

the 2000 2005

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
U.F.R. DE MATHEMATIQUES

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

Discipline : MATHEMATIQUES

présentée et soutenue publiquement

par

Hervé FOURLINNIE

le 8 décembre 1998

THEOREME DU "EDGE OF THE WEDGE" DANS LES CLASSES ULTRADIFFERENTIABLES

devant le jury composé de

Rapporteur	Mr JACQUES CHAUMAT	(Univ. PARIS XI)
Rapporteur	Mr MAKLOUF DERRIDJ	(Univ. HAUTE NORMANDIE)
Examineur	Mr VINCENT THILLIEZ	(Univ. LILLE 1)
Examinatrice	Mme ANNE DUVAL	(Univ. LILLE 1)
Directrice	Mme ANNE-MARIE CHOLLET	(Univ. LILLE 1)



A ma famille et à mes frères djiboutiens,

Je tiens à remercier très vivement Messieurs les professeurs, membres du jury, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes recherches en acceptant d'examiner cette thèse.

Je tiens, particulièrement, à exprimer ma profonde reconnaissance envers Madame Anne-Marie Chollet qui m'a dirigé dans ce travail. Mme Chollet m'a fait bénéficier de ses précieux conseils en me transmettant le plaisir de faire de la recherche en Mathématiques et en m'avertissant aussi de ses exigences. Je la remercie chaleureusement pour la confiance qu'elle m'a accordée, tout au long de ce travail et pour le soutien qu'elle m'a apporté dans les moments les plus difficiles. Je la remercie enfin de m'avoir encouragé pendant ces quelques années et d'avoir été si disponible, si compréhensive.

Je remercie vivement Monsieur Jacques Chaumat et Monsieur Makloul Derridj, d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. J'ai pu, en particulier, exposer mes problèmes à Monsieur Chaumat qui m'a accueilli avec énormément de gentillesse. Son aide judicieuse m'a également permis d'avancer, de manière importante, dans mon travail.

Je remercie beaucoup Madame Anne Duval et Monsieur Vincent Thilliez pour l'honneur et le plaisir qu'ils me font en acceptant de faire partie du jury de ma thèse.

Je remercie les étudiants, enseignants et chercheurs de l'U.F.R. de Mathématiques et, plus particulièrement l'équipe d'Analyse Complexe dont l'ambiance chaleureuse et sympathique a été un atout supplémentaire pour le travail.

Je remercie également le personnel de reprographie de l'U.F.R. de Mathématiques.

Enfin, j'ai une pensée profonde pour les amis que j'ai rencontrés à Djibouti qui m'ont confirmé, s'il en était besoin, que les mathématiques sont un langage universel qui unit les personnes bien au delà des clivages culturels, religieux et politiques.

INTRODUCTION

Le théorème de l’“Edge of the Wedge” trouve son origine dans des travaux liés à la théorie quantique des champs [Bo].

Le théorème 1 ci-dessous n’est autre que la version classique qui figure dans la monographie rédigée par W. Rudin en 1971 [Ru]. On fixe d’abord quelques notations. Soit Γ , un cône ouvert de $\mathbb{R}^n$ que l’on peut supposer convexe, sans restreindre la généralité. Soit E , un sous-ensemble ouvert non vide contenant 0 dans $\mathbb{R}^n$. On définit :

$$W^+ = E + i\Gamma = \{z = x + iy; x \in E, y \in \Gamma\}$$

$$\text{et } W^- = E - i\Gamma = \{z = x + iy; x \in E, -y \in \Gamma\}.$$

W^+ et W^- sont des coins (wedges, en anglais) opposés ayant pour arête (edge) commune E . On a l’énoncé suivant :

Théorème 1 [Ru]

Soit W^+ et W^- , des coins opposés d’arête commune E , un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors il existe un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbb{C}^n$ tel que toute fonction f , continue sur $W^+ \cup E \cup W^-$ et holomorphe dans chaque coin W^+ et W^- , s’étend en une fonction holomorphe dans Ω .

On notera que Ω ne dépend pas de la fonction f . Ce théorème ne présente évidemment de l’intérêt que si $n > 1$. En effet, si $n = 1$, c’est une conséquence du théorème de Morera.

On donne brièvement une idée de la preuve de W. Rudin, dans le cas $n > 1$. Quitte à effectuer un changement de variables linéaire préservant $\mathbb{R}^n$ et $i\mathbb{R}^n$, on peut se limiter au cas où $\Gamma = \Lambda_0 = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n; y_j > 0, 1 \leq j \leq n\}$.

W. Rudin construit une famille $\phi_z(\lambda)$ de disques analytiques de centre z dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, dépendant holomorphiquement de z , tels que $\phi_z(e^{i\theta})$ appartient à W^+ si $0 < \theta < \pi$, à W^- si $\pi < \theta < 2\pi$ et à E si $\theta = 0$ ou π . De là, il prouve que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[\phi_z(e^{i\theta})] d\theta$$

est holomorphe dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$ et coïncide avec f dans chaque coin W^+ ou W^- .

Il existe aussi d’autres preuves possibles de ce théorème, basées notamment sur la résolution d’un problème de $\bar{\partial}$ [Be].

Dans le cas $n > 1$, on peut présenter plusieurs généralisations du théorème 1.

On peut, par exemple, toujours dans le cadre holomorphe, affaiblir la régularité de f jusqu'à l'arête. La même conclusion subsiste si on suppose, par exemple, que f admet une limite au sens des distributions.

On peut également, ne plus supposer que l'arête est $\mathbb{R}^n$, mais une sous-variété totalement réelle de dimension n de $\mathbb{C}^n$. On en rappelle la définition :

Pour tout point z de $\mathbb{C}^n$, on désigne par J , la structure presque-complexe de $T_z(\mathbb{C}^n)$ (l'espace tangent en z à $\mathbb{C}^n$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$). Une variété E de $\mathbb{C}^n$ est totalement réelle si, en tout point p de E , on a $T_p(E) \cap JT_p(E) = \{0\}$.

Plus généralement, on définit ce qu'on appelle coin de $\mathbb{C}^n$. Soit E , une sous-variété totalement réelle de $\mathbb{C}^n$, de dimension n et p un point de E . On supposera, dans toute la suite, que l'on a $p = 0$ et $T_0(E) = \mathbb{R}^n$.

Pour tout cône ouvert, convexe Γ , de sommet 0 de $\mathbb{R}^n$ et tout $R > 0$, on définit des coins opposés $W^+(E, \Gamma; R)$ et $W^-(E, \Gamma; R)$ par :

$$W^+(E, \Gamma; R) = (E + i\Gamma) \cap B(0, R) \text{ et } W^-(E, \Gamma; R) = (E - i\Gamma) \cap B(0, R).$$

On dit que E est l'arête commune des coins opposés $W^+(E, \Gamma; R)$ et $W^-(E, \Gamma; R)$. On note

$$\bigcup W^\pm(E, \Gamma; R) = W^+(E, \Gamma; R) \cup W^-(E, \Gamma; R).$$

$$\text{et } \overline{\bigcup W^\pm(E, \Gamma; R)} = W^+(E, \Gamma; R) \cup (E \cap B(0, R)) \cup W^-(E, \Gamma; R).$$

Un coin $W'^\pm(E, \Gamma'; R')$ est dit strictement plus petit que $W^\pm(E, \Gamma; R)$ si $\overline{\Gamma'} \setminus \{0\} \subset \Gamma$ et $R' < R$. Pour alléger les notations et lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrit

$$W^\pm = W^\pm(E, \Gamma; R), \bigcup W^\pm = W^+ \cup W^- \text{ et } \overline{\bigcup W^\pm} = W^+ \cup (E \cap B(0, R)) \cup W^-.$$

Un coin $W^\pm(\mathbb{R}^n, \Gamma; R)$ d'arête $\mathbb{R}^n$ est appelé un coin "droit" .

Il est clair que le cas d'une variété E totalement réelle de $\mathbb{C}^n$, de dimension n , réelle analytique se ramène à $\mathbb{R}^n$. Dans le cas contraire, J.-P. Rosay démontre le résultat suivant:

Théorème 2 [R₁]

Soit E , une sous-variété totalement réelle de classe C^1 contenant 0 , de dimension n dans $\mathbb{C}^n$. Soient $W^\pm$, des coins opposés d'arête commune E . Alors, il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}^n$ tel que, toute fonction f , continue sur $\overline{\bigcup W^\pm}$ et holomorphe dans chaque coin W^+ et W^- , s'étend en une fonction holomorphe sur U .

La preuve utilise une technique d'approximation empruntée aux travaux de S. Baouendi et F. Trèves. La donnée f apparaît comme limite uniforme de polynômes holomorphes dans des coins $W'^\pm$, strictement plus petits que $W^\pm$.

J.-P. Rosay construit ensuite une famille de disques analytiques $\phi_z(\lambda)$, dépendant holomorphiquement de z qui, comme dans la preuve du théorème 1, ont leur bord dans

$W^+ \cup E \cup W^-$ et dont les centres remplissent un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$. Le principe du maximum appliqué sur chaque disque établit l'existence du prolongement holomorphe de f dans ce voisinage de l'origine.

D'autres généralisations sont possibles. On peut, par exemple, affaiblir les hypothèses sur la donnée f . J.-P. Rosay remplace l'hypothèse : " f , holomorphe sur $W^+ \cup W^-$ " par " $\bar{\partial}f$, de classe C^∞ dans $W^+ \cup W^-$, jusqu'à l'arête". Il obtient ainsi, ce qu'il appelle une version C^∞ du théorème de l'"Edge of the Wedge".

Théorème 3 [R₂]

Soit E , une sous-variété totalement réelle de classe C^3 contenant 0 de dimension n dans $\mathbb{C}^n$. Soient $W^\pm$, des coins opposés d'arête commune E . Soit f , une fonction continue sur $\overline{\bigcup W^\pm}$. On suppose que $\bar{\partial}f$ (défini au sens des distributions dans $\bigcup W^\pm$) est de classe C^∞ sur $\overline{\bigcup W^\pm}$. Alors, pour tout coin $W'^\pm$ strictement inclus dans $W^\pm$, la restriction de f à $\overline{\bigcup W'^\pm}$ est de classe C^∞ sur $\overline{\bigcup W'^\pm}$.

On notera qu'il s'agit là, comme pour le théorème 2, d'un résultat de nature locale.

Dans sa preuve, J.-P. Rosay fait un large usage de fonctions de troncature de classe C^∞ . Il utilise aussi, les propriétés de régularité locale de l'opérateur $\bar{\partial}$ de Cauchy-Riemann pour montrer que, si l'arête du coin est $\mathbb{R}^n$, le cône $\Gamma = \Lambda_0$ et F_0 , une fonction continue à support compact dans $\overline{\bigcup W^\pm}$ telle que $\bar{\partial}F_0$ est de classe C^1 dans $\overline{\bigcup W^\pm}$; alors, quitte à réduire W^+ et W^- , F_0 est de classe C^1 jusqu'à l'arête. Cela lui permet, dans le cadre général prévu par l'énoncé du théorème 3, quitte à réduire le coin, de conclure que la donnée f est de classe C^1 jusqu'à l'arête. Une itération du processus le conduit alors au résultat.

Dans ce travail, on établit des versions "Carleman" du théorème de l'"Edge of the Wedge". On définit pour cela les classes de Carleman considérées :

Soit f une fonction de classe C^∞ , définie dans $\mathbb{R}^q$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour tout multi-indice $L = (l_1, \dots, l_q)$ de longueur l et tout x de $\mathbb{R}^q$, on note

$$D^L f(x) = \frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_q^{l_q}}(x).$$

On désigne alors par $D^l f$, une dérivée quelconque d'ordre l de f .

Soit $\{M_p\}_{p \geq 0}$, une suite de réels positifs vérifiant les propriétés suivantes :

$$(H_1) \quad M_0 = 1 \text{ et } \{M_p\} \text{ est logarithmiquement convexe,}$$

$$(H_2) \quad \text{il existe } A \geq 1 \text{ tel que pour tout entier naturel } p, \text{ on a } M_{p+1} \leq A^{p+1} M_p.$$

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^q$, on note $C^\infty(\overline{\Omega})$, la classe des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω qui se prolongent continûment ainsi que toutes leurs dérivées sur $\overline{\Omega}$, l'adhérence de

l'ouvert Ω . On définit de la même manière la classe $C^\infty(\overline{\Omega})$ quand Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ en identifiant $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$.

Par extension, on notera $C^\infty(\overline{UW^\pm})$, la classe des fonctions indéfiniment dérivables dans $W^+ \cup W^-$ dont toutes les dérivées se prolongent continûment jusqu'à l'arête. De même, on notera $C(p!M_p ; \overline{UW^\pm})$, la classe de Carleman des fonctions f appartenant à $C^\infty(\overline{UW^\pm})$ et vérifiant la propriété suivante :

il existe des constantes C_1 ($C_1 \geq 0$) et C_2 ($C_2 \geq 1$), telles que l'on ait, pour tout z de $\overline{UW^\pm}$ et tout multi-indice P de longueur p ,

$$| D^P f(z) | \leq C_1 C_2^p p! M_p.$$

Soit f , une fonction de classe C^∞ , définie dans $\mathbb{C}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour tout multi-indice $L = (I, J)$ de $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, de longueur $l = i + j$, où i et j sont respectivement les longueurs de I et J , on note $D^L f(z) = \frac{\partial^l f}{\partial z^I \partial \bar{z}^J}(z)$ et on désigne par $D^l f$ une dérivée quelconque de f , d'ordre l .

En un certain sens, la suite $\{M_p\}$ mesure le défaut d'analyticité de la fonction f sur $\overline{\Omega}$. En effet, les estimations des dérivées d'ordre p , d'une fonction analytique satisfont :

$$| D^P f(x) | \leq C_1 C_2^p p!.$$

On établit, dans un premier temps, une version "Carleman" du théorème de l'Edge of the Wedge, dans le cas particulier où l'arête est $\mathbb{R}^n$:

Théorème 4

Soient $W^\pm$ des coins d'arête commune un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit f , une fonction continue sur $\overline{UW^\pm}$. Soit $\{M_p\}_{p \geq 0}$, une suite de réels vérifiant l'hypothèse (H_1) . On suppose que $\bar{\partial} f$ (défini au sens des distributions dans $\bigcup W^\pm$) appartient à la classe $C(p!M_p ; \overline{UW^\pm})$. Alors, pour tout coin $W'^\pm$ strictement inclus dans $W^\pm$, f appartient à $C(p!M_p ; \overline{UW'^\pm})$.

On peut remarquer que ce théorème est optimal et que les hypothèses sur la suite $\{M_p\}$ sont très faibles. En effet, on ne fait pas d'hypothèse de non quasi-analyticité sur la classe $C(p!M_p)$; ce théorème s'applique donc à des classes ne contenant pas de fonctions à support compact ; par exemple, les classes $C(p!M_p)$ avec $M_p = 1$ ou $M_p = (\ln p)^{\beta p}$, $\beta \leq 1$.

On établit aussi une version "Carleman" dans le cas général où E est une sous-variété totalement réelle de classe C^3 de $\mathbb{C}^n$.

Théorème 5

Soit E , une sous-variété totalement réelle de classe C^3 contenant 0 de dimension n dans $\mathbb{C}^n$. Soient $W^\pm$, des coins opposés d'arête commune E . Soit f , une fonction continue sur $\overline{\bigcup W^\pm}$. Soit $\{M_p\}_{p \geq 0}$, une suite de réels vérifiant les hypothèses (H_1) et (H_2) . On suppose que $\bar{\partial}f$ (défini au sens des distributions dans $\bigcup W^\pm$) appartient à la classe $C(p!M_p; \overline{\bigcup W^\pm})$. Alors, pour tout coin $W'^\pm$ strictement inclus dans $W^\pm$, f appartient à $C(\max(p!^2, p!M_p); \overline{\bigcup W'^\pm})$.

Dans le cas où M_p est supérieur ou égal à $p!$, pour tout p , il n'y a pas de perte de régularité. Dans le cas contraire, on ne sait pas si la perte est due à la méthode et peut être réduite.

Ce travail s'articule en trois parties.

Dans la première partie, on construit des fonctions de troncature de classe C^k adaptées au problème. Pour cela, après avoir introduit une certaine classe de jets de Whitney, les jets de classe $J_{k,B}$ (définition 2.4), on démontre un théorème d'extension de type Whitney pour cette classe (théorème 2.8).

Les fonctions de troncature s'obtiennent alors, en résolvant un problème de recollement de jets (proposition 3.6).

Dans la deuxième partie, on établit le théorème 4. On montre d'abord que f est de classe C^∞ dans des coins plus petits W''^+ et W''^- et que le contrôle des dérivées de f dans $\bigcup W''^\pm$ est de type Carleman, en utilisant les propriétés de $\bar{\partial}f$ (proposition 4.3).

On utilise ensuite, les fonctions de troncature, construites dans la proposition 3.6, afin de se ramener au cas où la fonction f , vérifie les hypothèses du théorème 4 mais est, cette fois, nulle dans $\overline{\bigcup W''^\pm}$, en dehors d'une boule centrée en 0. La formule de Cauchy-Pompéiu appliquée à des disques analytiques triviaux centrés en 0 permet alors, quitte à réduire les coins en $W'^\pm$, d'établir la régularité de f jusqu'à l'arête.

Enfin, la dernière partie est consacrée à la preuve du théorème 5. La difficulté que l'on rencontre ici, provient de la faible régularité imposée à l'arête E (de classe C^3). Une idée naturelle consiste à utiliser le difféomorphisme de classe C^3 et $\bar{\partial}$ -plat sur l'arête, à l'ordre 2 qui, au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, applique la variété totalement réelle E sur $\mathbb{R}^n$. On ramène ainsi, le cas d'un coin "tordu" à celui d'un coin droit. Cette idée utilisée dans la preuve du théorème 3 par J.-P. Rosay nécessite des itérations successives qui, dans le cadre C^∞ ne présente pas de réelles difficultés. Il en va bien autrement ici, dans la mesure où il importe de contrôler méticuleusement dans le "transfert", les estimées sur f et ses dérivées successives. La proposition-clé est la proposition 9.1. Il importe également de mentionner la technique de découpage propre à ce travail. Pour établir dans la preuve du théorème 5 que, pour tout $k \geq 1$, f est de classe C^k , on démontre que pour tout l , $0 \leq l \leq k$, f est de classe C^l et, à cet effet, on applique k fois la proposition 9.1 en tronquant donc à k reprises, la fonction et le coin.

Ce travail a fait l'objet d'une note publiée aux C.R.A.S. [F].

I^{ère} PARTIE : FONCTIONS DE TRONCATURE ADAPTEES

1- Définitions et notations

1.1 Boules et polydisques de $\mathbb{C}^n$

Soit $z = (z_k)_{1 \leq k \leq n} = (x_k + iy_k)_{1 \leq k \leq n}$ appartenant à $\mathbb{C}^n$; on note $z = x + iy$ où x et y appartiennent à $\mathbb{R}^n$. On pose $\Re z = x$ et $\Im z = y$.

La norme de x dans $\mathbb{R}^n$ est donnée par $|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$.

La norme de z dans $\mathbb{C}^n$ est donnée par $|z| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$.

Pour tout réel $r > 0$, on note $B(z, r)$, la boule ouverte de centre z et de rayon r :

$$B(z, r) = \{w \in \mathbb{C}^n ; |w - z| < r\}.$$

On note $\overline{B}(z, r)$, la boule fermée de centre z et de rayon r .

On note $B_{\mathbb{R}^n}(x, r)$, la boule ouverte de centre x et de rayon r :

$$B_{\mathbb{R}^n}(x, r) = \{u \in \mathbb{R}^n ; |u - x| < r\}.$$

On note $\overline{B}_{\mathbb{R}^n}(x, r)$, la boule fermée de centre x et de rayon r .

Pour tout couple de réels strictement positifs r_1 et r_2 , on note $P((x, y); (r_1, r_2))$, le polydisque ouvert de centre $z = x + iy$ et de rayon (r_1, r_2) :

$$P((x, y); (r_1, r_2)) = \{w = u + iv \in \mathbb{C}^n ; |u - x| < r_1, |v - y| < r_2\}.$$

1.2 Jets de Whitney

Soit f une fonction de classe C^∞ , définie dans $\mathbb{R}^q$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour tout multi-indice $L = (l_1, \dots, l_q)$ de longueur l et tout x de $\mathbb{R}^q$, on note

$$D^L f(x) = \frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_q^{l_q}}(x)$$

et on désigne par $D^l f$, une dérivée quelconque d'ordre l de f .

Soit Q un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^q$. Un jet F d'ordre k sur Q est la donnée d'une suite $\{F^J(\zeta); \zeta \in Q, J \in \mathbb{N}^q, |J| \leq k\}$ de fonctions continues sur Q à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour un multi-indice L de longueur $\ell \leq k$ de $\mathbb{N}^q$, on définit la L -ième dérivée du jet F d'ordre k par

$$D^L F = \frac{\partial^\ell F}{\partial x_1^{\ell_1} \dots \partial x_q^{\ell_q}} = \{F^{J+L}(\zeta); \zeta \in Q, J \in \mathbb{N}^q, |L + J| \leq k\}.$$

Pour tout jet F d'ordre k , tout ζ de Q et tout entier $p \leq k$, on définit le polynôme de Taylor de F , pour tout x de $\mathbb{R}^q$, par

$$(1.2.1) \quad T_\zeta^p F(x) = \sum_{J, |J| \leq p} \frac{1}{J!} (x - \zeta)^J F^J(\zeta)$$

et pour tout entier $p \leq k$, pour tout multi-indice J , $|J| \leq p$ et tout (ζ, x) de $Q \times Q$,

$$(1.2.2) \quad R_\zeta^{J,p} F(x) = F^J(x) - \sum_{K; |J+K| \leq p} \frac{1}{K!} (x - \zeta)^K F^{J+K}(\zeta).$$

1.3 Normes de fonctions et de formes linéaires

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et f une fonction appartenant à $C^\infty(\overline{\Omega})$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $|d^l f(x)| = \max_{|L|=l} |D^L f(x)|$ et on note $\|d^l f\|_{\overline{\Omega}} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |d^l f(x)|$.

Si $f = (f_1, \dots, f_{q'})$ où f_k appartient à $C^\infty(\overline{\Omega})$ pour $1 \leq k \leq q'$, on note $\|d^l f\|_{\overline{\Omega}} = \max_{1 \leq k \leq q'} \|d^l f_k\|_{\overline{\Omega}}$.

Soit f , une fonction appartenant à $C^\infty(\overline{\Omega})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$. On conserve les mêmes notations que précédemment en identifiant $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$.

On note pour tout z de Ω , $\overline{\partial} f(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}(z) d\overline{z}_j$ et pour tout l de $\mathbb{N}$,

$|d^l(\overline{\partial} f)(z)| = \max_{|L|=l; 1 \leq j \leq n} \left| D^L \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}(z) \right|$ et $\|d^l(\overline{\partial} f)\|_{\overline{\Omega}} = \sup_{z \in \overline{\Omega}} |d^l(\overline{\partial} f)(z)|$. Afin d'éviter des notations trop lourdes et quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on écrira $\|f\|$ au lieu de $\|f\|_{\overline{\Omega}}$.

2- Théorème d'extension pour les jets de classes $J_{k,B}$

On connaît le théorème d'extension de Whitney pour les jets de classe C^k , définis sur un compact Q de $\mathbb{R}^q$ [Ma]. Dans ce paragraphe, on démontre un théorème d'extension de type Whitney pour une classe de jets particulière, les jets $J_{k,B}$ (définition 2.4). Ce théorème sera très utile pour la construction au paragraphe suivant de fonctions de troncature adaptées.

2.1 Lemme

Soit un entier $q \geq 1$, il existe une constante A_1 telle que, pour tout entier $k \geq 1$ et tout $t > 1$, il existe une fonction $\eta_{k,t}$, de classe C^k dans $\mathbb{R}^q$ et vérifiant :

$$0 \leq \eta_{k,t} \leq 1 \text{ dans } \mathbb{R}^q,$$

$$\eta_{k,t}(x) = 1, \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^q, |x| \leq 1,$$

$$\eta_{k,t}(x) = 0, \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^q, |x| \geq t,$$

pour tout x de $\mathbb{R}^q$ et tout multi-indice J de longueur $j \leq k$, on a :

$$(2.1.1) \quad |D^J \eta_{k,t}(x)| \leq A_1^k \left(\frac{k}{(t-1)} \right)^j.$$

(La constante A_1 ne dépend que de la dimension q de $\mathbb{R}^q$.)

preuve

On peut tout d'abord remarquer qu'il suffit de traiter le cas $q = 1$ et $t = 2$. Le cas général s'en déduit immédiatement par composition avec des fonctions convenables.

1ère étape : On a le résultat très classique suivant :

sous-lemme Soit $(a_i)_{i \geq 0}$, une suite de nombres réels strictement positifs vérifiant $\sum_{i=0}^k a_i \leq 1$. Il existe une fonction φ de classe C^{k-1} dans $\mathbb{R}$ à support dans $[0, 1]$, positive et vérifiant

$$(2.1.2) \quad \int_0^1 \varphi(u) du = 1,$$

$$(2.1.3) \quad |D^j \varphi(u)| \leq 2^j (a_0 \cdots a_j)^{-1} \text{ pour tout } j, 0 \leq j \leq k-1.$$

Preuve Si on note, pour $\beta > 0$, $H_\beta = \frac{1}{\beta} \eta_{[0,\beta]}$, la fonction φ s'obtient comme le produit de convolution $H_{a_0} * \cdots * H_{a_k}$.

2ème étape : Soit θ la fonction définie par

$$(2.1.4) \quad \begin{aligned} \theta(u) &= \varphi(-u-1) \text{ pour } u \text{ dans } [-2, -1], \\ \theta(u) &= -\varphi(u-1) \text{ pour } u \text{ dans } [1, 2], \\ \theta(u) &= 0 \text{ pour } u \text{ dans } \mathbb{R} \setminus [-2, -1] \cup [1, 2]. \end{aligned}$$

La fonction θ est de classe C^{k-1} sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à $k-1$ vérifient les mêmes estimations que les dérivées de φ .

Soit maintenant ψ , la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(2.1.5) \quad \psi(u) = \int_{-\infty}^u \theta(x) dx,$$

ψ est de classe C^k , à support dans $[-2, 2]$ et vérifie

$$(2.1.6) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \psi(u) \leq 1, \\ \psi(u) &= 1 \text{ pour } u \text{ dans } [-1, 1] \\ |D^j \psi(u)| &\leq 2^{j-1} (a_0 \cdots a_{j-1})^{-1} \text{ pour tout } j, 0 < j \leq k. \end{aligned}$$

3ème étape : On pose $a_i = \frac{1}{k+1}$, pour tout i , $0 \leq i \leq k$.

On obtient alors la fonction $\varphi_{k,t}$, définie dans le lemme et pour établir (2.1.1), il suffit de poser $A_1 = 4$.

2.2 Lemme [CC]

Soit un entier $q \geq 1$, il existe des constantes l, a, b et q_0 , strictement positives, $a < 1$, $b > 1$, $l > 1$, q_0 entier, $q_0 > 1$, telles que, si Q est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^q$, il existe une famille de boules $\{B(x_i, r_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- a) $\mathbb{R}^q \setminus Q = \bigcup_i B(x_i, r_i) = \bigcup_i B(x_i, lr_i)$,
- b) si x appartient à une boule $B(x_i, lr_i)$ on a à la fois

$$ar_i \leq d(x, Q) \leq br_i$$

et

$$ad(x, Q) \leq d(x_i, Q) \leq bd(x, Q),$$

où $d(x, \zeta)$ désigne la distance euclidienne de x à ζ et $d(x, Q) = \inf_{\zeta \in Q} d(x, \zeta)$.

- c) Pour chaque j , la même boule $B(x_j, lr_j)$ ne peut couper plus de q_0 boules de la famille $\{B(x_i, lr_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$.

2.3 Lemme

Soit Q , un compact de $\mathbb{R}^q$ et k , un entier, $k \geq 1$; il existe une famille de fonctions $\{\varphi_{k,i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ de classe C^k dans $\mathbb{R}^q$ vérifiant les propriétés suivantes :

- a) $0 \leq \varphi_{k,i} \leq 1$, pour tout i ,
- b) $\text{supp} \varphi_{k,i} \subset B(x_i, lr_i)$, pour tout i ,
- c) $\sum_i \varphi_{k,i}(x) = 1$, pour tout x de $\mathbb{R}^q \setminus Q$,
- d) pour tout entier j , pour tout multi-indice J de longueur j , $j \leq k$ pour tout entier i et pour tout x de $\mathbb{R}^q \setminus Q$, on a :

$$(2.3.1) \quad |D^J \varphi_{k,i}(x)| \leq A_2^k \left(\frac{k}{d(x, Q)} \right)^j.$$

(La constante A_2 ne dépend que de la dimension q de $\mathbb{R}^q$).

preuve

Soit l fixé, vérifiant les propriétés du lemme (2.2). Il existe, d'après le lemme (2.1), une constante A_1 telle que, si à la suite $\{B(x_i, r_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ introduite dans le lemme (2.2), on associe la suite de fonctions $\psi_{k,i}(x)$ de classe C^k dans $\mathbb{R}^q$ définies par :

$$\psi_{k,i}(x) = \eta_{k,l} \left(\frac{x - x_i}{r_i} \right),$$

on ait

$$0 \leq \psi_{k,i}(x) \leq 1,$$

$$\psi_{k,i}(x) = 1, \text{ si } x \text{ appartient à } B(x_i, r_i),$$

$$\psi_{k,i}(x) = 0, \text{ si } x \text{ n'appartient pas à } B(x_i, lr_i).$$

De là, d'après (2.1.1) et les propriétés du recouvrement décrites dans le lemme (2.2), on déduit que, pour tout x de $\mathbb{R}^q$ et tout multi-indice J de longueur j , $j \leq k$, on a :

$$|D^J \psi_{k,i}(x)| \leq A_1^k \left(\frac{k}{r_i(l-1)} \right)^j.$$

On pose

$$\varphi_{k,1} = \psi_{k,1},$$

$$\varphi_{k,2} = \psi_{k,2}(1 - \psi_{k,1}),$$

$$\dots \dots$$

$$\varphi_{k,j} = \psi_{k,j}(1 - \psi_{k,1}) \cdots (1 - \psi_{k,j-1}), \quad j \geq 2.$$

Les fonctions $\varphi_{k,j}$ vérifient clairement les affirmations a) et b) du lemme (2.3).

De plus, on a

$$\varphi_{k,1} + \cdots + \varphi_{k,i} = 1 - (1 - \psi_{k,1})(1 - \psi_{k,2}) \cdots (1 - \psi_{k,i})$$

et

$$\mathbb{R}^q \setminus Q = \bigcup_i B(x_i, r_i).$$

Donc, si x appartient à $\mathbb{R}^q \setminus Q$, il existe i_x tel que x appartienne à $B(x_{i_x}, r_{i_x})$ et donc tel que la fonction ψ_{k,i_x} soit égale à 1 en ce point. De là, on déduit

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_{k,i}(x) = 1, \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}^q \setminus Q.$$

Ceci établit c) en utilisant la propriété (2.2.c) du recouvrement.

Pour prouver d), on utilise l'expression de $\varphi_{k,i}$ et la règle de dérivation d'un produit en remarquant qu'il y a au plus q_0 facteurs différents de 1. On obtient alors

$$|D^J \varphi_{k,i}(x)| \leq (q^3 A_1^{q_0})^k \left(\frac{bk}{(l-1)d(x, Q)} \right)^j.$$

On obtient alors (2.3.1) en posant $A_2 = \frac{bq^3 A_1^{q_0}}{l-1}$.

2.4 Jets de classe $J_{k,B}(Q)$

Soit k , un entier fixé, $k \geq 1$ et B , une constante. Soit Q un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^q$. Un jet F d'ordre k appartient à la classe $J_{k,B}(Q)$ si, pour tout multi-indice J de longueur $j \leq k$ et tout x de Q , on a

$$(2.4.1) \quad |F^J(x)| \leq B^k k^j$$

et si pour tout $p \leq k$ et tout multi-indice J de longueur $j \leq p$ et tout (ζ, x) de $Q \times Q$, on a

$$(2.4.2) \quad |(R_\zeta^{J,p} F)(x)| \leq B^k \frac{k^{p+1}}{(p+1-j)!} |x - \zeta|^{p+1-j}.$$

2.5 Notation

Soit Q un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^q$. Pour tout x de $\mathbb{R}^q$, on note $\hat{x}$ un point de Q tel que $d(x, \hat{x}) = d(x, Q)$.

2.6 Lemme

Soit Q , un compact de $\mathbb{R}^q$, il existe une constante A_3 ne dépendant que de la dimension q de $\mathbb{R}^q$, telle que, pour tout entier $k \geq 1$, toute constante B , pour tout jet F appartenant à $J_{k,B}(Q)$ et tout x de $\mathbb{R}^q$ tel que $d(x, Q) < 1$, le polynôme $T_{\hat{x}}^k F$ vérifie la propriété suivante : pour tout multi-indice J de longueur $j \leq k$, on a

$$(2.6.1) \quad |(D^J T_{\hat{x}}^k F)(x)| \leq (A_3 B)^k k^j.$$

$$(2.6.2) \quad |(D^J T_{\hat{x}}^k F)(x) - F^J(\hat{x})| \leq (A_3 B)^k k^j d(x, Q).$$

N.B. La notation $(D^J T_{\hat{x}}^k F)(x)$ signifie que l'on a calculé la $J^{\text{ème}}$ dérivée du polynôme $t \rightarrow T_{\hat{x}}^k F(t)$ défini en (1.2.1), puis que l'on a évalué cette dérivée au point x .

preuve

Soit J , un multi-indice de longueur j , $j \leq k$. De la définition de $T_{\hat{x}}^k F$, on déduit que

$$(D^J T_{\hat{x}}^k F)(x) = D^J \left(\sum_{P; |P| \leq k} \frac{1}{P!} F^P(\hat{x})(x - \hat{x})^P \right).$$

On a donc

$$(D^J T_{\hat{x}}^k F)(x) = \sum_{P; J \leq P, |P| \leq k} \frac{1}{(P-J)!} (x - \hat{x})^{P-J} F^P(\hat{x})$$

et d'après (2.4.1), on en déduit que l'on a pour tout x de $\mathbb{R}^q$:

$$|(D^J T_{\hat{x}}^k F)(x)| \leq \sum_{P; J \leq P, |P| \leq k} \frac{1}{(P-J)!} |x - \hat{x}|^{P-J} B^k k^P.$$

Or, pour tout multi-indice L de longueur l , on a $1 \leq \frac{l!}{L!} \leq q^l$; on en déduit donc :

$$|(D^J T_{\hat{x}}^k F)(x)| \leq B^k \sum_{P; J \leq P, |P| \leq k} \frac{q^{p-j}}{(p-j)!} d(x, Q)^{p-j} k^p.$$

Pour tout l , le nombre de multi-indices L de longueur l est majoré par q^l . On a donc, quitte à ajouter des termes dans la sommation, pour tout x de $\mathbb{R}^q$ tel que $d(x, Q) < 1$:

$$|(D^J T_{\hat{x}}^k F)(x)| \leq (q^2 B)^k k^j \sum_{p=j}^k \frac{k^{p-j}}{(p-j)!}.$$

Et, puisque $\sum_{p=j}^k \frac{k^{p-j}}{(p-j)!} \leq e^k$, on en déduit :

$$|(D^J T_{\hat{x}}^k F)(x)| \leq (eq^2 B)^k k^j.$$

Ceci établit (2.6.1) avec $A_3 = eq^2$.

Pour établir (2.6.2), on reprend les calculs précédents en ne considérant dans les sommations que les multi-indices P strictement supérieurs à J .

2.7 Lemme

Soit Q , un compact de $\mathbb{R}^q$, il existe une constante A_4 ne dépendant que de la dimension q de $\mathbb{R}^q$, telle que, pour tout entier $k \geq 1$, toute constante B et pour tout jet F appartenant à $J_{k,B}(Q)$, tout couple (ζ_1, ζ_2) de $Q \times Q$, tout x de $\mathbb{R}^q$ et tout multi-indice J de longueur $j \leq k$ on ait :

$$(2.7.1) \quad |D^J(T_{\zeta_1}^k F - T_{\zeta_2}^k F)(x)| \leq (A_4 B)^k k^j (|\zeta_1 - x| + |\zeta_1 - \zeta_2|)^{k+1-j}.$$

Preuve

$$\text{On a } (T_{\zeta_1}^k F - T_{\zeta_2}^k F)(x) = \sum_{P; p \leq k} \frac{(x - \zeta_1)^P}{P!} (R_{\zeta_2}^{P,k} F)(\zeta_1).$$

$$D^J(T_{\zeta_1}^k F - T_{\zeta_2}^k F)(x) = \sum_{P \geq J; p \leq k} \frac{(x - \zeta_1)^{P-J}}{(P-J)!} (R_{\zeta_2}^{P,k} F)(\zeta_1)$$

et on a donc d'après (2.4.2), pour tout x de $\mathbb{R}^q$,

$$\begin{aligned} & |D^J(T_{\zeta_1}^k F - T_{\zeta_2}^k F)(x)| \\ & \leq \sum_{P \geq J; p \leq k} |x - \zeta_1|^{p-j} |\zeta_1 - \zeta_2|^{k+1-p} B^k \frac{k^{k+1}}{(P-J)!(k+1-p)!} \\ & \leq B^k k^j \sum_{p=j}^k \frac{q^{2p-j} k^{k+1-j} |x - \zeta_1|^{p-j} |\zeta_1 - \zeta_2|^{k+1-p}}{(p-j)!(k+1-p)!}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $k^{k+1-j} \leq (k+1-j)!e^k$, on a pour tout x de $\mathbb{R}^q$:

$$|D^J(T_{\zeta_1}^k F - T_{\zeta_2}^k F)(x)| \leq (eBq^2)^k k^j \sum_{p=j}^k \frac{(k+1-j)!}{(p-j)!(k+1-p)!} |x - \zeta_1|^{p-j} |\zeta_1 - \zeta_2|^{k+1-p}.$$

A l'aide de la formule du binôme de Newton, on en déduit pour tout x de $\mathbb{R}^q$:

$$|D^J(T_{\zeta_1}^k F - T_{\zeta_2}^k F)(x)| \leq (eBq^2)^k k^j (|\zeta_1 - x| + |\zeta_1 - \zeta_2|)^{k+1-j}.$$

Ceci établit la proposition avec $A_4 = eq^2$.

On démontre maintenant, le théorème d'extension annoncé. On notera la forme précisée de la majoration des dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k de l'extension $\tilde{F}$ de F .

2.8 Théorème d'extension de Whitney pour les jets de classe $J_{k,B}$

Soit Q , un compact de $\mathbb{R}^q$, il existe une constante A_5 ne dépendant que de la dimension q de $\mathbb{R}^q$, telle que, pour tout entier $k \geq 1$, toute constante B et pour tout jet F appartenant à $J_{k,B}(Q)$, il existe une fonction $\tilde{F}$ de classe C^k dans $\mathbb{R}^q$ telle que l'on ait, pour tout multi-indice P de longueur $p \leq k$ et tout x de Q ,

$$(2.8.1) \quad F^P(x) = D^P \tilde{F}(x)$$

et telle que, pour tout x de $\mathbb{R}^q$, on ait :

$$(2.8.2) \quad |D^P \tilde{F}(x)| \leq (A_5 B)^k k^p.$$

preuve

On considère la famille de boules $B(x_i, lr_i)$, $i \in \mathbb{N}$, introduite dans le lemme (2.2) et la famille de fonctions $\varphi_{k,i}$ introduite dans le lemme (2.3).

On pose, pour tout x de $\mathbb{R}^q \setminus Q$,

$$\tilde{F}(x) = \sum_i \varphi_{k,i}(x) \cdot T_{\tilde{x}_i}^k F(x).$$

La fonction $\tilde{F}$ est clairement de classe C^k sur $\mathbb{R}^q \setminus Q$. On va montrer qu'il existe une constante A_6 telle que, pour tout multi-indice P de longueur $p \leq k$ et tout x de $\mathbb{R}^q \setminus Q$, vérifiant $d(x, Q) < 1$, on ait

$$(2.8.3) \quad \left| D^P(\tilde{F} - T_{\hat{x}}^k F)(x) \right| \leq (A_6 B)^k k^p d(x, Q).$$

On a, pour tout x de $\mathbb{R}^q \setminus Q$,

$$\begin{aligned} D^P \tilde{F}(x) &= D^P \left(\sum_i \varphi_{k,i}(x) \cdot T_{\hat{x}_i}^k F(x) \right) \\ &= \sum_i \sum_{J; 0 \leq J \leq P} \frac{P!}{J!(P-J)!} (D^{P-J} \varphi_{k,i})(x) (D^J T_{\hat{x}_i}^k F)(x). \end{aligned}$$

Et de là, en utilisant (2.2.c) et (2.3.c), on a

$$\begin{aligned} D^P(\tilde{F} - T_{\hat{x}}^k F)(x) &= \\ &= \sum_{0 \leq J \leq P} \frac{P!}{J!(P-J)!} \sum_i (D^{P-J} \varphi_{k,i})(x) (D^J (T_{\hat{x}_i}^k F - T_{\hat{x}}^k F))(x). \end{aligned}$$

Or, d'après (2.7.1), on a

$$\left| D^J (T_{\hat{x}_i}^k F - T_{\hat{x}}^k F)(x) \right| \leq (A_4 B)^k k^j (|\hat{x}_i - x| + |\hat{x}_i - \hat{x}|)^{k+1-j}.$$

Et d'après (2.2.b), on a

$$|\hat{x}_i - x| \leq |\hat{x}_i - x_i| + |x_i - x| \leq d(x_i, Q) + l r_i \leq (b + \frac{l}{a}) d(x, Q)$$

et

$$|\hat{x}_i - \hat{x}| \leq |\hat{x}_i - x| + |x - \hat{x}| \leq (1 + b + \frac{l}{a}) d(x, Q).$$

On pose $A_7 = (1 + 2b + \frac{2l}{a}) > 1$. On a alors, pour tout x de $\mathbb{R}^q \setminus Q$ tel que $d(x, Q) < 1$,

$$(2.8.5) \quad \left| D^J (T_{\hat{x}_i}^k F - T_{\hat{x}}^k F) \right| \leq A_7 (A_4 B A_7)^k k^j d(x, Q)^{k+1-j}.$$

De là, en utilisant (2.2.c), (2.3.1) et (2.8.5), on a :

$$\begin{aligned} &\left| D^P(\tilde{F} - T_{\hat{x}}^k F)(x) \right| \\ &\leq \sum_{0 \leq J \leq P} \frac{P!}{J!(P-J)!} q_0 A_2^k \left(\frac{k}{d(x, Q)} \right)^{p-j} A_7 (A_4 B A_7)^k k^j d(x, Q)^{k+1-j} \\ &\leq q_0 A_7 (A_2 A_4 B A_7)^k k^p d(x, Q)^{k+1-p} \sum_{j=0}^p \frac{p!}{j!(p-j)!} q^{p+j} \\ &\leq q_0 A_7 (2q^2 A_2 A_4 B A_7)^k k^p d(x, Q). \end{aligned}$$

Ceci établit (2.8.3) avec $A_6 = 2q_0q^2A_2A_4A_7^2$.

A l'aide de (2.6.1), on en conclut que, pour tout x de $\mathbb{R}^q \setminus Q$ vérifiant $d(x, Q) < 1$, tout multi-indice P de longueur p , on a :

$$(2.8.6) \quad |D^P \tilde{F}(x)| \leq (A_8 B)^k k^p,$$

où $A_8 = 2 \max(A_3, A_6)$ est une constante ne dépendant que de q .

Soit maintenant ζ un point de Q , on déduit de (2.6.2) et de (2.8.3) que l'on a, pour tout multi-indice P ,

$$\lim_{x \rightarrow \zeta, x \in \mathbb{R}^q \setminus Q} D^P \tilde{F}(x) = F^P(\zeta).$$

On déduit de là que, puisque F est un jet de Whitney de classe C^k sur Q et que toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à k de $\tilde{F}$ se prolongent continûment à $\mathbb{R}^q$, le jet $\tilde{\mathcal{F}}$, défini par :

$$\tilde{\mathcal{F}}^P = D^P \tilde{F} \text{ sur } \mathbb{R}^q \setminus Q$$

$$\text{et } \tilde{\mathcal{F}}^P = F^P \text{ sur } Q$$

est de classe C^k dans $\mathbb{R}^q$. De plus, pour tout x de $\mathbb{R}^q$ et tout multi-indice P de longueur $p \leq k$, on a en posant $A_7 = \max(1, A_8)$,

$$|D^P \tilde{F}(x)| \leq (A_7 B)^k k^p.$$

Ceci établit le théorème, quitte à renommer $\tilde{\mathcal{F}}$ en $\tilde{F}$.

3- Construction de fonctions de troncature de classe C^k

Dans ce paragraphe, on construit, pour tout entier naturel $k \geq 1$, des fonctions de troncature χ_k de classe C^k dont les dérivées d'ordre inférieur ou égal à k vérifient des estimations bien précises et telle que $\bar{\partial}\chi_k$ soit identique à 0 sur $\mathbb{R}^2$ jusqu'à l'ordre $(k-1)$. Pour ce faire, on considère deux jets de $J_{k,B}$, ψ_1 sur $Q_1 = \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 3)$ et ψ_2 sur $Q_2 = \overline{B}(0, 1)$ coïncidant sur $Q_1 \cap Q_2$. Ainsi, en utilisant la transversalité des compacts Q_1 et Q_2 , on construit par recollement un jet sur $Q_1 \cup Q_2$ qu'on étend alors sur $\mathbb{C}^2$ à l'aide du théorème d'extension 2.8.

3.1 Compacts 1-transverses

Deux compacts Q_1 et Q_2 de $\mathbb{R}^q$, sont dits 1-transverses si il existe un ouvert Ω , contenant $Q_1 \cup Q_2$ tel que l'on ait :

$$\text{pour tout } x \text{ de } \Omega, \quad d(x, Q_1 \cap Q_2) \leq d(x, Q_1) + d(x, Q_2).$$

Ceci est un cas très particulier de la régulière situation de Lojasiewicz.

3.2 Lemme de recollement et d'extension

Soient Q_1 et Q_2 , deux compacts 1-transverses de $\mathbb{C}^2$. Il existe une constante A_9 telle que pour tout entier naturel $k \geq 1$, toute constante B et pour tout jet ψ_1 appartenant à $J_{k,B}(Q_1)$ vérifiant $\psi_1 \equiv 0$ sur $Q_1 \cap Q_2$, il existe une fonction φ_k , de classe C^k dans $\mathbb{C}^2$, telle que,

$\varphi_k \equiv \psi_1$ sur Q_1 et $\varphi_k \equiv 0$ sur Q_2 , au sens des jets, à l'ordre k .

De plus, pour tout z de $\mathbb{C}^2$ et tout multi-indice J de longueur $j \leq k$, on a :

$$(3.2.1) \quad |D^J \varphi_k(z)| \leq (A_9 B)^k k^j.$$

(La constante A_9 ne dépend que de la dimension de $\mathbb{C}^2$.)

preuve

On montre tout d'abord que le jet ψ d'ordre k , défini sur $Q_1 \cup Q_2$ par :

$$\psi = \{(\psi)^J(\zeta), \zeta \in Q_1 \cup Q_2 ; \psi^J = \psi_1^J \text{ sur } Q_1, \psi^J = 0 \text{ sur } Q_2 ; J \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2, |J| \leq k\},$$

suite de fonctions continues sur $Q_1 \cup Q_2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, appartient à la classe $J_{k,5B}(Q_1 \cup Q_2)$, définie en (2.4) :

En premier lieu, on contrôle les dérivées de ψ d'ordre inférieur ou égal à k . Pour tout multi-indice J de longueur $j \leq k$ et tout z de $Q_1 \cup Q_2$, on a :

$$(3.2.2) \quad |\psi^J(z)| \leq B^k k^j,$$

puisque ψ_1 appartient à $J_{k,B}(Q_1)$ et que ψ est identique à 0 sur Q_2 .

En second lieu, on contrôle, pour tout (ζ, z) de $(Q_1 \cup Q_2)^2$, tout $q \leq k$ et tout multi-indice J de longueur $j \leq q$, les restes $R_\zeta^{J,q} \psi$, définis en (2.4.2). Pour tout couple (ζ, z) appartenant à $Q_1 \times Q_1$, on a :

$$(3.2.3) \quad |R_\zeta^{J,q} \psi(z)| \leq B^k \frac{k^{q+1}}{(q+1-j)!} |z - \zeta|^{q+1-j},$$

puisque ψ_1 appartient à $J_{k,B}(Q_1)$.

Pour tout couple (ζ, z) appartenant à $Q_2 \times Q_2$, on a :

$$(3.2.4) \quad |R_\zeta^{J,q} \psi(z)| = 0,$$

puisque ψ est identique à 0 sur Q_2 .

Pour tout couple (ζ_2, z_1) de $Q_2 \times Q_1$, on a :

$$R_{\zeta_2}^{J,q} \psi(z_1) = \psi^J(z_1) - \sum_{P, |J+P| \leq q} \frac{1}{P!} (z_1 - \zeta_2)^P \psi^{J+P}(\zeta_2).$$

Soit z_2 , un point de $Q_1 \cap Q_2$ vérifiant $|z_2 - z_1| = d(z_1, Q_1 \cap Q_2)$. On a alors, étant donné que ψ est identique à 0 sur Q_2 ,

$$R_{\zeta_2}^{J,q} \psi(z_1) = \psi^J(z_1) = R_{z_2}^{J,q} \psi_1(z_1).$$

Ainsi, puisque ψ_1 appartient à la classe $J_{k,B}(Q_1)$, on en déduit que pour tout (ζ_2, z_1) de $Q_2 \times Q_1$, on a :

$$|R_{\zeta_2}^{J,q} \psi(z_1)| \leq B^k \frac{k^{q+1}}{(q+1-j)!} |z_1 - z_2|^{q+1-j}.$$

Les compacts Q_1 et Q_2 étant 1-transverses, on a :

$$|z_2 - z_1| = d(z_1, Q_1 \cap Q_2) \leq d(z_1, Q_2) \leq |\zeta_2 - z_1|.$$

Finalement, on a donc pour tout (ζ_2, z_1) de $Q_2 \times Q_1$:

$$(3.2.5) \quad |R_{\zeta_2}^{J,q} \psi(z_1)| \leq B^k \frac{k^{q+1}}{(q+1-j)!} |z_1 - \zeta_2|^{q+1-j}.$$

Pour tout couple (ζ_1, z_2) de $Q_1 \times Q_2$, on a :

$$R_{\zeta_1}^{J,q} \psi(z_2) = \psi^J(z_2) - \sum_{P, |J+P| \leq q} \frac{1}{P!} (\zeta_1 - z_2)^P \psi^{J+P}(\zeta_1).$$

Or, comme $\psi \equiv 0$ sur Q_2 , on a :

$$R_{\zeta_1}^{J,q} \psi(z_2) = -T_{\zeta_1}^{q-j} \psi^J(z_2).$$

Soit ζ_2 , un point de $Q_1 \cap Q_2$ vérifiant : $|\zeta_2 - \zeta_1| = d(\zeta_1, Q_1 \cap Q_2)$. Comme on a évidemment $T_{\zeta_2}^{q-j} \psi^J(z_2) = 0$, on en déduit :

$$R_{\zeta_1}^{J,q} \psi(z_2) = T_{\zeta_2}^{q-j} \psi^J(z_2) - T_{\zeta_1}^{q-j} \psi^J(z_2).$$

Ainsi, on en déduit :

$$R_{\zeta_1}^{J,q} \psi(z_2) = - \sum_{P, |P| \leq q-j} \frac{1}{P!} (z_2 - \zeta_1)^P R_{\zeta_2}^{P, q-j} \psi^J(\zeta_1).$$

$$R_{\zeta_1}^{J,q} \psi(z_2) = - \sum_{P, |P| \leq q-j} \frac{1}{P!} (z_2 - \zeta_1)^P R_{\zeta_2}^{J+P, q} \psi(\zeta_1).$$

Puisque ψ_1 appartient à $J_{k,B}(Q_1)$, on obtient alors :

$$|R_{\zeta_1}^{J,q} \psi(z_2)| \leq \sum_{p=0}^{q-j} \frac{4^p |z_2 - \zeta_1|^p}{p!} B^k \frac{k^{q+1}}{(q+1-p-j)!} |\zeta_2 - \zeta_1|^{q+1-p-j}.$$

De plus, les compacts Q_1 et Q_2 étant 1-transverses, on a :

$$| \zeta_2 - \zeta_1 | = d(\zeta_1, Q_1 \cap Q_2) \leq d(\zeta_1, Q_2) \leq | z_2 - \zeta_1 |.$$

On en déduit donc :

$$| R_{\zeta_1}^{J,q} \psi(z_2) | \leq B^k k^{q+1} | z_2 - \zeta_1 |^{q+1-j} \sum_{p=0}^{q-j} \frac{4^p}{p!(q+1-p-j)!}.$$

$$| R_{\zeta_1}^{J,q} \psi(z_2) | \leq B^k \frac{k^{q+1}}{(q+1-j)!} | z_2 - \zeta_1 |^{q+1-j} \sum_{p=0}^{q-j} \frac{(q+1-j)!}{p!(q+1-p-j)!} 4^p.$$

Ainsi, on a finalement pour tout (ζ_1, z_2) de $Q_1 \times Q_2$:

$$(3.2.6) \quad | R_{\zeta_1}^{J,q} \psi(z_2) | \leq (5B)^k \frac{k^{q+1}}{(q+1-j)!} | z_2 - \zeta_1 |^{q+1-j}.$$

D'après (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5) et (3.2.6), on a donc pour tout (ζ, z) de $(Q_1 \cup Q_2) \times (Q_1 \cup Q_2)$

$$(3.2.7) \quad | R_{\zeta}^{J,q} \psi(z) | \leq (5B)^k \frac{k^{q+1}}{(q+1-j)!} | z - \zeta |^{q+1-j}.$$

D'après (3.2.2) et (3.2.7), le jet ψ appartient alors à $J_{k,5B}(Q_1 \cup Q_2)$. D'après le théorème (2.8) d'extension de Whitney pour les jets de classe $J_{k,5B}$, on en déduit qu'il existe une fonction φ_k , de classe C^k dans $\mathbb{C}^2$ vérifiant pour tout multi-indice P , de longueur $p \leq k$,

$$D^P \varphi_k = D^P \psi_1 \text{ sur } Q_1 \text{ et } D^P \varphi_k = 0 \text{ sur } Q_2.$$

De plus, il existe une constante A_5 telle que pour tout multi-indice J de longueur $j \leq k$ et tout z de $Q_1 \cup Q_2$, on ait :

$$| D^J \varphi_k(z) | \leq (5A_5 B)^k k^j.$$

φ_k vérifie donc les conditions du sous-lemme, en posant $A_9 = 5A_5$.

3.3 Lemme

Il existe une constante absolue A_{10} telle que pour tout entier $k \geq 1$, il existe un jet ψ_1 appartenant à $J_{k,A_{10}}(Q_1)$, où $Q_1 = \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0,3)$ est considéré comme compact de $\mathbb{C}^2$, vérifiant les propriétés suivantes :

$$\psi_1(x) = 1, \text{ pour tout } x \text{ de } \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0,1).$$

$$\psi_1(x) = 0, \text{ pour tout } x \text{ de } \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0,3) \setminus \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0,2).$$

$$\overline{\partial} \psi_1 \equiv 0, \text{ à l'ordre } (k-1) \text{ sur } Q_1 = \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0,3).$$

preuve

Pour construire un tel jet, on considère une fonction φ_1 , de classe C^{k+1} , définie dans $\mathbb{R}^2$ et vérifiant :

$$0 \leq \varphi_1 \leq 1,$$

$$\varphi_1(x) = 1, \text{ pour tout } x \text{ de } \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 1),$$

$$\varphi_1(x) = 0, \text{ pour tout } x \text{ hors de } \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 2).$$

Il existe une constante A_{11} telle que pour tout x de $\mathbb{R}^2$ et pour tout multi-indice J de $\mathbb{N}^2$, de longueur $j \leq k + 1$, on ait :

$$(3.3.2) \quad |D_x^J \varphi_1(x)| \leq A_{11}^k k^j.$$

On construit une telle fonction en appliquant le lemme 2.1 à $t = 2$ et $q = 2$.

La fonction φ_1 définit un jet ϕ_1 de classe C^k sur Q_1 , où Q_1 est considéré comme compact de $\mathbb{R}^2$:

$$\phi_1 = \{D^J \varphi_1(x) ; x \in Q_1, J \in \mathbb{N}^2, j \leq k\}.$$

On complète ce jet en un jet ψ_1 de Q_1 , considéré comme compact de $\mathbb{C}^2$ de sorte que l'on ait $\bar{\partial}\psi_1 \equiv 0$ à l'ordre $(k - 1)$ sur Q_1 . Pour cela, on pose pour tout x de Q_1 , pour tout multi-indice $J = (J_x, J_y)$ de $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ de longueur $j = j_x + j_y$:

$$(3.3.3) \quad \psi_1^J(x) = (i)^{j_y} D_x^{J_x + J_y} \varphi_1(x).$$

Ainsi, le jet ψ_1 est entièrement déterminé sur Q_1 . De plus, on a, pour tout x de Q_1 et tout multi-indice $J = (J_x, J_y)$ de longueur $j \leq k$,

$$(3.3.4) \quad |\psi_1^J(x)| \leq |D_x^{J_x + J_y} \varphi_1(x)| \leq A_{11}^k k^j,$$

d'après (3.3.2) et pour tout (ζ, x) de $Q_1 \times Q_1$, tout $q \leq k$ et tout multi-indice $J = (J_x, J_y)$ de $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$, de longueur $j \leq q$, on a :

$$R_\zeta^{J,q} \psi_1(x) = \psi_1^J(x) - \sum_{P, |J+P| \leq q} \frac{1}{P!} (x - \zeta)^P \psi_1^{J+P}(\zeta).$$

D'après (3.3.3), on a donc :

$$R_\zeta^{J,q} \psi_1(x) = (i)^{j_y} \left(D_x^{J_x + J_y} \varphi_1(x) - \sum_{P_x, |J+P_x| \leq q} \frac{1}{P_x!} (x - \zeta)^{P_x} D_x^{J_x + J_y + P_x} \varphi_1(\zeta) \right).$$

$$R_{\zeta}^{J,q}\psi_1(x) = (i)^{j_y} \left(D_x^{J_x+J_y}\varphi_1(x) - \sum_{P_x, |P_x| \leq q-j} \frac{1}{P_x!} (x-\zeta)^{P_x} D_x^{P_x} (D_x^{J_x+J_y}\varphi_1)(\zeta) \right).$$

Ainsi, le reste $R_{\zeta}^{J,q}\psi_1(x)$ est contrôlé par un reste de Taylor à l'ordre $(q-j)$ de la fonction de classe $C^{q+1-j} : D_x^{J_x+J_y}\varphi_1$. On a donc pour tout (ζ, x) de $Q_1 \times Q_1$ et tout multi-indice J de longueur $j \leq q$:

$$| R_{\zeta}^{J,q}\psi_1(x) | \leq \sum_{P_x, |P_x|=q+1-j} \frac{1}{P_x!} |x-\zeta|^{P_x} \sup_{|w-x| \leq |\zeta-x|} | D_x^{j+P_x}\varphi_1(w) |.$$

$$| R_{\zeta}^{J,q}\psi_1(x) | \leq \frac{4^{q+1-j}}{(q+1-j)!} |x-\zeta|^{q+1-j} \sup_{|w-x| \leq |\zeta-x|} | D_x^{q+1}\varphi_1(w) |.$$

$$| R_{\zeta}^{J,q}\psi_1(x) | \leq \frac{4^{q+1-j}}{(q+1-j)!} |x-\zeta|^{q+1-j} A_{11}^k k^{q+1}.$$

Finalement, on a, en posant $A_{10} = 16A_{11}$, pour tout (ζ, x) de $Q_1 \times Q_1$, tout $q \leq k$ et tout multi-indice J de longueur $j \leq q$:

$$(3.3.5) \quad | R_{\zeta}^{J,q}\psi_1(x) | \leq A_{10}^k \frac{k^{q+1}}{(q+1-j)!} |x-\zeta|^{q+1-j}.$$

Ainsi, d'après (3.3.4) et (3.3.5), le jet ψ_1 appartient à $J_{k,A_{10}}(Q_1)$.

3.4 Lemme

Les compacts de $\mathbb{C}^2$: $Q_1 = \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 3)$ et $Q_2 = \overline{B}(0, 1)$ sont 1-transverses.

preuve

Soit Ω , un ouvert contenant $Q_1 \cup Q_2$. On montre que, pour tout ζ de Ω , on a :

$$(3.4.1) \quad d(\zeta, Q_1 \cap Q_2) \leq d(\zeta, Q_1) + d(\zeta, Q_2).$$

Soit $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ appartenant à Ω .

$$(3.4.2) \quad \text{Si } |\Re \zeta| \leq 1, \text{ alors on a } d(\zeta, Q_1 \cap Q_2) = d(\zeta, Q_1).$$

Dans ce cas, la propriété (3.4.1) est vérifiée.

Si $|\Re \zeta| > 1$, alors on a $d(\zeta, Q_1) \geq |\Im \zeta|$ puisque $|\Im \zeta|$ représente la distance du point ζ au plan $\mathbb{R}^2$.

On a aussi $d(\zeta, Q_2) = |\zeta| - 1$ et on a $d(\zeta, Q_1 \cap Q_2) = \sqrt{|\Im \zeta|^2 + (|\Re \zeta| - 1)^2}$.

Dans ce cas, on a donc :

$$(3.4.3) \quad d(\zeta, Q_1 \cap Q_2)^2 = |\Im \zeta|^2 + (|\Re \zeta| - 1)^2 \leq d(\zeta, Q_1)^2 + d(\zeta, Q_2)^2.$$

Ainsi, d'après (3.4.2) et (3.4.3), la propriété (3.4.1) est vérifiée pour tout ζ de Ω ; les compacts Q_1 et Q_2 sont alors 1-transverses.

3.5 Proposition

Il existe une constante absolue A_{12} telle que pour tout entier naturel $k \geq 1$, il existe une fonction φ_k , de classe C^k dans $\mathbb{C}^2$ et vérifiant :

$$\varphi_k(z) = 1, \text{ pour tout } z \text{ de } \overline{B}(0, 1),$$

$$\varphi_k(z) = 0, \text{ pour tout } z \text{ de } \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 3) \setminus \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 2),$$

$$\overline{\partial}\varphi_k \equiv 0, \text{ à l'ordre } (k-1) \text{ sur } \overline{B}_{\mathbb{R}^2}(0, 3),$$

pour tout z de $\mathbb{C}^2$ et pour tout J de $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$, de longueur $j \leq k$, on a

$$(3.5.1) \quad |D^J \varphi_k(z)| \leq A_{12}^k k^j.$$

preuve

Soit ψ_1 , le jet appartenant à $J_{k, A_{10}}(Q_1)$, défini dans le lemme (3.3) et ψ_2 , le jet défini sur $Q_2 = \overline{B}(0, 1)$ par $\psi_2 \equiv 1$.

On considère les jets $\tilde{\psi}_1$ et $\tilde{\psi}_2$ définis respectivement sur Q_1 et Q_2 par $\tilde{\psi}_1 \equiv \psi_1 - 1$ sur Q_1 et $\tilde{\psi}_2 \equiv 0$ sur Q_2 ; par construction, $\psi_1 \equiv 0$ sur $Q_1 \cap Q_2$.

D'après le lemme (3.4), les compacts Q_1 et Q_2 sont 1-transverses. D'après le lemme (3.2) de recollement et d'extension, on en déduit alors qu'il existe une fonction $\tilde{\varphi}_k$, de classe C^k et vérifiant :

$$(3.5.2) \quad \tilde{\varphi}_k \equiv \tilde{\psi}_1 \text{ sur } Q_1 \text{ et } \tilde{\varphi}_k \equiv 0 \text{ sur } Q_2, \text{ au sens des jets.}$$

De plus, il existe une constante A_9 telle que, pour tout z de $\mathbb{C}^2$ et tout multi-indice J de longueur $j \leq k$, on ait :

$$(3.5.3) \quad |D^J \tilde{\varphi}_k(z)| \leq (A_9 A_{10})^k k^j.$$

Alors, d'après (3.5.2) et (3.5.3), la fonction $\varphi_k = \tilde{\varphi}_k + 1$ vérifie bien les conditions de la proposition 3.5 avec $A_{12} = A_9 A_{10}$.

Il s'agit maintenant de construire à partir de φ_k , les fonctions de troncature désirées, c'est l'objet de la proposition suivante :

3.6 Proposition

Il existe une constante A_{13} telle que pour tout entier $k \geq 1$ et tout réel $t > 1$, il existe une fonction $\chi_k = \chi_{k,t}$, de classe C^k dans $\mathbb{C}^2$ et vérifiant :

$$\chi_k(z) = 1, \text{ pour tout } z \text{ de } \overline{B}(0,1),$$

$$\chi_k(z) = 0, \text{ pour tout } z \text{ hors de } \overline{B}(0,t),$$

$$\overline{\partial}\chi_k \equiv 0, \text{ à l'ordre } (k-1) \text{ sur } \mathbb{R}^2,$$

pour tout multi-indice J de $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ de longueur $j \leq k$ et tout z de $\mathbb{C}^2$, on a

$$(3.6.1) \quad |D^J \chi_k(z)| \leq A_{13}^k \left(\frac{k}{t-1} \right)^j.$$

Pour tout multi-indice Q de longueur $q \leq k-1$ et pour tout z de $\mathbb{C}^2$, on a

$$(3.6.2) \quad \left| D^Q \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial \overline{z}_j} \right) (z) \right| \leq 4^k \frac{|y|^{k-1-q}}{(k-1-q)!} \sup_{|w-x| \leq |y|} |d^{k-1}(\overline{\partial}\chi_k)(w)|.$$

preuve

On effectue la preuve pour $t = 3$. Considérons d'une part, une fonction η_k , de classe C^k dans $\mathbb{C}^2$, vérifiant :

$$\eta_k(z) = 1, \text{ pour tout } z \text{ de } \overline{B}(0,2),$$

$$\eta_k(z) = 0, \text{ pour tout } z \text{ hors de } \overline{B}(0,3),$$

il existe une constante A_{14} telle que pour tout z de $\mathbb{C}^2$ et tout multi-indice J , de longueur $j \leq k$, on ait :

$$(3.6.3) \quad |D^J \eta_k(z)| \leq A_{14}^k k^j.$$

Une telle fonction s'obtient en appliquant le lemme (2.1). Considérons d'autre part, la fonction φ_k , définie dans le lemme (3.5). La fonction χ_k définie dans $\mathbb{C}^2$ par : $\chi_k = \varphi_k \eta_k$ vérifie alors la propriété (3.6.1) avec $A_{13} = A_{12} A_{14}$.

Soit $z = (z_1, z_2)$ appartenant à $B(0,3)$. On considère la fonction $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$

$$\tau \rightarrow (x_1 + i\tau y_1, x_2 + i\tau y_2).$$

Soit Q , un multi-indice de $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$, on applique la formule de Taylor à la fonction $D^Q \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial \overline{z}_j} \right) \circ \omega$, définie dans $\mathbb{R}$, à l'ordre $(k-1-q)$ en 0, on a :

$$\begin{aligned} \left| D^Q \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial \overline{z}_j} \right) \circ \omega(1) \right| &\leq \left| D^Q \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial \overline{z}_j} \right) \circ \omega(0) \right| + \dots \\ &+ \frac{1}{(k-2-q)!} \left| \frac{\partial^{k-2-q}}{\partial \tau^{k-2-q}} \left(D^Q \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial \overline{z}_j} \right) \circ \omega \right) (0) \right| \\ &+ \frac{1}{(k-1-q)!} \sup_{\tau \in [0,1]} \left| \frac{\partial^{k-1-q}}{\partial \tau^{k-1-q}} \left(D^Q \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial \overline{z}_j} \right) \circ \omega \right) (\tau) \right|. \end{aligned}$$

On en déduit, puisque $\bar{\partial}\chi_k = 0$ sur $\mathbb{R}^2$, à l'ordre $(k-1)$, que pour tout $z = (z_1, z_2)$ de $B(0, 3)$, on a :

$$\left| D^Q \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial \bar{z}_j} \right) \circ \omega(1) \right| \leq \frac{1}{(k-1-q)!} \sup_{\tau \in [0,1]} \left| \frac{\partial^{k-1-q}}{\partial \tau^{k-1-q}} \left(D^Q \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial \bar{z}_j} \right) \circ \omega \right) (\tau) \right|.$$

Or, on a pour tout τ de $[0, 1]$:

$$\frac{\partial^{k-1-q}}{\partial \tau^{k-1-q}} \left(D^Q \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial \bar{z}_j} \right) \circ \omega \right) (\tau) = \sum_{L, |L|=k-1-q} D^{L+Q} \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial \bar{z}_j} \right) (x + i\tau y) \cdot [w'(\tau)]^{k-1-q}.$$

On en déduit donc que pour tout z de $B(0, 3)$, on a :

$$\left| \frac{\partial^{k-1-q}}{\partial \tau^{k-1-q}} \left(D^Q \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial \bar{z}_j} \right) \circ \omega \right) (\tau) \right| \leq (4 |y|)^{k-1-q} \sup_{|w-x| \leq |y|} |d^{k-1}(\bar{\partial}\chi_k)(w)|.$$

Ce qui est aussi vrai pour tout z de $\mathbb{C}^2$ puisque $\chi_k \equiv 0$ en dehors de $\bar{B}(0, 3)$. On a donc pour tout multi-indice Q de longueur $q \leq k-1$ et tout z de $\mathbb{C}^2$:

$$\left| D^Q \left(\frac{\partial \chi_k}{\partial \bar{z}_j} \right) (z) \right| \leq 4^k \frac{|y|^{k-1-q}}{(k-1-q)!} \sup_{|w-x| \leq |y|} |d^{k-1}(\bar{\partial}\chi_k)(w)|.$$

Ceci établit (3.6.2).

II^{ème} PARTIE : CAS OU L'ARETE EST $\mathbb{R}^n$.

4- Estimations des dérivées d'une fonction définie dans des coins

Les résultats des paragraphes suivants sont énoncés dans $\mathbb{C}^2$. Sans perdre la généralité, de la même manière que dans [Ru], on suppose que la fonction F_0 donnée est définie sur les coins $\cup W^\pm(\mathbb{R}^2, \Lambda_0; R_0)$ où Λ_0 a été défini dans l'introduction et $R_0 > 0$. On montre dans ce paragraphe, sous les hypothèses du théorème 4 de l'introduction, que pour tout α , $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, F_0 est de classe C^∞ sur les coins $\cup W^\pm(\mathbb{R}^2, \Lambda_\alpha; R_0(1 - \sin \alpha))$, où $\Lambda_\alpha = \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2; 0 < y_1 \tan \alpha < y_2 < \frac{y_1}{\tan \alpha} \right\}$ est un cône strictement inclus dans Λ_0 , c'est à dire $\overline{\Lambda_\alpha} \setminus \{0\} \subset \Lambda_0$. On donne de plus, une estimation des dérivées de F_0 sur cet ensemble. Pour ce faire, on utilisera les propriétés de régularité de $\bar{\partial} F_0$. On donne avant tout une définition des classes de Carleman.

4.1 Classes de Carleman

On note $C^\infty(\overline{\cup W^\pm})$, la classe des fonctions indéfiniment dérivables dans $W^+ \cup W^-$ dont toutes les dérivées se prolongent continûment jusqu'à l'arête.

Soit $\{M_p\}_{p \geq 0}$, une suite de réels positifs vérifiant les propriétés suivantes :

$$(H_1) \quad M_0 = 1 \text{ et } \{M_p\} \text{ est logarithmiquement convexe,}$$

$$(H_2) \quad \text{il existe } A \geq 1 \text{ tel que pour tout entier naturel } p, \text{ on a } M_{p+1} \leq A^{p+1} M_p.$$

On note $C(p!M_p; \overline{\cup W^\pm})$, la classe de Carleman des fonctions f appartenant à $C^\infty(\overline{\cup W^\pm})$ et vérifiant la propriété suivante :

il existe des constantes C_1 ($C_1 \geq 0$) et C_2 ($C_2 \geq 1$), telles que l'on ait, pour tout z de $\overline{\cup W^\pm}$ et tout multi-indice P de longueur p ,

$$| D^P f(z) | \leq C_1 C_2^p p! M_p.$$

Soit f , une fonction de classe C^∞ , définie dans $\mathbb{C}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour tout multi-indice $L = (I, J)$ de $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, de longueur $l = i + j$, où i et j sont respectivement les longueurs de I et J , on note $D^L f(z) = \frac{\partial^l f}{\partial z^I \partial \bar{z}^J}(z)$ et on désigne par $D^l f$ une dérivée quelconque de f , d'ordre l . On définit de la même manière que précédemment la classe $C(p!M_p; \bar{\Omega})$ quand Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ en identifiant $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$.

4.2 Lemme

Soit $z_0 = x_0 + iy_0$ appartenant à $\cup W^\pm(\mathbb{R}^2, \Lambda_\alpha; R_0(1 - \sin \alpha))$;

on pose $r_\alpha(y_0) = \sin \alpha |y_0|$. Alors, on a $\bar{B}(z_0, r_\alpha(y_0)) \subset \cup W^\pm(\mathbb{R}^2, \Lambda_0; R_0)$.

preuve

Soit $z_0 = (z_{0,1}, z_{0,2})$ dans $W^+(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_0(1 - \sin \alpha))$.

Pour tout $w = (u_1 + iv_1, u_2 + iv_2) \in \overline{B}(z_0, r_\alpha(y_0))$, on a $|w - z_0| \leq |y_0| \sin \alpha$;

on a alors, en particulier, $|v_1 - y_{0,1}| \leq |y_0| \sin \alpha$.

Si $v_1 \geq y_{0,1}$, alors on a $v_1 > 0$.

Si $v_1 < y_{0,1}$, alors on a $y_{0,1} - v_1 \leq |y_0| \sin \alpha$ et donc, $v_1 > y_{0,1} - |y_0| \sin \alpha$.

$$\text{Or, } |y_0| = \sqrt{y_{0,1}^2 + y_{0,2}^2} < y_{0,1} \sqrt{1 + \frac{1}{(\tan \alpha)^2}} < \frac{y_{0,1}}{\sin \alpha},$$

donc, $v_1 > 0$; de la même manière, on montre que $v_2 > 0$.

De plus, on a $|w| \leq |w - z_0| + |z_0|$,
 $|w| < |y_0| \sin \alpha + R_0(1 - \sin \alpha) \leq R_0$.

Ainsi, on a bien $w \in W^+(\mathbb{R}^2, \wedge_0; R_0)$. On procède de la même manière pour z_0 dans $W^-(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_0(1 - \sin \alpha))$.

4.3 Proposition

Sous les hypothèses du théorème 4, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout α , $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, F_0 est de classe C^k dans $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_0(1 - \sin \alpha))$ et il existe des constantes A_{15} et A_{16} ne dépendant que de α , telles que, pour tout z_0 dans $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_0(1 - \sin \alpha))$ et pour tout multi-indice K de longueur k , on a :

$$(4.3.1) \quad |D^K F_0(z_0)| \leq A_{15} A_{16}^k \frac{k! M_k}{|y_0|^k}.$$

preuve

Soit k , un entier naturel et $z_0 = x_0 + iy_0$ appartenant à $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_0(1 - \sin \alpha))$.

D'après le lemme 4.2, il existe $r_\alpha(y_0)$ tel que $\overline{B}(z_0, r_\alpha(y_0)) \subset \bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_0; R_0)$. On pose désormais $r_\alpha(y_0) = r_\alpha$.

Soit $\eta_{k,2}$, la fonction définie sur $\mathbb{C}^2$ identifié à $\mathbb{R}^4$, dans le lemme 2.1. On considère la fonction η associée à z_0 , définie sur $\mathbb{C}^2$ par :

$$\eta(z) = \eta_{k,2} \left(\frac{3(z - z_0)}{r_\alpha} \right).$$

D'après (2.1.1), on a pour tout z de $\mathbb{C}^2$ et tout multi-indice J de longueur $j \leq k$:

$$(4.3.2) \quad |D^J \eta(z)| \leq A_1^k \left(\frac{3k}{r_\alpha} \right)^j.$$

La fonction ηF est nulle en dehors de $\overline{B}(z_0, \frac{2r_\alpha}{3})$, on a alors en appliquant la formule de Martinelli-Bochner à la fonction ηF et au domaine $B(z_0, r_\alpha)$:

$$\eta F(z) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\{0 \leq |\zeta - z_0| \leq \frac{2r_\alpha}{3}\}} \overline{\partial}(\eta F)(\zeta) \bigwedge \sum_{j=1}^{j=2} (-1)^{j+1} \frac{\overline{\zeta_j - z_j}}{|\zeta - z|^4} \bigwedge_{k \neq j} d\overline{\zeta_k}.$$

Ainsi, pour tout z de $B(z_0, \frac{r_\alpha}{6})$, on a $F(z) = G(z) + H(z)$ où,

$$G(z) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\{\frac{r_\alpha}{3} \leq |\zeta - z_0| \leq \frac{2r_\alpha}{3}\}} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta_j}(\zeta) F(\zeta) \frac{\overline{\zeta_j - z_j}}{|\zeta - z|^4} d\zeta \wedge d\overline{\zeta},$$

et

$$H(z) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\{0 \leq |\zeta - z_0| \leq \frac{2r_\alpha}{3}\}} \frac{\partial F}{\partial \zeta_j}(\zeta) \eta(\zeta) \frac{\overline{\zeta_j - z_j}}{|\zeta - z|^4} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.$$

Pour $\zeta = \xi + i\mu$, on a posé $d\zeta = d\xi + id\mu$ et $d\overline{\zeta} = d\xi - id\mu$. D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, les intégrales intervenant dans la première somme sont clairement C^∞ en tout z de $B(z_0, \frac{r_\alpha}{6})$.

Les intégrales intervenant dans la seconde somme sont C^k en tout z de $B(z_0, \frac{r_\alpha}{6})$ car elles sont le produit de convolution d'une fonction de classe C^k et d'une fonction localement intégrable. On a alors pour tout multi-indice $K = (k_1, k_2)$ de longueur k :

$$\frac{\partial^K G}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}}(z) =$$

$$\frac{(k+1)!}{(2i\pi)^2} \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\{\frac{r_\alpha}{3} \leq |\zeta - z_0| \leq \frac{2r_\alpha}{3}\}} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta_j}(\zeta) F(\zeta) \frac{\overline{(\zeta_j - z_j)} \overline{(\zeta_1 - z_1)}^{k_1} \overline{(\zeta_2 - z_2)}^{k_2}}{|\zeta - z|^{4+2k}} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}.$$

Ainsi, on a pour tout z de $B(z_0, \frac{r_\alpha}{6})$:

$$\left| \frac{\partial^K G}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}}(z) \right| \leq \frac{2(k+1)!}{(2\pi)^2} \|\overline{\partial} \eta\| \|F\| \int_{\{\frac{r_\alpha}{3} \leq |\zeta - z_0| \leq \frac{2r_\alpha}{3}\}} \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{|\zeta - z|^{k+3}}.$$

Ceci est vrai en particulier pour $z = z_0$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\{\frac{r_\alpha}{3} \leq |\zeta - z_0| \leq \frac{2r_\alpha}{3}\}} \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{|\zeta - z_0|^{k+3}} &\leq \left(\frac{3}{r_\alpha}\right)^k \int_{\{\frac{r_\alpha}{3} \leq |\zeta - z_0| \leq \frac{2r_\alpha}{3}\}} \frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{|\zeta - z_0|^3} \\ &\leq \left(\frac{3}{r_\alpha}\right)^k \int_{\frac{r_\alpha}{3}, \frac{2r_\alpha}{3}[\times]0, \pi[{}^2 \times]0, 2\pi[} \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\rho d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{3}{r_\alpha}\right)^k \int_{\frac{r_\alpha}{3}, \frac{2r_\alpha}{3}[} d\rho \int_{]0, \pi[} \sin^2 \theta_1 d\theta_1 \int_{]0, \pi[} \sin \theta_2 d\theta_2 \int_{]0, 2\pi[} d\theta_3 \\
&\leq \left(\frac{3}{r_\alpha}\right)^{k-1} (2\pi)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a pour tout z_0 de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_0(1 - \sin \alpha))$:

$$\left| \frac{\partial^K G}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}}(z_0) \right| \leq 2 \left(\frac{3}{r_\alpha}\right)^{k-1} (k+1)! \|F\| \|\bar{\partial}\eta\|.$$

On en déduit à l'aide de (4.3.2), que pour tout z_0 de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_0(1 - \sin \alpha))$, on a

$$\left| \frac{\partial^K G}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}}(z_0) \right| \leq 2 \left(\frac{3A_1}{r_\alpha}\right)^k k(k+1)! \|F\|.$$

Or, on a $(k+1)! \leq 2^{k+1}k!$ et $k \leq 2^k$, pour tout k appartenant à $\mathbb{N}$. On en déduit alors :

$$(4.3.3) \quad \left| \frac{\partial^K G}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}}(z_0) \right| \leq 4 \|F\| \left(\frac{12A_1}{\sin \alpha}\right)^k \frac{k!}{|y_0|^k}.$$

On a, en utilisant les propriétés du produit de convolution, pour tout z de $B(z_0, \frac{r_\alpha}{6})$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^K H}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}}(z) = \\
&\frac{1}{(2i\pi)^2} \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\{0 \leq |\zeta - z_0| \leq r_\alpha\}} \frac{\partial^K}{\partial \zeta_1^{k_1} \partial \zeta_2^{k_2}} \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_j}(\zeta) \eta(\zeta) \right) \frac{\overline{\zeta_j - z_j}}{|\zeta - z|^4} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.
\end{aligned}$$

D'après la formule de Leibniz, on en déduit :

$$\left| \frac{\partial^K H}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}}(z) \right| \leq \frac{2}{(2\pi)^2} \sum_{L \leq K} \binom{L}{K} \|D^L \bar{\partial} F\| \|D^{K-L} \eta\| \int_{\{0 \leq |\zeta - z_0| \leq \frac{2r_\alpha}{3}\}} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta - z|^3},$$

$$\text{où } \binom{L}{K} = \frac{K!}{L!(K-L)!}.$$

Ceci est vrai en particulier pour $z = z_0$. Or, on a comme plus haut,

$$\int_{\{0 \leq |\zeta - z_0| \leq \frac{2r_\alpha}{3}\}} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta - z_0|^3} \leq \int_{]0, \frac{2r_\alpha}{3}[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[} (\sin \theta_1)^2 \sin \theta_2 d\rho d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$$

$$\leq \frac{2r_\alpha}{3} (2\pi)^2.$$

On en déduit alors que pour tout z_0 de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_0(1 - \sin \alpha))$:

$$\left| \frac{\partial^K H}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}}(z_0) \right| \leq \frac{4r_\alpha}{3} \sum_{L \leq K} \binom{L}{K} \|D^L \bar{\partial} F\| \|D^{K-L} \eta\|.$$

On en déduit d'après (4.3.2), que pour tout z_0 de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_0(1 - \sin \alpha))$, on a

$$\left| \frac{\partial^K H}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}}(z_0) \right| \leq \frac{4r_\alpha}{3} \sum_{L \leq K} \binom{L}{K} C_1 C_2^l l! M_l A_1^k \left(\frac{3k}{r_\alpha} \right)^{k-l}.$$

Or, pour tout multi-indice Q de longueur q , on a : $1 \leq \frac{q!}{Q!} \leq 2^q$,

$$\text{ainsi, on a } \binom{L}{K} = \frac{K!}{L!(K-L)!} \leq \frac{k!}{\frac{l!}{2^l} \frac{(k-l)!}{2^{k-l}}} \leq \binom{l}{k} 2^k,$$

on en déduit que pour tout z_0 de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_0(1 - \sin \alpha))$, on a :

$$\left| \frac{\partial^K H}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}}(z_0) \right| \leq \frac{4C_1 r_\alpha}{3} (2A_1 C_2)^k \sum_{L \leq K} \binom{l}{k} l! M_l \left(\frac{3k}{r_\alpha} \right)^{k-l}.$$

De plus, pour tout q , le nombre de multi-indices Q de longueur q est majoré par 2^q . On a donc :

$$\left| \frac{\partial^K H}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}}(z_0) \right| \leq \frac{4C_1 r_\alpha}{3} \left(\frac{12A_1 C_2}{r_\alpha} \right)^k \sum_{l=0}^k \binom{l}{k} l! M_l k^{k-l}.$$

Or, la suite de terme général $u_l = l! M_l k^{k-l}$ est logarithmiquement convexe puisque le rapport $\frac{u_{l+1}}{u_l} = \frac{l+1}{k} \frac{M_{l+1}}{M_l}$ est strictement croissant. Ainsi, on en déduit que :

$$\text{pour tout } l, 0 \leq l \leq k, \text{ on a } u_l \leq \max(u_0, u_k) = \max(k^k, k! M_k).$$

$$\text{Donc, pour tout } l, 0 \leq l \leq k, \text{ on a } l! M_l k^{k-l} \leq \max(e^k k!, k! M_k).$$

La suite (M_p) étant logarithmiquement convexe, on a $\frac{M_k}{M_1^k} \geq 1$. On a donc :

$$(4.3.4) \quad \text{Pour tout } l, 0 \leq l \leq k, l! M_l k^{k-l} \leq \left(e \max(1, \frac{1}{M_1}) \right)^k k! M_k.$$

On en déduit que pour tout z_0 de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_0(1 - \sin \alpha))$, on a :

$$(4.3.5) \quad \left| \frac{\partial^K H}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}}(z_0) \right| \leq \frac{4C_1 \sin \alpha |y_0|}{3} \left(\frac{24eA_1C_2 \max(1, \frac{1}{M_1})}{\sin \alpha} \right)^k \frac{k!M_k}{|y_0|^k}.$$

On a alors, d'après (4.3.3) et (4.3.5), pour tout z_0 de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_0(1 - \sin \alpha))$ et tout multi-indice K de longueur k :

$$\left| \frac{\partial^K F}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}}(z_0) \right| \leq A_{15} A_{16}^k \frac{k!M_k}{|y_0|^k},$$

$$\text{où } A_{15} = 4\|F\| + \frac{4C_1 \sin \alpha}{3} \text{ et } A_{16} = \frac{24eA_1C_2}{\sin \alpha} \max\left(1, \frac{1}{M_1}\right).$$

5- Démonstration du théorème 4

5.1 Lemme

Soit G , une fonction continue sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\wedge_\alpha}$ telle que le support de G soit inclus dans une boule $B(x_0, u)$ de $\mathbb{C}^2$, où x_0 appartient à $\mathbb{R}^2$ et $u > 0$.

On suppose que $\bar{\partial}G$ est de classe C^k sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\wedge_\alpha}$.

Alors, G est de classe C^k sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\wedge_\alpha}$. De plus, pour tout z de $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\wedge_\alpha}$ et tout multi-indice K de longueur k , on a :

$$(5.1.1) \quad |D^K G(z)| \leq 6u \|d^k(\bar{\partial}G)\|.$$

preuve

On traite le cas où $x_0 = 0$; le cas général s'en déduit par translation.

On démontre par récurrence sur l , $0 \leq l \leq k$, que la fonction G est de classe C^l sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\wedge_\alpha}$. On montre de plus, que pour tout $z = x + iy$ de $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\wedge_\alpha}$, on a :

$$(5.1.2) \quad |D^l G(z)| \leq 6u \|d^l(\bar{\partial}G)\|.$$

L'hypothèse de récurrence est bien vérifiée à l'ordre 0. Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée à un ordre l , $0 \leq l < k$ et montrons qu'elle se vérifie alors à l'ordre suivant. Pour cela, on considère une dérivée $l^{\text{ème}}$, G_l de la fonction G . Soit $z = x + iy$ appartenant à $\mathbb{R}^2 \pm i\wedge_\alpha \cap B(0, u)$; on pose $t = |y|$ et $a = \frac{y}{|y|}$. On considère la droite complexe définie par : $U(\zeta) = x + a\zeta$. On applique la formule de Cauchy à la fonction $G_l \circ U$ dans le disque $D(0, 2u)$ de $\mathbb{C}$, en it :

$$G_l \circ U(it) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0, 2u)} \frac{G_l \circ U(\zeta)}{\zeta - it} d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \iint_{D(0, 2u)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} (G_l \circ U)(\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - it}.$$

Or, pour tout ζ de $\partial D(0, 2u)$, on a

$$|U(\zeta)| = |x + a\zeta| \geq |\zeta| - |x| > u.$$

Ainsi, on a pour tout $z = x + ita$ de $\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha \cap B(0, u)$:

$$G_l(x + ita) = -\frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \sum_{j=1}^2 a_j \frac{\partial G_l}{\partial \bar{z}_j}(x + a\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - it}.$$

Ainsi, la fonction $x \longrightarrow G_l(x + ita)$ est le produit de convolution d'une fonction de classe C^1 par rapport à x et d'une fonction localement intégrable. On a alors :

$$(5.1.3) \quad \frac{\partial G_l}{\partial x_i}(x + ita) = -\frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \sum_{j=1}^2 a_j \frac{\partial^2 G_l}{\partial x_i \partial \bar{z}_j}(x + a\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - it}.$$

On considère la fonction g_l , définie sur le compact de $\mathbb{R}^5$: $S = \{|x| \leq u, |t| \leq u, |a| = 1\}$.
par : $g_l(x, t, a) = G_l(x + iat)$.

On a $\lim_{t \rightarrow 0} g_l(x, t, a) = G_l(x)$, uniformément en x et en a .

De plus, d'après (5.1.3), la fonction $\frac{\partial g_l}{\partial x_i}$ est continue sur S . Elle y est donc uniformément continue.

On a donc : $\forall \mu \geq 0, \exists \eta \geq 0, \forall (x, t, a), (x', t', a') \in S$,

$$|x - x'| \leq \eta, |t - t'| \leq \eta, |a - a'| \leq \eta \implies \left| \frac{\partial g_l}{\partial x_i}(x, t, a) - \frac{\partial g_l}{\partial x_i}(x', t', a') \right| \leq \mu.$$

D'où, en particulier, en prenant $x' = x$, $t' = 0$ et $a' = a$, on a :

$$\forall \mu \geq 0, \exists \eta \geq 0, \forall (x, t, a), |x| \leq u, |t| \leq u, |a| = 1,$$

$$|t| \leq \eta \implies \left| \frac{\partial g_l}{\partial x_i}(x, t, a) - \frac{\partial g_l}{\partial x_i}(x, 0, a) \right| \leq \mu.$$

Cela prouve que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial g_l}{\partial x_i}(x, t, a) = \frac{\partial g_l}{\partial x_i}(x, 0, a)$, uniformément en x et en a . Ainsi, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial G_l}{\partial x_i}(x + iat) = \frac{\partial G_l}{\partial x_i}(x)$$

$$(5.1.4) \quad \text{où } \frac{\partial G_l}{\partial x_i}(x) = -\frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \sum_{j=1}^2 a_j \frac{\partial^2 G_l}{\partial x_i \partial \bar{z}_j}(x + a\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta}.$$

On en déduit donc que $\frac{\partial G_l}{\partial x_i}$ est continue sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha} \cap B(0, u)$. Le résultat (5.1.3) est donc vérifié pour tout $z = x + iy$ appartenant à $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha} \cap B(0, u)$.

De la même manière que précédemment, on applique la formule de Cauchy à la fonction $\frac{\partial G_l}{\partial \bar{z}_i} \circ U$ dans $D(0, 2u)$ en it :

$$(5.1.5) \quad \frac{\partial G_l}{\partial \bar{z}_i}(x + iy) = -\frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \sum_{j=1}^2 a_j \frac{\partial^2 G_l}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j}(x + a\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - it}.$$

Ainsi, en retranchant l'égalité (5.1.5) à l'égalité (5.1.3), on obtient :

$$(5.1.6) \quad \frac{\partial G_l}{\partial z_i}(x + iy) = -\frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \sum_{j=1}^2 a_j \frac{\partial^2 G_l}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(x + a\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - it}.$$

De plus, puisque la fonction G_l est nulle en dehors de la boule $B(0, u)$ de $\mathbb{C}^2$, G_l est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha$ et l'hypothèse de récurrence est bien vérifiée à l'ordre (1+1).

De plus, on a pour tout $z = x + iy$ de $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha}$:

$$\left| \frac{\partial G_l}{\partial z_i}(z) \right| \leq \frac{1}{\pi} \|d(\bar{\partial} G_l)\| \iint_{D(0, 2u)} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta - it|}.$$

Si on a $|\zeta| < 2u$, alors on a $|\zeta - it| < |\zeta| + |t| < 3u$. Ainsi, on en déduit :

$$\left| \frac{\partial G_l}{\partial z_i}(z) \right| \leq \frac{1}{\pi} \|d(\bar{\partial} G_l)\| \iint_{D(it, 3u)} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta - it|}.$$

$$\text{Or on a } \iint_{D(it, 3u)} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta - it|} \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{3u} d\rho \leq 6\pi u.$$

On en déduit donc que pour tout $z = x + iy$ de $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha}$, on a :

$$|D^1 G_l(z)| \leq 6u \|d(\bar{\partial} G_l)\|.$$

Ceci établit (5.1.1).

5.2 Lemme

Soit k , un entier, $k \geq 1$, il existe une fonction η_k , de classe C^{k+1} dans $\mathbb{C}^2$ telle que :

$\eta_k(z) = 1$, pour tout z de $\mathbb{C}^2$, $|z| \leq R_0(1 - \sin \alpha)^2$.

$\eta_k(z) = 0$, pour tout z de $\mathbb{C}^2$, $|z| \geq R_0(1 - \sin \alpha)$.

$\bar{\partial}\eta_k(x) \equiv 0$, à l'ordre k , pour tout x de $\mathbb{R}^2$.

Il existe une constante A_{17} ne dépendant que de α , telle que, pour tout z de $\mathbb{C}^2$ et tout multi-indice J de $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$, de longueur $j \leq k+1$ on ait

$$(5.2.1) \quad |D^J \eta_k(z)| \leq A_{17}^k k^j.$$

On a aussi pour tout z de $\mathbb{C}^2$ et tout multi-indice Q de $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$, de longueur $q \leq k$

$$(5.2.2) \quad \left| D^Q \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial \bar{z}_j} \right) (z) \right| \leq 4^k \frac{|y|^{k-q}}{(k-q)!} \sup_{|w-x| \leq |y|} |d^k (\bar{\partial} \eta_k)(w)|.$$

preuve

Soit k , un entier, $k \geq 1$ et soit la fonction $\chi_{k+1, \frac{1}{1-\sin \alpha}}$, définie dans la proposition

(3.6). On définit alors la fonction η_k sur $\mathbb{C}^2$ par : $\eta_k(z) = \chi_{k+1, \frac{1}{1-\sin \alpha}} \left(\frac{z}{R_0(1 - \sin \alpha)^2} \right)$.

D'après la proposition (3.6), la fonction η_k possède bien les propriétés requises et on établit aisément (5.2.1) en posant $A_{17} = \frac{4A_{13}^2}{R_0(1 - \sin \alpha)^2 \sin \alpha}$.

5.3 Théorème

Soit $R_0 > 0$ et soit F_0 , une fonction continue sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^n, \Lambda_0; R_0)}$. Soit $\{M_p\}_{p \geq 0}$, une suite de réels vérifiant l'hypothèse (H_1) . On suppose que $\bar{\partial} F_0$ (défini au sens des distributions dans $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^n, \Lambda_0; R_0)$) appartient à la classe $C(p!M_p; \overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^n, \Lambda_0; R_0)})$.

Alors, pour tout cône Λ_1 strictement inclus dans Λ_0 et tout R_1 , $0 < R_1 < R_0$, F_0 appartient à $C(p!M_p; \overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^n, \Lambda_1; R_1)})$.

preuve

Dans $\mathbb{R}^2$, pour tout cône ouvert connexe Λ_1 de sommet 0, strictement inclus dans Λ_0 , il existe un cône Λ_α tel que $\Lambda_1 \subset \subset \Lambda_\alpha \subset \subset \Lambda_0$.

Pour tout entier naturel $k \geq 1$, on considère la fonction F_k , définie sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha}$ par $F_k(z) = (\eta_k F_0)(z)$. Cette fonction est continue sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha}$ et son support est inclus dans $B(0, R_0(1 - \sin \alpha))$. De plus, $\bar{\partial} F_k$ est de classe C^k sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha}$.

En effet, on a $\frac{\partial F_k}{\partial \bar{z}_j} = b_j + m_j$, où $b_j = \eta_k \left(\frac{\partial F_0}{\partial \bar{z}_j} \right)$ et $m_j = \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial \bar{z}_j} \right) F_0$.

La fonction $\overline{b_j}$ est de classe C^k sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha}$ et on a, d'après la formule de Leibniz, pour tout z de $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha}$ et tout multi-indice K de longueur k :

$$|D^K b_j(z)| \leq \sum_{l=0}^k \binom{l}{k} 2^{k+l} |D^L \bar{\partial} F_0(z)| |D^{K-L} \eta_k(z)|.$$

Ainsi, d'après (5.2.1) et le fait que $\bar{\partial} F_0$ appartient à la classe $C(p!M_p; \overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \Lambda_0; R_0)})$, on a :

$$|D^K b_j(z)| \leq C_1 (4A_{17} C_2)^k \sum_{l=0}^k \binom{l}{k} l! M_l k^{k-l}.$$

Or, d'après le résultat (4.3.4) dû au fait que la suite (M_l) est logarithmiquement convexe, on a pour tout l , $0 \leq l \leq k$, $l! M_l k^{k-l} \leq \left(e \max(1, \frac{1}{M_1}) \right)^k k! M_k$. Ainsi, on en déduit que, pour tout z de $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha}$ et tout multi-indice K de longueur k , on a :

$$(5.3.3) \quad |D^K b_j(z)| \leq C_1 \left(8e A_{17} C_2 \max(1, \frac{1}{M_1}) \right)^k k! M_k.$$

De même, la fonction m_j , prolongée par 0 sur $\mathbb{R}^2$ ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à k , est de classe C^k sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha}$.

En effet, m_j est de classe C^k sur $\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha$; on a, de plus, pour tout z de $\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha$ et tout multi-indice Q , de longueur $q \leq k$, d'après la formule de Leibniz :

$$|D^Q m_j(z)| \leq \sum_{l=0}^q \binom{l}{q} 2^{q+l} |D^{Q-L} \bar{\partial} \eta_k(z)| |D^L F_0(z)|.$$

Ainsi, d'après (5.2.2) et (4.3.1), on a pour tout multi-indice Q , de longueur $q \leq k$,

$$|D^Q m_j(z)| \leq A_{15} (16A_{16})^k \sup_{|w-x| \leq |y|} |d^k(\bar{\partial} \eta_k)(w)| \sum_{l=0}^q \frac{q!}{(q-l)! l!} \frac{|y|^{k+l-q}}{(k+l-q)!} \frac{l! M_l}{|y|^l}.$$

$$|D^Q m_j(z)| \leq A_{15} (16A_{16})^k \frac{q!}{k!} |y|^{k-q} \sup_{|w-x| \leq |y|} |d^k(\bar{\partial} \eta_k)(w)| \sum_{l=0}^q \frac{k!}{(q-l)!(k+l-q)!} M_l.$$

La suite (M_k) étant logarithmiquement convexe, on a $M_l \leq \frac{M_q}{M_1^{q-l}}$. Ainsi, on a :

$$|D^Q m_j(z)| \leq A_{15} \left(32A_{16} \max(1, \frac{1}{M_1}) \right)^k \frac{q! M_q}{k!} |y|^{k-q} \sup_{|w-x| \leq |y|} |d^k(\bar{\partial} \eta_k)(w)|.$$

On a donc bien, pour tout multi-indice Q de longueur $q \leq k$ et tout $z = x + iy$ de $\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha$,

$$\lim_{|\Im m z| \rightarrow 0} D^Q m_j(z) = 0.$$

De plus, pour tout multi-indice K de longueur k et tout $z = x + iy$ de $\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha$, on obtient à l'aide de (5.2.1),

$$|D^K m_j(z)| \leq A_{15} A_{17} \left(64 A_{16} A_{17} \max(1, \frac{1}{M_1}) \right)^k k^k M_k.$$

$$(5.3.4) \quad |D^K m_j(z)| \leq A_{15} A_{17} \left(64 e A_{16} A_{17} \max(1, \frac{1}{M_1}) \right)^k k! M_k.$$

Finalement, la fonction $\frac{\partial F_k}{\partial \bar{z}_j}$ est bien de classe C^k sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha}$ et on a, d'après (5.3.3) et (5.3.4), pour tout z de $\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha$ et tout multi-indice K de longueur k :

$$(5.3.5) \quad \left| D^K \frac{\partial F_k}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq A_{18} A_{19}^k k! M_k,$$

où $A_{18} = A_{15} A_{17} + C_1$ et $A_{19} = 64 e A_{16} A_{17} \max(1, \frac{1}{M_1})$ sont des constantes ne dépendant que de C_1, C_2, α et M_1 .

En appliquant alors le lemme 5.1 à la fonction F_k définie sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha}$, on en déduit que F_k est de classe C^k et que, pour tout z de $\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\alpha$ et tout multi-indice K de longueur k , on a :

$$|D^K F_k(z)| \leq 6 \|d^k(\bar{\partial} F_k)\|.$$

Ainsi, d'après (5.3.5), on en déduit :

$$(5.3.6) \quad |D^K F_k(z)| \leq 6 A_{18} A_{19}^k k! M_k.$$

Or, pour tout k de $\mathbb{N}$, la fonction F_k coïncide avec F , ainsi que toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à k et en particulier ses dérivées $k^{\text{ièmes}}$ sur $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \Lambda_\alpha; R_0(1 - \sin \alpha)^2)$.

On en conclut que, la fonction F appartient à $C\left(p! M_p; \bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \Lambda_1; R_1)\right)$. Il suffit, en effet, de choisir α , assez petit, de sorte que $\Lambda_1 \subset \Lambda_\alpha$ et $R_1 < R_0(1 - \sin \alpha)^2$.

III^{ème} PARTIE : L'ARETE EST UNE VARIETE TOTALEMENT REELLE

6- Situation géométrique

On démontre maintenant le théorème 5. La difficulté que l'on rencontre ici, provient de la faible régularité imposée à l'arête E (de classe C^3). On s'inspire de la preuve donnée par J.-P Rosay pour démontrer le théorème 3, en transférant par changement de variables presque analytique, l'étude de F sur des coins "tordus" à l'étude de son image sur des coins "droits" : $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^n, \wedge; R)$, où $\wedge$ est un cône de $\mathbb{R}^n$ et $R > 0$. Pour cela, on utilise les lemmes classiques suivants :

6.1 Lemme

Soit E , une sous-variété totalement réelle de classe C^3 contenant 0 et de dimension n dans $\mathbb{C}^n$. Il existe un voisinage U_0 de 0 dans $\mathbb{C}^n$ et un difféomorphisme Z

$Z : U_0 \rightarrow Z(U_0) \subset \mathbb{C}^n$ de classe C^3 tels que l'on ait

$$(6.1.1) \quad E \cap Z(U_0) = Z(U_0 \cap \mathbb{R}^2)$$

$$(6.1.2) \quad \text{et } \bar{\partial}Z \equiv 0, \text{ à l'ordre 2 sur } U_0 \cap \mathbb{R}^2.$$

preuve

Dans toute la suite, afin d'alléger la preuve, on suppose $n = 2$.

E est une sous-variété totalement réelle de $\mathbb{C}^2$, de classe C^3 et de dimension 2. On peut définir E , dans un voisinage U_c de 0 dans $\mathbb{C}^2$:

$$(6.1.3) \quad E \cap U_c = \{x + iy \in \mathbb{C}^2 ; y = h(x), x \in U_r\},$$

où U_r est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$ et h une fonction de classe C^3 définie dans U_r , à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et vérifiant : $h(0) = 0$ et $dh(0) = 0$.

Quitte à restreindre U_r , la fonction h détermine un jet de Whitney H , de classe C^3 sur $K = \overline{U_r}$. On complète ce jet en un jet $\tilde{H}$ sur K , considéré comme compact de $\mathbb{C}^2$ de sorte que l'on ait : $\bar{\partial}\tilde{H} \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^2$ à l'ordre 2. Pour cela, on pose en particulier :

$$(6.1.4) \quad \text{pour tout } x \text{ de } K, \quad \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial y_j}(x) = i \frac{\partial H_k}{\partial x_j}(x) \text{ et } \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial H_k}{\partial x_j}(x).$$

$\tilde{H}$ est un jet de whitney de classe C^3 , défini sur K , compact de $\mathbb{C}^2$, à valeurs dans $\mathbb{C}^2$ et $\bar{\partial}$ -plat, à l'ordre 2 sur K . D'après le théorème d'extension de Whitney, il existe alors une

fonction $\tilde{h}$, définie dans $\mathbb{C}^2$, de classe C^3 coïncidant au sens des jets avec $\tilde{H}$ sur K . Ainsi, on a $\bar{\partial}\tilde{h} \equiv 0$ sur U_r , à l'ordre 2. Enfin, on a d'après (6.1.4) :

$$(6.1.5) \quad \text{pour tout } x \text{ de } K, \quad \frac{\partial \tilde{h}_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial h_k}{\partial x_j}(x) \text{ et } \frac{\partial \tilde{h}_k}{\partial y_j}(x) = i \frac{\partial h_k}{\partial x_j}(x).$$

On en déduit que l'on a, pour tout x de K :

$$(6.1.6) \quad \frac{\partial \Re \tilde{h}_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial h_k}{\partial x_j}(x) \text{ et } \frac{\partial \Re \tilde{h}_k}{\partial y_j}(x) = 0.$$

On déduit aussi de (6.1.5) que, pour tout x de K , on a :

$$(6.1.7) \quad \frac{\partial \Im \tilde{h}_k}{\partial x_j}(x) = 0 \text{ et } \frac{\partial \Im \tilde{h}_k}{\partial y_j}(x) = \frac{\partial h_k}{\partial x_j}(x).$$

On considère alors la fonction Z définie dans $\mathbb{C}^2$ par :

$$\begin{aligned} Z : \mathbb{R}^2 + i\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ x + iy &\longrightarrow z + i\tilde{h}(z). \end{aligned}$$

Z est de classe C^3 sur $\mathbb{C}^2$; de plus, on a $Z(0) = 0$.

D'après (6.1.6) et (6.1.7), la matrice jacobienne de Z en 0 est :

$$(6.1.8) \quad J_{\mathbb{R}}Z(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après (6.1.8), on a donc $DZ(0) = Id$. Alors, d'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage $U_0 \subset U_r + i\mathbb{R}^2$ de 0 dans $\mathbb{C}^2$ tel que Z définisse un difféomorphisme de classe C^3 de $U_0 \rightarrow Z(U_0)$. Et d'après (6.1.3), on a $Z(U_0 \cap \mathbb{R}^2) = E \cap Z(U_0)$.

On appellera “quasi-coin”, l'image d'un coin droit par Z . Dans le lemme suivant, on insère alors un “quasi-coin” $Z(W^\pm(\mathbb{R}^n, \Lambda_0; R_0))$ entre deux coins de $\mathbb{C}^n$, $W^\pm(E, \Gamma; R)$ et $W'^\pm(E, \Gamma', R')$ vérifiant $W'^\pm \subset\subset W^\pm$.

6.2 Lemme

Soit E , une sous-variété totalement réelle de classe C^3 contenant 0 et de dimension 2 dans $\mathbb{C}^2$. Soit Z , le difféomorphisme associée à E , définie dans le lemme (6.1).

Soient $W^\pm(E, \Gamma; R)$, des coins opposés d'arête commune E et $W'^\pm(E, \Gamma', R')$, des coins strictement inclus dans $W^\pm(E, \Gamma; R)$.

Il existe un nombre fini N de biholomorphismes ϕ_s $\mathbb{C}$ -linéaires de $\mathbb{C}^2$ tels que, quitte à réduire le voisinage U_0 de 0 dans $\mathbb{C}^2$, on ait

$$W'^\pm(E, \Gamma', R') \cap Z(U_0) \subset \bigcup_{s=1}^N Z(\phi_s(W^\pm(\mathbb{R}^2, \Lambda_0; R_0)) \cap U_0) \subset W^\pm(E, \Gamma; R) \cap Z(U_0).$$

$$(6.2.1) \quad \text{On note } B_1 = \max_{1 \leq s \leq N} \left(\sup_{z \in \overline{U_0}} |D^K(Z \circ \phi_s)(z)| \right)$$

$$(6.2.2) \quad \text{et } B_2 = \max_{1 \leq s \leq N} \left(\sup_{w \in Z(\overline{U_0})} |D^K(Z \circ \phi_s)^{-1}(w)| \right), \text{ pour } |K| \leq 3.$$

Par souci de simplification, on suppose dans la suite :

$$W'^{\pm}(E, \Gamma', R') \cap Z(U_0) \subset Z(W^{\pm}(\mathbb{R}^2, \wedge_0; R_0) \cap U_0) \subset W^{\pm}(E, \Gamma; R) \cap Z(U_0).$$

6.3 Lemme

Soient U_0 et Z définis dans les lemmes (6.1) et (6.2) tels que Z est un difféomorphisme de classe C^3 de $U_0 \rightarrow Z(U_0)$. Soit $R_0 > 0$ tel que $B(0, R_0) \subset U_0$.

On a, pour tout $z = x + iy$ dans $B(0, R_0)$,

$$(6.3.1) \quad \left| \frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq 2 |y|^2 \sup_{|\zeta - x| < |y|} \left| D^2 \left(\frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j} \right)(\zeta) \right|.$$

$$(6.3.2) \quad \left| D^1 \left(\frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j} \right)(z) \right| \leq 2 |y| \sup_{|\zeta - x| < |y|} \left| D^2 \left(\frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j} \right)(\zeta) \right|.$$

preuve

Soit $z = (z_1, z_2)$ appartenant à $B(0, R_0)$. On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$
 $t \rightarrow (x_1 + ity_1, x_2 + ity_2).$

On applique la formule de Taylor à la fonction $\frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j} \circ \varphi$, définie dans $\mathbb{R}$, à l'ordre 2 en 0, on a :

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j} \circ \varphi \right)(1) \right| &\leq \left| \left(\frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j} \circ \varphi \right)(0) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j} \circ \varphi \right)(0) \right| \\ &\quad + \frac{1}{2} \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j} \circ \varphi \right)(t) \right|. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $z = (z_1, z_2)$ de $B(0, R_0)$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| &\leq \left| \frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j}(x) \right| + \sum_{l=1}^2 |y_l| \left| \frac{\partial^2 Z_k}{\partial y_l \partial \bar{z}_j}(x) \right| \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 |y_m y_l| \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{\partial^3 Z_k}{\partial y_m \partial y_l \partial \bar{z}_j}(x_1 + ity_1, x_2 + ity_2) \right|. \end{aligned}$$

Or, d'après (6.1.3), on a $\frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j}(x) = 0$ et $D^1 \frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j}(x) = 0$. On a donc :

$$\left| \frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq 2 |y|^2 \sup_{|\zeta - x| < |y|} \left| d^2 \frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j}(\zeta) \right|.$$

Ceci établit (6.3.1).

De même, en appliquant la formule de Taylor à la fonction $D^1 \frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j} \circ \varphi$ à l'ordre 1 en 0, on a :

$$\left| D^1 \frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq 2 |y| \sup_{|\zeta - x| < |y|} \left| d^2 \frac{\partial Z_k}{\partial \bar{z}_j}(\zeta) \right|.$$

Ceci établit alors (6.3.2).

7- Passage aux coins “droits”

D'après le lemme 6.2, il suffit de montrer que, pour tout α , $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ et tout entier $k \geq 1$, la fonction F_0 vérifiant les conditions du théorème 5 est de classe C^k sur $Z \left(\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_\alpha) \right)$, $0 < R_\alpha < R_0$ et d'obtenir une estimation des dérivées de F_0 sur cet ensemble. Pour cela, on va répéter plusieurs fois le même argument afin de gagner, pas à pas, la régularité souhaitée. L'argument est le suivant.

Etant donnée une fonction F continue sur les “quasi-coins” $Z \left(\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\beta; R) \right)$, $R > 0$ et telle que $\bar{\partial}F$ y soit de classe C^2 , alors, pour tout γ , $0 < \gamma < \frac{\pi}{4} - \beta$, F est en fait de classe C^1 sur les “quasi-coins” réduits $Z \left(\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma)) \right)$. On a également des estimées des dérivées premières de F .

La proposition 7.3 est une des étapes essentielles de la preuve. On notera qu'il est nécessaire de préciser l'incidence qu'a la réduction de l'ouverture du coin sur l'estimation des dérivées de la fonction F donnée.

7.1 Lemme

Soient β et γ , deux réels positifs tels que : $\beta + \gamma < \frac{\pi}{4}$ et soit $R > 0$.

On considère les cônes $\wedge_\beta$ et $\wedge_{\beta+\gamma}$ de $\mathbb{R}^2$ associés respectivement à β et $\beta + \gamma$.

Pour tout $z = x + iy$ de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$,

on a $B(z, |y| \sin \gamma) \subset \bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\beta; R)$.

preuve

$\wedge_\beta$ est délimité par les droites D_1 d'équation : $y_2 = y_1 \tan \beta$ et D_2 : $y_2 = \frac{y_1}{\tan \beta}$.

Soit $z = x + iy = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$ appartenant à $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$.

Il existe alors δ tel que $\beta + \gamma \leq \delta \leq \frac{\pi}{2} - (\beta + \gamma)$ pour lequel on a : $y_2 = y_1 \tan \delta$.

Dans $\mathbb{R}^2$, le cercle C_1 de centre y , tangent à la droite D_1 admet pour rayon :

$r_1 = |y| \sin(\delta - \beta)$. De même, le cercle C_2 de centre y , tangent à la droite D_2 admet pour rayon : $r_2 = |y| \sin(\frac{\pi}{2} - \delta - \beta)$.

Ainsi, puisque l'on a $\gamma \leq \min(\delta - \beta, \frac{\pi}{2} - \delta - \beta)$, on en déduit que le disque $D(y, |y| \sin \gamma)$ de $\mathbb{R}^2$ est contenu dans Λ_β ; on en déduit alors que $B(z, |y| \sin \gamma)$ est contenu dans $\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\beta$. De plus, on a pour tout w de $B(z, |y| \sin \gamma)$, $|w - z| \leq |w| + |z| < R$.

Finalement, on a donc bien $B(z, |y| \sin \gamma) \subset \bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \Lambda_\beta; R)$.

7.2 Lemme

Soient R_0 et Z , définis dans le lemme 6.3.

Soient β et γ , deux réels positifs tels que $\beta + \gamma < \frac{\pi}{4}$ et soit R tel que $0 < R \leq R_0$.

Pour tout $w_0 = Z(z_0)$ où $z_0 = x_0 + iy_0$ appartient à $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \Lambda_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$, il existe une fonction χ de classe C^2 , définie dans $\mathbb{C}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\chi(w) = 1, \text{ pour tout } w \text{ de } Z\left(B(z_0, \frac{|y_0| \sin \gamma}{3})\right).$$

$$\chi(w) = 0, \text{ pour tout } w \text{ hors de } Z\left(B(z_0, \frac{2|y_0| \sin \gamma}{3})\right).$$

Il existe une constante B_3 telle que, pour tout w de $Z(B(z_0, |y_0| \sin \gamma))$

et tout multi-indice K de longueur $k \leq 2$, on ait :

$$(7.2.1) \quad |D^K \chi(w)| \leq \frac{B_3}{(|y_0| \sin \gamma)^k}.$$

(La constante B_3 ne dépend que de Z .)

preuve

Il existe une fonction η , de classe C^2 , définie dans $\mathbb{C}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que:

$\eta(z) = 1$, pour tout z de $B(0, 1)$.

$\eta(z) = 0$, pour tout z hors de $B(0, 2)$.

Soit $z_0 = x_0 + iy_0$ appartenant à $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \Lambda_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$.

On considère la fonction $\tilde{\eta}$, définie dans $\mathbb{C}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ par : $\tilde{\eta}(z) = \eta\left(\frac{3(z - z_0)}{\sin \gamma |y_0|}\right)$.

En posant $B_4 = 9 \max_{|K| \leq 2} (\|D^K \eta\|)$, on a, pour tout z de $B(z_0, |y_0| \sin \gamma)$ et tout multi-indice K de longueur $k \leq 2$:

$$(7.2.2) \quad |D^K \tilde{\eta}(z)| \leq \frac{B_4}{(|y_0| \sin \gamma)^k}.$$

On définit alors une fonction χ dans $\mathbb{C}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, par : $\chi(w) = \tilde{\eta} \circ Z^{-1}(w)$.

χ est bien C^2 ; de plus, pour tout w dans $\mathbb{C}^2$, on a :

$$|D^1 \chi(w)| \leq 4 |\tilde{\eta}(Z^{-1}(w))| |dZ^{-1}(w)|.$$

On en déduit alors, à l'aide de (7.2.2) et (6.2.2) que, pour tout w de $\mathbb{C}^2$, on a

$$|D^1 \chi(w)| \leq \frac{4B_2 B_4}{|y_0| \sin \gamma}.$$

De la même manière, on a, pour tout w de $\mathbb{C}^2$

$$|D^2 \chi(w)| \leq 16 |d^2 \tilde{\eta}(Z^{-1}(w))| |dZ^{-1}(w)|^2 + 4 |d\tilde{\eta}(Z^{-1}(w))| |d^2 Z^{-1}(w)| \leq \frac{20B_2^2 B_4}{|y_0|^2 \sin^2 \gamma}.$$

On établit ainsi la formule (7.2.1) en posant $B_3 = 20B_2^2 B_4$.

On précise quelques notations qui s'avèrent utiles pour alléger les énoncés des propositions suivantes :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et f une fonction appartenant à $C^\infty(\overline{\Omega})$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $q_1(f(x)) = \max(|f(x)|, |df(x)|)$ et $q_{1,\overline{\Omega}}(f) = \sup_{x \in \overline{\Omega}} q_1(f(x))$.

De même, on écrit $q_2(f(x)) = \max(|f(x)|, |df(x)|, |d^2 f(x)|)$ et $q_{2,\overline{\Omega}}(f) = \sup_{x \in \overline{\Omega}} q_2(f(x))$.

7.3 Proposition

Soient R_0 et Z , définis dans le lemme 6.3 tels que $Z : B(0, R_0) \rightarrow Z(B(0, R_0))$ définisse un difféomorphisme de classe C^3 .

Soient β et R , deux réels strictement positifs tels que $\beta < \frac{\pi}{4}$ et $R \leq R_0$.

Soit F , une fonction continue sur $Z\left(\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\beta; R)\right)$.

On suppose que $\overline{\partial}F$ est de classe C^2 sur $Z\left(\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\beta; R)\right)$.

Alors, pour tout $\gamma > 0$ tel que $\beta + \gamma < \frac{\pi}{4}$, on a F de classe C^2 sur

$Z\left(\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))\right)$ et il existe une constante B_5 telle que, pour tout $w_0 = Z(z_0)$ où $z_0 = x_0 + iy_0$ appartient à $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$, on a

$$(7.3.1) \quad |D^1 F(w_0)| \leq B_5 \left(\frac{\|F\|}{\gamma |y_0|} + q_1(\overline{\partial}F) \right).$$

$$(7.3.2) \quad |D^2 F(w_0)| \leq B_5 \left(\frac{\|F\|}{\gamma^2 |y_0|^2} + \frac{q_2(\overline{\partial}F)}{\gamma |y_0|} \right).$$

(La constante B_5 ne dépend que de Z .)

preuve

Soit $w_0 = Z(z_0)$ où $z_0 = x_0 + iy_0$ appartient à $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$ et soit $r_\gamma = |y_0| \sin \gamma$; d'après le lemme (7.1), on a $B(z_0, |y_0| \sin \gamma) \subset \bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\beta; R)$. On considère alors la fonction χ définie dans le lemme (7.2) associée à w_0 .

Soit w appartenant à $Z\left(B(z_0, \frac{r_\gamma}{6})\right)$. On a, en appliquant la formule de Martinelli-Bochner à la fonction (χF) en w , dans le domaine $Z\left(B(z_0, r_\gamma)\right)$:

$$\chi F(w) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{Z(B(z_0, r_\gamma))} \bar{\partial}(\chi F)(\zeta) \bigwedge \sum_{j=1}^{j=2} (-1)^{j+1} \frac{\overline{\zeta_j - w_j}}{|\zeta - w|^4} \bigwedge_{k \neq j} d\bar{\zeta}_k.$$

Pour $\zeta = \xi + i\eta$, on a posé $d\zeta = d\xi + i d\eta$ et $d\bar{\zeta} = d\xi - i d\eta$.

Ainsi, pour tout w de $Z\left(B(z_0, \frac{r_\gamma}{6})\right)$, on a $F(w) = H(w) + I(w)$ où,

$$H(w) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\mathbb{C}^2} \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_j}(\zeta) F(\zeta) \frac{\overline{\zeta_j - w_j}}{|\zeta - w|^4} d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

et

$$I(w) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\mathbb{C}^2} \frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}_j}(\zeta) \chi(\zeta) \frac{\overline{\zeta_j - w_j}}{|\zeta - w|^4} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, les intégrales intervenant dans la première somme sont clairement C^2 en tout w de $Z\left(B(z_0, \frac{r_\gamma}{6})\right)$.

Les intégrales intervenant dans la seconde somme sont C^2 en tout w de $Z\left(B(z_0, \frac{r_\gamma}{6})\right)$ car elles sont le produit de convolution d'une fonction C^2 et d'une fonction localement intégrable.

On a, pour tout w de $Z\left(B(z_0, \frac{r_\gamma}{6})\right)$:

$$\frac{\partial H}{\partial w_l}(w) = \frac{-2}{(2i\pi)^2} \sum_{j=1}^{j=2} \int_{\mathbb{C}^2} \frac{\partial \chi}{\partial \bar{\zeta}_j}(\zeta) F(\zeta) \frac{(\overline{\zeta_j - w_j})(\overline{\zeta_l - w_l})}{|\zeta - w|^6} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Cette égalité est vraie en particulier pour $w = w_0$. On a alors :

$$\left| \frac{\partial H}{\partial w_l}(w_0) \right| \leq \frac{4}{(2\pi)^2} \|\bar{\partial} \chi\| \|F\| \int_{\{\zeta \in Z(B(z_0, \frac{2r_\gamma}{3}) \setminus B(z_0, \frac{r_\gamma}{3}))\}} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta - w_0|^4}.$$

Or, si ζ appartient à $Z\left(B(z_0, \frac{2r_\gamma}{3}) \setminus B(z_0, \frac{r_\gamma}{3})\right)$, alors il existe z appartenant à $B(z_0, \frac{2r_\gamma}{3}) \setminus B(z_0, \frac{r_\gamma}{3})$ tel que $\zeta = Z(z)$. D'après le théorème des accroissements finis, on a alors :

$$|\zeta - w_0| \leq B_1 |z - z_0| \leq \frac{2B_1 r_\gamma}{3}.$$

De même, on a

$$|Z^{-1}(\zeta) - Z^{-1}(w_0)| \leq B_2 |\zeta - w_0|.$$

On en déduit donc :

$$|\zeta - w_0| \geq \frac{|Z^{-1}(\zeta) - Z^{-1}(w_0)|}{B_2} \geq \frac{r_\gamma}{3B_2}.$$

On a donc

$$\int_{\left\{\zeta \in Z\left(B\left(z_0, \frac{2r_\gamma}{3}\right) \setminus B\left(z_0, \frac{r_\gamma}{3}\right)\right)\right\}} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta - w_0|^4} \leq \int_{\left\{\frac{r_\gamma}{3B_2} \leq |\zeta - w_0| \leq \frac{2B_1 r_\gamma}{3}\right\}} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta - w_0|^4}.$$

On a donc

$$\int_{\left\{\zeta \in Z\left(B\left(z_0, \frac{2r_\gamma}{3}\right) \setminus B\left(z_0, \frac{r_\gamma}{3}\right)\right)\right\}} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta - w_0|^4} \leq 4\pi^2 \int_{\frac{r_\gamma}{3B_2}}^{\frac{2B_1 r_\gamma}{3}} \frac{d\rho}{\rho} \leq 4\pi^2 \ln(2B_1 B_2).$$

On en déduit alors :

$$\left| \frac{\partial H}{\partial w_l}(w_0) \right| \leq 4 \ln(2B_1 B_2) \|\bar{\partial}\chi\| \|F\|.$$

On a donc, en utilisant (7.2.1), pour tout w_0 de $Z\left(\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))\right)$,

$$(7.3.3) \quad \left| \frac{\partial H}{\partial w_l}(w_0) \right| \leq \frac{4 \ln(2B_1 B_2) B_3}{r_\gamma} \|F\|.$$

On a aussi, pour tout w de $Z\left(B\left(z_0, \frac{r_\gamma}{6}\right)\right)$:

$$\frac{\partial I}{\partial w_l}(w) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \sum_{j=1}^{j=2} \int_C \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_l \partial \bar{\zeta}_j}(\zeta) \chi(\zeta) + \frac{\partial F}{\partial \bar{\zeta}_j}(\zeta) \frac{\partial \chi}{\partial \zeta_l}(\zeta) \right) \frac{\overline{\zeta_j - w_j}}{|\zeta - w|^4} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Ceci est vrai en particulier pour $w = w_0$. On a donc :

$$\left| \frac{\partial I}{\partial w_l}(w_0) \right| \leq \frac{2}{(2\pi)^2} \left(\|d(\bar{\partial}F)\| \|\chi\| + \|\bar{\partial}F\| \|\partial\chi\| \right) \int_{B\left(z_0, \frac{2r_\gamma}{3}\right)} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta - w_0|^3}.$$

Or, comme plus haut, on a :

$$\int_{B\left(z_0, \frac{2r_\gamma}{3}\right)} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta - w_0|^3} \leq 4\pi^2 B_1 r_\gamma.$$

On en déduit donc :

$$\left| \frac{\partial I}{\partial w_l}(w_0) \right| \leq 2B_1 r_\gamma \left(\|d(\bar{\partial}F)\| \|\chi\| + \|\bar{\partial}F\| \|\partial\chi\| \right).$$

On a donc, en utilisant (7.2.1),

$$\left| \frac{\partial I}{\partial w_l}(w_0) \right| \leq 2B_1 B_3 r_\gamma \left(\|d(\bar{\partial}F)\| + \frac{\|\bar{\partial}F\|}{r_\gamma} \right).$$

Ainsi, on a, pour tout w_0 de $Z(\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma)))$,

$$(7.3.4) \quad \left| \frac{\partial I}{\partial w_l}(w_0) \right| \leq 4B_1 B_3 q_1(\bar{\partial}F).$$

Finalement, étant donné que l'on a $r_\gamma = |y_0| \sin \gamma \geq \frac{\gamma}{2} |y_0|$, on en déduit à l'aide des inégalités (7.3.3) et (7.3.4) et en prenant $B_5 \geq 4B_3 \max(2 \ln(2B_1 B_2), B_1)$, le contrôle (7.3.1) des dérivées premières de F .

Le contrôle des dérivées secondes de F s'effectue de la même manière. On a

$$|D^2 H(w_0)| \leq \frac{12}{(2\pi)^2} \|\bar{\partial}\chi\| \|F\| \int_{\{\zeta \in Z(B(z_0, \frac{2r_\gamma}{3}) \setminus B(z_0, \frac{r_\gamma}{3}))\}} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta - w_0|^5}.$$

$$(7.3.5) \quad |D^2 H(w_0)| \leq \frac{36B_2 B_3 \ln(2B_1 B_2)}{r_\gamma^2} \|F\|.$$

De même, on a :

$$|D^2 I(w_0)| \leq \frac{2}{(2\pi)^2} \left(\|d^2(\bar{\partial}F)\| \|\chi\| + 2\|d(\bar{\partial}F)\| \|\partial\chi\| + \|\bar{\partial}F\| \|\partial^2\chi\| \right) \int_{B(z_0, \frac{2r_\gamma}{3})} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta - w_0|^3}.$$

$$|D^2 I(w_0)| \leq 2B_1 B_3 r_\gamma \left(\|d^2(\bar{\partial}F)\| + \frac{2}{r_\gamma} \|d(\bar{\partial}F)\| + \left(\frac{1}{r_\gamma}\right)^2 \|\bar{\partial}F\| \right).$$

On a donc, pour tout w_0 de $Z(\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma)))$,

$$(7.3.6) \quad |D^2 I(w_0)| \leq \frac{10B_1 B_3}{\gamma |y_0|} q_2(\bar{\partial}F).$$

Finalement, en additionnant les inégalités obtenues en (7.3.5) et (7.3.6) et en posant $B_5 = 4B_3 \max(36B_2 \ln(2B_1 B_2), 5B_1)$, on obtient le contrôle (7.3.2) des dérivées secondes de F .

Les contrôles obtenus sur les dérivées de la fonction F , en chaque point $w_0 = Z(z_0)$ de $Z(\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^n, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma)))$ font intervenir la distance de z_0 par rapport à l'edge $\mathbb{R}^n$ ainsi que l'angle γ qui représente la réduction de l'ouverture du coin dans lequel la fonction F est définie.

7.4 Proposition

Soient R_0 et Z , définis dans le lemme (6.3) tels que $Z : B(0, R_0) \rightarrow Z(B(0, R_0))$ définisse un difféomorphisme de classe C^3 .

Soient β et R , deux réels strictement positifs tels que $\beta < \frac{\pi}{4}$ et $R \leq R_0$.

On considère F , une fonction continue sur $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\beta; R)} \right)$ telle que $\bar{\partial}F$ est de classe C^2 sur $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\beta; R)} \right)$.

Alors, pour tout $\gamma > 0$ tel que $\beta + \gamma < \frac{\pi}{4}$, la fonction G , définie sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\beta; R)}$ par $G = F \circ Z$ est alors de classe C^1 sur $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$

et on a aussi $\bar{\partial}G$, de classe C^1 sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$.

De plus, il existe une constante B_6 telle que, pour tout $z = x + iy$ de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$, on a

$$(7.4.1) \quad |D^1 G(z)| \leq B_6 \left(\frac{\|F\|}{\gamma |y|} + q_1(\bar{\partial}F) \right),$$

et, pour tout $z = x + iy$ de $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$, on a

$$(7.4.2) \quad |\bar{\partial}G(z)| \leq B_6 \left(\frac{\|F\|}{\gamma} + q_1(\bar{\partial}F) \right)$$

$$(7.4.3) \quad \text{et } |D^1(\bar{\partial}G)(z)| \leq B_6 \left(\frac{\|F\|}{\gamma^2} + \frac{q_2(\bar{\partial}F)}{\gamma} \right).$$

(La constante B_6 ne dépend que de Z).

G est évidemment continue sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$. De plus, on sait aussi, d'après la proposition 7.3, que G est de classe C^2 sur $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$ et on a, pour tout $z = x + iy$ de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$,

$$\frac{\partial G}{\partial z_j}(z) = \sum_{l=1}^2 \frac{\partial F}{\partial w_l} \circ Z(z) \frac{\partial Z_l}{\partial z_j}(z) + \frac{\partial F}{\partial \bar{w}_l} \circ Z(z) \frac{\partial \bar{Z}_l}{\partial z_j}(z).$$

$$\left| \frac{\partial G}{\partial z_j}(z) \right| \leq 2 \left| \partial F(Z(z)) \right| \|dZ\| + \|\bar{\partial}F\| \|dZ\|.$$

D'après (7.3.1) et (6.2.1), on a alors :

$$(7.4.4) \quad \left| \frac{\partial G}{\partial z_j}(z) \right| \leq 2B_1 B_5 \left(\frac{\|F\|}{\gamma |y|} + q_1(\bar{\partial}F) \right).$$

Ceci établit (7.4.1), en prenant $B_6 \geq 2B_1B_5$.

De même, on a, pour tout z de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$,

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{z}_j}(z) = \sum_{l=1}^2 \frac{\partial F}{\partial w_l} \circ Z(z) \frac{\partial Z_l}{\partial \bar{z}_j}(z) + \frac{\partial F}{\partial \bar{w}_l} \circ Z(z) \frac{\partial \bar{Z}_l}{\partial z_j}(z).$$

$$\text{On pose } H_j(z) = \sum_{l=1}^2 \frac{\partial F}{\partial w_l} \circ Z(z) \frac{\partial Z_l}{\partial \bar{z}_j}(z) \text{ et } I_j(z) = \sum_{l=1}^2 \frac{\partial F}{\partial \bar{w}_l} \circ Z(z) \frac{\partial \bar{Z}_l}{\partial z_j}(z).$$

La fonction I_j est de classe C^1 sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$ et on a, pour tout z de $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$,

$$(7.4.5) \quad |I_j(z)| \leq 2B_1 \|\bar{\partial} F\|.$$

On a, de plus, pour tout z de $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_j}{\partial z_k}(z) &= \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial w_m \partial \bar{w}_l} \circ Z(z) \frac{\partial Z_m}{\partial z_k}(z) \frac{\partial \bar{Z}_l}{\partial z_j}(z) + \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{w}_m \partial w_l} \circ Z(z) \frac{\partial \bar{Z}_m}{\partial \bar{z}_k}(z) \frac{\partial Z_l}{\partial z_j}(z) \\ &\quad + \sum_{l=1}^2 \frac{\partial F}{\partial \bar{w}_l} \circ Z(z) \frac{\partial^2 \bar{Z}_l}{\partial z_k \partial z_j}(z). \end{aligned}$$

En utilisant (6.2.1), on a donc, pour tout z de $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$,

$$(7.4.6) \quad \left| \frac{\partial I_j}{\partial z_k}(z) \right| \leq (8B_1^2 + 2B_1)q_1(\bar{\partial} F).$$

On procède de la même manière pour contrôler $\frac{\partial I_j}{\partial \bar{z}_k}$ sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$.

La fonction H_j est de classe C^1 sur $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$ et, prolongée par 0 sur $\mathbb{R}^2 \cap B(0, R(1 - \sin \gamma))$ ainsi que ses dérivées premières, elle s'étend alors en une fonction de classe C^1 sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$. En effet, on a, pour tout z de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$,

$$|H_j(z)| \leq |\partial F(Z(z))| \sum_{l=1}^2 \left| \frac{\partial Z_l}{\partial \bar{z}_j}(z) \right|.$$

D'après les inégalités (7.3.1), (6.2.1) et (6.3.1), on déduit alors

$$|H_j(z)| \leq 4B_1B_5 |y| \left(\frac{\|F\|}{|\gamma| |y|} + q_1(\bar{\partial} F) \right).$$

H_j , ainsi prolongée est donc bien continue sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$ et on a, pour tout z de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$,

$$(7.4.7) \quad |H_j(z)| \leq 4B_1 B_5 \left(\frac{\|F\|}{\gamma} + q_1(\bar{\partial}F) \right).$$

De plus, on a, pour tout z de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_j}{\partial z_k}(z) &= \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial w_m \partial w_l} \circ Z(z) \frac{\partial Z_m}{\partial z_k}(z) \frac{\partial Z_l}{\partial \bar{z}_j}(z) + \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{w}_m \partial w_l} \circ Z(z) \frac{\partial \bar{Z}_m}{\partial z_k}(z) \frac{\partial Z_l}{\partial \bar{z}_j}(z) \\ &\quad + \sum_{l=1}^2 \frac{\partial F}{\partial w_l} \circ Z(z) \frac{\partial^2 Z_l}{\partial z_k \partial \bar{z}_j}(z). \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \left| \frac{\partial H_j}{\partial z_k}(z) \right| \leq 8B_1 |d^2 F(Z(z))| |\bar{\partial}Z(z)| + 2|\partial F(Z(z))| |d(\bar{\partial}Z)(z)|.$$

A l'aide de (7.3.1), (7.3.2), (6.3.1) et (6.3.2), on a alors

$$\left| \frac{\partial H_j}{\partial z_k}(z) \right| \leq 4B_1 B_5 \left(\frac{4\|F\|}{\gamma^2} + \frac{4q_2(\bar{\partial}F)}{\gamma} + \frac{\|F\|}{\gamma} + q_1(\bar{\partial}F) \right) \sup_{|\zeta-x|<|y|} \left| d^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}_j} \right) (\zeta) \right|.$$

$$\left| \frac{\partial H_j}{\partial z_k}(z) \right| \leq 20B_1 B_5 \left(\frac{\|F\|}{\gamma^2} + \frac{q_2(\bar{\partial}F)}{\gamma} \right) \sup_{|\zeta-x|<|y|} \left| d^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}_j} \right) (\zeta) \right|.$$

$$\text{On a donc } \lim_{|y| \rightarrow 0} \frac{\partial H_j}{\partial z_k}(z) = 0.$$

On a, de plus, pour tout z de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$,

$$(7.4.8) \quad \left| \frac{\partial H_j}{\partial z_k}(z) \right| \leq 20B_1^2 B_5 \left(\frac{\|F\|}{\gamma^2} + \frac{q_2(\bar{\partial}F)}{\gamma} \right).$$

On procède de la même manière pour contrôler $\frac{\partial H_j}{\partial \bar{z}_k}$ sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$.

Finalement, H_j s'étend en une fonction de classe C^1 sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$.

Ainsi, $\frac{\partial G}{\partial \bar{z}_j}$ s'étend en une fonction de classe C^1 sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$ et

pour tout z de $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$, on a d'après les contrôles obtenus en (7.4.5) et (7.4.7)

$$(7.4.9) \quad \left| \frac{\partial G}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq 6B_1 B_5 \left(\frac{\|F\|}{\gamma} + q_1(\bar{\partial}F) \right).$$

Ceci établit (7.4.2) en prenant $B_6 \geq 6B_1B_5$. Pour tout z de $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$, on a aussi, d'après (7.4.6) et (7.4.8)

$$(7.4.10) \quad |D^1(\bar{\partial}G)(z)| \leq 30B_1^2B_5 \left(\frac{\|F\|}{\gamma^2} + \frac{q_2(\bar{\partial}F)}{\gamma} \right).$$

Ceci établit alors (7.4.3), en posant $B_6 = 30B_1^2B_5$.

8- Contrôle des dérivées premières d'une fonction à support petit définie sur des coins droits

A l'aide des paragraphes 6 et 7, on a ramené l'étude d'une fonction F , définie sur des quasi-coins $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\beta; R)} \right)$ à celle d'une fonction $G = F \circ Z$, définie sur des coins droits en donnant notamment dans la proposition 7.4, des estimations sur les dérivées premières de G et $\bar{\partial}G$. On montre, dans ce paragraphe, que l'on obtient un gain de régularité jusqu'à l'arête $\mathbb{R}^2$, d'une telle fonction G . Pour cela, on tronque la fonction G dans des boules centrées en chaque point de l'arête $\mathbb{R}^2$. On définit dans ce but, pour tout x_0 de $\mathbb{R}^2$, la fonction de troncature suivante :

8.1 Lemme

Soit $u > 0$ et x_0 un point de $\mathbb{R}^2$. Il existe une fonction χ_{x_0} , définie dans $\mathbb{C}^2$, de classe C^3 et vérifiant :

$$\chi_{x_0}(z) = 1, \text{ pour tout } z \text{ de } B\left(x_0, \frac{u}{3}\right).$$

$$\chi_{x_0}(z) = 0, \text{ pour tout } z \text{ hors de } B\left(x_0, \frac{2u}{3}\right).$$

$$\bar{\partial}\chi_{x_0}(t) = 0, \text{ pour tout } t \text{ de } \mathbb{R}^2, \text{ à l'ordre } 2.$$

Il existe une constante B_7 telle que pour tout z de $\mathbb{C}^2$ et tout multi-indice K de longueur $k \leq 3$, on ait :

$$(8.1.1) \quad |D^K \chi_{x_0}(z)| \leq \left(\frac{B_7}{u} \right)^k.$$

Il existe de plus une constante B_8 telle que, pour tout $z = x + iy$ de $\mathbb{C}^2$, on ait

$$(8.1.2) \quad \left| \frac{\partial \chi_{x_0}}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq B_8 \frac{|y|^2}{u^3}.$$

$$(8.1.3) \quad \left| D^1 \left(\frac{\partial \chi_{x_0}}{\partial \bar{z}_j} \right)(z) \right| \leq B_8 \frac{|y|}{u^3}.$$

(Les constantes B_7 et B_8 ne dépendent que de la dimension de $\mathbb{C}^2$.)

preuve

On considère la fonction $\chi_{3,2}$, de classe C^3 dans $\mathbb{C}^2$, définie dans le lemme (3.6). Cette fonction possède les propriétés suivantes :

$\chi_{3,2}(z) = 1$, pour tout z de $B(0, 1)$.

$\chi_{3,2}(z) = 0$, pour tout z hors de $B(0, 2)$.

$\bar{\partial}\chi_{3,2}(t) = 0$, pour tout t de $\mathbb{R}^2$, à l'ordre 2 .

Il existe une constante B_9 ne dépendant que de la dimension de $\mathbb{C}^2$ telle que, pour tout multi-indice J de longueur $j \leq 3$ et tout z de $\mathbb{C}^2$, on ait :

$$| D^J \chi_{3,2}(z) | \leq B_9^j.$$

Soit alors la fonction χ_{x_0} , définie dans $\mathbb{C}^2$ par : $\chi_{x_0}(z) = \chi_{3,2}\left(\frac{3(z - x_0)}{u}\right)$. On a alors

$\chi_{x_0}(z) = 1$, pour tout z de $B(x_0, \frac{u}{3})$,

$\chi_{x_0}(z) = 0$, pour tout z hors de $B(x_0, \frac{2u}{3})$,

$\bar{\partial}\chi_{x_0}(t) = 0$, pour tout t de $\mathbb{R}^2$, à l'ordre 2.

En posant $B_7 = 3B_9$, on établit (8.1.1) et, de la même manière que dans le lemme 4.5, à l'aide de la formule de Taylor, on établit (8.1.2) et (8.1.3).

8.2 Proposition

Soit G , une fonction continue sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\delta; R_\delta)}$ telle que $\bar{\partial}G$ soit de classe C^1 sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\delta; R_\delta)}$. On suppose que G est de classe C^1 sur $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\delta; R_\delta)$ et qu'il existe une constante B_{10} dépendant de G et δ telle que pour tout z de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\delta; R_\delta)$, on ait :

$$(8.2.1) \quad | D^1 G(z) | \leq \frac{B_{10}}{|y|}.$$

Alors, pour tout t ($0 < t < 1$), G est de classe C^1 sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\delta; R_\delta(1-t))}$.

De plus, il existe une constante B_{11} telle que, pour tout z de $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\delta; R_\delta(1-t))}$, on a

$$(8.2.2) \quad | D^1 G(z) | \leq B_{11} \left(\frac{B_{10}}{R_\delta t} + \frac{\|G\|}{R_\delta t} + q_1(\bar{\partial}G) \right).$$

preuve

Soit x_0 , un point de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $|x_0| \leq R_\delta(1-t)$. On a $B(x_0, R_\delta t) \subset B(0, R_\delta)$. On considère alors la fonction χ_{x_0} , associée à x_0 , définie dans le lemme 8.1, en posant

$u = R_\delta t$. Soit alors G_{x_0} , la fonction définie dans $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta}$ par : $G_{x_0} = \chi_{x_0} G$.

La fonction G_{x_0} est continue sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta}$ et vérifie $\text{supp } G_{x_0} \subset \overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta} \cap B(x_0, R_\delta t)$.

De plus, $\bar{\partial} G_{x_0}$ est de classe C^1 sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta}$.

$$\text{En effet, on a } \frac{\partial G_{x_0}}{\partial \bar{z}_j} = b_j + m_j, \text{ où } b_j = \chi_{x_0} \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{z}_j} \right) \text{ et } m_j = \left(\frac{\partial \chi_{x_0}}{\partial \bar{z}_j} \right) G.$$

Or, b_j est de classe C^1 sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta}$ et on a, d'après (8.1.1), pour tout z de $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta}$,

$$|D^1 b_j(z)| \leq |\chi_{x_0}(z)| \left| D^1 \frac{\partial G}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| + |D^1 \chi_{x_0}(z)| \left| \frac{\partial G}{\partial \bar{z}_j}(z) \right|.$$

$$(8.2.3) \quad |D^1 b_j(z)| \leq \|d(\bar{\partial} G)\| + \frac{B_7}{R_\delta t} \|\bar{\partial} G\|.$$

De même, m_j prolongée par 0 sur $\mathbb{R}^2$ ainsi que ses dérivées premières, est de classe C^1 sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta}$. m_j est évidemment continue sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta$. On a, de plus, pour tout z de $\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta \cap B(x_0, R_\delta t)$

$$|D^1 m_j(z)| \leq \left| D^1 \frac{\partial \chi_{x_0}}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| |G(z)| + \left| \frac{\partial \chi_{x_0}}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| |D^1 G(z)|.$$

On a donc, d'après (8.1.2) et (8.1.3), pour tout z de $\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta \cap B(x_0, R_\delta t)$:

$$|D^1 m_j(z)| \leq B_8 \frac{|y|}{(R_\delta t)^3} (\|G\| + B_{10}).$$

Ainsi, on a bien $\lim_{|y| \rightarrow 0} D^1 m_j(z) = 0$ et, puisque $|y| \leq R_\delta t$, on a, pour tout z de

$$\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta \cap B(x_0, R_\delta t)$$

$$(8.2.4) \quad |D^1 m_j(z)| \leq \frac{B_8}{(R_\delta t)^2} (\|G\| + B_{10}).$$

Enfin, puisque m_j est nulle hors de $B(x_0, R_\delta t)$, (8.2.4) est vraie pour tout z de $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta}$.

Finalement, $\frac{\partial G_{x_0}}{\partial \bar{z}_j}$ est bien de classe C^1 sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta}$ et on a d'après (8.2.3) et (8.2.4), pour tout z de $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta}$

$$(8.2.5) \quad \left| D^1 \frac{\partial G_{x_0}}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq \frac{B_8}{(R_\delta t)^2} (\|G\| + B_{10}) + \frac{2B_7}{R_\delta t} q_1(\bar{\partial} G).$$

Pour tout x_0 de $B_{\mathbb{R}^2}(0, R_\delta(1-t))$, on en déduit alors d'après le lemme 5.1, en posant $u = R_\delta t$, $\alpha = \delta$ et $k = 1$, que G_{x_0} est de classe C^1 sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta}$ et que, pour tout z de $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta}$, on a

$$(8.2.6) \quad |D^1 G_{x_0}(z)| \leq 6R_\delta t \|d(\bar{\partial} G_{x_0})\|.$$

On a donc, d'après (8.2.5) et (8.2.6), pour tout z de $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta}$

$$(8.2.7) \quad |D^1 G_{x_0}(z)| \leq \frac{6B_8}{R_\delta t} (\|G\| + B_{10}) + 12B_7 q_1(\bar{\partial} G).$$

Or, pour tout x_0 de $\overline{B_{\mathbb{R}^2}(0, R_\delta(1-t))}$, la fonction G_{x_0} coïncide avec G ainsi que ses dérivées premières sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta} \cap B(x_0, \frac{R_\delta t}{3})$. On en déduit alors que G est de classe C^1 sur $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta} \cap P\left((0,0); (R_\delta(1-t), \frac{R_\delta t}{3})\right)$ et qu'il existe une constante $B_{12} = 6 \max(2B_7, B_8)$ telle que, pour tout z_0 de $\overline{\mathbb{R}^2 \pm i\Lambda_\delta} \cap P\left((0,0); (R_\delta(1-t), \frac{R_\delta t}{3})\right)$, on a

$$(8.2.8) \quad |D^1 G(z_0)| \leq B_{12} \left(\frac{B_{10}}{R_\delta t} + \frac{\|G\|}{R_\delta t} + q_1(\bar{\partial} G) \right).$$

De plus, d'après l'hypothèse (8.2.1), la fonction G est de classe C^1 sur $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \Lambda_\delta; R)$ et on a, en particulier, pour tout $z_0 = x_0 + iy_0$ où $|y_0| \geq \frac{R_\delta t}{3}$:

$$(8.2.9) \quad |D^1 G(z_0)| \leq \frac{3B_{10}}{R_\delta t}.$$

Ainsi, la fonction G est de classe C^1 sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \Lambda_\delta; R_\delta(1-t))}$, pour tout $t > 0$ et on établit (8.2.2) à l'aide de (8.2.8) et (8.2.9), en posant $B_{11} = \max(B_{12}, 3)$.

9- Démonstration du théorème 5

La preuve du théorème 5 s'effectue sur un principe de récurrence. A chaque pas de cette récurrence, on gagne de la régularité sur la fonction F_0 de départ. Ainsi, aux dérivées successives de F_0 , on applique la même démarche résumée dans la proposition suivante.

9.1 Proposition

Soient $R_0 \leq 1$ et Z , définis dans le lemme (6.3) tels que $Z : B(0, R_0) \rightarrow Z(B(0, R_0))$ définisse un difféomorphisme de classe C^3 .

Soient β et R , deux réels strictement positifs tels que $\beta < \frac{\pi}{4}$ et $R \leq R_0$.

On considère F , une fonction continue sur $Z\left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \Lambda_\beta; R)}\right)$ telle que

$\bar{\partial} F$ est de classe C^2 sur $Z\left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \Lambda_\beta; R)}\right)$. Alors, pour tout $\gamma > 0$, F est de

classe C^1 sur $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma)(1 - \gamma))} \right)$ et il existe une constante B_{13} telle que pour tout w de $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma)(1 - \gamma))} \right)$, on ait :

$$(9.1.1) \quad |D^1 F(w)| \leq \frac{B_{13}}{R} \left(\frac{\|F\|}{\gamma^2} + \frac{q_2(\bar{\partial} F)}{\gamma} \right).$$

(La constante B_{13} ne dépend que de Z).

preuve

D'après la proposition (7.4), on sait que, pour tout $\gamma > 0$, la fonction G , définie par $G = F \circ Z$ est de classe C^1 sur $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$ et que $\bar{\partial} G$ est de classe C^1 sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$. De plus, d'après (7.4.1), il existe une constante B_6 , ne dépendant que de Z telle que pour tout z de $\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))$, on ait :

$$(9.1.2) \quad |D^1 G(z)| \leq \frac{B_6}{|y|} \left(\frac{\|F\|}{\gamma} + q_1(\bar{\partial} F) \right)$$

et d'après (7.4.2) et (7.4.3), on a sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma))}$,

$$(9.1.3) \quad q_1(\bar{\partial} G) \leq B_6 \left(\frac{\|F\|}{\gamma^2} + \frac{q_2(\bar{\partial} F)}{\gamma} \right).$$

On applique alors la proposition 8.2 à la fonction G avec $\delta = \beta + \gamma$, $R_\delta = R(1 - \sin \gamma)$ et $t = \gamma$. On en déduit que G est de classe C^1 sur $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma)(1 - \gamma))}$. Et d'après (8.2.2), (9.1.2) et (9.1.3), il existe une constante B_{11} ne dépendant que de la dimension de $\mathbb{C}^2$ telle que, pour tout z de $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma)(1 - \gamma))}$, on ait

$$|D^1 G(z)| \leq \frac{B_6 B_{11}}{R(1 - \sin \gamma)} \left(\frac{\|F\|}{\gamma^2} + \frac{q_1(\bar{\partial} F)}{\gamma} + \frac{\|F\|}{\gamma} + \frac{\|F\|}{\gamma^2} + \frac{q_2(\bar{\partial} F)}{\gamma} \right).$$

On a donc, pour tout z de $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma)(1 - \gamma))}$,

$$|D^1 G(z)| \leq \frac{3B_6 B_{11}}{R(1 - \sin \gamma)} \left(\frac{\|F\|}{\gamma^2} + \frac{q_2(\bar{\partial} F)}{\gamma} \right).$$

Or, pour tout γ , $0 < \gamma < \frac{\pi}{4}$, on a $1 - \sin \gamma > \frac{1}{8}$. On a alors, pour tout z de $\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1 - \sin \gamma)(1 - \gamma))}$,

$$|D^1 G(z)| \leq \frac{24B_6 B_{11}}{R} \left(\frac{\|F\|}{\gamma^2} + \frac{q_2(\bar{\partial} F)}{\gamma} \right).$$

On en déduit alors que F est de classe C^1 sur $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta+\gamma}; R(1-\sin\gamma)(1-\gamma))} \right)$ et on établit (9.1.1) en posant $B_{13} = 24B_2B_6B_{11}$, constante ne dépendant que de Z .

On peut remarquer que, dans cette proposition, la régularité C^1 de la fonction F jusqu'à l'arête s'obtient en réduisant d'une part, l'ouverture des quasi-coins d'un angle γ et d'autre part, le rayon de la boule dans laquelle les quasi-coins sont définis. On peut noter de plus, l'incidence qu'a cette réduction dans l'estimation (9.1.1) des dérivées premières de F jusqu'à l'arête.

9.2 Théorème

Soit E , une sous-variété totalement réelle de classe C^3 contenant 0 de dimension n dans $\mathbb{C}^n$. Soient $W^\pm$, des coins opposés d'arête commune E . Soit F_0 , une fonction continue sur $\overline{\bigcup W^\pm}$. Soit $\{M_p\}_{p \geq 0}$, une suite de réels vérifiant les hypothèses (H_1) et (H_2) . On suppose que $\bar{\partial}F_0$ (défini au sens des distributions dans $\bigcup W^\pm$) appartient à la classe $C(p!M_p; \overline{\bigcup W^\pm})$.

Alors, pour tout coin $W'^\pm$ strictement inclus dans $W^\pm$, la fonction F_0 appartient à $C(\max(p!^2, p!M_p); \overline{W'^\pm})$.

Soit Z , le difféomorphisme associé à E , défini sur un voisinage U_0 de 0 dans $\mathbb{C}^2$, construit dans le paragraphe 6. Le lemme 6.2 permet de ramener le cas de coins quelconques $\bigcup W'^\pm$ et $\bigcup W^\pm$ à l'étude de la situation géométrique plus simple où les hypothèses sur F_0 concernent $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_0; R_0)} \right)$ et où on souhaite établir, pour tout α , $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, un gain de régularité pour F_0 sur $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_\alpha)} \right)$, $0 < R_\alpha < R_0$.

Pour montrer que F_0 est de classe C^1 sur $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_\alpha)} \right)$ et obtenir une estimation de ses dérivées premières sur cet ensemble, il suffit d'appliquer une seule fois la proposition (9.1) à $F = F_0$, $\beta = 0$, $\gamma = \alpha$ et $R = R_0$.

On montre ainsi que F_0 est de classe C^1 sur $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_1)} \right)$,

où $R_1 = R_0(1 - \sin\alpha)(1 - \alpha)$. De plus, pour tout w de $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_1)} \right)$, on a

$$|D^1 F_0(w)| \leq \frac{B_{13}}{R_0} \left(\frac{\|F_0\|}{\alpha^2} + \frac{q_2(\bar{\partial}F_0)}{\alpha} \right).$$

Ainsi, puisque $\bar{\partial}F_0$ appartient à la classe $C(p!M_p; \overline{\bigcup W^\pm})$, on en déduit

$$|D^1 F_0(w)| \leq \frac{B_{13}}{R_0} \left(\frac{\|F_0\|}{\alpha^2} + \frac{2C_1 C_2^2 M_2}{\alpha} \right).$$

A l'aide de l'hypothèse (H_2) vérifiée par la suite $\{M_p\}$, on a donc

$$|D^1 F_0(w)| \leq \frac{B_{13}}{R_0} \left(\frac{\|F_0\|}{\alpha^2} + \frac{2C_1 A^2 C_2^2 M_1}{\alpha} \right).$$

Ainsi, pour tout w de $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_1)} \right)$, on a

$$(9.2.1) \quad |D^1 F_0(w)| \leq \frac{(2AC_1C_2 + \|F_0\|)B_{13}AC_2M_1}{\alpha^2 R_0}.$$

Pour montrer que F_0 est de classe C^2 sur $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_\alpha)} \right)$ et obtenir une estimation de ses dérivées secondes sur cet ensemble, on applique deux fois la proposition 9.1 ; ceci signifie qu'on effectue deux réductions sur les coins. On est alors amené, afin d'obtenir la régularité C^2 de F_0 dans l'ensemble souhaité, à réduire, à chacune des deux étapes, l'ouverture de ces coins d'un angle $\frac{\alpha}{2}$. Ainsi, on applique une première fois la proposition 9.1 à $F = F_0$ en posant $\beta = 0$, $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ et $R = R_0$.

On montre donc que F_0 est de classe C^1 sur $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\frac{\alpha}{2}}; R_0(1 - \sin \frac{\alpha}{2})(1 - \frac{\alpha}{2}))} \right)$.

Les dérivées premières de F_0 sont alors continues jusqu'à l'arête. On peut alors à nouveau appliquer la proposition 9.1, cette fois-ci, à une dérivée première quelconque de F_0 qu'on note $D^1 F_0$ et en posant $\beta = \frac{\alpha}{2}$, $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ et $R = R_1$.

Ceci montre alors que F_0 est de classe C^2 sur $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_2)} \right)$,

où $R_2 = R_0(1 - \sin \frac{\alpha}{2})^2(1 - \frac{\alpha}{2})^2$. De plus, pour tout w de $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_2)} \right)$, on a

$$|D^1 F_0(w)| \leq \frac{B_{13}}{R_0} \left(\frac{4\|F_0\|}{\alpha^2} + \frac{2q_2(\bar{\partial} F_0)}{\alpha} \right).$$

$$|D^2 F_0(w)| \leq \frac{B_{13}}{R_1} \left(\frac{4\|D^1 F_0\|}{\alpha^2} + \frac{2q_2(d(\bar{\partial} F_0))}{\alpha} \right).$$

On a alors, pour tout w de $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_2)} \right)$,

$$|D^2 F_0(w)| \leq \left(\frac{B_{13}}{R_1} \right)^2 \left(\frac{4\|F_0\|}{\alpha^2} + \frac{8q_2(\bar{\partial} F_0)}{\alpha^3} + \frac{2q_2(d(\bar{\partial} F_0))}{\alpha} \right).$$

Ainsi, puisque $\bar{\partial} F_0$ appartient à la classe $C(p!M_p; \overline{\bigcup W^\pm})$, on en déduit

$$|D^2 F_0(w)| \leq \left(\frac{B_{13}}{\alpha^2 R_1} \right)^2 (16\|F_0\| + 16C_1C_2^2M_2 + 6C_1C_2^3M_3).$$

A l'aide de l'hypothèse (H_2) que vérifie la suite $\{M_p\}$, on a donc

$$|D^2 F_0(w)| \leq \left(4 \frac{B_{13}}{\alpha^2 R_1} \right)^2 (\|F_0\| + C_1C_2^2M_2 + C_1(AC_2)^3M_2).$$

Ainsi, pour tout w de $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_2)} \right)$, on a

$$|D^2 F_0(w)| \leq \|F_0\| + 2AC_1C_2 \left(\frac{4B_{13}AC_2}{\alpha^2 R_1} \right)^2 M_2.$$

Pour montrer que, pour tout entier $k > 1$, F_0 est de classe C^k sur $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_\alpha)} \right)$ et obtenir une estimation de ses dérivées $k^{\text{ièmes}}$ sur cet ensemble, on itère k fois la proposition 9.1. Ainsi, on effectue k réductions sur les coins. Dans le but de contrôler les réductions effectuées, on définit deux suites finies (β_l) et (R_l) , pour $0 \leq l \leq k$:

$$\beta_l = \frac{\alpha l}{k} \text{ et } R_l = R_0 \left(1 - \sin \frac{\alpha}{k} \right)^l \left(1 - \frac{\alpha}{k} \right)^l.$$

La suite (β_l) caractérise la réduction de l'ouverture des coins. Elle précise qu'à chaque étape, on diminue cette ouverture d'un angle $\frac{\alpha}{k}$; ceci afin d'obtenir la régularité C^k , après k étapes, dans le coin réduit souhaité puisque $\beta_k = \alpha$. La suite (R_l) , quant à elle, caractérise la réduction que l'on effectue sur le rayon de la boule centrée en 0, dans laquelle sont définis les coins ; il faut avant tout s'assurer que ce rayon ne tend pas à s'annuler quand k tend vers l'infini ! Ce qui est bien le cas puisque $R_k = R_0 \left(1 - \sin \frac{\alpha}{k} \right)^k \left(1 - \frac{\alpha}{k} \right)^k$ est équivalent à $R_0 e^{-2\alpha}$, pour α proche de 0. On notera alors $R_\alpha = \min_{k \in \mathbb{N}} R_k$.

On montre alors par récurrence que, pour tout entier naturel $l \leq k$, la fonction F_0 est de classe C^l sur $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta_l}; R_l)} \right)$.

Pour cela, considérons F_l , une dérivée $l^{\text{ième}}$ de F_0 et appliquons la proposition (9.1) à $F = F_l$, $\beta = \beta_l$, $R = R_l$ et $\gamma = \frac{\alpha}{k}$. On en déduit alors que F_l est de classe C^1 sur $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta_{l+1}}; R_{l+1})} \right)$ et que, pour tout w de $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_{\beta_{l+1}}; R_{l+1})} \right)$, on a

$$|D^1 F_l(w)| \leq \frac{B_{13}}{R_l} \left(\frac{k^2 \|F_0\|}{\alpha^2} + \frac{k q_2 (\bar{\partial} F_0)}{\alpha} \right).$$

On en déduit finalement que F_0 est de classe C^k sur $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_k)} \right)$ et que, pour tout multi-indice L de longueur $l \leq k$, on a

$$|D^L F_0(w)| \leq \frac{B_{13}}{\alpha^2 R_\alpha} (k^2 \|d^{l-1} F_0\| + k q_2 (d^{l-1} (\bar{\partial} F_0))).$$

Pour k fixé, on obtient donc k inégalités du type précédent, vérifiées pour tout w de $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_\alpha)} \right)$:

$$|D^1 F_0(w)| \leq \frac{B_{13}}{\alpha^2 R_\alpha} (k^2 \|F_0\| + k q_2 (\bar{\partial} F_0)).$$

...

...

$$|D^k F_0(w)| \leq \frac{B_{13}}{\alpha^2 R_\alpha} (k^2 \|d^{k-1} F_0\| + k q_2 (d^{k-1} (\bar{\partial} F_0))).$$

En procédant par cascades, on en déduit alors que, pour tout w de $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_\alpha)} \right)$, on a

$$|D^k F_0(w)| \leq \left(\frac{B_{13}}{\alpha^2 R_\alpha} \right)^k \left(k^{2k} \|F_0\| + k \sum_{l=1}^k k^{2(k-l)} q_2 (d^{l-1} (\bar{\partial} F_0)) \right).$$

On en déduit à l'aide de (H_4) ,

$$|D^k F_0(w)| \leq \left(\frac{B_{13}}{\alpha^2 R_\alpha} \right)^k \left(k^{2k} \|F_0\| + 2^k \sum_{l=1}^k C_1 C_2^{l+1} k^{2(k-l)} (l+1)! M_{l+1} \right).$$

La suite $\{M_p\}$ vérifiant l'hypothèse (H_2) , on en déduit

$$|D^k F_0(w)| \leq \left(\frac{B_{13}}{\alpha^2 R_\alpha} \right)^k \left(k^{2k} \|F_0\| + 2AC_1 C_2 (4AC_2)^k \sum_{l=1}^k k^{2(k-l)} l! M_l \right).$$

Or, la suite de terme général $u_l = k^{2(k-l)} l! M_l$ est logarithmiquement convexe puisque le rapport $\frac{u_{l+1}}{u_l} = \frac{l+1}{k^2} \frac{M_{l+1}}{M_l}$ est strictement croissant. On en déduit alors que

$$\text{pour tout } l, 0 \leq l \leq k, k^{2(k-l)} l! M_l \leq \max(k^{2k}, k! M_k).$$

$$\text{On a donc pour tout } l, 0 \leq l \leq k, k^{2(k-l)} l! M_l \leq \left(e^2 \max(1, \frac{1}{M_1}) \right)^k \max(k!^2, k! M_k).$$

On en déduit donc, que pour tout w de $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_\alpha)} \right)$, on a

$$|D^k F_0(w)| \leq (2AC_1 C_2 + \|F_0\|) \left(\frac{4e^2 AC_2 B_{13}}{\alpha^2 R_\alpha} \max(1, \frac{1}{M_1}) \right)^k \max(k!^2, k! M_k).$$

Ainsi, en posant $C_3 = (2AC_1 C_2 + \|F_0\|)$ et $C_4 = 4e^2 AC_2 B_{13} \max(1, \frac{1}{M_1})$, on a bien pour tout w de $Z \left(\overline{\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_\alpha)} \right)$, $|D^k F_0(w)| \leq C_3 \left(\frac{C_4}{\alpha^2 R_\alpha} \right)^k \max(k!^2, k! M_k)$.

La constante C_3 dépend de $\|F_0\|$, de C_1 et de C_2 . La constante C_4 dépend de Z , de C_2 et de M_1 . Or, pour α assez petit, on a bien dans un voisinage de l'arête E ,

$$\bigcup W^\pm(E, \Gamma'; R') \subset\subset Z \left(\bigcup W^\pm(\mathbb{R}^2, \wedge_\alpha; R_\alpha) \right) \subset\subset \bigcup W^\pm(E, \Gamma; R).$$

Ainsi, on en déduit que F_0 appartient bien à $C \left(\max(p!^2, p! M_p) ; \overline{\bigcup W'^\pm} \right)$.

Références bibliographiques

- [Be] E. BEDFORD, *A short proof of the classical edge of the wedge theorem*, Proc. Am. Math. Soc. 43, 485-486 (1974).
- [Bo] N.N. BOGOLJUBOV et V.S. VLADIMIROV, *On some mathematical problems of quantum field theory*, Proc. Internat. Congress Math. (Edinburgh, 1958) Cambridge Univ. Press, New-York, 19-32, (1960).
- [CC₁] J. CHAUMAT et A.-M. CHOLLET, *Théorème de Whitney dans des classes ultradifférentiables*, Pub. IRMA Lille, Vol.28 VIII (1992).
- [CC₂] J. CHAUMAT et A.-M. CHOLLET, *Surjectivité de l'application restriction à un compact dans des classes ultradifférentiables*, Math. Ann., 298, 7-40 (1994).
- [F] H. FOURLINNIE, *Version Carleman du théorème de l'“Edge of the Wedge”*, C.R. Acad. Sci. Paris, 326, 561-566 (1998).
- [Ma] B. MALGRANGE, *Ideals of differentiable functions*, Oxford Univ. Press (1966).
- [R₁] J.-P. ROSAY, *A propos de “wedges” et d’“edges” et de prolongements holomorphes*, Trans. Am. Math. Soc., 297, 63-72 (1986)
- [R₂] J.-P. ROSAY, *The C^∞ version of the edge of the wedge for non-smooth edges*, J. Geom. Anal. 3, 335-341 (1993).
- [Ru] W. RUDIN, *Lectures on the edge of the wedge theorem*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math 6 AMS (1971).

