THESE DE DOCTORAT DE MATHEMATIQUES

Université des sciences et techniques Lille 1

Pascal LEFEVRE

Ensembles lacunaires en analyse harmonique et géométrie des espaces de Banach

Thèse soutenue le 13 Février 1998 devant le jury composé de:

Mme Myriam DECHAMPS
M. Gilles GODEFROY
M. Hans JARCHOW
M. Daniel LI
Mme Françoise PIQUARD (rapporteur)
M. Gilles PISIER (rapporteur)
M. Hervé QUEFFELEC (directeur)
M. Florian VASILESCU

Mojej żonce i naszemu pierwszemu dziecku.
A Kasia et notre premier enfant.

Cette thèse a été effectuée sous la direction d'Hervé Queffelec. Sa grande culture mathématique, ses qualités humaines et sa disponibilité ont fortement contribué à l'accomplissement de ce travail et au plaisir que j'y ai pris. Il m'a proposé de nombreux thèmes de recherche intéressants, m'a laissé choisir ma voie tout en me guidant.

Je suis particulièrement honoré que des experts tels que Françoise Piquard et Gilles Pisier aient accepté de rapporter cette thèse. J'ai eu à plusieurs occasions le privilège de profiter de leurs compétences; Françoise Piquard m'a gentillement conseillé sur mes travaux. Je les remercie de leur disponibilité.

Je remercie sincèrement chacun des membres du jury pour sa participation. Myriam Déchamps a guidé mes premiers pas dans le monde de la recherche. Une partie de mon intérêt pour l'analyse harmonique et la géométrie des Banach lui est due. Gilles Godefroy a toujours été chaleureusement à mon écoute lorsque je le sollicitais, me faisant profiter de ses connaissances étendues. Je remercie Hans Jarchow pour l'accueil sympathique que j'ai reçu à l'Université de Zürich et l'ambiance propice que j'y ai trouvée. Une partie de ce travail doit aux suggestions sympathiques et éclairées que Daniel Li m'a faites. Florian Vasilescu me fait l'honneur de s'intéresser à mon travail.

Je tiens à remercier Marek Bożejko qui m'a invité à plusieurs reprises à l'Université de Wrocław: dziękuję serdecznie. Merci aux étudiants de Hans Jarchow et notamment à Franziska Baur qui ont rendu mon séjour agréable à Zürich. Je salue amicalement les (ex-)thésards des bureaux 318-320, la sympathique équipe d'analyse fonctionnelle de Lille 1, le couloir de l'équipe d'analyse qui m'a si souvent hébergé à Jussieu et notamment les bureaux 14-16. Une pensée pour mes profs de prépa Jean-Pierre Ehrmann et Ruben TerMinassian qui ont une grande part de responsabilité dans ma passion des mathématiques et de leur enseignement. Je remercie chaleureusement les copains matheux ou non, la tribu des matheux-footeux de l'équipe des Boréliens pour leur amitié et leur soutien. J'embrasse affectueusement ma famille qui a toujours maintenu sa confiance en moi. Enfin, je dois à l'Université de Wrocław la découverte la plus importante de ma carrière de chercheur: Kasia.

Table des matières

Introduction 3

Résumé 5

Notations et définitions 9

I Ensembles de convergence uniforme 13

1 Introduction et rappels 13

2 Ensembles CUC et ensembles de Riesz 17

3 Cas vectoriel 18

II Ensembles Stationnaires 21

1 Résultats préliminaires 23

2 Point de vue topologique 25

3 Propriétés arithmétiques 27

4 Ensembles stationnaires et ensembles de continuité 30

5 Ensembles stationnaires et ensembles de convergence uniforme 37

6 Ensembles stationnaires et ensembles p-Sidon p.s. 41

7 Propriétés banachiques 41

8 Ensembles Stationnaires et ensembles $\Lambda(2)$ 44

9 Amélioration de l'intégrabilité 45

10 Annexe sur les Sidon partitions 50

11 Annexe: comparaison des normes $C^{p.s.}$ et infinie 51

III Ensembles p-Sidon 53

1 Propriétés multiplicatives des ensembles p-Sidon 54

2 Ensembles extensiblement p-Sidon 56

3 Quelques propriétés arithmético-fonctionnelles des ensembles p-Sidon p.s. 59

4 Théorème de Bernstein pour les p-Sidon 61

5 Etude vectorielle 62

IV Propriétés banachiques, ensembles de Rosenthal et de Riesz 67

1 Propriétés banachiques de l'algèbre du disque 68

2 Nouveaux ensembles de Riesz 69

3 Ensembles de Rosenthal 73

V Union d'ensembles $\Lambda(p)$ 75

Questions ouvertes 77

Bilan 79

Références 81

Introduction

Dépassant sa motivation initiale (outil de résolution des équations aux dérivées partielles: équation de la chaleur par exemple), la théorie des séries de Fourier s'est révélée être aussi une source abondante d'exemples et de contre-exemples en analyse. Plus particulièrement, les ensembles lacunaires peuvent servir de liens avec la géométrie des espaces de Banach. Réciproquement, la théorie des espaces de Banach sert aussi d'outil dans l'étude de ces ensembles. Chaque type d'ensemble lacunaire est associé à une propriété fonctionnelle "uniforme" précise, en ce sens qu'elle est valable pour un espace de fonctions. Il est donc intéressant de connaître les corrélations entre chaque catégorie d'ensembles lacunaires car cela correspond à une implication en terme de propriété fonctionnelle "uniforme". Par exemple, un résultat classique de Rudin ([Ru]) est: si $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ est tel que toute fonction continue à spectre dans S possède une transformée de Fourier dans ℓ^1 (S est Sidon), alors l'espace des fonctions de L^1 à spectre dans S est l'espace des fonctions de L^p à spectre dans S (ie S est $\Lambda(p)$), pour tout p fini. Bien sûr, un manque d'implication entre deux classes d'ensembles lacunaires est aussi une information importante.

Par définition, on peut adopter un autre point de vue sur un ensemble lacunaire: l'arithmétique. C'est une approche duale: on raisonne sur des sous-ensembles du groupe dual du groupe compact sur lequel les fonctions sont définies. Les caractérisations arithmétiques des ensembles lacunaires sont le plus souvent mal connues. Cette étude a plusieurs aspects. On désire par exemple cerner la "taille" d'un ensemble lacunaire. Il est classique pour cela d'effectuer une dichotomie. Par exemple sur $\mathbb{Z}$, on teste l'appartenance à la classe étudiée de $\mathbb{Z}$ lui-même, des nombres premiers, des carrés, des ensembles polynômiaux. Ou on part des ensembles des plus lacunaires, en testant les ensembles lacunaires à la Hadamard ($\frac{n_{j+1}}{n_j} \geq q > 1$), les ensembles dissociés, les ensembles de Sidon, voire les sommes finies d'éléments d'un ensemble dissocié. Plus généralement, on cherche à comparer la classe étudiée à d'autres classes d'ensembles lacunaires, arithmétiquement mieux connues. Un autre aspect est le potentiel de lacunarité d'une classe: on étudie la stabilité d'une classe par union. Par exemple, le résultat classique de Drury affirme que l'union de deux ensembles de Sidon est un ensemble de Sidon.

Malgré ce principe d'étude classique, de nombreux problèmes concernant les ensembles lacunaires restent ouverts.

Cette thèse étudie sous divers aspects quelques classes d'ensembles lacunaires. Le point de départ de ce travail est l'article [P-1], où Gilles Pisier introduit la classe des ensembles stationnaires et suggère son étude. Il propose notamment sa comparaison aux autres classes d'ensembles lacunaires, plus classiques, de l'analyse harmonique. Cette prospection conduit naturellement à l'étude d'autres classes d'ensembles lacunaires.

Dans une première partie, les liens entre la classe des ensembles de convergence uniforme et quelques autres classes d'ensembles lacunaires, notamment Riesz, sont étudiés. La comparaison avec la classe des ensembles stationnaires est abordée dans la partie suivante.

Dans une seconde partie, nous étudierons la classe des ensembles stationnaires introduite par Gilles Pisier. Des nouveaux résultats (entre autres arithmétiques) les concernant sont présentés. Nous exhiberons quelques relations avec d'autres classes (plus classiques) d'ensembles lacunaires de l'analyse harmonique (ensembles de continuité, ensembles dits $\Lambda(p)$, ensembles de convergence uniforme, p-Sidon).

L'objet de la troisième partie est l'étude des ensembles p-Sidon et l'amélioration de certains résultats connus. Un point de vue plus banachique permet d'étendre certains résultats connus pour le tore à un groupe abélien compact métrique quelconque. Quelques nouvelles propriétés banachiques sont exhibées.

Dans la quatrième partie, le cadre est toujours banachique mais l'étude s'oriente vers les problèmes d'intégrabilité et de continuité. Ceci correspond aux notions d' ensemble de Riesz et d'ensemble de Rosenthal. Nous exposons quelques problèmes ouverts classiques les concernant. La construction de nouveaux ensembles de Riesz permet de répondre à certains d'entre eux.

Nous dressons enfin une liste de questions sur les ensembles lacunaires et un schéma récapitulant les connections entre diverses classes d'ensembles lacunaires.

Résumé

Nous présentons les résultats nouveaux de cette thèse. Nous signalons entre parenthèses où le lecteur peut trouver la définition de l'ensemble lacunaire évoqué.

Dans la première partie, nous démontrons que, pour tout ensemble de convergence complètement uniforme $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ (CUC: I.1.2) et toute mesure μ à spectre dans Λ, les mesures:

$$\mu^+ = \sum_{n \in \Lambda \cap \mathbb{N}} \hat{\mu}(n) e_n \qquad \text{et} \qquad \mu^- = \sum_{n \in \Lambda \cap \mathbb{Z}^-} \hat{\mu}(n) e_{-n}$$

définissent des éléments de l'espace de Hardy H^1. En particulier, Λ est un ensemble de Riesz (0.7). Une classe d'ensembles stationnaires (II.0.1) qui n'est pas de convergence uniforme (0.4) est exhibée dans le chapitre suivant.

Dans la deuxième partie, nous étudions les ensembles stationnaires. Le point de vue probabiliste, sous-jacent au concept d'ensemble stationnaire, ne peut être remplacé par le point de vue topologique si on veut garder la même notion. Substituer le point de vue topologique au point de vue probabiliste redonne la notion d'ensemble de Sidon. Ce fait est un corollaire du théorème suivant qui donne un nouveau critère de convergence inconditionnelle.

Théorème *Soit X un espace de Banach. Soit une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de X. On définit*

$$\Omega_1 = \{\alpha \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}};\ \sum_{n \geq 0} r_n(\alpha) x_n \text{ converge dans } X\}.$$

Alors, Ω_1 est maigre ou $\sum_{n \geq 0} x_n$ converge inconditionnellement dans X.

Du point de vue arithmétique, un ensemble stationnaire ne contient pas de parallélépipèdes arbitrairement grands. Dans le cas particulier du tore, si $\Lambda = (n_j)_{j \geq 1}$ est un ensemble stationnaire,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) il existe } m > 1 \text{ et } c > 0 \text{ tels que } n_j \geq c j^m \quad j = 1, 2, \cdots \\ \text{En particulier,} \\ \text{ii) } \displaystyle\sum_{j \geq 1} \frac{1}{n_j} \quad \text{converge.} \end{array} \right.$$

Nous en déduisons:

Proposition *L'ensemble des nombres premiers* $(p_j)_{j\geq 1}$ *n'est pas un ensemble stationnaire.*

Proposition *Si* Λ *est stationnaire, la densité uniforme de* Λ *est nulle, c'est à dire:*

$$\Delta^+(\Lambda) = \lim_N \Big(\sup_{a\in\mathbb{Z}} \frac{|\Lambda \cap \{a, \cdots, a+N\}|}{N+1}\Big) = 0.$$

La connaissance des mesures à spectre lacunaire est liée à l'étude de leurs propriétés multiplicatives (au sens de la convolution). On désigne par $[\![.]\!]$ la norme $C^{p.s}$ (cf II).

Théorème *Soient* Λ *stationnaire et* E*, où* E *est* $\Lambda(1)$ *(0.5) si* G *est quelconque et* $E = \mathbb{Z}^-$ *si* $G = \mathbb{T}$*. Il existe* $C > 0$*, tel que, pour toute mesure* $\mu \in M_{\Lambda\cup E}$*, et tout* $h \in L^2$*:*

$$\Big[\!\!\Big[\sum_{\lambda\in\Lambda} \hat{\mu}(\lambda)\hat{h}(\lambda)\lambda\Big]\!\!\Big] \leq C\|\mu\|.\|h\|_2$$

Nous obtenons comme corollaire de nouveaux ensembles de continuité (déf. 0.6): $\Lambda\cup E$, où E est $\Lambda(1)$ si G est quelconque (nous avons une restriction arithmétique sur G) et $E = \mathbb{Z}^-$ si $G = \mathbb{T}$.

En vue d'exhiber de "gros" ensembles lacunaires, nous montrons que les ensembles $D_k = D \pm D \cdots \pm D$ (k fois, avec la notation additive), avec D dissocié, sont stationnaires. Ceci permet d'obtenir une classe d'ensembles stationnaires qui ne sont pas UC. Pour chaque $p < 2$, ces ensembles fournissent également des exemples d'ensembles stationnaires qui ne sont pas p-Sidon p.s. (III.1.1).

Nous adoptons ensuite un point de vue banachique des espaces $L^1_{\Lambda\cup E}$ et $C_{\Lambda\cup E}$, où E est $\Lambda(1)$ si G est quelconque et $E = \mathbb{Z}^-$ si $G = \mathbb{T}$. Ceci conduit, par exemple, à une inégalité de type Paley.

Pour donner une réponse partielle au problème du lien entre les stationnaires et les ensembles $\Lambda(2)$, nous introduisons la notion d'ensembles extensiblement stationnaires:

Définition *Un ensemble* $\Lambda \subset \Gamma$ *est extensiblement stationnaire s'il existe une constante* C *telle que, pour toute famille finie de parties finies* $(\Lambda_j)_j$ *de* Λ*, il existe un ensemble stationnaire* E *de constante inférieure à* C *et des éléments* γ_j *tels que,*

d'une part, $\{\gamma_j\Lambda_j\}_j$ *est une Sidon partition (cf. II.7.5) de constante inférieure à* C*;*

d'autre part, $\gamma_j\Lambda_j \subset E$.

Les techniques banachiques de la seconde partie s'appliquent aussi aux ensembles p-Sidon (0.3). Dans la troisième partie, nous étendons notamment un résultat de Fournier-Pigno [F-P] sur $\mathbb{T}$ au cas d'un groupe abélien compact métrique quelconque. Soit Λ un p-Sidon et L un ensemble $\Lambda(1)$ si G est quelconque, $L = \mathbb{Z}^-$ si $G = \mathbb{T}$:

Théorème *Pour toute mesure μ dans $M_{\Lambda \cup L}$, $\hat{\mu}1_\Lambda$ définit un multiplicateur compact de $M(\ell^2, \ell^p)$. En d'autres termes, il existe K (constante absolue) telle que, pour toute mesure μ dans $M_{\Lambda \cup L}$, on ait:*

$$\|(\hat{\mu}(\lambda))_{\lambda \in \Lambda}\|_{\frac{2p}{2-p}} \leq K S_p(\Lambda) \|\mu\|.$$

Nous introduisons la notion d'ensemble extensiblement p-Sidon:

Définition *Un ensemble $\Lambda \subset \Gamma$ est extensiblement p-Sidon s'il existe une constante C telle que pour toute famille finie de parties finies $(\Lambda_j)_j$ de Λ, il existe des caractères γ_j et un p-Sidon E de constante inférieure à C, tels que les ensembles $\gamma_j \Lambda_j$ soient disjoints et inclus dans E.*

La théorie des opérateurs (p, q)-sommants permet d'obtenir la condition nécessaire suivante:

Théorème *Si un ensemble Λ est extensiblement p-Sidon, alors l'opérateur de Fourier de $C_\Lambda(G)$ dans ℓ^p est un opérateur $(p, 1)$-sommant.*

Comme corollaire, nous obtenons le résultat classique (reformulé): il n'existe pas d'ensemble Λ extensiblement p-Sidon pour $p < \frac{4}{3}$. Nous avons également

Corollaire *Soit Λ, extensiblement p-Sidon, et une mesure μ à spectre dans Λ.*

Alors μ définit un multiplicateur de Fourier de l'espace de Lorentz $L^{p,1}(G)$ dans ℓ^p. En particulier, μ définit un multiplicateur de Fourier de l'espace $L^r(G)$ dans ℓ^p, pour tout $r > p$. .

Enfin, dans la quatrième partie, la géométrie des Banach permet d'obtenir de nouvelles classes d'ensembles de Riesz. Notamment, un résultat de Françoise Lust-Piquard [L-P] ("$c_o \not\subset C_\Lambda(G) \Rightarrow \Lambda$ Riesz") est généralisé. Ceci contribue à la résolution du problème de Walter Rudin signalé par Yves Meyer dans [Me]: déterminer les ensembles E d'entiers tels que $E \cup \mathbb{Z}^-$ est Riesz. En particulier

Théorème *Pour toute partie $\Lambda \subset \mathbb{N}$:*

$$c_o \not\subset C_\Lambda(G) \Longrightarrow \Lambda \cup \mathbb{Z}^- \text{ est un ensemble de Riesz.}$$

Dans le cas d'un groupe quelconque, une nouvelle classe d'ensembles de Riesz est obtenue: les unions d'un ensemble $\Lambda(1)$ et d'un ensemble Λ tel que $c_o \not\subset C_\Lambda(G)$. Si Λ vérifie une condition a priori plus forte, on a:

Théorème *L'union de Λ tel que "$c_o \not\subset L^\infty_\Lambda(G)$ avec un ensemble de Riesz bien disposé (IV.2.5) est un ensemble de Riesz.*

En particulier, nous avons la généralisation suivante du théorème de Rudin [Ru] sur l'union d'un $\Lambda(1)$ et des entiers négatifs:

Corollaire *Soit $E \subset \mathbb{N}$ un ensemble $\Lambda(1)$ et $\Lambda \subset \mathbb{N}$ tel que "$c_o \not\subset L^\infty_\Lambda(G)$".*
Alors $\mathbb{Z}^- \cup E \cup \Lambda$ est un ensemble de Riesz.

Nous avons également la généralisation suivante d'un résultat de Meyer [Me]:

Corollaire *Soit $E \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des sommes de deux carrés ou l'ensemble des nombres premiers. Soit $\Lambda \subset \mathbb{N}$ avec la propriété "$c_o \not\subset L^\infty_\Lambda(G)$".*
Alors $\mathbb{Z}^- \cup E \cup \Lambda$ est un ensemble de Riesz.

En annexe, nous signalons une réponse positive élémentaire au problème de l'union d'ensembles $\Lambda(p)$.

Théorème *Soient $1 < r < 2$, r' l'exposant conjugué de r, F un ensemble $\Lambda(r)$ et E un ensemble $\Lambda(p)$ pour tout $p < r'$.*
Alors $E \cup F$ est un ensemble $\Lambda(r)$.

Enfin, nous présentons un bilan (non exhaustif) des relations entre différents types d'ensembles lacunaires (les plus classiques).

Une partie de ces résultats est publiée dans [L1], [L2], [L3].

Notations et définitions

Soit G un groupe abélien compact infini métrisable, muni de sa mesure de Haar normalisée dx, soit Γ son dual (discret et dénombrable). G sera le plus souvent le tore $\mathbb{T}$ et donc Γ sera identifié à $\mathbb{Z}$ par $p \to e_p$, où $e_p(x) = e^{2i\pi px}$.

Nous noterons $\mathcal{P}(G)$ l'ensemble des polynômes trigonométriques sur G, i.e. l'ensemble des sommes finies $\sum\limits_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \gamma$, où $a_\gamma \in \mathbb{C}$.

Nous noterons $C(G)$ l'espace des fonctions complexes continues sur G, muni de la norme: $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in G} |f(x)|$. C'est aussi le complété de $\mathcal{P}(G)$ pour $\|.\|_\infty$.

$M(G)$ sera l'espace des mesures complexes sur G, muni de la norme de la variation totale. Si $\mu \in M(G)$, sa transformée de Fourier au point γ est définie par $\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \gamma(-x) d\mu(x)$.

$L^p(G)$ sera l'espace $L^p(G, dx)$ avec la norme:

$$\|f\|_p = \begin{cases} (\int_G |f(x)|^p dx)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \text{essup}|f(x)| & p = \infty \end{cases}$$

L'application : $f \to f dx$ identifie $L^1(G)$ avec un idéal fermé de $M(G)$ muni de la convolution.

Si B est un espace normé de fonctions sur G, qui s'injecte continûment dans $M(G)$, et si Λ est un sous-ensemble de Γ, on posera :

$$B_\Lambda = \{f \in B / \hat{f}(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \notin \Lambda\}.$$

C'est l'ensemble des éléments de B dont le spectre est inclus dans Λ.

$(\varepsilon_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ désignera une suite de variables de Bernoulli indexée by Γ, c'est à dire une suite de variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs $+1$ et -1 avec probabilité $1/2$. De façon similaire, $(g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ désignera une suite de variables gaussiennes complexes centrées indépendantes, normalisées par $\mathbb{E}|g_\gamma|^2 = 1$.

$|E|$ désignera le cardinal d'un ensemble fini E. Nous noterons A^c le complémentaire (dans Γ) de l'ensemble A.

Rappelons maintenant quelques définitions classiques d'ensembles lacunaires de Γ.

Définition 0.1 *Un ensemble $\Lambda \subset \Gamma$ est appelé ensemble de Sidon si Λ vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes:*

i) Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $P \in \mathcal{P}_\Lambda(G)$: $\sum_{\gamma\in\Lambda} |\hat{P}(\gamma)| \leq C\|P\|_\infty$

ii) Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $f \in C_\Lambda(G)$: $\sum_{\gamma\in\Lambda} |\hat{f}(\gamma)| \leq C\|f\|_\infty$

iii) Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \ell^\infty(\Lambda)$ avec $\|b\|_\infty = 1$, il existe $\mu \in M(G)$ avec $\|\mu\| \leq C$ telle que: $\forall\lambda \in \Lambda$, $\hat{\mu}(\lambda) = b_\lambda$

iv) Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in c_o(\Lambda)$ avec $\|b\|_\infty = 1$, il existe $f \in L^1(G)$ avec $\|f\|_1 \leq C$ telle que: $\forall\lambda \in \Lambda$, $\hat{f}(\lambda) = b_\lambda$.

Pour une étude plus approfondie des ensembles de Sidon, on pourra consulter [D-G],[L-R] ou [P-2].

Définition 0.2 *Un ensemble $A \subset \Gamma$ est dissocié si, pour tout $(n_\gamma)_{\gamma\in A} \in \{-2;\ldots;2\}^A$, avec tous les n_γ égaux à zéro sauf un nombre fini:*

$$\prod_{\gamma\in A} \gamma^{n_\gamma} = 1 \Rightarrow \forall\gamma \in A : \gamma^{n_\gamma} = 1.$$

Un ensemble $A \subset \Gamma$ est quasi-indépendant si, pour tout $(n_\gamma)_{\gamma\in A} \in \{-1;0;1\}^A$, avec tous les n_γ égaux à zéro sauf un nombre fini:

$$\prod_{\gamma\in A} \gamma^{n_\gamma} = 1 \Rightarrow \forall\gamma \in A : \gamma^{n_\gamma} = 1.$$

Nous rappelons que si Λ est quasi-indépendant dans Γ, alors Λ est un ensemble de Sidon.

La notion d'ensemble de Sidon se généralise de la manière suivante:

Définition 0.3 *Soient $1 \leq p < 2$ et $\Lambda \subset \Gamma$, Λ est appelé ensemble p-Sidon s'il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall f \in \mathcal{P}_\Lambda(G), \quad (\sum_{\lambda\in\Lambda} |\hat{f}(\lambda)|^p)^{1/p} \leq C\|f\|_\infty.$$

La plus petite constante C admissible est appelée constante de p-Sidonicité de Λ et se note $S_p(\Lambda)$. (voir par exemple [B] ou [B-P]).

Soit Λ un p-Sidon, il est clair qu'il est aussi q-Sidon pour $q > p$; s'il ne l'est pas pour $q < p$, on dit que Λ est un vrai p-Sidon.

Définition 0.4 *Soit $(F_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de parties finies de Γ telle que $\bigcup_{N=1}^{\infty} F_N = \Gamma$; on pose, pour f dans $L^1(G)$:*

$$S_N f = \sum_{\gamma\in F_N} \hat{f}(\gamma)\gamma.$$

Un ensemble $\Lambda \subset \Gamma$ est appelé ensemble de convergence uniforme, relativement à $(F_N)_{N\geq 1}$ (en abrégé: ensemble UC) si, pour tout f dans $C_\Lambda(G)$, $(S_N f)_{N\geq 1}$ converge vers f dans $C_\Lambda(G)$.

Remarque : nous allons développer les propriétés de cette classe d'ensembles dans le prochain chapitre.

Définition 0.5 *Soient $0 < p < \infty$ et A une partie de Γ. A est appelé ensemble $\Lambda(p)$ s'il existe q dans $]0, p[$ tel que les normes $\|.\|_p$ et $\|.\|_q$ soient équivalentes sur $\mathcal{P}_A(G)$. Soulignons que, dans ce cas, nous avons:*

$$\forall r \in]0, p[, \ L^p_A(G) = L^r_A(G)$$

Remarque: nous rappelons les faits suivants ([B-E]):
Si E est $\Lambda(p)$, pour $1 \leq p < 2$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que E est $\Lambda(p+\alpha)$.
Les ensembles $\Lambda(1)$ sont caractérisés par le fait que $L^1_E(G)$ est réflexif.

Nous introduisons les classes suivantes liées au comportement des mesures.

Définition 0.6 *Une partie Λ de Γ est appelée ensemble de continuité si*
$\forall\varepsilon > 0, \ \exists\delta > 0, \ \forall\mu \in M(G)$ *avec* $\|\mu\| = 1$ *:*

$$\overline{\lim_{\Gamma\setminus\Lambda}}|\hat{\mu}(n)| < \delta \Rightarrow \overline{\lim_{\Lambda}}|\hat{\mu}(n)| < \varepsilon.$$

Les relations entre les ensembles de continuité et d'autres ensembles minces (particulièrement UC ; $\Lambda(1)$; p-Sidon) ont été étudiées dans [F-P]. On trouve une étude de ces ensembles au chapitre VI de [H-M-P].

Définition 0.7 $\Lambda \subset \Gamma$ *est appelé ensemble de Riesz si*

$$\forall\mu \in M_\Lambda(G), \ \exists f \in L^1_\Lambda(G), \ \hat{f} = \hat{\mu}.$$

A ce propos, on peut consulter [Go], [L-P] ou [Me].

Définition 0.8 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la $n^{ième}$ fonction de Rademacher r_n est:*

$$r_n(x) = sign\left(\sin(2^n\pi x)\right), \ x \in \mathbb{R}.$$

Définition 0.9 *Soit $j \in \mathbb{N}^*$, $j-1 = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k 2^k$ la décomposition binaire de $j-1$ ($a_k = 0$ ou 1); la $j^{ième}$ fonction de Walsh w_j est $w_j(x) = \prod_{k\in\mathbb{N}} r_{k+1}^{a_k}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.*

Remarque: on peut aussi voir les fonctions r_n et w_j comme définies sur le groupe de Cantor $G = \{-1,1\}^{\mathbb{N}^*}$: $r_n(\omega)$ est la $n^{ième}$ composante de $\omega \in G$. Le groupe dual Γ est constitué des fonctions de Walsh; l'ordre dans lequel elles apparaissent avec la définition 0.9 est l'ordre de Paley.

Définition 0.10 *On pose $\psi(t) = \exp(t^2) - 1$ et on rappelle la définition de l'espace d'Orlicz $L^\psi(G)$: f est élément de $L^\psi(G)$ si*

$$\|f\|_\psi := \inf\left\{c > 0 \mid \int_G \psi(c^{-1}|f|) \leq 1\right\} < \infty.$$

$\|.\|_\psi$ est une norme qui fait de $L^\psi(G)$ un espace de Banach.

Définition 0.11 *Soient X et Y deux sous-espaces de $M(G)$, $M(X,Y)$ désigne l'espace des multiplicateurs de Fourier de X dans Y. Nous noterons $M_{2,\psi}$ l'espace $M(L^2, L^\psi)$.*

Définition 0.12 *Soient X et Y deux espaces de Banach, on dit que X contient Y si X contient un sous-espace isomorphe à Y. On notera cela: $Y \subset X$.*

Définition 0.13 *Soit X un espace de Banach, on note B_X la boule unité de X.*

Partie I
Ensembles de convergence uniforme

1 Introduction et rappels

Ul'yanov [U] introduisit en 1965 le problème suivant: caractériser les parties σ de $\mathbb{Z}$ pour lesquels les sommes de Fourier de toute fonction continue à spectre dans σ convergent uniformément vers f.

Γ est réunion croissante d'ensembles finis $\{F_N\}_{N\in\mathbb{N}^*}$: typiquement $[-N,N]$ pour $\mathbb{Z}$ et $\{w_1,\ldots,w_N\}$ pour le groupe de Cantor. Ce sont essentiellement les deux cadres intéressants pour l'étude des ensembles UC. Rappelons la définition des constantes de Lebesgue:

Définition 1.1 *étant donnée une partie $\mathcal{K}$ de Γ, la $N^{ième}$ constante de Lebesgue associée à $\mathcal{K}$ est le nombre*

$$\mathcal{L}_N(\mathcal{K}) = \sup\{\|S_N(f)\|_\infty | f \in C_{\mathcal{K}} \text{ et } \|f\|_\infty = 1\}$$

Comme pour les ensembles de Sidon, il y a des caractérisations équivalentes des ensembles de convergence uniforme. La proposition suivante est bien connue.

Proposition 1.2 *Soit $\Lambda \subset \Gamma$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) Si f est dans $C_\Lambda(G)$ alors la série de Fourier de f en 0 converge vers $f(0)$.

ii) Il existe une constante $C > 0$ et, pour tout entier N, une mesure μ_N dans $M(G)$ telle que $\|\mu_N\| \leq C$ et

$$\widehat{\mu_N}(\gamma) = 1 \text{ si } \gamma \in \Lambda \cap F_N \quad \text{et} \quad \widehat{\mu_N}(\gamma) = 0 \text{ si } \gamma \in \Lambda \cap (\Gamma \setminus F_N).$$

iii) La suite $\{\mathcal{L}_N(\Lambda)\}_{N\geq 1}$ est bornée.

iv) Λ est un ensemble de convergence uniforme.

La borne supérieure $U(\Lambda)$ des constantes de Lebesgue de Λ s'appelle la constante de convergence uniforme de Λ.

Preuve: $(i) \Rightarrow (ii)$. On considère les formes linéaires T_N qui à une fonction f de $C_\Lambda(G)$ associent sa $N^{ième}$ somme de Fourier en 0. Par hypothèse, d'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe une constante $C > 0$ telle que $\|T_N\| \leq C$. Le théorème de Hahn-Banach et le théorème de représentation de Riesz assurent alors l'existence des mesures $\mu_N \in M(G)$ telles que $\|\mu_N\| = \|T_N\| \leq C$ et pour tout $f \in C_\Lambda(G)$:

$$T_N(f) = \int_G f(-x)d\mu_N(x) \text{ donc } \forall\gamma \in \Lambda,\ T_N(\gamma) = \int_G \gamma(-x)d\mu_N(x) = \widehat{\mu_N}(\gamma).$$

Or par définition de T_N, si γ appartient à Λ alors

$$T_N(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma \in F_N \\ 0 & \text{si } \gamma \in \Gamma \setminus F_N \end{cases}$$

L'assertion (ii) est établie.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Soient $f \in C_\Lambda(G)$ et μ_N comme dans l'hypothèse, on a :

$$S_N(f) = \mu_N * f \quad \text{d'où} \quad \|S_N(f)\|_\infty = \|\mu_N * f\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$$

Les constantes de Lebesgue de Λ sont donc bornées par C.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. La suite $\{\mathcal{L}_N(\Lambda)\}_{N\geq 1}$ est majorée par $U(\Lambda)$.
Les opérateurs $S_N : C_\Lambda(G) \longrightarrow C_\Lambda(G)$ sont majorés en norme par $U(\Lambda)$. De plus, pour tout $P \in \mathcal{P}_\Lambda$, $\|S_N(P) - P\|_\infty$ converge vers 0. $\mathcal{P}_\Lambda$ est dense dans $C_\Lambda(G)$ donc pour tout $f \in C_\Lambda(G)$, $\|S_N(f) - f\|_\infty$ converge vers 0.

$(iv) \Rightarrow (i)$: trivial.
Ceci achève la démonstration de la proposition. ∎

Faisons un rappel sur le comportement assymptotique des constantes de Lebesgue associées au groupe dual tout entier dans le cadre du tore et dans le cadre du groupe de Cantor. Dans les deux cas, par approximation, en notant D_N le $N^{ième}$ noyau de Dirichlet, on a $\mathcal{L}_N(\Gamma) = \|D_N\|_1$.

Dans le premier cas, le résultat est bien connu: $\mathcal{L}_N(\mathbb{Z}) = \left(\frac{4}{\pi^2}\right)\log(N) + O(1)$ au voisinage de $+\infty$.

Dans le second, on a

$$\mathcal{L}_N := \mathcal{L}_N(\mathbb{N}^*) = \int_0^1 |D_N(t)|dt = \int_G |D_N(\omega)|d\omega$$

et ici $D_N = \sum_{j=1}^{N} w_j$.

En particulier, comme $D_{2^k} = \prod_{s=1}^{k}[1 + r_s] \geq 0$, $\|D_{2^k}\|_1 = 1$ et on voit que $\mathcal{L}_{2^k} = 1$. On en déduit que $\mathcal{L}_N \leq 1 + \log_2(N)$.

Mais on peut aussi montrer que (cf [K-S], p.140): $\overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{\mathcal{L}_N}{\log(N)} > 0$. $\mathcal{L}_N$ n'est donc pas bornée.

L'étude des ensembles de convergence uniforme n'est donc pas triviale: $\mathbb{Z}$ n'est pas de convergence uniforme pour le système trigonométrique et $\mathbb{N}^*$ n'est pas de convergence uniforme pour le système de Walsh.

On remarque également que le caractère UC dépend de la suite $(F_N)_N$ choisie. Par exemple, si on pose $F_n = \{w_1, \ldots, w_{2^n}\}$, $\mathcal{L}_n(\mathbb{N}^*)$ vaut maintenant 1 donc $\mathbb{N}^*$ est de convergence uniforme pour le système de Walsh pour ce choix de $(F_n)_n$.

On s'était déjà intéressé depuis longtemps au problème de la convergence normale (il s'agit alors de la notion d'ensemble de Sidon). Nous précisons qu'il s'agit d'une notion distincte de la première. Par exemple, soit A une union finie d'ensembles d'entiers $H = (n_j)$ lacunaires à la Hadamard ($n_{j+1} \geq qn_j$ où $q > 1$), l'ensemble $A+\cdots+A$ (k fois, $k \geq 2$) est UC sans être Sidon (cf [Tr]). On remarque que cet ensemble permet de construire, pour tout $p < 2$, un ensemble UC qui n'est pas p-Sidon ps. Les ensembles de la forme $H - H$, où H est un ensemble d'entiers lacunaire à la Hadamard, sont également UC (cf [F]) sans être Sidon.

Remarquons que ces théorèmes sont optimaux dans la mesure où il existe un Sidon S tel que $S + S$ contienne $\mathbb{N}$ et a fortiori ne soit pas UC. Il suffit de considérer pour S l'union de $\{-3^n\}_{n\geq 0}$ et de l'ensemble de Hadamard $\{n+3^n\}_{n\geq 0}$.

Dans le cadre du groupe de Cantor, Pedemonte [Pe] montre que l'ensemble des fonctions de Walsh formés par le produit de k fonctions de Rademacher distinctes ($k \geq 1$ fixé) est UC.

Ul'yanov posa la question de savoir si, par exemple, $\{k^2\}_{k\in\mathbb{N}}$ était un ensemble de convergence uniforme. Oskolkov (cf. [O]) y répondit plus tard par la négative et généralisa ce résultat à tout ensemble $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, où P est un polynôme prenant des valeurs distinctes et entières sur $\mathbb{N}$.

La caractérisation des ensembles de convergence uniforme étant liée au problème de savoir s'ils sont "gros" ou pas, on s'intéresse de façon naturelle à leur densité. Kashin et Tzafriri donnent la réponse partielle suivante dans [K-T]. On trouvera une démonstration détaillée de ce résultat dans [L1]. Dans ce qui suit la mesure ν est la mesure de comptage sur $S_N^q = \{\sigma \subset \{1, \ldots, N\}$ tel que $|\sigma| = q\}$ et le résultat est valable sur le groupe de Cantor:

Il existe $c > 0$ tel que pour tout $N = 2^r$, où $r \in \mathbb{N}$ est assez grand, et pour tout $q \in \{1, \ldots, \frac{N}{2}\}$, on ait:

$$\nu \left\{ \sigma \in S_N^q | \ U(\sigma) \leq c \log\left(2 + \frac{q}{\log(N)}\right)\right\} < \frac{1}{N^2}$$

Le théorème signifie que si un ensemble inclus dans $\{1, \ldots, N\}$ est de cardinal $\gg \log(N)$ alors la probabilité pour que $U(\sigma)$ diverge vers $+\infty$ avec N est proche de 1. Ainsi, si $|\sigma| \geq N^\alpha$ pour un $\alpha > 0$, alors $U(\sigma)$ est en grande probabilité d'ordre de grandeur maximal, c'est à dire de l'ordre de $\log(N)$.

Kashin et Tzafriri obtiennent un résultat du même type sur le tore.

Dans [F-P], les auteurs démontrent que l'union de $\mathbb{Z}^-$ et d'un ensemble $UC \subset \mathbb{N}$ (a fortiori CUC) est un ensemble de continuité. La question naturelle de savoir si ces ensembles sont aussi Riesz admet une réponse partielle positive (ce sera l'objet du prochain paragraphe). Mais précisons ce qu'est un ensemble de convergence complètement uniforme (CUC).

Définition 1.3 *On appelle ensemble de convergence complètement uniforme une partie Λ de $\mathbb{Z}$ telle que $\sup\limits_{p\in\mathbb{Z}}\{U(p + \Lambda)\}$ est fini. Ou encore, Λ est CUC si pour tout $f \in C_\Lambda(\mathbb{T})$, les opérateurs de Fourier dissymétriques $S_{m,n}(f) = \sum\limits_{k=m}^{n} \hat{f}(k)e_k$ sont uniformément bornés par rapport à $n, m \in \mathbb{Z}$.*

On notera CUC la classe des ensembles de convergence complètement uniforme.

CUC est incluse dans UC et contient les ensembles de Sidon.

Théorème 1.4 *[S-T] Λ est dans CUC si et seulement si Λ est dans UC et s'il existe une mesure μ de $M(\mathbb{T})$ telle que $\hat{\mu}_{|\Lambda\cap\mathbb{Z}^+} = 1$ et $\hat{\mu}_{|\Lambda\cap\mathbb{Z}^-} = 0$.*

En particulier, si Λ est un ensemble CUC, $C_{\Lambda\cap\mathbb{Z}^+}(\mathbb{T})$ et $C_{\Lambda\cap\mathbb{Z}^-}(\mathbb{T})$ sont complé mentés dans $C_\Lambda(\mathbb{T})$.

Définition 1.5 *On dira que deux parties A et B de $\mathbb{Z}$ sont harmoniquement séparées s'il existe une mesure telle que: $\hat{\mu}_{|A} = 1$ et si $\hat{\mu}_{|B} = 0$.*

Par exemple, deux ensembles de Sidon disjoints sont harmoniquement séparés (leur réunion est un Sidon). Par le théorème précédent, si Λ est UC et si $\mathbb{Z}^+ \cap \Lambda$ et $\mathbb{Z}^- \cap \Lambda$ sont harmoniquement séparés alors Λ est CUC.

Remarque: un ensemble de convergence uniforme E inclus dans $\mathbb{N}$ est un ensemble de convergence complètement uniforme.

En effet, E est un ensemble de convergence uniforme. De plus $E \cap \mathbb{Z}^-$ est vide, il suffit de remarquer que $S_{m,n} = S_n - S_m$.

En ce qui concerne le problème de l'union pour les ensembles UC et même CUC, la réponse est négative. Cela résulte du théorème suivant (qui, par ailleurs, nous sera utile dans le prochain chapitre) qui s'appuie sur des travaux précédents de P. Soardi et G. Travaglini (cf [S-T]):

Théorème 1.6 *[F] Si H une suite lacunaire à la Hadamard alors $H - H + H$ n'est pas UC. A fortiori, $H - H$ est un ensemble UC et n'est pas un ensemble CUC.*

Rappelons que, pour le cas particulier de l'union d'ensembles $A \subset \mathbb{N}$ et $B \subset \mathbb{Z}^-$ de convergence uniforme (ils sont donc en fait CUC), la réponse est positive: cf [Tr]. Toutefois , l'union de deux ensembles CUC n'est pas UC en général.

2 Ensembles CUC et ensembles de Riesz

Théorème 2.1 *Un ensemble de convergence complètement uniforme est un ensemble de Riesz.*

Preuve: Soit Λ un ensemble de convergence complètement uniforme, il existe une mesure δ qui sépare harmoniquement $\Lambda \cap \mathbb{Z}^-$ et $\Lambda \cap \mathbb{N}$:

$$\hat{\delta}_{|\Lambda \cap \mathbb{Z}^-} = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\delta}_{|\Lambda \cap \mathbb{N}} = 1.$$

Etant donnée μ dans $M_\Lambda(\mathbb{T})$, $\delta * \mu$ est un élément de $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{T})$. Comme $\mathbb{N}$ est un ensemble de Riesz, il existe f dans L^1 tel que, pour tout n de $\mathbb{Z}$, $\hat{f}(n) = \widehat{\delta * \mu}(n)$. A fortiori, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\hat{f}(n) = \hat{\mu}(n)$.

$f - \mu$ est un élément de $M_{\mathbb{Z}^-}(\mathbb{T})$ donc, de même ($\mathbb{Z}^-$ est un ensemble de Riesz), il existe g dans L^1 tel que, pour tout n de $\mathbb{Z}$, $\hat{g}(n) = (\widehat{f - \mu})(n)$.

Finalement, on peut écrire $\hat{\mu} = \widehat{f + g}$ et $\mu = f + g \in L^1$. ∎

Remarque: soit Λ un ensemble CUC. La démonstration précédente montre que la transformée de Hilbert est bornée de $M_\Lambda(\mathbb{T})$ dans H^1. Si $\mu \in M_\Lambda(\mathbb{T})$:

$$\mu^+ = \sum_{n \in \Lambda \cap \mathbb{N}} \hat{\mu}(n) e_n = \delta * \mu \qquad \text{et} \qquad \mu^- = \sum_{n \in \Lambda \cap \mathbb{Z}^-} \hat{\mu}(n) e_{-n} = (\delta_o - \delta) * \mu$$

sont dans H^1.

3 Cas vectoriel

Nous étudions maintenant le cas de la convergence uniforme pour des fonctions à valeurs vectorielles à spectre lacunaire. Nous allons voir que cela ne change pas grand chose.

Rappelons le résultat général suivant, où l'intégration se fait au sens de Bochner:

Proposition 3.1 *Soient X un espace de Banach, $\Lambda \subset \Gamma$ et $f \in C_\Lambda(G,X)$. Si $\{F_n\}_{n\geq 0}$ est une approximation de l'unité alors $\|F_n * f - f\|_{C_\Lambda(G,X)} \to 0$.*

Preuve: la démonstration est la même que dans le cas scalaire. Pour tout entier n, on a la majoration:

$$\begin{aligned}\sup_{g\in G}\|(F_n * f - f)(g)\|_X &= \sup_{g\in G}\|\int_G (F_n(x)f(g-x) - F_n(x)f(g))dx\|_X \\ &\leq \sup_{g\in G}\int_G F_n(x).\|f(g-x) - f(g)\|_X dx\end{aligned}$$

On est donc ramené au cas scalaire et le dernier terme converge vers 0 avec n. ∎

Corollaire 3.2 *Soient X un espace de Banach et $\Lambda \subset \Gamma$, alors $\mathcal{P}_\Lambda(G,X)$ est dense dans $C_\Lambda(G,X)$.*

Preuve: il suffit d'appliquer le résultat précédent et de remarquer que, pour tout f de $C_\Lambda(G,X)$ et tout entier n, $F_n * f \in \mathcal{P}_\Lambda(G,X)$. ∎

L'étude du cas vectoriel est donc achevée par le résultat suivant:

Théorème 3.3 *Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}$. On a équivalence entre:*

i) Λ est un ensemble de convergence uniforme.

ii) Pour tout espace de Banach X et tout f de $C_\Lambda(\mathbb{T},X)$, la série de Fourier de f converge en norme uniformément vers f.

Preuve: il est trivial que $ii) \Rightarrow i)$ en considérant $X = \mathbb{C}$.

$i) \Rightarrow ii)$ Etant donnés X, f dans $C_\Lambda(\mathbb{T},X)$ et $\varepsilon > 0$, on peut trouver g dans $\mathcal{P}_\Lambda(\mathbb{T},X)$ tel que $\sup_{x\in\mathbb{T}}\|(f-g)(x)\|_X < \varepsilon$ (c'est le résultat du corollaire précédent).

Notons d le degré du polynôme trigonométrique g et fixons $n \geq d$.

Par hypothèse, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier n, il existe une mesure μ_n dans $M(G)$ telle que $\|\mu_n\| \leq C$ et

$$\widehat{\mu_n}(\gamma) = 1 \text{ si } \gamma \in \Lambda \cap \{-n,\cdots,n\} \quad et \quad \widehat{\mu_n}(\gamma) = 0 \text{ si } \gamma \in \Lambda \cap (\mathbb{Z} \setminus \{-n,\cdots,n\}).$$

Remarquons que $S_n(g) = g$ et $S_n(f) = \mu_n * f$.

On a donc la majoration:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{T}} \|(S_n(f)-f)(x)\|_X &\leq \sup_{x\in\mathbb{T}}\Big(\|S_n(f-g)(x)\|_X + \|(f-g)(x)\|_X\Big) \\
&\leq (\|\mu_n\|+1).\sup_{x\in\mathbb{T}}\|(f-g)(x)\|_X \\
&\leq (C+1).\varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(S_n(f))_{n\geq 0}$ converge vers f dans $C_\Lambda(\mathbb{T},X)$. ∎

Partie II
Ensembles Stationnaires

Nous allons étudier certaines propriétés liées aux séries de Fourier dont on perturbe les coefficients aléatoirement par des choix de signes. Introduisons donc une norme relativement exotique sur $\mathcal{P}(G)$, la norme $C^{p.s}$ ("presque sûrement continue") ainsi définie (les $(\varepsilon_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ étant une suite de Bernoulli):

$$[\![f]\!] = \int_\Omega \|\sum_{\gamma\in\Gamma} \varepsilon_\gamma(\omega)\hat{f}(\gamma)\gamma\|_\infty d\mathbb{P}(\omega) \ . \tag{1}$$

Marcus et Pisier [M-P] ont montré qu'on obtient une norme équivalente si on remplace $(\varepsilon_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ par une suite standard de variables gaussiennes $(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$.

$C^{p.s}(G)$ est, par définition, la complétion de $\mathcal{P}(G)$ pour la norme $[\![\cdot]\!]$. C'est également l'ensemble des fonctions de $L^2(G)$ pour lesquelles l'intégrale dans (1) est finie, ou l'ensemble des fonctions de $L^2(G)$ telles que, presque sûrement: $\varepsilon_\gamma(\omega)\hat{f}(\gamma) = \widehat{f^\omega}(\gamma)$ avec f^ω dans $C(G)$ (pour l'équivalence entre les définitions quantitatives et qualitatives, on pourra consulter [K]) et $C^{p.s}(G)$ est appelé l'espace des séries de Fourier aléatoires presque sûrement continues.

Après le résultat spectaculaire de Drury ("l'union de deux ensembles de Sidon est un ensemble de Sidon"), beaucoup de progrès ont été effectués dans les années 70 sur de tels ensembles. Rider, en particulier, a montré qu'ils pouvaient être caractérisés par l'inégalité a priori suivante:

$$\forall f \in \mathcal{P}_\Lambda(G), \quad \sum_{\gamma\in\Gamma} |\hat{f}(\gamma)| \leq C\,[\![f]\!]$$

Pisier [P-1] a observé qu'ils pouvaient aussi être caractérisés par l'inégalité a priori

$$\forall f \in \mathcal{P}_\Lambda(G), \quad \|f\|_\infty \leq C\,[\![f]\!]$$

c'est à dire par l'inclusion continue $C^{p.s}_\Lambda(G) \subset C_\Lambda(G)$. Cela l'a naturellement conduit à considérer la classe $\mathcal{S}$ des sous-ensembles de Γ vérifiant l'inégalité inverse

$$\forall f \in \mathcal{P}_\Lambda(G), \quad [\![f]\!] \leq C\|f\|_\infty$$

qui correspond à l'inclusion continue $C_\Lambda(G) \subset C_\Lambda^{p \cdot s}(G)$.

Il a nommé ensembles stationnaires les éléments de la classe $\mathcal{S}$. Nous avons la définition précise suivante:

Définition 0.1 *Un ensemble $\Lambda \subset \Gamma$ est stationnaire (en abrégé $\Lambda \in \mathcal{S}$) si:*

$$(0.1) \qquad \exists C > 0,\ \forall f \in \mathcal{P}_\Lambda(G),\ [\![f]\!] \leq C\|f\|_\infty.$$

La meilleure constante C dans (0.1) appellée constante de stationnarité de Λ est notée $K_S(\Lambda)$.

Pisier a montré que $\mathcal{S}$ contient les ensembles de Sidon et les produits finis (comme sous-ensembles du groupe dual produit) de tels ensembles. $\mathcal{S}$ est donc strictement plus grande que la classe des ensembles de Sidon puisque si $\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k$ sont des Sidon infinis dans les groupes $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k$, alors $\Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_k$ est un vrai $\frac{2k}{k+1}$-Sidon (cf 0.3) dans le groupe $\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_k$.

Bourgain ([Bo]) a également démontré que, si A_1 et A_2 sont infinis :

$$A_1 \times A_2 \in \mathcal{S} \Leftrightarrow A_1 \text{ et } A_2 \in \mathcal{S} \cap \Lambda(2).$$

Malgré ces résultats, la classe $\mathcal{S}$ semble encore mal connue. Dans cette partie, nous nous attacherons à en donner de nouvelles propriétés et à la comparer à d'autres classes d'ensembles lacunaires, particulièrement les ensembles UC, les ensembles de continuité, les p-Sidon et les $\Lambda(p)$.

Nous aurons besoin dans la suite de deux inégalités liées à la norme $[\![\cdot]\!]$: d'une part l'inégalité de Salem-Zygmund [S-Z], qui sera utilisée sous la forme:

$$\exists C > 0,\ \forall (a_n)_{n \geq 0},\ |a_n| = 1,\ \forall N \geq 2 : \left[\!\!\left[\sum_{n=0}^{N-1} a_n e_n\right]\!\!\right] \geq C\sqrt{N \log N}. \qquad (2)$$

D'autre part, l'inégalité de Marcus-Pisier [M-P] qui s'exprime ainsi: il existe une constante $D > 0$ telle que, pour toute suite $(a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ convergente vers 0, on ait :

$$\left[\!\!\left[\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \gamma\right]\!\!\right]_{C(G)} \geq D \left[\!\!\left[\sum_{k \geq 0} a_k^* e_k\right]\!\!\right]_{C(\mathbb{T})}. \qquad (3)$$

(où $(a_k^*)_{k \geq 0}$ désigne le réarrangement décroissant de $(|a_\gamma|)_{\gamma \in \Gamma}$)

1 Résultats préliminaires

Lemme 1.1 *Soient $P \in \mathcal{P}(G)$, $E_\delta = \{\gamma \in \Gamma / |\hat{P}(\gamma)| \geq \delta\}$ et $N_\delta = |E_\delta|$ ($\delta > 0$), alors:*

$$[\![P]\!] \geq c\delta\sqrt{N_\delta \log N_\delta}.$$

Preuve : c est une constante numérique dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre, en restant indépendante de P et δ. Le principe de contraction ([K]) entraîne:

$$\begin{aligned} 2\,[\![P]\!] &\geq \left[\!\!\left[\sum_{\gamma \in E_\delta} |\hat{P}(\gamma)|\gamma \right]\!\!\right] \\ &\geq \delta \left[\!\!\left[\sum_{\gamma \in E_\delta} \gamma \right]\!\!\right]. \end{aligned}$$

En utilisant (3), on obtient :

$$[\![P]\!] \geq c\delta \left[\!\!\left[\sum_{k=0}^{N_\delta - 1} e_k \right]\!\!\right]_{C(\mathbb{T})}$$

puis en utilisant (2), il vient:

$$[\![P]\!] \geq c\delta\sqrt{N_\delta \log N_\delta}.$$

■

Comme les ensembles de Sidon (ou d'autres classes d'ensembles lacunaires), les ensembles stationnaires peuvent être définis de plusieurs façons équivalentes.

Proposition 1.2 *Soit $\Lambda \subset \Gamma$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) $C_\Lambda(G) \subset C_\Lambda^{p.s}(G)$

ii) Il existe $K > 0$ telle que, pour tout f dans $C_\Lambda(G)$, $[\![f]\!] \leq K\|f\|_\infty$.

iii) Il existe $K > 0$, tel que, pour tout élément (μ_ω) de $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, M(G))$ avec $\|\mu_\omega\|_M \leq 1$ $\mathbb{P} - p.s$, il existe une mesure μ sur G de norme inférieure à K, interpolant presque sûrement (μ_ω) au sens suivant:

$$\forall \gamma \in \Lambda : \quad \hat{\mu}(\gamma) = \int_\Omega \widehat{\mu_\omega}(\gamma)\varepsilon_\gamma(\omega)d\mathbb{P}(\omega).$$

iv) Il existe $K > 0$ tel que, pour tout m élément de $C^{p.s.}(G)^* = M(L^2, L^\psi)$, il existe une mesure μ sur G de norme inférieure à $K\|m\|$, interpolant m sur Λ au sens suivant:

$$\forall \lambda \in \Lambda, \ \hat{\mu}(\lambda) = m_\lambda.$$

v) Λ est un ensemble stationnaire.

Preuve : i) $\Leftrightarrow$ v) l'équivalence est claire d'après la densité, dans $C_\Lambda(G)$, des polynômes à spectre dans Λ.
i) $\Rightarrow$ ii) il s'agit juste d'appliquer le théorème du graphe fermé.
ii) $\Rightarrow$ i) trivial.
ii) $\Rightarrow$ iii) Soit (μ_ω) élément de $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, M(G))$ avec $\|\mu_\omega\| \leq 1$ $\mathbb{P}$-p.s. L'application $T : \mathcal{P}_\Lambda(G) \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{P}_\Lambda(G), \qquad T(f) = \int_\Omega (\mu_\omega * f^\omega)(0) d\mathbb{P}(\omega)$$

est une forme linéaire continue sur $\mathcal{P}_\Lambda(G)$, avec une norme bornée par K. En effet, on a, pour tout f de $\mathcal{P}_\Lambda(G)$:

$$|T(f)| \leq \int_\Omega \|\mu_\omega\| \|f^\omega\|_\infty d\mathbb{P}(\omega) \leq \int_\Omega \|f^\omega\|_\infty d\mathbb{P}(\omega) = [\![f]\!] \leq K\|f\|_\infty.$$

Le théorème de Hahn-Banach et le théorème de représentation de Riesz assure l'existence d'une mesure $\mu \in M(G)$ telle que$\|\mu\| \leq K$ et:

$$\forall f \in C(G) : \ \tilde{T}(f) = (\mu * f)(0). \tag{4}$$

En testant (4) sur $\gamma \in \Lambda$, on obtient:

$$\forall \gamma \in \Lambda : \quad \hat{\mu}(\gamma) = \tilde{T}(\gamma) = \int_\Omega \hat{\mu}_\omega(\gamma) \varepsilon_\gamma(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

ce qui prouve (iii).
iii) $\Rightarrow$ ii) Soit f dans $\mathcal{P}_\Lambda(G)$. D'après [K], $C^{p.s}(G)$ se plonge isométriquement dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, C(G))$, par conséquent:

$$[\![f]\!] = \sup \left\{ \left| \int_\Omega (\mu_\omega * f^\omega)(0) d\mathbb{P}(\omega) \right| / (\mu_\omega) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, M(G)) \quad \text{avec} \quad \|\mu_\omega\| \leq 1 \ p.s. \right\}$$

Or pour (μ_ω) dans la boule unité de $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, M(G))$, la condition (iii) donne une mesure $\mu \in M(G)$ telle que:

$$\|\mu\| \leq K, \ \text{et} \quad \forall \gamma \in \Lambda : \hat{\mu}(\gamma) = \int_\Omega \hat{\mu}_\omega(\gamma) \varepsilon_\gamma(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Il s'ensuit que

$$\int_\Omega (\mu_\omega * f^\omega)(0)d\mathbb{P}(\omega) = \sum_{\gamma\in\Lambda} \hat{f}(\gamma)\Big(\int_\Omega \hat{\mu}_\omega(\gamma)\varepsilon_\gamma(\omega)d\mathbb{P}(\omega)\Big) = f * \mu(0)$$

d'où

$$|\int_\Omega (\mu_\omega * f^\omega)(0)d\mathbb{P}(\omega)| \leq \|\mu\|\|f\|_\infty \leq K\|f\|_\infty$$

En prenant la borne supérieure du membre de droite, sur la boule unité de $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, M(G))$, nous obtenons: $[\![f]\!] \leq K\|f\|_\infty$, soit (ii).

ii) $\Leftrightarrow$ iv) Il s'agit d'un raisonnement par dualité tout à fait similaire au précédent. Nous ne le détaillerons donc pas (le fait que $C^{p.s.}(G)^* = M_{2,\psi}$ se trouve dans [P-1]). ∎

2 Point de vue topologique

Une question naturelle est la suivante: peut-on remplacer dans la définition de $C^{p.s}$ le point de vue probabiliste par le point de vue topologique? Plus précisément, peut-on échanger la notion de "convergence presque sûre" et la notion de "convergence quasi-sûre " dans ce qui précède?

Soit $\Lambda \subset \Gamma$, considérons le groupe de Cantor $\{-1,1\}^\Lambda$ muni de sa topologie usuelle et notons $r_\gamma(\alpha)$, la γ^{ieme} coordonnée de $\alpha \in \{-1,1\}^\Lambda$, où $\gamma \in \Lambda$. Supposons que Λ ait la propriété suivante:

$$(P)\left\{\begin{array}{c} \forall f \in C_\Lambda(G),\ \exists\Omega_f,\quad G_\delta \text{ dense}\quad \text{dans}\quad \{-1,1\}^\Lambda,\ \text{tel que } \forall\alpha\in\Omega_f: \\ \exists f^\alpha \in C_\Lambda(G)\quad \text{avec}\quad \widehat{f^\alpha}(\gamma) = r_\gamma(\alpha)\hat{f}(\gamma)\quad \forall\gamma\in\Lambda \end{array}\right.$$

Alors Λ est nécessairement un ensemble de Sidon.

C'est une conséquence du résultat général suivant:

Théorème 2.1 *Soit X un espace de Banach. Soit une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de X. On définit*

$$\Omega_1 = \{\alpha \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}};\ \sum_{n\geq 0} r_n(\alpha)x_n \text{ converge dans } X\}.$$

Alors, Ω_1 est maigre ou $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge inconditionnellement dans X.

Preuve: Supposons que Ω_1 soit non maigre. Fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout $q \geq 1$, posons

$$F_q = \{\omega \in \Omega;\ \forall m', m \geq q, \|\sum_{n=m}^{m'} r_n(\omega)x_n\| \leq \varepsilon\}.$$

La définition de Ω_1 se traduit par la relation:

$$\Omega_1 \subset \bigcup_{q \in \mathbb{N}^*} F_q.$$

Montrons que F_q est fermé dans Ω.

Soit $\omega \in \bar{F}_q$. Pour tous $m' \geq m \geq q$, il existe $\alpha \in F_q$ tel que pour tout $n \leq m'$, $r_n(\omega) = r_n(\alpha)$.

Nous avons: $\| \sum_{n=m}^{m'} r_n(\omega) x_n \| = \| \sum_{n=m}^{m'} r_n(\alpha) x_n \| \leq \varepsilon$ pour $\alpha \in F_q$. Cela montre que $\omega \in F_q$ et F_q est fermé dans Ω.

Ω_1 n'est pas inclus dans une union dénombrable de fermés d'intérieur vide donc

$$\exists\, q \geq 1, \quad \mathring{F}_q \neq \emptyset.$$

Autrement dit, il existe c dans Ω et $N \geq 1$ tels que la boule $B(c; N)$ soit incluse dans F_q, ou encore:

pour tout $\omega' \in \Omega$ tel que $r_n(\omega') = r_n(c)$ pour tout $n \leq N$, nous avons, pour tout $m' \geq m \geq q$: $\| \sum_{n=m}^{m'} x_n r_n(\omega') \| \leq \varepsilon$.

Soit $\omega \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ et notons $\tilde{q} = \max(N+1, q)$.
Soient m et m' avec $m' \geq m \geq \tilde{q}$ puis définissons ω_1 par:

$$\begin{cases} r_n(\omega_1) & = r_n(c) \quad \text{si } n \leq N \\ r_n(\omega_1) & = r_n(\omega) \quad \text{si } n \geq N+1. \end{cases}$$

$\omega_1 \in B(c, N) \subset F_q$. Nous obtenons donc

$$\| \sum_{n=m}^{m'} r_n(\omega) x_n \| = \| \sum_{n=m}^{m'} r_n(\omega_1) x_n \| \leq \varepsilon$$

Par conséquent, $\sum_{n \geq 1} r_n(\omega) x_n$ converge dans X. ∎

Corollaire 2.2 *Un ensemble $\Lambda \subset \Gamma$ ayant la propriété (P) est un ensemble de Sidon.*

Preuve: soit $f \in C_\Lambda(G)$, notons $\Lambda = (\lambda_n)_{n \geq 0}$ et posons

$$x_n = \hat{f}(\lambda_n) \lambda_n.$$

D'après le théorème 2.1, la série $\sum_{n \geq 0} \hat{f}(\lambda_n) \lambda_n$ converge inconditionnellement dans $C_\Lambda(G)$. Ainsi, $\{\lambda_n\}$ est une base inconditionnelle de $C_\Lambda(G)$ et cela signifie que Λ est un ensemble de Sidon. ∎

3 Propriétés arithmétiques

Dans [P-1], G. Pisier a montré en utilisant les polynômes de Rudin-Shapiro que les ensembles stationnaire ne peuvent contenir des progressions arithmétiques arbitrairement grandes. Il est facile de constater qu'un groupe abélien discret infini ne peut être un ensemble stationnaire. Nous allons généraliser cela dans la proposition suivante, en considérant des progressions arithmétiques à plusieurs dimensions.

Théorème 3.1 *Un ensemble stationnaire $\Lambda \subset \Gamma$ ne peut contenir des parallélépipèdes de taille arbitrairement grande.*

Remarque: rappelons qu'un parallélépipède de taille s, $s \geq 1$, est un ensemble de la forme:

$$P = \left\{ \beta \prod_{j=1}^{s} \lambda_j^{\varepsilon_j};\ \forall\ 1 \leq j \leq s : \varepsilon_j \in \{0,1\} \right\} \tag{5}$$

avec $\beta, \lambda_1, \cdots, \lambda_s \in \Gamma$ et avec les λ_j distincts.

Preuve: supposons au contraire que Λ contienne des parallélépipèdes de taille s, arbitrairement grande; nous pouvons supposer dans (5) que $\{\lambda_j\}$ est quasi-indépendant.

En effet, soit $P_N \subset \Lambda$ un parallélépipède de taille N de la forme (5). Choisissons $\lambda_{j_1} \neq 1$ dans$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_s\}$ et supposons les éléments $\lambda_{j_1}; \cdots; \lambda_{j_p}$ déjà choisis de façon que: $D_p = \{\lambda_{j_q}\}_{1 \leq q \leq p}$ est quasi-indépendant. Considérons alors l'ensemble A_p de tous les produits $\prod_{q=1}^{p} \lambda_{j_q}^{\varepsilon_q}$, où les ε_q sont dans $\{-1; 0; 1\}$. A_p est de cardinal 3^p, donc ${}^cA_p$ est de cardinal $N - 3^p$. Nous pouvons continuer la construction et si $N \geq 3^p + 1$, on peut trouver $\lambda_{j_{p+1}} \in \{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\}$ et différent de tous les $\prod_{q=1}^{p} \lambda_{j_q}^{\varepsilon_q}$; donc D_{p+1} est quasi-indépendant. Nous pouvons ainsi extraire $\phi(N)$ éléments, formant un ensemble quasi-indépendant inclus dans Γ, où $\phi(N)$ est de l'ordre de $\log N$, et donc est arbitrairement grand.

Nous supposerons donc dans la suite les parallélépipèdes de la forme (5), où $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_N\}$ est un ensemble quasi-indépendant et N arbitrairement grand.

Fixons N et faisons la construction suivante, qui est une variante de celle de Rudin et Shapiro: $R_0 = S_0 = \beta$ puis, par récurrence, pour $0 \leq q \leq N-1$

$$\begin{cases} R_{q+1} &= R_q + \lambda_{q+1} S_q \\ S_{q+1} &= R_q - \lambda_{q+1} S_q \end{cases}$$

Tout d'abord, la règle du parallélogramme donne:

$$|R_{q+1}|^2 + |S_{q+1}|^2 = 2(|R_q|^2 + |S_q|^2).$$

Donc,

$$|R_q|^2 + |S_q|^2 = 2^{q+1} \qquad \text{et} \qquad \|R_q\|_\infty \le 2^{\frac{q+1}{2}}.$$

Puis, la condition de quasi-indépendance assure que les coefficients du polynôme R_N vont effectivement correspondre à ce que l'on pense (il n'y aura pas de chevauchements de termes). Plus précisément, supposons que les coefficients de R_q et S_q (c'est le cas pour $q = 1$) vérifient:

(a) $supp(\widehat{R_q}) = supp(\widehat{S_q}) = \left\{\beta \prod_{j=1}^{q} \lambda_j^{\varepsilon_j} | \forall\ 1 \le j \le q : \varepsilon_j \in \{0,1\}\right\}$

et

(b) $|\{\gamma \in \Gamma | \hat{R}_q(\gamma) \neq 0\}| = |\{\gamma \in \Gamma | \hat{S}_q(\gamma) \neq 0\}| = 2^q$

et

(c) $\forall \gamma \in \left\{\beta \prod_{j=1}^{q} \lambda_j^{\varepsilon_j} | \forall\ 1 \le j \le q : \varepsilon_j \in \{0,1\}\right\}, \hat{S}_q(\gamma)$ et $\hat{R}_q(\gamma) \in \{-1, 1\}$.

On remarque que R_{q+1} est somme de R_q à spectre dans

$$\left\{\beta \prod_{j=1}^{q} \lambda_j^{\varepsilon_j} | \forall\ 1 \le j \le q : \varepsilon_j \in \{0,1\}\right\}$$

et de $\lambda_{q+1} S_q$ à spectre dans

$$\left\{\beta \lambda_{q+1} \prod_{j=1}^{q} \lambda_j^{\varepsilon_j} | \forall\ 1 \le j \le q : \varepsilon_j \in \{0,1\}\right\}.$$

Ces deux polynômes sont à spectres disjoints d'après la quasi-indépendance des λ_j, $1 \le j \le N$. Dans cette somme, les coefficients ne se combinent pas et le spectre de R_{q+1} est la réunion des spectres de R_q et de $\lambda_{q+1} S_q$,

$$\left\{\beta \prod_{j=1}^{q+1} \lambda_j^{\varepsilon_j};\ \forall\ 1 \le j \le q+1 : \varepsilon_j \in \{0,1\}\right\}.$$

Le raisonnement est similaire pour S_{q+1}, ce qui prouve (a), (b) et (c) par récurrence.

Au rang N, nous obtenons:

$$\left\{\begin{array}{ll} R_N \in \mathcal{P}_\Lambda & (6.1) \\ |\{\gamma \in \Gamma / \hat{R}_N(\gamma) \neq 0\}| = 2^N & (6.2) \\ \|R_N\|_\infty \le 2^{\frac{N+1}{2}} & (6.3) \\ \forall \gamma \in \Lambda \quad \hat{R}_N(\gamma) \in \{-1, 0, 1\} & (6.4) \end{array}\right. \qquad (6)$$

et appliquons le lemme 1.1 au polynôme R_N avec $\delta = 1$ pour obtenir, via (6.2) et (6.4) :

$$\exists c > 0, \quad [\![R_N]\!] \geq c 2^{\frac{N}{2}} \sqrt{N} \tag{7}$$

D'autre part, la stationnarité de Λ donne:

$$\text{via (6.1)}, \quad [\![R_N]\!] \leq K_s(\Lambda) \|R_N\|_\infty \quad \text{et, avec (6.3)}, \quad [\![R_N]\!] \leq K_s(\Lambda) 2^{\frac{N+1}{2}} \tag{8}$$

Finalement, les relations (7) et (8) conduisent à:

$$N \leq 2 (\frac{K_S(\Lambda)}{c})^2$$

N étant arbitrairement grand, nous obtenons une contradiction et le théorème est démontré. ∎

Nous avons le corollaire immédiat suivant:

Corollaire 3.2 *Γ n'est pas un ensemble stationnaire.*

Pour $\Gamma = \mathbb{Z}$, nous obtenons des résultats plus précis en utilisant les travaux de Miheev ([M]) sur les parallélépipèdes. Rappelons que Miheev démontre le fait suivant: si un ensemble $\Lambda = \{n_j\}_{j \geq 0}$ d'entiers ne contient pas de parallélépipède de taille $S \geq s$ (pour un certain $s \geq 2$), alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) il existe } m > 1 \text{ et } c > 0 \text{ tel que } \; n_j \geq c j^m \quad j = 1, 2, \cdots \\ \text{a fortiori} \\ \text{ii) } \displaystyle\sum_{j \geq 1} \frac{1}{n_j} \quad \text{converge.} \end{array} \right. \tag{9}$$

Corollaire 3.3 *Soit $\Lambda = \{n_j\}_{j \geq 0}$ un stationnaire de $\mathbb{Z}$, alors Λ a la propriété (9).*

Proposition 3.4 *L'ensemble des nombres premiers $(p_j)_{j \geq 1}$ n'est pas un ensemble stationnaire.*

Preuve : $\displaystyle\sum_{j \geq 1} \frac{1}{p_j} = \infty$ et on utlise le corollaire 3.2 (ii). ∎

Corollaire 3.5 *La densité uniforme d'un ensemble stationnaire $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ est nulle, c'est à dire:*

$$\Delta^+(\Lambda) = \lim_N \Big(\sup_{a \in \mathbb{Z}} \frac{|\Lambda \cap \{a, \cdots, a+N\}|}{N+1} \Big) = 0.$$

4 Ensembles stationnaires et ensembles de continuité

Dans tout ce paragraphe, nous dirons que G vérifie la propriété $\mathcal{D}$ si, de toute partie infinie de Γ, on peut extraire une partie infinie dissociée. Cela revient à écarter a priori le cas où $\{\gamma^2 | \gamma \in G\}$ est fini.

Dans [F-P], les auteurs ont montré que si Λ est un ensemble UC, un p-Sidon ou un ensemble $\Lambda(1)$, inclus dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{Z}^- \cup \Lambda$ est un ensemble de continuité. Nous allons démontrer un résultat similaire pour les ensembles stationnaires. Nous allons également étudier le cas d'un groupe abélien compact vérifiant la propriété arithmétique $\mathcal{D}$ et montrer que l'union d'un $\Lambda(1)$ et d'un stationnaire inclus dans Γ est encore un ensemble de continuité.

Ceci va résulter de l'étude du comportement des coefficients de Fourier des mesures de $M(G)$, à spectre lacunaire, contenant un stationnaire. Pour cela, nous allons exhiber des propriétés de ces mesures en terme de multiplicateur.

Théorème 4.1 *Soient Λ un ensemble stationnaire et A un ensemble $\Lambda(1)$, inclus dans Γ, alors il existe $c > 0$ telle que, pour toute mesure $\mu \in M_{\Lambda \cup A}(G)$ et tout $h \in L^2(G)$:*

$$\left[\!\!\left[\sum_{\lambda \in \Lambda} \hat{\mu}(\lambda) \hat{h}(\lambda) \lambda \right]\!\!\right] \leq c \|\mu\| . \|h\|_2. \tag{10}$$

De façon équivalente, pour toute mesure μ de $M_{\Lambda \cup A}(G)$, l'élément $\hat{\mu} 1_\Lambda$ définit un multiplicateur borné de $L^2(G)$ dans $C^{p.s.}(G)$.

Preuve : considérons d'abord l'opérateur:

$$T_\mu : \left| \begin{array}{ccc} C_{A^c}(G) & \longrightarrow & C^{p.s}(G) \\ h & \longrightarrow & \mu * h \end{array} \right.$$

Cet opérateur est borné car $\mu * f \in C_\Lambda(G) \subset C^{p.s}(G)$ pour tout f dans $C_{A^c}(G)$ donc

$$\|T_\mu\| \leq K_s(\Lambda) \|\mu\|,$$

L'hypothèse, A ensemble $\Lambda(1)$, traduit le caractère réflexif (garder la remarque de la définition 0.5 en mémoire) de $L^1_A(G) = M_A(G)$ (l'égalité a lieu car a fortiori A est un ensemble de Riesz). Comme $M_A(G) = (C(G)/C_{A^c}(G))^*$, l'espace $C(G)/C_{A^c}(G)$ est aussi réflexif.

D'après un théorème dû indépendamment à Pisier et Kislyakov ([D-J-T] p316), nous savons alors que l'opérateur T_μ est 2-sommant et le théorème de Pietsch assure l'existence d'une constante C' et d'une mesure de probabilité ν sur G telles que

$$\forall h \in C_{A^c}(G), \qquad [\![T_\mu(h)]\!] \leq C' \|\mu\| \left(\int_G |h(x)|^2 d\nu(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'invariance par translation de T_μ permet de choisir $d\nu = dx$. En effet, pour tout g dans G et tout h dans $C_{A^c}(G)$, nous avons: $[\![T_\mu(h)]\!] = [\![T_\mu(h_g)]\!]$, avec h_g, le translaté de h par g donc, en intégrant et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient:

$$\begin{aligned}
[\![T_\mu(h)]\!]^2 &= \int_G [\![T_\mu(h_g)]\!]^2 \, dg \\
&\leq \int_G \Big(C'^2 \|\mu\|^2 \int_G |h_g(x)|^2 d\nu(x)\Big) dg \\
&= (C'\|\mu\|)^2 \int_G \Big(\int_G |h_x(g)|^2 dg\Big) d\nu(x) = (C'\|\mu\|)^2 \int_G \|h\|_2^2 d\nu(x) \\
&= (C'\|\mu\|)^2 \|h\|_2^2.
\end{aligned}$$

Nous pouvons conclure en invoquant la densité de $C_{A^c}(G)$ dans $L^2_{A^c}(G)$, puis l'inconditionnalité des caractères dans l'espace $L^2(G)$. ■

Dans le cadre du tore, nous avons le résultat suivant:

Proposition 4.2 *Soit $\Lambda \subset \mathbb{N}$ un ensemble stationnaire. Il existe $c > 0$ telle que, pour toute mesure $\mu \in M_{\Lambda \cup \mathbb{Z}^-}(\mathbb{T})$ et tout $h \in L^2(\mathbb{T})$:*

$$\left[\!\!\left[\sum_{\lambda \in \Lambda} \hat{\mu}(\lambda) \hat{h}(\lambda) \lambda\right]\!\!\right] \leq c \|\mu\| . \|h\|_2. \tag{11}$$

C'est à dire que, pour toute mesure μ de $M_{\Lambda \cup \mathbb{Z}^-}(\mathbb{T})$, l'élément $(\hat{\mu} 1_\Lambda)$ définit un multiplicateur borné de $L^2(\mathbb{T})$ dans $C^{p.s.}(\mathbb{T})$.

Preuve : nous allons donner deux preuves. $A(\mathbb{D})$ désigne l'algèbre du disque, soit l'espace $C_{\mathbb{N}}(\mathbb{T})$.

Première méthode: nous utilisons une variante du théorème de Kahane-Katznelson-De Leeuw due à Kislyakov, que nous rappelons:

$$\exists c > 0, \ \forall h \in \ell^2(\mathbb{N}), \ \exists f \in A(\mathbb{D}), \ \begin{cases} \|f\|_\infty \leq c \|h\|_2 \\ \quad et \\ \forall \gamma \in \mathbb{N} : |\hat{f}(\gamma)| \geq |h_\gamma| \end{cases} \tag{K}$$

Fixons $h \in \ell^2$ et $\mu \in M_{\Lambda \cup \mathbb{Z}^-}(\mathbb{T})$ et considérons une fonction f de $A(\mathbb{D})$ comme dans (K), on voit que

$$\mu * f \in C_\Lambda(\mathbb{T}) \quad \text{et} \quad \|\mu * f\|_\infty \leq \|\mu\| . \|f\|_\infty \leq c \|\mu\| . \|h\|_2.$$

En invoquant la stationnarité de Λ, nous obtenons l'existence de $C > 0$ telle que:

$$[\![f * \mu]\!] \leq C \|\mu\| . \|h\|_2.$$

D'autre part, d'après le principe de contraction, $2\,[\![f*\mu]\!] \geq \left[\!\!\left[\sum_{\lambda\in\Lambda} \hat{\mu}(\lambda)h_\lambda\lambda\right]\!\!\right]$

Finalement, nous avons: $\left[\!\!\left[\sum_{\lambda\in\Lambda} \hat{\mu}(\lambda)h_\lambda\lambda\right]\!\!\right] \leq 2C\|\mu\|.\|h\|_2.$ ■

Deuxième méthode: nous pouvons utiliser un théorème dû à Bourgain ([W] p305): tout opérateur borné de $A(\mathbb{D})$ dans un espace de cotype 2 est 2-sommant. Nous avons déjà rappelé que G. Pisier ([P-1]) a montré que l'espace $C^{p.s.}(G)$ est de cotype 2.

L'opérateur T_μ, introduit dans la démonstration du théorème précédent, est 2-sommant. Nous concluons de la même manière que dans la démonstration 4.1.

■

Ceci nous permet d'obtenir en particulier une estimation fonctionnelle sur la taille des coefficients de Fourier d'une mesure à spectre dans un ensemble stationnaire inclus dans un groupe discret abélien quelconque.

Théorème 4.3 *Soient $\Lambda \subset \Gamma$ stationnaire et $\delta > 0$, alors, pour toute mesure $\mu \in M_\Lambda(G)$:*

$$|\{\gamma \in \Lambda / |\hat{\mu}(\gamma)| \geq \delta\}| \leq \exp\left(\frac{c\|\mu\|^2}{\delta^2}\right) \tag{12}$$

où c est une constante ne dépendant que de Λ.
Ceci s'interprète comme la continuité de l'injection:

$$\left| \begin{array}{ccc} M_\Lambda & \hookrightarrow & \ell^{\psi,\infty} \\ \mu & \to & \{\hat{\mu}(\gamma)\}_{\gamma\in\Lambda} \end{array} \right. \tag{13}$$

avec $\psi(t) = e^{t^2} - 1$ et $\ell^{\psi,\infty} = \{(a_n) | \sup_{n\geq 1} \psi^{-1}(n)a_n^* < \infty\}$.

Il va s'agir d'un corollaire du théorème plus général suivant:

Théorème 4.4 *Soient $A, B \subset \Gamma$ vérifiant:*

$$\exists c > 0, \quad \forall \mu \in M_{A\cup B}(G), \quad \forall h \in L^2(G) : \left[\!\!\left[\sum_{\lambda\in A} \hat{\mu}(\lambda)\hat{h}(\lambda)\lambda\right]\!\!\right] \leq c\|\mu\|\|h\|_2.$$

Alors, nous avons l'estimation:

$$\forall \mu \in M_{A\cup B}(G) : \quad |\{\gamma \in A / |\hat{\mu}(\gamma)| \geq \delta\}| \leq \exp\left(\frac{k\|\mu\|^2}{\delta^2}\right) \tag{14}$$

où k ne dépend que de la constante c intervenant dans l'hypothèse.

Preuve: k pourra varier d'une ligne à l'autre mais désignera une constante ne dépendant que de c. Soient $\mu \in M_{A\cup B}(G)$ et $\delta > 0$.

$\Lambda_\delta = \{\gamma \in A/|\hat{\mu}(\gamma)| \geq \delta\}$, notons Λ'_δ un sous-ensemble fini de Λ_δ et considérons

$$f := \frac{1}{|\Lambda'_\delta|^{1/2}} \sum_{\gamma \in \Lambda'_\delta} \gamma \qquad ; \quad \|f\|_2 = 1\,.$$

L'hypothèse conduit à l'inégalité

$$[\![f * \mu]\!] \leq c\|\mu\| \tag{15}$$

Puisque pour tout $\gamma \in \Lambda'_\delta$: $\widehat{f * \mu}(\gamma) = \frac{1}{|\Lambda'_\delta|^{1/2}}\hat{\mu}(\gamma)$, le lemme 1.1 implique l'inégalité :

$$[\![f * \mu]\!] \geq k\frac{\delta}{|\Lambda'_\delta|^{1/2}}\big(|\Lambda'_\delta|\log|\Lambda'_\delta|\big)^{1/2} = k\delta(\log|\Lambda'_\delta|)^{1/2}.$$

Ainsi, compte-tenu de (15), nous obtenons:

$$k\|\mu\| \geq \delta(\log|\Lambda'_\delta|)^{1/2}\,.$$

En passant au sup sur Λ'_δ, on a aussi Λ_δ fini et

$$k\|\mu\| \geq \delta(\log|\Lambda_\delta|)^{1/2}.$$

De manière équivalente

$$\forall\delta > 0,\ |\Lambda_\delta| \leq \exp\Big(\frac{k^2\|\mu\|^2}{\delta^2}\Big)$$

∎

Preuve du théorème 4.3 : il suffit d'appliquer le théorème précédent et le théorème 4.1 pour obtenir (12).

Ceci peut également s'écrire sous la forme

$$\exists D > 0 \quad \forall\delta > 0\, \forall\mu \in M_\Lambda, \quad |\Lambda_\delta| \leq \psi\Big(\frac{D\|\mu\|}{\delta}\Big).$$

Soit $(b_j)_{j\geq 1}$ le réarrangement décroissant de $\{|\hat{\mu}(\gamma)|\}_{\gamma\in\Lambda}$. Etant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que: $b_\ell \geq \frac{D\|\mu\|}{\psi^{-1}(n)}$, appliquons le résultat précédent à $\delta = (\psi^{-1}(n))^{-1}D\|\mu\|$ pour obtenir:

$$n \geq |\{\gamma \in \Lambda/|\hat{\mu}(\gamma)| \geq \delta\}| = |\{p \in \mathbb{N}^*/b_p \geq \delta\}| \geq \ell$$

et, en particulier, $b_n \leq \delta$ et $\sup_n b_n\psi^{-1}(n) \leq D\|\mu\|$, ce qui démontre (13). ∎

Un corollaire immédiat est :

Corollaire 4.5 *Tout ensemble stationnaire $\Lambda \subset \Gamma$ est un ensemble de Rajchman. Autrement dit*

$$\forall \mu \in M_\Lambda(G), \quad \lim_{\gamma \to \infty} \hat{\mu}(\gamma) = 0 .$$

Nous allons établir un résultat plus fort. Nous dégageons pour cela un principe général qui s'inspire des méthodes développées dans [F-P].

Théorème 4.6 *On suppose que G vérifie $\mathcal{D}$. Soient A et $B \subset \Gamma$ tels que*

B est un ensemble de continuité et il existe ϕ : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tendant vers l'infini telle que

$$\forall \mu \in M_{A\cup B}(G),\ \forall \delta > 0: \quad \phi(|\{\gamma \in A / |\hat{\mu}(\gamma)| \geq \delta\}|) \leq \frac{\|\mu\|}{\delta}. \tag{16}$$

Alors $A \cup B$ est un ensemble de continuité.

Preuve : on peut clairement supposer A et B disjoints.
Démontrons dans un premier temps la relation suivante

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in]0, \varepsilon[,\ \forall \mu \in M(G), \text{ avec } \|\mu\| = 1, \\ &\overline{\lim_{\gamma \notin A\cup B}}\ |\hat{\mu}(\gamma)| < \delta \Longrightarrow \overline{\lim_{\gamma \in A}}\ |\hat{\mu}(\gamma)| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{17}$$

Supposons au contraire que:
$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \delta \in]0, \varepsilon[, \quad \exists \mu \in M(G)$ avec $\|\mu\| = 1$ telle que:

$$\overline{\lim_{\gamma \notin A\cup B}}\ |\hat{\mu}(\gamma)| \leq \delta \quad \text{et} \quad \overline{\lim_{\gamma \in A}}\ |\hat{\mu}(\gamma)| > \varepsilon.$$

La condition $\overline{\lim\limits_{\gamma \notin A\cup B}}\ |\hat{\mu}(\gamma)| \leq \delta$, assure l'existence d'un ensemble fini F tel que:

$$\forall \gamma \notin A \cup B \quad \text{avec} \quad |\gamma| \notin F, \quad |\hat{\mu}(\gamma)| \leq \delta.$$

Puis, la condition $\overline{\lim\limits_{\gamma \in A}}\ |\hat{\mu}(\gamma)| > \varepsilon$ et la propriété $\mathcal{D}$ de G nous permettent de choisir une suite $(\gamma_j)_{j\geq 0}$ dans A, vérifiant la condition suivante:

$$\begin{cases} \gamma_0 \notin F \text{ et } \gamma_p . \prod\limits_{j=0}^{p-1} \gamma_j^{s_j} \notin F \text{ pour tout } p \geq 1 \text{ et tout } s_j \in \{-1, 0, 1\} \\ \gamma_0 \neq 1 \text{ et } \{\gamma_j\}_j \text{ dissocié} \\ \text{pour tout } j : |\hat{\mu}(\gamma_j)| \geq \varepsilon \end{cases}$$

Soient $N \geq 1$ et $\nu = \mu * R_N - \sum_{\gamma \notin A\cup B} \widehat{\mu * R_N}(\gamma)\gamma$,

R_N étant le produit de Riesz: $\prod_{j=1}^{N}[1 + Re(\gamma_j)]$.

ν appartient à $M_{A\cup B}$ et l'hypothèse (16) s'applique à ν pour nous donner, pour tout $\varepsilon_1 > 0$:

$$\varepsilon_1 \phi(|\Lambda_{\varepsilon_1}|) \leq \|\nu\| \leq \|\mu * R_N\|_1 + \|\sum_{\gamma \notin A\cup B} \widehat{\mu * R_N}(\gamma)\gamma\|_1 \tag{18}$$

(où Λ_{ε_1}désigne l'ensemble $\{\gamma \in A/|\hat{\nu}(\gamma)| \geq \varepsilon_1\}$).

Or

$$\|\mu * R_N\|_1 \leq \|\mu\|\|R_N\|_1 \leq 1 \tag{19}$$

et

$$\begin{aligned} \|\sum_{\gamma \notin A\cup B} \widehat{\mu * R_N}(\gamma)\gamma\|_1 &\leq \|\sum_{\gamma \notin A\cup B} \widehat{\mu * R_N}(\gamma)\gamma\|_2 \\ &\leq \sup_{\gamma \notin A\cup B} |\hat{\mu}(\gamma)|.\|R_N\|_2 \\ &\leq \sup_{\gamma \notin A\cup B} |\hat{\mu}(\gamma)|.2^N. \end{aligned} \tag{20}$$

On remarque que $\widehat{R_N}(\sigma) \neq 0$ uniquement si $\sigma = \prod_{k=1}^{N} \gamma_k^{s_k}$ avec $s_k \in \{-1, 0, 1\}$ donc $\sigma \notin F$. Pour de tels σ vérifiant de plus $\sigma \notin A \cup B$, on a:

$$|\hat{\mu}(\sigma)| \leq \delta. \tag{21}$$

Combinant (20) et (21), on aboutit à :

$$\|\sum_{\gamma \notin A\cup B} \widehat{\mu * R_N}(\gamma)\gamma\| \leq \delta 2^N. \tag{22}$$

D'autre part, pour tout $p \in \{1, \cdots, N\}$, $|\hat{\mu}(\gamma_p)||\widehat{R_N}(\gamma_p)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ donc $\gamma_p \in \Lambda_{\varepsilon/2}$ d'où

$$\{\gamma_1, \cdots, \gamma_N\} \subset \Lambda_{\varepsilon/2} \quad \text{et} \quad |\Lambda_{\varepsilon/2}| \geq N.$$

De (18), (19) et (22), nous tirons l'inégalité

$$\frac{\varepsilon}{2}\phi(|\Lambda_{\varepsilon/2}|) \leq 1 + \delta 2^N. \tag{23}$$

Maintenant, il suffit d'ajuster N tel que: $\frac{\varepsilon}{2}\phi(|\Lambda_{\varepsilon/2}|) > 4C$, puis δ tel que : $\delta < 2^{-N}$ pour obtenir une contradiction via (23). Nous avons ainsi établi (17) par l'absurde.

D'autre part, B est un ensemble de continuité et nous pouvons donc trouver $\alpha(\varepsilon) \in]0, \varepsilon[$ tel que

$$\forall \mu \in M(G), \text{ avec } \|\mu\| = 1 : \ \overline{\lim_{\gamma \notin B}} \ |\hat{\mu}(\gamma)| < \alpha(\varepsilon) \Longrightarrow \overline{\lim_{\gamma \in B}} \ |\hat{\mu}(\gamma)| < \varepsilon.$$

Fixons $\varepsilon > 0$, d'après (17), on a:

$$\overline{\lim_{\gamma \notin A \cup B}} \ |\hat{\mu}(\gamma)| < \delta(\alpha(\varepsilon)) \Longrightarrow \overline{\lim_{\gamma \in A}} \ |\hat{\mu}(\gamma)| < \alpha(\varepsilon). \tag{24}$$

A fortiori, $\overline{\lim_{\gamma \notin B}} \ |\hat{\mu}(\gamma)| < \alpha(\varepsilon)$ donc $\overline{\lim_{\gamma \in B}} \ |\hat{\mu}(\gamma)| < \varepsilon$. Compte tenu de (24),

$$\overline{\lim_{\gamma \in A \cup B}} \ |\hat{\mu}(\gamma)| < \varepsilon.$$

Donc, $A \cup B$ est un ensemble de continuité. ∎

Ce résultat et les propriétés des mesures à spectre lacunaire dégagées précédemment permettent d'exhiber de nouvelles classes d'ensembles de continuité.

Corollaire 4.7 *Soient $\Lambda \subset \Gamma = \hat{G}$ stationnaire, où G vérifie $\mathcal{D}$, et A un ensemble $\Lambda(1)$ alors: $\Lambda \cup A$ est un ensemble de continuité.*

Preuve: les théorèmes 4.1 et 4.4 permettent d'obtenir (14) avec A stationnaire et B ensemble $\Lambda(1)$. Nous sommes sous l'hypothèse (16) du théorème 4.6 avec $\phi(t) = C\sqrt{\log(t)}$ où C ne dépend que de A et B. Comme B est un ensemble $\Lambda(1)$, c'est en particulier un ensemble de continuité. Le théorème 4.6 permet de conclure. ∎

Dans le cadre du tore, on a un autre résultat:

Corollaire 4.8 *Soit $\Lambda \subset \mathbb{N}$ stationnaire, alors $\Lambda \cup \mathbb{Z}^-$ est un ensemble de continuité.*

Preuve: Les théorèmes 4.2 et 4.4 permettent d'obtenir (14) avec A stationnaire et $B = \mathbb{Z}^-$ (qui est de continuité d'après le théorème classique de Katznelson-de Leeuw). Nous sommes sous l'hypothèse (16) du théorème 4.6 avec $\phi(t) = C\sqrt{\log(t)}$ où C ne dépend que de A. Comme $\mathbb{Z}^-$ est un ensemble de continuité, le théorème 4.6 permet de conclure. ∎

5 Ensembles stationnaires et ensembles de convergence uniforme

Rappelons que Gilles Pisier a exhibé des ensembles stationnaires qui ne sont pas des ensembles de Sidon (réciproquement tout Sidon est trivialement stationnaire). Nous allons généraliser ce résultat en exhibant une classe d'ensembles stationnaires qui ne sont pas de convergence uniforme. Ceci va reposer sur le résultat même de Pisier et sur la construction de gros sous-ensembles stationnaires Λ de $\mathbb{Z}$, au sens suivant: il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $\delta_k > 0$ tels que

$$\forall N \geq 1: \quad |\Lambda \cap [-N, N]| \geq \delta_k (\log N)^k.$$

Montrons d'abord le résultat suivant

Théorème 5.1 *Soit E une partie dissociée de Γ, $E = \{\lambda_j\}_{j\geq 1}$. Soit k un entier supérieur à 1. Alors*

$$\Lambda_k := \Big\{\prod_{p=1}^{k} \lambda_{j_p}^{\varepsilon_p} /\ 1 \leq p \leq k; \varepsilon_p \in \{-1, 1\}; j_p \geq 1 \text{ distincts}\Big\}$$

est stationnaire.

Preuve: nous suivons la méthode de Blei [B] pour revenir de G^k (où le résultat de Pisier a lieu) à G. Nous avons:

$$\Lambda_k = \Big\{\prod_{p=1}^{k} \lambda_{j_p} | j_p \quad \text{distincts}\Big\} \cup \bigcup_{\ell=0}^{k-1} \Big\{\prod_{p=1}^{\ell} \lambda_{j_p} \prod_{p=\ell+1}^{k} \bar{\lambda}_{j_p} | j_p \quad \text{distincts}\Big\}$$

et tout fonction f de $\mathcal{P}_{\Lambda_k}(G)$ peut s'écrire (dans la suite, $\sum_{(j_p)}'$ signifie que l'on somme sur les indices tels que $j_1 < \cdots < j_\ell$ et $j_{\ell+1} < \cdots < j_k$ pour $0 \leq \ell \leq k-1$, et $j_1 < \cdots < j_k$ pour $\ell = k$):

$$\begin{aligned} f = \ & \sum_{\ell=0}^{k-1} \Big(\sum_{(j_p)}{}' \quad \hat{f}(\lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_\ell} \bar{\lambda}_{j_\ell+1} \cdots \bar{\lambda}_{j_k}) \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_\ell} \bar{\lambda}_{j_{\ell+1}} \cdots \bar{\lambda}_{j_k}\Big) \\ & + \sum_{(j_p)}{}' \ \hat{f}(\prod_{p=1}^{k} \lambda_{j_p}) \prod_{p=1}^{k} \lambda_{j_p} \end{aligned}$$

Définissons F dans $\mathcal{P}\underbrace{(G\times\cdots\times G)}_{k \text{ times}}$ par $F=\sum_{\ell=0}^{k}F_\ell$ où:

$$\begin{cases} F_k = \sum\limits_{\substack{(j_p)\\ \text{distincts}}} \hat{f}(\prod\limits_{p=1}^{k}\lambda_{j_p})\lambda_{j_1}\otimes\cdots\otimes\lambda_{j_k}\ ;\ F_k\in\mathcal{P}_{E\times\cdots\times E}(G^k) \\ \text{et} \\ F_\ell = \sum\limits_{\substack{(j_p)\\ \text{distincts}}} \sum\limits_{\substack{\varepsilon_i=\pm1\\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_k=2l-k}} \hat{f}(\lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_\ell}\bar{\lambda}_{j_{\ell+1}}\cdots\bar{\lambda}_{j_k})\lambda_{j_1}^{\varepsilon_1}\otimes\cdots\otimes\lambda_{j_k}^{\varepsilon_k} \end{cases} \tag{25}$$

Dans la suite, les cas $\ell=0$ et $\ell=k$ seront traités de la même manière. Fixons $0\le\ell\le k-1$, F_ℓ est symétrisé en écrivant:

$$\begin{cases} F_\ell = & \sum_{m=1}^{k}(-1)^{m+k}\sum\widehat{F_\ell}\big(\lambda_{j_1};\cdots;\lambda_{j_\ell};\bar{\lambda}_{j_{\ell+1}};\cdots;\bar{\lambda}_{j_k}\big)\times \\ & \psi_S(\lambda_{j_1})\cdots\psi_S(\lambda_{j_\ell})\overline{\psi_S(\lambda_{j_{\ell+1}})}\cdots\overline{\psi_S(\lambda_{j_k})} \end{cases} \tag{26}$$

où le second membre est indexé par les sous-ensembles S de $\{1,\cdots,k\}$ de cardinal m et les indices (j_p) distincts $(1\le p\le k)$ et où $\psi_S(\gamma)(g_1,\cdots,g_k)$ est égal $\sum\limits_{r\in S}\gamma(g_r)$ avec $(g_1,\cdots,g_k)\in G^k$.
Fixons (encore) m dans $\{1,\cdots,k\}$ et S inclus dans $\{1,\cdots,k\}$ avec $|S|=m$, nous notons $\tilde{F}$ pour:

$$\sum_{\substack{(j_p)\\ \text{distincts}}} \widehat{F_\ell}\big(\lambda_{j_1},\cdots,\lambda_{j_\ell},\bar{\lambda}_{j_{\ell+1}},\cdots,\bar{\lambda}_{j_k}\big)\psi_S(\lambda_{j_1})\cdots\psi_S(\lambda_{j_\ell})\overline{\psi_S(\lambda_{j_{\ell+1}})}\cdots\overline{\psi_S(\lambda_{j_k})}$$

(en remarquant que $\psi_S(\bar{\gamma})=\overline{\psi_S(\gamma)}$).
Nous avons: $\tilde{F}\in\mathcal{P}_{E\times\cdots\times E\times\bar{E}\times\cdots\times\bar{E}}$.
Soient $g_1,\cdots,g_k$ dans G et

$$V:=\tilde{F}(g_1,\cdots,g_k)\ . \tag{27}$$

Considérons le produit de Riesz $\nu=\prod\limits_{\gamma\in E}[1+Re(e^i\gamma)]$; nous avons

$$\hat{\nu}(\lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_\ell}\bar{\lambda}_{j_{\ell+1}}\cdots\bar{\lambda}_{j_k})=\frac{e^{i\ell}e^{-i(k-\ell)}}{2^k}=:a_\ell\ .$$

Il existe un polynôme P_ℓ, dépendant seulement de k et ℓ (il suffit par exemple de considérer un polynôme interpolateur de Lagrange) tel que:

$$P_\ell(a_\ell)=1 \quad \text{et} \quad P_\ell(a_t)=0 \quad \text{dès que} \quad t\neq\ell\ .$$

Nous pouvons écrire $\mu_\ell = P_\ell(\nu)$ (où le produit sur $M(G)$ est la convolution) et observer que:

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{\mu}_\ell(\lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_t}\bar{\lambda}_{j_{t+1}}\cdots\bar{\lambda}_{j_k}) = \delta_{t,\ell} \text{ (symbole de Kronecker)} \\ \text{pour tous } j_1,\cdots,j_k \text{ deux à deux distincts} \\ \\ \text{et } (C_k \text{ dépendant seulement de } k) \\ \\ \|\mu_\ell\| \leq C_k. \end{array}\right. \tag{28}$$

Enfin, nous considérons le produit de Riesz:

$$\mathcal{R} = \prod_{j\geq 0}[1 + Re(\eta_j\lambda_j)]$$

où: $\eta_j = \frac{\psi_S(\lambda_j)}{2^m}(g_1,\cdots,g_k)$ (remarquer que: $|\eta_j| \leq 1$).
On vérifie aisément que (gardant (27) en mémoire):

$$V = 2^{mk}2^k\mu_\ell * \mathcal{R} * f(0)$$

pour conclure en utilisant (28) que:

$$|V| \leq 2^{mk}2^k\|\mu_\ell\|_M\|\mathcal{R}\|_M\|f\|_\infty \leq 2^{mk}2^kC_k\|f\|_\infty.$$

Prenant la borne supérieure sur G^k, il vient:

$$\|\tilde{F}\|_\infty \leq 2^{mk}2^kC_k\|f\|_\infty\ .$$

Maintenant, considérant (25), (26) et la majoration précédente, nous obtenons:

$$\|F\|_\infty \leq \sum_{\ell=0}^{k}\|F_\ell\|_\infty \leq \sum_{\ell=0}^{k}\sum_{m=1}^{k}\sum_{|S|=m}2^{mk}2^kC_k\|f\|_\infty$$

et

$$\|F\|_\infty \leq A_k\|f\|_\infty \tag{29}$$

$$(\text{avec } A_k = k2^k(2^k+1)^kC_k).$$

E étant dissocié, c'est un ensemble de Sidon ainsi que $E \cup \bar{E} = E_1$. D'après le résultat de Pisier([P-1]), $\underbrace{E_1 \times \cdots \times E_1}_{k \text{ fois}}$ est un ensemble stationnaire dans Γ^k. Il existe donc $B_k > 0$ tel que, pour tout F dans $\mathcal{P}_{E_1\times\cdots\times E_1}(G^k)$,

$$\int_\Omega \|\sum_{\beta\in E_1^k}\varepsilon_\beta(\omega)\hat{F}(\beta)\beta\|_\infty d\mathbb{P}(\omega) \leq B_k\|F\|_\infty. \tag{30}$$

D'autre part, en fixant f dans $\mathcal{P}_{\Lambda_k}(G)$, observons que

$$\int_\Omega \Big\| \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{(j_p)}{}' \varepsilon_{\ell,j_1,\cdots,j_k}(\omega) \hat{f}(\lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_\ell}\bar{\lambda}_{j_{\ell+1}}\cdots\bar{\lambda}_{j_k})\lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_\ell}\bar{\lambda}_{j_{\ell+1}}\cdots\bar{\lambda}_{j_k}\Big\|_{C(G)} d\mathbb{P}(\omega)$$

est plus petit que

$$\int_\Omega \Big\| \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{\substack{(j_p)\\ \text{distincts}}} \varepsilon_{\ell,j_1,\cdots,j_k}(\omega) \hat{f}(\lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_\ell}\bar{\lambda}_{j_{\ell+1}}\cdots\bar{\lambda}_{j_k})\lambda_{j_1}\otimes\cdots\otimes\lambda_{j_\ell}\otimes\bar{\lambda}_{j_{\ell+1}}\otimes\cdots\otimes\bar{\lambda}_{j_k}\Big\|_{C(G^k)} d\mathbb{P}(\omega)$$

Via le principe de contraction, cela donne avec les notations de (25):

$$\text{(31)} \qquad [\![f]\!] \leq [\![F]\!] .$$

En combinant (29), (30) et (31), nous obtenons que $[\![f]\!] \leq A_k B_k \|f\|_\infty$ et Λ_k est un ensemble stationnaire dans Γ. ∎

Corollaire 5.2 *Il existe des ensembles stationnaires dans $\mathbb{Z}$, qui ne sont pas des ensembles UC.*

Preuve: par exemple, si H est une suite lacunaire à la Hadamard, $H - H + H$ n'est pas un ensemble UC (voir le théorème 1.6 de la première partie), mais il est stationnaire par le théorème précédent. ∎

Venons en au théorème annoncé au début de ce paragraphe.

Théorème 5.3 *Pour tout $k \geq 1$, il existe des ensembles stationnaires $\Lambda_k \subset \mathbb{Z}$ vérifiant:*

$$\exists \delta_k > 0, \quad \forall N \geq 1, \quad |\Lambda_k \cap [-N, N]| \geq \delta_k (\log N)^k.$$

Preuve: il suffit de considérer les ensembles $\Lambda_k = \{3^{m_1} + \cdots + 3^{m_k} \mid m_j \quad \text{distincts}\}$. Il est alors facile de vérifier que: $\forall N \geq 2k$:

$$|\Lambda_k \cap \{0, \cdots, k3^N\}| \geq (N+2)\cdots(N+2-k) \geq (\frac{N+2}{2})^k.$$

∎

Remarque: le théorème précédent est optimal en ce sens qu'il existe des ensembles de Sidon E tels que $\mathbb{N} \subset E + E$ et $E + E$ n'est pas stationnaire. En effet, en considérant l'ensemble $E = \{3^n + n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{-3^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, nous avons la propriété annoncée.

Remarque: pour comprendre l'intérêt du corollaire 5.2, rappelons que $\Lambda \in \mathcal{S}$ signifie que pour toute fonction f dans $C_\Lambda(G)$, il existe une partie Ω_f, de Ω de mesure 1, telle que, pour tout ω de Ω_f, la somme partielle de la série de Fourier de f^ω converge uniformément vers f^ω.

Λ est un ensemble UC si, pour toute fonction f dans $C_\Lambda(G)$, la somme partielle de la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

Remarquons que si on peut choisir un α commun dans tous les Ω_f (f décrivant $C_\Lambda(G)$) alors les opérateurs suivant:

$$\left| \begin{array}{ccc} C_\Lambda(G) & \to & \mathbb{C} \\ f & \to & S_n(f^\alpha)(0) \end{array} \right.$$

sont bornés uniformément d'après le théorème de Banach-Steinhaus. Nous avons d'après le théorème de Hahn-Banach puis le théorème de représentation de Riesz, l'existence, pour tout n de $\mathbb{N}$, d'une mesure ν_n, bornée indépendamment de n, telle que, pour tout λ de Λ: $\hat{\nu}_n(\lambda) = 0$ si $|\lambda| > n$ et $\hat{\nu}_n(\lambda) = \varepsilon_\lambda(\alpha)$ si $|\lambda| \leq n$. Les mesures $\mu_n = \nu_n * \nu_n$ vérifient la condition (ii) des caractérisations équivalentes des ensembles UC (cf 1.1, première partie) et Λ est un ensemble UC.

On peut ainsi constater que, dans une certaine mesure, même si $H + H - H$ est stationnaire (donc pas trop gros), il y a trop de fonctions dans C_{H+H-H} pour que $H + H - H$ soit UC.

6 Ensembles stationnaires et ensembles p-Sidon p.s.

Nous nous intéressons ici au lien entre les ensembles stationnaires et les ensembles p-Sidon p.s. Les ensembles Λ_k exhibés dans le paragraphe précédent fournissent des exemples d'ensembles stationnaires qui ne sont pas p-Sidon p.s. En effet, il est facile de vérifier que si Λ est un ensemble p-Sidon p.s. ($1 \leq p < 2$) inclus dans $\mathbb{Z}$, alors nous avons la condition arithmétique suivante (dont nous donnerons une démonstration très courte dans le paragraphe consacré aux ensembles p-Sidon):

$$\exists C > 0, \ \forall N \in \mathbb{N}^*, \ |\Lambda \cap \{0, \cdots, N\}| \leq C \log(N)^{\frac{p}{2-p}}.$$

Si H est une suite lacunaire à la Hadamard (par exemple $(3^n)_{n \geq 0}$) et k un entier tel que $\frac{2k}{k+1} > p$, en considérant $\Lambda_k = H + \cdots + H$ (k fois), nous obtenons un ensemble stationnaire, qui n'est pas un ensemble p-Sidon p.s.

7 Propriétés banachiques

Nous allons donner quelques propriétés banachiques des ensembles stationnaires.

Proposition 7.1 *Soit $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble stationnaire infini, alors $C_\Lambda(G)$ contient un sous-espace complémenté isomorphe à ℓ^1. Plus précisément, pour tout ensemble de Sidon $\Sigma \subset \Lambda$, $C_\Sigma(G)$ est complémenté dans $C_\Lambda(G)$.*

Nous donnons un corollaire immédiat (c'est une conséquence d'un résultat classique dû à Bessaga et Pełczyński, cf [D] th.10 p.48):

Corollaire 7.2 *Soit $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble stationnaire infini, alors nous avons l'inclusion: $\ell^\infty \subset (C_\Lambda(G))^*$.*

Preuve de la proposition 7.1: il suffit de considérer un sous-ensemble Σ de Λ qui soit Sidon. Λ étant infini, cela est possible ([L-R]). Nous avons pour tout $h \in C_\Sigma^{p.s.}(G)$:

$$\|h\|_\infty \leq S(\Sigma)\, [\![h]\!] .$$

Or, la stationnarité de Λ donne pour tout $f \in C_\Lambda(G)$:

$$[\![f]\!] \leq K_s(\Lambda)\|f\|_\infty .$$

Pour tout f dans $\mathcal{P}_\Lambda(G)$, nous avons, via le principe de contraction:

$$\|\sum_{\sigma\in\Sigma} \hat{f}(\sigma)\sigma\|_\infty \leq S(\Sigma) \left[\!\!\left[\sum_{\sigma\in\Sigma} \hat{f}(\sigma)\sigma\right]\!\!\right] \leq S(\Sigma)\, [\![f]\!] \leq S(\Sigma).K_s(\Lambda)\|f\|_\infty .$$

Ceci signifie que $C_\Sigma(G)$ est complémenté dans $C_\Lambda(G)$. Or Σ est un ensemble de Sidon, donc $C_\Sigma(G)$ est isomorphe à ℓ^1 et la conclusion s'ensuit. ∎

Nous avons également un résultat dual du même type:

Proposition 7.3 *Soient $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble stationnaire infini, L un ensemble $\Lambda(1)$ et $\Sigma \subset \Lambda$ un ensemble de Sidon , alors, pour toute mesure μ de $M_{\Lambda\cup L}$, l'opérateur T:*

$$\left| \begin{array}{ccc} L^2(G) & \to & \ell^1 \\ h & \to & \{\hat{\mu}(\sigma)\hat{h}(\sigma)\}_{\sigma\in\Sigma} \end{array} \right.$$

est borné.

Corollaire 7.4 *Soient $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble stationnaire infini et $L \subset \Gamma$ un ensemble $\Lambda(1)$, alors $M_{\Lambda\cup L}(G)$ contient un sous-espace complémenté isomorphe à ℓ^2.*

Preuve: il suffit à nouveau de considérer un sous-ensemble Σ de Λ qui soit Sidon. D'après la proposition précédente, $\sum_{\sigma\in\Sigma} \hat{\mu}(\sigma)\sigma$ définit un élément de $L^2_\Sigma(G)$, et a fortiori une mesure de $M_\Sigma(G)$, de norme inférieure à C fois la norme de μ (C ne dépend que de Λ et Σ). $M_\Sigma(G)$ est complémenté dans $M_{\Lambda\cup L}(G)$. Comme $M_\Sigma(G)$ est isomorphe à ℓ^2, ceci démontre le corollaire. ∎

Preuve de la proposition 7.3: le théorème 4.1 donne l'existence de $C > 0$ telle que, pour tout h de L^2:

$$\left[\!\!\left[\sum_{\lambda\in\Lambda}\hat{h}(\lambda)\hat{\mu}(\lambda)\lambda\right]\!\!\right] \leq C\|\mu\|.\|h\|_2.$$

D'autre part, le principe de contraction donne la majoration:

$$\sum_{\sigma\in\Sigma}|\hat{h}(\sigma)\hat{\mu}(\sigma)| \leq S(\Sigma)\left[\!\!\left[\sum_{\sigma\in\Sigma}\hat{h}(\sigma)\hat{\mu}(\sigma)\sigma\right]\!\!\right] \leq S(\Sigma)\left[\!\!\left[\sum_{\lambda\in\Lambda}\hat{h}(\lambda)\hat{\mu}(\lambda)\lambda\right]\!\!\right].$$

Il existe donc une constante $D > 0$ telle que $\|\widehat{T(h)}\|_1 \leq D\|\mu\|.\|h\|_2$ et T est borné. ∎

Remarque: le corollaire précédent peut s'écrire sous la forme d'une inégalité de type Paley. Soient $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble stationnaire infini, $\{a_j\}_j$ un ensemble de Sidon inclus dans Λ et $L \subset \Gamma$ un ensemble $\Lambda(1)$ (si $G = \mathbb{T}$, on peut même prendre $L = \mathbb{Z}^-$), alors

il existe $C > 0$ tel que, pour tout $h \in \mathcal{P}_{L\cup\Lambda}(G)$

$$(P) \qquad C\|h\|_1 \geq \Big(\sum_j|\hat{h}(a_j)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Sous certaines contraintes arithmétiques, nous pouvons obtenir la continuité de l'opérateur de convolution T de la proposition 7.3, sur $C^{p.s.}(G)$. Rappelons tout d'abord une définition:

Définition 7.5 *Soit $\Lambda \subset \Gamma$; nous dirons qu'une famille de sous-ensembles $\{\Sigma_j\}_j$ de Λ est une Sidon partition de Λ si: $\bigcup_j \Sigma_j = \Lambda$ et s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout choix de $(\sigma_j)_j$, avec σ_j dans Σ_j, l'ensemble $\{\sigma_j\}_j$ est de Sidon avec $S(\{\sigma_j\}_j) \leq C$.*

Rappelons ainsi le résultat suivant:

Théorème 7.6 *([M-P]p131) Si $\{\Sigma_j\}_j$ est une Sidon partition de $\Lambda \subset \Gamma$ alors il existe $M > 0$ telle que pour tout $h \in C^{p.s.}(G)$*

$$\sum_j\|h_j\|_2 \leq M\left[\!\!\left[\sum_j h_j\right]\!\!\right] \qquad \textit{avec} \quad h_j = \sum_{\lambda\in\Sigma_j}\hat{h}(\lambda)\lambda.$$

Remarque: nous donnerons une condition arithmétique nécessaire pour qu'une suite (n_j) vérifie la propriété: $\{[n_j + 1, n_{j+1}]\}_j$ est une Sidon partition.

Proposition 7.7 *Soit $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble stationnaire, $s > 0$ et $\{\Sigma_j\}$ une Sidon partition de Λ avec $S(\Sigma_j) \leq s$ pour tout j.*

Alors, pour toute mesure μ de M_Λ, l'opérateur A:

$$\left| \begin{array}{ccc} C^{p.s.}(G) & \rightarrow & \ell^1(\Lambda) \\ h & \rightarrow & \{\hat{\mu}(\lambda)\hat{h}(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda} \end{array} \right.$$

est borné.

Autrement dit, M_Λ s'injecte dans $M_{2,\psi}$.

Preuve: Soit h dans $C^{p.s.}(G)$, commençons par écrire:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |\hat{\mu}(\lambda)\hat{h}(\lambda)| = \sum_j \sum_{\lambda\in\Sigma_j} |\hat{\mu}(\lambda)\hat{h}(\lambda)|.$$

Puis, appliquons les résultats précédents: pour chaque j, nous avons la majoration:

$$\sum_{\lambda\in\Sigma_j} |\hat{\mu}(\lambda)\hat{h}(\lambda)| \leq S(\Sigma_j)\|\mu\|.\|h_j\|_2 \leq s\|\mu\|.\|h_j\|_2.$$

Compte tenu du théorème 7.6, nous avons finalement (M provient du théorème 7.6):

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |\hat{\mu}(\lambda)\hat{h}(\lambda)| \leq Ms\|\mu\| \, [\![h]\!] \, .$$

La dernière affirmation de la proposition résulte du fait que le dual de $C^{p.s.}(G)$ est $M_{2,\psi}$. ∎

Remarque: par exemple, l'hypothèse arithmétique de 7.7 est vérifiée par les ensembles $E_{a,b} = \{a^i + b^j \,|\, j \geq 0,\ 0 \leq i \leq \log(a)^{-1}. \log(b^{j+1} - b^j)\}$, où a et b sont des entiers strictement supérieurs à 1.

8 Ensembles Stationnaires et ensembles $\Lambda(2)$

Dans l'introduction de cette partie, nous avons énoncé le théorème de Bourgain qui établit la stabilité par produit des ensembles stationnaires qui sont $\Lambda(2)$. Il reste la question naturelle suivante: est-ce qu'un ensemble stationnaire est $\Lambda(2)$? Plus généralement $\Lambda(p)$ pour un $p > 0$?

Dans le théorème suivant, nous concluons positivement pour une sous-classe (est-ce une sous-classe stricte?) de la classe des ensembles stationnaires. Nous introduisons la notion suivante:

Définition 8.1 *Soit $\Lambda \subset \Gamma$; on dit que Λ est extensiblement stationnaire s'il existe une constante C telle que, pour toute famille finie de parties finies $(\Lambda_j)_j$*

de Λ, il existe un ensemble stationnaire E de constante inférieure à C et des caractères γ_j tels que,

d'une part, $\{\gamma_j \Lambda_j\}_j$ est une Sidon partition de constante inférieure à C;

d'autre part, $\gamma_j \Lambda_j \subset E$.

Remarque: une condition suffisante pour que Λ soit extensiblement stationnaire est l'existence d'un ensemble H infini tel que $H.\Lambda$ soit stationnaire. Tout ensemble extensiblement stationnaire est clairement stationnaire.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant

Théorème 8.2 *Tout ensemble extensiblement stationnaire est un ensemble $\Lambda(2)$.*

Preuve: l'idée est de montrer que l'inclusion formelle de $C_\Lambda(G)$ dans $L^2(G)$ est 1-sommante. D'après le théorème de Pietsch et l'invariance par translation de cette inclusion, on obtient alors le résultat.

Considérons une famille finie de polynômes f_j à spectre dans Λ, et appliquons l'hypothèse sur Λ aux parties $sp(f_j)$; avec les notations de la définition 8.1, il vient

$$C \sup_{x \in G} \sum_j |f_j(x)| = C \sup_{x \in G} \sum_j |(\gamma_j . f_j)(x)| = C \sup_{|\varepsilon_j|=1} \|\sum_j \varepsilon_j \gamma_j f_j\|_\infty \geq \left[\!\left[\sum_j \gamma_j f_j \right]\!\right].$$

Puis la propriété de Sidon partition donne, via le théorème 7.6, l'existence de C' telle que:

$$C' \left[\!\left[\sum_j \gamma_j f_j \right]\!\right] \geq \sum_j \|\gamma_j f_j\|_2 = \sum_j \|f_j\|_2.$$

d'où

$$C.C' \sup_{x \in G} \sum_j |f_j(x)| \geq \sum_j \|f_j\|_2.$$

Cela signifie exactement que l'inclusion formelle de $C_\Lambda(G)$ dans $L^2(G)$ est 1-sommante. ∎

Remarque: on retrouve le fait que les ensembles Λ_k du paragraphe 5 sont des ensembles $\Lambda(2)$.

9 Amélioration de l'intégrabilité

Nous nous intéressons dans cette section aux propriétés d'intégrabilité des fonctions presques sûrement continues, ou (c'est un point de vue dual) de certaines mesures opérant sur $C^{p.s.}$.

Nous commençons par montrer la non-trivialité de ce deuxième problème. En effet, il est facile de construire une série de polynômes normalement convergente dans tous les espaces de Hardy $H^p, p < 2$, vers un élément de $M_{2,\psi}$ mais divergente dans L^2:

Considérons la suite de polynômes: $\mu_j = 2^{-\frac{j}{2}} \sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} e_n$ avec j positif.

Observons d'abord que la série des μ_j converge vers μ dans H^p pour tout $p < 2$ vérifiant:

$$\|\mu\|_p \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-\frac{j}{2}} \| \sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} e_n \|_p \leq c \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-\frac{j}{2}} 2^{\frac{j}{p'}}.$$

où c est une constante ne dépendant que de p et la dernière série est convergente car $p' > 2$.

La mesure μ est également élément de $M_{2,\psi}$. Il suffit pour cela d'observer que $\cup_j \{2^j + 1, \cdots, 2^{j+1}\}$ est une Sidon partition de $\mathbb{N}^*$ donc l'inégalité de Marcus et Pisier (cf th 7.6) donne l'existence d'une constante C telle que, pour toute fonction f de $C^{p.s.}$:

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\mu * f}\|_1 &= \sum_j \|\widehat{\mu_j * f}\|_1 \\
&\leq \sum_j \|\mu_j\|_2 . \| \sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} \hat{f}(n) e_n \|_2 \qquad \text{par Cauchy-Schwarz} \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \| \sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} \hat{f}(n) e_n \|_2 \\
&\leq C [\![f]\!] .
\end{aligned}$$

μ définit un élément de $(C^{p.s.})^* = M_{2,\psi}$. Il est enfin clair que $\mu \notin L^2$ puisque $\|\mu_j\|_2 = 1$.

Remarque: par le résultat précédent, on ne peut espérer montrer que les ensembles stationnaires ou les ensembles p-Sidon ps sont $\Lambda(2)$ avec la seule information que toute fonction de L^p_Λ, $(p < 2)$, définit un élément de $M_{2,\psi}$, même si on suppose Λ Riesz ou de continuité. Les hypothèses précédemment énoncées sont notamment vérifiées si Λ est $\frac{4}{3}$-Sidon (nous détaillerons ce point dans le prochain chapitre).

La proposition suivante motive la suite de la section.

Proposition 9.1 *Pour tout $p > 2$, $C^{p.s.} \not\subset L^p$.*

Preuve: supposons le contraire, d'après le théorème du graphe fermé, l'inclusion de $C^{p.s.}$ dans L^p est continue. Il existe $C > 0$ telle que, pour tout f dans $C^{p.s.}$, $C [\![f]\!] \geq \|f\|_p$. En prenant pour f le noyau de Dirichlet D_n, on obtient: $C'\sqrt{n\log(n)} \geq n^{\frac{1}{p'}}$. Ce qui est impossible pour n assez grand. ∎

L'amélioration de l'intégrabilité (mieux que L^2) pour les fonctions presque sûrement continues passe donc par une condition restrictive. Nous choisissons le point de vue de la lacunarité et nous pouvons exhiber des classes d'ensembles lacunaires Λ telles que toute fonction de $C_\Lambda^{p.s.}$ soit dans tout espace L^p (p fini) mais sans que l'ensemble Λ soit Sidon (nous rappelons en effet le résultat de Pisier ([P-4]) selon lequel l'inclusion de $C_\Lambda^{p.s.}$ dans L^∞ implique que Λ est Sidon): il suffit de considérer des ensembles $\Lambda(p)$ pour tout p. Nous avons la propostion évidente suivante:

Proposition 9.2 *Soient $p > 2$ et Λ un ensemble $\Lambda(p)$. Alors, $C_\Lambda^{p.s.} \subset L^p$.*

Remarque: dans la proposition précédente, les ensembles Λ peuvent ne pas être α-Sidon p.s. ($\alpha < \frac{4}{3}$) en général puisqu'ils peuvent contenir des sommes d'ensembles finis arbitrairement grandes (voir chapitre suivant).

Ceci redémontre au passage qu'il n'y a pas d'inégalité de Hausdorff-Young inverse. En effet, si on avait: $\forall f \in L^p$ ($p > 4$), $\hat{f} \in \ell^{p'}$ alors l'ensemble Λ serait p'-Sidon p.s. or $p' < \frac{4}{3}$.

On peut améliorer la régularité d'un élément de $C^{p.s.}$ en perturbant localement ses coefficients de Fourier par convolution avec certaines fonctions intégrables. C'est une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 9.3 *Soit X l'espace ℓ^p ($2 \geq p$) ou $C^{p.s.}$; alors, pour tout x de X et toute série faiblement inconditionnellement convergente $\sum f_j$ de L^1, la série $\sum \|x * f_j\|_X$ converge.*

Preuve: il suffit de remarquer que dans les deux cas de l'hypothèse, un élément x de X se factorise (pour la convolution) par un élément a de L^2 et un multiplicateur m de L^2 dans X. Pour ℓ^p, c'est clair; pour $C^{p.s.}$, cela est traité dans le livre de Marcus et Pisier ([M-P]).

Ensuite, on factorise l'opérateur de convolution par f comme suit:

$$\begin{tikzcd} L^1(G) \arrow[rr, "*f"] \arrow[dr, "*a"'] & & X \\ & L^2(G) \arrow[ur, "*m"'] & \end{tikzcd}$$

Enfin, le théorème de Grothendieck assure le caractère 1-sommant de l'opérateur de convolution par a (celui-ci étant un opérateur d'un espace L^1 dans un espace L^2) donc de l'opérateur de convolution par f. D'où le résultat. ∎

Corollaire 9.4 *Soit X l'espace ℓ^p $(2 \geq p)$ ou $C^{p.s.}$ alors, pour tout $x \in X$ et tout $f \in L^s$ $(s > 1)$, la série $\sum \|x * f_j\|_X$ converge (on a posé $f_j = \sum_{\{2^j+1,\cdots,2^{j+1}\}} \hat{f}(n)e_n$).*

Plus précisément, on a la majoration:
$\sum \|x * f_j\|_X \leq c(s-1)^{-3}\|f\|_s.\|x\|_X$. *(c est une constante absolue)*

Preuve: le corollaire résulte de la proposition précédente en appliquant le théorème de Littlewood-Paley (pour les constantes, voir [Bo2]).

Avec les notations précédentes, celui-ci s'énonce ainsi:
il existe des constantes C et C' telles que, pour tout $2 \geq s > 1$ et tout $f \in L^s$

$$\|(\sum_j |f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_s \leq C_s\|f\|_s \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{C}(\mathrm{s}-1)^{-\frac{3}{2}} \leq \mathrm{C_s} \leq \mathrm{C'}(\mathrm{s}-1)^{-\frac{3}{2}}.$$

La série $\sum_j f_j$ est inconditionnellement convergente et nous obtenons, d'après la proposition, la convergence de la série $\sum \|x * f_j\|_X$. Plus précisément, on a la majoration:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_j \|x * f_j\|_X &\leq D\|x\|_X. \sup_{|\varepsilon_j|=1} \|\sum_j \varepsilon_j f_j\|_s \\
&\leq DC(s-1)^{-\frac{3}{2}}\|x\|_X.\|(\sum_j |f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_s \\
&\leq DCC'(s-1)^{-3}\|x\|_X.\|\sum_j f_j\|_s
\end{aligned}$$

∎

En ajoutant une hypothèse de stationnarité, on obtient alors une propriété de multiplicateur:

Proposition 9.5 *Soit $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble stationnaire, vérifiant de plus $C^{p.s.}_\Lambda(G) \subset L^p$, avec $p > 2$; alors on a l'inclusion continue*

$$M_\Lambda(G) \subset M(L^{p'}; L^2).$$

Preuve: il suffit d'utiliser la proposition 4.1. Soient μ une mesure de $M_\Lambda(G)$ et h dans L^2 alors $\mu * h \in C^{p.s.}_\Lambda(G) \subset L^p$. Nous avons donc

$$M_\Lambda(G) \subset M(L^2; L^p) = M(L^{p'}; L^2).$$

∎

On remarque que les hypothèses du théorème sont vérifiées en particulier si Λ est stationnaire et p'-Sidon ps (donc a posteriori p'-Sidon): voir à ce propos le prochain chapitre.

Un autre résultat permet également d'améliorer l'estimation du théorème 4.3 sous certaines hypothèses.

Théorème 9.6 *Soient $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble stationnaire et μ une mesure dans M_Λ, qui est aussi un élément de $M_{2,\psi}$; alors $\hat{\mu} \in \ell^4$.*

Preuve: Ceci résulte de la proposition plus générale suivante:

Proposition 9.7 *Pour tout $m \in M_{2,\psi}(G)$ et tout $\mu \in M_\Lambda(G)$ (Λ stationnaire), $m * \mu \in L^2$.*

Nous pouvons donner deux arguments pour démontrer cette proposition. Le premier utilise le lemme suivant:

Lemme 9.8 *Pour tout m dans $M_{2,\psi}(G)$, l'opérateur:*

$$T : \left| \begin{array}{ccc} C^{p.s.}(G) & \rightarrow & L^2(G) \\ h & \rightarrow & h * m \end{array} \right.$$

est 1-sommant.

Preuve du lemme: il s'agit en fait d'une application triviale du théorème de Grothendieck. On remarque que T se factorise: $T = U \circ V$ où V est l'opérateur de convolution de $C^{p.s.}(G)$ dans ℓ^1 par m et U la tranformation inverse de Fourier de ℓ^1 dans L^2 qui est 1-sommante d'après le théorème de Grothendieck. Donc T est 1-sommante. ∎

Preuve de la proposition. *Premier argument:* commençons par observer que l'opérateur:

$$S : \left| \begin{array}{ccc} C(G) & \rightarrow & L^2(G) \\ h & \rightarrow & h * \mu * m \end{array} \right.$$

est nucléaire. En effet, il s'agit de la composition de l'opérateur de convolution de $C(G)$ dans $C^{p.s.}(G)$ par μ et de l'opérateur de convolution de $C^{p.s.}(G)$ dans L^2 par m. Le premier opérateur est 2-sommant (cf th.4.1) et le second est 1-sommant (d'après le lemme précédent) donc 2-sommant. A fortiori, la composition est nucléaire. En fait, il est amplement suffisant de savoir que S est 1-sommant (donc d'appliquer directement le lemme sans connaitre le résultat du théorème 4.1). En appliquant le théorème de Pietsch, il existe une mesure ν et une constante C telles que, pour tout h dans $C(G)$, $\|S(h)\|_2 \leq C \int_G |h(\zeta)| d\nu(\zeta)$. L'invariance par translation de l'opérateur S permet de choisir pour ν la mesure de Haar sur

G. Ainsi, $\|S(h)\|_2 \leq C\|h\|_1$ pour tout h dans $C(G)$ donc, par densité, pour tout h de L^1, c'est à dire: $\mu * m$ appartient à L^2.

Deuxième argument: il est le plus simple, il utilise le théorème 4.1. Pour tout élément a de L^2, $a * \mu \in C^{p.s.}(G)$ donc $a * m * \mu \in \ell^1$ (par dualité). Par dualité encore, $a * m \in L^2$. ∎

10 Annexe sur les Sidon partitions

Nous supposons dans la suite de ce paragraphe que $(n_j)_j$ est une suite strictement croissante d'entiers formant un ensemble de Sidon. Nous allons donner une condition nécessaire pour que $(n_j)_j$ soit une Sidon partition. Ceci est lié à la question naturelle suivante:

toute suite $(m_j)_j$ vérifiant: $n_j < m_j < n_{j+1}$, pour tout j, forme-t-elle aussi un ensemble de Sidon?

Ecrivons $E_j = [n_j+1, n_{j+1}]$. Nous supposons que $\{E_j\}_j$ est une Sidon partition de $[n_1, +\infty[$.

Lemme 10.1 *Supposons qu'il existe $C > 0$ et, pour tout j, une partie Λ_j de E_j telle que Λ_j est un ensemble $\Lambda(p)$ (avec $p > 2$) de constante inférieure à C.*

Alors, en posant $\Lambda = \cup_j \Lambda_j$, pour tout $h \in \mathcal{P}$, tout $f \in C^{p.s.}_\Lambda$ et tout entier N:

$$\sup_{1 \leq j \leq N} \|h_j\|_{p'} [\![f]\!] \geq K \|\widehat{f * h}\|_1$$

où $K > 0$ ne dépend que de C et où on note $h_j = \sum_{n \in \Lambda_j} \hat{h}(n) e_n$.

Preuve: $\{E_j\}_j$ est une Sidon partition donc il existe $K_o > 0$ telle qu'on ait la minoration:

$$\sup_{1 \leq j \leq N} \|h_j\|_{p'} [\![f]\!] \geq K_o \sum_{j=1}^{N} \|h_j\|_{p'} \|f_j\|_2.$$

avec $f_j = \sum_{n \in \Lambda_j} \hat{f}(n) e_n$. Pour tout choix de signe $\alpha_j \in \Omega$, le fait que Λ_j soit un ensemble $\Lambda(p)$ implique

$$C \|h_j\|_{p'} \|f_j\|_2 \geq \|h_j\|_{p'} \|f_j^{\alpha_j}\|_p \geq \|h_j * f^{\alpha_j}\|_\infty$$

En remarquant que $2 \sup_{\alpha \in \Omega} \|h_j * f^\alpha\|_\infty \geq \|\widehat{h_j * f}\|_1$, nous obtenons l'existence de $K > 0$ telle que:

$$K \sup_{1 \leq j \leq N} \|h_j\|_{p'} [\![f]\!] \geq \sum_{1 \leq j \leq N} \|\widehat{h_j * f}\|_1 = \|\widehat{f * h}\|_1.$$

puisque les h_j ont leurs spectres disjoints. ∎

Corollaire 10.2 *Sous les hypothèses du lemme précédent, on a pour tout N et tout $f \in \mathcal{P}_\Lambda$ avec $sp(f) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq N} \Lambda_j$:*

$$\sup_{1 \leq j \leq N} (n_{j+1} - n_j)^{\frac{1}{p}} [\![f]\!] \geq K \|\hat{f}\|_1$$

avec $K > 0$.

Preuve: on utilise le lemme précédent avec $h_j = e_{n_j} V_{n_{j+1}-n_j}$, où V_n est le n^{ieme} noyau de De la Vallée Poussin. Le fait que $\|h_j\|_{p'}$ soit de l'ordre de $(n_{j+1} - n_j)^{\frac{1}{p}}$ conclut la démonstration. ∎

Corollaire 10.3 *Pour tout $0 < s < 1$, il existe K_s telle que, pour tout N:*

$$\|(n_{j+1} - n_j)_{1 \leq j \leq N}\|_s \leq K_s (n_{N+1} - n_N)(\log\ n_{N+1})^{\frac{1}{s}}.$$

Preuve: tout s ($s < 1$) s'écrit $\frac{2}{p}$ avec $p > 2$. Le théorème de Bourgain (on pourra consulter [T2] pour une présentation moderne) fournit une constante qui ne dépend que de p donc de s telle que, pour tout j, il existe un ensemble $\Lambda(p)$, noté Λ_j, inclus dans E_j de cardinal de l'ordre de $(n_{j+1} - n_j)^{\frac{2}{p}}$.

Posons $f = \sum_{1 \leq j \leq N} \sum_{n \in \Lambda_j} e_n$.

Le corollaire précédent donne l'existence de C_s telle que:

$$\sum_{1 \leq j \leq N} (n_{j+1} - n_j)^{\frac{2}{p}} \leq C_s \sup_{1 \leq j \leq N} (n_{j+1} - n_j)^{\frac{1}{p}} . [\![f]\!] .$$

Enfin, d'après Salem-Zygmund, il existe K_s telle que:

$$\sum_{1 \leq j \leq N} (n_{j+1} - n_j)^{\frac{2}{p}} \leq K_s \sup_{1 \leq j \leq N} (n_{j+1} - n_j)^{\frac{1}{p}} . \sqrt{\sum_{1 \leq j \leq N} (n_{j+1} - n_j)^{\frac{2}{p}} . \log(n_{N+1})}$$

D'où le résultat. ∎

11 Annexe: comparaison des normes $C^{p.s.}$ et infinie

L'inégalité de Salem-Zygmund combinée avec les polynômes de Rudin-Shapiro montre qu'il y a un décalage de l'ordre de $\sqrt{\log(N)}$ entre la norme L^∞ et la norme $C^{p.s.}$ pour les polynômes sur le tore à spectre $\{0, \cdots, N\}$. Plus précisément

$$\sup\left\{ \frac{[\![f]\!]}{\|f\|_\infty} \mid f \in \mathcal{P}(\mathbb{T}),\ sp(f) = \{0, \cdots, N\} \right\} \approx \sqrt{\log(N)}.$$

L. Rodriguez-Piazza montre dans sa thèse que le décalage entre la norme L^2 et la norme $C^{p.s.}$ pour les polynômes à spectre dans une partie finie A est de l'ordre de $\sqrt{q(A)}$, où $q(A)$ désigne le maximum des cardinaux des ensembles quasi-indépendants inclus dans A (cf [Ro] teorema IV.1.3).

Nous nous intéressons ici au point de vue $[\![.]\!] / \|.\|_\infty$ et signalons un corollaire de l'étude de la minoration de la constante de $K-$convexité par J. Bourgain ([Bo3]). Cette remarque nous a été communiquée par L. Rodriguez-Piazza. Le décalage entre la norme $C^{p.s.}$ et la norme sup. est minoré par une quantité de l'ordre de $\log(N)$, sur un sous-espace de dimension N de l'espace des polynômes à spectre dans l'ensemble des fonctions de Walsh.

Théorème 11.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier N:*

$$\sup\Big\{\frac{[\![f]\!]}{\|f\|_\infty} \mid f \in \mathcal{P}([0,1]),\ |sp(f)| = N\Big\} \geq C\log(N).$$

Preuve: remarquons qu'il suffit de montrer de résultat pour N de la forme 2^n. Puis il suffit d'appliquer la proposition 5.1 de [Bo3] où J. Bourgain construit un sous-ensemble aléatoire Λ de $\{w_k \mid 1 \leq k \leq 2^n\}$, tel que $C\log(|\Lambda|) \leq \sqrt{n}$ et un polynôme P à spectre dans Λ vérifiant:

$$\|P\|_\infty \leq C \text{ et } \hat{P}(r_j) = \tfrac{1}{\sqrt{n}}, \text{ pour tout } 1 \leq j \leq n.$$

Dès lors, puisque l'ensemble des fonctions de Rademacher $\{r_j\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ est un ensemble de Sidon (de constante de Sidon $s = \frac{\pi}{2}$), nous avons la minoration:

$$s\,[\![P]\!] \geq s \left[\!\!\left[\sum_{1 \leq j \leq n} \hat{P}(r_j) r_j \right]\!\!\right] \geq \sum_{1 \leq j \leq n} |\hat{P}(r_j)| = \sqrt{n}.$$

où la première inégalité provient de l'inconditionnalité des caractères dans $C^{p.s.}$.

Ceci donne le résultat annoncé. ∎

Partie III
Ensembles p-Sidon

Dans l'étude des ensembles stationnaires, nous avons essentiellement utilisé le fait que $[\![\cdot]\!]$ est une norme inconditionnelle pour les caractères satisfaisant la propriété suivante:

il existe une fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$ et, pour toute partie finie $A \subset \Gamma$

$$\left[\!\!\left[\sum_{\gamma\in A} \gamma\right]\!\!\right] \geq \psi(|A|) \left\|\sum_{\gamma\in A} \gamma\right\|_2 .$$

Les résultats du chapitre précédents sont donc valables pour d'autres classes de l'analyse harmonique, par exemple les ensembles p-Sidon.

Nous rappelons la définition suivante.

Définition 0.1 *Soient $\Lambda \subset \Gamma$ et $1 \leq p < 2$, on dit que Λ est p-Sidon ps s'il vérifie la propriété:*

$$\exists C > 0, \quad \forall h \in C_\Lambda^{p.s.}(G), \ \|\hat{h}\|_p \leq C\, [\![h]\!] .$$

La notion n'a d'intérêt que pour $p < 2$. Cette classe d'ensemble a été notamment étudiée par Rodriguez-Piazza (cf [Ro]). D'autre part, on remarque que tout ensemble p-Sidon est un ensemble p-Sidon p.s. En effet:

Pour tout polynôme f à spectre dans Λ, p-Sidon et pour tout choix de signe ω, f^ω est encore un polynôme f à spectre dans Λ. D'où

$\|\widehat{f^\omega}\|_p \leq S_p(\Lambda)\|f^\omega\|_\infty$ et en intégrant sur tous les choix de signe puis en utilisant l'inconditionnalité sur ℓ^p, on obtient: $\|\hat{f}\|_p \leq S_p(\Lambda)\, [\![f]\!]$.

Remarquons également que l'inconditionnalité des caractères dans $C^{p.s.}$ permet d'obtenir trivialement que l'union de deux ensembles p-Sidon p.s. est encore p-Sidon p.s..

Nous avons la condition arithmétique nécessaire suivante:

Proposition 0.2 *Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ un ensemble p-Sidon p.s., alors*

$$\exists C > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}^*,\ |\Lambda \cap \{0, \cdots, N\}| \leq C \log(N)^{\frac{p}{2-p}}.$$

Ce résultat n'est pas nouveau mais nous présentons une preuve extrêmement courte.

Preuve: soient $N \in \mathbb{N}^*$, a_N le cardinal de $\Lambda \cap [0, N]$ et h le polynôme trigonométrique $\sum_{n \in \Lambda \cap [0,N]} e_n$. La définition de la p-Sidonicité ps assure l'existence de C_1 (numérique) telle que: $a_N^{\frac{1}{p}} = \|\hat{h}\|_p \leq C_1 [\![h]\!]$.

La majoration de Salem-Zygmund donne l'existence de C_2 (numérique) telle que $[\![h]\!] \leq C_2 \sqrt{a_N \log(N)}$. Ainsi, il existe C ne dépendant que de Λ telle que: $a_N^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \leq C(\log(N))^{\frac{1}{2}}$. D'où le résultat. ∎

Remarque: la majoration en $\log(N)^{\frac{p}{2-p}}$ est optimale. En effet, étant donné H dissocié dans $\mathbb{Z}$ ($\{3^n\}_{n \geq 1}$ par exemple), les ensembles $H + \cdots + H$ (k fois) sont p-Sidon, avec $k = \frac{p}{2-p}$.

1 Propriétés multiplicatives des ensembles p-Sidon

Nous obtenons également des résultats concernant les coefficients de Fourier d'une mesure à spectre dans un p-Sidon. Là encore les techniques sont les mêmes que pour les stationnaires et nous étendons au cas d'un groupe abélien compact quelconque puis au passage à l'union avec un $\Lambda(1)$, une inégalité due à Fournier et Pigno ([F-P]) utilisant un résultat sur les multiplicateurs dû à Stečkin pour le tore.

Théorème 1.1 *Soient $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble p-Sidon, L un ensemble $\Lambda(1)$ et μ dans $M_{\Lambda \cup L}$, alors $\hat{\mu} 1_\Lambda$ définit un multiplicateur compact de $M(\ell^2, \ell^p)$ et il existe K (constante absolue) telle que, pour toute mesure μ dans $M_{\Lambda \cup L}$, on ait:*

$$\|(\hat{\mu}(\lambda))_{\lambda \in \Lambda}\|_{\frac{2p}{2-p}} \leq K S_p(\Lambda) \|\mu\|.$$

Preuve: il s'agit d'une preuve tout à fait similaire à celle du théorème 4.1. (seconde partie). Il suffit de remplacer l'espace $C^{p.s.}(G)$ par l'espace ℓ^p qui est également de cotype 2.

Le caractère compact provient tout simplement du théorème de Witt: comme $p < 2$, les opérateurs de ℓ^2 dans ℓ^p sont compacts. ∎

Dans le cas du tore, nous obtenons une inégalité due à Stečkin [St] (qui ne la formulait pas en ces termes).

Théorème 1.2 *Soit $\Lambda \subset \mathbb{N}$ un ensemble p-Sidon.*

Alors il existe K (constante absolue) telle que, pour toute mesure μ dans $M_{\Lambda\cup\mathbb{Z}^-}$, on ait:

$$\|\hat{\mu}1_\Lambda\|_{\frac{2p}{2-p}} \leq KS_p(\Lambda)\|\mu\|.$$

De plus, $\hat{\mu}1_\Lambda$ définit un multiplicateur compact de $M(\ell^2, \ell^p)$.

Preuve: on considère l'opérateur de convolution défini par:

$$J : \left| \begin{array}{ccc} A(\mathbb{D}) & \rightarrow & \ell^p \\ f & \rightarrow & f * \mu \end{array} \right.$$

Cet opérateur est défini car, pour f dans $A(\mathbb{D})$, $f * \mu \in C_\Lambda$ donc sa transformée de Fourier appartient à ℓ^p (Λ est p-Sidon) et sa norme ℓ^p est majorée par: $S_p(\Lambda)\|\mu\|\|f\|_\infty$. L'opérateur J est donc borné et sa norme est inférieure à $S_p(\Lambda)\|\mu\|$.

ℓ^p étant de cotype 2, le théorème de Bourgain entraîne que l'opérateur J est 2-sommant. Le théorème de Pietsch assure l'existence d'une mesure ν sur G et d'une constante C telles que: $\|\widehat{h * \mu}\|_p \leq CS_p(\Lambda)\|\mu\|.(\int_G |h(x)|^2 d\nu(x))^{\frac{1}{2}}$. L'invariance par translation permet de choisir pour ν la mesure de Haar sur $\mathbb{T}$. La densité de $A(\mathbb{D})$ dans H^2 conduit à:

$$\forall h \in H^2, \quad \|\widehat{h * \mu}\|_p \leq CS_p(\Lambda)\|\mu\|.\|h\|_2.$$

D'où le résultat. ∎

Remarque: comme dans le cas des ensembles stationnaires, il y a plusieurs preuves du théorème précédent (nouvelles par rapport au point de vue de Fournier et Pigno [F-P]).

Signalons le résultat suivant, corollaire des théorèmes 1.1, 1.2 de cette partie et de la caractérisation d, teo 2.3. page 85 de [Ro]:

Corollaire 1.3 *Soit $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble p-Sidon, avec $p \leq \frac{4}{3}$ et L un ensemble $\Lambda(1)$ (ou $L = \mathbb{Z}^-$ si $G = \mathbb{T}$) alors, pour toute mesure μ de $M_{\Lambda\cup L}$:*

$\hat{\mu}1_\Lambda$ définit un multiplicateur compact pour la convolution de L^2 dans L^ψ.

Preuve: soit μ une mesure de $M_{\Lambda\cup L}$, les théorèmes 1.1 ou 1.2 assurent que $\hat{\mu}1_\Lambda$ définit un multiplicateur compact de L^2 dans $\ell^{\frac{2p}{2-p}}$. Or, comme Λ est en particulier un ensemble p-Sidon p.s., on sait ([Ro] p 85) que $\ell^{\frac{2p}{3p-2}}$ s'injecte dans L^ψ. Il suffit de remarquer que, $\frac{2p}{3p-2} \geq \frac{2p}{2-p}$ pour $p \leq \frac{4}{3}$. ∎

Les théorèmes 1.2 et II.4.6 permettent de retrouver le résultat de Fournier et Pigno [F-P]: si E est p-Sidon ($p < 2$) alors $E \cup \mathbb{Z}^-$ est de continuité.

Pour un groupe G ayant la propriété $\mathcal{D}$, nous avons la variante suivante:

Théorème 1.4 *Soient A un ensemble p-Sidon et B un ensemble $\Lambda(1)$; alors $A \cup B$ est un ensemble de continuité.*

Preuve: le théorème 1.1 permet d'obtenir (16) (cf II.4.) avec A p-Sidon, B ensemble $\Lambda(1)$, $\phi(t) = Ct^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ où C ne dépend que de A et B. Comme B est un ensemble $\Lambda(1)$, B est en particulier un ensemble de continuité. Le théorème II.4.6 permet alors de conclure. ∎

2 Ensembles extensiblement p-Sidon

Nous allons montrer comment la théorie des opérateurs (p, q)-sommants permet d'obtenir une condition arithmétique sur les ensembles p-Sidon ($p < \frac{4}{3}$). Nous avons un résultat intermédiaire sur les ensembles extensiblement p-Sidon.

Donnons quelques définitions:

Définition 2.1 *Un opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est dit (p, q)-sommant s'il existe K telle que, pour toute famille finie de vecteurs $(x_j)_{1\leq j\leq n}$ de X, on a:*

$$\Big(\sum_{1\leq j\leq n} \|T(x_j)\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq K \sup_{\substack{\xi\in X^* \\ \|\xi\|=1}} \Big(\sum_{1\leq j\leq n} |\xi(x_j)|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

La définition suivante est nouvelle:

Définition 2.2 *Un ensemble $\Lambda \subset \Gamma$ est extensiblement p-Sidon s'il existe une constante C telle que:*

pour toute famille finie de parties finies $(\Lambda_j)_j$ de Λ, il existe des caractères γ_j et un ensemble p-Sidon E de constante inférieure à C, tels que les ensembles $\gamma_j\Lambda_j$ soient disjoints et inclus dans E.

Remarque: une condition suffisante pour l'extensibilité est la suivante: il existe H infini tel que $H.\Lambda$ est $p-$Sidon. D'autre part, un ensemble extensiblement p-Sidon est clairement un ensemble p-Sidon.

Notation: soit A un p-Sidon, nous noterons j_A l'opérateur:

$$\left| \begin{array}{ccc} C_A(G) & \to & \ell^p \\ h & \to & \hat{h} \end{array} \right.$$

Cet opérateur est de norme $S_p(A)$ (par définition).

Un ensemble extensiblement p-Sidon ($p < 2$) doit satisfaire une condition de nature banachique.

Théorème 2.3 *Soit Λ un ensemble extensiblement p-Sidon; alors la transformation de Fourier de $C_\Lambda(G)$ dans ℓ^p est $(p,1)$-sommante.*

Preuve: soit $(f_j)_{1\leq j\leq n}$ une famille finie de polynômes de $C_\Lambda(G)$, il existe des éléments $h_1,\cdots,h_n$ dans Γ tels que les polynômes h_jf_j soient à spectres disjoints (c'est le caractère extensible de Λ qui nous l'assure) et inclus dans E. La p-Sidonicité de E conduit à:

$$\| \widehat{\sum_{1\leq j\leq n} h_jf_j}\|_p \leq S_p(E)\| \sum_{1\leq j\leq n} h_jf_j\|_\infty \leq S_p(E) \sup_{|\varepsilon_j|=1} \| \sum_{1\leq j\leq n} \varepsilon_jf_j\|_\infty.$$

puis les polynômes h_jf_j étant à spectres disjoints, nous obtenons:

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{1\leq j\leq n} \|\widehat{f_j}\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} &= \Big(\sum_{1\leq j\leq n} \|\widehat{h_jf_j}\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|j_E(\sum_{1\leq j\leq n} h_jf_j)\|_p \\ &\leq S_p(E) \sup_{|\varepsilon_j|=1} \| \sum_{1\leq j\leq n} \varepsilon_jf_j\|_\infty.\end{aligned}$$

D'où:

$$\Big(\sum_{1\leq j\leq n} \|j_\Lambda(f_j)\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq S_p(E) \sup_{x\in G} \sum_{1\leq j\leq n} |f_j(x)|$$

et j_Λ est $(p,1)$-sommante. ∎

Nous obtenons comme corollaire une condition banachique pour les ensembles p-Sidon qui contiennent un produit de deux ensembles infinis:

Corollaire 2.4 *Soient $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble p-Sidon, A et B, infinis, tels que $AB \subset \Lambda$, alors j_A et j_B sont $(p,1)$-sommantes, de norme $(p,1)$-sommante majorée indépendamment de A et B.*

Ceci résulte directement du théorème précédent.

Nous obtenons également comme corollaire une condition arithmétique pour les ensembles p-Sidon, $p < \frac{4}{3}$. Cette condition connue depuis longtemps, se démontre directement (et facilement) via les matrices de Walsh. Il ne semble pas toutefois que le point de vue matriciel redonne la condition banachique énoncée ci-dessus. Cette condition apparait donc comme strictement plus forte.

Corollaire 2.5 *Soient $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble p-Sidon, A et B, infinis, tels que $AB \subset \Lambda$, alors nécessairement, on a: $p \geq \frac{4}{3}$.*

Preuve: elle résulte directement du lemme ci-dessous:

Lemme 2.6 *Soit $1 \leq p < \frac{4}{3}$, il n'existe pas d'ensemble infini A tel que la transformation de Fourier de $C_A(G)$ dans ℓ^p soit bornée et $(p,1)$-sommante.*

Preuve: *point de vue (p,q)-sommant.* Supposons l'existence d'un tel ensemble A pour $1 \leq p < \frac{4}{3}$. On peut choisir un réel q tel que: $\frac{p}{2-p} < q < 2$ puisque la condition $p < \frac{4}{3}$ implique $\frac{p}{2-p} < 2$.

L'injection i de ℓ^p dans ℓ^q est $((\frac{1}{p}+\frac{1}{2}+\frac{1}{q})^{-1},1)$-sommant (cf th.p209 [D-J-T]). D'après un théorème de König, Retherford et Tomczak-Jaegermann (p 208 [D-J-T]), la composition $i \circ j_A$ est 2-sommante.

Le théorème de Pietsch nous permet une fois de plus de conclure. Il existe une mesure de probabilité sur G, que l'on peut choisir comme étant la mesure de Haar, car $i \circ j_A$ est un opérateur invariant par translation et il existe une constante C telle que, pour tout élément h de $C_A(G)$, donc, par densité, pour tout élément h de $L^2_A(G)$, on ait:

$$\|\hat{h}\|_q \leq C\|h\|_2$$

ce qui est clairement impossible car $q < 2$.

Point de vue élémentaire: matrices de Walsh. Etant donné un entier n, sélectionnons n caractères distincts $a_1, \cdots, a_n$ dans A. Posons, pour $1 \leq j \leq n$:

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\Big(\frac{2i\pi kj}{n}\Big).a_k.$$

Les polynômes f_j sont à spectre dans A. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, pour des ε_j de module 1 arbitraires:

$$\|\sum_{1\leq j\leq n} \varepsilon_j f_j\|_\infty = \|\sum_{1\leq j\leq n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\Big(\frac{2i\pi kj}{n}\Big)\varepsilon_j.a_k\|_\infty \leq \|\{\varepsilon_j\}\|_2.\sup_{x\in G}\|\{a_k(x)\}\|_2 = n.$$

Soit

$$\sup_{|\varepsilon_j|=1} \|\sum_{1\leq j\leq n} \varepsilon_j f_j\|_\infty \leq n.$$

D'autre part, pour tout j:

$$\|\hat{f}_j\|_p = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$$

Explicitons le caractère $(p,1)$-sommant de j_A:

$$n^{\frac{2}{p}-\frac{1}{2}} = \Big(\sum_j \|\hat{f}_j\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq Cn$$

Ceci est valable pour tout entier n donc nous avons nécessairement: $p \geq \frac{4}{3}$. ∎

En appliquant un théorème de factorisation pour les opérateurs (p,q)-sommants, nous obtenons immédiatement un corollaire qui n'a d'interêt que pour $\frac{4}{3} \leq p < 2$.

Rappelons la définition suivante

Définition 2.7 *L'espace de Lorentz $L^{p,1}(G)$ est l'espace des fonctions mesurables f sur G (ici la mesure est la mesure de Haar m) dont le réarrangement décroissant f^* défini sur $[0,1]$ par $f^*(t) = \inf\{s > 0; m(|f| > s) \leq t\}$ vérifie*

$$\int_0^1 t^{\frac{1}{p}} \; f^*(t)\frac{dt}{t} \; < \infty$$

Corollaire 2.8 *Soient Λ tel que j_Λ soit $(p,1)$-sommante (par exemple Λ extensiblement p-Sidon) et une mesure μ à spectre dans Λ.*

Alors μ définit un multiplicateur de Fourier de l'espace de Lorentz $L^{p,1}(G)$ dans ℓ^p. En particulier, μ définit un multiplicateur de Fourier de l'espace $L^r(G)$ dans ℓ^p, pour tout $r > p$.

Preuve: il suffit de composer j_Λ avec l'opérateur de convolution par μ de $C(G)$ dans $C_\Lambda(G)$ puis d'appliquer le théorème 10.9 p.204 [D-J-T]. ∎

3 Quelques propriétés arithmético-fonctionnelles des ensembles p-Sidon p.s.

Nous nous intéressons aux liens entre l'absolue sommabilité des coefficients de Fourier d'une fonction de $C^{p.s.}$ et la lacunarité de son spectre. p désignera un réel de $[1,2[$.

Théorème 3.1 *Soient $\Lambda \subset \Gamma$ un ensemble p-Sidon p.s., $f \in C^{p.s.}_\Lambda(G)$ et $\{\Lambda_j\}_j$ une partition du spectre de f en ensembles finis. Posons $f_j = \sum_{\lambda\in\Lambda_j} \hat{f}(\lambda)\lambda$. Supposons que la série $\sum_j |\Lambda_j|^{1-p}$ diverge.*

Alors il existe une sous-suite $\{j_s\}_s$ telle que: $\|\widehat{f_{j_s}}\|_1$ converge vers 0.

Preuve: on a:

$$[\![f]\!] = \left[\!\!\left[\sum_j |\Lambda_j|^{\frac{1}{p'}} \|\hat{f}_j\|_p (|\Lambda_j|^{\frac{-1}{p'}} \|\hat{f}_j\|_p^{-1} \; f_j)\right]\!\!\right].$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a: $\|\widehat{f_j}\|_1 \leq |\Lambda_j|^{\frac{1}{p'}} \|\hat{f}_j\|_p$, donc le principe de contraction donne:

$$[\![f]\!] \geq \left[\!\!\left[\sum_j \|\widehat{f_j}\|_1 |\Lambda_j|^{-\frac{1}{p'}} \|\hat{f}_j\|_p^{-1} \; f_j\right]\!\!\right].$$

Puis, Λ étant un ensemble p-Sidon p.s., il existe $C > 0$ tel que:

$$[\![f]\!] \geq C\|(\sum_j \|\widehat{f}_j\|_1 \widehat{|\Lambda_j|^{\frac{-1}{p'}}} \|\hat{f}_j\|_p^{-1}\ f_j)\|_p = C\Big(\sum_j \|\widehat{f}_j\|_1^p |\Lambda_j|^{-\frac{p}{p'}}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

où la dernière égalité provient du caractère disjoint des ensembles Λ_j.

La divergence de la série $\sum_j |\Lambda_j|^{1-p}$ implique que $\liminf \|\widehat{f}_j\|_1 = 0$. ∎

Dans le cas du tore et d'un découpage dyadique, nous obtenons le:

Corollaire 3.2 *Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ un ensemble p-Sidon p.s., avec $p \leq \sqrt{2}$, posons $\Lambda_j = \Lambda \cap ([2^j + 1, \cdots, 2^{j+1}] \cup [-2^{j+1}, \cdots, -2^j - 1])$, $j \in \mathbb{N}$:*

alors, pour tout f dans $C_\Lambda^{p.s.}(\mathbb{T})$, il existe une sous-suite $\{j_s\}_s$ telle que: $\|\widehat{f}_{j_s}\|_1$ converge vers 0.

Preuve: il suffit d'appliquer le théorème précédent;

On remarque que Λ un ensemble p-Sidon p.s donc il existe C tel que pour tout j: $|\Lambda_j| \leq C j^{\frac{p}{2-p}}$. Ainsi, comme $p \leq \sqrt{2}$, on a la divergence de la série $\sum_j |\Lambda_j|^{1-p}$. ∎

Nous allons rentrer plus en profondeur dans l'étude des ensembles p-Sidon p.s pour $p \leq \sqrt{2}$ dans le cas du tore.

On notera, pour $A \subset \mathbb{Z}$, $a \in \ell^\infty(\Lambda)$ et $j \in \mathbb{N}$:

$$D_j = \{-2^{j+1}, \cdots, -2^j - 1\} \cup \{2^j + 1, \cdots, 2^{j+1}\} \quad \text{et } a_j = \sum_{n \in D_j} a(n)\delta_n.$$

(où $(\delta_n)_n$ est la base de Schauder canonique de c_o)

Alors on a la condition nécessaire suivante:

Théorème 3.3 *Soit Λ un ensemble p-Sidon p.s. pour $p \leq \sqrt{2}$. Soit $a \in c_o(\Lambda)$ tel que la suite de terme général $\|a_j\|_{\frac{2}{p}}^{\frac{1}{p}}$, est décroissante et sommable.*

Alors $a \in \ell^1(\Lambda)$.

Preuve: Considérons $h = \sum_j \|a_j\|_{\frac{2}{p}}^{\frac{1}{p}} g_j$, où g_j est le polynôme trigonométrique défini par

$$\begin{cases} g_j &= e_{2^j} & \text{si } a_j = 0 \\ g_j &= \Big(\sum_{n \in D_j} |a(n)|^{\frac{2}{p}}\Big)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n \in D_j} |a(n)|^{\frac{1}{p}} e_n & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $\|g_j\|_2 = 1$. Avec les notations précédentes: $\|h_j\|_2$ est décroissante vers 0 et élément de ℓ^1. D'après le théorème de Salem-Zygmund, h définit donc un élément de $C^{p.s.}(\mathbb{T})$. Le spectre de h est inclus dans l'ensemble $\Lambda \cup \{\pm 2^j\}$. Cette union est encore p-Sidon p.s.

$\hat{h}$ est élément de ℓ^p et on obtient:

$$\sum_j \|a_j\|_1 = \sum_j \|a_j\|_{\frac{2}{p}} \|\widehat{g_j}\|_p = \sum_j \|a_j\|_{\frac{2}{p}} (\sum_{n \in D_j} |a(n)|)(\sum_{n \in D_j} |a(n)|^{\frac{2}{p}})^{-\frac{p}{2}} = \|\hat{h}\|_p^p < \infty.$$

■

4 Théorème de Bernstein pour les p-Sidon

Dans le cas de fonctions à spectre dans un p-Sidon, le théorème classique de Bernstein peut être amélioré. Nous notons ω_f le module de continuité d'une fonction continue f:

$$\text{Pour } h > 0, \quad \omega_f(h) = \sup\{|f(u) - f(v)|; |u - v| < h\}.$$

Théorème 4.1 *Soit f une fonction continue sur le tore, à spectre dans un p-Sidon Λ. Supposons que ω_f vérifie la condition suivante:*

$$\sum_{j \geq 0} j^{\frac{p-1}{2-p}} . \omega_f(2^{-j}) < \infty.$$

Alors f est dans $A(\mathbb{T})$, ie $\hat{f} \in \ell^1$.

Preuve: on commence par remarquer que pour tout x dans $\mathbb{T}$, on a $f - f_x \in C_\Lambda$ (où $f_x(t) = f(x+t)$) donc en particulier, pour tout j dans $\mathbb{N}$:

$$\|\sum_{|n|=2^j}^{2^{j+1}-1} \hat{f}(n)(e_n(x) - 1)e_n\|_{\ell^p} \leq \|\widehat{f_x - f}\|_{\ell^p} \leq S_p(\Lambda)\|f_x - f\|_\infty \leq S_p(\Lambda)\omega_f(x)$$

En choisissant $x = (3.2^j)^{-1}$, on obtient l'inégalité:

$$\sqrt{3}\|\{\hat{f}(n)\}_{2^j \leq |n| < 2^{j+1}}\|_p \leq S_p(\Lambda)\omega_f((3.2^j)^{-1}) \leq S_p(\Lambda)\omega_f(2^{-j}).$$

Puis on majore la norme ℓ^1 de $\hat{f}$ via l'inégalité de Hölder (C_p ne dépend que de $S_p(\Lambda)$):

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_1 &\leq |\hat{f}(0)| + \sum_{j \in \mathbb{N}} \|\{\hat{f}(n)\}_{2^j \leq |n| < 2^{j+1}}\|_p . \|\{1_\Lambda(n)\}_{2^j \leq |n| < 2^{j+1}}\|_{p'} \\ &\leq \|f\|_\infty + C_p \sum_{j \geq 0} \omega_f(2^{-j}).j^{\frac{p-1}{2-p}} < \infty \end{aligned}$$

compte-tenu de la lacunarité de Λ: $|\Lambda \cap \{2^j + 1, \cdots, 2^{j+1}\}| \leq C' j^{\frac{p}{2-p}}$.

Enfin, l'hypothèse assure la convergence du terme de droite. ■

On a le corollaire immédiat suivant:

Corollaire 4.2 *Soit f une fonction continue sur le tore, à spectre dans un p-Sidon Λ. Supposons qu'il existe $\alpha > \frac{1}{2-p}$ et $C > 0$ tels que, pour tout $h > 0$: $\omega_f(h) \leq C(\log(\frac{1}{h}))^{-\alpha}$.*

Alors f est dans $A(\mathbb{T})$, ie $\hat{f} \in \ell^1$.

5 Etude vectorielle

Nous allons étudier le problème des fonctions à spectre lacunaire et à coefficients vectoriels.

Définition 5.1 *Soient E un espace de Banach, Λ une partie de Γ et $p \geq 1$.*

On dira que le couple (E, Λ) est p-Sidon si, pour toute fonction f de $C_\Lambda(G, E)$, la suite $(\|\hat{f}\|_E)_\Lambda$ est un élément de ℓ^p.

Remarques: 1) Pour $E = \mathbb{C}$, on retrouve la notion de p-Sidon.

2) La définition précédente est équivalente à la suivante:

il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{P}_\Lambda(G, E)$:

$$(\sum_{\lambda \in \Lambda} \|\hat{f}(\lambda)\|_E^p)^{\frac{1}{p}} \leq C\|f\|$$

Dans le cas fini-dimensionnel, nous avons la proposition facile suivante:

Proposition 5.2 *Si E est de dimension finie, alors*

Λ est p-Sidon $\iff$ (E, Λ) est p-Sidon.

Preuve: si (E, Λ) est p-Sidon alors il est trivial que Λ est p-Sidon (on raisonne sur un sous-espace de E de dimension 1).

Inversement, il suffit de montrer le résultat pour $x = \sum_{\text{finie}} x_j \lambda_j$, où $\Lambda = \{\lambda_j\}$ et $x_j \in E$.

Ecrivons $(\sum_j \|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} = \sum_j a_j \|x_j\|$ avec $\|a\|_{p'} = 1$.

On décompose x_j dans une base normée (b_n) de E (qui est de dimension finie, disons d). On a: $x_j = \sum_{1 \leq n \leq d} x_j(n) b_n$. Via l'inégalité de Hölder, on obtient:

$$(\sum_j \|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{1 \leq n \leq d} \sum_j a_j |x_j(n)| \leq \sum_{1 \leq n \leq d} S_p(\Lambda) \|\sum_j x_j(n) \lambda_j\|_\infty$$

Toutes les normes sont équivalentes. On peut donc choisir la norme sup sur E (maximum des modules des coordonnées). On aboutit alors à:

$$(\sum_j \|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq d.S_p(\Lambda) \sup_{g\in G} \|\sum_j x_j\lambda_j(g)\|_E.$$

Ainsi, (E,Λ) est p-Sidon. ∎

L'analogie avec les p-Sidon s'arrête au cas fini-dimensionnel. En dimension infinie, nous avons le résultat suivant:

Proposition 5.3 *Soit $1 \leq p < 2$, E un espace de dimension infinie, il n'existe pas d'ensemble Λ infini tel que (E,Λ) soit p-Sidon.*

Preuve: il s'agit d'un corollaire du théorème classique de Dvoretzky-Rogers. En effet, pour toute suite de scalaires (a_j) dans ℓ^2, il existe une suite d'éléments de E telle que $\sum x_j$ est inconditionnellement convergente et $\|x_j\|_E = |a_j|$.

Ainsi, s'il existait un ensemble Λ infini tel que (E,Λ) soit p-Sidon, on aurait l'existence de C telle que:

$$(\sum_j \|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} = \|a\|_p \leq C \sup_{g\in G} \|\sum_j x_j\lambda_j(g)\|_E \leq C \sup_{|\varepsilon_j|=1} \|\sum_j \varepsilon_j x_j\|_E.$$

Le choix d'une suite (a_j) de ℓ^2 qui n'est pas dans ℓ^p conduit à une contradiction. ∎

Désormais, dans ce paragraphe, on a $p \geq 2$.

L'existence de couples (E,Λ) p-Sidon avec E de dimension infinie, est soumise à la condition banachique suivante sur E:

Proposition 5.4 *Il existe un ensemble Λ infini tel que (E,Λ) soit p-Sidon si et seulement si Id_E est $(p,1)$-sommante.*

Preuve: supposons l'existence d'un ensemble $\Lambda = \{\lambda_j\}$ infini tel que (E,Λ) soit p-Sidon. Il existe alors C telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute famille $x_1,\cdots,x_n$ de E:

$$(\sum_j \|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{g\in G} \sup_{\zeta\in B_{E^*}} |\sum_j x_j\lambda_j(g)| \leq C \sup_{\zeta\in B_{E^*}} \sum_{j=1}^n |\zeta(x_j)|$$

Ainsi, Id_E est $(p,1)$-sommante.

Inversement, soit Λ un ensemble de Sidon. Soit $f = \sum_{j=1}^n x_j\lambda_j$ dans $\mathcal{P}_\Lambda(G,E)$. On a alors (C étant la norme $(p,1)$-sommante de Id_E):

$$(*) \qquad (\sum_j \|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\zeta\in B_{E^*}} \sum_{j=1}^n |\zeta(x_j)|.$$

Pour $\zeta \in B_{E^*}$ fixé, il existe une mesure μ_ζ sur G, de norme inférieure à $S(\Lambda)$, telle que, pour tout j, $\hat{\mu}_\zeta(\lambda_j)$ soit le signe complexe de $\zeta(x_j)$.

D'où

$$\sum_{j=1}^{n} |\zeta(x_j)| = \sum_{j=1}^{n} \hat{\mu}_\zeta(\lambda_j)\zeta(x_j) = \zeta(\sum_{j=1}^{n} \hat{\mu}_\zeta(\lambda_j)x_j) \leq \| \sum_{j=1}^{n} \hat{\mu}_\zeta(\lambda_j)x_j\|$$

Or $\sum_{j=1}^{n} \hat{\mu}_\zeta(\lambda_j)x_j = \mu_\zeta * f(0)$, la convolution se faisant par intégration vectorielle au sens de Bochner. On obtient donc:

$$\sum_{j=1}^{n} |\zeta(x_j)| \leq \|\mu\zeta\|.\|f\| \leq S(\Lambda)\|f\|.$$

D'après $(*)$,
$$(\sum_j \|x_j\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C.S(\Lambda)\|f\|.$$

Autrement dit (E, Λ) est p-Sidon. ∎

Remarque: la démonstration précédente montre que pour Λ Sidon, tout $p \geq 2$ et tout espace E d'identité $(p, 1)$-sommante, on a (E, Λ) p-Sidon.

Corollaire 5.5 *Soient E un Banach et $p > 2$, il existe un ensemble Λ infini tel que (E, Λ) soit p-Sidon si et seulement si E est de cotype p.*

Preuve: il suffit d'appliquer les résultats de Talagrand dans [T1] (M. Talagrand montre dans cet article que pour $p > 2$, un espace de Banach admet une identité $(p, 1)$-sommante si et seulement si E est de cotype p). ∎

Remarque: nous nous intéressons désormais au cas $p = 2$. Un espace E tel qu'il existe un ensemble Λ infini tel que (E, Λ) soit 2-Sidon a la propriété d'Orlicz (ie l'identité de E est $(2, 1)$-sommante). On peut adopter deux points de vue:

1) Soit on cherche les ensembles lacunaires Λ tels que, pour tout E ayant une identité $(p, 1)$-sommante, (E, Λ) soit p-Sidon.

2) Soit on cherche à caractériser les espaces E tels que (E, Γ) soit p-Sidon.

Avec ce deuxième point de vue, on a le résultat suivant:

Proposition 5.6 *Si E est isomorphe à un espace de Hilbert, (E, Γ) est 2-Sidon.*

Preuve: il suffit clairement de montrer le résultat pour H Hilbert. Pour toute famille finie (x_j) de H, on a:

$$\begin{aligned}
\sum_j \|x_j\|^2 &= \sum_{j,k} < x_j, x_k > \int_G \gamma_j(g)\gamma_k(g)dg = \int_G < \sum_j x_j\gamma_j(g), \sum_k x_k\gamma_k(g) > dg \\
&= \int_G \| \sum_j \gamma_j(g)x_j\|^2 dg \\
&\leq (\sup_{g\in G} \| \sum_j \gamma_j(g)x_j\|)^2
\end{aligned}$$

∎

Nous nous intéressons au problème plus fort suivant: quels sont les couples (X, Λ) vérifiant l'inégalité de Bessel vectorielle (avec infini):

$$(B) \qquad \Big(\sum_\lambda \|x_\lambda\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq C\Big(\int_G \|\sum_\lambda x_\lambda \lambda(g)\|^2 dg\Big)^{\frac{1}{2}}$$

où $x_\lambda \in X$ pour tout λ dans Λ et C ne dépend que du couple (X, Λ)?

Remarque: l'hypothèse minimale pour X est d'être de cotype 2. En effet, en considérant un couple (X, Λ) vérifiant l'inégalité de Bessel vectorielle, on extrait de Λ un ensemble de Sidon infini Σ. Les fonctions de Rademacher (que l'on indexe ici par Σ) forment un ensemble de Sidon du dual du groupe de Cantor Ω. D'après un résultat de Pisier ([P-2]), il existe C telle que, pour toute famille finie de vecteurs de X:

$$C\Big(\int_\Omega \|\sum_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma \varepsilon_\sigma(\omega)\|^2 dP(\omega)\Big)^{\frac{1}{2}} \geq \Big(\int_G \|\sum_{\sigma\in\Sigma} x_\sigma \sigma(g)\|^2 dg\Big)^{\frac{1}{2}} \geq C'\Big(\sum_\sigma \|x_\sigma\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On conclut que X est nécessairement de cotype 2.

Dans le cas du tore, le problème de caractériser les espaces E réalisant l'inégalité de Bessel vectorielle a été résolu par Kwapień [Kw]. Il s'agit des espaces de Hilbert. Il semble que le cas d'un groupe compact abélien quelconque soit ouvert.

En ce qui concerne le point de vue 1) nous signalons le résultat suivant:

Théorème 5.7 *Soit $\Lambda \subset \Gamma$ tel que pour tout X de cotype 2, (X, Λ) vérifie (B), alors Λ est un ensemble $\Lambda(2)$.*

Inversement, si Λ est un ensemble $\Lambda(2)$, alors (X, Λ) vérifie (B) pour tout treillis X 2-concave (c'est à dire tout espace X de cotype 2 qui est un treillis).

Preuve: en ce qui concerne le premier point, il suffit de considérer l'espace L^1_Λ qui est de cotype 2. L'inégalité de Bessel testée avec $x_\lambda = \hat{f}(\lambda)\lambda$, où $f \in \mathcal{P}_\Lambda(G)$, donne exactement l'inégalité: $\|\hat{f}\|_2 \leq C\|f\|_1$. Donc Λ est un ensemble $\Lambda(2)$.

Inversement, soit une famille finie (x_λ) de vecteurs de X. On a la minoration:

$$\begin{aligned}
\Big(\int_G \|\sum_\lambda x_\lambda\lambda(g)\|^2 dg\Big)^{\frac{1}{2}} &\geq \int_G \|\sum_\lambda x_\lambda \lambda(g)\| dg \\
&\geq \|\int_G |\sum_\lambda x_\lambda\lambda(g)| dg\| \\
&\geq C\|\Big(\int_G |\sum_\lambda x_\lambda \lambda(g)|^2 dg\Big)^{\frac{1}{2}}\| \qquad \text{car } \Lambda \text{ est } \Lambda(2). \\
&\geq C\|(\sum_\lambda |x_\lambda|^2)^{\frac{1}{2}}\| \\
&= C \sup_{a\in B_{\ell^2}} \|\sum a_\lambda x_\lambda\| \\
&\geq C.C'\Big(\sum_\lambda \|x_\lambda\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{car } X \text{ est 2 concave}
\end{aligned}$$

où C et C' ne dépendent que de Λ et X. ■

Nous donnons une caractérisation duale des couples (X, Λ) vérifiant l'inégalité de Bessel vectorielle.

Proposition 5.8 *(X, Λ) vérifie l'inégalité de Bessel vectorielle si et seulement s'il existe C telle que:*

pour toute suite $(a_\lambda)_\Lambda$ dans B_{ℓ^2} et toute famille $(x^*_\lambda)_\Lambda$ de B_{X^*}, il existe $\chi \in L^2(X^*)$ telle que, pour tout x de X et tout $\lambda \in \Lambda$: $\chi(\lambda x) = a_\lambda x^*_\lambda(x)$.

Preuve: supposons que (X, Λ) vérifie l'inégalité de Bessel vectorielle. Pour toute suite $(a_\lambda)_\Lambda$ dans B_{ℓ^2} et toute famille $(x^*_\lambda)_\Lambda$ de B_{X^*}, on considère l'opérateur:

$$T : \left| \begin{array}{ccc} L^2_\Lambda(G, X) & \to & \mathbb{C} \\ h & \to & \sum_{\lambda \in \Lambda} x^*_\lambda(\hat{h}(\lambda)) a_\lambda \end{array} \right.$$

Cet opérateur est borné par hypothèse. Le théorème de Hahn-Banach permet d'étendre T à l'espace L^2. On obtient par dualité l'existence de $\chi \in L^2(X^*)$ telle que: $\forall h \in L^2_\Lambda(G, X)$, $T(h) = \chi(h)$. Pour tout x de X et tout $\lambda \in \Lambda$: $\chi(\lambda x) = a_\lambda x^*_\lambda(x)$.

Pour la réciproque, il suffit, étant donné h dans $L^2_\Lambda(G, X)$, de choisir une famille $(a_\lambda)_\Lambda$ dans B_{ℓ^2}, puis une famille $(x^*_\lambda)_\Lambda$ de B_{X^*}, telle que:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda x^*_\lambda(\hat{h}(\lambda)) = (\sum_\lambda \|\hat{h}(\lambda)\|^2_X)^{\frac{1}{2}}$$

Par hypothèse, nous avons l'existence d'un élément χ de $L^2(X^*)$ tel que:

$$\chi(\hat{h}(\lambda)\lambda) = a_\lambda x^*_\lambda(\hat{h}(\lambda)).$$

et nous avons la majoration:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \chi(\hat{h}(\lambda)\lambda) = \chi(\sum_{\lambda \in \Lambda} \hat{h}(\lambda)\lambda) \leq \|\chi\| . \| \sum_{\lambda \in \Lambda} \hat{h}(\lambda)\lambda\| = \|\chi\| . \|h\|.$$

d'où

$$(\sum_\lambda \|\hat{h}(\lambda)\|^2_X)^{\frac{1}{2}} = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\Lambda x^*_\lambda(\hat{h}(\lambda)) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi(\hat{h}(\lambda)\lambda) \leq \|\chi\| . \|h\|.$$

■

Partie IV
Propriétés banachiques, ensembles de Rosenthal et de Riesz

Nous considérons dans ce paragraphe des propriétés encore mal connues des ensembles lacunaires. Nous nous intéressons notamment aux ensembles Λ tels que: "$C_\Lambda(G)$ ne contient pas c_o". Il s'agit d'un problème ouvert de savoir si cette condition implique que Λ est un ensemble de Rosenthal c'est à dire:

$$(Ro) \qquad \forall h \in L^\infty_\Lambda(G),\ \exists f \in C_\Lambda(G),\ \hat{f} = \hat{h}.$$

La réciproque est évidemment vraie: un dual séparable ne peut contenir de copie de c_o. Rappelons également la définition d'un ensemble de Riesz:

$$(Ri) \qquad \forall \mu \in M_\Lambda(G),\ \exists f \in L^1_\Lambda(G),\ \hat{f} = \hat{\mu}.$$

Signalons que tout ensemble Λ tel que $c_o \not\subset C_\Lambda(G)$ est un ensemble de Riesz (cf [L-P]). A fortiori, tout ensemble de Rosenthal est un ensemble de Riesz.

Nous pouvons déjà remarquer qu'il existe des ensembles de Rosenthal qui ne sont pas stationnaires (ni $\Lambda(p)$, ni p-Sidon p.s., ni UC) il suffit de considérer l'exemple original de Rosenthal (qui n'est pas un ensemble de Sidon) qui a la propriété de contenir des progressions arithmétiques arbitrairement grandes, propriété que ne partagent pas les ensembles stationnaires (ainsi que les $\Lambda(p)$, p-Sidon p.s. et UC).

Il reste le problème de la réciproque: si Λ est stationnaire, a-t-on $c_o \not\subset C_\Lambda(G)$? Ce problème semble difficile, même dans sa version affaiblie: "l'ensemble des carrés n'est pas stationnaire? " (il est connu que $c_o \subset C_{\{n^2\}}(\mathbb{T})$, cf [L-P2]).

En ce qui concerne les autres classes, il est clair pour des raisons de cardinalité que l'ensemble des carrés n'est pas p-Sidon p.s. ($p < 2$). Pour les ensembles UC, le problème est résolu négativement [O]. Par contre pour Λ ensemble UC, la question

"Λ est $UC \Rightarrow c_o \not\subset C_\Lambda(G)$? " est toujours ouverte. Daniel Li a récemment donné un exemple d'ensemble $\Lambda(p)$ vérifiant $c_o \subset C_\Lambda(G)$. Toutefois, le problème du caractère $\Lambda(2)$ de l'ensemble des carrés est toujours ouvert.

Nous avons démontré que tout ensemble stationnaire est un ensemble de continuité. Cela reste un problème ouvert de savoir si tout ensemble de continuité est un ensemble de Riesz. La réciproque est connue et est négative (cf [F-P]). On ne peut espérer montrer encore plus: Λ est un ensemble de continuité implique $c_o \not\subset C_\Lambda(G)$. Il suffit de se rappeler que $\mathbb{N}$ est un ensemble de continuité et que $c_o \subset C_{\mathbb{N}}(\mathbb{T})$.

Une question très naturelle se pose donc, liée à ce problème: tout ensemble de continuité est-il un ensemble de Riesz? Effectivement, les travaux de Fournier et Pigno ([F-P]) montrent que l'union de $\mathbb{Z}^-$ et E, où E est soit p-Sidon, soit $\Lambda(1)$, soit UC, est un ensemble de continuité. D'autre part, nous avons montré que l'union de $\mathbb{Z}^-$ et d'un ensemble stationnaire est aussi un ensemble de continuité. Il paraît donc naturel de se demander si chacun de ces ensembles est également un ensemble de Riesz. Le problème reste ouvert, même sans l'union avec $\mathbb{Z}^-$, en ce qui concerne les p-Sidon, les ensembles UC et les ensembles stationnaires.

Nous allons exhiber une nouvelle classe d'ensembles de Riesz, qui généralise dans le cadre du tore (en gagnant l'union avec $\mathbb{Z}^-$) un résultat de Françoise Piquard: tout Λ ayant la propiété $c_o \not\subset C_\Lambda(G)$ est un ensemble de Riesz (cf [L-P]). Pour cela, nous avons besoin de résultats sur l'algèbre du disque.

1 Propriétés banachiques de l'algèbre du disque

Nous allons démontrer le résultat connu suivant: l'algèbre du disque a la propriété de Dunford-Pettis et la propriété (V) de Pełczyński. Rappelons quelques définitions.

Définition 1.1 *On dit qu'un espace de Banach X a la propriété de Dunford-Pettis si pour toute suite (x_n) de X et (x_n^*) de X^* faiblement convergente vers* 0, $\left(x_n^*(x_n)\right)_n$ *tend vers* 0.

Définition 1.2 *On dit qu'un espace de Banach X a la propriété (V) de Pełczyński si, pour toute partie K de X^* non relativement faiblement compacte, il existe une suite (x_n) telle que $\sum_n x_n$ soit faiblement inconditionnellement convergente dans X et vérifie* $\inf_n \sup_{x^* \in K} |x^*(x_n)| > 0$.

Une forme équivalente est la suivante: pour tout espace de Banach Y et tout opérateur T de X dans Y qui n'est pas faiblement compact, il existe un sous-espace X_o de X isomorphe à c_o tel que $T_{|X_o}$ réalise un isomorphisme de X_o sur un sous-espace Y_o de Y.

Définition 1.3 *On dit qu'un sous-espace X de $C(\mathbb{T})$ est riche s'il existe une mesure de probabilité σ sur $\mathbb{T}$ telle que, pour toute fonction φ de $C(\mathbb{T})$ et toute suite bornée (x_n) de X telle que $\int_{\mathbb{T}} |x_n| d\sigma \to 0$ quand $n \to +\infty$, on ait $dist(\varphi.x_n, X) \to 0$.*

Nous allons démontrer pour l'algèbre du disque:

Théorème 1.4 *L'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$ est un sous-espace riche de $C(\mathbb{T})$.*

Preuve: soient φ dans $C(\mathbb{T})$ et une suite (x_n) de $A(\mathbb{D})$, avec $\|x_n\|_1 \to 0$ et $\|x_n\|_\infty \leq C$ (C indépendant de n). Fixons $\varepsilon > 0$.

La densité de $\mathcal{P}$ dans $C(\mathbb{T})$ assure l'existence d'un polynôme trigonométrique $\tilde{\varphi}$ tel que: $\|\tilde{\varphi} - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$. Soit d_ε le degré de $\tilde{\varphi}$.

La condition $\|x_n\|_1 \to 0$ assure que, pour n assez grand (disons $n \geq n_\varepsilon$, où n_ε ne dépend que de φ et ε), on a la majoration

$$\|\tilde{\varphi}.\sum_{k=0}^{d_\varepsilon} \widehat{x_n}(k)e_k\|_\infty \leq \|\tilde{\varphi}\|_\infty.\|x_n\|_1.\|\sum_{k=0}^{d_\varepsilon} e_k\|_\infty \leq \|\tilde{\varphi}\|_\infty.\|x_n\|_1.(d_\varepsilon + 1) < \varepsilon.$$

On définit alors $x = \tilde{\varphi}.(x_n - \sum_{k=0}^{d_\varepsilon} \widehat{x_n}(k)e_k)$. Il s'agit d'un élément de $A(\mathbb{D})$ et on a:

$$\begin{aligned} dist(\varphi.x_n, X) &\leq \|\varphi.x_n - x\|_\infty \leq \|\varphi.x_n - \tilde{\varphi}.x_n\|_\infty + \|\tilde{\varphi}.x_n - x\|_\infty \\ &\leq C\varepsilon + \|\tilde{\varphi}.\sum_{k=0}^{d_\varepsilon} \widehat{x_n}(k)e_k\|_\infty \leq C\varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 1.5 *L'algèbre du disque a la propriété (V) de Pełczyński. L'algèbre du disque et son dual ont la propriété de Dunford-Pettis.*

Il suffit d'appliquer III.D 31 dans [W].

2 Nouveaux ensembles de Riesz

Nous n'avons pas trouvé de référence où il est mentionné que les ensembles suivants sont Riesz.

Théorème 2.1 *Tout ensemble de convergence complètement uniforme est un ensemble de Riesz.*

Ceci a été démontré dans la partie I.

Nous allons maintenant généraliser un résultat de Françoise Lust-Piquard. Ceci est à comparer avec un résultat de Dressler et Pigno ("l'union d'un Rosenthal et d'un Riesz est Riesz").

Théorème 2.2 *Soient $\Lambda \subset \Gamma$ ayant la propiété $c_o \not\subset C_\Lambda(G)$ et E un ensemble de Riesz tel que $C_{E^c}(G)$ a la propriété (V) de Pełczyński.*

Alors $E \cup \Lambda$ est un ensemble de Riesz.

Preuve: Fixons μ dans $M_{E\cup\Lambda}(G)$ et f dans $L^\infty_{E^c}(G)$.

Considérons l'opérateur de convolution U par μ agissant de $C_{E^c}(G)$ dans $C_\Lambda(G)$; $\|U\| \leq \|\mu\|$. Comme $C_{E^c}(G)$ a la propriété (V) de Pełczyński par hypothèse et comme $c_o \not\subset C_\Lambda(G)$, U est faiblement compact (cf III.D.35 [W]).

La composition suivante est a fortiori faiblement compacte:

$$\left| \begin{array}{ccccc} L^1 & \rightarrow & C_{E^c}(G) & \rightarrow & C(G) \\ h & \rightarrow & h * f & \rightarrow & h * f * \mu \end{array} \right.$$

$f * \mu$ définit un convoluteur faiblement compact de $L^1(G)$ dans $C(G)$, donc $f * \mu$ appartient à $C(G)$, et ce pour tout élément f de $L^\infty_{E^c}(G)$. Autrement dit, μ est un multiplicateur de Fourier de $L^\infty_{E^c}(G)$ dans $C(G)$.

Nous appliquons alors un théorème dû à Heard (cf [He] p.833 avec $B = C_{E^c}(G)$, auquel cas $B^\perp = M_E(G)$, $Q_B = L^\infty_{E^c}(G)$ et on prend $g_n = \mu * F_n$ où (F_n) est une approximation de l'unité). Donc il existe g dans $L^1(G)$ tel que pour tout n dans E^c, $\hat{g}(n) = \hat{\mu}(n)$. Il en résulte que $\mu - g \in M_E(G)$. Comme E est un ensemble de Riesz, $\mu - g \in L^1(G)$ tout comme $\mu = g + (\mu - g)$. L'ensemble $E \cup \Lambda$ est donc Riesz. ∎

Nous obtenons le résultat suivant:

Corollaire 2.3 *Soit $\Lambda \subset \mathbb{N}$ ayant la propiété $c_o \not\subset C_\Lambda(\mathbb{T})$; alors $\mathbb{Z}^- \cup \Lambda$ est un ensemble de Riesz.*

Preuve: d'après les résultats du paragraphe précédent, $C_\mathbb{N}(\mathbb{T}) = A(\mathbb{D})$ a la propriété (V) de Pełczyński. D'autre part, le théorème de F. et M. Riesz affirme que $\mathbb{N}$ est un ensemble de Riesz. Le théorème précédent s'applique donc. ∎

Remarque: la réciproque est fausse: Y. Meyer a démontré que l'union des entiers négatifs et de l'ensemble des carrés est Riesz, mais $c_o \subset C_{\{n^2\}}(\mathbb{T})$ ([L-P2]).

Théorème 2.4 *Soient $\Lambda \subset \Gamma$ ayant la propriété $c_o \not\subset C_\Lambda(G)$ et E un ensemble $\Lambda(1)$.*

Alors l'ensemble $E \cup \Lambda$ est un ensemble de Riesz.

Preuve: *première méthode.* appliquons le théorème 2.2: il suffit de montrer que $C_{E^c}(G)$ possède la propriété (V) de Pełczyński. Pour cela, on applique un théorème de G. Godefroy et P. Saab (th. III.4 [G-S]: $X = C(G)$ a la propriété (V) et $R = M_E(G)$ est réflexif donc $R^\perp = C_{E^c}$ a (V).).

Seconde méthode. Supposons que $E \cup \Lambda$ ne soit pas un ensemble de Riesz. Il existe une mesure μ dans $M_{E\cup\Lambda}(G)$ et une suite de fonctions continues (f_n) (avec $\|f_n\| = 1$), engendrant un sous-espace X de $C(G)$ isomorphe à c_o, et telles que la suite $(\mu * f_n)$ engendre aussi un sous-espace de $C(G)$ isomorphe à c_o (cf [L-P] p71). On considère l'opérateur de convolution.

$$\left| \begin{array}{ccc} C(G) & \to & C(G)/C_\Lambda(G) \\ h & \to & \overline{h * \mu} \end{array} \right.$$

Comme cet opérateur se factorise par l'espace réflexif $C(G)/C_{E^c}(G)$, il est faiblement compact. Nous utilisons une caratérisation des opérateurs faiblement compacts à domaine $C(G)$ ([D-J-T] th 15.2 p309): pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon)$ telle que:

$$\forall f \in X, \ \|\overline{\mu * f}\| \leq N(\varepsilon)\|f\|_1 + \varepsilon\|f\|_\infty$$

On peut trouver une suite $(\Delta_n)_n$ dans $C_\Lambda(G)$ telle que $\|\mu * f_n - \Delta_n\|_\infty$ converge vers 0. En effet, $\|f_n\|_1$ converge vers 0 car $(\|f_n\|_1)_n$ appartient à ℓ^1, puisque l'injection canonique de $C(G)$ dans L^1 est 1-sommante (ie pour toute série inconditionnellement Cauchy dans $C(G)$, $\sum f_n$, est absolument convergente dans $L^1(G)$). Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier m tel que, pour tout entier $n \geq m$: $\|f_n\|_1 \leq N(\varepsilon)^{-1}\varepsilon$. Nous en déduisons que, pour tout entier $n \geq m$: $\|\overline{\mu * f_n}\| \leq 2\varepsilon$. Nous pouvons choisir Δ_n dans $C_\Lambda(G)$ tel que, pour tout $n \geq m$: $\|\mu * f_n - \Delta_n\|_\infty \leq 2\varepsilon$, comme annoncé.

Il en découle l'existence d'une sous-suite de (Δ_n) équivalente à une sous-suite de $(\mu * f_n)$. Par conséquent, $C_\Lambda(G)$ contient un sous-espace isomorphe à c_o. Ceci contredit l'hypothèse sur Λ. ∎

Si nous remplaçons la condition "$c_o \not\subset C_\Lambda(G)$" par la condition plus forte "$c_o \not\subset L^\infty_\Lambda(G)$" dans le théorème précédent, nous obtenons de nouveaux ensembles de Riesz. Il s'agit d'un problème ouvert de savoir si la propriété "$c_o \not\subset L^\infty_\Lambda(G)$" est strictement plus forte que la propriété "$c_o \not\subset C_\Lambda(G)$".

Définition 2.5 *$E \subset \Gamma$ est bien disposé si la boule unité de $L^1_E(G)$ est fermée en mesure. $E \subset \Gamma$ est un ensemble de Shapiro si tout sous-ensemble de E est bien disposé.*

Nous renvoyons le lecteur à [Go] pour les ensembles bien disposés et les ensembles de Shapiro.

Nous aurons besoin des notions banachiques suivantes.

Définition 2.6 *On dit qu'un espace de Banach Y a la propriété (V^*) de Pełczyński si, pour tout espace de Banach X, tout opérateur T de X dans Y qui n'est pas faiblement compact réalise un isomorphisme d'un sous-espace (complémenté) X_o de X sur un sous-espace Y_o complémenté dans Y, isomorphe à ℓ^1.*

Définition 2.7 *Soit X un espace de Banach. X est un L-facteur dans son bidual s'il existe une projection P de X^{**} sur X telle que pour tout x dans X^{**}:*

$$\|x\| = \|Px\| + \|x - Px\|.$$

Nous référons à [H-W-W] à ce propos.

Théorème 2.8 *Soit $\Lambda \subset \Gamma$ ayant la propriété "$c_o \not\subset L^\infty_\Lambda(G)$" et E un ensemble de Riesz et bien disposé.*

Alors $E \cup \Lambda$ est un ensemble de Riesz.

Preuve: fixons μ dans $M_{E\cup\Lambda}(G)$.

Considérons le multiplicateur de Fourier par μ, U, agissant de $L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$ dans $L^1(G)/L^1_E(G)$, U est bien défini et $\|U\| \leq \|\mu\|$. En effet, étant donné un coset $f + h$ avec $h \in L^1_{\Lambda^c}(G)$, $\mu * (f + h) = \mu * f + \mu * h$, où $\mu * h \in L^1_E(G)$.

Remarquons tout d'abord que $L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$ ne contient aucun sous-espace complémenté isomorphe à ℓ^1, car ceci est équivalent ([D] p.48) à la propriété "$c_o \not\subset L^\infty_\Lambda(G)$".

Comme E est bien disposé, $L^1(G)/L^1_E(G)$ a la propriété (V^*) de Pełczyński. En effet, $L^1(G)$ et $L^1_E(G)$ sont L-facteurs dans leur bidual donc $L^1(G)/L^1_E(G)$ est lui-même L-facteur dans son bidual (cor. 1.3 p. 160 [H-W-W]) . D'après un théorème de Pfitzner ([Pf] ou th.2.7 p.173, [H-W-W]), tout L-facteur dans son bidual a la propriété (V^*) de Pełczyński, ce qui était annoncé.

D'après la définition 2.6, l'opérateur U est faiblement compact. Fixons une fonction h dans $L^\infty_{E^c}(G)$, notons T le convoluteur par h de $L^1(G)/L^1_E(G)$ dans $C(G)$, $\|T\| \leq \|h\|_\infty$. Notons S la surjection canonique de $L^1(G)$ dans $L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$. La convolution par $h * \mu$ de $L^1(G)$ dans $C(G)$ est exactement la composition $T \circ U \circ S$. Cet opérateur est donc faiblement compact. Nous en concluons que $h * \mu$ appartient à $C(G)$, ainsi μ est un multiplicateur de Fourier de $L^\infty_{E^c}(G)$ dans $C(G)$.

La démonstration finit comme dans celle du théorème 2.2: par le théorème de Heard, nous obtenons une fonction g dans $L^1(G)$ telle que pour tout n dans E^c, $\hat{g}(n) = \hat{\mu}(n)$. Ainsi $\mu - g \in M_E(G)$. Comme E est un ensemble de Riesz, $\mu - g \in L^1(G)$ tout comme $\mu = g + (\mu - g)$. L'ensemble $E \cup \Lambda$ est donc Riesz. ∎

Remarque: je remercie D. Li de m'avoir montré l'argument en termes de L-facteurs dans la démonstration du théorème précédent.

Corollaire 2.9 *Soit E un ensemble de Shapiro et Λ avec la propriété "$c_o \not\subset L^\infty_\Lambda(G)$".*
Alors $E \cup \Lambda$ est un ensemble de Riesz.

Preuve: E est Shapiro donc est bien disposé et Riesz ([Go]). Le théorème précédent donne le résultat. ∎

Corollaire 2.10 *Soit $E \subset \mathbb{N}$ un ensemble $\Lambda(1)$ ou l'ensemble des sommes de deux carrés ($\{n^2+m^2 | n, m \in \mathbb{N}\}$) ou l'ensemble des nombres premiers. Soit $\Lambda \subset \mathbb{N}$ avec la propriété "$c_o \not\subset L^\infty_\Lambda(\mathbb{T})$".*
Alors $\mathbb{Z}^- \cup E \cup \Lambda$ est un ensemble de Riesz.

Preuve: le fait que, pour de tels ensembles E, l'ensemble $\mathbb{Z}^- \cup E$ est Shapiro, se trouve dans [Go]; on applique alors le corollaire 2.9. ∎

Remarque: nous rappelons qu'un résultat classique de Rudin ([Ru]) affirme que l'union d'un $\Lambda(1)$ et des entiers négatifs est Riesz.

Le corollaire 2.10 généralise également un résultat de Meyer [Me]: "si E est l'ensemble des carrés ou l'ensemble des nombres premiers, alors $\mathbb{Z}^- \cup E$ est Riesz".

3 Ensembles de Rosenthal

Dans ce paragraphe, nous examinons la question suivante:

$$c_o \not\subset C_\Lambda(G) \Longrightarrow \Lambda \text{ est Rosenthal?}$$

Nous ne répondons pas à ce problème mais précisons que, sous une certaine condition arithmétique, la réponse est positive. Tout d'abord, nous aurons besoin de la définition suivante:

Définition 3.1 *Nous dirons que $\Lambda \subset \Gamma$ admet une Sidon partition au sens de Blei s'il existe une famille de parties finies $(\Lambda_j)_j$ (indexée par $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$) formant une partition de Λ et une constante $C > 0$ telle que:*

$$\forall a \in \ell^\infty,\ \exists \mu_a \in M(G),\quad \|\mu_a\| \leq C\|a\|_\infty \quad et \quad \forall j,\ \forall \gamma \in \Lambda_j,\ \hat{\mu}_a(\gamma) = a_j.$$

Remarque: une Sidon partition au sens de Blei est en particulier une Sidon partition.

Nous avons alors le théorème suivant, dont les idées sont implicites dans [R]:

Théorème 3.2 *Soit $\Lambda \subset \Gamma$ admettant une Sidon partition au sens de Blei; alors:*

$$c_o \not\subset C_\Lambda(G) \Longleftrightarrow \Lambda \textit{ est un ensemble de Rosenthal.}$$

Preuve: ($\Rightarrow$) supposons $c_o \not\subset C_\Lambda(G)$ et fixons f dans $L^\infty_\Lambda(G)$. En utilisant l'hypothèse de Sidon partition au sens de Blei et les notations de la définition, on pose:

$$f_j = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \hat{f}(\lambda)\lambda \in \mathcal{P}_{\Lambda_j}(G).$$

Pour tout g de G et tout j, on considère l'élément a de ℓ^∞ tel que a_j soit le signe complexe de $\overline{f_j(x)}$. Par hypothèse, il existe une mesure μ_a, bornée indépendamment de g par C, telle que

$$\forall j, \quad \forall \gamma \in \Lambda_j, \quad \widehat{\mu_a}(\gamma) = a_j.$$

Nous avons donc:

$$\forall g \in G, \quad \sum_j |f_j(g)| = \sum_j a_j f_j(g) = \sum_j (\mu_a * f_j)(g) = (\mu_a * f)(g) \leq C\|f\|_\infty.$$

c'est à dire que la série $\sum_j f_j$ est faiblement inconditionnellement Cauchy dans $C_\Lambda(G)$.

D'après le résultat classique de Bessaga-Pełczyński, comme $c_o \not\subset C_\Lambda(G)$, cette série est convergente dans $C_\Lambda(G)$. Soit $F \in C_\Lambda(G)$, la somme de cette série.

En testant la convergence simple sur les caractères, on remarque que, pour tout j, $\widehat{F_{|\Lambda_j}} = \widehat{f_j}$ donc $\hat{F} = \hat{f}$ et on conclut que Λ est un ensemble de Rosenthal.

La réciproque est toujours vraie, comme on l'a rappelé dans l'introduction de cette partie IV. ∎

Partie V
Union d'ensembles $\Lambda(p)$

Nous nous intéressons ici à des propriétés d'union des ensembles $\Lambda(p)$. Bien que les démonstrations des résultats suivants soient très faciles, il semble que ceci n'ait pas été remarqué.

Dans la suite, p' désigne l'exposant conjugué de p: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. La proposition suivante n'est pas nouvelle (cf [R2]).

Proposition 0.1 *Soit E un ensemble $\Lambda(p)$, avec $p \geq 2$.*

Alors $L^p_E(G)$ est complémenté (complémentation invariante par translation) dans $L^p(G)$ et $L^{p'}_E(G)$ est complémenté (complémentation invariante par translation) dans $L^{p'}(G)$.

Nous en déduisons un résultat sur l'union pour lequel nous n'avons trouvé aucune référence.

Théorème 0.2 *Soient $1 < r < 2$, F un ensemble $\Lambda(r)$ et E un ensemble $\Lambda(p)$ pour tout $p < r'$.*

Alors $E \cup F$ est un ensemble $\Lambda(r)$.

Preuve: on ne perd aucune généralité en supposant que E et F sont disjoints. Comme F est un ensemble $\Lambda(r)$ avec $r < 2$, il existe $p \in]r, 2[$, tel que F soit $\Lambda(p)$ (cf [B-E]).

Fixons $s \in]r, p[$ et h un élément de $L^s_{E\cup F}(G)$. D'après la proposition précédente, comme $r' > s' > 2$ et E est $\Lambda(s')$, $L^s_{E^c}(G)$ est complémenté dans $L^s(G)$. $\sum\limits_{\lambda \in F} \hat{h}(\lambda)\lambda$ définit donc un élément g de $L^s_F(G)$.

Comme F est un ensemble $\Lambda(p)$, g appartient à $L^p_F(G)$. Puis, $h-g$ appartenant à $L^s_E(G)$, est aussi dans $L^p_E(G)$ (et même dans $L^{s'}(G)$). Finalement, h appartient à $L^p_{E\cup F}(G)$.

Donc $L^s_{E\cup F}(G) = L^p_{E\cup F}(G)$ et $E \cup F$ est $\Lambda(p)$, a fortiori $\Lambda(r)$. ∎

Dans le cas $p = 2$, nous n'avons plus le résultat de Bachelis et Ebenstein. Nous donnons une preuve très élémentaire d'une version faible d'un résultat de Fournier (Le résultat de Fournier est valable pour une classe a priori plus large d'ensemble E: les ensembles $\Lambda(2)$ uniformisables. La question de savoir si cette condition est strictement plus faible est ouverte).

Proposition 0.3 *Soient F un ensemble $\Lambda(2)$ et E un ensemble $\Lambda(r)$ (pour un $r > 2$).*

Alors $E \cup F$ est un ensemble $\Lambda(2)$.

Preuve: soit h un élément de $L^{r'}_{E \cup F}(G)$. On a $r' < 2$.

D'après la proposition 0.1, comme $r > 2$, $\sum_{\lambda \in F} \hat{h}(\lambda)\lambda$ définit un élément g de $L^{r'}_F(G)$. g est donc a fortiori dans $L^2_F(G)$ car F est un ensemble $\Lambda(2)$.

Ainsi, $h - g$ appartient à $L^{r'}_E(G) = L^r_E(G) = L^2_E(G)$. Finalement, h appartient à $L^2(G)$ et $E \cup F$ est un ensemble $\Lambda(2)$. ∎

Questions ouvertes

1) L'union de deux ensembles stationnaires est un ensemble stationnaire? Une question plus faible est: l'union d'un stationnaire et d'un Sidon est-elle stationnaire?

2) Si Λ est stationnaire, a-t-on $c_o \not\subset C_\Lambda(G)$? Mieux, Λ est-il Rosenthal?

3) Si Λ est UC (ou même CUC), a-t-on $c_o \not\subset C_\Lambda(G)$? Mieux, Λ est-il Rosenthal?

4) Un ensemble UC, p-Sidon, ou stationnaire est-il un ensemble de Riesz?

5) Mieux: si $\Lambda \subset \mathbb{N}$ est UC, p-Sidon, ou stationnaire, a-t-on $\mathbb{Z}^- \cup \Lambda$ Riesz?

6) Un ensemble UC, p-Sidon, ou stationnaire est-il un ensemble $\Lambda(s)$ pour un certain $s > 0$?

7) Si E est Riesz (ou plus fort: Shapiro), est-ce que $C_{E^c}(G)$ a la propriété (V) de Pełczyński?

Une question plus faible est: E Riesz et $c_o \not\subset C_\Lambda(G) \Rightarrow E \cup \Lambda$ Riesz?

8) Un ensemble de continuité est-il un ensemble de Riesz? (ceci est lié aux questions 4 et 5).

9) La condition $c_o \not\subset C_\Lambda(G)$ implique-t-elle Λ Rosenthal?

La condition $c_o \not\subset L^\infty_\Lambda(G)$ implique-t-elle Λ Rosenthal?

10) Une question plus forte est: est-ce que la condition $c_o \not\subset C_\Lambda(G)$ implique que Λ admet une Sidon partition au sens de Blei?

11) Est-ce que les ensembles de Sidon ont tous la propriété d'interpolation uniforme? Autrement dit: si $\{n_j\}_j$ Sidon, est-ce que $\{[n_j + 1, n_{j+1}]\}_j$ est une Sidon partition?

12) L'union de deux ensembles $\Lambda(2)$ est-elle un ensemble $\Lambda(2)$?

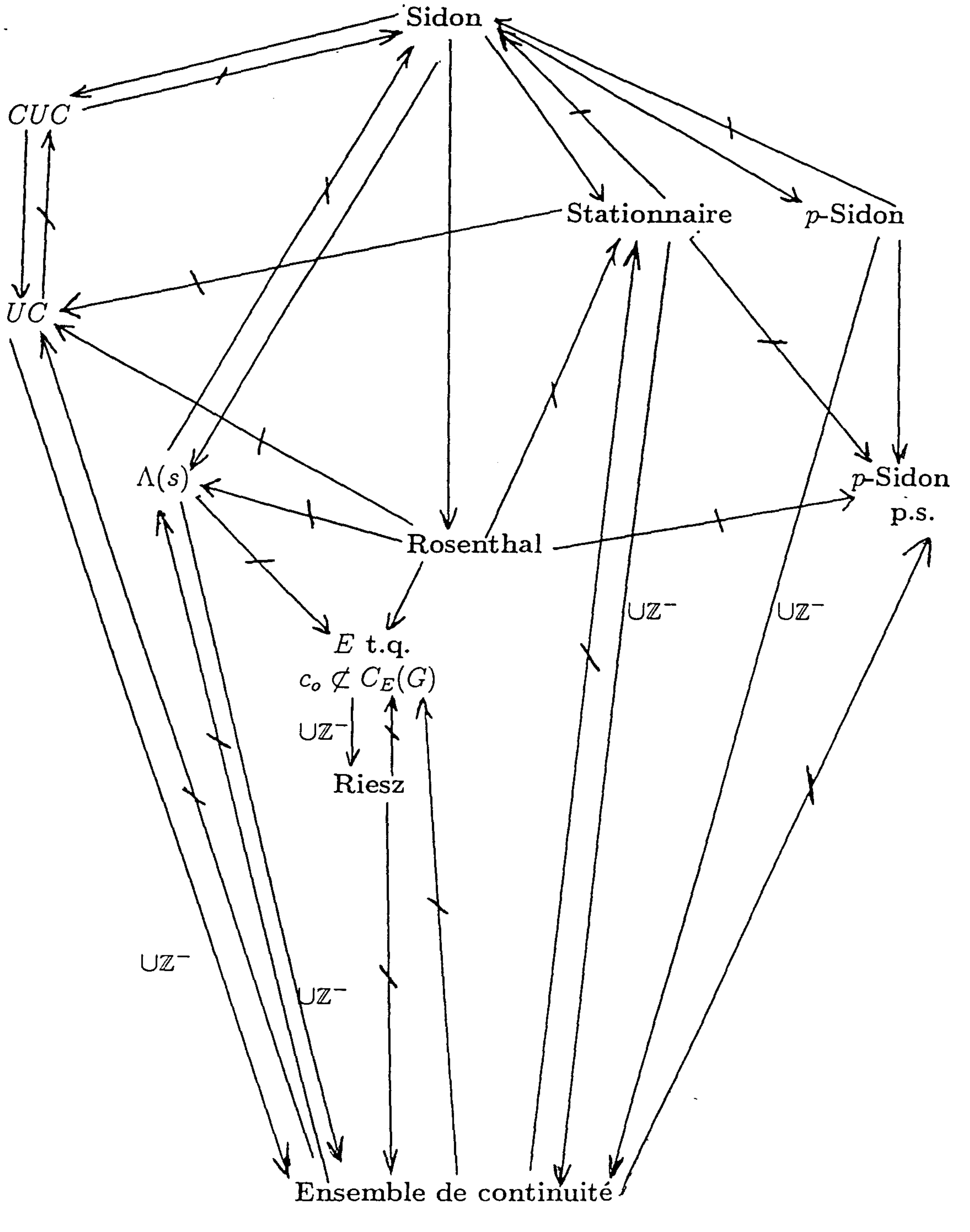
13) Existe-t-il un ensemble UC (ou même CUC) qui n'est pas stationnaire?

14) Existe-t-il un ensemble p-Sidon (resp. p-Sidon p.s.) qui n'est pas stationnaire? On remarque qu'un ensemble p-Sidon p.s. qui est stationnaire est a fortiori p-Sidon.

15) Les ensembles Λ tels que $C_\Lambda^{ps} \subset L^p$ pour $p > 2$ sont-ils nécessairement $\Lambda(p)$?

Bilan (non-exhaustif)

Soient $s \geq 1$ et $2 > p > 1$. La flèche $\longrightarrow$ signifie que les ensembles de la classe de gauche sont dans la classe de droite. La flèche $\not\longrightarrow$ signifie qu'il existe un ensemble de la classe de gauche qui n'est pas dans la classe de droite.



Remarque: l'union avec $\mathbb{Z}^-$ n'a bien sûr de sens que pour le tore. Dans le cas d'un groupe quelconque, on fait abstraction de cette précision.

Seule une partie des ensembles lacunaires introduits dans cette thèse intervient dans le schéma récapitulatif précédent. Il y a bien sûr d'autres types d'ensembles lacunaires:

ensembles de Shapiro, ensembles $\Lambda(2)$ uniformisables, ensembles p-Sidon uniformisables, ensembles ergodiques, ensembles de Riesz forts, ensembles de Rajchman (en fait, tous les ensembles énoncés précédemment sont Rajchman), des ensembles lacunaires liés à des propriétés fonctionnelles (compacts associés), des ensembles lacunaires liés à des propriétés banachiques dont les liens avec les ensembles lacunaires "classiques" sont encore mal connus (propriété de Schur pour $C_\Lambda(G)$, $L^\infty_\Lambda(G)$, $\ell^1 \not\subset L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}(G)$, faible-complétude séquentielle de $C_\Lambda(G)$...), des ensembles liés à des propriétés vectorielles (inégalité de Bessel, ...) ou matricielles comme par exemple les ensembles $\Lambda_{cb}(p)$ et la liste ne saurait être exhaustive...

Enfin, il y a également tout l'aspect de la stabilité d'une classe par union avec une sous-classe. Ceci donne des réponses "faibles" au problème de la stabilité par union d'une classe. Nous avons apporté quelques réponses positives en ce sens. Signalons quelques résultats à ce propos:

L'union d'un Riesz et d'un Rosenthal est encore Riesz (il est bien sûr faux qu'il y ait stabilité par union des Riesz: $\mathbb{Z}^- \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$ qui n'est pas Riesz).

L'union d'un p-Sidon avec un Sidon (ou mieux avec un p-Sidon uniformisable) est p-Sidon.

L'union d'un ensemble $\Lambda(2)$ et d'un ensemble $\Lambda(2)$ uniformisable est $\Lambda(2)$.

Références

[B-E] G. Bachelis, S. Ebenstein, on $\Lambda(p)$ sets, Pacific J. Math 54 (1974), 35-38.

[B] R. Blei, Sidon partitions and p-Sidon sets, Pacific J. Math 65 (1976), 307-313.

[Bo] J. Bourgain, Une remarque sur les ensembles stationnaires, Publication Math d'Orsay, exp. 2 (1981-82).

[Bo2] J. Bourgain, On the behavior of the constant in the Littlewood Paley inequality, GAFA 1987-88, Lecture Notes in Maths 1376

[Bo3] J. Bourgain, On martingales transforms in finite dimensional lattices with an appendix on the K-convexity constant, Math. Nachr. 119 (1984), p.41-53

[B-P] M. Bożejko and T. Pytlik, Some types of lacunary series, Colloq. Math. 25 (1972) 117-124.

[D-G] M. Dechamps-Gondim, Sur les compacts associés aux ensembles lacunaires, les ensembles de Sidon et quelques problèmes ouverts, Publ. Math. Orsay 84-01 (1984).

[D] J.Diestel, Sequences and Series in Banach Spaces, Springer Verlag

[D-J-T] J.Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely summing operators, Cambridge (1995).

[F] J.J.F Fournier, Two UC-sets whose union is not a UC set, Proc. AMS, 84 (1982) 69-72,

[F-P] J. Fournier-L. Pigno, Analytic and arithmetic properties of thin sets, Pacific J. Math. 105 (1983) 115-141.

[Go] G. Godefroy, On Riesz subsets of abelian discrete groups , Israel J. of Maths 61, (1988) 301-331

[G-S] G. Godefroy, P. Saab Quelques espaces de Banach ayant les propriétés (V) et (V^*) de Pełczyński , CRAS, (1986) t.303, p.503-506

[H-W-W] P Harmand, D Werner, W Werner, M-ideals in Banach Spaces and Banach Algebras, Lectures notes 1547

[He] E Heard, A sequential F. and M. Riesz theorem, Proc. AMS 18 (1967), 832-835

[H-M-P] B. Host, J.F. Mela, F. Parreau, Analyse harmonique des mesures, Astérisque 135-136

[K] J.P. Kahane, Some random series of functions, Cambridge 5 (1985).

[K-S] B.S. Kashin, A.A. Saakyan, Orthogonal series, AMS translations of Math. monographs 75 (1989)

[K-T] B. Kashin, L. Tzafriri, On random sets of uniform convergence, Preprint (1993)

[Ki] S. Kislyakov, Fourier coefficients of continuous functions and a classof multipliers,Ann. Inst. Fourier, 38 (1988), 147-183

[Kw] Kwapień, Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients,Studia Math.44 (1972), 583-595

[L1] P. Lefèvre, Sur les ensembles de convergence uniforme, Publ. Math. Orsay, 94-24 (1994).

[L2] P. Lefèvre, On some properties of the class of stationary sets, Colloq. Math., à paraître.

[L3] P. Lefèvre, Measures and lacunary sets

[L-P] F. Lust-Piquard, Propriétés harmoniques et géométriques des sous-espaces invariants par translations de $L^\infty(G)$, Thèse.

[L-P2] F. Lust-Piquard, Bohr local properties of $C_\Lambda(G)$, Coll. Math. 58 (1989) p.29-38

[L-R] J.M. Lopez and K.A. Ross, Sidon sets, Lecture notes in Pures and Appli. Math. 13, Marcel Dekker NY (1975).

[M] IM. Miheev, Trigonometric series with gaps, Analysis Math. 9 (1983) 43-55.

[Me] Y. Meyer, Spectres des mesures et mesures absolument continues, Studia Math., 30 (1968), 87-99

[M-P] Marcus-Pisier, Random Fourier series with application to harmonic analysis, Annals of Math Studies. Princeton University Press.

[O] K.I. Oskolkov, On spectra of uniform convergence Dokl. Acad. Nauk. SSSR, 228, 1986, 54-58

[Pe] L. Pedemonte, Sets of uniform convergence, Colloq. Math., 33, 1975, 122-132

[Pf] H. Pfitzner , L-summands in their biduals have property (V^*), Studia. Math., 1993

[P-1] G. Pisier, Sur l'espace de Banach des séries de Fourier aléatoires presque surement continues, Sem. Géometrie des Espaces de Banach. Ecole Polytechnique 1977-78.

[P-2] G. Pisier, De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon, Math. analysis and Appl. - Academic Press (7B).

[P-3] G. Pisier, Factorisation in Banach Spaces and Geometry in Banach Spaces, CBMS Regional Conf. N 60- Amer. Math. Soc., Providence R.I.

[P-4] G. Pisier, Ensembles de Sidon et espaces de cotype 2,Séminaire sur la géométrie des espaces de Banach, 1977-78, Ecole polytechnique.

[Ro] Rodriguez-Piazza, Rango y propriedas de medidas vectoriales. Cojuntos p-Sidon p.s.,Thèse

[R] H. Rosenthal, on trigonometric series associated with weak*-closed subspaces of continuous functions, J.Math.Mech., vol.17 (1967) 485-490

[R2] H. Rosenthal, Projections onto translation invariant subspaces of $L^p(G)$, memoirs AMS 63 (1966)

[Ru] W. Rudin, Trigonometric series with gaps, J. Math. Mech. 9 (1960), 203-227

[S-T] PM. Soardi-G. Travaglini, On sets of completely uniform convergence, Colloq. Math, 45 (1981), 317-320

[St] S.B. Stechkin, An extremal problem for polynomials, Amer. Math. Soc Trans., Series 2, vol. 14 173-180

[S-Z] Salem and Zygmund, Some properties of trigonometric series whose terms have random signs, Acta. Math. 91, 1954, 245-301.

[T1] M. Talagrand, Cotype and (q,1)-summing norm in a Banach Space, Inventiones Math. 110 (1992) p.545

[T2] M. Talagrand, Sections of smooth convex bodies via majorizing measures, Acta Math., 175 (1995), 273-300

[Tr] G. Travaglini, Some properties of UC sets,Bol. Unione Math. Ital. 15B (1978) 272-284

[U] P.L Ul'yanov, Some questions in the theory of orthogonal and biorthogonal series (Russe), Izv. Acad. Nauk. Azerbaidzhan N6 (1965) 11-13

[W] P. Wojtaszczyk, Banach Spaces for Analysts, Cambridge Studies in Advanced Math. 25 (1991)

[Z] A. Zygmund, Trigonometric series, Cambridge (1959)