N° d'ordre : 2384

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
U.F.R. DE MATHEMATIQUES

THESE

présentée pour obtenir
le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE
discipline : Mathématiques

par

Laurent VERDOUCQ

Dérivées tangentielles et interpolation pour les fonctions de la classe $\mathcal{A}^{k,\alpha}$ au bord de domaines de type fini.

soutenue le 4 décembre 1998 devant la commission d'examen

Mme Anne-Marie CHOLLET, président
MM. Eric AMAR, rapporteur
Jacques CHAUMAT, rapporteur
Joachim MICHEL, examinateur
Vincent THILLIEZ, directeur de thèse

N° d'ordre : 2384

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
U.F.R. DE MATHEMATIQUES

THESE

présentée pour obtenir
le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE
discipline : Mathématiques

par

Laurent VERDOUCQ

Dérivées tangentielles et interpolation pour les fonctions de la classe $\mathcal{A}^{k,\alpha}$ au bord de domaines de type fini.

soutenue le 4 décembre 1998 devant la commission d'examen

Mme	Anne-Marie CHOLLET, président
MM.	Eric AMAR, rapporteur
	Jacques CHAUMAT, rapporteur
	Joachim MICHEL, examinateur
	Vincent THILLIEZ, directeur de thèse

Remerciements

Je tiens, tout d'abord, à remercier Vincent Thilliez pour la grande compétence mathématique avec laquelle il m'a dirigé tout au long de ce travail. En étant toujours très disponible malgré ses nombreuses responsabilités, il a su au cours de nos discussions mathématiques (ou amicales), me guider, avec passion, dans ma découverte de la recherche en analyse complexe, ainsi que me prodiguer de très précieux conseils. Il a su aussi me proposer de nombreuses références en réponse aux questions que j'ai pu lui poser. Son bureau m'a constamment été grand ouvert et je le remercie vivement de son accueil toujours très sympathique.

Je remercie MM. Eric Amar et Jacques Chaumat qui ont bien voulu prendre sur leur temps précieux pour juger ce travail. Les quelques discussions que j'ai pu avoir avec eux ainsi que les remarques qu'ils ont émises m'ont permis d'améliorer un certain nombre de résultats.

Je remercie aussi Mme Anne-Marie Chollet qui me fait l'honneur de présider ce jury. J'ai eu le plaisir, en 1994, de suivre son cours de DEA donné en commun avec MM. François Berteloot et Vincent Thilliez. Mon attrait pour l'analyse complexe est né de ce cours et je suis d'autant plus sensible à l'intérêt qu'elle porte à mon travail.

Je suis également reconnaissant envers M. Joachim Michel qui a accepté d'examiner ma thèse et de participer à ce jury.

Je tiens particulièrement à remercier Emmanuel Mazzilli qui, à plusieurs reprises, a su, au cours de nos conversations et par de très judicieux conseils de lecture, me faire avancer dans ma réflexion.

Merci également à l'ensemble des collègues que j'ai pu cotoyer ici pendant ces années, les membres de l'équipe d'analyse complexe, plus généralement du laboratoire ainsi que le personnel de reprographie du M2.

Je souhaite enfin, plus généralement, associer à la réussite de ce travail un certain nombre de personnes qui m'ont aidé depuis toujours, à commencer par mes parents et grands-parents. J'y associe aussi mes amis pour leur soutien, ainsi que MM. Dewailly et Masselot pour qui j'ai le plus profond respect.

Mes pensées vont, pour terminer, à Chantal pour son aide de tous les jours.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

En 1986, dans un article paru aux *Mathematische Annalen*, J. Bruna et J. M. Ortega [BO] ont étudié les valeurs au bord des fonctions de la classe $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\mathbb{B}}) := \mathcal{O}(\mathbb{B}) \cap \mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\mathbb{B}})$ où $\mathbb{B}$ désigne la boule unité de $\mathbb{C}^n$, k un entier naturel et α un réel, avec $0 < \alpha < 1$. Ils ont pu, en particulier, démontrer l'existence de valeurs au bord pour certaines dérivées d'ordre supérieur à k des fonctions de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\mathbb{B}})$. Le fait bien connu que les fonctions dans $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\mathbb{B}})$ sont, en règle générale, de régularité double dans la direction complexe-tangentielle influence bien sûr l'ordre maximal de ces dérivées supplémentaires.

Plus précisément, Bruna et Ortega associent à tout monôme de dérivation un poids ω donné par $\omega = p/2 + q$, où p désigne le nombre de dérivées complexes-tangentielles et q le nombre de dérivées transverses composant le monôme. Ils obtiennent alors, sous l'hypothèse $\alpha \neq 1/2$, un théorème d'existence et de régularité de valeurs au bord pour les dérivées des fonctions de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\mathbb{B}})$ lorsque le poids vérifie $\omega < k + \alpha$.

Forts de ce résultat, ils construisent ensuite des fonctions de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\mathbb{B}})$ dont les dérivées de poids inférieur à $k + \alpha$ ont des valeurs prescrites sur une partie compacte convenable du bord. C'est un problème d'interpolation de jets de Whitney à régularité non isotrope.

Dans le cas des domaines strictement pseudoconvexes, l'article [BO] fait mention de résultats analogues.

Dans le cas des domaines faiblement pseudoconvexes, on peut espérer un meilleur gain de dérivées supplémentaires dans la direction complexe-tangentielle, gain relié à la géométrie du bord. Dans ces domaines, on est très vite confronté à de très sérieuses difficultés techniques, imputables à une géométrie plus compliquée.

Sous l'hypothèse de type fini, ces difficultés peuvent être levées à l'aide des constructions de V. Thilliez [T1], [T2], [T3], introduites en 1991 afin d'obtenir des résultats d'interpolation Gevrey dans les domaines de type fini de $\mathbb{C}^2$. On peut alors espérer relier le gain de dérivées tangentielles en un point du bord au type de ce point.

Le but de ce travail est d'obtenir ainsi des résultats dans l'esprit de ceux de Bruna et Ortega [BO], mais dans le cadre de domaines de type fini de $\mathbb{C}^2$ pour le gain de dérivées tangentielles et, moins généralement, dans les ellipsoïdes pour les résultats d'interpolation.

La thèse est divisée en sept chapitres, les trois premiers traitant le gain de dérivées tangentielles, les quatre derniers l'interpolation dans l'ellipsoïde.

Dans le premier chapitre, on commence par rappeler les définitions d'outils associés à la géométrie des domaines de type fini de $\mathbb{C}^2$: coordonnées adaptées de D. Catlin [Ca], pseudo-distance δ et pseudo-boules correspondantes, régions d'approche admissibles d'un point du bord, suivant la description qui en est donnée par V. Thilliez dans [T1], [T2] : grossièrement, pour deux points z et z' au voisinage d'un point de type fini, la pseudo-distance $\delta(z', z)$ est de l'ordre de la distance euclidienne d dans la direction transverse, et de $d^{\Theta(z',z)}$ dans la direction complexe-tangentielle. Pour $z' \in \partial\Omega$, le nombre $\Theta(z',z')$ n'est autre que le type $\theta(z')$ du point z'.

Après ces rappels, on décrit deux constructions de chemins affines par morceaux joignant des point situés dans des régions d'approche données. L'une de ces constructions est reprise de [T1], [T2] ; l'autre a été développée spécifiquement pour établir l'existence des dérivées supplémentaires pour $\mathcal{A}^{k,\alpha}$.

Dans le chapitre 2, on obtient en plusieurs étapes le résultat de base de cette thèse. On sait d'abord que l'appartenance d'une fonction holomorphe dans un domaine Ω à la classe $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ peut être caractérisée par un contrôle de l'explosion des dérivées au voisinage du bord : de l'ordre de $\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)^{k+\alpha-l}$ pour les dérivées d'ordre $l > k$, voir par exemple [McNS]. Ici, on obtient une version non isotrope de cette estimation, valable pour les points z d'une région d'approche admissible d'un point z' de $\partial\Omega$. Ce n'est alors plus l'ordre de dérivation l qui intervient, mais le "poids" $p/\Theta(z',z)+q$ où p est le nombre de dérivées complexes-tangentielles et q le nombre de dérivées transverses. Le théorème correspondant (théorème 2.5) est à comparer à des estimations obtenues par S. Grellier dans [G], sans qu'aucun des deux résultats ne recouvre l'autre.

Ces estimations non isotropes, jointes à des développements de Taylor le long de chemins construits dans la première partie, conduisent à une proposition qui permet de vérifier le critère de Cauchy d'existence d'une limite en un point z' du bord, et en restriction à une région d'approche admissible de z', pour les dérivées des fonctions de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, lorsque l'on a $p/\theta(z') + q < k + \alpha$.

Il est donc possible de définir des valeurs au bord pour ces dérivées en tout point z' du bord, non seulement pour $p+q \leq k$, ce qui est évident, mais aussi, plus généralement, pour $p/\theta(z') + q < k + \alpha$. Un exemple simple (2.11) montre que ce "poids" de dérivation est le plus grand possible.

Ce résultat peut bien être interprété comme une extension de la partie "existence" du théorème de Bruna et Ortega, puisque, dans le cas strictement pseudoconvexe, on a évidemment $\theta(z') = 2$ pour tout z'.

Dans le chapitre 3, on étudie la régularité des valeurs au bord précédemment définies. On établit alors pour cela une formule de Taylor non-isotrope pour les fonctions de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$: l'esprit de ce résultat est celui du théorème (1.5) de [BO] ; les méthodes de démonstration font appel aux idées de [T1], [T2].

Muni de cet outil, on démontre alors un théorème de régularité hölderienne pour les valeurs au bord des dérivées des foctions de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, sous la restriction technique $\alpha < 1/m$. Ce résultat contient en particulier le fait qu'une fonction holomorphe et α-hölderienne au sens usuel dans un domaine Ω strictement pseudoconvexe est automatiquement α-hölderienne par rapport à la pseudo-distance non isotrope sur le bord de Ω, voir [St]. Pour ces domaines et pour $\alpha < 1/2$, il recouvre également la partie "régularité" du théorème de Bruna et Ortega.

Au chapitre 4, on commence par définir, dans un voisinage U d'un point de type fini m sur $\partial\Omega$, des classes $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ non isotropes $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega} \cap U)$ constituées des fonctions de

$\mathcal{C}^\infty(\Omega \cap U)$ qui vérifient les mêmes estimations que celles établies au théorème (2.5) pour les fonctions de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ (en particulier, on a $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega} \cap U)$). On énonce ensuite, pour les classes $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}$, les analogues des théorèmes obtenus dans les chapitres 2 et 3 pour $\mathcal{A}^{k,\alpha}$. On donne enfin un théorème d'extension de type Whitney dans $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega} \cap U)$ après avoir défini, de manière appropriée au vu du théorème de Taylor non isotrope, une classe de jets non isotropes $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(E)$ sur une partie compacte E de $U \cap \partial\Omega$ dont chaque point est de type maximal m. On termine ce chapitre par une estimation plus précise de la solution du problème d'extension.

Dans toute la suite, on se limite au cas de l'ellipsoïde $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^2 \ ; \ |z_1|^m + |z_2|^2 < 1\}$ où m est un entier pair. Les points de type m sont les points du cercle $\mathcal{C} = \{(0, e^{i\theta}) \ ; \ \theta \in \mathbb{R}\}$. On considère un jet $\bar{\partial}$-plat F appartenant à la classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(E)$ et on cherche des conditions assurant que l'on puisse construire une fonction $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ dont le jet sur E soit égal à F. Les résultats du chapitre 4 permettant d'étendre F en une fonction g de $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega} \cap U)$, l'essentiel du travail consiste alors à "corriger" la solution g pour la rendre holomorphe : ceci fait l'objet des chapitres 5, 6 et 7.

Au chapitre 5, après quelques lemmes géométriques dans l'ellipsoïde, on construit, sous la condition

$$(*) \qquad \int_0^R N_r(I_R \cap E)dr \lesssim R,$$

où I_R désigne un arc quelconque de longueur R sur $\mathcal{C}$ et $N_r(I_R \cap E)$ désigne le nombre minimal d'arcs de longueur r recouvrant $I_R \cap E$, une fonction support h s'annulant sur E comme $\delta(z, E)$ et avec de bonnes estimées sur ses dérivées. On termine ce chapitre par des estimations sur la croissance de la forme de division $\omega = \bar{\partial}g/h^r$ où r est un paramètre convenable.

Le chapitre 6 est consacré à la résolution des équations $\bar{\partial}U = \omega$ et $\bar{\partial}_b u = \omega$ au sens de Skoda, avec une estimation précise de l'explosion de la solution (et de ses dérivées) en termes de puissances de $\delta(z, E)$. Comme dans [BO], on fait appel à un argument de noyaux intégraux. Dans le cas de la boule, J. Bruna et J. M. Ortega utilisent les noyaux à poids de Ph. Charpentier. Pour les ellipsoïdes, bien que des formules à noyaux aient été utilisées par plusieurs auteurs [A], [BC], [DFW] dans des buts divers, il semble ici que les noyaux de Berndtsson-Andersson [BA] soient mieux adaptés au problème étudié. Après des rappels sur ces noyaux puis des lemmes d'intégration, on donne la solution U de la première équation sous forme intégrale à l'aide de noyaux aux sections bien choisies. Les noyaux de Berndtsson-Andersson étant particulièrement bien adaptés aux calculs de dérivées, on obtient alors les bonnes estimées sur la solution U et ses dérivées. On termine par la résolution de la deuxième équation en utilisant un procédé de régularisation [Sk].

Le chapitre 7 vient conclure toute l'étude et l'on y montre, par des résultats classiques sur le noyau de Bochner-Martinelli, que la solution "corrigée" $\mathcal{F} = g - h^r U$ est bien un élément de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. En faisant intervenir les estimées obtenues dans le chapitre 5 sur h et dans le chapitre 6 sur U, on montre alors que les dérivées de $h^r U$ de poids $p/m+q < k+\alpha$ s'annulent sur E et l'on a donc obtenu que $\mathcal{F}$ réalise bien l'interpolation.

On achève ce travail en montrant que la condition $(*)$ est une condition nécessaire à la résolution du problème.

Une partie des résultats a déjà été annoncée dans une note [V].

§1. RAPPELS SUR LA GEOMETRIE DES DOMAINES DE TYPE FINI DE $\mathbb{C}^2$.

Tout ce qui suit est emprunté à [Ca], [T1] et [T2], excepté la première construction de chemins (1.5) et les lemmes qui s'y rattachent (1.6) et (1.7).

1.1 NOTATIONS GENERALES.

Soient Ω un domaine de $\mathbb{C}^2$ à frontière de classe $\mathcal{C}^\infty$, z^0 un point de $\partial\Omega$ et r une fonction définissante pour Ω au voisinage de z^0. Pour $z = (z_1, z_2)$ dans $\mathbb{C}^2$, on note $x_j = \Re e z_j$ et $y_j = \Im m z_j$ $(j = 1, 2)$.

1.2 COORDONNEES DE CATLIN ET PSEUDO-BOULES [Ca].

On peut supposer $\partial r/\partial x_2(z^0) > 0$; il est alors démontré dans [Ca] qu'il existe dans un voisinage convenable U de z^0, pour tout entier m, des applications $d_0,\ d_1, \ldots, d_m$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U, uniques telles que, pour tout z' de U, l'application $\phi_{z'}$ qui à ζ de $\mathbb{C}^2$ associe z donné par :

$$\begin{cases} z_1 = & z_1' + \zeta_1 \\ z_2 = & z_2' + d_0(z')\zeta_2 + \sum\limits_{k=1}^{m} d_k(z')\zeta_1^k \end{cases}$$

définisse un changement de coordonnées holomorphes dans $\mathbb{C}^2$ et telles que la fonction $\rho_{z'} = r \circ \phi_{z'}$, définissante pour $\Omega_{z'} = \phi_{z'}^{-1}(\Omega)$ au voisinage de 0, admette un développement de la forme

$$\rho_{z'}(\zeta) = r(z') + \Re e\zeta_2 + \sum_{\substack{j+k\leq m \\ j\geq 1, k\geq 1}} a_{j,k}(z')\zeta_1^j\bar{\zeta_1}^k + \mathcal{O}\left(|\zeta_1|^{m+1} + |\zeta||\zeta_2|\right)$$

où les $a_{j,k}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U.
On pose, pour $2 \leq l \leq m$, $A_l(z') = \max_{j+k=l} |a_{jk}(z')|$. On fait alors l'hypothèse que le point z^0 est de type fini m, ce qui signifie que l'on a $A_l(z^0) = 0$ pour $l < m$ et $A_m(z^0) \neq 0$. Quitte à rétrécir U, on a alors $A_m \neq 0$ dans U et on peut définir, pour z' dans U et δ réel strictement positif, les quantités

$$\theta(z') = \min\{l; A_l(z') \neq 0\}$$

(en particulier, pour $z' \in U \cap \partial\Omega$, $\theta(z')$ est le type de z'),

$$\tau(z', \delta) = \left(\sum_{l=2}^{m} \left(\frac{A_l(z')}{\delta}\right)^{1/l}\right)^{-1}$$

et

$$T(z', \delta) = \frac{\text{Log } \delta}{\text{Log}(\tau(z', \delta)/\tau(z', 1))}.$$

La quantité précédente est un analogue continu du T de Catlin [Ca], avec une normalisation convenable qui permet, par des considérations élémentaires de fonctions convexes, de montrer que $T(z',\delta)$ est une fonction croissante de δ, comprise entre $\theta(z')$ et m, qui se prolonge en 0 en posant $T(z',0)=\theta(z')$.

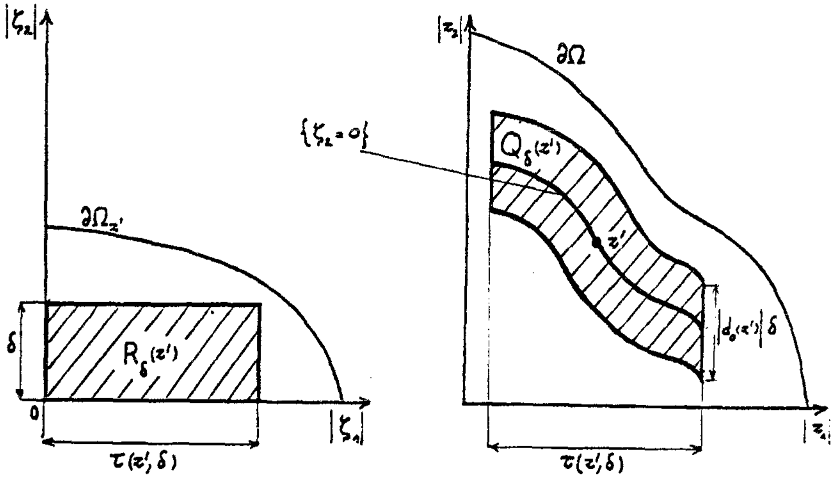
On définit enfin une famille de pseudo-boules (voir [Ca], [NSW]) par

$$Q_\delta(z') = \phi_{z'}\left(R_\delta(z')\right),$$

où $R_\delta(z')$ est le bidisque ouvert de centre 0, de birayon $(\tau(z',\delta),\delta)$. On leur associe une pseudo-distance définie, pour z' et z dans U, par

$$\delta(z',z) = \inf\{\eta > 0 \quad ; \quad z \in Q_\eta(z')\}.$$

Quitte à restreindre U, on pourra supposer que, pour tous z et z' de U, on a $\delta(z',z) < 1$.



Dans toute la suite, si X est un ensemble et $A(x)$, $B(x)$ sont deux expressions dépendant de x dans X, on écrira souvent $A(x) \lesssim B(x)$ pour dire que l'on a $A(x) \leq CB(x)$ où C est une constante positive indépendante de x. De même, $A(x) \approx B(x)$ signifie que l' on a simultanément $A(x) \lesssim B(x)$ et $B(x) \lesssim A(x)$.

1.3 OUTILS GEOMETRIQUES.

On définit maintenant la quantité $\Theta(z',z) := T(z',\delta(z',z))$. Cette quantité décrit alors la taille de la plus petite pseudo-boule de centre z' contenant z en ce sens que, de façon simpliste, cette taille est de l'ordre de $\delta^{1/\Theta}$ dans la direction complexe-tangentielle et δ dans la direction transverse. On a une liste de propriétés ([T1], [T2]) résumée ci-dessous.

(i) $2 \leq \theta(z') \leq \Theta(z',z) \leq m$,

(ii) $\delta(z',z) \leq \delta(z',z'')$ entraîne $\Theta(z',z) \leq \Theta(z',z'')$,

(iii) $\Theta(z',z')=\theta(z')$,

(iv) $\delta(z',z)\approx|\zeta_1|^{\Theta(z',z)}+|\zeta_2|$ pour $z=\phi_{z'}(\zeta)$,

(v) $\tau(z',\delta(z',z))\approx\delta(z',z)^{1/\Theta(z',z)}$

(vi) Pour tous $i,j\in\mathbb{N}$ et pour $z=\phi_{z'}(\zeta)$, on a

$$\left|\frac{\partial^{i+j}\rho_{z'}}{\partial\zeta_1^i\partial\bar{\zeta}_1^j}(\zeta)\right|\lesssim\inf\left\{1,\delta(z',z)^{1-(i+j)/\Theta(z',z)}\right\}.$$

On note $L_1,\ L_2$ les champs de vecteurs définis respectivement par

$$L_1=\frac{\partial r}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_1}-\frac{\partial r}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2},\ L_2=\frac{\partial}{\partial z_2}$$

et on pose $L_{i,1}=L_i$ et $L_{i,-1}=\bar{L}_i$ pour $i=1,2$. Le champ L_1 est complexe-tangentiel tandis que L_2 est transverse.
Dans ce travail, on sera amené à utiliser systématiquement des itérés de ces champs. Dans toute la suite, pour a,b entiers naturels, on notera $\mathcal{S}_{a,b}$ l'ensemble des suites $\beta=(\beta_l)_{1\leq l\leq a+b}$ à valeurs dans $\{1,2\}$ telles que $\#\{l,\beta_l=1\}=a$ et $\#\{l,\beta_l=2\}=b$. Pour $\beta\in\mathcal{S}_{a,b}$, on pourra alors considérer les itérés $L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{a+b}}$ ou $L_{\beta_1,\varepsilon_1}\dots L_{\beta_{a+b},\varepsilon_{a+b}}$, où (ε_l) désigne un élément de $\{-1,1\}^{a+b}$.
On est également amené à utiliser les champs de vecteurs $X_{z',j}$ associés aux coordonnées de Catlin :

$$X_{z',j}=(\phi_{z'})_*\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\right)\ \text{pour } j=1,2.$$

Explicitement, on a

$$\begin{cases} X_{z',1}(z)= & \dfrac{\partial}{\partial z_1}+T_{z'}(z_1)\dfrac{\partial}{\partial z_2}\ \text{avec } T_{z'}(z_1)=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}kd_k(z')(z_1-z_1')^{k-1},\\ X_{z',2}(z)= & d_0(z')\dfrac{\partial}{\partial z_2}.\end{cases}$$

On peut vérifier que $d_0(z')=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial r}{\partial z_2}(z')\right)^{-1}$ et $d_1(z')=-\left(\dfrac{\partial r}{\partial z_2}(z')\right)^{-1}\dfrac{\partial r}{\partial z_1}(z')$.

En particulier, le champ $X_{z',1}$ est à coefficients polynomiaux holomorphes et il est approximativement complexe-tangentiel en ce sens que l'on a

$$X_{z',1}(z)=\frac{\partial r}{\partial z_2}(z')L_1(z)+A(z',z)\frac{\partial}{\partial z_2}$$

avec $|\partial r/\partial z_2(z')|\approx 1$ et $A(z',z)=\mathcal{O}(|z_1-z_1'|)$. Le champ $X_{z',2}$, lui, est transverse.

On notera $\partial_{z_j}=\partial/\partial z_j$ pour $j=1,\ 2$. Soit $P=(p',p'')$ un biindice. On désigne par la lettre minuscule correspondante p la longueur $|P|=p'+p''$. La notation $X^P_{z',j}$ (resp.

ζ_j^P, $\partial_{z_j}^P$) désigne $X_{z',j}^{p'}\bar{X}_{z',j}^{p''}$ (resp. $\zeta_j^{p'}\bar{\zeta}_j^{p''}$, $\partial_{z_j}^{p'}\partial_{\bar{z}_j}^{p''}$). Si Q est un second biindice, $X_{z'}^{PQ}$ (resp. ζ^{PQ}, ∂_z^{PQ}) représente $X_{z',1}^P X_{z',2}^Q$ (resp. $\zeta_1^P\zeta_2^Q$, $\partial_{z_1}^P\partial_{z_2}^Q$).

Soient trois points $z' \in U \cap \bar{\Omega}$, $z'' \in U \cap \partial\Omega$ et $z = \phi_{z'}(\zeta) \in U \cap \Omega$. D'après Catlin [Ca], $\phi_{z''}$ se factorise en $\phi_{z'} \circ \psi_{z',z''}$ où $\psi_{z',z''} : \Omega_{z''} \to \Omega_{z'}$ est le changement de coordonnées associé par (1.2) au domaine $\Omega_{z'}$ et au point ζ'' tel que $z'' = \phi_{z'}(\zeta'')$. On a donc $\psi_{z',z''}(u) = \zeta$ avec

$$\begin{cases} \zeta_1 = & \zeta_1'' + u_1 \\ \zeta_2 = & \zeta_2'' + d_0''u_2 + \sum_{j=1}^{m} d_j''u_1^j, \end{cases}$$

où les d_j'', $0 \leq j \leq m$, dépendent de façon $\mathcal{C}^\infty$ de z' et z''.

Soit $\Xi_{\zeta'',j}$ le champ sur $\Omega_{z'}$ défini par

$$\Xi_{\zeta'',j} = (\psi_{z',z''})_* \left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right) = (\phi_{z'})_*^{-1}(X_{z'',j}),\ j = 1,2.$$

On a alors

$$\begin{cases} \Xi_{\zeta'',1} = & \dfrac{\partial}{\partial \zeta_1} + E\dfrac{\partial}{\partial \zeta_2} \text{ avec } E(\zeta) = \sum_{j=1}^{m} j d_j''(\zeta_1 - \zeta_1'')^{j-1}, \\ \Xi_{\zeta'',2} = & d_0''\dfrac{\partial}{\partial \zeta_2}. \end{cases}$$

1.4 REGIONS D'APPROCHE ADMISSIBLES.

Du fait que l'on a supposé $\partial r/\partial x_2 > 0$ dans U, on déduit facilement l'existence d'une constante h, avec $h \geq 0$, telle que pour tous points z' de $U \cap \partial\Omega$ et $z = \phi_{z'}(\zeta)$ de $U \cap \bar{\Omega}$, et tout réel t avec $0 \leq t < 1$, le point

(1.4.1) $$\zeta^{z',t} := \left(\zeta_1, \zeta_2 - \frac{h}{d_0(z')}t\right)$$

vérifie

(1.4.2) $$\rho_{z'}(\zeta^{z',t}) - \rho_{z'}(\zeta) \approx -t$$

et donc

(1.4.3) $$|\rho_{z'}(\zeta^{z',t})| \approx |\rho_{z'}(\zeta)| + t.$$

En l'absence de risque de confusion, on omettra l'indice z' : on notera $\zeta^t = \zeta^{z',t}$, $\rho = \rho_{z'}$.

On définit alors, pour a réel positif, le bidisque non isotrope

$$P^{t,a}(z') := P(0^t, (\tau(z', a|\rho(0^t)|), a|\rho(0^t)|)).$$

Il est établi dans [T1] qu'il existe une constante a avec $0 < a < 1$, telle que l'on ait, quitte à rétrécir U, $\phi_{z'}(P^{t,a}(z')) \subset \Omega \cap U$ pour $0 < t \leq 1$. On a en outre la propriété essentielle suivante :

$$\text{(1.4.4)} \qquad \begin{aligned} &\text{Pour } \zeta \in P^{t,a}(z'), \text{ le point } z = \phi_{z'}(\zeta) \\ &\text{satisfait } \delta(z', z) \approx |r(z)| = |\rho(\zeta)| \approx t. \end{aligned}$$

Pour $0 < t_0 \leq 1$ et $0 < a_0 \leq a$, on peut alors définir la région d'approche admissible

$$U_{z'}^{t_0,a_0} := \phi_{z'}(V_{z'}^{t_0,a_0})$$

avec

$$V_{z'}^{t_0,a_0} := \bigcup_{0<t<t_0} P^{t_0,a_0}(z').$$

Compte tenu de (1.4.4), on a évidemment

$$\delta(z', z) \approx |r(z)| \text{ pour } z \in U_{z'}^{t_0,a_0}.$$

On rappelle ici l'estimée suivante ([T1] (3.3) ou [T2] (2.9)). Soit λ un réel positif. Pour trois points z' et z'' dans $U \cap \partial\Omega$, $z = \phi_{z'}(\zeta)$ dans $U \cap \Omega$ vérifiant $\delta(z'', z) \leq \lambda\delta(z', z)$, on a

$$\text{(1.4.5)} \qquad \left|\frac{\partial^l E}{\partial \zeta_1^l}(\zeta_1)\right| \lesssim \delta(z', z)^{1-(l+1)/\Theta(z',z)} \quad \text{pour } 0 \leq l \leq m-1$$

où E a été défini en (1.3). (Pour $l \geq m$, on a évidemment $\partial^l E/\partial\zeta_1^l \equiv 0$.)

1.5 PREMIERE CONSTRUCTION DE CHEMINS.

Soient z' un point de $U \cap \partial\Omega, z$ et z'' deux points de $U_{z'}^{t_0,a_0}$ et ζ, ζ'' tels que $z = \phi_{z'}(\zeta)$, $z'' = \phi_{z'}(\zeta'')$. Par définition de $U_{z'}^{t_0,a_0}$, il existe t et t'' avec $0 < t \leq t_0$, $0 < t'' \leq t_0$, tels que l'on ait $\zeta \in P^{t,a_0}(z')$ et $\zeta'' \in P^{t'',a_0}(z')$ ou, autrement dit,

$$|\zeta_1| < \tau(z', a_0|\rho(0^t)|), \quad \left|\zeta_2 + \frac{h}{d_0(z')}t\right| < a_0|\rho(0^t)|$$

et

$$|\zeta_1''| < \tau(z', a_0|\rho(0^{t''})|), \quad \left|\zeta_2'' + \frac{h}{d_0(z')}t''\right| < a_0|\rho(0^{t''})|.$$

On supposera, pour fixer les idées, que l'on a

$$\text{(1.5.1)} \qquad t \leq t''.$$

Définissons alors des chemins S_1, S_2, S_3 de la façon suivante. Le chemin S_1 est le segment $[\zeta, \xi]$ avec $\xi := (\zeta_1, \zeta_2 - h(t'' - t)/d_0(z'))$. Les points de S_1 sont les points

$$u^{1,s} = \left(\zeta_1, \ \zeta_2 - \frac{h}{d_0(z')}s(t'' - t)\right) \text{ avec } 0 \leq s \leq 1.$$

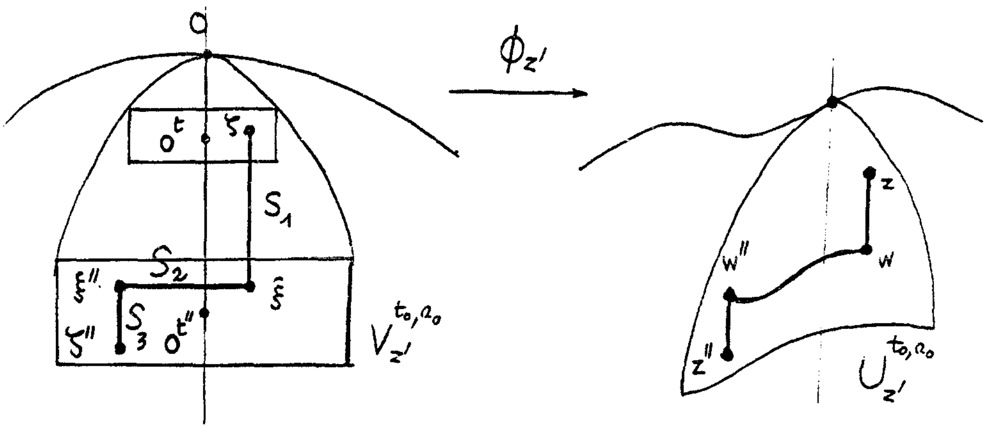
On pose $z^{1,s} = \phi_{z'}(u^{1,s})$. Le chemin S_2 est le segment $[\xi, \xi'']$ avec $\xi'' = (\zeta_1'', \xi_2)$. Les points de S_2 sont les points

$$u^{2,s} = (\zeta_1 + s(\zeta_1'' - \zeta_1), \xi_2) \text{ avec } 0 \leq s \leq 1.$$

On pose $z^{2,s} = \phi_{z'}(u^{2,s})$. Le chemin S_3 est le segment $[\xi'', \zeta'']$, constitué des points

$$u^{3,s} = (\zeta_1'', \xi_2 + s(\zeta_2'' - \xi_2)) \text{ avec } 0 \leq s \leq 1.$$

On pose $z^{3,s} = \phi_{z'}(u^{3,s})$. On note enfin $w = z^{1,1} = z^{2,0}$ et $w'' = z^{2,1} = z^{3,0}$.



Remarque : Pour $t = t''$, le chemin S_1 est réduit au point ζ.

On montre maintenant que les chemins construits restent dans la région d'approche de départ, voir le schéma ci-dessus.

1.6 LEMME.

Le chemin $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ défini précédemment est contenu dans $V_{z'}^{a_0,t_0}$. Plus précisément, on a

(1.6.1) $$u^{1,s} \in P^{t+s(t''-t),a_0}(z') \text{ pour tout } s \text{ avec } 0 \leq s \leq 1,$$

(1.6.2) $$S_2 \cup S_3 \subset P^{t'',a_0}(z').$$

Preuve : On établit d'abord (1.6.1). On a

$$|u_1^{1,s}| = |\zeta_1| \leq \tau(z', a_0|\rho(0^t)|) \leq \tau(z', a_0|\rho(0^{t+s(t''-t)})|)$$

car $\delta \mapsto \tau(z',\delta)$ est croissante et $|\rho(0^{t+s(t''-t)})| \geq |\rho(0^t)|$ en vertu de (1.4.2) et (1.5.1). On a également

$$\begin{aligned}\left|u_2^{1,s} + \frac{h}{d_0(z')}(t+s(t''-t))\right| &= \left|\zeta_2 - \frac{h}{d_0(z')}s(t''-t) + \frac{h}{d_0(z')}(t+s(t''-t))\right| \\ &= \left|\zeta_2 + \frac{h}{d_0(z')}t\right| < a_0|\rho(0^t)| \leq a_0|\rho(0^{t+s(t''-t)})|\end{aligned}$$

et l'assertion (1.6.1) est établie.

On prouve maintenant (1.6.2). On a d'abord

$$\begin{aligned}\left|u_2^{2,s} + \frac{h}{d_0(z')}t''\right| &= \left|\zeta_2 - \frac{h}{d_0(z')}(t''-t) + \frac{h}{d_0(z')}t''\right| \\ &= \left|\zeta_2 + \frac{h}{d_0(z')}t\right| < a_0|\rho(0^t)| \leq a_0|\rho(0^{t''})|.\end{aligned}$$

On a également

$$|u_1^{2,s}| = |\zeta_1 + s(\zeta_1'' - \zeta_1)| < (1-s)\tau(z', a_0|\rho(0^t)|) + s\tau(z', a_0|\rho(0^{t''})|) \leq \tau(z', a_0|\rho(0^{t''})|)$$

puisque l'on a $|\rho(0^{t''})| \geq |\rho(0^t)|$. Ceci montre que l'on a $S_2 \subset P^{t'',a_0}(z')$.

Pour S_3, on a similairement $|u_1^{3,s}| = |\zeta_1''| < \tau(z', a_0|\rho(0^{t''})|)$ et

$$\begin{aligned}\left|u_2^{3,s} + \frac{h}{d_0(z')}t''\right| &= \left|\zeta_2 - \frac{h}{d_0(z')}(t''-t) + s(\zeta_2'' - \zeta_2 + \frac{h}{d_0(z')}(t''-t)) + \frac{h}{d_0(z')}t''\right| \\ &= \left|\zeta_2 + \frac{h}{d_0(z')}t + s(\zeta_2'' + \frac{h}{d_0(z')}t'' - (\zeta_2 + \frac{h}{d_0(z')}t))\right| \\ &\leq (1-s)\left|\zeta_2 + \frac{h}{d_0(z')}t\right| + s\left|\zeta_2'' + \frac{h}{d_0(z')}t''\right| \\ &< (1-s)a_0|\rho(0^t)| + sa_0|\rho(0^{t''})| \leq a_0|\rho(0^{t''})|.\end{aligned}$$

Ceci établit l'inclusion $S_3 \subset P^{t'',a_0}(z')$ et achève de prouver le lemme.

Le lemme suivant contrôle la variation de Θ le long de S_1, S_2 et S_3.

<u>1.7 LEMME.</u>

Pour tout s avec $0 \leq s \leq 1$, on a

(1.7.1) $$\frac{1}{\Theta(z',z^{1,s})} - \frac{1}{\Theta(z',z)} \lesssim \frac{1}{|\mathrm{Log}\ \delta(z',z)|} \approx \frac{1}{|\mathrm{Log}\ \delta(z',z^{1,s})|},$$

(1.7.2) $$\left|\frac{1}{\Theta(z',z^{2,s})} - \frac{1}{\Theta(z',w)}\right| \lesssim \frac{1}{|\mathrm{Log}\ \delta(z',w)|} \lesssim \frac{1}{|\mathrm{Log}\ \delta(z',z'')|},$$

(1.7.3) $$\left|\frac{1}{\Theta(z',z^{2,s})}-\frac{1}{\Theta(z',z'')}\right|\lesssim\frac{1}{|\mathrm{Log}\ \delta(z',z'')|},$$

(1.7.4) $$\left|\frac{1}{\Theta(z',z^{3,s})}-\frac{1}{\Theta(z',w'')}\right|\lesssim\frac{1}{|\mathrm{Log}\ \delta(z',z'')|}.$$

Preuve : On a $\delta(z',z^{1,s})\approx t+s(t''-t)$ d'après (1.4.4) et (1.6.1). Il en résulte $\delta(z',z^{1,s})\gtrsim t\approx\delta(z',z)$ en particulier. On en déduit (1.7.1) en calquant la preuve de [T1], (3.4.4). On a par ailleurs $\delta(z',z^{2,s})\approx\delta(z',w)\approx\delta(z',w'')\approx\delta(z',z^{3,s})\approx\delta(z',z'')\approx t''$ en vertu de (1.4.4) et (1.6.2). Les estimations (1.7.2) à (1.7.4) en résultent aussitôt via les arguments de [T1], (3.4.3) ou [T2], (0.9).

1.8 DEUXIEME CONSTRUCTION DE CHEMINS [T1], [T2].

Soient deux réels t_0 et a_0 avec $0<t_0\le 1$ et $0<a_0\le a$. La construction de [T1], §3 (voir aussi [T2], (1.5)-(1.6) et (2.11)) fournit une constante δ_1 avec $\delta_1>0$, ne dépendant que de la géométrie de Ω, et deux réels s_0 et b_0 avec $0<s_0\le t_0$ et $0<b_0\le a_0$, dépendant de t_0, a_0 et de la géométrie de Ω, tels que les propriétés suivantes soient vérifiées :

On considère z' et z'' deux points de $U\cap\partial\Omega$ et $z=\phi_{z'}(\zeta)$ un point de $U^{s_0,b_0}_{z''}$ vérifiant $\delta(z',z)<\delta_1 b_0 t_0$. On considère un réel s avec $0<s\le s_0$ tel que l'on ait $z\in\phi_{z''}(P^{s,b_0}(z''))$. On pose $t:=(2\delta_1 t_0)^{-1}\delta(z',z)$ et on définit $\xi:=0^t=(0,-ht/d_0(z'))$, $x:=\phi_{z'}(\xi)$, $\omega:=(\zeta_1,-ht/d_0(z'))$, $y:=\phi_{z'}(\omega)$ ainsi que les segments $T_1:=[0,\xi]$ et $T_2:=[\xi,\omega]$, constitués respectivement des points $v^{1,\lambda}:=(0,-ht\lambda/d_0(z'))$ et $v^{2,\lambda}:=(\lambda\zeta_1,-ht/d_0(z'))$ avec $0\le\lambda\le 1$. On pose $x^{1,\lambda}=\phi_{z'}(v^{1,\lambda})$ et $x^{2,\lambda}=\phi_{z'}(v^{2,\lambda})$. On a alors

(1.8.1) $$\delta(z'',z)\approx s\lesssim t\approx\delta(z',z),\ \ \delta(z',x^{1,\lambda})\approx\lambda t \text{ et } \delta(z',x^{2,\lambda})\approx t$$

et

(1.8.2) $$\phi_{z'}(T_1\cup T_2)\subset U^{t_0,a_0}_{z'}.$$

En outre, si on pose $v^0:=\phi^{-1}_{z''}(y)$, $v^1:=\phi^{-1}_{z''}(z)$ et si on considère le segment $T:=[v^0,v^1]$ décrit par $v^\lambda:=v^0+\lambda(v^1-v^0)$ pour $0\le\lambda\le 1$, on a

(1.8.3) $$v^\lambda_1=v^0_1 \text{ pour } 0\le\lambda\le 1,$$

(1.8.4) $$|v^1-v^0|\lesssim\delta(z',z),$$

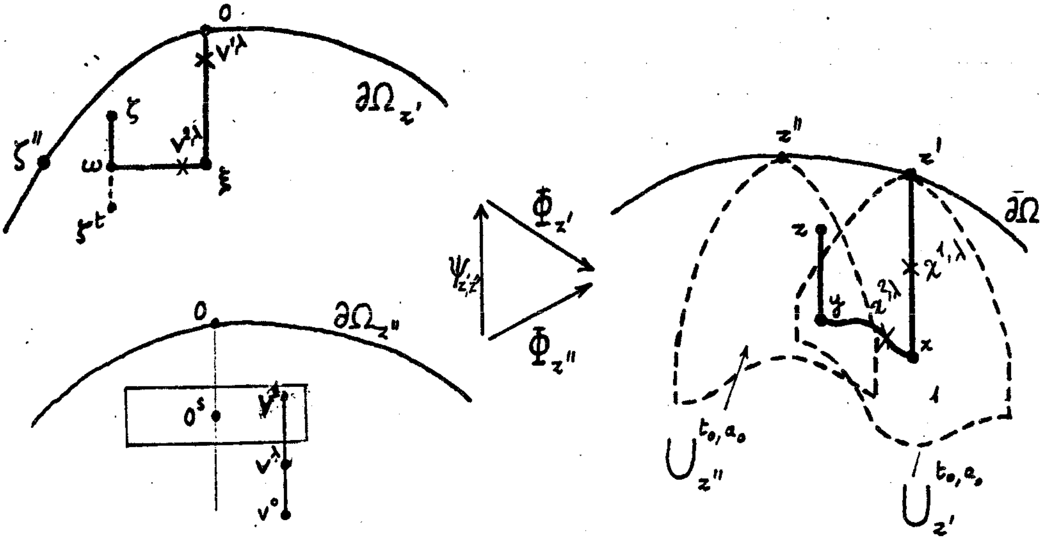
(1.8.5) $$\phi_{z''}(T)\ \subset\ U^{t_0,a_0}_{z''}\cap\phi_{z'}(P^{t,b_0}(z')),$$

(1.8.6) $$v^\lambda\in P^{s+(1-\lambda)t,a_0}(z'') \text{ pour } 0\le\lambda\le 1$$

et enfin, en posant $x^{3,\lambda} = \phi_{z''}(v^\lambda)$,

$$\frac{1}{\Theta(z'', x^{3,\lambda})} - \frac{1}{\Theta(z'', z)} \lesssim \frac{1}{|\text{Log } \delta(z'', z)|} \lesssim \frac{1}{|\text{Log } \delta(z'', x^{3,\lambda})|}. \tag{1.8.7}$$

Remarque : Avec les notations de [T1], [T2], on a $v^\lambda = u^{1-\lambda}$.



§2. ESTIMATIONS NON ISOTROPES ET VALEURS AU BORD DES DERIVEES COMPLEXES-TANGENTIELLES.

2.1 DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Soient k un entier naturel et α un réel avec $0 < \alpha < 1$. On note $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\bar{\Omega}$, dont les dérivées d'ordre k sont α-hölderiennes sur $\bar{\Omega}$. Soit $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω. On pose

$$\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) := \mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{O}(\Omega).$$

On note $\|.\|$ la norme usuelle sur $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, donnée par

$$\|f\| := \sup_{\substack{p+q\leq k \\ z\in\bar{\Omega}}} |\partial_z^{PQ} f(z)| + \sup_{\substack{p+q=k \\ z\in\bar{\Omega}, w\in\bar{\Omega}, z\neq w}} \frac{|\partial_z^{PQ} f(z) - \partial_z^{PQ} f(w)|}{|z-w|^\alpha}.$$

Cette norme munit $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ et $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ d'une structure d'algèbre de Banach.

Soit $\phi_{z'}$, $z' \in U$, le changement de coordonnées polynômial sur $\mathbb{C}^2$ défini en (1.2) et soit $\Omega_{z'} = \phi_{z'}^{-1}(\Omega)$. Il est facile de voir que pour $f \in \mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ (resp. $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$), on a $f \circ \phi_{z'} \in \mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega}_{z'})$ (resp. $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega}_{z'})$) et $\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} \approx \|f \circ \phi_{z'}\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega}_{z'})}$.

Dans la suite, on notera souvent

$$F := f \circ \phi_{z'}$$

en omettant l'indice z', pour abréger.

Avant de poursuivre, on introduit, pour des raisons de commodité, une notation supplémentaire. Pour β et γ réels avec $\beta > 0$, on pose

$$\mathcal{J}(\beta,\gamma) = \int_0^1 \frac{ds}{(s+\beta)^{1+\gamma}} \text{ et } \mathcal{W}(\beta,\gamma) = 1 + \mathcal{J}(\beta, \gamma - (k+\alpha)).$$

Quand γ varie, la quantité $\mathcal{W}(\beta,\gamma)$ décrit une échelle de croissance en β adaptée à l'expression des estimations que l'on se propose d'obtenir. On utilisera les propriétés élémentaires suivantes de $\mathcal{W}(\beta,\gamma)$.

Dans (2.1.1) à (2.1.7), on suppose toujours $0 < \beta < 1$.

Tout d'abord, pour λ réel positif, on a

$$\beta^\lambda \mathcal{W}(\beta,\gamma) \leq \mathcal{W}(\beta, \gamma - \lambda). \tag{2.1.1}$$

Soit, par ailleurs, ε un réel avec $0 < \varepsilon < 1$. On a les estimations

$$1 + C_\gamma \beta^{k+\alpha-\gamma} \leq \mathcal{W}(\beta,\gamma) \leq 1 + \frac{1}{\varepsilon}\beta^{k+\alpha-\gamma} \text{ pour } \gamma \geq k+\alpha+\varepsilon, \tag{2.1.2}$$

avec $C_\gamma = (1 - 2^{k+\alpha-\gamma})/(\gamma - k - \alpha)$,

$$1 \leq \mathcal{W}(\beta,\gamma) \leq \frac{C'}{\varepsilon} \text{ pour } 0 \leq \gamma \leq k+\alpha-\varepsilon, \tag{2.1.3}$$

avec $C' = 1 + 2^{k+\alpha}$, et enfin

$$(2.1.4) \qquad 1 + |\mathrm{Log}\,\beta| \le \mathcal{W}(\beta, k+\alpha) \le 2 + |\mathrm{Log}\,\beta|.$$

On a, en outre, les propriétés suivantes :

$$(2.1.5) \quad \frac{1}{K}\beta \le \beta' \le K\beta, \text{ avec } K \ge 1, \text{ implique } \frac{1}{K_\gamma}\mathcal{W}(\beta,\gamma) \le \mathcal{W}(\beta',\gamma) \le K_\gamma \mathcal{W}(\beta,\gamma),$$

avec $K_\gamma = K^{1+|\gamma-k-\alpha|}$,

$$(2.1.6) \qquad \gamma \le \gamma' \text{ implique } \mathcal{W}(\beta,\gamma) \le 2^{\gamma'-\gamma}\mathcal{W}(\beta,\gamma'),$$

et enfin, pour $K \ge 0$,

$$(2.1.7) \qquad \mathcal{W}\left(\beta, \gamma + \frac{K}{|\mathrm{Log}\,\beta|}\right) \le e^K \mathcal{W}(\beta,\gamma).$$

Les preuves de toutes ces assertions sont élémentaires et seront données en annexe.

Rappelons maintenant la caractérisation suivante classique de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ (voir [Du] ou [McNS, Lemme 8]). Une fonction f holomorphe dans Ω appartient à $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ si et seulement si, pour tous entiers naturels p et q, il existe une constante $C(p,q,f)$ telle que l'on ait, pour tout z de Ω,

$$(2.1.8) \qquad \left|\partial^p_{z_1}\partial^q_{z_2} f(z)\right| \le C(p,q,f)\left(1 + |r(z)|^{k+\alpha-(p+q)}\right),$$

et on a alors $C(p,q,f) \le C_{p,q}\,\|f\|$ où $C_{p,q}$ ne dépend que de p, q, k, α et de la géométrie de Ω. On observe maintenant, comme conséquence de (2.1.2) et (2.1.3) appliqués avec $\varepsilon = \min\{\alpha, 1-\alpha\}$, que (2.1.8) peut se reformuler en

$$(2.1.9) \qquad \left|\partial^p_{z_1}\partial^q_{z_2} f(z)\right| \le C(p,q)\|f\|\mathcal{W}(|r(z)|, p+q).$$

On va obtenir une version non isotrope de (2.1.9). Le résultat correspondant fera l'objet du théorème (2.6). Auparavant, plusieurs lemmes techniques sont nécessaires.

Dans toute la suite, la notation $\mathcal{O}'(\varphi(z',z))$ désigne une quantité bornée en module par $C\inf\{1, \varphi(z',z)\}$ où C est une constante ne dépendant pas de z et z'.

2.2 LEMME.

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \cap U)$, p et q deux indices, (β_l) une suite de $\mathcal{S}_{p,q}$ et (ε_l) une suite de $\{-1,1\}^{p+q}$. Il existe alors des fonctions $\gamma_{\beta,\varepsilon,p,q,I,J} \in \mathcal{C}^\infty(U \times U)$ telles que, pour tout $z' \in \bar{\Omega} \cap U$ et tout $z \in \Omega \cap U$, on ait

$$(2.2.1) \qquad \left(L_{\beta_1,\varepsilon_1}L_{\beta_2,\varepsilon_2}\dots L_{\beta_{p+q},\varepsilon_{p+q}}f\right)(z) = \sum_{\substack{I,J,\ i\le p \\ 1\le i+j\le p+q}} \gamma_{\beta,\varepsilon,p,q,I,J}(z',z)\left(X^I_{z',1}X^J_{z',2}f\right)(z)$$

avec

$$(2.2.2) \qquad \gamma_{\beta,\varepsilon,p,q,I,J}(z',z) = \mathcal{O}'\left(\delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z))}\right).$$

Preuve : Pour éviter d'alourdir encore un peu plus les notations, on oubliera les dérivées antiholomorphes, l'ensemble des estimations suivantes restant vraies lorsqu'elles interviennent.

On pose

$$L_1' = \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_2}\frac{\partial}{\partial\zeta_1} - \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_1}\frac{\partial}{\partial\zeta_2} \text{ et } L_2' = \frac{\partial}{\partial\zeta_2}.$$

Un calcul rapide montre facilement que l'on a

$$(L_1'F) = d_0(z')(L_1 f)\circ\phi_{z'} \text{ et } (L_2'F) = d_0(z')(L_2 f)\circ\phi_{z'}$$

et, puisque $|d_0(z')| \approx 1$, il suffit de démontrer les estimations sur $(L'_{\beta_1}L'_{\beta_2}\dots L'_{\beta_{p+q}}F)(\zeta)$. Traitons tout de suite le cas $p=0$. On a, dans ce cas, pour $F = f\circ\phi_{z'}$,

$$\left(L'_{\beta_1}L'_{\beta_2}\dots L'_{\beta_q}F\right)(\zeta) = \frac{\partial^q F}{\partial\zeta_2^q}(\zeta)$$

où $z = \phi_{z'}(\zeta)$, ce qui est bien la formule demandée.

Pour $p \neq 0$, les arguments de ([G], lemme 3-2) établissent facilement l'existence de fonctions $\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z)$ telles que

$$(L'_{\beta_1}L'_{\beta_2}\dots L'_{\beta_{p+q}}F)(\zeta) = \sum_{\substack{1\leq i+j\leq p+q \\ i\leq p}} \gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z)\frac{\partial^{i+j}F}{\partial\zeta_1^i\partial\zeta_2^j}(\zeta)$$

où

$$\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z) = \sum_{(a,b)\in E_{p,q,i,j}} \nu(a,b)\prod_{r=1}^{p}\left(\frac{\partial^{a_r+b_r}\rho}{\partial\zeta_1^{a_r}\partial\zeta_2^{b_r}}(\zeta)\right)$$

et où chaque $E_{p,q,i,j}$ est un ensemble de couples (a,b) de p-uples $a = (a_r)_{1\leq r\leq p}$ et $b = (b_r)_{1\leq r\leq p}$ d'entiers naturels vérifiant $\sum_{r=1}^p a_r = p-i$, $\sum_{r=1}^p b_r = p+q-j$ et $a_r + b_r \geq 1$ pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$ et où chaque $\nu(a,b)$ est un coefficient réel.

Il s'agit donc de montrer que $\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z) = \mathcal{O}'(\delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)})$. Comme ρ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a évidemment

$$\left|\prod_{r=1}^{p}\left(\frac{\partial^{a_r+b_r}\rho}{\partial\zeta_1^{a_r}\partial\zeta_2^{b_r}}(\zeta)\right)\right| \lesssim 1$$

et donc

$$(2.2.3) \qquad |\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z)| \lesssim 1.$$

Pour montrer l'autre estimée contenue dans la notation $\mathcal{O}'$, deux cas se présentent à nous.

• Supposons $j \leq q$. Puisque $i \leq p$, on a $j - q + (i-p)/\Theta(z',z) \leq 0$ et, dans ce cas $\mathcal{O}'(\delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)}) = \mathcal{O}(1)$ et (2.2.3) permet de conclure.

• Supposons $j > q$. Puisque $\sum_{r=1}^{p} a_r = p - i$, il y a au moins i indices a_r qui sont nuls et comme $a_r + b_r \geq 1$ pour tout $r \in \{1, \ldots, p\}$, il y a au moins i indices b_r qui ne sont pas nuls et donc, au plus $(p-i)$ indices b_r qui sont nuls.

Si on appelle I le nombre de ces indices b_r nuls, on a donc $I \leq p - i$. De plus, comme $p + q - j = \sum_{r=1}^{p} b_r \geq p - I$, on a $I \geq j - q$. On peut facilement se ramener au cas où les indices b_r nuls sont $b_1, b_2, \ldots, b_I$.

Pour les I indices b_r nuls, les indices a_r correspondants ne sont pas nuls. On obtient alors, en utilisant l'estimée (1.3 (vi)),

$$\left|\prod_{r=1}^{p}\left(\frac{\partial^{a_r+b_r}\rho}{\partial\zeta_1^{a_r}\partial\zeta_2^{b_r}}(\zeta)\right)\right| \lesssim \left|\prod_{r=1}^{I}\left(\frac{\partial^{a_r}\rho}{\partial\zeta_1^{a_r}}(\zeta)\right)\right| \lesssim \delta(z',z)^{I-(\sum_{r=1}^{I} a_r)/\Theta(z',z)}.$$

Or, puisque $p - i \geq \sum_{r=1}^{I} a_r$ et $I \geq j - q$, on obtient

$$\left|\prod_{r=1}^{p}\left(\frac{\partial^{a_r+b_r}\rho}{\partial\zeta_1^{a_r}\partial\zeta_2^{b_r}}(\zeta)\right)\right| \lesssim \delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)},$$

ce qui conclut la démonstration.

<u>2.3 LEMME.</u>

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \cap U)$, P et Q deux biindices. Il existe alors des fonctions $\Gamma_{\beta,\varepsilon,P,Q,i,j} \in \mathcal{C}^\infty(U \times U)$ telles que, pour tout $z' \in \bar{\Omega} \cap U$ et tout $z \in \Omega \cap U$, on ait

$$\left(X_{z',1}^{P} X_{z',2}^{Q} f\right)(z) = \sum_{\substack{i+j \leq p \\ \beta \in S_{i,j} \\ \varepsilon \in \{-1,1\}^{i+j}}} \Gamma_{\beta,\varepsilon,P,Q,i,j}(z',z)\left(L_{\beta_1,\varepsilon_1} \ldots L_{\beta_{i+j},\varepsilon_{i+j}} L_2^{Q} f\right)(z)$$

avec

$$\Gamma_{\beta,\varepsilon,P,Q,i,j}(z',z) = \mathcal{O}'\left(\delta(z',z)^{j+(i-p)/\Theta(z',z)}\right).$$

<u>Preuve :</u> On va se limiter à montrer ce lemme dans le cas de dérivées holomorphes. En reprenant les notations de (2.2), on va montrer un résultat un peu plus général :

$$\frac{\partial^{p+q} F}{\partial\zeta_1^{p}\partial\zeta_2^{q}}(\zeta) = \sum_{\substack{i+j \leq p \\ \beta \in S_{i,j}}} \Gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z)\left(L'_{\beta_1} \ldots L'_{\beta_{i+j}} L_2'^{q} F\right)(\zeta)$$

avec, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^r}{\partial\zeta_1^r}\left(\Gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',\phi_{z'}(\zeta))\right) = \mathcal{O}'\left(\delta(z',z)^{j+(i-p-r)/\Theta(z',z)}\right).$$

Pour $r = 0$, on aura bien obtenu la formule recherchée.
On procède par récurrence sur l'entier p. Pour $p = 0$, on a

$$\frac{\partial^q F}{\partial \zeta_2^q}(\zeta) = L_2'^q F(\zeta)$$

et la formule est bien vérifiée.
Supposons la formule vraie au rang p. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{p+1+q} F}{\partial \zeta_1^{p+1} \partial \zeta_2^q}(\zeta) = & \sum_{\substack{i+j\leq p \\ \beta \in S_{i,j}}} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\Gamma_{\beta,p,q,i,j}(z', \phi_{z'}(\zeta))\right) \left(L'_{\beta_1} \ldots L'_{\beta_{i+j}} L_2'^q F\right)(\zeta) \\ & + \sum_{\substack{i+j\leq p \\ \beta \in S_{i,j}}} \Gamma_{\beta,p,q,i,j}(z', z) \left(\frac{\partial \rho}{\partial \zeta_2}\right)^{-1} (L'_1 + \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_1} L'_2) \left(L'_{\beta_1} \ldots L'_{\beta_{i+j}} L_2'^q F\right)(\zeta).\end{aligned}$$

Pour obtenir le résultat, on voit qu'il suffit de montrer les 3 estimées suivantes, pour tout $r \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^r}{\partial \zeta_1^r} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\Gamma_{\beta,p,q,i,j}(z', \phi_{z'}(\zeta))\right) = \mathcal{O}'\left(\delta(z', z)^{j+(i-p-r-1)/\Theta(z',z)}\right),$$

$$\frac{\partial^r}{\partial \zeta_1^r} \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial \zeta_2}(\zeta)\right)^{-1} \Gamma_{\beta,p,q,i,j}(z', \phi_{z'}(\zeta))\right) = \mathcal{O}'\left(\delta(z', z)^{j+(i-(p+1)-r)/\Theta(z',z)}\right),$$

et

$$\frac{\partial^r}{\partial \zeta_1^r} \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial \zeta_2}(\zeta)\right)^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_1}(\zeta) \Gamma_{\beta,p,q,i,j}(z', \phi_{z'}(\zeta))\right) = \mathcal{O}'\left(\delta(z', z)^{j+1+(i-(p+1)-r)/\Theta(z',z)}\right).$$

Les deux premières sont tout à fait triviales (pour la deuxième, il suffit d'utiliser Leibniz pour et d'écrire que les dérivées de $(\partial\rho/\partial\zeta_2)^{-1}$ sont bornées.)
Pour la dernière, la majoration par une constante est triviale. De plus, par la remarque précédente et l'utilisation de la formule de Leibniz, on peut écrire, en appelant I_r le terme à majorer :

$$\begin{aligned} I_r & \lesssim \sum_{\substack{t,u \\ t+u \leq r}} \left|\frac{\partial^{t+1}\rho}{\partial \zeta_1^{t+1}}(\zeta) \frac{\partial^u}{\partial \zeta_1^u} \left(\Gamma_{\beta,p,q,i,j}(z', \phi_{z'}(\zeta))\right)\right| \\ & \lesssim \sum_{\substack{t,u \\ t+u \leq r}} \delta(z', z)^{1-(t+1)/\Theta(z',z)} \delta(z', z)^{j+(i-p-u)/\Theta(z',z)} \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence et (1.3 (vi)). On obtient donc

$$I_r \lesssim \sum_{\substack{t,u \\ t+u \leq r}} \delta(z', z)^{j+1+(i-(p+1)-t-u)/\Theta(z',z)} \lesssim \delta(z', z)^{j+1+(i-(p+1)-r)/\Theta(z',z)},$$

ce qui est le résultat souhaité.

2.4 LEMME.

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \cap U)$ et deux points $z' \in U \cap \bar{\Omega}$ et $z \in U \cap \Omega$. On suppose que, pour tous biindices I et J, on a

$$\left|\left(X^I_{z',1} X^J_{z',2} f\right)(z)\right| \leq A_{i,j}(f) \mathcal{W}\left(\delta(z',z), \frac{i}{\Theta(z',z)} + j\right)$$

où $A_{i,j}(f)$ est une constante positive. Alors, pour tous biindices P et Q, pour toute suite (β_l) de $\mathcal{S}_{p,q}$ et toute suite (ε_l) de $\{-1,1\}^{p+q}$, on a

$$\left|(L_{\beta_1,\varepsilon_1} \ldots L_{\beta_{p+q},\varepsilon_{p+q}} f)(z)\right| \leq A'_{p,q}(f) \mathcal{W}\left(\delta(z',z), \frac{p}{\Theta(z',z)} + q\right)$$

où $A'_{p,q}(f)$ est donné par $C_{p,q}(\sup_{i+j \leq p+q} A_{i,j}(f))$ avec une constante $C_{p,q}$ ne dépendant que de $p+q$ et de la géométrie de Ω.

Preuve : Ici encore, on oublie les dérivées antiholomorphes.
C'est une conséquence immédiate du lemme (2.2). On reprend la formule (2.2.1) et deux cas se présentent à nous.

• $j - q + (i-p)/\Theta(z',z) \geq 0$, alors en utilisant (2.2.2) puis (2.1.1) on a

$$\begin{aligned}\left|\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z) \frac{\partial^{i+j} F}{\partial \zeta_1^i \partial \zeta_2^j}(\zeta)\right| &\leq A'_{p,q}(f) \delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)} \mathcal{W}\left(\delta(z',z), \frac{i}{\Theta(z',z)} + j\right) \\ &\leq A'_{p,q}(f) \mathcal{W}\left(\delta(z',z), \frac{p}{\Theta(z',z)} + q\right),\end{aligned}$$

ce qui est le résultat souhaité.

• $j - q + (i-p)/\Theta(z',z) < 0$, alors $i/\Theta(z',z) + j < p/\Theta(z',z) + q$ et en utilisant (2.2.2) et (2.1.6) on a

$$\begin{aligned}\left|\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z) \frac{\partial^{i+j} F}{\partial \zeta_1^i \partial \zeta_2^j}(\zeta)\right| &\leq A'_{p,q}(f) \mathcal{W}\left(\delta(z',z), \frac{i}{\Theta(z',z)} + j\right) \\ &\leq A'_{p,q}(f) \mathcal{W}\left(\delta(z',z), \frac{p}{\Theta(z',z)} + q\right),\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Le lemme qui suit est une conséquence immédiate du lemme (2.3), de la même manière que (2.4) était une conséquence immédiate de (2.2).

2.5 LEMME.

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \cap U)$ et deux points $z' \in U \cap \bar{\Omega}$ et $z \in U \cap \Omega$. On suppose que, pour tous indices i et j, toute suite (β_l) de $\mathcal{S}_{i,j}$, toute suite (ε_l) de $\{-1,1\}^{i+j}$, on ait

$$\left|(L_{\beta_1,\varepsilon_1} \ldots L_{\beta_{i+j},\varepsilon_{i+j}} f)(z)\right| \leq A_{i,j}(f) \mathcal{W}\left(\delta(z',z), \frac{i}{\Theta(z',z)} + j\right)$$

où $A_{i,j}(f)$ est une constante positive. Alors, pour tous biindices P et Q, on a

$$\left|\left(X^P_{z',1}X^Q_{z',2}f\right)(z)\right| \leq A'_{p,q}(f)\mathcal{W}\left(\delta(z',z), \frac{p}{\Theta(z',z)} + q\right)$$

où $A'_{p,q}(f)$ est donné par $C_{p,q}(\sup_{i+j\leq p+q} A_{i,j}(f))$ avec une constante $C_{p,q}$ ne dépendant que de $p+q$ et de la géométrie de Ω.

Nous allons écrire maintenant l'analogue non isotrope de (2.1.9).

2.6 THEOREME.

Pour toute fonction f de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, tous points z' de $U \cap \partial\Omega$, z de $U^{1,a}_{z'}$, tout couple d'indices (p,q) et toute suite (β_l) de $\mathcal{S}_{p,q}$, on a

$$\left|\left(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f\right)(z)\right| \leq C_{p,q}\,\|f\|\,\mathcal{W}\left(|r(z)|, \frac{p}{\Theta(z',z)} + q\right),$$

où $C_{p,q}$ désigne une constante positive ne dépendant que de p, q, k, α et de la géométrie de Ω.

Preuve : Grâce au lemme (2.4), il suffit d'établir les mêmes estimations avec l'itéré $L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}$ des champs L_1, L_2 remplacé par l'itéré $X^p_{z',1}X^q_{z',2}$ des champs $X_{z',1}$, $X_{z',2}$. On montre d'abord qu'avec les notations de (1.4), on a, pour $0 \leq s \leq 1$ et $q \geq k+1$,

$$\left|\frac{\partial^{p+q}F}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^q}(\zeta^s)\right| \leq C_{p,q}\,\|f\|\,|\rho(\zeta^s)|^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q)} \tag{2.6.1}$$

avec $F = f \circ \phi_{z'}$ et $C_{p,q}$ une constante convenable. Pour cela, on utilise le lemme (1.3) de [T1], [T2] qui stipule que le bidisque

$$P^s := P(\zeta^s, ((a_1|\rho(\zeta^s)|)^{1/\Theta(z',z)}, a_1|\rho(\zeta^s)|))$$

satisfait $\phi_{z'}(P^s) \subset \Omega$ pour une constante a_1 bien choisie, ne dépendant que de la géométrie de Ω. En appliquant la formule de Cauchy sur ce bidisque, on a

$$\frac{\partial^{p+q}F}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^q}(\zeta^s) = \frac{(q-k)!}{(2i\pi)^2}\int_{\partial^0 P^s} \frac{\dfrac{\partial^k F}{\partial\zeta_2^k}(\omega_1,\omega_2)}{(\omega_1-\zeta_1)^{p+1}(\omega_2-\zeta_2^s)^{q-k+1}}\,d\omega_1 d\omega_2$$

où ∂^0 désigne comme d'habitude le bord distingué.

Comme on a, par hypothèse, $q-k+1 \geq 2$, il s'ensuit

$$\int_{\partial^0 P^s} \frac{\dfrac{\partial^k F}{\partial\zeta_2^k}(\omega_1,\zeta_2^s)}{(\omega_1-\zeta_1)^{p+1}(\omega_2-\zeta_2^s)^{q-k+1}}\,d\omega_1 d\omega_2 = 0$$

et, suivant l'idée utilisée par E. M. Stein [St] dans le cas strictement pseudoconvexe, on obtient alors, par soustraction,

$$\frac{\partial^{p+q}F}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^q}(\zeta^s)=\frac{(q-k)!}{(2i\pi)^2}\int_{\partial^0P^s}\frac{\dfrac{\partial^kF}{\partial\zeta_2^k}(\omega_1,\omega_2)-\dfrac{\partial^kF}{\partial\zeta_2^k}(\omega_1,\zeta_2^s)}{(\omega_1-\zeta_1)^{p+1}(\omega_2-\zeta_2^s)^{q-k+1}}\,d\omega_1d\omega_2 \tag{2.6.2}$$

Par ailleurs, on sait que l'on a

$$\left|\frac{\partial^kF}{\partial\zeta_2^k}(\omega_1,\omega_2)-\frac{\partial^kF}{\partial\zeta_2^k}(\omega_1,\zeta_2^s)\right|\lesssim\|f\|\,|\omega_2-\zeta_2^s|^\alpha. \tag{2.6.3}$$

De (2.6.2), (2.6.3) et de la définition de P^s, on déduit immédiatement (2.6.1).

Dans le cas $q\geq k+1$, le théorème (2.6) n'est qu'une reformulation de (2.6.1). En effet, pour $s=0$, (2.6.1) s'écrit

$$\left|\left(X_{z',1}^pX_{z',2}^qf\right)(z)\right|\leq C_{p,q}\,\|f\|\,|r(z)|^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q)}$$

avec $\dfrac{p}{\Theta(z',z)}+q\geq k+1\geq k+\alpha+\varepsilon$ avec $\varepsilon=1-\alpha$ et donc

$$|r(z)|^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q)}\leq C'_{p,q}\mathcal{W}\left(|r(z)|,\frac{p}{\Theta(z',z)}+q\right)$$

compte tenu de (2.1.2). Dans le cas $q\leq k$, on écrit

$$\frac{\partial^{p+q}F}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^q}(\zeta)=E_1+E_2$$

avec

$$E_1=\sum_{l=0}^{k-q}\frac{1}{l!}\frac{\partial^{p+q+l}F}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^{q+l}}(\zeta^1)(\zeta_2-\zeta_2^1)^l$$

et

$$E_2=\frac{(\zeta_2-\zeta_2^1)^{k-q+1}}{(k-q)!}\int_0^1 s^{k-q}\frac{\partial^{p+k+1}F}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^{k+1}}(\zeta^s)\,ds.$$

Quand z décrit $\bar\Omega\cap U$, les points $\phi_{z'}(\zeta^1)$ restent dans une partie compacte de Ω. Il s'ensuit aisément que l'on a $|E_1|\leq C_{p,q}\sup|F|\leq C'_{p,q}\,\|f\|$ pour des constantes $C_{p,q}$, $C'_{p,q}$ convenables. En appliquant (2.6.1) avec $q=k+1$, on obtient par ailleurs

$$|E_2|\leq C''_{p,q}\,\|f\|\int_0^1 s^{k-q}|\rho(\zeta^s)|^{\alpha-p/\Theta(z',z)-1}ds$$

avec $|\rho(\zeta^s)|\approx|\rho(\zeta)|+s$ d'après (1.4.3) et $s^{k-q}\leq(|\rho(\zeta)|+s)^{k-q}$ puisque l'on a supposé $q\leq k$. Il vient donc, quitte à augmenter $C''_{p,q}$,

$$\begin{aligned}|E_2|&\leq C''_{p,q}\,\|f\|\int_0^1(s+|\rho(\zeta)|)^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q+1)}\,ds\\&\leq C''_{p,q}\,\|f\|\,\mathcal{W}\left(|\rho(\zeta)|,\frac{p}{\Theta(z',z)}+q\right).\end{aligned}$$

Les estimations obtenues pour $|E_1|$ et $|E_2|$ prouvent évidemment le théorème, puisque $|\rho(\zeta)| = |r(z)|$ et $\dfrac{\partial^{p+q} F}{\partial \zeta_1^p \partial \zeta_2^q}(\zeta) = \left(X_{z',1}^p X_{z',2}^q f\right)(z)$.

2.7 COMMENTAIRES.

(i) Dans les hypothèses faites, on a $|r(z)| \approx \delta(z', z)$ en vertu de (1.4.4) et donc, compte tenu de (2.1.5), on peut remplacer $\mathcal{W}(|r(z)|, p/\Theta(z', z) + q)$ par $\mathcal{W}(\delta(z', z), p/\Theta(z', z) + q)$ dans le résultat obtenu. On peut aussi y remplacer les itérés $(L_{\beta_1} \dots L_{\beta_{p+q}} f)(z)$ par les itérés $(X_{z',1}^p X_{z',2}^q f)(z)$, en vertu du lemme (2.5). Dans tout ce qui suit, on utilisera ces remarques sans les mentionner.

(ii) En fonction de p, q, z', z la quantité $\mathcal{W}(\delta(z', z), p/\Theta(z', z) + q)$ peut varier "continûment" d'une estimation en $\delta(z', z)^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q)}$ à une estimation en $|\mathrm{Log}\, \delta(z', z)|$ (voir (2.1.2) à (2.1.4)) ; ceci motive l'utilisation de $\mathcal{W}$ pour formuler commodément le théorème.

(iii) Le théorème (2.6) peut être vu comme une généralisation aux domaines de type fini de $\mathbb{C}^2$ d'un résultat établi par J. Bruna et J. -M. Ortega dans la boule [BO, lemme 1.1].

(iv) D'après un travail de S. Grellier ([G], corollaire A), on sait que pour toute fonction f de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, tous entiers p et q vérifiant

$$(2.7.1) \qquad \frac{p}{m} + q > k + \alpha \text{ et } q \le k,$$

on a, en tout point z de Ω, l'estimation

$$(2.7.2) \qquad |(L_1^p L_2^q f)(z)| \le C_{p,q}(f) |r(z)|^{k+\alpha-q} \tau(z, c|r(z)|)^{-p},$$

où $C_{p,q}(f)$ désigne une constante positive dépendant de p, q, f et de la géométrie de Ω et c une constante positive assez petite, ne dépendant que de la géométrie de Ω.

On sait aussi, d'après [Ca], que $z \in Q_\delta(z')$ implique $\tau(z, \delta) \approx \tau(z', \delta)$. En particulier, pour $z \in U_{z'}^{1,a}$, on a $|r(z)| \approx \delta(z', z)$ et donc $\tau(z, c|r(z)|) \approx \tau(z, \delta(z', z)) \approx \tau(z', \delta(z', z)) \approx \delta(z', z)^{1/\Theta(z',z)} \approx |r(z)|^{1/\Theta(z',z)}$. L'estimation (2.7.2) donne alors

$$|(L_1^p L_2^q f)(z)| \le C'_{p,q}(f) |r(z)|^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q)},$$

ce qui, compte tenu des propriétés de $\mathcal{W}$ décrites en (2.1) et de (2.7.1), équivaut à

$$(2.7.3) \qquad |(L_1^p L_2^q f)(z)| \le C''_{p,q}(f) \mathcal{W}\left(|r(z)|, \frac{p}{\Theta(z', z)} + q\right).$$

Le théorème (2.6) fournit la même estimation sans la restriction (2.7.1) sur les indices. En revanche, il ne s'applique qu'aux points z appartenant à une région d'approche admissible de z'. En un certain sens, le théorème (2.6) peut donc être vu comme une généralisation locale du corollaire A de [G].

(v) Soient (p,q) un couple d'indices, (β_l) une suite de $\mathcal{S}_{p,q}$. On va montrer maintenant que pour $f \in \mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ et $z' \in U \cap \partial\Omega$, il est possible de définir $(L_{\beta_1} \dots L_{\beta_{p+q}} f)(z')$ non seulement pour $p+q \leq k$ (ce qui est évident) mais aussi, plus généralement, pour $p/\theta(z') + q < k + \alpha$. On donnera ultérieurement (en (3.7)) une propriété de régularité pour les fonctions $z' \mapsto (L_{\beta_1} \dots L_{\beta_{p+q}} f)(z')$ ainsi définies. Comme on l'a mentionné en introduction, ces résultats généralisent un théorème de J. Bruna et J.-M. Ortega ([BO], théorème 1.2) limité au cas de la boule. A la connaissance de l'auteur, ce théorème de [BO] semble être à ce jour la seule autre référence établissant explicitement l'existence de dérivées complexes-tangentielles "d'ordre excessif" pour les fonctions de la classe $\mathcal{A}^{k,\alpha}$. Le résultat sera obtenu en plusieurs étapes, faisant l'objet des points (2.8) à (2.11) qui suivent.

2.8 PROPOSITION.

Soit f une fonction de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. Soient z' un point de $U \cap \partial\Omega$, z et z'' deux points de $U_{z'}^{1,a}$ et (p,q) un couple d'entiers naturels tels que l'on ait

$$\text{(2.8.1)} \qquad \frac{p}{\theta(z')} + q < k + \alpha.$$

Soit ε un réel, avec $0 < \varepsilon < 1$. Si on pose

$$\alpha_\varepsilon := \min\left\{\frac{1-\varepsilon}{\Theta(z',z)},\ \frac{1-\varepsilon}{\Theta(z',z'')},\ k+\alpha-\left(\frac{p}{\Theta(z',z)}+q\right),\ k+\alpha-\left(\frac{p}{\Theta(z',z'')}+q\right)\right\},$$

on a alors

$$\text{(2.8.2)} \qquad \left|\left(X_{z',1}^{p} X_{z',2}^{q} f\right)(z) - \left(X_{z',1}^{p} X_{z',2}^{q} f\right)(z'')\right| \leq \frac{C(f)}{\varepsilon}(\delta(z',z)+\delta(z',z''))^{\alpha_\varepsilon},$$

où $C(f)$ est une constante ne dépendant que de f, k, α et de la géométrie de Ω.

On donnera en (2.10) la preuve de cette proposition.

2.9 REMARQUES.

(i) Compte tenu de (2.8.1), du fait que $p/\Theta(z',.)+q \leq p/\theta(z')+q$ et que $\theta(z')$ ne prend que des valeurs entières entre 2 et m, on a clairement $\inf_{z,z'}\{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q)\} > 0$.

Cette remarque sera utilisée dans la preuve qui suit. Elle implique également qu'à ε fixé, on a $\inf_{z,z',z''} \alpha_\varepsilon > 0$.

(ii) Lorsqu'on suppose $\alpha < 1/m$, les conditions $p/\theta(z') + q < k + \alpha$ et $p/\theta(z') + q \leq k$ sont équivalentes. De là, il est facile de voir que, dans les hypothèses de (2.8), on peut touver ε tel que

$$\text{(2.9.1)} \qquad \alpha_\varepsilon \geq \alpha$$

quels que soient z', z, z'', p et q. En particulier, pour $p = q = 0$, $z'' = z'$, le résultat obtenu s'écrit, pour $f \in \mathcal{A}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$

$$(2.9.2) \qquad |f(z) - f(z')| \lesssim \delta(z', z)^{\alpha} \text{ pour } z \in U^{1,a}_{z'}.$$

Dans [McNS], J. McNeal et E. M. Stein démontrent une forme globale de (2.9.2) (c'est-à-dire que z n'est pas astreint à rester dans une région d'approche de z') lorsque Ω est un convexe de type fini de $\mathbb{C}^n$. L'estimation (2.9.2) permet une interprétation naturelle de la restriction $\alpha < 1/m$, voir [McNS]. Un résultat similaire figure dans un travail de D.-C. Chang et S. Krantz ([CK], théorème 2.10).

(iii) Pour $1/m \leq \alpha$, on n'a plus (2.9.1). Dans le cas $p = q = 0$, on a $\alpha_{\varepsilon} \geq (1-\varepsilon)/m$ et donc

$$|f(z) - f(z')| \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z', z)^{(1-\varepsilon)/m}$$

pour $f \in \mathcal{A}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ et $z \in U^{1,a}_{z'}$. Cette estimation n'est évidemment pas optimale. Une amélioration de la proposition (2.8) dans le cas $\alpha \geq 1/m$ semble très compliquée, en particulier pour α rationnel de la forme $j/\theta(z')$ avec $1 \leq j < \theta(z')$. Cette difficulté correspond à la restriction $\alpha \neq 1/2$ rencontrée dans [BO].

2.10 PREUVE DE LA PROPOSITION (2.8).

On se place dans le cadre de la première construction de chemins, voir (1.5) à (1.7).

(i) Estimation le long de S_1 :

Soit J_1 l'entier naturel tel que l'on ait

$$k + \alpha + \varepsilon - 1 < \frac{p}{\Theta(z', z)} + q + J_1 \leq k + \alpha + \varepsilon.$$

On a évidemment $0 \leq J_1 \leq k+2$. Soit

$$I_1 = \left(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f\right)(z) - \left(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f\right)(w).$$

En notant, comme en (2.1), $F := f \circ \phi_{z'}$, on a

$$I_1 = \frac{\partial^{p+q}F}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^q}(\zeta) - \frac{\partial^{p+q}F}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^q}(\xi) = P_1 + R_1$$

avec

$$P_1 = \sum_{j=1}^{J_1} \frac{1}{j!}\frac{\partial^{p+q+j}F}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^{q+j}}(\xi)(\zeta_2 - \xi_2)^j \text{ et } R_1 = \frac{(\zeta_2 - \xi_2)^{J_1+1}}{J_1!}\int_0^1 s^{J_1}\frac{\partial^{p+q+J_1+1}F}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^{q+J_1+1}}(u^{1,s})ds.$$

On estime d'abord le polynôme de Taylor P_1.

Pour $1 \leq j \leq J_1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{j!}\left|\frac{\partial^{p+q+j}F}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^{q+j}}(\xi)(\zeta_2 - \xi_2)^j\right| &\lesssim (t'' - t)^j\left|\frac{\partial^{p+q+j}F}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^{q+j}}(\xi)\right| \\ &\lesssim (t'' - t)^j\mathcal{W}\left(\delta(z', w), \frac{p}{\Theta(z', w)} + q + j\right)\end{aligned}$$

compte tenu du théorème (2.6) et du lemme (2.5). On a aussi $0 \leq t''-t \leq t'' \approx \delta(z',w) \approx \delta(z',z'')$ et donc, compte tenu de (2.1.5),

$$(t''-t)^j \mathcal{W}\left(\delta(z',w), \frac{p}{\Theta(z',w)} + q + j\right) \lesssim \delta(z',z'')^j \mathcal{W}\left(\delta(z',z''), \frac{p}{\Theta(z',w)} + q + j\right).$$

Par (1.7.1) et (2.1.6)-(2.1.7), on a aussi

$$\mathcal{W}\left(\delta(z',z''), \frac{p}{\Theta(z',w)} + q + j\right) \lesssim \mathcal{W}\left(\delta(z',z''), \frac{p}{\Theta(z',z)} + q + j\right).$$

Enfin, on a $p/\Theta(z',z) + q + j \leq p/\Theta(z',z) + q + J_1 \leq k + \alpha + \varepsilon$ et donc, par (2.1.5) et (2.1.2),

$$\begin{aligned}\mathcal{W}\left(\delta(z',z''), \frac{p}{\Theta(z',w)} + q + j\right) &\lesssim \mathcal{W}\left(\delta(z',z''), k+\alpha+\varepsilon\right) \\ &\lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z',z'')^{-\varepsilon}.\end{aligned}$$

De ces considérations, il résulte que l'on a

$$|P_1| \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z',z'')^{1-\varepsilon}. \tag{2.10.1}$$

On estime maintenant le reste de Taylor R_1. On a sans difficulté

$$|R_1| \lesssim (t''-t)^{J_1+1} \int_0^1 s^{J_1} \mathcal{W}\left(\delta(z',z^{1,s}), \frac{p}{\Theta(z',z^{1,s})} + q + J_1 + 1\right) ds. \tag{2.10.2}$$

D'après (1.7.1) et (2.1.6)-(2.1.7), on a aussi

$$\mathcal{W}\left(\delta(z',z^{1,s}), \frac{p}{\Theta(z',z^{1,s})} + q + J_1 + 1\right) \lesssim \mathcal{W}\left(\delta(z',z^{1,s}), \frac{p}{\Theta(z',z)} + q + J_1 + 1\right).$$

On a par ailleurs $\delta(z',z^{1,s}) \approx t + s(t''-t)$ et donc

$$\mathcal{W}\left(\delta(z',z^{1,s}), \frac{p}{\Theta(z',z)} + q + J_1 + 1\right) \approx \mathcal{W}\left(t + s(t''-t), \frac{p}{\Theta(z',z)} + q + J_1 + 1\right)$$

en vertu de (2.1.5).

Enfin, comme on a $p/\Theta(z',z) + q + J_1 + 1 > k + \alpha + \varepsilon$, il vient

$$\mathcal{W}\left(t + s(t''-t), \frac{p}{\Theta(z',z)} + q + J_1 + 1\right) \lesssim \varepsilon^{-1}(t + s(t''-t))^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q+J_1+1)}$$

d'après (2.1.2). En reportant dans (2.10.2), on obtient

$$\begin{aligned}|R_1| &\lesssim \varepsilon^{-1}(t''-t)\int_0^1 (s(t''-t))^{J_1}\,(t+s(t''-t))^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q+J_1+1)}\ ds \\ &\lesssim \varepsilon^{-1}(t''-t)\int_0^1 (t+s(t''-t))^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q+1)}\ ds \\ &\lesssim \varepsilon^{-1}\left(k+\alpha-\left(\frac{p}{\Theta(z',z)}+q\right)\right)^{-1}\left({t''}^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q)} - t^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q)}\right)\end{aligned}$$

par un calcul direct. Suivant les hypothèses qui ont été faites et selon la remarque (2.9 (i)), on en déduit alors

$$|R_1| \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z',z'')^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q)}$$

et, compte tenu de (2.10.1),

$$|I_1| \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z',z'')^{\min\{k+\alpha-(p/\Theta(z',z)+q),1-\varepsilon\}}. \tag{2.10.3}$$

(ii) Estimation le long de S_2 :

Soit J_2 l'entier naturel tel que l'on ait

$$k+\alpha+\frac{\varepsilon-1}{\Theta(z',z'')} < \frac{p+J_2}{\Theta(z',z'')}+q \leq k+\alpha+\frac{\varepsilon}{\Theta(z',z'')}.$$

On a clairement $0 \leq J_2 \leq m(k+1)+1$. On pose

$$I_2 = \left(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f\right)(w) - \left(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f\right)(w'') = P_2 + R_2,$$

avec

$$P_2 = \sum_{j=1}^{J_2} \frac{1}{j!}\frac{\partial^{p+q+j}F}{\partial\zeta_1^{p+j}\partial\zeta_2^q}(\xi'')(\xi_1-\xi_1'')^j \text{ et } R_2 = \frac{(\xi_1-\xi_1'')^{J_2+1}}{J_2!}\int_0^1 s^{J_2}\frac{\partial^{p+q+J_2+1}F}{\partial\zeta_1^{p+J_2+1}\partial\zeta_2^q}(u^{2,s})ds.$$

Pour $1 \leq j \leq J_2$, compte tenu de (1.7.3), du fait que l'on a $\delta(z',w'') \approx \delta(z',z'')$ et $(p+j)/\Theta(z',z'')+q \leq k+\alpha+\varepsilon/\Theta(z',z'')$, on obtient

$$\left|\frac{\partial^{p+q+j}F}{\partial\zeta_1^{p+j}\partial\zeta_2^q}(\xi'')\right| \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z',z'')^{-\varepsilon/\Theta(z',z'')} \tag{2.10.4}$$

via des arguments similaires à ceux utilisés pour l'estimation de P_1.

Par ailleurs, dans la construction (1.5), on a

$$|\xi_1-\xi_1''| = |\zeta_1-\zeta_1''| \leq |\zeta_1|+|\zeta_1''| \lesssim \tau(z',a|\rho(0^{t''})|) \lesssim \tau(z',\delta(z',z''))$$

et donc

$$|\xi_1-\xi_1''| \lesssim \delta(z',z'')^{1/\Theta(z',z'')}. \tag{2.10.5}$$

Par (2.10.4) et (2.10.5), on a aussitôt

$$|P_2| \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z',z'')^{(1-\varepsilon)/\Theta(z',z'')}. \tag{2.10.6}$$

On estime à présent R_2. On a tout d'abord

$$\mathcal{W}\left(\delta(z',z^{2,s}),\frac{p+J_2+1}{\Theta(z',z^{2,s})}+q\right) \lesssim \mathcal{W}\left(\delta(z',z''),\frac{p+J_2+1}{\Theta(z',z'')}+q\right)$$

en vertu de (1.7.3), du fait que l'on a $\delta(z', z^{2,s}) \approx \delta(z', z'')$ et des propriétés (2.1.5) à (2.1.7) de $\mathcal{W}$. On en déduit, compte tenu de (2.10.5),

$$|R_2| \lesssim \delta(z', z'')^{(J_2+1)/\Theta(z',z'')} \mathcal{W}\left(\delta(z', z''), \frac{p + J_2 + 1}{\Theta(z', z'')} + q\right).$$

On a aussi $(p + J_2 + 1)/\Theta(z', z'') + q \geq k + \alpha + (\varepsilon - 1)/\Theta(z', z'') + 1/\Theta(z', z'') = k + \alpha + \varepsilon/\Theta(z', z'')$ et donc, par (2.1.2),

$$\mathcal{W}\left(\delta(z', z''), \frac{p + J_2 + 1}{\Theta(z', z'')} + q\right) \lesssim \varepsilon^{-1} \delta(z', z'')^{k+\alpha-((p+J_2+1)/\Theta(z',z'')+q)}.$$

Il vient donc

$$|R_2| \lesssim \varepsilon^{-1} \delta(z', z'')^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z'')+q)}$$

et, compte tenu de (2.10.6),

$$(2.10.7) \qquad |I_2| \lesssim \varepsilon^{-1} \delta(z', z'')^{\min\{k+\alpha-(p/\Theta(z',z'')+q),(1-\varepsilon)/\Theta(z',z'')\}}.$$

(iii) Estimation le long de S_3 :

On procède de façon similaire en définissant J_3 l'entier naturel tel que l'on ait

$$k + \alpha + \varepsilon - 1 < \frac{p}{\Theta(z', z'')} + q + J_3 \leq k + \alpha + \varepsilon.$$

On a évidemment $0 \leq J_3 \leq k + 2$. On pose

$$I_3 = \left(X^p_{z',1} X^q_{z',2} f\right)(w'') - \left(X^p_{z',1} X^q_{z',2} f\right)(z'') = P_3 + R_3,$$

avec

$$P_3 = \sum_{j=1}^{J_3} \frac{1}{j!} \frac{\partial^{p+q+j} F}{\partial \zeta_1^p \partial \zeta_2^{q+j}}(\zeta'')(\xi_2'' - \zeta_2'')^j \text{ et } R_3 = \frac{(\xi_2'' - \zeta_2'')^{J_3+1}}{J_3!} \int_0^1 s^{J_3} \frac{\partial^{p+q+J_3+1} F}{\partial \zeta_1^p \partial \zeta_2^{q+J_3+1}}(u^{3,s}) ds.$$

On a $|\xi_2'' - \zeta_2''| \lesssim a|\rho(0^{t''})| \lesssim t''$ et donc

$$(2.10.8) \qquad |\xi_2'' - \zeta_2''| \lesssim \delta(z', z'').$$

De là et de l'estimation

$$\left|\frac{\partial^{p+q+j} F}{\partial \zeta_1^p \partial \zeta_2^{q+j}}(\zeta'')\right| \lesssim \mathcal{W}\left(\delta(z', z''), \frac{p}{\Theta(z', z'')} + q + j\right),$$

les arguments déjà invoqués permettent d'obtenir

$$(2.10.9) \qquad |P_3| \lesssim \varepsilon^{-1} \delta(z', z'')^{(1-\varepsilon)/\Theta(z',z'')}.$$

De même, on a

$$|R_3| \lesssim \delta(z',z'')^{J_3+1}\int_0^1 s^{J_3}\mathcal{W}\left(\delta(z',z^{3,s}),\frac{p}{\Theta(z',z^{3,s})}+q+J_3+1\right)\,ds$$

et, compte tenu de (1.7.3), (1.7.4) et de l'estimation $\delta(z',z^{3,s}) \approx \delta(z',z'') \approx t''$,

$$|R_3| \lesssim \delta(z',z'')^{J_3+1}\mathcal{W}\left(\delta(z',z''),\frac{p}{\Theta(z',z'')}+q+J_3+1\right).$$

On conclut alors, avec les mêmes arguments que pour l'estimation de R_2, à la majoration

$$|R_3| \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z',z'')^{k+\alpha-(p/\Theta(z',z'')+q)}$$

et, compte tenu de (2.10.9),

$$|I_3| \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z',z'')^{\min\{k+\alpha-(p/\Theta(z',z'')+q),(1-\varepsilon)/\Theta(z',z'')\}}. \tag{2.10.10}$$

(iv) Conclusion :

Posons

$$I=\left(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f\right)(z)-\left(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f\right)(z'')=I_1+I_2+I_3.$$

En regroupant (2.10.3), (2.10.7) et (2.10.10), on obtient

$$|I| \lesssim \varepsilon^{-1}\delta(z',z'')^{\min\{k+\alpha-(p/\Theta(z',z'')+q),(1-\varepsilon)/\Theta(z',z'')\}}$$

mais cette estimation est liée au fait que l'on a supposé, pour simplifier les notations, $t'' \geq t$, c'est à dire $\delta(z',z'') \gtrsim \delta(z',z)$, dans la construction de chemins (1.5). Dans le cas général, il convient de tenir compte de la symétrie des rôles de z et z'' et on obtient ainsi immédiatement

$$|I| \lesssim \varepsilon^{-1}(\delta(z',z)+\delta(z',z'')^{\alpha_\varepsilon}$$

où α_ε est l'expression spécifiée en (2.7).

2.11 THEOREME.

Dans les hypothèses de la proposition (2.8), la limite

$$\lim_{z\to z',z\in U^{1,a}_{z'}}\left(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f\right)(z) \tag{2.11.1}$$

existe. On la note par abus $(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(z')$. *De même, pour toute suite* (β_l) *de* $\mathcal{S}_{p,q}$, *la limite*

$$\lim_{z\to z',z\in U^{1,a}_{z'}}\left(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f\right)(z) \tag{2.11.2}$$

existe. On la note par abus $(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f)(z')$. *De plus, on a*

$$(2.11.3)\qquad \left(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f\right)(z') = \sum_{\substack{i,j\\ i/\theta(z')+j<k+\alpha}} \gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z')\left(X^i_{z',1}X^j_{z',2}f\right)(z')$$

où les $\gamma_{\beta,p,q,i,j}$ *sont les fonctions de* $\mathcal{C}^\infty(U\times U)$ *définies en (2.2).*

<u>Preuve :</u> L'existence des limites (2.11.1) est un corollaire trivial de la proposition (2.8) et de la remarque (2.9 (i)), via une simple application du critère de Cauchy pour l'existence de limites.

L'existence des limites (2.11.2) découle du lemme (2.2) et de la formule (2.2.1). En effet, trois cas se présentent pour les termes qui apparaissent dans cette formule.

• $i/\theta(z')+j<k+\alpha$. Puisque $i/\Theta(z',z)+j\leq i/\theta(z')+j<k+\alpha$, la limite de $(X^i_{z',1}X^j_{z',2}f)(z)$ existe alors quand z tend vers z' dans $U^{1,a}_{z'}$.

• $i/\theta(z')+j>k+\alpha$. Alors, puisque $i/\Theta(z',z)+j\leq i/\theta(z')+j$, on obtient, en posant $\mu=(i/\theta(z')+j-(k+\alpha))/2>0$ et en utilisant (2.1.2),

$$\begin{aligned}\left|\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z)\left(X^i_{z',1}X^j_{z',2}f\right)(z)\right| &\lesssim \delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)}\mathcal{W}\left(\delta(z',z),\frac{i}{\Theta(z',z)}+j\right)\\ &\lesssim \delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)}\mathcal{W}\left(\delta(z',z),\frac{i}{\theta(z')}+j\right)\\ &\lesssim S_1+S_2.\end{aligned}$$

avec

$$S_1=\delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)}\ \text{et}\ S_2=\frac{1}{\mu}\delta(z',z)^{k+\alpha-i/\theta(z')-q+(i-p)/\Theta(z',z)}.$$

Quand on fait tendre z' vers z dans $U^{1,a}_{z'}$, S_1 tend vers 0, puisque $j-q+(i-p)/\Theta(z',z)\geq j-q+(i-p)/\theta(z')\geq k+\alpha-(p/\theta(z')+q)>0$. Pour S_2, puisque $i\leq p$, on a $(i-p)/\Theta(z',z)\geq(i-p)/\theta(z')$, d'où $\mu^{-1}\delta(z',z)^{k+\alpha-(i/\theta(z'))-q+(i-p)/\Theta(z',z)}\lesssim\delta(z',z)^{k+\alpha-(p/\theta(z')+q)}$ qui tend également vers 0.

• $i/\theta(z')+j=k+\alpha$. On a alors

$$\begin{aligned}\left|\gamma_{\beta,p,q,i,j}(z',z)\left(X^i_{z',1}X^j_{z',2}f\right)(z)\right| &\lesssim \delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)}\mathcal{W}\left(\delta(z',z),\frac{i}{\theta(z')}+j\right)\\ &\lesssim \delta(z',z)^{j-q+(i-p)/\Theta(z',z)}\left(1+|\mathrm{Log}\ \delta(z',z)|\right)\end{aligned}$$

avec $(i-p)/\Theta(z',z)+j-q\geq(i-p)/\theta(z')+j-q=k+\alpha-(p/\theta(z')+q)>0$, donc le terme correspondant tend aussi vers 0.
En faisant tendre z vers z' dans $U^{1,a}_{z'}$, on obtient donc bien la formule (2.11.3) souhaitée.

<u>2.12 EXEMPLE.</u>

A titre d'illustration, on peut considérer l'ellipsoïde $\Omega=\{|z_1|^4+|z_2|^2<1\}$ qui est de type fini 4 et vérifier aisément, à l'aide des inégalités $|z_1|\lesssim|1-z_2|^{1/4}$ et $|1-z_2|\gtrsim|r(z)|$, que la fonction $f(z) = z_1^2\mathrm{Log}(1 - z_2)$ est dans $\mathcal{A}^{0,1/2}(\bar{\Omega})$: il suffit pour cela de voir que $|\partial f/\partial z_i(z)| \lesssim |r(z)|^{-1/2}$ pour i=1,2. On peut alors, par des calculs simples, montrer que $(L_1 f)(0,1)$ existe (et est nulle) tandis que $(L_1^2 f)(0,1)$ et $(L_2 f)(0,1)$ n'existent pas. Ceci correspond bien à la condition (2.8.1) sur les ordres de dérivation.

§3. FORMULE DE TAYLOR NON ISOTROPE ET APPLICATIONS.

3.1 NOTATIONS ET HYPOTHESES.

Dans toute la suite, on supposera de plus

$$m\alpha \notin \mathbb{N}. \tag{3.1.1}$$

Soit $f \in \mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. Soit z' un point de $U \cap \partial\Omega$ de type m. Soient δ_1, s_0 et b_0 les nombres associés par (1.8) à $a_0 = a$ et $t_0 = 1$. On associe à f un développement de Taylor non isotrope

$$T^{z'}_{NI} f(z) = \sum_{\substack{i,j \in \mathbb{N} \\ i/m + j < k+\alpha}} \frac{1}{i!j!} \left(X^i_{z',1} X^j_{z',2} f\right)(z') \zeta_1^i \zeta_2^j \text{ pour } z = \phi_{z'}(\zeta).$$

On pose également $h := f - T^{z'}_{NI} f$, $H := h \circ \phi_{z'}$.

3.2 LEMME.

Soit f une fonction de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. Pour tout point z' de $U \cap \partial\Omega$ et tout couple d'indices (p,q) tel que $p/\theta(z') + q < k + \alpha$, on a

$$\left|\left(X^p_{z',1} X^q_{z',2} f\right)(z')\right| \leq C_{p,q}(f) \tag{3.2.1}$$

où $C_{p,q}(f)$ est une constante ne dépendant que de p, q et f.

De plus, pour tous points z', z'' de $U \cap \partial\Omega$ et z de $U \cap \bar{\Omega}$ et tout couple d'indices (p,q), on a

$$\left|\left(X^p_{z'',1} X^p_{z'',2} (T^{z'}_{NI} f)\right)(z)\right| \leq C'_{p,q}(f) \tag{3.2.2}$$

où $C'_{p,q}(f)$ est une constante ne dépendant que de p, q et f.

Preuve : Pour démontrer (3.2.1), on utilise le résultat (2.8.2). Pour $0 < \varepsilon < 1$, avec α_ε défini en (2.8), on a

$$\left|\left(X^p_{z',1} X^q_{z',2} f\right)(z) - \left(X^p_{z',1} X^q_{z',2} f\right)(z'')\right| \leq \varepsilon^{-1} C(f) (\delta(z', z) + \delta(z', z''))^{\alpha_\varepsilon}$$

pour z' dans $U \cap \partial\Omega$ et z, z'' dans $U^{1,a}_{z'}$. On fait alors tendre z'' vers z', tout en restant dans la région d'approche et on obtient, quitte à augmenter $C(\varepsilon, f)$,

$$\left|\left(X^p_{z',1} X^q_{z',2} f\right)(z') - \left(X^p_{z',1} X^q_{z',2} f\right)(z)\right| \leq \varepsilon^{-1} C(f) \delta(z', z)^{\beta_\varepsilon}$$

où $\beta_\varepsilon = \min\{(1-\varepsilon)/\theta(z'),\ k + \alpha - (p/\Theta(z', z) + q)\}$, donc

$$\left|\left(X^p_{z',1} X^q_{z',2} f\right)(z')\right| \leq \varepsilon^{-1} C(f) \delta(z', z)^{\beta_\varepsilon} + \left|\left(X^p_{z',1} X^q_{z',2} f\right)(z)\right|$$

pour tout z dans $U_{z'}^{1,a}$. On fixe ε et on pose $z = z'_{1/2} = \phi_{z'}(0^{1/2})$. On a alors $\delta(z', z'_{1/2}) \approx 1$ et

$$\left|\left(X_{z',1}^{p} X_{z',2}^{q} f\right)(z')\right| \leq C(f) + \left|\left(X_{z',1}^{p} X_{z',2}^{q} f\right)(z'_{1/2})\right|.$$

De plus, l'ensemble $\{z'_{1/2},\ z' \in U \cap \partial\Omega\}$ est inclus dans un compact de Ω, donc les $|(X_{z',1}^{p} X_{z',2}^{q} f)(z'_{1/2})|$ sont uniformément bornés pour $z' \in U \cap \partial\Omega$. On en tire facilement (3.2.1).

Pour démontrer (3.2.2), il suffit de voir que $(X_{z'',1}^{p} X_{z'',2}^{q}(T_{NI}^{z'} f))(z)$ est $\mathcal{C}^\infty$ en z et z'' et que le degré et les coefficients de $T_{NI}^{z'} f$ sont uniformément bornés en z' d'après (3.2.1).

3.3 THEOREME.

Soit f une fonction de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar\Omega)$ avec $\alpha \in]0,1[$ vérifiant $m\alpha \notin \mathbb{N}$. Soient z' un point de $U \cap \partial\Omega$ de type m, z'' un point de $U \cap \partial\Omega$, z un point de $U \cap \bar\Omega$ avec $\delta(z', z) < \delta_1 b_0 t_0$ et $z \in U_{z''}^{s_0, b_0}$, et p et q deux indices tels que $p/\Theta(z'', z) + q < k + \alpha$. Alors on a

$$\left|\left(X_{z'',1}^{p} X_{z'',2}^{q}(f - T_{NI}^{z'} f)\right)(z)\right| \lesssim \frac{1}{k + \alpha - (p/\Theta(z'', z) + q)} \delta(z', z)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}.$$

On fait la preuve en 3 étapes (3.4), (3.5) et (3.6). On se place désormais dans le schéma de construction de chemins du (1.8).

3.4 ESTIMATION EN ω.

Soient p et q deux entiers naturels tels que $p/m + q < k + \alpha$. On a alors l'estimation

$$\left|\frac{\partial^{p+q} H}{\partial \zeta_1^p \partial \zeta_2^q}(\omega)\right| \lesssim \delta(z', z)^{k+\alpha-(p/m+q)}.$$

Preuve : Elle se réalise en deux étapes.

(i) Première Etape : Estimation sur $[\xi, \omega]$.

Soit J l'entier naturel tel que l'on ait

$$\frac{p+J}{m} + q < k + \alpha \leq \frac{p+J+1}{m} + q.$$

On a évidemment $0 \leq J \leq m(k+1)$. Par développement de Taylor, on peut écrire

$$\frac{\partial^{p+q} H}{\partial \zeta_1^p \partial \zeta_2^q}(\omega) = P + R, \tag{3.4.1}$$

avec

$$P = \sum_{j=0}^{J} \frac{1}{j!} \frac{\partial^{p+q+j} H}{\partial \zeta_1^{p+j} \partial \zeta_2^q}(\xi) \zeta_1^j \text{ et } R = \frac{\zeta_1^{J+1}}{J!} \int_0^1 \sigma^J \frac{\partial^{p+q+J+1} H}{\partial \zeta_1^{p+J+1} \partial \zeta_2^q}(v^{2,1-\sigma}) d\sigma.$$

On va tout d'abord estimer $|R|$. On a

$$|R| \lesssim \left|\zeta_1^{J+1}\right| \int_0^1 \sigma^J \left|\frac{\partial^{p+q+J+1} H}{\partial\zeta_1^{p+J+1}\partial\zeta_2^q}(v^{2,1-\sigma})\right| d\sigma.$$

Par des considérations de degré immédiates, la condition $(p+J+1)/m+q \geq k+\alpha$ implique

$$\frac{\partial^{p+q+J+1} H}{\partial\zeta_1^{p+J+1}\partial\zeta_2^q}(v^{2,1-\sigma}) = \frac{\partial^{p+q+J+1} F}{\partial\zeta_1^{p+J+1}\partial\zeta_2^q}(v^{2,1-\sigma})$$

et donc, en vertu du théorème (2.6) et du lemme (2.5),

$$\left|\frac{\partial^{p+q+J+1} H}{\partial\zeta_1^{p+J+1}\partial\zeta_2^q}(v^{2,1-\sigma})\right| \lesssim \mathcal{W}\left(\delta(z', x^{2,1-\sigma}), \frac{p+J+1}{\Theta(z', x^{2,1-\sigma})}+q\right)$$

avec $\Theta(z',.) \equiv m$ puisque z' est de type m. On en tire

$$|R| \lesssim |\zeta_1|^{J+1} \int_0^1 \sigma^J \mathcal{W}\left(\delta(z', x^{2,1-\sigma}), \frac{p+J+1}{m}+q\right) d\sigma.$$

De plus, d'après (1.3 (iv)), on a $|\zeta_1| \lesssim \delta(z',z)^{1/\Theta(z',z)} = \delta(z',z)^{1/m}$.

On a donc

$$|R| \lesssim \delta(z',z)^{(J+1)/m} \int_0^1 \sigma^J \mathcal{W}\left(\delta(z', x^{2,1-\sigma}), \frac{p+J+1}{m}+q\right) d\sigma.$$

On va maintenant utiliser les propriétés relatives à $\mathcal{W}$. Puisque $\delta(z', x^{2,1-\sigma}) \approx t \approx \delta(z',z)$, on a, par (2.1.5),

$$\begin{aligned} |R| &\lesssim \delta(z',z)^{(J+1)/m} \int_0^1 \sigma^J \mathcal{W}\left(\delta(z',z), \frac{p+J+1}{m}+q\right) d\sigma \\ &\lesssim \delta(z',z)^{(J+1)/m} \mathcal{W}\left(\delta(z',z), \frac{p+J+1}{m}+q\right). \end{aligned}$$

La condition $(p+J+1)/m+q \geq k+\alpha$, jointe à l'hypothèse (3.1.1), assure que l'on a en fait $(p+J+1)/m+q-(k+\alpha) \geq \varepsilon$ avec $\varepsilon = \min_{j\in\{0,1\ldots,m\}} |\alpha - j/m|$. De là, en utilisant (2.1.2), on obtient finalement

$$|R| \lesssim \delta(z',z)^{(J+1)/m} \delta(z',z)^{k+\alpha-((p+J+1)/m+q)} = \delta(z',z)^{k+\alpha-(p/m+q)}. \tag{3.4.2}$$

(ii) <u>Deuxième Etape :</u> Estimation sur $[0,\xi]$.

Pour $\eta > 0$, on procède à un développement et à des estimations le long de $[v^{1,\eta}, \xi]$ avec le paramétrage $\lambda \to v^{1,\eta(1-\lambda)+\lambda}$ pour $0 \leq \lambda \leq 1$. On fera ensuite tendre η vers 0.

Pour $0 \leq j \leq J$, soit L_j l'entier naturel tel que l'on ait

$$\frac{p+j}{m}+q+L_j < k+\alpha \leq \frac{p+j}{m}+q+L_j+1.$$

On a évidemment $L_j \leq k+1$. On peut alors écrire, par développement de Taylor

$$\frac{\partial^{p+q+j} H}{\partial \zeta_1^{p+j} \partial \zeta_2^{q}}(\xi) = P_j^\eta + R_j^\eta, \tag{3.4.3}$$

avec

$$P_j^\eta = \sum_{l=0}^{L_j} \frac{1}{l!} \frac{\partial^{p+q+j+l} H}{\partial \zeta_1^{p+j} \partial \zeta_2^{q+l}}(v^{1,\eta})(\xi_2 - v_2^{1,\eta})^l$$

et

$$R_j^\eta = \frac{(\xi_2 - v_2^{1,\eta})^{L_j+1}}{L_j!} \int_0^1 \sigma^{L_j} \frac{\partial^{p+q+j+L_j+1} H}{\partial \zeta_1^{p+j} \partial \zeta_2^{q+L_j+1}}(v^{1,\eta\sigma+1-\sigma}) d\sigma.$$

Quand η tend vers 0, $v^{1,\eta}$ tend vers 0 en restant dans $V_{z'}^{1,a}$. Compte tenu de (2.11) et de la définition de $T_{NI}^{z'} f$, on voit alors que pour $0 \leq l \leq L_j$, chaque terme $\frac{\partial^{p+q+j+l} H}{\partial \zeta_1^{p+j} \partial \zeta_2^{q+l}}(v^{1,\eta})$ tend vers zéro. Ainsi on a

$$\lim_{\eta \longrightarrow 0} P_j^\eta = 0 \tag{3.4.4}$$

On va maintenant estimer R_j^η. Il vient

$$|R_j^\eta| \lesssim |\xi_2 - v_2^{1,\eta}|^{L_j+1} \int_0^1 \sigma^{L_j} \left| \frac{\partial^{p+q+j+L_j+1} H}{\partial \zeta_1^{p+j} \partial \zeta_2^{q+L_j+1}}(v^{1,\eta\sigma+1-\sigma}) \right| d\sigma.$$

On a $|\xi_2 - v_2^{1,\eta}| \leq |\xi_2| + |v_2^{1,\eta}| \lesssim t + \eta t \lesssim t$. De plus puisque $(p+j)/m + q + L_j + 1 \geq k + \alpha$ et pour des raisons de degré sur $T_{NI}^{z'} f$, on a

$$\frac{\partial^{p+q+j+L_j+1} H}{\partial \zeta_1^{p+j} \partial \zeta_2^{q+L_j+1}}(v^{1,\eta\sigma+1-\sigma}) = \frac{\partial^{p+q+j+L_j+1} F}{\partial \zeta_1^{p+j} \partial \zeta_2^{q+L_j+1}}(v^{1,\eta\sigma+1-\sigma}).$$

On applique l'estimée donnée par le théorème (2.6) et le lemme (2.5). Il vient

$$\begin{aligned} |R_j^\eta| &\lesssim t^{L_j+1} \int_0^1 \sigma^{L_j} \mathcal{W}\left(\delta(z', x^{1,\eta\sigma+1-\sigma}), \frac{p+j}{\Theta(z', x^{1,\eta\sigma+1-\sigma})} + q + L_j + 1\right) d\sigma \\ &= t^{L_j+1} \int_0^1 \sigma^{L_j} \mathcal{W}\left(\delta(z', x^{1,\eta\sigma+1-\sigma}), \frac{p+j}{m} + q + L_j + 1\right) d\sigma. \end{aligned}$$

Puisque $\delta(z', x^{1,\eta\sigma+1-\sigma}) \approx (\eta\sigma + 1 - \sigma)t$, on a alors d'après (2.1.5),

$$|R_j^\eta| \lesssim t^{L_j+1} \int_0^1 \sigma^{L_j} \mathcal{W}\left(t(1 + \sigma(\eta - 1)), \frac{p+j}{m} + q + L_j + 1\right) d\sigma$$

Compte tenu du choix de L_j et de (3.1.1), on a $(p+j)/m + q + L_j + 1 > k + \alpha$ et, d'après (2.1.2) et un argument déjà utilisé dans la première étape,

$$\begin{aligned} |R_j^\eta| &\lesssim t^{L_j+1} t^{k+\alpha-((p+j)/m+q+L_j+1)} \int_0^1 \sigma^{L_j}(1 + \sigma(\eta - 1))^{k+\alpha-((p+j)/m+q+L_j+1)} d\sigma \\ &= t^{k+\alpha-((p+j)/m+q)} \int_0^1 \sigma^{L_j}(1 + \sigma(\eta - 1))^{k+\alpha-((p+j)/m+q+L_j+1)} d\sigma. \end{aligned}$$

On remarque alors que dans l'intégrale de droite, la fonction intégrée est plus petite que la fonction $g(\sigma) = \sigma^{L_j}(1-\sigma)^{k+\alpha-((p+j)/m+q+L_j+1)}$ et que l'intégrale $\int_0^1 g(\sigma)d\sigma$ converge puisque l'on a $k+\alpha-((p+j)/m+q+L_j+1) > -1$. On a donc

$$\left|R_j^\eta\right| \lesssim t^{k+\alpha-((p+j)/m+q)}$$

uniformément en η.

Finalement, en faisant tendre η vers 0 et en utilisant (3.4.4), on obtient alors

$$\left|\frac{\partial^{p+q+j}H}{\partial\zeta_1^{p+j}\partial\zeta_2^q}(\xi)\right| \lesssim t^{k+\alpha-((p+j)/m+q)} \approx \delta(z',z)^{k+\alpha-((p+j)/m+q)}.$$

On peut alors injecter cette estimation dans (3.4.1) et, grâce à (3.4.2), on obtient

$$\left|\frac{\partial^{p+q}H}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^q}(\omega)\right| \lesssim \sum_{j=0}^{J}\delta(z',z)^{k+\alpha-((p+j)/m+q)}\delta(z',z)^{j/m} + \delta(z',z)^{k+\alpha-(p/m+q)},$$

ce qui donne le résultat annoncé.

3.5 ESTIMEE DE RACCORD.

Comme dans [T2] (3.5), on définit

$$A_{i,j}^{(p)} := \left(\frac{\partial^{i+j}}{\partial\zeta_1^i\partial\zeta_2^j}\Xi_{\zeta'',1}^p H\right)(\omega)\ ,(i,j,p)\in\mathbb{N}^3.$$

(On se reportera à (1.3) pour la définition de $\Xi_{\zeta'',1}$.) On va montrer par récurrence sur l'entier p que l'on a l'estimation

$$\left|A_{i,j}^{(p)}\right| \lesssim \delta(z',z)^{k+\alpha-((p+i)/m+j)}.$$

Preuve : Pour $p=0$, on vient de le montrer en (3.4) pour les entiers i,j tels que $i/m + j < k+\alpha$. D'après (3.1.1), il ne reste plus qu'à le montrer pour i,j entiers tels que $i/m+j > k+\alpha$. On a, par des considérations de degré

$$\frac{\partial^{i+j}H}{\partial\zeta_1^i\partial\zeta_2^j}(\omega) = \frac{\partial^{i+j}F}{\partial\zeta_1^i\partial\zeta_2^j}(\omega).$$

Par le théorème (2.6), le lemme (2.5) et puisque $\Theta(z',.)\equiv m$, on a

$$\left|\frac{\partial^{i+j}F}{\partial\zeta_1^i\partial\zeta_2^j}(\omega)\right| \lesssim \mathcal{W}\left(\delta(z',y),\frac{i}{\Theta(z',y)}+j\right) = \mathcal{W}\left(\delta(z',y),\frac{i}{m}+j\right).$$

On utilise alors (1.8.1) et (2.1.5) pour obtenir

$$\left|\frac{\partial^{i+j}F}{\partial\zeta_1^i\partial\zeta_2^j}(\omega)\right| \lesssim \mathcal{W}\left(\delta(z',z),\frac{i}{m}+j\right)$$

et, puisque $i/m + j > k + \alpha$, on a, en utilisant (2.1.2) et (3.1.1),

$$\left|\frac{\partial^{i+j} H}{\partial\zeta_1^i \partial\zeta_2^j}(\omega)\right| \lesssim \delta(z', z)^{k+\alpha-(i/m+j)},$$

ce qui clôt le cas $p = 0$.

On suppose la formule vraie au rang $p - 1$. Alors, d'après [T2] (3.5), on a

$$A_{i,j}^{(p)} = A_{i+1,j}^{(p-1)} + \sum_{l+n=i} \frac{i!}{l!n!} \frac{\partial^l E}{\partial\zeta_1^l}(\omega_1) A_{n,j+1}^{(p-1)}$$

d'où, en utilisant l'hypothèse de récurrence et (1.4.5), en remarquant que $\zeta_1 = \omega_1$,

$$\begin{aligned}\left|A_{i,j}^{(p)}\right| &\lesssim \delta(z', z)^{k+\alpha-((p-1+i+1)/m+j)} + \sum_{l+n=i} \frac{i!}{l!n!} \delta(z', z)^{1-(l+1)/m} \\ &\qquad\qquad \times \delta(z', z)^{k+\alpha-((p-1+n)/m+j+1)} \\ &\lesssim \delta(z', z)^{k+\alpha-((p+i)/m+j)},\end{aligned}$$

ce qui donne l'estimation souhaitée.

3.6 FIN DE LA PREUVE.

On fixe ε_0, un réel strictement positif. Soit L l'entier naturel tel que

$$k + \alpha + \varepsilon_0 - 1 < \frac{p}{\Theta(z'', z)} + q + L \leq k + \alpha + \varepsilon_0$$

On a évidemment $L \leq k + 1$.

On peut alors écrire, par un développement de Taylor,

$$\left(X_{z'',1}^p X_{z'',2}^q h\right)(z) = P + R$$

où

$$P = \sum_{l=0}^{L} \frac{1}{l!} \left(X_{z'',1}^p X_{z'',2}^{q+l} h\right)(y) \left(\frac{z_2 - y_2}{d_0(z'')}\right)^l \text{ et } R = \frac{(v_2^1 - v_2^0)^{L+1}}{L!} \int_0^1 \sigma^L \frac{\partial^{p+q+L+1} H^*}{\partial u_1^p \partial u_2^{q+L+1}}(v^{1-\sigma}) d\sigma$$

où $H^* = h \circ \phi_{z''}$.

Estimons tout d'abord R. En utilisant (1.8.4), on a

$$|R| \lesssim \delta(z', z)^{L+1} \int_0^1 \sigma^L \left|\frac{\partial^{p+q+L+1} H^*}{\partial u_1^p \partial u_2^{q+L+1}}(v^{1-\sigma})\right| d\sigma.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{p+q+L+1} H^*}{\partial u_1^p \partial u_2^{q+L+1}} &= \left(X_{z'',1}^p X_{z'',2}^{q+L+1} f\right) \circ \phi_{z''} - \left(X_{z'',1}^p X_{z'',2}^{q+L+1} T_{NI}^{z'} f\right) \circ \phi_{z''} \\ &= E_1 - E_2.\end{aligned}$$

Comme on n'a pas nécessairement $p/m + q + L + 1 \geq k + \alpha$, le terme E_2 dans l'égalité précédente n'est pas forcément nul, mais en vertu du lemme (3.2), on peut affirmer

$$|E_2| \lesssim 1.$$

Compte tenu du théorème (2.6) et du lemme (2.5) qui permettent de majorer $|E_1|$, il vient maintenant

$$\left| \frac{\partial^{p+q+L+1} H^*}{\partial u_1^p \partial u_2^{q+L+1}} (v^{1-\sigma}) \right| \lesssim \mathcal{W} \left(\delta(z'', x^{3,1-\sigma}), \frac{p}{\Theta(z'', x^{3,1-\sigma})} + q + L + 1 \right)$$

donc

$$|R| \lesssim \delta(z', z)^{L+1} \int_0^1 \sigma^L \mathcal{W} \left(\delta(z'', x^{3,1-\sigma}), \frac{p}{\Theta(z'', x^{3,1-\sigma})} + q + L + 1 \right) d\sigma.$$

On va maintenant utiliser diverses propriétés de $\mathcal{W}$. En combinant (1.8.7), (2.1.6) et (2.1.7), on obtient

$$|R| \lesssim \delta(z', z)^{L+1} \int_0^1 \sigma^L \mathcal{W} \left(\delta(z'', x^{3,1-\sigma}), \frac{p}{\Theta(z'', z)} + q + L + 1 \right) d\sigma.$$

D'après (1.8.6), on sait aussi que $v^{1-\sigma}$ appartient au bidisque $P^{s+\sigma t, a}(z'')$, donc on a $\delta(z'', x^{3,1-\sigma}) \approx s + \sigma t$, et enfin

$$|R| \lesssim \delta(z', z)^{L+1} \int_0^1 \sigma^L \mathcal{W} \left(s + \sigma t, \frac{p}{\Theta(z'', z)} + q + L + 1 \right) d\sigma.$$

Puisque $p/\Theta(z'', z) + q + L + 1 > k + \alpha + \varepsilon_0$, on obtient

$$\mathcal{W} \left(s + \sigma t, \frac{p}{\Theta(z'', z)} + q + L + 1 \right) \lesssim (s + \sigma t)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q+L+1)}$$

donc, compte tenu du fait que $\delta(z', z) \approx t$,

$$|R| \lesssim t \int_0^1 (\sigma t)^L (s + \sigma t)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q+L+1)} d\sigma.$$

De l'inégalité évidente $(s + \sigma t)^L \geq (\sigma t)^L$, on déduit que

$$|R| \lesssim t \int_0^1 (s + \sigma t)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q+1)} d\sigma$$

et en faisant le calcul direct de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 (s + \sigma t)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q+1)} \, d\sigma \quad &= \frac{1}{t\,(k + \alpha - (p/\Theta(z'', z) + q))} \Big((s + t)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)} \\ &\qquad - s^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)} \Big) \end{aligned}$$

puisque $p/\Theta(z'', z) + q < k + \alpha$. On obtient donc

$$|R| \lesssim \frac{1}{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}(s+t)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}$$

avec $\delta(z', z) \approx t$ et $s \lesssim t$, d'où

$$|R| \lesssim \frac{1}{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}\delta(z',z)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}. \tag{3.6.1}$$

D'autre part, pour $0 \leq l \leq L$, on a

$$(X^p_{z'',1}X^{q+l}_{z'',2}h)(y) = \Xi^p_{\zeta'',1}\left(\frac{d_0(z'')}{d_0(z')}\right)^{q+l}\frac{\partial^{q+l}}{\partial\zeta_2^{q+l}}H(\omega)$$

et

$$\left|(X^p_{z'',1}X^{q+l}_{z'',2}h)(y)\left(\frac{z_2-y_2}{d_0(z'')}\right)^l\right| = \frac{|d_0(z'')|^q}{|d_0(z')|^{q+l}}|z_2-y_2|^l\left|\Xi^p_{\zeta'',1}\frac{\partial^{q+l}}{\partial\zeta_2^{q+l}}H(\omega)\right|$$

avec de plus, $|d_0| \approx 1$ et $|z_2 - y_2| \lesssim \delta(z', z)$. En utilisant (3.5) et le fait que $\Xi_{\zeta'',1}$ et $\partial/\partial\zeta_2$ commutent, on obtient alors l'estimation :

$$|P| \lesssim \delta(z', z)^{k+\alpha-(p/m+q)}$$

donc, a fortiori,

$$|P| \lesssim \delta(z',z)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}. \tag{3.6.2}$$

En regroupant (3.6.1) et (3.6.2), on a le résultat souhaité :

$$\left|\left(X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}h\right)(z)\right| \lesssim \frac{1}{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}\delta(z',z)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}.$$

En application du théorème de Taylor (3.3), on démontre maintenant un résultat de régularité pour les fonctions $z' \mapsto (X^p_{z',1}X^q_{z',2}f)(z')$ et $z' \mapsto (L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f)(z')$ comme annoncé en (2.7 (v)).

3.7 THEOREME.

On suppose $0 < \alpha < 1/m$. On considère f une fonction de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar\Omega)$, z' un point de type m dans $U \cap \partial\Omega$ et V un voisinage convexe de z' dans $\mathbb{C}^2$, avec V relativement compact dans U.

Soient z'' un point de $V \cap \partial\Omega$ et (p, q) un couple d'entiers naturels vérifiant

$$\frac{p}{\theta(z'')} + q < k + \alpha.$$

On a alors

$$(3.7.1) \qquad \left|\left(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f\right)(z') - \left(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f\right)(z'')\right| \leq C(f)\delta(z',z'')^\alpha$$

où $C(f)$ est une constante dépendant de f et de la géométrie de Ω.

Pour toute suite (β_l) de $\mathcal{S}_{p,q}$, on a aussi

$$(3.7.2) \qquad \left|\left(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f\right)(z') - \left(L_{\beta_1}\dots L_{\beta_{p+q}}f\right)(z'')\right| \leq C'(f)\delta(z',z'')^\alpha$$

où $C'(f)$ est une constante dépendant de f et de la géométrie de Ω.

Preuve : Pour démontrer (3.7.1), on commence par décomposer le terme de gauche et on a

$$\left(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f\right)(z') - \left(X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}f\right)(z'') = A_1(z',z'') + A_2(z',z'')$$

où

$$A_1(z',z'') = \left(X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}(f - T^{z'}_{NI}f)\right)(z'')$$

et

$$A_2(z',z'') = \left(X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}T^{z'}_{NI}f\right)(z'') - \left(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f\right)(z').$$

La démonstration se découpe en trois étapes. Compte tenu de (3.2), on peut clairement se limiter au cas où on a $\delta(z',z'') < \delta_1 b_0 t_0$, où δ_1, b_0 et t_0 figurent en (3.1).

(i) Première Etape

On estime tout d'abord $A_1(z',z'')$. Comme on a supposé $\delta(z',z'') < \delta_1 b_0 t_0$, tout point z de $U^{s_0,b_0}_{z''}$ suffisamment proche de z'' vérifie également $\delta(z',z) < \delta_1 b_0 t_0$. On applique à un tel point z le théorème (3.3) en remarquant que les hypothèses sur p, q, α entraînent $p/\theta(z'') + q \leq k$ et a fortiori $p/\Theta(z'',z) + q \leq k$. On obtient

$$\left|\left(X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}(f - T^{z'}_{NI}f)\right)(z)\right| \lesssim \delta(z',z)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}.$$

On fait alors tendre z vers z'' tout en restant dans $U^{s_0,b_0}_{z''}$ et on obtient

$$(3.7.3) \qquad |A_1(z',z'')| \lesssim \delta(z',z'')^{k+\alpha-(p/\theta(z'')+q)}.$$

(ii) Deuxième Etape

On désire maintenant estimer $A_2(z',z'')$. Pour cela, on pose

$$B(z,z',z'') = \left(X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}((T^{z'}_{NI}f) - (T^{z'}_{NI}f)\circ\phi_{z'}\circ\phi^{-1}_{z''})\right)(z)$$

et

$$\mathcal{P}(\zeta) = \sum_{\substack{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}\\ i/m+j<k+\alpha}} \frac{1}{i!j!}\left(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f\right)(z')\zeta_1^i\zeta_2^j.$$

Par définition, on a

$$T^{z'}_{NI}f = \mathcal{P}\circ\phi^{-1}_{z'}$$

et donc

$$(T^{z'}_{NI}f) \circ \phi_{z'} \circ \phi^{-1}_{z''} = \mathcal{P} \circ \phi^{-1}_{z''}.$$

On considère l'application $\psi_{z',z''}$ et les dérivations $\partial/\partial u_j$ décrites en (1.3). Par ce qui précède, on a alors

$$B(z,z',z'') = \partial^{PQ}_u(\mathcal{P}(\psi_{z',z''}(u)) - \mathcal{P}(u))\Big|_{u=\phi^{-1}_{z''}(z)}.$$

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des familles $a = (a_{ij})$ de nombres complexes indexées par les biindices $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i/m + j < k + \alpha$.

L'ensemble $\mathcal{F}$ s'identifie à $\mathbb{C}^d$, où l'on a posé $d = \#\{(i,j)\ ;\ i/m + j < k + \alpha\}$. A tout élément a de $\mathcal{F}$, on fait correspondre le polynôme

$$\mathcal{P}_a(\zeta) = \sum_{\substack{i\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N} \\ i/m+j<k+\alpha}} a_{ij}\zeta_1^i\zeta_2^j.$$

On pose alors, pour $(z,w,z'',a) \in U \times V^2 \times \mathcal{F}$,

$$\widetilde{B}(z,w,z'',a) = \partial^{PQ}_u\left(\mathcal{P}_a(\psi_{w,z''}(u)) - \mathcal{P}_a(u)\right)\Big|_{u=\phi^{-1}_{z''}(z)}$$

de telle sorte que si $a^{z'}$ désigne l'élément de $\mathcal{F}$ défini par

$$a^{z'}_{ij} = \left(X^p_{z',1}X^q_{z',2}f\right)(z') \text{ pour } \frac{i}{m} + j < k + \alpha, \tag{3.7.4}$$

alors on a

$$\widetilde{B}\left(z,z',z'',a^{z'}\right) = B(z,z',z''). \tag{3.7.5}$$

La fonction

$$\widetilde{B} : \begin{array}{ccc} U \times V^2 \times \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (z,w,z'',a) & \mapsto & \widetilde{B}(z,w,z'',a) \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a en outre

$$\widetilde{B}(z,z'',z'',a) = 0 \tag{3.7.6}$$

pour tous (z,z'') de $U \times V$ et tout a de $\mathcal{F}$.
Soit alors $\mathcal{K}$ un compact de $\mathcal{F}$. En appliquant à $\widetilde{B}$ le théorème des accroissements finis par rapport à la troisième variable, on déduit de (3.7.6) que l'on a

$$\left|\widetilde{B}(z,w,z'',a)\right| \le C|w - z''| \text{ pour } (z,w,z'',a) \in U \times V^2 \times \mathcal{K}, \tag{3.7.7}$$

C désignant une constante positive convenable qui dépend de $\mathcal{K}$.

D'après le lemme (3.2), il existe un compact $\mathcal{K}$ de $\mathcal{F}$ tel que l'on ait

$$\{a^{z'}\ ;\ z' \in U \cap \partial\Omega \text{ et } \theta(z') = m\} \subset \mathcal{K}.$$

On applique alors (3.7.7) avec ce compact $\mathcal{K}$, avec $w = z'$, $a = a^{z'}$ et en notant que l'on a aussi

$$\begin{aligned}|z' - z''| &\lesssim |\zeta_1''| + |\zeta_2''| \lesssim (|\zeta_1''|^m + |\zeta_2''|)^{1/m} \\ &\lesssim \delta(z', z'')^{1/m}.\end{aligned}$$

Compte tenu de (3.7.5), on obtient la majoration

$$\left|\widetilde{B}(z, z', z'')\right| \lesssim \delta(z', z'')^{1/m}.$$

Pour finir, quand z tend vers z'', on constate, compte tenu des définitions, que $B(z, z', z'')$ tend vers $A_2(z', z'')$. On obtient ainsi

$$(3.7.8) \qquad |A_2(z', z'')| \lesssim \delta(z', z'')^{1/m}.$$

(iii) Troisième Etape

En regroupant (3.7.3) et (3.7.8), on obtient

$$(3.7.9) \qquad \begin{aligned}|A_1(z', z'') + A_2(z', z'')| &= \left|\left(X^p_{z',1} X^q_{z',2} f\right)(z') - \left(X^p_{z',1} X^q_{z',2} f\right)(z'')\right| \\ &\leq C(f)\delta(z', z'')^{\min\{1/m, k+\alpha-(p/\theta(z'')+q)\}}.\end{aligned}$$

L'estimation (3.7.1) en résulte, puisque $\min\{1/m, k+\alpha-(p/\theta(z'')+q)\} \geq \alpha$. L'estimation (3.7.2) découle immédiatement de (3.7.1) et de (2.11.3).

3.8 REMARQUES.

(i) Dans le cas $\alpha \geq 1/m$, la preuve de (3.7) fournit un résultat moins bon : sous réserve que l'on ait $m\alpha \notin \mathbb{N}$, on obtient

$$\left|\left(L_{\beta_1} \dots L_{\beta_{p+q}} f\right)(z') - \left(L_{\beta_1} \dots L_{\beta_{p+q}} f\right)(z'')\right| \leq \frac{C'(f)}{k + \alpha - (p/\theta(z'') + q)} \delta(z', z'')^\beta$$

avec, comme dans (3.7.9), $\beta = \min\{1/m, k + \alpha - (p/\theta(z'') + q)\}$.

(ii) Si on suppose $\alpha < 1/m$ mais $\theta(z') < m$, on obtient également une estimation plus faible, à savoir

$$\left|\left(L_{\beta_1} \dots L_{\beta_{p+q}} f\right)(z') - \left(L_{\beta_1} \dots L_{\beta_{p+q}} f\right)(z'')\right| \leq C'(f) \left(|\zeta_1''|^{\theta(z')} + |\zeta_2''|\right)^\alpha$$

pour $z'' = \phi_{z'}(\zeta'')$ vérifiant $\theta(z'') \leq \theta(z')$ et $p/\theta(z'') + q < k + \alpha$. La preuve consiste à reprendre les méthodes précédentes en travaillant avec la pseudo-distance "tronquée" $\delta^{(\nu)}$ définie à partir de

$$\tau^{(\nu)}(z', \delta) = \left(\sum_{l=2}^{\nu-1} \left(\frac{A_l(z')}{\delta}\right)^{1/l} + \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/\nu}\right)^{-1}, \quad \nu = 2, \dots, m.$$

Pour $\theta(z') = \nu$, on a $\delta^{(\nu)}(z', z'') \approx |\zeta_1''|^\nu + |\zeta_2''|$. Bien sûr, dans ce cas, les résultats ne sont plus liés de façon optimale à la géométrie du bord.

§4. CLASSES $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ NON ISOTROPES.

4.1 DEFINITION.

On définit la classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ non isotrope $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega}\cap U)$ comme étant l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega\cap U)$ pour lesquelles il existe des réels t_f et a_f avec $0 < t_f \leq 1$, $0 < a_f \leq a$, tels que pour tous points z' de $U\cap\partial\Omega$, z de $U_{z'}^{t_f,a_f}$, tout couple d'indices (p,q), toute suite (β_l) de $\mathcal{S}_{p,q}$, toute suite (ε_l) de $\{-1,1\}^{p+q}$, on ait

$$\left|(L_{\beta_1,\varepsilon_1}\dots L_{\beta_{p+q},\varepsilon_{p+q}}f)(z)\right| \leq C(p,q,f)\mathcal{W}\left(|r(z)|,\frac{p}{\Theta(z',z)}+q\right),$$

$C(p,q,f)$ désignant des constantes ne dépendant que de p, q, et de la fonction f.

4.2 REMARQUES IMPORTANTES.

(i) Soient f dans $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega}\cap U)$ et (I,J) un couple quelconque de biindices. Puisque $i/\Theta(z',z)+j \leq i+j$, on a

$$\left|\left(X_{z'}^{IJ}f\right)(z)\right| \leq C(i,j,f)\mathcal{W}\left(|r(z)|,\frac{i}{\Theta(z',z)}+j\right) \leq C'(i,j,f)\mathcal{W}(|r(z)|,i+j)$$

en utilisant (2.1.6) et le lemme (2.5). Pour $i+j > k+\alpha$, il en résulte, quitte à augmenter $C'(i,j,f)$,

$$\left|\left(X_{z'}^{IJ}f\right)(z)\right| \leq C'(i,j,f)|r(z)|^{k+\alpha-(i+j)}$$

à l'aide de (2.1.2).

Il est par ailleurs facile de voir que l'on a, pour P,Q deux biindices tels que $p+q = k+1$,

$$\partial_z^{PQ}f(z) = b_{P,Q}^{P,Q}(z,z')\left(X_{z'}^{PQ}f\right)(z) + \sum_{\substack{I,J\\(I,J)\neq(P,Q)\\i'\leq p',i''\leq p''\\j'\leq q',j''\leq q''}} b_{I,J}^{P,Q}(z,z')\left(X_{z'}^{IJ}f\right)(z),$$

où les $b_{I,J}^{P,Q}$ sont des coefficients de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ dans $U\times U$. Le premier terme est majoré comme plus haut par

$$C'(p,q,f)|r(z)|^{\alpha-1}.$$

On peut majorer tous les termes de la somme $\sum_{I,J}$ par une constante à l'aide de (2.1.3) et puisque pour les indices de cette somme on a

$$\frac{i}{\Theta(z',z)}+j < i+j \leq p+q-1 = k < k+\alpha.$$

On en tire

$$\left|\partial_z^{PQ}f(z)\right| \leq C''(p,q,f)|r(z)|^{\alpha-1}.$$

Il est alors clair, d'après un résultat classique de Hardy-Littlewood ([HL, appendice 1, proposition 2]), que f appartient à $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega}\cap V)$, où V est un voisinage de z^0, avec $V \subset\subset U$.

En résumé, on a établi l'inclusion $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega}\cap U) \subset \mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega}\cap V)$.

(ii) Du théorème (2.6) résulte le fait fondamental

$$\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega}\cap U)$$

ayant motivé la définition (4.3). En fait, la preuve de (2.6) est purement locale et l'on a plus généralement, si V est un voisinage de z^0, $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega}\cap V) \subset \mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega}\cap U)$, quitte à rétrécir U.

(iii) Comme on l'a déjà remarqué en (2.7 (i)), on peut remplacer, dans les estimations de la définition (4.1), $\mathcal{W}(|r(z)|, p/\Theta(z',z)+q)$ par $\mathcal{W}(\delta(z',z), p/\Theta(z',z)+q)$. On peut aussi y remplacer les itérés $\left(L_{\beta_1,\varepsilon_1}\dots L_{\beta_{p+q},\varepsilon_{p+q}}f\right)(z')$ par les itérés $(X^{PQ}_{z'}f)(z)$, en vertu du lemme (2.5). En utilisant ces remarques et en reprenant toutes les démonstrations faites dans les deux chapitres précédents avec, cette fois, des fonctions de $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega}\cap U)$, on obtient les résultats suivants.

4.3 THEOREME.

Soit f une fonction de $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega}\cap U)$. Soient z' un point de $U\cap\partial\Omega$, (P,Q) un couple de biindices tels que l'on ait

$$\frac{p}{\theta(z')}+q < k+\alpha. \tag{4.3.1}$$

Alors la limite

$$\lim_{z\to z',\, z\in U^{t_f,a_f}_{z'}} \left(X^{PQ}_{z'}f\right)(z) \tag{4.3.2}$$

existe. On la note par abus $(X^{PQ}_{z'}f)(z')$. De même, pour toute suite (β_l) de $\mathcal{S}_{p,q}$ et toute suite (ε_l) de $\{-1,1\}^{p+q}$, la limite

$$\lim_{z\to z',\, z\in U^{t_f,a_f}_{z'}} \left(L_{\beta_1,\varepsilon_1}\dots L_{\beta_{p+q},\varepsilon_{p+q}}f\right)(z) \tag{4.3.3}$$

existe. On la note par abus $\left(L_{\beta_1,\varepsilon_1}\dots L_{\beta_{p+q},\varepsilon_{p+q}}f\right)(z')$. Enfin, il existe des fonctions $\gamma_{\beta,\varepsilon,P,Q,I,J}$ de $\mathcal{C}^\infty(U\times U)$ telles que l'on ait

$$\left(L_{\beta_1,\varepsilon_1}\dots L_{\beta_{p+q},\varepsilon_{p+q}}f\right)(z') = \sum_{\substack{I,J \\ i/\theta(z')+j<k+\alpha}} \gamma_{\beta,\varepsilon,P,Q,I,J}(z',z')\left(X^{IJ}_{z'}f\right)(z'). \tag{4.3.4}$$

On associe à f, de manière cohérente avec (3.1), un développement de Taylor non isotrope

$$T^{z'}_{NI}f(z) = \sum_{\substack{I,J\in\mathbb{N}^2 \\ i/m+j<k+\alpha}} \frac{1}{I!J!}\left(X^I_{z',1}X^J_{z',2}f\right)(z')\zeta_1^I\zeta_2^J \text{ pour } z=\phi_{z'}(\zeta).$$

On a alors, similairement à (3.3) et (3.7) les résultats suivants.

4.4 THEOREME.

Soit f une fonction de $\mathcal{C}_{NI}^{k,\alpha}(\bar{\Omega}\cap U)$ avec $\alpha \in]0,1[$ vérifiant $m\alpha \notin \mathbb{N}$. Soient z' un point de $U \cap \partial\Omega$ de type m, z'' un point de $U \cap \partial\Omega$, z un point de $U \cap \bar{\Omega}$ avec $\delta(z', z) < \delta_1 b_f t_f$ et $z \in U_{z''}^{s_f, b_f}$, et P et Q, deux biindices tels que $p/\Theta(z'', z) + q < k + \alpha$. Alors on a

$$\left|\left(X_{z'',1}^{P} X_{z'',2}^{Q}(f - T_{NI}^{z'} f)\right)(z)\right| \lesssim \frac{1}{k + \alpha - (p/\Theta(z'', z) + q)} \delta(z', z)^{k+\alpha-(p/\Theta(z'',z)+q)}.$$

4.5 THEOREME.

On suppose $0 < \alpha < 1/m$. On considère f une fonction de $\mathcal{C}_{NI}^{k,\alpha}(\bar{\Omega} \cap U)$, z' un point de type m dans $U \cap \partial\Omega$ et V un voisinage convexe de z' dans $\mathbb{C}^2$, avec V relativement compact dans U. Soient z'' un point de $V \cap \partial\Omega$ et (p, q) un couple d'entiers naturels vérifiant

$$\frac{p}{\theta(z'')} + q < k + \alpha.$$

Pour tous biindices P, Q de longueurs respectives p et q, on a alors

$$\left|\left(X_{z'}^{PQ} f\right)(z') - \left(X_{z''}^{PQ} f\right)(z'')\right| \leq C(f)\delta(z', z'')^{\alpha} \tag{4.5.1}$$

où $C(f)$ est une constante dépendant de f et de la géométrie de Ω.

Pour toute suite (β_l) de $\mathcal{S}_{p,q}$ et toute suite (ε_l) de $\{-1, 1\}^{p+q}$, on a aussi

$$\left|\left(L_{\beta_1,\varepsilon_1} \ldots L_{\beta_{p+q},\varepsilon_{p+q}} f\right)(z') - \left(L_{\beta_1,\varepsilon_1} \ldots L_{\beta_{p+q},\varepsilon_{p+q}} f\right)(z'')\right| \leq C'(f)\delta(z', z'')^{\alpha} \tag{4.5.2}$$

où $C'(f)$ est une constante dépendant de f et de la géométrie de Ω.

Les théorèmes précédents vont nous permettre de définir une notion de jet de Whitney de classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ non isotrope sur une partie compacte E du bord dont tous les points sont de type maximal m. Il s'agira ensuite d'établir un théorème d'extension pour ces jets. Tout ceci fait l'objet des points (4.6) à (4.16) qui suivent.

Etant donné E une partie compacte de $U \cap \partial\Omega$, on posera

$$\delta(z, E) = \inf_{z' \in E} \delta(z, z').$$

Pour tout point z de $\bar{\Omega} \cap U$, on note $\tilde{z}$ un point de E qui réalise $\delta(z, E)$, c'est-à-dire,

$$\delta(z, \tilde{z}) = \delta(z, E). \tag{4.5.3}$$

4.6 POSITION DU PROBLEME D'EXTENSION DE JETS.

On suppose toujours, dans la suite, que α vérifie $m\alpha \notin \mathbb{N}$.

On suppose que E est un compact de $U \cap \partial\Omega$ dont tous les points sont de type m.

Un jet de Whitney F sur E est défini par une famille $\{(F_{PQ})\ ;\ P,Q \in \mathbb{N}^2, p/m+q < k+\alpha\}$ d'applications continues sur E, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Le jet F sera dit appartenir à la classe non isotrope $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(E)$ s'il existe, pour tous biindices P, Q tels que $p/m+q < k+\alpha$, une constante $C_{P,Q}$ ne dépendant que de P, Q et de la géométrie de Ω telle que l'on ait, pour tous z', z de E,

$$\left|F_{PQ}(z) - \left(X_z^{PQ} P_{NI}^{z'} F\right)(z)\right| \leq C_{P,Q}\delta(z',z)^{k+\alpha-(p/m+q)} \tag{4.6.1}$$

avec

$$P_{NI}^{z'}F(z) = \sum_{\substack{I,J \\ i/m+j<k+\alpha}} \frac{1}{I!J!} F_{IJ}(z')\zeta^{IJ} \text{ pour } z = \phi_{z'}(\zeta).$$

Par exemple, si f est une fonction de $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega} \cap U)$, alors f définit un jet de $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(E)$ en prenant $F_{PQ}(z') = (X_{z'}^{PQ} f)(z')$. La continuité des F_{PQ} est assurée par le théorème (4.5) et par une adaptation immédiate de la remarque (3.8). En appliquant le théorème (4.4) avec $z'' = z$, ce qui est possible puisque z'' appartient à $U_{z''}^{s_f,b_f} \cap \partial\Omega$, on obtient exactement (4.6.1), en remarquant que $\Theta(z',.) \equiv \Theta(z'',.) \equiv m$ puisque z' et z'' sont de type m.

Pour $F \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(E)$, on se propose réciproquement de construire f dans $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega} \cap U)$ telle que, pour tous biindices P, Q avec $p/m+q < k+\alpha$ et tous z' de E, on ait

$$\left(X_{z'}^{PQ} f\right)(z') = F_{PQ}(z').$$

4.7 LEMME DE RECOUVREMENT DE TYPE WHITNEY [CW].

Il existe $\gamma > 1$, $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que, si E est une partie compacte de $U \cap \partial\Omega$, on puisse trouver une famille de boules $(Q_{r_i}(z_i))_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes, où Q_i (resp. Q_i^*) désigne $Q_{r_i}(z_i)$ (resp. $Q_{\gamma r_i}(z_i)$) :

$$(U \cap \bar{\Omega})\backslash E = (U \cap \bar{\Omega}) \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i = (U \cap \bar{\Omega}) \cap \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i^*. \tag{4.7.1}$$

$$Cr_i \leq \delta(z,E) \leq \frac{1}{C} r_i \textit{ pour tout } z \in (U \cap \bar{\Omega}) \cap Q_i^*, \tag{4.7.2}$$

$$C\delta(z,E) \leq \delta(z_i,E) \leq \frac{1}{C}\delta(z,E) \textit{ pour tout } z \in (U \cap \bar{\Omega}) \cap Q_i^*, \tag{4.7.3}$$

(4.7.4) *pour tout $j \in \mathbb{N}$, Q_j^* coupe au plus N boules de la famille $(Q_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$.*

Soit à présent $F \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(E)$. On définit, pour z dans $\bar{\Omega} \cap U$, le polynôme P^l par, $P^l(z) = P^{\tilde{z}_l}_{NI}F(z)$.
On note $\zeta(l)$ et $\tilde{\zeta}(l)$ les coordonnées associées à z_l et à $\tilde{z}_l$.
On a alors $z = \phi_{z_l}(\zeta(l)) = \phi_{\tilde{z}_l}(\tilde{\zeta}(l))$ et

$$P^l(z) = \sum_{\substack{I,J \\ i/m+j<k+\alpha}} \frac{1}{I!J!} F_{IJ}(\tilde{z}_l)\tilde{\zeta}(l)^{IJ}.$$

On fixe λ un réel positif tel que, pour tout $z'' \in U \cap \partial\Omega$, tout $z \in U^{1,\alpha}_{z''} \cap Q^*_n$, on ait l'inégalité $\delta(z'', z) \leq \lambda r_n$: pour justifier l'existence de λ, il suffit de voir que l'on a, pour de tels points,

$$\delta(z'', z) \approx |r(z)| \lesssim \delta(z, E) \approx r_n$$

en utilisant (1.3), (1.4) et (4.7).

4.8 LEMME.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{1}{T(z_n, r_n)} - \frac{1}{m} \right| \lesssim \frac{1}{|Log\ r_n|}.$$

Preuve : D'après (4.6) et (4.7), on a $r_n \approx \delta(z_n, \tilde{z}_n)$. Puisque $T(z_n, \delta(z_n, \tilde{z}_n)) = \Theta(z_n, \tilde{z}_n)$, on utilise alors [T1] (3.4.3) ou [T2] (0.9) pour dire que

$$\left| \frac{1}{T(z_n, r_n)} - \frac{1}{\Theta(z_n, \tilde{z}_n)} \right| \lesssim \frac{1}{|\mathrm{Log}\ r_n|}.$$

On utilise alors le lemme (0.9) de [T1] pour écrire

$$\left| \frac{1}{\Theta(z_n, \tilde{z}_n)} - \frac{1}{\Theta(\tilde{z}_n, z_n)} \right| \lesssim \frac{1}{|\mathrm{Log}\ r_n|}$$

et on conclut en remarquant que $\Theta(\tilde{z}_n, z_n) = m$ puisque tout point de E est de type m.

4.9 LEMME.

Soient deux points $z'' \in U \cap \partial\Omega$ et $z \in U \cap \bar{\Omega} \cap (Q^*_n \backslash Q_n)$ tels que $\delta(z'', z) \leq \lambda r_n$, avec $z = \phi_{z_n}(\zeta(n))$ et $z'' = \phi_{z_n}(\zeta(n)'')$. Alors le champ $\Xi_{\zeta(n)'',1} = (\phi_{z_n})^{-1}_*(X_{z'',1})$ sur Ω_{z_n} s'exprime sous la forme $\dfrac{\partial}{\partial\zeta(n)_1} + E_{(n)}\dfrac{\partial}{\partial\zeta(n)_2}$ avec

$$\left| \frac{\partial^k E_{(n)}}{\partial\zeta(n)_1^k}(\zeta(n)_1) \right| \lesssim r_n^{1-(k+1)/m}.$$

Preuve : Il suffit d'appliquer les lemmes (6.3) et (6.4) de [T1] en remarquant au préalable que l'on peut, dans ceux-ci, remplacer l'hypothèse $z \in U^{1;a}_{z''}$ par l'hypothèse moins restrictive $\delta(z'', z) \leq cr$ où c est une constante positive donnée. On applique alors ces lemmes avec $z' = z_n$ en remarquant que l'on a $|r(z_n)| \lesssim \delta(z_n, E) \approx r_n$ par (1.3) et les propriétés du recouvrement. On utilise alors le lemme (4.8) pour conclure.

4.10 PROPOSITION.

Soit E un compact dans $U \cap \partial\Omega$. Il existe une famille $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega \cap U)$ satisfaisant les propriétés suivantes :

(4.10.1) $$0 \leq \psi_n \leq 1$$

(4.10.2) $$\mathrm{Supp}\psi_n \subset Q_n^*$$

(4.10.3) $$\sum_{n \in \mathbb{N}} \psi_n \equiv 1 \text{ sur } (U \cap \overline{\Omega}) \backslash E$$

Pour tous biindices P, Q, il existe des constantes $C_{P,Q}$ ne dépendant que de P, Q telles que on a, pour tous $z'' \in U \cap \partial\Omega$, tous $z \in U \cap \bar{\Omega}$ tels que $\delta(z'', z) \leq \lambda r_n$,

(4.10.4) $$\left|\left(X^{PQ}_{z''}\psi_n\right)(z)\right| \leq C_{P,Q} r_n^{-(p/m+q)}$$

Preuve : Nous allons utiliser le lemme (I.4.2) de [Ma]. Il existe des constantes $C_I \geq 0$ ne dépendant que de $I \in \mathbb{N}^2$ telles que, si K est un compact de $\mathbb{C}$ et si ε est un nombre réel strictement positif, il existe une fonction χ_ε sur $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant

a) $\chi_\varepsilon = 1$ au voisinage de K, $\chi_\varepsilon(t) = 0$ si $d(t, K) \geq \varepsilon$, $0 \leq \alpha_\varepsilon \leq 1$.

b) pour tout $t \in \mathbb{C}$ et tout $I \in \mathbb{N}^2$,

$$\left|\partial_t^I \chi_\varepsilon(t)\right| \leq \frac{C_I}{\varepsilon^i}.$$

Soit $z \in U$ avec $z = \phi_{z_n}(\zeta(n))$. On applique une première fois ce résultat avec $\varepsilon = \tau(z_n, \gamma r_n) - \tau(z_n, r_n)$ et $K = \{t \in \mathbb{C} \ ; \ |t| \leq \tau(z_n, r_n)\}$ et on obtient ainsi une première fonction φ_1^n. De même, en appliquant une seconde fois ce résultat avec les valeurs $\varepsilon = (\gamma - 1)r_n$ et $K = \{t \in \mathbb{C} \ ; \ |t| \leq r_n\}$, on obtient une seconde fonction φ_2^n.

On définit alors une fonction φ_n par

$$\varphi_n(z) = \varphi_1^n(\zeta(n)_1)\varphi_2^n(\zeta(n)_2) = \varphi_n \circ \phi_{z_n}(\zeta(n)), \text{ pour } z = \phi_{z_n}(\zeta(n)).$$

On a alors trivialement $\varphi_n \equiv 1$ sur Q_n, $\varphi_n \equiv 0$ sur Q_n^{*c} et $0 \leq \varphi_n \leq 1$.

De plus, pour deux biindices I, J, on a, pour $z \in U \cap \bar{\Omega} \cap Q_n^*$,

$$\begin{aligned}\left|\partial_{\zeta(n)}^{IJ}(\varphi_n \circ \phi_{z_n})(\zeta(n))\right| &= \left|\partial_{\zeta(n)_1}^{I}\varphi_1^n(\zeta(n)_1)\partial_{\zeta(n)_2}^{J}\varphi_2^n(\zeta(n)_2)\right| \\ &\leq \frac{C_I C_J}{((\gamma-1)r_n)^j(\tau(z_n,\gamma r_n)-\tau(z_n,r_n))^i}.\end{aligned}$$

Puisque $T(z_n, \gamma r_n) \geq T(z_n, r_n)$ et $\tau(z_n, 1) \approx 1$, on a

$$\tau(z_n,\gamma r_n)-\tau(z_n,r_n) = \tau(z_n,1)(\gamma r_n)^{1/T(z_n,\gamma r_n)} - \tau(z_n,1)r_n^{1/T(z_n,r_n)} \gtrsim r_n^{1/T(z_n,r_n)}$$

donc il existe des constantes $C_{I,J}$ ne dépendant que de I, J telles que

$$\left|\left(X_{z_n,1}^I X_{z_n,2}^J \varphi_n\right)(z)\right| \leq C_{I,J} r_n^{-(i/T(z_n,r_n)+j)}.$$

A l'aide de (4.8), on obtient alors, quitte à augmenter les constantes,

$$\left|\left(X_{z_n,1}^I X_{z_n,2}^J \varphi_n\right)(z)\right| \leq C_{I,J} r_n^{-(i/m+j)}.$$

Pour $z'' \in U \cap \partial\Omega$ et $z \in U \cap \bar{\Omega} \cap Q_n^*$ tels que $\delta(z'', z) \leq \lambda r_n$, on va montrer que $|X_{z'',1}^I X_{z'',2}^J \varphi_n(z)|$ admet la même majoration. On remarque d'abord que l'on peut montrer cette estimée uniquement pour les points $z \in U \cap \bar{\Omega} \cap (Q_n^* \backslash Q_n)$ tels que $\delta(z'', z) \leq \lambda r_n$ puisque, en dehors de la couronne $Q_n^* \backslash Q_n$, les dérivées de φ_n sont toutes nulles et que l'estimée est triviale pour $I = J = 0$.
On évalue alors

$$A_{I,J}^{(P)} = \left(\partial_{\zeta(n)}^{IJ}\left(\Xi_{\zeta(n)''}^{(P)}\varphi_n\right)(\zeta(n))\right)$$

à l'aide de la méthode de récurrence sur p déjà utilisée en (3.5), en remarquant que l'on a

$$\left(X_{z'',1}^I X_{z'',2}^J \varphi_n\right)(z) = \Xi_{\zeta(n)'',1}^I \left(\left(\frac{d_0(z'')}{d_0(z_n)}\right)^j \left(X_{z_n,2}^J \varphi_n\right) \circ \phi_{z_n}\right)(\zeta(n))$$

avec $z'' = \phi_{z_n}(\zeta(n)'')$.

En utilisant le lemme (4.9) et le fait que $|d_0| \approx 1$, on obtient

$$\left|\left(X_{z'',1}^I X_{z'',2}^J \varphi_n\right)(z)\right| \leq C_{I,J} r_n^{-(i/m+j)} \tag{4.10.5}$$

pour tout $z \in U \cap \bar{\Omega} \cap (Q_n^* \backslash Q_n)$ tel que $\delta(z'', z) \leq \lambda r_n$.

On pose alors $\psi_1 = \varphi_1$ et, pour $n > 1$,

$$\psi_n = \varphi_n(1-\varphi_1)\dots(1-\varphi_{n-1}).$$

Les propriétés (4.10.1) et (4.10.2) sont immédiates. Un calcul simple donne, pour tout n, $\psi_1 + \ldots + \psi_n = 1 - (1-\varphi_1)\dots(1-\varphi_{n-1})$. Si on considère $z \in (U \cap \bar{\Omega}) \backslash E$, il existe i tel que z appartienne à Q_i de sorte que $\varphi_i(z) = 1$. Il s'ensuit que l'on a $(\psi_1 + \ldots + \psi_n)(z) = 1$ dés que $n \geq i$ et on a bien (4.10.3).

Enfin, en utilisant Leibniz, pour $z \in U \cap \bar{\Omega}$ tel que $\delta(z'', z) \leq \lambda r_n$, en utilisant (4.10.5) et les propriétés du recouvrement, on obtient

$$\left|\left(X_{z''}^{PQ} \psi_n\right)(z)\right| \leq C_{P,Q} r_n^{-(p/m+q)}.$$

Ceci achève la preuve du lemme (4.10).

On considère désormais, pour $z \in (U \cap \bar{\Omega}) \backslash E$, la fonction

$$g(z) = \sum_{n \in \mathrm{N}} \psi_n(z) P^n(z), \tag{4.10.6}$$

où les polynômes P_n ont été définis en (4.7).

4.11 LEMME.

Soient deux points $z'' \in U \cap \partial\Omega$ et $z \in U \cap \bar{\Omega} \cap Q_l^*$ tels que $\delta(z'', z) \leq \lambda r_l$, avec $z = \phi_{\tilde{z}_l}(\tilde{\zeta}(l))$ et $z'' = \phi_{\tilde{z}_l}(\tilde{\zeta}(l)'')$. Alors le champ $\Xi_{\tilde{\zeta}(l)'',1} = (\phi_{\tilde{z}_l})_*^{-1}(X_{z'',1})$ sur $\Omega_{\tilde{z}_l}$ s'exprime sous la forme $\frac{\partial}{\partial \tilde{\zeta}(l)_1} + \tilde{E}_{(l)} \frac{\partial}{\partial \tilde{\zeta}(l)_2}$ avec

$$\left|\frac{\partial^k \tilde{E}_{(l)}}{\partial \tilde{\zeta}(l)_1^k}(\tilde{\zeta}(l)_1)\right| \lesssim r_l^{1-(k+1)/m}.$$

Preuve : Il suffit, pour obtenir l'estimée, d'appliquer [T2], prop. (2.9) avec $z' = \tilde{z}_n$ puisque l'on a $\delta(z'', z) \lesssim r_l \approx \delta(\tilde{z}_n, z)$ d'après (4.5.3) et (4.7.2).

4.12 LEMME.

Soient P, Q deux biindices. Il existe des constantes $C_{P,Q}(F), C'_{P,Q}(F)$ ne dépendant que de P, Q, F et de la géométrie de Ω telles que l'on ait, pour tous $z'' \in U \cap \partial\Omega$, $z \in U \cap \bar{\Omega}$,

$$\left|\left(X_{z''}^{PQ} P^l\right)(z)\right| \leq C_{P,Q}(F) \tag{4.12.1}$$

et

$$\left|\left(X_{\tilde{z}_l}^{PQ} P^l\right)(z) - F_{PQ}(\tilde{z}_l)\right| \leq C'_{P,Q}(F) r_l^{1/m} \text{ si } \frac{p}{m} + q < k + \alpha. \tag{4.12.2}$$

Preuve : $(X_{z''}^{PQ} P_{NI}^{z'} F)(z)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en z, z'' et continue par rapport à z' pour $z' \in U \cap \partial\Omega$, donc il existe des constantes $C_{P,Q}(F)$ telles que $|(X_{z''}^{PQ} P_{NI}^{z'} F)(z)| \leq C_{P,Q}(F)$ pour tous z, z', z''. (4.12.1) s'ensuit pour $z' = \tilde{z}_l$.

Pour (4.12.2), on commence par examiner $A^{PQ}(\tilde{z}_l) = \partial_{\tilde{\zeta}(l)}^{PQ}(P^l \circ \phi_{\tilde{z}_l})(\tilde{\zeta}(l)) - F_{PQ}(\tilde{z}_l)$. Pour $p/m + q < k + \alpha$, on a

$$A^{PQ}(\tilde{z}_l) = \sum_{\substack{(I,J) \neq (P,Q) \\ i/m+j<k+\alpha \\ i' \geq p', j' \geq q' \\ i'' \geq p'', j'' \geq q''}} \frac{1}{I!J!} F_{IJ}(\tilde{z}_l) \frac{I!J!}{(I-P)!(J-Q)!} \tilde{\zeta}(l)^{I-P, J-Q}.$$

Puisque $(I,J) \neq (P,Q)$ et $i' \geq p'$, $j' \geq q'$, $i'' \geq p''$, $j'' \geq q''$, on a $i/m + j - (p/m+q) \geq 1/m$ et donc

$$\left|A^{PQ}(\tilde{z}_l)\right| \leq \sum_{\substack{I,J \\ p/m+q+1/m \leq i/m+j<k+\alpha}} \frac{1}{(I-P)!(J-Q)!} F_{IJ}(\tilde{z}_l)\tilde{\zeta}(l)^{I-P,J-Q}.$$

De plus, à l'aide des relations $|\tilde{\zeta}(l)_1| \lesssim \delta(\tilde{z}_l,z)^{1/\Theta(\tilde{z}_l,z)} \approx r_l^{1/m}$ et $|\tilde{\zeta}(l)_2| \lesssim \delta(\tilde{z}_l,z) \approx r_l$, on obtient l'existence de constantes $C'_{I,J}(F)$ telles que

$$\begin{aligned}\left|A^{PQ}(\tilde{z}_l)\right| &\leq \sum_{\substack{I,J \\ p/m+q+1/m \leq i/m+j<k+\alpha}} C'_{I,J}(F) r_l^{(i-p)/m+j-q} \leq \sum_{\substack{I,J \\ p/m+q+1/m \leq i/m+j<k+\alpha}} C'_{I,J}(F) r_l^{1/m} \\ &\leq C'_{P,Q}(F) r_l^{1/m}\end{aligned}$$

puisque la somme est finie. On a donc obtenu (4.12.2).

4.13 PROPOSITION.

Pour tous biindices P,Q, il existe une constante $C_{P,Q}(F)$ ne dépendant que de P,Q, F et de la géométrie de Ω telle que, pour tout point $z'' \in U \cap \partial\Omega$, tout $z \in U \cap \bar{\Omega} \cap Q_l^* \cap Q_n^*$ tel que $\delta(z'',z) \leq \lambda r_l$, on ait la majoration

$$\left|\left(X_{z''}^{PQ}(P^n - P^l)\right)(z)\right| \leq C_{P,Q}(F) r_l^{k+\alpha-(p/m+q)}. \tag{4.13.1}$$

Preuve : Nous allons utiliser une récurrence similaire à celle de (3.4), (3.5) combinée avec le lemme (4.10). Pour cela, nous allons tout d'abord estimer, pour $z \in U \cap \bar{\Omega} \cap Q_l^* \cap Q_n^*$, la quantité $|(X_{\tilde{z}_l}^{PQ}(P^n - P^l))(z)|$. On effectue d'abord le développement de Taylor de $P^n - P^l$ au point $\tilde{z}_l$:

$$\begin{aligned}(P^n - P^l)(z) &= \sum_{I,J} \frac{1}{I!J!} \left(X_{\tilde{z}_l}^{IJ}(P^n - P^l)\right)(\tilde{z}_l)\tilde{\zeta}(l)^{IJ} \\ &= S_1(z) + S_2(z)\end{aligned}$$

où

$$S_1(z) = \sum_{\substack{I,J \\ i/m+j<k+\alpha}} \frac{1}{I!J!} \left(\left(X_{\tilde{z}_l}^{IJ}P^n\right)(\tilde{z}_l) - F_{IJ}(\tilde{z}_l)\right)\tilde{\zeta}(l)^{IJ}$$

et

$$S_2(z) = \sum_{\substack{I,J \\ i/m+j>k+\alpha}} \frac{1}{I!J!} \left(X_{\tilde{z}_l}^{IJ}P^n\right)(\tilde{z}_l)\tilde{\zeta}(l)^{IJ}.$$

Examinons tout d'abord $\left(X_{\tilde{z}_l}^{PQ}S_1\right)(z)$. On a

$$\left(X_{\tilde{z}_l}^{PQ}S_1\right)(z) = \sum_{\substack{I\neq P, J\neq Q \\ i/m+j<k+\alpha \\ i'\geq p', j'\geq q' \\ i''\geq p'', j''\geq q''}} \frac{1}{(I-P)!(J-Q)!} \left(\left(X_{\tilde{z}_l}^{IJ}P^n\right)(\tilde{z}_l) - F_{IJ}(\tilde{z}_l)\right)\tilde{\zeta}(l)^{I-P,J-Q}.$$

La condition de jet (4.6.1) donne, pour $z = \tilde{z}_l$ et $z' = \tilde{z}_n$

$$\left|F_{IJ}(\tilde{z}_l) - \left(X^{IJ}_{\tilde{z}_l} P^n\right)(\tilde{z}_l)\right| \lesssim \delta(\tilde{z}_l, \tilde{z}_n)^{k+\alpha-(i/m+j)}.$$

On remarque que l'on a $r_l \approx r_n$ puisque $z \in U \cap \bar{\Omega} \cap Q^*_l \cap Q^*_n$ et, à l'aide de (4.5.2), (4.7.3) et (4.7.3), on obtient

$$\delta(\tilde{z}_l, \tilde{z}_n) \lesssim \delta(\tilde{z}_l, z_l) + \delta(z_l, z) + \delta(z, z_n) + \delta(z_n, \tilde{z}_n) \lesssim r_l.$$

De plus on a $\left|\tilde{\zeta}(l)^{I-P,J-Q}\right| \lesssim r_l^{(i-p)/m+j-q}$ et on peut donc écrire qu'il existe des constantes $C_{I,J}(F)$ telles que

$$\begin{aligned} \left|\left(X^{PQ}_{\tilde{z}_l} S_1\right)(z)\right| &\leq \sum_{\substack{I\neq P, J\neq Q \\ i/m+j<k+\alpha \\ i'\geq p', j'\geq q' \\ i''\geq p'', j''\geq q''}} C_{I,J}(F) r_l^{k+\alpha-(i/m+j)} r_l^{(i-p)/m+j-q} \\ &\leq \sum_{\substack{I\neq P, J\neq Q \\ i/m+j<k+\alpha \\ i'\geq p', j'\geq q' \\ i''\geq p'', j''\geq q''}} C_{I,J}(F) r_l^{k+\alpha-(p/m+q)}, \end{aligned}$$

d'où

$$\left|\left(X^{PQ}_{\tilde{z}_l} S_1\right)(z)\right| \leq C_{P,Q}(F) r_l^{k+\alpha-(p/m+q)}$$

car la somme du membre de droite est finie. Examinons maintenant $(X^{PQ}_{\tilde{z}_l} S_2)(z)$. On a

$$\left(X^{PQ}_{\tilde{z}_l} S_2\right)(z) = \sum_{\substack{I,J \\ i/m+j>k+\alpha}} \frac{1}{(I-P)!(J-Q)!} \left(X^{IJ}_{\tilde{z}_l} P^n\right)(\tilde{z}_l) \tilde{\zeta}(l)^{I-P,J-Q}.$$

Comme dans [T2] (2.8) appliqué avec $z'' = \tilde{z}_l$ et $z' = \tilde{z}_n$, on observe que, pour $z = \phi_{\tilde{z}_n}(\tilde{\zeta}(n))$,

$$\tilde{\zeta}(n)_1 \text{ est un polynôme de degré } \begin{cases} 1 & \text{en } \tilde{\zeta}(l)_1 \\ 0 & \text{en } \tilde{\zeta}(l)_2 \end{cases}$$

et

$$\tilde{\zeta}(n)_2 \text{ est un polynôme de degré } \begin{cases} \leq m & \text{en } \tilde{\zeta}(l)_1 \\ 1 & \text{en } \tilde{\zeta}(l)_2 \end{cases}$$

et en remarquant alors que

$$\left(X^{IJ}_{\tilde{z}_l} P^n\right)(z) = \sum_{\substack{H,T \\ h/m+t<k+\alpha}} \frac{1}{H!T!} F_{HT}(\tilde{z}_n) \partial^{IJ}_{\tilde{\zeta}(l)} \tilde{\zeta}(n)^{HT},$$

et que

$$\partial^{IJ}_{\tilde{\zeta}(l)} \tilde{\zeta}(n)^{HT} = \begin{cases} \partial^I_{\tilde{\zeta}(l)_1} \left(\tilde{\zeta}(n)^H_1 \partial^J_{\tilde{\zeta}(l)_2} \tilde{\zeta}(n)^T_2\right) = 0 & \text{si } j > t \\ \partial^J_{\tilde{\zeta}(l)_2} \left(\partial^I_{\tilde{\zeta}(l)_1} \left(\tilde{\zeta}(n)^H_1 \tilde{\zeta}(n)^T_2\right)\right) = 0 & \text{si } i > h + mt, \end{cases}$$

on obtient

$$\left(X_{\tilde{z}_l}^{IJ} P^n\right) \equiv 0 \text{ pour } j > k+\alpha \text{ et pour } i > m(k+\alpha).$$

Il reste donc finalement

$$\left(X_{\tilde{z}_l}^{PQ} S_2\right)(z) = \sum_{\substack{I,J \\ j<k+\alpha, i<m(k+\alpha) \\ i/m+j>k+\alpha}} \frac{1}{(I-P)!(J-Q)!} X_{\tilde{z}_l}^{IJ} P^n(\tilde{z}_l) \tilde{\zeta}(l)^{I-P,J-Q}.$$

En utilisant (4.12.1) et le fait que $r_l^{(i-p)/m+j-q} \leq r_l^{k+\alpha-(p/m+q)}$ pour $i/m+j > k+\alpha$, il existe des constantes $C'_{I,J}(F)$ telles que

$$\left|\left(X_{\tilde{z}_l}^{PQ} S_2\right)(z)\right| \leq \sum_{\substack{I,J \\ j<k+\alpha, i<m(k+\alpha) \\ i/m+j>k+\alpha}} C'_{I,J}(F) r_l^{(i-p)/m+j-q} \leq C'_{P,Q}(F) r_l^{k+\alpha-(p/m+q)}$$

puisque la somme est finie. On a donc montré qu'il existe une constante $C_{P,Q}(F)$ telle que

$$\left|\left(X_{\tilde{z}_l}^{PQ}(P^n - P^l)\right)(z)\right| \leq C_{P,Q}(F) r_l^{k+\alpha-(p/m+q)}. \tag{4.13.2}$$

Il reste maintenant à passer de $X_{\tilde{z}_l}^{PQ}$ à $X_{z''}^{PQ}$. Il suffit pour cela d'utiliser le lemme (4.11) afin d'estimer par récurrence sur p la quantité

$$A_{I,J}^{(P)} = \left(\partial_{\tilde{\zeta}(l)}^{IJ}\left(\Xi_{\tilde{\zeta}(l)''}^{P}(P^n - P^l)\right)(\tilde{\zeta}(l))\right)$$

et on obtient alors le résultat annoncé en (4.13.1).

4.14 PROPOSITION.

Pour tous biindices P, Q, il existe des constantes $C_{P,Q}(F)$ et $C'_{P,Q}(F)$ ne dépendant que de P, Q, F et de la géométrie de Ω telles que pour tous $z'' \in U \cap \partial\Omega$, $z \in U \cap \bar{\Omega} \cap Q_l^*$ tel que $\delta(z'', z) \leq \lambda r_l$, on ait

$$\left|\left(X_{z''}^{PQ}(g - P^l)\right)(z)\right| \leq C_{P,Q}(F) r_l^{k+\alpha-(p/m+q)} \tag{4.14.1}$$

et

$$\left|\left(X_{z''}^{PQ} g\right)(z)\right| \leq C'_{P,Q}(F)\left(1 + \delta(z'', z)^{k+\alpha-(p/m+q)}\right). \tag{4.14.2}$$

Preuve : On a $g - P^l = \sum_{n\in\mathbb{N}} \psi_n(P^n - P^l)$ d'après (4.10.3) et (4.10.6). D'après les propriétés (4.7.4) et (4.10.2), on peut se limiter à estimer $(X_{z''}^{PQ}\psi_n(P^n - P^l))(z)$ pour $z \in U \cap \bar{\Omega} \cap Q_l^* \cap Q_n^*$ tel que $\delta(z'', z) \leq \lambda r_l$. En utilisant (4.10.4) et (4.13), en notant pour cela que l'on a $\delta(z'', z) \leq \lambda r_l$ et $r_l \approx r_n$, on obtient qu'il existe une constante $C_{P,Q}(F)$ ne dépendant que de P, Q, F et de la géométrie de Ω telle que

$$\left|\left(X_{z''}^{PQ}\left(\psi_n(P^n - P^l)\right)\right)(z)\right| \leq C_{P,Q}(F) r_l^{k+\alpha-(p/m+q)}.$$

En combinant (4.14.1) avec (4.12.1), on obtient (4.14.2) puisque, pour $k+\alpha-(p/m+q) < 0$, on a $r_l^{k+\alpha-(p/m+q)} \lesssim \delta(z'', z)^{k+\alpha-(p/m+q)}$.

4.15 THEOREME D'EXTENSION DE JETS.

Pour tout jet $F \in \mathcal{C}_{NI}^{k,\alpha}(E)$, il existe une fonction g dans $\mathcal{C}_{NI}^{k,\alpha}(\bar{\Omega} \cap U)$ telle que, pour tous biindices P, Q avec $p/m + q < k + \alpha$ et tout $z' \in E$, on ait

$$\left(X_{z'}^{PQ} g\right)(z') = F_{PQ}(z').$$

Preuve : En effet, on a, d'après (3.1.1), (2.1.2) et (2.1.3),

$$\mathcal{W}\left(\delta, \frac{p}{m} + q\right) \approx 1 \text{ si } \frac{p}{m} + q < k + \alpha$$

et

$$\mathcal{W}\left(\delta, \frac{p}{m} + q\right) \approx \delta^{k+\alpha-(p/m+q)} \text{ si } \frac{p}{m} + q > k + \alpha.$$

Puisqu'un point $z \in U_{z''}^{1,a} \cap Q_l^*$ vérifie automatiquement $\delta(z'', z) \leq \lambda r_l$, (4.14.2) implique donc que, pour tout $z'' \in U \cap \partial\Omega$, pour tout $z \in U_{z''}^{1,a}$, on ait

$$\left|\left(X_{z''}^{PQ} g\right)(z)\right| \leq C_{P,Q}(F) \mathcal{W}\left(|r(z)|, \frac{p}{m} + q\right) \tag{4.15.1}$$

et donc

$$\left|\left(X_{z''}^{PQ} g\right)(z)\right| \leq C_{P,Q}(F) \mathcal{W}\left(|r(z)|, \frac{p}{\Theta(z'', z)} + q\right)$$

puisque $\Theta(z'', z) \leq m$. A l'aide du lemme (2.4), on conclut que

$$g \in \mathcal{C}_{NI}^{k,\alpha}(\bar{\Omega} \cap U). \tag{4.15.2}$$

On va montrer maintenant que g réalise bien l'extension du jet F. Soit $z \in Q_l^*$. On a alors automatiquement $\delta(z, \tilde{z}_l) \lesssim r_l$. Les résultats (4.12.2) et (4.14.1) appliqués avec $z'' = \tilde{z}_l$ nous permettent alors d'écrire, pour $p/m + q < k + \alpha$, que

$$\left|\left(X_{\tilde{z}_l}^{PQ} g\right)(z) - F_{PQ}(\tilde{z}_l)\right| \lesssim \delta(z, E)^{\min\{1/m, k+\alpha-(p/m+q)\}} \tag{4.15.3}$$

puisque $r_l \approx \delta(z, E)$. On fait maintenant tendre z vers z' un point donné de E dans $U_{z'}^{1,a}$. Dans ce cas, $\tilde{z}_l$ tend également vers z' puisque

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{z}_l, z') &\lesssim \delta(\tilde{z}_l, z) + \delta(z, z') \lesssim \delta(z, E) + \delta(z, z') \\ &\lesssim \delta(z, z'). \end{aligned}$$

On va montrer que, pour $p/m + q < k + \alpha$,

$$\left(X_{\tilde{z}_l}^{PQ} g\right)(z) \text{ tend vers } \left(X_{z'}^{PQ} g\right)(z') \text{ quand } z \text{ vers } z' \text{ dans } U_{z'}^{1,a},$$

l'entier $l = l(z)$ étant toujours choisi tel que $z \in Q_l^*$. On utilise pour cela le lemme (2.3) qui nous apprend que

$$\left(X_{\tilde{z}_l}^{PQ} g\right)(z) = \sum_{\substack{i+j \leq p \\ \beta \in S_{i,j} \\ \varepsilon \in \{-1,1\}^{i+j}}} \Gamma_{\beta,\varepsilon,P,Q,i,j}(\tilde{z}_l, z) \left(L_{\beta_1,\varepsilon_1} \dots L_{\beta_{i+j},\varepsilon_{i+j}} L_2^Q g\right)(z)$$

avec

$$\Gamma_{\beta,\varepsilon,P,Q,i,j}(\tilde{z}_l, z) = \mathcal{O}'\left(\delta(\tilde{z}_l, z)^{j+(i-p)/m}\right)$$

puisque $\Theta(\tilde{z}_l, .) \equiv m$.
Quand z tend vers z' dans $U_{z'}^{1,a}$, on a deux cas de figure :
• si $i/m + j + q < k + \alpha$, alors

$$\Gamma_{\beta,\varepsilon,P,Q,i,j}(\tilde{z}_l, z) \text{ tend vers } \Gamma_{\beta,\varepsilon,P,Q,i,j}(z', z')$$

puisque $\Gamma_{\beta,\varepsilon,P,Q,i,j} \in \mathcal{C}^\infty(U \times U)$ et puisque $\tilde{z}_l$ tend aussi vers z'. D'après le théorème (4.4), on obtient également que

$$\left(L_{\beta_1,\varepsilon_1} \dots L_{\beta_{i+j},\varepsilon_{i+j}} L_2^Q g\right)(z) \text{ tend vers } \left(L_{\beta_1,\varepsilon_1} \dots L_{\beta_{i+j},\varepsilon_{i+j}} L_2^Q g\right)(z')$$

quand z tend vers z' dans $U_{z'}^{1,a}$.
• si $i/m + j + q > k + \alpha$, alors, puisque $g \in \mathcal{C}_{NI}^{k,\alpha}(\bar{\Omega} \cap U)$, on a, pour $z \in U_{z'}^{1,a} \cap Q_l^*$ et puisque $\delta(\tilde{z}_l, z) \lesssim \delta(z, E) \leq \delta(z', z)$,

$$\begin{aligned}\left|\Gamma_{\beta,\varepsilon,P,Q,i,j}(\tilde{z}_l, z) \left(L_{\beta_1,\varepsilon_1} \dots L_{\beta_{i+j},\varepsilon_{i+j}} L_2^Q g\right)(z)\right| &\lesssim \delta(\tilde{z}_l, z)^{j+(i-p)/m} \delta(z', z)^{k+\alpha-(i/m+j+q)} \\ &\lesssim \delta(\tilde{z}_l, z)^{k+\alpha-(p/m+q)}\end{aligned}$$

et ce majorant tend vers 0 quand z tend vers z'. On a donc montré que, quand z tend vers z' dans $U_{z'}^{1,a}$,

$$\left(X_{\tilde{z}_l}^{PQ} g\right)(z) \text{ tend vers } \sum_{\substack{i+j \leq p \\ i/m+j+q<k+\alpha \\ \beta \in S_{i,j} \\ \varepsilon \in \{-1,1\}^{i+j}}} \Gamma_{\beta,\varepsilon,P,Q,i,j}(z', z') \left(L_{\beta_1,\varepsilon_1} \dots L_{\beta_{i+j},\varepsilon_{i+j}} L_2^Q g\right)(z')$$

et ce dernier terme coïncide avec $(X_{z'}^{PQ} g)(z')$: il suffit, pour voir cela, d'adapter la méthode utilisée en (2.11) à l'aide du lemme (2.3). On a donc montré le résultat recherché.
On peut maintenant faire tendre z vers z' dans (4.15.3) et on obtient que, pour tous biindices P, Q tels que $p/m + q < k + \alpha$ et tout z' de E, on a

$$\left(X_{z'}^{PQ} g\right)(z') = F_{PQ}(z'),$$

ce qui achève la preuve de (4.15).

A l'aide de l'estimée (4.15.1) et de (4.15.2), on peut même, pour la fonction g, obtenir une estimation plus fine que celle donnée par le théorème de Taylor.

4.16 PROPOSITION.

Soit g la fonction fournie par le théorème (4.15). Pour tout P et Q, biindices tels que $p/m + q < k + \alpha$, il existe une constante $C_{P,Q}(F)$ ne dépendant que de P, Q, F et de la géométrie de Ω telle que, pour tous points z' de $U \cap \partial\Omega$ de type m, $z'' \in U \cap \partial\Omega$, $z \in U \cap \bar{\Omega}$ avec $\delta(z', z) < \delta_1 b_g t_g$ et $z \in U_{z''}^{s_g, b_g}$, on ait

$$\left| \left(X_{z'',1}^{P} X_{z'',2}^{Q} (g - T_{NI}^{z'} g) \right) (z) \right| \leq C_{P,Q}(F) \delta(z', z)^{k+\alpha-(p/m+q)}$$

où $T_{NI}^{z'}$ a été défini en (4.3).

Preuve : Il nous suffit d'adapter légèrement la preuve du théorème (3.3). Les parties (3.4) et (3.5) restent inchangées. On modifie uniquement la partie (3.6).

On y considère alors L l'entier naturel tel que

$$\frac{p}{m} + q + L < k + \alpha < \frac{p}{m} + q + L + 1$$

On a évidemment $L \leq k + 1$. On écrit alors le même développement de Taylor avec $h = g - T_{NI}^{z'}$ et $H^* = h \circ \phi_{z''}$. En utilisant pour g l'estimée (4.15.1) au lieu de la définition (4.1), on obtient, au lieu de (3.6.1),

$$|R| \lesssim \delta(z', z)^{k+\alpha-(p/m+q)}.$$

Il suffit de remplacer dans la démonstration, pour tout $z \in \Omega$, la quantité $\Theta(z', z)$ par m. De même, l'estimation (3.6.2) est remplacée par

$$|P| \lesssim \delta(z', z)^{k+\alpha-(p/m+q)}$$

En regroupant ces deux nouvelles estimées, on obtient bien le résultat.

§5. ESTIMATIONS DANS LES ELLIPSOÏDES.

5.1 NOTATIONS.

Dans toute la suite, on se limitera au cas d'un ellipsoïde complexe. On prendra donc $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^2, |z_1|^m + |z_2|^2 < 1\}$ où m est un entier pair, $m \geq 4$. Les points de type m sont les points $z_s = (0, e^{is})$ où $s \in \mathbb{R}$, les autres points du bord sont des points de stricte pseudoconvexité.

On suppose que les points z_s sont dans U pour $s \in]s_0, s_1[$ où s_0 et s_1 sont des réels tels que $s_1 > s_0$. On pose alors $I =]s_0, s_1[$ et $\mathcal{C} = \{z_s\ ;\ s \in I\}$.

Un calcul simple montre alors que l'on a

$$\phi_{z_s}(\zeta) = \left(\zeta_1, e^{is} + \frac{e^{is}}{2}\zeta_2\right) \tag{5.1.1}$$

et

$$\rho_{z_s}(\zeta) = \Re e\zeta_2 + |\zeta_1|^m + \frac{1}{4}|\zeta_2|^2.$$

Pour $z \in \mathbb{C}^2$, on pose

$$\pi(z) = \left(0, \frac{z_2}{|z_2|}\right) = (0, e^{is_z}). \tag{5.1.2}$$

Dans toute la suite E désigne un sous-ensemble compact de $\mathcal{C}$ et on considère V un voisinage de z^0 avec $E \subset V \subset U$ tel que, pour tout $z \in V$, on ait $\pi(z) \in \mathcal{C}$. .

Soit ψ une fonction dans $\mathcal{C}_0^\infty(s_0, s_1)$, l'espace des fonctions positives à valeurs réelles infiniment dérivables à support compact dans $]s_0, s_1[$ telle que $\psi \equiv 1$ sur $I' = [s_0', s_1']$ avec $s_0 < s_0' < s_1' < s_1$ choisis de telle sorte que $E \subset \{z_s\ ;\ s \in I'\}$. Pour $z \in \Omega \cap V$ et $s \in I$, on pose

$$P(z,s) = \frac{1 - |z_2|^2}{|1 - e^{is}\bar{z}_2|^2} = 2\Re e\frac{1}{1 - e^{is}\bar{z}_2} - 1,$$

et, pour $f \in L^1(I)$,

$$Pf(z) = \frac{1}{2\pi}\int_I P(z,s)f(s)\psi(s)\, ds.$$

On rappelle enfin une estimée spécifique à l'ellipsoïde. On obtient très simplement, par le calcul, que pour tout $z' \in U \cap \bar{\Omega}$, on a, pour $1 \leq l \leq m$,

$$|d_l(z')| \approx |z_1'|^{m-l}. \tag{5.1.3}$$

5.2 LEMME.

Pour tout $z \in V \cap \bar{\Omega}$, on a

$$\delta(z, \mathcal{C}) \approx |z_1|^m + 1 - |z_2|. \tag{5.2.1}$$

Preuve : Si on écrit $\phi_{\pi(z)}(\zeta_z) = z$ avec $\zeta_z = (\zeta_{z,1}, \zeta_{z,2})$, on a, à l'aide de (5.1.1) et (5.1.2),

$$\text{(5.2.2)} \qquad \begin{cases} z_1 = & \zeta_{z,1} \\ \\ z_2 = & e^{is_z} + \dfrac{e^{is_z}}{2}\zeta_{z,2} \end{cases}$$

Cela implique, par (1.3 (iv)) et (5.1.2)

$$\text{(5.2.3)} \qquad \delta(\pi(z), z) \approx |z_1|^m + |z_2 - e^{is_z}| = |z_1|^m + 1 - |z_2|.$$

Soit maintenant $s \in \mathbb{R}$ tel que $z_s \in U$. Comme z_s est de type m, on a $\delta(z_s, z) \approx |\zeta_{s,1}|^m + |\zeta_{s,2}|$ avec $\phi_{z_s}(\zeta_s) = z$ et $\zeta_s = (\zeta_{s,1}, \zeta_{s,2})$, c'est à dire

$$\text{(5.2.4)} \qquad \begin{cases} z_1 = & \zeta_{s,1} \\ \\ z_2 = & e^{is} + \dfrac{e^{is}}{2}\zeta_{s,2} \end{cases}$$

On en tire

$$\text{(5.2.5)} \qquad \delta(z_s, z) \approx |z_1|^m + |z_2 - e^{is}|.$$

On a donc $\delta(z, z_s) \geq C(|z_1|^m + |z_2 - e^{is}|)$ pour une constante C bien choisie et $\delta(z, \mathcal{C}) \geq \inf_s C(|z_1|^m + |z_2 - e^{is}|)$ avec $|z_2 - e^{is}| = |e^{-is}z_2 - 1|$, minimal pour $s = s_z$, donc $\delta(z, \mathcal{C}) \geq C(|z_1|^m + |z_2 - e^{is_z}|)$ d'où $\delta(z, \mathcal{C}) \gtrsim \delta(z, \pi(z))$. On a donc, en remarquant que $\pi(z)$ appartient à $\mathcal{C}$,

$$\text{(5.2.6)} \qquad \delta(z, \mathcal{C}) \approx \delta(z, \pi(z))$$

et le résultat suit.

Remarque : Si E est un sous ensemble de $\mathcal{C}$, on a alors naturellement, pour tout $z \in V \cap \Omega$,

$$\text{(5.2.7)} \qquad \delta(z, E) \gtrsim |z_1|^m + 1 - |z_2|.$$

5.3 LEMME.

Pour tout $s \in I$, pour tout $z \in \Omega \cap V$, on a

$$\text{(5.3.1)} \qquad \delta(z_s, z) \approx |s - s_z| + \delta(\pi(z), z)$$

et

$$\text{(5.3.2)} \qquad \delta(z_s, z) \approx |z_2 - e^{is}|.$$

Preuve : On reprend les notations (5.2.2) et (5.2.4) pour dire que les coordonnées de z_s dans $\Omega_{\pi(z)}$ sont

$$\left(0, 2\frac{e^{is}-e^{is_z}}{e^{is_z}}\right).$$

On a donc $\delta(\pi(z), z_s) \approx |e^{is_z} - e^{is}|$. On obtient alors, par l'inégalité triangulaire, $\delta(z_s, z) \lesssim \delta(z_s, \pi(z)) + \delta(\pi(z), z) \lesssim |e^{is_z} - e^{is}| + \delta(\pi(z), z) \lesssim |s - s_z| + \delta(\pi(z), z)$.

D'après (5.2.6), on a $\delta(\pi(z), z) \lesssim \delta(z_s, z)$ pour $s \in I$. En utilisant (5.2.3) et (5.2.5), on obtient $|s_z - s| \lesssim |e^{is_z} - e^{is}| \leq |e^{is_z} - z_2| + |z_2 - e^{is}| \lesssim \delta(\pi(z), z) + \delta(z_s, z)$, ce qui permet d'écrire $\delta(\pi(z), z) + |s_z - s| \lesssim \delta(z_s, z)$ et on a (5.3.1).
Pour (5.3.2), on a, d'après (5.2.5), $|z_2 - e^{is}| \lesssim \delta(z_s, z)$. On a également $|z_1|^m \leq 1 - |z_2|^2 \lesssim 1 - |z_2| \leq |z_2 - e^{is}|$ pour tout $s \in I$, ce qui permet de conclure.

A toute fonction f de $L^1(I)$ et à tout intervalle J, on associe maintenant la moyenne

$$J(f) = \frac{1}{|J|}\int_J f(s)ds,$$

où $|J|$ est la longueur de J. On considère l'espace

$$BMO(I) = \{f \in L^1(I) \ ; \ \sup_{J \subset I} J(|f - J(f)|) < \infty\}.$$

Une adaptation immédiate des arguments de [BO] (dans un cas très simple puisqu'ici I s'identifie à un compact du cercle-unité) mène au résultat suivant.

5.4 THEOREME.

Soit f dans $BMO(I)$. Il existe une constante $C(f)$ ne dépendant que de f et de la géométrie de Ω, telle que, pour tout z dans $\Omega \cap V$, tout couple (P, Q) de biindices,

$$\left|\partial_z^{PQ} Pf(z)\right| \leq C(f)\delta(z, \pi(z))^{-(p/m+q)}. \tag{5.4.1}$$

5.5 DEFINITIONS.

On désigne, pour tout réel $r > 0$, par $N_r(E)$ le nombre minimal de pseudoboules de rayon r dont les centres sont situés à des pseudodistances mutuelles supérieures ou égales à r, et recouvrant E. (Ce nombre est équivalent au nombre minimal de pseudoboules de rayon r, de centres quelconques, recouvrant E.) On dira que E satisfait $(*)$ s'il existe une constante $C_E > 0$ telle que pour tout $0 < R < 1$ et toute pseudoboule Q_R de rayon R centrée sur $\bar{\Omega} \cap V$, on ait

$$(*) \qquad \int_0^R N_\varepsilon(Q_R \cap E)d\varepsilon \leq C_E R.$$

En particulier, pour $R = 1$, on obtient $\int_0^1 N_\varepsilon(E)d\varepsilon < \infty$, ce qui est équivalent à dire que $\text{Log}\delta_E$ appartient à L^1(condition de Carleson). En fait, en calquant la démonstration faite dans [BO], on vérifie que $(*)$ donne un résultat beaucoup plus précis :

5.6 COROLLAIRE.

Si le compact E vérifie $(*)$, on a

$$\text{Log}\delta_E \in BMO(I)$$

De là, on peut établir un résultat crucial pour la suite de cette étude.

5.7 THEOREME.

On suppose que le compact E vérifie la condition $(*)$. Alors il existe une fonction h holomorphe sur Ω telle que, pour tout $z \in \Omega \cap V$,

$$|h(z)| \approx \delta(z, E), \tag{5.7.1}$$

et pour tout couple d'indices (p, q),

$$\left| \frac{\partial^{p+q} h}{\partial z_1^p \partial z_2^q}(z) \right| = \mathcal{O}\left(\delta(z, E)^{1-(p/m+q)}\right). \tag{5.7.2}$$

Preuve : On pose

$$h(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_I \frac{1+e^{-is}z_2}{1-e^{-is}z_2}\text{Log }\delta_E(s)\psi(s)ds\right) \tag{5.7.3}$$

pour $z \in \Omega$. On montre alors (5.7.1) de manière identique à celle dans [BO].
Pour montrer (5.7.2), il suffit de considérer les dérivées de

$$g(z) = \int_I \frac{\text{Log }\delta_E(s)}{1-e^{-is}z_2}\psi(s)ds$$

puisque l'on a

$$h(z) = \exp\left(\frac{1}{\pi}\left(g(z) - \frac{1}{2}\int_I \text{Log }\delta_E(s)\psi(s)\ ds\right)\right). \tag{5.7.4}$$

La fonction g ne dépend que de z_2. On regarde donc simplement

$$\frac{\partial^q g}{\partial z_2^q}(z).$$

En vertu du théorème (5.4), il suffit de se limiter au cas où on a $\delta(\pi(z), z) \leq \lambda\delta(z, E)$ pour une constante λ fixée.

Comme dans [BO], on est alors amené à considérer $K_z = \{s, |s - s_z| \leq \lambda\delta(z, E)\}$ où λ est choisie telle que

$$\delta_E(s) \approx \delta(z, E) \text{ dans } K_z.$$

On pose également

$$\phi(s) = (-1)^q(\text{Log } \delta_E(s) - K_z(\text{Log } \delta_E))e^{-isq}\psi(s),$$

et on remarque que, puisque l'on peut choisir ψ telle que $|\psi^{(i)}(s)| = \mathcal{O}(\delta(z_s, E)^{-i})$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors il existe des constantes C_i telles que, pour tout $s \in K_z$ et tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\left|\phi^{(i)}(s)\right| \leq C_i\delta(z, E)^{-i}.$$

Il suffit alors, comme dans [BO], de montrer que

$$\left|\int_{K_z} \frac{\phi(s)}{(1 - e^{-is}z_2)^{1+q}} ds\right| = \mathcal{O}\left(\delta(z, E)^{-q}\right).$$

Pour cela, on procède par récurrence sur q. On suppose, plus généralement, que pour tout $1 \leq j \leq q$, tout l dans $\mathbb{N}$, on ait

$$\left|\int_{K_z} \frac{\phi^{(l)}(s)}{(1 - e^{-is}z_2)^{j}} ds\right| = \mathcal{O}\left(\delta(z, E)^{-(j-1)-l}\right).$$

Comme dans [BO], on utilise une intégration par parties, on applique l'hypothèse de récurrence à l'un des deux termes obtenus et, pour l'autre, on remarque que, pour $z \in \Omega \cap V$, $|z_2| \approx 1$ et que, d'après (5.3.2) et (5.3.1), on a

$$\left|1 - e^{-i(s_z + \lambda\delta(z,E))}\right| \approx \delta((0, e^{-i(s_z+\lambda\delta(z,E))}), z) \approx \lambda\delta(z, E) + \delta(z, \pi(z)) \geq \lambda\delta(z, E)$$

et donc $\delta((0, e^{-i(s_z-\lambda\delta(z,E))}), z) \gtrsim \lambda\delta(z, E)$. On obtient alors bien le résultat d'après (5.7.4).

5.8 REMARQUE.

On voit clairement, d'après les estimations (5.7.1) et (5.7.2), que l'on peut prolonger h de telle sorte que l'on ait $h \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}\backslash E)$. Les estimations (5.7.1) et (5.7.2) restent alors valables pour $z \in \partial\Omega\backslash E$.

5.9 PROBLEME.

Soit E un sous-ensemble compact de $V \cap \partial\Omega$ dont chaque point est de type m. Un jet F de $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(E)$ au sens de (4.7) sera dit $\bar{\partial}$-plat si les fonctions F_{PQ} sont identiquement nulles sur E pour tous biindices P, Q tels que $p'' \neq 0$ ou $q'' \neq 0$. On convient alors de noter F_{PQ} par F_{pq} dans les autres cas ($p = |P| = p'$, $q = |Q| = q'$).

A partir de maintenant, on supposera que E est contenu dans l'ensemble $\mathcal{C}$ défini en (5.1) et que le jet F de $\mathcal{C}_{NI}^{k,\alpha}(E)$ du paragraphe (4.7) est $\bar\partial$-plat. On cherche alors à trouver une fonction $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar\Omega)$ qui interpole F, c'est à dire telle que, pour tous biindices P, Q avec $p/m + q < k + \alpha$ et tous z' de E, on ait

$$\left(X_{z'}^{PQ}\mathcal{F}\right)(z') = F_{PQ}(z').$$

On va voir que ceci est toujours possible lorsque E vérifie la condition $(*)$. Pour cela, on veut rendre la solution du problème (4.7) holomorphe. La solution g que l'on a obtenue en (4.15) appartient à $\mathcal{C}_{NI}^{k,\alpha}(\bar\Omega \cap U)$. On va construire une fonction U telle que

$$\bar\partial U = \frac{\bar\partial g}{h^r}$$

où h est la fonction holomorphe construite en (5.7) et où r est un réel choisi de telle sorte que la fonction $h^r U$ appartienne à $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar\Omega)$ et que toutes ses dérivées de poids $p/m + q < k + \alpha$ s'annulent sur E. La fonction $\mathcal{F} = g - h^r U$ sera alors une solution du problème d'interpolation dans $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\Omega)$.

On posera dans toute la suite

$$r = k + \alpha.$$

On considère également la (0,1)-forme ω donnée par :

$$\omega = \frac{\bar\partial g}{h^r}$$

et on écrit $\omega(z) = \omega_1(z)d\bar z_1 + \omega_2(z)d\bar z_2$.

A l'aide de la proposition (4.16), on va obtenir, en (5.11), (5.12), (5.13) et (5.14) de nouvelles estimées sur g, puis sur $\bar\partial g$ et ω. Les estimées sur ω joueront un rôle crucial dans la résolution du problème précédent au §6.

5.10 LEMME.

Soit λ un réel positif fixé. Soient z'' un point de $V \cap \partial\Omega$, z un point de $V \cap \bar\Omega$ tels que $\delta(z'', z) \le \lambda\delta(z, E)$. On a alors, pour tout entier h, l'estimation

$$\left|\left(X_{z'',1}^{h} T_{z''}\right)(z_1)\right| \lesssim \delta(z, E)^{1-(h+1)/m},$$

où $T_{z''}(z_1)$ a été défini en (1.3).

Preuve : Pour $h > m - 1$, on a clairement $X_{z'',1}^{h} T_{z''}(z_1) = 0$. Pour $h \le m - 1$, on a

$$X_{z'',1}^{h} T_{z''}(z_1) = \sum_{l=1+h}^{m} \frac{l!}{(l-h-1)!} d_l(z'')(z_1 - z_1'')^{l-h-1}.$$

Puisque l'on a $\delta(z'',z) \lesssim \delta(z,E)$, on a

$$(5.10.1) \qquad |z_1 - z_1''| \lesssim \delta(z'',z)^{1/\Theta(z'',z)} \lesssim \delta(z,E)^{1/\Theta(z'',z)} \leq \delta(z,E)^{1/m}.$$

De plus, pour $2 \leq l \leq m$, on a, à l'aide de (5.10.1), (5.1.3) et de (5.2.7),

$$|d_l(z'')| \approx |z_1''|^{m-l} \leq (|z_1'' - z_1| + |z_1|)^{m-l} \lesssim \delta(z,E)^{1-l/m}.$$

En regroupant ces deux estimées, on obtient le résultat.

5.11 LEMME (ESTIMEES SUR g).

Pour tous biindices P et Q tels que $p'' \neq 0$ ou $q'' \neq 0$, il existe une constante $C_{P,Q}(F)$ ne dépendant que de P ,Q et F telle que, pour tout point z'' de $V \cap \partial\Omega$, tout point z de $V \cap \bar{\Omega}$ avec $z \in U_{z''}^{s_g,b_g}$, on ait la majoration

$$\left|\left(X_{z'',1}^P X_{z'',2}^Q g\right)(z)\right| \leq C_{P,Q}(F)\delta(z,E)^{k+\alpha-(p/m+q)}.$$

Preuve : Pour les biindices P,Q tels que $p/m+q > k+\alpha$, il nous suffit d'utiliser les lemmes (4.10) et (4.12), la définition (4.10.6) de g et la propriété (4.6.4).

Pour les biindices P,Q tels que $p/m+q < k+\alpha$, on reprend la conclusion de la proposition (4.16) qui stipule que l'on a

$$\left|\left(X_{z'',1}^P X_{z'',2}^Q (g - T_{NI}^{z'}g)\right)(z)\right| \leq C_{P,Q}(F)\delta(z,z')^{k+\alpha-(p/m+q)}.$$

Or on a, par (4.7.3) et puisque le jet est $\bar\partial$-plat,

$$T_{NI}^{z'}g(z) = \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i/m+j<k+\alpha}} \frac{1}{i!j!}F_{ij}(z')\zeta_1^i\zeta_2^j \text{ pour } z = \phi_{z'}(\zeta)$$

et donc, à l'aide du changement de variable holomorphe $\psi_{z',z''}$ défini en (1.3) et puisque $p'' \neq 0$ ou $q'' \neq 0$,

$$\left(X_{z'',1}^P X_{z'',2}^Q T_{NI}^{z'}g\right)(z) = 0.$$

On applique alors le résultat obtenu au point $z' = \tilde{z}$ figurant en (4.7.2).

5.12 LEMME (ESTIMEES SUR $\bar\partial$g).

Pour tous biindices P et Q, il existe des constantes $C_{P,Q}(F)$ et $C'_{P,Q}(F)$ ne dépendant que de P,Q et de F telles que, pour tout point z'' de $V \cap \partial\Omega$, tout point z de $V \cap \bar{\Omega}$ avec $z \in U_{z''}^{s_g,b_g}$, on ait les majorations

$$(5.12.1) \qquad \left|\left(X_{z''}^{PQ}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_1}\right)(z)\right| \leq C_{P,Q}(F)\delta(z,E)^{k+\alpha-((p+1)/m+q)}$$

et

$$(5.12.2)\qquad \left|\left(X_{z''}^{PQ}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_2}\right)(z)\right| \le C'_{P,Q}(F)\delta(z,E)^{k+\alpha-(p/m+q+1)}.$$

Preuve : Soit $z \in \Omega \cap U$ avec $z = \phi_{z''}(u)$. On obtient facilement

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_1}(z) &= \frac{\partial G}{\partial \bar{u}_1}(u)\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{z}_1}(z) + \frac{\partial G}{\partial \bar{u}_2}(u)\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{z}_1}(z)\\ &= \frac{\partial G}{\partial \bar{u}_1}(u) - \frac{\overline{T_{z''}(z_1)}}{\overline{d_0(z'')}}\frac{\partial G}{\partial \bar{u}_2}(u)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_2}(z) &= \frac{\partial G}{\partial \bar{u}_1}(u)\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{z}_2}(z) + \frac{\partial G}{\partial \bar{u}_2}(u)\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{z}_2}(z)\\ &= \frac{1}{\overline{d_0(z'')}}\frac{\partial G}{\partial \bar{u}_2}(u)\end{aligned}$$

où $G = g \circ \phi_{z''}$ et $T_{z''}(z_1)$ a été défini en (1.3).
Soient, maintenant, deux biindices $P = (p', p'')$ et $Q = (q', q'')$. Par ce qui précède, il existe une constante $C_{P,Q}(F)$ telle que l'on ait

$$\begin{aligned}\left|\left(X_{z''}^{PQ}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_1}\right)(z)\right| = &\left|\left(X_{z''}^{P+(0,1),Q}g\right)(z)\right.\\ &\left.-\sum_{l=0}^{p''}\frac{1}{\overline{d_0(z'')}}\binom{p''}{l}\left(X_{z''}^{(0,l),0}\overline{T_{z''}}\right)(z_1)\left(X_{z''}^{P-(0,l),Q+(0,1)}g\right)(z)\right|\\ &\le C_{P,Q}(F)\Big(\left|\left(X_{z''}^{P+(0,1),Q}g\right)(z)\right|\\ &\qquad+\sum_{l=0}^{p''}\left|\left(X_{z''}^{(0,l),0}\overline{T_{z''}}\right)(z_1)\left(X_{z''}^{P-(0,l),Q+(0,1)}g\right)(z)\right|\Big).\end{aligned}$$

Puisque pour un point de $U_{z''}^{s_g,b_g}$, on a $\delta(z'',z) \lesssim \delta(z,E)$, on obtient, à l'aide du lemme (5.10) et de (5.11), quitte à augmenter $C_{P,Q}(F)$,

$$\begin{aligned}\left|\left(X_{z''}^{PQ}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_1}\right)(z)\right| &\le C_{P,Q}(F)\Big(\delta(z,E)^{k+\alpha-((p+1)/m+q)}\\ &\qquad+\sum_{l=0}^{p''}\delta(z,E)^{1-(l+1)/m}\delta(z,E)^{k+\alpha-((p-l)/m+q+1)}\Big)\end{aligned}$$

et on a donc bien (5.12.1)
De même, on obtient (5.12.2) en remarquant simplement que

$$\left(X_{z''}^{PQ}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_2}\right) = \frac{1}{\overline{d_0(z'')}}\left(X_{z''}^{P,Q+(0,1)}g\right).$$

5.13 PROPOSITION.

Pour tous biindices P, Q, il existe des constantes $C_{P,Q}(F)$ et $C'_{P,Q}(F)$ ne dépendant que de P, Q et F telles que, pour tout point z de $V \cap \bar{\Omega}$, on ait la majoration

$$\left|\partial_z^{PQ}\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_1}\right)(z)\right| \leq C_{P,Q}(F)\delta(z,E)^{k+\alpha-((p+1)/m+q)}. \tag{5.13.1}$$

et

$$\left|\partial_z^{PQ}\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_2}\right)(z)\right| \leq C'_{P,Q}(F)\delta(z,E)^{k+\alpha-1-(p/m+q)}. \tag{5.13.2}$$

Preuve : Pour simplifier, on ne va regarder que le cas $P = (p, 0)$, $Q = (q, 0)$, ce qui ne restreint pas la généralité. Des formules rappelées en (1.3), on obtient facilement que, pour tout z' de V,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z_1} &= X_{z',1} - T_{z'}(z_1)\dfrac{1}{d_0(z')}X_{z',2} \\ \dfrac{\partial}{\partial z_2} &= \dfrac{1}{d_0(z')}X_{z',2} \end{cases} \tag{5.13.3}$$

Il existe $z' \in V \cap \partial\Omega$ tel que $z \in U_{z'}^{s_g,b_g}$. On va donc appliquer (5.13.3) avec ce point z'. On obtient alors facilement,

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q}\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_1}\right)(z) = \sum_{\substack{0\leq j\leq p\\ 0\leq i\leq p-j}} \sum_{h\in E_{p,q,i,j}} \frac{\gamma(h)}{d_0(z')^{q+j}} \prod_{r=1}^{j}\left(X_{z',1}^{h_r}T_{z'}(z_1)\right)\left(X_{z',1}^{i}X_{z',2}^{q+j}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_1}\right)(z)$$

où $E_{p,q,i,j}$ est un ensemble de j-uples $h = (h_r)_{1\leq r\leq j}$ d'entiers naturels vérifiant $\sum_{r=1}^{j} h_r = p - j - i$ et où chaque $\gamma(h)$ est un coefficient réel.
En utilisant les lemmes (5.10) et (5.12) avec $z'' = z'$ où z' est défini plus haut, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q}\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_1}\right)(z)\right| &\leq C_{P,Q}(F) \sum_{\substack{0\leq j\leq p\\ 0\leq i\leq p-j\\ h\in E_{p,q,i,j}}} \left(\prod_{r=1}^{j}\delta(z,E)^{1-(h_r+1)/m}\right)\delta(z,E)^{k+\alpha-((i+1)/m+q+j)} \\
&\leq C_{P,Q}(F) \sum_{\substack{0\leq j\leq p\\ 0\leq i\leq p-j}} \delta(z,E)^{j-(p-j-i+j)/m}\delta(z,E)^{k+\alpha-((i+1)/m+q+j)} \\
&\leq C_{P,Q}(F)\delta(z,E)^{k+\alpha-((p+1)/m+q)},
\end{aligned}$$

ce qui conclut (5.13.1).
On obtient (5.13.2) de la même manière.

5.14 PROPOSITION.

Pour tous biindices P et Q, il existe des constantes $C_{P,Q}(F)$ et $C'_{P,Q}(F)$ telles que, pour tout point z de $V \cap \bar{\Omega}$, on ait les majorations

$$\left|\partial_z^{PQ}\omega_1(z)\right| \leq C_{P,Q}(F)\delta(z,E)^{-1/m-(p/m+q)}. \tag{5.14.1}$$

et

$$\left|\partial_z^{PQ}\omega_2(z)\right| \leq C'_{P,Q}(F)\delta(z,E)^{-1-(p/m+q)}. \tag{5.14.2}$$

Preuve : On écrit tout d'abord que, pour p, q entiers, on a

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q}\left(\frac{1}{h^r}\right)(z) = \sum_{\substack{s\leq p\\ t\leq q}} \frac{1}{h^{r+s+t}}(z) \sum_{(a,b)\in E_{s,t}} \gamma(a,b) \prod_{u=1}^{s+t} \frac{\partial^{a_u+b_u} h}{\partial z_1^{a_u}\partial z_2^{b_u}}(z)$$

où chaque $E_{s,t}$ est un ensemble de couples (a,b) de $(s+t)$-uples $a = (a_u)_{1\leq u\leq s+t}$ et $b = (b_u)_{1\leq u\leq s+t}$ d'entiers naturels vérifiant $\sum_{u=1}^{s+t} a_u = p-s$ et $\sum_{u=1}^{s+t} b_u = q-t$ et où chaque $\gamma(a,b)$ est un coefficient réel.

On utilise alors (5.7.1) et (5.7.2) pour écrire que, quitte à augmenter les constantes,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q}\left(\frac{1}{h^r}\right)(z)\right| &\leq C_{p,q} \sum_{\substack{s\leq p\\ t\leq q}} \frac{1}{\delta(z,E)^{r+s+t}} \sum_{(a,b)\in E_{s,t}} \prod_{u=1}^{s+t} \delta(z,E)^{1-(a_u/m+b_u)}\\
&\leq C_{p,q} \sum_{\substack{s\leq p\\ t\leq q}} \frac{1}{\delta(z,E)^{r+s+t}} \sum_{(a,b)\in E_{s,t}} \delta(z,E)^{s+t-((p-s)/m+q-t)}\\
&\leq C_{p,q} \sum_{\substack{s\leq p\\ t\leq q}} \delta(z,E)^{s/m+t-(p/m+q)-r}.
\end{aligned}$$

Quitte à augmenter $C_{p,q}$, on a donc obtenu que, pour tous entiers p, q, on a

$$\left|\frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q}\left(\frac{1}{h^r}\right)(z)\right| \leq C_{p,q}\delta(z,E)^{-r-(p/m+q)}.$$

Il suffit, ensuite, de regrouper cette estimée avec celles obtenues en (5.13) en utilisant la formule de Leibniz pour obtenir le résultat.

§6. UN PROBLEME DE $\bar\partial$.

6.1 NOTATIONS ET DEFINITIONS.

Dans toute la suite, on notera

$$dV(\zeta) = d\bar\zeta_1 \wedge d\bar\zeta_2 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \quad \text{et} \quad dV(\zeta_1) = d\bar\zeta_1 \wedge d\zeta_1.$$

On donne maintenant, dans un souci de clarté, une notation dont l'intérêt apparaîtra dans les calculs qui vont suivre. Soit f une fonction. Pour i, j deux entiers naturels, on posera

$$f(z)^{z_1^i z_2^j} = \frac{\partial^{i+j} f}{\partial z_1^i \partial z_2^j}(z).$$

On pose, pour $\zeta, z \in \bar\Omega$

$$\Phi(\zeta, z) = r(\zeta)^{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + r(\zeta)^{\zeta_2}(\zeta_2 - z_2).$$

On peut supposer, dans la suite, que ω est à support dans V. Avant d'aborder les noyaux de Berndtsson-Andersson, on a besoin de 2 lemmes. Le premier est extrait de [BCD], que l'on peut appliquer puisque Ω est convexe de type strictement fini.

6.2 LEMME.

Pour $z \in \partial\Omega$ et $\zeta \in \bar\Omega$, on a

$$\delta(z, \zeta) \approx |\Phi(\zeta, z) - r(\zeta)| \approx |\Phi(z, \zeta)|. \tag{6.2.1}$$

Le deuxième lemme est issu de [R1].

6.3 LEMME.

On a, pour tous $\zeta, z \in \bar\Omega$,

$$\Re e\Phi(\zeta, z) - r(\zeta) \gtrsim -r(\zeta) - r(z) + |z_1|^{m-2}|\zeta_1 - z_1|^2 + |\zeta_1 - z_1|^m + |\zeta_2 - z_2|^2.$$

On déduit alors de ce lemme les résultats fort importants suivants:

$$\begin{aligned} |\Phi(\zeta, z) - r(\zeta)| \gtrsim\ & -r(z) - r(\zeta) + |\Im m\Phi(\zeta, z)| \\ & + |z_1|^{m-2}|\zeta_1 - z_1|^2 + |\zeta_1 - z_1|^m + |\zeta_2 - z_2|^2. \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

pour tous $\zeta, z \in \bar\Omega$. On a également pour tous $\zeta, z \in \bar\Omega$,

$$\begin{aligned} |\Phi(\zeta, z) - r(\zeta)| \gtrsim\ & -r(z) - r(\zeta) + |\Im m\Phi(\zeta, z)| \\ & + |\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1 - z_1|^2 + |\zeta_1 - z_1|^m + |\zeta_2 - z_2|^2. \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

Ce résultat s'obtient facilement à partir de (6.3.1) en remarquant simplement que l'on a $|\zeta_1|^{m-2} \leq |z_1|^{m-2} + |\zeta_1 - z_1|^{m-2}$. On obtient également, par (6.3.1),

$$|r(\zeta)| \lesssim |\Phi(\zeta, z) - r(\zeta)|. \tag{6.3.3}$$

La combinaison de (6.3.1) et du lemme (6.2) permet d'affirmer que, pour $z \in \partial\Omega$, $\zeta \in \bar{\Omega}$, on a

$$|\zeta_1 - z_1| \lesssim |\Phi(z, \zeta)|^{1/m} \text{ et } |\zeta_2 - z_2| \lesssim |\Phi(z, \zeta)|^{1/2}. \tag{6.3.4}$$

On a facilement, d'après (6.3.1), pour tous $\zeta, z \in \bar{\Omega}$,

$$|\Phi(\zeta, z) - r(\zeta)| \gtrsim |\zeta - z|^m. \tag{6.3.5}$$

En annexe 3 (en (A3.1)), on montrera que, pour tous $\zeta, z \in \bar{\Omega}$,

$$\langle s, \zeta - z\rangle \gtrsim |\zeta - z|^{2m+2}. \tag{6.3.6}$$

6.4 RAPPELS ET NOTATIONS.

On donne maintenant quelques rappels de [BA] :
Soient s et Q des 1-formes données par

$$s = s_1 d(\zeta_1 - z_1) + s_2 d(\zeta_2 - z_2) \text{ et } Q = Q_1 d(\zeta_1 - z_1) + Q_2 d(\zeta_2 - z_2)$$

où $s_1, s_2 : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \to \mathbb{C}^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifient

$$|s(\zeta, z)| \leq c|\zeta - z|, \ \langle s, \zeta - z\rangle \neq 0 \text{ pour } \zeta \neq z \tag{6.4.1}$$

$$|\langle s, \zeta - z\rangle| \geq c_L|\zeta - z|^2, \ \zeta \in \bar{\Omega}, \ z \in L, \text{ compact de } \Omega \tag{6.4.2}$$

avec $\langle \zeta, z\rangle = \zeta_1 z_1 + \zeta_2 z_2$ et où $Q_1, Q_2 : \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \to \mathbb{C}^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, holomorphes en z. Soit enfin G une fonction holomorphe d'une variable complexe au voisinage de l'image de $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ par la transformation $(\zeta, z) \to 1 + \langle Q, z - \zeta\rangle$, avec $G(1) = 1$.
On peut alors considérer les noyaux

$$K = G(\langle Q, z - \zeta\rangle + 1)\frac{s \wedge ds}{\langle s, \zeta - z\rangle^2} + G'(\langle Q, z - \zeta\rangle + 1)\frac{s \wedge dQ}{\langle s, \zeta - z\rangle}$$

et

$$P = -\frac{1}{2}G''(\langle Q, z - \zeta\rangle + 1)(dQ)^2.$$

Le noyau P a des coefficients continus dans $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$, K est continu dans $\Omega \times \Omega$ en dehors de la diagonale et on a $d_{\zeta,z}K = P$ au sens des courants en dehors de la diagonale. De plus, tous les coefficients de K sont intégrables en $\zeta \in \bar{\Omega}$, uniformément pour z dans un compact quelconque $L \subset \Omega$. Toutes ces propriétés conduisent au théorème qui suit [BA].

6.5 THEOREME.

Soit $K_{0,0}$ la composante de K de bidegré $(0,0)$ en z, $(2,1)$ en ζ et soit $K_{0,1}$ celle de bidegré $(0,1)$ en z, $(2,0)$ en ζ. Alors, si f est une $(0,1)$-forme à coefficients dans $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, on a, pour tout $z \in \Omega$,

$$f(z) = \int_{\partial\Omega} f(\zeta) \wedge K_{0,1}(\zeta, z) + \int_{\Omega} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge K_{0,1}(\zeta, z) - \bar{\partial}_z \int_{\Omega} f(\zeta) \wedge K_{0,0}(\zeta, z),$$

l'opérateur $\bar{\partial}_z$ étant pris au sens des distributions dans Ω.

6.6 CHOIX DES NOYAUX.

On choisit

$$s(\zeta, z) = s_1(\zeta, z) d(\zeta_1 - dz_1) + s_2(\zeta, z) d(\zeta_2 - dz_2)$$

avec

$$s_1(\zeta, z) = (-r(z))^2 (\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1) - \overline{\Phi(z,\zeta)} r(z)^{z_1}$$

et

$$s_2(\zeta, z) = (-r(z))^2 (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2) - \overline{\Phi(z,\zeta)} r(z)^{z_2}.$$

On obtient facilement

$$\langle s, \zeta - z \rangle = (-r(z))^2 |\zeta - z|^2 + |\Phi(z, \zeta)|^2$$

et on voit donc aisément que s vérifie les hypothèses rappelées en (6.4.1) et (6.4.2).
On choisit la fonction

$$G(\xi) = \xi^{-3}$$

et, pour $\zeta, z \in \bar{\Omega}$, on pose $Q(\zeta, z) = Q_1(\zeta, z) d(\zeta_1 - z_1) + Q_2(\zeta, z) d(\zeta_2 - z_2)$ avec

$$Q_1(\zeta, z) = \frac{r(\zeta)^{\zeta_1}}{r(\zeta)} \text{ et } Q_2(\zeta, z) = \frac{r(\zeta)^{\zeta_2}}{r(\zeta)},$$

de telle sorte que

$$\langle Q, z - \zeta \rangle + 1 = \frac{-r(\zeta) + \Phi(\zeta, z)}{-r(\zeta)}.$$

On a $G(1) = 1$ et (6.3.3) permet de justifier que G est holomorphe au voisinage de l'image de $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ par la transformation $(\zeta, z) \mapsto 1 + \langle Q, \zeta - z \rangle$.
Remarque importante : La forme Q n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ mais, comme il est expliqué dans [BA], on peut considérer les formes Q_ε définies en remplaçant r par $r + \varepsilon$, appliquer le théorème (6.5) puis faire tendre ε vers 0. Le théorème (6.5) reste donc vrai pour ce choix de Q. Par ce même procédé, les coefficients de K sont toujours intégrables en $\zeta \in \bar{\Omega}$, uniformément pour z dans un compact quelconque $L \subset \Omega$. Ceux de P ne sont plus continus sur $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ mais sont intégrables en $\zeta \in \bar{\Omega}$.

On obtient ainsi les noyaux

$$K = K^{(1)} + K^{(2)}$$

avec

$$K^{(1)} = \left(\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right)^3 \frac{s\wedge ds}{\langle s,\zeta-z\rangle^2}$$

et

$$K^{(2)} = -3\left(\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right)^4 \frac{s\wedge dQ}{\langle s,\zeta-z\rangle}$$

ainsi que

$$P = -6\left(\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right)^5 (dQ)^2.$$

On donne maintenant quelques notations qui serviront dans toute la suite. On appellera $K_{1,0}$ la composante de K de bidegré $(1,0)$ en z, $(2,0)$ en ζ et $P_{1,0}$ celle de P de bidegré $(1,0)$ en z, $(2,1)$ en ζ. On posera alors

$$K_{1,0}(\zeta,z) = K_{1,0,1}(\zeta,z)\wedge dz_1 + K_{1,0,2}(\zeta,z)\wedge dz_2,$$

$$P_{1,0}(\zeta,z) = P_{1,0,1}(\zeta,z)\wedge dz_1 + P_{1,0,2}(\zeta,z)\wedge dz_2.$$

L'exposant (i) signalera les composantes issues du noyau $K^{(i)}$, pour $i=1,2$.

6.7 DEFINITION ET THEOREME.

Soit f une $(p,1)$-forme $(0\le p\le 2)$ à coefficients dans $L^1(\Omega)$. On suppose que l'on a

$$(6.7.1) \qquad ||(Log\,|r|)\bar\partial r\wedge f\,||_{L^1(\Omega)} < \infty.$$

Alors l'intégrale

$$T(f)(z) = -\int_\Omega f(\zeta)\wedge K_{0,0}(\zeta,z)$$

existe pour presque tout $z\in\Omega$ et on a $T(f)\in L^1_{p,0}(\Omega)$.
De plus, si $p=0$ et si f est $\bar\partial$-fermée au sens des distributions dans Ω, alors on a $\bar\partial T(f)=f$ au sens des distributions dans Ω.

Preuve : Le fait que l'intégrabilité de f et la propriété (6.7.1) entraînent l'existence et l'intégrabilité de $T(f)$ est établi en annexe 3. On y montre, en outre, que l'on a alors

$$(6.7.2) \qquad ||T(f)||_{L^1(\Omega)} \lesssim ||f||_{L^1(\Omega)} + ||(\mathrm{Log}\,|r|)\bar\partial r\wedge f||_{L^1(\Omega)}.$$

On suppose maintenant $\bar\partial f=0$. On va montrer que pour tout ouvert Ω' relativement compact dans Ω, on a $\bar\partial T(f)=f$ au sens des distributions dans Ω', ce qui établira le résultat final. Pour cela, on remarque d'abord que l'on peut construire une famille de formes $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(\bar\Omega)$, vérifiant $\bar\partial f_\varepsilon=0$ dans Ω', et telles que l'on ait,

$$(6.7.3) \qquad ||f_\varepsilon - f||_{L^1(\Omega)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

$$(6.7.4) \qquad ||(\mathrm{Log}\,|r|)\bar\partial r\wedge(f-f_\varepsilon)||_{L^1(\Omega)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

$$(6.7.5) \qquad ||\bar\partial f_\varepsilon||_{L^1(\Omega)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

La construction de f_ε est assez classique et a, par exemple, déjà été utilisée dans un travail ancien de N. Øvrelid [Ø]. Pour la commodité du lecteur, on rappelle l'argument utilisé : on commence par construire localement f_ε. Dans un voisinage V_w d'un point w de Ω, on pose simplement $f_\varepsilon = f * \chi_\varepsilon$ où $\chi_\varepsilon(\zeta) = \varepsilon^{-4}\chi(\zeta/\varepsilon)$, pour une fonction χ fixée positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans la boule unité et de masse 1. La version locale (c'est-à-dire avec Ω remplacé par V_w) de (6.7.3) et (6.7.4) est alors un fait classique de théorie de l'intégration ; de plus dans V_w on a $\bar\partial f_\varepsilon = (\bar\partial f) * \chi_\varepsilon = 0$. Lorsque w est un point de $\partial\Omega$, les assertions précédentes restent vraies dans $V_w \cap \Omega$ pourvu que V_w soit assez petit et que l'on remplace χ par une fonction χ_w du même type mais choisie avec un support contenu dans un cône assez étroit dirigé par le vecteur normal sortant à Ω en w. On obtient alors une approximation globale au moyen d'une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement fini de $\bar\Omega$ par des voisinages V_w ; la condition $\bar\partial f_\varepsilon = 0$ dans Ω' est obtenue simplement en imposant que l'une des fonctions de la partition soit égale à 1 au voisinage de Ω'.

De là, (6.7.2), (6.7.3) et (6.7.4) montrent que $T(f_\varepsilon)$ converge vers $T(f)$ dans $L^1(\Omega)$ et donc $\bar\partial T(f_\varepsilon)$ converge vers $\bar\partial f$ au sens des distributions dans Ω, *a fortiori* dans Ω'. Par ailleurs, on peut maintenant appliquer (6.5) à f_ε, en remarquant que l'intégrale de bord est nulle puisque, par construction, $K_{0,1}(\zeta, z) = 0$ pour $\zeta \in \partial\Omega$. On obtient ainsi

$$\bar\partial T(f_\varepsilon) = f_\varepsilon + g_\varepsilon,$$

où g_ε est donnée par

$$g_\varepsilon(z) = \int_\Omega \bar\partial g_\varepsilon(\zeta) \wedge K_{0,1}(\zeta, z)$$

pour $z \in \Omega$. Il suffit donc, pour conclure, de justifier que g_ε converge vers 0 au sens des distributions dans Ω'. Soit donc ψ une $(2,1)$-forme de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω'. On a

$$\int g_\varepsilon \wedge \psi = \int_\Omega \int_\Omega \bar\partial f_\varepsilon(\zeta) \wedge K_{0,1}(\zeta, z) \wedge \psi(z) dV(\zeta) dV(z).$$

Dans l'intégrale double précédente, seuls sont à considérer des couples (ζ, z) avec z dans le support de ψ, donc dans un compact de Ω', et ζ dans le support de $\bar\partial f_\varepsilon$, donc en dehors de Ω'. Pour de tels points, on a $|K_{0,1}(\zeta, z) \wedge \psi(z)| \lesssim 1$. Il vient alors immédiatement

$$\left| \int g_\varepsilon \wedge \psi \right| \lesssim ||\bar\partial f_\varepsilon||_{L^1(\Omega)}$$

et le résultat s'ensuit compte tenu de (6.7.5).

On donne maintenant un lemme issu de [BB].

6.8 LEMME.

Pour $f \in \mathcal{C}^\infty_{0,1}(\bar\Omega)$, avec les notations données en (6.6), on a

$$\partial T(f) = T(\partial f) + \int_\Omega f \wedge P_{1,0} + \int_\Omega \bar\partial f \wedge K_{1,0}.$$

De plus, si f appartient à $\mathcal{C}^\infty_{0,1}(\bar\Omega)$, est à support dans V et vérifie $\bar\partial f = 0$, alors on a

(6.8.1) $$T(f) \in \mathcal{C}^\infty(\bar\Omega) \text{ dans } \Omega.$$

La preuve de ce dernier résultat est placée aux paragraphes (A4.3) et (A4.4) de l'annexe 4 pour ne pas surcharger inutilement ce chapitre.

Le lemme suivant est élémentaire ; pour le détail de la preuve, on pourra se reporter à l'annexe 2.

6.9 LEMME DE CHANGEMENT DE VARIABLES.

Soit ε un réel, $0 < \varepsilon < 1$. Il existe un réel $\delta_0(\varepsilon)$ ne dépendant que de m et ε, vérifiant $0 < \delta_0(\varepsilon) < 1$ et tel que pour tout z de $V \cap \bar\Omega$ avec $|z_1| \leq 1 - \varepsilon$, les variables

$$\zeta_1, \qquad u = -r(\zeta), \qquad v = \Im m\Phi(\zeta, z)$$

forment un système de coordonnées $\mathcal{C}^\infty$ dans $\{\zeta \ ; \ \delta(z,\zeta) < \delta_0(\varepsilon)\}$, avec un jacobien majoré et minoré par des constantes ne dépendant que de ε et m, mais pas de z.

6.10 LEMME.

Pour tout réel σ avec $0 \leq \sigma < 1 + 2/m$, il existe une constante $C_\sigma > 0$ telle que, pour tout réel $\mu > 0$ et tout point $z \in (V \cap \partial\Omega)\backslash E$ avec $|z_1| \leq 1/2$, l'intégrale

$$J^{\sigma,\mu} = \int_{\delta(z,\zeta) \leq \mu\delta(z,E)} \delta(\zeta, E)^{-\sigma} dV(\zeta)$$

vérifie

$$J^{\sigma,\mu} \leq C_\sigma(\sup\{1,\mu\}\delta(z,E))^{2+2/m-\sigma}.$$

Preuve : On pose $s(\mu) = \sup\{1,\mu\}$. On peut se limiter au cas où $\mu\delta(z,E) \leq \delta_0(1/2)$ où $\delta_0(1/2)$ est le réel défini en (6.9). Dans le cas $\mu\delta(z,E) \geq \delta_0(1/2)$, il suffit en effet de remarquer que l'intégrale

$$\int_\Omega \delta(\zeta, E)^{-\sigma} dV(\zeta)$$

est finie puisque l'on a $\delta(\zeta, E) \gtrsim 1 - |\zeta_2|$ et $\sigma < 1 + 2/m$. Le résultat est alors trivial.

En utilisant le changement de variable du lemme (6.9), il suffit d'estimer, en utilisant le fait que $|\zeta_1|^m + 1 - |\zeta_2| \approx u + |\zeta_1|^m$ et les propriétés (5.2.7), (6.2.1) et (6.3.1), quitte à accroître le domaine d'intégration, l'intégrale

$$\int_{u+|v|+|\zeta_1 - z_1|^m \leq \mu\delta(z,E)} (u + |\zeta_1|^m)^{-\sigma} du dv dV(\zeta_1).$$

- Cas $1 < \sigma < 1 + 2/m$. On intègre d'abord en v pour obtenir

$$J^{\sigma,\mu} \lesssim \mu\delta(z,E) \int_{u+|\zeta_1 - z_1|^m \leq \mu\delta(z,E)} (u + |\zeta_1|^m)^{-\sigma} du dV(\zeta_1).$$

On intègre alors en u et on obtient

$$J^{\sigma,\mu} \lesssim \mu\delta(z,E)\int_{|\zeta_1-z_1|^m\leq\mu\delta(z,E)} \frac{1}{|\zeta_1|^{m(\sigma-1)}}dV(\zeta_1)$$

avec $m(\sigma-1)<2$. Puisque l'on a

$$|\zeta_1| \leq |z_1| + |\zeta_1 - z_1| \leq (1+\mu^{1/m})\delta(z,E)^{1/m} \lesssim (s(\mu)\delta(z,E))^{1/m},$$

on a, quitte à augmenter le domaine d'intégration,

$$J^{\sigma,\mu} \lesssim s(\mu)\delta(z,E)\int_{|\zeta_1|^m\leq s(\mu)\delta(z,E)} \frac{1}{|\zeta_1|^{m(\sigma-1)}}dV(\zeta_1) = (s(\mu)\delta(z,E))^{2+2/m-\sigma}.$$

• Cas $\sigma=1$. On choisit $0<\eta<1/m$ et on écrit

$$J^{1,\mu} \lesssim \int_{u+|v|+|\zeta_1-z_1|^m\leq\mu\delta(z,E)} \frac{1}{(u+|\zeta_1|^m)^{1-\eta}|\zeta_1|^{m\eta}}dudvdV(\zeta_1).$$

On intègre d'abord en v puis en u et on obtient

$$J^{1,\mu} \lesssim \mu\delta(z,E)\int_{|\zeta_1-z_1|^m\leq\mu\delta(z,E)} \frac{(\mu\delta(z,E)+|\zeta_1|^m)^\eta}{|\zeta_1|^{m\eta}}dvdV(\zeta_1).$$

On majore $\mu\delta(z,E)+|\zeta_1|^m$ par $s(\mu)\delta(z,E)$ puis on intègre en ζ_1 après avoir, comme précédemment, agrandi le domaine d'intégration ; on obtient alors le résultat.

• Cas $0\leq\sigma<1$. On intègre d'abord en v puis en u et on obtient

$$J^{\sigma,\mu} \lesssim \mu\delta(z,E)\int_{|\zeta_1-z_1|^m\leq\mu\delta(z,E)} (\mu\delta(z,E)+|\zeta_1|^m)^{1-\sigma}dV(\zeta_1).$$

On majore $\mu\delta(z,E)+|\zeta_1|^m$ par $s(\mu)\delta(z,E)$ puis on intègre en ζ_1 après avoir, comme dans le cas $1<\sigma<1+2/m$, agrandi le domaine d'intégration. On obtient alors le résultat.

6.11 LEMME.

Pour tous réels $2\leq\beta<3$, tout $z\in(V\cap\partial\Omega)\backslash E$ tel que $|z_1|\leq 1/2$, les intégrales

$$J_\beta = \int_{\delta(z,\zeta)\leq\lambda\delta(z,E)} \frac{|z_1|^{m-2}}{|\Phi(z,\zeta)|^\beta}dV(\zeta) \text{ et } K_\beta = \int_{\delta(z,\zeta)\leq\lambda\delta(z,E)} \frac{|\zeta_1-z_1|^{m-2}}{|\Phi(z,\zeta)|^\beta}dV(\zeta)$$

vérifient

$$J_\beta = \mathcal{O}\left(\delta(z,E)^{3-\beta}\right) \text{ et } K_\beta = \mathcal{O}\left(\delta(z,E)^{3-\beta}\right).$$

Preuve : Comme en (6.10), on peut ne montrer ce lemme que dans le cas où on a $\lambda\delta(z,E)\leq\delta_0(1/2)$ où $\delta_0(1/2)$ est le réel fixé par (6.9). Dans le cas contraire, il suffit de voir que les intégrales

$$\int_{\delta_0(1/2)\leq\delta(z,\zeta)\leq\lambda\delta(z,E)} \frac{|z_1|^{m-2}}{|\Phi(z,\zeta)|^\beta}dV(\zeta) \text{ et } \int_{\delta_0(1/2)\leq\delta(z,\zeta)\leq\lambda\delta(z,E)} \frac{|\zeta_1-z_1|^{m-2}}{|\Phi(z,\zeta)|^\beta}dV(\zeta)$$

sont convergentes puisque l'on a, dans le domaine d'intégration,

$$|\Phi(z,\zeta)| \approx \delta(z,\zeta) \geq \delta_0(1/2),$$

d'après (6.2.1), de même que les intégrales

$$\int_{\delta(z,\zeta)\leq\delta_0(1/2)} \frac{|z_1|^{m-2}}{|\Phi(z,\zeta)|^\beta} dV(\zeta) \text{ et } \int_{\delta(z,\zeta)\leq\delta_0(1/2)} \frac{|\zeta_1 - z_1|^{m-2}}{|\Phi(z,\zeta)|^\beta} dV(\zeta)$$

pour lesquelles il suffira, dans les calculs qui suivent, de remplacer $\lambda\delta(z,E)$ par $\delta_0(1/2)$ partout.
Supposons donc $\lambda\delta(z,E) \leq \delta_0(1/2)$. On utilise alors les lemmes (6.2), (6.3) et (6.9) pour affirmer que

$$J_\beta \lesssim \int_{u+|v|+|\zeta_1-z_1|^m\leq\lambda\delta(z,E)} \frac{|z_1|^{m-2}}{(u+|v|+|z_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2)^\beta} dudvdV(\zeta_1)$$

et

$$K_\beta \lesssim \int_{u+|v|+|\zeta_1-z_1|^m\leq\lambda\delta(z,E)} \frac{|\zeta_1-z_1|^{m-2}}{(u+|v|+|\zeta_1-z_1|^m)^\beta} dudvdV(\zeta_1).$$

• Cas $2 < \beta < 3$. On passe en polaire pour obtenir

$$J_\beta \lesssim \int_{u,|v|,r^m\leq\lambda\delta(z,E)} \frac{|z_1|^{m-2} r dr d\theta}{(u+|v|+|z_1|^{m-2}r^2)^\beta} dudv \lesssim \int_{u,|v|\leq\lambda\delta(z,E)} \frac{1}{(u+|v|)^{\beta-1}} dudv.$$

On intègre en u, puis en v et on obtient le résultat. Pour K_β, on a, en passant en polaire

$$K_\beta \lesssim \int_{u,|v|,r^m\leq\lambda\delta(z,E)} \frac{r^{m-2} r dr d\theta}{(u+|v|+r^m)^\beta} dudv \lesssim \int_{u,|v|\leq\lambda\delta(z,E)} \frac{1}{(u+|v|)^{\beta-1}} dudv$$

et le résultat suit.

• Cas $\beta = 2$. Après la première intégration en polaire, on obtient

$$J_2 \lesssim \int_{u,|v|\leq\lambda\delta(z,E)} \frac{1}{u+|v|} dudv.$$

On choisit $0 < \eta < 1$ et on écrit

$$\int_{u,|v|\leq\lambda\delta(z,E)} \frac{1}{u+|v|} dudv \lesssim \int_{u,|v|\leq\lambda\delta(z,E)} \frac{1}{u^\eta(u+|v|)^{1-\eta}} dudv$$

On intègre d'abord en v et on obtient

$$J_2 \lesssim \int_{u\leq\lambda\delta(z,E)} \frac{(u+\lambda\delta(z,E))^\eta}{u^\eta} du.$$

On majore $u + \lambda\delta(z,E)$ par $2\lambda\delta(z,E)$, puis on intègre en u pour obtenir le résultat. On procède de même pour K_2.

Remarque : Dans toute la suite, on pourra appliquer les lemmes (6.10) et (6.11) en notant que, pour tout point z de $V \cap \bar{\Omega}$, on peut supposer $|z_1| \leq 1/2$.

6.12 LEMME.

Pour tout réel $\beta > 2$ et tout point $\zeta \in V \cap \Omega$, les intégrales

$$L_\beta = \int_{z\in\partial\Omega} \frac{|\zeta_1|^{m-2}}{|\Phi(z,\zeta)|^\beta} d\sigma(z) \text{ et } M_\beta = \int_{z\in\partial\Omega} \frac{|\zeta_1 - z_1|^{m-2}}{|\Phi(z,\zeta)|^\beta} d\sigma(z),$$

où $d\sigma$ est la mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$, vérifient

$$L_\beta = \mathcal{O}\left(|r(\zeta)|^{2-\beta}\right) \text{ et } M_\beta = \mathcal{O}\left(|r(\zeta)|^{2-\beta}\right).$$

Preuve : On pose $\beta = 2 + \nu$ avec $\nu > 0$. On suppose que $|\zeta_1| \leq 1/2$. On peut alors, utiliser, par symétrie et comme dans le lemme (6.9), le changement de variables

$$u = -r(z), \quad v = \Im m\Phi(z,\zeta), \quad z_1.$$

(Dans le cas où $|\zeta_1| \geq 1/2$, on a alors $|\zeta_2| \leq 1/2$ et, par symétrie, on pourra utiliser le changement de variables (u, v, z_2).)
On peut également se limiter à montrer ce lemme en intégrant seulement sur $\{z \in \partial\Omega, \delta(\zeta, z) \leq \delta_0(1/2)\}$ où $\delta_0(1/2)$ a été défini en (6.9) (il suffit de voir que, pour $\delta(z,\zeta) \geq \delta_0(1/2)$, on a, d'après (6.2.1), $|\Phi(z,\zeta)| \gtrsim \delta_0(1/2)$). En remarquant que, sur le bord, on a $u = 0$, on combine alors ces nouvelles variables avec (6.2.1) et (6.3.2) pour affirmer que l'on a

$$L_\beta \lesssim \int_{|v|+|\zeta_1-z_1|^m \leq \delta_0(1/2)} \frac{|\zeta_1|^{m-2}}{(-r(\zeta) + |v| + |\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1 - z_1|^2)^{2+\nu}} dv d\sigma(z_1).$$

On passe en polaire pour obtenir

$$L_\beta \lesssim \int_{|v|, r^m \leq \delta_0(1/2)} \frac{|\zeta_1|^{m-2} r dr d\theta}{(-r(\zeta) + |v| + |\zeta_1|^{m-2} r^2)^{2+\nu}} dv \lesssim \int_{|v| \leq \delta_0(1/2)} \frac{1}{(-r(\zeta) + |v|)^{1+\nu}} dv.$$

On intègre en v et on obtient le résultat. Pour M_β, on a

$$M_\beta \lesssim \int_{|v|+|\zeta_1-z_1|^m \leq \delta_0(1/2)} \frac{|\zeta_1 - z_1|^{m-2}}{(-r(\zeta) + |v| + |\zeta_1 - z_1|^m)^{2+\nu}} dv d\sigma(z_1).$$

On a, en passant en polaire

$$M_\beta \lesssim \int_{|v|, r^m \leq \delta_0(1/2)} \frac{r^{m-2} r dr d\theta}{(-r(\zeta) + |v| + r^m)^{2+\nu}} dv \lesssim \int_{|v| \leq \delta_0(1/2)} \frac{1}{(-r(\zeta) + |v|)^{1+\nu}} dv$$

et le résultat suit.

6.13 LEMME.

La (0,1)-forme ω définie au §5 satisfait

(6.13.1) $$||\omega||_{L^1(\Omega)} < \infty,$$

(6.13.2) $$||(Log\,|r|)\bar{\partial}r \wedge \omega||_{L^1(\Omega)} < \infty.$$

et

(6.13.3) $$||(-r)^{1/m-1}\bar{\partial}r \wedge \omega||_{L^1(\Omega)} < \infty.$$

Preuve : La première inégalité est évidente à l'aide des estimées sur ω_1, ω_2 en (5.14) et du fait que l'on a $\delta(\zeta, E) \gtrsim 1 - |\zeta_2|$. Puisque (6.13.3) entraine (6.13.2), il ne reste plus qu'à montrer (6.13.3). Il suffit d'établir la convergence de

$$I = \int_{\zeta\in\Omega}(-r(\zeta))^{1/m-1}\delta(\zeta, E)^{-1/m}dV(\zeta)$$

et

$$J = \int_{\zeta\in\Omega}(-r(\zeta))^{1/m-1}|\zeta_1|^{m-1}\delta(\zeta, E)^{-1}dV(\zeta).$$

D'après (5.2.7) et le fait que $|\zeta_1|^m \leq u + |\zeta_1|^m \lesssim \delta(\zeta, E)$, il suffit d'estimer I. On voit qu'il suffit de majorer

$$K = \int_{\delta(z,\zeta)\leq\delta_0(1/2)}(-r(\zeta))^{1/m-1}\delta(\zeta, E)^{-1/m}dV(\zeta)$$

pour $z \in E$. On peut alors utiliser le changement de variables suggéré en (6.9) et on doit regarder

$$\int_{u+|v|+|\zeta_1|^m\leq\delta_0(1/2)} \frac{dudvdV(\zeta_1)}{u^{1-1/m}(u + |\zeta_1|^m)^{1/m}}.$$

On considère alors un réel ε avec $0 < \varepsilon < 1/m$. On a alors

$$\begin{aligned}(u + |\zeta_1|^m)^{1/m} &= (u + |\zeta_1|^m)^{\varepsilon}(u + |\zeta_1|^m)^{1/m-\varepsilon}\\ &\geq |\zeta_1|^{m\varepsilon}u^{1/m-\varepsilon}\end{aligned}$$

d'où

$$K \lesssim \int_{u+|v|+|\zeta_1|^m\leq\delta_0(1/2)} \frac{dudvdV(\zeta_1)}{u^{1-\varepsilon}|\zeta_1|^{m\varepsilon}},$$

ce qui donne le résultat, après intégration en u et en ζ_1.

6.14 CALCULS DES COMPOSANTES DES NOYAUX.

On ne calculera ici que les composantes de K et P intervenant explicitement dans la suite du chapitre. On notera que, pour tout $\zeta \in \bar{\Omega}$, tout $i = 1, 2$, on a $\overline{r(\zeta)^{\zeta_i}} = r(\zeta)^{\bar{\zeta}_i}$ et que pour $j \neq i$ on a $r(\zeta)^{\zeta_i \zeta_j} = r(\zeta)^{\zeta_i \bar{\zeta}_j} = 0$.

On a

$$s_1(\zeta,z)^{\zeta_1} = s_1(\zeta,z)^{\zeta_2} = 0,$$

$$s_1(\zeta,z)^{\bar{\zeta}_1} = r(z)^2 + r(z)^{z_1} r(z)^{\bar{z}_1}, \quad s_1(\zeta,z)^{\bar{\zeta}_2} = r(z)^{z_1} r(z)^{\bar{z}_2},$$

$$s_1(\zeta,z)^{z_1} = 2r(z)r(z)^{z_1}(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1) - r(z)^{\bar{z}_1 z_1}(\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1) r(z)^{z_1} - r(z)^{z_1^2} \overline{\Phi(z,\zeta)},$$

$$s_1(\zeta,z)^{z_2} = 2r(z)r(z)^{z_2}(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1) - r(z)^{z_1}(\bar{z}_2 - \bar{\zeta}_2).$$

De même, on obtient

$$s_2(\zeta,z)^{\zeta_1} = s_2(\zeta,z)^{\zeta_2} = 0,$$

$$s_2(\zeta,z)^{\bar{\zeta}_1} = r(z)^{z_2} r(z)^{\bar{z}_1}, \quad s_2(\zeta,z)^{\bar{\zeta}_2} = r(z)^2 + r(z)^{z_2} r(z)^{\bar{z}_2},$$

$$s_2(\zeta,z)^{z_1} = 2r(z)r(z)^{z_1}(\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2) - r(z)^{\bar{z}_1 z_1}(\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1) r(z)^{z_2},$$

$$s_2(\zeta,z)^{z_2} = 2r(z)r(z)^{z_2}(\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2) - r(z)^{z_2}(\bar{z}_2 - \bar{\zeta}_2).$$

On peut également calculer

$$dQ_1(\zeta,z) = \frac{r(\zeta)^{\zeta_1^2} d\zeta_1 + r(\zeta)^{\zeta_1 \bar{\zeta}_1} d\bar{\zeta}_1}{r(\zeta)} - \frac{r(\zeta)^{\zeta_1}(r(\zeta)^{\zeta_1} d\zeta_1 + r(\zeta)^{\bar{\zeta}_1} d\bar{\zeta}_1 + r(\zeta)^{\zeta_2} d\zeta_2 + r(\zeta)^{\bar{\zeta}_2} d\bar{\zeta}_2)}{r(\zeta)^2}$$

et

$$dQ_2(\zeta,z) = \frac{r(\zeta)^{\zeta_2^2} d\zeta_2 + r(\zeta)^{\zeta_2 \bar{\zeta}_2} d\bar{\zeta}_2}{r(\zeta)} - \frac{r(\zeta)^{\zeta_2}(r(\zeta)^{\zeta_1} d\zeta_1 + r(\zeta)^{\bar{\zeta}_1} d\bar{\zeta}_1 + r(\zeta)^{\zeta_2} d\zeta_2 + r(\zeta)^{\bar{\zeta}_2} d\bar{\zeta}_2)}{r(\zeta)^2}.$$

Composante (0,0) en z de $K^{(1)}$:

On a facilement $s \wedge ds = (s_1 ds_2 - s_2 ds_1) \wedge d(\zeta_1 - z_1) \wedge d(\zeta_2 - z_2)$. La composante (0,0) en z de cette forme est, en vertu des calculs précédents et après simplification,

$$(s \wedge ds)_{0,0}(\zeta,z) = \Psi_1^{(1)}(\zeta,z) d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 + \Psi_2^{(1)}(\zeta,z) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$

où l'on a posé

$$\Psi_1^{(1)}(\zeta,z) = r(z)^2 \Big((\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)(r(z)^{z_2} r(z)^{\bar{z}_2} + (-r(z))^2) - (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2) r(z)^{z_1} r(z)^{\bar{z}_2} - \overline{\Phi(z,\zeta)} r(z)^{z_1} \Big)$$

et

$$\Psi_2^{(1)}(\zeta,z) = r(z)^2 \quad \Big((\bar\zeta_1 - \bar z_1) r(z)^{z_2} r(z)^{\bar z_1} - (\bar\zeta_2 - \bar z_2)(r(z)^{z_1} r(z)^{\bar z_1} + (-r(z))^2) + \overline{\Phi(z,\zeta)} r(z)^{z_2} \Big).$$

On voit donc que l'on a en particulier

$$(6.14.1) \qquad (s \wedge ds)_{0,0}(\zeta,z) = 0 \text{ pour } z \in \partial\Omega.$$

Composante (0,0) en z de $K^{(2)}$:
On a, de manière très simple, $s \wedge dQ = (s_1 dQ_2 - s_2 dQ_1) \wedge d(\zeta_1 - z_1) \wedge d(\zeta_2 - z_2)$.
La composante (0,0) en z de cette forme est égale à

$$(s \wedge dQ)_{0,0}(\zeta,z) = \Psi_1^{(2)}(\zeta,z) d\bar\zeta_2 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 + \Psi_2^{(2)}(\zeta,z) d\bar\zeta_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$

où l'on a posé

$$\Psi_1^{(2)}(\zeta,z) = \frac{s_1(\zeta,z) r(\zeta)^{\zeta_2\bar\zeta_2}}{r(\zeta)} - \frac{s_1(\zeta,z) r(\zeta)^{\zeta_2} r(\zeta)^{\bar\zeta_2}}{r(\zeta)^2} + \frac{s_2(\zeta,z) r(\zeta)^{\zeta_1} r(\zeta)^{\bar\zeta_2}}{r(\zeta)^2}$$

et

$$\Psi_2^{(2)}(\zeta,z) = -\frac{s_1(\zeta,z) r(\zeta)^{\zeta_2} r(\zeta)^{\bar\zeta_1}}{r(\zeta)^2} - \frac{s_2(\zeta,z) r(\zeta)^{\zeta_1\bar\zeta_1}}{r(\zeta)} + \frac{s_2(\zeta,z) r(\zeta)^{\zeta_1} r(\zeta)^{\bar\zeta_1}}{r(\zeta)^2}.$$

Composantes (1,0) en z de P :
On a facilement $dQ \wedge dQ = -2 dQ_1 \wedge dQ_2 \wedge d(\zeta_1 - z_1) \wedge d(\zeta_2 - z_2)$.
Sa composante en $d\bar\zeta_2 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge dz_1$ a pour coefficient $-2\Psi_{1,1}^P(\zeta)/r^3(\zeta)$ avec

$$\Psi_{1,1}^P(\zeta) = r(\zeta)^{\zeta_1} r(\zeta)^{\zeta_1} r(\zeta)^{\bar\zeta_2\zeta_2} + r(\zeta)^{\zeta_2} r(\zeta)^{\zeta_1^2} r(\zeta)^{\bar\zeta_2} - r(\zeta)^{\zeta_1^2} r(\zeta)^{\zeta_2\bar\zeta_2} r(\zeta).$$

Notons que $\Psi_{1,1}^P(\zeta)^{\zeta_2} = 0$ en vertu de l'expression explicite de r et de l'égalité

$$r(\zeta)^{\zeta_2} r(\zeta)^{\zeta_1^2} r(\zeta)^{\bar\zeta_2} - r(\zeta)^{\zeta_1^2} r(\zeta)^{\zeta_2\bar\zeta_2} r(\zeta) = r(\zeta)^{\zeta_1^2}(1 - |\zeta_1|^m).$$

La composante en $d\bar\zeta_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge dz_1$ a pour coefficient $-2\Psi_{1,2}^P(\zeta)/r^3(\zeta)$ avec

$$\Psi_{1,2}^P(\zeta) = r(\zeta)^{\zeta_2} r(\zeta)^{\zeta_1^2} r(\zeta)^{\bar\zeta_1} - r(\zeta)^{\zeta_2} r(\zeta)^{\zeta_1\bar\zeta_1} r(\zeta)^{\zeta_1}.$$

La composante en $d\bar\zeta_2 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge dz_2$ a pour coefficient $-2\Psi_{2,1}^P(\zeta)/r^3(\zeta)$ avec

$$\Psi_{2,1}^P(\zeta) = r(\zeta)^{\zeta_1} r(\zeta)^{\zeta_2} r(\zeta)^{\zeta_2\bar\zeta_2} - r(\zeta)^{\zeta_1} r(\zeta)^{\bar\zeta_2} r(\zeta)^{\zeta_2^2} = r(\zeta)^{\zeta_1} r(\zeta)^{\zeta_2} r(\zeta)^{\zeta_2\bar\zeta_2}.$$

Enfin, la composante en $d\bar\zeta_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge dz_2$ a pour coefficient $-2\Psi_{2,2}^P(\zeta)/r^3(\zeta)$ avec

$$\begin{aligned} \Psi_{2,2}^P(\zeta) &= r(\zeta)^{\zeta_1\bar\zeta_1} r(\zeta)^{\zeta_2^2} r(\zeta) - r(\zeta)^{\bar\zeta_1} r(\zeta)^{\zeta_1} r(\zeta)^{\zeta_2^2} - r(\zeta)^{\zeta_2} r(\zeta)^{\zeta_2} r(\zeta)^{\zeta_1\bar\zeta_1} \\ &= -r(\zeta)^{\zeta_2} r(\zeta)^{\zeta_2} r(\zeta)^{\zeta_1\bar\zeta_1}. \end{aligned}$$

Composantes (1,0) en z de $K^{(1)}$:
En notant que, pour $i,j=1,2$, on a $s_i(\zeta,z)^{\zeta_j}=0$, on vérifie que

$$(s\wedge ds)_{1,0}(\zeta,z)=\Psi^{(1)}_{1,0,1}(\zeta,z)d\zeta_1\wedge d\zeta_2\wedge dz_1+\Psi^{(1)}_{1,0,2}(\zeta,z)d\zeta_1\wedge d\zeta_2\wedge dz_2$$

où l'on a posé

$$\Psi^{(1)}_{1,0,1}=s_1s_2^{z_1}-s_2s_1^{z_1} \text{ et } \Psi^{(1)}_{1,0,2}=s_1s_2^{z_2}-s_2s_1^{z_2}.$$

Composantes (1,0) en z de $K^{(2)}$:
La composante de $s\wedge dQ$ en $d\zeta_1\wedge d\zeta_2\wedge dz_1$ a pour coefficient $\Psi^{(2)}_{1,0,1}(\zeta,z)$ avec

$$\Psi^{(2)}_{1,0,1}(\zeta,z)=-\frac{s_1(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_2}r(\zeta)^{\zeta_1}}{r(\zeta)^2}-\frac{s_2(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_1^2}}{r(\zeta)}+\frac{s_2(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_1}r(\zeta)^{\zeta_1}}{r(\zeta)^2}.$$

En notant que $r(\zeta)^{\zeta_2^2}=0$, on voit de même que la composante de $s\wedge dQ$ en $d\zeta_1\wedge d\zeta_2\wedge dz_2$ a pour coefficient $\Psi^{(2)}_{1,0,2}(\zeta,z)$ avec

$$\Psi^{(2)}_{1,0,2}(\zeta,z)=-\frac{s_1(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_2}r(\zeta)^{\zeta_2}}{r(\zeta)^2}+\frac{s_2(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_1}r(\zeta)^{\zeta_2}}{r(\zeta)^2}.$$

6.15 PROPOSITION.

La fonction U donnée par

(6.15.1) $$U(z)=-\int_\Omega \omega(\zeta)\wedge K_{0,0}(\zeta,z)$$

est définie en tout point z de $\bar\Omega\backslash E$. De plus, elle vérifie

(6.15.2) $$\bar\partial U=\omega \text{ dans } \Omega$$

et

(6.15.3) $$U\in\mathcal{C}^\infty(\bar\Omega\backslash E).$$

Preuve : (6.15.2) est une conséquence immédiate de (6.7) et (6.13). Pour l'étude de la régularité au bord de la fonction U, il suffit de se limiter au cas de points z dans $(V\cap\bar\Omega)\backslash E$ en raison du support de ω. En effet, il existe une constante c telle que, pour tout z de $\Omega\backslash V$, tout ζ dans le support de ω, on ait $|\zeta-z|\geq c$. On conclut alors à l'aide de (6.3.5) et (6.3.6).
On pose $\lambda=(2C)^{-1}$ où C est la constante de l'inégalité triangulaire pour δ. On considère un point $z\in(V\cap\partial\Omega)\backslash E$ et une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $Q_{\lambda\delta(z,E)}(z)$, valant 1 dans $Q_{\lambda\delta(z,E)/2}(z)$.
On a alors, par le choix de λ,

(6.15.4) $$\delta(\zeta,E)\approx\delta(z,E) \text{ pour } \zeta \text{ dans le support de } \varphi,$$

puisque $\delta(z,E) \le C(\delta(z,\zeta)+\delta(\zeta,E)) \le \delta(z,E)/2 + C\delta(\zeta,E)$ et $\delta(\zeta,E) \le C(\delta(\zeta,z)+\delta(z,E)) \lesssim \delta(z,E)$.
On peut construire, comme dans la proposition (4.10), la fonction φ de telle sorte que l'on ait, pour tous biindices I, J, tout $\zeta \in \bar{\Omega}\backslash E$,

(6.15.5) $$\left|\partial_\zeta^{IJ}\varphi(\zeta)\right| = \mathcal{O}\left(\delta(\zeta,E)^{-i/m-j}\right).$$

On écrit alors

$$\omega = \omega' + \omega''$$

où l'on a posé

$$\omega' = \bar{\partial}\left(\varphi\frac{g}{h^r}\right) \text{ et } \omega'' = \bar{\partial}\left((1-\varphi)\frac{g}{h^r}\right).$$

Par des considérations de support, il est facile de voir que

(6.15.6) $$\omega' \in \mathcal{C}^\infty_{0,1}(\bar{\Omega}).$$

D'après (6.8.1) et puisque $\bar{\partial}\omega' = 0$, $T(\omega')$ est un élément de $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$.
Posons ensuite, pour $\xi \in \Omega$,

$$S(\xi) = -\int_\Omega \omega''(\zeta) \wedge K_{0,0}(\zeta,\xi).$$

Cette fonction est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω et on a simplement, pour tous biindices P, Q et tout point ξ suffisamment voisin de z dans Ω (donc en dehors du support de ω''),

$$\partial_z^{PQ}S(\xi) = -\int_\Omega \omega''(\zeta) \wedge \partial_z^{PQ}K_{0,0}(\zeta,\xi).$$

La proposition (A4.7) placée en annexe 4 permet alors d'affirmer que S et toutes ses dérivées se prolongent continûment en z. On a ainsi $S \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}\backslash E)$ et (6.15.3) s'ensuit puisque $U = T(\omega') + S$.

Dans toute la suite, toutes les constantes figurant implicitement dans les notations $\mathcal{O}$ ou $\lesssim$ dépendent du jet F choisi en (4.7). Pour alléger la rédaction, on oubliera de le mentionner.

<u>6.16 THEOREME.</u>

Pour tous biindices P, Q, on a, pour tout $z \in \partial\Omega\backslash E$,

(6.16.1) $$\left|\partial_z^{PQ}U(z)\right| = \mathcal{O}\left(\delta(z,E)^{-(p/m+q)}\right).$$

<u>Preuve :</u> D'après (6.15.3), on peut se limiter au cas de points $z \in (V \cap \partial\Omega)\backslash E$ puisque, pour $z \in \partial\Omega\backslash E$, on a $\delta(z,E) \gtrsim 1$.

D'après (6.15.2), on a $\bar\partial U = \omega$ dans Ω et cette dernière est une forme de $\mathcal{C}^\infty_{0,1}(\bar\Omega\backslash E)$. On peut donc écrire, si $p'' > 0$,

$$\partial_z^{PQ} U(z) = \partial_z^{P-(0,1),Q}\omega_1(z)$$

et on a le résultat par (5.14.1). De même, si $q'' > 0$, on a

$$\partial_z^{PQ} U(z) = \partial_z^{P,Q-(0,1)}\omega_2(z)$$

et on conclut à l'aide de (5.14.2).
Il ne reste donc plus qu'à considérer le cas où $P = (p,0)$ et $Q = (q,0)$.
En reprenant les notations de (6.15), on a immédiatement

$$\frac{\partial^{p+q}U}{\partial z_1^p \partial z_2^q}(z) = \frac{\partial^{p+q}T(\omega')}{\partial z_1^p \partial z_2^q}(z) + Z(\omega'')(z)$$

où l'on a posé

$$Z(\omega'')(z) = \lim_{\xi\to z}\left(-\int_{\zeta\in\Omega}\omega''(\zeta)\wedge\frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p\partial z_2^q}K_{0,0}(\zeta,\xi)\right) = -\int_{\zeta\in\Omega}\omega''(\zeta)\wedge\frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p\partial z_2^q}K_{0,0}(\zeta,z)$$

d'après (A4.7).
On peut appliquer le lemme (6.8) à ω' puisque l'on a (6.15.5) et on obtient, en notant que $\bar\partial\omega' = 0$,

$$\partial T(\omega')(z) = T\left(\partial\omega'\right)(z) + \int_{\zeta\in\Omega}\omega'(\zeta)\wedge P_{1,0}(\zeta,z).$$

On peut itérer le procédé et on obtient, comme dans [BB],

$$\frac{\partial^{p+q}T(\omega')}{\partial z_1^p\partial z_2^q}(z) = W(\omega')(z) + X(\omega')(z)$$

avec

$$W(\omega')(z) = T\left(\frac{\partial^{p+q}\omega'}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^q}\right)(z)$$

et

$$X(\omega')(z) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{(a,b,c,d)\in E_i}\mu(a,b,c,d)\int_{\zeta\in\Omega}\frac{\partial^{a+b}\omega'}{\partial\zeta_1^a\partial\zeta_2^b}(\zeta)\wedge\frac{\partial^{c+d}P_{1,0,i}}{\partial z_1^c\partial z_2^d}(\zeta,z)$$

où chaque E_i est un ensemble de quadruplets d'entiers naturels (a,b,c,d) tels que, si $i=1$, alors $a+c = p-1$ et $b+d = q$ tandis que, si $i=2$, alors $a+c=p$ et $b+d=q-1$, et où les $\mu(a,b,c,d)$ sont des coefficients réels. En notant que

$$\omega' = \varphi\omega + \frac{g}{h^r}\bar\partial\varphi \text{ et } \omega'' = (1-\varphi)\omega - \frac{g}{h^r}\bar\partial\varphi,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}(6.16.2)\qquad \frac{\partial^{p+q}U}{\partial z_1^p\partial z_2^q}(z) = {} & W(\varphi\omega)(z) + W(g\bar\partial\varphi/h^r)(z) + X(\varphi\omega)(z) + X(g\bar\partial\varphi/h^r)(z)\\ & + Z((1-\varphi)\omega)(z) - Z(g\bar\partial\varphi/h^r)(z),\end{aligned}$$

où les termes W, X, Z sont définis plus haut, la forme ω' ou ω'' étant évidemment remplacée par l'argument correspondant.
Par des considérations de support, la forme $g\bar{\partial}\varphi/h^r$ est dans $\mathcal{C}^\infty_{0,1}(\bar{\Omega})$ et on peut donc lui appliquer le lemme (6.8) pour obtenir, en itérant et en notant que $\bar{\partial}(g\bar{\partial}\varphi/h^r) = \omega \wedge \bar{\partial}\varphi$,

$$\frac{\partial^{p+q}T(g\bar{\partial}\varphi/h^r)}{\partial z_1^p \partial z_2^q}(z) = W(g\bar{\partial}\varphi/h^r)(z) + X(g\bar{\partial}\varphi/h^r)(z) + Y(\omega \wedge \bar{\partial}\varphi)(z)$$

où

$$Y(\omega \wedge \bar{\partial}\varphi)(z) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{(a,b,c,d)\in E_i} \nu(a,b,c,d) \int_{\zeta\in\Omega} \frac{\partial^{a+b}(\omega \wedge \bar{\partial}\varphi)}{\partial \zeta_1^a \partial \zeta_2^b}(\zeta) \wedge \frac{\partial^{c+d} K_{1,0,i}}{\partial z_1^c \partial z_2^d}(\zeta, z)$$

où E_i a été défini en (6.15) et où les $\nu(a,b,c,d)$ sont des coefficients réels. En se plaçant en ξ point de Ω, en dérivant sous le signe somme (ce qui est possible grâce au choix du support de $\bar{\partial}\varphi$) et en utilisant (A4.7) pour prolonger en z, on obtient également

$$\frac{\partial^{p+q}T(g\bar{\partial}\varphi/h^r)}{\partial z_1^p \partial z_2^q}(z) = Z(g\bar{\partial}\varphi/h^r)(z)$$

et on a donc

$$W(g\bar{\partial}\varphi/h^r)(z) + X(g\bar{\partial}\varphi/h^r)(z) + Y(\omega \wedge \bar{\partial}\varphi)(z) - Z(g\bar{\partial}\varphi/h^r)(z) = 0$$

et en replaçant cela dans (6.16.2), on obtient donc

(6.16.3) $$\frac{\partial^{p+q}U}{\partial z_1^p \partial z_2^q}(z) = W(\varphi\omega)(z) + X(\varphi\omega)(z) + Z((1-\varphi)\omega)(z) - Y(\omega \wedge \bar{\partial}\varphi)(z).$$

Dans les paragraphes (6.18) à (6.21), on va démontrer les estimées sur ces termes, après un lemme technique en (6.17). Par facilité, on omettra d'indiquer les arguments des opérateurs W, X, Y et Z ; par exemple, $W(\varphi\omega)(z)$ sera noté W.

6.17 LEMME.

Pour tous $\zeta \in \bar{\Omega}$, tous $z \in \partial\Omega$, tous entiers naturels i, j, on a les estimées suivantes :

(6.17.1) $$\langle s, \zeta - z\rangle^{z_1^i z_2^j} = \mathcal{O}'\left(|z_1|^{(2-j)m-i} + |\Phi(z,\zeta)|^{2-j-i/m}\right),$$

(6.17.2) $$(\langle s, \zeta - z\rangle^2)^{z_1^i z_2^j} = \mathcal{O}'\left(|z_1|^{(4-j)m-i} + |\Phi(z,\zeta)|^{4-j-i/m}\right),$$

(6.17.3) $$\Psi_1^{(1)}(\zeta, z)^{z_1^i z_2^j} = \mathcal{O}'\left(|z_1|^{(2-j)m-i-1} + |\Phi(z,\zeta)|^{2-j-(i+1)/m}\right),$$

(6.17.4) $$\Psi_2^{(1)}(\zeta, z)^{z_1^i z_2^j} = \mathcal{O}'\left(|z_1|^{(3-j)m-i-2} + |\Phi(z,\zeta)|^{3-j-(i+2)/m}\right),$$

$$(6.17.5) \qquad \Psi_1^{(2)}(\zeta,z)^{z_1^i z_2^j} = \frac{1}{r(\zeta)^2}\mathcal{O}'\left(|z_1|^{(2-j)m-i-1} + |\Phi(z,\zeta)|^{2-j-(i+1)/m}\right),$$

$$(6.17.6) \qquad \Psi_2^{(2)}(\zeta,z)^{z_1^i z_2^j} = \frac{1}{r(\zeta)^2}\mathcal{O}'\left(|z_1|^{(3-j)m-i-2} + |\Phi(z,\zeta)|^{3-j-(i+2)/m}\right),$$

$$(6.17.7) \qquad \Psi_{1,0,1}^{(1)}(\zeta,z)^{z_1^i z_2^j} = \mathcal{O}'\left(|z_1|^{(3-j)m-i-2} + |\Phi(z,\zeta)|^{3-j-(i+2)/m}\right),$$

$$(6.17.8) \qquad \Psi_{1,0,2}^{(1)}(\zeta,z)^{z_1^i z_2^j} = \mathcal{O}'\left(|z_1|^{(2-j)m-i-1} + |\Phi(z,\zeta)|^{2-j-(i+1)/m}\right),$$

$$(6.17.9) \qquad \Psi_{1,0,1}^{(2)}(\zeta,z)^{z_1^i z_2^j} = \frac{1}{r(\zeta)^2}\mathcal{O}'\left(|z_1|^{(3-j)m-i-2} + |\Phi(z,\zeta)|^{3-j-(i+2)/m}\right),$$

$$(6.17.10) \qquad \Psi_{1,0,2}^{(2)}(\zeta,z)^{z_1^i z_2^j} = \frac{1}{r(\zeta)^2}\mathcal{O}'\left(|z_1|^{(2-j)m-i-1} + |\Phi(z,\zeta)|^{2-j-(i+1)/m}\right).$$

Preuve : On va se contenter de montrer la première estimée, l'ensemble des autres faisant appel aux mêmes techniques et aux mêmes calculs.
On peut d'abord remarquer que la majoration par une constante est triviale puisque toutes les quantités considérées sont bornées. Ensuite, on obtient facilement, à l'aide de (6.3.4), que l'on a

$$\left|(|\zeta - z|^2)^{z_1^i z_2^j}\right| \lesssim |\Phi(z,\zeta)|^{2/m-(i/m+j)}.$$

De même, on obtient par le calcul et en remarquant que seule la situation où l'un des deux entiers naturels i et j est nul est à considérer, la majoration

$$\left|(-r(z))^{z_1^i z_2^j}\right| \leq |z_1|^{m-(mj+i)}.$$

Enfin, à l'aide de (6.3.4), on obtient par les mêmes arguments que

$$\left|\Phi(z,\zeta)^{z_1^i z_2^j}\right| \leq |z_1|^{m-(mj+i)} + |\Phi(z,\zeta)|^{1-(i/m+j)}$$

ainsi que

$$\left|\overline{\Phi(z,\zeta)}^{z_1^i z_2^j}\right| \leq |z_1|^{m-(mj+i)} + |\Phi(z,\zeta)|^{1-(i/m+j)}.$$

En utilisant la formule de Leibniz, on obtient alors le résultat cherché, en remarquant que l'on a, pour a, b entiers naturels

$$\left(|z_1|^a + |\Phi(z,\zeta)|^{a/m}\right)\left(|z_1|^b + |\Phi(z,\zeta)|^{b/m}\right) \leq |z_1|^{a+b} + |\Phi(z,\zeta)|^{(a+b)/m}.$$

Ceci prouve (6.17.1). Dans tous les autres calculs, on utilise aussi la relation

$$|\zeta_1| \leq |z_1| + |\zeta_1 - z_1| \lesssim |z_1| + |\Phi(z,\zeta)|$$

ainsi que, dans la démonstration de (6.17.5), (6.17.6), (6.17.9) et (6.17.10), l'inégalité

$$\frac{1}{|r(\zeta)|} \lesssim \frac{|\Phi(z,\zeta)|}{|r(\zeta)|^2}$$

résultant de (6.2.1) et (6.3.1).

6.18 ESTIMATION DE W.

D'après la remarque (6.14.1), on ne doit estimer que quatre termes, donnés par la composante (0,0) de $K^{(2)}$. On a donc

$$W = W_1^1 + W_2^1 + W_1^2 + W_2^2$$

avec

$$W_1^1 = -3\int_\Omega \frac{\partial^{p+q}(\varphi\omega_1)}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^q}(\zeta)\left(\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right)^4 \frac{s_1(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_2\bar{\zeta}_2}}{|\Phi(z,\zeta)|^2 r(\zeta)}dV(\zeta),$$

$$W_2^1 = -3\int_\Omega \frac{\partial^{p+q}(\varphi\omega_1)}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^q}(\zeta)\left(\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right)^4 \frac{r(\zeta)^{\bar{\zeta}_2}(s_2(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_1} - s_1(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_2})}{|\Phi(z,\zeta)|^2 r(\zeta)^2}dV(\zeta),$$

$$W_1^2 = 3\int_\Omega \frac{\partial^{p+q}(\varphi\omega_2)}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^q}(\zeta)\left(\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right)^4 \frac{-s_2(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_1\bar{\zeta}_1}}{|\Phi(z,\zeta)|^2 r(\zeta)}dV(\zeta)$$

et

$$W_2^2 = 3\int_\Omega \frac{\partial^{p+q}(\varphi\omega_2)}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^q}(\zeta)\left(\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right)^4 \frac{r(\zeta)^{\bar{\zeta}_1}(s_2(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_1} - s_1(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_2})}{|\Phi(z,\zeta)|^2 r(\zeta)^2}dV(\zeta).$$

<u>Estimation de W_1^1</u> : En remarquant que l'on a, pour $z \in \partial\Omega$, $s_1(\zeta,z) = -\overline{\Phi(z,\zeta)}r(z)^{z_1}$, on obtient, par des considérations de support,

$$\left|W_1^1\right| \lesssim \int_{\delta(z,\zeta)\leq\lambda\delta(z,E)} \left|\frac{\partial^{p+q}(\varphi\omega_1)}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^q}(\zeta)\right| \frac{|r(\zeta)|^3}{|\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|^4}\frac{|z_1|^{m-1}}{|\Phi(z,\zeta)|}dV(\zeta).$$

D'après (6.2.1), (6.3.1), (5.14.1), (6.15.3) et (6.15.4), on a, puisque $|z_1|^{m-1} \leq |z_1|^{m-2}$,

$$\left|W_1^1\right| \lesssim \delta(z,E)^{-1/m-p/m-q}J_2.$$

On applique alors le lemme (6.11) et on obtient

$$\left|W_1^1\right| \lesssim \delta(z,E)^{1-1/m-p/m-q} \lesssim \delta(z,E)^{-p/m-q}.$$

Estimation de W_2^1 : Par des arguments similaires, on a, en notant que pour $z \in \partial\Omega$, $s_2(\zeta, z) = -\overline{\Phi(z,\zeta)}r(z)^{z_2}$, la majoration

$$\begin{aligned}\left|W_2^1\right| &\lesssim \int_{\delta(z,\zeta)\leq\lambda\delta(z,E)} \left|\frac{\partial^{p+q}(\varphi\omega_1)}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^q}(\zeta)\right| \frac{|r(\zeta)|^2|\zeta_2|}{|\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|^4} \frac{\left||\zeta_1|^{m-2}\bar\zeta_1\bar z_2 - |z_1|^{m-2}\bar z_1\bar\zeta_2\right|}{|\Phi(z,\zeta)|}dV(\zeta)\\ &\lesssim \delta(z,E)^{-1/m-p/m-q}\int_{\delta(z,\zeta)\leq\lambda\delta(z,E)} \frac{\left||\zeta_1|^{m-2}\bar\zeta_1\bar z_2 - |z_1|^{m-2}\bar z_1\bar\zeta_2\right|}{|\Phi(z,\zeta)|^3}dV(\zeta).\end{aligned}$$

On pose $\alpha(\zeta,z) = |\zeta_1|^{m-2}\bar\zeta_1\bar z_2 - |z_1|^{m-2}\bar z_1\bar\zeta_2$ et on obtient à l'aide du théorème de Taylor et puisque $|z_1|^{m-1} \leq |z_1|^{m-2}$,

$$\begin{aligned}|\alpha(\zeta,z)| &= \left||z_1|^{m-2}\bar z_1(\bar z_2-\bar\zeta_2) + \bar z_2(|\zeta_1|^{m-2}\bar\zeta_1 - |z_1|^{m-2}\bar z_1)\right|\\ &\lesssim |z_1|^{m-2}|z_2-\zeta_2| + (|\zeta_1|^{m-2}+|z_1|^{m-2})|\zeta_1-z_1|.\end{aligned}\tag{6.18.1}$$

En utilisant l'inégalité triviale $|\zeta_1| \leq |z_1| + |\zeta_1 - z_1|$ et (6.3.4), on obtient

$$\begin{aligned}|\alpha(\zeta,z)| &\lesssim |z_1|^{m-2}|\Phi(z,\zeta)|^{1/2} + (|\zeta_1-z_1|^{m-2}+|z_1|^{m-2})|\Phi(z,\zeta)|^{1/m}\\ &\lesssim (|\zeta_1-z_1|^{m-2}+|z_1|^{m-2})|\Phi(z,\zeta)|^{1/m},\end{aligned}\tag{6.18.2}$$

puisque $|\Phi(z,\zeta)| \lesssim 1$. On peut donc écrire, en utilisant le lemme (6.11),

$$\begin{aligned}|W_2^1| &\lesssim \delta(z,E)^{-1/m-p/m-q}(J_{3-1/m}+K_{3-1/m})\\ &\lesssim \delta(z,E)^{-p/m-q}.\end{aligned}$$

Estimation de W_1^2 : Comme précédemment, il nous faut estimer

$$\begin{aligned}\left|W_1^2\right| &\lesssim \int_{\delta(z,\zeta)\leq\lambda\delta(z,E)} \left|\frac{\partial^{p+q}(\varphi\omega_2)}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^q}(\zeta)\right| \frac{|r(\zeta)|^3}{|\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|^4}\frac{|\zeta_1|^{m-2}}{|\Phi(z,\zeta)|}dV(\zeta)\\ &\lesssim \delta(z,E)^{-1-p/m-q}(J_2+K_2).\end{aligned}$$

On utilise encore le lemme (6.11) pour obtenir

$$\left|W_1^2\right| \lesssim \delta(z,E)^{-p/m-q}.$$

Estimation de W_2^2 : Il nous faut estimer

$$\left|W_2^2\right| \lesssim \int_{\delta(z,\zeta)\leq\lambda\delta(z,E)} \left|\frac{\partial^{p+q}(\varphi\omega_2)}{\partial\zeta_1^p\partial\zeta_2^q}(\zeta)\right| \frac{|r(\zeta)|^2|\zeta_1|^{m-1}}{|\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|^4}\frac{|\alpha(\zeta,z)|}{|\Phi(z,\zeta)|}dV(\zeta)$$

où $\alpha(\zeta,z)$ a été défini plus haut. On a $|\zeta_1|^{m-1} \lesssim \delta(\zeta,E)^{1-1/m} \approx \delta(z,E)^{1-1/m}$ d'après (5.2.7) et (6.15.3). On a donc

$$\left|W_2^2\right| \lesssim \delta(z,E)^{-1/m-p/m-q}\int_{\delta(z,\zeta)\leq\lambda\delta(z,E)} \frac{|\alpha(\zeta,z)|}{|\Phi(z,\zeta)|^3}dV(\zeta).$$

On s'est donc ramené à l'étude déjà faite plus haut pour W_2^1 et on obtient

$$\left|W_2^2\right| \lesssim \delta(z,E)^{-p/m-q}.$$

On a donc établi

$$|W| \lesssim \delta(z,E)^{-p/m-q}. \tag{6.18.3}$$

6.19 ESTIMATION DE Z.

On peut écrire

$$Z = Z_1^{(1)} + Z_2^{(1)} + Z_1^{(2)} + Z_2^{(2)}$$

avec, pour $i = 1,2$,

$$Z_i^{(1)} = \int_{\zeta\in\Omega} (1-\varphi(\zeta))\omega_i(\zeta) d\bar{\zeta}_i \wedge \frac{\partial^{p+q} K_{0,0}^{(1)}(\zeta,z)}{\partial z_1^p \partial z_2^q}$$

et

$$Z_i^{(2)} = \int_{\zeta\in\Omega} (1-\varphi(\zeta))\omega_i(\zeta) d\bar{\zeta}_i \wedge \frac{\partial^{p+q} K_{0,0}^{(2)}(\zeta,z)}{\partial z_1^p \partial z_2^q}.$$

Compte tenu des calculs de composantes de $K_{0,0}^{(1)}$ et $K_{0,0}^{(2)}$ menés en (6.14), on est amené à évaluer, pour les $Z_i^{(1)}$, l'expression

$$B_i^{(1)}(\zeta,z) = \frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q}\left(\frac{\Psi_i^{(1)}(\zeta,z)}{(\Phi(\zeta,z)-r(\zeta))^3\langle s,\zeta-z\rangle^2}\right),\ i=1,2$$

et, pour les $Z_i^{(2)}$, l'expression

$$B_i^{(2)}(\zeta,z) = \frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q}\left(\frac{\Psi_i^{(2)}(\zeta,z)}{(\Phi(\zeta,z)-r(\zeta))^4\langle s,\zeta-z\rangle}\right),\ i=1,2,$$

où les fonctions $\Psi_i^{(1)}$ et $\Psi_i^{(2)}$ ont été définies en (6.14). En effet, on a clairement

$$\left|Z_i^{(1)}\right| \lesssim \int_{\delta(z,\zeta)\geq\lambda\delta(z,E)} |\omega_i(\zeta)||r(\zeta)|^3 \left|B_i^{(1)}(\zeta,z)\right| dV(\zeta) \tag{6.19.1}$$

et

$$\left|Z_i^{(2)}\right| \lesssim \int_{\delta(z,\zeta)\geq\lambda\delta(z,E)} |\omega_i(\zeta)||r(\zeta)|^4 \left|B_i^{(2)}(\zeta,z)\right| dV(\zeta) \tag{6.19.2}$$

pour $i = 1,2$. On a

$$(\Phi(\zeta,z)-r(\zeta))^{z_1} = -\frac{m}{2}|\zeta_1|^{m-2}\bar{\zeta}_1, \quad (\Phi(\zeta,z)-r(\zeta))^{z_2} = -\bar{\zeta}_2$$

et il est alors clair que, pour μ entier non nul, i, j deux entiers naturels quelconques, on a

$$\left|\left(\frac{1}{(\Phi(\zeta,z)-r(\zeta))^{\mu}}\right)^{z_1^i z_2^j}\right| \lesssim \frac{|\zeta_1|^{i(m-1)}}{|\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|^{\mu+i+j}} \lesssim \frac{|z_1|^{i(m-1)}+|\Phi(z,\zeta)|^{i(1-1/m)}}{|\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|^{\mu+i+j}}.$$

On a donc, en utilisant (6.2.1),

$$\left|\left(\frac{1}{(\Phi(\zeta,z)-r(\zeta))^{\mu}}\right)^{z_1^i z_2^j}\right| = \frac{1}{|\Phi(z,\zeta)|^{\mu+i+j}}\mathcal{O}'\left(|z_1|^{i(m-1)} + |\Phi(z,\zeta)|^{i(1-1/m)}\right). \tag{6.19.3}$$

<u>Estimation de $Z_1^{(1)}$</u> : Il existe des constantes $a_{p_1,p_2,p_3}^{q_1,q_2,q_3}$ et des fonctions $C_{p_1,p_2,p_3}^{q_1,q_2,q_3}(\zeta,z)$ telles que

$$B_1^{(1)}(\zeta,z) = \sum_{\substack{p_1+p_2+p_3=p\\ q_1+q_2+q_3=q}} a_{p_1,p_2,p_3}^{q_1,q_2,q_3} C_{p_1,p_2,p_3}^{q_1,q_2,q_3}(\zeta,z)$$

avec

$$C_{p_1,p_2,p_3}^{q_1,q_2,q_3}(\zeta,z) = \left(\frac{1}{(\Phi(\zeta,z)-r(\zeta))^3}\right)^{z_1^{p_1} z_2^{q_1}} \left(\frac{1}{\langle s,\zeta-z\rangle^2}\right)^{z_1^{p_2} z_2^{q_2}} \left(\Psi_1^{(1)}(\zeta,z)\right)^{z_1^{p_3} z_2^{q_3}}. \tag{6.19.4}$$

On calcule, pour p_2, $q_2 \in \mathbb{N}^2$ tels que $p_2+q_2 \neq 0$, un développement de

$$\left(\frac{1}{\langle s,\zeta-z\rangle^2}\right)^{z_1^{p_2} z_2^{q_2}}.$$

Ce terme est égal à

$$\sum_{\substack{1\leq r+s\leq p_2+q_2\\ r\leq p_2,\, s\leq q_2}} \frac{1}{|\Phi(z,\zeta)|^{4+4r+4s}} \sum_{(a,b)\in E_{r,s}} \gamma(a,b) \prod_{u=1}^{r+s} \left(\langle s,\zeta-z\rangle^2\right)^{z_1^{a_u} z_2^{b_u}}$$

où chaque $E_{r,s}$ est un ensemble de couples (a,b) de $(r+s)$-uples $a=(a_u)_{1\leq u\leq r+s}$ et $b=(b_u)_{1\leq u\leq r+s}$ d'entiers naturels vérifiant $a_u \geq 1$ pour $1\leq u\leq r$, $b_u\geq 1$ pour $r+1\leq u\leq r+s$, $\sum_{u=1}^{r+s} a_u = p_2$, $\sum_{u=1}^{r+s} b_u = q_2$ et où chaque $\gamma(a,b)$ est un coefficient réel. On applique (6.17.2) et on obtient que, pour r,s,a,b fixés

$$\prod_{u=1}^{r+s}\left|\left(\langle s,\zeta-z\rangle^2\right)^{z_1^{a_u} z_2^{b_u}}\right| = \mathcal{O}'\left(\prod_{u=1}^{r+s}\left(|z_1|^{(4-b_u)m-a_u} + |\Phi(z,\zeta)|^{4-b_u-a_u/m}\right)\right).$$

En remarquant que

$$|z_1|^{(4(r+s)-\sum_{u=1}^{r+s} b_u)m-\sum_{u=1}^{r+s} a_u} + |\Phi(z,\zeta)|^{4(r+s)-\sum_{u=1}^{r+s} b_u-\sum_{u=1}^{r+s} a_u/m}$$

est égal à

$$|z_1|^{(4(r+s)-q_2)m-p_2}+|\Phi(z,\zeta)|^{4(r+s)-q_2-p_2/m},$$

on a montré que l'on a

$$\prod_{u=1}^{r+s}\left|(\langle s,\zeta-z\rangle^2)^{z_1^{a_u}z_2^{b_u}}\right|=\mathcal{O}'\left(|z_1|^{(4(r+s)-q_2)m-p_2}+|\Phi(z,\zeta)|^{4(r+s)-q_2-p_2/m}\right).$$

On a donc obtenu que, pour $p_2+q_2\neq 0$,

$$\left(\frac{1}{\langle s,\zeta-z\rangle^2}\right)^{z_1^{p_2}z_2^{q_2}}=\sum_{\substack{1\leq r+s\leq p_2+q_2\\ r\leq p_2,s\leq q_2}}\frac{1}{|\Phi(z,\zeta)|^{4+4r+4s}}\mathcal{O}'\Big(|z_1|^{(4(r+s)-q_2)m-p_2}$$
$$+|\Phi(z,\zeta)|^{4(r+s)-q_2-p_2/m}\Big)$$

et on a donc a fortiori,

$$\left(\frac{1}{\langle s,\zeta-z\rangle^2}\right)^{z_1^{p_2}z_2^{q_2}}=\sum_{r\leq p_2,s\leq q_2}\frac{1}{|\Phi(z,\zeta)|^{4+4r+4s}}\mathcal{O}'\Big(|z_1|^{(4(r+s)-q_2)m-p_2}\tag{6.19.5}$$
$$+|\Phi(z,\zeta)|^{4(r+s)-q_2-p_2/m}\Big),$$

cette estimation restant trivialement vraie dans le cas $p_2+q_2=0$. On regroupe alors (6.19.3) avec $\mu=3$, (6.19.4), (6.19.5) et (6.17.3) pour obtenir

$$C^{q_1,q_2,q_3}_{p_1,p_2,p_3}(\zeta,z)=\sum_{r\leq p_2,s\leq q_2}\frac{1}{|\Phi(z,\zeta)|^{7+4r+4s+p_1+q_1}}\mathcal{O}'\Big(|z_1|^{(4(r+s)+2-q_2-q_3)m-p_2-p_3-1+p_1(m-1)}$$
$$+|\Phi(z,\zeta)|^{4(r+s)+2-q_2-q_3-(p_2+p_3+1)/m+p_1(1-1/m)}\Big).$$

En reportant tout cela dans (6.19.1), on voit qu'il y a donc 3 types d'intégrales à estimer, compte tenu du fait que $|r(\zeta)|\lesssim|\Phi(z,\zeta)|$:

$$I_1=\int_{\delta(z,\zeta)\geq\lambda\delta(z,E)}|\omega_1(\zeta)|\frac{|z_1|^{(4(r+s)+2-q_2-q_3)m-p_2-p_3-1+p_1(m-1)}}{|\Phi(z,\zeta)|^{4+4r4s+p_1+q_1}}dV(\zeta)$$

et

$$I_2=\int_{\delta(z,\zeta)\geq\lambda\delta(z,E)}|\omega_1(\zeta)|\frac{1}{|\Phi(z,\zeta)|^{2+1/m+p/m+q}}dV(\zeta)$$

pour $(4(r+s)+2-q_2-q_3)m-p_2-p_3-1+p_1(m-1)\geq 0$ et

$$I_3=\int_{\delta(z,\zeta)\geq\lambda\delta(z,E)}|\omega_1(\zeta)|\frac{1}{|\Phi(z,\zeta)|^{4+4r+4s+p_1+q_1}}dV(\zeta)$$

pour $(4(r+s)+2-q_2-q_3)m-p_2-p_3-1+p_1(m-1)<0$.
Pour la première intégrale, on utilise un découpage adapté en écrivant

$$I_1=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{2^n\lambda\delta(z,E)\leq\delta(z,\zeta)\leq 2^{n+1}\lambda\delta(z,E)}|\omega_1(\zeta)|\frac{|z_1|^{(4(r+s)+2-q_2-q_3)m-p_2-p_3-1+p_1(m-1)}}{|\Phi(z,\zeta)|^{4+4r+4s+p_1+q_1}}dV(\zeta).$$

A l'intérieur de la couronne $Q_{2^{n+1}\lambda\delta(z,E)}(z)\backslash Q_{2^n\lambda\delta(z,E)}(z)$, on a, par (6.2.1), $|\Phi(z,\zeta)| \gtrsim 2^n\lambda\delta(z,E)$. De plus, on a, par (5.2.7), $|z_1| \lesssim \delta(z,E)^{1/m}$ et donc

$$|z_1| \lesssim (2^n\lambda\delta(z,E))^{1/m}$$

puisqu'il y a un nombre fini d'entiers n tels que $2^n\lambda < 1$. On peut donc écrire, puisque $p_1 + p_2 + p_3 = p$ et $q_1 + q_2 + q_3 = q$,

$$\begin{aligned} I_1 \lesssim & \sum_{n=0}^{+\infty}(2^n\lambda\delta(z,E))^{-4-4r-4s-p_1-q_1}(2^n\lambda\delta(z,E))^{4r+4s+2-q_2-q_3-(p_2+p_3+1)/m+p_1(1-1/m)} \\ & \qquad \times \int_{\delta(z,\zeta)\leq 2^{n+1}\lambda\delta(z,E)} |\omega_1(\zeta)|dV(\zeta) \\ = & \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(2^n\lambda\delta(z,E))^{-2-1/m-p/m-q}\right) \times \int_{\delta(z,\zeta)\leq 2^{n+1}\lambda\delta(z,E)} |\omega_1(\zeta)|dV(\zeta). \end{aligned}$$

On utilise alors le lemme (6.10) avec $\sigma = 1/m$ et en tenant compte encore du fait qu'il y a un nombre fini d'entiers n tels que $2^n\lambda < 1$, on obtient ainsi

$$\int_{\delta(z,\zeta)\leq 2^{n+1}\lambda\delta(z,E)} |\omega_1(\zeta)|dV(\zeta) \lesssim (2^{n+1}\lambda\delta(z,E))^{2+1/m} \lesssim (2^n\lambda\delta(z,E))^{2+1/m}$$

et donc

$$I_1 \lesssim \delta(z,E)^{-p/m-q}\sum_{n=0}^{\infty}(2^n)^{-p/m-q} \lesssim \delta(z,E)^{-p/m-q}$$

puisque la série est convergente. Pour la deuxième intégrale, à l'aide du même découpage et des mêmes remarques, on peut écrire

$$I_2 \lesssim \sum_{n=0}^{+\infty}(2^n\lambda\delta(z,E))^{-2-1/m-p/m-q}\int_{\delta(z,\zeta)\leq 2^{n+1}\lambda\delta(z,E)} |\omega_1(\zeta)|dV(\zeta)$$

et on conclut identiquement. Enfin, pour la dernière intégrale, puisque l'on a $|\Phi(z,\zeta)| \lesssim 1$ et que, dans le cas considéré, on a $-4-4r-4s-p_1-q_1 > -2-1/m-p/m-q$, on est ramené au cas précédent.

Estimation de $Z_2^{(1)}$: Il s'agit maintenant d'estimer $B_2^{(1)}(\zeta,z)$. On peut refaire exactement les mêmes calculs qu'au-dessus mais, ce coup-ci, il faut remplacer $\Psi_1^{(1)}$ par $\Psi_2^{(1)}$. On utilise alors (6.17.4) et on obtient alors 3 types d'intégrales à estimer :

$$\int_{\delta(z,\zeta)\geq\lambda\delta(z,E)} |\omega_2(\zeta)|\frac{|z_1|^{(4(r+s)+3-q_2-q_3)m-p_2-p_3-2+p_1(m-1)}}{|\Phi(z,\zeta)|^{4+4r+4s+p_1+q_1}}dV(\zeta)$$

et

$$\int_{\delta(z,\zeta)\geq\lambda\delta(z,E)} |\omega_2(\zeta)|\frac{1}{|\Phi(z,\zeta)|^{1+2/m+p/m+q}}dV(\zeta)$$

pour $(4(r+s)+3-q_2-q_3)m-p_2-p_3-2+p_1(m-1)\geq 0$,

$$\int_{\delta(z,\zeta)\geq\lambda\delta(z,E)}|\omega_2(\zeta)|\frac{1}{|\Phi(z,\zeta)|^{4+4r+4s+p_1+q_1}}dV(\zeta)$$

pour $(4(r+s)+3-q_2-q_3)m-p_2-p_3-2+p_1(m-1)<0$. On conclut alors de la même façon qu'auparavant en utilisant le lemme (6.10) avec $\sigma=1$.

Pour les deux termes restant, $Z_1^{(2)}$ et $Z_2^{(2)}$, on utilise la même méthode avec les estimées (6.17.1), (6.17.5), (6.17.6), (6.19.3) avec $\mu=4$ et l'inégalité, valable pour tout $\beta>2$,

$$\frac{|r(\zeta)|^4}{|r(\zeta)|^2|\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|^\beta}=\frac{|r(\zeta)|^2}{|\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|^\beta}\lesssim\frac{1}{|\Phi(z,\zeta)|^{\beta-2}}$$

obtenue par (6.2.1) et (6.3.1). En regroupant dans (6.19.2), on parvient à des intégrales que l'on estime comme précédemment.

En regroupant tous les résultats, on a donc obtenu

(6.19.6) $$|Z|\lesssim\delta(z,E)^{-p/m-q}.$$

6.20 ESTIMATION DE Y.

On écrit tout d'abord Y sous la forme

$$Y=\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{E_i}\nu(a,b,c,d)Y_{a,b,c,d}^{(j),i}$$

où

$$Y_{a,b,c,d}^{(j),i}=\int_{\zeta\in\Omega}\frac{\partial^{a+b}\omega\wedge\bar\partial\varphi}{\partial\zeta_1^a\partial\zeta_2^b}\wedge\frac{\partial^{c+d}K_{1,0,i}^{(j)}}{\partial z_1^c\partial z_2^d}.$$

On a $\omega\wedge\bar\partial\varphi=(\varphi^{\bar\zeta_1}\omega_2-\varphi^{\bar\zeta_2}\omega_1)d\bar\zeta_1\wedge d\bar\zeta_2$.
Il est à noter que le support de $\bar\partial\varphi$ est contenu dans la couronne $Q_{\lambda\delta(z,E)}(z)\backslash Q_{\lambda\delta(z,E)/2}(z)$.
En regroupant (5.14), (6.15.3) et (6.15.4), on obtient que, pour tout $\zeta\in(V\cap\bar\Omega)\setminus E$, on a

(6.20.1) $$\left|\frac{\partial^{a+b}}{\partial\zeta_1^a\partial\zeta_2^b}(\varphi^{\bar\zeta_1}\omega_2-\varphi^{\bar\zeta_2}\omega_1)(\zeta)\right|\lesssim\delta(z,E)^{-1-1/m-a/m-b}.$$

Pour estimer $Y_{a,b,c,d}^{(1),1}$, il nous faut majorer, en utilisant le calcul effectué en (6.14),

$$B_{1,0,1}^{(1)}(\zeta,z)=\frac{\partial^{c+d}}{\partial z_1^c\partial z_2^d}\left(\frac{\Psi_{1,0,1}^{(1)}(\zeta,z)}{(\Phi(\zeta,z)-r(\zeta))^3\langle s,\zeta-z\rangle^2}\right).$$

On voit que l'on peut copier point par point la démonstration de (6.19) avec (6.17.7), (6.19.3) et (6.19.5) jusqu'à obtenir qu'il y a 3 types d'intégrales à estimer :

$$\int_{\lambda\delta(z,E)/2\leq\delta(z,\zeta)\leq\lambda\delta(z,E)} \left|\frac{\partial^{a+b}}{\partial\zeta_1^a\partial\zeta_2^b}(\varphi^{\bar{\zeta}_1}\omega_2 - \varphi^{\bar{\zeta}_2}\omega_1)(\zeta)\right| \times \frac{|z_1|^{(4(r+s)+3-d_2-d_3)m-c_2-c_3-2+c_1(m-1)}}{|\Phi(z,\zeta)|^{4+4r+4s+c_1+d_1}} dV(\zeta)$$

et

$$\int_{\lambda\delta(z,E)/2\leq\delta(z,\zeta)\leq\lambda\delta(z,E)} \left|\frac{\partial^{a+b}}{\partial\zeta_1^a\partial\zeta_2^b}(\varphi^{\bar{\zeta}_1}\omega_2 - \varphi^{\bar{\zeta}_2}\omega_1)(\zeta)\right| \frac{1}{|\Phi(z,\zeta)|^{1+2/m+c/m+d}} dV(\zeta)$$

pour $(4(r+s)+3-d_2-d_3)m - c_2 - c_3 - 2 + c_1(m-1) \geq 0$ et

$$\int_{\lambda\delta(z,E)/2\leq\delta(z,\zeta)\leq\lambda\delta(z,E)} \left|\frac{\partial^{a+b}}{\partial\zeta_1^a\partial\zeta_2^b}(\varphi^{\bar{\zeta}_1}\omega_2 - \varphi^{\bar{\zeta}_2}\omega_1)(\zeta)\right| \frac{1}{|\Phi(z,\zeta)|^{4+4r+4s+c_1+d_1}} dV(\zeta)$$

pour $(4(r+s)+3-d_2-d_3)m - c_2 - c_3 - 2 + c_1(m-1) < 0$.
On ne va traiter que la première intégrale, la démonstration pour les autres étant similaire. Dans la couronne $Q_{\lambda\delta(z,E)}(z)\backslash Q_{\lambda\delta(z,E)/2}(z)$, on a, à l'aide de (6.2.1),

(6.20.2) $$|\Phi(z,\zeta)| \gtrsim \delta(z,E).$$

On utilise alors cette remarque, (6.20.1) et (5.2.7), pour majorer l'intégrale, compte tenu du fait que $c_1 + c_2 + c_3 = c$ et $d_1 + d_2 + d_3 = d$, par

$$\delta(z,E)^{-1-1/m-a/m-b} \times \delta(z,E)^{-1-2/m-c/m-d} \int_{\delta(z,\zeta)\leq\lambda\delta(z,E)} dV(\zeta).$$

On utilise alors le lemme (6.10) appliqué avec $\sigma = 0$ pour obtenir le majorant souhaité, puisque $a + c = p - 1$ et $b + d = q$.

On a donc obtenu l'estimation

(6.20.3) $$|Y| \lesssim \delta(z,E)^{-p/m-q}.$$

6.21 ESTIMATION DE X.

On peut écrire

$$X = \sum_{i,j=1}^{2} \sum_{E_i} \mu(a,b,c,d) X^{i,j}_{a,b,c,d}$$

où

$$X^{i,j}_{a,b,c,d}(z) = \int_{\zeta\in\Omega} \frac{\partial^{a+b}(\varphi\omega_j)}{\partial\zeta_1^a\partial\zeta_2^b}(\zeta)d\bar{\zeta}_j \wedge \frac{\partial^{c+d}P_{1,0,i}}{\partial z_1^c\partial z_2^d}(\zeta,z).$$

Estimation de $X^{1,2}_{a,b,c,d}$: A des constantes multiplicatives près, il nous faut estimer, d'après les formules de (6.14) et (6.19),

$$X^{i,j}_{a,b,c,d}(z) = \int_\Omega \frac{\partial^{a+b}(\varphi\omega_j)}{\partial\zeta_1^a\partial\zeta_2^b} \frac{\bar\zeta_2^d(|\zeta_1|^{m-2}\bar\zeta_1)^c}{(\Phi(\zeta,z)-r(\zeta))^{3+c+d}} \Psi^P_{i,j}(\zeta)dV(\zeta).$$

Pour estimer cette intégrale, on utilise, selon une idée de [BCZ], la formule de Stokes. On a alors, en remarquant que $\Psi^P_{i,j}(\zeta)^{\zeta_2} = 0$ et $(-r(\zeta)+\Phi(\zeta,z))^{\zeta_2} = 0$,

$$\begin{aligned} X^{i,j}_{a,b,c,d}(z) = & \int_{\partial\Omega} \frac{(-r(\zeta))}{\bar\zeta_2} \frac{\partial^{a+b}(\varphi\omega_j)}{\partial\zeta_1^a\partial\zeta_2^b}(\zeta) \frac{\bar\zeta_2^d(|\zeta_1|^{m-2}\bar\zeta_1)^c}{(\Phi(\zeta,z)-r(\zeta))^{3+c+d}} \Psi^P_{i,j}(\zeta)d\bar\zeta_1\wedge d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_1 \\ & - \int_\Omega \frac{(-r(\zeta))}{\bar\zeta_2} \frac{\partial^{a+b+1}(\varphi\omega_2)}{\partial\zeta_1^a\partial\zeta_2^{b+1}}(\zeta) \frac{\bar\zeta_2^d(|\zeta_1|^{m-2}\bar\zeta_1)^c}{(\Phi(\zeta,z)-r(\zeta))^{3+c+d}} \Psi^P_{i,j}(\zeta)dV(\zeta). \end{aligned}$$

La première intégrale est nulle puisque $-r(\zeta) = 0$ sur $\partial\Omega$.
On peut alors réitérer le procédé et on majore

$$\left|X^{i,j}_{a,b,c,d}(z)\right| \lesssim \int_\Omega \frac{|r(\zeta)|^{3+c+d}}{|\bar\zeta_2|^{c+d+3}} \left|\frac{\partial^{a+b+c+d+3}(\varphi\omega_j)}{\partial\zeta_1^a\partial\zeta_2^{b+c+d+3}}(\zeta)\right| \frac{\left|\bar\zeta_2^d(|\zeta_1|^{m-2}\bar\zeta_1)^c\right|}{|\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|^{3+c+d}} \left|\Psi^P_{i,j}(\zeta)\right| dV(\zeta).$$

On sépare alors les cas.
• Si $i=1$ et $j=1$, alors on obtient sans difficulté que

$$\left|\Psi^P_{1,1}(\zeta)\right| \lesssim |\zeta_1|^{m-2} \lesssim \delta(\zeta,E)^{1-2/m} \approx \delta(z,E)^{1-2/m}$$

pour des raisons de support.

On peut alors majorer $|X^{i,1}_{a,b,c,d}|$ à l'aide de (6.2.1), du lemme (6.10) appliqué avec $\sigma = 0$ et puisque $|(|\zeta_1|^{m-2}\bar\zeta_1)^c| \lesssim \delta(z,E)^{c(1-1/m)}$, par

$$\delta(z,E)^{-1/m-a/m-(b+c+d+3)} \times \delta(z,E)^{1-2/m} \times \delta(z,E)^{c(1-1/m)} \times \delta(z,E)^{2+2/m}.$$

En simplifiant, on obtient, puisque $a+c = p-1$ et $b+d = q$,

$$\left|X^{1,1}_{a,b,c,d}(\zeta,z)\right| \lesssim \delta(z,E)^{-p/m-q}.$$

• Si $i=1$ et $j=2$, alors on a

$$\left|\Psi^P_{1,2}(\zeta)\right| \lesssim |\zeta_1|^{2m-3} \lesssim \delta(\zeta,E)^{2-3/m} \approx \delta(z,E)^{2-3/m}$$

et on peut alors majorer $|X^{i,1}_{a,b,c,d}|$ par

$$\delta(z,E)^{-1-a/m-(b+c+d+3)} \times \delta(z,E)^{2-3/m} \times \delta(z,E)^{c(1-1/m)} \times \delta(z,E)^{2+2/m}$$

et on obtient, puisque $a+c = p-1$ et $b+d = q$,

$$\left|X^{1,2}_{a,b,c,d}(\zeta,z)\right| \lesssim \delta(z,E)^{-p/m-q}.$$

• Si $i = 2$ et $j = 1$, on a

$$\left|\Psi^P_{2,1}(\zeta)\right| \lesssim |\zeta_1|^{m-1} \leq |\zeta_1|^{m-2} \lesssim \delta(\zeta, E)^{1-2/m} \approx \delta(z, E)^{1-2/m}$$

et, donc, puisque $a + c = p$ et $b + d = q - 1$,

$$\left|X^{2,1}_{a,b,c,d}(\zeta, z)\right| \lesssim \delta(z, E)^{-p/m-q}.$$

• Enfin, si $i = 2$ et $j = 2$, alors on a

$$\left|\Psi^P_{2,2}(\zeta)\right| \lesssim |\zeta_1|^{m-2} \lesssim \delta(\zeta, E)^{1-2/m} \approx \delta(z, E)^{1-2/m}$$

pour des raisons de support et donc, puisque $a + c = p$ et $b + d = q - 1$,

$$\left|X^{2,2}_{a,b,c,d}(\zeta, z)\right| \lesssim \delta(z, E)^{-p/m-q}.$$

On a donc obtenu

(6.21.1) $$|X| \lesssim \delta(z, E)^{-p/m-q}.$$

On regroupe maintenant (6.18.3), (6.19.6), (6.20.3) et (6.21.1) dans (6.16.3), ce qui achève la démonstration du théorème (6.16).

On rappelle maintenant la définition du $\bar{\partial}_b$ au sens de H. Skoda [Sk].

6.22 DEFINITION.

Etant donnée une (0,1)-forme f, $\bar{\partial}$-fermée, dont les coefficients sont des mesures bornées dans Ω, nous dirons qu'une fonction $u \in L^1(\partial\Omega)$ est une solution de l'équation $\bar{\partial}_b u = f$, si pour toute forme η de degré (2,1), de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\bar{\Omega}$, $\bar{\partial}$-fermée, on a

$$\int_{\partial\Omega} u(\zeta)\eta(\zeta) = \int_\Omega f(\zeta) \wedge \eta(\zeta).$$

On va alors montrer le théorème suivant :

6.23 THEOREME.

Soit f une $(0,1)$-forme à coefficients dans $L^1(\Omega)$. On suppose que l'on a

(6.23.1) $$||(-r)^{1/m-1}\bar{\partial}r \wedge f||_{L^1(\Omega)} < \infty.$$

Alors l'intégrale

$$t(f)(z) = -\int_\Omega f(\zeta) \wedge K_{0,0}(\zeta, z)$$

existe pour presque tout $z \in \partial\Omega$ et on a $t(f) \in L^1(\partial\Omega)$.
De plus, si f est $\bar{\partial}$-fermée au sens des distributions dans Ω, alors on a $\bar{\partial}_b t(f) = f$ au sens de Skoda.

La preuve du théorème (6.23) va faire l'objet des points (6.24) à (6.28) qui suivent.

6.24 LEMME.

Pour toute (0,1)-forme f à coefficients dans $L^1(\Omega)$, la propriété (6.23.1) entraîne l'existence et l'intégrabilité de $t(f)$, avec

$$||t(f)||_{L^1(\partial\Omega)} \lesssim ||f||_{L^1(\Omega)} + ||(-r)^{1/m-1}\bar{\partial}r \wedge f||_{L^1(\Omega)}.$$

Preuve : On pose $f(\zeta) = f_1(\zeta)d\bar{\zeta}_1 + f_2(\zeta)d\bar{\zeta}_2$. En reprenant les notations de (6.14) et (6.18) avec $p = q = 0$, on voit que pour l'existence et l'intégrabilité de $t(f)$, il suffit d'établir que les intégrales V_1^1, V_1^2, V_2 données par

$$V_1^1 = \int_{z\in\partial\Omega}\int_\Omega |f_1(\zeta)| \left|\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right|^4 \frac{|r(z)^{z_1} r(\zeta)^{\zeta_2\bar{\zeta}_2}|}{|\Phi(z,\zeta)||r(\zeta)|} dV(\zeta)d\sigma(z),$$

$$V_1^2 = \int_{z\in\partial\Omega}\int_\Omega |f_2(\zeta)| \left|\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right|^4 \frac{|r(z)^{z_2} r(\zeta)^{\zeta_1\bar{\zeta}_1}|}{|\Phi(z,\zeta)||r(\zeta)|} dV(\zeta)d\sigma(z)$$

et

$$V_2 = \int_{z\in\partial\Omega}\int_\Omega |f_2(\zeta)r(\zeta)^{\bar{\zeta}_1} - f_1(\zeta)r(\zeta)^{\bar{\zeta}_2}| \left|\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right|^4 \times \frac{|s_2(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_1} - s_1(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_2}|}{|\Phi(z,\zeta)|^2|r(\zeta)|^2} dV(\zeta)d\sigma(z)$$

sont toutes finies. De plus, on aura alors

$$||t(f)||_{L^1(\partial\Omega)} \lesssim V_1^1 + V_1^2 + V_2. \tag{6.24.1}$$

Estimation de V_1^1 : Par simple utilisation de Fubini, on a, à l'aide de (6.2.1),

$$\left|V_1^1\right| \lesssim \int_\Omega |f_1(\zeta)||r(\zeta)|^3 \int_{z\in\partial\Omega} \frac{|z_1|^{m-1}d\sigma(z)}{|\Phi(z,\zeta)|^5} dV(\zeta).$$

En écrivant $|z_1|^{m-1} \leq |z_1|^{m-2} \leq |\zeta_1|^{m-2} + |z_1-\zeta_1|^{m-2}$, on obtient, d'après le lemme (6.12),

$$|V_1^1| \lesssim \int_\Omega |f_1(\zeta)||r(\zeta)|^3 (L_5 + M_5) dV(\zeta) \lesssim ||f_1||_{L^1(\Omega)}.$$

Estimation de V_1^2 : Comme précédemment, on a, à l'aide de (6.2.1),

$$\begin{aligned}|V_1^2| &\lesssim \int_\Omega |f_2(\zeta)||r(\zeta)|^3 \int_{z\in\partial\Omega} \frac{|\zeta_1|^{m-2}d\sigma(z)}{|\Phi(z,\zeta)|^5} dV(\zeta)\\ &\lesssim ||f_2||_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Estimation de V_2 : Par Fubini, on a

$$|V_2| \lesssim \int_{\zeta\in\Omega} |f_2(\zeta)r(\zeta)^{\bar\zeta_1} - f_1(\zeta)r(\zeta)^{\bar\zeta_2}||r(\zeta)|^2$$
$$\times \int_{z\in\partial\Omega} \frac{|s_2(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_1} - s_1(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_2}|}{|\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|^4|\Phi(z,\zeta)|^2} d\sigma(z)dV(\zeta).$$

A l'aide de (6.2.1) et de l'inégalité (6.18.1) sur $\alpha(\zeta,z)$, on en tire

$$|V_2| \lesssim \int_{\zeta\in\Omega} |(\bar\partial r\wedge f)(\zeta)||r(\zeta)|^2 \int_{z\in\partial\Omega}\left(\frac{|\zeta_1-z_1|^{m-2}}{|\Phi(z,\zeta)|^{5-1/m}} + \frac{|z_1|^{m-2}}{|\Phi(z,\zeta)|^{5-1/m}}\right) d\sigma(z)dV(\zeta).$$

On utilise encore l'inégalité $|z_1|^{m-2} \leq |\zeta_1 - z_1|^{m-2} + |\zeta_1|^{m-2}$ et le lemme (6.12) pour obtenir que

$$\begin{aligned}|V_2| &\lesssim \int_\Omega |(\bar\partial r\wedge f)(\zeta)||r(\zeta)|^2(L_{5-1/m} + M_{5-1/m})dV(\zeta)\\ &\lesssim ||(-r)^{1/m-1}\bar\partial r\wedge f||_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Compte tenu de (6.24.1), le lemme est donc démontré.

6.25 REGULARISATION.

On reprend ici des arguments déjà développés dans [Sk]. Considérons χ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\int_\Omega \chi(\zeta)dV(\zeta) = 1$ et telle que χ soit à support dans la boule de rayon 1/2. On pose

$$\chi_\varepsilon(\zeta) = \varepsilon^{-4}\chi(\zeta/\varepsilon).$$

Pour μ une mesure (resp. f une 1-forme) dans Ω, on appellera $\tilde\mu$ (resp. $\tilde f$) le prolongement de μ (resp. f) par 0 en dehors de Ω. On considère les formes régularisées f_ε :

$$f_\varepsilon = \tilde f * \chi_\varepsilon.$$

On considère également l'ellipsoïde complexe Ω_ε défini par la fonction définissante $r_\varepsilon = r+\varepsilon$. Tout ce qui a été fait précédemment avec l'ellipsoïde Ω peut être refait avec l'ellipsoïde Ω_ε, avec des constantes uniformes en ε dans toutes les estimations. On définit alors, comme en (6.7), une fonction $T_\varepsilon(f_\varepsilon)$ sur Ω_ε, puis, comme en (6.23), la fonction $t_\varepsilon(f_\varepsilon)$ sur $\partial\Omega_\varepsilon$. D'après le lemme (6.24), on obtient

$$||t_\varepsilon(f_\varepsilon)||_{L^1(\partial\Omega_\varepsilon)} \lesssim ||f_\varepsilon||_{L^1(\Omega_\varepsilon)} + ||(-r_\varepsilon)^{1/m-1}\bar\partial r\wedge f_\varepsilon||_{L^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Par simple utilisation de Fubini, on a aussi

$$||f_\varepsilon||_{L^1(\Omega_\varepsilon)} \leq ||f||_{L^1(\Omega)}.$$

On a besoin maintenant, pour finir la démonstration, de 2 lemmes dont la démonstration est identique à celle des lemmes (8.2) et (8.3) de [Sk].

6.26 LEMME.

Soit μ une mesure sur Ω telle que

$$\int_\Omega |r|^{1/m-1} d|\mu| < +\infty.$$

Il existe une constante $C(\Omega)$, indépendante de ε et de μ, telle que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |r_\varepsilon|^{1/m-1} |\tilde{\mu} * \chi_\varepsilon| d\lambda \leq C(\Omega) \int_\Omega |r|^{1/m-1} d|\mu|.$$

6.27 LEMME.

Il existe une constante $C(\Omega)$, indépendante de ε et de f, telle que

$$\left|\left| |r_\varepsilon|^{1/m-1} \left[(\bar{\partial} r \wedge \tilde{f}) * \chi_\varepsilon - \bar{\partial} r \wedge (\tilde{f} * \chi_\varepsilon) \right] \right|\right|_{L^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C(\Omega) \varepsilon^{1/m} ||f||_{L^1(\Omega)}.$$

6.28 FIN DE LA PREUVE DU THEOREME (6.23).

On obtient, en combinant (6.24), (6.26) et (6.27) que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$||(-r_\varepsilon)^{1/m-1} \bar{\partial} r \wedge f_\varepsilon||_{L^1(\Omega_\varepsilon)} \lesssim ||f||_{L^1(\Omega)} + ||(-r)^{1/m-1} \bar{\partial} r \wedge f||_{L^1(\Omega)}.$$

On en déduit donc que

$$||t_\varepsilon(f_\varepsilon)||_{L^1(\partial\Omega_\varepsilon)} \lesssim ||f||_{L^1(\Omega)} + ||(-r)^{1/m-1} \bar{\partial} r \wedge f||_{L^1(\Omega)}.$$

On conclut alors comme dans [Sk]. La suite f_ε est une suite de formes $\mathcal{C}^\infty$ satisfaisant uniformément aux hypothèses du théorème (6.23). De plus, par simple application de Stokes et du théorème (6.7), on a, pour toute forme η de degré (2,1), de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\bar{\Omega}_\varepsilon$, $\bar{\partial}$-fermée

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} t_\varepsilon(f_\varepsilon)(\zeta) \eta(\zeta) = \int_{\Omega_\varepsilon} f(\zeta) \wedge \eta(\zeta).$$

On peut alors passer à la limite, faire tendre ε vers 0 et on a le résultat.

6.29 NOTATION.

On pose $u(z) = t(\omega)(z)$ pour $z \in \partial\Omega$. D'après le lemme (6.13) et le théorème (6.23), on a $u \in L^1(\partial\Omega)$ et

$$\bar{\partial}_b u = \omega.$$

Au cours de la preuve de (6.15), on a également établi $U = T(\omega') + S$ avec $T(\omega') \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$, $S \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega} \backslash E)$ et $S(z) = -\int_\Omega \omega''(\zeta) \wedge K_{0,0}(\zeta, z)$ pour $z \in \partial\Omega \backslash E$. En rappelant que $\omega' + \omega'' = \omega$, on voit donc clairement que

$$U|_{\partial\Omega\backslash E} = t(\omega) = u.$$

§7. INTERPOLATION.

7.1 NOTATION.

Pour $f \in L^\infty(\partial\Omega)$ et $z \in \Omega$, on pose

$$BM(f)(z) = \int_{\partial\Omega} K_{BM}(\zeta, z) f(\zeta),$$

où K_{BM} désigne le noyau de Bochner-Martinelli :

$$K_{BM}(\zeta, z) = \frac{1}{4\pi^2|\zeta - z|^2}\left((\bar\zeta_1 - \bar z_1)d\bar\zeta_2 - (\bar\zeta_2 - \bar z_2)d\bar\zeta_1\right) \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2.$$

La fonction $BM(f)$ ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω. Les lemmes qui suivent permettent de préciser son comportement à la frontière.

7.2 LEMME.

Soient r un entier avec $1 \le r \le \infty$, f une fonction de $\mathcal{C}^r(\partial\Omega)$ et soit $\hat f$ une fonction de $\mathcal{C}^r(\mathbb{C}^2)$ telle que $\hat f_{|\partial\Omega} = f$. Alors, pour $i = 1, 2$, on a

$$\frac{\partial}{\partial z_i} BM(f) = BM\left(\left.\frac{\partial \hat f}{\partial \zeta_i}\right|_{\partial\Omega}\right) \quad \textit{dans } \Omega.$$

Preuve : C'est simplement la formule de Stokes [R2], p.165.

7.3 LEMME.

Pour tout réel α avec $0 < \alpha < 1$, on a

$$BM\left(\mathcal{C}^{0,\alpha}(\partial\Omega)\right) \subset \mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar\Omega).$$

Preuve : Soit f une fonction de $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$. On étend f en une fonction $\hat f$ de $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar W)$, où W est un voisinage de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{C}^2$ (par exemple, on peut prendre $\hat f = f \circ \pi$, où $\pi : W \to \partial\Omega$ est la projection naturelle).
Pour $z \in W \cap \Omega$, on a

$$\frac{\partial}{\partial z_i} BM(f)(z) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial K_{BM}}{\partial z_i}(\zeta, z) f(\zeta)$$

et

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial K_{BM}}{\partial z_i}(\zeta, z) = \frac{\partial}{\partial z_i} BM(1)(z) = 0$$

car $BM(1) = 1$. Ainsi, on a

$$\frac{\partial}{\partial z_i} BM(f)(z) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial K_{BM}}{\partial z_i}(\zeta, z)(f(\zeta) - \hat f(z)),$$

avec

$$\left|\frac{\partial K_{BM}}{\partial z_i}(\zeta, z)\right| \lesssim |\zeta - z|^{-4}$$

et

$$\left|f(\zeta) - \hat{f}(z)\right| \lesssim |\zeta - z|^{\alpha}.$$

On en tire, en notant σ la mesure de surface,

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_i} BM(f)(z)\right| \lesssim \int_{\partial\Omega} \frac{d\sigma(\zeta)}{|\zeta - z|^{4-\alpha}} \text{ pour } z \in W \cap \Omega.$$

$\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_i} BM(f)(z)$ s'évalue similairement. En définitive, on obtient

$$|\nabla BM(f)(z)| \lesssim \int_{\partial\Omega} \frac{d\sigma(\zeta)}{|\zeta - z|^{4-\alpha}} \text{ pour } z \in W \cap \Omega. \tag{7.3.1}$$

Il reste à évaluer l'intégrale figurant au second membre. Pour cela, on considère une boule euclidienne B_ε centrée en z, de rayon ε assez petit pour que l'on ait $\overline{B_\varepsilon} \subset \Omega$, et on applique la formule de Stokes sur $\Omega \backslash \overline{B_\varepsilon}$: il vient

$$\int_{\partial\Omega} \frac{d\sigma(\zeta)}{|\zeta - z|^{4-\alpha}} = \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{d\sigma(\zeta)}{|\zeta - z|^{4-\alpha}} + \mathcal{O}\left(\int_{\Omega \backslash \overline{B_\varepsilon}} \frac{d\sigma(\zeta)}{|\zeta - z|^{5-\alpha}}\right).$$

Or on a

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{d\sigma(\zeta)}{|\zeta - z|^{4-\alpha}} = \frac{1}{\varepsilon^{4-\alpha}} \sigma(\partial B_\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1}) \tag{7.3.2}$$

et

$$\int_{\Omega \backslash \overline{B_\varepsilon}} \frac{d\sigma(\zeta)}{|\zeta - z|^{5-\alpha}} \leq \int_{B \backslash \overline{B_\varepsilon}} \frac{d\sigma(\zeta)}{|\zeta - z|^{5-\alpha}}$$

où B est la boule de centre z et de rayon R fixé de telle sorte que l'on ait $\Omega \subset B(\xi, R)$ pour tout $\xi \in \Omega$. Ainsi

$$\int_{\Omega \backslash \overline{B_\varepsilon}} \frac{d\sigma(\zeta)}{|\zeta - z|^{5-\alpha}} \lesssim \int_\varepsilon^R \frac{r^3 dr}{r^{5-\alpha}} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\alpha-1}). \tag{7.3.3}$$

En prenant $\varepsilon = d(z, \partial\Omega)/2$ et en regroupant (7.3.2) et (7.3.3) dans (7.3.1), on a donc obtenu

$$|\nabla BM(f)(z)| \lesssim \frac{1}{d(z, \partial\Omega)^{1-\alpha}} \text{ pour tout } z \text{ de } W \cap \Omega. \tag{7.3.4}$$

Il est alors classique que l'estimation (7.3.4) implique $BM(f) \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

7.4 LEMME [HC].

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$, vérifiant $\bar{\partial}_b f = 0$ au sens de Skoda. Alors $BM(f)$ appartient à $\mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ et on a $BM(f)|_{\partial\Omega} = f$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et prouver le théorème d'interpolation qui résout le problème posé en (5.9) et qui a motivé tout le travail des chapitres 4, 5, 6 et 7.

7.5 THEOREME.

Soient m un entier pair, $m \geq 4$, k un entier naturel et α un réel dans $[0,1]$ tel que $m\alpha \notin \mathbb{N}$. On considère Ω l'ellipsoïde $\{z \in \mathbb{C}^2 \ ; \ |z_1|^m + |z_2|^2 < 1\}$ et z^0 un point de type m sur $\partial\Omega$. Il existe un voisinage V de z^0 satisfaisant la propriété suivante :

Soit E un sous-ensemble compact de $V \cap \partial\Omega$. On suppose que

(i) tous les points de E sont de type m,

(ii) il existe une constante $C_E > 0$ telle que, pour tout $R \in]0,1[$ et toute pseudoboule Q_R centrée sur $\bar{\Omega} \cap V$, on ait

$$(*) \qquad \int_0^R N_\varepsilon(Q_R \cap E)d\varepsilon \leq C_E R.$$

Alors, pour tout jet F de $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(E)$, $\bar{\partial}$-plat, il existe une fonction $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ vérifiant, pour tous entiers p, q tels que $p/m + q < k + \alpha$ et tout point z' de E,

$$(7.5.1) \qquad \left(X^p_{z',1} X^q_{z',2} \mathcal{F}\right)(z') = F_{pq}(z').$$

7.6 COMMENTAIRES.

(i) Les hypothèses sur le compact s'interprètent de la façon suivante : (7.5.i) signifie que E est contenu dans le cercle $\mathcal{C} = \{(0, z_2) \ ; \ |z_2| = 1\}$. De là, on peut montrer que (7.5.ii) peut se reformuler en termes d'arcs de cercle : pour tout arc I_R de longueur R contenu dans $\mathcal{C}$, on a

$$\int_0^R N_\varepsilon(E \cap I_R)d\varepsilon \leq C_E R.$$

(ii) Le théorème (7.5) étend le théorème (5.9) de [BO], valable dans la boule, au cas de compacts situés sur le bord des ellipsoïdes.

7.7 DEBUT DE LA PREUVE.

La preuve va se découper en 4 étapes. La première consistera à montrer que la fonction $h^r u$ où u a été définie en (6.29) est un élément de $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\partial\Omega)$. La deuxième aura pour but de montrer que l'intégrale de Bochner-Martinelli de la restriction de $g - h^r U$ à $\partial\Omega$ est un élément de $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. Après un lemme, on montrera, dans la troisième étape, que la fonction holomorphe $g - h^r U$ est donnée, dans Ω, par l'intégrale de Bochner-Martinelli de sa restriction au bord. Elle sera donc, compte tenu de la deuxième étape, un élément de

$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. Dans la quatrième et dernière étape, il ne restera plus qu'à montrer que $g - h^r U$ réalise bien l'interpolation.

1ère étape : On voit, en regroupant (5.7.2) et (6.16.1) et en utilisant la formule de Leibniz, que l'on a, pour tous biindices P, Q,

$$\left|\partial_z^{PQ}(h^r u)(z)\right| = \mathcal{O}\left(\delta(z,E)^{k+\alpha-(p/m+q)}\right) \text{ pour tout } z \text{ de } \partial\Omega\backslash E. \tag{7.7.1}$$

En particulier, pour tous biindices P, Q tels que $p/m + q < k + \alpha$,

(7.7.2) la fonction $\partial_z^{PQ}(h^r u)$ se prolonge continûment par la fonction nulle sur E.

On applique alors (7.7.1) pour P, Q tels que $p+q = k+1$. On a alors, pour tout $z \in \partial\Omega\backslash E$,

$$\begin{aligned}\left|\partial_z^{PQ}(h^r u)(z)\right| &= \mathcal{O}\left(\delta(z,E)^{k+\alpha-(p/m+k+1-p)}\right) = \mathcal{O}\left(\delta(z,E)^{\alpha-1+p(1-1/m)}\right) \\ &\lesssim \delta(z,E)^{\alpha-1}.\end{aligned} \tag{7.7.3}$$

Soient z', z'' deux points de $\partial\Omega$. Pour obtenir le résultat recherché dans cette étape, il nous faut montrer que, pour tous biindices P, Q tels que $p + q = k$, on a

$$\left|\partial_z^{PQ}(h^r u)(z') - \partial_z^{PQ}(h^r u)(z'')\right| \lesssim |z' - z''|^\alpha. \tag{7.7.4}$$

• Cas où l'on a $|z' - z''| \geq c\delta(z', E)$ et $|z' - z''| \geq c\delta(z'', E)$ où c est une constante positive choisie.

(7.7.4) découle directement de (7.7.1), puisque l'on a alors, pour $z' \in \partial\Omega\backslash E$

$$\begin{aligned}\left|\partial_z^{PQ}(h^r u)(z')\right| &= \mathcal{O}\left(\delta(z',E)^{k+\alpha-(p/m+k-p)}\right) = \mathcal{O}\left(\delta(z',E)^{\alpha+p(1-1/m)}\right) \lesssim \delta(z',E)^\alpha \\ &\lesssim |z' - z''|^\alpha\end{aligned}$$

et, similairement, pour $z'' \in \partial\Omega\backslash E$

$$\left|\partial_z^{PQ}(h^r u)(z'')\right| \lesssim |z' - z''|^\alpha.$$

Ces deux dernières estimées restent valables pour $z' \in E$ ou $z'' \in E$ d'après (7.7.2) et puisque $p/m + q < p + q = k < k + \alpha$.

• Cas où l'on a $|z' - z''| \leq c\delta(z', E)$.

On peut appliquer le théorème de la valeur moyenne à une courbe dans $\partial\Omega$ joignant z' à z'', de longueur comparable à $|z' - z''|$ et incluse dans la boule euclidienne $B(z', c\delta(z', E))$. On choisit alors c suffisamment petit de telle sorte que $B(z', c\delta(z', E)) \subset Q_{\lambda\delta(z',E)}(z')$ où λ a été défini en (6.15). On a alors, pour tout point z de cette courbe,

$$\delta(z,E) \approx \delta(z',E)$$

et on obtient alors, en utilisant (7.7.3), que

$$\left|\partial_z^{PQ}(h^r u)(z') - \partial_z^{PQ}(h^r u)(z'')\right| \lesssim |z' - z''|\delta(z',E)^{\alpha-1} \lesssim |z' - z''|^\alpha.$$

• Cas où l'on a $|z' - z''| \leq c\delta(z'', E)$.

La démonstration de (7.7.4) est identique à celle du cas précédent.
En regroupant tous les cas étudiés, on conclut que

$$h^r u \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\partial\Omega).$$

2ème étape : Puisque $g \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega} \cap U)$, on peut affirmer, d'après la remarque (4.2), que g est un élément de $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ et donc, on a montré que

$$f = (g - h^r U)_{|\partial\Omega} \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\partial\Omega). \tag{7.7.5}$$

Puisque $\bar{\partial}_b u = \omega$ d'après (6.29), on a, pour toute forme $\eta \in \mathcal{C}^1_{(0,1)}(\bar{\Omega})$ telle que $\bar{\partial}\eta = 0$,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} f\eta \ &= \int_{\partial\Omega} g\eta - \int_{\partial\Omega} uh^r\eta = \int_{\partial\Omega} g\eta - \int_{\Omega} h^r\omega \wedge \eta \\ &= \int_{\partial\Omega} g\eta - \int_{\Omega} \bar{\partial}g \wedge \eta = 0\end{aligned}$$

où l'on a utilisé, pour la dernière égalité, le théorème de Stokes sur l'ellipsoïde Ω_ε avant de faire tendre ε vers 0. On a donc

$$\bar{\partial}_b f = 0 \text{ au sens de Skoda.} \tag{7.7.6}$$

On applique alors le lemme (7.4) à f compte tenu de (7.7.5) et (7.7.6). Soit $\mathcal{F} = BM(f)$ la fonction holomorphe ainsi produite. Une application répétée du lemme (7.2) montre que les dérivées d'ordre k de $\mathcal{F}$ dans Ω sont données, compte tenu de (7.7.5), par l'action de BM sur des fonctions de $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\partial\Omega)$. Elles appartiennent donc à $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ d'après le lemme (7.3). On a ainsi établi

$$\mathcal{F} \in \mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega}). \tag{7.7.7}$$

7.8 PROPOSITION.

La fonction $\mathcal{F}$ définie en (7.7) vérifie

$$\mathcal{F} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega} \backslash E).$$

Preuve : Compte tenu de l'holomorphie de $\mathcal{F}$, il suffit d'établir que les dérivées holomorphes de $\mathcal{F}$ (qui sont parfaitement définies dans Ω) appartiennent à $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega} \backslash E)$. Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ un couple d'indices, z' un point de $\bar{\Omega} \backslash E$ et soit χ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{C}^2$, valant 1 au voisinage de z' et 0 au voisinage de E.
On a $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ avec

$$\mathcal{F}_1 = BM(\chi f) \text{ et } \mathcal{F}_2 = BM((1-\chi)f).$$

Par des considérations de support, $\mathcal{F}_2$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de z' ; en particulier, $\dfrac{\partial^{i+j}\mathcal{F}_2}{\partial z_1^i \partial z_2^j}$ est continue au voisinage de z' dans $\bar{\Omega}$.
Par ailleurs, la fonction χf appartient à $\mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$; on peut écrire

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial z_1^i \partial z_2^j} BM(\chi f) = BM\left(\frac{\partial^{i+j}}{\partial \zeta_1^i \partial \zeta_2^j} \widehat{\chi f}\bigg|_{\partial\Omega}\right) \text{ dans } \Omega,$$

en vertu du lemme (7.2). On a aussi

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial \zeta_1^i \partial \zeta_2^j} \widehat{\chi f} \in \bigcap_{0<\beta<1} \mathcal{C}^{0,\beta}(\partial\Omega) \ ;$$

on a donc

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial z_1^i \partial z_2^j} BM(\chi f) \in \bigcap_{0<\beta<1} \mathcal{C}^{0,\beta}(\bar{\Omega})$$

d'après le lemme (7.3). En particulier, on a

$$\frac{\partial^{i+j}\mathcal{F}_1}{\partial z_1^i \partial z_2^j} \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}).$$

Le point z' étant quelconque dans $\bar{\Omega}\backslash E$, les considérations sur $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ montrent clairement que l'on a bien

$$\frac{\partial^{i+j}\mathcal{F}}{\partial z_1^i \partial z_2^j} \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}\backslash E),$$

d'où la proposition.

7.9 FIN DE LA PREUVE.

3ème étape : Il est clair que la fonction g donnée en (4.10.6) est dans $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}\backslash E)$, ainsi que h d'après la remarque (5.8), et U d'après (6.15). A l'aide de la proposition (7.8), $\mathcal{F}$ et $g - h^r U$ sont donc deux fonctions de $\mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}\backslash E)$ qui coïncident sur $\partial\Omega\backslash E$; ceci entraîne clairement

$$\mathcal{F} = g - h^r U. \tag{7.9.1}$$

4ème étape : Il ne reste plus maintenant qu'à établir (7.5.1). Soit d'abord z'' un point de $\mathcal{C}\backslash E$. Puisque $\mathcal{F}$, g et $h^r U$ sont dans $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}\backslash E)$, (7.9.1) entraîne, pour p, q entiers tels que $p/m + q < k + \alpha$,

$$\left(X^p_{z'',1} X^q_{z'',2}\mathcal{F}\right)(z'') = \left(X^p_{z'',1} X^q_{z'',2} g\right)(z'') - \left(X^p_{z'',1} X^q_{z'',2} h^r U\right)(z''). \tag{7.9.2}$$

On utilise alors les formules (1.3) pour obtenir que, pour p, q entiers, $z \in \Omega$,

$$\left(X^p_{z'',1} X^q_{z'',2} h^r U\right)(z) = \sum_{\substack{0\le j\le p \\ 0\le i\le p-j}} \sum_{a\in E_{p,q,i,j}} \nu(a) d_0(z'')^{q+j} \prod_{s=1}^{j} \left(\frac{\partial^{a_s}}{\partial z_1^{a_s}} T_{z''}(z_1)\right) \left(\frac{\partial^{i+q+j} h^r U}{\partial z_1^i \partial z_2^{q+j}}\right)(z)$$

où $E_{p,q,i,j}$ est un ensemble de familles d'indices (a_s) vérifiant $\sum_{s=1}^{j} a_s = p-j-i$ et où chaque $\nu(a)$ est un réel.
On fait tendre dans cette formule z vers z'' et on voit que les seuls termes qui n'annulent pas

$$\prod_{s=1}^{j}\left(\frac{\partial^{a_s}}{\partial z_1^{a_s}}T_{z''}(z_1)\right)$$

sont ceux qui correspondent à $a_s = m-1$ pour tout s tel que $1 \leq s \leq j$. On a alors $(m-1)j = p-j-i$, ce qui signifie que $i/m+j+q = p/m+q$ et donc que

$$(7.9.3) \qquad \left(X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}h^rU\right)(z'') = \sum_{\substack{0\leq j\leq p \\ 0\leq i\leq p-j \\ i/m+j+q=p/m+q}} \sum_{a\in E_{p,q,i,j}} \nu(a)\left(\frac{\partial^{i+q+j}h^rU}{\partial z_1^i \partial z_2^{q+j}}\right)(z'').$$

Observons maintenant que $\mathcal{C}\backslash E$ est dense dans $\mathcal{C}$ (dans le cas contraire, E contiendrait un intervalle et on aurait $N_\varepsilon(E) \gtrsim 1/\varepsilon$, en contradiction avec $(*)$).

Soit $z' \in E$. On peut donc faire tendre z'' vers z' dans (7.9.2). Les propriétés de continuité des "dérivées supplémentaires" en restriction à $\mathcal{C}$ entraînent que, d'après (3.7),

$$\left(X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}\mathcal{F}\right)(z'') \underset{z''\to z'}{\longrightarrow} \left(X^p_{z',1}X^q_{z',2}\mathcal{F}\right)(z'),$$

et, d'après les théorèmes (4.5) et (4.15),

$$\left(X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}g\right)(z'') \underset{z''\to z'}{\longrightarrow} \left(X^p_{z',1}X^q_{z',2}g\right)(z') = F_{pq}(z').$$

En faisant tendre z'' vers z' dans le second membre de (7.9.3), on obtient à l'aide de (7.7.2) et puisque $i/m+j+q < k+\alpha$,

$$\left(X^p_{z'',1}X^q_{z'',2}h^rU\right)(z'') \underset{z''\to z'}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci achève la démonstration de (7.5.1) et du théorème (7.5).

7.10 PROPOSITION.

Soit E un sous-ensemble compact de $V \cap \partial\Omega$ dont tous les points sont de type m. Si E est un ensemble d'interpolation pour $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar\Omega)$, en ce sens qu'il satisfait les conclusions du théorème (7.5), alors E vérifie la condition $(*)$.

Preuve : On identifie tout d'abord E avec $\{0\}\times E'$ où E' est un compact de $\partial\mathbb{D}$, où $\mathbb{D}$ est le disque unité dans $\mathbb{C}$. On va montrer que E' est un ensemble d'interpolation pour $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\mathbb{D}})$. En suivant [Dy] et la caractérisation de tels domaines, la propriété d'interpolation entraîne la condition (K) "uniform hole condition", et par ailleurs, la condition "uniform hole condition" entraîne $(*)$ d'après le lemme 4.1 de [BO].
On écrira toujours, dans la suite, pour z', z points de E, $z'=(0,z_2')$ et $z=(0,z_2)$ avec z_2' et z_2 points de E'.

z_2' et z_2 points de E'.
On commence par prendre un jet $\bar{\partial}$-plat de classe $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ sur E', c'est-à-dire une famille $F = (F_Q)_{q \leq k}$ d'applications continues sur E' telles qu'il existe, pour tout Q tel que $q \leq k$, une constante C_Q telle que l'on ait, pour tous z_2', z_2 de E',

$$\left|F_Q(z_2) - \partial_{z_2}^Q P^{z_2'} F(z_2)\right| \leq C_Q |z_2' - z_2|^{k+\alpha-q} \tag{7.10.1}$$

avec

$$P^{z_2'} F(z_2) = \sum_{j \leq k} \frac{1}{j!} F_j(z_2')(z_2 - z_2')^j.$$

Le jet définit un jet $\tilde{F} = (\tilde{F}_{PQ})_{p/m+q \leq k+\alpha}$ sur E, en posant, pour $z \in E$,

$$\tilde{F}_{PQ}(0, z_2) = 0 \text{ si } P \neq 0 \text{ et } \tilde{F}_{PQ}(0, z_2) = F_Q(z_2) \text{ si } P = 0.$$

Puisque ce jet ne dépend pas de la variable z_1, la condition (4.6.1) est automatiquement vérifiée à l'aide de (7.10.1). Il suffit de remarquer que, pour z', z dans E, on a $|z_2' - z_2| \approx \delta(z', z)$ et $(X_z^{PQ} P_{NI}^{z'} \tilde{F})(z) = \partial_{z_2}^Q P^{z_2'} F(z_2)$ par construction.
Le jet $\tilde{F}$ est $\bar{\partial}$-plat et appartient donc à $\mathcal{C}_{NI}^{k,\alpha}(E)$. On peut donc l'interpoler, par hypothèse, dans l'ellipsoïde. On obtient ainsi une fonction $\tilde{\mathcal{F}}$ dans $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ qui réalise l'interpolation de $\tilde{F}$.
Il suffit alors de considérer la fonction $\mathcal{F}(z_2) = \tilde{\mathcal{F}}(0, z_2)$. Cette fonction interpole F dans le disque et appartient à $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\mathbb{D}})$.
Ceci achève la preuve.

ANNEXE 1

PREUVE DES ESTIMATIONS (2.1.1) A (2.1.7)

PREUVE DE (2.1.1) :

$$\begin{aligned}\beta^\lambda \mathcal{W}(\beta,\gamma) &= \beta^\lambda + \int_0^1 \frac{\beta^\lambda}{(s+\beta)^{1+\gamma-k-\alpha}} ds \\ &\leq 1 + \int_0^1 \frac{(s+\beta)^\lambda}{(s+\beta)^{1+\gamma-k-\alpha}}\, ds \\ &\leq \mathcal{W}(\beta,\gamma-\lambda).\end{aligned}$$

PREUVE DE (2.1.2) – (2.1.3) :

Par un calcul direct, on a

$$\mathcal{W}(\beta,\gamma) = 1 + \frac{1}{\gamma-k-\alpha}(\beta^{k+\alpha-\gamma} - (1+\beta)^{k+\alpha-\gamma})$$

pour $\gamma \neq k+\alpha$. Dans le cas $\gamma \geq k+\alpha+\varepsilon$, on a

$$\frac{1}{\gamma-k-\alpha}(\beta^{k+\alpha-\gamma} - (1+\beta)^{k+\alpha-\gamma}) \leq \frac{\beta^{k+\alpha-\gamma}}{\gamma-k-\alpha} \leq \frac{1}{\varepsilon}\beta^{k+\alpha-\gamma}$$

et $\beta^{k+\alpha-\gamma} - (1+\beta)^{k+\alpha-\gamma} \geq \beta^{k+\alpha-\gamma} - (2\beta)^{k+\alpha-\gamma} \geq (1-2^{k+\alpha-\gamma})\beta^{k+\alpha-\gamma}$, d'où l'on déduit (2.1.3). On fait un calcul analogue dans le cas $\gamma \leq k+\alpha-\varepsilon$.

PREUVE DE (2.1.4) :

Immédiate.

PREUVE DE (2.1.5) :

Dans les hypothèses faites, on a sans difficulté

$$\frac{1}{K_\gamma}(s+\beta)^{1+\gamma-k-\alpha} \leq (s+\beta')^{1+\gamma-k-\alpha} \leq K_\gamma(s+\beta)^{1+\gamma-k-\alpha}$$

pour $0 \leq s \leq 1$, $0 < \beta < 1$, d'où le résultat.

PREUVE DE (2.1.6) :

On a

$$\int_0^1 \frac{ds}{(s+\beta)^{1+\gamma-k-\alpha}} = \int_0^1 \frac{(s+\beta)^{\gamma'-\gamma}}{(s+\beta)^{1+\gamma'-k-\alpha}} ds$$

avec $(s+\beta)^{\gamma'-\gamma} \leq 2^{\gamma'-\gamma}$, d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\beta,\gamma) &\leq 1 + 2^{\gamma'-\gamma}\int_0^1 \frac{ds}{(s+\beta)^{1+\gamma'-k-\alpha}} \\ &\leq 2^{\gamma'-\gamma}\mathcal{W}(\beta,\gamma').\end{aligned}$$

PREUVE DE (2.1.7) :

On a

$$\mathcal{W}\left(\beta,\gamma+\frac{K}{|\mathrm{Log}\ \beta|}\right) = 1 + \int_0^1 \frac{(s+\beta)^{-K/|\mathrm{Log}\ \beta|}}{(s+\beta)^{1+\gamma-k-\alpha}}ds$$

avec $(s+\beta)^{-K/|\mathrm{Log}\ \beta|} \leq \beta^{-K/|\mathrm{Log}\ \beta|} = e^K$ d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{W}\left(\beta,\gamma+\frac{K}{|\mathrm{Log}\ \beta|}\right) &\leq 1 + e^K\int_0^1 \frac{ds}{(s+\beta)^{1+\gamma-k-\alpha}} \\ &\leq e^K\mathcal{W}(\beta,\gamma).\end{aligned}$$

ANNEXE 2

Pour $z \in \partial\Omega$, on considère la transformation

$$F_z \ : \quad \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$\zeta \mapsto (\xi_1, \eta_1, u(\zeta), v(\zeta))$$

où

$$\begin{aligned}
\zeta_j &= \xi_j + i\eta_j,\\
u(\zeta) &= -r(\zeta) = 1 - |\zeta_1|^m - |\zeta_2|^2\\
&= 1 - |\zeta_1|^m - \xi_2^2 - \eta_2^2,\\
v(\zeta) &= \Im m\Phi(\zeta, z) = \Im m\left(r(\zeta)^{\zeta_1}(\zeta_1 - z_1) + (r(\zeta)^{\zeta_2}(\zeta_2 - z_2)\right)\\
&= G(z_1, \zeta_1) + \Im m(\bar{\zeta}_2(\zeta_2 - z_2))\\
&= G(z_1, \zeta_1) - \Im m(\bar{\zeta}_2 z_2)\\
&= G(z_1, \zeta_1) - y_2\xi_2 + x_2\eta_2.
\end{aligned}$$

Le Jacobien $J_z(\zeta)$ est donné par

$$\begin{aligned}
J_z(\zeta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & -2\xi_2 & -2\eta_2 \\ * & * & -y_2 & x_2 \end{vmatrix}
&= -2(x_2\xi_2 + \eta_2 y_2)\\
&= -2\Re e(\bar{z}_2\zeta_2).
\end{aligned}$$

On a $|z_2 - \zeta_2| \leq |z - \zeta| \leq c_1\delta(z, \zeta)^{1/m}$ d'où

$$\left|\bar{z}_2\zeta_2 - |z_2|^2\right| \leq c_1|z_2|\delta(z, \zeta)^{1/m}$$

et

$$\Re e(\bar{z}_2\zeta_2) \geq |z_2|\left(|z_2| - c_1\delta(z, \zeta)^{1/m}\right).$$

On suppose $|z_1| \leq 1 - \varepsilon$, avec $0 < \varepsilon < 1$. On a alors $|z_2|^2 \geq 1 - (1 - \varepsilon)^m \ := d(\varepsilon) > 0$.
Soit

$$e(\varepsilon) \ := \left(\frac{\sqrt{d(\varepsilon)}}{2c_1}\right)^m.$$

On a clairement

$$\delta(z, \zeta) < e(\varepsilon) \Longrightarrow \Re e(\bar{z}_2\zeta_2) > \frac{1}{2}d(\varepsilon).$$

En résumé :

$$\left.\begin{array}{l}|z_1| \leq 1-\varepsilon \\ \delta(z,\zeta) < e(\varepsilon)\end{array}\right\} \Longrightarrow |J_z(\zeta)| > d(\varepsilon).$$

(On a aussi, trivialement, $|J_z(\zeta)| \leq 2$.)
La version à paramètre du théorème des fonctions implicites stipule qu'il existe alors $\delta_0(\varepsilon)$, ne dépendant que de ε et vérifiant $0 < \delta_0(\varepsilon) < 1$, tel que pour tout z avec $|z_1| \leq 1-\varepsilon$, l'application F_z définisse un système de coordonnées locales pour $\zeta \in Q_{\delta_0(\varepsilon)}(z)$.

Remarque : L'injectivité de la transformation peut être vérifiée "à la main".
Soient z, ζ, ζ' avec

$$\left\{\begin{array}{l} z \in \partial\Omega, |z_1| \leq 1-\varepsilon \\ \delta(z,\zeta) < e(\varepsilon) \\ \delta(z,\zeta') < e(\varepsilon)\end{array}\right. \qquad \text{et} \quad F_z(\zeta) = F_z(\zeta').$$

On a immédiatement $\zeta_1 = \zeta_1'$.
Les relations

$$\left\{\begin{array}{rl} |\zeta_2|^2 = & 1 - |\zeta_1|^m - u(\zeta) \\ \Im m(\bar{\zeta}_2 z_2) = & G(z_1,\zeta_1) - v(\zeta)\end{array}\right.$$

permettent d'en tirer

$$\left\{\begin{array}{rl} |\zeta_2| = & |\zeta_2'| \\ \Im m(\bar{\zeta}_2 z_2) = & \Im m(\bar{\zeta}_2' z_2)\end{array}\right.$$

et donc

$$\left\{\begin{array}{rl} \Re e(\bar{\zeta}_2 z_2) = & \pm\Re e(\bar{\zeta}_2' z_2) \\ \Im m(\bar{\zeta}_2 z_2) = & \Im m(\bar{\zeta}_2' z_2).\end{array}\right.$$

1er cas : $\Re e(\bar{\zeta}_2 z_2) = \Re e(\bar{\zeta}_2' z_2)$. On a alors $\bar{\zeta}_2 z_2 = \bar{\zeta}_2' z_2$ avec $z_2 \neq 0$ d'où $\zeta_2 = \zeta_2'$.

2$^{\text{ème}}$ cas : $\Re e(\bar{\zeta}_2 z_2) = -\Re e(\bar{\zeta}_2' z_2)$. On a alors $\bar{\zeta}_2 z_2 = -\overline{(\bar{\zeta}_2' z_2)} = -\zeta_2' \bar{z}_2$.
Montrons que ce cas est à exclure. Dans la situation considérée, on a

$$\begin{aligned} |\zeta_2 - \zeta_2'| &= \left|\zeta_2 + \bar{\zeta}_2 \frac{z_2}{\bar{z}_2}\right| = \frac{1}{|z_2|}|\zeta_2 \bar{z}_2 + \bar{\zeta}_2 z_2| \\ &= \frac{1}{|z_2|}\left|2\Re e(z_2\bar{\zeta}_2)\right| \geq 2\left(|z_2| - c_1\delta(z,\zeta)^{1/m}\right) \\ &> \sqrt{d(\varepsilon)} \end{aligned}$$

en vertu des calculs déjà faits.
On a aussi

$$|z_2 - \zeta_2| \leq c_1\delta(z,\zeta)^{1/m} < \frac{\sqrt{d(\varepsilon)}}{2}$$

$$|z_2 - \zeta_2'| \leq c_1\delta(z,\zeta')^{1/m} < \frac{\sqrt{d(\varepsilon)}}{2}$$

ce qui est évidemment contradictoire avec l'inégalité précédente.

ANNEXE 3.

A3.1 NOTATIONS.

Le lemme (6.3) nous permet de dire que, par symétrie, il existe une constante $c\in]0,1[$ telle que, pour tout ζ, $z\in\bar{\Omega}$,

$$\Re e\Phi(z,\zeta)-r(z)\gtrsim c(-r(z)-r(\zeta)+|z_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m+|\zeta_2-z_2|^2)$$

et donc

$$(A3.1.1)\quad |\Phi(z,\zeta)|\geq (1-c)r(z)+c(-r(\zeta)+|z_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m+|\zeta_2-z_2|^2).$$

On va donner maintenant un découpage de Ω inspiré de [Me]. Pour ζ fixé, on note E_1^ζ, E_2^ζ et E_3^ζ les 3 ensembles suivants :

$$E_1^\zeta=\{z\in\Omega\ ;\ |\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m+|\zeta_2-z_2|^2\geq -2(1-c/2)r(z)/c\},$$

$$E_2^\zeta=\{z\in\Omega\backslash E_1^\zeta\ ;\ -r(\zeta)\geq -2(1-c/2)r(z)/c\}$$

et

$$E_3^\zeta=\Omega\backslash(E_1^\zeta\cup E_2^\zeta).$$

On peut remarquer que, pour tout $z\in E_1^\zeta\cup E_2^\zeta$, on a

$$(A3.1.2)\qquad |\Phi(z,\zeta)|\gtrsim -r(\zeta)-r(z)+|\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m+|\zeta_2-z_2|^2$$

puisque, pour $z\in E_1^\zeta$,

$$(1-c)r(z)+c(|\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m+|\zeta_2-z_2|^2)\geq$$
$$-\frac{c}{2}r(z)+\frac{c}{2}(|z_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m+|\zeta_2-z_2|^2)$$

et, pour $z\in E_2^\zeta$,

$$(1-c)r(z)-cr(\zeta)\geq -\frac{c}{2}(r(\zeta)+r(z)).$$

Pour $z\in E_3^\zeta$, on a simplement

$$(A3.1.3)\qquad \begin{cases} |\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m+|\zeta_2-z_2|^2\leq -2(1-c/2)r(z)/c \\ -r(\zeta)\leq -2(1-c/2)r(z)/c. \end{cases}$$

On va maintenant montrer (6.3.6). On peut remarquer que, pour $z\in E_1^\zeta\cup E_2^\zeta$, on a, d'après (A3.1.2),

$$\langle s,\zeta-z\rangle\gtrsim|\Phi(z,\zeta)|^2\gtrsim|\zeta-z|^{2m}$$

et pour $z\in E_3^\zeta$, on a $\langle s,\zeta-z\rangle\geq(-r(z))^2|\zeta-z|^2$ avec $-r(z)\gtrsim|\zeta-z|^m$ d'après (A3.1.3).On en tire que, pour tous ζ et z de $\bar{\Omega}$, on a

$$\langle s,\zeta-z\rangle\gtrsim|\zeta-z|^{2m+2}.$$

Le lemme qui suit est élémentaire et a une démonstration similaire à celle de (6.9).

A3.2 LEMME.

Soit ε un réel, $0 < \varepsilon < 1$. Il existe un réel $\delta_0'(\varepsilon)$ ne dépendant que de m et ε, vérifiant $0 < \delta_0'(\varepsilon) < 1$ et tel que pour tout ζ de $V \cap \bar{\Omega}$ avec $|\zeta_1| \leq 1 - \varepsilon$, les variables

$$(A3.2.1) \qquad z_1, \quad p = \Re e\Phi(z,\zeta), \quad q = \Im m\Phi(z,\zeta),$$

$$(A3.2.2) \qquad z_1, \quad u' = -r(z), \quad v = \Im m\Phi(\zeta,z)$$

et

$$(A3.2.3) \qquad z_1, \quad u' = -r(z), \quad q = \Im m\Phi(z,\zeta)$$

forment des systèmes de coordonnées $\mathcal{C}^\infty$ dans $\{z\ ;\ \delta(\zeta,z) < \delta_0'(\varepsilon)\}$, avec un jacobien majoré et minoré par des constantes ne dépendant que de ε et m, mais pas de ζ.

Voici maintenant un lemme dont la démonstration est immédiate.

A3.3 LEMME.

Pour tous réels $a > 0$, $\beta \geq 0$, $R > 0$, on a

$$\int_0^R \frac{dx}{(a+x^2)^{\beta+1}} \lesssim \frac{1}{a^{\beta+1/2}}.$$

A3.4 LEMME.

On a

$$||T(\omega)||_{L^1(\Omega)} \lesssim ||\omega||_{L^1(\Omega)} + ||(Log\ |r|)\bar{\partial}r \wedge \omega||_{L^1(\Omega)}.$$

A3.5 PREUVE.

On va estimer

$$I = \int_{\zeta\in\Omega}\int_{z\in\Omega}\left|\omega(\zeta)\wedge K_{0,0}^{(1)}(\zeta,z)\right| dV(z)dV(\zeta)$$

puis

$$J = \int_{\zeta\in\Omega}\int_{z\in\Omega}\left|\omega(\zeta)\wedge K_{0,0}^{(2)}(\zeta,z)\right| dV(z)dV(\zeta).$$

Puisque ω est à support dans V, on pourra n'intégrer en z que sur V puisqu'il existe une constante c telle que, pour tout point $z \in \Omega\backslash V$ et tout ζ dans le support de f, on ait $|z-\zeta| \geq c$. Comme les intégrands que l'on estime ont des dénominateurs dans lesquels apparaissent seulement des puissances de $\Phi(\zeta,z) - r(\zeta)$ et de $\Phi(z,\zeta)$, on pourra conclure

à l'aide de (6.3.5) et (6.3.6).
A ζ fixé, on pourra même n'intégrer en z que sur $V \cap Q_{\delta_0'(1/2)}(\zeta)$ puisque, pour $z \in V \backslash Q_{\delta_0'(1/2)}(\zeta)$, on a $\delta(\zeta, z) \geq \delta_0'(1/2)$ et donc $|\zeta - z| \gtrsim 1$. En utilisant alors (6.3.5) et (6.3.6), on conclut de même.
Par abus, on appellera encore, pour $j = 1, 2, 3$, E_j^ζ l'ensemble $E_j^\zeta \cap Q_{\delta_0'(1/2)}(\zeta)$ en reprenant les notations de (A3.1) et (A3.2).
Dans toute la suite, on sera amené à découper les intégrales selon les ensembles E_j^ζ et, pour une intégrale I donnée sur Ω, on notera $I^{E_j^\zeta}$ l'intégrale restreinte à E_j^ζ.
Estimation de I : On veut montrer que $I \lesssim ||\omega||_{L^1(\Omega)}$. Il nous suffit, pour cela, de majorer par une constante l'intégrale

$$I_1 = \int_{z \in V} \left| \frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta, z) - r(\zeta)} \right|^3 \frac{|(s \wedge ds)_{0,0}|}{\langle s, \zeta - z\rangle^2} dV(z).$$

L'expression de $(s \wedge ds)_{0,0}$ donnée en (6.14) montre que

$$|(s \wedge ds)_{0,0}| \lesssim (-r(z))^2(|\zeta - z| + |\Phi(z, \zeta)|) \lesssim (-r(z))^2|\zeta - z|$$

par l'inégalité élémentaire $|\Phi(z, \zeta)| \lesssim |\zeta - z|$. On est donc ramené à majorer l'intégrale

$$I_2 = \int_V \left| \frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta, z) - r(\zeta)} \right|^3 \frac{(-r(z))^2|\zeta - z|}{((-r(z))^2|\zeta - z|^2 + |\Phi(z, \zeta)|^2)^2} dV(z).$$

Regardons tout d'abord $I_2^{E_1^\zeta}$. On peut écrire, en utilisant (6.3.3), pour ε réel tel que $\varepsilon < 1/m$ et à l'aide de (A3.1.2),

$$\begin{aligned} I_2^{E_1^\zeta} &= \int_{E_1^\zeta} \frac{(-r(z))^2|\zeta - z| dV(z)}{((-r(z))^2|\zeta - z|^2 + |\Phi(z, \zeta)|^2)^2} \lesssim \int_{E_1^\zeta} \frac{(-r(z))^2|\zeta - z| dV(z)}{(-r(z))^2|\zeta - z|^2 |\Phi(z, \zeta)|^2} \\ &\lesssim \int_{E_1^\zeta} \frac{dV(z)}{(-r(z) + |\Im m \Phi(z, \zeta)| + |\zeta_1 - z_1|^m)^2 |\zeta_1 - z_1|} \\ &\lesssim \int_{E_1^\zeta} \frac{dV(z)}{(-r(z) + |\Im m \Phi(z, \zeta)| + |\zeta_1 - z_1|^m)^{2-\varepsilon} |\zeta_1 - z_1|^{1+m\varepsilon}}. \end{aligned}$$

A l'aide des coordonnées données en (A3.2.3), on peut donc écrire

$$I_2^{E_1^\zeta} \lesssim \int_{u', |q|, |\zeta_1 - z_1| \leq M} \frac{du' dq dV(z_1)}{(u' + |q| + |\zeta_1 - z_1|^m)^{2-\varepsilon} |\zeta_1 - z_1|^{1+m\varepsilon}}$$

où M est un réel suffisamment grand. On intègre en u', puis en q pour obtenir

$$I_2^{E_1^\zeta} \lesssim \int_{|\zeta_1 - z_1| \leq M} \frac{M + |\zeta_1 - z_1|^{m\varepsilon}}{|\zeta_1 - z_1|^{1+m\varepsilon}} dV(z_1)$$

qui est borné indépendamment de z, puisque $m\varepsilon < 1$.
Dans E_2^ζ, on a encore (A3.1.2) et on peut donc faire les mêmes calculs pour $I_2^{E_2^\zeta}$.
Pour l'intégrale sur E_3^ζ, on peut écrire

$$\begin{aligned} I_2^{E_3^\zeta} &\lesssim \int_{E_3^\zeta} \left|\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right|^3 \frac{-r(z)\times -r(z)|\zeta-z|dV(z)}{-r(z)|\zeta-z|((-r(z))^2|\zeta-z|^2+|\Phi(z,\zeta)|^2)^{3/2}} \\ &\lesssim \int_{E_3^\zeta} \left|\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right|^3 \frac{-r(z)dV(z)}{((-r(z))^2|\zeta-z|^2+|\Phi(z,\zeta)|^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

D'après (6.3), on a

$$-r(z)\left|\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right|^3 \lesssim -r(\zeta)$$

et on a donc, puisque $-r(z) \gtrsim -r(\zeta)$ dans E_3^ζ,

$$I_2^{E_3^\zeta} \lesssim \int_{E_3^\zeta} \frac{-r(\zeta)dV(z)}{((-r(\zeta))^2|\zeta-z|^2+|\Phi(z,\zeta)|^2)^{3/2}}.$$

On utilise alors les coordonnées (z_1,p,q) pour obtenir

$$I_2^{E_3^\zeta} \lesssim \int_{p,q,|\zeta_1-z_1|\le M} \frac{-r(\zeta)dpdqdV(z_1)}{((-r(\zeta))^2|\zeta_1-z_1|^2+p^2+q^2)^{3/2}}$$

où M est un réel suffisamment grand. On intègre en p puis en q et on a, à partir de (A3.3),

$$I_2^{E_3^\zeta} \lesssim \int_{|\zeta_1-z_1|\le M} \frac{-r(\zeta)dV(z_1)}{((-r(\zeta))^2|\zeta_1-z_1|^2)^{1/2}} = \int_{|\zeta_1-z_1|\le M} \frac{dV(z_1)}{|\zeta_1-z_1|}$$

qui est borné indépendamment de ζ.
<u>Estimation de J :</u> On va établir l'inégalité

$$J \lesssim ||\omega||_{L^1(\Omega)} + ||(\mathrm{Log}\,|r|)\bar\partial r\wedge\omega||_{L^1(\Omega)}.$$

Il nous faut estimer, en suivant la remarque faite plus haut

$$J_1 = \int_{\zeta\in V}\int_{z\in V} \left|\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right|^4 \frac{|\omega_1(\zeta)s_1(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_2\bar\zeta_2}+\omega_2(\zeta)s_2(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_1\bar\zeta_1}|}{\langle s,\zeta-z\rangle|r(\zeta)|}dV(z)dV(\zeta)$$

et

$$J_2 = \int_{\zeta\in V} |\bar\partial r\wedge\omega(\zeta)| \int_{z\in V} \left|\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right|^4 \frac{|s_2(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_1}-s_1(\zeta,z)r(\zeta)^{\zeta_2}|}{\langle s,\zeta-z\rangle r(\zeta)^2}dV(z)dV(\zeta).$$

Pour obtenir le résultat, il suffit de montrer que les intégrales L_1, M_1, L_2 et M_2 données par

$$L_1 = \int_{z\in V} \left|\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right|^4 \frac{(-r(z))^2|\zeta-z|}{\langle s,\zeta-z\rangle|r(\zeta)|}dV(z),$$

$$M_1 = \int_{z\in V} \left|\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right|^4 \frac{|\Phi(z,\zeta)|(|r(z)^{z_1}|+|r(\zeta)^{\zeta_1\bar\zeta_1}|)}{|r(\zeta)|\langle s,\zeta-z\rangle}dV(z),$$

$$L_2 = \int_{z\in V} \left|\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right|^4 \frac{(-r(z))^2|\zeta-z|dV(z)}{\langle s,\zeta-z\rangle|\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|^2}$$

et

$$M_2 = \int_{z\in V} \left|\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right|^4 \frac{|\Phi(z,\zeta)||\alpha(\zeta,z)|}{\langle s,\zeta-z\rangle|\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|^2}dV(z)$$

vérifient $L_1 \lesssim 1$, $M_1 \lesssim 1$, $L_2 \lesssim 1$ et $M_2 \lesssim |\mathrm{Log}\,|r(\zeta)||$. On obtient très facilement

$$\begin{aligned} L_1 &\lesssim \int_V \frac{(-r(z))^2|\zeta-z|}{((-r(z))^2|\zeta-z|^2+|\Phi(z,\zeta)|^2)|\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|}dV(z)\\ &\lesssim \int_V \frac{dV(z)}{|\zeta_1-z_1||\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|}.\end{aligned}$$

On utilise les coordonnées (A3.2.2) pour écrire, à l'aide du lemme (6.3),

$$\begin{aligned} L_1 &\lesssim \int_{u',|v|,|\zeta_1-z_1|\le M} \frac{du'dvdV(z_1)}{|\zeta_1-z_1|(u'+|v|+|\zeta_1-z_1|^m)}\\ &\lesssim \int_{u',|v|,|\zeta_1-z_1|\le M} \frac{du'dvdV(z_1)}{|\zeta_1-z_1|u'^{1/2}|v|^{1/2}}\end{aligned}$$

qui est borné indépendamment de ζ.
On a

$$M_1^{E_1^\zeta} \lesssim \int_{E_1^\zeta} \frac{|\Phi(z,\zeta)|(|r(z)^{z_1}|+|r(\zeta)^{\zeta_1\bar\zeta_1}|)}{\langle s,\zeta-z\rangle|\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|}dV(z) \lesssim \int_{E_1^\zeta} \frac{(|r(z)^{z_1}|+|r(\zeta)^{\zeta_1\bar\zeta_1}|)dV(z)}{|\Phi(z,\zeta)||\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|}.$$

En passant aux coordonnées (A3.2.2) et en utilisant (6.3.1) et (A3.1.2), on obtient

$$\begin{aligned} M_1^{E_1^\zeta} \lesssim \int_{u',|v|,|\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m\le M} &\frac{(|\zeta_1|^{m-2}+|\zeta_1-z_1|^{m-2})}{(u'+|v|+|\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m)}\\ &\times\frac{du'dvdV(z_1)}{(u'+|\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m)}\end{aligned}$$

où M est un réel suffisamment grand. Soit $0<\varepsilon<1$ un réel. En écrivant que

$$u'+|v|+|\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m \ge (u'+|\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m)^{1-\varepsilon}|v|^\varepsilon,$$

on obtient

$$M_1^{E_1^\zeta} \lesssim \int_{u',|v|,|\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m\le M} \frac{(|\zeta_1|^{m-2}+|\zeta_1-z_1|^{m-2})du'dvdV(z_1)}{(u'+|\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m)^{2-\varepsilon}|v|^\varepsilon}.$$

On intègre en v, en u' pour obtenir

$$M_1^{E_1^\zeta} \lesssim \int_{|\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m\le M} \frac{(|\zeta_1|^{m-2}+|\zeta_1-z_1|^{m-2})dV(z_1)}{(|\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m)^{1-\varepsilon}}.$$

On intègre alors en z_1 en passant en polaire comme en (6.12) et on obtient le résultat.
La méthode ne change pas pour $M_1^{E_2^\zeta}$.
Pour $M_1^{E_3^\zeta}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} M_1^{E_3^\zeta} &\lesssim \int_{E_3^\zeta} \left| \frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)} \right|^4 \frac{dV(z)}{\langle s, \zeta - z\rangle^{1/2} |r(\zeta)|} \\ &\lesssim \int_{E_3^\zeta} \left| \frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)} \right|^4 \frac{dV(z)}{-r(z)|\zeta_1 - z_1||r(\zeta)|}. \end{aligned}$$

Puisque $-r(z) \gtrsim -r(\zeta)$ dans le domaine d'intégration, on a, à l'aide du lemme (6.3),

$$\begin{aligned} M_1^{E_3^\zeta} &\lesssim \int_{E_3^\zeta} \left| \frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)} \right|^4 \frac{dV(z)}{r(\zeta)^2 |\zeta_1 - z_1|} \\ &\lesssim \int_{E_3^\zeta} \frac{dV(z)}{|\zeta_1 - z_1||\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|^2}. \end{aligned}$$

Avec les coordonnées (u', v, z_1), on a

$$M_1^{E_3^\zeta} \lesssim \int_{u',|v|,|\zeta_1 - z_1|^m \leq M} \frac{du' dv dV(z_1)}{|\zeta_1 - z_1|(u' + |v| + |\zeta_1 - z_1|^m)^2}.$$

Après une première intégration en v, on obtient

$$M_1^{E_3^\zeta} \lesssim \int_{u',|\zeta_1 - z_1|^m \leq M} \frac{du' dV(z_1)}{|\zeta_1 - z_1|(u' + |\zeta_1 - z_1|^m)}.$$

En écrivant, pour ε réel dans $]0, 1/m[$,

$$u' + |\zeta_1 - z_1|^m \geq u'^{1-\varepsilon} |\zeta_1 - z_1|^{m\varepsilon},$$

on obtient donc

$$M_1^{E_3^\zeta} \lesssim \int_{u'|\zeta_1 - z_1|^m \leq M} \frac{du' dV(z_1)}{|\zeta_1 - z_1|^{1+m\varepsilon} u'^{1-\varepsilon}}.$$

Le résultat est alors immédiat.

L_2 s'estime de la même manière que $I_2^{E_1^\zeta}$. En effet, en procédant comme pour L_1, on obtient

$$\begin{aligned} L_2 &\lesssim \int_\Omega \frac{dV(z)}{|\zeta_1 - z_1||\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|^2} \\ &\lesssim \int_{u',|v|,|\zeta_1 - z_1| \leq M} \frac{du' dv V(z_1)}{|\zeta_1 - z_1|(u' + |v| + |\zeta_1 - z_1|^m)^2} \end{aligned}$$

à l'aide des coordonnées (A3.2.2). On termine alors comme pour $I_2^{E_1^\zeta}$ où l'on avait estimé la même intégrale.

Il ne reste plus que M_2. On obtient, en utilisant l'inégalité (6.18.2) sur $\alpha(\zeta, z)$, ainsi que (A3.1.2) et les coordonnées (A3.2.2),

$$\begin{aligned} M_2^{E_1^\zeta} &\lesssim \int_{E_1^\zeta} \frac{|\alpha(\zeta,z)|dV(z)}{|\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|^2|\Phi(z,\zeta)|} \\ &\lesssim \int_{u',|v|,|\zeta_1-z_1|\leq M} \frac{(|\zeta_1|^{m-2}+|\zeta_1-z_1|^{m-2})}{(u'+|v|+|\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m)^2} \\ &\qquad\qquad \times \frac{du'dvdV(z_1)}{(u'+|\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m)^{1-1/m}}. \end{aligned}$$

On intègre en v et on obtient

$$M_2^{E_1^\zeta} \lesssim \int_{u',|\zeta_1-z_1|\leq M} \frac{(|\zeta_1|^{m-2}+|\zeta_1-z_1|^{m-2})du'dV(z_1)}{(u'+|\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m)^{2-1/m}}.$$

On intègre en u' puis en z_1 et on obtient le résultat.

On procède de la même manière pour $M_2^{E_2^\zeta}$.

Pour $M_2^{E_3^\zeta}$, on a, en utilisant le fait que $-r(\zeta) \lesssim -r(z)$ dans le domaine d'intégration, la majoration

$$\begin{aligned} M_2^{E_3^\zeta} &\lesssim \int_{E_3^\zeta} \left|\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right|^4 \frac{|\alpha(\zeta,z)|dV(z)}{r(\zeta)^2\langle s,\zeta-z\rangle^{1/2}} \\ &\lesssim \int_{E_3^\zeta} \left|\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right|^4 \frac{|\alpha(\zeta,z)|dV(z)}{-r(z)|\zeta-z|r(\zeta)^2} \\ &\lesssim \int_{E_3^\zeta} \left|\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)}\right|^4 \frac{|\alpha(\zeta,z)|dV(z)}{|\zeta-z|(-r(\zeta))^3}. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme (6.3) et (6.18.1) qui nous donne

$$(A3.5.1) \qquad |\alpha(\zeta,z)| \lesssim (|\zeta_1|^{m-2}+|\zeta_1-z_1|^{m-2})|\zeta-z|,$$

on a la majoration

$$M_2^{E_3^\zeta} \lesssim \int_{E_3^\zeta} \frac{(|\zeta_1|^{m-2}+|\zeta_1-z_1|^{m-2}|)dV(z)}{|\Phi(\zeta,z)-r(\zeta)|^3}.$$

Après passage aux coordonnées (u', v, z_1), on doit donc estimer

$$M_2^{E_3^\zeta} \lesssim \int_{u',|v|,|\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m\leq M} \frac{(|\zeta_1|^{m-2}+|\zeta_1-z_1|^{m-2}|)du'dvdV(z_1)}{(-r(\zeta)+u'+|v|+|\zeta_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m)^3}.$$

Après des intégrations en z_1 et en v, on obtient

$$M_2^{E_3^\zeta} \lesssim \int_{u'\leq M} \frac{du'}{(-r(\zeta)+u')} \lesssim |\mathrm{Log}\ |r(\zeta)||.$$

Ceci achève la preuve de (A3.4).

A4.1 NOTATIONS.

Comme dans (A3.1), il existe une constante dans $]0,1[$ telle que

$$(A4.1.1) \quad |\Phi(z,\zeta) \gtrsim (1-c)r(z) + c(-r(\zeta) + |z_1|^{m-2}|\zeta_1 - z_1|^2 + |\zeta_1 - z_1|^m + |\zeta_2 - z_2|^2).$$

Pour z fixé, on note F_1^z, F_2^z et F_3^z les 3 ensembles suivants :

$$F_1^z = \{\zeta \in \Omega \; ; \; |z_1|^{m-2}|\zeta_1 - z_1|^2 + |\zeta_1 - z_1|^m + |\zeta_2 - z_2|^2 \geq -2(1-c)r(z)/c\},$$

$$F_2^z = \{\zeta \in \Omega \backslash F_1^z \; ; \; -r(\zeta) \geq -2(1-c)r(z)/c\}$$

et

$$F_3^z = \Omega \backslash (F_1^z \cup F_2^z).$$

On peut remarquer que, pour tout $\zeta \in F_1^z \cup F_2^z$, on a

$$(A4.1.2) \qquad |\Phi(z,\zeta)| \gtrsim -r(\zeta) + |z_1|^{m-2}|\zeta_1 - z_1|^2 + |\zeta_1 - z_1|^m + |\zeta_2 - z_2|^2$$

puisque, pour $\zeta \in F_1^z$,

$$(1-c)r(z)+c(|z_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m+|\zeta_2-z_2|^2) \geq \frac{c}{2}(|z_1|^{m-2}|\zeta_1-z_1|^2+|\zeta_1-z_1|^m+|\zeta_2-z_2|^2)$$

et, pour $\zeta \in F_2^z$,

$$(1-c)r(z) - cr(\zeta) \geq -\frac{c}{2}r(\zeta).$$

Pour $z \in F_3^z$, on a simplement

$$(A4.1.3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} |z_1|^{m-2}|\zeta_1 - z_1|^2 + |\zeta_1 - z_1|^m + |\zeta_2 - z_2|^2 \leq -2(1-c)r(z)/c \\ -r(\zeta) \leq -2(1-c)r(z)/c. \end{array} \right.$$

A4.2 LEMME.

Soit ε un réel, $0 < \varepsilon < 1$. Il existe un réel $\delta_0(\varepsilon)$ ne dépendant que de m et ε, vérifiant $0 < \delta_0(\varepsilon) < 1$ et tel que pour tout z de $V \cap \bar{\Omega}$ avec $|z_1| \leq 1-\varepsilon$, les variables

$$(A4.2.1) \qquad \zeta_1, \quad p = \Re e\Phi(z,\zeta), \quad q = \Im m\Phi(z,\zeta)$$

et

$$(A4.2.2) \qquad \zeta_1, \quad u = -r(\zeta), \quad q = \Im m\Phi(z,\zeta)$$

forment des systèmes de coordonnées $\mathcal{C}^\infty$ dans $\{\zeta \; ; \; \delta(z,\zeta) < \delta_0(\varepsilon)\}$, avec un jacobien majoré et minoré par des constantes ne dépendant que de ε et m, mais pas de z.

On peut supposer que le réel $\delta_0(\varepsilon)$ est le même que celui donné par le lemme (6.9). Il suffit, bien entendu, de prendre le plus petit des deux.

A4.3 PROPOSITION.

Soit f une $(p,1)$-forme $(0 \leq p \leq 2)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω, à support dans V, et bornée ainsi que toutes ses dérivées. Alors, pour tout z dans Ω, on a

$$(A4.3.1) \qquad |T(f)(z)| \leq C(f)$$

et, pour $i = 1, 2$ et a, b entiers naturels quelconques,

$$(A4.3.2) \qquad \left| \int_\Omega f(\zeta) \wedge \frac{\partial^{a+b} P_{1,0,i}}{\partial z_1^a \partial z_2^b}(\zeta, z) \right| \leq C_{a,b}(f),$$

où $C(f)$ (resp. $C_{a,b}(f)$) désigne une constante ne dépendant que de f et de la géométrie de Ω (resp. et des entiers a et b).

A4.4 PREUVE.

Comme dans l'annexe 3, on pourra, à z fixé, n'intégrer en ζ que sur $V \cap Q_{\delta_0(1/2)}(z)$. De plus, on pourra également se limiter au cas où $z \in \Omega \cap V$.
Par abus, on appellera encore, pour $j = 1, 2, 3$, F_j^z l'ensemble $F_j^z \cap Q_{\delta_0(1/2)}(z)$ en reprenant les notations de (A4.1) et (A4.2).

On va d'abord estimer

$$I = \int_{\zeta \in V} f(\zeta) \wedge K_{0,0}^{(1)}(\zeta, z) \text{ puis } J = \int_{\zeta \in V} f(\zeta) \wedge K_{0,0}^{(2)}(\zeta, z).$$

Estimation de I : Il faut donc majorer

$$I = \int_V f(\zeta) \wedge \left(\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta, z) - r(\zeta)} \right)^3 \frac{(s \wedge ds)_{0,0}}{\langle s, \zeta - z \rangle^2} dV(\zeta)$$

et, compte tenu de (6.3.3) et de l'étude faite en annexe 3, on est ramené à majorer l'intégrale

$$I_3 = \int_V \frac{(-r(z))^2 |\zeta - z|}{((-r(z))^2 |\zeta - z|^2 + |\Phi(z, \zeta)|^2)^2} dV(\zeta).$$

L'estimation de $I_3^{F_1^z}$ (resp. $I_3^{F_2^z}$) est identique à celle de $I_2^{E_1^\zeta}$ (resp. $I_2^{E_2^\zeta}$), après utilisation des coordonnées (A4.2.2).
Pour l'intégrale sur F_3^z, on peut écrire

$$\begin{aligned} I_3^{F_3^z} &\lesssim \int_{F_3^z} \frac{-r(z) \times -r(z) |\zeta - z| dV(\zeta)}{-r(z)|\zeta - z|((-r(z))^2 |\zeta - z|^2 + |\Phi(z, \zeta)|^2)^{3/2}} \\ &\lesssim \int_{F_3^z} \frac{-r(z) dV(\zeta)}{((-r(z))^2 |\zeta - z|^2 + |\Phi(z, \zeta)|^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

On utilise alors les coordonnées données en (A4.2.1) pour obtenir

$$I_3^{F_3^z} \lesssim \int_{p,q,|\zeta_1 - z_1| \leq M} \frac{-r(z) dp dq dV(\zeta_1)}{((-r(z))^2 |\zeta_1 - z_1|^2 + p^2 + q^2)^{3/2}}$$

où M est un réel suffisamment grand. On intègre en p puis en q et on a, à l'aide du lemme (A3.3),

$$I_3^{F_3^z} \lesssim \int_{|\zeta_1 - z_1| \leq M} \frac{-r(z)dV(\zeta_1)}{((-r(z))^2|\zeta_1 - z_1|^2)^{1/2}} = \int_{|\zeta_1 - z_1| \leq M} \frac{dV(\zeta_1)}{|\zeta_1 - z_1|}$$

qui est borné indépendamment de z.

<u>Estimation de J :</u> Il nous faut estimer

$$J_3 = -3 \int_V \left(\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta, z) - r(\zeta)} \right)^4 \frac{f_1(\zeta) s_1 r(\zeta)^{\zeta_2 \bar{\zeta}_2} + f_2(\zeta) s_2 r(\zeta)^{\zeta_1 \bar{\zeta}_1}}{\langle s, \zeta - z \rangle r(\zeta)} dV(\zeta)$$

et

$$J_4 = -3 \int_V \left(\frac{-r(\zeta)}{\Phi(\zeta, z) - r(\zeta)} \right)^4 \frac{(f_1(\zeta) r(\zeta)^{\bar{\zeta}_2} - f_2(\zeta) r(\zeta)^{\bar{\zeta}_1})(s_2 r(\zeta)^{\zeta_1} - s_1 r(\zeta)^{\zeta_2})}{\langle s, \zeta - z \rangle r(\zeta)^2} dV(\zeta).$$

On peut écrire

$$|J_3| \lesssim L_3 + M_3$$

avec

$$L_3 = \int_{\Omega^z} \frac{(-r(z))^2 |\zeta - z|}{\langle s, \zeta - z \rangle |\Phi(\zeta, z) - r(\zeta)|} dV(\zeta)$$

et

$$M_3 = \int_{\Omega^z} \frac{|\Phi(z, \zeta)|(|r(z)^{z_1}| + |r(\zeta)^{\zeta_1 \bar{\zeta}_1}|)}{|\Phi(\zeta, z) - r(\zeta)| \langle s, \zeta - z \rangle} dV(\zeta).$$

Pour L_3, on procède comme pour L_1 en (A3.5) avec les coordonnées (u, v, ζ_1).
Pour $M_3^{F_1^z}$ et $M_3^{F_2^z}$, la démonstration est identique à celle de (A3.5) en écrivant que $|\zeta_1|^{m-2} \leq |z_1|^{m-2}| + |\zeta_1 - z_1|^{m-2}$ et en utilisant les coordonnées du lemme (6.9).
Pour $M_3^{F_3^z}$, on peut écrire

$$M_3^{F_3^z} \lesssim \int_{F_3^z} \frac{dV(\zeta)}{\langle s, \zeta - z \rangle^{1/2} |\Phi(\zeta, z) - r(\zeta)|} \lesssim \int_{F_3^z} \frac{dV(\zeta)}{-r(z)|\zeta_1 - z_1||\Phi(\zeta, z) - r(\zeta)|}.$$

Avec les coordonnées de (6.9), on a, en utilisant (6.3.1), en écrivant que

$$-r(z) + u + |v| + |z_1|^{m-2}|\zeta_1 - z_1|^2 + |\zeta_1 - z_1|^m \geq u^{1/m}|v|^{1-1/m}$$

et en tenant compte de la définition de F_3^z,

$$M_3^{F_3^z} \lesssim \int_{u, |\zeta_1 - z_1|^m \leq -r(z), |v| \leq M} \frac{dudvdV(\zeta_1)}{-r(z)|\zeta_1 - z_1| u^{1/m} |v|^{1-1/m}}$$

pour M suffisamment grand et donc

$$M_1^{F_3^z} \lesssim \frac{1}{-r(z)} (-r(z))^{1-1/m} (-r(z))^{1/m} \lesssim 1.$$

On décompose également J_4 sous la forme

$$|J_4| \lesssim L_4 + M_4$$

avec

$$L_4 = \int_V \frac{(-r(z))^2|\zeta - z|dV(\zeta)}{\langle s, \zeta - z\rangle |\Phi(\zeta, z) - r(\zeta)|^2}$$

et

$$M_4 = \int_V \frac{|\Phi(z,\zeta)||\alpha(\zeta,z)|}{\langle s, \zeta - z\rangle |\Phi(\zeta, z) - r(\zeta)|^2} dV(\zeta).$$

L_4 s'estime de la même manière que L_2 dans (A3.5).
Il ne reste plus que M_4. $M_4^{F_1^z}$ et $M_4^{F_2^z}$ se traitent comme $M_2^{E_1^\zeta}$ et $M_2^{E_2^\zeta}$ avec les coordonnées du lemme (6.9) et puisque $|\zeta_1|^{m-2} \leq |z_1|^{m-2} + |\zeta_1 - z_1|^{m-2}$.
Pour $M_4^{F_3^z}$, on a, en utilisant cette dernière remarque et (A3.5.1), la majoration

$$\begin{aligned} M_4^{F_3^z} &\lesssim \int_{F_3^z} \frac{|\alpha(\zeta,z)|dV(\zeta)}{|\Phi(\zeta,z) - r(\zeta)|^2 |\langle s, \zeta - z\rangle^{1/2}} \lesssim \int_{F_3^z} \frac{|\alpha(\zeta,z)|dV(\zeta)}{-r(z)|\zeta - z||\Phi(\zeta,z) - r(\zeta)|^2} \\ &\lesssim \int_{F_3^z} \frac{(|z_1|^{m-2} + |\zeta_1 - z_1|^{m-2}|)dV(\zeta)}{-r(z)|\Phi(\zeta,z) - r(\zeta)|^2}. \end{aligned}$$

Après passage aux coordonnées du lemme (6.9) et une première intégration en v, on obtient

$$M_4^{F_3^z} \lesssim \int_{u, |z_1|^{m-2}|\zeta_1 - z_1|^2 + |\zeta_1 - z_1|^m \leq -r(z)} \frac{(|z_1|^{m-2} + |\zeta_1 - z_1|^{m-2})dudV(\zeta_1)}{-r(z)(-r(z) + u + |z_1|^{m-2}|\zeta_1 - z_1|^2 + |\zeta_1 - z_1|^m)}.$$

En écrivant que

$$-r(z) + u + |z_1|^{m-2}|\zeta_1 - z_1|^2 + |\zeta_1 - z_1|^m \geq u^{1/2}(|z_1|^{m-2}|\zeta_1 - z_1|^2 + |\zeta_1 - z_1|^m)^{1/2},$$

on obtient

$$\begin{aligned} M_4^{F_3^z} &\lesssim \int_{u, |z_1|^{m-2}|\zeta_1 - z_1|^2 + |\zeta_1 - z_1|^m \leq -r(z)} \frac{(|z_1|^{m-2} + |\zeta_1 - z_1|^{m-2})dudV(\zeta_1)}{-r(z)u^{1/2}(|z_1|^{m-2}|\zeta_1 - z_1|^2 + |\zeta_1 - z_1|^m)^{1/2}} \\ &\lesssim \frac{1}{-r(z)}(-r(z))^{1/2+1/2}, \end{aligned}$$

après intégration en ζ_1 par passage en coordonnées polaires comme en (6.12). Ceci achève la preuve de (A4.3.1).

Pour (A4.3.2), il suffit d'appliquer la même technique qu'en (6.21) et on obtient, si on appelle $X_{a,b,i,j}(f)$ les termes à majorer,

$$|X_{a,b,i,j}(f)| \lesssim \int_\Omega \frac{(-r(\zeta))^{3+a+b}}{|\bar{\zeta}_2^{a+b+3}|} \left| \frac{\partial^{a+b+3} f_j}{\partial \zeta_1^a \partial \zeta_2^{a+b+3}}(\zeta) \right| \frac{\left|\bar{\zeta}_2^b(|\zeta_1|^{m-2}\bar{\zeta}_1)^a\right|}{|\Phi(\zeta,z) - r(\zeta)|^{3+a+b}} \left|\Psi_{i,j}^P(\zeta)\right| dV(\zeta).$$

En utilisant (6.3.3) et le fait que $|\zeta_2| \approx 1$ dans le support de f, le résultat est immédiat.

A4.5 COROLLAIRE.

Soit f un élément de $\mathcal{C}^\infty_{0,1}(\bar\Omega)$, à support dans V et telle que $\bar\partial f = 0$ dans Ω. Alors, on a

$$T(f) \in \mathcal{C}^\infty(\bar\Omega).$$

Preuve : On démontre ici, en fait, le résultat annoncé en (6.8.1). La forme f vérifie bien toutes les hypothèses de la proposition (A4.3). Soient p, q deux entiers naturels. Comme en (6.16), on peut calculer, pour $z \in \Omega$,

$$\frac{\partial^{p+q}T(f)}{\partial z_1^p \partial z_2^q}(z) = W(f)(z) + X(f)(z)$$

avec

$$W(f)(z) = T\left(\frac{\partial^{p+q} f}{\partial \zeta_1^p \partial \zeta_2^q}\right)(z)$$

et

$$X(f)(z) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{(a,b,c,d)\in E_i} \mu(a,b,c,d) \int_{\zeta\in\Omega} \frac{\partial^{a+b} f}{\partial \zeta_1^a \partial \zeta_2^b}(\zeta) \wedge \frac{\partial^{c+d} P_{1,0,i}}{\partial z_1^c \partial z_2^d}(\zeta, z)$$

où chaque E_i est un ensemble de quadruplets d'entiers naturels (a, b, c, d) tels que, si $i = 1$, alors $a + c = p - 1$ et $b + d = q$ tandis que, si $i = 2$, alors $a + c = p$ et $b + d = q - 1$, et où les $\mu(a, b, c, d)$ sont des coefficients réels.
En utilisant la proposition (A3.4), on peut affirmer qu'il existe une constante $C_{p,q}(f)$ telle que

$$\left|\frac{\partial^{p+q}T(f)}{\partial z_1^p \partial z_2^q}(z)\right| \le C_{p,q}(f) \text{ pour tout } z \in \Omega.$$

On rappelle aussi que, dans les hypothèses faites, on a $\bar\partial T(f) = f$.
On a donc ainsi démontré le résultat puisque toutes les dérivées de $T(f)$ sont uniformément bornées dans Ω.

Dans ce qui suit, on reprend les notations λ et C définies en (6.15).

A4.6 PROPOSITION.

Soit z un point de $(V \cap \partial\Omega)\backslash E$. Soit f une $(0,1)$-forme de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $\bar\Omega\backslash Q_{\lambda\delta(z,E)/2}(z)$. Pour tous biindices P, Q, il existe une constante $C_{P,Q}(z)$ telle que, pour tout ξ dans $Q_{\lambda\delta(z,E)/4C}(z) \cap \Omega$, on ait

$$(A4.6.1) \qquad \int_{\zeta\in\Omega} \left|f(\zeta) \wedge \partial_z^{PQ} K_{0,0}(\zeta,\xi)\right| \le C_{P,Q}(z).$$

Preuve : En écrivant $\delta(z,\zeta) \le C(\delta(z,\xi)+\delta(\xi,\zeta))$, on obtient que, pour ζ dans le support de f, on a

$$\frac{\lambda}{2}\delta(z,E) \le \frac{C\lambda}{4C}\delta(z,E) + C\delta(\xi,\zeta),$$

et donc

$$\delta(\xi,\zeta) \gtrsim \delta(z,E).$$

On peut donc affirmer que

$$(A4.6.2) \qquad |\xi-\zeta| \gtrsim \delta(z,E).$$

D'après (6.3.5), (6.3.6) et (A4.6.2), on peut toujours affirmer qu'il existe une constante $C(z)>0$ ne dépendant que de z telle que

$$|\Phi(\zeta,\xi)-r(\zeta)| \gtrsim C(z) \text{ et } \langle s,\zeta-\xi\rangle \gtrsim C(z).$$

Cela permet de justifier (A4.6.1).

A4.7 COROLLAIRE.

Soit z un point de $(V\cap\partial\Omega)\backslash E$. Soit f une $(0,1)$-forme de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $\bar\Omega\backslash Q_{\lambda\delta(z,E)/2}(z)$.
Alors la fonction $T(f)$ et toutes ses dérivées se prolongent continûment à $\partial\Omega$ au voisinage de z. En outre, pour tous biindices P, Q, on a

$$\partial_z^{PQ}T(f)(z) = \lim_{\substack{\xi\to z\\ \xi\in\Omega}}\left(\int_{\zeta\in\Omega} f(\zeta)\wedge\partial_z^{PQ}K_{0,0}(\zeta,\xi)\right) = \int_{\zeta\in\Omega} f(\zeta)\wedge\partial_z^{PQ}K_{0,0}(\zeta,z).$$

Preuve : C'est une conséquence immédiate de (A4.6).

Le corollaire (A4.7) est en particulier utilisé en (6.15), pour justifier les calculs relatifs à la fonction S, ainsi qu'en (6.16).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[A] E. AMAR *Estimées Lipschitz dans les domaines convexes de type fini de* $\mathbb{C}^2$. Publ. Mat. 33 (1989), 69-83.

[BA] B. BERNDTSSON & M. ANDERSSON *Henkin-Ramirez formulas with weight factors.* Ann. Inst. Fourier 32 (1982), 91-110.

[BC] A. BONAMI & Ph. CHARPENTIER *Solutions de l'équation* $\bar{\partial}$ *et zéros de la classe de Nevanlinna dans certains domaines faiblement pseudo-convexes.* Ann. Inst. Fourier 32 (1982), 53-89.

[BCZ] P. BONNEAU, A. CUMENGE & A. ZERIAHI *Division dans les espaces de Lipschitz de fonctions holomorphes.* Springer Lectures Notes 1198 (1983-84), 73-87.

[BB] J. BRUNA & J. M. BURGUES *Holomorphic approximation in* C^m*-norms on totally real compact sets in* $\mathbb{C}^n$. Math. Ann. 269 (1984), 103-117.

[BCD] J. BRUNA, P. CHARPENTIER & Y. DUPAIN *Zero varieties for the Nevanlinna class in convex domains of finite type in* $\mathbb{C}^n$. Annals of Math. 147 (1998), 391-415.

[BO] J. BRUNA & J. M. ORTEGA *Interpolation by holomorphic functions smooth to the boundary in the unit ball of* $\mathbb{C}^N$. Math. Ann. 274 (1986), 525-575.

[Ca] D. CATLIN *Estimates for invariant metrics on weakly pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^2$. Math. Z. 200 (1989), 429-466.

[CK] D.-C. E. CHANG & S. G. KRANTZ *Holomorphic Lipschitz functions and application to the* $\bar{\partial}$*-problem.* Colloq. Math. 62 (1991), no.2, 227-256.

[CW] R. R. COIFMAN & G. WEISS *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes.* Springer Lectures Notes 242 (1972).

[DFW] K. DIEDERICH, J. E. FORNAESS & J. WIEGERINCK *Sharp Hölder estimates for* $\bar{\partial}$ *on ellipsoïds.* Manuscripta math. 56 (1986), 399-417.

[Du] P. L. DUREN *Theory of* H^p *spaces.* Academic Press, New York, 1970.

[Dy] E. M. DYNKIN *Free interpolation sets for Hölder classes.* Mat. Sb. 109 (1979), 107-128 ; Math. USSR-Sb. 37 (1980), 97-117.

[G] S. GRELLIER *Behavior of holomorphic functions in complex tangential directions in a domain of finite type in* $\mathbb{C}^n$. Publ. Mat. 36 (1992), 251-292.

[HC] G. M. HENKIN & E. M. CHIRKA *Boundary properties of holomorphic functions of several complex variables.* J. Sov. Math. 5 (1976), 612-687.

[HL] G. M. HENKIN & J. LEITERER *Theory of functions on complex manifolds.* Monographs in Mathematics, Birkhaüser, Basel-Boston-Stuttgart, 1984.

[Ma] B. MALGRANGE *Ideals of differentiable functions.* Oxford University Press (1966).

[McNS] J. D. McNEAL & E. M. STEIN *Mapping properties of the Bergman projection on convex domains of finite type.* Duke Math. J. 73 (1994), 177-199.

[Me] C. MENINI *Classes de Nevanlinna et estimations pour la résolution de l'équation de Cauchy-Riemann sur une intersection d'ouverts strictement pseudoconvexes.* Thèse (1994), Univ. Paul Sabatier, Toulouse.

[NSW] A. NAGEL, E. M. STEIN & S. WAINGER *Boundary behavior of functions holomorphic in domains of finite type.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA 78 (1981), 6596-6599.

[O] N. OVRELID *Integral representation formulas and L^p-estimates for the $\bar{\partial}$-equation.* Math. Scand. 29 (1971), 137-160.

[R1] R. M. RANGE *On Hölder estimates for $\bar{\partial}u = f$ on weakly pseudoconvex domains.* Proc. of Int. Conf., Cortona 1976-1977, Scuola Norm. Sup. Pisa (1978), 247-267.

[R2] R. M. RANGE *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables.* Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics 108 (1986).

[Sk] H. SKODA *Valeurs au bord pour les solutions de l'opérateur d'' et caractérisation des zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna.* Bull. Soc. math. France 104 (1976), 225-299.

[St] E. M. STEIN *Singular integrals and estimates for the Cauchy- Riemann equations.* Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), 440-445.

[T1] V. THILLIEZ *Classes de Gevrey non isotropes et interpolation dans les domaines de type fini de $\mathbb{C}^2$.* Thèse (1991), Univ. Paris-XI, Orsay.

[T2] V. THILLIEZ *Classes de Gevrey non isotropes dans les domaines de type fini de $\mathbb{C}^2$.* J. Analyse Math. 60 (1993), 259-305.

[V] L. VERDOUCQ *Valeurs au bord pour les dérivées tangentielles des fonctions de la classe $\mathcal{A}^{k,\alpha}$ dans les domaines de type fini de $\mathbb{C}^2$.* C. R. Acad. Sci. Paris 326 (1998), 161-164.

Département de Mathématiques, Université des sciences et technologies de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq, France
Adresse électronique : verdoucq@gat.univ-lille1.fr

0495 72431

Résumé.- Soit Ω un domaine de type fini de $\mathbb{C}^2$. Étant donnée une fonction f de $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, holomorphe dans Ω, on montre l'existence de valeurs au bord pour certaines dérivées de f d'ordre supérieur à k. Le gain de dérivées a lieu dans la direction complexe-tangentielle et est relié à la géométrie du bord. On établit ensuite une propriété de régularité hölderienne non isotrope pour ces valeurs au bord. Dans un voisinage convenable U d'un point de type fini m sur le bord de Ω, on définit alors des classes $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ non isotropes $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega} \cap U)$ et, pour une partie compacte E de $U \cap \partial\Omega$ dont chaque point est de type maximal m, une classe de jets non isotropes $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(E)$ pour laquelle on démontre un théorème d'extension à $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega} \cap U)$. En se limitant ensuite au cas de l'ellipsoïde $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^2 \ ; \ |z_1|^m + |z_2|^2 < 1\}$ où m est un entier pair, on donne enfin des conditions sur E permettant d'interpoler les jets $\bar{\partial}$-plats de $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(E)$ par des fonctions de $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. Ce travail généralise des résultats donnés par J. Bruna et J.-M. Ortega dans la boule.

Tangential Derivatives and interpolation for functions

of class $\mathcal{A}^{k,\alpha}$ at the boundary of finite type domains.

Abstract.- Let Ω be a domain of finite type in $\mathbb{C}^2$ and let f be a function holomorphic in Ω and belonging to $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. We prove the existence of boundary values for some suitable derivatives of f of order greater than k. The gain of derivatives holds in the complex-tangential direction and it is precisely related to the geometry of $\partial\Omega$. Then we prove a property of non-isotropic Hölder regularity for these boundary values. In a suitable neighbourhood U of a point of finite type m, we define then non isotropic $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ classes $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega} \cap U)$ and, for a compact subset E of $U \cap \partial\Omega$ whose points are of maximal type m, a class of non isotropic jets $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(E)$ for which we prove an extension theorem to $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(\bar{\Omega} \cap U)$. Finally, in the case of the ellipsoïd $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^2 \ ; \ |z_1|^m + |z_2|^2 < 1\}$ where m is an even integer, we give conditions on E allowing to interpolate $\bar{\partial}$-flat jets of $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{NI}(E)$ by functions of $\mathcal{A}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. This work generalizes some results given by J. Bruna and J.-M. Ortega in the unit ball.

Mots-Clés. - Domaines de type fini - Comportement au bord des fonctions holomorphes - Classes de Hölder - Noyaux intégraux - Interpolation - Dérivées tangentielles.

Classification AMS. - 32A40, 32A25, 32F20, 32A37.