

gen 2000 6253

N° d'ordre : 2238

THESE DE DOCTORAT

Présentée à

l'Université des Sciences et Technologies de Lille

Préparée au

Laboratoire de Mécanique de Lille (U.R.A 1441)

Département Sols - Structures

Ecole Centrale de Lille

Spécialité :

MECANIQUE



Sous le titre de :

**HOMOGENEISATION DES MATERIAUX MULTICOUCHES :
PRISE EN COMPTE DE LA PLASTICITE ET
DES CONDITIONS D'INTERFACE**

Par :

Manouchehr NEJAD ENSAN

Soutenue le 4 Mars 1998 devant la commission d'examen composée de :

DEBORDES O.

Président

PASTOR J.

Rapporteur

BOUTIN C.

Rapporteur

WEICHERT D.

Examineur

SHAHROUR I.

Directeur de thèse



AVANT - PROPOS

Ce travail a été réalisé au Département Sols - Structures du Laboratoire de Mécanique de Lille à l'Ecole Centrale de Lille sous la direction du professeur I. Shahrou Director du Département. Il a assuré la direction de ce travail. L'aide qu'il m'a apportée, les conseils qu'il m'a formulés m'ont été précieux. Je le remercie vivement et l'assure de ma reconnaissance.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur O. Debordes professeur à l'Institut Méditerranéen de Technologies Technopole de Château Gombert (IMTTCG Marseille) pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail et d'accepter la présidence du jury.

Mes sincères remerciements vont à Monsieur J. Pastor professeur à l'Université de Savoie (ESIGEC), et Monsieur C. Boutin Docteur Habilité à l'Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat, pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail. Je les remercie pour les conseils fructueux qu'ils m'ont prodigués.

Je remercie également Monsieur D. Weichert professeur à l'Institut für Allgemeine Mechanik Aachen Allemagne, qui a bien voulu participer à ce jury et me faire profiter de son expérience.

Je voudrais adresser mes remerciements à tous mes collègues et amis de l'équipe "Sol - Structure" du Laboratoire de Mécanique de Lille pour l'ambiance chaleureuse qu'ils ont su créer et qui a contribué à la réalisation de ce travail.

Pour finir, je tiens à remercier mon épouse et ma famille, pour m'avoir soutenu et encouragé à mener ce travail de longue haleine

SOMMAIRE

Résumé	1
Notations	2
Introduction générale	4

Chapitre 1

Homogénéisation des matériaux multicouches : vérification d'un modèle macroscopique élastoplastique

1.1 Homogénéisation des milieux à structure périodique ayant un comportement élastoplastique.....	7
1.1.1 Géométrie et grandeurs macroscopiques	7
1.1.2 Loi de comportement macroscopique.....	8
Cas des matériaux ayant comportement élastique	8
Cas des matériaux ayant comportement élastoplastique	9
1.2 Homogénéisation des matériaux multicouches à adhésion parfaite	11
1.2.1 Présentation du modèle	11
1.2.2 Intégration du modèle dans un programme d'éléments finis	15
Intégration par éléments finis	15
Intégration locale du modèle macroscopique.....	18
1.2.3 Application à l'étude de la réponse d'une cellule de base à des chemins de traction inclinés.....	21
1.3 Vérification du modèle macroscopique sur des problèmes aux limites.....	24
1.3.1 Essai de traction simple	27
Présentation de l'exemple.....	27
Résultats obtenus.....	27
1.3.2 Massif soumis à une compression simple.....	31
Présentation de l'exemple.....	31
Résultats obtenus.....	31
Étude de l'effet de bord	35
1.3.3 Massif soumis à son poids propre.....	38

Présentation de l'exemple	38
Résultats obtenus.....	38
1.3.4 Massif soumis à un chargement surfacique sur une partie de la surface supérieure	42
Présentation de l'exemple	42
Résultats obtenus.....	42
1.4 Conclusion	44

Chapitre 2

Homogénéisation des matériaux à structure périodique renforcés par des inclusions flexibles

2.1 Formulation du modèle.....	46
2.1.1 Cellule de base et grandeurs macroscopiques	46
2.1.2 Critère de résistance macroscopique	47
2.1.3 Modèle macroscopique	49
2.2 Intégration numérique	50
2.3 Vérification du modèle	50
2.3.1 Cellule de base soumise à une traction inclinée	51
2.3.2 Massif de sol soumis à son poids propre	54
Description de l'exemple	54
Résultats avec le jeu de paramètres A	55
Résultats avec le jeu de paramètres B	57
2.3.3 Massif de sol soumis à un chargement surfacique sur une partie de la surface.....	59
Description de l'exemple	59
Résultats obtenus.....	59
2.4 Application à la détermination de la hauteur critique d'un mur en terre armée....	63
2.5 Conclusion	64

Chapitre 3

Modèle macroscopique pour les matériaux multicouches à l'interface imparfaite

3.1 Introduction	66
3. 2 Formulation du modèle	66
3.2.1 Présentation de la cellule de base	66
3.2.2 Comportement microscopique.....	67
3.2.3 Grandeurs macroscopiques.....	70

3.2.4 Calcul des contraintes macroscopiques	71
3.3 Intégration numérique	74
3.4 Réponse d'une cellule de base à des chemins de traction inclinés.....	76
3.4.1 Influence de la direction de chargement	76
3.4.2 Influence des paramètres d'interface sur la réponse de la cellule de base	80
3. 4. Application à l'étude des ouvrages en matériaux multicouches.....	82
3.4.1 Présentation des exemples	82
3.4.2 Massif soumis à un chargement volumique.....	84
3.4.3 Massif soumis à un chargement surfacique	87
3.4.4 Détermination de la hauteur critique d'un mur en terre armée	89
3.5 Conclusion	90
 Conclusion générale	 91
Références bibliographiques	93

RESUME

Le présent travail porte sur l'homogénéisation des matériaux multicouches ayant un comportement élastoplastique. Il comprend trois chapitres:

- Le premier chapitre est composé de deux parties. Dans la première, on présente l'application de la technique d'homogénéisation aux milieux à structures périodiques ayant un comportement élastoplastique. La seconde partie est consacrée à l'étude d'un modèle macroscopique élastoplastique qui a été développé pour les matériaux multicouches. Dans un premier temps, on décrit la formulation de ce modèle et son intégration dans un code de calcul par éléments finis. Ce code est ensuite utilisé pour étudier le domaine de validité du modèle macroscopique en comparant, sur diverses structures, les résultats obtenus avec ce modèle à ceux obtenus en faisant une discrétisation de ces structures à l'échelle microscopique.

- Dans le deuxième chapitre, on propose d'étudier un cas limite des matériaux multicouches. Il s'agit des matériaux renforcés par des inclusions flexibles travaillant en traction - compression. Le chapitre est composé de quatre parties. Dans la première, on présente le modèle macroscopique développé pour ces matériaux en supposant que la matrice et l'inclusion sont dotés d'un comportement élastoplastique. Dans la seconde partie, on présente l'intégration numérique de ce modèle. La troisième partie comporte une étude comparative, sur quelques exemples, entre le modèle proposé et celui présenté dans le chapitre précédent pour les multicouches. Dans la dernière partie, on présente une application du modèle à la détermination de la hauteur critique d'un mur en terre armée.

- Le troisième chapitre est consacré à l'étude du comportement macroscopique pour les matériaux multicouches ayant un comportement élastoplastique avec prise en compte d'une possibilité de glissement à l'interface. Après une présentation de la formulation de ce modèle, on décrit son intégration numérique et ensuite on donne son application à l'étude de différents exemples.

Mots clés: Homogénéisation, milieux périodique, élastoplastique, multicouche, renforcement, interface, validation, éléments finis.

ABSTRACT

This study deals with the homogenization of elastoplastic multi - layered media. It includes three chapters:

- In the first chapter, the bases of the homogenization method in the case of elastoplastic periodic structure are presented, then we study a macroscopic elastoplastic model for multi - layered media. We present the formulation of this model and its integration in the finite elements programme. The validation of this model is performed for different boundary value problems. The results obtained are discussed against the solution based on microscopic discretisation.

- In the second chapter, we study the reinforced material in which the reinforcement works mainly in tension. We present a macroscopic elastoplastic model for this material and its integration in the finite elements programme. We compare the results obtained by this model against the results obtained in the first chapter. Finally, this model is applied to determination the critical height of a reinforced soil wall.

- In the last chapter, we take into consideration interface conditions between the two constituents which enable to improve the description of the overall behaviour of the multi - layered media. We present the formulation of this model and its integration in the finite elements programme. The validation of this model is performed for different boundary value problems.

Key words: Homogenization, periodic structure, elastoplastic, multi - layered, reinforcement, interface, validation, finite elements.

Alphabet latin

a	tenseur de rigidité élastique
a^{hom}	tenseur d'élasticité homogénéisé
B	matrice de déformation élémentaire
C	cohésion
C_{int}	cohésion de l'interface
C_E	tenseur de concentration de déformations dans le domaine élastique
e	tenseur de déformations microscopiques
e^P	tenseur de déformations plastiques microscopiques
E	tenseur de déformations macroscopiques
E_α	déformations macroscopiques dans la direction α
E_{int}	rigidité tangentielle élastique de l'interface
EY	module d'Young
f	surface de charge
f_{int}	surface de charge à l'interface
F	vecteur de force extérieure
F_r	force de déséquilibre
g	potentiel de plasticité
g_{int}	potentiel de plasticité à l'interface
G	module de cisaillement
H	hauteur du massif étudié dans les tests de vérifications
H_c	hauteur critique
I	tenseur unitaire
k_0	résistance à la traction des armatures
K^I	rigidité à la traction de l'inclusion
K_{int}	rigidité de l'interface
L	largeur du massif étudié dans les tests de vérifications
n	normale unitaire
q	charge surfacique
Q	contrainte de traction macroscopique
R	matrice de rigidité
T^I	effort normal dans l'inclusion
u	champs de déplacement microscopique
u_n	déplacement normale à l'interface
u_t	déplacement tangentiel à l'interface
U^e	déplacements noeudaux
v	champs de déplacement Y-périodique
W	proportion volumique
$\{x_i ; i = 1, 2, 3\}$	repère macroscopique
$\{y_i ; i = 1, 2, 3\}$	repère microscopique
Y	cellule de base

Alphabet grec

α	direction du chargement de traction
δ	symbole de Kroneker
ε	rapport d'échelle
φ	angle de frottement
Φ_{int}	angle de frottement à l'interface
γ	poids volumique
Γ_{int}	interface
λ	multiplicateur de plasticité
σ	tenseur de contraintes microscopiques
σ_{int}	vecteur de contraintes à l'interface
$(\sigma_n)_{\text{int}}$	contrainte normale à l'interface
Σ	tenseur de contraintes macroscopiques
ν	coefficient de Poisson
ψ	angle de dilatance
Ψ_{int}	angle de dilatance à l'interface
τ_{int}	contrainte cisaillement à l'interface
Ω	domaine occupé par la structure
∂Y	désigne la frontière extérieure de Y

Indices haut

i	relatif au matériau i
k	désigne le numéro d'incrément
m	relatif au matrice
r	relatif a l'inclusion
p	plastique

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ces dernières années on a assisté à un développement très important dans l'utilisation des matériaux composites dans différents secteurs de l'industrie (automobile, aérospatiale, bâtiment, génie civil,...). Ce développement est essentiellement dû aux bonnes caractéristiques de ces matériaux qui résultent d'une association des performances de leurs constituants.

Avec ce développement, les ingénieurs sont confrontés à des problèmes délicats de modélisation et de calcul de structures. En effet, les structures construites en matériaux composites sont caractérisées par de fortes hétérogénéités à l'échelle microscopique et par une forte anisotropie à l'échelle macroscopique ce qui rend très difficile l'utilisation des moyens de calcul développés pour des structures composées des matériaux isotropes et homogènes.

Une étude expérimentale des caractéristiques des matériaux composites est laborieuse et très difficile. C'est pourquoi, de nombreux travaux ont été consacrés aux méthodes permettant d'associer à ces matériaux des matériaux homogènes équivalents. Cette démarche rend possible l'utilisation des moyens de calcul disponibles (solutions analytiques, programmes de calcul,...) dans la conception et la vérification des structures en matériaux composites.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de ces travaux. Il s'intéresse au calcul des structures en matériaux multicouches à structure périodique. Les développements présentés sont basés sur la théorie d'homogénéisation des milieux périodiques dont les bases mathématiques sont présentées dans de nombreux ouvrages (Sanchez-Palencia 1985, Bensoussan et al. 1979, Dumontet 1983, Lene 1984, Suquet 1982a, Michel et Suquet 1994).

La modélisation du comportement des matériaux multicouches a fait l'objet des travaux dans notre laboratoire qui ont abouti à l'élaboration d'un modèle macroscopique pour les matériaux multicouches ayant un comportement élastoplastique avec une condition d'adhésion parfaite à l'interface (Pruchnicki 1991, Pruchnicki et Shahrour 1994). Le présent travail constitue une suite de ces travaux. Il a pour but de (i) déterminer le domaine de validité du modèle développé, (ii) d'étudier un cas limite des matériaux renforcés par des inclusions flexibles travaillant uniquement en traction - compression et (iii) et d'intégrer dans le modèle macroscopique la possibilité d'une prise en compte d'un glissement à l'interface.

Le travail est présenté en trois chapitres.

- Le premier chapitre est composé de deux parties. Dans la première, on présente l'application de la technique d'homogénéisation aux milieux à structures périodiques ayant un comportement élastoplastique. La seconde partie est consacrée à l'étude d'un modèle macroscopique élastoplastique qui a été développé pour les matériaux multicouches. Dans un premier temps, on décrit la formulation de ce modèle et son intégration dans un code de calcul par éléments finis. Ce code est ensuite utilisé pour étudier le domaine de validité du modèle macroscopique en comparant, sur diverses structures, les résultats obtenus avec ce modèle à ceux obtenus en faisant une discrétisation de ces structures à l'échelle microscopique.

- Dans le deuxième chapitre, on propose d'étudier un cas limite des matériaux multicouches. Il s'agit des matériaux renforcés par des inclusions flexibles travaillant en traction - compression. Le chapitre est composé de quatre parties. Dans la première, on présente le modèle macroscopique développé pour ces matériaux en supposant que la matrice et l'inclusion sont dotés d'un comportement élastoplastique. Dans la seconde partie, on présente l'intégration numérique de ce modèle. La troisième partie comporte une étude comparative, sur quelques exemples, entre le modèle proposé et celui présenté dans le chapitre précédent pour les multicouches. Dans la dernière partie, on présente une application du modèle à la détermination de la hauteur critique d'un mur en terre armée.

- Le troisième chapitre est consacré à l'étude du comportement macroscopique pour les matériaux multicouches ayant un comportement élastoplastique avec prise en compte d'une possibilité de glissement à l'interface. Après une présentation de la formulation de ce modèle, on décrit son intégration numérique et ensuite on donne son application à l'étude de différents exemples.

Chapitre 1

Homogénéisation des matériaux multicouches : vérification d'un modèle macroscopique élastoplastique

Dans ce chapitre on présente des tests de vérification d'un modèle homogénéisé qui a été développé pour les matériaux multicouches ayant un comportement élastoplastique. Il est composé de deux parties. Dans la première, on présente l'application de la technique d'homogénéisation aux milieux à structure périodique ayant un comportement élastoplastique. La seconde partie est consacrée à l'étude d'un modèle macroscopique élastoplastique qui a été développé pour les matériaux multicouches. Dans un premier temps, on décrit la formulation de ce modèle et son intégration dans un code de calcul par éléments finis. Ce code est ensuite utilisé pour étudier le domaine de validité du modèle macroscopique en comparant, sur diverses structures, les résultats obtenus avec ce modèle à ceux obtenus en faisant une discrétisation de ces structures à l'échelle microscopique.

1.1 Homogénéisation des milieux à structure périodique ayant un comportement élastoplastique

1.1.1 Géométrie et grandeurs macroscopiques

Dans ce travail on s'intéresse aux structures composées des matériaux hétérogènes à structure périodique. Ces structures peuvent être reconstituées à partir d'un élément représentatif appelé cellule de base ou Volume Élémentaire de Référence (V.E.R). Pour ces matériaux, on définit deux échelles : une échelle macroscopique liée au repère $R_x = \{x_i ; i = 1, 2, 3\}$ et une échelle microscopique $R_y = \{y_i ; i = 1, 2, 3\}$ liée à la cellule de base (Figure 1.1). La taille de l'hétérogénéité par rapport à la structure est définie par le paramètre $\varepsilon = y / x$ qui désigne le rapport entre une dimension caractéristique des hétérogénéités et une dimension caractéristique du matériau.

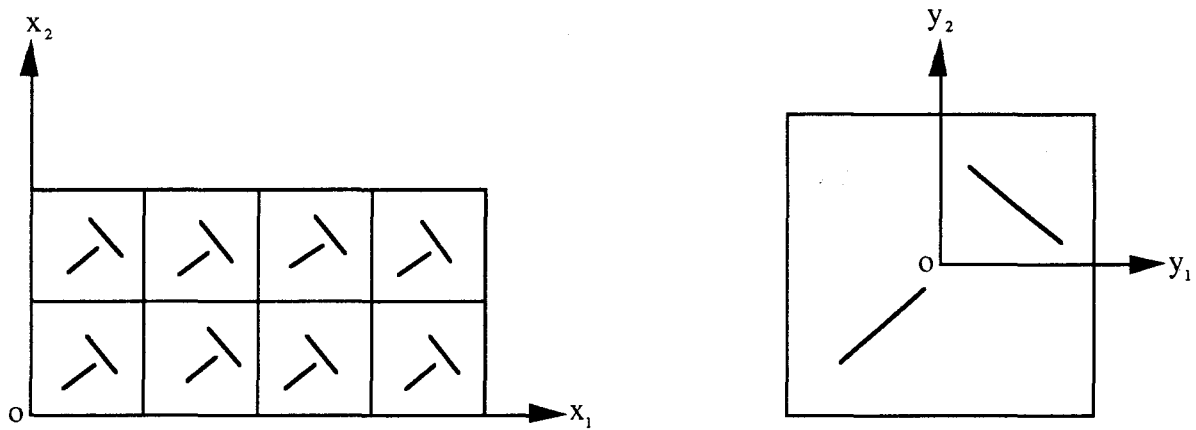


Figure 1.1 : Matériau hétérogène à structure périodique

En raison de la différence entre les caractéristiques mécaniques des matériaux constitutifs, les champs de variables d'état à l'intérieur du matériau hétérogène sont très fluctuants. L'amplitude de ces fluctuations est d'autant plus faible que la taille des hétérogénéités est petite. Lorsque ε tend vers zéro, une fonction rapidement oscillante peut être confondue avec sa valeur moyenne sur le V.E.R. Il est donc normal de définir les limites de ces champs, lorsque ε tend vers 0, comme étant leurs valeurs moyennes sur le V.E.R. Pour une grandeur microscopique p , on associe une grandeur macroscopique P définie par la valeur moyenne :

$$P = \frac{1}{|Y|} \int_Y p \, dy = \langle p \rangle_Y$$

où Y désigne la cellule de base.

En tenant compte ces considérations, on définit les contraintes et déformations macroscopiques (Σ et E) comme étant les moyennes de leurs homologues microscopiques (σ et e) dans la cellule de base Y :

$$\Sigma(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma(y) dy = \langle \sigma(y) \rangle_Y \quad (1.1a)$$

$$E(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y e dy = \frac{1}{2|Y|} \int_{\partial Y} (u_i n_j + u_j n_i) d\Gamma \quad (1.1b)$$

1.1.2 Loi de comportement macroscopique

Afin de décrire le comportement macroscopique des matériaux à structure périodique, on a besoin d'établir les relations entre les contraintes et déformations macroscopiques. Pour cela il faut résoudre sur la cellule de base un problème aux limites régi par les équations d'équilibre, le comportement des matériaux constitutifs et les conditions de périodicité sur les contraintes et déformations microscopiques.

Léné (1984) a montré que, dans le cas d'un matériau à structure périodique, on peut décomposer le déplacement (u) sur la cellule de base Y sous la forme:

$$u = E.y + v \quad (1.2)$$

où v désigne un champ de déplacement Y -périodique

Le calcul du tenseur de déformations à partir de l'équation 1.2 conduit à :

$$e(u) = E + e(v) \quad (1.3)$$

Cette expression montre que la déformation microscopique peut être décomposée en deux parties : une partie constante (E) représentant les déformations macroscopiques et une partie fluctuante ($e(v)$) qui rend compte de l'influence des hétérogénéités.

Cas des matériaux ayant comportement élastique

La loi de comportement macroscopique peut être obtenue par la résolution sur la cellule de base d'un problème élastique régi par les équations suivantes :

(i) Équations d'équilibre : $\text{div}_Y \sigma = 0$ (1.4a)

(ii) Loi de comportement microscopique : $\sigma = a(y) : e(u)$ (1.4b)

(iii) Déformations macroscopiques imposées : $\langle e(u) \rangle_Y = E$

(iv) Conditions de périodicité : $e(u)$ est Y - périodique et $\sigma.n$ est Y - antipériodique

$a(y)$ est le tenseur de rigidité élastique, dans le cas de constituants isotropes, très souvent rencontrés, l'expression de ce tenseur est donnée par:

$$a = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau.

La résolution de ce problème permet de calculer les contraintes microscopiques à partir desquelles on peut déterminer les contraintes macroscopiques. Du fait que le problème présenté est linéaire en E , on peut écrire le tenseur de déformations microscopiques sous la forme:

$$e(u) = C_E(y):E \quad (1.5)$$

C_E désigne le tenseur de concentration des déformations.

Le calcul des contraintes macroscopique à partir des expressions 1.4b et 1.5 conduit à :

$$\Sigma = a^{\text{hom}}:E \quad (1.6)$$

a^{hom} désigne le tenseur d'élasticité homogénéisé, son expression est donnée par :

$$a^{\text{hom}} = \langle a(y):C_E \rangle_Y \quad (1.7)$$

On note que la loi de comportement macroscopique fait intervenir un tenseur d'élasticité macroscopique (homogénéisé) égale à la moyenne, sur la cellule de base, du tenseur d'élasticité microscopique pondéré par le tenseur de concentration des déformations C_E .

Cas des matériaux ayant comportement élastoplastique

Dans le cas où le comportement des matériaux constitutifs est élastoplastique, la description du comportement macroscopique devient très complexe. En effet, dans ce cas la relation entre les contraintes et déformations macroscopiques fait intervenir les déformations microscopiques plastiques dans la cellule de base. Si dans la majorité des cas, il n'est pas possible de formuler analytiquement les lois de comportement, il est possible de suivre par méthode numérique ce comportement le long des chemins définis dans l'espace de contraintes ou des déformations macroscopiques.

Nous allons ci - après, présenter la démarche généralement suivie pour intégrer la loi de comportement macroscopique le long d'un chemin défini dans l'espace des déformations. On considère une cellule de base soumise à un tenseur de déformations macroscopiques E . Le tenseur de contraintes macroscopiques associé à E peut être déterminé par la résolution du problème élastoplastique suivant :

(i) Équations d'équilibre : $\text{div}_Y \sigma = 0$ (1.8a)

(ii) Comportement microscopique : $\sigma = a(y) : (e(u) - e^P)$ (1.8b)

Les déformations plastiques microscopiques (e^P) sont déterminées à partir de la fonction de charge (f) et du potentiel de plasticité (g)

(iii) Déformations macroscopiques imposées : $\langle e(u) \rangle_Y = E$

(iv) Conditions de périodicité : $e(u)$ est Y - périodique et $\sigma \cdot n$ est Y - antipériodique

La résolution de ce problème permet de calculer les contraintes microscopiques à partir desquelles on peut déterminer les contraintes macroscopiques. En multipliant le tenseur de contraintes microscopiques (cf. équation 1.8b) par le tenseur de concentration de déformation C_E et en effectuant la moyenne sur la cellule de base Y , on peut écrire la loi de comportement homogénéisée sous la forme :

$$\Sigma = a^{\text{hom}} : E - \langle a(y) : e^P : C_E \rangle_Y \quad (1.9)$$

Cette expression montre que la relation entre les tenseurs de contraintes et des déformations macroscopiques fait intervenir les déformations plastiques microscopiques dans la cellule de base. Par conséquent, la loi de comportement homogénéisée possède une infinité de variables internes.

1.2 Homogénéisation des matériaux multicouches à adhésion parfaite

Un modèle macroscopique a été élaboré dans notre laboratoire (Pruchnicki 1991, Pruchnicki et Shahrour 1994), pour des matériaux multicouches ayant un comportement élastoplastique avec adhésion parfaite à l'interface. Ce modèle est basé sur l'uniformité des grandeurs microscopiques dans chaque constituant de la cellule de base. Nous allons ci - après présenter brièvement ce modèle ainsi que son intégration dans un code de calcul par éléments finis et sa vérification sur des problèmes aux limites.

1.2.1 Présentation du modèle

La structure d'un matériau multicouche présente un caractère périodique. On désigne par εY la période de base de ce matériau (ε est un petit paramètre). La cellule de base est constituée de deux matériaux qui occupent respectivement les volumes Y^1 et Y^2 avec des proportions volumiques W^1 et W^2 (Figure 1.2). On suppose que les deux constituants sont parfaitement collés et que leur comportement est de type élastoplastique.

Du fait que la période est quelconque dans les directions y_1 et y_3 , les grandeurs microscopiques dépendent uniquement de y_2 . A partir des équations d'équilibre, on peut montrer que les trois composantes du tenseur de contraintes ($\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$) sont constantes dans chaque constituant. Les équations de compatibilité impliquent que trois composantes du tenseur de déformations (e_{11}, e_{13}, e_{33}) sont également constantes par constituant. En se plaçant dans le domaine élastique, la loi de comportement permet d'affirmer que $\sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{13}, e_{12}, e_{22}$, et e_{23} sont uniformes dans chaque constituant, car elles peuvent être explicitées en fonction des composantes $\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, e_{11}, e_{33}$ et e_{13} . L'uniformité des tenseurs de contraintes et de déformations dans la phase élastique implique que la plastification dans chaque matériau s'effectue d'une manière uniforme. Les déformations plastiques sont donc constantes dans chaque constituant. Par conséquent le comportement du matériau multicouche homogénéisé peut être décrit par une loi de comportement à deux variables internes qui représentent les états de plastification dans les deux constituants.

Pour déterminer la loi de comportement macroscopique, on dispose des équations suivantes :

(i) Continuité du vecteur contrainte à l'interface entre les deux constituants :

$$\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^2 \quad \text{pour } (i,j) = (1,2); (2,2) \text{ et } (2,3) \quad (1.10a)$$

L'indice supérieur désigne le numéro du constituant.

(ii) Continuité du tenseur de déformations dans le plan de l'interface:

$$e_{ij}^1 = e_{ij}^2 \quad \text{pour } (i,j) = (1,1); (1,3) \text{ et } (3,3) \quad (1.10b)$$

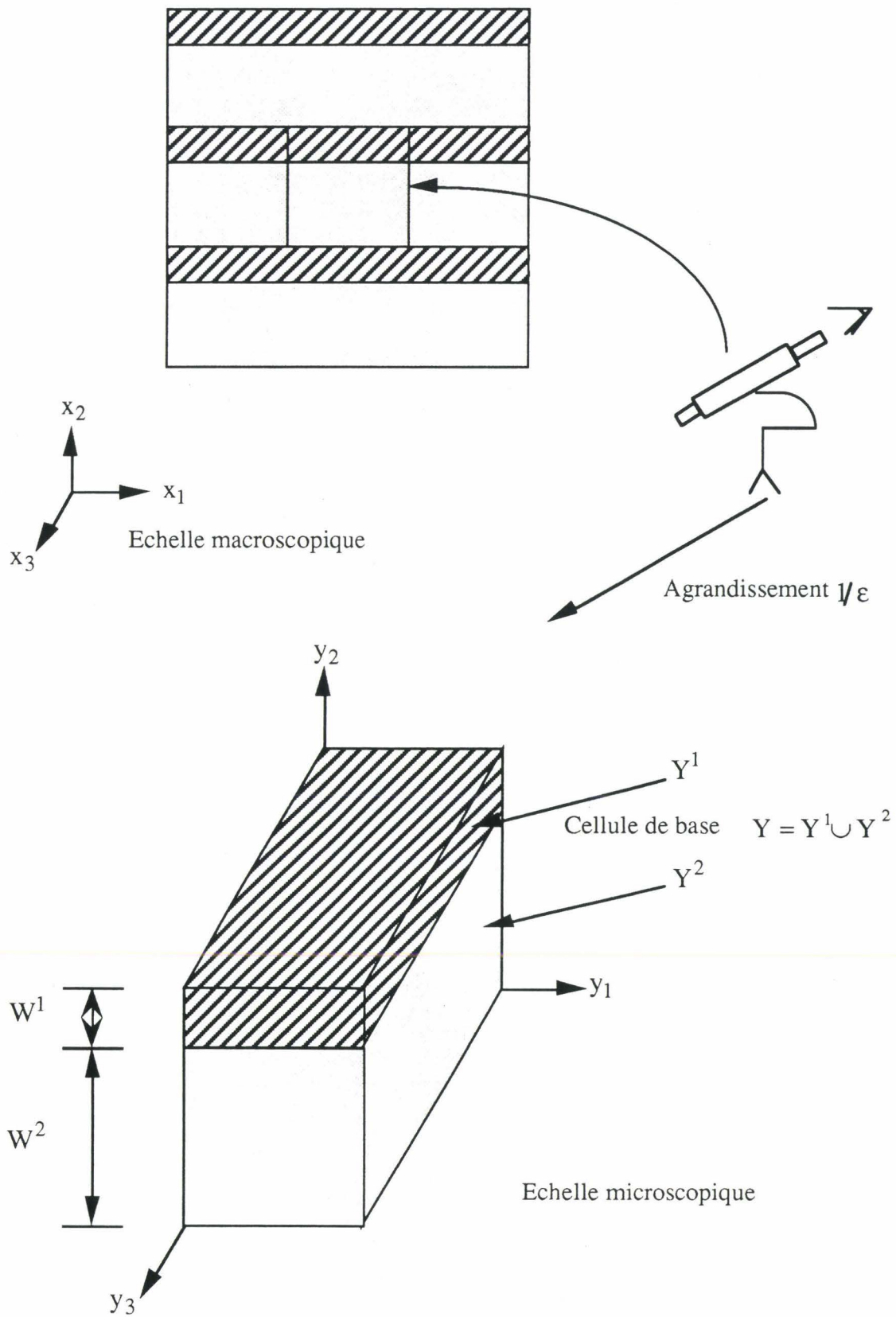


Figure 1.2 : Cellule de base Y d'un matériau multicouche à deux constituants

(iii) Comportement microscopique :

$$\sigma^i = a^i : (e - e^p)^i \quad \text{pour } i = 1 \text{ et } 2 \quad (1.10c)$$

(iv) Relation micro - macro en déformation qui s'écrit sous la forme :

$$E = \langle e \rangle = W^1 e^1 + W^2 e^2 \quad (1.10d)$$

En éliminant les composantes du tenseur de contraintes dans le système d'équations 1.10, on peut exprimer les déformations microscopiques en fonction des déformations macroscopiques et des déformations microscopiques plastiques. Cette expression s'écrit sous la forme :

$$e(u^i) = C_E^i : E + \sum_j C_j^i : (e^p)^j \quad (1.11)$$

C_E^i représente le tenseur de concentration de déformations dans le domaine élastique;

C_j^i représente un tenseur d'ordre 4 permettant d'obtenir le tenseur de déformations dans le matériau i résultant de la présence d'une déformation plastique dans le matériau j .

Les expressions des tenseurs C_E^i et C_j^i sont données par:

$$C_E^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta^i \frac{\Lambda}{\Delta} - \alpha^i & \frac{\beta^i}{\Delta} & \beta^i \frac{\Lambda}{\Delta} - \alpha^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma^i}{\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma^i}{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (1.12a)$$

$$C_j^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^i \delta_j^i - \beta^i \frac{W^j \alpha^j}{\Delta} & \delta_j^i - \frac{W^j \beta^i}{\Delta} & \alpha^i \delta_j^i - \beta^i \frac{W^j \alpha^j}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_j^i - \frac{W^j \gamma^i}{\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^i - \frac{W^j \gamma^i}{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (1.12b)$$

avec

$$\alpha^i = \frac{\nu^i}{1 - \nu^i} \quad \beta^i = \frac{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)}{(1 - \nu^i)EY^i} \quad \gamma^i = \frac{1}{G^i}$$

$$\Lambda = \sum_i W^i \alpha^i \quad \Delta = \sum_i W^i \beta^i \quad \Gamma = \sum_i W^i \gamma^i$$

EY^i , ν^i et G^i désignent respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson et le module de cisaillement du matériau i .

A partir des équations 1.10c et 1.11, on peut écrire le tenseur de contraintes microscopiques sous la forme :

$$\sigma^i = S_E^i : E - \sum_j S_j^i : (e^p)^j \quad (1.13)$$

$S_E^i = a^i : C_E^i$, $S_j^i = a^i : (I\delta_j^i - C_j^i)$, I est le tenseur unitaire et δ_j^i est le symbole de Kronecker.

Le calcul du tenseur de contraintes macroscopiques à partir de l'équation 1.13 conduit à l'expression suivante :

$$\Sigma = a^{\text{hom}} : E - \sum_i \sum_j B_j^i : (e^p)^j \quad (1.14)$$

$$\text{avec } a^{\text{hom}} = \sum_i B_E^i \quad B_E^i = W^i S_E^i \quad B_j^i = W^i S_j^i$$

a^{hom} représente le tenseur d'élasticité homogénéisé, son expression est donnée par:

$$a^{\text{hom}} = \begin{bmatrix} C + \frac{\Lambda^2}{\Delta} & \frac{\Lambda}{\Delta} & D + \frac{\Lambda^2}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Lambda}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} & \frac{\Lambda}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ D + \frac{\Lambda^2}{\Delta} & \frac{\Lambda}{\Delta} & C + \frac{\Lambda^2}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{M}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

avec

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_i W^i \alpha^i & \Delta &= \sum_i W^i \beta^i & \Gamma &= \sum_i W^i \gamma^i & M &= 2 \sum_i \frac{W^i}{\gamma^i} \\ \alpha^i &= \frac{v^i}{1-v^i} & \beta^i &= \frac{(1+v^i)(1-2v^i)}{(1-v^i)EY^i} & \gamma^i &= \frac{1}{G^i} \\ c^i &= \frac{1-(\alpha^i)^2}{\beta^i} & d^i &= \frac{\alpha^i(1-\alpha^i)}{\beta^i} & C &= \sum_i W^i c^i & D &= \sum_i W^i d^i \end{aligned}$$

L'expression 1.14 permet ainsi d'expliciter la loi de comportement macroscopique sous la forme d'une relation entre, d'une part, le tenseur de contraintes macroscopiques, et d'autre part, les tenseurs de déformations macroscopiques et des déformations plastiques microscopiques.

1.2.2 Intégration du modèle dans un programme d'éléments finis

Intégration par éléments finis

Le modèle homogénéisé présenté ci - dessous a été introduit dans le programme de calcul par éléments finis PECPLAS développé au laboratoire de Mécanique de Lille pour la résolution des problèmes posés en géotechnique (Shahrour 1988, 1992). L'intégration numérique est effectuée en utilisant la méthode de Newton - Raphson modifiée (Figure 1.3). Le calcul est effectué en divisant le chargement en plusieurs incréments. La matrice de rigidité (R) est calculée en utilisant le tenseur d'élasticité homogénéisé a^{hom} donnée dans l'expression 1.15 :

$$R = \int_{\Omega} {}^t B a^{\text{hom}} B d\Omega \quad (1.16a)$$

B désigne la matrice des déformations qui permet de calculer le tenseur de déformations dans un élément de base en fonction des déplacements nœuds (U^e) :

$$e = B U^e$$

Le calcul de l'incrément numéro k est mené selon les étapes suivantes :

(i) On détermine le vecteur de force ΔF_0 par la différence entre le vecteur des forces extérieures appliquées et le vecteur des forces résultant des contraintes précédentes :

$$\Delta F_0 = F^{(k)} - \int_{\Omega} {}^t B \Sigma^{(k-1)} d\Omega \quad (1.16b)$$

(ii) Ensuite on résout le système linéaire :

$$R \Delta U = \Delta F_0 \quad (1.16c)$$

(iii) Aux points de Gauss, on détermine l'incrément des déformations macroscopiques

$$\Delta E = B \Delta U^e$$

(iv) On détermine l'incrément de contraintes macroscopiques $\Delta \Sigma$ par intégration du modèle de comportement (présentée dans la section suivante) ce qui donne :

$$\Sigma^k = \Sigma^{k-1} + \Delta \Sigma$$

(v) On détermine les forces de déséquilibre (F_r) d'après l'expression suivante :

$$\Delta F_r = F^{(k)} - \int_{\Omega} {}^t B \Sigma^{(k)} d\Omega \quad (1.16d)$$

(vi) Si ΔF_r est faible, on passe à l'incrément suivant, si non reprend les étapes ii à vi en ajoutant au second membre de l'équation (ii) le terme ΔF_r .

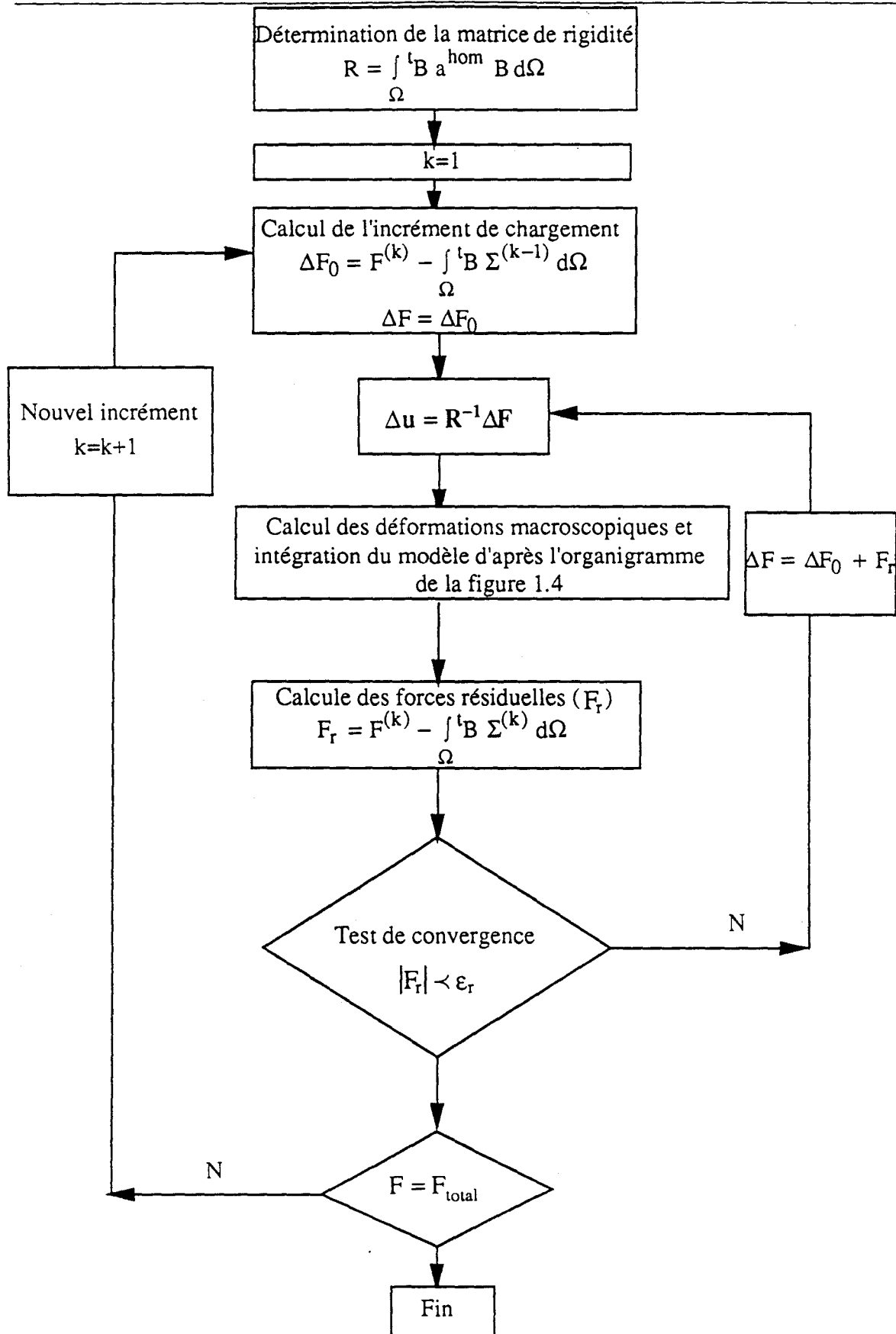


Figure 1.3 : Schéma numérique utilisé pour l'intégration du modèle dans un code de calcul par éléments finis

Intégration locale du modèle macroscopique

Dans cette section, on présente l'intégration du modèle macroscopique au niveau local. Cette intégration est effectuée pour un incrément de déformations macroscopiques ΔE imposé selon l'organigramme de la figure 1.4.

On commence par évaluer les incréments de contraintes microscopiques dans les deux constituants en supposant un comportement élastique (équation 1.13 avec $\Delta e^p = 0$). Ensuite, on évalue les critères de plasticité dans les deux constituants. Si on note une violation de ces critères de plasticité, on détermine les déformations plastiques d'après la règle de consistance :

$$\frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : \Delta \sigma^i = 0 \quad (1.17)$$

En reportant l'équation 1.13 dans cette équation, on obtient :

$$\frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : a^i : \left[\sum_j C_j^i : (\Delta e^p)^j - (\Delta e^p)^i \right] = - \frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : a^i : C_E^i : \Delta E \quad (1.18)$$

Les déformations plastiques microscopiques peuvent être exprimées en utilisant les potentiels de plasticité (g^i) :

$$\Delta e^{p^i} = \Delta \lambda^i \frac{\partial g^i}{\partial \sigma}$$

En reportant cette expression dans l'équation (1.18), on obtient le système d'équations :

$$(\Delta \lambda)^i \frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : a^i : \left[C_i^i : \frac{\partial g^i}{\partial \sigma} - \frac{\partial g^i}{\partial \sigma} \right] + (\Delta \lambda)^j \frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : a^i : C_j^i : \frac{\partial g^i}{\partial \sigma} = - \frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : a^i : C_E^i : \Delta E \quad \text{avec } i \neq j$$

Qu'on peut écrire sous la forme matricielle:

$$[M] \cdot [\Delta \lambda] = [m] \quad (1.19)$$

avec :

$$\begin{cases} M_{ij} = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : a^i : \left[C_i^i : \frac{\partial g^i}{\partial \sigma} - \frac{\partial g^i}{\partial \sigma} \right] & \text{si } i = j \\ M_{ij} = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : a^i : C_j^i : \frac{\partial g^i}{\partial \sigma} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.20a)$$

$$\{m_i = - \frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : a^i : C_E^i : \Delta E \quad (1.20b)$$

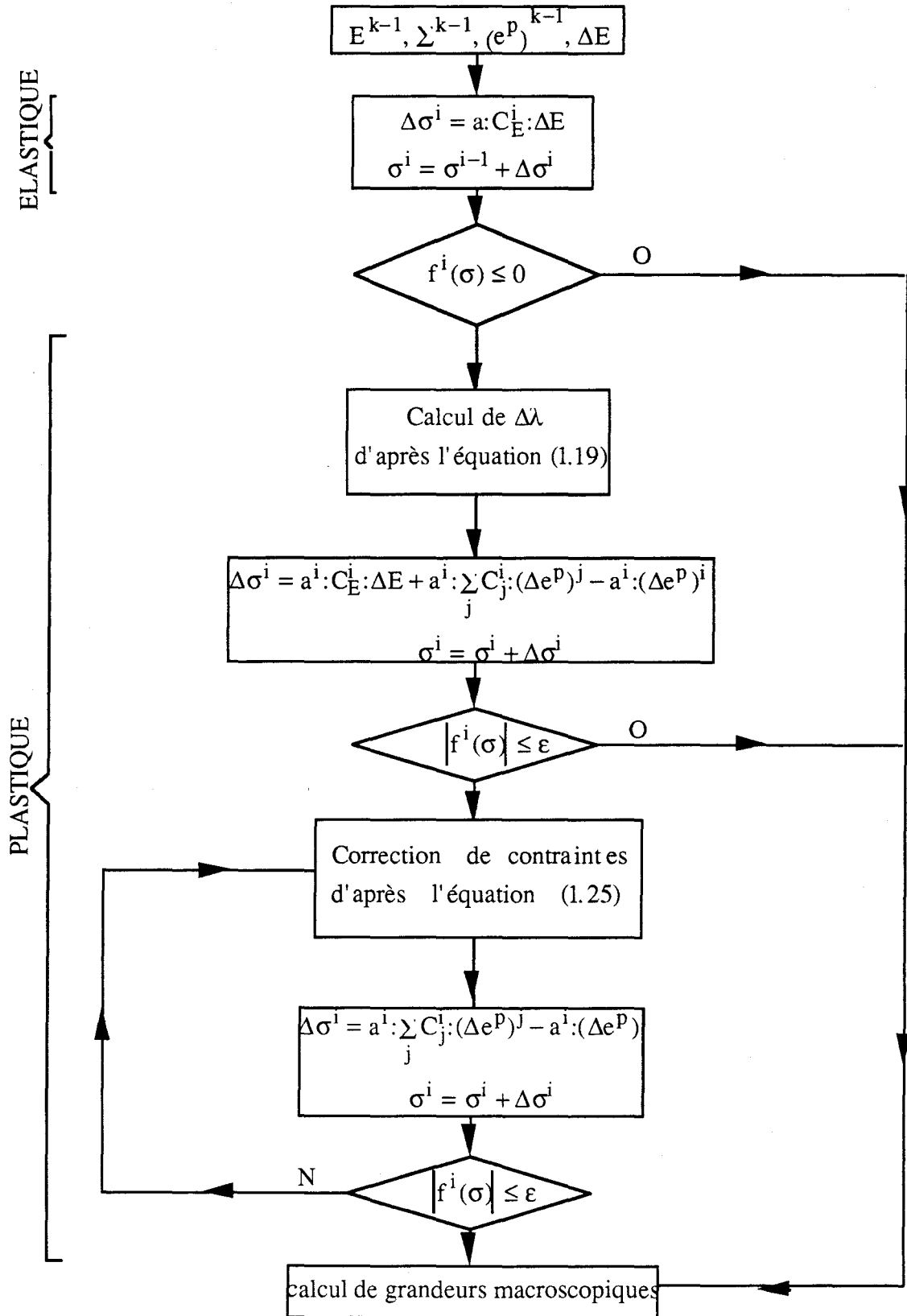


Figure 1.4 : Intégration numérique du modèle macroscopique

Connaissant les multiplicateurs de plasticité, on peut déterminer les grandeurs microscopiques (déformations élastiques et plastiques, contraintes) et ensuite leurs homologues macroscopiques.

L'application de la méthode d'intégration présentée ci - dessus peut donner lieu à des états de contraintes microscopiques qui violent le critère de plasticité (à cause des approximations utilisées dans le schéma d'intégration numérique). Dans ce cas, on applique une deuxième correction pour ramener l'état de contrainte des matériaux plastifiés sur la surface de charge. En supposant que l'état de contrainte précédent est σ_f^i , on cherche un incrément de contrainte $\Delta\sigma_f^i$ de telle sorte que :

$$f^i(\sigma_f^i + \Delta\sigma_f^i) = 0 \quad (1.21)$$

En effectuant un développement de Taylor de l'expression 1.21, on obtient :

$$f^i(\sigma_f^i + \Delta\sigma_f^i) = f^i(\sigma_f^i) + \frac{\partial f^i}{\partial \sigma}(\sigma_f^i) : \Delta\sigma_f^i = 0 \quad (1.22)$$

Comme la correction des contraintes est due uniquement à une mauvaise détermination des déformations plastiques, on évalue les incréments de contraintes à partir de l'expression 1.18 pour un incrément de déformations macroscopique $\Delta E = 0$. Ceci nous donne le système suivant :

$$\Delta\sigma_f^i = a^i : \left[\sum_j C_j^i : (\Delta e^p)^j - (\Delta e^p)^i \right] \quad (1.23)$$

En reportant cette expression dans l'équation 1.23, on obtient le système d'équations :

$$\Delta\lambda^i \frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : a^i : \left[C_i^i : \frac{\partial g^i}{\partial \sigma} - \frac{\partial g^i}{\partial \sigma} \right] + \Delta\lambda^j \frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : a^i : C_j^i : \frac{\partial g^j}{\partial \sigma} = -f^i \quad \text{avec } i \neq j \quad (1.24)$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$[M] \cdot [\Delta\lambda] = [-f] \quad (1.25)$$

Ce système permet de déterminer les multiplicateurs de plasticité et par conséquent les corrections des déformations plastiques qui permettent de ramener les contraintes microscopiques sur les surfaces de charge.

1.2.3 Application à l'étude de la réponse d'une cellule de base à des chemins de traction inclinés

Avant de présenter des tests de la vérification du modèle sur des problèmes aux limites, on propose de déterminer la réponse d'une cellule de base à des chemins de traction inclinés en déformations planes (Figure 1.5a). Les deux matériaux sont supposés obéir au critère de Mohr-Coulomb écrit en déformations planes :

$$f = \sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{11})^2 + 4\sigma_{12}^2} + \sin \varphi (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - 2C \cos \varphi \quad (1.26a)$$

$$g = \sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{11})^2 + 4\sigma_{12}^2} + \sin \psi (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (1.26b)$$

f et g désignent respectivement la surface de charge et le potentiel de plasticité. C , φ et ψ désignent respectivement la cohésion, l'angle de frottement et l'angle de dilataance.

Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la cellule de base sont données dans le tableau 1.1.

Matériau	EY (MPa)	ν	W	C (MPa)	φ (°)	ψ (°)
1	10500	0,22	0,008	6,0	0,0	0,0
2	150	0,3	0,992	0,0	30,0	30,0

Tableau 1.1: Caractéristiques mécaniques et géométriques retenues pour étudier la réponse d'une cellule de base à des chemins de traction inclinés

Le chargement est appliqué sous forme d'une traction macroscopique appliquée dans une direction inclinée d'un angle α par rapport à l'axe y_1 comme indiqué sur la figure 1.5a. Le chargement est appliqué à partir d'un état initial de contraintes isotrope (-0,05 MPa).

Les résultats des simulations numériques sont présentés à travers l'évolution de la contrainte de traction macroscopique (Q) avec la déformation macroscopique E_α :

La figure 1.5b illustre les résultats obtenus pour les différentes valeurs de α . On remarque que la réponse de la cellule de base comporte trois parties :

- La première correspond au domaine élastique ; elle est caractérisée par une forte anisotropie.

- La deuxième partie correspond à la plastification de l'un des deux matériaux qui se traduit par une diminution de la rigidité de la cellule.

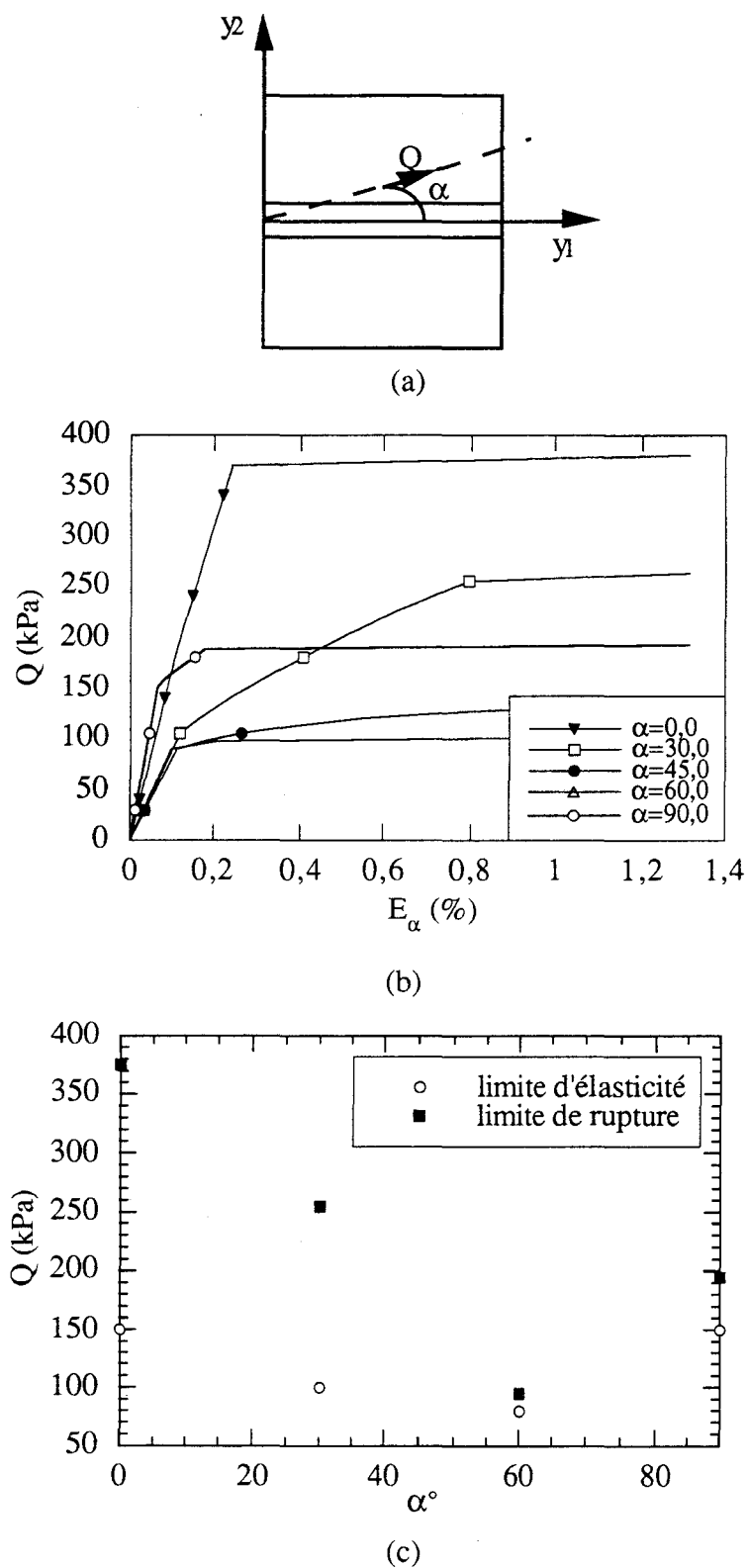


Figure 1.5 : Réponse d'une cellule de base à des chemins de traction inclinés

(a) Illustration de chemin du chargement

(b) Évolution de la contrainte macroscopique

(c) Limites d'élasticité et de rupture

- La troisième partie représente le seuil de résistance macroscopique de la cellule de base qui correspond à la plastification des deux matériaux.

La figure 1.5c montre les courbes donnant les variations des limites d'élasticité et de rupture avec l'inclinaison du chargement. On note une forte anisotropie de ces courbes. La résistance maximale est obtenue dans la direction du renforcement ($\alpha = 0$) alors que la résistance minimale est obtenue dans la direction $\alpha = 60^\circ$. Dans la première direction les limites d'élasticité et de ruptures sont respectivement de 150 et 380 kPa alors que dans la seconde direction, elles sont égales à 80 kPa et 100 kPa.

1.3 Vérification du modèle macroscopique sur des problèmes aux limites

Dans cette section on propose une vérification du modèle sur des problèmes aux limites. Les problèmes traités représentent un massif constitué d'un matériau multicouche et soumis à divers types de chargement (Figure 1.6). La vérification est effectuée en confrontant les calculs effectués avec le modèle macroscopique à ceux obtenus sur les structures hétérogènes en faisant une discrétisation à l'échelle microscopique. Elle a été menée pour différentes valeurs du rapport d'échelle $\varepsilon = \Delta H / H$ (ΔH et H désignent respectivement l'épaisseur de la cellule de base et la hauteur du massif).

Pour le chargement, nous avons considéré quatre cas (Figure 1.7). Le premier chargement correspond à une traction sur la frontière latérale avec la surface supérieure libre. Le second est une compression simple appliquée sur la surface supérieure du massif avec une frontière latérale libre. Le troisième chargement correspond à l'application du poids propre avec une frontière latérale libre. Le dernier cas concerne un chargement appliqué sur une partie de la surface du massif avec une frontière latérale nulle.

Les tests ont été effectués avec deux critères de plasticité:

- (i) Le critère de Mohr-Coulomb non associé (les équations 1.26a et 1.26b)
- (ii) Le critère de Drucker-Prager non associé qui s'écrit sous la forme:

$$f = \alpha_d \cdot I_1 + (J_2)^{\frac{1}{2}} - k_d$$

$$g = \beta_d \cdot I_1 + (J_2)^{\frac{1}{2}}$$

$$I_1 = \sigma_{ii} \quad J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}$$

$$\alpha_d = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad k_d = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)} \quad \beta_d = \frac{2 \sin \psi}{\sqrt{3}(3 - \sin \psi)}$$

Les caractéristiques mécaniques retenues pour les deux matériaux sont données dans le tableau 1.2.

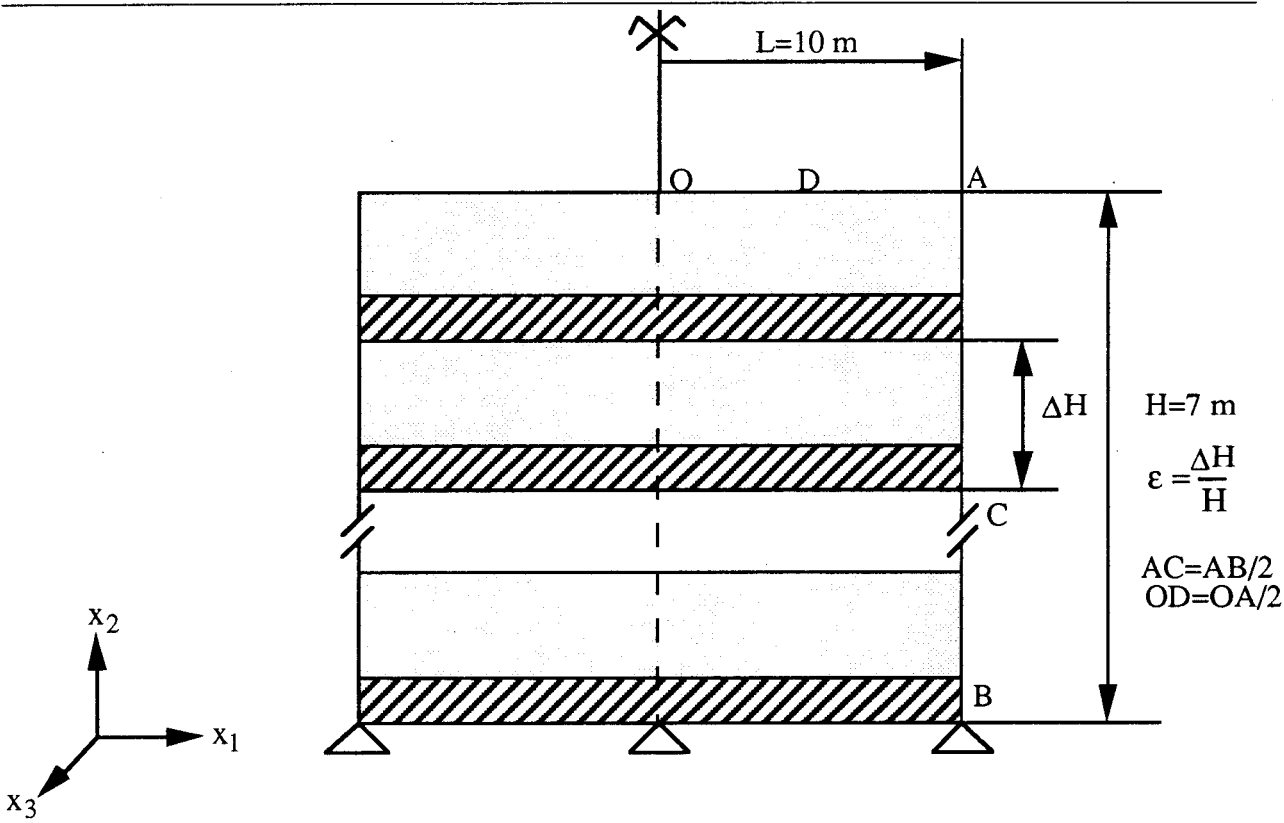


Figure 1.6 : Massif choisi pour la vérification du modèle macroscopique

Matériau	EY (MPa)	ν	W	C (MPa)	φ (°)	ψ (°)
1	300	0.22	0.25	0.4	0.0	0.0
2	150	0.3	0.75	0.0	30.0	15.0

Tableau 1.2 : Caractéristiques mécaniques et géométriques des constituants du multicouche

EY: Module d'Young

ν : Coefficient de Poisson

W: Proportion volumique

φ : Angle de frottement interne

C: Cohésion

ψ : Angle de dilatance



matériau (1)



matériau (2)

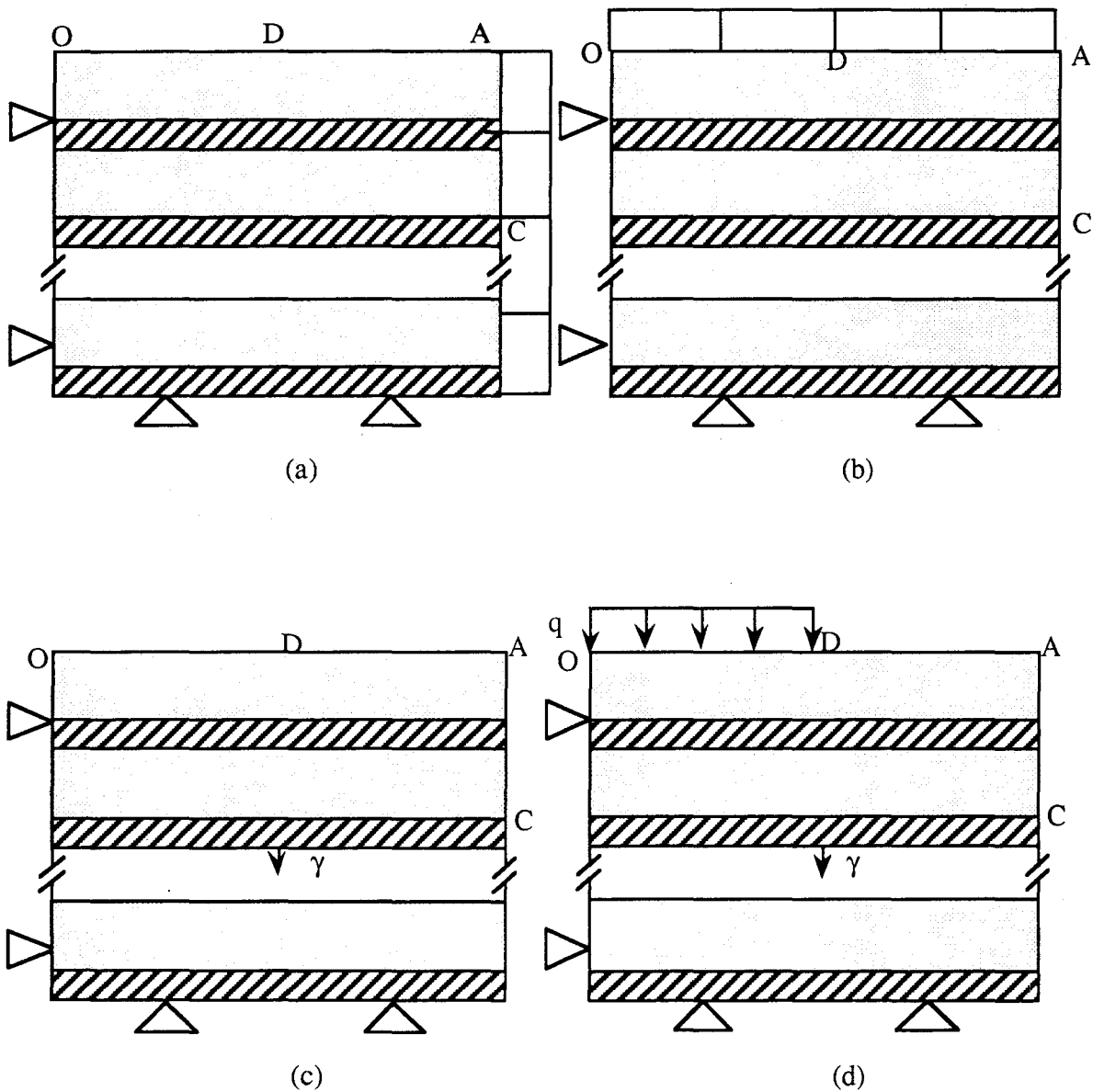


Figure 1.7 : Conditions de chargement retenues

(a) Traction simple

(b) Compression simple

(c) Chargement volumique

(d) Chargement surfacique

1.3.1 Essai de traction simple

Présentation de l'exemple

Dans cet exemple le massif est soumis à une traction uniforme dans la direction du renforcement tout en maintenant libre la surface supérieure figure 1.7a. Les tests ont été effectués avec deux rapports d'échelle $\varepsilon = 0,125$ (8 couches) et $\varepsilon = 0,25$ (4 couches). Compte tenu de la nature du chargement, les calculs avec le modèle homogénéisé ont été effectués avec un seul élément. Les calculs avec les modèles hétérogènes (discrétisation à l'échelle microscopique) ont été réalisés en utilisant les maillages montrés dans la figure 1.8. Ces maillages comportent respectivement 320 et 160 éléments quadrilatères à 8 noeuds (Q8).

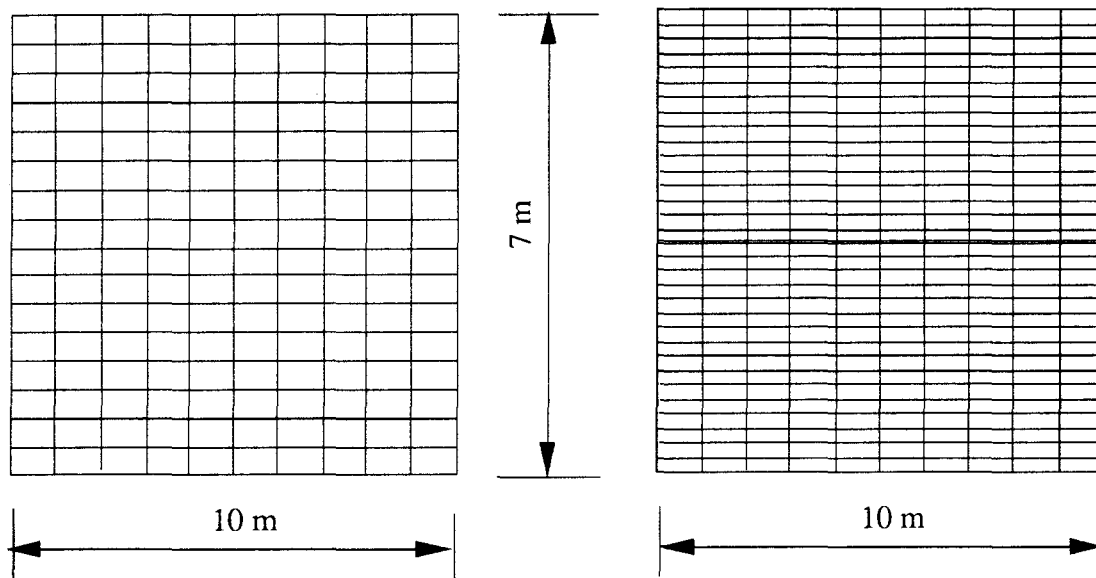


Figure 1.8 : Maillages de la structure hétérogène

Résultats obtenus

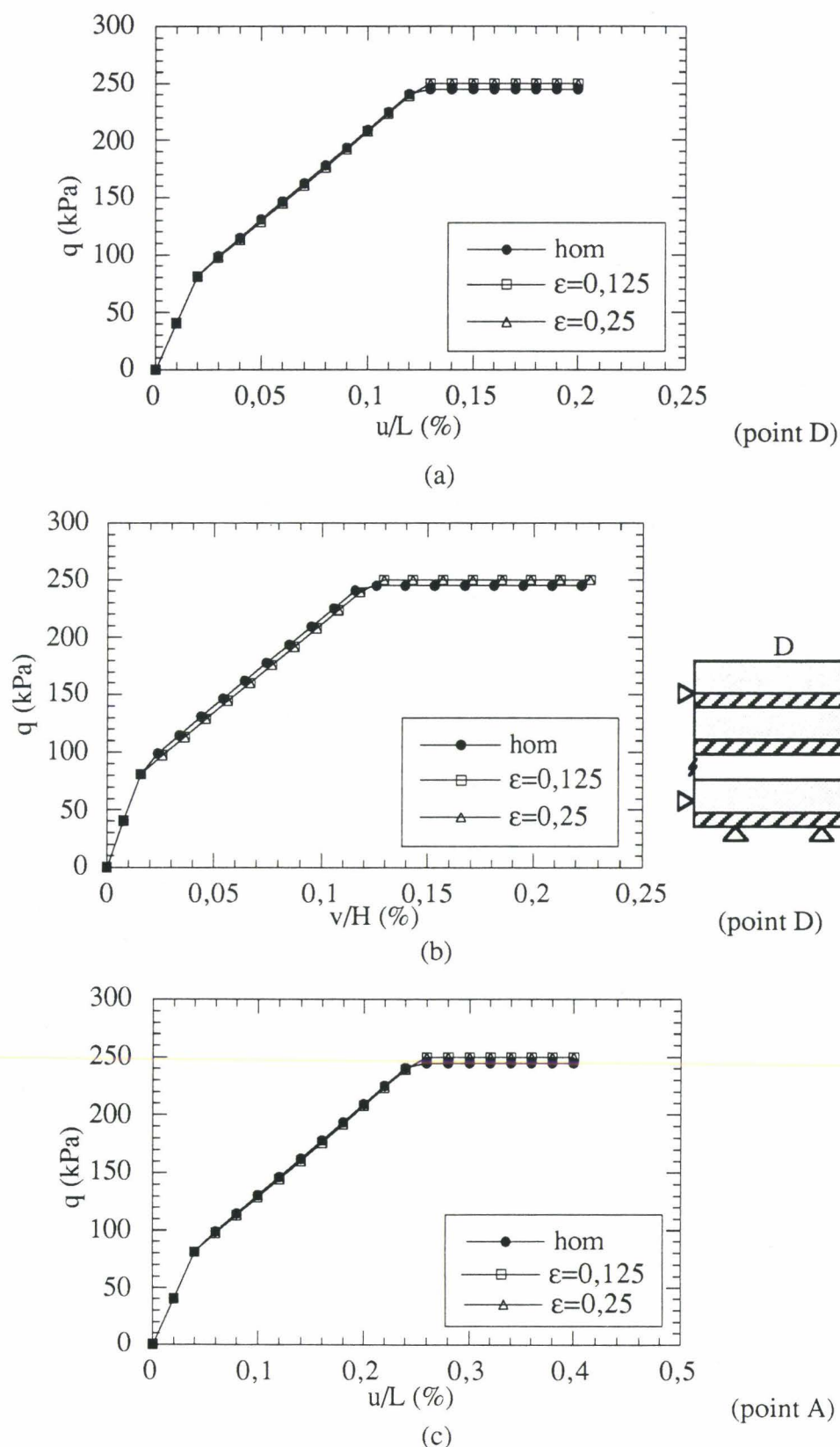
Les résultats obtenus avec le critère de Mohr - Coulomb sont donnés dans les figures 1.9a-c. Ces figures illustrent une comparaison entre les déplacements en deux points de la surface obtenus avec les deux modélisations et pour les deux rapports d'échelle. On note que la réponse de la cellule de base à ce chargement comporte trois parties :

- La première correspond au domaine élastique ; dans cette partie on note un accord parfait entre les deux modélisations.
- La deuxième partie correspond à la plastification de l'un des deux matériaux ; dans cette partie on note un très bon accord entre les deux modélisations même pour le rapport d'échelle élevé $\varepsilon = 0,25$.

-La troisième partie correspond à la charge limite qui résulte de la plastification des deux constituants. On note un très bon accord entre les valeurs de la charge limite obtenues avec les deux modélisations.

Les résultats obtenus avec le modèle de Drucker - Prager sont illustrés dans les figures 1.10a-c. On note qualitativement des résultats identiques à ceux obtenus avec le modèle de Mohr - Coulomb : un très bon accord entre les deux modélisations tant dans la phase élastique que plastique et pour les deux rapports d'échelle.

Ces résultats montrent que pour ce type de chargements, le modèle donne de bons résultats même pour un rapport d'échelle allant jusqu'à $\varepsilon = 0,25$.



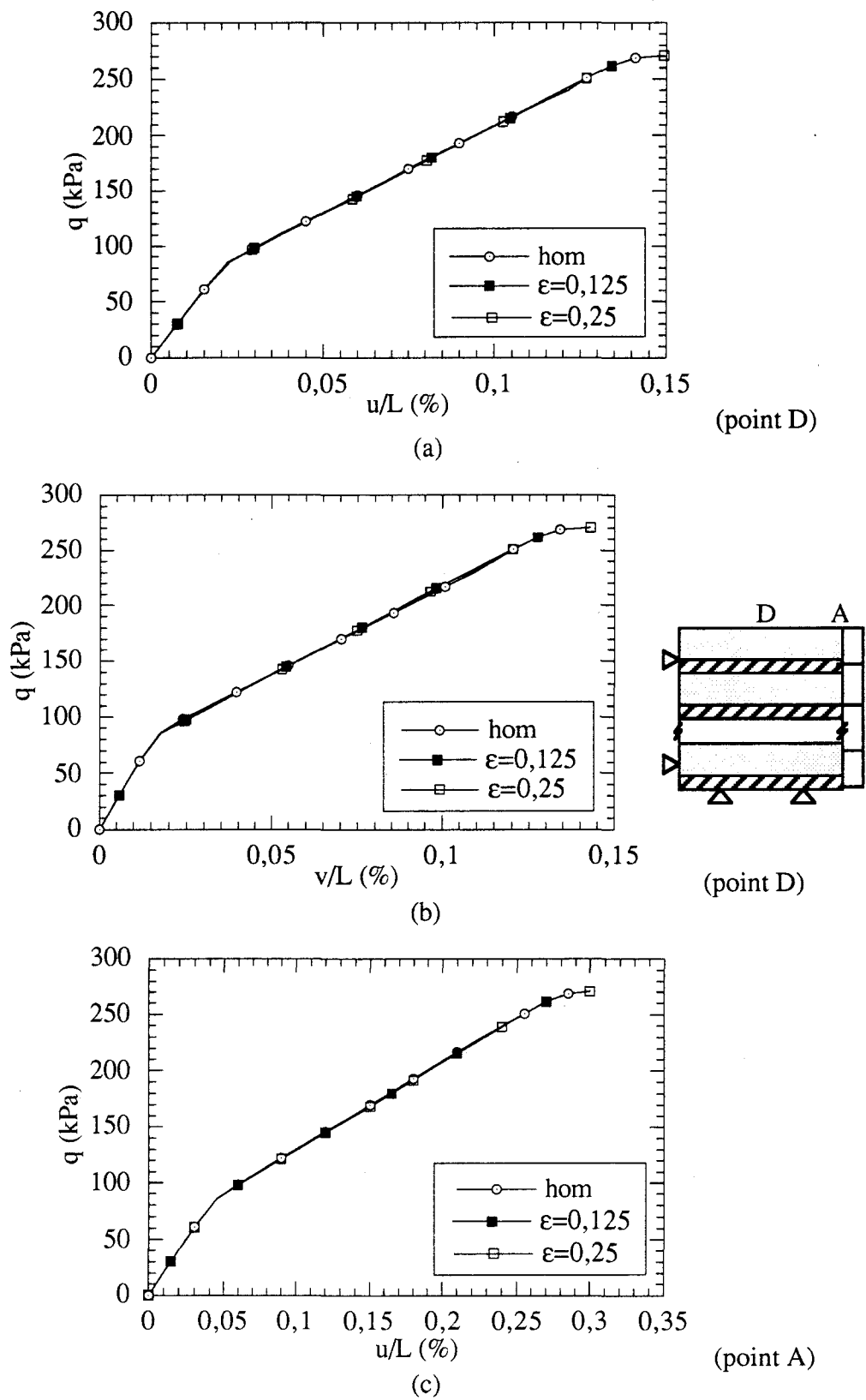


Figure 1.10 : Vérification du modèle macroscopique sur un chemin de traction simple (Modèle Drucker-Prager)
(a) Déplacement horizontal au point D
(b) Déplacement vertical au point D
(c) Déplacement horizontal au point A

1.3.2 Massif soumis à une compression simple

Présentation de l'exemple

Dans cet exemple le chargement est appliqué par un déplacement uniforme vertical appliqué à la surface supérieure du massif tout en gardant libre la frontière latérale. Il a été traité pour deux rapports d'échelle $\varepsilon = 0,125$ et $\varepsilon = 0,25$. Compte tenu de la nature du chargement, les calculs avec le modèle homogénéisé et sur les structures hétérogènes (discrétisation à l'échelle microscopique) ont été effectués avec les maillages utilisés dans l'exemple précédent.

Résultats obtenus

Les figures 1.11a -c montrent les résultats obtenus avec le critère de Mohr - Coulomb, en deux points de la surface latérale (A sur la surface supérieure et C au centre de la frontière latérale).

Ces figures montrent un très bon accord au niveau du déplacement vertical entre les deux modélisations pour les deux rapports d'échelles (figure 1.11a).

Pour le déplacement latéral, on note un bon accord dans la phase élastique. Dans la phase plastique, on observe un écart qui s'amplifie avec le rapport d'échelle et le niveau de chargement. Dans le tableau 1.3, on donne les valeurs numériques du déplacement latéral pour quatre niveaux de chargement. On note que pour le rapport d'échelle $\varepsilon = 0,25$ l'écart entre les deux modélisations passe de 20% à 35% quand le niveau de chargement passe de 260 kPa (phase élastique) à 500 kPa (proche de la charge limite), alors que pour $\varepsilon = 0,125$, ce rapport reste de l'ordre de 8% pour $q = 500$ kPa.

Par ailleurs, on note un bon accord entre les deux modèles au niveau de la valeur de la charge limite.

Modèle	$q = 260$ kPa	$q = 350$ kPa	$q = 400$ kPa	$q = 500$ kPa
hétérogène avec $\varepsilon = 0,25$	5,998	9,637	13,136	17,826
hétérogène avec $\varepsilon = 0,125$	5,205	8,243	10,592	14,496
Homogène	5,050	7,928	9,952	13,551

Tableau 1.3 : Vérification du modèle macroscopique sur un chemin de compression simple - Déplacement horizontal du point A (en mm)
(Critère de Mohr - Coulomb)

Les résultats obtenus avec le critère de Drucker - Prager sont donnés dans les figures 12a-c. On note qualitativement les mêmes résultats que ceux obtenus avec le critère de Mohr - Coulomb : (i) un très bon accord entre les deux modélisations dans le domaine

élastique pour les deux rapports d'échelle et (ii) un écart entre les deux modélisations dans la phase plastique qui s'amplifie avec le rapport d'échelle et le niveau de chargement.

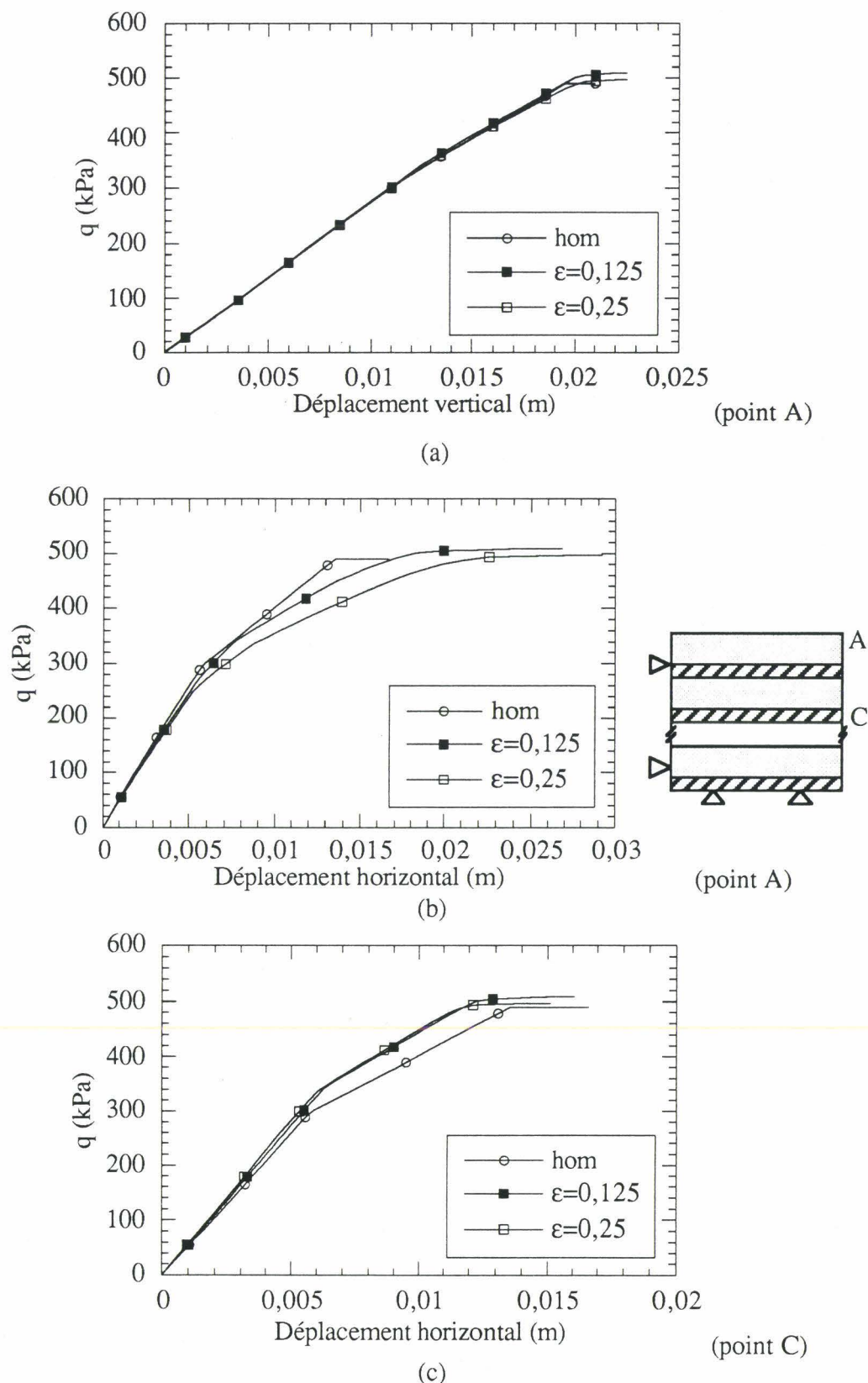


Figure 1.11 : Vérification du modèle macroscopique sur un chemin de compression simple (Modèle Mohr-Coulomb)
(a) Déplacement vertical au point A
(b) Déplacement horizontal au point A
(c) Déplacement horizontal au point C

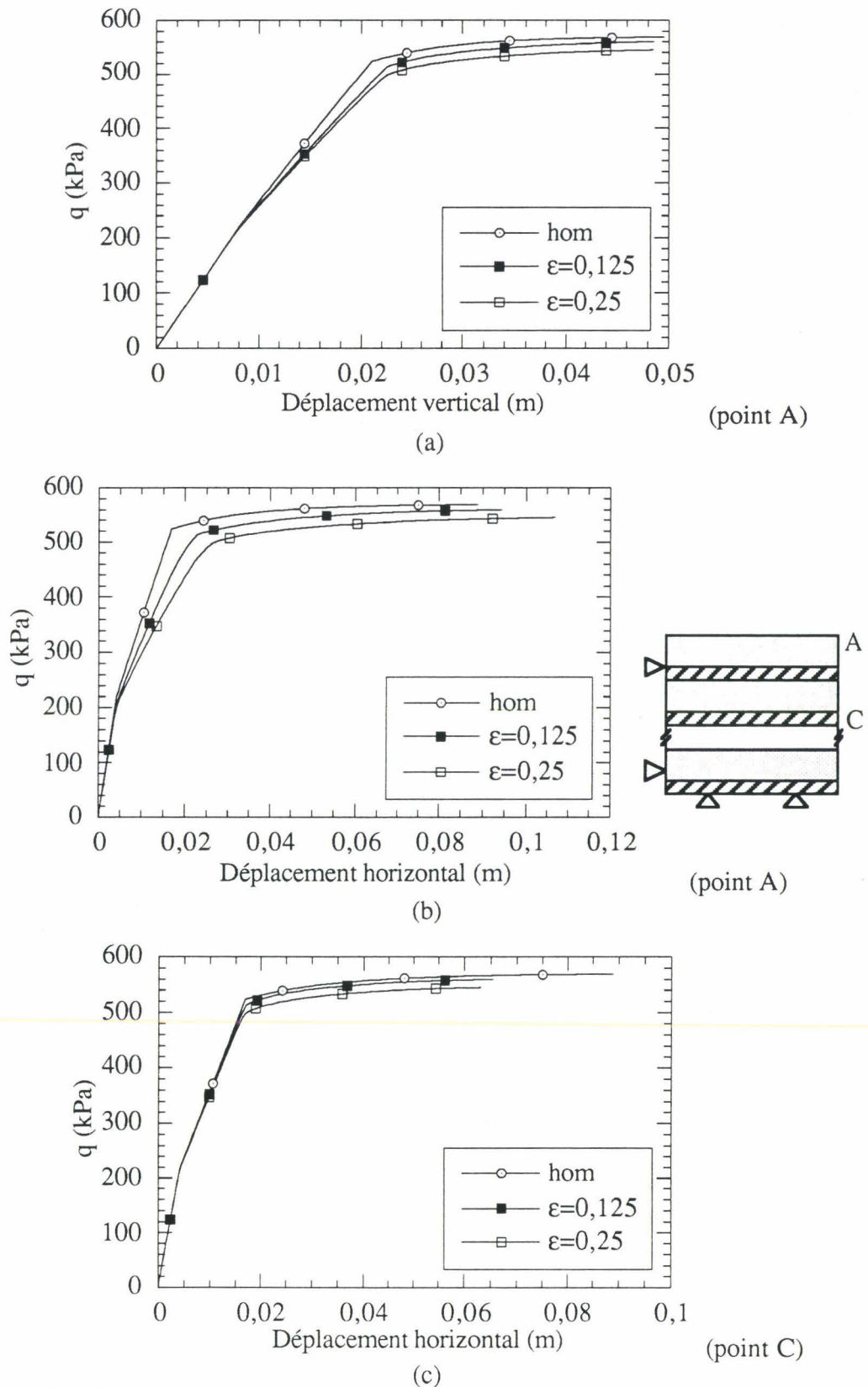


Figure 1.12 : Vérification du modèle macroscopique sur un chemin de compression simple (Modèle Drucker-Prager)

- (a) Déplacement vertical au point A
- (b) Déplacement horizontal au point A
- (c) Déplacement horizontal au point C

Étude de l'effet de bord

La confrontation des résultats obtenus entre les deux modèles a montré un certain écart qui s'amplifie avec la plasticité. Du fait que le chargement appliqué est homogène, on s'attend à ce que cet écart soit faible. Afin d'analyser son origine, on propose d'étudier d'une manière plus approfondie l'évolution des contraintes microscopiques dans le massif, et plus particulièrement au voisinage du bord libre. Les résultats obtenus avec le modèle Mohr - Coulomb et le rapport d'échelle $\epsilon = 0,125$ seront utilisés dans cette analyse.

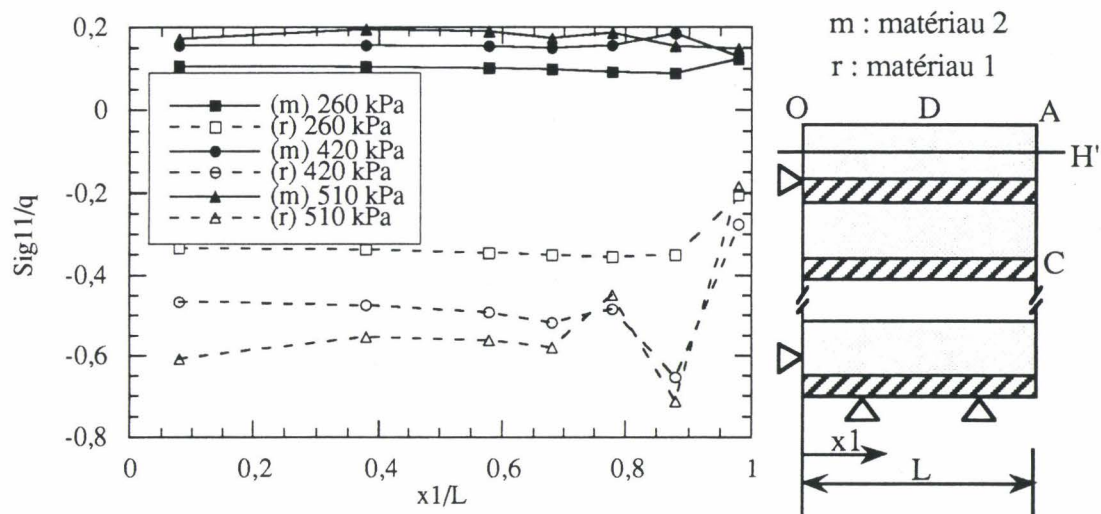
Dans les figures 1.13 et 1.14 on donne l'évolution des composantes du tenseur de contraintes le long de deux axes : H-H' ($x_2 = 6,8$ m) et V-V' ($x_1 = 8,8$ m).

Le long du premier axe, on note que :

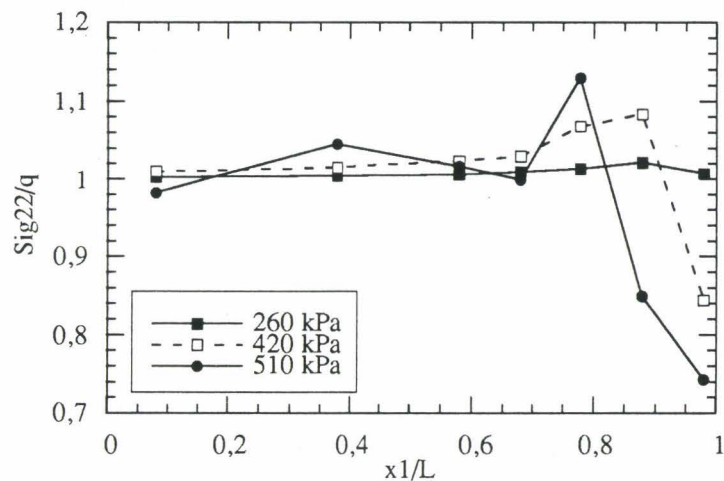
(i) La condition d'uniformité de contraintes microscopique dans les deux constituants est vérifiée loin du bord libre, en particulier dans le domaine élastique ($q = 260$ kPa). Au voisinage du bord libre, on note une forte variation des contraintes microscopiques qui s'amplifie avec l'approche de la surface libre et le niveau de plasticité. A titre d'exemple dans la phase élastique, la contrainte σ_{11} dans le renforcement varie de $-0,32q$ à $-0,2q$ alors que dans la phase plastique ($q = 420$ kPa) elle oscille entre $-,75q$ et $-0,2q$. De même pour la contrainte de cisaillement, nulle dans le modèle homogénéisé, on note une oscillation entre $-0,09q$ et $0,05q$ dans la phase élastique et entre $-0,13q$ et $0,06q$ dans la phase plastique ($q = 510$ kPa).

Le long de l'axe vertical V-V', on note également une forte oscillation des composantes σ_{22} et σ_{12} (qui sont continues entre les deux constituants) en particulier au voisinage de la surface du massif et dans la phase plastique.

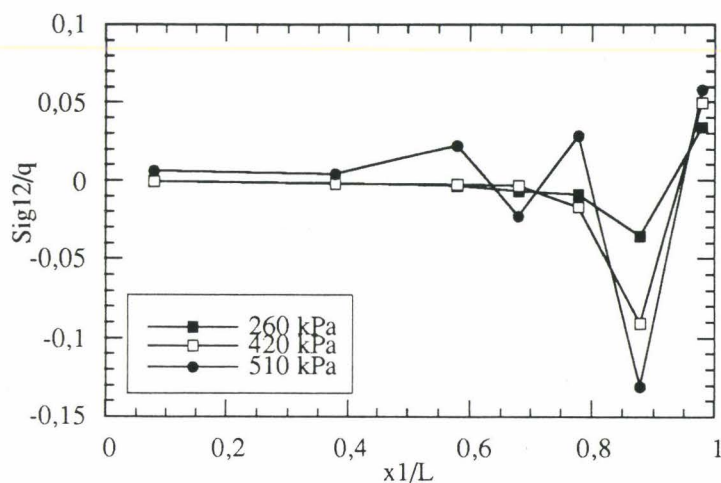
Ces résultats montrent une forte fluctuation des contraintes microscopiques au voisinage du bord libre, en particulier dans la phase plastique. L'amélioration du modèle requière la prise en compte de l'effet de bord dans le modèle. Des travaux ont été effectués dans la phase élastique par Dumontet (1990), il est nécessaire dans l'avenir d'étendre ces travaux à la phase plastique.



(a) Contrainte microscopique (σ_{11})

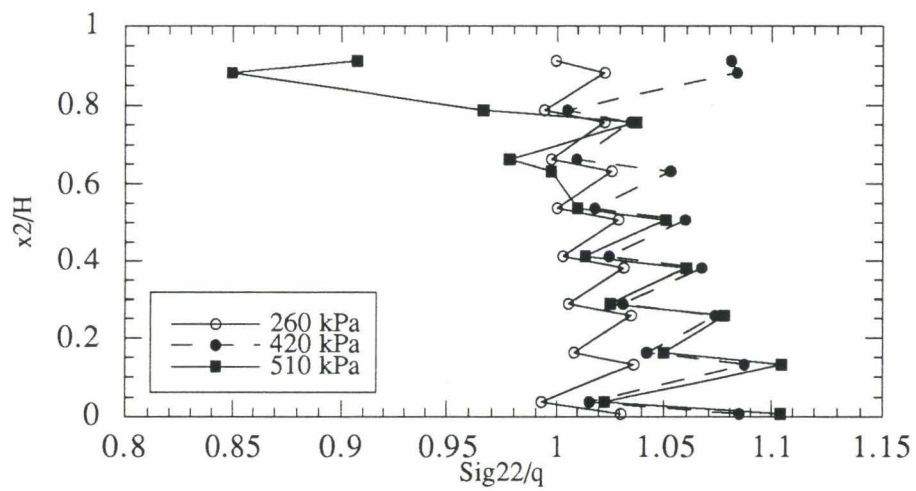
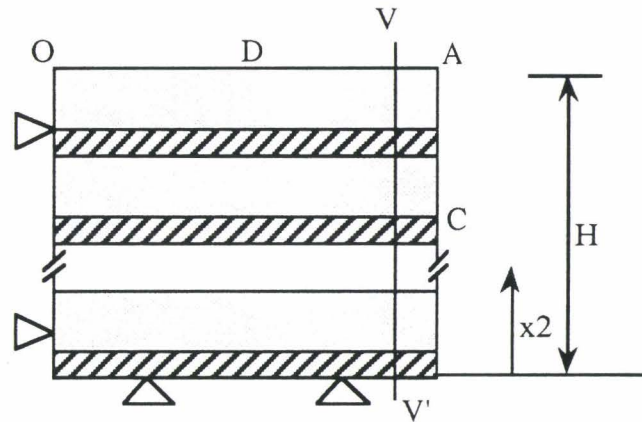


(b) Contrainte microscopique (σ_{22})

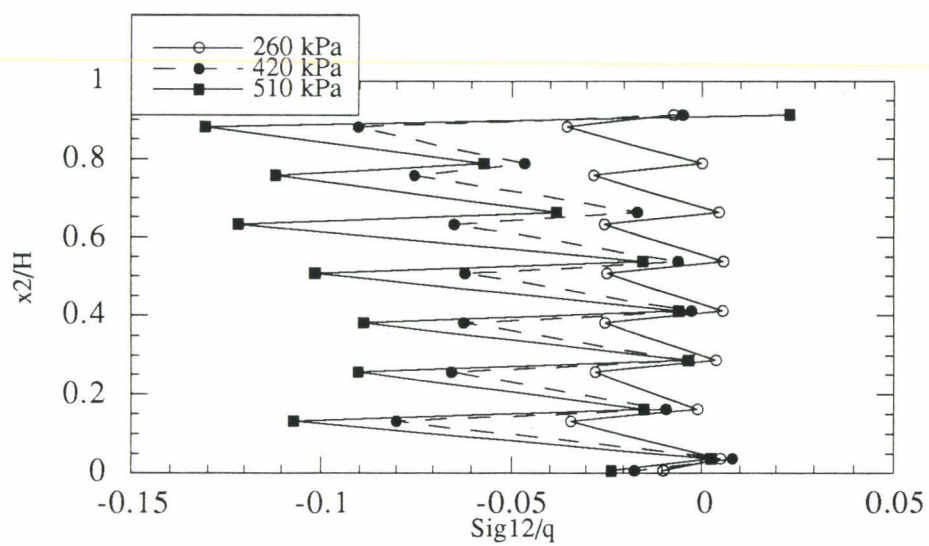


(c) Contrainte microscopique (σ_{12})

Figure 1.13 : Évolution des contraintes microscopiques le long de l'axe H-H' ($x_2=6,8$)



(a) Contrainte microscopique (σ_{22})



(b) Contrainte microscopique (σ_{12})

Figure 1.14 : Évolution des contraintes microscopiques le long de l'axe V-V' ($x_1=8,8$)

1.3.3. Massif soumis à son poids propre

Présentation de l'exemple

Dans cet exemple on considère un massif soumis à son poids propre avec des conditions de surface libre sur le bord latéral et sur la surface supérieure. Les tests de vérifications ont été effectués avec trois rapports d'échelle ($\varepsilon = 0,062$ (16 couches) , $0,125$ et $0,25$). Les maillages utilisés dans les calculs hétérogènes pour les rapports d'échelle ($\varepsilon=0,125$ et $0,25$) sont identiques à ceux utilisés précédemment. Pour le rapports d'échelle $\varepsilon= 0,062$ nous avons utilisé un maillage constituant de 640 éléments. Le maillage utilisé avec le modèle macroscopique est uniforme dans les deux directions. Il comporte 25 éléments quadrilatères à 8 noeuds.

Résultats obtenus

Les résultats obtenus avec le critère de Mohr - Coulomb sont donnés dans les figures 1.15a-d. Dans ces figures on donne l'évolution des déplacement en deux points du massif situés sur le bord latéral (A et C). La comparaison des résultats obtenus avec les deux modélisations et les différents rapports d'échelle montre :

- (i) Un très bon accord entre les deux modélisations dans la première phase de chargement ($\gamma H = 25$ kPa) qui correspond à la phase élastique. Cet accord est observé pour les trois rapports d'échelle.
- (ii) Un écart entre les deux modélisations a partir d'un chargement ($\gamma H = 25$ kPa) pour les rapports d'échelle ($\varepsilon = 0,125$ et $0,25$). Pour le rapport d'échelle $\varepsilon = 0,0625$, on obtient un bon accord tout au long du chargement.

Les résultats obtenus avec le critère de Drucker - Prager sont donnés dans les figures 1.16a-d. On note qualitativement les mêmes résultats que ceux obtenus avec le critère de Mohr - Coulomb : un très bon accord entre les deux modélisations dans la phase élastique pour les trois rapports d'échelle et un bon accord entre les deux modélisations dans la phase plastique uniquement pour le rapport d'échelle $\varepsilon = 0,0625$. Dans le tableau 1.4, on donne les valeurs numériques des déplacements obtenus à la fin du chargement pour les rapports d'échelle ($\varepsilon = 0,0625$ et $0,25$). On note un très bon accord entre les deux résultats pour le petit rapport d'échelle ($\varepsilon = 0,0625$) mais un écart significatif entre les deux modélisations pour le grand rapport. Ce dernier est de l'ordre de 80% pour le déplacement latéral au point A.

Modèle	Dep. Vertical point A (mm)	Dep. Horizontal point A (mm)	Dep. Vertical point C (mm)	Dep. Horizontal point C (mm)
$\varepsilon = 0,25$	4,052	2,611	3,319	2,623
$\varepsilon = 0,062$	2,548	1,342	1,827	2,537
Homogène	2,212	1,313	1,642	2,506

Tableau 1.4 : Vérification du modèle macroscopique sur un massif soumis à son poids propre (Modèle de Drucker-Prager)

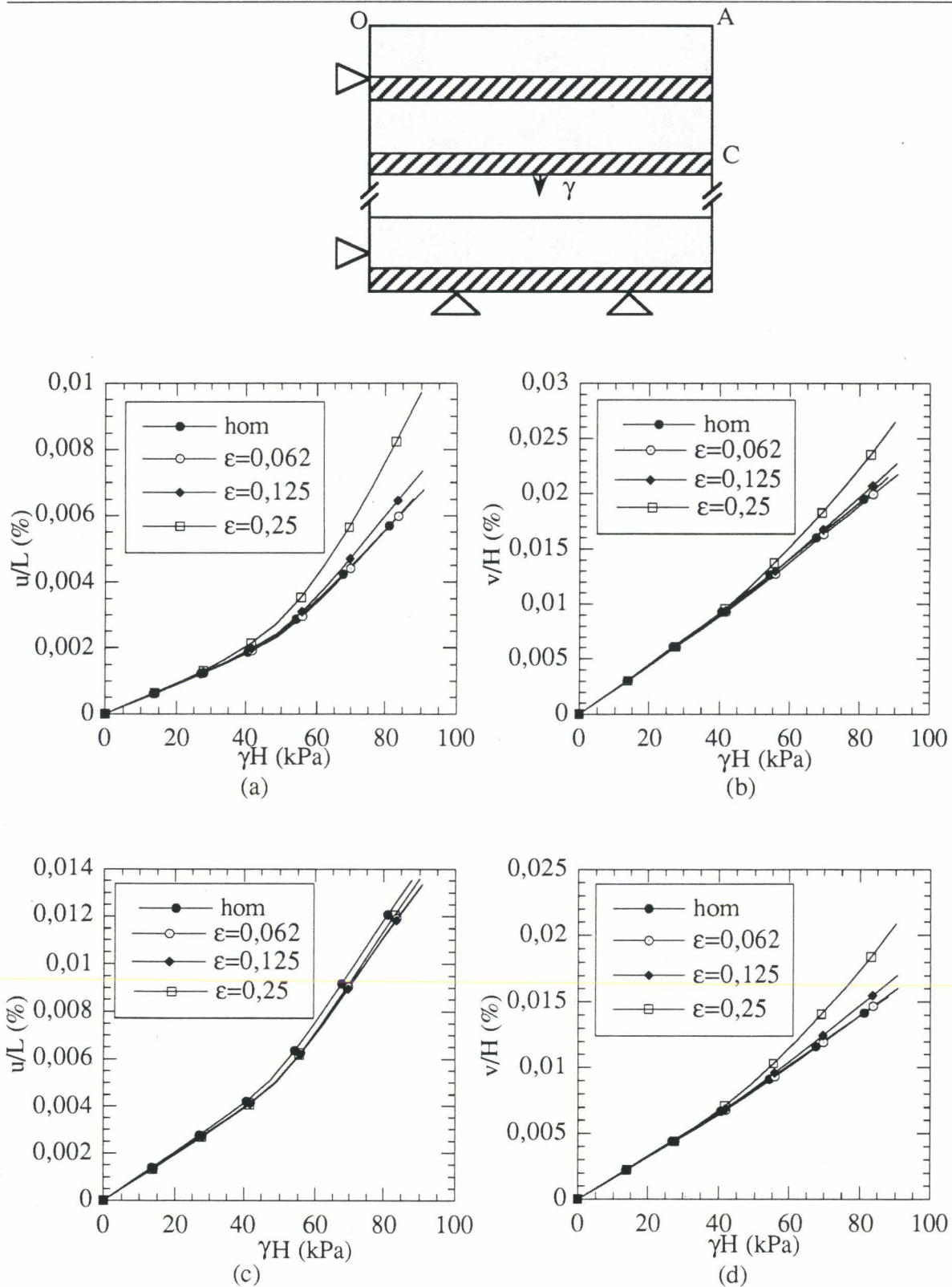


Figure 1.15 : Vérification du modèle macroscopique sur un massif soumis à son poids propre (Modèle Mohr- Coulomb)

- (a) Déplacement horizontal au point A
- (b) Déplacement vertical au point A
- (c) Déplacement horizontal au point C
- (d) Déplacement vertical au point C

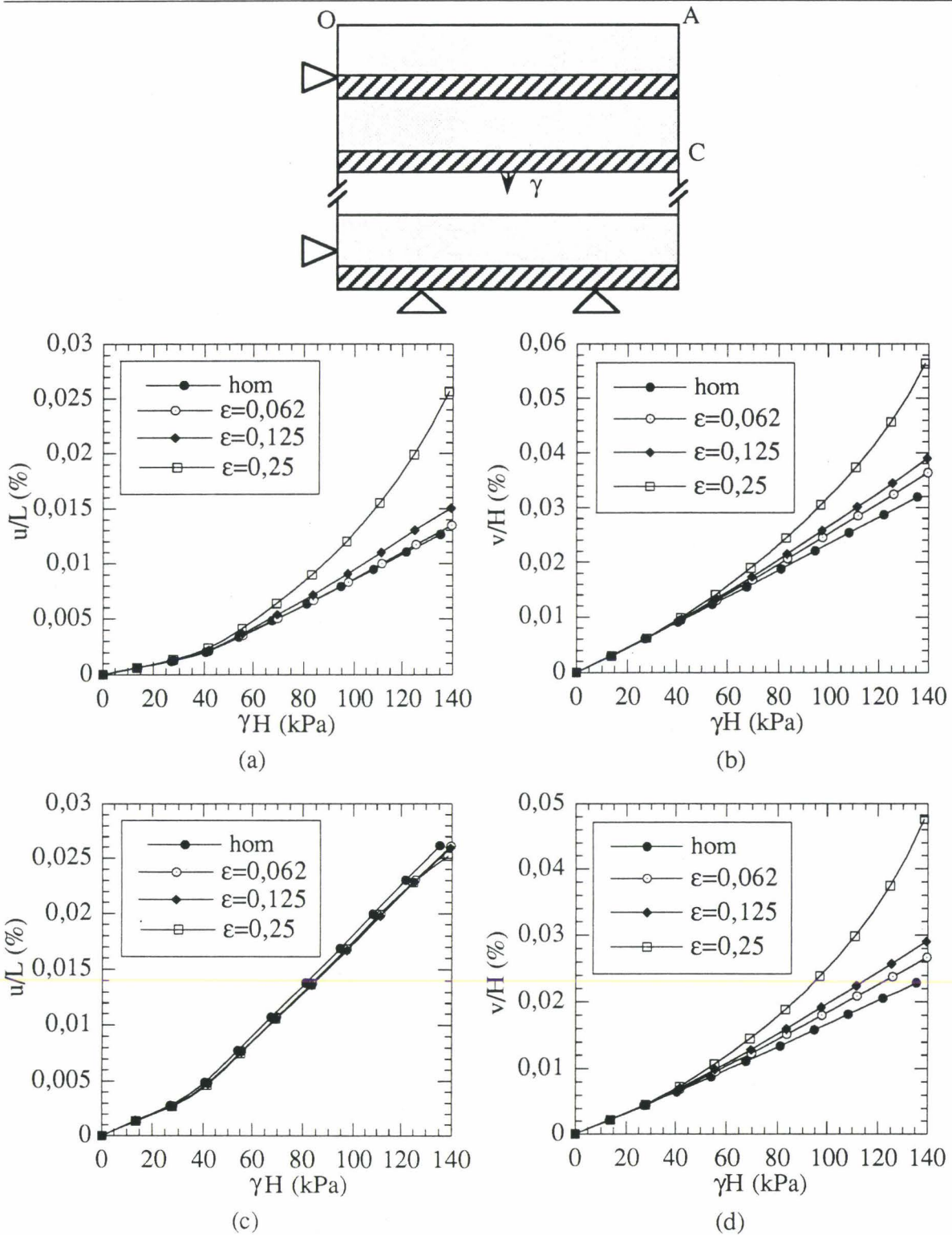


Figure 1.16 : Vérification du modèle macroscopique sur un massif soumis à son poids propre (Modèle Drucker-Prager)

- (a) Déplacement horizontal au point A
- (b) Déplacement vertical au point A
- (c) Déplacement horizontal au point C
- (d) Déplacement vertical au point C

1.3.4 Massif soumis à un chargement surfacique sur une partie de la surface supérieure

Présentation de l'exemple

Dans cet exemple, on considère un chargement surfacique sur une partie de la surface supérieure du massif. Le chargement est appliqué à partir d'un état initial correspondant au poids propre du massif (modélisation précédente). Les tests de vérification ont été effectués avec le modèle Drucker-Prager pour trois valeurs du rapport d'échelle $\varepsilon = (0,062, 0,125 \text{ et } 0,25)$.

Résultats obtenus

Les figures 1.17a-d illustrent les déplacements obtenus avec les deux modélisations en deux points du massif : A (coin supérieur) et D (sur la surface supérieure à l'extrémité de la zone d'application de la charge surfacique). L'analyse de ces résultats montre que :

- (i) Pour le déplacement prépondérant (déplacement vertical au point D), on obtient un bon accord entre les deux modélisations au début du chargement, mais par la suite on note un écart entre les deux résultats, en particulier pour les valeurs élevées du rapport d'échelle.
- (ii) Pour les déplacements d'ordre inférieur (horizontaux aux points A et D et vertical au point A), on note un écart significatif entre les deux modélisations, en particulier pour les forts niveaux de chargement et les valeurs élevées du rapport d'échelle.

Les valeurs numériques des déplacements correspondant au chargement $q = 200 \text{ kPa}$ sont données dans le tableau 1.5. On note que l'écart sur le déplacement vertical au point D est de l'ordre de 13% pour le rapport d'échelle $\varepsilon = 0,0625$ et de 32% pour le rapport d'échelle $\varepsilon = 0,25$. Pour le déplacement horizontal en ce point, les écarts pour les deux rapports d'échelle sont respectivement de 21% et de 170%.

Modèle	Dep. Horizontal point D (mm)	Dep. Vertical point D (mm)	Dep. Horizontal point A (mm)	Dep. Vertical point A (mm)
$\varepsilon = 0,25$	1,942	6,139	3,117	-0,231
$\varepsilon = 0,062$	0,854	5,232	2,416	-0,554
Homogène	0,735	4,621	2,221	-0,918

Tableau 1.5 : Vérification du modèle macroscopique sur un problème de massif soumis à un chargement surfacique (critère de Drucker-Prager) - Déplacements obtenus pour un chargement surfacique $q=200 \text{ kPa}$

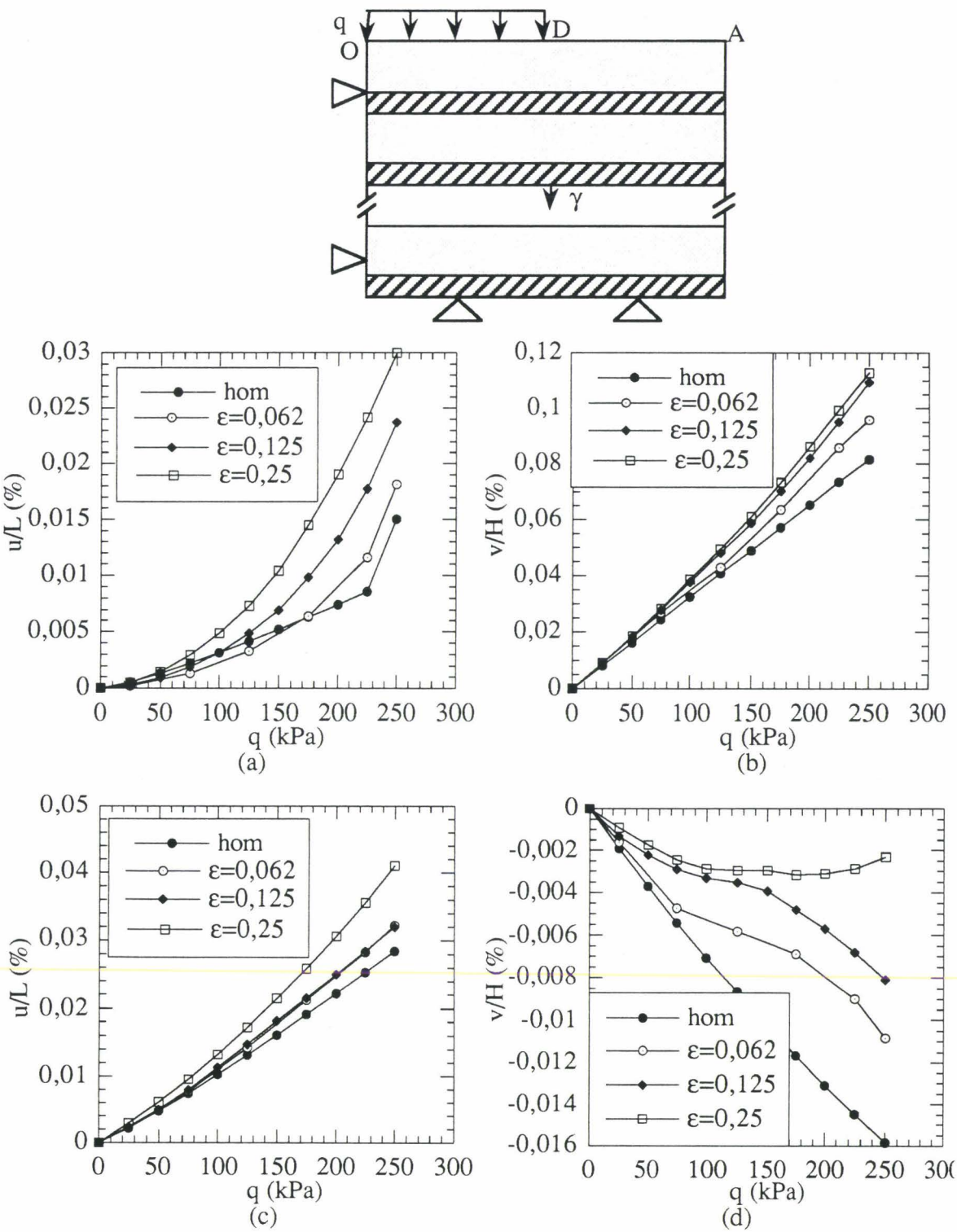


Figure 1.17 : Vérification du modèle macroscopique sur un massif soumis à un chargement surfacique sur une partie de la surface supérieure (Modèle Drucker-Prager)

- (a) Déplacement horizontal au point D
- (b) Déplacement vertical au point D
- (c) Déplacement horizontal au point A
- (d) Déplacement vertical au point A

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'implantation dans un code de calcul par éléments finis d'un modèle macroscopique élaboré pour la description du comportement des matériaux multicouches ayant un comportement élastoplastique.

Les tests de vérification ont été effectués en confrontant les résultats obtenus avec le modèle macroscopique à ceux obtenus par la résolution des problèmes hétérogènes en faisant une discrétisation à l'échelle microscopique. Ces tests ont été effectués sur un problème de massif soumis à divers types de chargements et pour différentes valeurs du rapport d'échelle. Ils ont montré que la précision du modèle macroscopique dépend de quatre facteurs à savoir : le rapport d'échelle, l'homogénéité du chargement appliqué, le niveau de plastification et la présence de bords libres.

En l'absence d'effet de bord et pour un chargement homogène (exemple d'un chargement par traction uniforme appliquée dans la direction de la stratification), le modèle donne de très bons résultats même pour un rapport d'échelle allant jusqu'à $\epsilon=0,25$.

La présence du bord libre au voisinage de la zone chargée a un effet négatif sur les performances du modèle, en particulier pour les forts niveaux de plastification.

Les résultats obtenus avec une faible valeur du rapport d'échelle ($\epsilon = 0,0625$) sont encourageants, même en présence des surfaces libres et pour les forts niveaux de plasticité.

Chapitre 2

Homogénéisation des matériaux à structure périodique renforcés par des inclusions flexibles

Dans ce chapitre, on propose d'étudier un cas limite des matériaux multicouches. Il s'agit des matériaux renforcés par des inclusions travaillant uniquement en traction - compression. Le chapitre est composé de quatre parties. Dans la première, on présente le modèle macroscopique développé pour ces matériaux en supposant que la matrice et l'inclusion sont dotés d'un comportement élastoplastique. Dans la seconde partie, on présente l'intégration numérique de ce modèle. La troisième partie comporte une étude comparative, sur quelques exemples, entre le modèle proposé et celui présenté dans le chapitre précédent pour les multicouches. Dans la dernière partie, on présente une application de ce modèle à la détermination de la hauteur critique d'un mur en terre armée.

2.1 Formulation du modèle

2.1.1 Cellule de base et grandeurs macroscopiques

La figure 2.1 montre la cellule de base pour un matériau multicouche renforcé par des inclusions flexibles. Cette cellule est composée d'une matrice dont le comportement est supposé de type élastoplastique et d'une inclusion de très faible épaisseur qui travaille uniquement en traction - compression. On note T^r la force axiale dans l'inclusion. Le modèle est développé dans l'hypothèse de déformations planes. Les caractéristiques mécaniques de l'inclusion sont données par :

- une rigidité à la traction K^r ,
- une résistance à la compression T^{r-} ,
- une résistance à la traction T^{r+} .

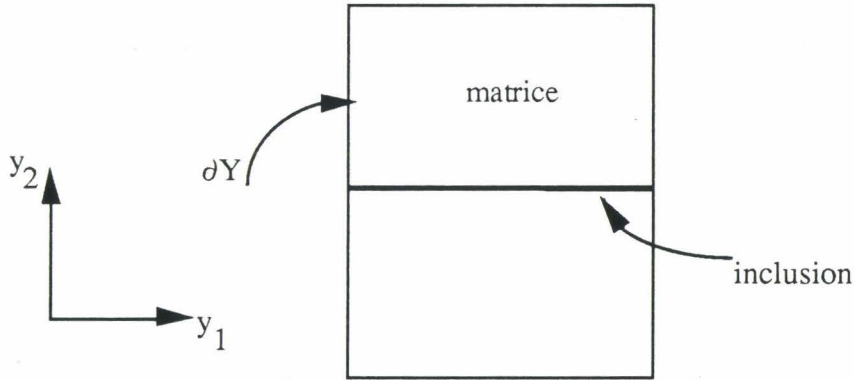


Figure 2.1 : Cellule de base d'un matériau renforcé par des inclusions flexibles

Les grandeurs macroscopiques sont définies en supposant que l'épaisseur de l'inclusion (par rapport à la cellule de base) tende vers zéro. Avec cette hypothèse le tenseur de déformations macroscopiques est égal à la moyenne sur la matrice du tenseur de déformations microscopiques :

$$E = \langle e \rangle_m \quad (2.1)$$

Compte tenu de la rigidité élevée de l'inclusion, sa contribution au tenseur de contraintes macroscopiques n'est pas négligeable. Ce tenseur résulte de la valeur moyenne du tenseur de contrainte microscopique dans la matrice (σ^m) et de la force reprise par l'inclusion :

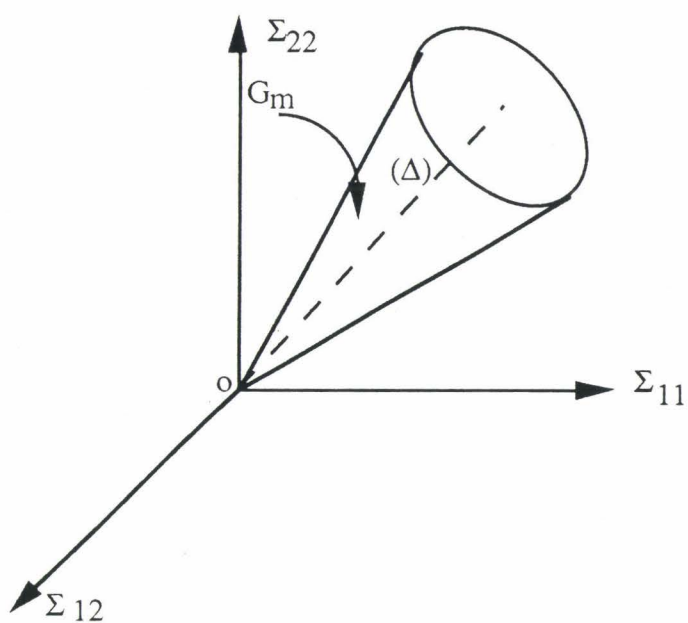
$$\Sigma = \langle \sigma \rangle_m + T^r y_1 \otimes y_1 \quad (2.2)$$

2.1.2 Critère de résistance macroscopique

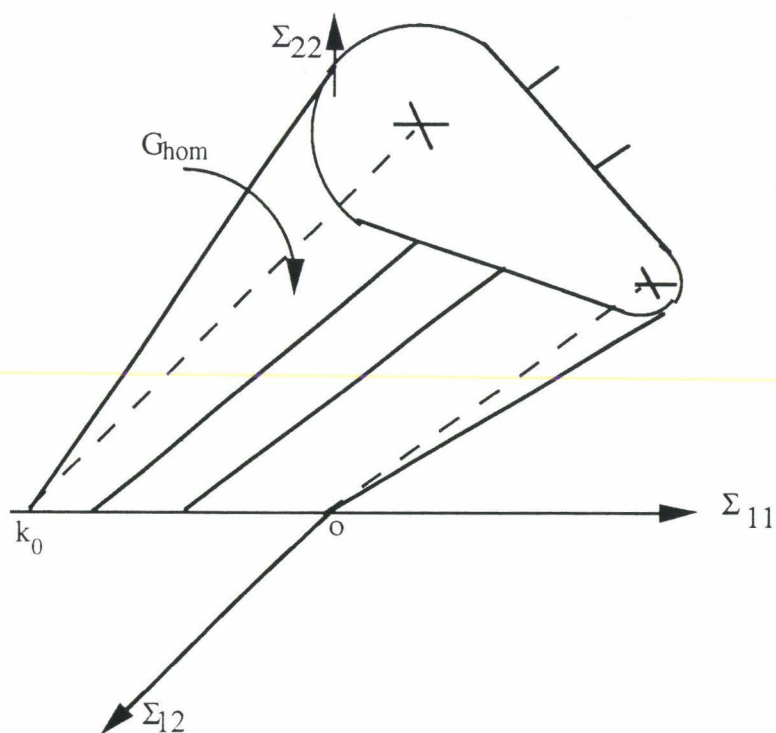
Le critère de résistance macroscopique des matériaux multicouches renforcés par des inclusions a fait l'objet de différents travaux de recherche (de Bauhan 1984, de Buhan 1986, Sïad 1987 et Michalowski et al 1996). Les travaux de De Buhan et ses collaborateurs étaient destinés à la détermination d'un critère de résistance pour la terre armée. En utilisant la technique de l'homogénéisation, ils ont montré que le domaine de résistance macroscopique de la terre armée (G_{hom}) s'exprime en fonction du domaine de résistance du sol (G_m) et de la résistance à la traction des armatures (k_0) (la résistance à la compression est supposée nulle) de la manière suivante :

$$\Sigma \in G_{\text{hom}} \Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma = \sigma^m + T^r y_1 \otimes y_1 \\ \sigma^m \in G_m \quad \text{et} \quad 0 \leq T^r \leq k_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

La figure 2.2b montre le domaine de résistance macroscopique du sol renforcé rapporté aux axes $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \sqrt{2}\Sigma_{12})$ pour un sol de Mohr - Coulomb. En comparant ce domaine avec celui du sol (figure 2.2a), on note bien la contribution du renforcement dans l'amélioration de la résistance du sol.



(a)



(b)

Figure 2.2 : Domaine de résistance

(a) Domaine de résistance du sol (b) Domaine de résistance du sol renforcé
(Siad 1987)

2.1.3 Modèle macroscopique

Le modèle macroscopique d'un matériau multicouche renforcé par inclusion flexibles peut être déduit du modèle de comportement des matériaux multicouche présenté dans le chapitre précédent (restreint aux chemins en déformations planes) en faisant tendre l'épaisseur d'un constituant vers zéro. Du fait que le tenseur de déformations microscopiques est constant par constituant, on obtient :

$$E = \langle e \rangle = e^m \quad (2.4)$$

En supposant une liaison parfaite entre l'inclusion et la matrice, la déformation axiale de l'inclusion est égale à la déformation (e_{11}) de la matrice :

$$(e_{11})^I = (e_{11})^m$$

Compte tenu de l'équation 2.4, la déformation de l'inclusion est égale à la déformation macroscopique (E_{11}) :

$$(e_{11})^I = E_{11} \quad (2.5)$$

La relation contrainte - déformation dans la matrice peut être écrite sous la forme :

$$\sigma^m = a^m : (e^m - (e^P)^m) \quad (2.6a)$$

a^m et $(e^P)^m$ désignent respectivement les tenseurs d'élasticité et des déformations plastiques de la matrice.

Pour l'inclusion, on peut écrire la relation suivante entre la contrainte et la déformation :

$$T^I = K^I (e_{11} - (e^P)^I) \quad (2.6b)$$

$(e^P)^I$ désigne la déformation plastique dans l'inclusion.

En reportant les relations 2.6a et 2.6b dans l'équation 2.2 et en prenant en compte les conditions 2.4 et 2.5, on peut exprimer le tenseur de contraintes macroscopiques de la manière suivante :

$$\Sigma = a^m : (E - (e^P)^m) + K^I (E_{11} - (e^P)^I) y_1 \otimes y_1$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$\Sigma = a^{\text{hom}} : E - a^m : (e^p)^m - K^r (e^p)^r y_1 \otimes y_1 \quad (2.7)$$

a^{hom} représente le tenseur d'élasticité homogénéisé, son expression est donnée par:

$$a^{\text{hom}} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu + K^r & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

λ et μ représentent les coefficients de Lamé de la matrice.

2.2 Intégration numérique

L'intégration numérique de ce modèle est effectuée d'une manière simple. En effet, dans ce cas les déformations microscopiques dans chaque constituant s'expriment uniquement en fonction des déformations macroscopiques (équations 2.4 et 2.5). L'intégration numérique de ce modèle est effectuée d'après un schéma incrémental. Pour un incrément de chargement donné, on cherche à déterminer la réponse du modèle à un incrément de déformations macroscopiques ΔE . La réponse de la matrice ($\Delta \sigma^m$) est déterminée par intégration de sa loi de comportement à un incrément de chargement $\Delta e^m = \Delta E$. La réponse de l'inclusion (ΔT^r) est déterminée par intégration de sa loi de comportement sur un incrément de déformation axiale égal à E_{11} . L'incrément de contraintes macroscopiques est ensuite déterminée en utilisant la relation 2.3 sous sa forme incrémentale :

$$\Delta \Sigma = \Delta \sigma^m + \Delta T^r y_1 \otimes y_1$$

2.3 Vérification du modèle

La vérification du modèle est effectuée par comparaison avec le modèle multicouche présenté dans la section précédente sur différents exemples en faisant tendre dans ce dernier l'épaisseur d'un constituant vers zéro. Dans un premier temps, on présente une confrontation entre les deux modèles sur une cellule de base soumise à du chemin de traction appliqué dans différentes directions. Ensuite, on présente des tests sur des exemples présentés dans le chapitre précédent concernant un massif de sol soumis à deux types de chargement : le poids propre et un chargement surfacique sur une partie de la surface du massif

2.3.1 Cellule de base soumise à une traction inclinée

Dans cette section, on effectue une comparaison entre les deux modèles (matériaux multicouches et matériaux renforcés par des inclusions) sur un chemin de traction appliqué à la cellule de base (figure 1.5a). Les simulations numériques ont été effectuées en supposant que la cellule de base est initialement soumise à une pression de confinement de (-0,05 MPa).

Le comportement de la matrice est décrit par un modèle élastique - parfaitement plastique utilisant le critère de Mohr - Coulomb non associé. Les jeux de paramètres choisis pour la matrice est l'inclusion sont donnés dans les tableaux 2.1a et 2.1b. Les caractéristiques équivalentes déterminées pour le modèle multicouche sont données dans le tableau 2.2. Ces caractéristiques ont été déterminées de telle manière qu'on conserve la rigidité et la résistance à la traction de l'inclusion dans les deux modèles :

$$(W*EY)^1 = K^I$$
$$2*(W*C)^1 = T^I +$$

EY (MPa)	ν	C (MPa)	φ (°)	ψ (°)
150	0,3	0,0	30,0	4,0

(a) Caractéristiques de la matrice

K ^I (MN/m)	T ^I (kN/m)
63	72

(b) Caractéristiques de l'inclusion

Tableau 2.1: Caractéristiques mécaniques retenues dans le modèle des matériaux renforcés par inclusion

Matériau	EY (MPa)	ν	W	C (MPa)	φ (°)	ψ (°)
Inclusion	10500	0,22	0,006	6,0	0,0	0,0
Matrice	150	0,3	0,994	0,0	30,0	4,0

Tableau 2.2: Caractéristiques mécaniques retenues dans modèle multicouche

Les valeurs du tenseur d'élasticité homogénéisé ont été déterminées pour les deux modèles à partir des expressions des tenseurs d'élasticité homogénéisés données dans les expressions (1.15 et 2.8). Ces valeurs sont données dans le tableau 2.3.

Modèle	a1111 (MPa)	a2222 (MPa)	a1122 (MPa)	a1212 (MPa)
Multicouche	267,2	203,1	86,9	58,1
Inclusion	264,9	201,9	86,5	57,7

Tableau 2.3 : Les valeurs du tenseur d'élasticité homogénéisé pour les modèles macroscopiques multicouche et inclusion

On constate que les coefficients donnés par les deux modèles sont très proches avec un écart de l'ordre de 1%.

Dans les figures 2.3a-e, on donne l'évolution de la contrainte de traction en fonction de la déformation macroscopique E_α pour les différentes directions. On note un très bon accord entre les deux modèles, ce qui signifie que le modèle à inclusion présente un cas limite du modèle multicouche quand l'épaisseur d'une couche tend vers zéro. Concernant l'évolution de la contrainte macroscopique. On note trois phases d'évolution : une première phase linéaire et élastique, une deuxième phase avec plastification d'un constituant et enfin une troisième phase sous forme d'un palier de contraintes qui correspond à la plastification des deux constituants. Pour ces trois phases, on note une anisotropie à l'échelle macroscopique qui privilégie clairement la direction des inclusions.

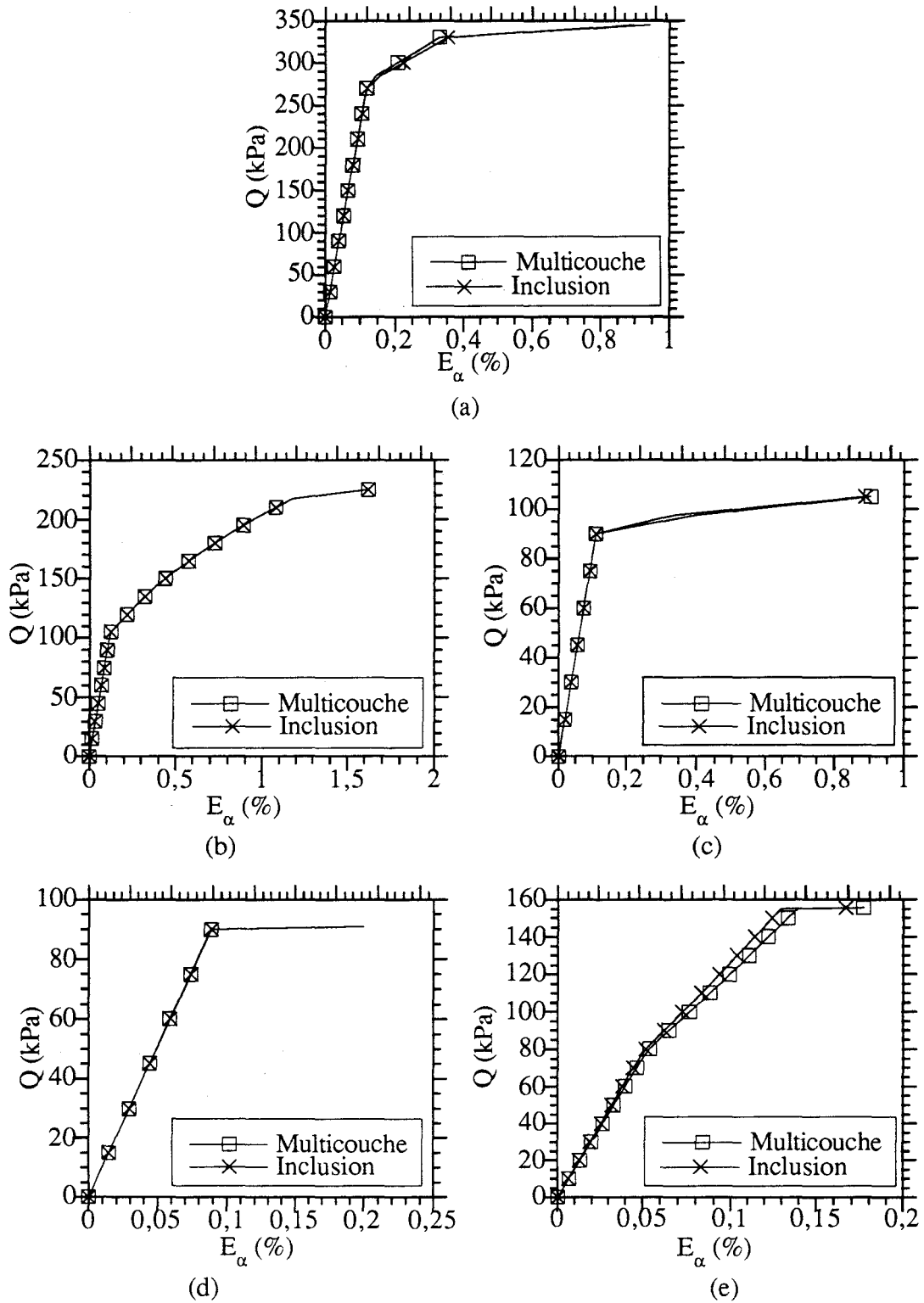


Figure 2.3 : Comparaison des deux modèles sur un chemin de traction simple appliquée dans différentes directions

(a) $\alpha=0^\circ$ (b) $\alpha=30^\circ$ (c) $\alpha=45^\circ$ (d) $\alpha=60^\circ$ (e) $\alpha=90^\circ$

2.3.2 Massif de sol soumis à son poids propre

Description de l'exemple

Cet exemple concerne un massif de sol soumis à son poids propre, les caractéristiques géométriques du massif sont données dans la figure 2.4.

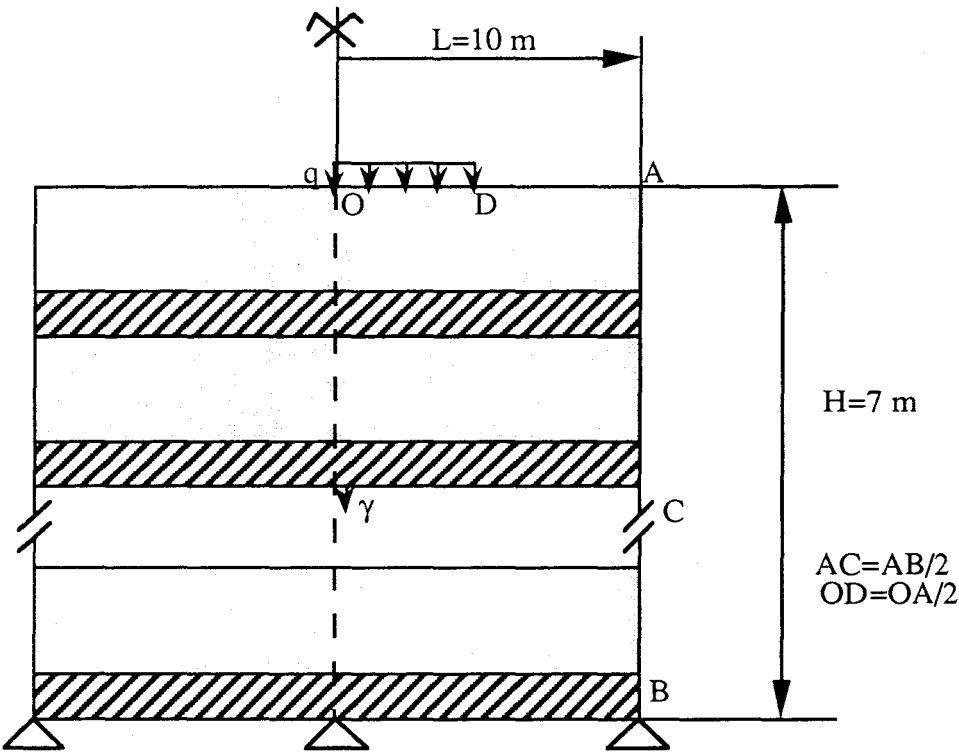


Figure 2.4 : Caractéristique du massif choisi pour la comparaison des deux modèles

Pour les caractéristiques mécaniques, nous avons retenu le jeu de paramètres donnée dans les tableaux 2.4a et 2.4b:

EY (MPa)	ν	C (MPa)	ϕ (°)	ψ (°)
150	0,3	0,005	30,0	4,0

(a) Caractéristiques de la matrice

K^I (MN/m)	T^I (kN/m)
63	72

(b) Caractéristiques de l'inclusion

Tableau 2.4: Caractéristiques mécaniques retenues dans le modèle des matériaux renforcés par inclusion

Pour le modèle multicouche, nous avons retenu deux jeux de paramètres qui permettent de conserver la rigidité et la résistance à la traction de l'inclusion. Le premier

jeu (noté Jeu A, tableau 2.2) correspond à un multicouche avec une très faible épaisseur du matériau représentant l'inclusion. Le deuxième (Jeu B, tableau 2.5) a été fixé avec une épaisseur plus importante de ce dernier ($W^1 = 0,2$). Ce jeu de paramètres nous permet d'étudier l'influence de l'épaisseur du renforcement sur la précision de la modélisation des matériaux multicouches à l'aide du modèle à inclusion.

Pour le comportement du sol, nous avons retenu un modèle élastique - parfaitement plastique utilisant le critère de Mohr - Coulomb non associé. Les conditions aux limites et le maillage retenus dans ce calcul sont identiques à ceux présentés dans le premier chapitre (section 1.3.3).

Matériau	EY (MPa)	ν	W	C (MPa)	ϕ (°)	ψ (°)
Inclusion	315	0,22	0,2	0,36	0,0	0,0
Matrice	187,5	0,3	0,8	0,00625	30,0	4,0

Tableau 2.5: Jeu de paramètre "B" utilisé dans le calcul du massif (épaisseur élevée du matériau représentant le renforcement)

Résultats avec le jeu de paramètres A

Les résultats obtenus avec le jeu de paramètres A (faible épaisseur de la couche représentant l'inclusion) sont donnés dans les figures 2.5a-f . Dans ces figures on donne l'évolution des déplacements aux points situés sur la surface du massif (A et D) et sur son bord latéral (C). La comparaison des résultats obtenus montre un très bon accord sur le déplacement vertical tout au long du chargement que ça soit en surface où sur le bord latéral du massif. En ce qui concerne le déplacement horizontal, on note au début du chargement (jusqu'à $\gamma H = 60$ kPa) un très bon accord entre les deux modèles ; par la suite, on observe un écart qui augmente avec le chargement tout en restant faible. Dans le tableau 2.6, on donne les valeurs numériques des déplacements aux points A, D et C à la fin du chargement. On note un écart de l'ordre de 4,5% sur le déplacement horizontal et de 2,6% sur le déplacement vertical.

Déplacement (mm)	Horizontal du point D	Vertical du point D	Horizontal du point A	Vertical du point A	Horizontal du point C	Vertical du point C
Multicouche	1,219	4,457	1,427	3,340	3,191	2,469
Inclusion	1,245	4,574	1,439	3,417	3,338	2,529

Tableau 2.6: Comparaison des déplacements obtenus avec les deux modèles : massif soumis à son poids propre (Jeu de paramètres A)

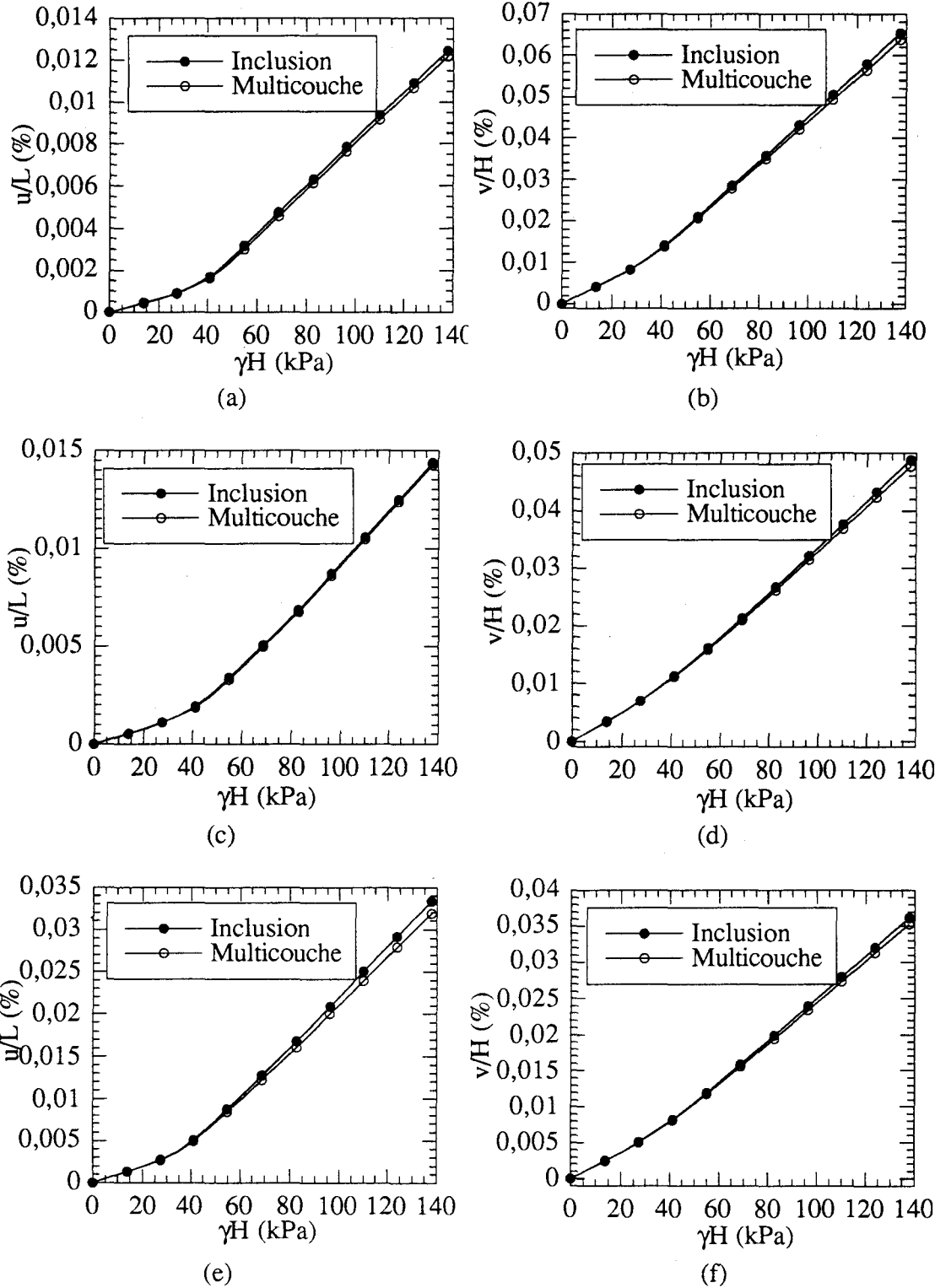


Figure 2.5 : Comparaison des deux modèles sur un massif du sol soumis à son poids propre (Jeu de paramètres A)

(a) et (b) Déplacement au point D

(c) et (d) Déplacement au point A

(e) et (f) Déplacement au point C

Résultats avec le jeu de paramètres B

Les résultats obtenus avec le jeu de paramètres B (épaisseur élevée de la couche représentant l'inclusion) sont donnés dans les figures 2.6a-f. La comparaison des résultats obtenus montre un faible écart sur le déplacement horizontal et un écart moyen sur le déplacement vertical. On note que le modèle multicouche donne une surestimation de la rigidité, ceci peut être attribué à la rigidité supplémentaire apportée dans la direction verticale.

Dans le tableau 2.7, on donne les valeurs numériques des déplacements aux points D, A et C à la fin du chargement. On note un écart de l'ordre de 12% sur le déplacement horizontal du point C et de l'ordre de 27% sur le déplacement vertical du point D.

Déplacement (mm)	Horizontal du point D	Vertical du point D	Horizontal du point A	Vertical du point A	Horizontal du point C	Vertical du point C
Multicouche	1,179	3,469	1,360	2,533	2,957	1,874
Inclusion	1,245	4,574	1,439	3,417	3,338	2,529

Tableau 2.7: Comparaison des déplacements obtenus avec les deux modèles :
massif soumis à son poids propre (Jeu de paramètres B)

Ces résultats permettent, d'une part, de vérifier le modèle développé pour les matériaux renforcés par inclusions, et, d'autre part, de montrer que le modèle multicouche peut être utilisé pour les matériaux renforcés par des inclusions en faisant tendre l'épaisseur d'un constituant vers zéro.

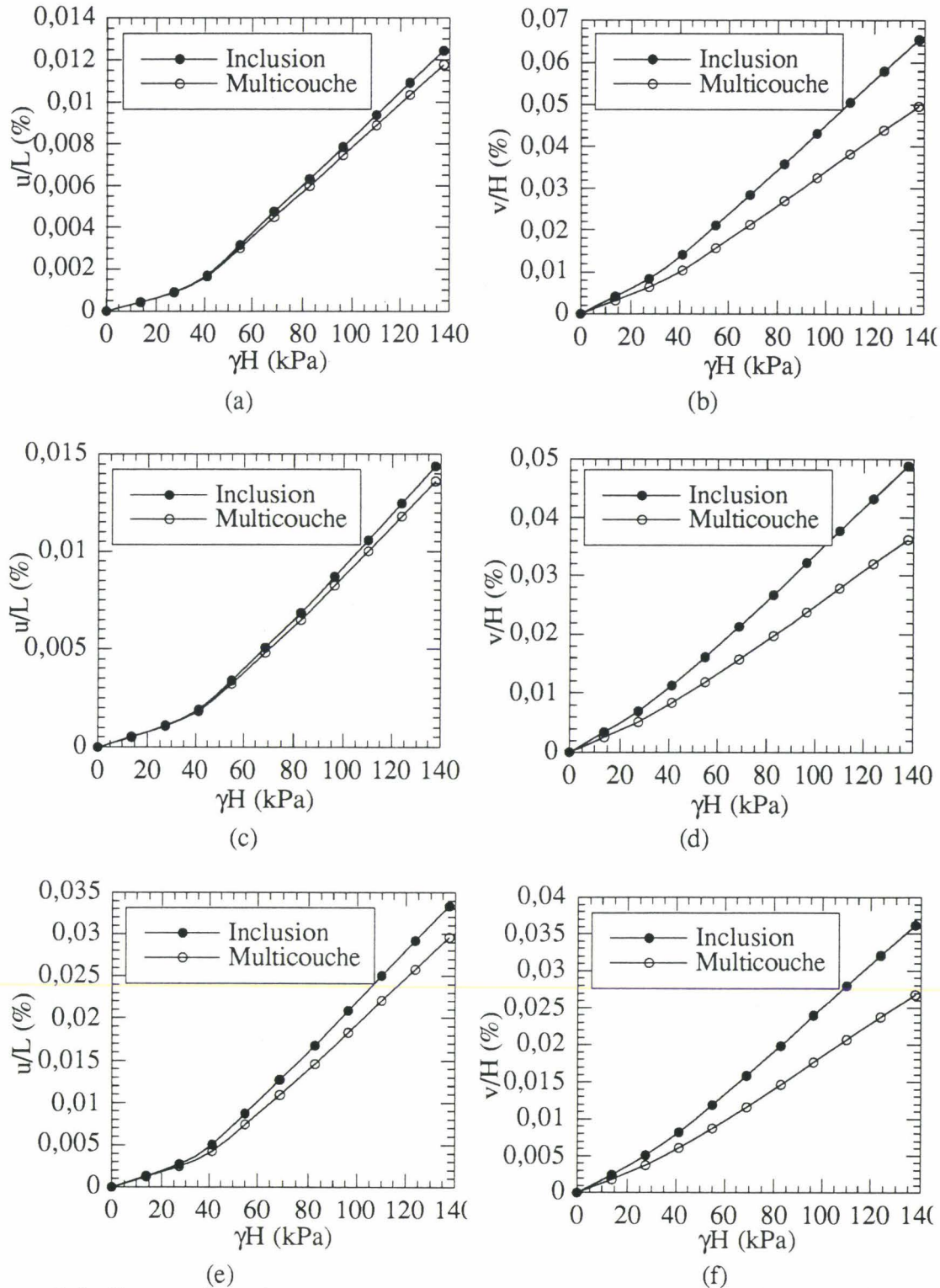


Figure 2.6 : Comparaison des deux modèles sur un massif du sol soumis à son poids propre (Jeu de paramètres B)

(a) et (b) Déplacement au point D
(c) et (d) Déplacement au point A
(e) et (f) Déplacement au point C

2.3.3 Massif de sol soumis à un chargement surfacique sur une partie de la surface

Description de l'exemple

Dans cet exemple, on applique un chargement surfacique sur une partie de la surface du massif (segment OD, figure 2.4). Ce chargement est appliqué en considérant un préchargement du massif par son poids propre (contraintes obtenues dans l'exemple précédent). Les comparaisons ont été effectuées avec les jeux de paramètres A et B donnés dans les tableaux 2.2 et 2.5.

Résultats obtenus

Les résultats obtenus avec le jeu de paramètres A sont donnés dans les figures 2.7a-f. Pour les déplacements verticaux et horizontaux, on note un très bon accord au début du chargement (jusqu'à $q = 60$ kPa), mais par la suite on note un écart qui s'amplifie avec le chargement. Il est à noter que le déplacement horizontal du point D reste faible par rapport au déplacement vertical (de l'ordre de 2.5% du déplacement vertical). Les valeurs des déplacements obtenues pour un chargement $q = 60$ kPa sont données dans le tableau 2.8. On note que l'écart entre les deux modèles est de l'ordre de 2% sur le déplacement vertical et de 1% sur le déplacement horizontal.

Déplacement (mm)	Horizontal du point D	Vertical du point D	Horizontal du point A	Vertical du point A	Horizontal du point C	Vertical du point C
Multicouche	0,119	4,669	1,098	-0,865	3,678	-0,644
Inclusion	0,120	4,732	1,109	-0,816	3,669	-0,613

Tableau 2.8: Comparaison des déplacements obtenus avec les deux modèles : massif soumis à un chargement surfacique $q = 60$ kPa (Jeu de paramètres A)

Les résultats obtenus avec le jeu de paramètres B sont donnés dans les figures 2.8a-d. Pour les déplacements des différents points, on note un écart important entre les deux modèles avec une surestimation de la rigidité verticale du massif et une sous-estimation de la rigidité dans la direction de l'inclusion. Les valeurs des déplacements obtenues pour un chargement $q = 60$ kPa sont données dans le tableau 2.9. On note que l'écart entre les deux modèles est de l'ordre de 28% sur le déplacement vertical et de 11% sur le déplacement horizontal.

Déplacement (mm)	Horizontal du point D	Vertical du point D	Horizontal du point A	Vertical du point A	Horizontal du point C	Vertical du point C
Multicouche	0,311	3,541	1,237	-0,713	3,280	-0,528
Inclusion	0,120	4,732	1,109	-0,816	3,669	-0,613

Tableau 2.9: Comparaison des déplacements obtenus avec les deux modèles : massif soumis à un chargement surfacique $q = 60$ kPa (Jeu de paramètres B)

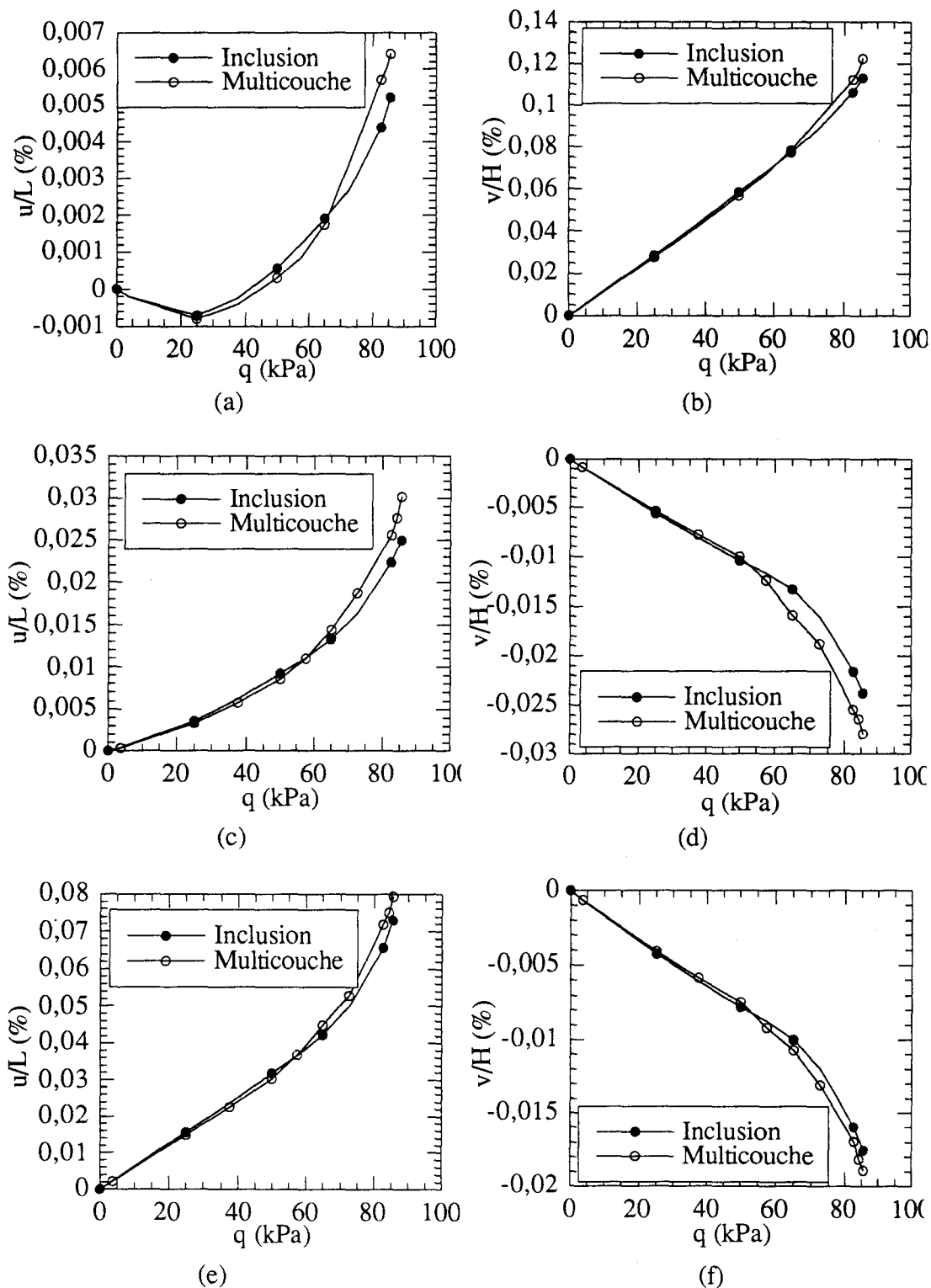


Figure 2.7 : Comparaison des deux modèles sur un massif du sol soumis à un chargement surfacique (Jeu de paramètres A)

(a) et (b) Déplacement au point D
 (c) et (d) Déplacement au point A
 (e) et (f) Déplacement au point C

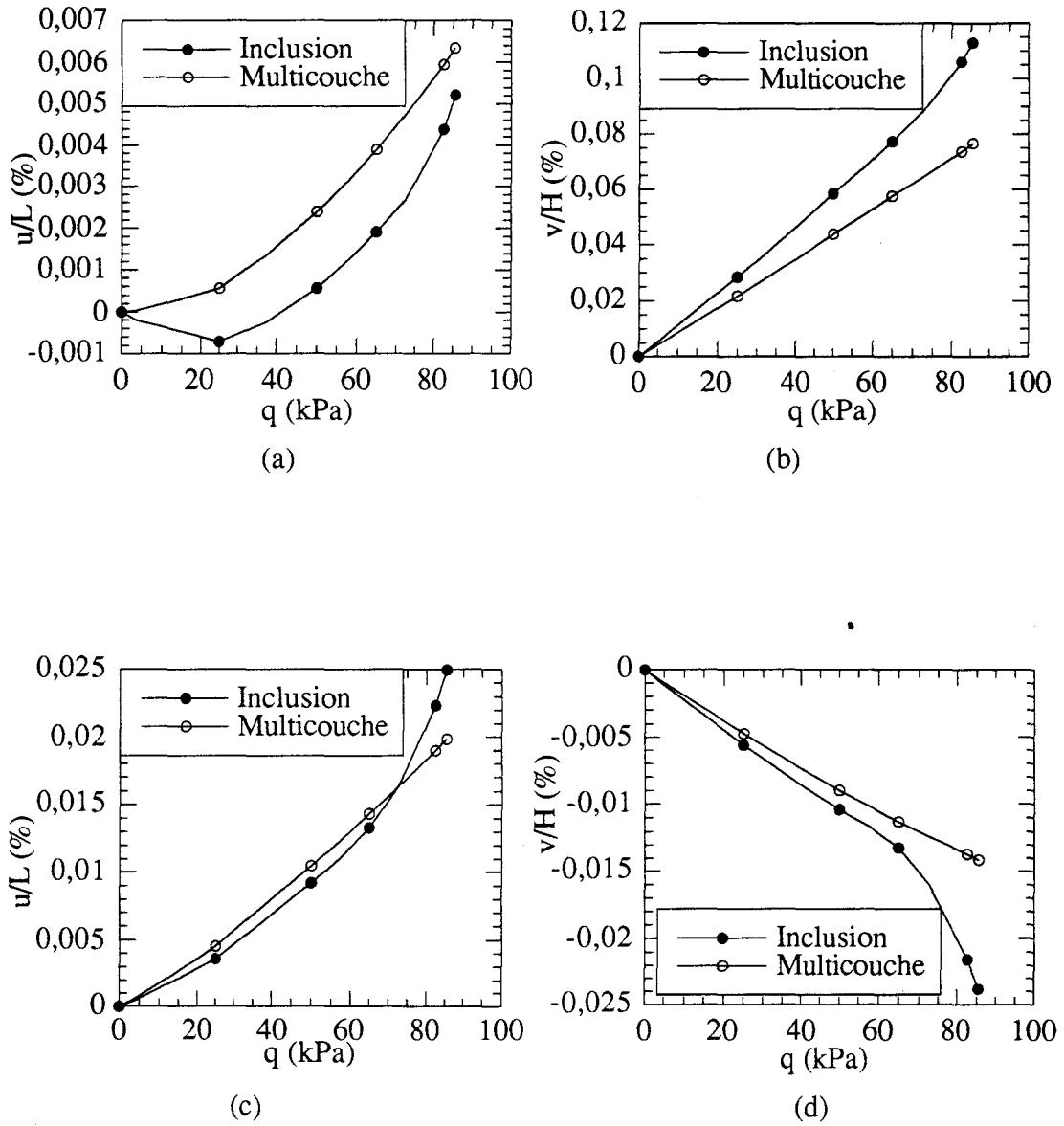


Figure 2.8 : Comparaison des deux modèles sur un massif du sol soumis à un chargement surfacique (Jeu de paramètres B)

(a) et (b) Déplacement au point D
(c) et (d) Déplacement au point A

2.4 Application à la détermination de la hauteur critique d'un mur en terre armée

Dans cette section, on applique le modèle développé à la détermination de la hauteur critique d'un mur en terre armée. Cette détermination a été effectuée sur le massif de sol présenté dans la figure 2.4 avec les caractéristiques données dans les tableaux 2.4a et 2.4b. Pour déterminer la hauteur critique, nous avons effectué des calculs pour différentes valeurs de la hauteur du mur en supposant que ce mur est soumis uniquement à son poids propre.

Les résultats obtenus sont donnés dans la figure 2.9. Ces résultats montrent la variation du déplacement vertical à l'extrémité supérieure du mur avec l'augmentation de la hauteur de ce mur. On note que ce déplacement croît avec la hauteur d'une manière régulière jusqu'à une hauteur $H = 15\text{m}$, ensuite on note une brusque augmentation de ce déplacement avec la hauteur. Pour une hauteur $H = 21\text{m}$, on obtient un déplacement de l'ordre de 5% de la hauteur du mur, pour une hauteur $H = 22\text{m}$, le calcul diverge, ce qui signifie que la hauteur critique est comprise entre 21 et 22m.

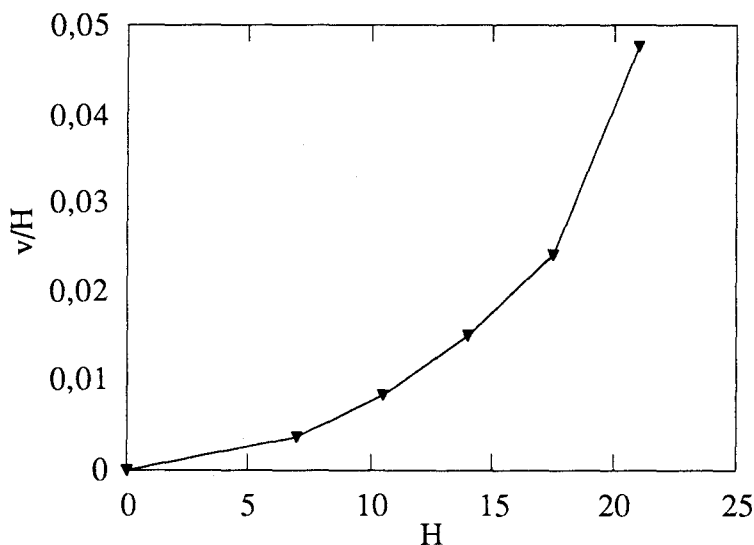


Figure 2.9 : Détermination de la hauteur critique d'un mur en terre armée

Afin de vérifier ce résultat, on propose de le comparer avec l'expression proposée par Siad (1987) à partir du théorème d'analyse limite:

$$H_c = 1,97 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \frac{k_0}{\gamma}$$

En reportant les valeurs numériques de notre exemple ($k_0=72 \text{ kN/m}$, $\gamma=20 \text{ kN/m}^3$), on obtient $H_c=21,6$ ce qui est en très bon accord avec notre résultat.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté un modèle macroscopique pour les matériaux à structure périodique renforcés par des inclusions travaillant en traction - compression en supposant que les matériaux constitutifs sont dotés d'un comportement élastoplastique.

L'intégration numérique de ce modèle dans un code de calcul est très simple, car les déformations macroscopiques dans la matrice et l'inclusion s'expriment uniquement en fonction des déformations macroscopiques.

Le modèle développé a été confronté, sur différents exemples, au modèle macroscopique développé au chapitre précédent. Les résultats obtenus ont montré un bon accord entre les deux modèles quand l'épaisseur d'une couche tend vers zéro (de l'ordre de 1%). Pour des épaisseurs élevées l'écart entre les deux modélisations est significatif.

Le modèle a été utilisé pour déterminer la hauteur critique d'un mur en terre armée. La détermination a été effectuée par simulation numérique d'un mur soumis à son poids propre en faisant augmenter sa hauteur. La hauteur critique obtenue est en bon accord avec l'expression proposée par Siad (1987) en utilisant le théorème d'analyse limite.

Chapitre 3

Modèle macroscopique pour les matériaux multicouches à l'interface imparfaite

Dans ce chapitre on présente la formulation d'un modèle macroscopique pour les matériaux multicouches ayant un comportement élastoplastique en prenant en compte la possibilité d'un glissement à l'interface. Après une présentation de la formulation de ce modèle, on décrit son intégration numérique et on donne son application à l'étude de différents exemples.

3.1 Introduction

Dans le premier chapitre de ce travail nous avons présenté un modèle macroscopique pour les matériaux multicouches ayant un comportement élastoplastique en supposant une adhérence parfaite à l'interface entre les constituants. Or, dans certains types de matériaux multicouches, on assiste généralement à une concentration des contraintes au niveau de l'interface qui peut donner lieu à des glissements modifiant ainsi d'une manière sensible le comportement macroscopique de ces matériaux tant au niveau de la rigidité que de la capacité de résistance. C'est le cas de la terre armée, où la rupture se produit généralement par deux mécanismes : par défaut d'adhérence entre les armatures et le sol qui donne lieu à des glissements ou par cassure des armatures.

Dans ce chapitre, on propose d'introduire dans le modèle macroscopique présenté dans le premier chapitre la possibilité d'un glissement au niveau de l'interface. Du fait que les applications recherchées visent le calcul des ouvrages comme la terre armée, on suppose que le contact entre les constituants est toujours assuré (pas de possibilité de décollement).

3.2 Formulation du modèle

3.2.1 Présentation de la cellule de base

La figure 3.1 illustre la cellule de base d'un matériau multicouche. Elle est constituée de deux matériaux qui occupent respectivement les volumes Y^1 et Y^2 avec des proportions volumiques W^1 et W^2 . On désigne par Γ_{int} l'interface entre les deux matériaux et par n_{int} la normale à l'interface dirigée du domaine Y^1 vers Y^2 . La liaison imparfaite au niveau de cette interface implique l'existence d'un champ de déplacement qui peut être discontinu $u(y)$. On désigne par $u^1(y)$ et $u^2(y)$, les champs de déplacement respectivement dans les sous domaines Y^1 et Y^2 . On associe à ces champs les tenseurs de contraintes microscopiques $\sigma^1(y)$ et $\sigma^2(y)$.

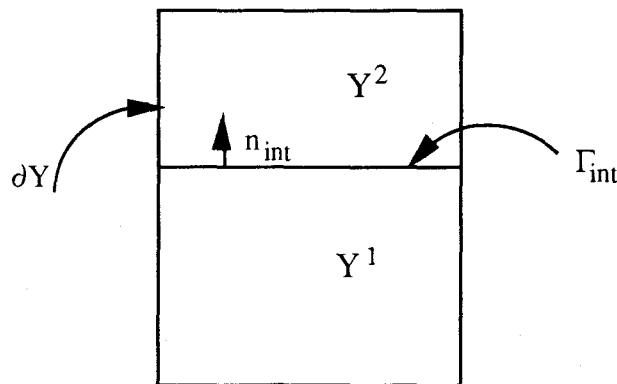


Figure 3.1 : Cellule de base Y

3.2.2 Comportement microscopique

On suppose que le comportement des deux constituants est décrit par un modèle élastique-parfaitement plastique avec une règle d'écoulement non associée. Ce comportement est défini par les tenseurs d'élasticité (a^i , $i=1,2$), les fonctions de charges ($f^i(\sigma)$, $i = 1,2$) et les potentiels de plasticité ($g^i(\sigma)$, $i = 1,2$).

La zone d'interface est généralement soumise à des forts cisaillements. Le comportement de cette zone peut être décrit par deux approches. La première approche consiste à modéliser cette zone par une couche mince dotée d'un comportement particulier qui permet de prendre en compte l'existence d'un fort cisaillement (Desai 1982, Desai et al 1988). Cette approche présente deux difficultés : (i) elle nécessite le développement d'un modèle particulier pour la zone d'interface et (ii) elle n'autorise pas de glissements importants. La seconde approche consiste à modéliser l'interface par une couche d'épaisseur nulle (surface) autorisant une discontinuité du déplacement tangentiel au passage de cette surface. Cette approche a l'avantage d'être simple à mettre en oeuvre sans limitation des valeurs des glissements. Elle a été adoptée dans le développement de notre modèle.

La discontinuité de déplacement à l'interface est désigné par le vecteur :

$$\Delta u_t = u_t^2 - u_t^1 \quad (3.1)$$

Compte tenu de la géométrie de la cellule de base ce vecteur a deux composantes non nulles. Dans le repère (y_1, y_2, y_3) ce vecteur s'écrit sous la forme :

$$\Delta u_t = \begin{pmatrix} u_1^2 - u_1^1 \\ 0 \\ u_3^2 - u_3^1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Le vecteur de contraintes à l'interface (σ_{int}) peut être décomposée sous la forme :

$$\sigma_{int} = \tau_{int} + (\sigma_n)_{int}$$

τ_{int} et $(\sigma_n)_{int}$ désignent respectivement les composantes de cisaillement et normale du vecteur de contraintes. Dans le repère (y_1, y_2, y_3), elles s'expriment sous la forme :

$$\tau_{int} = \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ 0 \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (\sigma_n)_{int} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Le comportement de l'interface est supposé obéir à une loi élastoplastique non associée. La discontinuité de déplacement est composée d'une partie élastique (Δu_t^e) et d'une partie plastique (Δu_t^p):

$$\Delta u_t = \Delta u_t^e + \Delta u_t^p \quad (3.4)$$

On suppose que la partie élastique du déplacement relatif est liée au vecteur de cisaillement (τ_{int}) par la relation

$$\tau_{int} = K_{int} \Delta u_t^e \quad (3.5)$$

K_{int} désigne la matrice de rigidité de l'interface qui s'écrit sous la forme :

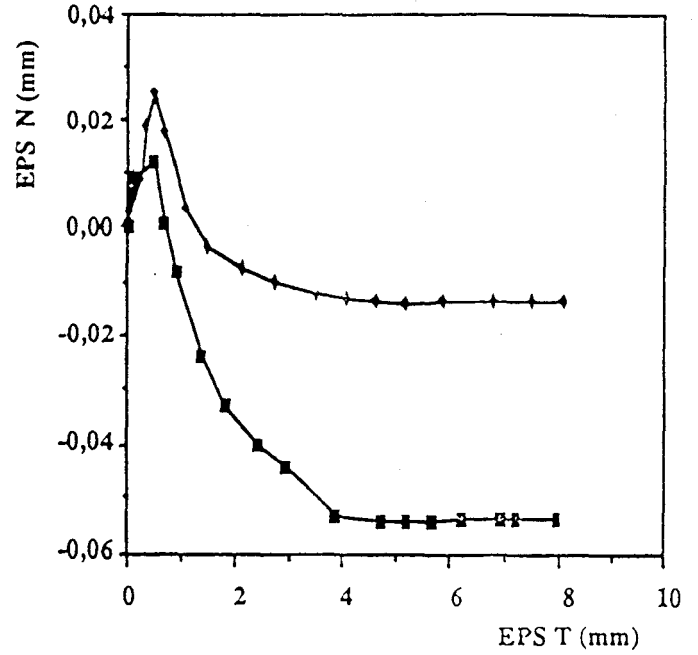
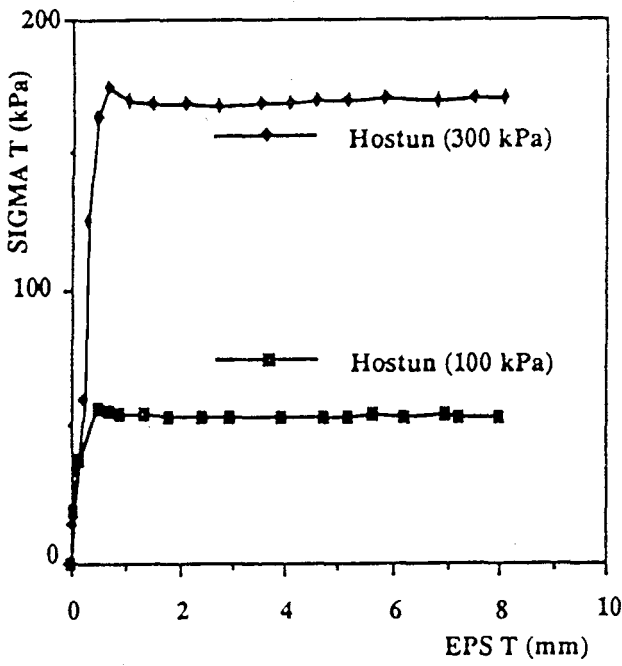
$$K_{int} = \begin{pmatrix} E_{int} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{int} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

E_{int} est la rigidité tangentielle élastique de l'interface.

La partie plastique du déplacement relatif est supposée obéir au critère de Mohr-Coulomb non associé. La fonction de charge et le potentiel de plasticité sont respectivement donnés par :

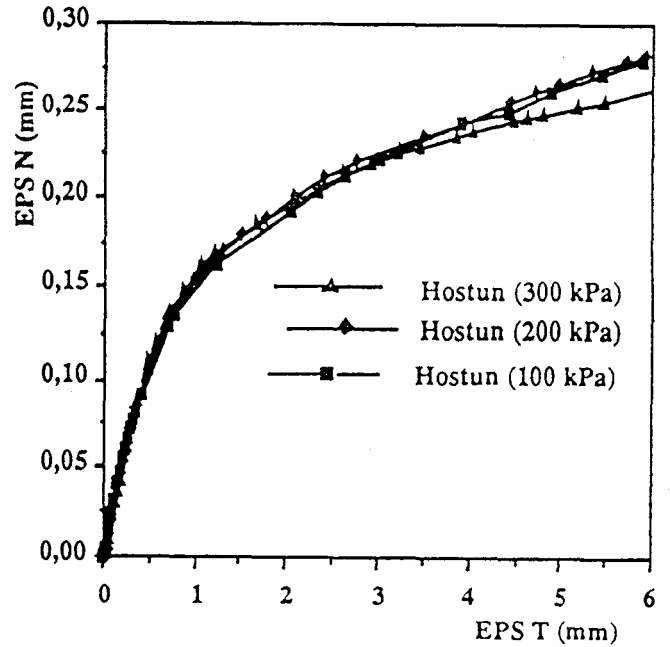
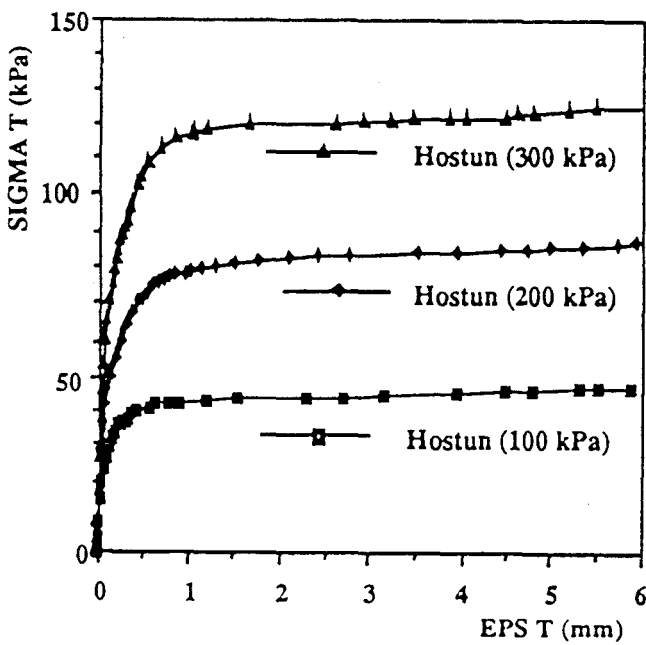
$$\begin{aligned} f_{int}((\sigma_n)_{int}, \tau_{int}) &= |\tau_{int}| + (\sigma_n)_{int} \operatorname{tg} \Phi_{int} - C_{int} \\ g_{int}((\sigma_n)_{int}, \tau_{int}) &= |\tau_{int}| + (\sigma_n)_{int} \operatorname{tg} \Psi_{int} \end{aligned} \quad (3.7)$$

où Φ_{int} , C_{int} et Ψ_{int} sont respectivement l'angle de frottement, la cohésion et l'angle de dilatanse de l'interface. Dans le cas d'un matériau comme la terre armée, ces paramètres peuvent être déterminés à partir des essais de cisaillement direct à contrainte normale constante avec mesure du déplacement normal. Les figures 3.2 et 3.3 montrent les résultats des essais d'interface types réalisés à la boîte de cisaillement entre un sable et une plaque d'acier pour différentes valeurs de la contrainte normale (Rézaie 1994).



(a) (b)
Figure 3.2 : Essai de cisaillement à contrainte normale constante
Surface lisse, sable d'HOSTUN dense ($D_r=90\%$)

(a) Evolution de la contrainte tangentielle
(b) Evolution du déplacement normal
(Rézaie 1994)



(a) (b)
Figure 3.3 : Essai de cisaillement à contrainte normale constante
Surface lisse, sable d'HOSTUN lâche ($D_r=15\%$)

(a) Evolution de la contrainte tangentielle
(b) Evolution du déplacement normal
(Rézaie 1994)

3.2.3 Grandeurs macroscopiques

Dans le cas d'une discontinuité du déplacement à l'interface, on doit prendre en compte la contribution de cette discontinuité à la déformation macroscopique. En effet, dans ce cas le tenseur de déformations macroscopiques est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 E &= \int_Y e(u) \, dy \\
 &= \int_{\partial Y} u \otimes n \, d\Gamma \\
 &= \int_{\partial Y_1} u \otimes n \, d\Gamma + \int_{\partial Y_2} u \otimes n \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{int}} \Delta u \otimes n_{int} \, d\Gamma \quad (3.8) \\
 &= \int_{Y_1} e(u) \, dy + \int_{Y_2} e(u) \, dy + \int_{\Gamma_{int}} \Delta u \otimes n_{int} \, d\Gamma
 \end{aligned}$$

n désigne la normale unitaire extérieure au domaine ∂Y ; le symbole $\otimes$ désigne le produit tensoriel de deux vecteurs :

$$(u \otimes v)_{ij} = \frac{1}{2}(u_i \cdot v_j + u_j \cdot v_i)$$

puisque le déplacement normal u_n est continu sur Γ_{int} , la relation (3.8) devient :

$$E = \int_{Y_1} e(u) \, dy + \int_{Y_2} e(u) \, dy + \int_{\Gamma_{int}} \Delta u_t \otimes n_{int} \, d\Gamma \quad (3.9)$$

Cette relation montre que la déformation macroscopique résulte des déformations microscopiques dans les deux constituants et de la discontinuité du déplacement tangentiel à l'interface.

Dans le cas d'un matériau multicouche, on a montré que les grandeurs microscopiques sont constantes dans chaque constituant. Ceci permet d'écrire la relation 3.9 sous la forme :

$$E = \sum_{i=1}^2 W_i \cdot e^i + \Delta u_t \otimes n_{int} \quad (3.10)$$

3.2.4 Calcul des contraintes macroscopiques

En se basant sur la section (1.2.1), on peut affirmer que des tenseurs de contraintes et de déformations sont constants dans chaque constituant, ce qui permet d'écrire le tenseur de contraintes macroscopiques par la moyenne des tenseurs contraintes microscopiques :

$$\Sigma = \sum_{i=1}^2 W^i \cdot \sigma^i \quad (3.11)$$

Les contraintes microscopiques sont données d'après la loi de comportement des constituants par l'expression :

$$\sigma^i = a^i : (e - e^p)^i \quad (3.12)$$

Au niveau de l'interface, on peut écrire les conditions suivantes :

(i) continuité du vecteur de contraintes qui donne :

$$\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^2 \quad (i, j) = (1, 2), (2, 2), (2, 3) \quad (3.13)$$

(ii) comportement de l'interface :

$$\tau_{int} = K_{int} (\Delta u_t - \Delta u_t^p) \quad (3.14)$$

(iii) l'uniformité des contraintes de cisaillement au niveau de l'interface (σ_{12}, σ_{23}) permet d'assurer l'uniformité de déplacement tangentiel à l'interface (relation 3.5 et 3.14). Cette uniformité permet d'écrire l'égalité des composantes de déformation :

$$e_{ij}^1 = e_{ij}^2 \quad (i, j) = (1, 1), (1, 3), (3, 3) \quad (3.15)$$

Le système d'équations 3.12 à 3.15 permet de calculer les déformations microscopiques en fonction des déformations macroscopiques, des déformations microscopiques plastiques et du glissement irréversible. On obtient :

$$e^i = C_E^i : E + \sum_{j=1}^2 C_j^i : (e^p)^j + C_{int}^i : \Delta u_t^p \otimes n_{int} \quad (3.16)$$

C_E^i représente le tenseur de concentration de déformations dans le domaine élastique. C_j^i désigne un tenseur d'ordre 4 qui donne le tenseur de déformations dans le matériau i résultant d'une déformation plastique dans le matériau j . C_{int}^i est un tenseur d'ordre 4 qui

donne la contribution d'un glissement irréversible aux déformations microscopiques. Les expressions des tenseurs C_E^i , C_j^i et C_{int}^i sont données par:

$$C_E^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta^i \frac{\Lambda}{\Delta} - \alpha^i & \frac{\beta^i}{\Delta} & \beta^i \frac{\Lambda}{\Delta} - \alpha^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma^i}{\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma^i}{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$C_j^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^i \delta_j^i - \beta^i \frac{W^j \alpha^j}{\Delta} & \delta_j^i - \frac{W^j \beta^i}{\Delta} & \alpha^i \delta_j^i - \beta^i \frac{W^j \alpha^j}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_j^i - \frac{W^j \gamma^i}{\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^i - \frac{W^j \gamma^i}{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$C_{int}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \frac{\gamma^i}{\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \frac{\gamma^i}{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha^i &= \frac{v^i}{1-v^i} & \beta^i &= \frac{(1+v^i)(1-2v^i)}{(1-v^i)EY^i} & \gamma^i &= \frac{1}{G^i} \\ \Lambda &= \sum_i W^i \alpha^i & \Delta &= \sum_i W^i \beta^i & \Gamma &= \sum_i W^i \gamma^i + \frac{1}{E_{int}} & M &= 2 \sum_i \frac{W^i}{\gamma^i} \\ c^i &= \frac{1-(\alpha^i)^2}{\beta^i} & d^i &= \frac{\alpha^i(1-\alpha^i)}{\beta^i} & C &= \sum_i W^i c^i & D &= \sum_i W^i d^i \end{aligned}$$

L'indice supérieur i désigne les quantités relatives au matériau i . E^i , ν^i et G^i désignent respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson et le module de cisaillement du matériau i .

L'expression des contraintes microscopiques peut être obtenue à partir des équations 3.12 et 3.16. On obtient :

$$\sigma^i = a^i : C_E^i : E - \sum_{j=1}^2 a^i : (I\delta_j^i - C_j^i) : (e^P)^j + a^i : C_{int}^i : \Delta u_t^P \otimes n_{int} \quad (3.20)$$

I est le tenseur unitaire et δ_j^i est le symbole de Kronecker.

La relation 3.20 peut être écrite sous la forme :

$$\sigma^i = S_E^i : E - \sum_{j=1}^2 S_j^i : (e^P)^j + S_{int}^i : \Delta u_t^P \otimes n_{int} \quad (3.21)$$

avec :

$$\begin{aligned} S_E^i &= a^i : C_E^i \\ S_j^i &= a^i : (I\delta_j^i - C_j^i) \\ S_{int}^i &= a^i : C_{int}^i \end{aligned} ,$$

En reportant l'équation 3.20 dans l'équation 3.11, on peut exprimer le tenseur de contraintes macroscopiques sous la forme :

$$\Sigma = a^{hom} : E - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 W^i S_j^i : (e^P)^j + S_{int}^i : \Delta u_t^P \otimes n_{int} \quad (3.22)$$

a^{hom} représente le tenseur d'élasticité homogénéisé, son expression est donnée par:

$$a^{hom} = \begin{bmatrix} C + \frac{\Lambda^2}{\Delta} & \frac{\Lambda}{\Delta} & D + \frac{\Lambda^2}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Lambda}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} & \frac{\Lambda}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ D + \frac{\Lambda^2}{\Delta} & \frac{\Lambda}{\Delta} & C + \frac{\Lambda^2}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{M}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

3.3 Intégration numérique

L'intégration du modèle présenté ci-dessus au niveau local est effectuée d'après le schéma numérique présenté dans le premier chapitre (cf. 1.2.2) en prenant en compte la condition d'interface et les expressions données dans les équations 3.20 et 3.22. Pour un incrément de déformations macroscopiques ΔE imposé, on détermine les incréments de contraintes microscopiques dans les deux constituants et dans l'interface en supposant un comportement élastique (équation 3.20 avec $\Delta e^p = \Delta u_t^p = 0$). Ensuite, on évalue les critères de plasticité dans les deux constituants et dans l'interface. Si on note une violation de ces critères, on détermine les déformations plastiques d'après les règles de consistance :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^i}{\partial \sigma} : \Delta \sigma^i &= 0 \\ \frac{\partial f_{\text{int}}}{\partial \sigma} : \Delta \sigma_{\text{int}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

En reportant les expressions 3.14 et 3.20 dans les équations de consistance, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^i}{\partial \sigma} : a^i : \left[\sum_j C_j^i : (\Delta e^p)^j - (\Delta e^p)^i \right] + \frac{\partial f^i}{\partial \sigma} : a^i : C_I^i : \Delta u_t^p \otimes n_{\text{int}} &= - \frac{\partial f^i}{\partial \sigma} : a^i : C_E^i : \Delta E \\ \frac{\partial f_{\text{int}}}{\partial \sigma} : a^i : \left[\sum_j C_j^i : (\Delta e^p)^j - (\Delta e^p)^i \right] + \frac{\partial f_{\text{int}}}{\partial \sigma} : a^i : C_I^i : \Delta u_t^p \otimes n_{\text{int}} &= - \frac{\partial f_{\text{int}}}{\partial \sigma} : a^i : C_E^i : \Delta E \end{aligned} \quad (3.25)$$

Les incréments des déformations plastiques peuvent être exprimés en fonction des multiplicateurs de plasticité sous la forme :

$$\begin{aligned} (\Delta e^p)^i &= (\Delta \lambda)^i \frac{\partial g^i}{\partial \sigma} \\ \Delta u_t^p &= (\Delta \lambda)_{\text{int}} \frac{\partial g_{\text{int}}}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (3.26)$$

En reportant le système d'équations 3.26 dans 3.25, on obtient le système d'équations suivant :

$$[M] \cdot \begin{bmatrix} \Delta \lambda^1 \\ \Delta \lambda^2 \\ \Delta \lambda_{\text{int}} \end{bmatrix} = [m] \quad (3.27)$$

où

$$\begin{cases}
 M_{ij} = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma} : a^i : \left[C_l^i : \frac{\partial g^i}{\partial \sigma} - \frac{\partial g^i}{\partial \sigma} \right] & \text{pour } (i,j) = (1,1) \text{ et } (2,2) \\
 M_{i3} = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma} : a^i : C_l^i : \frac{\partial g_{\text{int}}}{\partial \sigma} \otimes n_{\text{int}} & \text{pour } i = 1, 2, 3 \\
 M_{ij} = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma} : a^i : C_j^i : \frac{\partial g^i}{\partial \sigma} & \text{pour } (i,j) = (1,2) \text{ et } (2,1) \\
 M_{31} = \frac{\partial f_{\text{int}}}{\partial \sigma} \otimes n_{\text{int}} : a^i : \left[C_l^i : \frac{\partial g^i}{\partial \sigma} - \frac{\partial g^i}{\partial \sigma} \right] & i = 1 \\
 M_{32} = \frac{\partial f_{\text{int}}}{\partial \sigma} \otimes n_{\text{int}} : a^i : C_j^i : \frac{\partial g^i}{\partial \sigma} & i = 1 \quad j = 2 \\
 m_i = -\frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : a^i : C_E^i : \Delta E & i = 1, 2 \\
 m_3 = -\frac{\partial f_{\text{int}}}{\partial \sigma} \otimes n_{\text{int}} : a^i : C_E^i : \Delta E
 \end{cases}$$

Connaissant les multiplicateurs de plasticité, on peut calculer les grandeurs microscopiques (déformations plastiques, déformations élastiques et contraintes) et ensuite leurs homologues macroscopiques.

3.4 Réponse d'une cellule de base à des chemins de traction inclinés

3.4.1 Influence de la direction de chargement

Dans cette section, on propose d'étudier la réponse d'une cellule de base à des chemins de traction inclinés en déformations planes (Figure 1.5.a). Les deux matériaux sont supposés obéir au critère de Mohr-Coulomb non - associé écrit en déformations planes. Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la cellule de base et de l'interface sont données dans les tableaux 3.1a et 3.1b.

Matériau	EY (MPa)	ν	W	C (MPa)	ϕ (°)	ψ (°)
1	10500	0,22	0,008	6,0	0,0	0,0
2	150	0,3	0,992	0,0	30,0	30,0

Tableau 3.1a: Caractéristiques mécaniques et géométriques retenues pour étudier la réponse d'une cellule de base à des chemins de traction inclinés

E_{int} (MPa)	C_{int} (MPa)	Φ_{int} (°)	Ψ_{int} (°)
5300	0.0	20	4.0

Tableau 3.1b : Caractéristiques mécaniques de l'interface

Le chargement est appliqué sous forme d'une traction macroscopique dans une direction inclinée d'un angle α par rapport à l'axe y_1 en partant d'un état de contraintes isotrope (-0,05 MPa).

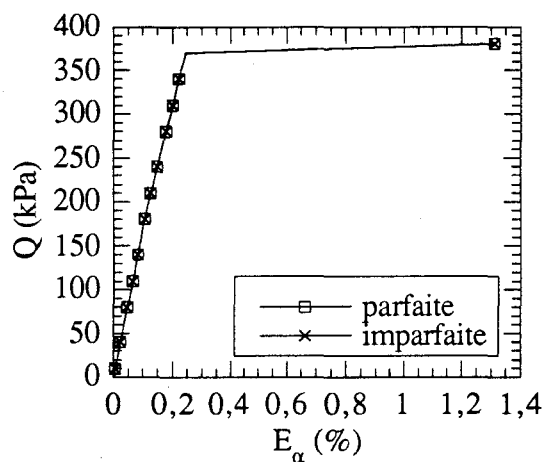
Dans les figures 3.4a-e on présente les résultats des simulations en considérant une interface parfaite et une interface autorisant le glissement (jeu de paramètre 3.1b). Ces résultats sont présentés à travers l'évolution de la contrainte de traction (Q) en fonction de la déformation calculé dans la direction de chargement (E_α).

Une analyse des résultats obtenus montre que :

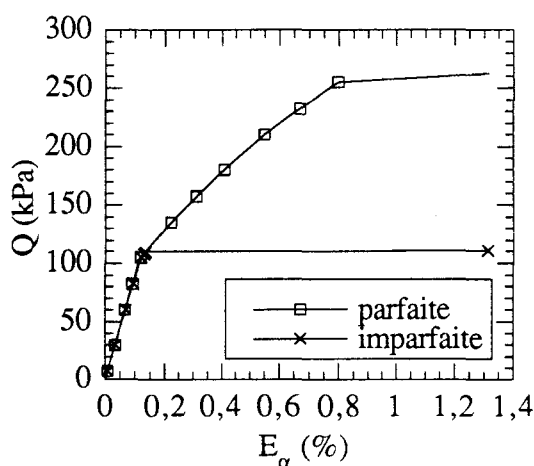
(i) Lorsque le multicouche est sollicité dans les directions $\alpha=0^\circ$ et $\alpha=90^\circ$, on note une coïncidence entre les deux comportements du fait que l'interface n'est pas suffisamment sollicitée dans ces deux cas (figures 3.4a et 3.3e).

(ii) Pour les autres directions ($\alpha = 30^\circ$, 45° et 60°), l'interface induit une réduction importante de la résistance de la cellule de base. En effet, pour les cas ($\alpha = 45$ et 60°), la rupture est obtenue par glissement avant l'apparition de la plasticité dans les constituants. Pour la direction $\alpha = 30^\circ$, le glissement à l'interface coïncide avec la plastification de la matrice.

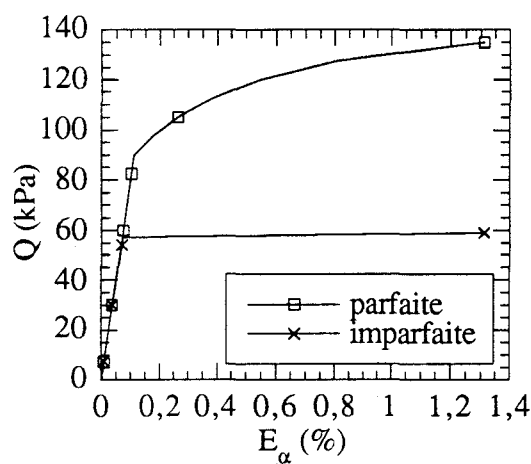
Les figure 3.5a et 3.5b montrent les courbes donnant les variations des limites d'élasticité et de rupture avec l'inclinaison du chargement. On note que la présence de l'interface amplifie l'anisotropie du comportement macroscopique. La résistance maximale est obtenue dans la direction du renforcement ($\alpha = 0$) alors que la résistance minimale est obtenue dans la direction $\alpha = 60^\circ$. Dans la première direction les limites d'élasticité et de rupture sont respectivement de 150 et 380 kPa alors que dans la seconde direction, elles sont égales à 55 kPa.



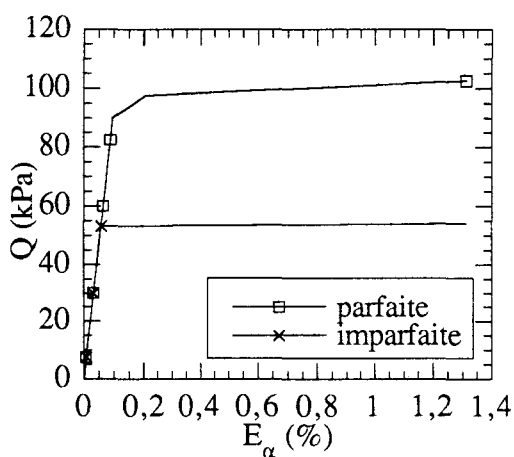
(a)



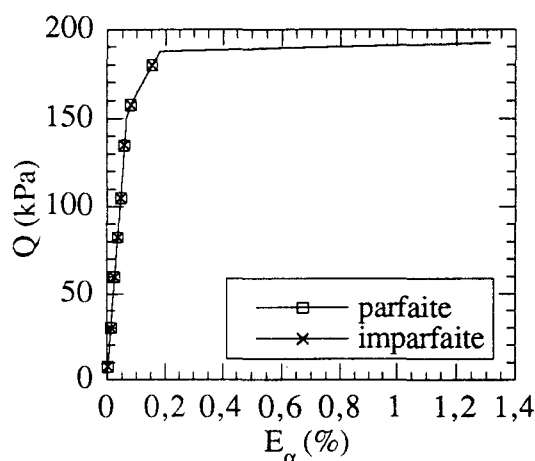
(b)



(c)



(d)



(e)

Figure 3.4 : Réponse d'une cellule de base à un chemin de traction incliné

(a) $\alpha=0^\circ$ (b) $\alpha=30^\circ$ (c) $\alpha=45^\circ$ (d) $\alpha=60^\circ$ (e) $\alpha=90^\circ$

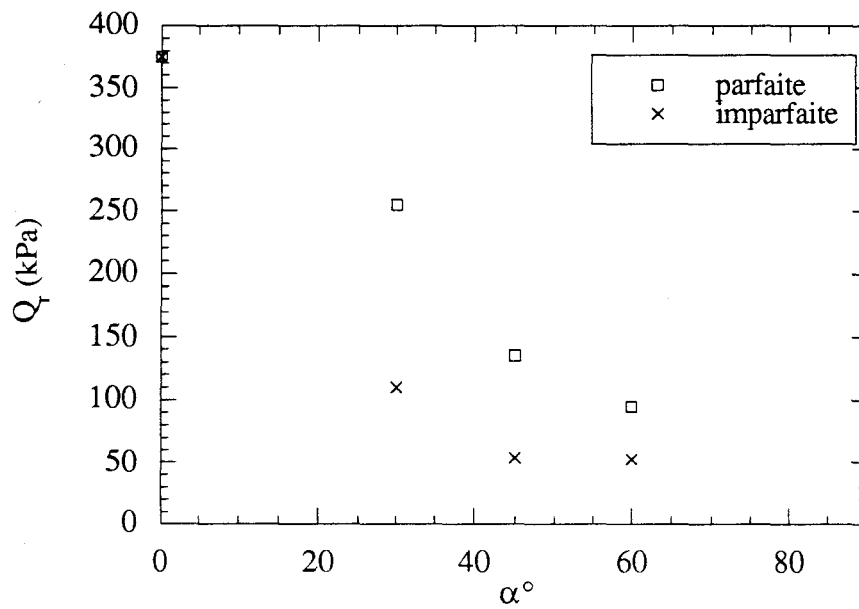
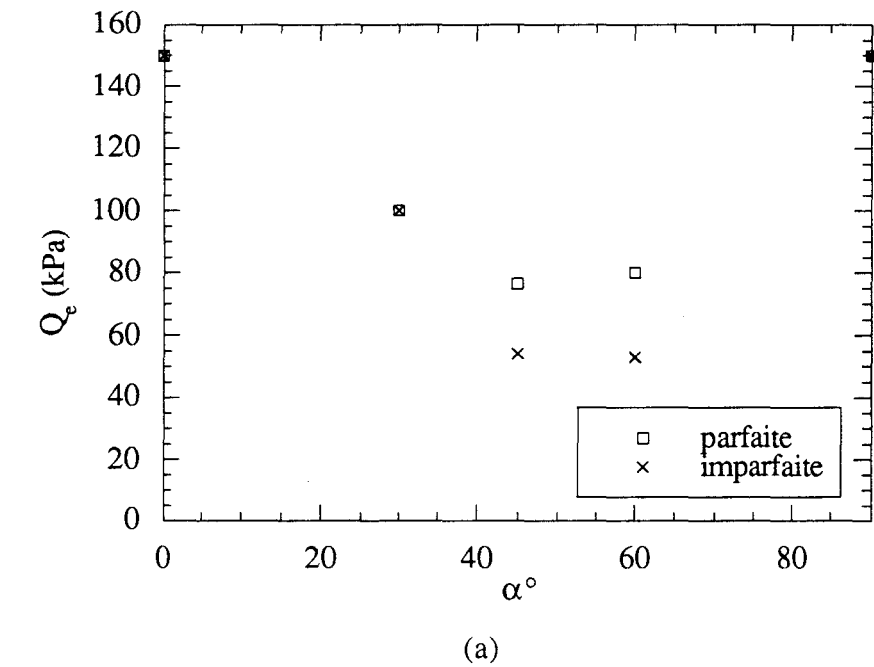


Figure 3.5 : Réponse d'une cellule de base à un chemin de traction incliné : Variation des limites d'élasticité et de rupture avec la direction de chargement
(a) Limite d'élasticité (b) Limite de rupture

3.4.2 Influence des paramètres d'interface sur la réponse de la cellule de base

Dans cette partie, on présente une étude de l'influence des caractéristiques mécaniques de l'interface sur le comportement macroscopique de la cellule de base sous un chemin de traction incliné. L'étude a été réalisée avec le jeu de paramètres de l'exemple précédent (tableaux 3.1a et 3.1b) et pour une direction de chargement faisant un angle $\alpha = 30^\circ$ avec l'axe y_1 . L'étude a concerné l'angle de frottement (Φ_{int}) et l'angle de dilataance (Ψ_{int}).

Les résultats de cette étude sont illustrés dans les figures 3.6a-c. On note que la diminution de l'angle de frottement induit une réduction importante de la résistance de la cellule. En effet, dans la direction étudiée, lorsque l'angle de frottement de l'interface est élevée (25°), la présence de l'interface n'affecte pas le comportement de la cellule, alors que pour des angles de frottements plus faibles (20° et 15°), l'interface réduit d'une manière très importante la résistance de la cellule de base : la résistance de la cellule avec une interface parfaite est de 250 kPa; avec une interface imparfaite, elle passe de 110 kPa à 60 kPa lorsque l'angle de frottement de l'interface passe à 20° à 15° .

Les figures 3.6b et 3.6c montrent l'influence de l'angle de dilataance sur la réponse de la cellule de base à un chemin de traction. On note que, ce paramètre n'a aucune influence sur la courbe traction - déformation. Par contre, il affecte la déformation volumique qui s'amplifie avec l'angle de dilataance.

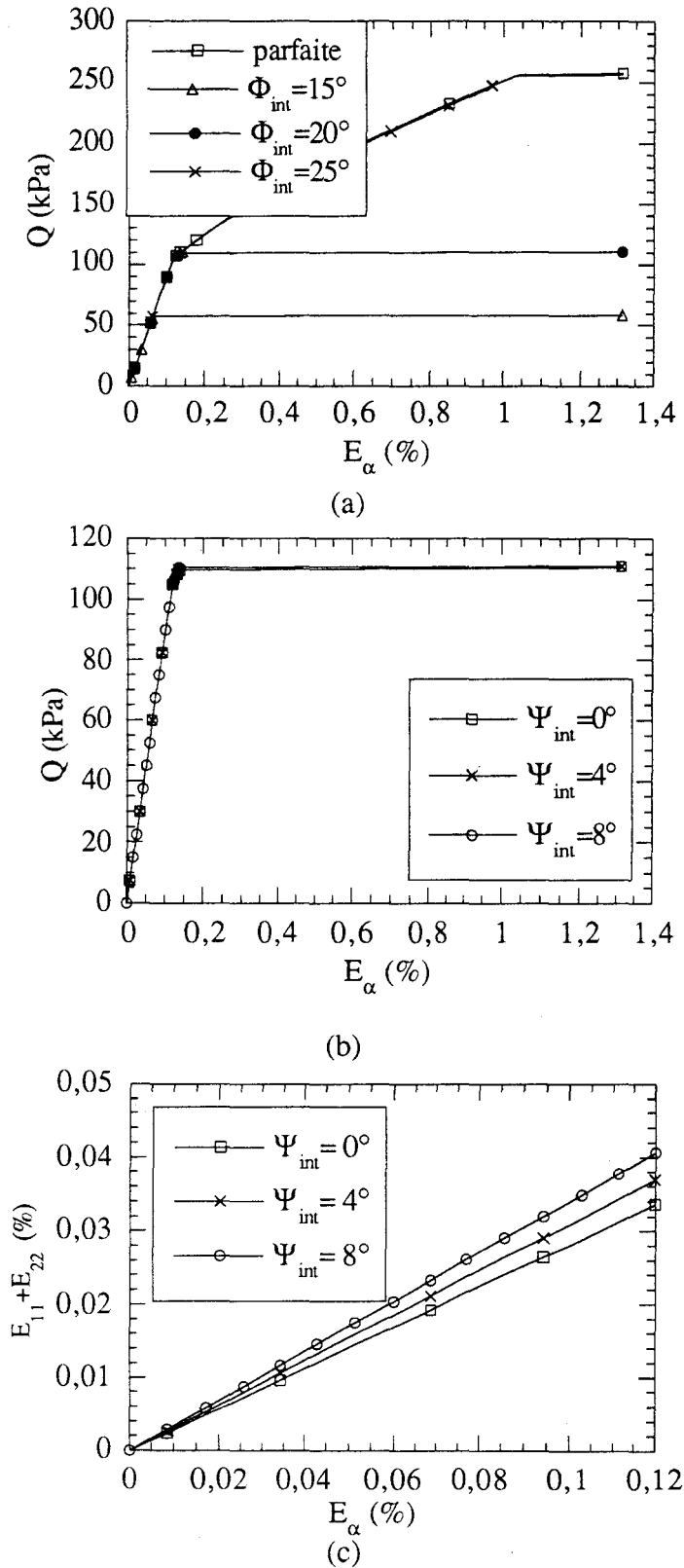


Figure 3-6 : Influence des paramètres de l'interface sur la réponse d'une cellule de base à un chemin de traction incliné ($\alpha=30^\circ$)

(a) Effet du paramètre Φ_{int}
 (b) et (c) Effet du paramètre Ψ_{int}

3. 4. Application à l'étude des ouvrages en matériaux multicouches

3.4.1 Présentation des exemples

Dans cette section, on propose d'étudier l'influence de la prise en compte de l'interface sur le comportement des ouvrages étudiés dans les deux premiers chapitres. Les figures 3.7a-c illustrent les cas retenus. Ils concernent l'étude du comportement d'un massif en matériaux multicouches soumis à deux types de chargement (force volumique et chargement surfacique) et la détermination de la hauteur critique d'un mur en terre armée. Les tests ont été effectués avec le rapport d'échelle $\varepsilon = 0,125$.

Les simulations ont été effectuées en déformations planes en utilisant le critère de Mohr - Coulomb non associé. Les caractéristiques mécaniques des deux constituants et de l'interface sont données dans les tableaux 3.2a et 3.2b. Pour étudier l'influence de l'angle de frottement de l'interface sur le comportement macroscopique, nous avons considéré deux valeurs pour cet angle (10° et 20°).

Pour chaque cas de chargement, on donne une confrontation entre les résultats de simulations obtenus avec une interface parfaite et une interface autorisant le glissement. Cette comparaison permet d'analyser l'influence des propriétés de l'interface sur le comportement des ouvrages étudiés.

Les calculs par élément finis présentés ont été effectués avec les maillages présentés dans le premier chapitre (cf. 1.3.3).

Matériau	EY (MPa)	ν	W	C (MPa)	ϕ ($^\circ$)	ψ ($^\circ$)
1	300	0,22	0,25	0,4	0,0	0,0
2	150	0,3	0,75	0,005	30,0	15,0

(a) Caractéristiques des constituants

E_{int} (MPa)	C_{int} (MPa)	Φ_{int} ($^\circ$)	Ψ_{int} ($^\circ$)
225	0.0	10 et 20	4.0

(b): Paramètres de l'interface

Tableau 3.2 : Jeu de paramètres retenu pour l'étude d'un massif soumis à un chargement volumique et surfacique

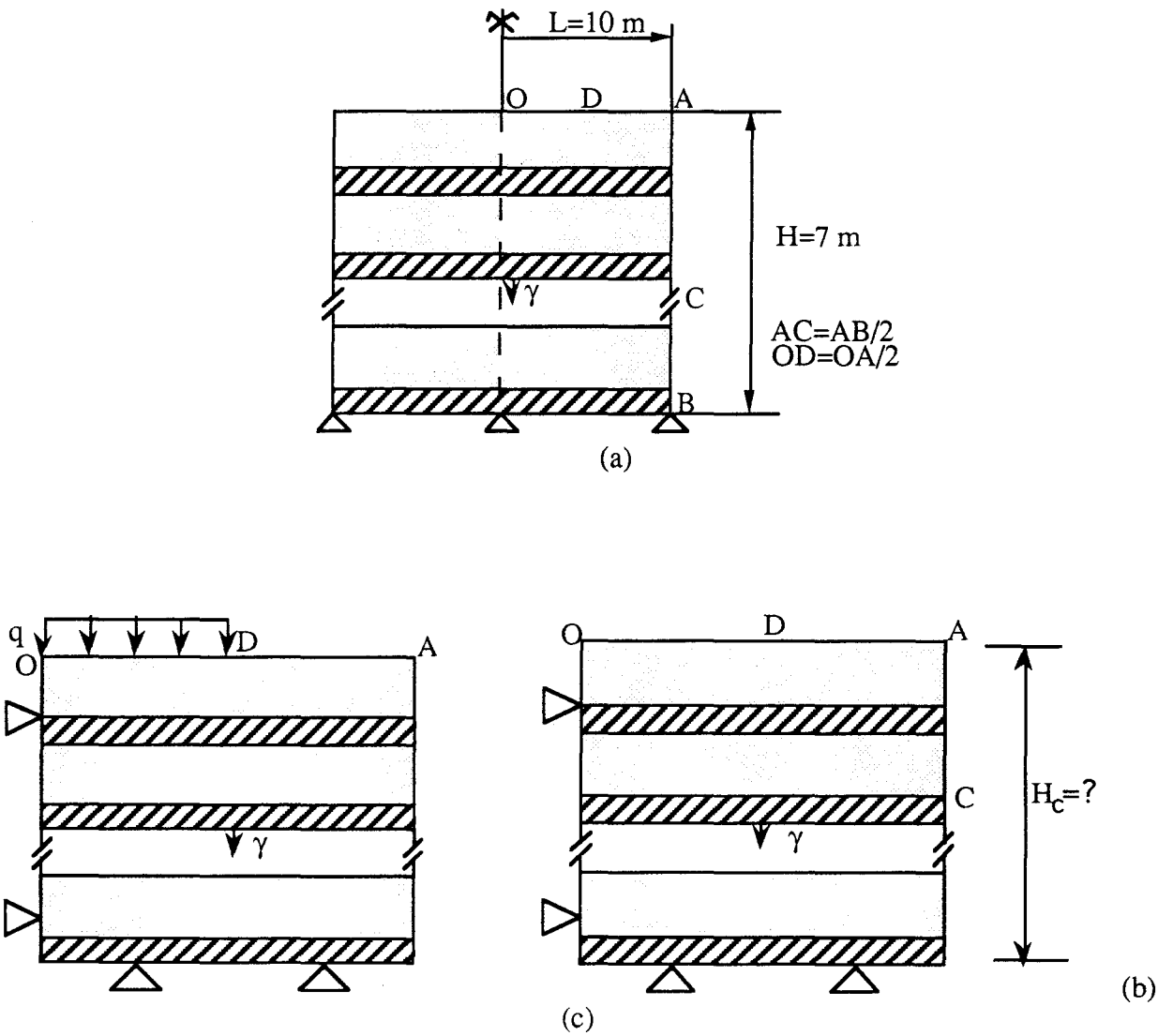
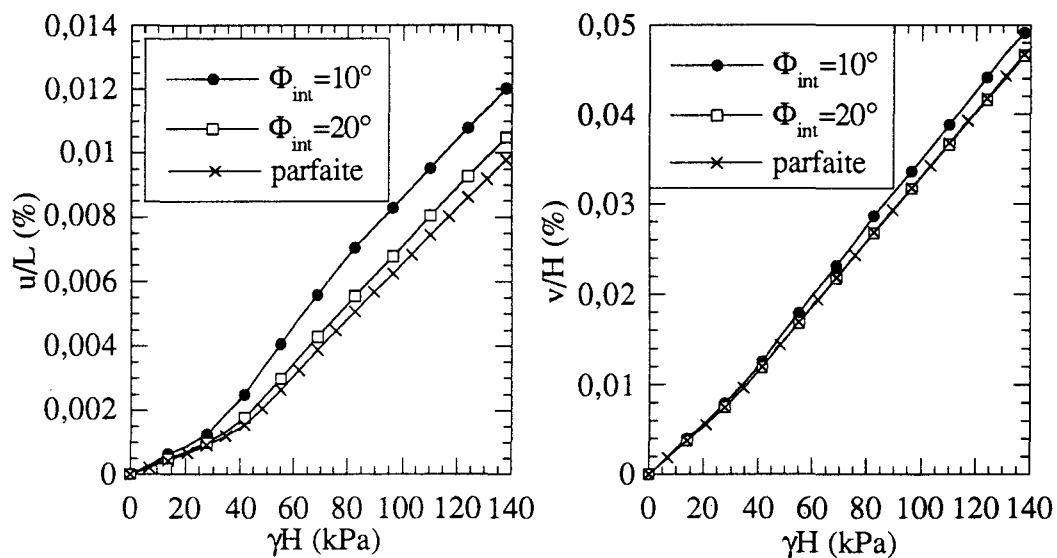


Figure 3.7 : Configuration étudiée avec le modèle macroscopique

3.4.2 Massif soumis à un chargement volumique

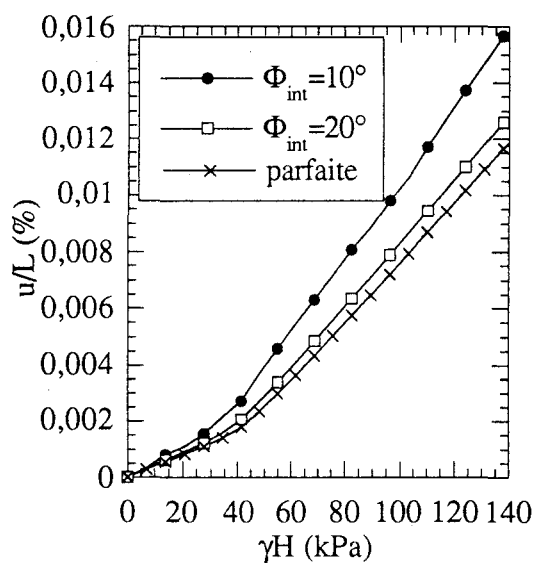
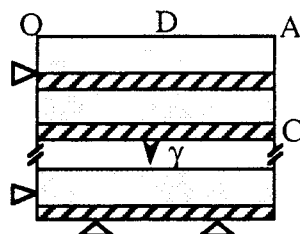
Dans cet exemple, on considère un massif soumis à une force volumique représentant le poids propre, la partie latérale du massif est supposée libre. Les figures 3.8a-d montrent l'évolution des déplacements dans des points significatifs du massif au cours du chargement. On note que pour un angle de frottement d'interface élevé ($\Phi_{\text{int}}=20^\circ$, soit deux tiers de l'angle de frottement de la matrice), la présence de l'interface n'affecte que légèrement le comportement de l'ouvrage, même dans le domaine des déformations plastiques (à partir de $\gamma H = 30$ kPa). Par contre quand l'angle de frottement de l'interface est faible ($\Phi_{\text{int}}=10^\circ$, soit un tiers de l'angle de frottement de la matrice), la présence de l'interface affecte le comportement de l'ouvrage en réduisant sa rigidité dans la direction latérale : en fin du chargement ($\gamma H = 140$ kPa), l'écart sur le déplacement latéral au coin supérieur du massif (point A) est de l'ordre de 25%.

La figure 3.9 montre le développement de la plastification dans le massif au cours de l'application du chargement volumique. On peut noter qu'au cours de l'application de ce chargement, seul le matériau frottant (représentant le sol dans le cas d'un mur en terre armée) se plastifie dans le cas d'une interface parfaite et que cette plastification débute dans le coin inférieure du massif et ensuite s'étend pour couvrir presque la totalité du massif à la fin du chargement volumique.

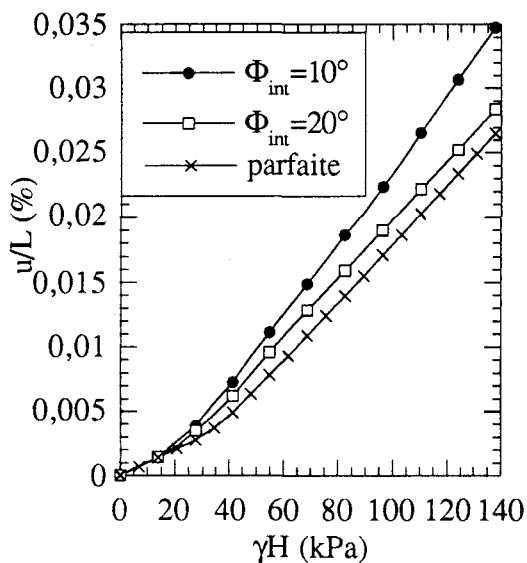


(a)

(b)



(c)



(d)

Figure 3.8 : L'influence de l'interface sur le comportement d'un massif soumis à son poids propre

(a) et (b) Déplacements au point D

(c) Déplacement au point A

(d) Déplacement au point C

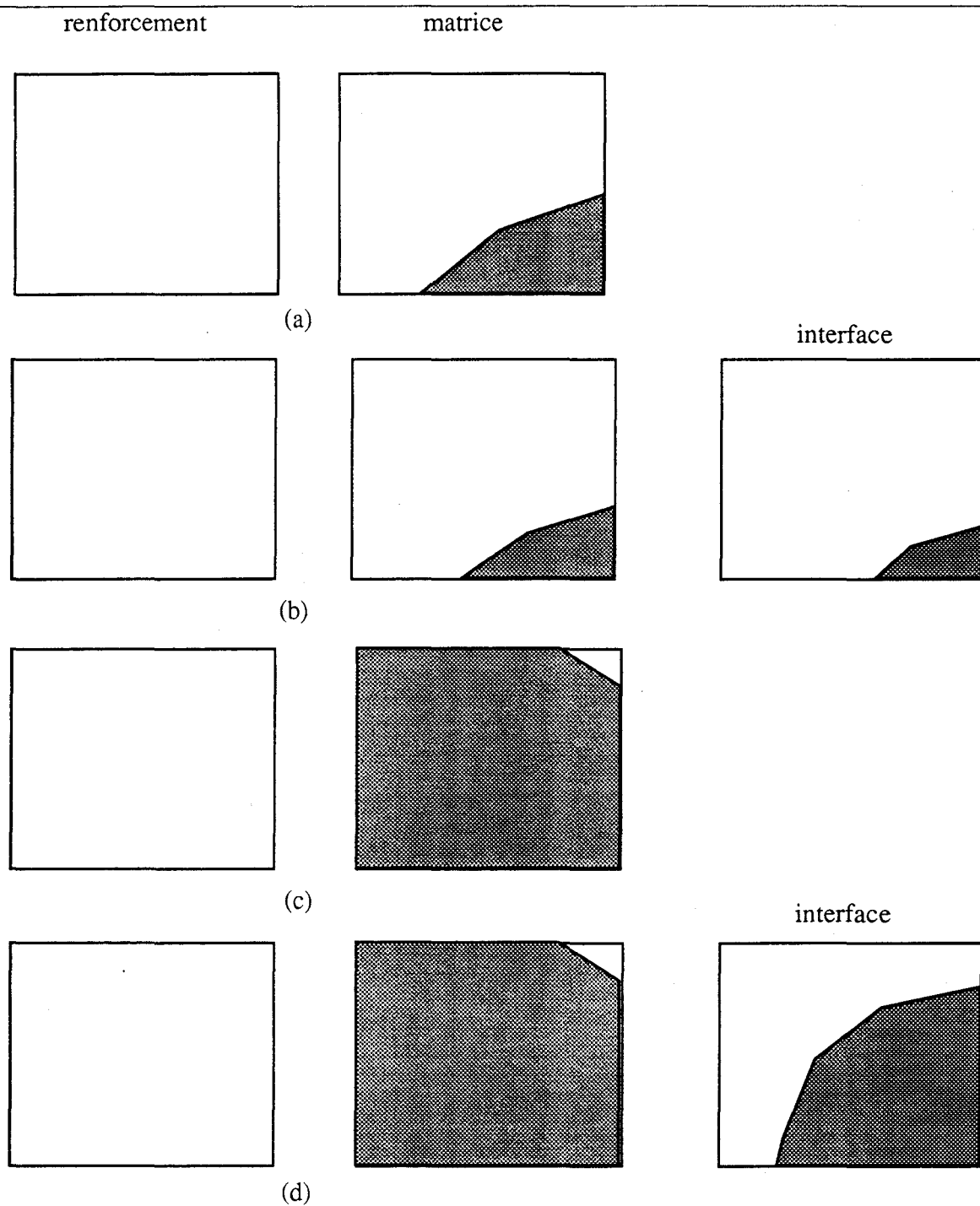


Figure 3.9 : Développement de la zone plastique dans un massif soumis à son poids propre

- (a) 20% de chargement (cas l'interface parfaite)
- (b) 20% de chargement (cas l'interface imparfaite)
- (c) 100% de chargement (cas l'interface parfaite)
- (d) 100% de chargement (cas l'interface imparfaite)

3.4.3 Massif soumis à un chargement surfacique

Dans cet exemple, on applique un chargement surfacique sur la moitié de la surface supérieure du massif soumis auparavant à son poids propre. Les résultats des simulations numériques avec les deux jeux de paramètres d'interface sont donnés dans les figures 3.10a-d. On note que la présence de l'interface se traduit par une augmentation des déplacements dans le massif (réduction de la rigidité) en particulier au voisinage du chargement. En effet, le déplacement latéral induit au point D (situé à l'extrémité de la surface du chargement) par un chargement surfacique $q = 200$ kPa augmente de 65 % (resp. de 85%) lorsqu'on prend en compte la présence d'une interface imparfaite avec un angle de frottement de 20° (resp. de 10°).

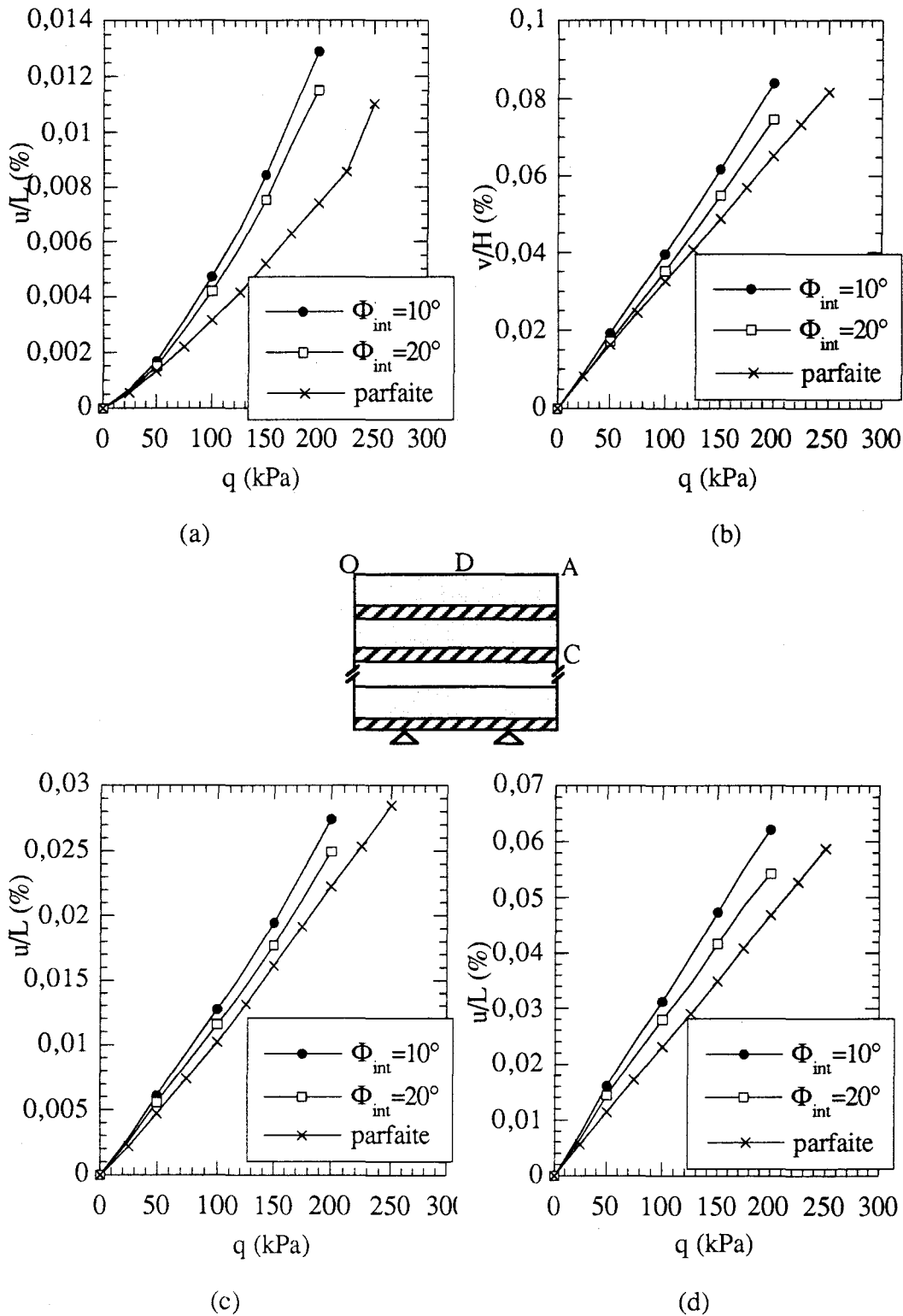


Figure 3.10 : L'influence de l'interface sur le comportement d'un massif soumis un chargement surfacique

(a) et (b) Déplacements au point D
(c) Déplacement au point A
(d) Déplacement au point C

3.4.4 Détermination de la hauteur critique d'un mur en terre armée

Dans cette section, on utilise le modèle développé pour analyser l'influence de l'interface sur la hauteur critique d'un mur en terre armée. Cette étude a été réalisée selon la démarche présentée dans le deuxième chapitre (cf. 2.6). Les caractéristiques mécaniques retenues dans cette étude sont les mêmes que celles utilisées dans l'exemple précédent (tableaux 2.4a et 2.4b). Les résultats obtenus avec les trois jeux de paramètres de l'interface (cohésion parfaite, $\Phi_{\text{int}} = 20^\circ$, $\Phi_{\text{int}} = 10^\circ$) sont donnés dans la figure 3.11. On note que la hauteur critique dépend sensiblement de la résistance de l'interface. Elle passe de 21m pour l'interface parfaite à 19 m (resp. 15m) avec une interface imparfaite ayant un angle de frottement de 20° (resp. de 10°).

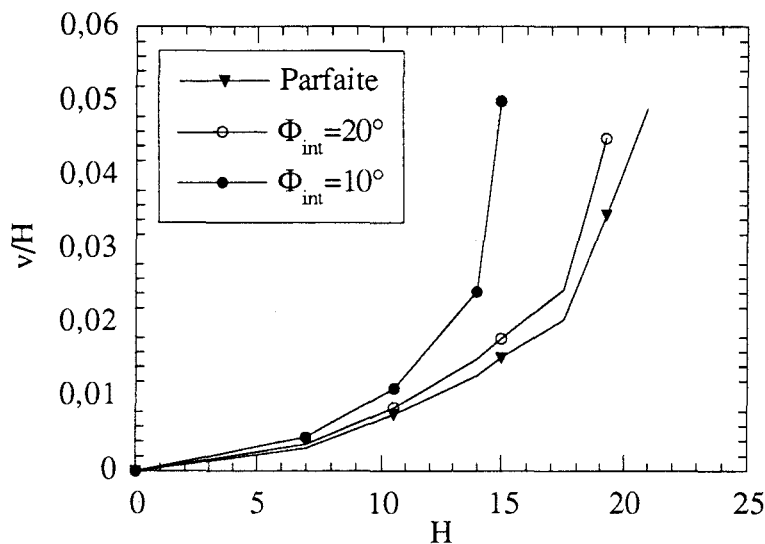


Figure 3.11: Détermination de la hauteur critique d'un mur en terre armée

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une extension du modèle macroscopique des matériaux multicouches présenté dans le premier chapitre à la prise en compte d'une possibilité d'un glissement au niveau de l'interface. Cette extension a été effectuée en modélisant l'interface par une couche d'épaisseur nulle dotée d'une loi de comportement élastoplastique non associée. Le modèle macroscopique obtenu qui peut être facilement intégré dans un code de calcul par éléments finis.

A travers différentes applications de ce modèle, on a montré que la présence d'une interface imparfaite dans des matériaux multicouches peut détériorer d'une manière sensible la rigidité et la résistance macroscopiques de ces ouvrages. Il est donc primordial dans les applications pratiques de prendre en compte la présence de l'interface, et plus particulièrement si la résistance de l'interface est faible par rapport à celle de la matrice.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce travail de thèse présenté dans ce mémoire a été consacré à la modélisation, dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation, du comportement des matériaux multicouches en prenant en compte différents aspects, notamment le comportement élastoplastique des constituants, un cas limite des matériaux renforcés par des inclusions flexibles travaillant en traction-compression et la possibilité d'un glissement à l'interface entre les constituants. Pour chacun de ces cas, on dispose actuellement d'un modèle macroscopique implanté dans un programme de calcul par éléments finis.

Pour les différents cas présentés ci-dessus, nous avons effectué des tests de vérification sur des exemples types qu'on peut rencontrer en génie civil. Ces tests sont fondés sur des calculs comparatifs entre différentes modélisations, comme par exemple (i) les calculs effectués avec le modèle macroscopique à interface parfaite et une discrétisation de la structure hétérogène à l'échelle microscopique et (ii) ceux effectués entre, d'une part, le modèle macroscopique à adhésion parfaite, et, d'autre part, le modèle macroscopique à inclusions flexibles ou le modèle à interface imparfaite.

Les différents tests de vérification ont montré le bon fonctionnement des programmes de calcul développés et la possibilité de leur utilisation dans le calcul d'ouvrages.

L'étude du domaine de validité du modèle macroscopique des matériaux multicouches à adhésion parfaite a montré que sa précision dépend de différents facteurs, notamment le rapport d'échelle, l'homogénéité de chargements, le niveau de plastification et la présence de bords libres. Pour des exemples types de génie civil tels que les massifs en matériaux multicouches soumis à des forces volumiques ou surfaciques, des bons résultats ont été obtenus pour un rapport d'échelle de l'ordre de 12%.

Le modèle proposé pour les matériaux renforcés par inclusions flexibles présente de grands avantages, notamment sa simplicité tant au niveau de la formulation que la programmation informatique. Les tests comparatifs effectués entre ce modèle et le modèle multicouche ont montré les limites de ce dernier dans le calcul des ouvrages renforcés par des inclusions flexibles.

Enfin, l'intégration dans le modèle multicouche d'une possibilité de glissement à l'interface élargit le domaine d'application de ce modèle en génie civil où des ruptures par glissement sont souvent rencontrées. Les tests effectués avec ce modèle ont montré l'attention qu'il faut accorder à la présence d'une interface imparfaite qui peut détériorer d'une manière sensible la rigidité et la résistance macroscopiques des matériaux multicouches.

Comme perspectives à ce travail, on propose la prise en compte de l'effet de bord dans le domaine plastique et la vérification de différentes versions du modèle sur des résultats expérimentaux.

Références bibliographiques

A . Bensoussan, J. L . Lions and G . Papanicolaou (1979) - "Asymptotic analysis for periodic structures" Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 5. North - Holland, Amsterdam.

P . De Buhan (1986) - "Approche fondamentale du calcul des ouvrages en sols renforcés" - Thèse d'Etat, Paris VI.

L . Cangemi, M . Cocu, M . Raous (1996) - "Adhesion and friction model for the fiber-matrix interface of composite" Engineering Systems Design and Analysis, Vol. 76. pp 157-163.

C . S Desai (1982) - "Soil structure interaction and simulation problems" - Chapter 7, Finite elements in Geomechanics, pp. 209 - 250.

C . S Desai and B . K Nagaraj (1988) - "Modelling for cyclic normal and shear behavior of interfaces" - Jour. of Eng. Mech., Vol. 114, n° 7, July 1988, pp. 1198 - 1217.

H . Dumontet (1990) - "Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites" - Thèse d'Etat, Paris VI.

D . Leguillon and F . Léné (1982) - "Homogenized constitutive law for a partially cohesive composite material", Int. J. Solids and Structures Vol. 18, No. 5, pp 443 - 458.

F . Léné (1984) - "Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement"-Thèse d'Etat, Paris VI.

P . B Lourenço (1996) - "A matrix formulation for elastoplastic homogenisation of layered materials", Mechanics of Cohesive - Frictional Material, Vol. 1 , pp 273 - 294.

P . V . Mc Laughlin (1972) - "Plastic limit behavior and failure of filament reinforced materials", Int. J. Solids and Structures Vol.8 , pp 1299-1318.

R . L Michalowski and A . Zhao (1996) - "Failure of unidirectionally reinforced composites with frictional matrix", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 122, No. 11 pp 1086-1091.

J . C . Michel and P . Suquet (1994) - "An analytical and numerical study of the overall behaviour of metal - matrix composites", Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. Vol 2, pp 637-658.

J . C . Michel - P . Suquet et F . Thébaud (1994) - "Une modélisation du rôle des interfaces dans le comportement des composites à matrice métallique", Revue européenne des élément finis, Vol. 3, No. 4, pp 573-595.

E . Pruchnicki (1991) - "Contribution à l'homogénéisation en phase lineaire et nonlineaire, appliction au renforcement des sols" - Thèse de l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

E . Pruchnicki I . Shahrour (1994) - "A macroscopic elastoplastic constitutive law for multilayered media: application to reinforced earth material"-Int . J . for Numerical Analytical Methods in Geomechanics, Vol.18, 507-518.

F . Rézaie (1994) - "Etude experimentale et modélisation du comportement de l'interface sols - structures sous chargement monotone et cyclique" - Thèse de l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

E . Sanchez-Palencia (1980) - "Non-homogeneous media and vibration theory"-Springer - Verlag, Berlin Heidelberg, New York.

A . Sawicki (1983) - "Plastic limit behavior of reinforced earth" - J . Geotechnical Eng, Vol. 109, No 7, 1983.

L . Siad (1987) - "Analyse de stabilité des ouvrages en terre armée par une méthode d'homogénéisation" - Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

I . Shahrour (1988) - "Modélisation et validation en génie civil" - Habilitation à diriger des recherches de l'Université des Sciences et Technologie de Lille.

P . Suquet (1982-a) - "Plasticité et homogénéisation" - Thèse d'Etat, Paris VI.

P . Suquet (1982-b) - "Une méthode duale en homogénéisation : Application aux milieux élastiques" - Journal de Mécanique Théorique et Appliquée , Numéro spécial, 1982, pp 79-98.

P . Suquet (1983) - "Analyse Limite et Homogénéisation" - Comtes Rendus de l'Académie des Sciences , Paris , t. 296, Série II, 1983, pp 1355-1358.

