

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
LABORATOIRE DE MECANIQUE DE LILLE U.R.A. 1441 C.N.R.S.

Année 1998

N° d'ordre : 2443

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE LILLE I

Discipline : Génie-Civil

présentée et soutenue publiquement

par

Vincent RENAUD

le 17 Décembre 1998

Titre :

**CONTRIBUTIONS A L'ETUDE D'UN MODELE DE MESOFISSURATION :
APPLICATION AU COMPORTEMENT D'UN GRES**

Directeur de thèse : D. KONDO

JURY

M. Pierre BEREST,
M. Gilles PIJAUDIER-CABOT,
M. Thierry DESOYER,
M. Félix DARVE,
M. Alain MILLARD,
M. Jian-Fu SHAO,
M. Djimédo KONDO,

Directeur du L.M.S. Polytechnique
Professeur, E.N.S. Cachan
Professeur, Université Aix Marseille II
Professeur, Université Grenoble I
Ingénieur C.E.A.
Professeur, Université Lille I
Professeur, Université Lille I

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur
Directeur de thèse



A Julie (pas encore là, mais déjà si présente)

TABLE DES MATIERES

TABLES DES ILLUSTRATIONS.....	6
REMERCIEMENTS.....	9
TABLE DES NOTATIONS.....	10
INTRODUCTION.....	13
I. MÉCANISMES PHYSIQUES D'ENDOMMAGEMENT ET MODÈLES DE COMPORTEMENT FRAGILE DES ROCHES.....	16
I.1. COMPORTEMENT FRAGILE DES ROCHES ET MÉSOFISSURATION.....	17
I.2. INTRODUCTION AUX MÉCANISMES D'ENDOMMAGEMENT FRAGILE DANS LES ROCHES.....	20
I.3. MODÈLES PHYSIQUES DE DÉFORMATIONS.....	22
I.3.1. <i>Modèle de mésoporosité.....</i>	22
I.3.2. <i>Modèle de la fissure inclinée glissante.....</i>	24
I.3.3. <i>Aspects expérimentaux tridimensionnels de la mésofissuration.....</i>	29
I.4. CONCLUSIONS ET COMMENTAIRES SUR QUELQUES PISTES DE MODÉLISATION.....	31
I.5. CONCLUSIONS DU CHAPITRE ET OBJECTIFS.....	33
II. ESTIMATIONS THÉORIQUES ET NUMÉRIQUES DES PROPRIÉTÉS EFFECTIVES DES MILIEUX MÉSOFISSURÉS.....	34
II.1. NOTION DE V.E.R. ET DÉFINITION DES GRANDEURS MOYENNES.....	35
II.2. COMPLIANCES ÉLASTIQUES EFFECTIVES DES MILIEUX FISSURÉS.....	37
II.3. MODÈLES DE PRÉDICTIONS DES CARACTÉRISTIQUES ÉLASTIQUES HOMOGENÉISÉES.....	38
II.3.1. <i>Cas des fissures ouvertes.....</i>	40
II.3.1.1. <i>Hypothèse de non-interaction entre mésofissures.....</i>	40
II.3.1.2. <i>Méthode différentielle.....</i>	41
II.3.1.3. <i>Méthode autocohérente.....</i>	41
II.3.2. <i>Cas des fissures fermées.....</i>	42
II.3.2.1. <i>Hypothèse de non-interaction entre mésofissures.....</i>	42
II.3.2.2. <i>Méthode différentielle.....</i>	44
II.3.2.3. <i>Méthode autocohérente.....</i>	44
II.4. APPROCHE NUMÉRIQUE DU PROBLÈME : SIMULATIONS DIRECTES.....	45
II.4.1. <i>La méthode des discontinuités de déplacements pour les milieux multifissurés.....</i>	45
II.4.2. <i>Le générateur aléatoire de fissures.....</i>	47
II.5. CALCUL NUMÉRIQUE DE LA COMPLIANCE - RÉSULTATS.....	48
II.5.1. <i>Simulations directes avec fissures ouvertes.....</i>	49
II.5.2. <i>Cas des sollicitations de compression.....</i>	55
II.6. CONCLUSION.....	58
III. UNE APPROCHE TRIDIMENSIONNELLE DE L'ENDOMMAGEMENT PAR MÉSOFISSURATION.....	59
III.1. INTRODUCTION.....	60
III.2. REPRÉSENTATION DE LA MÉSOSTRUCTURE INITIALE.....	60
III.3. EVALUATION TRIDIMENSIONNELLE DE LA COMPLIANCE DU MATÉRIAU MÉSOFISSURÉE.....	61
III.3.1. <i>Discontinuités de déplacement dans un milieu 3-D inélastique anisotrope.....</i>	62
III.3.2. <i>Evaluation du tenseur de compliance effective.....</i>	64
III.3.2.1. <i>Cas de mésofissures ouvertes.....</i>	64
III.3.2.2. <i>Cas de mésofissures 3-D fermées : prise en compte du frottement.....</i>	68
III.4. MÉCANISMES DE CROISSANCE DE MÉSOFISSURES ET LOIS D'ÉVOLUTION DE L'ENDOMMAGEMENT.....	72
III.4.1. <i>Généralités sur les lois de croissance de mésofissures.....</i>	72
III.4.2. <i>Lois d'évolution des mésofissures ouvertes.....</i>	75

III.4.3. Mécanismes d'évolution des mésolfissures fermées.....	78
III.4.3.1. Croissance en mode glissement	78
III.4.3.2. Le branchement des fissures 3-D en compression.....	81
III.4.4. La génération de nouvelles mésolfissures	87
III.5. RÉSULTATS ET COMPARAISONS	91
III.5.1. Calibration des paramètres du modèles.....	91
III.5.2. Simulations de la réponse en traction simple et en compression triaxiale d'un grès	92
III.6. CONCLUSION.....	96
IV. FORMULATION INCRÉMENTALE DU MODÈLE	98
IV.1. HYPOTHÈSES DE BASE ET MÉTHODOLOGIE.....	99
IV.2. ANALYSE DES DÉFORMATIONS	101
IV.2.1. Déformations due à la partie centrale de la mésolfissure.....	102
IV.2.2. Fissure équivalente soumise aux sollicitations extérieures.....	105
IV.3. LOIS D'ÉVOLUTION ET FORMULATION INCRÉMENTALE	108
IV.3.1. Calcul des facteurs d'intensité de contraintes pour le modèle simplifié de mésolfissure branchée.....	108
IV.3.2. Ecriture incrémentale de la loi constitutive.....	110
IV.3.3. Surfaces seuils de contraintes ou de déformations principales.....	112
IV.4. SIMULATIONS EN COMPRESSION UNIAXIALE OU TRIAXIALE.....	115
IV.4.1. Essai uniaxial	115
IV.4.2. Essai triaxial.....	119
IV.4.3. Essais cycliques.....	122
IV.4.4. Essais proportionnels.....	125
IV.4.5. Essai d'extension latérale	127
IV.4.6. Essais de refermeture de fissures.....	129
IV.4.7. Etude de sensibilité des paramètres.....	131
IV.4.7.1. Influence de la densité initiale de mésolfissures	131
IV.4.7.2. Influence du coefficient de frottement μ aux interfaces.....	131
IV.4.7.3. Influence de la ténacité K_I^c du matériau	132
IV.5. CONCLUSION.....	134
CONCLUSION.....	136
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	139
ANNEXES.....	147
ANNEXE 1 . CALCUL ANALYTIQUE DES COMPLIANCES EFFECTIVES DANS LE CAS 2-D.	148
ANNEXE 1 .1. HYPOTHÈSE DE NON-INTERACTION ENTRE MÉSOLFISSURES (N.I.C.).....	150
Annexe 1 .1.1. Cas des fissures ouvertes	151
Annexe 1 .1.2. Cas des fissures fermées.....	151
ANNEXE 1 .2. MÉTHODE DIFFÉRENTIELLE.....	153
Annexe 1 .2.1. Cas des fissures ouvertes	154
Annexe 1 .2.2. Cas des fissures fermées.....	154
ANNEXE 1 .3. MÉTHODE AUTOCOHÉRENTE (M.A.C.).....	154
Annexe 1 .3.1. Cas des fissures ouvertes	154
Annexe 1 .3.2. Cas des fissures fermées.....	155
ANNEXE 1 .4. CALCUL DES COMPLIANCES À L'AIDE DU MODÈLE NUMÉRIQUE.....	156
Annexe 1 .4.1. Cas des fissures ouvertes	157
Annexe 1 .4.2. Cas des fissures fermées.....	158
ANNEXE 2 . MATRICE DE TRANSFORMATION DE REPÈRE T POUR LE CALCUL DE COMPLIANCE ET APPLICATION DANS LE CAS DE MÉSOLFISSURES FERMÉES.	159
ANNEXE 3 . INFLUENCE DES PARAMÈTRES MÉSCOPICIQUES DU MODÈLE À MATRICE SÉCANTE.	162
ANNEXE 4 . LOI D'ÉVOLUTION ET COMPLIANCE POUR DES MÉSOLFISSURES FERMÉES DANS LE CAS TRIAXIAL AXISYMETRIQUE	165

ANNEXE 5 . CONSTRUCTION DES TENSEURS $\bar{A}$, $\bar{B}$ ET $\bar{C}$ DE LA FORMULATION INCRÉMENTALE DE LA LOI DE COMPORTEMENT.....	168
ANNEXE 5 .1. CHARGEMENT	168
<i>Annexe 5 .1.1. Frottement sans croissance de fissures (θ et l constant)</i>	<i>169</i>
<i>Annexe 5 .1.2. Frottement avec croissance stable de branches.....</i>	<i>169</i>
ANNEXE 5 .2. DÉCHARGEMENT.....	171
<i>Annexe 5 .2.1. Glissement dans le sens opposé sans fermeture de branches (θ et l constant).....</i>	<i>171</i>
<i>Annexe 5 .2.2. Fermeture de branches sans glissement dans le sens opposé (θ et b constant)</i>	<i>172</i>
<i>Annexe 5 .2.3. Fermeture de branches avec glissement dans le sens opposé (θ constant)</i>	<i>173</i>
ANNEXE 6 . ETUDE DE SENSIBILITÉ DE PARAMÈTRES DU MODÈLE INCRÉMENTAL.	175
ANNEXE 6 .1. ETUDE DE LA RÉPONSE D'UN MATÉRIAU CONTENANT DES MÉSOFISSURES PARALLÈLES.....	175
ANNEXE 6 .2. INFLUENCE DU COEFFICIENT H	175
ANNEXE 6 .3. INFLUENCE DE LA COHÉSION.....	176
ANNEXE 6 .4. INFLUENCE DE LA CRÉATION DE MÉSOFISSURES	176
ANNEXE 7 . EXTENSION AU COMPORTEMENT DIFFÉRÉ.....	178

TABLES DES ILLUSTRATIONS

FIGURE I.1 : EXEMPLE DE COURBE CONTRAINTES-DÉFORMATIONS D'UN GRÈS DES VOSGES EN COMPRESSION TRIAXIALE (D'APRÈS R. KHAZRAEI, 1997).	18
FIGURE I.2 : PHASES DU COMPORTEMENT EN COMPRESSION DES ROCHES ET ÉVOLUTION DE PROPRIÉTÉS PHYSIQUES.	18
FIGURE I.3 : FISSURATION AXIALE EN EXTENSION.	22
FIGURE I.4 : MODÉLISATION D'UN MÉSOPORE CYLINDRIQUE 2-D.	23
FIGURE I.5 : VARIATION DU F.I.C. NORMALISÉ D'UN MÉSOPORE CYLINDRIQUE.	24
FIGURE I.6 : MODÈLE DE LA MÉSOFISSURE GLISSANTE INCLINÉE.	25
FIGURE I.7 : VARIATION DU F.I.C. NORMALISÉ D'UNE MÉSOFISSURE BRANCHÉE 2-D.	27
FIGURE I.8 : MODÈLE DE FISSURE ÉQUIVALENTE DE FANELLA ET KRAJCINOVIC (1988).	28
FIGURE I.9 : BRANCHEMENT D'UNE MÉSOFISSURE 3-D D'APRÈS ADAMS ET SINES (1978).	30
FIGURE I.10 : PROPAGATION EN COMPRESSION D'UNE MÉSOFISSURE 3-D D'APRÈS SCHOLZ (1990).	31
FIGURE II.1 : DÉFINITION DU VOLUME ÉLÉMENTAIRE REPRÉSENTATIF EN UN POINT MATÉRIEL P .	36
FIGURES II.2 : A) POPULATION DE MÉSOFISSURES. B) MÉSOFISSURE ISOLÉE DANS LE MILIEU BIDIMENSIONNEL.	38
FIGURE II.3 : DISTRIBUTION ALÉATOIRE ET OUVERTURE DE FISSURES : VARIATION DE COMPLIANCE NORMALISÉE.	40
FIGURE II.4 : DISTRIBUTION ALÉATOIRE ET FERMETURE DE FISSURE: VARIATION DE COMPLIANCE NORMALISÉE.	43
FIGURE II.5 : MILIEU INFINI AVEC UNE FISSURE. D_s ET D_n SONT RESPECTIVEMENT LES DISCONTINUITÉS TANGENTIELLE ET NORMALE.	46
FIGURE II.6 : DISCRÉTISATION D'UN MILIEU FINI EN M.D.D.	46
FIGURE II.7 : EXEMPLE DE DISTRIBUTION DE MÉSOFISSURES ALÉATOIRES.	49
FIGURE II.8 : MODULE D'YOUNG EFFECTIF POUR DISTRIBUTION ALÉATOIRE TOTALE : COMPARAISONS AVEC N.I.C., DIF. ET M.A.C.	49
FIGURE II.9 : EFFET DES MÉSOFISSURES - INTERACTIONS AVEC LA FRONTIÈRE POUR DISTRIBUTION ALÉATOIRE : COMPARAISONS AVEC N.I.C., DIF. ET M.A.C.	50
FIGURE II.10 : EXEMPLE DE DISTRIBUTION DE MÉSOFISSURES PARALLÈLES.	51
FIGURE II.11 : MODULE D'YOUNG EFFECTIF POUR MÉSOFISSURES PARALLÈLES : COMPARAISONS AVEC LES MÉTHODES N.I.C., DIF. ET M.A.C.	51
FIGURE II.12 : EFFET DES MÉSOFISSURES - INTERACTIONS AVEC LA FRONTIÈRE POUR DISTRIBUTION PARALLÈLE : COMPARAISONS AVEC LES MÉTHODES N.I.C., DIF. ET M.A.C.	51
FIGURE II.13 : DISTRIBUTION DE MÉSOFISSURES PARALLÈLES AVEC LE RAPPORT $\frac{h}{L}$.	52
FIGURE II.14 : VARIATION DU F.I.C. POUR UNE PAIRE DE FISSURES COLINÉAIRES ET PARALLÈLES.	52
FIGURE II.15 : VARIATION DE MODULE D'YOUNG EFFECTIF EN FONCTION DE LA DENSITÉ ET DU RAPPORT $\frac{h}{L}$ SANS INTERACTION AVEC LE CONTOUR.	53
FIGURE II.16 : VARIATION DE MODULE DE CISAILLEMENT EFFECTIF EN FONCTION DE LA DENSITÉ ET DU RAPPORT $\frac{h}{L}$ SANS INTERACTION AVEC LE CONTOUR.	54
FIGURE II.17 : VARIATION DE MODULE D'YOUNG EFFECTIF EN FONCTION DE LA DENSITÉ ET DU RAPPORT $\frac{h}{L}$ AVEC INTERACTION AVEC LE CONTOUR.	54
FIGURE II.18 : EXEMPLE DE DISTRIBUTION DE MÉSOFISSURES PARALLÈLES TESTÉE SOUS CHARGEMENT COMPRESSIONNIF ($\mu = 0.5$, $\phi = \frac{\pi}{3}$).	55
FIGURES II.19 : COMPRESSION UNIAXIALE. RAPPORT DE COMPLIANCE EFFECTIVE POUR UN MILIEU CONTENANT UN ENSEMBLE DE MÉSOFISSURES PARALLÈLES ($\phi = \frac{\pi}{3}$, $\mu=0.5$): $\frac{\bar{S}_{11}}{\bar{S}_{11}^0}$, $\frac{\bar{S}_{22}}{\bar{S}_{22}^0}$, $\frac{\bar{S}_{21}}{\bar{S}_{21}^0}$.	56
FIGURE II.20 : VARIATION DE COMPLIANCE NORMALISÉE EN FONCTION DE L'ANGLE DE FISSURATION ($\mu=0.6$).	57
FIGURE III.1 : REPRÉSENTATION DE LA MÉSOSTRUCTURE INITIALE DU MATÉRIAU MÉSOFISSURÉ.	61
FIGURE III.2 : SCHÉMATISATION 3-D DE LA MÉSOFISSURE DANS UN ÉCHANTILLON.	62
FIGURE III.3 : REPRÉSENTATION TRIDIMENSIONNELLE DE LA MÉSOFISSURE ELLIPTIQUE.	63

FIGURE III.4 : ETATS DE MÉSOFISSURATION 3-D POSSIBLES SOUS SOLLICITATIONS DE TRACTION.	75
FIGURE III.5 : DÉFINITION DES DIVERS DOMAINES D'ACTIVATION DES MÉSOFISSURES 3-D OUVERTES.	77
FIGURE III.6: ETATS DE MÉSOFISSURATION 3-D POSSIBLES SOUS SOLLICITATIONS DE COMPRESSION.	78
FIGURE III.7 : INFLUENCE DES MÉCANISMES DE GLISSEMENT ET DE PROPAGATION INSTABLE EN COMPRESSION.	79
FIGURE III.8 : INFLUENCE DES MÉCANISMES DE GLISSEMENT ET DE PROPAGATION INSTABLE EN COMPRESSION.	81
FIGURE III.9 : FISSURE BRANCHÉE 3-D.	83
FIGURES III.10 : SECTIONS 2-D À L'ANGLE β DE LA FISSURE BRANCHÉE.	83
FIGURE III.11: FISSURE ÉQUIVALENTE 2-D.	84
FIGURE III.12 : EXEMPLE DE VARIATION DE $L = F(\beta)$ POUR $\sigma_{22} = 0, 0.5, 1, 2$ ET 5 MPa.	85
FIGURE III.13 : SCHÉMATISATION GÉNÉRALE DE L'ÉTAT DE LA MÉSOSTRUCTURE EN COMPRESSION.	86
FIGURE III.14 : INFLUENCE DU MÉCANISME DE BRANCHEMENT EN COMPRESSION.	87
FIGURE III.15 : DOMAINES D'ACTIVATION DES DIVERS MÉCANISMES DE MÉSOFISSURATION EN COMPRESSION UNIAXIALE.	90
FIGURE III.16 : MODÈLE 3-D - COURBES $\sigma - \varepsilon$ SOUS SOLLICITATIONS DE TRACTION.	92
FIGURE III.17 : COURBES CONTRAINTES-DÉFORMATIONS EN COMPRESSION UNIAXIALE.	93
FIGURE III.18 : COURBES CONTRAINTES-DÉFORMATIONS EN COMPRESSION TRIAXIALE À 10 MPa DE CONFINEMENT.	93
FIGURE III.19 : COURBES CONTRAINTES-DÉFORMATIONS EN COMPRESSION TRIAXIALE À 20 MPa DE CONFINEMENT.	94
FIGURE III.20 : COURBES CONTRAINTES-DÉFORMATIONS EN COMPRESSION TRIAXIALE À 30 MPa DE CONFINEMENT.	94
FIGURE III.21 : ESSAI UNIAXIAL : VARIATION DE COMPLIANCES.	94
FIGURE III.22 : ESSAI UNIAXIAL SANS CRÉATION DE FISSURES : VARIATION DE COMPLIANCES.	95
FIGURE III.23 : ESSAI TRIAXIAL À 20 MPa : VARIATION DE COMPLIANCES.	95
FIGURE III.24 : ALGORITHME SIMPLIFIÉ DU MODÈLE.	96
FIGURE IV.1 : GÉOMÉTRIE DE LA FISSURE BRANCHÉE EN COMPRESSION.	100
FIGURE IV.2 : LE BRANCHEMENT 3-D CONSIDÉRÉ COMME UN ENSEMBLE DE SECTIONS BRANCHÉES 2-D.	100
FIGURE IV.3 : GLISSEMENT ÉQUIVALENT.	103
FIGURE IV.4 : REPÈRE DE LA BRANCHE.	104
FIGURE IV.5 : DÉTAIL DE LA GÉOMÉTRIE DU BRANCHEMENT.	104
FIGURE IV.6 : FISSURE BRANCHÉE ÉQUIVALENTE.	106
FIGURE IV.7 : RÉPONSE SOUS UN CHEMIN DE CHARGEMENT-DÉCHARGEMENT.	112
FIGURE IV.8 : EXEMPLE DE SURFACE SEUILS EN CONTRAINTES.	113
FIGURE IV.10 : EXEMPLE DE SURFACE SEUILS EN DÉFORMATIONS.	114
FIGURE IV.11 : SEUILS TRIAXIAUX EN CONTRAINTES EN FONCTION DU COEFFICIENT DE FROTTEMENT.	115
TABEAU IV.1 : ÉVOLUTION DE LA MATRICE TANGENTE NORMALISÉE POUR LA SIMULATION DE L'ESSAI UNIAXIAL SUR UN GRÈS DE FONTAINEBLEAU.	116
FIGURE IV.12 : COURBES CONTRAINTES - DÉFORMATIONS EN COMPRESSION UNIAXIALE.	116
FIGURE IV.13 : OUVERTURE MOYENNE DES BRANCHES POUR L'ESSAI UNIAXIAL.	117
FIGURE IV.14 : ESSAI UNIAXIAL : LONGUEUR DE BRANCHEMENT.	117
FIGURE IV.15 : OUVERTURE DES FISSURES DE DIFFÉRENTES FAMILLES POUR L'ESSAI UNIAXIAL À LA CONTRAINTE DE 68 MPa.	118
FIGURE IV.16 : ALLURE DU BRANCHEMENT POUR L'ESSAI UNIAXIAL À LA CONTRAINTE DE 68 MPa.	119
FIGURE IV.17 : COMPARAISON DU MODÈLE INCRÉMENTAL EN VERSION 2-D ET 3-D.	119
FIGURE IV.18 : ESSAI TRIAXIAL À 10 MPa.	120
FIGURE IV.19 : ESSAI TRIAXIAL À 20 MPa.	121
FIGURE IV.20 : ESSAI TRIAXIAL À 30 MPa.	121
FIGURE IV.21 : ESSAI TRIAXIAL À 10 MPa : ÉVOLUTION DU GLISSEMENT AU COURS DU CHARGEMENT.	122
FIGURE IV.22 : ESSAI TRIAXIAL À 10 MPa : ÉVOLUTION DE LA LONGUEUR ET DE L'OUVERTURE DES BRANCHES.	122
FIGURE IV.23 : ESSAI CYCLIQUE UNIAXIAL.	123
FIGURE IV.24 : ESSAI CYCLIQUE UNIAXIAL : ÉVOLUTION DU GLISSEMENT.	124
FIGURE IV.25 : ESSAI CYCLIQUE UNIAXIAL : ÉVOLUTION DE LA LONGUEUR DES BRANCHES.	124
FIGURE IV.26 : ESSAI CYCLIQUE UNIAXIAL : ÉVOLUTION DE L'OUVERTURE DES BRANCHES.	125
TABEAU IV.2 : ENDOMMAGEMENT AXIAL ET LATÉRAL.	125
FIGURE IV.27 : ESSAI PROPORTIONNEL : $K = 30$	126
FIGURE IV.28 : ESSAI PROPORTIONNEL : OUVERTURE MOYENNE DES BRANCHES.	126
FIGURE IV.29 : ESSAI PROPORTIONNEL : VARIATION DES LONGUEURS DE BRANCHEMENT.	127
FIGURE IV.30 : ESSAI D'EXTENSION LATÉRALE.	127
FIGURE IV.31 : ESSAI DE DÉCHARGEMENT LATÉRAL.	128
FIGURE IV.32 : TRAJET DE DÉCHARGEMENT LATÉRAL : OUVERTURE MOYENNE ET LONGUEUR DES BRANCHES.	128
FIGURE IV.33 : TRAJET EN CONTRAINTES POUR L'ESSAI DE CHARGEMENT LATÉRAL.	129
FIGURE IV.34 : TRAJET DE CHARGEMENT LATÉRAL : COURBES CONTRAINTES-DÉFORMATIONS.	129
FIGURE IV.35 : TRAJET DE CHARGEMENT LATÉRAL : ÉVOLUTION DE L'OUVERTURE MOYENNE.	130

Table des illustrations

TABLEAU IV.3 : TRAJET DE CHARGEMENT LATÉRAL : ÉVOLUTION DES COMPOSANTES DE LA MATRICE TANGENTE. .	130
FIGURE IV.36 : MODÈLE INCRÉMENTAL - INFLUENCE DE LA DENSITÉ INITIALE DE MÉSOFISSURES.	131
FIGURE IV.37 : INFLUENCE DU FROTTEMENT AUX INTERFACES.	132
FIGURE IV.38 : INFLUENCE DE LA TÉNACITÉ K_I^c DE LA MATRICE DU MATÉRIAU.	132
FIGURE IV.39 : ALGORITHME DU MODÈLE INCRÉMENTAL.	133
FIGURE A1.1 : REPÈRE LOCAL DE LA MÉSOFISSURE RECTILIGNE.	148
FIGURE A1.2 : SCHÉMA DE DISTRIBUTION DES DISCONTINUITÉS DE DÉPLACEMENTS POUR UNE FISSURE DISCRÉTISÉE EN 5 ÉLÉMENTS.	156
FIGURE A3.1 : INFLUENCE DE LA DENSITÉ INITIALE DE MÉSOFISSURES.	162
FIGURE A3.2 : INFLUENCE DE LA TAILLE MAXIMALE DES GRAINS.	162
FIGURE A3.3 : INFLUENCE DE LA GRANULOMÉTRIE $\hat{\gamma} = \frac{D_{\min}}{D_{\max}}$ DU MATÉRIAU.	163
FIGURE A3.4 : INFLUENCE DE LA DISTRIBUTION DE TAILLE DES MÉSOFISSURES INITIALES, $\rho = \frac{a_0}{a_f}$	164
FIGURE A4.1 : MILIEU MÉSOFISSURÉ SOUMIS À DES SOLlicitATIONS TRIAXIALES AXISYMETRIQUES.	165
FIGURE A4.2 : DOMAINES D'ANGLES DE FISSURATION EN COMPRESSION 3-D.	166
FIGURE A5.1 : GÉOMÉTRIE DE LA FISSURE BRANCHÉE EN COMPRESSION.	168
FIGURE A5.2 : FERMETURE PARTIELLE DES BRANCHES.	172
FIGURE A6.1 : MATÉRIAU CONTENANT DES MÉSOFISSURES PARALLÈLES.	175
FIGURE A6.2 : INFLUENCE DE L'ANGLE ϕ	175
FIGURE A6.3 : INFLUENCE DE LA COHÉSION.	176
FIGURE A6.4 : INFLUENCE DE LA CONTRAINTE CRITIQUE DE DÉCOHÉSION.	177
FIGURE A6.5 : INFLUENCE DU TAUX MAXIMAL DE NUCLÉATION DE MÉSOFISSURES.	177
FIGURE A7.1 : SIMULATION DU FLUAGE UNIAxIAL EN COMPRESSION.	178

REMERCIEMENTS

Bien entendu, tout travail de recherche suppose l'intégration au sein d'une équipe. Je tiens donc à remercier Messieurs les professeurs J.-P. Henry et J. F. Shao, ancien et actuel responsables du Département Mécanique des Matériaux Fragiles et des Structures du Laboratoire de Mécanique de Lille (U.R.A. - 1441 C.N.R.S.) pour m'avoir permis de rejoindre leur équipe. Je leur en suis très reconnaissant.

Ce laboratoire de Mécanique de Lille est dirigé par Monsieur G. Caignaert dont je tiens à souligner l'amabilité constante. Je lui exprime mes remerciements les plus sincères.

J'exprime ma respectueuse gratitude à Messieurs G. Pijaudier-Cabot (Professeur E.N.S. Cachan) et T. Desoyer (Professeur Université Aix Marseille II) pour l'intérêt qu'ils portent à ce travail de thèse en acceptant d'en être les rapporteurs ainsi qu'à Monsieur P. Bérest (directeur du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'école Polytechnique Palaiseau, président du comité français de Mécanique des Roches) qui a accepté d'être le président de ce jury.

Messieurs A. Millard (ingénieur C.E.A. Saclay), F. Darve (Professeur Université Grenoble I) et J.-F. Shao (Professeur Université Lille I) me font l'honneur d'être examinateurs de ce jury ; qu'ils agréent l'expression de ma vive reconnaissance.

Cette thèse, ainsi que mon projet de D.E.A. qui en est à l'origine, doivent beaucoup à Monsieur le Professeur D. Kondo qui a continuellement suivi mon travail. J'aimerais lui adresser mes sincères et loyaux remerciements pour sa patience, son opiniâtreté et la rigueur scientifique qu'il a tenté de m'inculquer.

Je ne remercie pas Monsieur Bill Gates et son espiègle logiciel de traitement de texte (que je ne nommerai pas : je vais pas faire de la publicité pour un produit que je déconseille formellement à quiconque souhaitant rédiger plus de 10 pages). Les caprices de celui-ci m'ont néanmoins permis d'apprécier dans toute sa plénitude la signification de l'empirisme.

De façon plus générale, je tiens à rappeler les efforts consentis par les autres membres de l'équipe pour m'avoir supporté durant quatre ans. Je remercie donc par ordre d'apparition dans l'équipe : Gilles D., Marc Q., Fabrice C., Anne-Sophie C., Marjorie B. et Stéphane H.

Enfin, je tiens à remercier chaleureusement mes parents pour m'avoir soutenu tout au long de mes études (qui vont peut-être prendre fin !). Je n'oublie pas, bien évidemment, ma femme Delphine, qui a su me rendre facile cette tranche de vie (qui lui a parfois semblée longue et pénible). Je leur dois sans doute plus qu'il ne m'est possible d'écrire en ces quelques lignes.

TABLE DES NOTATIONS

Le lecteur ne trouvera ici que les notations communes aux différents chapitres et modèles présentés dans ce mémoire. Les écritures correspondant aux développements intermédiaires ne sont pas reportés dans cette table.

$\bar{A}$	: Tenseur du second ordre
$\overline{\overline{A}}$	: Tenseur du quatrième ordre
$\bar{A} \otimes \bar{B}$	: Produit tensoriel du tenseur $\bar{A}$ par le tenseur $\bar{B}$
$\bar{A} : \bar{B}$	: Produit tensoriel doublement contracté du tenseur $\bar{A}$ par le tenseur $\bar{B}$
$\dot{a}$	: Incrément de la variable a
$\langle \rangle$	: Moyenne
$\tilde{a}$	: Variable normalisée
a', a''	: Variables exprimées dans des repères locaux
γ	: Excentricité de l'ellipse
$\hat{\gamma}$	: Rapport entre la taille minimale et maximale des agrégats
δ_{ij}	: Symbole de Kronecker
$\bar{\varepsilon}$	: Tenseur des déformations
$\bar{\varepsilon}^d$	: Tenseur des déformations inélastiques dues à l'endommagement
ζ	: Coefficient de saturation exponentiel de l'ouverture par rapport au glissement
η	: Coefficient de décroissance exponentielle de la contrainte de décohésion
θ	: Orientation de la branche par rapport à la partie centrale de la mésolfissure
λ	: Valeur propre
μ	: Coefficient de frottement
$\nu_{(0)}$	: Coefficient de Poisson (initial)
ξ	: Rapport entre l'incrément d'ouverture et l'incrément de glissement

ρ	: Rapport entre taille initiale et finale de mésosfissure
$\bar{\sigma}$	: Tenseur des contraintes
$\tau_c^{(0)}$	: Contrainte de cohésion (initiale)
τ_d	: Contrainte de décohésion
ν	: Vecteur propre
ϕ	: 1 ^{er} angle d'Euler 3-D ou orientation 2-D de la mésosfissure
ψ	: 2 ^{ème} angle d'Euler 3-D de la mésosfissure
$\omega_{(0)}$	: Densité de mésosfissuration (initiale)
$a_{(0,f)}$	: Demi-taille d'une mésosfissure (initiale, finale)
b	: Glissement
A	: Surface du V.E.R.
B	: Matrice de transformation de déplacement 2-D
C	: Matrice de transformation de déplacement 3-D
D	: Discontinuité de déplacement
$d_{(0)}$	: Ouverture (initiale) de la mésosfissure
$\bar{\bar{D}}$	: Tenseur de compliance tangente
E_0	: Module d'Young (initial)
$E()$	: Intégrale elliptique complète de seconde espèce
$G_{(0)}$	: Module de cisaillement (initial)
$H()$	: Fonction d'Heaviside
J	: Intégrale de Rice
$K()$	: Intégrale elliptique complète de première espèce
$K_I^{(g)}$	: Facteur d'intensité de contrainte en mode I (à l'interface)
K_I^c	: Ténacité de la matrice du matériau en mode I
l	: Longueur de branchement

M	: Intégrale de surface
$\vec{n}$	: Vecteur normal
N	: Nombre de mésolfissure contenues dans le V.E.R.
P	: Matrice de passage
$\bar{\bar{S}}^{(0)}$	: Tenseur de compliance sécante (du matériau sain)
$\bar{\bar{S}}^d$	: Tenseur des compliances inélastiques dues à l'endommagement
T	: Matrice de transformation
$\text{tr}()$	: Trace d'un tenseur ou d'une matrice
$\vec{u}$	: Vecteur champ de déplacement
V	: Volume du V.E.R.
DIF.	: Méthode différentielle
F.I.C.	: Facteur d'intensité de contrainte
M.A.C.	: Méthode autoconsistante (ou autocohérente)
M.D.D.	: Méthode des discontinuités de déplacement
M.E.B.	: Microscope électronique à balayage
N.I.C.	: Méthode de Taylor ou non-interaction (de Non Interacting Crack)
V.E.R.	: Volume élémentaire représentatif

INTRODUCTION

Ce mémoire de thèse est la synthèse d'une recherche consacrée à l'étude de l'endommagement par mésofissuration des roches quasi-fragiles. En mécanique des roches, les domaines d'application concernés par ces phénomènes d'endommagement sont nombreux (stockage de déchets, construction d'ouvrages souterrains, forages pétroliers, etc.). Dans le cas particulier du stockage souterrain, le massif hôte doit assurer diverses fonctions dont celles de barrière à la diffusion d'éléments radioactifs. L'état de dégradation (induit ou non) du massif rocheux joue un rôle clef dans l'évaluation des propriétés requises.

Par matériaux quasi-fragiles, nous entendons une classe de matériaux dont le comportement mécanique présente un certain nombre de caractéristiques communes : non-linéarité des réponses, anisotropie et dilatance induites par les sollicitations, forte sensibilité à la pression moyenne, rupture avec présence de faibles déformations permanentes. L'endommagement, quant à lui, est compris comme l'altération des propriétés mécaniques du matériau, celle-ci étant provoquée par une évolution de la mésostructure. Dans le cas qui nous concerne, il s'agira de modifications irréversibles de mésostructure en relation avec la fissuration (création et croissance de mésofissures). Il existe deux approches pour étudier le comportement d'une telle classe de matériau :

- les modèles phénoménologiques qui utilisent des variables internes d'endommagement pour bâtir la loi de comportement macroscopique de milieux mésofissurés (endommagés) et qui fournissent des équations constitutives applicables efficacement au calcul d'ouvrages de Génie-Civil,
- les modèles mésomécaniques qui tentent de prendre en compte les mécanismes de déformations à l'échelle des grains et de construire la loi de comportement par une procédure de changement d'échelle dite de passage micro-macro.

Une troisième voie intermédiaire peut être l'étude du passage micro-macro en vue d'enrichir directement la formulation des modèles phénoménologiques. Ce type de formulation macroscopique construit donc une loi de type phénoménologique tout en se référant à des mésomécanismes physiques bien identifiés. Cette approche, pour être plus efficace, doit s'appuyer sur des analyses issues des approches mésomécaniques. L'ambition générale est d'enrichir la compréhension physique du comportement quasi-fragile.

Ce mémoire s'organise autour de quatre chapitre dont les grandes lignes sont brièvement évoquées ci-après.

Nous nous proposons d'étudier dans un premier chapitre les mécanismes physiques d'endommagement fragile dont l'identification exacte est capitale pour le traitement d'éventuels couplages. Les récents progrès réalisés dans le domaine expérimental ont permis de montrer que le comportement mécanique de tels matériaux est pour une large part déterminé par leur mésostructure (Kranz, 1983, Myer et *al.*, 1992). Plusieurs modèles explicatifs ont émergé ces dernières années. Nous analyserons en particulier deux d'entre eux, l'un basé sur la porosité initiale, l'autre sur la préexistence de mésofissures. Cette analyse devra permettre d'aboutir à un choix de modèle physique pertinent pour l'étude du comportement quasi-fragile. Ce chapitre s'achève sur quelques réflexions d'ordre général concernant les différentes voies de modélisation du comportement envisagées dans cette étude.

Dans le second chapitre, après avoir précisé les concepts de base des approches micro-macro, on analyse différents modèles théoriques d'estimation des propriétés effectives des milieux contenant un nombre important de mésofissures ouvertes ou fermées. Les questions concernant l'évolution des mésofissures n'y sont pas abordées. La plupart de ces modèles conduisent à des prédictions divergentes pour des densités de mésofissures moyennes ou élevées. C'est pourquoi ces prédictions sont évaluées et comparées, dans le cas 2-D, à de nombreuses simulations numériques directes que nous avons réalisées à l'aide d'une méthode de discontinuité de déplacement. Ce chapitre constitue donc un préalable à l'étude de l'endommagement par mésofissuration des milieux élastiques fragiles.

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation mésomécanique du comportement des matériaux fragiles sous sollicitation de traction simple ou de compression triaxiale. Les seuls mécanismes (de déformation) considérés sont la création et la croissance de mésofissures ainsi que le frottement sur les lèvres de mésofissures fermées. Les deux types de sollicitations considérés conduisent à des modes de fissuration radicalement différents : mésofissures ouvertes en propagation rectiligne (mode I) pour la traction ; mésofissures fermées avec propagation en mode mixte (I + II). Aussi, la formulation de la loi de comportement est basée sur l'estimation de la compliance effective et de son évolution avec la mésostructure sous ces différents chargements. Les travaux à la base de cette partie du travail sont ceux de J. W. Ju et ses collaborateurs (Ju et Lee, 1991 ; Lee et Ju, 1991) et ceux de Fanella et Krajcinovic (1988). La contribution apportée ici est double : (i) expliciter et étendre l'écriture de ces modèles, en y incorporant sous une forme plus générale l'aspect 3-D de la mésofissuration ainsi que la création de mésofissures et la cohésion ; (ii) analyser

et tester les prédictions de cette modélisation sur le comportement du grès, ceci afin d'établir une base de développement pour une formulation incrémentale du modèle, ce qui est l'objet du quatrième et dernier chapitre.

Dans le quatrième chapitre, nous étendons le domaine de validité du modèle élaboré au chapitre III par une approche incrémentale. Cette approche devra donc permettre de décrire la réponse des matériaux sous des trajets de chargement plus généraux : chemins de chargement cycliques, chemins proportionnels, extension latérale, etc.. La forme nouvelle du modèle proposé permet également d'aborder certaines spécificités du comportement des matériaux étudiés telles le contact unilatéral des lèvres de mésolfissures (Ramtani, 1990). Enfin, l'étude des chemins de déchargement permettra de confirmer le rôle clé du frottement en exhibant des déformations résiduelles ou des boucles d'hystérésis liées à celui-ci.

I. MECANISMES PHYSIQUES D'ENDOMMAGEMENT ET MODELES DE COMPORTEMENT FRAGILE DES ROCHES

Ce chapitre essentiellement bibliographique concerne l'étude des mécanismes d'endommagement par mésofissuration dans les roches. Après avoir constaté l'importance de la fissuration axiale sous sollicitations de compression, nous analysons deux modèles physiques de déformation : le modèle de mésoporosité et le modèle de fissure inclinée glissante. Ce dernier modèle est apparu comme le plus pertinent pour aborder divers aspects du comportement fragile : dilatance, anisotropie induite, déformations permanentes, boucles d'hystérésis. Ce chapitre s'achève sur une analyse tridimensionnelle de ce modèle et sur des réflexions générales concernant la modélisation du comportement des matériaux mésofissurés.

I.1. Comportement fragile des roches et mésofissuration

Les roches quasi-fragiles telles que des grès ou des granites constituent une classe de matériaux hétérogènes dont le comportement non-linéaire sous sollicitations multiaxiales est assez complexe. Sous chargement de compression, elles présentent un certain nombre de caractéristiques communes dont les plus importantes sont :

- une réponse fortement non-linéaire accompagnée par une perte importante de rigidité,
- une anisotropie induite par les sollicitations ; cette anisotropie de comportement génère de manière générale des déformations volumiques fortement dilatantes. L'anisotropie ainsi que la dilatance peuvent être interprétées comme la conséquence d'une fissuration orientée. Nous reviendrons en détail sur ce point,
- une forte sensibilité à la pression moyenne. Une des manifestations les plus spectaculaires de cette caractéristique est la transition fragile-ductile souvent observée à fort confinement dans la réponse non-linéaire de roches réputées fragiles,
- un comportement irréversible sous sollicitations cycliques. Cette irréversibilité est accentuée par la présence de boucles d'hystérésis,
- l'existence de déformations permanentes parfois non négligeables, notamment pour les déformations volumiques. Les origines de telles déformations permanentes sont variées : champs d'autocontraintes, non-refermeture complète de défauts, frottement sur les lèvres de mésofissures.

La figure I.1, montrant un exemple de réponse expérimental obtenu au Laboratoire de Mécanique de Lille par R. Khazraei (1997) sur un grès de Vosges, permet d'illustrer certains traits caractéristiques que nous venons d'évoquer. Il s'agit d'un essai triaxial à 10 MPa de confinement, dans lequel on note l'importance de la dégradation ainsi que des déformations résiduelles. D'autres données sur un grès de Fontainebleau (Haied, 1995) conduisent qualitativement à des observations similaires.

Une importante littérature a été consacrée ces trois dernières décennies à l'étude des mécanismes physiques à l'origine d'un tel comportement des roches fragiles. Le résultat majeur de nombre de ces investigations est que l'on a pu relier la réponse mécanique des roches à leur degré de mésofissuration. Par exemple, à la suite notamment des travaux de Bienawski (1967), Paterson (1978) a synthétisé dans son ouvrage différentes phases du comportement mécanique reliées à des

stades précis de développement de la mésosfissuration ainsi qu'à l'évolution de nombreuses propriétés physiques. Nous reproduisons sur la figure I.2 le schéma proposé par cet auteur. On y note l'évolution, au cours de la déformation, de propriétés physiques variées, telles la résistivité électrique, la perméabilité, l'émission acoustique, les vitesses de propagation d'onde.

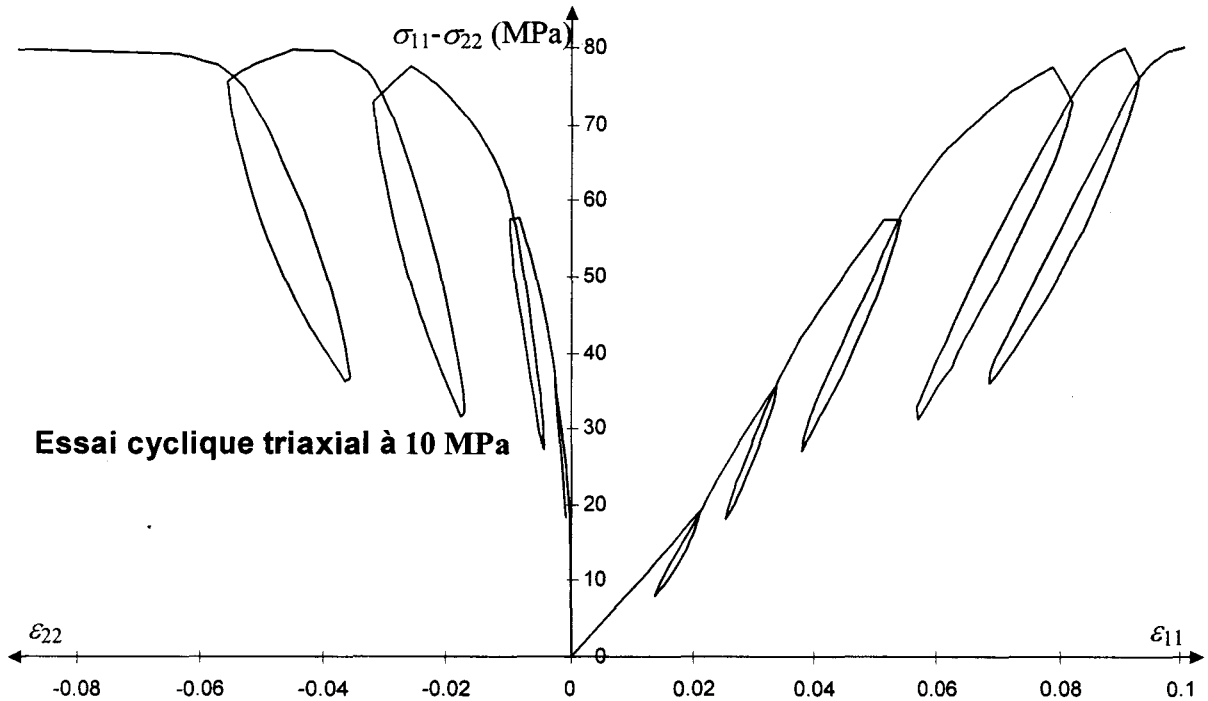


Figure I.1 : Exemple de courbe contraintes-déformations d'un grès des Vosges en compression triaxiale (d'après R. Khazraei, 1997).

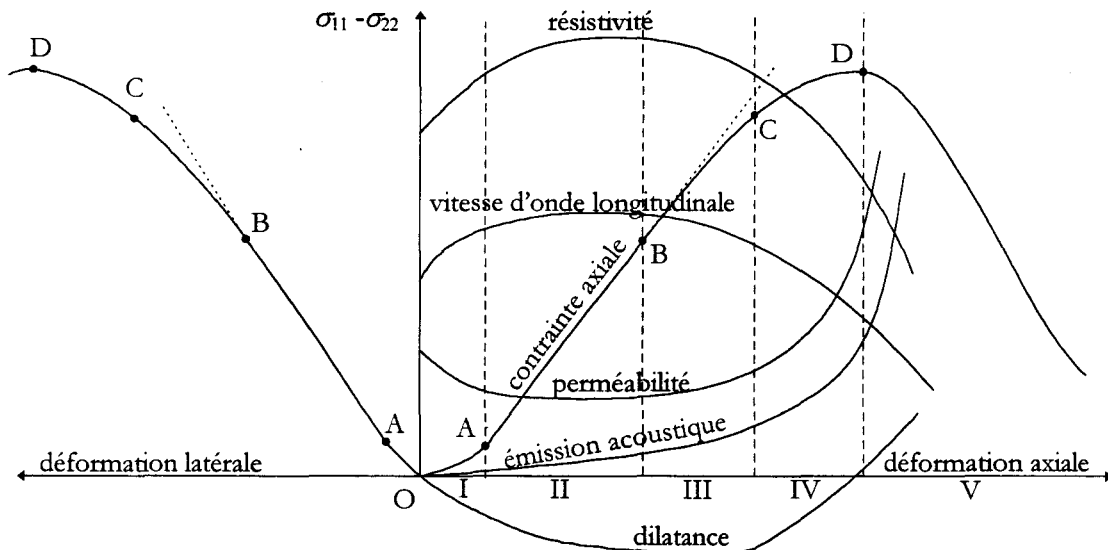


Figure I.2 : Phases du comportement en compression des roches et évolution de propriétés physiques.

Plus généralement, on distingue sur cette courbe plusieurs phases reliées à des degrés spécifiques de mésofissuration :

-(i) phase de serrage (OA) : le matériau supposé vierge contient en réalité des mésofissures qui se referment dans la première phase du chargement : c'est le phénomène de serrage. Parfois négligeable pour les roches, cette phase est pratiquement inexistante dans d'autres matériaux fragiles comme le béton.

-(ii) comportement linéaire (AB) : la réponse du matériau est linéaire dans cette phase. Un déchargement entraînerait la présence de boucles d'hystérésis de faible amplitude liée au frottement. Des mésofissures préexistantes peu inclinées par rapport à la contrainte principale majeure peuvent glisser (Bienawski, 1967). Au delà du seuil d'élasticité (en général, plus de 10 fois plus élevé en compression qu'en traction), des mésofissures préexistantes à la frontière des plus gros grains et de la matrice commencent à se propager.

-(iii) propagation (BC) : lorsque le niveau de sollicitations est encore plus élevé, les mésofissures se propagent aux interfaces grains-matrice puis dans la matrice. Durant cette phase, on observe une nette évolution des différentes propriétés physiques, signe d'une dégradation du matériau. Les mécanismes de création et de croissance de mésofissures dans cette phase seront spécifiquement analysés dans les prochains paragraphes. Précisons simplement qu'à ce stade, la propagation des mésofissures est stable.

-(iv) phase (CD) : C'est la phase de propagation instable qui précède la rupture macroscopique du matériau. Les non-linéarités des déformations s'accroissent. En particulier, on observe une importante dilatance sur la courbe de déformation volumique. Les mécanismes physiques d'interaction et de coalescence de mésofissures, en jeu durant cette phase, sont très complexes (ils dépendent par exemple du confinement) et conduisent généralement à la formation d'une macrofracture par un processus de localisation des déformations dont le traitement n'est pas abordé dans ce mémoire.

Remarque : Si la corrélation entre le comportement fragile des roches et le degré de fissuration diffuse semble relativement bien acceptée, les mécanismes précis à l'origine de celle-ci sont encore sujet à de nombreuses controverses. L'analyse précise de ces mécanismes sera abordée au paragraphe 1.3.

I.2. Introduction aux mécanismes d'endommagement fragile dans les roches

L'interprétation sommaire qui vient d'être présentée suggère que la mésosfissuration est le mécanisme responsable du comportement non-linéaire et de la rupture des roches fragiles. Toute tentative de modélisation d'un tel comportement, pour être viable, doit s'appuyer sur une compréhension physique de cette mésosfissuration. La mécanique de l'endommagement constitue le cadre idéal pour une telle modélisation. On désigne par endommagement les phénomènes de création et de croissance de surfaces de discontinuités à l'échelle des grains (qualifiée de mésoscopique) sous l'effet de sollicitations. Lorsque ces surfaces de discontinuités sont des mésosfissures, on parle d'endommagement par mésosfissuration ou d'endommagement fragile. Nous avons vu sur l'exemple précédent que, bien qu'ayant sa source à l'échelle mésoscopique, l'évolution de la structure (mésosfissuration) des roches altère de façon importante leurs propriétés macroscopiques. On devine alors les nombreuses conséquences que peut avoir l'endommagement dans les problèmes de géomécanique¹.

- Hétérogénéité des roches et amorçage de l'endommagement fragile :

Après ces brèves définitions, nous nous proposons de préciser le rôle joué par les hétérogénéités dans le processus d'endommagement des roches. En effet, les récents progrès réalisés dans le domaine expérimental et particulièrement en microscopie électronique à balayage ont permis de mettre en évidence la complexité ainsi que la diversité des sources de la mésosfissuration dans les roches fragiles. Celles-ci sont généralement composées de grains homogènes, d'orientation cristalline ou d'origine minéralogique diverses. Les interfaces entre ces grains ou entre grains et matrice sont les points faibles de la mésostructure où vont pouvoir se créer (site potentiel d'amorçage) et se propager les mésosfissures. De nombreux auteurs (Panet, 1976 ; Houpert et Hommand, 1980) indiquent d'ailleurs que la répartition des fissures (orientation et taille) est identique à celle des grains. Différentes études mésostructurales montrent que le type de fissures (inter, intra ou transgranulaires) mécaniquement induites dans les roches, ainsi que leur nombre relatif dépend de la mésostructure initiale (histoire du massif géologique d'où provient l'échantillon), de la minéralogie, du type de roche et naturellement du trajet de chargement imposé (cf. Jaeger et Cook, 1979). L'hétérogénéité du matériau à l'échelle mésoscopique peut ainsi jouer un rôle important, non seulement dans l'amorçage de l'endommagement, mais aussi au cours de son développement.

¹ Un domaine important de recherche impliquant ces problèmes d'endommagement est celui de la stabilité mécanique des ouvrages de stockage souterrain ainsi que la perméabilité des massifs hôtes. Plus exactement, ceux-ci doivent assurer un certain nombre de propriétés barrières pour la diffusion de polluants.

- Hétérogénéité des roches et développement de l'endommagement :

Les facteurs physiques externes susceptibles de générer et d'accroître la mésolfissuration des roches sont principalement de nature mécanique et thermique. Du fait de l'hétérogénéité de structure des roches, l'application d'un champ de contraintes homogène sur les contours d'une éprouvette, induit à l'échelle mésoscopique une distribution très complexe de contraintes qui affecte l'amorçage et l'évolution des mésolfissures. Celles-ci peuvent ainsi se fermer, s'ouvrir, croître ou s'arrêter de se développer en réponse à des contraintes locales fortement hétérogènes. Une cartographie qui donnerait la répartition précise de contraintes en fonction du chargement imposé pourrait ainsi fournir des informations capitales sur l'influence des hétérogénéités. Les données disponibles dans la littérature sur cette question (voir par exemple Kranz, 1983) indique que les contraintes locales les plus élevées sont situées sur les surfaces de contact (entre grains ou entre grains et matrice), en tête de fissures de mésolfissures préexistantes, ou au voisinage des pores. Le signe et l'amplitude de ces contraintes dépendent naturellement de l'orientation et de la géométrie de ces défauts ainsi que des propriétés mécaniques du milieu. Citons également, à propos du rôle des hétérogénéités, une synthèse plus récente proposée par Kemeny et Cook (1991).

- Mode d'endommagement par fissures d'extension :

Le but visé dans cette section est de préciser qu'à partir de diverses données de littérature, il est possible de dégager un mode prédominant d'endommagement fragile sous sollicitations de compression². L'identification exacte d'un tel mode d'endommagement est capitale pour la modélisation (physique) du comportement mécanique telle que nous l'envisageons dans la suite de ce travail.

De nombreuses observations réalisées sur des échantillons de roche déformée indiquent que la majeure partie des fissures mécaniquement induites apparaissent essentiellement en mode d'extension (mode I, voir figure I.3) (Wawersik et Brace, 1971 ; Peng et Johnson, 1972). L'existence de fissures de cisaillement était par contre assez controversée. Ce n'est qu'à partir des observations au microscope électronique à balayage (M.E.B.) de Tapponnier et Brace (1976) et celles de Wong (1982) que ces fissures de cisaillement, dont la taille est relativement faible, ont pu être mises en évidence. Nous reviendrons sur les liens entre ces deux types de fissuration.

² L'étude spécifique des mécanismes d'endommagement sous sollicitations de compression est nécessaire pour deux raisons : i) la plupart des applications en géomécanique impliquent des états de contraintes de ce type ; ii) comme nous le verrons dans les chapitres ultérieurs, l'étude de la mésolfissuration sous sollicitations de traction présente peu de difficultés, la propagation se faisant uniquement en mode I (ouverture).

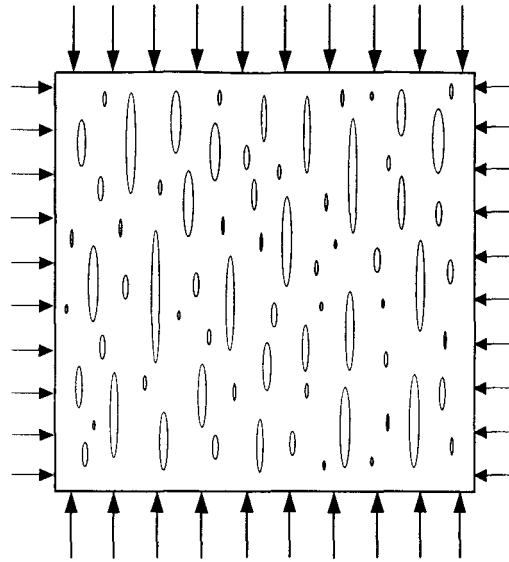


Figure I.3 : Fissuration axiale en extension.

I.3. Modèles physiques de déformations

Les fissures d'extension, que nous venons de décrire, restent le mode principal de déformation des roches fragiles en compression. Les nombreuses tentatives effectuées (notamment les observations au microscope) pour comprendre l'origine de cette fissuration ont été à l'origine de diverses controverses. La raison essentielle d'une telle situation est la grande variété des origines mésostructurales identifiées : pores, fissures préexistantes, défauts d'élasticité entre constituants, interfaces. Parmi ces sources de fissuration, deux ont été particulièrement abordées dans la littérature et ont donné lieu à quelques modèles analytiques simples. Nous les analysons maintenant.

I.3.1. Modèle de mésoporosité

Dans cette modélisation, on considère que la fissure axiale émane d'un pore. Sammis et Ashby (1986) ont calculé les conditions de croissance en fonction du rayon des pores et du confinement (figure I.4). Ces résultats ont été comparés avec des expériences sur des verres et sur des matières plastiques.

On peut faire ici l'analyse qualitative de ce modèle physique. Supposons le pore cylindrique soumis aux contraintes σ_{11} et σ_{22} . Lorsque $\sigma_{11} > 3\sigma_{22}$, une zone de traction apparaît à la frontière du pore dans la direction des contraintes principales. Si $\sigma_{11} - 3\sigma_{22}$ croît, des mésofissures peuvent s'amorcer dans la zone de concentration de contraintes et se propager dans la direction de σ_{11} (voir figure I.4). Sammis et Ashby (1986) ont établi une expression générale du facteur d'intensité de contraintes (F.I.C.) de la fissure en fonction de la longueur l :

$$K_I = -\sigma_{11} \sqrt{\pi a} \left[\frac{1.1 \left(1 - 2.1 \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}} \right)}{\left(1 + \frac{l}{a} \right)^{3.3}} - \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}} \right] \sqrt{\frac{l}{a}} \quad (1.1)$$

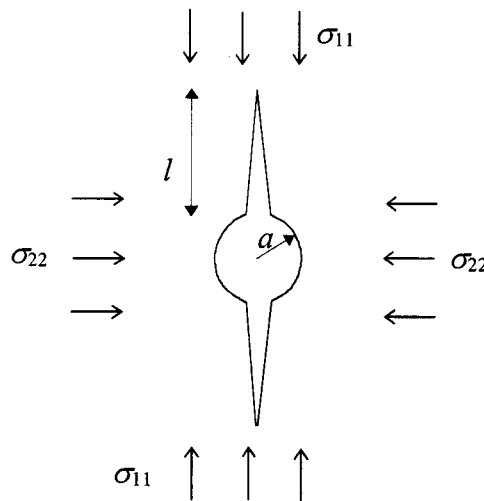


Figure I.4 : Modélisation d'un mésopore cylindrique 2-D.

Selon cette expression, la propagation de la fissure s'amorce de manière instable, puis de manière stable. La figure I.5 montre la variation du F.I.C. normalisé avec la longueur l , pour différents rapports $\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}}$. Cet ensemble de courbes indique que la transition entre la propagation instable et stable survient tôt. Par exemple, dans le cas de la compression simple ($\sigma_{22} = 0$), cette transition se produit pour une longueur $l = \frac{a}{5.6} \approx 0.18a$, avec un F.I.C. normalisé de 0.27. En supposant une ténacité de $0.6 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ et un rayon moyen de pore de 5.10^{-3} m , la fissuration s'amorce pour $\sigma_{11} = -17.7 \text{ MPa}$ (le rapport $\frac{l}{a} = 1$ est atteint pour $\sigma_{11} = -42.8 \text{ MPa}$). Les grandes longueurs de fissure ne peuvent être atteintes avec ce modèle de mésoporosité : il faudrait par exemple $\sigma_{11} = -441 \text{ MPa}$ pour obtenir $\frac{l}{a} = 4$ que l'on constate expérimentalement pour les mésofissures.

Sammis et Ashby (1986) ont également étudié le cas des mésopores sphériques. Les conclusions sont en général analogues aux précédentes. La transition entre la propagation instable et stable survient un peu plus tôt qu'en 2-D ($l = \frac{a}{7.2} \approx 0.14a$ en compression simple). A partir de ces quelques illustrations, on peut observer que la propagation de fissures axiales émanant de pores est

peu probable. Cette remarque peut être confortée par la forte stabilisation de la propagation, que l'on constate lorsqu'est appliquée une pression de confinement.

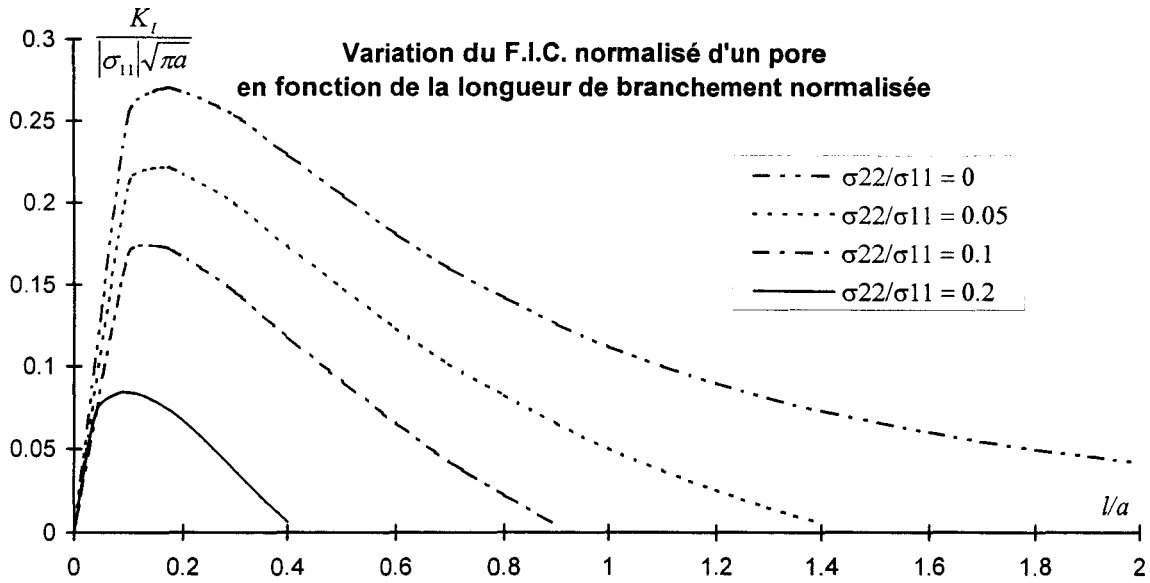


Figure I.5 : Variation du F.I.C. normalisé d'un mésopore cylindrique.

I.3.2. Modèle de la fissure inclinée glissante

L'autre modèle explicatif de la fissuration axiale est celui basé sur le frottement et le glissement sur des lèvres de fissures préexistantes, couplés avec un branchement de la mésofissure (figure I.6a). Initialement proposée par Brace et Bombolakis (1963), ce modèle physique est largement utilisé en mécanique des roches (Brace et *al.*, 1966 ; Scholz et Kranz, 1974 ; Nemat-Nasser et Horii, 1982 ; Horii et Nemat-Nasser, 1985), et plus récemment Myer et *al.* (1995). De nombreuses études concernant la déformation des bétons font intervenir également ce type de modèle (voir p. ex. Zaitsev, 1983).

Pour ce modèle physique de mésofissure inclinée, le mécanisme principal est le glissement induisant une extension. Une mésofissure soumise à des sollicitations de compression se propage, après un certain seuil de chargement, de manière stable en mode I (ouverture) dans la direction principale de chargement. Cette ouverture des branches a été observée dans les expériences de Brace et Bombolakis (1963), de Hoek et Bienawski (1965) et dans celles de Horii et Nemat-Nasser, 1985, 1986). Depuis le modèle de base de Brace et *al.* (1966), plusieurs auteurs ont proposé des schématisations théoriques de la fissure branchée (Nemat-Nasser et Horii, 1982 ; Zaitsev, 1983 ; Horii et Nemat-Nasser, 1985, 1986 ; Scholz et *al.*, 1986) : toutes ont en commun le cisaillement comme force motrice de l'extension des branches. Certaines de ces schématisations ont été mises en œuvre pour des études spécifiques de l'endommagement (Kachanov, 1982a, 1982b ; Ashby et

Hallam, 1986 ; Kemeny et Cook, 1987 ; Fanella et Krajcinovic, 1988 ; Nemat-Nasser et Obata, 1988 et Ju et Lee, 1991). Nous présentons brièvement ici les aspects essentiels de l'étude de la fissure branchée dans le cas 2-D. Le mécanismes physiques de branchement dans le cas 3-D seront analysés ultérieurement dans ce chapitre, à partir de données expérimentales de la littérature.

Etude mécanique bidimensionnelle de quelques modèles de mésosfissures branchées :

La mésosfissure initiale (figure I.6a) est supposée rectiligne de longueur $2a$, et soumise à un champ biaxial de contraintes principales. Il est également admis que la longueur de contact ne varie pas en fonction du glissement.

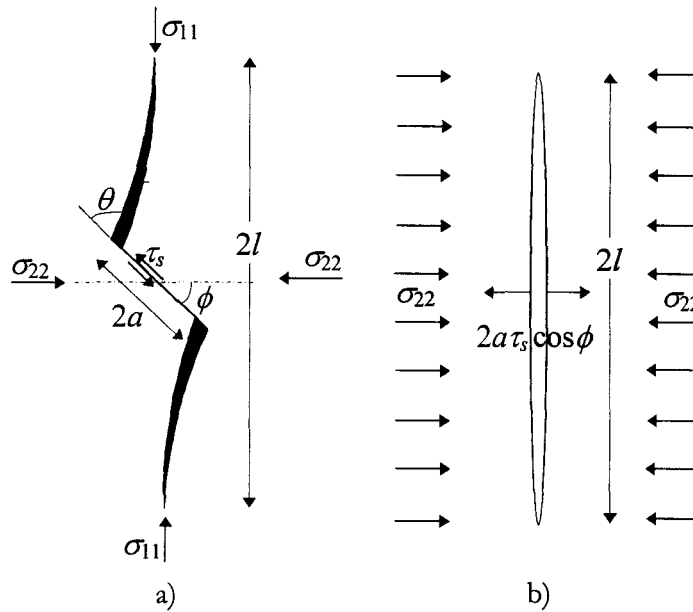


Figure I.6 : Modèle de la mésosfissure glissante inclinée.

Sur la base d'un critère de type Coulomb, la contrainte de cisaillement, réduit par la présence du frottement (μ), qui s'applique sur la partie centrale de la mésosfissure branchée est :

$$\tau_s = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \frac{\sin 2\phi}{2} - \mu (\sigma_{11} \cos^2 \phi + \sigma_{22} \sin^2 \phi) \quad (1.2)$$

Le cisaillement réduit (ou résultant) induit des zones de traction en tête de fissure. Ceci a pour effet de favoriser l'amorçage d'une branche qui se propage en mode I et s'aligne progressivement dans la direction du chargement principal.

Kemeny et Cook (1987) ont approximé cette fissure par une longue fissure verticale de longueur $2l$ (figure I.6b). Le F.I.C. après amorçage est alors donné par :

$$K_I = \frac{2a\tau_s \cos\phi}{\sqrt{\pi l}} + \sigma_{22}\sqrt{\pi l} \quad \text{si } a \ll l \quad (1.3)$$

Horii et Nemat-Nasser (1986) ont établi une expression du F.I.C. valable pour tout l (l étant maintenant la longueur d'une branche). Le cisaillement résultant $\tau_s^r = |\tau_s| - \tau_c$ sur la partie centrale de longueur $2a$, obtenu en tenant compte de la cohésion τ_c , devient une paire de forces réparties colinéaires dont la composante normale à la fissure équivalente (figure I.6b) est : $F_n = 2a\tau_s^r \sin\theta$.

Le facteur d'intensité de contrainte produit par une telle force est : $K_I^{\text{ouverture}} = \frac{F_n}{\sqrt{\pi l}}$. On constate que ce résultat est singulier en $l = 0$; on introduit alors une longueur effective de branche $l + l^*$. Le facteur d'intensité de contrainte devient $K_I^{\text{ouverture}} = \frac{2a\tau_s^r \sin\theta}{\sqrt{\pi(l+l^*)}}$. (1.4)

Par rapport à (1.3), le F.I.C. (1.4) est évalué en tenant compte de la forme courbe de la branche. Pour déterminer l^* , les auteurs utilisent le F.I.C. donné par Cotterell & Rice (1980) lors de l'amorçage du branchement (en supposant que la partie centrale de la fissure est en mode II pur et la branche en mode I pur pour) :

$$K_I = \frac{3}{4} K_{II} \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right). \quad \text{C'est-à-dire :}$$

$\tilde{K}_I = \frac{3}{4} \sqrt{\pi a} \sigma_s \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right)$. Or, à l'amorçage du branchement, la longueur de la branche est nulle et la direction de propagation obtenue, correspondant au maximum du facteur d'intensité de contrainte $\tilde{K}_I$, vaut $\theta_c = \text{Arccos}\frac{1}{3} \approx 0.392\pi$. En égalant les deux F.I.C. avec $l = 0$, $\tilde{l}^* = \frac{8}{3\pi^2} \approx 0.27$.

Par ailleurs, une fissure idéale de longueur $2l$ soumise à une contrainte normale σ_n ayant pour facteur d'intensité de contraintes en mode d'ouverture : $K_I^{\text{contraintes}} = \sqrt{\pi l} \sigma_n$, le facteur d'intensité de contraintes total de la fissure équivalente est donc donné par :

$$K_I = \frac{2a\tau_s^r \sin\theta}{\sqrt{\pi(l+l^*)}} + \sqrt{\pi l} (\sigma_{11} \cos^2(\phi+\theta) + \sigma_{22} \sin^2(\phi+\theta)) \quad (1.5)$$

La relation (1.5) prédit une propagation stable des branches si $\sigma_{22} \leq 0$ (compression). L'application d'une contrainte latérale de traction $\sigma_{22} \geq 0$, même faible, génère une phase d'instabilité de la propagation après une étape de propagation stable (voir figure I.7). Comme l'angle

de branchement θ dépend du chargement, du frottement, de l'orientation de la partie centrale et de la longueur de branchement, nous avons utilisé les résultats exacts de Horii et Nemat-Nasser(1986, figure 17, p. 357) pour calculer numériquement les valeurs indiquées sur cette figure. Les paramètres utilisés sont : $\mu = 0.3$, $\phi = 45^\circ$ et $\tau_c = 0$.

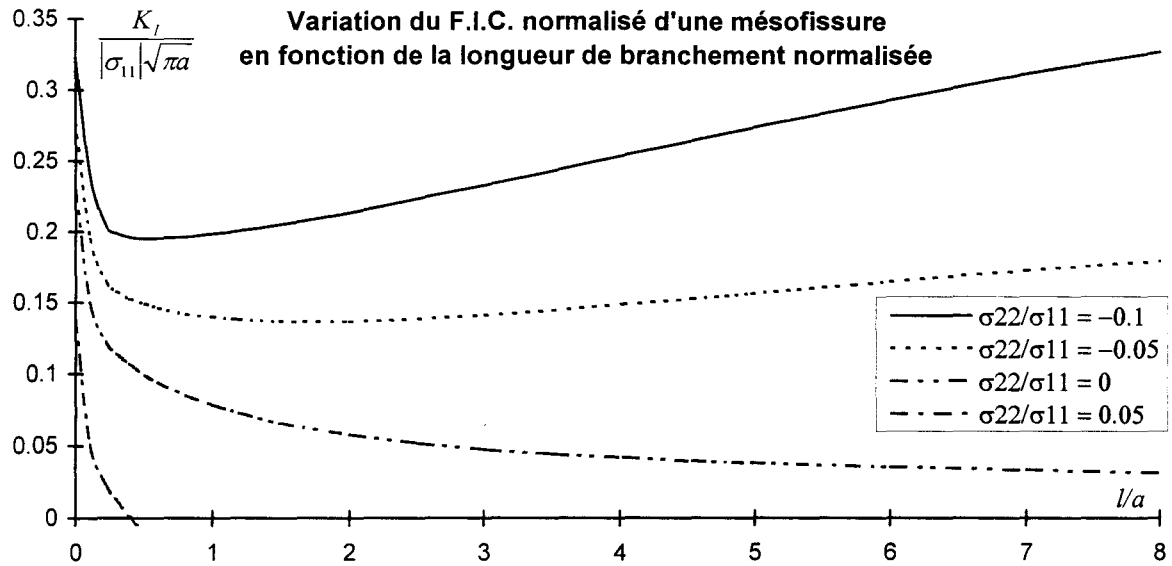


Figure I.7 : Variation du F.I.C. normalisé d'une mésolfissure branchée 2-D.

On constate également la très forte sensibilité de la stabilité de la propagation (diminution de K_I) vis à vis de la pression latérale. Cet effet d'inhibition de la fissuration axiale par le confinement a été confirmé dans certaines des expériences - modèles réalisées par Horii et Nemat-Nasser (1985).

Le modèle analytique qui vient d'être présenté a l'inconvénient suivant : aux points d'application des deux forces concentrées F_n , les composantes du vecteur discontinuités de déplacement (ouverture, glissement) tendent vers l'infini. Ceci est préjudiciable pour le calcul des compliances ou des déformations qui dépendent directement de ces discontinuités de déplacement. C'est pourquoi Fanella et Krajcinovic (1988) en ont proposé une variante (voir figure I.8). Les branches sont supposées verticales (dans la direction du chargement principal σ_{11}). La force F se projette selon deux composantes (normale et tangentielle) P et S . Ces deux forces sont les intégrales sur une longueur $2a\alpha\sin\phi$ des deux contraintes correspondantes p_0 et s_0 . Cette longueur est corrigée par un coefficient α (évalué à 0.25 en moyenne ; ce coefficient joue ici le rôle de l^*), afin que le F.I.C. de cette fissure équivalente soit égal à celui du modèle précédent (de Horii et Nemat-Nasser, 1985).

$$P = F \cos \phi = 2 \int_0^{a \sin \phi} p_0 dx, \quad S = F \sin \phi = 2 \int_0^{a \sin \phi} s_0 dx \quad \text{soit } s_0 = \frac{\tau_s}{\alpha} \quad \text{et } p_0 = s_0 \cot \phi.$$

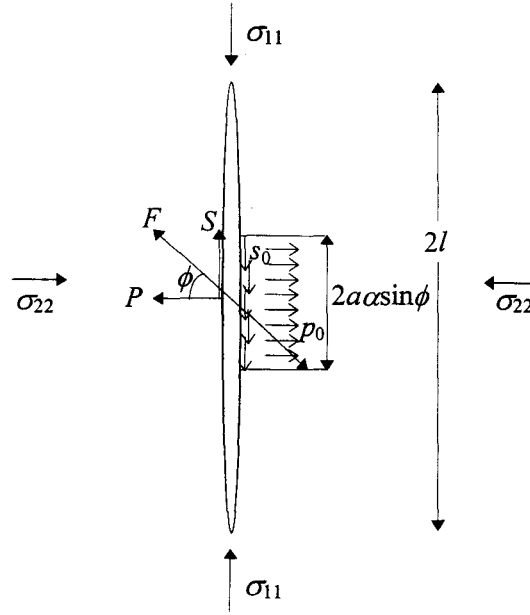


Figure I.8 : Modèle de fissure équivalente de Fanella et Krajcinovic (1988).

L'ensemble des modèles présentés concordent pour le calcul du facteur d'intensité de contraintes de la fissure branchée. Un point commun particulier de ces modèles analytiques est une grande sensibilité à la pression de confinement : de faibles valeurs de σ_{22} diminuent considérablement le F.I.C. et, par conséquent, abaissent le seuil de branchement (cf. par exemple la figure I.8). Il faut préciser que si la pression de confinement stabilise les fissures et semble inhiber leur croissance, il est observé dans certaines expériences que le nombre et la taille moyenne des mésofissures mécaniquement induites sont très importants dans la roche déformée à haute pression de confinement (Kranz, 1983). L'application d'un confinement implique d'imposer un déviateur de contraintes élevé pour propager les mésofissures, ce qui provoque en même temps l'activation d'un grand nombre de petites fissures. De plus, si la pression de confinement s'oppose au développement des mésofissures, elle favorise aussi les interactions entre celles-ci et généralement leur croissance. Ces effets ont été mis en évidence par Horii et Nemat-Nasser (1985) dans un modèle expérimental.

Conclusions :

Les deux modèles physiques (mésoporosité, fissure branchée) présentés ont en commun la génération d'une fissuration axiale. Nous avons vu quelques difficultés inhérentes au mécanisme de porosité initiale ; en particulier, on a noté un effet très fort de la présence du confinement. De plus, le modèle physique de mésopores, ne permet pas d'interpréter certains aspects du comportement, tels les boucles d'hystérésis ou la présence de déformations résiduelles. Grâce à la présence du frottement, ceci est par contre possible dans le modèle de mésofissure inclinée. Il faut rappeler que

la réalité physique des matériaux rocheux est sans doute très complexe et doit mettre en jeu l'ensemble des sources de fissuration indiquées au paragraphe 1.2.

L'ensemble des études que nous avons décrites à propos de la fissure branchée ont été réalisées en 2-D. Nous abordons maintenant, sur la base de données expérimentales, les questions liées à la nature tridimensionnelle de la mésofissuration. Nous proposerons une extension 3-D des études analytiques au troisième chapitre.

1.3.3. Aspects expérimentaux tridimensionnels de la mésofissuration

Très peu d'expériences détaillées traitant des modes d'évolution des fissures tridimensionnelles sont disponibles dans la littérature. Ceci est encore plus vrai pour les matériaux naturels comme les roches. Les études menées par Adams et Sines (1978) sont sans doute les premières de ce type (sur polyméthylméthacrylate transparent ou P.M.M.A.) dans un matériau voisin des roches. Les principaux aspects (scénario) de la propagation rapportés par ces auteurs sont les suivants (voir figure I.9) :

- ⇒ les fissures primaires se branchent en tête (inférieure et supérieure) de la fissure initiale dans la direction principale de chargement ; c'est la coupe plane de ces fissures primaires qui correspond à la fissure branchée 2-D.
- ⇒ puis, des fissures « nageoire de poisson » apparaissent dans le centre de la fissure de type *penny-shaped* ; elles se propagent aussi dans la direction principale de chargement (leurs longueurs peuvent être supérieures à celles des fissures primaires),
- ⇒ enfin les fissures « pétales » apparaissent sur le contour de la fissure centrale près des branches.

Les fissures « nageoires de poisson » ressemblent aux branches des pores : peut-être parce qu'il n'y a pas de contact net entre les lèvres de la fissure centrale à cet endroit. Scholz (1990) a suggéré une description différente du début de la propagation des mésofissures de type *penny-shaped* : il a ignoré les fissures « nageoires de poisson », mais a émis l'hypothèse que les fissures « pétales » pouvaient être plus développées (voir figure I.10) que celles observées par Adams et Sines (1978).

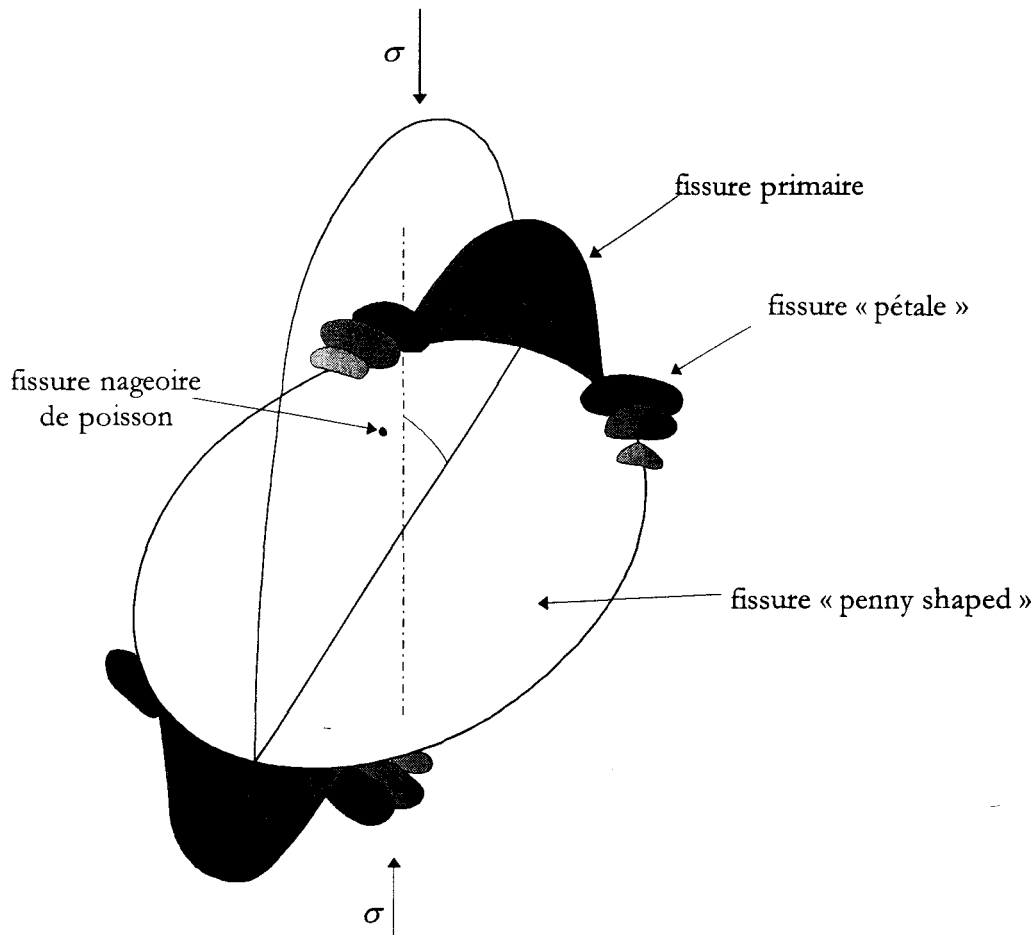


Figure I.9 : Branchement d'une mésolfissure 3-D d'après Adams et Sines (1978).

Un des moyens d'affiner la compréhension et l'importance de ces mécanismes, consiste à réaliser des expériences sur matériaux transparents. Le verre est un matériau adéquat pour ces expériences : la ténacité du verre est du même ordre de grandeur que celui des matériaux rocheux. Il est nécessaire d'effectuer plusieurs fois les essais pour obtenir des caractéristiques statistiquement représentatives du matériau étudié. Des résultats expérimentaux (Adams et Sines, 1978) montrent que les fissures 3-D isolées ne se propagent pas sur une longue distance ($\frac{l}{a} = 1$). Par rapport au cas 2-D, des parties du contour sont dominées par du cisaillement longitudinal (III), cela ne crée pas de contrainte de traction mais de petites fissures (pétales) inclinées. Il faut cependant relativiser ces résultats car les échantillons de verre ne contiennent pas de nombreuses mésolfissures préexistantes comme dans les matériaux rocheux. De manière générale, la propagation de la branche (fissure primaire) dans la direction principale de chargement s'accompagne d'une propagation latérale.

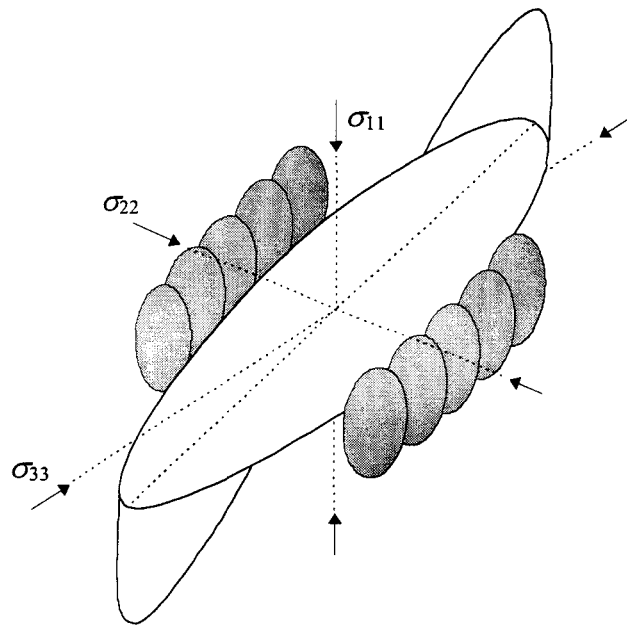


Figure I.10 : Propagation en compression d'une mésocraquelure 3-D d'après Scholz (1990).

Etant donné que les étapes initiales du développement d'une mésocraquelure sont qualitativement différentes en 2-D par rapport au cas 3-D, la transition entre les échelles 2-D et 3D nécessite quelques précisions : l'ouverture des branches des mésocraquelures voisines provoquerait un champ de traction dans des plans parallèles à l'axe de compression. Suivant l'orientation de la mésocraquelure, la propagation se trouverait fortement accélérée.

Pour plus de détails sur ces différents aspects, nous pouvons citer les travaux de Germanovich et *al.*, 1993 ; 1994).

I.4. Conclusions et commentaires sur quelques pistes de modélisation

L'établissement de modèles de comportement pour étudier la dégradation par mésocraquelure s'effectue généralement, soit par une approche phénoménologique, soit à travers une approche micro-macro. Ces approches sont bien analysées dans l'ouvrage de Krajcinovic (1997). Ne souhaitant donc pas présenter une revue bibliographique complète sur ces démarches, nous nous contenterons de faire ici quelques réflexions d'ordre général. Une présentation plus précise du cadre particulier des approches micro-macro sera faite au prochain chapitre.

Approche phénoménologique :

Elle consiste généralement à traiter les phénomènes d'évolution de mésostructure (dégradation) par l'intermédiaire de variables internes d'endommagement. La donnée d'un potentiel

d'énergie (par exemple énergie libre de Helmotz) ainsi que des lois d'évolutions des variables internes permet d'aboutir, dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles, à des lois de comportement macroscopiques. Cette démarche est assez rigoureuse et les lois de comportement qui en sont issues ont l'avantage d'être facilement incorporées dans des codes de calculs par éléments finis. Elles présentent cependant un certain nombre d'écueils dont les plus importants résident dans le choix des variables internes et/ou des lois d'évolution. S'agissant de l'endommagement anisotrope par mésosfissuration, une synthèse proposée par Chaboche (1992a) permet de constater un certain nombre d'inconsistances dans la plupart des modèles phénoménologiques existants : perte de symétrie du tenseur d'élasticité, discontinuité des réponses sous certains trajets de sollicitations. Une autre difficulté majeure concerne le traitement des effets unilatéraux, pour lequel certains travaux récents (Chaboche, 1993 ; Halm, 1997 ; Halm et Dragon, 1996) semblent apporter des solutions pertinentes.

Approche mésomécanique :

La démarche micro-macro vise à bâtir la loi de comportement en s'appuyant sur des mécanismes d'évolution de mésostructure bien identifiés. Par exemple, pour le comportement des roches fragiles, l'analyse bibliographique réalisée peut servir comme base à une telle approche. Depuis les travaux de Kachanov (1982a, 1982b), de nombreux modèles de comportement de matériaux fragiles sont issus de cette approche. Certains de ces modèles sont formulés en 2-D. C'est le cas par exemple des travaux d'Andrieux (1983), (voir également Andrieux et *al.*, 1986) ou de Nemat-Nasser et Obata (1988). Ces auteurs ont, par des voies différentes aboutit à des modèles assez riches, formulés de manière incrémentale. En particulier, les mécanismes de frottement et de glissement y sont abondamment analysés. La limitation de ces études reste leur caractère bidimensionnel. Il existe également d'autres études, tridimensionnelles, comme celles de Gambarotta et Lagomarsino (1993), de Krajcinovic et Fanella (1986), de Fanella et Krajcinovic (1988) ou encore de Lee et Ju (1991) et Ju et Lee (1991). L'étude de Gambarotta et Lagomarsino est très générale pour les trajets de sollicitations, car de formulation incrémentale. Mais elle s'appuie sur une hypothèse de propagation rectiligne des mésosfissures préexistantes, avec frottement. Nous avons vu qu'une telle hypothèse n'est pas toujours conforme à l'apparition de mésosfissures axiales, observées dans les expériences. D'ailleurs l'insuffisance de cette hypothèse est confirmé par les très faibles dilatances prédites en compression par cette modélisation. Les travaux de l'équipe de D. Krajcinovic ou ceux de J. W. Ju font l'hypothèse d'une mésosfissure branchée, ce qui permet de mieux décrire les mécanismes de déformation fragile, mais ils sont limités à des chemins de compression triaxiale de révolution.

Conclusions :

Les modèles mésomécaniques permettent a priori de bâtir des lois de comportement intégrant de façon plus pertinente les mécanismes physiques de déformation à l'échelle des grains (par exemple). Ils peuvent donc conduire à des lois d'une grande richesse. L'inconvénient majeur reste leur complexité aussi bien en phase d'élaboration que de mise en œuvre numérique. Une voie intermédiaire émerge dans certaines études récentes. Elle consiste à enrichir la construction des modèles phénoménologiques d'endommagement (par mésofissuration) à l'aide de résultats issus de la micromécanique. A ce titre, on peut citer les travaux de Halm et Dragon (1996) qui proposent des potentiels thermodynamiques bâtis sur la base des résultats de Kachanov (1992, 1993b) et permettant de traiter les problèmes de refermeture de fissures (effets unilatéraux). Néanmoins ces travaux n'intègrent pas encore de manière complètement satisfaisante les mécanismes importants de déformations répertoriés dans ce chapitre. L'étude théorique et numérique de modèles intégrant de tels mécanismes physiques de déformations des matériaux quasi-fragiles, ainsi que des simplifications qu'on peut en apporter, permettrait de mieux asseoir les approches intermédiaires que nous venons d'évoquer.

I.5. Conclusions du chapitre et objectifs

Ce premier chapitre général a permis d'identifier des mécanismes fondamentaux de la déformation des roches quasi-fragiles. Naturellement, sur la base de quelques données concordantes de la littérature en mécanique des roches, certains de ces mécanismes ont été privilégiés. Mieux, nous étions amenés à conclure de l'intérêt du modèle physique de mésofissure branchée. L'incorporation du frottement et l'adjonction de lois d'évolution adéquates devrait en faire, a priori, un modèle conforme à la plupart des observations expérimentales. C'est l'ambition générale de ce travail que de contribuer au développement des modèles mésomécaniques de matériaux à fissuration diffuse, l'objectif à moyen terme étant d'enrichir certaines approches phénoménologiques de l'endommagement par mésofissuration.

Il n'est pas inutile de préciser ici que le modèle physique (de fissure branchée) retenu est souvent envisagé dans l'étude du comportement d'autres matériaux tels les bétons ou des céramiques. Il nous semble cependant que la modélisation qui en sera directement issue dans ce travail devra pour l'instant être limitée aux matériaux à faible porosité pour lesquels les mécanismes de mésoporosité seront négligeables. D'autres types de modélisations devront être mises en œuvre dans le cas d'endommagement par évolution de porosité (voir p. ex. Pijaudier-Cabot et Burlion, 1996).

II. ESTIMATIONS THEORIQUES ET NUMERIQUES DES PROPRIETES EFFECTIVES DES MILIEUX MESOFISSURES

Après avoir précisé les concepts de base des approches micromécaniques, on analyse différents modèles théoriques d'estimation des propriétés effectives des milieux contenant un nombre important de mésolfissures. La plupart de ces modèles (non-interaction, Mori-Tanaka, modèle autocohérent, méthode différentielle, etc.) conduisent à des prédictions divergentes pour des densités de mésolfissures moyennes ou élevées. Ces prédictions sont ensuite comparées à de nombreuses simulations numériques directes que nous avons réalisées à l'aide d'une méthode de discontinuité de déplacement (méthode de frontière). On en conclut que, de manière générale, l'approximation de non-interaction est assez pertinente, notamment pour des mésolfissures fermées glissantes.

Dans ce chapitre, on se propose d'analyser les propriétés effectives des matériaux contenant un grand nombre de mésos fissures. Les questions concernant l'évolution des mésos fissures n'y sont pas abordées. Il s'agit donc d'un préalable à l'étude de l'endommagement par mésos fissuration des milieux élastiques fragiles. La distribution des mésos fissures étant supposée quelconque, il est *a priori* possible d'inscrire l'étude des milieux contenant des mésos fissures dans le cadre général de la théorie de la micromécanique des milieux aléatoires (théorie d'Eshelby, 1957 ; 1961). Mais à cause de la géométrie particulière des fissures (ellipsoïdes aplatis), qui induit certaines dégénérescences mathématiques, le point de vue développé est celui de l'approche directe suivie par Horii et Nemat-Nasser (1983) et récemment décrite de façon détaillée par Kachanov (1993b). Après avoir rappelé les concepts de base des approches micro-macro, on étudie et développe quelques modèles analytiques permettant la prise en compte des interactions entre fissures ouvertes ou fermées. Les prédictions de ces modèles seront analysées à la lumière de simulations numériques directes réalisées à l'aide d'une méthode de frontière.

II.1. Notion de V.E.R. et définition des grandeurs moyennes

L'échelle habituelle du mécanicien est celui du point matériel, dite macroscopique. A cette échelle, le milieu est supposé continu et généralement homogène. Or, la plupart des matériaux de l'ingénieur sont hétérogènes. Cette hétérogénéité provient de la nature des divers constituants du matériau. Dans le cas particulier des roches, c'est à la fois la minéralogie ainsi que les mésos fissures préexistantes qui sont à l'origine de cette hétérogénéité. Dans les bétons, la porosité peut également jouer un rôle non négligeable. L'échelle de l'assemblage grains-matrice, dite mésoscopique, constitue ainsi une échelle appropriée à l'étude de ces matériaux. Une schématisation des relations entre les deux échelles est présentée sur la figure II.1, P étant un point matériel.

Ayant précisé ces notions d'échelle de longueurs, on peut préciser maintenant le concept de volume élémentaire représentatif (V.E.R.)¹ (Hill, 1965). Il s'agit d'un élément de volume qui, au point matériel P est statistiquement représentatif d'un voisinage infinitésimal en ce point. Le V.E.R. doit être donc suffisamment petit par rapport au volume de l'échantillon ou de la structure et suffisamment grand par rapport aux nombreuses hétérogénéités qu'il contient.

L'objectif général des approches micro-macro étant de trouver un milieu homogène équivalent ayant les mêmes propriétés macroscopiques que le milieu hétérogène, il est nécessaire de

¹ Pour une discussion détaillée de ce concept de volume élémentaire représentatif et des notions de moyenne qui s'y rattachent, on peut se référer au premier chapitre de l'ouvrage de Nemat-Nasser et Hori (1993) ou à Bornert (1996).

définir sur le V.E.R. les valeurs moyennes des champs locaux. De manière générale, les contraintes et déformations moyennes sont définies (Hill, 1963 ; Bui et *al.*, 1981 ; Mura, 1987 ; Nemat-Nasser et Hori, 1993)² par :

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV \quad \text{et} \quad \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon dV. \quad (2.1)$$

ECHELLE MACROSCOPIQUE

ECHELLE MESOSCOPIQUE

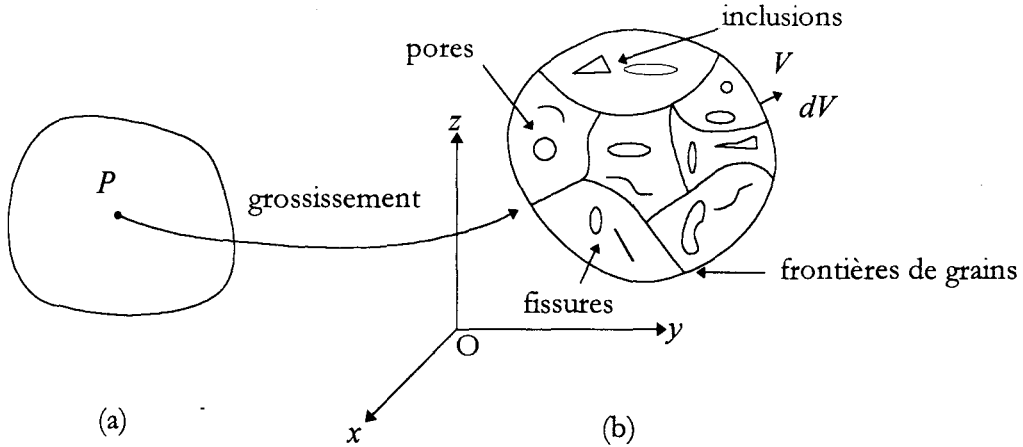


Figure II.1 : Définition du Volume Élémentaire Représentatif en un point matériel P .

Dans le cas particulier de conditions aux limites homogènes en contraintes, on vérifie que $\langle \sigma \rangle = \bar{\sigma}$. La contrainte moyenne $\langle \sigma \rangle$ est donc égale à la contrainte macroscopique $\bar{\sigma}$ imposée sur le V.E.R.. Comme les fissures sont supposées de tailles assez faibles par rapport à la taille du V.E.R., on peut considérer que cette hypothèse revient à négliger les effets de bord. Précisons dès à présent que les développements analytiques ultérieurs sur les milieux fissurés seront effectués dans ce cadre. La raison en est que sous l'hypothèse de contraintes homogènes au contour, les solutions des champs associés à la présence des fissures peuvent être aisément construites.

En supposant que les hétérogénéités sont des défauts de types pores ou fissures dans une matrice solide, on a :

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon^0 + \int_{\Gamma} \frac{1}{2} (\bar{u} \otimes \bar{n} + \bar{n} \otimes \bar{u}) dS \quad (2.2)$$

$\bar{u}$ représente le vecteur champ de déplacements et Γ l'ensemble des surfaces de discontinuité (p. ex. lèvres de fissures) ; la normale extérieure le long de ces surfaces est notée $\bar{n}$.

² Il s'agit là d'une hypothèse dite d'ergodicité (Kröner, 1977) où la moyenne d'un ensemble est supposée équivalente à la moyenne volumique.

II.2. Compliances élastiques effectives des milieux fissurés

On se place maintenant dans le cadre d'un milieu contenant une population donnée de mésosfissures (figure II.2a). L'expression (2.2) donnant la déformation moyenne peut alors s'écrire :

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon^0 + \int \frac{1}{2} (\bar{D} \otimes \bar{n} + \bar{n} \otimes \bar{D}) dS = \varepsilon^0 + \bar{\varepsilon}^d \quad (2.3)$$

Dans cette expression $\bar{D}$ représente le vecteur discontinuités de déplacements sur les lèvres des mésosfissures Γ . La déformation macroscopique du milieu fissuré comporte ainsi deux termes. Le premier (ε^0) est associé à la déformation du squelette solide et le second ($\bar{\varepsilon}^d$) correspond au champ de déformation induit par les mésosfissures (voir par exemple Horii et Nemat-Nasser, 1983 ; Kachanov, 1992).

Considérons maintenant le cas où la matrice a un comportement élastique linéaire avec une compliance $\bar{\bar{S}}^0$ et où $\bar{D}'_i$ varie linéairement avec $\bar{\sigma}'_i$. Notons pour simplifier l'écriture $\langle \varepsilon \rangle = \bar{\varepsilon}$. L'hypothèse de linéarité permet de relier $\bar{\varepsilon}$ à $\bar{\sigma}$ par :

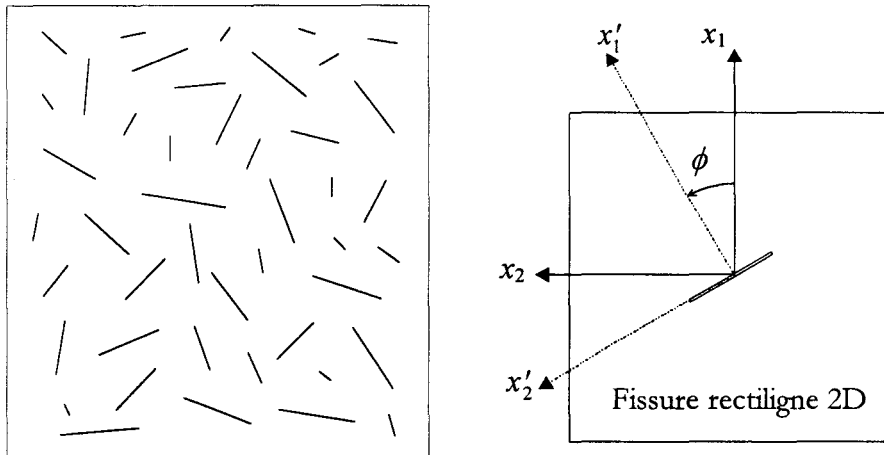
$$\bar{\varepsilon} = (\bar{\bar{S}}^0 + \bar{\bar{S}}^d) : \bar{\sigma} = \bar{\bar{S}} : \bar{\sigma} \quad (2.4)$$

On voit donc que le calcul de la compliance effective $\bar{\bar{S}}$ revient à évaluer la compliance $\bar{\bar{S}}^d$ due à la présence des mésosfissures, c'est-à-dire, en pratique, à déterminer les discontinuités de déplacements sur l'ensemble des mésosfissures. Malgré son apparente simplicité, l'évaluation de $\langle \varepsilon \rangle$ (équation 2.2) pose d'énormes difficultés dans le cas de fissures en interaction. En effet, la prise en compte exacte des interactions entre mésosfissures (on dit aussi entre phases) est un problème complexe exigeant des informations de nature statistique portant sur les positions, les tailles et les orientations de toutes les mésosfissures. Les difficultés inextricables dans la construction des probabilités géométriques qui en découlent ont donc été à l'origine de développements de diverses méthodes approchées. Dans le cadre de l'approche directe, on peut différencier deux manières de traiter ces interactions. Les méthodes des champs effectifs placent une mésosfissure isolée dans une matrice vierge avec un champ de contraintes effectif (pas nécessairement uniforme dans le V.E.R.). Les méthodes de milieux effectifs, quant à elles, considèrent la mésosfissure isolée (sa contribution à la compliance globale peut être alors facilement déterminée) dans une matrice avec un module effectif. Notre propos se limitera ici essentiellement aux méthodes de milieux effectifs ; ceci en raison de leur simplicité de mise en œuvre. Nous indiquerons au moment opportun quelques commentaires sur certaines méthodes de champs effectifs.

II.3. Modèles de prédictions des caractéristiques élastiques homogénéisées

Dans ce paragraphe, on se propose d'expliciter quelques unes des méthodes analytiques d'estimation des compliances effectives. On traitera successivement le cas des mésosfissures ouvertes puis celui des mésosfissures fermées. Les principaux modèles considérés dans chacun de ces deux cas sont le modèle de fissures non-interactives, le modèle autocohérent et la méthode différentielle. Précisons à nouveau qu'il s'agit dans les trois cas de méthodes de milieux effectifs. Dans ce paragraphe, on a cherché essentiellement à construire des résultats explicites 2-D, notamment dans les cas de fissures fermées. La plupart des résultats existent d'une certaine manière dans la synthèse de Kachanov (1993b). La contribution plus personnelle fera l'objet du paragraphe II.4 traitant des simulations numériques directes.

Considérons une mésosfissure rectiligne plane (k) isolée dans un milieu élastique linéaire isotrope (figure II.2b) de module E et de coefficient de Poisson ν .



Figures II.2 : a) Population de mésosfissures. b) Mésosfissure isolée dans le milieu bidimensionnel.

Du fait que l'on peut établir les solutions d'une mésosfissure soumise à une contrainte normale et une contrainte tangentielle, la première étape de l'analyse consiste à effectuer les calculs dans le repère local $'$ de la fissure k . Pour cela, nous utilisons les matrices de changement de repère g et g' telles que :

$$\bar{\bar{S}}' = g' \bar{\bar{S}}^T g' \text{ et } \bar{\bar{S}} = {}^T g \bar{\bar{S}}' g \text{ ou } \bar{\sigma} = {}^T g' \bar{\sigma}' \text{ et } \bar{\sigma}' = g \bar{\sigma} \quad (2.5)$$

$$\text{avec } [g] = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \sin 2\phi \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -\sin 2\phi \\ -\frac{1}{2}\sin 2\phi & \frac{1}{2}\sin 2\phi & \cos 2\phi \end{bmatrix} \text{ et } [g'] = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \frac{1}{2}\sin 2\phi \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & -\frac{1}{2}\sin 2\phi \\ -\sin 2\phi & \sin 2\phi & \cos 2\phi \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Remarque : nous utilisons les notations de Voigt pour l'écriture de la compliance.

Pour des mésos fissures 2-D, la partie $\bar{\varepsilon}^d$ du tenseur de déformation s'écrit :

$$\bar{\varepsilon}_d = \frac{1}{2A} \sum_k \left[\int_a (D \otimes n + n \otimes D) da \right]^{(k)} \quad (2.7)$$

Rappelons que D est le vecteur de discontinuités de déplacements associé au défaut (k) de normale $\vec{n}$. A est l'aire du volume élémentaire représentatif et a est la demi-longueur d'une mésos fissure.

La méthodologie générale de calcul nécessite d'évaluer, à partir des relations (2.7), et dans le cadre de chacun des modèles envisagés le vecteur discontinuité de déplacement de la mésos fissure. Le calcul de $\bar{\varepsilon}^d$ et l'identification $\bar{\varepsilon}^d = \bar{\bar{S}}^d \bar{\sigma}$ permet d'obtenir la compliance effective. Le détail de ces calculs se trouve en annexe 1. Le paramètre clef dans le cas 2-D est la densité de mésos fissures ω_0 , trace du tenseur $\bar{\alpha} = \frac{1}{A} \sum_k (a^2 \vec{n} \otimes \vec{n})^k$. Signalons qu'il existe en mécanique des roches d'autres définitions de densité (voir travaux de Wong, 1985) qui font notamment appel à des notions de stéréologie quantitative.

Rappelons qu'en notation classique de Voigt, la loi de comportement du matériau contenant

$$\text{les mésos fissures s'écrit : } \bar{\varepsilon}_i = \bar{\bar{S}}_{ij} \bar{\sigma}_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \text{ avec } \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} & \sigma_1 = \sigma_{11} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} & \sigma_2 = \sigma_{22} \\ \varepsilon_3 = 2\varepsilon_{12} & \sigma_3 = \sigma_{12} \end{cases}$$

La compliance élastique initiale (en déformation plane) est donnée par :

$$\bar{\bar{S}}_0 = \frac{1 + \nu_0}{E_0} \begin{bmatrix} 1 - \nu_0 & -\nu_0 & 0 \\ -\nu_0 & 1 - \nu_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad E_0 \text{ et } \nu_0 \text{ sont les caractéristiques élastiques du matériau sain.}$$

II.3.1. Cas des fissures ouvertes

II.3.1.1. Hypothèse de non-interaction entre mésolfissures

• Famille de fissures parallèles : $\bar{\bar{S}}^d = 2\pi\omega_0 \frac{1-\nu^2}{E} \begin{bmatrix} \cos^2\phi & 0 & -\frac{\sin 2\phi}{2} \\ 0 & \sin^2\phi & -\frac{\sin 2\phi}{2} \\ -\frac{\sin 2\phi}{2} & -\frac{\sin 2\phi}{2} & 1 \end{bmatrix}$ (2.8)

• Distribution aléatoire de fissures : $\bar{\bar{S}} = \frac{1-\nu^2}{E} \begin{bmatrix} 1 + \pi\omega_0 \frac{\nu}{\nu-1} & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{\nu-1} & 1 + \pi\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{1-\nu} + 2\pi\omega_0 \end{bmatrix}$ (2.9)

A même densité, la contribution apportée au module d'Young (c'est à dire à $\bar{\bar{S}}_{22}$) est deux fois plus importante pour les fissures parallèles normales à l'axe de chargement ($\phi = \frac{\pi}{2}$) que pour les fissures aléatoires (distribution isotrope). On peut également observer que la distribution isotrope ne modifie pas $\bar{\bar{S}}_{12}$ et $\bar{\bar{S}}_{21}$, ce qui indique que le coefficient de Poisson varie de la même façon que le module d'Young : $\frac{E}{E_0} = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{1}{1+\pi\omega}$.

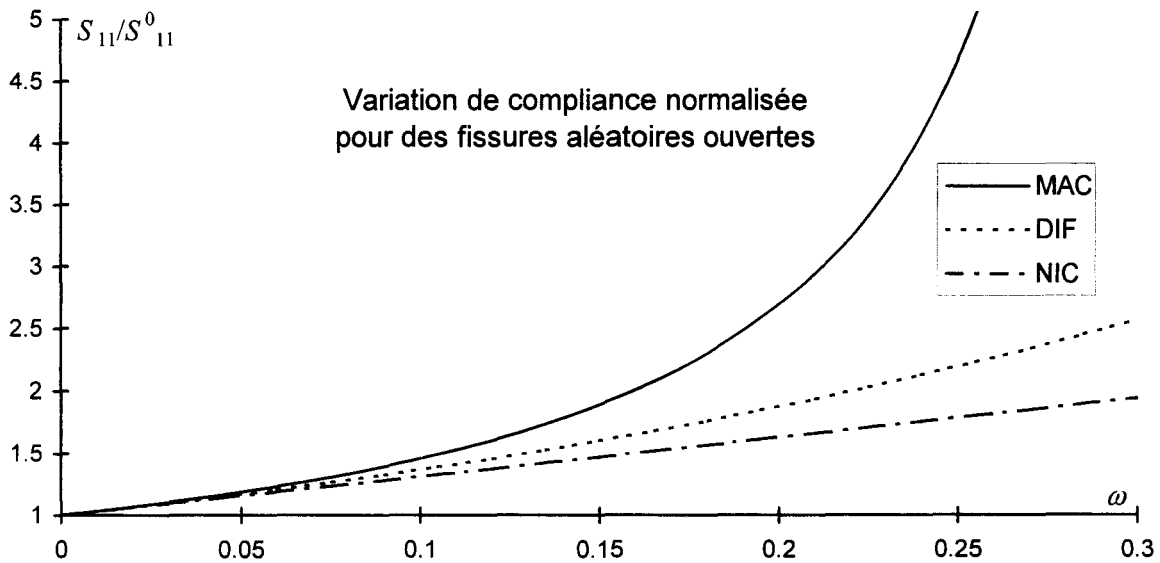


Figure II.3 : Distribution aléatoire et ouverture de fissures : variation de compliance normalisée.

II.3.1.2. Méthode différentielle

Cette méthode exploite les résultats de la N.I.C., mais l'analyse est incrémentale : la densité croît par incrément de $d\omega$ au cours duquel les propriétés effectives sont recalculées. Cela se traduit par l'équation différentielle du 1^{er} degré :

$$\frac{\bar{\bar{S}}_{11}(\omega)}{\bar{\bar{S}}_{11}^0} = 1 + \pi\omega \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{\bar{S}}_{11}(\omega) + d\bar{\bar{S}}_{11}(\omega)}{\bar{\bar{S}}_{11}(\omega)} = 1 + \pi d\omega.$$

La condition initiale étant $\bar{\bar{S}}_{11}(0) = \bar{\bar{S}}_{11}^0$, la solution est : $\bar{\bar{S}}_{11} = e^{\pi\omega} \bar{\bar{S}}_{11}^0$. En appliquant cette technique aux autres termes de la compliance, nous obtenons les résultats suivants :

- fissures parallèles $\frac{\bar{\bar{S}}}{\bar{\bar{S}}^0} = \begin{bmatrix} e^{2\pi\omega \cos^2 \phi} & 1 & 1 \\ 1 & e^{2\pi\omega \sin^2 \phi} & 1 \\ 1 & 1 & e^{\pi\omega(1-\nu)} \end{bmatrix}$ (2.10)

- fissures aléatoires $\frac{\bar{\bar{S}}}{\bar{\bar{S}}^0} = \begin{bmatrix} e^{\pi\omega} & 1 & 1 \\ 1 & e^{\pi\omega} & 1 \\ 1 & 1 & e^{\pi\omega(1-\nu)} \end{bmatrix}$ (2.11)

II.3.1.3. Méthode autocohérente

L'hypothèse de l'estimation autocohérente est que chacune des mésolfissures se trouve dans le milieu effectif inconnu. Les compliances qui interviennent dans les équations à résoudre sont donc celles que l'on recherche. La démarche de résolution de ces équations implicites impose donc un schéma de calcul itératif du type : $\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{S}}^0 + \bar{\bar{S}}^d(\bar{\bar{S}})$.

- fissures parallèles : $\bar{\bar{S}}^d = \pi\omega_0 \begin{bmatrix} \bar{\bar{S}}_{11}^d & \bar{\bar{S}}_{12}^d & \bar{\bar{S}}_{13}^d \\ \text{symétrique} & \bar{\bar{S}}_{22}^d & \bar{\bar{S}}_{23}^d \\ \text{symétrique} & \text{symétrique} & \bar{\bar{S}}_{33}^d \end{bmatrix}$ (2.12)

avec

$$\begin{cases} \bar{\bar{S}}_{11}^d = \cos^2 \phi [\sin^2 \phi \langle B_{22}^{(k)'} \rangle + \cos^2 \phi \langle B_{11}^{(k)'} \rangle] & \bar{\bar{S}}_{23}^d = -\frac{\sin 2\phi}{2} [\cos 2\phi \langle B_{22}^{(k)'} \rangle + 2\sin^2 \phi \langle B_{11}^{(k)'} \rangle] \\ \bar{\bar{S}}_{22}^d = \sin^2 \phi [\cos^2 \phi \langle B_{22}^{(k)'} \rangle + \sin^2 \phi \langle B_{11}^{(k)'} \rangle] & \bar{\bar{S}}_{13}^d = \frac{\sin 2\phi}{2} [\cos 2\phi \langle B_{22}^{(k)'} \rangle - 2\cos^2 \phi \langle B_{11}^{(k)'} \rangle] \\ \bar{\bar{S}}_{33}^d = \cos^2 2\phi \langle B_{22}^{(k)'} \rangle + \sin^2 2\phi \langle B_{11}^{(k)'} \rangle & \bar{\bar{S}}_{12}^d = \frac{\sin^2 2\phi}{4} [\langle B_{11}^{(k)'} \rangle - \langle B_{22}^{(k)'} \rangle] \end{cases}$$

Il n'existe pas de solution explicite dans ce cas ; l'estimation de la compliance peut être réalisée numériquement $\bar{\bar{S}}_i^d = f(\bar{\bar{S}}_{i-1}^d + \bar{\bar{S}}^0)$.

$$\bullet \text{ fissures aléatoires : } \bar{\bar{S}} = \frac{1+\nu}{E(1-\pi\omega_0)} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu(1-\pi\omega_0) & 0 \\ -\nu(1-\pi\omega_0) & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\nu\pi\omega_0) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

II.3.2. Cas des fissures fermées

II.3.2.1. Hypothèse de non-interaction entre mésolfissures

En raison des possibilités de fermeture (et éventuellement de glissement et frottement) de certaines mésolfissures sous chargement de compression, l'évaluation des compliances est moins directe que dans le cas des mésolfissures ouvertes. Plus exactement, le vecteur discontinuité de déplacement peut être dépendant du trajet de chargement. Par exemple, appliquons tout d'abord un cisaillement pur sur un défaut (on génère alors une discontinuité tangentielle de déplacement) suivi d'une contrainte normale de compression. En appliquant ces sollicitations dans l'ordre inverse, on n'obtient pas de discontinuité de déplacement si le frottement ou la contrainte normale de compression sont assez élevés (cf. Boursin et *al.*, 1996). Suivant une observation faite par Kachanov (1982a, 1982b), il existe un domaine non négligeable de trajet de chargement pour lesquels on peut admettre l'indépendance du chemin de contrainte (c'est par exemple le cas où les mésolfissures sont toujours en glissement). Les applications envisagées sont supposées rentrer dans ce cadre.

Le frottement est supposé de type Coulomb. Cette loi suppose que les lèvres d'une mésolfissure vont commencer à glisser si $\tau_s \geq 0$: $\tau_s = |\sigma'_{12}| - \mu |\sigma'_{11}| - \tau_c^0$. σ'_{11} et σ'_{12} sont les contraintes normale et tangentielles en repère local (voir figure II.2b). Les sollicitations de compression empêche l'ouverture de la mésolfissure : $D_1 = 0$.

Le glissement est donc bloqué pour les mésolfissures fermées dont $|\phi| \in [0, \text{Arctan } \mu]$. On parle de fissures inactives ($\bar{D} = \bar{0}$). Les relations qui suivent sont donc valables pour $|\phi| \in \left] \text{Arctan } \mu, \frac{\pi}{2} \right]$.

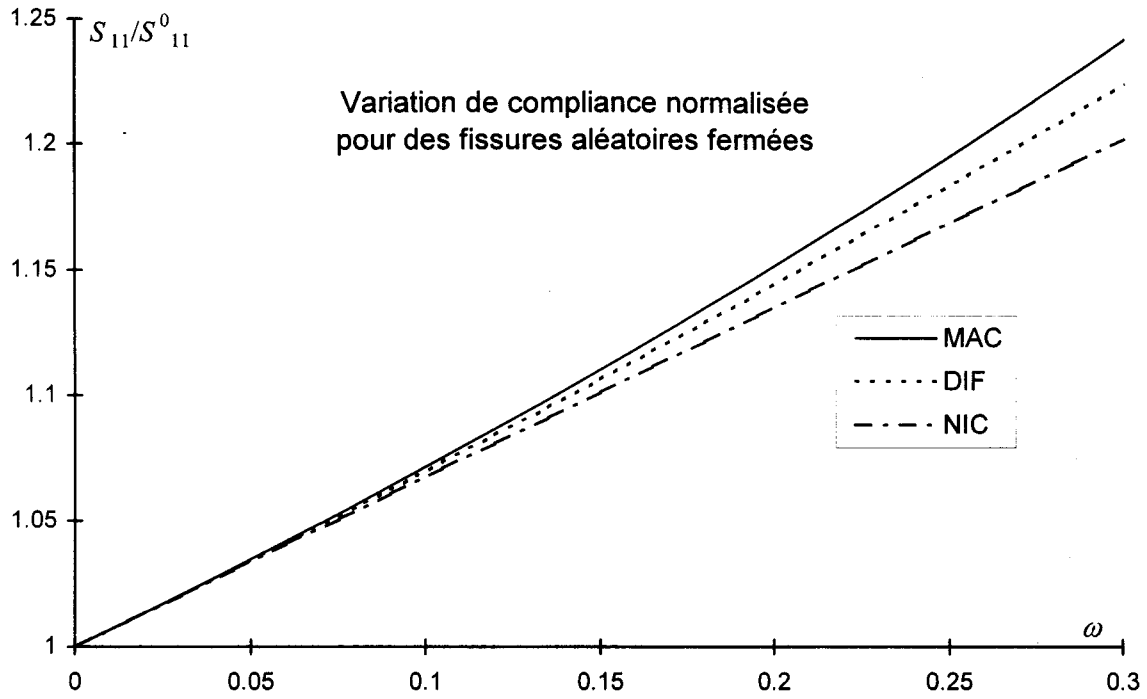


Figure II.4 : Distribution aléatoire et fermeture de fissure: variation de compliance normalisée.

- Famille de fissures parallèles :

$$\bar{\bar{S}} = \frac{1-\nu^2}{E} \begin{bmatrix} 1+2\pi\omega_0 \sin\phi \cos^2\phi & \frac{\nu}{\nu-1} - 2\pi\omega_0 \cos\phi \sin^2\phi & -\pi\omega_0 \sin 2\phi \\ \frac{\nu}{\nu-1} - 2\pi\omega_0 \sin\phi \cos^2\phi & 1+2\pi\omega_0 \cos\phi \sin^2\phi & \pi\omega_0 \sin 2\phi \\ -2\pi\omega_0 \cos 2\phi \cos\phi & 2\pi\omega_0 \cos 2\phi \sin\phi & \frac{2}{1-\nu} + 2\pi\omega_0 \cos 2\phi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b(\phi) \\ a(\phi) \\ c(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\text{avec } \begin{cases} a(\phi) = \cos\phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin\phi \\ b(\phi) = \sin\phi - \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \cos\phi \\ c(\phi) = \cos 2\phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin 2\phi \end{cases}$$

- Distribution aléatoire de fissures :

$$\bar{\bar{S}}^d = \frac{\omega_0}{2} \frac{1-\nu^2}{E} \begin{pmatrix} \gamma & -\delta & 0 \\ -\gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 4\gamma \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$\text{en posant } \delta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\mu + \frac{3\mu}{1+\mu^2} \text{ et } \gamma = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\mu - \frac{\mu}{1+\mu^2}.$$

On observe que le frottement induit également pour cette distribution une anisotropie des propriétés élastiques (sauf pour un frottement nul).

II.3.2.2. Méthode différentielle

Dans le cas des fissures fermées en interaction, le milieu devient anisotrope. Cependant, nous avons remarqué (à l'aide d'un programme de calcul spécifique) que les résultats obtenus à partir d'une formulation anisotrope diffèrent de 3% seulement d'avec la formulation isotrope (c'est à dire $B_{22}^{(k)'}(\phi) = 2\bar{\bar{S}}'_{22}(\phi)$) pour une densité de $\omega = 0.2$. Les résultats que nous présentons ici sont donc théoriquement inexacts, mais très proches de la réalité. Ces remarques s'appliquent aussi à la méthode autocohérente.

$$\bullet \text{ fissures parallèles } \frac{\bar{\bar{S}}}{\bar{\bar{S}}_0} = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi\omega\cos^2\phi\sin\phi\phi(\phi)}{2\pi\omega\frac{1-\nu}{\nu}\cos^2\phi\sin\phi\phi(\phi)}} & e^{\frac{2\pi\omega\frac{1-\nu}{\nu}\sin^2\phi\cos\phi\phi(\phi)}{2\pi\omega\sin^2\phi\cos\phi\phi(\phi)}} & 1 \\ e^{\frac{2\pi\omega\frac{1-\nu}{\nu}\cos^2\phi\sin\phi\phi(\phi)}{2\pi\omega\sin^2\phi\cos\phi\phi(\phi)}} & e^{\frac{2\pi\omega\frac{1-\nu}{\nu}\sin^2\phi\cos\phi\phi(\phi)}{2\pi\omega\sin^2\phi\cos\phi\phi(\phi)}} & 1 \\ 1 & 1 & e^{\pi\omega(1-\nu)\cos 2\phi\phi(\phi)} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\bullet \text{ fissures aléatoires } \frac{\bar{\bar{S}}}{\bar{\bar{S}}_0} = \begin{bmatrix} e^{\frac{\omega\gamma}{2}} & e^{\frac{\omega\delta(\nu-1)}{2\nu}} & 1 \\ e^{\frac{\omega\gamma(\nu-1)}{2\nu}} & e^{\frac{\omega\delta}{2}} & 1 \\ 1 & 1 & e^{\omega(1-\nu)\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

II.3.2.3. Méthode autocohérente

$$\bullet \text{ fissures parallèles : } \bar{\bar{S}}^d = \pi\omega_0 \begin{bmatrix} \sin\phi\cos^2\phi & -\cos\phi\sin^2\phi & -\frac{\sin 2\phi}{2} \\ -\sin\phi\cos^2\phi & \cos\phi\sin^2\phi & \frac{\sin 2\phi}{2} \\ -\cos 2\phi\cos\phi & \cos 2\phi\sin\phi & \cos 2\phi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b(\phi) \\ a(\phi) \\ c(\phi) \end{bmatrix} B_{22}^{(k)'}(\phi) \quad (2.18)$$

• fissures aléatoires :

$$\bar{\bar{S}}^d(\bar{\bar{S}}) = \frac{1}{\pi} \left[\int_{\text{Arctan } \mu}^{\frac{\pi}{2}} \bar{\bar{S}}^d(\phi, \bar{\bar{S}}) d\phi - \int_{-\text{Arctan } \mu}^{-\frac{\pi}{2}} \bar{\bar{S}}^d(\phi, \bar{\bar{S}}) d\phi \right] \quad (2.19)$$

Ces relations n'ont pas de solutions sous forme explicite sauf dans le cas des fissures lubrifiées ($\mu = 0$) :

$$\bar{S} = \frac{1 + \nu}{E(4 - \pi \omega_0)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & -\pi \omega_0(1 - 2\nu) - 4\nu & 0 \\ -\pi \omega_0(1 - 2\nu) - 4\nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & 2(\pi \omega_0(1 - 2\nu) + 4) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

II.4. Approche numérique du problème : simulations directes

Nous avons vu à travers les quelques graphiques présentés que les différentes estimations conduisent à des résultats peu concordants aux fortes densités de mésolfissures. L'objectif poursuivi dans ce paragraphe est de confronter les estimations théoriques à des simulations numériques directes. Ces travaux numériques, réalisés à l'aide d'une méthode de frontière dite de « discontinuités de déplacement », ont été pour l'essentiel publiés dans Renaud et *al.* (1996).

II.4.1. La méthode des discontinuités de déplacements pour les milieux multifissurés

La méthode de discontinuités de déplacements est une méthode de type équation intégrale en déformation plane due à Crouch (1976) (voir aussi Crouch et Starfield, 1983). Elle a été développée depuis quelques années au sein du laboratoire (p.ex ; Kondo, 1989 ; Belkacemi, 1990) et dans d'autres équipes françaises (Yin et Ehrlacher, 1993). C'est une méthode de type indirect (potentiel double couche) qui fait intervenir des variables auxiliaires qui sont donc les discontinuités de déplacement. De manière évidente, ceci est un avantage pour l'étude des milieux mésolfissurés. Les détails sur la méthode numérique proprement dite peuvent être trouvés dans la bibliographie indiquée. Nous nous contentons d'indiquer ici les grandes lignes de la méthode.

Brièvement, la méthode est fondée sur la solution analytique du problème d'une discontinuité de déplacement constante le long d'un segment de droite fini dans le plan x, y d'un solide élastique infini (figure II.5). Le contour du domaine ainsi que les fissures peuvent être discrétisés par un nombre fini d'éléments dont les inconnues sont les discontinuités de déplacement définies (figure II.6). Sur les mésolfissures, ces inconnues sont bien l'ouverture et le glissement des lèvres :

$$D_i = u_i(x_i, 0_-) - u_i(x_i, 0_+) \quad i = n, s \quad (2.21)$$

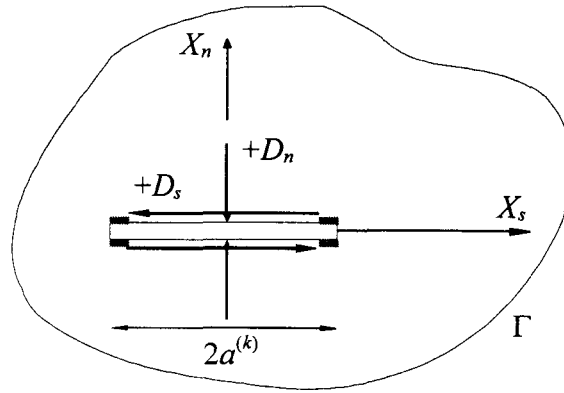


Figure II.5 : Milieu infini avec une fissure. D_s et D_n sont respectivement les discontinuités tangentielle et normale.

Formellement, la solution élastique se présente sous la forme :

$$U_i(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x,z) D_j(z) d\Gamma \quad (2.22)$$

U_{ij} est la solution fondamentale associée à l'application d'un champ de déplacements discontinu unitaire D_j , imposé suivant j au point z . L'application de cette équation aux problèmes aux limites consiste à discrétiser le domaine en N éléments rectilignes sur lesquels les discontinuités sont supposées constantes (figure II.6).

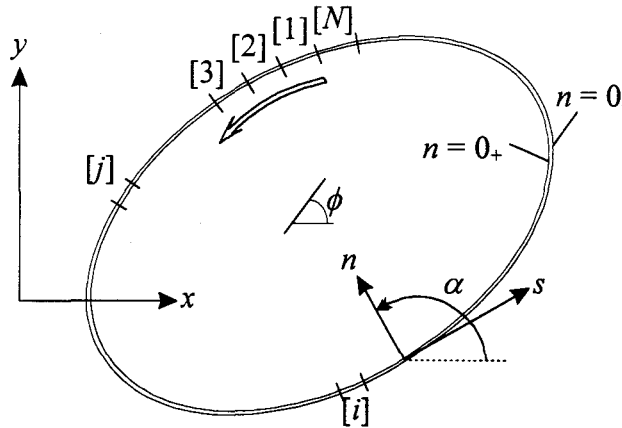


Figure II.6 : Discrétisation d'un milieu fini en M.D.D.

En notant respectivement D_n^j et D_s^j les discontinuités normale et tangentielle, on aboutit au système d'équations (Crouch et Starfield, 1983) :

$$\left. \begin{aligned} b_s^i &= \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} D_n^j \\ b_n^i &= \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} D_s^j + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} D_n^j \end{aligned} \right\} \quad i = 1 \text{ à } N \quad (2.23)$$

Le vecteur b représente ici les conditions aux limites du problème sur la frontière (contraintes imposées ou déplacements imposés), C est la matrice de coefficients d'influence, composée de 4 blocs. C dépend des propriétés élastiques du milieu ainsi que du type de conditions aux limites considérées. La résolution de (2.23) fournit les discontinuités de déplacement nécessaires à l'évaluation de la compliance effective. Par ailleurs, les symétries axiales peuvent être prises en compte pour simplifier la méthode. Notons enfin que, dans la méthode numérique, les contraintes peuvent être considérées à l'infini. Ceci sera utile pour étudier les seules interactions entre mésolfissures (sans effet de bord donc).

***Remarque :** Notre travail numérique dans cette partie a consisté d'une part à développer un générateur de mésolfissures, couplé à la méthode des discontinuités de déplacement et d'autre part à mettre en œuvre un algorithme permettant le traitement adéquat du contact (fermeture, frottement et glissement) entre les lèvres des mésolfissures fermées.*

II.4.2. Le générateur aléatoire de fissures

Les distributions de fissures générées peuvent être ou non aléatoires en position ou en tailles. Concernant l'orientation, il est possible de considérer une distribution isotrope ou une ou des familles de mésolfissures parallèles). De nombreux auteurs (voir p. ex. Panet, 1976 ; Houpert et Hommand, 1980) font observer que la répartition des fissures (en orientation et taille) est identique à celle des grains. Il s'agit donc plutôt de distributions aléatoires que corrélées.

Sur le plan purement numérique, de nombreuses méthodes existent dont certaines sont décrites dans le Numerical Recipes (H. Press et *al.*, 1992). Ces algorithmes donnent des paramètres résultats aléatoires pour peu que les paramètres données le soient aussi : si on réintroduit les mêmes données après avoir arrêté le programme, celui-ci redonne la même suite de nombres aléatoires. A moins d'avoir besoin qu'une seule fois de la fonction aléatoire, ce n'est donc pas suffisant. Du point de vue informatique, il existe une façon élégante de générer une séquence aléatoire de nombres : il faut initialiser la fonction *RANDOM* avec la partie tronquée du temps en 100^{ème} de seconde.

Le programme conçu teste l'intersection éventuelle des fissures entre elles (en ce sens, il s'agit plutôt d'un générateur pseudo-aléatoire qu'aléatoire) et permet de déterminer aléatoirement (pour une densité de fissuration demandée) toutes les caractéristiques géométriques des fissures : coordonnées x et y , orientation et taille ($2a$). Ceci n'est cependant pas une obligation.

Par ailleurs, la seconde difficulté à surmonter était la visualisation à l'écran de la génération effectuée. Cela permet notamment de se rendre compte si les fissures sont trop proches les unes des

autres afin d'éviter des perturbations numériques. De plus, les fissures sont éloignées du contour d'au moins une distance égale à leurs tailles pour les mêmes raisons.

II.5. Calcul numérique de la compliance - Résultats

L'évaluation numérique des compliances exige de mettre en relation les déformations du milieu fissuré aux contraintes à appliquer. Le détail de la méthodologie de calcul (passage des discontinuités au tenseur de compliance) est fourni en annexe 1.

De nombreux travaux utilisant des méthodes différentes (Kachanov, 1992 ; Berthaud et *al.*, 1994 ; Renaud et *al.*, 1996) aboutissent aux mêmes conclusions : la distribution des tailles des mésolfissures n'influent pas sur la variation des modules et des compliances effectifs. Cela permet de travailler sur un nombre très restreint de mésodéfauts (150 maximum par rapport à la réalité où il faudrait $N = 3.10^5$ dans un V.E.R. de 1 dm^2 : $\omega = N \frac{a^2}{A} = 0.3$ soit $N = \omega \frac{A}{a^2} = 0.3 \frac{10^{-2}}{10^{-8}}$ avec une demi-taille moyenne de mésolfissure de 10^{-4}) pour atteindre des densités élevées.

Les simulations numériques ont été réalisées dans un contexte général où les tailles des mésolfissures sont supposées petites par rapport à la taille du V.E.R.. Des études récentes semblent en effet montrer une dépendance des modules effectifs avec la taille des fissures (Yin et Ehrlacher, 1996) à partir d'un ratio de taille $\frac{L}{2a}$ inférieur à 8 (voir figure II.11 pour la définition de ces longueurs). A $\frac{L}{2a} = 2.5$ par exemple, ces auteurs obtiennent une variation de module maximale inférieure à 7%. Mais dans cet ordre de grandeur de ratio, Yin et Ehrlacher font observer que l'hypothèse de petites tailles des hétérogénéités par rapport à la taille du V.E.R. n'est plus satisfaite. Dans tous nos calculs numériques, le ratio de taille est toujours supérieur à 10.

Dans le but d'estimer l'impact de l'interaction des fissures avec le contour du V.E.R., deux types de simulation ont été effectués : avec ou sans interaction avec le contour (voir figure II.7). L'objectif est d'évaluer en quelque sorte un effet de bord. Afin d'obtenir une certaine faisabilité et du gain en temps de calcul, la discrétisation des fissures a été limitée à (2, 3, 4 et 5) éléments. Des extrapolations statistiques entre ces différents résultats nous permettent de retrouver la précision d'une division de fissure en 40 éléments. Ces relations ont été vérifiées sur différentes configurations de mésolfissuration. Précisons enfin que dans le cas d'une distribution aléatoire, nous avons testé

chaque génération avec la même sollicitation selon les deux axes 1 et 2. S'il y a un écart supérieur à 2% entre les deux modules obtenus, la distribution est rejetée, car supposée non parfaitement aléatoire.

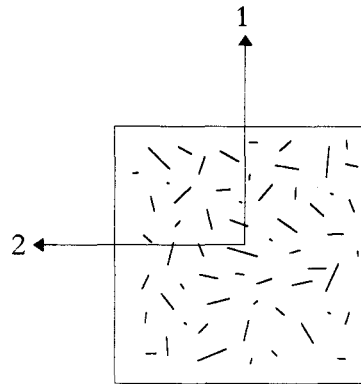


Figure II.7 : Exemple de distribution de mésolfissures aléatoires.

II.5.1. Simulations directes avec fissures ouvertes

- Distribution de mésolfissures sans interaction avec le contour

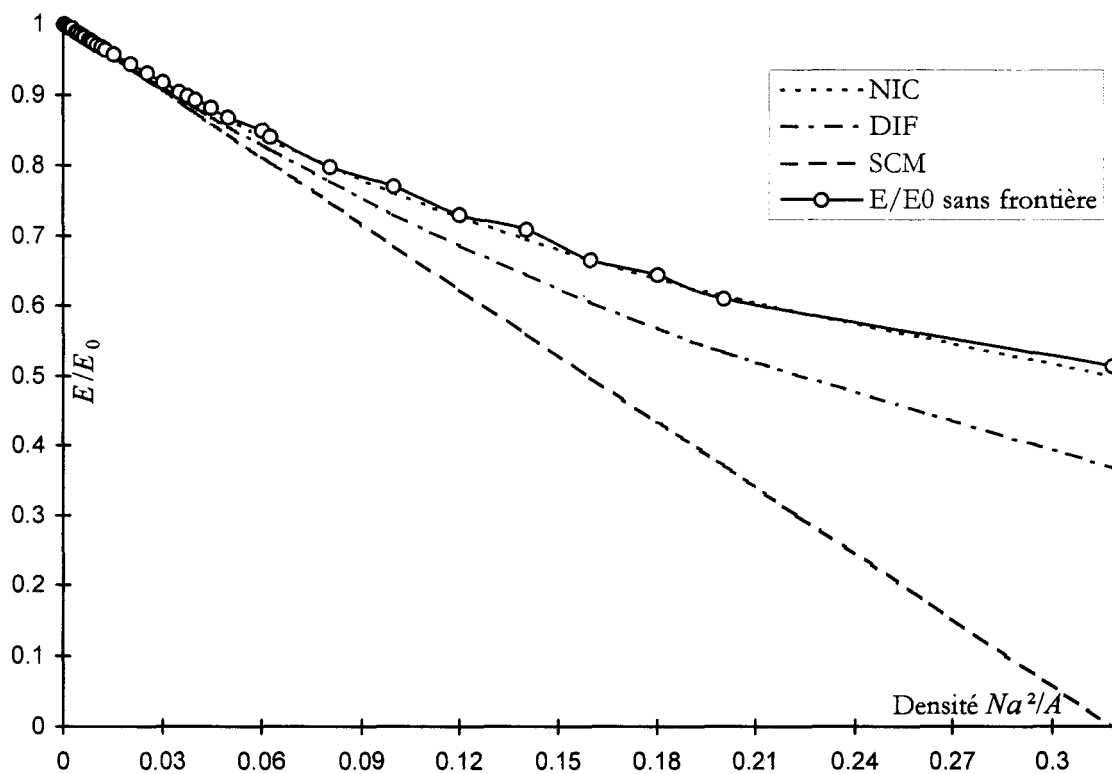


Figure II.8 : Module d'Young effectif pour distribution aléatoire totale : comparaisons avec N.I.C., DIF. et M.A.C..

Ces simulations sont réalisées en imposant sur les mésolfissures les contraintes données à l'infini. La figure II.8 montre la variation du module effectif avec la densité de mésolfissures dans le

cas d'une distribution aléatoire en coordonnées, tailles (rapport de 1 à 10) et orientations. On observe une concordance des résultats numériques avec l'approximation de non-interaction entre mésolfissures (N.I.C.). Cette observation précédente confirme celle de Kachanov (1992) et celle plus récente de Berthaud et *al.* (1994) qui ont tous les deux utilisé une méthode de type pseudo-tractions. Des simulations similaires effectuées avec une taille constante des mésolfissures permettent d'aboutir aux mêmes conclusions (Renaud et *al.*, 1996). La pertinence du paramètre densité de mésolfissures ω pour caractériser les modules effectifs semble ainsi confirmée.

- Effets des interactions avec le contour

D'autres calculs ont été réalisés dans le cas où les conditions aux limites (contraintes) sont imposées sur le contour du domaine (alors discrétisé). Ces calculs permettent d'évaluer en plus des interactions entre mésolfissures, les interactions entre celles-ci et le bord du V.E.R.. Les résultats obtenus (figure II.9) montrent que contrairement aux cas précédents, l'accord est obtenu avec la méthode différentielle (D.I.F.). Cela correspond d'ailleurs aux résultats expérimentaux de Carvalho et Labuz (1996) effectués sur des plaques d'aluminium artificiellement fissurées. Ceci suggère que les interactions doivent être prises en compte dans les applications en domaine borné. Nous avons également mené des expériences numériques sur des distributions de mésolfissures parallèles (figure II.10). Les conclusions fournies par ces calculs sont analogues à celles obtenues pour les distributions aléatoires (figures II.11 et II.12).

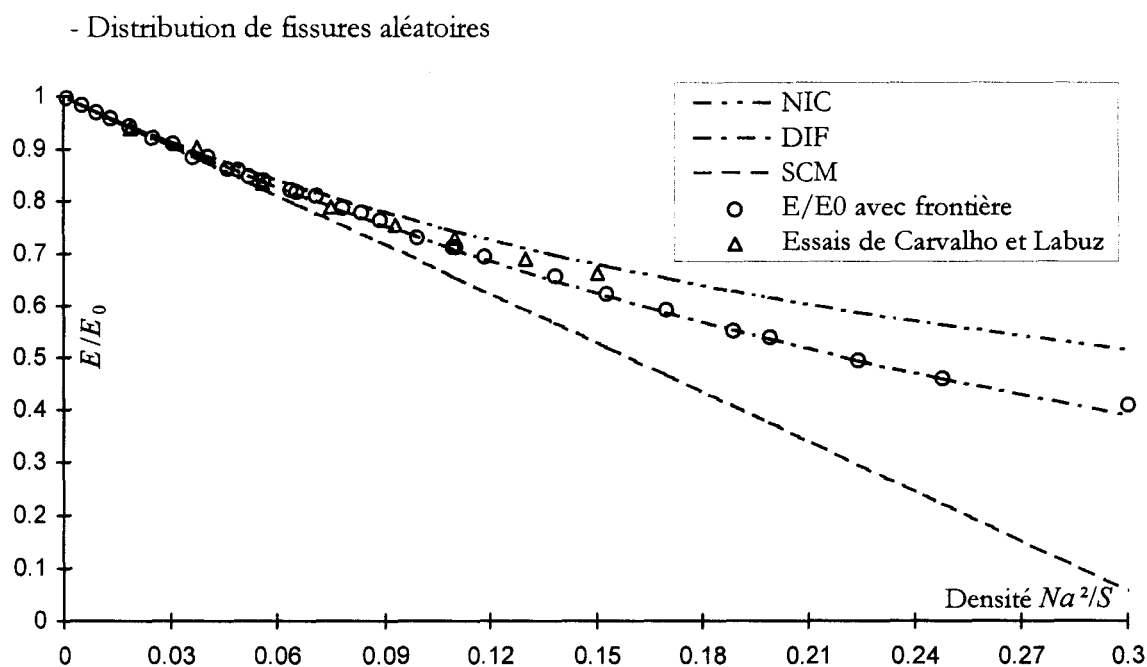


Figure II.9 : Effet des mésolfissures - interactions avec la frontière pour distribution aléatoire : comparaisons avec N.I.C., DIF. et M.A.C..

- Distribution de fissures parallèles

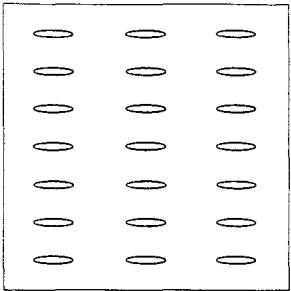


Figure II.10 : Exemple de distribution de mésolfissures parallèles.

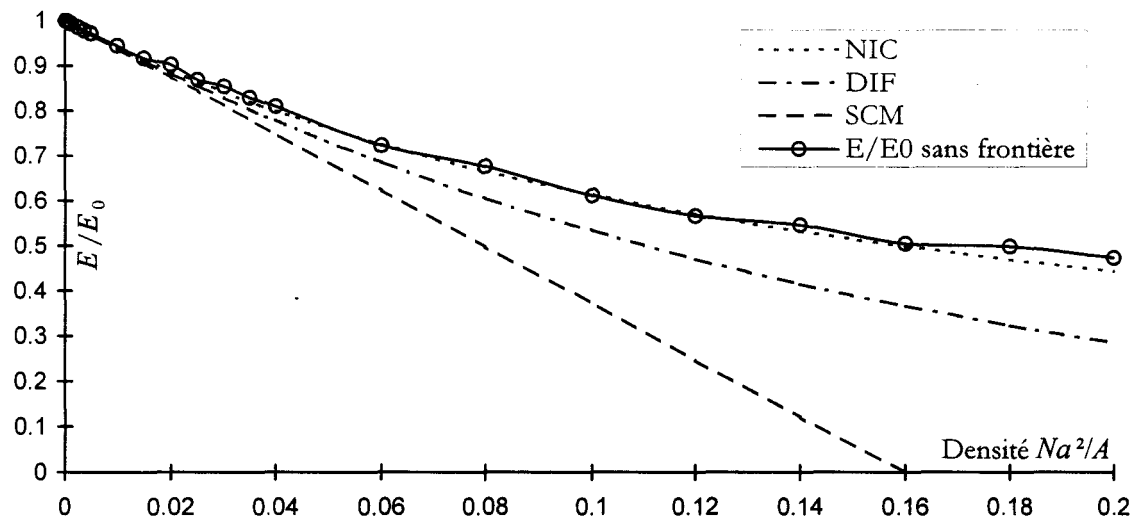


Figure II.11 : Module d'Young effectif pour mésolfissures parallèles : comparaisons avec les méthodes N.I.C., DIF. et M.A.C..

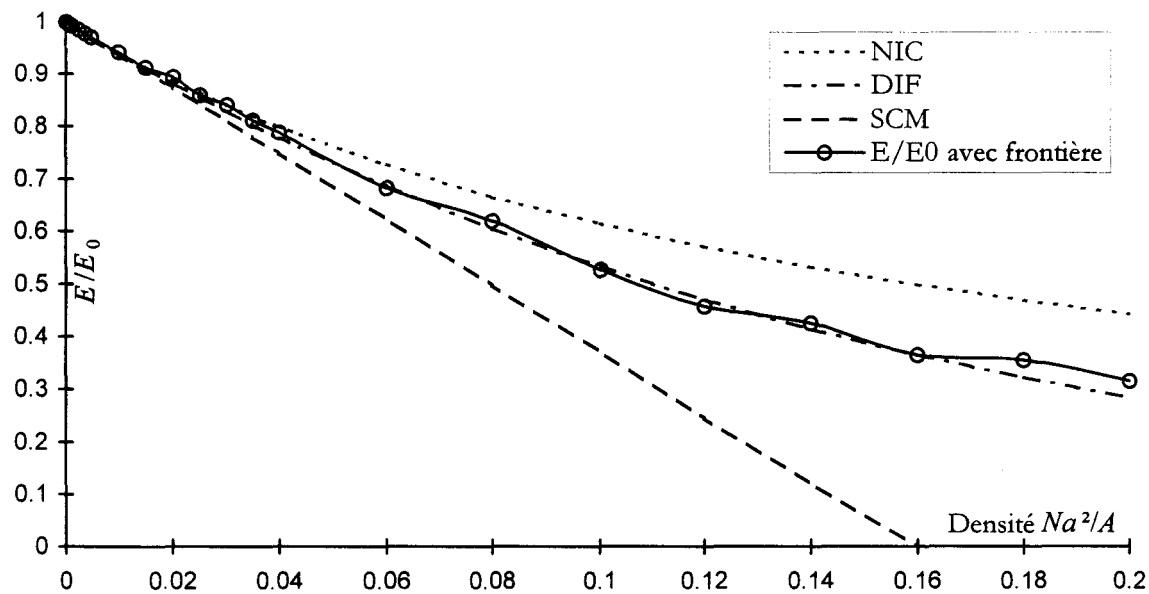


Figure II.12 : Effet des mésolfissures - interactions avec la frontière pour distribution parallèle : comparaisons avec les méthodes N.I.C., DIF. et M.A.C..

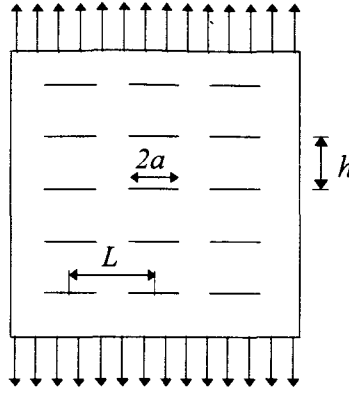
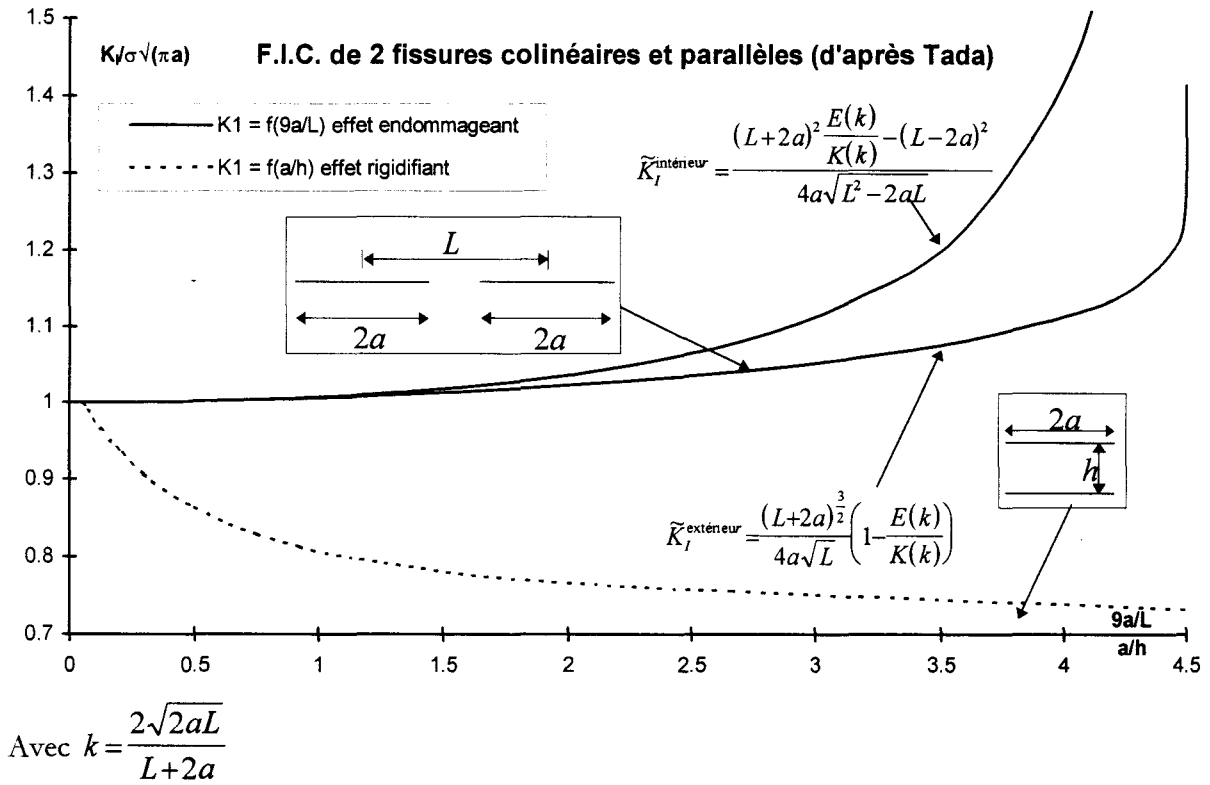

 Figure II.13 : distribution de mésosfissures parallèles avec le rapport $\frac{h}{L}$.


Figure II.14 : Variation du F.I.C. pour une paire de fissures colinéaires et parallèles.

La première catégorie de résultats (interactions entre mésosfissures seulement) a été interprétée par Kachanov (1992) comme le résultat de deux effets compétitifs liés à la mécanique des interactions entre mésosfissures distribuées aléatoirement. Ces deux effets créent, l'un (effet rigidifiant ou *shielding effect*) une diminution des facteurs d'intensité de contraintes (F.I.C.) des fissures en interaction, et l'autre (effet d'amplification) une augmentation de ceux-ci. On peut illustrer ces deux mécanismes d'interaction sur la distribution doublement périodique de mésosfissures de la figure II.13., suivant les valeurs des longueurs. La figure II.14 résume les résultats analytiques

(Handbook de Tada, 1973). A longueur de fissure a fixée, lorsque h diminue ($\frac{a}{h}$ augmente) on obtient l'effet rigidifiant, tandis que la diminution de L ($\frac{a}{L}$ augmente) produit un effet d'amplification.

- Effet de la position des mésolfissures sur les résultats.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de montrer, à l'aide de l'outil numérique, la complexité des effets de ces interactions sur les propriétés effectives. La configuration de mésolfissures considérée est toujours celle de la figure II.12. Des études similaires ont été réalisées par Alpa et Gambarotta (1993).

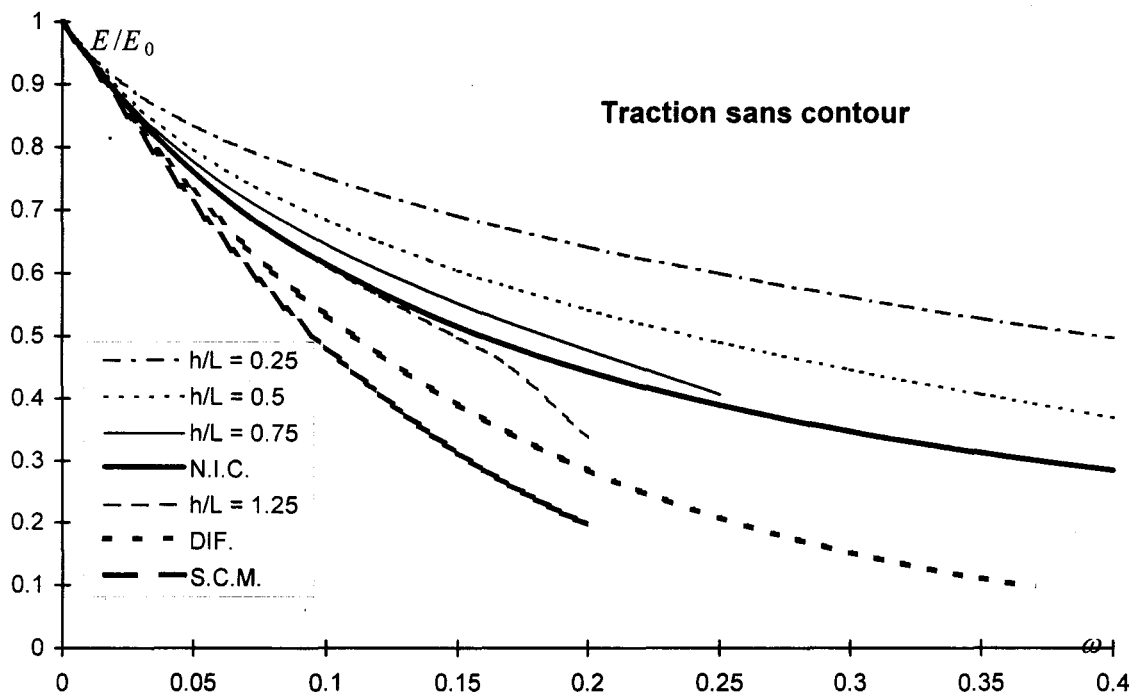


Figure II.15 : Variation de module d'Young effectif en fonction de la densité et du rapport $\frac{h}{L}$ sans interaction avec le contour.

La figure II.15 concerne le cas où seules les interactions entre mésolfissures sont étudiées (pas d'effet de contour du V.E.R.). Les résultats sont surtout analysés par rapport aux prédictions du modèle de fissures non-interactives (N.I.C.). La taille des mésolfissures étant fixée, on observe que l'effet rigidifiant ne se fait sentir sur le module d'Young effectif qu'en dessous d'un rapport $\frac{h}{L}$ (de l'ordre de 1.25). Il disparaît par contre pour le module de cisaillement effectif (figure II.16). Ce résultat est en contradiction avec celui obtenu, à l'aide d'une méthode de pseudo-tractions, par Alpa

et Gambarotta (1993) qui indiquent un effet rigidifiant quel que soit le rapport $\frac{h}{L}$. Enfin, on note pour le rapport élevé $\frac{h}{L}=1.25$, un changement d'allure dans les variations de propriétés effectives. Ce changement est simplement dû au fait que, pour obtenir une densité moyenne de 0.2, les fissures se touchent presque horizontalement.

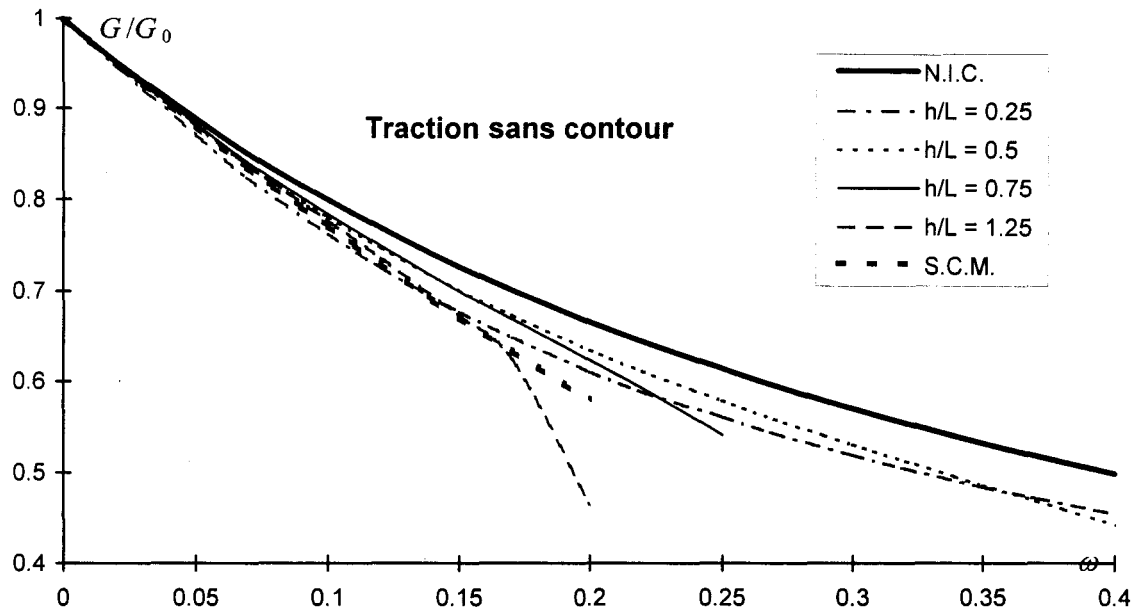


Figure II.16 : Variation de module de cisaillement effectif en fonction de la densité et du rapport $\frac{h}{L}$ sans interaction avec le contour.

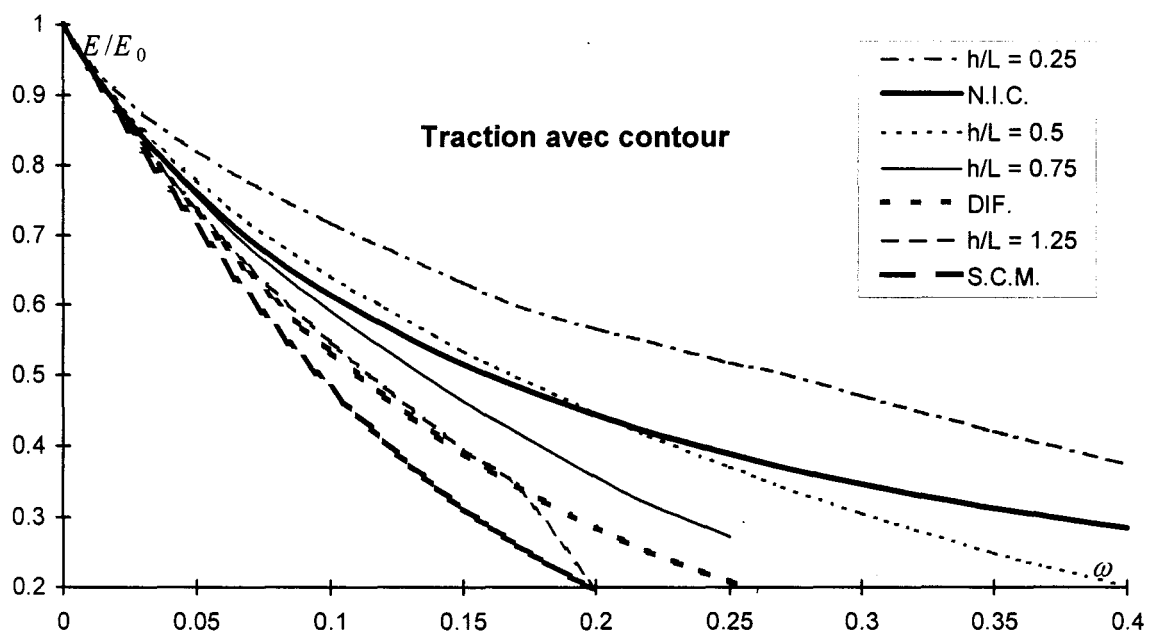


Figure II.17 : Variation de module d'Young effectif en fonction de la densité et du rapport $\frac{h}{L}$ avec interaction avec le contour.

La figure II.17 correspond à la variation de module effectif pour différents rapports $\frac{h}{L}$, lorsque l'interaction avec le contour du VER est prise en compte. On constate que l'effet rigidifiant ne se manifeste qu'en dessous de $\frac{h}{L} = 0.5$.

II.5.2. Cas des sollicitations de compression

La méthode numérique développée permet également de traiter le cas des mésolfissures fermées pour lesquelles le frottement doit être pris en compte. Un algorithme itératif spécifique a été mis au point à ce propos. Le frottement est supposé de type Coulomb. Les résultats (variation des compliances) présentés sont obtenus dans le cas d'une compression uniaxiale. Un exemple associé à la distribution de la figure II.18 est présenté sur les figures II.19. Nous constatons que les compliances présentent une anisotropie marquée. Les résultats se rapprochent plus de ceux de la non-interaction que de la méthode autocohérente. Un léger effet rigidifiant est observé pour toutes ces compliances au delà d'une densité ω de l'ordre de 0.15. Nous remarquons par ailleurs que les effets d'interaction entre ces fissures fermées sont moins importants que pour des fissures ouvertes (estimations resserrées entre S.C.M. et N.I.C.). De plus, l'impact de la mésolfissuration sur les compliances est plus faible. Ces conclusions semblent indiquer une plus faible importance des interactions en compression.

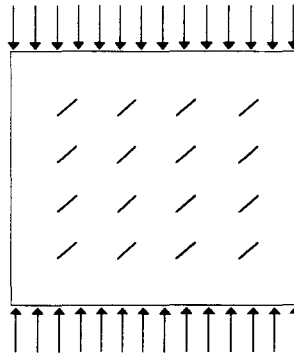
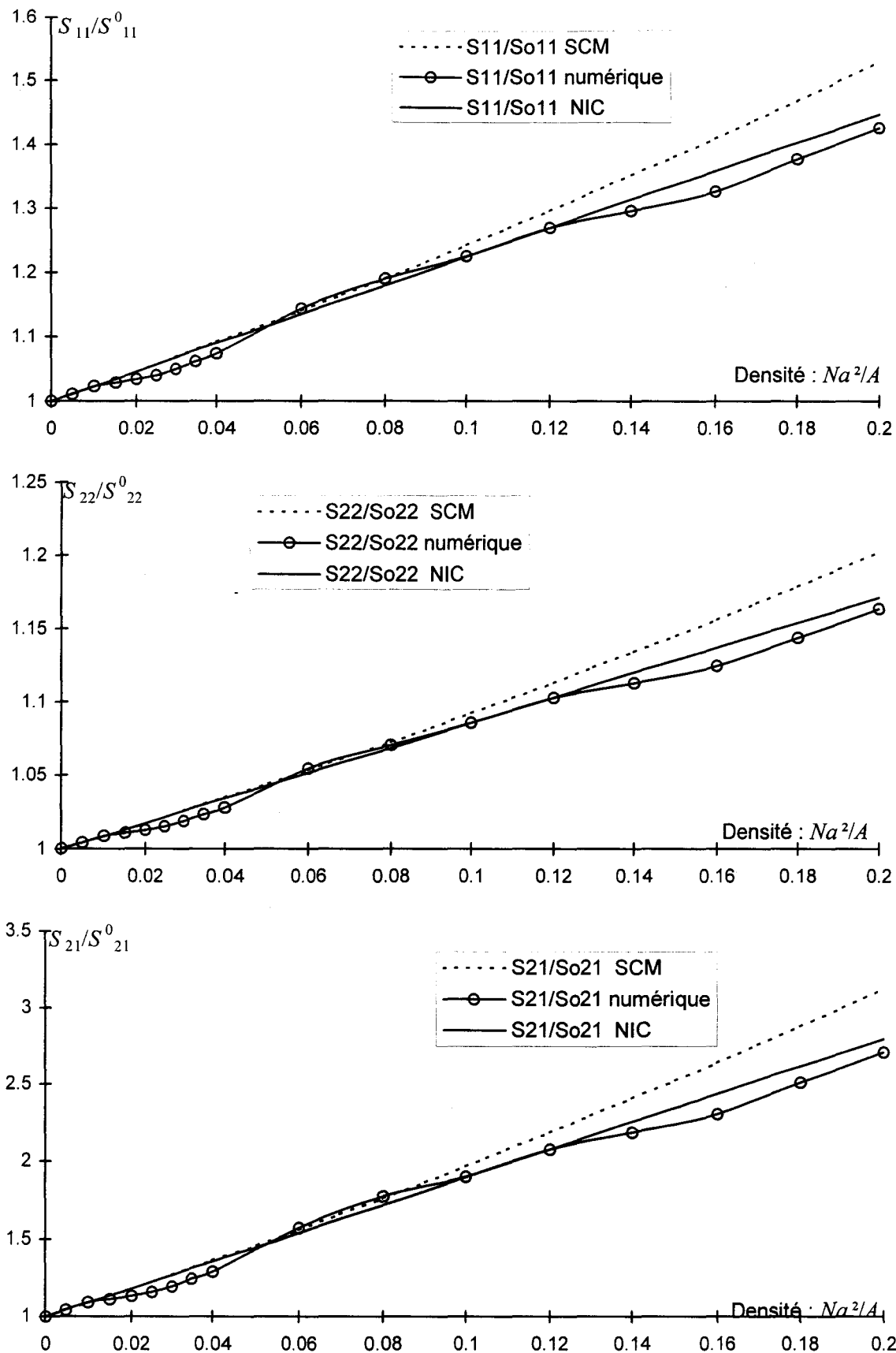


Figure II.18 : Exemple de distribution de mésolfissures parallèles testée sous chargement compressif ($\mu = 0.5$, $\phi = \frac{\pi}{3}$).



Figures II.19 : Compression uniaxiale. Rapport de compliance effective pour un milieu contenant

un ensemble de mésosfissures parallèles ($\phi = \frac{\pi}{3}$, $\mu = 0.5$) : $\frac{\bar{S}_{11}}{\bar{S}_{11}^0}$, $\frac{\bar{S}_{22}}{\bar{S}_{22}^0}$, $\frac{\bar{S}_{21}}{\bar{S}_{21}^0}$.

La figure II.20, indique la très forte dépendance des résultats de l'orientation (angle ϕ) de la famille de mésolfissures considérées. Sur cet exemple, la densité est $\omega = 0.12$. En compression uniaxiale, les compliances sont maximales entre $\phi = \frac{\pi}{4}$ et $\phi = \frac{\pi}{3}$, sauf pour $\bar{S}_{33}$. De plus, ces compliances ne varient fortement qu'après un certain angle proche de $\text{Arctan } \mu$.

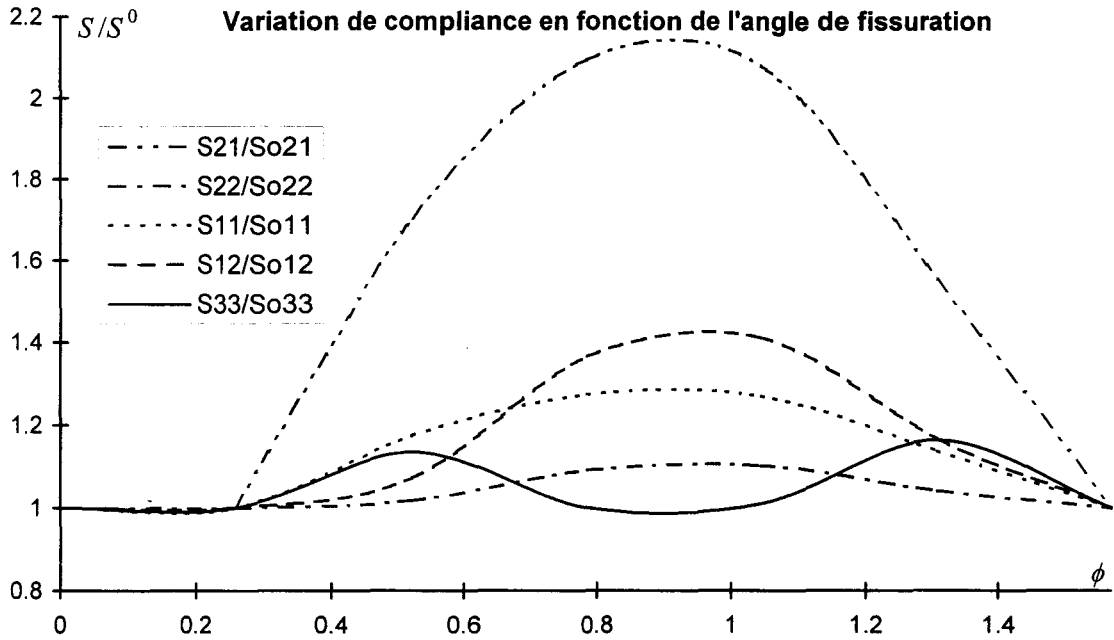


Figure II.20 : Variation de compliance normalisée en fonction de l'angle de fissuration ($\mu=0.6$).

La méthode numérique utilisée pour l'évaluation des propriétés effectives des milieux fissurés 2-D a prouvé son efficacité sur les exemples montrés. L'évaluation de compliances, de modules d'Young ou de coefficient de Poisson ne pose aucun problème en 2-D, qu'il s'agisse de traction ou de compression. Pour une sollicitation de traction (fissures ouvertes), nous montrons que les interactions entre défauts peuvent être négligées. Ceci provient sans doute de la nature aléatoire de la distribution spatiale des défauts. Les résultats de la traction sont en accord avec la méthode de Taylor lorsque le contour n'est pas discrétisé et avec la méthode différentielle lorsqu'il y a interaction des défauts avec le contour. D'un autre côté, la non-interaction semble être la méthode qui corresponde le mieux avec nos résultats en compression (même avec la prise en compte du contour qui a tendance à accroître l'effet endommageant) où l'on observe une nette anisotropie des modules. Cependant, l'analyse des résultats est rendue plus difficile par l'interaction des défauts et la prise en compte du frottement (notamment dans le cas des distributions aléatoires).

II.6. Conclusion

De manière générale, l'ajout de mésos fissures dans un solide élastique linéaire a tendance à dégrader les propriétés effectives de ce dernier. Cependant, nous avons observé que certaines distributions particulières pouvaient même fournir un module d'Young effectif supérieur à celui prédit dans l'hypothèse de non-interaction. Ces résultats numériques recoupent d'autres qui ont été déjà indiqués par des auteurs comme Alpa et Gambarotta (1993) ou Kachanov (1993b). Cependant, tout au moins dans le cas des contraintes imposées, l'hypothèse de configuration aléatoire des fissures ouvertes apparaît équivalente à l'hypothèse de non-interaction. Soulignons à nouveau le fait que ce résultat est également celui prédit par le modèle Mori-Tanaka (qui en prend en compte dans un certain sens les interactions) dans le cas des solides mésos fissurés (Benveniste, 1986). Malgré le faible nombre de simulations, cette hypothèse de non-interaction semble aussi pertinente dans le cas de mésos fissures fermées glissantes. Pour cet ensemble de raisons, l'essentiel des travaux présentés dans les chapitres suivants s'appuieront sur cette hypothèse, d'autant plus que les effets d'interaction sont généralement plus faibles dans le contexte 3-D. L'étude des propriétés effectives pour le milieu 3-D sera abordé au chapitre III.

On doit néanmoins souligner, à partir d'une simple analyse des effets locaux (figure II.14), qu'il n'y a pas de corrélation quantitative stable entre la rupture du matériau (les énergies de rupture) et le paramètre densité de mésos fissures. La raison essentielle de cette situation est le fait que ces énergies de rupture dépendent beaucoup des configurations locales des mésos fissures (voir pour une analyse quantitative de cette question : Fond, 1992 ; Kachanov, 1993b). Ceci est un point de vue non local de l'endommagement fragile, qui risque d'être pénalisant pour l'étude de la croissance des mésos fissures. Les progrès à attendre dans ce domaine viendront sans doute d'approches statistiques comme celles présentées en détail par Krajcinovic dans son récent ouvrage (Krajcinovic, 1997).

III. UNE APPROCHE TRIDIMENSIONNELLE DE L'ENDOMMAGEMENT PAR MESOFISSURATION.

Ce chapitre est consacré à la modélisation mésomécanique du comportement des matériaux fragiles sous sollicitation de traction simple ou de compression triaxiale. Les seuls mécanismes (d'endommagement) considérés sont la création, la croissance de mésofissures ainsi que le frottement sur les lèvres de mésofissures fermées. Les deux types de sollicitations considérés conduisent à des modes de fissuration radicalement différents (cf. chapitre I) : mésofissures ouvertes en propagation rectiligne (mode I) pour la traction ; mésofissures fermées avec propagation en mode mixte (I + II). La formulation de la loi de comportement est basée sur l'estimation de la compliance effective et de son évolution avec la mésostructure. Les travaux à la base de cette partie du travail sont ceux de Ju et ses collaborateurs (Ju et Lee, 1991 ; Lee et Ju, 1991) et ceux de Fanella et Krajcinovic (1988). La contribution apportée ici est double et à consisté à : (i) expliciter et étendre l'écriture de ces modèles, en y incorporant sous une forme plus générale l'aspect 3-D de la mésofissuration ainsi que la création de mésofissures et la cohésion dont l'importance a été décrite au premier chapitre ; (ii) analyser et tester les prédictions de la présente modélisation sur le comportement du grès, ceci afin d'établir une base de développement pour une formulation incrémentale (et donc générale) du modèle (cf. chapitre IV).

III.1. Introduction

L'approche mésomécanique de l'endommagement fragile est assez récente, et a bénéficié en grande partie de développements récents aussi bien dans le domaine de la détermination des propriétés effectives (Budiansky et O'Connell, 1976 ; Hoenig, 1978, 1979, 1982 ; et Horii et Nemat-Nasser, 1983) que dans celui des mécanismes de croissance des mésosfissures (Horii et Nemat-Nasser, 1985, 1986 ; Zaitsev, 1983). Depuis les travaux, en terme de lois de comportement, réalisés par Kachanov (1982a, 1982b), elle a connu des développements importants d'abord en 2D par l'utilisation du modèle de Taylor (Krajcinovic et Sumarac, 1989) ou du schéma autocohérent (Ju, 1991) ou encore par leur extension tridimensionnelle (Gambarotta et Lagomarsino, 1993 ; Fanella et Krajcinovic, 1988 ; Ju et Lee, 1991 ; Lee et Ju, 1991). Des applications de ce type de modélisation au comportement de céramiques (Sadowski, 1994) ou de la glace (Wu et Sunder, 1992a, 1992b ; Wu et Niu, 1995a, 1995b) ont considérablement élargi leur domaine de validité. Dans les travaux 3-D que nous venons d'énumérer, on peut relever soit que les mécanismes de croissance de mésosfissures ne sont pas les plus pertinents, soit que l'aspect 3-D n'est pas traité de manière générale. L'ambition, somme toute modeste de ce chapitre, est donc d'élaborer un cadre un peu plus général de ces modélisations en y incorporant divers aspects physiques que nous avons étudiés au chapitre I. On peut distinguer dans la démarche générale les étapes suivantes :

- a) représentation de la mésostructure du matériau,
- b) estimation des compliances effectives associées,
- c) construction des lois d'évolution de la mésostructure.

Les deux premières étapes ont été brièvement analysées au chapitre II dans le cas plan. Cette analyse sera poursuivie ici dans le contexte tridimensionnel. L'étude générale des lois de croissance de mésosfissures en mode mixte, déjà pauvre dans le cas 2-D, prend un caractère plus difficile encore en 3-D. On ne pourra, dans l'état actuel des connaissances, se contenter en mode mixte que de lois de croissance tridimensionnelle relativement simples. Bien que le domaine de validité du modèle de mésosfissuration que nous allons présenter ici concerne de nombreuses applications, soulignons que ce chapitre constitue une première étape dans la modélisation plus générale abordée au chapitre IV.

III.2. Représentation de la mésostructure initiale

L'endommagement induit par le chargement étant le résultat de l'évolution de la mésostructure du matériau, il s'avère que celle-ci, notamment dans son état initial, doit être bien caractérisée et schématisée. Cette représentation doit s'appuyer sur des observations fines de la

structure intime de la classe de matériaux étudiés. Les analyses physiques, essentiellement bibliographiques, réalisées au premier chapitre semblent indiquer, tout au moins dans le cas des roches fragiles à faible porosité, que les mésofissures initiales sont disposées le long d'interfaces grains-matrice (figure III.1). Nous ne revenons pas ici sur plusieurs aspects de cette question qui ont été discutés au chapitre I.

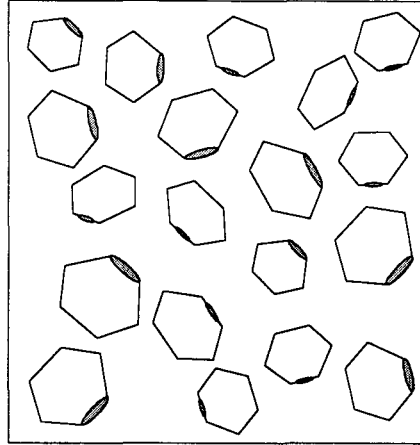


Figure III.1 : Représentation de la mésostructure initiale du matériau mésofissuré.

Malgré la simplicité relative de cette représentation, son étude nécessite l'analyse d'un matériau hétérogène à trois phases : matrice, grains, mésofissures. Pour des roches pluriminérales (à plusieurs constituants), pour lesquelles les phases matrice et grains sont bien différenciées, cette représentation ne peut être simplifiée. En revanche dans le cas de matériaux granulaires cohérents comme les grès, il est possible de schématiser grossièrement la mésostructure comme une matrice mésofissurée comme celle que nous avons étudiée au second chapitre (figure II.2a).

III.3. Evaluation tridimensionnelle de la compliance du matériau mésofissuré

Les hypothèses générales de travail sont les suivantes :

H3.1 : les mésofissures sont supposées de type « penny-shaped » (en forme de pièce de monnaie) et aléatoirement distribuées dans le V.E.R. noté V .

H3.2 : les interactions entre ces mésofissures ne sont pas prises en compte (méthode N.I.C.).

H3.3 : les conditions aux limites considérées sont celles de contraintes homogènes sur le contour de V .

Nous ne revenons pas sur le cadre général de calcul des compliances (cf. paragraphe II.1). La contribution des mésofissures à la déformation s'exprime en 3-D sous la forme :

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^d = \frac{1}{2V} \sum_k \int_{S^{(k)}} (D_i n_j + D_j n_i)^{(k)} dS^{(k)} \quad (3.1)$$

avec $i, j = 1, 2, 3$ et $n^{(k)}$ la normale unitaire de la $k^{ème}$ surface de mésosfissure d'aire $S^{(k)}$.

Comme dans le cas plan, le calcul de $\bar{\varepsilon}^d$ permet d'évaluer $\bar{\bar{S}}^d$ et donc le tenseur de compliance effectif $\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{S}}_0 + \bar{\bar{S}}^d$. A nouveau, l'évaluation de $\bar{\bar{S}}^d$ nécessite la détermination des discontinuités de déplacement dans le cas général d'un milieu élastique 3-D. Les déformations sont ainsi liées aux contraintes par la relation $\bar{\varepsilon} = \bar{\bar{S}} : \bar{\sigma}$. Soulignons qu'en présence de frottement, $\bar{\bar{S}}$ est un tenseur de compliance inélastique. Si l'on désire de plus prendre en compte l'interaction entre mésosfissures, il faudra être en mesure de traiter ce problème dans le cadre anisotrope. C'est évidemment plus difficile que dans le cas 2-D où la théorie des champs complexes de Lekhnitskii (1963) a été mis à profit. Nous nous appuyons ici sur les travaux de Hoenig (1978, 1982) qui a fourni un cadre d'étude de ce problème de fissuration tridimensionnelle en milieu élastique 3-D¹. Précisons que le cadre anisotrope existait depuis les travaux de Sih et *al.* (1965).

III.3.1. Discontinuités de déplacement dans un milieu 3-D inélastique anisotrope

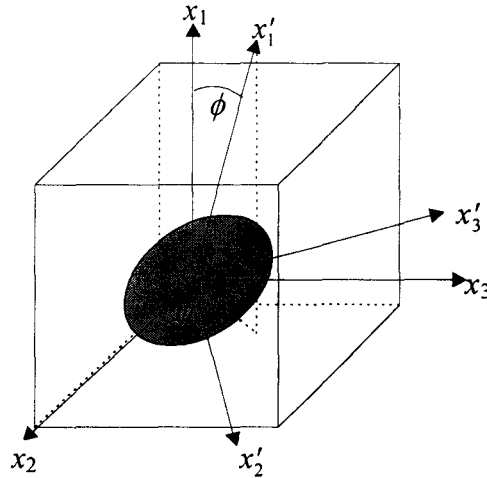


Figure III.2 : Schématisation 3-D de la mésosfissure dans un échantillon.

La démarche de base s'apparente à celle initialement suivie par Budiansky et O'Connell (1976). Elle consiste à dériver une relation liant l'intégrale de surface M (cf. p. ex. Bui (1978) pour la définition) d'une mésosfissure au travail total des contraintes dans le champ des discontinuités de déplacement. Considérons donc, de manière générale, une fissure elliptique de demi-axes a et b

¹ Initialement, la modélisation a été abordée dans ce cadre général. Les premiers résultats, qui rejoignent les conclusions de Ju et Lee (1991), indiquent que la résolution du problème en considérant une matrice isotrope fournit une approximation correcte. Ceci confirme l'idée que l'impact des interactions entre mésosfissures sur les propriétés effectives peuvent être négligées.

dans un milieu élastique anisotrope soumis à un champ de contraintes uniforme (figure III.3). Le repère d'étude est celui de la mésosfissure, l'axe z' étant parallèle à la direction normale. Le repère '' est basé sur un plan radial au point s sur le contour Γ de la fissure elliptique.

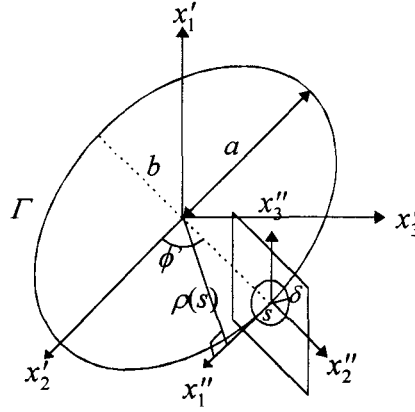


Figure III.3 : Représentation tridimensionnelle de la mésosfissure elliptique.

Les discontinuités de déplacement entre les lèvres de la mésosfissure prennent la forme suivante Hoenig (1978, 1982):

$$D'_i(x', y') = 2a\sqrt{\gamma} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} \hat{C}_{ik}^{-1} \bar{\sigma}'_{1k} \quad (3.2)$$

avec $\gamma = \frac{b}{a}$. La matrice $\hat{C}^{-1}$ joue un rôle analogue à la matrice B' du cas 2-D (elle ne dépend que des propriétés du matériau) ; σ'_{1k} représente les contraintes dans le repère local de la fissure. Cette solution a été obtenue en se basant sur la solution du problème d'inclusion ellipsoïdale d'Eshelby (1957, 1961). Afin de déterminer $\hat{C}^{-1}$, l'idée est donc d'égaliser le travail des contraintes appliquées sur la fissure W avec l'intégrale de surface M . Or :

$$W = \frac{1}{2} \int_S \bar{\sigma}'_{3k} D'_k dS = \frac{2}{3} \pi a^3 \gamma^{\frac{3}{2}} \hat{C}_{kj} \beta'_k \beta'_j \quad \text{avec } \beta'_k = \hat{C}_{jk}^{-1} \sigma'_{1j}$$

En reprenant l'étude de Budiansky et O'Connell (1976), l'intégrale de surface M peut être considérée comme une forme intégrale de J (intégrale de Rice, 1968) ou comme une forme dérivée de W :

$$M = \oint \rho(s) \lim_{\delta \rightarrow 0} J''(s, \delta) ds = a \frac{\partial W}{\partial a}$$

$\rho(s)$ est la distance perpendiculaire de l'origine à la ligne tangente au contour Γ au point s (voir figure 3.3). La difficulté de l'analyse réside dans l'évaluation de M dans le cas d'un milieu

anisotrope. Les grandes lignes techniques de ce travail peuvent être trouvés dans les articles de Hoenig (1978, 1982). Quelques détails sont apportés dans Renaud et Kondo (1994).

III.3.2. Evaluation du tenseur de compliance effective

Le calcul de C' permet l'évaluation des discontinuités de déplacements D' (pour toutes sollicitations données) de chaque mésolfissure et donc de sa contribution à la déformation (équation 3.1) :

$$\varepsilon_{ij}^{d(k)} = \frac{2\pi a^3 \gamma}{3V} (C_{ik}'^{-1(k)} \sigma_{ik}' n_j' + C_{jl}'^{-1(k)} \sigma_{jl}' n_i') \text{ et } \bar{C}_{ij}' = \frac{C_{ij}'}{\sqrt{\gamma}} \quad (3.3)$$

Pour l'évaluation de la compliance effective, il importe de distinguer les cas des mésolfissures ouvertes de celui des mésolfissures fermées.

III.3.2.1. Cas de mésolfissures ouvertes

La contribution d'une fissure elliptique ouverte à la compliance effective (dans le repère local) prend alors la forme suivante en notations de Voigt :

$$\bar{S}_{ij}^{d(k)} = \frac{4\pi a^3 \gamma}{3V} \begin{bmatrix} C_{11}'^{-1(k)} & 0 & 0 & 0 & C_{13}'^{-1(k)} & C_{12}'^{-1(k)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{31}'^{-1(k)} & 0 & 0 & 0 & C_{33}'^{-1(k)} & C_{32}'^{-1(k)} \\ C_{21}'^{-1(k)} & 0 & 0 & 0 & C_{23}'^{-1(k)} & C_{22}'^{-1(k)} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Dans le cas particulier d'une matrice isotrope transverse (Hoenig, 1978), nous avons :

$$\begin{aligned} C_{11}'^{-1} &= \frac{2S\sqrt{\gamma}}{E(k)} \sqrt{\frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{S_{22}^2 - S_{23}^2}} & U &= \sqrt{\frac{1 - \frac{S_{23}^2}{S_{22}^2}}{2}} \sqrt{\left(1 - \frac{S_{23}}{S_{22}}\right) \left(\frac{S_{66}}{S_{44}} + \frac{S_{12}}{S_{22}}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{S_{23}^2}{S_{22}^2}\right) \frac{S_{11}}{S_{22}} - \frac{S_{12}^2}{S_{22}^2}}} \\ C_{22}'^{-1} &= \frac{2S\sqrt{\gamma}}{R_1} & R_1 &= \frac{E(k) \left[k^2 - \left(1 - \frac{U}{T}\right) \right] + \gamma^2 K(k) \left(1 - \frac{U}{T}\right)}{k^2} \\ C_{33}'^{-1} &= \frac{2S\sqrt{\gamma}}{R_2} & R_2 &= \frac{E(k) \left[k^2 + \left(1 - \frac{U}{T}\right) \gamma^2 \right] - \gamma^2 K(k) \left(1 - \frac{U}{T}\right)}{k^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$K(k)$ et $E(k)$ sont les intégrales elliptiques complète de 1^{ère} et 2^{ème} espèce de l'argument k .

$$\text{soit } s_i = \frac{C_{ii}^{-1} E_0 \gamma}{2(1 - \nu_0^2)}$$

On retrouve bien dans ce cas, à partir de ce résultat général (fissures elliptiques, s_1, s_2 et s_3 dépendent alors de γ) celui de Horii et Nemat-Nasser (1983) pour des fissures «penny-shaped» :

$$\bar{\bar{S}}_{ij}^{',d(k)} = \frac{8\pi a^3(1 - \nu_0^2)}{3VE_0} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_2 \end{bmatrix} \text{ si } \gamma = 1 \text{ alors } \begin{cases} s_1 = \frac{2}{\pi} \\ s_2 = s_3 = \frac{2}{\pi \left(1 - \frac{\nu_0}{2}\right)} \end{cases} \quad (3.6)$$

La compliance dans le repère global est obtenue à l'aide de la matrice de passage P qui font intervenir les deux angles d'Euler ϕ et ψ (figure 3.2) : $\sigma' = P \sigma P^T = P \sigma^T P = T \tau$.

$$P = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi\cos\psi & \sin\phi\sin\psi \\ -\sin\phi & \cos\phi\cos\psi & \cos\phi\sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

La compliance en repère global est alors donnée par : $\bar{\bar{S}}^{',d(k)} = {}^T T \bar{\bar{S}}^{',d(k)} T$.

$$\text{De plus, sachant que } \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \text{ pour un chargement triaxial et que}$$

$\sigma' = P \sigma P^T$, nous obtenons :

$$\sigma' = \begin{bmatrix} (\sigma_{22}\cos^2\psi + \sigma_{33}\sin^2\psi)\sin^2\phi + \sigma_{11}\cos^2\phi & (\sigma_{22}\cos^2\psi + \sigma_{33}\sin^2\psi - \sigma_{11})\sin\phi\cos\phi & -\sin\phi\sin\psi\cos\psi(\sigma_{22} - \sigma_{33}) \\ (\sigma_{22}\cos^2\psi + \sigma_{33}\sin^2\psi - \sigma_{11})\sin\phi\cos\phi & (\sigma_{22}\cos^2\psi + \sigma_{33}\sin^2\psi)\cos^2\phi + \sigma_{11}\sin^2\phi & -\cos\phi\sin\psi\cos\psi(\sigma_{22} - \sigma_{33}) \\ -\sin\phi\sin\psi\cos\psi(\sigma_{22} - \sigma_{33}) & -\cos\phi\sin\psi\cos\psi(\sigma_{22} - \sigma_{33}) & \sigma_{22}\sin^2\psi + \sigma_{33}\cos^2\psi \end{bmatrix}$$

Les contraintes locales qui interviennent dans le calcul des discontinuités de déplacement d'une mésosfissure d'orientation (ϕ, ψ) sont :

$$\begin{aligned}\sigma'_{11} &= (\sigma_{22} \cos^2 \psi + \sigma_{33} \sin^2 \psi) \sin^2 \phi + \sigma_{11} \cos^2 \phi \\ \sigma'_{12} &= (\sigma_{22} \cos^2 \psi + \sigma_{33} \sin^2 \psi - \sigma_{11}) \sin \phi \cos \phi \\ \sigma'_{13} &= -\sin \phi \sin \psi \cos \psi (\sigma_{22} - \sigma_{33})\end{aligned}\quad (3.8)$$

ce qui dans le cas axisymétrique donne : $\sigma'_{11} = \sigma_{22} \sin^2 \phi + \sigma_{11} \cos^2 \phi$, $\sigma'_{12} = (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \phi \cos \phi$, $\sigma'_{13} = 0$.

Les relations 3.6 sont valables pour une mésosissure donnée k dans son repère local. Elles donnent la contribution de celle-ci aux propriétés effectives du matériau. La détermination de la compliance effective du matériau contenant une population de mésosissures peut se faire sous un certain nombre d'hypothèses simplificatrices liées à la distribution spatiale.

Hypothèses :

$\Rightarrow$ H3.4 : Les mésosissures sont supposées en très grand nombre.

$\Rightarrow$ H3.5 : Elles sont distribuées aléatoirement dans l'espace et uniformément en taille (entre $a_{0\min}$ et $a_{0\max}$) et orientation.

Ces bornes des demi-longueurs de fissures seront quelquefois remplacées par $a_{\text{début}}$ et a_{fin} car elles dépendent parfois de l'angle ϕ en raison des mécanismes (mésosissures stables, mésosissures en propagation) mis en jeu à partir des lois d'évolution (voir paragraphe III.5).

Ces hypothèses statistiques, que l'on peut rapprocher de celles portant sur la distribution des grains, sont nécessaires afin d'évaluer les valeurs moyennes des compliances sur l'ensemble du volume. La première permet de considérer une distribution (quasi) continue des mésosissures. Tandis que la seconde implique la même densité initiale de mésosissures pour toutes les orientations. Avec ces hypothèses, il est possible de définir une densité de probabilité $p(a, \phi, \psi)$ telle que :

$$\bar{\bar{S}}_{ij}^d = N \int_{\Omega} \bar{\bar{S}}_{ij}^{d(k)} p(a, \phi, \psi) d\Omega$$

Cette écriture étend ces hypothèses à Ω , domaine de mésosissures actives. Les 3 variables étant supposées indépendantes, on peut écrire : $p(a, \phi, \psi) = p(a) p(\phi) p(\psi)$. Puisque la densité de probabilité p doit vérifier $\int_{\Omega} p(a, \phi, \psi) d\Omega = 1$, soit $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{a_{0\min}}^{a_{0\max}} p(a, \phi, \psi) \sin \phi da d\psi d\phi = 1$, on a alors :

$$p(a, \phi, \psi) = \frac{1}{2\pi(a_{0\max} - a_{0\min})} \quad (3.9)$$

N (très grand) étant le nombre de mésosfissures dans le volume élémentaire représentatif V , la compliance effective moyenne s'écrit :

$$\bar{\bar{S}}^d = \frac{N}{V} \frac{1}{2\pi(a_{0\max} - a_{0\min})} \int_0^{2\pi} \int_{a_{0\min}}^{a_{0\max}} \int_0^{\pi} T(\phi, \psi) \bar{\bar{S}}'^d(a, \phi, \psi) T(\phi, \psi) \sin\phi da d\phi d\psi \quad (3.10)$$

Dans le cas de la matrice isotrope avec chargement triaxial axisymétrique, cette expression peut se calculer analytiquement.

$$\bar{\bar{S}}^d = \frac{N}{V} \frac{1 - \nu_0^2}{3E_0} \frac{2\pi}{a_{0\max} - a_{0\min}} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{a_{0\min}}^{a_{0\max}} a^3 \sin\phi \Xi(\phi) da d\phi \quad (3.11)$$

avec :

$$[\Xi(\phi)] = \begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & d & c & 0 & 0 & 0 \\ b & c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(d-c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix} \begin{cases} a = \cos^2 \phi (\cos^2 \phi s_1 + \sin^2 \phi s_2) \\ b = \frac{1}{8} \sin^2 2\phi (s_1 - s_2) \\ c = \frac{1}{8} \sin^2 \phi (\sin^2 \phi s_1 + \cos^2 \phi s_2 - s_3) \\ d = \frac{1}{8} \sin^2 \phi (3 \sin^2 \phi s_1 + 3 \cos^2 \phi s_2 + s_3) \\ e = \frac{1}{2} (\sin^2 2\phi s_1 + \cos^2 2\phi s_2 + \cos^2 \phi s_3) \end{cases}$$

Nous constatons ainsi que la contribution d'une distribution aléatoire de mésosfissures à la compliance effective est de type isotrope transverse. Ceci est lié à la symétrie des sollicitations imposées (cas triaxial axisymétrique). Ce n'est pas lié à la non-coaxialité ($s_1 \neq s_2 = s_3$) entre l'état de contraintes et le champ de discontinuités de déplacements.

Dans les cas où les bornes des demi-longueurs de fissures (a_{fin} et $a_{\text{début}}$) ne dépendent pas de l'angle ϕ (voir 3.23 et 3.25 par exemple), l'intégration donne la compliance dans le repère global due à une distribution aléatoire de mésosfissures :

$$\bar{\bar{S}}^d = \frac{N}{V} \frac{2\pi(1 - \nu_0^2)}{45E_0} \frac{a_{\text{fin}}^4 - a_{\text{début}}^4}{a_{0\max} - a_{0\min}} \left[\begin{pmatrix} a' & b' & b' & 0 & 0 & 0 \\ b' & d' & c' & 0 & 0 & 0 \\ b' & c' & d' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(d' - c') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e' \end{pmatrix} \right]_{\phi_1}^{\phi_2} \quad (3.12)$$

avec :

$$\begin{cases} a' = -\cos^3 \phi (3 \cos^2 \phi (s_1 - s_2) + 5s_2) \\ b' = \frac{1}{2} \cos^3 \phi (3 \cos^2 \phi - 5)(s_1 - s_2) \\ c' = -\frac{1}{8} \cos \phi (3 \cos^4 \phi (s_1 - s_2) + 5 \cos^2 \phi (s_3 + s_2 - 2s_1) + 15(s_1 - s_3)) \\ d' = -\frac{1}{8} \cos \phi (9 \cos^4 \phi (s_1 - s_2) - 5 \cos^2 \phi (s_3 - 3s_2 + 6s_1) + 15(3s_1 + s_3)) \\ e' = \frac{1}{2} \cos \phi (12 \cos^4 \phi (s_1 - s_2) - 5 \cos^2 \phi (s_3 - 4s_2 + 4s_1) - 15s_2) \end{cases}$$

ϕ_1 et ϕ_2 sont des bornes dépendant des mécanismes (mésolfissures stables, mésolfissures en propagation) mis en jeu à partir des lois d'évolution (voir paragraphe III.5).

Pour la distribution isotrope de mésolfissures de type « penny-shaped », en milieu isotrope ($s_1 = \frac{2}{\pi}$ et $s_2 = s_3 = \frac{2}{\pi(1 - \frac{\nu}{2})}$), on retrouve les résultats, sur la compliance effective (il s'agit ici

d'une moyenne sur toutes les orientations : on intègre de 0 à $\frac{\pi}{2}$ en supposant que toutes les fissures s'ouvrent), de Horii et Nemat-Nasser (1983) :

$$\bar{\bar{S}}^d = \frac{N}{V} \frac{16(1 - \nu_0^2)}{45E_0(2 - \nu_0)} \frac{a_{\text{fin}}^4 - a_{\text{début}}^4}{4(a_{0\text{max}} - a_{0\text{min}})} \begin{pmatrix} 10-3\nu & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 10-3\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 10-3\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5-\nu \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Le problème des fissures ouvertes est réglé en ce qui concerne le calcul de la compliance. La prochaine étape (paragraphe III.5) consistera en l'écriture d'une loi d'évolution de la mésolfissure.

III.3.2.2. Cas de mésolfissures 3-D fermées : prise en compte du frottement

Comme dans le cas plan, les conditions aux limites adoptées sur cette catégorie de mésolfissures sont celles d'un contact unilatéral avec frottement de type Coulomb :

- la fissure ne peut pas transmettre de contrainte de traction ; lorsqu'elle est ouverte, alors les contraintes appliquées sur les lèvres sont nulles.

- les lèvres des fissures ne peuvent s'interpénétrer. La discontinuité normale est toujours non négative.

La condition de nullité de la discontinuité normale de la fissure implique que la contrainte normale de la fissure corresponde à la contrainte normale à l'infini en tout point des lèvres de la fissure (Bui, 1978).

Le frottement est un des mécanismes dissipatifs pris en compte dans cette étude. La dissipation dans ce cas s'interprète comme le travail du cisaillement résultant dans l'évolution de l'incrément de glissement (Andrieux, 1983). Comme dans l'étude d'Andrieux, nous supposons que la fissure est, soit totalement ouverte, soit totalement fermée et que pour toute évolution du glissement, l'état final est aussi un état limite de glissement.

Le frottement des lèvres de mésolfissures est encore méconnu ; nous le traiterons ici en terme de moyenne lié à la morphologie rugueuse des surfaces de mésolfissures. Plus exactement, son identification pourra se faire à partir de données macroscopiques (nous y reviendrons plus tard). Dans le cas général du milieu anisotrope, la contrainte normale de contact transmise sur les lèvres des mésolfissures est donnée par la condition de nullité de la discontinuité normale $D_1 = 0$:

$$C_{11}^{-1}(\sigma'_{11} - \sigma'_{11}) + C_{12}^{-1}(\sigma'_{12} - \sigma'_{12}) + C_{13}^{-1}(\sigma'_{13} - \sigma'_{13}) = 0.$$

Ainsi, la contrainte normale de contact est donnée de manière générale :

$$\sigma'_{11} = \frac{C_{11}^{-1}\sigma'_{11} + C_{12}^{-1}\sigma'_{12} + C_{13}^{-1}\sigma'_{13}}{C_{11}^{-1} - \mu C_{12}^{-1} \text{sgn}(\sigma'_{12}) - \mu C_{13}^{-1} \text{sgn}(\sigma'_{13})} < 0. \text{ Dans le cas de l'isotropie, cette expression se}$$

réduit à : $\sigma'_{11} = \sigma'_{11}$, ce qui est le résultat déjà mis en évidence par Bui (1978).

Les contraintes de cisaillement résultant du contact avec frottement de Coulomb sur les lèvres de la mésolfissure, σ'_{12} , σ'_{13} , sont calculées à l'aide des deux conditions suivantes :

- si la fissure est fermée et frotte sans glisser : $|\sigma'_{12}| \leq -\mu\sigma'_{11}$ ou $|\sigma'_{13}| \leq -\mu\sigma'_{11}$ alors $D_i = 0$

$\sigma'_{11} = \sigma'_{11}$, $\sigma'_{12} = \sigma'_{12}$, $\sigma'_{13} = \sigma'_{13}$: il y a blocage du glissement par frottement ; aucune discontinuité de déplacement n'est possible.

- si la fissure est fermée et glisse avec frottement : $|\sigma'_{12}| > -\mu\sigma'_{11}$ ou $|\sigma'_{13}| > -\mu\sigma'_{11}$ alors

$$D_1 = 0 \text{ et : } \sigma'_{12} = -\text{sgn}(\sigma'_{12})\mu\sigma'_{11}, \text{ ou } \sigma'_{13} = -\text{sgn}(\sigma'_{13})\mu\sigma'_{11}.$$

Dans le repère local de la mésolfissure (étant donné $n_2' = n_3' = 0$ et $n_1' = 1$) les seules contributions non nulles aux déformations (voir 3.1 et 3.3) sont :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{13}' &= \frac{4\pi a^3 \gamma}{3V} [C_{31}^{-1}(\sigma_{11}'^c - \sigma_{11}') + C_{32}^{-1}(\sigma_{12}'^c - \sigma_{12}') + C_{33}^{-1}(\sigma_{13}'^c - \sigma_{13}')] \\ \varepsilon_{12}' &= \frac{4\pi a^3 \gamma}{3V} [C_{21}^{-1}(\sigma_{11}'^c - \sigma_{11}') + C_{22}^{-1}(\sigma_{12}'^c - \sigma_{12}') + C_{23}^{-1}(\sigma_{13}'^c - \sigma_{13}')] \end{aligned}$$

On en déduit les seules composantes non nulles de la compliance effective dans le repère local pour une famille de mésolfissures donnée :

$$\begin{aligned}S_{51}' &= \frac{4\pi a^3 \gamma}{3V} [C_{31}^{-1} - C_{11}^{-1} H_1'] & S_{55}' &= \frac{4\pi a^3 \gamma}{3V} [C_{33}^{-1} - C_{13}^{-1} H_1'] & S_{56}' &= \frac{4\pi a^3 \gamma}{3V} [C_{32}^{-1} - C_{12}^{-1} H_1'] \\ S_{61}' &= \frac{4\pi a^3 \gamma}{3V} [C_{21}^{-1} - C_{11}^{-1} H_2'] & S_{65}' &= \frac{4\pi a^3 \gamma}{3V} [C_{23}^{-1} - C_{13}^{-1} H_2'] & S_{66}' &= \frac{4\pi a^3 \gamma}{3V} [C_{22}^{-1} - C_{12}^{-1} H_2']\end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\text{avec : } H_1' = \frac{C_{31}^{-1} - \mu C_{32}^{-1} \text{sgn}(\sigma_{12}') - \mu C_{33}^{-1} \text{sgn}(\sigma_{13}')}{C_{11}^{-1} - \mu C_{12}^{-1} \text{sgn}(\sigma_{12}') - \mu C_{13}^{-1} \text{sgn}(\sigma_{13}')} \quad H_2' = \frac{C_{21}^{-1} - \mu C_{22}^{-1} \text{sgn}(\sigma_{12}') - \mu C_{23}^{-1} \text{sgn}(\sigma_{13}')}{C_{11}^{-1} - \mu C_{12}^{-1} \text{sgn}(\sigma_{12}') - \mu C_{13}^{-1} \text{sgn}(\sigma_{13}')}$$

Dans le cas de l'isotropie initiale, les relations 3.6 donnent un tenseur non symétrique :

$$\bar{\bar{S}}_{,d}' = \frac{8\pi a^3}{3V} \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu \text{sgn}(\sigma_{13}') s_3 & 0 & 0 & 0 & s_3 & 0 \\ \mu \text{sgn}(\sigma_{12}') s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

La compliance dans le repère global due à la famille de mésolfissures considérée (dans le cas où a ne dépend pas de ϕ) en utilisant 3.10 est donnée en annexe 2. Le tenseur de compliances perd ses symétries mineures dans ce cas le plus général (nous obtenons 36 composantes indépendantes). Nous reprenons ces résultats pour évaluer la compliance d'une distribution aléatoire, après intégration sur ψ , celle-ci s'écrit :

$$\bar{\bar{S}}^d = \frac{2\pi\omega_0(1-\nu_0^2)}{45E_0\rho^3} \begin{bmatrix} a' & b' & b' & 0 & 0 & 0 \\ b' & d' & c' & 0 & 0 & 0 \\ b' & c' & d' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(d'-c') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e' \end{bmatrix}_{\phi_1}^{\phi_2} \quad (3.16)$$

$$\text{avec : } \omega_0 = \frac{N}{V} p(a) \int_{a_{0\min}}^{a_{0\max}} a^3 da = \frac{N}{V} \frac{a_{0\max}^3(1-\hat{\gamma}^4)}{1-\hat{\gamma}} \text{ et :}$$

$$\begin{cases} a' = s_2(-\mu \operatorname{sgn}(\sigma'_{12}) \sin^3 \phi (3 \cos^2 \phi + 2) + \cos^3 \phi (3 \cos^2 \phi - 5)) \\ b' = -\frac{1}{2} s_2(3\mu \operatorname{sgn}(\sigma'_{12}) \sin^5 \phi + \cos^3 \phi (3 \cos^2 \phi - 5)) \\ c' = \frac{1}{8} s_2(3\mu \operatorname{sgn}(\sigma'_{12}) \sin^5 \phi + \cos^3 \phi (3 \cos^2 \phi - 5)) - \frac{5}{8} s_3 \cos \phi (\cos^2 \phi - 3) \\ d' = \frac{3}{8} s_2(3\mu \operatorname{sgn}(\sigma'_{12}) \sin^5 \phi + \cos^3 \phi (3 \cos^2 \phi - 5)) + \frac{5}{8} s_3 \cos \phi (\cos^2 \phi - 3) \\ e' = \frac{1}{2} s_2(2\mu \operatorname{sgn}(\sigma'_{12}) \sin^3 \phi (6 \cos^2 \phi - 1) - \cos \phi (12 \cos^4 \phi - 20 \cos^2 \phi + 15)) - \frac{5}{2} s_3 \cos^3 \phi \end{cases}$$

Cette relation reste valable pour des mésolfissures en propagation rectiligne. Comme pour les fissures ouvertes, cette contribution à la compliance est isotrope transverse (5 composantes indépendantes). Dans le cas de fissures de type « *penny-shaped* » distribuées aléatoirement dans le cas uniaxial, la compliance inélastique est :

$$\bar{\bar{S}}^d = \frac{\omega_0(1-\nu_0^2)}{45E_0(2-\nu_0)\rho^3(1+\mu^2)^{\frac{5}{2}}} \begin{bmatrix} a'' & b'' & b'' & 0 & 0 & 0 \\ b'' & d'' & c'' & 0 & 0 & 0 \\ b'' & c'' & d'' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(d''-c'') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e'' \end{bmatrix}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} a'' = 8\mu \operatorname{sgn}(\sigma'_{12}) \left[\mu^3(5 + 2\mu^2) - 2(1 + \mu^2)^{\frac{5}{2}} \right] + 40\mu^2 + 16 \\ b'' = -12\mu \operatorname{sgn}(\sigma'_{12}) \left[(1 + \mu^2)^{\frac{5}{2}} - \mu^5 \right] - 20\mu^2 - 8 \\ c'' = 3\mu \operatorname{sgn}(\sigma'_{12}) \left[(1 + \mu^2)^{\frac{5}{2}} - \mu^5 \right] - 15\mu^4 - 20\mu^2 + 8 \\ d'' = 9\mu \operatorname{sgn}(\sigma'_{12}) \left[(1 + \mu^2)^{\frac{5}{2}} - \mu^5 \right] + 15\mu^4 + 40\mu^2 + 16 \\ e'' = 8\mu \operatorname{sgn}(\sigma'_{12}) \left[\mu^3(\mu^2 - 5) - (1 + \mu^2)^{\frac{5}{2}} \right] + 60\mu^2(1 + \mu^2) + 48 \end{cases}$$

On observe que dans le cas d'une distribution aléatoire de mésolfissures fermées, le comportement est de type isotrope transverse. Ceci provient de l'activation préférentielle de certaines familles d'orientation de mésolfissures du fait de la présence du frottement.

Remarque : Comme nous l'avons déjà souligné, en présence de frottement, les déformations peuvent être dépendantes du trajet de chargement. Cependant, le domaine de trajets de chargement triaxial (actifs : toutes les fissures qui glissent continuent de le faire quand le chargement augmente) pour lequel les réponses sont indépendantes est assez large (voir Kachanov, 1982a, 1982b).

III.4. Mécanismes de croissance de mésolfissures et lois d'évolution de l'endommagement

III.4.1. Généralités sur les lois de croissance de mésolfissures

Le présent contexte de modélisation par création et croissance de mésolfissures incite à utiliser des lois de propagation de mésolfissures (p. ex. critère de Griffith), issues de la mécanique de la rupture (Sih et Liebowitz, 1968 ; Bui, 1978 ; Kanninen et Popelar, 1985 ; Lawn, 1993). Si par rapport aux approches phénoménologiques ceci constitue un avantage, il n'en demeure pas moins que l'utilisation de concepts de la mécanique de la rupture pour des fissures de taille mésoscopique et en interactions entre elles peut poser un certain nombre de problèmes².

² En fait, l'utilisation des concepts de mécanique de la rupture ne pose pas à cette échelle des problèmes majeurs si ce n'est une définition correcte des paramètres intrinsèques intervenant dans l'écriture des critères (voir à ce propos la discussion de Krajcinovic et Sumarac, 1989). Le rôle des interactions est par contre plus délicat à traduire.

En première approximation, on peut supposer que chaque mésofissure se comporte comme dans un milieu effectif homogène. Le choix préalable qui a été fait de négliger les interactions entre mésofissures est ici déterminante. Car autrement, il aurait fallu développer des critères de propagation tridimensionnels en milieu (effectif) anisotrope que l'on peut formellement écrire. Un tel développement permettrait de traduire dans un certain sens les aspects non locaux de la mésofissuration (cf. travaux de Bazant et Pijaudier-Cabot, 1988). Ce cadre théorique, bien que très compliqué existe (voir travaux de Hoenig, 1982). Mais sa mise en œuvre ne pourra être par exemple possible qu'en se basant sur la moyenne des énergies de propagation sur tout le front tridimensionnel de la fissure. Formellement, on écrira :

$$G_c = \frac{1}{2\pi a} \oint_{\Gamma} G'(a, \phi_u, \psi') ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G'(a, \phi_u, \psi') d\psi'$$

ϕ_u représente le domaine d'orientation critique pour lequel les fissures de demi-taille (rayon) a vont progresser ; a est le rayon de la fissure de type « penny-shaped ». G_c est une énergie critique, caractéristique du matériau.

La conséquence directe de cette approximation (moyenne sur le front) est l'impossibilité de prédire exactement le trajet de fissuration. Notons enfin que dans une approche de type autocohérent, le milieu effectif serait de plus inconnu. Cette situation, pour le moins inextricable, conduit à s'appuyer plutôt sur des lois de propagation de fissures en milieu élastique isotrope. Là encore, on doit noter que le problème n'est pas si simple lorsque les trois modes (I, II et III) de propagation sont simultanément présents. Les travaux récents de l'équipe de J.-B. Leblond (thèse de Lazarus, 1997) confirment cette difficulté et montrent la complexité technique des outils mathématiques nécessaires pour la contourner. Le point de vue adopté est relativement simple et consiste à faire les hypothèses suivantes :

i) En présence du mode d'ouverture, on suppose que la propagation d'une mésofissure donnée (penny-shaped) est auto-similaire. En clair, elle verra sa taille (rayon) croître de manière uniforme.

ii) Les mésofissures fermées peuvent après une phase de propagation interfaciale (et uniforme) se brancher (mode mixte). Les branches pourront ensuite évoluer en mode I.

Remarque : Les premières propagations de mésofissures, supposées autosimilaires sur les interfaces, sont en principe instables. Leurs arrêts peuvent être expliqués en évoquant la barrière d'énergie que constitue la matrice (de

plus grande ténacité). Ce phénomène a été principalement observé dans des bétons par Zaitsev (1983) : les tailles initiales de mésosfissures (notées en moyenne $2a_0$) augmentent jusqu'à une certaine longueur finale (en moyenne $2a_f$) dépendant de la taille moyenne des grains. On note dans ces mécanismes de croissance, le rôle clef des hétérogénéités des matériaux (roches, bétons etc.) considérés dans cette étude.

Avant d'examiner les différents modes de croissance, présentons de manière générale le critère dans l'hypothèse d'une matrice isotrope de module E_0 et de coefficient de Poisson ν_0 . Dans ce cas, l'énergie d'avancement G' est donnée sous la forme (Kanninen et Popelar, 1985) :

$$\overline{G'} = \frac{1-\nu_0^2}{E_0} (K_I'^2 + K_{II}'^2) + \frac{1+\nu_0}{E_0} K_{III}'^2 = \frac{1-\nu_0^2}{E_0} \left[\left(2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \sigma'_{11} \right)^2 + \left(\frac{2}{1-\frac{\nu_0}{2}} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sigma'_{12} \right)^2 \right] + \frac{1+\nu_0}{E_0} \left(\frac{2(1-\nu_0)}{1-\frac{\nu_0}{2}} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sigma'_{13} \right)^2 \quad (3.18)$$

ou encore, comme le propose Krajcinovic (1997) :

$$G' = \Theta_{ij}^{(ky)} K'_i K'_j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{avec} \quad \Theta_{ij}^{(ky)} = \frac{1+\nu_0}{E_0} \left[(1-\nu_0) \delta_{ij} + \nu_0 \delta_{III,i} \delta_{III,j} \right] \quad (3.19)$$

Le critère d'énergie (du type $G' = G_c$) doit permettre de déterminer, d'une part, les seuils d'endommagement, et d'autre part, le domaine d'activation du dommage, c'est à dire l'ensemble des mésosfissures qui participent à l'endommagement (ouverture, glissement ou propagation). Il sera alors possible de préciser comment évolue le champ de mésosfissuration avec les sollicitations. Selon le type de chargement imposé au V.E.R., nous avons entrevu deux modes d'évolution de l'endommagement : croissance des mésosfissures essentiellement en mode I (ouverture) pour des fissures soumises à une contrainte normale de traction, croissance en mode II (fermeture et glissement) suivi d'un branchement en mode mixte pour des mésosfissures sous compression normale.

De façon générale, les équations d'évolution correspondant au mode d'ouverture sont les plus aisées à mettre en œuvre (voir Krajcinovic et Fanella, 1986 ou Sumarac et Krajcinovic, 1989). Celles correspondant à la compression sont beaucoup plus lourdes à mettre en œuvre car elles font intervenir de façon plus déterminante à la fois le mode II et le mode mixte, en raison des trajets de fissuration complexes.

La mise en œuvre du critère de propagation nécessite la détermination du taux de restitution d'énergie critique G_c . Très peu de données sont disponibles sur cette grandeur, en particulier pour les fissures interfaciales. De manière générale, les facteurs d'intensité de contrainte interfaciaux

critiques pour le mode I (K_I^{cf}), le mode II (K_{II}^{cf}) et pour le mode III (K_{III}^{cf}) sont différents. Une simplification consiste à intégrer la contribution du mode III dans l'énergie associée au mode II :

$$\left(\frac{K_I}{K_I^{cf}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{II}^{cf}}\right)^2 = 1.$$

$$\text{avec alors } K_{II}' = \frac{2}{1 - \frac{\nu_0}{2}} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sqrt{\sigma_{12}'^2 + \sigma_{13}'^2} \quad (3.20)$$

III.4.2. Lois d'évolution des mésolfissures ouvertes

Les états possibles de mésolfissuration en traction sont résumés sur les figures III.4.

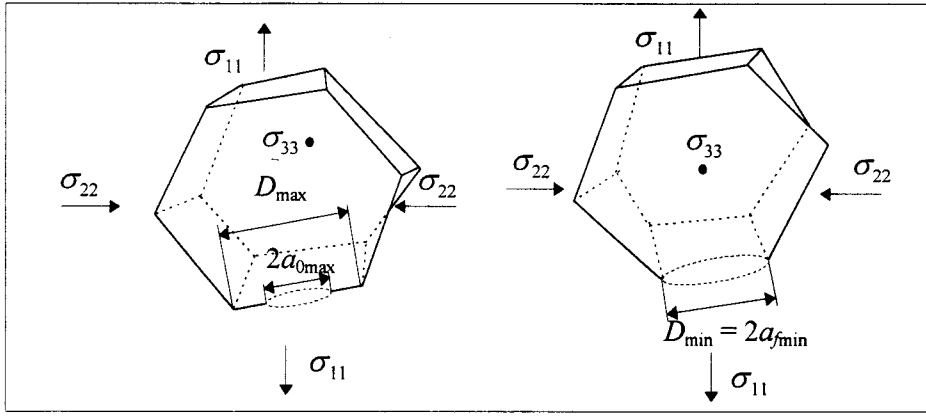


Figure III.4 : États de mésolfissuration 3-D possibles sous sollicitations de traction.

La traduction du critère précédent pour des mésolfissures ouvertes sous contraintes triaxiales principales s'écrit (avec 3.8) :

$$\sigma_{11}'^2 + \gamma^2 \sigma_{12}'^2 + \gamma^2 (1 - \nu_0) \sigma_{13}'^2 = \frac{\pi E_0}{4a(1 - \nu_0^2)} G_c \quad (3.21)$$

ce qui conduit à $A_1 \cos^4 \phi + A_2 \cos^2 \phi + A_3 = 0$

$$\text{avec } A_1 = \left(\cos^2 \psi (\sigma_{22} - \sigma_{33}) + \sigma_{33} - \sigma_{11} \right)^2 (1 - \gamma^2)$$

$$\gamma = \frac{1}{1 - \frac{\nu}{2}}$$

$$A_2 = \cos^2 \psi (\sigma_{22} - \sigma_{33}) \left[(\sigma_{22} - \sigma_{33}) (\gamma^2 (\nu_0 - 1) + (2(1 - \gamma^2) + \gamma^2 \nu_0) \cos^2 \psi) + 2(\gamma^2 - 1)(\sigma_{33} - \sigma_{11}) - 2\sigma_{33} \right] + (\sigma_{33} - \sigma_{11}) (\gamma^2 (\sigma_{33} - \sigma_{11}) - 2\sigma_{33})$$

$$A_3 = \cos^2 \psi (\sigma_{22} - \sigma_{33}) \left[(\sigma_{22} - \sigma_{33}) (\cos^2 \psi - \gamma^2 \sin^2 \psi (\nu_0 - 1)) + 2\sigma_{33} \right] + \sigma_{33}^2 - \frac{G_c E_0 \pi}{4a(1 - \nu_0^2)}.$$

Nous pouvons ainsi évaluer l'angle ultime ϕ_u qui définit le domaine $[-\phi_u, \phi_u]$ des mésolfissures qui se propagent (de manière instable) pour chaque angle ψ (cf. III.6. pour la signification de ce domaine d'angle).

Ces relations deviennent plus simples dans le cas triaxial axisymétrique, car alors, les solutions ne dépendent plus de ψ .

$$\phi_{u_{\min, \max}} = \text{Arccos} \sqrt{\frac{-A_2 - \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3}}{2A_1}} \quad (3.22)$$

Les conditions d'existence de ϕ_u doivent être vérifiées à chaque niveau de chargement pour tout ψ :

$$1 \geq \frac{-A_2 - \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3}}{2A_1} \geq 0 \text{ et } A_2^2 - 4A_1A_3 \geq 0.$$

Les angles $\phi_{u_{\max}}$ et $\phi_{u_{\min}}$ (équation 3.22) sont respectivement associés aux rayons $a_{0\max}$ et $a_{0\min}$ (avec les A_1, A_2 et A_3 correspondants). Nous rappelons que les mésosfissures sont supposées de tailles initiales comprises entre $a_{0\max}$ et $a_{0\min}$. Les premières mésosfissures commençant à se propager sont celles à $\phi = 0$ et $a = a_{0\max}$. Pour un essai de traction uniaxiale, (cas de la simulation présentée ultérieurement, III.6), on en déduit un seuil macroscopique d'endommagement $\sigma_{11}^0 = \sqrt{\frac{\pi}{a_{0\max}}} \frac{K_I^{if}}{2}$.

Nous pouvons, dans ce cas, décrire plus précisément les différentes étapes :

- Si $\sigma_{11} < \sigma_{11}^0$ toutes les fissures sont inactives
- Si $\sigma_{11} \geq \sigma_{11}^0$ les fissures dont $\phi \in [\phi_{u_{\min}}, \phi_{u_{\max}}] \times a \in [a_0^m(\phi, \psi), a_{0\max}] + \phi \in [0, \phi_{u_{\min}}] \times a \in [a_{0\min}, a_{0\max}]$ s'ouvrent, deviennent instables et augmentent en taille jusqu'à atteindre une longueur caractéristique a_f . Dans la présente version du modèle, le rapport $\rho = \frac{a_0}{a_f}$ est supposé constant, mais il pourrait être une variable aléatoire comprise entre 0 et 1. D'autre part, les fissures dont $\phi \in [\phi_{u_{\min}}, \phi_{u_{\max}}] \times a \in [a_{0\min}, a_0^m(\phi, \psi)] + \phi \in [\phi_{u_{\max}}, \pi/2] \times a \in [a_{0\min}, a_{0\max}]$ s'ouvrent sans se propager. $a_0^m(\phi, \psi)$ est la taille minimale pour que la mésosfissure devienne instable pour une orientation ϕ donnée (à partir de 3.21) :

$$a_0^m(\phi, \psi) = \frac{\pi E_0}{4(1 - \nu_0^2) [\sigma_{11}'^2 + \gamma^2 \sigma_{12}'^2 + \gamma^2 (1 - \nu_0) \sigma_{13}'^2]} G_c \quad (3.23)$$

Sachant que la compliance globale inélastique sur un domaine d'orientations et de tailles de fissures est toujours de la forme :

$$\bar{\bar{S}}^d = \frac{N}{V} \frac{1}{2\pi(a_{0\max} - a_{0\min})} \int_{\phi_{\text{début}}}^{\phi_{\text{fin}}} \int_0^{2\pi} \int_{a_{\text{début}}}^{a_{\text{fin}}} T(\phi, \psi) \bar{\bar{S}}^{d(k)}(a, \phi, \psi) T(\phi, \psi) \sin \phi da d\psi d\phi$$

$\phi_{\text{début}}$, ϕ_{fin} , $a_{\text{début}}$ et a_{fin} sont des bornes qui varient avec le mécanisme considéré (voir ci-dessous).

Nous pouvons écrire la compliance inélastique totale comme étant : $\bar{\bar{S}}^d = \bar{\bar{S}}^{du} + \bar{\bar{S}}^{ds}$ où

$\bar{\bar{S}}^{du} = \bar{\bar{S}}^d(\phi_{u\min}, \phi_{u\max}, a_f^m(\phi, \psi), a_{f\max}) + \bar{\bar{S}}^d(0, \phi_{u\min}, a_{f\min}, a_{f\max})$: compliance due à la propagation instable.

$\bar{\bar{S}}^{ds} = \bar{\bar{S}}^d(\phi_{u\max}, \frac{\pi}{2}, a_{0\min}, a_{0\max}) + \bar{\bar{S}}^d(\phi_{u\min}, \phi_{u\max}, a_{0\min}, a_0^m(\phi, \psi))$: compliance due au glissement.

Pour ce cas des fissures ouvertes, il faut souligner que la modélisation adoptée exclut la présence de déformations résiduelles après une éventuelle décharge. L'expérience indique au contraire la présence dans certains cas de telles déformations. Un couplage éventuel de la mésosfissuration et de mécanismes simples de dislocations permettrait d'aboutir à ce résultat (cf. Ju, 1996).

Remarquons que la notion de domaine actif de dommage porte à la fois sur les orientations et sur les tailles des mésosfissures. Les angles correspondant à ces différents cas d'évolution sont schématisés sur la figure III.5.

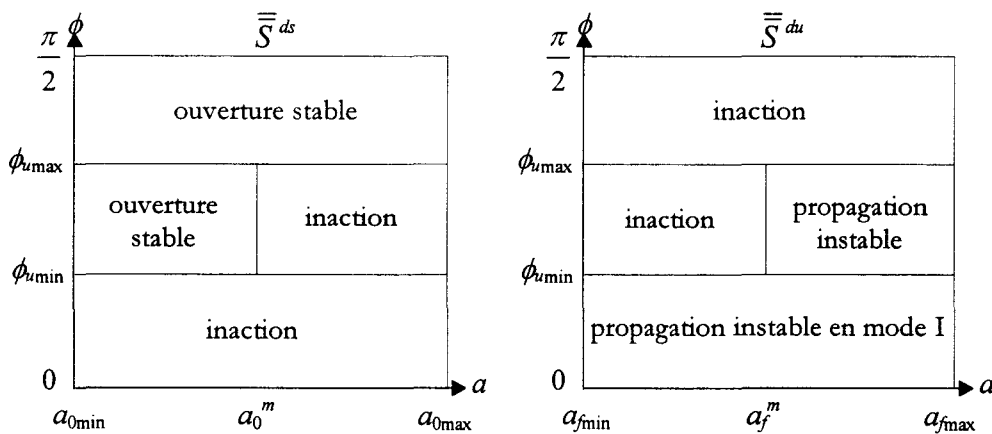


Figure III.5 : Définition des divers domaines d'activation des mésosfissures 3-D ouvertes.

Pour éviter l'intersection de ces domaines, il faut que $a_{0\max} < a_{f\min}$, donc en fait $\rho < \hat{\gamma}$ (voir le paragraphe III.6.1 pour de plus de renseignements sur la signification de ces paramètres.).

III.4.3. Mécanismes d'évolution des mésosfissures fermées

Sous sollicitations de compression, le mode de mésosfissuration est plus complexe qu'en traction. Les mésosfissures initialement interfaciales, peuvent se fermer, frotter, glisser, se propager d'abord en mode II et enfin se brancher (mode mixte). Nous avons souligné au chapitre I que ce mécanisme de mésosfissuration, initialement suggéré par Brace et Bombolakis (1963), est observé (à l'aide du M.E.B.) dans les roches (Kranz, 1983 ; Horii et Nemat-Nasser, 1985 ; Nemat-Nasser et Horii, 1993 ; Myer et *al.*, 1992) et dans le béton (voir par exemple Zaitsev, 1983). Son étude théorique a été également l'objet de travaux importants dont notamment ceux de Nemat-Nasser et Horii (1982), Horii et Nemat-Nasser (1985, 1986), Steif (1984). Par convention, nous appellerons cette fissure en mode mixte, fissure branchée. Les trois stades de mésosfissuration en compression sont schématisés sur les figures III.6.

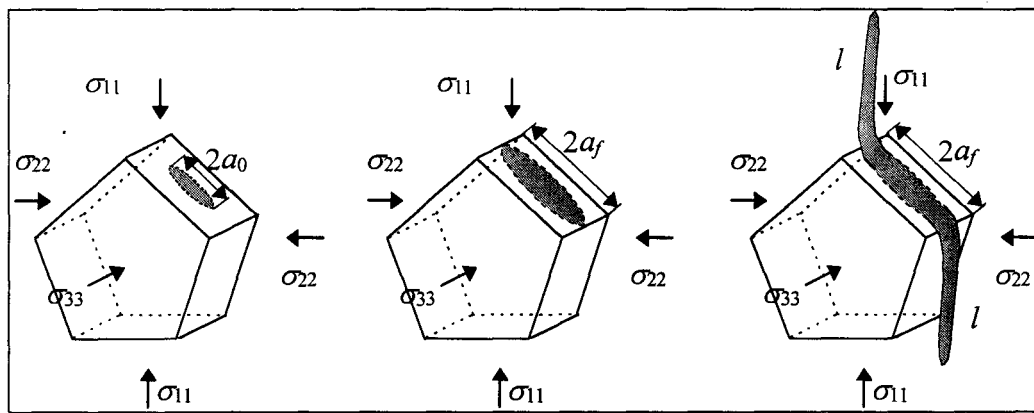


Figure III.6: Etats de mésosfissuration 3-D possibles sous sollicitations de compression.

A chaque niveau de chargement donné, on doit évaluer les domaines d'activation du dommage (orientations pour lesquelles les mésosfissures deviennent instables et voient leur taille augmenter). Les angles définissant ces domaines sont représentés sur la figure III.7. Enfin, c'est ce domaine de dommage actif qui apporte des contributions au tenseur de compliance effective.

III.4.3.1. Croissance en mode glissement

Rappelons que la fissure se propage instantanément de façon rectiligne dans sa direction initiale. En compression, les seuls modes initiaux de propagation de la fissure (fermée, frottante et glissante) sont les modes II et III dont les critères sont du type fourni par l'équation 3.20 (avec $K_I' = 0$) : $K_{II}' = K_{II}^{if}$. Pour une mésosfissure de type *penny-shaped*, le facteur d'intensité de contrainte en mode II (incluant les 2 composantes du cisaillement dans le plan de la mésosfissure) peut être calculé comme :

$$K_{II}' = \frac{4}{2-\nu_0} \sqrt{\frac{a_{0_{\max}}}{\pi}} \tau_s \text{ avec } \tau_s = \sqrt{\sigma_{12}'^2 + \sigma_{13}'^2} + \mu \sigma_{11}' \quad (3.24)$$

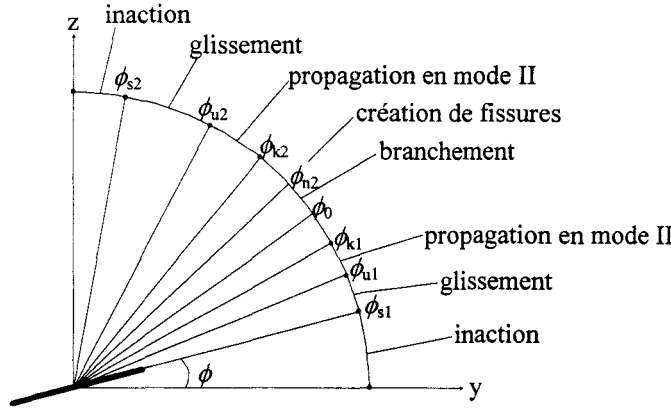


Figure III.7 : Domaines d'angles de fissuration en compression 3-D.

Suivant la loi de frottement de Coulomb, les fissures vont glisser si la force motrice $\tau_s > 0$. μ est le coefficient de frottement (paramètre *a priori* mésoscopique) sur les lèvres des mésosfissures fermées. En développant 3.24 à l'aide de 3.8, on peut évaluer l'angle qui définit l'activation des mésosfissures pour la propagation instable en mode II : $\tan^4 \phi + 2\alpha \tan^2 \phi + \beta = 0$ soit :

$$\phi(\psi)_u = \text{Arctan} \sqrt{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}} \quad (3.25)$$

avec $x = \frac{(2-\nu_0)K_{II}^{if}}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a_{0_{\max}}}}$ et

$$\alpha = \frac{2\mu(\sigma_{22} \cos^2 \psi + \sigma_{33} \sin^2 \psi)(\sigma_{11} - x) - \sin^2 \psi \cos^2 \psi (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 - (\sigma_{22} \cos^2 \psi + \sigma_{33} \sin^2 \psi - \sigma_{11})^2}{2\mu^2(\sigma_{22} \cos^2 \psi + \sigma_{33} \sin^2 \psi)^2 - 2\sin^2 \psi \cos^2 \psi (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2}$$

$$\beta = \frac{(\sigma_{11} - x)^2}{\mu^2(\sigma_{22} \cos^2 \psi + \sigma_{33} \sin^2 \psi)^2 - \sin^2 \psi \cos^2 \psi (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2}$$

Les conditions d'existence de ϕ_u doivent être vérifiées à chaque niveau de chargement pour tout ψ : $\alpha^2 \geq \beta$ et $-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta} \geq 0$.

De même, à chaque niveau de chargement, on obtient la fonction $a_0(\phi, \psi)$ pour ce mode :

$$a_0(\phi, \psi) = \frac{\pi \left(\frac{2-\nu_0}{4} K_{II}^{if} \right)^2}{\left[\sqrt{\sigma_{12}'^2 + \sigma_{13}'^2} + \mu \sigma_{11}' \right]^2} \quad (3.26)$$

Afin de trouver les angles limites de glissement, à partir desquels les fissures glissent (sans forcément se propager), nous résolvons la condition de glissement ($\tau_s \geq 0$) qui développée donne :

$$\phi(\psi)_s = \text{Arctan} \sqrt{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}} \text{ avec } x = 0 \quad (3.27)$$

Précisons la démarche dans le cas d'une compression triaxiale axisymétrique (essai triaxial de révolution)

Etapes en compression avec pression latérale : cas du mode instable II

- Si $\sigma_{11} < \sigma_{11}^0$ toutes les fissures sont inactives (σ_{11}^0 est le seuil de glissement d'une mésofissure).
- Si $\sigma_{11} \geq \sigma_{11}^0$ les fissures dont $\phi \in [\phi_{u1}, \phi_{u2}] \times a \in [a_f(\phi, \psi), a_{f_{\max}}]$ deviennent instables et augmentent en taille jusqu'à atteindre une longueur caractéristique a_f . D'autre part, les fissures dont $\phi \in [\phi_{u1}, \phi_{u2}] \times a \in [a_{0\min}, a_0(\phi, \psi)] + \phi \in [\phi_{s1}, \phi_{s1}] \times a \in [a_{0\min}, a_{0\max}] + \phi \in [\phi_{u1}, \phi_{u2}] \times a \in [a_{0\min}, a_{0\max}]$ glissent sans se propager. $a_0(\phi, \psi)$ est la taille minimale de mésofissure pour que cette dernière devienne instable pour une orientation ϕ, ψ donnée.

La compliance effective en compression pour le mode II est : $\bar{S}^d = \bar{S}^{du} + \bar{S}^{ds}$ où

$$\begin{aligned} \bar{S}^{du} &= \bar{S}^d(\phi_{u1}, \phi_{u2}, a_f(\phi), a_{f_{\max}}) \\ \bar{S}^{ds} &= \bar{S}^d(\phi_{u2}, \phi_{s2}, a_{0\min}, a_{0\max}) + \bar{S}^d(\phi_{u1}, \phi_{u2}, a_{0\min}, a_0(\phi)) + \bar{S}^d(\phi_{s1}, \phi_{u1}, a_{0\min}, a_{0\max}) \end{aligned}$$

Examinons à ce stade l'importance du mécanisme de croissance en mode II. Sans rentrer dans les questions d'identification de paramètre, qui seront abordées ultérieurement (paragraphe III.5.1.1) dans ce chapitre, l'objectif est de comparer les prédictions au comportement élastique linéaire.

Les résultats pour une sollicitation de compression simple sont présentés sur la figure III.8. On constate que lorsque, seuls le glissement et la propagation instable en mode II sont pris en compte, le modèle est incapable de rendre compte de la réponse fortement dilatante des matériaux fragiles sous ce type de chargement (cf. chapitre I). Ces remarques sont confirmées en consultant les travaux de Gambarotta et Lagomarsino (1993) portant sur un modèle incrémental avec le glissement comme variable interne et une propagation rectiligne de mésofissures. Non seulement la déformation volumique obtenue par ces auteurs n'est pas dilatante, mais de plus, les non-linéarités de la déformation axiale sont plus marquées que celles de la déformation transversale. Ceci semble

contraire aux observations expérimentales et souligne à nouveau la nécessité d'une prise en compte du branchement des mésosfissures.

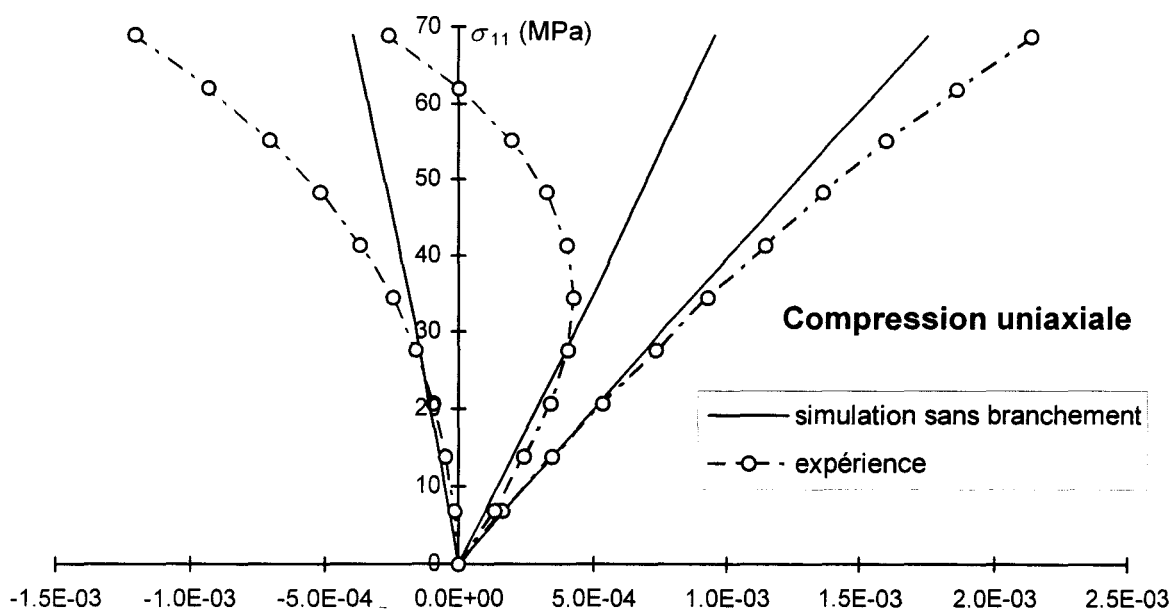


Figure III.8 : Influence des mécanismes de glissement et de propagation instable en compression.

III.4.3.2. Le branchement des fissures 3-D en compression

La particularité de la mésosfissure branchée est la possibilité qu'elle offre de générer un mécanisme d'ouverture dans chacune de ses branches. Elle serait donc l'une des explications de l'existence de mésosfissures axiales dilatantes souvent observées par exemple dans des roches sollicitées en compression. D'autres mécanismes liés à la porosité ont été décrits au premier chapitre. Malgré sa pertinence physique dans les roches dont la porosité n'est pas faible, l'étude analytique du modèle associé aux mésopores présente de nombreuses difficultés. Il doit néanmoins être gardé à l'esprit pour d'éventuelles améliorations du modèle présenté dans ce travail (prise en compte des interactions entre pores et mésosfissures (Fond, 1992 ; Kachanov, 1993a)).

Dans le cas précédent d'une propagation instable, les mésosfissures passent d'une taille initiale $2a_0$ à une taille finale $2a_f$. Cette propagation est arrêtée par la matrice du matériau qui joue le rôle de barrière d'énergie. Lorsque des niveaux de compression plus élevés sont atteints, certains de ces défauts se branchent dans la matrice et tendent à se propager de façon stable suivant la direction perpendiculaire à la contrainte principale mineure.

La nature tridimensionnelle de la mésosfissuration rend difficile l'élaboration de solutions au problème de la fissure branchée. Nous suivons ici la méthodologie proposée par Krajcinovic et Fanella (1988) et qui consiste à approximer la fissure 3-D branchée par une série de sections

branchées 2-D. Ainsi les discontinuités de déplacements (ouverture et glissement) sont calculées en moyennant les solutions 2-D le long du contour de la fissure 3-D. Les développements qui vont suivre sont une illustration de cette approximation dans le cas triaxial axisymétrique.

Critère de branchement de la fissure :

L'initiation du branchement de la fissure est liée à la présence de mode II dont le F.I.C. est :

$$K_{II} = \frac{4}{2-\nu_0} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \tau_s. \text{ Selon Cotterell et Rice (1980), le mode I existe en tête de branche (pour une}$$

fissure branchée 2-D en déformation plane) et $K_I = \frac{2}{\sqrt{3}} K_{II}$ (voir le paragraphe IV.2.3 pour de plus

amples détails). Le critère de branchement s'écrit alors $K_I^c = \frac{8}{2-\nu_0} \sqrt{\frac{a}{3\pi}} (|\sigma'_{12}| - \mu |\sigma'_{11}|) = K_I$, où

K_I^c est le facteur d'intensité de contrainte critique en mode I de la matrice (ou ténacité). En minimisant la contrainte de cisaillement agissant sur la section située à un angle β (voir figure III.11), on remarque que le branchement démarre quand $\beta' = 0$, $\phi = \phi_0$ et $a_f = a_{f_{\max}}$. La valeur seuil du chargement correspondant est :

$$\sigma_{11}^{0k} = \left(\mu + \sqrt{\mu^2 + 1} \right) \left[\sigma_{22} \left(\mu + \sqrt{\mu^2 + 1} \right) - \frac{2-\nu_0}{4} \sqrt{\frac{3\pi}{a_f}} K_I^c \right]$$

Lorsque ce seuil est atteint, nous supposons que le contour de la fissure entière va se brancher. De même que précédemment, on obtient les bornes du domaine d'activation des fissures en branchement :

$$\phi_{k,2} = \text{Arctan} \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4C(C + \mu)}}{2C}, C = \frac{\frac{2-\nu_0}{8} \sqrt{\frac{3\pi}{a_{f_{\max}}}} K_I^c + \mu \sigma_{22}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}, \sigma_{11} \geq \sigma_{11}^{0k} \quad (3.28)$$

La taille minimale de fissure nécessaire à l'activation du branchement à une étape de chargement et une orientation données est obtenue à partir du critère de branchement :

$$a_k(\phi) = \frac{3\pi}{64} \left[\frac{(2-\nu_0) K_I^c}{(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \phi \cos \phi - \mu (\sigma_{22} \sin^2 \phi + \sigma_{11} \cos^2 \phi)} \right]^2 \quad (3.29)$$

L'étude mathématique précise de l'évolution de la fissure branchée (incurvée) 2-D est très complexe (Cotterell et Rice, 1980). Les travaux les plus complets effectués sur ce problème sont à ce jour ceux de Horii et Nemat-Nasser (1986). Plusieurs types de fissure branchée équivalente ont été étudiés par ces auteurs (cf. chapitre I). Les résultats obtenus étant similaires, notamment après amorçage du branchement, le système équivalent retenu dans cette phase de l'étude est celui de la

figure III.10b. L'application du critère de stabilité en K_I permet de déterminer la longueur du branchement à tout niveau de chargement (Zaitsev, 1983 ; Horii et Nemat-Nasser, 1985 ; Fanella et Krajcinovic, 1988) :

$$l = \frac{1}{\pi} \left[\frac{K_I^c - \text{sgn}(\sigma_{22}) \sqrt{K_I^{c^2} + 8\sigma_{22}a_f (|\sigma'_{12}| - \mu|\sigma'_{11}|) \cos \phi}}{2\sigma_{22}} \right]^2 \quad (3.30)$$

Pour la compression simple, la nullité de σ_{22} entraîne : $l = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2a_f (|\sigma'_{12}| - \mu|\sigma'_{11}|) \cos \phi}{K_I^c} \right]^2 \quad (3.31)$

Enfin, nous choisissons la fissure branchée équivalente qui soit le plus proche possible de la réalité : le système équivalent retenu est celui de la figure III.11.

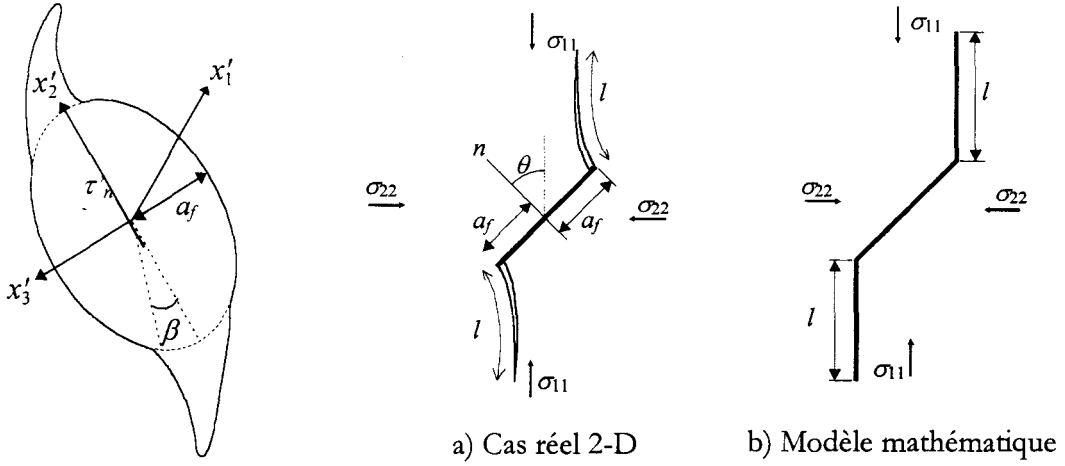


Figure III.9 : Fissure branchée 3-D.

Figures III.10 : Sections 2-D à l'angle β de la fissure branchée.

Au lieu de modéliser la contrainte de cisaillement induite par le branchement comme une force ponctuelle, Fanella et Krajcinovic (1988) ont supposé que la pression est uniformément distribuée au centre de la surface de la fissure 2-D équivalente sur une longueur $2\alpha_k a_f \sin \phi$ (voir figure III.11). Cela permet d'éviter les singularités de déplacement au voisinage du chargement ponctuel. La constante α_k est déterminée en égalant le facteur d'intensité de contrainte en mode I de cette fissure équivalente à celui étudié numériquement par Horii et Nemat-Nasser (1985). La valeur approximative de α_k proposée par Horii et Nemat-Nasser (1985) est 0.25.

Précisons que l'ouverture et le glissement moyen d'une fissure branchée 2-D pour une section quelconque à un angle β (et approximée à l'aide de la fissure équivalente) sont donnés dans le *handbook* de Tada (1973). Les composantes moyennes (sur $2l$) du vecteur discontinuités de déplacements 2-D le long de la fissure équivalente sont alors :

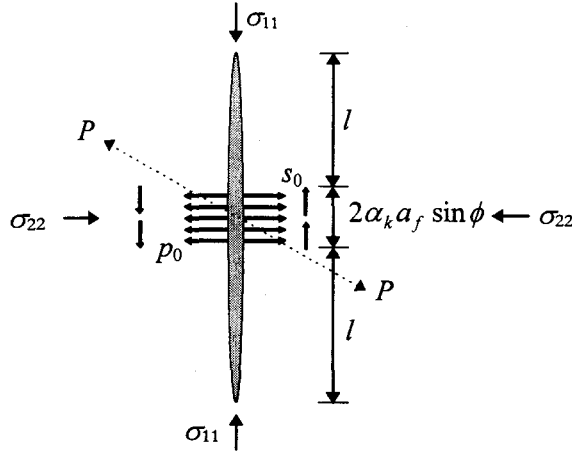


Figure III.11: Fissure équivalente 2-D.

$$\begin{aligned} \langle D_1 \rangle(\beta) &= \frac{4.8(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0} F_1(a_f, \phi, l) \tau_{(n, \beta)} \\ \langle D_2 \rangle(\beta) &= \frac{4.8(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0} F_1(a_f, \phi, l) \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} \tau_{(n, \beta)} \\ \langle D_3 \rangle(\beta) &= 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

avec $\tau_{(n, \beta)} = \tau_{(n, 0)} \cos \beta$ (voir figure III.9), $\tau_{(n, 0)} = \sigma'_{12} - \mu \sigma'_{11}$ et la fonction F_1 suivante :

$$F_1(a_f, \phi, l) = \frac{\text{Arcsin}\left(\frac{\alpha_k a_f \sin \phi}{\alpha_k a_f \sin \phi + l}\right) \sqrt{l(l + 2(\alpha_k a_f \sin \phi))} + (\alpha_k a_f \sin \phi) \ln\left(\frac{\alpha_k a_f \sin \phi + l}{\alpha_k a_f \sin \phi}\right)}{\alpha_k \tan \phi} \quad (3.33)$$

La longueur du branchement (voir équations 3.29 et 3.30) varie le long du contour de la fissure (voir figure III.12), cette variation est prise en compte en utilisant le vecteur discontinuités de déplacement moyen le long du contour de la fissure 3-D ($-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ en raison de la symétrie).

Soit $\langle D \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D \cos \beta d\beta = \frac{2}{\pi} D$ qui a pour composantes :

$$\begin{aligned} D'_i &= \frac{2}{\pi} 0.6 B'_{ij} F_1(a_f, \phi, l) (\sigma'_{1j} - \mu \delta_{2j} \sigma'_{11}) \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} \\ D''_i &= \frac{2}{\pi} 0.6 B''_{ij} F_1(a_f, \phi, l) (\sigma'_{1j} - \mu \delta_{2j} \sigma'_{11}) \end{aligned} \quad \text{avec } B''_{22} = B'_{22} = \frac{8(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0}$$

On observe déjà bien sur cette figure l'effet de la pression latérale sur le branchement. Le vecteur discontinuités de déplacement moyen le long du contour de la fissure ($-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$) a pour composantes :

$$D'_i = \frac{2}{\pi} 0.6 B'_{ij} F_1(a_f, \phi, l) (\sigma'_{1j} - \mu \delta_{2j} \sigma'_{11}) \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} \quad \text{avec } B'_{22} = B''_{22} = \frac{8(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \quad (3.34)$$

$$D''_i = \frac{2}{\pi} 0.6 B''_{ij} F_1(a_f, \phi, l) (\sigma'_{1j} - \mu \delta_{2j} \sigma'_{11})$$

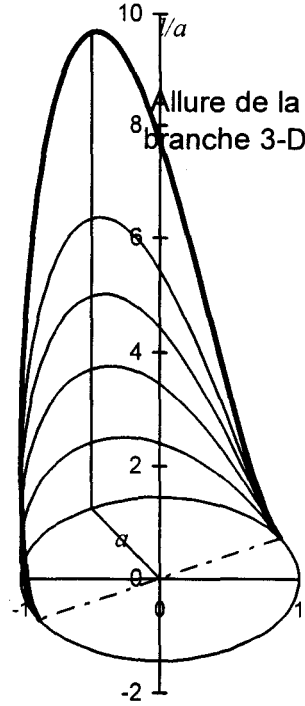


Figure III.12 : Exemple de variation de $l = f(\beta)$ pour $\sigma_{22} = 0, 0.5, 1, 2$ et 5 MPa.

Les compliances effectives dans les deux cas s'écrivent respectivement (l'indice k correspond au branchement, *kinking* en anglais) :

- pour la partie centrale de la fissure branchée :

$$\bar{S}_k^{*(p)} = \eta_k \frac{N}{V} \frac{1}{2\pi\rho^2(a_{0\max} - a_{0\min})} \int_{\phi_{k1}}^{\phi_{k2}} \int_0^{2\pi} \int_{a_k(\phi)}^{a_{0\max}} a^2 F_1\left(\frac{a}{\rho}, \phi, l\right) D_{ijmn}^{(p)} \frac{\sin^3 \phi}{\cos \phi} da d\phi d\psi \quad (3.35)$$

- pour les branches de la fissure :

$$\bar{S}_k^{(c)} = \eta_k \frac{N}{V} \frac{1}{2\pi\rho(a_{0\max} - a_{0\min})} \int_{\phi_{k1}}^{\phi_{k2}} \int_0^{2\pi} \int_{a_k(\phi)}^{a_{0\max}} a l F_1\left(\frac{a}{\rho}, \phi, l\right) D_{ijmn}^{(c)} \sin \phi da d\phi d\psi \quad (3.36)$$

$$\text{avec } D_{ijkl}^{(p)} = \frac{4.8(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} (g_{1j} g_{2i} + g_{1i} g_{2j}) g_{1k} (g_{2l} - \mu g_{1l}) \quad D_{ijkl}^{(c)} = \frac{9.6(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \hat{g}_{2i} \hat{g}_{2j} g_{1k} (g_{2l} - \mu g_{1l}),$$

$$[g] = [P^{-1}] \text{ (relation 3.7) et } [\hat{g}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & -\cos\psi \end{bmatrix},$$

et $\eta_k = \frac{\phi_{k_2} - \phi_{k_1} - \int_{\phi_{k_1}}^{\phi_{k_2}} \frac{a_k(\phi)}{a_{0\max}} d\phi}{(\phi_{s_2} - \phi_{s_1})(1-\gamma)}$ représente la fraction de fissures branchées pour un

niveau de chargement donné (c'est le rapport entre l'aire définie par $a_k(\phi)$ et l'aire admissible dans l'espace (a, ϕ)).

Les expressions de la compliance effective due à une fissure branchée peuvent être enfin données dans le cas d'une matrice isotrope :

$$\bar{\bar{S}}_k^d = \eta_k \frac{N}{V} \frac{4.8(1-\nu_0^2)}{2\pi\rho^2 E_0} \frac{1}{a_{0\max} - a_{0\min}} \int_{\phi_{k_1}}^{\phi_{k_2}} \int_{a_k(\phi)}^{a_{0\max}} a F_1\left(\frac{a}{\rho}, \phi, l\right) \sin \phi \begin{pmatrix} a'' & b'' & b'' & 0 & 0 & 0 \\ c'' & 3d'' & d'' & 0 & 0 & 0 \\ c'' & d'' & 3d'' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e'' \end{pmatrix} da d\phi$$

$$\begin{cases} a'' = 2a \sin 2\phi \sin^2 \phi (\sin \phi - \mu \cos \phi) \\ b'' = -2a \sin^4 \phi (\mu \sin \phi + \cos \phi) \\ c'' = -2 \cos \phi (\sin \phi - \mu \cos \phi) (a \sin^3 \phi - l\rho) \\ d'' = \frac{\sin \phi}{2} (\mu \sin \phi + \cos \phi) (a \sin^3 \phi - l\rho) \\ e'' = -a \cos 2\phi \frac{\sin^3 \phi}{\cos \phi} (\sin \phi - \mu \cos \phi) \end{cases} \quad (3.37)$$

L'évaluation complète de $\bar{\bar{S}}_k^d$ nécessite alors une intégration numérique. Une schématisation du V.E.R. (mésostructure) lorsque tous les mécanismes sont activés est présentée sur la figure III.13.

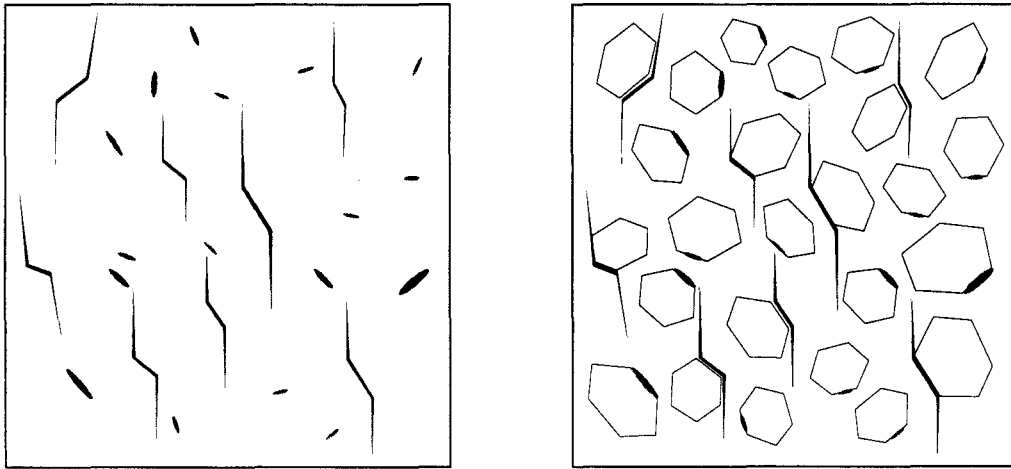


Figure III.13 : Schématisation générale de l'état de la mésostructure en compression.

Etapes d'évolution de la fissure branchée 3-D dans un essai triaxial de révolution

- si $\sigma_{11} < \sigma_{11}^{0k}$ (seuil de branchement) aucune fissure ne se branche.
- si $\sigma_{11} \geq \sigma_{11}^{0k}$ les fissures dont $\phi \in [\phi_{k1}, \phi_{k2}] \times a \in [a_f^k(\phi), a_{f_{\max}}]$ se branchent et augmentent en taille jusqu'à atteindre une longueur caractéristique l_f .

La compliance globale inélastique due au branchement s'écrit donc sous la forme :

$$\bar{S}^{dk} = \bar{S}^d(\phi_{k1}, \phi_{k2}, a_f^k(\phi), a_{f_{\max}}, l(\phi, \frac{a}{\rho}))$$

Les résultats obtenus, après incorporation dans le modèle du mécanisme de branchement sont reportés sur la figure III.14. La comparaison de ces résultats avec ceux de la figure III.8 montrent de façon claire l'importance de ce mécanisme dans la réponse dilatante des matériaux étudiés. On constate cependant que les prédictions ne sont pas complètement satisfaisantes, notamment pour les forts niveaux de contraintes. Une des raisons possibles de cette lacune est le fait que la croissance de mésolfissures est généralement accompagnée de la création de nouvelles mésolfissures.

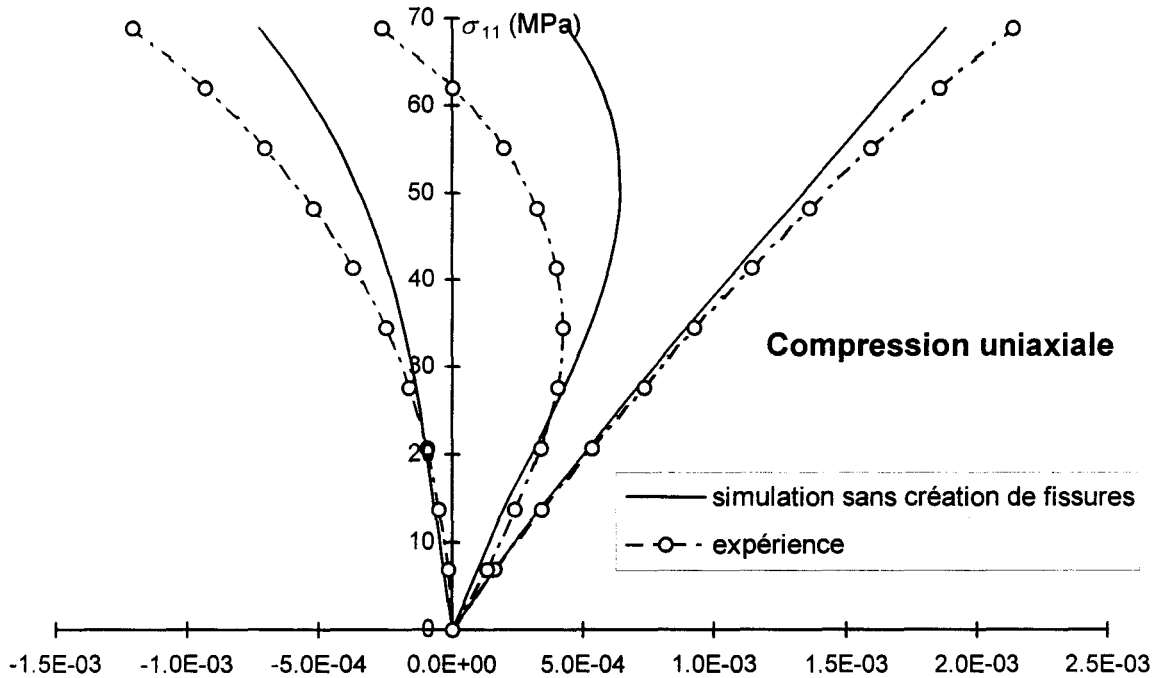


Figure III.14 : Influence du mécanisme de branchement en compression.

III.4.4. La génération de nouvelles mésolfissures

La génération de nouvelles mésolfissures au cours du processus de déformation, est reconnue comme un des principaux mécanismes de l'endommagement des matériaux quasi-fragiles.

Ce mécanisme apparaît généralement sous des chargements élevés. Il peut jouer un rôle crucial dans la transition fragile-ductile observée dans certaines roches. C'est au moins le cas dans le comportement de la glace polycristalline étudiée par Wu et Niu (1994). On connaît encore peu de choses sur les origines physiques de ce phénomène, mais il semblerait qu'il existe des liens avec le développement d'une microplasticité (voir p. ex. les travaux de Krajcinovic et Stojimirovic, 1990). Nous avons dans ce travail choisi d'étudier ce mécanisme à l'aide d'un modèle simplifié dit de Zener-Stroh, développé dans Stroh (1954) puis repris par Smith et Barnby (1967). Ce modèle (utilisé initialement pour des fissures dans les milieux cristallins comme les métaux) repose sur un critère de contrainte de cisaillement critique (de type Zener-Stroh). Nous en rappelons juste les hypothèses portant sur son adaptation à la génération de mésosissures dans les matériaux fragiles.

Hypothèses :

H.5 : Les nouvelles mésosissures sont générées uniquement aux interfaces. De plus, leur taille est supposée proportionnelle à celle des grains.

H.6 : On suppose que la contrainte de décohésion τ_d de l'interface grains - matrice est plus faible que la contrainte de rupture de la matrice et des grains du matériau.

H.7 : Nous supposons la même distribution de tailles des mésosissures créées que pour celles qui préexistaient.

Pilotées par les contraintes de cisaillement, les mésosissures nouvellement créées glissent sur les plans actifs (sur une face d'un grain) jusqu'à ce qu'elles soient arrêtées par la frontière du grain. En écrivant donc $\sigma'_{12} = \tau_d$, c'est-à-dire $(\sigma_{22}\cos^2\psi + \sigma_{33}\sin^2\psi - \sigma_{11})\tan\phi = \tau_d(1 + \tan^2\phi)$, on obtient le domaine d'angles (ϕ_{n1}, ϕ_{n2}) en fonction de l'angle ψ pour lequel les contraintes de cisaillement dépassent la contrainte de décohésion :

$$\phi_{n_{1,2}} = \text{Arctan} \frac{1 \mp \sqrt{1-4C^2}}{2C}, \quad C = \frac{\tau_d}{\sigma_{22}\cos^2\psi + \sigma_{33}\sin^2\psi - \sigma_{11}}, \quad \sigma_{11} \geq \sigma_{11}^{0n} \quad (3.38)$$

Ce qui donne le seuil de création de mésosissure : $\sigma_{11}^{0n} = \sigma_{22}\cos^2\psi + \sigma_{33}\sin^2\psi - 2\tau_d$ (la contrainte de décohésion est positive). Il faut aussi vérifier $\sigma'_{13} = \tau_d$, c'est-à-dire

$$(\sigma_{33} - \sigma_{22})\sin\phi \frac{\sin 2\psi}{2} = \tau_d, \text{ d'où } \phi_{n_1} = \text{Arcsin} \frac{2\tau_d}{(\sigma_{33} - \sigma_{22})\sin 2\psi}, \phi_{n_2} = \frac{\pi}{2}, \quad |(\sigma_{33} - \sigma_{22})\sin 2\psi| \geq 2\tau_d$$

La dépendance de ces domaines d'angles avec ψ disparaît en appliquant ces relations au cas triaxial axisymétrique, nous obtenons deux angles symétriques par rapport à $\phi_{n0} = \frac{\pi}{4}$ pour lequel les premières fissures apparaissent. Comme cet angle ϕ_{n0} est inférieur à l'angle de glissement initial $\phi_{s0} = \phi_0$, seul l'angle ϕ_{n2} suivant nous intéresse pour le calcul de la compliance (voir figure III.7) :

$$\phi_{n2} = \text{Arctan} \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11} + \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 - 4\tau_d^2}}{2\tau_d}.$$

Les nouvelles mésolfissures sont ensuite intégrées dans la mésostructure et testées (tout comme celles qui préexistaient) à l'aide des différents critères déjà développés (propagation instable en mode II, branchement, etc.).

Pour terminer l'analyse du problème, il ne reste plus qu'à évaluer le nombre N_n de mésolfissures créées. Celui-ci dépend du nombre total de grains ainsi que de leur forme. D'après Krajcinovic et Fanella (1986), se basant sur des données concernant des bétons, N_n doit satisfaire les bornes suivantes : $0 \leq N_n \frac{\pi}{2} \leq (N_f N_a - N)(\phi_{n2} - \phi_{n1})$, N_f étant le nombre de facettes de chaque grain ou chaque inclusion, N_a le nombre moyen de grains ou d'inclusions et N le nombre de mésolfissures préexistantes. D'après Harr (1977), un agrégat possède en moyenne 7 facettes ($N_f = 7$) et 3 fissures préexistantes ($N = 3N_a$). On peut donc considérer l'estimation

$\frac{N_n}{V} = \frac{8}{3\pi}(\phi_{n2} - \phi_{n1}) \frac{N}{V}$ comme acceptable. Ce qui conduit à :

$$\omega_n = \frac{8\omega}{3\pi} \text{Arctan} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\tau_d}\right)^2 - 1}.$$

Illustration du mécanisme de création de mésolfissures : essai triaxial de révolution

Notons tout d'abord que d'une manière générale, $|\sigma_{11}^{0n}| > |\sigma_{11}^{0k}| > |\sigma_{11}^0|$.

- si $\sigma_{11} < \sigma_{11}^{0n}$ il n'y a pas de création de mésolfissure.
- si $\sigma_{11} \geq \sigma_{11}^{0n}$ les fissures dont $\phi \in [\phi_{u1}, \phi_{n2}] \times a \in [a_f(\phi), a_{f_{\max}}]$ deviennent instables et augmentent en taille jusqu'à atteindre une longueur caractéristique a_f . La compliance globale due à la propagation instable de fissures créées en mode II est :

$$\bar{\bar{S}}^{dun} = \bar{\bar{S}}^d(\phi_{u1}, \phi_{n2}, a_f(\phi), a_{f_{\max}}).$$

D'autre part, les fissures dont $\phi \in [\phi_{u1}, \phi_{n2}] \times a \in [a_{0min}, a_0(\phi)] + \phi \in [\phi_{s1}, \phi_{u1}] \times a \in [a_{0min}, a_{0max}]$ glissent sans se propager et leur compliance globale est :

$$\bar{S}^{dsn} = \bar{S}^d(\phi_{s1}, \phi_{u1}, a_{0min}, a_{0max}) + \bar{S}^d(\phi_{u1}, \phi_{n2}, a_{0min}, a_0(\phi)).$$

Enfin, les fissures dont $\phi \in [\phi_{k1}, \phi_{k2}] \times a \in [a_f^k(\phi), a_{fmax}]$ se branchent et augmentent en taille jusqu'à atteindre une longueur caractéristique l_f calculée avec 3.31. Donc, la compliance globale inélastique due au branchement de mésolfissures créées s'écrit sous la forme :

$\bar{S}^{dkn} = \bar{S}^d(\phi_{k1}, \phi_{k2}, a_f^k(\phi), a_{fmax}, l(\phi, \frac{a}{\rho}))$. La compliance globale due à l'ensemble des mésolfissures créées est : $\bar{S}^{dn} = \bar{S}^{dsn} + \bar{S}^{dun} + \bar{S}^{dkn}$.

On peut évaluer l'importance du mécanisme de création de mésolfissures en comparant les nouvelles simulations (figure III.18) aux précédentes.

On peut évaluer la contribution des divers mécanismes à la déformation non-linéaire du matériau en visualisant le domaine d'activation des mésolfissures. Un exemple de résultat concernant les mécanismes est présenté à la figure III.15. Il correspond à la simulation que nous venons de commenter. Il confirme l'importance des mécanismes de branchement et de création de nouvelles mésolfissures.

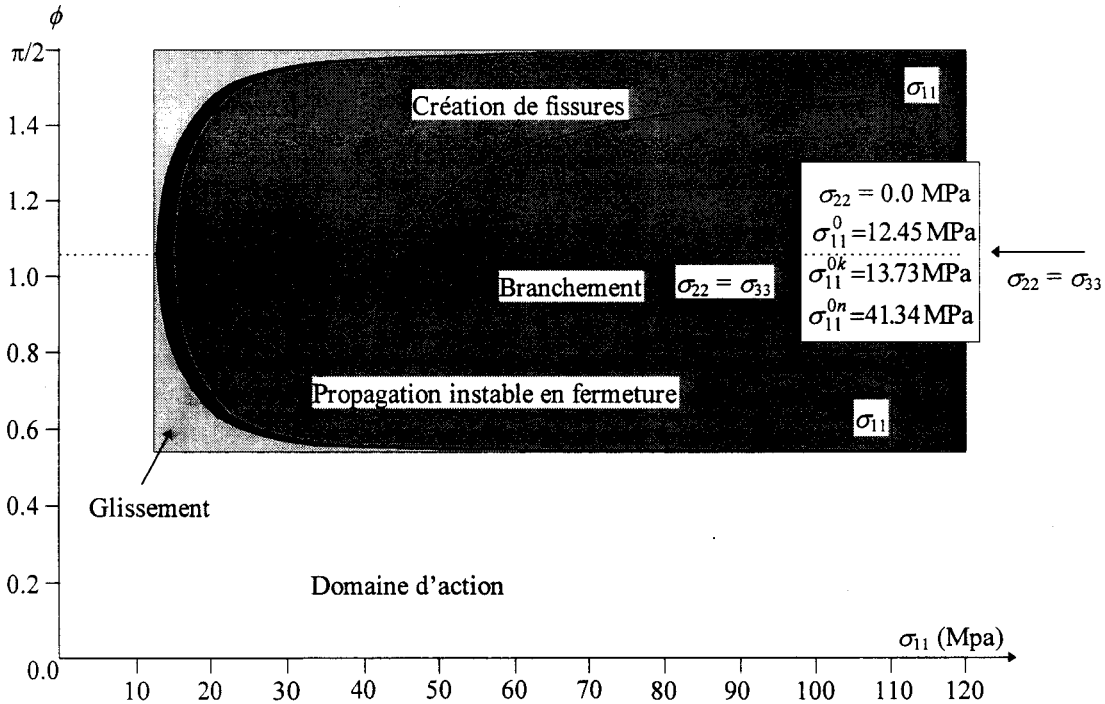


Figure III.15 : Domaines d'activation des divers mécanismes de mésolfissuration en compression uniaxiale.

III.5. Résultats et comparaisons

L'objectif visé dans ce paragraphe est essentiellement d'évaluer les prédictions du modèle sur des trajets de chargements triaxiaux de révolution.

III.5.1. Calibration des paramètres du modèles

Le modèle présente l'avantage que tous les paramètres nécessaires à sa mise en œuvre ont une signification physique. Mais malheureusement, les informations mésostructurales (concernant le grès) dont nous disposons sont très pauvres ; c'est pourquoi la démarche sera en partie qualitative. En particulier, pour certains paramètres (F.I.C.), nous avons repris des valeurs courantes dans la littérature concernant des bétons (Fanella et Krajcinovic, 1988 ; Newman et Newman, 1972 ; Zaitsev, 1983) ou des roches. Nous savons cependant que la taille moyenne d'un grain de quartz dans le grès de Fontainebleau est de l'ordre de 0.25 mm. Nous avons ensuite supposé que la taille maximale d'un grain est le double de la taille moyenne (celle-ci étant le double de la taille minimale). En dehors des paramètres élastiques E_0 et ν_0 , la version présentée du modèle comporte 8 paramètres (dont certains sont étudiés en annexe 3) que l'on peut ranger en deux catégories.

- les paramètres macroscopiques : K_I^c que l'on peut obtenir à l'aide d'essais classiques de mécanique de la rupture (flexion 3 points par exemple) ; le coefficient de frottement μ , même si de façon stricte celui-ci devrait être considéré comme une caractéristique des lèvres de mésosfissures, donc de nature mésoscopique.

- les paramètres mésomécaniques : la densité initiale de mésosfissures (ω_0), les dimensions des interfaces (ou des grains : $D_{\max}$ et $D_{\min}$ où $D_{\max}$ est la taille maximum d'un agrégat, avec le

rapport $\hat{\gamma} = \frac{D_{\min}}{D_{\max}}$,) soit en fait, les demi-tailles finales des fissures ($a_{f_{\min}} = \frac{D_{\min}}{2} = \hat{\gamma} \frac{D_{\max}}{2}$ et

$a_{f_{\max}} = \frac{D_{\max}}{2}$), la demi-taille des mésosfissures préexistantes (a_0) avec $\rho = \frac{a_0}{a_f}$. En principe, des

observations au microscope électronique à balayage (M.E.B.) suffisent pour évaluer ces quatre premiers paramètres. Les deux derniers paramètres mésoscopiques sont les facteurs d'intensité de contraintes critiques aux interfaces des grains, en mode I (K_I^{II}) et en mode II (K_{II}^{II}). Ceux-ci sont plus délicats à déterminer, même s'ils font depuis peu l'objet de recherches importantes tant sur le plan expérimental que théorique (voir p. ex. Qu et Bassani, 1989 et Bassani et Qu, 1989). Suivant Zaitsev (1983), on peut de manière schématique considérer que $K_I^c > K_{II}^{II} > K_I^{II}$.

III.5.2. Simulations de la réponse en traction simple et en compression triaxiale d'un grès

Les paramètres du modèle pour les simulations effectuées sont choisis à partir des données de Fanella et Krajcinovic (1988) : $E_0 = 39300 \text{ MPa}$, $\nu_0 = 0.13$, $D_{\max} = 0.5 \text{ mm}$, $\omega_0 = 0.06$, $\rho = 0.72$, $\hat{\gamma} = 0.25$, $K_I^f = 0.165 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, $K_{II}^f = 0.33 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$. Il faut ici souligner que la densité apparaît comme un paramètre de calage, le modèle y étant très sensible. La première simulation 3-D que nous présentons concerne la traction uniaxiale (figure III.16). La réponse sous ce chargement présente une importante non-linéarité. Les courbes de compliances (très forte dégradation de la composante axiale) montrent que la mésosfissuration est principalement orientée de façon perpendiculaire à la charge.

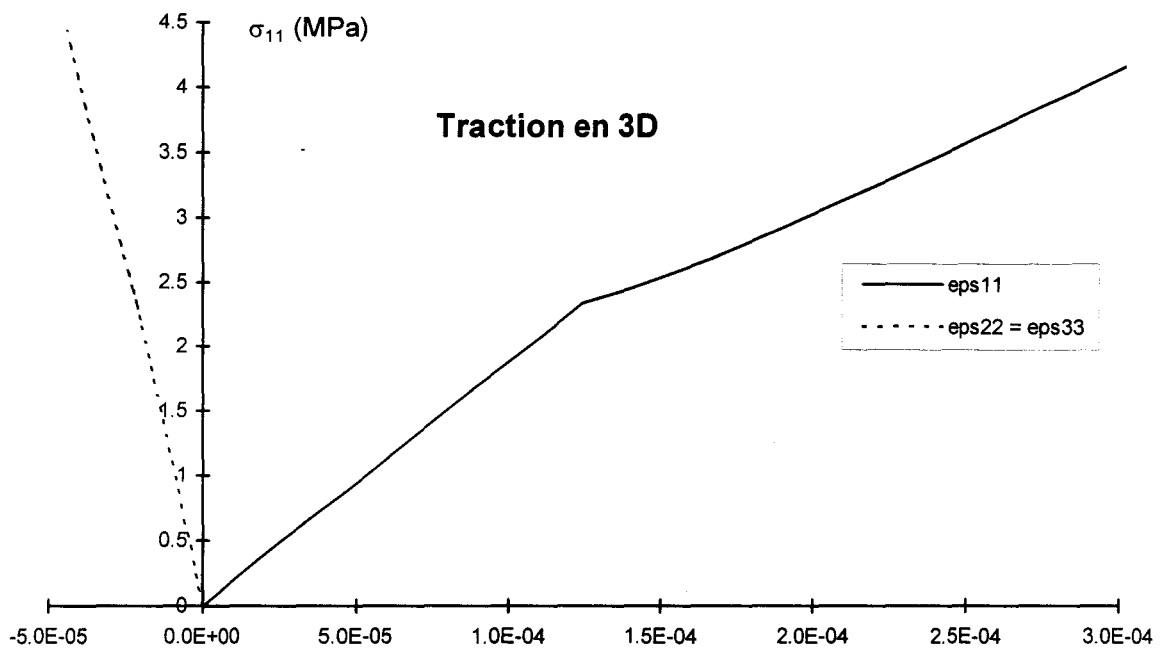


Figure III.16 : Modèle 3-D - Courbes $\sigma - \epsilon$ sous sollicitations de traction.

Nous avons également effectué un certain nombre de simulations en compression uniaxiale et triaxiale. Les paramètres du modèle nécessaires pour la simulation en compression sont le coefficient de frottement $\mu = 0.6$, et $K_I^c = 0.6 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$. La simulation en compression uniaxiale avec cet ensemble de paramètres figure III.18. a déjà fait l'objet de commentaires lors de la présentation des mécanismes. On observe une dilatance assez prononcée dans la réponse du matériau. La comparaison avec les données expérimentales est plutôt satisfaisante. La réponse axiale (ϵ_{11}) reste quasi-linéaire tout au long du chargement. Pour des confinements plus élevés (voir figure III.19 et III.20), la performance du modèle est moins bonne. Ceci est essentiellement dû à l'effet d'inhibition de la pression sur le développement des branches des mésosfissures. On peut imaginer

que la dilatace observée à des contraintes élevées dans les essais triaxiaux provient en partie de la création de nouvelles mésosfissures. Or, même si ce mécanisme est pris en compte dans le modèle, la connaissance physique que nous en avons pour l'instant est très limitée. Des exemples de variation de compliances correspondant aux simulations présentées sont fournies sur les figures III.22 à III.24. Ces figures confirment l'anisotropie induite par la fissuration, l'endommagement étant plus important dans la direction transversale (voir S_{12} par exemple).

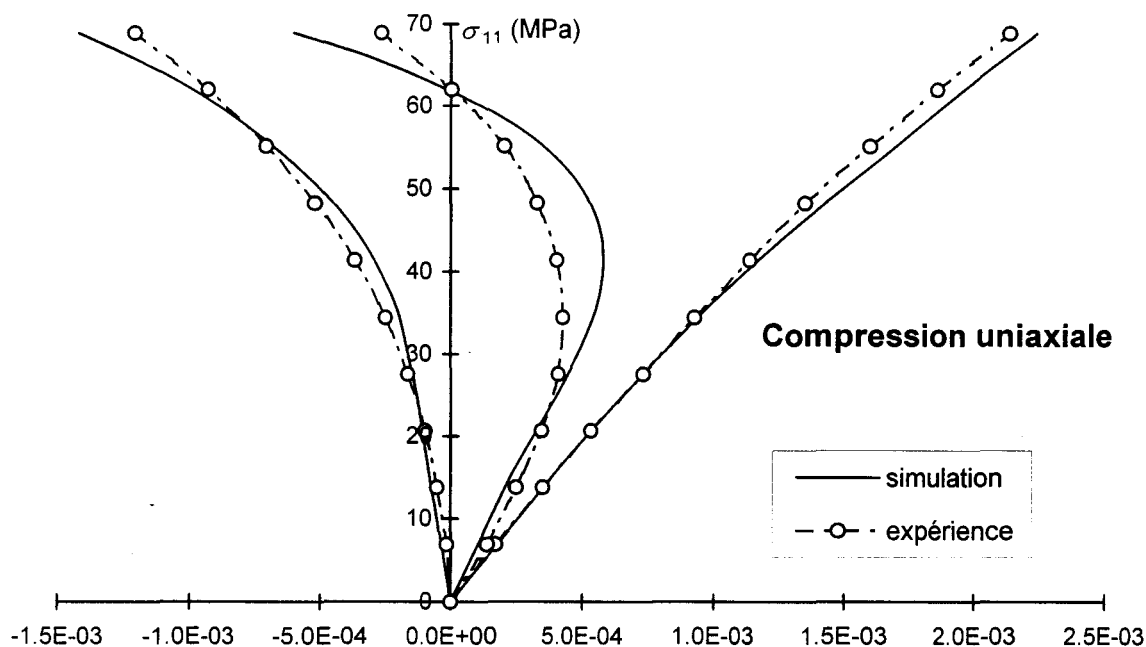


Figure III.17 : Courbes contraintes-déformations en compression uniaxiale.

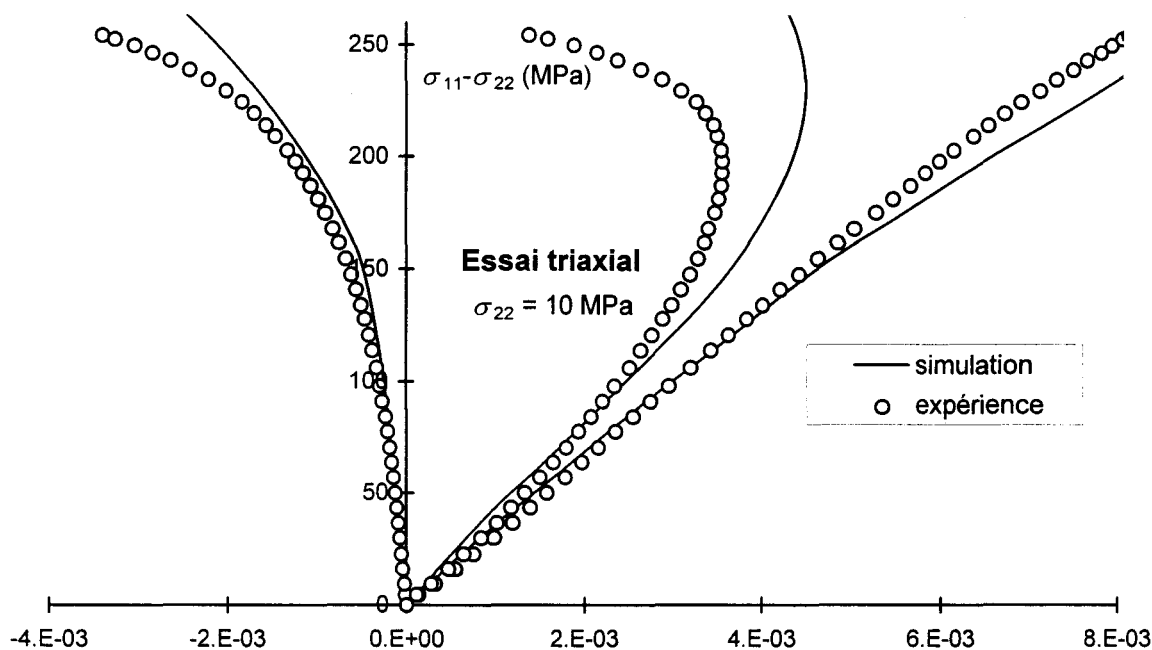


Figure III.18 : Courbes contraintes-déformations en compression triaxiale à 10 MPa de confinement.

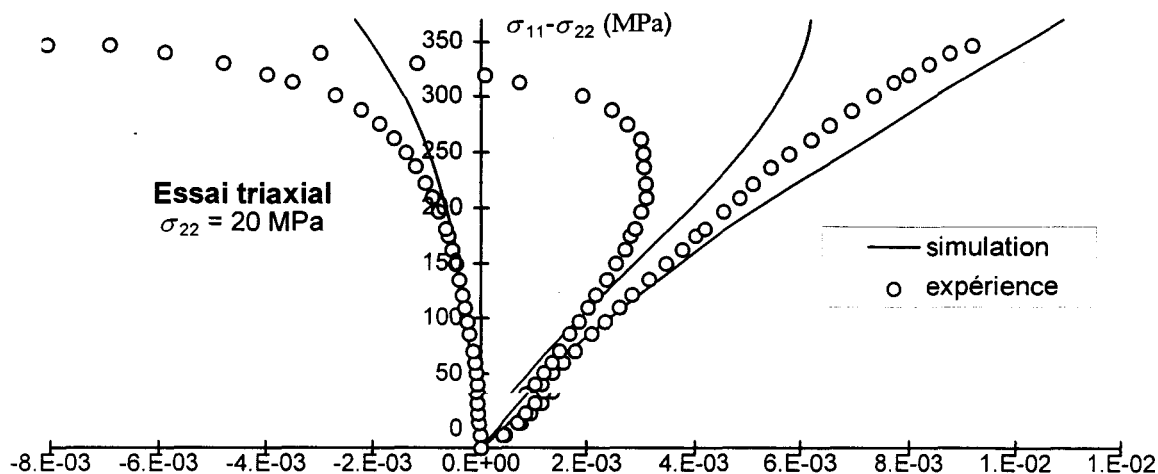


Figure III.19 : Courbes contraintes-déformations en compression triaxiale à 20 MPa de confinement.

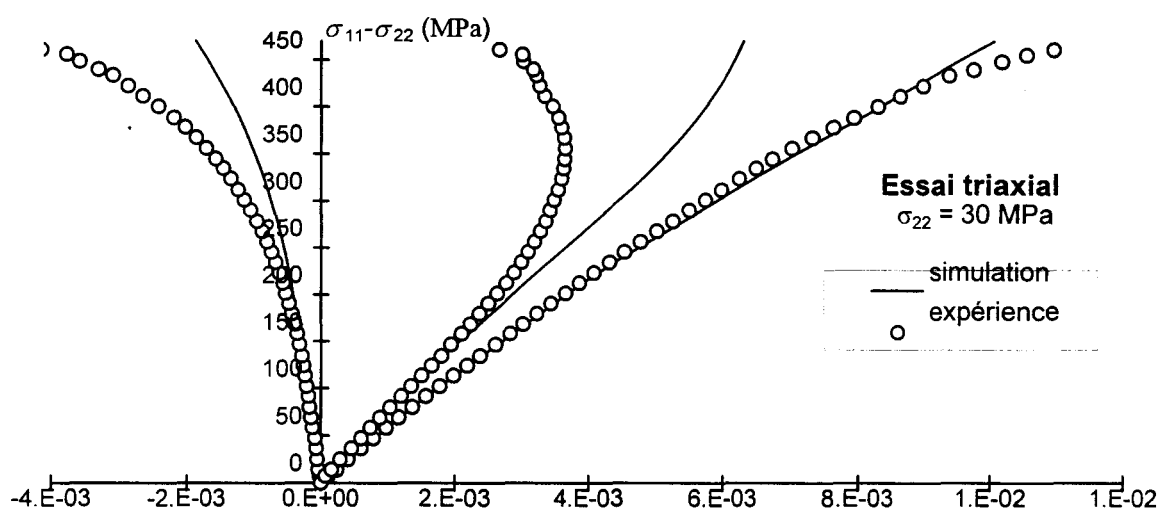


Figure III.20 : Courbes contraintes-déformations en compression triaxiale à 30 MPa de confinement.

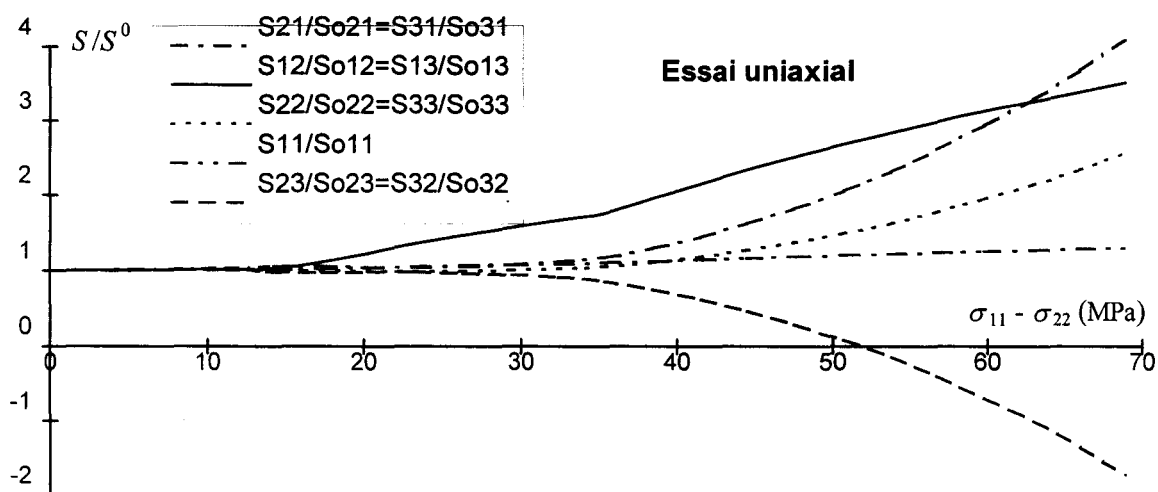


Figure III.21 : Essai uniaxial : variation de compliances.

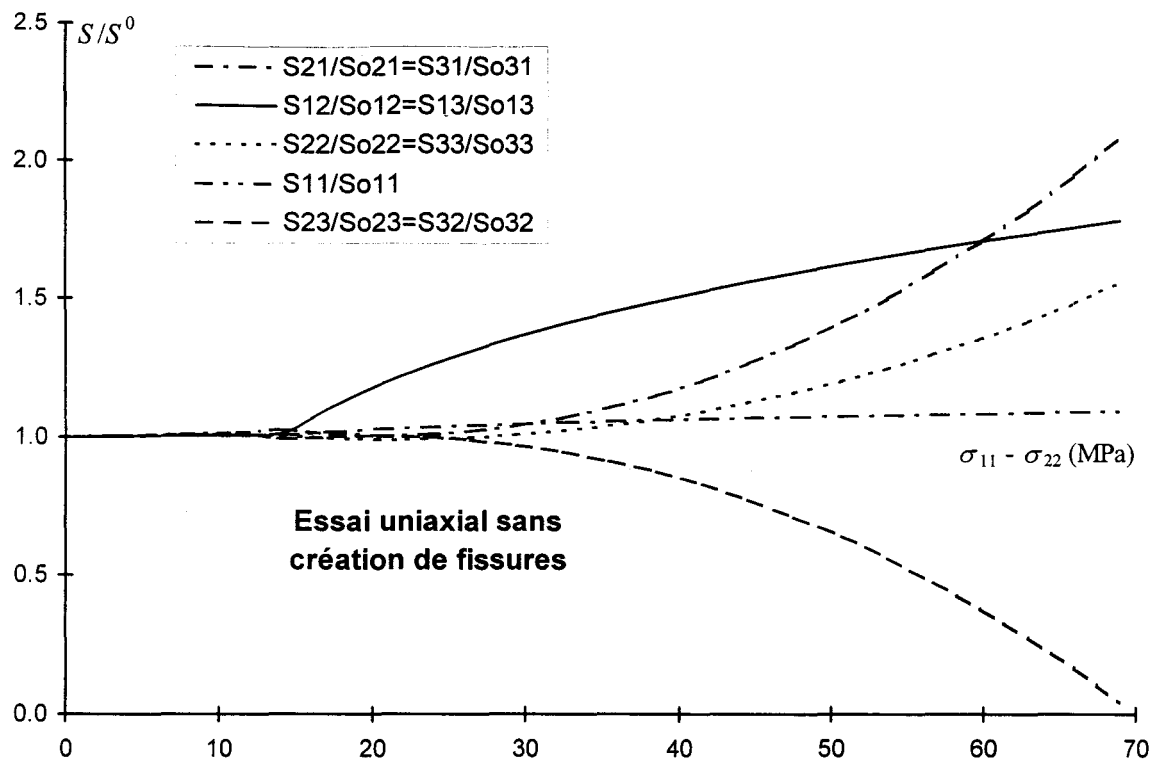


Figure III.22 : Essai uniaxial sans création de fissures : variation de compliances.

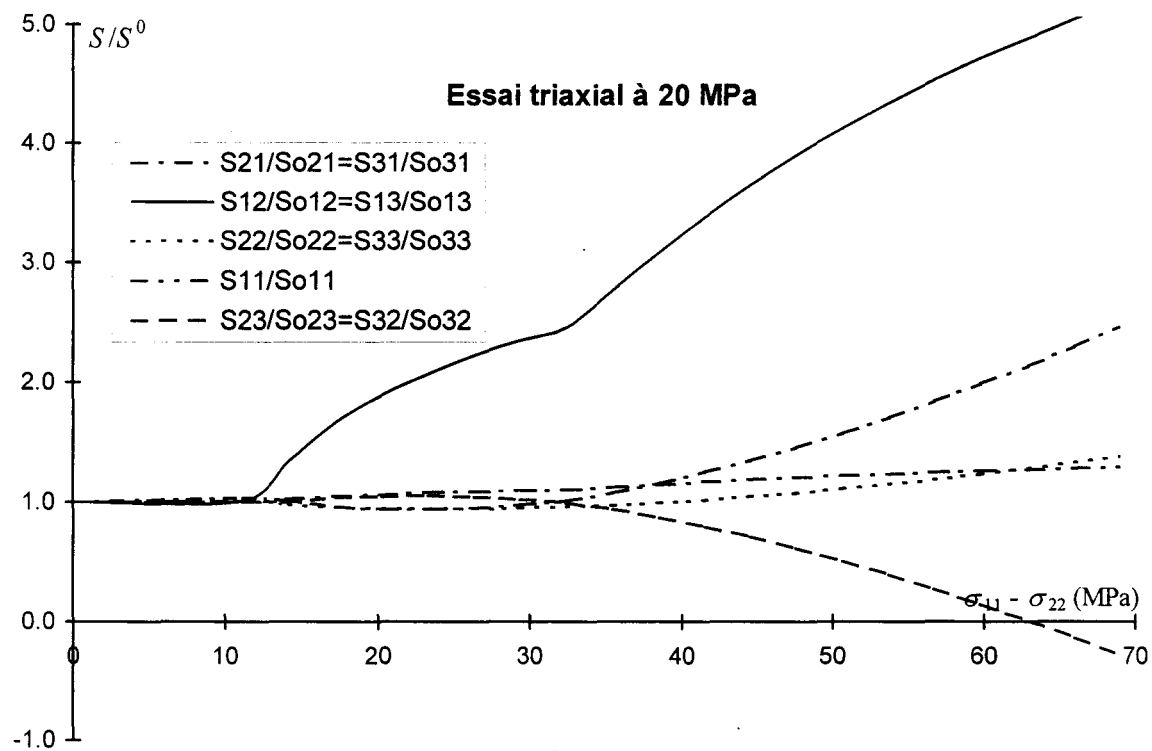


Figure III.23 : Essai triaxial à 20 MPa : variation de compliances.

Algorithme du modèle

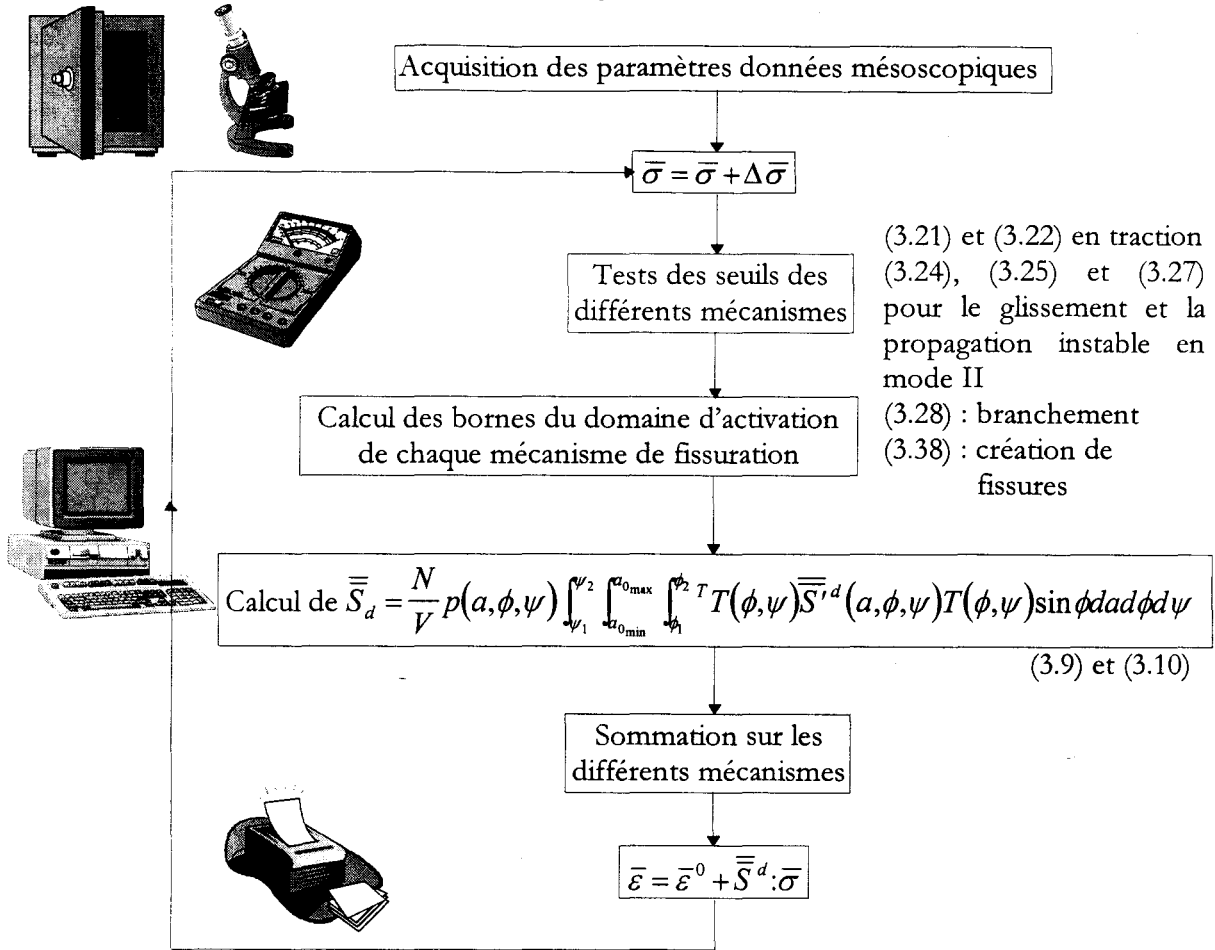


Figure III.24 : Algorithme simplifié du modèle.

Afin de permettre une compréhension plus rapide de ce modèle, nous avons résumé sur un algorithme simplifié (figure III.24) les différentes étapes permettant de construire le tenseur de compliance anisotrope en fonction des différents mécanismes mis en jeu par l'ouverture et la fermeture de mésosfissure.

III.6. Conclusion

La présente formulation du modèle est basée sur l'évaluation des compliances effectives d'un matériau affaibli par la présence de mésosfissures. Le modèle intègre divers mécanismes de mésosfissuration : création et croissance en mode mixte. Les lois d'évolution de la mésosfissuration sont celles fournies par la mécanique linéaire de la rupture (critères d'énergie G). De nombreuses simplifications ont été faites pour traiter l'aspect 3-D de la croissance des mésosfissures.

Les simulations effectuées montrent qualitativement la pertinence du modèle construit, tant pour l'étude de l'endommagement en traction simple que sous compression triaxiale. L'anisotropie induite, la dilatance sont relativement bien décrites. La pression de confinement limite très

fortement le développement de la mésosfissuration. Ce qui nous conduit à penser que la création de nouvelles mésosfissures doit jouer un rôle important dans la réponse en compression triaxiale. Il est possible d'améliorer les résultats en intégrant des modèles de création de mésosfissures, plus complexes (Wu et Niu, 1994).

Malgré les résultats obtenus, nous devons souligner que le domaine de validité du modèle présenté se limite à des trajets de chargement où la modélisation de type $\bar{\varepsilon} = \bar{S} : \bar{\sigma}$ est justifiée (indépendance des réponses vis-à-vis du chemin de chargement). En particulier, l'étude des trajets incluant des cycles de chargement-déchargement ou des trajets conduisant à la refermeture des mésosfissures (effet unilatéral) n'a pas été possible. La formulation plus générale, sous forme incrémentale est l'objet du quatrième chapitre.

IV. FORMULATION INCREMENTALE DU MODELE

Dans ce chapitre, nous proposons une extension de l'approche précédemment étudiée au chapitre III. Cette extension débouche sur une formulation incrémentale tridimensionnelle du modèle mésomécanique. Elle est réalisée sur la base des travaux de Nemat-Nasser et Obata (1988) en 2-D. L'étude proposée est en ce sens une généralisation tridimensionnelle de ces travaux. Cette formulation permet d'aborder l'étude des matériaux rocheux quasi-fragiles sous des trajets de chargement généraux : chargements cycliques, chemin proportionnel, extension latérale, trajets induisant une refermeture progressive de mésofissures, etc.. Certaines spécificités de l'endommagement des matériaux cohésifs frottants sont enfin analysées à travers les simulations réalisées : contact unilatéral des lèvres de mésofissures, déformations résiduelles ou boucles d'hystérésis liées à la présence du frottement.

L'approche incrémentale du modèle que l'on se propose de développer dans ce chapitre a pour objectif d'étendre le domaine de validité du modèle élaboré au chapitre III. Elle devra donc permettre de décrire la réponse des matériaux sous des trajets de chargement plus complexes : chemins de chargement cycliques, extension ou compression latérale etc.. Sous cette nouvelle forme, le modèle doit permettre d'aborder certaines spécificités du comportement des matériaux étudiés telles le contact unilatéral des lèvres de mésolfissures. Enfin, l'étude des chemins de déchargement permettra de confirmer le rôle clé du frottement en exhibant des déformations résiduelles ou des boucles d'hystérésis liées à celui-ci. Un travail a été déjà réalisé dans ce sens par Nemat-Nasser et Obata (1988) en 2-D. L'étude proposée concerne la généralisation tridimensionnelle de cette approche.

Précisons que l'essentiel de l'analyse concernera des sollicitations de compression, le traitement des mésolfissures ouvertes en traction ne nécessitant pas d'écriture incrémentale (qui dans ce cas est immédiate, cf. p. ex. Leguillon et Sanchez-Palencia, 1981). Nous compléterons donc cette analyse à la fin de la présentation, afin de prendre en compte par exemple l'ouverture de certaines mésolfissures qui peut accompagner le développement de mésolfissures branchées sous certains trajets de sollicitations (ex : torsion).

IV.1. Hypothèses de base et méthodologie

Nous reprenons le modèle présenté au chapitre III en prenant en compte l'évolution de la mésolfissuration sous des trajets quelconques de chargement. La modélisation repose toujours sur l'analyse de la fissure branchée représentée sur la figure IV.1 : il s'agit d'une coupe de la mésolfissure 3-D (figure IV.2).

La démarche que nous allons suivre consiste à :

i) **simplifier la représentation géométrique et mécanique de la mésolfissure branchée.**

En effet celle ci sera représentée par 4 paramètres :

- le glissement moyen b de la partie centrale de la mésolfissure,
- l'ouverture d de la partie centrale,
- la longueur l de chacune des 2 branches,

- l'angle entre axes médians de branches et de partie centrale θ . C'est-à-dire l'orientation des branches.

En fait, suivant Nemat-Nasser et Obata (1988), 3 paramètres seront retenus puisque l'ouverture est reliée au glissement par une relation du type : $\tilde{d} = \tilde{d}_f (1 - e^{-\zeta \tilde{b}})$, ce qui permet d'établir $\tilde{d} = \xi \tilde{b}$ où $\xi = \zeta (\tilde{d}_f - \tilde{d})$.

Cette relation entre l'ouverture et le glissement moyens correspond à l'existence d'éventuelles aspérités sur les lèvres des mésolfissures lors du glissement : ces lèvres peuvent donc glisser en utilisant les défauts de planéité. Ces aspérités étant de tailles faibles par rapport à la longueur des lèvres, on peut imposer que la fissure centrale ne puisse s'ouvrir que jusqu'à une certaine valeur maximale $\tilde{d}_f$. L'expression précédente de d suppose que les mésolfissures ont une ouverture initiale nulle (bien que l'on puisse concevoir que certains défauts préexistants soient déjà ouverts) et une ouverture maximale d_f au cours du glissement. Bien entendu, d_f peut être choisie égale à 0 (la partie centrale de la fissure branchée resterait alors fermée au cours du glissement).

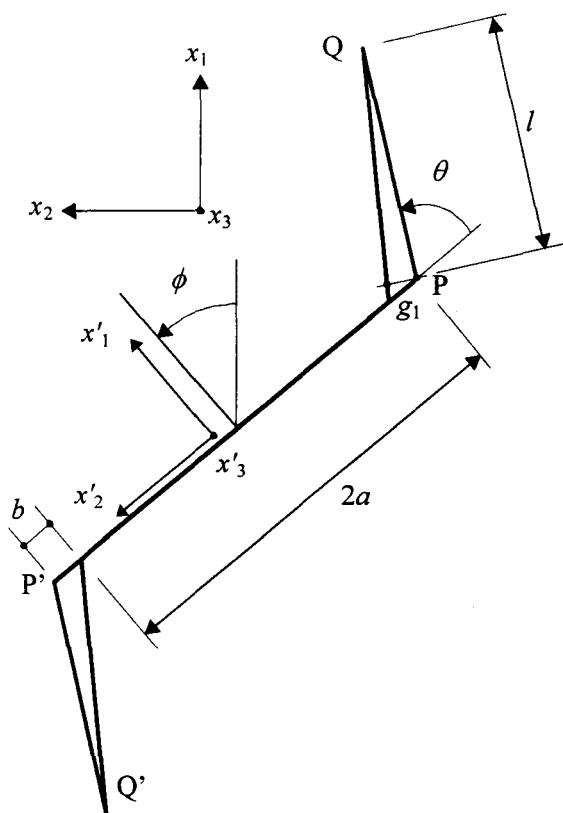


Figure IV.1 : Le branchement 3-D considéré comme un ensemble de sections branchées 2-D.

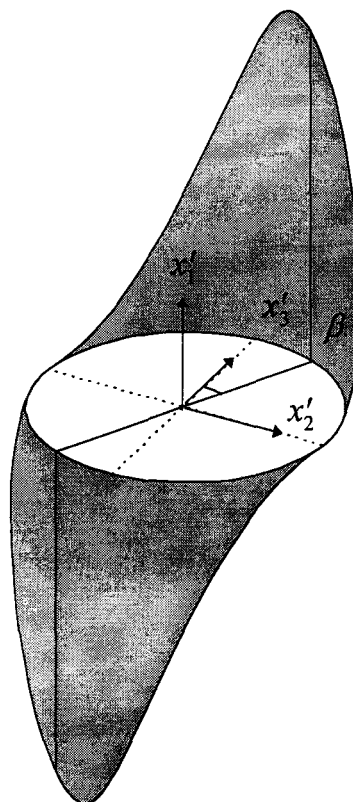


Figure IV.2 : Géométrie de la fissure branchée en compression.

Par ailleurs, l'état initial du matériau est essentiellement représenté par la densité de mésosfissures. Tous les paramètres physiques ayant la dimension d'une longueur sont normalisés par rapport à cette dernière : glissement : $\tilde{b} = \frac{b}{a}$, ouverture : $\tilde{d} = \frac{d}{a}$, longueur de branche : $\tilde{l} = \frac{l}{a}$, densité : $\omega = N \frac{a^3}{V}$.

Par rapport à l'analyse faite au précédent chapitre, soulignons que certains paramètres mésostructuraux tels les dimensions de grains ne sont plus considérés dans la formulation incrémentale, car inclus en quelque sorte dans la densité de mésosfissures. D'autres paramètres physiques viennent s'ajouter à la cohésion notée τ_c^0 . C'est le cas par exemple du coefficient ζ décrivant l'évolution de l'ouverture d avec le glissement.

ii) **Ensuite, évaluer les déformations du V.E.R. connaissant l'état de mésostructure.**

Ceci correspond en principe au travail réalisé au chapitre III.

iii) **Etablir les relations incrémentales entre d'une part, les paramètres géométriques et mécaniques de mésosfissuration, et d'autre part l'incrément de contraintes.** Il s'agira de préciser les incréments $\dot{\tilde{l}}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\tilde{b}}$ en fonction de $\dot{\tilde{\sigma}}$ et donc d'aboutir à une loi de comportement de la forme $\dot{\tilde{\varepsilon}} = \overline{\overline{D}} : \dot{\tilde{\sigma}}$. $\overline{\overline{D}}$ est une 'matrice tangente' pour le comportement non-linéaire du matériau mésosfissuré. Nous notons que la démarche incrémentale permet une description précise du chemin de fissuration (fissure branchée courbe).

IV.2. Analyse des déformations

Explicitons brièvement, dans le cadre des simplifications proposées (description géométrique et mécanique à l'aide de 3 paramètres) les différentes contributions de la mésosfissure branchée à la déformation du V.E.R.. Les déformations peuvent se décomposer en 2 parties :

- celles dues à la partie centrale PP' (voir figure IV.1). Elles correspondent essentiellement à des discontinuités de traction,
- celles correspondant à la fissure équivalente (figure IV.6) soumise aux contraintes appliquées : il s'agit de déformations de compression.

IV.2.1. Déformations due à la partie centrale de la mésosfissure

• Déformations induites par le glissement de la partie centrale

Nous reprenons l'analyse du glissement réalisée au chapitre III. Celle-ci incluait la contribution des 2 contraintes de cisaillement σ'_{12} et σ'_{13} (voir figure IV.3), c'est-à-dire de deux composantes du vecteur discontinuités de déplacement. Examinons séparément ces deux cas :

$$\text{- glissement } b_2 \text{ dû à } \sigma'_{12}, \text{ nous avons } \bar{D}' = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{n}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Classiquement, sur une mésosfissure circulaire de diamètre $2a$, le tenseur de déformation est évalué avec la relation (3.3) : ainsi $\varepsilon'_{12} = \varepsilon'_{21} = \frac{1}{2} \frac{N}{V} \iint_S (n'_1 D'_2 + n'_2 D'_1) dS' = \frac{\pi N}{2 V} b_2 a^2 = \frac{\pi}{2} \omega \tilde{b}_2$. Pour passer dans le repère global, nous utilisons la matrice de passage P (3.7) dont le jacobien est $\sin \phi$: $\bar{\varepsilon} = P^{-1} \bar{\varepsilon}' P$ (cela revient à utiliser la 6^{ème} ligne de la matrice de transformation T : voir en annexes, l'équation A2.1).

$$\text{La déformation due uniquement au glissement } b_2 \text{ est : } \bar{\varepsilon}_b = \pi \omega \tilde{b}_2 \bar{p}'_0{}^1. \quad (4.1)$$

$$\text{avec } \bar{p}'_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sin 2\phi & \cos 2\phi \cos \psi & \cos 2\phi \sin \psi \\ \cos 2\phi \cos \psi & \sin 2\phi \cos^2 \psi & \frac{\sin 2\phi \sin 2\psi}{2} \\ \cos 2\phi \sin \psi & \frac{\sin 2\phi \sin 2\psi}{2} & \sin 2\phi \sin^2 \psi \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\text{Cela permet d'écrire : } \sigma'_{12} = \bar{\sigma} : \bar{p}'_0 \quad (4.3)$$

$$\text{- glissement } b_3 \text{ dû à } \sigma'_{13}, \text{ nous avons } \bar{D}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \varepsilon'_{13} = \varepsilon'_{31} = \frac{\pi N}{2 V} b_3 a^2 = \frac{\pi N}{2 V} \tilde{b}_3 a^3 = \frac{\pi}{2} \omega \tilde{b}_3$$

$$\text{Là encore, } \bar{\varepsilon}_b = \pi \omega \tilde{b}_3 \bar{p}''_0 \quad \text{avec } \bar{p}''_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi \\ -\cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \sin 2\psi & \sin \phi \cos 2\psi \\ \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos 2\psi & \sin \phi \sin 2\psi \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\text{et } \sigma'_{13} = \bar{\sigma} : \bar{p}''_0 \quad (5^{\text{ème}} \text{ ligne de } T, \text{ voir A2.1}). \quad (4.5)$$

¹ Nous rappelons que $\bar{A}$ représente un tenseur d'ordre 2 et $\bar{\bar{A}}$ un tenseur d'ordre 4.

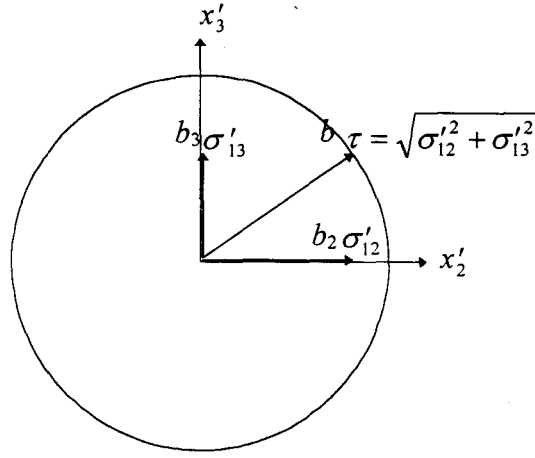


Figure IV.3 : Glissement équivalent.

Compte tenu de la difficulté à prendre en compte séparément les deux modes II et III, nous supposons à nouveau (comme au troisième chapitre) que les deux composantes du glissement s'additionnent (voir figure IV.3) pour donner un b unique :

$$b_2 = \frac{b \sigma'_{12}}{\sqrt{\sigma'_{12}{}^2 + \sigma'_{13}{}^2}} \quad \text{et} \quad b_3 = \frac{b \sigma'_{13}}{\sqrt{\sigma'_{12}{}^2 + \sigma'_{13}{}^2}}.$$

Dans ce cas, le champ de discontinuité de déplacement D est :

$$\bar{D}' = \frac{b}{\sqrt{\sigma'_{12}{}^2 + \sigma'_{13}{}^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma'_{12} \\ \sigma'_{13} \end{pmatrix} \quad \text{cela induit } \bar{\varepsilon}' = \frac{\pi}{2} \omega \frac{\tilde{b}}{\sqrt{\sigma'_{12}{}^2 + \sigma'_{13}{}^2}} \begin{bmatrix} 0 & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{12} & 0 & 0 \\ \sigma'_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Dans le repère global : $\bar{\varepsilon}_b = \pi \omega \tilde{b} \bar{p}_0$ avec $\bar{p}_0 = \frac{b_2}{b} \bar{p}_0' + \frac{b_3}{b} \bar{p}_0''$ soit :

$$\bar{p}_0 = \frac{\begin{bmatrix} -\sigma'_{12} \sin 2\phi & \sigma'_{12} \cos 2\phi \cos \psi - \sigma'_{13} \cos \phi \sin \psi & \sigma'_{13} \cos \phi \cos \psi + \sigma'_{12} \cos 2\phi \sin \psi \\ \sigma'_{12} \cos 2\phi \cos \psi - \sigma'_{13} \cos \phi \sin \psi & \sigma'_{12} \sin 2\phi \cos^2 \psi - \sigma'_{13} \sin \phi \sin 2\psi & \sin \phi (\sigma'_{12} \cos \phi \sin 2\psi + \sigma'_{13} \cos 2\psi) \\ \sigma'_{13} \cos \phi \cos \psi + \sigma'_{12} \cos 2\phi \sin \psi & \sin \phi (\sigma'_{12} \cos \phi \sin 2\psi + \sigma'_{13} \cos 2\psi) & \sigma'_{12} \sin 2\phi \sin^2 \psi + \sigma'_{13} \sin \phi \sin 2\psi \end{bmatrix}}{2\sqrt{\sigma'_{12}{}^2 + \sigma'_{13}{}^2}} \quad (4.7)$$

• Déformations induites par l'ouverture de la partie centrale

La déformation due uniquement à l'ouverture d de la partie centrale est :

$$\varepsilon_{11}' = \frac{N}{2V} \iint_S 2D_1 n_1' dS' = \frac{N}{V} \iint_S D_1 dS' = \pi \omega \tilde{d} \quad \bar{D}' = \begin{pmatrix} \tilde{d} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en repère global } \bar{\varepsilon}_d = \pi \omega \tilde{d} \bar{p}_1 \quad (4.8)$$

$$\text{avec } \bar{p}_1 = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \frac{\sin 2\phi}{2} \cos \psi & \frac{\sin 2\phi}{2} \sin \psi \\ \frac{\sin 2\phi}{2} \cos \psi & \sin^2 \phi \cos^2 \psi & \frac{\sin 2\psi \sin^2 \phi}{2} \\ \frac{\sin 2\phi}{2} \sin \psi & \frac{\sin 2\psi \sin^2 \phi}{2} & \sin^2 \phi \sin^2 \psi \end{bmatrix} \text{ et } \sigma'_{11} = \bar{\sigma} : \bar{p}_1 \quad (4.9)$$

(ce tenseur correspond à la 1^{ère} ligne de T , voir A2.1)

• Déformations induites par le branchement

Le glissement et l'ouverture de la partie centrale induisent généralement des discontinuités de déplacement à la naissance des branches de la fissure (figures IV.4 et IV.5). L'effet de celles-ci s'étudie selon les principaux modes de fissuration.

♦ Mode I - ouverture

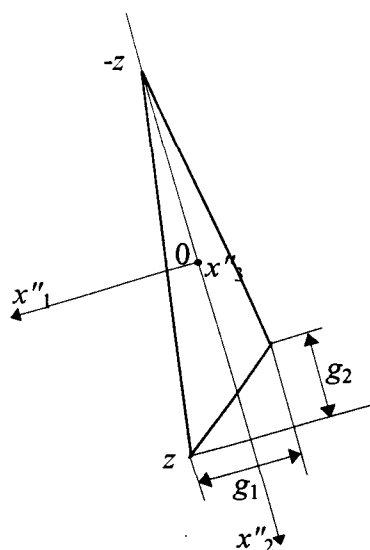


Figure IV.4 : Repère de la branche.

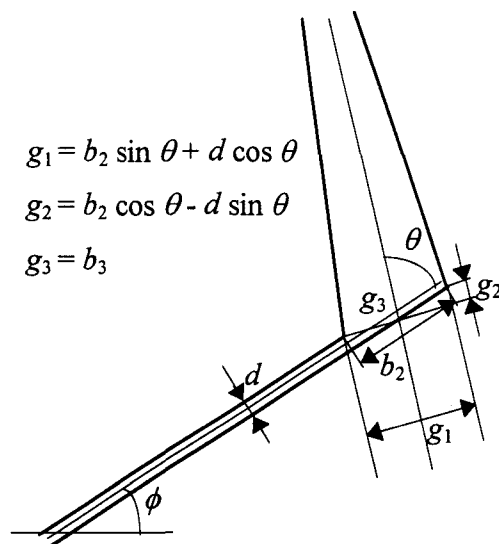


Figure IV.5 : Détail de la géométrie du branchement.

$$\text{♦ En } x_2'' = 0, \text{ le vecteur discontinuité de déplacement est } \bar{D}'' = \begin{pmatrix} \tilde{g}_1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Nous effectuons ensuite un calcul similaire à (4.8) sur la surface des 2 branches conformément au repère de la figure IV.4.

$$\varepsilon_{11}'' = \frac{N}{V} \int_{-\frac{\tilde{l}}{2} - \frac{\tilde{a}}{2} \left(1 - \frac{2x_2''}{\tilde{l}}\right)}^{\frac{\tilde{l}}{2} - \frac{\tilde{a}}{2} \left(1 - \frac{2x_2''}{\tilde{l}}\right)} \int D_1'' dx_3'' dx_2'' = \omega \tilde{g}_1 \frac{\tilde{l}}{2} \tilde{a} = \omega \tilde{g}_1 \frac{\tilde{l}}{2} \quad (4.10)$$

Mode II - glissement

$$\text{De même que précédemment, } \bar{D}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{g}_2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{12}'' = \frac{N}{V} \iint_{S'} D_2'' dS'' = \omega \frac{\tilde{g}_2}{4} \tilde{l} \quad (4.11)$$

♦ Mode III - glissement anti-plan

$$\bar{D}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{b}_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon_{13}'' = \frac{N}{V} \iint_{S'} D_3'' dS'' = \omega \frac{\tilde{l}}{2} \tilde{b}_3 \quad (4.12)$$

Au total, pour les 2 branches, on obtient comme contribution :

$$\bar{\varepsilon}_c'' = \frac{\omega \tilde{l}}{2} \begin{bmatrix} 2\tilde{g}_1 & \tilde{g}_2 & 2\tilde{b}_3 \\ \tilde{g}_2 & 0 & 0 \\ 2\tilde{b}_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\omega \tilde{l}}{2} \left(\frac{\tilde{b}}{\sqrt{\sigma_{12}'^2 + \sigma_{13}'^2}} \begin{bmatrix} 2\sigma_{12}' \sin \theta & \sigma_{12}' \cos \theta & 2\sigma_{13}' \\ \sigma_{12}' \cos \theta & 0 & 0 \\ 2\sigma_{13}' & 0 & 0 \end{bmatrix} + \tilde{d} \begin{bmatrix} 2\cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4.13)$$

La matrice de passage du repère global au repère de la branche se déduit de (3.7) :

$$P''(\phi, \theta, \psi) = P(\phi + \theta, \psi) \quad \text{avec} \quad \bar{\varepsilon}'' = P''^{-1} \bar{\varepsilon} \quad (4.14)$$

Ainsi, dans le repère global : $\bar{\varepsilon}_c = P''^{-1} \bar{\varepsilon}_c'' P''$.

$$\text{La déformation qui résulte du branchement est : } \bar{\varepsilon}_c = \omega \tilde{l} (\tilde{b} \bar{q}_0 + \tilde{d} \bar{q}_1) \quad (4.15)$$

avec :

$$\bar{q}_0 = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{12}'^2 + \sigma_{13}'^2}} \begin{bmatrix} -\sigma_{12}' \sin \phi \cos(\theta + \phi) & -\sigma_{13}' \sin \psi \cos(\theta + \phi) + \sigma_{12}' \cos(\theta + 2\phi) \frac{\cos \psi}{2} & \sigma_{13}' \cos \psi \cos(\theta + \phi) + \sigma_{12}' \cos(\theta + 2\phi) \frac{\sin \psi}{2} \\ \text{sym.} & \sin(\theta + \phi) (\sigma_{12}' \cos \phi \cos^2 \psi - \sigma_{13}' \sin 2\psi) & \sin(\theta + \phi) \left(\sigma_{12}' \cos \phi \frac{\sin 2\psi}{2} + \sigma_{13}' \cos 2\psi \right) \\ \text{sym.} & \text{sym.} & \sin(\theta + \phi) (\sigma_{13}' \sin 2\psi + \sigma_{12}' \cos \phi \sin^2 \psi) \end{bmatrix}$$

$$\bar{q}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \cos \phi \cos(\theta + \phi) & \sin(\theta + 2\phi) \cos \psi & \sin(\theta + 2\phi) \sin \psi \\ \text{sym.} & 2 \sin(\theta + \phi) \cos^2 \psi \sin \phi & \sin(\theta + \phi) \sin \phi \sin 2\psi \\ \text{sym.} & \text{sym.} & 2 \sin(\theta + \phi) \sin^2 \psi \sin \phi \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

IV.2.2. Fissure équivalente soumise aux sollicitations extérieures

Dans ce modèle, il y a en fait deux forces motrices : les discontinuités de déplacement (que nous venons d'étudier) et le cisaillement résultant (force F''). La fissure branchée est idéalisée comme sur la figure IV.6.

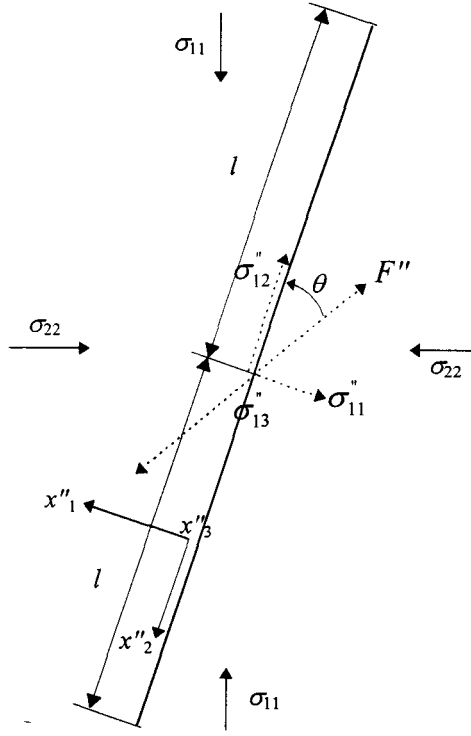


Figure IV.6 : Fissure branchée équivalente.

En effet, les contraintes appliquées ont tendance à diminuer l'ouverture des branches et à modifier le glissement de la partie centrale. La branche est schématisée par une ellipse de demi-axes principaux z et a' . Les discontinuités de déplacement sont les mêmes que (3.2) :

$$\bar{D}_i'' = 2\sqrt{a'z} \sqrt{1 - \frac{x_2''^2}{z^2} - \frac{x_3''^2}{a'^2}} \hat{C}_{ii}''^{-1} \sigma_{ii}'' \text{ avec } z = \frac{\tilde{l}}{2} \text{ et } a' = \frac{\tilde{a}}{2} = \frac{1}{2} \quad (4.17)$$

Evaluons tout d'abord les contraintes en repère local : $P'' \bar{\sigma} P''^{-1} = \bar{\sigma}''$. Posons $\sigma_{11}'' = \bar{\sigma} : \bar{\alpha}$

, $\sigma_{12}'' = \bar{\sigma} : \frac{\bar{\beta}}{2}$ et $\sigma_{13}'' = \bar{\sigma} : \frac{\bar{\delta}}{2}$. $\bar{\beta}$ représente une rotation de $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans la base $(\sigma_{11}'', \sigma_{12}'')$.

$$\text{où } \bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta + \phi) & \frac{\sin 2(\theta + \phi)}{2} \cos \psi & \frac{\sin 2(\theta + \phi)}{2} \sin \psi \\ \frac{\sin 2(\theta + \phi)}{2} \cos \psi & \sin^2(\theta + \phi) \cos^2 \psi & \sin^2(\theta + \phi) \frac{\sin(2\psi)}{2} \\ \frac{\sin 2(\theta + \phi)}{2} \sin \psi & \sin^2(\theta + \phi) \frac{\sin(2\psi)}{2} & \sin^2(\theta + \phi) \sin^2 \psi \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\bar{\beta} = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \theta} \quad (4.19)$$

$$\bar{\delta} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos(\theta + \phi) \sin \psi & \cos(\theta + \phi) \cos \psi \\ -\cos(\theta + \phi) \sin \psi & -\sin(\theta + \phi) \sin 2\psi & \sin(\theta + \phi) \cos 2\psi \\ \cos(\theta + \phi) \cos \psi & \sin(\theta + \phi) \cos 2\psi & \sin(\theta + \phi) \sin 2\psi \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

donc, pour l'ouverture de 2 branches (de façon similaire à l'équation (11) p. 1500 de Ju et Lee, 1991) et avec l'aide des relations (3.5) :

$$\varepsilon_{11}'' = 2 \frac{N}{V} \int_{-z}^z \int_{-a' \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{z^2}}}^{a' \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{z^2}}} D_1'' dx_3'' dx_2'' = \frac{4}{3} \omega \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \bar{\sigma} : \bar{\alpha} \tilde{l}^{\frac{3}{2}} \tilde{C}_{11}''^{-1} \text{ avec } \tilde{C}_{ii}''^{-1} = \frac{\pi E_0}{4(1 - \nu_0^2)} \bar{C}_{ii}''^{-1} \quad (4.21)$$

$$\text{de même, pour le glissement de la branche : } \varepsilon_{12}'' = \frac{N}{V} \iint_{S''} D_2'' dS'' = \omega \frac{1 - \nu_0^2}{3E_0} \bar{\sigma} : \bar{\beta} \tilde{l}^{\frac{3}{2}} \tilde{C}_{22}''^{-1} \quad (4.22)$$

$$\text{et } \varepsilon_{13}'' = \frac{N}{V} \iint_{S''} D_3'' dS'' = \omega \frac{1 - \nu_0^2}{3E_0} \bar{\sigma} : \bar{\delta} \tilde{l}^{\frac{3}{2}} \tilde{C}_{33}''^{-1} \quad (4.23)$$

$$\text{ainsi } \bar{\varepsilon}_a'' = \omega \frac{1 - \nu_0^2}{3E_0} \tilde{l} \sqrt{\tilde{l}} \begin{bmatrix} 4\bar{\sigma} : \bar{\alpha} \tilde{C}_{11}''^{-1} & \bar{\sigma} : \bar{\beta} \tilde{C}_{22}''^{-1} & \bar{\sigma} : \bar{\delta} \tilde{C}_{33}''^{-1} \\ \bar{\sigma} : \bar{\beta} \tilde{C}_{22}''^{-1} & 0 & 0 \\ \bar{\sigma} : \bar{\delta} \tilde{C}_{33}''^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou encore}$$

$$\bar{\varepsilon}_a'' = P''^{-1} \varepsilon_a'' P'' = \omega \frac{1 - \nu_0^2}{3E_0} \tilde{l} \sqrt{\tilde{l}} \left[4(\bar{\sigma} : \bar{\alpha}) \bar{\alpha} \tilde{C}_{11}''^{-1} + (\bar{\sigma} : \bar{\beta}) \bar{\beta} \tilde{C}_{22}''^{-1} + (\bar{\sigma} : \bar{\delta}) \bar{\delta} \tilde{C}_{33}''^{-1} \right] \quad (4.24)$$

En résumé, la déformation totale due à la présence de la version simplifiée de mésolfissure branchée est : $\bar{\varepsilon} = \bar{S}^0 : \bar{\sigma} + \bar{\varepsilon}_a'' + \bar{\varepsilon}_b'' + \bar{\varepsilon}_c'' + \bar{\varepsilon}_d''$ dont l'écriture plus explicite est

$$\bar{\varepsilon} = \bar{S}^0 : \bar{\sigma} + \omega \left\{ \frac{1 - \nu_0^2}{3E_0} \tilde{l} \sqrt{\tilde{l}} \left[4\bar{\alpha} \otimes \bar{\alpha} \tilde{C}_{11}''^{-1} + \bar{\beta} \otimes \bar{\beta} \tilde{C}_{22}''^{-1} + \bar{\delta} \otimes \bar{\delta} \tilde{C}_{33}''^{-1} \right] : \bar{\sigma} \right. \\ \left. + \pi (\tilde{b} \tilde{p}_0 + \tilde{d} \tilde{p}_1) + \tilde{l} (\tilde{b} \tilde{q}_0 + \tilde{d} \tilde{q}_1) \right\} \quad (4.25)$$

La moyenne des déformations suivant l'orientation des mésolfissures initiales (c'est-à-dire des parties centrales) est obtenue en intégrant $\bar{\varepsilon}$ sur ϕ et ψ : $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\varepsilon}(\psi, \phi) \sin \phi d\psi d\phi$.

IV.3. Lois d'évolution et formulation incrémentale

IV.3.1. Calcul des facteurs d'intensité de contraintes pour le modèle simplifié de mésolfissure branchée

Pour compléter l'écriture de la loi de comportement, il faut établir le lien entre les paramètres cinématiques b , l , θ , avec la contrainte appliquée $\bar{\sigma}$. La résolution complète de ce problème nécessite de calculer le facteur d'intensité de contrainte en mode I de deux manières : à partir du chargement et en fonction des caractéristiques cinématiques de la mésostructure. Une différenciation sur ces grandeurs permettra d'explicitier les relations incrémentales (que nous établirons).

• Calcul de K_I à partir des contraintes appliquées sur la fissure équivalente

Le cisaillement résultant $\tau_s' = \bar{\sigma} : \bar{p}_2 - \tau_c$ induit par le chargement sur la partie centrale de longueur $2a$ devient une paire de forces réparties colinéaires F'' dont la composante normale à la fissure équivalente (figure IV.6) est : $F_n'' = 2a\tau_s' \sin\theta = F'' \sin\theta$.

Suivant Nemat-Nasser et Obata (1988), la cohésion est choisie sous la forme suivante :

$$\tau_c = \tau_c^0 e^{-\eta|b|}, |b| \equiv \int_0^t |\dot{b}| dt. \quad (4.26)$$

Cette évolution toujours décroissante de la cohésion en fonction du glissement (cumulé) peut s'expliquer par le fait que nous avons considéré que la présence des aspérités (sur les lèvres des mésolfissures préexistantes) génèrent une certaine ouverture au cours du glissement.

Le facteur d'intensité de contrainte produit par une telle force en tête de la mésolfissure branchée est : $K_I^{\text{ouverture}} = \frac{F_n''}{\sqrt{\pi l}}$. Cependant, ce résultat présente une singularité en $l = 0$. Pour contourner cette singularité en début de branchement, Horii et Nemat-Nasser (1986) ont introduit une longueur effective de branche $l + l^*$. Le facteur d'intensité de contrainte s'écrit alors :

$$K_I^{\text{ouverture}} = \frac{2a\tau_s' \sin\theta}{\sqrt{\pi(l + l^*)}} \quad (4.27)$$

La longueur fictive l^* , est déterminée en comparant (4.27) aux résultats de Cotterell & Rice (1980), valables uniquement à l'amorçage du branchement (en supposant qu'il s'agisse de mode II pur pour la partie centrale et de mode I pur pour le branchement) :

$K_I = \frac{3}{4} K_{II} \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right)$. C'est-à-dire : $\tilde{K}_I = \frac{3}{4} \sqrt{\pi a} \sigma'_{12} \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right)$. Au début de cette propagation stable, la longueur de la branche est nulle et prend une orientation particulière correspondant à la maximisation du facteur d'intensité de contrainte précité. L'angle obtenu est : $\theta_c = \text{Arccos} \frac{1}{3} \approx 0.392\pi$. En égalant ce résultat avec celui de (4.27) pour $l = 0$, on obtient :

$$\tilde{l}^* = \frac{8}{3\pi^2} \approx 0.27. \quad (4.28)$$

Par ailleurs, une fissure idéale de longueur $2l$ soumise à une contrainte normale a pour facteur d'intensité de contraintes en mode d'ouverture : $K_I^{\text{contraintes}} = \sqrt{\pi l} \sigma''_{11}$. Sachant que $\sigma''_{11} = \bar{\sigma} : \bar{\alpha}$, le facteur d'intensité de contraintes total de la fissure équivalente est $K_I = \frac{2a\tau_s'' \sin\theta}{\sqrt{\pi(l + \tilde{l}^*)}} + \sqrt{\pi l} \bar{\sigma} : \bar{\alpha}$. Enfin, en normalisant le F.I.C. par $\sqrt{a}$, nous obtenons :

$$\tilde{K}_I = H_1 \sin\theta + \sqrt{\pi \tilde{l}} \bar{\sigma} : \bar{\alpha} \quad \text{en posant : } H_1 = \frac{2(\bar{\sigma} : \bar{p}_2 - \tau_c)}{\sqrt{\pi(\tilde{l} + \tilde{l}^*)}} \quad (4.29)$$

$\bar{\sigma} : \bar{p}_2$ représente $\sigma : \bar{p}_0 - \mu \text{sgn}(\sigma : \bar{p}_0) \|\sigma'_{11}\|$, τ_c étant positif. En particulier, dans le cas du chargement triaxial, le signe de $\sigma'_{12} = \bar{\sigma} : \bar{p}'_0$ et de σ'_{11} sont connus, d'où :

$$\bar{p}_2 = \bar{p}'_0 + \mu \bar{p}_1 = \begin{bmatrix} \cos\phi(\mu\cos\phi - \sin\phi) & \frac{\cos\psi}{2}(\cos 2\phi + \mu\sin 2\phi) & \frac{\sin\psi}{2}(\cos 2\phi + \mu\sin 2\phi) \\ \frac{\cos\psi}{2}(\cos 2\phi + \mu\sin 2\phi) & \sin\phi(\cos\phi + \mu\sin\phi)\cos^2\psi & \sin\phi(\cos\phi + \mu\sin\phi)\frac{\sin 2\psi}{2} \\ \frac{\sin\psi}{2}(\cos 2\phi + \mu\sin 2\phi) & \sin\phi(\cos\phi + \mu\sin\phi)\frac{\sin 2\psi}{2} & \sin\phi(\cos\phi + \mu\sin\phi)\sin^2\psi \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

• Calcul de K'_I avec les discontinuités de déplacements induits sur la branche

Dans ce cas, nous considérons la géométrie de la branche de la figure IV.4. Le facteur d'intensité de contraintes, relié à l'ouverture de la branche, aura deux contributions : celle induite par l'ouverture g_1 imposée sur la branche par la partie centrale de la mésolfissure et celle résultant des contraintes extérieures. En effet, l'ouverture moyenne du branchement s'obtient en sommant

l'ouverture induite : $\langle \tilde{u}_n \rangle = \frac{\tilde{g}_1}{2} + \langle \tilde{u}_1^* \rangle$, avec : $\langle \tilde{u}_1^* \rangle = \frac{1}{S''} \iint_{S''} \tilde{u}_1^* dS''$. C'est-à-dire :

$$\langle \tilde{u}_n \rangle = \frac{1}{2} \left(\tilde{b} \sin \theta + \tilde{d} \cos \theta + 4 \frac{1 - \nu_0^2}{3E_0} \tilde{C}_{11}''^{-1} \sqrt{\tilde{l}} \sigma_{11}'' \right) \quad (4.31)$$

D'après Muskhelishvili (1953) et Nemat-Nasser et Obata (1988), la contrainte normale en $x_1'' = 0$ est $\sigma_{11}(x_2'', 0) = -\frac{g_1}{4\pi} \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} \frac{\text{sgn}(x_2'')}{\sqrt{z^2 - x_2''^2}} H(|x_2''| - z)$

en $x_2'' = -z$, $K_I \sqrt{\pi z} = \int_{-z}^z \sigma_{11}(-z, 0) dx_2''$ d'où $K_I = -\frac{g_1}{4} \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} \frac{1}{\sqrt{\pi z}}$ avec $z = \frac{l}{2}$

(4.32)

Comme la fissure branchée étant symétrique par rapport à sa partie centrale, les facteurs d'intensité de contraintes sont les mêmes aux deux extrémités, et la longueur à prendre en compte est l et non plus $2l$ comme pour la fissure équivalente précédemment. On obtient alors :

$$K_I^{\text{ouverture}} = \frac{g_1}{2} \frac{E_0}{2(1 - \nu_0^2)} \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{l}{2}}} \text{ et en supposant que l'ouverture } d \text{ est nulle, puis en évitant la}$$

singularité en $l = 0$: $K_I^{\text{ouverture}} = \frac{E_0 b \sin \theta}{2(1 - \nu_0^2) \sqrt{2\pi(l + l^{**})}}$ et $K_I^{\text{contraintes}} = \sqrt{\frac{\pi l}{2}} \sigma_{11}''$

(4.33)

Afin de déterminer l^{**} , nous nous plaçons en $l = 0$, le glissement moyen est égal à la moyenne de la discontinuité de déplacement sur la fissure suivant 2 :

$$b = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a D_2'' n_1'' dx_2 \text{ avec } D_2'' = 4 \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \sqrt{a^2 - x_2''^2} (\bar{\sigma} : \bar{p}_2 - \tau_c) \text{ ainsi } b = \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \pi a (\bar{\sigma} : \bar{p}_2 - \tau_c)$$

puis en utilisant b et en égalant $K_I(l = 0)$ avec $K_I(l = 0)$, nous trouvons : $l^{**} = \frac{\pi^2}{32} l^* = \frac{1}{12} \approx 0.08$.

(4.34)

Finalement, le facteur d'intensité de contraintes est $\tilde{K}_I = H_2 \tilde{g}_1 + \sqrt{\frac{\pi \tilde{l}}{2}} \bar{\sigma} : \bar{\alpha}$ en posant

$$H_2 = \frac{E_0}{2(1 - \nu_0^2) \sqrt{2\pi(\tilde{l} + \tilde{l}^{**})}} \quad (4.35)$$

IV.3.2. Ecriture incrémentale de la loi de comportement

On se propose ici d'établir les relations incrémentales entre d'une part $\dot{\tilde{l}}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\tilde{b}}$, et d'autre part $\dot{\bar{\sigma}}$; ceci se fera par l'intermédiaire de 3 tenseurs du second ordre : $\dot{\tilde{l}} = \bar{A} : \dot{\bar{\sigma}}$, $\dot{\theta} = \bar{B} : \dot{\bar{\sigma}}$, $\dot{\tilde{b}} = \bar{C} : \dot{\bar{\sigma}}$.

La différentiation du tenseur de déformation (formule 4.25) permet d'obtenir la loi de comportement $\dot{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{D}} : \dot{\bar{\sigma}}$, avec :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{D}} = \bar{\bar{S}}^0 + \omega \left\{ \tilde{b} \tilde{q}_0 + \tilde{d} \tilde{q}_1 + \frac{1-\nu_0^2}{2E_0} \sqrt{\tilde{l}} \left[4(\bar{\sigma} : \bar{\alpha}) \bar{\alpha} \left(\tilde{C}_{11}''^{-1} + \frac{2\tilde{l}}{3} \frac{\tilde{\alpha}_{11}''^{-1}}{\tilde{A}} \right) + (\bar{\sigma} : \bar{\beta}) \bar{\beta} \left(\tilde{C}_{22}''^{-1} + \frac{2\tilde{l}}{3} \frac{\tilde{\alpha}_{22}''^{-1}}{\tilde{A}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (\bar{\sigma} : \bar{\delta}) \bar{\delta} \left(\tilde{C}_{33}''^{-1} + \frac{2\tilde{l}}{3} \frac{\tilde{\alpha}_{22}''^{-1}}{\tilde{A}} \right) \right] \right\} \otimes \bar{A} + \\ \omega \left\{ \tilde{b} \tilde{l} \tilde{r}_0 + \tilde{d} \tilde{l} \tilde{r}_1 + \frac{1-\nu_0^2}{3E_0} \tilde{l}^{\frac{3}{2}} \left[((\bar{\sigma} : \bar{\gamma}) \bar{\beta} + (\bar{\sigma} : \bar{\beta}) \bar{\gamma}) \tilde{C}_{22}''^{-1} + ((\bar{\sigma} : \bar{\chi}) \bar{\delta} + (\bar{\sigma} : \bar{\delta}) \bar{\chi}) \tilde{C}_{33}''^{-1} - 4((\bar{\sigma} : \bar{\beta}) \bar{\alpha} + (\bar{\sigma} : \bar{\alpha}) \bar{\beta}) \tilde{C}_{11}''^{-1} \right] \right\} \otimes \bar{B} \\ + \omega \left\{ \tilde{\pi} \tilde{p}_0 + \tilde{l} \tilde{q}_0 + \xi (\tilde{\pi} \tilde{p}_1 + \tilde{l} \tilde{q}_1) \right\} \otimes \bar{C} + \omega \frac{1-\nu_0^2}{3E_0} \tilde{l}^{\frac{3}{2}} \left[4\bar{\alpha} \otimes \bar{\alpha} \tilde{C}_{11}''^{-1} + \bar{\beta} \otimes \bar{\beta} \tilde{C}_{22}''^{-1} + \bar{\delta} \otimes \bar{\delta} \tilde{C}_{33}''^{-1} \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

où $\bar{\gamma} = \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \bar{\alpha}}{\partial \theta^2}$ $\bar{\chi} = \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial \theta}$ $\tilde{r}_0 = \frac{\partial \tilde{q}_0}{\partial \theta}$ et $\tilde{r}_1 = \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial \theta}$.

L'évaluation de la matrice tangente $\bar{\bar{D}}$ nécessite le calcul des trois tenseurs $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $\bar{C}$. La présence de chacun de ces tenseurs étant en rapport avec l'évolution incrémentale de la grandeur associée, on est amené à examiner différentes situations liées à l'incrément de sollicitations donné. Plus précisément, nous avons distingué les cas de chargement et de déchargement. Les calculs permettant d'obtenir $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $\bar{C}$ dans chacun de ces cas étant parfois longs et trop techniques, nous les avons reporté en annexe 5. Ils s'appuient essentiellement sur la différentiation des 2 F.I.C. préalablement calculés (équations 4.29 et 4.35). Nous résumons juste les situations de chargement et déchargement.

Le critère général du chargement est déterminé par application du critère de Coulomb sur les lèvres des mésolfissures inclinées : $\bar{\sigma} : \bar{p}_2 - \tau_c = 0$. La croissance de mésolfissures est quant à elle, régie par les critères de mécanique de la rupture. Dans le cas du chargement, lorsqu'il y a glissement seul, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont nuls. La croissance des branches implique que les trois tenseurs sont tous non nuls.

La décharge correspond à la décroissance de la force motrice $\bar{\sigma} : \bar{p}_2 - \tau_c$. La réponse de la mésolfissure à une décharge est assez complexe. Il y a lieu de distinguer plusieurs possibilités telles que : i) blocage du glissement par frottement ii) glissement en sens opposé iii) fermeture partielle de branches avec ou sans glissement (en sens opposé) de la partie centrale des mésolfissures (figure IV.7) iv) éventuellement croissance de branches sans glissement supplémentaire. Toutes ces situations sont analysées et les expressions des tenseurs $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $\bar{C}$ qui leur sont associées sont précisés dans l'annexe 5.

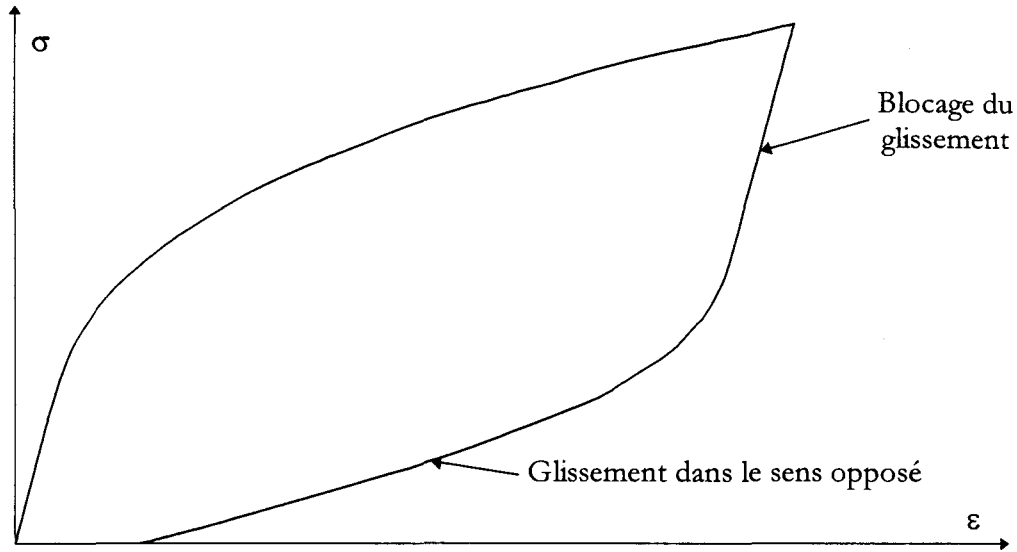


Figure IV.7 : Schématisation de la réponse sous un chemin de chargement-déchargement.

IV.3.3. Surfaces seuils de contraintes ou de déformations principales

Nous nous proposons de préciser graphiquement les seuils de glissement, de fissuration et de branchement de mésolfissures. Les mésolfissures préexistantes ne peuvent être actives qu'à partir d'un certain seuil de contrainte.

Rappelons que pour le glissement cette fonction seuil s'écrit : $\bar{\sigma} : \bar{p}_2 \geq \tau_c$.

En compression, la propagation instable des mésolfissures à l'interface est régie par

$\tilde{K}_{II}^{if} = \frac{4(\bar{\sigma} : \bar{p}_2 - \tau_c)}{(2 - \nu_0)\sqrt{\pi}}$, où le premier membre correspond au facteur d'intensité critique en mode II de l'interface.

Les premiers branchements se produisent quand $\tilde{K}_I^c = \frac{2(\bar{\sigma} : \bar{p}_2 - \tau_c) \sin \theta_c}{\sqrt{\pi l^*}}$. θ_c est l'angle calculé à l'amorçage du branchement (voir paragraphe IV.3.1).

Sous sollicitation de traction simple, les premières fissures commençant à se propager, en mode I, sont celles qui sont orientées perpendiculairement à la charge ($\phi = 0$) :

$$\sigma_{11} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tilde{K}_I^{if} \quad (4.37)$$

Les paramètres retenus pour tracer les seuils sont : $E_0 = 39300$ MPa, $\nu_0 = 0.13$, $\mu = 0.6$, $K_I^c = 0.6 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, $K_I^{if} = 0.15 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, $K_{II}^{if} = 0.3 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ et $\tau_c^0 = 5$ MPa. Ces paramètres seront

commentés ultérieurement. Disons juste que les valeurs indiquées correspondent à des ordres de grandeurs courants.

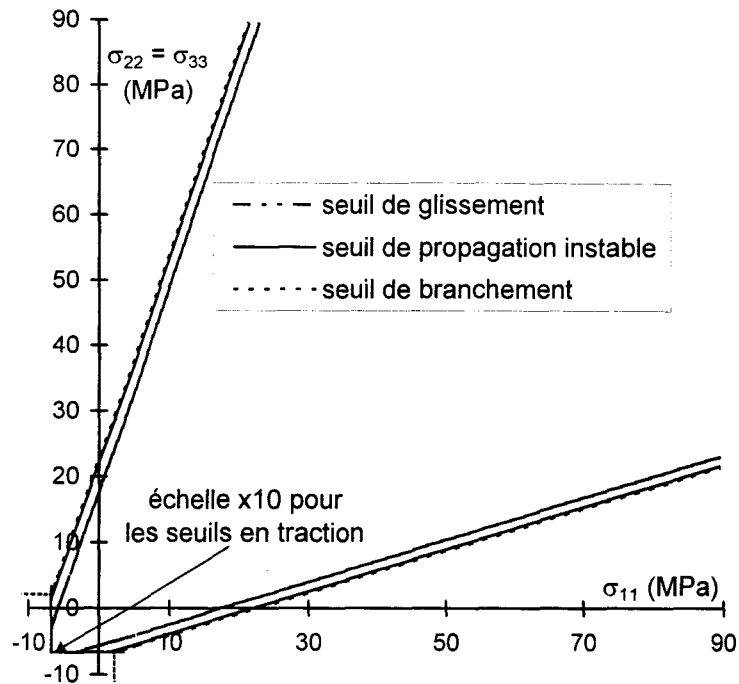


Figure IV.8 : Exemple de surface seuils en contraintes.

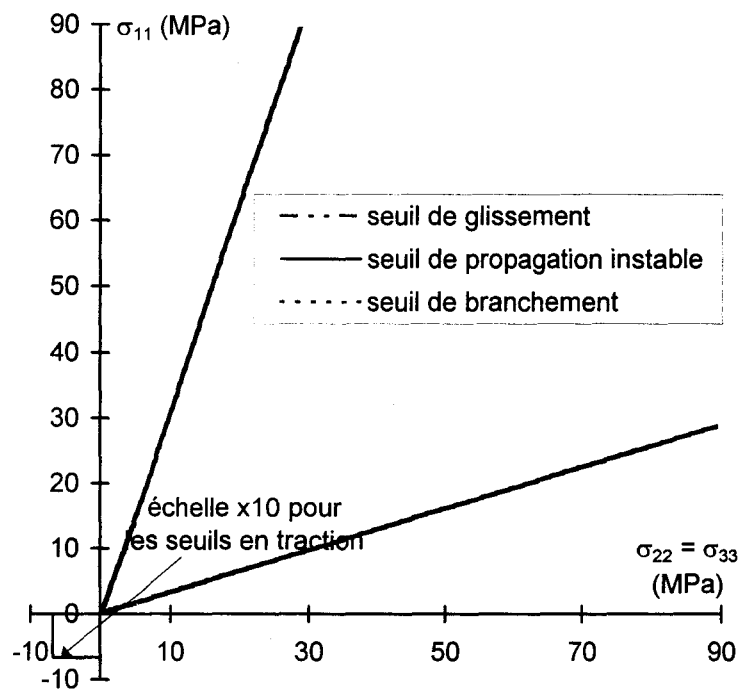


Figure IV.9 : Surface seuils en contraintes à cohésion nulle.

Nous présentons dans le cas triaxial axisymétrique les seuils en contraintes sur les figures IV.8 IV.9 et IV.11 et en déformations sur la figure IV.10. Nous remarquons que le scénario d'endommagement est bien dans l'ordre suivant : glissement + frottement, puis propagation

instable et branchement stable des fissures (ces deux derniers seuils étant quasiment confondus). Nous notons que les surfaces seuils sont ouvertes du côté de la compression : une pression hydrostatique par exemple empêcherait la fissuration. Nous constatons également une dissymétrie entre les seuils en compression et les seuils en traction : le rapport entre ces seuils étant de l'ordre de 20 en uniaxial. Ce résultat semble être en accord avec les observations courantes sur des roches fragiles.

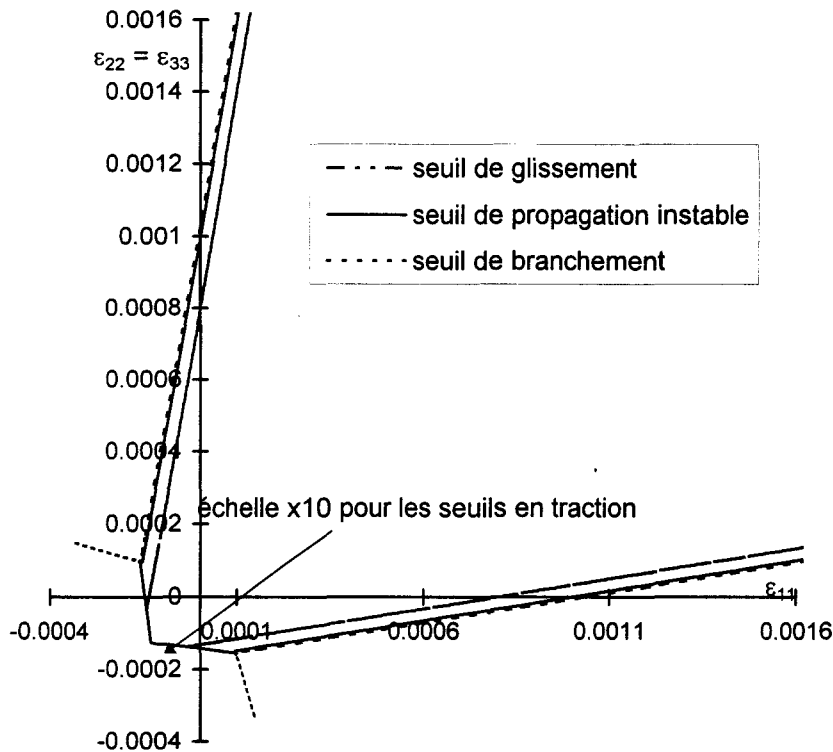


Figure IV.10 : Exemple de surface seuils en déformations.

La figure IV.11, montre l'importance du coefficient de frottement pour le seuil du glissement.

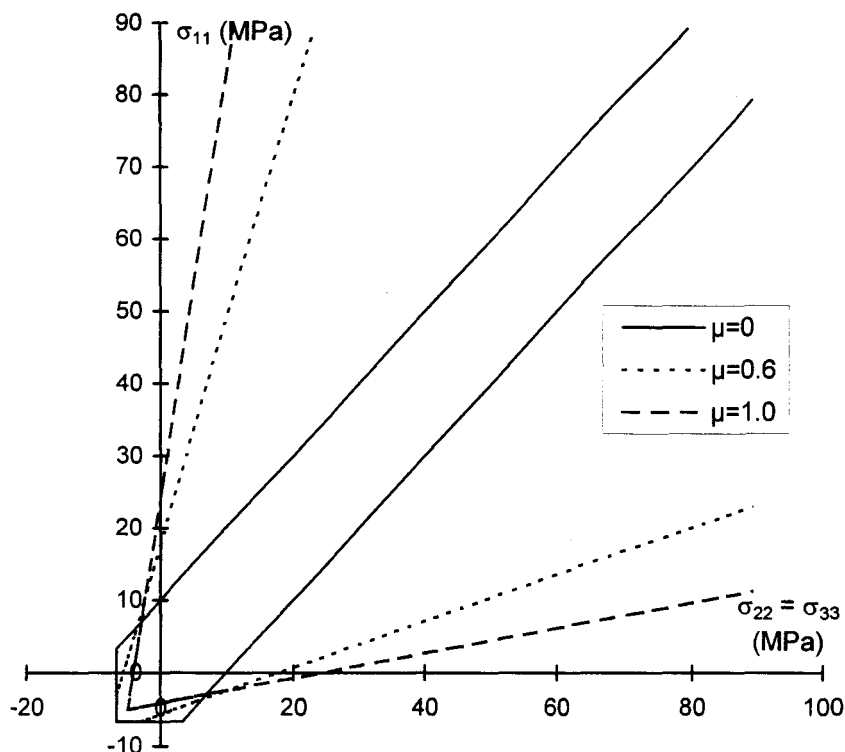


Figure IV.11 : Seuils triaxiaux en contraintes en fonction du coefficient de frottement.

IV.4. Simulations en compression uniaxiale ou triaxiale

IV.4.1. Essai uniaxial

Nous avons effectué un certain nombre de simulations en compression triaxiale. La sensibilité du modèle par rapport aux différents paramètres sera ultérieurement étudiée. Les paramètres du modèle pour la simulation du comportement du grès de Fontainebleau sont choisis comme suit : $E_0 = 39300$ MPa, $\nu_0 = 0.13$, $\mu = 0.6$, $\omega_0 = 0.06$, $\rho = 1.0$, $K_I^c = 0.6$ MPa $\sqrt{\text{m}}$, $\tau_c^0 = 5$ MPa, $\eta = 500$, $\zeta = 10^4$, $\tau_d = 7.5$ MPa et $\tilde{d}_f = 1.5 \times 10^{-5}$.

Nous disposons de peu d'informations mésostructurales sur le grès étudié ; c'est pourquoi la démarche sera en partie qualitative. Comme pour le précédent chapitre, nous avons repris des valeurs courantes de certains paramètres (F.I.C. et tailles des mésosfissures) soit dans la littérature concernant des bétons (Fanella et Krajcinovic, 1988 ; Newman et Newman, 1972 ; Zaitsev, 1983) ou des roches. Nous rappelons que les problèmes d'identification restent les mêmes que précédemment (cf. III.7). Ce jeu de paramètres est valable pour l'ensemble des essais présentés dans ce chapitre. Seuls E_0 et ν_0 ont été choisis en fonction du confinement pour représenter leur variation dans les essais triaxiaux.

La simulation en compression uniaxiale sur le grès de Fontainebleau étudié avec cet ensemble de paramètres est montrée sur la figure IV.12. Après une phase de réponse élastique linéaire, les mésosfissures glissent sans se brancher (18 MPa-24 MPa). Du fait que nous avons choisi $\rho = 1.0$ (pas de propagation aux interfaces), les mésosfissures amorcent ensuite leur branches, de manière stable dans la direction θ . Nous constatons que la comparaison entre les réponses non-linéaires obtenues et l'expérience est satisfaisante. En particulier la dilatance, très prononcée, semble être bien reproduite. L'analyse de l'évolution des composantes de la matrice tangente (tableau IV.1) montre une anisotropie induite très marquée. On observe également que $\overline{\overline{D}}$ est non symétrique. Dans ce tableau, le point 2 correspond au début du glissement ; le point 3 se situe dans la phase de branchement. Le point 5 correspond à la rupture expérimentale.

n°	σ_{11} (MPa)	D_{11}/S^o_{11}	D_{12}/S^o_{12}	D_{21}/S^o_{21}	D_{22}/S^o_{22}	D_{23}/S^o_{23}	D_{44}/S^o_{44}	D_{66}/S^o_{66}
1	0	1	1	1	1	1	1	1
2	18.58	1.04	1.48	1.20	1.06	0.84	1.01	1.00
3	23.88	1.08	2.03	1.34	1.11	0.71	1.02	1.00
4	45.11	1.35	19.44	6.93	11.99	-27.19	2.64	1.05
5	67.93	1.40	66.10	16.84	89.27	-225.98	14.12	1.16

Tableau IV.1 : Evolution de la matrice tangente normalisée pour la simulation de l'essai uniaxial sur un grès de Fontainebleau.

Avec $D_{22} = D_{33}$, $D_{23} = D_{32}$, $D_{55} = D_{66}$ et $D_{31} = D_{21}$.

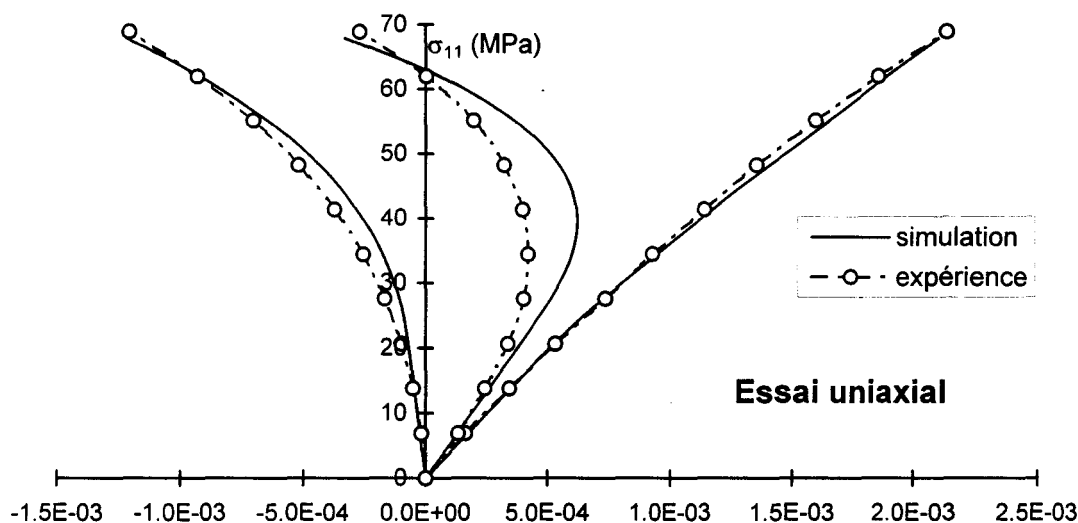


Figure IV.12 : Courbes contraintes - déformations en compression uniaxiale.

Nous avons déjà indiqué que l'un des intérêts de la modélisation effectuée est de permettre d'évaluer l'état mésostructural du matériau à chaque pas de charge. Considérons le cas d'un chargement suivi de déchargement. Nous pouvons par exemple tracer la variation de l'ouverture moyenne des branches avec le chargement (figure IV.13). A partir de 24 MPa (naissance des

branches), cette ouverture augmente sensiblement avec le chargement. Lors de la décharge, elle reste d'abord quasiment constante puis diminue très nettement. A la fin de la décharge, on observe la présence d'une ouverture résiduelle, sans doute liée au glissement irréversible sur la partie centrale des mésosfissures.

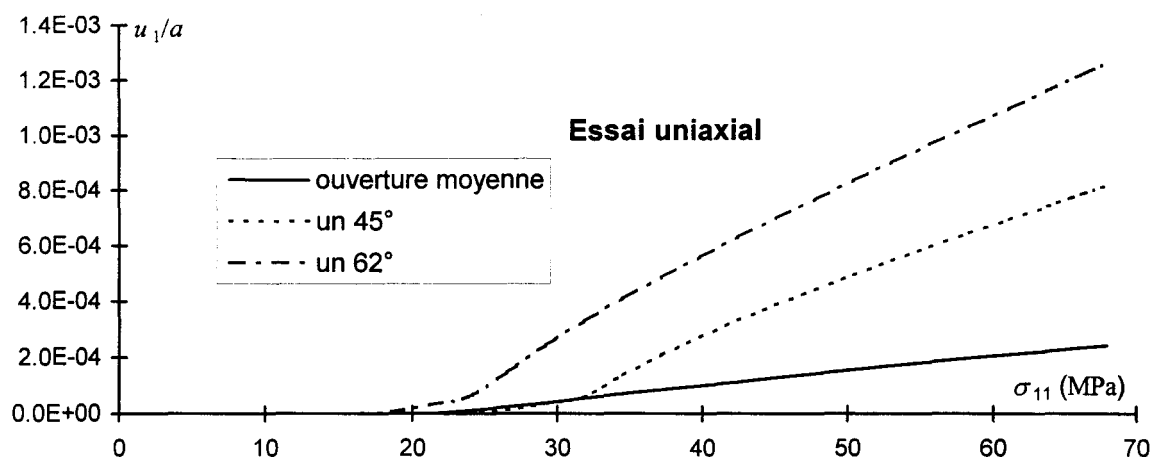


Figure IV.13 : Ouverture moyenne des branches pour l'essai uniaxial.

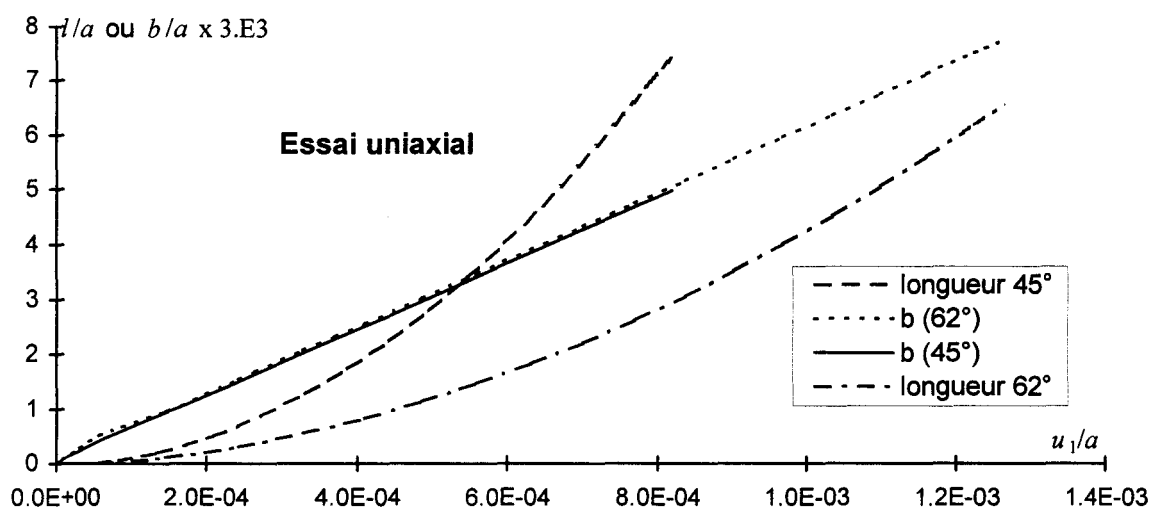


Figure IV.14 : Essai uniaxial : longueur de branchement.

L'examen détaillé des différentes familles de mésosfissures montre même qu'aucune branche ouverte ne se referme complètement après décharge. On peut également représenter les longueurs des branches de mésosfissures de différentes orientations ou le glissement sur la partie centrale de ces mésosfissures (figure IV.14). A titre de comparaison, seules, deux familles parmi les plus dominantes (orientation $\phi=45^\circ$ et $\phi=62^\circ$) sont représentées. Nous remarquons que la longueur de branchement est nettement plus importante pour la mésosfissure à $\phi=62^\circ$. En revanche la relation entre le glissement et l'ouverture moyenne des branches est linéaire et pratiquement la même pour les deux familles. Ceci peut s'expliquer par le fait que la branche s'oriente rapidement dans la

direction principale de chargement ($\phi + \theta = \frac{\pi}{2}$) et dans ce cas (4.31) devient :

$$\langle \tilde{u}_n \rangle = \frac{1}{2} (\tilde{b} \cos \phi + \tilde{d}_f \sin \phi).$$

Un exemple de résultats concernant l'état d'ouverture moyenne des différentes familles (d'orientation) de mésolfissures du matériau est indiqué sur la figure IV.15. Le niveau de charge uniaxiale dans cet exemple est 68 MPa. On constate bien l'importance de la contribution à l'endommagement des familles de mésolfissures d'orientation $[45^\circ - 66^\circ]$. La représentation générale de la mésostructure (figure IV.16) confirme l'importance des branches correspondant à ces familles. Enfin, on observe que les branches s'orientent rapidement suivant la direction principale de chargement.

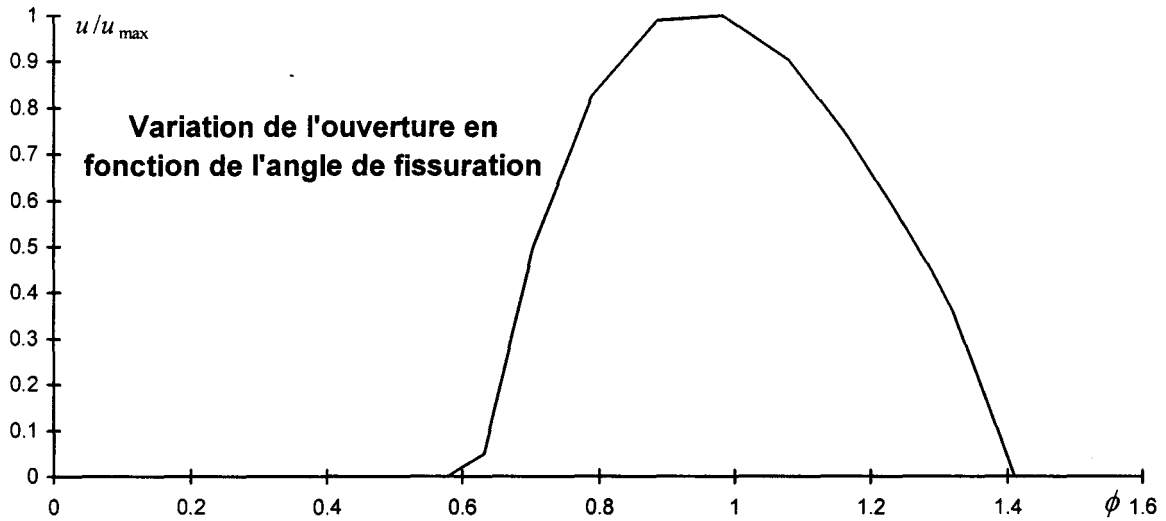


Figure IV.15 : Ouverture des fissures de différentes familles pour l'essai uniaxial à la contrainte de 68 MPa.

Remarque : Afin de mettre en évidence l'importance de la modélisation 3-D, nous avons comparé, dans le cas du grès, les prédictions du modèle élaboré avec celles fournies par la version 2-D (Nemat-Nasser et Obata, 1988). La seule modification majeure à apporter dans les données concerne la densité initiale de mésolfissures. La densité 2-D est

$$\text{déduite de la densité tridimensionnelle } \omega \text{ par : } \frac{\omega_{2D}}{\omega_{3D}} = \frac{N \frac{a^2}{S}}{N \frac{a^3}{V}} = \frac{V}{aS} = \frac{\frac{4}{3} \pi a^3}{a \pi a^2} = \frac{4}{3}.$$

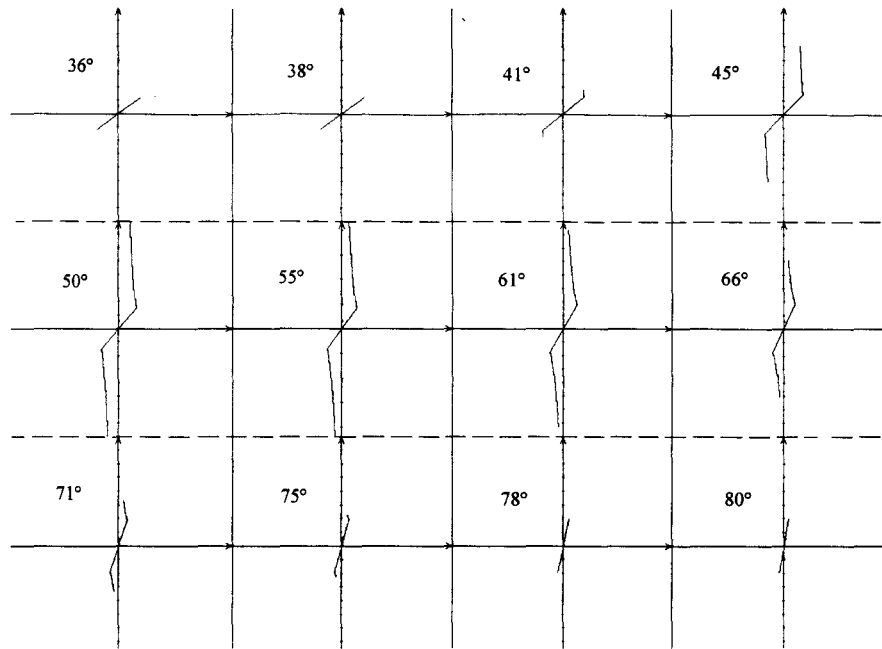


Figure IV.16 : Allure du branchement pour l'essai uniaxial à la contrainte de 68 MPa.

La comparaison, montrée sur la figure IV.17, souligne bien la différence entre les prédictions des deux versions du modèle.

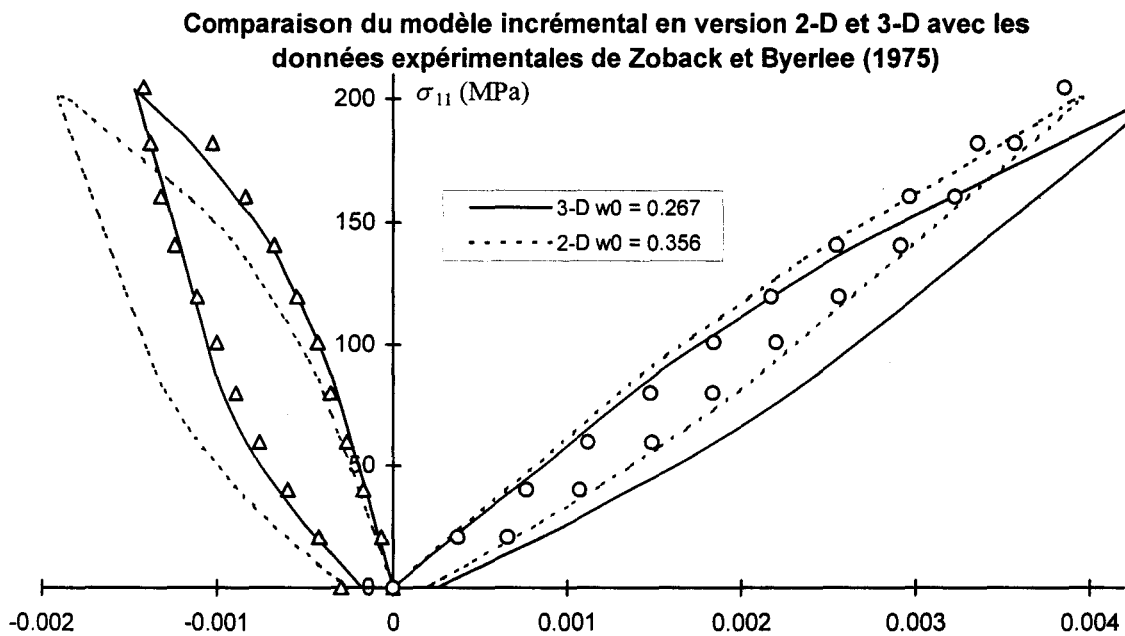


Figure IV.17 : Comparaison du modèle incrémental en version 2-D et 3-D.

IV.4.2. Essai triaxial

Le rôle de la pression de confinement est largement reconnu dans la littérature concernant les roches (voir par exemple Paterson, 1978). L'influence de la pression est un des aspects essentiels à prendre en compte dans le comportement non-linéaire. Les résultats d'expérience sur le grès

indiquent une certaine tendance à la ductilité lorsque la pression de confinement augmente. S'agissant de la modélisation proposée, la présence du confinement rend plus difficile la propagation de la partie branchée des mésosfissures. On peut espérer décrire la transition fragile-ductile à l'aide de ce modèle. Rappelons qu'à l'exception des modules élastiques, les valeurs des paramètres du modèle sont celles indiquées précédemment. Trois simulations sont présentées pour illustrer la réponse sous chargement triaxial de révolution (figures IV.18 à IV.20).

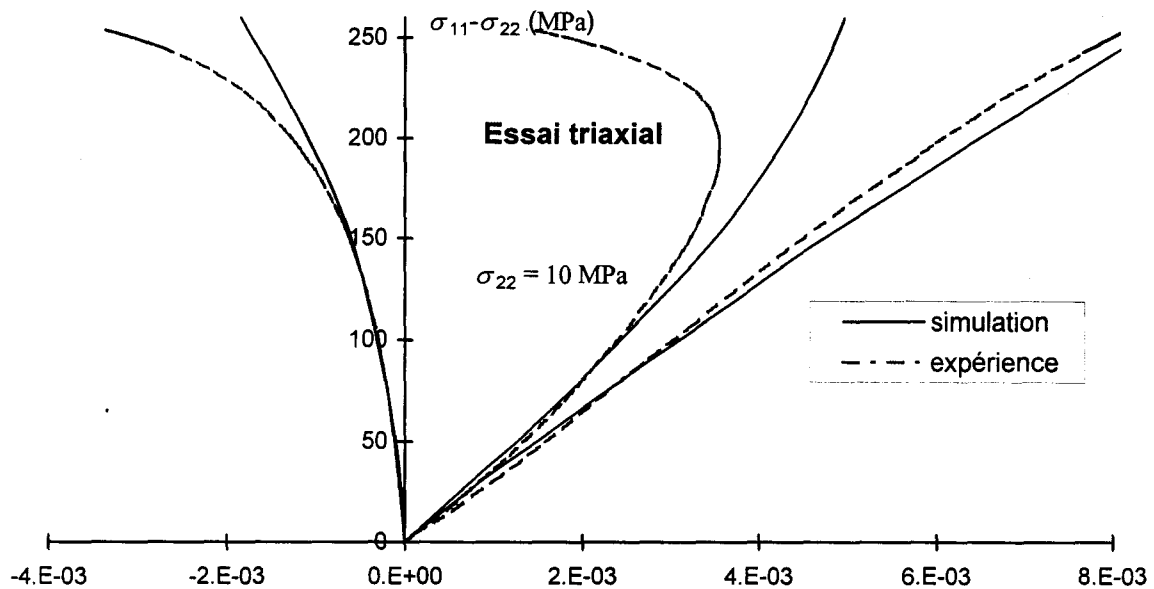


Figure IV.18 : Essai triaxial à 10 MPa.

Les tendances générales sont qualitativement reproduites. Mais on observe que le modèle sous-estime le comportement dilatant du matériau, notamment aux forts déviateurs. Afin de comprendre l'origine d'un tel résultat, nous avons analysé les prédictions à l'échelle mésoscopique. Sur la figure IV.21 nous présentons, à titre d'exemple, l'évolution du glissement dans l'essai à 10 MPa de confinement. On constate que les niveaux de glissement (des lèvres de mésosfissures) atteints sont plus importants que dans l'essai uniaxial, les déviateurs de contraintes étant plus élevés. La figure IV.22 montre l'évolution de la longueur et de l'ouverture moyenne des branches. Bien que le glissement soit important, on observe donc que la présence du confinement inhibe fortement le développement des branches (longueur et ouverture). En clair, la difficulté à reproduire la dilatance expérimentale provient des faibles longueurs et ouvertures des branches. Une première piste d'amélioration (mais pour l'instant difficile) consisterait à reprendre les lois d'évolution en essayant de tenir compte par exemple des interactions entre mésosfissures. Une seconde voie concernerait l'étude plus documentée du mécanisme de création de nouvelles mésosfissures. Les quelques observations faites en mécanique des roches sur cette question semblent indiquer la création de très nombreuses mésosfissures dans les essais triaxiaux.

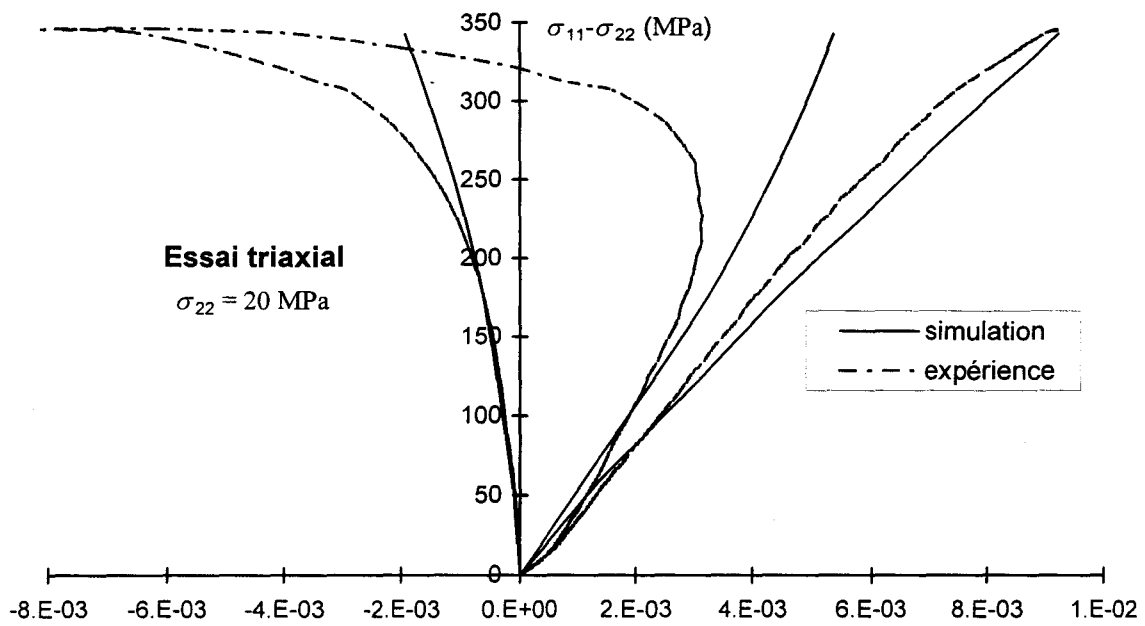


Figure IV.19 : Essai triaxial à 20 MPa.

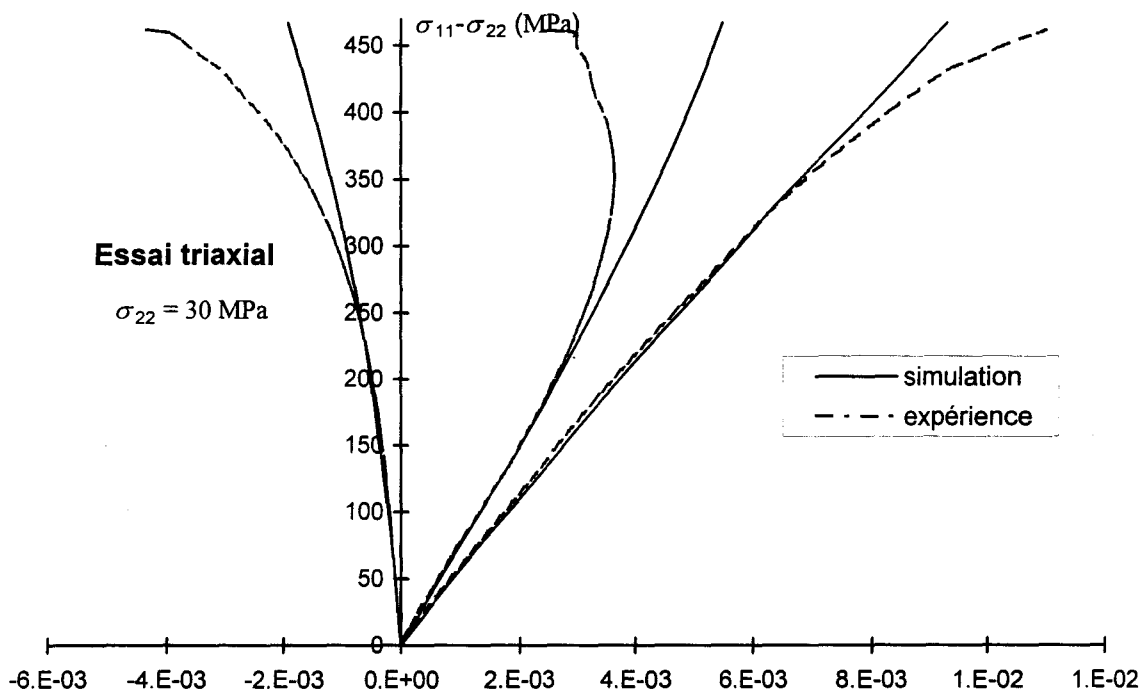


Figure IV.20 : Essai triaxial à 30 MPa.

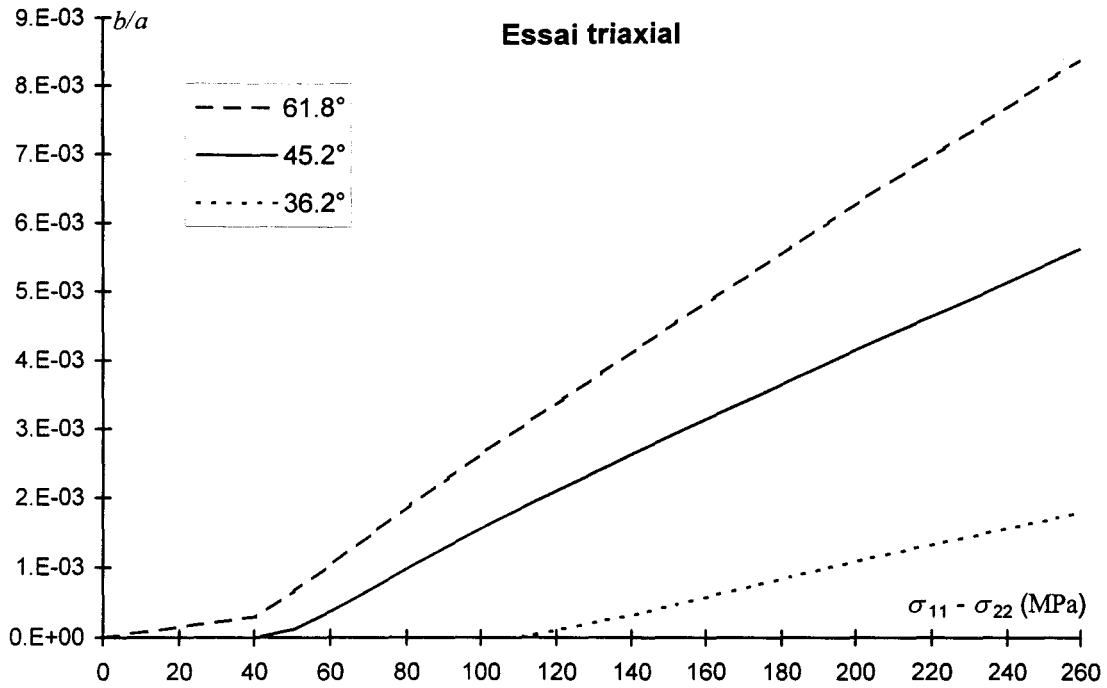


Figure IV.21 : Essai triaxial à 10 MPa : évolution du glissement au cours du chargement.

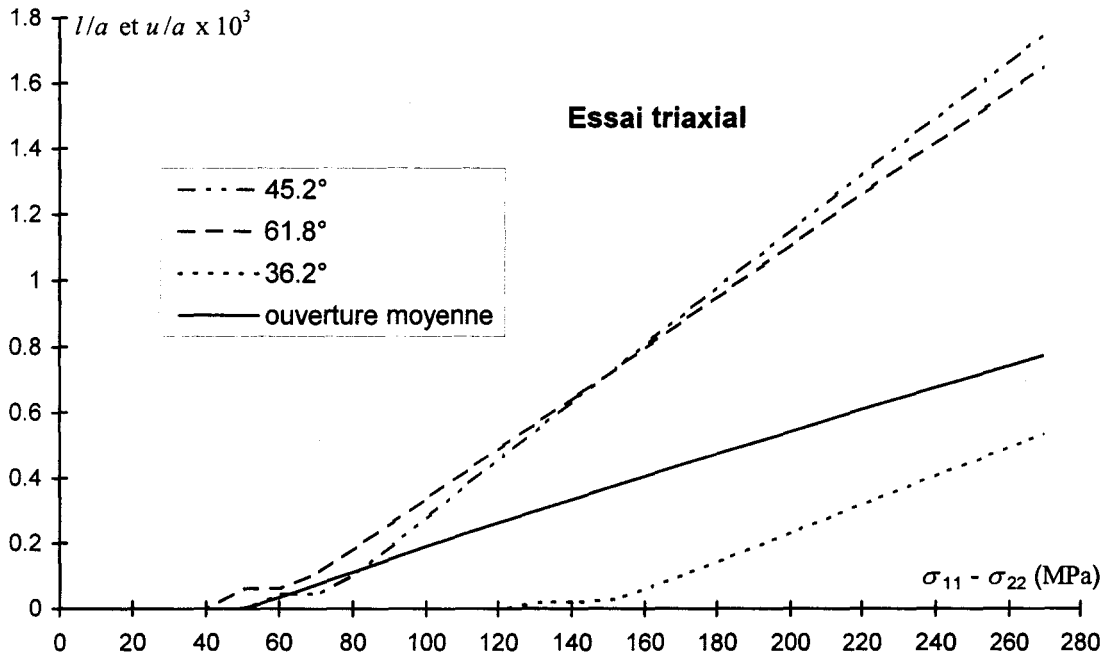


Figure IV.22 : Essai triaxial à 10 MPa : évolution de la longueur et de l'ouverture des branches.

IV.4.3. Essais cycliques

Nous avons également simulé le comportement cyclique du grès. L'exemple de l'essai uniaxial est indiqué à la figure IV.23. On remarque la nature complexe de la réponse globale en déchargement-rechargement prédit par ce modèle : anisotropie, boucles d'hystérésis, déformations permanentes.

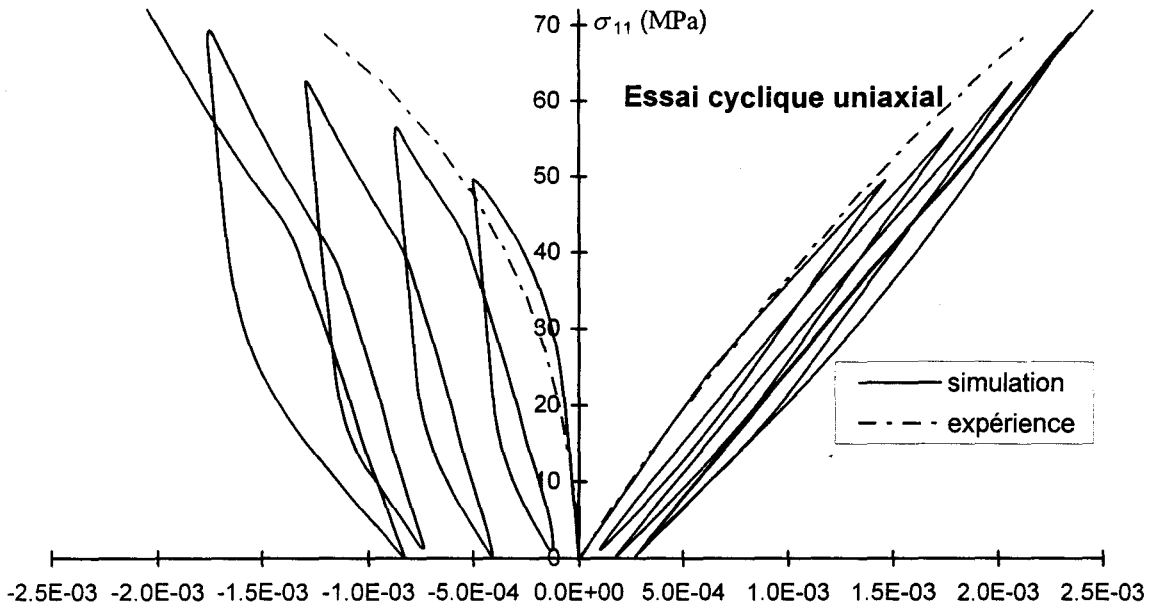


Figure IV.23 : Essai cyclique uniaxial.

La présence de déformations permanentes correspond à l'incompatibilité des déformations de glissement bloquées par frottement. Examinons l'évolution du glissement au cours d'un cycle de chargement-déchargement (figure IV.24). A titre d'exemple, nous avons choisi le premier cycle. Lors du déchargement, on observe sur l'ensemble des mésosfissures préalablement activées, d'abord une phase de blocage du glissement (b constant) suivie d'une mobilisation en sens opposé (ce qui a pour effet la diminution du glissement cumulé b). Dans la phase de blocage du glissement, du fait de la propagation préalable des mésosfissures, le matériau est dégradé par rapport à l'état initial. A la fin de la décharge, on constate la présence d'un glissement résiduel. Par ailleurs, nous remarquons un arrêt de la diminution du glissement à la fin de la décharge : cela correspond à une fermeture partielle des branches (voir l'annexe 5 pour plus de détails). Lors de la recharge, le glissement évolue avec une pente différente du premier chargement après une nouvelle phase de blocage. Suivant l'orientation des mésosfissures, le glissement en fin de seconde charge est inférieur (62°) ou supérieur (45°) au glissement en fin de première charge. L'évolution de la longueur des branches et de l'ouverture moyenne est présentée sur les figures IV.25 et IV.26. L'ouverture moyenne a une évolution similaire à celle du glissement irréversible (ces deux grandeurs sont reliées entre elles par la relation 4.31). En ce qui concerne l'évolution de la longueur des branches, l'irréversibilité du comportement fait que les longueurs restent constantes en décharge. Lorsque le déviateur a suffisamment réaugmenté, les longueurs croissent à nouveau. Les résultats obtenus dans les essais triaxiaux sont similaires à ceux que nous venons de décrire, la différence portant sur la longueur ou l'ouverture moyenne des branches (plus faibles) que nous avons commentées au IV.3.2.

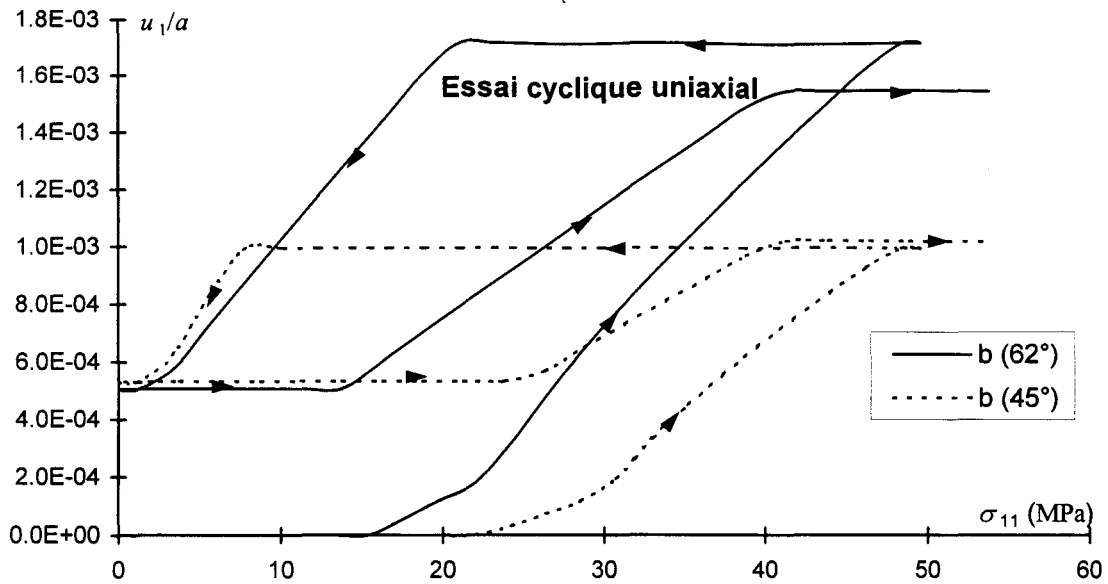


Figure IV.24 : Essai cyclique uniaxial : évolution du glissement.

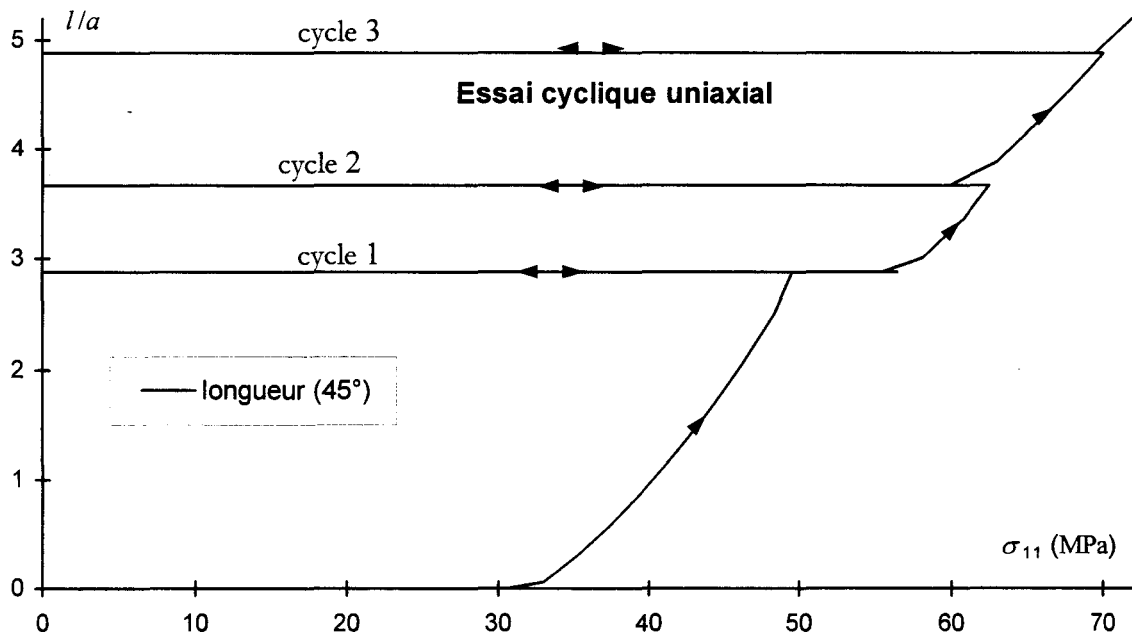


Figure IV.25 : Essai cyclique uniaxial : évolution de la longueur des branches.

Pour les 4 cycles présentés à la figure IV.23, nous avons reporté à titre indicatif les modules sécants des boucles d'hystérésis dans le tableau IV.2. D'une manière générale, ces modules sécants diminuent lorsque le niveau de contraintes à partir duquel est réalisée la décharge augmente. Ceci est plus marqué pour les modules sécants latéraux et correspond schématiquement au type d'anisotropie induite que l'on observe expérimentalement dans les roches fragiles.

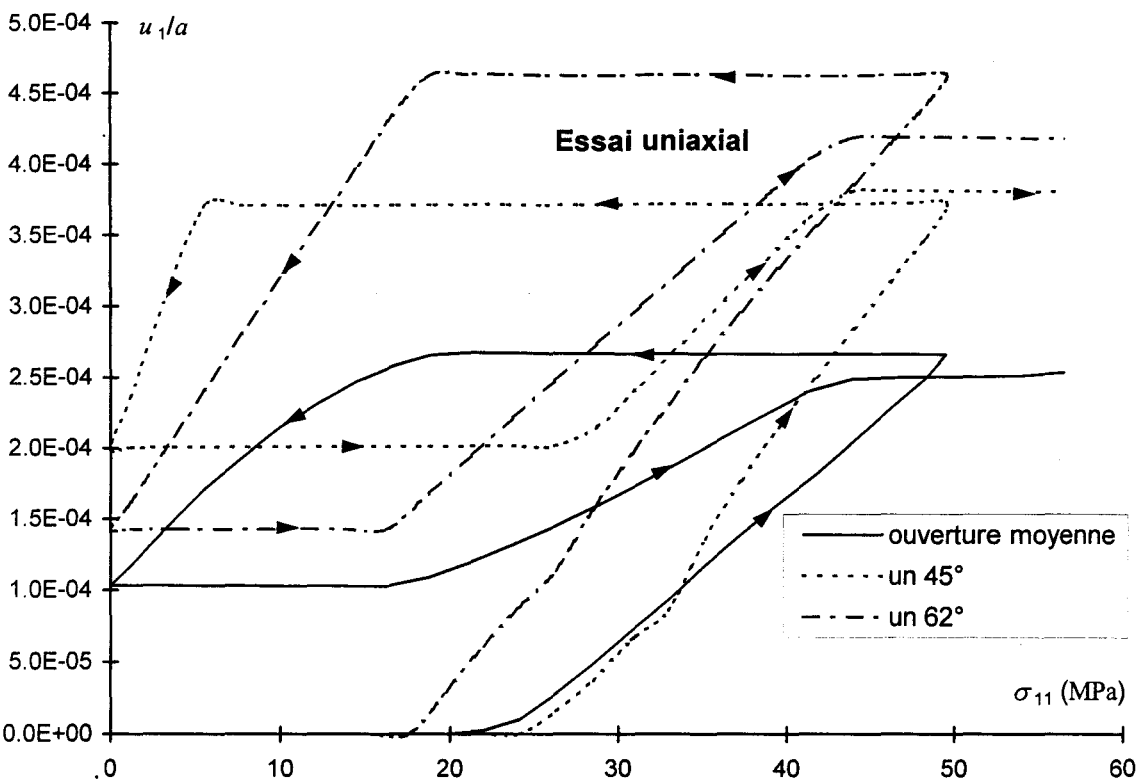


Figure IV.26 : Essai cyclique uniaxial : évolution de l'ouverture des branches.

n° du cycle	niveau de décharge en contrainte	E_s/E_0 (MPa)	E_{ts}/E_{t0} (MPa)
1	50 MPa	0862	0.328
2	56 MPa	0.850	0.310
3	63 MPa	0.835	0.273
4	69 MPa	0.813	0.207

Tableau IV.2 : Endommagement axial et latéral.

IV.4.4. Essais proportionnels

Ce paragraphe et le prochain sont destinés à tester le modèle sur d'autres trajets de chargement sur lesquels nous disposons de données expérimentales pour le grès. Le premier trajet est celui d'un essai proportionnel. Il s'agit d'un essai triaxial au cours duquel le rapport entre la contrainte axiale et la pression de confinement est maintenu constant. Dans l'essai que nous simulons, ce rapport est de 30. Les résultats présentés à la figure IV.27 indiquent que la forte dilatance observée à la fin de l'essai n'est pas très bien reproduite. Une fois de plus, ceci provient de l'effet fortement inhibiteur de la pression sur le branchement des mésofissures.

La variation de l'ouverture moyenne en fonction du déviateur de contraintes (voir IV.28) est de même nature que dans les essais triaxiaux.

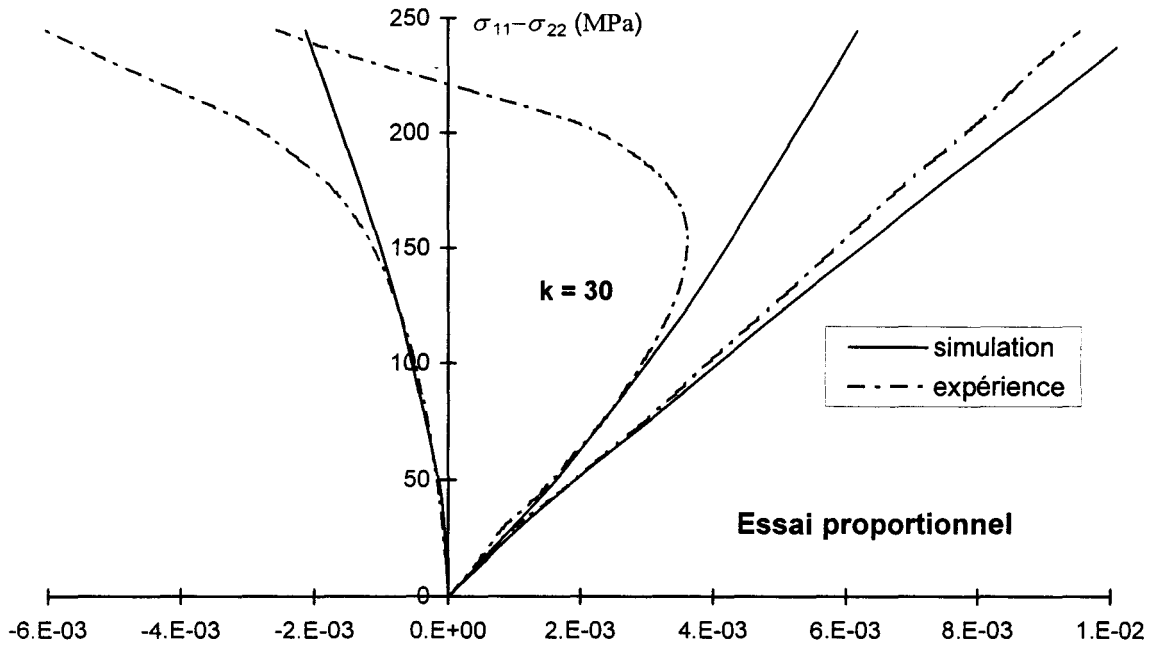
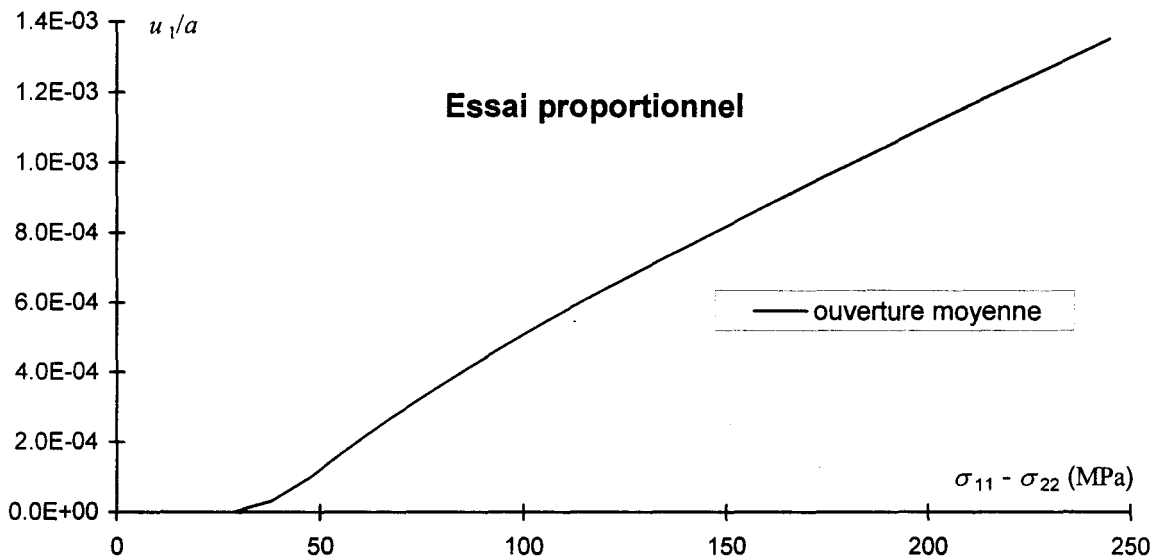

Figure IV.27 : Essai proportionnel : $k = 30$.


Figure IV.28 : Essai proportionnel : ouverture moyenne des branches.

La figure IV.29 illustre à nouveau le fait que la croissance des branches (longueur l) n'est pas suffisante pour fournir une réponse dilatante du matériau. les longueurs de branchement semblent atteindre une limite (la concavité de ces courbes est tournée dans le sens opposé à celle de l'essai uniaxial : figure IV.14). Ces remarques sont aussi valables pour les essais triaxiaux. On peut souligner que si l'ouverture moyenne des mésofissures est du même ordre de grandeur que pour l'essai uniaxial, la longueur est en moyenne 4 fois plus courte pour l'essai proportionnel.

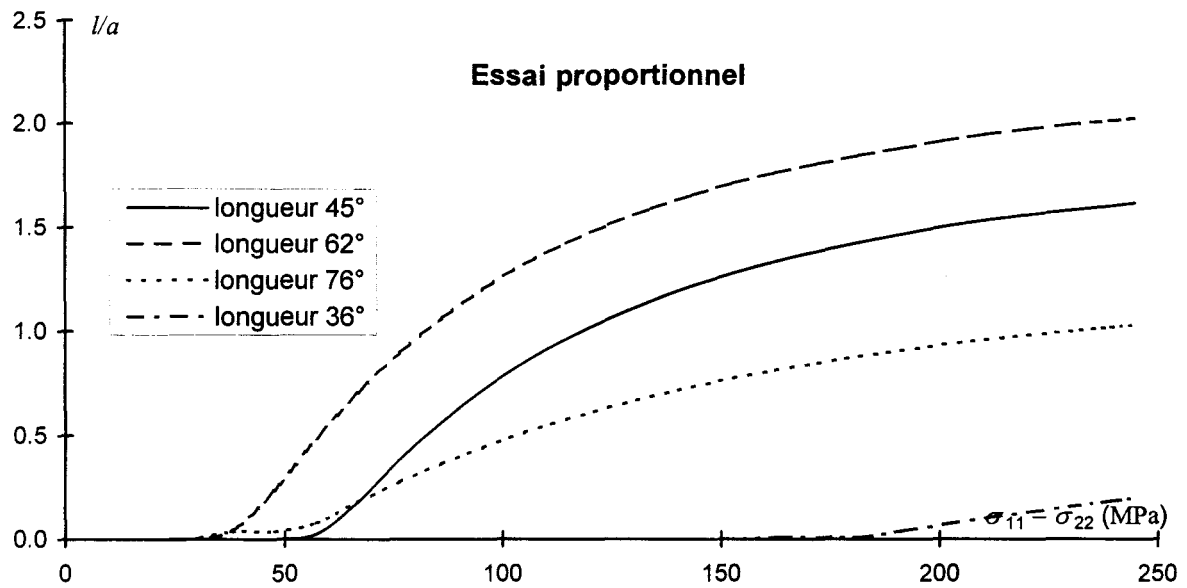


Figure IV.29 : Essai proportionnel : variation des longueurs de branchement.

IV.4.5. Essai d'extension latérale

Il s'agit d'un essai dans lequel on applique une compression isotrope jusqu'à une pression donnée (ici 55 MPa), suivie d'une décharge latérale. La réponse est enregistrée lors de cette décharge. La simulation de cet essai (figure IV.30) n'est pas très satisfaisante (voir comparaison avec l'expérience). L'observation majeure à faire est que le critère de croissance de mésosfissures est tardivement atteint sur ce chemin de sollicitations. Plus précisément les premiers branchements de mésosfissures ne sont obtenues que lorsque le confinement est réduit à 17 MPa.

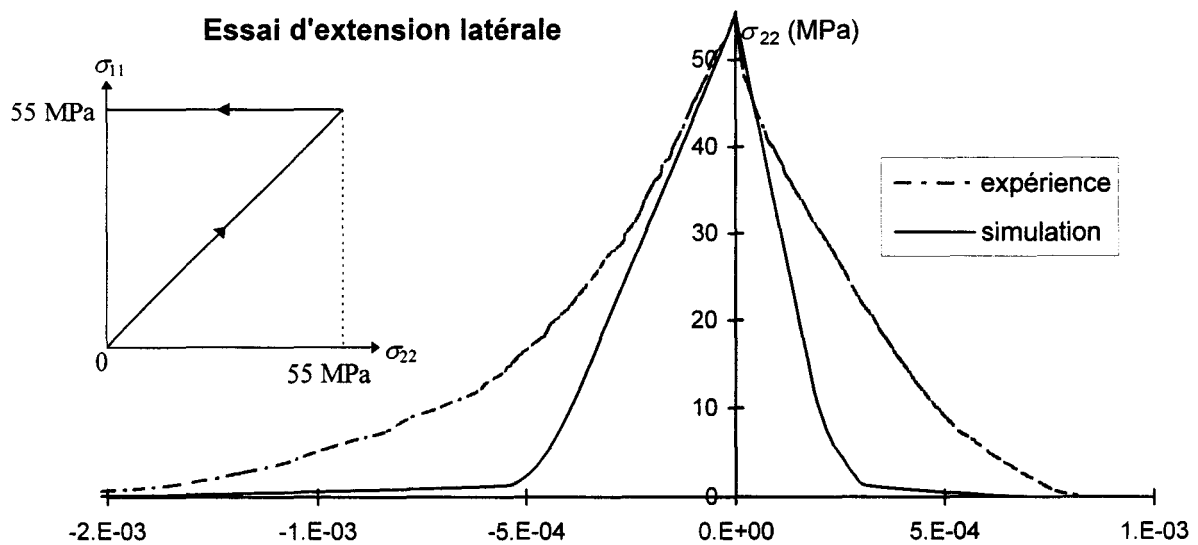


Figure IV.30 : Essai d'extension latérale.

Pour cette raison, nous avons réalisé une simulation du chemin de décharge après avoir superposé à la compression isotrope un déviateur non-endommageant de 70 MPa. L'objectif visé est de permettre d'atteindre la surface seuil au cours de la décharge. Les résultats obtenus sont présentés et comparés à l'expérience (à titre indicatif) sur la figure IV.31. Soulignons juste que les non-linéarités de la réponse sont assez bien reproduites.

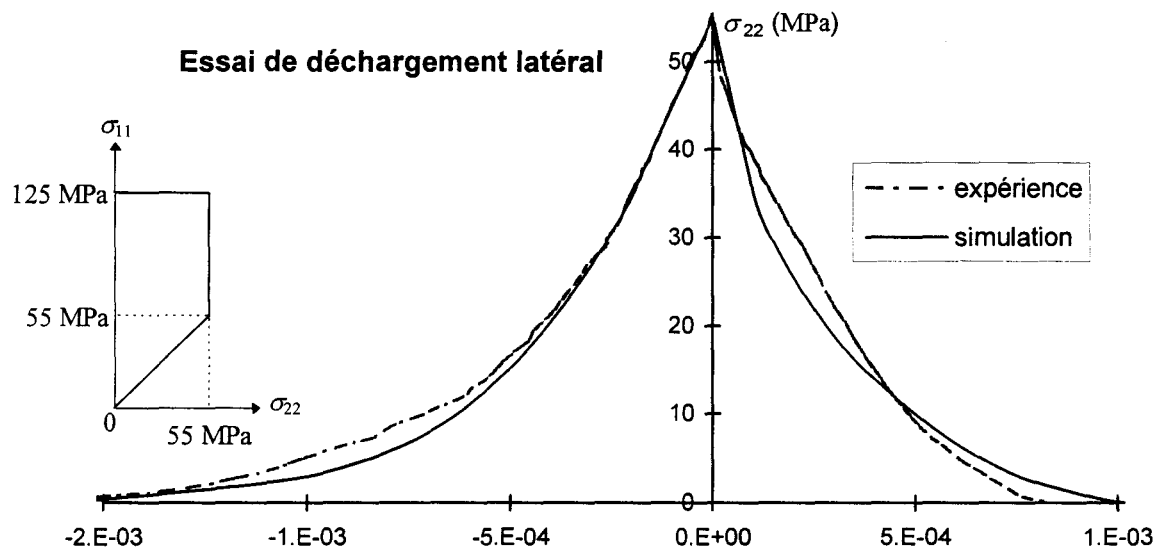


Figure IV.31 : Essai de déchargement latéral.

La variation de l'ouverture moyenne ainsi que la longueur des branches des mésosfissures (figure IV.32) montre l'importance de la fissuration sous ce type de trajet de chargement.

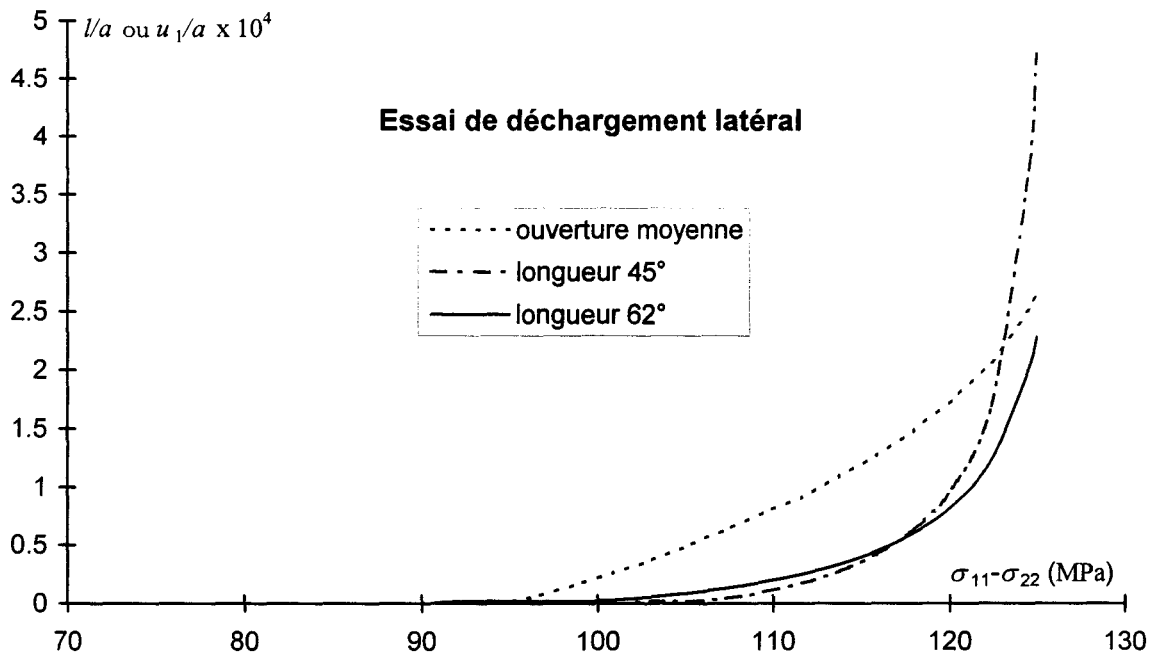


Figure IV.32 : Trajet de déchargement latéral : ouverture moyenne et longueur des branches.

IV.4.6. Essais de refermeture de fissures

Nous avons déjà souligné qu'un des aspects importants de l'endommagement par mésosfissuration est la description des effets unilatéraux liés à la refermeture des mésosfissures. D'importantes études ont été consacrées à ce problème. Citons en particulier les travaux réalisés dans l'équipe de A. Dragon (Halm et Dragon, 1996) et ceux de Chaboche (Chaboche, 1992b ; 1993). Notre ambition ici, plus modeste, est d'évaluer la réponse du modèle sur des chemins de refermeture de mésosfissures. Le test retenu est celui schématisé sur la figure IV.33. Il s'agit d'un chemin triaxial de révolution ou uniaxial (endommageant) suivi d'un chargement latéral (augmentation de la pression de confinement). Seule la réponse au cours du chargement latéral est étudiée.

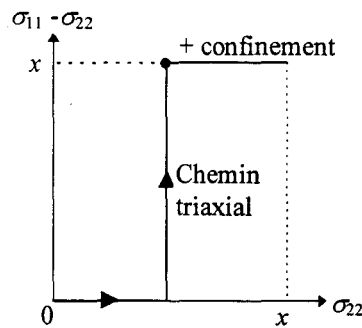


Figure IV.33 : Trajet en contraintes pour l'essai de chargement latéral.

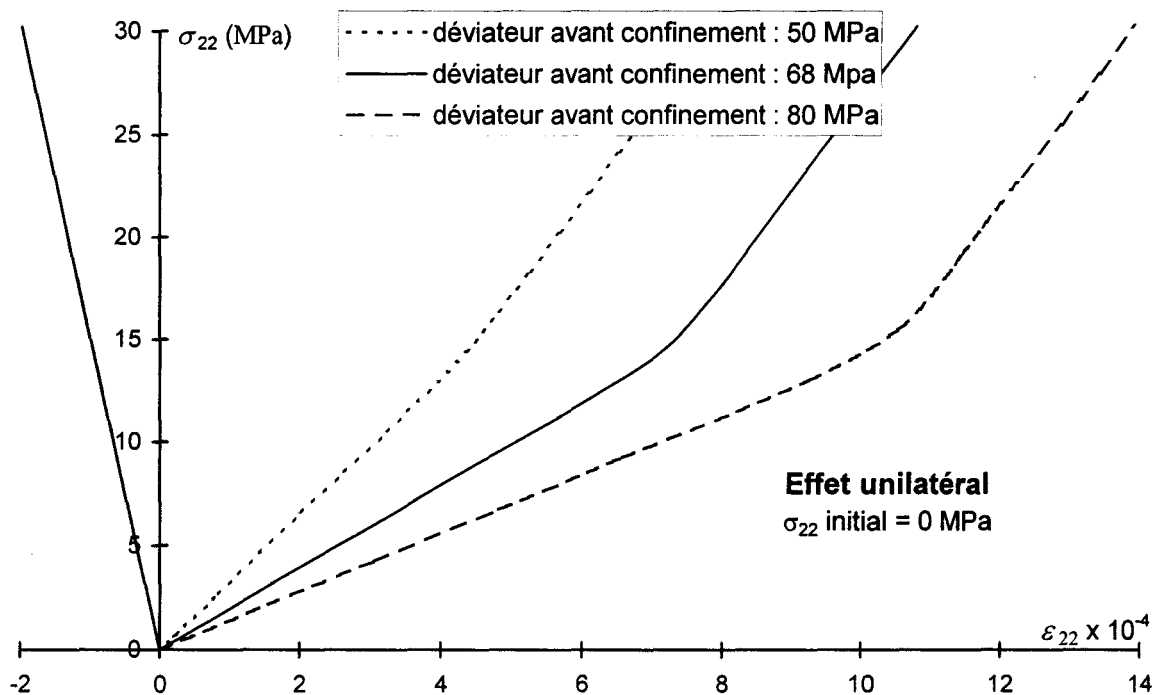


Figure IV.34 : Trajet de chargement latéral : courbes contraintes-déformations.

L'exemple de résultats montré à la figure IV.34 concerne un chargement latéral effectué à partir d'un déviateur donné de l'essai uniaxial. On observe sur ces courbes un changement d'allure dans la réponse du matériau. Cet effet, qui correspond à une fermeture de l'ensemble des mésosfissures peut être situé à 19 MPa. Comme nous pouvons le constater sur le tableau IV.4, la récupération du module est totale (100 % de restauration quel que soit le confinement initial). Nous devons noter qu'en fait la refermeture des mésosfissures est progressive. La figure IV.35, montre l'évolution de l'ouverture moyenne globale sur l'ensemble du trajet de sollicitations. Il apparaît que les branches se referment assez vite quelque soit l'ampleur du déviateur préalablement atteint. L'analyse des différentes familles de mésosfissures indique que les contraintes macroscopiques de fermeture diffèrent d'une famille à une autre, puisque celles-ci ne sont pas dans le même état d'ouverture avant le chargement latéral. Notons enfin que dans les essais triaxiaux, à même déviateur, la refermeture est plus rapide (les branches étant moins ouvertes).

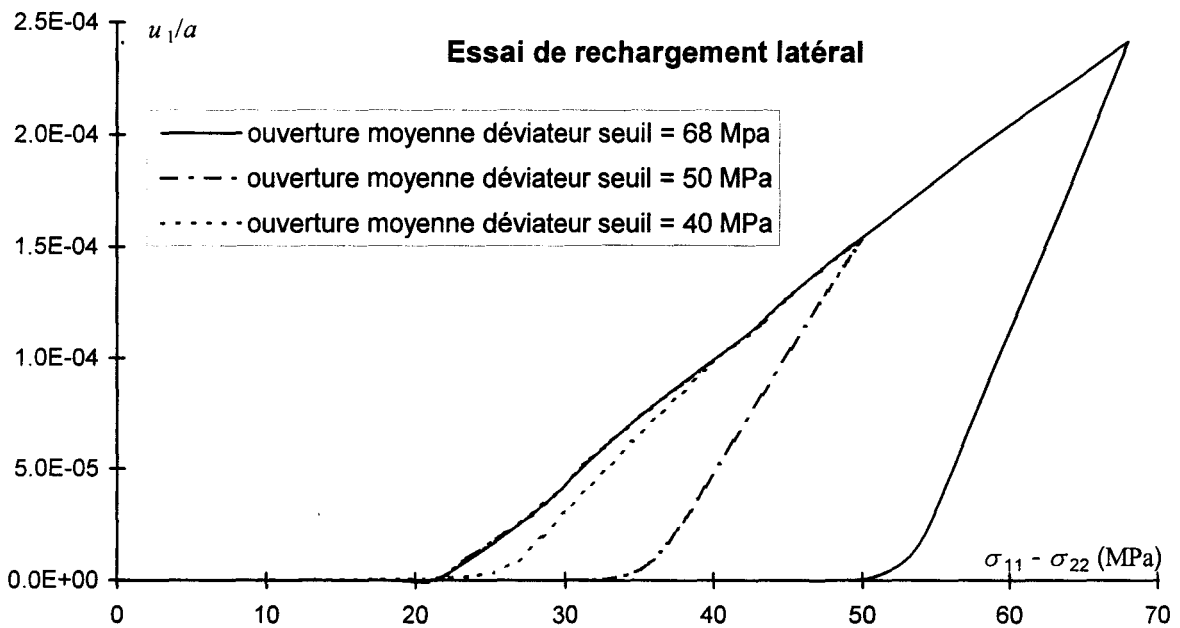


Figure IV.35 : Trajet de chargement latéral : évolution de l'ouverture moyenne.

confinement (MPa)	$\frac{D_{11}}{S_{11}^0}$	$\frac{D_{12}}{S_{12}^0} = \frac{D_{13}}{S_{13}^0}$	$\frac{D_{21}}{S_{21}^0} = \frac{D_{31}}{S_{31}^0}$	$\frac{D_{22}}{S_{22}^0} = \frac{D_{33}}{S_{33}^0}$	$\frac{D_{23}}{S_{23}^0} = \frac{D_{32}}{S_{32}^0}$	$\frac{D_{44}}{S_{44}^0}$	$\frac{D_{55}}{S_{55}^0} = \frac{D_{66}}{S_{66}^0}$
0.0	1.3549	27.95	9.27	23.67	-57.16	4.37	1.07
4.74	1.0022	1.0	1.0	1.3328	1.0	1.0738	1.0371
14.5	1.0011	1.0	1.0	1.0875	1.0	1.0194	1.0098
16.46	1.0003	1.0	1.0	1.0078	1.0	1.0017	1.0009
18.41	1.0001	1.0	1.0	1.0015	1.0	1.0003	1.0002
22.31	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Tableau IV.3 : Trajet de chargement latéral : évolution des composantes de la matrice tangente.

IV.4.7. Etude de sensibilité des paramètres

Une étude de sensibilité des principaux paramètres du modèle a été réalisée. Nous en présentons les résultats pour quelques uns de ces paramètres qui nous semblent les plus importants. Les résultats pour d'autres sont présentées en annexe 6.

IV.4.7.1. Influence de la densité initiale de mésosfissures

L'étude de l'influence de la densité initiale de mésosfissures sur la réponse du matériau, en considérant trois densités ($0.5\omega_0$, ω_0 et $2\omega_0$). Les résultats (figure IV.36) indiquent une grande influence de ce paramètre sur le comportement. En particulier, on note une réponse plus dilatante lorsque la densité initiale augmente.

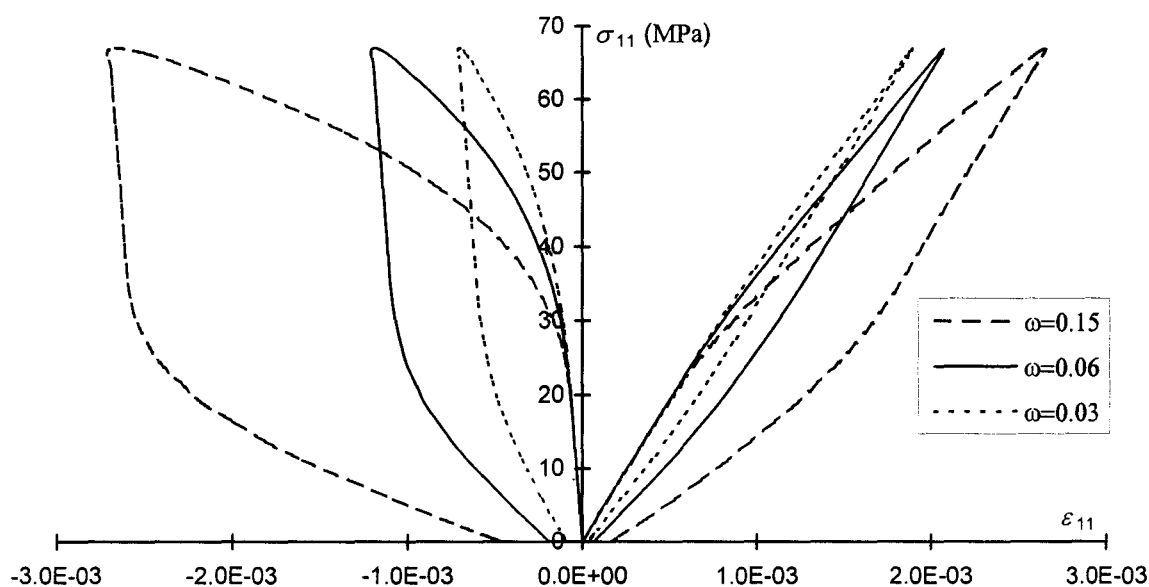


Figure IV.36 : Modèle incrémental - Influence de la densité initiale de mésosfissures.

IV.4.7.2. Influence du coefficient de frottement μ aux interfaces

Nous avons déjà souligné l'importance du frottement dans les mécanismes de déformations sous sollicitation de compression. L'activation par glissement des lèvres des mésosfissures est directement liée à la valeur de ce paramètre. Le branchement en dépend aussi puisque c'est le glissement sur la partie inclinée et frottante des mésosfissures qui en est le moteur. Les résultats de la figure IV.37 indiquent un effet sensible de la variation de μ sur la réponse du matériau, notamment pour ce qui concerne les déformations transversales.

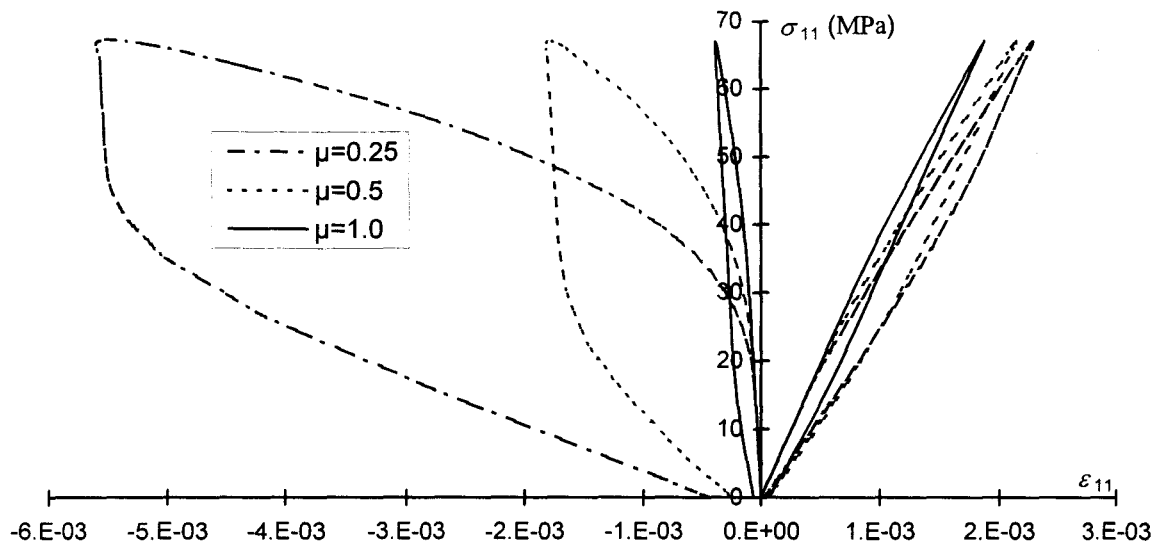
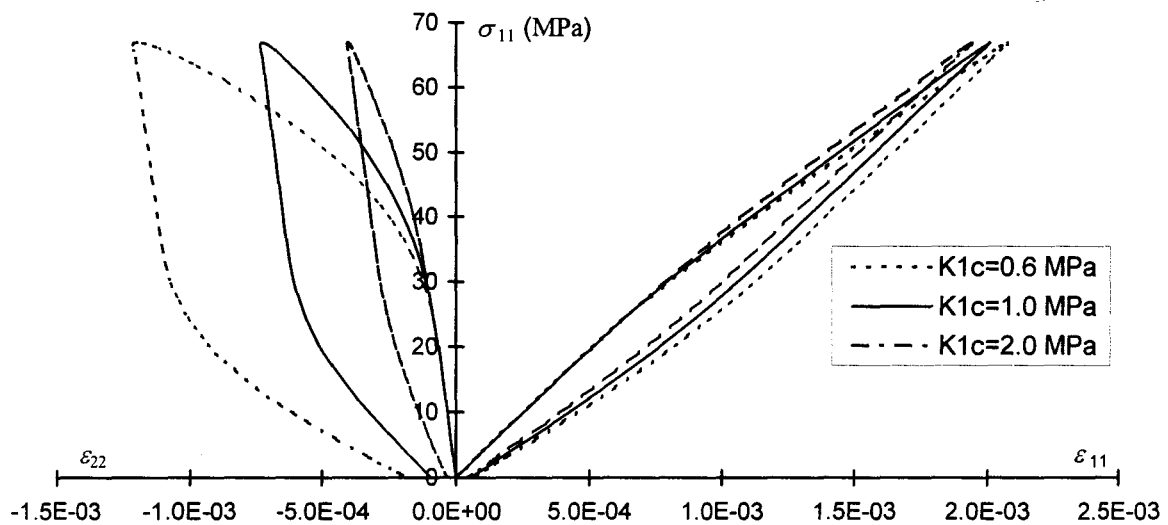


Figure IV.37 : Influence du frottement aux interfaces.

IV.4.7.3. Influence de la ténacité K_I^c du matériau


 Figure IV.38 : Influence de la ténacité K_I^c de la matrice du matériau.

Trois paramètres de ténacité interviennent dans les critères d'évolution. Ce sont les deux ténacités aux interfaces (grains-matrice) et la ténacité K_I^c de la matrice du matériau. Les simulations ont révélé que les prédictions du modèle sont peu sensibles aux paramètres interfaciaux K_{II}^{if} et K_{II}^{if} . Cette observation est d'autant plus intéressante que dans l'état actuel des connaissances ces deux paramètres sont très délicats à déterminer expérimentalement. Par contre la ténacité de la matrice peut être estimée à partir d'un essai classique de mécanique de la rupture (flexion 3 points par exemple), en testant la matrice seule. La figure IV.38 montre l'influence de K_I^c ; on constate un

effet marqué sur les déformations transversales. Ceci est compréhensible étant donné que K_I^c conditionne directement la propagation des branches des mésosfissures.

Algorithme simplifié du modèle incrémental

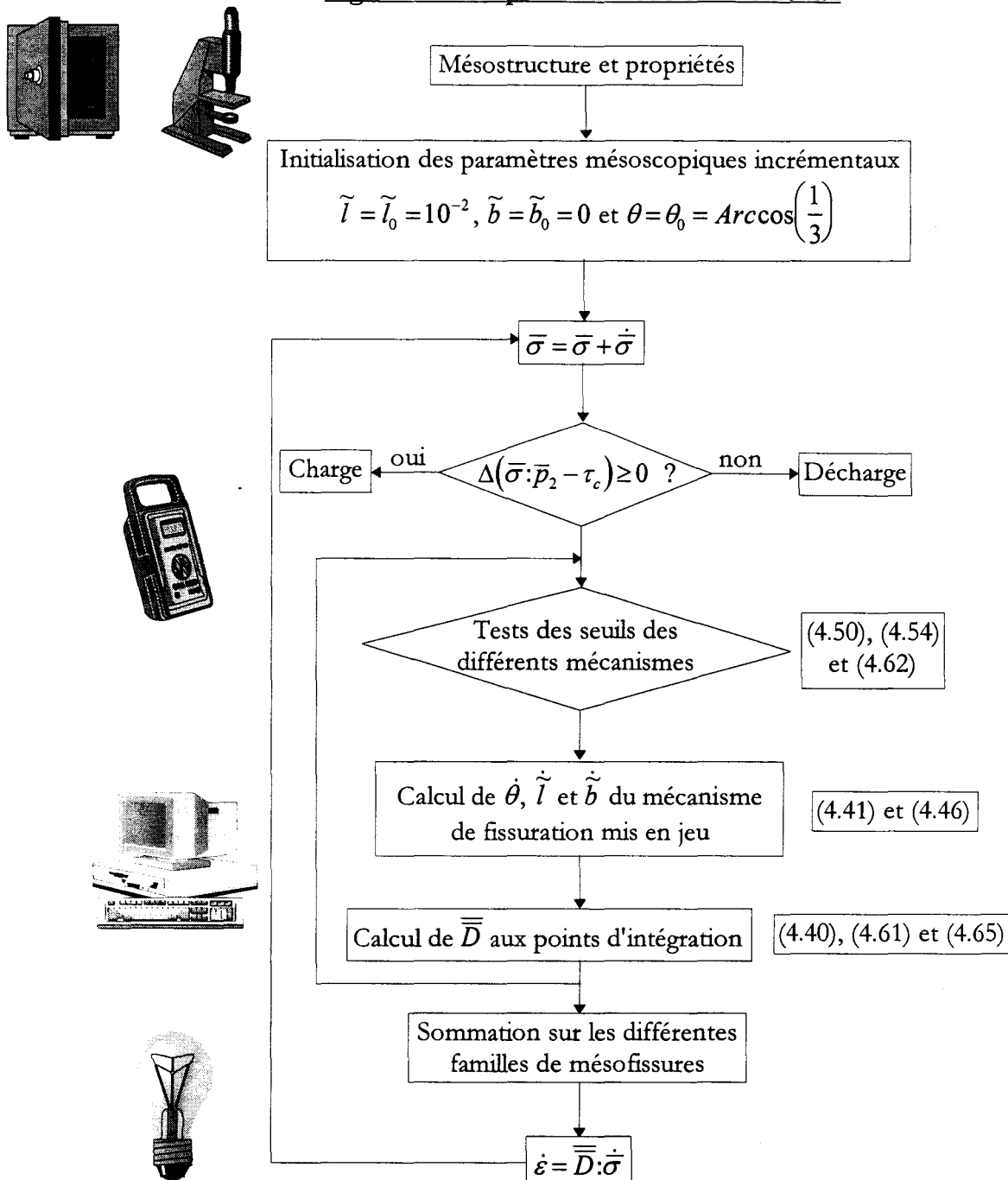


Figure IV.39 : Algorithme du modèle incrémental.

Dans le but de permettre une compréhension plus rapide de cette version incrémentale du modèle, nous avons résumé sur un algorithme simplifié (figure IV.39) les différentes étapes permettant de construire le tenseur de matrice tangente anisotrope en fonction des différents mécanismes mis en jeu par l'ouverture et la fermeture de mésosfissure.

IV.5. Conclusion

Cette étude a été consacrée à la mise en œuvre d'une modélisation incrémentale du comportement des matériaux fragiles mésolfissurés. La modélisation a été construite sur la base de l'analyse mécanique de la mésolfissure branchée 3-D étudiée au chapitre III. Nous avons suivi une démarche initialement proposée par Nemat-Nasser et Obata (1988) dans le cas plan. La généralisation au cas 3-D pose un certain nombre de problèmes, notamment ceux liés à l'étude du branchement. Ceux-ci ont été résolus en approximant l'étude du branchement 3-D par une série de coupes 2-D.

L'identification des paramètres mésoscopiques dans le cas du grès de Fontainebleau a été réalisée de façon encore trop sommaire, en s'appuyant sur des ordres de grandeur disponibles dans la littérature. On peut déjà envisager une première phase d'identification (observations au M.E.B.) qui concernerait la densité initiale de mésolfissures. Malgré ces difficultés, les simulations effectuées ont montré les potentialités du modèle élaboré. Celui-ci semble apte à décrire les traits fondamentaux du comportement des matériaux fragiles : fortes non-linéarités, anisotropie induite, dilatance, sensibilité à la pression moyenne, dépendance vis-à-vis du chemin de sollicitations. Nous devons cependant noter un trop fort effet de la pression de confinement sur le développement des mésolfissures. C'est un point qui mérite d'être mieux étudié sur le plan expérimental. Enfin, la réponse globale étant directement reliée à l'état de mésolfissuration, il est possible d'évaluer la mésostructure du matériau à tout instant.

L'aspect unilatéral, lié à la refermeture de certaines mésolfissures, est un des points sensibles de la modélisation de l'endommagement. Les simulations réalisées montrent, au moins dans le cas des essais triaxiaux axisymétriques, que la fermeture des mésolfissures est progressive et aboutit à une restauration complète des modules initiaux du matériau. En fait, l'aspect unilatéral de la mésolfissuration est naturellement pris en compte par le modèle proposé.

Un point fondamental que nous n'avons pas abordé dans cette étude est celui du critère de rupture. Dans le cadre du modèle développé, on peut envisager de prendre la longueur maximale ou encore la densité critique de mésolfissures. Ce choix suppose l'évaluation d'une longueur critique que l'on peut par exemple relier à l'espacement moyen entre les grains composant la structure du matériau. Ce critère s'apparenterait à un critère de coalescence de mésolfissures. L'évaluation expérimentale d'une densité critique nécessiterait par exemple des techniques de microphotographies.

Le modèle peut être étendu pour la prise en compte de comportements différés liés à la propagation lente (subcritique) de mésolfissures. Une présentation succincte d'une telle extension ainsi que quelques simulations associées sont présentées en annexe 7.

CONCLUSION

Ce travail de thèse avait pour but de proposer une modélisation de la mésolfissuration diffuse à l'échelle mésoscopique. L'ambition à terme est d'enrichir les modèles phénoménologiques destinés aux matériaux fragiles.

Le premier chapitre bibliographique a permis de définir les mécanismes physiques généraux de déformation des matériaux rocheux mésolfissurés. L'analyse bibliographique succincte nous a permis de retenir un mode de fissure branchée initialement proposé par Brace et Bombolakis (1966) et couramment étudié en mécanique des roches. Le travail à effectuer pour concrétiser une telle modélisation concerne l'évaluation de la compliance effective pour un milieu dont la mésostructure évolue avec le chargement. Nous avons en particulier mis en avant la nécessité d'une extension 3-D d'un tel mécanisme.

De manière générale, l'ajout de mésolfissures dans un solide élastique linéaire a tendance à dégrader les propriétés effectives de ce dernier. Cependant, nous avons observé que certaines distributions particulières pouvaient aboutir à un module d'Young effectif supérieur à celui prédit dans l'hypothèse de non-interaction entre mésolfissures. Cependant, tout au moins dans le cas de condition de contraintes homogènes au contour, nous avons constaté que l'hypothèse de configuration aléatoire des fissures ouvertes apparaît équivalente à l'hypothèse de non-interaction. Ces résultats numériques confirment les conclusions de Kachanov (1992, 1993b) et Berthaud et *al.* (1994). Malgré le faible nombre de simulations, nous avons pu confirmer la validité de cette hypothèse de non-interaction dans le cas de mésolfissures fermées glissantes. Cet ensemble d'études a conduit à ne retenir dans un premier temps l'hypothèse de non-interaction pour les modèles à développer. L'essentiel des travaux présentés dans les chapitres III et IV se sont appuyés sur cette hypothèse, d'autant plus qu'il est admis que les effets d'interaction sont généralement plus faibles dans le contexte 3-D.

Une première formulation du modèle dans sa version à « matrice sécante » est basée sur l'évaluation des compliances effectives d'un matériau affaibli par la présence de mésolfissures. La modélisation intègre divers mécanismes de mésolfissuration : création de nouvelles fissures et croissance en mode mixte. Les lois d'évolution de la mésolfissuration sont obtenues à partir de la mécanique linéaire de la rupture (critères d'énergie G). Certaines simplifications ont été faites pour

traiter l'aspect 3-D de la croissance des mésosfissures. Les premières simulations effectuées à l'aide de ce modèle montrent sa pertinence qualitative, tant pour l'étude de l'endommagement en traction simple que sous compression triaxiale de révolution. L'anisotropie induite, la dilatace sont relativement bien décrites. Nous devons néanmoins noter que la pression de confinement limite très fortement le développement de la mésosfissuration.

Malgré les résultats obtenus, nous devons souligner que le domaine de validité du modèle présenté se limite à des trajets de chargement où la modélisation à « matrice sécante » est justifiée (indépendance des réponses vis-à-vis du chemin de chargement). En particulier, l'étude des trajets incluant des cycles de chargement-déchargement ou des trajets conduisant à la refermeture des mésosfissures (effet unilatéral) n'a pas été possible.

La formulation plus générale, sous forme incrémentale (chapitre IV) a permis de combler les lacunes de cette modélisation à « matrice sécante ». Le modèle incrémental a été construite sur la base de l'analyse mécanique de la mésosfissure branchée 3-D étudiée au chapitre III. Nous avons suivi une démarche similaire à celle initialement proposée par Nemat-Nasser et Obata (1988) dans le cas plan. La généralisation au cas 3-D a été rendue possible grâce à des simplifications apportées à l'étude du branchement. Plus exactement, le branchement 3-D a été approximé par une série de coupes 2-D dont la pertinence n'a pu être jugée qu'à travers les prédictions du modèle.

L'identification des paramètres mésoscopiques dans le cas du grès de Fontainebleau a été réalisée de façon encore trop sommaire, en s'appuyant sur des ordres de grandeur disponibles dans la littérature. On peut déjà envisager une première phase d'identification (observations au M.E.B.) qui concernerait la densité initiale de mésosfissures. Malgré ces difficultés, les simulations effectuées ont montré les potentialités du modèle élaboré. Celui-ci semble apte à décrire les traits moyens du comportement des matériaux fragiles : fortes non-linéarités, anisotropie induite, dilatace, sensibilité à la pression moyenne, dépendance vis-à-vis du chemin de sollicitations. Par rapport aux données d'expérience, nous avons encore constaté un trop fort effet de la pression de confinement sur le développement des mésosfissures. C'est un point qui mérite d'être mieux étudié sur le plan expérimental. Enfin, la réponse globale étant directement reliée à l'état de mésosfissuration, il a été possible d'évaluer l'évolution de la mésostructure du matériau au cours des sollicitations.

L'aspect unilatéral, lié à la refermeture de certaines mésosfissures, est un des points sensibles de la modélisation de l'endommagement. Il est naturellement traité dans le présent modèle. Les simulations réalisées montrent, au moins dans le cas des essais triaxiaux axisymétriques, que la

fermeture des mésolfissures est progressive et aboutit à une restauration complète des modules initiaux du matériau.

Un certain nombre d'aspects importants restent encore ouverts dans la démarche proposée. Sans un ordre particulier d'importance, citons les points suivants :

- i) lois de croissance 3-D des mésolfissures en mode mixte. Ceci est un point de la modélisation qui exigerait des études théoriques,
- ii) identification complète des paramètres mésostructuraux du modèle et enrichissement des mécanismes de déformations, notamment en ce qui concerne les mésolfissures nouvellement créées,
- iii) analyse de la rupture sur la base des paramètres mésostructuraux (en évolution).

Une perspective importante de ce travail concernerait la mise en œuvre d'une démarche phénoménologique basée sur le modèle physique étudié. Une telle démarche récemment entreprise par Batista et Gross (1998), consisterait à identifier des variables internes (ex. glissement) pertinentes à partir des travaux réalisés. Ce choix devra être complété par des lois d'évolution à inscrire dans un formalisme thermodynamique similaire à celui proposé par Rice (1971).

Un point fondamental que nous n'avons pas abordé dans cette étude est celui du critère de rupture. Dans le cadre du modèle développé, on peut envisager de prendre la longueur maximale ou encore la densité critique de mésolfissures. Ce choix suppose l'évaluation d'une longueur critique que l'on peut par exemple relier à l'espacement moyen entre les grains composant la structure du matériau. Ce critère s'apparenterait à un critère de coalescence de mésolfissures. L'évaluation d'une densité critique nécessiterait par exemple des techniques de microphotographies.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- M. **Adams** & G. **Sines** (1978) : Crack extension from flaws in a brittle material subjected to compression. *Tectonophysics*, vol. 49, pp. 97-118.
- G. **Alpa**, & L. **Gambarotta** (1993) : The elastic crack interaction in modelling materials, *Eng. Fract. Mech.*, vol. 46, n° 4, pp. 663-676.
- S. **Andrieux** (1983) : Un modèle de matériau microfissuré – Application aux roches et aux bétons. *Thèse de doctorat*. E.N.P.C..
- S. **Andrieux**, Y. **Bamberger** & J. J. **Marigo** (1986) : Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches, *J. Mécanique Théorique et Appliquée*, vol. 5, n° 3, pp. 471-513.
- M. F. **Ashby** & S. D. **Hallam** (1986) : The failure of brittle solids containing small cracks under compressive stress states. *Acta Metall.*, vol. 34, n° 3, pp. 497-510.
- B. K. **Atkinson** (1984) : Subcritical crack growth in geological materials. *J. Phys. Res.*, vol. 89, n° B6, pp. 4077-4114.
- J.L. **Bassani**, & J. **Qu** (1989) : Finite crack on bimaterial and bicrystal interfaces, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 37, n° 4, pp. 435-453.
- M. **Batista**, & D. **Gross** (1998) : The sliding crack model of brittle deformation : an internal variable approach, *Int. J. Solids Structures*, vol. 35, n° 5-6, pp. 487-509.
- Z. P. **Bazant** & G. **Pijaudier-Cabot** (1988) : Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *J. Appl. Mech.*, vol. 55, pp. 287-293.
- Y. **Belkacemi** (1990) : Méthode des discontinuités de déplacement en champ complexe. *Thèse de doctorat*, Université de Lille I.
- Y. **Benveniste** (1986) : On the Mori-Tanaka method in cracked bodies, *Mech. Res. Commun.* vol. 13, n°4, pp. 193-201.
- Y. **Berthaud**, C. **Fond** & P. **Brun** (1994) : Effect of interactions on the stiffness of cracked media. *Mech. Res. Commun.*, vol. 21, n° 5, pp. 525-533.
- Z. T. **Bienawski** (1967) : Mechanism of brittle fracture of rock. Part I Theory of the fracture progress - Part II Experimental study - Part III : Fracture in tension and under long term loading. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol. 4, pp. 395-430.
- M. **Bornert** (1996) : Morphologie microstructurale et comportement mécanique ; caractérisations expérimentales, approches par bornes et estimations autocohérentes généralisées. *Thèse de doctorat*, E.N.P.C..
- A. **Boursin**, J.-L. **Chaboche** & F. **Roudolff** (1996) : Mécanique de l'endommagement avec conditions unilatérales et stockage d'énergie élastique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 323, Série II b, p. 369-376.

- W. F. **Brace** & E. G. **Bombolakis** (1963) : A note on brittle crack growth in compression, *J. Geophys. Res.*, vol. 68, pp. 3709-3713.
- W. F. **Brace**, B. W. **Paulding** & C. **Scholz** (1966) : Dilatancy in the fracture of crystalline rocks, *J. Geophys. Res.*, vol. 71, pp. 3939-3953.
- B. **Budiansky** & R. O' **Connell** (1976) : Elastic moduli of a cracked solid. *Int. J. Solids Structures*, vol. 12, pp. 81-97.
- H. D. **Bui** (1978) : Mécanique de la rupture fragile. *Ed. Masson, Paris*.
- H. D. **Bui**, K. **Dang Van** & C. **Stolz** (1981) : Relations entre les grandeurs macroscopiques et microscopiques pour un solide élastique-fragile ayant des zones endommagées. *C.R. Acad. Sc. Paris*, t.292, Série II, pp. 863-866.
- F. C. S. **Carvalho** & J. F. **Labuz** (1996) : Experiments on effective elastic modulus of two-dimensional solids with cracks and holes. *Int. J. Solids Structures*, vol. 33, n° 28, pp. 4119-4130.
- J. L. **Chaboche** (1992a) : Damage induced anisotropy : on difficulties associated with the active/passive unilateral condition. *Int. J. of Damage Mech.*, vol. 1, n° 2, pp. 148-171.
- J. L. **Chaboche** (1992b) : Une nouvelle condition unilatérale pour décrire le comportement des matériaux avec dommage anisotrope, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 314, Série II, pp. 1395-1401.
- J. L. **Chaboche** (1993) : Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage, *Int. J. Damage Mech.*, vol. 2, pp. 311-329.
- B. **Cottetrel** & J. R. **Rice** (1980) : Slightly curved or kinked cracks. *Int. J. Fract.*, vol. 16, pp. 155-169.
- S.L. **Crouch** (1976) : Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 10, pp. 301-343.
- S. L. **Crouch** & A. M. **Starfield** (1983) : Boundary element methods in solid mechanics. *Ed. George Allen & Unwin (Publishers) Ltd.*
- J. D. **Eshelby** (1957): The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. London, Series A*, vol. 241, pp. 376-396.
- J. D. **Eshelby** (1961): Elastic inclusion and inhomogeneities. In : *Progress in Solid Mechanics* 2, pp. 89-140, I.N. Sneddon and R. Hill, Eds., North-Holland, Amsterdam, The Netherlands.
- D. **Fanella** & D. **Krajcinovic** (1988) : A micromechanical model for concrete in compression. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 29, pp. 59-66.
- C. **Fond** (1992) : Interactions entre fissures et cavités circulaires dans les milieux élastiques plans. *Thèse de doctorat*, Université Paris VI.
- L. **Gambarotta**, S. **Lagomarsino** (1993) : A microcracked damage model for brittle materials. *Int. J. Solids Structures*, vol. 30, n° 2, pp. 177-198.
- L. N. **Germanovich**, R. L. **Salganik**, A. V. **Dyskin** & K. K. **Lee** (1994) : Mechanisms of brittle fracture of rock with pre-existing cracks in compression. *Pageoph.*, vol. 143, n° 1/2/3, pp. 117-149.

- L. N. **Germanovich**, A. V. **Dyskin** & N. M. **Tsyru'nikov** (1993) : A model of the deformation and fracture of brittle materials with cracks under uniaxial compression. *Izv. RAN. Mekhanika Tverdogo Tela*, vol. 28, n° 1, pp. 127-143.
- A. **Haied** (1995) : Etude expérimentale de la rupture en mode de déformations localisé d'un grès. *Thèse de Doctorat*, Université de Lille I.
- D. **Halm** (1997) : Contribution à la modélisation du comportement unilatéral et du frottement dans les matériaux mésofissurés. *Thèse de doctorat*, E.N.S.M.A..
- D. **Halm** & A. **Dragon** (1996) : A model of anisotropic damage by mesocrack growth ; unilateral effect. *Int. J. Damage Mech.*, vol. 5, pp. 384-402.
- M. E. **Harr** (1977) : *Mechanics of particulate media*. McGraw-Hill, New York.
- J.-P. **Henry** (1978) : Mécanique linéaire de la rupture appliquée à l'étude de la fissuration et de la fracture de roches calcaires. *Thèse de Docteur es sciences physiques à l'U.S.T.L.*
- R. **Hill** (1963) : Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 11, pp. 357-372.
- R. **Hill** (1965) : A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 13, pp. 213-222.
- E. **Hoek** & Z. T. **Bienawski** (1965) : Brittle fracture propagation in rock under compression. *J. Fracture Mech.*, vol. 1, pp. 137-155.
- A. **Hoenig** (1978) : The behaviour of a plat elliptical crack on an anisotropic elastic body. *Int. J. Solids Structures*, vol. 14, pp. 925-934.
- A. **Hoenig** (1979) : Elastic moduli of a non-randomly cracked body. *Int. J. Solids Structures*, vol. 15, pp. 137-154.
- A. **Hoenig** (1982) : Near-tip behavior of a crack in a plane anisotropic elastic body. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 16, n° 3, pp. 393-403.
- H. **Horii** & S. **Nemat-Nasser** (1983) : Overall moduli of solids with microcracks load-induced anisotropy. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 31, n° 2, pp. 155-171.
- H. **Horii** & S. **Nemat-Nasser** (1985) : Compression-induced microcrack growth in brittle solids : axial splitting and shear failure. *J. Geophys. Res.*, vol. 90, n° B4, pp. 3105-3125.
- H. **Horii** & S. **Nemat-Nasser** (1986) : Brittle failure in compression : splitting, faulting and brittle-ductile transition. *Philos. Trans. R. Soc. (London)*, Series A, vol. 319, pp. 337-374.
- R. **Houppert** & F. **Hommand-Etienne** (1980) : Comportement mécanique et structure et roche. *C.R. 15^{ème} coll. du groupe français de rhéologie*, Paris.
- J. C. **Jaeger** & N. G. W. **Cook** (1979) : Fundamentals of rock mechanics. 3rd edition, Chapman and Hall, London, U. K..
- J. W. **Ju** (1991) : On two-dimensional self-consistent micromechanical damage models for brittle solids. *Int. J. Solids Structures*, vol. 27, n° 2, pp. 227-258.

- J.W. **Ju** (1996) : On micromechanical evolutionary damage models for polycrystalline ceramics. *Int. J. Damage Mech.*, vol. 5, pp. 113-137.
- J. W. **Ju** & X. **Lee** (1991) : Micromechanical damage models for brittle solids, part I : tensile loadings. *J. Eng. Mech.* vol. 117, pp. 1495-1514.
- M. **Kachanov** (1982a) : A microcrack model of rock inelasticity. Part I : Frictional sliding on microcracks. *Mech. Mater.* vol. 1, pp. 19-27.
- M. **Kachanov** (1982b) : A microcrack model of rock inelasticity. Part II : Propagation of microcracks. *Mech. Mater.* vol. 1, pp. 29-41.
- M. **Kachanov** (1992) : Effective elastic properties of cracked solids : Critical review of some basic concepts, *Appl. Mech. Review*, vol. 45, n° 8, pp. 304-335.
- M. **Kachanov** (1993a) : On the effective moduli of solids with cavities and cracks. *Int. J. Fract.*, vol. 59 pp. R17 - R21.
- M. **Kachanov** (1993b) : Elastic solids with many cracks and related problems. In : J.W. *Hutchinson* & T. Y. *Wu* (eds), *Advances in Applied Mechanics*, pp. 259-445, Academic Press.
- M. F. **Kanninen** & C. H. **Popelar** (1985) : *Advanced fracture mechanics*. Oxford University Press, New York and Clarendon Press, Oxford.
- J.M. **Kemeny** & N.G.W. **Cook** (1987) : Micromechanics of deformation in rocks. In : *constitutive laws for engineering materials*, pp. 155-188.
- J.M. **Kemeny** & N.G.W. **Cook** (1991) : Crack models for the failure of rocks in compression. In : *Toughening Mechanisms in Quasi-Brittle Materials*, ed. S. P. Shah, pp. 879-887.
- R. **Khazraei** (1995) : Etude expérimentale et modélisation de l'endommagement anisotrope des roches fragiles. *Thèse de doctorat*, Université Lille I.
- D. **Kondo** (1989) : Modélisation du comportement des roches par la mécanique linéaire de la rupture : application à la stabilité des ouvrages souterrains. *Thèse de Doctorat*, Université de Lille I.
- D. **Kondo**, V. **Renaud** & J.-F. **Shao** (1997) : Modélisations à l'échelle mésoscopique de l'endommagement des géomatériaux : application au comportement d'un grès. In : *Ouvrages, géomatériaux*, dir. C. Petit, G. Pijaudier-Cabot, J.-M. Reynouard. - ed. Hermès, 1997 pp. 319-336.
- D. **Krajcinovic** (1997) : *Damage Mechanics*, North Holland, Amsterdam, The Netherlands, vol. 41.
- D. **Krajcinovic** & D. **Fanella** (1986) : A micromechanical model for concrete. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 25, pp. 585-596.
- D. **Krajcinovic** & D. **Sumarac** (1987) : Micromechanics of damage processes, In *Continuum Damage Mechanics : Theory and Applications* (edited by D. Krajcinovic & J. Lemaître, Springer, Vienna), pp. 135-194.
- D. **Krajcinovic** & A. **Stojimirovic** (1990) : Deformation processes in semi-brittle polycrystalline ceramics. *Int. J. Fract.*, vol. 42, pp. 73-86.

- R. L. **Kranz** (1983) : Microcracks in rocks : a review, *Tectonophysics*, vol. 100, pp. 449-480.
- E. **Kröner** (1977) : Bounds for effective elastic moduli of disordered materials. *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 25, pp. 137-155.
- B. R. **Lawn** (1993) : *Fracture of brittle solids*. 2nd edition Cambridge University Press.
- V. **Lazarus** (1997) : Quelques problèmes tridimensionnels de la mécanique de la rupture fragile. *Thèse de doctorat*, Université Paris VI.
- X. **Lee** & J. W. **Ju** (1991) : Micromechanical damage models for brittle solids, part II : compressive loadings. *J. Eng. Mech.* vol. 117, pp. 1515-1536.
- D. **Leguillon** & E. **Sanchez-Palencia** (1982) : On the behaviour of a cracked elastic body with (or without) friction. *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, vol. 1, n° 2, pp. 195-209.
- S. G. **Lekhnitskii** (1963) : *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, The government publishing house for technical-theoretical works, Moscow and Leningrad. Holden-Day, Inc., San Francisco, Calif.
- T. **Mura** (1987) : *Micromechanics of defects in solids*. 2nd ed., Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.
- N. I. **Muskhelishvili** (1953) : Some basic problems in the mathematical theory of elasticity. (J R M. Radok, trans.). Noordhoff, Groningen, Holland.
- L. R. **Myer**, J. M. **Kemeny**, Z. **Zheng**, R. **Suarez**, R. T. **Ewy** & N. G. W. **Cook** (1992) : Extensile cracking in porous rock under differential compressive stress, *Appl. Mech. Review*, vol. 45, n°8, pp. 263-280.
- L. R. **Myer**, J. M. **Kemeny**, N. G. W. **Cook** & Z. **Liu**, K. T. **Nihei**, (1995) : Micromechanics of non-linear macroscopic deformation and fracture of rocks under differential compression. Baker & Karahaloo (ed.). London : E & FN Spon, pp. 151-167.
- S. **Nemat-Nasser** & H. **Horii** (1982) : Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation and rockburst. *J. Geophys. Res.*, vol. 87, n° B8, pp. 6805-6821.
- S. **Nemat-Nasser** & M. **Obata** (1988) : A microcrack model of dilatancy in brittle materials. *J. Appl. Mech.*, vol. 55, pp. 24-350.
- S. **Nemat-Nasser** & M. **Hori** (1993) : *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*, North - Holland, Amsterdam.
- J. B. **Newman** & K. **Newman** (1972) : The cracking and failure of concrete under combined stresses and its implications for structural design. *The deformation and rupture of solids subjected to multiaxial stresses*, vol. 1, Int. Symp. of RILEM, Cannes, France, pp. 149-168.
- M. **Panet** (1976) : *La mécanique des roches appliquée aux ouvrages du Génie-Civil*. E.N.P.C., Paris.
- S. **Paterson** (1978) : *Experimental deformation of rocks : The brittle field*, Springer.
- S. S. **Peng** & A. M. **Johnson** (1972) : Crack growth and faulting in cylindrical specimens of Chemsford granite. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol. 9, pp. 37-86.

- G. **Pijaudier-Cabot** & N. **Burlion** (1996) : Damage and localisation in elastic materials with voids. *Mech. of Cohesive-Frictional Mat.*, vol. 1, pp. 129-144.
- W. H. **Press** & *al.* (1992) : Numerical recipes in FORTRAN : the art of scientific computing, 2nd edition, Cambridge University Press.
- J. **Qu** & J.L. **Bassani** (1989) : Finite crack on bimaterial and bicrystal interfaces, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 37, n° 4, pp. 417-433.
- S. **Ramtani** (1990) : Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral, *Thèse de Doctorat*, Université Paris VI.
- V. **Renaud** & D. **Kondo** (1994) : Numerical evaluation of effective moduli in brittle rocks with multiple interacting cracks. In *Numerical methods in geotechnical engineering*, Smith (ed.), Balkema, Rotterdam, pp. 401-407.
- V. **Renaud**, D. **Kondo** & J. P. **Henry** (1996) : Computations of effective moduli for microcracked materials : a boundary element approach, *Computational Materials Science*, vol. 5, n° 1-3, pp. 227-237.
- J. R. **Rice** (1968) : Mathematical analysis in the mechanics of fracture, in *Fracture* (edited by H. Liebowitz), vol. II, Academic Press, New York.
- T. **Sadowski** (1994) : Modelling of semi-brittle MgO ceramic behaviour under compression, *Mech. of Mater.*, vol. 18, pp. 1-16.
- C. G. **Sammis** & M. F. **Ashby** (1986) : The failure of brittle porous solids under compressive stress states, *Acta Metall.*, vol. 34, n° 3, pp. 511-526.
- C. H. **Scholz** (1990) : *The mechanics of earthquake and faulting*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Sidney.
- C. H. **Scholz** & R. **Kranz** (1974) : Notes on dilatancy recovery. *J. Geophys. Res.*, vol. 79, pp. 2132-2135.
- C. H. **Scholz**, G. **Boitnott** & S. **Nemat-Nasser** (1986) : The Bridgman ring paradox revisited. *PAGEOPH*, vol. 124, pp. 587-599.
- J. F. **Shao** & *al.* (1997) : Sub-critical damage in brittle rock around underground storage caverns, 1st *Asian rock mechanics symposium : ARMS'97, Seoul*.
- G. C. **Sih**, P. C. **Paris** & G. R. **Irwin** (1965) : On cracks in rectilinearly anisotropic bodies, *Int. J. Fracture Mech.*, vol. 1, n° 3, pp. 189-203.
- G. C. **Sih** & H. **Liebowitz** (1968) : Fracture an advanced treatise, vol. 2, Mathematical Fundamental, *Academic Press*. New York - London.
- E. **Smith** & J. T. **Barnby** (1967) : Crack nucleation in crystalline solids, *Metal Sci. J.*, vol.1, pp. 56-64.
- P. S. **Steif** (1984) : Crack extension under compressive loading. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 20, n° 3, pp. 463-473.
- A. N. **Stroh** (1954) : The formation of cracks as a result of plastic flow, *Proc. Roy. Soc., Series A*, vol. 223, pp. 404-414.

- D. **Sumarac** & D. **Krajcinovic** (1987) : A self-consistent model for microcrack-weakened solids. *Mech. Mater.*, vol. 6, pp. 39-52.
- H. **Tada** (1973) : The stress analysis of cracks handbook. *Del Research Corp.*, Hellertown, Paris.
- P. **Tapponier** & W. F. **Brace** (1976) : Development of stress-induced microcracks in Westerly granite. *Int. J. Rock Min. Sci.*, vol. 13, pp. 103-112.
- W. R. **Wawersik** & W. F. **Brace** (1971) : Post failure behaviour of a granite and diabase. *Rock Mech.*, vol. 3, pp. 61-85.
- T. F. **Wong** (1982) : Micromechanics of faulting in westerly granite. *Int. J. Rock mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.*, vol. 19, pp. 49-64.
- T. F. **Wong** (1985) : Geometric probability approach to the characterization and analysis of microcracking in rocks. *Mech. Mater.*, vol. 4, pp. 261-276.
- S. **Wu** & J. **Niu** (1994) : A theoretical investigation into the nucleation of stable crack precursors in polycrystalline ice. *Int. J. of Fracture*, vol. 68, pp. 151-181.
- S. **Wu** & J. **Niu** (1995a) : Micromechanical prediction of the compressive failure of ice : model development. *Mech. Mater.*, vol. 20, pp. 9-32.
- S. **Wu** & J. **Niu** (1995b) : Micromechanical prediction of the compressive failure of ice : numerical simulations. *Mech. Mater.*, vol. 20, pp. 33-58.
- S. **Wu** & S. **Shyam Sunder** (1992a) : Elastic anisotropy and micro-damage processes in polycrystalline ice. Part I : theoretical formulation. *Int. J. of Fracture*, vol. 55, pp. 223-243.
- S. **Wu** & S. **Shyam Sunder** (1992b) : Elastic anisotropy and micro-damage processes in polycrystalline ice. Part II : numerical simulations. *Int. J. of Fracture*, vol. 55, pp. 375-396.
- H. P. **Yin** & A. **Ehrlacher** (1993) : Variational approach of displacement discontinuity method and application to crack problem. *Int. J. of Fracture*, vol. 63, pp. 135-153.
- H. P. **Yin** & A. **Ehrlacher** (1996) : Size and density influence on overall moduli of finite media with cracks. *Mech. Mater.*, vol. 23, pp. 287-294.
- H. **Yoshida** & H. **Horii** (1992) : A micromechanics-based model for creep behavior of rock, *Appl. Mech. Review*, vol. 45, n° 8, pp. 294-303.
- Y. B. **Zaitsev** (1983) : Crack propagation in a composite material. in F. H. Wittmann, ed., *Fracture mechanics of concrete*, Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, pp. 31-60.
- M. **Zoback** & J. **Byerlee** (1975) : The effect of cyclic differential stress on dilatancy in westerley granite under uniaxial and biaxial conditions. *J. Geophys. Res.*, vol. 80, pp. 1526-1530.

Publications significatives liées à cette thèse

- D. **Kondo** & V. **Renaud** (1995) : Effets des interactions entre défauts sur les propriétés effectives des matériaux microfissurés. 13^{ème} Congrès Français de Mécanique, Sept. 1995, Strasbourg, vol. 1, pp. 317-320.
- D. **Kondo** & V. **Renaud** (1996) : Modélisation à l'échelle mésoscopique de l'endommagement fragile des roches et des bétons : application au comportement en compression d'un grès - Géo 96, 3^{ème} réunion annuelle, Aussois.
- D. **Kondo**, V. **Renaud** & J.-F. **Shao** (1997) : Modélisations à l'échelle mésoscopique de l'endommagement des géomatériaux : application au comportement d'un grès. In : *Ouvrages, géomatériaux*, dir. C. Petit, G. Pijaudier-Cabot, J.-M. Reynouard. - ed. Hermès, 1997 pp. 319-336.
- D. **Kondo** & V. **Renaud** (1997) : Formulation incrémentale à l'échelle mésoscopique d'un modèle d'endommagement : application à un grès - Géo 97, 4^{ème} réunion annuelle, Aussois.
- V. **Renaud** & D. **Kondo** (1994) : Numerical evaluation of effective moduli in brittle rocks with multiple interacting cracks. In *Numerical methods in geotechnical engineering*, Smith (ed.), Balkema, Rotterdam, pp. 401-407.
- V. **Renaud**, D. **Kondo** & J. P. **Henry** (1996) : Computations of effective moduli for microcracked materials : a boundary element approach, *Computational Materials Science*, vol. 5, n° 1-3, pp. 227-237.
- V. **Renaud** & D. **Kondo** (1995) : Un modèle mésomécanique d'endommagement pour les géomatériaux fragiles - Géo 95, 2^{ème} réunion annuelle, Aussois.
- V. **Renaud** & D. **Kondo** (1997) : Calibration and numerical validation of a micromechanical damage model. NUMOG VI, Montréal, pp. 135-140, Pietruszczak & Pande (eds), Balkema, Rotterdam.
- V. **Renaud** (1997) : Approche mésomécanique de l'endommagement anisotrope d'un grès. E.C. 97, Mai 1997, Strasbourg, pp. 165-172.
- V. **Renaud** & D. **Kondo** (1997) : Formulation incrémentale d'un modèle mésomécanique et application à un grès, *Réunion annuelle du Groupe de Réflexion sur l'Endommagement (MECAMAT), Marne la Vallée*, pp. 16-26.

ANNEXES

Annexe 1 . Calcul analytique des compliances effectives dans le cas 2-D.

L'objet de cette première annexe, attachée au second chapitre du mémoire, est de synthétiser un certain nombre de résultats sur la compliance de milieux contenant des mésolfissures. Le cas où certaines mésolfissures peuvent se fermer est particulièrement examiné.

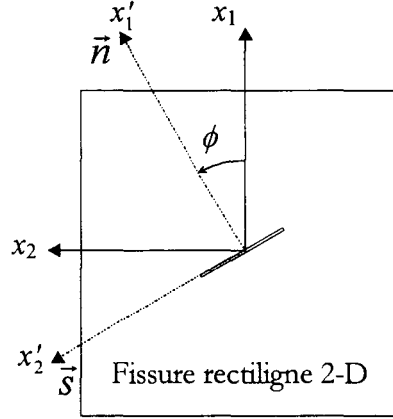


Figure A1.1 : Repère local de la mésolfissure rectiligne.

Dans le cas où la matrice est à comportement élastique linéaire de compliance $\bar{\bar{S}}^0$, les déformations totales sont liées aux contraintes par la relation : $\bar{\varepsilon} = (\bar{\bar{S}}^0 + \bar{\bar{S}}^d) : \bar{\sigma} = \bar{\bar{S}} : \bar{\sigma}$.

Dans le repère direct local $(\bar{n}, \bar{s})$ (voir figure A1.1), n' est de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et D' de la forme $\begin{pmatrix} D_n' \\ D_s' \end{pmatrix}$, alors en développant l'équation $\bar{\varepsilon}_d = \frac{1}{2A} \sum_k \left[\int_a (D \otimes n + n \otimes D) da \right]^{(k)}$:

$$\frac{1}{2A} (D^{(k)'} \otimes n^{(k)'} + n^{(k)'} \otimes D^{(k)'}) = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} D_n^{(k)'} & 0 \\ D_s^{(k)'} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} D_n^{(k)'} & D_s^{(k)'} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou encore dans le repère global :

$$\bar{\varepsilon}^d = \bar{\bar{S}}^d : \bar{\sigma} = \frac{1}{A} \sum_k \left[\int_{-a^{(k)}}^{a^{(k)}} \begin{pmatrix} \cos \phi^{(k)} (D_n^{(k)'} \cos \phi^{(k)} + D_s^{(k)'} \sin \phi^{(k)}) \\ \sin \phi^{(k)} (D_n^{(k)'} \sin \phi^{(k)} - D_s^{(k)'} \cos \phi^{(k)}) \\ D_s^{(k)'} \cos 2\phi^{(k)} - D_n^{(k)'} \sin 2\phi^{(k)} \end{pmatrix} dx \right] \quad (A1.1)$$

Les discontinuités de déplacement d'une fissure k ouverte (en mode I ou mixte), de demi-longueur $a^{(k)}$ dans un solide homogène anisotrope, sont reliées aux contraintes moyennes par (Lekhtnitskii, 1963 ; Sih et al., 1965 ; Horii et Nemat-Nasser, 1983) :

$$D_i^{(k)} = 2\sqrt{a^{(k)^2} - x'^2} B_{ij}^{(k)} \bar{\sigma}'_{1j} \quad (A1.2)$$

La matrice de transformation de déplacement B dépend des solutions de l'équation caractéristique associée (A1.3) à une équation aux dérivées partielles de F d'ordre 4. Lekhnitskii (1963) a montré que la fonction de contraintes F correspondant au problème d'élasticité vérifiait cette équation.

$$\bar{S}'_{11} - (\bar{S}'_{13} + \bar{S}'_{31})\lambda' + (\bar{S}'_{12} + \bar{S}'_{21} + \bar{S}'_{33})\lambda'^2 - (\bar{S}'_{23} + \bar{S}'_{32})\lambda'^3 + \bar{S}'_{22}\lambda'^4 = 0. \quad (A1.3)$$

Les racines de l'équation caractéristique dépendent de l'orientation ϕ des fissures. Lekhnitskii a également démontré que les racines complexes $\lambda'(\phi)$ peuvent se mettre sous la forme :

$$\lambda'(\phi) = \frac{\lambda'(0)\cos\phi - \sin\phi}{\cos\phi + \lambda'(0)\sin\phi}, \lambda'(0) \text{ pouvant être exactement évalué.} \quad (A1.4)$$

En fait, nous avons besoin des parties réelles et imaginaires positives : $\lambda_j'(0) = r_j'(0) \pm i s_j'(0)$, $j=1, 2$. Pour tout ce qui suit, posons $s_j'(\phi) = s_j'$ et $r_j'(\phi) = r_j'$. Dans le cas particulier de l'isotropie initiale, l'équation devient une équation bicarrée, car les termes en λ' et λ'^3 deviennent nuls ($\bar{S}'_{13} = \bar{S}'_{31} = \bar{S}'_{23} = \bar{S}'_{32} = 0$). Il est alors facile d'en tirer des relations sur les racines, notamment :

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i'(0) = 0 \text{ ce qui impose } r_1'(0) = -r_2'(0) \text{ et } s_1'(0) = s_2'(0).$$

Ce qui donne :

$$r_1'(0) = -r_2'(0) = \sqrt{\frac{\frac{\bar{S}'_{11}}{\bar{S}'_{22}} - \frac{\bar{S}'_{12} + \bar{S}'_{21} + \bar{S}'_{33}}{2\bar{S}'_{22}}}{2}} \text{ et } s_1'(0) = s_2'(0) = \sqrt{\frac{\frac{\bar{S}'_{11}}{\bar{S}'_{22}} + \frac{\bar{S}'_{12} + \bar{S}'_{21} + \bar{S}'_{33}}{2\bar{S}'_{11}}}{2}}.$$

Cas des fissures ouvertes :

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} s'_1(r'^2_2 + s'^2_2) + s'_2(r'^2_1 + s'^2_1) & r'_1 s'_2 + r'_2 s'_1 \\ \text{symétrique} & s'_1 + s'_2 \end{bmatrix} \bar{S}'_{22} \quad (A1.5)$$

Avec une hypothèse d'isotropie initiale, on a : $\forall \phi : r'_1 = -r'_2$ et $s'_1 = s'_2$; ce qui implique que $B^{(k)}_{12} = B^{(k)}_{21} = 0$ (découplage entre les modes d'ouverture et de glissement) et :

$$B^{(k)} = 2s' \begin{bmatrix} r'^2 + s'^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{S}'_{22} \quad (A1.6)$$

Sachant que pour une mésolfissure, $\bar{\varepsilon}^d = \frac{1}{A} \int_{-a^{(k)}}^{a^{(k)}} \begin{pmatrix} D_n^{(k)}, n_1^{(k)}, \\ D_t^{(k)}, n_2^{(k)}, \\ \frac{1}{2}(D_n^{(k)}, n_2^{(k)}, + D_t^{(k)}, n_1^{(k)},) \end{pmatrix} dx = \bar{\bar{S}}^d \bar{\sigma}^d$

avec : $n_1^{(k)'} = 1$ et $n_2^{(k)'} = 0$, on obtient :

$$\bar{\bar{S}}^{d(k')} = \frac{\pi a^{(k)2}}{A} \begin{bmatrix} B_{11}^{(k')} & 0 & B_{12}^{(k')} \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{21}^{(k')} & 0 & B_{22}^{(k')} \end{bmatrix} \quad (A1.7)$$

La compliance globale s'obtient par sommation sur le nombre total N de mésolfissures après avoir effectué le changement de repère adéquat (du repère local au repère global) :

$\bar{\bar{S}}^d = \sum_{k=1}^N \tau^{(k)} \bar{\bar{S}}^{d(k')} g^{(k)}$. En développant ces calculs, nous obtenons :

$$\bar{\bar{S}}^d = \pi \omega_0 \begin{bmatrix} \bar{\bar{S}}_{11}^d & \bar{\bar{S}}_{12}^d & \bar{\bar{S}}_{13}^d \\ \text{symétrique} & \bar{\bar{S}}_{22}^d & \bar{\bar{S}}_{23}^d \\ \text{symétrique} & \text{symétrique} & \bar{\bar{S}}_{33}^d \end{bmatrix} \quad (A1.8)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \bar{\bar{S}}_{22}^d = \sin^2 \phi \left[\cos^2 \phi \langle B_{22}^{(k)'} \rangle + \sin^2 \phi \langle B_{11}^{(k)'} \rangle \right] \\ \bar{\bar{S}}_{12}^d = \frac{\sin^2 2\phi}{4} \left[\langle B_{11}^{(k)'} \rangle - \langle B_{22}^{(k)'} \rangle \right] \\ \bar{\bar{S}}_{23}^d = -\frac{\sin 2\phi}{2} \left[\cos 2\phi \langle B_{22}^{(k)'} \rangle + 2 \sin^2 \phi \langle B_{11}^{(k)'} \rangle \right] \\ \bar{\bar{S}}_{11}^d = \cos^2 \phi \left[\sin^2 \phi \langle B_{22}^{(k)'} \rangle + \cos^2 \phi \langle B_{11}^{(k)'} \rangle \right] \\ \bar{\bar{S}}_{13}^d = \frac{\sin 2\phi}{2} \left[\cos 2\phi \langle B_{22}^{(k)'} \rangle - 2 \cos^2 \phi \langle B_{11}^{(k)'} \rangle \right] \\ \bar{\bar{S}}_{33}^d = \cos^2 2\phi \langle B_{22}^{(k)'} \rangle + \sin^2 2\phi \langle B_{11}^{(k)'} \rangle \end{cases}$$

Annexe 1.1. Hypothèse de non-interaction entre mésolfissures (N.I.C.)

La non-interaction entre les mésolfissures implique que l'on peut utiliser les solutions d'une mésolfissure en milieu infini. Celles-ci sont évaluées à partir des composantes de B . L'hypothèse d'isotropie initiale étant faite, on a : $r_1' = r_2' = 0$ et $s_1' = s_2' = 1$. Ainsi :

$$B_{22}' = 2\bar{\bar{S}}_{22}' = 2\bar{\bar{S}}_{22}^0 = 2 \frac{1 - \nu_0^2}{E_0}.$$

Annexe 1.1.1. Cas des fissures ouvertes

La relation (A1.5) s'écrit : $B^{(k)} = 2 \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} [I]$ et (A1.8) prend la forme :

$$\bar{\bar{S}}^d = 2\pi \omega_0 \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & 0 & -\frac{\sin 2\phi}{2} \\ 0 & \sin^2 \phi & -\frac{\sin 2\phi}{2} \\ -\frac{\sin 2\phi}{2} & -\frac{\sin 2\phi}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (A1.9)$$

Ce résultat concerne une famille de fissures parallèles d'orientation ϕ . Le cas d'une distribution aléatoire de fissures est obtenu par intégration sur ϕ de (A1.9). La compliance globale est alors donnée par :

$$\bar{\bar{S}} = \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \begin{bmatrix} 1 + \pi \omega_0 & \frac{\nu_0}{\nu_0 - 1} & 0 \\ \frac{\nu_0}{\nu_0 - 1} & 1 + \pi \omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{1 - \nu_0} + 2\pi \omega_0 \end{bmatrix} \quad (A1.10)$$

Annexe 1.1.2. Cas des fissures fermées

Pour des mésosfissures qui se ferment, nous reprenons les résultats fournis par Horii et Nemat-Nasser (1983), en y apportant quelques simplifications. Les valeurs des compliances peuvent être affectées par les trajets de sollicitations suivis. Les résultats que nous présentons négligent cet aspect car les applications réalisées (compression simple) respectent cette hypothèse. Les contraintes transmises sur la fissure sont supposées constantes (Bui, 1978) et le frottement de type Mohr-Coulomb. Dans ce cas, les discontinuités de déplacement tangentielles, relatives à l'axe 2, sont données par l'expression suivante :

$$D_2^{(k)'} = 2\sqrt{a^{(k)2} - x'^2} \bar{\bar{S}}_{22}' \left[(r_1' s_2' + r_2' s_1') (\sigma_{11}^{(k)'} - \sigma_{11}^{c(k)'}) + (s_1' + s_2') (\sigma_{12}^{(k)'} + \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)'}) \sigma_{11}^{c(k)'}) \right] \quad (A1.11)$$

$$\text{avec } \sigma_{11}^{c(k)'} = \frac{[s_1' (r_2'^2 + s_2'^2) + s_2' (r_1'^2 + s_1'^2)] \sigma_{11}^{(k)'} + (s_1' r_2' + s_2' r_1') \sigma_{12}^{(k)'}}{s_1' (r_2'^2 + s_2'^2) + s_2' (r_1'^2 + s_1'^2) - \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)'}) (s_1' r_2' + s_2' r_1')}$$

μ est le coefficient de frottement.

Nous avons, après un certain nombre de développements et quelques simplifications (Kondo, Renaud et Shao, 1997), montré que les seuls termes non nuls du tenseur de compliances s'écrivent :

$$\bar{\bar{S}}_{33}^{d'(k)} = \pi a^{(k)^2} \frac{s_1' s_2' [(s_1' + s_2')^2 + (r_1' - r_2')^2]}{s_1' (r_2'^2 + s_2'^2) + s_2' (r_1'^2 + s_1'^2) - \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)'}) (s_1' r_2' + s_2' r_1')} \bar{\bar{S}}_{22}' \text{ et } \bar{\bar{S}}_{31}^{d'(k)} = \bar{\bar{S}}_{33}^{d'(k)} \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)'})$$

Nous pouvons déduire de ce résultat la matrice de transformation de déplacements $B^{(k)'} :$

$$B^{(k)'} = \bar{\bar{S}}_{22}' \frac{s_1' s_2' [(s_1' + s_2')^2 + (r_1' - r_2')^2]}{s_1' (r_2'^2 + s_2'^2) + s_2' (r_1'^2 + s_1'^2) - \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)'}) (s_1' r_2' + s_2' r_1')} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)'}) & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A1.12})$$

Nous rappelons que les quantités r_i' et s_i' dépendent de l'orientation de la mésosfissure. Nous pouvons noter que cette matrice est non-symétrique sauf dans le cas où le frottement est nul. Dans ce cas, seul le seul terme de compliance non-nul dans le repère de la fissure est $\bar{\bar{S}}_{33}^{d'(k)}$. Et la

compliance en repère local due à la $k^{\text{ème}}$ fissure s'écrit : $\bar{\bar{S}}^{d(k')} = \frac{\pi a^{(k)^2}}{A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{21}^{(k')} & 0 & B_{22}^{(k')} \end{bmatrix}$

Pour une famille de N fissures parallèles, on a en repère global :

$$\bar{\bar{S}}^d = \pi \omega_0 \sum_{k=1}^N g^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)'}) & 0 & 1 \end{bmatrix} g B_{22}^{(k')} \quad (\text{A1.13})$$

C'est à dire $\bar{\bar{S}}^d(\phi) = \pi \omega_0 \begin{bmatrix} \sin \phi \cos^2 \phi & -\cos \phi \sin^2 \phi & -\frac{\sin 2\phi}{2} \\ -\sin \phi \cos^2 \phi & \cos \phi \sin^2 \phi & \frac{\sin 2\phi}{2} \\ -\cos 2\phi \cos \phi & \cos 2\phi \sin \phi & \cos 2\phi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b(\phi) \\ a(\phi) \\ c(\phi) \end{bmatrix} B_{22}^{(k')}(\phi)$

(A1.14)

avec $\begin{cases} a(\phi) = \cos \phi + \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)'}) \sin \phi \\ b(\phi) = \sin \phi - \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)'}) \cos \phi \\ c(\phi) = \cos 2\phi + \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)'}) \sin 2\phi \end{cases}$

Ces relations sont valables pour des fissures parallèles dans le cas général anisotrope. l'hypothèse d'isotropie du milieu et de non-interaction entre fissures implique $B_{22}^{(k')} = 2 \frac{1 - \nu_0^2}{E_0}$ et donc l'expression suivante pour la compliance en repère global :

$$\bar{\bar{S}} = \frac{1-\nu_0^2}{E_0} \begin{bmatrix} 1+2\pi\omega_0 b(\phi)\sin\phi\cos^2\phi & \frac{\nu_0}{\nu_0-1}-2\pi\omega_0 a(\phi)\cos\phi\sin^2\phi & -\pi\omega_0 c(\phi)\sin 2\phi \\ \frac{\nu_0}{\nu_0-1}-2\pi\omega_0 b(\phi)\sin\phi\cos^2\phi & 1+2\pi\omega_0 a(\phi)\cos\phi\sin^2\phi & \pi\omega_0 c(\phi)\sin 2\phi \\ -2\pi\omega_0 b(\phi)\cos 2\phi\cos\phi & 2\pi\omega_0 a(\phi)\cos 2\phi\sin\phi & \frac{2}{1-\nu_0}+2\pi\omega_0 c(\phi)\cos 2\phi \end{bmatrix} \quad (\text{A1.15})$$

Dans le cas d'une distribution aléatoire de fissures, l'intégration de ce résultat (des fissures parallèles) sur le domaine d'activation du glissement donne :

$$\bar{\bar{S}} = \frac{1}{\pi} \left[\int_{\text{Arctan}\mu}^{\frac{\pi}{2}} \bar{\bar{S}}(\phi) d\phi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\text{Arctan}\mu} \bar{\bar{S}}(\phi) d\phi \right] \quad (\text{A1.16})$$

$$\bar{\bar{S}}^d = \frac{\omega_0}{2} \frac{1-\nu_0^2}{E_0} \begin{pmatrix} \gamma & -\delta & 0 \\ -\gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 4\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\bar{S}} = \frac{1+\nu_0}{2E_0} \begin{pmatrix} (1-\nu_0)(2+\gamma\omega_0) & -2\nu_0-(1-\nu_0)\delta\omega_0 & 0 \\ -2\nu_0-(1-\nu_0)\gamma\omega_0 & (1-\nu_0)(2+\delta\omega_0) & 0 \\ 0 & 0 & 4(1+\gamma\omega_0(1-\nu_0)) \end{pmatrix} \quad (\text{A1.17})$$

$$\text{en posant } \delta = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\mu + \frac{3\mu}{1+\mu^2} \text{ et } \gamma = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\mu - \frac{\mu}{1+\mu^2}.$$

Conclusion : La présence du frottement induit, même pour une distribution isotrope de mésosfissures une anisotropie ainsi qu'une perte de symétrie dans le tenseur de compliances. L'isotropie du tenseur n'est obtenue que pour des mésosfissures lubrifiées ($\mu = 0$).

Annexe 1.2. Méthode différentielle

Cette méthode exploite les résultats de la méthode précédente (N.I.C.), mais l'analyse est de type incrémental : la densité est augmentée par incrément de $d\omega$ au cours duquel les propriétés effectives sont recalculées. La traduction de cette méthode conduit à une équation différentielle du

$$1^{\text{er}} \text{ degré (à partir de } \frac{\bar{\bar{S}}_{11}(\omega)}{\bar{\bar{S}}_{11}^0} = 1 + \pi\omega \text{)} : \frac{\bar{\bar{S}}_{11}(\omega) + d\bar{\bar{S}}_{11}(\omega)}{\bar{\bar{S}}_{11}(\omega)} = 1 + \pi d\omega.$$

La condition initiale étant $\bar{\bar{S}}_{11}(0) = \bar{\bar{S}}_{11}^0$, la solution s'écrit : $\bar{\bar{S}}_{11} = e^{\pi\omega} \bar{\bar{S}}_{11}^0$. En appliquant cette technique aux autres termes de la compliance, nous obtenons les résultats suivants :

Annexe 1 .2.1. Cas des fissures ouvertes

- fissures parallèles $\frac{\bar{\bar{S}}}{\bar{S}^0} = \begin{bmatrix} e^{2\pi\omega \cos^2 \phi} & 1 & 1 \\ 1 & e^{2\pi\omega \sin^2 \phi} & 1 \\ 1 & 1 & e^{\pi\omega(1-\nu)} \end{bmatrix}$ (A1.18)

- fissures aléatoires $\frac{\bar{\bar{S}}}{\bar{S}^0} = \begin{bmatrix} e^{\pi\omega} & 1 & 1 \\ 1 & e^{\pi\omega} & 1 \\ 1 & 1 & e^{\pi\omega(1-\nu)} \end{bmatrix}$ (A1.19)

Annexe 1 .2.2. Cas des fissures fermées

- fissures parallèles $\frac{\bar{\bar{S}}}{\bar{S}^0} = \begin{bmatrix} e^{2\pi\omega \cos^2 \phi \sin \phi b(\phi)} & e^{2\pi\omega \frac{1-\nu_0}{\nu_0} \sin^2 \phi \cos \phi a(\phi)} & 1 \\ e^{2\pi\omega \frac{1-\nu_0}{\nu_0} \cos^2 \phi \sin \phi b(\phi)} & e^{2\pi\omega \sin^2 \phi \cos \phi a(\phi)} & 1 \\ 1 & 1 & e^{\pi\omega(1-\nu_0) \cos 2\phi c(\phi)} \end{bmatrix}$ (A1.20)

- fissures aléatoires $\frac{\bar{\bar{S}}}{\bar{S}^0} = \begin{bmatrix} e^{\frac{\omega\gamma}{2}} & e^{\frac{\omega\gamma(\nu_0-1)}{2\nu_0}} & 1 \\ e^{-\frac{\omega\gamma(\nu_0-1)}{2\nu_0}} & e^{\frac{\omega\gamma}{2}} & 1 \\ 1 & 1 & e^{\omega(1-\nu_0)(\beta-(1-\mu^2)\alpha)} \end{bmatrix}$ (A1.21)

Annexe 1 .3. Méthode autocohérente (M.A.C.)

On suppose dans la méthode autocohérente que chaque fissure se trouve dans le milieu effectif recherché. Le calcul est du même type que dans l'hypothèse de non interaction, mais nécessite un calcul itératif : $\bar{\bar{S}}_i^d = f\left(\bar{\bar{S}}_{i-1}^d + \bar{S}^0\right)$.

Annexe 1 .3.1. Cas des fissures ouvertes

Pour une distribution aléatoire de fissures, il suffit de faire la moyenne suivante :

$$\bar{\bar{S}}^d(\bar{S}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \bar{\bar{S}}^d(\phi, \bar{S}) d\phi \quad (A1.22)$$

Le caractère aléatoire de la distribution conduit à $B_{22} = B_{11}$. Il est alors possible de trouver une expression analytique de (A1.18) puisque r' et s' sont dans ce cas indépendants de ϕ ($r' = 0$ et $s' = 1$) :

$$\bar{\bar{S}}^d = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi \omega_0 \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & 0 & -\sin \phi \cos \phi \\ 0 & \sin^2 \phi & -\sin \phi \cos \phi \\ -\sin \phi \cos \phi & -\sin \phi \cos \phi & 1 \end{bmatrix} 2\bar{\bar{S}}'_{22}(\phi) d\phi \quad (\text{A1.23})$$

$$\text{avec } \bar{\bar{S}}'_{22}(\phi) = \cos^4 \phi \bar{\bar{S}}_{22} + \sin^4 \phi \bar{\bar{S}}_{11} + \frac{\sin^2 2\phi}{4} (2\bar{\bar{S}}_{12}^0 + \bar{\bar{S}}_{33})$$

$$\text{En intégrant : } \bar{\bar{S}}^d = \frac{\pi \omega_0}{8} (6\bar{\bar{S}}_{22} + \bar{\bar{S}}_{33} + 2\bar{\bar{S}}_{12}^0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

En effectuant n fois $\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{S}}^0 + \bar{\bar{S}}^d(\bar{\bar{S}})$ et en posant $x = \pi \omega_0$, nous obtenons :

$$\bar{\bar{S}}_{11} = \bar{\bar{S}}_{22} = \bar{\bar{S}}_{22}^0 (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n) \text{ et } \bar{\bar{S}}_{33} = \bar{\bar{S}}_{33}^0 [1 + (1 - \nu)(x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)]$$

Nous pouvons alors reconnaître des développements limités en séries connus :

$$\frac{\bar{\bar{S}}_{22}}{\bar{\bar{S}}_{22}^0} = \frac{E_0}{E} = \frac{1}{1 - \pi \omega_0} \text{ et } \frac{\bar{\bar{S}}_{33}}{\bar{\bar{S}}_{33}^0} = \frac{G_0}{G} = \frac{1 - \nu_0 \pi \omega_0}{1 - \pi \omega_0}$$

Finalement, la compliance globale totale (avec la M.A.C.) en déformation plane pour une distribution aléatoire est :

$$\bar{\bar{S}} = \frac{1 + \nu_0}{E_0(1 - \pi \omega_0)} \begin{bmatrix} 1 - \nu_0 & -\nu_0(1 - \pi \omega_0) & 0 \\ -\nu_0(1 - \pi \omega_0) & 1 - \nu_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 - \nu_0 \pi \omega_0) \end{bmatrix} \quad (\text{A1.24})$$

Annexe 1.3.2. Cas des fissures fermées

- fissures parallèles : de même que précédemment, nous intégrons le résultat des fissures parallèles sur le domaine d'activation du glissement qui correspond à un chargement triaxial axisymétrique :

$$\bar{\bar{S}}^d(\bar{\bar{S}}) = \frac{1}{\pi} \left[\int_{\text{Arctan } \mu}^{\frac{\pi}{2}} \bar{\bar{S}}^d(\phi, \bar{\bar{S}}) d\phi - \int_{-\text{Arctan } \mu}^{-\frac{\pi}{2}} \bar{\bar{S}}^d(\phi, \bar{\bar{S}}) d\phi \right] \quad (\text{A1.25})$$

Il n'y a pas de solution explicite dans ce cas.

• fissures aléatoires : dans le cas des fissures lubrifiées ($\mu = 0$), il est possible d'effectuer le même raisonnement que pour les fissures ouvertes en remplaçant (A1.9) par (A1.15) et $\bar{S}_{12}^0$ par $\bar{S}_{12}$ dans (A1.23). En posant $x = \frac{\pi\omega_0}{4}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\bar{S}_{11} = \bar{S}_{22} = \bar{S}_{22}^0(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n), \quad \bar{S}_{12} = \bar{S}_{21} = \bar{S}_{12}^0 - x(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)\bar{S}_{11}^0 \text{ et} \\ \bar{S}_{33} = \bar{S}_{33}^0 + 4x(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)\bar{S}_{11}^0\end{aligned}$$

Nous pouvons alors reconnaître des développements limités en séries connus :

$$\frac{\bar{S}_{11}}{\bar{S}_{11}^0} = \frac{\bar{S}_{22}}{\bar{S}_{22}^0} = \frac{E_0}{E} = \frac{1}{1 - \frac{\pi\omega_0}{4}}, \quad \frac{\bar{S}_{12}}{\bar{S}_{12}^0} = \frac{\bar{S}_{21}}{\bar{S}_{21}^0} = 1 + \frac{\pi\omega_0(1 - \nu_0)}{(4 - \pi\omega_0)\nu_0} \text{ et } \frac{\bar{S}_{33}}{\bar{S}_{33}^0} = \frac{G_0}{G} = 1 + \frac{2\pi\omega_0(1 - \nu_0)}{4 - \pi\omega_0}.$$

Finalement, la compliance globale totale (avec la M.A.C.) en déformation plane pour une distribution aléatoire de mésolfissures est :

$$\bar{S} = \frac{1 + \nu_0}{E_0(4 - \pi\omega_0)} \begin{bmatrix} 1 - \nu_0 & -\pi\omega_0(1 - 2\nu_0) - 4\nu_0 & 0 \\ -\pi\omega_0(1 - 2\nu_0) - 4\nu_0 & 1 - \nu_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(\pi\omega_0(1 - 2\nu_0) + 4) \end{bmatrix} \quad (\text{A1.26})$$

Ce résultat ne peut être obtenu pour $\mu \neq 0$.

Annexe 1.4. Calcul des compliances à l'aide du modèle numérique

Le modèle numérique fournit comme résultats les discontinuités de déplacement qui ne varient plus forcément de manière parabolique le long de la mésolfissure. Elles sont par exemple distribuées comme sur figure A1.2.

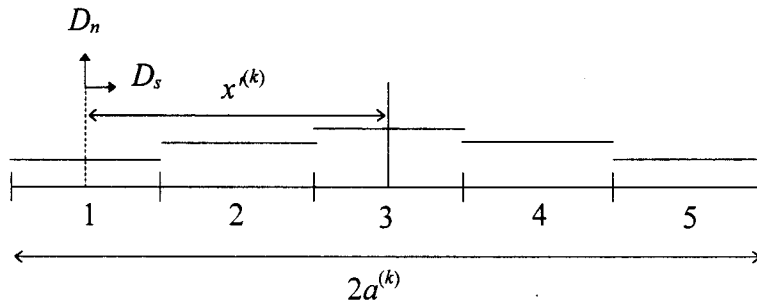


Figure A1.2 : Schéma de distribution des discontinuités de déplacements pour une fissure discrétisée en 5 éléments.

La relation (A1.2) doit donc être modifiée en conséquence :

$$\begin{cases} D_n^{(k)} = 2a^{(k)} [B_{11}'\sigma'_{11} + B_{12}'\sigma'_{12}]^{(k)} \text{ ou } 0 \text{ (en fermeture)} \\ D_s^{(k)} = 2a^{(k)} [B_{21}'\sigma'_{11} + B_{22}'\sigma'_{12}]^{(k)} \end{cases} \quad (\text{A1.27})$$

$$\text{avec } \begin{cases} \sigma'_{11}^{(k)} = \sigma_{11} \cos^2 \phi + \sigma_{22} \sin^2 \phi - \sigma_{12} \sin 2\phi \\ \sigma'_{12}^{(k)} = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \frac{\sin 2\phi}{2} + \sigma_{12} \cos 2\phi \end{cases} \quad \text{lorsque les contraintes sont à l'infini.}$$

B' est la matrice de transformation de déplacement : c'est l'inconnue à déterminer puisqu'avec la relation (2.13), nous pouvons calculer la compliance d'une fissure en repère local due à l'endommagement. Il suffira ensuite d'effectuer le passage du repère local au global, puis de sommer sur les N fissures.

$$\text{donc finalement : } \bar{\bar{S}}^{d(k)} = \frac{4a^{(k)^2}}{A} \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)} & 0 & B_{12}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{21}^{(k)} & 0 & B_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \text{ et } \bar{\bar{S}}^{d(k)} = \frac{4a^{(k)^2}}{A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{21}^{(k)} & 0 & B_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.28})$$

fissure ouverte fissure fermée

Annexe 1.4.1. Cas des fissures ouvertes

En général, avec de telles méthodes numériques, une fissure est discrétisée en plusieurs éléments ce qui implique que les discontinuités normales et tangentielles, les contraintes en repère local varient le long d'une fissure ; d'où la moyenne afin d'obtenir la compliance en repère local due à l'endommagement. L'hypothèse d'isotropie initiale permet de déterminer les deux termes non nuls (diagonaux) de B' . La compliance en repère global est alors donnée par :

$$\bar{\bar{S}}^{d(k)} = \frac{4a^{(k)^2}}{A} \begin{bmatrix} \cos^2 \phi (\sin^2 \phi \langle B_{22}^{(k)} \rangle + \cos^2 \phi \langle B_{11}^{(k)} \rangle) & -\frac{\sin^2 2\phi}{4} (\langle B_{22}^{(k)} \rangle - \langle B_{11}^{(k)} \rangle) & \frac{\sin 2\phi}{2} (\cos 2\phi \langle B_{22}^{(k)} \rangle - 2\cos^2 \phi \langle B_{11}^{(k)} \rangle) \\ \text{symétrique} & \sin^2 \phi (\cos^2 \phi \langle B_{22}^{(k)} \rangle + \sin^2 \phi \langle B_{11}^{(k)} \rangle) & -\frac{\sin 2\phi}{2} (\cos 2\phi \langle B_{22}^{(k)} \rangle + 2\sin^2 \phi \langle B_{11}^{(k)} \rangle) \\ \text{symétrique} & \text{symétrique} & \cos^2 2\phi \langle B_{22}^{(k)} \rangle + \sin^2 2\phi \langle B_{11}^{(k)} \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{A1.29})$$

Des simplifications peuvent être effectuées dans certains cas particuliers (cisaillement nul, fissure normale à l'axe de chargement et $\sigma'_{22} = 0$) : cela revient à annuler les termes appropriés de la matrice B' .

Annexe 1 .4.2. Cas des fissures fermées

Sous sollicitation de compression, la fissure peut se fermer, ses lèvres ne peuvent que glisser (avec frottement) les unes par rapport aux autres. Cela signifie que la discontinuité normale est nulle, d'où : $D_s^{(k)'} = 2a^{(k)} [B_{21}' \sigma_{11}' + B_{22}' \sigma_{12}']^{(k)}$. De plus, on a la relation : $B_{21}^{(k)'} = \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)'}) B_{22}^{(k)'}$.

Finalement, en moyennant sur la longueur de la fissure, on a :

$$B_{22}^{(k)'} = \left\langle \frac{D_s^{(k)'}}{2a^{(k)} (\sigma_{12}^{(k)'} + \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)'}) \sigma_{11}^{(k)'})} \right\rangle \quad (\text{A1.30})$$

et à partir de ce moment, nous appliquons la relation (A1.14) pour calculer la compliance en repère global.

Annexe 2. Matrice de transformation de repère T pour le calcul de compliance et application dans le cas de mésosfissures fermées.

Pour obtenir T , il faut identifier les deux termes suivants $P\sigma^T P = T\tau$ (τ est en notations de Voigt alors que σ est représenté par une matrice carrée classique).

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi \cos^2 \psi & \sin^2 \phi \sin^2 \psi & \sin^2 \phi \sin 2\psi & \sin 2\phi \sin \psi & \sin 2\phi \cos \psi \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi \cos^2 \psi & \cos^2 \phi \sin^2 \psi & \cos^2 \phi \sin 2\psi & -\sin 2\phi \sin \psi & -\sin 2\phi \cos \psi \\ 0 & \sin^2 \psi & \cos^2 \psi & -\sin 2\psi & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \cos \phi \sin 2\psi & \frac{1}{2} \cos \phi \sin 2\psi & \cos \phi \cos 2\psi & -\sin \phi \cos \psi & \sin \phi \sin \psi \\ 0 & -\frac{1}{2} \sin \phi \sin 2\psi & \frac{1}{2} \sin \phi \sin 2\psi & \sin \phi \cos 2\psi & \cos \phi \cos \psi & -\cos \phi \sin \psi \\ -\frac{1}{2} \sin 2\phi & \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos^2 \psi & \frac{1}{2} \sin 2\phi \sin^2 \psi & \frac{1}{2} \sin 2\phi \sin 2\psi & \cos 2\phi \sin \psi & \cos 2\phi \cos \psi \end{bmatrix} \quad (A2.1)$$

Nous pouvons maintenant calculer la compliance en repère global due à une famille de mésosfissures fermées : $\bar{\bar{S}}^{d(k)} = {}^T T \bar{\bar{S}}^{d(k)} T$.

$$\text{D'après 3.15, } \bar{\bar{S}}^{d(k)} = \frac{8\pi a^3}{3V} \frac{1-\nu_0^2}{E_0} {}^T T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu \text{sgn}(\sigma'_{13}) s_3 & 0 & 0 & 0 & s_3 & 0 \\ \mu \text{sgn}(\sigma'_{12}) s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_2 \end{bmatrix} T \text{ soit :} \quad (A2.2)$$

$$\bar{\bar{S}}^{d(k)} = \frac{8\pi a^3}{3V} \frac{1-\nu_0^2}{E_0} \bar{\bar{\Omega}}^{(k)}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \frac{s_2}{2} \sin 2\phi \cos \phi (\sin \phi - \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \cos \phi) \\ \Omega_{12} &= -\frac{s_2}{2} \sin 2\phi \cos^2 \psi \sin \phi (\cos \phi + \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi) \\ \Omega_{13} &= -\frac{s_2}{2} \sin 2\phi \sin^2 \psi \sin \phi (\cos \phi + \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi) \\ \Omega_{14} &= -\frac{s_2}{2} \sin 2\phi \sin 2\psi \sin \phi (\cos \phi + \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi) \\ \Omega_{15} &= -\frac{s_2}{2} \sin 2\phi \sin \psi (\cos 2\phi + \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin 2\phi) \\ \Omega_{16} &= -\frac{s_2}{2} \sin 2\phi \cos \psi (\cos 2\phi + \mu \text{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin 2\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{21} &= -\frac{1}{2} \sin 2\phi \cos \psi \cos \phi \left[\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin \psi s_3 + \cos \psi s_2 (\sin \phi - \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \cos \phi) \right] \\
\Omega_{22} &= \sin^2 \phi \cos^2 \psi \left[-(\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \cos \psi \sin \phi - \sin \psi) \sin \psi s_3 + \cos^2 \psi \cos \phi s_2 (\cos \phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi) \right] \\
\Omega_{23} &= \sin^2 \phi \sin^2 \psi \left[-(\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin \psi \sin \phi + \cos \psi) \cos \psi s_3 + \cos^2 \psi \cos \phi s_2 (\cos \phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi) \right] \\
\Omega_{24} &= \sin^2 \phi \sin 2\psi \left[-(\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin 2\psi \sin \phi + \cos 2\psi) s_3 + \cos^2 \psi \cos \phi s_2 (\cos \phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi) \right] \\
\Omega_{25} &= \frac{1}{4} \sin 2\phi \sin 2\psi \left[-(2\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin \psi \sin \phi + \cos \psi) s_3 + \cos \psi s_2 (\cos 2\phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin 2\phi) \right] \\
\Omega_{26} &= \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos \psi \left[-(2\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \cos \psi \sin \phi - \sin \psi) \sin \psi s_3 + \cos^2 \psi s_2 (\cos 2\phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin 2\phi) \right] \\
\Omega_{31} &= \frac{1}{2} \sin 2\phi \sin \psi \cos \phi \left[\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \cos \psi s_3 - \sin \psi s_2 (\sin \phi - \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \cos \phi) \right] \\
\Omega_{32} &= \frac{1}{2} \sin^2 \phi \sin 2\psi \cos \psi \left[(\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \cos \psi \sin \phi - \sin \psi) s_3 + \sin \psi \cos \phi s_2 (\cos \phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi) \right] \\
\Omega_{33} &= \sin^2 \phi \sin^2 \psi \left[(\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin \psi \sin \phi + \cos \psi) \cos \psi s_3 + \sin^2 \psi \cos \phi s_2 (\cos \phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi) \right] \\
\Omega_{34} &= \sin^2 \phi \sin 2\psi \left[(\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin 2\psi \sin \phi + \cos 2\psi) \frac{s_3}{2} + \sin^2 \psi \cos \phi s_2 (\cos \phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi) \right] \\
\Omega_{35} &= \frac{1}{2} \sin 2\phi \sin \psi \left[(2\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin \psi \sin \phi + \cos \psi) \cos \psi s_3 + \sin^2 \psi s_2 (\cos 2\phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin 2\phi) \right] \\
\Omega_{36} &= \frac{1}{4} \sin 2\phi \sin 2\psi \left[(2\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \cos \psi \sin \phi - \sin \psi) s_3 + \sin \psi s_2 (\cos 2\phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin 2\phi) \right] \\
\Omega_{41} &= \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos \phi \left[\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \cos 2\psi s_3 - \sin 2\psi s_2 (\sin \phi - \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \cos \phi) \right] \\
\Omega_{42} &= \sin^2 \phi \cos \psi \left[(\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \cos \psi \sin \phi - \sin \psi) \cos 2\psi s_3 + \cos \psi \cos \phi \sin 2\psi s_2 (\cos \phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi) \right] \\
\Omega_{43} &= \sin^2 \phi \sin \psi \left[(\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin \psi \sin \phi + \cos \psi) \cos 2\psi s_3 + \sin 2\psi \sin \psi \cos \phi s_2 (\cos \phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi) \right] \\
\Omega_{44} &= \sin^2 \phi \left[(\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin 2\psi \sin \phi + \cos 2\psi) \cos 2\psi s_3 + \sin^2 2\psi \cos \phi s_2 (\cos \phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi) \right] \\
\Omega_{45} &= \frac{1}{2} \sin 2\phi \left[(2\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin \psi \sin \phi + \cos \psi) \cos 2\psi s_3 + \sin 2\psi \sin \psi s_2 (\cos 2\phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin 2\phi) \right] \\
\Omega_{46} &= \sin \phi \left[(2\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \cos \psi \sin \phi - \sin \psi) \cos 2\psi s_3 + \cos \phi \sin 2\psi \cos \psi s_2 (\cos 2\phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin 2\phi) \right] \\
\Omega_{51} &= \cos^3 \phi \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \cos \psi s_3 - \cos 2\phi \sin \psi s_2 (\sin \phi - \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \cos \phi) \\
\Omega_{52} &= \sin \phi \cos \psi \left[(\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \cos \psi \sin \phi - \sin \psi) \cos \psi \cos \phi s_3 + \cos 2\phi \sin 2\psi \frac{s_2}{2} (\cos \phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi) \right] \\
\Omega_{53} &= \frac{1}{4} \sin 2\phi \sin 2\psi (\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin \psi \sin \phi + \cos \psi) s_3 + \sin \phi \sin^3 \psi \cos 2\phi s_2 (\cos \phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi) \\
\Omega_{54} &= \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos \psi (\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin 2\psi \sin \phi + \cos 2\psi) s_3 + \sin \phi \sin \psi \sin 2\psi \cos 2\phi s_2 (\cos \phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi) \\
\Omega_{55} &= \cos^2 \phi (2\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin \psi \sin \phi + \cos \psi) \cos \psi s_3 + \sin^2 \psi \cos 2\phi s_2 (\cos 2\phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin 2\phi) \\
\Omega_{56} &= \cos^2 \phi (2\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \cos \psi \sin \phi - \sin \psi) \cos \psi s_3 + \frac{1}{2} \sin 2\psi \cos 2\phi s_2 (\cos 2\phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin 2\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_{61} &= -\cos^3 \phi \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin \psi s_3 - \cos 2\phi \cos \phi \cos \psi s_2 \left(\sin \phi - \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \cos \phi \right) \\
 \Omega_{62} &= -\frac{1}{4} \sin 2\phi \sin 2\psi \left(\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \cos \psi \sin \phi - \sin \psi \right) s_3 + \sin \phi \cos^3 \psi \cos 2\phi s_2 \left(\cos \phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi \right) \\
 \Omega_{63} &= \sin \phi \sin^2 \psi \left[-\left(\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \right) s_3 + \cos \psi \cos 2\phi s_2 \left(\cos \phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi \right) \right] \\
 \Omega_{64} &= -\frac{1}{2} \sin 2\phi \sin \psi \left(\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin 2\psi \sin \phi + \cos 2\psi \right) s_3 + \sin \phi \cos \psi \sin 2\psi \cos 2\phi s_2 \left(\cos \phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin \phi \right) \\
 \Omega_{65} &= -\cos^2 \phi \left(2\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \right) \sin \psi s_3 + \frac{1}{2} \sin 2\psi \cos 2\phi s_2 \left(\cos 2\phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin 2\phi \right) \\
 \Omega_{66} &= -\cos^2 \phi \left(2\mu \operatorname{sgn}(\sigma_{13}^{(k)}) \cos \psi \sin \phi - \sin \psi \right) \sin \psi s_3 + \cos^2 \psi \cos 2\phi s_2 \left(\cos 2\phi + \mu \operatorname{sgn}(\sigma_{12}^{(k)}) \sin 2\phi \right)
 \end{aligned}$$

Dans ce cas le plus général possible, nous obtenons 36 composantes indépendantes. Les symétries majeures sont respectées (cela est implicite avec la notation de Voigt puisque, par exemple, $S_{1211} = S_{2111} = S_{31}$). En revanche, aucune symétrie mineure n'est respectée : ceci est dû à la présence du frottement.

Annexe 3 . Influence des paramètres mésoscopiques du modèle à matrice sécante.

• Influence de la densité initiale de mésofissures :

Nous avons étudié l'influence de la mésostructure initiale sur la réponse du matériau. Seul le nombre de mésofissures est modifié, les distributions restant les mêmes. Trois densités ($0.5\omega_0$, ω_0 et $2\omega_0$) sont présentées sur la figure A5.1. On peut conclure à une influence très importante de ce paramètre sur le comportement du matériau. Celui-ci devient plus dilatatant lorsque la densité initiale augmente.

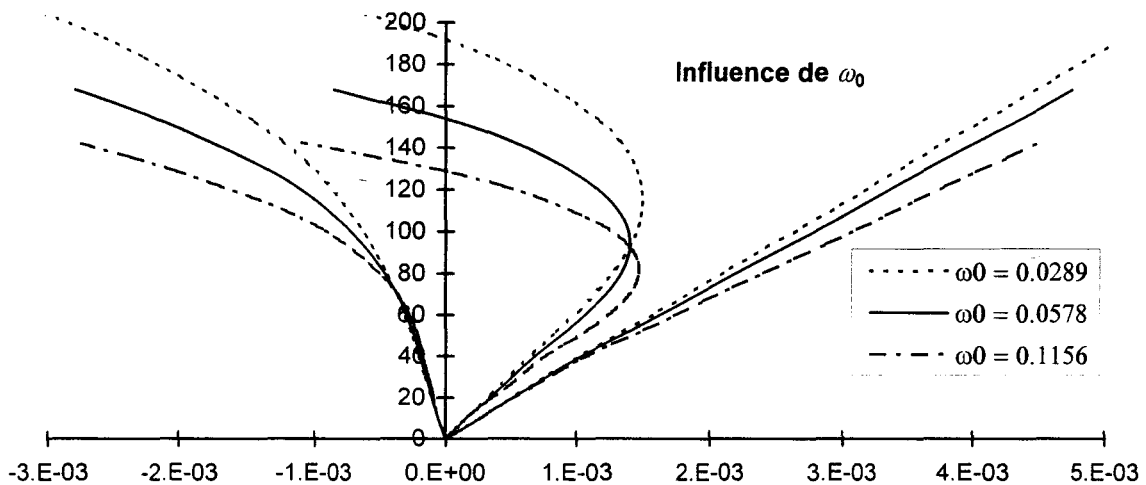


Figure A3.1 : Influence de la densité initiale de mésofissures.

• Influence de la taille maximale des grains :

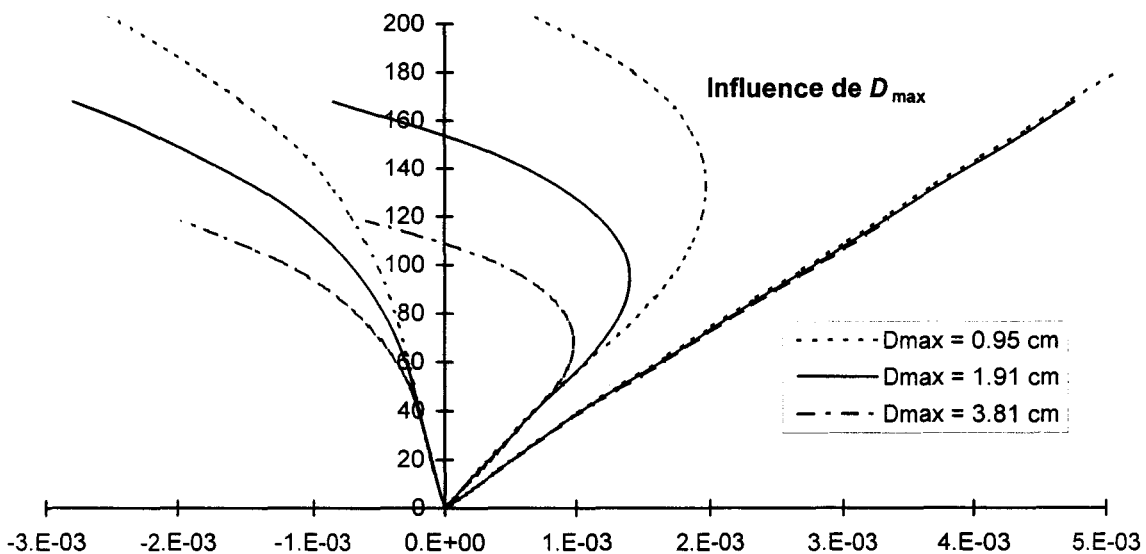


Figure A3.2 : Influence de la taille maximale des grains.

On se propose d'évaluer ici l'effet de la taille moyenne des grains qui composent la structure du matériau. Le rapport $\hat{\gamma} = \frac{D_{\min}}{D_{\max}}$ est maintenu à sa valeur utilisée dans la simulation de référence.

Deux cas de comparaison ont été simulés avec $\frac{D_{\max}}{2}$ et $2D_{\max}$ (figure A5.2). On constate que le matériau résiste moins quand la valeur de $D_{\max}$ augmente. Ce résultat est sans doute lié à la probabilité plus forte de trouver des mésosfissures de grande taille lorsque $D_{\max}$ est plus grand. Les réponses axiales restent quasiment insensibles à la variation de $D_{\max}$.

• **Influence de la granulométrie du matériau :**

L'objectif ici est de quantifier le rôle de la distribution de la taille de grains sur la réponse du matériau. Cette distribution est caractérisée par le paramètre $\hat{\gamma}$. Plus $\hat{\gamma}$ est élevé, plus la granulométrie sera resserrée. Par rapport à la simulation de référence ($\hat{\gamma} = 0.253$), nous avons considéré deux granulométries, une deux fois plus serrée et une plus large. Les résultats obtenus (figure A5.3) montrent que la présence de grains de faible taille ($\hat{\gamma} = 0.127$) n'influence pas de façon sensible le comportement. A l'inverse, le resserrement de la granulométrie autour de $D_{\max}$ ($\hat{\gamma} = 0.76$) conduit à un matériau nettement plus dilatatant.

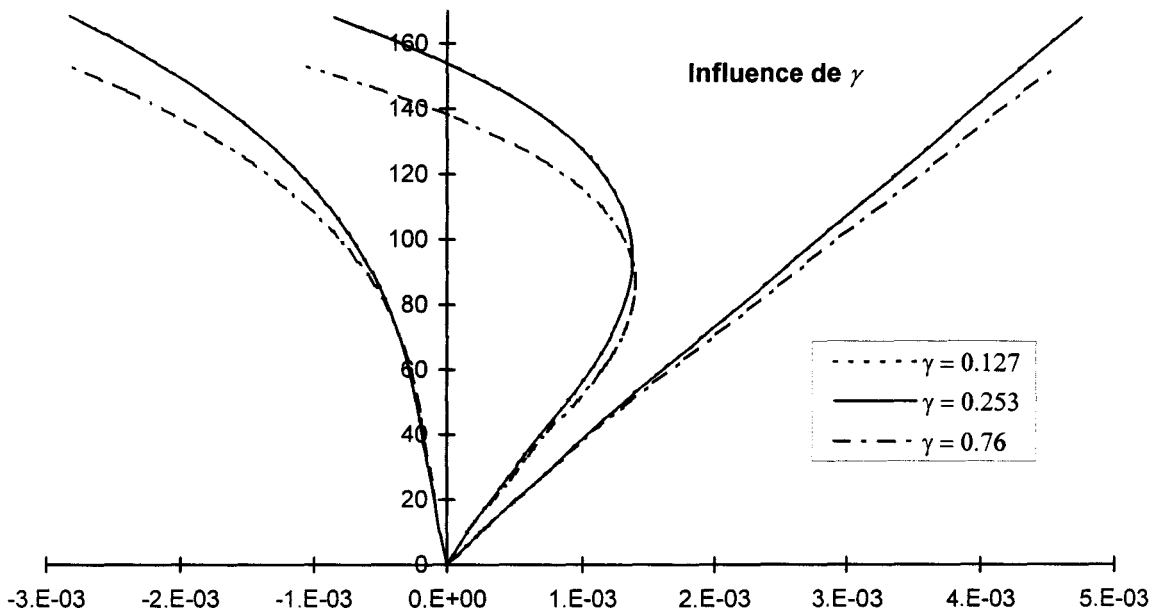


Figure A3.3 : Influence de la granulométrie $\hat{\gamma} = \frac{D_{\min}}{D_{\max}}$ du matériau.

• *Influence de la distribution des tailles initiales des mésolfissures :*

Cette influence est montrée sur la figure A5.4. Le comportement semble donc très sensible à la variation de ρ . Les simulations montrent que la non-linéarité du comportement est plus prononcée lorsque ρ diminue.

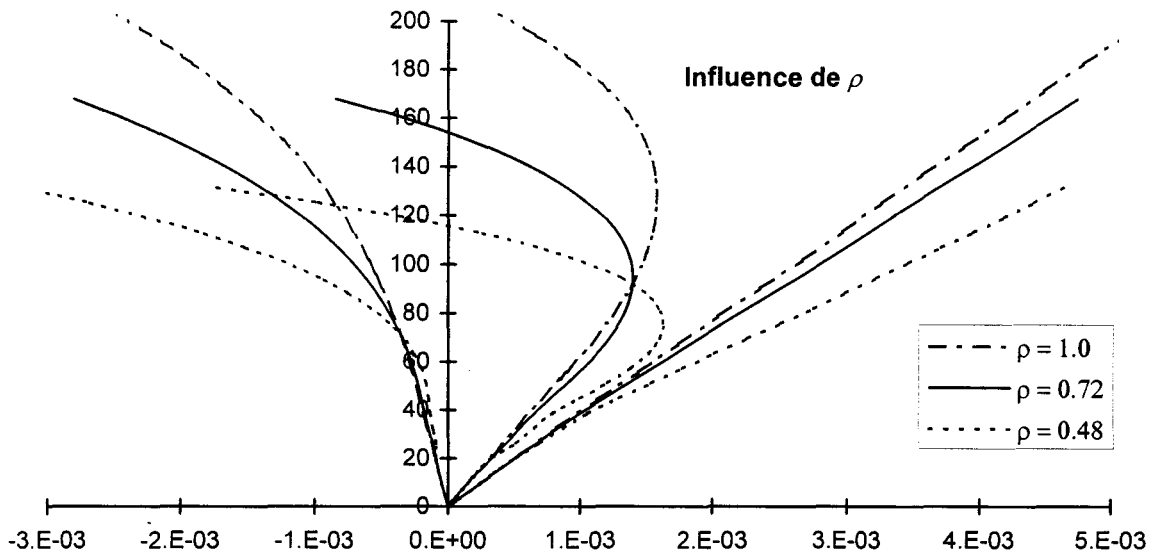


Figure A3.4 : Influence de la distribution de taille des mésolfissures initiales, $\rho = \frac{a_0}{a_f}$.

Annexe 4 . Loi d'évolution et compliance pour des mésolfissures fermées dans le cas triaxial axisymétrique.

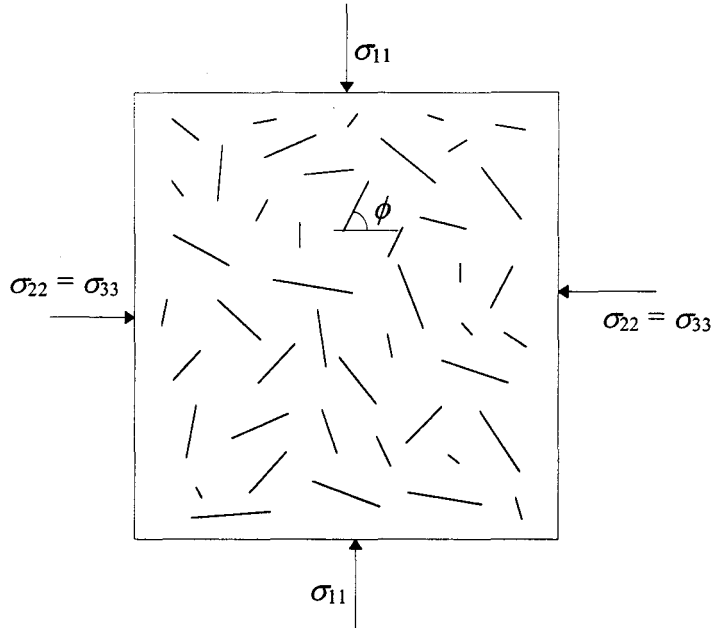


Figure A4.1 : Milieu mésolfissuré soumis à des sollicitations triaxiales axisymétriques.

Cette annexe, rattachée au troisième chapitre du mémoire, détaille les lois d'évolution des mésolfissures dans le cas d'une compression triaxiale axisymétrique (voir figure A4.1). Dans le cas d'un tenseur de contraintes axisymétrique, le critère de propagation rectiligne pour les fissures fermées s'écrit sous la forme : $K_{II}' = K_{IIc}^{if}$.

$$K_{II}' = \frac{4}{2-\nu_0} \sqrt{\frac{a_{0\max}}{\pi}} \left| (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \phi \cos \phi + \text{sgn}(\sigma_{12}') \mu (\sigma_{22} \sin^2 \phi + \sigma_{11} \cos^2 \phi) - \tau_c \right| \quad (\text{A4.1})$$

On peut donc évaluer l'angle qui définit pour ce cas l'activation des mésolfissures (voir figure A4.2) :

$$\phi_{u_{1,2}} = \text{Arctan} \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4C(C + \mu)}}{2C}, \text{ avec } C = \frac{(2-\nu_0)K_{II}^{if}}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a_{0\max}}} + \tau_c + \mu \sigma_{22}, \sigma_{11} \geq \sigma_{11}^0 \quad (\text{A4.2})$$

Les premières propagations instables apparaissent pour l'orientation $\phi_0 = \text{Arctan}(\mu + \sqrt{\mu^2 + 1})$ en minimisant le critère par rapport à ϕ ; la valeur du seuil de chargement axial σ_{11} correspondant est σ_{11}^0 :

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22} - 2 \left[\frac{(2-\nu_0)K_{II}^{if}}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a_{0_{\max}}}} + \tau_c - \mu\sigma_{22} \right] \left(\mu + \sqrt{\mu^2 + 1} \right) \quad (A4.3)$$

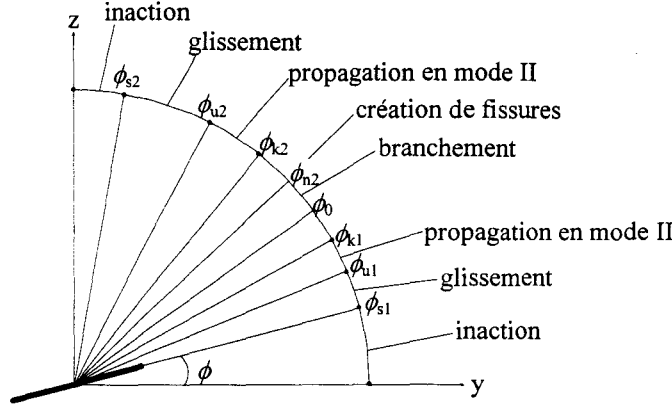


Figure A4.2 : Domaines d'angles de fissuration en compression 3-D.

De même, à chaque niveau de chargement, on obtient la fonction $a_{0(\phi)}$ pour ce mode :

$$a_0(\phi) = \frac{\pi \left(\frac{2-\nu_0}{4} K_{II}^{if} \right)^2}{\left[|\sigma_{11} - \sigma_{22}| \sin \phi \cos \phi + \text{sgn}(\sigma'_{12}) \mu (\sigma_{22} \sin^2 \phi + \sigma_{11} \cos^2 \phi) - \tau_c \right]^2} \quad (A4.4)$$

Afin de trouver les angles limites de glissement, à partir desquels les fissures glissent (sans forcément se propager), réécrivons la condition de glissement sous la forme :

$|\sigma_{11} - \sigma_{22}| \sin \phi \cos \phi + \mu (\sigma_{22} \sin^2 \phi + \sigma_{11} \cos^2 \phi) = 0$, la résolution de cette équation conduit à :

$$\phi_{s1,2} = \text{Arctan} \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4C(C + \mu)}}{2C}, \quad C = \frac{\mu\sigma_{22}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}, \quad \sigma_{11} \geq \left(2\mu(\mu + \sqrt{\mu^2 + 1}) + 1 \right) \sigma_{22} \quad (A4.5)$$

Dans le cas de mésolfissures distribuées aléatoirement sous sollicitations triaxiales axisymétriques, la compliance inélastique est (à partir de 3.16, en prenant

$$\phi_1 = \text{Arctan} \frac{1 - \sqrt{1 - 4C(C + \mu)}}{2C} \text{ et } \phi_2 = \text{Arctan} \frac{1 + \sqrt{1 - 4C(C + \mu)}}{2C} :$$

$$\bar{S}^d = \frac{\omega_0(1-\nu_0^2)\gamma}{45E_0(2-\nu_0)\rho^3} \begin{pmatrix} a'' & b'' & b'' & 0 & 0 & 0 \\ b'' & d'' & c'' & 0 & 0 & 0 \\ b'' & c'' & d'' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(d'' - c'') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e'' \end{pmatrix} \quad (A4.6)$$

$$\begin{aligned}
 a'' &= 2s_2 \left[\frac{4C^3 \alpha'_{5,8} - \beta' \alpha'_{1,10}}{\alpha'_{1,4}^{\frac{5}{2}}} - \frac{4C^3 \alpha_{5,8} + \beta \alpha_{1,10}}{\alpha_{1,4}^{\frac{5}{2}}} \right] \\
 b'' &= \frac{s_2}{2} \left[\frac{8C^3 \alpha_{5,8} + 3\beta \alpha_{1,0}}{\alpha_{1,4}^{\frac{5}{2}}} - \frac{8C^3 \alpha'_{5,8} + 3\beta' \alpha'_{1,0}}{\alpha'_{1,4}^{\frac{5}{2}}} \right] \\
 c'' &= \frac{1}{8} \left[\frac{s_2 (8C^3 \alpha'_{5,8} + 3\beta' \alpha'_{1,0}) - 10Cs_3 \alpha'_{3,8} \alpha'_{1,4}}{\alpha'_{1,4}^{\frac{5}{2}}} + \frac{s_2 (-8C^3 \alpha_{5,8} + 3\beta \alpha_{1,0}) + 10Cs_3 \alpha_{3,8} \alpha_{1,4}}{\alpha_{1,4}^{\frac{5}{2}}} \right] \\
 d'' &= \frac{1}{8} \left[\frac{s_2 (24C^3 \alpha'_{5,8} + 9\beta' \alpha'_{1,0}) + 10Cs_3 \alpha'_{3,8} \alpha'_{1,4}}{\alpha'_{1,4}^{\frac{5}{2}}} + \frac{s_2 (-24C^3 \alpha_{5,8} + 9\beta \alpha_{1,0}) - 10Cs_3 \alpha_{3,8} \alpha_{1,4}}{\alpha_{1,4}^{\frac{5}{2}}} \right] \\
 e'' &= \frac{s_2 [C[15\alpha_{1,0}'^2 + 8C^2 \alpha'_{5,14}] - \beta' \alpha'_{1,-20}] + 20C^3 s_3 \alpha'_{1,4}}{\alpha'_{1,4}^{\frac{5}{2}}} - \frac{s_2 [C[15\alpha_{1,0}^2 + 8C^2 \alpha_{5,14}] + \beta \alpha_{1,-20}] + 20C^3 s_3 \alpha_{1,4}}{\alpha_{1,4}^{\frac{5}{2}}} \\
 \text{avec } \begin{cases} \alpha_{i,j} = i(\sqrt{1-4C(C+\mu)}+1)^2 + jC^2 \\ \beta = (\sqrt{1-4C(C+\mu)}+1)^3 \mu \operatorname{sgn}(\sigma'_{12}) \end{cases} & \begin{cases} \alpha'_{i,j} = i(\sqrt{1-4C(C+\mu)}-1)^2 + jC^2 \\ \beta' = (\sqrt{1-4C(C+\mu)}-1)^3 \mu \operatorname{sgn}(\sigma'_{12}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ces relations sont valables pour différents types de fissures et d'évolutions :

- fissures ellipsoïdales : $s_1 = \frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \sin^2 \psi'} d\psi'}$
- $s_2 = \frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \left(1 - \frac{1-\nu_0}{\gamma^2}\right) \sin^2 \psi'}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \sin^2 \psi'}} d\psi'}$ $s_3 = \frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\nu_0) \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{(1-\nu_0)\gamma^2}\right) \sin^2 \psi'}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \sin^2 \psi'}} d\psi'}$,
- fissures de type « penny-shaped » : $\gamma = 1$, $\begin{cases} s_1 = \frac{2}{\pi} \\ s_2 = s_3 = \frac{2}{\pi \left(1 - \frac{\nu_0}{2}\right)} \end{cases}$,
- fissures qui glissent sans se propager : $C = \frac{\mu \sigma_{22}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}$ voir (A2.6),
- qui se propagent de manière instable : $C = \frac{(2-\nu_0)K_{II}^{yf}}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a_{0\max}}} + \tau_c + \mu \sigma_{22}$ voir (A4.2).

Annexe 5 . Construction des tenseurs $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $\bar{C}$ de la formulation incrémentale de la loi de comportement.

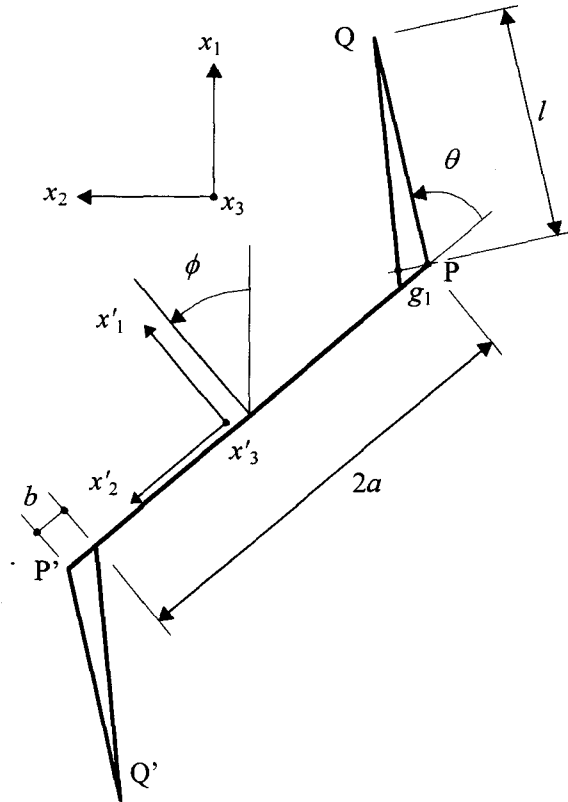


Figure A5.1 : Géométrie de la fissure branchée en compression.

La mésofissure PP' soumise à des sollicitations de compression peut glisser à partir d'un certain seuil. Ce glissement induit des discontinuités de déplacement tangentielle en tête de fissure. Ces discontinuités favorisent la propagation stable en mode I de branches qui vont peu à peu s'aligner avec la direction principale de chargement (voir figure A5.1). Sous certaines conditions en décharge, ces branches peuvent se fermer partiellement.

La démarche de construction des tenseurs du second ordre $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $\bar{C}$ suit celle proposée par Nemat-Nasser et Obata (1988) dans le cas plan. Il s'agit donc ici d'une généralisation 3-D de cette approche. Rappelons que la détermination de ces tenseurs est nécessaire pour le calcul de la matrice tangente (formule 4.36 du chapitre IV). Ces tenseurs dépendent de l'incrément de contraintes appliqué. On doit donc distinguer les différents cas de sollicitations incrémentales

Annexe 5 .1. Chargement

Le chargement est contrôlé par le glissement ; la fonction seuil est définie par $\bar{\sigma} : \bar{p}_2 - \tau_c = 0$. Pour obtenir $\bar{A}$, $\bar{B}$ et $\bar{C}$, il faut écrire la différentielle totale (en fonction des paramètres non-constants) de la condition d'égalité des deux facteurs d'intensité de contraintes. En phase de chargement (activation de la mésolfissure), nous pouvons obtenir les situations suivantes :

Annexe 5 .1.1. Frottement sans croissance de fissures (θ et l constant)

C'est le cas lorsque le cisaillement sur la partie centrale est supérieur à la résistance de cohésion de celle-ci : $K_I < K_c$ et $\bar{\sigma} : \bar{p}_2 \geq \tau_c$. De plus, la différentiation de la condition $K_I = K'_I$, s'écrit (en accord avec les relations 4.1) :

$$\frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \tilde{A}} \bar{A} : \dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \theta} \bar{B} : \dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \tilde{b}} \bar{C} : \dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \tilde{K}'_I}{\partial \tilde{A}} \bar{A} : \dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial \tilde{K}'_I}{\partial \theta} \bar{B} : \dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial \tilde{K}'_I}{\partial \tilde{b}} \bar{C} : \dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial \tilde{K}'_I}{\partial \bar{\sigma}} \dot{\bar{\sigma}}$$

Mais dans le cas du présent mécanisme (θ et l constants), nous avons :

$$\bar{A} = \bar{0}, \quad \bar{B} = \bar{0}, \quad \bar{C} = \frac{1}{\frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \tilde{b}} - \frac{\partial \tilde{K}'_I}{\partial \tilde{b}}} (\bar{b}_1 - \bar{b}_2) \quad (\text{A5.1})$$

$$\text{avec } \frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \tilde{b}} = \text{sgn}(\tilde{b}) H_3 \sin \theta \text{ et } \frac{\partial \tilde{K}'_I}{\partial \tilde{b}} = H_2 (\sin \theta + \xi \cos \theta), \quad H_3 = \frac{2 \tau_c \eta}{\sqrt{\pi(\tilde{l} + \tilde{l}^*)}} \quad (\text{A5.2})$$

$$\text{Les tenseurs } \bar{b}_1 \text{ et } \bar{b}_2 \text{ correspondent à :} \quad \bar{b}_1 = -\frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \bar{\sigma}} \text{ et } \bar{b}_2 = -\frac{\partial \tilde{K}'_I}{\partial \bar{\sigma}}$$

$$\text{donc } \bar{b}_1 = -\frac{2 \bar{p}_2 \sin \theta}{\sqrt{\pi(\tilde{l} + \tilde{l}^*)}} - \sqrt{\pi \tilde{l}} \bar{\alpha} \quad \text{et } \bar{b}_2 = -\sqrt{\frac{\pi \tilde{l}}{2}} \bar{\alpha} \quad (\text{A5.3})$$

La matrice tangente s'écrit :

$$\bar{\bar{D}} = \bar{\bar{S}}^0 + \omega \left\{ \pi \bar{p}_0 + \tilde{l} \bar{q}_0 + \xi (\pi \bar{p}_1 + \tilde{l} \bar{q}_1) \right\} \otimes \bar{C} + \omega \frac{1 - \nu_0^2}{3 E_0} \tilde{l}^{\frac{3}{2}} \left[4 \bar{\alpha} \otimes \bar{\alpha} \tilde{C}_{11}''^{-1} + \bar{\beta} \otimes \bar{\beta} \tilde{C}_{22}''^{-1} + \bar{\delta} \otimes \bar{\delta} \tilde{C}_{33}''^{-1} \right] \quad (\text{A5.4})$$

Annexe 5 .1.2. Frottement avec croissance stable de branches

Dans ce cas, nous avons : $\tilde{K}_I = \tilde{K}'_I = \tilde{K}_c$ et $\bar{\sigma} : \bar{p}_2 \geq \tau_c$. Il est nécessaire d'effectuer la différentielle totale exacte de $\tilde{K}_I$, $\tilde{K}'_I$ et L (voir A5.5) pour relier $\tilde{l}$, $\dot{\theta}$ et $\dot{\tilde{b}}$ à $\dot{\bar{\sigma}}$. Afin de

résoudre ce problème, on considère que les différentielles des deux F.I.C. en mode I ($\tilde{K}_I$ et $\tilde{K}'_I$) par rapport à θ et $\tilde{b}$ sont colinéaires. Cette hypothèse conduit à la condition suivante sur les dérivées partielles par rapport à l'angle de branchement et au glissement :

$$\frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{K}'_I}{\partial \tilde{b}} - \frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \tilde{b}} \frac{\partial \tilde{K}'_I}{\partial \theta} \equiv L = 0 \quad (\text{A5.5})$$

En différentiant, nous obtenons :

$$[\Lambda] \begin{bmatrix} \dot{\tilde{l}} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\tilde{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 : \bar{\sigma} \\ \bar{b}_2 : \bar{\sigma} \\ \bar{b}_3 : \bar{\sigma} \end{bmatrix} \quad [\Lambda] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \tilde{l}} & \frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \theta} & \frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \tilde{b}} \\ \frac{\partial \tilde{K}'_I}{\partial \tilde{l}} & \frac{\partial \tilde{K}'_I}{\partial \theta} & \frac{\partial \tilde{K}'_I}{\partial \tilde{b}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{l}} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{b}} \end{bmatrix} \quad (\text{A5.6})$$

$$\text{où : } \bar{b}_3 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\sigma}} \quad (\text{A5.7})$$

$$\text{Nous en déduisons } \begin{bmatrix} \dot{\tilde{l}} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\tilde{b}} \end{bmatrix} = [\Lambda]^{-1} \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{bmatrix} : \bar{\sigma} \text{ et donc les tenseurs } \bar{A}, \bar{B} \text{ et } \bar{C}.$$

$$\text{donc } \bar{b}_3 = \frac{\partial \tilde{K}'_I}{\partial \tilde{b}} \frac{\partial \bar{b}_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \tilde{b}} \frac{\partial \bar{b}_2}{\partial \theta} = \frac{\partial \tilde{K}'_I}{\partial \tilde{b}} \left[\sqrt{\pi \tilde{l}} \bar{\beta} - \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{\pi(\tilde{l} + \tilde{l}^*)}} \bar{p}_2 \right] - \frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \tilde{b}} \sqrt{\frac{\pi \tilde{l}}{2}} \bar{\beta} \quad (\text{A5.8})$$

Précisons pour finir les expressions des différentes dérivées partielles dans Λ .

$$\frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \tilde{l}} = -\frac{H_1 \sin \theta}{2(\tilde{l} + \tilde{l}^*)} + \frac{\bar{\sigma} : \bar{\alpha}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{l}}} \quad \frac{\partial \tilde{K}'_I}{\partial \tilde{l}} = -\frac{H_2 \tilde{g}_1}{2(\tilde{l} + \tilde{l}^{**})} + \sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{l}}} \frac{\bar{\sigma} : \bar{\alpha}}{2}$$

$$\text{avec } \frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \theta} = H_2 \tilde{g}_2 - \sqrt{\frac{\pi \tilde{l}}{2}} \bar{\sigma} : \bar{\beta} \quad \frac{\partial \tilde{K}'_I}{\partial \theta} = H_1 \cos \theta - \sqrt{\pi \tilde{l}} \bar{\sigma} : \bar{\beta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{b}} = H_2 \left[H_3 (\tilde{g}_2 \eta \sin \theta + \xi \operatorname{sgn}(\tilde{b})) - H_1 \xi \zeta \cos^2 \theta \right] + (\bar{\sigma} : \bar{\beta}) \sqrt{\pi \tilde{l}} \left[H_2 \xi \zeta \cos \theta - \frac{\eta H_3 \sin \theta}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{l}} &= \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{l}}} \frac{\bar{\sigma} : \bar{\beta}}{2} \left[\frac{\sin \theta H_3 \operatorname{sgn}(\tilde{b}) \tilde{l}^*}{\sqrt{2}(\tilde{l} + \tilde{l}^*)} - \frac{H_2 \tilde{l}^{**} (\sin \theta + \xi \cos \theta)}{\tilde{l} + \tilde{l}^{**}} \right] \\ &+ \frac{H_2 (2\tilde{l} + \tilde{l}^* + \tilde{l}^{**})}{2(\tilde{l} + \tilde{l}^*)(\tilde{l} + \tilde{l}^{**})} \left[\tilde{g}_2 \sin \theta H_3 \operatorname{sgn}(\tilde{b}) - \cos \theta H_1 (\sin \theta + \xi \cos \theta) \right] \end{aligned} \quad (\text{A5.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = & H_1 H_2 (\cos 2\theta - \xi \sin 2\theta) - H_2 H_3 [\tilde{g}_2 \cos \theta - \tilde{g}_1 \sin \theta] \operatorname{sgn}(\tilde{b}) \\ & - H_2 \sqrt{\pi \tilde{l}} [(\cos \theta - \xi \sin \theta) \bar{\sigma} : \bar{\beta} + (\sin \theta + \xi \cos \theta) \bar{\sigma} : \bar{\gamma}] + H_3 \operatorname{sgn}(\tilde{b}) \sqrt{\frac{\pi \tilde{l}}{2}} [\cos \theta \bar{\sigma} : \bar{\beta} + \sin \theta \bar{\sigma} : \bar{\gamma}] \end{aligned}$$

La matrice tangente dans la présente situation est celle du cas général mentionné auparavant (équation 4.36).

Annexe 5.2. Déchargement

C'est le cas lorsque le cisaillement sur la partie centrale décroît : $\dot{\tau}_s''' < 0$. Plusieurs cas sont à distinguer lors du déchargement.

Annexe 5.2.1. Glissement dans le sens opposé sans fermeture de branches (θ et l constant)

Dans ce contexte, le frottement et le glissement agissent dans la direction opposée du déplacement relatif, le facteur d'intensité de contrainte en mode I devient :

$$\tilde{K}_I = \frac{2(\bar{\sigma} : \bar{p}_2' + \tau_c) \sin \theta}{\sqrt{\pi(\tilde{l} + \tilde{l}^*)}} + \sqrt{\pi \tilde{l}} \bar{\sigma} : \bar{\alpha} \quad \text{avec } \bar{p}_2' = \bar{p}_2(-\mu) \quad (\text{A5.10})$$

La condition d'amorçage du glissement en sens opposé est : $K_I \leq K_I'$, et ne peut se produire que lorsque la résistance à la cohésion maximale de PP' pendant le chargement est supérieure à la résistance à la cohésion de PP' durant la décharge. Cela se traduit par :

$$\tau_{\max} \geq \tau_c + \bar{\sigma} : \bar{p}_2' \quad \text{avec } \tau_{\max} = \bar{\sigma}_{\max} : \bar{p}_2 - \tau_c$$

Par ailleurs, comme dans le premier cas de chargement, nous avons :

$$\bar{A} = \bar{0} \quad \bar{B} = \bar{0} \quad \bar{C} = \frac{1}{\frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \tilde{b}} - \frac{\partial \tilde{K}_I'}{\partial \tilde{b}}} (\bar{b}_1 - \bar{b}_2) \quad (\text{A5.11})$$

$$\text{avec } \frac{\partial \tilde{K}_I}{\partial \tilde{b}} = -\operatorname{sgn}(\tilde{b}) H_3 \sin \theta \quad \bar{b}_1 = -\frac{2\bar{p}_2' \sin \theta}{\sqrt{\pi(\tilde{l} + \tilde{l}^*)}} - \sqrt{\pi \tilde{l}} \bar{\alpha} \quad (\text{A5.12})$$

L'expression de la matrice tangente est la même que dans le premier cas de chargement :
A5.4.

Annexe 5 .2.2. Fermeture de branches sans glissement dans le sens opposé (θ et b constant)

La fermeture des branches de la fissure ne se produit pas instantanément, mais de manière progressive. C'est le cas par exemple lors d'un chargement latéral (augmentation du confinement) au cour d'un essai triaxial axisymétrique. Tout se passe comme si la longueur des branches décroît de la taille maximale jusqu'à une certaine longueur dépendant du chargement. Nous supposons que la fermeture est symétrique par rapport à la bissectrice de la branche, de telle sorte que l'angle θ de branchement reste constant. La solution de la fissure (de longueur y , voir figure A5.2) partiellement fermée peut être obtenue par (Muskhelishvili, 1953) :

$$u_1''(x_2'') = - \int_{-y}^{x_2''} B_1(\xi) d\xi = - \frac{1-\nu_0^2}{E_0} 4\sigma_{11}'' \left[y \text{Arcsin} \frac{x_2''}{y} + y \frac{\pi}{2} - \sqrt{y^2 - x_2''^2} \right] \quad (\text{A5.13})$$

$$\text{avec } B_1(x) = 4\sigma_{11}'' \frac{1-\nu_0^2}{E_0} \frac{\sqrt{y+x}}{\sqrt{y-x}}$$

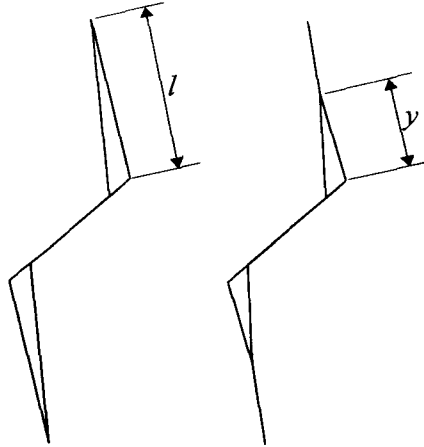


Figure A5.2 : Fermeture partielle des branches.

$$\text{Or en } x_2'' = y, u_1'' = \tilde{g}_1, \text{ d'où } y = - \frac{E_0 \tilde{g}_1}{4\pi\bar{\sigma}:\bar{\alpha}(1-\nu_0^2)}$$

Calculons la déformation selon 1 (où l'ouverture se réduit) pour 2 branches :

$$\varepsilon_{11}'' = 2 \frac{N}{V} \int_{-y}^y \int_{-\frac{\tilde{a}}{2}(1-\frac{x_2''}{y})}^{\frac{\tilde{a}}{2}(1-\frac{x_2''}{y})} u_1'' dx_3'' dx_2'' = -2\pi\omega\sigma_{11}'' \frac{1-\nu_0^2}{E_0} y^2 \tilde{C}_{11}''^{-1} = - \frac{\omega}{8\pi\bar{\sigma}:\bar{\alpha}} \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \tilde{g}_1^2 \tilde{C}_{11}''^{-1} \quad (\text{A5.14})$$

Pour ε_{12}'' et ε_{13}'' il n'y a pas de différences avec le cas du chargement, si ce n'est que nous utilisons la longueur maximum atteinte durant l'histoire du chargement, car la fermeture partielle des branches est simulée par $\dot{l} < 0$:

$$\varepsilon_{12}'' = \omega \frac{1-\nu_0^2}{3E_0} \bar{\sigma} : \bar{\beta} \tilde{l}_{\max}^{\frac{3}{2}} \tilde{C}_{22}''^{-1} + \omega \frac{\tilde{l}_{\max}}{2} \tilde{g}_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{13}'' = \omega \frac{1-\nu_0^2}{3E_0} \bar{\sigma} : \bar{\delta} \tilde{l}_{\max}^{\frac{3}{2}} \tilde{C}_{33}''^{-1} + \omega \tilde{l}_{\max} \tilde{b}_3$$

Dans le repère global, ces déformations sont données par :

$$\bar{\varepsilon}_c = \omega \left[-\frac{\tilde{C}_{11}''^{-1}}{8\pi\bar{\sigma}:\bar{\alpha}} \frac{E_0}{1-\nu_0^2} (\tilde{b}_2 \sin\theta + \tilde{d} \cos\theta)^2 \bar{\alpha} + \frac{1-\nu_0^2}{3E_0} [(\bar{\sigma}:\bar{\beta}) \bar{\beta} \tilde{C}_{22}''^{-1} + (\bar{\sigma}:\bar{\delta}) \bar{\delta} \tilde{C}_{33}''^{-1}] \tilde{l}_{\max}^{\frac{3}{2}} \right. \\ \left. + \frac{\tilde{l}_{\max}}{2} (\tilde{b}_2 \cos\theta - \tilde{d} \sin\theta) \bar{\beta} + \tilde{l}_{\max} \tilde{b}_3 \bar{\delta} \right] \quad (\text{A5.15})$$

La condition de fermeture de branches sans glissement dans le sens opposé est : $\tilde{K}'_l = 0$.

Ce F.I.C. est préféré à l'autre (4.29) car il prend en compte la géométrie de la branche, ce qui est essentiel dans le cas que nous traitons ici.

$$\text{En différenciant : } \bar{A} = \frac{\bar{b}_2}{\frac{\partial \tilde{K}'_l}{\partial \tilde{d}}} \quad \bar{B} = 0 \quad \bar{C} = 0 \quad (\text{A5.16})$$

En fait, le tenseur $\bar{A}$ ne sert pas pour le calcul de la matrice tangente puisque la déformation ne dépend pas de $\tilde{l}$ mais de $\tilde{l}_{\max}$. Donc, le calcul de $\dot{\tilde{l}}$ ne sert ici que pour réévaluer $\tilde{l}$, $\tilde{K}_l$ et $\tilde{K}'_l$.

La matrice tangente est alors :

$$\bar{\bar{D}} = \bar{\bar{S}}^0 + \omega \left\{ \frac{E_0 \tilde{g}_1^2 \tilde{C}_{11}''^{-1}}{8\pi(1-\nu_0^2)(\bar{\sigma}:\bar{\alpha})^2} \bar{\alpha} \otimes \bar{\alpha} + \frac{1-\nu_0^2}{3E_0} \tilde{l}_{\max}^{\frac{3}{2}} (\bar{\beta} \otimes \bar{\beta} \tilde{C}_{22}''^{-1} + \bar{\delta} \otimes \bar{\delta} \tilde{C}_{33}''^{-1}) \right\} \quad (\text{A5.17})$$

Annexe 5 .2.3. Fermeture de branches avec glissement dans le sens opposé (θ constant)

La condition de fermeture de branches avec glissement dans le sens opposé est :

$$\tilde{K}_l = \tilde{K}'_l = 0. \quad (\text{A5.18})$$

Par rapport à (A5.16), nous devons rajouter la condition $\tilde{K}_l = 0$ pour pouvoir différentier (A5.18) avec les deux paramètres non-constants l et b .

$$\text{En différenciant : } \begin{cases} \frac{\partial \tilde{K}_l}{\partial \tilde{l}} \dot{\tilde{l}} + \frac{\partial \tilde{K}_l}{\partial \tilde{b}} \dot{\tilde{b}} = \bar{b}_1 : \bar{\sigma} \\ \frac{\partial \tilde{K}'_l}{\partial \tilde{l}} \dot{\tilde{l}} + \frac{\partial \tilde{K}'_l}{\partial \tilde{b}} \dot{\tilde{b}} = \bar{b}_2 : \bar{\sigma} \end{cases}$$

$$\text{Et finalement : } \begin{cases} \bar{A} = \frac{\frac{\partial \tilde{K}_l}{\partial \tilde{b}} \bar{b}_1 - \frac{\partial \tilde{K}_l}{\partial \tilde{b}} \bar{b}_2}{\det} & \bar{B} = 0 \\ \bar{C} = \frac{\frac{\partial \tilde{K}_l}{\partial \tilde{a}} \bar{b}_2 - \frac{\partial \tilde{K}_l}{\partial \tilde{a}} \bar{b}_1}{\det} & \det = \frac{\partial \tilde{K}_l}{\partial \tilde{a}} \frac{\partial \tilde{K}_l}{\partial \tilde{b}} - \frac{\partial \tilde{K}_l}{\partial \tilde{b}} \frac{\partial \tilde{K}_l}{\partial \tilde{a}} \end{cases} \quad (\text{A5.19})$$

$$\text{avec } \frac{\partial \tilde{K}_l}{\partial \tilde{a}} = - \frac{(\bar{\sigma} \cdot \bar{p}_2 + \tau_c) \sin \theta}{\sqrt{\pi} (\tilde{l} + \tilde{l}^*)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{\alpha}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{l}}} \quad (\text{A5.20})$$

Dans le cas particulier de la fermeture des branches en déchargement, la matrice tangente avec ou sans glissement dans le sens opposé s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{D}} = \bar{\bar{S}}^0 + \omega & \left\{ \frac{E_0 \tilde{g}_1^2 \tilde{C}_{11}''^{-1}}{8\pi(1-\nu_0^2)(\sigma:\alpha)^2} \bar{\alpha} \otimes \bar{\alpha} + \frac{1-\nu_0^2}{3E_0} \tilde{l}_m^{\frac{3}{2}} (\bar{\beta} \otimes \bar{\beta} \tilde{C}_{22}''^{-1} + \bar{\delta} \otimes \bar{\delta} \tilde{C}_{33}''^{-1}) \right\} \\ & + \omega \left\{ \pi \bar{p}_0 + \pi \tilde{\zeta} \bar{p}_1 - \frac{E_0 (\sin \theta + \xi \cos \theta) \tilde{g}_1 \bar{\alpha} \tilde{C}_{11}''^{-1}}{4\pi(1-\nu_0^2) \bar{\sigma} \cdot \bar{\alpha}} + \frac{\tilde{l}_m}{2} (\cos \theta - \xi \sin \theta) \bar{\beta} + \tilde{l}_m \bar{\delta} \right\} \otimes \bar{C} \end{aligned} \quad (\text{A5.21})$$

Annexe 6 . Etude de sensibilité de paramètres du modèle incrémental.

Annexe 6 .1. Etude de la réponse d'un matériau contenant des mésosfissures parallèles

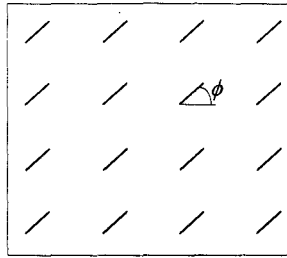


Figure A6.1 : Matériau contenant des mésosfissures parallèles.

Plus ϕ est faible (valeur limite basse dépendant de μ) ou plus ϕ est proche de $\frac{\pi}{2}$, moins la mésosfissure participe à l'endommagement (voir figure A6.2). L'endommagement (et donc la longueur du branchement) est maximal pour un angle proche 55° - 60° en compression uniaxiale, avec l'augmentation du confinement ou la diminution du frottement, le domaine d'activation de la mésosfissuration est décalé vers des angles plus faibles.

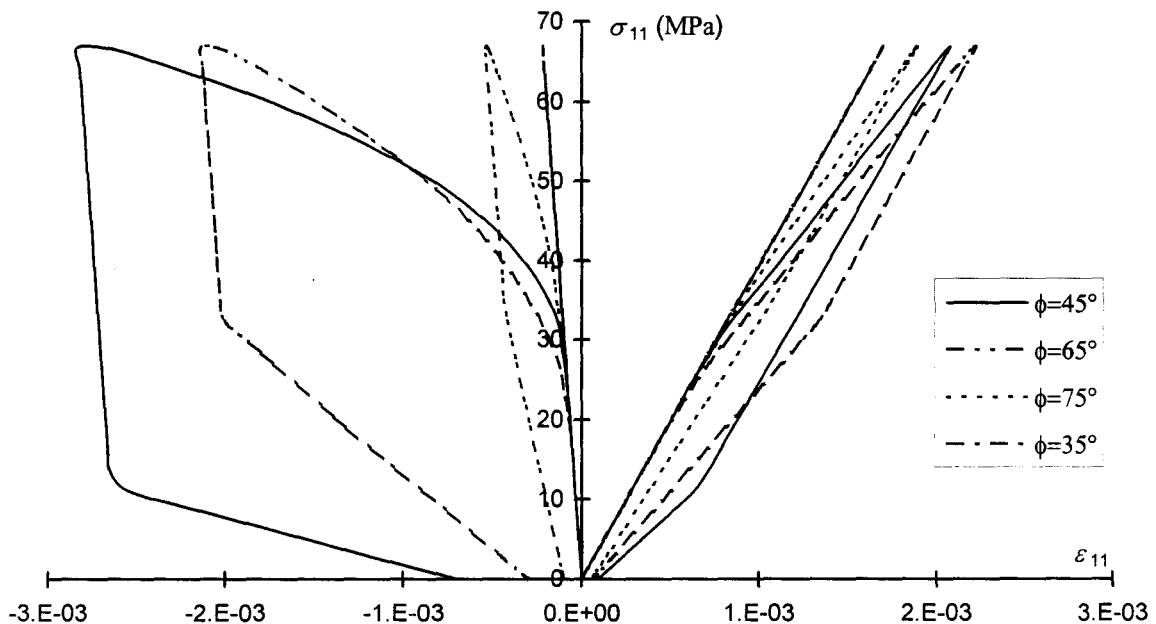


Figure A6.2 : Influence de l'angle ϕ .

Annexe 6 .2. Influence du coefficient η

Il s'agit de apprécier l'effet du coefficient η sur la contrainte de cohésion qui est une fonction décroissante du glissement $\tau_c = \tau_c^0 e^{-\eta|\delta|}$ (voir 4.26). Plus ce coefficient est élevé et plus la cohésion est faible ce qui induit un cisaillement résultant et un F.I.C. sur la fissure plus élevés. Nous avons constaté que le comportement du matériau est plus dilatant lorsque η est grand. $\eta = 0$ correspond à une cohésion constante ce qui implique une plus grande résistance du matériau durant l'essai. Par ailleurs, nous pouvons estimer que la cohésion perd au maximum 30% de sa valeur pendant un essai où l'ordre de grandeur (maximum) du glissement est de 10^{-2} : dans ces conditions η varie entre 0 et 40. L'influence de ce paramètre n'est pas suffisamment significative pour qu'elle soit graphiquement représentée.

Annexe 6 .3. Influence de la cohésion

La cohésion influe directement sur le cisaillement résultant sur la partie centrale de la mésosfissure branchée. L'augmentation de la cohésion ne fait que diminuer ce cisaillement et donc retarde la propagation des mésosfissures. Les longueurs de branchement sont en effet plus importantes avec une cohésion faible. On note cependant que l'effet de la cohésion sur la réponse globale reste limité (voir figure A6.3).

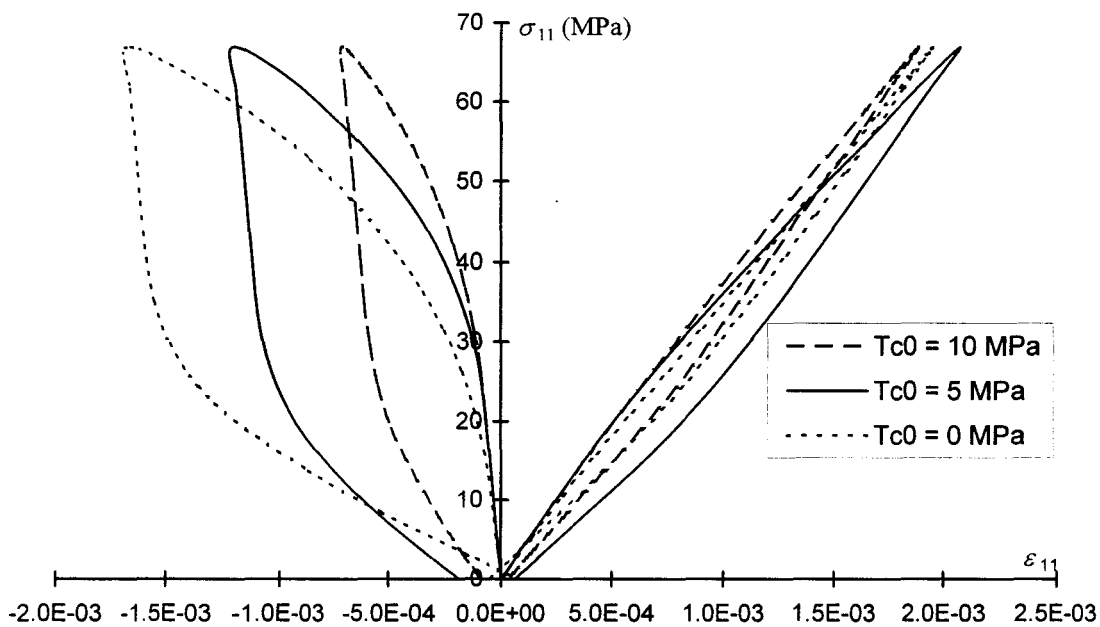


Figure A6.3 : Influence de la cohésion.

Annexe 6 .4. Influence de la création de mésosfissures

Les observations expérimentales dans les roches par exemple ont apporté la preuve que dans l'endommagement par croissance de mésosfissures est accompagné par la création de nouvelles

mésolfissures. Ce mécanisme de nucléation n'étant pas encore bien expliqué, nous avons considéré un modèle simple de type Zener-Stroh dans lequel la création de mésolfissures est contrôlée par un critère de contrainte de décohésion (cisaillement) dont la valeur critique est notée $2\tau_d$. La simulation de référence étant effectuée à $\tau_d = 7.5$ MPa, nous avons testé deux autres valeurs. On voit clairement l'effet de ce mécanisme sur les non-linéarités des déformations (figure A6.4). Le paramètre τ_d permet de préciser à partir de quel seuil de contrainte, le phénomène de création de mésolfissures (nucléation) peut commencer. Dans les simulations précédentes, le rapport entre le nombre maximal de fissures nouvelles et le nombre de fissures préexistantes était fixé à 100 %. Nous avons réalisé d'autres simulations en faisant varier ce taux maximal de nucléation p_n (figure A6.5). Naturellement, plus ce taux est important, plus les non-linéarités sont prononcées.

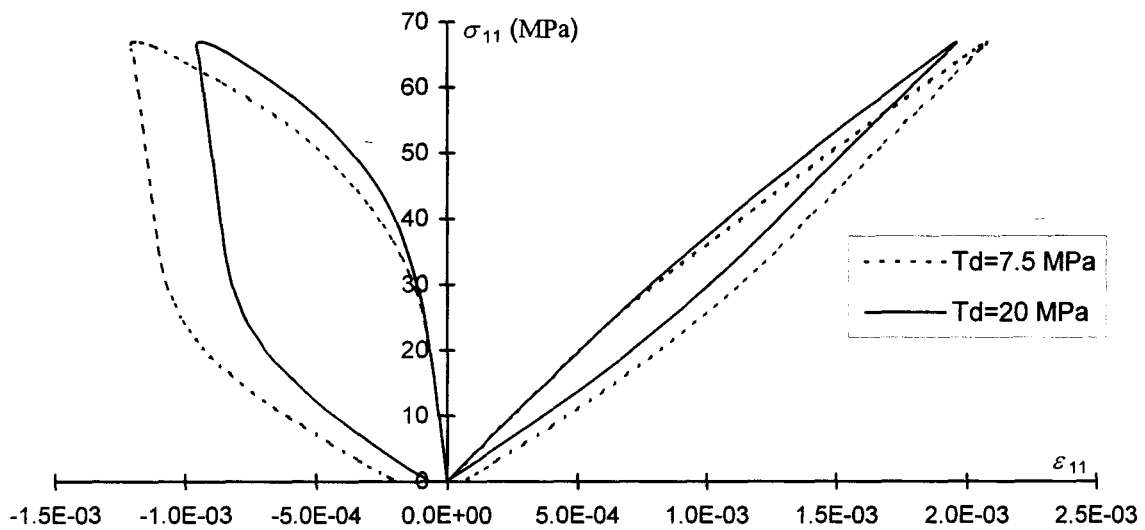


Figure A6.4 : Influence de la contrainte critique de décohésion.

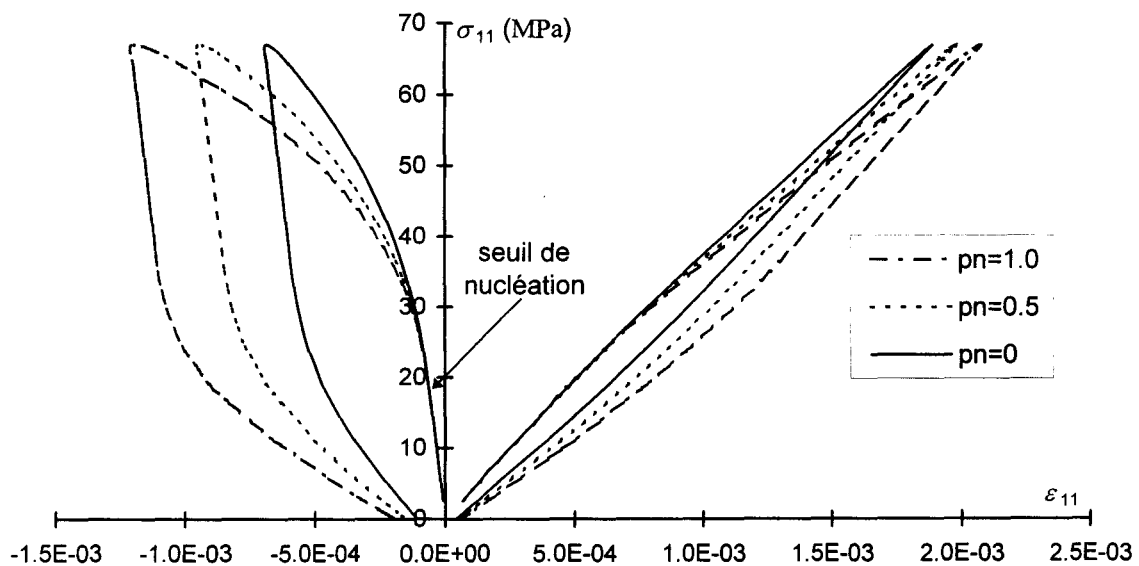


Figure A6.5 : Influence du taux maximal de nucléation de mésolfissures.

Annexe 7 . Extension au comportement différé.

Il est possible d'introduire dans le modèle un critère de propagation subcritique (croissance stable de mésofissures en fonction du temps avant d'atteindre le critère de propagation critique : $K_I = K_I^c$) afin de reproduire le comportement d'un matériau fragile lors d'un essai de fluage. Ce mécanisme de croissance dépendant du temps peut correspondre à une corrosion sous contraintes en tête de fissure, de la diffusion, de la dissolution, des échanges ioniques. Nous utilisons la relation de propagation lente qui lie la vitesse de mésofissuration au facteur d'intensité de contraintes en mode I (voir par exemple une étude récente de Yoshida et Horii, 1992) : $\frac{dl}{dt} = A_f K_I^n$, c'est à dire $\dot{l} = A_f K_I^n$. A_f et n sont des paramètres (dites de corrosion sous contraintes) qui dépendent des conditions d'environnement (comme l'humidité, la température et le pH) . Ce type de relation est généralement établi sur la base de résultats d'essais expérimentaux (en double torsion par exemple) comme dans les travaux d'Atkinson (1984), ou dans les études réalisées au sein de notre équipe par Henry (1978) ou Shao et *al.*, (1997). Pour l'exemple de simulation d'un essai uniaxial de fluage de 9 jours, présenté à la figure A7.1, les valeurs utilisées pour les différents paramètres sont les suivantes : $A_f = 100 \text{ ms}^{-1}$ et $n = 20$. La réponse en déformation latérale pour différents niveaux de charge est qualitativement satisfaisante. C'est moins le cas pour la déformation axiale, les mésofissures se développent en propagation lente principalement dans la direction de σ_{11} . Précisons enfin que dans le cas de la simulation présentée, le mécanisme de propagation lente n'est activé que pour des longueurs de branchement relativement importantes.

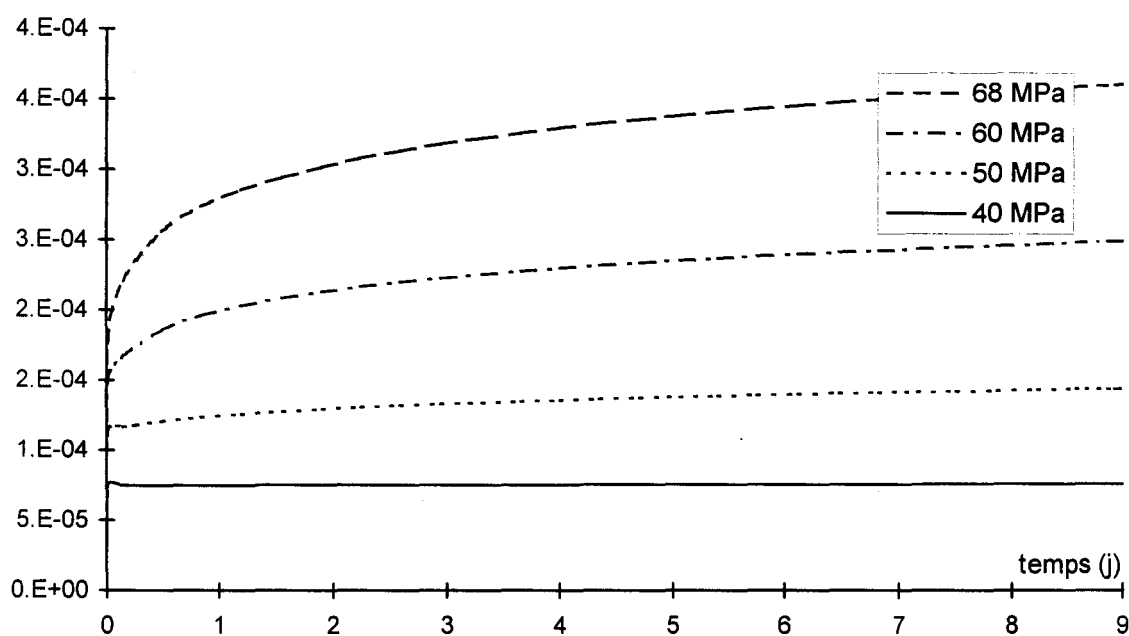


Figure A7.1 : Simulation du fluage uniaxial en compression.