

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE  
LABORATOIRE DE MECANIQUE DE LILLE**

**"GROUPE FIABILITE DES STRUCTURES"**

**THESE DE DOCTORAT**

Présentée pour l'obtention du

**DIPLOME DE DOCTORAT EN MECANIQUE**

par

**Valérie FERRO**



---

**ANALYSE GEOMETRIQUEMENT NON LINEAIRE DES PLAQUES  
ET COQUES LAMINEES EN GRANDES ROTATIONS**

---

---

**GEOMETRICALLY NONLINEAR ANALYSIS FOR LAMINATED  
PLATES AND SHELLS WITH LARGE ROTATIONS**

---

**Soutenue le 18 Décembre 1998, devant la commission d'examen composée de :**

<b>Président de jury :</b>	<b>M. B. LANDJERIT</b>	E.U.D.I.L, Lille
<b>Rapporteurs :</b>	<b>M. R.SCHMIDT</b>	I.A.M., RWTH, Aachen (Allemagne)
	<b>M. R.VALID</b>	Ecole centrale de Paris
<b>Examineurs :</b>	<b>M. I. KREJA</b>	Université Technique de Gdansk (Pologne)
	<b>M. J-B. TRITSH</b>	E.U.D.I.L, Lille
	<b>M. K. WOZNICA</b>	E.U.D.I.L, Lille
<b>Directeur de thèse :</b>	<b>M. D. WEICHERT</b>	I.A.M., RWTH, Aachen (Allemagne)

---

# *Table des matières*

---

## Table des matières

<b>REMERCIEMENTS .....</b>	
<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>4</b>
 <b>CHAPITRE 1 - LA THEORIE DES COQUES</b>	
<b>1.1 La théorie des coques.....</b>	<b>9</b>
1.1.1 Qu'est-ce qu'une coque?.....	9
1.1.2 Hypothèses fondamentales .....	10
1.1.3 La stratification.....	12
<b>1.2 Géométrie différentielle.....</b>	<b>13</b>
1.2.1 Systèmes de coordonnées dans l'espace.....	13
1.2.2 Description géométrique de la coque.....	14
1.1.3 Géométrie différentielle d'une surface.....	17
1.2.4 Etude des dérivations.....	19
1.2.4.1 Dérivées des vecteurs de base.....	20
1.2.4.2 Dérivées des vecteurs de l'espace.....	21
 <b>CHAPITRE 2 - GEOMETRIE NON LINEAIRE DES COQUES</b>	
<b>2.1 Etude du déplacement.....</b>	<b>26</b>
2.1.1 Hypothèse fondamentale .....	26
2.1.2 Classification des théories .....	27
<b>2.2 Relation déformations-déplacements.....</b>	<b>26</b>
2.2.1 Tenseur des déformations.....	28
2.2.2 Calcul des composantes de la déformation.....	30

2.3 Le principe des travaux virtuels.....	32
2.3.1 Les hypothèses.....	32
2.3.2 Travail interne.....	33
2.3.3 Travail externe.....	36
2.3.4 Equations de mouvement.....	37
<b>CHAPITRE 3 - LOIS DE COMPORTEMENT.....</b>	
3.1 Loi de comportement.....	41
3.1.1 Définition.....	41
3.1.2 Le tenseur d'élasticité.....	42
3.2 Application au modèle.....	43
3.2.1 Ecriture matricielle.....	43
3.2.2 Symétrie géométrique.....	44
3.2.3 Matériaux isotropes.....	45
3.2.4 Matériaux orthotropes.....	46
3.3 Application au laminé.....	47
3.3.1 Intégration globale des contraintes.....	47
3.3.2 Intégration globale de la matrice constitutive.....	49
<b>CHAPITRE 4 - LA METHODE DES ELEMENTS FINIS</b>	
4.1 Préliminaire.....	53
4.2 Discrétisation.....	53
4.2.1 Approximation.....	53
4.2.2 Formulation de l'élément.....	54
4.2.3 Etude des déplacements.....	54

4.2.4 Etude de la déformation.....	55
4.3 Le principe.....	57
4.3.1 Expression de la matrice de rigidité.....	57
4.3.2 Enoncé du principe.....	60
4.4 Ecriture matricielle de la déformation.....	60
4.4.1 Décomposition en fonction des déplacements.....	60
4.4.2 Opérateurs linéaires.....	61
4.4.3 Opérateurs non-linéaires.....	63
4.5 Calcul de la matrice de rigidité tangentielle totale.....	65
4.6 Le programme.....	67

**CHAPITRE 5 - RESULTATS NUMERIQUES.....**

5.1 Modélisation numérique.....	70
5.1.1 Choix des éléments.....	70
5.1.2 Résolution des systèmes non-linéaires.....	71
5.1.3 Intégration numérique.....	73
5.2 Exemples.....	74
5.2.1 Plaque (0,90) sous chargement concentre.....	74
5.2.2 Plaque sandwich sous chargement uniforme.....	75
5.2.3 Cylindre isotrope sous charge ponctuelle.....	77
5.2.4 Cylindre orthotrope (0,90) sous charge ponctuelle.....	78
5.2.5 Cylindre orthotrope sous charge concentrée (0,90)s.....	78
5.2.6 Arc à chargement non symétrique.....	80
5.2.7 Arc à chargement non symétrique.....	81
5.3 Conclusion.....	82

**CONCLUSION GENERALE.....97**

**BIBLIOGRAPIE .....100**

**ANNEXES**

**ANNEXE A : Eléments de géométrie différentielle .....108**

**ANNEXE B : Composantes du tenseur des déformation.....110**

**ANNEXE C : géométrie de la plaque .....113**

**ANNEXE D : géométrie de la coque cylindrique .....115**

**ANNEXE E : géométrie de la coque cylindrique .....116**

## **Remerciements**

*Ce travail a été effectué au Laboratoire de Mécanique de Lille au sein du groupe "Fiabilité des structures" et au département mécanique de l'Ecole Universitaire D'Ingénieurs de Lille, à l'Université des Sciences et Technologies de Lille.*

*Je remercie en premier lieu le professeur D. Weichert d'avoir accepté la tâche d'être mon directeur de thèse.*

*Je suis sensible à l'honneur que m'ont fait Messieurs R. Schmidt et R. Valid en acceptant d'être les rapporteurs de ce travail.*

*Je remercie Monsieur B. Landjerit de présider mon jury. Mes remerciements vont de même à Messieurs I. Kreja, J.B. Tritsh et K. Woznica qui ont accepté d'être membres de ce jury.*

*Toute ma gratitude va à I. Kreja qui a mis à ma disposition ses qualités scientifiques avec une grande générosité. Ses idées et conseils m'ont guidée tout au long du cheminement de ce travail. Qu'il accepte le témoignage de ma reconnaissance la plus sincère.*

*Je remercie mes collègues du département mécanique de l'E.U.D.I.L, Messieurs P. Dufresnoy, M. Musial, J.L. Munoz, J.B. Tritsh. Ma reconnaissance va à C. Théron, directeur des études du département, pour le soutien qu'il m'a apporté.*

*Mes pensées vont aux autres thésards avec qui j'ai partagé de bons moments, mais qui m'ont également aidée à traverser les périodes difficiles.*

*Je tiens à remercier également mes parents et amis pour leur patience et leurs encouragements.*

*Je voudrais dédier ce modeste travail à la mémoire de mon père, et à ma mère.*

---

# *Introduction générale*

---

### ***Le contexte :***

Notre étude porte sur le comportement géométriquement non linéaire des coques minces. Dans l'énoncé d'un problème linéaire, une coque appuyée sur son contour ne peut ni s'enfoncer ni décoller, or nous savons qu'en réalité se pose souvent le problème de flambement ou de plissement des structures minces lorsqu'elles sont accompagnées de grands déplacements et de grandes rotations bien que les déformations restent faibles, c'est la raison de l'introduction de l'analyse non linéaire.

La coque est un solide dont une dimension appelée épaisseur, reste faible par rapport aux autres dimensions. Il est donc permis de penser que la coque est un solide engendré par une surface de référence et une hauteur. L'intérêt est de pouvoir simplifier le problème tridimensionnel en un problème bidimensionnel. Les champs de déplacement sont définis sur la surface moyenne prise comme surface de référence, par l'utilisation d'expressions polynomiales suivant l'épaisseur. La théorie présentée aujourd'hui est du premier ordre, les champs de déplacement varient linéairement en fonction de la cote de la coque. Cet ordre de développement est couramment employé car seule la continuité  $C^0$  des variables est requise. Il existe cependant des théories d'ordre supérieur, avec des distributions plus générales des champs des déplacements entraînant une augmentation du nombre de variables cinématiques. Le champ des déplacements peut par exemple être distribué en fonctions sinusoïdales selon l'épaisseur ( Tsai & Palazotto [56] ).

Selon l'écriture des déplacements et des déformations, les développements ont donné naissance à diverses théories. La littérature concernant les modèles de coques est très vaste. Nous pouvons cependant en citer les principaux axes et les différents domaines

d'applications. Ainsi, sous l'hypothèse de conservation des normales à la surface moyenne, c'est à dire sans phénomène de cisaillement, les équations cinématiques se rattachent à la théorie de Love-Kirchhoff ( Koiter [26] ). Ce modèle est mis en défaut lorsque le matériau subit des effets de cisaillement. Citons en exemple les composites, qui sont de plus en plus employés dans les différents domaines de l'industrie. Dans ce cas de figure, la normale à la surface moyenne de la coque non déformée reste une droite après déformation, mais n'est plus nécessairement normale à la surface moyenne de la coque déformée. La théorie de Von Karman ( Meek & Ristic [36] ) permet une grande simplification de l'écriture de la déformation reposant sur le fait que les composantes de déplacements dans le plan et leurs dérivées restent faibles. La théorie des rotations modérées ( Kreja & Schmidt & Reddy [27], Librescu [30] ) prend en compte un nombre plus important de termes que la théorie de Von Karman. La formulation complète ( Saleeb & al. [46], Schmidt & Chroscielewski [9], [10] ) sur laquelle repose le travail actuel permet de traiter des problèmes où l'ordre de grandeur des rotations peut être important.

Dans l'industrie, les calculs numériques de structures utilisant des éléments de coques sont très répandus. Dans de nombreux secteurs ( carrosserie, automobile, réservoirs...), la méthode des éléments finis est devenue un outil indispensable. Cette méthode est apparue il y a environ trente cinq ans. Les premiers éléments de plaque ont été formulées avec la théorie de Kirchhoff sous forme discrète. C'est Dhatt en 1969 qui pose les bases de la formulation de l'élément triangulaire ( Dhatt & Touzot [15] ). Ce sont, au travers des publications de Batoz et Dhatt au début des années 80 qu'un grand intérêt a été porté aux éléments quadrilatéraux ( Batoz & Dhatt [6] ). Le programme que nous avons élaboré aujourd'hui vise à modéliser les phénomènes de grands déplacements et de grandes rotations avec prise en compte du cisaillement transverse, en utilisant les éléments quadrilatéraux.

## ***Plan de la thèse :***

Dans le premier chapitre, nous présentons tout d'abord la coque. Nous la définissons au travers de ses paramètres et caractéristiques géométriques. Nous aborderons la méthode de stratification ( Librescu [30] ) qui permet de décomposer la coque en un nombre donné de couches. La surface moyenne de chaque couche sera le support de définition des variables cinématiques surfaciques qui vont permettre l'écriture du problème de façon bidimensionnelle. Nous relatons ensuite un certain nombre d'égalités différentielles destinées ultérieurement à la compréhension de la mise en équations du problème dans les chapitres suivants.

Nous abordons ensuite l'hypothèse fondamentale de l'écriture des composantes du vecteur déplacement ( Librescu [30] ) qui permet le passage du problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel. Nous donnons les hypothèses physiques et la mise en équations qui permettent d'établir les différents modèles cinématiques de coques ( Reddy [45] ). Les déplacements définis par rapport à la surface moyenne sont alors introduits dans le tenseur des déformations de Green-Lagrange. La résolution du principe des travaux virtuels par approche cinématique permet d'établir les équations d'équilibre et les conditions aux limites de la coque ( Valid [61] ).

Le chapitre trois est consacré à la loi de comportement. Après un bref rappel des hypothèses qui permettent d'établir la loi de Hooke généralisée ( Marsden & Hughes [34] ), nous appliquons celle-ci à notre matériau. Nous effectuons les calculs du tenseur d'élasticité et des contraintes par intégration au travers de chaque couche du laminé ensuite sommées sur l'épaisseur totale de la coque. Pour terminer, ces grandeurs seront écrites sous forme matricielles afin d'être introduites dans l'algorithme.

Par le biais de la méthode des éléments finis ( Craveur [14] ), nous posons le problème sous forme discrète. Les grandeurs sont écrites sous forme matricielle, et des opérateurs sont introduits afin de traiter la géométrie non linéaire ( Palmerio [38] ). Nous établirons les différents termes qui conduisent à l'obtention de la matrice de rigidité, qui

permet le calcul des déplacements. Nous terminons ce chapitre par donner le déroulement du programme.

Nous proposons à la fin du rapport les solutions numériques de quelques exemples, comparées à d'autres résultats. Nous proposons une palette de géométries et de matériaux différents, afin d'une part de valider le code pour un grand nombre d'applications, et d'autre part d'en montrer l'apport.

## *Chapitre 1*

---

# *La théorie des coques*

---

## 1-1 La théorie des coques :

### 1-1-1 Qu'est ce qu'une coque? :

Une coque est un solide ou partie de solide, dont au moins une dimension, appelée épaisseur, est petite par rapport aux autres dimensions.

Selon certains critères géométriques, les éléments de volume seront classés de la façon suivante (Batoz & Dhatt [6]) :

Plaque : surface plane	longueur $L$ , largeur $l$	$h < L, l$
Coque : surface courbe	longueur $L$ , largeur $l$ rayon de courbure minimum $R_{\min}$	$h < L, l, R_{\min}$
Poutre droite : ligne, section	longueur $L$ , section $A=h l$	$h, l < L$
arc : ligne courbe, section	longueur $L$ , section $A=h l$	$h, l < L$

La coque est en fait considérée comme un solide dont le volume est engendré par une surface moyenne qui est la surface de référence, s'étendant d'une longueur de  $h/2$  de chaque côté de la surface suivant sa normale.

L'épaisseur, qu'on note  $h$ , est un paramètre géométrique déterminant. Suivant son ordre de grandeur face aux autres dimensions, les coques sont dites minces, modérées ou épaisses, et ces attributs entraînent des spécificités pour la théorie employée.

Une coque mince vérifie :

$$\frac{h}{R_{\min}} \ll 1 \quad (1.1)$$

### ***1-1-2 Hypothèses fondamentales :***

L'étude des coques minces repose sur les hypothèses suivantes :

- Une droite normale à la surface moyenne ne subit pas d'élongation.
- Les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur une normale à la surface moyenne déformée.

Ces hypothèses sont les hypothèses de Love et Kirchhoff ( Schmidt [49] ), ceux-ci ont établi des modèles de plaques et coques où les contraintes normales sont nulles et les déformations de cisaillement négligeables, puisque la rigidité de cisaillement est très supérieure à la rigidité de flexion. Ces modèles ont été repris par Koiter ( Koiter [26] ) et Sanders ( Sanders [47] ), entre autres.

Lorsque le cisaillement transversal ne peut être négligé, l'hypothèse se réduit à :

- Une droite normale à la surface moyenne avant déformation reste une droite n'ayant pas subi d'élongation, mais celle-ci n'est pas nécessairement normale à la surface moyenne déformée.

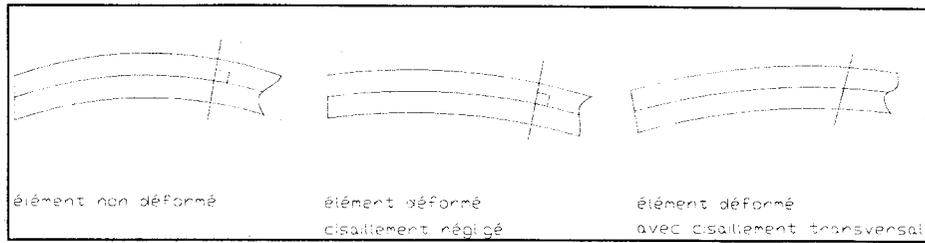


Figure 1-1 : influence du cisaillement transversal

Cette troisième hypothèse est une base de la théorie de Mindlin-Reissner-Hencky (Batoz & Dhatt [6] ), qui donne le comportement des coques d'épaisseur modérée, et des coques où l'influence du cisaillement transversal ne peut être négligée, bien qu'étant d'épaisseur faible.

Le modèle de Kirchhoff est valable tant que l'épaisseur reste faible, et lorsque le matériau possède un module de cisaillement transversal  $G$  élevé. Notons que pour un matériau isotrope,  $G$  est du même ordre que le module de Young  $E$ , seule la géométrie de la coque permet de définir la modélisation appropriée.

En effet pour une coque homogène isotrope, les effets de cisaillement transversal sont négligeables (Batoz & Dhatt [6] ) si :

$$\frac{E}{kG} \left( \frac{h}{L} \right)^2 \ll 1 \quad (1.2)$$

$k$  est le facteur de correction de cisaillement transversal, égal à  $5/6$  dans le cas des matériaux isotropes, et calculé pli par pli dans le cas des matériaux composites.

Ces différentes hypothèses de base ont permis de nombreux travaux sur le comportement des coques avec le respect de la validité physique, du contexte d'application scientifique et technologique et de la rigueur de la formulation mathématique.

Nous avons établi un modèle où les effets de cisaillement transversal ne peuvent être négligés, avec des matériaux tels que les composites laminés par exemple.

### 1-1-3 La stratification :

Le procédé consiste à décomposer la coque suivant  $N$  couches, parallèlement à une surface de référence, celle-ci étant choisie pour coïncider avec la surface moyenne de la première couche. L'intérêt est que l'étude du comportement de la coque est ramenée à son feuillet moyen, au lieu de traiter une approche tridimensionnelle directement.

On note  $2h_k$  l'épaisseur uniforme de la couche  $k$ ,  $k = \{1, N\}$ .  $z_k$  est la distance mesurée suivant la normale entre la surface de référence et la surface moyenne de la couche  $k$ , quelconque (Librescu [30]) :

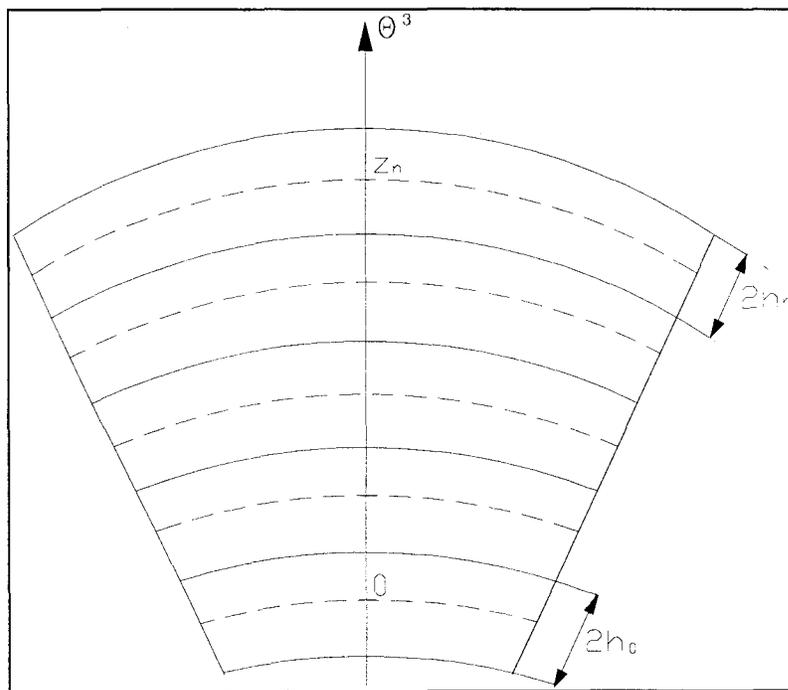


Figure 1.2 : La coque stratifiée

Le stratifié est donc constitué de couches possédant chacune des caractéristiques mécaniques et des orientations de fibres différentes. C'est le cas des composites qui sont constitués de fibres liées par des résines.

Il peut y avoir perte de cohésion de l'empilement, les couches ne sont plus liées entre elles, dans ce cas on parle d'endommagement par délaminage. On constate alors que dans ce phénomène les contraintes de cisaillement transversal jouent un rôle important ( Allen & Harris [1], [2], [3] ).

Nous nous limitons pour notre étude, aux hypothèses suivantes :

- Chaque couche possède ses caractéristiques mécaniques et physiques.
- Le matériau de chaque couche est linéairement élastique et anisotrope.
- Les couches sont parfaitement liées entre elles.

## ***1-2 Géométrie différentielle :***

### ***1-2-1 Systèmes de coordonnées dans l'espace :***

Nous allons tout d'abord établir les systèmes de coordonnées généralement employés pour décrire la géométrie des coques :

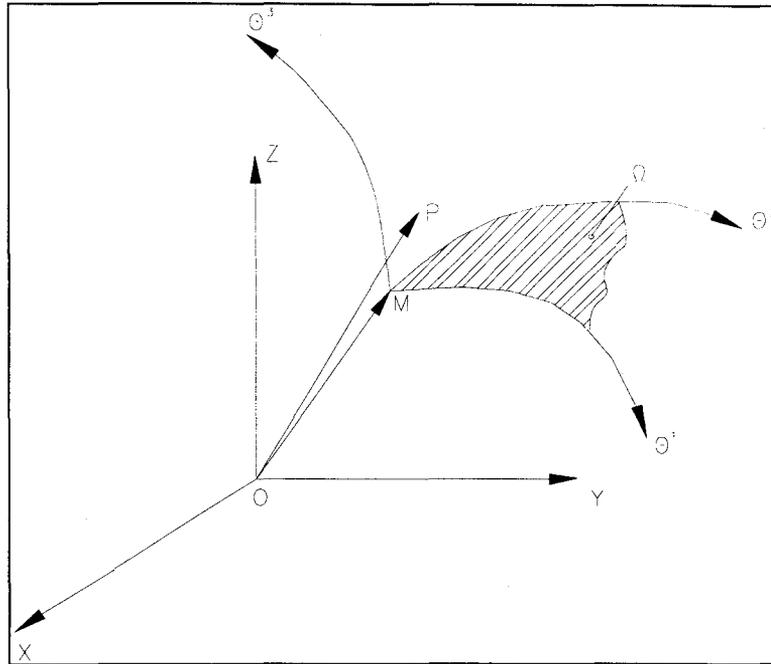


Figure 1-3 : Systèmes de coordonnées

$(x, y, z)$  sont les coordonnées cartésiennes de l'espace  $\mathfrak{R}^3$ ,  $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  sont les coordonnées curvilignes; on dit que l'on a défini un système de coordonnées curvilignes  $(\theta^i)_{i=1,2,3}$  si on connaît une application bijective et suffisamment régulière d'un domaine de  $\mathfrak{R}^3$  sur un autre domaine de  $\mathfrak{R}^3$  qui à  $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  fait correspondre  $(x, y, z)$  (Coirier [12]).

### 1-2-2 Description géométrique de la coque :

Le domaine de la coque dans l'espace est délimité par :

$$-\frac{h}{2} \leq \theta^3 \leq \frac{h}{2} \quad (1.3)$$

Il est rappelé que  $h$  est l'épaisseur de la coque, supposée constante dans la suite.

Les surfaces extérieures  $S^+$  et  $S^-$  qui délimitent la coque sont définies par :

$$S^+ = \left( \theta^1, \theta^2, \theta^3 = \frac{h}{2} \right) \quad (1.4)$$

et :

$$S^- = \left( \theta^1, \theta^2, \theta^3 = -\frac{h}{2} \right) \quad (1.5)$$

Soit  $\Omega$  la surface de référence, telle que :

$$\Omega = \left( \theta^1, \theta^2, \theta^3 = 0 \right) \quad (1.6)$$

A est la surface latérale de la coque,  $\Gamma$  en est la courbe limite :

$$\Gamma = \Omega \cap A \quad (1.7)$$

Nous supposons  $S^+$ ,  $S^-$  et  $\Gamma$  réguliers pour toutes les opérations différentielles développées dans la suite.

Considérons maintenant P, un point quelconque de la coque définie précédemment, et soit  $\mathbf{R}$  le vecteur de l'espace d'origine O et d'extrémité P :

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{R}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (1.8)$$

avec les relations suivantes entre les deux systèmes de coordonnées définis :

$$\theta^i = \theta^i(x, y, z) \quad (1.9)$$

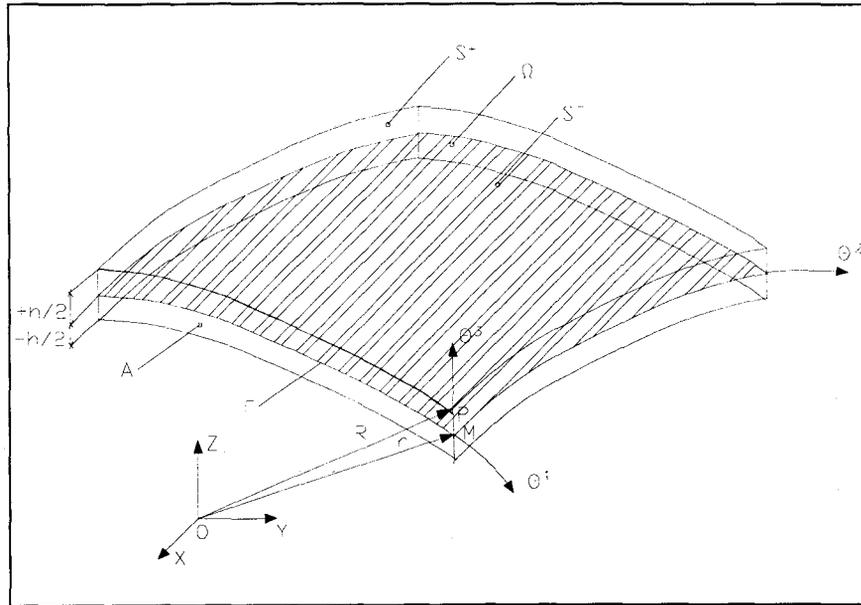


Figure 1-4 : Géométrie de la coque

Posons :

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^1}$$

$$\mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^2} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^3}$$

Les  $\mathbf{g}_i$  sont les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées curvilignes, ils forment une base spatiale. De ces vecteurs, nous pouvons construire le tenseur métrique de composantes

$g_{ij}$  :

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (1.11)$$

Ce tenseur permet la construction de la cobase  $\mathbf{g}^i$  :

$$\mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j \quad (1.12)$$

où encore :

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \quad (1.13)$$

où les  $g^{ij}$  sont les composantes de l'inverse du tenseur métrique. Les vecteurs  $\mathbf{g}^i$  sont donc orthogonaux aux lignes de coordonnées curvilignes :

$$\mathbf{g}^i \mathbf{g}_j = \delta_j^i \quad (1.14)$$

$\delta_j^i$  est le symbole de Kroneker :

$$\delta_j^i = 1, \text{ si } i = j, \text{ et } \delta_j^i = 0, \text{ si } i \neq j \quad (1.15)$$

### ***1-2-3 Géométrie différentielle d'une surface :***

Soit M, la projection orthogonale de P sur la surface  $\Omega$ , repéré dans l'espace curviligne par le vecteur  $\mathbf{r}$ :

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) \quad (1.16)$$

A partir de ce vecteur  $\mathbf{r}$ , nous construisons les vecteurs de base de la surface moyenne pour le système de coordonnées  $\theta^i$  :

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^\alpha} \quad (1.17)$$

et :

$$\hat{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{R}_{,3} \quad (1.18)$$

$\hat{\mathbf{a}}_3$  est par définition, un vecteur unitaire.

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OP}} &= \mathbf{R}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ &= \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \hat{\mathbf{a}}_3(\theta^1, \theta^2) \end{aligned} \quad (1.19)$$

La cobase  $\mathbf{a}^i$  est exprimée en fonction de  $\mathbf{g}^i$  :

$$\mathbf{a}^i(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{g}^i(\theta^1, \theta^2, 0) \quad (1.20)$$

De même que pour les équations (1.12) et (1.13) :

$$\mathbf{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta \quad (1.21)$$

$$\mathbf{a}_\alpha = a_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\beta \quad (1.22)$$

$a^{\alpha\beta}$  et  $a_{\alpha\beta}$  sont les composantes des tenseurs métriques contravariants et covariants respectivement, de la surface de référence  $\Omega$ .

Nous en déduisons que :

$$\mathbf{a}^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \mathbf{a}^\beta \quad (1.23)$$

$$\mathbf{a}_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta \quad (1.24)$$

$$\mathbf{a}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\gamma\beta} = \delta_{\gamma}^{\alpha} \quad (1.25)$$

Les vecteurs  $\mathbf{a}_{\alpha}$  et  $\mathbf{g}_{\alpha}$  sont reliés par :

$$\mathbf{g}_{\alpha} = \mu_{\alpha}^{\lambda} \mathbf{a}_{\lambda} \quad (1.26)$$

où  $\mu_{\alpha}^{\lambda}$  sont les composantes du tenseur de changement de courbure, défini par :

$$\mu_{\alpha}^{\lambda} = \delta_{\alpha}^{\lambda} - \theta^3 b_{\alpha}^{\lambda} \quad (1.27)$$

$b_{\alpha}^{\lambda}$  est le tenseur de courbure dont nous reparlerons ultérieurement, défini par :

$$b_{\alpha}^{\lambda} = \hat{\mathbf{a}}_3 \mathbf{a}_{,\alpha}^{\lambda} \quad (1.28)$$

#### **1-2-4 Etude des dérivations :**

##### **1-2-4-1 dérivées des vecteurs de base :**

Nous posons :

$$\mathbf{g}_{i,j} = \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \theta^j} \quad (1.29)$$

Si nous revenons à la construction de la base  $\mathbf{g}_i$  :

$$\mathbf{g}_{i,j} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \quad (1.30)$$

Le vecteur  $\mathbf{g}_{i,j}$  peut être exprimé dans la base de vecteurs  $\mathbf{g}_k$  ou  $\mathbf{g}^k$  :

$$\mathbf{g}_{i,j} = \Gamma_{ijk} \mathbf{g}^k \quad (1.31)$$

$$\mathbf{g}_{i,j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k \quad (1.32)$$

Les coefficients  $\Gamma_{ijk}$  et  $\Gamma_{ij}^k$  sont les symboles de Christoffel de première et de seconde espèce, respectivement, leurs définitions sont données en annexe A.

Nous pouvons également définir les symboles de Christoffel évalués dans la surface de référence :

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(\theta^1, \theta^2) = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}(\theta^1, \theta^2, 0) \quad (1.33)$$

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}(\theta^1, \theta^2) = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(\theta^1, \theta^2, 0) \quad (1.34)$$

Les relations complémentaires figurent en annexe A, elles permettent d'écrire :

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathbf{a}_{\gamma} + b_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{a}}_3 \quad (1.35)$$

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{a}^{\gamma} + b_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{a}}_3 \quad (1.36)$$

$$\mathbf{a}^{\alpha}_{,\beta} = -\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} \mathbf{a}^{\gamma} + b_{\beta}^{\alpha} \hat{\mathbf{a}}_3 \quad (1.37)$$

Ces équations sont connues sous le nom de formules de Gauss pour les dérivées des vecteurs tangents.

Quant à la dérivée du vecteur normal, elle s'écrit :

$$\hat{\mathbf{a}}_{3,\beta} = -b_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha \quad (1.38)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{3,\beta} = -b_\beta^\alpha \mathbf{a}_\alpha \quad (1.39)$$

Ces relations sont les formules de Weingarten.

#### ***1-2-4-2 Dérivée des vecteurs de l'espace :***

Considérons  $\mathbf{V}$ , le déplacement d'un point de la coque, il s'écrit :

$$\mathbf{V} = V^i \mathbf{g}_i \quad (1.40)$$

ou encore, dans la cobase :

$$\mathbf{V} = V_i \mathbf{g}^i \quad (1.42)$$

et en termes de composantes :

$$V^\alpha = V^\alpha(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$$

$$V_\alpha = V_\alpha(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (1.43)$$

$$V_3 = V^3 = V_3(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$$

Ce vecteur peut être exprimé dans le repère lié à la surface de référence :

$$\mathbf{V} = \bar{V}^\alpha \mathbf{a}_\alpha + \bar{V}^3 \mathbf{a}_3 \quad (1.44)$$

et également dans la cobase correspondante :

$$\mathbf{V} = \bar{V}_\alpha \mathbf{a}^\alpha + \bar{V}_3 \mathbf{a}^3 \quad (1.45)$$

Les composantes s'écrivent de la même manière que pour (1.43) :

$$\bar{V}^\alpha = \bar{V}^\alpha(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$$

$$\bar{V}_\alpha = \bar{V}_\alpha(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (1.46)$$

$$\bar{V}_3 = \bar{V}^3 = \bar{V}_3(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$$

A tout moment nous pouvons passer de la base  $\mathbf{a}_i$  à la base  $\mathbf{g}_i$  :

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha - \theta^3 b_\alpha^\beta \mathbf{a}_\beta \quad (1.47)$$

Et pour le tenseur métrique :

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{\alpha\beta} - 2\theta^3 b_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2 b_{\alpha\gamma} b_\beta^\gamma \quad (1.48)$$

$$\mathbf{g}_{\alpha 3} = 0 \quad (1.49)$$

$$\mathbf{g}_{33} = 1 \quad (1.50)$$

Nous pouvons écrire les relations entre les composantes spatiales et celles relative à la surface moyenne :

$$\begin{aligned} V_\alpha &= \mu_\alpha^\lambda \bar{V}_\lambda \\ V^\alpha &= (\mu^{-1})^\alpha_\beta \bar{V}^\beta \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$V_3 = \bar{V}_3$$

D'après les relations (1.31) et (1.32), la dérivée du vecteur  $\mathbf{V}$  s'écrit :

$$\mathbf{V}_{,i} = (V^j_{,i} + V^k \Gamma_{ik}^j) \mathbf{g}_j \quad (1.52)$$

$$\mathbf{V}_{,i} = (V_{j,i} + V_k \Gamma_{ij}^k) \mathbf{g}^j \quad (1.53)$$

Ces dérivées sont appelées les dérivées covariantes et contravariantes des composantes contravariantes et covariantes du vecteur  $\mathbf{V}$  :

$$\mathbf{V}_{,i} = V^j \parallel_i \mathbf{g}_j \quad (1.54)$$

$$\mathbf{V}_{,i} = V_j \parallel_i \mathbf{g}^j \quad (1.55)$$

De plus, les dérivées covariantes des déplacements de l'espace notées  $(\cdot) \parallel_i$  peuvent être reliées aux dérivées covariantes  $(\cdot)_{,i}$  des déplacements sur la surface moyenne par les relations suivantes :

$$V_\alpha \parallel_\beta = \mu_\alpha^\lambda (\bar{V}_\gamma \parallel_\beta - b_{\gamma\beta} \bar{V}_3)$$

$$V^\alpha \parallel_\beta = (\mu^{-1})^\alpha_\gamma (\bar{V}^\gamma \parallel_\beta - b_\beta^\gamma \bar{V}_3)$$

$$V_\alpha \parallel_3 = \mu^\gamma_\alpha \bar{V}_{\gamma,3}$$

$$V^\alpha \parallel_3 = (\mu^{-1})^\alpha_\gamma \bar{V}^\gamma_{,3} \tag{1.56}$$

$$V^3 \parallel_\alpha = V_3 \parallel_\alpha = \bar{V}_{3,\alpha} + b_{\alpha\lambda} \bar{V}^\lambda$$

$$V_3 \parallel_3 = V^3 \parallel_3 = \bar{V}_{3,3} = V^3_{,3}$$

Ces dérivées vont servir à élaborer les équations cinématiques, objet de notre prochain chapitre.

## *Chapitre 2*

---

# *Géométrie non linéaire des coques*

---

## 2-1 Etude du déplacement :

### 2-1-1 Hypothèse fondamentale :

La théorie sur laquelle le travail présenté est basé repose sur le fait que les déplacements moyens s'expriment en fonction de la variable  $\theta^3$  suivant un développement de Taylor ( Librescu [30] ) :

$$\bar{V}_i(\theta^\alpha, 0, t) = V_i(\theta^\alpha, 0, t) + \theta^3 \frac{\partial V_i(\theta^\alpha, 0, t)}{\partial \theta^3} + (\theta^3)^2 \frac{\partial^2 V_i(\theta^\alpha, 0, t)}{\partial (\theta^3)^2} + \dots \quad (2.1)$$

Ceci permet de ramener le problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel, et ainsi simplifier la mise en équations.

Nous écrivons les composantes du vecteur déplacement défini ci-dessus de la façon suivante (Reddy [45] ) :

$$\begin{aligned} \bar{V}_1(\theta^1, \theta^2, \theta^3) &= u + \alpha \theta^3 \frac{\partial w}{\partial \theta^1} + \beta \theta^3 \phi_1 + \lambda (\theta^3)^2 \psi_1 + \gamma (\theta^3)^3 \xi_1 \\ \bar{V}_2(\theta^1, \theta^2, \theta^3) &= v + \alpha \theta^3 \frac{\partial w}{\partial \theta^2} + \beta \theta^3 \phi_2 + \lambda (\theta^3)^2 \psi_2 + \gamma (\theta^3)^3 \xi_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\bar{V}_3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = w + \lambda \theta^3 \phi_3 + \gamma (\theta^3)^2 \psi_3$$

Pour la théorie à l'ordre 3, il faut définir les fonctions rattachées à la variable  $\gamma$  :

$$\xi_1 = -\frac{4}{3h^2} \left( \phi_1 + \frac{\partial w}{\partial \theta^1} \right) \quad (2.3)$$

$$\xi_2 = -\frac{4}{3h^2} \left( \phi_2 + \frac{\partial w}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.4)$$

$$\psi_3 = 0 \quad (2.5)$$

(u,v,w) sont les composantes de déplacement dans les directions  $\theta^1$ ,  $\theta^2$  et  $\theta^3$  respectivement.

$\phi_1$  et  $\phi_2$  sont les rotations autour des axes  $\theta^2$  et  $\theta^1$ , respectivement de la normale à la surface moyenne.

### 2-1-2 Classification des théories :

La formulation (2-2) permet de faire apparaître les différents modèles de coques dont les composantes du déplacement vérifient l'hypothèse (2-1).

Suivant les valeurs attribuées à  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ , et  $\gamma$  nous obtenons donc ( Reddy [45] ) :

	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$	$\gamma$
Théorie de Love-Kirchhoff	-1	0	0	0
Théorie à l'ordre 1	0	1	0	0
Théorie à l'ordre 2	0	1	1	0
Théorie à l'ordre 3	0	1	0	1

Le modèle de Mindlin-Reissner, qui prend en compte le cisaillement transverse, s'applique aux coques d'épaisseurs modérées.

Le modèle de Love-Kirchhoff, où la déformation à l'effort tranchant n'est pas prise en compte, est employé pour les coques minces.

Les théories d'ordres supérieurs traduisent le fait qu'une droite normale à la surface moyenne ne demeure pas nécessairement une droite après déformation.

Nous allons nous limiter à un développement à l'ordre 1 pour les composantes membranaires du déplacement, et jusqu'à l'ordre 0 pour la composante suivant la normale à la surface moyenne. Ceci est justifié par le fait que la dimension suivant la normale est petite par rapport aux deux autres.

Les composantes du vecteur déplacement s'écrivent donc :

$$\bar{V}_\alpha(\theta^\omega, \theta^3, t) = \overset{(0)}{V}_\alpha + \theta^3 \overset{(1)}{V}_\alpha \quad (2.6)$$

$$\bar{V}_3(\theta^\omega, \theta^3, t) = \overset{(0)}{V}_3 \quad (2.7)$$

## ***2-2 Relations déformations-déplacements :***

### ***2-2-1 Le tenseur des déformations :***

Nous introduisons le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$ .

Pour introduire l'ordre de grandeur des composantes de  $\mathbf{E}$ , il est pratique d'exprimer celles-ci en fonction du tenseur des déformations linéaires  $\mathbf{e}$  et du tenseur de rotation  $\mathbf{w}$  :

$$\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{e}_{ij} + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{ki} \mathbf{w}_{kj} + \frac{1}{2} (\mathbf{e}_{kj} \mathbf{w}_{ki} + \mathbf{e}_{ki} \mathbf{w}_{kj}) + \frac{1}{2} \mathbf{e}_{ki} \mathbf{e}_{kj} \quad (2.8)$$

avec les composantes de  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{w}$  qui sont définies par :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (V_i \parallel_j + V_j \parallel_i) \quad (2.9)$$

$$w_{ij} = \frac{1}{2} (V_i \parallel_j - V_j \parallel_i) \quad (2.10)$$

Nous rappelons que  $\mathbf{V}$  est le vecteur déplacement défini au chapitre 1.

L'hypothèse des petites déformations nous place dans le cadre :

$$E_{ij} \ll O(\theta^2), \text{ où } \theta^2 \ll 1 \quad (2.11)$$

Les théories des rotations sont classées de la manière suivante :

$$\omega_{ij} = O(\theta^2) \text{ avec } \theta^2 \ll 1 \quad \Rightarrow \text{ petites rotations, de l'ordre de 2 degrés}$$

$$\omega_{ij} = O(\theta) \quad \Rightarrow \text{ rotations modérées, de l'ordre de 10 degrés}$$

$$\omega_{ij} = O(\sqrt{\theta}) \quad \Rightarrow \text{ rotations larges, de l'ordre de 25 degrés}$$

$$\omega_{ij} = O(1) \quad \Rightarrow \text{ grandes rotations, supérieures à 25 degrés.}$$

### ***2-2-2 Calcul des composantes de la déformation :***

Les composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange sont données en fonction des composantes du vecteur de déplacement  $\mathbf{V}$ :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{V}_i \parallel_j + \mathbf{V}_j \parallel_i + \mathbf{V}^k \parallel_i \mathbf{V}_k \parallel_j \right) \quad (2.12)$$

Les relations (2.6) et (2.7) permettent de mettre ces composantes sous la forme :

$$E_{\alpha\beta} = \overset{(0)}{E}_{\alpha\beta} + \theta^3 \overset{(1)}{E}_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2 \overset{(2)}{E}_{\alpha\beta} \quad (2.13)$$

$$E_{\alpha 3} = \overset{(0)}{E}_{\alpha 3} + \theta^3 \overset{(1)}{E}_{\alpha 3} \quad (2.14)$$

Nous rappelons que la composante normale du tenseur des déformations est négligée.

En remplaçant les dérivées des composantes du vecteur déplacement par les équations (1.56) et en utilisant les formules de géométrie différentielles établies au chapitre 1, nous

obtenons le développement des composantes  $\overset{(i)}{E}_{mn}$  :

$$\begin{aligned} \overset{(0)}{E}_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} \left( \overset{(0)}{\mathbf{V}_\alpha} \parallel_\beta + \overset{(0)}{\mathbf{V}_\beta} \parallel_\alpha - 2\mathbf{b}_{\alpha\beta} \overset{(0)}{\mathbf{V}}_3 \right) + \frac{1}{2} \left( \overset{(0)}{\mathbf{V}}_{3,\alpha} + \mathbf{b}_{\alpha\lambda} \overset{(0)}{\mathbf{V}}^\lambda \right) \left( \overset{(0)}{\mathbf{V}}_{3,\beta} + \mathbf{b}_{\beta\delta} \overset{(0)}{\mathbf{V}}^\delta \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( \overset{(0)}{\mathbf{V}}^\lambda \parallel_\alpha - \mathbf{b}_\alpha^\lambda \overset{(0)}{\mathbf{V}}_3 \right) \left( \overset{(0)}{\mathbf{V}}_\lambda \parallel_\beta - \mathbf{b}_{\lambda\beta} \overset{(0)}{\mathbf{V}}_3 \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{E}_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} \left( \overset{(1)}{\mathbf{V}_\alpha} \parallel_\beta + \overset{(1)}{\mathbf{V}_\beta} \parallel_\alpha \right) - \frac{1}{2} \left[ \mathbf{b}_\alpha^\gamma \left( \overset{(0)}{\mathbf{V}}_\lambda \parallel_\beta - \mathbf{b}_\beta^\lambda \overset{(0)}{\mathbf{V}}_3 \right) + \mathbf{b}_\beta^\gamma \left( \overset{(0)}{\mathbf{V}}_\gamma \parallel_\alpha - \mathbf{b}_\alpha^\gamma \overset{(0)}{\mathbf{V}}_3 \right) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{b}_{\beta\lambda} \left( \overset{(0)}{\mathbf{V}}_{3,\alpha} + \mathbf{b}_{\alpha\delta} \overset{(0)}{\mathbf{V}}^\delta \right) + \mathbf{b}_{\alpha\lambda} \left( \overset{(0)}{\mathbf{V}}_{3,\beta} + \mathbf{b}_{\beta\delta} \overset{(0)}{\mathbf{V}}^\delta \right) \right] \overset{(1)}{\mathbf{V}}^\lambda \\ & + \frac{1}{2} \left( \overset{(0)}{\mathbf{V}}^\lambda \parallel_\beta - 2\mathbf{b}_\beta^\lambda \overset{(0)}{\mathbf{V}}_3 \right) \overset{(1)}{\mathbf{V}}_\lambda \parallel_\alpha + \frac{1}{2} \left( \overset{(0)}{\mathbf{V}}^\lambda \parallel_\alpha - \mathbf{b}_\alpha^\lambda \overset{(0)}{\mathbf{V}}_3 \right) \overset{(1)}{\mathbf{V}}_\lambda \parallel_\beta \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\overset{(2)}{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( -\mathbf{b}_\alpha^\gamma \overset{(0)}{\mathbf{V}}_\gamma \parallel_\beta - \mathbf{b}_\beta^\gamma \overset{(0)}{\mathbf{V}}_\gamma \parallel_\alpha \right) + \frac{1}{2} \mathbf{b}_{\alpha\lambda} \mathbf{b}_{\beta\delta} \overset{(1)}{\mathbf{V}}^\lambda \overset{(1)}{\mathbf{V}}^\delta + \frac{1}{2} \overset{(1)}{\mathbf{V}}^\lambda \parallel_\alpha \overset{(1)}{\mathbf{V}}_\lambda \parallel_\beta \quad (2.17)$$

$$E_{\alpha 3}^{(0)} = \frac{1}{2} \left( \overset{(0)}{V}_{3,\alpha} + \overset{(1)}{V}_{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left( \overset{(0)}{V}_{\lambda} |_{\alpha} - b_{\alpha\lambda} \overset{(0)}{V}_3 \right) \overset{(1)}{V}^{\lambda} + \frac{1}{2} \overset{(0)}{V}^{\lambda} \overset{(1)}{V}_{\lambda} |_{\alpha} + \frac{1}{2} b_{\alpha\lambda} \overset{(1)}{V}^{\lambda} \overset{(0)}{V}_3 \quad (2.18)$$

$$E_{\alpha 3}^{(1)} = \frac{1}{2} \overset{(1)}{V}_{\lambda} |_{\alpha} \overset{(1)}{V}^{\lambda} \quad (2.19)$$

Les termes soulignés sont pris en compte dans le cadre des théories liées aux grandes rotations ( Librescu [30] ). Lorsque ceux-ci sont négligés, il s'agit de la théorie des rotations modérées ( Kreja, Schmidt, Reddy [27] ).

La théorie de Von Karman simplifie considérablement ces relations, elle repose sur l'hypothèse que les déplacements  $\overset{(0)}{V}_{\alpha}$  et leurs dérivées demeurent faibles; ne restent alors que dans les termes non linéaires des produits du type  $\overset{(0)}{V}_{3,\alpha} \overset{(0)}{V}_{3,\beta}$  ( Meek, Ristic [36] ).

La théorie de Von Karman a fait aboutir de nombreux travaux, tant par son efficacité que sa simplicité. Elle a été souvent comparée à la théorie des rotations modérées, qui elle même reste valable sur un vaste domaine d'exemples ( Palmerio [38] ).

Le travail que nous présentons aujourd'hui vise cependant à montrer la limite de ces modèles dans certains cas, et donc l'intérêt de prendre en compte la théorie des grandes rotations.

### 2-3 Le principe des travaux virtuels :

Pour établir les équations d'équilibre et les conditions aux limites, nous utilisons le principe des travaux virtuels qui consiste à imposer un déplacement cinématiquement admissible arbitraire sur la structure et à égaliser les travaux externe et interne ( Valid [61] ).

L'approximation porte uniquement sur le champ de déplacement, et est ensuite introduite dans les champs de contraintes et de déformation.

### 2-3-1 Les hypothèses :

La coque, de masse volumique  $\rho$  est soumise à des efforts de volume de vecteur  $\mathbf{f}$ . La surface externe  $S$ , union de  $S^+$  et de  $S^-$  est soumise à des forces de pression  $\mathbf{p}$ . Des contraintes de vecteur  $\mathbf{S}^*$  sont prescrites sur une partie de  $A$  notée  $A_s$ .

Notons que  $\mathbf{S}^*$  s'exprime en fonction du premier tenseur de Piola-Kirchhoff :

$$S^{*i} = \hat{t}^{ij} n_j \quad (2.20)$$

Rappelons que  $\Omega$  est la surface moyenne de la coque,  $\Gamma$  en est la courbe limite, notons  $\Gamma_s$  la partie de  $\Gamma$  où les vecteurs de contraintes sont prescrits, et  $\Gamma_v$  la partie de  $\Gamma$  où sont imposés les déplacements :

$$\Gamma = \Gamma_s \cup \Gamma_v \quad (2.21)$$

Nous donnons une représentation de l'élément de volume considéré :

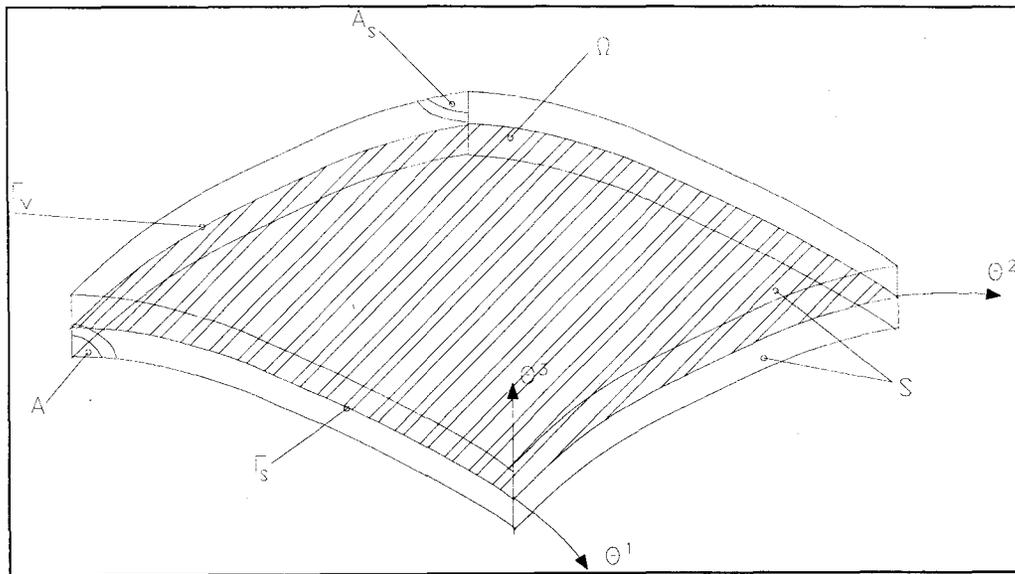


Figure 2-1 : Elément de volume de la coque

### 2-3-2 Travail interne :

La variation du travail interne est calculée à partir de  $\mathbf{S}$ , second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et  $\mathbf{E}$ , tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$-\delta W_i = \int_V \mathbf{S}^{ij} \delta E_{ij} dV \quad (2.22)$$

Si on utilise les relations (2.15) et (2.16), on aboutit à:

$$-\delta W_i = \int_V \left\{ \delta E_{\alpha\beta}^{(0)} S^{\alpha\beta} + \delta E_{\alpha\beta}^{(1)} \theta^3 S^{\alpha\beta} + \delta E_{\alpha\beta}^{(2)} (\theta^3)^2 S^{\alpha\beta} + 2\delta E_{\alpha 3}^{(0)} S^{\alpha 3} + 2\delta E_{\alpha 3}^{(1)} \theta^3 S^{\alpha 3} \right\} dV \quad (2.23)$$

A partir des relations (2.17)-(2.21) et à cause de la symétrie des composantes  $S^{ij}$  nous pouvons écrire que :

$$\int_V \delta E_{\alpha\beta}^{(0)} S^{\alpha\beta} dV = \int_V \left[ S^{\alpha\beta} \delta V_{\alpha|\beta}^{(0)} - b_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \delta V_3 + S^{\alpha\beta} \left( V_{3,\alpha}^{(0)} + b_{\alpha}^{\lambda} V_{\lambda}^{(0)} \right) \left( \delta V_{3,\beta}^{(0)} + b_{\beta}^{\gamma} \delta V_{\gamma}^{(0)} \right) \right] dV \quad (2.24)$$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned} \int_V \delta E_{\alpha\beta}^{(0)} S^{\alpha\beta} dV = & \int_V \left\{ \left[ S^{\alpha\beta} \delta V_{\alpha}^{(0)} \right]_{\beta} - S^{\alpha\beta} \delta V_{\alpha|\beta}^{(0)} - b_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \delta V_3 + \left[ \left( V_{3,\alpha}^{(0)} + b_{\alpha}^{\lambda} V_{\lambda}^{(0)} \right) S^{\alpha\beta} \delta V_3 \right]_{\beta} \right. \\ & - \left[ \left( V_{3,\alpha}^{(0)} + b_{\alpha}^{\lambda} V_{\lambda}^{(0)} \right) S^{\alpha\beta} \right]_{\beta} \delta V_3 + \left( V_{\lambda}^{\lambda} \Big|_{\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda} V_3 \right) S^{\alpha\beta} \left( \delta V_{\lambda|\beta}^{(0)} - b_{\lambda}^{\beta} \delta V_3 \right) \\ & \left. + b_{\beta}^{\gamma} S^{\alpha\beta} \delta V_{\gamma} \left( V_{3,\alpha}^{(0)} + b_{\alpha}^{\lambda} V_{\lambda}^{(0)} \right) \right\} dV \end{aligned} \quad (2.25)$$

L'élément de volume s'exprime en fonction de l'élément de surface :

$$dV = \mu d\theta^3 d\Omega \quad (2.26)$$

Les éléments de surfaces supérieure et inférieure s'écrivent :

$$dS = \mu d\Omega \quad (2.27)$$

Et sur la surface latérale A, notons que :

$$n_{\alpha} dA = v_{\alpha} \mu d\theta^3 d\Gamma \quad (2.28)$$

où :

$$\mu = \left| \mu_{\alpha}^{\beta} \right| \quad (2.29)$$

et  $v_{\alpha}$  sont les composantes du vecteur normal unitaire à  $\Gamma$ .

La relation (2.23) se ramène sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \int_V \delta E_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} dv &= \int_{\Gamma} \left\{ L_{(0)}^{\alpha\beta} \delta V_{\alpha} + L_{(0)}^{\alpha\beta} \left( V_{3,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} V_{\lambda} \right) \delta V_3 + L_{(0)}^{\alpha\beta} \left( V^{\lambda} |_{\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda} V_3 \right) \delta V_{\lambda} \right\} v_{\beta} d\Gamma \\
 &\quad - \int_{\Omega} \left\{ L_{(0)}^{\alpha\beta} |_{\beta} \delta V_{\alpha} + b_{\alpha\beta} L_{(0)}^{\alpha\beta} \delta V_3 + \delta V_3 \left[ \left( V_{3,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} V_{\lambda} \right) L_{(0)}^{\alpha\beta} \right]_{\beta} - b_{\beta}^{\gamma} \delta V_{\gamma} L_{(0)}^{\alpha\beta} \right. \\
 &\quad \left. \left( V_{3,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} V_{\lambda} \right) + \left[ \left( V^{\lambda} |_{\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda} V_3 \right) L_{(0)}^{\alpha\beta} \right]_{\beta} \delta V_{\lambda} + \delta V_3 \left( V^{\lambda} |_{\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda} V_3 \right) L_{(0)}^{\alpha\beta} \right\} d\Omega
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

De la même manière, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \int_V \delta E_{\alpha\beta} \theta^3 S^{\alpha\beta} dV &= \int_{\Gamma} \left\{ \left( \delta V_{\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} \delta V_{\lambda} \right) L_{(1)}^{\alpha\beta} + \delta V_3 b_{\alpha}^{\lambda} V_{\lambda} L_{(1)}^{\alpha\beta} + \delta V_{\lambda} b_{\alpha}^{\lambda} \left( V^{\lambda} |_{\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda} V_3 \right) L_{(1)}^{\alpha\beta} \right. \\
 &\quad \left. + \delta V_{\lambda} V^{\lambda} |_{\alpha} L_{(1)}^{\alpha\beta} \right\} v_{\beta} d\Gamma - \int_{\Omega} \left\{ -\delta V_{\gamma} b_{\alpha}^{\lambda} b_{\beta}^{\gamma} V_{\lambda} L_{(1)}^{\alpha\beta} + \left( \delta V_{\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda} \delta V_{\lambda} \right) L_{(1)}^{\alpha\beta} |_{\beta} \right. \\
 &\quad \left. + \delta V_{\lambda} b_{\alpha}^{\lambda} \left( V_{3,\beta} + b_{\beta}^{\gamma} V_{\gamma} \right) L_{(1)}^{\alpha\beta} + \delta V_3 \left( b_{\alpha}^{\lambda} V_{\lambda} L_{(1)}^{\alpha\beta} \right)_{\beta} - \delta V_3 b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} L_{(1)}^{\alpha\beta} \right. \\
 &\quad \left. + \delta V_{\lambda} \left[ \left( V^{\lambda} |_{\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda} V_3 \right) L_{(1)}^{\alpha\beta} \right]_{\beta} + \delta V_{\lambda} \left( V^{\lambda} |_{\alpha} L_{(1)}^{\alpha\beta} \right)_{\beta} \right\} d\Omega
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
 \int_V \delta E_{\alpha\beta} (\theta^3)^2 S^{\alpha\beta} dV &= - \int_{\Gamma} \left( \delta V_{\lambda} b_{\alpha}^{\lambda} L_{(2)}^{\alpha\beta} + V^{\lambda} |_{\alpha} L_{(2)}^{\alpha\beta} \delta V_{\lambda} \right) v_{\beta} d\Gamma + \int_{\Omega} \left\{ \delta V_{\lambda} b_{\alpha}^{\lambda} L_{(2)}^{\alpha\beta} |_{\beta} \right. \\
 &\quad \left. + \delta V_{\gamma} b_{\alpha}^{\lambda} b_{\beta}^{\gamma} V_{\lambda} L_{(2)}^{\alpha\beta} - \delta V_{\lambda} \left( V^{\lambda} |_{\alpha} L_{(2)}^{\alpha\beta} \right)_{\beta} \right\} d\Omega
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
 \int_V 2\delta E_{\alpha 3} S^{\alpha 3} dV &= \int_{\Gamma} \left\{ \delta V_{\lambda} V^{\lambda} L_{(0)}^{\alpha 3} + \delta V_3 L_{(0)}^{\alpha 3} + \delta V_{\lambda} V^{\lambda} L_{(0)}^{\alpha 3} \right\} v_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Omega} \left\{ \delta V_{\lambda} b_{\alpha}^{\lambda} L_{(0)}^{\alpha 3} \right. \\
 &\quad \left. - \delta V_3 L_{(0)}^{\alpha 3} |_{\alpha} + \delta V_{\alpha} L_{(0)}^{\alpha 3} - \left( \delta V_3 V^{\lambda} + \delta V^{\lambda} V_3 \right) b_{\alpha\lambda} L_{(0)}^{\alpha 3} - \delta V_{\lambda} V^{\lambda} L_{(0)}^{\alpha 3} |_{\alpha} \right. \\
 &\quad \left. + \delta V_{\gamma} a^{\lambda\gamma} \left( V_{\lambda} |_{\alpha} - b_{\lambda\alpha} V_3 \right) L_{(0)}^{\alpha 3} - \delta V_{\lambda} \left( V^{\lambda} L_{(0)}^{\alpha 3} \right)_{\alpha} - \delta V_{\lambda} V^{\lambda} |_{\alpha} L_{(0)}^{\alpha 3} \right\} d\Omega
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\int_V 2\delta E_{\alpha 3}^{(1)} \theta^3 S^{\alpha 3} dV = \int_{\Gamma} \left( \delta \dot{V}_{\lambda}^{(1)} \dot{V}^{\lambda} L_{(1)}^{\alpha 3} \right) v_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Omega} \left( \delta \dot{V}_{\lambda}^{(1)} \dot{V}^{\lambda} L_{(1)}^{\alpha 3} |_{\alpha} - \delta \dot{V}_{\lambda}^{(1)} \dot{V}^{\lambda} |_{\alpha} L_{(1)}^{\alpha 3} \right) d\Omega \quad (2.34)$$

où les  $L_{(n)}^{ij}$  sont les composantes du vecteur contrainte intégrées sur l'épaisseur de la coque :

$$L_{(n)}^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu S^{ij} (\theta^3)^n d\theta^3, \quad n=0,1 \quad (2.35)$$

### 2.3.3 Travail externe :

En fonction de ces données nous déterminons la variation du travail externe :

$$\delta W_e = \int_V \rho (f^i - \ddot{V}^i) \delta V_i dV + \int_{A_s} \hat{S}^i \delta V_i dA + \int_S P^i \delta V_i dS \quad (2.36)$$

Les  $\ddot{V}^i$  sont les composantes de l'accélération d'un point matériel de la coque.

Nous développons la variation du travail externe de la manière suivante :

$$\int_V \rho f^i \delta V_i dV = \int_{\Omega} \left\{ \delta \dot{V}_{\alpha}^{(0)} F_{(0)}^{\alpha} + \delta \dot{V}_3^{(0)} F_{(0)}^3 + \delta \dot{V}_{\alpha}^{(1)} F_{(1)}^{\alpha} \right\} d\Omega \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \int_V \rho \ddot{V}^i \delta V_i dV = \int_{\Omega} \left\{ \delta \dot{V}_{\alpha}^{(0)} \left( \dot{V}^{\alpha} I_{(0)} + \dot{V}^{\alpha} I_{(1)} \right) + \delta \dot{V}_3^{(0)} \left( \dot{V}^3 I_{(0)} + \dot{V}^3 I_{(1)} \right) \right. \\ \left. + \delta \dot{V}_{\alpha}^{(1)} \left( \dot{V}^{\alpha} I_{(1)} + \dot{V}^{\alpha} I_{(2)} \right) \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\int_{A_s} \hat{S}^i \delta V_i dA = \int_{\Gamma_s} \left\{ \delta \dot{V}_{\alpha}^{(0)} \int_{-h/2}^{h/2} \mu \hat{t}^{\alpha\beta} v_{\beta} d\theta^3 + \delta \dot{V}_3^{(0)} \int_{-h/2}^{h/2} \mu \hat{t}^{3\beta} v_{\beta} d\theta^3 + \delta \dot{V}_{\alpha}^{(1)} \int_{-h/2}^{h/2} \mu \hat{t}^{\alpha\beta} v_{\beta} \theta^3 d\theta^3 \right\} d\Gamma \quad (2.39)$$

$$\int_S P^i \delta V_i dS = \int_{\Omega} \left\{ \delta V_{,\alpha}^{(0)} P_{(0)}^\alpha + \delta V_{,3}^{(0)} P_{(0)}^3 + \delta V_{,\alpha}^{(1)} P_{(1)}^\alpha \right\} d\Omega \quad (2.40)$$

Les  $F_{(n)}^i$ , les  $I_{(n)}$ , et les  $P_{(n)}^i$  sont les représentants intégrés sur l'épaisseur  $h$  de la coque des efforts volumiques, des moments d'inertie et des efforts de pression moyens, respectivement :

$$F_{(n)}^i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \mu f^i (\theta^3)^n d\theta^3, \quad n=0,1 \quad (2.41)$$

$$I_{(n)} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \mu (\theta^3)^n d\theta^3, \quad n=0,1,2 \quad (2.42)$$

$$P_{(n)}^i = \left[ \mu (\theta^3)^n P^i \right]_{-h/2}^{h/2}, \quad n=0,1 \quad (2.43)$$

### 2.3.4 Equations de mouvement :

Le principe des travaux virtuels est donné par :

$$\delta W = \delta W_e + \delta W_i = 0 \quad (2.44)$$

Les variations  $\delta W_i$  et  $\delta W_e$  sont remplacées par les expressions déterminées précédemment.

La variation de travail s'exprime donc en fonction des variables  $\delta V_{,\alpha}^{(n)}$ , pour  $n=\{0,1\}$  et  $\delta V_{(0)}^{(3)}$ . Les variations de déplacements étant arbitraires, les coefficients doivent varier indépendamment.

Les équations d'équilibre sont données par :

⇒ pour  $\delta \mathbf{V}_\alpha^{(0)}$  :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}^\alpha I_{(0)} + \dot{\mathbf{V}}^\alpha I_{(1)} - \mathbf{P}_{(0)}^\alpha - \mathbf{F}_{(0)}^\alpha = & -\mathbf{b}_\beta^\alpha \left[ \mathbf{L}_{(0)}^{\beta 3} + \left( \mathbf{V}_{3,\lambda}^{(0)} + \mathbf{b}_\lambda^\gamma \mathbf{V}_\gamma^{(0)} \right) \mathbf{L}_{(0)}^{\lambda\beta} + \mathbf{b}_\lambda^\gamma \mathbf{V}_\gamma^{(1)} \mathbf{L}_{(1)}^{\lambda\beta} \right] + \left[ \mathbf{L}_{(0)}^{\alpha\beta} - \mathbf{b}_\lambda^\alpha \mathbf{L}_{(1)}^{\lambda\beta} \right. \\ & \left. + \mathbf{V}^\alpha \mathbf{L}_{(0)}^{\beta 3} + \left( \mathbf{V}^\alpha |_\lambda - \mathbf{b}_\lambda^\alpha \mathbf{V}_3 \right) \mathbf{L}_{(0)}^{\lambda\beta} + \left( \mathbf{V}^\alpha |_\lambda \mathbf{L}_{(1)}^{\lambda\beta} \right) \right] \Big|_\beta \end{aligned} \quad (2.45)$$

⇒ pour  $\delta \mathbf{V}_3^{(0)}$  :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}^3 I_{(0)} - \mathbf{P}_{(0)}^3 - \mathbf{F}_{(0)}^3 = & \left[ \mathbf{L}_{(0)}^{\beta 3} + \left( \mathbf{V}_{3,\lambda}^{(0)} + \mathbf{b}_\lambda^\gamma \mathbf{V}_\gamma^{(0)} \right) \mathbf{L}_{(0)}^{\lambda\beta} + \mathbf{b}_\lambda^\gamma \mathbf{V}_\gamma^{(1)} \mathbf{L}_{(1)}^{\lambda\beta} \right] \Big|_\beta \\ & + \mathbf{b}_{\alpha\beta} \left[ \mathbf{L}_{(0)}^{\alpha\beta} - \mathbf{b}_\lambda^\alpha \mathbf{L}_{(1)}^{\lambda\beta} + \mathbf{V}^\alpha \mathbf{L}_{(0)}^{\beta 3} \right] + \left( \mathbf{V}^\alpha |_\lambda - \mathbf{b}_\lambda^\alpha \mathbf{V}_3 \right) \mathbf{L}_{(0)}^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.46)$$

⇒ pour  $\delta \mathbf{V}_\alpha^{(1)}$  :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}^\alpha I_{(1)} + \dot{\mathbf{V}}^\alpha I_{(2)} - \mathbf{P}_{(1)}^\alpha - \mathbf{F}_{(1)}^\alpha = & \left[ \mathbf{L}_{(1)}^{\alpha\beta} - \mathbf{b}_\lambda^\alpha \mathbf{L}_{(2)}^{\lambda\beta} + \mathbf{V}^\alpha \mathbf{L}_{(1)}^{\beta 3} + \mathbf{V}^\alpha |_\lambda \mathbf{L}_{(2)}^{\lambda\beta} + \left( \mathbf{V}^\alpha |_\lambda \mathbf{L}_{(2)}^{\lambda\beta} - \mathbf{b}_\lambda^\alpha \mathbf{V}_3 \right) \mathbf{L}_{(1)}^{\alpha\beta} \right. \\ & \left. + \mathbf{V}^\alpha |_\beta \mathbf{L}_{(0)}^{\beta 3} \right] \Big|_\beta - \mathbf{b}_\beta^\alpha \left[ \left( \mathbf{V}_{3,\lambda}^{(0)} + \mathbf{b}_\lambda^\gamma \mathbf{V}_\gamma^{(0)} \right) \mathbf{L}_{(1)}^{\lambda\beta} + \mathbf{b}_\lambda^\gamma \mathbf{V}_\gamma^{(1)} \mathbf{L}_{(2)}^{\lambda\beta} \right] - \mathbf{L}_{(0)}^{\alpha 3} \\ & - \mathbf{a}^{\alpha\beta} \left( \mathbf{V}_\beta |_\lambda - \mathbf{b}_{\beta\lambda} \mathbf{V}_3 \right) \mathbf{L}_{(0)}^{\lambda 3} - \mathbf{V}^\alpha |_\lambda \mathbf{L}_{(1)}^{\lambda 3} - \mathbf{b}_\lambda^\alpha \mathbf{V}_3 \mathbf{L}_{(0)}^{\lambda 3} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Et les conditions aux limites sont les suivantes :

⇒ pour  $\delta \mathbf{V}_\alpha^{(0)}$  :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \mu \hat{t}^{\alpha 3} v_{\alpha} d\theta^3 = \left[ L_{(0)}^{\alpha 3} + \left( V_{3,\lambda}^{(0)} + b_{\lambda}^{\gamma} V_{\gamma}^{(0)} \right) L_{(0)}^{\lambda \alpha} + \left( b_{\lambda}^{\gamma} V_{\gamma}^{(1)} + V^{\gamma} |_{\lambda}^{(1)} \right) L_{(1)}^{\lambda \alpha} + \left( V^{\lambda} |_{\gamma}^{(0)} - b_{\gamma}^{\lambda} V_3^{(0)} \right) L_{(0)}^{\gamma \alpha} \right] v_{\alpha} \quad (2.48)$$

⇒ pour  $\delta V_3^{(0)}$  :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \mu \hat{t}^{\alpha 3} v_{\alpha} d\theta^3 = \left[ L_{(0)}^{\alpha 3} + \left( V_{3,\lambda}^{(0)} + b_{\lambda}^{\gamma} V_{\gamma}^{(0)} \right) L_{(0)}^{\lambda \alpha} + b_{\lambda}^{\gamma} V_{\gamma}^{(1)} L_{(1)}^{\lambda \alpha} \right] v_{\alpha} \quad (2.49)$$

⇒ pour  $\delta V_{\alpha}^{(1)}$  :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \mu \hat{t}^{\alpha \beta} v_{\beta} \theta^3 d\theta^3 + \left[ L_{(1)}^{\alpha \beta} - b_{\lambda}^{\alpha} L_{(2)}^{\lambda \beta} + V^{\alpha} L_{(1)}^{\beta 3} + \left( V^{\alpha} |_{\lambda}^{(0)} - b_{\lambda}^{\alpha} V_3^{(0)} \right) L_{(1)}^{\lambda \beta} + V^{\alpha} L_{(0)}^{\beta 3} \right] v_{\beta} \quad (2.50)$$

Nous avons établi cinq équations d'équilibre et cinq conditions aux limites.

## *Chapitre 3*

---

# *Lois de comportement*

---

### 3.1 loi de comportement :

#### 3.1.1 Définition :

On dit qu'un matériau est élastique s'il existe un état de référence sans contrainte et si, après déformation le tenseur des contraintes ne dépend que du tenseur des déformations calculé à partir de cet état de référence (Duvaut [16]).

Nous définissons la loi de comportement comme telle; soit une fonction convexe fermée  $w(\mathbf{E}, \mathbf{x})$ , non négative ( Germain [19], Marsden & Hughes [34] ) :

$$S^{ij} = \frac{\partial w(\mathbf{E}, \mathbf{X})}{\partial E_{ij}} \quad (3.1)$$

$w(\mathbf{E}, \mathbf{x})$  n'est autre que l'énergie libre volumique. Les  $S^{ij}$  sont les composantes du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, les  $E_{ij}$  sont les composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange.  $\mathbf{X}$  est le vecteur position lagrangien du point considéré.

Lorsque le domaine est homogène  $w$  est indépendante de la particule considérée. Dans un milieu supposé isotherme,  $w$  coïncide avec l'énergie interne.

De la même manière que pour l'équation (3.1), on peut définir une forme quadratique définie positive  $w^*(\mathbf{S})$  permettant d'écrire la loi de comportement de la façon suivante :

$$E^{ij} = \frac{\partial w^*(\mathbf{S})}{\partial S_{ij}} \quad (3.2)$$

où  $w^*(\mathbf{S})$  est appelée énergie libre des contraintes élastiques. Parallèlement, on appelle souvent  $w(\mathbf{E})$  l'énergie volumique des déformations élastiques.

### 3.1.2 Le tenseur d'élasticité :

Si  $w$  est une fonction continue et différentiable au voisinage de zéro, celle-ci peut être approchée par une forme quadratique définie positive et les contraintes  $S^{ij}$  sont fonctions linéaires des déformations  $E_{ij}$ .

Comme on fait l'hypothèse des petites perturbations, l'approximation consiste à ne garder que les termes d'ordre 1 dans le développement des  $S^{ij}$  en fonction des  $E_{ij}$ , telle est l'hypothèse établie en élasticité linéaire et sur laquelle repose notre modèle.

L'énergie volumique des déformations élastiques se met alors sous la forme :

$$w(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} C^{ijkl} E_{ij} E_{kl} \quad (3.3)$$

$C$  est appelé le tenseur d'élasticité, il est d'ordre 4.

D'après l'équation (3.1), ce tenseur peut être défini comme suit :

$$C^{ijkl} = \frac{\partial^2 w}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (3.4)$$

De cette définition et de la symétrie du tenseur des déformations, nous déduisons que :

$$C^{ijkl} = C^{jikl} = C^{ijlk} = C^{klij} \quad (3.5)$$

Le tenseur d'élasticité permet d'écrire :

$$S^{ij} = C^{ijkl} E_{kl} \quad (3.6)$$

Cette relation donne le comportement d'un matériau homogène en élasticité linéaire, en évolution isotherme.

De semblables raisonnements conduisent à poser :

$$E_{ij} = C^*_{ijkl} S^{kl} \quad (3.7)$$

$C^*$  est le tenseur de complaisance élastique, il vérifie les égalités analogues à (3.5) :

$$C^*_{ijkl} = C^*_{jikl} = C^*_{ijlk} = C^*_{klij} \quad (3.8)$$

## 3.2 Application au modèle :

### 3.2.1 Ecriture matricielle :

Du fait de la symétrie des tenseurs de contraintes et de déformations, nous pouvons ramener  $C$  à une matrice carrée (6,6).

Pour cela nous utilisons la notation de Voigt qui permet d'obtenir une écriture matricielle symétrique pour un tenseur du quatrième ordre :

$$11 \implies 1; \quad 22 \implies 2; \quad 33 \implies 3; \quad 23 \implies 4; \quad 13 \implies 5; \quad 12 \implies 6$$

Les tenseurs des contraintes et des déformations sont alors parfaitement définis par la donnée de leurs six composantes.

Cependant pour rendre la matrice d'élasticité symétrique, nous utiliserons les distorsions angulaires au lieu des déformations :

$$\begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{22} \\ S^{12} \\ S^{33} \\ S^{23} \\ S^{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{54} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \gamma_{12} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

avec :

$$\gamma_{ij} = 2 E_{ij}, \text{ où } i \neq j \quad (3.10)$$

### 3.2.2 Symétrie géométrique :

Notre modèle admettant pour plan de symétrie  $(x^1, x^2)$ , nous remarquons que :

$$\bar{S}_{23} = -S_{23}, \bar{S}_{31} = -S_{31} \quad (3.11a)$$

$$\bar{E}_{23} = -E_{23}, \bar{E}_{31} = -E_{31} \quad (3.11b)$$

La barre signifie que les composantes se rattachent au demi espace de côte négative.

Cette symétrie entraîne alors l'écriture de la matrice constitutive sous la forme :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

### 3.2.3 Matériaux isotropes :

Il s'agit de la modélisation la plus simple. Par définition, un matériau isotrope présente les mêmes propriétés dans toutes les directions de l'espace.

Deux coefficients suffisent alors à définir le tenseur d'élasticité :

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

E est le module de Young, encore appelé module d'élasticité,  $\nu$  est le coefficient de Poisson. Le coefficient qui relie les contraintes tangentielles aux déformations angulaires est noté G.

### 3.2.4 Matériaux orthotropes :

Nous avons trois plans de symétrie, ce qui laisse neuf composantes à déterminer pour la matrice constitutive. Dans ses axes d'orthotropie, la loi de Hooke donne :

$$\begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{22} \\ S^{12} \\ S^{33} \\ S^{23} \\ S^{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & C_{12} & 0 & 0 \\ & C_{22} & 0 & C_{23} & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{22} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \gamma_{12} \\ E_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

où les composantes  $C_{ij}$  prennent les valeurs suivantes :

$$C_{11} = \frac{(1 - \nu_{23})E_{11}}{1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}^2 E_{22} / E_{11}}, \quad C_{22} = \frac{(1 - \nu_{12}^2 E_{22} / E_{11})E_{22}}{(1 + \nu_{23})(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}^2 E_{22} / E_{11})},$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{12} E_{22}}{1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}^2 E_{22} / E_{11}}, \quad C_{23} = \frac{(\nu_{23} - \nu_{12}^2 E_{22} / E_{11})E_{22}}{(1 + \nu_{23})(1 - \nu_{23} - 2\nu_{12}^2 E_{22} / E_{11})},$$

$$C_{33} = G_{12},$$

$$C_{55} = G_{23},$$

$$C_{66} = G_{13}$$

Notre modèle est composé de N couches. Il faut ramener chaque matrice  $C_h$  définie dans le repère local d'orthotropie lié à la couche h, dans le repère global de la coque.

Considérons pour cela  $\theta_h$  l'angle de rotation d'orthotropie de la couche h, et soit  $\mathbf{T}$  la matrice de passage qui permet l'écriture de  $C'_h$  :

$$C'_h = \mathbf{T}^{-1} C_h \mathbf{T} \quad (3.15)$$

$\mathbf{T}$  est donnée en fonction de  $\theta_h$  :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 0 & CS & 0 & 0 \\ S^2 & C^2 & 0 & -CS & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ CS & 2CS & 0 & C^2 - S^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

avec :

$$C = \cos(\theta_h) \text{ et } S = \sin(\theta_h)$$

### 3.3 Application au laminé :

#### 3.3.1 Intégration globale des contraintes :

Pour la structure totale, les efforts ont été ultérieurement donnés au chapitre 2 :

$$L_{(n)}^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu S^{ij}(\theta^3)^n d\theta^3, n = 0,1 \quad (3.17)$$

Nous rappelons que h est l'épaisseur de la coque.

Pour les plaques,  $\mu$  est donné par :

$$\mu = 1 \quad (3.18)$$

pour les cylindres, son calcul se résume à :

$$\mu = 1 + \frac{\theta^3}{R} \quad (3.19)$$

et pour les sphères, l'expression de  $\mu$  devient :

$$\mu = \left(1 + \frac{\theta^3}{R}\right)^2 \quad (3.20)$$

Comme nous venons de le voir, la matrice constitutive n'est pas une variable continue sur toute l'épaisseur de la coque, les intégrations prenant en compte cette grandeur doivent être résolues pour chaque couche sachant que le flux total dans l'épaisseur est la somme des flux dans chaque pli ( Reddy [45], Teyeb [55] ) :

$$L_{(n)}^{ij} = \sum_{h=1}^N \int_{-h/2}^{h/2} \mu C_h^{ijkl} E_{kl}^{(n)} (\theta^3)^n d\theta^3 \quad (3.21)$$

$C_h$  est la matrice d'élasticité de la couche  $h$  exprimée dans le repère global,  $N$  étant le nombre total de couches du laminé. Les termes  $E_{kl}^{(n)}$  sont les composantes du tenseur des déformations définis au chapitre 2.

Nous pouvons schématiser de la façon suivante le comportement des grandeurs le long de l'épaisseur :

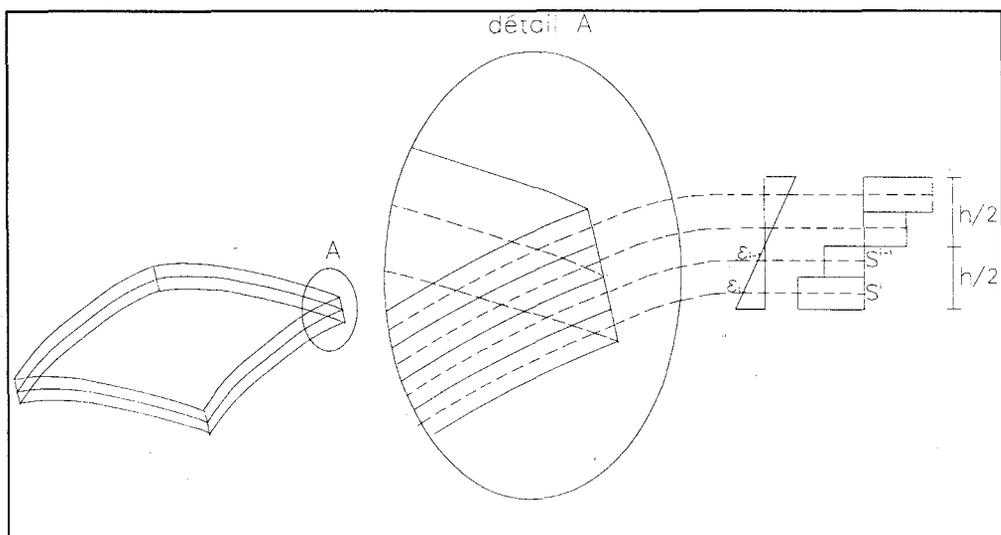


Figure 3.1 : Calcul des contraintes du laminé

### 3.3.2 Intégration globale de la matrice constitutive :

En utilisant la notation de Voigt qui ramène le tenseur d'élasticité d'ordre 4 à un tenseur d'ordre 2 et qui permet l'écriture des contraintes et des déformations sous forme vectorielle, et en faisant intervenir les développements en série des composantes de la déformation établis au chapitre 2, la relation (3.21) devient :

⇒ Pour les termes plans et normaux :

$$\begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & R_2 \\ R_1^T & \hat{R}_2 & R_3 \\ R_2^T & R_3^T & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Le vecteur  $[E]$  est tel que :

$$[E_n] = \begin{bmatrix} E_{11}^{(n)} \\ E_{22}^{(n)} \\ 2 E_{12}^{(n)} \end{bmatrix} \quad \text{pour } n=0,1,2 \quad (3.23)$$

et de même pour le vecteur contrainte :

$$[L_n] = \begin{bmatrix} L_{(n)}^{11} \\ L_{(n)}^{22} \\ L_{(n)}^{12} \end{bmatrix} \quad \text{pour } n=0,1,2 \quad (3.24)$$

$[R]$  est la matrice constitutive globale du laminé qui a pour écriture détaillée :

$$[R_n] = \begin{bmatrix} R_{(n)}^{11} & R_{(n)}^{12} & R_{(n)}^{16} \\ R_{(n)}^{12} & R_{(n)}^{22} & R_{(n)}^{26} \\ R_{(n)}^{16} & R_{(n)}^{26} & R_{(n)}^{66} \\ R_{(n)}^{13} & R_{(n)}^{23} & R_{(n)}^{36} \end{bmatrix} \text{ pour } n=0,1$$

$$[R_2] = \begin{bmatrix} R_{(2)}^{11} & R_{(2)}^{12} & R_{(2)}^{16} \\ R_{(2)}^{12} & R_{(2)}^{22} & R_{(2)}^{26} \\ R_{(2)}^{16} & R_{(2)}^{26} & R_{(2)}^{66} \\ R_{(2)}^{13} & R_{(2)}^{23} & R_{(2)}^{36} \end{bmatrix}, [\hat{R}_2] = \begin{bmatrix} R_{(2)}^{11} & R_{(2)}^{12} & R_{(2)}^{16} \\ R_{(2)}^{12} & R_{(2)}^{22} & R_{(2)}^{26} \\ R_{(2)}^{16} & R_{(2)}^{26} & R_{(2)}^{66} \end{bmatrix}$$

$$[R_3] = \begin{bmatrix} R_{(3)}^{11} & R_{(3)}^{12} & R_{(3)}^{16} \\ R_{(3)}^{12} & R_{(3)}^{22} & R_{(3)}^{26} \\ R_{(3)}^{16} & R_{(3)}^{26} & R_{(3)}^{66} \end{bmatrix}, [R_4] = \begin{bmatrix} R_{(4)}^{11} & R_{(4)}^{12} & R_{(4)}^{16} \\ R_{(4)}^{12} & R_{(4)}^{22} & R_{(4)}^{26} \\ R_{(4)}^{16} & R_{(4)}^{26} & R_{(4)}^{66} \end{bmatrix}$$

⇒ Et pour les termes de cisaillement :

$$\begin{bmatrix} L_{(0)}^{23} \\ L_{(0)}^{13} \\ L_{(1)}^{23} \\ L_{(1)}^{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{(0)}^{44} & R_{(0)}^{45} & R_{(1)}^{44} & R_{(1)}^{45} \\ R_{(0)}^{45} & R_{(0)}^{55} & R_{(1)}^{45} & R_{(1)}^{55} \\ R_{(1)}^{44} & R_{(1)}^{45} & R_{(2)}^{44} & R_{(2)}^{45} \\ R_{(1)}^{45} & R_{(1)}^{55} & R_{(2)}^{45} & R_{(2)}^{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{23}^{(0)} \\ E_{13}^{(0)} \\ E_{23}^{(1)} \\ E_{13}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Où chacune des composantes de  $[R]$  est calculée comme suit :

$$R_{(n)}^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu C^{ij}(\theta^3)^n d\theta^3 \quad (3.26)$$

Soit N le nombre total de couches :

$$R_{(n)}^{ij} = \sum_{h=1}^N C_h^{ij} \int_{-h/2}^{h/2} \mu(\theta^3)^n d\theta^3 \quad (3.27)$$

Nous avons isolé les termes plans et le terme normal, et les termes de cisaillement, cette séparation des calculs va simplifier la modélisation numérique.

La détermination des  $L_{(n)}^{ij}$  permettra la résolution des équations d'équilibre (2.45) à (2.47) et des conditions aux limites (2.48) à (2.50).

## *Chapitre 4*

---

# *La méthode des éléments finis*

---

### **4-1 Préliminaire :**

L'algorithme est introduit dans un programme qui a été conçu initialement par deux équipes, celle de Wuppertal en Allemagne ( Kreja & Schmidt & Reddy [27] ), et celle de Blackburg aux U.S.A. ( Palmerio [37], Palmerio & Reddy & Schmidt [38] ).

### **4-2 Discrétisation :**

#### **4-2-1 Approximation :**

Le but de ce chapitre est de poser notre problème continu sous forme discrète. Soit  $f$  une grandeur de la structure et  $M$  un point de la structure. On définit une approximation qui satisfait les lois physiques auxquelles  $f$  répond sous la forme suivante ( Craveur [14] ) :

$$\tilde{f}(M) = \sum_{i=1}^n a_i \theta_i(M) \quad (4.1)$$

Les fonctions  $\theta_i$  sont appelées fonctions de pondération ou fonctions de forme. Les coefficients  $a_i$  sont les coordonnées de la fonction  $f$  dans la base des fonctions  $\theta_i$ .

L'erreur apportée par cette approximation est donc :

$$\varepsilon = f - \tilde{f} \quad (4.2)$$

Lors de la modélisation numérique, le choix de la valeur de  $\varepsilon$  est primordial car celle-ci doit être suffisamment petite pour que les solutions numériques obtenues soient représentatives de la réalité.

Notre approche étant une approche cinématique, l'approximation va donc porter sur les déplacements et être introduite dans les champs de contrainte et de déformation.

#### **4-2-2 Formulation de l'élément :**

Nous considérons une structure  $\Omega$ , et  $\Gamma$  sa frontière.  $\Omega$  va être découpée en une somme d'éléments notés  $\Omega_e$ . A chaque élément est affecté un certain nombre de nœuds.

Les critères de choix portant sur la géométrie des éléments et le nombre de nœuds, ainsi que leurs influences sur le calcul seront abordés dans le chapitre suivant.

Le programme effectue les calculs des diverses grandeurs pour chaque élément. Une opération d'assemblage consiste alors ensuite à reconstruire les grandeurs matricielles globales de la structure. Après l'assemblage, la taille du problème est égale aux nombre de degrés de liberté indépendants de la structure.

#### **4-2-3 Etude des déplacements :**

Dans le cas de l'approche cinématique, les degrés de liberté sont les déplacements des nœuds du maillage.

Au regard de la relation (4.1), le champ de déplacement  $\{U\}$  global de la structure se met sous la forme :

$$\{U\} = [N]\{q\} \quad (4.3)$$

Où  $[N]$  est la matrice des fonctions d'interpolation.  $\{q\}$  est le vecteur des déplacements nodaux donné par :

$$\{q\} = \left\{ \begin{array}{c} U_{11}^e \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{P1}^e \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{N1}^e \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{NP}^e \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

P est le nombre de composantes du vecteur déplacement d'un point nodal, N le nombre total de points nodaux de  $\Omega$ .  $U_{jl}^e$  est la l<sup>ème</sup> composante du déplacement du point nodal J,  $1 \leq J \leq N$ .

La fonction  $N_i$  associée à  $U_{ik}^e$  y prend la valeur 1 car le déplacement physique dans la direction k au nœud i est égal au déplacement nodal  $U_{ik}^e$  qui le représente., elle a pour valeur 0 sur les autres déplacements nodaux.

#### 4.2.4 Etude de la déformation :

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, les composantes de la déformation peuvent être décomposées en deux parties, l'une linéaire notée  $\{E_L\}$ , l'autre non linéaire notée  $\{E_{NL}\}$  :

$$\{E\} = \{E_L\} + \{E_{NL}\} \quad (4.5)$$

Nous proposons le développement suivant ( Kreja & Schmidt & Reddy [27] ) :

$$E = [B_0] \{u\} + \frac{1}{2} [A(\{q\})][g(\{q\})] \quad (4.6)$$

où  $[B_0]$  est la matrice de rigidité linéaire, et  $[A]$  un opérateur différentiel matriciel.

Nous décomposons  $\{\vartheta\}$  de la manière suivante :

$$\{\vartheta\} = [G]\{u\} \quad (4.7)$$

Tout comme  $[A]$ ,  $[G]$  est un opérateur différentiel matriciel. Le calcul des différents opérateurs sera donné ultérieurement dans ce chapitre.

La variation par rapport aux déplacements nous donne :

$$\delta E = [B_0]\delta\{u\} + \frac{1}{2} \{ \delta[A]\{\vartheta\} + [A]\delta\{\vartheta\} \} \quad (4.8)$$

De plus, nous imposons la relation suivante :

$$\delta[A]\{\vartheta\} = [A]\delta\{\vartheta\} \quad (4.9)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\delta E = [B_0]\delta\{u\} + [A]\delta\{\vartheta\} \quad (4.10)$$

Sachant d'après (4.7) que :

$$\delta\{\vartheta\} = [G]\delta\{u\} \quad (4.11)$$

Et en utilisant les fonctions d'interpolation définies précédemment, l'écriture de la déformation se résume à :

$$\delta\{E\} = [\bar{B}](\delta\{q\}) \quad (4.12)$$

$[\bar{B}]$  est la matrice de rigidité totale comprenant  $[B_L]$ , partie linéaire de la matrice de rigidité et  $[B_{NL}]$ , partie non linéaire dépendant des déplacements :

$$[\bar{B}] = [B_L] + [B_{NL}(\{q\})] \quad (4.13)$$

$[B_{NL}]$  est négligeable dans le cas des déformations infinitésimales.

D'après (4.10) et (4.11) :

$$[\bar{B}] = [B_0][N] + [A(\{u^e\})][G(\{u^e\})][N] \quad (4.14)$$

$[B_{NL}]$  est décomposée suivant  $[A]$  et  $[G]$ , fonctions linéaires des composantes du déplacement.

### 4-3 Le principe :

#### 4-3-1 Expression de la matrice de rigidité :

D'après le principe des travaux virtuels :

$$\int_{\Omega} \delta\{E\}^T \{\sigma\} d\Omega - \int_{\Omega} \delta\{U^e\}^T f d\Omega - \int_{\Gamma} \delta\{U^e\}^T T d\Gamma = 0 \quad (4.15)$$

$f$  sont les efforts volumiques appliquées à  $\Omega$ , et  $T$  les efforts surfaciques appliquées sur  $\Gamma$ .

En remplaçant  $\delta\{E\}^T$  d'après la relation (4.12), nous arrivons à :

$$\int_{\Omega} [\bar{B}]^T \{\sigma\} d\Omega - \{F\} = 0 \quad (4.16)$$

$\{F\}$  est le vecteur force global appliqué sur la structure discrète, qui prend en compte tous les chargements extérieurs.

Différentions par rapport aux déplacements :

$$\int_{\Omega} [\bar{\mathbf{B}}]^T \{\sigma\} d\Omega - \int_{\Omega} [\bar{\mathbf{B}}]^T \delta\{\sigma\} d\Omega = 0 \quad (4.17)$$

D'après ce qui a été établi au chapitre 3 :

$$\{\sigma\} = [\mathbf{C}]\{\mathbf{E}\} \quad (4.18)$$

En différentiant cette relation :

$$\delta\{\sigma\} = [\mathbf{C}]\delta\{\mathbf{E}\} = [\mathbf{C}][\bar{\mathbf{B}}]\delta\{\mathbf{U}^e\} \quad (4.19)$$

$[\mathbf{B}_0]$  étant indépendante de  $\{\mathbf{U}^e\}$  :

$$\delta[\bar{\mathbf{B}}] = \delta[\mathbf{B}_{NL}] \quad (4.20)$$

ce qui entraîne pour la relation (4.17) :

$$\int_{\Omega} \delta[\mathbf{B}_{NL}]^T \{\sigma\} d\Omega + \int_{\Omega} [\bar{\mathbf{B}}]^T [\mathbf{C}][\bar{\mathbf{B}}]\delta\{\mathbf{U}^e\} d\Omega = 0 \quad (4.21)$$

Là, nous posons :

$$[\bar{\mathbf{K}}] = \int_{\Omega} [\bar{\mathbf{B}}]^T [\mathbf{C}][\bar{\mathbf{B}}] d\Omega \quad (4.22)$$

où  $[\bar{\mathbf{K}}]$  n'est autre que la matrice de rigidité, que l'on peut décomposer comme suit :

$$[\bar{\mathbf{K}}] = [\mathbf{K}_L] + [\mathbf{K}_{NL}] \quad (4.23)$$

$[\mathbf{K}_L]$  est la matrice de rigidité lorsque nous considérons de petits déplacements :

$$[K_L] = \int_{\Omega} [B_L]^T [C] [B_L] d\Omega \quad (4.24)$$

$[K_{NL}]$  intervient lorsque nous prenons en compte de grands déplacements :

$$[K_{NL}] = \int_{\Omega} [B_L]^T [C] [B_{NL}] + [B_{NL}]^T [C] [B_{NL}] + [B_{NL}]^T [C] [B_L] d\Omega \quad (4.25)$$

Nous proposons d'écrire :

$$\int_{\Omega} \delta [B_{NL}]^T \{\sigma\} = [K_{\sigma}] \quad (4.26)$$

où  $[K_{\sigma}]$  reste à déterminer.

Nous proposons de poser  $[K_T]$  la matrice de rigidité tangente de la structure discrétisée :

$$[K_{\sigma}] + [K_{NL}] + [K_L] = [K_T] \quad (4.27)$$

Matrice que nous pouvons calculer si nous connaissons  $[K_{\sigma}]$  :

$$[K_{\sigma}] \delta\{U\} = \int_{\Omega} [N]^T [G]^T \delta[A]^T \{\sigma\} d\Omega \quad (4.28)$$

Nous utilisons la propriété matérielle suivante :

$$\delta[A]^T \{\sigma\} = [S] \delta\{U\} \quad (4.29)$$

Où  $[S]$  est obtenue par identification, ce qui nous donne finalement  $[K_{\sigma}]$  :

$$[K_{\sigma}] \delta\{U\} = \int_{\Omega} [N]^T [G]^T [S] [G] [N] \delta\{U^e\} d\Omega \quad (4.30)$$

$$\Rightarrow [K_\sigma] = \int_{\Omega} [N]^T [G]^T [S][G][N] d\Omega \quad (4.31)$$

$[K_\sigma]$  étant parfaitement définie, il en est de même pour  $[K_\tau]$ .

#### 4-3-2 *Enoncé du principe :*

La résolution du problème se met donc sous la forme :

$$[K_\tau]\{q\} - \{F\} = 0 \quad (4.32)$$

Après avoir assemblé les grandeurs élémentaires de tous les éléments de la structure, nous obtenons :

$\{F\}$  est le vecteur forces ne comprenant que les charges extérieures, puisque nous partons d'une structure vierge, donc libre de contraintes et de déformations initiales.

#### 4-4 *Ecriture matricielle de la déformation :*

##### 4-4-1 *Décomposition en fonction des déplacements :*

$$V_i \parallel_j = V_{i,j} + V_k \Gamma_{jk}^i \quad (4.33)$$

$$V_i \parallel_j = V_{i,j} - V_k \Gamma_{ij}^k \quad (4.34)$$

Nous développons les relations (2.15)-(2.19) de la déformation en fonction de celles du déplacement. Pour simplifier l'écriture nous utiliserons la notation suivante

$$\mathbf{u} = \overset{(0)}{V}_1 \quad \mathbf{v} = \overset{(0)}{V}_2 \quad \mathbf{w} = \overset{(0)}{V}_3 \quad \psi_x = \overset{(1)}{V}_1 \quad \psi_y = \overset{(1)}{V}_2$$

les composantes de la déformation s'écrivent alors comme suit :

$$\begin{aligned} \overset{(0)}{E}_{11} = & u_{,1} - u\Gamma_{11}^1 - v\Gamma_{11}^2 - b_{11}w + \frac{1}{2}(w_{,1} + b_1^1u + b_1^2v)^2 + \frac{1}{2}[(a^{11} + a^{21})u_{,1} \\ & + (a^{22} + a^{12})v_{,1} + (a^{11}u + a^{12}v)(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^2) + (a^{21}u + a^{22}v)(\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2) \\ & - (b_1^1 + b_1^2)w][u_{,1} - u(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^1) + v_{,1} - v(\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^1) - w(b_{11} + b_{21})] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Ces termes sont donnés en annexe B.

Nous avons vu précédemment que la déformation pouvait se décomposer comme suit :

$$\delta E = \{ [B_0][N] + [A(\{\underline{v}\})][G(\{\underline{v}\})][N] \} (\delta\{\underline{v}\}) \quad (4.36)$$

Suite aux relations que nous venons de développer, nous allons exprimer les différents opérateurs en fonction des déplacements. Ceux-ci sont divisés en deux parties, l'une contenant les termes plans et le cisaillement normal, et l'autre les termes de cisaillement transversal.

#### 4-4-2 Opérateurs linéaires :

Nous donnons pour les termes plans et normaux :

$$[B_L] = [B_0][N] = \begin{bmatrix} [B_1] & [0_2] \\ [0_1] & [B_2] \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} (\Phi_{i,x} - \Gamma_{11}^1 \Phi_i) & -\Gamma_{22}^2 \Phi_i & -b_1^1 \Phi_i \\ -\Gamma_{22}^1 \Phi_i & (\Phi_{i,y} - \Gamma_{22}^2 \Phi_i) & -b_2^2 \Phi_i \\ (\Phi_{i,y} - 2\Gamma_{12}^1 \Phi_i) & (\Phi_{i,x} - 2\Gamma_{12}^2 \Phi_i) & -2b_2^1 \Phi_i \\ (-b_1^1 \Phi_{i,x} + b_1^1 \Gamma_{11}^1 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{12}^1 \Phi_i) & (-b_1^2 \Phi_{i,x} + b_1^1 \Gamma_{11}^2 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{12}^2 \Phi_i) & (b_1^1 b_{11} + b_1^2 b_{21}) \Phi_i \\ (-b_2^1 \Phi_{i,y} + b_2^1 \Gamma_{12}^1 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{22}^1 \Phi_i) & (-b_2^2 \Phi_{i,y} + b_2^1 \Gamma_{12}^2 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{22}^2 \Phi_i) & (b_2^1 b_{12} + b_2^2 b_{22}) \Phi_i \\ (-b_1^1 \Phi_{i,y} + b_1^1 \Gamma_{12}^1 \Phi_i + b_1^2 \Gamma_{22}^1 \Phi_i) & (-b_1^2 \Phi_{i,y} + b_1^1 \Gamma_{12}^2 \Phi_i + b_1^2 \Gamma_{22}^2 \Phi_i) & (b_1^1 b_{11} + b_1^2 b_{21}) \Phi_i \\ (-b_2^1 \Phi_{i,x} + b_2^1 \Gamma_{11}^1 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{12}^1 \Phi_i) & (-b_2^2 \Phi_{i,x} + b_2^1 \Gamma_{11}^2 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{12}^2 \Phi_i) & (b_2^1 b_{12} + b_2^2 b_{22}) \Phi_i \end{bmatrix}$$

$$[B_2] = \begin{bmatrix} (\Phi_{i,x} - \Gamma_{11}^1 \Phi_i) & -\Gamma_{11}^2 \Phi_i \\ -\Gamma_{22}^1 \Phi_i & (\Phi_{i,y} - \Gamma_{22}^2 \Phi_i) \\ (\Phi_{i,y} - 2\Gamma_{12}^1 \Phi_i) & (\Phi_{i,x} - 2\Gamma_{12}^2 \Phi_i) \\ (-b_1^1 \Phi_{i,x} + b_1^1 \Gamma_{11}^1 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{12}^1 \Phi_i) & (-b_1^2 \Phi_{i,x} + b_1^1 \Gamma_{11}^2 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{12}^2 \Phi_i) \\ (-b_2^1 \Phi_{i,y} + b_2^1 \Gamma_{12}^1 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{22}^1 \Phi_i) & (-b_2^2 \Phi_{i,y} + b_2^1 \Gamma_{12}^2 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{22}^2 \Phi_i) \\ (-b_1^1 \Phi_{i,y} + b_1^1 \Gamma_{12}^1 \Phi_i + b_1^2 \Gamma_{22}^1 \Phi_i) & (-b_1^2 \Phi_{i,y} + b_1^1 \Gamma_{12}^2 \Phi_i + b_1^2 \Gamma_{22}^2 \Phi_i) \\ (-b_2^1 \Phi_{i,x} + b_2^1 \Gamma_{11}^1 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{12}^1 \Phi_i) & (-b_2^2 \Phi_{i,x} + b_2^1 \Gamma_{11}^2 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{12}^2 \Phi_i) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$[O_1]$  et  $[O_2]$  sont des matrices nulles de dimension respective (4,3) et (4,2).

Pour les composantes de cisaillement, une relation analogue à (4.37) donne :

$$[B_L] = [[B_0]][N] \quad (4.38)$$

soit :

$$[B_L] = \begin{bmatrix} b_2^1 \Phi_i & b_2^2 \Phi_i & \Phi_{i,y} & 0 & \Phi_i \\ b_1^1 \Phi_i & b_1^2 \Phi_i & \Phi_{i,x} & \Phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 4-4-3 Opérateurs non linéaires :

$[B_{NL}]$  s'écrit :

$$[B_{NL}] = [[A][G][N]] \quad (4.39)$$

D'après la relation (4.7) :

$$[[G][N]]\{U\} = \{\mathfrak{g}\} \quad (4.40)$$

où :

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{g}\} = \{\mathfrak{g}_i\}, i=1, \dots, 14 \text{ avec: } & \mathfrak{g}_1 = b_1^1 u + b_1^2 v + w_{,x} \\ & \mathfrak{g}_2 = u_{,x} - b_{11} w = u_{,x} - u \Gamma_{11}^1 - v \Gamma_{11}^2 - b_{11} w \\ & \mathfrak{g}_3 = v_{,x} - b_{11} w = v_{,x} - u \Gamma_{12}^1 - v \Gamma_{12}^2 - b_{21} w \\ & \mathfrak{g}_4 = b_2^1 u + b_2^2 v + w_{,y} \\ & \mathfrak{g}_5 = u_{,y} - b_{12} w = u_{,y} - u \Gamma_{12}^1 - v \Gamma_{12}^2 - b_{12} w \\ & \mathfrak{g}_6 = v_{,y} - b_{22} w = v_{,y} - u \Gamma_{22}^1 - v \Gamma_{22}^2 - b_{22} w \\ & \mathfrak{g}_7 = b_1^1 \psi_x + b_1^2 \psi_y \\ & \mathfrak{g}_8 = \psi_{x|x} = \psi_{x,x} - \psi_x \Gamma_{11}^1 - \psi_y \Gamma_{11}^2 \\ & \mathfrak{g}_9 = \psi_{y|x} = \psi_{y,x} - \psi_x \Gamma_{12}^1 - \psi_y \Gamma_{12}^2 \\ & \mathfrak{g}_{10} = b_2^1 \psi_x + b_2^2 \psi_y \\ & \mathfrak{g}_{11} = \psi_{x|y} = \psi_{x,y} - \psi_x \Gamma_{12}^1 - \psi_y \Gamma_{12}^2 \\ & \mathfrak{g}_{12} = \psi_{y|y} = \psi_{y,y} - \psi_x \Gamma_{22}^1 - \psi_y \Gamma_{22}^2 \\ & \mathfrak{g}_{13} = \psi_x \\ & \mathfrak{g}_{14} = \psi_y \end{aligned}$$

En identifiant, nous obtenons :

$$[[G][N]]= \begin{bmatrix} b_1^1 \Phi_i & b_1^2 \Phi_i & \Phi_{i,x} & 0 & 0 \\ \Phi_{i,x} - \Gamma_{11}^1 \Phi_i & \Gamma_{11}^2 \Phi_i & -b_{11} & 0 & 0 \\ -\Gamma_{21}^1 \Phi_i & \Phi_{i,x} - \Gamma_{21}^2 \Phi_i & -b_{21} \Phi_i & 0 & 0 \\ b_2^1 \Phi_i & b_2^2 \Phi_i & \Phi_{i,y} & 0 & 0 \\ \Phi_{i,y} - \Gamma_{12}^1 \Phi_i & \Gamma_{12}^2 \Phi_i & -b_{12} \Phi_i & 0 & 0 \\ \Gamma_{22}^1 \Phi_i & \Phi_{i,y} - \Gamma_{22}^2 \Phi_i & -b_{22} \Phi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1^1 \Phi_i & b_1^2 \Phi_i \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{i,x} - \Gamma_{11}^1 \Phi_i & -\Gamma_{11}^2 \Phi_i \\ 0 & 0 & 0 & -\Gamma_{21}^1 \Phi_i & \Phi_{i,x} - \Gamma_{21}^2 \Phi_i \\ 0 & 0 & 0 & b_2^1 \Phi_i & b_2^2 \Phi_i \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{i,y} - \Gamma_{12}^1 \Phi_i & -\Gamma_{12}^2 \Phi_i \\ 0 & 0 & 0 & -\Gamma_{22}^1 \Phi_i & \Phi_{i,y} - \Gamma_{22}^2 \Phi_i \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_i \end{bmatrix}$$

L'opérateur [A] est défini par :

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

avec le détail de [A] donné par :

$$[A_1] = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & a^{11} \vartheta_2 + a^{12} \vartheta_3 & a^{21} \vartheta_2 + a^{22} \vartheta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta_4 & a^{11} \vartheta_5 + a^{12} \vartheta_6 & a^{21} \vartheta_5 + a^{22} \vartheta_6 \\ \vartheta_4 & a^{11} \vartheta_5 + a^{12} \vartheta_6 & a^{21} \vartheta_5 + a^{22} \vartheta_6 & \vartheta_1 & a^{11} \vartheta_2 + a^{12} \vartheta_3 & a^{21} \vartheta_2 + a^{22} \vartheta_3 \\ \vartheta_7 & a^{11} \vartheta_8 + a^{12} \vartheta_9 & a^{21} \vartheta_8 + a^{22} \vartheta_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta_{10} & a^{11} \vartheta_{11} + a^{12} \vartheta_{12} & a^{21} \vartheta_{11} + a^{22} \vartheta_{12} \\ \vartheta_{10} & a^{11} \vartheta_5 + a^{12} \vartheta_6 & a^{21} \vartheta_{11} + a^{22} \vartheta_{12} & \vartheta_7 & a^{11} \vartheta_8 + a^{12} \vartheta_9 & a^{21} \vartheta_8 + a^{22} \vartheta_9 \end{bmatrix}$$

$$[A_3] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \vartheta_{13} \ \vartheta_{14} \ 0 \ 0]$$

[A<sub>2</sub>] et [A<sub>4</sub>] sont des matrices nulles de dimension respective (4,6) et (9,2).

Pour les termes de cisaillement :

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_1 & A_4 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

avec:

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a^{11}\vartheta_{13} + a^{12}\vartheta_{14} & a^{21}\vartheta_{13} + a^{22}\vartheta_{14} \\ 0 & a^{11}\vartheta_{13} + a^{12}\vartheta_{14} & a^{21}\vartheta_{13} + a^{22}\vartheta_{14} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_3] = \begin{bmatrix} a^{11}\vartheta_5 + a^{12}\vartheta_6 & a^{21}\vartheta_5 + a^{22}\vartheta_6 \\ a^{11}\vartheta_2 + a^{12}\vartheta_3 & a^{21}\vartheta_2 + a^{22}\vartheta_3 \end{bmatrix}$$

$$[A_4] = \begin{bmatrix} a^{12}\vartheta_{11} + a^{22}\vartheta_{12} & a^{21}\vartheta_{11} + a^{22}\vartheta_{12} \\ a^{21}\vartheta_8 + a^{22}\vartheta_9 & a^{11}\vartheta_8 + a^{12}\vartheta_{93} \end{bmatrix}$$

$[A_2]$  est une matrice nulle de dimension (2,6).

#### 4-5 Calcul de la matrice de rigidité tangentielle totale :

Nous proposons d'écrire :

$$\int_{\Omega} \delta[B_{NL}]^T \{\sigma\} = [K_{\sigma}] \quad (4.43)$$

où  $[K_{\sigma}]$  reste à déterminer.

On pose :

$$[K_{\sigma}] + [K_{NL}] + [K_L] = [K_T] \quad (4.44)$$

$[K_T]$  est la matrice de rigidité tangente globale, que nous pouvons donc calculer d'après les équations (4.24), (4.25), et (4.31).

$[S]$  est obtenue par identification. Pour les termes plans et normaux, nous obtenons :

$$[S] = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2^T & S_4 & S_3 \\ S_3^T & S_3^T & S_6 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

avec :

$$[S_1] = \begin{bmatrix} L_{(0)}^{11} & 0 & 0 & L_{(0)}^{12} & 0 & 0 \\ & a^{11}L_{(0)}^{11} & 0 & 0 & a^{11}L_{(0)}^{12} & a^{12}L_{(0)}^{12} \\ & & a^{22}L_{(0)}^{11} & 0 & a^{12}L_{(0)}^{12} & a^{22}L_{(0)}^{12} \\ & & & L_{(0)}^{22} & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & a^{11}L_{(0)}^{22} & a^{11}L_{(0)}^{12} \\ & & & & & a^{22}L_{(0)}^{22} \end{bmatrix}$$

$$[S_2] = \begin{bmatrix} L_{(1)}^{11} & 0 & 0 & L_{(1)}^{12} & 0 & 0 \\ 0 & a^{11}L_{(1)}^{11} & a^{11}(L_{(1)}^{11} + L_{(0)}^{11}) & 0 & a^{11}L_{(1)}^{12} & a^{12}L_{(1)}^{12} \\ 0 & a^{12}L_{(1)}^{12} & a^{22}L_{(1)}^{21} & 0 & a^{12}L_{(1)}^{12} & a^{22}L_{(1)}^{12} \\ L_{(1)}^{12} & 0 & 0 & L_{(1)}^{22} & 0 & 0 \\ 0 & a^{11}L_{(1)}^{12} & a^{12}(L_{(1)}^{12} + L_{(0)}^{12}) & 0 & a^{11}L_{(1)}^{22} & a^{12}L_{(1)}^{22} \\ 0 & a^{21}L_{(1)}^{12} & a^{22}L_{(1)}^{12} & 0 & a^{21}L_{(1)}^{22} & a^{22}L_{(1)}^{22} \end{bmatrix}$$

$$[S_4] = \begin{bmatrix} L_{(2)}^{11} & 0 & 0 & L_{(2)}^{12} & 0 & 0 \\ & a^{11}L_{(2)}^{11} & a^{12}(L_{(1)}^{11} + L_{(2)}^{11}) & 0 & a^{11}L_{(2)}^{12} & a^{12}L_{(2)}^{12} \\ & & a^{22}L_{(2)}^{11} & 0 & a^{12}L_{(2)}^{12} & a^{22}L_{(2)}^{12} \\ & & & L_{(2)}^{22} & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & & a^{11}L_{(2)}^{22} & a^{12}L_{(2)}^{22} \\ & & & & & a^{22}L_{(2)}^{22} \end{bmatrix}$$

$$[S_6] = \begin{bmatrix} a^{11}L_{(0)}^{33} & a^{12}L_{(0)}^{33} \\ \text{sym} & a^{22}L_{(0)}^{33} \end{bmatrix}$$

$[S_3]$  est une matrice nulle de dimension (6,2).

Pour les termes de cisaillement, nous obtenons:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$[S_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a^{11}L_{(0)}^{13} & a^{12}L_{(0)}^{13} \\ a^{12}L_{(0)}^{13} & a^{22}L_{(0)}^{13} \\ 0 & 0 \\ a^{11}L_{(0)}^{23} & a^{12}L_{(0)}^{23} \\ a^{21}L_{(0)}^{23} & a^{22}L_{(0)}^{23} \\ 0 & 0 \\ a^{11}L_{(1)}^{13} & a^{12}L_{(1)}^{13} \\ a^{12}L_{(1)}^{13} & a^{22}L_{(1)}^{13} \\ 0 & 0 \\ a^{11}L_{(1)}^{23} & a^{12}L_{(1)}^{23} \\ a^{12}L_{(1)}^{23} & a^{22}L_{(1)}^{23} \end{bmatrix}$$

$[S_1]$  et  $[S_3]$  sont des matrices nulles de dimension respective (12,12) et (2,2).

$[S]$  étant calculée,  $[K_\sigma]$  est parfaitement définie, il en est de même pour  $[K_T]$ .

#### 4-6 Le programme :

Le programme que nous allons utiliser par la suite permet d'obtenir les déplacements en fonction du paramètre de charge. Nous donnons le cheminement des calcul effectués par le programme :

## *Chapitre 5*

---

### *Résultats numériques*

---

## 5-1 Modélisation numérique :

### 5-1-1 Choix des éléments :

Les géométries les plus couramment utilisées pour les éléments sont les triangles et les quadrangles. L'avantage des éléments triangles est de pouvoir modéliser des surfaces de forme quelconque. Cependant notre choix se portera sur les éléments quadrangles car à nombre égal de degrés de liberté ils convergent plus vite vers la solution. De plus pour un nombre donné de nœuds, le nombre d'éléments quadrangles à prendre en compte est inférieur au nombre d'éléments triangles nécessaires.

Nous avons choisi les éléments à quatre nœuds de degré un, et pour les éléments de degré deux : les éléments à neuf nœuds de la famille des carrés de Lagrange ou ceux à huit nœuds de la famille de Serendip, qui permettent d'augmenter la performance de l'élément, mais augmentent également le nombre de degrés de liberté de celui-ci :

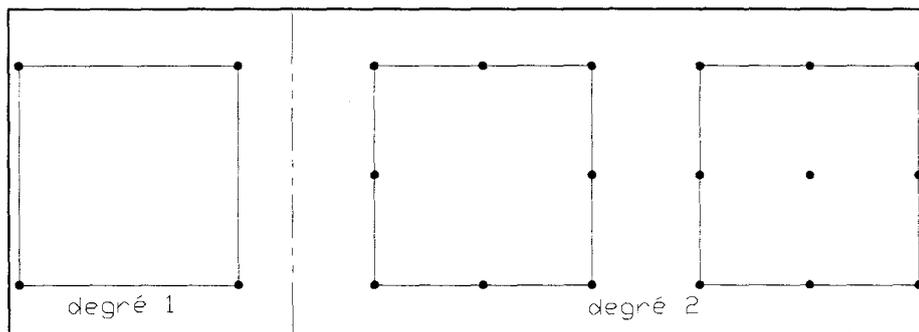


Figure 5-1 : Type d'éléments

De plus, notre coque admettant des symétries de chargement et des conditions aux limites, nous pouvons limiter les calculs au quart de celle-ci.

Lors de la résolution numérique des exemples, nous précisons les nouvelles conditions aux limites à prendre en compte pour le quart de la structure.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous serons amenés à valider nos choix, et à déterminer la convergence du nombre d'éléments nécessaires vers une solution satisfaisante.

### 5-1-2 Résolution des systèmes non linéaires :

En raison de la prise en compte des termes non linéaires dans le tenseur de Green-Lagrange, la résolution de notre problème se trouve être non linéaire.

La courbe liant la charge au déplacement peut alors être de la forme :

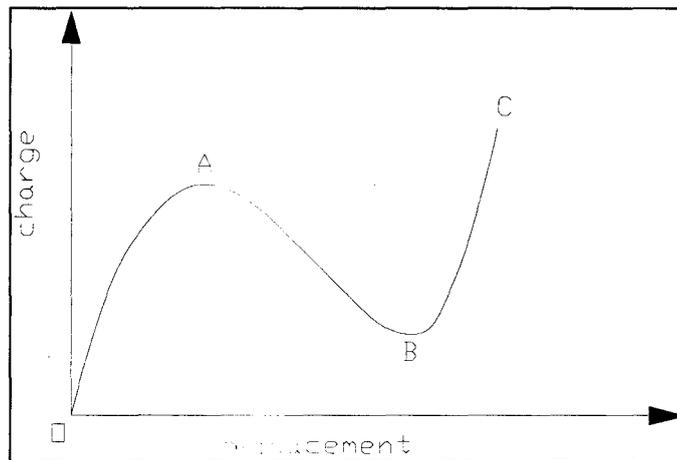


Figure 5-2 : courbe non linéaire

Dans les régions OA et BC, la méthode de Newton-Raphson permet de déterminer la solution. Lorsque nous nous trouvons dans le domaine AB, nous utilisons une méthode incrémentale, nous considérons l'incrément de déplacement donné, et c'est l'incrément de charge qui reste à déterminer. Nous constatons en effet que pour une valeur de déplacement donnée, ne correspond qu'une seule valeur de chargement. La combinaison des méthodes incrémentale et de Newton-Raphson est la méthode des déplacements contrôlés.

Nous avons à résoudre l'équation donnée par (4.32) :

$$[K_T]\{q\} - \{F\} = 0 \quad (5.1)$$

Nous décomposons la charge totale en un nombre fini d'incrément d'intensité  $\Delta\lambda$  :

$$[K_T](\Delta\{q\}) = RS + \Delta\lambda\{F_0\} \quad (5.2)$$

RS est le résidu dû à l'estimation du déplacement initial (ou erreur due à la méthode de résolution), qui doit être minime pour donner un incrément de déplacement proche de la solution exacte.  $\{F_0\}$  le vecteur unitaire parallèle à l'incrément de charge.

Dans le domaine AB, , nous considérons  $\Delta\{q\}$  donné et c'est  $\Delta\lambda$ , valeur unique qui reste à déterminer. Nous transférons directement l'incrément  $\Delta\lambda$  de l'équation (5.2), dans le premier membre en imposant  $\Delta\{q\} = 0$  :

$$[K_T](\Delta\{q^r\}) = RS \quad (5.3)$$

La matrice de rigidité  $[K_T]$  est modifiée, elle perd sa symétrie et sa largeur de bande. Pour éviter cela, nous pouvons la résoudre deux fois, avec deux seconds membres différents, en utilisant la même matrice  $[K_T]$  (Teyeb [55]) :

$$[K_T](\Delta\{q^{F_0}\}) = \{F_0\} \quad (5.4)$$

La solution de (5.2) devient alors

$$\Delta\{q\} = \Delta\{q^r\} + \Delta\lambda\Delta\{q^{F_0}\} \quad (5.5)$$

Puisqu'on impose  $\Delta\{q\}$  égal à zéro, il vient que :

$$\Delta\lambda = -\frac{\Delta\{q^r\}}{\Delta\{q^{r_0}\}} \quad (5.6)$$

Nous avons donc déterminé  $\Delta\lambda$  par la méthode des déplacements contrôlés.

### 5-1-3 Intégration numérique :

L'intégrale permettant d'obtenir la matrice de rigidité est en général une expression complexe, c'est pourquoi nous avons recours à une méthode d'intégration numérique, dont le rôle est d'évaluer l'intégrale en la remplaçant par une somme pondérée.

En bidimensionnel, nous avons :

$$\iint f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^P w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (5.1)$$

Nous avons choisi la méthode de Gauss, compatible avec le type d'éléments quadrangles. Là encore le choix du nombre de points d'intégration reste délicat.

En pratique, on utilise souvent un schéma d'intégration réduite qui consiste à prendre dans chaque direction un nombre de points égal au degré de l'élément.

Lorsqu'on prend un nombre supérieur de points, on parle de schéma d'intégration complet (Kreja, Schmidt, Reddy [27]) :

Nombre de nœuds par élément	Nombre de points de Gauss	
4 nœuds	1 × 1	Intégration réduite
	2 × 2	Intégration complète
8 nœuds	2 × 2	Intégration réduite
	3 × 3	Intégration complète
9 nœuds	2 × 2	Intégration réduite
	3 × 3	Intégration complète

Les calculs des termes plans et transverses étant séparés, les choix des schémas d'intégration relatifs à ces termes sont indépendants. Nous pouvons essayer donc plusieurs possibilités afin d'obtenir une précision correcte des résultats sans multiplier les calculs.

## 5-2 Exemples :

### 5-2-1 Plaque (0/90) sous charge distribuée :

Il s'agit d'une plaque en appui simple ( Palmerio [38] ), ayant les caractéristiques matérielles et géométriques suivantes :

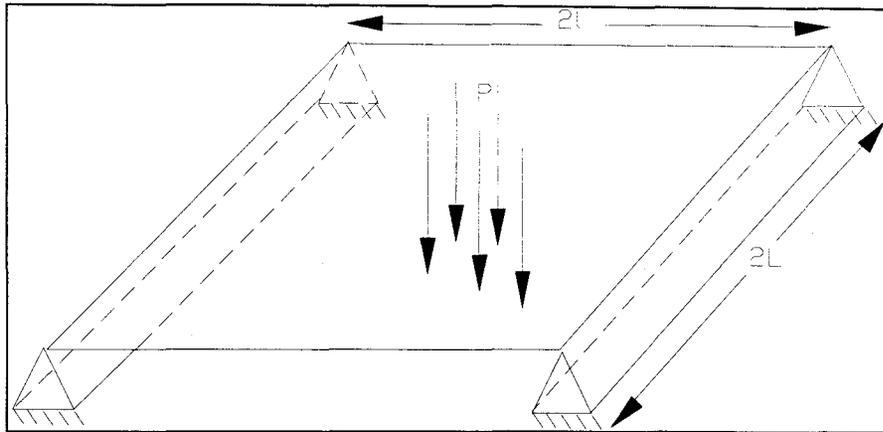


Figure 5-3 : Plaque sous charge distribuée

$$L = l = 243.8 \text{ cm}, h = 0.635 \text{ cm}$$

$$E_{11} = 175775 \text{ MPa}, E_{22} = 7031 \text{ MPa},$$

$$G_{12} = G_{13} = 3515.5 \text{ MPa}, G_{23} = 1406.2 \text{ MPa}, \nu_{12} = 0.25$$

La figure (5-4) donne la flèche en fonction du paramètre de charge (Une unité correspond à 100 Pa). Les résultats entre rotations modérées et rotations larges sont identiques. Au regard de l'annexe C, la géométrie de la plaque entraîne la nullité d'une grande partie des termes non linéaires de la déformation données en annexe B, l'erreur commise entre rotations modérées et rotations larges est donc minimale dans le cas des plaques.

### 5-2-2 Plaque sandwich sous chargement uniforme :

C'est un matériau qui est composé d'un cœur et de deux semelles, assemblés par collage ou soudure. Ces matériaux sont très légers en raison de la matière qui compose le cœur.

Nous avons étudié un matériau sandwich encasté composé de deux semelles identiques en aluminium ( Chang & Sawamiphakdi [7] ).

Pour les deux semelles d'aluminium :

$E = 10500 \text{ ksi}$  ,  $G = 4038.4615 \text{ ksi}$  ,  $\nu = 0.3$  ,  $L = l = 1270 \text{ mm}$  ,  $h_f = 0.381 \text{ mm}$  ,

et pour le cœur constitué d'aluminium en nid d'abeilles :

$E = 0$  ,  $G = 50 \text{ ksi}$  ,  $L = l = 1270 \text{ mm}$  ,  $h_c = 2.54 \text{ mm}$  ,

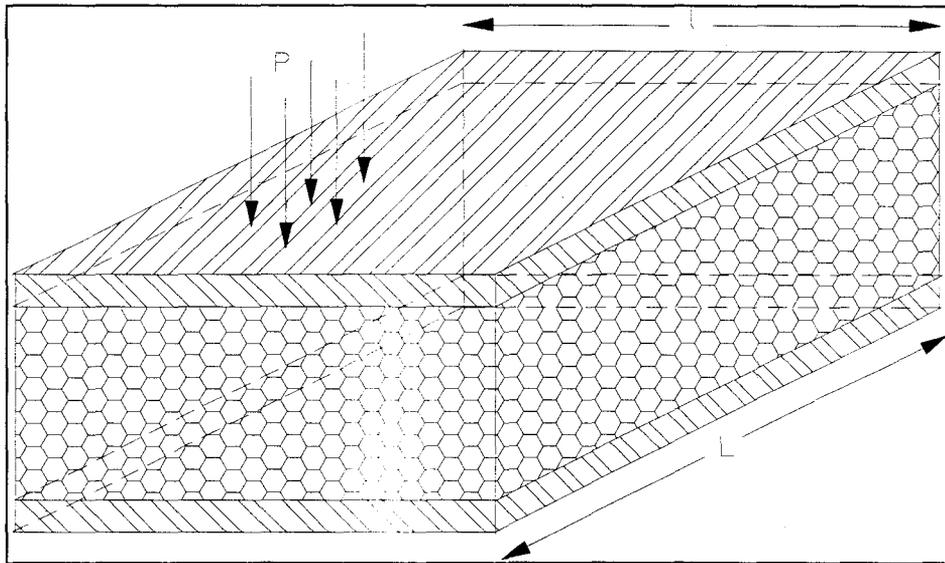


Figure 5-5 :Plaque sandwich sous charge distribuée

Le paramètre de charge est donné par :

$$P = \frac{12 L^3 (1 - \nu^2)}{E h_f h_c}$$

La flèche obtenue par la présente étude sur la figure (5-6) est quasiment identique à celles obtenues avec la théorie des rotations modérées de la présente étude et de [7]. La géométrie étant une plaque, la remarque précédente s'applique ici. Par contre la courbe se rattachant à la solution linéaire montre l'importance des termes non linéaires.

### 5-2-3 Cylindre isotrope sous charge ponctuelle :

On étudie un panneau cylindrique, deux des bords disposés en vis à vis sont sur pivots, les autres bords sont libres ( Saleeb & Chang & Yingyeunyong [46], Liao & Reddy [29] ) :

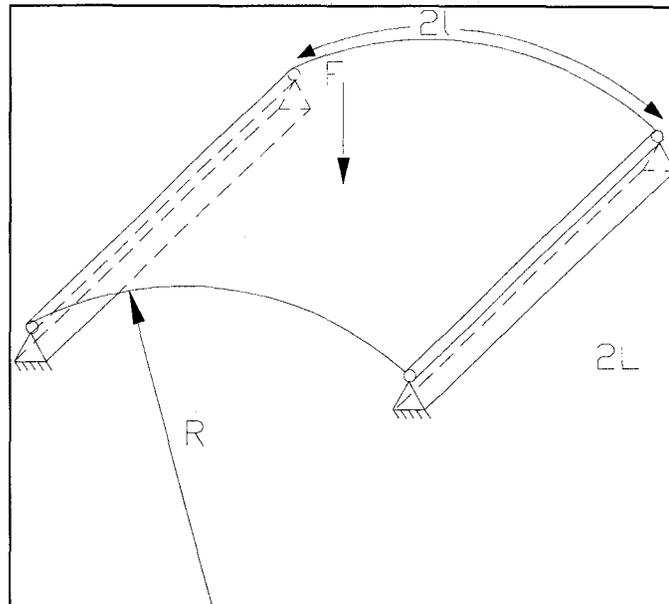


Figure 5-7 : cylindre sous charge ponctuelle

Les dimensions sont :

$$R = 2540\text{mm}, L = 1254\text{mm}, h = 12.7\text{mm}, \text{ et } E = 3102.75\text{N/mm}^2, \nu = 0.3$$

Le paramètre de charge est ici donné en KN. La figure (5-8) montre que la théorie des rotations modérées et celle des grandes rotations donnent des résultats très semblables. Le résultat de la littérature est fondé sur un principe variationnel mixte, et là encore les résultats convergent vers une même solution.

La figure (5-9) quant à elle reprend le même exemple, mais l'épaisseur est divisée par deux. Les résultats sont à comparés à ceux de la littérature. Plus la coque est mince et plus l'ordre de grandeur des déplacements est élevé pour un même domaine de chargement.

#### **5-2-4 Cylindre orthotrope (0/90) sous charge ponctuelle :**

Nous considérons maintenant un cylindre possédant la même géométrie et les mêmes conditions aux limites, cependant les propriétés matérielles ont été modifiées ( Palmerio [38] ) :

$$h = 25.4 \text{ mm}$$

$$E_{11} = 40 \text{ msi}, E_{22} = 1 \text{ msi}, G_{12} = G_{13} = 0.6 \text{ msi},$$

$$G_{13} = 2.53704 \cdot 10^6 \text{ psi}, G_{23} = 0.5 \text{ msi}, \nu_{12} = 0.25$$

Nos résultats obtenus pour le déplacement en fonction du paramètre de charge (F/1000 en lb) figure (5-10) présentent une légère différence entre la théorie des rotations larges et celle des rotations modérées. Le résultat de la littérature s'appuie sur une formulation non linéaire totale. Par rapport à cette solution, notre théorie semble insuffisante, bien qu'un peu plus proche de [38] que la théorie des rotations modérées.

A partir des résultats de la présente étude, nous avons dessiné la coque à différentes étapes du chargement afin de visualiser la déformée, figure (5-11).

En réalité la cote est de dimension très faible par rapport aux autres composantes, nous avons donc multiplié z par dix afin de voir avec précision les déplacements engendrés par les efforts.

#### **5-2-5 Cylindre orthotrope sous charge concentrée (0/90)s :**

Il s'agit d'un panneau cylindrique orthotrope encasté sous charge concentrée ( Tsai & Palazotto [56] ). Nous modélisons l'épaisseur suivant quatre couches afin de respecter la symétrie miroir. Les données sont :

$R = 304.8 \text{ mm}$ ,  $L = 139.7 \text{ mm}$ ,  $l = 152.4 \text{ mm}$   $h = 1.016 \text{ mm}$ ,

$E_{11} = 20.4610^6 \text{ psi}$ ,  $E_{22} = 4.09210^6 \text{ psi}$ ,  $G_{12} = 2.5370410^6 \text{ psi}$ ,

$G_{13} = 2.5370410^6 \text{ psi}$ ,  $G_{23} = 1.2685210^6 \text{ psi}$ ,  $\nu_{12} = 0.313$

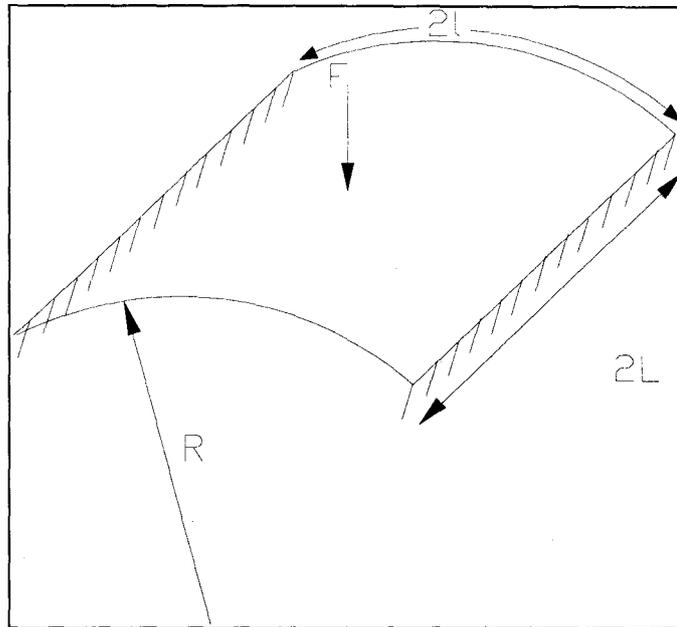


Figure 5-12 : cylindre orthotrope sous charge concentrée

La figure (5-13) donne la flèche centrale en fonction du paramètre de charge ( $F/4$  en lb). Elle met en évidence la différence apportée par les théories présentées. Tant que les déplacements restent faibles, toutes les solutions donnent des résultats équivalents. Il s'agit en fait du domaine où le chargement modifie très peu la géométrie, correspondant aux petites déformations et rotations. Au delà du point critique d'instabilité géométrique, la différence entre la présente solution et celle obtenue dans la référence ( Tsai & Palazotto [56] ) est importante. Pour une même charge, la flèche du modèle [56] est plus faible, la coque a un comportement plus raide, ceci peut s'expliquer par le fait que dans [56], la distribution du cisaillement transverse est une fonction parabolique au travers de l'épaisseur de la coque, et que seuls sont pris en compte les termes linéaires dans les relations déplacements-déformations de cisaillement. Nous avons d'ailleurs, afin de comparer la différence des résultats avec précision, effectué nous même un calcul en négligeant les déformations de cisaillement non linéaires. Ce calcul est donné sous le nom

de théorie des rotations larges modifiées. On constate que le résultat obtenu est très voisin de [56], l'interpolation des déformations linéaires de cisaillement n'est donc pas primordiale dans la différence soulignée avec la théorie des rotations larges, mais la prise en compte des termes non linéaires joue un rôle très important dans les résultats. Le point fort de l'algorithme actuel est de tenir compte des termes non linéaires de la déformation.

Afin de valider les courbes obtenues, nous avons cherché à déterminer le nombre d'éléments suffisant pour l'obtention d'une solution satisfaisante.

Sur la figure (5-14), nous remarquons que pour 16, 25 et 64 éléments, les résultats convergent vers une même solution, alors que pour 4 éléments, les résultats sont quelques peu différents. Dans ce cas présent, quatre éléments ne suffisent pas à modéliser correctement la solution.

La figure (5-15) relative à cet exemple montre l'évolution du point d'instabilité géométrique en fonction du rapport d'orthotropie  $E_{11}/E_{22}$ . Plus ce rapport est faible et plus la charge engendrant ce point est élevée. Lorsque  $E_{11}/E_{22}$  est compris entre 5 et 15, la variation de chargement est très importante, alors que pour un rapport entre 15 et 30, cette variation est beaucoup plus faible. Ceci est dû au fait que pour un degré d'orthotropie élevé, les caractéristiques planes de la coque sont dominées par  $E_{11}$ .

### ***5-2-6 Cylindre orthotrope sous charge concentrée (-45/45/-45/45)s :***

Nous avons conservé les grandeurs géométriques de l'exemple précédent; mais cette fois le modèle est constitué de huit couches avec la disposition (-45/45/-45/45)s.

Sur la figure (5-16), globalement les comportements des différentes théories s'identifient à l'exemple précédent. Le point d'instabilité géométrique est nettement supérieur dans [56]. Lorsque les déplacements deviennent importants, les théories liées aux grandes rotations convergent vers la même solution alors que la théorie des rotations modérées donne des

déplacements plus faibles. Dans ce cas de figure, c'est la présente étude qui donne les maxima en déplacements, alors que précédemment ceux-ci étaient obtenus par l'étude [56]. Nous avons également introduit, comme pour la figure (5-13) la théorie des rotations larges modifiées, qui permet de renforcer la conclusion précédente quant à l'interpolation des termes linéaires et la prise en compte des termes non linéaires.

Nous voyons que le résultat est très différent du modèle (0/90)<sub>s</sub>, l'orientation des fibres affecte la position du point d'instabilité géométrique. L'effort en ce point est presque doublé par rapport à l'étude précédente.

Lors de la constitution du composite, l'épaisseur globale n'est qu'un paramètre. Le nombre de couches et l'orientation des fibres jouent un rôle prépondérant sur le comportement mécanique du matériau.

### 5-2-7 Arc à chargement non symétrique :

Cet exemple met en jeu des rotations importantes au cours du chargement ( Chroscielewski & Schmidt [10], Kreja & Al. [27] ) :

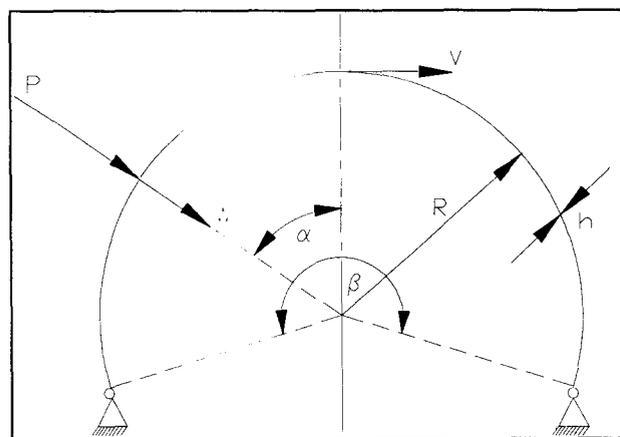


Figure 5-17 : arc à point de chargement non symétrique

On donne les valeurs suivantes :

$$R = 10^3 \text{ cm}, l = h = 1 \text{ cm}, \beta = 200^\circ, \alpha = 60^\circ$$

$$E = 1.2 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2, G = 0.4615385 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$$

Cet arc a été modélisé par une bande de vingt éléments. Le calcul est effectué pour les rotations larges et modérées, les deux théories présentent une faible différence. Sur la figure (5-18) on donne  $W$  en fonction du paramètre de charge en KN. D'autres résultats sont proposés en comparaison, les grandes rotations (Chroscielwski & Schmidt [10]), la théorie des coques minces de Donnel et Vlasov, et la théorie des rotations modérées de Koiter et Sanders, où un certain nombre de termes ont été omis par rapport à la théorie des rotations modérées présentée ici, figure aussi la théorie des déformations et des rotations larges de Yaghmai. Les modèles de Donnel et Vlasov et de Koiter et Sanders sont insuffisants en raison des grandes rotations engendrées par la charge. Le résultat [10] est calculé en élasticité bidimensionnelle, l'algorithme est plus puissant en ce qui concerne les rotations, car celles-ci sont calculées au moyen du tenseur des rotations. De plus, on constate sur la figure (5-19) que les déplacements tangentiels sont du même ordre de grandeur que la flèche au point de chargement.

### **5-3 Conclusion :**

Une partie des exemples traités nous a permis de retrouver des résultats antérieurs, nous permettant ainsi de valider l'algorithme, mais aussi de dire que dans un certain nombre de cas, les théories ultérieures donnent des résultats très satisfaisants.

D'autres exemples nous ont mis en évidence l'intérêt du travail actuel. Nous avons montré d'une part que la théorie des rotations modérées où la théorie de Von Karman pouvaient être mises en défaut. Selon l'ordre des déplacements et des rotations, la variation des

résultats peut être très sensibles aux différentes théories utilisées. D'autre part, nous avons montré que des termes à priori négligeables, telles que les déformations de cisaillement non linéaires peuvent jouer un rôle important dans les calculs.

Nous restons prudents cependant, quand au domaine de validité du programme lorsque les rotations mises en jeu deviennent très grandes. En effet, nous avons considéré les termes  $V_1^{(i)}$ , et  $V_2^{(i)}$  comme étant les rotations de la normale autour de la surface moyenne. C'est une approximation et les rotations réelles de la normale sont en fait données par le calcul du tenseur des rotations.

Conditions aux limites :

$$x = \pm L, v = w = \psi_y = 0$$

$$y = \pm l, u = w = \psi_x = 0$$

$$x = 0, u = \psi_x = 0$$

$$y = 0, v = \psi_y = 0$$

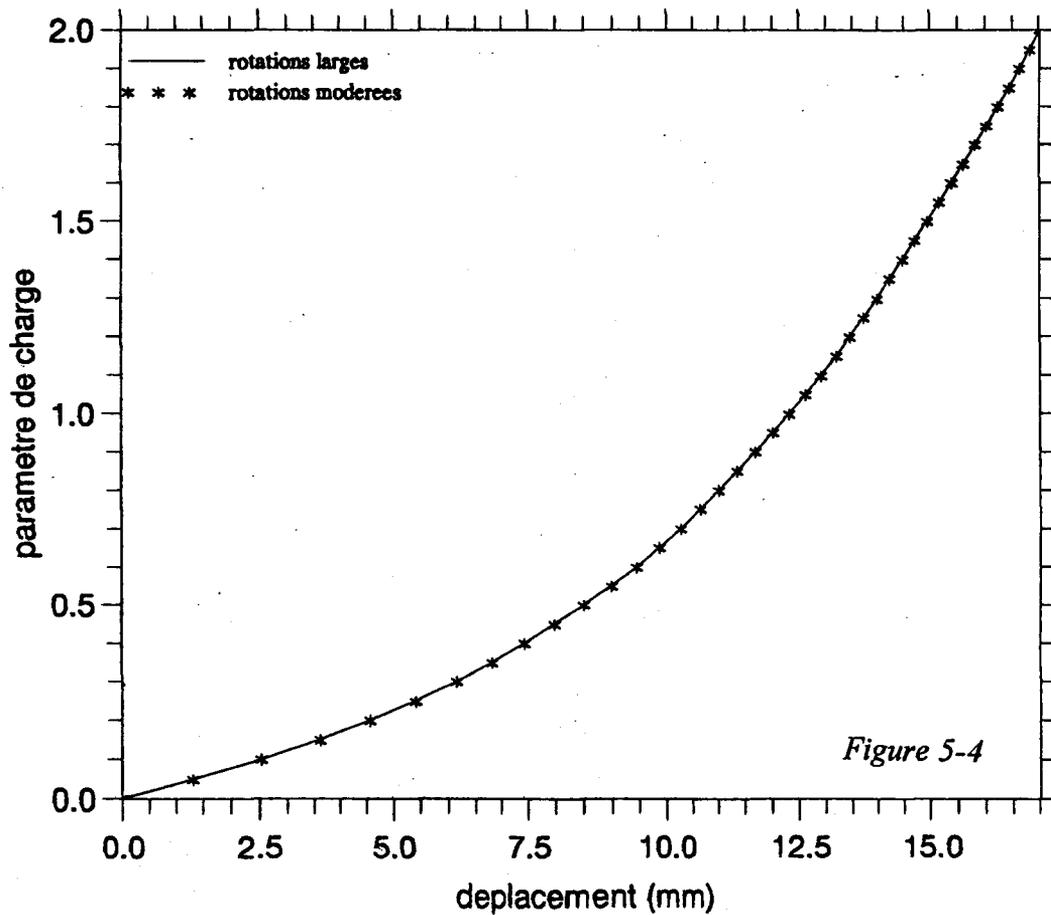
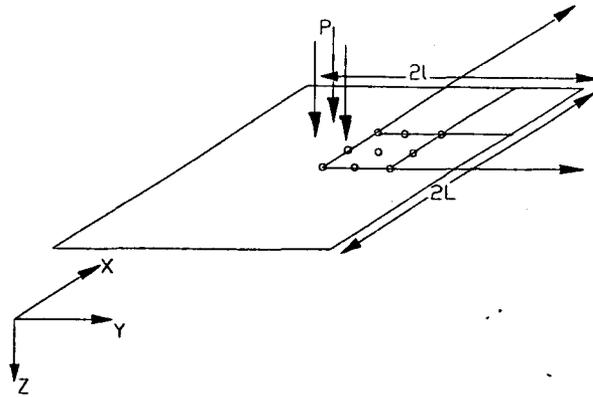


Figure 5-4

Conditions aux limites :

$$x = \pm L, u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0$$

$$y = 0, v = \psi_y = 0$$

$$x = 0, u = \psi_x = 0$$

$$y = \pm l, u = v = w = \psi_x = \psi_y$$

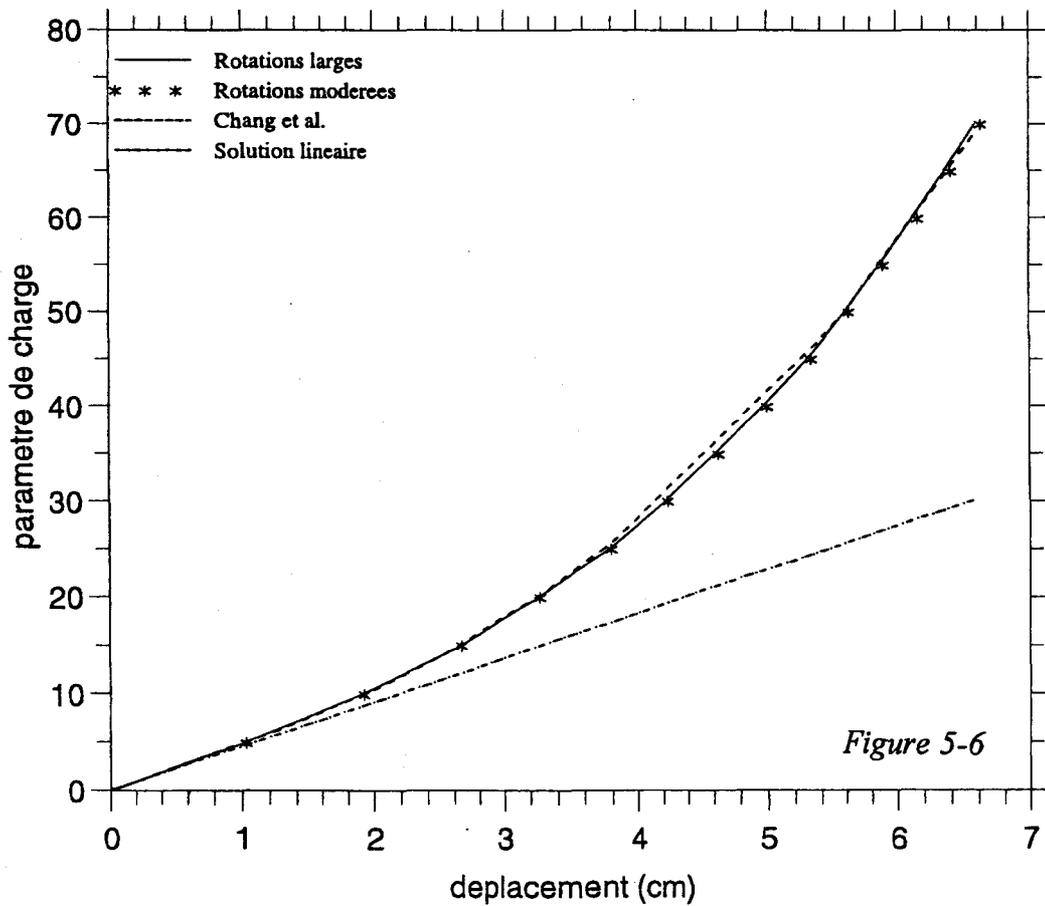
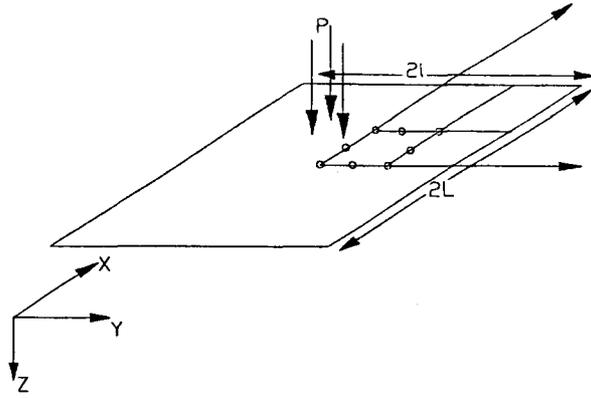


Figure 5-6

Conditions aux limites :

$$x = \pm L, \text{ libre}$$

$$y = \pm l, u = v = w = \psi_x = 0$$

$$x = 0, u = \psi_x = 0$$

$$y = 0, v = \psi_y = 0$$

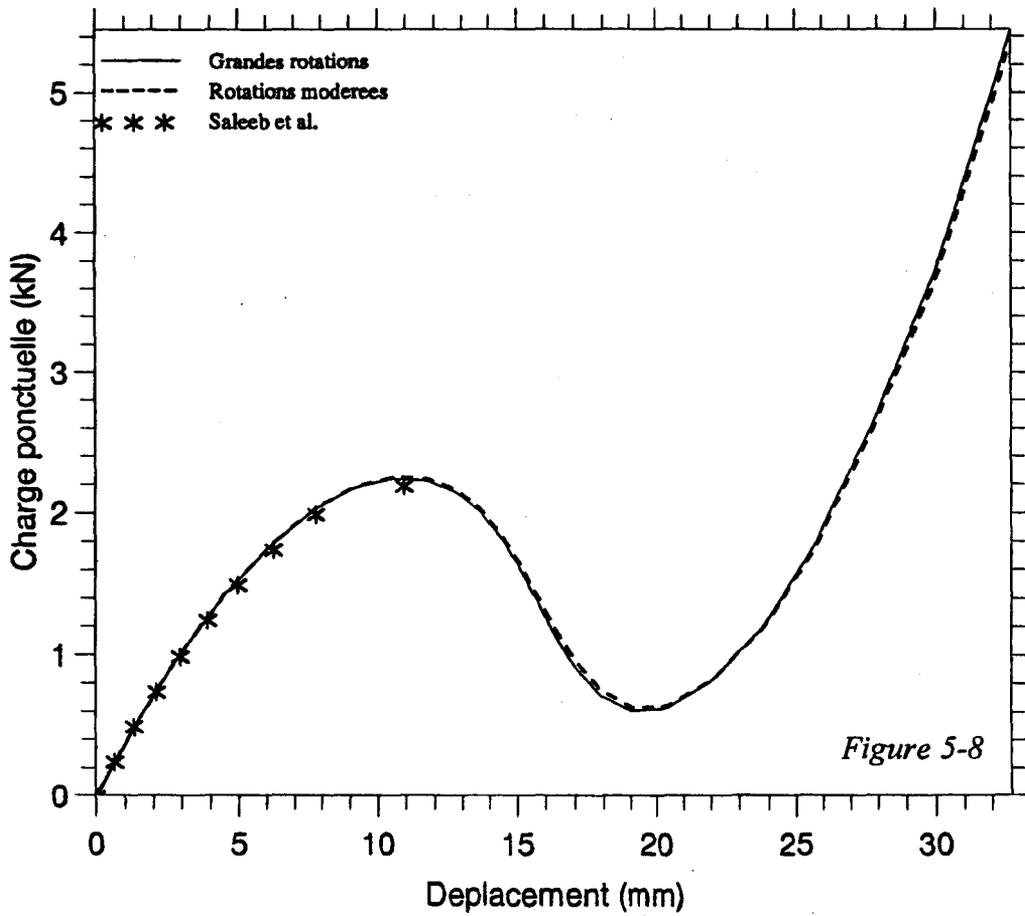
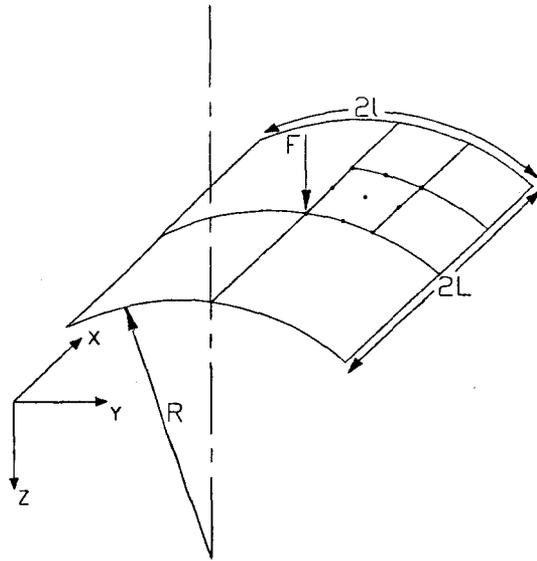


Figure 5-8

Conditions aux limites :

$$x = \pm L, \text{ libre}$$

$$y = \pm l, u = v = w = \psi_x = 0$$

$$x = 0, u = \psi_x = 0$$

$$y = 0, v = \psi_y = 0$$

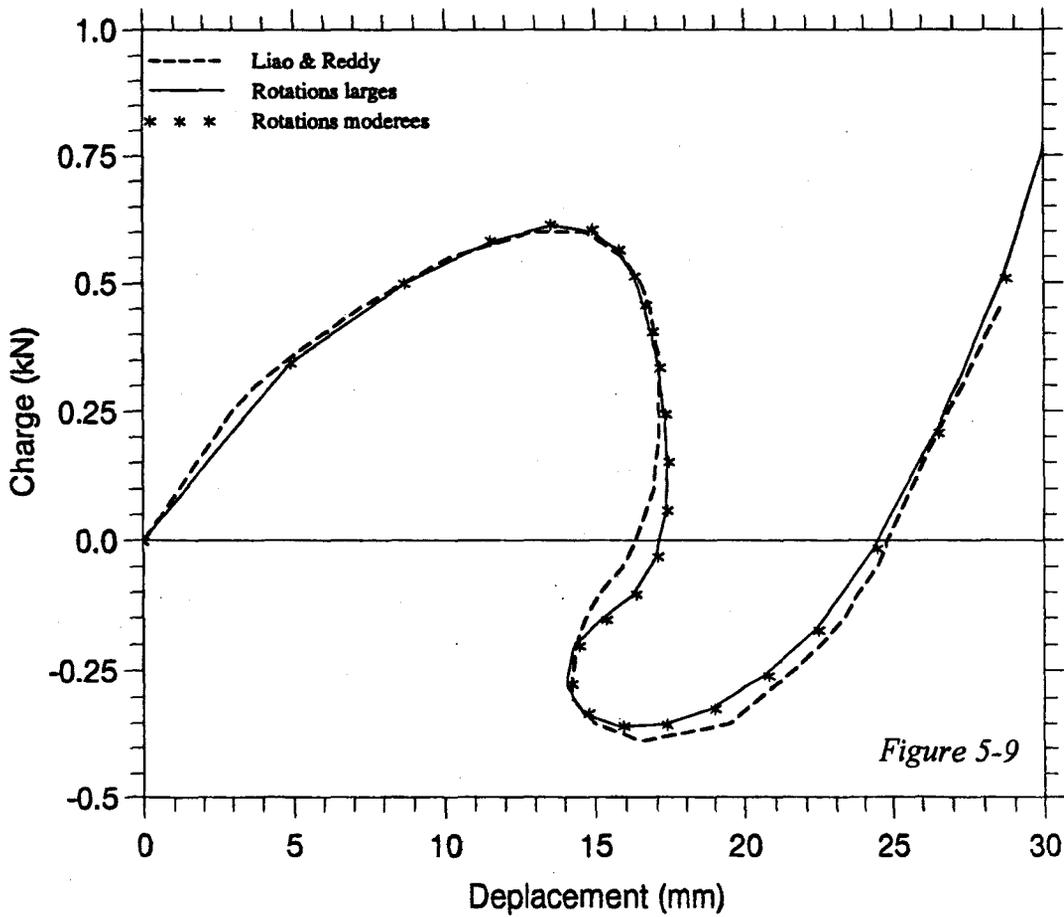
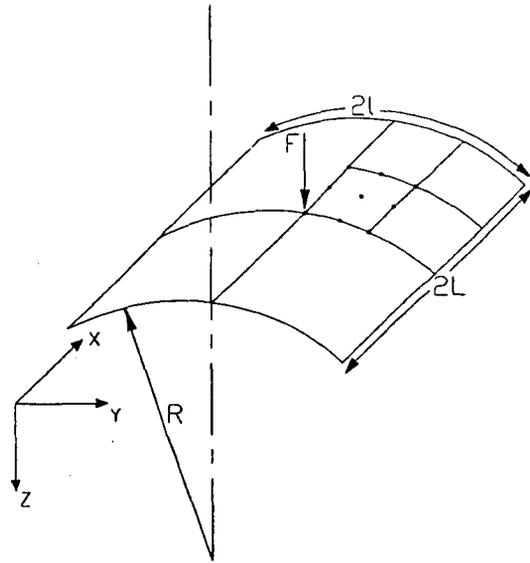


Figure 5-9

Conditions aux limites :

$$x = \pm L, \text{ libre}$$

$$y = \pm l, u = v = w = \psi_x = 0$$

$$x = 0, u = \psi_x = 0$$

$$y = 0, v = \psi_y = 0$$

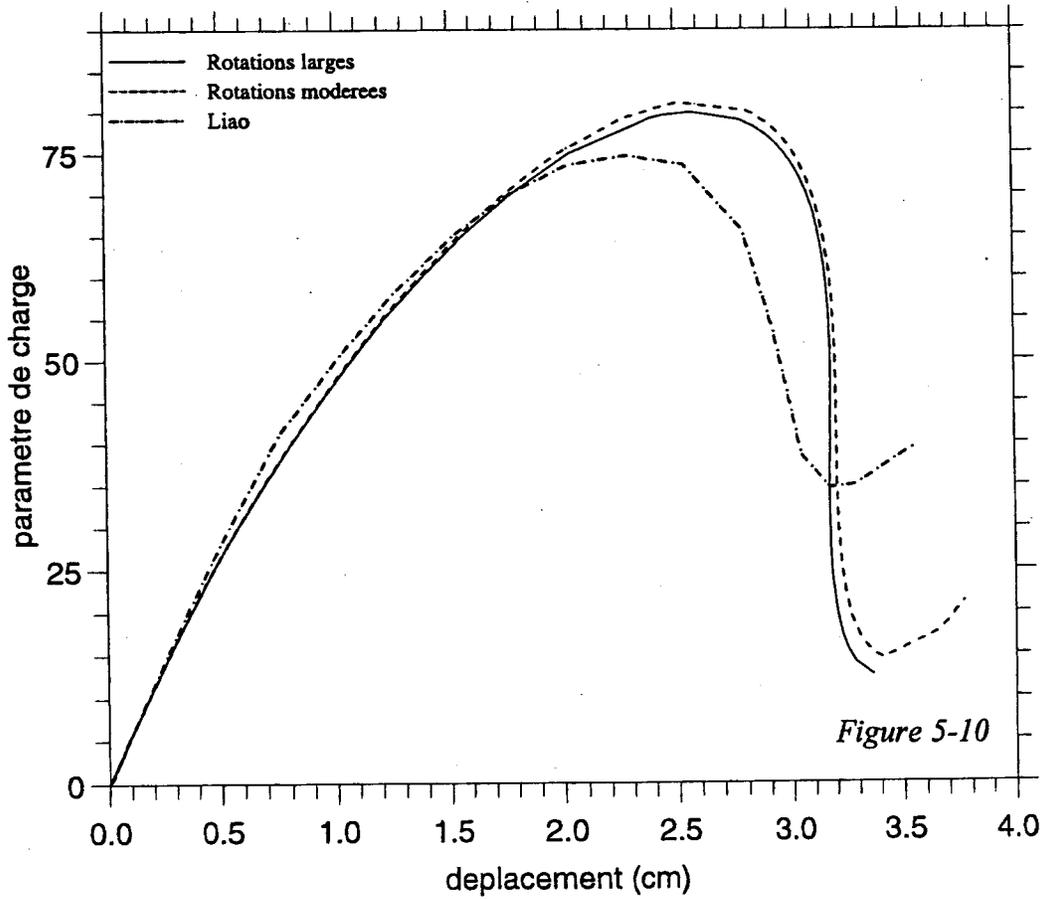
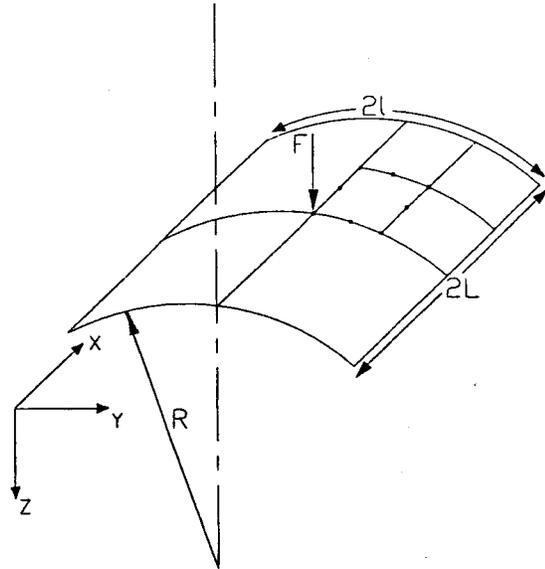


Figure 5-10

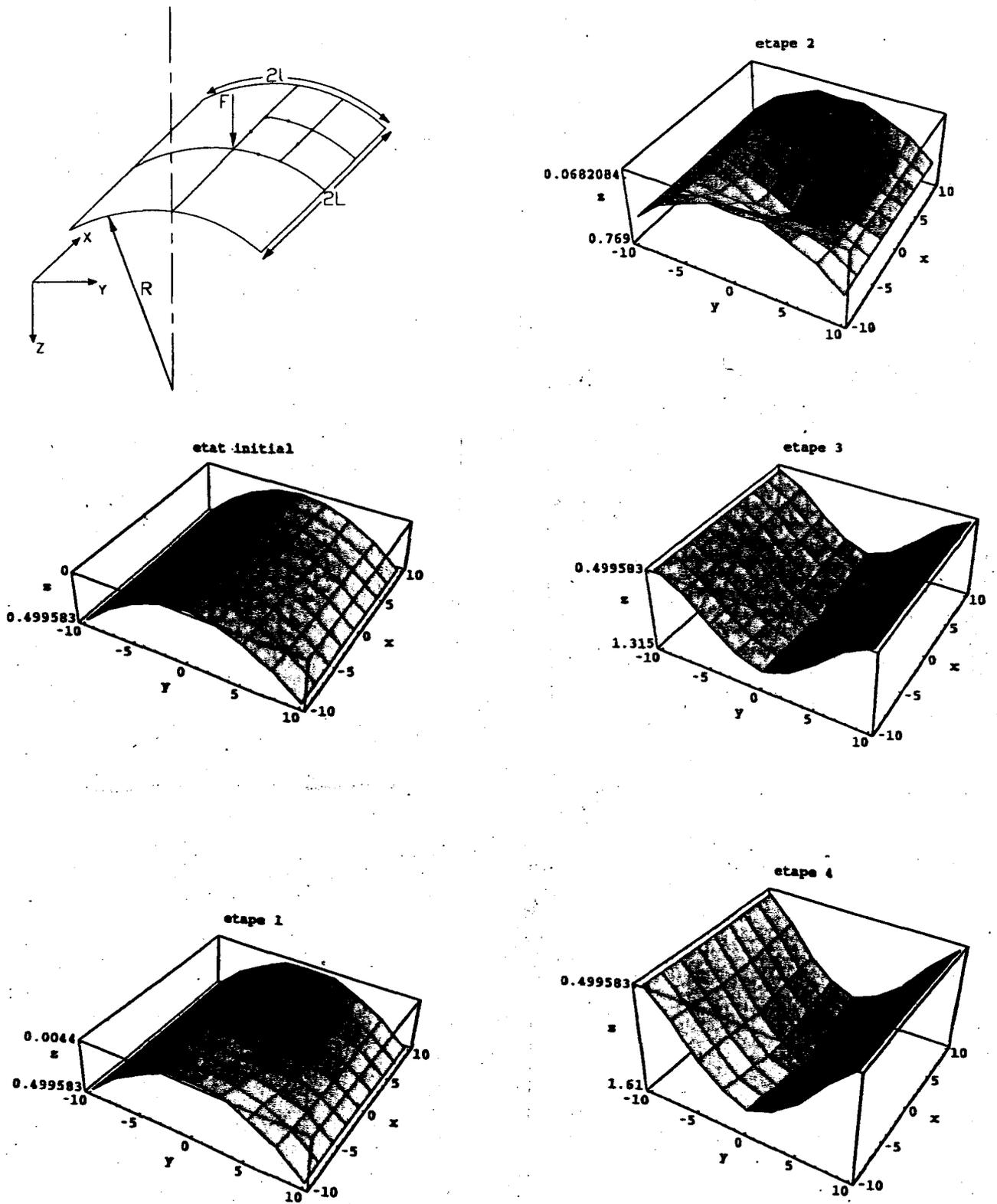


Figure 5-11

Conditions aux limites :

$x = \pm L$ , libre

$y = \pm l$ ,  $u = v = w = \psi_x = \psi_y$

$x = 0$ ,  $u = \psi_x = 0$

$y = 0$ ,  $v = \psi_y = 0$

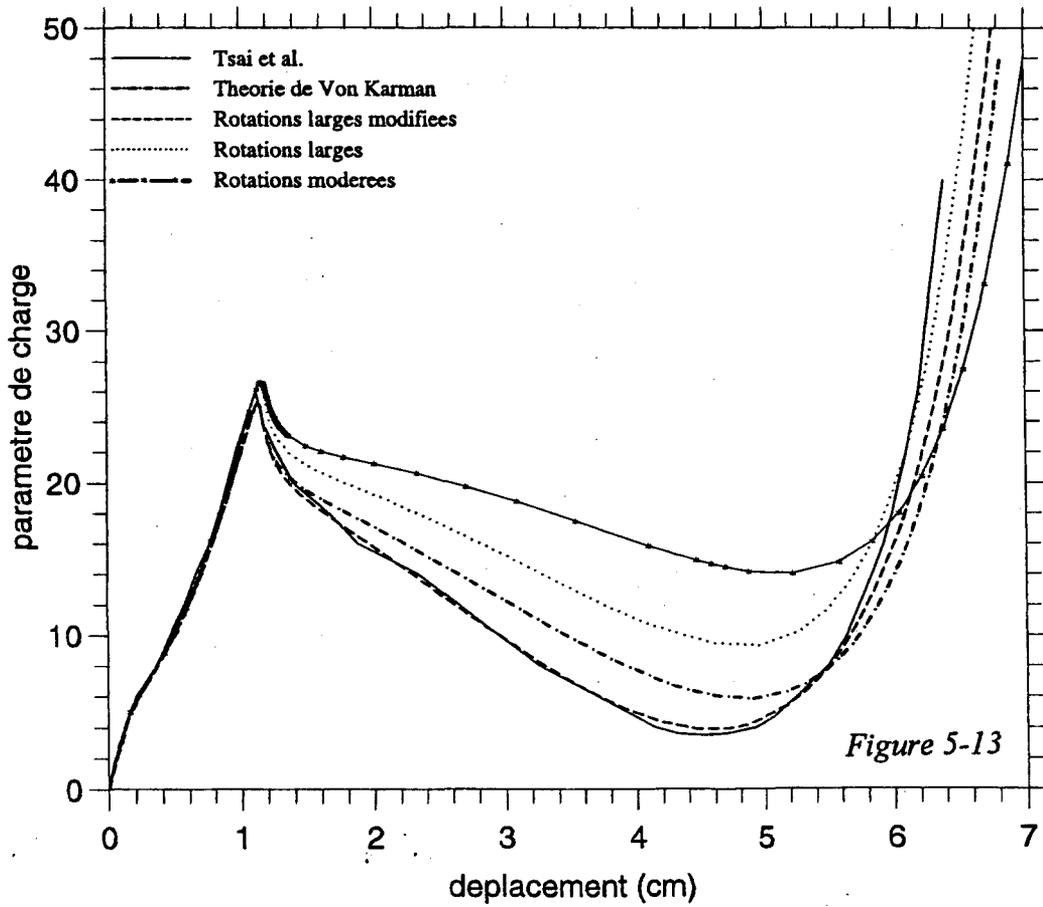
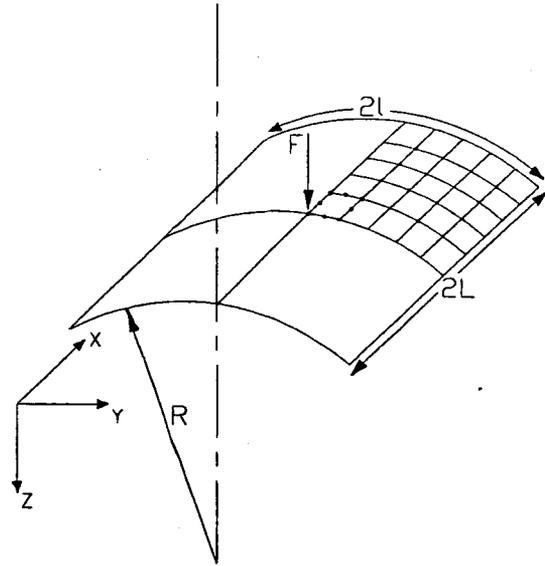
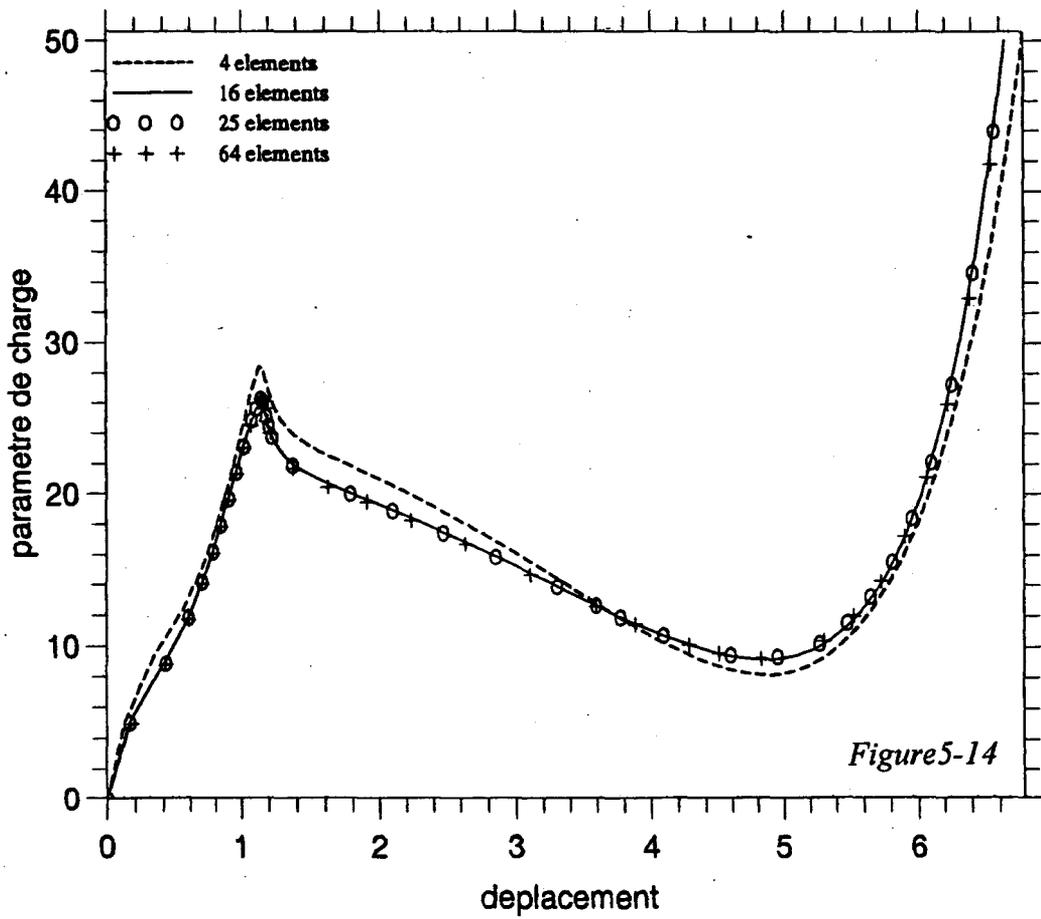
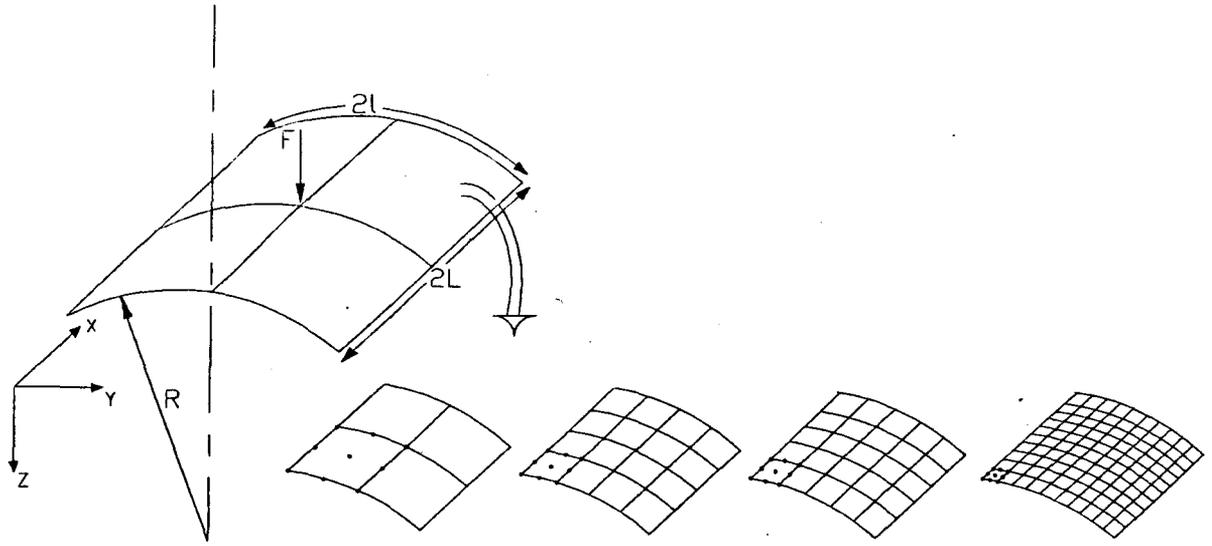


Figure 5-13



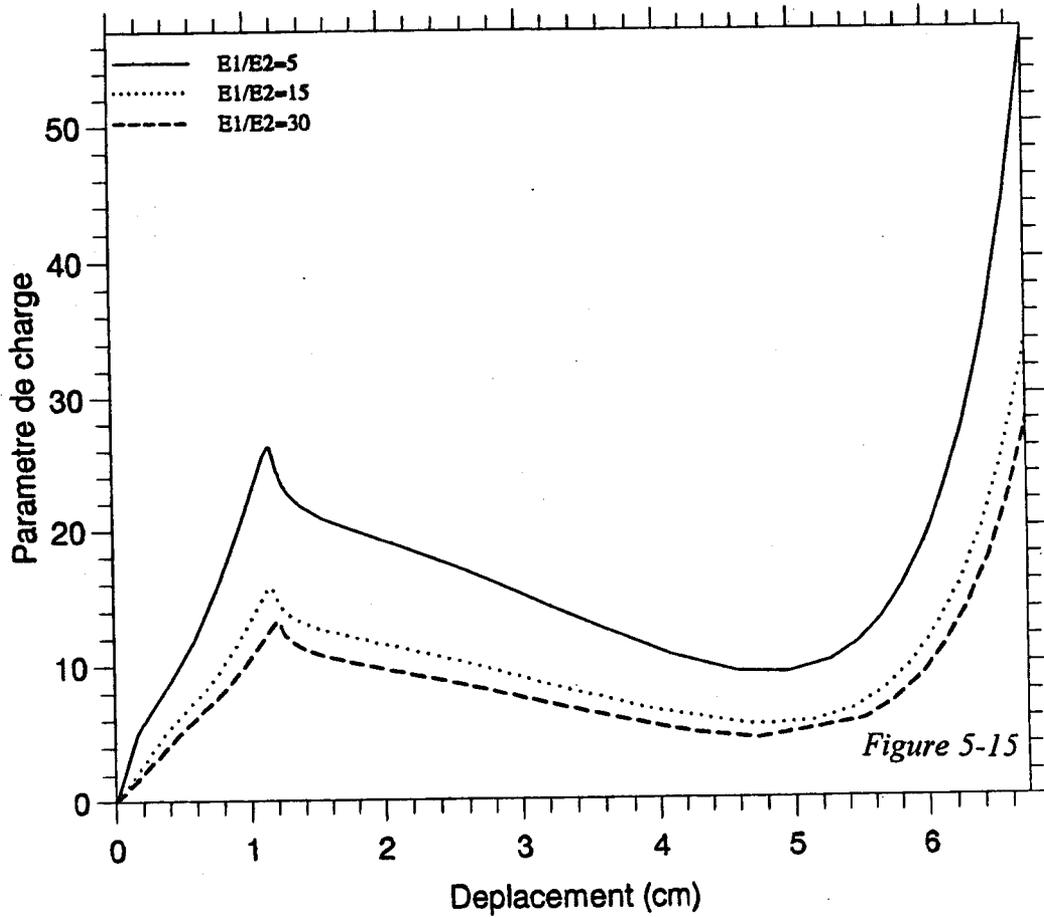
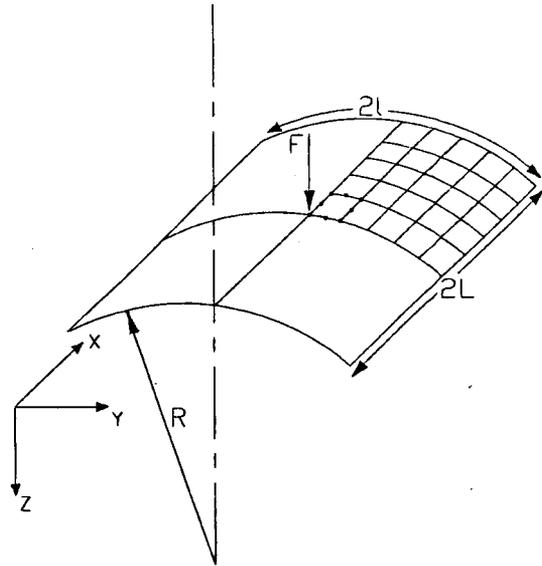
Conditions aux limites :

$$x = \pm L, \text{ libre}$$

$$y = \pm l, u = v = w = \psi_x = \psi_y$$

$$x = 0, u = \psi_x = 0$$

$$y = 0, v = \psi_y = 0$$



Conditions aux limites :

$$x = \pm L, \text{ libre}$$

$$y = \pm l, u = v = w = \psi_x = \psi_y$$

$$x = 0, u = \psi_x = 0$$

$$y = 0, v = \psi_y = 0$$

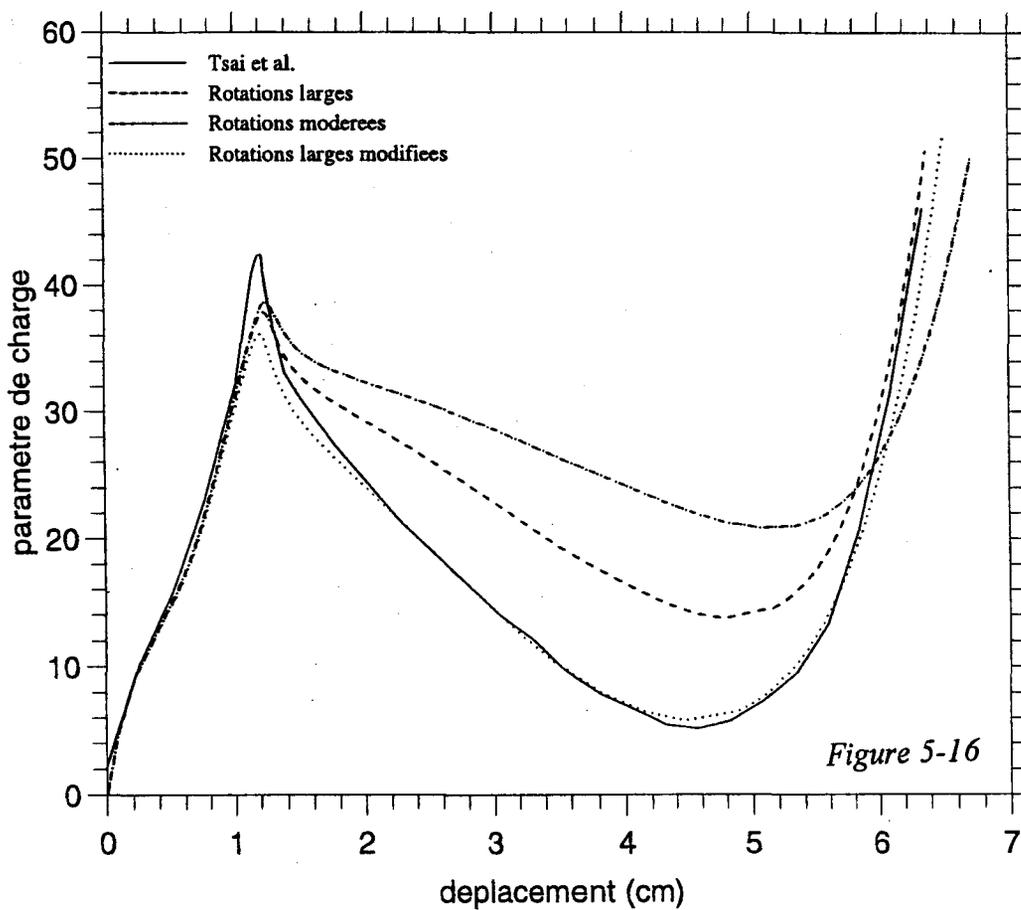
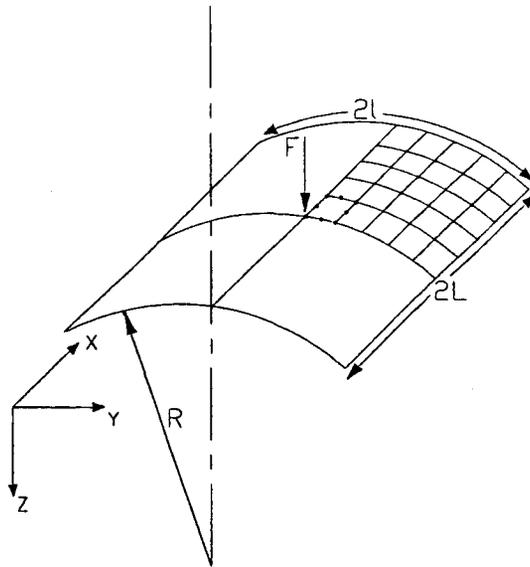


Figure 5-16

Conditions aux limites :

$$x = \pm a, u = \psi_x = 0$$

$$y = \pm b, v = \psi_y = 0$$

$$x = 0, u = \psi_x = 0$$

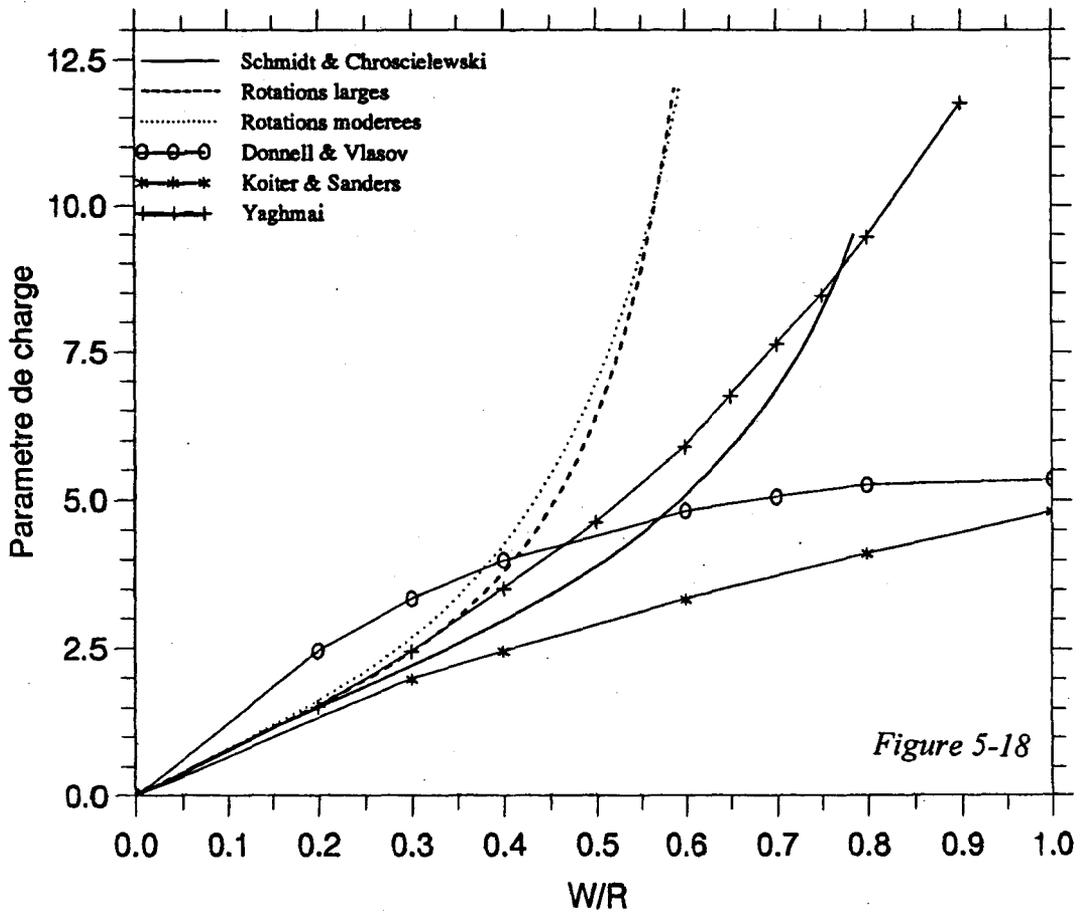
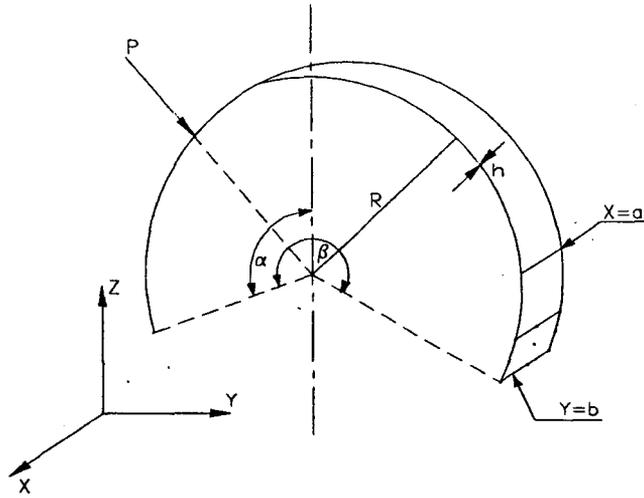


Figure 5-18

Conditions aux limites :

$$x = \pm a, u = \psi_x = 0$$

$$y = \pm b, v = \psi_y = 0$$

$$x = 0, u = \psi_x = 0$$

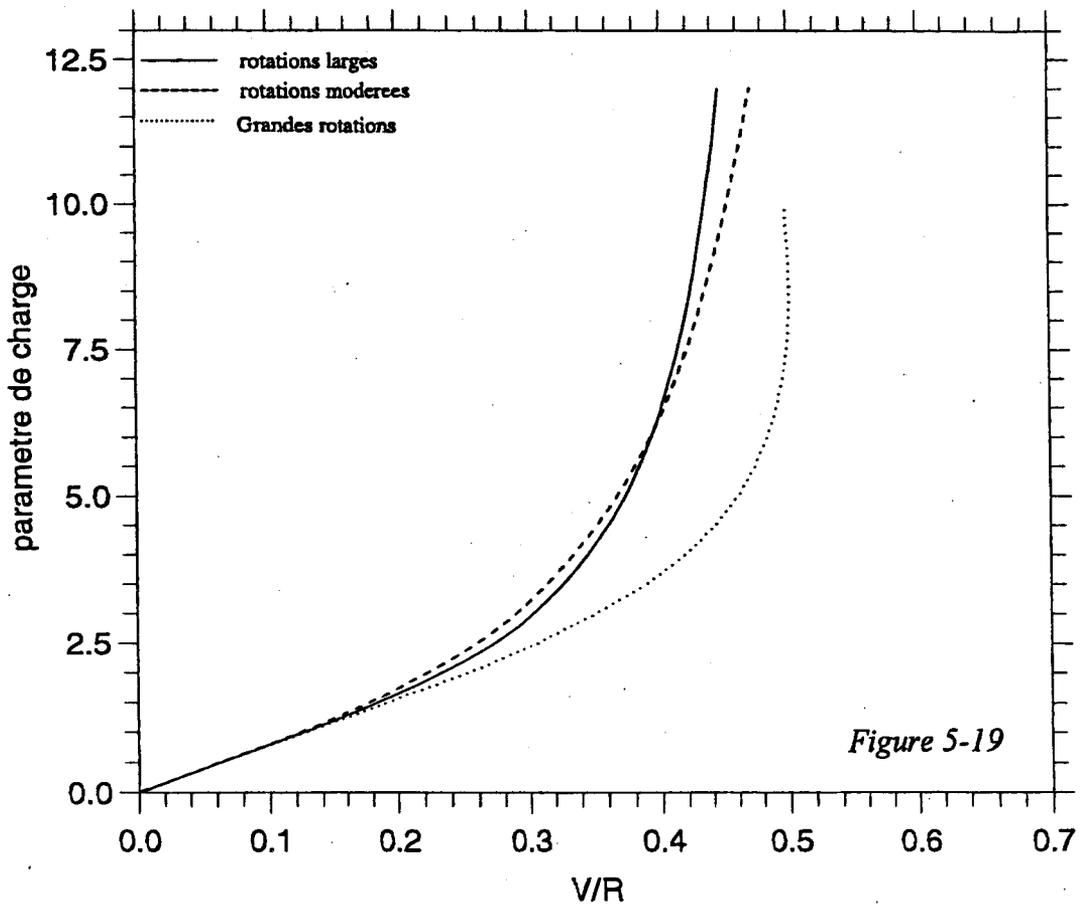
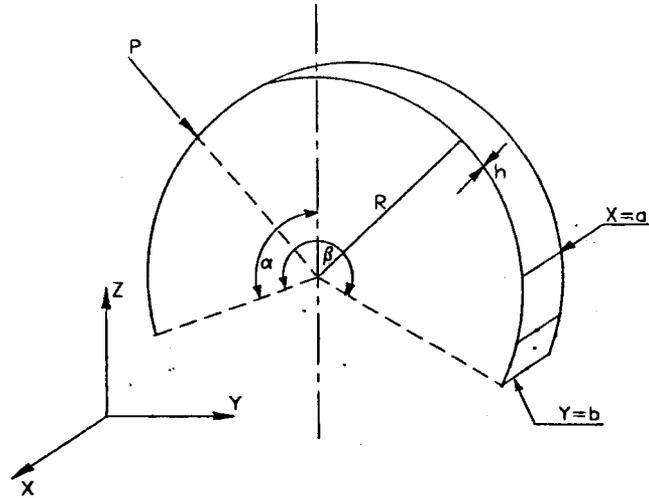


Figure 5-19

---

## *Conclusion générale*

---

## ***Conclusion :***

Nous avons établi un modèle permettant l'étude du comportement géométriquement nonlinéaire des plaques et des coques en grands déplacements et petites déformations. Les rotations ne sont pas nécessairement du même ordre que celui des déformations. Les champs de déplacement sont développés en fonction de la cote, sans variation d'épaisseur. Ces développements cinématiques ont permis le passage du problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel. Le problème prend en compte les effets de cisaillement transversal. Les lois de comportement ont été établies pour la structure laminée. Nous avons élaboré un algorithme mettant en œuvre ces divers comportements mécaniques s'appliquant à un grand nombre de problèmes. Nous sommes capables grâce à des méthodes numériques de suivre l'instabilité géométrique des coques.

Le programme a été validé sur un certain nombre d'exemples où, en raison des données, nous prédisions que les résultats resteraient inchangés. Sur d'autres exemples, le nouveau modèle a mis en évidence une performance supplémentaire dans le domaine des grands déplacements et grandes rotations. D'un autre cote, l'algorithme est encore limité parce que nous n'avons pas introduit le tenseur des rotations.

Cependant dans certains cas, le modèle peut être mise en défaut en raison de certaines hypothèses restrictives. En effet, dans l'écriture des déplacements en série de Taylor, nous nous sommes arrêtés à l'ordre 1. Il serait intéressant de voir si la prise en compte des termes d'ordre supérieur a une influence sur les calculs.

D'autre part, nous avons négligé le terme  $\overset{(1)}{V}_3$ , qui représente la rotation de la normale à la surface moyenne. Des discussions concernant la prise en compte de ce degré de liberté supplémentaire sont présentés dans la littérature, lorsque la déformation normale est négligée, la prise en compte du terme  $\overset{(1)}{V}_3$  transforme la théorie des rotations modérées de degré 5 en une théorie modifiée des rotations modérées, toujours de degré 5 parce qu'il est démontré que le terme  $\overset{(1)}{V}_3$  est fonction des autres degrés de liberté ( Kreja & Schmidt & Reddy [27] ). Il serait intéressant d'introduire cette approche dans la théorie présentée.

Dans la présentation des résultats, ne figure pas la donnée des contraintes. Une meilleure approximation de cette grandeur serait fournie par une formulation variationnelle mixte ( Valid [61] ), et éviterait de plus l'oscillation de la solution en approche cinématique lorsque le nombre de degrés de liberté devient trop important.

Nous avons omis les phénomènes d'endommagement. Les composites peuvent être endommagés par délaminage. En effet, en cas de surcontraintes, les matériaux composites ne s'adaptent pas, les plis se détachent alors les uns des autres, il y a perte de cohésion de l'empilement. Ce phénomène a été étudié avec les hypothèses de la théorie des rotations modérées ( Teyeb [55] ). Un paramètre est introduit pour décrire ce phénomène dans les termes de cisaillement et les termes normaux de la déformation ( Allen & al. [ ] ).

Lorsque la ruine du matériau est due à l'endommagement ductile, elle se produit dans le domaine plastique, ce comportement est lié à l'étude des métaux ( Kreja & Schmidt & Weichert [28] ). Ce procédé est lié à de grandes déformations plastiques. Aborder le domaine des grandes déformations reste très délicat, les hypothèses que nous avons émises pour établir la loi d'écoulement ne sont valables qu'en petites déformations. A la difficulté des non linéarités géométriques, viennent se greffer des non linéarités matérielles.

Le programme se limite pour l'instant au domaine des petite déformations élastiques dépourvues d'endommagement, mais un grand nombre de phénomènes mécaniques pourrait élargir le champ des applications.

---

# *Bibliographie*

---

## ***Bibliographie***

**1- ALLEN D. H., HARRIS C. E.**

"Damage dependant constitutive model for laminated composites", *J. Mech. Behaviour Materials*, A. Aladjem ed., Freund Publishing, Tel-Aviv, Vol.1, N° 1-4, pp. 81-100 (1998).

**2- ALLEN D. H., HARRIS C. E. & GROVES S. E.**

"A thermomechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage-I. Theoretical development ", *Int. J. Solid Structures*, Vol.23, N° 9, pp. 1301-1318 (1987).

**3- ALLEN D. H., HARRIS C. E. & GROVES S. E.**

"A thermomechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage-II. Application to matrix cracking", *Int. J. Solid Structures*, Vol.23, N° 9, pp. 1319-1338 (1987).

**4- AYAD R.**

"Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement", Thèse de l'Université de Compiègne (1993).

**5- BASAR Y.**

"Modelling of shells; tensor analysis, bending theory", part I, Editions Cahiers de Mécanique (1993).

**6- BATOZ J. L., DHATT G.**

"Modélisation des Structures par Eléments Finis", Vol. 3 coques, Editions Hermès (1992).

**7- CHABOCHE J. L., LEMAITRE J.**

"Mécanique des matériaux solides", Editions Dunod (1988).

**8- CHANG T. Y., SAWAMIPHAKDI K.**

"Large deformation analysis of laminated shells by finite element", *Computers & Structures*, vol. 13, pp. 331-340 (1981).

**9- CHROSCIELEWSKI J., SCHMIDT R.**

"A solution control method for nonlinear finite element post-buckling analysis of structures", in *Post-buckling of elastic structures*, EUROMECH 200 Colloquim Proceedings, J. Szabo ed., Elsevier Sciences Publishers B. V., Amsterdam, pp19-33 (1986).

**10- CHROSCIELEWSKI J., SCHMIDT R.**

"Comparison of numerical results for nonlinear finite element analysis of beams and shells based on 2-D elasticity theory and on novel finite rotation theories for thin structures", in *Finite Rotation in Structural Mechanics*, Proc. EUROMECH-Colloquium 197, Jablona (Poland), ed. W. Pietraszkiewicz, Springer-Verlag/Bertin-Heidelberg-Newton, pp111-120 (1986).

**11- CHROSCIELEWSKI J., SCHMIDT R.**

"Contribution to nonlinear finite elements analysis of structures with emphasis on buckling and post-buckling problems", in *Computational Mechanics Theory and Applic.*, Proc. *International Conference on Computational Mechanics*, Tokyo, ed. Yagawa and S.N. Alturi, Vol 1, III. 179-184 Springer-Verlag (1986).

**12- COIRIER J.**

"*Mécanique des milieux continus*", Editions Dunod (1997).

**13- COMBESURE A., JIAJU Y.**

"Finite element method for large displacement and large strain elasto-plastic analysis of shell structures and some applications of damage mechanics", *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 36, N°2, pp. 219-231 (1990)

**14- CRAVEUR J. C.**

"*Modélisation des structures, calcul par éléments finis*", Editions Masson (1996).

**15- DHATT G., TOUZOT G.**

"*Une présentation de la méthode des éléments finis*", Deuxième édition, Editions Maloine S. A. (1984).

**16- DUVAUT**

"*Mécanique des milieux continus*", Collection Mathématiques Appliqués pour la Maîtrise, Ed. P. G. Ciarlet et J-L. Lions .

**17- ENGBLOM J. J., OCHOA O. O.**

"Through the thickness stress predictions for laminated plates of advanced composite materials", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol 21, pp. 1759-1776 (1985).

**18- GAY D.**

"*Matériaux composites*", Traité des nouvelles technologies, Série Mécanique, 3<sup>e</sup> édition, Editions Hermès (1991).

**19- GERMAIN P.**

"*Cours de Mécanique*", Editions de l'Ecole Polytechnique, Tomes 1 et 2 (1980).

**20- GERMAIN P.**

"*Cours de Mécanique des milieux continus*", Editions Masson (1973).

**21- HAAS D. J., LEE S. W.**

"A nine-node assumed-strain finite element for composite for composite plates and shells", *Computers & Structures*, Vol. 26, N°3, pp. 445-452 (1987)

**22- HENRY J. P., PARSY F.**

"*Cours d'élasticité*", Traité des nouvelles technologies, Série Mécanique, 3<sup>e</sup> édition, Editions Dunod (1982).

**23- IBRAHIMEGOVIC A.**

"Finite elastic deformation and finite rotations of 3D continuum with independent rotation field", in *Finite Rotations in Solid and Structural Mechanics*, (eds A. Ibrahimegovic and M. Géraadin), special issue of *Revue Européenne des Elements Finis* (1985)

**24- KATTAN P. I., VOYIADJIS G. Z.**

"A coupled theory of damage mechanics and finite strain elasto-plasticity - I. Damage and elastic deformations", *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 28, N°5, pp. 421-435 (1990).

**25- KHDEIR A. A., REDDY J. N., LIBRESCU L.**

"Analytic solution of a refined shear deformation theory for rectangular composite plates", *Int. J. Solid Structures*, Vol 23, N°10, pp. 1447-1463 (1987).

**26- KOITER W. T.**

"A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells", *Proceedings of the Symposium in the Theory of Thin Elastic Shells*, ed. By Koiter W. T., North Holland Publishing Co., Delft (Amsterdam), pp. 12-33 (1960).

**27- KREJA I., SCHMIDT R., REDDY J. N.**

"Finite elements based on a first order shear deformation moderate rotation shell theory with applications to the analysis of composite structures", *Int. J. Nonlinear Mech.*, vol. 32, n°6, pp. 1123-1142 (1997).

**28- KREJA I., SCHMIDT R., WEICHERT D.**

"Plastic ductile damage finite element analysis of structures", *ZAMM*, vol. 73, issue 4, pp. 378-381 (1993).

**29- LIAO C. L., REDDY J. N.**

"Continuum-based stiffened composite shell element for geometrically nonlinear analysis", *AIAA Journal*, vol. 27 (1989).

**30- LIBRESCU L.**

"Refined geometrically nonlinear theories of anisotropic laminated shells", *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. XLV, pp. 1-22 (1987).

**31- LIBRESCU L., REDDY J. N.**

"A few remarks concerning several refined theories of anisotropic composite laminated plates", *Int. J. Engng. Sci.*, vol. 27, n°5, pp.515-527 (1989).

**32- LIBRESCU L. & SCHMIDT R.**

"Higher-order moderate rotation theories for elastic anisotropic plates", *Finite Rotations in Structural Mechanics*, Proceedings of the EUROMECH Colloquim 197, Jablona (Poland), ed.W. Pietraszkiewicz, Springer-Verlag, Berlin, pp. 158-174 (1985).

**33- LIBRESCU L. & SCHMIDT R.**

"Substation of a shear-deformable theory of anisotropic composite laminated shells accounting for the interlaminae continuity conditions", *Int. Jour. Eng. Sciences*, vol. 29, N° 6, pp. 669-683 (1991).

**34- MARDSEN J. E., HUGHES T. J. R.**

"*Mathematical foundations of elasticity*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.

**35- McMEEKING R.M. , RICE J. R.**

"Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation", *Int. J. Solids Structures.*, vol. 11, pp.601-616

**36- MEEK J. L., RISTIC S., 1997**

"Large displacement analysis of thin plates and shells using a flat face finite element formulation", *Comp. Meth. Appl. Engng.*, vol.145, pp. 285-299 (1997).

**38- PALMERIO A. F.**

"On a moderate rotation theory for anisotropic shells", PhD dissertation, Virginia Tech . Blacksburg USA (1988).

**37- PALMERIO A. F., REDDY J. N., SCHMIDT R.**

"On a moderate rotation theory of laminated anisotropic shells", *Int. J. Nonlinear Mechanics*, Part I and II, vol. 25, pp.687-714 (1990).

**39- LASCHET G., JEUSETTE J. P.**

"Postbuckling finite element analysis of composite panels", *Composite Structure* 14, pp. 35-48 (1990)

**40- RAMM E., MATZENMILLER A.**

"Consistent linearization in elasto-plastic shell analysis", *International Conference on Computational Plasticity - Models, Software and Applications*, Barcelona (1987)

- 41- **RAMMERSTORFER F. G., DORNINGER K., STARLINGER A.**  
"Composite and sandwich shells", note non publiée.
- 42- **REDDY J. N.**  
"Bending of laminated anisotropic shells by a shear deformable finite element", *Fibre Science and Technology*, Vol. 17, pp. 9-24 (1982).
- 43- **REDDY J. N.**  
"A simple higher-order theory for laminated composite plates", *J. Appl. Mech.*, Vol. 51, pp. 745-752 (1984).
- 44- **REDDY J. N.**  
"Mixed variational formulations of various theories of laminated composite plates", *Computational Mechanics '86*, Proc. ICCM 86, Tokyo, ed. G. Yagawa, S. N. Atluri (1986)
- 45- **REDDY J. N.**  
"On the generalisation of displacement-based laminate theories", *Appl. Mech.*, vol 42, n° 11, part 2 (1989).
- 46- **SALEEB A.F., VHANG T.Y., GRAF W., NGYEUNYONG S.**  
"A hybrid/mixed model for nonlinear shell analysis and its application to large-rotation problems", *Int. J. Num. Meth. Engng*, vol. 29, pp. 407-446 (1990).
- 47- **SANDERS J. L.**  
"Nonlinear theories for thin shells", *Quart. Appl. Maths.*, vol. 21, pp. 21-36 (1963).
- 48- **SAIGAL S., KAPANIA R. K., YANG T. Y.**  
"Geometrically nonlinear finite element analysis of imperfected laminated shells", *J. Composite Materials*, Vol. 20- March 1986
- 49- **SCHMIDT R.**  
"A current trend in shell theory : Constrained geometrically nonlinear Kirchhoff-Love type theories based on polar decomposition of trains and rotations", *Computers & Structures*, vol. 20, n° 1-3, pp. 265-275 (1985).
- 50- **SCHMIDT R., WEICHERT D.**  
"Refined theory elastic-plastic shells at moderate rotation", *ZAMM*, Vol. 69, N° 1, pp. 11-21 (1989).
- 51- **SIDOROFF F.**  
"Incremental Constitutive equation for large strain elasto plasticity", *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 20, N° 1, pp. 19-26 (1982).

**52- SIMO J. C., JU J. W.**

"On continuum damage-elastoplasticity at finite strains. A computational framework", *Computational Mechanics* 5, pp. 375-400 (1989).

**53- SIMO J. C., JU J. W.**

"Strain- and stress based continuum damage - II. Computational aspects", *Int. J. Solids Structures*, Vol.23, N°7, pp. 841-869 (1987).

**54- TENG J. G., LOU Y. F.**

"Post collapse bifurcation analysis of shells of revolution by the accumulated arc-length method", *Int J. Num. Meth. Engng*, Vol. 140, N° 1-3, pp. 2369-2383 (1997).

**55- TEYEB O. M.**

"Analyse géométriquement non linéaire des coques et plaques : Application aux structures laminées", Thèse de l'Université des Sciences et Technologies de Lille (1993).

**56- TSAI C. T., PALAZOTTO A. N.**

"Large-rotation snap-through buckling in laminated cylindrical panels", *Finite Elements in Analysis and Design*, N°9, pp. 65-75 (1991).

**57- VALID R.**

"Une nouvelle méthode de calcul des plaques et coques en composites multicouches", *C.R. Acad. Sci.*, t.304, Série II, N° 10 (1987)

**58- VALID R.**

"Le principe non linéaire d'énergie complémentaire en théorie des coques", *C. R. Acad. Sci.*, t.309, Série II, pp.1445-1449 (1989)

**59- VALID R.**

"The nonlinear principles of complementary energy in shell theory, statics and dynamics. I- Statics", *Eur. J. Mech. A/Solids*, N°5, pp. 625-651 (1992)

**60- VALID R.**

"The nonlinear principles of complementary energy in shell theory, statics and dynamics. II- Dynamics", *Eur. J. Mech. A/Solids*, N°6, pp. 791-834 (1992)

**61- VALID R.**

"The nonlinear theory of shells through variational principles from elementary algebra to differential geometry", Ed. Wiley (1995).

**62- WRIGGERS P., GRUTTMANN F.**

"Thin Shells with finite rotations : Theory and finite element formulation", in *Analytical and Computational Models of Shells*, Winter Annual Meeting of the ASME, San Francisco, A. K. Noor, T. Belytschko, J. C. Simo ed. (1989).

**63- YEOM C. H., LEE S. W.**

"An assumed strain finite element model for large deflection composite shells", *Int. J. Numerical Methods Engng.*, vol. 28, n° 1-3, pp. 1749-1768 (1989).

---

# *Annexes*

---

C'est à partir de la dérivée des vecteurs de base que repose le développement de la cinématique de notre problème, c'est pourquoi nous donnons le détail des formules utilisées.

Les symboles de Christoffel de première et de seconde espèce sont définis de la façon suivante :

$$\Gamma_{ijk} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_{i,j} \quad (\text{A.1})$$

$$\Gamma_{ij}^k = \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_{i,j} \quad (\text{A.2})$$

Puisque :

$$\mathbf{g}_{i,j} = \mathbf{g}_{j,i} \quad (\text{A.3})$$

Ceci nous amène à :

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik} \quad (\text{A.4})$$

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (\text{A.5})$$

Nous pouvons déduire que :

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_{ik,j} + \mathbf{g}_{jk,i} - \mathbf{g}_{ij,k}) \quad (\text{A.6})$$

Ces définitions restent valables pour les vecteurs de base surfaciques :

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{a}_\gamma \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{a}^{\gamma} \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \quad (\text{A.8})$$

Nous retrouvons toujours les conditions de symétrie :

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \bar{\Gamma}_{\beta\alpha\gamma} \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\gamma} \quad (\text{A.10})$$

De la même manière que pour l'équation (A.6), nous déduisons que :

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{\alpha\gamma,\beta} + \mathbf{a}_{\beta\gamma,\alpha} - \mathbf{a}_{\alpha\beta,\gamma}) \quad (\text{A.11})$$

Revenons au tenseur de courbure qui permet de relier  $\mathbf{g}_{\alpha}$  et  $\mathbf{a}_{\alpha}$ , nous avons :

$$\mathbf{b}_{\alpha\beta}(\theta^1, \theta^2) = \hat{\mathbf{a}}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{b}_{\beta}^{\alpha}(\theta^1, \theta^2) = \hat{\mathbf{a}}_3 \cdot \mathbf{a}^{\alpha}_{,\beta} \quad (\text{A.13})$$

Nous en déduisons que :

$$\mathbf{b}_{\alpha\beta}(\theta^1, \theta^2) = \Gamma_{\alpha\beta 3}(\theta^1, \theta^2) \quad (\text{A.14})$$

$$\mathbf{b}_{\beta}^{\alpha}(\theta^1, \theta^2) = \Gamma_{3\beta}^{\alpha}(\theta^1, \theta^2) \quad (\text{A.15})$$

Nous donnons les composantes du tenseur des déformations :

$$\begin{aligned}
 {}^{(0)}E_{11} = & u_{,1} - u\Gamma_{11}^1 - v\Gamma_{11}^2 - b_{11}w + \frac{1}{2}(w_{,1} + b_1^1u + b_1^2v)^2 + \frac{1}{2}[(a^{11} + a^{21})u_{,1} \\
 & + (a^{22} + a^{12})v_{,1} + (a^{11}u + a^{12}v)(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^2) + (a^{21}u + a^{22}v)(\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2) \\
 & - (b_1^1 + b_1^2)w][u_{,1} - u(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^1) + v_{,1} - v(\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^1) - w(b_{11} + b_{21})]
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{(0)}E_{22} = & v_{,2} - v\Gamma_{22}^2 - u\Gamma_{22}^1 - b_{22}w + \frac{1}{2}(w_{,2} + b_2^1u + b_2^2v)^2 + \frac{1}{2}[(a^{11} + a^{21})u_{,2} + v_{,2} \times \\
 & (a^{22} + a^{12}) + (a^{11}u + a^{12}v)(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^2) + (a^{21}u + a^{22}v)(\Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^2) - (b_2^1 + b_2^2)w] \\
 & \times [u_{,2} - u(\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^1) + v_{,2} - v(\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^2) - w(b_{12} + b_{22})]
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
 2{}^{(0)}E_{12} = & u_{,2} + v_{,1} - 2v\Gamma_{12}^2 - 2u\Gamma_{12}^1 - b_{12}w + (w_{,1} + b_1^1u + b_1^2v)(w_{,2} + b_2^1u + b_2^2v) \\
 & + [(a^{11}u_{,1} + a^{21}v_{,1}) + \Gamma_{11}^1(a^{11}u + a^{12}v) + \Gamma_{12}^1(a^{21}u + a^{22}v) - b_1^1w] \\
 & \times [u_{,2} - \Gamma_{12}^1u - \Gamma_{12}^2v - b_1^2w] + [v_{,2} - \Gamma_{22}^1u - \Gamma_{12}^2v - b_{21}^2w] \\
 & \times [(a^{21}u_{,1} + a^{22}v_{,1}) + \Gamma_{11}^2(a^{11}u + a^{12}v) + \Gamma_{12}^2(a^{21}u + a^{22}v) - b_1^2w]
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{(1)}E_{11} = & \psi_{1,1} - \Gamma_{11}^1\psi_1 - \Gamma_{11}^2\psi_2 - b_1^1(u_{,1} - \Gamma_{11}^1u - \Gamma_{11}^2v) - b_1^2(v_{,1} - \Gamma_{21}^1u - \Gamma_{21}^2v) \\
 & + [w_{,1} + b_1^1u + b_1^2v] \times [b_1^1\psi_1 + b_1^2\psi_2] + (b_{11}b_1^1 + b_{12}b_1^2)w + \frac{1}{2} \\
 & \times [(a^{11}u_{,1} + a^{12}v_{,1}) + (a^{11}u + a^{12}v)\Gamma_{11}^1 + (a^{21}u + a^{22}v)\Gamma_{12}^1 - b_1^1w] \\
 & \times [\Psi_{1,1} - \Gamma_{11}^1\psi_1 - \Gamma_{11}^2\psi_2] + \frac{1}{2}[(a^{21}u_{,1} + a^{22}v_{,1}) + (a^{11}u + a^{12}v)\Gamma_{11}^2 \\
 & + (a^{21}u + a^{22}v)\Gamma_{21}^2 - b_1^2w] \times [\psi_{1,1} - \Gamma_{12}^1\psi_1 - \Gamma_{12}^2\psi_2] + \frac{1}{2}[(a^{11}\psi_{1,1} + a^{12}\psi_{2,1}) \\
 & + \psi_1\Gamma_{11}^1 + \psi_2\Gamma_{12}^1][u_{,1} - \Gamma_{11}^1u - \Gamma_{11}^2v - b_{11}w] + \frac{1}{2}(v_{,1} - \Gamma_{21}^1u - \Gamma_{21}^2v - b_{21}w) \\
 & \times [(a^{21}\psi_{1,1} + a^{22}\psi_{2,1}) + (a^{11}\psi_1 + a^{12}\psi_2)\Gamma_{11}^2 + (a^{21}\psi_1 + a^{22}\psi_2)\Gamma_{21}^2]
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
 E_{yy}^{(1)} &= \psi_{y,y} - \psi_x \Gamma_{22}^1 - \psi_y \Gamma_{22}^2 - b_2^1 (u_{,y} - u \Gamma_{12}^1 - v \Gamma_{12}^2 - b_{12} w) - b_2^2 \\
 &\quad \times (v_{,y} - u \Gamma_{22}^1 - v \Gamma_{22}^2 - b_{22} w) + b_2^1 (w_{,y} + b_2^1 u + b_2^2 v) \psi_x \\
 &\quad + b_2^2 (w_{,y} + b_2^1 u + b_2^2 v) \psi_y + \frac{1}{2} [(a^{21} u_{,y} + a^{22} v_{,y}) + (a^{11} u + a^{21} v)] \\
 &\quad \times \Gamma_{12}^2 + (a^{21} u + a^{22} v) \Gamma_{22}^1 - b_2^1 w (\psi_{x,y} \Gamma_{12}^1 \psi_x - \Gamma_{12}^2 \psi_y) + \frac{1}{2} \\
 &\quad \times [(a^{11} u_{,y} + a^{21} v_{,y}) + (a^{11} u + a^{21} v) \Gamma_{12}^1 + (a^{21} u + a^{22} v) \Gamma_{22}^2 - b_2^2 w] \\
 &\quad \times (\psi_{y,y} - \Gamma_{22}^1 \psi_x - \Gamma_{22}^2 \psi_y) + \frac{1}{2} [(a^{11} \psi_{x,x} + a^{12} \psi_{y,y}) + \\
 &\quad + (a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) \Gamma_{12}^1 + (a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y) \Gamma_{22}^1] (u_{,y} - \Gamma_{12}^1 u - \Gamma_{12}^2 v - b_2^1 w) \\
 &\quad + [(a^{21} \psi_{x,y} + a^{22} \psi_{y,y}) + (a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) \Gamma_{12}^2 + (a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y) \Gamma_{22}^2] \\
 &\quad \times \frac{1}{2} (v_{,y} - \Gamma_{22}^1 u - \Gamma_{22}^2 v - b_2^2 w)
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
 E_{xy}^{(1)} &= \psi_{x,y} - \psi_x \Gamma_{12}^1 - \psi_y \Gamma_{12}^2 - \psi_{y,x} - \psi_x \Gamma_{21}^1 - \psi_y \Gamma_{21}^2 - b_1^1 \\
 &\quad \times (u_{,y} - u \Gamma_{12}^1 - v \Gamma_{12}^2 - b_{12} w) - b_1^2 (v_{,y} - u \Gamma_{22}^1 - v \Gamma_{22}^2 - b_{22} w) \\
 &\quad - b_2^1 (u_{,x} - u \Gamma_{11}^1 - v \Gamma_{11}^2 - b_{11} w) - b_2^2 (v_{,x} - u \Gamma_{21}^1 - v \Gamma_{21}^2 - b_{21} w) \\
 &\quad + (w_{,x} + b_1^1 u + b_1^2 v) (b_1^1 \psi_x + b_2^2 \psi_y) + (w_{,y} + b_2^1 u + b_2^2 v) (b_1^1 \psi_x + b_1^2 \psi_y) \\
 &\quad + [(a^{11} u_{,x} + a^{12} v_{,x}) + (a^{11} u + a^{12} v) \Gamma_{11}^1 + (a^{21} u + a^{22} v) \Gamma_{12}^1 - b_1^1 w] \\
 &\quad \times (\psi_{x,y} - \Gamma_{12}^1 \psi_x - \Gamma_{12}^2 \psi_y) + (\psi_{y,y} - \Gamma_{22}^1 \psi_x - \Gamma_{22}^2 \psi_y) \\
 &\quad \times [(a^{21} u_{,x} + a^{22} v_{,y}) + (a^{11} u + a^{12} v) \Gamma_{11}^2 + (a^{21} u + a^{22} v) \Gamma_{21}^2 - b_1^2 w] \\
 &\quad + [(a^{11} u_{,x} + a^{12} v_{,x}) + (a^{11} u + a^{12} v) \Gamma_{11}^1 + (a^{21} u + a^{22} v) \Gamma_{12}^1] \\
 &\quad \times (u_{,y} - \Gamma_{12}^1 u - \Gamma_{12}^2 v - b_{12} w) + (u_{,y} - \Gamma_{22}^1 u - \Gamma_{22}^2 v - b_{22} w) \\
 &\quad + [(a^{21} u_{,x} + a^{22} v_{,y}) + (a^{11} u + a^{12} v) \Gamma_{11}^2 + (a^{21} u + a^{22} v) \Gamma_{21}^2]
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
 E_{xx}^{(2)} &= -b_1^1 (\psi_{x,x} - \psi_x \Gamma_{11}^1 - \psi_y \Gamma_{11}^2) - b_1^2 (\psi_{y,x} - \psi_x \Gamma_{12}^1 - \psi_y \Gamma_{12}^2) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (b_1^1 b_1^1 \psi_x \psi_x + b_1^2 b_1^2 \psi_y \psi_y) + b_1^1 b_1^2 \psi_x \psi_y + \frac{1}{2} [(a^{11} \psi_{x,x} + a^{12} \psi_{y,x}) \\
 &\quad + \Gamma_{11}^1 (a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) + \Gamma_{21}^1 (a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y)] (\psi_{x,x} - \Gamma_{11}^1 \psi_x - \Gamma_{11}^2 \psi_y) \\
 &\quad + [(a^{21} \psi_{x,x} + a^{22} \psi_{y,x}) + \Gamma_{11}^2 (a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) + \Gamma_{21}^2 (a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y)] \\
 &\quad (\psi_{y,x} - \Gamma_{11}^1 \psi_x - \Gamma_{21}^2 \psi_y)
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
 E_{yy}^{(2)} = & -b_2^1(\psi_{x,y} - \psi_x \Gamma_{12}^1 - \psi_y \Gamma_{12}^2) - b_2^2(\psi_{y,y} - \psi_x \Gamma_{22}^1 - \psi_y \Gamma_{22}^2) \\
 & + \frac{1}{2}(b_2^1 b_2^1 \psi_x \psi_x + b_2^2 b_2^2 \psi_y \psi_y) + b_2^1 b_2^2 \psi_x \psi_y \\
 & + \frac{1}{2}[(a^{11} \psi_{x,y} + a^{12} \psi_{y,y}) + \Gamma_{12}^1(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) + \Gamma_{22}^1(a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y)] \\
 & \times (\psi_{x,y} - \Gamma_{11}^1 \psi_x - \Gamma_{11}^2 \psi_y) + [(a^{21} \psi_{x,y} + a^{22} \psi_{y,y}) + \Gamma_{12}^2(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) \\
 & + \Gamma_{22}^2(a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y)](\psi_{y,y} - \Gamma_{22}^1 \psi_x - \Gamma_{22}^2 \psi_y)
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
 2 E_{yy}^{(2)} = & -b_1^1(\psi_{x,y} - \psi_x \Gamma_{12}^1 - \psi_y \Gamma_{12}^2) - b_1^2(\psi_{y,y} - \psi_x \Gamma_{22}^1 - \psi_y \Gamma_{22}^2) \\
 & - b_2^1(\psi_{x,x} - \psi_x \Gamma_{11}^1 - \psi_y \Gamma_{11}^2) - b_2^2(\psi_{y,x} - \psi_x \Gamma_{21}^1 - \psi_y \Gamma_{21}^2) \\
 & + b_1^1(b_2^1 \psi_x + b_2^2 \psi_y) \psi_x + b_1^2(b_2^1 \psi_x + b_2^2 \psi_y) \psi_y \\
 & \times [(a^{11} \psi_{x,x} + a^{12} \psi_{y,x}) + \Gamma_{11}^1(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) + \Gamma_{12}^1(a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y)] \\
 & \times (\psi_{x,y} - \Gamma_{12}^1 \psi_x - \Gamma_{12}^2 \psi_y) + [(a^{21} \psi_{x,x} + a^{22} \psi_{y,x}) + \Gamma_{11}^2(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) \\
 & + \Gamma_{21}^2(a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y)](\psi_{y,y} - \Gamma_{22}^1 \psi_x - \Gamma_{22}^2 \psi_y)
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
 2 E_{yz}^{(0)} = & w_{,y} + b_2^1 u + b_2^2 v + \psi_y + (u_{,y} - u \Gamma_{12}^1 - v \Gamma_{12}^2 - b_{12} w)(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) \\
 & + (v_{,y} - u \Gamma_{22}^1 - v \Gamma_{22}^2 - b_{22} w)(a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y) + \psi_x [(a^{11} u_{,y} + a^{12} v_{,y}) \\
 & + \Gamma_{12}^1(a^{11} u + a^{12} v) + \Gamma_{22}^1(a^{21} u + a^{22} v) - b_2^1 w] + \psi_y [(a^{21} u_{,y} + a^{22} v_{,y}) \\
 & + \Gamma_{12}^2(a^{11} u + a^{12} v) + \Gamma_{22}^2(a^{21} u + a^{22} v) - b_2^2 w]
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
 2 E_{zx}^{(0)} = & w_{,x} + b_1^1 u + b_1^2 v + \psi_x + (u_{,x} - u \Gamma_{11}^1 - v \Gamma_{11}^2 - b_{11} w)(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) \\
 & + (v_{,x} - u \Gamma_{21}^1 - v \Gamma_{21}^2 - b_{12} w)(a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y) + \psi_x [(a^{11} u_{,x} + a^{12} v_{,x}) \\
 & + \Gamma_{11}^1(a^{11} u + a^{12} v) + \Gamma_{12}^1(a^{21} u + a^{22} v) - b_1^1 w] + \psi_y [(a^{21} u_{,x} + a^{22} v_{,x}) \\
 & + \Gamma_{11}^2(a^{11} u + a^{12} v) + \Gamma_{21}^2(a^{21} u + a^{22} v) - b_1^2 w]
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

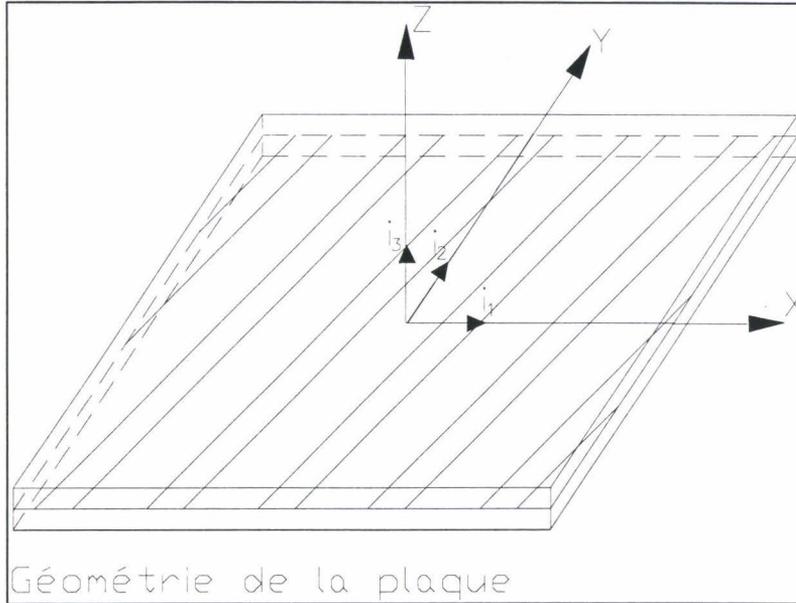
$$\begin{aligned}
 2 E_{yz}^{(1)} = & (\psi_{x,y} - \psi_x \Gamma_{12}^1 - \psi_y \Gamma_{12}^2)(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) + (\psi_{y,y} - \psi_x \Gamma_{22}^1 - \psi_y \Gamma_{22}^2)(a^{21} \psi_x \\
 & + a^{22} \psi_y) + \psi_x [(a^{11} \psi_{x,y} + a^{12} \psi_{y,y}) + \Gamma_{12}^1(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) + \Gamma_{22}^1(a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y)] \\
 & + \psi_y [(a^{21} \psi_{x,y} + a^{22} \psi_{y,y}) + \Gamma_{12}^2(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) + \Gamma_{22}^2(a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y)]
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
 2 E_{yz}^{(1)} = & (\psi_{x,x} - \psi_x \Gamma_{11}^1 - \psi_y \Gamma_{11}^2)(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) + (\psi_{y,x} - \psi_x \Gamma_{12}^1 - \psi_y \Gamma_{12}^2)(a^{21} \psi_x \\
 & + a^{22} \psi_y) + \psi_y [(a^{11} \psi_{x,x} + a^{12} \psi_{y,x}) + \Gamma_{11}^1(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) + \Gamma_{12}^1(a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y)] \\
 & + \psi_x [(a^{21} \psi_{x,x} + a^{22} \psi_{y,x}) + \Gamma_{11}^2(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) + \Gamma_{12}^2(a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y)]
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

$$E_{zz}^{(0)} = \frac{1}{2}[(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) \psi_x + (a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y)] \tag{B.14}$$

## Les plaques :

Nous étudions les opérateurs se rattachant aux géométries particulières utilisées dans ce travail.



Sur la surface moyenne, le vecteur position  $\mathbf{r}$  est donné par :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z = 0) \quad (\text{C.1})$$

Les vecteurs de base sont :

$$\mathbf{a}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{,1} \\ \mathbf{r}_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{a}}_3 = \hat{\mathbf{a}}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2|} = \mathbf{i}_3 \quad (\text{C.3})$$

Les vecteurs de base inverses sont tels que :

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{a}^\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}^1 \\ \mathbf{i}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Tenseurs métriques :

$$\mathbf{a}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbf{a}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

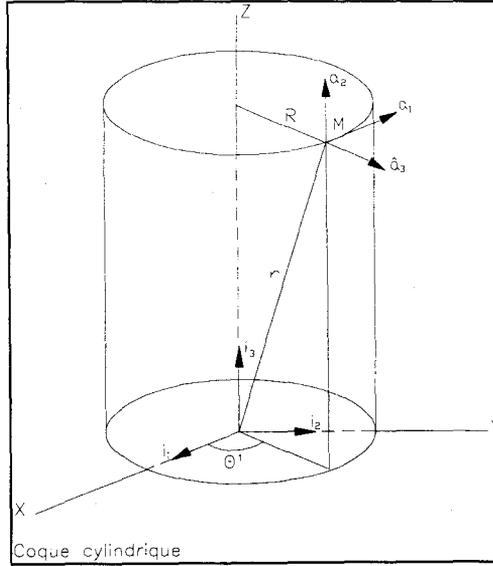
Symboles de Christoffel de première espèce :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \equiv 0, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \quad (\text{C.8})$$

Tenseur de courbure :

$$\mathbf{b}_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{b}_\alpha^\beta \equiv 0 \quad (\text{C.9})$$

**Les coques cylindriques :**



Pour le cylindre, le vecteur position est défini comme tel :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) = R \cos \theta^1 \hat{\mathbf{i}}_1 + R \sin \theta^1 \hat{\mathbf{i}}_2 + \theta^2 \hat{\mathbf{i}}_3 \quad (\text{D.1})$$

Nous en déduisons les vecteurs de base :

$$\mathbf{a}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{,1} \\ \mathbf{r}_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \sin \theta^1 \hat{\mathbf{i}}_1 + R \cos \theta^1 \hat{\mathbf{i}}_2 \\ \hat{\mathbf{i}}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{a}}_3 = \hat{\mathbf{a}}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2|} = \cos \theta^1 \hat{\mathbf{i}}_1 + \sin \theta^1 \hat{\mathbf{i}}_2 \quad (\text{D.3})$$

Soit pour les vecteurs de base unitaires :

$$\hat{\mathbf{a}}_\alpha = \frac{\mathbf{a}_\alpha}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \quad (\text{D.4})$$

$$\hat{\mathbf{a}}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{R} \quad (\text{D.5})$$

$$\hat{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{a}_2 \quad (\text{D.6})$$

Pour la cobase nous avons :

$$\mathbf{a}^\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} \sin \theta^1 \hat{\mathbf{i}}_1 + \frac{1}{R} \cos \theta^1 \hat{\mathbf{i}}_2 \\ \hat{\mathbf{i}}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

Ce qui donne pour les tenseurs métriques :

$$[\mathbf{a}_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

$$[\mathbf{a}^{\alpha\beta}] = [\mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{11} & \mathbf{a}^{12} \\ \mathbf{a}^{21} & \mathbf{a}^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

$$a = |\mathbf{a}_{\alpha\beta}| = R^2 \quad (\text{D.10})$$

$$\frac{1}{a} = |\mathbf{a}^{\alpha\beta}| = \frac{1}{R^2} \quad (\text{D.11})$$

Les tenseurs de courbure sont donc donnés par :

$$[\mathbf{b}_{\alpha\beta}] = [\mathbf{a}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{a}}_{3,\beta}] = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

$$[\mathbf{b}_\alpha^\beta] = [-\mathbf{a}^\alpha \cdot \hat{\mathbf{a}}_{3,\beta}] = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^1 & \mathbf{b}_2^1 \\ \mathbf{b}_1^2 & \mathbf{b}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.13})$$

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{b}_\alpha^\alpha = -\frac{1}{2R} \quad (\text{D.14})$$

$$K = \frac{|b_{\alpha\alpha}|}{a} = 0 \quad (D.15)$$

Le tenseur de changement de courbure est alors déterminé :

$$[\mu_{\alpha}^{\beta}] = [\delta_{\alpha}^{\beta} - \theta^3 b_{\alpha}^{\beta}] = \begin{bmatrix} \mu_1^1 & \mu_1^2 \\ \mu_2^1 & \mu_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\theta^3}{R} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (D.16)$$

Les symboles de Christoffel sont :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = -\mathbf{a}_{\alpha} \cdot \mathbf{a}_{\beta, \gamma} = 0 \quad (D.17)$$

Les composantes physiques donnent :

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{a}^i = \hat{v}_i \hat{\mathbf{a}}^i = \hat{v}_i \frac{\mathbf{a}^i}{\sqrt{a^{ii}}} \quad (D.18)$$

$$\hat{v}_i = \sqrt{a^{ii}} v_i \quad (D.19)$$

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{R} v_1 \quad \hat{v}_2 = v_2 \quad \hat{v}_3 = v_3 \quad (D.20)$$

Et pour un tenseur d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T_{ij} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j = \hat{T}_{ij} \hat{\mathbf{a}}^i \otimes \hat{\mathbf{a}}^j \\ &= T^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j = \hat{T}^{ij} \hat{\mathbf{a}}_i \otimes \hat{\mathbf{a}}_j \end{aligned} \quad (D.21)$$

Donc :

$$\hat{T}_{ij} = \sqrt{a^{ii}} \sqrt{a^{jj}} T_{ij} \quad (D.22)$$

$$\hat{T}^{ij} = \sqrt{a_{ii}} \sqrt{a_{jj}} T^{ij} \quad (D.23)$$

$$\hat{T}_{11} = \frac{1}{R^2} T_{11}; \hat{T}_{12} = \frac{1}{R} T_{12}; \hat{T}_{13} = \frac{1}{R} T_{13}; \hat{T}_{21} = \frac{1}{R} T_{21}; \hat{T}_{22} = T_{22}$$

$$\hat{T}_{23} = T_{23}; \hat{T}_{31} = \frac{1}{R} T_{31}; \hat{T}_{32} = T_{32}; \hat{T}_{33} = T_{33}$$

$$\hat{T}^{11} = R^2 T^{11}; \hat{T}^{12} = R T^{12}; \hat{T}^{13} = R T^{13}; \hat{T}^{21} = R T^{21}; \hat{T}^{22} = T^{22}$$

$$\hat{T}^{23} = T^{23}; \hat{T}^{31} = R T^{31}; \hat{T}^{32} = T^{32}; \hat{T}^{33} = T^{33}$$

Les dérivées sont calculées :

$$v_\alpha|_\beta = v_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda v_\lambda \quad (D.24)$$

$$u|_x = u_{,x} = R\hat{u}_{,x}$$

$$v|_x = v_{,x} = \hat{v}_{,x}$$

$$w|_x = w_{,x} = \hat{w}_{,x} \quad (D.25)$$

$$u|_y = u_{,y} = R\hat{u}_{,y}$$

$$v|_y = v_{,y} = \hat{v}_{,y}$$

$$w|_y = w_{,y} = \hat{w}_{,y}; v^\alpha = a^{\alpha\beta} v_\beta \quad (D.26)$$

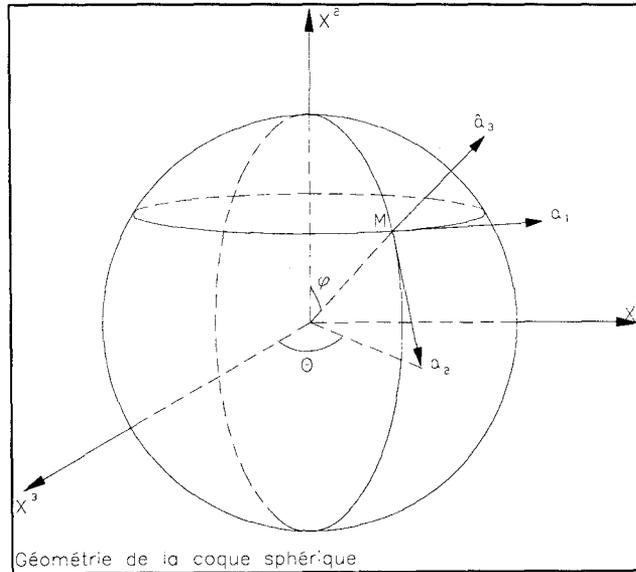
$$v^1 = \frac{1}{R^2} u = \frac{1}{R} \hat{u} \qquad v^2 = v = \hat{v} \qquad (D.27)$$

Les composantes physiques de la déformation s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \hat{E}_{xx} &= \frac{E_{xx}}{R^2} \\ \hat{E}_{yy} &= E_{yy} \\ 2\hat{E}_{xy} &= \frac{2E_{xy}}{R} \end{aligned} \qquad (D.28)$$

$$\begin{aligned} 2\hat{E}_{xz} &= \frac{2E_{xz}}{R} \\ 2\hat{E}_{yz} &= 2E_{yz} \\ \hat{E}_{zz} &= E_{zz} \end{aligned} \qquad (D.29)$$

**Les coques sphériques :**



Pour la sphère, le vecteur position est défini comme tel :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{r}(R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi) \quad (\text{E.1})$$

$$a_x = R \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = R \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = R \cos \varphi \quad (\text{E.2})$$

Par analogie avec le chapitre 1 :

$$\theta^1 \Leftrightarrow \theta^1 = R\varphi$$

$$\theta^2 \Leftrightarrow \theta^2 = \theta \quad (\text{E.3})$$

Nous en déduisons les vecteurs de base surfaciques :

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^2} = R \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{a}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{E.4})$$

Ce qui donne pour les tenseurs métriques :

$$[\mathbf{a}_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (R \sin \varphi)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

$$a = |\mathbf{a}_{\alpha\beta}| = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = (R \sin \varphi)^2 \quad (\text{E.6})$$

$$[\mathbf{a}^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(R \sin \varphi)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

Les tenseurs de courbure sont donnés par :

$$\mathbf{b}_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{E.8})$$

$$\mathbf{b}_\beta^\alpha = \mathbf{a}^{\alpha\lambda} \mathbf{b}_{\lambda\beta} \quad (\text{E.9})$$

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial \theta^\beta} \quad (\text{E.10})$$

$$\mathbf{a}_{1,1} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi \sin \theta \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_{1,2} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{2,1} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_{2,2} = R \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.11})$$

$$\Rightarrow [\mathbf{b}_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} -1/R & 0 \\ 0 & -R \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (\text{E.12})$$

$$\Rightarrow \mathbf{b}_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -1/R & 0 \\ 0 & -1/R \end{bmatrix} \quad (\text{E.13})$$

Le tenseur de changement de courbure est alors déterminé :

$$\mu_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} - \theta^3 \mathbf{b}_{\beta}^{\alpha} \quad (\text{E.14})$$

$$[\mu_{\alpha}^{\beta}] = \begin{bmatrix} 1 + \theta^3 / R & 0 \\ 0 & 1 + \theta^3 / R \end{bmatrix} \quad (\text{E.15})$$

Les symboles de Christoffel sont :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \mathbf{a}^{\gamma} \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \quad (\text{E.16})$$

$$[\Gamma_{\alpha\beta}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R \sin \varphi \cos \theta \end{bmatrix}, \quad [\Gamma_{\alpha\beta}^2] = \begin{bmatrix} 0 & \cot \varphi / R \\ \cot \varphi / R & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.17})$$

Les composantes physiques donnent :

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{a}^i = \hat{v}_i \hat{\mathbf{a}}^i = \hat{v}_i \frac{\mathbf{a}^i}{\sqrt{\mathbf{a}^{ii}}} \quad (\text{E.18})$$

$$\hat{v}_i = \sqrt{a^{ii}} v_i \quad (\text{E.19})$$

$$\hat{v}_1 = v_1 \quad \hat{v}_2 = \frac{v_2}{R \sin \varphi} \quad \hat{v}_3 = v_3 \quad (\text{E.20})$$

$$v^\alpha = a^{\alpha\beta} v_\beta \quad (\text{E.21})$$

$$v^1 = v_1 = \hat{v}_1 \quad v^2 = \frac{v_2}{(R \sin \varphi)^2} = \frac{\hat{v}_2}{R \sin \varphi} \quad (\text{E.22})$$

Les dérivées sont calculées :

$$v_\alpha |_\beta = v_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda v_\lambda \quad (\text{E.23})$$

$$v_1 |_1 = v_{1,1}$$

$$v_1 |_2 = v_{1,2} - v_2 \frac{\cot g \varphi}{R}$$

$$v_2 |_1 = v_{2,1} - v_2 \frac{\cot g \varphi}{R}$$

$$v_2 |_2 = v_{2,2} + v_1 R \sin \varphi \cos \theta$$

$$v^\alpha |_\beta = v^\alpha_{,\beta} + \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha v^\lambda \quad (\text{E.25})$$

$$v^1|_1 = v^1_{,1}$$

$$v^1|_2 = v^1_{,2} - v^2 R \sin \varphi \cos \theta$$

(E.26)

$$v^2|_1 = v^2_{,1} + v^2 \frac{\cot g \varphi}{R}$$

$$v^2|_2 = v^2_{,2} + v^1 \frac{\cot g \varphi}{R}$$

Les composantes physiques de la déformation s'écrivent :

$$\hat{E}_{xx} = E_{xx}$$

$$\hat{E}_{yy} = \frac{E_{yy}}{(R \sin \varphi)^2}$$

$$2\hat{E}_{xy} = \frac{2E_{xy}}{R \sin \varphi} \quad (E.27)$$

$$2\hat{E}_{yz} = \frac{2E_{yz}}{R \sin \varphi}$$

$$2\hat{E}_{xz} = 2E_{xz} \quad (E.28)$$

$$\hat{E}_{zz} = E_{zz}$$

