \Lambda'_i = 0, \sum_{i=1}^{n-2q} r_i = 1\}.$$

Mais, par hypothèse, cela revient à :

$$K' = \{r \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_{i=1}^n r_i \Lambda_i = 0, \sum_{i=2q+1}^n r_i = 1\}.$$

Mais cette dernière expression de K' s'identifie à K , car, pour $r \in K$, on a également, par hyperbolicité faible (cf lemme 4 de la seconde partie) :

$$\sum_{i=2q+1}^n r_i \neq 0$$

ce qui permet de construire l'homéomorphisme :

$$\Phi : r \in K \longmapsto \left(r_1, \dots, r_{2q}, \frac{r_{2q+1}}{r_{2q+1} + \dots + r_n}, \dots, \frac{r_n}{r_{2q+1} + \dots + r_n} \right)$$

qui induit une équivalence combinatoire des polytopes, les différentes faces de K , caractérisées comme les points r de K avec certaines coordonnées bien précises nulles (cf proposition 5, première partie) étant envoyées sur les sous-ensembles correspondants, faces de K' .

Cette égalité des polytopes associés signifie en particulier (cf proposition 5 de la première partie) que :

$$S = (\mathbb{C}^*)^{2q} \times S' .$$

Supposons la condition d'hyperbolicité faible non vérifiée pour $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_{n-2q})$, par exemple, nous pouvons supposer que 0 appartienne à l'enveloppe convexe de $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_{2m-2q})$, alors il en résulte que :

$$G = \{z_{2m+1} = \dots = z_n = 0, z_j \neq 0 \text{ pour } 2q+1 \leq j \leq 2m\}$$

est inclus dans S' , donc que $(\mathbb{C}^*)^{2q} \times G$ est inclus dans S , et qu'ainsi 0 appartient à l'enveloppe convexe de $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m})$, ce qui est absurde.

Enfin, une légère adaptation du corollaire de la proposition 2 montre que l'équivalence combinatoire des polytopes induit un difféomorphisme entre M_1 et $M'_1 \times (S^1)^{2q}$.

Réciproquement, soit une configuration admissible $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ et soit M_1 la variété correspondante. Nous nous contenterons de construire une configuration admissible donnant $M_1 \times S^1 \times S^1$, le résultat général s'obtenant par itération de cette construction. Soit la configuration dans \mathbb{C}^{m+1} :

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 & \dots & \Lambda_n & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & -1-i & i \end{pmatrix}$$

Cette configuration, appelons-la $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_{n+2})$, vérifie la condition de Siegel et la condition d'hyperbolicité faible. Ceci est en fait évident pour la condition de Siegel. Par ailleurs, supposons que 0 appartienne à l'enveloppe convexe de $2m+2$ des vecteurs Λ'_i . La dernière ligne implique que Λ'_{n+1} et Λ'_{n+2} sont parmi ces $2m+2$ vecteurs. Maintenant, de par la forme diagonale par blocs de la matrice des Λ'_i , cela implique que 0 est également dans l'enveloppe convexe des $2m$ autres vecteurs considérés en restriction à leurs m premières coordonnées, donc dans l'enveloppe convexe de $2m$ vecteurs de $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ ce qui est impossible par hyperbolicité faible. Le même raisonnement montre de plus que z_{n+1} et z_{n+2} sont deux points indispensables. Dès lors, le polytope associé de cette configuration se lit uniquement sur les n premières coordonnées, donc est le même que le polytope associé à $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$. Ceci implique que la variété correspondante M'_1 est difféomorphe à $M_1 \times S^1 \times S^1$. \square

Corollaire B. *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 10, en écrivant cette fois $k = 2q + r$ avec r valant 1 ou 2, les variétés N et $N' \times (S^1)^{2q}$ sont difféomorphes.*

Preuve. Par application du théorème 10 (en tenant compte de la légère modification dans l'écriture de $k = 2q + r$), on a :

$$M_1 \simeq (S^1)^{2q} \times M'_1$$

où cette fois M'_1 est issue d'une configuration avec un ou deux points indispensables. Ceci permet d'écrire (cf lemme 6 de la deuxième partie) :

$$M_1 \simeq (S^1)^{2q} \times (S^1)^r \times M_0 \quad \text{et} \quad M'_1 \simeq (S^1)^r \times M_0$$

avec $r > 0$ et M_0 variété 2-connexe, ce qui, par application du lemme 8 de la deuxième partie donne :

$$N \simeq (S^1)^{2q} \times (S^1)^{r-1} \times M_0$$

d'où enfin, par application du même lemme à M'_1 :

$$N \simeq (S^1)^{2q} \times N'$$

ce qui achève la preuve. \square

Remarque. Le théorème 10 est un théorème de réduction uniquement pour la classification à difféomorphisme près. Il en va tout autrement pour la classification à biholomorphisme près de N . Avoir par exemple N difféomorphe à $S^1 \times S^1 \times N'$ n'est pas sans intérêt au niveau complexe, car la structure complexe obtenue ne respectera pas forcément cette décomposition produit. Nous en verrons un exemple dans la prochaine partie.

Application \tilde{J} .

Ainsi que nous l'avons vu en première partie, il existe une action du tore réel $(S^1)^n$ sur la variété M_1 , avec, comme quotient, le polytope associé. À cette action est associée une application, qui se comporte comme l'application moment en géométrie symplectique (le lecteur pourra comparer ce paragraphe avec [De]).

Soit P un polytope convexe de dimension r plongé dans \mathbb{R}^q , i.e. l'enveloppe convexe de p points (v_1, \dots, v_p) de \mathbb{R}^q , pour p et q quelconques. Plus précisément, comme nous ne voulons pas considérer dans ce paragraphe les polytopes comme pleins, nous voyons P comme la frontière topologique relative de l'enveloppe convexe $\mathcal{H}(v_1, \dots, v_p)$. Ceci signifie la chose suivante : l'enveloppe convexe $\mathcal{H}(v_1, \dots, v_p)$ est supportée par un unique hyperplan de dimension r de \mathbb{R}^q . Nous définissons P comme la différence entre l'adhérence de $\mathcal{H}(v_1, \dots, v_p)$ et son intérieur, mais au sens de la topologie induite sur le r -plan supportant l'enveloppe convexe. Nous notons alors :

$$P = \partial\mathcal{H}(v_1, \dots, v_p) .$$

Soit \mathcal{P}_0 l'ensemble des polytopes simples de dimension quelconque (considérés comme frontière relative de l'enveloppe convexe de vecteurs d'un certain \mathbb{R}^p , comme nous venons de l'expliquer). Soit \mathcal{C}_0 l'ensemble des configurations admissibles, toutes dimensions confondues.

Il existe une application naturelle J_0 de \mathcal{C}_0 dans \mathcal{P}_0 , à savoir l'application qui à une configuration admissible fait correspondre son polytope associé, c'est-à-dire :

$$J_0 : \begin{cases} \mathcal{C}_0 & \longrightarrow & \mathcal{P}_0 \\ (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n) & \longmapsto & \partial\{(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_{i=1}^n a_i \Lambda_i = 0, \sum_{i=1}^n a_i = 1\} \end{cases}$$

Remarquons que nous associons ainsi à une configuration (m, n) un polytope plongé dans \mathbb{R}^n .

Nous allons munir \mathcal{C}_0 et \mathcal{P}_0 d'une topologie rendant J_0 continue. Commençons par \mathcal{C}_0 . Remarquons pour cela que :

$$\mathcal{C}_0 = \bigcup_{m=0}^{\infty} \left\{ \bigcup_{n \geq 2m+1} \mathcal{C}_{m,n} \right\}$$

où $\mathcal{C}_{m,n}$ représente l'ensemble des configurations admissibles (m, n) . Munissons alors $\mathcal{C}_{m,n}$ de la distance :

$$d_{m,n} : \begin{cases} \mathcal{C}_{m,n} \times \mathcal{C}_{m,n} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\Lambda, \Lambda') \longmapsto \max_{i=1}^n \|\Lambda_i - \Lambda'_i\| \end{cases}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{C}^m . Par ailleurs, pour tout m , on a :

$$\mathcal{C}_{m,2m+1} \subset \mathcal{C}_{m,2m+2} \subset \dots \subset \mathcal{C}_{m,n} \subset \dots$$

ce qui permet de définir $\mathcal{C}_{m,\infty}$ comme limite directe de cette suite et de la munir de la topologie de limite directe induite.

Maintenant, on a de même :

$$\mathcal{C}_{1,\infty} \subset \mathcal{C}_{2,\infty} \subset \dots \subset \mathcal{C}_{m,\infty} \subset \dots$$

et \mathcal{C}_0 est la limite directe de cette suite, que nous munissons de la topologie de limite directe.

De même, on peut décomposer \mathcal{P}_0 en :

$$\mathcal{P}_0 = \bigcup_{p=0}^{\infty} \left\{ \bigcup_{r \geq p} \mathcal{P}_{p,r} \right\}$$

où $\mathcal{P}_{p,r}$ désigne l'ensemble des polytopes simples de dimension p plongés dans \mathbb{R}^r . Une nouvelle fois, le double passage à la limite directe de la suite $\mathcal{P}_{p,r}$ donne \mathcal{P}_0 . Sur $\mathcal{P}_{p,r}$, nous considérons la topologie dont une base de voisinages est :

$$V_{(P,\epsilon)} = \{P' \in \mathcal{P}_{p,r} \mid \max_{p \in P} d(p, P') \leq \epsilon\}$$

pour $P \in \mathcal{P}_{p,r}$ et $\epsilon > 0$. Enfin on pose $d(p, P') = \min_{p' \in P'} \|p - p'\|$, où $\|\cdot\|$ désigne cette fois la norme euclidienne de \mathbb{R}^r .

Remarque. Dans cette présentation, nous voyons maintenant les polytopes comme plongés dans un \mathbb{R}^r et non plus comme donnée combinatoire. Au sens de la topologie précédemment définie, deux polytopes combinatoirement équivalents peuvent être arbitrairement éloignés l'un de l'autre.

Remarque. Étant donné le fait que nous identifions chaque polytope simple avec la frontière topologique relative de l'enveloppe convexe de ses sommets, les deux topologies sont exactement les mêmes : il s'agit de topologies induites par restriction à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$, où \mathbb{R}^∞ est la limite directe de la suite des \mathbb{R}^i muni de la topologie de limite directe.

Lemme 3. *Pour les topologies précédemment décrites, l'application $J_0 : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{P}_0$ précédente est continue.*

Preuve. L'application J_0 se décompose en :

$$J_{m,n} : \mathcal{C}_{m,n} \longrightarrow \mathcal{P}_{n-m-1,n}$$

de telle sorte que, par définition de la limite directe, il suffit de vérifier la continuité des applications $J_{m,n}$.

Soit $P \in \mathcal{P}_{n-m-1,n}$ de dimension $n - m - 1$, avec :

$$P = J_{m,n}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$$

Soit $\epsilon > 0$ et soit $V_{(P,\epsilon)}$ le voisinage de P défini ci-dessus. On a donc :

$$P = \partial\{(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \sum_{i=1}^n a_i \Lambda_i = 0, \sum_{i=1}^n a_i = 1\}.$$

Maintenant, il est clair que pour $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ suffisamment proche de $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ (au sens de la distance $d_{m,n}$ définie précédemment), le polytope $P' = J_0(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ sera dans $V_{(P,\epsilon)}$. \square

Soit alors \mathcal{P} l'ensemble \mathcal{P}_0 quotienté par la relation d'équivalence combinatoire, et soit \mathcal{C} l'ensemble \mathcal{C}_0 quotienté par équivalence.

D'après la proposition 2, l'application J_0 se projette en $J : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}$.

Remarque. La topologie quotient sur \mathcal{P} ne sépare aucun point.

En raison du théorème 10, cette application n'est pas injective, si l'on permet toutes les configurations. Soit $\mathcal{C}_{\text{réduites}}$ l'ensemble des configurations admissibles réduites modulo équivalence et soit \tilde{J} la restriction de J à ce sous-ensemble.

Question. L'application $\tilde{J} : \mathcal{C}_{\text{réduites}} \rightarrow \mathcal{P}$ est-elle une bijection?

Diagramme de Gale.

Afin de répondre à la question posée au paragraphe précédent, nous introduisons de nouveau quelques notions sur les polytopes convexes. Nos références sont [Gr] et [B-L].

Soit $V = \{v_1, \dots, v_p\}$ un ensemble de p points de \mathbb{R}^q . Soit maintenant $W = \{w_1, \dots, w_p\}$ un ensemble de p points de \mathbb{R}^{p-q-1} . Considérons alors :

$$\mathcal{H}(v_1, \dots, v_p) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(w_1, \dots, w_p)$$

les polytopes convexes formés par les enveloppes convexes des éléments de V et W respectivement. Pour $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ un ensemble d'indices entiers compris entre 1 et p , nous noterons I^C l'ensemble complémentaire, à savoir :

$$I^C = \{1 \leq j \leq p \mid j \notin I\}.$$

Enfin, nous noterons *Relint* $\mathcal{H}(v_1, \dots, v_p)$ l'intérieur relatif de $\mathcal{H}(v_1, \dots, v_p)$, c'est-à-dire l'ensemble des points de $\mathcal{H}(v_1, \dots, v_p)$ qui n'appartiennent pas à une face de ce polytope, mais lui sont intérieurs.

Définition (voir [B-L], p.511). L'ensemble W est un diagramme de Gale de V si et seulement si, pour tout ensemble d'indices I , on a :

$$0 \in \text{Relint } \mathcal{H}(w_i)_{i \in I^c} \iff \mathcal{H}(v_i)_{i \in I} \text{ est une face du polytope } \mathcal{H}(v_1, \dots, v_n).$$

Étant donné un ensemble V , un diagramme de Gale de V est donné par une transformation de Gale de V (cf [B-L], p.511, [Gr] p.85) : on regarde (v_1, \dots, v_p) comme matrice, à laquelle on ajoute une colonne de un pour obtenir une matrice $(q+1) \times p$. Le noyau de cette matrice vue comme application linéaire est l'espace des relations affines entre les v_i . Une base de cet espace est appelée transformation de Gale de V , et satisfait la relation précédente.

La notion de diagramme de Gale va nous permettre de relier le polytope associé à l'enveloppe convexe $\mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$.

Lemme 4. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible. Alors le polytope convexe $\mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ est un diagramme de Gale du dual du polytope associé.

Remarque. Cet énoncé doit se comprendre de la manière suivante : étant donné le polytope associé, on peut définir son dual combinatoire. Maintenant le lemme signifie que tout plongement de ce dual dans \mathbb{R}^{n-2m-1} est un diagramme de Gale de $\mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$.

Preuve. Remarquons tout d'abord que la dimension du polytope associé est $n - 2m - 1$, ce qui correspond. Soit I un ensemble d'indices de dimension p . Si :

$$0 \in \text{Relint } \mathcal{H}(\Lambda_i)_{i \in I}$$

alors par définition, le sous-espace :

$$\{z_i = 0, i \in I^c, \text{ et } z_j \neq 0, j \in I\}$$

est inclus dans S . Par ailleurs (cf proposition 5 de la première partie), il existe une numérotation des hyperfaces du polytope associé telle que l'intersection des hyperfaces d'indice $i \in I^c$ soit une face de ce polytope. En passant au dual, les hyperfaces (h_1, \dots, h_{n-k}) deviennent $n-k$ sommets v_1, \dots, v_{n-k} (où k est le nombre de points indispensables). Considérons l'application :

$$g : \bigcap_{i \in I^c} h_i \longmapsto \mathcal{H}((v_i)_{i \in I})$$

qui est précisément l'anti-isomorphisme entre le polytope associé et son dual. La propriété précédente revient à dire que $\mathcal{H}(v_i)_{i \in I^c}$ est une face du dual du polytope associé. Il suffit alors d'ajouter, à l'intérieur du dual, k points isolés correspondant aux k points indispensables pour satisfaire à la définition de diagramme de Gale.

Inversement, la démonstration reste valable. La condition d'hyperbolicité faible assure enfin que si $0 \in \mathcal{H}(\Lambda_i)_{i \in I}$, alors en fait $0 \in \text{Relint } \mathcal{H}(\Lambda_i)_{i \in I}$.

Enfin, cette démarche est valable pour tout choix de (v_1, \dots, v_{n-k}) réalisant un plongement du dual dans \mathbb{R}^{n-2m-1} . \square

Théorème de réalisabilité.

La correspondance établie dans le lemme 4 nous permet d'énoncer :

Théorème 11. *L'application $\tilde{J} : \mathcal{C}_{\text{réduites}} \rightarrow \mathcal{P}$ est une bijection : à tout polytope simple (modulo équivalence combinatoire), on peut associer une unique configuration admissible réduite (modulo équivalence) ayant ce polytope comme polytope associé.*

Remarque. Comme le polytope associé est un polytope simple, son dual est un polytope simplicial, de telle sorte que l'on peut reformuler ce théorème avec une application à valeurs dans l'ensemble des polytopes simpliciaux (à équivalence combinatoire près)

Remarque. Lorsque le polytope est réduit à un point, l'homéomorphisme \tilde{J} va associer la configuration réduite à un point de \mathbb{C}^0 . Cependant ce cas existe également pour une configuration non vide : si $n = 2m + 1$ la variété produite est un tore complexe (cf théorème 1) et le polytope associé est un point. Cette alternative n'est pas couverte par \tilde{J} car les configurations admissibles qui donnent un tore complexe ne peuvent être réduites.

Remarque. Ce résultat accentue la ressemblance entre l'application \tilde{J} et l'application moment en géométrie symplectique. Le lecteur pourra comparer avec le théorème principal de [De].

Preuve. Soit P un polytope simple de dimension f à p hyperfaces. Il nous faut d'abord trouver les dimensions (m, n, k) de la configuration admissible susceptible d'avoir P comme polytope associé.

$$\begin{cases} n - 2m - 1 = f \\ n - k = p \end{cases}$$

Comme nous voulons une configuration réduite k vaut 0 ou 1. Ceci donne deux valeurs possibles de n , mais une seule de ces valeurs donnera une valeur entière pour m . Ainsi les dimensions (m, n, k) sont déterminées de manière unique. Vérifions que ces dimensions sont cohérentes. Si l'on excepte le cas où le polytope est réduit à un point (cas auquel est associé une configuration d'un point indispensable de \mathbb{C}^0 - cf la remarque ci-dessus), on a :

$$p \geq f + 1 \geq 2 .$$

Mais alors, utilisant le fait que k vaut 0 ou 1, il vient :

$$p + 1 \geq n \geq p \implies m \geq 0 .$$

Les valeurs trouvées sont donc cohérentes, à condition d'inclure comme cas-limite le cas $m = 0$, qui intervient lorsque $p = f + 1$, i.e. lorsque le polytope est un simplexe. Ce cas doit se comprendre ainsi : l'on considère uniquement l'action projective de \mathbb{C}^* sur $S = \mathbb{C}^n - \{0\}$ ce qui donne pour variété N l'espace projectif $\mathbb{C}P^{n-1}$. La variété M_1 est alors S^{2n-1} .

Comme dans le lemme 4, si $k = 1$, nous ajoutons un point à l'intérieur du dual de P pour représenter le point indispensable et récupérer les bonnes dimensions.

Une transformation de Gale du dual de ce polytope étendu si nécessaire va nous donner une configuration $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ dans \mathbb{C}^m . Reste à vérifier qu'elle est admissible.

Par définition d'une transformation de Gale, $0 \in \mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ donc la condition de Siegel est vérifiée. Supposons que la condition d'hyperbolicité faible ne soit pas vérifiée, par exemple supposons que $0 \in \mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m})$. Quitte à se restreindre à une sous-configuration plus petite, comme les Λ_i sont non nuls, on peut toujours supposer de plus que $0 \in \text{Relint } \mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m})$. Donc, de par la définition d'un diagramme de Gale, il existe une face du dual du polytope P correspondant à l'ensemble d'indices complémentaire, donc une face de dimension au plus $n - 2m - 2$ à $n - 2m$ sommets. Une telle face ne peut être un simplexe. Or, comme P est simple, son dual est simplicial, d'où contradiction. La configuration est admissible.

Par le lemme 4, la configuration admissible construite a pour polytope associé le polytope P modulo équivalence combinatoire. Par ailleurs, par application de la proposition 2, cette construction ne dépend pas du représentant choisi. \square

Corollaire A. *Il existe une correspondance surjective, non injective, entre l'ensemble des polytopes simples quotienté par équivalence combinatoire et l'ensemble des classes de variétés M_1 réduites à difféomorphisme près.*

Preuve. On combine le théorème 11, le corollaire de la proposition 2, et la proposition 3. \square

Corollaire B. *Soit (m, n) un couple d'entiers vérifiant $n > 2m + 1$. Alors le nombre de variétés M_1 (à difféomorphisme près) obtenues par une configuration réduite (m, n, k) (avec $k = 0, 1$) est borné supérieurement par le nombre de polytopes simpliciaux (à équivalence combinatoire près) de dimension $n - 2m - 1$ avec p sommets, où p est compris entre $n - 1$ et n .*

Preuve. C'est une reformulation du corollaire précédent en utilisant la proposition 5 de la première partie, le lemme 4 de la deuxième partie et en considérant le dual du polytope associé. \square

Remarque. Nous avons utilisé le dual du polytope associé dans ce corollaire, plutôt que le polytope associé, car la plupart des articles donnant des estimations du nombre de polytopes donnent des estimations du nombre de polytopes simpliciaux.

Conjecture sur la classification de M_1 .

Le choix de classifier M_1 plutôt que N provient du fait que l'action de $(S^1)^n$ sur M_1 est particulièrement simple et explicite, puisqu'il s'agit de la restriction à M_1 de l'action de ce tore sur \mathbb{C}^n par rotation de chaque coordonnée. L'existence de cette action permet de supposer que M_1 a une forme très particulière. Deux résultats confirment et précisent ce point de vue.

Premièrement, Santiago López de Medrano a donné dans [LdM1] et [LdM2] une classification complète de M_1 dans le cas $m = 1$ (voir aussi [LdM-Ve]). Nous donnons l'énoncé complet dans la partie VII. Disons simplement ici que la variété M_1 est, dans ce cas, soit un produit de sphères de dimension impaire, soit une somme connexe de produits de sphères, cette somme connexe ayant de plus la propriété d'être 2-connexe. La preuve de ce théorème repose sur un calcul direct des classes d'homologie fait dans [LdM2] et sur l'utilisation du théorème de h-cobordisme.

Deuxièmement, Mac Gavran a classifié dans [McG], à difféomorphisme près, les variétés différentiables de dimension n compactes, connexes, simplement connexes, subissant une action différentiable localement libre du tore T^{n-2} . Il s'agit toujours de sommes connexes de produits de sphères. Certains de ces cas correspondent (à

multiplication par un ou deux S^1 près) au cas d'une variété M_1 dont le polytope associé est un polygone et nous utiliserons ce résultat dans la partie VII pour donner des exemples de variétés N . La démonstration de cette classification se fait en définissant une somme connexe généralisée, dite somme connexe adjacente. On fait alors une récurrence sur le nombre de sommets du polygone quotient de l'action, le cas du triangle correspondant à S^5 et le cas à $p + 1$ sommets se déduisant du cas à p sommets par une somme connexe adjacente dont l'on peut calculer le résultat.

Ces deux faits semblent indiquer que M_1 a la forme d'une somme connexe de produits de sphères, modulo des produits de sphères de dimension impaires. Plus précisément,

Proposition 4. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible et soit M_1 la variété correspondante. Alors M_1 est difféomorphe à :*

$$(S^1)^k \times P \times M_0$$

avec P produit de sphères de dimension impaire supérieure ou égale à trois et M_0 variété différentiable 2-connexe.

Preuve. C'est un simple raffinement du lemme 6 de la deuxième partie. On a :

$$S = (\mathbb{C}^*)^k \times (\mathbb{C}^2 - \{0\})^{k'} \times \dots \times (\mathbb{C}^p - F)$$

avec F ensemble analytique de codimension complexe au moins deux en tout point. En adaptant le difféomorphisme dudit lemme 6, il vient :

$$M_1 \simeq (S^1)^k \times \underbrace{(S^3)^{k'} \times \dots \times M_0}_{\text{produits de sphères}}$$

avec M_0 une variété 2-connexe, ce qui achève la preuve. \square

Définition. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible et soit M_1 la variété correspondante. Nous appellerons cœur de M_1 la variété M_0 de la décomposition de la proposition 4.

Nous conjecturons :

Conjecture. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible, soit M_1 la variété correspondante et soit M_0 le cœur de M_1 . Alors :*

- (i) *L'homologie de M_0 est libre et sphérique (chaque classe d'homologie, exceptée la classe en dimension maximale, peut être représentée par une sphère plongée).*
- (ii) *La variété M_0 est difféomorphe à une somme connexe de produits de sphères.*

Dans les deux paragraphes suivants, nous donnons quelques indications sur les deux points de cette conjecture.

Homologie de M_0 .

La méthode utilisée dans [LdM2] pour calculer les classes d'homologie ne se généralise pas. Plus précisément, l'assertion qui y est faite et selon laquelle les classes d'homologie correspondent aux plus grandes sous-configurations non admissibles mises en dualité de Poincaré avec les classes issues des plus petites sous-configurations admissibles n'est plus vraie. Nous verrons au chapitre VII qu'en appliquant ce procédé, l'on n'obtient pas toutes les classes d'homologie.

Un autre procédé est d'utiliser le fait suivant, immédiate application de la proposition 4 de cette partie et du corollaire C de la proposition 4 de la première partie :

Fait. Le cœur M_0 a même homologie que le complémentaire d'un arrangement de sous-espaces vectoriels.

Rappelons alors qu'une formule pour la cohomologie du complémentaire d'un arrangement de sous-espaces est donnée dans [G-McP], comme application de la théorie de Morse stratifiée. D'autres méthodes, en particulier l'utilisation d'une suite de Mayer-Vietoris généralisée, ont permis de donner des formulations plus simples de ce résultat. Nous utiliserons la formulation de [J-0-S] (théorème C4) pour calculer l'homologie de M_0 dans le chapitre VII dans un cas particulier. Nous résumons maintenant la méthode de [J-0-S], en l'appliquant à notre cas.

Soit $S_0 = \mathbb{C}^p - F$ avec F arrangement de sous-espaces vectoriels du type :

$$\{z_{i_1} = \dots = z_{i_q} = 0\}$$

pour (i_1, \dots, i_q) un q -uplet d'entiers compris entre 1 et p (il s'agit de l'arrangement de la proposition 4). Soit L le poset (ensemble partiellement ordonné) d'intersection de F , à savoir l'ensemble des intersections des éléments de F ordonné par inclusion, avec comme minimum $0 \in \mathbb{C}^p$ et comme maximum \mathbb{C}^p .

Par ailleurs, appelons A_1, \dots, A_r les sous-espaces de F , soit T l'ensemble des entiers de 1 à r , et soit W l'ensemble des intersections des éléments de T , à savoir l'ensemble des singletons, paires, triplets, ..., r -uplets d'entiers compris entre 1 et r , tous différents. Nous munissons W d'une application dimension :

$$d : i_1 \dots i_p \in W \mapsto p - 1 \in \mathbb{N}$$

et ordonnons W par inclusion. Il y a alors une application naturelle entre W et L , à savoir :

$$\Phi \begin{cases} W & \longrightarrow L \\ i_1 \dots i_p & \longmapsto A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p} \end{cases}$$

Cette application respecte les relations d'ordre sur W et L . Elle est par ailleurs surjective mais généralement non injective. À chaque intersection X de L , nous pouvons associer le sous-ensemble $\Phi^{-1}(X)$, et à ce sous-ensemble, nous faisons correspondre un complexe simplicial $K(X)$ de la manière suivante : chaque élément de $\Phi^{-1}(X)$ constitue un sommet et chaque chaîne d'éléments $a_1 \subset \dots \subset a_p$ de $\Phi^{-1}(X)$ constitue un p -simplex. Notons enfin $K^*(X)$ le complexe simplicial correspondant à $\Phi^{-1}(X) - \zeta(X)$, où $\zeta(X)$ représente l'unique élément minimal de $\Phi^{-1}(X)$ pour l'inclusion.

Chaque sous-espace X de L va contribuer à la cohomologie de S_0 en fonction de la cohomologie réduite du complexe $K^*(X)$. Plus précisément, si l'on désigne par $\tilde{H}^*(X)$ la cohomologie réduite de X , on a :

Théorème (voir [J-0-S]). Soit $S_0 = \mathbb{C}^p - F$ et soit L le poset d'intersection correspondant à F . Alors :

$$\tilde{H}^s(S_0, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{X \in L} H_{X,q}$$

avec $s = 2p - \dim_{\mathbb{R}} X - q - 1$ et $H_{X,q}$ vérifiant :

$$H_{X,q} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } \Phi^{-1}(X) = \{\sigma\} \text{ est trivial et } d(\sigma) = q. \\ \tilde{H}^{r-q-1}(K^*(X)) & \text{si } \Phi^{-1}(X) \text{ est non trivial et } d(\zeta(X)) = r. \end{cases}$$

Remarquons que cette formule permet de programmer un algorithme de calcul des classes de cohomologie de S_0 . Comme par ailleurs, S_0 s'obtient à partir du polytope associé, on a :

Proposition 5. *Il existe un algorithme (en temps fini) permettant de calculer la cohomologie de M_1 , une fois donnée la configuration admissible $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ correspondante.*

Malheureusement, cette formule ne nous permet pas de répondre à la première partie de la conjecture. Notons en effet que cette formule appliquée à un arrangement contenant des sous-espaces qui ne sont pas des hyperplans peut donner des groupes de cohomologie avec de la torsion (voir [Je] pour un exemple de ce type).

Type difféomorphe de M_0 .

La démonstration de [McG] ne se généralise pas, en particulier parce que, même pour les polyèdres, le passage du cas à p sommets au cas à $p + 1$ sommets est beaucoup plus délicat (cf [Gr] p.270).

Appliquant le théorème de classification de Novikov (cf [Br]), nous pouvons cependant répondre partiellement au (ii) de la conjecture si l'on suppose le (i) vrai.

Proposition 6. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible, soit M_1 la variété correspondante et soit M_0 le cœur de M_1 . Supposons que le (i) de la conjecture soit vraie, i.e. supposons que l'homologie de M_0 soit libre et que chaque classe d'homologie, exceptée la classe maximale, soit représentée par une sphère plongée. Supposons de plus la dimension de M_0 supérieure ou égale à 5.*

Alors M_0 est homéomorphe à la somme connexe de produits de sphères correspondante, i.e. le (ii) de la conjecture est vraie, à homéomorphisme près.

Preuve. Nous allons utiliser le théorème suivant, que l'on trouvera dans [Br], (corollaire II.3.8, page 43) :

Théorème. *Soient M_0 et M'_0 deux variétés lisses, fermées, simplement connexes, de dimension p supérieure ou égale à 5. Une équivalence d'homotopie $f : M_0 \rightarrow M'_0$ est homotope à un difféomorphisme $f' : M_0 \# \Sigma \rightarrow M'_0$ (avec $M_0 = M_0 \# \Sigma$ comme espace topologique), pour une sphère d'homotopie $\Sigma = \partial U$, et U parallélisable, si et seulement s'il existe une application entre fibrés $b : \nu \rightarrow \nu'$ au-dessus de f telle que $T(b)_*(\alpha) = \alpha'$, pour $\alpha \in \pi_{p+q}(T(\nu))$ et $\alpha' \in \pi_{p+q}(T(\nu'))$ les applications naturelles de recollement.*

Ici, les variétés M_0 et M'_0 sont supposés différentiablement plongées dans un \mathbb{R}^{p+q} commun et ν et ν' désignent alors les fibrés normaux respectifs. Maintenant $T(\nu)$ et $T(\nu')$ désignent les espaces de Thom associés à ces plongements et construits de la manière suivante (cf [Br]) : soit E l'espace total du fibré en disques fermés associé à ν , soit E_0 le fibré en sphères correspondant, alors on a $E_0 \subset E$ et l'espace de Thom $T(\nu)$ est défini comme E/E_0 , i.e. en contractant le "bord" du fibré sur un point que

nous noterons p_∞ . Il en va de même pour ν' . Par le théorème du voisinage tubulaire de Thom, les fibrés E et E' sont difféomorphes à deux ouverts U et U' de \mathbb{R}^{p+q} . Ces difféomorphismes s'étendent en deux applications de la sphère S^{p+q} sur $T(\nu)$ et respectivement $T(\nu')$. Pour cela, nous considérons S^{p+q} comme la compactification de \mathbb{R}^{p+q} et construisons :

$$\Phi : S^{p+q} = \mathbb{R}^{p+q} \cup \infty \longrightarrow T(\nu) \text{ telle que } \begin{cases} \Phi : U \longrightarrow E \text{ difféomorphisme.} \\ \Phi(S^{p+q} - U) = p_\infty \end{cases}$$

On construit de même Φ' . Les applications Φ et Φ' définissent les classes α et α' du théorème. Enfin, $T(b)$ est l'extension de b aux espaces de Thom.

Nous allons appliquer ce théorème au cœur M_0 et à M'_0 la somme connexe de produits de sphères correspondante. Comme les classes d'homologie de M_0 sont représentées par des sphères plongées, nous pouvons facilement construire f , une application C^∞ entre M'_0 et M_0 qui induit un isomorphisme en homotopie, i.e. une équivalence faible d'homotopie. Mais une équivalence faible d'homotopie entre variétés est en fait une équivalence d'homotopie. Par ailleurs, comme M_0 peut s'exprimer comme image réciproque de 0 par une application différentiable, le fibré normal ν est trivial (cf la remarque suivant la proposition 1 de la partie III), et il en va de même pour M'_0 . Par la même raison, M_0 et M'_0 sont des bords : c'est en effet évident pour M'_0 . Pour M_0 , nous procédons comme dans [LdM-Ve]. Pour simplifier nous allons supposer que M_0 est en fait égal à M_1 . Alors M_1 borde :

$$W_1 = \left\{ w \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n \Lambda_i'' |w_i|^2 = 0, \sum_{i=1}^n |w_i|^2 = 1, \sum_{i=1}^n \text{Im}(\lambda_i^1) |w_i|^2 \geq 0 \right\}$$

avec :

$$1 \leq i \leq m \quad \Lambda_i'' = (\text{Re}(\lambda_i^1), \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^m).$$

Ceci s'adapte sans difficultés dans le cas de M_0 quelconque. Comme conséquence, M_0 et M'_0 sont normalement cobordants à zéro. Comme les classes α et α' dépendent uniquement des classes de cobordisme normal de M_0 et M'_0 (cf [Br]), ces deux classes sont en fait nulles. Dès lors, comme les fibrés normaux sont triviaux, l'application f se relève en une application b entre ν et ν' et $T(b)$ envoie la classe triviale α sur la classe triviale α' . Le théorème peut s'appliquer. \square

VI. ESPACE DE DÉFORMATIONS DE N ET CONSTRUCTIONS ANNEXES.

Cette partie est divisée en deux sous-parties très différentes et d'inégales longueurs. La première sous-partie forme le pendant complexe de la partie précédente, en ce sens qu'elle donne des éléments de classification des structures complexes cette fois obtenues sur une même variété N (i.e. à type difféomorphe fixé). En particulier, nous construisons un espace de déformations lisse pour chaque variété N et montrons que, dans certains cas, il est universel. La deuxième sous-partie détaille deux extensions de la construction initiale.

Variétés N et structures produits.

Nous avons vu dans la partie précédente que la variété N peut souvent (lorsque $k > 1$) s'écrire, à difféomorphisme près, comme produit d'une variété 2-connexe par un produit de sphères de dimension impaire (cf proposition 4 de la partie V et corollaire B du théorème 10). Cette décomposition n'est pas forcément respectée à biholomorphisme près, en particulier :

Proposition 1. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible vérifiant la condition (H) et soit N la variété correspondante. Soit $k = 2q + r$ avec $q > 0$ et r valant 1 ou 2. Supposons de plus $k \leq m + 1$. Alors il existe une variété N' (issue d'une configuration admissible), telle que N est difféomorphe à $N' \times (S^1)^{2q}$ mais non biholomorphe à $N' \times T_{\mathbb{C}}^q$, pour $T_{\mathbb{C}}^q$ tore complexe de dimension complexe q .*

Preuve. La variété N' est construite conformément au corollaire B du théorème 10, d'où l'identification à difféomorphisme près. Par application du théorème 5, il n'y a pas de 1-formes holomorphes globales sur N . Mais si N était biholomorphe à $N' \times T_{\mathbb{C}}^q$, elle admettrait q formes holomorphes globales issues du tore complexe. \square

Il semble raisonnable de penser que cette proposition reste vraie dans le cas général. Bien sûr, la démonstration précédente ne fonctionne plus, mais c'est essentiellement parce qu'elle utilise un critère très grossier.

L'espace de déformations D .

Dans ce paragraphe, nous nous interrogeons sur les conditions pour que deux configurations admissibles $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ et $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ donnent des variétés N biholomorphes. Étant donné qu'il faut pour cela que les variétés N soient difféomorphes, nous considérons désormais, en vertu de la proposition 1 de la cinquième partie, des configurations équivalentes.

Il est clair qu'une permutation quelconque d'une configuration admissible donnera une variété N biholomorphe à celle de départ. Les transformations affines ne vont pas non plus influencer le type biholomorphe de N . On a :

Proposition 2. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible. Soit $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ une configuration équivalente possédant une permutation arbitraire $(\Lambda''_1, \dots, \Lambda''_n)$ qui vérifie :*

$$\text{Il existe } A \in GL_m(\mathbb{C}), B \in \mathbb{C}^m \text{ tels que } (\Lambda''_1, \dots, \Lambda''_n) = (A\Lambda_1 + B, \dots, A\Lambda_n + B)$$

Alors les variétés N et N' correspondantes sont biholomorphes.

Preuve. D'après la proposition 2 de la cinquième partie, les ouverts S et S' sont égaux. Soit maintenant $z \in S = S'$. Nous allons montrer que les feuilletages \mathcal{F}

et \mathcal{F}' induits respectivement par $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ et $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ sont exactement les mêmes, et pour cela que la feuille du premier feuilletage passant par z est égale à la feuille du deuxième feuilletage passant par z . Pour simplifier, nous travaillerons avec $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ et non une de ses permutations.

Soit w point de S appartenant à la feuille de \mathcal{F} passant par z . Ceci signifie qu'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $T \in \mathbb{C}^m$ tels que :

$$w = (a.z_1 e^{\langle \Lambda_1, T \rangle}, \dots, a.z_n e^{\langle \Lambda_n, T \rangle}) .$$

Mais alors, si l'on pose :

$$T' = ({}^t A)^{-1} T \quad \text{et} \quad a' = e^{-{}^t B \times ({}^t A)^{-1} \times T}$$

pour A et B tels que :

$$(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n) = (A\Lambda_1 + B, \dots, A\Lambda_n + B)$$

on a de même :

$$w = (a'.z_1 e^{\langle \Lambda'_1, T' \rangle}, \dots, a'.z_n e^{\langle \Lambda'_n, T' \rangle}) . \quad \square$$

L'existence d'une réciproque à cette proposition constitue une question importante et naturelle. Nous allons reformuler cette question. Posons pour cela :

Définition. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible. Nous appellerons espace de déformations D associé à $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ l'ensemble des configurations admissibles $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ équivalentes à $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ quotienté par la relation d'équivalence :

Il existe $A \in GL_m(\mathbb{C})$, $B \in \mathbb{C}^m$ tels que $(\Lambda''_1, \dots, \Lambda''_n) = (A\Lambda_1 + B, \dots, A\Lambda_n + B)$

pour $(\Lambda''_1, \dots, \Lambda''_n)$ une permutation arbitraire de $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$.

Remarquons qu'il ne s'agit pas, a priori, d'un espace de déformations au sens classique du terme. Soit en effet \mathcal{D} l'union des variétés complexes N obtenues à partir des configurations admissibles de D et soit $\mathcal{D} \xrightarrow{P} D$ la projection associée. Alors, pour que $\mathcal{D} \xrightarrow{P} D$ soit une famille de déformations de $N_{(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)}$, il est nécessaire que D soit un espace analytique complexe (éventuellement singulier, cf [Su]). Dans notre cas, nous avons en fait mieux.

Proposition 3. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible et soit D l'ensemble associé. Alors D est un ouvert connexe de $(\mathbb{C}^{n-m-1})^m$.

Preuve. Par hyperbolicité faible, nous pouvons supposer que $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$ est de rang complexe m et que $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_{2m+1})$ est une sous-configuration admissible (cf lemme 2 de la première partie).

Soit $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ une configuration admissible représentant un élément de D . Quitte à remplacer ce représentant par une de ses permutations, nous pouvons supposer que $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ peut s'homotoper, au sens donné dans la définition de l'équivalence de deux configurations, à $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$ (i.e. il existe un chemin continu de configurations admissibles qui joint ces deux configurations). Remarquons que

(cf lemme 1 de la partie IV), on a de même $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_{2m+1})$ sous-configuration admissible et donc, par le lemme 2 de la première partie :

$$\begin{pmatrix} \Lambda'_1 & \dots & \Lambda'_m \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang $m + 1$.

Mais alors, il existe une transformation affine (sans permutation) donnée par $A \in GL_m(\mathbb{C})$ et $B \in \mathbb{C}^m$ telle que :

$$A(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_{m+1}) + B = (e_1, \dots, e_m, 0)$$

où (e_1, \dots, e_m) représente la base canonique de \mathbb{C}^m . Par cette transformation, les vecteurs $(\Lambda'_{m+2}, \dots, \Lambda'_n)$ sont envoyés sur (a_1, \dots, a_{n-m-1}) des vecteurs de \mathbb{C}^m . Nous associons ainsi à $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ un point de $(\mathbb{C}^{n-m-1})^m$.

Inversement, une telle écriture est unique par classe d'équivalence affine (avec permutation). En effet, une fois tout représentant de cette classe ramené, par permutations, à un représentant homotope à $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ (i.e., en vertu du lemme 1 de la partie IV, une fois 0 ramené dans la bonne "chambre" de l'enveloppe convexe $\mathcal{H}(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$, ce qui est réalisé par une unique permutation), les différents représentants ne diffèrent plus que par relation affine (sans permutation), et dès lors, on peut les envoyer affinement sur :

$$(e_1, \dots, e_m, 0, a_1, \dots, a_{n-m-1}) .$$

L'espace D est donc une partie de $(\mathbb{C}^{n-m-1})^m$. Notons que, si l'on prend une configuration $(\Lambda''_1, \dots, \Lambda''_n)$ suffisamment proche de $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$, la permutation à effectuer sera la même, et donc la forme finale :

$$(e_1, \dots, e_m, 0, a'_1, \dots, a'_{n-m-1})$$

sera aussi proche que voulu de $(e_1, \dots, e_m, 0, a_1, \dots, a_{n-m-1})$; ceci fait de D un ouvert de $(\mathbb{C}^{n-m-1})^m$. Enfin, la connexité vient du fait que, une fois la permutation de départ effectué, les représentants de deux classes de D sont joints par un arc de représentants de classes de D et que cette connexité par arcs est conservée par transformation affine. \square

Remarquons que $p : \mathcal{D} \rightarrow D$ est une fibration localement triviale. Nous définissons alors :

Définition. Nous dirons que D est un espace de modules réduit en $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ si et seulement si deux points distincts de D donnent naissance à deux variétés N non biholomorphes.

Définition (cf [Su]). Nous dirons que D est un espace de modules (ou espace de déformations universel) en $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ si et seulement si D est un espace de modules réduit et si de plus, pour toute famille de déformations $\mathcal{X} \rightarrow X$ en un point base $(q, N) \in X \times \mathcal{X}$, avec X espace analytique complexe, il existe une application holomorphe (entre espaces analytiques complexes) surjective j entre (un voisinage de q dans) X et (un voisinage de $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ dans) D telle que :

(i) $j(q) = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$.

(ii) Modulo restriction à un voisinage de q dans X et à un voisinage de $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ dans D , on ait :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{j} & D \end{array}$$

Ici, ce diagramme doit se comprendre de la manière suivante : la famille $\mathcal{X} \rightarrow X$ est isomorphe à la famille induite $\mathcal{Y} \rightarrow X$, avec :

$$\mathcal{Y} = \{(x, v) \in X \times D \mid j(x) = p(v)\} .$$

Dès lors, la question de la réciproque de la proposition 2 devient :

Question. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible et soit l'ensemble D associé. L'ensemble D est-il un espace de modules réduit?

Mais alors, une seconde question naturelle se joint à cette première, à savoir :

Question. L'espace D est-il un espace de modules?

Toute cette partie consiste à répondre à ces deux questions.

Remarque. Dans le cas général, il est nécessaire de considérer des espaces de déformations qui ne soient pas des variétés. Par exemple, l'espace versel de déformations de Kuranishi peut être singulier à l'origine (cf [Su]). Avoir un espace de déformations D lisse non trivial est donc déjà une propriété forte à elle seule.

Équivalence affine.

Nous répondons, dans ce paragraphe, à la première des deux questions.

Théorème 12. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible et soit D l'espace de déformations correspondant. Dans les cas suivants :

(i) $m = d = 1$,

(ii) $d > 2$,

l'espace D est un espace de modules réduit.

Preuve. Ainsi que constaté dans [LdM-Ve], les résultats de [L-N1] prouvent le (i). Pour le (ii), nous suivons la démonstration de [LdM-Ve]. Soient $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ et $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ deux configurations admissibles équivalentes donnant la même variété N à biholomorphisme près. Nous allons relever ce biholomorphisme en une conjugaison des feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' induits par $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ et $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ respectivement sur V . On a :

$$\begin{array}{ccc} (V, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\quad ? \quad} & (V, \mathcal{F}') \\ & \searrow \tilde{\pi} & \swarrow \tilde{\pi}' \\ & & N \end{array}$$

et nous cherchons un automorphisme de V envoyant \mathcal{F} sur \mathcal{F}' . Autrement dit, comme $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}'$ sont des fibrés \mathbb{C}^m -principaux (cf proposition 4 de la première partie), nous cherchons un biholomorphisme de fibrés (mais pas forcément un isomorphisme, i.e. pas forcément une application qui agisse par translations sur la fibre). Nous allons pour cela comparer les cocycles qui définissent ces fibrés, et qui sont des éléments de $H^1(N, \mathcal{O}^{\oplus m})$.

(i) Soient $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de N tel que:

$$\begin{cases} g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{C}^m \\ h_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{C}^m \end{cases}$$

soient les cocycles des fibrés principaux $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}'$. Nous considérons de nouveau la suite exacte courte de faisceaux introduite dans la démonstration du théorème 3, à savoir :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_V^{inv} \longrightarrow \mathcal{O}_V \xrightarrow{L_{\tilde{\xi}_1} \oplus \dots \oplus L_{\tilde{\xi}_m}} \mathcal{O}_{etr} \longrightarrow 0$$

Posons $L = L_{\tilde{\xi}_1} \oplus \dots \oplus L_{\tilde{\xi}_m}$. La suite exacte longue associée s'écrit :

$$0 \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V^{inv}) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_V) \rightarrow H^0(V, \mathcal{O}_{etr}) \rightarrow H^1(V, \mathcal{O}_V^{inv}) \rightarrow \dots$$

On a alors l'identification :

$$i \geq 0 \quad H^i(V, \mathcal{O}_V^{inv}) \simeq H^i(N, \mathcal{O}) .$$

La suite exacte longue précédente va nous permettre de calculer $H^1(N, \mathcal{O})$. Par compacité de N , on obtient :

$$H^0(V, \mathcal{O}_V^{inv}) = H^0(N, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$$

Sous l'hypothèse $d > 2$, on a (cf [Sc]) :

$$H^0(V, \mathcal{O}_V) = H^0(\mathbb{C}P^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^{n-1}}) = \mathbb{C} \text{ et } H^1(V, \mathcal{O}_V) = H^1(\mathbb{C}P^{n-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^{n-1}}) = 0 .$$

Reste à calculer $H^0(V, \mathcal{O}_{etr})$, c'est-à-dire l'espace des fonctions holomorphes globales sur V localement image d'un élément de \mathcal{O}_V par l'opérateur L . Par compacité de V , il n'y a que les constantes de \mathbb{C}^m à considérer. Mais l'indépendance linéaire des $\tilde{\xi}_i$ entraîne que toute constante convient, donc :

$$H^0(V, \mathcal{O}_{etr}) = \mathbb{C}^m$$

et la suite exacte longue donne :

$$\begin{cases} 0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathbb{C}^m \rightarrow H^1(V, \mathcal{O}_V^{inv}) \rightarrow 0 \end{cases}$$

Il résulte de cela que :

$$H^1(V, \mathcal{O}_V^{inv}) \simeq H^1(N, \mathcal{O}) = \mathbb{C}^m$$

et donc :

$$H^1(N, \mathcal{O}^{\oplus m}) \simeq M_m(\mathbb{C}) .$$

Remarquons que, conformément à la démonstration du théorème 3, une base de $H^1(N, \mathcal{O})$ est alors donnée par les sous-fibrés de rang un de $\tilde{\pi}$ ou de $\tilde{\pi}'$, qui correspondent aux actions d'un seul champ de vecteurs de la configuration admissible. De ce fait, les cocycles g_{ij} et h_{ij} sont représentés dans l'identification précédente par une matrice de $GL_m(\mathbb{C})$, et donc diffèrent de la multiplication par une matrice inversible près.

(ii) Soit P la matrice inversible qui relie les deux cocycles. Cela signifie :

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h_{ij}^1 \\ \vdots \\ h_{ij}^m \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} g_{ij}^1 \\ \vdots \\ g_{ij}^m \end{pmatrix} = P \cdot g_{ij} \text{ pour tout } (i, j) .$$

Soit alors p_i les biholomorphismes locaux de V défini sur le recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ par :

$$\begin{cases} U_i \times \mathbb{C}^m \xrightarrow{p_i} U_i \times \mathbb{C}^m \\ (w, z) \longmapsto (w, Pz) \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que :

$$p_j(w, z + g_{ij}(w)) = (w, P.z + h_{ij}(w)) = (Id, h_{ij}) \circ p_i(w, z) \quad i \in I$$

donc les p_i font commuter les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^m & \xrightarrow{(Id, g_{ij})} & U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^m \\ \downarrow p_i & & \downarrow p_i \\ U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^m & \xrightarrow{(Id, h_{ij})} & U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^m \end{array}$$

et ainsi les p_i induisent un biholomorphisme p de V qui conjugue les feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' .

Remarque. En fait, p est un isomorphisme de fibrés affines, mais pas de fibrés principaux.

Comme $d > 2$, l'application p s'étend en un biholomorphisme de $\mathbb{C}P^{n-1}$, que nous continuerons d'appeler p . Donc, comme le groupe d'automorphismes de $\mathbb{C}P^{n-1}$ est le groupe linéaire projectif, il existe $M \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :



$$\begin{cases} \mathbb{C}P^{n-1} \xrightarrow{p} \mathbb{C}P^{n-1} \\ [z] \longmapsto [Mz] \end{cases}$$

i.e. p est la projection sur $\mathbb{C}P^{n-1}$ de l'automorphisme $z \mapsto M.z$ de \mathbb{C}^n .

(iii) Montrons enfin que p induit une conjugaison affine des configurations. Soit $[w]$ un point de V . La feuille de \mathcal{F} passant par w est donnée par :

$$T \in \mathbb{C}^m \quad \left[\begin{pmatrix} e^{\langle \Lambda_1, T \rangle} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\langle \Lambda_n, T \rangle} \end{pmatrix} .w \right]$$

Mais, de par la conjugaison de feuilletages p , tous ces points de V sont envoyés par p sur la feuille de $p(w)$ dans \mathcal{F}' . On a donc :

$$\left[\begin{pmatrix} e^{\langle \Lambda'_1, T' \rangle} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\langle \Lambda'_n, T' \rangle} \end{pmatrix} .Mw \right] = \left[M. \begin{pmatrix} e^{\langle \Lambda_1, T \rangle} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\langle \Lambda_n, T \rangle} \end{pmatrix} .w \right]$$

pour T' fonction de T . En remontant à \mathbb{C}^n :

$$M^{-1}. \begin{pmatrix} e^{\langle \Lambda'_1, T' \rangle} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\langle \Lambda'_n, T' \rangle} \end{pmatrix} .M = \alpha(T). \begin{pmatrix} e^{\langle \Lambda_1, T \rangle} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\langle \Lambda_n, T \rangle} \end{pmatrix}$$

Remarquons que p se relevant en un biholomorphisme de \mathbb{C}^n , les fonctions T' et α sont holomorphes en T . Ces deux matrices étant semblables, leurs valeurs propres sont égales, donc, à une permutation arbitraire près :

$$1 \leq i \leq m \quad e^{\langle \Lambda'_i, T' \rangle} = \alpha(T). e^{\langle \Lambda_i, T \rangle}$$

ou encore, comme $\alpha(T)$ est une fonction holomorphe qui ne s'annule jamais, localement autour de $T = 0$:

$$1 \leq i \leq m \quad \langle \Lambda'_i, T' \rangle = \langle \Lambda_i, T \rangle + \alpha'(T)$$

Maintenant, T' est donc une fonction holomorphe de T au voisinage de 0, donc en prenant les parties linéaires en T de α' et T' , et en utilisant le fait que, lorsque T vaut 0, on a de même $T' = 0$, il vient :

$$1 \leq i \leq m \quad \langle \Lambda'_i, BT \rangle = \langle \Lambda_i + \alpha', T \rangle$$

pour $B \in GL_m(\mathbb{C})$ et $\alpha' \in \mathbb{C}^m$, ce qui revient à dire, qu'à une permutation arbitraire près, les deux configurations admissibles s'obtiennent l'une de l'autre par une transformation affine de \mathbb{C}^m . \square

Remarque. Certaines variétés N ont un espace de modules non connexe. Soient en effet $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ et $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ deux configurations admissibles non équivalentes mais donnant lieu à des variétés M_1 difféomorphes (cf proposition 3 de la partie V). Supposons $d > 2$. Alors, par le théorème 12, l'on dispose de deux espaces de modules réduits D et D' , dont la réunion est non connexe : on ne peut donc pas passer continûment d'une structure complexe de D sur N à une structure complexe de D' .

Espace de modules.

Nous répondons maintenant à la deuxième question posée plus haut. De même que dans [LdM-Ve], on a :

Théorème 13. *Soient $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible, N la variété compacte complexe correspondante et D l'espace de déformations associé. Si $d > 3$ et si $\Lambda_i \neq \Lambda_j$ pour $i \neq j$, alors l'espace D est un espace de modules (espace de déformations universel) de N .*

Preuve. Nous suivons, dans ses grandes lignes, la démonstration de [LdM-Ve]. La stratégie est la suivante (voir [Su] p.160 pour la justification des faits suivants) : à l'aide de suites exactes de faisceaux adéquates, nous calculons la dimension de $H^1(N, \Theta)$ et vérifions qu'elle égale celle de D . Comme la dimension de l'espace versel de Kuranishi de N , appelons-le K , est inférieure ou égale à celle de $H^1(N, \Theta)$, ceci a pour conséquence que D et K ont même dimension, celle de $H^1(N, \Theta)$. Maintenant, comme K est par définition un espace versel de déformations de N , il existe une application holomorphe de D dans K . Comme D est un espace de modules réduit, cette application est injective donc régulière en restriction à la partie lisse de K . Mais alors, en un tel point régulier, l'application de Kodaira-Spencer de $T_z D$ dans $H^1(N, \Theta)$ est un isomorphisme, donc d'après un théorème de Kodaira-Spencer, D est également un espace de déformations versel de N . Enfin, comme deux points de N correspondent à deux structures complexes non biholomorphes sur N , l'on conclut que N est un espace de déformations universel, i.e. un espace de modules.

Considérons alors les trois suites exactes courtes de faisceaux sur V :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_V^{inv} & \longrightarrow & \mathcal{O}_V & \xrightarrow{L} & \mathcal{O}_{etr} & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & \Theta_V^{inv} & \longrightarrow & \Theta_V & \xrightarrow{[\tilde{\xi}_1, -] \oplus \dots \oplus [\tilde{\xi}_m, -]} & \Theta_{etr} & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_V^{inv} \cdot \tilde{\xi}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_V^{inv} \cdot \tilde{\xi}_m & \longrightarrow & \Theta_V^{inv} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \Theta_b & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où Θ_V est le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur V , et $\Theta_{etr} \subset (\Theta_V)^{\oplus m}$ est le faisceau image de Θ_V par l'opérateur linéaire de crochets de Lie $[\tilde{\xi}_1, -] \oplus \dots \oplus [\tilde{\xi}_m, -]$. Par ailleurs Θ_V^{inv} est le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes de V qui commutent avec $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_m$. Enfin Θ_b est défini par ces suites exactes. La première suite exacte est, quant à elle, celle déjà utilisée dans les théorèmes 3 et 12. Remarquons que l'on a :

$$H^i(V, \Theta_b) \simeq H^i(N, \Theta) \text{ pour tout } i .$$

Comme $d > 3$, on a (cf [Sc]) :

$$\begin{aligned} H^0(V, \Theta_V) &= H^0(\mathbb{C}P^{n-1}, \Theta_{\mathbb{C}P^{n-1}}) \simeq sl_n(\mathbb{C}) = \{\text{matrices de trace nulle}\} \\ \text{et } H^1(V, \mathcal{O}_V) &= H^2(V, \mathcal{O}_V) = H^1(V, \Theta_V) = H^2(V, \Theta_V) = 0 . \end{aligned}$$

La première suite exacte se réécrit :

$$\begin{cases} 0 \rightarrow \mathbb{C}^m \rightarrow H^1(V, \mathcal{O}_V^{inv}) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow H^1(V, \mathcal{O}_{etr}) \rightarrow H^2(V, \mathcal{O}_V^{inv}) \rightarrow 0 \end{cases}$$

et implique donc :

$$H^1(V, \mathcal{O}_V^{inv}) = \mathbb{C}^m \quad \text{et} \quad H^2(V, \mathcal{O}_V^{inv}) \simeq H^1(V, \mathcal{O}_{etr}) .$$

Comme les Λ_i sont tous distincts, $H^0(V, \Theta_V^{inv})$ s'identifie aux matrices diagonales modulo les scalaires, et, par le théorème 6, on a :

$$H^0(V, \Theta_b) = \mathbb{C}^{n-m-1} .$$

Les deux autres suites exactes longues en cohomologie deviennent alors :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{C}^n / \mathbb{C}^* \rightarrow M_n(\mathbb{C}) / \mathbb{C}^* \rightarrow H^0(V, \Theta_{etr}) \rightarrow H^1(V, \Theta_V^{inv}) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathbb{C}^m \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^m \rightarrow H^1(V, \Theta_V^{inv}) \rightarrow H^1(V, \Theta_b) \xrightarrow{p} H^2(V, (\mathcal{O}_V^{inv})^{\oplus m}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Lemme 1. *L'image de $H^1(V, \Theta_b)$ par p est zéro.*

Preuve. D'après les identifications précédentes, on a :

$$(*) \quad H^2(V, \mathcal{O}_V^{inv}) \simeq H^1(V, \mathcal{O}_{etr}) .$$

On peut comprendre cet isomorphisme ainsi. Étant donné un élément du groupe de cohomologie $H^1(V, \mathcal{O}_{etr})$, on peut le représenter par :

$$\begin{cases} h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{C}^m \\ h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha} = 0 \quad \text{sur} \quad U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \end{cases}$$

vérifiant de plus qu'il existe $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{C}$ tel que :

$$L.g_{\alpha\beta} = L_{\xi_1} \oplus \dots \oplus L_{\xi_m} . g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} .$$

Remarquons que $(g_{\alpha\beta})$ est bien défini modulo un cocycle de $H^1(V, \mathcal{O}_V^{inv})$. Remarquons de plus que $(g_{\alpha\beta})$ n'est pas un cocycle. En fait :

$$g_{\alpha\beta} + g_{\beta\gamma} + g_{\gamma\alpha} = k_{\alpha\beta\gamma}$$

tel que :

$$L.k_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha} = 0$$

donc $(g_{\alpha\beta})$ définit un élément $(U_\alpha, k_{\alpha\beta\gamma})$ de $H^2(V, \mathcal{O}_V^{inv})$. Inversement, l'isomorphisme $(*)$ assure que, partant d'un cocycle $(U_\alpha, k_{\alpha\beta\gamma})$ de $H^2(V, \mathcal{O}_V^{inv})$, on peut remonter à un $(g_{\alpha\beta})$ et donc à $(U_\alpha, h_{\alpha\beta})$ de $H^1(V, \mathcal{O}_{etr})$.

Qu'en est-il maintenant de l'application p ? Soit :

$$\begin{cases} \chi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow TV/T\tilde{\mathcal{F}}|_{U_\alpha \cap U_\beta} \\ \chi_{\alpha\beta} + \chi_{\beta\gamma} + \chi_{\gamma\alpha} = 0 \quad \text{sur } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \end{cases}$$

un représentant de $H^1(V, \Theta_b)$ (où $T\tilde{\mathcal{F}}$ désigne le feuilletage induit sur V par les champs $\tilde{\xi}_i$).

On peut représenter ce cocycle par :

$$\tilde{\chi}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1} \simeq TV|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

et nous écrirons, par abus de notations :

$$\tilde{\chi}_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta} + a_1^{\alpha\beta} \cdot \tilde{\xi}_1 + \dots + a_m^{\alpha\beta} \cdot \tilde{\xi}_m$$

les $(a_j^{\alpha\beta})$ étant bien définis modulo m cocycles de $H^1(V, \mathcal{O}_V^{inv})$ et une fois de plus, ne sont pas des cocycles mais on a :

$$a_j^{\alpha\beta} + a_j^{\beta\gamma} + a_j^{\gamma\alpha} = k_{\alpha\beta\gamma}^j$$

avec $(k_{\alpha\beta\gamma}^j)$ élément de $H^2(V, \mathcal{O}_V^{inv})$, pour tout $1 \leq j \leq m$. La flèche p vérifie donc :

$$p(\chi_{\alpha\beta}) = (k_{\alpha\beta\gamma}^1, \dots, k_{\alpha\beta\gamma}^m) .$$

Mais en vertu de l'isomorphisme précédemment décrit, on peut voir p à valeurs dans $H^1(V, \mathcal{O}_{etr}^{\oplus m})$ et on a alors :

$$p(\chi_{\alpha\beta}) = L.(a_1^{\alpha\beta}, \dots, a_m^{\alpha\beta}) = h_{\alpha\beta} .$$

Mais les $a_j^{\alpha\beta}$ sont des éléments de \mathcal{O}_V^{inv} , donc des fonctions invariantes par L , i.e. :

$$p(\chi_{\alpha\beta}) = h_{\alpha\beta} = 0 . \quad \square$$

En application du lemme 1, les deux suites exactes précédentes deviennent :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{C}^n / \mathbb{C}^* \rightarrow M_n(\mathbb{C}) / \mathbb{C}^* \rightarrow H^0(V, \Theta_{etr}) \rightarrow H^1(V, \Theta_V^{inv}) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathbb{C}^m \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^m \rightarrow H^1(V, \Theta_V^{inv}) \rightarrow H^1(V, \Theta_b) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Comme l'espace tangent de D s'injecte dans $H^1(V, \Theta_b)$ (par l'intermédiaire de l'application de Kodaira-Spencer, voir [Su]), la dimension de ce dernier espace est supérieure ou égale à $m(n - m - 1)$. Il nous manque la dimension de $H^0(V, \Theta_{etr})$ pour pouvoir dire plus. Un élément de cet espace est une collection de m champs linéaires (M_1, \dots, M_m) de \mathbb{C}^n vérifiant localement :

il existe χ germe de champ de \mathbb{C}^n tel que : $[\chi, R] = 0$, $[\chi, \xi_i] = M_i$, $1 \leq i \leq m$.

En particulier, par l'identité de Jacobi :

$$[M_k, \xi_l] = [M_l, \xi_k] \quad \text{pour } 1 \leq k, l \leq m .$$

Désignons par $(m_{ij}^k)_{i,j=1}^n$ les coefficients de la matrice qui caractérise le champ linéaire M_k :

$$m_{ji}^l(\lambda_j^k - \lambda_i^k) = m_{ji}^k(\lambda_j^l - \lambda_i^l) \quad \text{pour } 1 \leq k, l \leq m .$$

Comme les λ_i sont tous distincts, pour tout j différent de i , il existe k compris entre 1 et m tel que :

$$\lambda_j^k - \lambda_i^k \neq 0$$

et dès lors, pour tout $l \neq k$:

$$m_{ji}^l = m_{ji}^k \cdot \frac{\lambda_j^l - \lambda_i^l}{\lambda_j^k - \lambda_i^k}$$

et l'on obtient ainsi $n(n-1)(m-1)$ relations non triviales entre les $n^2 - m$ coefficients des champs M_1, \dots, M_m (le $-m$ provient du fait que l'on considère ces champs comme projectifs), donc :

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(V, \Theta_{etr}) \leq (n-1)(n+m) .$$

Mais les suites exactes impliquent alors :

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(V, \Theta_{etr}) = (n-1)(n+m) \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{C}} H^1(V, \Theta_b) = m(n-m-1)$$

ce qui achève la preuve. \square

Remarque. Il y a une identification entre Θ_{etr} et un sous-faisceau de :

$$\mathcal{C}^1(\mathfrak{G}, \Theta) = \mathcal{C}^1(\mathfrak{G}, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \Theta$$

pour $\mathcal{C}^1(\mathfrak{G}, \mathbb{C})$ ensemble des applications linéaires de \mathfrak{G} dans \mathbb{C} (cf [Le2]). De plus, l'application $\Theta \rightarrow \Theta_{etr}$ est la différentielle de Koszul (cf [Le2]).

Nous terminons cette partie en détaillant deux extensions de la construction des variétés N .

Existence de revêtements ramifiés de N .

Nous nous inspirons de [Mi] et [B-V] pour construire des revêtements ramifiés de N .

Soit (p_1, \dots, p_{n+1}) un $(n+1)$ -uplet d'entiers tous non nuls et considérons :

$$P : z \in \mathbb{C}^{n+1} \longmapsto z_1^{p_1} + \dots + z_{n+1}^{p_{n+1}} \in \mathbb{C} .$$

Soit $V^* = P^{-1}(0) - \{0\}$. Il s'agit d'une variété complexe (cf [Mi], §9). Soit :

$$H^* = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z_1 + \dots + z_{n+1} = 0\} - \{0\} .$$

Il existe une application naturelle entre V^* et H^* , à savoir :

$$(\Psi) \quad \begin{cases} V^* \longrightarrow H^* \\ z \longmapsto (z_1^{p_1}, \dots, z_{n+1}^{p_{n+1}}) \end{cases}$$

L'application Ψ est un revêtement holomorphe ramifié. Si nous identifions H^* à $\mathbb{C}^n - \{0\}$ par :

$$z \in H^* \longmapsto (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n - \{0\}$$

nous pouvons faire agir \mathbb{C}^m sur H^* , y définir S , ouvert des feuilles de Siegel, feuilleté par \mathcal{F} . La variété holomorphe M sera espace quotient de cette action, et nous aurons une projection holomorphe :

$$\pi_0 : S \longrightarrow M .$$

Soit $W^* = \Psi^{-1}(S)$. L'application :

$$\begin{cases} W^* \xrightarrow{F} M \\ z \longmapsto \pi_0 \circ \Psi(z) \end{cases}$$

permet de définir un feuilletage holomorphe $\tilde{\mathcal{F}}$ sur W^* , dont les feuilles sont données par les composantes connexes de $F^{-1}(c)$, pour c point de M . Le revêtement Ψ envoie une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur une feuille de \mathcal{F} .

Soit \tilde{M} l'espace des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$. Comme Ψ envoie $\tilde{\mathcal{F}}$ sur \mathcal{F} , il passe au quotient en un revêtement ramifié $\tilde{\Psi}$ de \tilde{M} sur M . Dès lors, \tilde{M} est un espace analytique complexe et $\tilde{\Psi}$ un revêtement ramifié holomorphe (cf [Gu2]), en particulier \tilde{M} est un espace de feuilles séparé, donc une variété complexe (les changements de coordonnées transverses du feuilletage permettent de construire un atlas holomorphe sur \tilde{M}).

Comme dans la première partie, nous pouvons projectiviser toute la construction en considérant :

$$V = S/\mathbb{C}^* \subset \{[z] \in \mathbb{C}P^n \mid z_1 + \dots + z_{n+1} = 0\}$$

et en quotientant W^* par l'action induite par :

$$\chi(z) = \sum_{i=1}^{n+1} q_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

pour : $q_1 p_1 = \dots = q_n p_n = \text{PPCM}(p_1, \dots, p_n)$.

On obtient alors une variété compacte complexe \tilde{N} et un revêtement ramifié holomorphe de \tilde{N} sur N de degré $p_1 \times \dots \times p_{n+1}$. Nous venons de montrer :

Proposition 4. *Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible et soit N la variété compacte complexe correspondante.*

Soit (p_1, \dots, p_{n+1}) un $(n+1)$ -uplet d'entiers naturels tous non nuls, soit :

$$P(z) = z_1^{p_1} + \dots + z_{n+1}^{p_{n+1}}$$

et soit $V = P^{-1}(0) - \{0\}$. Soit le revêtement ramifié de degré $p_1 \times \dots \times p_{n+1}$:

$$(\Psi) \quad \begin{cases} V^* \longrightarrow \mathbb{C}^n - \{0\} \\ z \longmapsto (z_1^{p_1}, \dots, z_n^{p_n}) \end{cases}$$

Soit enfin \mathcal{F} le feuilletage induit sur $\mathbb{C}^n - \{0\}$ par $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ et l'action projective de \mathbb{C}^* . Soit S l'ouvert correspondant et $\tilde{S} = \Psi^{-1}(S)$.

Alors il existe sur \tilde{S} un feuilletage holomorphe $\tilde{\mathcal{F}}$ préservé par Ψ , d'espace des feuilles une variété compacte complexe \tilde{N} , et un revêtement ramifié holomorphe $\tilde{\Psi}$ de degré $p_1 \times \dots \times p_{n+1}$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{S}, \tilde{\mathcal{F}}) & \xrightarrow{\Psi} & (S, \mathcal{F}) \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \tilde{N} & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & N \end{array}$$

où $\tilde{\pi}$ est la projection de \tilde{S} sur \tilde{N} .

Fibrés holomorphes de fibre N .

Je remercie Blaine Lawson, qui, via Alberto, m'a suggéré cette construction.

Soit X une variété compacte complexe et soit $E \xrightarrow{p} X$ un fibré holomorphe vectoriel sur X de fibre \mathbb{C}^n . Ce fibré est défini par un recouvrement (U_α) de X et un cocycle :

$$\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

avec :

$$\begin{cases} \phi_{\alpha\beta} \cdot \phi_{\beta\alpha} \equiv Id \text{ sur } U_\alpha \cap U_\beta \\ \phi_{\alpha\beta} \cdot \phi_{\beta\gamma} \cdot \phi_{\gamma\alpha} \equiv Id \text{ sur } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \end{cases}$$

Sur chaque fibre \mathbb{C}^n , nous pouvons faire agir $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ selon une configuration admissible $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$. Supposons maintenant que le cocycle $(\phi_{\alpha\beta})$ soit en fait à valeurs dans :

$$\text{Diag}^*(\mathbb{C}^n) = \{\text{matrices diagonales de } GL_n(\mathbb{C})\} \simeq (\mathbb{C}^*)^n .$$

Dans ces conditions les changements de cartes du fibré :

$$(z, T) \in U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^n \longmapsto (z, \phi_{\alpha\beta}(z).T) \in U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}^n$$

se réduisent à $U_\alpha \cap U_\beta \times S$ et commutent avec l'action de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^*$ selon le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 U_\alpha \cap U_\beta \times S & \xrightarrow{(Id, \phi_{\alpha\beta})} & U_\alpha \cap U_\beta \times S \\
 (Id, \pi) \downarrow & & \downarrow (Id, \pi) \\
 U_\alpha \cap U_\beta \times N & \xrightarrow{(Id, \tilde{\phi}_{\alpha\beta})} & U_\alpha \cap U_\beta \times N
 \end{array}$$

ce qui signifie que l'on peut définir ainsi un cocycle :

$$\tilde{\phi}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \text{Aut}(N)$$

ce qui permet de construire un fibré holomorphe localement trivial $V \xrightarrow{\tilde{p}} X$ de fibre N .

Remarquons que la condition selon laquelle $\phi_{\alpha\beta}$ est à valeurs dans $\text{Diag}^*(\mathbb{C}^n)$ est équivalente à demander qu'il existe une décomposition de E comme somme de Whitney de n fibrés holomorphes en droites E_1, \dots, E_n , le cocycle $\phi_{\alpha\beta}$ étant alors produit cartésien des cocycles :

$$\phi_{\alpha\beta}^i : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{C}^* \quad 1 \leq i \leq n.$$

Nous pouvons donc énoncer :

Proposition 5. *Soit X une variété compacte complexe. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible et soit N la variété compacte complexe correspondante.*

Supposons qu'il existe un fibré holomorphe \mathbb{C}^n -vectoriel $E \xrightarrow{p} X$. Supposons de plus que E admette une décomposition comme somme de Whitney de n fibrés en droites.

Alors on peut construire, à partir de ce fibré, une variété compacte complexe V comme espace total d'un fibré holomorphe localement trivial $V \rightarrow X$ de fibre N .

VII. EXEMPLES DE VARIÉTÉS COMPACTES COMPLEXES.

Tableaux récapitulatifs.

Avant de passer aux exemples proprement dits, nous donnons dans le tableau suivant, le résumé des propriétés générales des variétés N démontrées au cours des précédentes parties. Ce récapitulatif se fait en fonction de d et de k . Nous notons par $h(N, \mathcal{M})$ le degré de transcendance du corps des fonctions méromorphes sur N , par $h(N, \Theta)$ la dimension complexe de $H^0(N, \Theta)$, et enfin par K_N le fibré canonique de N . Pour les autres notations, nous renvoyons à l'index des notations.

d	1		2	≥ 3	≥ 4
k	$\geq m + 2$	$< m + 2$	0		
$M_1 \xrightarrow{\pi_1} N$	trivial		non trivial		
$\pi_1(N)$	\mathbb{Z}^{k-1}		$\{0\}$		
$H^2(N, \mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}^{(k-1)(k-2)/2}$		\mathbb{Z}		
$h(N, \mathcal{M})$	$\geq a$		a		
$h^{0,1}$	$\geq m$			m	
$h^{1,0}$	$k - m - 1$	0			
	si la condition (H) est vérifiée				
$h^{p,0} (p > 1)$?	0 si (H) est vérifiée			
$\text{Alb}(N)$?	$\{0\}$ si (H) est vérifiée			
K_N	?	non trivial si (H) est vérifiée			
$h(N, \Theta)$	$\geq n - m - 1$		$\begin{cases} = n - m - 1 \text{ si } \Lambda_i \neq \Lambda_j \text{ pour } i \neq j \\ \geq n - m - 1 \text{ sinon} \end{cases}$		
Espace D	de déformations (lisse)			de modules réduit	de modules si $\Lambda_i \neq \Lambda_j$ pour $i \neq j$

Tableau récapitulatif des propriétés générales de N .

Le tableau suivant détaille les différences de propriétés pour une configuration vérifiant la condition (H) et une configuration vérifiant la condition (K). Dans les deux cas, nous supposons $d > 1$.

	condition (H) vérifiée	condition (K) vérifiée
Groupe G	de Cousin	$(\mathbb{C}^*)^{n-2m-1} \times T_{\mathbb{C}}^m$
$h(N, \mathcal{M})$	0	$n - 2m - 1$
$h^{0,1}$	0	≥ 0
$h(N, \Theta)$	$n - m - 1$	$\geq n - m - 1$
sous-variétés hol. de dim. $\geq m$	uniquement standard	autres exemples
Feuilles de \mathcal{G}	ouvertes	tores complexes de dimension m
Espace N/\mathcal{G}	non séparé	orbifold kählérienne

Comparaison des conditions (H) et (K) pour $d > 1$.

Dans les paragraphes qui suivent, nous donnons des exemples et familles d'exemples explicites des variétés qui peuvent être construites par la construction expliquée dans cette thèse.

Cas $m = 1$.

Ainsi que signalé précédemment, Santiago López de Medrano a donné dans [LdM1] et [LdM2] (voir aussi [Wa] où certains calculs homologiques identiques sont faits et [LdM-Ve] où une démonstration plus simple de certains points de ce théorème est donnée) une classification complète, pour $m = 1$, des variétés M_1 à difféomorphisme près. On a :

Théorème. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une configuration admissible $(1, n)$. Alors :

(i) Cette configuration est équivalente à $((\lambda'_1, n_1), \dots, (\lambda'_{2l+1}, n_{2l+1}))$ où n_i désigne la multiplicité de λ'_i et $n = n_1 + \dots + n_{2l+1}$.

(ii) Soit $d_i = n_i + \dots + n_{i+l-1}$ pour i allant de 1 à $2l + 1$ (les indices étant pris modulo $2l + 1$). Alors :

- si $l = 0$, on a $M_1 = \emptyset$.

- si $l = 1$, on a $M_1 = S^{2n_1-1} \times S^{2n_2-1} \times S^{2n_3-1}$.

- si $l > 1$, on a M_1 difféomorphe à la somme connexe des variétés $S^{2d_i-1} \times S^{2n-2d_i-2}$, pour i allant de 1 à $2l + 1$.

À partir de cette classification, Santiago López de Medrano et Alberto Verjovsky vérifient dans [LdM-Ve] que l'on peut obtenir comme variété N , dans le cas $l = 1$ de la classification :

(i) les tores complexes de dimension complexe 1.

(ii) Les variétés différentiables $S^{2p-1} \times S^1$ (pour $p > 1$) munies d'une structure complexe de Hopf ou de Haefliger (linéaire) (voir [Ho] et [Ha]).

(iii) Les produits de sphères $S^{2p-1} \times S^{2q-1}$ (pour p et q strictement supérieurs à 1) munis d'une structure complexe de Calabi-Eckmann ou de Loeb-Nicolau linéaire (voir [C-E] et [L-N1]).

(iv) Les variétés différentiables $S^2 \times S^{2p-1} \times S^{2q-1}$.

(v) Les variétés différentiables espace total de certains fibrés non triviaux au-dessus de $\mathbb{C}P^{p-1}$ et de fibre $S^{2q-1} \times S^{2r-1}$.

Enfin, dans le cas $l > 1$, la variété N est la base d'un S^1 -fibré non-trivial d'espace total une somme connexe de produits de sphères. On donne dans [LdM-Ve] une description plus précise de ces variétés.

Cas $m = 2$ et petites valeurs de n .

Dans tout ce paragraphe, nous fixons la valeur de m à 2 et donnons la classification des variétés N pour des petites valeurs de n .

Pour $n < 5$, la condition d'hyperbolicité ne peut-être vérifiée, et il n'y a donc pas de variétés N .

Pour $n = 5$, conformément au théorème 1, l'on obtient les tores complexes de dimension complexe deux.

Pour $n = 6$, le polytope associé a pour dimension 1, donc il s'agit d'un segment. Ceci a pour conséquence que :

$$k = 4 \quad \text{et} \quad S = (\mathbb{C}^*)^4 \times \mathbb{C}^2 - \{0\} .$$

Dès lors, il vient :

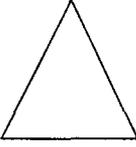
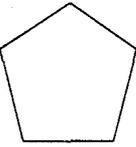
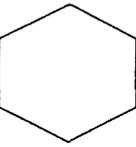
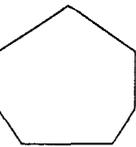
$$M_1 \simeq (S^1)^4 \times S^3 \quad \text{et} \quad N \simeq (S^1)^3 \times S^3 .$$

Pour $n = 7$, le polytope associé est un polygone, et plusieurs possibilités apparaissent. Conformément au théorème 11, la classification se fait en fonction du type combinatoire du polytope associé et du nombre de points indispensables. Les résultats sont consignés dans le tableau de la page suivante.

Lorsque le fibré $M_1 \xrightarrow{\pi_1} N$ est trivial, i.e. lorsque le nombre de points indispensables est strictement positif, la variété N s'obtient de la variété M_1 en effaçant un S^1 . Lorsque ce fibré est non trivial, nous ne disposons pas d'une description plus précise que de dire que N est la base de ce fibré. Les valeurs de M_1 données dans le tableau suivant s'obtiennent par application du théorème 10 et par application des résultats de [McG] (voir le dernier paragraphe de cette partie).

Pour $n = 8$, le polytope associé est un polyèdre et l'on peut faire le même type de classification. Nous donnons dans les deux tableaux suivants la classification partielle. On vérifie en effet, à l'aide de la table donnée en annexe de [Gr] que d'autres polyèdres conviennent. Ici encore, la classification s'obtient pour les grandes valeurs de k par application du théorème 10. De même que précédemment, la variété N n'est explicitement déterminée à difféomorphisme près que lorsque le fibré π_1 est trivial, i.e. lorsqu'il y a un point indispensable. Nous avons omis cette fois ce renseignement dans le tableau.

Il nous reste à expliquer comment nous avons procédé pour les petites valeurs de k . Nous nous sommes servis premièrement de la proposition :

Polytope associé	k	variété M_1	fibré π_1
	4	$S^5 \times T^4$	trivial
	3	$S^3 \times S^3 \times T^3$	trivial
	2	$\left(\prod_{i=1}^5 S^3 \times S^4 \right) \times T^2$	trivial
	1	$\left(\prod_{i=1}^8 S^4 \times S^4 \prod_{i=1}^9 S^3 \times S^5 \right) \times S^1$	trivial
	0	$\prod_{i=1}^{14} S^3 \times S^6 \prod_{i=1}^{35} S^4 \times S^5$	non trivial

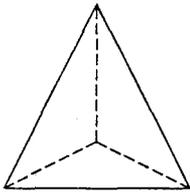
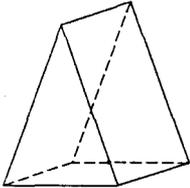
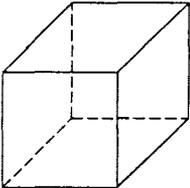
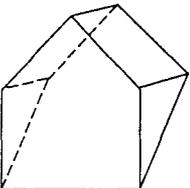
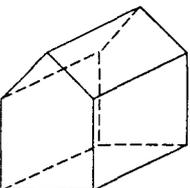
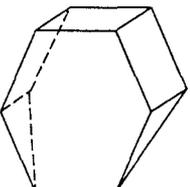
Classification des variétés M_1 pour $m = 2$ et $n = 7$.

Proposition 1. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible (m, n, k) , soit M_1 la variété correspondante et soit P son polytope associé. Si P possède une section, i.e. s'il existe un polytope P' tel que P soit combinatoirement équivalent au produit $P' \times [0, 1]$ avec P' non réduit à un point, alors M_1 est difféomorphe au produit $S^3 \times N'$ où N' est la variété obtenue par une configuration admissible $(m, n-1, k+1)$ de polytope associé P' .

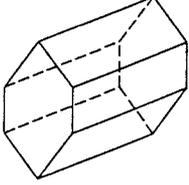
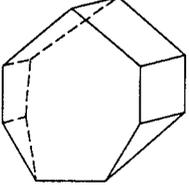
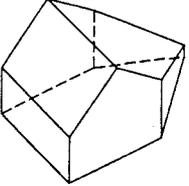
Preuve. Remarquons pour commencer que le polytope P' est également un polytope simple. En effet, de chaque sommet de P partent p arêtes (où p est la codimension minimale de F dans l'écriture $S = (C^*)^k \times (C^{n-k} - F)$), donc de chaque sommet de P' partent $p-1$ arêtes.

Par application du théorème 11, il existe une configuration admissible réduite (m', n', k') ayant P' comme polytope associé. Remarquons que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, par application du théorème 10, l'on peut toujours remplacer cette configuration par une configuration (m'', n'', k'') ayant même polytope associé P' et telle que :

$$m'' = m' + r \quad n'' = n' + 2r \quad k'' = k' + 2r .$$

Polytope associé	k	variété M_1
	4	$S^7 \times T^4$
	3	$S^5 \times S^3 \times T^3$
	2	$S^3 \times S^3 \times S^3 \times T^2$
	2	$\left(\prod_{i=1}^2 S^4 \times S^5 \prod_{i=1}^3 S^3 \times S^6 \right) \times T^2$
	1	$\left(\prod_{i=1}^5 S^3 \times S^4 \right) \times S^3 \times S^1$
	1	$\left(\prod_{i=1}^6 S^3 \times S^7 \prod_{i=1}^8 S^4 \times S^6 \prod_{i=1}^3 S^5 \times S^5 \right) \times S^1$ (?)

Classification (partielle) des variétés M_1 pour $m = 2$ et $n = 8$.

Polytope associé	k	variété M_1
	0	$\left(\prod_{i=1}^9 S^3 \times S^5 \prod_{i=1}^8 S^4 \times S^4 \right) \times S^3$
	0	???
	0	???

Classification (partielle) des variétés M_1 pour $m = 2$ et $n = 8$ (suite).

Dès lors, comme la dimension de P' est égale à celle de P moins un et que P' possède deux hyperfaces de moins que P (chaque hyperface de P' donne, par multiplication par $[0, 1]$ une hyperface de P , auxquelles il faut ajouter $P' \times \{0\}$ et $P' \times \{1\}$ pour avoir toutes les hyperfaces de P), on a (cf proposition 5 de la première partie) :

$$\begin{cases} \dim P = n - 2m - 1 = \dim P' + 1 = n'' - 2m'' \\ n - k = n'' - k'' + 2 \end{cases}$$

où la deuxième ligne d'égalités porte sur le nombre d'hyperfaces. En particulier, si nous exigeons $m'' = m$, il vient :

$$m'' = m \quad n'' = n - 1 \quad k'' = k + 1$$

ce qui est cohérent, puisque l'on a k plus petit ou égal à $2m - 1$. En effet d'après le lemme 4 de la deuxième partie, k est inférieur à $2m$. Mais maintenant si $k = 2m$, comme remarqué dans la démonstration du lemme, le polytope associé est un simplexe. Or, un simplexe ne peut se factoriser comme produit d'un polytope par $[0, 1]$. De plus, n est supérieur à $2m + 3$ puisque son polytope associé est, par hypothèse, de dimension supérieure ou égale à 2.

Soit M'_1 la variété correspondante. Nous pouvons écrire (cf lemmes 6 et 8 de la deuxième partie) :

$$M'_1 \simeq S^1 \times N'$$

puisque d'après les égalités précédentes, on a k'' supérieur à un. Maintenant l'existence d'une section pour le polytope associé peut s'écrire :

$$P = (P' \times [0, 1/2]) \cup_{P' \times \{1/2\}} (P' \times [1/2, 1]) .$$

Souvenons-nous maintenant de l'interprétation du polytope associé (cf proposition 5 de la première partie). Celui-ci reflète l'action du tore réel sur M_1 , et en fait chaque point de l'intérieur du polytope représente une orbite maximale de cette action, chaque point de l'intérieur d'une hyperface une orbite de codimension 1 et ainsi de suite. Ceci signifie que le demi-polytope $(P' \times [0, 1/2])$ correspond au sous-espace de M_1 donné par :

$$M'_1 \times S^1 \times [0, 1/2] /_{S^1 \times \{0\} = * } \simeq M'_1 \times D^2 \simeq N' \times S^1 \times D^2$$

et qu'il en va de même pour la seconde partie. Dès lors, on a :

$$M_1 \simeq N' \times S^1 \times D^2 \cup_{N' \times S^1 \times S^1} N' \times D^2 \times S^1 \simeq N' \times S^3$$

ce qui achève la preuve. \square

Corollaire. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible, et soit N la variété compacte complexe correspondante. Alors il existe une configuration admissible avec pour variété associée $N \times S^1 \times S^3$ (à difféomorphisme près).

Preuve. Soit P le polytope associé de $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$, que nous supposons (m, n, k) . Utilisant les théorèmes 10 et 11, nous pouvons construire une configuration admissible $(m, n + 1, k - 1)$ ayant $P \times [0, 1]$ comme polytope associé. On conclut par la proposition précédente. \square

Remarque. Il est bien entendu très facile de construire une structure complexe sur $N \times S^1 \times S^3$ en prenant le produit de la variété complexe N avec la variété de Hopf $S^1 \times S^3$. Mais, dans le corollaire précédent on construit $N \times S^1 \times S^3$ comme variété complexe associée à un espace de structures complexes (l'espace D de la partie VI) de dimension $m(n - m - 1)$, et il est ainsi possible que certaines de ces structures ne respectent pas holomorphiquement la décomposition produit précédente (cf proposition 1 de la partie VI).

Dans le cas du livre hexagonal (polyèdre obtenu du prisme à base hexagonale en contractant une face rectangulaire sur un segment), nous avons utilisé la formule de Goresky-Mac Pherson pour calculer l'homologie et la conjecture de la partie V pour donner le type difféomorphe de M_1 . Ceci explique le point d'interrogation.

Détaillons maintenant le calcul de l'homologie du livre hexagonal. Nous renvoyons à la partie V où nous expliquons la méthode de [J-O-S] que nous utilisons maintenant. Nous numérotions le livre hexagonal de la façon suivante : 1 et 7 sont les faces hexagonales du livre, et 2, 3, 4, 5 et 6 les autres faces par contiguïté (2 est une face triangulaire, 3 la face rectangulaire contiguë et ainsi de suite). Dans ces conditions, l'on vérifie aisément que $S = \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^7 - F)$ où F est la réunion des sous-espaces vectoriels :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{z_2 = z_4 = 0\} & A_2 &= \{z_2 = z_5 = 0\} & A_3 &= \{z_2 = z_6 = 0\} \\
A_4 &= \{z_3 = z_5 = 0\} & A_5 &= \{z_3 = z_6 = 0\} & A_6 &= \{z_4 = z_6 = 0\} \\
A_7 &= \{z_1 = z_3 = z_7 = 0\} & A_8 &= \{z_1 = z_4 = z_7 = 0\} \\
A_9 &= \{z_1 = z_5 = z_7 = 0\}
\end{aligned}$$

Soit L le poset d'intersection de F et soit W l'ensemble des singletons, paires, triplets, ..., 7-uplets d'entiers compris entre 1 et 7 tous différents. Il y a alors une application naturelle entre W et L , à savoir :

$$\Phi \begin{cases} W & \longrightarrow & L \\ i_1 \dots i_p & \longmapsto & A_{i_1 \dots i_p} = A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_p} \end{cases}$$

Rappelons que chaque élément X de L contribue à la cohomologie de $\mathbb{C}^7 - F$ en fonction du complexe simplicial $K^*(X)$ associé à $\Phi^{-1}(X)$. Dans le tableau page suivante, nous donnons la liste des éléments de L contribuant non trivialement à la cohomologie $H^*(\mathbb{C}^7 - F, \mathbb{Z})$. Il y manque simplement les contributions de 0 et de \mathbb{C}^7 qui donnent \mathbb{Z} respectivement en $H^{10}(\mathbb{C}^7 - F, \mathbb{Z})$ et $H^0(\mathbb{C}^7 - F, \mathbb{Z})$.

Remarquons qu'il s'agit là d'un exemple de la procédure décrite à la proposition 5 de la partie V. Si l'on admet la conjecture de la partie V, alors le type difféomorphe de toute variété M_1 peut être calculé par ordinateur à partir de la seule connaissance du polytope associé. Il suffit pour cela, comme nous l'avons fait dans cet exemple, de numéroter les hyperfaces du polytope associé, d'en déduire S , de factoriser la partie S_0 correspondant au cœur de M_1 , de calculer la cohomologie de S_0 grâce à la formule de Goresky-Mac Pherson. Conformément à la conjecture, cette cohomologie doit être libre et la variété M_1 est alors difféomorphe au produit de la somme connexe de produits de sphères de même cohomologie que S_0 par le produit de sphères de dimension impaire que nous avons factorisé pour obtenir S_0 de S .

Remarque. Ainsi que nous l'avons signalé au cours de la partie V, l'assertion faite dans [LdM1] et [LdM2] et selon laquelle les classes d'homologie de M_1 sont portées par les sous-configurations admissibles minimales et les sous-configurations Poincaré (i.e. complémentaires d'une sous-configuration admissible) maximales n'est plus vraie. On vérifie en effet aisément que, dans l'exemple présenté ici, certaines classes de cohomologie sont portées par des sous-configurations qui ne vérifient pas ces propriétés, par exemple $\{z_2 = z_4 = z_6 = 0\}$.

Produits de sphères.

Comme il a été décrit plus haut, le cas $m = 1$ contient toutes les structures complexes linéaires construites sur les produits de sphères de dimension impaire. En prenant des valeurs de m plus grandes, l'on peut récupérer des structures complexes sur des produits d'un nombre quelconque de sphères de dimension impaire.

Sous-espace	complexe K^*	contribution	* =
A_p ($1 \leq p \leq 6$)	\emptyset	\mathbb{Z}	3
A_p ($7 \leq p \leq 9$)	\emptyset	\mathbb{Z}	5
A_{12}, A_{23}, A_{24}	\emptyset	\mathbb{Z}	4
A_{35}, A_{45}, A_{56}	\emptyset	\mathbb{Z}	4
A_{18}, A_{29}, A_{57}	\emptyset	\mathbb{Z}	6
A_{68}, A_{78}, A_{89}	\emptyset	\mathbb{Z}	6
$\{z_2 = z_4 = z_6 = 0\}$	3 points	\mathbb{Z}^2	4
$\{z_2 = z_3 = z_4 = z_6 = 0\}$	2 points	\mathbb{Z}	5
$\{z_1 = z_2 = z_4 = z_5 = z_7 = 0\}$	2 points	\mathbb{Z}	7
$\{z_1 = z_3 = z_5 = z_7 = 0\}$	3 points	\mathbb{Z}^2	6
$\{z_1 = z_3 = z_4 = z_5 = z_7 = 0\}$	2 points	\mathbb{Z}	7
$\{z_1 = z_3 = z_4 = z_6 = z_7 = 0\}$	2 points	\mathbb{Z}	7
$\{z_1 = z_3 = z_5 = z_6 = z_7 = 0\}$	2 points	\mathbb{Z}	7
$\{z_2 = z_3 = z_5 = z_6 = 0\}$	2 points	\mathbb{Z}	5
$\{z_2 = z_4 = z_5 = z_6 = 0\}$	2 points	\mathbb{Z}	5
$\{z_1 = z_2 = z_3 = z_5 = z_7 = 0\}$	2 points	\mathbb{Z}	7
$\{z_1 = z_2 = z_4 = z_6 = z_7 = 0\}$	2 points	\mathbb{Z}	7

Cohomologie $H^*(N, \mathbb{Z})$ du livre hexagonal.

Proposition 2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit un r -uplet d'entiers p_1, \dots, p_r tel que la somme des p_i soit paire. Alors il existe une configuration admissible $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ telle que la variété N correspondante soit difféomorphe à :

$$(S^1)^{p_1} \times (S^3)^{p_2} \times \dots \times (S^{2r-1})^{p_r}.$$

Preuve. Nous allons construire un polytope qui corresponde à une variété N de ce type. Remarquons que pour cela, il suffit d'avoir :

$$S = (\mathbb{C}^*)^{p_1+1} \times (\mathbb{C}^2 - \{0\})^{p_2} \times \dots \times (\mathbb{C}^r - \{0\})^{p_r}$$

le $p_1 + 1$ provenant du fait que S nous donne directement M_1 et que pour passer à N , il faut alors effacer un S^1 .

Le lemme suivant va nous préciser quels sont les polytopes qui correspondent aux sphères de dimension impaire.

Lemme 1. Soit $l \in \mathbb{N}$. Soit P le simplexe de dimension l . Alors les configurations admissibles de polytope associé P ont pour variété M_1 associée :

$$(S^1)^{2c} \times S^{2l+2} \quad c \in \mathbb{N}$$

Preuve. Soit $l \in \mathbb{N}$ et considérons le simplexe associé. Par le théorème 11, il existe une configuration admissible réduite (m, n, k) ayant ce polytope comme polytope associé. Cette configuration vérifie :

$$\begin{cases} k = 0 \text{ ou } 1 \\ l = n - 2m - 1 \\ l + 1 = n - k \end{cases}$$

ce qui donne :

$$k = 0 \quad n = l + 1 \quad m = 0$$

et dans ce cas la variété N n'est rien d'autre que le quotient de $\mathbb{C}^{l+1} - \{0\}$ par \mathbb{C}^* , i.e. le projectif $\mathbb{C}P^l$ (cf la remarque faite à ce sujet au cours de la preuve du théorème 11). Dans ces conditions la variété M_1 est la sphère S^{2l+1} . Maintenant, par le théorème 10, l'on peut changer de configuration admissible pour obtenir la même variété M_1 modulo un nombre pair de S^1 . \square

Pour obtenir la variété que nous désirons, nous allons, conformément au lemme 1, prendre le polytope produit des simplexes de différentes dimensions que nous nécessitons. Ceci doit se comprendre de la manière suivante : chaque simplexe peut être vu comme l'intersection (formant un compact convexe) de demi-espaces d'un certain \mathbb{R}^p (i.e. parties de \mathbb{R}^p se trouvant d'un côté d'un hyperplan), et nous considérons tout simplement l'intersection de ces demi-espaces, mais épaissis cette fois en demi-espaces du produit libre des \mathbb{R}^p précédents. L'on obtient encore une région intersection de demi-espaces, compacte et convexe, donc il s'agit d'un polytope convexe.

Remarquons que ce polytope est simple. En effet si P est un polytope simple qui vérifie que de chaque sommet partent c arêtes, et si P' est un autre polytope simple vérifiant cette fois que de chaque sommet partent c' arêtes, alors de chaque sommet du polytope produit de P et P' , partent $c + c'$ arêtes, ce qui en fait un polytope simple. Par le théorème 11, il existe une configuration admissible réduite ayant ce polytope comme polytope associé et par le théorème 10, l'on peut lui ajouter des S^1 libres si nécessaire. Comme la somme des p_i est paire, cette démarche est cohérente. Enfin remarquons que l'ouvert S correspondant est le produit libre des ouverts S associés à chaque simplexe, ce qui nous assure que M_1 et donc N sera bien le produit de sphères recherché. \square

Corollaire. Soit $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ une configuration admissible avec au moins un point indispensable et soit N la variété compacte complexe correspondante. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soit un r -uplet d'entiers p_1, \dots, p_r tel que la somme des p_i soit paire. Alors il existe une configuration admissible $(\Lambda'_1, \dots, \Lambda'_n)$ telle que la variété N' correspondante soit difféomorphe à :

$$(S^1)^{p_1} \times (S^3)^{p_2} \times \dots \times (S^{2r-1})^{p_r} \times N.$$

Preuve. Il suffit de faire le produit du polytope associé de N avec le polytope correspondant au produit de sphères donné dans la démonstration de la proposition précédente. \square

Remarque. L'hypothèse selon laquelle il existe un point indispensable est nécessaire en particulier si p_1 est non nul. En effet dans ce cas, s'il n'y a pas de point indispensable, le fibré $M_1 \rightarrow N$ est non trivial, par contre le fibré $M'_1 \rightarrow N'$ l'est puisque p_1 est non nul. Dès lors, le difféomorphisme entre M_1 et M'_1 modulo le produit de sphères impaires ne descend pas en un difféomorphisme entre N et N' modulo le produit de sphères impaires (cf proposition 3 de la partie V).

Remarque. La même remarque que celle que nous avons faite suite à la proposition 1 est valable ici. Il est possible que certaines des structures complexes ainsi construites ne soit pas le produit de la structure complexe de N par des variétés de Hopf (ou Haefliger linéaire) et des variétés de Calabi-Eckmann (ou Loeb-Nicolau linéaire).

Cas López de Medrano-Verjovsky.

En combinant le théorème 10 et le théorème de classification des variétés M_1 pour le cas $m = 1$ donné dans [LdM-Ve] et rappelé plus haut, nous obtenons :

Théorème 14. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p = 2l + 1 \leq n$. Soit une décomposition entière quelconque $n = n_1 + \dots + n_p$.*

Posons enfin $d_1 = n_1 + \dots + n_l, \dots, d_p = n_p + n_1 + \dots + n_{l-1}$.

Alors il existe une structure complexe sur la variété :

$$\left(\prod_{i=1}^p S^{2d_i-1} \times S^{2n-2-2d_i} \right) \times S^1 .$$

Cas des polygones.

Lorsque le polytope associé est un polygone, nous pouvons donner la description exacte de N .

Appelons C_n^p les coefficients binômiaux et notons $(\alpha)S^l \times S^m$ la somme connexe de α copies de $S^l \times S^m$.

Théorème 15. *Soit $p > 3$. Alors il existe une structure complexe sur :*

(i) *la variété $\left(\prod_{j=1}^{p-3} (jC_{p-2}^{j+1})S^{2+j} \times S^{p-j} \right) \times S^1$ si p est impair.*

(ii) *la variété $\prod_{j=1}^{p-3} (jC_{p-2}^{j+1})S^{2+j} \times S^{p-j}$ si p est pair.*

Preuve. Soit $p > 3$. Considérons le p -gone. Par le théorème 11, il existe une configuration admissible réduite (m, n, k) ayant ce p -gone comme polytope associé. On a :

$$\begin{cases} k = 0 \text{ ou } 1 \\ 2 = n - 2m - 1 \\ p = n - k \end{cases}$$

ce qui donne, pour $p = 2q + 1$ impair :

$$k = 0 \quad n = p \quad m = q - 1$$

et M_1 est une variété simplement connexe de dimension réelle $p + 2$ subissant une action lisse et libre du tore réel de dimension p avec p orbites de codimension 2. Utilisant le théorème 3.4 de [McG], il vient :

$$M_1 \simeq \#_{j=1}^{p-3} jC_{p-2}^{j+1} S^{2+j} \times S^{p-j} .$$

et en utilisant le théorème 10, l'on peut trouver une configuration admissible vérifiant $M'_1 \simeq M_1 \times (S^1)^2$ qui donne la variété N voulue.

Pour $p = 2q$ pair, le système précédent donne :

$$k = 1 \quad n = p + 1 \quad m = q - 1$$

et M_1 est difféomorphe à $S^1 \times M_0$, avec M_0 cœur 2-connexe de M_1 . La variété simplement connexe M_0 de dimension réelle $p + 2$ subit une action lisse et libre du tore réel p avec p orbites de dimension p . Dès lors, en appliquant le théorème 3.4 de [McG], l'on obtient :

$$N \simeq M_0 \simeq \#_{j=1}^{p-3} jC_{p-2}^{j+1} S^{2+j} \times S^{p-j} . \quad \square$$

L'on obtient ainsi une famille de variétés compactes complexes qui sont des sommes connexes de produits de sphères. Remarquons que cette somme connexe contient des produits de sphères de dimension paire, ce qui mérite d'être souligné, puisque par [D-S], les seuls produits de sphères de dimension paire admettant une structure presque complexe sont les produits de S^2 et S^6 ainsi que $S^2 \times S^4$.

Remarque. Si la conjecture de la partie V s'avère vraie, toute configuration admissible avec un point indispensable et dont l'ouvert S ne possède pas de composante de type $\mathbb{C}^p - \{0\}$ (pour $p > 1$) donne une variété compacte complexe N qui est une somme connexe de produits de sphères. De plus, conformément à la proposition 5 de la partie V, le calcul du type difféomorphe de N peut se faire sur ordinateur, puisque les conditions citées se lisent directement sur le polytope associé.

BIBLIOGRAPHIE

- [Au] M. Audin, *Exemples de variétés presque complexes*, L'Enseig. Math. **37** (1991), 175–190.
- [B-L] M.M. Bayer, C.W. Lee, *Combinatorial aspects of convex polytopes*, Handbook of convex geometry, Elsevier Sciences Publishers B.V., 1993, pp. 485–534.
- [B-P-V] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer, 1984.
- [B-T] R. Bott, L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 86, Springer, 1986.
- [B-V] E. Brieskorn, A. Van de Ven, *Some complex structures on products of homotopy spheres*, Topology **7** (1968), 389–393.
- [Bl] A. Blanchard, *Sur les variétés analytiques complexes*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **73** (1956), 157–202.
- [Bo] F. Bogomolov, *Complex manifolds and algebraic foliations*, preprint (1996).
- [Bor] C. Borcea, *Some remarks on deformations of Hopf manifolds*, Rev. Roum. Math. pures et appl. **26** (1981), 1287–1294.
- [Br] W. Browder, *Surgery on simply-connected manifolds*, Springer, 1972.
- [C-E] E. Calabi, B. Eckmann, *A class of compact, complex manifolds which are not algebraic*, Ann. Math. **58** (1953), 494–500.
- [C-K-M] H. Clemens, J. Kollar, S. Mori, *Higher dimensional complex geometry*, Astérisque **166** (1988).
- [C-K-P] C. Camacho, N. Kuiper, J. Palis, *The topology of holomorphic flows with singularity*, Publ. math. IHES **48** (1978), 5–38.
- [C-LN] C. Camacho, A. Lins Neto, *Geometric theory of foliations*, Birkhäuser, 1985.
- [Ca] E. Calabi, *Construction and properties of some 6-dimensional almost complex manifolds*, Trans. AMS **87** (1958), 407–438.
- [D-S] B. Datta, S. Subramanian, *Nonexistence of almost complex structures on products of even-dimensional spheres*, Topo. and its appl. **36** (1990), 39–42.
- [De] T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*, Bull. Soc. Math. Fr. **116** (1988), 315–339.
- [Ee-Ve] J. Eells, A. Verjovsky, *Harmonic and riemannian foliations*, Bol. Soc. Mat. Mex. **4** (1997), 1–14.
- [Fr] R. Friedman, *On Threefolds with trivial canonical bundle*, Proc. symp. Pure Math. **53** (1991), 103–134.
- [G-McP] M. Goresky, R. Mac Pherson, *Stratified Morse Theory*, Springer, 1988.
- [G-R] H. Grauert, Remmert, *Theory of Stein spaces*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 236, Springer, 1979.
- [Gr] B. Grünbaum, *Convex polytopes*, pure and applied mathematics series, vol. XVI, Interscience Publishers, 1967.
- [Gro] M. Gromov, *Partial Differential Equations*, Springer, 1986.
- [Gu1] R.C. Gunning, *Lectures on Riemann Surfaces*, Princeton University Press, 1965.
- [Gu2] R.C. Gunning, *Lectures on complex analytic varieties: the local parametrization theorem*, Princeton University Press, 1970.
- [Ha] A. Haefliger, *Deformations of transversely holomorphic flows on spheres and deformations of Hopf manifolds*, Compositio Math. **55** (1985), 241–251.
- [Har] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer, 1977.
- [Has] K. Hasegawa, *Deformations and diffeomorphism types of Hopf manifolds*, Ill. Jour. Math. **37** (1993), 643–651.
- [Hi] H. Hironaka, *Resolution of singularities over a field of characteristic zero*, Ann. Math. **79** (1964), 109–306.
- [Hir] M.W. Hirsch, *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 33, Springer, 1976.
- [Ho] H. Hopf, *Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten*, Studies and essays presented to R. Courant, New York, 1948.
- [J-O-S] K. Jewell, P. Orlik, B.Z. Shapiro, *On the complements of affine subspace arrangements*, Topo. and its appl. **56** (1994), 215–233.
- [Je] K. Jewell, *Complements of sphere and subspace arrangements*, Topo. and its appl. **56** (1994), 199–214.

- [K-Y] M. Kato, A. Yamada, *Examples of simply connected compact complex 3-folds II*, Tokyo J. Math. **9** (1986), 1–28.
- [Ka] M. Kato, *Examples of simply connected compact complex 3-folds*, Tokyo J. Math. **5** (1982), 341–364.
- [Ku] N. Kuiper, *The topology of linear \mathbb{C}^m -flows on \mathbb{C}^n* , Lecture Notes in Mathematics **1007** (1981), 448–462.
- [L-N1] J.J. Loeb, M. Nicolau, *Holomorphic flows and complex structures on products of odd dimensional spheres*, Math. Ann. **306** (1996), 781–817.
- [L-N2] J.J. Loeb, M. Nicolau, *On the complex geometry of a class of non Kählerian manifolds*, preprint Barcelone (1997).
- [L-T] P. Lu, G. Tian, *The complex structures on connected sums of $S^3 \times S^3$* , Manifolds and Geometry, Sym. Math., vol. 36, Cambridge University Press, 1996, pp. 284–293.
- [LdM1] S. López de Medrano, *The space of Siegel leaves of a holomorphic vector field*, Lecture Notes in Mathematics **1345** (1988), 233–245.
- [LdM2] S. López de Medrano, *The topology of the intersection of quadrics in \mathbb{R}^n* , Lecture Notes in Mathematics **1370** (1989), 280–292.
- [LdM-Ve] S. López de Medrano, A. Verjovsky, *A new family of complex, compact, non symplectic manifolds*, Bol. Soc. Mat. Bra. **28**, 2 (1997), 253–269.
- [Le1] F. Lescure, *Sur les compactifications équivariantes des groupes commutatifs*, Ann. Inst. Fourier **38**, 4 (1988), 93–120.
- [Le2] F. Lescure, *Action sur la cohomologie de Dolbeault*, C.R. Acad. Sci. Paris **314** (1992), 923–926.
- [Le-Me] F. Lescure, L. Meersseman, *Une compactification équivariante \bar{X} de $(\mathbb{C}^*)^5$ de variété d’Albanese nulle et $H^0(\bar{X}, d\mathcal{O}_{\bar{X}}) \neq 0$* , en préparation (1998).
- [M-K] J. Morrow, K. Kodaira, *Complex manifolds*, Athena series, Holt, Rinehart and Winston, 1971.
- [Ma1] D. Mall, *On the topology of holomorphic foliations on Hopf manifolds*, Compos. Math. **89** (1993), 243–250.
- [Ma2] D. Mall, *On holomorphic vector bundles on Hopf manifolds with trivial pullback on the universal covering*, Math. Ann. **294** (1992), 719–740.
- [Ma3] D. Mall, *The cohomology of line bundles on Hopf manifolds*, Osaka J. Math. **28** (1991), 999–1015.
- [McG] D. Mac Gavran, *Adjacent connected sums and torus actions*, Trans. of the AMS **251** (1979), 235–254.
- [Me1] L. Meersseman, *Construction de variétés compactes complexes*, C.R. Acad. Sci. Paris **325** (1997), 1005–1008.
- [Me2] L. Meersseman, *A geometric process of construction of compact complex manifolds in any dimension*, preprint Barcelone (1998).
- [Mi] J. Milnor, *Singular points on complex hypersurfaces*, Princeton University Press, 1968.
- [Mo] B. Moishezon, *On n -dimensional compact varieties with n algebraically independent meromorphic functions I, II, III*, AMS translations **63** (1967), 51–177.
- [Mom] A. Morimoto, *On the classification of non compact complex abelian Lie groups*, Trans. AMS **123** (1966), 200–228.
- [Mor] S. Morita, *A topological classification of complex structures on $S^1 \times \Sigma^{2n-1}$* , Topology **14** (1975), 13–22.
- [N-N] A. Newlander, L. Nirenberg, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. Math. **65** (1957), 391–404.
- [Ne] P. Newstead, *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, Tata Institute Lecture Notes, 1978.
- [Od] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, Springer, 1987.
- [Sc] G. Scheja, *Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen*, Math. Ann. **144** (1961), 345–360.
- [St] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, 1951.
- [Su] D. Sundararaman, *Moduli, deformations and classifications of compact complex manifolds*, Pitman, 1980.
- [Ta] C.H. Taubes, *The existence of anti-selfdual conformal structures*, J. Diff. Geom. **36** (1992), 163–253.

- [Wa] C.T.C. Wall, *Stability, pencils and polytopes*, Bull. London Math. Soc. **12** (1980), 401–421.
- [We] R.O. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Prentice Hall, 1973.

Index des Notations

Dans cet index, nous consignons les notations utilisées avec la même signification tout au long de la thèse. Le numéro de page associé localise le *premier* emploi, et donc la définition. Rappelons que d'autres notations sont spécifiées au début de cette thèse.

$\mathcal{C}_{\text{réduites}}$	85	\tilde{G}	21
\mathcal{G}	63	Θ	60
$b_1(N)$	47	N	17
M_0	89	\mathcal{P}	85
n	11	m	11
$h^{1,0}$	42	$h^{0,1}$	42
K_N	107	\mathcal{C}	85
η_j	63	ξ_j	11
G	21	M_1	20
π	21	$\text{Alb}(N)$	42
a	48	D	93
\tilde{J}	83	R	20
V	33	\mathfrak{O}	47
Ω_1	42	$h(N, \mathcal{M})$	107
$\mathcal{H}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$	12	M	17
$h(N, \Theta)$	107	$\tilde{\xi}_j$	42
\mathcal{T}	17	π_0	21
\mathcal{N}	20	\mathcal{O}	42
π_1	24	d	36
Λ_j	11	S	17
α_i	27, 32	k	17
λ_i^j	11	$\tilde{\pi}_0$	33
E	17	\mathcal{P}_0	83
Γ	32	$\tilde{\pi}_1$	36
\mathcal{O}_V	42	$\mathcal{O}_V^{\text{inv}}$	42
\mathcal{O}_{etr}	42	$\tilde{\pi}_1$	65
$\tilde{\eta}_j$	64	\mathcal{C}_0	83
J_0	83	<i>Relint</i>	85
A	27	L	42

Index terminologique

Cœur	89
Condition (H)	51
Condition (K)	70
Condition de Siegel	15
Condition d'hyperbolicité faible	15
Configuration (m, n, k)	80
Configuration admissible	15
Configuration équivalente	77
Configuration réduite	80
Diagramme de Gale	86
Espace de déformations D	94
Espace de modules	95
Espace de modules réduit	95
Feuille de Poincaré	12
Feuille de Siegel	12
Feuilletage transversalement kählérien	63
Groupe de Cousin	23
Point éliminable	17
Point indispensable	17
Polytope associé	25
Sous-variété standard	67
Système (S)	48
Système (SI)	57
Transformation de Gale	86

Table des Matières

INTRODUCTION	1
Plongements de variétés compactes complexes et formulation du problème	2
Variétés compactes complexes et variétés algébriques	3
Actions de groupes. Variétés de Hopf	4
Variétés de Calabi-Eckmann	5
Variétés transverses à un feuilletage holomorphe	6
Variétés de López de Medrano-Verjovsky	7
Variétés complexes et somme connexe	7
Description des résultats obtenus	9
Liens avec Geometric Invariant Theory	10
I. CONSTRUCTION DES VARIÉTÉS	11
Système diagonal de champs de vecteurs linéaires holomorphes	11
Existence de feuilles de Siegel	12
Condition d'hyperbolicité faible	14
Construction de variétés compactes complexes	17
Compactification équivariante	20
Applications projections	21
Polytope associé de M_1	25
II. LA VARIÉTÉ N EST SOIT UN TORE COMPLEXE, SOIT UNE VARIÉTÉ NON SYMPLECTIQUE	26
Le cas $n = 2m + 1$	26
Exemples	30
Action libre	30
Groupe G	32
Le cas $n > 2m + 1$	34
III. FONCTIONS MÉROMORPHES ET FORMES HOLOMORPHES SUR N	41
Caractère algébrique réel de la variété N	41
La variété N n'est pas Moishezon	41
Fonctions méromorphes de N	48
Groupe de Cousin et condition (H)	53

Formes holomorphes de N	57
IV. CHAMPS DE VECTEURS, FEUILLETAGES ET SOUS-VARIÉTÉS HOLOMORPHES DE N	60
Champs de vecteurs holomorphes sur N	60
Feuilletage transversalement kählérien	62
Sous-variétés holomorphes de N	66
Espace quotient N/\mathcal{G}	70
V. ELÉMENTS DE CLASSIFICATION DES VARIÉTÉS N À DIFFÉOMORPHISME PRÈS.	77
Configurations équivalentes	77
Polytopes associés combinatoirement équivalents	78
Théorème de réduction	80
Application \tilde{J}	83
Diagramme de Gale	85
Théorème de réalisabilité	86
Conjecture sur la classification de M_1	88
Homologie de M_0	89
Type difféomorphe de M_0	91
VI. ESPACE DE DÉFORMATIONS DE N ET CONSTRUCTIONS ANNEXES.	93
Variétés N et structures produits	93
L'espace de déformations D	93
Équivalence affine	96
Espace de modules	100
Existence de revêtements ramifiés de N	103
Fibrés holomorphes de fibre N	105
VII. EXEMPLES DE VARIÉTÉS COMPACTES COMPLEXES.	107
Tableaux récapitulatifs	107
Cas $m = 1$	108
Cas $m = 2$ et petites valeurs de n	109
Produits de sphères	114
Cas López de Medrano-Verjovsky	117
Cas des polygones	117
BIBLIOGRAPHIE.	119
INDEX DES NOTATIONS.	122
INDEX TERMINOLOGIQUE.	123
TABLE DES MATIÈRES.	124

