

55376  
1998  
3

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

**SUSPENSION DES  
FIBRATIONS DE GANEA  
ET INVARIANT DE HOPF**

Thèse soutenue le 11 décembre 1998

par

**Lucile VANDEMBROUCQ**

pour obtenir le titre de

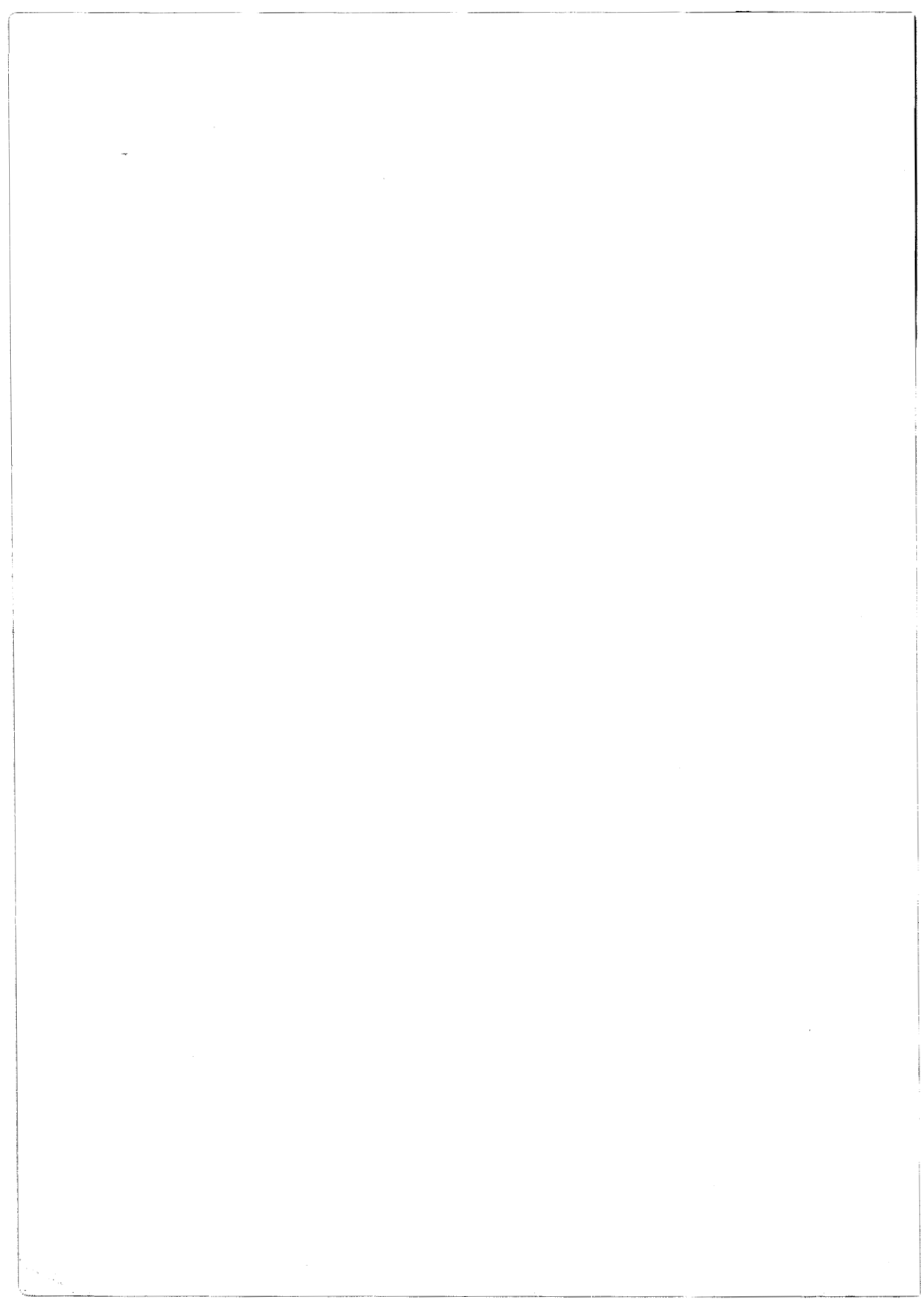
**Docteur en Mathématiques**

Composition du Jury :

<i>Président</i>	Jean-Michel LEMAIRE	<i>Université de Nice</i>
<i>Rapporteurs</i>	Yves FÉLIX Hans SCHEERER	<i>Université Catholique de Louvain Freie Universität Berlin</i>
<i>Examineurs</i>	Octavian CORNEA Pascal LAMBRECHTS	<i>Université de Lille 1 Université d'Artois</i>
<i>Directeur de Thèse</i>	Daniel TANRÉ	<i>Université de Lille 1</i>

Numéro d'ordre : 2377





UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

**SUSPENSION DES  
FIBRATIONS DE GANEA  
ET INVARIANT DE HOPF**

Thèse soutenue le 11 décembre 1998

par

**Lucile VANDEMBROUCQ**

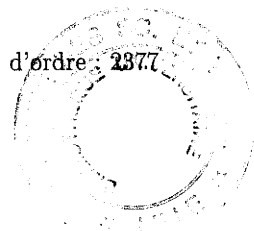
pour obtenir le titre de

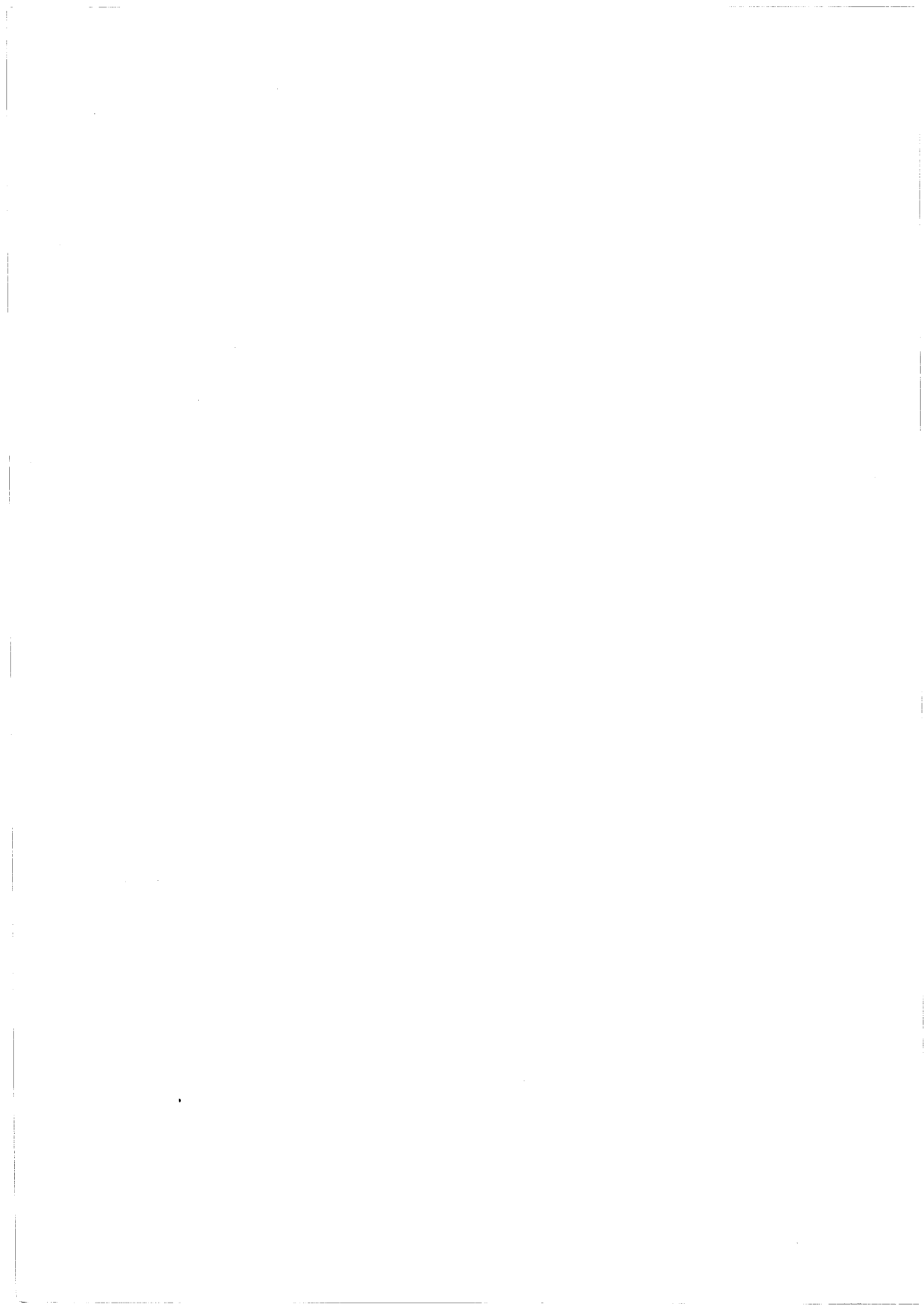
**Docteur en Mathématiques**

Composition du Jury :

<i>Président</i>	Jean-Michel LEMAIRE	<i>Université de Nice</i>
<i>Rapporteurs</i>	Yves FÉLIX	<i>Université Catholique de Louvain</i>
	Hans SCHEERER	<i>Freie Universität Berlin</i>
<i>Examineurs</i>	Octavian CORNEA	<i>Université de Lille 1</i>
	Pascal LAMBRECHTS	<i>Université d'Artois</i>
<i>Directeur de Thèse</i>	Daniel TANRÉ	<i>Université de Lille 1</i>

Numéro d'ordre : 2377





# Table des matières

Introduction	5
Notations et conventions	13
<b>I Suspension des fibrations de Ganea et invariant de Hopf</b>	<b>17</b>
<b>1 La catégorie et ses approximations</b>	<b>19</b>
1.1 La catégorie	19
1.2 La construction de Ganea	20
1.3 Caractérisation de Whitehead	23
1.4 Approximations de la catégorie	25
<b>2 La <math>\sigma</math>-catégorie</b>	<b>27</b>
2.1 Définition	27
2.2 Comparaison des invariants	28
2.3 Une version enrichie de la $\sigma$ -catégorie	33
2.4 $\sigma^i$ -catégorie rationnelle	37
<b>3 Attachement d'une cellule</b>	<b>47</b>
3.1 Espace de Ganea d'un espace d'adjonction	47
3.2 Invariant de Hopf et $\sigma$ -catégorie	51
3.3 Exemples	58
<b>4 <math>\sigma^i</math> catégorie d'un produit d'espaces</b>	<b>63</b>
4.1 Introduction	63
4.2 La conjecture de Ganea	65
4.3 Exemple d'Iwase et invariant de Hopf	67
4.4 $X$ -espaces et $X$ -applications	69
4.5 Démonstrations	73
4.6 Produit d'un espace et d'une sphère	75

4

**II Sur le transfert de Becker et Gottlieb 81**

**5 83**

5.1 Introduction . . . . . 83

5.2 Modèle d'une fibration . . . . . 84

5.3 Transfert . . . . . 85

5.4 Inclusion de la fibre . . . . . 90

**Bibliographie 95**

# Introduction

En 1934, L. Lusternik et L. Schnirelmann associent à une variété  $M$  un entier appelé *catégorie* de  $M$  qui permet d'estimer par défaut le nombre de points critiques d'une fonction différentiable définie sur  $M$  [31]. Quelques années plus-tard, R. H. Fox étend la définition de Lusternik et Schnirelmann aux espaces topologiques : si  $X$  est un espace topologique, la catégorie de  $X$  est le plus petit entier  $n$  pour lequel  $X$  peut-être recouvert par  $n + 1$  ouverts contractiles dans  $X$  [13]. Par exemple, la catégorie d'un espace contractile est 0, celle d'une sphère est 1. Cependant, malgré la simplicité de la définition, la catégorie se révèle être un invariant homotopique difficile à appréhender. Les difficultés apparaissent tout autant dans la détermination explicite de la catégorie d'un espace donné, même s'il s'agit d'un espace bien connu par ailleurs comme c'est le cas d'un groupe de Lie, que dans la recherche des propriétés de cet invariant. Ainsi, la question *peut-on calculer la catégorie d'un produit d'espaces  $X \times Y$  connaissant les catégories respectives de  $X$  et de  $Y$*  n'a toujours pas, à l'heure actuelle, une réponse complète.

Une étape importante dans l'étude de la catégorie réside dans les caractérisations introduites respectivement par G. Whitehead et T. Ganea [47] [14]. Celles-ci permettent, grâce à la construction d'espaces particuliers, d'exprimer la catégorie en termes d'existence de relèvement d'application ou de section. Il devient alors possible (ou en tout cas plus direct) d'utiliser les outils de la théorie homotopique (suites exactes d'homotopie, d'homologie, théorie de l'obstruction etc...) pour étudier la catégorie. Jouant un rôle central dans notre travail, la caractérisation de Ganea s'énonce à partir d'une suite de fibrations

$$(\mathcal{G}_n) \quad F_n(X) \xrightarrow{i_n(X)} G_n(X) \xrightarrow{g_n(X)} X$$

associée à tout espace  $X$ . Ganea montre que la catégorie de  $X$  est inférieure ou égale à  $n$  si et seulement si la fibration  $g_n(X)$  admet une section. Outre la formalisation de la catégorie qu'elles apportent, les caractérisations de Whitehead et de Ganea ont également suggéré des approximations de cet invariant

parmi lesquelles on trouve les catégories faibles  $wcat$  (au sens de Whitehead) et  $G-wcat$  (au sens de Ganea), l'invariant de Toomer  $e_k$  défini pour un corps  $\mathbf{k}$ ... L'étude de telles approximations permet d'aborder la catégorie aussi bien d'un point de vue calculatoire que d'un point de vue théorique. Dans cette perspective, nous nous intéressons à l'information contenue dans les fibrations de Ganea après suspension. Plus précisément nous définissons une version "suspendue" de la catégorie :

**Définition :** Pour  $i \geq 0$ ,  $\sigma^i cat X$  est le plus petit entier  $n$  pour lequel l'application  $\Sigma^i g_n(X) : \Sigma^i G_n(X) \rightarrow \Sigma^i X$  admet une section homotopique.

Nous obtenons ainsi une suite décroissante d'approximations de la catégorie dont la limite est notée  $\sigma cat X$ . Afin de guider l'étude de ces invariants, formulons les questions suivantes :

- Comment  $\sigma^i cat$  se situe-t-il parmi les autres approximations de la catégorie ?
- Comment calculer  $\sigma^i cat$  ?
- Quelles sont les propriétés de  $\sigma^i cat$  ?
- Que nous apprend-il sur la catégorie ?

L'enjeu de la première question est à la fois de cerner ces nouveaux invariants et d'examiner s'ils sont effectivement nouveaux. Nous dressons dans le chapitre 2 les inégalités

$$e_k(X) \leq \sigma cat X \leq \sigma^i cat X \leq \sigma^1 cat X = G-wcat X \leq \sigma^0 cat X = cat X$$

et montrons le cas d'égalité suivant :

**Théorème A.** *Si  $X$  est un CW-complexe  $(q-1)$ -connexe tel que  $dim(X) \leq q(cat X + 1) - 2$ , alors  $\sigma cat X = cat X$ .*

Nous montrons également que, y compris dans ce rang, les invariants  $e_k$  et  $\sigma cat$  sont en général différents. Il est d'ailleurs intéressant de remarquer que, contrairement à l'invariant de Toomer,  $\sigma cat$  rend compte des opérations de Steenrod. En revanche, lorsque l'espace  $X$  est un espace rationnel (complètement dépourvu de telles opérations), les nombres  $e_{\mathbf{Q}}(X)$  et  $\sigma^i cat(X)$  ( $i \geq 1$ ) coïncident. Cela nous fournit un premier moyen de calculer les invariants  $\sigma^i cat$  que nous complétons dans le chapitre 3 d'une étude des variations du comportement de  $\sigma^i cat$  lors d'un attachement de cellule. À la manière de Bernstein et Hilton [4], nous associons, à un espace  $X$  de catégorie  $k$  et à une application  $\alpha : S^p \rightarrow X$ , un élément  $H(\alpha)$  du groupe  $\pi_p(G_k(X))$ , appelé



*invariant de Hopf* et nous montrons

**Théorème B.** Soient  $X$  un CW complexe  $(q - 1)$ -connexe ( $q \geq 2$ ) de catégorie inférieure ou égale à  $k$  et  $s : X \rightarrow G_k(X)$  une section de  $g_k(X)$ . Considérons une application  $\alpha : S^p \rightarrow X$  ( $p \geq q+1$ ) et notons  $Y = X \cup_{\alpha} e^{p+1}$  sa cofibre homotopique. Pour tout  $i \geq 0$  :

- (a) Si  $\Sigma^i H(\alpha) = 0$  alors  $\sigma^i \text{cat} Y \leq k$ ,  
 (b) Si, de plus,  $\dim(X) \leq q(k+1) - 2$ , alors la réciproque est vraie i.e.  $\sigma^i \text{cat} Y \leq k$  implique  $\Sigma^i H(\alpha) = 0$ .

Nous pouvons alors, grâce à quelques techniques homotopiques, calculer les invariants  $\sigma^i \text{cat}$  sur des exemples. En particulier, nous montrons que chacune des inégalités énoncées ci-dessus peut être stricte.

Concernant les propriétés de  $\sigma^i \text{cat}$ , nous nous sommes essentiellement intéressés au comportement de ces invariants vis-à-vis du produit. En 1971, Ganea demandait si tout espace  $X$  vérifie l'égalité  $\text{cat}(X \times S^m) = \text{cat} X + 1$  [15]. Cette question, dont la version affirmative est connue comme étant la conjecture de Ganea, est restée longtemps ouverte. Très récemment N. Iwase [23] y a répondu par la négative en montrant que l'espace  $Q = S^2 \cup_{\alpha} e^{10}$ , où  $\alpha$  est un élément d'ordre 3 du groupe  $\pi_9(S^2)$ , vérifie  $\text{cat} Q = \text{cat}(Q \times S^n) = 2$  pour tout  $n$  plus grand que 2. Pour les invariants  $\sigma^i \text{cat}$ , nous montrons

**Théorème C.** Soit  $X$  un espace connexe par arcs. Pour tout  $i > 0$  et tout  $m \geq 1$ ,

$$\sigma^{i+m} \text{cat} X + 1 \leq \sigma^i \text{cat}(X \times S^m) \leq \sigma^i \text{cat} X + 1$$

En conséquence nous obtenons l'égalité  $\sigma \text{cat}(X \times S^m) = \sigma \text{cat} X + 1$ .

Compte tenu des travaux d'Iwase, la question de Ganea devient naturellement : pour quels espaces  $X$  a-t-on l'égalité  $\text{cat}(X \times S^n) = \text{cat} X + 1$ ? Les résultats déjà obtenus sur la conjecture de Ganea sont autant d'éléments de réponse à cette question. Ainsi grâce à K. Hess et B. Jessup, on peut affirmer que tout espace rationnel  $X$  vérifie l'égalité  $\text{cat}(X \times S^n) = \text{cat} X + 1$  [21] [27]. Plus récemment, J. Strom a montré qu'un CW-complexe  $X$   $(q - 1)$ -connexe dont la dimension est majorée par  $q(\text{cat} X + 1) - 2$  vérifie aussi cette égalité [41]. Mentionnons également les travaux de Y. Rudyak [36] qui, dans le prolongement de ceux de W. Singhof [39], donnent des conditions suffisantes en termes de dimension et de connexité pour qu'une variété vérifie la conjecture

de Ganea. La combinaison des théorèmes A, B et C nous permet à la fois de retrouver certains de ces résultats et de les compléter. Plus précisément, comme conséquence immédiate du théorème C nous obtenons la condition suffisante suivante :

*Si  $\sigma^{n+1}catX = catX$  alors  $cat(X \times S^k) = catX + 1$  pour tout  $k \leq n$ .*

La forme limite de ce critère rejoint une condition suffisante énoncée par Rudyak en termes de poids catégorique pour qu'un espace vérifie la conjecture de Ganea. En utilisant maintenant le théorème A, nous retrouvons le résultat de Strom :

*Si  $X$  est un CW-complexe  $(q-1)$ -connexe tel que  $dim(X) \leq q(catX + 1) - 2$ , alors  $cat(X \times S^n) = catX + 1$  pour tout  $n \geq 1$ .*

Et enfin, grâce au théorème C, nous obtenons

**Théorème D.** *Soit  $X$  un CW-complexe  $(q-1)$ -connexe considérons une application  $\alpha : S^p \rightarrow X$  ( $p \geq q+1$ ). Supposons que  $dim(X) \leq (catX+1)q-2$  et soit  $m \geq 1$ . Si  $\Sigma^{m+1}H(\alpha) \neq 0$  alors  $cat((X \cup_{\alpha} e^{p+1}) \times S^m) = cat(X \cup_{\alpha} e^{p+1}) + 1$ .*

Ce dernier résultat nous permet d'exhiber de nouveaux espaces vérifiant la conjecture de Ganea et pour lesquels la condition de Strom ne suffit pas.

Parallèlement à l'étude de  $\sigma^i cat$ , nous examinons une version enrichie de cet invariant. Cet enrichissement provient d'une structure supplémentaire liée à l'application diagonale. Si  $\bar{\Delta} : Y \rightarrow Y \wedge Y$  désigne la composée de l'application diagonale et de l'application d'identification  $Y \times Y \rightarrow Y \wedge Y$ , nous définissons

**Définition.** Pour  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma_{\bar{\Delta}}^i cat(X)$  est le plus petit entier  $n$  tel que la  $i^{\text{ème}}$  suspension de la  $n^{\text{ème}}$  fibration de Ganea  $\Sigma^i g_n(X) : \Sigma^i G_n(X) \rightarrow \Sigma^i X$  admet une section homotopique  $s : \Sigma^i X \rightarrow \Sigma^i G_n(X)$  rendant le diagramme suivant homotopiquement commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^i X & \xrightarrow{s} & \Sigma^i G_n X \\ \Sigma^i \bar{\Delta} \downarrow & & \downarrow \Sigma^i ((g_n(X) \wedge id) \circ \bar{\Delta}) \\ X \wedge \Sigma^i X & \xrightarrow{id \wedge s} & X \wedge \Sigma^i G_n X. \end{array}$$

Nous obtenons ainsi une suite d'approximations de la catégorie qui sont, a priori, plus proches de la catégorie que ne le sont les invariants  $\sigma^i cat$ . Nous

établissons quelques propriétés de  $\sigma_{\Delta}^i \text{cat}$  parmi lesquelles il est intéressant de mentionner l'inégalité

$$\sigma_{\Delta}^{i+n} \text{cat} X + 1 \leq \sigma_{\Delta}^i \text{cat}(X \times S^n) \text{ pour } i \geq 1, n \geq 1$$

et le fait que, si  $X$  est un espace rationnel, alors, pour tout  $i \geq 1$ ,  $\sigma_{\Delta}^i \text{cat} X$  est le plus petit  $n$  pour lequel l'application induite en cohomologie par la fibration  $g_n(X)$ , admet une rétraction de  $H^*(X; \mathbf{Q})$ -modules. Cette caractérisation de  $\sigma_{\Delta}^i \text{cat}$  pour les espaces rationnels permet, en particulier, de montrer que, sur certains exemples, cet invariant est effectivement strictement plus grand que  $\sigma^i \text{cat}$ .

L'étude des invariants  $\sigma \text{cat}$  et  $\sigma_{\Delta} \text{cat}$  constitue la première partie de ce texte. Dans une seconde partie, plus courte et complètement indépendante de la première, nous présentons un travail sur le transfert de Becker et Gottlieb.

Dans [18] D. Gottlieb construit, pour une fibration  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  dont la fibre  $F$  est une variété compacte, connexe, orientable, un transfert qui généralise celui des revêtements : le transfert est une application  $\tau : H^*(E; \mathbf{Z}) \rightarrow H^*(B; \mathbf{Z})$  de  $H^*(B; \mathbf{Z})$ -modules telle que la composée  $\tau \circ H^*(p)$  est la multiplication par  $\chi_F$ , la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $F$ . Cette construction repose sur le Théorème de l'inclusion de la fibre qui affirme qu'il existe une classe  $\alpha \in H^n(E; \mathbf{Z})$  vérifiant  $H^*(i)(\alpha) = \chi_F \cdot \omega$ , où  $\omega \in H^n(F; \mathbf{Z})$  désigne la classe fondamentale de  $F$ . Plus-tard, à partir d'une généralisation de la dualité de Spanier-Whitehead, Gottlieb et Becker [2] étendent ce transfert à toute fibration de fibre un CW-complexe fini. Nous renvoyons à [29] pour un exposé des travaux de Gottlieb et Becker sur le transfert.

L'objet de notre seconde partie est de montrer que le transfert défini par Becker et Gottlieb existe au niveau d'un modèle algébrique de la fibration  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  si les espaces  $E$  et  $B$  sont dans le domaine d'Anick et si  $F$  est un CW-complexe de dimension finie. Plus précisément, sous ces conditions, l'application  $p$  peut être modélisée par une KS-extension  $(\Lambda X, d) \xrightarrow{\psi} (\Lambda(X \oplus Y), d)$  et nous construisons un morphisme de  $\Lambda X$ -modules différentiels  $\tau : (\Lambda(X \oplus Y), d) \rightarrow (\Lambda X, d)$  tel que  $\tau(x) = \chi_F \cdot x$  pour tout  $x \in \Lambda X$ . Lorsque  $\chi_F \neq 0$ , le transfert définit une rétraction de  $\Lambda X$ -modules différentiels du morphisme  $\psi$ , et cela nous permet, en particulier, de minorer la catégorie de Lusternik et Schnirelmann du rationalisé de  $E$  par la catégorie du rationalisé de  $B$ . De plus, lorsque  $H^*(F; \mathbf{k})$  satisfait la dualité de Poincaré avec classe fondamentale  $\omega \in H^n(F; \mathbf{k})$ , nous donnons la construction explicite d'un cocycle  $z \in \Lambda(X \oplus Y)$  telle que  $i^*([z]) = \chi_F \cdot \omega$ ,  $[z]$  désignant la classe de  $z$

dans  $H^n(\Lambda(X \oplus Y)) = H^n(E; \mathbf{k})$ .

Le plan de ce travail est le suivant :

Après quelques pages de généralités dans lesquelles nous fixons les notations que nous utilisons, nous entamons la première partie consacrée à la catégorie de Lusternik et Schnirelmann.

Le Chapitre 1 est essentiellement un rappel sur la catégorie : nous y donnons la définition de cet invariant, ses premières propriétés, ses caractérisations ainsi que les approximations que nous considérerons dans la suite.

Dans le Chapitre 2, nous posons la définition de  $\sigma cat$  et le comparons aux autres approximations de la catégorie. Nous donnons également la définition de  $\sigma_{\Delta} cat$  et calculons ces invariants dans le cas particulier des espaces rationnels.

Le Chapitre 3 est consacré à l'étude du comportement de  $\sigma cat$  lors de l'attachement d'une cellule. Après avoir caractérisé ce comportement grâce aux suspensions d'un invariant de Hopf, nous continuons la comparaison de  $\sigma cat$  avec les autres approximations de la catégorie en calculant tous ces invariants sur quelques exemples explicites.

Dans le chapitre 4, qui clôture notre première partie, nous nous intéressons aux propriétés de  $\sigma cat$  et de  $\sigma_{\Delta} cat$  relatives aux produits de deux espaces. En particulier, nous y présentons les applications de nos résultats à la conjecture de Ganea.

Vient ensuite la deuxième partie sur le transfert de Becker et Gottlieb. D'un seul tenant, cette partie contient une construction du morphisme de transfert au niveau du modèle d'une fibration ainsi qu'une démonstration dans ce cadre du théorème de l'inclusion de la fibre.

Pour terminer, je voudrais remercier tous ceux qui m'ont entourée durant ces années de travail. Daniel Tanré a encadré cette thèse avec patience et exigence. Je lui suis très reconnaissante du sérieux et de l'ouverture avec lesquels il s'est impliqué dans mon travail et je garderai un très bon souvenir de nos discussions. Je le remercie également de s'être toujours soucie de ce que mes conditions de travail soient les meilleures possibles. Durant ces deux dernières années, j'ai passé beaucoup de temps à Louvain-la-Neuve où l'équipe d'Yves Félix m'a accueillie sans réserve ni formalité. En plus de cette généreuse hospitalité, Yves Félix m'a souvent reçue dans son bureau pour parler de mathématiques. C'est un grand plaisir pour moi qu'il ait accepté d'être rapporteur de ma thèse. Lors d'un séjour à Oberwolfach, j'ai eu d'intéressantes discussions avec Hans Scheerer. J'ai beaucoup apprécié l'intérêt qu'il a porté à mes questions et le remercie d'avoir bien voulu être

rapporteur. Jean-Michel Lemaire me fait l'honneur de présider le jury, je lui en suis très reconnaissante. C'est aussi une grande joie pour moi de compter Octave Cornea et Pascal Lambrechts parmi les membres du jury. Ils m'ont tous deux donné beaucoup de conseils et m'ont constamment soutenue de leur enthousiasme. Je voudrais aussi remercier Steve Halperin qui m'a donné de précieuses indications pour la partie concernant le transfert. Thomas et moi avons passé de longues heures à parler de mathématiques. Nos discussions quotidiennes ont éclairci de nombreux points et m'ont beaucoup apporté. Merci.



## Notations et conventions

Un espace topologique pointé  $(X, x_0)$  est dit *bien pointé* si le point  $x_0$  est fermé dans  $X$  et si la paire  $(X, x_0)$  a la propriété d'extension des homotopies. Par exemple, un CW-complexe  $X$  dont le point base est choisi parmi les 0-cellules est toujours bien pointé. Ainsi, l'intervalle  $\mathbf{I} = [0, 1]$  muni du point base  $*$  = 0 et la  $n$ -sphère  $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$  munie du point base  $(1, 0, \dots, 0)$  sont des espaces bien pointés.

Dans tout ce texte, nous entendrons par *espace* un espace topologique de Hausdorff compactement engendré bien pointé du type d'homotopie d'un CW-complexe. Un tel espace est automatiquement du type d'homotopie pointée d'un CW-complexe pointé par une 0-cellule. Le point base est généralement noté  $*$ . Nous travaillons dans la catégorie constituée de ces espaces et dans laquelle les morphismes, appelés *applications*, sont les applications continues préservant les points de base. Les fibrations, cofibrations, et équivalences d'homotopie sont respectivement repérées par les symboles :  $\rightarrow$ ,  $\hookrightarrow$  et  $\xrightarrow{\sim}$ . Deux applications homotopes ( $f \simeq g$ ) sont toujours, sauf mention du contraire, homotopes relativement au point base.

À deux applications  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X \rightarrow Z$  nous associons l'espace

$$Z_{f,g} = \frac{X \times \mathbf{I} \cup Y \cup Z}{(x, 0) \sim f(x), (x, 1) \sim g(x), (*, t) \sim (*, 0)}$$

En particulierisant les applications  $f$  et  $g$  nous obtenons les constructions réduites suivantes :

Le cylindre  $IX := Z_{id,id}$ , le cône  $CX := Z_{id,*}$ , la suspension  $\Sigma X := Z_{*,*}$ , le cylindre de l'application  $f$  (mapping cylinder)  $Z_f := Z_{f,id} = Y \cup_f IX$  et la cofibre homotopique (mapping cône)  $C_f := Z_{f,*} = Y \cup_f CX$ . Si  $pr_X : X \times Y \rightarrow X$  et  $pr_Y : X \times Y \rightarrow Y$  désignent les projections canoniques, le joint de  $X$  et  $Y$  est l'espace  $X * Y = Z_{pr_X, pr_Y}$ .

Certaines de ces constructions admettent des descriptions alternatives utilisant le smash-produit  $\wedge$  qui est, puisque les espaces sont compactement engendrés, associatif et commutatif à homéomorphisme naturel près. Ainsi, le cône  $CX$  et la suspension  $\Sigma X$  sont naturellement homéomorphes aux espaces  $\mathbf{I} \wedge X$  et  $S^1 \wedge X$ . Notons, pour  $i \geq 1$ ,  $\Sigma^i X$  la suspension  $i$  fois itérée de  $X$  i.e.  $\Sigma^1 X := \Sigma X$  et  $\Sigma^i X := \Sigma(\Sigma^{i-1} X)$ . Par convention  $\Sigma^0 X = X$ . La  $i^{\text{ème}}$  suspension de  $X$  est naturellement homéomorphe à  $S^i \wedge X$ . Le joint  $X * Y$  est, quant à lui, naturellement homotopiquement équivalent à  $\Sigma(X \wedge Y)$ . Toute application  $f : X \rightarrow Y$  se décompose en une cofibration suivie d'une équivalence d'homotopie. Nous utiliserons la décomposition suivante :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \nearrow \\ & Z_{f,id} & \end{array}$$

dans laquelle la cofibration  $X \rightarrow Z_{f,id}$  est l'inclusion  $x \mapsto (x, 1)$  et l'équivalence d'homotopie  $\varphi : Z_{f,id} = Y \cup_f IX \rightarrow Y$  est définie par  $\varphi(x, t) = f(x)$  et  $\varphi(y) = y$  pour  $x \in X, t \in \mathbf{I}$  et  $y \in Y$ . Remarquons que la cofibre homotopique de  $f$  est exactement la cofibre de la cofibration associée.

Une suite  $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$  est une *cofibration homotopique* si le composé  $\rho \circ \iota$  est homotopiquement triviale et si l'application induite  $C_i \rightarrow C$  est une équivalence d'homotopie (ou, de façon équivalente, si l'application induite  $C \rightarrow Z_i/A$  est une équivalence d'homotopie).

Décrivons à présent les versions duales au sens d'Eckmann et Hilton de ces différents objets. Sous cette dualité l'espace  $X^{\mathbf{I}}$  des chemins libres  $\lambda : \mathbf{I} \rightarrow X$  pointé par le chemin constant  $*$  correspond au cylindre  $IX$ . Notons, pour  $t \in \mathbf{I}$ ,  $ev_t : X^{\mathbf{I}} \rightarrow X$  l'application d'évaluation en  $t$  i.e.  $ev_t(\lambda) = \lambda(t)$ . À deux applications  $f : Y \rightarrow X$  et  $g : Z \rightarrow X$ , on associe l'espace  $P_{f,g} := \{(\lambda, y, z) \in X^{\mathbf{I}} \times Y \times Z \mid ev_0(\lambda) = \lambda(0) = f(y) \text{ et } ev_1(\lambda) = \lambda(1) = g(z)\}$ . En particulierisant les applications, nous obtenons l'espace des chemins d'origine fixée  $PX := P_{id,*} = \{\lambda \in X^{\mathbf{I}} \mid \lambda(1) = *\}$ , l'espace des lacets  $\Omega X := P_{*,*} = \{\lambda \in X^{\mathbf{I}} \mid \lambda(0) = \lambda(1) = *\}$ , l'espace des chemins de l'application  $f$  (mapping path space)  $P_f := P_{f,id} = \{(\lambda, y) \in X^{\mathbf{I}} \times Y \mid ev_0(\lambda) = \lambda(0) = f(y)\}$  et la fibre homotopique  $F_f := P_{f,*}$ . Comme précédemment, toute application  $f : Y \rightarrow X$  se décompose en une équivalence d'homotopie suivie d'une fibration



et nous utiliserons la décomposition suivante :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow \sim & \nearrow \\ & P_{f,id} & \end{array}$$

L'équivalence d'homotopie  $Y \xrightarrow{\sim} P_{f,id}$  est l'application définie par  $y \mapsto (c_{f(y)}, y)$  où  $c_{f(y)}$  désigne le chemin constant en  $f(y)$  et la fibration  $P_{f,id} \rightarrow X$  est l'évaluation en 0.

Une suite  $F \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} B$  est une *fibration homotopique* si le composé  $poi$  est homotopiquement trivial et si l'application induite  $F \rightarrow F_f$  est une équivalence d'homotopie.

Les foncteurs  $\Sigma$  et  $\Omega$  constituent une paire de foncteurs adjoints de la catégorie des espaces dans elle-même. Cela signifie qu'il existe des bijections naturelles

$$[\Sigma A, B] \stackrel{\sharp}{\cong} [A, \Omega B]$$

inverses l'une de l'autre. De plus, les applications  $\sharp$  et  $\flat$  préservent les lois de groupes. L'application  $id_{\Omega B}^{\sharp} : \Sigma \Omega B \rightarrow B$  est l'application d'évaluation  $[\omega, t] \mapsto \omega(t)$  ( $\omega \in \Omega B$ ,  $t \in \mathbb{I}$ ) que nous noterons souvent  $ev$ . L'application  $id_{\Sigma A}^{\flat} : A \rightarrow \Omega \Sigma A$ , quant à elle, associe à un point  $a \in A$  le lacet  $\omega_a$  défini par  $\omega_a(t) = [a, t] \in \Sigma A$ . Remarquons que les relations suivantes sont satisfaites :

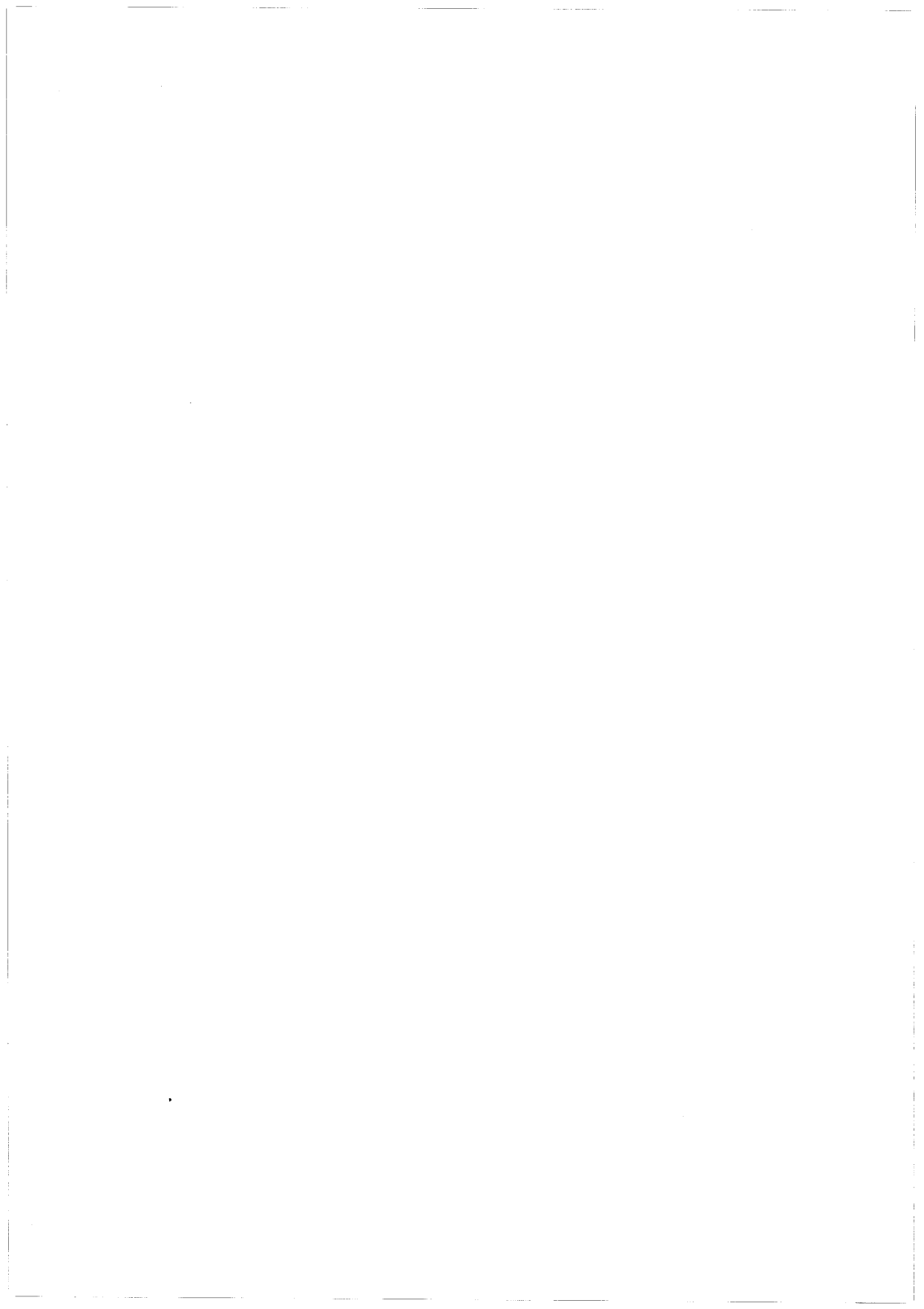
une application  $f : \Sigma A \rightarrow B$  coïncide avec la composée  $\Sigma A \xrightarrow{\Sigma f^{\sharp}} \Sigma \Omega B \xrightarrow{id_{\Omega B}^{\sharp}} B$  et une application  $g : A \rightarrow \Omega B$  se décompose sous la forme  $A \xrightarrow{id_{\Sigma A}^{\flat}} \Omega \Sigma A \xrightarrow{\Omega g^{\flat}} \Omega B$ .

Enfin, si  $\mathbf{k}$  un corps commutatif et si  $V = \{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  est un  $k$  espace vectoriel gradué (evg), nous dirons (par abus) qu'un élément  $v \in V_i$  est un *élément* de  $V$  de degré  $i$  et nous noterons  $|v| = i$ . Nous noterons parfois la graduation en haut en utilisant la convention suivante  $V^i = V_{-i}$ . La suspension (resp. désuspension) d'un evg  $V$  est l'evg  $sV$  (resp.  $s^{-1}V$ ) défini par  $(sV)_i = V_{i-1}$  (resp.  $(s^{-1}V)_i = V_{i+1}$ ). Si  $V$  est connexe i.e.  $V_0 = \mathbf{k}$  et  $V_i = 0$  pour  $i < 0$ , on note  $\Sigma V$ , l'evg  $\mathbf{k} \oplus s\bar{V}$  où  $\bar{V} = V_{>0}$ . De même, si  $\varphi : V \rightarrow W$  est un morphisme entre evg connexes tel que  $\varphi(1) = 1$ ,  $\Sigma\varphi$  désigne le morphisme  $\mathbf{k} \oplus s\bar{\varphi}$  et  $\Sigma^{-1}\varphi$  le morphisme  $\mathbf{k} \oplus s^{-1}\bar{\varphi}$ . L'homologie d'un espace vectoriel gradué différentiel (evgd)  $(V, d)$  est notée  $H(V, d)$ . Un morphisme d'evgd qui induit un isomorphisme en homologie est repéré par le signe " $\sim$ " et appelé *quasi-isomorphisme*.



## Première partie

# Suspension des fibrations de Ganea et invariant de Hopf



# Chapitre 1

## La catégorie et ses approximations

La catégorie de Lusternik et Schnirelmann fut introduite en 1934 pour minorer le nombre de points critiques d'une fonction différentiable définie sur une variété [31]. Des variétés, la notion fut ensuite étendue par R. Fox aux espaces topologiques [13]. Nous adoptons la version "pointée" de la définition de Fox. Après avoir énoncé les premières propriétés de la catégorie, nous présentons la caractérisation de cet invariant établie par T. Ganea en 1967 [14]. Celle-ci traduit en termes d'existence de section la catégorie d'un espace et joue un rôle central dans notre travail. Dans la section 3 nous détaillons une autre caractérisation de la catégorie, antérieure à celle de Ganea et due à G. Whitehead [47]. Ces caractérisations suggèrent la définition d'approximations de la catégorie dont la dernière section fera l'exposé. Dans tout ce chapitre, les résultats sont énoncés sans démonstration et sont accompagnés, sauf s'ils sont immédiats, d'une ou plusieurs références.

### 1.1 La catégorie

Soit  $X$  un espace. Un ouvert  $U \subset X$  contenant le point de base est dit *contractile dans  $X$*  si l'inclusion  $U \hookrightarrow X$  est homotopiquement triviale.

**Définition 1.1.1.** La catégorie de  $X$ , notée  $catX$ , est le plus petit  $n \in \mathbb{N}$  pour lequel  $X$  peut être recouvert par  $n + 1$  ouverts contractiles dans  $X$ . Si aucun entier ne vérifie cette propriété, on pose  $catX = \infty$ .

Par exemple, la catégorie d'un espace contractile est 0. La sphère  $S^n$

peut, quant à elle, être recouverte par les deux calottes sphériques  $U_0 = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} > -\frac{1}{2}\}$  et  $U_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} < \frac{1}{2}\}$  toutes deux contractiles dans  $S^n$ . Ce recouvrement est minimal et la catégorie de  $S^n$  est 1.

La première qualité de la catégorie est d'être un invariant homotopique. Cela provient de son comportement vis-à-vis d'une relation de domination définie pour les espaces. Plus précisément :

On dit qu'un espace  $Y$  domine un espace  $X$  s'il existe des applications  $i : X \rightarrow Y$  et  $r : Y \rightarrow X$  telles que  $r \circ i \simeq id_X$ .

**Proposition 1.1.2.** *Si l'espace  $Y$  domine l'espace  $X$ , alors  $cat X \leq cat Y$ .*

Deux espaces  $X$  et  $Y$  ont le même type d'homotopie si et seulement s'ils se dominent mutuellement. Il en découle :

**Corollaire 1.1.3.** *La catégorie est un invariant du type d'homotopie.*

**Remarque.** Selon notre définition, tout espace contient dans son type d'homotopie un CW-complexe bien pointé. Or, pour un espace normal, bien pointé et connexe par arcs, la définition 1.1.1 est équivalente à sa version "non pointée". Il en résulte que la seule différence entre ces deux définitions de la catégorie concerne uniquement les espaces non connexes par arcs qui, selon notre définition (i.e. déf. 1.1.1), sont toujours de catégorie infinie.

**Proposition 1.1.4.** *Soit  $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$  une cofibration homotopique. Alors  $cat C \leq cat B + 1$ .*

**Proposition 1.1.5.** *Soit  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  une fibration. Alors  $cat(E \cup CF) \leq cat B$ .*

## 1.2 La construction de Ganea

Un espace  $X$  est contractile si et seulement si la fibration des chemins  $ev_0 : PX \rightarrow X$  admet une section. Plus généralement, Ganea a défini, par récurrence à partir de la fibration des chemins, une suite de fibrations

$$(\mathcal{G}_n) \quad F_n(X) \xrightarrow{in(X)} G_n(X) \xrightarrow{g_n(X)} X$$

dans lesquelles  $cat G_n(X) \leq cat X$  et qui permettent de caractériser la catégorie en termes d'existence de sections.

Rappelons cette construction : posons  $F_0(X) = \Omega X$ ,  $G_0(X) = PX$ ,  $g_0(X) = ev_0$  et supposons avoir construit  $(\mathcal{G}_n)$ . Considérons l'application  $g'_{n+1} : G_n(X) \cup$

$CF_n(X) \rightarrow X$  qui prolonge  $g_n(X)$  en envoyant le cône sur le point de base  $*$ . La fibration  $g_{n+1}(X)$  est obtenue en décomposant l'application  $g'_{n+1}$  en une équivalence d'homotopie suivie d'une fibration

$$\begin{array}{ccc}
 G_n(X) \cup CF_n(X) & \xrightarrow{g'_{n+1}} & X \\
 \searrow \alpha_{n+1} \sim & & \nearrow g_{n+1}(X) \\
 & P_{g'_{n+1}} = G_{n+1}(X) &
 \end{array}$$

Notons  $F_{n+1}(X)$  la fibre de  $g_{n+1}(X)$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega X & \longrightarrow & F_1(X) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_n(X) & \longrightarrow & F_{n+1}(X) \\
 \downarrow i_0(X) & & \downarrow i_1(X) & & & & \downarrow i_n(X) & & \downarrow i_{n+1}(X) \\
 PX & \longrightarrow & G_1(X) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & G_n(X) & \longrightarrow & G_n(X) \cup CF_n(X) & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & G_{n+1}(X) \\
 & \searrow g_0(X) & & \searrow g_n(X) & & & & \searrow g_{n+1}(X) & & & \\
 & & & & & & X & & & &
 \end{array}$$

**Théorème 1.2.1** ([14]). *La catégorie de  $X$  est le plus petit  $n \in \mathbb{N}$  pour lequel la fibration  $g_n(X)$  admet une section homotopique i.e. il existe une application  $s : X \rightarrow G_n(X)$  telle que  $g_n(X) \circ s \simeq id_X$ .*

**Remarque.** Puisque l'application  $g_n(X)$  est une fibration, on peut toujours supposer que la section est exacte. Autrement dit,  $cat X \leq n$  si, et seulement s'il existe une application  $s : X \rightarrow G_n(X)$  telle que  $g_n(X) \circ s = id_X$ .

Les fibrations  $g_n(X)$  et les espaces totaux  $G_n(X)$  sont respectivement appelés *fibrations de Ganea* et *espaces de Ganea* de l'espace  $X$ .

Notons les propriétés suivantes de la construction de Ganea :

- La construction est fonctorielle,
- $cat G_n(X) \leq n$  si  $n \leq cat X$  (cf. Prop. 1.1.4),
- $cat G_n(X) = cat X$  si  $n \geq cat X$  (cf. [5]),
- L'espace  $F_n(X)$  a le type d'homotopie du joint itéré  $*^{n+1} \Omega X$  de  $n + 1$  copies de  $\Omega X$  (cf. [16]),
- Si  $X_*$  désigne la composante connexe du point base, alors, pour tout  $n \geq 0$ ,  $F_n(X) = F_n(X_*)$  et  $G_n(X) = G_n(X_*)$ . Les espaces  $F_n(X)$  pour  $n \geq 1$  et  $G_n(X)$  pour  $n \geq 0$  sont connexes par arcs.

- La première fibration  $g_1(X) : G_1(X) \rightarrow X$  est équivalente, au-dessus de  $X$ , à l'application d'évaluation  $ev = id_{\Omega X}^{\#} : \Sigma\Omega X \rightarrow X$  définie par  $ev([w, t]) = w(t)$ .

Précisons le dernier point. Considérons l'équivalence d'homotopie  $C\Omega X \rightarrow PX$  qui à une classe  $[\omega, t]$  ( $\omega \in \Omega X$ ,  $t \in [0, 1]$ ) associe le chemin  $\omega_t$  défini par  $\omega_t(r) = \omega(rt)$ . Cette application induit une équivalence d'homotopie  $\kappa : \Sigma\Omega X \rightarrow G_1(X)$  telle que  $g_1(X) \circ \kappa = ev$ . L'application d'évaluation n'est pas une fibration, cependant tout inverse à droite donne par composition avec  $\kappa$  une section de la fibration  $g_1(X)$ . Il est parfois plus aisé de construire un tel inverse à droite. C'est par exemple le cas si l'espace  $X$  est une sphère  $S^q$  ou, plus généralement, une suspension  $\Sigma A$  puisque, par l'adjonction, l'application  $\Sigma id_{\Sigma A}^{\#} : \Sigma A \rightarrow \Sigma\Omega\Sigma A$  vérifie  $id_{\Sigma A} = id_{\Omega\Sigma A}^{\#} \circ \Sigma id_{\Sigma A}^{\#}$ . En conséquence la composée  $\Sigma A \xrightarrow{\Sigma id_{\Sigma A}^{\#}} \Sigma\Omega\Sigma A \xrightarrow{\kappa} G_1(\Sigma A)$  est une section de  $g_1(\Sigma A)$  et les espaces qui sont des suspensions sont de catégorie 1. De plus, lorsque  $X$  est une sphère  $S^q$  ( $q \geq 1$ ), la fibration  $g_1(S^q)$  est, compte tenu de la connexité de  $F_1(S^q) \sim \Omega S^q * \Omega S^q$ , une  $(2q - 1)$ -équivalence. Il en résulte que la section de  $g_1(S^q)$  décrite précédemment est unique à homotopie près pour  $q > 1$ . Plus généralement, si  $X$  est  $(q - 1)$ -connexe, la fibration  $g_n(X) : G_n(X) \rightarrow X$  est une  $q(n + 1) - 1$ -équivalence. Par conséquent  $cat X \leq n$  pourvu que  $X$  est un CW-complexe de dimension inférieure ou égale à  $q(n + 1) - 1$ . En outre, la fibration  $g_n(X)$  admet une unique section (à homotopie près) lorsque l'inégalité est stricte.

Les fibrations de Ganea ne sont pas les seules à "calculer" la catégorie d'un espace  $X$ . Par exemple, une application équivalente à  $g_n(X)$  au-dessus de  $X$  peut permettre de détecter si la catégorie est inférieure ou égale à  $n$ . Une telle application rentre dans le cadre plus général des  $n$ -LS applications définies par H. Scheerer et D. Tanré [37] :

**Définition 1.2.2.** Une application  $\tilde{g}_n : \tilde{G}_n(X) \rightarrow X$  est une  $n$ -LS application s'il existe un diagramme commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{G}_n(X) & \xrightarrow{\psi} & G_n(X) & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{G}_n(X) \\ & \searrow \tilde{g}_n & \downarrow g_n(X) & \swarrow \tilde{g}_n & \\ & & X & & \end{array}$$

i.e.  $g_n(X) \circ \psi \simeq \tilde{g}_n$  et  $\tilde{g}_n \circ \varphi \simeq g_n(X)$ .

Dans les chapitres 2 et 4 nous expliciterons des  $n$ -LS applications pour les espaces rationnels et pour le produit d'un espace et d'une sphère  $X \times S^m$ .



### 1.3 Caractérisation de Whitehead

Intéressons-nous à présent à la définition alternative de la catégorie proposée par G. Whitehead [47].

Notons pour un espace  $X$  et pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\Delta^{n+1} : X \rightarrow X^{n+1}$  l'application diagonale,  $\Delta^{n+1}(x) = (x, x, \dots, x)$ . En 1956, G. Whitehead a prouvé que le nombre minimal d'ouverts contractiles dans  $X$  nécessaires pour recouvrir  $X$  tout entier correspond à la possibilité de déformer, pour un certain  $n$ , l'application  $\Delta^{n+1}$  dans un sous-espace de  $X^{n+1}$  appelé *fat wedge* et noté  $T^n(X)$ . Plus précisément,  $T^n(X) = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in X^{n+1} \mid \exists i \in [1, n+1] \mid x_i = *\}$  est le sous-espace des  $(n+1)$ -uplets dont au moins l'une des composantes est le point de base. Notons  $j^n(X) : T^n(X) \rightarrow X^{n+1}$  l'inclusion du fat wedge dans  $X^{n+1}$ .

**Théorème 1.3.1** ([47]). *Soit  $X$  un espace. La catégorie de  $X$  est le plus petit  $n \in \mathbf{N}$  pour lequel la diagonale  $\Delta^{n+1} : X \rightarrow X^{n+1}$  se déforme à homotopie près dans le fat wedge  $T^n(X)$ . Autrement dit,*

$$\text{cat} X = \inf \{n \in \mathbf{N} \mid \exists \phi : X \rightarrow T^n(X) \text{ vérifiant } j^n(X) \circ \phi \simeq \Delta^{n+1}\}.$$

Si  $X = \Sigma A$  est une suspension, un relèvement de la diagonale  $\Delta : \Sigma A \rightarrow \Sigma A \times \Sigma A$  est donné par l'application de pincement

$$\begin{aligned} \nu : \Sigma A &\rightarrow T^1(\Sigma A) = \Sigma A \vee \Sigma A \\ [a, t] &\mapsto \begin{cases} ([a, 2t], *) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (*, [a, 2t - 1]) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Lorsque  $X$  est une sphère  $S^n$ , l'application  $j^1(S^n) : S^n \vee S^n \rightarrow S^n \times S^n$  est une  $(2n-1)$ -équivalence, le pincement s'avère ainsi être l'unique, à homotopie près, relèvement de la diagonale. Les suspensions ne recouvrent pas la totalité des espaces de catégorie 1 encore appelés *co-H-espaces*. Ces espaces sont très étudiés en théorie de l'homotopie notamment parce qu'ils constituent la version duale des H-espaces et qu'ils permettent de munir les ensembles de classes d'homotopie  $[X, Y]$  d'une loi de composition. Les premiers exemples de co-H-espaces qui ne sont pas des suspensions sont dus à Bernstein et Hilton [4] et sont de la forme  $S^3 \cup_{\alpha} e^{2p+1}$  où  $p$  est un nombre premier impair et  $\alpha \in \pi_{2p}(S^3)$  est un élément d'ordre  $p$ .

Des théorèmes 1.2.1 et 1.3.1, il apparaît que l'existence d'une section pour la  $n^{\text{ème}}$  fibration de Ganea équivaut à l'existence d'une application relevant la  $(n+1)^{\text{ème}}$  diagonale dans le fat wedge. Gilbert, en 1968, montre que ces deux applications se déduisent l'une de l'autre par l'intermédiaire

d'un produit fibré et établit ainsi un lien direct entre les caractérisations de Whitehead et Ganea [17]. En 1991, J-P Doeraene [6] montre que ce lien est de nature catégorique en ce sens qu'il existe dans toute catégorie modèle au sens de Quillen [35] munie d'un axiome supplémentaire dit "axiome du cube". Précisons le produit fibré utilisé par Gilbert.

Convertissons l'application  $j^n(X) : T^n(X) \rightarrow X^{n+1}$  en une fibration :

$$\begin{array}{ccc}
 T^n(X) & \xrightarrow{j^n(X)} & X^{n+1} \\
 \searrow \sim & & \nearrow ev_0 \\
 & P_{j^n(X)} = (X^{n+1})^{[0,1]} \times_{(ev_1, j^n(X))} T^n(X) & 
 \end{array}$$

et considérons  $p_n(X) : P_n(X) \rightarrow X$  la fibration induite par  $ev_0$  le long de  $\Delta^{n+1} : X \rightarrow X^{n+1}$ . Gilbert et Doeraene ont montré que cette fibration avait le même type d'homotopie fibrée que la  $n^{ième}$  fibration de Ganea (cf aussi [28]). Nous obtenons ainsi un diagramme commutatif dans lequel le carré central est un produit fibré et qui établit une bijection entre les relèvements de la diagonale et les sections de  $g_n(X)$  :

$$\begin{array}{ccccc}
 G_n(X) & \xrightarrow{\sim} & P_n(X) & \longrightarrow & P_{j^n(X)} & \xleftarrow{\sim} & T^n(X) \\
 \searrow g_n(X) & & \downarrow p_n(X) & & \downarrow ev_0 & & \swarrow j^n(X) \\
 & & X & \xrightarrow{\Delta^{n+1}} & X^{n+1} & & 
 \end{array}$$

Remarquons qu'un point de  $P_n(X)$  est un  $(n + 1)$ -uplet  $(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{n+1})$  de chemins de  $X$  commençant tous en un même  $x \in X$  et dont l'un, au moins, finit au point de base i.e. pour tout  $i$ ,  $\lambda^i(0) = x$  et il existe  $i_0$  tel que  $\lambda^{i_0}(1) = *$ . Notons  $(x, \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{n+1})$  un tel point. L'application  $p_n(X)$  envoie ce point sur  $x$ , l'origine commune des  $n + 1$  chemins.

La projection  $P_{j^n(X)} \rightarrow T^n(X)$  est un inverse homotopique de l'application  $T^n(X) \rightarrow P_{j^n(X)}$ , nous obtenons ainsi un diagramme naturel et homotopiquement commutatif qui est un produit fibré homotopique au sens de Mather [33]

$$\begin{array}{ccc}
 G_n(X) & \xrightarrow{\gamma_n} & T^n(X) \\
 g_n(X) \downarrow & & \downarrow j^n(X) \\
 X & \xrightarrow{\Delta^{n+1}} & X^{n+1}
 \end{array}$$

En particulier  $F_n(X)$  est la fibre homotopique de  $j^n(X) : T^n(X) \rightarrow X^{n+1}$  et nous notons  $\vartheta_n(X) : F_n(X) \rightarrow T^n(X)$  l'application induite.

## 1.4 Approximations de la catégorie

La détermination explicite de la catégorie se révèle difficile. Afin d'obtenir des résultats partiels, de nombreuses approximations ont été introduites, certaines par défaut, d'autres par excès. Dans tout ce travail, nous nous intéresserons plus particulièrement aux approximations par défaut.

Notons  $\mathcal{C}_n(X)$  la cofibre homotopique de  $g_n(X)$  et  $\rho_n(X) : X \rightarrow \mathcal{C}_n(X)$  l'application induite. La cofibre de  $j^n(X) : T^n(X) \rightarrow X^{(n+1)}$ , notée  $X^{(n+1)}$ , est le smash-produit de  $n + 1$  copies de  $X$ . Notons  $q_{n+1} : X^{(n+1)} \rightarrow X^{(n+1)}$  l'application d'identification. La composée  $q_{n+1} \circ \Delta^{n+1} : X \rightarrow X^{(n+1)}$ , notée  $\bar{\Delta}^{n+1}$ , est dite *diagonale réduite*. Cette application induit une application  $c_n : \mathcal{C}_n(X) \rightarrow X^{(n+1)}$  et un diagramme homotopiquement commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 G_n(X) & \xrightarrow{\gamma_n} & T^n(X) \\
 g_n(X) \downarrow & & \downarrow j^n(X) \\
 X & \xrightarrow{\Delta^{n+1}} & X^{(n+1)} \\
 \rho_n(X) \downarrow & \searrow \bar{\Delta}^{n+1} & \downarrow q_{n+1} \\
 \mathcal{C}_n(X) & \xrightarrow{c_n} & X^{(n+1)}
 \end{array}$$

Ce diagramme suggère les définitions suivantes de versions "faibles" de la catégorie introduites respectivement par Gilbert en 1966 [17] et par Berstein et Hilton en 1959 [4].

**Définition 1.4.1.** Soit  $X$  un espace,

- $G\text{-}wcat(X)$  est le plus petit  $n \in \mathbf{N}$  tel que l'application  $\rho_n(X) : X \rightarrow \mathcal{C}_n(X)$  est homotopiquement triviale;
- $wcat(X)$  est le plus petit  $n \in \mathbf{N}$  tel que la diagonale réduite  $\bar{\Delta}^{n+1} : X \rightarrow X^{(n+1)}$  est homotopiquement triviale.

Nous nous intéresserons également à l'*invariant de Toomer* qui est d'abord défini à partir de la suite spectrale de Milnor-Moore, mais que Toomer décrit aussitôt de la façon suivante [45] :

**Définition 1.4.2.** Soit  $\mathbf{k}$  un corps commutatif et  $X$  un espace. L'invariant de Toomer de l'espace  $X$ , noté  $e_{\mathbf{k}}(X)$ , est le plus petit  $n \in \mathbf{N}$  pour lequel l'application linéaire  $H_*(g_n(X); \mathbf{k}) : H_*(G_n(X); \mathbf{k}) \rightarrow H_*(X; \mathbf{k})$ , induite en homologie par la  $n^{\text{ème}}$  fibration de Ganea, est surjective.

**1.4.3.** Si  $X$  est un CW-complexe 1-connexe de type fini Halperin et Lemaire [20] montrent que  $e_{\mathbf{k}}(X)$  peut être calculé à partir d'un modèle d'Adams-Hilton  $(TV, d) \xrightarrow{\sim} C_*(\Omega X; \mathbf{k})$  de  $X$  [1]. Plus précisément, rappelons que la

*bar-construction* d'une algèbre de chaînes augmentée  $(A, d)$  est la coalgèbre différentielle  $BA = (T(s\bar{A}), d_1 + d_2)$  où  $\bar{A}$  est l'idéal d'augmentation,  $s\bar{A}$  désigne la suspension de l'espace vectoriel gradué  $\bar{A}$  ( $(s\bar{A})_i = \bar{A}_{i-1}$ ) et,  $d_1$  et  $d_2$  sont donnés par

$$d_1[sa_1 | \cdots | sa_n] = - \sum_{i=1}^n (-1)^{\varepsilon(i)} [sa_1 | \cdots | sda_i | \cdots | sa_n],$$

$$d_2[sa_1 | \cdots | sa_n] = \sum_{i=2}^n (-1)^{\varepsilon(i)} [sa_1 | \cdots | sa_{i-1}sa_i | \cdots | sa_n].$$

Ici  $\varepsilon(1) = 0$  et, si  $|a_i|$  désigne le degré de  $a_i \in A$ ,  $\varepsilon(i) = i - 1 + \sum_{j=1}^{i-1} |a_j|$  pour  $i > 1$ . Notons  $B_{\leq n}A = T^{\leq n}(s\bar{A})$  le sous-complexe des mots de longueur inférieure ou égale à  $n$ . L'entier  $e_{\mathbf{k}}(X)$  est alors le plus petit  $n$  pour lequel l'application linéaire  $H(B_{\leq n}TV) \rightarrow H(BTV) \cong H_*(X; \mathbf{k})$  est surjective.

Ces (a priori) différentes approximations de la catégorie s'ordonnent de la façon suivante :

**Proposition 1.4.4.** *Soit  $X$  un espace et  $\mathbf{k}$  un corps commutatif.*

$$e_{\mathbf{k}}(X) \leq G\text{-}wcatX \leq catX \text{ et } wcatX \leq G\text{-}wcatX \leq catX.$$

Ces invariants sont effectivement différents : il existe pour chacune des inégalités un espace pour lequel elle se révèle stricte ; nous en donnerons des exemples dans le chapitre 3. Notons également que l'invariant de Toomer et la catégorie faible au sens de Bernstein et Hilton  $wcat$  ne sont pas comparables. Nous montrerons, par exemple, dans le chapitre 3 que les espaces  $X = S^3 \cup_{\alpha} e^7$  et  $Y = S^2_{\alpha} \vee S^2_{\beta} \cup_{\beta} e^5$ , où  $\alpha \in \pi_6(S^3)$  est un élément d'ordre 4 et  $\beta = [i_a, [i_a, i_b]] \in \pi_4(S^2_{\alpha} \vee S^2_{\beta})$  est le crochet de Whitehead itéré des inclusions, vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} e_{\mathbf{k}}(X) = 1 & \text{et} & wcat(X) = 2 \\ e_{\mathbf{k}}(Y) = 2 & \text{et} & wcat(Y) = 1. \end{cases}$$

# Chapitre 2

## La $\sigma$ -catégorie

Les fibrations de Ganea  $g_n(X) : G_n(X) \rightarrow X$  permettent de caractériser la catégorie de l'espace  $X$  en termes d'existence de section. Nous étudions la catégorie d'un point de vue "stable" en ce sens que nous nous intéressons à l'information contenue dans les suspensions successives des fibrations de Ganea. Nous définissons ainsi, pour tout  $i \geq 0$ , une "catégorie suspendue" appelée  $\sigma^i$ -catégorie et notée  $\sigma^i cat$ . Cela nous donne une suite d'approximations de la LS-catégorie dont la limite peut être comprise comme une version topologique de l'invariant de Toomer mais qui, au contraire de celui-ci, rend compte des opérations de Steenrod. L'objet de la deuxième section est de comparer les invariants  $\sigma^i cat$  aux approximations de la catégorie introduites dans le chapitre 1. Nous compliquons ensuite ces "catégories suspendues" d'une structure liée à l'application diagonale. Cela donne lieu à une nouvelle suite d'approximations de la catégorie, notée  $(\sigma_\Delta^i cat)_{i \geq 0}$ , dont nous établissons les premières propriétés dans la section 3. En particulier,  $\sigma_\Delta^i cat$  témoigne d'une partie de la structure multiplicative de la cohomologie des fibrations de Ganea. Enfin, dans la dernière section, nous calculons  $\sigma^i cat$  et  $\sigma_\Delta^i cat$  pour les espaces rationnels.

### 2.1 Définition

**Définition 2.1.1.** Pour  $i \in \mathbb{N}$ , la  $\sigma^i$ -catégorie de  $X$ , notée  $\sigma^i cat(X)$ , est le plus petit entier  $n$  pour lequel la  $i^{\text{ème}}$  suspension de la  $n^{\text{ème}}$  fibration de Ganea  $\Sigma^i g_n(X) : \Sigma^i G_n(X) \rightarrow \Sigma^i X$  admet une section homotopique i.e. il existe une application  $s : \Sigma^i X \rightarrow \Sigma^i G_n(X)$  telle que  $\Sigma^i g_n(X) \circ s \simeq id$ . La  $\sigma$ -catégorie de  $X$  est le nombre  $\sigma cat(X) := \inf_{i \in \mathbb{N}} \sigma^i cat(X)$ .

Par convention,  $\sigma^0 cat X = cat X$ . Vérifions tout d'abord l'invariance ho-

motopique des nombres  $\sigma^i \text{cat}$ .

**Proposition 2.1.2.** *Considérons une application  $\xi : Y \rightarrow X$  et supposons que  $\Sigma^i \xi : \Sigma^i Y \rightarrow \Sigma^i X$  admet une section homotopique, alors  $\sigma^i \text{cat} X \leq \sigma^i \text{cat} Y$ . En particulier, si l'espace  $Y$  domine l'espace  $X$ , alors, pour tout  $i \geq 0$ ,  $\sigma^i \text{cat} X \leq \sigma^i \text{cat} Y$ .*

**Corollaire 2.1.3.** *La  $\sigma^i$ -catégorie est un invariant du type d'homotopie.*

**Démonstration de la proposition 2.1.2.** Soit  $\varphi : \Sigma^i X \rightarrow \Sigma^i Y$  une application telle que  $\Sigma^i \xi \circ \varphi \simeq id_{\Sigma^i X}$ . Supposons que  $\sigma^i \text{cat} Y \leq n$  et donnons-nous une section  $s : \Sigma^i Y \rightarrow \Sigma^i G_n(Y)$  de  $\Sigma^i g_n(Y)$ . Formons le composé  $\Sigma^i G_n(\xi) \circ s \circ \varphi : \Sigma^i X \rightarrow \Sigma^i G_n(X)$ . En composant par  $\Sigma^i g_n(X)$ , nous obtenons  $\Sigma^i g_n(X) \circ \Sigma^i G_n(\xi) \circ s \circ \varphi = \Sigma^i \xi \circ \Sigma^i g_n(Y) \circ s \circ \varphi = \Sigma^i \xi \circ \varphi \simeq id_{\Sigma^i X}$ . Par conséquent, l'application  $\Sigma^i G_n(\xi) \circ s \circ \varphi$  est une section homotopique de  $\Sigma^i g_n(X)$  et  $\sigma^i \text{cat} X \leq n$ .  $\square$

Si la catégorie de  $X$  est inférieure ou égale à  $n$ , il existe une application  $s : X \rightarrow G_n(X)$  telle que  $g_n(X) \circ s = id$ . La  $i^{\text{ème}}$  suspension de cette application est clairement une section homotopique de  $\Sigma^i g_n(X)$ . De la même façon, la suspension d'une section de  $\Sigma^i g_n(X)$  est une section de  $\Sigma^{i+1} g_n(X)$ . Autrement dit, nous venons de prouver que les invariants  $\sigma^i \text{cat}(X)$  constituent une suite décroissante d'approximations de la LS-catégorie.

$$\sigma \text{cat} X \leq \sigma^{i+1} \text{cat}(X) \leq \sigma^i \text{cat}(X) \leq \text{cat} X$$

Nous allons maintenant comparer ces approximations à celles que nous avons introduites dans le premier chapitre.

## 2.2 Comparaison des invariants

Commençons par comparer la  $\sigma^i$ -catégorie à l'invariant de Toomer. Soit  $\mathbf{k}$  un corps. Si  $\sigma^i \text{cat} X \leq n$ , l'application linéaire  $H_*(\Sigma^i g_n(X); \mathbf{k})$  est surjective. Or cette application s'identifie à  $\Sigma^i H_*(g_n(X); \mathbf{k})$  qui ne peut être surjective que si  $H_*(g_n(X); \mathbf{k})$  l'est déjà. Par conséquent, nous avons, pour tout  $i \geq 0$ , l'inégalité :

$$e_{\mathbf{k}}(X) \leq \sigma^i \text{cat} X.$$

Remarquons qu'une section de  $H_*(g_n(X); \mathbf{k})$  provenant de l'hypothèse  $e_{\mathbf{k}}(X) \leq n$  est, a priori, moins riche qu'une section issue de l'inégalité  $\sigma^i \text{cat} X \leq n$ . Par exemple, lorsque  $\mathbf{k} = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ , l'homologie d'un espace à coefficients dans

$\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  bénéficie d'une structure supplémentaire : c'est un module sur  $\mathcal{A}_p$ , l'algèbre de Steenrod mod  $p$ . Une application continue induit en homologie une application linéaire compatible à cette structure si bien que, dans notre cas,  $H^*(g_n(X); \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$  est un morphisme de  $\mathcal{A}_p$ -modules. En utilisant le fait que les opérations de Steenrod commutent à la suspension, nous obtenons :

**Proposition 2.2.1.** *Si  $\sigma^i \text{cat} X \leq n$  alors  $H_*(g_n(X); \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$  admet une section de  $\mathcal{A}_p$ -modules.*

Cela laisse soupçonner qu'il existe des espaces pour lesquels  $\sigma^i \text{cat}$  est strictement plus grand que l'invariant de Toomer. Nous pourrions d'ici peu confirmer cette impression en constatant que  $e_k(Sp(2)) < \sigma^i \text{cat}(Sp(2))$  pour tout  $i \geq 0$ .

Récemment Rudyak a introduit une version stable de  $G\text{-wcat}$ . Son invariant  $r(X)$ , défini en premier lieu en termes de poids catégorique, est le plus petit  $n \in \mathbf{N}$  pour lequel l'application  $\rho_n(X) : X \rightarrow \mathcal{C}_n(X)$  est stablement inessentielle [36]. En utilisant les propriétés classiques de la suite de Puppe d'une cofibration (cf. lemme 2.2.6) il est facile d'établir la

**Proposition 2.2.2.** *Soit  $X$  un espace 1-connexe. Pour tout  $i \geq 1$ ,  $\sigma^i \text{cat}(X)$  est le plus petit  $n \in \mathbf{N}$  tel que l'application  $\Sigma^{i-1} X \rightarrow \Sigma^{i-1} \mathcal{C}_n(X)$  est homotopiquement triviale. En particulier  $\sigma^1 \text{cat}(X) = G\text{-wcat}(X)$  et, si  $X$  est un CW-complexe fini,  $\sigma \text{cat}(X) = r(X)$ .*

Nous avons finalement obtenu les égalités et inégalités que la proposition suivante rassemble :

**Proposition 2.2.3.** *Soit  $X$  un espace 1-connexe. Pour  $1 \leq i \leq j$  et pour tout corps  $\mathbf{k}$ , nous avons :*

$$e_{\mathbf{k}}(X) \leq \sigma \text{cat} X \leq \sigma^j \text{cat} X \leq \sigma^i \text{cat} X \leq \sigma^1 \text{cat} X \leq \text{cat} X.$$

De plus, si  $X$  est 1-connexe,  $\sigma^1 \text{cat} X = G\text{-wcat} X$ .

**Remarque.** Dans le chapitre 1 nous avons signalé que  $w\text{cat}$  et l'invariant de Toomer ne sont pas comparables en général. De la même façon, il n'est pas possible d'établir une relation entre  $\sigma \text{cat}$  et  $w\text{cat}$ , nous donnerons dans le chapitre 3 des exemples illustrant cette affirmation.

L'un des objectifs du chapitre 3 est de construire des espaces pour lesquels au moins l'une des inégalités de la proposition 2.2.3 se révèle stricte. Néanmoins quand la catégorie d'un CW-complexe est maximale compte tenu de sa connexité et de sa dimension la plupart des invariants coïncident :

**Théorème 2.2.4.** *Soit  $X$  un CW-complexe  $(q-1)$ -connexe ( $q \geq 2$ ) et soit  $i \geq 0$ . Si  $\sigma^i \text{cat} X = n$  et si  $\dim(X) \leq q(n+1) - 2 + i$  alors  $\sigma^{i+1} \text{cat}(X) = n$ . Si  $\dim(X) \leq q(\text{cat} X + 1) - 2$  alors  $\sigma \text{cat}(X) = w \text{cat} X = \text{cat} X$ .*

Ce résultat nous permet de distinguer sur un exemple les invariants  $\sigma \text{cat}$  et  $e_k$  :

**Exemple.** Considérons le groupe de Lie  $Sp(2)$ , cet espace admet une décomposition cellulaire de la forme :  $S^3 \cup e^7 \cup e^{10}$ . Dans [38] Schweitzer montre que la catégorie de  $Sp(2)$  est 3. De la proposition 2.2.4, il résulte que  $\sigma \text{cat} Sp(2) = \text{cat} Sp(2) = 3$ . Par ailleurs, en utilisant le modèle d'Adams-Hilton, Halperin et Lemaire ont prouvé que, pour tout corps  $\mathbf{k}$ , l'invariant de Toomer de  $Sp(2)$  valait 2 [20].

Sous les hypothèses du théorème 2.2.4, l'égalité  $w \text{cat} X = \text{cat} X$  est prouvée dans [3] [41]. Nous utilisons les mêmes techniques pour démontrer que  $\sigma \text{cat} X = \text{cat} X$ . L'ingrédient majeur de la démonstration est la conséquence suivante du théorème d'excision homotopique de Blakers-Massey :

**Lemme 2.2.5.** *Soit  $A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\rho} C$  une cofibration homotopique dans laquelle tous les espaces sont 1-connexes. Notons  $F$  la fibre homotopique de  $\rho$ ,  $\chi : F \rightarrow B$  l'application induite et  $d : A \rightarrow F$  un relèvement de  $\iota$ , i.e.  $\chi$  et  $d$  vérifient  $\chi \circ d \simeq \iota$ . Si  $A$  et  $C$  sont respectivement  $(a-1)$  et  $(c-1)$ -connexes, alors l'application  $d$  est une  $a+c-2$  équivalence.*

**Démonstration.** Quitte à la modifier dans son type d'homotopie faible, on peut toujours supposer que la cofibration homotopique  $A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\rho} C$  est une vraie cofibration. Convertissons l'application  $\rho : B \rightarrow C$  en fibration et notons  $\chi' : F \rightarrow P_\rho = C^{\mathbf{I}} \times_C B$  l'inclusion de la fibre.

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\chi'} & P_\rho \\ d \uparrow & & \uparrow e \simeq \\ A & \xrightarrow{\iota} & B \xrightarrow{\rho} C \end{array}$$

L'application  $\chi : F \rightarrow B$  de l'énoncé est la composée  $F \xrightarrow{\chi'} P_\rho \xrightarrow{pr} B$ . Par le lemme des cinq appliqué aux longues suites exactes d'homotopie des paires  $(P_\rho, F)$  et  $(B, A)$ , l'application  $d$  est une  $a+c-2$  équivalence si et seulement si l'application de paires  $e : (B, A) \rightarrow (P_\rho, F)$  est une  $a+c-1$  équivalence. La paire  $(B, A)$  et l'espace  $A$  sont respectivement  $(c-1)$ -connexe et  $(a-1)$ -connexe, il résulte donc du théorème d'excision homotopique de Blakers-Massey que l'application d'identification  $\rho : (B, A) \rightarrow (C, *)$  est une  $a+c-1$



équivalence. Puisque l'application  $\tilde{\rho} : (P_\rho, F) \rightarrow (C, *)$  induit un isomorphisme en homotopie, le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} (B, A) & \xrightarrow{e} & (P_\rho, F) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \tilde{\rho} \\ (C, *) & \xlongequal{\quad} & (C, *) \end{array}$$

implique que l'application  $e$  est une  $a + c - 1$  équivalence.  $\square$

**Démonstration du théorème 2.2.4.** L'égalité  $\sigma cat = cat$  se déduit par une récurrence immédiate de la première partie de l'énoncé. Puisque  $\sigma^{i+1}cat(X) \leq \sigma^i cat(X)$ , la seule chose à prouver est que  $\sigma^{i+1}cat(X) \geq n$ . Supposons que ce n'est pas le cas i.e.  $\sigma^{i+1}cat(X) \leq n - 1$ . Considérons la cofibration homotopique  $\Sigma^i G_{n-1}(X) \xrightarrow{\Sigma^i g_{n-1}(X)} \Sigma^i X \xrightarrow{\Sigma^i \rho_{n-1}(X)} \Sigma^i C_{n-1}(X)$ . Notons  $F$  la fibre homotopique de  $\Sigma^i \rho_{n-1}(X)$  et  $\chi : F \rightarrow \Sigma^i X$  l'application induite. Soit  $d : \Sigma^i G_{n-1}(X) \rightarrow F$  un relèvement homotopique de  $\Sigma^i g_{n-1}(X)$  dans la fibre; c'est-à-dire  $d$  vérifie  $\chi \circ d \simeq \Sigma^i g_{n-1}(X)$ . Puisque  $\Sigma^i G_{n-1}(X)$  et  $\Sigma^i C_{n-1}(X)$  sont respectivement  $(q+i-1)$  et  $(qn+i-1)$ -connexes, il découle du lemme 2.2.5 que  $d$  est une  $q(n+1) + 2i - 2$  équivalence. L'hypothèse de dimension implique alors que l'application  $d_{\#} : [\Sigma^i X, \Sigma^i G_{n-1}(X)] \rightarrow [\Sigma^i X, F]$  est surjective. Par ailleurs, puisque  $\sigma^{i+1}cat(X) \leq n - 1$ , l'application  $\Sigma^i \rho_{n-1}(X)$  est homotopiquement triviale et  $\chi$  admet une section homotopique  $\tau : \Sigma^i X \rightarrow F$ . La surjectivité de  $d_{\#}$  garantit l'existence d'une application  $\tilde{s} : \Sigma^i X \rightarrow \Sigma^i G_{n-1}(X)$  telle que  $d_{\#}(\tilde{s}) = d \circ \tilde{s} = \tau$ . Clairement,  $\tilde{s}$  est une section homotopique de  $\Sigma^i g_{n-1}(X)$ . Il en résulte que  $\sigma^i cat(X) \leq n - 1$  ce qui est une contradiction.  $\square$

Nous terminons cette section en énonçant les propriétés de la suite de Puppe d'une cofibration desquelles la proposition 2.2.2 se déduit immédiatement.

**Lemme 2.2.6.** *Considérons une cofibration homotopique  $A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\rho} C$  où  $C$  est 1-connexe et sa suite de Puppe  $A \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\rho} C \xrightarrow{\delta} \Sigma A \xrightarrow{\Sigma \iota} \Sigma B \xrightarrow{\Sigma \rho} \Sigma C \rightarrow \dots$ . Les énoncés suivants sont équivalents :*

- l'application  $\rho$  est homotopiquement triviale,
- la cofibration  $C \xrightarrow{\delta} \Sigma A \xrightarrow{\Sigma \iota} \Sigma B$  est homotopiquement triviale i.e.  $\Sigma A \sim C \vee \Sigma B$ ,
- l'application  $\delta$  admet une rétraction homotopique  $r : \Sigma A \rightarrow C$ ,
- l'application  $\Sigma \iota$  admet une section homotopique  $\sigma : \Sigma B \rightarrow \Sigma A$ .

De plus, si ces conditions sont remplies, si l'espace  $C$  est un co- $H$ -espace et l'application  $\delta$  une application primitive, alors les applications  $\delta$ ,  $r$ ,  $\Sigma\iota$  et  $\sigma$  satisfont la relation  $\sigma \circ \Sigma\iota + \delta \circ r \simeq id_{\Sigma A}$  et l'application  $\Sigma A \xrightarrow{\nu} \Sigma A \vee \Sigma A \xrightarrow{r \vee \Sigma\iota} C \vee \Sigma B$ , où  $\nu$  désigne le pincement, est une équivalence d'homotopie.  $\square$

Dans la suite, nous utiliserons également le lemme suivant :

**Lemme 2.2.7.** *Considérons une fibration homotopique  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  et sa suite de Puppe  $\cdots \rightarrow \Omega F \xrightarrow{\Omega i} \Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B \xrightarrow{\delta} F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ . Les énoncés suivants sont équivalents :*

- l'application  $\delta$  est homotopiquement triviale,
- la fibration  $\Omega F \xrightarrow{\Omega i} \Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B$  est homotopiquement triviale i.e.  $\Omega E \sim \Omega F \times \Omega B$ ,
- l'application  $\Omega i$  admet une rétraction homotopique  $r : \Omega E \rightarrow \Omega F$ ,
- l'application  $\Omega p$  admet une section homotopique  $\sigma : \Omega B \rightarrow \Omega E$ .

De plus, lorsque ces conditions sont remplies, les applications  $\Omega i$ ,  $r$ ,  $\Omega p$  et  $\sigma$  satisfont la relation  $\sigma \circ \Omega p + \Omega i \circ r \simeq id_{\Omega E}$  et l'application  $\Omega F \times \Omega B \xrightarrow{\Omega i \times \sigma} \Omega E \times \Omega E \xrightarrow{\mu} \Omega E$ , où  $\mu$  désigne la multiplication des lacets, est une équivalence d'homotopie.  $\square$

À titre d'exemple, nous retrouvons, pour deux espaces  $X$  et  $Y$ , les équivalences naturelles de Puppe

$$\Sigma(X \times Y) \xrightarrow{\sim} \Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y)$$

et

$$\Omega(\Omega X * \Omega Y) \times \Omega X \times \Omega Y \xrightarrow{\sim} \Omega(X \vee Y)$$

*Preuve.* Désignons par  $pr_X : X \times Y \rightarrow X$ ,  $pr_Y : X \times Y \rightarrow Y$ ,  $i_X : X \rightarrow X \vee Y$  et  $i_Y : Y \rightarrow X \vee Y$  les projections et inclusions canoniques et par  $j$  l'inclusion  $X \vee Y \rightarrow X \times Y$ . La composée  $r : \Sigma(X \times Y) \xrightarrow{\nu} \Sigma(X \times Y) \vee \Sigma(X \times Y) \xrightarrow{\Sigma pr_X \vee \Sigma pr_Y} \Sigma X \vee \Sigma Y$ , où  $\nu$  est le pincement, constitue une rétraction de l'application  $\Sigma j : \Sigma(X \vee Y) \rightarrow \Sigma(X \times Y)$ . En appliquant le lemme 2.2.6 à la cofibration homotopique  $X \times Y \xrightarrow{q} X \wedge Y \rightarrow \Sigma(X \vee Y)$ , nous obtenons l'équivalence  $\Psi = (r \vee \Sigma q) \circ \nu : \Sigma(X \times Y) \xrightarrow{\sim} \Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y)$ . De manière duale l'application  $\Omega X \times \Omega Y \xrightarrow{\Omega i_X \times \Omega i_Y} \Omega(X \vee Y) \times \Omega(X \vee Y) \xrightarrow{*} \Omega(X \vee Y)$ , dans laquelle  $*$  désigne la composition des lacets, est une section de  $\Omega j : \Omega(X \vee Y) \rightarrow \Omega(X \times Y)$ . En considérant, cette fois la fibration homotopique  $\Omega(\Omega X * \Omega Y) \rightarrow \Omega(X \vee Y) \xrightarrow{\Omega j} \Omega(X \times Y)$  nous obtenons  $\Omega(\Omega X * \Omega Y) \times \Omega X \times \Omega Y \xrightarrow{\sim} \Omega(X \vee Y)$ .  $\square$

## 2.3 Une version enrichie de la $\sigma$ -catégorie

L'application linéaire  $H^*(g_n(X); \mathbf{k})$  admet une structure de  $H^*(X; \mathbf{k})$ -modules que nous détaillons dans la suite. C'est cette structure supplémentaire qui suggère la variation de la  $\sigma$ -catégorie que nous introduisons à présent :

La donnée d'une application  $f : Y \rightarrow X$  permet de construire le composé  $Y \xrightarrow{\Delta} Y \times Y \xrightarrow{q} Y \wedge Y \xrightarrow{f \wedge id} X \wedge Y$  que nous notons  $\bar{\Delta}_f$ . Pour  $y \in Y$ ,  $\bar{\Delta}_f(y) = f(y) \wedge y$ . Grâce à l'associativité et à la commutativité du smash produit, nous pouvons associer à  $f : Y \rightarrow X$  des applications  $\Sigma^i Y \rightarrow X \wedge \Sigma^i Y$  définies de la façon suivante : pour tout  $i \geq 0$ , notons  $R_i : \Sigma^i(Y \wedge Z) \rightarrow Y \wedge \Sigma^i Z$  et  $L_i : \Sigma^i(Y \wedge Z) \rightarrow \Sigma^i Y \wedge Z$  les homéomorphismes naturels et formons les composés  $R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_f : \Sigma^i Y \rightarrow \Sigma^i(X \wedge Y) \rightarrow X \wedge \Sigma^i Y$ .

**Définition 2.3.1.** Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application. Pour  $i \in \mathbf{N}$ ,  $\sigma_{\Delta}^i cat(f)$  est le plus petit entier  $n$  tel que la  $i^{\text{ème}}$  suspension de la  $n^{\text{ème}}$  fibration de Ganea  $\Sigma^i g_n(Y) : \Sigma^i G_n(Y) \rightarrow \Sigma^i Y$  admet une section homotopique  $s : \Sigma^i Y \rightarrow \Sigma^i G_n(Y)$  rendant le diagramme suivant homotopiquement commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^i Y & \xrightarrow{s} & \Sigma^i G_n Y \\ R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_f \downarrow & & \downarrow R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_{f \circ g_n(Y)} \\ X \wedge \Sigma^i Y & \xrightarrow{id \wedge s} & X \wedge \Sigma^i G_n Y. \end{array}$$

La limite des  $\sigma_{\Delta}^i cat(f)$  est notée  $\sigma_{\Delta} cat(f)$ .

Pour un espace  $X$ ,  $\sigma_{\Delta}^i cat(X) := \sigma_{\Delta}^i cat(id)$  et  $\sigma_{\Delta} cat(X) := \sigma_{\Delta} cat(id)$

**Remarque.** Étant donnée une application  $f : Y \rightarrow X$ , le nombre  $\sigma_{\Delta}^i cat(f)$  est plus grand que  $\sigma^i cat(Y)$  puisque, non seulement l'application  $\Sigma^i g_n(Y)$  doit admettre une section homotopique mais, en plus, cette section doit être compatible avec une certaine "structure". Néanmoins, il se peut que cette condition de compatibilité soit toujours remplie, c'est par exemple le cas lorsque les applications  $R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_f$  et  $R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_{f \circ g_n(Y)}$  sont triviales. Ainsi, lorsque  $f : Y \rightarrow X$  est l'application triviale, on a  $\sigma_{\Delta}^i cat(f) = \sigma^i cat Y$  et, si  $Y$  est un co-H-espace alors, pour toute  $f : Y \rightarrow X$ , on a  $\sigma_{\Delta}^i cat(Y) = \sigma_{\Delta}^i cat(f) = \sigma^i cat Y = 1$ . Nous donnerons dans la section suivante l'exemple d'un espace pour lequel  $\sigma_{\Delta}^i cat$  et  $\sigma^i cat$  diffèrent.

Afin de mieux cerner les nombres  $\sigma_{\Delta}^i cat$  commençons par établir les inégalités suivantes :

**Proposition 2.3.2.** Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application, pour tout  $i \geq 0$ , on a

$$\begin{cases} \sigma_{\Delta} \text{cat}(f) \leq \sigma_{\Delta}^{i+1} \text{cat}(f) \leq \sigma_{\Delta}^i \text{cat}(f) \leq \sigma_{\Delta}^0 \text{cat}(f) = \text{cat}Y \\ \sigma^i \text{cat}(Y) \leq \sigma_{\Delta}^i \text{cat}(f) \leq \sigma_{\Delta}^i \text{cat}(Y). \end{cases}$$

**Démonstration.** Supposons que  $\text{cat}Y \leq n$ . Toute section  $s : Y \rightarrow G_n(Y)$  de  $g_n(Y)$  vérifie la relation  $(id \wedge s) \circ \bar{\Delta}_f = \bar{\Delta}_{f \circ g_n(Y)} \circ s$ . Il en découle que  $\sigma_{\Delta}^0 \text{cat}(f) \leq n$  ce qui permet de conclure à l'égalité  $\sigma_{\Delta}^0 \text{cat}(f) = \text{cat}Y$ . De plus, en usant, après  $i$  suspensions, de la naturalité de  $R_i : \Sigma^i(X \wedge Z) \xrightarrow{\cong} X \wedge \Sigma^i Z$ , nous obtenons la relation  $(id \wedge \Sigma^i s) \circ R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_f = R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_{f \circ g_n(Y)} \circ \Sigma^i s$  et, par conséquent, l'inégalité  $\sigma_{\Delta}^i \text{cat}(f) \leq n$ . Avec les mêmes arguments nous montrons que la suite  $(\sigma_{\Delta}^i \text{cat}(f))_{i \in \mathbb{N}}$  est décroissante récoltant ainsi la première ligne d'inégalités. Supposons à présent  $\sigma_{\Delta}^i \text{cat}Y \leq n$  et notons  $s' : \Sigma^i Y \rightarrow \Sigma^i G_n(Y)$  une section homotopique de  $\Sigma^i g_n(Y)$  rendant homotopiquement commutatif le carré supérieur du diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^i Y' & \xrightarrow{s} & \Sigma^i G_n Y \\ R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta} \downarrow & & \downarrow R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_{g_n(Y)} \\ Y \wedge \Sigma^i Y & \xrightarrow{id \wedge s'} & Y \wedge \Sigma^i G_n Y \\ f \wedge id \downarrow & & \downarrow f \wedge id \\ X \wedge \Sigma^i Y & \xrightarrow{id \wedge s'} & X \wedge \Sigma^i G_n Y \end{array}$$

Comme le carré inférieur est commutatif, nous retrouvons, par composition, le diagramme que l'application  $s'$  doit rendre commutatif. Il en résulte l'inégalité  $\sigma_{\Delta}^i \text{cat}(f) \leq \sigma_{\Delta}^i \text{cat}(Y)$ . La dernière inégalité ayant déjà été discutée, la proposition est démontrée.  $\square$

Les nombres  $\sigma_{\Delta}^i \text{cat}$  vérifient les propriétés de domination suivantes :

**Proposition 2.3.3.** Considérons un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & Z & \xrightarrow{\xi} & Y \\ & \searrow f & \downarrow g & \swarrow f & \\ & & X & & \end{array}$$

Si  $\xi \circ \varphi \simeq id$  alors  $\sigma_{\Delta}^i \text{cat}(f) \leq \sigma_{\Delta}^i \text{cat}(g)$  et  $\sigma_{\Delta}^i \text{cat}(Y) \leq \sigma_{\Delta}^i \text{cat}(Z)$ .

En particulier  $\sigma_{\Delta}^i \text{cat}$  est un invariant du type d'homotopie des espaces.

Pour démontrer cette proposition nous utilisons le lemme suivant qui sera également utile dans la suite :

**Lemme 2.3.4.** *Considérons un diagramme commutatif à homotopie près :*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & Z \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & X \end{array}$$

Alors, pour tout  $i \geq 0$ , les composés  $(id \wedge \Sigma^i \varphi) \circ R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_f$  et  $R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_g \circ \Sigma^i \varphi$  sont homotopes. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^i Y & \xrightarrow{\Sigma^i \varphi} & \Sigma^i Z \\ R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_f \downarrow & & \downarrow R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_g \\ X \wedge \Sigma^i Y & \xrightarrow{id \wedge \Sigma^i \varphi} & X \wedge \Sigma^i Z. \end{array}$$

**Démonstration.** Vérifions le cas  $i = 0$ . Les autres cas s'obtiendront par suspension et par argument de naturalité. Par définition  $(id \wedge \varphi) \circ \bar{\Delta}_f = (id \wedge \varphi) \circ (f \wedge id) \circ \bar{\Delta} = (f \wedge \varphi) \circ \bar{\Delta}$ . Puisque les applications  $f$  et  $g \circ \varphi$  sont homotopes, on obtient  $(id \wedge \varphi) \circ \bar{\Delta}_f \simeq (g \circ \varphi \wedge \varphi) \circ \bar{\Delta} \simeq (g \wedge id) \circ (\varphi \wedge \varphi) \circ \bar{\Delta} \simeq (g \wedge id) \circ \bar{\Delta} \circ \varphi \simeq \bar{\Delta}_g \circ \varphi$ .  $\square$

**Démonstration de la proposition 2.3.3** Supposons que  $\sigma^i cat_{\Delta}(g) \leq n$  et soit  $s : \Sigma^i Z \rightarrow \Sigma^i G_n(Z)$  une section homotopique de  $\Sigma^i g_n(Z)$  vérifiant  $(id \wedge s) \circ R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_g \simeq R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_{g \circ g_n(Z)} \circ s$ . Nous savons (cf Prop. 2.1.2) que la composée  $\tilde{s} = \Sigma^i G_n(\xi) \circ s \circ \Sigma^i \varphi$  est une section homotopique de  $\Sigma^i g_n(Y)$ . Il nous reste à vérifier que  $(id \wedge \tilde{s}) \circ R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_f \simeq R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_{f \circ g_n(Y)} \circ \tilde{s}$ . Remarquons pour cela que  $g \circ \varphi \simeq f$  et que  $(f \circ g_n(Y)) \circ G_n(\xi) \simeq g \circ g_n(Z)$ . En utilisant le lemme 2.3.4 et la relation de compatibilité satisfaite par l'application  $s$ , nous obtenons les diagrammes homotopiquement commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma^i Y & \xrightarrow{\Sigma^i \varphi} & \Sigma^i Z & \xrightarrow{s} & \Sigma^i G_n(Z) & \xrightarrow{\Sigma^i G_n(\xi)} & \Sigma^i G_n(Y) \\ R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_f \downarrow & & \downarrow R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_g & & \downarrow & & \downarrow \\ X \wedge \Sigma^i Y & \xrightarrow{id \wedge \Sigma^i \varphi} & X \wedge \Sigma^i Z & \xrightarrow{id \wedge s} & X \wedge \Sigma^i G_n(Z) & \xrightarrow{id \wedge \Sigma^i G_n(\xi)} & X \wedge \Sigma^i G_n(Y). \end{array}$$

La relation souhaitée vient de la composition de ces diagrammes et l'inégalité  $\sigma_{\Delta}^i cat(f) \leq n$  est ainsi établie. Pour prouver la relation  $\sigma_{\Delta}^i cat(Y) \leq$

$\sigma_{\Delta}^i \text{cat}(Z)$ , il suffit de considérer le diagramme homotopiquement commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Sigma^i Y & \xrightarrow{\Sigma^i \varphi} & \Sigma^i Z & \xrightarrow{s} & \Sigma^i G_n(Z) & \xrightarrow{\Sigma^i G_n(\xi)} & \Sigma^i G_n(Y) \\
 R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta} \downarrow & & \downarrow R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta} & & \downarrow & & \downarrow \\
 Y \wedge \Sigma^i Y & \xrightarrow{id \wedge \Sigma^i \varphi} & Z \wedge \Sigma^i Z & \xrightarrow{id \wedge s} & Z \wedge \Sigma^i G_n(Z) & \xrightarrow{id \wedge \Sigma^i G_n(\xi)} & Y \wedge \Sigma^i G_n(Y).
 \end{array}$$

et de suivre le même raisonnement.  $\square$

Précisons à présent le lien qui existe entre l'application  $\bar{\Delta}_f : Y \rightarrow X \wedge Y$  et la structure de module sur l'algèbre de cohomologie de  $X$  que l'application  $f : Y \rightarrow X$  permet d'associer à la cohomologie de l'espace  $Y$ .

Fixons un corps commutatif  $\mathbf{k}$ . Notons  $H^*(S) = H^*(S; \mathbf{k})$  l'espace vectoriel de cohomologie de l'espace  $S$  à coefficients dans  $\mathbf{k}$  et  $m^*$  le morphisme induit en cohomologie par une application  $m : S \rightarrow T$ . La diagonale  $\Delta : S \rightarrow S \times S$  munit  $H^*(S)$  d'une structure d'algèbre par le cup-produit  $\smile : H^*(S) \otimes H^*(S) \xrightarrow{\cong} H^*(S \times S) \xrightarrow{\Delta^*} H^*(S)$ .

Considérons à présent une application  $f : Y \rightarrow X$ . Elle induit une structure de  $H^*(X)$ -module sur  $H^*(Y)$

$$\alpha_f = \Delta^* \circ (f \times id)^* : H^*(X) \otimes H^*(Y) \xrightarrow{\cong} H^*(X \times Y) \rightarrow H^*(Y)$$

donnée par  $\alpha_f(x \otimes y) = f^*(x) \smile y$  pour  $x \in H^*(X)$  et  $y \in H^*(Y)$ . L'application  $(\bar{\Delta}_f)^*$  est la restriction de l'application  $\alpha_f$  au sous-espace  $H^*(X \wedge Y) = \mathbf{k} \oplus \tilde{H}^*(X) \otimes \tilde{H}^*(Y)$  où  $\tilde{H}$  désigne la cohomologie réduite. Dans la définition de l'invariant  $\sigma_{\Delta}^i \text{cat}$  est intervenue l'application  $R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_f : \Sigma^i Y \rightarrow X \wedge \Sigma^i Y$  qui, par l'isomorphisme  $H^*(\Sigma Y) = \Sigma H^*(Y) = \mathbf{k} \oplus s^i \tilde{H}^*(Y)$ , induit en cohomologie :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{k} \oplus \tilde{H}^*(X) \otimes s^i \tilde{H}^*(Y) & \rightarrow & \mathbf{k} \oplus s^i \tilde{H}^*(Y) \\
 & & 1 \mapsto 1 \\
 x \otimes s^i y & \mapsto & s^i (f^*(x) \smile y)
 \end{array}$$

Le morphisme  $(R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_f)^*$  est donc exactement la restriction de  $\Sigma^i \alpha_f = \mathbf{k} \oplus s^i \alpha_f$ .

**Proposition 2.3.5.** *Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application. Si  $\sigma_{\Delta} \text{cat}(f) \leq n$ , alors  $(g_n(Y))^*$  admet une rétraction de  $H^*(X)$ -modules.*

En particulier, si  $\sigma_{\Delta} \text{cat}(X) \leq n$ , alors  $(g_n(X))^*$  admet une rétraction de  $H^*(X)$ -modules.

**Démonstration.**

Supposons que  $\sigma_{\Delta}^i \text{cat}(f) \leq n$ . Il existe donc une application  $\tau : \Sigma^i Y \rightarrow \Sigma^i G_n Y$  telle que  $\Sigma^i g_n(Y) \circ \tau \simeq \text{id}$  et telle que le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^i Y & \xrightarrow{\tau} & \Sigma^i G_n Y \\ R_i \circ \Sigma^i \tilde{\Delta}_f \downarrow & & \downarrow R_i \circ \Sigma^i \tilde{\Delta}_{f \circ g_n(Y)} \\ X \wedge \Sigma^i Y & \xrightarrow{\text{id} \wedge \tau} & X \wedge \Sigma^i G_n Y. \end{array}$$

En cohomologie nous obtenons, en particulier,  $\tau^* \circ \Sigma^i (g_n(Y))^* = \text{id}$ , et de la désuspension de cette égalité résulte une rétraction linéaire,  $\Sigma^{-i} \tau^*$ , de  $(g_n(Y))^*$ . Montrons que cette rétraction est un morphisme de  $H^*(X)$ -modules i.e. que la relation  $\Sigma^{-i} \tau^*(((g_n(Y))^* \circ f^*)(x) \smile z) = f^*(x) \smile (\Sigma^{-i} \tau^*(z))$  est vraie pour tout  $x \in H^*(X)$  et tout  $z \in H^*(G_n Y)$ .

Remarquons, pour cela, que le diagramme ci-dessus induit en cohomologie :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k} \oplus \tilde{H}^*(X) \otimes s^i \tilde{H}^*(G_n Y) & \xrightarrow{\mathbf{k} \oplus (\text{id} \otimes \tau^*)} & \mathbf{k} \oplus \tilde{H}^*(X) \otimes s^i \tilde{H}^*(Y) \\ \mathbf{k} \oplus s^i \alpha_{f \circ g_n(Y)} \downarrow & & \downarrow \mathbf{k} \oplus s^i \alpha_f \\ \mathbf{k} \oplus s^i \tilde{H}^*(G_n Y) & \xrightarrow{\tau^*} & \mathbf{k} \oplus s^i \tilde{H}^*(Y). \end{array}$$

Décomposons  $H^*(X) \otimes H^*(G_n(Y)) = \mathbf{k} \oplus \tilde{H}^*(X) \otimes \tilde{H}^*(G_n Y) \oplus \tilde{H}^*(X) \otimes \mathbf{k} \oplus \mathbf{k} \otimes \tilde{H}^*(G_n(Y))$ . Lorsque  $x \otimes z \in \mathbf{k} \oplus \tilde{H}^*(X) \otimes \tilde{H}^*(G_n Y)$  la relation découle de la désuspension du diagramme ci-dessus. Si  $x \otimes z \in \mathbf{k} \otimes \tilde{H}^*(G_n(Y))$ , elle est immédiate; si  $x \otimes z \in \tilde{H}^*(X) \otimes \mathbf{k}$  il vient  $\Sigma^{-i} \tau^*(((g_n(Y))^* \circ f^*)(x) \smile z) = ((\Sigma^{-i} \tau^*) \circ (g_n(Y))^* \circ f^*)(x) \cdot z$  car  $z \in \mathbf{k}$  et, finalement, puisque  $\Sigma^{-i} \tau^* \circ (g_n(Y))^* = \text{id}$ , on obtient  $\Sigma^{-i} \tau^*(((g_n(Y))^* \circ f^*)(x) \smile z) = f^*(x) \cdot z = f^*(x) \cdot (\Sigma^{-i} \tau^*(z))$ .  $\square$

## 2.4 $\sigma^i$ -catégorie rationnelle

Nous fixons  $\mathbf{k} = \mathbf{Q}$  et nous considérons des espaces  $S$  1-connexes de type fini i.e. dont la cohomologie rationnelle  $H^*(S; \mathbf{Q})$  est un  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel gradué de dimension finie en chaque degré. Un tel espace  $S$  est un *espace rationnel* si ses groupes d'homologie à coefficients entiers  $\tilde{H}_*(S; \mathbf{Z})$  sont des

$\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels, ou, de façon équivalente, si ses groupes d'homotopie  $\pi_*(S)$  sont des  $\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels. Une application  $\varphi : S \rightarrow T$  est une équivalence d'homotopie rationnelle (notée  $\sim_{\mathbf{Q}}$ ) si  $\pi_*(\varphi) \otimes \mathbf{Q}$  (ou, de façon équivalente  $H_*(\varphi; \mathbf{Q})$ ), est un isomorphisme. On dit que deux espaces  $S$  et  $T$  ont le même type d'homotopie rationnelle s'il existe une chaîne d'équivalences d'homotopie rationnelle les connectant  $S \xrightarrow{\sim_{\mathbf{Q}}} \dots \xrightarrow{\sim_{\mathbf{Q}}} T$ . À un espace  $S$  1-connexe de type fini, nous pouvons associer un espace rationnel  $S_{\mathbf{Q}}$  ayant même type d'homotopie rationnelle. L'espace  $S_{\mathbf{Q}}$ , unique à équivalence d'homotopie près, est le *rationalisé* de  $S$ . Il constitue une approximation de l'espace  $S$  qui peut être complètement représentée par des objets algébriques tels que des algèbres graduées différentielles commutatives (*agdc*) ou des algèbres de Lie graduées différentielles (*lgd*). De cette façon, la LS-catégorie de l'espace  $S_{\mathbf{Q}}$ , dite *catégorie rationnelle* de  $S$  et notée  $cat_0(S)$ , peut être calculée algébriquement et s'avère être une excellente approximation de la catégorie de  $S$ . En 1974, Toomer [45] avait conjecturé que, pour les espaces rationnels, la LS-catégorie coïncidait avec l'invariant  $e_{\mathbf{Q}}$ . Cela s'est révélé faux et c'est à J.-M. Lemaire et F. Sigrist que l'on doit le premier contre-exemple : ils construisent un espace  $S$  vérifiant  $e_{\mathbf{Q}}(S) = 2$  et  $cat_0(S) = 3$  [30]. La différence entre  $e_{\mathbf{Q}}$  et  $cat_0$  se trouve, en fait, être aussi grande que possible comme l'ont ensuite montré Y. Félix, S. Halperin et J.-C. Thomas [10]. Nous calculons les invariants  $\sigma^i cat$  et  $\sigma_{\Delta}^i cat$  pour les espaces rationnels. Nous trouvons que  $\sigma^i cat(S_{\mathbf{Q}}) = e_{\mathbf{Q}}(S)$  et que  $\sigma_{\Delta}^i cat(S_{\mathbf{Q}})$  est un réel intermédiaire entre l'invariant de Toomer et la catégorie. Nous commençons par rappeler les techniques et résultats d'homotopie rationnelle dont nous aurons besoin. Pour davantage de détails et de développements, nous renvoyons à [7] [11] [43].

- *Modèles de Sullivan, modèles de Quillen et formalité*

Dans ce qui suit, une *agdc*  $(A, d)$  est une algèbre graduée  $A$  munie d'une différentielle  $d$  de degré +1 vérifiant  $d(ab) = (da)b + (-1)^{|a|}adb$  ( $a, b \in A$ ), commutative dans le sens gradué ( $ab = (-1)^{|a||b|}ba$ ) et augmentée. Une *lgd*  $(L, d)$  est une algèbre de Lie graduée munie d'une différentielle  $d$  de degré -1 vérifiant  $d[x, y] = [dx, y] + (-1)^{|x|}[x, dy]$ ,  $x, y \in L$ .

Une *algèbre de Sullivan* est une *agdc* de la forme  $(AV, d)$  où  $AV$  est l'algèbre graduée commutative libre engendrée par l'evg  $V$  et  $V$  s'écrit  $V = \bigoplus_{k \geq 0} V(k)$  tel que  $d_{|V(0)} = 0$  et  $d(V(k)) \subset \Lambda(\bigoplus_{p \leq k-1} V(p))$  pour  $k \geq 1$ . Si, de plus,  $d(V) \subset \Lambda^{\geq 2}V$ , l'algèbre de Sullivan  $(AV, d)$  est dite *minimale*. Un modèle de Sullivan d'une *agdc*  $(A, d)$  est un quasi-isomorphisme  $\theta : (AV, d) \rightarrow (A, d)$  provenant d'une algèbre de Sullivan. Une *agdc*  $(A, d)$  cohomologiquement 1-connexe admet toujours un modèle minimal de Sullivan et celui-ci



est unique à isomorphisme près. Le foncteur (contravariant)  $A_{PL}$  de Sullivan [42] associe à un espace  $S$  1-connexe de type fini une agdc cohomologiquement 1-connexe de type fini qui est quasi-isomorphe à l'algèbre des cochaînes singulières  $C^*(S; \mathbf{Q})$ . Ce foncteur constitue un invariant complet de la théorie homotopique des espaces rationnels. En particulier, il existe un foncteur réalisation  $\langle - \rangle$  de la catégorie des adgc cohomologiquement 1-connexes et de type fini dans la catégorie des espaces 1-connexes de type fini satisfaisant à la propriété suivante : si  $S$  est un espace 1-connexe de type fini et si  $(\Lambda V, d)$  est un modèle de Sullivan de  $S$ , alors  $\langle \Lambda V, d \rangle$  et  $S$  ont le même type d'homotopie rationnelle.

Par, définition, un modèle (minimal) de Sullivan d'un espace  $S$  1-connexe de type fini est un modèle (minimal)  $((\Lambda V, d), \theta)$  de l'agdc  $A_{PL}(S)$ . Les algèbres  $H^*(\Lambda V, d)$  et  $H^*(S; \mathbf{Q})$  sont ainsi isomorphes. De plus, si  $(\Lambda V, d)$  est le modèle minimal de  $S$  (de type fini), l'evg  $V$  est de type fini et est isomorphe au dual de l'homotopie de l'espace  $V^p \cong Hom(\pi_p(S), \mathbf{Q})$  et donc à l'homotopie rationnelle de  $S$  ( $V^p \cong \pi_p(S) \otimes \mathbf{Q}$ ).

Cette modélisation se prolonge aux morphismes d'agdc et aux applications. Une KS extension est un morphisme d'agdc  $(A, d_A) \rightarrow (A \otimes \Lambda V, d)$  tel que  $a \mapsto a \otimes 1$ ,  $d(a \otimes 1) = d_A a \otimes 1$  et  $V$  est muni d'une base bien ordonnée  $\{v_\alpha\}_{\alpha \in J}$  pour laquelle la différentielle  $d$  vérifie  $d(1 \otimes v_\alpha) \in A \otimes \Lambda V_{<\alpha}$ . Tout morphisme d'agdc  $(A, d) \rightarrow (B, d)$  se factorise en une KS extension suivie d'un quasi-isomorphisme d'agdc

$$\begin{array}{ccc} (A, d) & \xrightarrow{\quad} & (B, d) \\ & \searrow & \nearrow \sim \\ & (A \otimes \Lambda V, d) & \end{array}$$

Ainsi, si  $(\Lambda V, d)$  est un modèle de Sullivan d'un espace  $T$ , une application  $\varphi : S \rightarrow T$  est modélée par une KS extension  $(\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda(V \oplus W), d)$  obtenue en factorisant le morphisme  $(\Lambda V, d) \xrightarrow{\sim} A_{PL}(T) \xrightarrow{A_{PL}(\varphi)} A_{PL}(S)$ . Une telle KS extension est appelée *modèle de Sullivan relatif* de l'application  $\varphi$ .

La théorie homotopique des espaces rationnels peut également être modélée par la théorie homotopique des algèbres de Lie graduées différentielles (lgd). Ainsi, D. Quillen [35] associe par un foncteur  $\lambda$  à tout espace  $S$  1-connexe une lgd  $\lambda(S) = (L, d)$  1-réduite (i.e.  $L_0 = 0$ ) telle que  $H(L, d)$  est isomorphe (sans hypothèse de finitude) à l'algèbre de Lie  $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$  (munie du crochet de Samelson). Un *modèle de Quillen* de  $S$  est alors une lgd libre  $(\mathbf{L}(V), d)$  quasi-isomorphe à  $\lambda(S)$ . Il est dit *minimal* lorsque la

différentielle est décomposable  $d(V) \subset [\mathbf{L}(V), \mathbf{L}(V)]$ , l'evg  $V$  est alors isomorphe à  $s^{-1}H_*(S; \mathbf{Q})$ . Grâce à un résultat de M. Majewski [32], on sait que les modèles de Quillen et de Sullivan d'un espace  $S$  1-connexe de type fini sont reliés par les foncteurs  $\mathcal{C}^*$  et  $\mathcal{L}$  de Quillen.

Nous utiliserons également la notion de formalité :

Un espace  $S$  1-connexe de type fini est *formel* s'il a même modèle minimal que l'agdc  $(H^*(S; \mathbf{Q}), 0)$  i.e. s'il existe des quasi-isomorphismes d'agdc  $(H^*(S; \mathbf{Q}), 0) \xleftarrow{\sim} (\Lambda V, d) \xrightarrow{\sim} A_{PL}(S)$  où  $(\Lambda V, d)$  est le modèle minimal de  $S$ . Cela est équivalent à l'existence d'un modèle minimal de Quillen à différentielle purement quadratique [43]. Le type d'homotopie rationnel d'un espace formel est ainsi complètement déterminé par sa cohomologie rationnelle. Soient  $S$  et  $T$  deux espaces 1-connexes de type fini de modèles minimaux respectifs  $(\Lambda V, d)$  et  $(\Lambda W, d)$ . Une application  $\varphi : S \rightarrow T$  entre deux espaces formels est *formalisable* [30] [12] s'il existe deux quasi-isomorphismes  $\theta_S : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\sim} (H^*(S; \mathbf{Q}), 0)$  et  $\theta_T : (\Lambda W, d) \xrightarrow{\sim} (H^*(T; \mathbf{Q}), 0)$  et un morphisme d'agdc  $\tilde{\varphi} : (\Lambda W, d) \rightarrow (\Lambda V, d)$  tels que le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{array}{ccccc} (H^*(T; \mathbf{Q}), 0) & \xleftarrow{\theta_T} & (\Lambda W, d) & \xrightarrow{\sim} & A_{PL}(T) \\ \varphi^* \downarrow & & \downarrow \tilde{\varphi} & & \downarrow A_{PL}(\varphi) \\ (H^*(S; \mathbf{Q}), 0) & \xleftarrow{\theta_S} & (\Lambda V, d) & \xrightarrow{\sim} & A_{PL}(S) \end{array}$$

Par exemple, la suspension d'une application est formalisable, elle est donc, à équivalence d'homotopie près, déterminée par l'application qu'elle induit en cohomologie.

•  *$\sigma$ -catégorie et  $\sigma_\Delta$ -catégorie rationnelles*

Comme nous l'avons déjà rappelé, la catégorie rationnelle d'un espace  $X$  1-connexe est, par définition, la catégorie de son rationalisé :  $cat_0(X) = cat(X_{\mathbf{Q}})$ . Dans [46], Toomer montre que les espaces de Ganea d'un espace rationnel sont des espaces rationnels et en déduit l'existence, pour tout  $n \geq 0$ , d'un diagramme homotopiquement commutatif

$$\begin{array}{ccc} G_n(X)_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\cong} & G_n(X_{\mathbf{Q}}) \\ & \searrow g_n(X)_{\mathbf{Q}} & \swarrow g_n(X_{\mathbf{Q}}) \\ & & X_{\mathbf{Q}} \end{array}$$

Une application  $\varphi : S \rightarrow T$  entre espaces 1-connexes de type fini induisant une (unique à équivalence d'homotopie près) application entre les rationalisés

$\varphi_{\mathbf{Q}} : S_{\mathbf{Q}} \rightarrow T_{\mathbf{Q}}$ , il résulte de ce diagramme que la catégorie rationnelle d'un espace  $S$  1-connexe de type fini est une borne inférieure de la LS catégorie  $cat_0(S) \leq cat(S)$ .

De la même façon nous posons, pour un espace  $X$  1-connexe de type fini,  $\sigma^i cat_0(X) := \sigma^i cat(X_{\mathbf{Q}})$ ,  $\sigma cat_0(X) := \sigma cat(X_{\mathbf{Q}})$  et pour une application  $f : Y \rightarrow X$ ,  $\sigma_{\Delta}^i cat_0(f) := \sigma_{\Delta}^i cat(f_{\mathbf{Q}})$  et  $\sigma_{\Delta} cat_0(f) := \sigma_{\Delta} cat(f_{\mathbf{Q}})$ . En remarquant que la rationalisation commute avec la suspension et le smash-produit et en utilisant le diagramme ci-dessus, il est facile de voir que  $\sigma^i cat_0$  et  $\sigma_{\Delta}^i cat_0$  sont des approximations respectives de  $\sigma^i cat$  et de  $\sigma_{\Delta}^i cat$ .

Dans la section précédente, nous avons montré que, pour une application  $f : Y \rightarrow X$  et pour un corps  $\mathbf{k}$ , l'inégalité  $\sigma_{\Delta}^i cat(f) \leq n$  implique que l'application  $H^*(g_n(Y); \mathbf{k})$  induite en cohomologie par la fibration  $G_n(Y) \rightarrow Y$  admet une rétraction de  $H^*(X; \mathbf{k})$ -modules. Du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 G_n(Y)_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\cong} & G_n(Y_{\mathbf{Q}}) \\
 \searrow^{g_n(Y)_{\mathbf{Q}}} & & \swarrow_{g_n(Y_{\mathbf{Q}})} \\
 & Y_{\mathbf{Q}} & \\
 & \downarrow f_{\mathbf{Q}} & \\
 & X_{\mathbf{Q}} &
 \end{array}$$

il résulte que les structures de  $H^*(X; \mathbf{Q}) = H^*(X_{\mathbf{Q}}; \mathbf{Q})$ -modules des morphismes  $H^*(g_n(Y); \mathbf{Q}) = H^*(g_n(Y)_{\mathbf{Q}}; \mathbf{Q})$  et  $H^*(g_n(Y_{\mathbf{Q}}); \mathbf{Q})$  sont équivalentes. Par suite, si  $\sigma_{\Delta}^i cat(f) \leq n$  ces morphismes admettent tous deux une rétraction de  $H^*(X; \mathbf{Q})$ -modules. Cela admet une réciproque :

**Théorème 2.4.1.** *Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application entre espaces 1-connexes de type fini. Alors, pour tout  $i \geq 1$ ,  $\sigma_{\Delta}^i cat_0(f) = \sigma_{\Delta} cat_0(f)$  et  $\sigma_{\Delta} cat_0(f)$  est le plus petit  $n \in \mathbf{N}$  pour lequel  $H^*(g_n(Y); \mathbf{Q})$  admet une rétraction de  $H^*(X; \mathbf{Q})$ -modules.*

*En particulier, pour tout  $i \geq 1$ ,  $\sigma^i cat_0(Y) = \sigma cat_0(Y) = e_{\mathbf{Q}}(Y)$  et  $\sigma_{\Delta} cat_0(Y) \leq n$  si et seulement si  $H^*(g_n(Y); \mathbf{Q})$  admet une rétraction de  $H^*(Y; \mathbf{Q})$ -modules.*

**Démonstration.** Supposons que l'application  $H^*(g_n(Y); \mathbf{Q})$  admet une rétraction  $r : H^*(G_n(Y); \mathbf{Q}) \rightarrow H^*(Y; \mathbf{Q})$  de  $H^*(X; \mathbf{Q})$ -modules. De manière équivalente, l'application  $H^*(g_n(Y)_{\mathbf{Q}}; \mathbf{Q})$  admet une rétraction de  $H^*(X_{\mathbf{Q}}; \mathbf{Q})$ -modules que nous noterons également  $r$ . Pour établir notre énoncé, il nous suffit, puisque les entiers  $(\sigma_{\Delta}^i cat_0(f))_{i \in \mathbf{N}}$  forment une suite décroissante, de

prouver que  $\sigma_{\Delta}^1 \text{cat}_0(f) \leq n$ . En considérant la suspension du diagramme

$$\begin{array}{ccc} G_n(Y)_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\simeq} & G_n(Y_{\mathbf{Q}}) \\ & \searrow^{g_n(Y)_{\mathbf{Q}}} & \swarrow_{g_n(Y_{\mathbf{Q}})} \\ & & Y_{\mathbf{Q}} \end{array}$$

le problème revient à construire une application  $s : \Sigma Y_{\mathbf{Q}} \rightarrow \Sigma G_n(Y)_{\mathbf{Q}}$  qui vérifie  $\Sigma g_n(Y)_{\mathbf{Q}} \circ s \simeq id$  et qui rend homotopiquement commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \Sigma Y_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{s} & \Sigma G_n(Y)_{\mathbf{Q}} \\ R_1 \circ \Sigma \Delta_{f_{\mathbf{Q}}} \downarrow & & \downarrow R_1 \circ \Sigma \Delta_{(f \circ g_n(Y))_{\mathbf{Q}}} \\ X_{\mathbf{Q}} \wedge \Sigma Y_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{id \wedge s} & X_{\mathbf{Q}} \wedge \Sigma G_n(Y)_{\mathbf{Q}} \end{array}$$

Notons  $\tilde{r} : H_*(Y_{\mathbf{Q}}) \rightarrow H_*(G_n(Y)_{\mathbf{Q}})$  le dual de  $r$ , ce morphisme vérifie  $H_*(g_n(Y)_{\mathbf{Q}}) \circ \tilde{r} = id$  et rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_*(Y_{\mathbf{Q}}) & \xrightarrow{\tilde{r}} & \tilde{H}_*(G_n(Y)_{\mathbf{Q}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{H}_*(X_{\mathbf{Q}}) \otimes \tilde{H}_*(Y_{\mathbf{Q}}) & \xrightarrow{id \otimes \tilde{r}} & \tilde{H}_*(X_{\mathbf{Q}}) \otimes \tilde{H}_*(G_n(Y)_{\mathbf{Q}}) \end{array}$$

Appliquons le foncteur  $\mathbf{L}$  des algèbres de Lie libres et munissons les algèbres de Lie ainsi obtenues de la différentielle 0 :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{L}\tilde{H}_*(Y_{\mathbf{Q}}), 0) & \longrightarrow & (\mathbf{L}\tilde{H}_*(G_n(Y)_{\mathbf{Q}}), 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbf{L}\tilde{H}_*(X_{\mathbf{Q}}) \otimes \tilde{H}_*(Y_{\mathbf{Q}}), 0) & \longrightarrow & (\mathbf{L}\tilde{H}_*(X_{\mathbf{Q}}) \otimes \tilde{H}_*(G_n(Y)_{\mathbf{Q}}), 0) \end{array}$$

L'application  $\Sigma g_n(Y)_{\mathbf{Q}}$  étant formalisable, le morphisme  $\mathbf{L}\tilde{H}_*(g_n(Y)_{\mathbf{Q}}) : (\mathbf{L}\tilde{H}_*(G_n(Y)_{\mathbf{Q}}), 0) \rightarrow (\mathbf{L}\tilde{H}_*(Y_{\mathbf{Q}}), 0)$  en est un modèle. Par conséquent le morphisme  $\mathbf{L}\tilde{r}$  se réalise en une section homotopique  $\sigma : \Sigma Y_{\mathbf{Q}} \rightarrow \Sigma G_n(Y)_{\mathbf{Q}}$  de  $\Sigma g_n(Y)_{\mathbf{Q}}$ . Remarquons que l'application  $\sigma$  est formalisable car c'est une application entre suspensions qui est injective en homologie [12]. En conséquence  $\tilde{r} = s^{-1}\tilde{H}_*(\sigma)$ . Par formalité les morphismes verticaux du diagramme ci-dessus sont les modèles des applications  $R_1 \circ \Sigma \Delta_{f_{\mathbf{Q}}} : \Sigma Y_{\mathbf{Q}} \rightarrow X_{\mathbf{Q}} \wedge \Sigma Y_{\mathbf{Q}}$  et  $R_1 \circ \Sigma \Delta_{(f \circ g_n(Y))_{\mathbf{Q}}} : \Sigma G_n(Y)_{\mathbf{Q}} \rightarrow X_{\mathbf{Q}} \wedge \Sigma G_n(Y)_{\mathbf{Q}}$ . En

réalisant ce diagramme, nous obtenons donc une application  $m : X_{\mathbf{Q}} \wedge \Sigma Y_{\mathbf{Q}} \rightarrow X_{\mathbf{Q}} \wedge \Sigma G_n(Y)_{\mathbf{Q}}$  et un diagramme homotopiquement commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Sigma Y_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma G_n(Y)_{\mathbf{Q}} \\ R_1 \circ \Sigma \Delta_{f_{\mathbf{Q}}} \downarrow & & \downarrow R_1 \circ \Sigma \Delta_{(f \circ g_n(Y))_{\mathbf{Q}}} \\ X_{\mathbf{Q}} \wedge \Sigma Y_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{m} & X_{\mathbf{Q}} \wedge \Sigma G_n(Y)_{\mathbf{Q}}. \end{array}$$

dans lequel il nous reste à montrer que  $m \simeq id \wedge \sigma$ . L'application  $id \wedge \sigma : X_{\mathbf{Q}} \wedge \Sigma Y_{\mathbf{Q}} \rightarrow X_{\mathbf{Q}} \wedge \Sigma G_n(Y)_{\mathbf{Q}}$  est une application entre suspensions injective en homologie, elle est donc formalisable [12] et admet pour modèle  $Ls^{-1} \tilde{H}_*(id \wedge \sigma) = id \otimes L\tilde{r} : L(\tilde{H}_*(X_{\mathbf{Q}} \wedge \Sigma Y_{\mathbf{Q}}), 0) \rightarrow L(\tilde{H}_*(X_{\mathbf{Q}} \wedge \Sigma G_n(Y)_{\mathbf{Q}}), 0)$ . En conséquence  $m \simeq id \wedge \sigma$ .  $\square$

La catégorie rationnelle s'est révélée être un ingrédient essentiel dans l'étude de l'homotopie rationnelle des espaces. Le résultat fondamental dans cette direction est le théorème suivant dit *mapping theorem* établi en 1982 par Y. Félix et S. Halperin :

**Théorème 2.4.2 ([8]).** *Soit  $f : S \rightarrow T$  une application entre espaces 1-connexes de type fini. Si  $\pi_*(f) \otimes \mathbf{Q} : \pi_*(S) \otimes \mathbf{Q} \rightarrow \pi_*(T) \otimes \mathbf{Q}$  est injective alors  $cat_0(S) \leq cat_0(T)$ .*

L'une des applications majeures de ce théorème est de pouvoir séparer la classe des espaces 1-connexes de type fini et de catégorie rationnelle finie en deux classes disjointes : la classe des espaces elliptiques i.e. les espaces dont l'homotopie rationnelle est finie et la classe des espaces hyperboliques i.e. dont l'homotopie rationnelle croît de façon exponentielle. Historiquement, le point de départ du mapping theorem et de ses diverses conséquences réside dans une caractérisation en termes de modèles de Sullivan de la catégorie rationnelle. Rappelons cette caractérisation : soit  $(\Lambda V, d)$  un modèle minimal de  $S$ , considérons la projection  $\pi_n : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V / \Lambda^{>n} V, d)$  et factorisons-la en une KS extension suivie d'un quasi-isomorphisme :  $(\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda W, d) \xrightarrow{\sim} (\Lambda V / \Lambda^{>n} V, d)$ . Dans [8] Félix et Halperin montrent que  $cat_0(S)$  est le plus petit  $n$  pour lequel la projection  $\pi_n : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V / \Lambda^{>n} V, d)$  admet une rétraction homotopique ce qui signifie que la KS extension  $(\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V \otimes \Lambda W, d)$  admet une rétraction d'agdc. Cette caractérisation a alors suggéré la définition de la *module-catégorie* :  $Mcat_0(S)$  est le plus petit  $n$  pour lequel la projection  $\pi_n$  admet une rétraction homotopique de  $\Lambda V$ -modules différentiels. En 1988, K. Hess montre que les invariants  $Mcat_0$  et  $cat_0$  coïncident [21]. Ce résultat combiné aux travaux de B. Jessup sur  $Mcat_0$  [27] permet d'établir la formule  $cat_0(T \times S^m) = cat_0(T) + 1$ . Plus récemment,

en utilisant également le résultat de K. Hess, Y. Félix, S. Halperin et J-M. Lemaire [9] ont prouvé la formule générale  $cat_0(S \times T) = cat_0(S) + cat_0(T)$ .

Exprimons, à présent, l'invariant  $\sigma_{\Delta}^i cat_0(f)$  en termes de modèles de Sullivan. Considérons une application  $f : Y \rightarrow X$  et  $(\Lambda V, d) \xrightarrow{\phi} (\Lambda W, d)$  un modèle de Sullivan relatif de  $f$  ( $W = V \oplus V'$ ). La réalisation géométrique de ce modèle est homotopiquement équivalente à l'application  $f_{\mathbf{Q}} : Y_{\mathbf{Q}} \rightarrow X_{\mathbf{Q}}$ .

Le morphisme d'agdc  $\pi_n : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V/\Lambda^{>n}V, d)$  munit l'algèbre  $H(\Lambda V/\Lambda^{>n}V, \vec{d})$  d'une structure de  $H(\Lambda V, d)$ -modules définie comme suit : notons  $[a]$  la classe de cohomologie d'un cocycle  $a$ . Alors,  $[x] \in H(\Lambda V, d)$  et  $[y] \in H(\Lambda V/\Lambda^{>n}V, \vec{d})$   $[x] \cdot [y] = [\pi_n(x)y] = [xy]$ .

Par ailleurs, H. Scheerer et D. Tanré ont montré que la réalisation géométrique du morphisme  $\pi_n : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V/\Lambda^{>n}V, d)$  est une  $n$ -LS application [37]. Autrement dit, il existe des applications continues  $l$  et  $h$  telles que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} G_n(\langle \Lambda V \rangle) & \xrightarrow{l} & \langle \Lambda V/\Lambda^{>n}V \rangle & \xrightarrow{h} & G_n(\langle \Lambda V \rangle) \\ & \searrow g_n(\langle \Lambda V \rangle) & \downarrow (\pi_n) & \swarrow g_n(\langle \Lambda V \rangle) & \\ & & \langle \Lambda V \rangle & & \end{array}$$

Nous en déduisons la caractérisation suivante :

**Proposition 2.4.3.** *Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application entre espaces 1-connexes de type fini. Soit  $f_{\mathbf{Q}} : Y_{\mathbf{Q}} \rightarrow X_{\mathbf{Q}}$  sa rationalisation et  $(\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda W, d)$  un modèle de Sullivan de  $f$ . Alors,  $\sigma_{\Delta}^i cat_0(f) \leq n$  si et seulement si  $H(\pi_n) : H(\Lambda W, d) \rightarrow H(\Lambda W/\Lambda^{>n}W, \vec{d})$  admet une rétraction de  $H(\Lambda V, d)$ -modules.*

□

Nous allons, à présent, construire à partir du générateur  $\iota \in \pi_2(S^2)$  et de l'application de Hopf  $\eta \in \pi_5(\mathbf{CP}^2)$ , des espaces qui permettent de séparer les invariants  $\sigma_{\Delta} cat_0$ ,  $\sigma cat_0$  et  $cat_0$ .

Le premier de ces espaces a été construit par Lemaire et Sigrist [30]

**Un espace pour lequel  $\sigma_{\Delta} cat_0 \neq \sigma cat_0$**

Désignons par  $X$  l'espace  $(\mathbf{CP}^2 \vee S^2) \cup_{\alpha} e^7$  où  $\alpha = [\eta, \iota]$ . Son modèle minimal  $(\Lambda Z, d)$  est défini par  $Z = \bigoplus_{p \geq 2} Z^p$

$Z^2 : x, y \quad dx = dy = 0$

$Z^3 : a, b \quad da = x^2, db = xy$

$$Z^4 : v \quad dv = xb - ya$$

$$Z^5 : c, w \quad dc = y^3, dw = ab + xv$$

$$Z^6 : m, n \quad dm = av - xw, dn = bv - yw$$

$Z^{\geq 7}$  est construit par récurrence pour que  $H^{\geq 8}(\Lambda Z, d) = 0$ . (cf [30],[7])

La cohomologie  $H(\Lambda Z, d)$  est représentée par les cocycles

$$1, x, y, y^2, xc + y^2b.$$

Il est déjà connu que  $e_{\mathbf{Q}}(X) = 2$  et que  $cat_0(X) = 3$  [30]. Nous savons donc que  $\sigma cat_0(X) = 2$ . Montrons que  $\sigma_{\Delta} cat_0(X) = 3$ . La cohomologie  $H^{\leq 6}(\Lambda Z/\Lambda^{>2}Z)$  étant représentée par les cocycles

$$1, x, y, y^2, xb, yb, c, xv, yv, xc, yc, xw, yw$$

il existe une unique rétraction linéaire de  $H(p_2) : H(\Lambda Z, d) \rightarrow H(\Lambda Z/\Lambda^{>2}Z, \bar{d})$ . Cette rétraction envoie  $[1] \mapsto [1]$ ,  $[x] \mapsto [x]$ ,  $[y] \mapsto [y]$ ,  $[y^2] \mapsto [y^2]$ ,  $[xc] \mapsto [xc + y^2b]$  et toute autre classe sur 0. Elle envoie donc la classe  $[c]$  sur 0 ce qui lui interdit d'être une rétraction de  $H(\Lambda Z, d)$ -modules car elle devrait alors envoyer la classe  $[xc] = [x] \cdot [c]$  sur 0. Finalement  $\sigma_{\Delta} cat_0(X) = 3$ .

En modifiant l'attachement de la dernière cellule, nous construisons

**Un espace pour lequel  $\sigma_{\Delta} cat_0 \neq cat_0$**

Considérons l'espace  $Y = (\mathbf{CP}^2 \vee S^2) \cup_{\beta} e^8$  où  $\beta = [[\eta, \iota], \iota]$ . Nous allons prouver que  $\sigma_{\Delta} cat_0(Y) = 2$  tandis que  $cat_0(Y) = 3$ .

Le modèle minimal de  $Y$ ,  $(\Lambda V, d)$  est défini, en reprenant les notations de l'exemple précédent, par

$$V^p = Z^p \text{ pour } p \leq 5,$$

$$V^6 : u, m, n \quad du = y^2b - xc, dm = av - xw, dn = bv - yw$$

$$V^7 : p, r, s \quad dp = bc - yu, dr = xm + aw, ds = ym + bw + v^2$$

et  $V^{\geq 8}$  est construit par récurrence pour que  $H^{\geq 9}(\Lambda V, d) = 0$ .

• Prouvons que  $\sigma_{\Delta} cat_0(Y) = 2$

Les cohomologies  $H(\Lambda V, d)$  et  $H(\Lambda V/\Lambda^{>2}V, \bar{d})$  sont respectivement représentées par les cocycles

$$1, x, y, y^2, y^2v + xu + ac,$$

et

$$1, x, y, y^2, xa, xb, yb, c, ab, yv, av, bv, yc, xu, ac \dots$$

Nous construisons alors une rétraction linéaire de  $H(p_2) : H(\Lambda V, d) \rightarrow H(\Lambda V/\Lambda^{>2}V, \bar{d})$  par  $[1] \mapsto [1]$ ,  $[x] \mapsto [x]$ ,  $[y] \mapsto [y]$ ,  $[y^2] \mapsto [y^2]$ ,  $[xu + ac] \mapsto [y^2v + xu + ac]$  et toute autre classe est envoyée sur 0. Mises à part  $[y^2]$  et

[ $yc$ ], aucune classe de  $H(\Lambda V/\Lambda^{>2}V, \bar{d})$  n'est décomposable sous l'action de  $H(\Lambda V, d)$ -modules, la rétraction linéaire construite précédemment est donc une rétraction de  $H(\Lambda V, d)$ -modules. Par conséquent  $\sigma_{\Delta} \text{cat}_0(Y) = 2$ .

• Prouvons à présent que  $\text{cat}_0(Y) = 3$ .

Compte tenu de la décomposition cellulaire de  $Y$ , il est clair que  $\text{cat}_0(Y) \leq 3$ . Pour montrer l'inégalité inverse, nous construisons, de la même façon que dans [8], une application  $(S^4 \times \mathbf{CP}^2)_{\mathbf{Q}} \rightarrow Y_{\mathbf{Q}}$  injective en homotopie. Considérons  $I$  l'idéal de  $\Lambda V$  engendré par  $x, a, b, y^3, v^2$  et  $V^{\geq 5}$ . Cet idéal est stable par la différentielle. Le quotient de  $\Lambda V$  par  $I$  est l'adgc  $(\Lambda y/y^3 \otimes \Lambda v/v^2, 0)$ . La projection  $(\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda V/I, \bar{d}) \cong (\Lambda y/y^3 \otimes \Lambda v/v^2, 0)$  factorise à travers le modèle minimal de  $(\Lambda y/y^3 \otimes \Lambda v/v^2, 0)$  à savoir  $\Lambda(y, v, \alpha, \beta)$ ,  $d\alpha = y^3$ ,  $d\beta = v^2$ . Nous obtenons ainsi une application  $h : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda(y, v, \alpha, \beta), d)$  qui est surjective sur les générateurs :  $h(y) = y$ ,  $h(v) = v$ ,  $h(c) = \alpha$  et  $h(s) = \beta$ . L'algèbre  $\Lambda(y, v, \alpha, \beta)$  étant le modèle minimal de  $S^4 \times \mathbf{CP}^2$ , la réalisation de  $h$  donne lieu à une application continue  $(S^4 \times \mathbf{CP}^2)_{\mathbf{Q}} \rightarrow Y_{\mathbf{Q}}$  injective en homotopie. Le mapping theorem nous permet d'en déduire que  $\text{cat}_0(S^4 \times \mathbf{CP}^2) \leq \text{cat}_0 Y$ . Par la formule de K. Hess et B. Jessup, nous obtenons  $\text{cat}(S^4 \times \mathbf{CP}^2)_{\mathbf{Q}} = 1 + \text{cat}(\mathbf{CP}^2)_{\mathbf{Q}} = 3$ . Il en découle, finalement, l'égalité  $\text{cat} Y_{\mathbf{Q}} = 3$ .  $\square$



# Chapitre 3

## Attachement d'une cellule

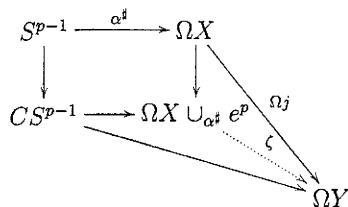
Dans tout ce chapitre, nous considérons un CW-complexe  $X$   $(q - 1)$ -connexe ( $q \geq 2$ ) et une application  $\alpha : S^p \rightarrow X$ , ( $p \geq q + 1$ ).

Le but est d'étudier le comportement des  $\sigma^i$ -catégories lors de l'attachement d'une cellule à l'espace  $X$  le long de l'application  $\alpha$ . Une telle étude a déjà été réalisée pour la LS-catégorie par Berstein et Hilton [4]. Leurs travaux montrent que les variations de la catégorie lors d'un attachement de cellule sont détectées par une classe d'homotopie liée à l'application d'attachement et appelée *invariant de Hopf*. Grâce à cette analyse, Berstein et Hilton ont, en particulier, pu exhiber le premier exemple d'un espace qui est un co-H-espace sans être une suspension. Nous considérons un analogue de leur invariant de Hopf et montrons que le comportement de la  $\sigma^i$ -catégorie est fonction de la  $i^{\text{ème}}$  suspension de cette classe d'homotopie. Après avoir donné quelques techniques de détermination de l'invariant de Hopf, nous appliquons ce résultat au calcul explicite de la  $\sigma^i$ -catégorie sur quelques exemples. Avant tout, nous commençons par examiner le squelette de basse dimension des espaces de Ganea de l'espace  $Y = X \cup_{\alpha} e^{p+1}$  ce qui motivera la définition de l'invariant de Hopf que nous donnons dans la section 2. Nous serons souvent amenés, par raison de commodité, à ne pas distinguer une application de sa classe d'homotopie.

### 3.1 Espace de Ganea d'un espace d'adjonction

Notons  $j : X \rightarrow Y = X \cup_{\alpha} e^{p+1}$  l'inclusion de  $X$  dans la cofibre homotopique. L'application  $\Omega j \circ \alpha^{\sharp} = \Omega(j \circ \alpha) \circ (id_{S^p})^{\sharp} : S^{p-1} \rightarrow \Omega X \rightarrow \Omega Y$  est homotopiquement triviale. Nous obtenons donc, par la propriété universelle

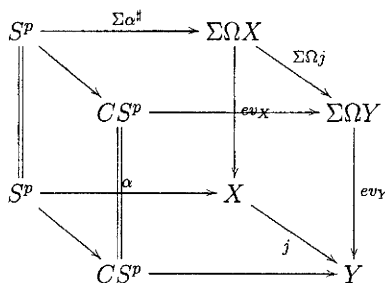
des sommes amalgamées une factorisation de  $\Omega j$  :



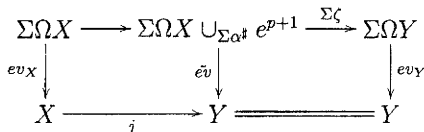
Nous voulons décrire les espaces de Ganea de  $Y$  en fonction de ceux de  $X$ . Cette description repose sur le lemme suivant démontré en fin de section.

**Lemme 3.1.1.** *L'application  $\zeta : \Omega X \cup_{\alpha^\sharp} e^p \rightarrow \Omega Y$  est une  $(p + q - 2)$ -équivalence.*

Par suspension nous obtenons une  $(p + q - 1)$ -équivalence  $\Sigma \zeta : \Sigma \Omega X \cup_{\Sigma \alpha^\sharp} e^{p+1} \rightarrow \Sigma \Omega Y$ . Du cube commutatif suivant



nous déduisons que la  $(p + q - 1)$ -équivalence  $\Sigma \zeta$  s'inscrit dans un diagramme commutatif



dans lequel l'application  $\tilde{e}v : \Sigma \Omega X \cup_{\Sigma \alpha^\sharp} e^{p+1} \rightarrow X \cup_{\alpha} e^{p+1} = Y$  coïncide avec  $ev_X$  sur  $\Sigma \Omega X$  et envoie la cellule  $e^{p+1}$  sur elle-même par l'identité. Via l'équivalence d'homotopie  $\kappa : \Sigma \Omega Z \xrightarrow{\sim} G_1(Z)$ , décrite dans la section 1.2, ce diagramme s'identifie à un même diagramme où les applications  $ev_X$ ,  $\tilde{e}v$ ,  $ev_Y$  et  $\Sigma \Omega j$  sont respectivement remplacées par les applications  $g_1(X)$ ,  $\tilde{g}_1 = (g_1(X), id)$ ,  $g_1(Y)$  et  $G_1(j)$ .

Plus généralement, notons  $\kappa_1 = \kappa$  et  $\kappa_n$  la composée  $\Sigma\Omega X \xrightarrow{\kappa} G_1(X) \rightarrow G_n(X)$ . Chaque composée  $S^p \xrightarrow{\kappa_n \circ \Sigma\alpha^\sharp} G_n(X) \xrightarrow{G_n(j)} G_n(Y)$  est homotopiquement triviale. Par la propriété universelle des sommes amalgamées, nous obtenons des applications  $\bar{g}_n : G_n(X) \cup_{\kappa_n \circ \Sigma\alpha^\sharp} e^{p+1} \rightarrow Y$ ,  $\zeta_n : G_n(X) \cup_{\kappa_n \circ \Sigma\alpha^\sharp} e^{p+1} \rightarrow G_n(Y)$  et un diagramme commutatif dans lequel  $j_n : G_n(X) \rightarrow G_n(X) \cup_{\kappa_n \circ \Sigma\alpha^\sharp} e^{p+1}$  est l'inclusion et  $\zeta_n \circ j_n = G_n(j)$ .

$$\begin{array}{ccc}
 F_n(X) & \xrightarrow{F_n(j)} & F_n(Y) \\
 \downarrow i_n(X) & & \downarrow i_n(Y) \\
 G_n(X) & \xrightarrow{j_n} G_n(X) \cup_{\kappa_n \circ \Sigma\alpha^\sharp} e^{p+1} \xrightarrow{\zeta_n} & G_n(Y) \\
 \downarrow g_n(X) & \bar{g}_n \downarrow & \downarrow g_n(Y) \\
 X & \xrightarrow{j} & Y \xlongequal{\quad} Y.
 \end{array}$$

**Proposition 3.1.2.** *Pour tout  $n \geq 1$ , le diagramme ci-dessus vérifie :*

- (i) *Le carré de gauche est une somme amalgamée;*
- (ii)  *$F_n(j)$  est une  $(nq + p - 1)$ -équivalence;*
- (iii)  *$\zeta_n$  est une  $(p + q - 1)$ -équivalence;*
- (iv) *Les applications  $g_n(X)$  et  $g_n(Y)$  induisent une application  $\mathcal{C}(G_n(j)) \rightarrow \mathcal{C}(j) = S^{p+1}$  qui est un isomorphisme en homologie jusqu'au degré  $p + q - 1$ .*

**Démonstration de la proposition 3.1.2** L'énoncé (i) découle de l'égalité  $g_n(X) \circ \kappa_n \circ \Sigma\alpha^\sharp = \alpha$  et de la propriété de composition des sommes amalgamées. Pour (ii), rappelons que l'application  $F_n(j)$  s'identifie au joint itéré  $\Omega_j^{n+1}$ . L'application  $\Omega_j : \Omega X \rightarrow \Omega Y$  est une  $(p - 1)$ -équivalence. En utilisant la connexité de  $\Omega X$ , il est facile d'en déduire le résultat. L'énoncé (iii) se prouve par récurrence sur  $n$ . Le cas  $n = 1$  vient du fait que l'application  $\zeta_1$  est exactement (via  $\kappa$ ) la suspension de l'application  $\zeta$  du lemme 3.1.1. Supposons le résultat vrai pour  $n \geq 1$ . Remarquons que l'espace  $G_{n+1}(X) \cup_{\kappa_{n+1} \circ \Sigma\alpha^\sharp} e^{p+1}$  est, via l'équivalence d'homotopie  $G_n(X) \cup F_n(X) \xrightarrow{\alpha_{n+1}} G_{n+1}(X)$  dans le même type d'homotopie que la cofibre homotopique du composé  $F_n(X) \xrightarrow{i_n(X)} G_n(X) \xrightarrow{j_n} G_n(X) \cup_{\kappa_n \circ \Sigma\alpha^\sharp} e^{p+1}$ . Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 F_n(X) & \xlongequal{\quad} & F_n(X) & \xrightarrow{F_n(j)} & F_n(Y) \\
 \downarrow i_n(X) & \searrow & \downarrow j_n \circ i_n(X) & & \downarrow i_n(Y) \\
 G_n(X) & \xrightarrow{j_n} & G_n(X) \cup_{\kappa_n \circ \Sigma\alpha^\sharp} e^{p+1} & \xrightarrow{\zeta_n} & G_n(Y)
 \end{array}$$

En prenant les cofibres homotopiques des applications  $i_n(X)$ ,  $j_n \circ i_n(X)$  et

$i_n(Y)$  et en utilisant l'équivalence d'homotopie  $\alpha_{n+1}$  nous obtenons une suite  $G_{n+1}(X) \rightarrow G_{n+1}(X) \cup_{\kappa_{n+1} \circ \Sigma \alpha^!} e^{p+1} \rightarrow G_{n+1}(Y)$ . Par argument de propriété universelle, il est facile d'identifier cette suite avec le composé  $\zeta_{n+1} \circ j_{n+1}$ . D'après le point (ii), l'application  $F_n(j)$  est une  $(nq + p - 1)$ -équivalence. Il résulte alors du lemme des cinq et de l'hypothèse de récurrence que  $\zeta_{n+1}$  est aussi une  $(p + q - 1)$ -équivalence ce qui termine la preuve.

(iv) La construction des cofibres homotopiques des applications  $j_n$ ,  $G_n(j)$  et  $j$  donne, en particulier, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G_n(X) \cup_{\kappa_n \circ \Sigma \alpha^!} e^{p+1} & \xrightarrow{\zeta_n} & G_n(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}(j_n) = S^{p+1} & \longrightarrow & \mathcal{C}(G_n(j)) \\ \parallel & & \downarrow \\ S^{p+1} & \xlongequal{\quad\quad\quad} & \mathcal{C}(j) \end{array}$$

dans lequel l'application  $\mathcal{C}(G_n(j)) \rightarrow \mathcal{C}(j)$  est induite par  $g_n(X)$  et  $g_n(Y)$ . L'application  $S^{p+1} \rightarrow \mathcal{C}(G_n(j))$  a pour inverse à gauche  $\mathcal{C}(G_n(j)) \rightarrow \mathcal{C}(j) = S^{p+1}$ ; elle induit donc un morphisme injectif en homologie. D'autre part, puisque le carré supérieur du diagramme ci-dessus est une somme amalgamée, nous pouvons déduire du point (iii) que  $S^{p+1} \rightarrow \mathcal{C}(G_n(j))$  est une  $(p + q - 1)$ -équivalence. En définitive, cette application induit un isomorphisme en homologie jusqu'au degré  $p + q - 1$  et il en est donc de même de son inverse à gauche.  $\square$

**Démonstration du lemme 3.1.1** Il s'agit de montrer que la fibre homotopique  $F'$  de l'application  $\zeta$  est  $(p + q - 3)$ -connexe. Considérons  $F$  la fibre homotopique de l'inclusion  $j : X \rightarrow Y$ . Notons  $\chi : F \rightarrow X$  l'application induite et  $d : S^p \rightarrow F$  un relèvement de  $\alpha$  dans  $F : \chi \circ d \simeq \alpha$ . D'après le lemme 2.2.5, l'application  $d$  est une  $(p + q - 2)$ -équivalence, il en découle que son adjoint  $d^\# : S^{p-1} \rightarrow \Omega S^p \xrightarrow{\Omega d} \Omega F$  est une  $\min(2p - 3, p + q - 3)$ -équivalence, soit une  $(p + q - 3)$ -équivalence. La cofibre homotopique  $\Omega F \cup_{d^\#} e^p$  de  $d^\#$  est donc  $p + q - 3$  connexe. Dans [37], H. Scheerer et D. Tanré montrent que les espaces  $\Omega F \cup_{d^\#} e^p$  et  $F'$  s'inscrivent dans une cofibration homotopique  $\Omega F \cup_{d^\#} e^p \rightarrow F' \rightarrow \Omega^2 Y * S^{p-1}$ . Le joint  $\Omega^2 Y * S^{p-1}$  étant  $(p + q - 3)$ -connexe, il en résulte que  $F'$  est également  $(p + q - 3)$ -connexe.  $\square$

## 3.2 Invariant de Hopf et $\sigma$ -catégorie

3.2.1. Nous commençons par préciser le comportement en homotopie des applications intervenant dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 F_n(X) & \xrightarrow{\sim} & F_n(X) \\
 i_n(X) \downarrow & & \downarrow \vartheta_n(X) \\
 G_n(X) & \xrightarrow{\gamma_n} & T^n(X) \\
 g_n(X) \downarrow & & \downarrow j^n(X) \\
 X & \xrightarrow{\Delta^{n+1}} & X^{n+1}
 \end{array}$$

et par fixer quelques notations.

L'application  $\pi_*(X) \rightarrow \pi_*(G_n(X))$  qui à une classe  $[\beta]$  associe la classe  $[\kappa_n \circ \Sigma \beta^{\sharp}]$  est une section de  $\pi_*(g_n(X))$ . Ceci montre, en particulier, que l'application  $g_n(X)$  est surjective en homotopie. En fait, cette section en homotopie provient d'une section naturelle  $\sigma : \Omega X \xrightarrow{id_{\Omega X}} \Omega \Sigma \Omega X \xrightarrow{\Omega \kappa_n} \Omega G_n(X)$  de la fibration  $\Omega g_n(X)$ . La seule existence de cette section permet, grâce à la version duale du lemme 2.2.6 de prouver que la fibration  $\Omega F_n(X) \rightarrow \Omega G_n(X) \rightarrow \Omega X$  est triviale. En particulier l'application  $\Omega i_n(X) : \Omega F_n(X) \rightarrow \Omega G_n(X)$  admet une rétraction  $\omega : \Omega G_n(X) \rightarrow \Omega F_n(X)$  vérifiant  $\Omega i_n(X) \circ \omega + \sigma \circ \Omega g_n(X) \simeq id$  et  $i_n(X) : F_n(X) \rightarrow G_n(X)$  est injective en homotopie.

De la même façon,  $\Omega j^n(X) : \Omega T^n(X) \rightarrow \Omega X^{n+1}$  admet une section naturelle  $\sigma' : \Omega X^{n+1} = (\Omega X)^{n+1} \rightarrow (\Omega T^n(X))^{n+1} \xrightarrow{*} \Omega T^n(X)$  (dans laquelle la première flèche est définie à partir des différentes inclusions de  $X$  dans le fat wedge et la seconde est la composition des lacets) ce qui assure la trivialité de la fibration homotopique  $\Omega F_n(X) \xrightarrow{\Omega \vartheta(X)} \Omega T^n(X) \xrightarrow{\Omega j^n(X)} \Omega X^{n+1}$ . En conséquence, il existe une application naturelle  $\omega' : \Omega T^n(X) \rightarrow \Omega F_n(X)$  vérifiant  $\omega' \circ \Omega \vartheta_n(X) = id$  et  $\Omega \vartheta_n(X) \circ \omega' + \sigma' \circ \Omega j^n(X) = id$ .

Enfin, la projection  $X^{n+1} \rightarrow X$  sur un facteur quelconque constitue un inverse à gauche de l'application diagonale. L'application  $\Omega \Delta^{n+1}$  admet donc une rétraction et celle-ci induit, par la trivialité des fibrations considérées ci-dessus, une rétraction de  $\Omega \gamma_n : \Omega G_n(X) \rightarrow \Omega T^n(X)$ . En particulier,  $\gamma_n$  est injective en homotopie.

*Supposons désormais que la catégorie de  $X$  est inférieure ou égale à  $k \geq 1$ .*

Rappelons que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G_k(X) & \xrightarrow{\gamma_k} & T^k(X) \\ g_k(X) \downarrow & & \downarrow j^k(X) \\ X & \xrightarrow{\Delta^{k+1}} & X^{k+1} \end{array}$$

établit une bijection entre les sections de  $g_k(X)$  et les relèvements à homotopie près de la diagonale. Fixons une section  $s : X \rightarrow G_k(X)$  de  $g_k(X)$  et notons  $\phi = \gamma_k \circ s : X \rightarrow T^k(X)$  le relèvement de  $\Delta^{k+1}$  correspondant. La catégorie de l'espace  $X \cup_{\alpha} e^{p+1}$  est au plus  $k+1$ . Il en est donc de même des  $\sigma^i \text{cat} Y$ . Pour  $\text{cat}$  et pour  $\sigma^i \text{cat}$ , se pose alors la question : " Sous quelles conditions la borne  $k+1$  est-elle atteinte ? " Dans le cas de la catégorie, la question peut être abordée par l'un des problèmes équivalents suivants :

- (a) sous quelles conditions l'application  $X \xrightarrow{s} G_k(X) \xrightarrow{G_k(j)} G_k(Y)$  s'étend-elle à  $Y$  ?
- (b) sous quelles conditions l'application  $X \xrightarrow{\phi} T^k(X) \xrightarrow{T^k(j)} T^k(Y)$  s'étend-elle à  $Y$  ?

Berstein et Hilton répondent à la question en montrant que l'obstruction à l'extension de  $\phi$  réside dans une classe d'homotopie  $\mathcal{H}_{\phi}(\alpha)$  appelée *invariant de Hopf délicat* dont voici la définition :

À la classe  $\alpha : S^p \rightarrow X$ , Bernstein et Hilton associent l'élément  $\mathcal{H}_{\phi}(\alpha) = (\omega \circ \Omega \phi \circ \alpha^{\sharp})^{\flat} \in \pi_p(F_k(X)) \cong \pi_{p+1}(X^{k+1}, T^k(X))$  et montrent :

**Théorème 3.2.2** ([4]). *Soient  $X$  un CW complexe  $(q-1)$ -connexe ( $q \geq 2$ ) de catégorie inférieure ou égale à  $k$  et  $\phi : X \rightarrow T_k(X)$  un relèvement de  $\Delta^{k+1}$ . Considérons une application  $\alpha : S^p \rightarrow X$  et notons  $Y = X \cup_{\alpha} e^{p+1}$  sa cofibre homotopique. Si  $\mathcal{H}_{\phi}(\alpha) = 0$  alors  $\text{cat} Y \leq k$ . La réciproque est vraie lorsque  $\dim(X) \leq q(k+1) - 2$ .*

Dans le cas de  $\sigma^i \text{cat}$  ( $i > 0$ ) les problèmes (a) et (b) "suspendus" ne sont plus équivalents. L'extension de  $\Sigma^i G_k(j) \circ \Sigma^i s : \Sigma^i X \rightarrow \Sigma^i G_k(Y)$  à l'espace  $\Sigma^i Y$  permet toujours de construire un relèvement de  $\Sigma^i \Delta^{k+1}$  mais il n'est pas possible en général (comme l'illustrera l'exemple 4) d'obtenir une section homotopique de  $\Sigma^i g_k(Y)$  à partir d'un relèvement de  $\Sigma^i \Delta^{k+1}$ . Nous sommes amenés à aborder la question par le problème (a). Nous allons associer à l'application  $\alpha$  un invariant de Hopf dont la  $i^{\text{ème}}$  suspension représentera l'obstruction à étendre l'application  $\Sigma^i G_k(j) \circ \Sigma^i s$  à l'espace  $\Sigma^i Y$ . Plus précisément cet invariant va mesurer le défaut de commutativité

du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Sigma\Omega S^p & \xrightarrow{\kappa_k \circ \Sigma\Omega\alpha} & G_k(X) \\ \Sigma id^\sharp \uparrow & & \uparrow s \\ S^p & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

dans lequel la composée  $\kappa_k \circ \Sigma\Omega\alpha \circ \Sigma id^\sharp = \kappa_k \circ \Sigma\alpha^\sharp$  est l'application d'attachement de la cellule  $e^{p+1}$  à l'espace de Ganea  $G_k(X)$  que nous avons étudiée dans la section 3.1. Autrement dit (voir 3.2.1), l'invariant de Hopf mesure la différence entre la section de  $\Omega g_k(X)$  induite par  $s$  et la section naturelle  $\sigma$  toutes deux évaluées en  $\alpha$  :

**Définition 3.2.3.** *L'invariant de Hopf de  $\alpha : S^p \rightarrow X$  est l'élément  $H_s(\alpha) = H(\alpha) = \kappa_k \circ \Sigma\alpha^\sharp - s \circ \alpha = (\sigma \circ \alpha^\sharp - \Omega s \circ \alpha^\sharp)^b \in \pi_p(G_k(X))$ .*

Remarquons que  $g_k(X) \circ (\kappa_k \circ \Sigma\alpha^\sharp - s \circ \alpha) \simeq *$  ce qui signifie que l'invariant de Hopf  $H(\alpha)$  est dans l'image de  $i_k(X) : F_k(X) \rightarrow G_k(X)$ . Considéré comme une classe d'homotopie de  $F_k(X)$  (nous le noterons alors  $\mathcal{H}_s(\alpha)$ ), cet invariant est la traduction en termes des fibrations de Ganea de l'invariant de Hopf défini par Bernstein et Hilton (cf. prop. 3.2.7). Notons que cet invariant de Hopf version "à la Ganea" apparaît déjà dans les travaux d'Iwase [24].

Nous montrons alors :

**Théorème 3.2.4.** *Soient  $X$  un CW complexe  $(q-1)$ -connexe ( $q \geq 2$ ) de catégorie inférieure ou égale à  $k$  et  $s : X \rightarrow G_k(X)$  une section de  $g_k(X)$ . Considérons une application  $\alpha : S^p \rightarrow X$  ( $p \geq q+1$ ) et notons  $Y = X \cup_\alpha e^{p+1}$  sa cofibre homotopique. Pour tout  $i \geq 0$  :*

*Si  $\Sigma^i H(\alpha) = 0$  alors  $\sigma^i \text{cat} Y \leq k$ .*

*Si, de plus,  $\dim(X) \leq q(k+1) - 2$ , alors la réciproque est vraie i.e.  $\sigma^i \text{cat} Y \leq k$  implique  $\Sigma^i H(\alpha) = 0$ .*

Lorsque l'espace  $X$  est une sphère  $S^q$ , la condition sur la dimension est toujours remplie et le théorème se simplifie en :

**Corollaire 3.2.5.** *Considérons une application  $\alpha : S^p \rightarrow S^q$  ( $q \geq 2, p \geq q+1$ ) de cofibre homotopique  $Y = S^p \cup_\alpha e^{p+1}$ . Alors, pour tout  $i \geq 0$ ,  $\sigma^i \text{cat} Y \leq 1$  si et seulement si  $\Sigma^i H(\alpha) = 0$ .*

Avant de démontrer le théorème 3.2.4 situons-le par rapport aux résultats de Bernstein et Hilton [4] et de Gilbert [17].

Gilbert étudie l'influence sur la catégorie faible  $G\text{-}wcat$  de l'attachement d'une cellule à une sphère  $S^q$ . Remarquons tout d'abord que l'espace  $\Sigma\Omega S^q$  est homotopiquement équivalent à un wedge infini de sphères  $\bigvee_{n \geq 1} S^{n(q-1)+1}$ . L'application  $\Sigma\alpha^\# : S^p \rightarrow \Sigma\Omega S^q \sim \bigvee_{n \geq 1} S^{n(q-1)+1}$  coïncide alors avec l'invariant de Hopf composé défini par Hilton [22]. Gilbert considère la classe  $H'(\alpha) \in \pi_p(\bigvee_{n \geq 2} S^{n(q-1)+1})$  obtenue par projection de  $\Sigma\alpha^\#$ . La section  $s = \Sigma id^\# : S^q \rightarrow \Sigma\Omega S^q$  coïncidant avec l'inclusion  $S^q \rightarrow \bigvee_{n \geq 1} S^{n(q-1)+1}$ , cette projection s'identifie à l'application  $\varrho : \Sigma\Omega S^q \rightarrow \mathcal{C}(s) \sim \bigvee_{n \geq 2} S^{n(q-1)+1}$ . Ainsi  $H'(\alpha) = \varrho \circ \Sigma\alpha^\# = \varrho \circ H(\alpha)$ . De plus, l'application  $\varrho$  admet une section homotopique  $\tau : \bigvee_{n \geq 2} S^{n(q-1)+1} \rightarrow \Sigma\Omega S^q$  vérifiant  $\tau \circ \varrho + s \circ ev \simeq id_{\Sigma\Omega S^q}$ . Il en résulte que  $H(\alpha) = 0$  si et seulement si  $H'(\alpha) := \varrho \circ H(\alpha) = 0$  et, de même pour tout  $i \geq 1$  :  $\Sigma^i H(\alpha) = 0$  si et seulement si  $\Sigma^i H'(\alpha) = 0$ . Gilbert utilise la classe  $\Sigma H'(\alpha)$  pour étudier les variations de  $G\text{-}wcat$ . Il montre que  $G\text{-}wcat(S^q \cup_\alpha e^{p+1}) \leq 1$  si et seulement si  $\Sigma H'(\alpha) = 0$ . Le cas  $i = 1$  du corollaire 3.2.5 est donc exactement le théorème de Gilbert et le cas  $i = 1$  du théorème 3.2.4 étend l'étude de Gilbert à tout espace. Notons, au passage que, pour  $\alpha : S^p \rightarrow S^q$ ,  $H(\alpha) = [\Sigma\alpha^\# - (\Sigma id^\#) \circ \alpha]$  est l'obstruction à ce que l'application  $\alpha$  soit une application de co-H-espace.

**3.2.6.** En suivant Gilbert, nous définissons  $H'(\alpha) = \varrho \circ H(\alpha) \in \pi_p(\mathcal{C}(s))$  où  $\varrho : G_k(X) \rightarrow \mathcal{C}(s)$  désigne l'inclusion de  $G_k(X)$  dans la cofibre de  $s : X \rightarrow G_k(X)$ . Par le diagramme suivant dans lequel toutes les lignes et colonnes sont des cofibrations homotopiques

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xlongequal{\quad} & X & \longrightarrow & * \\
 \downarrow s & & \downarrow \parallel & & \downarrow \\
 G_k(X) & \xrightarrow{\varrho_k(X)} & X & \xrightarrow{\rho_k(X)} & C_k(X) \\
 \downarrow \varrho & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{C}(s) & \longrightarrow & * & \longrightarrow & \Sigma\mathcal{C}(s)
 \end{array}$$

on observe que  $\Sigma\mathcal{C}(s) \sim C_k(X)$ . Par conséquent, pour  $i \geq 1$ , la classe  $\Sigma^i H'(\alpha)$  est élément de  $\pi_{p+i}(\Sigma^{i-1} C_k(X))$ . Remarquons également (en prolongeant les suites de Puppe des deux lignes du bas) que l'application  $\Sigma\varrho : \Sigma G_k(X) \rightarrow \Sigma\mathcal{C}(s)$  est une rétraction homotopique du connectant  $\delta : C_k(X) \rightarrow \Sigma G_k(X)$  de la suite de Puppe de la cofibration  $G_k(X) \xrightarrow{\varrho_k(X)} X \xrightarrow{\rho_k(X)} C_k(X)$ .

Venons-en au résultat de Berstein et Hilton énoncé précédemment. Nous allons voir que ce résultat est complètement contenu dans le cas  $i = 0$  du



théorème 3.2.4. Pour cela, nous allons mettre en relation l'invariant de Hopf défini par Berstein et Hilton et celui de la définition 3.2.3. À cette occasion, nous rassemblons dans la proposition suivante les différents invariants de Hopf rencontrés jusqu'ici et les relations existant entre-eux.

**Proposition 3.2.7.** *Soit  $s : X \rightarrow G_k(X)$  une section de la  $k^{\text{ème}}$  fibration de Ganea. Notons  $\phi := \gamma_k \circ s$  le relèvement de la diagonale correspondant et  $\varrho : G_k(X) \rightarrow \mathcal{C}(s)$  l'application obtenue en construisant la cofibre homotopique de  $s$ . À une application  $\alpha : S^p \rightarrow X$  nous avons associé :*

- (1)  $H(\alpha) = \kappa_k \circ \Sigma \alpha^\sharp - s \circ \alpha \in \pi_p(G_k(X))$ , d'adjointe  $H(\alpha)^\sharp = \sigma \circ \alpha^\sharp - \Omega s \circ \alpha^\sharp$  et  $\mathcal{H}_s(\alpha) \in \pi_p(F_k(X))$  défini par  $H(\alpha) = i_k(X) \circ \mathcal{H}_s(\alpha)$
- (2)  $\mathcal{H}_\phi(\alpha) = (\omega' \circ \Omega \phi \circ \alpha^\sharp)^\flat \in \pi_p(F_k(X)) \cong \pi_{p+1}(X^{k+1}, T^k(X))$ . Cet élément vérifie  $\mathcal{H}_\phi(\alpha)^\sharp = -\omega' \circ \Omega \gamma_k \circ H(\alpha)^\sharp$  et  $H(\alpha) = -i_k(X) \circ \mathcal{H}_\phi(\alpha)$  où  $i_k(X) : F_k(X) \rightarrow G_k(X)$  est l'inclusion. Autrement dit  $\mathcal{H}_\phi(\alpha) = -\mathcal{H}_s(\alpha)$ .
- (3)  $H'(\alpha) = \varrho \circ H(\alpha) \simeq \varrho \circ \kappa_k \circ \Sigma \alpha^\sharp \in \pi_p(\mathcal{C}(s))$ . Pour  $i \geq 1$ ,  $\Sigma^i H'(\alpha) \in \pi_{p+i}(\Sigma^{i-1} C_k(X))$

Les applications  $H : \pi_p(X) \rightarrow \pi_p(G_k(X))$ ,  $\mathcal{H}(= \mathcal{H}_\phi = -\mathcal{H}_s) : \pi_p(X) \rightarrow \pi_p(F_k(X))$  et  $H' : \pi_p(X) \rightarrow \pi_p(\mathcal{C}(s))$  sont des homomorphismes de groupes qui satisfont les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} H = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H} = 0 & \text{et} \quad H = 0 \Rightarrow H' = 0 \\ \Sigma^i \mathcal{H} = 0 \Rightarrow \Sigma^i H = 0 & \text{et} \quad \Sigma^i H = 0 \Leftrightarrow \Sigma^i H' = 0 \quad \text{pour tout } i \geq 1. \end{array} \right.$$

**Remarque.** L'équivalence  $H = 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}_\phi = 0$  montre que le cas  $i = 0$  du théorème 3.2.4 est exactement le théorème de Berstein et Hilton énoncé précédemment. Après suspension, l'implication  $H = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = 0$  n'est plus vraie car les applications  $\Sigma^i i_k(X) : \Sigma^i F_k(X) \rightarrow \Sigma^i G_k(X)$  ne sont, en général, pas injectives en homotopie.

**Démonstration de la proposition 3.2.7** Les points (1) et (3) sont les définitions des invariants  $H$  et  $H'$  (cf définition 3.2.3 et  $n^0$  3.2.6). Pour montrer la coïncidence des éléments  $\mathcal{H}_\phi(\alpha)^\sharp = \omega' \circ \Omega(\gamma_k \circ s \circ \alpha) \circ id^\sharp$  et  $-\omega' \circ \Omega \gamma_k \circ H(\alpha)^\sharp = -\omega' \circ \Omega \gamma_k \circ (\sigma \circ \alpha^\sharp - \Omega s \circ \alpha^\sharp)$ , il s'agit de prouver que  $\omega' \circ \Omega \gamma_k \circ \sigma \circ \alpha^\sharp = 0$ . Par naturalité de  $\sigma$ ,  $\gamma_k$  et  $\omega'$ , on obtient  $\omega' \circ \Omega \gamma_k \circ \sigma \circ \alpha^\sharp = \omega' \circ \Omega \gamma_k \circ \Omega G_k(\alpha) \circ \sigma \circ id^\sharp = \omega' \circ \Omega T^k(\alpha) \circ \Omega \gamma_k \circ \sigma \circ id^\sharp = \Omega F_k(\alpha) \circ \omega' \circ \Omega \gamma_k \circ \sigma \circ id^\sharp$ . Remarquons à présent que les applications  $\Omega \gamma_k \circ \sigma \circ id^\sharp$  et  $\sigma' \circ \Omega \Delta^{k+1} \circ id^\sharp$  constituent toutes deux des relèvements de l'application  $\Omega \Delta^{k+1} \circ id^\sharp : S^{p-1} \rightarrow \Omega(S^p)^{k+1}$  le long de  $\Omega j_k(S^p)$ . Cette dernière étant une  $((k+1)p - 2)$ -équivalence, elle induit une bijection  $[S^{p-1}, \Omega T^k(S^p)] \rightarrow [S^{p-1}, (\Omega S^p)^{k+1}]$ . Il en résulte que  $\Omega \gamma_k \circ \sigma \circ id^\sharp$  et  $\sigma' \circ \Omega \Delta \circ id^\sharp$  sont homotopes. Par conséquent  $\omega' \circ \Omega \gamma_k \circ \sigma \circ \alpha^\sharp = \Omega F_k(\alpha) \circ \omega' \circ \sigma' \circ \Omega \Delta \circ id^\sharp = 0$

puisque  $\omega' \circ \sigma' = 0$ . Montrons à présent que  $H(\alpha) = -i_k(X) \circ \mathcal{H}_\phi(\alpha)$ . Puisque  $\Omega\gamma_k$  admet une rétraction (cf 3.2.1), il suffit d'établir que  $\Omega\gamma_k \circ H(\alpha)^\sharp \simeq -\Omega\gamma_k \circ \Omega i_k(X) \circ \mathcal{H}_\phi(\alpha)^\sharp$ . Par la relation démontrée précédemment et  $\Omega\partial_n(X) \circ \omega' + \sigma' \circ \Omega j^n(X) = id$  nous obtenons  $\Omega\gamma_k \circ \Omega i_k(X) \circ \mathcal{H}_\phi(\alpha)^\sharp \simeq -\Omega\partial_k(X) \circ \omega' \circ \Omega\gamma_k \circ H(\alpha)^\sharp \simeq (\sigma' \circ \Omega j_k(X) - id) \circ \Omega\gamma_k \circ H(\alpha)^\sharp \simeq -\Omega\gamma_k \circ H(\alpha)^\sharp$  car  $\Omega j_k(X) \circ \Omega\gamma_k \circ H(\alpha)^\sharp \simeq \Omega\Delta^{k+1} \circ \Omega g_k(X) \circ H(\alpha)^\sharp \simeq *$ . Nous avons ainsi obtenu  $i_k(X) \circ \mathcal{H}_\phi(\alpha) = -H(\alpha) = -i_k(X) \circ \mathcal{H}_s(\alpha)$ , l'égalité  $\mathcal{H}_\phi(\alpha) = -\mathcal{H}_s(\alpha)$  découle de l'injectivité en homotopie de l'application  $i_k(X)$ . Venons-en à la seconde partie de l'énoncé. Puisque les applications d'adjonction préservent les lois de composition, il est clair que  $H, H', \mathcal{H}(= \mathcal{H}_\phi = -\mathcal{H}_s)$  sont des homomorphismes de groupes. Enfin, les seules implications non évidentes sont  $H = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = 0$  et  $\Sigma^i H' = 0 \Rightarrow \Sigma^i H = 0$ . La première se déduit de la relation  $H(\alpha) = -i_k(X) \circ \mathcal{H}(\alpha)$  et de l'injectivité en homotopie de l'application  $i_k(X) : F_k(X) \rightarrow G_k(X)$ . Pour la seconde implication, remarquons que l'application  $\Sigma^i s$  est une suspension ( $i \geq 1$ ) qui admet une rétraction homotopique, en l'occurrence  $\Sigma^i g_k(X)$ . Il découle du lemme 2.2.6 que la cofibration  $\Sigma^i X \xrightarrow{\Sigma^i s} \Sigma^i G_k(X) \xrightarrow{\Sigma^i \varrho} \Sigma^i \mathcal{C}(s)$  est triviale et que  $\Sigma^i \varrho$  admet une section homotopique  $\tau : \Sigma^i \mathcal{C}(s) \rightarrow \Sigma^i G_k(X)$  vérifiant  $\tau \circ \Sigma^i \varrho + \Sigma^i s \circ \Sigma^i g_k(X) \simeq id_{\Sigma^i G_k(X)}$ . Sachant que  $\Sigma^i \varrho \circ \Sigma^i H = 0$  et que  $\Sigma^i g_k(X) \circ \Sigma^i H = 0$ , on en déduit que  $\Sigma^i H = 0$ .  $\square$

**Démonstration du théorème 3.2.4** Considérons un entier  $i \geq 0$ .

(a) L'égalité  $\Sigma^i H(\alpha) = 0$  signifie que les applications  $\Sigma^i(\kappa_k \circ \Sigma\alpha^\sharp)$  et  $\Sigma^i(s \circ \alpha) = \Sigma^i s \circ \Sigma^i \alpha$  sont homotopes. Les applications  $id : \Sigma^i S^p \rightarrow \Sigma^i S^p$  et  $\Sigma^i s : \Sigma^i X \rightarrow \Sigma^i G_k(X)$  induisent ainsi une application entre les cofibres homotopiques de  $\Sigma^i(\kappa_k \circ \Sigma\alpha^\sharp)$  et de  $\Sigma^i \alpha$  que l'on note  $\tilde{s} : \Sigma^i Y \rightarrow \Sigma^i(G_k(X) \cup_{\kappa_k \circ \Sigma\alpha^\sharp} e^{p+1})$ . Considérons alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \Sigma^i S^p & \xrightarrow{\Sigma^i \alpha} & \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i j} & \Sigma^i Y \\
 \parallel & & \uparrow \Sigma^i g_k(X) & & \uparrow \Sigma^i \tilde{g}_k \\
 \Sigma^i S^p & \xrightarrow{\Sigma^i(\kappa_k \circ \Sigma\alpha^\sharp)} & \Sigma^i G_k(X) & \longrightarrow & \Sigma^i(G_k(X) \cup_{\kappa_k \circ \Sigma\alpha^\sharp} e^{p+1}) \\
 \parallel & & \uparrow \Sigma^i s & & \uparrow \tilde{s} \\
 \Sigma^i S^p & \xrightarrow{\Sigma^i \alpha} & \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i j} & \Sigma^i Y.
 \end{array}$$

Par le lemme des cinq, le composé  $\xi := \Sigma^i \tilde{g}_k \circ \tilde{s}$  induit un isomorphisme en homologie, c'est donc une équivalence d'homotopie. Le choix d'un inverse homotopique  $\xi^{-1}$  permet de former l'application  $\tilde{s} \circ \xi^{-1}$  qui constitue une section homotopique de  $\Sigma^i \tilde{g}_k(Y)$ . En composant  $\tilde{s} \circ \xi^{-1}$  par  $\Sigma^i \zeta_k :$

$\Sigma^i(G_k(X) \cup_{\kappa_k \circ \Sigma \alpha^i} e^{p+1}) \rightarrow \Sigma^i G_k(Y)$ , nous obtenons une section homotopique de  $\Sigma^i g_k(Y)$  et il en résulte que  $\sigma^i \text{cat} Y \leq k$ .

(b) Supposons que  $\sigma^i \text{cat} Y \leq k$  et soit  $\tilde{s} : \Sigma^i Y \rightarrow \Sigma^i G_k(Y)$  une section homotopique de  $\Sigma^i g_k(Y)$ . Étant donné la connexité de  $F_k(Y)$ , la fibration  $g_k(Y)$  est une  $(q(k+1) - 1)$ -équivalence, sa  $i^{\text{ème}}$  suspension est donc une  $(q(k+1) - 1 + i)$ -équivalence. Puisque  $\dim(\Sigma^i X) \leq q(k+1) - 2 + i$ , l'application  $\Sigma^i g_k(Y)$  induit une bijection  $[\Sigma^i X, \Sigma^i G_k(Y)] \rightarrow [\Sigma^i X, \Sigma^i Y]$ . De la relation  $\Sigma^i g_k(Y) \circ \Sigma^i G_k(j) \circ \Sigma^i s \simeq \Sigma^i j \simeq \Sigma^i g_k(Y) \circ \tilde{s} \circ \Sigma^i j$  il découle que les composées  $\Sigma^i G_k(j) \circ \Sigma^i s$  et  $\tilde{s} \circ \Sigma^i j$  sont homotopes. Nous obtenons ainsi  $\Sigma^i G_k(j) \circ \Sigma^i H(\alpha) = \Sigma^i G_k(j) \circ \Sigma^i(\Sigma \alpha^i - s \circ \alpha) = \Sigma^i G_k(j) \circ \Sigma^i(-s \circ \alpha) = -\tilde{s} \circ \Sigma^i j \circ \Sigma^i \alpha = 0$ . De  $\Sigma^i G_k(j) \circ \Sigma^i H(\alpha) = 0$  il nous reste à déduire que  $\Sigma^i H(\alpha) = 0$ . Pour cela distinguons deux cas :

( $i = 0$ ) Dans la proposition 3.2.7, nous avons montré que  $H(\alpha) = -i_k(X) \circ \mathcal{H}(\alpha)$  avec  $\mathcal{H}(\alpha) \in \pi_p(F_k(X))$ . L'égalité  $G_k(j) \circ H(\alpha) = 0$  implique donc  $i_k(Y) \circ F_k(j) \circ \mathcal{H}(\alpha) = 0$ . Puisque l'application  $i_k(Y)$  est injective en homotopie, il vient  $F_k(j) \circ \mathcal{H}(\alpha) = 0$ . D'après la Prop 3.1.2 (ii) l'application  $\pi_p(F_k(j))$  est injective et nous pouvons conclure.

( $i \geq 1$ ) Notons  $\mathcal{C}(s)$  la cofibre homotopique de  $s$  et  $\varrho : G_k(X) \rightarrow \mathcal{C}(s)$  l'application induite. De même notons  $\tilde{\varrho} : \Sigma^i G_k(Y) \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{s})$  l'application induite dans la cofibre de  $\tilde{s}$ . Puisque  $\Sigma^i G_k(j) \circ \Sigma^i s \simeq \tilde{s} \circ \Sigma^i j$ , il existe une application  $\psi : \Sigma^i \mathcal{C}(s) \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{s})$  telle que  $\psi \circ \Sigma^i \varrho \simeq \tilde{\varrho} \circ \Sigma^i G_k(j)$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{C}^i \left\{ \begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} \right. & \Sigma^i \mathcal{C}(s) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{C}(\tilde{s}) & \\
 & \uparrow \Sigma^i \varrho & & \uparrow \tilde{\varrho} & \\
 \Sigma^i S^p & \xrightarrow[\Sigma^i H(\alpha)]{} \Sigma^i G_k(X) & \xrightarrow[\Sigma^i G_k(j)]{} & \Sigma^i G_k(Y) & \\
 & \uparrow \Sigma^i s & & \uparrow \tilde{s} & \\
 & \Sigma^i X & \xrightarrow{\Sigma^i j} & \Sigma^i Y & 
 \end{array}$$

L'égalité  $\Sigma^i G_k(j) \circ \Sigma^i H(\alpha) = 0$  nous donne ainsi  $\psi \circ \Sigma^i \varrho \circ \Sigma^i H(\alpha) = 0$ . Montrons que  $\Sigma^i H(\alpha) = \Sigma^i \varrho \circ \Sigma^i H(\alpha)$  est nul, de la proposition 3.2.7 il découlera que  $\Sigma^i H(\alpha) = 0$  et l'énoncé sera démontré. Remarquons que  $\Sigma^i \varrho \circ \Sigma^i H(\alpha) \in \pi_{p+i}(\Sigma^i \mathcal{C}(s))$ . Par la proposition 3.1.2, l'application  $\Sigma^i \mathcal{C}(G_k(j)) \rightarrow S^{p+i+1}$  induite par  $\Sigma^i g_k(X)$  et  $\Sigma^i g_k(Y)$  donne en homologie un isomorphisme jusqu'au degré  $p+q-1+i$ . Il en est donc de même de sa section homotopique induite par  $\Sigma^i s$  et  $\tilde{s}$ . Puisque  $q \geq 2$ , il en résulte que la cofibre homotopique de  $\psi$  est au moins  $p+i+1$  connexe et que  $\psi$  est une  $(p+i+1)$ -équivalence.

L'application induite par  $\psi$  en homotopie est donc injective dans le degré  $p + i$  et  $\Sigma^i \varrho \circ \Sigma^i H(\alpha) = 0$ .  $\square$

### 3.3 Exemples

Dans la section précédente, nous avons ramené la détermination de la  $\sigma^i$ -catégorie d'un espace  $X \cup e^{p+1}$  au calcul de classes d'homotopie. Nous disposons ainsi de divers outils pour calculer : quelques relations entre les classes d'homotopie qui permettent parfois de réduire le calcul à celui de classes connues, la suite EHP lorsqu'il s'agit d'applications  $\alpha : S^p \rightarrow S^q$  et un invariant de Hopf "grossier" dont nous commençons par donner la définition.

Soient  $X$  un espace de catégorie  $k$  et  $s : X \rightarrow G_k(X)$  une section de  $g_k(X)$ .

Considérons l'application d'identification  $q_{k+1} : (X^{k+1}, T^k(X)) \rightarrow (X^{(k+1)}, *)$  et notons  $\bar{q}^{k+1} : F_k(X) \rightarrow \Omega X^{(k+1)}$  l'application induite :

$$\begin{array}{ccc}
 F_k(X) & \xrightarrow{\bar{q}^{k+1}} & \Omega X^{(k+1)} \\
 \vartheta_k(X) \downarrow & & \downarrow \\
 T^k(X) & \longrightarrow & * \\
 j^k(X) \downarrow & & \downarrow \\
 X^{k+1} & \xrightarrow{q_{k+1}} & X^{(k+1)}
 \end{array}$$

Pour étudier les variations de  $wcat$ , Bernstein et Hilton introduisent un homomorphisme  $\bar{H} : \pi_p(X) \rightarrow \pi_{p+1}(X^{(k+1)})$  appelé *invariant de Hopf grossier* et défini par  $\bar{H}(\alpha) = (q_{k+1})_* \circ \mathcal{H}(\alpha)$ . Ils montrent que si  $\bar{H}(\alpha) = 0$  alors  $wcat(X \cup_\alpha e^{p+1}) \leq k$  et que la réciproque est vraie si  $dim(X) \leq q(k+1) - 2$  cf [4]. Via l'isomorphisme  $\pi_p(F_k(X)) \cong \pi_{p+1}(X^{k+1}, T^k(X))$ , l'homomorphisme  $\bar{H}$  peut s'interpréter comme le composé  $(\bar{q}^{k+1} \circ \mathcal{H})^b = (\bar{q}^{k+1})^b \circ \Sigma \mathcal{H}$ . Rappelons que  $c_k : C_k(X) \rightarrow X^{(k+1)}$  désigne l'application induite entre les cofibres

de  $g_k(X)$  et  $j^k(X)$  et que  $\Sigma H^i(\alpha) \in \pi_{p+1}(C_k(X))$  (cf 3.2.6)

$$\begin{array}{ccc}
 G_k(X) & \xrightarrow{\gamma_k} & T^k(X) \\
 g_k(X) \downarrow & & \downarrow j^k(X) \\
 X & \xrightarrow{\Delta^{k+1}} & X^{k+1} \\
 \rho_k(X) \downarrow & & \downarrow q_{k+1} \\
 C_k(X) & \xrightarrow{c_k} & X^{(k+1)}
 \end{array}$$

**Proposition 3.3.1.**  $\bar{H}(\alpha) = c_k \circ \Sigma H^i(\alpha)$

**Démonstration.** Considérons le diagramme suivant dans lequel les deux premières colonnes sont des suites de cofibrations homotopiques et  $l : \Sigma F_k(X) \rightarrow C_k(X)$  est l'application induite

$$\begin{array}{ccccc}
 F_k(X) & \xrightarrow{i_k(X)} & G_k(X) & \xrightarrow{\gamma_k} & T^k(X) \\
 \downarrow & & g_k(X) \downarrow & & \downarrow j^k(X) \\
 * & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\Delta^{k+1}} & X^{k+1} \\
 \downarrow & & \rho_k(X) \downarrow & & \downarrow q_{k+1} \\
 \Sigma F_k(X) & \xrightarrow{l} & C_k(X) & \xrightarrow{c_k} & X^{(k+1)} \\
 \parallel & & \downarrow \delta & & \\
 \Sigma F_k(X) & \xrightarrow{\Sigma i_k(X)} & \Sigma G_k(X) & & 
 \end{array}$$

La composée  $c_k \circ l : \Sigma F_k(X) \rightarrow X^{(k+1)}$  est l'application induite par  $\gamma_k \circ i_k(X) \simeq \vartheta_k(X)$ , elle est donc homotope à  $(\bar{q}_{k+1})^b$ . Nous obtenons ainsi  $\bar{H}(\alpha) = c_k \circ l \circ \Sigma \mathcal{H}(\alpha)$ . Par ailleurs, nous avons déjà remarqué (3.2.6) que l'application  $\Sigma \varrho : \Sigma G_k(X) \rightarrow \Sigma \mathcal{C}(s) \sim C_k(X)$  est une rétraction homotopique du connectant  $\delta : C_k(X) \rightarrow \Sigma G_k(X)$ . Il résulte de cette remarque et de la proposition 3.2.7 que  $\bar{H}(\alpha) = c_k \circ \Sigma \varrho \circ \delta \circ l \circ \Sigma \mathcal{H}(\alpha) = c_k \circ \Sigma \varrho \circ \Sigma i_k(X) \circ \Sigma \mathcal{H}(\alpha) = c_k \circ \Sigma \varrho \circ \Sigma H(\alpha) = c_k \circ \Sigma H^i(\alpha)$ .  $\square$

Comme conséquence, nous obtenons

**Corollaire 3.3.2.** Pour tout  $i \geq 1$ ,  $\Sigma^i H = 0$  implique  $\Sigma^{i-1} \bar{H} = 0$ .

L'invariant  $\bar{H}$  est plus grossier mais en même temps plus facile à calculer. En particulier, lorsque  $X$  est une sphère, il coïncide avec la suspension de l'invariant de Hopf originel. Plus précisément :

Considérons une application  $\alpha : S^p \rightarrow S^q$ . Nous avons déjà signalé que l'application  $\Sigma\alpha^\sharp : S^p \rightarrow \Sigma\Omega S^q \sim \bigvee_{n \geq 1} S^{n(q-1)+1}$  s'identifie à l'invariant de Hopf composé défini par Hilton [22]. En particulier, si l'on note  $h_n : \Sigma\Omega S^q \sim \bigvee_{m \geq 1} S^{m(q-1)+1} \rightarrow S^{n(q-1)+1}$  la projection canonique et  $H_n$  la composée  $h_n \circ \Sigma\alpha^\sharp$  alors  $H_1$  est l'identité et  $H_2$  est l'invariant de Hopf classique. De plus, nous avons les relations :

- $H = 0$  si et seulement si  $H' = 0$ ,
- si  $H = 0$  alors  $H_n = 0$  pour tout  $n \geq 2$ ,
- $\bar{H} = \Sigma H_2$  (cf [22]).

Par exemple, si  $\eta \in \pi_3(S^2)$  désigne l'application de Hopf alors  $H_2(\eta) = id$ . Il en résulte, par raison de dimension, que  $H(\eta) = \iota_2$  où  $\iota_n : S^{n(q-1)+1} \rightarrow \bigvee_{m \geq 1} S^{m(q-1)+1}$  est l'inclusion.

• *formule de composition*

Par définition, pour  $\alpha : S^p \rightarrow X$  la classe  $H(\alpha)$  mesure le défaut de commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma\Omega S^p & \xrightarrow{\kappa_k \circ \Sigma\Omega\alpha} & G_k(X) \\ \Sigma id^\sharp \uparrow & & \uparrow s \\ S^p & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

Si l'on considère, à présent, une application  $\beta : S^m \rightarrow S^p$ , alors, en composant les défauts de commutativité dans le diagramme suivant,

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma\Omega S^m & \xrightarrow{\Sigma\Omega\beta} & \Sigma\Omega S^p & \longrightarrow & G_k(X) \\ \Sigma id^\sharp \uparrow & & \Sigma id^\sharp \uparrow & & \uparrow s \\ S^m & \xrightarrow{\beta} & S^p & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

nous obtenons la formule de composition similaire à celle démontrée par Hilton [22] :

$$H(\alpha \circ \beta) = H(\alpha) \circ \beta + \kappa_n \circ (\Sigma\Omega\alpha) \circ H(\beta).$$

En particulier, si  $\beta$  est une application de co-H-espace,  $H(\alpha \circ \beta) = H(\alpha) \circ \beta$ .

Calculons à présent les invariants  $\sigma^i cat$  sur quelques exemples. Nous utilisons, pour les éléments des groupes d'homotopies des sphères, les notations de Toda [44].

**Exemple 1.** Considérons  $Y_1 = S^3 \cup_\alpha e^7$  où  $\alpha = \nu' \in \pi_6(S^3)$  est un élément d'ordre 4. Cet espace vérifie :

$$e_k(Y_1) = 1, wcatY_1 = 2 \text{ et } \forall i \geq 0 \quad \sigma^i cat(Y_1) = 2.$$

**Démonstration.** Un modèle d'Adams-Hilton de  $Y_1 = S^3 \cup_{\nu} e^7$  est donné par l'algèbre graduée différentielle  $T(x, y)$ ,  $dx = dy = 0$ ,  $|x| = 2$ ,  $|y| = 6$ . Ce CW-complexe a donc même modèle d'Adams-Hilton que le wedge  $S^3 \vee S^7$ . Il en résulte (cf section 1.3) que  $e_k(Y) = e_k(S^3 \vee S^7) = 1$ . Montrons à présent que  $\sigma^i catY_1 = wcatY_1 = 2$ . Puisque l'espace  $Y$  a deux cellules il est déjà clair que ces entiers sont majorés par 2. Considérons la suite EHP pour la 2-localisation de la sphère  $S^3$  :

$$\longrightarrow \pi_5(S^2_{(2)}) \xrightarrow{E} \pi_6(S^3_{(2)}) \xrightarrow{H_2} \pi_6(S^5_{(2)}) \xrightarrow{P} \pi_4(S^2_{(2)}) \xrightarrow{E} \pi_5(S^3_{(2)}) \longrightarrow$$

La suspension  $E : \pi_4(S^2_{(2)}) \rightarrow \pi_5(S^3_{(2)})$  étant un isomorphisme, le morphisme  $H_2$  est surjectif. En conséquence, il existe un élément  $x \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$  non nul tel que  $H_2(x \cdot \nu') = \eta$  où  $\eta \in \pi_6(S^5)$  est une suspension itérée de l'application de Hopf  $S^3 \rightarrow S^2$ . La classe  $H_2(\nu')$  est donc stablement non nulle. Par le corollaire 3.2.5 nous obtenons  $\sigma^i catX > 1$  pour tout  $i \geq 0$  et par [4]  $wcatY > 1$ .  $\square$

**Exemple 2.**[17] Soit  $Y_2 = S^3 \cup_{\alpha} e^{18}$  où  $\alpha = \varepsilon_3 \circ \nu_{11} \circ \nu_{14} \in \pi_{17}(S^3)$  est un élément d'ordre 2. Gilbert a prouvé que  $\Sigma H'(\alpha) = 0$  cependant que  $H'(\alpha) \neq 0$ . Il s'ensuit que  $Y_2$  est un espace vérifiant :

$$\forall i \geq 1 \quad \sigma^i cat(Y_2) = wcatY_2 = 1 \text{ et } \sigma^0 cat(Y_2) = catY_2 = 2.$$

**Exemple 3.** Considérons  $Y_3 = S^2 \cup_{\alpha} e^{10}$  où  $\alpha \in \pi_9(S^2)$  est un élément d'ordre 3. Cet espace a déjà été étudié par Gilbert [17] et, récemment, Iwase a prouvé qu'il constitue un contre-exemple à la conjecture de Ganea [23].

$$\forall i \geq 2 \quad \sigma^i cat(Y_3) = 1 \text{ et } wcatY_3 = \sigma^0 cat(Y_3) = \sigma^1 catY_3 = 2.$$

**Démonstration.** L'application de Hopf  $\eta : S^3 \rightarrow S^2$  induit un isomorphisme entre les groupes d'homotopie  $\pi_9(S^3)$  et  $\pi_9(S^2)$ . L'application  $\alpha$  se décompose ainsi en  $S^9 \xrightarrow{\beta} S^3 \xrightarrow{\eta} S^2$  où  $\beta \in \pi_9(S^3) = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$  est un élément d'ordre 3. Nous allons prouver que  $\beta$  est une application de co-H-espaces (i.e.  $H(\beta) = 0$ ) vérifiant  $\Sigma\beta \neq 0$  et  $\Sigma^2\beta = 0$ . La formule de composition nous donnera  $H(\alpha) = H(\eta \circ \beta) = H(\eta) \circ \beta = \iota_2 \circ \beta$ . Il en résultera que l'invariant  $H(\alpha)$  coïncide avec  $H_2(\alpha)$  et qu'il vérifie  $H(\alpha) \neq 0$ ,  $\Sigma H(\alpha) \neq 0$  (donc  $\bar{H}(\alpha) \neq 0$ ) et  $\Sigma^i H(\alpha) = 0$  pour tout  $i \geq 1$ . Le corollaire 3.2.5 et le résultat de Bernstein et Hilton sur  $wcat$  [4][Cor. 3.19] permettent d'en déduire l'énoncé. La classe  $\Sigma\beta$  est non nulle car le morphisme de suspension  $\pi_9(S^3) \rightarrow \pi_{10}(S^4)$  est injectif. En revanche,  $\pi_{11}(S^5) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  ne contient aucun élément d'ordre 3 ce qui entraîne  $\Sigma^2\beta = 0$ . Pour prouver que  $\beta$  est une application de co-H-espaces, il s'agit de prouver que la classe  $H(\beta) \in \pi_9(\Sigma\Omega S^3)$ , ou de

façon équivalente  $H'(\alpha) \in \pi_9(\Sigma\Omega S^3/S^3)$ , est nulle. Pour cela, nous allons montrer que le groupe  $\pi_9(\Sigma\Omega S^3/S^3)$  ne contient pas d'élément d'ordre 3.

Calculons ce groupe :  $\pi_9(\Sigma\Omega S^3/S^3) = \pi_9(\bigvee_{n=2}^{\infty} S^{2n+1}) = \pi_9(S^5 \vee S^7 \vee S^9)$ .

Grâce à l'équivalence d'homotopie  $\Omega(X \vee Y) \sim \Omega X \times \Omega Y \times \Omega(\Omega X * \Omega Y)$ , on obtient que  $\pi_9(S^5 \vee S^7 \vee S^9) = \pi_9(S^5) \oplus \pi_9(S^7) \oplus \pi_9(S^9)$ . Finalement  $\pi_9(\Sigma\Omega S^3/S^3) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  ne possède aucun élément d'ordre 3 et  $H(\beta) = 0$ .  $\square$

**Remarque.** L'inclusion  $\iota_2 : S^3 \rightarrow \Sigma\Omega S^2$  factorise à travers la fibre  $F_2(S^2) = \Omega S^2 * \Omega S^2$  en  $\iota_2 = i_1(S^2) \circ (id_{S^2})^\sharp * (id_{S^2})^\sharp$ . Il en résulte que  $\mathcal{H}(\alpha) = (id_{S^2})^\sharp * (id_{S^2})^\sharp \circ \beta$  et donc on a également  $\Sigma\mathcal{H}(\alpha) \neq 0$  et  $\Sigma^2\mathcal{H}(\alpha) = 0$ .

**Exemple 4.** Considérons  $Y_4 = S_a^2 \vee S_b^2 \cup_\alpha e^5$  où  $\alpha \in \pi_4(S_a^2 \vee S_b^2)$  est le produit de Whitehead itéré  $[\iota_a, [\iota_a, \iota_b]]$  des inclusions. Cet espace vérifie

$$wcat(Y_4) = 1 \text{ et } \sigma^i cat Y_4 = e_k(Y_4) = 2 \text{ pour tout } i \geq 0.$$

**Démonstration.** L'égalité  $wcat(Y_4) = 1$  est prouvée dans [4]. Pour démontrer la seconde partie de l'énoncé, il suffit de voir que  $e_k(Y_4) = 2$ . Soit  $A = T(a, b, e)$  avec  $|a| = |b| = 1$ ,  $|e| = 4$ ,  $da = db = 0$  et  $de = [a, [a, b]]$  un modèle d'Adams-Hilton de l'espace  $Y_4$ . Rappelons que  $e_k(Y_4)$  est le plus petit  $n$  pour lequel  $(B_n A = T^{\leq n}(s\bar{A}), D) \hookrightarrow (BA, D)$  est surjective en homologie (cf section 1.3). Puisque  $D(sa) = D(sb) = 0$  et  $D(se) = -sa^2b + sba^2$ , il n'existe pas dans  $s\bar{A}$  d'élément  $m$  distinct de  $se$  tel que  $D(se + m) = 0$ . Autrement dit  $H(B_1 A) \rightarrow H(BA) = H_*(Y_4; \mathbf{k})$  n'est pas surjective et  $e_k(Y_4) > 1$ . Puisque  $e_k(Y_4) \leq cat Y_4 \leq 2$ , il en résulte que  $e_k(Y_4) = 2$ .

**Remarque.**  $Y_4$  est un espace pour lequel  $\Sigma\Delta : \Sigma Y_4 \rightarrow \Sigma(Y_4 \times Y_4)$  se relève dans la suspension du fat wedge cependant que  $\Sigma g_1(Y_4)$  n'admet pas de section homotopique. Pour montrer cela, rappelons (cf. chapitre 2 section 2) que l'espace  $\Sigma(Y_4 \times Y_4)$  se décompose, via l'équivalence de Puppe, sous la forme  $\Sigma(Y_4 \vee Y_4) \vee \Sigma(Y_4 \times Y_4)$ . En particulier  $\Sigma j^1(Y_4)$  admet une rétraction  $r : \Sigma(Y_4 \times Y_4) \rightarrow \Sigma Y_4 \vee \Sigma Y_4$  et  $\Sigma q_2 : \Sigma(Y_4 \times Y_4) \rightarrow \Sigma(Y_4 \wedge Y_4)$  admet une section homotopique  $\xi$  vérifiant  $j^1(Y_4) \circ r + \xi \circ \Sigma q_2 \simeq id$ . Puisque  $wcat Y_4 = 1$ , l'application  $\Sigma q_2 \circ \Sigma\Delta$  est homotopiquement triviale et par conséquent  $r \circ \Sigma\Delta$  est un relèvement de  $\Sigma\Delta$ . Pourtant  $\Sigma g_1(Y_4)$  n'admet pas de section homotopique puisque  $\sigma^i cat Y_4 > 1$  pour tout  $i \geq 0$ .  $\square$



# Chapitre 4

## $\sigma^i$ catégorie d'un produit d'espaces

### 4.1 Introduction

Les difficultés rencontrées dans l'étude de la LS-catégorie se manifestent dès l'examen des propriétés de base. Ainsi, il n'est pas facile de déterminer la catégorie d'un produit d'espaces connaissant celle de chaque facteur. Cette question déjà étudiée par Fox [13] a été au centre de nombreux travaux que nous rappellerons dans ce chapitre et n'a toujours pas trouvé une réponse complète. Bien-sûr, le problème du produit se pose également pour les approximations de la catégorie. Dans cette perspective, nous nous intéressons aux nombres  $\sigma^i \text{cat}(X \times Z)$ ,  $\sigma_{\Delta}^i \text{cat}(X \times Z)$  et, de façon intermédiaire, à  $\sigma_{\Delta}^i \text{cat}(X \times Z \xrightarrow{pr_X} X)$ . En 1941, Fox démontre que la LS-catégorie du produit de deux espaces  $X$  et  $Z$  connexes par arcs est majorée par la somme de leur catégorie respective [13] :

$$\text{cat}(X \times Z) \leq \text{cat}X + \text{cat}Z.$$

Dans la section 5, nous démontrons :

**Théorème 4.1.1.** *Soient  $X$  et  $Z$  deux espaces connexes par arcs. Alors, pour tout  $i \geq 0$ ,*

- $\sigma^i \text{cat}(X \times Z) \leq \sigma^i \text{cat}X + \sigma^i \text{cat}Z$ ;
- $\sigma_{\Delta}^i \text{cat}(X \times Z \xrightarrow{pr_X} X) \leq \sigma_{\Delta}^i \text{cat}X + \sigma^i \text{cat}Z$ .

En particulierisant les espaces  $X$  et  $Z$ , il est possible d'améliorer ce résultat. Ainsi, l'égalité  $e_{\mathbf{Q}}(X \times Z) = e_{\mathbf{Q}}(X) + e_{\mathbf{Q}}(Z)$ , prouvée par Toomer [45] pour les espaces 1-connexes de type fini, combinée au théorème 2.4.1 montre que,

pour  $X$  et  $Z$  1-connexes de type fini et pour  $i \geq 1$ , on a  $\sigma^i \text{cat}(X_{\mathbf{Q}} \times Z_{\mathbf{Q}}) = \sigma^i \text{cat}X_{\mathbf{Q}} + \sigma^i \text{cat}Z_{\mathbf{Q}}$ . Le cas  $i = 0$ ,  $\text{cat}(X_{\mathbf{Q}} \times Z_{\mathbf{Q}}) = \text{cat}X_{\mathbf{Q}} + \text{cat}Z_{\mathbf{Q}}$ , est également vrai et provient d'un théorème récent de Y. Félix, S. Halperin et J.-M. Lemaire [9] associé au résultat fondamental de K. Hess [21]. Dans ce contexte, nous obtenons

**Théorème 4.1.2.** *Soient  $X$  et  $Z$  deux espaces 1-connexes de type fini. Alors, pour tout  $i \geq 1$ ,*

$$\sigma_{\Delta}^i \text{cat}X_{\mathbf{Q}} + \sigma^i \text{cat}Z_{\mathbf{Q}} \leq \sigma_{\Delta}^i \text{cat}(X_{\mathbf{Q}} \times Z_{\mathbf{Q}}) \leq \sigma_{\Delta}^i \text{cat}X_{\mathbf{Q}} + \sigma_{\Delta}^i \text{cat}Z_{\mathbf{Q}}.$$

Un deuxième cas particulier consiste à supposer que l'un des espaces est une sphère. L'égalité  $\text{cat}(X \times S^m) = \text{cat}X + 1$  a longtemps été l'objet d'un problème ouvert connu comme étant la conjecture de Ganea. Très récemment, Iwase [23] a donné un contre-exemple à cette conjecture. Dans le cas de la  $\sigma^i$ -catégorie, nous obtenons les inégalités suivantes :

**Théorème 4.1.3.** *Soit  $X$  un espace connexe par arcs. Pour tout  $i > 0$  et tout  $m \geq 1$ ,*

- $\sigma^{i+m} \text{cat}X + 1 \leq \sigma^i \text{cat}(X \times S^m) \leq \sigma^i \text{cat}X + 1$ ;
- $\sigma_{\Delta}^{i+m} \text{cat}X + 1 \leq \sigma_{\Delta}^i \text{cat}(X \times S^m \xrightarrow{\text{pr}_X} X) \leq \sigma_{\Delta}^i \text{cat}X + 1$ .

**Corollaire 4.1.4.** *Soit  $X$  un espace connexe par arcs. Pour  $m \geq 1$ ,*

- $\sigma \text{cat}(X \times S^m) = \sigma \text{cat}X + 1$ ;
- $\sigma_{\Delta} \text{cat}(X \times S^m \xrightarrow{\text{pr}_X} X) = \sigma_{\Delta} \text{cat}X + 1$ ;
- $\sigma_{\Delta} \text{cat}X + 1 \leq \sigma_{\Delta} \text{cat}(X \times S^m)$ .

À l'origine de la conjecture de Ganea, dont nous détaillerons les différents éléments de réponse dans les sections 2 et 3, se trouvent l'exemple des espaces de Moore que Fox exhiba pour montrer que l'égalité  $\text{cat}(X \times Z) = \text{cat}X + \text{cat}Z$  est en général fautive : soient  $p$  un nombre premier et  $n$  un entier non nul, un espace de Moore de type  $(n, p)$ , noté  $M(n, p)$ , est, par définition, la cofibre homotopique d'une application  $S^n \rightarrow S^n$  de degré  $p$ . Si  $q$  est un nombre premier distinct de  $p$ , l'inclusion  $M(n, p) \vee M(n, q) \xrightarrow{\sim} M(n, p) \times M(n, q)$  est une équivalence d'homotopie. Comme  $M(n, p)$  et  $M(n, q)$  sont des suspensions ( $M(n, p) = \Sigma M(n-1, p)$ ), il en résulte que  $\text{cat}(M(n, p) \times M(n, q)) = \text{cat}M(n, p) = 1$  cependant que  $\text{cat}M(n, p) + \text{cat}M(n, q) = 2$ . En 1971, ces espaces constituaient les seuls exemples connus pour lesquels la catégorie d'un produit diffère de la somme des catégories. L'importance de la torsion homologique dans ces exemples a conduit Ganea à poser le problème suivant [15], connu depuis comme étant la conjecture de Ganea :

Soit  $X$  un CW-complexe fini et  $m \geq 1$  un entier, a-t-on

$$\text{cat}(X \times S^m) = \text{cat}X + 1 ?$$

Dans la suite, nous dirons qu'un espace  $X$  vérifie la conjecture de Ganea pour  $m$  s'il vérifie l'égalité précédente et qu'il vérifie la conjecture de Ganea si l'égalité est vraie pour tout  $m \geq 1$ .

**Remarque.** Puisque pour les espaces de Moore les invariants  $\sigma^i \text{cat}$  et  $\text{cat}$  coïncident, l'exemple précédent nous montre que l'égalité  $\sigma^i \text{cat}(X \times Z) = \sigma^i \text{cat}X + \sigma^i \text{cat}Z$  est en général fausse.

## 4.2 La conjecture de Ganea

Le premier élément de réponse au problème posé par Ganea est dû à Singhof en 1979 [39] qui prouve qu'une variété  $M$  linéaire par morceaux  $(n-1)$ -connexe et de dimension  $d$  vérifie la conjecture de Ganea pour  $m$  pourvu que sa catégorie  $\text{cat}M$  excède  $\frac{n+m}{2} + 2$ .

À la fin des années 80, la question a été abordée avec les techniques d'homotopie rationnelle et a trouvé dans ce cadre une réponse complète. Plus précisément la conjecture de Ganea est vraie pour les espaces rationnels et cela résulte de la combinaison des travaux de B. Jessup [27] et de K. Hess [21] : B. Jessup établit, pour tout espace  $X$  1-connexe de type fini, l'égalité  $M\text{cat}_0(X \times S^m) = M\text{cat}_0(X) + 1$  tandis que K. Hess démontre que, pour de tels espaces, les invariants  $M\text{cat}_0$  et  $\text{cat}_0$  coïncident. Notons que l'égalité  $\text{cat}_0(X \times Z) = \text{cat}_0(X) + \text{cat}_0(Z)$  mentionnée ci-dessus se décompose également en une égalité établie pour l'invariant  $M\text{cat}_0$  [9] complétée du résultat de K. Hess.

Plus récemment Y. Rudyak prouve que la conjecture est vraie pour toute variété fermée  $S$ -parallélisable  $(q-1)$ -connexe et de dimension inférieure ou égale à  $2q\text{cat}M - 4$  [36] et J. Strom montre que tout CW-complexe  $(q-1)$ -connexe dont la dimension satisfait  $\dim(X) \leq q(\text{cat}X + 1) - 2$  vérifie la conjecture de Ganea [41].

La formule produit satisfaite par les invariants  $\sigma^i \text{cat}$  (cf théorème 4.1.3) nous permet d'énoncer la condition suffisante suivante :

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $X$  un espace et  $m \geq 1$ ,  
Si  $\sigma^{m+1} \text{cat}(X) = \text{cat}(X)$  alors  $\text{cat}(X \times S^m) = \text{cat}(X) + 1$ ,  
Si  $\sigma \text{cat}(X) = \text{cat}(X)$  alors  $\text{cat}(X \times S^m) = \text{cat}(X) + 1$  pour tout  $m \geq 1$ .*

En particulier nous retrouvons la condition de Rudyak [36] : si  $r(X) = \text{cat}(X)$  alors l'espace  $X$  vérifie la conjecture de Ganea.

**Démonstration de la proposition 4.2.1.** Les valeurs possibles de  $\text{cat}(X \times S^m)$  sont  $\text{cat}X$  ou  $\text{cat}X + 1$ . Pour  $i = 1$ , la première partie du théorème 4.1.3 s'écrit  $\sigma^{m+1}\text{cat}(X) + 1 \leq \sigma^1\text{cat}(X \times S^m)$ . En appliquant  $\sigma^{m+1}\text{cat}(X) = \text{cat}(X)$  on obtient  $\text{cat}(X) + 1 \leq \sigma^1\text{cat}(X \times S^m) \leq \text{cat}(X \times S^m)$ . Il en découle que  $\text{cat}(X \times S^m) = \text{cat}X + 1$ . Le deuxième énoncé se déduit de la même façon du corollaire 4.1.4.  $\square$

Dans la Proposition 2.2.4, nous avons établi le cas d'égalité suivant : Soit  $X$  un CW-complexe  $(q-1)$ -connexe, si  $\dim(X) \leq q(\text{cat}X + 1) - 2$  alors  $\sigma\text{cat}X = \text{cat}X$ .

Nous retrouvons ainsi le résultat de Strom :

**Corollaire 4.2.2.** *Si  $X$  est un CW-complexe  $(q-1)$ -connexe de dimension inférieure ou égale à  $q(\text{cat}X + 1) - 2$ , alors  $X$  vérifie la conjecture de Ganea.*

Par exemple,  $Sp(2)$  vérifie la conjecture de Ganea.

Les résultats du chapitre 4 nous permettent de compléter cet énoncé par une condition suffisante pour qu'un espace d'adjonction  $Y = X \cup e^{p+1}$  vérifie la conjecture de Ganea :

**Théorème 4.2.3.** *Soit  $X$  un CW-complexe  $(q-1)$ -connexe ( $q \geq 2$ ) et de catégorie majorée par  $k \geq 1$ . Soit également  $s : X \rightarrow G_k(X)$  une section de  $g_k(X)$  et considérons une application  $\alpha : S^p \rightarrow X$  ( $p \geq q + 1$ ). Supposons que  $\dim(X) \leq (k+1)q - 2$ .*

$\forall m \geq 1$ , Si  $\Sigma^{m+1}H(\alpha) \neq 0$  alors  $\text{cat}((X \cup_\alpha e^{p+1}) \times S^m) = \text{cat}(X \cup_\alpha e^{p+1}) + 1$ .

Autrement dit, si  $\Sigma^{m+1}H(\alpha) \neq 0$  alors l'espace  $Y = X \cup_\alpha e^{p+1}$  vérifie la conjecture de Ganea pour  $m$ .

**Démonstration.** Du théorème 3.2.4 et de l'hypothèse  $\Sigma^{m+1}H(\alpha) \neq 0$  nous déduisons que  $\sigma^{m+1}\text{cat}(Y) > \text{cat}(X)$ . Puisque  $\sigma^{m+1}\text{cat}(Y)$  n'a que deux valeurs possibles en l'occurrence  $\text{cat}X$  et  $\text{cat}Y$ , nous obtenons  $\sigma^{m+1}\text{cat}(Y) = \text{cat}(Y)$ . La proposition 4.2.1 complète la démonstration.  $\square$

Ce théorème nous permet d'exhiber de nouveaux espaces vérifiant la conjecture de Ganea et pour lesquels la condition de Strom n'est pas suffisante :

**Exemple 5.** Considérons  $\varepsilon_3 \in \pi_{11}(S^3)$  un élément d'ordre 2. Par [44] nous savons que  $H_2(\varepsilon_3)$  est une classe stable ce qui implique que l'élément  $H(\varepsilon_3)$  est stablement non trivial. Par conséquent, l'espace  $S^3 \cup_{\varepsilon_3} e^{12}$  vérifie la conjecture de Ganea.

Cependant, comme nous l'avons déjà signalé, la conjecture de Ganea est fautive en général. Le premier contre-exemple est dû à N. Iwase [23]. Nous le présentons dans la section suivante afin de mettre en évidence le rôle tenu par les invariants de Hopf dans l'argument d'Iwase. Depuis, D. Stanley [40] a construit une série d'espaces qui sont des contre-exemples à la conjecture de Ganea et qui permettent, dans le même temps, de former des espaces pour lesquels la longueur en cônes introduite par O. Cornea [5] et la LS-catégorie diffèrent. Ces espaces sont de la forme  $Z = T^r(S^l) \cup_{\alpha} e^s$  où  $\alpha$  est une application pour laquelle il existe un entier  $n$  grand tel que  $\Sigma^n H(\alpha) \neq 0$  et  $\Sigma^{n+1} H(\alpha) = 0$ . D. Stanley montre que, pour  $m \geq n + 1$ , on a  $cat(Z \times S^m) = catZ = r$ . Le théorème 4.2.3 complète ce résultat en établissant que  $cat(Z \times S^m) = catZ + 1$  pour  $m \leq n$ .

### 4.3 Exemple d'Iwase et invariant de Hopf

Iwase considère l'espace  $Q = S^2 \cup_{\alpha} e^{10}$  où  $\alpha \in \pi_9(S^2)$  est un élément d'ordre 3 (cf chap 4; exemple 3). Cet espace est de catégorie 2 (nous noterons  $s_Q : Q \rightarrow G_2(Q)$  une section de  $g_2(Q)$ ) et Iwase montre que, pour tout  $m \geq 2$ ,

$$cat(Q \times S^m) = catQ = 2.$$

Retraçons, sans entrer dans les détails, la preuve d'Iwase [23].

Notons  $j : S^2 \rightarrow Q$  l'inclusion de  $S^2$  dans la cofibre homotopique de  $\alpha$  et  $s : S^2 \rightarrow G_1(S^2)$  la section de  $g_1(S^2)$ . Rappelons que (cf section 4.1) la composée  $G_1(j) \circ \kappa \circ \Sigma \alpha^{\sharp}$  est homotopiquement triviale. De la relation  $G_1(j) \circ H(\alpha) = G_1(j) \circ (\kappa \circ \Sigma \alpha^{\sharp} - s \circ \alpha) = -G_1(j) \circ s \circ \alpha$  on tire le diagramme homotopiquement commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} S^9 & \xrightarrow{-F_1(j) \circ H(\alpha)} & F_1(Q) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow i_1(Q) \\ S^2 & \xrightarrow{G_1(j) \circ s} & G_1(Q) \end{array}$$

*Handwritten notes:*

$$\begin{array}{ccc} F_1(S^2) & \xrightarrow{H(\alpha)} & F_1(Q) \\ \downarrow \kappa & & \downarrow i_1(Q) \\ G_1(S^2) & \xrightarrow{s} & G_1(Q) \end{array}$$

$G_1(j) \circ H(\alpha) = G_1(j) \circ (\kappa \circ \Sigma \alpha^{\sharp} - s \circ \alpha) = -G_1(j) \circ s \circ \alpha$

Notons  $S^m$  l'élément représentant  $id_{S^m}$  dans le groupe  $\pi_m(S^m, *)$ . La construction du crochet de Whitehead des classes  $\alpha$  et  $S^m$  donne la somme amalgamée

suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 S^9 * S^{m-1} & & \\
 \parallel & & \\
 S^9 \times CS^{m-1} \cup_{S^9 \times S^{m-1}} CS^9 \times S^{m-1} \xrightarrow{[\alpha, S^m]} S^2 \times S^m \cup_{S^2 \times * } Q \times * & & \\
 \downarrow & \longrightarrow & \downarrow \\
 CS^9 \times CS^{m-1} & \longrightarrow & Q \times S^m
 \end{array}$$

Par une construction similaire, qui s'avère être une construction naturelle, Iwase obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 F_1(Q) * S^{m-1} & & \\
 = & & \\
 F_1(Q) \times CS^{m-1} \cup_{F_1(Q) \times S^{m-1}} CF_1(Q) \times S^{m-1} \longrightarrow G_1(Q) \times S^m \cup_{G_1(Q) \times * } G_2(Q) \times * & & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 CF_1(Q) \times CS^{m-1} & \longrightarrow & G_2(Q) \times S^m
 \end{array}$$

dans lequel l'application  $G_1(Q) \times S^m \cup_{G_1(Q) \times * } G_2(Q) \times * \rightarrow G_2(Q) \times S^m$  est l'application issue de la propriété universelle des sommes amalgamées dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 G_1(Q) & \longrightarrow & G_1(X) \times S^m \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G_2(Q) & \longrightarrow & G_2(Q) \times S^m
 \end{array}$$

Par naturalité, il vient alors un diagramme homotopiquement commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 S^9 * S^{m-1} & \xrightarrow{(F_1(j) \circ \mathcal{H}(\alpha)) * S^{m-1}} & F_1(Q) * S^{m-1} \\
 \downarrow [\alpha, S^m] & & \downarrow \\
 S^2 \times S^m \cup_{S^2 \times * } Q \times * & \xrightarrow{G_1(j) \circ s \times id \cup s_Q \times * } & G_1(Q) \times S^m \cup_{G_1(Q) \times * } G_2(Q) \times * \\
 \downarrow & \nearrow s' & \downarrow \\
 Q \times S^m & \xrightarrow{s_Q \times id} & G_2(Q) \times S^m \\
 & & \downarrow g_2(Q) \times id \\
 & & Q \times S^m
 \end{array}$$

dans lequel la première colonne est une cofibration homotopique. Nous montrerons dans la section 6 que la composée  $\tilde{g}_2 : G_1(Q) \times S^m \cup_{G_1 Q \times *} G_2(Q) \times * \rightarrow G_2(Q) \times S^m \xrightarrow{g_2(Q) \times id} Q \times S^m$  est une 2-LS application (corollaire 4.6.2). Il suffit donc, pour montrer que  $cat(Q \times S^m) = 2$ , de lui construire une section homotopique. Dans l'exemple 3 du chapitre 4, nous avons vu que  $\Sigma^2 \mathcal{H}(\alpha) = 0$ , il en découle que l'application  $(F_1(j) \circ \mathcal{H}(\alpha)) * S^{m-1} \simeq \Sigma^m F_1(j) \circ \Sigma^m \mathcal{H}(\alpha)$  est homotopiquement triviale pourvu que  $m \geq 2$ . Puisque c'est le cas, il existe une application  $s' : Q \times S^m \rightarrow G_1(Q) \times S^m \cup_{G_1 Q \times *} G_2(Q) \times *$  telles que  $\tilde{g}_2 \circ s'$  et  $id_{Q \times S^m}$  sont homotopes sur  $S^2 \times S^m \cup Q \times *$ . La différence entre ces deux applications se manifeste par une classe d'homotopie  $\delta \in \pi_{9+m+1}(Q \times S^m)$  qui se relève le long de  $\tilde{g}_2$  en une classe  $\delta' \in \pi_{9+m+1}(G_1(Q) \times S^m \cup_{G_1 Q \times *} G_2(Q) \times *)$ . En ajoutant la classe  $\delta'$  à l'application  $s'$  via la coaction  $Q \times S^m \rightarrow Q \times S^m \vee \Sigma(S^9 * S^{m-1})$ , on obtient une section homotopique de  $g_2$  et par conséquent  $cat(Q \times S^m) = 2$ .  $\square$

La trivialité de la classe  $\Sigma^2 \mathcal{H}(\alpha)$  s'est révélée avoir un rôle essentiel dans la démonstration précédente. Plus généralement, Iwase [24] a montré que pour un CW-complexe  $(q-1)$ -connexe dont la dimension vérifie  $dim(X) \leq q(cat X + 1) - 2$  et pour une application  $\alpha : S^p \rightarrow X$  la non trivialité de la classe  $\Sigma^m \mathcal{H}(\alpha)$  est une condition nécessaire pour que l'espace  $Y = X \cup_\alpha e^{p+1}$  vérifie la conjecture de Ganea pour l'entier  $m$ .

## 4.4 $X$ -espaces et $X$ -applications

Les démonstrations des théorèmes 4.1.1 et 4.1.3 se déroulent en deux temps. La première étape consiste à prouver l'énoncé concernant l'invariant  $\sigma^i cat$ , cela nous amène, en particulier, à construire des sections homotopiques de suspensions de fibrations de Ganea. L'objet de la seconde étape est de vérifier que ces mêmes sections homotopiques rendent commutatifs (à homotopie près) des diagrammes du type :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^i Y & \xrightarrow{\quad} & \Sigma^i G_n(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \wedge \Sigma^i Y & \xrightarrow{id \wedge -} & X \wedge \Sigma^i G_n(Y) \end{array}$$

Pour préparer cette deuxième étape, nous établissons dans cette section les propriétés concernant les applications de la forme  $Y \rightarrow X \wedge Y$  dont nous aurons besoin.

**4.4.1.** Dorénavant  $X$  est un espace fixé et nous disons qu'un espace  $Y$  muni d'une application  $\alpha : Y \rightarrow X \wedge Y$  est un  $X$ -espace. Une application  $\varphi : Y \rightarrow Z$ , entre deux  $X$ -espaces  $(Y, \alpha)$  et  $(Z, \beta)$  est une  $X$ -application si  $\beta \circ \varphi \simeq (id \wedge \varphi) \circ \alpha$ , on note alors  $\varphi : (Y, \alpha) \rightarrow (Z, \beta)$ . Cette notion présente un caractère stable : si  $(Y, \alpha)$  est un  $X$ -espace, alors on peut considérer pour tout  $i \geq 0$  l'application  $R_i \circ \Sigma^i \alpha : \Sigma^i Y \rightarrow X \wedge \Sigma^i Y$  et, par suite  $(\Sigma^i Y, R_i \circ \Sigma^i \alpha)$  est un  $X$ -espace. De même les suspensions itérées  $\Sigma^i \varphi$  d'une  $X$ -application  $\varphi : (Y, \alpha) \rightarrow (Z, \beta)$  sont aussi des  $X$ -applications.

Tout espace  $S$  admet une structure triviale de  $X$ -espace donnée par l'application  $*$  :  $S \rightarrow X \wedge S$ .

La définition de  $\sigma cat_\Delta$  d'une application  $f : Y \rightarrow X$  a déjà mis en évidence plusieurs structures de  $X$ -espaces construites à partir de  $f$  :

- $(Y, \bar{\Delta}_f)$  et ses suspensions itérées  $(\Sigma^i Y, R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_f)$ ,
- $(G_n(Y), \bar{\Delta}_{f \circ g_n(Y)})$  et ses suspensions itérées  $(\Sigma^i G_n(Y), \Sigma^i \bar{\Delta}_{f \circ g_n(Y)})$ .

Dans ce nouveau cadre, le lemme 2.3.4 signifie que, si l'on considère un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\varphi} & Z \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & X \end{array}$$

alors, pour tout  $i \geq 0$ , l'application  $\Sigma^i \varphi : \Sigma^i Y \rightarrow \Sigma^i Z$  est une  $X$ -application entre les  $X$ -espaces  $(\Sigma^i Y, R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_f)$  et  $(\Sigma^i Z, R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_g)$ . Par exemple, étant donné un espace  $Y$  et une application  $f : Y \rightarrow X$ , les fibrations de Ganea  $g_n(Y) : G_n(Y) \rightarrow Y$  et leurs suspensions itérées sont des  $X$ -applications pour les structures de  $X$ -espaces décrites précédemment. L'invariant  $\sigma_\Delta^i cat(f)$  est alors le plus petit entier  $n$  pour lequel l'application  $\Sigma^i g_n(X)$  admet une section homotopique de  $X$ -espaces.

Avant de détailler les exemples qui nous serviront ensuite, remarquons que la notion de  $X$ -application est préservée par composition et par passage à l'inverse :

**Proposition 4.4.2.** Soient  $\varphi : (Y, \alpha) \rightarrow (Z, \beta)$  et  $\vartheta : (Z, \beta) \rightarrow (W, \gamma)$  deux  $X$ -applications.

La composée  $\vartheta \circ \varphi : (Y, \alpha) \rightarrow (W, \gamma)$  est une  $X$ -application,

Si  $\varphi$  est une équivalence d'homotopie, alors tout inverse homotopique de  $\varphi$  est aussi une  $X$ -application.



**Démonstration.** La première assertion est immédiate. Démontrons le second point. Soit  $\xi$  un inverse homotopique de  $\varphi$ . Puisque  $\varphi$  est une  $X$ -application, on a  $(id \wedge \varphi) \circ \alpha \circ \xi \simeq \beta \circ \varphi \circ \xi \simeq \beta$ . En composant par  $id \wedge \xi$ , il vient  $\alpha \circ \xi \simeq (id \wedge \xi) \circ \beta$ .  $\square$

**4.4.3.** Soient  $(Y, \alpha)$  et  $(Z, \beta)$  deux  $X$ -espaces, le bouquet  $Y \vee Z$  est muni de la  $X$ -structure  $Y \vee Z \xrightarrow{\alpha \vee \beta} (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \xrightarrow{\cong} X \wedge (Y \vee Z)$ . Ainsi, pour qu'une application  $\varphi \vee \varphi' : Y \vee Z \rightarrow Y' \vee Z'$  soit une  $X$ -application, il suffit que  $\varphi : (Y, \alpha) \rightarrow (Y', \alpha')$  et  $\varphi' : (Z, \beta) \rightarrow (Z', \beta')$  soient toutes deux des  $X$ -applications. Si  $(Y, \alpha)$  est un  $X$ -espace, alors pour tout espace  $Z$ ,  $Y \wedge Z$  est un  $X$ -espace pour  $\alpha \wedge id : Y \wedge Z \rightarrow X \wedge Y \wedge Z$ .

Les deux propositions suivantes rassemblent les exemples de  $X$ -applications qui interviendront de façon essentielle dans les démonstrations des théorèmes 4.1.1 et 4.1.3.

**Proposition 4.4.4.** Considérons une application  $f : Y \rightarrow X$ , un espace  $Z$  et la projection  $pr_Z : Y \times Z \rightarrow Z$ . Les espaces  $Y$ ,  $Z$ ,  $Y \times Z$  et  $Y \wedge Z$  sont munis des structures de  $X$ -espaces respectives :  $\bar{\Delta}_f$ ,  $*$  :  $Z \rightarrow X \wedge Z$ ,  $\bar{\Delta}_{f \circ pr_Z}$  et  $\bar{\Delta}_f \wedge id$ . Les suspensions itérées et les bouquets de ces espaces sont munis des structures définies en 4.4.1 et 4.4.3. Compte-tenu de ces structures, les applications suivantes et leurs suspensions itérées sont des  $X$ -applications

- (i) les applications  $R : \Sigma(Y \wedge Z) \rightarrow Y \wedge \Sigma Z$ ,  $L : \Sigma(Y \wedge Z) \rightarrow \Sigma Y \wedge Z$  et leur inverse  $R^{-1}$  et  $L^{-1}$  ;
- (ii) l'application de pincement  $\nu : \Sigma Y \rightarrow \Sigma Y \vee \Sigma Y$  ;
- (iii) l'application d'identification  $q : Y \times Z \rightarrow Y \wedge Z$ .

**Démonstration.** Puisque la suspension et le passage à l'inverse préservent les  $X$ -applications, il nous suffit de prouver que chacune des applications des points (i), (ii), (iii) est une  $X$ -application.

(i) La propriété découle de la naturalité des applications  $R$  et  $L$  et des relations  $(id \wedge R) \circ R = R$  et  $(R \wedge id) \circ L = (id \wedge L) \circ R$ .

(ii) Puisque les suspensions d'applications sont compatibles aux structures de co- $H$ -espaces induites par l'application de pincement, on a  $\nu \circ \Sigma \bar{\Delta}_f = (\Sigma \bar{\Delta}_f \vee \Sigma \bar{\Delta}_f) \circ \nu$ . Comme, de plus,  $(id \wedge \nu) \circ R$  coïncide avec le composé  $\Sigma(X \wedge Y) \xrightarrow{(RV R)^{\circ \nu}} X \wedge \Sigma Y \vee X \vee \Sigma Y \cong X \wedge (\Sigma Y \vee \Sigma Y)$ , on en déduit que  $\nu$  est une  $X$ -application.

(iii) Les espaces  $Y \times Z$  et  $Y \wedge Z$  sont munis des structures respectives :

$\bar{\Delta}_{f \circ pr_Y}(y, z) = f(y) \wedge (y, z), (y, z) \in Y \times Z$   
 $\bar{\Delta}_f \wedge id(y \wedge z) = f(y) \wedge y \wedge z, y \wedge z \in Y \wedge Z.$   
 On a donc clairement  $(\bar{\Delta}_f \wedge id) \circ q = (id \wedge q) \circ \bar{\Delta}_{f \circ pr_Y}.$   
 $\square$

Considérons, à présent, le composé suivant noté  $\Psi$  :  
 $\Sigma(Y \times Z) \xrightarrow{(id \vee \nu) \circ \nu} \Sigma(Y \times Z) \vee \Sigma(Y \times Z) \vee \Sigma(Y \times Z) \xrightarrow{\Sigma pr_Y \vee \Sigma q \vee \Sigma pr_Z} \Sigma Y \vee \Sigma(Y \wedge Z) \vee \Sigma Z.$  Pour  $(y, z) \in Y \times Z$  et  $t \in \mathbf{I}$ ,

$$\Psi([(y, z), t]) = \begin{cases} ([y, 3t], *, *) & 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (*, [q(y, z), 3t - 1], *) & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (*, *, [z, 3t - 2]) & \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Cette application est exactement l'équivalence (naturelle) de Puppe que nous avons décrite dans le chapitre 2 (section 2, lemme 2.2.6). En particulier, l'application  $\Sigma q : \Sigma(Y \times Z) \rightarrow \Sigma(Y \wedge Z)$  admet une section homotopique  $\xi : \Sigma(Y \wedge Z) \rightarrow \Sigma(Y \times Z)$ . Notons  $\Psi^{-1} : \Sigma Y \vee \Sigma(Y \wedge Z) \vee \Sigma Z \rightarrow \Sigma(Y \times Z)$  l'inverse homotopique de  $\Psi$  défini par

$$\begin{cases} \Psi^{-1}([t, y], *, *) = [t, y, *] \\ \Psi^{-1}(*, [t, x \wedge z], *) = \xi([t, x \wedge z]) \\ \Psi^{-1}(*, *, [t, z]) = [t, *, z] \end{cases}$$

et notons  $H : \Sigma(Y \times Z) \times I \rightarrow \Sigma(Y \times Z)$  l'homotopie entre l'identité et  $\Psi^{-1} \circ \Psi$ .

**Proposition 4.4.5.** *Soient  $f : Y \rightarrow X$  une application et  $Z$  un espace. Les espaces sont munis des structures de  $X$ -espaces décrites dans la Prop 4.4.4. L'application  $\Psi : \Sigma(Y \times Z) \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma(Y \wedge Z) \vee \Sigma Z$ , son inverse homotopique  $\Psi^{-1}$  et leurs suspensions itérées sont des  $X$ -applications.*

**Démonstration.** Par définition, l'application  $\Psi$  est une  $X$ -application si les applications  $(R_1 \circ \Sigma \bar{\Delta}_f \vee R_1 \circ \Sigma(\bar{\Delta}_f \wedge id) \vee *) \circ \Psi$  et  $(id \wedge \Psi) \circ R_1 \circ \Sigma \bar{\Delta}_{f \circ pr_Y}$  sont homotopes. L'application  $K : \Sigma(Y \times Z) \times \mathbf{I} \rightarrow (X \wedge \Sigma Y) \vee (X \wedge \Sigma(Y \wedge Z)) \vee (X \wedge \Sigma Z)$  définie, pour  $(y, z) \in Y \times Z$  et  $t, r \in \mathbf{I}$ , par :

$$K([(y, z), t], r) = \begin{cases} (f(y) \wedge [y, 3t], *, *) & 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (*, f(y) \wedge [(y \wedge z), 3t - 1], *) & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (id \wedge \Psi) \circ R_1 \circ \Sigma \bar{\Delta}_{f \circ pr_Y} \circ H([(y, z), 3t - 2], r) & \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

constitue une homotopie entre ces deux composées. Par conséquent,  $\Psi$  est une  $X$ -application et il en est de même de son inverse  $\Psi^{-1}$  et de leurs suspensions itérées.  $\square$

## 4.5 Démonstrations

### Démonstration du théorème 4.1.1

• Montrons d'abord que  $\sigma^i \text{cat}(X \times Z) \leq \sigma^i \text{cat} X + \sigma^i \text{cat} Z$ . Le cas  $i = 0$  est exactement le théorème de Fox [13]. Soit  $i \geq 1$ , supposons  $\sigma^i \text{cat} X \leq n$  et  $\sigma^i \text{cat} Z \leq k$  et notons  $s_X$  et  $s_Z$  des sections homotopiques respectives de  $\Sigma^i g_n(X)$  et de  $\Sigma^i g_k(Z)$ . Nous voulons construire, à partir des applications  $s_X$  et  $s_Z$ , une section homotopique de  $\Sigma^i g_{n+k}(X \times Z)$ . Remarquons que  $\text{cat}(G_n(X) \times G_k(Z)) \leq n+k$ , cela nous garantit l'existence d'une application  $\mu : G_n(X) \times G_k(Z) \rightarrow G_{n+k}(X \times Z)$  telle que  $g_{n+k}(X \times Z) \circ \mu \simeq g_n(X) \times g_k(Z)$ . La commutativité à homotopie près du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \Sigma^i G_n X \vee \Sigma^i (G_n X \wedge G_k Z) \vee \Sigma^i G_k Z & \xleftarrow{\Sigma^{i-1} \Psi} & \Sigma^i (G_n X \times G_k Z) & \xrightarrow{\Sigma^i \mu} & \Sigma^i G_{n+k}(X \times Z) \\
 \downarrow & & \downarrow & \swarrow \Sigma^i g_{n+k}(X \times Z) & \\
 \Sigma^i X \vee \Sigma^i (X \wedge Z) \vee \Sigma^i Z & \xleftarrow{\Sigma^{i-1} \Psi} & \Sigma^i (X \times Z) & & 
 \end{array}$$

dans lequel  $\Psi$  est l'équivalence de Puppe, permet de réduire le travail à la construction d'une section homotopique de  $\Sigma^i g_n(X) \vee \Sigma^i (g_n(X) \wedge g_k(Z)) \vee \Sigma^i g_k(Z)$  : si  $S$  désigne une telle section, la composée  $s_{X \times Z} := \Sigma^i \mu \circ \Sigma^{i-1} \Psi^{-1} \circ S \circ \Sigma^{i-1} \Psi$  sera une section homotopique de  $\Sigma^i g_{n+k}(X \times Z)$  et il en découlera que  $\sigma^i \text{cat}(X \times Z) \leq n+k$ . Remarquons que l'application  $\Sigma^i (g_n(X) \wedge g_k(Z))$  se décompose comme suit  $\Sigma^i (g_n(X) \wedge g_k(Z)) = L_i^{-1} \circ (\Sigma^i g_n(X) \wedge id_Z) \circ L_i \circ R_i^{-1} \circ (id_{G_n(X)} \wedge \Sigma^i g_k(Z)) \circ R_i$ . Nous en obtenons une section homotopique par la formation du composé  $s_{X \wedge Z} := L_i^{-1} \circ (s_X \wedge id) \circ L_i \circ R_i^{-1} \circ (id \wedge s_Z) \circ R_i$ . Nous complétons cette application par  $s_X$  et  $s_Y$  sur les autres composantes du wedge, autrement dit nous posons  $S = s_X \vee s_{X \wedge Z} \vee s_Z$  obtenant ainsi la section homotopique souhaitée.

• Pour prouver la seconde inégalité, nous allons "pister" les structures de  $X$ -espaces dans la démonstration précédente. Plus précisément, supposons que  $\sigma_{\Delta}^i \text{cat}(X) \leq n$  et que  $\sigma^i \text{cat} Z \leq k$ . Cela signifie, en reprenant les notations ci-dessus, que les applications  $s_X : (\Sigma^i X, R_i \circ \Sigma \bar{\Delta}) \rightarrow (\Sigma^i G_n(X), R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_{g_n(X)})$  et  $s_Z : (\Sigma^i Z, *) \rightarrow (\Sigma^i G_k(Z), *)$  sont des  $X$ -applications (les espaces  $\Sigma^i Z$  et  $\Sigma^i G_k(Z)$  étant munis des  $X$ -structures triviales,  $s_Z$  est "gratuitement" une  $X$ -application). Il s'agit de montrer que l'application  $s_{X \times Z}$  construite à partir de  $s_X$  et  $s_Z$  est une  $X$ -application relativement aux structures  $R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_{pr_X}$  et  $R_i \circ \Sigma^i \bar{\Delta}_{pr_X \circ g_{n+k}(X \times Z)}$ . Les espaces  $G_n(X) \times G_k(Z)$  et  $G_n(X) \wedge G_k(Z)$  sont munis des structures de  $X$ -espaces respectives  $\bar{\Delta}_{pr_X \circ (g_n(X) \times g_k(X))} = \bar{\Delta}_{g_n(X) \circ pr_{G_n(X)}}$  et  $\bar{\Delta}_{g_n(X)} \wedge id$ . Puisque  $\mu$  vérifie  $pr_X \circ$

$g_{n+k}(X \times Z) \circ \mu \simeq pr_X \circ (g_n(X) \times g_k(Z))$ , le lemme 2.3.4 entraîne que  $\Sigma^i \mu$  est une  $X$ -application. D'autre part, la proposition 4.4.5 nous garantit que  $\Sigma^i \Psi$  et  $\Sigma^i \Psi^{-1}$  sont des  $X$ -applications. Il nous reste donc à montrer que  $S = s_X \vee s_{X \wedge Z} \vee s_Z$  possède également cette propriété. Par la proposition 4.4.4, l'application  $s_{X \wedge Z} = L_i^{-1} \circ (s_X \wedge id) \circ L_i \circ R_i^{-1} \circ (id \wedge s_Z) \circ R_i$  est une  $X$ -application comme composée de  $X$ -applications. Finalement chacune des applications  $s_X$ ,  $s_Z$  et  $s_{X \wedge Z}$  est une  $X$ -application et il résulte de la  $X$ -structure associée à un bouquet d'espaces (cf. 4.4.3 que l'application  $S$  est une  $X$ -application. En conclusion,  $\sigma_{\Delta}^i cat(X \times Z \xrightarrow{pr_X} X) \leq n + k$ .  $\square$

**Démonstration du théorème 4.1.2** Soient  $(\Lambda V, d)$  et  $(\Lambda W, d)$  des modèles de Sullivan des espaces  $X$  et  $Z$ . Rappelons (prop 2.4.3) que, si  $(\Lambda U, d)$  est un modèle de Sullivan d'un espace  $S$ , alors pour tout  $i > 0$ ,  $\sigma^i cat(S_{\mathbf{Q}})$  (resp  $\sigma_{\Delta}^i cat S_{\mathbf{Q}}$ ) est le plus petit entier  $n$  pour lequel l'application  $H(\rho_n^{\Lambda U}) : H(\Lambda U, d) \rightarrow H(\Lambda U/\Lambda^{>n}U, d)$  admet une rétraction linéaire (resp de  $H(\Lambda U, d)$ -modules). Montrons que  $\sigma_{\Delta}^i cat(X_{\mathbf{Q}} \times Z_{\mathbf{Q}}) \leq \sigma_{\Delta}^i cat(X_{\mathbf{Q}}) + \sigma_{\Delta}^i cat(Z_{\mathbf{Q}})$ . Supposons que  $\sigma_{\Delta}^i cat(X_{\mathbf{Q}}) \leq n$  et que  $\sigma_{\Delta}^i cat(Z_{\mathbf{Q}}) \leq k$ . Notons  $r_X : H(\Lambda V/\Lambda^{>n}V) \rightarrow H(\Lambda V)$  (resp  $r_Z : H(\Lambda W/\Lambda^{>k}W) \rightarrow H(\Lambda W)$ ) les morphismes de  $H(\Lambda V)$ -modules (resp  $H(\Lambda W)$ -modules) dont l'existence est garantie par ces hypothèses. Le morphisme d'agdc  $\pi_n^{\Lambda V} \otimes \pi_k^{\Lambda W}$  factorise à travers le morphisme  $\pi_{n+k}^{\Lambda(V \oplus W)}$  :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda V \otimes \Lambda W & \xrightarrow{\pi_n^{\Lambda V} \otimes \pi_k^{\Lambda W}} & \Lambda V/\Lambda^{>n}V \otimes \Lambda W/\Lambda^{>k}W \\ \downarrow \pi_{n+k}^{\Lambda(V \oplus W)} & \nearrow \lambda & \\ \Lambda(V \oplus W)/\Lambda^{n+k}(V \oplus W) & & \end{array}$$

Le morphisme  $\lambda$  est un morphisme de  $(\Lambda(V \oplus W))$ -modules, il induit donc un morphisme de  $H(\Lambda(V \oplus W))$ -modules. Par ailleurs, la structure de  $H(\Lambda(V \oplus W))$ -modules de l'application  $H(\pi_n^{\Lambda V} \otimes \pi_k^{\Lambda W}) = H(\pi_n^{\Lambda V}) \otimes H(\pi_k^{\Lambda W})$  provient du produit tensoriel de la structure de  $H(\Lambda V)$ -modules de  $H(\pi_n^{\Lambda V})$  par la structure de  $H(\Lambda W)$ -modules de  $H(\pi_k^{\Lambda W})$ . Cela implique, en particulier, que le morphisme  $r_X \otimes r_Z$  constitue une rétraction de  $H(\Lambda(V \oplus W))$ -modules de  $H(\pi_n^{\Lambda V}) \otimes H(\pi_k^{\Lambda W})$ . Par suite  $(r_X \otimes r_Z) \circ H(\lambda)$  est un morphisme de  $H(\Lambda(V \oplus W))$ -modules vérifiant  $(r_X \otimes r_Z) \circ H(\lambda) \circ H(\pi_{n+k}^{\Lambda(V \oplus W)})$  et  $\sigma_{\Delta}^i cat(X_{\mathbf{Q}} \times Z_{\mathbf{Q}}) \leq n + k$ .

La démonstration de l'inégalité  $\sigma_{\Delta}^i cat X_{\mathbf{Q}} + \sigma^i cat Z_{\mathbf{Q}} \leq \sigma_{\Delta}^i cat(X_{\mathbf{Q}} \times Z_{\mathbf{Q}})$  est une adaptation immédiate d'une démonstration de B. Jessup [27]. Supposons que  $\sigma^i cat Z_{\mathbf{Q}} = e_{\mathbf{Q}}(Z_{\mathbf{Q}}) = k$  et que  $\sigma_{\Delta}^i cat(X_{\mathbf{Q}} \times Z_{\mathbf{Q}}) \leq n + k$ . Puisque

$e_{\mathbf{Q}}(Z_{\mathbf{Q}}) = k$ , il existe un cocycle  $\alpha \in \Lambda^{>k}W$  qui n'est pas un cobord. Nous pouvons alors considérer l'application  $\Lambda V$ -linéaire  $m : \Lambda V \rightarrow \Lambda V \otimes \Lambda W$  définie par  $m(v) = v \otimes \alpha$ . Cette application commute à la différentielle, c'est donc un morphisme de  $\Lambda V$ -modules différentiels. D'un autre côté, soit  $E$  un supplémentaire de  $\mathbf{Q}\alpha$  dans  $\Lambda W$  i.e.  $\Lambda W = \mathbf{Q}\alpha \oplus E$  et considérons l'application  $\Lambda V$ -linéaire  $p : \Lambda V \otimes \Lambda W = \Lambda V \otimes \mathbf{Q}\alpha \oplus \Lambda V \otimes E \rightarrow \Lambda V$  définie par  $p(\alpha) = 1$  et  $p(E) = 0$ . Puisque la différentielle de  $\Lambda V \otimes \Lambda W$  est la différentielle produit et que  $\alpha$  n'est pas un cobord, l'application  $p$  commute à la différentielle. C'est donc un morphisme de  $\Lambda V$  modules différentiels qui vérifie  $p \circ m = id$ . Par ailleurs, la longueur (de mots) de l'élément  $\alpha$  implique que le morphisme  $\pi_{n+k}^{\Lambda(V \oplus W)} \circ m$  factorise à travers  $\Lambda V / \Lambda^{>n}V$  :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda V & \xrightarrow{m} & \Lambda V \otimes \Lambda W \\ \pi_n^{\Lambda V} \downarrow & & \downarrow \pi_{n+k}^{\Lambda(V \oplus W)} \\ \Lambda V / \Lambda^{>n}V & \xrightarrow{\bar{m}} & \Lambda(V \oplus W) / \Lambda^{>n+k}(V \oplus W) \end{array}$$

L'application  $\bar{m}$  induite par  $m$  est un morphisme de  $\Lambda V$ -modules différentiels. Par l'hypothèse  $\sigma^i cat_{\Delta}(X_{\mathbf{Q}} \times Z_{\mathbf{Q}}) \leq n+k$  il existe un morphisme de  $H(\Lambda(V \oplus W))$ -modules  $r : H(\Lambda(V \oplus W) / \Lambda^{>n+k}(V \oplus W)) \rightarrow H(\Lambda(V \oplus W))$  tel que  $r \circ H(\pi_{n+k}^{\Lambda(V \oplus W)}) = id$ . Du diagramme ci-dessus, nous déduisons que l'application  $H(p) \circ r \circ H(\bar{m}) : H(\Lambda V / \Lambda^{>n}V) \rightarrow H(\Lambda V)$  est une rétraction de  $H(\Lambda V)$ -modules de  $H(\rho_n^{\Lambda V})$ . Par conséquent  $\sigma_{\Delta}^i cat(X_{\mathbf{Q}}) \leq n$ .  $\square$

## 4.6 Produit d'un espace et d'une sphère

Nous commençons par construire une  $(n+1)$  LS application pour le produit  $X \times S^m$ .

**Théorème 4.6.1.** *Soit  $X$  un espace. L'application  $\tilde{g}_{n+1} : \tilde{G}_{n+1} = (G_n(X) \times S^m) \cup C(F_n(X) \times *) \rightarrow X \times S^m$  qui étend  $g_n(X) \times id$  en envoyant le cône sur le point de base, est une  $(n+1)$  LS application. Autrement dit, il existe des applications  $\varphi : G_{n+1}(X \times S^m) \rightarrow \tilde{G}_{n+1}$  et  $\gamma : \tilde{G}_{n+1} \rightarrow G_{n+1}(X \times S^m)$  telles que  $\tilde{g}_{n+1} \simeq g_{n+1}(X \times S^m) \circ \gamma$  et  $g_{n+1}(X \times S^m) \simeq \tilde{g}_{n+1} \circ \varphi$ . De plus, les applications  $\varphi$  et  $\gamma$  sont compatibles aux structures de  $X$ -espaces induites par les applications  $pr_X \circ g_{n+1}(X \times S^m)$  et  $pr_X \circ \tilde{p}_{n+1}$ .*

**Démonstration.** Nous construisons les applications  $\gamma$  et  $\varphi$  telles que  $pr_X \circ g_{n+1}(X \times S^m) \gamma \simeq pr_X \circ \tilde{g}_{n+1}$  et  $pr_X \circ g_{n+1}(X \times S^m) \simeq pr_X \circ \tilde{g}_{n+1} \circ \varphi$ . Par le lemme 2.3.4 elles sont donc des  $X$ -applications pour les structures  $\tilde{\Delta}_{pr_X \circ \tilde{g}_{n+1}}$

et  $\bar{\Delta}_{pr_X \circ g_{n+1}(X \times S^m)}$ .

• construction de  $\varphi$

Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} F_n(X \times S^m) & \longrightarrow & F_n(X) \times F_n(S^m) & \xrightarrow{id \times *}& F_n(X) \times * \\ i_n(X \times S^m) \downarrow & & \downarrow & & \downarrow i_n(X) \\ G_n(X \times S^m) & \longrightarrow & G_n(X) \times G_n(S^m) & \xrightarrow{id \times g_n(S^m)}& G_n(X) \times S^m. \end{array}$$

Rappelons que  $g'_{n+1}(X \times S^m) : G_n(X \times S^m) \cup CF(X \times S^m) \rightarrow X \times S^m$  désigne l'application qui prolonge  $g_n(X \times S^m)$  en envoyant le cône sur le point de base. De la commutativité du diagramme ci-dessus, nous déduisons l'existence d'une application  $\varphi' : \mathcal{C}(i_n(X \times S^m)) = G_n(X \times S^m) \cup CF(X \times S^m) \rightarrow \tilde{G}_{n+1}$  entre les cofibres homotopiques des applications  $i_n(X \times S^m)$  et  $i_n(X) \times *$ . Considérons à présent le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} F_n(X \times S^m) & \longrightarrow & F_n(X) \times * & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & G_n(X \times S^m) & \longrightarrow & G_n(X) \times S^m & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ CF_n(X \times S^m) & \longrightarrow & CF_n(X) \times * & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & \mathcal{C}(i_n(X \times S^m)) & \xrightarrow{\varphi'} & \tilde{G}_{n+1}(X \times S^m) & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & g_{n+1} & & \tilde{g}_{n+1} & \\ & & X \times S^m & \xlongequal{\quad} & X \times S^m \end{array}$$

par propriété universelle des sommes amalgamées, l'application  $\varphi'$  vérifie  $\tilde{g}_{n+1} \circ \varphi' \simeq g'_{n+1}(X \times S^m)$ . Choisissons un inverse homotopique  $\alpha_{n+1}^{-1}$  de l'application  $\alpha_{n+1} : G_n(X \times S^m) \cup CF(X \times S^m) \xrightarrow{\sim} G_{n+1}(X \times S^m)$ . Cette application vérifie  $g'_{n+1}(X \times S^m) \circ \alpha_{n+1}^{-1} \simeq g_{n+1}(X \times S^m)$  et, par conséquent,  $\varphi = \varphi' \circ \alpha_{n+1}^{-1}$  convient.

• construction de  $\gamma$

Supposons avoir construit des applications  $\mu : G_n(X) \times S^m \rightarrow G_{n+1}(X \times S^m)$  et  $H : CF_n(X \times *) \rightarrow G_{n+1}(X \times S^m)$  telles que  $g_{n+1}(X \times S^m) \circ \mu = g_n(X) \times id$ ,

$g_{n+1}(X \times S^m) \circ H = *$  et telles que le diagramme en traits pleins suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 F_n(X) \times * & \longrightarrow & G_n(X) \times S^m \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C(F_n(X) \times *) & \longrightarrow & \tilde{G}_{n+1} \\
 & \searrow H & \nearrow \mu \\
 & & G_{n+1}(X \times S^m)
 \end{array}$$

Notons  $\gamma : \tilde{G}_{n+1} \rightarrow G_{n+1}(X \times S^m)$  l'application provenant de la propriété universelle des sommes amalgamées. Cette application vérifie  $g_{n+1}(X \times S^m) \circ \gamma = \tilde{g}_{n+1}$  et répond ainsi au problème. Le travail se réduit donc à la construction des applications  $\mu$  et  $H$ . Pour cela, nous allons remplacer les fibrations de Ganea par les fibrations  $p_n(Z) : P_n(Z) \rightarrow Z$  obtenues par image réciproque des fibrations associées aux inclusions  $j_Z^n : T^n(Z) \rightarrow Z^{n+1}$  (cf Chap 1). Rappelons qu'un élément de  $P_n(Z)$  est noté  $(z, \lambda^1, \dots, \lambda^{n+1})$  où les  $\lambda^i \in Z^{\mathbf{I}}$  sont des chemins de  $Z$  commençant tous en  $z$  et parmi lesquels au moins un termine au point base. L'application  $p_n(Z)$  associe à un tel élément le point  $z$ . Notons  $\Phi_n(Z)$  la fibre de  $p_n(Z)$ .

En utilisant l'homéomorphisme  $(X \times S^m)^{\mathbf{I}} \cong X^{\mathbf{I}} \times (S^m)^{\mathbf{I}}$ , un élément de  $P_n(X \times S^m)$  est un couple de  $n+2$  uplets

$$\left( \begin{array}{l} (x, \lambda^1, \dots, \lambda^{n+2}) \\ (s, \mu^1, \dots, \mu^{n+2}) \end{array} \right) \text{ où } \lambda^i \in X^{\mathbf{I}}, \mu^i \in (S^m)^{\mathbf{I}} \text{ et } (x, s) \in X \times S^m$$

et tel qu'à une certaine position  $i_0$ , les chemins  $\lambda^{i_0}$  et  $\mu^{i_0}$  finissent tous deux en  $*$ . Regardons la sphère  $S^m$  comme le sous-ensemble de  $\mathbf{R}^{m+1}$  défini par  $\{(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) \in \mathbf{R}^{m+1} \mid \sum x_j^2 = 1\}$  muni du point de base  $*$  =  $(1, 0, \dots, 0)$ . Considérons les calottes sphériques  $U_0 = \{(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_{m+1} > -\frac{1}{2}\}$  et  $U_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) \in S^m \mid x_{m+1} < \frac{1}{2}\}$ . La normalité de la sphère assure l'existence d'une application continue (exceptionnellement non pointée)  $t : S^m \rightarrow \mathbf{I}$ ,  $s \mapsto t_s$  telle que  $t_s = 0$  sur un voisinage de  $U_0 \setminus U_0 \cap U_1$ ,  $t_s = 1$  sur un voisinage de  $U_1 \setminus U_0 \cap U_1$  et  $t_* = \frac{1}{2}$ . Les ouverts  $U_0$  et  $U_1$  étant contractiles dans  $S^m$ , il existe deux applications continues  $h_0 : IU_0 \rightarrow S^m$  et  $h_1 : IU_1 \rightarrow S^m$  telles que  $h_j(-, 0) = id_{U_j}$  et  $h_j(-, 1) = *$  pour  $j \in \{0, 1\}$ . Notons pour  $j \in \{0, 1\}$  et  $s \in U_j$ ,  $\mu^j(s)$  le chemin  $h_j(s, -)$  commençant en  $s$  et finissant au point de base. Notons également  $\tau = \frac{1}{2(n+1)}$  et  $\varpi = \frac{1}{\tau}$ . L'application  $\mu$  est définie de la façon suivante :

$$\mu((x, \lambda^1, \dots, \lambda^{n+1}), s) = \begin{cases} \bullet \text{ pour } 2i\tau \leq t_s \leq (2i+1)\tau \\ \left( \begin{array}{l} (x, \lambda^1, \dots, \lambda^i, \lambda_{\varpi t_s - 2i}^{i+1}, \lambda^{i+1}, \dots, \lambda^{n+1}) \\ (s, \mu^1(s), \dots, \mu^1(s), \mu^1(s)_{\varpi t_s - 2i}, \mu^0(s), \dots, \mu^0(s)) \end{array} \right) \\ \bullet \text{ pour } (2i+1)\tau \leq t_s \leq (2i+2)\tau \\ \left( \begin{array}{l} (x, \lambda^1, \dots, \lambda^i, \lambda^{i+1}, \lambda_{(2i+2)\tau - \varpi t_s}^{i+1}, \dots, \lambda^{n+1}) \\ (s, \mu^1(s), \dots, \mu^1(s), \mu^1(s), \mu^0(s)_{(2i+2)\tau - \varpi t_s}, \dots, \mu^0(s)) \end{array} \right) \end{cases}$$

où  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

Cette application est continue par construction et vérifie  $p_{n+1}(X \times S^m) \circ \mu = p_n(X) \times id$ . En écrivant  $t_* = \frac{1}{2} = 2(q+1)\tau$  si  $n = 2q+1$  et  $t_* = \frac{1}{2} = (2q+1)\tau$  si  $n = 2q$ , nous obtenons que l'image d'un point  $((*, \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{n+1}), *) \in \Phi_n(X) \times *$  par le composé  $\Phi_n(X) \times * \rightarrow P_n(X) \times S^m \xrightarrow{\mu} P_{n+1}(X \times S^m)$  est :

$$\left( \begin{array}{l} (*, \lambda^1, \dots, \lambda^{q+1}, \hat{*}, \lambda^{q+2}, \dots, \lambda^{n+1}) \\ (*, \hat{*}, \dots, \hat{*}, \hat{*}, \hat{*}, \dots, \hat{*}) \end{array} \right) \text{ si } n = 2q+1,$$

et

$$\left( \begin{array}{l} (*, \lambda^1, \dots, \lambda^q, \lambda^{q+1}, \lambda^{q+1}, \dots, \lambda^{n+1}) \\ (*, \hat{*}, \dots, \hat{*}, \hat{*}, \hat{*}, \dots, \hat{*}) \end{array} \right) \text{ si } n = 2q.$$

L'application  $\Phi_n(X) \times * \rightarrow P_n(X) \times S^m \xrightarrow{\mu} P_{n+1}(X \times S^m)$  est homotopiquement triviale et nous définissons une homotopie  $H : C(\Phi_n(X) \times *) = C(\Phi_n(X)) \rightarrow P_{n+1}(X \times S^m)$  par :

$$H([*, \lambda^1, \dots, \lambda^{n+1}], r) = \left( \begin{array}{l} (*, \lambda_{1-r}^1, \dots, \lambda_{1-r}^{q+1}, \hat{*}, \lambda_{1-r}^{q+2}, \dots, \lambda_{1-r}^{n+1}) \\ (*, \hat{*}, \dots, \hat{*}, \hat{*}, \hat{*}, \dots, \hat{*}) \end{array} \right) \text{ pour } n = 2q+1$$

et, pour  $n = 2q$ ,

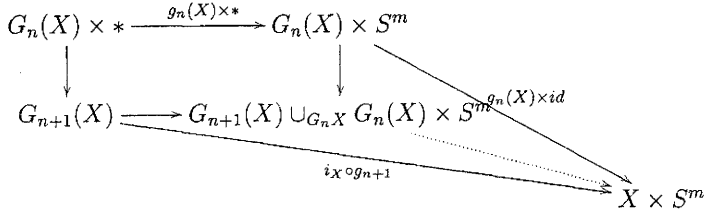
$$H([*, \lambda^1, \dots, \lambda^{n+1}], r) = \begin{cases} \left( \begin{array}{l} (*, \lambda^1, \dots, \lambda^q, \lambda_{1-2r}^{q+1}, \lambda^{q+1}, \dots, \lambda^{n+1}) \\ (*, \hat{*}, \dots, \hat{*}, \hat{*}, \hat{*}, \dots, \hat{*}) \end{array} \right) r \leq \frac{1}{2} \\ \left( \begin{array}{l} (*, \lambda_{2-2r}^1, \dots, \lambda_{2-2r}^q, \hat{*}, \lambda_{2-2r}^{q+1}, \dots, \lambda_{1-2r}^{n+1}) \\ (*, \hat{*}, \dots, \hat{*}, \hat{*}, \hat{*}, \dots, \hat{*}) \end{array} \right) r \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

□



**Remarque.** L'application  $\mu : G_n(X) \times S^m \rightarrow G_{n+1}(X \times S^m)$  permet de donner une preuve alternative à celle de Fox de l'inégalité  $cat(X \times S^m) \leq cat X + 1$ .

**Corollaire 4.6.2.** L'application  $G_n(X) \times S^m \cup_{G_n X} G_{n+1}(X) \rightarrow X \times S^m$  issue de la propriété universelle dans le diagramme

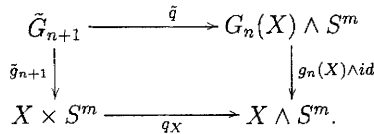


est une  $(n + 1)$ -LS application.

**Démonstration.** Par l'équivalence d'homotopie  $\alpha_{n+1}$ , l'application est équivalente au-dessus de  $X \times S^m$  à l'application  $G_n(X) \times S^m \cup_{G_n X} (G_n(X) \cup_{F_n(X)} CF_n(X)) \rightarrow X \times S^m$ . Il suffit, pour conclure, de remarquer que cette dernière application est exactement l'application  $\tilde{g}_{n+1}$  décrite dans la proposition 4.6.1.  $\square$

**Démonstration du théorème 4.1.3**

• L'inégalité  $\sigma^i cat(X \times S^m) \leq \sigma^i cat X + 1$  est déjà établie. Supposons que  $\sigma^i cat(X \times S^m) \leq n + 1$ . En reprenant les notations du théorème 4.6.1, cela entraîne que l'application  $\Sigma^i \tilde{g}_{n+1}$  a une section homotopique  $\tilde{s}$ . Notons, pour un espace  $Z$ ,  $q_Z : Z \times S^m \rightarrow Z \wedge S^m$  l'application d'identification. Considérons l'application  $\tilde{q} : \tilde{G}_{n+1} \rightarrow G_n(X) \wedge S^m$  définie par  $\tilde{q}(u) = q_{G_n(X)}(u)$  si  $u \in G_n(X) \times S^m$  et  $\tilde{q}(u) = *$  si  $u \in C(F_n(X) \times *)$ . Par construction, nous obtenons un diagramme commutatif



Rappelons que la composée  $\xi : \Sigma(X \wedge S^m) \hookrightarrow \Sigma X \vee \Sigma(X \wedge S^m) \vee \Sigma S^m \xrightarrow{\psi^{-1}} \Sigma(X \times S^m)$  est une section homotopique de  $\Sigma q_X$  (cf section 2). Par conséquent, l'application  $(\Sigma^i \tilde{q}) \circ \tilde{s} \circ \xi$  constitue une section homotopique

de  $\Sigma^i(g_n(X) \wedge id) \simeq \Sigma^{i+m}g_n(X)$  ce qui implique  $\sigma^{i+m}cat(X) \leq n$ .

• Il reste à montrer que  $\sigma_{\Delta}^{i+m}catX + 1 \leq \sigma_{\Delta}^i cat(X \times S^m \xrightarrow{pr_X} X)$ . Supposons que  $\sigma_{\Delta}^i cat(X \times S^m \xrightarrow{pr_X} X) \leq n + 1$ . Cela signifie que  $\Sigma^i g_{n+1}(X \times S^m)$  admet une section homotopique compatible aux structures de  $X$ -espaces. Puisque l'application  $\varphi : G_{n+1}(X \times S^m) \rightarrow \tilde{G}_{n+1}$  construite dans le théorème 4.6.1 est une  $X$ -application, on peut supposer, en reprenant les notations précédentes, que  $\tilde{s} : \Sigma^i(X \times S^m) \rightarrow \Sigma^i \tilde{G}_{n+1}$  est aussi une  $X$ -application. Remarquons que le point (i) de la proposition 4.4.4 permet d'identifier les  $X$ -applications  $g_n(X) \wedge id$  et  $\Sigma^{i+m}g_n(X)$ . Pour prouver que  $\sigma_{\Delta}^{i+m}catX \leq n$ , il s'agit donc de montrer que l'application  $(\Sigma^i \tilde{q}) \circ \tilde{s} \circ \xi$  est une  $X$ -application. Par la proposition 4.4.5 et des arguments de composition il suffit de voir que  $\tilde{q}$  possède cette propriété. À cet effet, rappelons que la structure de  $X$ -espace de  $\tilde{G}_{n+1} = G_n(X) \times S^m \cup_{F_n(X)} C(F_n(X) \times *)$  issue de  $\tilde{g}_{n+1}$  est donnée par

- $\Delta_{pr_X \circ \tilde{g}_{n+1}}(u) = (g_n(X) \circ pr_{G_n(X)}(u)) \wedge u$  si  $u \in G_n(X) \times S^m$
- $\Delta_{pr_X \circ \tilde{g}_{n+1}}(u) = *$  si  $u \in CF_n(X)$ .

Vérifions que  $\tilde{q} : G_n(X) \times S^m \cup_{F_n(X)} C(F_n(X) \times *) \rightarrow G_n(X) \wedge S^m$  est une  $X$ -application : si  $u \in CF_n(X)$  on a  $(\tilde{\Delta}_{g_n(X)} \wedge id) \circ \tilde{q}(u) = (id \wedge \tilde{q}) \circ \Delta_{pr_X \circ \tilde{g}_{n+1}}(u) = *$ , et si  $u \in G_n(X) \times S^m$ , on obtient  $(\tilde{\Delta}_{g_n(X)} \wedge id) \circ \tilde{q}(u) = (\tilde{\Delta}_{g_n(X)} \wedge id) \circ q(u) = (id \wedge q)((g_n(X) \circ pr_{G_n(X)})(u) \wedge u)$  car l'application d'identification est une  $X$ -application (Prop 4.4.4).  $\square$

**Deuxième partie**  
**Sur le transfert de Becker et**  
**Gottlieb**



# Chapitre 5

## 5.1 Introduction

Dans [18] D. H. Gottlieb montre que, pour une fibration  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  dont la fibre  $F$  est une variété compacte, connexe, orientable et de classe fondamentale  $\omega \in H^n(F; \mathbf{Z})$ , il existe une classe  $\alpha \in H^n(E; \mathbf{Z})$  vérifiant  $H^*(i)(\alpha) = \chi_F \cdot \omega$ , où  $\chi_F$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $F$ . Cet énoncé constitue le théorème de l'inclusion de la fibre. À partir la classe  $\alpha$ , Gottlieb définit un transfert qui généralise celui des revêtements : le transfert est une application  $\tau : H^*(E; \mathbf{Z}) \rightarrow H^*(B; \mathbf{Z})$  de  $H^*(B; \mathbf{Z})$ -modules telle que la composée  $\tau \circ H^*(p)$  est la multiplication par  $\chi_F$ . Grâce à l'existence du transfert, Gottlieb montre qu'aucun des espaces projectifs  $\mathbf{R}\mathbf{P}^{2n}$ ,  $\mathbf{C}\mathbf{P}^{2n}$  ou  $\mathbf{H}\mathbf{P}^{2n}$  ne peut être l'espace total d'une fibration non triviale de fibre une variété. Plus-tard, à partir d'une généralisation de la dualité de Spanier-Whitehead, Gottlieb et Becker [2] étendent ce transfert à toute fibration de fibre un CW-complexe fini (cf. [29] pour un exposé des travaux de Becker et Gottlieb sur le transfert).

Le but de cette partie est de donner, sous certaines hypothèses, une construction du transfert au niveau d'un modèle d'une fibration.

Soit  $\mathbf{k}$  un corps commutatif. Nous considérons une fibration  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  dans laquelle les espaces  $E$  et  $B$  sont dans le domaine d'Anick (la définition est rappelée dans la section suivante) et  $H^*(F; \mathbf{k})$  est de dimension finie. L'application  $p$  peut alors être modélée par une KS-extension  $(\Lambda X, d) \xrightarrow{\psi} (\Lambda(X \oplus Y), d)$ . Nous montrons qu'il existe un transfert pour cette KS-extension. Plus précisément, nous construisons un morphisme de  $\Lambda X$ -modules différentiels  $\tau : (\Lambda(X \oplus Y), d) \rightarrow (\Lambda X, d)$  tel que  $\tau(x) = \chi_F \cdot x$  pour tout  $x \in \Lambda X$ . Lorsque  $\chi_F \neq 0$ , le transfert définit une rétraction de  $\Lambda X$ -modules différentiels du morphisme  $\psi$ , et cela nous permet, en particulier, de minorer la catégorie de Lusternik et Schnirelmann du rationalisé de  $E$  par la catégorie du rationalisé

de  $B$ . De plus, lorsque  $H^*(F; \mathbf{k})$  satisfait la dualité de Poincaré avec classe fondamentale  $\omega \in H^n(F; \mathbf{k})$ , nous donnons la construction explicite d'un cocycle  $z \in \Lambda(X \oplus Y)$  telle que  $i^*([z]) = \chi_F \cdot \omega$ ,  $[z]$  désignant la classe de  $z$  dans  $H^n(\Lambda(X \oplus Y)) = H^n(E; \mathbf{k})$ .

Avant d'entamer la construction du transfert au niveau des modèles, nous donnons une rapide présentation des modèles d'une fibration dans le domaine d'Anick que nous utiliserons. Nous renvoyons à [11], [19] et [34] pour davantage de détails sur ces modèles.

## 5.2 Modèle d'une fibration

Dorénavant  $\mathbf{k}$  est un corps commutatif fixé. L'entier  $\rho(\mathbf{k})$  désigne la caractéristique de  $\mathbf{k}$  lorsque celle-ci est finie et on pose  $\rho(\mathbf{k}) = \infty$  sinon. Les  $\mathbf{k}$ -espaces vectoriels gradués différentiels (evgd),  $(V, d)$ , sont des  $\mathbf{k}$ -espaces vectoriels  $\mathbf{Z}$ -gradués  $V = \{V^i\}_{i \in \mathbf{Z}}$  munis d'une différentielle de degré  $+1$ . Les bifoncteurs  $- \otimes_{\mathbf{k}} -$  et  $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(-, -)$  sont notés respectivement  $- \otimes -$  et  $\text{Hom}(-, -)$ , de même la cohomologie d'un espace  $S$  à coefficients dans  $\mathbf{k}$  est notée  $H^*(S)$ .

**Définition 5.2.1.** Soit  $r \geq 1$ . Un espace topologique  $S$  1-connexe est dit  $r$ -tempéré (ou dans le domaine d'Anick) si son homologie  $H_*(S)$  est concentrée en degrés  $r < i \leq r\rho(\mathbf{k})$ .

Lorsqu'un espace  $S$  est  $r$ -tempéré, l'algèbre graduée différentielle (agd) des cochaînes singulières  $C^*(S)$  est "naturellement" équivalente à une algèbre graduée différentielle commutative (agdc)  $A(S)$  : cela signifie qu'il existe une chaîne de quasi-isomorphismes d'agd  $A(S) \xleftarrow{\sim} D(S) \xrightarrow{\sim} C^*(S)$  et que, bien que  $A$  ne soit, pas fonctoriel, on peut associer à une application  $f : S \rightarrow T$  entre deux espaces  $r$ -tempérés un morphisme  $A(f)$  tel que le diagramme usuel commute [19]. Une fibration  $p : E \rightarrow B$  entre deux espaces  $r$ -tempérés peut donc être modélée par une KS-extension (ou modèle de Sullivan relatif)  $(\Lambda X, d) \xrightarrow{\psi} (\Lambda(X \oplus Y), d)$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda X & \xrightarrow{\sim} & A(B) & \xleftarrow{\sim} & D(B) & \xrightarrow{\sim} & C^*(B) \\ \psi \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda(X \oplus Y) & \xrightarrow{\sim} & A(E) & \xleftarrow{\sim} & D(E) & \xrightarrow{\sim} & C^*(E) \end{array}$$

Notons  $\varepsilon : (\Lambda X, d) \rightarrow \mathbf{k}$  l'augmentation et  $\bar{d}$  la différentielle induite sur  $\Lambda Y$  par la projection  $\pi = \varepsilon \otimes_{\Lambda X} id : \Lambda(X \oplus Y) \rightarrow \mathbf{k} \otimes_{\Lambda X} \Lambda(X \oplus Y) =$

$\Lambda Y$ . Remarquons que le morphisme d'agdc  $(\Lambda X, d) \rightarrow (\Lambda(X \oplus Y), d)$  est en particulier un morphisme de  $\Lambda X$ -modules différentiels et que l'algèbre  $\Lambda(X \oplus Y) = \Lambda X \otimes \Lambda Y$  est un  $\Lambda X$ -module libre. La KS-extension est donc, en particulier, une résolution  $\Lambda X$ -semi-libre (au sens de [11]) du morphisme de  $\Lambda X$ -modules différentiels  $(\Lambda X, d) \rightarrow (\Lambda(X \oplus Y), d)$ . Puisque  $\Lambda X$  est 1-connexe (i.e.  $X = X^{\geq 2}$ ), ce morphisme de  $\Lambda X$ -modules différentiels admet une résolution semi-libre minimale :

$$\begin{array}{ccccc} (\Lambda X, d) & \longrightarrow & (\Lambda(X \oplus Y), d) & \xrightarrow{\pi} & (\Lambda Y, \bar{d}) \\ & \searrow & \uparrow \varphi \sim & & \uparrow \bar{\varphi} \sim \\ & & (\Lambda X \otimes H(\Lambda Y, \bar{d}), d) & \xrightarrow{\rho} & (H(\Lambda Y, \bar{d}), 0) \end{array}$$

Dans ce diagramme, l'application  $\varphi$  est un quasi-isomorphisme de  $\Lambda X$ -modules différentiels,  $\bar{\varphi}$  est un quasi-isomorphisme d'evgd et  $\rho$  désigne la projection  $\varepsilon \otimes_{\Lambda X} id_H$ . "Minimale" signifie ici que la différentielle sur l'evgd quotient  $\mathbf{k} \otimes_{\Lambda X} H(\Lambda Y, \bar{d}) = H(\Lambda Y, \bar{d})$  est nulle. Si  $p : E \rightarrow B$  est une fibration de fibre  $F$  alors l'evgd  $(\Lambda Y, \bar{d})$  est quasi-isomorphe à  $C^*(F)$ , autrement dit les deux espaces vectoriels  $H(\Lambda Y, \bar{d})$  et  $H^*(F)$  sont isomorphes. De plus, sous l'hypothèse supplémentaire  $H_{r\rho(\mathbf{k})}(E) = 0$ , L. Menichi [34] a montré que les morphismes d'algèbres  $H(\pi) : H(\Lambda(X \oplus Y), d) \rightarrow H(\Lambda Y, \bar{d})$  et  $H^*(i) : H^*(E) \rightarrow H^*(F)$ , où  $i : F \rightarrow E$  désigne l'inclusion de la fibre, sont identiques à isomorphisme près ; en particulier les algèbres  $H(\Lambda Y, \bar{d})$  et  $H^*(F)$  sont isomorphes.

### 5.3 Transfert

Dans cette partie, nous considérons une fibration  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  dont la base et l'espace total sont  $r$ -modérés et de type fini. Nous supposons également que  $H_{r\rho(\mathbf{k})}(E) = 0$  et considérons  $(\Lambda X, d) \xrightarrow{\psi} (\Lambda(X \oplus Y), d)$  un modèle de Sullivan relatif de l'application  $p$ .

Si la cohomologie de la fibre  $H^*(F)$  est de dimension finie, on appelle *nombre de Lefschetz* d'une application continue  $g : F \rightarrow F$  et on note  $\Lambda_g \in \mathbf{k}$ , la trace graduée de  $H^*(g)$ ,  $\Lambda_g = \sum_i (-1)^i \text{tr} H^i(g)$ . Lorsque  $g = id$ , on retrouve la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $F : \Lambda_{id} = \chi_F$ .

Rappelons que, si  $H^*(F)$  est de dimension finie, l'application linéaire  $T : \text{Hom}(H^*(F), \mathbf{k}) \otimes H^*(F) \rightarrow \text{End}(H^*(F))$  définie par  $T(\xi \otimes h)(h') =$

$(-1)^{|h||h'|} \xi(h')h$  pour  $h, h' \in H^*(F)$  et  $\xi \in \text{Hom}(H^*(F), \mathbf{k})$  est un isomorphisme. En particulier, si  $\{e_i\}_{i \in I}$  est une base de  $H^*(F)$  et si on note  $\{\check{e}_i\}_{i \in I}$  sa base duale, l'élément  $\sum_{i \in I} (-1)^{|e_i|} \check{e}_i \otimes e_i \in \text{Hom}(H^*(F), \mathbf{k}) \otimes H^*(F)$ , appelé

*élément universel*, a pour image l'identité de  $H^*(F) : T(\sum_{i \in I} (-1)^{|e_i|} \check{e}_i \otimes e_i) = id$ .

Le nombre de Lefschetz de  $g$  s'écrit alors  $\Lambda_g = \sum_{i \in I} (-1)^{|e_i|} \check{e}_i(H^*(g)(e_i)) = \sum_{i \in I} (-1)^{|e_i|} ev(\check{e}_i \otimes H^*(g)(e_i))$  où  $ev : \text{Hom}(H^*(F), \mathbf{k}) \otimes H^*(F) \rightarrow \mathbf{k}$  désigne l'application d'évaluation.

**Théorème 5.3.1.** *Considérons une application continue  $f : E \rightarrow E$  telle que  $p \circ f = p$  et notons  $\bar{f} : F \rightarrow F$  sa restriction à la fibre. Si  $H^*(F)$  est de dimension finie, alors il existe un morphisme de  $\Lambda X$ -modules différentiels  $\tau : (\Lambda(X \oplus Y), d) \rightarrow (\Lambda X, d)$  dont la restriction à  $\Lambda X$  est la multiplication par le nombre de Lefschetz de  $\bar{f} : \tau \circ \psi(x) = \Lambda_{\bar{f}} \cdot x, x \in \Lambda X$ .*

*En particulier, si  $\Lambda_{\bar{f}} \neq 0$ , le morphisme  $\psi : (\Lambda X, d) \rightarrow (\Lambda(X \oplus Y), d)$  admet une rétraction de  $\Lambda X$ -modules différentiels.*

Avant d'entamer la preuve, examinons le cas de la fibration triviale  $F \rightarrow F \rightarrow *$ . L'espace  $F$  est ici dans le domaine d'Anick, nous pouvons en considérer un modèle de Sullivan  $(\Lambda Y, d)$ . Le transfert est alors le morphisme d'evgd  $\tau : (\Lambda Y, d) \rightarrow \mathbf{k}$  défini par  $\tau(1) = \chi_F \cdot 1 = \chi_F$  et  $\tau(y) = 0$  si  $y \in \Lambda^+ Y$ . Décrivons-le d'une façon un peu plus compliquée mais qui guidera le cas général. Considérons la résolution  $\mathbf{k}$  semi-libre minimale de  $\mathbf{k} \rightarrow (\Lambda Y, d)$  donnée par  $\mathbf{k} \rightarrow (H^*(F), 0) \xrightarrow{\sim} (\Lambda Y, d)$ . Notons  $\smile$  le produit de  $H^*(F)$  et  $\{e_i\}_{i \in I}$  une base de l'espace vectoriel  $H^*(F)$ . En notant  $\{\check{e}_i\}_{i \in I}$  la base de  $\text{Hom}(H^*(F), \mathbf{k})$  associée, on définit le transfert  $\tau$  en posant :

$$\tau(h) = \sum_{i \in I} (-1)^{|e_i|} \check{e}_i(H^*(f)(e_i) \smile h).$$

Autrement dit, si  $\eta : \mathbf{k} \rightarrow \text{End}(H^*(F))$  est définie par  $\eta(1) = id$ , le transfert est le composé

$$\begin{aligned} H^*(F) &\cong \mathbf{k} \otimes H^*(F) \xrightarrow{\eta \otimes id} \text{End}(H^*(F)) \otimes H^*(F) \xrightarrow{T^{-1} \otimes id} \\ &\text{Hom}(H^*(F), \mathbf{k}) \otimes H^*(F) \otimes H^*(F) \xrightarrow{id \otimes H^*(f) \otimes id} \\ &\text{Hom}(H^*(F), \mathbf{k}) \otimes H^*(F) \otimes H^*(F) \xrightarrow{id \otimes \smile} \text{Hom}(H^*(F), \mathbf{k}) \otimes H^*(F) \xrightarrow{ev} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Remarquons que cette description utilise de façon fondamentale l'élément universel et le produit de  $H^*(F)$ . La preuve du Théorème 5.3.1 consiste à adapter cette construction au cas général. Les rôles de  $\mathbf{k}$  et  $H^*(F)$  seront respectivement tenus par  $(\Lambda X, d)$  et par un  $\Lambda X$ -module différentiel de rang fini  $(\Lambda X \otimes K, d)$ . Les bifoncteurs  $- \otimes -$  et  $\text{Hom}(-, -)$  seront remplacés par les



bifoncteurs  $-\otimes_{\Lambda X} -$  et  $Hom_{\Lambda X}(-, -)$  qui, à deux  $\Lambda X$ -modules différentiels  $(M, d_M)$  et  $(N, d_N)$ , associent les  $\Lambda X$ -modules différentiels  $(M \otimes_{\Lambda X} N, d)$  et  $(Hom_{\Lambda X}(M, N), D)$ . Leurs différentielles sont respectivement définies par  $d(m \otimes_{\Lambda X} n) = d_M m \otimes_{\Lambda X} n + (-1)^{|m|} m \otimes_{\Lambda X} d_N n$  et  $Df(m) = d_N(f(m)) - (-1)^{|f|} f(d_M m)$  pour  $m \in M$ ,  $n \in N$  et  $f \in Hom_{\Lambda X}(M, N)$ . Rappelons que si  $(M, d_M)$  et  $(N, d_N)$  sont deux  $\Lambda X$ -modules différentiels libres comme  $\Lambda X$ -modules non différentiels ( $M = \Lambda X \otimes K$ ,  $N = \Lambda X \otimes K'$ ) il en est de même des  $\Lambda X$ -modules différentiels  $(M \otimes_{\Lambda X} N, d)$  et  $(Hom_{\Lambda X}(M, N), D)$  : ces  $\Lambda X$ -modules sont en effet respectivement isomorphes aux  $\Lambda X$ -modules libres  $\Lambda X \otimes K \otimes K'$  et  $\Lambda X \otimes Hom(K, K')$ .

La proposition suivante nous garantit l'existence d'un élément universel. La démonstration est une adaptation directe du cas classique.

**Proposition 5.3.2.** *Si  $(M, d) = (\Lambda X \otimes K, d)$  est un  $\Lambda X$ -module différentiel de rang fini, alors l'application  $T_{\Lambda X} : (Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes K, \Lambda X) \otimes_{\Lambda X} \Lambda X \otimes K, d) \rightarrow (End_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes K), D)$  définie, pour  $z, w \in \Lambda X \otimes K$  et  $f \in Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes K, \Lambda X)$ , par  $T_{\Lambda X}(f \otimes_{\Lambda X} z)(w) = (-1)^{|z||w|} f(w) \cdot z$  est un isomorphisme de  $\Lambda X$ -modules différentiels.*

Rappelons que les cocycles de  $(End_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes K), D)$  sont les morphismes de  $\Lambda X$ -modules différentiels. En particulier l'identité est un cocycle et étant donnée une base, nous pouvons former dans  $Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes K, \Lambda X) \otimes_{\Lambda X} \Lambda X \otimes K$  un cocycle "universel" de la façon suivante :

Soit  $\{b_i\}_{i \in I}$  une base de  $K$  et  $\{\tilde{b}_i \mid i \in I\} \subset Hom(K, \mathbf{k})$  sa base duale, alors  $\{\beta_i = 1 \otimes b_i \mid i \in I\} \subset \Lambda X \otimes K$  et  $\{\check{\beta}_i = id \otimes \tilde{b}_i \mid i \in I\} \subset Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes K, \Lambda X)$  constituent respectivement des bases des  $\Lambda X$ -modules  $\Lambda X \otimes K$  et  $Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes K, \Lambda X)$ . L'élément  $\sum_i (-1)^{|\beta_i|} \check{\beta}_i \otimes \beta_i$  dont l'image par  $T_{\Lambda X}$  est l'identité est alors un cocycle, appelé cocycle "universel".

Le deuxième ingrédient nécessaire pour notre construction du transfert est un "relèvement" du cup-produit de la fibre. Plus précisément nous utiliserons l'énoncé suivant :

**Proposition 5.3.3.** *Soit  $(\Lambda U, d) \rightarrow (\Lambda(U \oplus V), d)$  une KS extension et considérons sa résolution  $(\Lambda U, d)$ -semi-libre minimale*

$$\begin{array}{ccccc} (\Lambda U, d) & \longrightarrow & (\Lambda(U \oplus V), d) & \xrightarrow{\pi} & (\Lambda V, \bar{d}) \\ & \searrow & \uparrow \varphi \sim & & \uparrow \bar{\varphi} \sim \\ & & (\Lambda U \otimes H(\Lambda V, \bar{d}), d) & \xrightarrow{\rho} & (H(\Lambda V, \bar{d}), 0) \end{array}$$

Notons  $v$  le produit de  $H = H(\Lambda V, \bar{d})$ . Alors, il existe un morphisme de  $\Lambda U$ -modules différentiels  $\mu : (\Lambda U \otimes H \otimes_{\Lambda U} \Lambda U \otimes H, d) \rightarrow (\Lambda U \otimes H, d)$  rendant

commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda U \otimes H \otimes_{\Lambda U} \Lambda U \otimes H, d) & \xrightarrow{\mu} & (\Lambda U \otimes H, d) \\ \rho \otimes \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ (H \otimes H, 0) & \xrightarrow{\nu} & (H, 0). \end{array}$$

**Démonstration.** Notons respectivement  $m$  et  $m'$  les multiplications des algèbres  $\Lambda(U \oplus V)$  et  $\Lambda V$ . L'application  $\Lambda U \otimes H \otimes_{\Lambda U} \Lambda U \otimes H \xrightarrow{\varphi \otimes \varphi} \Lambda(U \oplus V) \otimes \Lambda(U \oplus V) \xrightarrow{m} \Lambda(U \oplus V)$  induit un morphisme de  $\Lambda U$ -modules différentiels  $\bar{m} : (\Lambda U \otimes H \otimes_{\Lambda U} \Lambda U \otimes H, d) \rightarrow (\Lambda(U \oplus V), d)$ . Puisque le module  $\Lambda U \otimes H \otimes_{\Lambda U} \Lambda U \otimes H$  est un  $\Lambda U$ -module différentiel semi-libre, il existe, par le lemme de relèvement [2] un morphisme de  $\Lambda U$ -modules différentiels  $\mu : (\Lambda U \otimes H \otimes_{\Lambda U} \Lambda U \otimes H, d) \rightarrow (\Lambda U \otimes H, d)$  et une application  $\Lambda U$ -linéaire  $\theta : \Lambda U \otimes H \otimes_{\Lambda U} \Lambda U \otimes H \rightarrow \Lambda(U \oplus V)$  de degré -1 tels que  $\varphi \circ \mu - \bar{m} = d\theta + \theta d$ . Notons  $\bar{\mu}$  le morphisme d'evgd  $\mathbf{k} \otimes_{\Lambda U} \mu : (H \otimes H, 0) \rightarrow (H, 0)$ . Montrons que  $\bar{\mu}$  est exactement le produit de  $H$  et l'énoncé sera démontré. Puisque  $\theta$  est  $\Lambda U$ -linéaire, l'application  $\pi \circ \theta$  induit une application  $\theta' : H \otimes H \rightarrow \Lambda V$  de degré -1 telle que  $\pi \circ \theta = \theta' \circ (\rho \otimes \rho)$ . On vérifie facilement que  $\theta'$  est une homotopie entre les morphismes d'evgd  $\bar{\varphi} \circ \bar{\mu}$  et  $m' \circ \bar{\varphi} \otimes \bar{\varphi}$  i.e.  $\bar{\varphi} \circ \bar{\mu} - m' \circ \bar{\varphi} \otimes \bar{\varphi} = d\theta'$ . Soit  $q : (\Lambda V, \bar{d}) \rightarrow (H, 0)$  une rétraction d'evgd de  $\bar{\varphi}$ ,  $q \circ \bar{\varphi} = id$ . On obtient donc  $\bar{\mu} - q \circ m' \circ \bar{\varphi} \otimes \bar{\varphi} = q d\theta' = 0$ . Il suffit, pour conclure, de remarquer que le produit de  $H$  est exactement le composé  $q \circ m' \circ (\bar{\varphi} \otimes \bar{\varphi})$ .  $\square$

**Démonstration du Théorème 5.3.1.** Rappelons que  $\psi : (\Lambda X, d) \rightarrow (\Lambda(X \oplus Y), d)$  est un modèle de Sullivan relatif de la fibration  $p : E \rightarrow B$ . Notons  $\varepsilon : \Lambda X \rightarrow \mathbf{k}$  l'augmentation. Considérons la résolution  $\Lambda X$ -semi-libre minimale du morphisme de  $\psi$  :

$$\begin{array}{ccccc} (\Lambda X, d) & \xrightarrow{\psi} & (\Lambda(X \oplus Y), d) & \xrightarrow{\pi} & (\Lambda Y, \bar{d}) \\ & \searrow & \uparrow \varphi \sim & & \uparrow \bar{\varphi} \sim \\ & & (\Lambda X \otimes H(\Lambda Y, \bar{d}), d) & \xrightarrow{\rho} & (H(\Lambda Y, \bar{d}), 0) \end{array}$$

Il suffit de construire un morphisme de  $\Lambda X$ -modules différentiels  $\tau : (\Lambda X \otimes H, d) \rightarrow (\Lambda X, d)$  tel que  $\tau(x) = \Lambda_{\bar{f}} \cdot x$  pour  $x \in \Lambda X$ . D'après [34], on sait que les morphismes d'algèbres  $H^*(\pi)$  et  $H^*(i)$  coïncident, en particulier l'algèbre  $H(\Lambda Y, \bar{d})$  est isomorphe à  $H^*(F)$ . On note donc  $H = H(\Lambda Y, \bar{d}) = H^*(F)$  et  $\sim$  le produit. L'application  $f : E \rightarrow E$  induit un morphisme de  $\Lambda X$ -modules différentiels  $\Phi : \Lambda X \otimes H \rightarrow \Lambda X \otimes H$ . La projection de  $\Phi$  sur  $H$ ,  $\mathbf{k} \otimes_{\Lambda X} \Phi$ , s'identifie à l'application linéaire  $H^*(\bar{f})$  induite par la restriction de  $f$  à la

fibres. Soit  $\{e_i\}_{i \in I}$  une base de l'espace vectoriel  $H$  et  $\{\check{e}_i\}_{i \in I}$  sa base duale. Les ensembles  $\{\varepsilon_i = 1 \otimes e_i \mid i \in I\}$  et  $\{\check{\varepsilon}_i = id \otimes \check{e}_i \mid i \in I\}$  constituent alors des bases des  $\Lambda X$ -modules  $\Lambda X \otimes H$  et  $Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes H, \Lambda X)$ . Nous allons construire le transfert à partir du cocycle "universel"  $\sum_{i \in I} (-1)^{|\varepsilon_i|} \check{\varepsilon}_i \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_i$ .

Notons  $(\Phi_{ij})$  la matrice de  $\Phi$  dans la base  $\{\varepsilon_i\}$ . Remarquons que  $(\varepsilon \Phi_{ij})$  est exactement la matrice de  $H^*(\bar{f})$  dans la base  $\{e_i\}$  et que, pour raison de degré, on a  $\Phi_{ii} = \varepsilon \Phi_{ii}$  pour tout  $i$ . À l'aide du morphisme  $\mu : \Lambda X \otimes H \otimes_{\Lambda X} \Lambda X \otimes H \rightarrow \Lambda X \otimes H$  construit dans la proposition 5.3.3 pour la KS extension  $\psi : (\Lambda X, d) \rightarrow (\Lambda(X \oplus Y), d)$ , on définit l'application  $\tau : \Lambda X \otimes H \rightarrow \Lambda X$  par  $\tau(x \otimes h) = x \cdot \sum_{i \in I} (-1)^{|\varepsilon_i|} \check{\varepsilon}_i (\mu(\Phi(\varepsilon_i) \otimes_{\Lambda X} h))$  pour  $x \in \Lambda X$  et  $h \in H$ . En utilisant l'égalité  $d(\sum_{i \in I} (-1)^{|\varepsilon_i|} \check{\varepsilon}_i \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_i) = 0$ , il est facile de voir que  $\tau$  commute à la différentielle. L'application  $\tau$  est ainsi un morphisme de  $\Lambda X$ -modules différentiels qui, de plus, vérifie pour  $x \in \Lambda X$  :  $\tau(x \otimes 1) = x \cdot \tau(1) = x \cdot \sum_i (-1)^{|\varepsilon_i|} \check{\varepsilon}_i (\Phi(\varepsilon_i)) = x \cdot \sum_i (-1)^{|\varepsilon_i|} \Phi_{ii} = x \cdot \sum_i (-1)^{|\varepsilon_i|} \varepsilon \Phi_{ii} = x \cdot \sum_i (-1)^{|\varepsilon_i|} \varepsilon \Phi_{ii} = \Lambda_{\bar{f}} \cdot x$ .  $\square$

En notant  $S_{\mathbf{Q}}$  le rationalisé de l'espace  $S$ , nous obtenons comme conséquence du théorème 5.3.1 :

**Corollaire.** *Soit  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  une fibration dans laquelle tous les espaces sont 1-connexes et du type d'homotopie d'un CW-complexe de type fini. Si  $H^*(F; \mathbf{Q})$  est de dimension finie et si  $\chi_F \neq 0$  alors  $cat E_{\mathbf{Q}} \geq cat B_{\mathbf{Q}}$ .*

Fixons pour le reste de cette section  $\mathbf{k} = \mathbf{Q}$ . Tous les espaces 1-connexes et ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe de type fini sont ainsi dans le domaine d'Anick. Rappelons que Félix et Halperin [8] ont caractérisé la LS-catégorie du rationalisé d'un espace de la façon suivante :

Soit  $S$  un espace 1-connexe du type d'homotopie d'un CW-complexe de type fini et soit  $(\Lambda U, d)$  un modèle de Sullivan de cet espace. Considérons, pour tout  $n \geq 0$ , un modèle relatif de la projection  $(\Lambda U, d) \rightarrow (\Lambda U / \Lambda^{>n} U, d)$  :

$$(\Lambda U, d) \xrightarrow{j} (\Lambda U \otimes \Lambda V, d) \xrightarrow{\sim} (\Lambda U / \Lambda^{>n} U, d)$$

Alors [8]  $cat S_{\mathbf{Q}}$  est le plus petit  $n \in \mathbf{N}$  pour lequel  $j$  admet une rétraction d'agcd. Dans [21] K. Hess montre que ceci est équivalent à l'existence d'une rétraction de  $\Lambda U$ -modules différentiels.

**Démonstration du corollaire.** Soit  $(\Lambda X, d) \xrightarrow{\psi} (\Lambda(X \oplus Y), d)$  un modèle (sur  $\mathbf{Q}$ ) de la fibration  $p$ . Supposons  $cat E_{\mathbf{Q}} \leq n$ , et considérons un modèle

de la projection

$$(\Lambda(X \oplus Y), d) \xrightarrow{j_1} (\Lambda(X \oplus Y) \otimes \Lambda V, d) \xrightarrow{\phi_1} (\Lambda(X \oplus Y)/\Lambda^{>n}(X \oplus Y), d)$$

et  $r : (\Lambda X \otimes \Lambda Y \otimes \Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda(X \oplus Y), d)$  une rétraction de  $\Lambda X \otimes \Lambda Y$  modules différentiels de l'application  $j_1$ . Considérons également

$$(\Lambda X, d) \xrightarrow{j_2} (\Lambda X \otimes \Lambda W, d) \xrightarrow{\phi_2} (\Lambda X/\Lambda^{>n}X, d)$$

un modèle de la projection et

$$\psi' : (\Lambda X/\Lambda^{>n}X, d) \rightarrow (\Lambda(X \oplus Y)/\Lambda^{>n}(X \oplus Y), d)$$

l'application d'agdc induite par  $\psi$ . Nous obtenons ainsi le diagramme commutatif en traits pleins suivant

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda X & \xrightarrow{\psi} & \Lambda X \otimes \Lambda Y & \xrightarrow{j_1} & \Lambda X \otimes \Lambda Y \otimes \Lambda V \\ j_2 \downarrow & & \lambda \nearrow & & \phi_1 \downarrow \sim \\ \Lambda X \otimes \Lambda W & \xrightarrow{\phi_2} & (\Lambda X/\Lambda^{>n}X, d) & \xrightarrow{\psi'} & (\Lambda(X \oplus Y)/\Lambda^{>n}(X \oplus Y), d) \end{array}$$

dans lequel toutes les applications sont des morphismes de  $\Lambda X$ -modules différentiels et  $\phi_1$  est un quasi-isomorphisme surjectif. Par le lemme de relèvement [2], il existe un morphisme de  $\Lambda X$ -modules différentiels  $\lambda$  tel que  $\phi_1 \circ \lambda = \psi' \circ \phi_2$ . Soit maintenant  $\tau : (\Lambda X \otimes \Lambda Y, d) \rightarrow (\Lambda X, d)$  le transfert construit dans le Théorème 5.3.1 vérifiant  $\tau \circ \psi = \chi_F$ . Puisque  $\chi_F \neq 0$ , formons le composé  $\tilde{\tau} = \frac{1}{\chi_F} \tau \circ r \circ \lambda$ . Cette application est un morphisme de  $\Lambda X$ -modules différentiels et vérifie  $\tilde{\tau} \circ j_2 = id_{\Lambda X}$ , par conséquent  $cat B_{\mathbf{Q}} \leq n$ .  $\square$

## 5.4 Inclusion de la fibre

Rappelons la définition suivante :

Une algèbre graduée connexe  $A$  de dimension finie satisfait la *dualité de Poincaré* pour  $\omega \in A^n$  si  $A^n = \omega \cdot \mathbf{k}$ ,  $A^{>n} = 0$  et si la multiplication de  $A$  induit une forme bilinéaire non dégénérée  $P : A \otimes A \rightarrow A \xrightarrow{I} \mathbf{k}$  où  $I$  est l'application linéaire définie par  $I(\omega) = 1$  et  $I(A^{<n}) = 0$ . L'application  $\nu : A \rightarrow Hom(A, \mathbf{k})$  définie par  $\nu(a)(b) = I(a \cdot b)$  est alors une application linéaire bijective de degré  $-n$ .

Si  $\{b_i\}_{i \in J}$  est une base homogène de l'espace vectoriel gradué  $A$ , on note  $\{b_i^*\}_{i \in J}$  sa base duale pour la dualité de Poincaré  $P$ . L'élément  $b_i^*$  vérifie  $\text{deg}(b_i^*) = n - \text{deg}(b_i)$  et  $P(b_i^* \otimes b_j) = \delta_{ij}$ . L'application  $\nu$  transforme la base  $\{b_i^*\}$  en la base duale de  $\{b_i\}$  pour la dualité linéaire i.e.  $\nu(b_i^*) = \check{b}_i$ .

Pour une fibration  $F \rightarrow E \rightarrow B$  dans laquelle la cohomologie de la fibre satisfait la dualité de Poincaré, nous montrons que cette dualité s'étend en une dualité entre un modèle de  $E$  et son dual comme module sur un modèle de la base. Nous nous servons ensuite de cette dualité pour démontrer dans notre cadre le théorème de l'inclusion de la fibre et en déduire la construction d'un morphisme de transfert.

Considérons à nouveau une fibration  $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$  dans laquelle la base et l'espace total sont  $r$ -tempérés et de type fini. Supposons que  $H_{r,\rho(k)}(E) = 0$  et notons  $(\Lambda X, d) \xrightarrow{\psi} (\Lambda(X \oplus Y), d)$  un modèle de Sullivan relatif de l'application  $p$ . Considérons également la  $\Lambda X$  résolution semi-libre minimale du morphisme  $\psi$

$$\begin{array}{ccccc} (\Lambda X, d) & \longrightarrow & (\Lambda(X \oplus Y), d) & \xrightarrow{\pi} & (\Lambda Y, \bar{d}) \\ & \searrow & \uparrow \varphi \sim & & \uparrow \bar{\varphi} \sim \\ & & (\Lambda X \otimes H, d) & \xrightarrow{\rho} & (H, 0) \end{array}$$

où  $H = H(\Lambda Y, \bar{d}) = H^*(F)$ .

**Théorème 5.4.1.** *Supposons que  $H = H^*(F)$  satisfait la dualité de Poincaré pour la classe  $\omega \in H^n(F)$ . Notons  $I_{\Lambda X} : \Lambda X \otimes H \rightarrow \Lambda X$  l'application définie par  $I_{\Lambda X}(x \otimes h) = (-1)^{|x|n} x \cdot I(h)$  et  $\mu$  le relèvement du produit de  $H$  (cf Prop 5.3.3). Alors*

(i) *L'application  $\nu_{\Lambda X} : \Lambda X \otimes H \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes H, \Lambda X)$ , définie par :*

$$\nu_{\Lambda X}(u)(v) = I_{\Lambda X} \circ \mu(u \otimes_{\Lambda X} v) \quad u, v \in \Lambda X \otimes H$$

*est une bijection de  $\Lambda X$ -modules différentiels de degré  $-n$ .*

(ii) *Pour toute application  $f : E \rightarrow E$  vérifiant  $p \circ f = p$  il existe un cocycle  $z \in \Lambda X \otimes H$  tel que  $\rho(z) = \Lambda_{\bar{f}} \cdot \omega$  où  $\bar{f}$  est la restriction de  $f$  à la fibre.*

*De plus,  $\nu_{\Lambda X}(z) : \Lambda X \otimes H \rightarrow \Lambda X$  est un transfert i.e.  $\nu_{\Lambda X}(z)$  est un morphisme de  $\Lambda X$ -modules différentiels tel que  $\nu_{\Lambda X}(z)(x) = \Lambda_{\bar{f}} \cdot x$  pour  $x \in \Lambda X$ .*

**Démonstration.** (i) Notons  $P_{\Lambda X}$  le composé  $\Lambda X \otimes H \otimes_{\Lambda X} \Lambda X \otimes H \xrightarrow{\mu} \Lambda X \otimes H \xrightarrow{I_{\Lambda X}} \Lambda X$ . Pour raison de degré  $I_{\Lambda X}$  est une application différentielle,  $P_{\Lambda X}$  et  $\nu_{\Lambda X}$  sont donc des applications de  $\Lambda X$ -modules différentiels.

Pour montrer que  $\nu_{\Lambda X}$  est bijective, nous montrons qu'elle transforme une

base en une base. Soit  $\{e_i\}_{i \in \{0, \dots, N\}}$  une base de  $H$  telle que  $e_0 = 1, e_N = \omega$  et  $|e_i| \leq |e_j|$  pour  $i \leq j$ . Notons  $\varepsilon_i = 1 \otimes e_i$  les éléments de la base de  $\Lambda X \otimes H$  correspondante.

La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda X \otimes H \otimes_{\Lambda X} \Lambda X \otimes H & \xrightarrow{\mu} & \Lambda X \otimes H & \xrightarrow{I_{\Lambda X}} & \Lambda X \\ \downarrow & & \downarrow \rho & & \downarrow \varepsilon \\ H \otimes H & \xrightarrow{\quad \quad} & H & \xrightarrow{I} & \mathbf{k} \end{array}$$

nous donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} P_{\Lambda X}(\varepsilon_i \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_j) = 0 & \text{si } |e_i| + |e_j| < n, \\ P_{\Lambda X}(\varepsilon_i \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_j) = P(e_i \otimes e_j) & \text{si } |e_i| + |e_j| = n, \\ P_{\Lambda X}(\varepsilon_i \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_j) \in \Lambda^+ X & \text{si } |e_i| + |e_j| > n. \end{cases}$$

Soit  $\{e_i^*\}$  la base duale de  $e_i$  pour la dualité de Poincaré. En suivant le procédé de Gram-Schmidt, nous construisons une base  $\{\varepsilon_i^*\}$  du  $\Lambda X$ -module libre  $\Lambda X \otimes H$  telle que  $\varepsilon_i^* = 1 \otimes e_i^* + \sum_{j>i} \alpha_{ij} \cdot \varepsilon_j^*$  où  $\alpha_{ij} \in \Lambda^+ X$  et telle que

$P_{\Lambda X}(\varepsilon_i^* \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_j) = \delta_{ij}$ . Les  $\varepsilon_i^*$  sont définis par récurrence par  $\varepsilon_N^* = 1 \otimes e_N^*$  et  $\varepsilon_{N-k}^* = 1 \otimes e_{N-k}^* - \sum_{i < k} P_{\Lambda X}(1 \otimes e_{N-k}^* \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_{N-i}) \cdot \varepsilon_{N-i}^*$ . Par ailleurs, notons  $\tilde{\varepsilon}_i = id \otimes \check{e}_i$  l'image de la forme linéaire  $\check{e}_i$ , duale de  $e_i$ , par l'isomorphisme canonique  $Hom(H, \mathbf{k}) \xrightarrow{\cong} Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes H, \Lambda X)$ . Les éléments  $\{\tilde{\varepsilon}_i\}$  forment une base de  $Hom_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes H, \Lambda X)$ . L'image de  $\varepsilon_i^*$  par  $\nu_{\Lambda X}$  est exactement  $\tilde{\varepsilon}_i$  ce qui signifie que l'application  $\nu_{\Lambda X}$  transforme une base en une base. Le point (i) est donc démontré.

(ii) L'application  $f$  induit un morphisme de  $\Lambda X$ -modules différentiels  $\Phi : (\Lambda X \otimes H, d) \rightarrow (\Lambda X \otimes H, d)$  dont la projection sur  $H$  s'identifie à l'application linéaire  $H^*(\tilde{f})$  induite par la restriction de  $f$  à la fibre. Notons  $(\Phi_{ij})$  la matrice de  $\Phi$  dans la base  $\{\varepsilon_i\}$ . Rappelons que  $(\varepsilon \Phi_{ij})$  est la matrice de  $H^*(f)$  dans la base  $\{e_i\}$  et que  $\varepsilon \Phi_{ii} = \Phi_{ii} \in \mathbf{k}$  pour tout  $i$ .

Nous cherchons un cocycle  $z \in \Lambda X \otimes H$  tel que  $\rho(z) = \Lambda_f \cdot \omega$ . Remarquons que  $\Lambda_f \cdot \omega = \sum_{i=0}^N (-1)^{|e_i|} \varepsilon \Phi_{ii} e_i^* \smile e_i = \sum_{i=0}^N (-1)^{|e_i|} \varepsilon \Phi_{ii} \rho \mu(\varepsilon_i^* \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_i) =$

$$\rho \left( \sum_{i=0}^N (-1)^{|e_i|} \Phi_{ii} \mu(\varepsilon_i^* \otimes_{\Lambda X} \varepsilon_i) \right).$$

L'élément  $\sum_{i=0}^N (-1)^{|e_i|} \Phi_{ii} \varepsilon_i^* \otimes \varepsilon_i$  est un cocycle car il est l'image inverse du cocycle  $\Phi$  par la bijection différentielle  $T_{\Lambda X} \circ (\nu_{\Lambda X} \otimes id) : \Lambda X \otimes H \otimes_{\Lambda X} \Lambda X \otimes H \rightarrow End_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes H)$ . Puisque  $\mu$  commute à la différentielle  $z =$

$\sum_i (-1)^{|\varepsilon_i|} \Phi_{ii} \mu(\varepsilon_i^* \otimes \varepsilon_i)$  est également un cocycle. Ce cocycle vérifie  $\rho(z) = \Lambda_{\bar{f}} \cdot \omega$  et répond donc à la question. Son image par  $\nu_{\Lambda X}$  est également un cocycle i.e. un morphisme de  $\Lambda X$ -modules différentiels  $\nu_{\Lambda X}(z) : (\Lambda X \otimes H, d) \rightarrow (\Lambda X, d)$ . Vérifions que  $\nu_{\Lambda X}(z)$  est un transfert : soit  $x \in \Lambda X$ , on a  $\nu_{\Lambda X}(z)(x) = (-1)^{|x| |\nu_{\Lambda X}(z)|} x \cdot \nu_{\Lambda X}(1) = x \cdot I_{\Lambda X} \circ \mu \left( \sum_i (-1)^{|\varepsilon_i|} \Phi_{ii} \mu(\varepsilon_i^* \otimes \varepsilon_i) \otimes 1 \right) = x \cdot \sum_i (-1)^{|\varepsilon_i|} \Phi_{ii} P_{\Lambda X}(\varepsilon_i^* \otimes \varepsilon_i) = \Lambda_{\bar{f}} \cdot x$ .  $\square$



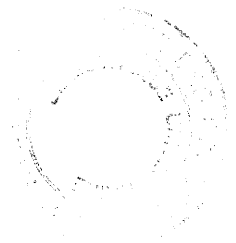


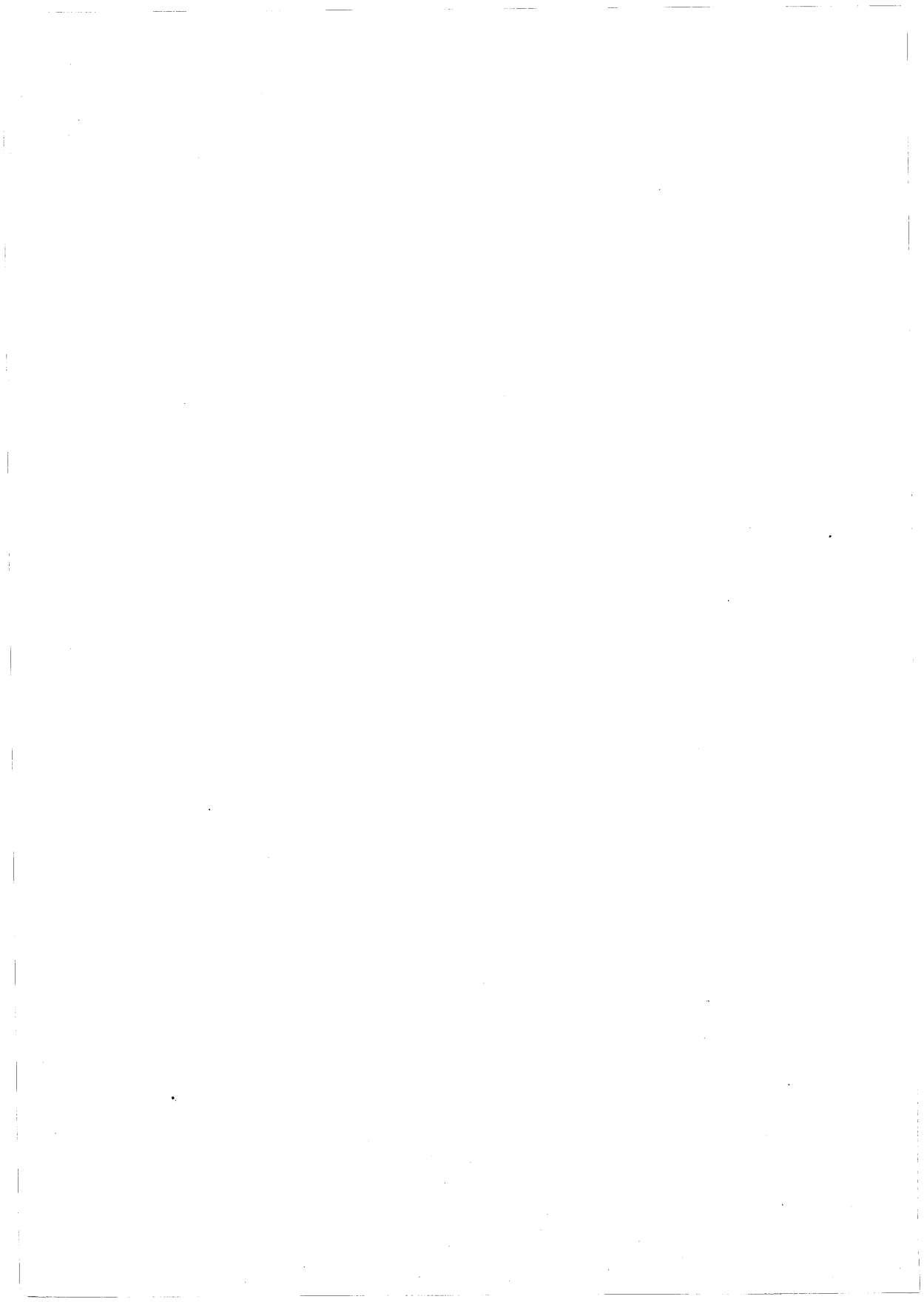
# Bibliographie

- [1] J.F. Adams et P.J. Hilton : On the chain algebra of a loop space, *Comment. Math. Helvetici* **30** (1956), pp. 305-330.
- [2] J.C. Becker et D.H. Gottlieb : The transfer map for fibrations and duality, *Compositio-Math.* **33** (1976), pp. 107-133.
- [3] I. Berstein et T. Ganea : On the homotopy-commutativity of suspensions, *Illinois J. Math.*, vol **6** (1962), pp. 336-340.
- [4] I. Berstein et P.J. Hilton : Category and generalized Hopf invariants, *Illinois J. Math.*, vol **4** (1960), pp. 437-451.
- [5] O. Cornea : Cone-length and Lusternik-Schnirelmann category, *Topology*, vol **33** (1994), pp. 95-111.
- [6] J-P. Doeraene : LS-category in a model category, *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol **84** (1993), pp. 215-261.
- [7] Y. Félix : La dichotomie elliptique-hyperbolique en homotopie rationnelle. SMF. Astérisque **176**, 1989.
- [8] Y. Félix et S. Halperin : Rational LS category and its applications, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol **273** (1982), pp. 1-37.
- [9] Y. Félix, S. Halperin et J-M. Lemaire : The rational LS-category of products and of Poincaré duality complexes, *Topology*, vol **37** (1998), pp. 749-756.
- [10] Y. Félix, S. Halperin et J-C. Thomas : LS catégorie et suite spectrale de Milnor-Moore, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, vol **111** (1983), pp. 89-96.
- [11] Y. Félix, S. Halperin et J-C. Thomas : Rational homotopy theory, Version June 1997.
- [12] Y. Félix, D. Tanré : Sur la formalité des applications, LNM, vol **1318**, Springer Verlag, 1988.
- [13] R. H. Fox : On the Lusternik-Schnirelmann category, *Annals of Math.*, vol **42** (1941), pp. 333-370.

- [14] T. Ganea : Lusternik-Schnirelmann category and strong category, *Illinois J. Math.*, vol **11** (1967), pp. 417-427.
- [15] T. Ganea : Some problems on numerical homotopy invariants. *Symposium on Algebraic Topology*. LNM, vol **249**, Springer Verlag, 1971, pp.23-30.
- [16] T. Ganea : A generalization of the homology and homotopy suspension, *Comment. Math. Helv.*, vol **39** (1965), pp. 295-322.
- [17] W.J. Gilbert : Some examples for weak category and conilpotency, *Illinois J. Math.*, vol **12** (1968), pp. 421-432.
- [18] D.H. Gottlieb : Fiber bundles and the Euler characteristic, *J. Diff. Geom.* **10** (1975), pp. 39-48.
- [19] S. Halperin : Universal envelopping algebras and loop space homology, *J. Pure Appl. Algebra* **83** (1992), pp. 237-282.
- [20] S. Halperin et J-M. Lemaire : Notions of category in differential algebra, *Algebraic Topology - Rational Homotopy* LNM, vol **1318**, Springer Verlag, 1988, pp. 138-154.
- [21] K. Hess : A proof of Ganea's conjecture for rational spaces, *Topology* **30** (1991), pp. 205-214.
- [22] P.J. Hilton : Generalizations of the Hopf invariant, Colloque de Topologie algébrique, Louvain, 1956, pp. 9-27.
- [23] N. Iwase : Ganea's conjecture on Lusternik-Schnirelmann category, to appear in Bull. London Math. Soc.
- [24] N. Iwase :  $A_\infty$ -method in Lusternik-Schnirelmann category, preprint.
- [25] I.M. James : On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann, *Topology* **17** (1978), pp. 331-348.
- [26] I.M. James : Lusternik-Schnirelmann category, in : *Handbook of Algebraic Topology*, Elsevier (1995), pp. 1293-1310.
- [27] B. Jessup : Rational approximations to L-S category and a conjecture of Ganea, *Trans. Amer. Math. Soc.* **317** (1990), pp. 655-660.
- [28] T. Kahl : Lusternik-Schnirelmann-Kategorie und axiomatische Homotopietheorie, Diplomarbeit, FU Berlin (1994).
- [29] J-M. Lemaire : Le transfert dans les espaces fibrés (d'après J. Becker et D. Gottlieb), Séminaire Bourbaki 23<sup>e</sup> année 1975/76 n<sup>o</sup> 472.
- [30] J-M. Lemaire et F. Sigrist : Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la L-S catégorie, *Comment. Math. Helvetici* **56** (1981), pp. 103-122.
- [31] L. Lusternik et L. Schnirelmann : *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Hermann, Paris, (1934).

- [32] M. Majewski : A cellular Lie algebra model for spaces and its equivalence with the models of Quillen and Sullivan, Thèse, FU Berlin (1996).
- [33] M. Mather : Pull-backs in homotopy theory, *Can. J. Math.*, **28** (1976), pp. 225-263.
- [34] L. Menichi : Sur l'algèbre de cohomologie d'une fibre, Thèse, Lille (1997).
- [35] D. Quillen : Rational homotopy theory, *Ann. Math.* **90** (1969), pp. 205-295.
- [36] Yu. B. Rudyak : On category weight and its applications. *Topology*, to appear.
- [37] H. Scheerer et D. Tanré : Fibrations à la Ganea, *Bull. Belg. Math. Soc* **4** (1997), 333-353.
- [38] P. Schweitzer : Secondary cohomology operations induced by the diagonal mapping, *Topology* **3** (1965), pp. 337-355.
- [39] W. Singhof : Minimal coverings of manifolds with balls : *Manuscripta Math.*, vol **29** (1979), pp.385-415.
- [40] D. Stanley : Spaces with Lusternik-Schnirelmann category  $n$  and cone length  $n + 1$ , preprint.
- [41] J. Strom : Two special cases of Ganea's conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc*, to appear.
- [42] D. Sullivan : Infinitesimal computations in topology, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **47** (1978), pp. 269-331.
- [43] D. Tanré : Homotopie rationnelle : Modèles de Chen, Quillen, Sullivan, LNM, vol **1025**, Springer Verlag, 1983.
- [44] H. Toda : *Composition methods in homotopy groups of spheres*, Annals of mathematics studies **49**.
- [45] G. H. Toomer : Lusternik-Schnirelmann category and the Moore spectral sequence, *Math. Z.* **138** (1974), pp. 123-143.
- [46] G.H. Toomer : Topological localization, category and cocategory, *Canadian J. Math.* **27** (1975), pp. 319-322.
- [47] G.W. Whitehead : *Elements of homotopy theory*, Springer Verlag, Berlin, GTM series 61 (1978).





053767209

La catégorie de Lusternik-Schnirelmann d'une variété minore le nombre de points critiques d'une fonction différentiable. À partir de la suite de fibrations utilisée par Ganea pour caractériser la catégorie d'un espace  $X$ , nous introduisons une suite décroissante d'entiers,  $\sigma^i \text{cat} X$ , s'intercalant entre l'invariant  $e$  de Toomer et la catégorie. Pour un espace rationnel,  $\sigma^i \text{cat}$  et  $e$  coïncident mais ils diffèrent en général.

À la manière de Berstein et Hilton, nous étudions le comportement de  $\sigma^i \text{cat}$  lors d'un attachement de cellule et montrons qu'il est fonction d'une classe d'homotopie, appelée *invariant de Hopf*, déterminée par l'application d'attachement. Des comparaisons de  $\sigma^i \text{cat}$  avec des approximations déjà connues de la catégorie sont données à travers plusieurs exemples explicites.

Nous étudions ensuite la  $\sigma^i$ -catégorie d'un produit et obtenons en particulier  $\sigma^{i+m} \text{cat} X + 1 \leq \sigma^i \text{cat}(X \times S^m) \leq \sigma^i \text{cat} X + 1$ . Nous en déduisons des conditions suffisantes pour qu'un espace  $X$  vérifie la *conjecture de Ganea*, i.e.  $\text{cat}(X \times S^m) = \text{cat} X + 1$ . Nous obtenons également une condition suffisante en termes d'invariant de Hopf et pouvons ainsi exhiber de nouveaux espaces vérifiant la conjecture de Ganea et pour lesquels les résultats récents de Rudyak et Strom ne s'appliquent pas. Nous considérons également une version de  $\sigma^i \text{cat}$  enrichie par l'application diagonale et la caractérisons pour les espaces rationnels.

Dans une seconde partie, nous construisons le transfert de Becker et Gottlieb d'une fibration au niveau d'un modèle algébrique. Nous en déduisons que la catégorie rationnelle de l'espace total majore celle de la base lorsque la caractéristique d'Euler-Poincaré de la fibre est non nulle.