

THESE

Présentée à

l'Université des Sciences et Technologies de LILLE

en vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

Spécialité

Productique : Automatique et Informatique Industrielle

par

CAROLINE GUERNEZ JEAN

SURVEILLANCE DE SYSTEMES A MODELES POLYNOMIAUX :

GENERATION DE RESIDUS ET ETUDE DE SENSIBILITE

soutenue le 24 Septembre 1998 devant la commission d'examen

- Rapporteurs : - Daniel LAZARD, Professeur, Université de Paris VI, Jussieu
Dominique SAUTER, Professeur, Université de Nancy 1, H. Pointcaré
Sette DIOP, Chargé de recherche CNRS, LSS
- Examineurs : J. Pierre RICHARD Professeur, Ecole Centrale de Lille
Michel PETITOT Maître de conférence, USTL
Abdel AITOUCHE Enseignant, HEI
- Directeurs de thèse : J. Philippe CASSAR Professeur, USTL
Marcel STAROSWIECKI Professeur, USTL



AVANT PROPOS

Cette étude a été menée au sein du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de LILLE (LAIL - URA 1440) et encadrée par Monsieur le professeur Jean-Philippe CASSAR sous la direction de Monsieur le professeur Marcel STAROSWIECKI. Je tiens à leur témoigner toute ma reconnaissance pour l'aide tant scientifique que morale qu'ils ont su m'apporter tout au long de ce travail.

Je tiens également à remercier les membres du jury qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail :

Monsieur le Professeur Daniel LAZARD

Monsieur le Professeur Dominique SAUTER

Monsieur le Chargé de Recherche Sette DIOP

Mes remerciements vont également à Monsieur Michel PETITOT du Laboratoire de Calcul Formel du Laboratoire d'Informatique Fondamentale de LILLE pour ses précieux conseils, ainsi qu'aux membres de l'équipe de Surveillance du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielles.

Le Laboratoire d'Automatique des Hautes Etudes Industrielles de LILLE m'a accueillie et offert un cadre favorable à l'aboutissement de ce travail. Toute ma reconnaissance va donc à ses enseignants pour leur soutien tout au long de ce travail.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE.....	3
CHAPITRE 1. INTRODUCTION A LA SURVEILLANCE	5
1.1 INTRODUCTION.....	5
1.2 GENERALITES ET TERMINOLOGIE.....	6
1.2.1 <i>Notions de Système et Processus</i>	6
1.2.2 <i>Notion de Défaillances</i>	7
1.2.3 <i>Fonctions et opérations d'un système de surveillance</i>	9
1.2.4 <i>Evaluation du système de surveillance</i>	11
1.2.5 <i>Conclusion</i>	11
1.3 SURVEILLANCE A BASE DE MODELE ANALYTIQUE.....	12
1.3.1 <i>Modèles de processus</i>	12
1.3.2 <i>Génération des résidus</i>	14
1.3.3 <i>Décision</i>	17
1.3.4 <i>Localisation</i>	17
1.3.5 <i>Génération des résidus sous contraintes de localisation</i>	19
1.3.6 <i>Conclusion</i>	19
1.4 SURVEILLANCE DE SYSTEMES NON LINEAIRES.....	21
1.4.1 <i>Modèles non linéaires</i>	21
1.4.2 <i>Génération des résidus</i>	21
1.4.3 <i>Décision</i>	24
1.4.4 <i>Localisation</i>	24
1.5 CONCLUSION.....	25
CHAPITRE 2. ELIMINATION DANS LES SYSTEMES POLYNOMIAUX	26
2.1 INTRODUCTION.....	26
2.2 APPROCHE GEOMETRIQUE - ELIMINATION PAR PROJECTION.....	27
2.2.1 <i>Cas linéaire</i>	27
2.2.2 <i>Cas bilinéaire</i>	28
2.2.3 <i>Cas polynomial</i>	31
2.3 APPROCHE ALGEBRIQUE DE L'ELIMINATION POLYNOMIALE.....	33
2.3.1 <i>Algèbre des anneaux polynomiaux : quelques définitions</i>	33
2.3.2 <i>Enoncé de la théorie de l'élimination algébrique</i>	35
2.3.3 <i>Exhaustivité du résultat</i>	39
2.4 OBSERVABILITE ET RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS POLYNOMIALES.....	43
2.4.1 <i>Observabilité algébrique</i>	43
2.4.2 <i>Résolution d'un système d'équations</i>	46
2.5 IMPLEMENTATION	47
2.6 CONCLUSION.....	48

CHAPITRE 3. ESPACE DE PARITE POLYNOMIAL	49
3.1 INTRODUCTION.....	49
3.2 ALGEBRE / ALGEBRE DIFFERENTIELLE.....	50
3.3 MODELES POLYNOMIAUX TRAITES	51
3.3.1 Modèles de fonctionnement normal.....	51
3.3.2 Modèles d'incertitude et d'influence des défaillances.....	53
3.3.3 Extension temporelle du modèle	56
3.3.4 Conclusion	58
3.4 ESPACE DE PARITE POLYNOMIAL	59
3.4.1 Formulation du problème	59
3.4.2 Extraction des Relations de Redondance Analytique Polynomiales.....	59
3.4.3 Forme de calcul des résidus polynomiaux.....	65
3.4.4 Exhaustivité.....	66
3.4.5 Conclusion	66
3.5 ETUDE DE SENSIBILITE AUX DEFAILLANCES ET ROBUSTESSE AUX ENTREES INCONNUES	67
3.5.1 Formulation du problème	67
3.5.2 Robustesse aux entrées inconnues	67
3.5.3 Sensibilité aux défaillances - forme d'évaluation des résidus.....	68
3.5.4 Analyse de la sensibilité d'un résidu	76
3.6 STRUCTURATION DES RESIDUS	85
3.6.1 Notion de signature de panne théorique et réelle	85
3.6.2 Localisation des défaillances.....	85
3.6.3 Intérêt de la structuration des résidus	86
3.6.4 Structuration des résidus polynomiaux.....	87
3.7 CONCLUSION	93

**CHAPITRE 4. BASES DE GROEBNER DE GRANDS SYSTEMES D'EQUATIONS
POLYNOMIALES.....94**

4.1 INTRODUCTION.....	94
4.2 CHOIX DE L'ORDRE D'ELIMINATION DES VARIABLES INCONNUES	95
4.2.1 Analyse structurelle des systèmes d'équations	95
4.2.2 Génération des Bases de Groëbner	96
4.2.3 Remarque sur les systèmes blocs triangulaires	97
4.2.4 Conclusion	98
4.3 CONDITIONS NECESSAIRES D'EXISTENCE DE RELATIONS DE REDONDANCE ANALYTIQUE	99
4.3.1 Sous systèmes surdéterminés	99
4.3.2 Sous systèmes juste déterminés.....	100
4.3.3 Systèmes sous déterminés.....	105
4.3.4 Conclusion	106
4.4 PARTITIONNEMENT DU SYSTEME EN SOUS SYSTEMES	107
4.4.1 Connexion de blocs systèmes	107
4.4.2 Recherche de RRA.....	108
4.4.3 Application.....	111

4.4.4 Conclusion	117
CHAPITRE 5. ILLUSTRATION & MISE EN OEUVRE.....	118
5.1 INTRODUCTION.....	118
5.2 APPLICATION A UN SYSTEME STATIQUE DE SIX ECHANGEURS THERMIQUES	119
5.2.1 Cahier des charges	119
5.2.2 Modèle polynomial en fonctionnement normal.....	119
5.2.3 Base de Groebner de l'ensemble des Relations de Redondance Analytique Polynomiales du système	121
5.2.4 Analyse de sensibilité des résidus	123
5.2.5 Structuration des résidus	128
5.2.6 Conclusion	129
5.3 APPLICATION A UN SYSTEME DYNAMIQUE DE GREEMENT HYDRAULIQUE	131
5.3.1 Le système	131
5.3.2 Conception des résidus	132
5.3.3 Etude de sensibilité	134
5.3.4 Simulations.....	136
5.3.5 Conclusion	141
 CONCLUSION & PERSPECTIVES.....	142
Annexe 1 : COMPLEMENTS MATHEMATIQUES	144
Annexe 2 : SENSIBILITE D'UN RESIDU	151
Annexe 3 : ANALYSE STRUCTURELLE	156
BIBLIOGRAPHIE	161

INTRODUCTION GENERALE

Une des préoccupations de l'équipe Surveillance du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de LILLE concerne *l'étude structurelle des systèmes*. L'analyse du graphe structurel d'un système - graphe représentant les liens entre les variables et les contraintes du système - permet d'identifier l'ensemble des relations de redondances qu'il est possible de construire dans le système, d'en déduire les sous systèmes surveillables, les défaillances susceptibles d'être détectées et isolées, leur degré de localisabilité, les variables calculables, les capteurs à implanter pour répondre à des spécifications données...

Ces résultats ne prennent pas en compte un élément important du modèle : des *éliminations analytiques*, telles que les pertes de rang sur les systèmes linéaires, peuvent modifier les résultats obtenus par l'analyse structurelle du modèle. Ainsi certaines relations de redondance analytique ne peuvent être trouvées avec les procédures structurelles, ce qui prive le système de surveillance de résidus et nuit par conséquent à ses performances. De plus, ces éliminations analytiques peuvent modifier la structure des résidus obtenus en faisant disparaître analytiquement l'influence d'une défaillance sur un résidu.

Ces considérations nous ont amenés à nous intéresser aux *processus d'élimination* de variables dans les modèles analytiques décrivant le comportement des systèmes physiques. Nos premières investigations ont concerné le domaine des méthodes d'Espace de Parité linéaire, déjà largement exploré, ainsi que leur extension aux systèmes bilinéaires. Puis rapidement, notre attention s'est portée sur le *domaine de la géométrie algébrique* qui est l'étude des systèmes d'équations polynomiales et qui aborde notamment le thème de l'élimination de variables dans les systèmes polynomiaux. Ces travaux extérieurs au domaine de l'automatique sont particulièrement intéressants pour traiter cette classe particulière de systèmes non linéaires.

Les bases algorithmiques de la géométrie algébrique ne sont pas récentes, c'est dans les années 1960 que *Buchberger et Hironaka* ont découverts de nouveaux algorithmes pour manipuler les systèmes d'équations polynomiales. Mais ces dernières années, les nouveaux algorithmes, couplés à des calculateurs puissants et rapides, ont permis des applications intéressantes, notamment en robotique. C'est donc grâce à la *Théorie de l'Élimination* des systèmes algébriques, et à des logiciels de *Calcul Formel* réalisant l'implantation de ces algorithmes (MAPLE V, GB, ...), que nous allons pouvoir développer et exploiter des méthodes de surveillance de systèmes à modèles polynomiaux.

Cette *thèse* va explorer le domaine de la géométrie algébrique afin d'étayer des méthodes de *génération de résidus polynomiaux*, et des *méthodes d'analyses de sensibilité* - qui est un point sensible des systèmes non linéaires.

Le *Chapitre 1* est une introduction à la surveillance. Les principes généraux de la surveillance et sa terminologie y sont présentés. Les travaux existants concernant les méthodes de surveillance à partir de modèles analytiques - qui nous intéresserons dans la suite de cette thèse - y sont repris. Enfin ce chapitre décrit rapidement l'existant sur les systèmes non linéaires, en terme de surveillance.

Le *Chapitre 2* pose les bases théoriques qui seront utilisées dans les chapitres suivants. Le thème principal en est l'Élimination de variables dans les systèmes polynomiaux. Les approches géométriques couramment utilisées en Surveillance sont d'abord rappelées, dans le cas des systèmes linéaires et bilinéaires. L'approche algébrique associée est plus longuement détaillée dans le cas le plus général de systèmes polynomiaux. Après quelques notions d'algèbre, la théorie de l'Élimination est présentée, ainsi que son outil algorithmique les Bases de Groëbner. Suivent des considérations quant à l'exhaustivité des résultats trouvés. Une présentation de la notion d'observabilité algébrique et de la résolution de systèmes d'équations polynomiales conclut ce chapitre.

Le *Chapitre 3* présente notre contribution à la génération de résidus polynomiaux et à l'étude de leur sensibilité. Une méthode d'Espace de Parité Polynomiale permettant de générer des résidus de surveillance polynomiaux y est présentée dans un premier temps. Cette dernière est basée sur la Théorie de l'Élimination et développée grâce aux Bases de Groëbner. Dans un deuxième temps, nous nous intéressons à la sensibilité aux défaillances des résidus ainsi générés, ainsi qu'à leur robustesse face aux entrées inconnues.

Le *Chapitre 4* présente notre contribution au calcul des Bases de Groëbner sur des grands systèmes d'équations. Cette préoccupation provient du fait que les algorithmes de Bases de Groëbner peuvent mettre en jeu énormément de temps et de place mémoire, et que cette tendance se trouve encouragée par la complexité du système. Ainsi, nous proposons dans ce chapitre quelques pré-traitements structurels pouvant contribuer à faciliter le calcul des Bases de Groëbner, et par là même le développement de notre méthode de génération de résidus polynomiaux dans les grands systèmes d'équations.

Enfin, le *Chapitre 5* illustre les propos des chapitres précédents. Deux illustrations sont développées : la première application considérée est un *système statique*, constitué de six échangeurs thermiques montés en série-parallèle, la deuxième application est un *système dynamique*, constitué d'un anneau hydraulique de test.

1. INTRODUCTION A LA SURVEILLANCE

1.1 INTRODUCTION

Par essence, la surveillance vise à assurer l'intégrité du système auquel elle s'applique. Sa fonction est donc [Isermann 96] de reconnaître et d'indiquer en temps réel les anomalies de comportement à partir des informations disponibles sur le système (mesures, modèles, historiques, ...).

La notion de base de la surveillance est l'observation orientée vers le contrôle de l'intégrité. Ce contrôle a pour objectifs d'assurer la cohérence des informations obtenues par observation avec la connaissance disponible sur le comportement du système à surveiller. Le *test de cohérence* est basé sur la notion de *redondance d'information*.

Il y a *redondance d'information* lorsque plusieurs informations, d'origines différentes, sont disponibles sur la valeur d'une variable physique. L'observation fournit une partie des informations nécessaires à la redondance, mais elle doit être complétée par d'autres connaissances sur le système. La surveillance utilise la redondance en testant la cohérence de ces différentes informations pour détecter la présence d'une défaillance. Le *test de cohérence* dépend de la nature des informations disponibles et donne lieu à différentes approches rassemblées Figure 1-1, les approches indiquées par une astérisque nous intéressent plus particulièrement pour ce mémoire. [Frank 96]

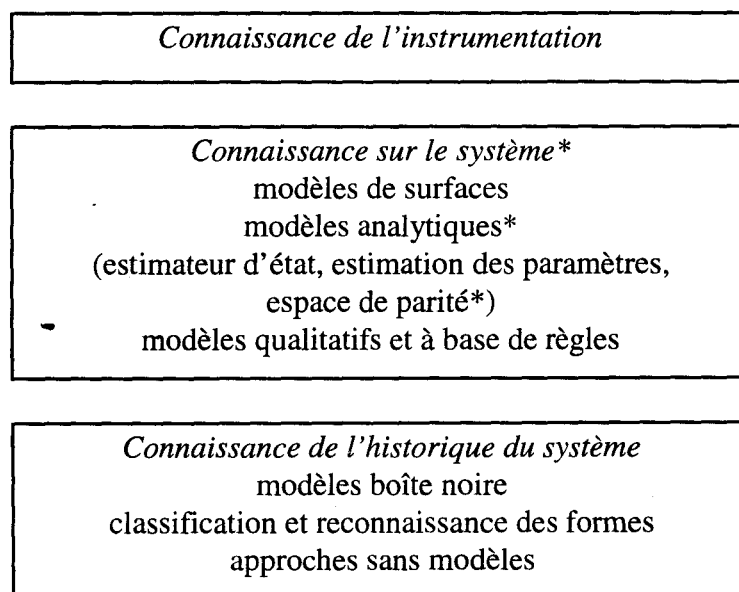


Figure 1-1 : Connaissances permettant de tester la cohérence d'information par redondance d'information.

La section 1.2 décrit les concepts inhérents à toute méthode de surveillance et précise la terminologie employée.

La section 1.3 s'intéresse plus particulièrement à la surveillance à base de modèles analytiques qui est le cadre de cette thèse. Les concepts de la section 1.2 y sont plus détaillés. Les différentes méthodes de génération et d'évaluation de résidus sont brièvement décrites.

La section 1.4 traite de la surveillance des systèmes non linéaires. On y parle de linéarisation, et à nouveau d'estimation de paramètres, d'estimation d'état et d'espace de parité.

1.2 GENERALITES ET TERMINOLOGIE

Les définitions que nous présentons ici sont issues ou inspirées des références [Isermann 96], [Frank 90], [Brunet 90] [Cassar 96].

1.2.1 Notions de Système et Processus

Un *système* est une combinaison de *processus élémentaires* et d'une *unité de commande* permettant de former un ensemble cohérent dans un but spécifique (transformation de matière, transport, etc.).

Chaque processus élémentaire est associé à un ensemble d'actionneurs et de capteurs qui constituent respectivement le *processus d'actionnement* et l'*instrumentation*.

Le processus d'actionnement permet d'appliquer au processus des sollicitations ou commandes, appelées *entrées* et générées par l'unité de commande. L'instrumentation délivre des mesures ou *sorties mesurées*.

Par commodité, on désignera par le mot générique *processus* l'ensemble constitué du processus d'actionnement, du processus élémentaire et de l'instrumentation.

Les entrées et les sorties constituent les *variables externes* du processus. Les sorties sont une image de l'*état* du processus. L'état est un ensemble de *variables internes* suffisant pour résumer le passé et déterminer le futur immédiat du processus [Brunet 90].

Ces variables évoluent selon certaines lois ou *relations*, fixées par la nature physique et l'agencement des composants du processus, en fonction des sollicitations extérieures.

Ces sollicitations extérieures comprennent outre les entrées définies ci-dessus, un ensemble de *perturbations* ou *entrées inconnues*. Celles-ci, contrairement aux entrées, interviennent sur le processus de manière non contrôlée.

L'ensemble de ces considérations est reporté sur la Figure 1-2.

On retrouve sur cette figure :

$\underline{u}(t)$: l'ensemble des entrées de commande telles qu'elles sont fournies par l'unité de commande.

$\tilde{\underline{u}}(t)$: l'ensemble des entrées de commande telles qu'elles sont réellement appliquées au processus physique (après éventuelles perturbations).

$\underline{x}(t)$: l'état du processus.

$\underline{y}(t)$: les sorties ou mesures

$p(t)$: les perturbations ou entrées inconnues.

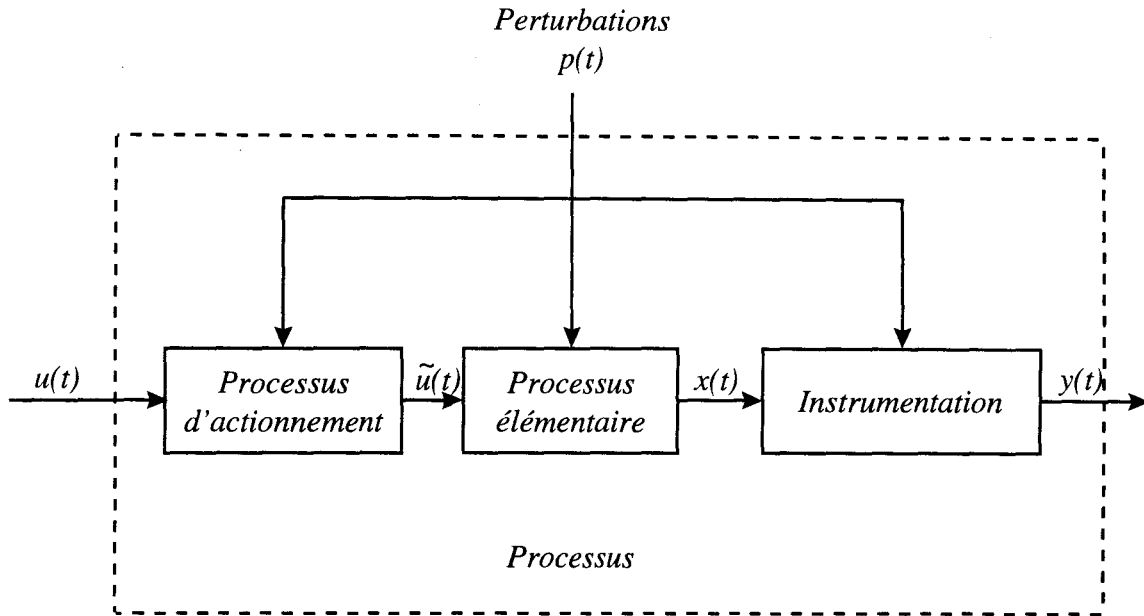


Figure 1-2 : processus et variables

L'état du processus physique évolue corrélativement à la commande qu'on lui applique selon certaines lois que l'on peut représenter par exemple par un ensemble de relations différentielles du type :

$$\underline{f}(\underline{\dot{x}}(t), \underline{x}(t), \underline{\tilde{u}}(t), \underline{p}(t)) = \underline{0} \quad (1-1)$$

L'opération de mesure est généralement du type statique :

$$\underline{h}(\underline{x}(t), \underline{\tilde{u}}(t), \underline{y}(t), \underline{p}(t)) = \underline{0} \quad (1-2)$$

La relation liant l'entrée de commande $\underline{u}(t)$ à $\underline{\tilde{u}}(t)$ est elle aussi généralement statique :

$$\underline{g}(\underline{u}(t), \underline{\tilde{u}}(t), \underline{p}(t)) = \underline{0} \quad (1-3)$$

1.2.2 Notion de Défaillances

Sur un système automatisé, les défaillances peuvent se produire au niveau du processus ou au niveau des unités de contrôle. Nous nous intéresserons dans cette thèse aux défaillances du processus, tel qu'il a été décrit précédemment.

Détaillons dans un premier temps la terminologie des défaillances. Quelle est la différence entre un défaut, une panne, un dysfonctionnement, une perturbation, ... ?

Défaut

Imperfection physique liée soit à la conception ou à la mise en œuvre du dispositif. Le défaut peut rester « caché » pendant un certain temps avant de donner lieu à une défaillance.

Défaillance

Modification suffisante et permanente des caractéristiques physiques d'un système ou d'un composant pour qu'une fonction ne puisse plus être assurée dans les conditions prévues.

Panne

Interruption permanente de la capacité du système à réaliser une fonction requise sous des conditions de fonctionnement spécifiées.

Dysfonctionnement

Irrégularité intermittente dans la réalisation d'une fonction désirée du système.

Entrée Inconnue ou Perturbation

Entrée inconnue (non mesurable et incontrôlable) agissant sur un système. La notion d'entrée inconnue permet parfois d'introduire dans le modèle les erreurs de modélisation entre le système réel et le modèle mathématique, ainsi que les bruits système et les bruits mesure, afin d'en évaluer les effets.

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux défaillances, et aux perturbations inhérentes à tout système réel. Du point de vue de la surveillance, il est intéressant de répartir les défaillances en trois catégories selon qu'elles agissent sur le processus d'actionnement, sur le processus élémentaire, ou sur l'instrumentation.

Défaillance processus

Défaillance sur le processus lui-même (fuite, encrassement, court-circuit, ...). La relation (1-1) n'est plus vérifiée.

Défaillance capteur

Défaillance de l'instrumentation (erreurs d'échelle, hysteresis, biais, mauvais contacts,...). La relation (1-2) n'est plus vérifiée.

Défaillance actionneur

Défaillance sur le processus d'actionnement (commande mal restituée). La relation (1-3) n'est plus vérifiée.

Ces défaillances engendrent alors des erreurs, des symptômes qui seront mis en évidence par des résidus.

Erreur

Ecart entre une valeur mesurée ou estimée (d'une variable de sortie) et la vraie valeur, spécifiée ou théoriquement correcte.

Résidu

Indicateur de défaillance. Il exprime l'incohérence entre les informations disponibles et les informations théoriques.

Symptôme

Changement du comportement d'une quantité observable, qui sort du domaine définissant son comportement normal.

Les conséquences néfastes de l'apparition de défaillances sur un processus incitent à la mise en œuvre d'un système de surveillance dont la fonction et les opérations qu'ils réalisent sont présentées ci-dessous.

1.2.3 Fonctions et opérations d'un système de surveillance

Le but d'un système de surveillance est de détecter les défaillances et d'indiquer leurs causes, afin d'éviter un arrêt global du processus.

1.2.3.1 Fonctions d'un système de surveillance

Le concept général du diagnostic consiste en les trois tâches suivantes [Frank 96].

Détection de défaillance

Il s'agit de détecter l'occurrence d'une défaillance dans le processus, défaillance qui conduit à un comportement indésirable ou intolérable du processus, en présence des entrées inconnues. La phase de détection indique en fait laquelle de ces deux hypothèses est la plus probable :

- H_0 : le système est non défaillant (fonctionnement normal)
- H_1 : le système présente une défaillance.

La détection peut être erronée de deux façons différentes : *non détection* ou *fausse alarme*. Ces concepts, ainsi que ceux associés de *sensibilité* et de *robustesse*, seront détaillés en section 1.2.4.

Localisation de défaillance

Il s'agit de localiser, de classifier, les différentes défaillances détectées par la tâche précédente de détection. Ainsi, l'étape de détection ayant délivré l'information de présence d'une défaillance, il convient d'attribuer celle-ci à un composant du processus (actionneur, processus élémentaire, capteur).

Pour ce faire, l'étape de localisation indique parmi plusieurs hypothèses H_1^i , i étant l'indice de la cause de défaillance, laquelle est la plus probable. Une hypothèse H_1^0 englobe tous les cas de défaillances non répertoriés.

Analyse de défaillance

Il s'agit de déterminer certaines caractéristiques de la défaillance détectée et isolée : instant d'apparition, type, durée, amplitude, mais aussi degré de sévérité [Brunet 90]. C'est la phase d'*estimation de la défaillance*.

Mais aussi, il s'agit de déterminer la cause de la défaillance en utilisant les informations issues de la surveillance et des symptômes heuristiques. C'est la phase de *diagnostic*.

Certains auteurs proposent d'autres fonctionnalités imputables au module de surveillance comme le pronostic d'évolution d'une défaillance, l'analyse des conséquences (sécurité, qualité, etc.), la planification des actions [Brunet 90], ou la reconfiguration des lois de commandes. Ces fonctionnalités sortent du cadre de ce mémoire.

1.2.3.2 Opérations réalisées par un système de surveillance

Pour réaliser les tâches de diagnostic citées ci-dessus, les trois étapes suivantes doivent être réalisées.

Génération des résidus

La génération de résidus consiste en une génération de signaux ou symptômes qui signalent les défaillances. Il s'agit de manipuler les données collectées (mesures) pour constituer d'autres données, en quantité inférieure, possédant la caractéristique de représenter le plus fidèlement possible la manifestation des défaillances.

Selon le type de connaissance dont on dispose sur le processus, la méthode mise en œuvre pour générer ces résidus diffère. On distingue les méthodes *sans modèle* des méthodes *avec modèle* [Staroswiecki 94].

Les méthodes *sans modèle* s'appliquent lorsqu'aucun modèle du processus - analytique ou qualitatif, n'est disponible. Les méthodes mises en œuvre sont alors basées sur une phase d'apprentissage à partir des mesures disponibles suivie d'une phase d'exploitation où sont appliquées des techniques de type Reconnaissance des Formes [Dubuisson 90]

Les méthodes *avec modèle* sont fondées sur l'exploitation d'une connaissance des relations liant les différentes variables observables du processus (le *modèle*). Les résidus naissent d'une confrontation de cette connaissance a priori avec la connaissance réelle représentée par les variables mesurées. Le type de connaissance disponible - analytique ou qualitatif, conditionne la manière dont cette confrontation est mise en œuvre. Le cas qui nous intéresse dans ce mémoire est celui des modèles analytiques, qui sera présenté en section 1.3.

Evaluation des résidus (Classification des défaillances)

L'évaluation des résidus consiste en une prise de décision logique quant à l'instant d'occurrence de la défaillance et de sa localisation. Le processus surveillé étant un système physique soumis à des perturbations inconnues et souvent aléatoires, les résidus sont considérés comme étant eux-mêmes des processus aléatoires soumis à des fluctuations non forcément dues à des défaillances, ce qui influe sur les procédures de décision.

Analyse de défaillances

L'analyse de défaillances consiste en la détermination du type de défaillance, de sa taille et de sa cause.

1.2.4 Evaluation du système de surveillance

Il convient de pouvoir évaluer les performances d'un système de surveillance à travers un certain nombre de critères de performance [Staroswiecki 94], ceux ci pouvant également faire partie de spécifications au stade de la synthèse du système de surveillance. Nous ne détaillerons pas de façon exhaustive les critères de performance existants mais uniquement ceux qui nous serviront par la suite.

Probabilité de Non Détection

Si une défaillance apparaît et n'est pas détectée, on parle de Non Détection. La non détection est un événement non prévisible au sens déterministe et sera donc caractérisé à l'aide du langage probabiliste. Un système de surveillance est d'autant plus efficace - au sens non détection, que la *probabilité de non détection* est faible.

Ce concept est à mettre en relation avec celui de *sensibilité* des résidus aux défaillances qui sera exposé plus loin.

Probabilité de Fausse Alarme

Si le système de surveillance déclare la présence d'une défaillance alors qu'il n'y en a pas, on parle de Fausse Alarme. Comme précédemment, la nature aléatoire de la fausse alarme pousse à l'établissement d'un critère de qualité adapté : la *probabilité de fausse alarme*, que l'on cherchera à obtenir la plus faible possible.

Ce concept est à mettre en relation avec celui de *robustesse* des résidus aux défaillances qui sera exposé plus loin.

D'autres critères de qualité sont par exemple : le *délai de détection d'une défaillance*, i.e. la durée temporelle s'écoulant entre l'apparition d'une défaillance sur le processus et sa détection par le système de surveillance, la *probabilité de fausse localisation*...

1.2.5 Conclusion

Nous avons présenté dans cette section les principes généraux d'un système de surveillance. Celui-ci est responsable d'une fonction essentielle : détecter et caractériser les défaillances d'un processus. Cette fonction est réalisée par la mise en œuvre de plusieurs opérations dont les principales sont la génération des signaux indicateurs et la prise de décision proprement dite. Un système de surveillance est caractérisé par un certain nombre de critères de qualité comme les taux de fausses alarmes et de non détections, dont la minimisation est l'enjeu de la conception.

Ces concepts prennent un sens particulier dans le cadre des méthodes de surveillance basées sur l'utilisation d'un modèle mathématique du processus. Ils sont présentés dans la section suivante.

1.3 SURVEILLANCE A BASE DE MODELE ANALYTIQUE

1.3.1 Modèles de processus

Le *comportement* d'un système est l'ensemble des trajectoires que suivent les variables qu'il met en œuvre, à partir d'un état initial et en réponse à des sollicitations externes. Nous nous intéressons ici à des différents *modèles* pouvant décrire ce comportement.

Commençons par définir les types de modèles que nous allons rencontrer dans la suite de ce mémoire. Différencions d'abord les modèles qualitatifs des modèles quantitatifs dont font partie les modèles analytiques.

Modèle qualitatif

Modèle décrit par des variables au nombre réduit de modalités, et des relations liant ces variables.

Modèle quantitatif

Modèle décrit par des variables au nombre infini de modalités dans un domaine donné de variations, et des relations statiques et dynamiques liant ces variables dans le but de décrire le comportement du système en termes mathématiques quantitatifs.

Modèle analytique

Ensemble d'équations différentielles mettant en relation les variables du processus et décrivant le comportement du système. Un modèle analytique est un modèle quantitatif.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux modèles analytiques et ce sont eux que nous allons développer. Ainsi il existe trois types de modèles analytiques selon le domaine considéré - domaine temporel continu ou discret, domaine fréquentiel. Nous ne nous intéressons pas dans ce mémoire au domaine fréquentiel.

Modèle à temps continu

Modèle faisant intervenir les variables d'entrées, d'état, de sorties et leurs dérivées temporelles respectives. De la forme :

$$\underline{F}(x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots, y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots) = \underline{0}$$

Modèle à temps discret

Modèle faisant intervenir les variables d'entrées, d'état, de sorties à divers instants de l'horizon temporel. De la forme :

$$\underline{F}(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \dots) = \underline{0}$$

Certains modèles sont plus spécifiques à la surveillance. Nous citons ici cinq modèles analytiques dont nous nous servirons par la suite : un modèle de fonctionnement normal, un modèle d'influence des défaillances, un modèle d'incertitude sur modèle, un modèle entrées/sortie ou *Relations de Redondance Analytique*, un modèle de comportement des

défaillances. Les exemples présentés sont linéaires à temps discret et se généralisent facilement.

Modèle de référence - de fonctionnement normal

Modèle quantitatif qui décrit le fonctionnement non défaillant du système et permet d'obtenir analytiquement la forme de calcul des résidus.

$$\text{exemple : } \begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A \cdot \underline{x}_k + B \cdot \underline{u}_k \\ \underline{y}_k = C \cdot \underline{x}_k + D \cdot \underline{u}_k \end{cases}$$

\underline{x}_k est le vecteur d'état à l'instant k , \underline{u}_k le vecteur d'entrées, \underline{y}_k le vecteur de sorties. Les matrices A, B, C, D sont de taille appropriée, ainsi que celles intervenant par la suite.

Modèle d'influence des défaillances

Modèle qui décrit l'influence des défaillances sur le système, sans que l'on n'ait aucun modèle de cette défaillance. Les défaillances sont introduites dans les relations (1) et (2). Il sera à la base des procédures de localisation des défaillances.

Dans le cas des systèmes linéaires, les défaillances ont souvent été décomposées en deux classes : *défaillances additives* dont l'effet est indépendant des entrées et *défaillances multiplicatives* parce que portant sur des modifications des paramètres du modèle. Des auteurs proposent dans un but de simplification de transformer toutes les erreurs multiplicatives en termes additifs [Gertler 94]. Cela conduit à considérer toutes les défaillances comme des défaillances additives soit d'un actionneur, soit d'un capteur. Cependant, cette formulation, si elle est plus simple, a l'inconvénient de faire disparaître du modèle les éventuels couplages entre les défaillances induits par une erreur de modèle sur la matrice d'état, les états non pris en compte ou les variables issues de modèles singuliers.

$$\text{exemple : } \begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A \cdot \underline{x}_k + B \cdot \underline{u}_k + F \cdot \underline{f}_k \\ \underline{y}_k = C \cdot \underline{x}_k + D \cdot \underline{u}_k + G \cdot \underline{f}_k \end{cases}$$

Formulation additive des défaillances où \underline{f}_k est le vecteur des défaillances comprenant les défaillances sur les actionneurs, sur les capteurs et sur les composantes de la dynamique du système.

Modèle d'incertitude

Le modèle d'incertitude décrit des incertitudes déterministes et/ou stochastiques du modèle (incertitudes sur les paramètres ou les capteurs, bruits). Associé à un modèle d'influence, il permet d'obtenir analytiquement la forme d'évaluation des résidus. De la même façon que précédemment, les incertitudes peuvent se ramener à un modèle additif.

$$\text{exemple : } \begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A \cdot \underline{x}_k + B \cdot \underline{u}_k + E \cdot \underline{d}_k + F \cdot \underline{f}_k \\ \underline{y}_k = C \cdot \underline{x}_k + D \cdot \underline{u}_k + H \cdot \underline{d}_k + G \cdot \underline{f}_k \end{cases} \quad \underline{d}_k \text{ est le vecteur des entrées inconnues.}$$

Modèle Entrées/Sorties ou Relations de Redondance Analytique

Modèle liant les variables d'entrées aux variables de sorties du processus, ainsi éventuellement que leurs dérivées respectives - pour les modèles à temps continu, ou leurs différentes valeurs sur l'horizon temporel - pour les modèles à temps discret. La valeur de ces variables étant disponible à chaque instant, il est possible de vérifier en temps réel leur adéquation au modèle.

exemples :

- vecteur des relations de Redondance analytique issues du modèle de référence :

$$\underline{\Phi}(\underline{u}_{k-s}, \dots, \underline{u}_k, \underline{y}_{k-s}, \dots, \underline{y}_k) = \underline{0}$$

qui donne la forme de calcul du vecteur des résidus :

$$\underline{r}_k = \underline{\Phi}(\underline{u}_{k-s}, \dots, \underline{u}_k, \underline{y}_{k-s}, \dots, \underline{y}_k)$$

- vecteur des relations de Redondance analytique issues du modèle d'incertitude associé au modèle d'influence :

$$\underline{\Phi}(\underline{u}_{k-s}, \dots, \underline{u}_k, \underline{y}_{k-s}, \dots, \underline{y}_k, \underline{d}_{k-s}, \dots, \underline{d}_k, \underline{f}_{k-s}, \dots, \underline{f}_k) = \underline{0}$$

qui donne la forme d'évaluation du vecteur des résidus :

$$\underline{r}_k = \underline{\Phi}(\underline{d}_{k-s}, \dots, \underline{d}_k, \underline{f}_{k-s}, \dots, \underline{f}_k)$$

Modèle de comportement de la défaillance

L'expression des résidus $\underline{r}_k = \underline{\Phi}(\underline{d}_{k-s}, \dots, \underline{d}_k, \underline{f}_{k-s}, \dots, \underline{f}_k)$ définit la réponse du vecteur des résidus aux défaillances. Elle fait clairement apparaître l'aspect dynamique de la réponse des résidus. Une spécification plus fine de la défaillance consiste à préciser quelles sont ses caractéristiques temporelles ou harmoniques.

1.3.2 Génération des résidus

1.3.2.1 Principe

Dans le cas des approches analytiques à base de modèles, la première étape - la *génération de résidu*, consiste à produire un signal qui contient des informations sur les défaillances, à l'aide d'un modèle analytique mathématique du système. Il est important de remarquer que, pour la génération de résidus, aucune hypothèse sur la défaillance ne doit être faite.

Le principe de base est toujours le même : la connaissance du modèle permet de confronter les données mesurées sur le processus avec la connaissance *a priori* que le modèle représente. La comparaison, faite sous une forme ou une autre, donne naissance à un ensemble de signaux indicateurs de défaillances représentant l'écart comportemental entre le processus réel *observé* et le modèle *théorique*. Illustration Figure 1-3.

Le générateur de résidu est un système dynamique conduit par les entrées et les sorties du système concerné. Une modélisation exacte du système à surveiller étant impossible, les effets

des incertitudes de modélisations doivent être prise en compte. Les résidus doivent être *robustes* à ces incertitudes tout en restant *sensibles* aux défaillances.

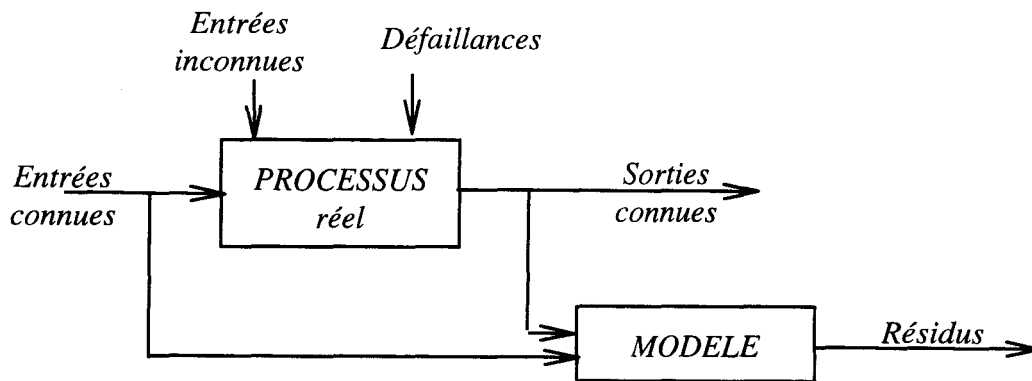


Figure 1-3 : Principe de base de la génération de résidu avec modèle

1.3.2.2 Propriétés des résidus

Ainsi afin de représenter idéalement l'occurrence des défaillances sur le processus surveillé, le vecteur résidu doit posséder la propriété d'être nul en l'absence de défaillance, et non nul en présence d'une défaillance :

$$\underline{f}(t) = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{r}(t) = \underline{0}$$

Ce qui peut se décomposer en deux implications mettant en évidence deux propriétés des résidus : la *robustesse* et la *sensibilité*.

Robustesse

Elle est traduite par l'implication : $\underline{f}(t) = \underline{0} \Rightarrow \underline{r}(t) = \underline{0}$.

Elle signifie que le résidu doit être indépendant de l'état courant du processus et de l'entrée de commande. La validité de cette relation conditionne le fait que le résidu ne peut pas varier lorsqu'il n'y a pas de défaillances. Il doit être le plus *robuste* possible aux entrées inconnues pour éviter les *fausses alarmes*.

Sensibilité

Elle est traduite par l'implication : $\underline{f}_i(t) \neq 0 \Rightarrow \underline{r}(t) \neq \underline{0}$.

Elle représente la capacité du résidu à représenter la défaillance $\underline{f}_i(t)$. La validité de cette relation conditionne le fait que le résidu s'écarte de zéro dès que la défaillance apparaît. Le résidu doit être le plus *sensible* possible aux défaillances pour éviter les *non détections*. La sensibilité ne peut assurée pour toutes les valeurs possibles de $\underline{f}(t)$, en effet certaines configurations de pannes conduisent à un résidu nul. Nous allons discuter de ce point dans les chapitres suivants.

Pour la *détection*, les effets de la défaillance sur le vecteur résidu \underline{r} doivent pouvoir être distingués des effets des perturbations. Pour la *localisation*, les effets de la défaillance sur le vecteur résidu \underline{r} doivent pouvoir être distingués des effets des perturbations et des autres défaillances.

1.3.2.3 Méthodes de génération de résidus

Les méthodes d'exploitation des modèles analytiques afin d'obtenir des résidus sont variées et définissent les différentes « écoles » dans le domaine de la surveillance. Ces dernières - présentées ci-dessous, ont été essentiellement développées pour des systèmes linéaires mais leur principe général reste valable en non linéaire.

Méthode par Estimation d'état

On connaît un modèle paramétrique décrivant le comportement du système ainsi que la valeur $\underline{\theta}$ de ses paramètres en fonctionnement normal. Les observations sont utilisées pour estimer l'état du système (observateurs, filtre de Kalman) :

$$\hat{\underline{x}}(t) = f(\underline{y}(t), \dot{\underline{y}}(t), \ddot{\underline{y}}(t), \dots, \underline{u}(t), \dot{\underline{u}}(t), \ddot{\underline{u}}(t), \dots, \underline{\theta})$$

Cette estimation reportée dans les équations de la mesure (2) donne une expression particulière de résidu [Brunet 90]:

$$\underline{r}(t) = g(\underline{y}(t), \hat{\underline{x}}(t), \underline{\theta})$$

Les références suivantes pourront être consultées dans le domaine : [Frank 90, 96], [Mazzour 96], [Staroswiecki 91] [Patton 91]

Méthode par Estimation des paramètres

On connaît un modèle paramétrique décrivant le comportement du système ainsi que la valeur $\underline{\theta}$ de ses paramètres en fonctionnement normal. Les observations sont utilisées pour estimer les paramètres caractérisant le fonctionnement réel :

$$\hat{\underline{\theta}}(t) = f(\underline{y}(t), \dot{\underline{y}}(t), \ddot{\underline{y}}(t), \dots, \underline{u}(t), \dot{\underline{u}}(t), \ddot{\underline{u}}(t), \dots)$$

L'estimation des paramètres doit être cohérente avec la connaissance disponible sur ceux-ci. Cette cohérence est testée par le résidu [Iserman 84] :

$$\underline{r}(t) = \hat{\underline{\theta}}(t) - \underline{\theta}$$

Méthode de l'Espace de Parité

On connaît un modèle paramétrique décrivant le comportement du système ainsi que la valeur $\underline{\theta}$ de ses paramètres en fonctionnement normal. Le modèle est réécrit pour ne plus contenir que des variables observées :

$$f(\underline{y}(t), \dot{\underline{y}}(t), \ddot{\underline{y}}(t), \dots, \underline{u}(t), \dot{\underline{u}}(t), \ddot{\underline{u}}(t), \dots, \underline{\theta}) = 0$$

Les observations sont alors injectées dans ce modèle dont la cohérence est testée par le résidu :

$$\underline{r}(t) = f(\underline{y}(t), \dot{\underline{y}}(t), \ddot{\underline{y}}(t), \dots, \underline{u}(t), \dot{\underline{u}}(t), \ddot{\underline{u}}(t), \dots, \underline{\theta})$$

En linéaire, la réécriture du modèle se fait par un mécanisme de projection [Chow & Willsky 84], pour des systèmes polynomiaux par un mécanisme d'élimination qui fait l'objet de cette thèse [Guernez 96]. Les références suivantes pourront être consultées dans le domaine : [Potter 77],[Gertler 91],[Staroswiecki 91],[Patton & Chen 91].

1.3.3 Décision

1.3.3.1 Principe

La prise de décision concernant la présence éventuelle d'une défaillance et sa localisation est faite par un test du vecteur résidu.

Qualitativement, le résidu est un vecteur dont on sait qu'il est proche de l'origine en l'absence de défaillance, et qu'il s'en éloigne lorsqu'une défaillance apparaît. Le test de détection revient donc à mettre en oeuvre une procédure de décision répondant de manière binaire : présence ou absence de défaillance. Pour ce faire, on définit une *fonction de décision* qui à une valeur particulière $\underline{r}(t)$ - ou à une suite de valeurs successives, du vecteur résidu associe un scalaire $J(\underline{r}(t))$. Le test de détection consiste alors à comparer la valeur instantanée de $J(\underline{r}(t))$ à un seuil $Th(t)$ et à prendre une décision selon la règle suivante :

$$\begin{cases} \text{Si } J(\underline{r}(t)) > Th(t) & \text{alors décider : " processus en défaut" } \\ \text{Si } J(\underline{r}(t)) < Th(t) & \text{alors décider : " pas de défaillance" } \end{cases}$$

Le problème de la détection consiste à déterminer une fonction de décision et un seuil de façon à minimiser les *fausses alarmes* et les *non détections*.

1.3.3.2 Méthodes

La détermination d'une fonction de décision et d'un seuil est menée grâce à l'application de méthodes particulières [Frank 96] :

1. déterministe
2. théorie statistique de la décision
3. reconnaissance des formes
4. prise de décision floue
5. réseaux de neurones

Les nombreuses techniques de détection de défaillance sont détaillées dans les ouvrages spécialisés dans ce domaine [Brunet 90], [Ragot 90], [Dubuisson 90], [Basseville 93].

1.3.4 Localisation

Pour réaliser la détection, nous n'avons pris en compte que les résidus exprimant l'écart au fonctionnement normal. Pour pouvoir localiser et réaliser le diagnostic il nous faut prendre

aussi en compte le fonctionnement défaillant du système. Pour cela, il est nécessaire d'ajouter des connaissances supplémentaires concernant les défaillances. Comme pour la détection, la localisation vérifiera la cohérence entre ces informations et les observations.

Les connaissances concernant les défaillances apparaissent dans le *modèle d'influence* et le *modèle de comportement de la défaillance* décrit au 1.3.1.1.

La localisation doit choisir entre plusieurs hypothèses de défaillances H_1^i . La procédure repose donc sur la construction d'un discriminateur entre deux hypothèses H_1^i et H_1^j , sur le choix de l'hypothèse la plus crédible et sur l'évaluation du risque pris en proposant l'hypothèse retenue comme cause de défaillance. Les hypothèses faites concernant la défaillance vont induire fortement les méthodes de localisation utilisées. Soit les défaillances sont complètement spécifiées en amplitude, soit on ne connaît que le ou les terme(s) à moyenne non nulle, la valeur étant inconnue. Illustration Figure 1-4.

Les astérisques sur la Figure 1-4 indiquent les approches qui nous intéressent dans ce mémoire. En effet, nous considérerons *l'amplitude de la défaillance inconnue*. Ce cas est le plus réaliste dans la mesure où il est rare que l'on puisse prévoir l'importance de la défaillance a priori. Nous nous désintéresserons de l'approche statistique dans la mesure où la non linéarité se prête mal à une telle approche, au profit des *approches structurelles* [Cassar 94c]. Citons néanmoins [Zhang 96] qui s'intéresse à la prise de décision sur des résidus polynomiaux, travaux sur lesquels nous reviendrons par la suite.

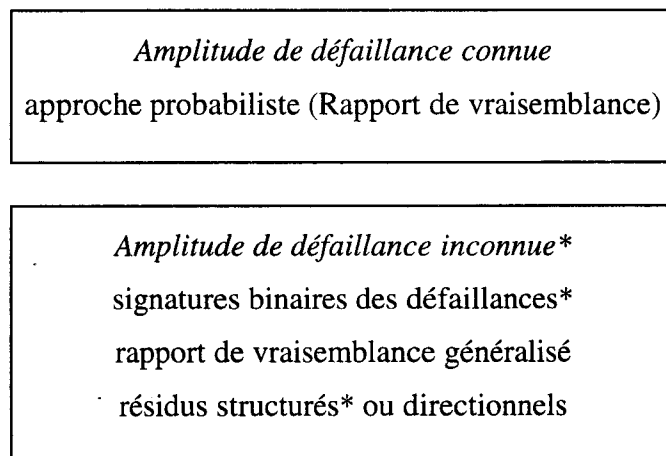


Figure 1-4 : Différentes approches analytiques de la localisation

Décrivons rapidement les deux approches structurelles que nous utiliserons par la suite dans ce mémoire.

Signatures binaires des défaillances

Lorsqu'on ne dispose que d'informations binaires, la localisation va se faire sur la base des *signatures binaires des défaillances* : quels sont les indicateurs dont l'état logique est affecté par la défaillance. Cette information est contenue dans la *forme d'évaluation* des résidus.

La comparaison de l'état observé et des signatures de défaillances permet, en utilisant une distance entre vecteurs binaires, une reconnaissance de la défaillance.

Résidus structurés

La reconnaissance d'une défaillance impose que ses effets sur le vecteur des résidus puissent être distingués des effets des autres défaillances

Le principe de la structuration des résidus est de *générer* les résidus pour qu'à chaque hypothèse de défaillance corresponde un sous espace spécifique dans lequel le vecteur des résidus va se situer.

Le principe des résidus structurés montre que les réflexions sur la localisation ont des conséquences sur la conception du générateur de résidus. La localisation n'est pas une étape conceptuellement découplée de la génération : un générateur va être conçu pour respecter un cahier des charges en terme de capacité de localisation.

1.3.5 Génération des résidus sous contraintes de localisation

Dans ce même objectif de localisation, trois approches différentes existent :

Résidus structurés

On cherche à obtenir des résidus dont la structure reste proche de l'idéal structurel défini par I^+ et I^- , I^+ est l'ensemble des événements auxquels le résidu doit être sensible et I^- l'ensemble des événements auxquels le résidu doit être insensible. [Cassar 94c]

Résidus directionnels

L'objectif est que, quelle que soit sa dynamique, une défaillance p_j provoque une évolution du vecteur des résidus dans une direction Φ_j donnée de l'espace. [Gertler 93]

Spécification en fréquence

L'objectif est d'atteindre des spécifications de sensibilité des résidus dans une gamme de fréquences données. [Frank 93]

Nous nous intéresserons aux Résidus structurés dont nous parlerons plus amplement au chapitre 3 section 6.

1.3.6 Conclusion

Nous avons présenté dans cette partie les aspects particuliers de l'approche de surveillance basée sur l'utilisation d'un modèle analytique du processus. Nous avons d'abord présenté les différents modèles utilisés en surveillance : *modèle de fonctionnement normal, modèle d'influence des défaillances, modèles des incertitudes...* Puis nous nous sommes intéressés à la génération des indicateurs de défaillances - les *résidus*, qui représentent l'écart comportemental entre le processus surveillé et son modèle en fonctionnement normal. Nous

avons vu qu'il existe trois approches de génération des résidus : l'*estimation paramétrique*, l'*estimation d'état* et l'*espace de parité*. La phase suivante est l'évaluation des résidus dont les principes ont été évoqués.

Le travail présenté dans ce mémoire s'intègre dans le cas particulier des *modèles non linéaires* pour lesquels les principes énoncés précédemment restent valables. Cependant le fond du problème est plus complexe car les non linéarités rendent le traitement analytique du problème difficile - notamment pour le découplage et la localisation des défaillances.

1.4 SURVEILLANCE DE SYSTEMES NON LINEAIRES

1.4.1 Modèles non linéaires

1.4.1.1 Modèle général

Le modèle non linéaire le plus général que nous allons considérer est le suivant, utilisant les mêmes notations que précédemment. C'est ici un *modèle d'incertitude* associé à un *modèle d'influence*, tels qu'ils l'ont été définis au 1.3.1.

$$\begin{cases} \underline{F}(\underline{\dot{x}}(t), \underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{d}(t), \underline{f}(t)) = \underline{0} \\ \underline{G}(\underline{y}(t), \underline{x}(t), \underline{u}(t), \underline{d}(t), \underline{f}(t)) = \underline{0} \end{cases} \quad (1-4)$$

Cependant, quand une méthode de génération de résidus est développée, elle l'est sur une classe particulière de non linéarité. Nous détaillerons ces classes lors de la présentation des méthodes associées. Nous présentons néanmoins ici la classe particulièrement développée que constituent les *modèles bilinéaires*.

1.4.1.2 Modèle bilinéaire

Les modèles bilinéaires forment une classe intéressante des systèmes non linéaires. Ils sont utilisés pour représenter une grande variété de procédés incluant les systèmes de réacteurs nucléaires, les systèmes de suspension, les systèmes de conduite hydraulique, les systèmes de four à combustion gazeuse, les systèmes d'échangeurs thermiques... Un modèle bilinéaire à temps discret est présenté ci dessous. [Yu 95][Yu 96]

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A^0 \cdot \underline{x}_k + B \cdot \underline{u}_k + \sum_{i=1}^h A^i \cdot \underline{u}_k(i) \cdot \underline{x}_k + E \cdot \underline{d}_k + F \cdot \underline{f}_k \\ \underline{y}_k = C \cdot \underline{x}_k + G \cdot \underline{f}_k \end{cases} \quad (1-5)$$

Les notations sont les mêmes que précédemment. Notons que $\underline{u}_k(i)$ est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur \underline{u}_k . La non linéarité vient uniquement du produit entre les scalaires $\underline{u}_k(i)$ et le vecteur d'état \underline{x}_k .

1.4.2 Génération des résidus

La génération de résidus pour la détection de défaillances dans les systèmes non linéaires se pose exactement en les mêmes termes que pour les systèmes linéaires, comme il a été décrit dans la section 1.3 précédente. [Isermann 96] présente une étude des méthodes utilisées en fonction du type de procédé - linéaire ou non linéaire, et du modèle associé - linéaire, linéarisé ou non linéaire. Nous présentons ici quelques unes de ses remarques.

Force est de constater que la statique et la dynamique des procédés ont été bien plus modélisées par des modèles linéaires que non linéaires. Quant aux modèles non linéaires, les méthodes par *observateurs* sont utilisées dans la plupart des cas, mais *l'estimation paramétrique* et les *réseaux neuronaux* jouent également un rôle important. *L'espace de parité* et les *méthodes combinées* sont utilisées de façon mineure.

Les procédés à modèles linéaires ou linéarisés sont traités pour la plupart par les méthodes d'*estimation paramétrique* et d'*observateurs*. *L'espace de parité* et les *méthodes combinées* sont également utilisées dans plusieurs applications, mais dans une moindre mesure que les autres méthodes. [Isermann 96]

Nous n'aborderons pas dans ce qui suit les méthodes basées sur les réseaux neuronaux [Frank 96] qui sont hors de notre propos. Mais nous décrirons brièvement deux façons d'aborder les systèmes non linéaires soit par un modèle linéarisé, soit par un modèle non linéaire.

1.4.2.1 Linéarisation autour d'un point de fonctionnement

Cette approche consiste à *linéariser* le système non linéaire autour d'un ou plusieurs points de fonctionnement, de telle sorte que le système soit représenté par un ensemble d'équations linéaires.

Les erreurs de modélisation sont représentées comme des *entrées inconnues*. Une stratégie de découplage vis à vis de ces entrées inconnues est ensuite utilisée pour générer les résidus, de telle sorte qu'ils soient robustes aux entrées inconnues. Deux méthodes sont largement utilisées : méthode des observateurs à entrées inconnues [Viswanadham 87], [Ge 97], [Frank 89], méthode de placement de pôles [Patton 88].

Nous ne nous intéresserons pas dans ce mémoire à la linéarisation autour d'un point de fonctionnement mais aux méthodes basées sur les modèles non linéaires.

1.4.2.2 Méthodes basées sur des modèles non linéaires

Méthodes par Observateurs non linéaires

L'observation de l'état d'un système non linéaire est difficilement réalisable sur la forme très générale :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1-6)$$

mais pas sur des formes plus particulières que constituent les systèmes non linéaires affines en la commande (1-7) et les systèmes non linéaires à modèles de sortie linéaire (1-8).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t)) \cdot u(t) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1-7) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases} \quad (1-8)$$

Les méthodes de construction d'observateurs non linéaires peuvent être regroupées en trois grandes catégories [Adjallah 93] : (1) méthodes de transformation du système sous forme pseudo linéaire, (2) méthodes directes basées sur la théorie de stabilité de Lyapounov, (3) méthodes particulières. Une bibliographie exhaustive sur le sujet peut être trouvée dans [Adjallah 93].

[Seliger & Frank 91] ont proposées des méthodes de générations de résidus basées sur les observateurs non linéaires.

Les systèmes bilinéaires constituent une classe de systèmes non linéaires plus aisée à manipuler. Les méthodes de détection de défaillances basées sur les observateurs bilinéaires sont de deux sortes : (1) les observateurs de type Luenberger d'ordre plein ou minimal, qui reposent sur une estimation de l'état et où une fonction de l'erreur d'observation est utilisée en tant que résidu pour la détection de défaillances [Hara & Furuta 76], [Funahashi 79], [Hac 92], [Bennett 96], (2) les observateurs issus des observateurs à entrées inconnues des systèmes linéaires, qui est une forme plus générale d'observateur dans la mesure où ce qui est observé est une fonction linéaire de l'état qui est découplée des entrées inconnues [Yu 94],[Yu 96], [Mechmeche 97].

Méthode par Estimation des paramètres non linéaires

Les paramètres d'un système peuvent être estimés par toute une variété de méthodes d'estimation de paramètres. Certaines sont issues des méthodes linéaires [Isermann 84], [Isermann 93], [Frank 90], mais il existe également plusieurs méthodes bilinéaires d'estimation de paramètres [Mohler 73], [Burnham 87].

Méthode d'espace de parité bilinéaire

La méthode d'espace de parité, initialement développée pour des systèmes linéaires, peut être étendue à des systèmes modélisés par un modèle bilinéaire de type (1-2). Cette méthode est développée au chapitre 2 section 2.2.2. Notons néanmoins qu'elle se ramène au traitement d'un modèle linéaire dont la matrice d'état n'est pas invariante mais dépend de l'entrée u , ce qui entraîne une application de la méthode d'espace de parité linéaire à chaque instant d'échantillonnage. Cette méthode ne peut donc être utilisée pour des systèmes rapides d'ordre élevé à cause des calculs excessifs en résultant. [Yu 95] [Würtenberger 95]

Notons également les travaux sur les systèmes multilinéaires - essentiellement dans le domaine du transport de matière, qui eux aussi se ramènent au cas linéaire. [Ragot 90] [Maquin 96]

1.4.2.3 Conclusion

Les observateurs non linéaires constituent l'essentiel des travaux en Surveillance sur les systèmes non linéaires. Les méthodes d'estimation des paramètres sont somme toute peu développées. Les méthodes d'Espace de Parité non linéaires se ramènent en fait à des cas linéaires.

L'objet de ce mémoire est de développer une *méthode d'Espace de Parité* sur des systèmes *non linéaires polynomiaux*, qui ne peuvent, dans leur cas général, se mettre sous une forme linéaire.

1.4.3 Décision

Nous n'entrerons pas plus précisément dans le détail de la procédure de prise de décision que nous ne l'avons fait au 1.3.3. Cependant il faut noter en la matière les travaux de Qinghua Zhang, Michèle Basseville et Albert Benveniste sur la prise de décision sur des résidus polynomiaux, qui font l'objet de cette thèse [Zhang 96, 97]. Ces derniers proposent une *approche locale* qui permet de détecter de « petites » défaillances, en ramenant le problème à la détection de changements de moyenne d'un vecteur aléatoire gaussien - problème simple en terme de prise de décision traité par le *Generalized likelihood ratio (GLR) test*.

1.4.4 Localisation

La procédure de localisation pose le problème de découplage des défaillances (et éventuellement des entrées inconnues). [Frank 91] a fait une suggestion qui consiste à utiliser les degrés de liberté dans le choix du gain de l'observateur pour découpler les différentes défaillances.

[Shumski 91] préconise lui la décomposition du système à surveiller en sous-systèmes avec un générateur de résidu associé à chacun d'entre eux. Les générateurs de résidus seront construits de telle façon que toute défaillance dans un sous-système laisse invariant le résidu correspondant, à l'exception des résidus associés aux autres sous systèmes. C'est la notion de résidus structurés qui apparaît ici.

[Zhang 96] propose une procédure de localisation locale, consécutive à la détection de l'occurrence d'une défaillance.

1.5 CONCLUSION

Nous avons vu, dans ce chapitre présentant succinctement l'état de l'art dans le domaine qui nous intéresse, que les méthodes de Détection et Localisation de Défaillances (FDI) sont analytiquement développées pour les *systèmes linéaires* d'une façon complète et précise.

Les *systèmes non linéaires* sont abordés d'une façon générale par deux voies différentes : soit les méthodes ramènent le problème non linéaire à un problème linéaire - d'une façon ou d'une autre, soit ces méthodes traitent des systèmes non linéaires d'une classe particulière et limitée.

Nous voulons, dans ce mémoire, développer une méthode *analytique*, comparable à l'Espace de Parité en linéaire, qui traite les systèmes décrits par un *modèle polynomial*, englobant ainsi les modèles *linéaires*, *bilinéaires* et *multilinéaires* plus classiques. Plusieurs résultats ont déjà été présentés : [Guernez 96b], [Guernez 97a], [Guernez 97b].

Des travaux se rattachent à ce thème : ceux de Gilles Comte-Varga [Comte-Varga 97] qui traite les systèmes polynomiaux par une autre approche algébro-différentielle.

2. ELIMINATION DANS LES SYSTEMES POLYNOMIAUX

2.1 INTRODUCTION

Parmi les méthodes citées précédemment, nous avons choisi de nous intéresser plus particulièrement à l'*Espace de Parité*. La philosophie de cette approche, rappelons le, est d'éliminer du modèle initial les variables inconnues afin d'obtenir un modèle entrées / sorties exploité par les procédures de FDI.

Cela nous amène naturellement à rechercher les *moyens mathématiques d'éliminer* certaines variables d'un système d'équations, et plus particulièrement, d'un système d'équations polynomiales - incluant les systèmes linéaires, bilinéaires, multilinéaires.

Deux approches sont possibles. La première est une approche *géométrique* relative aux *variétés affines* définies par des équations polynomiales - courbes, surfaces... L'élimination revient alors à la projection d'une variété dans un sous espace de dimension inférieure.

La deuxième approche est *algébrique* et conduit à l'algèbre des anneaux polynomiaux. Les polynômes issus du système initial seront manipulés sous forme d'*idéaux*. L'algèbre des anneaux polynomiaux offre des outils analytiques comparables à ceux de l'algèbre linéaire. La méthode des *Bases de Groëbner* permet de traiter les idéaux polynomiaux d'une façon algorithmique et implémentable.

Les Bases de Groëbner apparaissent au milieu des années 1960, introduites par H. Hironaka, qui les appelle alors « bases standard » et indépendamment un peu plus tard par B. Buchberger dans sa thèse de doctorat. Le nom « Base de Groëbner » fut donné par Buchberger en l'honneur de son directeur de thèse W. Groëbner (1899-1980).

L'approche par les Bases de Groëbner est une approche algébrique *non différentielle* dans la mesure où la notion de dérivation n'apparaît pas explicitement [Lazard 91, 92], [Cox 92], [Faugère 93], [Buchberger 95], [Grabe 95]. Il existe une approche algébro-différentielle des systèmes polynomiaux traités par [Ritt 50], [Seidenberg 56], [Fliess 89], [Glad 89], [Diop 92] pour citer quelques auteurs faisant référence dans le domaine et dont les travaux sont repris pour la Détection et la Localisation de Défaillance par [Comte-Varga 97].

2.2 APPROCHE GEOMETRIQUE - ELIMINATION PAR PROJECTION

Les mécanismes de projection d'un objet géométrique dans un espace de dimension inférieure sont largement traités dans le cas des systèmes linéaires. Une extension peut se réaliser de façon quasi immédiate pour les systèmes bilinéaires. Quant aux mécanismes de projection d'une variété algébrique, s'ils sont moins connus, ils n'en demeurent pas moins parfaitement définis.

2.2.1 Cas linéaire

Qu'il s'agisse de l'espace de parité statique, d'ordre donné ou généralisé, le principe général de génération de résidus linéaires par projection peut être énoncé d'une façon unique [Cocquempot 1993] [Patton & Chen, 1991] [Chow & Willsky 1984]

Modèle linéaire

Le modèle du système considéré est donné par les équations :

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = A \cdot \underline{x}(k) + B \cdot \underline{u}(k) + E \cdot \underline{d}(k) + F \cdot \underline{f}(k) \\ \underline{y}(k) = C \cdot \underline{x}(k) + D \cdot \underline{u}(k) + H \cdot \underline{d}(k) + G \cdot \underline{f}(k) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dim \underline{y}(k) &= (q,1) \\ \dim \underline{x}(k) &= (n,1) \\ \dim \underline{u}(k) &= (m,1) \\ \dim \underline{f}(k) &= (e,1) \\ \dim \underline{d}(k) &= (d,1) \end{aligned} \tag{2-9}$$

En écrivant ces équations sur un horizon d'observation de taille s , on obtient l'équation générale :

$$M(C, D, A, B) \cdot \underline{Y} - \text{Obs} \cdot \underline{x} = P(E, H) \cdot \underline{d} + Q(F, G) \cdot \underline{f}$$

\underline{Y} est le vecteur des variables mesurées, entrées ou sorties.

$$\dim \underline{Y} = (q+m) \cdot (s+1) \tag{2-10}$$

$M(C, D, A, B)$ est une matrice réelle dépendante des matrices A, B, C, D .

\underline{x} est le vecteur des variables inconnues à l'instant d'observation initial.

Obs est la matrice d'observation.

$$\dim \text{Obs} = ((q+m)(s+1), n) \quad \text{Rang Obs} = \text{RgObs}$$

Projection linéaire : approche géométrique

L'équation (2-2) va être projetée dans un espace W^{RgW} supplémentaire à celui généré par les colonnes de Obs , un tel espace est appelé *Espace de Parité*. Plus formellement, cette projection peut être définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Pi &: \mathfrak{R}^{(q+m) \cdot (s+1)} \rightarrow W^{RgW} \\ \underline{z} &\mapsto W \cdot \underline{z} \end{aligned} \quad (2-11)$$

Projeter les équations (2-2) dans l'Espace de Parité va permettre d'éliminer les variables inconnues \underline{x} .

Algèbre associée

L'outil algébrique associé à la projection linéaire est la matrice de projection. Les lignes de cette matrice de projection W définissent l'espace vectoriel supplémentaire à celui engendré par les colonnes de la matrice Obs .

Obs^{RgObs} sous espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice Obs .

$$\dim Obs = ((q + m) \cdot (s + 1), n), \text{ rang } Obs = RgObs$$

W^{RgW} sous espace vectoriel engendré par les colonnes de W , supplémentaire à Obs^{RgObs} .

$$W = \left\{ \omega^t \text{ indépendants} \mid \omega^t \cdot Obs = 0 \right\}$$

$$\dim W = ((q + m \cdot (s + 1) - RgObs, q \cdot (s + 1)), \text{ rang } W = (q + m) \cdot (s + 1) - RgObs = RgW$$

Condition d'existence

Une condition nécessaire d'existence de W est que la matrice Obs ne soit pas de rang plein, autrement dit : $\text{rang } Obs < (q + m) \cdot (s + 1)$, il faut que le nombre de lignes de Obs soit plus grand que son rang.

Le théorème de Cayley-Hamilton nous assure que cette condition est toujours satisfaite pour une fenêtre d'observation s assez grande.

Résultat de la projection

Les équations projetées ne font plus intervenir les variables inconnues - les composantes du vecteur \underline{x} .

$$W \cdot M(C, D, A, B) \cdot \underline{Y} = W \cdot (P(E, H) \cdot \underline{d} + Q(F, G) \cdot \underline{f}) \quad (2-12)$$

2.2.2 Cas bilinéaire

La méthode de l'Espace de Parité est largement utilisée pour les systèmes linéaires. Elle est étendue ici pour s'appliquer à des systèmes bilinéaires. [Yu 95a] [Yu 95b]

Modèle bilinéaire

Considérons un système bilinéaire à temps discret dont le modèle est le suivant :

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A^0 \cdot \underline{x}_k + \sum_{i=1}^m A^i \cdot u_k(i) \cdot \underline{x}_k + B \cdot \underline{u}_k + E \cdot \underline{d}_k + F \cdot \underline{f}_k \\ \underline{y}_k = C \cdot \underline{x}_k + D \cdot \underline{u}_k + H \cdot \underline{d}_k + G \cdot \underline{f}_k \end{cases} \quad (2-13)$$

même notation qu'au 1.2.1.

En posant :

$$A_k^* = A^0 + \sum_{i=1}^m u_k(i) \cdot A^i \quad (2-14)$$

le système bilinéaire (2-5) devient un système linéaire variant temporellement.

$$\begin{bmatrix} y_{k-s} \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = M_k^* \cdot \underline{x}_{k-s} + H_{1(k)}^* \cdot \begin{bmatrix} u_{k-s} \\ \vdots \\ u_k \end{bmatrix} + H_{2(k)}^* \cdot \begin{bmatrix} d_{k-s} \\ \vdots \\ d_k \end{bmatrix} + H_{3(k)}^* \cdot \begin{bmatrix} f_{k-s} \\ \vdots \\ f_k \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

$$\begin{aligned}
M_k^* &= \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A_{k-s}^* \\ C \cdot A_{k-s+1}^* \cdot A_{k-s}^* \\ \vdots \\ C \cdot \prod_{i=1}^s A_{k-i}^* \end{bmatrix}, \\
H_{1(k)}^* &= \begin{bmatrix} D & & & 0 \\ C \cdot B & D & & \\ C \cdot A_{k-s+1}^* \cdot B & C \cdot B & D & \\ \vdots & & & \ddots \\ C \cdot (\prod_{i=1}^{s-1} A_{k-i}^*) \cdot B & C \cdot (\prod_{i=2}^{s-1} A_{k-i}^*) \cdot B & \dots & C \cdot B & D \end{bmatrix} \\
H_{2(k)}^* &= \begin{bmatrix} H & & & 0 \\ C \cdot E & H & & \\ C \cdot A_{k-s+1}^* \cdot E & C \cdot E & H & \\ \vdots & & & \ddots \\ C \cdot (\prod_{i=1}^{s-1} A_{k-i}^*) \cdot E & C \cdot (\prod_{i=2}^{s-1} A_{k-i}^*) \cdot E & \dots & C \cdot E & H \end{bmatrix} \\
H_{3(k)}^* &= \begin{bmatrix} G & & & 0 \\ C \cdot F & G & & \\ C \cdot A_{k-s+1}^* \cdot F & C \cdot F & G & \\ \vdots & & & \ddots \\ C \cdot (\prod_{i=1}^{s-1} A_{k-i}^*) \cdot F & C \cdot (\prod_{i=2}^{s-1} A_{k-i}^*) \cdot F & \dots & C \cdot F & G \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

On retrouve la forme (2-4) mais cette fois toutes les matrices dépendent de l'instant k d'observation des entrées connues .

$$M_k(C, D, A, B) \cdot \underline{Y} - Obs_k \cdot \underline{x} = P_k(E, H) \cdot \underline{d} + Q_k(F, G) \cdot \underline{f} \quad (2-16)$$

Projection bilinéaire : approche géométrique

L'équation (2-8) va être projetée dans l'Espace de Parité $\Omega_k^{Rg\Omega_k}$, supplémentaire à celui généré par les colonnes de Obs_k . Plus formellement, cette projection peut être définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\forall k, \quad \Pi_k : \mathfrak{R}^{(q+m) \cdot (s+1)} &\rightarrow \Omega_k^{Rg\Omega_k} \\
\underline{z} &\mapsto \Omega_k \cdot \underline{z}
\end{aligned} \quad (2-17)$$

Notons que Ω_k est fonction des $u_k(i)$. Projeter les équations (2-8) dans l'Espace de Parité va permettre d'éliminer les variables inconnues \underline{x} .

Algèbre associée

Le principe est le même qu'en linéaire, mais il faut calculer une matrice Ω_k orthogonale à Obs_k à chaque instant k .

$$\Omega_k = \left\{ \omega_k^t \text{ indépendants} \mid \omega_k^t \cdot Obs_k = 0 \right\} \quad (2-18)$$

Un algorithme récursif a été développé [Yu 95b], applicable à condition que $|A_k^*| \neq 0, \forall k$. Néanmoins cet algorithme ne peut pas être utilisé pour des systèmes rapides d'ordre élevé qui entraînent trop de calculs.

Condition d'existence

Une condition nécessaire d'existence de Ω_k est que la matrice Obs_k ne soit pas de rang plein, autrement dit : $\text{rang } Obs_k < (q + m) \cdot (s + 1), \forall k$.

Résultat de la projection

Les équations projetées ne font plus intervenir les variables inconnues - les composantes du vecteur \underline{x} .

$$\forall k, \Omega_k \cdot M_k(C, D, A, B) \cdot \underline{Y} = \Omega_k \cdot (P_k(E, H) \cdot \underline{d} + Q_k(F, G) \cdot \underline{f}) \quad (2-19)$$

2.2.3 Cas polynomial

La méthode de l'Espace de Parité ne peut être étendue directement aux systèmes polynomiaux comme elle l'a été aux systèmes bilinéaires. Néanmoins le problème se pose dans les mêmes termes.

Modèle polynomial

Le modèle étudié est polynomial en ses états \underline{x} , entrées \underline{u} , entrées inconnues \underline{d} et défauts \underline{f} .

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = P(\underline{x}_k, \underline{u}_k, \underline{d}_k, \underline{f}_k) \\ \underline{y}_k = Q(\underline{x}_k, \underline{u}_k, \underline{d}_k, \underline{f}_k) \end{cases} \quad (2-20)$$

et $P(\underline{x}_k, \underline{u}_k, \underline{d}_k, \underline{f}_k)$ et $Q(\underline{x}_k, \underline{u}_k, \underline{d}_k, \underline{f}_k)$ sont des polynômes d'indéterminées $x_{1(k)}, \dots, x_{n(k)}, u_{1(k)}, \dots, u_{m(k)}, y_{1(k)}, \dots, y_{q(k)}, d_{1(k)}, \dots, d_{d(k)}, f_{1(k)}, \dots, f_{e(k)}$, à coefficients dans un corps K .

En écrivant ces équations sur un horizon d'observation de taille s , on obtient les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{y}_{k-s} = Q(\underline{x}_{k-s}, \underline{u}_{k-s}, \underline{d}_{k-s}, \underline{f}_{k-s}) \\ \underline{y}_{k-s+1} = Q(\underline{x}_{k-s+1}, \underline{u}_{k-s+1}, \underline{d}_{k-s+1}, \underline{f}_{k-s+1}) \\ \quad = Q(P(\underline{x}_{k-s}, \underline{u}_{k-s}, \underline{d}_{k-s}, \underline{f}_{k-s}), \underline{u}_{k-s+1}, \underline{d}_{k-s+1}, \underline{f}_{k-s+1}) \\ \quad = Q_{k-s+1}(\underline{x}_{k-s}, \underline{u}_{k-s, k-s+1}, \underline{d}_{k-s, k-s+1}, \underline{f}_{k-s, k-s+1}) \\ \vdots \\ \underline{y}_k = Q_k(\underline{x}_{k-s}, \underline{u}_{k-s, k}, \underline{d}_{k-s, k}, \underline{f}_{k-s, k}) \end{array} \right. \quad (2-21)$$

notation : $\underline{u}_{i, i+s} = \underline{u}_i, \underline{u}_{i+1}, \dots, \underline{u}_{i+s}$

Nous pouvons encore reformuler le problème sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \underline{y}_{k-s} - Q(\underline{x}_{k-s}, \underline{u}_{k-s}, \underline{d}_{k-s}, \underline{f}_{k-s}) = 0 \\ f_2 = \underline{y}_{k-s+1} - Q_{k-s+1}(\underline{x}_{k-s}, \underline{u}_{k-s, k-s+1}, \underline{d}_{k-s, k-s+1}, \underline{f}_{k-s, k-s+1}) = 0 \\ \vdots \\ f_{s+1} = \underline{y}_k - Q_k(\underline{x}_{k-s}, \underline{u}_{k-s, k}, \underline{d}_{k-s, k}, \underline{f}_{k-s, k}) = 0 \end{array} \right. \quad (2-22)$$

Projection polynomiale : approche géométrique

Eliminer les variables inconnues d'un système polynomial correspond également à projeter l'ensemble de ses solutions dans un sous-espace de dimension inférieure. Néanmoins la définition de cette projection n'est pas aussi simple que dans le cas linéaire, comme nous allons le voir dans la section suivante.

Algèbre associée

Dans le cas linéaire, une matrice de projection invariante est déterminée. Dans le cas bilinéaire, cette matrice de projection est recalculée numériquement à chaque instant.

Pour comprendre et manipuler les systèmes polynomiaux, nous travaillerons dans l'algèbre des anneaux polynomiaux $K[x_1, \dots, x_n]$, l'outil algébrique utilisé est l'*idéal* et fait l'objet de la section suivante.

2.3 APPROCHE ALGEBRIQUE DE L'ELIMINATION POLYNOMIALE

L'algèbre des anneaux polynomiaux $K[x_1, \dots, x_n]$ est une algèbre à laquelle nous sommes peu familiarisés. Nous allons tout d'abord en rappeler quelques éléments, issus de l'ouvrage de référence [Cox 94]. Puis nous nous intéresserons à l'élimination algébrique et ferons le lien avec l'approche géométrique. Les notions que nous présentons ici nous seront utiles au chapitre 3.

2.3.1 Algèbre des anneaux polynomiaux : quelques définitions

Les définitions secondaires se trouvent dans l'**Annexe 1**, pour ne pas alourdir les explications. Pour l'ensemble des définitions et théorèmes, l'ensemble K est un *corps*, où l'on peut définir addition, soustraction, multiplication et division avec les propriétés habituelles. L'ensemble des nombres réels \mathfrak{R} , des nombres complexes C , des nombres rationnels Q sont des exemples de corps.

Nous rappelons d'abord la définition d'un *polynôme*. Puis nous introduirons les objets géométriques et algébriques de base que sont la *variété affine* et l'*idéal*. Nous poserons ensuite le problème de l'*élimination* dans les systèmes polynomiaux, ainsi que la notion de *relation d'ordre* qui lui est liée.

Polynômes

Définition (2-5)

Un polynôme f en x_1, x_2, \dots, x_n à coefficients dans K est une combinaison linéaire finie (à coefficients dans K) de monômes. f s'écrira sous la forme :

$$f = \sum_{\alpha \in E} a_{\alpha} \cdot x^{\alpha}, \quad a_{\alpha} \in K,$$

E est l'ensemble des n -uplets d'exposants. L'ensemble de tous les polynômes en x_1, x_2, \dots, x_n à coefficients dans K est noté $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

$K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ a une structure d'anneau.

Variété affine

Définition (2-6)

Soit K un corps, et soient f_1, \dots, f_s des polynômes de $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$. On pose :

$V(f_1, \dots, f_s) = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq s \right\}$, qu'on appellera variété affine définie par f_1, \dots, f_s .

La variété affine est l'ensemble des solutions dans K du système d'équations $f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_s(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Nous allons définir maintenant la notion d'idéal et voir comment elle est liée à la notion de variété affine. Nous verrons que l'idéal permet de traiter les variétés affines avec les outils du calcul formel.

Idéal

Définition

(2-7)

Un sous ensemble $I \subset K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ est un *idéal* s'il satisfait :

- (1) $0 \in I$
- (2) si $f, g \in I$ alors $(f + g) \in I$
- (3) si $f \in I$ et $h \in K[x_1, \dots, x_n]$ alors $(h \cdot f) \in I$

Soient f_1, \dots, f_s des polynômes de $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$. L'ensemble

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_i h_i \cdot f_i \mid h_1, \dots, h_s \in K[x_1, \dots, x_n] \right\} \text{ est un idéal de } K[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

On dit que cet idéal est *généralé* par f_1, \dots, f_s et noté $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$.

Notons que $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ainsi que I sont des ensembles infinis de polynômes.

Relations équations polynomiales / variété affine / idéal

Une variété dépend uniquement de l'idéal généralé par ses équations polynomiales. Dépendante de l'idéal lui-même et non de la base de polynômes qui le génère, une variété affine n'est pas modifiée lors d'un changement de base de l'idéal.

Propriété

(2-8)

Si f_1, \dots, f_s et g_1, \dots, g_t sont des bases du même idéal I de $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$, de telle sorte que $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$, alors $V(f_1, \dots, f_s) = V(g_1, \dots, g_t)$.

Notons ainsi qu'un idéal peut avoir plusieurs bases polynomiales différentes, et que la résolution de ces différents systèmes d'équations polynomiales donne la même solution : la même variété affine. Par la suite nous nous intéresserons à un type de base particulier : les *Bases de Groebner*.

Idéal d'élimination

Dans notre optique d'élimination de certaines variables d'un système d'équations polynomiales, nous allons considérer l'idéal d'élimination, qui contient tous les polynômes issus du système initial, qui ne contiennent plus les variables à éliminer. « Issus du système initial » signifie ici « résultants d'une combinaison linéaire à coefficients polynomiaux des polynômes décrivant le système initial ».

Etant donné $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset K[x_1, x_2, \dots, x_n]$, le $k^{\text{ème}}$ idéal d'élimination I_k est l'idéal de $K[x_{k+1}, \dots, x_n]$ défini par :

$$I_k = I \cap K[x_{k+1}, \dots, x_n]$$

Autrement dit, éliminer x_1, \dots, x_k signifie trouver des polynômes non nuls de l'idéal d'élimination I_k .

Relations d'ordre

Les théorèmes qui seront énoncés par la suite reposent sur la division polynomiale. Si cette division est bien connue pour les polynômes à une variable, elle l'est moins pour les polynômes multivariés. Néanmoins le principe est le même, il nécessite d'ordonner les termes du polynôme en ordre décroissant du degré. L'introduction d'une relation d'ordre sur les monômes d'un polynôme multivariable est indispensable pour la suite.

Définition

Un *ordre monomial* sur $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ est une relation $>$ sur Z^{n+} (ensemble des entiers relatifs positifs ou nuls de dimension n), ou d'une façon équivalente, une relation sur l'ensemble des monômes $x^\alpha, \alpha \in Z^{n+}$ satisfaisant :

(1) $>$ est un ordre total (ou linéaire) sur Z^{n+} .

(2) si $\alpha > \beta$ et $\lambda \in Z^{n+}$, alors $\alpha + \lambda > \beta + \lambda$.

(3) tout sous ensemble non nul de Z^{n+} possède un plus petit élément selon $>$.

Quelques ordres parmi les plus couramment utilisés se trouvent en **Annexe 1**. Citons l'ordre lexicographique - le plus naturel, les ordres totaux - basés sur les degrés des polynômes, les ordres de type k -élimination - spécifiques à l'élimination (ordre de Bayer et Stillman).

Ces relations d'ordre vont nous permettre de définir les notions de degré multiple, de coefficient dominant, de monôme dominant, de terme dominant pour un polynôme donné. (cf. **Annexe 1**).

2.3.2 Enoncé de la théorie de l'élimination algébrique

Éliminer des variables d'un système d'équations polynomiales se fait de façon immédiate lorsque l'on possède une base particulière de l'idéal considéré : une Base de Groebner.

2.3.2.1 Bases de Groebner

Une Base de Groebner $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ d'un idéal $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ est une autre base génératrice de I , c'est à dire que $I = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$.

Elle possède des propriétés spécifiques à l'élimination, assorties de propriétés d'existence et de constructibilité particulièrement intéressantes.

Définition d'une Base de Groebner

Définition

(2-11)

Soit un ordre monomial fixé. Un sous ensemble fini $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ d'un idéal I est une base de Groebner de I (ou base standard) si :

$$\langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle = \langle LT(I) \rangle$$

où $LT(g_i)$ est le terme dominant du polynôme g_i et $\langle LT(I) \rangle$ est l'idéal généré par les termes dominants des éléments de I .

Autrement dit, d'une façon moins formelle, un ensemble $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ est une base de Groebner de I si et seulement si le terme dominant de chaque élément de I est divisible par un des $LT(g_i)$. Notons qu'interviennent ici les relations d'ordre précédemment définies par la notion de terme dominant.

Existence et unicité

Les théorèmes suivants nous assurent qu'un idéal, qui est un ensemble infini de polynômes, possède toujours une Base de Groebner. Et que pour un ordre donné, l'idéal a une Base de Groebner Réduite unique.

Théorème de la base de Hilbert. (2-12)

Tout idéal $I \subset K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ a un ensemble générateur fini. C'est à dire qu'il existe des polynômes f_1, \dots, f_s de I tels que $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$.

Corollaire (2-13)

Soit un ordre monomial fixé. Tout idéal $I \subset K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ autre que $\{0\}$ a une base de Groebner. De plus, toute base de Groebner d'un idéal I est un ensemble générateur fini de I .

Définition d'une Base de Groebner Réduite (2-14)

Une Base de Groebner réduite d'un idéal polynomial I est une Base de Groebner G de I telle que :

- $LC(p) = 1, \forall p \in G$, coefficient dominant de p unitaire
- $\forall p \in G$, aucun monôme de p n'appartient à $\langle LT(G - \{p\}) \rangle$, l'idéal généré par les termes dominants des polynômes de $G - \{p\}$.

Proposition d'unicité (2-15)

Soit $I \neq \{0\}$ un idéal polynomial. Alors, pour un ordre monomial donné, I possède une unique Base de Groebner réduite.

Notons que cette unicité est valable pour un ordre donné sur les variables. Utiliser une relation d'ordre monomiale différente ou réordonner différemment les variables sous la même relation d'ordre, modifie la base de Groebner réduite.

Construction

L'algorithme de Buchberger permet de construire une Base de Groebner d'un idéal I décrit par une base génératrice. [Buchberger, 1985]

-Théorème (2-16)

Soit $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \neq \{0\}$ un idéal polynomial. Alors une base de Groebner de I peut être *construite* en un nombre fini d'étapes.

Cet algorithme (cf. **Annexe 1**) constitue un tournant de la géométrie algébrique implantée sur ordinateur. Des packages de Bases de Groebner sont implémentés en MAPLE, MATHEMATICA, REDUCE... des softs dédiés sont développés : GB développés par J.C. Faugère à Jussieu (Paris IX)... Notons que des optimisations du calcul des Bases de Groebner sont toujours du domaine de la recherche en calcul formel.

2.3.2.2 Théorie de l'élimination

Nous avons maintenant en main les outils nécessaires pour procéder à l'élimination de variables d'un système d'équations polynomiales décrivant un idéal I . Nous avons vu au 1.3.1 que les solutions recherchées sont dans un idéal d'élimination. Grâce aux bases de Groebner nous allons pouvoir décrire cet idéal d'élimination de façon intensive par une de ses bases génératrices.

Théorème d'Elimination

(2-17)

Soit $I \subset K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ un idéal et soit G une base de Groebner de I , selon l'ordre lexicographique $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Pour tout $0 \leq k \leq n$, l'ensemble

$$G_k = G \cap K[x_{k+1}, \dots, x_n]$$

est une base de Groebner du $k^{\text{ième}}$ idéal d'élimination I_k .

Notons qu'il ne s'agit pas ici d'un processus heuristique d'élimination, mais de la meilleure façon possible d'éliminer ces variables du système d'équations puisque tout autre polynôme éliminant ces variables sera combinaison des éléments de G_k .

Notons également que lorsque $G_k = \emptyset$, cela signifie qu'il n'existe aucun polynôme issu du système ne contenant que les variables x_{k+1}, \dots, x_k , autrement dit que $I_k = \{0\}$ ne contient que le polynôme nul.

L'algorithme des Bases de Groebner pour l'ordre lexicographique élimine non seulement la première variable, mais aussi les deux premières, puis les trois premières, ainsi de suite. Cela est intéressant pour la résolution de systèmes polynomiaux, mais trop sophistiqué dans le cas où l'on veut seulement éliminer un ensemble de variables indépendamment de tout ordre d'élimination. Cela conduit à définir un Théorème d'Elimination Généralisé faisant intervenir des ordres monomiaux spécifiques à l'élimination.

Théorème d'Elimination Généralisé

Un ordre monomial dédié à l'élimination est dit de type k -élimination. Selon cet ordre tout monôme contenant une des variables à éliminer est supérieur aux autres monômes. Un exemple d'ordre de type k -élimination est donné en **Annexe 1**, il s'agit de l'ordre de $k^{\text{ième}}$ élimination de Bayer et Stillman (1987).

L'énoncé du Théorème d'Elimination Généralisé est le suivant :

Soit $I \subset K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ un idéal et soit G une base de Groebner de I , selon un ordre monomial de type k -élimination. Pour tout $0 \leq k \leq n$, l'ensemble $G_k = G \cap K[x_{k+1}, \dots, x_n]$ est une base de Groebner du $k^{\text{ième}}$ idéal d'élimination I_k .

2.3.3 Exhaustivité du résultat

Nous avons affirmé précédemment que l'idéal d'élimination contenait *tous* les polynômes en x_{k+1}, \dots, x_n issus du système initial, et cela n'est pas remis en cause. Il faut cependant rappeler que le mot « issus » signifie dans ce cas « issus d'une combinaison algébrique ». Ce qui suit va mettre en évidence le fait qu'un polynôme en x_{k+1}, \dots, x_n peut être issu du système initial par une autre voie.

Formulation du problème

Le problème que l'on veut ici mettre en évidence est illustré par l'exemple suivant :

Exemple :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Soit } I \text{ un idéal, tel que } I = \langle (u_1 + y_1)^2 \rangle \subset K[u_1, y_1] \\ \text{on a alors } p = (u_1 + y_1)^2 \in I \\ \text{mais } q = u_1 + y_1 \notin I \end{array} \right\}$$

Ainsi un polynôme peut ne pas appartenir à un idéal donné, mais une de ses puissances oui. Nous nous privons alors de tout un ensemble de polynômes issus du système et possédant les variables voulues, polynômes qui sont de plus sous une forme plus « simple ». Formulons d'abord le problème en des termes plus mathématiques qui nous permettront de le résoudre.

Formulation mathématique du problème

Les polynômes que nous venons d'évoquer se trouvent dans un ensemble que l'on appelle *radical de I* .

Définition

(2-19)

Soit $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ un idéal. Le *radical* de I , noté \sqrt{I} , est l'ensemble

$$\{f / f^m \in I \text{ pour } m \geq 1\}.$$

Lemme

(2-20)

Si I est un idéal de $K[x_1, \dots, x_n]$ alors \sqrt{I} est un idéal de $K[x_1, \dots, x_n]$ contenant I .

$$I \subset \sqrt{I}$$

Les polynômes de \sqrt{I} sont également issus du système initial et l'on peut trouver des polynômes qui soient dans \sqrt{I} mais pas dans I . Alors comment nous assurer que nous possédons bien tous les polynômes issus du système ? Trois solutions sont proposées.

Solution 1 : description de \sqrt{I}

Connaissant le système initial $\{f_1, \dots, f\}$, nous pouvons décrire I de façon intensive par une de ses bases. Cependant il n'est pas aisé de manipuler le radical d'un idéal I , notamment dans la recherche d'une de ses bases génératrices. Les travaux de [Gianni 88] conduisent à des implémentations sur SCRATCHPAD et MACAULAY, respectivement, pour trouver une base du radical d'un idéal. Mais ces algorithmes sont très sophistiqués [Cox 92].

Le problème précédent est résolu quand l'idéal I est premier (cf. Annexe 1 - Définition 16), en effet alors :

Lemme (2-21)

Si un idéal I est premier alors $\sqrt{I} = I$.

Des algorithmes testant la primalité d'un idéal existent dans les travaux de [Mines 88] et [Seidenberg 84] ; cependant ces algorithmes ne sont pas intéressants en pratique. Les travaux de [Gianni 88] ont conduit à des algorithmes implémentés sur SCRATCHPAD. Une approche différente donne des algorithmes similaires pour MACAULAY.

Ainsi, le traitement du radical de I nécessite l'implémentation de traitements supplémentaires, soit pour tester la primarité de l'idéal, soit pour déterminer une base du radical. Nous allons voir qu'en pratique de tels traitements peuvent être évités.

Solution 2 : idéaux premiers

Dans le cas général d'un système modélisé de la façon suivante :

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = F(\underline{x}_k, \underline{u}_k) \\ \underline{y}_k = G(\underline{x}_k, \underline{u}_k) \end{cases}$$

On montre que l'idéal I suivant est premier :

$$I = \left\langle \begin{array}{l} x_{k+1}^1 - F_1(\underline{x}_k, \underline{u}_k), \dots, x_{k+1}^n - F_n(\underline{x}_k, \underline{u}_k), \\ y_k^1 - G_1(\underline{x}_k, \underline{y}_k), \dots, y_k^q - G_q(\underline{x}_k, \underline{y}_k), \\ \vdots \\ x_{k+s}^1 - F_1(\underline{x}_{k+s-1}, \underline{u}_{k+s-1}), \dots, x_{k+s}^n - F_n(\underline{x}_{k+s-1}, \underline{u}_{k+s-1}), \\ y_{k+s}^1 - G_1(\underline{x}_{k+s}, \underline{y}_{k+s}), \dots, y_{k+s}^q - G_q(\underline{x}_{k+s}, \underline{y}_{k+s}) \end{array} \right\rangle \text{ est premier.}$$

De plus,

Lemme (2-22)

Si I est un idéal de $K[x_1, \dots, x_n]$ premier alors $I \cap K[x_{k+1}, \dots, x_n]$ est premier.

Nous nous retrouvons donc après élimination dans un idéal premier où ne va plus se poser le problème d'exhaustivité des relations en x_{k+1}, \dots, x_n trouvées, puisqu'alors l'idéal est égal à son radical.

Solution 3 : un polynôme à la puissance près

Si nous sommes confrontés à un système dont le modèle n'est pas premier et que la base de \sqrt{I} n'est pas exploitable, il faut se contenter d'une base $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ de I . Il nous manque toujours les polynômes du radical de I , cependant nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Résultat en Surveillance (2-23)

Dans la recherche des Relations de Redondance Analytique Polynomiales issues d'un système, les polynômes de \sqrt{I} n'appartenant pas à I n'apportent aucune information supplémentaire aux procédures de surveillances, mais permettent uniquement de simplifier les formes de calcul.

En effet :

- $f^m = 0 \Leftrightarrow f = 0$ car $K[x_1, \dots, x_n]$ est un domaine intégral.

- f^m a les mêmes indéterminées que f .

- $f \in \sqrt{I}$ a une forme plus simple que $p = f^m \in I$

En effet, rappelons que $f \in \sqrt{I} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}, m \geq 1 \mid f^m \in I$. Autrement dit, un polynôme appartient au radical si et seulement si une de ses puissances appartient à l'idéal. Les éléments de I étant parfaitement décrits, nous pouvons ponctuellement, pour un polynôme de I donné, rechercher sa forme factorisée (décomposition en facteurs irréductibles cf. **Annexe 1**). Nous pouvons nous contenter de cela car la description du radical ne nous apporte pas de connaissances nouvelles en FDI, mais uniquement une simplification de la forme de calcul.

D'un point de vue implémentation, la plupart des systèmes de calcul algébrique permettent de factoriser les polynômes de $\mathcal{Q}[x_1, \dots, x_n]$. La factorisation dans $\mathcal{R}[x_1, \dots, x_n]$ ou $\mathcal{C}[x_1, \dots, x_n]$ est bien plus difficile et fait actuellement partie du domaine de la recherche.

2.4 OBSERVABILITE ET RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS POLYNOMIALES

2.4.1 Observabilité algébrique

La question d'observabilité d'un système polynomial n'est pas l'essentiel notre propos puisque notre intérêt réside dans l'approche par élimination qui ne nécessite pas l'observabilité du système. Néanmoins nous présentons ici quelques éléments sur le sujet, liés aux Bases de Groëbner [Germundsson 91].

Définition (2-24)

Un système est complètement observable si toutes ses variables peuvent être connues soit par mesure directe, soit par estimation à partir des mesures.

En linéaire, la condition d'observabilité est une condition sur la matrice *Obs* décrite en section 2.2.1. Il faut en effet que *Obs* soit une matrice de rang plein colonnes afin que la sous matrice carrée extraite de *Obs* soit inversible et permette d'exprimer les variables d'état inconnues \underline{x} en fonction des mesures \underline{Y} .

[Germundsson 91] propose de construire un idéal à partir duquel l'information d'observabilité algébrique peut être déduite concernant le système suivant :

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = f(\underline{x}_k, \underline{u}_k) \\ y_k = g(\underline{x}_k, \underline{u}_k) \end{cases} \quad (2-23)$$

où f et g sont des vecteurs de fonctions polynomiales.

L'idéal d'observabilité d'ordre k du système (2-15) est défini comme suit :

$$O_k(f, g) = \Gamma_k(f, g) \cap K(\underline{Y}_k, \underline{U}_k)[\underline{x}_0]$$

$$\text{où } \begin{cases} \Gamma_0(f, g) = \langle \underline{y}_0 - g(\underline{x}_0, \underline{u}_0) \rangle \\ \Gamma_k(f, g) = \Gamma_{k-1}(f, g) + \langle \underline{x}_k - f(\underline{x}_{k-1}, \underline{u}_{k-1}), \underline{y}_k - g(\underline{x}_k, \underline{u}_k) \rangle \end{cases}$$

$\Gamma_k(f, g)$ est un idéal de $K(\underline{Y}_k, \underline{U}_k)[\underline{X}_k]$, c'est à dire un idéal à coefficient $\underline{Y}_k, \underline{U}_k$ dans le corps K , et à indéterminées \underline{X}_k .

Les notations sont les suivantes : $\underline{X}_k = \underline{x}_0, \dots, \underline{x}_k$ regroupe les vecteurs des variables d'état entre les instants 0 et k , idem pour \underline{u} et \underline{y} ; $K[\underline{x}]$ désigne $K[x_1, \dots, x_n]$ l'anneau des polynômes en les composantes du vecteur \underline{x} .

L'idéal $O_k(f, g)$ contient toutes les relations polynomiales entre \underline{x}_0 et les séquences d'entrées/sorties supposées connues $\underline{Y}_k, \underline{U}_k$. Cet idéal résulte en fait de l'élimination des occurrences temporelles de \underline{x} supérieures strictement à zéro. Nous avons vu précédemment que les Bases de Groëbner constituaient un outil pour décrire un tel idéal d'élimination - nous ne reviendrons pas sur ce point.

Exemple 2-1 :

Soit un système décrit par le modèle polynomial à temps discret suivant :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) \cdot x_2(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases} \quad (2-24)$$

Dans un premier temps nous générons l'idéal $\Gamma_k(f, g)$, pour $k=1$. Notons qu'il est en fait généré par les équations (2-16) écrites à chaque instant de la fenêtre temporelle allant de 0 à k :

$$\Gamma_1(f, g) = \langle x_1(1) - x_1(0) - x_2(0) - u(0), x_2(1) - x_1(0) \cdot x_2(0), y(1) - x_2(1), y(0) - x_2(0) \rangle \quad (2-25)$$

L'idéal d'observabilité d'ordre 2 du système est alors l'idéal résultant de l'intersection suivante :

$$O_1(f, g) = \Gamma_1(f, g) \cap K(u(0), u(1), y(0), y(1))[x_1(0), x_2(0)] \quad (2-26)$$

Pour obtenir l'idéal (2-18), il faudra en fait procéder à l'élimination de $x_1(1), x_2(1)$. Les Bases de Groëbner nous permettent de décrire cet idéal de façon intensive : nous obtenons, pour un ordre tel que $\{x_1(0), x_2(0)\} < \{x_1(1), x_2(1)\}$:

$$O_1(f, g) = \langle y(0) \cdot x_1(0) - y_1, x_2(0) - y(1) \rangle \quad (2-27)$$

La question est maintenant la suivante : *Est-il possible d'extraire suffisamment d'information de $O_k(f, g)$ pour reconstruire \underline{x}_0 ?*

Les éléments de réponse se trouvent dans les définitions et théorèmes suivants [Germundsson 91] :

Définition (2-26)

Le système (2-15) est algébriquement observable d'ordre k si et seulement si la dimension de $O_k(f, g)$ est égale à zéro. Le système (2-15) est algébriquement observable si (2-15) est algébriquement observable pour un certain ordre.

Théorème (2-27)

Si le système (2-15) est algébriquement observable alors

$$\dim O_{n-1}(f, g) = 0$$

où n est la dimension du vecteur d'état du système.

Par « dimension », Germundsson et Forsman entendent dimension de l'ensemble des solutions des équations polynomiales de l'idéal. Cette définition (2-21) signifie donc qu'il existe un systèmes d'équations polynomiales avec un *nombre fini de solutions décrivant l'état*. Ce théorème (2-22) permet de résoudre la question de l'observabilité algébrique d'un système en un nombre fini d'étapes.

Nous allons maintenant utiliser les Bases de Groëbner pour tester la dimension zéro de l'idéal $O_k(f, g)$, grâce au théorème suivant :

Théorème (2-28)

L'idéal $O_k(f, g)$ est de dimension zéro si et seulement si les éléments de la Base de Groëbner correspondante ont des monômes principaux de la forme x_i^j ($i^{\text{ème}}$ composante x_i de l'état \underline{x} , à la puissance j).

Exemple 2-2 (suite) :

Dans l'exemple 2-2 l'idéal $O_1(f, g) = \langle y(0) \cdot x_1(0) - y_1, x_2(0) - y(1) \rangle$ est de dimension zéro. Le système est donc algébriquement observable. Remarquons cependant que pour un coefficient $y(0)=0$ il est impossible de retrouver l'état.

Nous avons présenté dans cette section la notion d'observabilité traitée au moyen des Bases de Groëbner. Mais il faut savoir que l'observabilité des systèmes non linéaires peut être soumise à d'autres définitions et d'autres méthodes de résolution, citons les travaux de [Diop 91] en la matière.

2.4.2 Résolution d'un système d'équations

La technique des bases de Groebner peut être utilisée pour résoudre des systèmes d'équations polynomiales à plusieurs variables. Commençons par donner un exemple d'application.

Exemple :

$$\text{Considérons les équations suivantes : } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = y \\ x = z \end{cases} \text{ dans } C^3.$$

Ces équations déterminent l'idéal $I = \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + z^2 - y, x - z \rangle \subset C[x, y, z]$ et nous voulons trouver tous les points de $V(I)$. La proposition 7 de l'Annexe 1 implique que l'on peut trouver $V(I)$ en utilisant n'importe quelle base de I .

Nous utiliserons une base de Groebner de I selon l'ordre lexicographique $x > y > z$. La base

$$\text{obtenue est : } \begin{cases} g_1 = x - z \\ g_2 = -y + 2z^2 \\ g_3 = z^4 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4} \end{cases}.$$

La première remarque à faire est que g_3 dépend de z uniquement et que l'on peut trouver ses quatre racines : $z = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\pm \sqrt{5} - 1}$.

Ensuite, quand ces valeurs sont substituées dans les équations $g_2 = 0$ et $g_3 = 0$, ces deux équations peuvent être résolues de façon unique pour x et y respectivement.

Ainsi on trouve quatre solutions pour $g_1 = g_2 = g_3 = 0$, deux réelles et deux complexes. Et, puisque $V(I) = V(g_1, g_2, g_3)$, on est sûr d'avoir trouvé toutes les solutions du système initial.

Utilisation des bases de Groebner pour la résolution

Trouver une base de Groebner d'un idéal selon un ordre lexicographique simplifie considérablement la forme des équations. En effet, on obtient des équations où les variables sont éliminées successivement. L'ordre d'élimination correspond à l'ordre donné sur les variables.

Un système d'équations de cette forme est facile à résoudre, particulièrement quand la dernière équation contient seulement une variable. On peut alors appliquer les techniques de résolution propres aux polynômes à une seule variable pour trouver ses racines, et les substituer ensuite dans les autres équations du système. On peut alors résoudre le système par rapport aux autres variables d'une façon similaire à l'exemple ci-dessus.

2.5 IMPLEMENTATION

Le terme anglais de *computer algebra* désigne un domaine de recherche qui combine deux sujets : l'algèbre et la science informatique, que l'on pourrait traduire par *algèbre informatisée*. L'algèbre informatisée traite de la manipulation symbolique d'entités algébriques.

Les *systèmes d'algèbre informatisée* réalisent cette manipulation symbolique. MAPLE, REDUCE, MATHEMATICA sont les systèmes les plus connus et des programmes particulièrement puissants. Nous pouvons également citer MACSYMA et SCRATCHPAD aussi puissants que les trois précédents et également capables calculer des Bases de Groëbner. Il existe également des programmes plus spécialisés tels que MACAULAY et CoCoA conçus initialement pour des chercheurs en géométrie algébrique Citons enfin GB développé par Faugère (Jussieu, Polytechnique) avec lequel nous avons travaillé, en parallèle avec MAPLE V.

La limite de ces systèmes tient en la quantité de mémoire énorme nécessitée par les calculs de Bases de Groëbner. De plus, notons que la plupart travaillent avec des coefficients entiers, voire rationnels mais que travailler avec des coefficients réels ou complexes fait toujours partie de domaine de la recherche [Heinz 91].

3. ESPACE DE PARITE POLYNOMIAL

3.1 INTRODUCTION

Nous allons présenter dans ce chapitre notre contribution à la surveillance des systèmes non linéaires. Rappelons que nous nous intéressons aux méthodes d'espace de parité, que celles-ci sont largement développées dans le cas linéaire et qu'elles sont étendues aux systèmes bilinéaires.

Notons cependant que l'extension aux *systèmes bilinéaires* résulte de l'utilisation directe de l'espace de parité linéaire dont les matrices de projection sont recalculées à chaque instant d'échantillonnage. En effet, les systèmes bilinéaires sont vus comme des systèmes linéaires non invariants, dont les matrices représentatives ont une valeur différente à chaque instant. Il faut ainsi projeter *numériquement* ces différentes matrices dans l'espace de parité, à chaque instant. (voir chapitre 2 section 2.2.2) Cette façon de procéder trouve ses limites dans les systèmes *rapides d'ordre élevé* pour lesquels elle entraîne des calculs excessifs [Yu 95].

L'approche que nous allons présenter n'est pas une approche *numérique* mais une approche *formelle*. Il s'agit d'obtenir l'expression formelle des résidus issus du système pour pouvoir ensuite seulement les implanter numériquement. Bien entendu cette approche s'applique non seulement aux systèmes polynomiaux, mais aussi aux systèmes linéaires et bilinéaires qui sont des systèmes polynomiaux particuliers.

La complexité intrinsèque à l'extraction des relations de redondance analytique, à partir d'un modèle donné, est prise en charge par la phase de calcul formel, selon la procédure que nous allons décrire dans ce chapitre et avec les outils mathématiques décrits dans le chapitre 2. Restera alors à implanter numériquement les résidus.

Nous expliquerons en section 3.2 les raisons qui nous ont conduit à développer l'algèbre plutôt que l'algèbre différentielle. En section 3.3 nous parlerons des modèles polynomiaux, de la modélisation des incertitudes et des défaillances ainsi que de l'extension des modèles sur une fenêtre temporelle. Nous présenterons ensuite en section 3.4 la méthode d'Espace de Parité Polynomiale proprement dite. Nous affinerons ensuite cette présentation par une étude de la sensibilité des résidus aux défaillances et de leur robustesse face aux entrées inconnues, en section 3.5. Nous chercherons ensuite à améliorer ces performances par une structuration des résidus obtenus, en section 3.6.

3.2 ALGÈBRE / ALGÈBRE DIFFÉRENTIELLE

Deux options s'offraient à nous dans le traitement des systèmes polynomiaux : l'*algèbre* ou l'*algèbre différentielle*. Cette dernière ajoute l'opération de *dérivation* à l'algèbre.

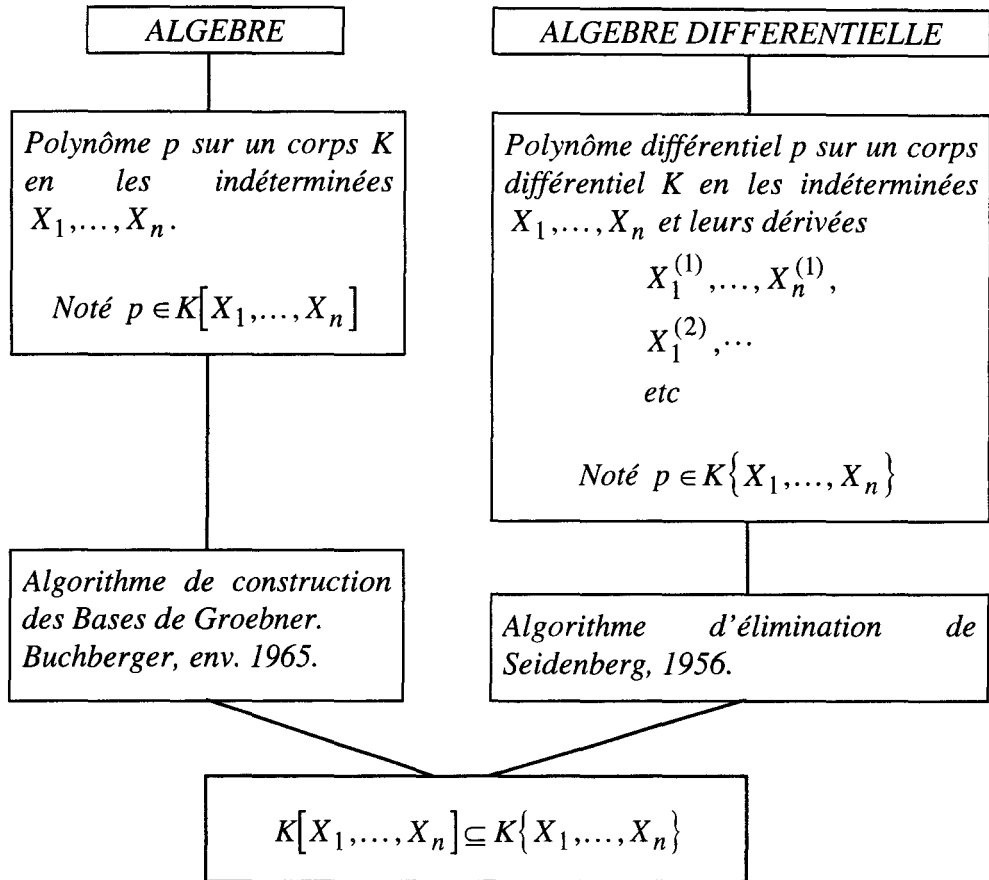


Figure 3-1 : Algèbre / Algèbre différentielle

Nous avons choisi d'écarter l'algèbre différentielle pour diverses raisons. La première raison est que le traitement différentiel des équations est assez lourd dans la mesure où il faut gérer l'opération de dérivation et où l'on ne maîtrise pas le degré de dérivation final des RRA. La deuxième raison en est justement que l'Algèbre non différentielle permet de traiter les variables dérivées comme de simples variables et que nous pouvons choisir à priori un degré maximal de dérivation pour les entrées/sorties intervenant dans les RRA. La troisième raison enfin est que des travaux utilisant l'algèbre différentielle pour la surveillance des systèmes polynomiaux sont déjà menés dans le laboratoire [Comte-Varga 97].

Afin de gérer la notion de dérivation en algèbre non différentielle, nous allons en fait traiter les dérivées des variables comme des variables à part entière. La différence essentielle avec l'algèbre différentielle est qu'il nous faudra fixer un ordre de dérivation maximal pour ces variables.

Dans la mesure où les résidus que nous voulons exploiter à des fins de surveillance ne peuvent faire intervenir des ordres de dérivation trop importants - qui occasionneraient des difficultés pour implémenter les résidus, cette contrainte n'en est pas une en surveillance.

3.3 MODELES POLYNOMIAUX TRAITES

3.3.1 Modèles de fonctionnement normal

Nous allons dans un premier temps nous intéresser aux modèles polynomiaux de *fonctionnement normal*. Les relations décrivant le comportement normal du système sont alors des équations différentielles polynomiales, que l'on peut considérer à temps continu ou à temps discret. Nous pourrions à partir de ces modèles extraire la *forme de calcul des résidus*.

Une classification des modèles polynomiaux est présentée sur la Figure 3-2, qui nous permet de mettre en évidence les divers domaines traités.

Forme générale

Comme le montre la figure 3-2, la forme *la plus générale* de modèle polynomial que nous allons traiter est la suivante :

$$\underline{G}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Y}) = \underline{0} \quad (3-1)$$

Elle comprend des relations différentielles polynomiales, contenant des variables inconnues \underline{X} et leurs formes dérivées continues ou discrètes, ainsi que des variables connues \underline{U} et \underline{Y} , et leurs dérivées. Le vecteur \underline{X} contient des variables simples et des variables dérivées - rappelons ici que nous considérons les variables dérivées comme des variables simples à part entière. Les vecteurs \underline{U} et \underline{Y} sont des vecteurs de variables connues - intrinsèquement ou par la mesure, respectivement vecteur d'entrée - ou commande, et vecteur de sortie - ou mesures.

Modèle statique

C'est un modèle fréquemment utilisé, pour les applications de transports de matière par exemple, sous une forme polynomiale bilinéaire, voire multilinéaire. Une application à un système d'échangeurs thermiques a été traitée dans [Guernez 96b], et présentée dans le chapitre 5.

Modèle dynamique

C'est sous la forme « Relations d'état / Relations de mesures » que le système dynamique nous est le plus familier. Néanmoins les autres modèles dynamiques présentés figure 3-2 pourront également être traités comme nous le verrons par la suite.

Modèles linéaire et bilinéaire

Ces deux types de modèles sont traités en surveillance par d'autres méthodes - voir chapitre 1, largement pour les systèmes linéaires, et de façon plus récente pour les systèmes bilinéaires. Tous deux font partie de la classe plus générale des systèmes polynomiaux.

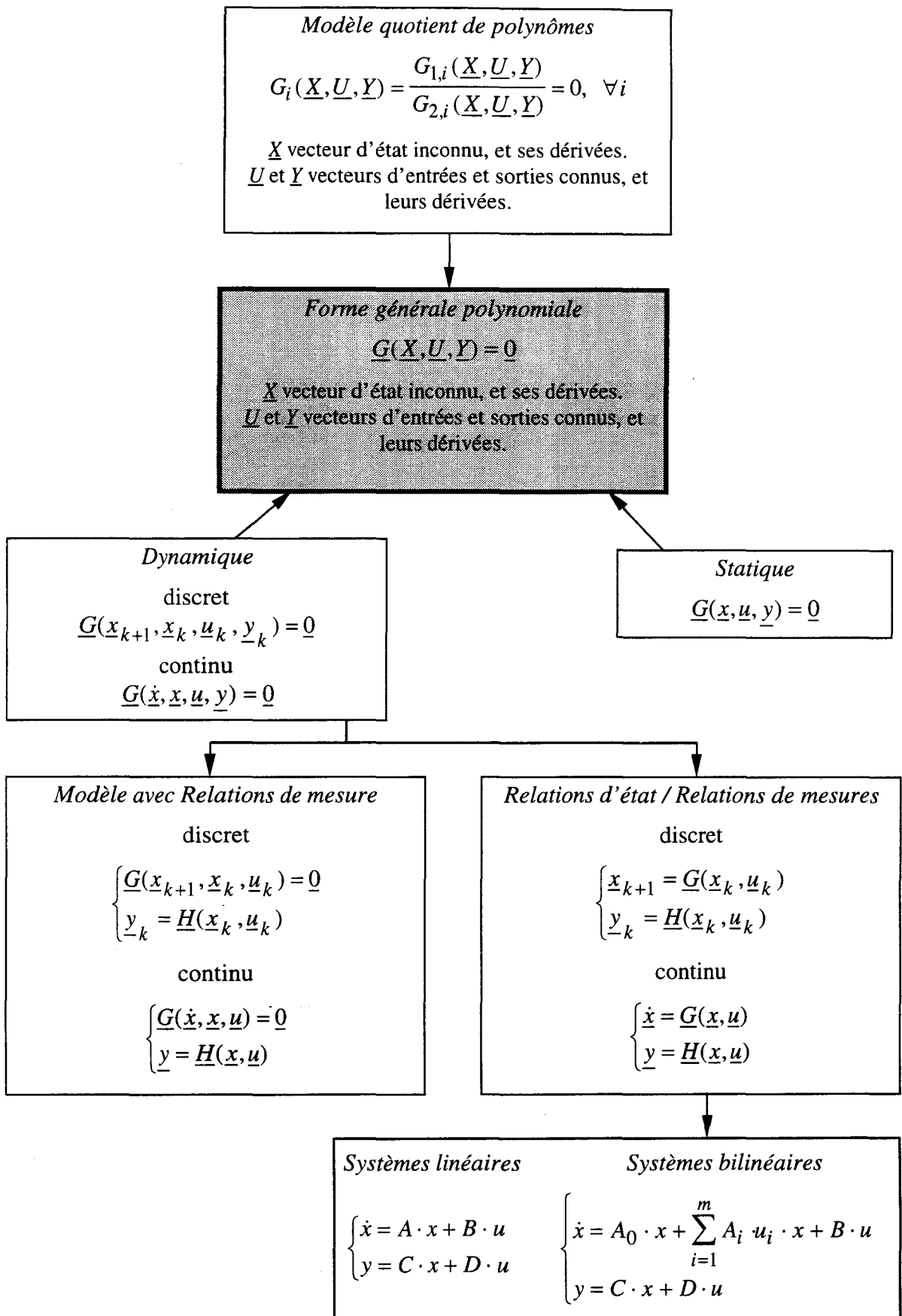


Figure 3-2 : classification des modèles polynomiaux

Modèle quotient de polynômes

Un modèle se présentant sous la forme de *quotients de polynômes* (3-2), [Zhang 97], peut être ramené à une forme de type (3-1) et traité en tant que tel.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{G_{1,1}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Y})}{G_{1,2}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Y})} = 0 \\ \vdots \\ \frac{G_{s,1}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Y})}{G_{s,2}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Y})} = 0 \end{array} \right. \quad (3-2)$$

Il faut que les dénominateurs soient non nuls, ce qui s'écrit de la façon suivante, en faisant intervenir une nouvelle variable z :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{1,1}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Y}) = 0 \\ \vdots \\ G_{s,1}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Y}) = 0 \\ 1 - z \cdot G_{1,2}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Y}) \cdots G_{s,2}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Y}) = 0 \end{array} \right. \quad (3-3)$$

On retrouve alors un modèle de type (3-1) comprenant une variable inconnue supplémentaire z , qu'il faudra éliminer par la suite au même titre que les éléments de \underline{X} .

3.3.2 Modèles d'incertitude et d'influence des défaillances

Nous allons intéresser maintenant à la modélisation des incertitudes et à la modélisation de l'influence des défaillances dans les modèles polynomiaux.

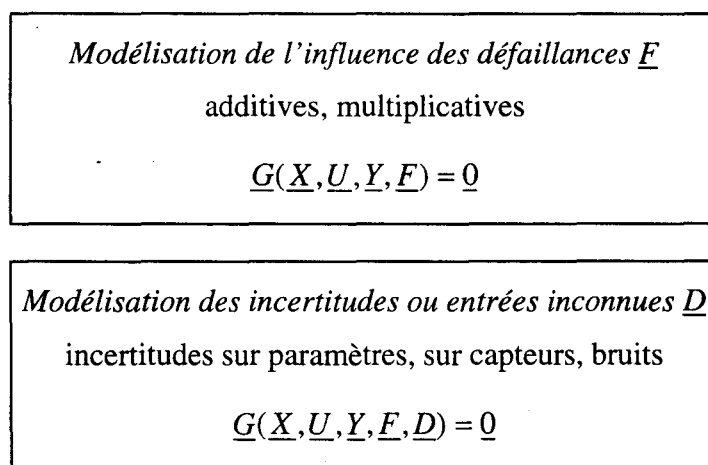


Figure 3-3 : modèle d'incertitude et modèle d'influence

L'introduction d'une nouvelle variable additive ou multiplicative ne modifie pas la nature polynomiale de nos modèles, un polynôme étant par définition une somme de produits de

variables. Nous pouvons donc modéliser l'influence des défaillances ainsi que toute forme d'entrées inconnues et les traiter en tant que variables inconnues au même titre que les variables d'état inconnues \underline{X} .

Exemple 3-1 : [Guernez 97a]

$$\begin{pmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,k} \cdot x_{2,k} - u_{1,k} + f_{1,k} \\ 0.4 \cdot x_{2,k} - u_{2,k} \end{pmatrix}$$

$$y_k = x_{1,k} + u_{2,k} - f_{2,k}$$

Modélisation d'une défaillance $f_{1,k}$ sur l'entrée u_1 , et d'une défaillance $f_{2,k}$ sur la sortie y .

Remarque sur les modèles linéaires à paramètres incertains

Dans la pratique, les systèmes sont rarement modélisés de façon parfaite et leurs paramètres sont connus avec une certaine imprécision. On peut modéliser les incertitudes qui affectent la matrice C des équations linéaires (2-1) sous la forme [Ragot 96] :

$$C = C_0 + \theta_i \cdot \sum_{i=0}^r C_i, \quad r \text{ entier naturel fixé.}$$

Où les paramètres θ_i appartiennent à un certain domaine. Lorsque les paramètres θ_i sont nuls, C prend la valeur nominale C_0 .

Exemple 3-2 :

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1+\theta & 1 \\ 1 & 0 & 1+\theta \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot x(t) \quad (3-4)$$

Le système (3-4) est un système de mesure où l'on dispose de 5 mesures couplées de 3 grandeurs, sur lequel on a introduit un paramètre d'incertitude θ . Un tel système peut être réécrit en mettant les incertitudes sous forme d'entrées inconnues \underline{d} :

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\theta \cdot x(t)}_{\underline{d}(t)} \\ &= A \cdot x(t) + H \cdot \underline{d}(t) \end{aligned} \quad (3-5)$$

La recherche des Relations de Redondance Analytique de ce système passe par l'élimination des variables inconnues \underline{x} et des entrées inconnues \underline{d} du système (3-5) et peut être réalisées par projection successive selon le principe énoncé en section 2.2.1. :

Soit $W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ telle que $W \cdot A = 0$, la multiplication par W du système (3-5) donne :

$$\begin{bmatrix} y_1 - y_3 \\ y_2 - y_4 \\ -2 \cdot y_4 + y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{d}(t) \quad (3-6)$$

Soit maintenant $W' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ telle que $W' \cdot W \cdot H = 0$, la multiplication par W' du système (3-6) donne la RRA linéaire issue du système :

$$-2 \cdot y_4 + y_5 = 0 \quad (3-7)$$

Par cette procédure nous obtenons une seule RRA, celle ci est linéaire.

Nous verrons que, en considérant le système (3-4) sous la forme polynomiale suivante :

$$\begin{cases} y_1 - x_1 - (1 + \theta) \cdot x_2 - x_3 = 0 \\ y_2 - x_1 - (1 + \theta) \cdot x_3 = 0 \\ y_3 - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ y_4 - x_1 - x_3 = 0 \\ y_5 - 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

et en recherchant des RRA polynomiales, nous obtenons une RRA supplémentaire qui est :

$$2 \cdot (y_3 \cdot y_4 - y_1 \cdot y_4 - y_2 \cdot y_3) + y_5 \cdot (y_3 - y_4) + y_2 \cdot (y_4 + y_2) = 0$$

Notons l'avantage d'une approche polynomiale pour la modélisation de ces incertitudes sur les paramètres des systèmes linéaires. En effet une incertitude sur un paramètre du système linéaire introduit une non linéarité de type polynomial, que nous verrons comment traiter par la suite.

En linéaire, le découplage du système vis à vis de cette incertitude se fait en la transformant en entrée inconnue et en se découplant vis à vis de celle-ci, cela conduit généralement à une perte d'information dans la mesure où l'on recherche des relations de redondance linéaires alors que celles-ci sont par nature polynomiales.

3.3.3 Extension temporelle du modèle

Quand le modèle est statique la question d'extension temporelle du modèle ne se pose pas, il faut extraire les relations de redondance analytiques du modèle tel qu'il est donné. Quand le modèle est dynamique, il peut exister, au delà des relations de redondance analytique statiques, des relations de redondance temporelles liant les variables connues à divers instants de la fenêtre temporelle - pour le cas discret, ou à divers degré de dérivation - pour le cas continu. [Chow & Willsky 84].

Systemes linéaires

Pour les systèmes *linéaires*, la taille s de la fenêtre sur laquelle il faut étendre le modèle pour obtenir des relations de redondance analytiques, est déterminée par la condition suivante :

$$\text{rang} \text{Obs} < (q + m) \cdot (s + 1),$$

avec les notations du chapitre 2 section 2.2.1

qui conditionne l'existence de la matrice de projection W . Le théorème de Cayley-Hamilton nous assure que cette condition est toujours satisfaite pour une fenêtre d'observation assez grande. Le nombre de relations de redondance analytique linéairement indépendantes est donné par la taille de W , matrice de projection de Obs dans l'espace de parité.

Systemes polynomiaux

Pour les systèmes polynomiaux, il n'existe pas de critère simple tel que le rang permettant de conclure a priori sur l'existence de relations de redondance analytique. Nous verrons qu'il faut générer une base de Groebner de l'idéal d'élimination et regarder si elle contient au moins un polynôme autre que le polynôme nul.

Substitution par les équations d'état

Lorsque le modèle contient une relation d'état exprimant une variable x_{k+1} en fonction de x_k , il peut être intéressant de substituer aux occurrences de x_{k+1} son expression fonction de x_k . Cela permet de limiter le nombre de variables à éliminer. Ce traitement de substitution peut se programmer facilement en calcul formel.

Exemple 3-3 : [Guernez 97a]

Reprenons l'exemple 3-1,

$$\begin{pmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,k} \cdot x_{2,k} - u_{1,k} + f_{1,k} \\ 0.4 \cdot x_{2,k} - u_{2,k} \end{pmatrix} \quad (3-8)$$
$$y_k = x_{1,k} + u_{2,k} - f_{2,k}$$

Deux options s'offrent à nous, si l'on désire par exemple travailler sur une fenêtre de taille 2.

1^{ère} option : Nous écrirons simplement le modèle (3-8) sur la fenêtre temporelle :

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = x_{1,k} \cdot x_{2,k} - u_{1,k} + f_{1,k} \\ x_{2,k+1} = 0.4 \cdot x_{2,k} - u_{2,k} \\ y_k = x_{1,k} + u_{2,k} - f_{2,k} \\ y_{k+1} = x_{1,k+1} + u_{2,k+1} - f_{2,k+1} \end{cases}$$

La recherche de RRA nécessitera l'élimination des variables $x_{1,k+1}$, $x_{2,k+1}$, $x_{1,k}$ et $x_{2,k}$ de ces quatre équations.

2^{ème} option : Nous écrivons le modèle (3-8) sur la fenêtre temporelle, puis nous réduisons le nombre de relations et de variables à traiter en substituant $x_{1,k+1}$ et $x_{2,k+1}$ par leurs valeurs en fonction de $x_{1,k}$ et $x_{2,k}$:

$$\begin{cases} y_k = x_{1,k} + u_{2,k} - f_{2,k} \\ y_{k+1} = x_{1,k+1} + u_{2,k+1} - f_{2,k+1} \\ \quad = (x_{1,k} \cdot x_{2,k} - u_{1,k} + f_{1,k}) + u_{2,k+1} - f_{2,k+1} \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi un système où le nombre de variables inconnues à éliminer est réduit aux occurrences de \underline{x} à l'instant k .

Notons ici que le principe est le même dans le cas continu, ainsi que l'illustre l'exemple 3-4.

Exemple 3-4 :

Soit un système dont le comportement est représenté par le modèle polynomial continu suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \cdot x_2(t) - u_1(t) + f_1(t) \\ 0.4 \cdot x_2(t) - u_2(t) \end{pmatrix} \quad (3-9)$$

$$y(t) = x_1(t) + u_2(t) - f_2(t)$$

De la même façon, le modèle (3-9) peut être écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) - u_1(t) + f_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = 0.4 \cdot x_2(t) - u_2(t) \\ y(t) = x_1(t) + u_2(t) - f_2(t) \\ \dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) + \dot{u}_2(t) - \dot{f}_2(t) \end{cases}$$

La recherche de RRA nécessitera l'élimination des variables $\dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t)$, $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de ces quatre équations.

3.3.4 Conclusion

Les différents modèles que nous venons de présenter se ramènent tous au modèle général. Ce dernier est un modèle constitué d'équations différentielles de forme polynomiale. Quant aux variables qu'elles font intervenir, deux choses sont à noter : la première est que les variables dérivées seront considérées comme des variables à part entière, la deuxième est que nous partitionnons les variables en deux catégories : les variables inconnues et les variables connues (par la mesure ...).

Nous allons maintenant voir comment la méthode *d'Espace de Parité* peut s'étendre aux systèmes polynomiaux. Nous présenterons la théorie sur le modèle général et l'illustrerons sur des modèles plus « classiques » - modèles état/mesures, modèles bilinéaires.

3.4 ESPACE DE PARITE POLYNOMIAL

3.4.1 Formulation du problème

Nous avons vu, *Figure 3-2*, que les systèmes polynomiaux étudiés pouvaient se ramener à la forme générale suivante :

$$\underline{G}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Y}) = \underline{0}$$

que l'on peut écrire sous la forme plus détaillée suivante :

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q) = 0 \\ \vdots \\ g_s(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q) = 0 \end{cases} \quad (3-10)$$

Les x_i , u_i , y_i sont respectivement les composantes des vecteurs \underline{X} , \underline{U} , \underline{Y} . Le vecteur \underline{X} est, rappelons le, le vecteur des variables inconnues. Il contient des variables simples et des variables dérivées, que nous pouvons toutes renommer x_i puisque pour nous ce sont des variables indépendantes. Les vecteurs \underline{U} et \underline{Y} sont des vecteurs de variables connues - intrinsèquement ou par la mesure, respectivement vecteur d'entrée - ou commande, et vecteur de sortie - ou mesures. Même remarque pour \underline{U} et \underline{Y} quant à leurs composantes dérivées.

Dans notre optique de surveillance par une méthode d'*Espace de Parité*, notre objectif premier est d'extraire du système (3-10) des *relations de redondance analytique*, autrement dit des relations ne contenant que des variables connues :

$$\begin{cases} \Phi_1(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_t(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q) = 0 \end{cases} \quad (3-11)$$

La procédure permettant de réécrire le modèle (3-10) sous une forme entrées / sorties (3-11) est décrite dans la section suivante.

3.4.2 Extraction des Relations de Redondance Analytique Polynomiales

Le problème qui nous est posé au 3.4.1 est un problème d'*élimination* de variables d'un système d'équations polynomiales. L'Espace de Parité Linéaire utilise un processus de projection linéaire des équations - algébriquement réalisé par la multiplication des équations du système par une matrice de projection, pour procéder à une telle élimination. Dans l'algèbre des anneaux polynomiaux, nous avons à notre disposition la *Théorie de l'Élimination* décrite au chapitre 2 section 2.3.2.2.

3.4.2.1 L'Idéal des relations / l'Idéal d'élimination

Nous allons dans un premier temps associer les équations du système (3-12) à l'Idéal qu'elles génèrent :

$$I = \left\langle g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q), \dots, g_s(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q) \right\rangle \quad (3-12)$$

I , comme nous l'avons vu au chapitre 2, contient tous les polynômes issus des polynômes du système (3-10) par combinaisons linéaires à coefficients polynomiaux. De cet ensemble, il nous faut extraire les polynômes ne contenant pas d'éléments de \underline{X} , autrement formulé il nous faut une description de l'ensemble suivant - par une de ses bases génératrices :

$$I_n = I \cap K[u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q] \quad (3-13)$$

L'ensemble I_n est l'Idéal d'élimination de I . Il contient les Relations de Redondance Analytiques Polynomiales issues du système. L'Idéal d'élimination I_n est un ensemble infini qu'il nous faut décrire d'une façon intensive par une de ses bases génératrices, afin de pouvoir l'exploiter. Cela est toujours possible, en effet, comme nous l'avons signalé précédemment, tout idéal possède un ensemble générateur fini (cf. chapitre 2 section 2.3.2.1).

Nous allons, pour trouver une base génératrice de I_n , utiliser la Théorie de l'élimination décrite au chapitre 2 section 2.3.2.2. Pour ce faire, nous procédons en trois étapes : la première consiste à choisir un *ordre* sur les variables, la deuxième à générer une *Base de Groebner* de l'Idéal I , la troisième à extraire de la Base de Groebner précédente une Base de Groebner génératrice de I_n - par application du *Théorème d'élimination*.

3.4.2.2 Etape 1 : choix de l'ordre sur les variables

Nous avons vu au chapitre 2 section 2.3.1 qu'il était nécessaire d'établir un *ordre monomial* sur les variables (Définition 2-6), les Bases de Groebner étant définies et construites pour un ordre monomial donné (Définition 2-7).

Pour pouvoir éliminer les composantes x_i du vecteur \underline{X} , il faut que cet ordre monomial établisse les variables x_i plus grandes que toutes les autres variables - u_i et y_i .

$$\{x_1, \dots, x_n\} > \{u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q\} \quad (3-14)$$

Un choix judicieux du type d'ordre utilisé va permettre de construire plus ou moins facilement la Base de Groebner associée. Un type d'ordre est dédié à l'élimination, il s'agit des ordres de *type k-élimination* (cf. Théorème d'élimination généralisé, chapitre 2, section 2.3.2.2). Néanmoins ces ordres sont peu implémentés sur les logiciels existants (cf. chapitre 2, section 2.4), il nous faudra donc travailler essentiellement avec l'ordre lexicographique ou les ordres totaux.

3.4.2.3 Etape 2 : calcul d'une Base de Groebner de I

Une fois un ordre choisi et établi sur les variables, nous pouvons donner les polynômes du système (3-4) au logiciel de calcul formel, pour qu'il calcule la Base de Groebner réduite de l'idéal - rappelons que celle ci est unique (Proposition 2-11).

Exemple 3-5 en Maple :

La commande Maple suivante calcule la Base de Groebner de l'idéal généré par les trois polynômes selon l'ordre lexicographique pur sur les variables ordonnées telles que $x > y > z$

$$\text{gbasis}\left(\left[x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + z^2 - y, x - z\right], [x, y, z], \text{plex}\right)$$

La Base de Groebner calculée est la suivante :

$$\left\{x - z, -y + 2 \cdot z^2, z^4 + (1/2) \cdot z^2 - 1/4\right\}$$

3.4.2.4 Etape 3 : Base de Groebner de I_n

Une fois que nous avons une Base de Groebner de l'Idéal I pour un ordre approprié sur les variables, il nous reste à appliquer le Théorème (2-13) qui nous donne directement une Base de Groebner de I_n . Celle ci est constituée des polynômes de la Base de Groebner de I qui ne font pas intervenir les variables x_i .

Il est possible qu'il n'existe aucun polynôme de la Base de Groebner de I satisfaisant ces conditions, cela signifie que I_n ne contient que le polynôme nul, et que par conséquent aucune Relations de Redondance Analytique Polynomiale ne peut être extraite du système.

Exemple 3-6 (suite du précédent) :

Si nous voulons sur l'exemple précédent éliminer les variables x et y , il nous faut trouver une base de $\langle x^2 + y^2 + z^2 - 1, x^2 + z^2 - y, x - z \rangle \cap K[z]$, celle ci est donnée par le seul polynôme en z uniquement de la Base de Groebner de I :

$\left\{z^4 + (1/2) \cdot z^2 - 1/4\right\}$. Rappelons ici que cette procédure est valable uniquement pour un ordre tel que $x > y > z$.

Maintenant que nous possédons une Base de I_n , nous avons en fait une base génératrice de toutes les Relations de Redondances Analytiques Polynomiales du système. Résumons cette procédure sur la Figure (3-4) suivante et illustrons la par un exemple.

3.4.2.5 *Résumé, Exemple*

Le schéma de la Figure 3-4 résume la procédure précédemment décrite, l'exemple 3-5 l'illustre. Nous rappelons ensuite que le système décrit dans l'exemple 3-5 ne peut en aucun cas être traité par une procédure de projection dans l'espace de parité, comme cela avait été possible pour les systèmes bilinéaires. (cf. Chapitre 2 section 2.2.2 et 2.2.3)

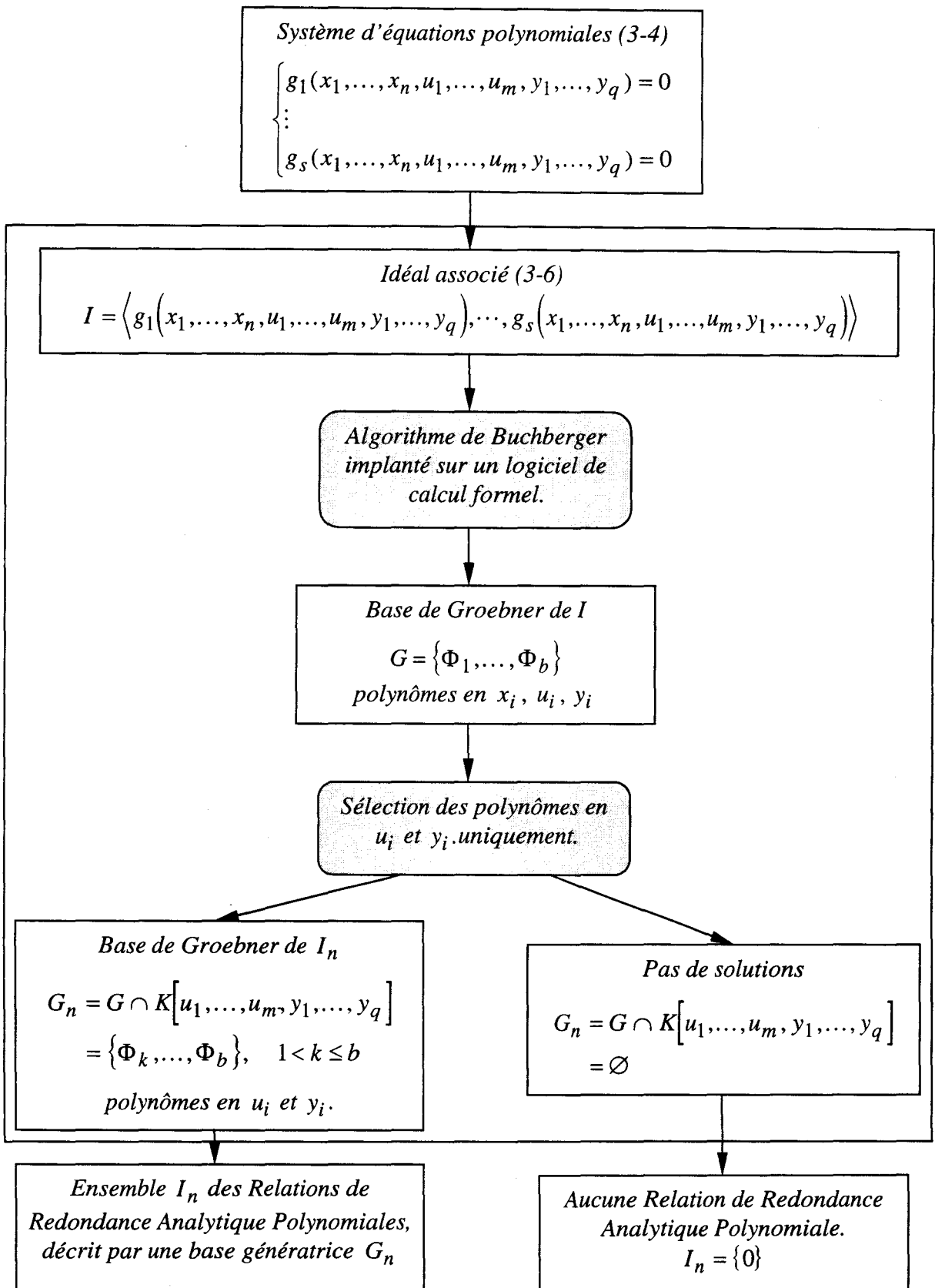


Figure 3-4 : Méthode d'Espace de Parité Polynomiale, procédure d'extraction des RRAP.

Exemple 3-7 [Guernez 97a] :

Soit le système polynomial à temps discret sous forme état / mesure suivant :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,k} \cdot x_{2,k} - u_{1,k} \\ 0.4 \cdot x_{2,k} - u_{2,k} \end{pmatrix} \\ y_k = x_{1,k} + u_{2,k} \end{cases}$$

Nous écrivons la sortie sur une fenêtre temporelle de taille 2 :

$$\begin{cases} y_k = x_{1,k} + u_{2,k} \\ y_{k+1} = x_{1,k} \cdot x_{2,k} - u_{1,k} + u_{2,k+1} \\ y_{k+2} = (x_{1,k} \cdot x_{2,k} - u_{1,k}) \cdot (0.4 \cdot x_{2,k} - u_{2,k}) - u_{1,k+1} + u_{2,k+2} \end{cases}$$

C'est sur ce modèle que va s'appliquer la procédure précédente d'Espace de Parité Polynomial.

Formons d'abord l'idéal des relations

$$I = \left\langle \begin{array}{l} y_k - x_{1,k} - u_{2,k}, y_{k+1} - x_{1,k} \cdot x_{2,k} + u_{1,k} - u_{2,k+1}, \\ y_{k+2} - (x_{1,k} \cdot x_{2,k} - u_{1,k}) \cdot (0.4 \cdot x_{2,k} - u_{2,k}) + u_{1,k+1} - u_{2,k+2} \end{array} \right\rangle$$

Etablissons un ordre sur les variables, pour lequel les variables inconnues sont les plus grandes. C'est l'ordre lexicographique qui sera ici implémenté sur MAPLE.

$$x_{1,k} > x_{2,k} > y_k > y_{k+1} > y_{k+2} > u_{1,k} > u_{1,k+1} > u_{2,k} > u_{2,k+1} > u_{2,k+2}$$

La ligne de code qui permet de calculer la Base de Groebner est la suivante :

```
maple gbasis([yk-x1k-u2k, yk1-x1k*x2k+u1k-
u2k1, 5*yk2-
(x1k*x2k-u1k) * (2*x2k-5*u2k) +5*u1k1-5*u2k2]
, [x1k, x2k, yk, yk1, yk2, u1k, u1k1, u2k, u2k1, u2k2], plex)
```

MAPLE V nous génère la Base de Groebner GB suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -y_k + x_{1,k} + u_{2,k}, \\ \Phi_2 &= -y_{k+1} - u_{1,k} + u_{2,k+1} + x_{2,k} \cdot y_k - x_{2,k} \cdot u_{2,k}, \\ \Phi_3 &= -5 \cdot u_{2,k} \cdot y_{k+1} + 5 \cdot u_{2,k} \cdot u_{2,k+1} + 2 \cdot x_{2,k} \cdot y_{k+1} - 2 \cdot x_{2,k} \cdot u_{2,k+1} - \\ &\quad 5 \cdot y_{k+2} - 5 \cdot u_{1,k+1} + 5 \cdot u_{2,k+2}, \\ \Phi_4 &= -5 \cdot u_{2,k}^2 \cdot y_{k+1} + 5 \cdot u_{2,k}^2 \cdot u_{2,k+1} - 5 \cdot u_{2,k} \cdot y_{k+2} - 5 \cdot u_{2,k} \cdot u_{1,k+1} \\ &\quad + 5 \cdot u_{2,k} \cdot u_{2,k+2} + 4 \cdot y_{k+1} \cdot u_{2,k+1} + 2 \cdot u_{2,k+1} \cdot u_{1,k} - 2 \cdot u_{2,k+1}^2 \\ &\quad - 2 \cdot y_{k+1}^2 - 2 \cdot y_{k+1} \cdot u_{1,k} + 5 \cdot y_{k+1} \cdot u_{2,k} \cdot y_{k+1} - 5 \cdot y_{k+1} \cdot u_{2,k} \cdot u_{2,k+1} \\ &\quad + 5 \cdot y_{k+1} \cdot y_{k+2} + 5 \cdot y_{k+1} \cdot u_{1,k+1} - 5 \cdot y_{k+1} \cdot u_{2,k+2} \end{aligned}$$

Nous avons vu précédemment qu'une base de

$$I_2 = I \cap K[y_k, y_{k+1}, y_{k+2}, u_{1,k}, u_{1,k+1}, u_{2,k}, u_{2,k+1}, u_{2,k+2}]$$

est constituée par les polynômes de la base GB ne contenant pas d'inconnues. Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \Phi_4 = & -5*u_{2k}^2*y_{k1} + 5*u_{2k}^2*u_{2k1} - 5*u_{2k}*y_{k2} - 5*u_{2k}*u_{1k1} \\ & + 5*u_{2k}*u_{2k2} + 4*y_{k1}*u_{2k1} + 2*u_{2k1}*u_{1k} - 2*u_{2k1}^2 \\ & - 2*y_{k1}^2 - 2*y_{k1}*u_{1k} + 5*y_k*u_{2k}*y_{k1} - 5*y_k*u_{2k}*u_{2k1} \\ & + 5*y_k*y_{k2} + 5*y_k*u_{1k1} - 5*y_k*u_{2k2} \end{aligned}$$

$\Phi_4 = 0$ est la Relation de Redondance Analytique Polynomiale du système pour la fenêtre temporelle donnée. D'autres RRA peuvent être obtenues en multipliant celle-ci par un coefficient polynomial. Notons ici que cela pose problème pour la sensibilité des résidus, nous aborderons ce problème plus loin dans ce mémoire en section 3-5.

Rappelons ici que l'exemple 3-5 précédent ne peut être traité par une approche par projection dans l'espace de parité, (Cf. chapitre 2 section 2.2.3). En effet :

Nous pouvons chercher à réécrire ce système pour le mettre sous une forme « linéaire » :

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2(k) & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

La matrice A contient un élément qui n'est pas connu, il sera donc impossible de trouver une matrice orthogonale à A numériquement.

La Figure 3-4 décrit la méthode d'Espace de Parité Polynomiale qui permet de découpler le système initial des variables inconnues, comme il est illustré dans l'exemple. Les Relations de Redondance Analytiques Polynomiales obtenues vont maintenant être exploitées pour la surveillance sous forme de Résidus, comme il est décrit au chapitre 1 section 1.3.2.

3.4.3 Forme de calcul des résidus polynomiaux

Nous nous retrouvons avec un ensemble d'équations qui sont des Relations de Redondances Analytiques Polynomiales, et qui permettent de générer toute autre Relation de Redondance par des combinaisons linéaires à coefficients polynomiaux.

$$\begin{cases} \Phi_k(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_b(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q) = 0 \end{cases} \quad (3-15)$$

Rien ne nous dit que les polynômes intervenant dans les équations (3-15) sont les meilleurs dans une optique de surveillance. Nous nous intéresserons à cette question par la suite quand nous étudierons la sensibilité des résidus aux différentes défaillances, en section 3-5.

Cela étant dit considérons les équations (3-15) comme point de départ pour obtenir nos résidus. Ceux-ci sont alors :

$$\begin{cases} r_1 = \Phi_k(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q) \\ \vdots \\ r_{b-k+1} = \Phi_b(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q) \end{cases} \quad (3-16)$$

Les résidus (3-16) sont nuls en fonctionnement normal, et de même qu'en linéaire, nous pouvons faire le postulat que le vecteur des résidus divergera de zéro en fonctionnement défaillant.

3.4.4 Exhaustivité

Nous avons évoqué, au chapitre 2 section 2.3.3, la possibilité de passer à côté des polynômes « racines n^{ième} » des éléments de I_n . Nous ne reviendrons pas sur cette question, mais proposons ici un moyen rapide de vérifier, pour un polynôme donné, s'il possède une forme simplifiée.

La plupart des systèmes de calcul formel permettent de factoriser les polynômes à coefficients rationnels - la factorisation des polynômes à coefficients réels ou complexes est bien plus difficile. Sous MAPLE V, la commande *factor* permet de factoriser un polynôme multivariable. Ainsi nous pourrions obtenir la forme simplifiée d'un résidu, lorsque cela est possible.

3.4.5 Conclusion

Cette section a défini la méthode d'*Espace de Parité Polynomial*, qui comme ses instantiations linéaire ou bilinéaire, découple le système vis à vis des variables inconnues.

Nous pouvons alors obtenir la forme de calcul des résidus, pour l'implanter numériquement. La même procédure peut être appliquée pour découpler le système des incertitudes qui sont des entrées inconnues et donc traitées de la même façon que \underline{X} , comme nous le verrons en section 3.5.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'analyse de ces résidus. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre 1, la forme de calcul des résidus une fois implémentée permet uniquement de détecter l'occurrence d'un défaut, mais ne donne aucune information quand à la localisation du défaut occurrent. Cette information est donnée par la forme d'évaluation des résidus - chapitre 1, section 1.3.4.

3.5 ETUDE DE SENSIBILITE AUX DEFAILLANCES ET ROBUSTESSE AUX ENTREES INCONNUES

3.5.1 Formulation du problème

Nous avons vu - chapitre 1 section 1.3.2.2, que le vecteur résidu doit posséder deux propriétés : *robustesse aux entrées inconnues* (être nul en l'absence de défaut) et *sensibilité aux défauts* (être non nul en présence d'un défaut).

Reprenons le modèle général de la Figure 3-3, section 3.3.2, modélisant les entrées inconnues - ou incertitudes, et l'influence des défaillances :

$$\underline{G}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Y}, \underline{F}, \underline{D}) = \underline{0}$$

que l'on peut écrire de façon plus détaillée :

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e, d_1, \dots, d_d) = 0 \\ \vdots \\ g_s(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e, d_1, \dots, d_d) = 0 \end{cases} \quad (3-17)$$

Pour être *robuste* aux entrées inconnues, il faut découpler le système (3-17) des entrées inconnues d_1, \dots, d_d . La procédure de découplage est la même que précédemment.

Pour être *sensible* aux défauts, il faut que la forme d'évaluation des résidus contiennent les défauts désirés. Cela, bien entendu, est une condition nécessaire et non suffisante de sensibilité. En effet, comme nous le verrons, si le découplage des entrées inconnues assure la robustesse, la présence d'un défaut dans une forme d'évaluation ne garantit pas la sensibilité du résidu à ce défaut.

3.5.2 Robustesse aux entrées inconnues

S'affranchir des entrées inconnues dans la mesure où celles-ci sont modélisées de telle sorte que le modèle reste polynomial, ne pose pas de problème. Il suffit d'utiliser la procédure d'Espace de Parité polynomial pour éliminer ces entrées inconnues, dans la mesure où cela est possible bien entendu.

Reprenons l'exemple 3-2, présentant une incertitude sur un paramètre :

Exemple 3-8 :

La variable θ représente une incertitude sur un paramètre. Elle est inconnue au même titre que les x .

$$\begin{cases} y_1 - x_1 - (1 + \theta) \cdot x_2 - x_3 = 0 \\ y_2 - x_1 - (1 + \theta) \cdot x_3 = 0 \\ y_3 - x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ y_4 - x_1 - x_3 = 0 \\ y_5 - 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

Nous allons utiliser la procédure précédemment décrite pour nous découpler des variables inconnues. La commande MAPLE V utilisée est la suivante :

```
maple gbasis([y1-x1-(1+0)*x2-x3,y2-x1-(1+0)*x3,y3-x1-x2-x3,y4-x1-x3,y5-2*x1-2*x3],
[x1,x2,x3,0,y1,y2,y3,y4,y5],plex)
```

MAPLE V nous génère une Base de Groebner dont nous extrayons la Relation de Redondance Analytique suivante :

$$2 \cdot (y_3 \cdot y_4 - y_1 \cdot y_4 - y_2 \cdot y_3) + y_5 \cdot (y_3 - y_4) + y_2 \cdot (y_4 + y_2) = 0$$

Cette relation est non linéaire et n'aurait pu être trouvée par des méthodes classiques recherchant des relations linéaires, comme nous l'avons vu dans l'exemple 3-2.

3.5.3 Sensibilité aux défaillances - forme d'évaluation des résidus

Pour la discussion qui va suivre nous ne parlerons plus des entrées inconnues que nous considérerons découplées si elles existent.

Les définitions liées au concept de *sensibilité* sont rappelées en **Annexe2**. Rappelons néanmoins que la sensibilité d'un résidu vis à vis d'un ensemble de défaillances représente la capacité de ce résidu à représenter les défaillances - en s'écartant de zéro.

3.5.3.1 Obtention des forme de calcul et forme d'évaluation des résidus

Nous avons vu au chapitre 1, que la *forme d'évaluation* des résidus - obtenue à partir du modèle d'influence des défaillance (cf. section 1.3.1), contient l'information de sensibilité des résidus aux défaillances. Rappelons que la *forme de calcul* des résidus sera implantée numériquement pour obtenir la valeur de l'indicateur de défauts. Pour obtenir cette forme d'évaluation, nous partons du modèle (3-16) que l'on va découpler des variables \underline{X} :

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e) = 0 \\ \vdots \\ g_s(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e) = 0 \end{cases}$$

pour obtenir les Relations de Redondance Analytique suivantes :

$$\begin{cases} \Phi_1(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_t(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e) = 0 \end{cases} \quad (3-18)$$

Rappelons que ces relations sont des *polynômes*, constitués de sommes de monômes, eux mêmes produits de variables. Pour extraire de (3-18) la forme de calcul et la forme d'évaluation des résidus, nous allons reformuler (3-18) de la façon suivante :

$$\begin{cases} \Phi_{1,cal}(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q) + \Phi_{1,eval}(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_{t,cal}(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q) + \Phi_{t,eval}(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e) = 0 \end{cases} \quad (3-19)$$

Les $\Phi_{i,cal}(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q)$ sont constituées des monômes des Φ_i ne contenant pas de variables f_j et sont les *formes de calcul* respectivement des résidus r_i . Les $\Phi_{i,eval}(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e)$ sont constituées des monômes des Φ_i contenant au moins une variable f_j et sont les *formes d'évaluation* respectivement des résidus r_i .

En fonctionnement normal

En effet, en fonctionnement normal, les variables de défaillances sont nulles : $f_j = 0, \forall j$. Cela implique que les *formes d'évaluation* sont nulles - en tant que somme de produits contenant chacun au moins un f_j :

$$\Phi_{i,eval}(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e) = 0 \quad (3-20)$$

Les contraintes (3-19) étant toujours vérifiées, (3-20) implique que les *formes de calcul* sont également nulles :

$$\Phi_{i,cal}(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q) = 0 \quad (3-21)$$

Cela nous montre que, si nous implantons $r_i = \Phi_{i,cal}(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q)$, comme indicateur de défaut, il sera bien nul en fonctionnement normal.

En fonctionnement défaillant

En fonctionnement défaillant, dans l'hypothèse de *panne unique* qui est la nôtre, une des variables de défaillances a une valeur non nulle : $\exists j / f_j \neq 0, \forall j$.

Dans la plupart des cas, la *forme d'évaluation des résidus*, qui est un polynôme dont chaque monôme contient au moins une variable de défaillance, sera alors non nulle :

$$\Phi_{i,eval}(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e) \neq 0 \quad (3-22)$$

Il est important de noter que la forme d'évaluation d'un résidu peut être nulle en présence d'une défaillance du fait qu'elle est également fonction du point de fonctionnement du système. Pour ce point de fonctionnement très particulier, le résidu ne sera pas sensible à la défaillance. Il est possible néanmoins postuler que cette configuration se produit rarement.

Dans le cas où la forme d'évaluation est effectivement non nulle, nous avons :

$$\begin{aligned} \Phi_{i,cal}(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q) &\neq 0 \\ &= -\Phi_{i,eval}(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e) \end{aligned} \quad (3-23)$$

Cela montre que, si nous implantons $r_i = \Phi_{i,cal}(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q)$, comme indicateur de défaut, il sera bien non nul en fonctionnement défaillant. De plus l'explication de cette divergence de zéro - donnée par la forme d'évaluation, nous permet d'aborder la phase d'*isolation et d'analyse du défaut*.

Exemple

Reprenons l'exemple 3-5 où cette fois nous travaillons avec un modèle d'influence des défaillances. [Guernez 97a]

Exemple 3-9

Soit le modèle d'influence des défaillances suivant :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,k} \cdot x_{2,k} - u_{1,k} + f_{1,k} \\ 0.4 \cdot x_{2,k} - u_{2,k} \end{pmatrix} \\ y_k = x_{1,k} + u_{2,k} - f_{2,k} \end{cases}$$

Deux types de défaut peuvent survenir sur le système : un défaut sur l'entrée u_1 - noté f_1 , et un défaut sur la sortie y - noté f_2 . La procédure permettant d'extraire des Relations de Redondance Analytique est la même que dans l'exemple 3-5 en ajoutant les variables modélisant l'influence des défaillances :

$$\begin{aligned} x_{1,k} &> x_{2,k} > y_k > y_{k+1} > y_{k+2} > u_{1,k} > u_{1,k+1} > u_{2,k} > u_{2,k+1} > u_{2,k+2} > f_{1,k} > \\ f_{1,k+1} &> f_{2,k} > f_{2,k+1} > f_{2,k+2} \end{aligned}$$

La relation - de forme (3-18), obtenue est la suivante

$$\begin{aligned}
0 = & -5*u_2k^2*yk1 - 5*u_2k^2*f2k1 + 5*u_2k^2*u_2k1 \\
& -5*u_2k*yk2 - 5*u_2k*f2k2 - 5*u_2k*u_1k1 + 5*u_2k*f1k1 \\
& + 5*u_2k*u_2k2 + 4*yk1*u_2k1 + 4*f2k1*u_2k1 + 2*u_2k1*u_1k \\
& - 2*u_2k1*f1k - 2*u_2k1^2 - 2*yk1^2 - 2*f2k1^2 + 4*yk1*f2k1 \\
& - 2*yk1*u_1k + 2*yk1*f1k - 2*u_1k*f2k1 + 2*f2k1*f1k \\
& + 5*u_2k*yk*yk1 + 5*u_2k*yk*f2k1 + 5*u_2k*yk1*f2k \\
& + 5*u_2k*f2k*f2k1 - 5*yk*u_2k*u_2k1 - 5*f2k*u_2k*u_2k1 \\
& + 5*yk*yk2 + 5*yk*f2k2 + 5*yk2*f2k + 5*f2k*f2k2 \\
& + 5*yk*u_1k1 - 5*yk*f1k1 + 5*u_1k1*f2k - 5*f2k*f1k1 \\
& - 5*yk*u_2k2 - 5*f2k*u_2k2
\end{aligned}$$

Après avoir mis la relation précédente sous forme (3-18), nous pouvons extraire les forme de calcul et forme d'évaluation du résidu obtenu :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{calcul}} = & -5*u_2k^2*yk1 + 5*u_2k^2*u_2k1 - 5*u_2k*yk2 - \\
& 5*u_2k*u_1k1 \\
& + 5*u_2k*u_2k2 + 4*yk1*u_2k1 + 2*u_2k1*u_1k - 2*u_2k1^2 \\
& - 2*yk1^2 - 2*yk1*u_1k + 5*u_2k*yk*yk1 - \\
& 5*yk*u_2k*u_2k1 + 5*yk*yk2 \\
& + 5*yk*u_1k1 - 5*yk*u_2k2 \\
\Phi_{\text{évaluation}} = & -5*u_2k^2*f2k1 - 5*u_2k*f2k2 + 5*u_2k*f1k1 \\
& + 4*f2k1*u_2k1 - 2*u_2k1*f1k - \\
& 2*f2k1^2 + 4*yk1*f2k1 + 2*yk1*f1k \\
& - 2*u_1k*f2k1 + 2*f2k1*f1k + 5*u_2k*yk*f2k1 + 5*u_2k*yk1*f2k \\
& + 5*u_2k*f2k*f2k1 - 5*f2k*u_2k*u_2k1 + 5*yk*f2k2 + 5*yk2*f2k \\
& + 5*f2k*f2k2 - 5*yk*f1k1 + 5*u_1k1*f2k - 5*f2k*f1k1 - \\
& 5*f2k*u_2k2
\end{aligned}$$

La forme d'évaluation fait intervenir les deux défaillances, ce qui indique que le résidu est sensible aux deux défauts - dans la plupart des cas. En effet, nous voyons ici que certains points de fonctionnement vont annuler la forme d'évaluation. Ainsi si l'on considère une défaillance unique f_1 , que donc $f_2=0$, la forme d'évaluation devient :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{évaluation}}(f_1) = & 5*u_2k*f1k1 - 2*u_2k1*f1k - 2*yk1*f1k \\
& - 5*yk*f1k1
\end{aligned}$$

Nous constatons que, dans le cas où ($u_2 = y$), la forme d'évaluation est nulle quelle que soit la valeur de la défaillance f_1 . Le résidu ne sera donc pas sensible à cette défaillance pour ces points de fonctionnement particuliers où ($u_2 = y$).

Une simulation du système vient illustrer cette « sensibilité » du résidu aux deux défaillances, qui sera détaillée dans la section 3.5.3.2 suivante.

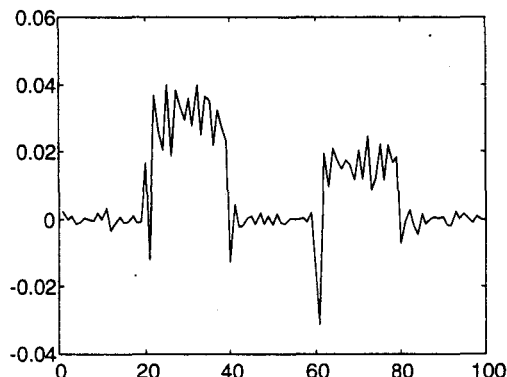


Figure 3-5 : Forme d'évaluation du résidu en fonction du temps

Les conditions de simulation sont celles de [Guernez 97a] : taille de la fenêtre : 100, amplitude des entrées constantes : 0.1, écart type du bruit blanc gaussien de moyenne nulle : 0.01, défaut sur u_1 apparu à l'instant 20, de durée 20 et d'amplitude 0.2, défaut sur y apparu à l'instant 60, de durée 20 et d'amplitude 0.2.

L'analyse de la forme d'évaluation des résidus est un point clé des procédures d'isolation de défaut - chapitre 1 section 1.2.3.1.

3.5.3.2 Notion de sensibilité aux défaillances

Position du problème

Plusieurs problèmes relatifs à la sensibilité des résidus relativement aux défaillances peuvent se poser.

Un problème que nous évoquons ici mais que nous ne développerons pas est un problème inhérent aux techniques de prise de décision. En effet l'influence de la défaillance peut être « noyée » dans le bruit environnant, ou encore une grande disparité dans les sensibilités respectives d'un résidu à différentes défaillances peut exister. Ces deux phénomènes vont pénaliser les procédures de prise de décision et nécessiteront un effort dans ce domaine [Zhang 96,97].

Un problème, qui est plus présent dans ce mémoire, est celui lié aux formes d'évaluation des résidus. Le problème est double - analytique et numérique, et se pose de la façon suivante :

- L'expression d'une forme d'évaluation peut contenir une variable de défaillance f dont l'influence est en fait analytiquement annulée du fait des relations liant les autres variables du système.

Exemple 3-10 :

Soit la forme d'évaluation Φ d'un résidu r que nous voudrions sensible à deux défaillances f_1 et f_2 :

$$\Phi = f_1 + f_1 \cdot f_2$$

Notons que Φ est polynomiale, ce qui se conçoit vu la nature polynomiale de nos systèmes.

Les deux défaillances interviennent dans le résidu, néanmoins, sous l'hypothèse de panne unique qui est la nôtre, le résidu ne permet pas de détecter la défaillance f_2 . En effet, nous avons alors :

$$f_2 \neq 0, f_1 = 0 \Rightarrow \Phi = 0$$

Ce problème, ainsi que d'autres de même nature seront traités dans la suite de cette section.

- L'expression d'une forme d'évaluation peut contenir une variable de défaillance f dont l'influence est en fait *numériquement* annulée du fait des valeurs que peuvent prendre les autres variables du système.

Exemple 3-11 :

Soit la forme d'évaluation Φ d'un résidu r que nous voudrions sensible à deux défaillances f_1 et f_2 :

$$\Phi = f_1 + (u_1 - y_2) \cdot f_2$$

Notons que Φ est polynomiale, ce qui se conçoit vu la nature polynomiale de nos systèmes et que Φ peut contenir des variables d'entrées / sorties u_1 et y_2 .

Les deux défaillances interviennent dans le résidu, néanmoins, pour certains points de fonctionnement, le résidu ne permet pas de détecter la défaillance f_2 . En effet, nous pouvons alors avoir :

$$f_2 \neq 0, f_1 = 0, u_1 = y_2 \Rightarrow \Phi = 0$$

Ce problème, ainsi que d'autres de même nature seront traités dans la suite de cette section.

Sensibilité structurelle

Il est une chose néanmoins que nous pouvons établir dans les deux cas précédents : il s'agit d'une *condition nécessaire* de sensibilité d'un résidu à un ensemble de défaillances données. Cette condition nécessaire est issue de la définition de la notion de *sensibilité structurelle*, cf. **Annexe 2**.

Un résidu r sera dit structurellement sensible à une défaillance f quand sa forme d'évaluation contient la variable exprimant la défaillance, c'est à dire quand :

$$\frac{\partial r}{\partial f} \neq 0.$$

La sensibilité structurelle est une condition nécessaire non suffisante de sensibilité d'un résidu à un ensemble donné de défaillances. Autrement dit si un résidu r n'est pas structurellement sensible à une défaillance f alors nous pouvons affirmer qu'il n'y sera pas sensible.

La sensibilité structurelle d'un résidu est triviale à déterminer. Il s'agit d'une information binaire que nous exploiterons en section 3.6. Néanmoins, il nous faudra examiner analytiquement cette forme d'évaluation pour pouvoir conclure quant à la sensibilité effective du résidu aux défaillances.

Sensibilité Analytique des systèmes polynomiaux

Pour les *systèmes polynomiaux*, comme nous l'avons vu dans l'exemple 3-7, la dérivée du résidu par rapport à une des défaillances peut faire intervenir des variables d'entrées ou de sorties non constantes, la variable de défaillance elle-même ou encore une autre variable de

défaillance. Cela induit une nouvelle notion de sensibilité, qui dépend notamment du *point de fonctionnement* du système. Des techniques d'étude de sensibilité existent néanmoins et sont regroupées de façon exhaustive dans [Karnavas 93]

Ce dernier préconise dans notre cas l'utilisation d'une *Fonction de Sensibilité Absolue*. La sensibilité absolue d'une fonction F par rapport aux variations d'un paramètre α est donnée par :

$$S_{\alpha}^F = \left. \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right|_{PFN} \quad (3-24)$$

où PFN signifie que la dérivée partielle est évaluée au Point de Fonctionnement normal (PFN) où tous les paramètres ont leur valeur nominale. De là nous pouvons déduire que, pour une variation de α « petite » :

$$\Delta F \approx S_{\alpha}^F \cdot \Delta \alpha \quad (3-25)$$

Il s'agit là ni plus ni moins d'une procédure de *linéarisation* du résidu autour d'un point de fonctionnement.

Exemple 3-12

Soit la fonction $R = u_1^2 \cdot y_1 + u_2^3$ qui est la forme de calcul d'un résidu. Et nous nous intéressons à l'influence sur le résidu d'un biais sur u_1 , sur y_1 et sur u_2 . Faisons les hypothèses suivantes :

1. Nous travaillons à un point de fonctionnement connu : $u_1 = 1$, $y_1 = 2$, $u_2 = 0.5$.
2. Les variations sur les variables sont « faibles ».

Calculons les sensibilités absolues de R aux variations sur les trois variables :

$$S_{u_1}^R = \left. \frac{\partial R}{\partial u_1} \right|_{PFN} = 2 \cdot u_1 \cdot y_1 \Big|_{PFN} = 4, \quad S_{y_1}^R = 1, \quad S_{u_2}^R = 0.75$$

Cela signifie que si l'on considère sur ces variables un biais de 0.1 alors la variation du résidu sera respectivement de :

$$\Delta R = 4 \cdot 0.1 = 0.4 \text{ pour un biais sur } u_1,$$

$$\Delta R = 1 \cdot 0.1 = 0.1 \text{ pour un biais sur } y_1$$

$$\Delta R = 0.75 \cdot 0.1 = 0.075 \text{ pour un biais sur } u_2$$

Nous pouvons ainsi quantifier et comparer la façon dont réagit le résidu face à une variation de l'une de ses variables, il s'agit d'une quantification de la sensibilité du résidu aux défaillances.

Si l'on considère la forme d'évaluation de R , relativement à une défaillance sur u_1 :

$$\begin{aligned}
 R_{\text{éval.}} &= (u_1 + \Delta u_1)^2 \cdot y_1 + u_2^3 \\
 &= u_1^2 \cdot y_1 + u_2^3 + \Delta u_1^2 \cdot y_1 + 2 \cdot \Delta u_1 \cdot y_1 \\
 &= \Delta u_1^2 \cdot y_1 + 2 \cdot \Delta u_1 \cdot y_1
 \end{aligned}$$

Au point de fonctionnement considéré la valeur de la forme d'évaluation est de 0.42, elle représente la variation du résidu lors de l'apparition du biais sur u_1 . Notons qu'elle est sensiblement la même que celle obtenue précédemment, et que ces deux valeurs seront d'autant plus proches que la valeur du biais est faible.

Sous les hypothèses énoncées dans l'exemple 3-10, cette méthode nous permet analytiquement de quantifier la sensibilité d'un résidu à partir de sa forme de calcul. La défaillance se présente alors comme un biais de « petite » amplitude sur l'une des variables intervenant dans la forme de calcul. Cette méthode nous permet de comparer les différentes sensibilités d'une part, et d'autre part permet d'estimer si la réponse du résidu à la défaillance sera suffisante ou non pour la phase de décision.

Néanmoins cette méthode présente deux inconvénients majeurs :

1. Le modèle d'influence de la défaillance est imprécis - car issu d'une linéarisation autour d'un point de fonctionnement, ce qui pourra occasionner des difficultés en termes d'estimation de la défaillance et de prise de décision.
2. Nous verrons dans la section 3.5.4 suivante qu'il est intéressant en surveillance de pouvoir contrôler la structure des résidus, autrement dit de générer des résidus sensibles à telles défaillances et insensibles à telles autres. La méthode précédente ne permet que de constater les sensibilités et pas de les construire. La seule façon de faire est pour nous de contrôler analytiquement la forme d'évaluation des résidus.

Sensibilité Empirique des systèmes polynomiaux

Le terme provient de [Karnavas 93] et est le résultat d'une procédure bien connue qui est la *simulation*. Un modèle mathématique d'un système est simulé sur ordinateur, et diverses méthodes sont employées pour faire varier les paramètres pendant la simulation. Les effets de ces variations sont alors observés et mesurés. Rappelons que nous faisons dans ce mémoire l'hypothèse d'une panne unique, ce qui facilitera les simulations - en effet un seul paramètre à la fois varie.

Certaines remarques préalables permettent de se dispenser dans certains cas de simulation :

1. Si la défaillance n'intervient pas dans la forme d'évaluation du résidu, alors ce dernier n'est pas sensible à la défaillance, il est donc inutile d'entreprendre une simulation.
2. Si un monôme de la forme d'évaluation contient deux ou plusieurs défaillances alors ce terme peut être purement supprimé de la forme d'évaluation. En effet dans l'hypothèse d'une panne unique, ce monôme sera forcément nul. Cette suppression peut entraîner la disparition de certaines variables de défaillances dans la forme d'évaluation, et l'on se ramène alors à la remarque 1.

3.5.4 Analyse de la sensibilité d'un résidu

3.5.4.1 Définitions préalables et illustration du problème

Pour étudier la sensibilité d'un résidu à une défaillance donnée, il faut partir de la forme d'évaluation r du résidu. Si l'on considère une défaillance f_j , cette forme d'évaluation peut s'écrire sous la forme d'un polynôme en f_j à coefficients polynomiaux.

$$\begin{aligned}
 r &= \sum_i a_i \cdot f_j^{\alpha_i}, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}^+ (\text{entier positif}) \\
 a_i &\in K[U, Y, \overline{F_j}], \\
 \text{où } \overline{F_j} &= \{f_k | k \neq j\}, \\
 U &= \{u_1, \dots, u_m\}, Y = \{y_1, \dots, y_n\} \\
 U \text{ et } Y &\text{ ensemble de variables d'entrées / sorties connues} \\
 \text{Par convention on pose } &a_0 = 0.
 \end{aligned} \tag{3-26}$$

Il pourra être également intéressant de considérer la valeur du résidu en réponse à la défaillance f_j seule. Autrement dit, l'hypothèse de panne unique est faite. Le polynôme a_0 n'est pas inclus dans l'expression (3-27) car il ne dépend pas de f_j mais des autres défaillances uniquement.

$$r_0^j = \sum_{i \neq 0} a_i \cdot f_j^{\alpha_i} \tag{3-27}$$

Enfin, nous allons considérer ce qui est classiquement considéré comme la sensibilité du résidu r à la défaillance f_j ; c'est à dire la dérivée partielle de r par rapport à f_j . Notons que cette définition est habituellement utilisée pour des résidus linéaires, et que son utilisation pour des résidus non linéaires est sujette à caution comme nous allons le voir Figure (3-6).

$$S_j = \frac{\partial r}{\partial f_j} = \sum_{i \neq 0} \alpha_i \cdot a_i \cdot f_j^{\alpha_i - 1} \tag{3-28}$$

Illustration du problème

Pour mettre en évidence les interactions entre ces différentes valeurs, ainsi que les problèmes de sensibilité pouvant être rencontrés, nous présentons quelques résidus particuliers sur la Figure (3-6).

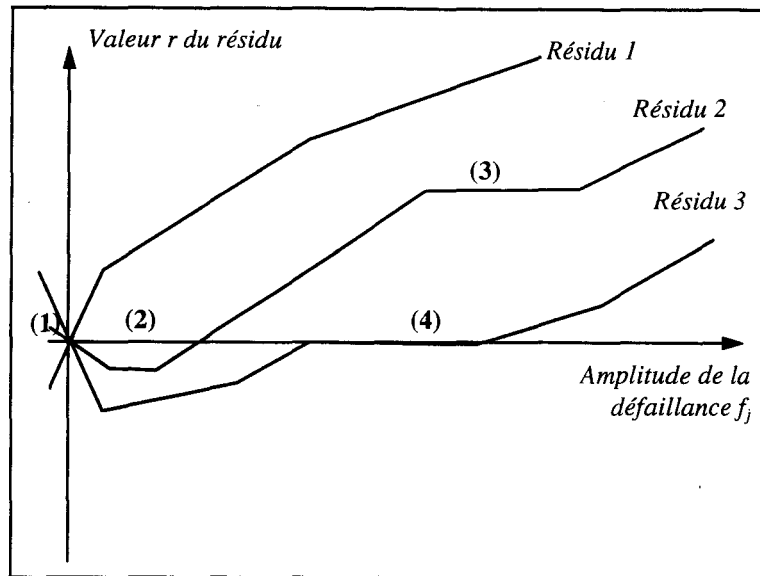


Figure 3-6 : illustration des problèmes de sensibilité

Le *Résidu 1* ne présente aucune difficulté d'analyse de sensibilité du résidu à la défaillance f_j . En effet, non seulement la valeur du résidu r n'est jamais nulle en fonctionnement défaillant, mais la valeur de la sensibilité S_j non plus - la dérivée de la courbe représentant le *Résidu 1* n'étant jamais nulle.

Le *Point (2)* est plus intéressant. En effet en ce point la valeur du résidu r est nulle en présence de la défaillance f_j . Certes la sensibilité S_j n'est pas nulle, mais ce qui nous intéresse pour la détection de la défaillance est bien la valeur du résidu et non la sensibilité. Néanmoins, ce problème de non détection de la défaillance étant ponctuel peut être négligé.

Le *Point (3)* présente la particularité d'un résidu r non nul et d'une sensibilité nulle S_j . Néanmoins, c'est la valeur du résidu qui nous permet de détecter la défaillance et donc ce cas ne présente pas vraiment d'intérêt.

Le *Point (4)* met en exergue un phénomène que nous allons développer dans la suite de cette section. En effet, dans le voisinage du point (4), la valeur du résidu et de la sensibilité sont nuls. Localement autour du point (4), il y a non détection de la défaillance f_j . Cela exprime en fait *localement un changement de structure du résidu*.

Conclusion

Ces quelques points nous conduisent à penser que la sensibilité S_j n'est pas significative pour des résidus non linéaires, mais que l'analyse de la sensibilité du résidu sera plus pertinente si elle suit la valeur du résidu r lui-même, ou éventuellement r_0^j si l'on s'intéresse à une panne unique sur f_j .

De plus le problème de changement local de structure d'un résidu est un fait nouveau qui mérite plus amples développements - dans la suite de cette section.

3.5.4.2 Sensibilité Structurelle

Le résidu sera structurellement sensible à f_j si le polynôme r exprimant la sensibilité est différent du polynôme nul. Cette condition s'exprime de la façon suivante, avec les notions précédentes :

$$r \neq 0 \Rightarrow \exists i \neq 0 \text{ tel que } a_i \neq 0 \quad (3-29)$$

Exemple 3-13

Soit r la forme d'évaluation polynomiale d'un résidu :

$$r = 2 \cdot u_1 \cdot f_1 + y_1^2 \cdot f_2 + f_3 \cdot f_4 + f_1^3 + (u_1 - u_2) \cdot f_5 + f_6^2$$

le résidu r est structurellement sensible à f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6 . Nous pouvons affirmer ici que le résidu r ne sera pas sensible aux autres défaillances pouvant survenir.

Cette information est immédiatement disponible en considérant l'expression de la forme d'évaluation r du résidu.

Dans le cas où le résidu r est structurellement sensible à f_j , nous allons nous intéresser aux conditions qui pourraient annuler la sensibilité.

La variété algébrique associée à un ensemble de polynômes exprime l'ensemble des valeurs des variables qui annulent cet ensemble de polynômes (cf. **Annexe 1**). Nous utiliserons donc largement cette notion dans l'étude des conditions d'annulation de la sensibilité.

3.5.4.3 Annulation de la sensibilité : cas général

La sensibilité de r à f_j s'annule lorsque les variables impliquées dans r , à savoir $\{u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e\}$, appartiennent à la variété affine $V(r)$ définie par r . Autrement dit :

$$\underline{v} \in V(r) \Leftrightarrow r(\underline{v}) = 0 \quad (3-30)$$

Cette variété est très générale et n'informe pas sur les raisons de l'annulation. $V(r)$ peut ainsi être constituée de quelques valeurs isolées qui sont autant de « points singuliers » rarement atteints.

Au contraire, elle peut être le résultat de conjonctions extérieures à f_j résultant de contraintes imposées par le système. Une étude plus détaillée doit maintenant être menée pour explorer ces différents cas.

Ces différents cas sont liés à la variété $V(a_0, \dots, a_n)$, défini par l'ensemble des coefficients polynomiaux de $f_j^{\alpha_j}$ définis en (3-26). En effet :

$$\underline{v} \in V(a_0, \dots, a_n) \Rightarrow \underline{v} \in V(r) \Rightarrow r(\underline{v}) = 0 \quad (3-31)$$

L'appartenance à $V(a_0, \dots, a_n)$ est donc une *condition suffisante* d'annulation de la sensibilité r . Celle ci peut être atteinte soit systématiquement, soit numériquement en un certain nombre de points particuliers. Cela fait l'objet des deux paragraphes suivants.

3.5.4.4 Annulation systématique de la sensibilité

Nous n'avons pas pris en compte à cette étape de notre étude le fait que les valeurs des variables d'entrées et de mesures pouvaient être elles-mêmes contraintes par des relations de redondance définies par l'idéal d'élimination I_n . I_n est, comme précédemment, l'intersection entre l'idéal généré par les polynômes décrivant le modèle et $K[u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e]$.

On a donc : $(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e) \in V(I_n)$.

La variété d'un idéal $V(I_n)$ est définie en **Annexe 1**.

Si l'on introduit les défaillances, $I_n \cdot K[f_1, \dots, f_e]$ définit l'ensemble des polynômes de $K[u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e]$ qui s'annuleront en même temps que les résidus. En effet :

$$\underline{v} \in V(I_n) \Rightarrow \forall \underline{f}, (\underline{v}, \underline{f}) \in V(I_n \cdot K[f_1, \dots, f_e]) \quad (3-32)$$

$V(I_n \cdot K[f_1, \dots, f_e])$ est l'ensemble des valeurs qui respectent les contraintes imposées par le modèle.

Si $V(I_n \cdot K[f_1, \dots, f_e]) \subset V(r)$, alors il n'existe pas de valeurs compatibles avec le modèle qui n'annule par r . La sensibilité r est donc systématiquement nulle. Autrement formulé :

$$V(I_n \cdot K[f_1, \dots, f_e]) \subset V(r) \Rightarrow r \equiv 0 \quad (3-33)$$

Remarque 1

La condition exprimée par le premier terme peut se tester en vérifiant l'appartenance des r^k à l'idéal $I_n \cdot K[f_1, \dots, f_e]$, où les r^k sont les termes d'une factorisation de r ($r = \prod_k r^k$).

$$\exists k \mid r^k \in I_n \cdot K[f_1, \dots, f_e] \Rightarrow r \equiv 0 \quad (3-34)$$

Remarque 2

Si l'un des a_i , défini dans l'expression du résidu r (3-26), appartient à $I_n \cdot K[f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_e]$, pour les mêmes raisons que précédemment, il sera systématiquement nul.

$$a_i \in I_n \cdot K[f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_e] \Rightarrow a_i \equiv 0 \quad (3-35)$$

Si le cas se produit, il est possible d'annuler le ou les termes correspondants dans r . On obtient un nouveau résidu r^* , sur lequel une nouvelle étude de sensibilité peut être reprise à l'étape de l'étude de la sensibilité structurelle (section 3.5.4.2.).

Ainsi, une *condition nécessaire* de la sensibilité de r à f_j est la sensibilité structurelle de r^* .

Exemple 3-13 (suite)

$$r = 2 \cdot u_1 \cdot f_1 + y_1^2 \cdot f_2 + f_3 \cdot f_4 + f_1^3 + (u_1 - u_2) \cdot f_5 + f_6^2$$

Si notre système est tel que les deux entrées u_1 et u_2 sont égales analytiquement, que donc $u_1 - u_2 = 0$ est une Relation de Redondance Analytique, alors le résidu r ne sera pas sensible à f_5 .

Une nouvelle étude de sensibilité pourra être menée sur le résidu :

$$r^* = 2 \cdot u_1 \cdot f_1 + y_1^2 \cdot f_2 + f_3 \cdot f_4 + f_1^3 + f_6^2$$

3.5.4.5 Annulation numérique de la sensibilité

Si tous les polynômes a_i de l'expression (3-23) sont numériquement nuls, alors la sensibilité du résidu r le sera aussi, quelle que soit la valeur de f_j :

$$(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_e) \in V(a_0, \dots, a_n) \Rightarrow r = 0 \quad (3-36)$$

L'appartenance à $V(a_0, \dots, a_n)$ ne peut être testée dans le cas général puisqu'elle fait intervenir les valeurs des défaillances qui sont inconnues.

Néanmoins, une réécriture de r permet d'envisager deux cas particuliers : le cas où la sensibilité peut être testée, et le cas des pannes uniques. On écrit :

$$\begin{aligned} r &= \sum_i c_i \cdot f_j^{\alpha_i} + \sum_k d_k \cdot \underline{f}^{\underline{\alpha}_k} \\ c_i, d_k &\in K[u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q] \\ \alpha_i &\in N, \quad \underline{\alpha}_k = (\alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{e,k}) \in N^e \\ \underline{f}^{\underline{\alpha}_k} &= f_1^{\alpha_{1,k}} \dots f_e^{\alpha_{e,k}} \end{aligned} \quad (3-37)$$

Le premier terme de la somme ne fait apparaître que la défaillance f_j . Le deuxième terme de la somme fait apparaître toutes les défaillances, y compris f_j mais f_j n'est jamais la seule variable de défaillance d'un monôme (sinon le monôme serait comptabilisé dans le premier terme de la somme).

Sensibilité testable

Si tous les d_k sont nuls, la sensibilité du résidu r (3-37) s'écrit :

$$r = \sum_i c_i \cdot f_j^{\alpha_i} \quad (3-38)$$

L'expression (3-38) s'annule si tous les c_i sont nuls :

$$(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q) \in V(c_1, \dots, c_s) \Rightarrow r = 0 \quad (3-39)$$

L'appartenance à la variété peut être testée puisqu'elle ne fait intervenir que des variables connues.

Exemple 3-14 :

Soit un résidu $r = (u_1 - u_2) \cdot f_1 + (y_1^4 - y_2) \cdot f_1^2$.

Nous sommes dans le cas où la sensibilité de r à la défaillance f_1 est testable. En effet, nous pouvons tester à chaque instant :

$$\begin{cases} \Phi_1 = u_1 - u_2 \\ \Phi_2 = y_1^4 - y_2 \end{cases}$$

Quand ces deux expressions sont nulles, nous savons qu'alors le résidu r n'est plus sensible à f_1 .

L'information obtenue signifie une modification de la signature de la défaillance f_j . Elle doit donc être prise en compte par la procédure de localisation.

Hypothèse de panne unique

L'hypothèse de panne unique implique que, lorsque f_j survient, toutes les autres défaillances sont nulles. Dans ce cas, le deuxième terme de (3-37) est toujours nul et l'on peut recommencer l'étude, comme dans le cas précédent.

L'hypothèse de panne unique est séduisante dans la mesure où elle simplifie l'étude. Cependant l'absence de défaillance ne signifie pas l'égalité absolue à zéro des f_k ($k \neq j$) ; un fonctionnement tolère des écarts par rapport au modèle ne serait-ce que pour des raisons de robustesse.

L'annulation de la sensibilité sous cette hypothèse doit donc être prise avec beaucoup de précautions.

Exemple 3-15 :

Soit un résidu $r = (u_1 - u_2) \cdot f_1 + (y_1^4 - y_2) \cdot f_1^2 \cdot f_2$.

Si l'on se place dans l'hypothèse d'une panne unique, la sensibilité de r à la défaillance f_1 devient :

$$\Gamma = (u_1 - u_2) \cdot f_1$$

Sur quoi l'on pourrait conclure que le résidu est sensible à la défaillance f_1 sous l'hypothèse que $\Phi = u_1 - u_2 \neq 0$.

Néanmoins si l'on conjugue les deux faits suivants : f_2 proche de zéro, mais non nul absolument, et $(y_1^4 - y_2)$ très grand, cela n'est plus vrai.

3.5.4.6 Notion de sensibilité inconditionnelle

Sensibilité inconditionnelle

Nous introduisons ici la notion de *sensibilité inconditionnelle*. La sensibilité sera dite inconditionnelle si, quelles que soient les valeurs $\{u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e\}$, elle ne s'annule jamais pour $f_j \neq 0$.

La sensibilité sera inconditionnelle dans deux cas bien identifiés :

- Cas a : r est un monôme dans lequel a_i ne peut s'annuler. Cela inclut le cas linéaire où a_i est une constante.
- Cas b : Les a_i sont des constantes et le polynôme r en f_j n'a pas de solutions dans K .

Sensibilité faiblement conditionnelle

La sensibilité sera dite *faiblement conditionnelle* si les conditions pour lesquelles elle s'annule ne peuvent dépendre des valeurs des variables autres que la défaillance considérée.

Une condition pour que la sensibilité soit faiblement conditionnelle est que tous les polynômes a_i de l'expression (3-23) ne peuvent s'annuler en même temps.

$$V(a_0, \dots, a_n) = \{ \} \Leftrightarrow r \text{ est faiblement conditionnelle} \quad (3-40)$$

Pour que $V(a_0, \dots, a_n) = \{ \}$, il suffit qu'il existe un ensemble de polynômes de $\{a_0, \dots, a_n\}$, que nous noterons $\{c_0, \dots, c_s\}$ tels que $V(c_0, \dots, c_s) = \{ \}$.

On peut distinguer plusieurs cas :

– Cas a : un ou plusieurs polynômes qui ne peuvent s'annuler sur le corps K .

Cas a-1 : $a_i = cste$, un polynôme constant ne peut s'annuler.

Cas a-2 : $V(a_i) = \{ \}$, un polynôme qui n'a aucune solution dans le corps K considéré. *Exemple* : $(x^2 + 1)$ dans \mathbb{R} .

– Cas b : plusieurs polynômes incompatibles, $V(c_0, \dots, c_p) = \{ \}$.

$$\text{Exemple : } \begin{cases} y + x - 3 = 0 \\ y + x + 4 = 0 \end{cases}$$

3.5.4.7 Relation entre les différentes conditions

L'insensibilité inconditionnelle est un cas particulier de la sensibilité faiblement conditionnelle.

Les conditions d'annulation systématique sont à tester préalablement aux autres études car elles modifient la structure de fait du résidu. Par contre elles ne modifient pas les conditions de sensibilité faiblement conditionnelle. Ces deux conditions peuvent donc être traitées dans un ordre quelconque.

On peut construire l'arbre d'analyse suivant (Figure 3-7) :

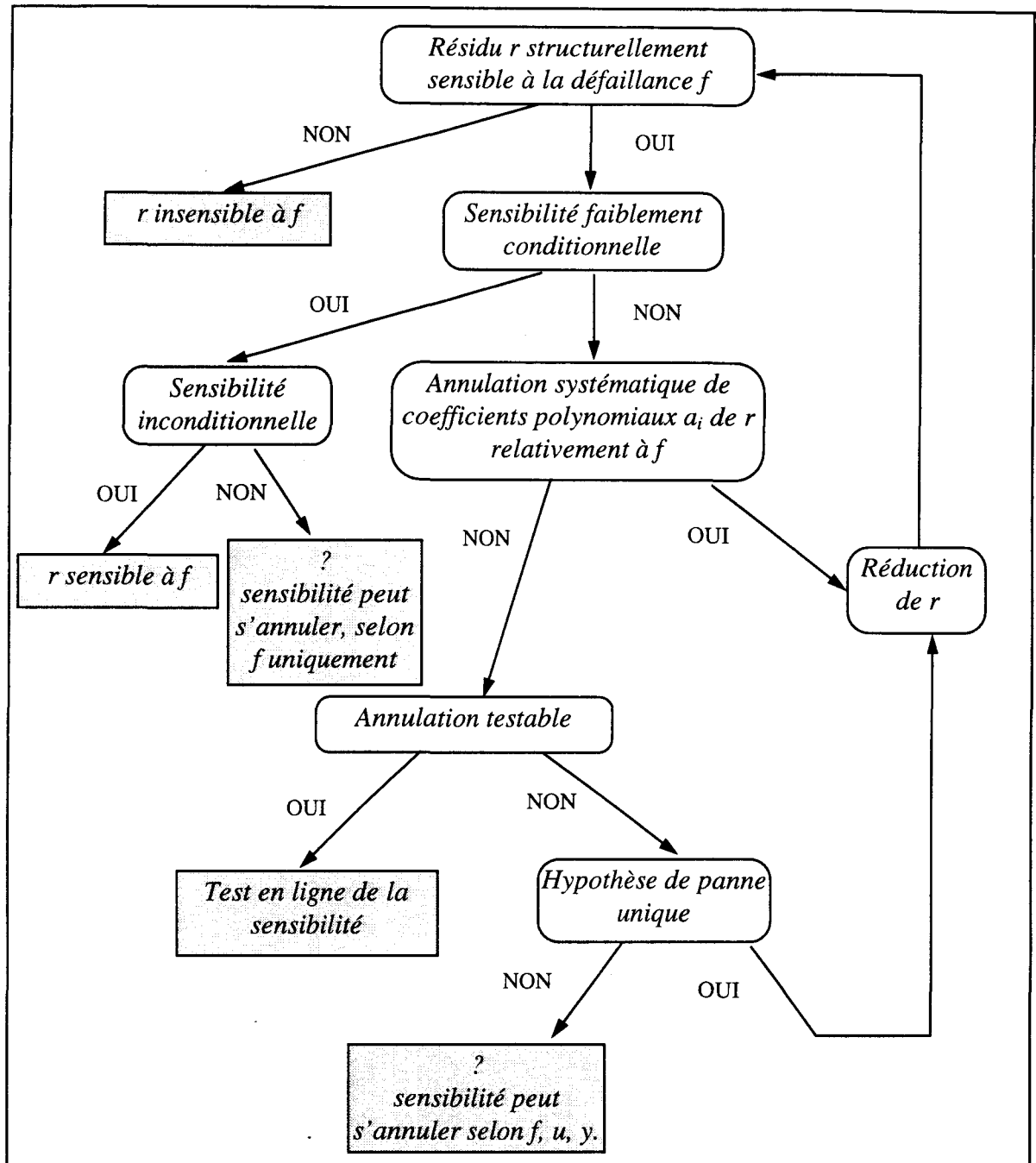


Figure 3-7 : arbre d'analyse de la sensibilité

3.5.4.8 Etude sur un domaine réduit

Les conditions d'annulation de la sensibilité ont été posées d'un point de vue purement mathématique. Dans le cas d'un système physique, les valeurs des variables sont soumises à des contraintes soit physiques, soit technologiques, qui limitent leur étendue d'évolution.

Il est donc conceptuellement possible de définir un domaine d'évolution D des variables connues et des défaillances. L'étude de la sensibilité n'a d'intérêt que sur ce domaine.

3.6 STRUCTURATION DES RESIDUS

Nous allons faire ici référence à des notions que nous avons introduites au chapitre 1 section 1.3.4 et 1.3.5 et qui sont largement traitées dans [Staroswiecki 96].

3.6.1 Notion de signature de panne théorique et réelle

Un résidu peut être sensible ou non à une défaillance donnée, cette information *binaires* étant issue de la *forme d'évaluation* du résidu qui contient ou non la variable défaillance. Cette information relative aux différentes défaillances possibles et aux différents résidus existants peut être regroupée dans un tableau binaire comme suit.

Exemple 3-16 : tableau de signatures de pannes

	f_1	f_2	f_3	f_4
r_1	1	1	0	0
r_2	0	1	1	1
r_3	1	0	1	1

Ce qui se lit horizontalement : le résidu r_1 est structurellement sensible aux défaillances f_1 et f_2 et insensible aux défaillances f_3 et f_4 , etc... Ces mots binaires sont appelés *signatures théoriques des résidus ou structures théoriques des résidus*.

Verticalement, on peut lire que la défaillance f_1 influence structurellement les résidus r_1 et r_3 mais n'influence pas le résidu r_2 , etc... Ces mots binaires sont appelés *signatures théoriques de pannes*.

La notion de *signatures réelles* vient des études de sensibilité effective réalisées lors de simulations du processus réel, et peuvent s'écrire dans le même type de tableau binaire.

3.6.2 Localisation des défaillances

Lors du fonctionnement du processus à surveiller, les données disponibles sont recueillies et injectées dans la forme d'évaluation des résidus. Ainsi une valeur de chacun des résidus est-elle accessible à chaque instant t . Les procédures de prise de décision - chapitre 1 section 1.3.3, déterminent alors pour chaque résidu s'il est représentatif d'une défaillance ou non. Cette information binaire est consignée dans un mot binaire appelé *vecteur de cohérence*.

Exemple 3-17 : vecteur de cohérence

$$vc(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A l'instant t , les procédures de prise de décision ont décidé que les résidus r_1 et r_2 indiquent la présence d'un défaut, alors que le résidu r_3 non.

Ce vecteur de cohérence est alors comparé aux *signatures réelles de pannes* - considérons comme telles celles de l'exemple (3-16). La signature de panne qui est la plus proche du vecteur de cohérence nous indique la défaillance incriminée. (La distance de Hamming est couramment utilisée pour ce faire, voir [Staroswiecki 96]). En l'occurrence le vecteur cohérence de l'exemple (3-17), permet d'identifier la défaillance f_2 de l'exemple (3-16).

Ceci est la base des procédures de *localisation* basées sur les *signatures binaires* des défaillances. Néanmoins, nous constatons que les signatures de pannes peuvent ne pas permettre la localisation d'une panne, comme c'est le cas dans l'exemple (3-16) où f_3 et f_4 ont la même signature et ne peuvent donc être différenciées. Ce qui conduit à la notion de *résidus structurés* - chapitre 1 section 1.3.4 et 1.3.5.

3.6.3 Intérêt de la structuration des résidus

Le principe des *résidus structurés* est de *générer* des résidus pour respecter un cahier des charges en terme de capacité de *localisation des pannes*. Reprenons l'exemple (3-16).

Exemple 3-18

Les signatures de pannes de l'exemple (3-16) ne permettaient pas de différencier les défaillances f_3 et f_4 , l'idée des *résidus structurés* est de générer un nouveau résidu r_4 dont la signature permette cette différenciation : en l'occurrence, dans notre cas, il faut un résidu r_4 sensible à la défaillance f_3 et insensible à la défaillance f_4 , ou inversement.

	f_1	f_2	f_3	f_4
r_1	1	1	0	0
r_2	0	1	1	1
r_3	1	0	1	1
r_4	1	1	1	0

Nous ne nous intéresserons pas dans ce mémoire à la question de savoir quelles signatures de pannes il serait le mieux de générer à des fins de localisation. Ce sujet est abordé dans [Staroswiecki 96].

Nous allons nous intéresser à la question suivante : comment générer un résidu de structure donnée ? Cette procédure s'appelle *structuration des résidus*.

3.6.4 Structuration des résidus polynomiaux

3.6.4.1 Choix d'une structure cible

La première chose à faire est de nous établir un objectif, ici en l'occurrence une *structure cible de résidu* que l'on doit générer. D'une façon classique, on définit cette signature cible par deux ensembles V^+ et V^- . V^+ est l'ensemble des défaillances auxquelles le résidu doit être sensible, et V^- l'ensemble des défaillances auxquelles le résidu doit être insensible. A ce niveau nous parlons de *sensibilité structurelle*.

Exemple 3-19

r_4	1	1	1	0
-------	-----	-----	-----	-----

$$V^+ = \{f_1, f_2, f_3\} \text{ et } V^- = \{f_4\}$$

3.6.4.2 Méthode de structuration

Nous partons des Relations de Redondance Analytique Polynomiales (3-18) issues du modèle d'influence des relations :

$$\begin{cases} \Phi_1(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e) = 0 \\ \vdots \\ \Phi_t(u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, f_1, \dots, f_e) = 0 \end{cases}$$

Rappelons que ces polynômes constituent une base de Groëbner génératrice des Relations de Redondance Analytique Polynomiales du système et qu'ils vont constituer les formes de calcul et d'évaluation des résidus - *formes d'évaluation* dont nous voulons maîtriser la structure.

Nous allons, pour générer un résidu possédant la structure cible, éliminer des équations (3-18) les variables de V^- et conserver les variables de V^+ ainsi que les \underline{U} et \underline{Y} . Pour cela, comme pour la méthode d'Espace de Parité, nous posons l'ordre monomial suivant sur les variables :

$$\{V^-, u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q\} > V^+ \quad (3-41)$$

Par la méthode d'Espace de Parité Polynomiale, décrite Figure 3-4, nous pouvons obtenir, quand cela est possible, une base génératrice des polynômes ne faisant plus intervenir les variables de V^- dans leur structure. L'ensemble des polynômes ne contenant plus les variables de V^- est le suivant :

$$I_n^- = I_n \cap K[u_1, \dots, u_m, y_1, \dots, y_q, V^+] \quad (3-42)$$

Chacun des polynômes de l'ensemble (3-42) pourra être candidat en tant que résidu insensible aux défaillances de V^- .

Remarque 1 : Les polynômes de (3-42) sont des polynômes contenant des variables de l'ensemble V^+ mais *rien* ne peut garantir que parmi ceux-ci un polynôme contient *toutes* les variables de V^+ , garantissant ainsi l'obtention de la structure cible. Nous allons voir ci-dessus comment nous pouvons essayer de contourner cette difficulté.

Remarque 2 : Certaines variables s'éliminent « en bloc ». Ainsi lors de l'élimination d'une de ces variables, les autres s'éliminent également. Cela est dû à l'existence d'un lien entre ces variables, lien qui peut être visible - dans le cas où un changement de variables transformant ces variables en une variable unique fait disparaître les occurrences des variables initiales, ou indiscernable - le lien existant est plus complexe. Dans ce deuxième cas, il ne nous reste qu'à constater le phénomène.

3.6.4.3 Résultats de la méthode de structuration

Zéros de la structure cible

Si l'ensemble (3-42) ne se réduit pas au polynôme nul - sa Base de Groëbner contient un ou plusieurs polynômes non nuls, alors la première partie du travail est faite. Nous avons des résidus de structure possédant les mêmes zéros que la structure cible.

Si l'ensemble (3-42) se réduit au polynôme nul - sa Base de Groebner ne contient alors que le polynôme nul, alors nous pouvons conclure qu'il n'existe pas de résidus qui soient insensibles à toutes les variables de V^- . La structure cible ne peut donc être atteinte, il faut trouver d'autres signatures cibles permettant d'atteindre les objectifs de localisation - quand cela est possible. Quand cela n'est pas possible, les défaillances sont structurellement indiscernables et cette information fait partie des résultats de la phase de conception du système de surveillance.

Uns de la structure cible

Comme nous l'avons évoqué à la fin du 3.6.4.2, ce point est plus sensible que le précédent. Posons bien le problème : nous voulons atteindre notre structure cible et donc obtenir un (ou plusieurs) polynômes contenant *exactement* toutes les variables de V^+ . (Le cas des variables de V^- étant réglés au paragraphe précédent)

Nous travaillons avec I_n^- par l'intermédiaire de sa Base de Groebner notée G_n^- :

$$G_n^- = \{g_1^-, \dots, g_s^-\} \quad (3-43)$$

Plusieurs cas peuvent se poser que nous allons regrouper dans l'organigramme de la Figure 3-8.

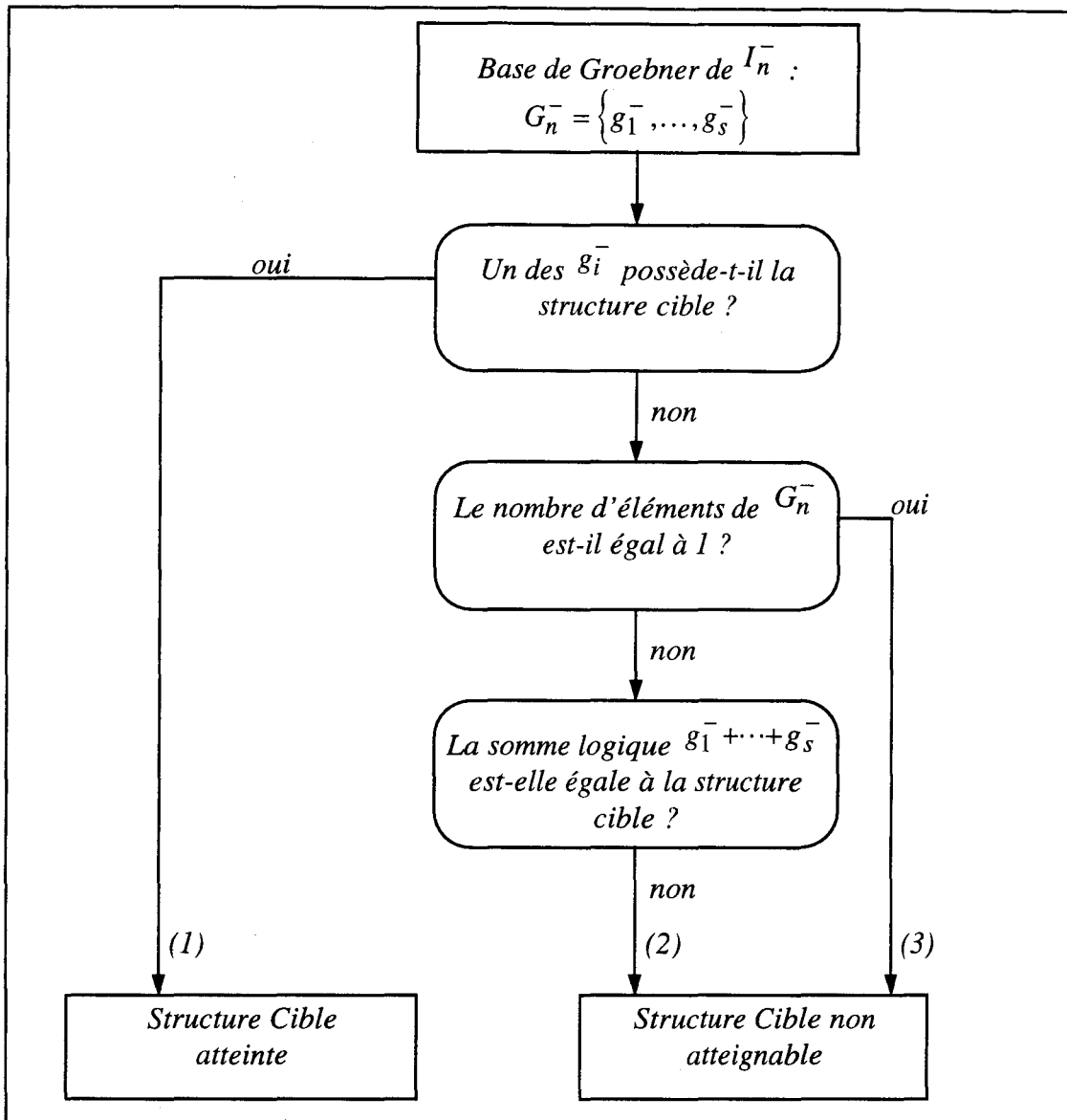


Figure 3-8 : Comment générer les « 1 » de la structure cible.

L'explication des branches (2) et (3) de la Figure 3-8 vient de résultats préliminaires sur la combinaison des résidus, que nous présentons et démontrons en **Annexe 2**. Nous rappelons ici les propriétés essentielles explicitant l'organigramme de la Figure 3-8.

L'explication de la branche (3) vient de la propriété suivante (propriété A2-3, Annexe 2) :

Propriété (A2-3) :

Soit un idéal $I = \langle g_1 \rangle \subset K[\underline{U}, \underline{Y}, \underline{F}]$ généré par un seul polynôme g_1 . Si ce polynôme générateur g_1 est structurellement sensible aux défaillances \underline{F}^* - où \underline{F}^* est un ensemble de défaillances inclus strictement dans \underline{F} , alors aucun résidu issu du système ne sera sensible aux défaillances contenues dans $\underline{F} - \underline{F}^*$.

L'explication de la branche (2) vient de la propriété suivante (propriété A2-5, Annexe 2) :

Propriété (A2-5) :

Soit un idéal $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle \subset K[\underline{U}, \underline{Y}, \underline{F}]$ généré par un ensemble de polynômes g_1, \dots, g_s . Si ces polynômes générateurs g_i sont structurellement sensibles respectivement aux ensembles de défaillances D_i - où D_i est un ensemble de défaillances inclus strictement dans \underline{E} , alors aucun résidu issu du système ne sera sensible aux défaillances contenues dans $\underline{F} - \bigcup_{i=1}^s D_i$, insensibilité structurelle

Cela signifie que l'on ne pourra atteindre exactement la structure cible désirée. Nous pouvons voir quelles sont les défaillances incriminées dans cette déviation de l'objectif en considérant la somme logique $g_1^- + \dots + g_s^-$: là où la signature cible exigeait un « un » la somme logique contient un « zéro ».

3.6.4.4 Exemple de structuration de résidus

Modélisation polynomiale

Soit un système de deux échangeurs thermiques modélisés de la façon suivante, où f_i indique un flux, t_i une température et t_{im} une mesure. [Guernez 96b]

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 - f_5 - f_6 = 0 \\ f_2 - f_3 - f_4 = 0 \\ f_1 \cdot t_8 - f_6 \cdot t_6 - f_5 \cdot t_5 = 0 \\ f_2 \cdot t_7 - f_4 \cdot t_4 - f_3 \cdot t_3 = 0 \\ f_6 \cdot (t_1 - t_6) - f_4 \cdot (t_2 - t_4) = 0 \\ f_5 \cdot (t_1 - t_5) - f_3 \cdot (t_2 - t_3) = 0 \\ f_1 = f_{1m} \quad t_5 = t_{5m} \\ f_2 = f_{2m} \quad t_7 = t_{7m} \\ t_1 = t_{1m} \quad t_8 = t_{8m} \\ t_2 = t_{2m} \quad t_3 = t_{3m} \\ f_4 = f_{4m} \quad f_6 = f_{6m} \end{array} \right. \quad (3-44)$$

Espace de Parité Polynomial

Les résidus obtenus pour ce système par la méthode d'espace de parité polynomiale précédemment décrite sont les suivantes, pour un ordre lexicographique :

$$f_1 > f_2 > t_1 > t_2 > t_7 > t_8 > f_3 > t_3 > f_4 > t_4 > f_5 > t_5 > f_6 > t_6 > f_{1m} > f_{2m} > f_{4m} > f_{6m} > t_{1m} > t_{2m} > t_{3m} > t_{5m} > t_{7m} > t_{8m}$$

$$r_1 = f_{1m} \cdot (t_{1m} - t_{8m}) + f_{2m} \cdot (t_{2m} - t_{7m})$$

$$r_2 = f_{4m} \cdot (t_{3m} - t_{2m}) + f_{1m} \cdot (t_{8m} - t_{5m}) + f_{6m} \cdot (t_{5m} - t_{1m}) + f_{2m} \cdot (t_{7m} - t_{3m})$$

Nous considérons dans cet exemple des pannes additives sur les capteurs. La forme d'évaluation d'un résidu est donc semblable à sa forme de calcul, toujours sous l'hypothèse d'une panne unique.

Le tableau des signatures de pannes théoriques pour ces deux résidus est le suivant :

	f_{1m}	f_{2m}	f_{4m}	f_{6m}	t_{1m}	t_{2m}	t_{3m}	t_{5m}	t_{7m}	t_{8m}
$r1$	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$r2$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Notons que les variables $f_{4m}, f_{6m}, t_{3m}, t_{5m}$ s'éliminent en blocs.

Structuration des résidus

Choisissons une signature cible où $V^- = \{t_{7m}, t_{8m}\}$:

	f_{1m}	f_{2m}	f_{4m}	f_{6m}	t_{1m}	t_{2m}	t_{3m}	t_{5m}	t_{7m}	t_{8m}
$r3$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0

Le nouveau résidu généré sera insensible à une panne sur t_{7m}, t_{8m} . L'intérêt en terme de surveillance est que l'ajout de ce résidu au tableau des signatures de pannes théoriques va permettre de différencier une panne sur les capteurs mesurant t_{7m}, t_{8m} des autres pannes ayant la même signature relativement à $r1, r2$.

Pour trouver un résidu $r3$ possédant la signature théorique cible, nous allons chercher dans l'idéal d'élimination :

$$I \cap K[f_{1m}, f_{2m}, f_{4m}, f_{6m}, t_{1m}, t_{2m}, t_{3m}, t_{5m}]$$

où I est l'idéal généré à partir des relations de redondance initiales.

Pour décrire cet ensemble, cherchons en une base de Groëbner, avec un ordre adéquat sur les variables :

$$t_{7m} > t_{8m} > f_{1m} > f_{2m} > f_{4m} > f_{6m} > t_{1m} > t_{2m} > t_{3m} > t_{5m}$$

Et prélevons de cette base les polynômes constituant la base de Groëbner de l'idéal d'élimination. Nous obtenons un seul résidu :

$$r_3 = (f_{4m} - f_{2m}) \cdot (t_{3m} - t_{2m}) + (f_{6m} - f_{1m}) \cdot (t_{5m} - t_{1m})$$

Nous obtenons ici directement la signature cible. Y compris V^+ .

Choisissons une nouvelle signature cible où $V^- = \{t_{7m}\}$:

	f_{1m}	f_{2m}	f_{4m}	f_{6m}	t_{1m}	t_{2m}	t_{3m}	t_{5m}	t_{7m}	t_{8m}
r_3	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1

Le nouveau résidu généré sera insensible à une panne sur t_{7m} . L'intérêt est de pouvoir isoler une panne sur t_{7m} d'une panne sur un des autres capteurs.

Nous recommençons la procédure précédente avec cette fois :

$$I \cap K[f_{1m}, f_{2m}, f_{4m}, f_{6m}, t_{1m}, t_{2m}, t_{3m}, t_{5m}, t_{8m}]$$

Mais cette fois la base de Groëbner de l'idéal d'élimination est $\{0\}$. Aucun polynôme possédant cette signature ne peut être trouvé.

3.7 CONCLUSION

Ce chapitre 3 constitue la première partie de notre apport à la surveillance des systèmes polynomiaux.

Nous y avons présenté :

- les différents modèles que nous allions pouvoir traiter par cette méthode : modèle polynomial statique, dynamique, à temps discret, à temps continu, modèle en fonctionnement normal, modèle d'incertitudes et d'influence des défaillances...
- la méthode d'Espace de Parité Polynomiale telle que nous l'avons développée et comprenant la recherche des Relations de Redondance Polynomiales du système de façon exhaustive, la recherche des formes de calcul et d'évaluation des résidus polynomiaux.
- une étude de la sensibilité et de la robustesse de ces résidus. Nous avons montré comment cette méthode permettait d'obtenir des résidus robustes à des entrées inconnues, et l'avantage qu'elle présentait face aux méthodes linéaires classiques pour trouver des résidus non linéaires polynomiaux. Nous avons développé la notion de sensibilité de résidus polynomiaux, qui a la particularité d'être fonction des entrées/sorties du système.
- la notion de résidus structurés. En effet, les Bases de Groebner sont un outil particulièrement intéressant dans la recherche de structuration d'un ensemble de résidus polynomiaux. Nous pouvons ainsi, considérant une structure cible donnée, déterminer s'il existe ou non des résidus possédant cette structure qui soient issus du système initialement considéré. De plus, nous pouvons trouver ces résidus, quand ils existent, par le jeu des différents ordres monomiaux sur les variables qui les composent.

Nous allons dans le chapitre 4 suivant présenter notre deuxième apport à la surveillance de systèmes polynomiaux, qui concerne l'application de la méthode d'Espace de Parité Polynomial à de grands systèmes d'équations. Une illustration des propos tenus dans ce chapitre et dans le chapitre 4, se trouve au chapitre 5.

4. BASES DE GROEBNER DE GRANDS SYSTEMES D'EQUATIONS POLYNOMIALES

4.1 INTRODUCTION

Nous avons présenté au chapitre 3 une méthode de génération de résidus qui se fonde sur l'utilisation des Bases de Groëbner. Cette méthode a été explicitée et illustrée sur des exemples simples. A priori cette méthode s'applique également sur des systèmes polynomiaux de taille plus importante. Cependant il existe des limitations dues au calcul même des Bases de Groëbner.

En effet, le calcul d'une Base de Groëbner d'un système peut nécessiter beaucoup de temps et de place mémoire. A titre d'exemple, le système de 34 équations / 54 variables, présenté en application au chapitre 5, a nécessité 44 heures de calcul pour aboutir à un résultat dépassant les capacités de la machine et qui n'a donc pu être exploité. Le logiciel utilisé pour ce faire était MAPLE V, sur une station SUN.

Ce phénomène nous a encouragé à rechercher un prétraitement des systèmes polynomiaux, préalable à leur soumission au logiciel de calcul formel. Deux types de travaux nous ont inspirés : les travaux de décomposition de grands systèmes d'équations linéaires de [Thuair 76], et les travaux sur les modèles structurels de [Declerck 91]. Dans les deux cas, il s'agit d'étudier la structure des équations du modèle initial, c'est à dire les liens qui existent entre les variables et les équations, ou les variables entre elles, indépendamment de toute valeur numérique.

Dans un premier temps, nous nous sommes demandés s'il existait un *ordonnancement privilégié* des variables à éliminer pour procéder à leur élimination. Autrement dit, par quelle variable à éliminer faut-il commencer ? Cela fait l'objet de la section 4.2.

Puis nous nous sommes intéressés aux *conditions structurelles nécessaires d'existence* de relations de redondance analytique polynomiale d'un système. Autrement dit, dans quel cas pouvons nous dire qu'il n'existe pas de relation de redondance analytique, et nous dispenser alors d'un calcul inutile. Cela fait l'objet de la section 4.3.

Enfin nous avons cherché à *décomposer le problème* de la recherche des relations de redondance analytique polynomiale. Ainsi, au lieu de calculer directement la Base de Groëbner du système initial, nous faisons des calculs intermédiaires (de Base de Groëbner) sur des sous-systèmes du système initial. Les résultats obtenus ont été appliqués avec succès à l'application du chapitre 5 précédemment citée. Cela fait l'objet de la section 4.3.

4.2 CHOIX DE L'ORDRE D'ELIMINATION DES VARIABLES INCONNUES

Dans les sections qui ont précédées celle-ci, nous avons procédé à l'élimination des variables inconnues de systèmes d'équations polynomiales, afin d'en extraire un système d'équations entrées/sorties ne comportant que des variables connues.

Pour ce faire, et quel que soit l'ordre d'élimination choisi, une constante revient, à savoir que les variables inconnues X sont supérieures aux variables connues Y .

$$\{x_1, \dots, x_n\} > \{y_1, \dots, y_q\} \quad (4-1)$$

Dans cette section, nous allons traiter la question suivante : Y a-t-il un ordre privilégié sur les variables X pour faciliter leur élimination ? Il ne s'agit pas de choisir un ordre monomial particulier (lexicographique, de degré total, ...) mais de privilégier un certain *ordonnement naturel* des variables - ordonnancement dans lequel elles seront successivement éliminées.

Nous allons voir que cet ordonnancement naturel peut nous être suggéré par l'*analyse structurelle* des équations initiales décrivant le système.

4.2.1 Analyse structurelle des systèmes d'équations

L'Analyse Structurelle [Staroswiecki 96] est l'analyse des propriétés structurelles du système, c'est à dire des propriétés qui sont indépendantes des valeurs réelles des paramètres (plus exactement, des propriétés qui sont vraies presque partout dans l'espace des paramètres). On n'y représente que les liens entre les variables et les paramètres du modèle, indépendamment de la forme sous laquelle ces liens sont exprimés (valeurs numériques ou symboliques, relations analytiques ou non). Les liens sont représentés par un graphe, et c'est la structure de ce graphe qui est analysée. Le domaine mis en jeu est la *Théorie des Graphes* [Dulmage 58], [Richetin 75], [Bergé 73]. L'Analyse structurelle ne traite que des données binaires et se prête bien, pour cette raison, à l'analyse de grands systèmes - en utilisant les résultats sur les systèmes creux.

L'Analyse structurelle fournit des outils intéressants pour de nombreuses étapes du processus de conception du système de surveillance [Staroswiecki 96]. Celui qui nous intéresse ici est la détermination des *séquences de calcul* permettant d'aboutir à un résidu. Ces séquences de calculs sont obtenues par une *mise sous forme canonique* de la matrice d'incidence binaire associée au graphe du système. Cette mise sous forme canonique est issue de procédures de *triangularisation* de la matrice d'incidence [Murota 87][Declerck 91], Cf. Annexe 3.

Exemple 4-1 :

Soit le système suivant décrit par un ensemble d'équations polynomiales - linéaires, à coefficients rationnels. Les variables inconnues sont $\{x, y, z\}$ et les variables connues $\{c_1, c_2, c_3\}$.

$$\begin{cases} x + y + z - c_1 = 0 \\ 2 \cdot x - z - c_2 = 0 \\ 3 \cdot z - c_3 = 0 \end{cases} \quad (4-2)$$

La matrice d'incidence sur les variables inconnues au sens de l'analyse structurelle - cf. Annexe 3, est la suivante :

	x	y	z
eq_1	1	1	1
eq_2	1	0	1
eq_3	0	0	1

Les algorithmes de triangularisation qui permutent les lignes et les colonnes de la matrice d'incidence, donnent la matrice triangularisée suivante :

	y	x	z
eq_1	1	1	1
eq_2	0	1	1
eq_3	0	0	1

Le nouvel ordonnancement des variables, suite à cette procédure de triangularisation, est (y, x, z) et non plus (x, y, z) .

Nous allons voir maintenant comment utiliser cette remarque dans la génération des Bases de Groëbner.

4.2.2 Génération des Bases de Groëbner

Nous postulons ici que l'ordre naturel issu de la triangularisation structurelle précédente est un ordre privilégié d'élimination sur les variables inconnues. Ce postulat vient du fait que les algorithmes d'élimination cherchent à éliminer successivement les variables dans l'ordre décroissant donné, or nous proposons à ces algorithmes un ordre pour lequel l'élimination est déjà faite, il semble naturel de penser alors que le travail des algorithmes se trouvera facilité.

Exemple 4-1 (suite) :

Nous allons poursuivre l'exemple 4-1 que nous avons choisi linéaire pour mieux illustrer les mécanismes d'élimination. En effet, l'algorithme du pivot de Gauss est un cas particulier de l'algorithme de Buchberger, [Cox 92].

(y, x, z) donnera $y > x > z$ comme ordre d'élimination privilégié. Nous réécrivons alors le système d'équations (4-2) sous la forme :

$$\begin{cases} y + x + z - c_1 = 0 \\ 2.x - z - c_2 = 0 \\ 3.z - c_3 = 0 \end{cases}$$

qui peut être mis sous forme échelon de façon quasi immédiate par multiplication des 2^{ème} et 3^{ème} relations par les coefficients 1/2 et 1/3 respectivement :

$$\begin{cases} y + x + z - c_1 = 0 \\ x - z/2 - c_2/2 = 0 \\ z - c_3/3 = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi directement une Base minimale de Groëbner, le travail de l'algorithme est facilité par le choix de cet ordre naturel d'élimination. Nous allons maintenant essayer un ordre qui n'est pas « naturel ».

Soit l'ordre suivant sur les variables : $x > y > z$. Appliquons le pivot de Gauss sur le système (4-2) jusqu'à obtenir une forme échelon.

$$\begin{cases} x + y + z - c_1 = 0 \\ 2.x - z - c_2 = 0 \\ 3.z - c_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z - c_1 = 0 \\ -2.y - 3.z - c_2 + 2.c_1 = 0 \\ 3.z - c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z - c_1 = 0 \\ y - 3/2.z - c_2/2 + c_1 = 0 \\ z - c_3/3 = 0 \end{cases}$$

Nous constatons bien ici que l'obtention de la forme échelon est moins directe que précédemment.

Cet exemple est linéaire mais illustre bien les mécanismes qui entrent en jeu lors du déroulement de l'algorithme de Buchberger sur les systèmes d'équations polynomiales. Il illustre la notion d'*ordre naturel* d'élimination sur les variables d'un système.

4.2.3 Remarque sur les systèmes blocs triangulaires

Notons que le résultat de la triangularisation structurelle peut être une matrice d'incidence, non pas parfaitement triangulaire, mais *bloc-triangulaire* (cf. **Annexe 3**). La notion d'ordre naturel sur les variables est la même que précédemment, cependant nous ne pouvons conclure quant à l'ordre relatif des variables intervenant dans ces blocs.

Exemple 4-2 :

Soit la matrice d'incidence triangularisée suivante :

	x	y	z	t
eq_1	1	1	1	1
eq_2	1	1	1	
eq_3			1	1
eq_4				1

L'ordre naturel d'élimination sur les variables est le suivant : $\{x, y\} > z > t$, nous ne pouvons conclure quant à l'ordre relatif de x et y .

Nous allons exploiter cette information de bloc-triangularité en section 4.3, pour introduire une condition nécessaire d'existence de Relations de Redondance Analytique d'un système.

4.2.4 Conclusion

La notion d'ordre naturel d'élimination est un concept issu de notre culture en Analyse Structurale, que nous ne pouvons pas ignorer étant donné la similitude des raisonnements.

Il faut bien noter que ce concept est intrinsèquement lié aux équations initiales décrivant le système et qu'il ne s'agit pas d'un invariant de l'idéal généré par ces équations. Autrement dit, si le système initial n'est pas présenté sous une forme qui se triangularise structurellement alors nous ne pouvons tirer aucune conclusion quant à un ordre naturel sur les variables.

Notons également que, dans le domaine particulier du calcul formel, la notion de systèmes triangulaires existe et désigne un concept assez proche du nôtre, qui n'a pas été développé dans cette thèse car il nécessite un prérequis important et ne présente pas d'intérêt pour nos propos. Des références sur le sujet peuvent être trouvées dans [Lazard 91, 92], [Gräbe 95].

4.3 CONDITIONS NECESSAIRES D'EXISTENCE DE RELATIONS DE REDONDANCE ANALYTIQUE

Nous cherchons ici à établir des *conditions nécessaires structurelles* d'existence de RRA dans un système polynomial donné. Travaillant sur une matrice d'incidence structurelle binaire, il ne peut être question de chercher des conditions suffisantes d'existence de RRA. Notons également, comme cela a été fait dans la conclusion du 4.2, que ce qui suit est intrinsèquement lié aux équations initiales du modèle et pas à l'idéal associé.

4.3.1 Sous systèmes surdéterminés

La notion de sous systèmes sur déterminés est définie en **Annexe 3**. Un des résultats établi de l'Analyse Structurelle est le suivant :

Proposition 1 : Sous l'hypothèse de *calculabilité* des variables inconnues intervenant dans le sous système surdéterminé, l'existence d'un sous système surdéterminé est une condition nécessaire et suffisante d'existence de RRA pour un système donné.

Exemple 4-3 :

Soit la matrice d'incidence d'un système surdéterminé :

	x	y	z
eq_1	1		
eq_2	1	1	
eq_3	0	1	1
eq_4	1	1	1

Sous l'hypothèse que les variables inconnues x , y et z peuvent être déduites à partir des relations eq_1 , eq_2 et eq_3 , la relation $eq_4 = 0$ est une RRA.

Cependant cette hypothèse de calculabilité purement analytique est contraignante et peut être difficile à vérifier. Nous allons donc, pour ce qui suit, nous en dispenser et établir des conditions nécessaires, certes non suffisantes, d'existence de RRA pour des systèmes polynomiaux donnés.

4.3.2 Sous systèmes juste déterminés

Proposition

La notion de sous systèmes juste déterminés est définie en **Annexe 3**. Un premier résultat issu de nos considérations sur l'élimination de variables d'un système polynomial et indépendant de la notion de calculabilité peut être formulé de la façon suivante :

Proposition 2 : Si la matrice d'incidence structurelle sur les variables inconnues d'un sous système juste déterminé est parfaitement triangulaire, alors aucune Relation de Redondance Analytique ne pourra être issue de ce sous système.

Autrement dit,

Si la bloc triangularisation du système, décrit par l'idéal I sur $K[X, C]$, relativement aux inconnues X , conduit à une partition des relations $P = \{P_1, \dots, P_s\}$ telle que

$$\forall j, \text{Card}(P_j) = 1 \text{ alors } I \cap K[C] = 0.$$

Cette proposition suppose que le modèle initial ne trouve pas dans un cas très particulier décrit dans le théorème intermédiaire qui suit.

Démonstration

Soit un système modélisé par un modèle polynomial décrit par les polynômes $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$, et faisant intervenir des variables inconnues X et des variables connues C .

Les polynômes de P sont tels que $\begin{cases} p_0 \in K[X \cup C] \\ p_1, \dots, p_n \in K[(X / X_0) \cup C] \end{cases}$, où X_0 est un sous ensemble de X , tels que seul le polynôme p_0 contient les variables de X_0 .

Théorème intermédiaire

Si p_0 ne peut pas s'écrire :

$$p_0 = k + r_0 \text{ avec } k \in \langle P \rangle \cdot K[X \cup C] \text{ et } r_0 \in K[(X / X_0) \cup C]$$

$$\text{alors } \langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle \cap K[(X / X_0) \cup C] = \langle p_1, \dots, p_n \rangle \cap K[(X / X_0) \cup C]$$

Démonstration intermédiaire

1) première implication.

Cette première implication est triviale.

$$\begin{aligned}
f &\in \langle p_1, \dots, p_n \rangle \cap K[(X / X_0) \cup C] \\
\Rightarrow f &= \sum_{i=1, n} h_i \cdot p_i \text{ où } h_i \in K[X \cup C] \text{ et } f \in K[(X / X_0) \cup C] \\
\Rightarrow f &= 0 \cdot p_0 + \sum_{i=1, n} h_i \cdot p_i \text{ où } h_i \in K[X \cup C] \text{ et } f \in K[(X / X_0) \cup C] \\
\Rightarrow f &\in \langle P \rangle \cap K[(X / X_0) \cup C]
\end{aligned}$$

2) deuxième implication

$$\text{Soit } f \in \langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle \cap K[(X / X_0) \cup C]$$

On peut écrire f sous la forme

$$\begin{aligned}
f &= h \cdot p_0 + f_1 \text{ avec } f_1 \in \langle p_1, \dots, p_n \rangle \cdot K[X \cup C] \\
&\text{et } p_0 \text{ polynome en } X_0 \text{ à coefficients dans } K[(X / X_0) \cup C]
\end{aligned}$$

$$p_0 \text{ peut s'écrire } \begin{cases} p_0 = \sum_i a_i \cdot \underline{X}_0^{\alpha_i} \\ \text{avec } a_i = q_i + r_i \text{ où } q_i \in \langle p_1, \dots, p_n \rangle \end{cases} \text{ d'après le théorème}$$

20, **Annexe 1.**

$$\text{D'où on peut écrire } p_0 = \sum_i q_i \cdot \underline{X}_0^{\alpha_i} + \sum_i r_i \cdot \underline{X}_0^{\alpha_i}.$$

Plusieurs cas peuvent alors se présenter :

- Cas n°1 : $\forall i \neq 0, r_i = 0$

$$\text{cela entraîne } p_0 = r_0 + \sum_i q_i \cdot \underline{X}_0^{\alpha_i}$$

$$\text{d'où } f = h \cdot r_0 + \sum_i q_i \cdot \underline{X}_0^{\alpha_i} + f_1$$

Pour que f appartienne à $K[(X / X_0) \cup C]$, il suffit que :

$$h \in K[(X / X_0) \cup C] \text{ et } f_1 = - \sum_{i \neq 0} h \cdot q_i \cdot \underline{X}_0^{\alpha_i} + f_0 \text{ avec } f_0 \in \langle P \rangle$$

$$f \text{ s'écrit alors } f = h \cdot r_0 + f_0 \text{ donc } f \in \langle r_0 \rangle + \langle p_1, \dots, p_n \rangle \cdot K[X \cup C].$$

$$\text{Donc dans ce cas } f \notin \langle p_1, \dots, p_n \rangle \cap K[(X / X_0) \cup C].$$

C'est justement ce cas qui est éliminé par l'hypothèse du théorème intermédiaire. L'introduction des variables X_0 est artificielle car $\langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle = \langle r_0, p_1, \dots, p_n \rangle$ est inclus dans $K[(X / X_0) \cup C]$.

- Cas n°2 : $\forall i, r_i = 0$

Dans ce cas $r_0 = 0$ et $f \in \langle p_1, \dots, p_n \rangle \cap K[(X / X_0) \cup C]$ d'après le cas n°1. Ce cas n'apporte rien.

- Cas n°3 : $\exists i \neq 0, r_i \neq 0$

On peut écrire $f = \sum_i h \cdot q_i \cdot \underline{X}_0^{\alpha_i} + \sum_i h \cdot r_i \cdot \underline{X}_0^{\alpha_i} + f_1$.

Si $h \neq 0$, il n'existe pas de f_1 tel que les termes en X_0 s'annulent.

En effet :

$$f_1 \in \langle p_1, \dots, p_n \rangle \cdot K[X \cup C]$$

$$\Rightarrow f_1 = \sum_i n_i \cdot \underline{X}_0^{\alpha_i} \text{ avec } n_i \in \langle p_1, \dots, p_n \rangle$$

$$\text{D'où } f = \sum_i h \cdot q_i \cdot \underline{X}_0^{\alpha_i} + \sum_i h \cdot r_i \cdot \underline{X}_0^{\alpha_i} + \sum_i n_i \cdot \underline{X}_0^{\alpha_i}.$$

Pour annuler les X_0 , il faudrait que $n_i = h \cdot (r_i + q_i)$, ce qui n'est pas possible puisque :

$$(r_i + q_i) \notin \langle p_1, \dots, p_n \rangle, \text{ car } r_i \neq 0$$

$$\text{or } n_i \in \langle p_1, \dots, p_n \rangle.$$

Si $h = 0$, alors $f = f_1$. Or $f_1 \in \langle p_1, \dots, p_n \rangle \cdot K[X \cup C]$ et $f \in K[(X / X_0) \cup C]$.

D'où $f \in \langle p_1, \dots, p_n \rangle \cdot K[(X / X_0) \cup C]$.

Ce cas 3 représente le cas général. Il exprime le fait que l'on ne peut pas éliminer la ou les variables qui apparaissent seulement dans le polynôme p_0 sans éliminer p_0 de l'ensemble des polynômes.

Les cas 1 et 2 violent le principe de la localité de l'écriture d'une relation d'un modèle. En effet, celle-ci ne doit pas dépendre de la connaissance du reste du système. C'est pourquoi l'hypothèse du théorème intermédiaire n'est pas contraignante. Elle renvoie à un

problème d'écriture du modèle, qui fait partie des perspectives de cette thèse.

□

Par récurrence sur l'ensemble des polynômes de P ,

$$\langle p_0, p_1, \dots, p_n \rangle \cap K[(X / X_0) \cup C] = \langle p_1, \dots, p_n \rangle \cap K[(X / X_0) \cup C]$$

$$\langle p_1, \dots, p_n \rangle \cap K[(X / X_0 / X_1) \cup C] = \langle p_2, \dots, p_n \rangle \cap K[(X / X_0 / X_1) \cup C]$$

...

$$\langle p_{n-1}, p_n \rangle \cap K[(X / X_0 / \dots / X_{n-1}) \cup C] = \langle p_n \rangle \cap K[(X / X_0 / \dots / X_{n-1}) \cup C]$$

$$\text{il reste } \langle p_n \rangle \cap K[(X / X_0 / \dots / X_n) \cup C] = \langle p_n \rangle \cap K[C]$$

Il ne reste à la fin qu'un seul polynôme p_n . Ce dernier contient les variables inconnues X_n qu'il faut éliminer. Or cela est impossible à cause de la propriété ci-dessous.

Propriété :

Si un polynôme p contient un ensemble de variable inconnues X et un ensemble de variables connues C , alors l'idéal d'élimination $J = \langle p \rangle \cap K[C]$ est égal au polynôme nul.

$$p \in K[X \cup C] \text{ et } p \notin K[C] \Rightarrow \langle p \rangle \cap K[C] = \{0\}$$

Démonstration de la propriété :

Ce résultat repose sur la nature des polynômes pouvant être générés à partir de p : $\forall f \in \langle p \rangle, f = h \cdot p$ avec $h \in K[X \cup C]$.

Le seul polynôme de $\langle p \rangle$ qui puisse appartenir à $K[C]$ est le polynôme nul obtenu pour $h = 0$.

□

□

Exemple 4-4 :

Reprenons le système (4-2) :

$$\begin{cases} x + y + z - c_1 = 0 \\ 2 \cdot x - z - c_2 = 0 \\ 3 \cdot z - c_3 = 0 \end{cases} \text{ dont la matrice d'incidence}$$

triangularisée est :

	y	x	z
eq₁	1	1	1

eq_2	0	1	1
eq_3	0	0	1

La forme triangulaire de la matrice d'incidence nous permet d'affirmer qu'il n'y aura pas de RRA - relations en $\{c_1, c_2, c_3\}$, pour ce système.

Intuitivement, si les variables inconnues sont calculables alors il n'y a pas d'information redondante, chaque équation est dédiée à la détermination d'une variable inconnue. Si les variables inconnues ne sont pas calculables alors la seule voie possible pour obtenir une RRA passe par l'élimination directe des variables inconnues, or la structure parfaitement triangulaire rend cette élimination impossible.

Contraposée

Un deuxième résultat, en fait la contraposée du résultat précédent, peut être formulé ainsi :

Proposition 3 : Si la matrice d'incidence structurale sur les variables inconnues d'un sous système juste déterminé n'est pas parfaitement triangulaire mais présente des blocs sur sa diagonale alors il est possible analytiquement que des RRA puissent être générées.

En effet, cette fois, en cas de non calculabilité des variables inconnues, il est possible de voir s'éliminer les variables intervenant dans le bloc.

Exemple 4-5 :

Soit le système polynomial suivant :

$$\begin{cases} x - c_1 = 0 \\ y^2 \cdot z^2 + x - c_2 = 0 \\ y \cdot z - c_3 = 0 \end{cases}$$

Sa matrice d'incidence bloc triangulaire sur les variables inconnues est la suivante :

	y	z	x
eq_1	1	1	
eq_2	1	1	1
eq_3			1

Dans cet exemple, il n'est pas possible de déterminer les valeurs de y et z - auquel cas il n'y aurait pas eu de RRA. Mais par contre il est possible de les éliminer à l'intérieur du bloc sur la diagonale, c'est à dire en considérant les équations 1 et 2. La variable x étant déterminée grâce à l'équation 3, nous pouvons obtenir une RRA : $c_3^2 + c_1 = 0$.

4.3.3 Systèmes sous déterminés

La notion de sous systèmes sous déterminés est définie en **Annexe 3**. Issu presque directement de la proposition 2 sur les systèmes juste déterminés, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Proposition 4 : Si la matrice d'incidence structurelle sur les variables inconnues d'un sous système sous déterminé contient un sous système juste déterminé parfaitement triangulaire sur toutes les relations alors aucune RRA ne pourra être issue de ce sous système.

Exemple 4-6 :

Soit le système : $\begin{cases} x + y + z - c_1 = 0 \\ 2 \cdot x - z - c_2 = 0 \end{cases}$ dont la matrice d'incidence triangularisée est :

	y	x	z
eq ₁	1	1	1
eq ₂	0	1	1

La forme triangulaire du sous système juste déterminé - en grisé, nous permet d'affirmer qu'il n'y aura pas de RRA - relations en $\{c_1, c_2\}$, pour ce système.

Nous pouvons de même énoncer la contraposée de la proposition 4 :

Proposition 5 : Si la matrice d'incidence structurelle sur les variables inconnues d'un sous système sous déterminé ne contient pas le sous système juste déterminé décrit dans la proposition 4, alors il est possible qu'une RRA puisse être générée.

Exemple 4-7 :

Soit le système : $\begin{cases} x + y + z - c_1 = 0 \\ (x + y + z)^3 - c_2 = 0 \end{cases}$ dont la matrice d'incidence triangularisée est :

	y	x	z
eq ₁	1	1	1
eq ₂	1	1	1

Une RRA peut être générée sur cet exemple : $c_1^3 - c_2 = 0$.

Il ne s'agit bien sûr que d'un exemple des mécanismes d'élimination pouvant être mis en jeu.

4.3.4 Conclusion

Lorsque nous travaillons avec des méthodes utilisant la détermination des variables inconnues et par voie de conséquence des hypothèses de calculabilité de ces mêmes variables, l'Analyse Structurale nous indique directement l'existence ou non de RRA - par l'existence ou non de systèmes sur déterminés.

Hors de ce cadre, il faut considérer toutes les simplifications analytiques possibles, allant de la perte de rang pour les systèmes linéaires à l'élimination de variables pour les systèmes polynomiaux. Cela étant dit, les systèmes structurellement juste et sous déterminés peuvent eux aussi générer des RRA.

Les seuls cas où nous pouvons affirmer qu'aucune RRA ne sera générée sont les sous systèmes structurellement juste déterminés et parfaitement triangulaires, ainsi que les sous systèmes sous déterminés contenant un juste déterminé parfaitement triangulaire sur toutes les relations.

4.4 PARTITIONNEMENT DU SYSTEME EN SOUS SYSTEMES

La seule façon possible d'aborder de grands systèmes d'équations polynomiales réside dans un partitionnement de ces systèmes en plusieurs sous systèmes que l'on pourra traiter séparément, cela afin de limiter le grossissement des données qui est le point critique et limitant du calcul des Bases de Groëbner.

Nous considérons dans cette section des grands systèmes d'équations qui soient faiblement interconnectés. Rechercher des sous systèmes du système initial qui soient indépendants ou faiblement interconnectés est une discipline de la *Théorie des Graphes* [Bergé 73], et passe par la recherche des *ensembles minimaux d'articulations*. Nous ne développerons pas ce point ici pour nous intéresser au traitement des divers éléments de la partition. Notons néanmoins la question clé de toute partition : En combien de sous systèmes veut-on décomposer le système ? La réponse est soit pressentie - par une connaissance physique du système, soit ignorée - et dans ce cas il faut essayer plusieurs nombres avant de trouver une solution satisfaisante.

Dans la partition du système initial, les *blocs indépendants (relations-variables)* pourront être traités séparément par la méthode d'Espace de Parité Polynomiale afin d'en extraire les Relations de Redondance Analytique.

Dans la partition du système initial, les *blocs faiblement interconnectés* pourront être traités séparément dans la recherche d'une base de Groëbner, puis les bases respectives seront réunies, moyennant contraintes, pour la recherche d'une base de Groebner globale générant les RRA polynomiales du système. Cette procédure est détaillée dans les sections suivantes.

4.4.1 Connexion de blocs systèmes

Nous allons ici présenter quelques résultats établis en collaboration avec Michel Petitot de l'équipe de calcul formel du L.I.F.L (Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille). Ces quelques résultats sont inhérents à la connexion de systèmes algébriques - des résultats similaires existent en algèbre différentielle.

Soient deux systèmes algébriques (Σ_1) et (Σ_2) dont nous supposons les entrées respectivement indépendantes. Par définition, les *entrées d'un système algébrique* sont des variables *indépendantes* qui ne sont liées entre elles par aucune relation et dont toutes les autres variables dépendent ; les entrées constituent alors ce qu'on appelle une *base de transcendance algébrique*.

Les *Bases de Groebner* sont un outil qui permet de décider de l'indépendance ou non d'un ensemble de variables : elles permettent en effet de trouver ou non la relation qui lie ces variables entre elles, en éliminant toutes les autres variables.

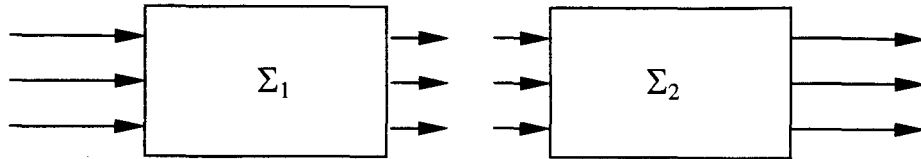


Figure 4-1 : Deux systèmes à connecter en série.

Nous pouvons formuler les résultats suivants :

Proposition 6 : Réaliser la connexion entre les deux sous systèmes ne va pas ajouter de contraintes sur les sorties de (Σ_1), puisque les entrées de (Σ_2) sont indépendantes. Par voie de conséquence, la connexion ne donnera pas lieu à de nouvelles RRA sur les relations de (Σ_1).

Proposition 7 : Réaliser la connexion entre les deux sous systèmes va ajouter des contraintes sur les entrées de (Σ_2), si les sorties de (Σ_1) ne sont pas indépendantes entre elles. Par voie de conséquence, la connexion donnera lieu à de nouvelles RRA sur les relations de (Σ_2). Les données du problème grossissent.

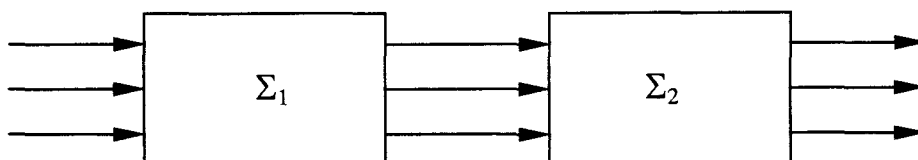
Proposition 8 : Réaliser la connexion entre les deux sous systèmes ne va pas ajouter de contraintes sur les entrées de (Σ_2), si les sorties de (Σ_1) sont indépendantes entre elles. Par voie de conséquence, la connexion ne donnera pas lieu à de nouvelles RRA sur les relations de (Σ_2).

Lorsque nous disons que la connexion ne donnera pas lieu à de nouvelles RRA sur les relations d'un système (Σ_1), cela veut dire qu'il n'y aura pas de nouvelles RRA liant les variables du système (Σ_1) uniquement. Cependant la connexion va ajouter éventuellement des RRA liant les variables connues des deux systèmes (Σ_1) et (Σ_2). Il faudra tenir compte de ce point dans la section suivante.

4.4.2 Recherche de RRA

Nous allons maintenant développer plus précisément ces résultats pour la recherche effective de l'ensemble des RRA de grands systèmes d'équations polynomiales.

Proposition



Soient (Σ_1) et (Σ_2) deux systèmes modélisés chacun par un modèle polynomial et connectés en série. Les entrées et les sorties de chaque système seront supposées *indépendantes*.

Trois types de variables sont considérées : les *variables connues* - intrinsèquement ou par la mesure, Y_1 et Y_2 respectivement pour chaque système ; les *variables inconnues*, X_1 et X_2 respectivement pour chaque système ; les *variables de liens* L constituées de l'ensemble des variables de (Σ_1) et (Σ_2) qui interviennent dans les relations de liens R entre les systèmes.

La Figure 4-2 décrit la proposition que nous faisons sur la décomposition de la recherche des RRA.

Explication

Notre objectif est de limiter le grossissement des données, or le calcul de la Base de Groëbner sur le système global et toutes les variables peut conduire à une base d'une taille importante alors que l'information qui nous intéresse - à savoir les RRA, peut être de taille réduite. Pour éviter de générer la Base de Groëbner globale, nous localisons dans un premier temps la recherche des RRA sur les sous systèmes.

Figure 4-2 (1) et (2). Nous avons vu précédemment - en section 4.4.1 proposition 6 et 8, que la connexion des sous systèmes ne va pas ajouter de RRA sur les relations des sous systèmes, puisque les entrées et les sorties sont supposées indépendantes. En conséquence, nous pouvons éliminer respectivement les variables inconnues des sous systèmes, nous ne perdons pas d'information pour la génération des nouvelles RRA. Cependant cette connexion peut générer de nouvelles RRA liant les variables connues des deux sous systèmes. En conséquence nous ne pouvons pas éliminer les variables de liens entre ces sous systèmes.

Figure 4-2 (3). A ce niveau, les variables inconnues et non de liens de chaque sous système ont été éliminées. Nous devons donc générer une Base de Groëbner sur un nombre réduit de variables, l'essentiel du travail d'élimination ayant été réalisé. Il nous restera uniquement à éliminer les variables de liens qui sont inconnues.

Figure 4-2 (4). Par l'égalité des Bases de Groëbner, nous entendons l'égalité des idéaux contenant les RRA polynomiales du système. En effet deux idéaux sont égaux quand ils possèdent la même Base de Groëbner réduite pour le même ordre - cela est dû à l'unicité de la Base de Groëbner réduite pour un idéal donné [Cox 92].

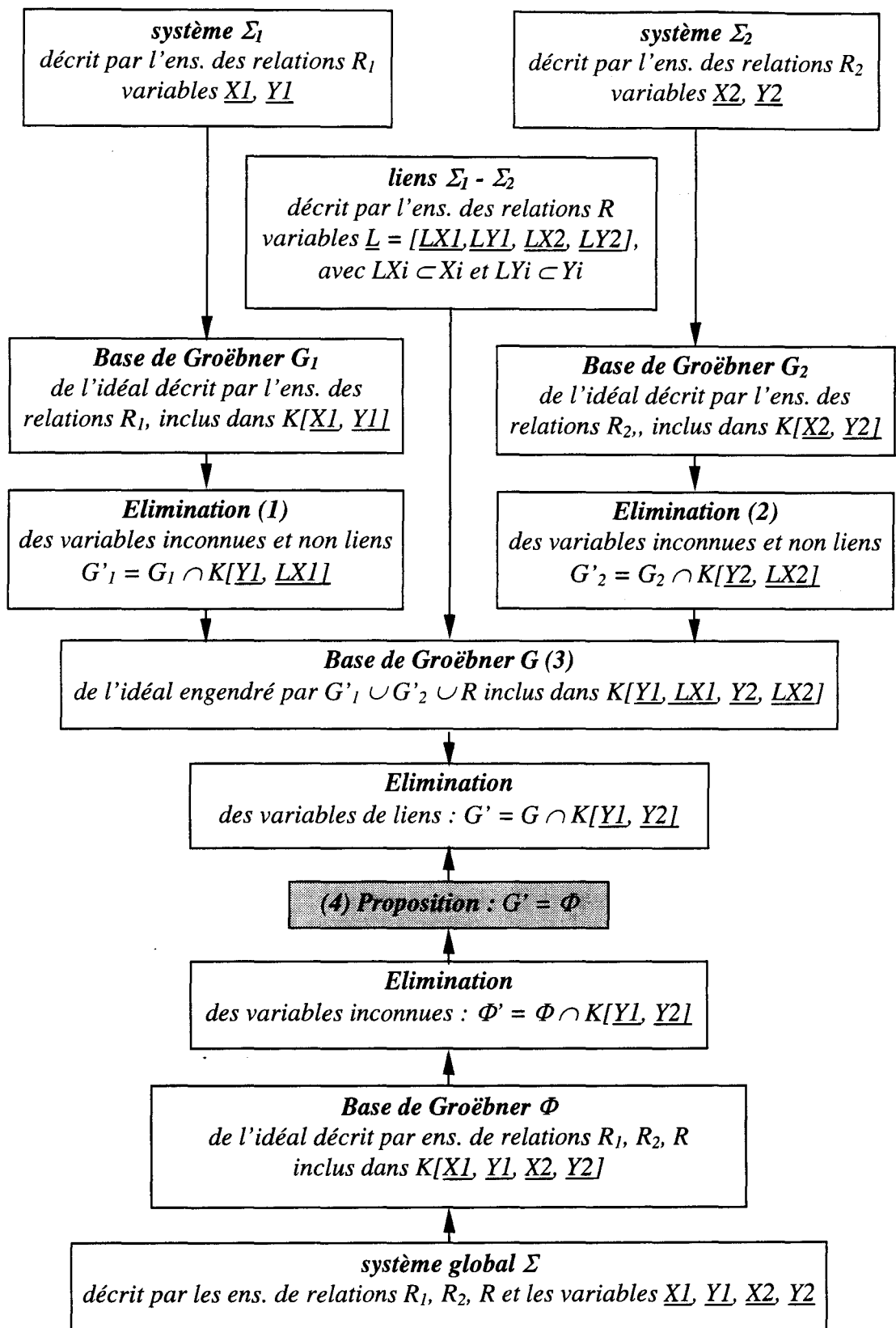


Figure 4-2 : Décomposition de la génération de RRA par partitionnement du système.

4.4.3 Application

Nous travaillons sous MATLAB V et accédons au noyau MAPLE V par l'intermédiaire d'une toolbox MATLAB de Calcul symbolique, sur une station SUN

Nous commençons par appeler un package GROBNER contenant toutes fonctions inhérentes au calcul des bases de Groebner.

```
clear;
maple('with','grobner');
```

4.4.3.1 Les équations du système

Nous définissons ensuite les équations décrivant le système des six échangeurs thermiques. Nous avons regroupé ces équations dans des partitions qui nous ont été indiquées par une recherche des ensembles d'articulations du système, issue de la Théorie des Graphes - partition qui semble naturelle si l'on considère le système étudié (Figure 4-3). Notons que nous avons créé de nouvelles variables afin que les variables de chacun des sous systèmes soient distinctes, et avons ajouté, par voie de conséquence, des relations liant ces nouvelles variables aux autres : ce sont les relations dites de *Liens*.

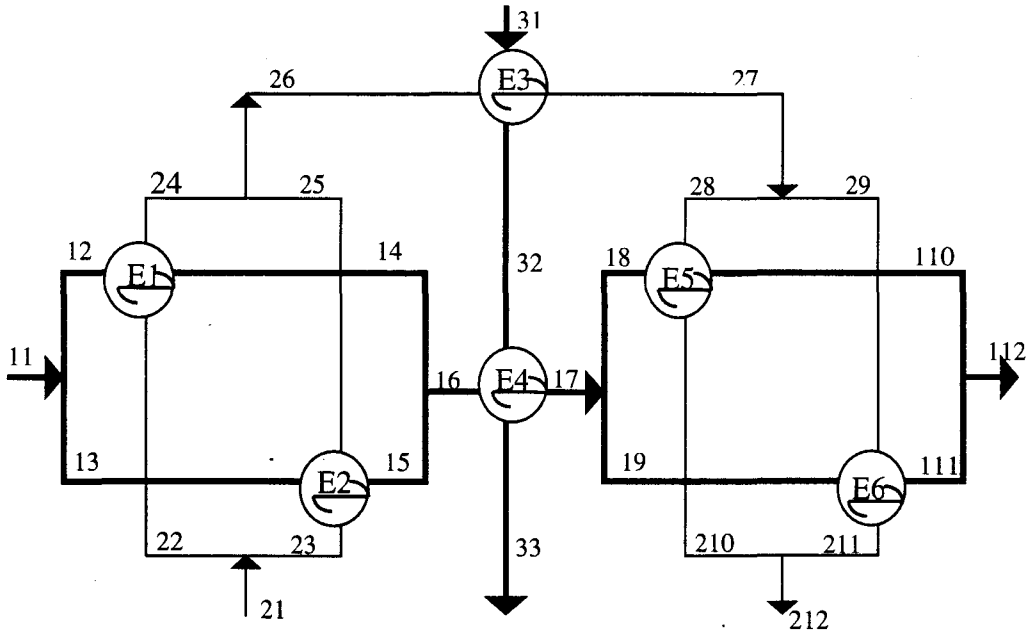


Figure 4-3 : Système de six échangeurs thermiques

→ Système d'échangeurs E1,E2 :

$$r1='f11-f12-f13';$$

$$r2='f16-f14-f15';$$

$$r5='f21-f22-f23';$$

$r6='f26-f24-f25';$
 $r9='f12-f14';$
 $r10='f22-f24';$
 $r11='f13-f15';$
 $r12='f23-f25';$
 $r21='f11*t11-f12*t12-f13*t13';$
 $r22='f16*t16-f14*t14-f15*t15';$
 $r25='f21*t21-f22*t22-f23*t23';$
 $r26='f26*t26-f24*t24-f25*t25';$
 $r29='(t14-t12)*f12-(t22-t24)*f22';$
 $r30='(t15-t13)*f13-(t23-t25)*f23';$

→ Système d'échangeurs E5,E6

$r3='f17-f18-f19';$
 $r4='f112-f110-f111';$
 $r7='f27-f28-f29';$
 $r8='f212-f210-f211';$
 $r17='f18-f110';$
 $r18='f28-f210';$
 $r19='f19-f111';$
 $r20='f29-f211';$
 $r23='f17*t17-f18*t18-f19*t19';$
 $r24='f112*t112-f110*t110-f111*t111';$
 $r27='f27*t27-f28*t28-f29*t29';$
 $r28='f212*t212-f210*t210-f211*t211';$
 $r33='(t110-t18)*f18-(t28-t210)*f28';$
 $r34='(t111-t19)*f19-(t29-t211)*f29';$

→ Système d'échangeurs E3

$r13='f31-f32';$
 $r14='fp26-fp27';$
 $r31='(tp27-tp26)*fp26-(t31-t32)*f31';$

→ Système d'échangeurs E4

$r15='fp16-fp17';$
 $r16='fp32-f33';$
 $r32='(tp17-tp16)*fp16-(tp32-t33)*fp32';$

→ Liens

$l1='t26-tp26';$
 $l2='f26-fp26';$
 $l3='t16-tp16';$
 $l4='f16-fp16';$
 $l5='t27-tp27';$
 $l6='f27-fp27';$
 $l7='t17-tp17';$
 $l8='f17-fp17';$
 $l9='t32-tp32';$
 $l10='f32-fp32';$

4.4.3.2 Les bases de Groebner locales et éliminations locales

Pour appliquer notre méthode, nous calculons ensuite une base de Groebner locale à chaque sous système et en extrayons une base de l'idéal d'élimination - l'élimination concerne les variables inconnues du système et n'intervenant pas dans les relations de liens.

→ Génération de la base E1,E2

```
maple      gbasis([f11-f12-f13,f16-f14-f15,f21-f22-f23,f26-f24-f25,f12-
f14,f22-f24,f13-f15,f23-f25,f11*t11-f12*t12-f13*t13,f16*t16-f14*t14-
f15*t15,f21*t21-f22*t22-f23*t23,f26*t26-f24*t24-f25*t25,(t14-t12)*f12-
(t22-t24)*f22,(t15-t13)*f13-(t23-
t25)*f23],[f22,t22,f23,t23,f24,t24,f25,t25,f14,t14,f15,t15,f11,t11,f12,t12,f
13,t13,f21,t21,f16,t16,f26,t26],plex);
```

Base de l'idéal d'élimination - élimination de **f22, t22, f23, t23, f24, t24, f25, t25, f14, t14, f15, t15** :

```
solution=[f11-f16,
f16*t11+f26*t21-f16*t16-f26*t26,
-f16+f12+f13,
f13*t12-f16*t12-f13*t13-f26*t21+f16*t16+f26*t26,
f21-f26]
```

→ Génération de la base E5,E6

```
maple      gbasis([f17-f18-f19,f112-f110-f111,f27-f28-f29,f212-f210-
f211,f18-f110,f28-f210,f19-f111,f29-f211,f17*t17-f18*t18-
f19*t19,f112*t112-f110*t110-f111*t111,f27*t27-f28*t28-
f29*t29,f212*t212-f210*t210-f211*t211,(t110-t18)*f18-(t28-
t210)*f28,(t111-t19)*f19-(t29-
t211)*f29],[f28,t28,f29,t29,f210,t210,f211,t211,f110,t110,f111,t111,f17,t
17,f18,t18,f19,t19,f27,t27,f112,t112,f212,t212],plex);
```

Base de l'idéal d'élimination - élimination de **f28, t28, f29, t29, f210, t210, f211, t211, f110, t110, f111, t111** :

```
solution=[f17-f112,
f112*t17+t27*f212-f112*t112-f212*t212,
-f112+f18+f19,
t18*f19-f112*t18-f19*t19-t27*f212+f112*t112+f212*t212,
f27-f212]
```

→ Génération de la base de E3

```
maple      gbasis([f31-f32,fp26-fp27,(tp27-tp26)*fp26-(t31-t32)*f31],
[fp26,tp26,f32,t32,fp27,tp27,f31,t31],plex);
```

Toutes les variables sont soit mesurées, soit font partie des relations de liens. Nous gardons la base de l'idéal.

```
solution=[fp26-fp27,
f31*t31-f31*t32-fp27*tp27+fp27*tp26,
-f31+f32]
```

→ Génération de la base de E4

```
maple gbasis([fp16-fp17,fp32-f33,(tp17-tp16)*fp16-(tp32-t33)*fp32],
,[fp16,tp16,fp32,tp32,fp17,tp17,f33,t33],plex);
```

Toutes les variables sont soit mesurées, soit font partie des relations de liens. Nous gardons la base de l'idéal.

```
solution=[fp16-fp17,fp17*tp16+f33*tp32-fp17*tp17-f33*t33,fp32-f33]
```

4.4.3.3 Exploitation des relations de liens

A ce niveau nous avons déjà bien simplifié le problème. Nous disposons de :

```
solution E1 E2 =[f11-f16,
f16*t11+f26*t21-f16*t16-f26*t26,
-f16+f12+f13,
f13*t12-f16*t12-f13*t13-f26*t21+f16*t16+f26*t26,
f21-f26]
solution E5 E6 =[f17-f112,
f112*t17+t27*f212-f112*t112-f212*t212,
-f112+f18+f19, t18*f19-f112*t18-f19*t19-
t27*f212+f112*t112+f212*t212,
f27-f212]
solution E3 =[fp26-fp27,
f31*t31-f31*t32-fp27*tp27+fp27*tp26,
-f31+f32]
solution E4 =[fp16-fp17,
fp17*tp16+f33*tp32-fp17*tp17-f33*t33,
fp32-f33]
```

Il nous reste à exploiter les relations de liens :

```
l1='t26-tp26';
l2='f26-fp26';
l3='t16-tp16';
l4='f16-fp16';
l5='t27-tp27';
l6='f27-fp27';
l7='t17-tp17';
l8='f17-fp17';
l9='t32-tp32';
l10='f32-fp32';
```

Nous exploitons à nouveau la méthode que nous présentons et cherchons à éliminer les variables de liens - de la forme f_{pi} et t_{pi} . Pour cela nous partitionnons à nouveau le système en d'une part (solutions de E1,E2 et E5,E6) et d'autre part (solutions de E3, E4 et liens). En effet la première partition ne contient pas les variables que nous voulons éliminer à savoir $tp26$, $fp26$, $tp16$, $fp16$, $tp27$, $fp27$, $tp17$, $fp17$, $tp32$, $fp32$, $t32$, $f32$. Nous procédons donc à la recherche d'une base de l'idéal d'élimination correspondant sur le deuxième élément de la partition :

```

maple gbasis([t26-tp26,f26-fp26,t16-tp16,f16-fp16,t27-tp27,f27-fp27,t17-
tp17,f17-fp17,t32-tp32,f32-fp32,fp16-fp17,fp17*tp16+f33*tp32-
fp17*tp17-f33*t33,fp32-f33,fp26-fp27,f31*t31-f31*t32-
fp27*tp27+fp27*tp26,-
f31+f32],[tp26,fp26,tp16,fp16,tp27,fp27,tp17,fp17,tp32,fp32,t32,f32,t26,
f26,t16,f16,t27,f27,t17,f17,f33,t33,f31,t31],plex)

```

La solution obtenue est la suivante :

```

solution E3 E4 Liens = [f17*t16-f17*t17-f31*t33+f31*t31+f27*t26-
f27*t27,
-f27+f26,f16-f17,-f31+f33]

```

4.4.3.4 Résultat final

Nous disposons à présent de trois ensembles de relations constituées uniquement de variables mesurées. Il s'agit de :

```

solution E1 E2 =[f11-f16,
f16*t11+f26*t21-f16*t16-f26*t26,
-f16+f12+f13,
f13*t12-f16*t12-f13*t13-f26*t21+f16*t16+f26*t26,
f21-f26]

```

```

solution E5 E6 =[f17-f112,
f112*t17+t27*f212-f112*t112-f212*t212,
-f112+f18+f19,t18*f19-f112*t18-f19*t19-
t27*f212+f112*t112+f212*t212,
f27-f212]

```

```

solution E3 E4 Liens = [f17*t16-f17*t17-f31*t33+f31*t31+f27*t26-
f27*t27,
-f27+f26,
f16-f17,
-f31+f33]

```

Notre postulat est que la réunion de ces relations forme une base de l'ensemble des RRA du système, que nous aurions pu obtenir directement en recherchant la base de Groëbner de tout le système ce qui n'est pas possible sous MAPLE vu la taille trop importante de la base obtenue.

```

maple gbasis([f17*t16-f17*t17-f31*t33+f31*t31+f27*t26-f27*t27,-
f27+f26,f16-f17,-f31+f33,f11-f16,f16*t11+f26*t21-f16*t16-f26*t26,-
f16+f12+f13,f13*t12-f16*t12-f13*t13-f26*t21+f16*t16+f26*t26,f21-
f26,f17-f112,f112*t17+t27*f212-f112*t112-f212*t212,-
f112+f18+f19,t18*f19-f112*t18-f19*t19-
t27*f212+f112*t112+f212*t212,f27-
f212],[f12,f13,f17,f18,f19,f27,f112,f11,f16,f21,f26,f212,f31,f33,t12,t13,t1
7,t18,t19,t27,t112,t11,t16,t21,t26,t212,t31,t33],plex)

```

Nous obtenons :

```

r1 = -f16 + f12 + f13,
r2 = f13 t12 - f13 t13 - f16 t12 + f16 t16 - f212 t21 + f212 t26,

```

$$\begin{aligned}
r3 &= f17 - f16, \\
r4 &= f18 + f19 - f16, \\
r5 &= t18 f19 - f19 t19 - f16 t18 + f16 t16 - t27 f212 + f212 t26 + f33 \\
&\quad t31 - f33 t33, \\
r6 &= f27 - f212, \\
r7 &= -f16 + f112, \\
r8 &= f11 - f16, \\
r9 &= f16 t17 - f16 t16 + t27 f212 - f212 t26 - f33 t31 + f33 t33, \\
r10 &= f16 t112 - f16 t16 - f212 t26 + f212 t212 - f33 t31 + f33 t33, \\
r11 &= f16 t11 - f16 t16 + f212 t21 - f212 t26, \\
r12 &= -f212 + f21, \\
r13 &= -f212 + f26, \\
r14 &= t17 f212 t21 - t17 f212 t212 + t112 t27 f212 - t11 t27 f212 - t112 \\
&\quad f212 t26 + t11 f212 t26 - t16 f212 t21 + t16 f212 t212 - t112 f33 \\
&\quad t31 + t112 f33 t33 + t17 f33 t31 - t17 f33 t33 - t16 f33 t31 + t16 \\
&\quad f33 t33 + t11 f33 t31 - t11 f33 t33, \\
r15 &= t16 f212 t212 - t16 t27 f212 + t112 t27 f212 - t112 f212 t26 - t112 \\
&\quad f33 t31 + t112 f33 t33 + t17 f212 t26 - t17 f212 t212 + t17 f33 t31 \\
&\quad - t17 f33 t33, \\
r16 &= -t16 f212 t21 + t16 f212 t212 - t16 f33 t31 + t16 f33 t33 + t11 \\
&\quad f212 t26 - t11 f212 t212 + t11 f33 t31 - t11 f33 t33 + t112 f212 \\
&\quad t21 - t112 f212 t26, \\
r17 &= f31 - f33, \\
r18 &= -t21 t112 f33 t31 + t21 t112 f33 t33 + t21 t17 f33 t31 - t21 t17 f33 \\
&\quad t33 + t27 t16 f33 t31 - t27 t16 f33 t33 - t27 t11 f33 t31 + t27 t11 \\
&\quad f33 t33 + t26 t112 f33 t31 - t26 t112 f33 t33 - t26 t17 f33 t31 + \\
&\quad t26 t17 f33 t33 - t212 t16 f33 t31 + t212 t16 f33 t33 + t212 t11 \\
&\quad f33 t31 - t212 t11 f33 t33
\end{aligned}$$

Notons que nous donnons ici l'ordre des variables précédemment utilisé pour calculer la base de Groebner globale des RRA sous le logiciel dédié GB (Faugère, Jussieu). Nous obtenons exactement le même résultat, ce qui était prévisible puisque la base de Groebner réduite est unique pour un ordre donné.

Nous pouvons ainsi conclure, et sans que cela ait valeur de démonstration, que notre théorie est vérifiée sur cette application.

4.4.4 Conclusion

La proposition que nous avons faite, sur la décomposition de la recherche des RRA par partitionnement du système, nous semble prometteuse pour éviter le grossissement des données d'un calcul de Base de Groëbner. Nous répartissons la difficulté sur les différents sous systèmes de la partition. Bien entendu, il faut que le système se prête à une telle décomposition.

Cette proposition nous semble juste et a été vérifiée sur un exemple de système d'équations polynomiales comportant 34 équations et 54 variables. Néanmoins la démonstration mathématique n'a pas été faite à ce jour et cela fait de nos propositions de simples postulats.

Revenons néanmoins sur l'intérêt d'une telle décomposition. L'exemple traité a été implémenté sur le logiciel dédié Gb (Faugère, Jussieu) ; le même problème n'a pu être résolu sur MAPLE V étant donné le grossissement des données et le temps de calcul. Néanmoins notre approche par décomposition a permis de retrouver sur MAPLE V le même résultat final que celui sur Gb. Si l'on ajoute que le gain de temps entre Gb et MAPLE V est d'un facteur 1000 - à l'avantage de Gb, nous comprendrons l'intérêt pratique d'une telle approche.

5. ILLUSTRATION & MISE EN OEUVRE

5.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous allons illustrer nos propos sur deux applications différentes. La première application considérée est un *système statique*, constitué de six échangeurs thermiques montés en série-parallèle, dont le modèle est constitué d'équations polynomiales - en fait linéaires et bilinéaires. [Guernez 97a]

La deuxième application considérée est un *système dynamique*, constitué d'un gréement hydraulique de test, dont le modèle est un système d'équations bilinéaires. Les données initiales ont été reprises d'une application de [Yu 96].

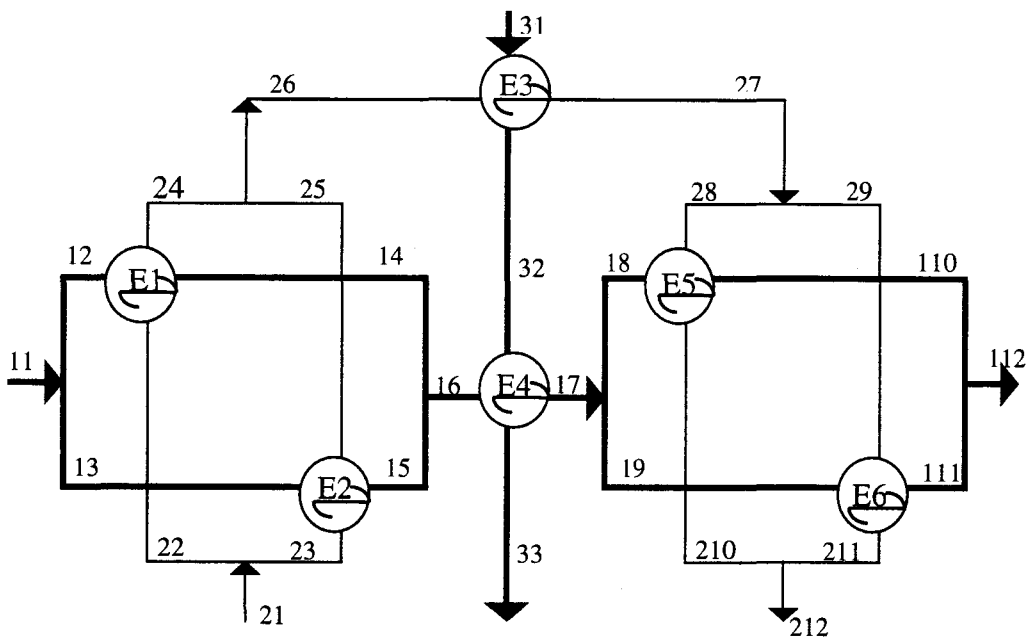
Sur ces deux applications, nous présenterons toutes les étapes de la génération de résidus et nous intéresserons à leur sensibilité aux défaillances.

5.2 APPLICATION A UN SYSTEME STATIQUE DE SIX ECHANGEURS THERMIQUES

5.2.1 Cahier des charges

Nous disposons d'une installation instrumentée dont nous voulons évaluer les performances en terme de capacité de *détection* et de *localisation* des pannes pouvant survenir sur les variables mesurées - qui sont au nombre de 28 : {f12, f13, f17, f18, f19, f27, f112, f11, f16, f21, f26, f212, f31, f33, t12, t13, t17, t18, t19, t27, t112, t11, t16, t21, t26, t212, t31, t33}.

5.2.2 Modèle polynomial en fonctionnement normal



Le schéma précédent représente les flux circulant dans les échangeurs thermiques (symbolisés par des cercles). Trois flux f_{11} , f_{21} et f_{31} à différentes températures - respectivement t_{11} , t_{21} , et t_{31} , pénètrent dans le système. Chacun des flux entrants est divisé en deux flux qui chacun entrent dans un échangeur différent. A la sortie d'un échangeur, le flux est le même mais sa température est modifiée. Ce système peut être modélisé par un système d'équations polynomiales comprenant des équations linéaires et bilinéaires :

$$\text{Echangeurs E1, E2 : } \left\{ \begin{array}{l} r1 = f11 - f12 - f13', \\ r2 = f16 - f14 - f15', \\ r5 = f21 - f22 - f23', \\ r6 = f26 - f24 - f25', \\ r9 = f12 - f14', \\ r10 = f22 - f24', \\ r11 = f13 - f15', \\ r12 = f23 - f25', \\ r21 = f11 * t11 - f12 * t12 - f13 * t13', \\ r22 = f16 * t16 - f14 * t14 - f15 * t15', \\ r25 = f21 * t21 - f22 * t22 - f23 * t23', \\ r26 = f26 * t26 - f24 * t24 - f25 * t25', \\ r29 = (t14 - t12) * f12 - (t22 - t24) * f22', \\ r30 = (t15 - t13) * f13 - (t23 - t25) * f23', \end{array} \right.$$

$$\text{Echangeurs E5, E6 : } \left\{ \begin{array}{l} r3 = f17 - f18 - f19', \\ r4 = f112 - f110 - f111', \\ r7 = f27 - f28 - f29', \\ r8 = f212 - f210 - f211', \\ r17 = f18 - f110', \\ r18 = f28 - f210', \\ r19 = f19 - f111', \\ r20 = f29 - f211', \\ r23 = f17 * t17 - f18 * t18 - f19 * t19', \\ r24 = f112 * t112 - f110 * t110 - f111 * t111', \\ r27 = f27 * t27 - f28 * t28 - f29 * t29', \\ r28 = f212 * t212 - f210 * t210 - f211 * t211', \\ r33 = (t110 - t18) * f18 - (t28 - t210) * f28', \\ r34 = (t111 - t19) * f19 - (t29 - t211) * f29', \end{array} \right.$$

$$\text{Echangeur E3 : } \left\{ \begin{array}{l} r13 = f31 - f32', \\ r14 = f26 - f27', \\ r31 = (t27 - t26) * f26 - (t31 - t32) * f31' \end{array} \right.$$

$$\text{Echangeur E4 : } \left\{ \begin{array}{l} r15 = f16 - fp17', \\ r16 = f32 - f33', \\ r32 = (t17 - t16) * f16 - (t32 - t33) * f32', \end{array} \right.$$

Les variables mesurées, donc connues, sont : {f12, f13, f17, f18, f19, f27, f112, f11, f16, f21, f26, f212, f31, f33, t12, t13, t17, t18, t19, t27, t112, t11, t16, t21, t26, t212, t31, t33}.

Nous supposerons cette installation avec un seul *point de fonctionnement nominal*, dont les valeurs sont les suivantes :

mf11 = 50;	mf23 = mf21-mf22;	mt21 = 293;	mt28 = mt27;
mf12 = 25;	mf24 = mf22;	mt31 = 278;	mt29 = mt27;
mf13 = mf11-mf12;	mf25 = mf23;	mt12 = mt11;	mt33 = 288;
mf14 = mf12;	mf26 = mf21;	mt13 = mt11;	mt17 = 685/2;
mf15 = mf13;	mf27 = mf21;	mt22 = mt21;	mt18 = mt17;
mf16 = mf11;	mf28 = 15;	mt23 = mt21;	mt19 = mt17;
mf17 = mf11;	mf29 = mf27-mf28;	mt14 = 353;	mt111 = 338;
mf18 = 25;	mf210 = mf28;	mt24 = 343;	mt110 = 335;
mf19 = mf17-mf18;	mf211 = mf29;	mt15 = 348;	mt112 = 673/2;
mf110 = mf18;	mf212 = mf27;	mt16 = 701/2;	mt210 = 1039/3;
mf111 = mf19;	mf31 = 80;	mt25 = 1054/3;	mt211 = 1024/3;
mf112 = mf17;	mf32 = mf31;	mt26 = 2083/6;	
mf21 = 30;	mf33 = mf31;	mt32 = 283;	
mf22 = 15;	mt11 = 383;	mt27 = 2003/6;	

5.2.3 Base de Groebner de l'ensemble des Relations de Redondance Analytique Polynomiales du système

Différentes méthodes utilisées

Ce système de 34 équations pour 54 variables, dont 28 sont connues, peut être considéré comme un « grand » système d'équations dans la mesure où l'outil logiciel utilisé MAPLE V ne permet pas d'en obtenir une Base de Groëbner.

Deux options s'offrent à nous, soit nous utilisons un logiciel dédié aux Bases de Groëbner (GB, Faugère), soit nous essayons de décomposer le problème afin d'obtenir la Base de Groëbner par un moyen détourné - c'est ce qui est développé au chapitre 4. Les deux options ont été réalisées et conduisent au même résultat.

A titre indicatif rappelons la structure du système d'équations initiales (Figure 1), et comment elle a été partitionnée pour trouver la Base de Groëbner du système. Cette figure représente les liens entre les variables du système (un « + » indique que le lien existe, un « - » indique qu'il n'y pas de lien direct), on trouve en ligne et en colonne les 34 variables constituant le système initial. Une analyse structurelle du système a permis de dégager deux partitions principales (en grisé) et un ensemble de variables de liaison entre ces partitions, c'est sur ces trois ensembles que vont s'effectuer les étapes de la recherche de la Base de Groëbner du système, comme il l'a été décrit au chapitre 4.

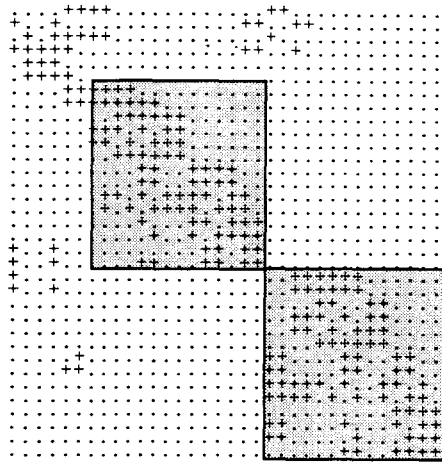


Figure 5-1 : structure Relation / Relation du système d'échangeurs thermiques

Bases de Groëbner des RRA

Nous ne présenterons pas ici la Base de Groëbner du système initial car celle ci est constituée d'une centaine de polynômes, dont seuls les 18 RRA nous intéressent. Ces RRA ont été obtenues par la procédure décrite au Chapitre 4.

Les 18 Relations de Redondance Analytique Polynomiales obtenues sont les suivantes pour l'ordre lexicographique :

f12 > f13 > f17 > f18 > f19 > f27 > f112 > f11 > f16 > f21 > f26 > f212 > f31 > f33 > t12 > t13 > t17 > t18 > t19 > t27 > t112 > t11 > t16 > t21 > t26 > t212 > t31 > t33

$$r1 = 'f12+f13-f16';$$

$$r2 = 'f13*t12-f13*t13-f16*t12+f16*t16-f212*t21+f212*t26';$$

$$r3 = 'f17-f16';$$

$$r4 = 'f18+f19-f16';$$

$$r5 = 'f19*t18-f19*t19-f16*t18+f16*t16-f212*t27+f212*t26+f33*t31-f33*t33';$$

$$r6 = 'f27-f212';$$

$$r7 = 'f112-f16';$$

$$r8 = 'f11-f16';$$

$$r9 = 'f16*t17-f16*t16+f212*t27-f212*t26-f33*t31+f33*t33';$$

$$r10 = 'f16*t112-f16*t16-f212*t26+f212*t212-f33*t31+f33*t33';$$

$$r11 = 'f16*t11-f16*t16+f212*t21-f212*t26';$$

$$r12 = 'f21-f212';$$

$$r13 = 'f26-f212';$$

$$r14 = 'f212*t17*t21-f212*t17*t212+f212*t27*t112-f212*t27*t11-f212*t112*t26+f212*t11*t26-f212*t16*t21+f212*t16*t212+f33*t17*t31-f33*t17*t33-'$$

$$f33*t112*t31+f33*t112*t33+f33*t11*t31-f33*t11*t33-f33*t16*t31+f33*t16*t33';$$

$$r15= 'f212*t17*t26-f212*t17*t212+f212*t27*t112-f212*t27*t16-f212*t112*t26+f212*t16*t212+f33*t17*t31-f33*t17*t33-f33*t112*t31+f33*t112*t33';$$

$$r16= 'f212*t112*t21-f212*t112*t26+f212*t11*t26-f212*t11*t212-f212*t16*t21+f212*t16*t212+f33*t11*t31-f33*t11*t33-f33*t16*t31+f33*t16*t33';$$

$$r17= 'f31-f33';$$

$$r18= 'f33*t17*t21*t31-f33*t17*t21*t33-f33*t17*t26*t31+f33*t17*t26*t33-f33*t27*t11*t31+f33*t27*t11*t33+f33*t27*t16*t31-f33*t27*t16*t33-f33*t112*t21*t31+f33*t112*t21*t33+f33*t112*t26*t31-f33*t112*t26*t33+f33*t11*t212*t31-f33*t11*t212*t33-f33*t16*t212*t31+f33*t16*t212*t33';$$

Nous obtenons ainsi une base génératrice de l'ensemble des RRAP du système. Tout essai de structuration se fera à partir de cette base génératrice ou d'une autre base de Groebner du même idéal, selon un autre ordre sur les variables.

5.2.4 Analyse de sensibilité des résidus

L'analyse de *sensibilité des résidus* se fait, pour cette application, en considérant une panne sur une des variables mesurées. Nous faisons toujours l'hypothèse de l'unicité de la panne.

5.2.4.1 Analyse théorique de sensibilité

Nous obtenons les signatures théoriques de pannes suivantes, pour l'ensemble des 18 résidus obtenus, relativement aux 28 défaillances possibles sur les capteurs de mesures - un pour chaque variable mesurée :

	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	f	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t		
	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2	2	3	3	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	2	2	3	3	
	2	3	7	8	9	7	1	1	6	1	6	1	1	3	2	3	7	8	9	7	1	1	6	1	6	1	1	3	
r1	1	1									1																		
r2		1									1				1	1								1	1	1			
r3			1								1																		
r4				1	1						1																		
r5					1						1			1				1	1	1			1		1		1	1	1
r6						1								1															
r7							1				1																		
r8											1	1																	
r9											1			1			1			1			1		1		1	1	1
r10											1			1							1		1		1	1	1	1	1
r11											1			1									1	1	1	1	1		
r12												1	1																
r13													1	1															
r14													1	1							1	1	1	1	1	1	1	1	1
r15													1	1							1	1	1	1	1	1	1	1	1
r16														1	1						1	1	1	1	1	1	1	1	1
r17															1	1													
r18																1		1					1	1	1	1	1	1	1

Figure 5-2 : Signatures théoriques de panne sur les variables mesurées.

Sur les 28 causes de pannes possibles, il est maintenant possible de distinguer seulement 21 signatures de pannes théoriques différentes. Sont indiscernables les pannes intervenant dans les couples suivants (t31,t33), (t16,t26), (t18,t19), (t112,t212) et (t12,t13) auxquels s'ajoutent les couples (f12,f13) et (f18,f19).

Elaboration de cette matrice - Simulation

Une simulation des pannes décrites précédemment sur les flux et les températures permet d'élaborer la matrice de la Figure 5-3, par seuillage. Prenons comme exemple une panne survenant successivement sur f13, f33 et t33.

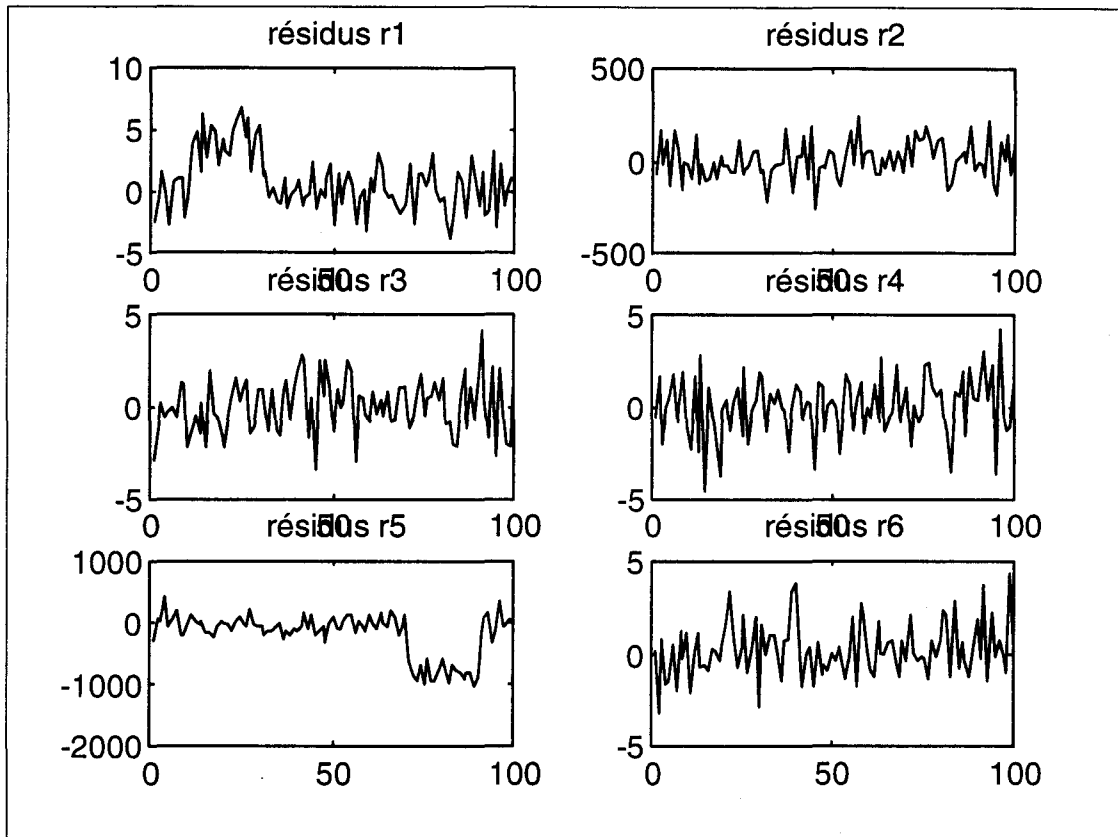


Figure 5-4 : Réponse des résidus r1 à r6 aux 3 défauts successifs.

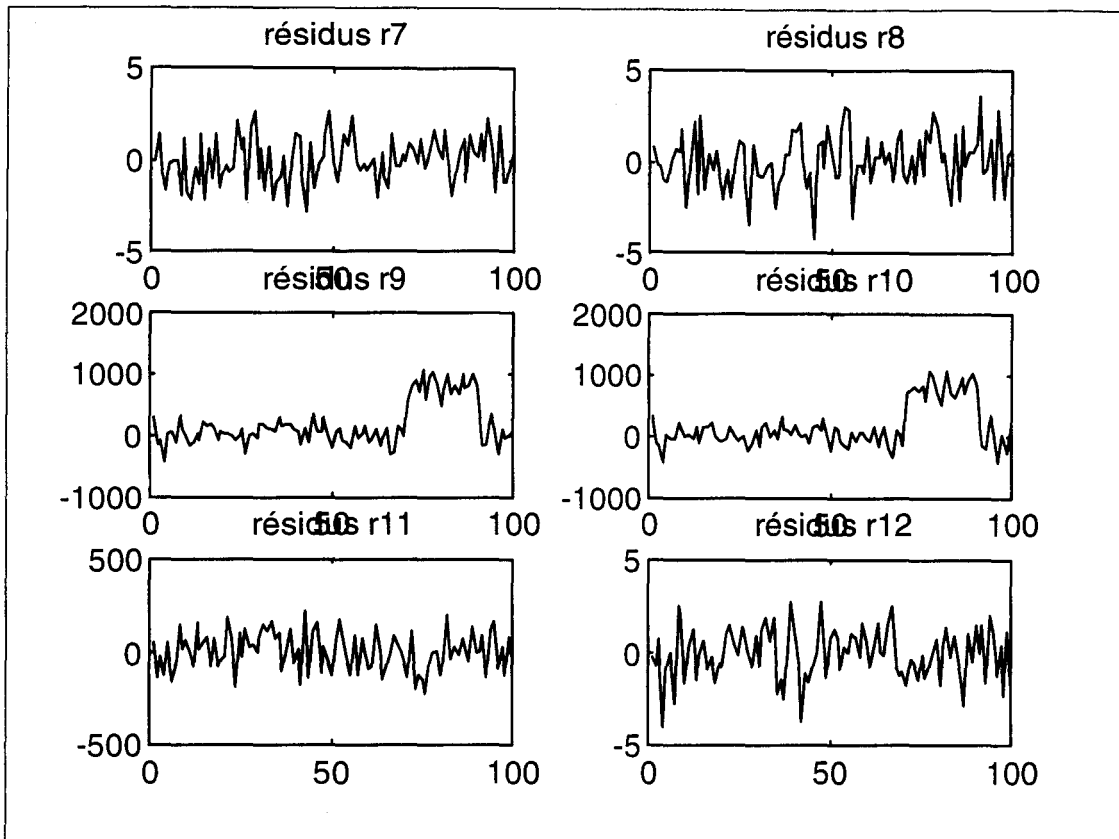


Figure 5-5 : Réponse des résidus r7 à r12 aux 3 défauts successifs.

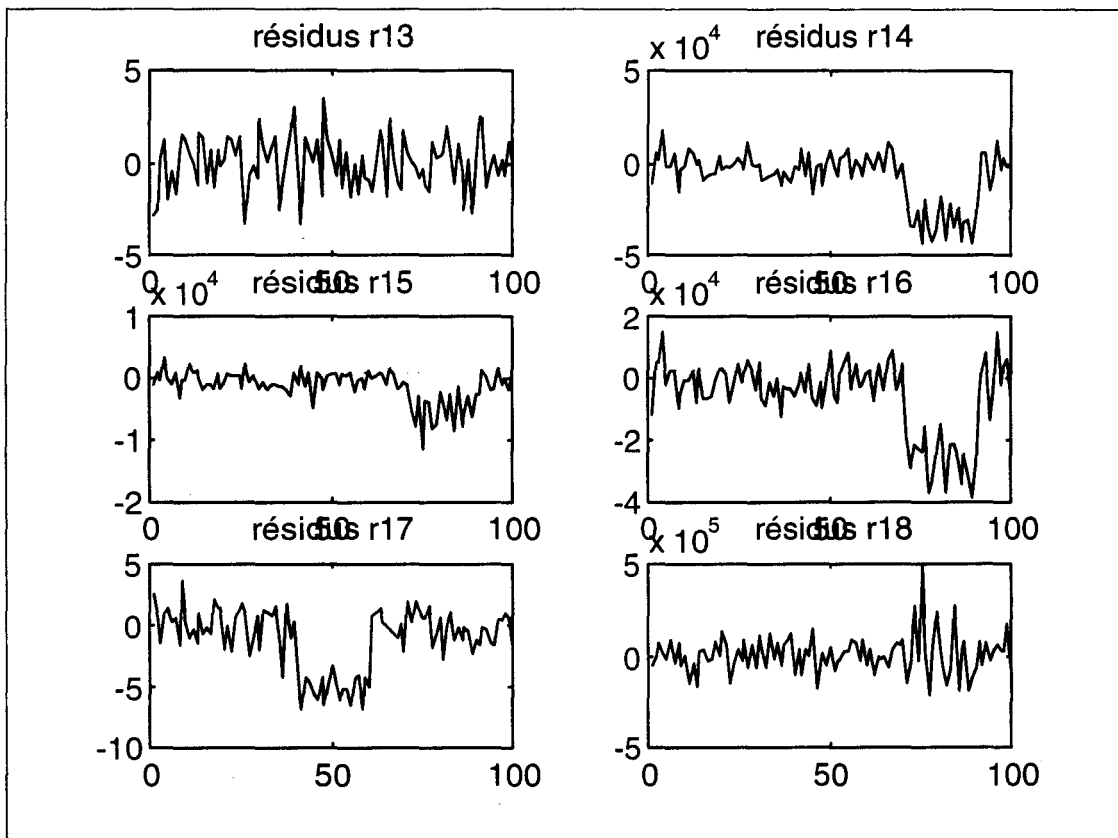


Figure 5-6 : Réponse des résidus r13 à r18 aux 3 défauts successifs

Interprétation de la matrice de signatures de pannes réelles

Un résidu sera insensible en pratique à une panne donnée - même s'il lui est structurellement sensible, si la forme d'évaluation de ce résidu présente un facteur multiplicatif de cette panne qui est nul en fonctionnement normal.

Ainsi, pour l'exemple des pannes sur les variables F13, F33 et T33 traité aux Figures 5-3, 5-4 et 5-5, nous pouvons expliquer la perte de sensibilité des résidus :

- r2 est insensible à f13 car le facteur devant f13 est (t12-t13) qui est nul en fonctionnement normal.
- dans cette application, r18 est un produit de trois facteurs :

$$r18 = -f33*(t31-t33)*(t11*t27-t16*t27+t112*t21-t112*t26-t212*t11-t17*t21+t212*t16+t17*t26)$$

Les deux premiers sont non nuls en fonctionnement normal, il nous reste donc en résidu :

$$res18 = t11*t27-t16*t27+t112*t21-t112*t26-t212*t11-t17*t21+t212*t16+t17*t26$$

r18 sera donc insensible à f33, t31 et t33, ce que sa structure ne laissait pas présager.

5.2.4.3 Traitements sur un résidu polynomial en vue d'une prise de décision

A titre indicatif considérons le résidu r15 qui est polynomial de degré 3, et appliquons lui quelques traitements visant à mettre en évidence les deux défauts qui apparaissent : l'un en température à l'instant 40 pour une durée de 20 et l'autre en flux à l'instant 70 pour la même durée. Les conditions de simulation sont les mêmes que précédemment.

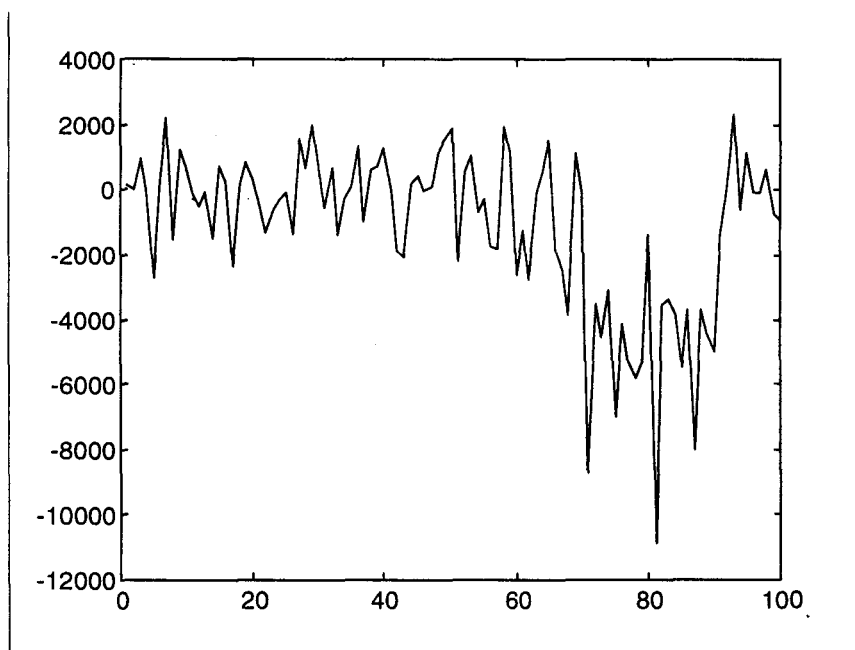


Figure 5-7 : Résidu r15 polynomial de degré 3.

Deux traitements du résidu en vue d'une prise de décision sont considérés :

- un moyennage sur une fenêtre de taille variable,
- une somme cumulée,

Les résultats obtenus ici ont uniquement une valeur illustrative.

La figure 5-8 nous montre que la première défaillance entre les instants 40 et 60 sera difficile à détecter, si l'on veut garder une marge de robustesse. La deuxième défaillance entre les instants 70 et 90 pourra quant à elle être détectée, en effet on voit sur la figure 5-8 que pour les deux méthodes un seuil de détection existe.

Notons néanmoins que nous sommes incapables d'établir des taux de fausses alarmes ou de non détection de façon statistique, vu la nature non linéaire des résidus. D'où l'intérêt de recherches plus approfondies dans le domaine de la prise de décision statistique. [Zhang 97]

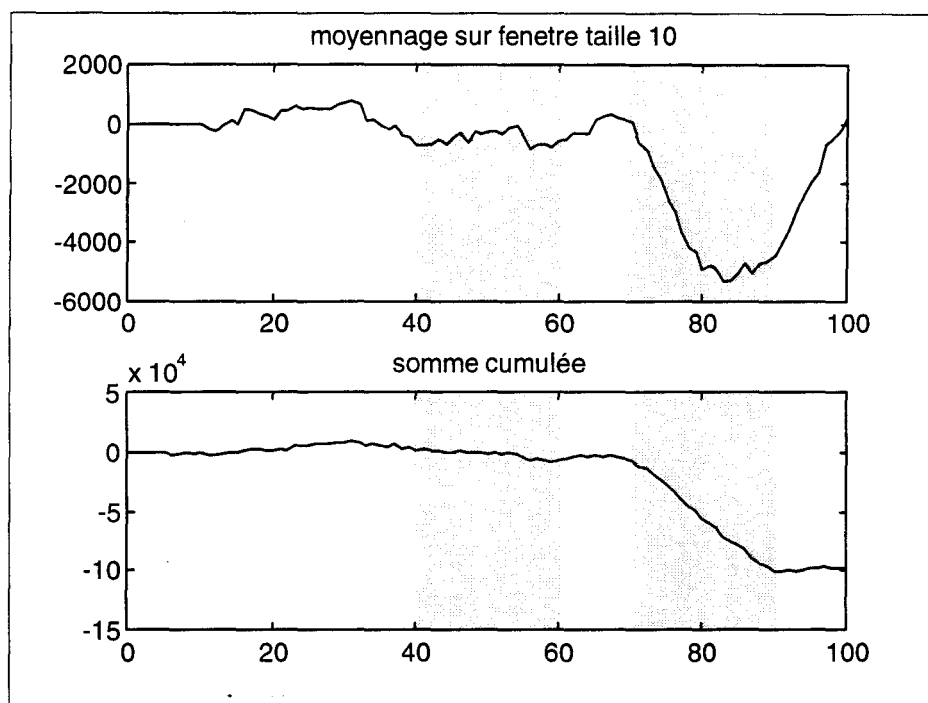


Figure 5-8 : traitements sur le résidu polynomial r_{15} , bruit d'amplitude 1.

5.2.5 Structuration des résidus

Nous n'allons pas ici développer une procédure de structuration complexe visant à améliorer les performances du système de surveillance en terme de localisation - par la recherche d'une matrice de signatures de pannes idéale. Mais nous allons nous intéresser aux couples de pannes indiscernables $\{(t_{31}, t_{33}), (t_{16}, t_{26}), (t_{18}, t_{19}), (t_{112}, t_{212}), (t_{12}, t_{13}), (f_{12}, f_{13})\}$ et

(f_{18}, f_{19}) . Nous allons essayer de générer de nouveaux résidus rendant les variables de ces couples discernables l'une par rapport à l'autre.

Pour ce faire, nous utilisons la théorie développée au chapitre 3 section 3.6.4 sur la structuration des résidus.

Séparation de t_{16} et t_{26}

Selon la même méthode que celle développée au chapitre 3, nous cherchons à décrire l'idéal :

$$I \cap \mathbb{K} \left[\begin{array}{l} f_{12}, f_{13}, f_{17}, f_{18}, f_{19}, f_{27}, f_{112}, f_{11}, f_{16}, f_{21}, f_{26}, f_{212}, f_{31}, f_{33}, t_{12}, t_{13}, t_{17}, t_{18}, t_{19}, t_{27}, \\ t_{112}, t_{11}, t_{16}, t_{21}, t_{212}, t_{31}, t_{33} \end{array} \right]$$

où $I = \langle r_1, \dots, r_{18} \rangle$ est l'idéal généré à partir des 18 relations de redondance analytiques, et où n'apparaît pas la variable t_{26} .

La base de Groëbner de cet idéal d'élimination, pour un ordre lexicographique où t_{26} est supérieure aux autres variables, est constituée d'un seul polynôme g :

$$g = (t_{112} - t_{16}) \cdot (f_{16} \cdot t_{112} - f_{16} \cdot t_{11} + f_{33} \cdot t_{33} + f_{212} \cdot t_{212} - f_{33} \cdot t_{31} - f_{212} \cdot t_{21})$$

g possède la structure théorique voulue dans la mesure où il contient t_{16} et pas t_{26} . Cependant le facteur qui contient t_{16} est multiplié par un terme qui est lui même une relation de redondance analytique. Nous nous trouvons dans le cas présenté au *chapitre 3 - section 3.5.3.3 - Analyse 4* : le résidu g n'est pas sensible à une défaillance sur t_{16} .

Séparation des autres couples de pannes

Pour les autres couples de pannes indiscernables, on retrouve exactement le même problème que pour (t_{16}/t_{26}) . On ne peut distinguer une panne d'une autre à l'intérieur d'un de ces couples.

Conclusion

Sur cette application telle qu'elle a été instrumentée, il reste des couples de pannes indiscernables. Selon les objectifs de surveillance fixés, on pourra se contenter de cet état, ou alors modifier l'instrumentation.

5.2.6 Conclusion

Nous avons illustré nos propos précédents des chapitres 3 et 4 sur cette application de six échangeurs thermiques.

Nous avons vu dans un premier temps comment une analyse structurelle d'un système d'équations pouvait faciliter la recherche d'une Base de Groëbner d'un grand système d'équations. Rappelons ici que sur cette application MAPLE V n'est pas capable de déterminer directement la Base de Groëbner du système initial, mais qu'en décomposant le problème il arrive au même résultat (voir Chapitre 4)

Ensuite nous nous sommes intéressés à l'analyse de sensibilité des 18 résidus obtenus. Nous avons construit les matrices des signatures de pannes théorique et réelle (après simulation). 23 pannes peuvent être détectées et isolées sur les 28 pannes possibles. Les autres peuvent être détectées mais sont indiscernables deux à deux. Nous avons alors entrepris une tentative de structuration des résidus afin de différencier ces pannes ; mais l'implantation actuelle de l'instrumentation est telle que cette différenciation est impossible.

Nous avons rapidement considéré le processus de prise de décision sur nos résidus polynomiaux. Des décisions peuvent être prises lorsque le résidu dépasse nettement un seuil donné, mais nous sommes incapables d'établir des taux de fausses alarmes ou de non détection de façon statistique. D'où l'intérêt de recherches plus approfondies dans le domaine de la prise de décision statistique. [Zhang 97]

Après avoir illustré nos propos sur un système statique, nous allons maintenant nous intéresser à un système dynamique discret.

5.3 APPLICATION A UN SYSTEME DYNAMIQUE DE GREEMENT HYDRAULIQUE

Nous allons développer notre méthode d'Espace de Parité Polynomiale sur un exemple traité par ailleurs dans [Yu 96]. Nous ne détaillerons pas la méthode de Yu, dans la mesure où elle est basée sur des observateurs, notion que nous n'avons pas explicitée dans cette thèse. Le lecteur voudra bien se référer à l'article de Yu dans la revue Automatica pour une éventuelle comparaison entre les deux méthodes.

Le modèle fourni est valable autour d'un point de fonctionnement donné. Nous utiliserons les mêmes notations que l'article de [Yu 96] pour ce qui suit.

5.3.1 Le système

On considère un modèle bilinéaire à temps discret de la forme suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A^0 \cdot x_k + B \cdot u_k + \sum_{i=1}^h A^i \cdot u_k(i) \cdot x_k + E \cdot d_k + G \cdot f_a(k) \\ y_k = C \cdot x_k + Q \cdot f_s(k) \end{cases} \quad (5-1)$$

où $x_k \in \mathcal{R}^n$, $u_k \in \mathcal{R}^m$ et $y_k \in \mathcal{R}^p$ sont respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie. h est le nombre de termes bilinéaires et les valeurs $u_k(i)$, ($i=1 \dots h$) sont les composantes de u_k . Mais aussi $d_k \in \mathcal{R}^l$, $f_a(k) \in \mathcal{R}^q$ et $f_s(k) \in \mathcal{R}^g$ représentent respectivement le vecteur des entrées inconnues, le vecteur des défauts système et actionneurs et le vecteur des défauts capteurs. Les matrices A^0, A^i, B, C, E, G et Q sont des matrices constantes aux dimensions adéquates. On supposera que les matrices C, E, G et Q sont de rang plein.

Un modèle de la forme (5-1) a été identifié par Yu autour d'un point de fonctionnement pour l'application. Les matrices correspondantes de ce modèle sont :

$$\begin{aligned} A^0 &= \begin{bmatrix} 0.3679 & 0 & 0 & -0.2387 \\ 77.0803 & 0.7274 & -0.0638 & -20.1665 \\ 361.1734 & 6.6764 & 0.6476 & -59.0429 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6065 \end{bmatrix} & A^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4065 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6084 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} -0.0774 & 0 \\ -3.8964 & 0.3111 \\ -8.0691 & -7.8472 \\ 0.3935 & 0 \end{bmatrix} & E &= \begin{bmatrix} 0 \\ -3.0356 \\ -11.3864 \\ 0 \end{bmatrix} & Q &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & G &= 0 \end{aligned} \quad (5-2)$$

Les entrées, états et sorties sont définis en temps continu respectivement par :

$$u(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ Pp(t) \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} Xs(t) \\ Pm(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ i(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} Xs(t) \\ Pm(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

A titre indicatif $i(t)$ est un courant, $\theta(t)$ une position angulaire, $Xs(t)$ un déplacement, $v(t)$ une tension, $Pm(t)$ et $Pp(t)$ des pressions. Pour plus de précision voir [Yu 95b].

5.3.2 Conception des résidus

Le système est bilinéaire et peut donc être soumis à notre méthode d'Espace de Parité Polynomial. Nous écrivons les sorties sur une fenêtre de taille 3. avec la notation $Pp=Pp(t)$, $v=v(t)$, $y2k = y2(t)$, $y2k1 = y2(t+1)$... Si nous avons choisi ici une fenêtre de taille 3, c'est parce qu'une fenêtre de taille 2 ne permet d'obtenir qu'une seule RRAP, suffisante pour la détection mais pas pour une éventuelle isolation des défaillances sur $y2$ et $y3$.

Le logiciel utilisé GB (Faugère, Polytechnique, Jussieu) n'accepte pour le moment que les coefficients entiers. Comme nous travaillons avec des nombres rationnels nous avons dû réduire au même dénominateur puis simplifier chaque équation. Les relations obtenues sont les suivantes :

```
e1: poly := 10000*Xsk1-3679*Xs+2387*ii+774*v ;
e2: poly := 10000*Pmk1-770803*Xs-7274*Pm+638*O+201665*ii+38964*v-3111*Pp-4065*v*Pm+30356*d ;
e3: poly := 10000*Ok1-3611734*Xs-66764*Pm-6476*O+590429*ii+80691*v+78472*Pp-
16084*v*Pm+113864*d ;
e4: poly := 10000*iik1-6065*ii-3935*v ;

r1: poly := y1k-Xs ;
r2: poly := y2k-Pm ;
r3: poly := y3k-O ;

r4: poly := 10000*y1k1-3679*Xs+2387*ii+774*v ;
r5: poly := 10000*y2k1-770803*Xs-7274*Pm+638*O+201665*ii+38964*v-3111*Pp-4065*v*Pm+30356*d ;
r6: poly := 10000*y3k1-3611734*Xs-66764*Pm-6476*O+590429*ii+80691*v+78472*Pp-
16084*v*Pm+113864*d ;

r7: poly := 10000*y1k2-3679*Xsk1+2387*iik1+774*vk1 ;
r8: poly := 10000*y2k2-770803*Xsk1-7274*Pmk1+638*Ok1+201665*iik1+38964*vk1-3111*Ppk1-
4065*vk1*Pmk1+30356*dk1 ;
r9: poly := 10000*y3k2-3611734*Xsk1-66764*Pmk1-6476*Ok1+590429*iik1+80691*vk1+78472*Ppk1-
16084*vk1*Pmk1+113864*dk1 ;
```

Figure 5-9 : Modèle étendu sur une fenêtre temporelle de taille 2.

La base de Groebner recherchée est obtenue pour l'ordre lexicographique suivant sur les variables :

Xsk1>Pmk1>Ok1>iik1>dk1>Xs>Pm>O>ii>d>v>Pp>vk1>Ppk1>y1k>y2k>y3k>y1k1>y2k1>y3k1>y1k2>y2k2>y3k2

variables inconnues : Xsk1, Pmk1, Ok1, iik1, dk1, Xs, Pm, O, ii, d

variables connues : v, Pp, vk1, Ppk1, y1k, y2k, y3k, y1k1, y2k1, y3k1, y1k2, y2k2, y3k2

Figure 5-10 : Ordre lexicographique sur les variables

Remarque : A des fins d'isolation des pannes il aurait été plus judicieux de choisir un ordre groupant les différentes valeurs temporelles de y1, y2 et y3. Cela a été fait mais ne conduit pas à ce que l'on aurait espéré, à savoir deux RRA sensibles différemment à y2 et y3, pour pouvoir différencier les deux défauts.

La Base de Groebner obtenue se compose de 13 polynômes dont trois RRAP :

G1 = Xsk1 - y1k1,
G2 = Pmk1 - y2k1,
G3 = Ok1 - y3k1,
G4 = 2387iik1 + 774vk1 -3679y1k1 + 10000y1k2,
G5 = 1954933288dk1 + 1939040547vk1 -28415002308Ppk1 + 275978689641y1k1 + 11888849588y2k1 + 2817162964y3k1 -272092250000y1k2 + 12384680000y2k2 -3130050000y3k2 ,
G6 = Xs - y1k,
G7 = Pm - y2k,
G8 = -y3k,
G9 = 2243080609ii -1198152000vk1 -6911255351y1k + 24480782000y1k1 -15480000000y1k2,
G10 = 180523585000764236d + 40105268551656000vk1 y2k + 262824765568146000vk1 + 115616830930795194y1k y2k -2178176942573931453y1k -504891132774336000y2k y1k1 + 518155924440000000y2k y1k2 -51360485142294482y2k + 1973798781889550y3k - 8190208136736421000y1k1 + 51770300455720000y2k1 + 2052418757235000y3k1 + 3395668805790000000y1k2,
G11 = 939707v + 1548000vk1 + 4462627y1k -19488000y1k1 + 20000000y1k2,
G12 = 69747748750295273Pp + 1066060666188000vk1 y2k + 14826867158106000vk1 + 3073275912511987y1k y2k -712716320824577013y1k -13420794743328000y2k y1k1 + 13773393620000000y2k y1k2 -30547730959256364y2k -6862569722733284y3k + 351465688366629000y1k1 -29023423916270000y2k1 + 7737608518955000y3k1 + 191561591190000000y1k2,
G13 = 1377339362vk1 y2k1 + 19156159119vk1 -148445736278Ppk1 + 1607862274677y1k1 + 65015437704y2k1 + 14605764824y3k1 -1145300190000y1k2 + 61771220000y2k2 -16468130000y3k2

Figure 5-11 : Base de Groebner pour l'ordre donné.

Les trois RRAP sont G11, G12 et G13 :

RRA1 = 939707v + 1548000vk1 + 4462627y1k -19488000y1k1 + 20000000y1k2,
RRA2 = 69747748750295273Pp + 1066060666188000vk1 y2k + 14826867158106000vk1 + 3073275912511987y1k y2k -712716320824577013y1k -13420794743328000y2k y1k1 + 13773393620000000y2k y1k2 -30547730959256364y2k -6862569722733284y3k + 351465688366629000y1k1 -29023423916270000y2k1 + 7737608518955000y3k1 + 191561591190000000y1k2,
RRA3 = 1377339362vk1 y2k1 + 19156159119vk1 -148445736278Ppk1 + 1607862274677y1k1 + 65015437704y2k1 + 14605764824y3k1 -1145300190000y1k2 + 61771220000y2k2 -16468130000y3k2

Figure 5-12 : Base des Relations de Redondance Analytiques Polynomiales.

Nous obtenons ainsi trois résidus dont nous allons pouvoir étudier les propriétés. Nous repassons ici à une notation temporelle, les résidus sont évalués à l'instant $(t+2)$ en fonction des mesures et entrées allant de l'instant t à l'instant $(t+2)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Résidu 1 } (t+2) &= \\
 &939707 * v(t) \\
 &+ 1548000 * v(t+1) \\
 &+ 4462627 * y1(t) \\
 &- 19488000 * y1(t+1) \\
 &+ 20000000 * y1(t+2), \\
 \\
 \text{Résidu 2 } (t+2) &= \\
 &69747748750295273 * Pp(t) \\
 &+ 1066060666188000 * v(t+1) * y2(t) \\
 &+ 14826867158106000 * v(t+1) \\
 &+ 3073275912511987 * y1(t) * y2(t) \\
 &- 712716320824577013 * y1(t) \\
 &- 13420794743328000 * y2(t) * y1(t+1) \\
 &+ 13773393620000000 * y2(t) * y1(t+2) \\
 &- 30547730959256364 * y2(t) \\
 &- 6862569722733284 * y3(t) \\
 &+ 351465688366629000 * y1(t+1) \\
 &- 29023423916270000 * y2(t+1) \\
 &+ 7737608518955000 * y3(t+1) \\
 &+ 191561591190000000 * y1(t+2), \\
 \\
 \text{Résidu 3 } (t+2) &= \\
 &1377339362 * v(t+1) * y2(t+1) \\
 &+ 19156159119 * v(t+1) \\
 &- 148445736278 * Pp(t+1) \\
 &+ 1607862274677 * y1(t+1) \\
 &+ 65015437704 * y2(t+1) \\
 &+ 14605764824 * y3(t+1) \\
 &- 1145300190000 * y1(t+2) \\
 &+ 61771220000 * y2(t+2) \\
 &- 16468130000 * y3(t+2)
 \end{aligned}$$

Figure 5-13 : Forme de calcul des résidus.

Rappelons encore une fois que ces RRAP sont valables autour du point de fonctionnement spécifique puisqu'elles dérivent d'un modèle valable en ce point uniquement.

5.3.3 Etude de sensibilité

5.3.3.1 Obtention de la forme d'évaluation

Nous nous intéressons dans le cadre de cette comparaison, aux défauts capteurs sur $y2$ et $y3$ que nous allons modéliser par les variables $Dy2$ et $Dy3$ qui vont intervenir en pannes additives sur $y2$ et $y3$. Pour obtenir la forme d'évaluation des résidus, il faudrait modéliser ces pannes sur le modèle initial (5-1) et recommencer la procédure précédemment décrite. Cependant comme il s'agit en l'occurrence d'un simple changement de variable - de $y2$ en $(y2+Dy2)$ et

y_3 en $(y_3 + Dy_3)$, ce changement peut être réalisé directement sur les formes de calcul des résidus (Figure 5-13).

Nous obtenons après substitution et simplification de la forme de calcul - qui elle est toujours nulle, les formes d'évaluations suivantes :

$\text{EvalRésidu 1 (t+2)} =$ $0,$
$\text{EvalRésidu 2 (t+2)} =$ $1066060666188000 * v(t+1) * Dy_2(t)$ $+ 3073275912511987 * y_1(t) * Dy_2(t)$ $- 13420794743328000 * Dy_2(t) * y_1(t+1)$ $+ 13773393620000000 * Dy_2(t) * y_1(t+2)$ $- 30547730959256364 * Dy_2(t)$ $- 6862569722733284 * Dy_3(t)$ $- 29023423916270000 * Dy_2(t+1)$ $+ 7737608518955000 * Dy_3(t+1),$
$\text{EvalRésidu 3 (t+2)} =$ $1377339362 * v(t+1) * Dy_2(t+1)$ $+ 65015437704 * Dy_2(t+1)$ $+ 14605764824 * Dy_3(t+1)$ $+ 61771220000 * Dy_2(t+2)$ $- 16468130000 * Dy_3(t+2)$

Figure 5-14 : Forme d'évaluation des résidus.

5.3.3.2 Analyse

Nous pouvons tirer quelques conclusions des formes d'évaluation des résidus, que nous illustrerons ensuite par des simulations numériques.

Notons que le *résidu 1* ne nous est d'aucune utilité pour la détection des défaillances sur y_2 et y_3 puisqu'il n'y est pas sensible structurellement et donc pas sensible du tout. Rappelons ici que la sensibilité structurelle est une condition nécessaire de sensibilité réelle des résidus aux défaillances données. Le résidu 1 est sensible à une défaillance sur y_1 mais nous ne nous y intéresserons pas dans le cadre de cette comparaison.

Notons ensuite une *sensibilité structurelle* des *résidus 2 et 3* aux défaillances sur y_2 et y_3 , en effet les variables Dy_2 et Dy_3 interviennent dans la forme d'évaluation du résidu.

Notons que la *sensibilité des résidus 2 et 3* à une défaillance sur y_2 dépend de l'entrée v et de la sortie y_1 . La sensibilité des résidus est donc conditionnée au point de fonctionnement du système. Notons cependant que, dans le résidu 3, le coefficient devant le monôme contenant v et Dy_2 est 50 fois moindre que celui des autres monômes en Dy_2 uniquement, ce qui laisse supposer que pour une entrée relativement faible la sensibilité du résidu 3 n'est fonction que de Dy_2 .

Notons enfin que la sensibilité des résidus à une défaillance sur y_3 ne dépend que de Dy_3 .

5.3.3 Structuration

Rappelons ici que nous voulons détecter, voire isoler, l'occurrence d'une défaillance sur y_2 et y_3 (sous l'hypothèse d'une panne unique simultanée). Nous avons vu précédemment que nous possédons au moins deux résidus permettant de détecter l'occurrence de ces deux défaillances. Quant à l'isolation de ces deux défaillances, nous ne sommes pas parvenu à générer un résidu sensible à l'un et insensible à l'autre, n'améliorant pas sur ce point les performances de [Yu 96].

5.3.4 Simulations

Notons que les sorties qui nous intéressent sont $y_2 = P_m$ et $y_3 = O$.

5.3.4.1 Simulation n°1

```
Défaut :          aucun
bruit :          0.005
entrées :        v(t) = 0.5*sin(2*pi*t/200)
                  Pp = ones(n,1)*.5;
entrée inconnue : d(t) = 0.5*sin(2*pi*t/100);
```

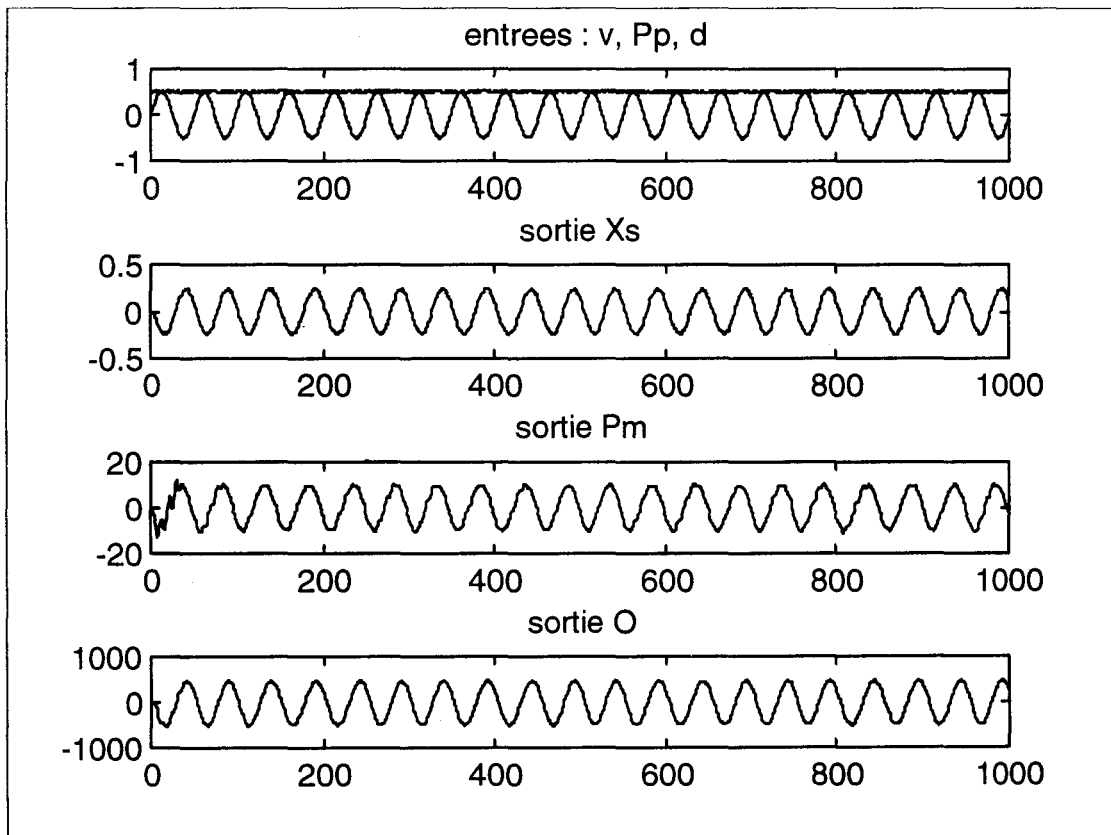


Figure 5-15 : Entrées / sorties du système en fonctionnement normal.

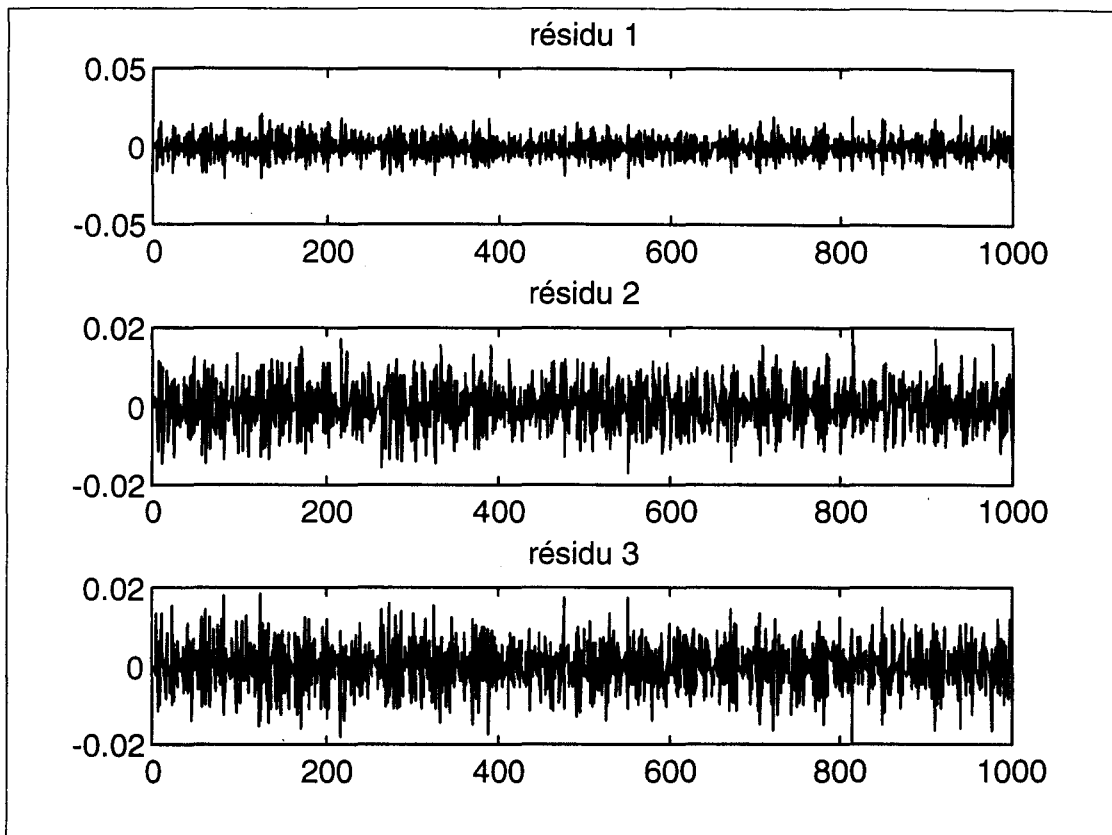


Figure 5-16 : Les trois résidus en fonctionnement normal.

Nos trois résidus sont bien nuls en fonctionnement normal.

5.3.4.2 Simulation n°2

```
Défauts : dy2=[zeros(200,1); ones(200,1); zeros(600,1)]*0.4;
          dy3=[zeros(600,1); ones(200,1); zeros(200,1)]*50;
bruit : 0.005
entrées : v(t) = 0.5*sin(2*pi*t/200)
          Pp =ones(n,1)*.5;
entrée inconnue : d(t) = 0.5*sin(2*pi*t/100);
```

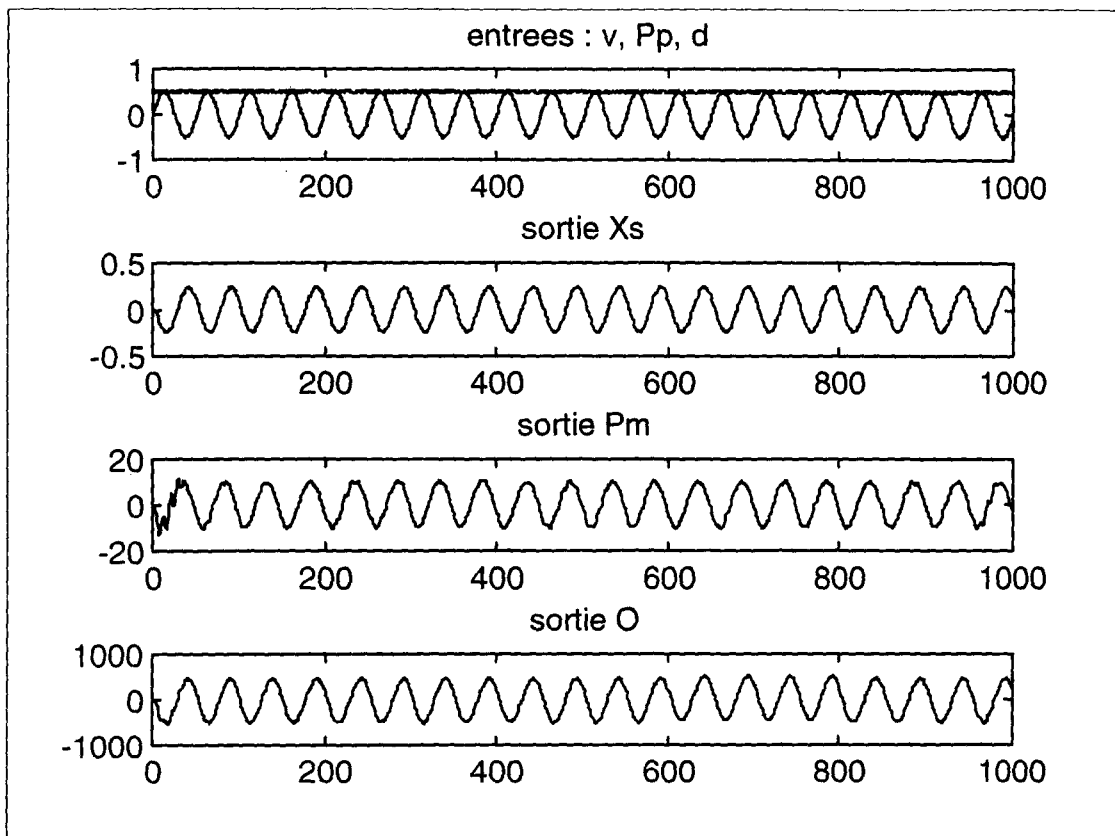


Figure 5-17 : Entrées / Sorties du système avec défaut sur Pm et O.

Les défaillances sont des biais sur les capteurs d'environ 5 % du signal mesuré pour Pm et de 10 % pour O.

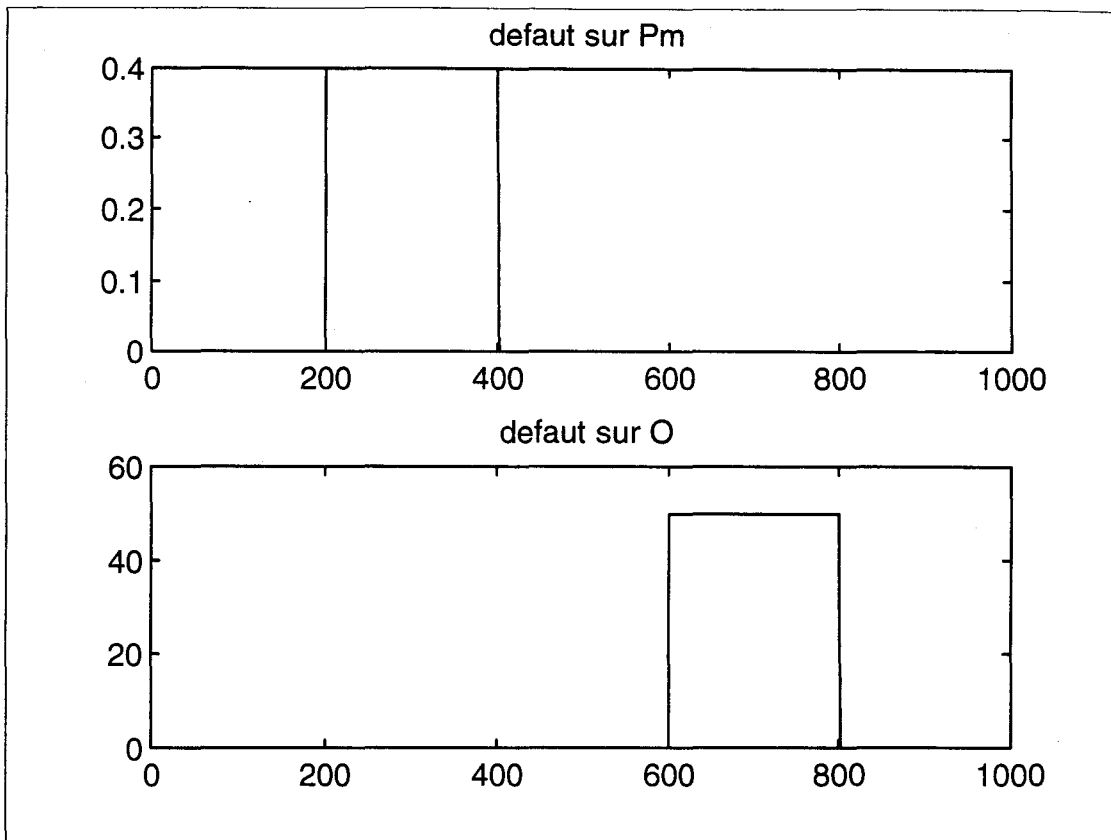


Figure 5-18 : Biais sur les capteurs mesurant Pm et O.

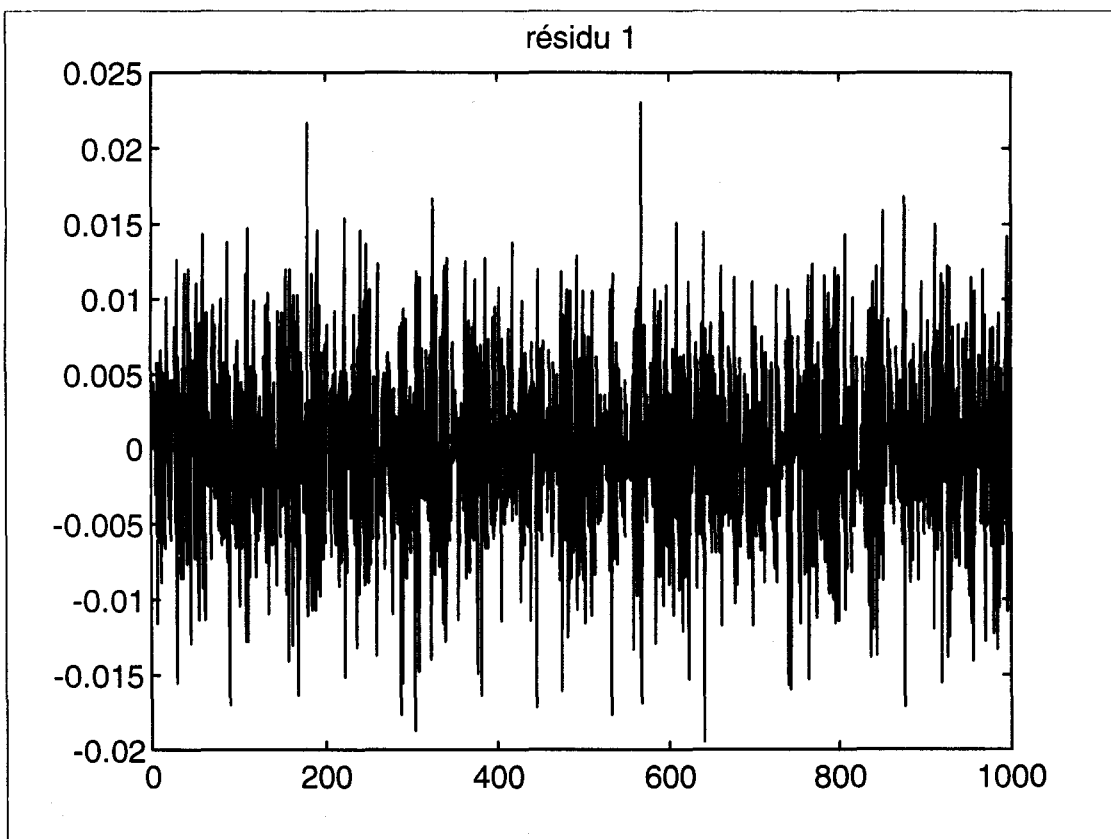


Figure 5-19 : Résidu 1 insensible aux défaillances.

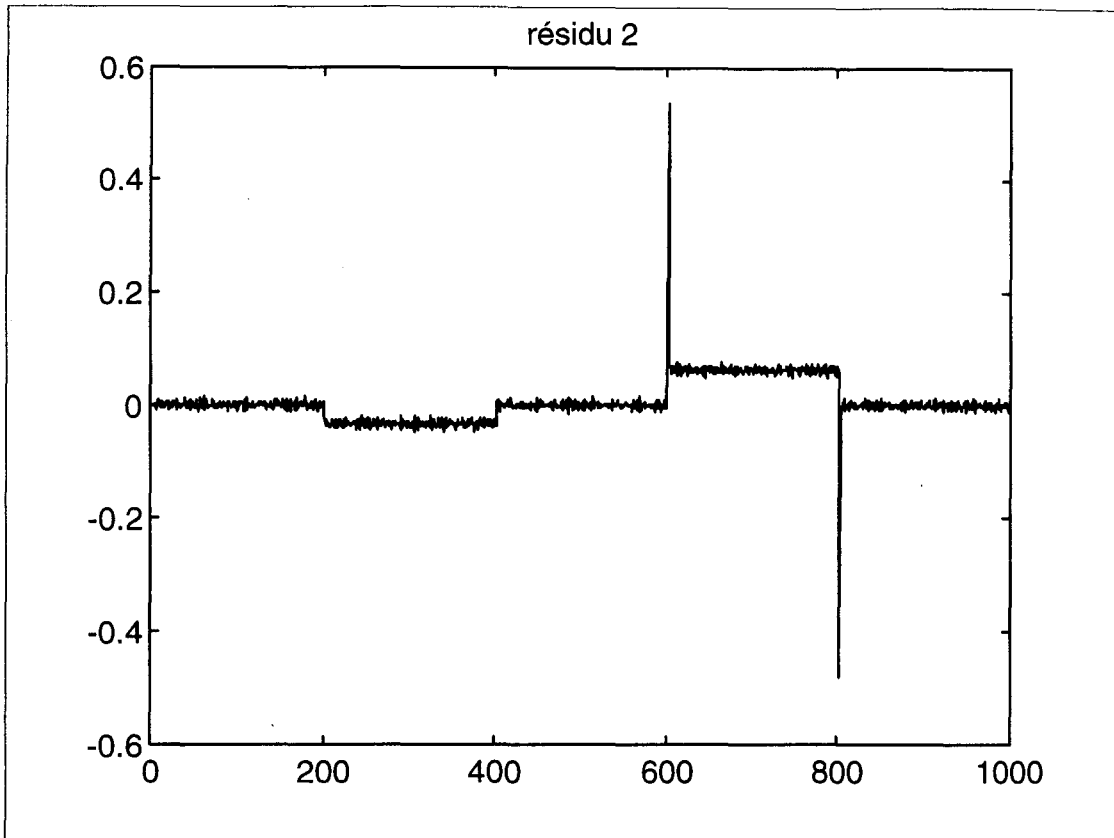


Figure 5-20 : Résidu 2 sensible aux deux défaillances.

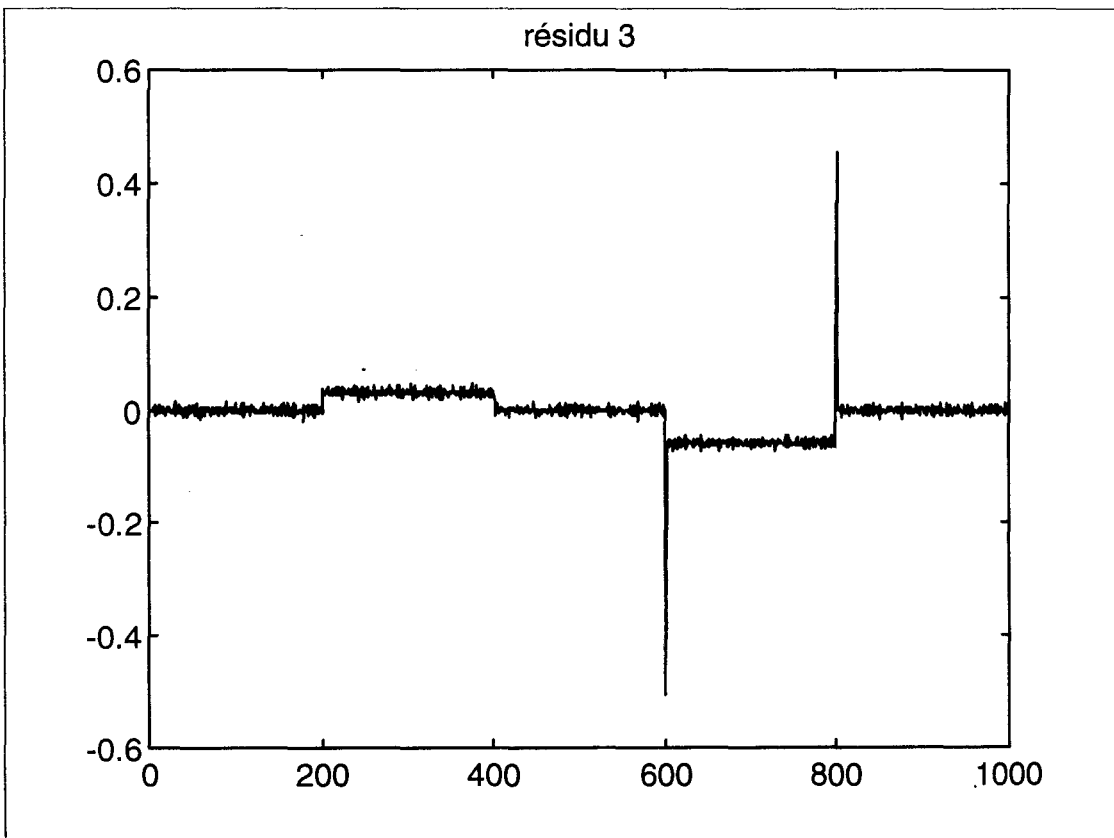


Figure 5-21 : Résidu 3 sensible aux deux défaillances.

Les résidus 2 et 3 sont bien sensibles en pratique aux défaillances données sur y_2 et y_3 . Sachant que le défaut est un biais d'amplitude constante, il est possible de retrouver l'amplitude de ce biais en considérant les réponses des résidus.

5.3.5 Conclusion

Les résultats obtenus sont qualitativement les mêmes que ceux de [Yu 96]. Ainsi nous sommes capables de détecter les deux défaillances mais pas de les isoler.

Notons que notre procédure de prise de décision, tout comme celle de Yu, consiste en un seuillage des résidus.

Nous avons évoqué au cours de cette thèse, une méthode d'espace de parité bilinéaire où la matrice de projection des inconnues était recalculée à chaque instant. Il ne s'agit pas de la méthode utilisée pour cette comparaison, mais d'autres travaux de [Yu 94, 95].

CONCLUSION & PERSPECTIVES

Conclusion

Dans l'état de l'art, présenté au *Chapitre 1*, nous avons vu que les méthodes de génération de résidus et d'étude de sensibilité étaient largement développées dans le cas des systèmes linéaires. Pour les systèmes non linéaires, qui font l'objet de nos préoccupations, deux voies sont ouvertes : soit le problème est ramené à un problème linéaire, soit la méthode se réduit à l'étude d'une classe limitée de systèmes présentant les propriétés adéquates inhérentes à la méthode. C'est vers cette deuxième voie que nous nous sommes dirigés, pour développer une méthode de génération de résidus dans le cas des systèmes modélisés par des systèmes d'équations polynomiales. Notons que les modèles polynomiaux comprennent les modèles linéaires et multi-linéaires.

Au *Chapitre 2*, nous avons ensuite développé le principe qui est la base de notre méthode de génération de résidus : l'élimination de variables de systèmes d'équations. Si le processus est bien connu pour les systèmes linéaires, il nécessitait plus ample développement pour les systèmes polynomiaux. Nous avons donc introduit quelques notions d'algèbre : les Idéaux polynomiaux, la Théorie de l'Elimination, les Bases de Groëbner, ...

Une fois ces notions introduites, nous pouvions commencer le *Chapitre 3* qui constitue notre premier apport à la surveillance de systèmes polynomiaux. Dans un premier temps nous avons présenté les différents modèles que nous allions pouvoir traiter par cette méthode : modèle polynomial statique, dynamique, à temps discret, à temps continu, modèle en fonctionnement normal, modèle d'incertitudes et d'influence des défaillances...

Puis nous avons présenté la méthode d'Espace de Parité Polynomiale telle que nous l'avons développée et comprenant la recherche des Relations de Redondance Polynomiales du système de façon exhaustive, la recherche des formes de calcul et d'évaluation des résidus polynomiaux.

Ensuite une étude de la sensibilité et de la robustesse de ces résidus a été réalisée. Nous avons montré comment cette méthode permettait d'obtenir des résidus robustes à des entrées inconnues, et l'avantage qu'elle présentait face aux méthodes linéaires classiques pour trouver des résidus non linéaires polynomiaux.

Nous avons développé l'analyse de la sensibilité des résidus polynomiaux, qui est un point délicat de l'étude des résidus non linéaires. Grâce à l'outil algébrique, nous avons pu systématiser l'analyse de cette sensibilité. Ainsi nous avons défini les notions de *sensibilité structurelle* -condition nécessaire à la sensibilité du résidu vis à vis d'une défaillance donnée, *sensibilité inconditionnelle* où le résidu est toujours sensible à la défaillance, de *sensibilité faiblement conditionnelle* où seule des valeurs particulières de la défaillance peuvent annuler la sensibilité du résidu à cette défaillance. Nous avons isolé les cas où la sensibilité pouvait être évaluée en ligne, où l'hypothèse de panne unique était indispensable pour assurer une sensibilité indépendante des entrées/sorties, où une annulation systématique de certaines composantes du résidu amenait à une nouvelle analyse de sensibilité sur un résidu réduit... Ces

différents résultats constituent un schéma d'analyse systématique de sensibilité des résidus polynomiaux et sont repris sous forme d'arbre d'analyse.

Enfin nous avons introduit la notion de résidus structurés. En effet, les Bases de Groebner sont un outil particulièrement intéressant dans la recherche de structuration d'un ensemble de résidus polynomiaux. Nous pouvons ainsi, considérant une structure cible donnée, déterminer s'il existe ou non des résidus possédant cette structure qui soient issus du système initialement considéré. De plus, nous pouvons trouver ces résidus, quand ils existent, par le jeu des différents ordres monomiaux sur les variables qui les composent.

Le *Chapitre 4* constitue notre deuxième apport à la surveillance des systèmes polynomiaux, et plus particulièrement des grands systèmes d'équations. Dans un premier temps, nous y avons introduit la notion d'ordre naturel d'élimination, concept intrinsèquement lié aux équations initiales du système. Puis nous avons établi une condition nécessaire d'existence de relations de redondance analytique polynomiales issue de l'étude structurelle du système, et basé sur sa triangularisation. Enfin nous proposons une méthode de partitionnement du système d'équations permettant de décomposer le calcul des Bases de Groëbner, méthode illustrée par un exemple sur un « grand » système d'équations.

Et perspectives ...

Plusieurs points nous semblent susceptibles d'être approfondis. Le premier concerne les liens qui semblent intéressants entre *l'analyse structurelle* et le calcul formel - dont le calcul des Bases de Groëbner. Une formalisation est nécessaire concernant l'apport de l'analyse structurelle quant au choix de l'ordre des variables pour l'élimination, quant à la décomposition du système d'équations dans la recherche d'une Base de Groëbner globale, quant à la recherche de conditions nécessaires... Et d'une façon plus générale, il faudrait explorer d'une façon plus approfondie les apports que peut faire l'analyse structurelle au calcul formel, et réciproquement. Cela ouvre des perspectives intéressantes de collaborations pluridisciplinaires.

Un deuxième point intéressant concerne *l'écriture du modèle polynomial*. Ainsi, nous avons vu qu'une condition nécessaire d'existence de relations de redondance analytique polynomiales est que la matrice d'incidence structurelle du modèle ne soit pas triangulaire. Cette condition n'est pas un invariant de l'idéal associé au modèle, mais elle est intrinsèquement liée aux équations initiales du modèle. Autrement dit, parmi les différents systèmes d'équations polynomiales décrivant le système, certains nous permettent de conclure et d'autres pas. Il y a là matière à réflexion...

Un dernier point concerne les *conditions d'existence de résidus structurés*. Le développement préalable des deux perspectives précédentes semble nécessaire avant d'aborder le sujet. Mais l'intérêt de trouver de telles conditions est de première importance dans la phase de conception du système de surveillance.

Annexe 1 : COMPLEMENTS MATHEMATIQUES

Cette Annexe présente des notions complémentaires à celles exposées dans le Chapitre 2. Lorsque ces dernières sont utilisées, leur référence est rappelée.

A1-1. DEFINITIONS & THEOREMES

définition 1.

Un corps est un ensemble K muni de deux opérations binaires « \cdot » et « $+$ » définies sur K , pour lesquelles les conditions suivantes sont satisfaites :

1. « \cdot » et « $+$ » sont associatives, commutatives,
2. « \cdot » est distributive par rapport à « $+$ »,
3. « \cdot » et « $+$ » ont chacune un élément neutre,
4. Tout élément de K a un inverse pour « $+$ »,
5. Tout élément non nul de K a un inverse pour « \cdot ».

définition 2.

Un anneau commutatif est un ensemble A muni de deux opérations binaires « \cdot » et « $+$ » définies sur A , pour lesquelles les conditions 1., 2., 3., 4. précédentes sont satisfaites.

$K[x_1, x_2, \dots, x_n]$, l'ensemble des polynômes en (x_1, x_2, \dots, x_n) à coefficient dans le corps K , est un anneau polynomial.

définition 3.

Un corps K est algébriquement clos si tout polynôme non constant de $K[x]$ a une racine dans K .

Remarque : \mathfrak{R} n'est pas algébriquement clos. C l'est.

définition 4.

Un monôme en $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un produit de la forme :

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

où les exposants α_i sont des entiers positifs. Notation : $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$,
 $\underline{x}^{\underline{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$

Le degré total de ce monôme est la somme $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

définition 5.

Soit K un corps, et soient f_1, \dots, f_s des polynômes de $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$. On pose :
 $V(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq s\}$, qu'on appellera *variété affine* définie par f_1, \dots, f_s .

Remarque : La variété affine est l'ensemble des solutions du système d'équations
 $f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_s(x_1, \dots, x_n) = 0$.

définition 6.

Soit $I \subset K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ un idéal. On note par $V(I)$ l'ensemble :
 $V(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ pour tout } f \in I\}$

proposition 7.

$V(I)$ est une variété affine. En particulier, si $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ alors $V(I) = V(f_1, \dots, f_s)$.

théorème 8.(Théorème de Fermeture)

Soit $V = V(f_1, \dots, f_s) \subset K^n$, K algébriquement clos, et soit I_k le $k^{\text{ième}}$ idéal d'élimination de $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$. Alors :

- (1) $V(I_k)$ est la plus petite variété affine contenant $\Pi_k(V) \subset K^{n-k}$.
- (2) Quand $V \neq \emptyset$, il existe une variété affine $W \subset V(I_k)$ telle que $V(I_k) - W \subset \Pi_k(V)$.

définition 9.

L'*ordre lexicographique* est un ordre monomial défini de la façon suivante. Soient,
 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$.

$\alpha >_{lex} \beta$ si, dans le vecteur différence $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$, le terme non nul le plus à gauche est positif. On écrira $x^\alpha >_{lex} x^\beta$ si $\alpha >_{lex} \beta$.

Exemple : $(1,2,0) >_{lex} (0,3,4)$ ou $x_1 \cdot x_2^2 >_{lex} x_2^3 \cdot x_3^4$, car $\alpha - \beta = (1, -1, -4)$
 $(3,2,4) >_{lex} (3,2,1)$ car $\alpha - \beta = (0,0,3)$

définition 10.

L'ordre total lexicographique (*graded lex order*) est un ordre monomial défini de la façon suivante. Soient, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$.

On dit que $\alpha >_{grlex} \beta$ si

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i, \text{ ou } |\alpha| = |\beta| \text{ et } \alpha >_{lex} \beta$$

Exemple : $(1,2,3) >_{grlex} (3,2,0)$ car $|(1,2,3)| = 6 > |(3,2,0)| = 5$
 $(1,2,4) >_{grlex} (1,1,5)$ car $|(1,2,4)| = |(1,1,5)|$ et $(1,2,4) >_{lex} (1,1,5)$

définition 11.

L'ordre total lexicographique inverse (*graded reverse lex order*) est un ordre monomial défini de la façon suivante. Soient, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$.

On dit que $\alpha >_{grvlex} \beta$ si

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i, \text{ ou}$$

$|\alpha| = |\beta|$ et, dans $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$, le terme non nul le plus à droite est négatif.

Exemple : $(4,7,1) >_{grvlex} (4,2,3)$ car $|(4,7,1)| = 12 > |(4,2,3)| = 9$
 $(1,5,2) >_{grvlex} (4,1,3)$ car $|(1,5,2)| = |(4,1,3)|$ et $\alpha - \beta = (-3,4,-1)$

définition 12.

Soit un entier fixé $1 \leq k \leq n$. Un ordre monomial $>$ sur $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ est un *ordre monomial de type k-élimination* si tout monôme contenant un des x_1, \dots, x_k est plus grand que tous les monômes de $K[x_{k+1}, \dots, x_n]$.

définition 13.

L'ordre k -élimination de BAYER et STILLMAN (1987) est un ordre monomial défini de la façon suivante. Soit un entier fixé $1 \leq k \leq n$. Soient, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$.

$\alpha >_k \beta$ si

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i > \sum_{i=1}^k \beta_i, \text{ ou}$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = \sum_{i=1}^k \beta_i \text{ et } \alpha >_{\text{grvlex}} \beta$$

Exemple : Sur $K[t, x, y]$, $(2,1,0) >_1 (1,1,0) >_1 (0,1,2)$ ou $t^2 \cdot x >_1 t \cdot x >_1 x \cdot y^2$

définition 14.

Soit $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \cdot x^{\alpha}$ un polynôme non nul de $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ et soit $>$ un ordre monomial.

(1) le *multidegré* de f est : $\text{multideg}(f) = \max_{\alpha}(\alpha \in \mathbb{Z}^{n+}, a_{\alpha} \neq 0)$

(2) le *coefficient dominant* de f est : $LC(f) = a_{\text{multideg}(f)} \in K$.

(3) le *monôme dominant* de f est : $LM(f) = x^{\text{multideg}(f)}$.

(4) le *terme dominant* de f est : $LT(f) = LC(f) \cdot LM(f)$.

définition 15.

Soit $I \subset K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ un idéal autre que $\{0\}$.

On note $LT(I)$ l'ensemble des termes dominants des éléments de I . Ainsi,

$$LT(I) = \left\{ c \cdot x^{\alpha}, \text{ tels que } \exists f \in I, LT(f) = c \cdot x^{\alpha} \right\}$$

On note $\langle LT(I) \rangle$ l'idéal généré par les éléments de $LT(I)$.

définition 16.

Un idéal $I \subset \mathfrak{R}[x_1, \dots, x_n]$ est *premier* si quand $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ et $f \cdot g \in I$ alors soit $f \in I$ soit $g \in I$.

définition 17.

Un polynôme $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ est *irréductible* sur K si f est non constant et n'est pas le produit de deux polynômes non constants de $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

théorème 18.

Tout polynôme non constant $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ peut être écrit sous forme d'un produit $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_r$ de facteurs irréductibles sur K . De plus, si $f = g_1 \cdot g_2 \cdots g_s$ est une autre factorisation en facteurs irréductibles sur K , alors $r = s$ et les g_i peuvent être permutés de telle sorte que chaque f_i soit un multiple constant de g_i .

définition 19.

Un anneau commutatif R est un *domaine intégral* si pour tout $a, b \in \mathfrak{R}$ et $a \cdot b = 0$, alors soit $a = 0$ ou $b = 0$.

théorème 20. (algorithme de division dans $K[x_1, \dots, x_n]$)

Soit un ordre monomial $>$ sur $Z_{\geq 0}^n$, et soit $F = (f_1, \dots, f_s)$ un s -uplet ordonné de polynômes de $K[x_1, \dots, x_n]$. Alors chaque $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ peut être écrit sous la forme :

$$f = a_1 \cdot f_1 + \cdots + a_s \cdot f_s + r$$

où $a_i, r \in K[x_1, \dots, x_n]$,

et soit $r = 0$, soit r est une combinaison linéaire, à coefficient dans K , de monômes dont aucun n'est divisible par un des $LT(f_i)$.

On appellera r le *reste* de la division de f par F .

De plus, si $a_i \cdot f_i \neq 0$ alors on a :

$$\text{multi deg}(f) \geq \text{multi deg}(a_i \cdot f_i)$$

A1-2. CONSTRUCTION D'UNE BASE DE GROEBNER

définition 21.

Nous noterons \bar{f}^F le reste de la division de f par le s-uplet ordonné $F = (f_1, \dots, f_s)$. Si F est une base de Groëbner de $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$, alors on peut considérer F comme un ensemble sans ordre particulier.

Définition 22.

Soient $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ des polynômes non nuls.

1. Si $\text{multideg}(f) = \alpha$ et $\text{multideg}(g) = \beta$, alors soit $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ où $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i), \forall i$. On appelle x^γ le *plus petit commun multiple* de $\text{LM}(f)$ et de $\text{LM}(g)$, noté $x^\gamma = \text{LCM}(\text{LM}(f), \text{LM}(g))$.

2. Le *S-polynôme* de f et g est la combinaison : $S(f, g) = \frac{x^\gamma}{\text{LT}(f)} \cdot f - \frac{x^\gamma}{\text{LT}(g)} \cdot g$

théorème 23.

Soit $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \neq \{0\}$ un idéal polynomial. Alors une base de Groëbner de I peut être construite en un nombre fini d'étapes par l'algorithme suivant :

Entrée : $F = (f_1, \dots, f_s)$

Sortie : une base de Groëbner $G = (g_1, \dots, g_t)$ de I , avec $F \subset G$.

$G := F$

Répéter

$G' := G$

Pour chaque couple $\{p, q\}, p \neq q$ *de* G' *faire*

$$S := \overline{S(p, q)}^{G'}$$

Si $S \neq 0$ *alors* $G := G \cup \{S\}$

Jusqu'à ce que $G = G'$

Remarque : Cette version de l'algorithme est clair pour la compréhension de la construction d'une base, mais n'est pas très pratique pour la programmation. Des améliorations ont été apportées, que nous ne détaillerons pas ici, mais qui se trouvent dans [COX 92].

Annexe 2 : SENSIBILITE D'UN RESIDU

Nous avons exposé au chapitre 1 section 1.3.2.2, et au chapitre 3 section 3.5.3.2, la notion de *sensibilité*, que nous allons rappeler ici afin de pouvoir approfondir le sujet - ce dont nous avons besoin au chapitre 3 section 3.6.4.3.

A2-1. RAPPEL DE DEFINITIONS

Sensibilité. Elle représente la capacité du résidu à représenter les défaillances - en s'écartant de zéro. Elle est traduite par l'implication :

$$\underline{d}(t) \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{r}(t) \neq \underline{0}$$

Le résidu doit être le plus sensible aux défaillances pour éviter les non détections.

Sensibilité structurelle. Un résidu est structurellement sensible à une défaillance quand sa forme d'évaluation contient la variable défaillance, c'est à dire quand :

$$\frac{\partial r}{\partial f} \neq 0$$

La sensibilité structurelle d'un résidu à une défaillance donnée est une condition nécessaire non suffisante de sensibilité réelle de ce résidu à cette défaillance.

Sensibilité pratique. Un résidu est sensible en pratique à une défaillance, lorsque ce fait a été établi par un jeu de simulations, cf. chapitre 3 section 3.5.3.2.

Signature d'un résidu. C'est un mot binaire qui traduit la sensibilité ou non du résidu aux diverses défaillances. On parle de *signature théorique* lorsqu'on étudie la sensibilité structurelle, et de *signature réelle* lorsque l'on étudie la sensibilité pratique.

A2-2. SENSIBILITE D'UN PRODUIT DE RESIDUS

Rappelons que le produit de N résidus est un résidu.

Le résultat que nous allons démontrer est le suivant :

Propriété (A2-1) :

Soient r_1 et r_2 deux résidus structurellement sensibles chacun à un ensemble de défaillances D_1 et D_2 respectivement. Leur produit $R = r_1 \cdot r_2$ est structurellement sensible aux défaillances communes $D_1 \cap D_2$.

Autrement formulé : la signature du produit de deux résidus r_1 et r_2 est le résultat du 'ET logique' entre les signatures respectives de r_1 et r_2 .

Ce résultat se généralise à un produit de $N \geq 2$ résidus.

Démonstration (limitée à deux résidus et trois défaillances pour être plus explicite) :

r_1 est un résidu structurellement sensible à f_1 et f_2 signifie que

$$f_1 \neq 0 \text{ ou } f_2 \neq 0 \Rightarrow r_1 \neq 0 \text{ et que } f_1 = 0 \text{ et } f_2 = 0 \Rightarrow r_1 = 0$$

Idem pour r_2 structurellement sensible à f_2 et f_3 .

Considérons le produit R des deux résidus : $R = r_1 \cdot r_2$.

- en fonctionnement normal : $f_1 = f_2 = f_3 = 0 \Rightarrow r_1 = 0$ et $r_2 = 0 \Rightarrow R = 0$, le produit R est nul en fonctionnement normal, c'est un résidu.
- en fonctionnement défaillant sur f_1 :
 $f_1 \neq 0$ et $f_2 = f_3 = 0 \Rightarrow r_1 \neq 0$ et $r_2 = 0 \Rightarrow R = 0$, R est insensible à f_1 .
- en fonctionnement défaillant sur f_3 :
 $f_3 \neq 0$ et $f_2 = f_1 = 0 \Rightarrow r_1 = 0$ et $r_2 \neq 0 \Rightarrow R = 0$, R est insensible à f_3 .
- en fonctionnement défaillant sur f_2 :
 $f_2 \neq 0$ et $f_1 = f_3 = 0 \Rightarrow r_1 \neq 0$ et $r_2 \neq 0 \Rightarrow R \neq 0$, R est sensible à f_2 .

Nous démontrons ainsi que le résidu R est sensible aux défaillances communes de r_1 et r_2 . Cette démonstration s'étend aisément pour un nombre supérieur de défaillances et de résidus.

Remarque : Nous considérons ici les sensibilités structurelles, néanmoins le raisonnement s'applique également aux sensibilités pratiques à la seule exception que la relation $R \neq 0$ n'implique forcément pas une sensibilité pratique de R vis à vis de f_2 . (L'écartement de zéro peut en effet être trop faible pour être détecté.)

Corollaire (A2-2) :

Le résultat de la propriété (A2-1) s'étend au produit d'un résidu r_1 , sensible à un ensemble de défaillances D_1 , par une expression p quelconque contenant l'ensemble de variables de défaillances D_2 , dans la mesure où cette expression p reste non nulle en fonctionnement défaillant.

Démonstration : Idem à (A2-1).

A2-3. SENSIBILITE D'UNE SOMME DE RESIDUS

Rappelons que la somme de N résidus est un résidu.

Le résultat que nous allons démontrer est le suivant :

Propriété (A2-3) :

Soient r_1 et r_2 deux résidus structurellement sensibles chacun à un ensemble de défaillances D_1 et D_2 respectivement. Leur somme $R = r_1 + r_2$ est structurellement sensible aux défaillances $(D_1 \cup D_2) - \{f_i \text{ s'annulant analytiquement dans } r_1 + r_2\}$.

Ce résultat se généralise à une somme de $N \geq 2$ résidus.

Démonstration (limitée à deux résidus et trois défaillances pour être plus explicite) :

r_1 est un résidu structurellement sensible à f_1 et f_2 signifie que

$$f_1 \neq 0 \text{ ou } f_2 \neq 0 \Rightarrow r_1 \neq 0 \text{ et que } f_1 = 0 \text{ et } f_2 = 0 \Rightarrow r_1 = 0$$

Idem pour r_2 structurellement sensible à f_2 et f_3 .

Considérons la somme R des deux résidus : $R = r_1 + r_2$.

- en fonctionnement normal : $f_1 = f_2 = f_3 = 0 \Rightarrow r_1 = 0$ et $r_2 = 0 \Rightarrow R = 0$, la somme R est nulle en fonctionnement normal, c'est un résidu.
- en fonctionnement défaillant sur f_1 :
 $f_1 \neq 0$ et $f_2 = f_3 = 0 \Rightarrow r_1 \neq 0$ et $r_2 = 0 \Rightarrow R \neq 0$, R est sensible à f_1 .
- en fonctionnement défaillant sur f_3 :
 $f_3 \neq 0$ et $f_2 = f_1 = 0 \Rightarrow r_1 = 0$ et $r_2 \neq 0 \Rightarrow R \neq 0$, R est sensible à f_3 .
- en fonctionnement défaillant sur f_2 :
 $f_2 \neq 0$ et $f_1 = f_3 = 0 \Rightarrow r_1 \neq 0$ et $r_2 \neq 0 \Rightarrow R \neq 0$, sauf dans le cas particulier où f_2 n'apparaît plus dans la somme. R est donc sensible à f_2 .

Nous démontrons ainsi que le résidu R est sensible aux défaillances communes de r_1 et r_2 , sauf celles s'éliminant analytiquement lors de la somme. Cette démonstration s'étend aisément pour un nombre supérieur de défaillances et de résidus.

Remarque : Nous considérons ici les sensibilités structurelles. En effet c'est plus délicat pour les sensibilités pratiques où, par exemple, le bruit sur un résidu r_1 peut

être supérieur au seuil d'un autre résidu r_2 , la somme étant alors insensible aux défaillances auxquelles est sensible r_2 .

Exemple

Illustrons nos propos par le tableau de sensibilité structurelle suivant. Les termes r_1 , r_2 et r_3 peuvent être vu comme trois résidus que l'on cherche à combiner, ou comme les trois membres d'un résidu (sous forme de somme ou de produit) dont on cherche à analyser la sensibilité.

	f_1	f_2	f_3	f_4
r_1	1	1	0	0
r_2	0	1	1	0
r_3	1	0	1	0
r_1+r_2	1	1	1	0
r_2+r_3	1	1	1	0
r_3+r_1	1	1	1	0
$r_1+r_2+r_3$	1	1	1	0
$r_1 \cdot r_2$	0	1	0	0
$r_2 \cdot r_3$	0	0	1	0
$r_3 \cdot r_1$	1	0	0	0
$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$	0	0	0	0

A2-4. RESIDUS POLYNOMIAUX

Nous nous intéressons dans ce mémoire à des résidus polynomiaux. Ceux-ci sont contenus dans un *idéal* et sont générés à partir des polynômes de la base génératrice de telle sorte qu'ils peuvent s'exprimer sous la forme :

$$R = p_1 \cdot r_1 + p_2 \cdot r_2 + \dots + p_n \cdot r_n$$

où les r_i sont les résidus de base et les p_i des polynômes à variables \underline{U} , \underline{Y} et \underline{F} (avec les notations des chapitres précédents). Les résultats précédents concernant les sommes et produits de résidus nous permettent de tirer les conclusions suivantes :

Propriété (A2-4) :

Soit un idéal $I = \langle g_1 \rangle \subset K[\underline{U}, \underline{Y}, \underline{F}]$ généré par un seul polynôme g_1 . Si ce polynôme générateur g_1 est structurellement sensible aux défaillances \underline{F}^* - où \underline{F}^* est un ensemble de défaillances inclus strictement dans \underline{F} , alors aucun résidu issu de I n'est sensible aux défaillances contenues dans $\underline{F} - \underline{F}^*$.

Démonstration :

Soit f un résidu contenu dans l'idéal $I = \langle g_1 \rangle \subset K[\underline{U}, \underline{Y}, \underline{F}]$, tel que g_1 soit structurellement sensible aux défaillances \underline{F}^* .

$$f \in I \Leftrightarrow f = p_1 \cdot g_1, \text{ où } p_1 \in K[\underline{U}, \underline{Y}, \underline{F}]$$

f étant le produit de deux polynômes, le corollaire (A2-2) nous permet de conclure que f sera sensible au mieux à toutes les défaillances de \underline{F}^* , si p_1 est tel qu'il ne s'annule pas lors d'un fonctionnement défaillant sur une des défaillances de \underline{F}^* .

Propriété A2-5 :

Soit un idéal $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle \subset K[\underline{U}, \underline{Y}, \underline{F}]$ généré par un ensemble de polynômes g_1, \dots, g_s . Si ces polynômes générateurs g_i sont structurellement sensibles respectivement aux ensembles de défaillances D_i - où D_i est un ensemble de défaillances inclus strictement dans \underline{F} , alors aucun résidu issu du système ne sera sensible aux défaillances contenues dans $\underline{F} - \bigcup_{i=1}^s D_i$, insensibilité structurelle et donc insensibilité pratique.

Démonstration :

Soit f un résidu contenu dans l'idéal $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle \subset K[\underline{U}, \underline{Y}, \underline{F}]$, tel que g_1, \dots, g_s soient structurellement sensibles respectivement aux défaillances D_i .

$$f \in I \Leftrightarrow f = p_1 \cdot g_1 + \dots + p_s \cdot g_s, \text{ où } p_i \in K[\underline{U}, \underline{Y}, \underline{F}]$$

Le corollaire (A2-2) implique que les produits $(p_i \cdot g_i)$ sont sensibles au plus aux défaillances de D_i respectivement.

La propriété A2-3 implique que $\sum_{i=1}^s p_i \cdot g_i$ est sensible au plus aux défaillances de

$\bigcup_{i=1}^s D_i$. Cela entraîne que si $\underline{F} - \bigcup_{i=1}^s D_i \neq \emptyset$, alors il constitue un ensemble de défaillances auxquelles les résidus de I ne pourront être sensibles structurellement et donc en pratique.

Propriété A2-6 :

Soit un idéal $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle \subset K[\underline{U}, \underline{Y}, \underline{F}]$ généré par un ensemble de polynômes g_1, \dots, g_s . Si ces polynômes générateurs g_i sont structurellement sensibles respectivement aux ensembles de défaillances D_i - où D_i est un ensemble de défaillances inclus strictement dans

\underline{F} , et que $\bigcup_{i=1}^s D_i = \underline{F}$ nous pouvons dire que :

1. Le résidu $r = |g_1| + \dots + |g_s|$ est structurellement sensible à toutes les défaillances de \underline{F} .
2. Le résidu $r = g_1 + \dots + g_s$ est structurellement sensible à toutes les défaillances de \underline{F} qui ne s'annulent pas analytiquement au cours de la somme.

Démonstration :

Point n°1 :

Ce résultat est trivial. En effet l'égalité $\bigcup_{i=1}^s D_i = \underline{F}$ entraîne que chaque défaillance de

\underline{F} apparaît dans au moins un des résidus g_1, \dots, g_s . La somme des valeurs absolues ne pouvant entraîner d'annulation analytique de variables défaillance, elle contient toutes les variables de \underline{F} et est donc structurellement sensible à toutes les défaillances de \underline{F} .

Point n°2 :

Ce résultat est trivial et provient de la définition même de la sensibilité structurelle.

Annexe 3 : ANALYSE STRUCTURELLE

Une description exhaustive de l'Analyse Structurelle appliquée à la surveillance peut être trouvée dans [Staroswiecki 96]. Nous nous contentons ici de présenter les aspects de l'Analyse Structurelle dont nous avons besoin au chapitre 3, section 3.7.

A3-1. LA STRUCTURE DU MODELE

Du point de vue général où se situe l'Analyse Structurelle, le modèle du système est considéré comme un ensemble de contraintes qui s'appliquent à un ensemble de variables, dont seules certaines sont mesurées. On appelle *structure* du modèle le graphe biparti dont la *matrice d'incidence* représente les liens entre les variables (qu'elles soient connues ou non) [Staroswiecki 89].

Soit $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ l'ensemble des contraintes qui représentent le modèle du système. Soit $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ l'ensemble de toutes les variables. Z est formé de trois sous-ensembles : U - le sous-ensemble des variables de commande, Y - le sous-ensemble des variables mesurées et X - le sous-ensemble des variables non mesurées. Y et U constituent les variables connues, X est l'ensemble des variables inconnues. Soit K le sous-ensemble des variables connues.

La structure est décrite par le relation binaire suivante :

$$S : F \times Z \rightarrow \{0,1\}$$
$$(f_i, z_j) \mapsto S(f_i, z_j) = 1 \text{ ssi la contrainte } f_i \text{ s'applique à la variable } z_j.$$
$$\mapsto S(f_i, z_j) = 0 \text{ autrement}$$

Exemple de système [Guernez 96a]:

Le système suivant décrit le fonctionnement d'un système de deux échangeurs thermiques :

$$\begin{cases} F1 - F5 - F6 = 0 & (R1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F2 - F3 - F4 = 0 & (R2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F1 \cdot T8 - F6 \cdot T6 - F5 \cdot T5 = 0 & (R3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F2 \cdot T7 - F4 \cdot T4 - F3 \cdot T3 = 0 & (R4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (T1 - T6) \cdot F6 - (T2 - T4) \cdot F4 = 0 & (R5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (T1 - T5) \cdot F5 - (T2 - T3) \cdot F3 = 0 & (R6) \end{cases}$$

Avec les notations précédentes nous avons : $F = \{R1, R2, R3, R4, R5, R6\}$, $X = \{F3, F4, F5, F6, T4, T6\}$ et $K = \{F1, F2, T1, T2, T3, T5, T7, T8\}$.

Plusieurs types de matrice d'incidence peuvent être construits, il s'agit de la même information représentée de manières légèrement différentes :

	X						K							
	F6	F5	T6	F3	F4	T4	F1	F2	T1	T2	T7	T8	T5	T3
R1	1	1					1							
R3	1	1	1				1					1	1	
R6		1		1					1	1			1	1
R2				1	1			1						
R4				1	1	1		1			1			1
R5	1		1		1	1			1	1				

Matrice d'incidence décrivant la structure.

	X														K								
	F1	F2	T1	T2	T7	T8	T5	T3	F6	F5	T6	F3	F4	T4	ff1	ff2	tt1	tt2	tt7	tt8	tt5	tt3	
mf ₁	1														1								
mf ₂		1														1							
mt ₁			1														1						
mt ₂				1														1					
mt ₇					1														1				
mt ₈						1															1		
mt ₅							1															1	
mt ₃								1															1
R1	1								1	1													
R3	1					1	1		1	1	1												
R6			1	1			1	1		1		1											
R2		1										1	1										
R4		1			1			1				1	1	1									
R5			1	1					1		1		1	1									

Matrice d'incidence généralisée faisant apparaître les relations de mesures mf_i et mt_i ,

	X					
	F6	F5	T6	F3	F4	T4
R1	1	1				
R3	1	1	1			
R6		1		1		
R2				1	1	
R4				1	1	1
R5	1		1		1	1

Matrice d'incidence décrivant la structure sur les variables inconnues.

A3-2. DECOMPOSITION CANONIQUE ET TRIANGULARISATION

[Declerck 91] montre que tout système peut être décomposé structurellement de manière canonique en trois sous systèmes :

- un *sous système sous-déterminé* comprend P variables et Q contraintes, avec $P > Q$. Les valeurs des variables ne peuvent être déduites à partir des contraintes.
- un *sous système structurellement juste déterminé* comprend le même nombre de variables que de contraintes. De plus, il existe sur ce système un *couplage complet*, c'est à dire une bijection entre les contraintes et les variables. [Cassar 94b] démontre que, dans le cas de systèmes linéaires, l'existence d'un couplage complet sur un sous système est une condition nécessaire de détermination des variables inconnues de ce sous système.
- un *sous système structurellement surdéterminé* comprend un sous système juste déterminé et α contraintes supplémentaires portant sur les variables de ce sous système. Ces α contraintes, une fois leurs variables déterminées en fonction des variables connues (variables d'entrée et de mesure), seront appelées Relations de Redondance Analytique (RRA). [Cassar 97] montre que l'existence d'un système surdéterminé est une condition suffisante d'existence d'une RRA.

[Declerck 91] et [Murota 87] proposent des algorithmes de recherche des composantes canoniques.

Nous nous intéressons au chapitre 3 section 7 aux *séquences de calculs* permettant de déterminer les variables inconnues du système - ensemble X. Cette information se trouve dans les *sous systèmes juste déterminés*. L'existence d'un *couplage complet* sur les variables inconnues est une condition nécessaire de résolution du système vis à vis de ces variables. L'interprétation du couplage est la suivante : la variable inconnue x_i est calculée en résolvant la contrainte f_j , sous l'hypothèse que toutes les autres variables sont connues.

Une mise sous *forme triangulaire* des sous systèmes juste déterminés permet de déduire la séquence de calcul aboutissant à la résolution du système. De nombreux algorithmes de triangularisation existent.

Exemple de triangularisation et extraction des séquences de calculs.

$$\text{Soit le système suivant : } \begin{cases} x_2 - c_2 = 0 & (R1) \\ x_1 + x_2 - c_1 = 0 & (R2) \\ x_1 + x_3 - c_3 = 0 & (R3) \end{cases}$$

Sa matrice d'incidence est la suivante :

	x_1	x_2	x_3
R1	1	1	0
R2	1	0	1
R3	0	1	0

Les « 1 » représentent un couplage complet dont l'existence est une condition nécessaire de résolubilité du système d'équations. Un algorithme de triangularisation, cherchant à maximiser le nombre de zéros au dessus de la diagonale, donne la matrice d'incidence triangularisée suivante :

	x_2	x_1	x_3
R3	1	0	0
R1	0	1	0
R2	0	1	1

La séquence de calcul que l'on peut déduire est la suivante :

1. Résolution de R3 vis à vis de x_2 : $x_2 = c_2$
2. Résolution de R1 vis à vis de x_1 : $x_1 = -x_2 + c_1 = -c_2 + c_1$
3. Résolution de R2 vis à vis de x_3 : $x_3 = -x_1 + c_3 = c_2 - c_1 + c_3$

Notons que les matrices d'incidence ne peuvent pas toujours se mettre sous une forme triangulaire parfaite et qu'alors il faut travailler avec une *bloc-triangularisation* qui donne une séquence de calculs, non pour la résolution successive de variables simples, mais pour la résolution de sous ensemble de variables. Cf. Figure A3-1.

Les sous blocs (relations, variables inconnues) doivent se résoudre indépendamment mais successivement de gauche à droite et de haut en bas.

1	1								
1	1						0		
		1							
			1	0	1	1			
			0	1	1	1			
			0	1	0	1			
			1	1	0	0			
							1	1	
							1	1	

Figure A3-1 : Matrice d'incidence bloc triangularisée.

BIBLIOGRAPHIE

[Adjallah 93]

Adjallah K.H., Contribution au diagnostic de systèmes par observateur d'état, *Thèse de doctorat en automatique*, Institut Polytechnique de Lorraine, CRAN, 1993.

[Bennett 96]

Bennett S.M., Patton R.J., Daley S., Newton D.A., Model based intermittent fault tolerance in an induction motor drive, *CESA'96 IMACS multiconference, Symposium on Control, Optimization & Supervision*, 678-83, Lille, France, 1996.

[Bergé 73]

Bergé C., Graphes et Hypergraphes, Dunot, Paris, 1973.

[Brunet 90]

Brunet J., Jaume D., Labarrere M., Rault A., Vergé M., Détection et diagnostic de pannes, approche par modélisation, *Traité des nouvelles technologies*, Hermès, 1990.

[Buchberger 95]

Buchberger B., Groebner bases : an algorithmic method in polynomial ideal theory, in *Multidimensional Systems Theory*, edited by N. K. Bose, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, pp.184-232

[Burnham 87]

Burnham K.J., James, D.J.G., Shield D.N., Self tuning control of bilinear systems, *Optimal Control Applications & methods*, n°8, pp.147-57, 1987.

[Cassar 92]

Cassar J. Ph., Staroswiecki M., Résidus structurés : intérêt et conditions d'existence. Présentation GRECO Automatique Groupe Diagnostic. 21 octobre 1992.

[Cassar 94a]

Cassar J. Ph., Ferhati R., Woinet R. Fault detection and isolation system for a refinery unit. *SAFE PROCESS'94 IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes*, Espoo, Finland, june 13-15, 1994.

[Cassar 94b]

Cassar J. Ph., Analyse et surveillance des processus complexes. *Habilitation à diriger les recherches*. Lille 1 USTL, 11 mai 1994.

[Cassar 94c]

Cassar J. Ph., Litwak R. G., Cocquempot V., Staroswiecki M. Approche structurelle de la conception de systèmes de surveillance pour des procédés industriels complexes. *Revue Européenne de Diagnostic et sûreté de fonctionnement*, vol. n°2, 1994, p. 179-202.

[Cassar 96]

Cassar J. Ph., Staroswiecki M., Pour une approche unifiée de la surveillance, *Ecole d'été d'Automatique de Grenoble*, Session 14, 2-6 Septembre 1996.

[Chow & Willsky 84]

Chow E.Y., Willsky A.S., Analytical Redundancy and the Design of Robust Failure Detection Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-29 n°7, July, 1984.

[Comte-Varga 97]

Comte-Varga G., Surveillance des Systèmes non linéaires : application aux machines asynchrones, *Thèse de l'université des Sciences et Technologies de Lille*, Lille, France, 2 décembre 1997.

[Coquempot 93]

Cocquempot V., Surveillance des processus industriels complexes : génération et optimisation des relations de redondance analytiques, *Thèse de l'université des Sciences et Technologies de Lille*, Lille, France, 18 février 1993.

[Cox 92]

Cox D., Little J., O'Shea D., Ideals, Varieties, and Algorithms, *Undergraduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1992.

[Declerk 91]

Declerk P. Analyse structurale et fonctionnelle des grands systèmes. Application à une centrale PWR 900 MW. *Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille*, Villeneuve d'Ascq, France, 20 décembre 1991.

[Diop 91]

Diop S., Fliess M., On non linear observability, *in proc. of the first European Control Conference*, 1991.

[Diop 92]

Diop S., Differential algebraic decision methods, and some applications in system theory, *Theoret. Comput. Sci.*, 98, pp.137-61, 1992.

[Dubuisson 90]

Dubuisson B., Diagnostic et reconnaissance des formes, *Traité des Nouvelles Technologies*, série Diagnostic et Maintenance, Hermès, 1990.

[Dulmage 58]

Dulmage A.L., N.S. Mendelson. Coverings of bipartite graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, Vol. 10, pp.517-534, 1958.

[Faugère 93]

Faugère J.C., Gianni P., Lazard D., Mora T., Efficient computation of zero-dimensional Groebner bases by change of ordering, *Journal of Symbolic Computation*, vol. 16, Iss. 4, p.329-44, 1993.

[Fliess 89]

Fliess M., Automatique et Corps différentiels, *Forum Math.*, 1, pp.227-38, 1989.

[Frank 89]

Frank P.M., Wunnenberg J., Robust fault Diagnosis using unknown input schemes, *Fault diagnosis in dynamic systems*, Patton et al., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

[Frank 90]

Frank P.M., Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy - a survey and some new results, *Automatica*, vol.26, n°3, pp.459-74, 1990.

[Frank 91]

Frank P.M., Enhancement of robustness in observer-based fault detection, IFAC/IMACS Symposium on fault detection, supervision and safety for technical processes, Baden-Baden, 2, pp.275-87.

[Frank 93]

Frank P.M., Ding X., Frequency Domain Approach to minimizing detectable fault in FDI system, *Appl. Math. and Comp. Science*, vol.3, n°3, pp.417-43,1993.

[Frank 96]

Frank P.M., Analytical and Qualitative Model-based Fault Diagnosis - a survey and some new results, *European Journal of control*, 2 :6-28,1996.

[Funahashi 79]

Funahashi Y., Stable state estimator for bilinear systems, *Int.J.Control*,29,181-8,1979

[Ge 88]

Ge W., Fang C.Z., Detection of faulty components via robust observations, *Int. J. control*, 47, pp.581-99.

[Germundsson 91]

Germundsson R., Forsman K., A constructive approach to algebraic observability, *proc. of the 30th Conference on Decision and Control*, pp.451-2, Brighton, England, December 1991.

[Gertler 91]

Gertler J.J., Analytical redundancy methods in fault detection and isolation. Survey and Synthesis, *IFAC symposium SAFEPROCESS'91*, Baden-Baden, September 10-13, pp. 9-21, 1991.

[Gertler 93]

Gertler J.J., Monajemy R., Generating Directional Residuals with Dynamic Parity Equations, *12th World Congress IFAC*, Sydney, Australia, July 18-23, vol. 7, pp. 505-510, 1993.

[Gertler 94]

Gertler J.J., Modelling Errors as Unknown Inputs, *IFAC symposium SAFEPROCESS'94*, Espoo, Finland, June 10-13, 1994.

[Gianni 88]

Gianni P., Trager B., Zacharias G., Gröbner bases and primary decomposition of polynomial ideals, in *Computational Aspects of Commutative Algebra*, edited by L. Robbiano, Academic Press, New York, pp.15-33, 1988.

[Glad 89]

Glad S.T., Nonlinear state space and input output descriptions using differential algebra, *New Trends in Nonlinear Control Theory, Lect. Notes Control Inform. Sci.*, in J. Descusse, M. Fliess, A. Isidori, M. Leborgne (eds.), n°122, Springer-Verlag, Berlin, pp.182-9, 1989.

[Guernez 96a]

Guernez C., Cassar J.P. Staroswiecki M., Génération de relations de redondance analytique pour la surveillance de processus industriels non linéaires, *Automatique-Génie Informatique-Image AGI'96*, Tours, E3I, 6-7 Juin 96.

[Guernez 96b]

Guernez C., Cassar J.P. Staroswiecki M., Fault Detection and isolation on polynomial systems : analytical redundancy relations generation and residuals structuration, *CESA'96 IMACS Multiconference, Symposium on Control, Optimization and Supervision*, pp.690-695, July 9-12, 1996, Lille, France.

[Guernez 97a]

Guernez C., Cassar J.P. Staroswiecki M., Extension of Parity Space to non linear polynomial dynamic systems, *SAFEPROCESS'97*, August, 1997, Hull, England.

[Guernez 97b]

Guernez C., Petitot M., Cassar J.P. Staroswiecki M., Fault Detection and Isolation on systems with non linear polynomial models, *15th IMACS World Congress on Scientific computation, Modelling and Applied Mathematics*, August 24-29, 1997, Berlin, Germany.

[Grabe 95]

Grabe H.G., Triangular systems and factorized Groebner bases, *Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes, 11th International Symposium*, Paris, France, p. 248-61, 17-22 July 1995.

[Hac 92]

Design of disturbance decoupled observer for bilinear systems, *Trans. ASME, J. Dynamic Syst. Measure. Control*, 114, 556-62, 1992.

[Hara & Furuta 76]

Hara S., Furuta K., Minimal order state observers for bilinear systems, *Int.J.Control*, 24, 705-18, 1976.

[Hammouri 94]

Hammouri H., Kinnaert M., El Yaagoubi E.H., Residual generator synthesis for bilinear systems up to output injection, *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, FL, pp.1548-53, December 1994.

[Heintz 91]

Heintz J., Recio T., Roy M.F., Algorithms in real algebraic geometry and applications to computational geometry, *DIMACS series in Discrete Math. and Theor. Comp. Sci.*, 6, pp.137-62, 1991.

[Isermann 84]

Isermann R., Process Fault Detection Based on Modelling and Estimation Methods - A Survey, *Automatica*, vol. 20, n°4, p387-404, 1984.

[Isermann 93]

Isermann R., Fault diagnosis of machines via parameter estimation and knowledge processing-tutorial paper. *Automatica*, 29, 815-35, 1993.

[Isermann 96]

Isermann R., Ballé P., Trends in the application of model based fault detection and diagnosis of technical processes, *COSY'96*, 13th IFAC World Congress, San Francisco, USA, 30 June - 5 July 1996

[Karnavas 93]

Karnavas W.J., Sanchez P.J., Bahill A.T., Sensitivity Analyses of Continuous and Discrete Systems in the Time and Frequency Domains, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol.23,n°2, March/April 1993.

[Lazard 91]

Lazard D., A new method for solving algebraic systems of positive dimension, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 33, Iss. 1-3, p. 147-60,1991.

[Lazard 92]

Lazard D., Solving Zero-dimensional Algebraic systems, *J. Symbolic Computation*, vol. 13, pp.117-31, 1992.

[Maquin 96]

Maquin D., Ragot J., Méthodes de base de la surveillance : systèmes statiques et dynamiques, *Ecole d'été d'Automatique de Grenoble*, Surveillance des systèmes continus, 2-6 Septembre, 1996, Grenoble, France.

[Maquin 97]

Maquin D., Cocquempot V., Cassar J.P., Staroswiecki M., Ragot J., Generation of Analytical Redundancy Relations for FDI purposes, *SAFEPROCESS'97*, Hull, U.K., pp.86-93, August 1997.

[Mazzour 96]

Mazzour E.H., Observabilité, estimation d'état et architecture d'instrumentation des systèmes multilinéaires, *Thèse d'automatique de l'université de Corse*, France, 15 janvier 1996.

[Mechmeche 97]

Mechmeche C., Nowakowski S., Residual generator synthesis for bilinear systems with unknown inputs, *SAFEPROCESS'97*, Hull, U.K., pp.771-6, August 1997.

[Mines 88]

Mines R., Richman F. , Ruitenburg W., A course in constructive algebra, *Springer-Verlag*, New York - Berlin - Heidelberg, 1988.

[Mohler 73]

Mohler R.R., bilinear control process, *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, vol. 106, 1973.

[Murota 87]

Murota K., System analysis by graphs and matroids, Springer-Verlag, 1987.

[Patton 88]

Patton R., Robust fault detection using eigenstructure assignment, *Proc. 12th IMACS World Congress Mathematical modelling and Scientific Computation*, Paris, France, vol. 2, pp. 431-4, 18-22 July, 1988.

[Patton & Chen 91]

Patton R.J., Chen J., A review of parity spaces approaches to fault diagnosis, *IFAC Symposium SAFEPROCESS'91*, Baden-Baden, September 10-13, pp. 239-255, 1991.

[Potter 77]

Potter J.E., Suman M.C., Thresholdless redundancy management with array of skewed instrument, *Electronic Flight Control Systems*, Agadograph, vol. 224, 1977, pp15-25.

[Richetin 75]

Richetin M., Analyse structurale des systèmes complexes en vue d'une commande hiérarchisée. *Thèse de doctorat d'état*, Toulouse, n°674, 1975.

[Ritt 50]

Ritt J.F., Differential Algebra, *American Mathematical Society*, Providence, 1950.

[Ragot 90]

Ragot J., Darouach M., Maquin D., Bloch G., Validation de données et diagnostic, *Traité des Nouvelles Technologies*, série Diagnostic et Maintenance, Hermès, 1990.

[Seidenberg 56]

Seidenberg A., An elimination theory for differential algebra, *Univ. California Publ. Math. (N.S.)*, 3, pp.31-65, 1956.

[Seidenberg 84]

Seidenberg A., On the Lasker-Noether decomposition theorem, *Am. J.Math.*, 106, pp.611-38, 1984.

[Shumski 91]

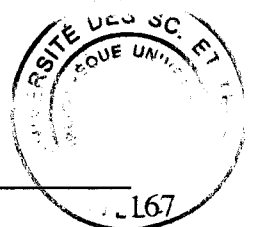
Shumski A. E., Fault detection in non linear systems by functional diagnosis, *Automation and Remote Control*, URSS, 52(12), pp.1759-65, Traduit de Avtomatika i Telemekhanika, 12, pp.148-55, december 91.

[Staroswiecki 89]

Staroswiecki M., Declerk P. Analytical redundancy in non linear interconnected systems by means of structural analysis. *AIPAC'89 IFAC Symposium on Advanced Information Processing in Automatic Control*, Nancy, France, 3-5 july, 1989, R. Husson (ed.), Centre de recherche en en automatique de Nancy, pp. II 23-27.

[Staroswiecki 91]

Staroswiecki M., Cocquempot V., Cassar J.P., Observer-based and Parity Space approaches for failure detection and identification, *Proc. IMACS Symposium MCTS*, Lille, France, pp. 536-41, 1991.



[Staroswiecki 96]

Staroswiecki M., Cassar J.P., Approche Structurelle pour la conception des systèmes de surveillance, *Ecole d'été d'Automatique de Grenoble*, Session 14, 2-6 Septembre 1996.

[Thuair 76]

Thuair A., Décomposition des grands systèmes, thèse d'informatique, Université de Nice, 9 novembre 1976.

[Viswanadham 87]

Viswanadham N., Schricander R., Fault detection using unknown input observers, *Control Theory and Advanced Technology*, 3, pp.91-101, 1987.

[Yu 94]

Yu D.L., Shield D.N., Mahtani J.L., A non linear fault detection method for a hydraulic system, *Proceedings of 4th IEE International Conference CONTROL'94*, Univ. of Warwick, U.K., Vol.2, pp. 1318-22, March 21-24,1994.

[Yu 95a]

Yu D.L., Shield D.N., Fault Diagnosis in bilinear systems - a survey, *Proceedings of 3rd European Control Conference*, Rome, Italy, pp.360-5, September 1995

[Yu 95b]

Yu D.L., Fault Diagnosis for industrial systems with emphasis on bilinear systems, *Ph.D. thesis*, Coventry University, Coventry, U.K..

[Yu 96]

Yu D.L., Shield D.N., A Bilinear Fault Detection Observer, *Automatica*, vol. 32, n°11, pp.1597-1602.

[Yu 97]

Yu D.L., Shield D.N., An extended parity space method and a case study on an industrial furnace, *SAFEPROCESS'97*, Hull, U.K., pp.777-82, August 1997.

[Würtenberger 95]

Würtenberger M., Höfling T., Vehicle Supervision by Parity Equations, *Proceedings of the American Control Conference*, Seattle, Washington, pp.1662-6, June 1995.

[Zhang 97]

Zhang Q., Basseville M., Benveniste A., Monitoring Dynamic systems with Polynomial non linearities, *SAFEPROCESS'97*, Hull, U.K., pp.1015-20, August 1997

[Zhang 96]

Zhang Q., Basseville M., Benveniste A., Fault Detection and Isolation in Nonlinear Dynamic Systems : A Combined Input-Output and Local Approach, *IRISA publication interne*, n°1074, décembre 1996.