N° d'ordre : 2437

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Emmanuel NOWAK

MESURES TRANSLATÉES ET DISTANCE EN VARIATION

Application à l'absolue continuité et à un principe d'invariance local pour des champs aléatoires gibbsiens

Soutenue le 17 Décembre 1998 devant la Commission d'Examen :

Président :	Ch. SUQUET, Université de Lille I
Directeur de Thèse :	Y. DAVYDOV, Université de Lille I
Rapporteurs :	J. MÉMIN, Université de Rennes I
	V. PAULAUSKAS, Université de Vilnius
Examinateurs :	A. DERMOUNE, Université de Lille I
	S. RŒLLY, Université de Lille I
	Z. SHI, Université de Paris VI

Remerciements

Parfois une discussion, un conseil ou une remarque peut contribuer au succès d'un travail de recherche, de même qu'un simple mot d'encouragement peut renforcer la motivation nécessaire à cette entreprise. Je tiens donc à remercier ceux, mathématiciens ou pas, qui d'une façon ou d'une autre m'ont apporté leur soutien durant ces dernières années.

Je suis particulièrement reconnaissant à mon directeur de thèse, Monsieur Youri Davydov, d'avoir guidé mes pas avec un optimisme permanent et une disponibilité infaillible dans les moments importants. C'est aujourd'hui un honneur pour moi de le remercier pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée et la confiance qu'il m'a témoignée.

Ma profonde gratitude va aux rapporteurs de cette thèse, Messieurs Jean Mémin et Vygantas Paulauskas, pour leurs conseils et pour tout ce qu'exige cette tâche qu'ils ont eu l'extrême obligeance d'accepter et de remplir avec diligence.

Je remercie également Madame Sylvie Rœlly, Messieurs Azzouz Dermoune, Zan Shi et Charles Suquet qui m'ont fait l'honneur d'être membres du jury.

Il est juste de souligner l'importance du laboratoire de Statistique et Probabilités. Merci à tous ses membres pour leurs remarques, conseils et encouragements passés, présents et j'espère futurs, particulièrement à Sylvie Rœlly pour l'intérêt qu'elle a porté à mon travail et les nombreux conseils qu'elle m'a prodigués, concernant notamment la théorie des mesures de Gibbs.

Je n'oublie pas le personnel du secrétariat scientifique ainsi que celui de l'imprimerie qui ont, comme d'habitude, associé l'efficacité à la gentillesse.

Je tiens par ailleurs à exprimer ma reconnaissance au Capitaine Hardy ainsi qu'aux cadres du service Infrastructure de la B.A. 103 pour leur compréhension.

Enfin, il est légitime que le dernier hommage revienne à mes parents qui ont toujours veillé à ce que mes études se déroulent dans les meilleures conditions.

Table des matières

1 Introduction **3**

1.1 Introduction 3

1.2 Préliminaires 6

1.2.1 Notations 6

1.2.2 Le processus de Wiener d-dimensionnel 7

1.2.3 Admissibilité 7

1.2.4 Variation totale 8

1.2.5 Formule de probabilité totale 9

2 Mélange de mesures gaussiennes **11**

2.1 Introduction 11

2.2 Inégalités pour la distance en variation 13

2.2.1 Désintégration d'une mesure gaussienne 14

2.2.2 Inégalités 14

2.3 Equivalence de la mesure translatée 21

3 Mesures de Gibbs et leurs translatées **25**

3.1 Introduction 25

3.1.1 Notations 25

3.1.2 Mesures de Gibbs sur espace d'états $\mathbb{R}$ 26

3.2 Mesures gaussiennes et mesures gibbsiennes 28

3.2.1 Spécifications gaussiennes 29

3.2.2 Mesures gaussiennes en tant que mesures de Gibbs . . 29

3.2.3 Mesures associées à une spécification gaussienne 31

3.3 Inégalités pour la distance en variation 32

3.3.1 Translation presque nulle 32

◊ Potentiels vérifiant l'hypothèse **(H)** 33

◊ Potentiels de portée finie 39

◊ Potentiels vérifiant une condition de décroissance . . 42

3.3.2 Translation quelconque 46

◊ Potentiels de portée finie 46

◇ Potentiels vérifiant une condition de décroissance . . 49
◇ Exemples fondamentaux 57
3.4 Equivalence de la mesure translatée 59

4 Principe d'invariance local 61
4.1 Introduction 61
4.1.1 Définition du processus en escalier 62
4.1.2 Un théorème limite local 63
4.1.3 La classe de fonctions $\mathcal{M}_P$ 64
4.2 Principe d'invariance local pour des champs aléatoires gibbsiens 66
4.2.1 Théorème principal 66
4.2.2 Cas d'un potentiel ultra-pair 74
4.2.3 Conclusion 75

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction

Le point de départ de ce travail est une remarque de Y. Davydov concernant l'étude de la distance en variation totale, notée $\|\cdot\|$, entre la loi μ_n d'un vecteur aléatoire $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ à composantes indépendantes identiquement distribuées, et sa translatée $\mu_n^{(b)}$ définie par $\mu_n^{(b)}(B) = \mu_n(B-b)$, $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Ici, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\mu_n^{(b)}$ n'est autre que la loi de $\bar{\xi} + b$. Si les ξ_n possèdent une densité commune p absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ, alors Y. Davydov a montré que

$$\|\mu_n - \mu_n^{(b)}\| \leq \sqrt{I(p)}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \tag{1.1}$$

où $I(p)$ est la quantité de Fisher associée à p, définie par

$$I(p) = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{p'(x)}{p(x)}\right]^2 p(x)dx\,.$$

Supposons maintenant que $\xi = (\xi_k, k \in \mathbb{N})$ soit une suite infinie de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (on notera v.a.i.i.d.) et $b = \{b_k, k \in \mathbb{N}\}$ une suite numérique. On note μ et $\mu^{(b)}$ les lois de ξ et $\xi + b = \{\xi_k + b_k\}$. Il est alors facile d'obtenir à partir de (1.1) le même type de majoration, c'est-à-dire :

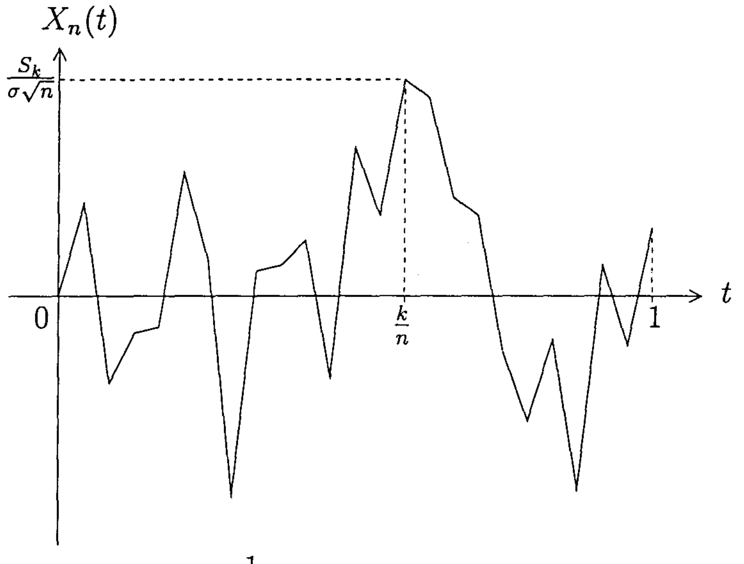
$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \leq \sqrt{I(p)}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2}\,. \tag{1.2}$$

L'étude de la distance en variation totale entre μ et $\mu^{(b)}$ permet de comparer ξ et $\xi + b$, ce qui rejoint les travaux de L.A. Shepp sur la continuité absolue d'une suite de v.a.i.i.d. et de sa translatée. Il a entre autres démontré le résultat suivant :

Théorème 1.1.1. *Si $I(p) < \infty$, alors*

$$\mu \sim \mu^{(b)} \iff \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 < \infty .$$

Une majoration de cette distance permit également à Y. Davydov d'obtenir un principe d'invariance local pour les fonctionnelles stochastiques dans le principe d'invariance de Donsker-Prokhorov. Le cadre en est le suivant : $\xi = (\xi_k, k \in \mathbb{N}^*)$ est une suite de v.a.i.i.d. définies sur un espace probabilisé et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, telle que $E(\xi_k) = 0$ et $\text{var}(\xi_k) = \sigma^2 < \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Posons $S_0 = 0$ et $S_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Pour n donné dans $\mathbb{N}^*$, on construit alors le processus polygonal $X_n(t), t \in [0,1]$, passant par les points $\left(\frac{k}{n}, \frac{S_k}{\sigma\sqrt{n}}\right)$, k variant de 0 à n :



$$X_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(S_{[nt]} + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}\right)$$

où $[.]$ désigne la partie entière. Soit P_n la loi de X_n dans $\mathcal{C}[0,1]$, l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$. D'après le principe d'invariance de Donsker-Prokhorov, on sait que P_n converge faiblement vers la loi du processus de Wiener W (on notera $P_n \Rightarrow W$). Si φ est une fonctionnelle (*i.e.* une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$) définie sur $\mathcal{C}[0,1]$, W-presque partout (p.p.) continue, on peut en déduire que

$$P_n\varphi^{-1} \Rightarrow W\varphi^{-1} .$$

En imposant certaines conditions sur les variables ξ_k et pour une classe particulière de fonctions φ, Y. Davydov a montré qu'on pouvait obtenir la convergence forte dans ce qui précède, c'est-à-dire :

$$P_n\varphi^{-1} \xrightarrow{\text{var}} W\varphi^{-1},$$

où $\xrightarrow{\text{var}}$ désigne la convergence en variation, ou convergence forte.

Nous voyons donc que l'étude de la distance en variation entre la loi d'un processus ξ et sa translatée est doublement intéressante.

D'une part, elle permet de comparer ces deux lois et on peut alors espérer trouver des conditions pour que celles-ci soient équivalentes. Le cas d'un processus $\xi = (\xi_k, k \in \mathbb{N}^*)$ composé de v.a.i.i.d. a largement été étudié, notamment par L.A. Shepp [31], ainsi que celui des mesures gaussiennes (voir par exemple [17]), par des méthodes différentes. Enfin, H. Sato [29] puis C. Noquet [20] se sont intéressés aux chaînes de Markov.

D'autre part, elle a, comme nous l'avons vu, permis à Y. Davydov d'obtenir un principe d'invariance local pour les v.a.i.i.d.. Ce procédé a été repris par C. Noquet [20] dans le cas des chaînes de Markov homogènes.

Nous avons, quant à nous, voulu élargir la classe des processus gaussiens en considérant tout d'abord un certain type de mélange de mesures gaussiennes, le mélange agissant sur l'opérateur de covariance, puis en nous intéressant aux mesures de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Nous en donnerons une définition précise dans le chapitre 3, mais pouvons d'ores et déjà en donner une idée. Un processus $\xi = (\xi_k\,, k \in \mathbb{Z}^d)$ est gibbsien si, pour chaque volume fini Λ de $\mathbb{Z}^d$ et chaque configuration η à l'extérieur de Λ, les lois conditionnelles de $(\xi_k\,, k \in \Lambda)$ sachant que $(\xi_k = \eta_k\,, k \notin \Lambda)$ coincident avec un système de lois conditionnelles données à priori. Les processus gibbsiens, ainsi que ceux correspondant à un mélange de mesures gaussiennes, sont donc d'un intérêt particulier en ce qui concerne la dépendance stochastique et constituent un prolongement naturel aux études effectuées sur les v.a.i.i.d., présentées précédemment.

Le plan d'étude est le suivant : nous étudierons successivement ces deux types de processus et obtiendrons pour chacun une majoration de la distance en variation entre la loi en question et sa translatée. On en déduira alors dans chaque cas un premier résultat concernant l'équivalence entre cette loi et sa translatée. Enfin, nous utiliserons les résultats établis pour démontrer un principe d'invariance local pour certains processus de Gibbs. Nous procéderons de la manière suivante : soit $\xi = (\xi_k, k \in \mathbb{Z}^d)$ un tel processus, défini sur un espace probabilisé et à trajectoires dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit cette fois P_n comme la loi, sur un espace $\mathbb{X}$ plus large que l'espace $\mathcal{C}[0,1]^d$ des fonctions continues sur $[0,1]^d$, du processus en escalier $X_n(t), t \in [0,1]^d$ défini par :

$$X_n(t) = \frac{1}{\sigma n^{d/2}} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ 0<k\leq[nt]}} \xi_k$$

où $\sigma^2 = E(\xi_k^2) \in]0, \infty[$, le processus ξ étant supposé strictement stationnaire.

Il existe des travaux récents (voir [25]) qui donnent des situations où la suite de lois (P_n) converge faiblement vers la loi du processus de Wiener d-dimensionnel W que nous définirons plus loin (voir § 1.2.2). Nous supposerons donc que (P_n) converge faiblement, en l'occurence vers la loi de W. Grâce à l'étude de la distance en variation entre la loi μ du processus initial ξ et sa translatée, nous verrons qu'il est alors possible d'en déduire, en utilisant un théorème limite local dû à Y. Davydov, que

$$P_n\varphi^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{var}} W\varphi^{-1}$$

pour une certaine classe de fonctionnelles φ que l'on précisera. Enfin, nous donnerons l'exemple, issu de [25], de certains champs gibbsiens pour lesquels on a effectivement la convergence faible de (P_n) vers la loi de W.

1.2 Préliminaires

1.2.1 Notations

Nous allons introduire ici quelques notations que nous utiliserons dès à présent ou dans les chapitres suivants. D'autres apparaîtront tout au long de cet ouvrage.

- Si $\mathbb{X}$ est un espace vectoriel topologique, on notera $\mathbb{X}^*$ l'espace dual de $\mathbb{X}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire exprimant la dualité entre $\mathbb{X}$ et $\mathbb{X}^*$.
- On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{Z}^d$. Autrement dit, on a $\mathcal{S} = \{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d, |\Lambda| < \infty\}$ où $|\Lambda|$ désigne le cardinal de Λ.
- Le symbole $\ll$ désigne l'absolue continuité d'une mesure par rapport à une autre.
- On note $\imath$ l'élément de $\mathbb{C}$ tel que $\imath^2 = -1$.
- Enfin, le symbole $\blacksquare$ signale la fin d'une preuve et $\square$ la fin d'une démonstration intermédiaire interne à une preuve.

1.2.2 Le processus de Wiener d-dimensionnel

Pour $d = 1$, le processus de Wiener sur $[0,1]$ est bien connu : c'est le processus gaussien continu, centré, de fonction de covariance $\min\{s,t\}$. Nous généralisons ce processus à $[0,1]^d$ en considérant le champ aléatoire de Wiener-Chentsov, défini comme étant le champ aléatoire gaussien centré $\{W_t,\ t \in [0,1]^d\}$ de fonction de covariance

$$K(s,t) = \prod_{i=1}^{d} \min\{s^{(i)}, t^{(i)}\}, \quad s = (s^{(1)}, \dots, s^{(d)}),\ t = (t^{(1)}, \dots, t^{(d)}).$$

On considère sur $[0,1]^d$ l'ordre suivant : pour $s, t \in [0,1]^d$, $s = (s^{(1)}, \dots, s^{(d)})$, $t = (t^{(1)}, \dots, t^{(d)})$, on écrit $s < t$ (resp. $s \leq t$) si $s^{(i)} < t^{(i)}$ (resp. $s^{(i)} \leq t^{(i)}$), $i = 1, \dots, d$. Pour $t_1, t_2 \in [0,1]^d$, $t_1 < t_2$, on note $]t_1, t_2]$ l'intervalle d-dimensionnel $\{s \in [0,1]^d : t_1 < s \leq t_2\}$ que l'on appelle pavé. En d'autre termes,

$$]t_1, t_2] = \prod_{i=1}^{d}]t_1^{(i)}, t_2^{(i)}].$$

On définit alors les accroissements $\Delta W(B)$ du processus W sur un pavé $B =]s,t]$ de $[0,1]^d$ par

$$\Delta W(B) = \sum_{\substack{\alpha_i = 0,1 \\ i=1,\dots,d}} (-1)^{d - \sum_i \alpha_i}\, W\big(s^{(1)} + \alpha_1(t^{(1)} - s^{(1)}), \dots, s^{(d)} + \alpha_d(t^{(d)} - s^{(d)})\big).$$

Rappelons que l'on a la caractérisation suivante : le processus stochastique $\{W_t,\ t \in [0,1]^d\}$ est un champ de Wiener-Chentsov si

(1) $P(W \in \mathcal{C}[0,1]^d) = 1$, $P(W(t) = 0) = 1$ pour tout t appartenant à une frontière inférieure de $[0,1]^d$, c'est-à-dire pour lequel il existe j tel que $t^{(j)} = 0$.

(2) Si $B_1, \dots, B_m$ sont des pavés disjoints de $[0,1]^d$, alors les accroissements $\Delta W(B_1), \dots, \Delta W(B_m)$ sont des v.a.r. normales centrées et de variances les volumes des pavés B_i .

1.2.3 Admissibilité

Définition 1.2.1. *Soit P une mesure sur la tribu borélienne d'un espace vectoriel topologique $\mathbb{X}$, et $b \in \mathbb{X}$. On dit que b est admissible pour P si la mesure $P^{(b)}$ définie par $P^{(b)}(B) = P(B - b)$ est absolument continue par rapport à P. On dit que b définit une direction admissible pour P si tous les vecteurs de la famille $\{cb, c \in \mathbb{R}\}$ sont admissibles pour P. L'ensemble des vecteurs définissant des directions admissibles pour P forme un espace vectoriel que nous noterons H_P.*

Dans le cas gaussien, on peut expliciter l'espace H_P. Nous en donnons ici deux exemples, énoncés sous forme de théorèmes que l'on peut trouver dans [7] et [17].

Théorème 1.2.2. *Si P est une mesure gaussienne sur un espace de Hilbert $\mathbb{X}$, d'opérateur de covariance A, alors :*

$$H_P = \sqrt{A}\,\mathbb{X} \tag{1.3}$$

Théorème 1.2.3. *Si P est la mesure de Wiener W sur $\mathbb{X} = \mathcal{C}(\mathbb{T})$ avec $\mathbb{T} = [0,1]^d$, $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ étant l'espace de Banach constitué des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ avec la norme $|x| = \sup_{t\in\mathbb{T}} |x(t)|$, on a alors :*

$$H_P = H_W = \left\{ \ell \in \mathbb{X},\ \ell(t) = \int_{[0,t]} h(s)\lambda^d(ds), h \in L^2(\mathbb{T}, \lambda^d) \right\} . \tag{1.4}$$

1.2.4 Variation totale

Définition 1.2.4. *Soit μ une mesure signée sur $(\Omega, \mathcal{F})$. La variation totale de la mesure μ, notée $\|\mu\|$, est la quantité définie par :*

$$\|\mu\| = \sup_{(A_n)} \sum_n |\mu(A_n)| ,$$

le sup *étant pris sur les partitions finies de Ω. La convergence en norme $\|\cdot\|$ est appelée convergence en variation ou convergence forte et elle est désignée par le symbole $\xrightarrow{\text{var}}$.*

On peut signaler quelques propriétés de la variation totale, qui serviront par la suite. On pourra trouver la justification des deux premiers lemmes qui suivent dans [7] et [8].

Lemme 1.2.5. *Si μ est une mesure signée absolument continue par rapport à une mesure ν, et $h = d\mu/d\nu$ la densité de la mesure μ par rapport à la mesure ν, alors $\|\mu\| = \int |h|\, d\nu$.*

Lemme 1.2.6. *Si (μ_n) et (ν_n) sont deux suites de mesures telles que $\mu_n \Rightarrow \mu$ et $\nu_n \Rightarrow \nu$, alors*

$$\|\mu - \nu\| \leq \liminf \|\mu_n - \nu_n\| .$$

Lemme 1.2.7. *Si (μ_n) est une suite de mesures telle que $\mu_n \ll \nu$ pour tout n, et $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{var}} \mu$, alors $\mu \ll \nu$.*

Preuve : Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $\nu(A) = 0$. On a alors $\mu_n(A) = 0$ pour tout n, donc $\mu(A) = 0$. La mesure μ est donc absolument continue par rapport à la mesure ν. ∎

1.2.5 Formule de probabilité totale

Nous allons maintenant énoncer la formule de « probabilité totale », permettant de décomposer une mesure, ce qui servira à calculer $\|\mu - \mu^{(b)}\|$. Nous nous référons ici à [7].

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable et P une probabilité sur $\mathcal{F}$. Soit Γ une partition de l'espace Ω en sous-ensembles γ disjoints. L'espace quotient dont les éléments sont les sous-ensembles γ est noté Ω/Γ.

Soit $\pi\colon \Omega \to \Omega/\Gamma$ la projection canonique associant à chaque $\omega \in \Omega$ l'élément de la partition auquel ω appartient. On munit l'espace quotient d'une tribu $\mathcal{F}_{\Omega,\Gamma}$ constituée des ensembles $A \subset \Omega/\Gamma$ pour lesquels $\pi^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. On obtient alors sur l'espace mesurable $(\Omega/\Gamma, \mathcal{F}_{\Omega,\Gamma})$ la mesure quotient $P_\Gamma = P\pi^{-1}$.

Finalement, on obtient dans $(\Omega, \mathcal{F})$ une sous-tribu $\mathcal{F}^\Gamma$ constituée des ensembles de la forme $\pi^{-1}(A), A \in \mathcal{F}_{\Omega,\Gamma}$.

Un système de mesures de probabilité $\{P_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ définies sur $\mathcal{F}$ est appelé système de mesures conditionnelles pour P relativement à la partition Γ si pour tout $B \in \mathcal{F}$, la fonction $\gamma \to P_\gamma(B)$ est mesurable pour $\mathcal{F}_{\Omega,\Gamma}$ et pour tout $A \in \mathcal{F}_{\Omega,\Gamma}$:

$$P(B \cap \pi^{-1}(A)) = \int_A P_\gamma(B) P_\Gamma(d\gamma)\,. \tag{1.5}$$

En d'autres termes, la fonction $P_{\pi(\cdot)}(B)$ est une version de la probabilité conditionnelle $P(B/\mathcal{F}^\Gamma)$. Pour $A = \Omega/\Gamma$, la formule (1.5) devient *la formule de probabilité totale.*

Définition 1.2.8. *On appelle* formule de probabilité totale *la désintégration de la mesure P par rapport à l'application de projection sur Ω/Γ au moyen des probabilités P_γ. Autrement dit, pour tout $B \in \mathcal{F}$, on a :*

$$P(B) = \int_{\Omega/\Gamma} P_\gamma(B) P_\Gamma(d\gamma)\,. \tag{1.6}$$

Supposons que Ω soit un espace métrique séparable complet et $\mathcal{F}$ la tribu borélienne et soit Γ la partition en images réciproques de points par une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans un espace métrique séparable complet. Une telle partition est dite mesurable, et il existe un système de mesures conditionnelles correspondant. Chaque mesure conditionnelle est unique et concentrée sur $\pi^{-1}(\gamma)$, à un ensemble de mesure P_γ-nulle près. Cependant, on peut se passer de cette hypothèse portant sur l'espace Ω si on connaît à priori un système de mesures conditionnelles et une mesure quotient, ce que nous ferons.

Parmi les propriétés de cette décomposition, il en est une qui nous intéresse particulièrement : elle permet d'exprimer la distance en variation entre deux mesures par le biais des mesures conditionnelles. Le théorème suivant ([7], p. 2800) en est l'illustration.

Théorème 1.2.9. *Soient P et Q des mesures sur Ω ; soient $\{P_\gamma\}$, $\{Q_\gamma\}$, P_Γ, Q_Γ les systèmes de mesures conditionnelles et de mesures quotient correspondants. Alors*

$$\|P - Q\| = \int_{\Omega/\Gamma} \left\| P_\gamma \frac{dP_\Gamma(\gamma)}{d(P_\Gamma + Q_\Gamma)} - Q_\gamma \frac{dQ_\Gamma(\gamma)}{d(P_\Gamma + Q_\Gamma)} \right\| (P_\Gamma + Q_\Gamma)(d\gamma)$$

En particulier, si $P_\Gamma = Q_\Gamma$, alors

$$\left\| P - Q \right\| = \int_{\Omega/\Gamma} \left\| P_\gamma - Q_\gamma \right\| P_\Gamma(d\gamma) \tag{1.7}$$

L'idée sera de considérer des partitions mesurables dont les éléments ont une structure suffisamment simple ou telles que les mesures conditionnelles y soient connues. Une situation est bien connue : c'est lorsque la mesure est gaussienne. Nous l'étudierons plus en détail lorsque cela sera nécessaire (voir § 2.2.1).

Chapitre 2

Mélange de mesures gaussiennes

2.1 Introduction

Nous allons ici définir ce que nous appelons mélange de mesures gaussiennes. Il s'agit d'un mélange agissant sur l'opérateur de covariance d'une mesure gaussienne initiale centrée, ce qui correspond à la définition des lois dont les distributions sont à contours elliptiques que l'on peut trouver dans [2]. On y définit ces lois sur $\mathbb{R}^n$ de la façon suivante : si $\bar{\xi}$ est un vecteur aléatoire de dimension n, $\bar{m}$ un élément de $\mathbb{R}^n$, ϕ une fonction réelle et Σ une matrice $n \times n$ symétrique de type positif, alors on dit que $\bar{\xi}$ possède une loi à contour elliptique, de paramètres $\bar{m}, \Sigma, \phi$ (on note : $\bar{\xi} \sim EC_n(\bar{m}, \Sigma, \phi)$) si la fonction caractéristique $\phi_{\bar{\xi}-\bar{m}}$ de $\bar{\xi} - \bar{m}$ est de la forme :

$$\phi_{\bar{\xi}-\bar{m}}(t) = \phi(t'\Sigma t), \quad t \in \mathbb{R}^n .$$

Supposons que Σ soit inversible. On ne peut évidemment pas choisir n'importe quelle fonction ϕ : c'est ce que précisent les résultats suivants de Schoenberg [30], qui est à la base de cette théorie. Si Φ_n, $n \geq 1$ est la classe des fonctions ϕ réelles telles que $\phi(t'\Sigma t)$ soit une fonction caractéristique, alors $\phi \in \Phi_n$ si et seulement si

$$\phi(u) = \int_{[0,\infty)} \Omega_n(r^2 u)\, F(dr), \quad u \geq 0\,, \tag{2.1}$$

où F est la loi d'une v.a.r. R positive et $\Omega_n(||t||^2)$, $t \in \mathbb{R}^n$ la fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire $U^{(n)}$ de dimension n uniformément distribué sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. D'autre part, $\Phi_n \searrow \Phi_\infty$ et $\phi \in \Phi_\infty$ si et seulement si ϕ est donnée par (2.1) avec $\Omega_n(r^2 u)$ remplacé par $\exp(-r^2 u/2)$:

$$\phi(u) = \int_{[0,\infty)} \exp(-\frac{r^2 u}{2})\, F(dr), \quad u \geq 0\,. \tag{2.2}$$

On sait alors d'après [2] que si $\bar{\xi} \sim EC_n(\bar{m}, \Sigma, \phi)$ avec Σ inversible et ϕ du type (2.2) telle que $F(0) = 0$, alors $\bar{\xi}$ est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue. D'autre part, les composantes de $\bar{\xi}$ ont des moments d'ordre 1 finis si et seulement si R est intégrable et dans ce cas, $\bar{m}$ est la moyenne de $\bar{\xi}$. Enfin, chaque composante de $\bar{\xi}$ a un moment d'ordre 2 fini si et seulement si $\mathrm{E}(R^2) < \infty$.

Nous allons étendre cette notion à un espace vectoriel topologique quelconque. Dans tout ce qui suit, on supposera que μ est la loi d'un processus ξ défini sur un espace mesuré.

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ un espace vectoriel topologique muni de sa tribu borélienne, et μ_A une mesure gaussienne sur $\mathbb{X}$, centrée et d'opérateur de covariance $A : \mathbb{X}^* \to \mathbb{X}$, c'est-à-dire une mesure telle que

$$\forall x^* \in \mathbb{X}^* , \quad \int_{\mathbb{X}} \exp\left[\imath\langle x, x^*\rangle\right] \mu_A(dx) = \exp\left[-\frac{1}{2}\langle Ax^*, x^*\rangle\right] .$$

On supposera que l'opérateur A est défini (positif) dans le sens où

$$\big(\langle Ax^*, x^*\rangle = 0\big) \Rightarrow \big(x^* \equiv 0\big) .$$

Soit alors F la loi d'une v.a.r. positive R de carré et d'inverse intégrables : $\mathrm{E}(R^2) < \infty$ et $\mathrm{E}(R^{-1}) < \infty$.

Définition 2.1.1. *L'opérateur de covariance A et la loi F étant choisis comme ci-dessus, on appellera mélange de mesures gaussiennes la mesure μ définie sur $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ par*

$$\mu(B) = \int_0^\infty \mu_r(B)\, F(dr) \tag{2.3}$$

pour tout $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$, où $\mu_r \stackrel{def}{=} \mu_{r^2A}$ est la mesure gaussienne centrée d'opérateur de covariance r^2A sur $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$.

Signalons ici l'étude de G.N. Sytaya [34] qui se place dans un espace de Hilbert et considère les mélanges du type

$$\mu = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \mu_{\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_m A_m}\, \nu(d\alpha_1, \cdots, d\alpha_m)$$

où les opérateurs de covariance A_i sont définis positifs et la mesure ν continue au point $(0, \ldots, 0)$. Notre définition de la mesure μ correspond donc au cas $m = 1$, si on suppose que $\mathbb{X}$ est un espace de Hilbert.

Il est clair que nous aurions pu choisir la mesure μ_A non centrée, ce qui n'affecte en rien les résultats obtenus par la suite, la seule raison étant de simplifier les notations. Voyons rapidement à quoi correspond la mesure μ définie par (2.3) pour différents choix de l'espace des trajectoires $\mathbb{X}$. Dans tout ce paragraphe, ϕ est la fonction définie par (2.2).

Tout d'abord, supposons que $\mathbb{X} = \mathbb{R}^\Lambda$, $\Lambda \in \mathcal{S}$. L'opérateur de covariance est identifié à une matrice $(A_{ij})_{i,j\in\Lambda}$ et la mesure μ admet alors pour fonction caractéristique

$$\int_{\mathbb{R}^\Lambda} \exp\big[\imath \sum_{k\in\Lambda} z_k x_k\big]\,\mu(dx) = \phi\big(\sum_{i,j\in\Lambda} z_i A_{ij} z_j\big)\,, \quad z \in \mathbb{R}^\Lambda\,. \tag{2.4}$$

Ensuite, si l'espace des trajectoires est $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, on identifie l'opérateur de covariance à une matrice infinie $(A_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}^d}$; μ est alors la mesure telle que l'on ait, pour tout $z \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ dont les coordonnées non nulles sont en nombre fini :

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}} \exp\big[\imath \sum_{k\in S} z_k x_k\big]\,\mu(dx) = \phi\big(\sum_{i,j\in S} z_i A_{ij} z_j\big)\,. \tag{2.5}$$

Enfin, si les trajectoires de ξ sont à valeurs dans un espace de Hilbert mesurable $(\mathbb{H}, \mathcal{B})$, on identifie $\mathbb{H}$ avec son dual et μ est la mesure telle que pour tout $z \in \mathbb{H}$,

$$\int_{\mathbb{H}} \exp\big[\imath(x,z)\big]\,\mu(dx) = \phi(Az, z)\,, \tag{2.6}$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{H}$.

Le but est d'étudier la distance en variation entre la mesure μ définie par (2.3) et sa translatée. Pour cela, nous la décomposerons grâce à la formule de probabilité totale vue au chapitre précédent.

2.2 Inégalités pour la distance en variation

Nous allons étudier $\|\mu - \mu^{(b)}\|$ dans plusieurs cas. Tout d'abord, lorsque l'espace des trajectoires est un espace vectoriel séparable localement convexe, puis un espace de Hilbert séparable et enfin $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. On rappelle que μ_A est la mesure gaussienne centrée d'opérateur de covariance A et que pour une mesure P, H_P est l'espace des directions admissibles pour P. Nous reprenons, dans ce qui suit, les notations introduites au paragraphe 1.2.5. Dans l'immédiat, précisons ce que devient la formule de probabilité totale dans le cas gaussien, ce qui nous permettra, en choisissant convenablement la partition de l'espace, de déterminer la distance en variation dont il est question.

2.2.1 Désintégration d'une mesure gaussienne

La référence demeure [7], article auquel on pourra se référer pour de plus amples informations, ainsi qu'à la section 9 de [17].

Soit $\mathbb{X}$ un espace vectoriel séparable localement convexe et P une mesure gaussienne centrée sur $\mathbb{X}$, d'opérateur de covariance K. Soit $\mathbb{X}_P$ la fermeture de $\mathbb{X}^*$ dans $L^2(\mathbb{X}, P)$. Un élément h de cet espace, considéré comme une variable aléatoire sur $(\mathbb{X}, P)$, sera noté $\langle\cdot, h\rangle$. L'espace $\mathbb{X}_P$, sous-espace de $L^2(\mathbb{X}, P)$, est un espace de Hilbert. Le produit scalaire induit de $L^2(\mathbb{X}, P)$ est noté $(\cdot,\cdot)$ et la norme $\|\cdot\|$. On définit alors l'opérateur i^* plongeant $\mathbb{X}^*$ dans $\mathbb{X}_P$ et $i : \mathbb{X}_P = \mathbb{X}_P^* \to \mathbb{X}$ l'opérateur adjoint de i^*.

On peut alors expliciter H_P et déterminer une partition de l'espace pour laquelle le système de lois conditionnelles est connu.

Théorème 2.2.1. *Avec les notations précédentes, $H_P = i(\mathbb{X}_P)$ et si Γ est une partition de $\mathbb{X}$ en lignes parallèles à un vecteur $b \in H_P$, $b = i(h)$, $h \in \mathbb{X}_P$, alors pour P_Γ-presque tout $\gamma = \{x + cb, c \in \mathbb{R}\}$, $x \in \mathbb{X}$, la mesure conditionnelle P_γ est gaussienne de paramètres $(-\langle x, h\rangle \|h\|^{-2}, \|h\|^{-2})$. De plus, l'opérateur de covariance de P est égal à $i\,i^*$.*

On remarquera que la variance des mesures conditionnelles sur les lignes parallèles au vecteur $b \in H_P$ ne dépend pas de γ : on la note $\sigma_P^2(b)$ et on dit que c'est le *taux d'admissibilité* du vecteur b pour la mesure P. La quantité $\sigma_P(b)$ vaut donc $\|h\|^{-1}$ si $b = i(h)$. Cependant, l'espace H_P ainsi décrit reste assez difficile à cerner. Le théorème suivant permet de le déterminer dans des situations concrètes.

Théorème 2.2.2. *Supposons que l'opérateur de covariance K de la mesure P admette la factorisation $K = I\,I^*$, où I est un opérateur linéaire d'un espace de Hilbert $L = L^*$ dans $\mathbb{X}$ et I^* l'opérateur adjoint de I. Alors $H_P = I(L)$ et pour tout $b \in H_P$, $b = I(l)$, $l \in L$, on a $\sigma_P(b) = \|l\|_L^{-1}$.*

L'exemple le plus classique, que nous utiliserons plus loin, correspond au cas où $\mathbb{X}$ est un espace de Hilbert. On identifie alors $\mathbb{X}^*$ et $\mathbb{X}$. L'opérateur de covariance est symétrique défini positif et possède alors la factorisation $K = \sqrt{K}\sqrt{K}$ où $\sqrt{K} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ est la racine carrée de K. On obtient alors que $H_P = \sqrt{K}\,\mathbb{X}$ et $\sigma_P(b) = \|h\|_{\mathbb{X}}^{-1}$ si $b = \sqrt{K}\,h$, $h \in \mathbb{X}$.

2.2.2 Inégalités

Théorème 2.2.3. *Soit $\mathbb{X}$ un espace vectoriel séparable localement convexe et soit μ définie sur $(\mathbb{X}, \mathcal{B}_{\mathbb{X}})$ par (2.3). Alors pour tout $b \in H_{\mu_A}$, on a :*

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathbb{E}(R^{-1})\, \sigma_{\mu_A}^{-1}(b)$$

où R est la v.a.r. associée à ϕ et $\sigma_{\mu_A}(b)$ le taux d'admissibilité du vecteur b pour la mesure μ_A.

Preuve : D'après la représentation (2.3), on a pour tout $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{X}}$:

$$\mu(B) = \int_0^\infty \mu_r(B) F(dr)\,,$$

où μ_r est la loi du processus gaussien centré d'opérateur de covariance $r^2 A$. $\{\mu_r\}$ et F constituent donc un système de lois conditionnelles et une mesure quotient pour μ. D'après (1.7) on a donc :

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| = \int_0^\infty \|\mu_r - \mu_r^{(b)}\| F(dr)\,. \tag{2.7}$$

Pour étudier $\|\mu_r - \mu_r^{(b)}\|$, on va associer à μ_r un système de lois conditionnelles et une mesure quotient bien choisis : les éléments de la partition seront des droites, que l'on choisira parallèles à un vecteur admissible pour μ_r, en l'occurence le vecteur b puisqu'on a trivialement $H_{\mu_A} = H_{\mu_r}$. Dans l'immédiat, nous allons effectuer un calcul intermédiaire qui permettra de déterminer la distance en question.

Lemme 2.2.4. *Soient ν une mesure gaussienne sur $\mathbb{X}$ de moyenne m_ν, d'opérateur de covariance K_ν et $b \in H_\nu$. Alors*

$$\|\nu - \nu^{(b)}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma_\nu^{-1}(b)\,, \tag{2.8}$$

où $\sigma_\nu(b)$ est le taux d'admissibilité du vecteur b pour la mesure ν.

Preuve : Supposons que ν soit centrée, ce qui ne change pas la distance en variation en question et considérons la partition Γ de l'espace en lignes parallèles au vecteur $b \in H_\nu$: chaque $\gamma \in \Gamma$ est de la forme $\{x + cb,\ c \in \mathbb{R}\}$, $x \in \mathbb{X}$. D'autre part, il existe $h \in \mathbb{X}_\nu$ tel que $b = i_\nu(h)$ où i_ν est l'opérateur de $\mathbb{X}_\nu$ dans $\mathbb{X}$ tel que $K_\nu = i_\nu i_\nu^*$. Soient alors $\{\nu_\gamma\}$, ν_Γ un système de lois conditionnelles et une mesure quotient pour ν. Grâce au théorème (2.2.1), on sait que pour ν_Γ–presque tout $\gamma \in \Gamma$, la mesure conditionnelle ν_γ pour le paramétrage $\gamma = \{x + cb, c \in \mathbb{R}\}$ est gaussienne de paramètres

$$(-\langle x, h\rangle \|h\|_{\mathbb{X}_\nu}^{-2}\,, \|h\|_{\mathbb{X}_\nu}^{-2})\,,$$

où $\|h\|_{\mathbb{X}_\nu}^{-2}$ est la norme sur $\mathbb{X}_\nu$, induite de celle sur $L^2(\mathbb{X}, \nu)$. Par ailleurs, les mesures $\nu_\gamma^{(b)}$ sont gaussiennes de paramètres

$$(-\langle x, h\rangle \|h\|_{\mathbb{X}_\nu}^{-2} + 1\,, \|h\|_{\mathbb{X}_\nu}^{-2})$$

puisque l'unité est b sur γ. D'après le lemme (1.2.5), on obtient, en notant $\|h\|$ à la place de $\|h\|_{\mathbb{X}_\nu}$:

$$\begin{aligned}
\|\nu_\gamma - \nu_\gamma^{(b)}\| &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\|h\|^{-1}} \left|\exp\Big(-\frac{u^2}{2\|h\|^{-2}}\Big) - \exp\Big(-\frac{(u-1)^2}{2\|h\|^{-2}}\Big)\right| du \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\|h\|^{-1}} \Big[\exp\Big(-\frac{u^2}{2\|h\|^{-2}}\Big) - \exp\Big(-\frac{(u-1)^2}{2\|h\|^{-2}}\Big)\Big] du \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\|h\|^{-1}} \Big[\exp\Big(-\frac{(u-1)^2}{2\|h\|^{-2}}\Big) - \exp\Big(-\frac{u^2}{2\|h\|^{-2}}\Big)\Big] du \\
&= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\|h\|^{-1}} \exp\Big(-\frac{u^2}{2\|h\|^{-2}}\Big) du \\
&= 2\int_{-\frac{\|h\|}{2}}^{\frac{\|h\|}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{v^2}{2}\Big) dv \\
&\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\|h\| \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\|h\|_{\mathbb{X}_\nu},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|\nu - \nu^{(b)}\| &= \int_{\mathbb{X}/\Gamma} \|\nu_\gamma - \nu_\gamma^{(b)}\| \, \nu_\Gamma(d\gamma) \\
&\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\|h\|_{\mathbb{X}_\nu} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sigma_\nu^{-1}(b)\,.
\end{aligned}$$

□

Remarquons ici que l'on peut obtenir l'expression exacte de $\|\nu - \nu^{(b)}\|$. En reprenant le calcul ci-dessus :

$$\|\nu_\gamma - \nu_\gamma^{(b)}\| = 2\,\mathbb{P}(|Y| \leq \frac{\|h\|}{2}) = \|\nu - \nu^{(b)}\| \tag{2.9}$$

où Y est une v.a.r gaussienne centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Mais revenons à la démonstration principale et appliquons ce lemme à la mesure μ_r. Cela donne, pour tout $r > 0$,

$$\|\mu_r - \mu_r^{(b)}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sigma_{\mu_r}^{-1}(b)$$

d'où

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sigma_{\mu_r}^{-1}(b)\, F(dr)\,.$$

Il reste à expliciter $\sigma_{\mu_r}^{-1}(b)$, ce qui fait l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.2.5. *Pour tout $r > 0$, on a l'égalité*

$$\sigma_{\mu_r}^{-1}(b) = \frac{1}{r}\, \sigma_{\mu_A}^{-1}(b)\,.$$

Preuve : Nous avons vu au paragraphe (2.2.1) que pour la mesure gaussienne centrée μ_A, il existe un opérateur $i_{\mu_A} : \mathbb{X}_{\mu_A} \to \mathbb{X}$ tel que $A = i_{\mu_A}\, i^*_{\mu_A}$. De même, pour tout $r > 0$, il existe un opérateur $i_{\mu_r} : \mathbb{X}_{\mu_r} \to \mathbb{X}$ tel que $r^2 A = i_{\mu_r}\, i^*_{\mu_r}$. En posant $I_{\mu_r} = r^{-1} i_{\mu_r}$, on obtient une seconde factorisation de l'opérateur de covariance de μ_A qui est $A = I_{\mu_r}\, I^*_{\mu_r}$, que l'on peut représenter par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{X}_{\mu_A} = \mathbb{X}^*_{\mu_A} \arrow[dr, "i_{\mu_A}"] & \\
\mathbb{X}^* \arrow[ur, "i^*_{\mu_A}"] \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "I^*_{\mu_r}"'] & & \mathbb{X} \\
& \mathbb{X}_{\mu_r} = \mathbb{X}^*_{\mu_r} \arrow[ur, "I_{\mu_r}"'] &
\end{tikzcd}$$

D'autre part, b appartient à H_{μ_r} qui est égal à $I_{\mu_r}(\mathbb{X}_{\mu_r})$ d'après le théorème (2.2.2), donc il existe $h_r \in \mathbb{X}_{\mu_r}$ tel que $b = I_{\mu_r} h_r$, *i.e.* $b = i_{\mu_r}(r^{-1} h_r)$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mu_r}^{-1}(b) &= \|r^{-1} h_r\|_{\mathbb{X}_{\mu_r}} \\
&= \frac{1}{r}\, \|h_r\|_{\mathbb{X}_{\mu_r}} \\
&= \frac{1}{r}\, \sigma_{\mu_A}^{-1}(b)
\end{aligned}$$

puisque $b = I_{\mu_r} h_r$, $h_r \in \mathbb{X}_{\mu_r}$ et $A = I_{\mu_r} I^*_{\mu_r}$ est une factorisation de l'opérateur A par l'intermédiaire de l'espace de Hilbert $L = \mathbb{X}_{\mu_r}$.

□

On obtient finalement :

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{r}\, \sigma_{\mu_A}^{-1}(b)\, F(dr)$$

i.e.

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{E}(R^{-1})\, \sigma_{\mu_A}^{-1}(b)\,.$$

■

Remarque 2.2.6. *En reprenant l'expression* (2.9)*, on peut obtenir une minoration de cette distance. En effet, on obtient alors*

$$\|\mu_r - \mu_r^{(b)}\| = 2\,\mathbb{P}\big(\,|Y| \leq \frac{1}{2r}\sigma_{\mu_A}^{-1}(b)\big)\,,$$

d'où

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| = 2\int_0^\infty \mathbb{P}\big(\,|Y| \leq \frac{1}{2r}\sigma_{\mu_A}^{-1}(b)\big)\, F(dr)\,.$$

Grâce à l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev, on peut minorer la quantité sous l'intégrale :

$$\mathbb{P}\big(\,|Y| \leq \frac{1}{2r}\sigma_{\mu_A}^{-1}(b)\big) \geq 1\ -\ 4r^2\sigma_{\mu_A}^2(b)$$

d'où

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \geq 2\big(1 - 4\,\mathrm{E}(R^2)\,\sigma_{\mu_A}^2(b)\big)\,. \tag{2.10}$$

Cette minoration reste vraie même si $b \notin \mathbb{H}_{\mu_A}$ si on pose par convention $\sigma_{\mu_A}(b) = 0$ lorsque $b \notin \mathbb{H}_{\mu_A}$, ce qui ne signifie rien d'autre que la nullité du taux d'admissibilité de b pour μ_A dans ce cas.

Supposons maintenant que l'espace des trajectoires soit un espace de Hilbert $\mathbb{H}$. On obtient alors, grâce à l'étude précédente, le résultat suivant.

Corollaire 2.2.7. *Soient $(\mathbb{H}, \mathcal{B})$ un espace de Hilbert séparable et μ définie sur $\mathbb{H}$ par* (2.3)*. Alors pour tout $b = \sqrt{A}\,h$, $h \in \mathbb{H}$, on a :*

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{E}(R^{-1})\, \|h\|_{\mathbb{H}}\,.$$

Preuve : L'opérateur de covariance A possède dans ce cas la factorisation $A = \sqrt{A}\sqrt{A}$ où $\sqrt{A} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ est la racine carrée de A. L'élément b étant de la forme $\sqrt{A}\,h$, nous savons d'après le théorème (2.2.2) qu'il appartient à $\mathbb{H}_{\mu_A}$, μ_A étant la mesure gaussienne centrée d'opérateur de covariance A et $\sigma_{\mu_A}^{-1}(b) = \|h\|_{\mathbb{H}}$, d'où le résultat. ■

Exemple 2.2.8. *Prenons $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Pour tout $b = (b_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^n$, on obtient*

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{E}(R^{-1})\ \sqrt{b' A^{-1} b},$$

ce qui rejoint un résultat de [21] obtenu en utilisant la densité des vecteurs gaussiens. De même, on obtiendrait une majoration semblable sur $\mathbb{R}^\Lambda$, $\Lambda \in \mathcal{S}$ et on voudrait pouvoir obtenir un résultat similaire en faisant tendre Λ vers $S = \mathbb{Z}^d$. Cependant, ce passage à la limite est difficilemment justifiable et on ne peut pas toujours conclure. Le problème est le suivant : étant donné une matrice $A = (A_{ij})_{i,j \in S}$, quelles sont les conditions d'une part pour que A admette une inverse A^{-1}, d'autre part pour que l'on ait

$$\sum_{i,j \in \Lambda_n} {}^{(n)}A_{ij}^{-1}\, b_i\, b_j \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \sum_{i,j \in S} A_{ij}^{-1} b_i\, b_j \tag{2.11}$$

où $\Lambda_n = [-n, n]^d$ et les ${}^{(n)}A_{ij}^{-1}$ sont les coefficients de l'inverse de la matrice $(A_{ij})_{i,j \in \Lambda_n}$. Ce problème est lié à la théorie des systèmes linéaires à une infinité d'inconnues, que par exemple F. Riesz a développé pour $S = \mathbb{N}$ dans [27]. En adaptant à $S = \mathbb{Z}^d$ les idées qui y apparaissent, supposons qu'il existe une constante M positive telle que

$$\sum_{j,k \in \mathbb{Z}^d} A_{jk}\, b_j b_k \le M \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} b_k^2 \tag{2.12}$$

pour tout $b \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Alors A définit un opérateur sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, que F. Riesz nomme *substitution linéaire.* On peut considérer sur cet espace la racine carrée de A et on obtient le théorème suivant.

Théorème 2.2.9. *Soit $A = (A_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}^d}$ vérifiant la condition (2.12) et μ définie sur $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ par (2.3). Alors pour tout $b = \sqrt{A}\, h$, $h \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, on a :*

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{E}(R^{-1})\ \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} h_i^2}\,.$$

Preuve : Soit (Ω) l'ensemble des éléments ω de Ω de coordonnées nulles sauf un nombre fini, *i.e.* tels que $\{i \in \mathbb{Z}^d,\ \omega_i \neq 0\} \in \mathcal{S}$. En identifiant Ω^* à (Ω), on obtient la factorisation suivante pour A :

$$\begin{tikzcd}
(\Omega) \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "\sqrt{A}"'] & & \Omega \\
& \ell^2(\mathbb{Z}^d) \arrow[ur, "\sqrt{A}"'] &
\end{tikzcd}$$

On peut alors appliquer le théorème (2.2.2), ce qui donne, puisque $b = \sqrt{A}\,h$, $h \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$:

$$\sigma_{\mu_A}^{-1}(b) = \|h\|_{\ell^2}$$

d'où

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{E}(R^{-1})\,\|h\|_{\ell^2}.$$

■

On peut imposer des conditions supplémentaires sur la matrice A pour que celle-ci soit inversible et telle que le passage à la limite (2.11) soit valide. Supposons par exemple que A soit *bornée*, c'est-à-dire qu'il existe des constantes strictement positives M et m, telles que pour tout $b \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$,

$$m \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} b_k^2 \leq \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} A_{jk}\, b_j b_k \leq M \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} b_k^2. \tag{2.13}$$

Alors A est inversible et le passage à la limite (2.11) est possible pout tout $b \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$. De plus, l'inverse de A est également bornée et vérifie quelque soit $b \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$:

$$\frac{1}{M} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} b_k^2 \leq \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} A_{jk}^{-1}\, b_j b_k \leq \frac{1}{m} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} b_k^2.$$

On voit donc que sous ces conditions, b appartient à $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ si et seulement si $(A^{-1}b, b)$ est fini, où

$$(A^{-1}b, b) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}^d} A_{jk}^{-1}\, b_j b_k.$$

On peut donc énoncer le corollaire suivant qui est le prolongement attendu de l'inégalité obtenue à l'exemple (2.2.8) sur $\mathbb{R}^n$, moyennant certaines conditions sur l'opérateur de covariance.

Corollaire 2.2.10. *Soit $A = (A_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}^d}$ vérifiant la condition* (2.13) *et μ définie sur $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ par* (2.3). *Alors pour tout $b \in \Omega$, on a :*

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{E}(R^{-1})\,\sqrt{(A^{-1}b, b)}.$$

Nous avons vu un critère pour que A soit inversible et le passage à la limite (2.11) possible. Cependant, il serait plus intéressant d'avoir des conditions sur les coefficients A_{ij} pour que ces conclusions subsistent. C'est le cas, présenté dans le chapitre 13 de [15], si la matrice A est définie positive et telle que

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}^d}\sum_{j\neq i}\frac{|A_{ij}|}{A_{ii}}<1 \text{ et } \forall i\in\mathbb{Z}^d,\ \sum_{j\neq i}\frac{|A_{ij}|}{A_{jj}^{\frac{1}{2}}}<\infty\,.$$

Si A est homogène, c'est-à-dire A_{ij} n'est fonction que de $i-j$ (on notera alors $A_{ij}=A(i-j)$), la condition précédente devient

$$\sum_{k\neq 0}|A(k)|<A(0)\,.$$

Si on se place sous cette hypothèse d'homogénéité et en supposant que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|A(k)|<\infty\,,$$

on peut utiliser les outils de l'analyse de Fourier pour trouver des conditions nous satisfaisant, mais nous n'aborderons pas plus en détail ce problème ici.

2.3 Equivalence de la mesure translatée

Nous pourrions utiliser l'étude précédente pour en déduire, dans tous les cas, une condition sur b pour que μ et $\mu^{(b)}$ soient équivalentes. Cependant la question a été complètement résolue par G.N. Sytaya lorsque l'espace des trajectoires est un espace de Hilbert et on connaît alors la densité de $\mu^{(b)}$ par rapport à μ. Nous ne nous intéresserons donc qu'au cas où l'espace Ω est séparable localement convexe et donnerons une démonstration utilisant la distance en variation lorsque $\Omega=\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Nous donnerons également une expression de la densité lorsque b est admissible.

Théorème 2.3.1. *Soit $A=(A_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}^d}$ vérifiant la condition (2.13), μ définie sur $\Omega=\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ par (2.3) et $b\in\Omega$. Alors*

$$\mu\sim\mu^{(b)}\Leftrightarrow(A^{-1}b,b)<\infty\,.$$

Preuve : Soit $\zeta^{(n)}$ le processus défini par la translation suivante de ξ :

$$\zeta_i^{(n)}=\begin{cases}\xi_i & \text{si } i\in]-n,n[^d\,,\\ \xi_i+b_i & \text{si } i\notin]-n,n[^d\,,\end{cases}\tag{2.14}$$

et $\nu^{(n)}$ la mesure correspondante. On a par construction $\zeta^{(0)}=\xi+b$ *i.e.* $\nu^{(0)}=\mu^{(b)}$ et $\nu^{(n)}\sim\nu^{(n+1)}$ pour tout $n\geq 0$ puisque quelque soit $m\geq 0$, $\nu^{(m)}$ s'écrit sous la forme

$$\nu^{(m)}=\int_0^\infty \nu_r^{(m)}\,F(dr)$$

où $\nu_r^{(m)}$ est la mesure gaussienne obtenue par la translation définie par (2.14). Les mesures gaussiennes $\nu_r^{(n)}$ et $\nu_r^{(n+1)}$ sont absolument continues l'une par rapport à l'autre puisqu'elles ne diffèrent que d'une translation par un vecteur ayant un nombre fini de composantes non nulles. Cette propriété s'étend à $\nu^{(n)}$ et $\nu^{(n+1)}$ et on obtient par récurrence que

$$\forall n > 0 \,, \quad \nu^{(n)} \sim \nu^{(0)} \,.$$

Or

$$\|\nu^{(n)} - \mu\|^2 \leq \sum_{i,j \notin]-n,n[^d} A_{ij}^{-1}\, b_i b_j \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \,,$$

donc d'après le lemme (1.2.7), $\mu \ll \nu^{(0)}$, *i.e.* $\mu \ll \mu^{(b)}$. Par un raisonnement identique avec le vecteur $-b$, on obtient que $\mu^{(b)} \ll \mu$ et donc $\mu \sim \mu^{(b)}$.

D'autre part, la minoration (2.10) nous permet de dire que si $(A^{-1}b, b)$ n'est pas fini, alors $\|\mu - \mu^{(b)}\| = 2$ donc ces deux mesures sont singulières.

■

Il est clair que cette démonstration n'est pas la plus directe. Son intérêt réside dans l'utilisation de la distance en variation pour obtenir un résultat d'absolue continuité. De plus, cette méthode sera réadaptée dans le chapitre suivant aux mesures de Gibbs et sera alors très utile.

Replaçons-nous dans le cas d'un espace vectoriel séparable localement convexe $\mathbb{X}$. On obtient de même que b est admissible pour μ si et seulement si $b \in \mathbb{H}_{\mu_A}$. La première étape, pour obtenir une expression de la densité de $\mu^{(b)}$ par rapport à μ, consiste à déterminer celle de $\mu_r^{(b)}$ par rapport à μ_r, pour chaque $r > 0$. Pour cela, nous disposons d'un résultat bien connu, que l'on peut trouver par exemple dans [7], qui nous donne la densité d'une mesure gaussienne translatée, par rapport à la mesure initiale. Les notations sont celles introduites au paragraphe 2.2.1 du chapitre 1.

Théorème 2.3.2. *Soit μ_A la mesure gaussienne centrée d'opérateur de covariance A et $b \in \mathbb{H}_{\mu_A}$, $b = i_{\mu_A}(h)$, $h \in \mathbb{X}_{\mu_A}$. On a alors*

$$\frac{d\mu_A^{(b)}}{d\mu_A}(x) = \exp\left[\langle x, h\rangle - \frac{1}{2}\|h\|^2\right] .$$

Nous avons, quant à nous, besoin de la densité de $\mu_r^{(b)}$ par rapport à μ_r, pour chaque $r > 0$, où $b \in \mathbb{H}_{\mu_A}$. Le vecteur b appartient également à $\mathbb{H}_{\mu_r}$ donc s'écrit sous la forme $b = i_{\mu_r}(h_r)$, $h \in \mathbb{X}_{\mu_r}$ (signalons que cet élément h_r est différent de celui qui apparaît dans la démonstration du lemme (2.2.5)). On a donc

$$\frac{d\mu_r^{(b)}}{d\mu_r}(x) = \exp\left[\langle x, h_r\rangle - \frac{1}{2}\|h_r\|^2\right] .$$

Le problème est qu'il nous faudrait une expression non pas en fonction de h_r, mais de h et r. C'est ce que l'on va préciser maintenant.

Lemme 2.3.3. *Pour tout $r > 0$, on a*

$$\frac{d\mu_r^{(b)}}{d\mu_r}(x) = \exp\left[\frac{1}{r^2}\left(\langle x, h\rangle - \frac{1}{2}\|h\|^2\right)\right].$$

Preuve : Soit f une fonction mesurable bornée et χ le processus gaussien dont la loi est μ_A ; μ_r est la loi de $r\chi$ et $\mu_r^{(b)}$ celle de $r\chi + b$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{\mu_r^{(b)}}(f) &= \mathrm{E}\left(f(r\chi + b)\right) \\ &= \mathrm{E}\left(f\left(r(\chi + \frac{b}{r})\right)\right) \\ &= \int_{\mathbb{X}} f(rx)\, \mu_A^{(\frac{b}{r})}(dx)\,. \end{aligned}$$

Or $b = i_{\mu_A}(h)$ donc $r^{-1}b = i_{\mu_A}(r^{-1}b)$. On obtient donc en poursuivant le calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{\mu_r^{(b)}}(f) &= \int_{\mathbb{X}} f(rx) \exp\left[\langle x, \frac{h}{r}\rangle - \frac{1}{2}\|\frac{h}{r}\|^2\right] \mu_A(dx) \\ &= \int_{\mathbb{X}} f(y) \exp\left[\langle \frac{y}{r}, \frac{h}{r}\rangle - \frac{1}{2}\|\frac{h}{r}\|^2\right] \mu_r(dy)\,, \end{aligned}$$

puisque μ_r est la mesure image de μ_A par l'application $x \mapsto rx$. Nous avons donc montré que pour toute fonction mesurable bornée f, on avait

$$\mathrm{E}_{\mu_r^{(b)}}(f) = \int_{\mathbb{X}} f(x) \exp\left[\frac{1}{r^2}\left(\langle x, h\rangle - \frac{1}{2}\|h\|^2\right)\right] \mu_r(dx)\,,$$

ce qui achève la démonstration de ce lemme.

■

Grâce à un résultat de [33], on peut affirmer que les mesures μ_r définissant μ sont singulières et qu'il existe des ensembles V_r, $r > 0$, deux à deux disjoints et tels que $\mu_r(V_r) = 1$. Nous pouvons alors déterminer la densité de la mesure translatée $\mu^{(b)}$ par rapport à μ, le vecteur b appartenant à $\mathbb{H}_\mu = \mathbb{H}_{\mu_A}$.

Théorème 2.3.4. *Pour tout $b = i_{\mu_A}(h)$, $h \in \mathbb{X}_{\mu_A}$, on a :*

$$\frac{d\mu^{(b)}}{d\mu}(x) = \exp\left[\frac{1}{a(x)}\left(\langle x, h\rangle - \frac{1}{2}\|h\|^2\right)\right], \tag{2.15}$$

où $a(x)$ est la fonction définie μ-presque sûrement par :

$$a(x) = r^2, \quad x \in V_r\,, r > 0. \tag{2.16}$$

Preuve : Pour toute fonction mesurable bornée f, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{\mu_A^{(b)}}(f) &= \int_{\mathbb{X}} f(x)\,\mu_A^{(b)}(dx) \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{X}} f(x)\,\mu_r^{(b)}(dx)\,F(dr) \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{X}} f(x) \exp\left[\frac{1}{r^2}\big(\langle x,h\rangle - \frac{1}{2}\|h\|^2\big)\right] \mu_r(dx)\,F(dr) \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{X}} f(x) \exp\left[\frac{1}{a(x)}\big(\langle x,h\rangle - \frac{1}{2}\|h\|^2\big)\right] \mu_r(dx)\,F(dr) \\
&= \int_{\mathbb{X}} f(x) \exp\left[\frac{1}{a(x)}\big(\langle x,h\rangle - \frac{1}{2}\|h\|^2\big)\right] \mu_A(dx)\,.
\end{aligned}$$

∎

L'expression que nous obtenons ici n'est pas surprenante puisque G.N. Sytaya [34] avait obtenu dans le cas d'un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ et pour tout vecteur $b = \sqrt{A}\,h$, $h \in \mathbb{H}$:

$$\frac{d\mu^{(b)}}{d\mu}(x) = \exp\left[\frac{1}{a(x)}\big((A^{-\frac{1}{2}}x,h) - \frac{1}{2}\|h\|^2\big)\right],$$

$(\cdot,\cdot)$ désignant le produit scalaire sur $\mathbb{H}$. En désignant par $\{e_k\}$ et $\{\lambda_k\}$ des systèmes de fonctions propres et valeurs propres de l'opérateur A, la fonction $a(x)$ est alors déterminée par

$$a(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(x,e_k)^2}{\lambda_k} \in\,]0,\infty[\,.$$

Chapitre 3

Mesures de Gibbs et leurs translatées

3.1 Introduction

Le but est toujours d'obtenir une majoration de la distance $\|\mu - \mu^{(b)}\|$, μ étant cette fois une mesure de Gibbs sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}})$ associée à un potentiel ϕ. Nous allons tout d'abord introduire quelques notations qui seront utilisées par la suite. Puis nous présenterons les définitions et propriétés que l'on peut retrouver dans [15] concernant les mesures de Gibbs, nécessaires à notre étude.

Dans les paragraphes suivants, nous établirons les liens qui peuvent exister entre les mesures gaussiennes et celles de Gibbs. Nous étudierons ensuite $\|\mu - \mu^{(b)}\|$, μ étant une mesure de Gibbs, pour en déduire finalement une conséquence d'absolue continuité similaire à celle du chapitre précédent.

3.1.1 Notations

On suppose désormais que $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}})$ où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}}$ la tribu produit. On utilisera les notations suivantes :

- $\sigma_\Lambda : \Omega \to \mathbb{R}^\Lambda$ la projection sur les coordonnées en Λ,
- $\Omega_\Lambda = \mathbb{R}^\Lambda$ et $\forall \omega \in \Omega$, $\omega_\Lambda = \sigma_\Lambda(\omega) \in \Omega_\Lambda$,
- pour $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ et $\Delta \subset \mathbb{Z}^d$ tels que $\Lambda \cap \Delta \neq \emptyset$, on note $(\omega_\Lambda, \omega_\Delta)$ un élément de l'ensemble $\mathbb{R}^{\Lambda \cup \Delta}$ (par exemple : $\forall \omega \in \Omega$, $\omega = (\omega_\Lambda, \omega_{\Lambda^c})$),
- $\mathcal{F}_\Lambda$ est la tribu engendrée par les $\sigma_\Delta^{-1}(A)$, $\Delta \in \mathcal{S}$, $\Delta \subset \Lambda$, $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^\Delta}$,
- pour une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{F})$, $\mu_\Lambda = \mu \circ \sigma_\Lambda^{-1}$,
- λ^m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$ et $\lambda = \lambda^1$,
- δ_η est la mesure de Dirac en η,
- $\mathrm{E}_\mu(\cdot)$ désigne l'espérance par rapport à la mesure μ,

- $\mathcal{L} = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ \exists\Lambda \in \mathcal{S}$ tel que f soit $\mathcal{F}_\Lambda$-mesurable bornée$\}$ est l'ensemble des fonctions locales (ou cylindriques) bornées,
- $\overline{\mathcal{L}} = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ \exists (f_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{L},\ \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0\}$ est l'ensemble des fonctions quasilocales, $\|\cdot\|_\infty$ étant la norme uniforme.
- pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$, on pose
  - $\delta_i(f) = \sup\{\mid f(\xi) - f(\eta) \mid,\ \xi_{\{i\}^c} = \eta_{\{i\}^c}\}$, $i \in \mathbb{Z}^d$, l'oscillation dans la i^{e} direction de la fonction f,
  - $\delta(f) = \sup\{\mid f(\xi) - f(\eta) \mid,\ \xi, \eta \in \Omega\}$ l'oscillation totale de f,
- $\mathbb{I}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'évènement A.

3.1.2 Mesures de Gibbs sur espace d'états $\mathbb{R}$

Seules les connaissances nécessaires à la suite de l'étude seront rappelées ici. Pour plus de détails, on pourra consulter l'ouvrage de référence [15].

Définition 3.1.1. *On appelle* potentiel d'interaction sur $\mathbb{Z}^d$, *noté* ϕ, *une famille* $\{\phi_A,\ A \in \mathcal{S}\}$ *de fonctions de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *telles que pour tout* $A \in \mathbb{Z}^d$, ϕ_A *est* $\mathcal{F}_A$*-mesurable, i.e.* $\phi_A(\omega)$ *ne dépend que de* ω_A*. Pour un volume fini* Λ *de* $\mathbb{Z}^d$*, la fonction*

$$H^\phi_\Lambda = \sum_{\substack{A\in\mathcal{S}\\ A\cap\Lambda\neq\emptyset}} \phi_A$$

est appelée, quand elle existe, Hamiltonien en Λ *associé au potentiel* ϕ *et la famille* $\{H^\phi_\Lambda,\ \Lambda \in \mathcal{S}\}$ *est appelé* Hamiltonien *associé à* ϕ*. Nous supposerons qu'il existe une partie non vide* $\tilde{\Omega}$ *de* Ω *telle que*

$$\forall\Lambda \in \mathcal{S},\ \forall\omega \in \tilde{\Omega}, \qquad \sum_{\substack{A\in\mathcal{S}\\ A\cap\Lambda\neq\emptyset}} |\phi_A(\omega)| < \infty. \tag{3.1}$$

Enfin on introduit, en posant par convention $\exp[-H^\phi_\Lambda(\omega_\Lambda, \omega_{\Lambda^c})] = 0$ *là où le Hamiltonien n'est pas défini, la* fonction de partition

$$Z^\phi_\Lambda(\omega) = \int_{\Omega_\Lambda} \exp[-H^\phi_\Lambda(\omega_\Lambda, \omega_{\Lambda^c})]\, \lambda^\Lambda(d\omega_\Lambda)$$

et on suppose que ϕ *est* admissible, *c'est à dire que pour tout* $\Lambda \in \mathcal{S}$ *et tout* $\omega \in \tilde{\Omega}$*, on a* $Z^\phi_\Lambda(\omega) < \infty$*.*

Remarque 3.1.2. $Z^\phi_\Lambda(\omega)$ *ne dépend en fait que de* ω_{Λ^c} *; on le notera parfois* $Z^\phi_\Lambda(\omega_{\Lambda^c})$*. D'autre part, la notion d'admissibilité pour un potentiel est totalement étrangère à celle vue en* 1.2.3 *pour un élément de l'espace.*

Définition 3.1.3. *On appelle* λ-spécification locale *associée au potentiel* ϕ *une famille* $\pi = (\pi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{S}}$ *de noyaux de probabilité de* $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$ *sur* $\mathcal{F}$ *définie par :*

$$\forall \xi \in \Omega_{\Lambda^c}, \qquad \pi_\Lambda(d\omega, \xi) = \frac{1}{Z_\Lambda^\phi(\omega)} \exp[-H_\Lambda^\phi(\omega)]\,(\lambda^\Lambda \otimes \delta_\xi)(d\omega)\,.$$

Définition 3.1.4. *Soit* ϕ *un potentiel d'interaction sur* $\mathbb{Z}^d$ *et* $\tilde{\Omega}$ *tel que* (3.1) *soit vérifiée. On dit que* μ *est une* mesure de Gibbs *pour* ϕ *— on note alors* $\mu \in \mathcal{G}(\phi)$ *— si c'est une mesure de probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *telle que* $\mu(\tilde{\Omega}) = 1$ *et*

$$\forall \Lambda \in \mathcal{S}, \qquad \mu(\cdot) = \int_{\Omega_{\Lambda^c}} \pi_\Lambda(\cdot, \xi)\, \mu_{\Lambda^c}(d\xi)$$

où $\pi = (\pi_\Lambda, \Lambda \in \mathcal{S})$ *est la* λ*-spécification locale associée au potentiel* ϕ*.*

Nous dirons qu'un processus stochastique $(\mathcal{X}_k,\ k \in \mathbb{Z}^d)$ dont les trajectoires sont dans $\mathbb{R}^{Z^d}$ est un processus de Gibbs (ou gibbsien) si sa loi μ est une mesure de Gibbs. On peut alors interpréter $\pi_\Lambda(\cdot, \xi)$ comme étant la loi conditionnelle de $\mathcal{X}$ sachant que $\mathcal{X}_{\Lambda^c} = \xi$.

Par la suite, nous ferons toujours l'hypothèse suivante de régularité sur le Hamiltonien, ce qui ne sera pas très restrictif dans les différentes situations où nous nous placerons, mais toutefois indispensable pour la validité des calculs.

Hypothèse (H) : *Quels que soient* $\Lambda \in \mathcal{S}$ *et* $\xi \in \tilde{\Omega}_{\Lambda^c}$*, l'application :*

$$\omega_\Lambda \longmapsto H_\Lambda^\phi(\omega_\Lambda, \xi)$$

de $\tilde{\Omega}_\Lambda$ *dans* $\mathbb{R}$*, est localement lipschitzienne (i.e. pour tout point* ω_Λ *de* $\tilde{\Omega}_\Lambda$*, il existe un voisinage de* ω_Λ *sur lequel la restriction de* $H_\Lambda^\phi(\cdot, \xi)$ *est lipschitzienne).*

Bien sûr, nous ne considèrerons que des potentiels pour lesquels $\mathcal{G}(\phi)$ est non vide. Enfin, on omettra parfois, lorsqu'il ne peut y avoir confusion, le symbole $\{\}$: on notera par exemple H_i^ϕ au lieu de $H_{\{i\}}^\phi$ le Hamiltonien au site $i \in \mathbb{Z}^d$.

Définition 3.1.5. *Pour* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *intégrable et* $\xi \in \Omega_{\Lambda^c}$*,* $\pi_\Lambda(f, \xi)$ *est l'espérance conditionnelle de* f *sachant que* $\omega_{\Lambda^c} = \xi$ *:*

$$\pi_\Lambda(f, \xi) = \int_\Omega f(\omega)\, \pi_\Lambda(d\omega, \xi)\,.$$

On note $\pi_\Lambda(f)$ *l'espérance conditionnelle de* f *par rapport à la tribu* $\mathcal{F}_{\Lambda^c}$ *et* π_Λ *l'application de* $L^1(\Omega)$ *dans* $L^1(\Omega)$ *qui à* f *associe* $\pi_\Lambda(f)$*. On dira que la spécification* π *est* quasilocale *si* $\pi_\Lambda(\overline{\mathcal{L}}) \subset \overline{\mathcal{L}}$ *pour tout* $\Lambda \in \mathcal{S}$*.*

Nous utiliserons une technique mise en place par Dobrushin, en introduisant une matrice $C(\pi) = (C_{ij}(\pi))_{i,j\in\mathbb{Z}^d}$ qui quantifie la dépendance des coordonnées en des sites distincts. Plus précisément, $C_{ij}(\pi)$ représentera l'influence de la valeur ξ_j au site j sur la distribution conditionnelle $\pi_i(\cdot,\xi)$.

Définition 3.1.6. *On définit les coefficients $C_{ij}(\pi)$ par*

$$C_{ij}(\pi) = \sup \|\pi_i(\cdot,\xi) - \pi_i(\cdot,\eta)\| ,$$

où le sup *est pris sur les ξ,η tels que $\xi_{\{j\}^c} = \eta_{\{j\}^c}$.*

On introduit alors une condition de dépendance faible à l'aide de ces coefficients.

Définition 3.1.7. *On dit que la spécification π satisfait la* condition de Dobrushin *si π est quasilocale et si*

$$c(\pi) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{i\in\mathbb{Z}^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} C_{ij}(\pi) < 1 .$$

On peut alors énoncer le théorème d'unicité de Dobrushin (voir [10]) appliqué à notre cas, c'est-à-dire $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$.

Théorème 3.1.8. *Si la spécification π associée au potentiel ϕ satisfait la condition de Dobrushin, alors $\mid \mathcal{G}(\phi) \mid = 1$.*

Remarque 3.1.9. *Le théorème d'unicité de Dobrushin dans sa forme générale s'applique pour $\Omega = E^S$, $(E,\mathcal{E})$ étant un espace mesurable quelconque et S un ensemble infini dénombrable. La conclusion du théorème est alors : $\mid \mathcal{G}(\phi) \mid \leq 1$, l'égalité ayant lieu si E est un espace de Borel standard (i.e. il existe une métrique d sur E qui en fait un espace métrique séparable complet dont $\mathcal{E}$ est la tribu borélienne pour d).*

3.2 Mesures gaussiennes et mesures gibbsiennes

Nous allons ici étudier sommairement les liens qui peuvent exister entre ces deux classes de mesures. Les mesures gaussiennes sont un cas trivial du mélange défini par l'égalité (2.3) puisqu'il suffit de choisir une masse de Dirac en $r > 0$ pour F. Sous certaines conditions, ce sont aussi des mesures de Gibbs pour des spécifications gaussiennes.

Préciser en détail ces liens est un problème complexe que nous n'entreprendrons pas. Citons, à ce sujet, les travaux de Rozanov [28] qui donna les premiers résultats, suivis de ceux de Dobrushin [11] et Künsch [16]. On pourra trouver les théorèmes énoncés dans les paragraphes 3.2.2 et 3.2.3, ainsi que leur preuve, dans le chapitre 13 de [15].

3.2.1 Spécifications gaussiennes

Pour commencer, introduisons quelques notations. Etant donnée une fonction $J : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$; on définit l'ensemble

$$\Omega_J = \{\omega \in \Omega, \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |J(i,j)\,\omega_j| < \infty, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d\}$$

qui appartient à la tribu asymptotique

$$\mathcal{T} = \bigcap_{\Lambda \in \mathcal{S}} \mathcal{F}_{\Lambda^c}\,.$$

Rappelons que J est dite *définie positive* si

$$\sum_{i,j \in \mathbb{Z}^d} u_i J(i,j) \overline{u}_j > 0$$

pour toute suite complexe $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ ayant un nombre fini de valeurs non nulles. Supposons maintenant que J soit symétrique définie positive et soit $h \in \Omega$. On définit alors la *spécification gaussienne* $\gamma^{J,h}$ pour J et h par l'attribution du *potentiel quadratique* $\phi^{J,h}$ donné par les équations

$$\phi_A^{J,h}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,J(i,i)\,\omega_i^2 + h_i\,\omega_i & \text{si } A = \{i\} \\ J(i,j)\,\omega_i \omega_j & \text{si } A = \{i,j\},\ i \neq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, on introduit, pour J et h, le sous-espace affine de Ω

$$M_{J,h} = \{m \in \Omega_J \ :\ h_i + \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} J(i,j) m_j = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d\}\,.$$

Cet espace apparaîtra dans la description de l'ensemble des mesures de Gibbs dont le potentiel est quadratique pour J, h.

3.2.2 Mesures gaussiennes en tant que mesures de Gibbs

Deux problèmes se posent alors. Etant donnée une mesure gaussienne, existe-t-il des conditions pour que celle-ci soit gibbsienne ? Inversement, étant donné une mesure de Gibbs associée à une spécification gaussienne, quand peut-on dire que c'est une mesure gaussienne ? Le théorème suivant caractérise les champs gaussiens qui sont aussi gibbsiens.

Théorème 3.2.1. *Soit μ un champ gaussien de moyenne m et de fonction de covariance K. Soit $h \in \Omega$ et $J : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ une fonction symétrique définie positive. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mu \in \mathcal{G}(\phi^{J,h})$,

(ii) $\mu(\Omega_J) = 1$, $m \in M_{J,h}$ *et* $\forall i, k \in \mathbb{Z}^d$,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} J(i,j)\, K(j,k) = \delta_{ik} .$$

Par la suite, nous supposerons souvent la mesure μ centrée pour simplifier les calculs, mais cela n'affecte en rien les résultats que nous obtiendrons. On peut alors énoncer le corollaire suivant, qui signifie qu'un champ gaussien centré μ, de fonction de covariance K est une mesure de Gibbs si et seulement si K, considérée comme une matrice infinie, a une inverse définie positive J telle que $\mu(\Omega_J) = 1$.

Corollaire 3.2.2. *Soit μ un champ gaussien centré de fonction de covariance K et $J : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ une fonction symétrique définie positive. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mu \in \mathcal{G}(\phi^{J,0})$,

(ii) $\mu(\Omega_J) = 1$ *et* $\forall i, k \in \mathbb{Z}^d$,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} J(i,j)\, K(j,k) = \delta_{ik} .$$

Réciproquement, si $\gamma^{J,h}$ est une spécification gaussienne, il existe des conditions pour que $\mu \in \mathcal{G}(\phi^{J,h})$ soit gaussienne, de fonction de covariance K inverse de J et de moyenne $m \in M_{J,h}$. Nous ne développerons pas ce problème en détail ici et renvoyons le lecteur en ce qui le concerne aux travaux cités au début de ce paragraphe, ainsi qu'à [15] et [14]. Donnons juste en exemple un théorème dont on trouve les éléments de démonstration dans le chapitre 13 de [15].

Théorème 3.2.3. *Soit $J : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ une fonction symétrique définie positive telle que*

$$(a) \quad \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} J(i,i)^{-1} \sum_{j \neq i} |J(i,j)| < 1 ,$$

$$(b) \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \sum_{j \neq i} |J(i,j)|\, J(j,j)^{-\frac{1}{2}} < \infty .$$

Alors J possède une inverse K et la mesure gaussienne centrée, de fonction de covariance K, appartient à $\mathcal{G}(\phi^{J,0})$, avec $\tilde{\Omega} = \Omega_J$.

Enfin, signalons deux exemples extraits de [15] que nous utiliserons ultérieurement.

Exemple 3.2.4. *Soient $d = 1$, $\beta > 0$, $1 < a < 2$ et soit $J : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie par $J(i,j) = J(i-j)$ où $J : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est telle que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} J(k) = 0$ et $J(k) = -\beta\, |k|^{-a}$ si $k \neq 0$.*
Alors la mesure gaussienne centrée de fonction de covariance K inverse de J appartient à $\mathcal{G}(\phi^{J,0})$, avec $\tilde{\Omega} = \mu(\Omega_J)$.

Exemple 3.2.5. *Soient $d = 2$, $\beta > 0$, $2 < a < 4$ et $J : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $J(i,j) = J(i-j)$ où $J : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ est telle que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} J(k) = 0$ et $J(k) = -\beta\, |k|^{-a}$ si $k \neq 0$.*
Alors la mesure gaussienne centrée de fonction de covariance K inverse de J appartient à $\mathcal{G}(\phi^{J,0})$, avec $\tilde{\Omega} = \mu(\Omega_J)$.

3.2.3 Mesures associées à une spécification gaussienne

Soit $\phi^{J,h}$ un potentiel quadratique, où $J : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction symétrique définie positive et h un élément de Ω. Comme nous l'avons déjà dit, nous n'aurons pas la prétention de vouloir faire l'étude complète de l'ensemble des mesures de Gibbs associées à ce potentiel. Nous allons seulement rappeler les résultats qui nous serviront par la suite.

Théorème 3.2.6. *Supposons que $\mathcal{G}(\phi^{J,h}) \neq \emptyset$. Alors J possède une inverse K et*

$$\mathcal{G}(\phi^{J,h}) = \{\mu_K * \nu : \nu \in \mathcal{P}(\Omega,\mathcal{F}),\ \nu(M_{J,h}) = 1\}$$

où $\mathcal{P}(\Omega,\mathcal{F})$ est l'ensemble des mesures de probabilité sur $(\Omega,\mathcal{F})$, $*$ le produit de convolution et μ_K la mesure gaussienne centrée de fonction de covariance K.

Cette description des mesures de Gibbs associées à un potentiel quadratique nous conduit à la remarque suivante, importante puisqu'elle permet d'obtenir une majoration de $\|\mu - \mu^{(b)}\|$ pour toute mesure $\mu \in \mathcal{G}(\phi^{J,h})$, à partir de celle de $\|\mu_K - \mu_K^{(b)}\|$.

Remarque 3.2.7. *Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{G}(\phi^{J,h})$, on a :*

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \leq \|\mu_K - \mu_K^{(b)}\|,$$

où $\mu_K \in \mathcal{G}(\phi^{J,0})$ est la mesure gaussienne centrée de fonction de covariance K inverse de J.

Preuve : On sait, d'après le théorème 3.2.6, qu'il existe une mesure de probabilité $\nu \in \mathcal{P}(\Omega, \mathcal{F})$, $\nu(M_{J,h})=1$, telle que $\mu = \mu_K * \nu$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{M_{J,h}} \mu_K^{(m)}\, \nu(dm) \\ \mu^{(b)} &= \int_{M_{J,h}} \mu_K^{(m+b)}\, \nu(dm) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|\mu - \mu^{(b)}\| &= \| \int_{M_{J,h}} (\mu_K^{(m)} - \mu_K^{(m+b)})\, \nu(dm)\, \| \\ &\leq \int_{M_{J,h}} \|\mu_K^{(m)} - \mu_K^{(m+b)}\|\, \nu(dm) \\ &= \int_{M_{J,h}} \|\mu_K - \mu_K^{(b)}\|\, \nu(dm) \\ &= \|\mu_K - \mu_K^{(b)}\|\,. \end{aligned}$$

■

3.3 Inégalités pour la distance en variation

Rappelons que $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}})$. Une mesure gibbsienne μ étant donnée sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et b un élément de Ω, nous allons étudier la distance en variation entre μ et sa translatée $\mu^{(b)}$. Nous procédons en deux étapes : on suppose tout d'abord que la translation est presque nulle et obtenons un premier théorème qui donne la forme générale d'une majoration de la distance entre μ et $\mu^{(b)}$. Il s'en déduit deux inégalités dans deux cas particuliers — lorsque le potentiel est de portée finie puis lorsqu'il vérifie une condition de décroissance — toutes deux de la forme $\|\mu - \mu^{(b)}\| \leq k(\sum b_i^2)^{\frac{1}{2}}$, où k est une constante finie. Grâce à cette étude, nous pourrons alors envisager le cas général, c'est-à-dire prendre b quelconque.

3.3.1 Translation presque nulle

Nous allons dans un premier temps nous limiter à une translation par un vecteur b^Λ dont les composantes non nulles sont en nombre fini, *i.e.* $b^\Lambda \in (\Omega)$. Pour cela, soit $b \in \Omega$ et $\Lambda \in \mathcal{S}$; on pose alors

$$b^\Lambda = (b_i\, \mathbb{I}_\Lambda(i)\,)_{i \in \mathbb{Z}^d}\,.$$

Le but est d'obtenir un résultat qui permette de passer à la limite quand Λ tend vers $\mathbb{Z}^d$.

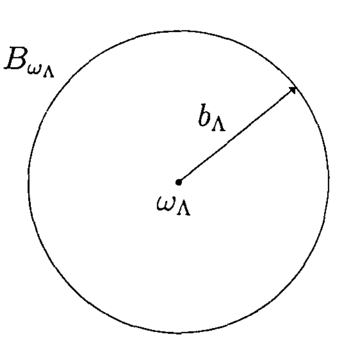
$\diamondsuit$ Potentiels vérifiant l'hypothèse (H)

Rappelons que cette hypothèse ne porte que sur la régularité du Hamiltonien. Nous allons dans ce cas déterminer une majoration la plus générale possible de la distance en variation entre une mesure de Gibbs et sa translatée par le vecteur b^Λ. Mais avant cela, énonçons le théorème suivant de Rademacher (voir [13], p. 216), ainsi qu'un lemme, nécessaires à la suite de l'étude.

Théorème 3.3.1. *Si h est une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, alors h est différentiable en λ^m-presque tout point de $\mathbb{R}^m$.*

Lemme 3.3.2. *Soit ϕ un potentiel vérifiant l'hypothèse* (H) *et soit $S_\Lambda = \{r_\Lambda \in \mathbb{R}^\Lambda,\ \|r_\Lambda\| = \|b_\Lambda\|\}$ la sphère de $\mathbb{R}^\Lambda$ de rayon $\|b_\Lambda\|$. Pour presque tout $r_\Lambda \in S_\Lambda$ et presque tout $\omega_\Lambda \in \mathbb{R}^\Lambda$, l'application $H_\Lambda^\phi(\cdot,\xi)$ est dérivable presque partout sur le segment $\{\omega_\Lambda + \alpha\, r_\Lambda,\ \alpha \in [0,1]\}$.*

Preuve : D'après le théorème de Rademacher, l'application $H_\Lambda^\phi(\cdot,\xi)$ est dérivable en λ^Λ-presque tout point ω_Λ de $\mathbb{R}^\Lambda$. Soit ω_Λ un tel point. Notons B_{ω_Λ} la boule de $\mathbb{R}^\Lambda$, de centre ω_Λ et de rayon $\|b_\Lambda\|$:



Alors $H_\Lambda^\phi(\cdot,\xi)$ est dérivable presque partout sur le segment $\{\omega_\Lambda + \alpha\, r_\Lambda\,,\ \alpha \in [0,1]\}$, cela pour presque tout $r_\Lambda \in S_\Lambda$. En effet, si on note $\mathcal{R}_\Lambda$ l'ensemble des points de la boule B_{ω_Λ} pour lesquels $H_\Lambda^\phi(\cdot,\xi)$ n'est pas dérivable, on a $\lambda^\Lambda(\mathcal{R}_\Lambda) = 0$, d'où le résultat en passant en coordonnées polaires et en appliquant le théorème de Fubini.

■

Théorème 3.3.3. *Si $\mu \in \mathcal{G}(\phi)$ où ϕ est un potentiel vérifiant l'hypothèse* **(H)**, *posons*

$$Y_i = \frac{\partial H_i^\phi}{\partial \omega_i}$$

la dérivée partielle de H_i^ϕ par rapport à la i^e variable, que l'on suppose μ-intégrable. On a alors :

$$\|\mu - \mu^{(b^\Lambda)}\| \leq \mathrm{E}_\mu \left| \sum_{i \in \Lambda} b_i Y_i \right| .$$

Preuve : Pour tout $B \in \mathcal{F}$, on a :

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \int_{\Omega_{\Lambda^c}} \pi_\Lambda(B, \xi)\, \mu_{\Lambda^c}(d\xi) \\ \mu^{(b^\Lambda)}(B) &= \int_{\Omega_{\Lambda^c}} \pi_\Lambda(B - b^\Lambda, \xi)\, \mu_{\Lambda^c}(d\xi) \end{aligned}$$

Posons $\pi_\Lambda^{(b^\Lambda)}(B, \xi) = \pi_\Lambda(B - b^\Lambda, \xi)$ pour tout $B \in \mathcal{F}$. On obtient alors grâce au théorème 1.2.9 :

$$\|\mu - \mu^{(b^\Lambda)}\| = \int_{\Omega_{\Lambda^c}} \|\pi_\Lambda(\cdot, \xi) - \pi_\Lambda^{(b^\Lambda)}(\cdot, \xi)\|\, \mu_{\Lambda^c}(d\xi) .$$

Or

$$\begin{aligned} \pi_\Lambda(B - b^\Lambda, \xi) &= \int_{B - b^\Lambda} \frac{1}{Z_\Lambda^\phi(\xi)} \exp[-H_\Lambda^\phi(\omega)]\, \lambda^\Lambda \otimes \delta_\xi(d\omega) \\ &= \int_B \frac{1}{Z_\Lambda^\phi(\xi)} \exp[-H_\Lambda^\phi(\omega - b^\Lambda)]\, \lambda^\Lambda \otimes \delta_\xi(d\omega) , \end{aligned}$$

cette dernière égalité étant obtenue en appliquant le théorème de transfert, la mesure $\lambda^\Lambda \otimes \delta_\xi$ étant invariante par la fonction $f(x) = x - b^\Lambda$ puisque λ^Λ est invariante par translation et $b^\Lambda_{\Lambda^c} = 0$. On a donc :

$$\pi_\Lambda^{(b^\Lambda)}(d\omega, \xi) = \frac{1}{Z_\Lambda^\phi(\xi)} \exp[-H_\Lambda^\phi(\omega - b^\Lambda)]\, \lambda^\Lambda \otimes \delta_\xi(d\omega) .$$

Les deux mesures de probabilité $\pi_\Lambda(\cdot, \xi)$ et $\pi_\Lambda^{(b^\Lambda)}(\cdot, \xi)$ étant, pour ξ fixé, à densité par rapport à la mesure $\lambda^\Lambda \otimes \delta_\xi$, il vient en appliquant le lemme 1.2.5

et en posant $\vartheta_\Lambda(\xi) = \|\pi_\Lambda(\cdot,\xi) - \pi_\Lambda^{(b^\Lambda)}(\cdot,\xi)\|$:

$$\begin{aligned}
\vartheta_\Lambda(\xi) &= \int_\Omega \frac{1}{Z_\Lambda^\phi(\xi)} \left|\exp[-H_\Lambda^\phi(\omega)] - \exp[-H_\Lambda^\phi(\omega - b^\Lambda)]\right| \lambda^\Lambda \otimes \delta_\xi(d\omega) \\
&= \int_{\Omega_\Lambda} \int_{\Omega_{\Lambda^c}} \frac{1}{Z_\Lambda^\phi(\xi)} \left|\exp[-H_\Lambda^\phi(\omega)] - \exp[-H_\Lambda^\phi(\omega - b^\Lambda)]\right| \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \delta_\xi(d\omega_{\Lambda^c})\lambda^\Lambda(d\omega_\Lambda) \\
&= \int_{\Omega_\Lambda} \frac{1}{Z_\Lambda^\phi(\xi)} \left|\exp[-H_\Lambda^\phi(\omega_\Lambda,\xi)] - \exp[-H_\Lambda^\phi((\omega_\Lambda,\xi) - b^\Lambda)]\right| \lambda^\Lambda(d\omega_\Lambda) \\
&= \int_{\Omega_\Lambda} \frac{1}{Z_\Lambda^\phi(\xi)} \left|\exp[-H_\Lambda^\phi(\omega_\Lambda,\xi)] - \exp[-H_\Lambda^\phi(\omega_\Lambda - b_\Lambda,\xi)]\right| \lambda^\Lambda(d\omega_\Lambda)\,.
\end{aligned}$$

On définit alors la fonction $f_\xi : [0,1] \times \tilde{\Omega}_\Lambda \longmapsto \mathbb{R}$ par

$$f_\xi(\alpha,\omega_\Lambda) = \frac{1}{Z_\Lambda^\phi(\xi)} \exp[-H_\Lambda^\phi(\omega_\Lambda - \alpha\, b_\Lambda,\xi)]\,.$$

▷ *1^er^ cas* : Supposons que pour λ^Λ–presque tout $\omega_\Lambda \in \tilde{\Omega}_\Lambda$, l'application $H_\Lambda^\phi(\cdot,\xi)$ soit dérivable presque partout sur le segment $\{\omega_\Lambda - \alpha\, b_\Lambda,\ \alpha \in [0,1]\}$. Considérée comme fonction de α, f_ξ est dérivable presque partout et sa dérivée vaut

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_\xi}{\partial \alpha}(\alpha,\omega_\Lambda) &= \frac{1}{Z_\Lambda^\phi(\xi)} \sum_{i\in\Lambda} b_i \frac{\partial H_\Lambda^\phi}{\partial \omega_i}(\omega_\Lambda - \alpha\, b_\Lambda,\xi)\, \exp[-H_\Lambda^\phi(\omega_\Lambda - \alpha\, b_\Lambda,\xi)] \\
&= \sum_{i\in\Lambda} b_i \frac{\partial H_\Lambda^\phi}{\partial \omega_i}(\omega_\Lambda - \alpha\, b_\Lambda,\xi)\, f_\xi(\alpha,\omega_\Lambda)\,.
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$
\begin{aligned}
\vartheta_\Lambda(\xi) &= \int_{\Omega_\Lambda} |f_\xi(1,\omega_\Lambda) - f_\xi(0,\omega_\Lambda)| \; \lambda^\Lambda(d\omega_\Lambda) \\
&= \int_{\Omega_\Lambda} \left| \int_0^1 \frac{\partial f_\xi}{\partial \alpha}(\alpha,\omega_\Lambda)\, d\alpha \right| \lambda^\Lambda(d\omega_\Lambda) \\
&\leq \int_0^1 \int_{\Omega_\Lambda} \left| \frac{\partial f_\xi}{\partial \alpha}(\alpha,\omega_\Lambda) \right| \lambda^\Lambda(d\omega_\Lambda)\, d\alpha \\
&= \int_0^1 \int_{\Omega_\Lambda} \frac{1}{Z_\Lambda^\phi(\xi)} \left| \sum_{i\in\Lambda} b_i \frac{\partial H_\Lambda^\phi}{\partial \omega_i}(\omega_\Lambda - \alpha\, b_\Lambda, \xi) \right| \\
&\qquad\qquad \exp[-H_\Lambda^\phi(\omega_\Lambda - \alpha\, b_\Lambda, \xi)]\, \lambda^\Lambda(d\omega_\Lambda)\, d\alpha \\
&= \int_0^1 \int_{\Omega_\Lambda} \frac{1}{Z_\Lambda^\phi(\xi)} \left| \sum_{i\in\Lambda} b_i \frac{\partial H_\Lambda^\phi}{\partial \omega_i}(\omega_\Lambda, \xi) \right| \exp[-H_\Lambda^\phi(\omega_\Lambda, \xi)]\, \lambda^\Lambda(d\omega_\Lambda)\, d\alpha \\
&\qquad\qquad \text{(par invariance de } \lambda^\Lambda \text{ par translation)} \\
&= \int_{\Omega_\Lambda} \frac{1}{Z_\Lambda^\phi(\xi)} \left| \sum_{i\in\Lambda} b_i \frac{\partial H_\Lambda^\phi}{\partial \omega_i}(\omega_\Lambda, \xi) \right| \exp[-H_\Lambda^\phi(\omega_\Lambda, \xi)]\, \lambda^\Lambda(d\omega_\Lambda)\,.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
\|\mu - \mu^{b^\Lambda}\| &\leq \int_{\Omega_{\Lambda^c}} \frac{1}{Z_\Lambda^\phi(\xi)} \int_{\Omega_\Lambda} \left| \sum_{i\in\Lambda} b_i \frac{\partial H_\Lambda^\phi}{\partial \omega_i}(\omega_\Lambda, \xi) \right| \\
&\qquad\qquad \exp[-H_\Lambda^\phi(\omega_\Lambda, \xi)] \lambda^\Lambda(d\omega_\Lambda) \mu_{\Lambda^c}(d\xi) \\
&= \mathrm{E}_\mu \left| \sum_{i\in\Lambda} b_i \frac{\partial H_\Lambda^\phi}{\partial \omega_i} \right|.
\end{aligned}
$$

Pour obtenir le résultat voulu, il suffit de remarquer que

$$
H_\Lambda^\phi(\omega) = \sum_{\substack{A\cap\Lambda\neq\emptyset \\ A\in\mathcal{S}, A\not\ni i}} \phi_A(\omega) + \sum_{\substack{A\in\mathcal{S} \\ A\ni i}} \phi_A(\omega)\,.
$$

Or $\phi_A(\omega)$ ne dépend que de ω_A, donc sa dérivée par rapport à ω_i est nulle si $i \notin A$. On a donc pour tout $i \in \Lambda$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H_\Lambda^\phi}{\partial \omega_i}(\omega) &= \sum_{\substack{A\in\mathcal{S} \\ A\ni i}} \frac{\partial \phi_A}{\partial \omega_i}(\omega) \\
&= \frac{\partial H_i^\phi}{\partial \omega_i}(\omega) \\
&= Y_i(\omega)\,.
\end{aligned}
$$

$\triangleright$ *2e cas* : Il existe un segment $\{\omega_\Lambda - \alpha\, b_\Lambda,\ \alpha \in [0,1]\}$, $\omega_\Lambda \in \tilde{\Omega}_\Lambda$, sur lequel $H_\Lambda^\phi(\cdot,\xi)$ n'est pas dérivable presque partout. D'après le lemme 3.3.2, on peut choisir une suite $(b_\Lambda^{(n)},\ n \in \mathbb{N})$ qui tend vers b_Λ telle que pour λ^Λ–presque tout $\omega_\Lambda \in \tilde{\Omega}_\Lambda$, $H_\Lambda^\phi(\cdot,\xi)$ soit dérivable presque partout sur le segment $\{\omega_\Lambda + \alpha\, b_\Lambda^{(n)},\ \alpha \in [0,1]\}$, quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a alors, d'après ce qui précède :

$$\|\mu - \mu^{(b^{\Lambda,n})}\| \leq \mathrm{E}_\mu \Big| \sum_{i\in\Lambda} b_i^{(n)} \frac{\partial H_i^\phi}{\partial \omega_i} \Big|$$

où

$$(b^{\Lambda,n}) = (b_i^{(n)}\, \mathbb{I}_\Lambda(i)\,)_{i\in\mathbb{Z}^d}\,.$$

Grâce au lemme 1.2.6 et puisque $\mu^{(b^{\Lambda,n})}$ converge faiblement vers $\mu^{(b^\Lambda)}$, on obtient :

$$\|\mu - \mu^{(b^\Lambda)}\| \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}_\mu \Big| \sum_{i\in\Lambda} b_i^{(n)} \frac{\partial H_i^\phi}{\partial \omega_i} \Big|\,.$$

Etant donné que l'on a supposé Y_i intégrable, on peut appliquer le théorème de Lebesgue pour obtenir que

$$\|\mu - \mu^{(b^\Lambda)}\| \leq \mathrm{E}_\mu \Big| \sum_{i\in\Lambda} b_i \frac{\partial H_i^\phi}{\partial \omega_i} \Big|\,.$$

■

Le théorème 3.3.3 donne une majoration de la distance en variation entre μ et $\mu^{(b^\Lambda)}$, mais on utilisera plutôt l'inégalité suivante qui s'en déduit.

Corollaire 3.3.4. *Si $\mu \in \mathcal{G}(\phi)$, alors :*

$$\|\mu - \mu^{(b^\Lambda)}\|^2 \leq \sum_{i,j\in\Lambda} b_i b_j\, \mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\|\mu - \mu^{(b^\Lambda)}\|^2 &\leq \Big(\mathrm{E}_\mu \Big| \sum_{i\in\Lambda} b_i Y_i \Big|\Big)^2 \\
&\leq \mathrm{E}_\mu \Big| \sum_{i\in\Lambda} b_i Y_i \Big|^2 \\
&= \sum_{i,j\in\Lambda} b_i b_j\, \mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j)
\end{aligned}$$

■

Exemple 3.3.5. *Soit* $J : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ *une fonction symétrique définie positive telle qu'il existe une mesure* $\mu \in \mathcal{G}(\phi^{J,0})$ *gaussienne centrée de fonction de covariance* K *inverse de* J*. Supposons de plus que*

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathrm{E}_\mu(\sigma_k^2) < \infty \quad et \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |J(i,j)| < \infty\,. \tag{3.2}$$

On a alors :

$$\|\mu - \mu^{(b^\Lambda)}\|^2 \leq \sum_{i,j\in\Lambda} b_i b_j\, J(i,j)\,. \tag{3.3}$$

Preuve : Rappelons que $\phi^{J,0}$ est défini par

$$\phi_A^{J,0}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, J(i,i)\,\omega_i^2 & \text{si } A = \{i\} \\ J(i,j)\,\omega_i\omega_j & \text{si } A = \{i,j\},\ i \neq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} H_i^{\phi^{J,0}}(\omega) &= \sum_{\substack{A\in\mathcal{S} \\ A\ni i}} \phi_A^{J,0}(\omega) \\ &= \frac{1}{2} J(i,i)\omega_i^2 + \sum_{k\neq i} J(i,k)\omega_i\omega_k \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Y_i(\omega) &= J(i,i)\omega_i + \sum_{k\neq i} J(i,k)\omega_k \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} J(i,k)\omega_k\,. \end{aligned}$$

L'hypothèse faite sur les moments d'ordre 2 des σ_k et sur la fonction J nous permet d'appliquer le théorème de convergence dominée et d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_\mu(Y_iY_j) &= \mathrm{E}_\mu\Big(\sum_{k,k'\in\mathbb{Z}^d} J(i,k)J(j,k')\sigma_k\sigma_{k'}\Big) \\ &= \sum_{k,k'\in\mathbb{Z}^d} J(i,k)J(j,k')\,\mathrm{E}_\mu(\sigma_k\sigma_{k'}) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} J(i,k) \sum_{k'\in\mathbb{Z}^d} J(j,k')K(k,k') \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} J(i,k)\delta_{jk} \\ &= J(i,j)\,. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le corollaire 3.3.4 pour obtenir l'inégalité annoncée. Remarquons que si $J(i,j) = 0$ lorsque i et j sont assez éloignés l'un de l'autre, alors la condition $\sup_k \mathrm{E}_\mu(\sigma_k^2) < \infty$ n'est plus nécessaire.

■

Exemple 3.3.6. *Soient $J : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ une fonction symétrique définie positive et $h \in \Omega$, tels que $\mathcal{G}(\phi^{J,h}) \neq \emptyset$. Notons K l'inverse de J et supposons que*

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}^d} K(i,i) < \infty \quad \textit{et} \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |J(i,j)| < \infty .$$

On a alors :

$$\forall \mu \in \mathcal{G}(\phi^{J,h}), \quad \|\mu - \mu^{(b^\Lambda)}\|^2 \leq \sum_{i,j\in\Lambda} b_i b_j \, J(i,j) . \tag{3.4}$$

Preuve : C'est une conséquence directe de la remarque 3.2.7 appliquée à l'exemple précédent.

■

Quand Λ tend vers S, on voudrait passer à la limite dans le membre de droite de l'inégalité du corollaire 3.3.4. Cependant, $\mathrm{E}_\mu(Y_iY_j)$ reste en général inconnu et il faudrait pouvoir l'estimer. C'est l'objectif des deux paragraphes suivants, tout d'abord lorsque le potentiel est de portée finie, puis plus généralement lorsqu'il vérifie une condition de décroissance.

◇ Potentiels de portée finie

Nous supposerons toujours que la condition **(H)** est satisfaite, et ce jusqu'à la fin du dernier chapitre.

Définition 3.3.7. *On dit qu'un potentiel ϕ est* de portée finie r *si*

$$\sup\{d(A),\, A \in \mathcal{S},\, \phi_A \neq 0\} = r < \infty,$$

où $d(A)$ représente le diamètre de A pour la norme uniforme sur $\mathbb{Z}^d$.

Définition 3.3.8. *On dit qu'un potentiel ϕ est* invariant par translation *si*

$$\phi_{A+j} \circ \tau_j = \phi_A \quad \forall\, A \in \mathcal{S},\, j \in \mathbb{Z}^d,$$

où $A + j = \{i + j,\, i \in A\}$ et $\tau_j : \omega \mapsto (\omega_{i-j})_{i\in\mathbb{Z}^d}$.

Théorème 3.3.9. *Soit $\mu \in \mathcal{G}(\phi)$ avec ϕ de portée finie r, invariant par translation et tel que $\mathrm{E}_\mu(Y_i^2) = \sigma_Y^2 < \infty$. On a alors :*

$$\|\mu - \mu^{(b^\Lambda)}\|^2 \leq C_r \sum_{i\in\Lambda} b_i^2$$

avec

$$C_r = (2r+1)^d \, \sigma_Y^2 .$$

Preuve : Remarquons que l'hypothèse $\sigma_Y^2 < \infty$ assure l'intégrabilité des Y_i . Nous allons d'abord montrer que $\mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j) = 0$ si $|i-j| > r$. En posant $\Delta = \{i,j\}$, on a dans ce cas :

$$\mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j) = \int_{\Omega_{\Delta^c}} \frac{1}{Z_\Delta^\phi(\omega)} \int_{\Omega_\Delta} \frac{\partial H_i^\phi}{\partial \omega_i}(\omega) \frac{\partial H_j^\phi}{\partial \omega_j}(\omega) \\ \exp[-H_\Delta^\phi(\omega)] \, \lambda^2(d\omega_\Delta) \, \mu_{\Delta^c}(d\omega_{\Delta^c}) ,$$

or

$$\begin{aligned} H_\Delta^\phi(\omega) &= \sum_{\substack{A \in \mathcal{S} \\ A \cap \Delta \neq \emptyset}} \phi_A(\omega) \\ &= \sum_{\substack{A \ni i \\ A \not\ni j}} \phi_A(\omega) + \sum_{\substack{A \ni j \\ A \not\ni i}} \phi_A(\omega) + \sum_{A \supset \{i,j\}} \phi_A(\omega) \\ &= \sum_{\substack{A \ni i \\ A \not\ni j}} \phi_A(\omega) + \sum_{\substack{A \ni j \\ A \not\ni i}} \phi_A(\omega) \end{aligned}$$

car $\phi_A = 0$ si $d(A) > r$. On obtient donc :

$$H_\Delta^\phi(\omega) = H_i^\phi(\omega) + H_j^\phi(\omega) .$$

De plus, $H_i^\phi(\omega)$ (respectivement $H_j^\phi(\omega)$) ne dépend que des ω_k pour lesquels $|k-i| \leq r$ (respectivement $|k-j| \leq r$), ce qui permet d'écrire :

$$\mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j) = \int_{\Omega_{\Delta^c}} \frac{1}{Z_\Delta^\phi(\omega)} \Big(\int_{\Omega_{\{i\}}} \frac{\partial H_i^\phi}{\partial \omega_i}(\omega) \, \exp[-H_i^\phi(\omega)] \, \lambda(d\omega_i) \\ \int_{\Omega_{\{j\}}} \frac{\partial H_j^\phi}{\partial \omega_j}(\omega) \, \exp[-H_j^\phi(\omega)] \, \lambda(d\omega_j) \Big) \, \mu_{\Delta^c}(d\omega_{\Delta^c}) .$$

Or pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, on a $\Omega_{\{k\}} = \mathbb{R}$ et

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial H_k^\phi}{\partial \omega_k}(\omega) \, \exp[-H_k^\phi(\omega)] \, \lambda(d\omega_k) = 0 .$$

En effet, nous avons par définition

$$Z_{\{k\}}^\phi(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \exp[-H_k^\phi(\omega)] \, \lambda(d\omega_k) < \infty ,$$

donc il existe une suite de réels (α_n) qui décroît vers $-\infty$ ainsi qu'une suite de réels (β_n) qui croît vers $+\infty$, telles que

$$\lim_{n\to\infty} \exp[-H_k^\phi(\alpha_n, \omega_{\{k\}^c})] = \lim_{n\to\infty} \exp[-H_k^\phi(\beta_n, \omega_{\{k\}^c})] = 0\,.$$

Par ailleurs, nous avons pour ces deux suites :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial H_k^\phi}{\partial \omega_k}(\omega) \exp[-H_k^\phi(\omega)]\,\lambda(d\omega_k) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{\partial H_k^\phi}{\partial \omega_k}(\omega) \exp[-H_k^\phi(\omega)]\,\lambda(d\omega_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp[-H_k^\phi(\omega)] \Big|_{\omega_k=\alpha_n}^{\omega_k=\beta_n} \\
&= 0 \qquad \mu_{\{k\}^c}\text{-p.s.}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi que

$$\mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j) = 0 \quad \text{si } |i-j| > r\,.$$

Remarquons que nous avons montré au passage que les v.a.r. Y_i sont centrées. D'autre part, pour $|i-j| \leq r$, on a $|\mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j)| \leq (\mathrm{E}_\mu Y_i^2)^{\frac12} (\mathrm{E}_\mu Y_j^2)^{\frac12} = \sigma_Y^2$. On obtient alors, à partir du corollaire 3.3.4 :

$$\begin{aligned}
\|\mu - \mu^{(b^\Lambda)}\|^2 &\leq \sum_{i\in\Lambda} \sum_{\substack{j\in\Lambda \\ |i-j|\leq r}} |b_i|\,|b_j|\,\sigma_Y^2 \\
&= \sum_{i\in\Lambda} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d \\ |k|\leq r}} |b_i^\Lambda|\,|b_{i+k}^\Lambda|\,\sigma_Y^2 \\
&= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d \\ |k|\leq r}} \sum_{i\in\Lambda} |b_i^\Lambda|\,|b_{i+k}^\Lambda|\,\sigma_Y^2 \\
&\leq \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d \\ |k|\leq r}} \Big(\sum_{i\in\Lambda} b_i^{\Lambda\,2}\Big)^{\frac12} \Big(\sum_{i\in\Lambda} b_{i+k}^{\Lambda\ 2}\Big)^{\frac12} \sigma_Y^2 \\
&\leq \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d \\ |k|\leq r}} \Big(\sum_{i\in\Lambda} b_i^2\Big) \sigma_Y^2 \\
&= (2r+1)^d \Big(\sum_{i\in\Lambda} b_i^2\Big) \sigma_Y^2
\end{aligned}$$

■

L'étape suivante consiste à envisager les potentiels de rang non borné. Cependant, C_r tend vers l'infini quand r tend vers l'infini. Il faut donc imposer des conditions sur le potentiel de façon à pouvoir prendre $r = \infty$.

◇ Potentiels vérifiant une condition de décroissance

Lemme 3.3.10. *Soient $\Lambda, \Delta \in \mathcal{S}$, $f \in \mathcal{F}_\Lambda$ et $g \in \mathcal{F}_\Delta$. Supposons qu'il existe une semi-métrique s sur $\mathbb{Z}^d$ telle que*

$$C_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} C_{ij}(\pi)\, e^{s(i,j)} < 1\,. \tag{3.5}$$

Alors

$$|\text{cov}(f,g)| \leq \min(|\Lambda|\,, |\Delta|)\, \frac{(1-C_1)^{-1}}{4} \exp[-s(\Lambda,\Delta)]\, \delta(f)\delta(g)$$

Preuve : Soit D la matrice $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$ définie par :

$$D = (D_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}^d} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geq 0} C^n(\pi)$$

où $C^n(\pi)$ est la puissance n-ième de la matrice $C(\pi)$. Cette série converge grâce à l'inégalité (3.5) qui implique la condition de Dobrushin. D'après [15] (Proposition 8.34), on a pour tout $f, g \in \overline{\mathcal{L}}$:

$$|\text{cov}(f,g)| \leq \frac{1}{4} \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^d} \delta_i(f)\delta_j(g)\, D_{ij}$$

Or pour $f \in \mathcal{F}_\Lambda$ (respectivement $g \in \mathcal{F}_\Delta$), on a $\delta_i(f) = 0$ si $i \notin \Lambda$ (respectivement $\delta_j(g) = 0$ si $j \notin \Delta$), d'où

$$\begin{aligned} |\text{cov}(f,g)| &\leq \frac{1}{4} \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ j \in \Delta}} \delta_i(f)\delta_j(g)\, D_{ij} \\ &\leq \frac{1}{4} \delta(f)\delta(g) \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ j \in \Delta}} D_{ij}\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Supposons que $\min(|\Lambda|\,, |\Delta|) = |\Lambda|$. Alors

$$\begin{aligned} \exp[s(\Lambda,\Delta)] \sum_{\substack{i \in \Lambda \\ j \in \Delta}} D_{ij} &\leq \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Delta} \exp[s(i,j)]\, D_{ij} \\ &\leq |\Lambda| \sup_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \exp[s(i,j)]\, D_{ij}\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Or pour tout $i_0 \in \mathbb{Z}^d$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \exp[s(i_0,j)]\, D_{i_0 j} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} e^{s(i_0,j)} \sum_{n\geq 0} C^n_{i_0 j}(\pi) \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} e^{s(i_0,j)} C^n_{i_0 j}(\pi) \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} e^{s(i_0,j)} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n\in\mathbb{Z}^d \\ i_n=j}} \prod_{k=1}^{n} C_{i_{k-1}i_k}(\pi) \\
&\leq 1 + \sum_{n\geq 1} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n\in\mathbb{Z}^d \\ i_n=j}} \prod_{k=1}^{n} C_{i_{k-1}i_k}(\pi)\, e^{s(i_{k-1},i_k)} \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} \sum_{i_1,\dots,i_n\in\mathbb{Z}^d} \prod_{k=1}^{n} C_{i_{k-1}i_k}(\pi)\, e^{s(i_{k-1},i_k)} \\
&\leq 1 + \sum_{n\geq 1} {C_1}^n \\
&= \frac{1}{1-C_1}\,. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

On obtient donc, en combinant (3.7) et (3.8) :

$$\sum_{\substack{i\in\Lambda \\ j\in\Delta}} D_{ij} \leq \exp[-s(\Lambda,\Delta)]\, \min(|\Lambda|\,,|\Delta|)\,(1-C_1)^{-1}$$

et le résultat annoncé vient alors grâce à la majoration (3.6). ∎

Dans ce qui suit, on prendra garde aux notations similaires que sont $|A|$ pour désigner le cardinal d'un ensemble A de $\mathbb{Z}^d$, $|i|$ pour la norme uniforme d'un élément i de $\mathbb{Z}^d$ et $|b_i|$ pour la valeur absolue d'un élément b_i de $\mathbb{R}$.

Théorème 3.3.11. *Soit $\mu \in \mathcal{G}(\phi)$ où ϕ est invariant par translation. On suppose de plus qu'il existe une semi-métrique s sur $\mathbb{Z}^d$ invariante par translation — on notera $s(i,j) = s(i-j)$ — telle que*

$$(i) \qquad C_1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} C_{0j}(\pi)\, e^{s(j)} < 1\,,$$

$$(ii) \qquad C_2 = \sum_{\substack{A\in\mathcal{S} \\ A\ni 0}} |A|^{\frac{1}{2}}\, \delta\Big(\frac{\partial\phi_A}{\partial\omega_0}\Big)\, \exp[s(A)] < \infty\,,$$

$$(iii) \qquad C_3 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \exp[-s(k)] < \infty\,,$$

où $s(A)$ est le s-diamètre de l'ensemble A. Alors il existe une constante C_ϕ finie telle que :

$$\|\mu - \mu^{(b^\Lambda)}\|^2 \leq C_\phi \sum_{i\in\Lambda} b_i^2 .$$

Remarque 3.3.12. *On connaît la valeur explicite de la constante C_ϕ. Elle vaut*

$$C_\phi = \frac{1}{4} C_3 \, C_2{}^2 \, (1 - C_1)^{-1} . \tag{3.9}$$

D'autre part, il est démontré dans [15] que l'on a l'inégalité suivante :

$$C_1 \leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{A\in\mathcal{S} \\ A\ni 0}} (|A| - 1) \, \delta(\phi_A) \, \exp[s(A)] .$$

On peut donc immédiatement en déduire le corollaire suivant dont les hypothèses sont légèrement plus restrictives mais plus faciles à vérifier puisqu'elles ne portent que sur la semi-métrique et le potentiel.

Corollaire 3.3.13. *En reprenant les hypothèses du théorème* 3.3.11 *et en remplaçant la condition (i) par*

$$(i') \quad C_1' = \sum_{\substack{A\in\mathcal{S} \\ A\ni 0}} (|A| - 1) \, \delta(\phi_A) \, \exp[s(A)] < 2 ,$$

alors il existe une constante $C_\phi' < \infty$ telle que :

$$\|\mu - \mu^{(b^\Lambda)}\|^2 \leq C_\phi' \sum_{i\in\Lambda} b_i^2 .$$

De plus, on connaît son expression : elle vaut

$$C_\phi' = \frac{1}{4} C_3 \, C_2{}^2 \left(1 - \frac{C_1'}{2}\right)^{-1} . \tag{3.10}$$

Preuve du Théorème : Nous allons étudier le comportement de $\mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j)$ et montrer qu'il tend vers zéro quand $s(i-j)$ tend vers l'infini avec la même vitesse que $\exp[-s(i-j)]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j) &= \mathrm{cov}(Y_i, Y_j) \\
&= \mathrm{cov}\Big(\sum_{\substack{A\ni i \\ A\in\mathcal{S}}} \frac{\partial \phi_A}{\partial \omega_i}, \sum_{\substack{A'\ni j \\ A'\in\mathcal{S}}} \frac{\partial \phi_{A'}}{\partial \omega_j} \Big) \\
&= \sum_{\substack{A\ni i, A'\ni j \\ A, A'\in\mathcal{S}}} \mathrm{cov}\left(\frac{\partial \phi_A}{\partial \omega_i}, \frac{\partial \phi_{A'}}{\partial \omega_j} \right) .
\end{aligned}$$

On peut en effet sortir les sommes de la covariance car d'après (ii), pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$,

$$\sum_{\substack{A \ni i \\ A \in S}} \mathrm{E}_\mu \left(\frac{\partial \phi_A}{\partial \omega_i} - \mathrm{E}_\mu \left(\frac{\partial \phi_A}{\partial \omega_i} \right) \right)^2 < \infty .$$

On obtient alors grâce au lemme 3.3.10 (on rappelle que $s(A, A')$ est la distance entre A et A' ; elle est donc égale à $\inf\{s(i-j),\ i \in A,\ j \in A'\}$) :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j)| &\leq \sum_{\substack{A \ni i \\ A' \ni j}} \min(|A|, |A'|) \frac{(1-C_1)^{-1}}{4} \delta\Big(\frac{\partial \phi_A}{\partial \omega_i}\Big) \\
&\qquad\qquad \delta\Big(\frac{\partial \phi_{A'}}{\partial \omega_j}\Big) \exp[-s(A, A')] \\
&\leq \frac{(1-C_1)^{-1}}{4} \sum_{\substack{A \ni i \\ A' \ni j}} |A|^{\frac{1}{2}} |A'|^{\frac{1}{2}} \delta\Big(\frac{\partial \phi_A}{\partial \omega_i}\Big) \delta\Big(\frac{\partial \phi_{A'}}{\partial \omega_j}\Big) \\
&\qquad\qquad \exp[-s(i-j) + s(A) + s(A')] \\
&= \frac{(1-C_1)^{-1}}{4} \Big(\sum_{\substack{A \in S \\ A \ni 0}} |A|^{\frac{1}{2}} \delta\Big(\frac{\partial \phi_A}{\partial \omega_0}\Big) \exp[s(A)] \Big)^2 \exp[-s(i-j)] \\
&= K \exp[-s(i-j)]
\end{aligned}$$

avec $K = {C_2}^2 (1 - C_1)^{-1}/4$. On obtient alors, en appliquant l'inégalité du corollaire 3.3.4 :

$$\begin{aligned}
\|\mu - \mu^{(b^\Lambda)}\|^2 &\leq K \sum_{i \in \Lambda} \sum_{j \in \Lambda} \exp[-s(i-j)]\, |b_i|\, |b_j| \\
&= K \sum_{i \in \Lambda} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \exp[-s(k)]\, |b_i^\Lambda|\, |b_{i+k}^\Lambda| \\
&= K \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \exp[-s(k)] \sum_{i \in \Lambda} |b_i^\Lambda|\, |b_{i+k}^\Lambda| \\
&\leq K \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \exp[-s(k)] \sum_{i \in \Lambda} {b_i^\Lambda}^2 \\
&= K \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \exp[-s(k)] \sum_{i \in \Lambda} b_i^2 .
\end{aligned}$$

■

Remarque 3.3.14. *La condition (iii) est facile à vérifier si $d = 1$. Elle s'écrit dans ce cas*

$$C_3 = \exp[-s(0)] + 2 \sum_{k \geq 1} \exp[-s(k)] < \infty .$$

Dans le cas où $d \geq 2$, on peut facilement conclure si s est de la forme $s(k) = p(|k|)$, p étant une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, en remarquant que

$$\begin{aligned}\#\{k \in \mathbb{Z}^d, |k| = l\} &= (2l+1)^d - (2l-1)^d \\ &\sim 2^d\, d\, l^{d-1}\end{aligned}$$

et remplacer ainsi (iii) par la condition : $\sum_{l \geq 0} l^{d-1} \exp[-p(l)] < \infty$. Si on veut majorer la constante C_3, on a :

$$\begin{aligned}\#\{k \in \mathbb{Z}^d, |k| = l\} &\leq 2d\,(2l+1)^{d-1} \\ &\leq 2^d\, d\,(l+1)^{d-1}.\end{aligned}$$

3.3.2 Translation quelconque

On peut maintenant obtenir une majoration de $||\mu - \mu^{(b)}||$ pour un élément b quelconque de Ω. Si $\Lambda \in \mathcal{S}$, on rappelle que b^Λ est défini par $b_i^\Lambda = b_i$ si $i \in \Lambda$, 0 sinon.

◊ Potentiels de portée finie

Théorème 3.3.15. *Soit $\mu \in \mathcal{G}(\phi)$ où ϕ est de portée finie r, invariant par translation et tel que $\mathrm{E}_\mu(Y_i^2) = \sigma_Y^2 < \infty$. On a alors :*

$$||\mu - \mu^{(b)}||^2 \leq C_r \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} b_i^2$$

avec

$$C_r = (2r+1)^d\, \sigma_Y^2 .$$

Preuve : Il suffit de définir $(\mu_n)_{n\geq 0}$ et $(\nu_n)_{n\geq 0}$ par $\mu_n = \mu$, $\nu_n = \mu^{(b^{\Lambda_n})}$ où $\Lambda_n =]-n, n[^d$ ($\Lambda_0 = \emptyset$), et de leur appliquer le lemme 1.2.6 : on a en effet $\mu_n \Rightarrow \mu$ puisqu'elles sont égales, et $\nu_n \Rightarrow \nu = \mu^{(b)}$, d'où

$$\begin{aligned}||\mu - \mu^{(b)}||^2 &\leq \liminf ||\mu - \mu^{(b^{\Lambda_n})}||^2 \\ &= \liminf C_r \sum_{i \in \Lambda_n} b_i^2 \\ &= C_r \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} b_i^2 .\end{aligned}$$

■

On peut citer en exemple deux cas classiques de potentiel de portée finie : celui où le rang vaut zéro, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas d'interaction entre les différents sites, et celui d'une spécification markovienne, dont le potentiel est de portée finie $r = 1$. Bien que le cas $r = 0$ soit peu intéressant du point de vue de la théorie des mesures de Gibbs, il le devient de celui des processus stochastiques. Il correspond en effet à une suite de variables aléatoires indépendantes et permet de retrouver des résultats connus.

Exemple 3.3.16. *Soit ϕ le potentiel défini par*

$$\phi_A(\omega) = \begin{cases} \varphi(\omega_i) & si\ A = \{i\}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

En posant $p(\cdot) = Z_{\{0\}}^{\phi\,-1} \exp[-\varphi(\cdot)\,]$, on obtient :

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \leq \sqrt{I_p}\left[\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} b_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

où

$$I_p = \int_{\mathbb{R}} \frac{p'(\omega_0)^2}{p(\omega_0)}\,\lambda(d\omega_0)$$

est la quantité de Fisher associée à la densité p.

Preuve : On peut appliquer le théorème 3.3.15 dans le cadre d'un potentiel de rang zéro. Pour cela, posons $p(\cdot) = Z^{-1}\exp[-\varphi(\cdot)]$, où $Z = Z_{\{0\}}^{\phi}$ est ici constant, et calculons σ_Y^2 :

$$\begin{aligned}
\sigma_Y^2 &= \mathrm{E}_\mu \left(\frac{\partial H_0^\phi}{\partial \omega_0}\right)^2 \\
&= \mathrm{E}_\mu \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial \omega_0}\right)^2 \\
&= \int_{\Omega_{\{0\}^c}} Z^{-1} \int_{\mathbb{R}} \varphi'(\omega_0)^2 \exp[-\varphi(\omega_0)]\,\lambda(d\omega_0)\ \mu_{\{0\}^c}(d\omega_{\{0\}^c}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{p'(\omega_0)^2}{p(\omega_0)}\,\lambda(d\omega_0) \\
&= I_p
\end{aligned}$$

■

Ce résultat rejoint celui de [5] pour des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées : on obtient en effet la même majoration pour la distance en variation entre μ et $\mu^{(b)}$.

Un autre cas s'impose : celui d'une spécification markovienne homogène, dont le potentiel est de portée finie $r = 1$. Supposons que μ soit la loi d'une chaîne de Markov $(\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ strictement stationnaire, de densité de loi invariante ρ et de densité de probabilité de transition $p(\cdot,\cdot) > 0$ bornée. On sait alors, d'après [15], que μ est une mesure de Gibbs associée au potentiel défini par :

$$\phi_A(\omega) = \begin{cases} -\log p(\omega_{i-1},\omega_i) & \text{si } A = \{i-1, i\}\,, \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases} \tag{3.11}$$

On retrouve alors une majoration du même type que celle obtenue dans ce cas de par C. Noquet ([19]). En reprenant les mêmes notations que [19], on désigne par $p'_x(\cdot,\cdot)$ et $p'_y(\cdot,\cdot)$ les dérivées partielles de p respectivement par rapport à la première et à la seconde coordonnée, en supposant qu'elles existent. Enfin, si f_y désigne la densité de $\xi_1/\xi_2{=}y$ (ξ_1 sachant que $\xi_2{=}y$) et g_x la densité de $\xi_2/\xi_1{=}x$, on pose :

$$I_p(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{g'_x}{g_x}(y)\right]^2 g_x(y)\,dy\,,$$
$$J_p(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{f'_y}{f_y}(y)\right]^2 f_y(x)\,dx\,,$$

et on définit la quantité I par :

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} I_p(x)\rho(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} J_p(y)\rho(y)\,dy\,.$$

Exemple 3.3.17. *Soit ϕ le potentiel défini par* (3.11) *correspondant à la chaîne de Markov décrite ci-dessus. On a alors :*

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \le \sqrt{3I}\left[\sum_{i\in Z} b_i^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve : On peut à nouveau appliquer le théorème 3.3.15 dans le cadre d'un potentiel de rang un et il suffit alors de déterminer σ_Y. On a $\forall i \in Z$:

$$\begin{aligned} H_i^\phi(\omega) &= \sum_{\substack{A\in\mathcal{S}\\ A\ni i}} \phi_A(\omega) \\ &= -\log p(\omega_{i-1},\omega_i) - \log p(\omega_i,\omega_{i+1}) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Y_i(\omega) &= \frac{\partial H_i^\phi}{\partial \omega_i}(\omega) \\ &= -\frac{p'_y}{p}(\omega_{i-1},\omega_i) - \frac{p'_x}{p}(\omega_i,\omega_{i+1}) \end{aligned}$$

donc

$$\sigma_Y^2 = \mathrm{E}_\mu(Y_i^2) = \mathrm{E}_\mu \left[\frac{p_y'}{p}(\xi_{i-1}, \xi_i) + \frac{p_x'}{p}(\xi_i, \xi_{i+1})\right]^2 .$$

Or il est démontré dans [19] que cette dernière quantité est inférieure ou égale à I, ce qui achève la démonstration. ■

L'exemple suivant, plus familier à la mécanique statistique, concerne les potentiels harmoniques, d étant ici quelconque. On dit qu'un potentiel quadratique $\phi^{J,h}$ invariant par translation est harmonique si

$$\begin{aligned} J(0) &= \beta \geq 1 \qquad (\beta > 1 \text{ si } d < 3)\,, \\ J(\pm e_p) &= -\frac{1}{2d}\,, \quad p = 1, \ldots, d\,, \end{aligned}$$

où e_p est le p–ième vecteur de base de $\mathbb{Z}^d$: $e_p^{(i)} = \delta_{ip}$ pour $i = 1, \ldots, d$.

Exemple 3.3.18. *Soit μ une mesure gibbsienne pour le potentiel harmonique défini ci-dessus. On a alors :*

$$\|\mu - \mu^{(b)}\|^2 \leq 3^d \beta \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} b_i^2 .$$

Preuve : Grâce à la remarque 3.2.7, il suffit de prouver l'inégalité pour la mesure de Gibbs gaussienne centrée $\mu \in \mathcal{G}(\phi^{J,0})$. Or d'après l'exemple 3.3.5, on sait que $\mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j) = J(i - j)$, donc $\mathrm{E}_\mu(Y_i^2) = J(0) = \beta$ et le potentiel est de portée finie $r = 1$.

■

◇ Potentiels vérifiant une condition de décroissance

Théorème 3.3.19. *Soit $\mu \in \mathcal{G}(\phi)$ où ϕ est invariant par translation. On suppose de plus qu'il existe une semi-métrique s sur $\mathbb{Z}^d$ invariante par translation — on notera $s(i,j) = s(i - j)$ — telle que*

$$(i) \qquad C_1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} C_{0j}\, e^{s(j)} < 1\,,$$

$$(ii) \qquad C_2 = \sum_{\substack{A \in \mathcal{S} \\ A \ni 0}} |A|^{\frac{1}{2}}\, \delta\Big(\frac{\partial \phi_A}{\partial \omega_0}\Big)\, \exp[s(A)] < \infty\,,$$

$$(iii) \qquad C_3 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \exp[-s(k)] < \infty\,.$$

Alors

$$\|\mu - \mu^{(b)}\|^2 \leq C_\phi \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} b_i^2 ,$$

où C_ϕ *est la constante finie définie par* (3.9).

Corollaire 3.3.20. *En reprenant les hypothèses du théorème précédent et en remplaçant la condition* (i) *par*

$$(i') \quad C_1' = \sum_{\substack{A \in \mathcal{S} \\ A \ni 0}} (|A| - 1)\, \delta(\phi_A)\, \exp[s(A)] < 2$$

on obtient

$$\|\mu - \mu^{(b)}\|^2 \leq C_\phi' \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} b_i^2 ,$$

où C_ϕ' *est la constante finie définie par* (3.10).

Preuve : C'est la même, pour le théorème 3.3.19 comme pour le corollaire 3.3.20, que celle du théorème 3.3.15 en remplaçant C_r par C_ϕ ou C_ϕ'. ∎

On peut citer ici comme exemple certains potentiels par paires invariants par translation, c'est-à-dire de la forme

$$\phi_A(\omega) = \begin{cases} J(i-j)\, \varphi(\omega_i, \omega_j) & \text{si } A = \{i, j\},\ i \neq j \\ \psi(\omega_i) & \text{si } A = \{i\}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $J : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ paire, $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ symétrique et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que ϕ_A soit admissible.

Exemple 3.3.21. *On suppose que* ϕ *est un potentiel admissible de la forme*

$$\phi_A(\omega) = \begin{cases} J(i-j) & \textit{si } A = \{i, j\},\ i \neq j\,, \\ \psi(\omega_i) & \textit{si } A = \{i\}, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

avec $J : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ *paire et* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivable telle que* $\delta(\psi') < \infty$. *On a alors :*

$$\|\mu - \mu^{(b)}\|^2 \leq \frac{1}{4} C_3\, C_2^2 \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} b_i^2 .$$

Preuve : Vérifions que les hypothèses du corollaire 3.3.20 sont réalisées, en posant $s(i, j) = |i - j|$.

$$
\begin{aligned}
(i') \qquad C_1' &= \sum_{\substack{A\in\mathcal{S}\\ A\ni 0}} (|A|-1)\,\delta(\phi_A)\,\exp[s(A)] \\
&= \sum_{i\neq 0} \delta(\phi_{\{i,0\}})\exp[|i|] = 0 \\
(ii) \qquad C_2 &= \sum_{\substack{A\in\mathcal{S}\\ A\ni 0}} |A|^{\frac{1}{2}}\,\delta\Big(\frac{\partial\phi_A}{\partial\omega_0}\Big)\,\exp[s(A)] \\
&= \delta(\psi') < \infty \\
(iii) \qquad C_3 &= \sum_{l\geq 0} \#\{k\in\mathbb{Z}^d,\, |k|=l\}\,\exp[-l] < \infty \\
&\text{car } \#\{k\in\mathbb{Z}^d,\, |k|=l\} \sim 2^d\,d\,l^{d-1}\,.
\end{aligned}
$$

■

Dans les exemples qui suivent, nous supposerons que $d=1$ pour simplifier les calculs et obtenir des résultats numériques. Cependant, on peut trouver des exemples similaires pour d quelconque, ce que nous ferons à la suite de ces exemples.

Exemple 3.3.22. *On suppose que $d=1$. Soit alors ϕ le potentiel défini par :*

$$
\phi_A(\omega) = \begin{cases} J(i-j)\,\varphi(\omega_i,\omega_j) & si\ A=\{i,j\}\,,\, i\neq j \\ \psi(\omega_i) & si\ A = i \\ 0 & sinon \end{cases}
$$

avec $J(k) = \exp[-|k|]$ et $\varphi(x,y) = \varphi(x-y)$ une fonction paire telle que $\delta(\varphi)\leq 1$ et $\delta(\varphi')<\infty$. La fonction ψ est telle que le potentiel ϕ soit admissible et $\delta(\psi')<\infty$.

En prenant $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\cos(x-y)$ et $\psi(x) = \log(1+x^2)$ pour effectuer les calculs, on obtient :

$$
\|\mu-\mu^{(b)}\| \leq 10\sqrt{\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i^2}\,.
$$

Preuve : Vérifions que le corollaire 3.3.20 s'applique.
(i') Remarquons tout d'abord que

$$
\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \exp[-|k|]\,\exp[\frac{|k|}{4}] = 2\,\frac{e^{-\frac{3}{4}}}{1-e^{-\frac{3}{4}}} < 2\,.
$$

On a alors, en posant $s(i,j) = \frac{1}{4}\,|i-j|$:

$$\begin{aligned} C_1' &= \sum_{\substack{A\in\mathcal{S}\\ A\ni 0}} (|A|-1)\,\delta(\phi_A)\,\exp[s(A)] \\ &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \exp[-\,|k|]\,\exp[\frac{|k|}{4}] \\ &= 2\frac{e^{-\frac{3}{4}}}{1-e^{-\frac{3}{4}}} < 2\,. \end{aligned}$$

(ii) La semi-métrique s étant ainsi définie, on obtient

$$\begin{aligned} C_2 &= \sum_{\substack{A\in\mathcal{S}\\ A\ni 0}} |A|^{\frac{1}{2}}\,\delta\Big(\frac{\partial\phi_A}{\partial\omega_0}\Big)\,\exp[s(A)] \\ &= 2+\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \sqrt{2}\,\exp[-\,|k|]\,\exp[\frac{|k|}{4}] \\ &= 2+2\sqrt{2}\,\frac{e^{-\frac{3}{4}}}{1-e^{-\frac{3}{4}}} < \infty\,. \end{aligned}$$

(iii) Enfin, il reste à calculer

$$\begin{aligned} C_3 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp[-s(k)] \\ &= 1+2\sum_{k>0}\exp[-\frac{k}{4}] \\ &= 1+2\,\frac{e^{-\frac{1}{4}}}{1-e^{-\frac{1}{4}}} < \infty\,. \end{aligned}$$

Il vient alors, grâce au corollaire 3.3.20 :

$$\|\mu-\mu^{(b)}\| \le \sqrt{C_\phi'}\,\Big[\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

avec

$$C_\phi' = \frac{1}{4}\,C_3\,C_2{}^2\Big(1-\frac{C_1'}{2}\Big)^{-1} < 100\,.$$

■

L'exemple suivant montre comment la semi-métrique s intervient dans la vitesse à laquelle le potentiel peut décroître : au lieu que celle-ci soit exponentielle, on peut supposer qu'elle est de l'ordre d'une puissance.

Exemple 3.3.23. *Soit $q > 2$, $d = 1$ et ϕ défini comme dans l'exemple précédent, avec cette fois $J(k) = |k|^{-q}$ et $\delta(\varphi) \leq \frac{1}{2}$. Alors il existe une constante finie C'_ϕ telle que :*

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \leq C'_\phi \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i^2}\,.$$

Pour $q = 4$, $\varphi(x, y) = \frac{1}{4}\cos(x - y)$ et $\psi(x) = \log(1 + x^2)$, on obtient :

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \leq 15 \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i^2}\,.$$

Preuve : On vérifie comme précédemment que les hypothèses du corollaire 3.3.20 sont réalisées.
(i') Remarquons tout d'abord que

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} |k|^{-q} < \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} |k|^{-2} = \frac{\pi^2}{3} < 4\,. \tag{3.12}$$

D'autre part, pour tout p tel que $1 < p < q - 1$, on a :

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} |k|^p \, |k|^{-q} \;=\; \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} |k|^{p-q} < \infty\,. \tag{3.13}$$

D'après (3.12), (3.13) et le théorème de convergence dominée, on peut trouver une constante $c > 0$ telle que

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} |k|^{-q} \exp[c\,|k| \wedge p \log(1 + |k|)] < \frac{\pi^2}{3} < 4\,. \tag{3.14}$$

On a alors, en posant $s(i, j) = c\,|i - j| \wedge p \log(1 + |i - j|)$:

$$\begin{aligned} C'_1 &= \sum_{\substack{A \in \mathcal{S} \\ A \ni 0}} (|A| - 1)\, \delta(\phi_A)\, \exp[s(A)] \\ &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \frac{1}{2}\, |k|^{-q} \exp[c\,|k| \wedge p \log(1 + |k|)] < \frac{\pi^2}{6} < 2\,. \end{aligned}$$

(ii) La semi-métrique s étant ainsi définie, on obtient

$$\begin{aligned}
C_2 &= \sum_{\substack{A\in\mathcal{S}\\ A\ni 0}} |A|^{\frac{1}{2}}\, \delta\Big(\frac{\partial\phi_A}{\partial\omega_0}\Big)\, \exp[s(A)] \\
&= 2 + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \frac{\sqrt{2}}{2}\, |k|^{-q} \exp[c\,|k| \wedge p\log(1+|k|)] \\
&< 2 + \sqrt{2}\,\frac{\pi^2}{6} < \infty\,.
\end{aligned}$$

(iii) Enfin, il reste à montrer que la constante C_3 est finie.

$$\begin{aligned}
C_3 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp[-s(k)] \\
&= 1 + 2\sum_{k>0} \exp[-(c\,k \wedge p\log(1+k))]\,.
\end{aligned}$$

On voit alors que $C_3 < \infty$ puisque l'on obtient une série à termes positifs dont le terme général est équivalent à k^{-p} en $+\infty$. Or $p > 1$ donc cette série converge. Pour donner une application numérique, prenons $q = 4$. On peut alors prendre par exemple $p = 2$, la condition sur p étant $1 < p < q - 1$, et trouver une constante c telle que (3.14) soit réalisée. Vérifions que pour ces valeurs de p et q, $c = 1/4$ convient, *i.e.* la condition (3.14) est réalisée. Il faut donc montrer que

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k>0} k^{-4} \exp[\frac{k}{4} \wedge 2\log(1+k)] < \frac{\pi^2}{6}\,.$$

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \sum_{k>0} k^{-4} \exp[\frac{k}{4} \wedge 2\log(1+k)] \\
&= \sum_{k=1}^{7} k^{-4} \exp[\frac{k}{4}] + \sum_{k=8}^{\infty} k^{-4} \exp[2\log(1+k)] \\
&= \sum_{k=1}^{7} k^{-4} \exp[\frac{k}{4}] + \sum_{k=8}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{k^4} \\
&< \sum_{k=1}^{7} k^{-4} \exp[\frac{k}{4}] + \int_7^{\infty} \frac{(x+1)^2}{x^4}\, dx < \frac{\pi^2}{6}\,.
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} C_3 &= 1+2\sum_{k=1}^{7}\exp[-\frac{k}{4}]+2\sum_{k=8}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} \\ &= 1+2\sum_{k=1}^{7}\exp[-\frac{k}{4}]+\frac{\pi^2}{3}-2\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k^2} < 8\,, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$C'_\phi = \frac{1}{4}\,C_3\,C_2{}^2\left(1-\frac{C'_1}{2}\right)^{-1} < 225\,.$$

■

Remarque 3.3.24. *(a) Le choix de ψ dans les deux derniers exemples est uniquement déterminé par le fait que le potentiel doit être admissible. C'est le cas ici puisque pour tout $\Lambda \in \mathcal{S}$, on a :*

$$\begin{aligned} Z_\Lambda^\Phi(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^\Lambda}\exp\Big[-\sum_{\substack{A\in\mathcal{S}\\ A\cap\Lambda\neq\emptyset}}\phi_A(\omega)\Big]\,\lambda_\Lambda(d\omega_\Lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}^\Lambda}\exp\Big[-\sum_{i\in\Lambda}\psi(\omega_i)\Big]\,\exp\Big[-\sum_{\substack{i\neq j\\ \{i,j\}\cap\Lambda\neq\emptyset}}J(i-j)\,\varphi(\omega_i,\omega_j)\Big]\,\lambda_\Lambda(d\omega_\Lambda)\,. \end{aligned}$$

Grâce aux choix de J et de φ, on peut majorer la deuxième exponentielle par une constante, et on obtient que $Z_\Lambda^\phi(\omega) < \infty$ si

$$\int_{\mathbb{R}^\Lambda}\exp\Big[-\sum_{i\in\Lambda}\psi(\omega_i)\Big]\,\lambda_\Lambda(d\omega_\Lambda) < \infty\,.$$

Or cette intégrale vaut

$$\begin{aligned} I &= \prod_{i\in\Lambda}\int_{\mathbb{R}}\exp[-\psi(x)]\,\lambda(dx) \\ &= \prod_{i\in\Lambda}\int_{\mathbb{R}}\exp[-\log(1+x^2)]\,\lambda(dx) \\ &= \prod_{i\in\Lambda}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}\,\lambda(dx) \\ &= \pi^{|\Lambda|} < \infty\,. \end{aligned}$$

(b) On peut obtenir des constantes plus petites que 10 et 15. Dans l'exemple 3.3.22, *il faudrait pour cela poser $s(i,j) = c\,|i-j|$ et étudier la fonction qui*

à $c \in]0,1[$ *associe* C'_ϕ. *Quant à l'exemple* 3.3.23, *il faut étudier la fonction de deux variables qui à* $(p,c) \in]1, q-1[\times]0,\infty[$ *associe* C'_ϕ.
(c) Enfin, on aurait pu prendre d quelconque. Nous allons donner des exemples dans ce qui suit.

Exemple 3.3.25. *Soient* $d \geq 1$ *et* ϕ *défini comme dans l'exemple* 3.3.22 : $J(k) = \exp[-|k|]$, *la fonction* φ *vérifiant cette fois*

$$\begin{aligned}\delta(\varphi) &< 2\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \exp[-|k|]\Big)^{-1},\\ \delta(\varphi') &< \infty,\end{aligned}$$

ψ *étant toujours choisie telle que le potentiel soit admissible et* $\delta(\psi') < \infty$. *Alors il existe une constante finie* C'_ϕ *telle que :*

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \leq C'_\phi \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i^2}\,.$$

Preuve : C'est exactement le même raisonnement que celui l'exemple 3.3.22. Il suffit de définir la métrique

$$s(i,j) = c\,|i-j|$$

avec c assez petit.

■

Exemple 3.3.26. *Soient* $d \geq 1$ *et* ϕ *défini comme dans l'exemple* 3.3.23 : $J(k) = |k|^{-q}$ $(q > d+1)$, *la fonction* φ *vérifiant cette fois*

$$\begin{aligned}\delta(\varphi) &< 2\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |k|^{-q}\Big)^{-1},\\ \delta(\varphi') &< \infty,\end{aligned}$$

ψ *étant toujours choisie telle que le potentiel soit admissible et* $\delta(\psi') < \infty$. *Alors il existe une constante finie* C'_ϕ *telle que :*

$$\|\mu - \mu^{(b)}\| \leq C'_\phi \sqrt{\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i^2}\,.$$

Preuve : C'est exactement le même raisonnement que celui l'exemple 3.3.23. Il suffit de définir la métrique

$$s(i,j) = c\,|i-j| \wedge p\log(1+|i-j|)$$

avec c assez petit.

◇ Exemples fondamentaux

Nous avons vu au corollaire 3.3.4 que si $\mu \in \mathcal{G}(\phi)$, alors

$$\|\mu - \mu^{(b^\Lambda)}\|^2 \le \sum_{i,j\in\Lambda} b_i b_j \,\mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j)\,.$$

Les conditions requises pour les théorèmes 3.3.15 et 3.3.19 (potentiels de portée finie ou avec condition de décroissance) permettent d'obtenir une majoration de $\|\mu - \mu^{(b)}\|$ même si on ne connaît pas l'expression de $\mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j)$. Il est évident que si celle-ci est connue, on peut obtenir un résultat encore meilleur.

Théorème 3.3.27. *Soit $\mu \in \mathcal{G}(\phi)$; on suppose que $|\mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j)| \le \alpha(i-j)$ où $\alpha : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^+$ est sommable :*

$$C''_\phi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \alpha(k) < \infty\,.$$

Alors :

$$\|\mu - \mu^{(b)}\|^2 \le C''_\phi \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} b_i^2\,.$$

Preuve : Pour tout $\Lambda \in \mathcal{S}$, on a

$$\begin{aligned}
\|\mu - \mu^{(b^\Lambda)}\|^2 &\le \sum_{i,j\in\Lambda} |b_i b_j|\; \alpha(i-j) \\
&= \sum_{i\in\Lambda}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left|b_i^\Lambda b_{i+k}^\Lambda\right|\; \alpha(k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \alpha(k) \sum_{i\in\Lambda} \left|b_i^\Lambda b_{i+k}^\Lambda\right| \\
&\le \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \alpha(k) \sum_{i\in\Lambda} b_i^2\,.
\end{aligned}$$

La fin de la démonstration est alors identique à celles des théorèmes 3.3.15 et 3.3.19. ∎

On peut citer ici le cas gaussien en exemple. Pour d quelconque, nous obtenons le théorème suivant.

Corollaire 3.3.28. *Soit μ une mesure gibbsienne pour un potentiel quadratique $\phi^{J,h}$, où $J(i,j) = J(i-j)$ et $h \in \Omega$. Supposons que*

$$C''_\phi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |J(k)| < \infty\,.$$

On a alors :

$$\|\mu - \mu^{(b)}\|^2 \leq C''_\phi \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} b_i^2 .$$

Exemple 3.3.29. *Soit $d = 1$, $\beta > 0$, $1 < a < 2$ et $J : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie comme dans l'exemple 3.2.4 par $J(i,j) = J(i-j)$ où $J(k) = -\beta\,|k|^{-a}$ si $k \neq 0$ et $\sum_{k\in\mathbb{Z}} J(k) = 0$. Quelle que soit $\mu \in \mathcal{G}(\phi^{J,h})$, où h est un élément de Ω, on a :*

$$\|\mu - \mu^{(b)}\|^2 \leq C''_\phi \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i^2$$

avec

$$C''_\phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |J(k)| < \infty .$$

Preuve : Grâce à la remarque 3.2.7, il suffit de prouver l'inégalité pour la mesure de Gibbs gaussienne centrée $\mu \in \mathcal{G}(\phi^{J,0})$. Or d'après l'exemple 3.3.5, on sait que $\mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j) = J(i-j)$. On a donc $|\mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j)| = \beta\,|i-j|^{-a}$ $(i \neq j)$. Or

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |k|^{-a} < \infty ,$$

donc les hypothèses du théorème 3.3.27 sont vérifiées avec $\alpha(k) = \beta\,|k|^{-a}$ si $k \neq 0$ et $\alpha(0) = |J(0)|$. ■

Exemple 3.3.30. *Soit $d = 2$, $\beta > 0$, $2 < a < 4$ et $J : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme dans l'exemple 3.2.5 par $J(i,j) = J(i-j)$ où $J(k) = -\beta\,|k|^{-a}$ si $k \neq 0$ et $\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} J(k) = 0$. Quelle que soit $\mu \in \mathcal{G}(\phi^{J,h})$, où h est un élément de Ω, on a :*

$$\|\mu - \mu^{(b)}\|^2 \leq C''_\phi \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} b_i^2$$

avec

$$C''_\phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |J(k)| < \infty .$$

Preuve : C'est la même que précédemment. Il suffit de vérifier que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |J(k)| < \infty ,$$

or

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2 \\ k \neq 0}} |J(k)| &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2 \\ k \neq 0}} \beta\,|k|^{-a} \\
&= \sum_{l > 0} \#\{k \in \mathbb{Z}^2,\ |k| = l\} \beta l^{-a} < \infty
\end{aligned}$$

car

$$\#\{k \in \mathbb{Z}^2,\ |k| = l\} \sim 2^d\, d\, l^{d-1} = 8\, l\,.$$

■

3.4 Equivalence de la mesure translatée

Grâce à l'étude précédente, nous allons pouvoir trouver des conditions pour que les mesures μ et $\mu^{(b)}$ soient équivalentes. Il suffira en fait que le potentiel vérifie certaines restrictions et que $\sum b_i^2 < \infty$. Pour plus de clarté, nous allons définir les trois conditions suivantes qui permettent, comme nous venons de le voir, d'obtenir des résultats.

$(\mathbf{F_r})$ Le potentiel est de portée finie r et tel que $\mathrm{E}_\mu(Y_i^2) < \infty$.

$(\mathbf{D_s})$ Il existe une semi-métrique s sur $\mathbb{Z}^d$ invariante par translation — notée $s(i,j) = s(i-j)$ — telle que

$$(i) \qquad C_1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} C_{0j}\, e^{s(j)} < 1\,,$$

$$(ii) \qquad C_2 = \sum_{\substack{A \in \mathcal{S} \\ A \ni 0}} |A|^{\frac{1}{2}}\, \delta\Big(\frac{\partial \phi_A}{\partial \omega_0}\Big)\, \exp[s(A)] < \infty\,,$$

$$(iii) \qquad C_3 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \exp[-s(k)] < \infty\,.$$

$(\mathbf{D}_\alpha)$ Il existe une fonction $\alpha : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ telle que $|\mathrm{E}_\mu(Y_i Y_j)| \leq \alpha(i-j)$ et

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \alpha(k) < \infty\,.$$

Théorème 3.4.1. *Soit $\mu \in \mathcal{G}(\phi)$ telle que ϕ soit invariant par translation et qu'une des conditions $(\mathbf{F_r})$, $(\mathbf{D_s})$ ou $(\mathbf{D}_\alpha)$ soit vérifiée. On a alors :*

$$\mu \sim \mu^{(b)} \ \ si \ \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} b_i^2 < \infty\,.$$

Preuve : Rappelons tout d'abord quelques notations. Si $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$, et $b \in \Omega$, b^Λ est un élément de Ω défini par $b_i^\Lambda = b_i$ si $i \in \Lambda$, 0 sinon. On a également défini l'élément b_Λ comme le projeté de b sur $\Omega_\Lambda = \mathbb{R}^\Lambda$.
Pour tout $n \geq 0$, on pose $\Lambda_n =]-n, n[^d$ et on introduit la loi ν_n par

$$\nu_n = \mu^{(b^{\Lambda_n^c})}\,.$$

On a alors $\nu_0 = \mu^{(b)}$. Montrons que pour tout $n \geq 0$, $\nu_{n+1} \ll \nu_n$:
Soit $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}}$ tel que $\nu_n(A) = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \nu_n(A) = \mu^{(b^{\Lambda_n^c})}(A) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{\Lambda_{n+1}^c}} \pi_{\Lambda_{n+1}}(A - b^{\Lambda_n^c}, \xi)\, \mu_{\Lambda_{n+1}^c}(d\xi) \end{aligned}$$

donc

$$\pi_{\Lambda_{n+1}}(A - b^{\Lambda_n^c}, \xi) = 0 \qquad \mu_{\Lambda_{n+1}^c}\text{- p.s.}$$

Or

$$\begin{aligned} \pi_{\Lambda_{n+1}}(A - b^{\Lambda_n^c}, \xi) &= \int_{A - b^{\Lambda_n^c}} \frac{1}{Z^{\phi}_{\Lambda_{n+1}}(\xi)} \exp[-H^{\phi}_{\Lambda_{n+1}}(\omega)]\, \lambda^{\Lambda_{n+1}} \otimes \delta_{\xi}(d\omega) \\ &= \int_A \frac{1}{Z^{\phi}_{\Lambda_{n+1}}(\xi)} \exp[-H^{\phi}_{\Lambda_{n+1}}(\omega - b^{\Lambda_n^c})] \\ &\qquad\qquad \lambda^{\Lambda_{n+1}} \otimes \delta_{(\xi + b_{\Lambda_{n+1}^c})}(d\omega) \end{aligned}$$

car la projection de $b^{\Lambda_n^c}$ sur $\Omega_{\Lambda_{n+1}^c}$ n'est autre que $b_{\Lambda_{n+1}^c}$. Remarquons que c'est aussi celle de $b^{\Lambda_{n+1}^c}$. On obtient donc que

$$\lambda^{\Lambda_{n+1}} \otimes \delta_{(\xi + b_{\Lambda_{n+1}^c})}(A) = 0 \qquad \mu_{\Lambda_{n+1}^c}\text{- p.s.}$$

D'autre part,

$$\nu_{n+1}(A) = \mu^{(b^{\Lambda_{n+1}^c})}(A) = \int_{\mathbb{R}^{\Lambda_{n+1}^c}} \pi_{\Lambda_{n+1}}(A - b^{\Lambda_{n+1}^c}, \xi)\, \mu_{\Lambda_{n+1}^c}(d\xi)\,.$$

D'où

$$\begin{aligned} \pi_{\Lambda_{n+1}}(A - b^{\Lambda_{n+1}^c}, \xi) &= \int_{A - b^{\Lambda_{n+1}^c}} \frac{1}{Z^{\phi}_{\Lambda_{n+1}}(\xi)} \exp[-H^{\phi}_{\Lambda_{n+1}}(\omega)]\, \lambda^{\Lambda_{n+1}} \otimes \delta_{\xi}(d\omega) \\ &= \int_A \frac{1}{Z^{\phi}_{\Lambda_{n+1}}(\xi)} \exp[-H^{\phi}_{\Lambda_{n+1}}(\omega - b^{\Lambda_{n+1}^c})] \\ &\qquad\qquad \lambda^{\Lambda_{n+1}} \otimes \delta_{(\xi + b_{\Lambda_{n+1}^c})}(d\omega) \\ &= 0 \qquad \mu_{\Lambda_{n+1}^c}\text{- p.s.} \end{aligned}$$

On obtient donc que $\nu_{n+1} \ll \nu_n$. Par récurrence, on a donc pour tout $n \geq 1$:

$$\nu_n \ll \mu^{(b)}\,.$$

D'autre part, $\nu_n \xrightarrow{var} \mu$ puisque $\|\nu_n - \mu\| \leq k\,(\sum_{i \notin \Lambda_n} b_i^2)^{\frac{1}{2}} \to 0$ car c'est la série-reste d'une série convergente, k étant une constante finie. D'après le lemme 1.2.7, on a alors $\mu \ll \mu^{(b)}$. En remarquant que $\mu = (\mu^{(b)})^{(-b)}$, on obtient de même que $\mu^{(b)} \ll \mu$, d'où l'équivalence de μ et $\mu^{(b)}$.

■

Chapitre 4

Principe d'invariance local

4.1 Introduction

Le but est d'obtenir un théorème limite local pour des fonctionnelles de processus gibbsiens, dont le potentiel vérifie une des conditions qui apparaissent dans le chapitre précédent.

Considérons une suite de processus aléatoires $(X_n(t), t \in T)$ dont les trajectoires appartiennent presque sûrement à un espace fonctionnel $\mathbb{X}$ et notons P_n la loi du processus X_n. Si f est une application mesurable de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$, il est démontré dans [5] que sous certaines conditions, $P_n f^{-1}$ converge en variation.

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction générale, Y. Davydov s'est intéressé au processus polygonal ou en escalier X_n obtenu à partir d'une suite de v.a.i.i.d. $\xi = (\xi_k, k \in \mathbb{N}^*)$ définies sur un espace probabilisé et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, telle que $E(\xi_k) = 0$ et $\text{var}(\xi_k) = \sigma^2 < \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Soit P_n la loi de X_n dans l'espace approprié ($\mathcal{C}[0,1]$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ ou $\mathcal{D}[0,1]$ l'espace de Skorohod). D'après le principe d'invariance de Donsker-Prokhorov, P_n converge faiblement vers la loi de W. En imposant certaines conditions sur les variables ξ_k et pour une classe particulière de fonctions f, on obtient que

$$P_n f^{-1} \xrightarrow{\text{var}} W f^{-1}.$$

Dans notre cas, X_n sera le processus en escalier obtenu à partir d'un champ aléatoire gibbsien sur $\mathbb{Z}^d$ avec un potentiel vérifiant certaines restrictions, dont celles des théorèmes 3.3.15, 3.3.19 ou 3.3.27. Ce sera donc une des conditions suivantes.

($\mathbf{F_r}$) Le potentiel est de portée finie r et tel que $\mathrm{E}_\mu(Y_i^2) < \infty$. On rappelle que Y_i est défini par

$$Y_i = \frac{\partial H_i^\phi}{\partial \omega_i}.$$

($\mathbf{D_s}$) Il existe une semi-métrique s sur $\mathbb{Z}^d$ invariante par translation — notée $s(i,j) = s(i-j)$ — telle que

$$(i) \qquad C_1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} C_{0j}\, e^{s(j)} < 1\,,$$

$$(ii) \qquad C_2 = \sum_{\substack{A \in \mathcal{S} \\ A \ni 0}} |A|^{\frac{1}{2}}\, \delta\Big(\frac{\partial \phi_A}{\partial \omega_0}\Big)\, \exp[s(A)] < \infty\,,$$

$$(iii) \qquad C_3 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \exp[-s(k)] < \infty\,.$$

($\mathbf{D}_\alpha$) Il existe une fonction $\alpha : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ telle que $|\mathrm{E}_\mu(Y_iY_j)| \le \alpha(i-j)$ et

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \alpha(k) < \infty.$$

Mais avant de présenter des résultats, il est nécessaire de définir correctement le processus en escalier ainsi que l'espace dans lequel on le considère.

4.1.1 Définition du processus en escalier

Rappelons que pour $d \ge 1$, l'ordre sur $[0,1]^d$ est le suivant : pour s, t dans $[0,1]^d$, $s = (s^{(1)}, \ldots, s^{(d)})$, $t = (t^{(1)}, \ldots, t^{(d)})$, on écrit $s < t$ (respectivement $s \le t$) si $s^{(i)} < t^{(i)}$ (respectivement $s^{(i)} \le t^{(i)}$) pout tout $i = 1, \ldots, d$. Pour $t_1, t_2 \in [0,1]^d$, $t_1 < t_2$, $[t_1, t_2[$ est l'intervalle d-dimensionnel

$$[t_1, t_2[= \prod_{i=1}^{d} [t_1^{(i)}, t_2^{(i)}[\,.$$

Enfin, pour $t \in [0,1]^d$, $|t| = \max_{1 \le i \le d} |t^{(i)}|$.

On définit alors l'espace métrique $(\mathbb{X}, \rho)$ de la façon suivante : ρ est la distance uniforme et $\mathbb{X}$ la fermeture uniforme, dans l'espace des fonctions bornées de $[0,1]^d$ dans $\mathbb{R}$, de $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, où E_n est l'espace vectoriel engendré par les fonctions en escalier sur $[0,1]^d$ constantes sur les pavés du type

$$I_n = \Big[\frac{k^{(1)}}{n}, \frac{k^{(1)}+1}{n}\Big[\times \cdots \times \Big[\frac{k^{(d)}}{n}, \frac{k^{(d)}+1}{n}\Big[. \tag{4.1}$$

L'intérêt de cet espace est qu'il est séparable, complet (voir par exemple [26], p. 118, problèmes [1] et [2]) et c'est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{D}$, version multi-paramétrique des fonctions « cad-lag »que nous définirons dans le paragraphe 4.2.2. Ces propriétés seront nécessaires à l'obtention du principe d'invariance local que nous énoncerons ultérieurement.

Considérons alors sur $\mathbb{Z}^d$ un champ aléatoire réel $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}^d\}$. L'espace probabilisé correspondant est $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, où $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par les ensembles cylindriques et μ la distribution de $\xi = \{\xi_n, n \in \mathbb{Z}^d\}$. On note $\mathcal{I}$ la tribu des sous-ensembles invariants de Ω :

$$\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{F} : \tau_m(A) = A, \text{ pour tout } m \in \mathbb{Z}^d\},$$

Définition 4.1.1. *Le champ aléatoire $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}^d\}$ est invariant par translation (homogène) si $\mu \circ \tau_m^{-1} = \mu$ pour tout $m \in \mathbb{Z}^d$.*

Supposons donc que le champ aléatoire ξ soit invariant par translation et que $0 < \sigma^2 < \infty$, où $\sigma^2 = \mathrm{E}(\xi_0^2)$. On pose alors

$$X_n(t) = \frac{1}{\sigma n^{d/2}} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ 0 < k \leq [nt]}} \xi_k \quad t \in [0,1]^d, n \in \mathbb{N}, \tag{4.2}$$

où $[nt] = ([nt^{(1)}], \ldots, [nt^{(d)}])$ et $[\cdot]$ désigne la partie entière d'un nombre. X_n est le processus en escalier, à trajectoires dans $\mathbb{X}$, obtenu à partir de ξ et on notera P_n sa loi dans $\mathbb{X}$.

Nous allons tout d'abord présenter un théorème limite local pour les fonctionnelles de processus aléatoires, dû à Y. Davydov [5]. Cela nous permettra ensuite d'obtenir le principe d'invariance désiré, dans le cas gibbsien. Dans ce qui suit, on dira que f est une fonctionnelle si c'est une fonction mesurable de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{R}$; l'ensemble $\Delta = \{x + c\ell, c \in [a,b]\}, x, \ell \in \mathbb{X}, a, b \in \mathbb{R}$ est appelé segment parallèle au vecteur ℓ et on utilise alors la notation $\Delta || \ell$.

4.1.2 Un théorème limite local

Dans ce paragraphe et dans le suivant, $(\mathbb{X}, \rho)$ peut être n'importe quel espace. Ce n'est pas forcément celui que l'on vient de définir.

Théorème 4.1.2. *On considère $(P_n, n \in \overline{\mathbb{N}})$ une suite de mesures de probabilité sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{X}}$ d'un espace vectoriel métrique séparable complet $(\mathbb{X}, \rho)$, et f une fonctionnelle.*

On suppose que $P_n \Rightarrow P_\infty$ et que pour P_∞-presque tout $x \in \mathbb{X}$, il existe une boule ouverte B de centre x, un nombre $\varepsilon > 0$ et $(G_{c,n}, c \in]0, \varepsilon], n \in \overline{\mathbb{N}})$ une famille de transformations de $\mathbb{X}$, tels que

1. *pour tout* $c \in]0, \varepsilon]$:
$$G_{c,n}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} G_{c,\infty}x, \text{ en mesure } P_n,$$
2. *la transformation* $G_{c,\infty}$ *est continue pour tout* $c \in]0, \varepsilon[$ *et, pour toute boule* S,
$$d(S,c) = \sup_{z\in S} \rho(z, G_{c,\infty}z) \underset{c\to 0}{\longrightarrow} 0\,,$$
3. $\limsup_n \|P_n G_{c,n}^{-1} - P_n\| \underset{c\to 0}{\longrightarrow} 0\,,$
4. *pour tout* $\delta \in]0, \varepsilon[$,
$$\int_B \|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{z,n}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{z,\infty}^{-1}\|\, P_n(dz) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$
où $\varphi_{z,n}(c) = f(G_{c,n}z)$, $c \in]0, \varepsilon]$, $n \in \overline{\mathbb{N}}$,
5. *pour tout* $\delta \in]0, \varepsilon[$, *l'application* $z \mapsto \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{z,\infty}^{-1}$ *de* B *dans* $\mathbb{Z}(\mathbb{R})$, *l'espace de Banach des mesures finies sur* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ *muni de la norme de la variation totale, est continue* P_∞*-presque sûrement.*

On a alors :
$$P_n f^{-1} \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{var}} P_\infty f^{-1}\,.$$

La condition *1* signifie que pour tout $\epsilon > 0$, on a
$$\lim_{n\to\infty} P_n\{|G_{c,n} - G_{c,\infty}| > \epsilon\} = 0\,.$$

La condition *2* traduit le fait que pour des petits c, les applications $G_{c,n}$ sont proches de l'identité sur des ensembles bornés.

La condition *3* indique que les perturbations de P_n par les applications $G_{c,n}$ sont uniformément petites pour des petits c.

En ce qui concerne les deux dernières conditions, il est évident que toute fonctionnelle f ne peut convenir. C'est pourquoi nous allons définir une classe $\mathcal{M}_P$ de fonctions qui satisfont à ces hypothèses.

4.1.3 La classe de fonctions $\mathcal{M}_P$

L'espace $\mathbb{X}$ est encore ici un espace vectoriel métrique séparable complet. On rappelle par ailleurs que H_P est l'espace des directions admissibles pour la mesure P.

Définition 4.1.3. *Une fonctionnelle f appartient à la classe $\mathcal{M}(x, l, (l_n))$, où $x, l \in \mathbb{X}$ et $l_n \to l$, s'il existe un voisinage V de x tel que pour P-presque tout $y \in V$ et tout $\Delta = \{y + c\,l,\ c \in [a, b]\}$, on ait*

$$\left.\begin{array}{l} \Delta \subset V \\ \Delta_n \parallel l_n \\ \Delta_n \to \Delta \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda f_{\Delta_n}^{-1} \xrightarrow{var} \lambda f_{\Delta}^{-1},$$

où $f_\Delta(c) = f(y + c\,l)$, $c \in [a, b]$.

Définition 4.1.4. *Une fonctionnelle f appartient à la classe $\mathcal{M}_P$, P étant une mesure sur $\mathbb{X}$, si pour P-presque tout $x \in \mathbb{X}$, il existe $\ell \in H_P$ tel que $f \in \mathcal{M}(x, \ell, (\ell_n))$ quelque soit la suite (ℓ_n) qui converge vers ℓ.*

A première vue, la classe $\mathcal{M}_P$ paraît assez difficile à cerner. Cependant, on peut donner des exemples explicites de fonctions y appartenant, lorsque $P = W$. On peut trouver dans [7] et [8] plusieurs exemples de fonctionnelles qui appartiennent à $\mathcal{M}_W$.

Exemples 4.1.5. *Citons les plus usuelles :*

Ex 1 : *pour tout $t_0 \in [0, 1]^d$,*

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x(t_0), \end{aligned}$$

Ex 2 :

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sup_{[0,1]^d} x(t), \end{aligned}$$

Ex 3 :

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sup_{[0,1]^d} |x(t)|, \end{aligned}$$

Ex 4 : *Pour toute fonction g strictement convexe continue sur $\mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} f_4 : \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sup_{[0,1]^d} g(x(t)), \end{aligned}$$

Ex 5 :

$$\begin{aligned} f_5 : \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{[0,1]^d} q(x(t))\, \nu(dt), \end{aligned}$$

où ν est une mesure finie sur $\mathcal{B}([0,1]^d)$ et q une fonction mesurable vérifiant par exemple la condition suivante : si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un intervalle ouvert $\mathcal{O} \subset]-\epsilon, \epsilon[$ sur lequel q' est continue et ne s'annule pas, alors $f_5 \in \mathcal{M}_W$.

4.2 Principe d'invariance local pour des champs aléatoires gibbsiens

On suppose ici que $\xi = \{\xi_k, k \in \mathbb{Z}^d\}$ est un champ aléatoire gibbsien invariant par translation tel que $0 < \sigma^2 < \infty$, où $\sigma^2 = \mathbb{E}(\xi_0^2)$. X_n est le processus en escalier obtenu à partir de ξ, défini par l'égalité (4.2) et dont les trajectoires sont dans l'espace métrique séparable complet $\mathbb{X}$ défini au paragraphe 4.1.1. Rappelons que l'on note P_n la loi de X_n.

4.2.1 Théorème principal

Théorème 4.2.1. *Soit ξ un champ gibbsien associé à un potentiel satisfaisant une des trois conditions $(\mathbf{F_r})$, $(\mathbf{D_s})$ ou $(\mathbf{D_\alpha})$ et tel que $P_n \Rightarrow W$. On a alors :*

$$\forall f \in \mathcal{M}_W, \quad P_n f^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{var} W f^{-1}.$$

Preuve : Tout d'abord, précisons quelques notations. Pour bien distinguer les éléments 1–dimensionnels de ceux d–dimensionnels, on notera ces derniers en gras tout au long de cette démonstration : $\mathbf{k} = (k^{(1)}, \dots, k^{(d)})$ pour un élément de $\mathbb{Z}^d$ et $\mathbf{t} = (t^{(1)}, \dots, t^{(d)})$ pour un élément de $[0,1]^d$. Enfin, on pose $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^d$ et $\mathbf{n} = n\mathbf{1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

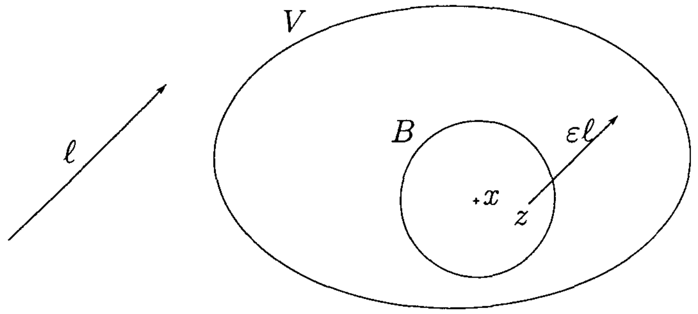
Nous avons supposé que $P_n \Rightarrow P_\infty = W$ dans $(\mathbb{X}, \rho)$. D'autre part, f appartient à $\mathcal{M}_W$ donc il existe $\mathbb{X}_0$ tel que $W(\mathbb{X}_0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{X}_0$, il existe $\ell \in H_W$ tel que $f \in \mathcal{M}(x, \ell, (\ell_n))$. Autrement dit :
$\forall x \in \mathbb{X}_0, \exists\, \ell \in H_W, \exists\, V$ voisinage de x tels que pour W–presque tout $z \in V$, $\forall\, \Delta = \{z + c\,\ell,\ c \in [a,b]\}$:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta \in V \\ \Delta_n \parallel \ell_n \\ \Delta_n \to \Delta \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda f_{\Delta_n}^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{var} \lambda f_\Delta^{-1}.$$

D'autre part, $\ell \in H_W$ donc d'après le théorème 1.2.3, il existe $h \in L^2([0,1]^d, \lambda^d)$ tel que

$$\ell(\mathbf{t}) = \int_0^{\mathbf{t}} h(\mathbf{s})\, \lambda^d(d\mathbf{s}), \quad \mathbf{t} \in [0,1]^d.$$

Nous allons utiliser le théorème 4.1.2 : soit $x \in \mathbb{X}_0$; on choisit la boule B et le nombre ε tels que $W(\partial B) = 0$, $B \subset V$ et pour tout $z \in B$, $\Delta = \{z + c\,\ell,\ c \in [0, \varepsilon]\} \subset V$:



Cela n'apparaît pas dans les notations, mais remarquons que $\ell, (\ell_n)$ et ε dépendent de x. Il nous reste à définir les transformations $G_{c,n}$. Pour cela, choisissons ℓ_n comme étant la fonction en escalier passant par les points $(\mathbf{k}/n, \ell(\mathbf{k}/n))$:

$$\ell_n(\mathbf{t}) = \sum_{0 \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \ell(\frac{\mathbf{k}}{n})\, \mathbb{I}_{[\mathbf{k},\mathbf{k}+\mathbf{1})}(\mathbf{t})\,, \quad \mathbf{t} \in [0,1]^d.$$

On définit alors les $G_{c,n}$ par :

$$\begin{aligned} G_{c,n}(x) &= x + c\,\ell_n\,, \\ G_{c,\infty}(x) &= x + c\,\ell\,. \end{aligned}$$

Vérifions que les cinq conditions du théorème 4.1.2 sont réalisées.

Condition 1 : Pour tout $c \in (0, \varepsilon]$, on a

$$G_{c,n}(y) = y + c\,\ell_n \to y + c\,\ell$$

i.e. $G_{c,n}(y) \to G_{c,\infty}(y)$ ponctuellement donc en mesure P_n.

Condition 2 : La transformation $G_{c,\infty}$ est continue pour tout $c \in (0, \varepsilon]$

puisque c'est une translation, et pour toute boule $S \subset \mathbb{X}$,

$$\begin{aligned} d(S,c) &= \sup_{z\in S} \rho(z, G_{c,\infty} z) \\ &= \sup_{z\in S} \sup_{\mathbf{t}\in[0,1]^d} |z(\mathbf{t}) - (z(\mathbf{t}) + c\,\ell(\mathbf{t}))| \\ &= \sup_{z\in S} \sup_{\mathbf{t}\in[0,1]^d} |c\,\ell(\mathbf{t})| \\ &= c \sup_{\mathbf{t}\in[0,1]^d} |c\,\ell(\mathbf{t})| \\ &= c\,\|\ell\| \underset{c\to 0}{\longrightarrow} 0\,. \end{aligned}$$

Condition 3 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application J_n de E_n dans $(\mathbb{R}^d)^n$ par

$$\begin{aligned} J_n : \quad E_n &\longrightarrow (\mathbb{R}^d)^n \\ e_n &\longmapsto n^{d/2}\sigma \Big(\sum_{i=0}^{d} (-1)^i \sum_{\mathbf{s}\in S_i} e_n\big(\frac{\mathbf{k}-\mathbf{s}}{n}\big)\Big)_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}} \end{aligned}$$

avec $S_i = \{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d$ tel que $s^{(j)} = 1$ pour i indices et $s^{(j)} = 0$ pour les autres $\}$.
Nous avons alors le résultat suivant :

Lemme 4.2.2.

$$J_n X_n = (\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}}\,.$$

Preuve : Nous allons effectuer une récurrence sur d.
(i) pour $d = 1$, J_n est définie par :

$$J_n : \quad e_n \longmapsto \sqrt{n}\,\sigma \Big(e_n\big(\frac{k}{n}\big) - e_n\big(\frac{k-1}{n}\big)\Big)_{1\le k\le n}$$

Pour tout $1 \le k \le n$, on a donc

$$\begin{aligned} (J_n X_n)_k &= \sqrt{n}\,\sigma \Big(\frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma}\sum_{j=1}^{k} \xi_j - \frac{1}{\sqrt{n}\,\sigma}\sum_{j=1}^{k-1} \xi_j\Big) \\ &= \xi_k \end{aligned}$$

(ii) supposons la propriété vraie jusqu'au rang $d-1$ et montrons qu'elle l'est au rang d. Pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, on a :

$$
\begin{aligned}
(J_n X_n)_{\mathbf{k}} &= \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \sum_{\mathbf{s}\in S_i} \sum_{0<\mathbf{j}\leq \mathbf{k}-\mathbf{s}} \xi_{\mathbf{j}} \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i \sum_{\substack{\mathbf{s}\in S_i \\ s^{(d)}=0}} \sum_{0<\mathbf{j}\leq \mathbf{k}-\mathbf{s}} \xi_{\mathbf{j}} + \sum_{i=1}^{d} (-1)^i \sum_{\substack{\mathbf{s}\in S_i \\ s^{(d)}=1}} \sum_{0<\mathbf{j}\leq \mathbf{k}-\mathbf{s}} \xi_{\mathbf{j}} \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i \sum_{\substack{\mathbf{s}\in S_i \\ s^{(d)}=0}} \sum_{p=1}^{k^{(d)}} \sum_{\substack{0<\mathbf{j}\leq \mathbf{k}-\mathbf{s} \\ j^{(d)}=p}} \xi_{\mathbf{j}} + \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^i \sum_{\substack{\mathbf{s}\in S_i \\ s^{(d)}=0}} \sum_{0<\mathbf{j}\leq \mathbf{k}'-\mathbf{s}} \xi_{\mathbf{j}} \\
&\qquad \text{où } \mathbf{k}' = \mathbf{k} - (0,\ldots,0,1) \\
&= \sum_{p=1}^{k^{(d)}} \underbrace{\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i \sum_{\substack{\mathbf{s}\in S_i \\ s^{(d)}=0}} \sum_{\substack{0<\mathbf{j}\leq \mathbf{k}-\mathbf{s} \\ j^{(d)}=p}} \xi_{\mathbf{j}}}_{\substack{\xi_{(k^{(1)},\ldots,k^{(d-1)},p)} \\ \text{par hypothèse de récurrence}}} + \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{i+1} \sum_{\substack{\mathbf{s}\in S_i \\ s^{(d)}=0}} \sum_{0<\mathbf{j}\leq \mathbf{k}'-\mathbf{s}} \xi_{\mathbf{j}} \\
&= \sum_{p=1}^{k^{(d)}} \xi_{(k^{(1)},\ldots,k^{(d-1)},p)} - \underbrace{\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i \sum_{\substack{\mathbf{s}\in S_i \\ s^{(d)}=0}} \sum_{0<\mathbf{j}\leq \mathbf{k}'-\mathbf{s}} \xi_{\mathbf{j}}}_{\substack{\sum_{p=1}^{k'^{(d)}} \xi_{(k'^{(1)},\ldots,k'^{(d-1)},p)} \\ \text{de la même façon}}} \\
&= \sum_{p=1}^{k^{(d)}} \xi_{(k^{(1)},\ldots,k^{(d-1)},p)} - \sum_{p=1}^{k^{(d)}-1} \xi_{(k^{(1)},\ldots,k^{(d-1)},p)} \\
&= \xi_{(k^{(1)},\ldots,k^{(d)})},
\end{aligned}
$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

□

Or J_n est bijective, donc

$$\|P_n G_{c,n}^{-1} - P_n\| = \|P_n G_{c,n}^{-1} J_n^{-1} - P_n J_n^{-1}\|.$$

D'autre part, $P_n J_n^{-1}$ est la loi de $J_n X_n = (\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{1}\leq\mathbf{k}\leq\mathbf{n}}$ et $P_n G_{c,n}^{-1} J_n^{-1}$ est la loi de $J_n\, G_{c,n} X_n$, que nous allons préciser.

$$\begin{aligned} J_n\, G_{c,n} X_n &= J_n(X_n + c\,\ell_n) \\ &= n^{d/2}\sigma\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\sigma\, n^{d/2}} + c\sum_{i=0}^{d}(-1)^i \sum_{\mathbf{s}\in S_i} \ell\left(\frac{\mathbf{k}-\mathbf{s}}{n}\right)\right)_{\mathbf{1}\leq\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} \\ &= (\xi_{\mathbf{k}} + c\, a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{1}\leq\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} \end{aligned}$$

avec

$$a_{\mathbf{k}} = n^{d/2}\sigma\sum_{i=0}^{d}(-1)^i \sum_{\mathbf{s}\in S_i} \ell\left(\frac{\mathbf{k}-\mathbf{s}}{n}\right).$$

On obtient donc que $\|P_n G_{c,n}^{-1} - P_n\| = \|\mathcal{P}_n^{(ca)} - \mathcal{P}_n\|$ où $\mathcal{P}_n$ est la loi de $(\xi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{1}\leq\mathbf{k}\leq\mathbf{n}}$ et $a = (a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{1}\leq\mathbf{k}\leq\mathbf{n}}$. D'après le théorème 3.3.15, 3.3.19 ou 3.3.27, on a alors :

$$\|P_n G_{c,n}^{-1} - P_n\| \leq K\, c\left(\sum_{\mathbf{1}\leq\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} a_{\mathbf{k}}^2\right)^{1/2}$$

avec K constante finie. D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}} &= n^{d/2}\sigma\sum_{i=0}^{d}(-1)^i \sum_{\mathbf{s}\in S_i} \ell\left(\frac{\mathbf{k}-\mathbf{s}}{n}\right) \\ &= n^{d/2}\sigma\sum_{i=0}^{d}(-1)^i \sum_{\mathbf{s}\in S_i} \int_0^{\frac{\mathbf{k}-\mathbf{s}}{n}} h(\mathbf{t})\, \lambda^d(dt). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que :

Lemme 4.2.3.

$$a_{\mathbf{k}} = n^{d/2}\sigma\int_{\frac{\mathbf{k}-\mathbf{1}}{n}}^{\frac{\mathbf{k}}{n}} h(\mathbf{t})\, \lambda^d(dt)$$

Preuve : On procède par récurrence sur d : la démonstration est identique à celle du lemme précédent, en remplaçant $\sum_{\mathbf{0}\leq\mathbf{j}\leq\mathbf{k}-\mathbf{s}} \xi_{\mathbf{j}}$ par $\int_0^{\mathbf{k}-\mathbf{s}/n} h(\mathbf{t})\, \lambda^d(dt)$.
(i) pour $d = 1$:

$$\begin{aligned} a_k &= n^{d/2}\sigma\int_0^{\frac{k}{n}} h(t)\, dt - \int_0^{\frac{k-1}{n}} h(t)\, dt \\ &= n^{d/2}\sigma\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(t)\, dt \end{aligned}$$

(ii) supposons la propriété vraie jusqu'au rang $d-1$ et montrons qu'elle l'est au rang d :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{\mathbf{k}}}{n^{d/2}\sigma} &= \sum_{i=0}^{d}(-1)^i \sum_{\mathbf{s}\in S_i} \int_0^{\frac{\mathbf{k}-\mathbf{s}}{n}} h(\mathbf{t})\,\lambda^d(d\mathbf{t}) \\
&= \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i \sum_{\substack{\mathbf{s}\in S_i\\ s^{(d)}=0}} \int_0^{\frac{\mathbf{k}-\mathbf{s}}{n}} h(\mathbf{t})\,\lambda^d(d\mathbf{t}) + \sum_{i=1}^{d}(-1)^i \sum_{\substack{\mathbf{s}\in S_i\\ s^{(d)}=1}} \int_0^{\frac{\mathbf{k}-\mathbf{s}}{n}} h(\mathbf{t})\,\lambda^d(d\mathbf{t}) \\
&= \int_0^{\frac{k^{(d)}}{n}} \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i \sum_{\substack{\mathbf{s}\in S_i\\ s^{(d)}=0}} \int_\Pi h(\mathbf{t})\,\lambda^{d-1}(dt^{(1)},\ldots,dt^{(d-1)}) \quad \lambda(dt^{(d)}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d}(-1)^i \sum_{\substack{\mathbf{s}\in S_{i-1}\\ s^{(d)}=0}} \int_0^{\frac{\mathbf{k}'-\mathbf{s}}{n}} h(\mathbf{t})\,\lambda^d(d\mathbf{t}), \quad \text{où } \Pi = \prod_{j=1}^{d-1}\Big[0, \frac{k^{(j)}-s^{(j)}}{n}\Big].
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence pour la première partie et en effectuant un changement de variable dans la seconde, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{\mathbf{k}}}{n^{d/2}\sigma} &= \int_0^{\frac{k^{(d)}}{n}} \int_\Delta h(\mathbf{t})\,\lambda^{d-1}(dt^{(1)},\ldots,dt^{(d-1)}) \quad \lambda(d\mathbf{t}^{(d)}) \\
&\quad - \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i \sum_{\substack{\mathbf{s}\in S_i\\ s^{(d)}=0}} \int_0^{\frac{\mathbf{k}'-\mathbf{s}}{n}} h(\mathbf{t})\,\lambda^d(d\mathbf{t}), \quad \text{où } \Delta = \prod_{j=1}^{d-1}\Big[\frac{k^{(j)}-1}{n}, \frac{k^{(j)}}{n}\Big] \\
&= \int_0^{\frac{k^{(d)}}{n}} \int_\Delta h(\mathbf{t})\,\lambda^{d-1}(dt^{(1)},\ldots,dt^{(d-1)}) \quad \lambda(dt^{(d)}) \\
&\quad - \int_0^{\frac{k^{(d)}-1}{n}} \int_\Delta h(\mathbf{t})\,\lambda^{d-1}(dt^{(1)},\ldots,dt^{(d-1)})\,\lambda(dt^{(d)}) \text{ de la même façon} \\
&= \int_{\frac{\mathbf{k}-\mathbf{1}}{n}}^{\frac{\mathbf{k}}{n}} h(\mathbf{t})\,\lambda^d(d\mathbf{t}),
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

□

On obtient finalement :

$$\|P_n G_{c,n}^{-1} - P_n\| \le K\,c\,\sigma\Big[n^d \sum_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{n}} \Big(\int_{\frac{\mathbf{k}-\mathbf{1}}{n}}^{\frac{\mathbf{k}}{n}} h(\mathbf{t})\,\lambda^d(d\mathbf{t})\Big)^2\Big]^{1/2}.$$

Il ne reste plus qu'à étudier l'expression à droite de l'inégalité pour pouvoir conclure.

Lemme 4.2.4.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^d \sum_{1 \leq k \leq n} \Big(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(t)\, \lambda^d(dt) \Big)^2 \leq \|h\|_2^2 \,. \tag{4.3}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} n^d \sum_{1 \leq k \leq n} \Big(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(t)\, \lambda^d(dt) \Big)^2 &= \frac{1}{n^d} \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h(t)\, \frac{\lambda^d(dt)}{(\frac{1}{n})^d} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{n^d} \sum_{1 \leq k \leq n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} h^2(t)\, \frac{\lambda^d(dt)}{(\frac{1}{n})^d} \\ &= \int_{[0,1]^d} h^2(t)\, \lambda^d(dt)\,. \end{aligned}$$

□

Nous aurions pu montrer qu'en fait, le membre de gauche dans (4.3) tend vers celui de droite quand n tend vers l'infini, mais la majoration obtenue suffit. On obtient finalement :

$$\limsup_n \|P_n G_{c,n}^{-1} - P_n\| \leq K\, c\, \sigma\, \|h\|_2\,,$$

donc

$$\limsup_n \|P_n G_{c,n}^{-1} - P_n\| \underset{c \to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Condition 4 : Nous allons ici utiliser le lemme suivant de Billingsley ([1], p. 34, théorème 5.5).

Lemme 4.2.5. *Si $P_n \Rightarrow P$ et $P(D) = 1$, où D est l'ensemble des z tels que pour toute suite (z_n) qui converge vers z, $g_n(z_n)$ tende vers $g(z)$, alors $\int g_n\, dP_n \to \int g\, dP$.*

Nous allons l'appliquer à $P = W$, $g_n(y) = \|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{y,n}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{y,\infty}^{-1}\|\, \mathbb{1}_B(y)$ et $g \equiv 0$. On a supposé que $P_n \Rightarrow W$; il reste à montrer que pour W-presque tout z, $g_n(z_n) \to g(z)$ pour toute suite (z_n) qui converge vers z.
Rappelons alors que nous avons choisi, au début de la preuve, $\ell \in H_W$ et V voisinage de x tels que pour W-presque tout z, $\forall\, \Delta = \{z + c\ell,\ c \in [a,b]\}$, on ait

$$\left.\begin{array}{l} \Delta \subset V \\ \Delta_n \parallel \ell_n \\ \Delta_n \to \Delta \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda f_{\Delta_n}^{-1} \xrightarrow{var} \lambda f_{\Delta}^{-1}\,.$$

Prenons $\Delta = \{z + c\ell,\, c \in [0,\delta]\}$ et $\Delta_n = \{z_n + c\ell_n,\, c \in [0,\delta]\}$. Grâce au choix de B et ε, on a $\Delta \subset V$ si $z \in B$; donc pour W-presque tout $z \in B$:

$$\begin{aligned}&\Delta \subset V\,,\\ &\Delta_n \parallel \ell_n\,,\\ &\Delta_n \to \Delta\,.\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\lambda f_{\Delta_n}^{-1} \xrightarrow{var} \lambda f_{\Delta}^{-1}$$

i.e.

$$\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{z_n,n}^{-1} \xrightarrow{var} \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{z,\infty}^{-1}\,.$$

On peut effectuer le même raisonnement en posant cette fois $\Delta_n = \{z_n + c\ell,\, c \in [0,\delta]\}$ et on obtient que pour W-presque tout $z \in B$,

$$\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{z_n,\infty}^{-1} \xrightarrow{var} \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{z,\infty}^{-1}$$

d'où pour W-presque tout $z \in B$:

$$\|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{z_n,n}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{z_n,\infty}^{-1}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

D'autre part, $\mathbb{I}_B(z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ si z n'appartient pas à $(B \cup \partial B)$, donc pour W-presque tout z n'appartenant pas à B puisque $W(\partial B) = 0$.

On obtient finalement, pour W-presque tout z, la convergence vers 0 de $g_n(z_n)$ pour toute suite z_n tendant vers z. Donc grâce au lemme 4.2.5,

$$\int_B \|\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{z,n}^{-1} - \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{z,\infty}^{-1}\|\, P_n(dz) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Condition 5 : Soit (z_n) une suite qui converge vers z dans B ; montrons que

$$\lambda_{[0,\delta]}\varphi_{z_n,\infty}^{-1} \xrightarrow{var} \lambda_{[0,\delta]}\varphi_{z,\infty}^{-1}\,.$$

C'est exactement ce qui a été fait précédemment, en prenant $\Delta = \{z + c\ell,\, c \in [0,\delta]\}$ et $\Delta_n = \{z_n + c\ell,\, c \in [0,\delta]\}$.

∎

4.2.2 Cas d'un potentiel ultra-pair

L'espace $\mathbb{X}$ est la fermeture uniforme de l'espace vectoriel des fonctions en escalier constantes sur les intervalles I_n définis par (4.1). Considérons maintenant la fermeture uniforme, dans l'espace des fonctions bornées de $[0,1]^d$ dans $\mathbb{R}$, de l'espace vectoriel formé de toutes les fonctions en escalier. Cet espace, noté $\mathbb{D}$, constitue une version multi-paramétrique des fonctions « càd-làg ». On introduit sur $\mathbb{D}$ une topologie métrique, coincidant avec la topologie de Skorohod si $d = 1$, qui en fait un espace métrique séparable complet (pour plus de précisions, on se rapportera à [32]). On l'appelle par analogie topologie de Skorohod. Considérons alors sur $\mathbb{Z}^d$ un champ aléatoire réel $\xi = \{\xi_n, n \in \mathbb{Z}^d\}$ invariant par translation. L'espace probabilisé correspondant est $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Définition 4.2.6. *Le champ aléatoire ξ invariant par translation est ergodique si μ est triviale sur la tribu des sous-ensembles invariants, c'est-à-dire $\mu(A) = 0$ ou 1 pour tout $A \in \mathcal{I}$.*

Nous allons par la suite nous intéresser plus particulièrement aux champs aléatoires gibbsiens dont le potentiel possède la propriété d'être « ultra-pair ».

Définition 4.2.7. *Un potentiel ϕ associé à une mesure de Gibbs μ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ est ultra-pair si pour tout $A \in \mathbb{Z}^d$ fini, on a*

$$\phi_A(x_k, k \in A) = \phi_A(\theta_k x_k, k \in A)\,, \quad \theta_k \in \{-1, 1\}\,.$$

Si ξ est un champ aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, on notera comme précédemment P_n la loi du processus en escalier sur $[0,1]^d$ défini par l'égalité (4.2). Le théorème suivant est dû à Poghosyan et Rœlly [25]. Il s'applique dans sa version originale à un champ aléatoire « différence de martingales », mais on sait grâce à [18] qu'un champ aléatoire gibbsien dont le potentiel est ultra-pair est différence de martingales.

Théorème 4.2.8. *Soit $\xi = \{\xi_k, k \in \mathbb{Z}^d\}$ un champ aléatoire gibbsien invariant par translation, ergodique, associé à un potentiel ϕ ultra-pair et tel que $0 < \sigma^2 < \infty$, où $\sigma^2 = \mathrm{E}(\xi_0^2)$. Alors*

$$P_n \Rightarrow W\,,$$

où P_n est la loi du processus en escalier obtenu à partir de ξ, défini par l'égalité (4.2) et W le processus de Wiener d-dimensionnel sur $[0,1]^d$.

La convergence obtenue a lieu dans $\mathbb{D}$ muni de la topologie de Skorohod. Il nous faut plus : on voudrait en fait que X_n converge vers W pour la topologie uniforme sur $\mathbb{D}$. On utilisera le symbole $[U]$ pour désigner la topologie uniforme et $[S]$ pour celle de Skorohod. Enfin, on notera $\mathcal{U}$ la tribu borélienne de $\mathbb{D}$ pour $[U]$ et $\mathcal{D}$ la tribu borélienne de $\mathbb{D}$ pour $[S]$. On a $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}$, et le théorème suivant, dont la démonstration présentée dans [1] (p. 151) lorsque $d = 1$ se généralise facilement à d quelconque.

Théorème 4.2.9. *Si P_n et P sont deux mesures définies sur $\mathcal{U}$ telles que*

$$\begin{cases} P_n \Rightarrow P & [S] \\ P(\mathcal{C}) = 1 \end{cases}$$

où $\mathcal{C}$ est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]^d$, alors

$$P_n \Rightarrow P \quad [U].$$

Preuve : Il suffit de reprendre celle de [1], le seul point à vérifier étant le suivant : si $x_n \to x$ $[S]$ et x continue sur $[0,1]^d$, alors $x_n \to x$ $[U]$. Cette propriété figure dans [32], ce qui achève la démonstration.

∎

4.2.3 Conclusion

Nous avons alors réuni des conditions pour lesquelles nous obtenons le principe d'invariance local voulu : il suffit par exemple que le processus gibbsien initial ξ vérifie les hypothèses du théorème 4.2.8 ainsi qu'une des trois conditions $(\mathbf{F_r})$, $(\mathbf{D_s})$ ou $(\mathbf{D}_\alpha)$. On peut donc énoncer le principe local d'invariance suivant.

Théorème 4.2.10. *Soit $\xi = \{\xi_k, k \in \mathbb{Z}^d\}$ un champ gibbsien invariant par translation, ergodique, associé à un potentiel ϕ ultra-pair, vérifiant une des conditions $(\mathbf{F_r})$, $(\mathbf{D_s})$ ou $(\mathbf{D}_\alpha)$ et tel que $0 < \mathrm{E}(\xi_0^2) < \infty$. Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{M}_W$, on a :*

$$P_n f^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{var} W f^{-1},$$

où P_n est la loi du processus en escalier obtenu à partir de ξ, défini par l'égalité (4.2) et W le processus de Wiener d-dimensionnel sur $[0,1]^d$.

Ces conditions sont suffisantes mais évidemment pas nécessaires. Il serait notamment intéressant de trouver une classe moins restreinte que celle des potentiels ultra-pairs, pour laquelle la convergence faible du processus en escalier vers le mouvement brownien d-dimensionnel a lieu.

On pourrait penser à introduire une condition de φ-mélange mais Dobrushin [9] a montré que celle-ci n'était pas vérifiée même pour des exemples simples de champs aléatoires gibbsiens. Dobrushin et Nahapetian [12] ont alors introduit la condition de φ-mélange non uniforme suivante.

Le champ aléatoire $\xi = \{\xi_k, k \in \mathbb{Z}^d\}$ de loi μ satisfait la condition de φ-mélange non uniforme si, pour tout $\Lambda, \Delta \in \mathcal{S}$, il existe une fonction réelle positive $\varphi_{|\Lambda|}(\cdot)$ ne dépendant que de $|\Lambda|$, telle que $\varphi_{|\Lambda|}(x) \to 0$ quand $x \to \infty$ et

$$\sup_{\substack{E\in\mathcal{F}_\Lambda, F\in\mathcal{F}_\Delta \\ \mu(F)>0}} |\mu(E|F) - \mu(E)| \leq \varphi_{|\Lambda|}\big(d(\Lambda, \Delta)\big)\,.$$

En particulier, elle est immédiatement vérifiée si la condition (i) de $(\mathbf{D_s})$ est satisfaite, pour certains choix de la semi-métrique s (voir [15], 158–159). D'autre part, Chen [3] puis Chuanrong [4] ont récemment obtenu un théorème de convergence faible pour des champs aléatoires non-uniformément φ-mélangeants. On peut donc espérer étendre les résultats présentés dans cette thèse en s'orientant dans cette direction.

Notations

Λ	un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$
σ_Λ	la projection sur $\mathbb{R}^\Lambda$
$\|\Lambda\|$	le cardinal de l'ensemble Λ
Λ^c	le complémentaire de Λ
$\imath$	le complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$
$[\cdot]$	la partie entière
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	une forme bilinéaire sur un espace vectoriel
$(\cdot,\cdot)$	un produit scalaire sur un espace de Hilbert
$\\|\cdot\\|$	une norme sur un espace de Hilbert
λ^Λ	la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^\Lambda$
δ_η	la mesure de Dirac en η
E_μ	l'espérance par rapport à μ
$\mathbb{I}_A$	la fonction indicatrice de l'évènement A
δ_{ik}	le symbole de Krönecker
$\ll$	absolue continuité entre deux mesures
$\sim$	équivalence de deux mesures
$\Rightarrow$	la convergence faible (ou en loi)
$\xrightarrow{var}$	la convergence en variation totale
$\blacksquare$	la fin d'une preuve
$\square$	la fin d'une démonstration intermédiaire

$\emptyset$	l'ensemble vide
$\mathcal{C}[0,1]$	l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$
$\mathcal{C}(\mathbb{T})$	l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{T}$
$\mathcal{D}[0,1]$	l'espace de Skorohod
ℓ^2	l'ensemble des suites de carré sommable
$\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$	l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ dans $\mathbb{R}$
$\mathbb{X}^*$	le dual d'un espace vectoriel topologique $\mathbb{X}$

W	le processus de Wiener

$\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$
$\Omega_\Lambda = \mathbb{R}^\Lambda$
$\mathcal{S} = \{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d, \mid \Lambda \mid < \infty\}$

$\mathbb{D}$	l'analogue multi-dimensionnel des fonctions cad-lag ...	p. 74
(ϕ_A)	potentiel d'interaction	p. 26
(H^ϕ_Λ)	Hamiltonien	p. 26
$Z\phi$	fonction de partition	p. 26
(π_Λ)	spécification locale	p. 27
$\gamma^{J,h}$	spécification gaussienne	p. 29
$C_{ij}(\pi)$	coefficient de Dobrushin	p. 28
$\mathcal{G}(\phi)$	l'ensemble des mesures de Gibbs associées à ϕ	p. 27
$P^{(b)}$	la tranlatée de la mesure P par le vecteur b	p. 7
H_P	l'espace des directions admissibles pour P	p. 7
$\mathcal{I}$	la tribu des ensembles invariants	p. 63
$M_{J,h}$	le noyau associé à une spécification gaussienne	p. 29
$\mathcal{M}_P$	classe de fonctionnelles	p. 65
$\mathcal{T}$	la tribu-queue	p. 29
$\mathbb{X}_P$	la fermeture de $\mathbb{X}^*$ dans $L^2(\mathbb{X}, P)$	p. 14
$\delta_i(f)$	l'oscillation partielle de f en i	p. 25
$\delta(f)$	l'oscillation totale de f	p. 25
τ_j	translation des sites par j	p. 39
$I(p)$	la quantité de Fisher associée à p	p. 3
$\mathcal{L}$	l'ensemble des fonctions locales (ou cylindriques)	p. 25
$\overline{\mathcal{L}}$	l'ensemble des fonctions quasi-locales	p. 25
$\sigma_P(b)$	le taux d'admissibilité de b pour P	p. 14
b^Λ		p. 32
$(\mathbf{H})$		p. 27
$(\mathbf{D_s})$		p. 59
$(\mathbf{F_r})$		p. 59
$\mathcal{F}$		p. 25
$\mathcal{F}_\Lambda$		p. 25
i, i^*		p. 14
$\tilde{\Omega}$		p. 26
(Ω)		p. 17
Ω_J		p. 29
Y_i		p. 33

Bibliographie

[1] P. Billingsley *Convergence of Probability Measures.* Wiley, New-York (1968).

[2] S. Cambanis, S. Huang, G. Simons *On the Theory of Elliptically Contoured Distributions.* Journal of Multivariate Analysis Vol. 11, 368–385 (1981).

[3] D. C. Chen *A uniform central limit theorem for nonuniform ϕ-mixing random fields.* Ann. Probab., Vol. 19, 636–649 (1991).

[4] L. Chuanrong *Weak convergence for non-uniform φ-mixing random fields.* Chin. Ann. of Math., Ser. B, Vol. 18, n° 1, 71–78 (1997).

[5] Y. Davydov *Sur le théorème local limite en dimension infinie.* LOMI seminars, Vol. 177, 46–50 (1989).

[6] Y. Davydov *Local limit theorems for functionals of random processes.* Th. Prob. Appl., Vol. 33, 732–738 (1988).

[7] Y. Davydov, M. Lifshits *Fibering method in some probabilistic problems.* Journal of Soviet Math. Vol. 31, 2796–2858 (1985).

[8] Y. Davydov, M. Lifshits, N. Smorodina *Les propriétés locales des répartitions des fonctionnelles stochastiques.* Nauka, Moscou (1995) (version anglaise : *Local Properties of Distributions of Stochastic Functionals.* AMS Providence, Rhode Island (1998).

[9] R. L. Dobrushin *The description of the random fields by its conditional distributions.* Th. Prob. Appl., Vol. 13, 201–229 (1968).

[10] R. L. Dobrushin *The problem of uniqueness of a Gibbs random field and the problem of phase transition.* Funct. Anal. Appl., Vol. 2, 302–312 (1968).

[11] R. L. Dobrushin *Gaussian random fields – Gibbsian point of view.* In : R. L. Dobrushin and Ya. G. Sinai (eds.), Multicomponent random systems, Adv. in Prob. and Related Topics, Vol. 6, New-York : Dekker (1980).

[12] R. L. Dobrushin, B. S. Nahapetian *Strong convexity of pressure for a lattice system of classical statistical physics.* Teoret. Mat. Fiz., Vol. 20, 223–234 (1974).

[13] H. Federer *Geometric Measure Theory.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York (1969).

[14] O. Garet *Mesures de Gibbs gaussiennes et dynamiques aléatoires associées sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$.* Thèse présentée à l'Université de Lille I (1998).

[15] H. O. Georgii *Gibbs measures and phase transition.* Walter de Gruyter, Berlin, New-York (1988).

[16] H. Künsch *Gaussian Markov random fields.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Vol. 26, 53–73 (1979).

[17] M. Lifshits *Gaussian Random Functions.* Kluwer, Academic Publishers (1995).

[18] B. S. Nahapetian, A. N. Petrosian *Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem.* Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, Series A. I. Mathematica, Volumen 17, 105–110 (1992).

[19] C. Noquet *Inégalité pour la distance en variation des lois de deux vecteurs markoviens.* IRMA, Lille, Vol. 37, N° I (1995).

[20] C. Noquet *Principe d'invariance local pour les chaînes de Markov.* Thèse présentée à l'Université de Lille I (1997).

[21] E. Nowak *Majorations pour la distance en variation de deux lois à contour elliptique.* IRMA, Lille, Vol. 40, N° I (1996).

[22] E. Nowak *Distance en variation totale entre une mesure de Gibbs et sa translatée.* IRMA, Lille, Vol. 42, N° IX (1997).

[23] E. Nowak *Un théorème limite local pour des fonctionnelles de processus gibbsiens.* IRMA, Lille, Vol. 43, N° III (1997).

[24] E. Nowak *Distance en variation totale entre une mesure de Gibbs et sa translatée.* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, 239–242 (1998).

[25] S. Poghosyan, S. Rœlly *Invariance principle for martingale-difference random fields.* Statistics and Probability Letters 38, 235–245 (1998).

[26] D. Pollard *Convergence of stochastic processes.* Springer (1984).

[27] F. Riesz *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.* Paris, Gauthier-Villars (1913).

[28] Y. A. Rozanov *On Gaussian fields with given conditional distributions.* Th. Prob. Appl., Vol. 12, 381–391 (1967).

[29] H. Sato *Absolute continuity of locally equivalent Markov chains.* Mem. fac. Sci., Kyushu univ. ser. A, Vol. 45, N° 2, 258–308 (1991).

[30] I. J. Schoenberg *Metric spaces and completely monotone functions.* Ann. Math. Vol. 39, 811–841 (1938).

[31] L. A. Shepp *Distinguishing a sequence of random variables from a translate of itself.* Ann. Math. Stat. Vol. 36, 1107–1112 (1965).

[32] M. L. Straf *Weak convergence of stochastic processes with several parameters.* Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. Vol. II, 187–221 (1970).

[33] V. N. Sudakov *Problèmes géométriques de la théorie des lois de probabilité infini-dimensionnelles* (en russe). Académie des Sciences, Vol. 141 (1976).

[34] G. N. Sytaya *On admissible displacements of suspended Gaussian measures.* Th. Prob. Appl., Vol. 14, 506–509 (1969).

TRANSLATED MEASURES AND DISTANCE IN VARIATION
Application to absolute continuity and a local invariance principle for Gibbsian random fields.

Abstract :
The study of the distance in total variation between the law of an i.i.d. random variables sequence and its translate has led Y. Davydov to a local invariance principle for this sequence. It appears that it is possible to use it in order to study the absolute continuity between an infinte product measure and its translate.

We suggest to generalize this method to stochastic processes for which this independance condition is not necessary. We focus on processes which are related in one hand to a type of mixture of Gaussian measures and in another hand to Gibbs measures on $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$.

On the first part, we are studying one after the other one these two process classes and obtain, for each of them, a majoration of the distance in variation between the considered law and its translate. We can then conclude, for precise cases, to their equivalence.

The second part is dedicated to the elaboration of a local invariance principle for some Gibbsian random fields, for which the potential has finite range or apply to a decreasing condition.

Key words : Random fields, distance in variation, translated law, mixture of Gaussian measures, Gibbs measures, equivalence of measures, local invariance principle.

AMS Classification : 60G60, 28C20, 60G99, 60K35, 60F17.