Nº d'ordre: 2313

55 376 1998 5

THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE I

pour l'obtention du grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE EN MECANIQUE DES FLUIDES

par

Véronique Latard

METHODES DE VISUALISATION PAR GRADIENT D'INDICE EN MECANIQUE DES MILIEUX NON HOMOGENES

APPLICATION

A LA DIFFUSION ACOUSTIQUE ET AUX ECOULEMENTS DIPHASIQUES

soutenue le 26 octobre 1998 devant la commission d'examen :

Président de jury : J.M. Delhaye

Rapporteur : M. BRUNEAU Professeur à l'université du Mans.

Rapporteur : Y. GERVAIS Professeur à l'université de Poitiers.

Examinateurs:

Y. BRUNET Maître de conférence à l'USTL 1.

G. CAIGNAERT Professeur à l'ENSAM de Lille.

J.M. DELHAYE Dir. Rech. C.E.A. à Caradache, Professeur à l'E.C.P.

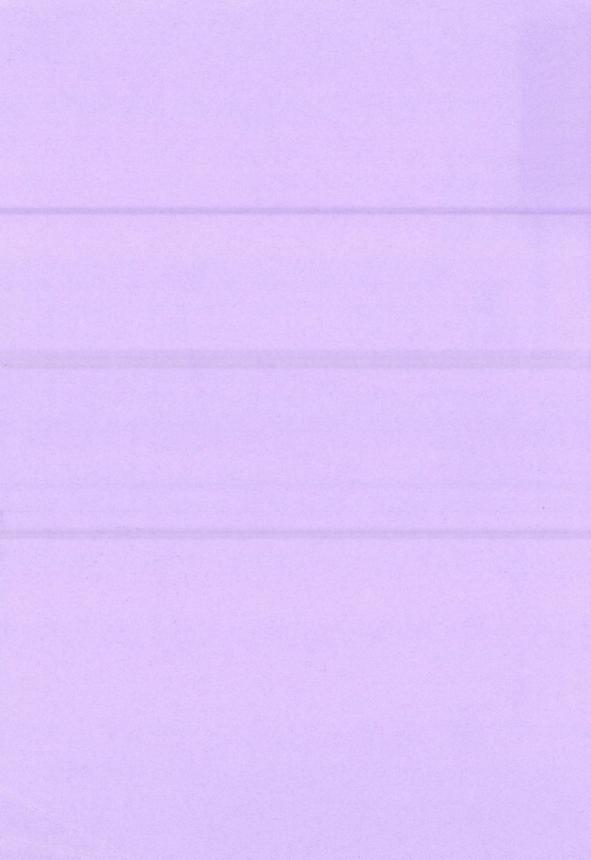
M. FINK Professeur à l'ESPCI.

G. MAZE Professeur à l'université du Havre.

A. MERLEN Professeur à l'USTL 1, directeur de thèse.

P. PERNOD Professeur à l'Ecole Centrale de Lille.





55376 1998 5

THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE I

pour l'obtention du grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE EN MECANIQUE DES FLUIDES

par

Véronique Latard

	A RETOURNER LE		
METHODES DE VISU MECANIQUE	PEB 23964 PEB 25169 29 NOV. 2005		,
A LA DIFFUSION A(
soutenue le 26 ou Président de jury : J.M. Delh Rapporteur : M. BRUNEAU Rapporteur : Y. GERVAIS P Examinateurs : Y. BRUNET Maître d G. CAIGNAERT Prof J.M. DELHAYE Dir. I M. FINK Professeur à G. MAZE Professeur i A. MERLEN Professeu			

		İ
		į

REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans ce mémoire est le résultat de la collaboration de deux laboratoires :

- -Le Laboratoire de Mécanique de Lille.
- -L'équipe Electronique et Acoustique EC- Lille, de l'Institut d'Electronique et de Micro-électronique du nord, Département d'Opto-Acousto-électronique.

Je tiens donc en premier lieu à exprimer ma profonde reconnaissance à MM. A. Merlen et Ph. Pernod qui ont codirigés cette thèse, pour la confiance qu'ils m'ont accordés tout au long de ces années et pour leur participation active à la réalisation de ce travail.

Je remercie MM Bruneau et Gervais qui me font l'honneur d'accepter la charge de Rapporteur. Je remercie également tous les membres du Jury :

- MM. Maze et Fink qui ont montré un vif intérêt pour nos travaux,
- M. Delhaye pour son intérêt et son soutien dans nos premiers pas en diphasique,
- M. Caignaert qui, en tant que directeur du laboratoire, a assuré le financement de la plupart des outils mis en place (miroirs, tunnel hydrodynamique ...),

et M. Brunet, notamment pour sa gentillesse, et pour son investissement personnel à la mise en place, au fonctionnement, et à l'automatisation du traitement des images du tunnel hydrodynamique.

Mes remerciements vont également à tous mes compagnons de route qui au fil des années ont apporté leur contribution à la réalisation de cette thèse. Je remercie donc Claude Ahyi pour son aide dans tous les domaines et plus particulièrement sur la source à étincelle, ainsi que pour les nombreuses journées passées ensemble à perfectionner notre maîtrise des techniques de visualisation et à étudier la diffusion acoustique par les cibles. Enfin, je remercie vivement Laurent Derbesse à qui je dois les visualisations dans les milieux fluides tricouches.

Je tiens enfin à exprimer toute ma gratitude à M. D. Décultot et à toute l'équipe du LAUE du Havre qui ont eu l'extrême amabilité de mettre à notre disposition les tubes et les cibles Lines et qui ont pris une part active dans l'interprétation des résultats.

Que tous les thésards du M3 et du LML qui me connaissent soient assurés de ma profonde reconnaissance pour la sincère amitié qu'ils m'ont toujours témoignée.

SOMMAIRE

SUMMAIRE	
	PAGES
PRESENTATION	1
REMERCIEMENTS	2
SOMMAIRE	3
NOMENCLATURE	7
INTRODUCTION GENERALE	8
1-INTRODUCTION A LA PROPAGATION	
DES ONDES ACQUISTIQUES	
DES ONDES ACOUSTIQUES	
1-1.GENERALITES SUR LES ONDES ELASTIQUES	12
1-1.1.Equations générales	12
1-1.1.1.Equation des ondes 1-1.1.2.Conditions aux frontières	12 15
1-1.2.Cas du demi espace infini	16
1-1.2.1.Réflexion d'une onde polarisée horizontalement 1-1.2.2.Réflexion d'une onde polarisée verticalement 1-1.2.3.Ondes inhomogènes	18 20 25
1-2.ONDE DE SURFACE DE RAYLEIGH	26
1-2.1.Généralités	26
1-2.2.Equation de Rayleigh	27
1-2.3.Résolution de l'équation de Rayleigh 1-2.4.Intensité acoustique pour un solide	29 30
1 2.4. Interiate accustinge pour art solide	50
1-3.CAS DE L'INTERFACE SOLIDE-LIQUIDE	33
1-3.1.Equation de Stoneley	33
1-3.2.Onde de surface de Stoneley	36
1-3.3.Onde de Rayleigh généralisée 1-3.4.Condition d'apparition des différentes ondes	38 43
. 1 2 1. and a apparation and afficient control	-10
1-4.CONCLUSION : PRINCIPE D'OBSERVATION DES ONDES D'INTER	FACE

46

LIQUIDE SOLIDE

2-DISPOSITIF EXPERIMENTAL

2-1.INTRODUCTION	49
2-2.MOYENS EXPERIMENTAUX	50
2-2.1. Système de visualisation ultra rapide par strioscopie ou ombroscopie 2-2.2. Source à mini-étincelle	50 57
2-3.EXPLOITATIONS POSSIBLES DES RESULTATS	58
2-3.1.Mesures à partir des visualisations 2-3.2.Mesures à partir d'un hydrophone	58 64
2-4.PERSPECTIVES :	
EVOLUTION VERS UNE CAMERA ULTRA RAPIDE PAR CCD	64
PLANCHES	66
3- <u>LES ONDES LATERALES</u>	
3-1.INTRODUCTION	74
3-2.PROPRIETES PARTICULIERES AUX ONDES SPHERIQUES :	
CAS D'UNE SOURCE ACOUSTIQUE PONCTUELLE OMNIDIRECTIONN	ELLE 74
3-3.THEORIE DES ONDES LATERALES POUR	
UNE INTERFACE LIQUIDE LIQUIDE	78
3-3.1.Description physique3-3.2.Expression mathématique pour l'onde réfléchie spéculaire régulière3-3.3.Expression mathématique pour l'onde latérale	78 80 90

3-4.THEORIE DES ONDES LATERALES	
POUR UNE INTERFACE LIQUIDE-SOLIDE	97
3-5.OBSERVATION EXPERIMENTALE DES ONDES LATERALES	99
3-5.1. Visualisation des ondes latérales à un milieu tricouche liquide 3-5.2. Visualisation des ondes latérales à une interface liquide-solide	99 101
ANNEXE : METHODE DU COL PLANCHES	103 106
4- <u>LES ONDES DE LAMB</u>	
4-1.INTRODUCTION	112
4-2.LA THEORIE DES ONDES DE LAMB SUR UNE PLAQUE	112
4-2.1.Cas d'une plaque dans le vide 4-2.2.Résultats généraux sur les ondes de Lamb 4-2.3.Fréquences de coupure des modes 4-2.4.Cas particulier concernant les modes zéros 4-2.5.Cas de la plaque au contact avec un fluide	112 117 120 123 126
4-3.ANALYSE DES RESULTATS EXPERIMENTAUX SUR LES PLAQUES	132
 4-3.1.Visualisation de la diffraction des ondes par une plaque dans l'eau 4-3.2.Simulation de l'onde A0 4-3.3.Les équiphases 4-3.4.Courbes de dispersion expérimentales 4-3.5.Conclusion 	132 133 140 143 145
PLANCHES	146
5-DIFFRACTION SUR DES SURFACES COURBES	
5-1.INTRODUCTION	152
5-2.PARAMETRES MODIFIANT LA NATURE DES ONDES	152

5-2.1.Introduction 5-2.2.Effets de la courbure et de l'épaisseur	152 153
5-3.METHODES CLASSIQUES	155
5-4.THEORIE DES ONDES SUR UN SOLIDE ELASTIQUE	156
5-4.1.Introduction 5-4.2.Série modale ou série de Rayleigh 5-4.3.Transformation de Watson-Sommerfeld pour le cylindre 5-4.4.Théorie géométrique pour le cylindre 5-4.5.Onde stationnaire pour le cylindre 5-4.6.Conclusion	156 157 161 166 170 171
5-5.APPLICATION AU CAS DE LA SPHERE	172
5-5.1.Introduction 5-5.2.Simulation pour la sphere élastique 5-5.3. Résultats expérimentaux 5-5.4. Comparaison simulation – expérience	172 172 178 179
5-6. DIFFRACTION DES ONDES PAR UN TUBE	181
5-6.1.Introduction 5-6.2.Première identification des ondes 5-6.3.Identification par la courbe de dispersion	181 181 182
5-7.ETUDE DE LA DIFFRACTION PAR UNE CIBLE LINE	184
5-7.1.Introduction 5-7.2.Description des photographies 5-7.3.Simulation de l'onde A0 et de l'onde A 5-7.4.Effets de la courbure et simulation	184 184 187 191
PLANCHES	194
6-TUNNEL HYDRODYNAMIQUE DIPHASIQUE	

6-1.1.Introduction 6-1.2.Mise au point de l'adaptation d'indice	221 221
6-2.ECOULEMENTS DIPHASIQUES TRIDIMENSIONNELS	223
6-2.1.Introduction	223
6-2.2.Dispositif expérimental	224
6-2.3.Enregistrements et traitements des images	225
6-2.4.Exploitation des images traitées	228
PLANCHES	232
CONCLUSION GENERALE	242
REFERENCES	244
RESUME	248



Nomenclature des notations courantes

Relatives aux ondes en général

ω pulsation de l'onde

λ longueur d'onde

f fréquence de l'onde

t temps de propagation de l'onde

Relatives aux potentiels et aux déplacements des ondes

A potentiel vecteur des ondes transverses

Ψ potentiel des ondes longitudinales

Φ potentiel des ondes dans le fluide

u_L vecteur vitesse des ondes longitudinales

u_T vecteur vitesse des ondes transverses

Relatives aux vitesses des ondes

C_L vitesse de propagation des ondes longitudinales

C_T vitesse de propagation des ondes transverses

C₁ vitesse de propagation des ondes dans le fluide

C_R vitesse de propagation de l'onde de Rayleigh

C_R vitesse de propagation de l'onde de Rayleigh généralisée

Cs vitesse de propagation de l'onde de Stoneley

C_{ph} vitesse de groupe des ondes vitesse de phase des ondes

Relatives aux nombres d'onde

k_L nombre d'onde longitudinale

k_T nombre d'onde transverse

k_I nombre d'onde dans le fluide

k_R nombre d'onde de Rayleigh

 ξ variable homogène à un nombre d'onde

$$\gamma_{\rm L} = \sqrt{k_{\rm L}^2 - \xi^2}$$

$$\gamma_{\rm T} = \sqrt{k_{\rm T}^2 - \xi^2}$$

$$y_1 = \sqrt{k_1^2 - \xi^2}$$

 $\sigma_L = \gamma_L h$ avec h la moitié de l'épaisseur de la plaque

$$\sigma_T = \gamma_T h$$

$$\sigma_e = \gamma_1 h$$

Relatives aux objets

- e épaisseur de la plaque
- h e/2
- r₀ rayon de la sphère
- b / a rapport des rayons (b rayon interne, a rayon externe) pour les tubes et les cibles Line

Relatives aux fonctions

- j_n fonction de Bessel sphérique
- h_n fonction de Hankel sphérique
- P_n fonction de Legendre
- J_n fonction de Bessel cylindrique
- H_n fonction de Hankel cylindrique

Relative aux repères et aux angles

- O, x, y, z repère cartésien orthonormé
- α , θ , γ angle d'incidence et de réémission des ondes

Relatives au chapitre 6

- Re nombre de Reynolds lié à l'écoulement des billes
- v viscosité dynamique du mélange d'huiles
- D diamètre des billes
- P.T.V. Particle Tracking Velocimetry

INTRODUCTION GENERALE

La philosophie générale de ce mémoire peut être résumée de la façon suivante. A partir de techniques expérimentales appartenant à des domaines distincts des sciences pour l'ingénieur et en procédant aux adaptations nécessaires pour les rendre compatibles, des métrologies originales à base de visualisations se révéleront dans deux domaines où elles faisaient défaut : la diffusion acoustique ultrasonore et les écoulements granulaires denses.

Ces deux thématiques en apparence disjointes sont reliées par l'approche métrologique. L'objectif primaire était justement d'étendre les méthodes de visualisations usuelles en mécanique des fluides et en particulier leurs aspects quantitatifs à des thèmes originaux non abordés ailleurs par ces moyens. Ce mémoire montrera le succès de cette démarche pour la diffusion ultrasonore et la percée obtenue pour les écoulements granulaires denses. Ces thèmes ne sont pas exhaustifs et les savoir-faires développés ici sont encore bons à prendre dans d'autres domaines pour peu qu'un intérêt se manifeste.

Ici, une impulsion initiale est venue du secteur de l'acousto-électronique apportant une source acoustique ultrasonore impulsionnelle qui, une fois associée à la visualisation ultrarapide par ombroscopie issue de l'aérodynamique instationnaire compressible, s'est révélée un outil novateur.

Pour les écoulements granulaires denses, l'impulsion venait du secteur industriel, la recherche a consisté à vaincre l'opacité de ces milieux pour accéder aux mouvements tridimensionnels des grains au sein du mélange. La recherche a évidemment testé différentes méthodes issues de la mécanique des fluides, mais le mémoire ne s'étendra que sur la plus prometteuse : la P.T.V., issue essentiellement des techniques vélocimétriques dans les écoulements incompressibles.

Pour l'ombroscopie ultra-rapide en acoustique, la méthode sera validée, ses apports novateurs pour la compréhension et la qualification des phénomènes seront mis en évidence.

Pour les milieux granulaires denses en trois dimensions. La technique de mesure sera simplement illustrée, les procédures de dépouillement automatiques seront indiquées, mais l'ensemble des performances n'est pas encore totalement circonscrit et l'exploitation physique des phénomènes reste à faire.

LA PREMIERE METHODE

Les méthodes de visualisation très utilisées en mécanique des fluides sont appliquées à l'observation de la diffusion acoustique à partir de 1938 (Schmidt 1938). Elles vont s'améliorer et permettre d'identifier la nature des ondes diffusées (Neubauer 1969). Cependant les limitations sont importantes : les sources ne permettent pas d'obtenir des réponses impulsionnelles, les champs d'observation sont réduits à quelques centimètres et la cadence des images est restreinte.

Les méthodes classiques d'expérimentation en diffusion acoustique sont souvent des méthodes de traitement du signal en harmonique car les équations de base se prêtent bien à cela. Leur domaine d'investigation est donc généralement le domaine fréquenciel avec l'analyse des spectres obtenus. Les générateurs utilisés sont des transducteurs courants générant des ondes planes harmoniques.

Dans une approche impulsionnelle en diffusion acoustique (Welton-de Billy-Hayman-Quentin 1980), des bursts sont principalement utilisés comme générateurs d'impulsions ce qui signifie que la réponse du système est obtenue seulement dans une bande de fréquences limitée.

Un dispositif de visualisation ultra rapide par ombroscopie ou strioscopie permettant d'enregistrer des séquences à des cadences atteignant dix millions d'images par seconde avec des champs d'observation de plusieurs dizaines de centimètres a été réalisé (Kemmou 1996, Ahyi 1997). Il a été utilisé en premier lieu pour caractériser une source acoustique impulsionnelle de type mini étincelle mise au point par l'équipe DOAE de l'IEMN.

L'exploitation de ces ressources permettra d'améliorer la qualité et la résolution des visualisations, de valider la méthode et de faire avancer l'analyse en diffusion acoustique.

A cette fin nous utilisons conjointement le système de visualisation et la source impulsionnelle de type mini-étincelle pour étudier la diffusion acoustique par des objets. Cette association autorise alors l'étude dans le domaine temporel et permet d'obtenir la réponse impulsionnelle de l'objet.

L'ensemble du mémoire est structuré de la façon suivante :

Un premier chapitre didactique s'appuyant sur une synthèse bibliographique présente des cas d'interactions fluide structures simples en commençant par la réflexion d'ondes sur un demi-espace plan en contact avec le vide. Les circonstances d'apparition de telles ondes ainsi que les critères qui les caractérisent sont présentés au non-spécialiste.

Le modèle est ensuite étendu par le remplacement du vide par un fluide idéal. L'apparition de l'onde de Stoneley est expliquée. Enfin dans une rapide présentation sera évoquée la manifestation de ces ondes diffractées lors de nos expériences.

Ce premier chapitre est une introduction à la théorie des ondes qui est écrit dans un but pédagogique. Il est adjoint en marge du travail de thèse pour faciliter la compréhension des non-acousticiens qui chercheraient dans ce mémoire une évaluation de la méthode pour d'autres applications.

Le chapitre 2 décrit les moyens expérimentaux utilisés et évoque les méthodes employées pour identifier les ondes diffractées. La théorie des ondes est utilisée par comparaison pour confirmer l'identification les diverses ondes visibles par ombroscopie ou strioscopie rapide lors de nos expérimentations.

Ce chapitre reste bref mais renvoie à des références utiles notamment (Ahyi, 1997) en ce qui concerne l'étude des caractéristiques de la source acoustique.

Le troisième chapitre décrit tout d'abord les propriétés des ondes sphériques puis leur interaction avec des interfaces de type liquide-liquide et de type solide-liquide. Pour finir, sont présentées des visualisations d'ondes latérales obtenues par notre technique de visualisation, entre autres sur un milieu liquide tricouches permettant de comparer la théorie et l'expérience dans un cas simple.

Un quatrième chapitre touche davantage les problèmes pratiques traités expérimentalement en considérant le cas de la plaque plane. Les visualisations de la diffraction d'une plaque dans un liquide permettent ensuite de mettre en évidence les ondes de Lamb déterminées par la théorie.

Ce chapitre, même s'il est encore consacré à un objet de forme simple, est la clé de ce mémoire. Il montre l'apport de la méthode de visualisation pour la mise en évidence de l'onde A0 bien connue théoriquement mais non détectée jusqu'alors par les méthodes harmoniques. La confrontation théorie-expérience confirme la présence de cette onde. Nous montrons en plus que nous pouvons extraire des visualisations des paramètres quantitatifs (vitesses de phase, longueurs d'onde, courbes de dispersion). Ce résultat servira de base à l'étude de cibles de formes plus complexes.

Le cinquième chapitre est consacré à la diffraction par des cibles tridimensionnelles, nous indiquons les effets de plusieurs paramètres importants, comme la courbure et l'épaisseur des coques et exposons une revue des différentes méthodes couramment employées pour

l'identification des ondes que ce soit de façon théorique, numérique ou expérimentale (RST, MIIR).

La méthode de Watson-Sommerfeld est appliquée au cas particulier de la diffraction d'ondes planes harmoniques par un cylindre. Ceci sert de base à l'étude de la sphère dont est présentée la comparaison théorie-expérience par le biais de la simulation des ondes géométriques. Cette partie importante du mémoire confirme que la méthode permet d'accéder à la réponse impulsionnelle de la sphère.

La diffraction acoustique par des coques sera ensuite ramenée à celle des plaques par le biais d'une étude de similitude.

Ce chapitre se clôt sur l'étude de cibles de forme plus complexes telles que la cible Line qui est un tube cylindrique fermé aux extrémités par deux hémisphères. Ces cibles sont très exploitées actuellement par les méthodes harmoniques sous l'impulsion de la D.R.E.T.. Là encore la méthode obtient un apport original avec la mise en évidence de l'interaction entre une onde A0 et une onde A.

LA DEUXIEME METHODE

Grâce à la sensibilité de l'ombroscopie, la première méthode a permis de mettre au point une adaptation d'indice entre un mélange de deux huiles et des billes de pyrex qui rend le milieu granulaire transparent. Cette technique peut donc s'appliquer à l'étude de milieux denses qui sont les plus difficiles à étudier théoriquement et expérimentalement. Ils sont donc mal connus alors que leurs applications sont nombreuses comme le transport en bouchon ou les lits fluidisés. Un dispositif simple a été réalisé pour une première étude de faisabilité métrologique.

Le sixième chapitre présente la technique de visualisation choisie. Il s'agit d'un tunnel hydrodynamique associé à une caméra numérique permettant l'étude par P.T.V. (Particle Tracking Velocity). Tout d'abord une technique d'adaptation d'indice est en œuvre pour rendre le milieu homogène optiquement puis des marqueurs sont introduits. Le mémoire présente l'écoulement des billes par gravitation en tunnel vertical. Les premiers résultats sont des répartitions de vitesses et les trajectoires caractéristiques obtenues grâce à la réalisation d'un traitement automatisé des images.

La mise en place de cette technique ouvre désormais la voie à un traitement statistique des résultats dans le but de remonter aux grandeurs macroscopiques de l'écoulement. De plus, de nombreuses possibilités d'étude s'offrent comme par exemple d'autres configurations du tunnel ou d'autres géométries plus difficiles à réaliser techniquement mais plus simples à aborder théoriquement.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION A LA PROPAGATION DES ONDES ACOUSTIQUES



1-1.GENERALITE SUR LES ONDES ELASTIQUES

1-1.1.EQUATION GENERALE (GONCHAROV 1993, LANDAU 1971)

1-1.1.1. Equations des ondes

On considère des ondes élastiques planes se propageant dans un domaine D. Le milieu est défini par sa densité ρ et les constantes adiabatiques de Lamé λ et μ . Le vecteur déplacement est appelé \mathbf{u} .

L'équation du mouvement s'écrit alors :

(1-1)
$$(\lambda + 2\mu)$$
grad div(u) - μ rot rot(u) = ρ u"

où u'est la dérivée seconde de u par rapport au temps.

On peut réécrire cette équation de la façon suivante :

(1-2)
$$C_T^2$$
 grad div(u) - C_T^2 rot rot(u) = u"

avec
$$C_L^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$$
 et $C_T^2 = \mu/\rho$

D'après le théorème d'Helmholtz, tout vecteur se décompose de façon unique sous la forme:

(1-3)
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{L} + \mathbf{u}_{T}$$
 avec rot $\mathbf{u}_{L} = 0$ et div $\mathbf{u}_{T} = 0$

Dès lors, on peut poser :

(1-4)
$$\mathbf{u}_{L} = \mathbf{grad} \, \Psi \, \mathbf{et} \, \mathbf{u}_{T} = \mathbf{rot} \, \mathbf{A}$$

avec Ψ potentiel scalaire défini à une fonction du temps près et A potentiel vecteur défini à un gradient près.

On peut donc choisir A tel que div A = 0 sans restreindre la généralité puisque seul rot A nous intéresse.

On applique alors la décomposition d'Helmholtz (1-3) au vecteur u de l'équation du mouvement (1-2) qui devient donc :

(1-5)
$$(\mathbf{u}_{L}^{"} - C_{L}^{2} \Delta \mathbf{u}_{L}) + (\mathbf{u}_{T}^{"} - C_{T}^{2} \Delta \mathbf{u}_{T}) = 0$$

en se servant de la relation suivante :

(1-6) rot rot $u = \text{grad div} u - \Delta u$

En remplaçant \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_T par leurs expressions (1-4), on obtient :

(1-7)
$$C_T^2 \operatorname{grad} \left(\Delta \Psi - C_T^{-2} \Psi'' \right) + C_T^2 \operatorname{rot} \left(\Delta A - C_T^{-2} A'' \right) = 0$$

L'unicité de la décomposition d'Helmholtz du vecteur nul nous donne alors :

(1-8)
$$\frac{\operatorname{grad} (\Delta \Psi - C_L^{-2} \Psi'') = 0}{\operatorname{rot} (\Delta A - C_L^{-2} A'') = 0}$$

dans le domaine D, avec les conditions aux limites remplies sur \mathbf{u}_{L} et \mathbf{u}_{T} .

La première équation de (1-8) devient après intégration :

(1-9)
$$\Delta \Psi - C_t^{-2} \Psi'' = g(t)$$

dont la solution générale est de la forme $\Psi=\Psi_{_0}+\Psi_{_1}(g(t))$ où $\Psi_{_0}$ est la solution de l'équation homogène. On peut donc se limiter au cas g(t)=0 car g(t) n'intervient pas dans le calcul de $\mathbf{u}_L=\mathbf{grad}\ \Psi$.

La deuxième équation de (1-8) devient après intégration :

(1-10)
$$\Delta A - C_{T}^{-2} A'' = \text{grad } G$$

cependant on peut prendre G constant car rot A est indépendant du choix de G d'après la deuxième équation de (1-8).

On aboutit alors aux deux équations des ondes :

$$\Delta \Psi = C_L^{-2} \Psi''$$
(1-11) $\Delta \mathbf{A} = C_T^{-2} \mathbf{A}''$

$$\operatorname{avec} C_L^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho \text{ et } C_T^2 = \mu/\rho$$

La forme générale des solutions des équations des ondes (1-11) est :

(1-12)
$$\Psi = f(\mathbf{n.r} - C_L t)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}(\mathbf{n.r} - C_T t)$$

avec $\mathbf{r} = (x,y,z)$ vecteur position et \mathbf{n} vecteur unitaire quelconque.

f est une fonction scalaire arbitraire et F est une fonction vectorielle arbitraire.

On pose
$$\xi = \mathbf{n.r} - C_L t$$

Soit \mathbf{n} donné: $\mathbf{u}_L = \mathbf{grad} \Psi = \mathbf{n} d\mathbf{f} / d\xi$

On pose $\varsigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - C_T t$ Soit \mathbf{n} donné: $\mathbf{u}_T = \mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{n} \wedge d\mathbf{F} / d\varsigma$

On obtient ainsi une onde élastique plane constituée de deux ondes se propageant indépendamment l'une de l'autre.

Pour la première, le déplacement \mathbf{u}_L est parallèle à la direction de propagation \mathbf{n} . Cette onde, de vitesse C_L , produit une variation de volume et est irrotationnelle; on dit que c'est une onde longitudinale.

Pour la deuxième, le déplacement $\mathbf{u_T}$ est situé dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. Cette onde a une vitesse C_T , elle n'est pas irrotationnelle mais est isovolume. On l'appelle onde transversale.

Pour des matériaux existants, on a λ et μ qui sont toujours positifs et

$$\frac{C_L}{C_\tau} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\mu}$$

ce qui conduit à :

$$C_r \geq \sqrt{2}C_T$$

Les ondes harmoniques planes réprésentent un cas important des solutions des équations des ondes (1-12). Elles peuvent s'écrire sous la forme :

(1-13)
$$\begin{split} \Psi &= D \exp(i\omega(\mathbf{n}.\mathbf{r} \cdot \mathbf{C}_L t)/\mathbf{C}_L) = D \exp(i(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r} \cdot \omega t)) , \mathbf{k}_L = \omega \cdot \mathbf{n}/\mathbf{C}_L \\ \mathbf{A} &= \mathbf{E} \exp(i\omega(\mathbf{n}.\mathbf{r} \cdot \mathbf{C}_T t)/\mathbf{C}_T) = \mathbf{E} \exp(i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} \cdot \omega t)) , \mathbf{k}_T = \omega \cdot \mathbf{n}/\mathbf{C}_T \end{split}$$

où D, E sont des nombres complexes arbitraires constants; $\mathbf{k_L}$, $\mathbf{k_T}$ sont des vecteurs d'ondes; ω est la pulsation; $\mathbf{k_L}$, $\mathbf{k_T}$ sont les modules de $\mathbf{k_L}$ et $\mathbf{k_T}$ respectivement.

Il est toujours possible de choisir les axes des coordonnées de telle façon que $k_{LX} = k_L$, $k_{LY} = k_{LZ} = 0$ ou $k_{TX} = k_T$, $k_{TY} = k_{TZ} = 0$ ce qui nous donne :

(1-14 a)
$$\Psi = D \exp(i(k_T.x-\omega t)) \text{ ou } A = \mathbf{E} \exp(i(k_T.x-\omega t))$$

et pour les ondes se propageant dans le sens opposé :

(1-14 b)
$$\Psi = D \exp(-i(k_T \cdot x - \omega t)) \text{ ou } A = E \exp(-i(k_T \cdot x - \omega t))$$

On note que la propagation des ondes longitudinales et transversales en milieu infini s'effectue sans dispersion (la vitesse de propagation est indépendante de la fréquence). Par conséquent des ondes planes de forme arbitraire (1-12) se propagent sans dispersion.

1-1.1.2 Conditions aux frontières

Dans un milieu élastique, homogène, infini, les ondes longitudinales et transversales se propagent indépendamment, c'est à dire qu'elles n'interagissent pas. Dans le cas général, si la densité ou les coefficients de Lamé varient dans l'espace, une onde longitudinale génère en se propageant des ondes transversales et vice versa. Cela se produit en particulier à la frontière de deux milieux homogènes différents.

Examinons les différents types d'interfaces usuelles :

a) Contact entre deux demi-espaces élastiques

a.i) sans glissement

Le déplacement et la contrainte doivent être continus à l'interface s.

$$\left(u_{j}^{1}-u_{j}^{2}\right)_{s}=0$$

$$(\sigma_{nj}^1 - \sigma_{nj}^2)_s = 0$$

avec j = 1, 2, 3; n normal à s; 1 = milieu 1; 2 = milieu 2

a.ii) avec glissement

Le déplacement et la contrainte normale doivent être continus, les contraintes tangentielles doivent être nulles.

$$\begin{aligned} \left(u_n^1 - u_n^2\right)_s &= 0\\ \left(\sigma_{nn}^1 - \sigma_{nn}^2\right)_s &= 0\\ \left(\sigma_{ni}^1\right)_s &= 0, \left(\sigma_{ni}^2\right)_s &= 0 \text{ avec j différent de n.} \end{aligned}$$

b) Contact d'un corps élastique avec un mur rigide infini

b.i) sans glissement.

$$(u_i)_s = 0$$
 pour $j = 1, 2, 3$.

b.ii) avec glissement

$$(u_n)_s = 0$$

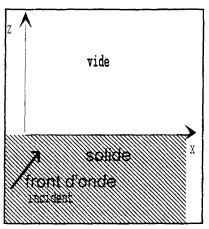
 $(\sigma_{ni})_s = 0$ pour j différent de n

c) Frontière d'un corps élastique avec une surface libre (ou vide)

$$(\sigma_{nj})_s = 0$$
 pour $j = 1, 2, 3$.

1-1.2. CAS DU DEMI-ESPACE INFINI (GONCHAROV 1993)

On considère une interface plane entre un solide élastique occupant le demi espace z<0 et le vide (figure 1-1). L'équation de l'interface est donc z=0. z est l'axe normal à la surface dirigé vers le vide. On choisit les directions des axes x et y de façon à ce que la normale au front d'onde incident dans le solide soit dans le plan (x, z) (le plan d'incidence). Le problème devient plan et tout est indépendant de y.



<u>figure 1-1</u> : schématisation du demi espace et de la direction de propagation du front d'onde incident

On considère un matériau élastique linéaire. La loi de Hooke s'écrit dans notre base orthonormée:

(1-15)
$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij} + \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \text{ pour } i, j = 1,2,3$$

où σ est le tenseur des contraintes et où on a les correspondances suivantes entre les grandeurs indicées et nos notations précédentes : le vecteur (x1, x2, x3) correspond à (x, y, z) et aux indices 1, 2, 3 correspondent respectivement les composantes suivant x, y, z.

Les conditions à la paroi s'expriment dans notre cas (qui correspond au cas c du paragraphe 1-1.1.2.) par :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$
 à l'interface $z = 0$.

On les explicite en se servant de la loi de Hooke (1-15), ce qui donne :

(1-16)
$$(\partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x)_{z=0} = (\partial u_y / \partial z)_{z=0} = ((\lambda + 2\mu)\partial u_z / \partial z + \lambda \partial u_x / \partial x)_{z=0} = 0$$

On peut alors considérer deux types d'ondes incidentes possibles dans le solide :

a) Les ondes polarisées horizontalement :

On considère une onde incidente transverse dans le cas où le mouvement de la particule est perpendiculaire au plan d'incidence. C'est à dire que le déplacement u_y est différent de zéro tandis que les déplacements u_x et u_z sont nuls. On dit que cette onde est une onde polarisée horizontalement par rapport à la surface libre.

b) Les ondes polarisées verticalement :

On considère une onde incidente pour laquelle le mouvement de la particule se trouve dans le plan d'incidence. Dans ce cas u_y est égal à zéro. L'onde est polarisée dans le plan perpendiculaire à la surface. Elle peut être longitudinale ou transversale.

On remarque que, en ce qui concerne les conditions à la paroi (1-16), u_X et u_Z interagissent dans la première et la troisième condition, de par leur dérivée, tandis que u_Y en est absent. La deuxième condition, elle, ne contient que u_Y . Cela veut dire qu'on peut traiter indépendamment les ondes polarisées verticalement et les ondes polarisées horizontalement.

1-1.2.1. Réflexion des ondes polarisées horizontalement

On considère le cas du demi-espace plan avec des ondes polarisées horizontalement dans le solide. Le déplacement est perpendiculaire au plan d'incidence, et tout est indépendant de y.

On a alors avec l'aide de (1-4):

(1-17)
$$u_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

On cherche les solutions élémentaires sous forme d'ondes progressives harmoniques. On aura deux ondes élémentaires pour satisfaire la condition à la frontière. Il est commode de chercher u_v sous la forme $u_v = u_v^* + u_v^-$ avec :

(1-18)
$$u_{y}^{+} = b^{+} \exp(i(\xi x + \gamma_{T} z - \omega t))$$

$$u_{y}^{-} = b^{-} \exp(i(\xi' x - \gamma'_{T} z - \omega' t))$$

où le signe + désigne l'onde dite incidente car elle se propage vers la surface et - l'onde réfléchie qui s'en éloigne. Les amplitudes complexes des ondes sont notées b. ξ , γ_T et ξ' , γ_T' sont les composantes des vecteurs d'ondes de l'onde incidente et réfléchie respectivement.

On a alors:

(1-19)
$$\gamma_T^2 + \xi^2 = k_T^2 = \omega^2 / C_T^2$$

 $\gamma_T'^2 + \xi'^2 = k_T'^2 = \omega'^2 / C_T^2$

En substituant les expressions du déplacement (1-18) dans la condition à la paroi $(\frac{\partial u_y}{\partial z})_{z=0} = 0$, on obtient :

(1-20)
$$b^- = b^+ \left(\frac{\gamma_T}{\gamma_T'}\right) \exp(i((\xi - \xi')x - (\omega - \omega')t))$$

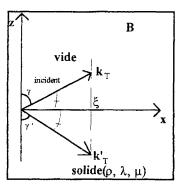
Ceci est satisfait pour tout x et tout t si $\omega = \omega'$ et $\xi = \xi'$. Ainsi la fréquence de l'onde et la projection du vecteur d'onde sur la paroi sont conservées quand l'onde est réfléchie. Les équations (1-19) nous donne alors $\gamma_T = \gamma_T'$ ce qui conduit à :

(1-21)
$$b^{-} = b^{+}$$

$$u_{y} = u_{y}^{+} + u_{y}^{-} = (b^{+} \exp(i\gamma_{T}z) + b^{-} \exp(-i\gamma_{T}z)) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

Le coefficient de réflexion est donc :

(1-22)
$$V = b^-/b^+ = 1$$



<u>figure 1-2</u>: représentation des vecteurs d'onde dans le cas de réflexion d'une onde polarisée horizontalement (transversale)

On peut donc écrire (figure 1-2) :

$$\xi = k_T \sin \gamma = k_T' \sin \gamma'$$

or d'après (1-19) $k_T = k_T'$, ce qui implique que $\gamma = \gamma'$. L'angle d'incidence est donc égal à l'angle de réflexion, c'est la loi de Snell.

On remarque que la loi de Snell est une simple conséquence de la dépendance de l'onde incidente et l'onde réfléchie en x et t à travers le facteur $\exp(i(\xi x - \omega t))$. La vitesse de propagation suivant x est la même pour les deux ondes.

Cette règle est donc applicable à toute solution de ce type de l'équation des ondes sur l'interface plane z = 0. On la retrouvera donc sous une forme équivalente pour les ondes polarisées verticalement.

1-1.2.2. Réflexion des ondes polarisées verticalement

On considère le cas du demi espace plan avec des ondes polarisées verticalement dans le solide. D'après le paragraphe précédent, $u_y=0$ et l'onde incidente est dans le plan (o x z) orthogonal au plan de l'interface z=0. Par conséquent les déplacements u_x et u_z sont dans le plan (x,z), et tout est indépendant de y.

On obtient donc avec l'aide de (1-4):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{x} &= \partial \Psi / \partial \mathbf{x} - \partial \mathbf{A}_{y} / \partial \mathbf{z} \\ \textbf{(1-23)} \ \ \mathbf{u}_{y} &= \partial \mathbf{A}_{x} / \partial \mathbf{z} - \partial \mathbf{A}_{z} / \partial \mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{u}_{z} &= \partial \Psi / \partial \mathbf{z} + \partial \mathbf{A}_{y} / \partial \mathbf{x} \end{aligned}$$

Car A et ψ ne dépendent que de x et z. De plus, seul u_y dépend de A_X et de A_Z , on peut donc prendre $A_X = A_Z = 0$ sans restreindre la généralité.

En z = 0, la condition $\sigma_{yz} = 0$ est identiquement vérifiée, il reste donc à expliciter $\sigma_{xz} = 0$ et $\sigma_{zz} = 0$.

Cherchons les solutions sous forme d'ondes progressives. Si elles existent, elles dépendent de x et t à travers $\exp(i (\xi x - \omega t))$. ξ est la projection du nombre d'onde de l'onde incidente sur x et on pose $\xi = \omega/c$ où c est la vitesse de l'onde incidente le long de la paroi. Les équations des ondes (1-11) imposent que l'onde incidente et l'onde réfléchie aient la même vitesse suivant x.

On peut donc écrire les solutions sous la forme :

(1-24)
$$\Psi = f(z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

$$A_x = g(z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

Les équations des ondes (1-11) deviennent :

(1-25 a)
$$\frac{\partial^2 f / \partial z^2 = (-k_L^2 + \xi^2) f}{\partial^2 g / \partial z^2 = (-k_T^2 + \xi^2) g}$$

ce qui équivaut à :

(1-25 b)
$$\frac{\partial^2 \Psi / \partial z^2 = (-k_L^2 + \xi^2)^T \Psi}{\partial^2 A_y / \partial z^2 = (-k_T^2 + \xi^2)^T A_y}$$

 $k_L = \omega/C_L$ et $k_T = \omega/C_T$ sont les nombres d'ondes longitudinaux et transverses. On a donc $k_L < k_\tau$ pour tout matériau élastique.

En tenant compte de l'équation des ondes (1-25) et avec l'aide de (1-16) et (1-23), les conditions à la paroi deviennent :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial z} + ipA_y \right] &= 0 \\ \textbf{(1-26)} & \left[\frac{\partial A_y}{\partial z} - ip\Psi \right] &= 0 \\ \dot{a} z &= 0 \\ avec p &= (2\xi^2 - k_T^2)/(2\xi) \end{aligned}$$

Plaçons nous dans le cas où $-\xi^2 < k_\tau^2 < k_\tau^2$. On a alors :

(1-27)
$$\frac{\xi < k_{L} \rightarrow \xi^{2} - k_{L}^{2} < 0}{\xi < k_{T} \rightarrow \xi^{2} - k_{T}^{2} < 0}$$

On pose:

(1-28)
$$i^2 \gamma_L^2 = \xi^2 - k_L^2 \rightarrow \gamma_L = \sqrt{k_L^2 - \xi^2}$$

 $i^2 \gamma_T^2 = \xi^2 - k_T^2 \rightarrow \gamma_T = \sqrt{k_T^2 - \xi^2}$

avec $i^2 = -1$

Les solutions de (1-25 a) sont du type :

$$f(z) = a^{+} \exp(i\gamma_{L}z) + a^{-} \exp(-i\gamma_{L}z)$$
$$g(z) = b^{+} \exp(i\gamma_{T}z) + b^{-} \exp(-i\gamma_{T}z)$$

On peut donc écrire la solution des équations des ondes (1-24) sous la forme générale :

(1-29)
$$\Psi = (a^+ \exp(i\gamma_L z) + a^- \exp(-i\gamma_L z)) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

$$A_Y = (b^+ \exp(i\gamma_T z) + b^- \exp(-i\gamma_T z)) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

En adoptant la même dénomination qu'en 1-1.2.2., la notation + désigne l'onde incidente et - l'onde réfléchie

En remplaçant dans les conditions aux frontières (1-26), on obtient :

(1-30)
$$\gamma_L(a^+ - a^-) + p(b^+ + b^-) = 0$$
$$\gamma_T(b^+ - b^-) - p(a^+ + a^-) = 0$$

Examinons deux cas significatifs:

a) b+= 0 : l'onde incidente est purement longitudinale. En posant

$$V_{LL} = \frac{a^{-}}{a^{+}}$$
 facteur de réflexion de l'onde longitudinale

(1-31)

 $V_{LT} = \frac{b^{-}}{a^{+}}$ facteur de conversion en onde transverse

les équations (1-30) donnent :

(1-32 a)
$$V_{LL} = \frac{\gamma_L \gamma_T - p^2}{\gamma_L \gamma_T + p^2}$$

(1-32 b)
$$V_{LT} = \frac{-2\gamma_L p}{\gamma_L \gamma_T + p^2}$$

b) a+=0: l'onde incidente est purement transverse. On pose :

$$V_{TT} = \frac{b^{-}}{b^{+}}$$
 facteur de réflexion de l'onde transversale $V_{TL} = \frac{a^{-}}{b^{+}}$ facteur de conversion en onde longitudinale

Les équations (1-30) donnent :

(1-32 c)
$$V_{TT} = \frac{\gamma_L \gamma_T - p^2}{\gamma_L \gamma_T + p^2}$$
 facteur de réflexion de l'onde transverse

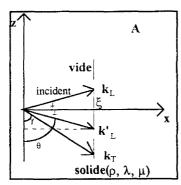
(1-32 d)
$$V_{TL} = \frac{2\gamma_T p}{\gamma_T \gamma_T + p^2}$$
 facteur de conversion en onde longitudinale

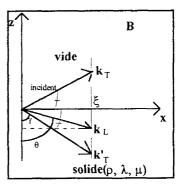
On remarque que
$$V_{LT} = -\frac{\gamma_L}{\gamma_T} V_{TL}$$
 et $V_{LL} = V_{TT}$.

De façon générale on a à l'interface :

(1-33)
$$a^{-} = V_{LL}a^{+} + V_{TL}b^{+}$$
$$b^{-} = V_{LT}a^{+} + V_{TL}b^{+}$$

On peut exprimer ces coefficients V_{ij} (i = L,T; j = L,T) en fonction des angles d'incidences et de réflexions ainsi que des nombres d'ondes (figure 1-3).





<u>figure 1-3</u>: représentation des vecteurs d'onde dans le cas de réflexion d'ondes polarisées verticalement, (A) longitudinale, (B) transverse.

La forme de la solution (1-29) conduit à la loi de réfraction :

(1-34 a)
$$\xi = k_L \sin \theta = k_T \sin \gamma$$

De même, le sens physique de γ_L et γ_T étant la projection des vecteurs d'ondes \mathbf{k}_L et \mathbf{k}_T sur l'axe z, on a :

(1-34 b)
$$\gamma_{L} = k_{L} \cos \theta$$

$$\gamma_{T} = k_{T} \cos \gamma$$

d'où il découle :

$$p = -\gamma_T \cot an 2\gamma$$

D'après ces expressions, les coefficients (1-32) peuvent s'écrire :

(1-35 a)
$$V_{LL} = \frac{\cos\theta \tan^2 2\gamma - C_L/C_T \cos\gamma}{\cos\theta \tan^2 2\gamma + C_L/C_T \cos\gamma}$$

et

(1-35 b)
$$V_{LT} = \frac{2\cos\theta \tan 2\gamma}{\cos\theta \tan^2 2\gamma + C_L / C_T \cos\gamma}$$

Cas particuliers de réflexion :

- a) Une incidence normale $\theta=\gamma=0$ implique que $V_{LL}=V_{TT}=-1$ et que $V_{LT}=V_{TL}=0$. La réflexion est totale, il n'y a donc pas de conversion de mode. La phase s'incrémente de π pour ψ et A_y , c'est à dire qu'il n'y a pas de déphasage pour u. C'est une situation similaire à celles des ondes polarisées horizontalement.
- b) Pour $V_{LL} = V_{TT} = 0$, la conversion est totale. Ce cas est toujours possible et on peut trouver par le calcul, les valeurs de γ et θ pour lesquelles cela se produit.

L'équation
$$V_{LL} = V_{TT} = 0$$
 nous donne :

(1-36)
$$\cos\theta \tan^2 2\gamma = C_1/C_T \cos\gamma$$

En remplaçant dans l'expression (1-35 b), cela entraine :

(1-37)
$$V_{LT} = \cot n2\gamma = \frac{C_T \cos \theta}{C_T \cos \gamma} \tan 2\gamma$$

L'analyse de cette équation montre qu'à une valeur fixée pour γ correspond une valeur pour θ . Pour toutes les combinaisons possibles des constantes élastiques, θ est compris entre 37 et 90 degrés et γ est compris entre 25 et 45 degrés.

Remarque:

Les équations ainsi que les facteurs de réflexion et de conversion sont indépendants de ω. On peut donc étendre toutes les propriétés ci-dessus à toute combinaison linéaire (finie ou infinie) d'ondes. Ainsi par le biais de la transformée de Fourier, on peut généraliser ces propriétés à toutes les ondes, en particulier aux ondes impulsionnelles.

1-1.2.3. Ondes inhomogènes

Si on a une onde incidente transversale polarisée verticalement dans le solide avec un angle γ , d'après la loi de réfraction (1-34 a) on est limité au cas $\sin(\gamma) < C_T / C_L$, c'est à dire que γ doit être inférieur à 45° pour tous les matériaux.

Le cas où $\sin(\gamma) > C_T / C_L$ impliquerait que sin θ soit supérieur à 1! C'est justement la situation où ξ est supérieur à k_L écartée au paragraphe précédent.

Examinons désormais $k_L^2 < \xi^2 \le k_{\tau}^2$.

En tenant compte du facteur $\exp(i(\xi x - \omega t))$ et de la condition $a^+ = 0$, le potentiel de l'onde longitudinale réfléchie a alors la forme :

(1-38)
$$\Psi = V_{TL}b^{+} \exp(|\gamma_L|z + i(\xi x - \omega t))$$

où
$$\gamma_L = \pm i \sqrt{\xi^2 - k_L^2}$$
 et $|\gamma_L| = \sqrt{\xi^2 - k_L^2}$

Cette expression correspond à une onde d'amplitude inhomogène qui se propage le long de la paroi à la vitesse $c = \omega/\xi$. Cette amplitude décroît de façon exponentielle lorsqu'on s'éloigne de la paroi $(z \to -\infty)$. L'énergie de cette onde longitudinale est donc confinée près de la surface.

Pour sa part, l'onde transverse reste homogène. A_y doit donc être de la forme :

(1-39)
$$A_{\Upsilon} = (b^+ \exp(i\gamma_T z) + V_{TT}b^+ \exp(-i\gamma_T z))\exp(i(\xi x - \omega t))$$

avec
$$\gamma_T = \sqrt{k_T^2 - \xi^2}$$
 réel.

Le coefficient de réflexion de l'onde transversale est :

(1-40 a)
$$V_{TT} = \frac{i|\gamma_L|\gamma_T - p^2}{i|\gamma_L|\gamma_T + p^2} = \exp(-i\alpha)$$

avec
$$\alpha = 2 \arctan \frac{|\gamma_L| \gamma_T}{p^2}$$

On a toujours $\xi=k_{_T}\sin\gamma\;\;\text{et donc}\; \left|\gamma_{_L}\right|=\omega\;/\;c_{_T}\sqrt{\sin^2\gamma-c_{_T}^2\,/\;c_{_L}^2}$

On aboutit ainsi à :

(1-40 b)
$$\alpha = 2\arctan(\tan^2 2\gamma / \cos \gamma \sqrt{\sin^2 \gamma - c_r^2 / c_L^2})$$

On a donc un retard de phase indépendant de ω de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente. La réflexion est totale puisque $|V_{TT}| = 1$.

Le problème des ondes inhomogènes ne se pose pas pour l'onde longitudinale incidente puisque l'angle de l'onde transverse réfléchie γ est plus petit que θ . Bien entendu de telles ondes sont impossibles pour les polarisations horizontales.

1-2.ONDE DE SURFACE DE RAYLEIGH (MASON 1973 [1])

1-2.1.GENERALITES

On est toujours dans le cas d'un demi espace élastique plan à surface libre, mais on examine la possibilité d'ondes entièrement inhomogènes pour ψ et A_y . Il est alors clair que toute l'énergie de l'onde sera confinée près de la surface. Pour que cela soit possible, il faut que les solutions ne soient pas la combinaison linéaire de deux exponentielles de signe contraire. Il faut donc :

-soit qu'il y ait réflexion totale $V_{TL}=0$ ce qui n'a lieu que pour $\gamma=45^\circ$. Cela ne concerne que les ondes transverses incidentes pour lesquelles $\psi=0$. C'est le cas précédent avec $\gamma=45^\circ$.

-soit qu'il y ait conversion totale $V_{LL}=V_{TT}=0$. Ce cas est obtenu également à incidence normale $\theta=\gamma=0$, mais il s'agit là d'ondes homogènes. Cependant d'autres possibilités existent encore.

1-2.2.EQUATION DE RAYLEIGH

Il faut montrer que les solutions du problème posé au paragraphe 1-1.2.1 incluent des ondes de surface. On cherche pour cela les solutions des équations des ondes telles que les amplitudes diminuent à mesure que l'on s'éloigne de la surface libre, c'est à dire lorsqu'on va vers les z négatifs. C'est le cas si l'onde A_v est également inhomogène.

Pour cela, il faut : $\xi^2 - k_\tau^2 > 0$ qui est le seul cas qu'on n'a pas encore traité. C'est à dire: $k_L^2 < k_\tau^2 < \xi^2$

On pose:

(1-41 a)
$$|\gamma_{L}| = (\xi^{2} - k_{L}^{2})^{1/2}$$

et

(1-41 b)
$$|\gamma_{\tau}| = (\xi^2 - k_{\tau}^2)^{1/2}$$

Ainsi on cherche les solutions des équations des ondes sous la forme :

(1-42)
$$\Psi = (\psi_{\iota} \exp(-|\gamma_{\iota}|z) + \psi_{\circ} \exp(|\gamma_{\iota}|z)) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

$$A_{y} = (A_{\iota} \exp(-|\gamma_{\tau}|z) + A_{\circ} \exp(|\gamma_{\tau}|z)) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

De plus il faut que A_1 et ψ_1 soient nuls pour que la solution soit possible physiquement, car quand z tend vers moins l'infini, c'est à dire loin dans le milieu solide, $\exp(-\left|\gamma_{\perp}\right|z))$ et $\exp(-\left|\gamma_{\perp}\right|z))$ tendraient vers l'infini.

Ceci conduit à :

(1-43)
$$\begin{aligned} \Psi &= \psi_{\theta} \exp(\left| \gamma_{L} \right| z) \exp(i(\xi x - \omega t)) \\ A_{y} &= A_{\theta} \exp(\left| \gamma_{T} \right| z) \exp(i(\xi x - \omega t)) \end{aligned}$$

On déduit des équations des ondes (1-25) les expressions suivantes :

(1-44)
$$\frac{\left|\gamma_{L}^{2}\right| = \xi^{2} - k_{L}^{2}}{\left|\gamma_{T}^{2}\right| = \xi^{2} - k_{T}^{2}}$$

Les conditions à la paroi (1-26) donnent :

(1-45)
$$\begin{aligned} \left| \boldsymbol{\gamma}_{L} \right| \boldsymbol{\Psi}_{0} + i \boldsymbol{p} \boldsymbol{A}_{0} &= 0 \\ \left| \boldsymbol{\gamma}_{T} \right| \boldsymbol{A}_{0} - i \boldsymbol{p} \boldsymbol{\Psi}_{0} &= 0 \\ \hat{\boldsymbol{a}} \ \boldsymbol{z} &= 0. \end{aligned}$$

Il existe une solution non triviale si le déterminant de ce système est nul ce qui équivaut à :

$$(1-46) \left| \gamma_L \right| \left| \gamma_T \right| - p^2 = 0,$$

(c'est à dire
$$V_{TL} = V_{TT} = 0$$
)

Cela s'écrit :

$$(\xi^2 - k_{\rm L}^2)^{1/2} (\xi^2 - k_{\rm T}^2)^{1/2} - (2\xi^2 - k_{\rm T}^2)^2 / (4\xi^2) = 0$$

et plus explicitement :

$$(1-47) \ 4(\frac{C_{\tau}}{C})^{2}((\frac{C_{\tau}}{C})^{2}-1)^{\nu_{2}}((\frac{C_{\tau}}{C})^{2}-(\frac{C_{\tau}}{C})^{2})^{\nu_{1}^{2}}-(2(\frac{C_{\tau}}{C})^{2}-1)^{2}=0$$

Cette expression est appelée l' EQUATION DE RAYLEIGH.

La solution de cette équation donne la vitesse de l'onde de surface progressive vérifiant la condition de paroi libre dans un demi espace élastique plan.

Ainsi, on appelle onde de surface de Rayleigh la superposition de l'onde transversale et de l'onde longitudinale (1-43) répondant à ce problème.

Remarque:

L'équation de Rayleigh est la condition d'existence de l'onde de surface progressive sur un demi-espace vérifiant les conditions de paroi libre, et cela quel que soit le mécanisme de génération de celle-ci (Mason 1973 [1]). On a donc cherché un type de solution, de façon générale, sans conditions initiales, et sans conditions frontières sur x et z à l'infini.

1-2.3.RESOLUTION DE L'EQUATION DE RAYLEIGH

Si on remplace dans l'équation de Rayleigh C par $1/2C_T$ puis par C_T , on trouve que l'équation change de signe, d'où l'existence d'une racine réelle dans cet intervalle.

La racine Cr dépend du matériau. Comme pour tout matériau élastique $0 < C_T/C_L < \sqrt{2} / 2$, on trouve toujours l'inégalité suivante $0.87C_T < Cr < 0.96C_T$.

On remarque que l'équation de Rayleigh est indépendante de la fréquence ω , il en va donc ainsi de Cr, ce qui veut dire que l'onde de Rayleigh n'est pas dispersive.

Cr étant réelle et inférieure à CT, les expressions des potentiels s'écrivent :

$$\Psi = \psi_0 \exp((\xi_R^2 - k_L^2)^{1/2} z) \exp(i(\xi_R x - \omega t))$$

$$A_y = A_0 \exp((\xi_R^2 - k_T^2)^{1/2} z) \exp(i(\xi_R x - \omega t))$$

avec
$$\xi_R$$
, $(\xi_R^2 - k_L^2)$, $(\xi_R^2 - k_T^2) > 0$ et réels.

On remarque que ces expressions ont un terme en exponentielle réelle négative suivant z ce qui signifie qu'il y a atténuation dans cette direction, et un terme en exponentielle imaginaire pure suivant x qui est un terme de propagation dans cette direction. On en conclut que l'onde de surface de Rayleigh se propage près de la surface, sans atténuation suivant x et à la vitesse Cr.

On peut évaluer la distance à la surface à laquelle les déplacements sont encore sensibles. Pour cela, on définit la profondeur de pénétration z_1 comme étant la profondeur à laquelle l'amplitude de l'onde diminue de e fois.

On a:

(1-48)
$$\exp(\left|\gamma_{L}|z_{1}\right) = 1/e$$

$$\exp(\left|\gamma_{T}|z_{1}\right) = 1/e$$

d'où:

(1-49)
$$z_1 = -1/|\gamma_L|$$
$$z_1 = -1/|\gamma_T|$$

On remarque que la profondeur de pénétration diffère pour les différentes composantes de l'onde de surface. La composante transverse se fait sentir plus profondément que la composante longitudinale.

Il est également intéressant de connaître la répartition de l'énergie au cours de la propagation d'une onde sonore.

1-2.4. INTENSITE ACOUSTIQUE POUR UN SOLIDE

1-2.4.1. Définition

L'intensité acoustique d'une onde sonore est définie comme la moyenne du flux d'énergie à travers une unité de surface normale à la direction de propagation n pendant un temps caractéristique. Une onde plane arbitraire est représentée par une superposition d'ondes planes harmoniques en utilisant une intégrale de Fourier. L'approche harmonique introduit alors une grandeur complexe mais la grandeur physique correspond à la partie réelle de la grandeur complexe. On doit donc utiliser les parties réelles de la pression et de la vitesse quand on calcule les quantités quadratiques de l'energie et de l'intensité d'une onde harmonique.

Pour un fluide idéal, on calcule cette intensité à partir de la puissance des forces par unité de surface :

$$I_n = Re(p)Re(v).n$$

où Re(p) désigne la partie réelle de la pression complexe p et Re(v) celle de la vitesse complexe v.

L'intensité acoustique moyenne d'un signal de période T est donc :

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T} \int I_n dt$$

que l'on écrira :

$$\langle I \rangle = \langle pv \rangle_T$$

Pour un solide, on a par analogie :

$$I_n = -Re(\sigma).Re(v).n$$

avec σ la contrainte d'où :

$$\langle I_n \rangle = -\langle Re(\sigma), Re(\mathbf{v}), n \rangle$$

1-2.4.2.Intensité acoustique pour l'onde de Rayleigh

L'intensité acoustique est colinéaire à la direction de propagation de l'onde. Pour l'onde de Rayleigh, nous examinons donc l'intensité acoustique suivant \mathbf{x} . Le vecteur vitesse est $\mathbf{v} = -\mathrm{i}\omega \mathbf{u}$ où \mathbf{u} est le vecteur déplacement.

On en déduit :

(1-50)
$$I_x = -\text{Re}(\sigma_{xz})\text{Re}(v_x) - \text{Re}(\sigma_{zz})\text{Re}(v_z)$$

car ici v_v=0.

En tenant compte de (1-34) on pose :

(1-51)
$$\begin{aligned} \Psi &= \psi_o \exp(|\gamma_u|z) \exp(i(\xi x - \omega t)) = \psi_o \exp(i(\xi x - \omega t)) \\ A_v &= A_o \exp(|\gamma_v|z) \exp(i(\xi x - \omega t)) = A_o \exp(i(\xi x - \omega t)) \end{aligned}$$

La loi de Hooke (1-15) nous donne alors :

(1-52 a)
$$\sigma_{xz} = \mu(2i\xi | \gamma_L | \psi - (|\gamma_T^2| + \xi^2) A_y)$$

(1-52 b)
$$\sigma_{xx} = 2\mu(-i\xi|\gamma_{\tau}|A_{y} - \xi^{2}\psi) + \lambda(-\xi^{2}\psi + |\gamma_{z}|\psi)$$

(1-52 c)
$$\sigma_{\alpha} = 2\mu(i\xi|\gamma_{\tau}|A_{y} + |\gamma_{t}^{2}|\psi) + \lambda(-\xi^{2}\psi + |\gamma_{t}^{2}|\psi)$$

et la décomposition d'Helmholtz (1-4):

(1-52 d)
$$-\mathbf{v}_{x} = -\xi \omega \psi - i\omega \left| \mathbf{\gamma}_{T} \right| \mathbf{A}_{y}$$

(1-52 e)
$$-v_z = -\xi \omega A_y + i\omega \left| \gamma_1 \right| \psi$$

On prend maintenant les parties réelles de ces expressions (1-52) :

(1-53 a)
$$\operatorname{Re}(\sigma_{xz}) = \mu(-2\xi | \gamma_1 | \psi_1 \sin(\xi x - \omega t) - (|\gamma_T^2| + \xi^2) A_1 \cos(\xi x - \omega t))$$

(1-53 b)
$$\operatorname{Re}(\sigma_{xx}) = 2\mu(\xi|\gamma_{\tau}|A_{1}\sin(\xi x - \omega t) - \xi^{2}\psi_{1}\cos(\xi x - \omega t)) + \lambda(-\xi^{2} + |\gamma_{L}^{2}|)\psi_{1}\cos(\xi x - \omega t)$$

(1-53 c)
$$\operatorname{Re}(\sigma_{z}) = 2\mu(-\xi|\gamma_{1}|A_{1}\sin(\xi x - \omega t) + |\gamma_{1}^{2}|\psi_{1}\cos(\xi x - \omega t)) + \lambda(-\xi^{2} + |\gamma_{1}^{2}|)\psi_{1}\cos(\xi x - \omega t)$$

(1-53 d)
$$\operatorname{Re}(-v_{x}) = -\xi \omega \psi_{1} \cos(\xi x - \omega t) + \omega \left| \gamma_{T} \right| A_{1} \sin(\xi x - \omega t)$$

(1-53 e)
$$Re(-v_z) = -\xi \omega A_1 \cos(\xi x - \omega t) - \omega \left| \gamma_z \right| \psi_1 \sin(\xi x - \omega t)$$

A l'aide de (1-53), on calcule I_X avec (1-50) et on fait la moyenne temporelle sur une période, on obtient :

(1-54)
$$\langle I_{\nu} \rangle = \mu \omega \xi A_{\nu}^2 (2\xi^2 - 3/2k_{\tau}^2) - \omega \xi \psi_{\nu}^2 (1/2(\lambda - 2\mu)k_{\nu}^2 + 2\mu \xi^2)$$

En remplaçant A_1 et ψ_1 par leurs valeurs, on arrive à :

(1-55)
$$\langle I_z \rangle = \mu \omega \xi A_z^2 (2\xi^2 - 3/2k_z^2) \exp(2|\gamma_z|z) - \omega \xi \psi_z^2 (1/2(\lambda - 2\mu)k_z^2 + 2\mu \xi^2) \exp(2|\gamma_z|z)$$

L'intensité acoustique est fonction uniquement de z. Pour l'onde de Rayleigh, la pénétration de l'énergie acoustique se fait donc suivant z. Son intensité acoustique s'atténue de façon exponentielle quand on s'éloigne de la paroi (figure 1-4). Elle dépend de ω à travers γ_L et γ_T . Les hautes fréquences s'atténuent donc plus vite.

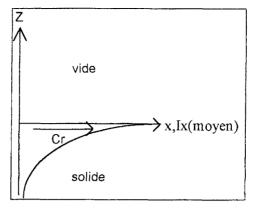


figure 1-4: intensité acoustique movenne lx pour l'onde de Rayleigh

1-3. CAS DE L'INTERFACE SOLIDE-LIQUIDE

(MASON 1973 [1])

On se trouve dans les mêmes conditions que précédemment mais on remplace le vide par un fluide idéal. Le demi espace élastique se situe dans la partie des z négatifs et le fluide occupe le demi espace des z positifs. L'équation de l'interface est encore z=0. On s'intéresse ici à l'existence des ondes de surface

1-3.1. EQUATION DE STONELEY

Le système linéaire des équations de l'acoustique pour le fluide au repos s'écrit :

(1-56)
$$\frac{\partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{grad} \, \mathbf{p} / \rho_1 = 0 \, (a)}{\partial \rho / \partial t + \rho_1 \text{div } \mathbf{v} = 0 \, (b)}$$

où p est la pression, ${\bf v}$ est la vitesse et ρ_1 est la masse volumique du liquide.

On remarque que:

$$\frac{\partial \mathbf{rot} \ \mathbf{v}}{\partial \mathbf{t}} = 0$$

ainsi si $\mathbf{rot} \ \mathbf{v} = 0$ à l'instant initial, l'écoulement est irrotationnel. On cherche donc des solutions où \mathbf{v} est irrotationnel.

L'équation (1-56 a) est celle du mouvement et (1-56 b) est la conservation de la masse pour un fluide compressible.

Le système est adiabatique et on a :

$$\partial p / \partial \rho = C_1^2 \Leftrightarrow \partial \rho / \partial t = 1 / C_1^2 \partial \rho / \partial t$$

où C₁ désigne la vitesse du son dans le fluide.

On utilise cette expression dans (b) ce qui donne pour (1-56):

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + \mathbf{grad} \, \mathbf{p} / \rho_1 = 0 \quad (a1)$$

1/ $(\rho_1 C_1^2) \partial \mathbf{p} / \partial t + \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (b1)$

On applique l'opérateur div à (a1), on dérive (b1) par rapport à t et on déduit :

(1-57)
$$\Delta p - 1/C_1^2 \partial^2 p / \partial t^2 = 0$$

qui est l'équation de l'onde de pression dans le fluide.

On peut résoudre cette équation en posant :

$$\mathbf{v} = \mathbf{grad} \ \Phi$$
 puisque $\mathbf{rot} \ \mathbf{v} = 0$

où \phi est le potentiel scalaire de la vitesse v.

D'après (1-56)(a) on a alors $p = i\omega \rho_1 \Phi$

On cherche les solutions des équations des ondes qui correspondent à des ondes entièrement inhomogènes à la fois dans le solide (comme pour les ondes de Rayleigh) et dans le liquide. Nous verrons qu'il convient de généraliser l'approche faite dans la section 1-2. en préservant la possibilité de valeurs complexes pour ξ .

Pour le fluide, on cherchera les solutions de (1-57) sous la forme :

(1-58 a)
$$\Phi = \Phi_0 \exp(-\gamma_1 z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$
$$\operatorname{avec} \gamma_1^2 = \omega^2 / C^2 - \omega^2 / C_1^2 = \xi^2 - k_1^2$$

et pour le solide, on utilise les expressions suivantes :

(1-58 b)
$$\psi = \psi_0 \exp(\gamma_L z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$
$$A_v = A_0 \exp(\gamma_T z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

Les solutions physiques sont telles que $Re(\gamma_1) > 0$, $Re(\gamma_L) > 0$, $Re(\gamma_T) > 0$

La présence du liquide modifie les conditions à la paroi. Désormais les contraintes normales n'y sont plus nulles. La vitesse normale est continue et seules les contraintes tangentielles sont nulles car on considère que le fluide est idéal.

On a donc:

$$-i\omega u_z = v_z$$

$$(1-59) \frac{\sigma_{xz} = 0}{\sigma_{zz} = -p}$$

$$\dot{a} z = 0$$

Ceci équivaut à :

$$\begin{aligned} -i\omega\left(\gamma_{L}\Psi+i\xi A_{Y}\right)&=-\gamma_{i}\Phi\\ \textbf{(1-60)} & 2i\xi\partial\Psi/\partial z-(2\xi^{2}-k_{T}^{2})A_{Y}=0\\ \rho C_{T}^{2}((2\xi^{2}-k_{T}^{2})\Psi+2i\xi\partial A_{Y}/\partial z)&=-i\omega\rho_{t}\Phi\\ \grave{a}z&=0 \end{aligned}$$

Les expressions des potentiels (1-58) conduisent au système suivant :

$$-i\omega\gamma_{L}\Psi_{0} + \omega\xi A_{0} + \gamma_{1}\Phi_{0} = 0$$

$$(1-61) \frac{2i\xi\gamma_{L}\Psi_{0} - (2\xi^{2} - k_{T}^{2})A_{0} = 0}{\rho c_{T}^{2}(2\xi^{2} - k_{T}^{2})\Psi_{0} + \rho c_{T}^{2}2i\xi\gamma_{T}A_{0} + i\omega\rho_{1}\Phi_{0} = 0}$$

$$\hat{a} z = 0$$

Ce système est non trivial si son déterminant est égal à zéro :

$$(1-62) -4\xi^2 \gamma_L \gamma_T + (2\xi^2 - k_T^2)^2 + \frac{\rho_1}{\rho} \frac{\omega^2}{C_T^2} \frac{\gamma_L}{\gamma_1} k_T^2 = 0$$

Ceci peut s'écrire plus explicitement :

$$(1-62 \text{ bis}) \Leftrightarrow -4 \frac{C_{\tau}^{2}}{C^{2}} (\frac{C_{\tau}^{2}}{C^{2}} - 1)^{\nu_{2}} (\frac{C_{\tau}^{2}}{C^{2}} - \frac{C_{\tau}^{2}}{C_{L}^{2}})^{\nu_{2}} + (1 - 2\frac{C_{\tau}^{2}}{C^{2}})^{2} + \frac{\rho_{i}}{\rho} \frac{(\frac{C_{\tau}^{2}}{C^{2}} - \frac{C_{\tau}^{2}}{C_{L}^{2}})^{\nu_{2}}}{(\frac{C_{\tau}^{2}}{C^{2}} - \frac{C_{\tau}^{2}}{C_{L}^{2}})^{\nu_{2}}} = 0$$

C'est l'EQUATION DE STONELEY.

On soulignera que l'on cherche des solutions éventuellement complexes pour ξ , et donc pour C, dont le sens physique sera précisé dans la suite. On remarque au passage que pour ρ = 0, on retrouve l'équation de Rayleigh.

1-3.2.ONDE DE SURFACE DE STONELEY

Cherchons la possibilité d'une solution réelle pour l'équation (1-62). On voit facilement que l'équation change de signe dans l'intervalle (0,C1).

Il y a donc une solution réelle telle que $Cs \le C_1 \le C_T$ qui correspond à l'onde dite de Stoneley.

La résolution de (1-62) montre donc que l'onde de Stoneley a une vitesse Cs légèrement inférieure à C1, quel que soit le liquide et le milieu élastique.

L'onde de surface de Stoneley se propage à l'interface liquide-solide parallèlement à la paroi et sans atténuation. Son amplitude décroît de façon exponentielle quand on s'éloigne de la paroi c'est à dire de chaque côté de l'interface. La vitesse de l'onde est indépendante de la fréquence, par conséquent il en est de même pour l'équation de Stoneley et il n'y a donc pas de dispersion.

Evidemment quand la densité du liquide tend vers zéro, c'est à dire pour une interface solide-vide, cette onde disparaît.

On peut calculer l'intensité acoustique de cette onde ainsi que sa répartition dans les deux milieux.

Pour le fluide on a :

$$I = Re(p).Re(v)$$

soit

$$I = Re(\rho i\omega \phi).Re(grad\phi)$$

ce qui donne suivant ox :

$$I_{x} = \rho_{1}\omega\xi\phi_{0}^{2}\exp(-2\gamma_{1}z)\sin^{2}(\xi x - \omega t)$$

En moyenne sur une période, on obtient :

(1-63 a)
$$\left\langle I_{x}\right\rangle_{liquide} = \frac{1}{2}\rho_{l}\omega\xi\phi_{0}^{2}\exp(-2\gamma_{l}z) \text{ avec } z > 0$$

L'analyse dans le solide rejoint celle du paragraphe 1-2.4.2 à ceci près qu'ici on a :

$$\gamma_L^2 = \xi^2 - k_L^2$$
$$\gamma_T^2 = \xi^2 - k_T^2$$

au lieu de

$$\left|\gamma_L^2\right| = \xi^2 - k_L^2$$

$$\left|\gamma_{\mathrm{T}}^{2}\right| = \xi^{2} - k_{\mathrm{T}}^{2}$$

ce qui préserve la possibilité de valeurs complexes pour γ_L ou γ_T .

On obtient donc (1-63 b):

$$\langle I_x \rangle_{\text{solide}} = \mu \omega \xi A_0^2 (2\xi^2 - 3/2k_T^2) \exp(2\gamma_T z) - \omega \xi \psi_0^2 (1/2(\lambda - 2\mu)k_L^2 + 2\mu \xi^2) \exp(2\gamma_L z)$$

avec $z < 0$

Dans le cas de l'onde de Stoneley, on sait que les γ_I , γ_L et γ_T sont réels. La répartition de l'énergie pour l'onde de Stoneley se déduit en comparant les termes des deux équations (1-63). On voit alors que l'intensité acoustique s'atténue plus vite dans le solide que dans le liquide car γ_I est inférieur à γ_L .

Pour déterminer si l'énergie à l'interface est plus importante dans le solide ou le liquide, on fait le rapport des intensités moyennes à z = 0 et on obtient aisément :

$$\frac{\left\langle I_{x} \right\rangle_{\text{solide}}}{\left\langle I_{x} \right\rangle_{\text{n. s.}}} = \frac{2\mu A_{0}^{2} (2\xi^{2} - 3/2k_{T}^{2}) - \psi_{0}^{2} ((\lambda - 2\mu)k_{L}^{2} + 4\mu\xi^{2})}{\rho_{1}\phi_{0}^{2}} \qquad \text{pour } z = 0$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{\left\langle I_{x}\right\rangle _{\text{solide}}}{\left\langle I_{x}\right\rangle _{\text{linede}}}=\frac{\rho_{s}\omega^{2}}{\rho_{1}\varphi_{0}^{2}}((4\frac{C_{T}^{2}}{C^{2}}-3)A_{0}^{2}-((1-4\frac{C_{T}^{2}}{C_{L}^{2}})+4\frac{C_{T}^{2}}{C^{2}})\Psi_{0}^{2})$$

ce qui donne pour le cas aluminium - eau ($C_{\rm L}=6000$ m/s, $C_{\rm T}=3100$ m/s C=1500 m/s $\rho_{\rm S}=2.7$ kg/m 3):

$$\textbf{(1-64)} \ \frac{\left\langle I_x \right\rangle_{\text{solide}}}{\left\langle I_x \right\rangle_{\text{liquide}}} = 2.7 \frac{\omega^2}{\phi_0^2} \textbf{(13\,A_0^2 - 16\,\Psi_0^2)}$$

Ainsi, on peut dire que pour les hautes fréquences l'énergie existant à l'interface du côté solide est plus importante que pour les basses fréquences, la plus grande partie de l'énergie près de l'interface se trouvant dans le liquide. En fait, l'onde de Stoneley est un phénomène lié à la présence du liquide, il est donc naturel que ce soit ce dernier qui reçoive l'essentiel de l'énergie. On a une répartition typique de l'intensité acoustique sur la figure 1-5. (Mason 1973 [1])

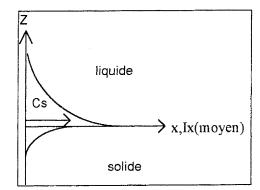


figure 1-5 : diagramme de l'intensité moyenne en fonction de l'éloignement de l'interface

1-3.3.ONDES DE RAYLEIGH GENERALISEES

En plus de l'onde de surface de Stoneley, à l'interface entre le fluide et le demi-espace élastique qu'on vient de considérer, il existe une autre onde solution de l'équation de Stoneley. On le comprend aisément car si on fait tendre ρ_l vers zéro, on doit retrouver une onde de Rayleigh. En fait, elle existe aussi dans notre cas, mais sa nature est modifiée par la réaction du milieu fluide.

Elle correspond alors à une autre solution de l'équation de Stoneley mais celle-ci est complexe. On appelle $C_{R'}$ la partie réelle de cette racine complexe. $C_{R'}$ correspond alors à la vitesse physique de l'onde et la partie imaginaire de cette racine est un facteur d'amortissement qui tend vers zéro si ρ_l tend vers zéro. Numériquement, la vitesse $C_{R'}$ est toujours proche de $C_T >> C_l$ en général. Son énergie réside alors essentiellement dans le solide. Cette onde est appelée onde de Rayleigh généralisée. Elle s'atténue lors de sa propagation le long de la paroi et appartient ainsi à la classe des ondes faibles. Les vecteurs de propagation sont inclinés par rapport à la paroi ce qui veut dire qu'une partie de l'énergie traverse l'interface pour passer dans le liquide (voir figures 1-6). Mathématiquement, l'influence de la partie complexe de ξ sur γ_l ,

 γ_L et γ_T introduit dans les expressions des potentiels un terme en exponentielle complexe suivant z qui correspond à une déviation de la direction de propagation.

En fait il suffit de réécrire les potentiels et de regarder les termes introduits par la partie complexe.

Pour cela, on écrit la racine complexe de l'équation de Stoneley sous la forme :

$$\xi_{R'} = \xi_{R'}' + i\xi_{R'}"$$

Par conséquent les γ_1 , γ_L et γ_T sont complexes et on peut les décomposer en une partie réelle et une partie imaginaire :

$$\gamma_{1} = \gamma_{1}' + i\gamma_{1}''$$

$$\gamma_{L} = \gamma_{L}' + i\gamma_{L}''$$

$$\gamma_{T} = \gamma_{T}' + i\gamma_{T}''$$

Ceci permet alors de réécrire les potentiels (1-58) de la façon suivante :

$$\begin{split} & \phi = \phi_0 \exp(-\gamma_1^{\;'} z - \xi_{R^{\;'}} x) \, \exp(i(\xi_{R^{\;'}} x - \gamma_1^{\;"} z - \omega t)) \, \text{avec } z \ge 0, \, x \ge 0 \\ & \psi = \psi_0 \exp(\gamma_L^{\;'} z - \xi_{R^{\;'}} x) \, \exp(i(\xi_{R^{\;'}} x + \gamma_L^{\;"} z - \omega t)) \\ & A_v = A_0 \exp(\gamma_T^{\;'} z - \xi_{R^{\;'}} x) \, \exp(i(\xi_{R^{\;'}} x + \gamma_T^{\;"} z - \omega t)) \end{split} \quad \text{avec } z \le 0, \, x \ge 0 \end{split}$$

Les termes en exponentielle réelle, qui sont des termes d'amortissement, sont fonction de x et z. Cela signifie que maintenant l'onde s'atténue également suivant x. Cependant ξ_R ," est généralement petit devant 1 et cette atténuation est lente.

Les termes en exponentielle imaginaire pure, qui sont des termes de propagation, sont fonction de x et z. Cela veut dire que le vecteur de propagation de l'onde est légèrement incliné par rapport à la paroi, les parties imaginaires des γ étant généralement très petites devant 1 (voir figure 1-6 a).

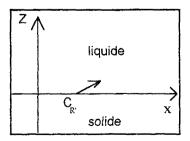


figure 1-6 a : vecteur de propagation pour l'onde de Rayleigh généralisée

Le calcul des intensités acoustiques moyennes calculées pour l'onde de Stoneley (1-63) est similaire pour les ondes de Rayleigh généralisées. On peut déduire les termes prépondérants des intensités acoustiques moyennes pour l'onde de Rayleigh généralisée sans les recalculer. On donnera donc des ordres de grandeur des intensités acoustiques moyennes :

$$\langle I_n \rangle \approx \exp(-2\gamma_i'z) \exp(-2\xi_{R'}''x) \quad x > 0, z > 0$$

$$\langle I_n \rangle \approx (\exp(2\gamma_T'z) + \exp(2\gamma_L'z)) \exp(-2\xi_{R'}"x) \quad x > 0, z < 0$$

n est la direction de propagation légèrement inclinée par rapport à l'axe des x.

Ces termes impliquent une décroissance exponentielle en z plus importante dans le solide que dans le liquide car $\gamma_L' > \gamma_1'$. De plus ils indiquent que, maintenant les intensités acoustiques décroissent également en fonction de x. Cette décroissance est identique dans le solide et dans le liquide avec ξ_R ." généralement petit devant 1 (voir figures 1-6 b et 1-6 c).

Si on néglige la composante du vecteur de propagation suivant z, on a le même résultat pour l'intensité acoustique de l'onde de Rayleigh que pour l'intensité acoustique de l'onde de Stoneley mais avec $C = C_{R'}$, on peut donc écrire le rapport des intensités moyennes à z = 0 suivant x :

$$\frac{\left\langle I_{x}\right\rangle _{solide}}{\left\langle I_{x}\right\rangle _{lioude}}=\frac{\rho _{s}\omega ^{2}}{\rho _{l}\varphi _{0}^{2}}((4\frac{C_{T}^{2}}{C^{2}}-3)A_{_{0}}^{2}-((1-4\frac{C_{T}^{2}}{C_{L}^{2}})+4\frac{C_{T}^{2}}{C^{2}})\Psi _{_{0}}^{2})$$

Si on prend le cas de l'aluminium, on obtient :

$$(1-65) \frac{\langle I_x \rangle_{\text{solide}}}{\langle I_x \rangle_{\text{liqude}}} \approx 2.7 \frac{\omega^2}{\phi_0^2} (A_0^2 - 4 \Psi_0^2)$$

On peut donc dire de la même façon que dans le cas de Stoneley que plus les fréquences sont grandes plus l'énergie à l'interface se situe du côté solide.

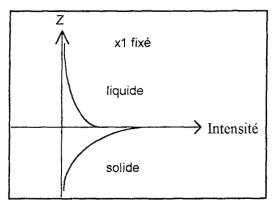


figure 1-6 b : répartition d'énergie pour l'onde de Rayleigh généralisée

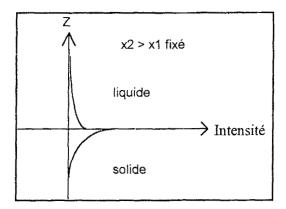


figure 1-6 c: répartition d'énergie pour l'onde de Rayleigh généralisée

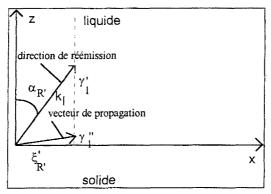
Remarque importante:

Pour les ondes homogènes, la réémission de l'onde dans le milieu liquide se fait suivant la direction de propagation. Par contre pour les ondes de surface, il est important de distinguer la direction de propagation de la direction de réémission. En effet, le vecteur de propagation des ondes de surface est parallèle à la paroi ou légèrement incliné par rapport à celle ci alors que la réémission se fait avec le même angle que l'angle de génération de l'onde qui peut être grand.

Prenons l'exemple de l'onde de Rayleigh généralisée afin d'éclaircir ceci. Le potentiel du côté liquide s'écrit :

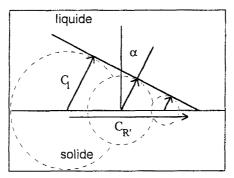
$$\varphi = \varphi_0 \exp(-\gamma_1' z - \xi_{R'}"x) \exp(i(\xi_{R'}' x - \gamma_1"z - \omega t))$$

Les termes de propagation sont déterminés par les termes en exponentielle imaginaire pure c'est à dire que le vecteur de propagation est $(\xi_{R'}, \gamma_1)$. (figure 1-7)



<u>figure 1-7</u>: propagation et réémission de l'onde de Rayleigh généralisée

L'énergie perdue dans le liquide par l'onde de surface constitue une onde de réémission qui se propage dans le liquide à la vitesse C_l pendant que sa propagation dans le solide est à la vitesse $C_{R'}$ si on prend l'exemple de l'onde de Rayleigh généralisée. Ainsi on a le schéma suivant :



<u>figure 1-8</u>: réémission dans le liquide de l'onde de Rayleigh généralisée

Pendant un temps Δt , une équiphase se déplacera de C_1 Δt dans le liquide et de $C_{R'}$ Δt à la surface. Le front d'onde induit aura donc la forme d'un plan perpendiculaire à la direction (C_1 , $C_{R'}$), c'est à dire avec les notations de la figure 1-8, tel que :

$$\sin \alpha = \frac{C_1}{C_{P'}} = \sin \alpha_{R'}$$

où l'angle $\alpha_{R'}$ est justement l'angle sous lequel doit arriver l'onde incidente pour produire une onde de Rayleigh généralisée. On l'appelle angle de génération.

L'égalité précédente est équivalente avec les notations de la figure 1-7 à :

 $\xi_{p'} = k_1 \sin \alpha_{p'}$ où $\alpha_{R'}$ est l'angle de génération de l'onde.

C'est la loi de réfraction appliquée au cas des ondes de surface (Uberall 1990 [2]).

Cela permet d'écrire :

$$\cos \alpha_{R'} = (k_1^2 - \xi_{R'}^{12})^{1/2} = \gamma_1^{1}$$

La réémission se fait donc suivant la direction du vecteur $(\xi_{R'}, \gamma_1)$ (figure 1-7). Elle forme bien un angle $\alpha_{R'}$ avec l'axe des z égal à l'angle de génération.

On va d'ailleurs s'intéresser à la génération et à la réémission des ondes de surfaces dans le paragraphe suivant.

1-3.4. CONDITIONS D'APPARITION DES DIFFERENTES ONDES

On considère toujours un demi espace plan en contact avec un liquide et une onde plane progressive incidente dans le liquide. La figure 1-9 représente les vecteurs de propagation des ondes et leurs projections sur x dans le cas des ondes homogènes.

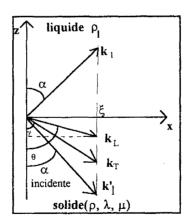


figure 1-9: vecteurs de propagation pour une onde incidente dans le liquide

On peut écrire la loi de réfraction (figure 1-9):

(1-66)
$$\xi = k_1 \sin \alpha = k_L \sin \theta = k_T \sin \gamma$$

La loi (1-66) n'est possible que si $\xi < k_L < k_T < k_1$, il faut pour cela que : $\sin \alpha \le C_1/C_L$ où α est l'angle d'incidence.

a) Il existe donc un angle d'incidence $\alpha_{\rm L}$ pour lequel l'onde réfractée longitudinale a un vecteur d'onde $k_{\rm L}$ parallèle à la paroi (voir figure 1-10).

On a alors $\theta = 90^{\circ}$ et l'incidence cherchée est donnée par la loi de réfraction (1-66) :

$$\sin \alpha_1 = C_1/C_1$$

Si $\alpha > \alpha_L$, on a alors : $\sin \alpha > C_1/C_L$ ce qui impliquerait que $\sin \theta$ soit plus grand que 1. Par conséquent on a $\xi > k_L$ et l'onde longitudinale devient inhomogène. L'onde transverse reste homogène tant que $\sin \alpha \le C_1/C_\tau$ et l'onde réfléchie existe bien dans le fluide sous forme homogène.

b) Il existe également une incidence α_{τ} pour laquelle l'onde réfractée transverse se propage parallèlement à la paroi (voir figure 1-10).

Dans ce cas $\gamma = 90^{\circ}$, ce qui implique d'après (1-66) que :

$$\sin \alpha_{\rm T} = C_{\rm I}/C_{\rm T}$$

Dès lors, si $\alpha > \alpha_T$, $\xi > k_T > k_L$ et l'onde transverse devient également inhomogène. L'onde dans le fluide reste homogène et se réfléchie. Cette situation continue jusqu'à ce que l'onde de Rayleigh généralisée apparaisse.

- c) L'onde de Rayleigh généralisée est en effet obtenue dans le cas $\text{Re}(\xi) > k_L > k_T$ mais avec $\text{Re}(\xi) < k_1$. Pour que cette onde apparaisse, il faut que l'onde incidente soit telle qu'elle engendre une onde suivant (ox) dans le solide à la vitesse $C_{R'}$. Il faut donc que $\xi'_{R'} = \omega / C_{R'}$, c'est à dire que : $\sin \alpha_{\kappa} = C_1 / C_{\kappa}$. L'onde dans le liquide n'est pas une onde homogène et s'atténue exponentiellement en z puisqu'elle est solution de l'équation de Stoneley. En revanche la réémission dans le liquide fait apparaître une onde homogène de réémission dite onde de tête de Schmidt se propageant dans la direction $(\xi'_{R'}, \gamma_1')$.
- d) Une onde inhomogène dans le liquide n'existe que si $\xi > k_1 > k_2 > k_3$. Une telle onde doit donc avoir une vitesse inférieure à la vitesse du son dans le liquide. L'onde de Stoneley répond à cette exigence mais elle ne peut provenir d'une excitation incidente avec $\alpha < 90^\circ$ car

on aurait alors $\xi < k_1$. L'onde de Stoneley ne peut donc exister que par une excitation initiale dans la direction de propagation c'est à dire pour $\alpha = 90^{\circ}$.

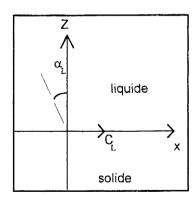
e) Il existe une autre catégorie d'ondes de surface qu'on appelle ondes Latérales. Dans le cas simple présenté ici, elles correspondent au cas limite pour les ondes homogènes (a) et (b) et sont générées pour $\alpha=\alpha_{\tau}$ ou $\alpha=\alpha_{L}$. Elles se propagent à la vitesse C_{T} et C_{L} sans atténuation le long de la paroi. Nous verrons plus en détail ces ondes dans le chapitre 3.

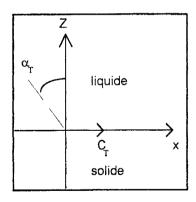
<u>Exemples</u>: On peut prendre le cas d'une interface aluminium-eau (figure 1-10). On trouve alors respectivement les vitesses suivantes pour les ondes de surface:

$$C_L = 4.3C_1$$
 $C_T = 2.04C_1$ $C_R = 1.91C_1$ $C_s = 0.991C_1$ avec la vitesse $C_1 = 1493$ m/s

Les angles d'incidence auxquels sont générées ces ondes de surface sont également appelés angles critiques de génération. Leurs valeurs respectives sont :

$$\alpha_{\rm r} = 13^{\circ}26', \, \alpha_{\rm r} = 29^{\circ}20', \, \alpha_{\rm R'} = 31^{\circ}96', \, \alpha_{\rm s} = 90^{\circ}$$





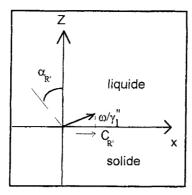


figure 1-10: angles critiques de génération et vecteurs de propagation des ondes de surface

1-4.CONCLUSION:

PRINCIPE D'OBSERVATION DES ONDES D'INTERFACE LIQUIDE-SOLIDE (MASON 1973 [1])

On a vu les conditions d'apparition des différentes ondes, voyons maintenant comment les produire et les visualiser en pratique.

Dans notre approche expérimentale, on utilise une méthode de visualisation permettant de suivre les fronts d'ondes dans le fluide. Pour créer ces fronts, on utilise une source à étincelle large bande omnidirectionnelle (Pernod 1996, Kemmou 1996). On obtient ainsi une onde sphérique quasi impulsionnelle. Il importe de savoir identifier les interactions de cette onde avec les obstacles étudiés, car les ondes dans les solides ne seront identifiables que par leur réémission dans le fluide.

On peut considérer une onde incidente sphérique dont la source est un point S placé dans le liquide à une distance finie de l'interface plane liquide-solide (figure 1-11).

Cela donne alors la possibilité d'avoir tous les angles d'incidence et ainsi tous les types d'ondes.

Il existe des ondes qui se propagent dans le liquide soit directement, soit après une réflexion sur l'interface. Ce type d'onde est donc directement détecté par un observateur situé dans le liquide à un point P.

Les ondes de surface (de type Rayleigh généralisé ou de type Stoneley) et les ondes latérales sont guidées le long de l'interface et peuvent être également détectées par un observateur situé à une certaine distance de la paroi dans le liquide. En effet, elles peuvent se

manifester pour l'observateur sous la forme d'une onde rayonnée dans le liquide, appelée onde de tête de Schmidt. Nous avons vu que cette onde est émise à l'angle critique de génération de l'onde de surface et que la théorie géométrique des rayons s'applique aux ondes de Schmidt (figure 1-11). (Uberall 1990 [2])

Les méthodes que nous allons employer pour visualiser les ondes acoustiques sont la strioscopie et l'ombroscopie. Ces techniques de visualisation relativement simples sont un outil très puissant d'étude de la propagation des ondes dans les fluides.

En visualisant alors l'onde de tête on pourra identifier les ondes de surface qui se propagent à l'interface solide-liquide grâce à leur angle d'émission.

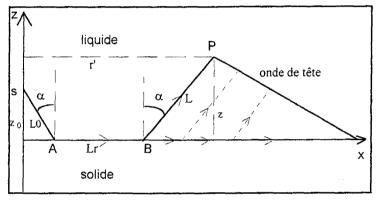


figure 1-]]: onde de Schmidt émise en B qui révèle la présence de l'onde se propageant à l'interface.

S: source ponctuelle
P: observateur

CHAPITRE 2:

DISPOSITIF EXPERIMENTAL



2-1.INTRODUCTION

Le chapitre 1 nous a permis de mettre en place les bases sur lesquelles il sera facile de s'appuyer dans la démarche expérimentale d'identification des ondes.

Le chapitre 2 vise à présenter les moyens expérimentaux utilisés.

Les méthodes classiques d'expérimentation en diffusion acoustique sont souvent des méthodes de traitement du signal en harmonique car les équations de base se prêtent bien au traitement harmonique. Leur domaine d'investigation est donc généralement le domaine fréquenciel avec l'analyse des spectres obtenus. Les générateurs utilisés sont des transducteurs courants générant des ondes planes harmoniques.

Lors d'une approche impulsionnelle en diffusion acoustique (Welton-de Billy-Hayman-Quentin 1980), des bursts sont principalement utilisés comme générateurs d'impulsions ce qui veut dire qu'on a la réponse du système seulement dans une bande de fréquences limitée.

De plus, à part quelques articles remarquables (Duclos 1972, Hayman 1979, Neubauer 1969 et 1970, Mason 1976 [3], Weight 1978), la visualisation est relativement peu employée en diffusion acoustique alors qu'en mécanique des fluides compressibles elle donne d'excellents résultats, en particulier lorsqu'il s'agit d'identifier des ondes de choc et d'en mesurer la vitesse

Notre approche est une transposition de cette démarche au contexte de l'acoustique. L'idée fondatrice est d'obtenir la réponse impulsionnelle du système. Pour cela, on doit travailler avec des impulsions courtes et de formes simples (si possible proche du dirac) et d'allure spatiale sphérique (source ponctuelle). La réalisation d'une telle source est difficile, pourtant l'équipe de l'IEMN y est parvenue.

Notre dispositif expérimental se compose de deux éléments essentiels :

- -Un système de visualisation ultra rapide par strioscopie ou ombroscopie
- -Une source à mini-étincelle permettant la génération d'impulsions acoustiques omnidirectionnelles.

On rend ainsi accessible l'observation de l'ensemble des fronts d'ondes issus de l'interaction onde cible permettant une bonne compréhension physique du phénomène. De plus, cela permet d'évoluer dans le domaine temporel expérimentalement, ouvrant dès lors de nouvelles perspectives théoriques de simulation et d'analyse.

Ce chapitre s'articule de la façon suivante :

- -Tout d'abord, on présente le système de visualisation et la source.
- -Ensuite, on s'attache à montrer les possibilités d'exploitation des résultats.

Les chapitres suivants permettront alors d'exploiter les performances de la méthode sur des exemples concrets.

2-2.MOYENS EXPERIMENTAUX

2-2.1.SYSTEME DE VISUALISATION ULTRA RAPIDE PAR STRIOSCOPIE OU OMBROSCOPIE

2-2.1.1.Introduction

La visualisation ultra rapide par strioscopie ou ombroscopie est principalement utilisée en mécanique des fluides compressibles. Elle permet d'évaluer les vitesses de déplacement de structures telles que les chocs, les tourbillons, ... On l'a utilisée ici dans le cadre de la diffraction acoustique par un objet. Notre but est de visualiser les variations de pression dues à la propagation d'une onde acoustique et d'obtenir une cinématographie du phénomène se déroulant à grande vitesse. On rappelle pour fixer les idées que la vitesse de l'onde dans l'eau est de 1480 m/s.

2-2.1.2. Le principe de l'ombroscopie (Merzkirch 1987)

Le principe de l'ombroscopie repose sur la variation de l'indice de réfraction due à la variation de la masse volumique que provoque le passage de l'onde. Cette méthode est sensible si la dérivée spatiale seconde de l'indice de réfraction n'est pas nulle. La déviation des rayons lumineux produit ainsi des zones d'ombres et de lumière qui sont particulièrement visibles sur les fronts d'ondes.

2-2.1.3. Le principe de la strioscopie (ou schlieren) (Davies 1981, Merzkirch 1987)

Bien que plus ancienne, la strioscopie peut être considèrée comme un perfectionnement de l'ombroscopie.

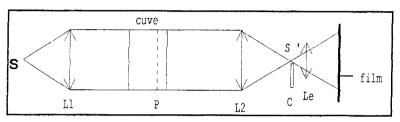


figure 2-1 : principe de la strioscopie

La source S a une brillance constante. En absence de phénomène la lentille (Le) donne sur l'écran, une image uniformément éclairée du plan P. Si on dispose un couteau C strictement au point image S', l'image du plan P est encore uniformément éclairée mais son intensité est plus faible. On observe donc une teinte grise uniforme que l'on désigne par teinte sensible.

Le critère de réglage de la position du couteau (suivant l'axe optique) est précisément l'obtention d'un éclairement uniforme sur l'écran; si le couteau est en amont ou en aval du point image, l'écran est obscurci d'un seul côté.

Des gradients d'indice apparaissent avec le phénomène. Ils dévient les rayons lumineux qui seront interceptés par le couteau si la déviation se fait vers ce dernier. Cela se traduit sur la photographie par des stries claires ou foncées sur la teinte grise. Cette méthode est sensible si la dérivée spatiale première de l'indice n'est pas nulle, elle est donc plus sensible que l'ombroscopie et on gagne également en contraste. Si on place l'arête du couteau horizontalement, on sera sensible aux gradients verticaux de l'indice n et si on place l'arête du couteau verticalement, il s'agira des gradients horizontaux.

2-2.1.4. Exploitation de la strioscopie (MERZKIRCH 1987)

En absence de perturbation, l'intensité lumineuse I arrivant à un point (x,y) quelconque du plan photographique sera constante. Pour une source réelle, non parfaitement ponctuelle, l'intensité lumineuse uniforme est donnée avec suffisamment de précision par (Merzkirch 1987):

(2-1)
$$I(x,y) = \eta I_0(\frac{ab}{f_c^2}) = cte$$

où a est la hauteur réduite de l'image de la source lumineuse (cela est dû à la présence du couteau) et b sa largeur.

In est l'intensité lumineuse d'origine de la source lumineuse.

 η est le coefficient d'absorption qui traduit la perte d'intensité sur le chemin source-couteau. f_c est la distance focale de la lentille du récepteur Le.

Cette équation est valable si on peut négliger les aberrations.

Si des faisceaux lumineux sont déviés d'un angle ϵ , l'image correspondante de ces rayons est décalée de Δa et Δb dans le plan du couteau. On appelle ϵ_y la composante verticale de ϵ et f_2 la distance focale de la seconde lentille L2. On peut ainsi écrire :

(2-2)
$$\Delta a = f_2 \tan \varepsilon_y \approx f_2 \varepsilon_y \cot \varepsilon_y$$
 est petit.

La lumière traversant la zone d'expérience étant un faisceau parallèle, Δa est indépendante de la distance entre la zone d'expérience et la deuxième lentille.

La déviation ε implique un changement local de l'intensité lumineuse en (x,y). Si on considère que l'arête du couteau est parallèle à l'axe des x, on obtient :

(2-3)
$$\Delta I(x,y) = \eta I_0(\frac{\Delta ab}{f_c^2})$$

Par conséquent il est possible de mesurer les changements relatifs d'intensité :

(2-4)
$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta a}{a} = \varepsilon_y \frac{f_2}{a}$$

On cherche maintenant à exprimer cette variation d'intensité en fonction de la variation de l'indice de réfraction. Pour cela, on utilise les relations suivantes tirées des relations de Weyl, et valables en première approximation pour des faisceaux quasiment rectilignes (Merzkirch 1987) (planche 2-1):

(2-5)
$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x}$$
, $\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial y}$

avec n indice de réfraction.

On obtient une expression reliant l'angle de déviation ε du faisceau à la variation de l'indice de réfraction en considérant que le faisceau ne subit pas de déviation en dehors de la zone d'expérience.

La déviation totale est alors l'intégrale de toutes les déviations sur le trajet $\xi 1$ $\xi 2$ (planche 2-1):

(2-6a)
$$\tan \varepsilon_x = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} dz$$

(2-6b)
$$\tan \epsilon_y = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} dz$$

Cela permet d'écrire (2-4) sous la forme :

$$\textbf{(2-7)} \quad \frac{\Delta I}{I} = \frac{f_2}{a} \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \ \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y} \, dz$$

Dans l'exemple d'un gaz pour lequel l'indice de réfraction n est proche de 1. La relation de Glaston-Dale : $n-1=K\ \rho$, donne :

(2-8)
$$\frac{\Delta I}{I} = K \frac{f_2}{a} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\partial \rho}{\partial y} dz$$

Si l'écoulement est plan, on obtient directement la composante suivant y du gradient d'indice de réfraction à partir de la varition locale d'intensité lumineuse sur une image strioscopique. Si on tourne le couteau de 90° , on mesure la composante suivant x car on est alors sensible au Δb . Si l'écoulement est à symétrie de révolution une transformée d'Abel (Kogelschatz 1972) permet d'obtenir le gradient de ρ dans le plan méridien. Dans le cas tridimensionnel, l'information sur ρ devient qualitative. Cependant, pour les structures bien identifiées spatialement, comme des ondes ou des tourbillons, on peut obtenir une information quantitative sur leur position, ou leur vitesse si un procédé de cinématographie est utilisé.

La méthode permet également d'avoir accès à la déviation des rayons lumineux dans les deux directions. Si la déviation est positive, on aura une strie claire sur l'image et si la déviation est négative, on aura une strie foncée qui correspond à une diminution d'intensité. On peut

jouer sur la sensibilité de la méthode de la façon suivante. Supposons que l'on puisse détecter les variations d'intensité $\frac{\Delta I}{I}=0.1$ alors l'angle minimum ϵ_{min} des déviations détectable sera $\epsilon_{min}=0.1\frac{a}{f_2}$. Il faut donc que $\frac{a}{f_2}$ soit petit pour que de petites déviations soient détectées.

En général la distance focale f₂ est fixée et la hauteur de l'image de la source a ne peut être réduite arbitrairement, la sensibilité du système Schlieren est donc limitée. On décrit ces limitations dans le paragraphe suivant.

2-2,1.5.Les limitations en résolution du système strioscopique

• La plus sévère restriction à laquelle le système est confronté provient de l'apparition de phénomènes de diffraction obtenus notamment en réduisant a. Cet effet n'est pas pris en compte dans la théorie géométrique et par conséquent les relations obtenues précédemment ne lui sont pas applicables.

En lumière blanche, le phénomène de diffraction aboutit à un étalement spatial de la tache focale. En effet les différentes longueurs d'onde composant le spectre ne permettent pas la focalisation en un point unique. C'est l'aberration chromatique.

La partie de la tache occultée par le couteau est différente pour des angles de déviation différents. La conséquence est que l'image de l'objet se situant dans le plan d'observation est déformée. De plus les changements d'intensité observés ne sont plus exactement décrits par (2-7).

Schardin (1942) a étudié la perturbation de la diffraction sur l'image Schlieren dans un cas particulier de déviation ϵ constante dans un cercle avec un champ extérieur de densité constante. L'objectif était d'obtenir pour ce cas la plus petite valeur de a telle que l'angle ϵ soit correctement déterminé.

Dans ce cas le système Schlieren (avec ses limites de sensibilité) sert à mesurer le gradient d'indice (de densité) de façon précise mais la résolution spatiale du champ testé est complètement perdue.

Hosch et Walters (1977) ont étudié le cas inverse d'une haute résolution spatiale mais une sensibilité modérée respectant la distribution de densité mesurée. Les effets de diffraction peuvent être inclus directement dans l'analyse Schlieren, si la modulation de la lumière du système est décrite au moyen de transformées de Fourier au lieu de relations d'optique géométrique. Une telle analyse (Véret 1970) pour une onde lumineuse ayant un changement de phase $\phi(x,y)$ dans le champ d'expérimentation a été réalisée.

Il existe une relation entre l'indice n et le changement de phase ϕ :

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{1}{\lambda} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (n(x, y, z) - n_{\infty}) dz$$

où λ est la longueur d'onde de la lumière utilisée et n_∞ l'indice dans la zone non perturbée.

Pour tenir compte de la diffraction, Véret adopte la formule (Merzkirch 1987) :

(2-9)
$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\phi^2}{(\eta^2 + \beta)}$$

η est l'atténuation due au couteau, β est un terme tenant compte de la diffraction. Cette formule permet de déterminer le plus petit changement de phase possible φ(x,y) comme mesure de la sensibilité.

Ce résultat semble en contradiction avec la relation (2-7) qui indique que la méthode répond aux changements de gradient d'indice et non aux changements de phase optiques ou d'indice absolu. En fait, la relation (2-7) décrit la forme de la plus petite perturbation qui peut être résolue par la méthode Schlieren avec une sensibilité maximum tandis que la relation (2-9) permet de déduire la plus petite amplitude de la perturbation qu'on peut détecter en haute résolution spatiale.

Ces estimations de la sensibilité limite sont des résultats théoriques qui s'appliquent à un système optique idéal. Cependant les résultats expérimentaux en sont relativement proches malgré les aberrations optiques réelles qui peuvent être d'ailleurs corrigées ou minimisées. Par exemple, on corrige les erreurs de parallaxe (Ahyi 1997) et l'approximation miroir sphérique en utilisant un montage en Z décrit au paragraphe 2-2.1.7 et des miroirs ayant une grande focale.

 L'image Schlieren obtenue permet en principe de déterminer la distribution des angles de déviation ou après intégration, la distribution de masse volumique dans le fluide ρ(x,y).

L'intensité peut être influencée par les caractéristiques du film photographique et du processus de développement. Si on considère que le film est utilisé dans sa gamme de sensibilité (qui est linéaire) et que le processus de développement appliqué est linéaire alors la variation de densité photographique ΔD (ou différence de niveaux de gris) entre deux points d'un cliché strioscopique est donnée par :

(2-10)
$$\Delta D = C \log(1 + \frac{\Delta I}{I})$$

On mesure cette quantité avec un densitomètre, on en déduit alors la valeur de l'intensité relative et par conséquent l'angle de déviation ou les variations de p.

La constante C de la formule (2-10) est déterminée par des images de "Schlieren standard" utilisées comme référence.

L'évaluation densitomètrique de la photographie peut être automatisée, et en scannant la photographie il est possible d'identifier les courbes d'égale photodensité. Cependant, les mesures de contraste ou de niveaux de gris ne sont pas très précises.

2-2.1.6. Application aux ondes acoustiques dans les liquides (Uberall 1990 [4])

Lorsqu'un matériau est traversé par une onde acoustique, son indice optique se trouve altéré localement. Considérons le cas d'un liquide d'indice n. Ce dermier est relié à la masse volumique p par la relation de Lorentz-Lorentz :

(2-11)
$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = K\rho$$

avec K coefficient de compressibilité adiabatique du milieu.

Une variation de pression dp entraıne une variation d'indice de réfraction :

(2-12)
$$dn = \frac{(n^2-1)(n^2+2)}{6nc^2\rho}dp$$

On note c la célérité de l'onde :
$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Ainsi la méthode de strioscopie ou ombroscopie peut s'avérer utile pour identifier les ondes acoustiques à condition que la sensibilité du système soit compatible avec les variations physiques de n.

2-2.1.7. Système de visualisation

Le système de visualisation ultra rapide par strioscopie ou ombroscopie qui est employé dans cette étude est basé sur le principe de Cranz-Schardin (planche 2-2). Ce dispositif est composé de 24 flashes déclenchés successivement par l'intermédiaire d'un générateur d'impulsion programmable avec des intervalles de temps ajustables indépendamment de 100 ns à 1 s. Cette possibilité présente l'avantage de pouvoir concentrer un nombre d'images important sur le phénomène dont on veut obtenir un maximum d'information temporelle.

Deux grands miroirs sphériques de 50 cm de diamètre dont la distance focale est de 2 m font l'office des lentilles L1 et L2 de la figure 2-1. Ils assurent à la fois un grand champ et une grande focale ce qui rend les erreurs de parallaxe, et par conséquent la déformation de l'image, négligeables.

On a adopté un montage en Z qui minimise les aberrations géométriques donnant toute liberté quant à la taille de la veine d'expérience. Pour ce faire, nous disposons de 2 miroirs de renvois plans de longueur 45 cm et de largeur 30 cm.

Enfin la réception est assurée par 24 récepteurs, conjugués aux éclateurs devant lesquels on peut installer 24 couteaux pour le cas de la strioscopie.

Chaque éclateur a une durée de 300 ns. La lumière émise par un éclateur est transformée en un faisceau parallèle par le premier miroir sphérique, puis elle se réfléchit sur le premier miroir plan pour ensuite traverser le champ d'expérience. Le deuxième miroir plan renvoie le faisceau sur le deuxième miroir sphérique qui assure la focalisation sur le couteau strioscopique ou la lentille du récepteur. L'objectif des récepteurs projette l'image sur un plan film. On obtient ainsi 24 images de 26*32 mm² donnant une représentation cinématographique du phénomène sur un film de 18*24 cm². Le film a une sensibilité de 200 ASA qui assure une détection suffisante des ondes.

2-2.2. SOURCE A MINI-ETINCELLE

2-2.2.1.Introduction

Nous présentons, ici, la source acoustique utilisée pour la génération d'une onde acoustique impulsionnelle. Initialement développée pour la modélisation physique des phénomènes sismiques de subsurface (Pernod 1989, 1998), cette source a ensuite été optimisée pour les mesures de réponses impulsionnelles spatio-temporelles acoustiques (Kemmou 1996, Pernod 1996). Elle permet d'obtenir un front d'onde sphérique uniforme très net. La brièveté et la puissance de la source donnent un excellent rapport signal sur bruit tant pour les visualisations que pour les mesures à l'hydrophone.

2-2.2.2.Principe de fonctionnement (Kemmou 1996)

Le principe consiste en une rapide décharge d'un condensateur chargé au préalable par une source haute tension pouvant atteindre 10 kV. Cette décharge est déclenchée par l'utilisation d'un thyratron qui est un interrupteur autorisant de brèves commutations. Une miniétincelle est ainsi créée entre les deux électrodes immergées dans l'eau (planche 2-3 a).

La conséquence est une forte impulsion acoustique (onde primaire) suivie par une bulle de cavitation. Le diamètre de cette bulle va croître, atteindre un maximum puis imploser en émettant une onde secondaire au moment où son diamètre passe par un minimum. L'étude du comportement spatial et temporel du signal émis par la source a été réalisée simultanément à l'aide d'une visualisation et d'une mesure de pression par hydrophone (kemmou 1996, Ahyi 1997).

Dans cette fenêtre temporelle le signal qui représente la signature de la source peut être divisé en deux parties. La première partie correspond à un temps de montée très bref d'environ 100 ns et la deuxième correspond à une décroissance exponentielle d'une durée de 2 µs (planche 2-3 b). Cette impulsion permet d'exciter une large gamme de fréquences qui s'étend de quelques kilohertzs à 1.5 mégahertzs à -20 db (planche 2-3 c). Compte tenu de sa très grande largeur de bande, cette impulsion peut être considérée comme un quasi dirac pour un grand nombre de systèmes acoustiques. La fenêtre temporelle exploitable se situe entre l'émission de l'onde primaire et l'émission de l'onde secondaire issue de l'implosion de la bulle de cavitation. Selon l'énergie de la source qui dépend du condensateur utilisé cette fenêtre varie entre 600 µs et 800 µs (kemmou 1996, Ahyi 1997).

La visualisation nous montre la progression au cours du temps d'un front très marqué et omnidirectionnel (planche 2-4), la source peut alors être considérée comme ponctuelle. Ce front permet alors d'insonifier une cible avec des angles variant de 0 à 90 degrés ce qui est favorable à la génération d'un maximum d'ondes diffractées. Dès lors, il sera possible d'observer l'interaction de ce front d'onde avec divers objets.

Voyons maintenant quelles données quantitatives il est possible d'extraire des visualisations et des signaux recueillis par un hydrophone.

2-3.EXPLOITATIONS POSSIBLES DES RESULTATS

2-3.1.MESURES A PARTIR DES VISUALISATIONS

Afin d'éviter les erreurs induites par le fait que la strioscopie et l'ombroscopie sont des méthodes tridimensionnelles qui intègrent suivant l'axe z (Ahyi 1997), toutes les visualisations et mesures présentées ont été réalisées de façon à ce que la cible et la source soient toujours situées dans un même plan perpendiculaire à l'axe optique.

Les configurations sont essentiellement à symétrie de révolution ou symétriques par rapport au plan de mise au point du système de visualisation. Les fronts d'ondes visualisés correspondent donc à la position de ces fronts dans le plan médian ou méridien.

L'ombroscopie et la strioscopie donnent accès à la phase qui est conservée contrairement aux amplitudes (voir chapitre 4 paragraphe 4-8.4.2.). Ainsi les fronts d'onde rayonnés lors de l'interaction entre une cible (plaque, coque pour le cas dispersif) et l'onde impulsionnelle sont des équiphases dont on peut extraire la vitesse de phase. Par la méthode qui sera décrite au chapitre 4, nous verrons que la fréquence d'une onde harmonique peut être identifiée également.

La vitesse de groupe est la vitesse de l'ensemble de la perturbation. On peut donc la calculer grâce à deux images successives donnant la propagation du front le plus avancé. Nous verrons même au chapitre 4 qu'une seule image peut fournir la courbe de dispersion d'une onde dispersive.

Fixons au passage les définitions de la vitesse de groupe C_g et de la vitesse de phase Cph (Leander 1996).

Pour donner une définition de la vitesse de phase, on considère la propagation d'une onde monodimensionnelle dans un milieu homogène. On se limitera également à des ondes de type monochromatique. La propagation d'une telle onde est alors décrite par le nombre d'onde complexe suivant :

$$k(\omega) = \frac{\omega}{Cph(\omega)} - i\alpha(\omega)$$

où ω est la pulsation, $\alpha(\omega)$ est le coefficient d'atténuation et Cph(ω) est la vitesse de phase.

On explique $Cph(\omega)$ en considérant la fonction de phase qui s'écrit :

$$\varphi = \omega(t - \frac{x}{Cph(\omega)})$$
 où t est le temps.

Par exemple, une pression acoustique constante implique que la phase soit constante. On peut ainsi écrire :

$$\omega(t-\frac{x}{Cph(\omega)})=C_1$$

d'où:

$$x = Cph(\omega)t + C$$
,

avec C1 et C2 des constantes.

Dans l'espace x, t, la vitesse de la perturbation est alors $Cph(\omega)$ que l'on appelle vitesse de phase et qui en général dépend de la fréquence.

L'intérêt de la vitesse de groupe est de caractériser l'évolution d'un groupe d'ondes ayant des longueurs d'onde légèrement différentes.

La première définition semble avoir été donnée par Stokes. On considère deux ondes sinusoïdales d'égale amplitude mais de fréquences légèrement différentes. En additionnant les potentiels, on obtient :

(2-13)
$$\cos(\omega t - kx) + \cos((\omega + \Delta \omega)t - (k + \Delta k)x)$$

= $2\cos((\Delta \omega t - \Delta kx)/2)\cos((\omega + \Delta \omega)t/2 - (k + \Delta k)x/2)$

Le premier facteur représente une amplitude variant lentement avec $\Delta k/2$ tandis que le deuxième représente de larges oscillations $(k + \Delta k)/2$. La première partie est l'enveloppe qui se propage à $\frac{\Delta \omega}{\Delta k}$ qui est appelé vitesse de groupe (**planche 2-5**).

La planche 2-5 présente la vitesse de phase et la vitesse de groupe pour la superposition de deux ondes harmoniques ayant des longueurs d'ondes légèrement différentes. Les deux premiers graphiques représentent les deux ondes se propageant suivant x avec t fixé à t1 et t2 respectivement. Les deux graphiques suivants représentent la propagation de la superposition de ces deux ondes suivant x pour t fixé à t1 et t2 respectivement.

La première onde a une longueur d'onde $\lambda_1=2\pi/k=Cph_1^*dt$ et la deuxième onde a une longueur d'onde $\lambda_2=2\pi/(k+\Delta\,k)=Cph_2^*dt$ légèrement supérieure à λ_1 . La vitesse de groupe est donnée par la distance qui sépare le lieu où les ondes sont en phase en t1 du lieu où les ondes sont en phase à t2 fois dt=(t2-t1). Le lieu où les deux ondes sont en phase correspond au maximum d'amplitude quand les deux ondes sont superposées. Les quantités représentées sur le dernier graphique de la **planche 2-5** sont la longueur d'onde de l'enveloppe $\lambda_m=2\pi/k_m$ avec $k_m=\Delta k/2$ et la longueur d'onde moyenne $\lambda_c=2\pi/k_c$ avec $k_c=(k+\Delta k)/2$.

D'une façon générale, la vitesse de groupe de Stokes s'écrit :

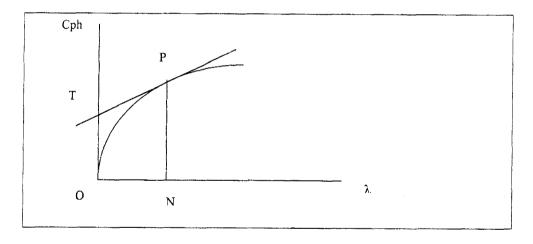
(2-14)
$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = (\frac{dk}{d\omega})^{-1}$$

Si on appelle λ la longueur d'onde qui est égale à 2π / k, on peut alors exprimer la vitesse de groupe sous la forme suivante :

$$C_g = \frac{d(kCph)}{dk} = Cph - \lambda \frac{dCph}{d\lambda}$$

car Cph = ω / k .

Cette formule admet une représentation géométrique simple (figure 2-2). Si une courbe est construite avec λ en abscisse et Cph en ordonnée, la vitesse de groupe en un point P de longueur d'onde ON et de vitesse de phase PN peut être déterminée en traçant la tangente en ce point. Le point T étant l'intersection de la tangente avec avec l'axe des ordonnées, OT représente alors la vitesse de groupe.



<u>Figure 2-2</u>: Représentation de la vitesse de groupe pour Cph (λ) connue

Une autre approche de la vitesse de groupe donnée par Lamb est la constance de la longueur d'onde du groupe λ au cours de la propagation :

(2-15)
$$\frac{\mathrm{D}\lambda}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + C_{\mathrm{g}} \frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0$$

Ici la longueur d'onde est considérée comme une fonction de l'espace et du temps. On reconnaît la dérivée en suivant la vitesse de groupe et l'interprétation cinématique en est que pour voir une longueur d'onde constante dans un milieu dispersif, l'observateur doit se déplacer à la vitesse $C_{\underline{\sigma}}$.

On veut montrer que la relation (2-15) est cohérente avec la définition (2-14).

Pour cela, on prend un point x_0 qui suit la crête d'une onde de longueur d'onde $\lambda(x,t)$ et a donc la vitesse Cph₀ à t fixé et en un second point x_1 qui suit la crête suivante de l'onde dans le sens de la propagation et a donc la vitesse Cph₁ (t) qui peut différer de Cph₀ (t) à cause de l'éventuelle inhomogénéité du milieu ou de la loi de propagation.

On a donc $\lambda = (x_1(t)-x_0(t))$ et son évolution au cours du temps s'écrit :

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_0}{dt} = Cph_1 - Cph_0$$

$$\begin{split} \text{Si} & \quad \frac{\partial Cph}{\partial x} << \frac{Cph}{\lambda} \quad \text{,c'est} \quad \grave{a} \quad \text{dire} \quad \text{varie} \quad \text{peu suivant} \quad x, \quad \text{alors} \quad \text{on peut \'ecrire} \\ Cph_1 - Cph_0 &= \frac{\partial Cph}{\partial x} \, \lambda \; . \end{split}$$

Maintenant si on considère le point de vue de x0 dans son déplacement alors :

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\mathrm{Cph}_0$$

Cela implique que :

(2-16)
$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + Cph \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \lambda \frac{\partial Cph}{\partial x} = \lambda \frac{dCph}{d\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x}$$

le second membre exprimant le taux auquel deux sommets consécutifs d'une onde s'éloignent l'un de l'autre.

On en déduit donc :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + (Cph - \lambda \frac{dCph}{d\lambda}) \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$$

qui est bien la relation (2-15) avec l'expression désignant la vitesse de groupe identique à (2-14). Cette interprétation de Cg permet de mieux comprendre ce que l'on entend par « groupe »

en milieu dispersif où Cg dépend de ω et donc de λ . Il s'agit en fait du groupe d'ondes de longueur d'onde proche du λ considéré.

Il existe une relation liant la vitesse de phase et le ω correspondant à la vitesse de groupe (Leander 1996) :

(2-17)
$$C_g(\omega) = \frac{Cph^2}{Cph - \omega} \frac{dCph}{d\omega}$$

Cette expression s'obtient aisément. En effet, comme $k = \omega$ / Cph on a :

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d(\frac{\omega}{Cph})} = \frac{1}{\frac{d(\frac{\omega}{Cph})}{(\frac{d\omega}{Cph})}}$$

d'où:

$$C_{g} = \frac{1}{\frac{1}{Cph} - \frac{\omega}{Cph^{2}} \frac{dCph}{d\omega}}$$

qui correspond bien à la relation (2-17).

Si l'onde est non dispersive k et ω sont indépendants et Cph la vitesse de phase est égale à C_g la vitesse de groupe.

Pour finir, on donne brièvement une dernière interprétation de la vitesse de groupe qui consiste à écrire une onde sous la forme suivante :

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp(i(kx - \omega t)) d\omega$$

Si le temps t est grand alors la fonction est rapidement variable et l'intégrale est nulle. Cependant si $\exp(i(kx-\omega t))$ est constant alors $dx / dt = dk / d\omega$ et les ondes coopèrent.

 $Cg(\omega)$ est la vitesse à laquelle les ondes de pulsation voisine de ω sont en phase perpétuellement.

2-3.2.MESURE A PARTIR D'UN HYDROPHONE

On utilise un hydrophone large bande pour les mesures de variations de pression en fonction du temps lors de la diffraction acoustique par une cible. Sa bande passante va de 100 kHz à 10 MHz à -7 db; il a été fabriqué par **Nakamura et Otani en 1992**. On le relie à un oscilloscope pour enregistrer le signal temporel.

En pratique, l'hydrophone peut être placé à quelques centimètres de la cible. Pour le cas de l'onde incidente seule, on obtient le signal et le spectre de la planche 2-3. Lors de la diffraction, on obtient une succession de pics que les visualisations permettent d'associer aux ondes identifiées par le dépouillement des photographies. Cette association des deux techniques permet de progresser dans l'interprétation physique des signaux de pression temporels. Lorsque le phénomène est répétitif, on peut recommencer l'opération en déplaçant à chaque fois le capteur d'un incrément spatial donné. On obtient alors une description spatio-temporelle du champ de pression qui peut être corrélé avec les visualisations. Une telle technique sera mise en œuvre aux chapitres 4 et 5.

2-4. PERSPECTIVES: EVOLUTION VERS UNE CAMERA ULTRA RAPIDE CCD

Notre système actuel présente quelques inconvénients et notamment une parallaxe importante et un encombrement qui rend le procédé inutilisable hors laboratoire. De plus, on est confronté au temps nécessaire à l'obtention des images et aux difficultés d'un post traitement. Il faut 30 minutes pour avoir le négatif et autant pour la photographie. Un post traitement n'est possible qu'en scannant la photographie.

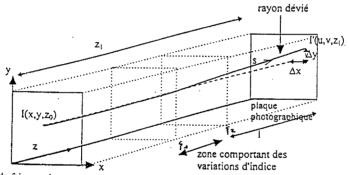
Si on prend des LEDs comme sources lumineuses à la place des éclateurs et qu'on utilise une réception CCD, cela permet d'avoir directement les images numérisées. L'utilisation de logiciels de traitement d'images conventionnels (Photoshop par exemple) facilitera ensuite l'analyse des phénomènes visualisés.

Il en résulte un gain de temps et une économie très importante. Pour conserver une bonne définition et un nombre d'images suffisant, il convient d'utiliser un capteur CCD de haute résolution possédant 2048*2048 pixels par exemple.

Une telle conception a récemment fait l'objet d'un dépôt de brevet (Pernod, Merlen & al 1998).

Un premier prototype utilisant un capteur 512*512 a par ailleurs été réalisé pour tester la validité du concept (Gatti 1996).





section du faisceau de lumière parallèle

PLANCHE 2-1 : DEVIATION DU FAISCEAU LUMINEUX A LA TRAVERSEE DE LA VEINE

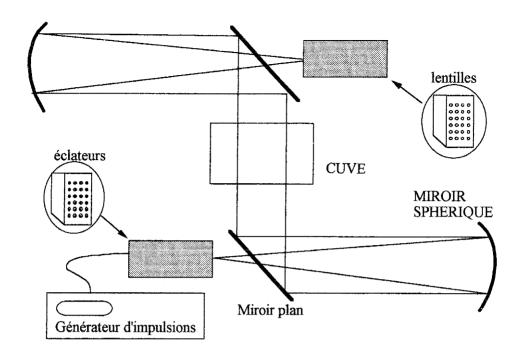


PLANCHE 2-2: SYTEME DE VISUALISATION ULTRA RAPIDE

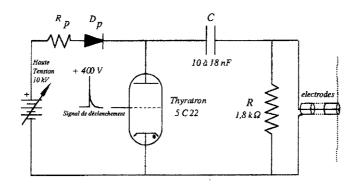
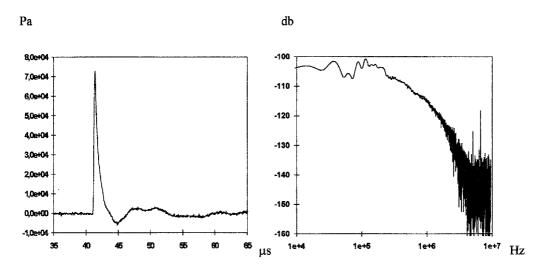
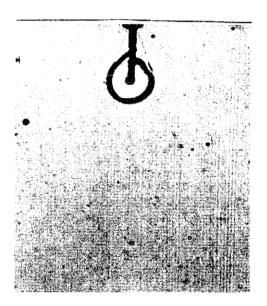


PLANCHE 2-3 A : Schéma électrique de la source



 $\underline{\textbf{PLANCHE 2-3 B ET C}}: \textbf{Signal temporel et spectre de la source}$

PLANCHE 2-3: SOURCE ACOUSTIQUE



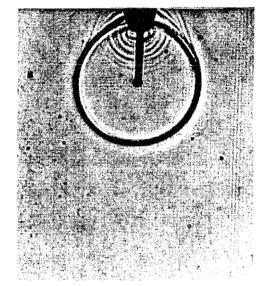
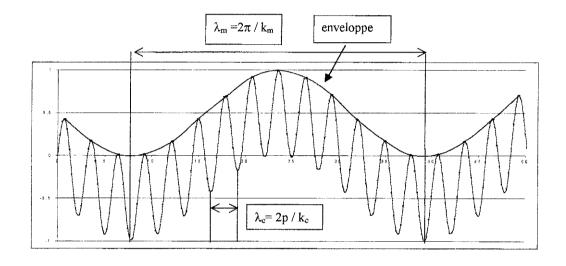


PLANCHE 2-4: VISUALISATION DU RAYONNEMENT DU MINI ETINCELEUR







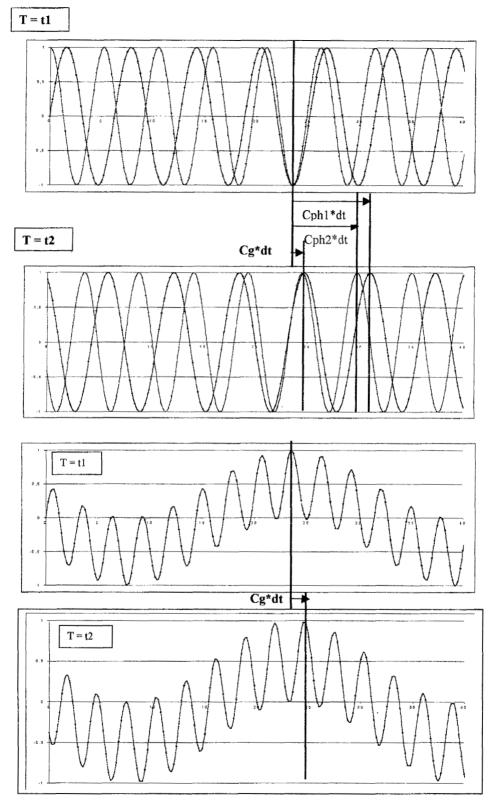


PLANCHE 2-5: Vitesse de groupe et vitesse de phase

CHAPITRE 3 : LES ONDES LATERALES



3-1.INTRODUCTION

Dans la pratique, comme nous l'avons déjà mentionné, nous ne disposons pas d'un générateur d'ondes progressives planes mais d'une source ponctuelle omnidirectionnelle et impulsionnelle dont le spectre fréquentiel se rapproche de celui d'un dirac pur et dont l'émission est spatialement omnidirectionnelle (Pernod et al. 1994, Kemmou 1996). Nous observons donc l'interaction d'une onde sphérique avec l'environnement.

Nous allons ainsi pouvoir observer nos interfaces soumises à des sollicitations d'incidence très différentes et produire un maximum d'ondes possibles. Cet enrichissement conduit à la manifestation d'ondes spécifiques à l'interaction des ondes sphériques avec les interfaces. En particulier, la réflexion d'une onde sphérique par la frontière de séparation de deux milieux présente l'intérêt de pouvoir engendrer des ondes latérales.

Dans la première partie de ce chapitre, nous examinons d'abord l'onde émise par une telle source puis nous traitons la théorie des ondes latérales liquide-liquide avant de traiter les ondes latérales liquide-solide.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous utilisons nos techniques de visualisation pour mettre les ondes latérales en évidence de façon expérimentale. On a vu à la fin du chapitre l paragraphe 1-4 que l'onde latérale se propageant près de l'interface dans le milieu 2 si C2 > C1 se manifeste par une onde de tête dans le milieu 1. Dans un premier temps, on étudiera le cas des interfaces liquide liquide en utilisant trois couches de liquide puis, dans un deuxième temps on décrira les résultats obtenus avec une interface liquide solide.

3-2.PROPRIETES PARTICULIERES AUX ONDES SPHERIQUES :

CAS D'UNE SOURCE ACOUSTIQUE PONCTUELLE OMNIDIRECTIONNELLE

Imaginons cette source dans un fluide occupant tout l'espace. Le problème est donc à symétrie sphérique et l'équation des ondes qui s'écrit :

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

devient:

(3-1)
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r})$$

La solution peut être cherchée sous la forme $\phi = \frac{f(r,t)}{r}$ ce qui donne :

(3-2)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$$

qui est l'équation des ondes unidirectionnelles classique dont la solution générale est $f = f_1(ct - r) + f_2(ct + r)$.

Nous nous intéressons aux ondes émises de la source située en r=0. Ces ondes se propagent donc de r=0 à l'infini et la solution la plus générale est :

$$(3-3) \quad \phi = \frac{f(ct-r)}{r}$$

Cette forme est singulière en r = 0. On peut cependant exprimer la solution sur tout l'espace y compris en r = 0 en utilisant la solution faible. C'est à dire en admettant une solution au sens des distributions.

Pour une solution de type onde monochromatique on a :

(3-4)
$$\phi = \frac{A \exp(i(kr - \omega t))}{r}$$
 avec $k = \frac{\omega}{c}$.

L'équation des ondes s'écrit pour r différent de zéro $\Delta \phi + k^2 \phi = 0$. Au sens des distributions cela s'écrit pour ψ une fonction test s'annulant en r > R > 0:

(3-5)
$$\langle \Delta \phi + k^2 \phi, \psi \rangle = \langle \phi, \Delta \psi + k^2 \psi \rangle = \int_{V} \phi(\Delta \psi + k^2 \psi) dv$$

où $v(\varepsilon)$ est un domaine sphérique compris entre ε et R. On appellera s la surface du domaine, n sa normale. (r, θ, ϕ) s'entendront comme les coordonnées sphériques et (c_r, c_θ, c_ϕ) comme le repère orthonormé correspondant.

Appliquons dans $v(\epsilon)$, où ϕ et Ψ sont des fonctions classiques, la formule d'analyse tensorielle : $div(\phi grad\psi) = \phi \Delta \psi + grad\phi$. grad ψ on a donc :

(3-6)
$$\int_{V} \phi \Delta \psi dv + k^{2} \int_{V} \phi \psi dv = \int_{V} div \left[\phi grad \psi \right] dv - \int_{V} grad \phi . grad \psi dv + \int_{V} k^{2} \phi \psi dv$$

Grâce à la formule d'Ostrogradski, on obtient :

(3-7)

$$\int\limits_{V} \varphi \Delta \psi dv + k^2 \int\limits_{V} \varphi \psi dv = \int\limits_{S} \varphi. grad\psi. \textbf{n} ds - \int\limits_{V} div \Big[\psi grad\varphi \Big] dv + \int\limits_{V} \psi \Delta \varphi dv + \int\limits_{V} k^2 \varphi \psi dv + \int\limits_{V} k^2 \varphi \psi dv + \int\limits_{V} \psi \Delta \varphi dv + \int$$

qu'on réécrit :

(3-8)
$$\int_{V} \phi \Delta \psi dv + k^{2} \int_{V} \phi \psi dv = \int_{S} \phi \operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{n} ds - \int_{S} \psi \operatorname{grad} \phi \cdot \mathbf{n} ds + \int_{V} \psi (\Delta \phi + k^{2} \phi) dv$$

$$= \left\langle \Delta \phi + k^{2} \phi, \psi \right\rangle$$

La troisième intégrale est nulle dans v puisque dans v, $r \ge 0$ donne $\Delta \phi + k^2 \phi = 0$. On a donc :

(3-9)
$$\langle \Delta \phi + k^2 \phi, \psi \rangle = \int_{S} \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds - \int_{S} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds$$

Comme ψ est une fonction test, seule la surface $r=\epsilon$ est à prendre en compte car ψ s'annule sur r=R ainsi que toutes ses dérivées. De plus, sur $r=\epsilon$, $n=-c_\Gamma$ d'où $\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial r}$.

On en déduit alors (3-10) :

$$\langle \Delta \phi + k^2 \phi, \psi \rangle = - \int_{S} \phi \frac{\partial \psi}{\partial r} ds + \int_{S} \psi \frac{\partial \phi}{\partial r} ds$$

ce qui équivaut à :

(3-11)
$$\langle \Delta \phi + k^2 \phi, \psi \rangle = -\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \phi \frac{\partial \psi}{\partial \tau} r^2 \sin \theta d\theta d\phi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \psi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

Pour l'onde monochromatique cela donne (3-12) :

$$\left\langle \Delta \phi + k^2 \phi, \psi \right\rangle = -4\pi \frac{\partial \psi}{\partial r} \bigg|_{\epsilon} A \exp(i(k\epsilon - \omega t))\epsilon - 4\pi \psi(\epsilon) A \Big[-\exp(i(k\epsilon - \omega t)) + ik\epsilon \exp(i(k\epsilon - \omega t)) \Big] \Big] + ik\epsilon \exp(i(k\epsilon - \omega t)) \Big] +$$

Quand & tend vers zéro, on obtient :

(3-13)
$$\langle \Delta \phi + k^2 \phi, \psi \rangle = -4\pi \psi(0) A \exp(-i\omega t)$$

On en déduit donc que la distribution solution du problème sur r > ou = 0 vérifie :

(3-14)
$$\Delta \phi + k^2 \phi = -4\pi A \exp(-i\omega t)\delta(r)$$

pour une source en r = 0.

Plus généralement pour une source en $r=r_0$ on pourra écrire la solution faible comme solution de l'équation :

(3-15)
$$\Delta \phi + k^2 \phi = -4\pi A \exp(-i\omega t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

où r et ro sont des vecteurs position.

Pour r différent de r_0 , l'équation est évidemment identique à l'équation des ondes classique pour les solutions régulières. La solution est alors : $A \exp(-i\omega t) \frac{\exp(ik\|r-r_0\|)}{\|r-r_0\|}$

3-3. THEORIE DES ONDES LATERALES POUR UNE INTERFACE LIQUIDE-LIQUIDE

3-3.1. DESCRIPTION PHYSIQUE (LANDAU 1971)

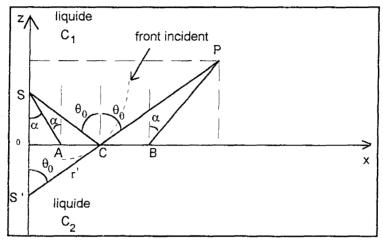
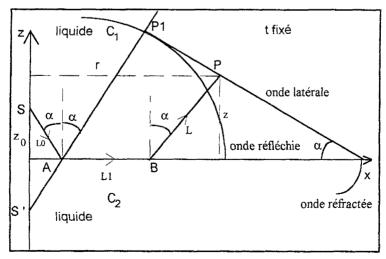


figure 3-1 : Rayons réfléchis vérifiant le principe de Fermat



<u>figure 3-2</u>: Apparition d'une onde latérale lors de la réflexion d'une onde sphérique sur une interface pour $C_1 \le C_2$

On se place dans le cas où l'onde sphérique précèdente se réfléchit à la frontière de séparation de deux fluides de masses volumiques respectives ρ_1 et ρ_2 . On s'intéressera en particulier au cas des ondes latérales.

Pour fixer les idées, on définit d'abord les angles utilisés :

-On appelle θ_0 l'angle maximum d'incidence à un instant donné, c'est à dire l'angle formé par la tangente au front incident et la normale à l'interface (figure 3-1).

-On appelle θ l'angle d'incidence courant qui couvre toutes les incidences de 0 à θ_0 . En effet, lors d'une excitation par une onde sphérique, tous les angles entre 0 et θ_0 participent à l'excitation même si, comme on le verra, ce sont les angles proches de θ_0 qui sont importants. On a donné ici la signification physique de θ , mais celui-ci sera défini comme un angle complexe pour les calculs.

-On appelle α l'angle de réflexion totale. C'est l'angle au delà duquel les ondes dans le milieu 2 deviennent inhomogènes. On va voir l'importance de cet angle dans toute la suite de l'étude.

Un rayon réfléchi ordinaire satisfait le principe de Fermat c'est à dire qu'il suit le chemin le plus rapide pour aller de S à P. Nous supposons que $C_1 < C_2$ et que la source est dans le milieu 1, il existe alors deux types de chemins. Le premier se propage uniquement dans le milieu 1 et correspond au trajet S C P. Le deuxième type de chemin est possible si l'angle d'incidence maximale θ_0 est supérieur ou égal à l'angle de réflexion totale α . Un rayon peut alors atteindre l'interface avec l'angle de réflexion totale α . Ce rayon longe ensuite l'interface dans le milieu 2, et enfin, à partir d'un point B de l'interface, il revient dans le milieu 1 sous le même angle. Cela correspond au trajet S A B P (figure 3-1). Tout point de la surface tel que $x > x_A$ peut jouer le rôle de B. On appelle x_A et x_B les abscisses de A et B.

Par conséquent, le lieu des points P image à l'instant t d'une onde émise en S à t=0 en suivant la direction SA constitue une surface conique (à cause de la symétrie cylindrique suivant OZ du problème) de droites génératrices parallèles à la direction S'A et issus des points B tels que $C_2t > x_B > x_A$. Ce lieu constitue ce qu'on appelle l'onde latérale. Cette onde part donc de l'intersection de l'interface avec l'onde réfractée et va jusqu'au point P1 tangent à l'onde réfléchie. (figure 3-2)

L'existence de cette onde correspond à l'apparition des ondes inhomogènes dans le milieu 2. Son origine s'explique difficilement dans le cadre de la théorie géométrique, c'est pourquoi nous aborderons son étude du point de vue des solutions de l'équation des ondes.

3-3.2.EXPRESSION MATHEMATIQUE POUR L'ONDE REFLECHIE SPECULAIRE REGULIERE (BREKHOVSKIKV 1980)

On place une interface liquide plane dans le plan xoy. La source acoustique est placée en x = 0, y = 0 et $z = z_0$ (figure 3-2). Le fluide 1 est en z > 0 et a une vitesse du son C_1 et une masse volumique ρ_1 . Le fluide 2 est en z < 0 avec une vitesse du son C_2 et une masse volumique ρ_2 . Le problème admet une symétrie cylindrique autour de oz.

Si la source est dans le fluide 1 on vient de voir que physiquement l'onde latérale existe pour $C_1 < C_2$ et pour un angle d'incidence maximal supérieur ou égal à un angle d'incidence critique α permettant ainsi une incidence sous l'angle de réflexion totale α . Du point de vue mathématique le problème est assez compliqué. On présente donc dans un premier temps le calcul de l'onde réfléchie régulière par la méthode du point de selle, ce qui nous permettra d'expliquer avec suffisamment de clarté le problème de l'existence des ondes latérales.

La propagation d'une onde sonore monochromatique d'amplitude unitaire à partir d'une source ponctuelle dans le fluide homogène 1 est décrite (comme on l'a établi en (3-15)) par l'équation :

(3-16)
$$\Delta \phi + k_1^2 \phi = -4 \pi \delta (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

avec $k_1 = \omega / C_1$ et r_0 le vecteur position de la source. ϕ est ici le terme spatial du potentiel des vitesses et δ la distribution de dirac. Il est à noter qu'on omet ici et dans le reste de la section la dépendance exponentielle du temps.

Nous prendrons dans ce qui suit un système de coordonnées tel que le plan (x, y) soit la surface de séparation, avec l'axe des oz confondu avec S S'. On aura z > 0 dans le milieu 1. A la surface doivent être continues la pression et la composante en z de la vitesse.

D'après l'équation (1-13) du chapitre 1, les solutions harmoniques sont de la forme :

(3-17)
$$\phi = \phi(z) \exp(i(k_x x + k_y y))$$

en omettant toujours la dépendance exponentielle du temps.

Les solutions impulsionnelles sont obtenues en faisant la somme des solutions harmoniques sur toutes les fréquences ce qui équivaut à une transformée de Fourier :

(3-18)
$$\phi = \int_{-\infty}^{+\infty+\infty} \phi(z) \exp(i(k_x x + k_y y)) dk_x dk_y$$

Le problème étant à symétrie cylindrique, on exprime ϕ en un point d'observation P de coordonnées cylindriques (r, θ_1, z) dans l'espace physique et pour tout k de coordonnées polaires (k, θ_2) dans l'espace vectoriel des vecteurs d'ondes du plan oxy.

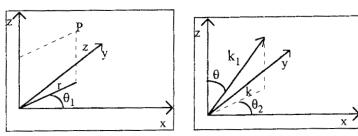


figure 3-3:

 ϕ est calculé au point d'observation P dont les coordonnées cylindriques sont (r, θ_1, z) et pour tout vecteur d'onde k du plan xy dont les coordonnées polaires sont (k, θ_2)

On pose donc (figure 3-3):

(3-19a)
$$k_{x} = k \cos \theta_{2}$$

$$k_{y} = k \sin \theta_{2}$$

$$k = \sqrt{k_{x}^{2} + k_{y}^{2}}$$

$$x = r \cos \theta_{1}$$

$$y = r \sin \theta_{1}$$

r et θ_1 sont fixés , θ_2 est compris entre 0 et 2π et k varie de 0 à l'infini. Avec ce changement de variable, l'intégrale de (3-18) devient :

(3-20)
$$\phi = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} \phi(z) \exp(ikr \cos(\theta_{2} - \theta_{1})) k dk d\theta_{2}$$

La représentation intégrale de la fonction de Bessel est :

$$2\pi J_0(u) = \int_0^{2\pi} exp(iucos\Theta)d\Theta$$

en posant u = kr et $\Theta = \theta_2 - \theta_1$.

Cela permet d'écrire \u03c4 de la façon suivante :

(3-21)
$$\phi = 2\pi \int_{0}^{\infty} \phi(z) J_{0}(kr) kdk$$

Or $J_0(u) = 1/2(H_0^{(1)}(u) + H_0^{(2)}(u))[7]$ où $H_0^{(1)}$ et $H_0^{(2)}$ sont les fonctions de Hankel du premier et du second ordre. On peut exprimer $H_0^{(2)}$ en fonction de $H_0^{(1)}$ par $H_0^{(2)}(\exp(-i\pi)u) = -H_0^{(1)}(u)$. On obtient alors la formule suivante : $J_0(u) = 1/2(H_0^{(1)}(u) - H_0^{(1)}(-u))$ qui permet de transformer l'intégrale (3-21) en une intégrale de moins l'infini à plus l'infini :

(3-22)
$$\phi = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z) H_0^{(1)}(kr) k dk$$
 où $k = \pm \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ désormais.

On note que $H_0^{(1)}$ est singulière en 0 mais nous verrons que cela ne gênera pas le calcul de l'intégrale.

Il faut maintenant déterminer $\varphi(z)$. Pour cela on applique (3-22) à (3-16) et par transformée de Fourier Inverse on trouve:

(3-23)
$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} - (k^2 - k_1^2) \varphi = -1/\pi \delta (z - z_0)$$

avec z₀ distance de la source à l'interface (figure 3-2).

Les conditions physiques imposées sont celles de la continuité de la pression et de la vitesse normale à l'interface en z = 0. Celles-ci s'écrivent :

(3-24)
$$\rho_1 \varphi(z)|_{0^+} = \rho_2 \varphi(z)|_{0^-}$$

où on rappelle que ρ_1 est la densité du fluide 1 et ρ_2 la densité du fluide 2.

$$(3-25) \frac{d\varphi}{dz}\bigg|_{0^{+}} = \frac{d\varphi}{dz}\bigg|_{0^{-}}$$

On remarque que ces conditions imposent une définition de φ continue par morceaux si ρ_I différent de ρ_2 avec un saut en z = 0.

D'autre part la continuité de la pression au voisinage de la source impose :

$$\phi|_{z=z_0} = \phi|_{z=z_0}$$

Ceci impose alors une condition sur la composante z de la vitesse en z_0 . En effet, en intégrant (3-23) entre z_0^- et z_0^+ , on obtient :

$$\frac{d\phi}{dz}\Big|_{z_0^-}^{z_0^+} - (k^2 - k_1^2)\phi\Big|_{z_0^-}^{z_0^+} = -\frac{1}{\pi}$$

et donc

(3-26)
$$\frac{d\phi}{dz}\Big|_{z_0^+} - \frac{d\phi}{dz}\Big|_{z_0^-} = -\frac{1}{\pi}$$

Nous cherchons la solution sous la forme :

$$\phi(z) = A \exp(-\gamma_1 z) \quad \text{pour } z > z_0$$

$$(3-27) \quad \phi(z) = B \exp(-\gamma_1 z) + C \exp(\gamma_1 z) \quad \text{pour } z_0 > z > 0$$

$$\phi(z) = D \exp(\gamma_2 z) \quad \text{pour } z < 0$$

avec
$$\gamma_1^2 = k^2 - k_1^2$$
, $\gamma_2^2 = k^2 - k_2^2$, $k_1 = \omega / C_1$ et $k_2 = \omega / C_2$

Il faudra poser (3-28):

$$\begin{split} \gamma_1 &= \sqrt{k^2 - k_1^2} \ \text{pour } k \geq k_1 \ \text{car la solution cherchée ne doit pas croître à l'infini,} \\ \gamma_1 &= -i \sqrt{k_1^2 - k^2} \ \text{pour } k \leq k_1 \ \text{car l'onde doit se propager en s'éloignant de } z_0. \\ \gamma_2 &= \sqrt{k^2 - k_2^2} \ \text{pour } k \geq k_2 \ \text{car la solution cherchée ne doit pas croître à l'infini,} \\ \gamma_2 &= -i \sqrt{k_2^2 - k^2} \ \text{pour } k \leq k_2 \ \text{car l'onde doit se propager en s'éloignant de } z_0. \end{split}$$

Les conditions limites en z = 0 et $z = z_0$ donnent quatre équations déterminant les coefficients A, B, C, D fonctions de k. Un calcul simple conduit aux expressions suivantes :

$$B = C \frac{\gamma_1 \rho_2 - \gamma_2 \rho_1}{\gamma_1 \rho_2 + \gamma_2 \rho_1}$$

$$(3-29) D = C \frac{2\gamma_1 \rho_1}{\gamma_1 \rho_2 + \gamma_2 \rho_1}$$

$$A = B + C \exp(2\gamma_1 z_0)$$

$$C = \frac{1}{2\pi \gamma_1} \exp(-\gamma_1 z_0)$$

On remarque que si $\rho_1 = \rho_2$, B = 0, $D = A = C \exp(2\gamma_1 z_0) = \frac{1}{2\pi\gamma_1} \exp(\gamma_1 z_0)$. La solution est alors continue en z = 0 et correspond à l'onde incidente émise par la source (paragraphe 1.1.).

La solution pour ρ_1 différent de ρ_2 s'écrit alors :

$$\phi(z) = B \exp(-\gamma_1 z) + \frac{1}{2\pi\gamma_1} \exp(-\gamma_1 (z - z_0)) \qquad \text{pour } z > z_0$$

$$(3-30) \ \phi(z) = B \exp(-\gamma_1 z) + \frac{1}{2\pi\gamma_1} \exp(\gamma_1 (z - z_0)) \ \text{pour } z_0 > z > 0$$

$$\phi(z) = \frac{\rho_1}{\pi(\gamma_1 \rho_2 + \gamma_1 \rho_1)} \exp(-\gamma_1 z_0) \exp(\gamma_2 z) \ \text{pour } 0 > z$$

On retrouve donc le terme en $\frac{1}{2\pi\gamma_1}$ caractéristique de l'onde incidente, l'onde réfléchie décrite par le terme $B\exp(-\gamma_1 z)$ et l'onde réfractée dans le milieu 2 en z < 0. Pour l'onde réfléchie le potentiel ϕ' est donné par :

(3-31)
$$\phi' = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} B(k) \exp(-\gamma_1 z) H_0^{(1)}(kr) k dk$$
 pour $z_0 > z > 0$, le coefficient C correspondant à

l'onde incidente.

On peut introduire un coefficient de réflexion :

(3-32) R(k) =
$$\frac{\rho_2 \gamma_1 - \rho_1 \gamma_2}{\rho_2 \gamma_1 + \rho_1 \gamma_2}$$

mesurant le rapport d'amplitude entre l'onde réfléchie et l'onde incidente.

On a alors:

(3-33) B(k)=
$$\frac{1}{2\pi\gamma_1} \exp(-\gamma_1 z_0) R(k)$$
, avec $\gamma_1 = -i\sqrt{k_1^2 - k^2}$ et $k_1 = \omega / c_1$.

On peut remplacer l'intégration sur k de (3-31) par une intégration sur θ qui caractérise la direction de propagation de chaque onde plane. Cela permet d'obtenir un chemin d'intégration dans le plan de la variable complexe θ (plan qui sera utilisé pour la méthode du col).

On fait donc un changement de variable (figure 3-4) :

$$k = k_1 \sin \theta$$
(3-34 a)
$$dk=k_1 \cos \theta d \theta$$

où
$$k_1 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

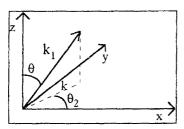


figure 3-4 :

k est la projection orthogonale de k_1 dans le plan xy

On peut alors exprimer y_1 et y_2 en fonction de θ :

$$\gamma_1 = -i \ k_1 \cos \theta = i \ k_2 \ pour \ k < k_1$$
 (3-34 b)
$$\gamma_2 = -i k_1 (\frac{C_1^2}{C_2^2} - \sin^2 \theta)^{1/2} \ pour \ k < k_2$$

Dans ce cas, la forme de la solution (3-30) impose Im $(\frac{C_1^2}{C_2^2} - \sin^2 \theta)^{1/2} > 0$ pour que l'amplitude de ϕ dans le milieu 2 tende vers zéro quand z tend vers moins l'infini.

La variable complexe θ peut s'écrire sous la forme : $\theta = \theta' + i \theta''$. On en déduit que :

(3-35)
$$\frac{\sin \theta = \sin \theta' \cosh \theta'' + i \cos \theta' \sinh \theta''}{\cos \theta = \cos \theta' \cosh \theta'' - i \sin \theta' \sinh \theta''}$$

On peut alors exprimer le potentiel (3-31) de l'onde réfléchie avec la variable θ :

(3-36 a)
$$\phi' = \frac{ik_1}{2} \int_{0.0}^{\beta 0} R(\theta) \exp(ik_1(z+z_0)\cos\theta) H_0^{(1)}(k_1\sin\theta r) \sin\theta d\theta$$

où $R(\theta)$ est le coefficient de réflexion.

A l'aide des relations (3-34) et (3-35), on calcule les bornes de l'intégrale α_0 et β_0 pour que cela corresponde aux valeurs moins l'infini et plus l'infini pour k.

Or, si k tend vers plus ou moins l'infini, sin θ doit tendre vers plus ou moins l'infini également. On en déduit que la partie imaginaire de θ doit tendre vers plus ou moins l'infini.

Cependant γ_1 réel doit alors tendre vers plus l'infini pour que les amplitudes des ondes diminuent quand z augmente. Ceci impose alors que $k_z \to -i\infty$ et par conséquent que $\cos\theta \to +i\infty$.

Dans ce cas θ' doit être égale à $\pm \pi/2$ mais si $\theta' = \pi/2$ pour θ'' tend vers plus l'infini alors $\cos\theta \to -i\infty$, de même $\theta' = -\pi/2$ pour θ'' tend vers moins l'infini.

Les seules valeurs compatibles avec nos exigences sont donc :

 $\theta' = -\pi/2$ si θ'' tend vers plus l'infini, ce qui donne $\sin\theta \to -i\infty$

 $\theta' = \pi/2$ si θ'' tend vers moins l'infini, ce qui donne sin $\theta \to +i\infty$

On en conclut que la borne supérieure de l'intégrale est $\pi/2 - i\infty$ et la borne inférieure est son opposée.

Soit donc à calculer :

(3-36 b)
$$\phi' = \frac{ik_1}{2} \int_{-\pi/2 - i\infty}^{\pi/2 - i\infty} R(\theta) \exp(ik_1(z + z_0) \cos \theta) H_0^{(1)}(k_1 \sin \theta \tau) \sin \theta d\theta$$

où $R(\theta)$ est le coefficient de réflexion.

Pour l'onde spéculaire réfléchie régulière $k \le k_2 \le k_1$ on a :

(3-37a)
$$R(\theta) = \frac{m \cos\theta - (n^2 + \sin^2\theta)^{1/2}}{m \cos\theta + (n^2 - \sin^2\theta)^{1/2}}$$

avec
$$\gamma_2 = -ik_1(\frac{C_1^2}{C_2^2} - \sin^2\theta)^{1/2}$$
, $n = \frac{C_1}{C_2}$ et $m = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

Dans le cas d'une réflexion totale c'est dire pour $k > k_2$ et $k < k_1$ on a :

(3-37b)
$$R(\theta) = \frac{m \cos\theta + i (n^2 - \sin^2\theta)^{1/2}}{m \cos\theta - i (n^2 - \sin^2\theta)^{1/2}} \text{ avec } \gamma_2 = k_1 (\sin^2\theta - \frac{C_1^2}{C_2^2})^{1/2}$$

et on doit donc imposer $\operatorname{Re}(\sin^2\theta - \frac{C_1^2}{C_2^2})^{1/2} > 0$ pour que l'amplitude de ϕ pour 0 > z (3-30) diminue quand z tend vers moins l'infini.

Quand k₁r est grand (c'est à dire quand l'onde réfléchie est à une distance de la source grande devant la longueur d'onde), on utilise la représentation asymptotique de Hankel :

(3-38)
$$H_0^{(1)}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \exp i(u - \frac{\pi}{4})(1 - 1/8iu + ...)$$

avec $u = k_1 r \sin \theta$

On obtient alors au premier ordre en un point P situé en (r,z) quel que soit θ :

(3-39)
$$\phi' = (\frac{k_1}{2\pi r})^{1/2} \int_{-\pi/2 + i\infty}^{\pi/2 + i\infty} \exp(i\pi/4) R(\theta) \exp(i(k_1(z + z_0)\cos\theta + k_1 r\sin\theta)) \sqrt{\sin\theta} d\theta$$

On pose (figure 3-1):

(3-40)
$$z+z_0 = r' \cos \theta_0$$

 $r = r' \sin \theta_0$

où r' la distance S' P et θ_0 est l'angle d'incidence maximum.

On en déduit pour \(\phi' \):

(3-41)
$$\phi' = (\frac{k_1}{2\pi r})^{1/2} \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} \exp(i\pi/4) R(\theta) \exp(i(k_1 r' \cos(\theta - \theta_0))) \sqrt{\sin \theta} d\theta$$

On considère k₁r' grand devant 1, on peut alors appliquer la méthode du col pour résoudre l'intégrale. Celle ci permet de calculer ce type d'intégrale sur un chemin tel que l'intégrale soit presque nulle hors d'un tronçon particulier. L'exposé du principe est explicité en annexe 1.

Appliquons la méthode du col pour calculer l'intégrale correspondant au potentiel de l'onde réfléchie. Tout d'abord, on cherche l'équation du nouveau chemin.

On pose:

$$G = k_1 r'$$

 $f(\theta) = i f2(\theta) = i cos(\theta - \theta_0)$

On cherche le point de selle :

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}\theta} = 0 \Leftrightarrow -\sin(\theta - \theta_0) = 0 \Leftrightarrow \theta = \theta_0$$

D'après l'annexe 1, on écrit :

$$f2(\theta) = \cos(\theta - \theta_0) = f2(\theta_0) + i s^2 = 1 + i s^2$$

Le chemin correspond aux valeurs réelles de s. On pose $\theta=\theta'+i\theta''$ dans le plan de la variable complexe θ .

L'équation du chemin s'obtient en prenant la partie réelle de chaque côté de l'égalité suivante :

$$\sin\theta\sin\theta_0 + \cos\theta\cos\theta_0 = 1 + is^2$$
 or
$$(3-42) \sin\theta = \sin\theta' \cosh\theta'' + i\cos\theta' \sinh\theta'' + i\cos\theta' \sinh\theta'' + i\sin\theta' \sinh\theta''$$
 donc

(3-43) $\cos(\theta' - \theta_0) \cosh \theta'' = 1$ est l'équation du chemin de selle C' (figure 3-5).

Ce chemin coupe l'axe des abscisses en $\theta=\theta_0$ avec un angle de 45°. Il part de $-\frac{\pi}{2}+\theta_0+i\infty$ et va jusque $\frac{\pi}{2}-\theta_0-i\infty$. On remarque qu'en passant du chemin C au chemin de selle C', on lève la singularité de l'intégrale en zéro puisque C' ne passe pas par 0.

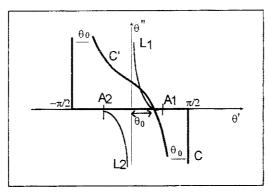


figure 3-5: chemin d'intégration pour l'onde réfléchie spéculaire régulière : $k < k_2$ Al et A2 situés respectivement en $\theta = \pm \arcsin(\frac{C_1}{C_2})$

Avant d'estimer l'intégrale, nous allons étudier en détail la possibilité du remplacement de C par C'. Pour cela on doit analyser les singularités rencontrées par le terme sous l'intégrale lors de la déformation continue de C en C'.

Dans le cas général, $R(\theta)$ a deux valeurs pour chaque θ dépendant du signe choisi pour la racine $\sqrt{(\frac{C_1}{C_2})^2 - \sin^2 \theta}$.

On a deux valeurs possibles pour le coefficient de réflexion suivant que $\operatorname{Im}((\frac{C_1}{C_2})^2 - \sin^2 \theta)^{1/2})$

est positif ou négatif. On considère alors deux plans complexes distincts θ placés l'un au dessus de l'autre formant ainsi deux feuillets de Riemann. Sur chacun de ces plans $R(\theta)$ a une seule valeur.

On pose $\operatorname{Im}(((\frac{C_1}{C_2})^2 - \sin^2\theta)^{1/2}) > 0$ pour le plan du dessus et $\operatorname{Im}(((\frac{C_1}{C_2})^2 - \sin^2\theta)^{1/2}) < 0$ pour le plan du dessous.

Les deux feuillets se rejoignent sur les lignes L_1 et L_2 de branchement $Im(((\frac{C_1}{C_2})^2-\sin^2\theta)^{1/2})=0$. Ces lignes commencent aux points de branchement A_1 et A_2 situés respectivement en $\theta=\pm \arcsin(\frac{C_1}{C_2})$ qui sont des points singuliers pour $R(\theta)$.

si $\text{Im}(((\frac{C_1}{C_2})^2-\sin^2\theta)^{1/2})=0$ alors $(\frac{C_1}{C_2})^2-\sin^2\theta=x^2$ avec x^2 réel positif. On en déduit facilement que $\sin\theta\to\pm i\infty$ quand $x^2\to\infty$, et donc que $\sin\theta\to0$ on a $\theta^*\to\pm\infty$ d'après

Il est important de préciser que le chemin initial C contourne les points singuliers A_1 et A_2 par le bas et le haut respectivement afin d'éviter les coupures L_1 et L_2 .

(3-42). On peut ainsi tracer L_1 et L_2 .

On a vu que pour le cas de l'onde réfléchie régulière, on doit prendre $Im((\frac{C_1}{C_2})^2 - \sin^2\theta)^{1/2}) > 0 \ .$ On impose alors au chemin C d'intégration de se situer dans le plan de dessus.

La déformation de C en C' est possible seulement quand les extrémités des chemins se situent sur le même feuillet sachant qu'on passe d'un feuillet à l'autre en coupant L_1 . Ici, $\theta_0 < \alpha = \arcsin(C_1/C_2)$ et donc le chemin C' coupe deux fois la ligne de branchement L_1 . Dans ce cas, C' se trouve dans le feuillet de Riemann supérieur à l'exception d'une petite portion et la transformation C C' ne pose pas de problème. On peut dès lors calculer l'intégrale sur le nouveau chemin.

Le champ au point d'observation est constitué d'ondes planes réfléchies sur l'interface à des angles proches de θ_0 . En effet, le chemin sur lequel la phase est constante est aussi le chemin sur lequel le terme sous l'intégrale diminue le plus rapidement quand on s'éloigne du point de selle. Ceci veut dire que la partie du chemin de selle importante est celle proche du point de selle θ_0 .

D'après l'annexe 1, on a :

$$\Phi(0) = \sqrt{\frac{-2}{f''(\theta_0)}} F(\theta_0)$$

où, dans le cas présent :

$$F(\theta_0) = \exp(i\frac{\pi}{4}) \sqrt{\frac{k_1}{2\pi r' \sin \theta_0}} R(\theta_0) \sqrt{\sin \theta_0}$$

$$f''(\theta_0) = -i$$

et donc :

$$\Phi(0) = \sqrt{-2i} \exp(i\frac{\pi}{4}) \sqrt{\frac{k_1}{2\pi r'}} R(\theta_0) = \sqrt{\frac{k_1}{\pi r'}} R(\theta_0)$$

On obtient finalement:

(3-44)
$$\phi' = \frac{\exp(ik_1r')}{r'}R(\theta_0)$$

Cette expression correspond au potentiel de l'onde réfléchie régulière c'est à dire pour le cas où l'angle d'incidence est inférieur à l'angle de réflexion totale et donc où l'onde latérale est absente.

3-3.3.<u>EXPRESSION MATHEMATIQUE POUR L'ONDE LATERALE</u> (BREKHOVSKIKV 1980)

Dans l'analyse de l'onde réfléchie faites ci dessus, nous avons tenu compte du fait que $R(\theta)$ est une fonction analytique multivalente (ici 2 valeurs) mais pas du cas pour lequel on trouve des angles $\theta \geq \alpha$ c'est à dire du cas $\theta_0 \geq \alpha$ qui est la condition d'existence de l'onde latérale. On verra alors qu'on est dans l'obligation d'ajouter un terme à l'expression de l'onde réfléchie régulière. Ce terme correspond à l'onde latérale. On établira d'abord le fondement

mathématique de l'apparition de ce terme, puis ayant obtenu son expression on pourra en déduire sa signification physique.

Si on rencontre des points singuliers en passant du chemin classique C au chemin utilisé pour le point de selle, on doit ajouter au potentiel de l'onde réfléchie le résidu s'il s'agit d'un pôle ou, en particulier ici, l'intégrale sur les bords de la ligne de coupure dans le cas d'un point de branchement.

Si $\theta > \alpha = \pm \arcsin(\frac{C_1}{C_2})$ angle de réflexion interne, on ajoute un terme au potentiel de l'onde réfléchie car quand on déforme le chemin C en C' on passe par une singularité.

En effet si $\theta > \alpha$, la ligne L_1 n'est traversée qu'une seule fois par C' et on passe alors du feuillet de Riemann supérieur au feuillet inférieur de façon définitive ce qui veut dire que les extrémités de C et de C' ne sont plus dans le même feuillet. Or, la transformation continue de C à C' n'est possible que si leurs chemins sont situés sur le même feuillet au moins au début et à la fin (**Brekhovskikv 1980**). Cependant, il est possible d'éviter de couper L_1 en ajoutant à C' un contour C" qui contourne A_1 . La figure 3-6a montre le procédé. On part de B (feuillet supérieur), on revient en B (feuillet inférieur) en parcourant C" et en coupant une seule fois L_1 . Il suffit ensuite de suivre C' pour recouper L_1 et se retrouver sur C' mais dans le feuillet supérieur.

De cette façon, le début et la fin du chemin C' se trouve à nouveau dans le feuillet supérieur.

L'expression de l'onde réfléchie est alors constituée de deux parties. La première correspond bien à l'onde réfléchie régulière décrite comme précédemment par l'intégration sur le chemin de selle C'. La deuxième partie correspond à l'onde latérale donnée par l'intégrale sur le contour C''.

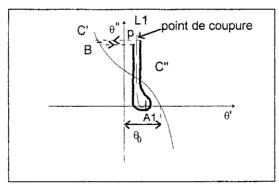


figure 3-6 a: chemin d'intégration C"et C'

Ainsi si $\theta > \alpha$, l'onde latérale existe et elle correspond à l'intégrale sur le contour C", c'est à dire de chaque côté de la ligne de branchement L1 (figure 3-6 b). Sur la ligne L1, la partie imaginaire de la racine $\sqrt{(\frac{C_1}{C_2})^2 - \sin^2 \theta}$ est nulle. On a vu (3-37) que pour k < k2 on doit imposer $\operatorname{Im}(((\frac{C_1}{C_2})^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}) > 0 \quad \text{et que pour } k > k2 \quad \text{on doit imposer}$ $\operatorname{Re}((\sin^2 \theta - (\frac{C_1}{C_2})^2)^{1/2}) > 0. \text{ Ici on contourne L1 ce qui veut dire qu'on reste dans un même}$ feuillet sur tout le chemin et que par conséquent les deux conditions précédentes doivent être imposées partout. On a donc $\operatorname{Im}(((\frac{C_1}{C_2})^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}) > 0 \quad \text{et } \operatorname{Re}((\sin^2 \theta - (\frac{C_1}{C_2})^2)^{1/2}) > 0 \quad \text{sur } C''$ ce qui conduit à choisir l'égalité suivante (plutôt que son opposé):

$$\left(\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2 - \sin^2\theta\right)^{1/2} = +i\left(\sin^2\theta - \left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2\right)^{1/2}$$

On peut ainsi réécrire $R(\theta)$ (3-37b) à l'aide de cette égalité, on le note alors $R^+(\theta)$.

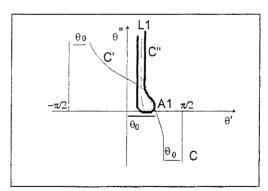


figure 3-6 b: chemin d'intégration pour l'onde latérale C"

L'onde latérale s'écrit sur le contour C":

$$\begin{aligned} \text{(3-45)} \quad & \phi_{\text{lat}} = (\frac{k_1}{2\pi r})^{1/2} \int\limits_{i\infty}^{Al} & \exp(i\pi/4) R(\theta) \exp(i(k_1 r' \cos(\theta - \theta_0))) \sqrt{\sin\theta} d\theta \\ & + (\frac{k_1}{2\pi r})^{1/2} \int\limits_{Al}^{i\infty} & \exp(i\pi/4) R^+(\theta) \exp(i(k_1 r' \cos(\theta - \theta_0))) \sqrt{\sin\theta} d\theta \end{aligned}$$

où $R(\theta)$ et $R^+(\theta)$ sont donc les valeurs du coefficient de réflexion de chaque côté de L1 qui diffèrent seulement par le signe la racine carrée.

On peut recombiner l'intégrale de la façon suivante et se ramener ainsi à une intégrale régulière sur L1 :

$$\begin{aligned} &\textbf{(3-46)} \ \, \phi_{tat} = (\frac{k_1}{2\pi r})^{1/2} \int\limits_{A1}^{i\infty} \exp(i\pi/4)\Phi(\theta) \exp(i(k_1 r' \cos(\theta-\theta_0))) \sqrt{\sin\theta} d\theta \\ &\text{où} \\ &\textbf{(3-47)} \ \, \Phi(\theta) = R^+(\theta) - R(\theta) \ \, = \frac{4m \, \cos\theta (n^2 - \sin^2\theta)^{1/2}}{m^2 \, \cos^2\theta - n^2 + \sin^2\theta} \ \, \text{avec} \ \, n = \frac{C_1}{C_2} \ \, \text{et} \ \, m = \frac{\rho_2}{\rho_1} \end{aligned}$$

On calcule cette intégrale par une méthode basée sur la méthode du col (annexe 1). Cela consiste toujours à déformer L1 en un nouveau chemin T pour k_1r' grand (figure 3-7). De même que pour la méthode du col, on cherche un chemin tel que $f1 = \text{Im } (\cos(\theta-\theta_0))$ a un maximum en un point de ce chemin et diminue le plus vite possible quand on s'éloigne de ce point. Le chemin correspond alors à une ligne de "steepest descent" pour f1 et représente une ligne de valeur constante pour $f2 = \text{Re } (\cos(\theta-\theta_0))$ (annexe 1).

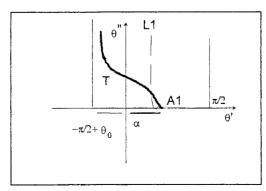


figure 3-7 : chemin d'intégration T pour l'onde latérale

Mais ici, on ne calcule pas le point de selle, on impose seulement au nouveau chemin de partir du point de branchement A1 connu (qui n'est pas un point singulier pour l'intégrale (3-46)) et ensuite de suivre la ligne de "steepest descent".

On pose ainsi:

$$f2(\theta) = \text{Re} (\cos(\theta - \theta_0)) = \text{constante}$$

que l'on peut fixer en $\theta = \alpha$ réel, par conséquent $\cos(\alpha - \theta_0)$ est réel et constant. On obtient alors le chemin T (figure 3-7):

(3-48)
$$\cos(\theta' - \theta_0) \cosh \theta'' = \cos(\alpha - \theta_0)$$

Sur le chemin T on a donc :

$$\cos(\theta - \theta_0) = \cos(\alpha - \theta_0) - i \sin(\theta' - \theta_0) \sinh \theta''$$

De plus on ne rencontre pas de singularité (pôles, points de branchement) en passant de L1 à T, on peut donc exprimer l'onde latérale (3-46) de la façon suivante (3-49) :

$$\phi_{\text{lat}} = (\frac{k_1}{2\pi r})^{1/2} \int\limits_{T} -\exp(i(k_1 r' \cos(\alpha - \theta_0)) + i\pi/4) - \Phi(\theta) \exp(-k_1 r' \sin(\theta_0 - \theta') \sinh \theta'') \sqrt{\sin \theta} d\theta$$

Comme $k_1 r'$ est grand, l'exposant $-k_1 r' \sin(\theta' - \theta_0) \sinh \theta''$ ne joue un rôle important que pour θ'' petit. On peut donc prendre $\theta' = \alpha$ comme point de départ du chemin et θ'' petit dans l'exposant d'où l'approximation suivante :

$$\sin(\theta_0 - \theta') \sinh \theta'' = \sin(\theta_0 - \alpha)\theta''$$

A ce niveau de l'approximation, cela revient à prendre $\theta = \alpha$ partout sauf dans la racine carrée de $\Phi(\theta)$ car $(\frac{C_1}{C_2})^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}$ tend vers zéro en ce point.

On calcule donc l'approximation de $((\frac{C_1}{C_2})^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}$ à un ordre supérieur :

(3-50)
$$(n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} = (-2in \cos \alpha \theta'')^{1/2} = -\sqrt{2} \exp(-i\pi/4)(n \cos \alpha \theta'')^{1/2}$$

Tout cela conduit à l'expression de l'onde latérale sous la forme d'une intégrale de 0 à l'infini avec la nouvelle variable d'intégration θ "car $d\theta = id\theta$ ":

(3-51)
$$\phi_{lat} = \left(\frac{-4in\sqrt{k_1}}{m\sqrt{\pi r \cos\alpha}}\right) \exp(i(k_1 r' \cos(\alpha - \theta_0))) \int_0^\infty \exp(-k_1 r' \sin(\theta_0 - \alpha)\theta'') \sqrt{\theta''} d\theta''$$

On effectue un changement de variable pour mettre l'intégrale sous une forme qui permettra de l'évaluer facilement :

$$\sqrt{\theta''} = x$$

$$dx = 1 / 2(\theta'')^{-1/2} d\theta''$$

On calcule alors l'intégrale sachant que :

$$\int_{0}^{\infty} x^{2} \exp(Gx^{2}) dx = 1/2(\frac{\pi}{G^{3}})^{2}$$

On obtient comme expression finale pour l'onde latérale :

(3-52)
$$\phi_{lat} = \frac{-2in \exp(ik_1 r' \cos(\alpha - \theta_0))}{k_1 m (r \cos\alpha)^{1/2} (r' \sin(\alpha - \theta_0))^{3/2}}$$

Avec les notations de la figure 3-18, on remarque que :

$$z + 1 = r' \cos \theta_0$$

$$r = r' \sin \theta_0$$

$$k_1 r' \cos(\alpha - \theta_0) = k_1 (L_0 + L) + k_1 n L_1$$

$$r' \sin(\alpha - \theta_0) = L_1 \cos \alpha$$

on écrit le potentiel de l'onde latérale sous la forme :

(3-53)
$$\phi_{iat} = \frac{-2in \exp(ik_1 r' \cos(\alpha - \theta_0))}{k_1 m(r')^2 (\sin \theta_0 \cos \alpha \sin^3(\alpha - \theta_0))^{1/2}}$$

Cette écriture du potentiel se prête bien à la compréhension de sa signification à laquelle on s'intéresse maintenant.

On remarque ainsi que le long d'une direction donnée l'amplitude décroît en fonction de l'inverse du carrée de la distance r'.

De plus, on s'aperçoit que le front d'onde s'écrit :

$$r'\cos(\alpha - \theta_0) = r\sin\alpha + (z+1)\cos\alpha = k_1(L_0 + L) + nL_1 = constante$$

avec α constant. Ce front est conique dans l'espace à cause de la symétrie du problème et cela correspond bien au lieu des points P de la figure 3-2 et de la figure 3-8. C'est ce front d'onde que l'on a désigné sous le nom d'onde de tête de Schmidt au chapitre 1. Il correspond en fait à la réémission dans le fluide 1 de l'onde latérale.

On peut aussi écrire l'onde latérale en fonction des distances connues (figure 3-8) :

(3-54)
$$\phi_{lat} = \frac{-2in}{k_1 m (n^2 - 1)(r)^{1/2} L_1^{-3/2}} exp(ik_1(L_0 + L) + ik_1 nL_1)$$

Le terme $k_1(L_0 + L) + nL_1$ peut alors être considéré comme le déphasage le long du chemin SABP qui connecte la source et le point d'observation.

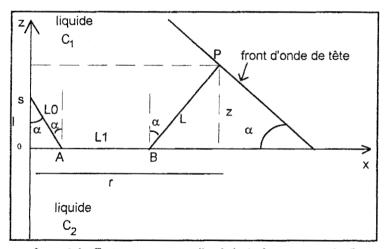


figure 3-8 : Trajet parcouru par l'onde latérale pour atteindre P

3-4. ONDES LATERALES POUR L'INTERFACE FLUIDE-SOLIDE

Si on remplace le milieu liquide 2 par un solide, on modifie les conditions à l'interface et par suite le coefficient de réflexion. D'autre part, on a deux ondes latérales générées respectivement aux angles de réflexion interne pour les ondes longitudinales et transverses.

On se propose dans ce paragraphe de déterminer l'expression de l'onde latérale correspondant au cas des ondes longitudinales en sachant qu'on procède de la même manière pour l'onde latérale correspondant au cas des ondes transverses.

Il est également entendu que ce paragraphe s'appuie sur la section 3-3.

On exprime le coefficient de réflexion calculé à partir des conditions à la paroi (1-59) par

(3-55)
$$R(\theta) = \frac{D_{-}}{D_{+}}$$

où
$$D_z = \rho_2 \cos\theta \left[(b_T^2 - \sin^2\theta)^2 + 4b_L b_T \sin^2\theta \right] \pm \rho_1 b_L (b_T^2 + \sin^2\theta)^2$$

est similaire à l'équation de Stoneley (1-62) et est obtenu en posant :

$$\frac{C_1}{C} = \sin \theta$$
 (loi de réfraction),

$$\begin{split} &b_{\rm L} = (n_{\rm L}^2 - \sin^2\theta)^{\rm L/2} \\ &b_{\rm T} = (n_{\rm T}^2 - \sin^2\theta)^{\rm L/2} \end{split} \ \ {\rm et} \ \ n_{\rm L} = \frac{C_{\rm L}}{C_{\rm L}} \ , \ \ n_{\rm T} = \frac{C_{\rm L}}{C_{\rm T}} \ {\rm les \ indices \ de \ r\'efraction \ acoustiques}. \end{split}$$

Les singularités de $R(\theta)$ correspondant aux points de branchement sont :

(3-56)
$$\alpha_L = \pm \sin^{-1} n_L$$
 et $\alpha_T = \pm \sin^{-1} n_T$ et sont les angles de réflexion totale.

On calcule:

(3-57)
$$\Phi_{t}(\theta) = R^{+}(\theta) - R(\theta)$$

 $R(\theta)$ et $R^+(\theta)$ sont les valeurs du coefficient de réflexion de chaque côté de la ligne de branchement et diffèrent seulement par le signe de la racine carrée b_L . Dans $\Phi_L(\theta)$ on peut fixer $\theta = \alpha_L$ sauf dans la racine carrée dont on calcule l'approximation :

(3-58)
$$b_x = (n_x^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} = (-2in_x \cos \alpha_x \theta'')^{1/2} = -\sqrt{2} \exp(-i\pi/4)(n_x \cos \alpha_x \theta'')^{1/2}$$

On peut en déduire une approximation de $\Phi_i(\theta)$:

(3-59)
$$\Phi_{L}(\theta) = \frac{-4\rho_{2}\cos\alpha_{L}\rho_{1}b_{L}(b_{T}^{2} - \sin^{2}\alpha_{L})^{2}(b_{T}^{2} + \sin^{2}\alpha_{L})^{2}}{\rho_{2}^{2}\cos^{2}\alpha_{L}(b_{T}^{2} - \sin^{2}\alpha_{L})^{4}}$$

en simplifiant on obtient:

(3-60)
$$\Phi_{L}(\theta)\sqrt{\sin\theta} = \frac{-4\sqrt{2}\exp(-i\pi/4)\rho_{1}n_{1}^{4}n_{L}\theta^{n1/2}}{\rho_{1}\cos^{1/2}\alpha_{L}(n_{2}^{2}-2n_{1}^{2})^{2}}$$

d'où, en remplaçant $\Phi(\theta)$ par l'expression de $\Phi_L(\theta)$ dans l'expression de l'onde latérale (3-49), on obtient (3-61):

$$\phi^L_{lat} = \frac{-4i\rho_1 n_T^4 n_L \sqrt{k_I}}{\rho_2 \sqrt{\pi r \cos \alpha_I} \left(n_T^2 - 2n_L^2\right)^2} \exp(i(k_I r' \cos(\alpha_L - \theta_0))) \exp(-k_I r' \sin(\theta_0 - \alpha_L)\theta'') \sqrt{\theta''} d\theta''$$

En procèdant de la même manière que pour le cas liquide liquide, on aboutit à la forme équivalente de (3-53) pour le cas solide liquide :

(3-62)
$$\phi^{L}_{lat} = \frac{-2i\rho_{1}n_{T}^{4}n_{L}}{\rho_{2}\sqrt{r\cos\alpha_{L}(n_{T}^{2}-2n_{L}^{2})^{2}k_{1}(r'\sin(\theta_{0}-\alpha_{L}))^{3/2}}} \exp(i(k_{1}r'\cos(\alpha_{L}-\theta_{0})))$$

Comme pour le cas liquide, l'amplitude décroît en (1/r')2 avec la distance de la source. Les surfaces d'ondes sont des cônes :

$$r' \cos(\alpha_L - \theta_0) = constante$$

Pour un angle d'incidence $\theta_0 \ge \alpha_L$ ou α_T il existe donc une onde latérale qui se propage le long de l'interface avec une vitesse C_L ou C_T et dont la présence est révélée par une onde de tête de Schmidt rayonnée dans le liquide.

3-5. OBSERVATION EXPERIMENTALE DES ONDES LATERALES

3-5.1.<u>VISUALISATION DES ONDES LATERALES</u> <u>DANS UN MILIEU TRICOUCHE LIQUIDE</u> (Derbesse 1997)

3-5.1.1.Le dispositif

Les trois fluides ont nécessairement été choisis non miscibles afin de pouvoir réaliser les trois couches, et optiquement transparents pour satisfaire les premières exigences de la visualisation. Le premier fluide situé en haut est celui dans lequel on place la source à miniétincelle, il doit donc être ininflammable. Enfin, le deuxième fluide doit avoir une vitesse du son supérieure à celle du premier fluide afin de pouvoir envisager la génération d'une onde latérale dans le premier milieu.

Pour la couche supérieure on utilise une huile minérale appelée Marcol 82 dont la vitesse du son est de 1360 m/s et la densité de $0.844~g/cm^3$. Pour la couche intermédiaire on utilise une solution aqueuse de sel inorganique, le chlorure de calcium [CaCl₂]. Le sel accroit la vitesse du son dans l'eau qui atteint 1695 m/s pour une masse volumique de $1.31~g/cm^3$. La couche inférieure est, quant à elle, constituée de tétrachlorure de carbone [CCl₄] où la vitesse du son est relativement faible de 950 m/s et la masse volumique assez élevée de $1.594~g/cm^3$.

3-5.1.2.Les expériences

Les deux paramètres essentiels de l'étude sont l'épaisseur e de la couche intermédiaire d'une part et la distance d entre les électrodes de la source et la première interface d'autre part.

La visualisation de la **planche 3-1a** montre la diffraction acoustique dans le cas du milieu tricouche liquide avec une épaisseur e de 1.5 cm pour une distance d de 0.6 cm. La visualisation de la **planche 3-1b** montre le cas pour lequel la distance d est de 1.5 cm pour une épaisseur e de 2.5 cm.

Identifions ces ondes à l'aide de la **planche 3-2** qui est reproduction de la **planche 3-1b** sur laquelle les différentes ondes observées ont été numérotées pour faciliter les explications.

On remarque tout d'abord sur ce cliché, à gauche de la photographie, de nombreuses ondes dues aux échos sur les parois de la cuve et dont on ne tiendra pas compte.

Ensuite, on reconnait aisément l'onde incidente (1), la réflexion spéculaire (2) ainsi que l'onde transmise (3) du milieu 1 au milieu 2.

Le front d'onde noté (4) est celui qui nous intéresse. En effet, il correspond à l'onde de tête qui témoigne de la propagation de l'onde latérale à l'interface entre les deux liquides avec une vitesse C2. On voit en particulier qu'elle est plus atténuée qu'une onde transmise ou réfléchie ce qui est caractéristique d'une onde de surface. La partie réémise correspond alors uniquement à l'énergie perdue dans le milieu 1 au cours de la propagation. En ce qui concerne sa forme, elle est identique à l'onde latérale de la figure 3-2. Elle est tangente à l'onde réfléchie (2) et fait un angle $\alpha = \arcsin\frac{C_1}{C_2} = \arcsin\frac{1360}{1695} = 53^\circ$ avec l'interface. Elle apparait dans le plan de coupe comme une droite qui est la trace d'une surface conique d'axe vertical étant donné la symétrie cylindrique du problème.

Les fronts d'ondes notés (6) et (8) sont de simples réflexions internes à la deuxième couche, la première sur l'interface inférieure, la deuxième sur l'interface supérieure.

Les fronts d'ondes (5) et (9) sont les ondes transmises dans la troisième couche par les ondes (3) et (8) du milieu 2.

Enfin le front d'onde (7) observé dans la première couche est la transmission de l'onde (6) transmise au milieu 1.

On voit que l'on n'observe pas d'onde latérale dans le milieu à l'interface inférieure car la vitesse du son dans le milieu inférieur est plus petite que celle du milieu intermédiaire.

Revenons maintenant à la **planche 3-1** pour étudier l'influence des paramètres telles que l'épaisseur de la couche intermédiaire et la distance entre la source et l'interface. Ces deux paramètres sont indépendants ce qui permet de voir l'influence de chacun de ces paramètres à partir seulement de deux photographies sur lesquelles les deux paramètres varient en même temps.

On considère en premier la variation de l'épaisseur de la couche intermédiaire entre la planche 3-1 a et la planche 3-1 b.

Quand l'épaisseur de la couche intermédiaire varie, on constate que l'écart entre le front d'onde (7) et (4) change. Plus l'épaisseur de la couche est faible plus cet écart diminue. L'explication de ce phénomème est simple si on considère le fait que la vitesse dans le milieu 2 est assez importante et que de plus, dans le cas d'une faible épaisseur, les réflexions internes à ce milieu vont se faire rapidement et réémettre quasi simultanément dans le premier milieu. Cela se

traduit sur les images par un rapprochement des front d'onde (3) et (6) d'une part et (4) et (7) d'autre part.

Si on avait une plaque solide fine avec une épaisseur de l'ordre du millimètre, on comprend qu'on aurait alors un phénomène d'interférence. Les ondes deviendraient dispersives. C'est le cas des ondes de Lamb qui seront étudiées au chapitre suivant.

Pour l'observation de l'onde latérale, il est donc préférable d'avoir une couche intermédiaire suffisamment épaisse.

On considère en second lieu le fait que la distance entre la source et l'interface varie sur les planches 3-1 a et 3-1 b. On remarque que plus la source est proche de l'interface, plus l'onde latérale est générée rapidement ce qui est logique puisque l'angle d'incidence atteint alors plus vite l'angle de réflexion totale α . Pour une bonne observation, le choix de la distance source interface se porte donc sur une distance source interface d'environ I cm.

Sur la planche 3-2, on a également tracé l'angle d'incidence et l'angle de réémission pour l'onde latérale. On retrouve bien pour ces angles la valeur de l'angle de réflexion totale α .

3-5.2. <u>VISUALISATION DES ONDES LATERALES</u> <u>A UNE INTERFACE LIQUIDE SOLIDE</u>

3-5.2.1.Dispositif

On a placé une plaque d'épaisseur 5 mm en position verticale dans la cuve d'expérience. On a placé les électrodes de la source à 1 cm au dessus de la plaque de verre verticale et dans le plan médian de la plaque.

3-5.2.2. Analyse des résultats

On visualise sur la **planche 3-3** l'ensemble des fronts d'ondes rayonnés. Le front d'onde incident et le front d'onde réfléchi sont facilement reconnaissables.

Ensuite on voit un front d'onde très marqué du côté du liquide qui est une droite tangente au front d'onde réfléchi et qui coupe l'interface avec un certain angle.

On a également un autre front d'onde tangent au front d'onde réfléchi mais celui-ci est plus atténué et plus rapide que le premier. L'angle qu'il forme avec l'interface est alors nettement inférieur au précédent.

On identifie le premier front d'onde comme étant l'onde de Schmidt liée à l'onde latérale transverse qui se propage dans le verre à la vitesse C_T = 3100 m / s . L'angle formé avec l'interface est alors de α_T = 28°.

Le front d'onde le plus rapide est identifié de la même manière en mesurant la vitesse à partir de la photographie. Il correspond lui a l'onde latérale longitudinale qui se propage à la vitesse $C_L=5060~\text{m}$ / s dans le verre parallèlement à l'interface. Son angle d'émission est $\alpha_L=17^\circ$.

Il est intéressant de faire quelques remarques concernant ce qui se passe du côté de la plaque de verre.

On voit bien sûr l'onde incidente par transparence à travers la plaque mais on remarque surtout l'onde latérale transverse ainsi que l'onde réfléchie. Le fait d'avoir une plaque, c'est à dire une petite dimension dans la direction perpendiculaire au plan de la visualisation, donne la possibilité de rendre compte du caractère sphérique des ondes. Le phénomène est bien tridimensionnel mais la visualisation représente un plan de coupe. Si on regarde l'ensemble de la visualisation, on s'aperçoit que cette onde latérale forme un dièdre dont le sommet est situé à l'interface. Le dièdre visualisé est en fait la trace de la surface conique dans le plan de coupe.

En revanche, on remarque qu'on ne voit pas ici l'onde transverse transmise dans le verre.

Dans le but de voir cette onde transmise, on a alors remplacé la plaque de verre par une plaque de plexiglass ayant une plus grande épaisseur (1 cm) et un module d'Young plus faible. La planche 3-4 montre que dans ce cas on voit, en plus de l'onde latérale transverse, l'onde transverse transmise dans le solide. La vitesse de l'onde latérale est de l'ordre de 2580 m/s et l'angle de réémission (ou de réflexion totale) qui est de l'ordre de 35 degrés. On note ici l'absence d'onde latérale longitudinale probablement très faible et non visible à ce niveau de sensibilité optique.

ANNEXE 1

LA METHODE DU COL

(BREKHOVSKIKV 1980)

D'une manière générale cette méthode sert à estimer les intégrales de la forme :

(a)
$$I = \int_{C} F(\xi) \exp(Gf(\xi)) d\xi$$

avec G grand réel positif. C est le chemin d'intégration dans le plan de ξ , $f(\xi)$ et $F(\xi)$ sont des fonction analytiques de la variable complexe ξ . Le chemin peut être déformé dans certaines limites, sans changer la valeur de l'intégrale. On a :

$$f(\xi) = f1(\xi) + i f2(\xi)$$

On choisit le chemin tel que f1 a un maximum en un point et diminue le plus vite possible quand on s'éloigne de ce point. f1 et f2 ont la propriété dans le plan complexe que ces lignes de "steepest descent" pour l'une représentent les lignes de valeurs constantes pour l'autre. Le point du chemin qui est un maximum pour f1 est appelé point de selle ("saddle point"). La dérivée de f1 en ce point est nulle et f2 est constante sur ce chemin, sa dérivée est nulle. Le rôle essentiel sera donc joué par une petite partie du chemin d'intégration autour du point de selle.

Si on a un point de selle en $\xi = \xi_0$, on écrit :

(b)
$$f(\xi) = f(\xi_0) - s^2$$

ce qui donne :

$$f2(\xi) = f2(\xi_0)$$

 $f1(\xi) = f1(\xi_0) - s^2$

s est réel, le chemin coincide avec l'axe réel dans le plan s. (on pourrait considérer s complexe)

On fait un changement de variable de ξ en s et on définit :

$$F(\xi)d\xi/ds \equiv \Phi(s)$$

En prenant également en compte (b), on peut réécrire l'intégrale (a) qui prend la forme suivante le long du chemin de selle T:

$$I = \exp(Gf(\xi_0)) \int_0^\infty \exp(-Gs^2)\Phi(s)ds$$

 ρ est grand, par conséquent seules les petites valeurs de s sont importantes. On écrit le développement limité pour ϕ :

$$\Phi(s) = \Phi(0) + \Phi'(0)s + ...$$

de plus on sait que :

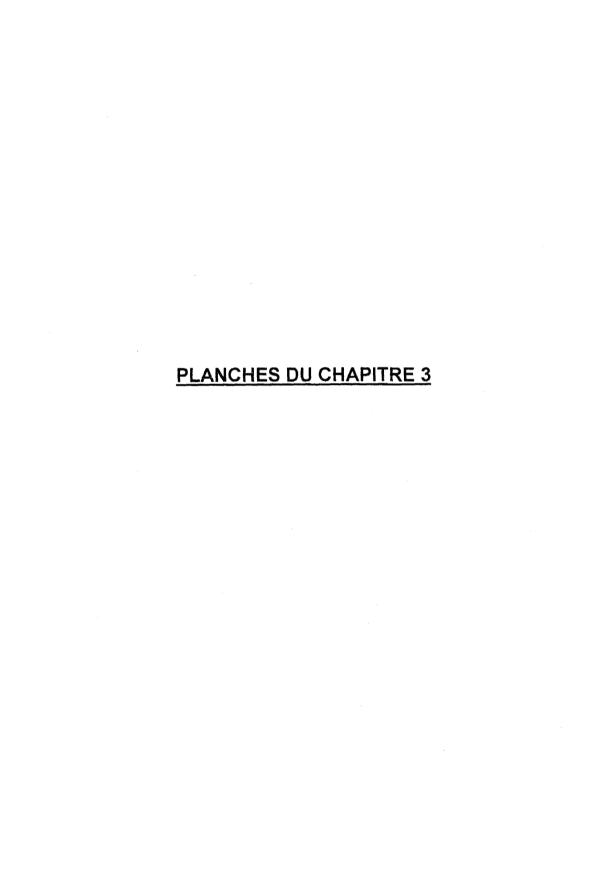
$$\int_{0}^{\infty} \exp(-Gs^{2}) ds = \sqrt{\frac{\pi}{G}}$$

On peut alors donner une approximation de l'intégrale (a):

(c)
$$I = \exp(Gf(\xi_0))\sqrt{\frac{\pi}{G}}(\Phi(0)+...)$$

avec
$$\Phi(0) = \sqrt{\frac{-2}{f''(\xi_0)}} F(\xi_0)$$
 (Brekhovskikv 1980)

En effet si la fonction F(s) varie suffisamment lentement en comparaison du terme en exponentiel, c'est à dire si ses dérivées sont suffisamment petites, alors on peut se limiter au premier terme de (c).



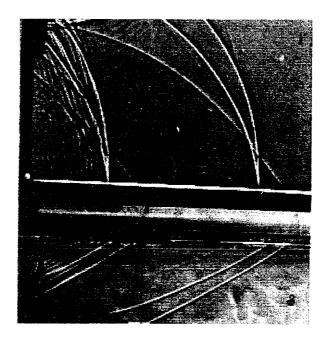
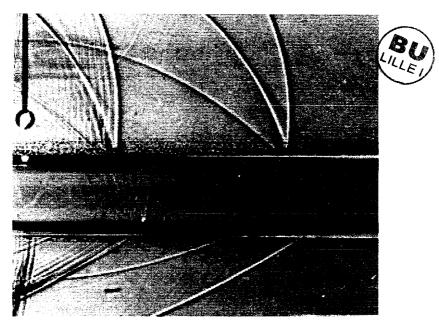
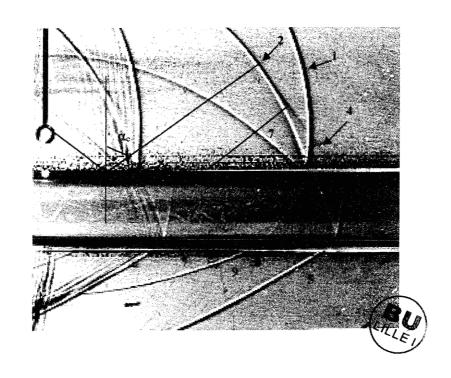


PLANCHE 3-1 A: Ondes latérales dans un milieu tricouche
L'épaisseur de la couche intermédiaire est de 1,5 cm
et la distance électrodes interface est de 0,6 cm.



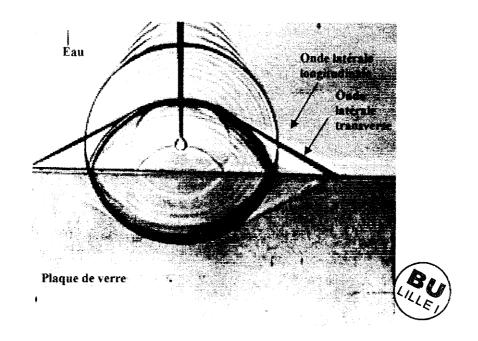
<u>PLANCHE 3-1 B</u>: Ondes latérales dans un milieu tricouche L'épaisseur de la couche intermédiaire est de 2,5 cm et la distance électrodes interface est de 1,5 cm



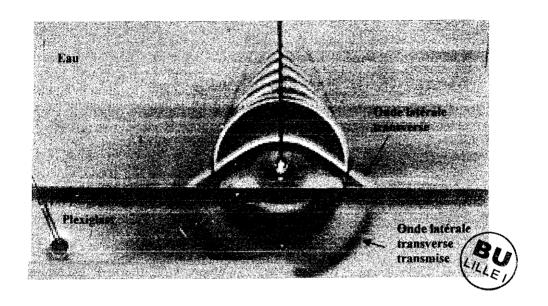


<u>PLANCHE 3-2</u> : ONDES LATERALES DANS LE CAS D'UN MILIEU TRICOUCHE LIQUIDE





<u>PLANCHE 3-3</u>: ONDES LATERALES DANS LE CAS D'UNE PLAQUE DE VERRE D'EPAISSEUR 0.5 CM



<u>PLANCHE 3-4</u>: ONDES LATERALES DANS LE CAS D'UNE PLAQUE DE PLEXIGLASS D'UNE EPAISSEUR 1 CM



CHAPITRE 4 : LES ONDES DE LAMB



4-1.INTRODUCTION

On a vu au chapitre 1, le modèle du demi espace mais celui-ci n'est pas le seul qui soit utile pour comprendre les mécanismes de la diffusion acoustique. En pratique, les structures étudiées sont surtout des plaques et des coques. On va donc exposer ici, la question relative aux plaques élastiques.

Dans la première partie de ce chapitre, on se propose de traiter la théorie de la diffraction acoustique par une plaque. Les ondes qui correspondent aux modes propres de vibration d'une plaque élastique plane d'épaisseur finie dans le vide sont connues comme étant des ondes de Lamb. Elles deviennent des ondes de Rayleigh dans le cas où l'épaisseur tend vers l'infini

On a vu au chapitre 2 qu'on dispose d'un outil efficace dans l'association d'un système de visualisation ultra rapide par ombroscopie ou strioscopie et d'une source à mini-étincelle.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on verra de quelle manière la théorie des ondes mise en oeuvre dans la première partie sera utilisée pour identifier les diverses ondes mises en évidence par ombroscopie ou strioscopie rapide lors de nos expérimentations en diffraction acoustique sur différents objets. On présente un cas d'interaction fluide structure simple : la réflexion d'ondes sur une plaque immergée dans un liquide.

4-2.LA THEORIE DES ONDES DE LAMB SUR UNE PLAQUE

4-2.1.<u>LE CAS D'UNE PLAQUE DANS LE VIDE (GONCHAROV 1993)</u>

4-2.1.1.Détermination de l'équation de Lamb

Dans cette section, on considère à nouveau des ondes harmoniques planes sans se préoccuper du mécanisme de génération. On cherche la condition d'existence de telles ondes vérifiant les conditions de parois libres.

La plaque est placée dans le vide. On choisit z comme axe normal aux parois de la plaque et x comme axe de la direction de propagation de l'onde. Les parois se situent à z = -h, z = h et donc l'épaisseur de la plaque est 2h. (figure 4-1)

On traite le cas plus intéressant des ondes polarisées verticalement. En effet, les ondes polarisées horizontalement obéissent aux lois de la réflexion classique comme on l'a vu pour le demi espace plan. On étudie donc des déplacements dans le plan vertical formé par la normale à la plaque et la direction de propagation. Les potentiels sont alors indépendants de y.

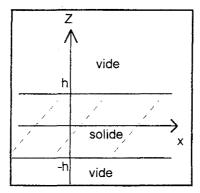


figure 4-1: plaque plane d'épaisseur 2h

De façon similaire à (1-23) du chapitre 1, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\mathbf{x}} &= \partial \Psi / \partial \mathbf{x} - \partial \mathbf{A}_{\mathbf{y}} / \partial \mathbf{z} \\ \textbf{(4-1)} &\quad \mathbf{u}_{\mathbf{y}} &= 0 \\ &\quad \mathbf{u}_{\mathbf{z}} &= \partial \Psi / \partial \mathbf{z} - \partial \mathbf{A}_{\mathbf{y}} / \partial \mathbf{x} \end{aligned}$$

avec $\Psi(x,z,t)$ et $A(0,A_y,0)$ potentiels scalaire et vecteur respectivement, et u déplacement.

En tenant compte de (1-27) et (1-29) du chapitre 1, on pose :

(4-2)
$$\Psi = (C1 \cos \gamma_L z + C2 \sin \gamma_L z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

$$A_y = (D1 \cos \gamma_T z + D2 \sin \gamma_T z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

où C1, C2, D1, D2 sont des constantes complexes. Ces constantes permettent de poser :

$$\gamma_L = \sqrt{(k_L^2 - \xi^2)}$$
 avec $k_L = \omega / C_L$ et $\xi = \omega / C$ réel
$$\gamma_T = \sqrt{(k_T^2 - \xi^2)}$$
 avec $k_T = \omega / C_T$

en prenant la racine positive sans restreindre la généralité des solutions.

On cherche ainsi toutes les solutions qu'elles soient homogènes ou inhomogènes, c'est à dire pour γ_L (ou γ_T) réel ou imaginaire pur.

Les conditions à la paroi sont :

(4-3)
$$\frac{\partial \Psi / \partial z + ipA_y = 0}{\partial A_y / \partial z - ip\Psi = 0}$$

$$\dot{a} z = -h \text{ et } z = h$$

$$avec p = (2\xi^2 - k_T^2)/(2\xi)$$

On remplace les potentiels par leur expression (4-2) dans les conditions aux parois (4-3). En posant :

$$\sigma_{t} = \gamma_{T} h = \sqrt{(k_{T}^{2} - \xi^{2})} h$$
(4-4) et
$$\sigma_{l} = \gamma_{L} h = \sqrt{(k_{L}^{2} - \xi^{2})} h$$

On obtient:

$\sigma_i \sin \sigma_i$	-iph sin σι	σι cos σι	iph cos σ _t	C1	1
$-\sigma_1 \sin \sigma_1$	iph sin σ _t	$\sigma_{l} \cos \sigma_{l}$	iph cos ot	D2	= 0
-iph $\cos \sigma_1$	$\sigma_t \cos \sigma_t$	iph sin σ_1	$\sigma_{t} \sin \sigma_{t}$	C2	
-iph $\cos \sigma_l$	$\sigma_t \cos \sigma_t$	-iph sin σ_i	$-\sigma_t \sin \sigma_t$	Dl	

Par la suite des transformations suivantes : soustraction la ligne (1) à la ligne (2), ainsi que la ligne (4) à la ligne (3), puis addition les lignes (1) et (2) ainsi que les lignes (3) et (4), on peut réécrire le système d'équations sous la forme :

$\sigma_l \sin \sigma_l$	-iph sin σ_t	0	0	C1	
-iph cos σ ₁	$\sigma_t \cos \sigma_t$	0	0	D2	= 0
0	0	$\sigma_l \cos \sigma_l$	iph cos ot	C2	
0	0	iph sin σ_l	$\sigma_t \sin \sigma_t$	D1	

Il existe une solution non triviale si le déterminant de cette matrice est nul . Ceci équivaut à (4-5) :

 $(\sigma_t \sigma_1 \sin \sigma_1 \cos \sigma_t + p^2 h^2 \cos \sigma_1 \sin \sigma_t)(\sigma_1 \sigma_t \sin \sigma_t \cos \sigma_1 + p^2 h^2 \cos \sigma_t \sin \sigma_1) = 0$ Cette expression est appelée <u>EQUATION DE LAMB</u>.

On remarque qu'ici même les ondes homogènes doivent être solutions d'un problème aux valeurs propres.

4-2.1.2. Modes symétriques et antisymétriques

L'équation précédente est vérifiée si un des deux facteurs est nul. On peut considérer un premier cas dans lequel :

(4-6 a)
$$(\sigma_t \sigma_1 \sin \sigma_1 \cos \sigma_t + p^2 h^2 \cos \sigma_1 \sin \sigma_t) = 0$$

(4-6 b) $(\sigma_1 \sigma_t \sin \sigma_t \cos \sigma_1 + p^2 h^2 \cos \sigma_t \sin \sigma_1) \neq 0$

Il existe alors une solution non nulle si C2 = D1 = 0. Cela implique, pour les potentiels et les déplacements, la forme suivante :

(4-7a)
$$\Psi = (C1 \cos \gamma_L z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$
$$A_v = (D2 \sin \gamma_T z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

(4-7b)
$$u_x = (i\xi C1 \cos \gamma_L z - \gamma_T D2 \cos \gamma_T z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$
$$u_y = (-\gamma_y C1 \sin \gamma_z z + i\xi D2 \sin \gamma_T z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

On peut en déduire que :

$$u_x(-z) = u_x(z)$$

$$u_y(-z) = -u_y(z)$$

ce qui implique que les déplacements sont symétriques par rapport à z = 0.

Notons au passage que $u_x(z)$ et $u_z(z)$ ne correspondent pas aux déplacements longitudinaux et transverses. En effet, $\mathbf{u} = \mathbf{u_L} + \mathbf{u_T} = \mathbf{grad} \ \psi + \mathbf{rot} \ \mathbf{A}$, où $\mathbf{u_L} \neq \mathbf{u_x} \mathbf{i}$ et $\mathbf{u_T} \neq \mathbf{u_z} \mathbf{k}$.

On réécrit souvent (4-6 a) sous la forme :

(4-8) $\sigma_t \sigma_1 \tan \sigma_1 + p^2 h^2 \tan \sigma_1 = 0$ relation de dispersion pour les modes symétriques.

On considère maintenant l'autre cas :

$$(\sigma_t \sigma_1 \sin \sigma_1 \cos \sigma_t + p^2 h^2 \cos \sigma_1 \sin \sigma_t) \neq 0$$

$$(\sigma_1 \sigma_1 \sin \sigma_1 \cos \sigma_1 + p^2 h^2 \cos \sigma_1 \sin \sigma_1) = 0$$

La deuxième équation (4-6b) s'écrit également :

(4-9)
$$\sigma_t \sigma_1 \tan \sigma_t + p^2 h^2 \tan \sigma_1 = 0$$

On a alors:

(4-10)
$$u_x = (i\xi C2 \sin \gamma_L z + \gamma_T D1 \sin \gamma_T z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$
$$u_z = (\gamma_L C2 \cos \gamma_L z + i\xi D1 \cos \gamma_T z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

et on en déduit que :

$$u_x(-z) = -u_x(z)$$

$$u_x(-z) = u_x(z)$$

ce qui explique que ces modes soient appelés antisymétriques.

Pour σ_l et σ_t réels, la périodicité des équations (4-8) et (4-9) induit une infinité dénombrable de solutions pour ξ fixé. On leur affecte donc un indice n en classant d'une part les modes symétriques et d'autre part les modes antisymétriques. On affecte les indices suivant l'ordre croissant des valeurs de ω , la plus petite recevant l'indice 0. Les modes symétriques seront ainsi notés S_0 , S_1 , ..., S_n et les modes antisymétriques A_0 , A_1 , ..., A_n . Les équations (4-8) et (4-9) variant continûment avec ξ , tous ces modes constituent des fonctions continues ω_n (ξ) ou $\xi_n(\omega)$.

Il en est de même pour la fonction $C(n,\omega) = \omega / \xi_n$ à n fixé. Cette fonction représente la vitesse de propagation de l'onde suivant la direction x, c'est à dire la vitesse de phase le long de la plaque. Un exemple générique est donné sur la figure 4-2 qui représente les vitesses de phase parallèles à la plaque en fonction de la vitesse caractéristique du problème ω *2h (ω fréquence et 2h épaisseur de la plaque).

Si on observe la figure 4-2, on constate que pour les petites valeurs de ω^*2h , seuls les deux modes d'indice 0 sont présents. Le mode symétrique (normal) est noté S_0 et le mode antisymétrique (flexion) est noté A_0 . Lorsque ω^*2h augmente, il apparaît des modes d'indices supérieurs notés S_i et A_i respectivement. On constate que si ω^*2h tend vers zéro, la branche A_0 tend vers zéro.

A mesure que ω *2h augmente et tend vers l'infini les modes d'indice zéro ont des vitesses de phase qui convergent puis coïncident avec la vitesse de l'onde de Rayleigh C_R .

En ce qui concerne les modes d'indices supérieurs, les vitesses de phase tendent vers C_T (vitesse de l'onde transverse dans le solide) pour ω^*2h tendant vers l'infini.

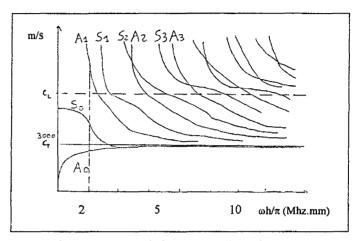


figure 4-2: courbes de dispersion pour les modes symétriques et antisymétrique de Lamb. Vitesses de phase en fonction de ω*2h/2π.

Cas d'une plaque d'aluminium.

4-2.2.<u>RESULTATS GENERAUX SUR LES ONDES DE LAMB</u> (MASON 1976 [1])

Pour une plaque élastique plane dans le vide, les vibrations propres sont obtenues en résolvant l'équation de Lamb. Les racines réelles ξ_n déterminent les vitesses de phase $C(n,\omega)$ des différents modes des ondes de Lamb se propageant le long de la plaque.

En fait les courbes de dispersion de la figure 4-2 peuvent être obtenues de deux façons :

a) Soit on fixe ξ et l'équation détermine les fréquences possibles $\omega = \omega_n$ (ξ). Le nombre des valeurs propres ω_n est alors une infinité dénombrable car les relations de dispersion (4-8) et (4-9) sont périodiques. A chaque valeur ω_n correspond une vitesse de propagation $C_n = \omega_n / \xi$ qui est la vitesse de phase.

b) Soit la fréquence est fixée et donc k_L et k_T sont fixés. Dans ce cas la relation de dispersion a une infinité dénombrable de racines réelles $\xi_n(\omega)$ donnant les vitesses de propagation $C_n(\omega)$.

Cependant, les deux équations (4-8) et (4-9) ne sont plus périodiques si σ_t et σ_t deviennent imaginaires purs. En effet, σ_t et σ_t sont soit réels, soit imaginaires purs selon les valeurs respectives de ξ^2 , k_T^2 et k_L^2 . Cette situation est analogue à celle rencontrée dans l'étude de l'équation de Rayleigh. Physiquement cela est lié au fait que la plaque est dans le vide, et que les ondes ne peuvent rayonner dans un fluide environnant ce qui se traduirait par l'existence d'une partie imaginaire non nulle pour ξ^2 . Les solutions sont donc réelles ou imaginaires pures puisque seul un ξ^2 réel intervient dans les équations.

- a) Si $k_L^2 > \xi^2$, c'est à dire $C_L < C$ les ondes longitudinales et transverses sont homogènes et (4-8) et (4-9) sont inchangées.
 - b) Dans le cas où $k_L^2 < \xi^2 < k_T^2$ les équations de dispersion (4-8) et (4-9) deviennent:

$$-\sigma_t |\sigma_1| \operatorname{th} |\sigma_1| + p^2 h^2 \tan \sigma_t = 0$$
(4-11 a) $\sigma_t |\sigma_1| \tan \sigma_t + p^2 h^2 \operatorname{th} |\sigma_1| = 0$

$$\operatorname{avec} \sigma_1 = i |\sigma_1|$$

On a alors une onde longitudinale inhomogène et une onde transverse homogène.

c) Dans le cas où $\xi^2 > \omega^2/CT^2 = k_T^2$ c'est à dire $C < C_T$, les équations de dispersion (4-8) et (4-9) deviennent :

$$-|\sigma_t||\sigma_1| \operatorname{th}|\sigma_1| + p^2 h^2 \operatorname{th}|\sigma_t| = 0$$

$$(4-11 b) -|\sigma_t||\sigma_1| \operatorname{th}|\sigma_t| + p^2 h^2 \operatorname{th}|\sigma_1| = 0$$

$$\operatorname{avec} \ \sigma_t = i|\sigma_t| \ \operatorname{et} \ \sigma_1 = i|\sigma_1|$$

Pour ω fixé il existe alors une seule racine réelle ξ_n pour chacune des deux relations (4-11b) de dispersion. On retrouve le cas des ondes inhomogènes dont l'énergie est confinée près des surfaces de la plaque. Sur la figure 4-2, cela ne se produit que pour le mode antisymétrique A_0 et pour le mode S0 si le produit ω *h est suffisamment grand.

d) Notons enfin que la présence de fonctions périodiques dans les équations (4-5) permet aussi de trouver une infinité dénombrable de solutions quand σ_t et σ_1 sont réels y

compris pour des valeurs de ξ telles que $\xi^2 < 0$ quelque soit ω fixé. Les solutions ne sont alors plus des ondes progressives mais des vibrations locales (sans propagation suivant x) telles que :

$$\Psi = (\text{Clcos}(\gamma_L z) + \text{C2sin}(\gamma_L z)) \exp(\pm |\xi_n| x - i\omega t)$$

$$A_v = (\text{Dlcos}(\gamma_T z) + \text{D2sin}(\gamma_T z)) \exp(\pm |\xi_n| x - i\omega t)$$

Dans le cas général, les modes ont des composantes longitudinales et transversales. Il est commode parfois de considérer un tel mode comme la superposition d'une paire d'ondes planes longitudinales et d'une paire d'ondes planes transversales subissant une conversion de mode à la réflexion sur les parois de la plaque (figure 4-3). Cette représentation devient naturelle si on écrit les expressions des potentiels sous la forme :

(4-12a)
$$\begin{split} \Psi &= C_s \left[\exp(i(\xi x + \gamma_L z - \omega t)) + \exp(i(\xi x - \gamma_L z - \omega t)) \right] \\ A_y &= D_s \left[\exp(i(\xi x + \gamma_T z - \omega t)) - \exp(i(\xi x - \gamma_T z - \omega t)) \right] \end{split}$$

pour les modes symétriques et :

$$\Psi = C_{\bullet} \left[\exp(i(\xi x + \gamma_L z - \omega t)) - \exp(i(\xi x - \gamma_L z - \omega t)) \right]$$

$$A_y = D_{\bullet} \left[\exp(i(\xi x + \gamma_T z - \omega t)) + \exp(i(\xi x - \gamma_T z - \omega t)) \right]$$

pour les modes antisymétriques.

Remarque:

Du fait de la nullité de leur déterminant, les équations des ondes de Lamb induisent une relation entre C1 et D2 d'une part et C2 et D1 d'autre part. D'après le système d'équations permettant d'obtenir l'équation de Lamb (4-5), ces relations sont :

$$\gamma_L \ hC1 \sin \gamma_L \ h - iphD2 \sin \gamma_T \ h = 0$$
(4-13 a) ou
$$-iphC1 \cos \gamma_L \ h + \gamma_T \ hD2 \cos \gamma_T \ h = 0$$
dans le cas symétrique,

$$\gamma_L hC2 \cos \gamma_L h + iphD1 \cos \gamma_T h = 0$$
(4-13 b) ou
$$iphC2 \sin \gamma_L h + \gamma_T hD1 \sin \gamma_T h = 0$$

dans le cas antisymétrique

On note que les deux équations de (4-13 a) sont liées puis le déterminant du système des deux équations est nul. Il en est de même pour les équations de (4-13 b).

Evidemment, C_S et D_S sont liés par des équations du même type que C1 et D2. De même, C_a et D_a sont liés par des équations du même type que C2 et D1.

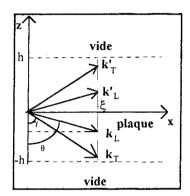


figure 4-3: représentation des modes de propagation dans une plaque comme la somme de quatre ondes planes

4-2.3. FREQUENCES DE COUPURE DES MODES

Comme nous l'avons vu sur la figure 4-2, seules les courbes A_0 et S_0 sont définies entre $\omega=0$ et l'infini. Pour tous les autres modes, il existe une fréquence minimale que nous appellerons la fréquence de coupure du mode $\omega c_n/2\pi$ pour le mode n. Nous allons voir que cela correspond à l'apparition des solutions $\xi_n^2 < 0$.

En effet étudions la fonction continue $\xi_n(\omega)$ autour de la valeur $\xi_n=0$ ce qui revient à $C_n(\omega)$ pour C_n tend vers l'infini sur la figure 4-2. On voit que cela arrive systématiquement sauf pour la courbe A_0 et S_0 et que cela se produit pour une fréquence de coupure $\omega c_{n/2\pi}$ différente de zéro.

Or, si ξ tend vers zéro pour ω différent de zéro, c'est que la valeur absolue de p tend vers l'infini, γ_L tend vers k_L et γ_T tend vers k_T .

a) Pour un mode symétrique, on a donc d'après (4-5) :

$$(4-14 \text{ a}) \tan k_T h/\tan k_L h = 0$$

ce qui implique deux possibilités :

(4-14 b)
$$k_T h = h\omega/C_T = m_1 \pi \text{ ou } k_T h = \pi (2 m_2-1)/2$$

avec $m_1 = 1,...$; $m_2 = 1,2,...$ (on exclut $m_1 = 0$ car cela correspondrait au mode d'indice 0 avec une fréquence de coupure nulle)

donc:

(4-15)
$$(\omega c)_{m_1} = m_1 (\pi C_T)/h \text{ ou } (\omega c)_{m_2} = (m_2-1/2) (\pi C_1)/h$$

Examinons la succession de ces valeurs pour pouvoir les attribuer aux modes correspondant : Pour $\omega = (\omega c)_{m1}$ et donc $\xi = 0$, l'expression de la solution (4-7) et la relation (4-13 a) donnent :

C1 = 0,
$$u_z = 0$$

(4-16 a) et
 $u_x = (-k_T D2 \cos k_T z) \exp(-i(\omega c)_{m_1} t)$

On en déduit également les potentiels de l'onde :

$$\psi = 0$$

$$A_v = D2 \sin k_T z \exp(-i(\omega c)_{m1} t)$$

ce qui signifie que l'on a une onde stationnaire transverse à amplitude constante dans une couche z constante et dont la phase est indépendante de x et z.

Pour $\omega = (\omega c)_{m2}$, le relations (4-7) et (4-13 a) impliquent :

$$u_z = (-k_L C1 \sin k_L z) \exp(-i(\omega c)_{m2} t)$$
(4-16 b) et
$$D2 = 0 , u_x = 0$$

On écrit aussi les potentiels de l'onde :

$$\psi = 0$$

$$A_v = D2 \sin k_T z \exp(-i(\omega c)_{m_1} t)$$

ce qui signifie que l'on a une onde stationnaire longitudinale à amplitude constante dans une couche.

Pour attribuer les fréquences de coupures aux différents modes symétriques, il suffit de les ordonner. Cela peut dépendre du matériau.

Prenons l'exemple de la plaque d'aluminium (figure 4-2).

On a vu que le mode S0 est associé à la fréquence de coupure nulle qui est sans conteste la plus basse.

Pour le mode S1, il faut départager les cas $m_1=1$ et $m_2=1$, c'est à dire $(\omega c)_{m_1}=\pi C_T$ / h et $(\omega c)_{m_2}=1/2$ πC_L / h. Pour l'aluminium, C_T / C_L < 1/2 ce qui implique $(\omega c)_{m_1}<(\omega c)_{m_2}$. Le mode S1 est donc coupé en $(\omega c)_{m_1}=\omega c_1=\pi C_T$ / h . Comme C_L /2 < $2C_T$, $(\omega c)_{m_2}=\omega c_2=1/2$ πC_L / h correspond au mode S2 et $2\pi C_T$ / h, c'est à dire le cas $m_1=2$, au mode S3. Il suffit de répéter le processus à l'infini.

b) On a des résultats analogues pour les modes antisymétriques. Dans ce cas (4-5) donne :

$$tan k_L h/tan k_T h = 0$$

c'est à dire :

$$(\omega c)_{m_3}=(m_3-1/2)~(\pi~C_T)/h~ou~(\omega c)_{m_4}=m_4~(\pi~C_L)/h$$
 avec $m_4=1,...$; $m_3=1,2,...$ (comme pour les modes symétriques on exclut $m_4=0$ car on aurait $\omega=0$)

Pour $\omega = (\omega c)_{m3}$ et donc $\xi = 0$, l'équivalent de (4-7) pour les modes antisymétriques et (4-13 b) donne :

$$u_z = 0$$
(4-17) et
$$u_x = (k_T D1 \sin k_T z) \exp(-i(\omega c)_{mx} t)$$

ce qui signifie que l'on a une onde stationnaire transverse à amplitude constante dans une couche.

Pour $\omega = (\omega c)_{m_4}$, on obtient de même que précédemment :

$$u_z = (k_L C2 \cos k_L z) \exp(-i(\omega c)_{m4} t)$$
(4-18) et
 $u_x = 0$

ce qui signifie que l'on a une onde stationnaire longitudinale à amplitude constante dans une couche

Au total pour l'aluminium, on obtient un classement des modes par l'ordre croissant de leurs fréquences de coupure (figure 4-2) : $A_1 < S_1 < S_2 < A_2 < S_3 < A_3$avec une vitesse de phase qui tend vers l'infini.

Dans ce cas on observe un croisement des courbes de dispersion des modes S et A du même indice (ou ordre) à partir de l'indice 2.

4-2.4.<u>CAS PARTICULIERS CONCERNANT LES MODES ZERO</u> (GONCHAROV 1993)

4-2.4.1. Plaque de très faible épaisseur

Dans le cas de plaques de très faible épaisseur la vitesse caractéristique $2h\omega$ est toujours très petite sauf pour des fréquences rarement atteintes par des sources acoustiques. On se trouve donc sur une portion du domaine $C(n,\omega)$ où seuls les modes dont la fréquence de coupure est nulle sont activés. A titre d'exemple, sur une plaque d'aluminium d'1 mm d'épaisseur, le mode A1 n'est sollicité que si $2h\omega > \pi C_T / 2 = 8280$ m/s, c'est à dire pour des fréquences $f > C_T / 8h = 1.32$ MHz. Pour ces plaques, l'analyse précédente peut donc se simplifier dans la plupart des cas à sa limite asymptotique pour $2h\omega << C_T$.

Tout d'abord, on considère le mode symétrique et on analyse son équation de dispersion dans le cas de la plaque fine, d'épaisseur 2h.

On suppose alors que:

(14-9)
$$|\sigma_t| = |\gamma_T| h \langle \langle 1 \text{ et } |\sigma_1| = |\gamma_L| h \langle \langle 1 | \sigma_1| \rangle \rangle$$

L'approximation de l'équation de dispersion s'écrit pour les modes symétriques :

(4-20)
$$\sigma_1^2 + p^2 h^2 = 0$$

Cette équation a une solution si ol est imaginaire pure et donc si l'onde longitudinale est inhomogène dans l'épaisseur de la plaque. On résout en remplaçant p et ol par leur expression et on trouve :

(4-21)
$$\xi = \frac{k_T^2}{2(k_T^2 - k_T^2)^{1/2}} = \frac{\omega}{2c_T(1 - c_T^2 / c_T^2)^{1/2}}$$

On constate alors que la vitesse de l'onde suivant x est indépendante de la fréquence ce qui veut dire que cette onde n'est pas dispersive.

On peut donner l'approximation en plaques minces des potentiels des ondes :

(4-22)
$$\psi = C1 \exp(i(\xi x - \omega t))$$

$$A_y = D2 \gamma_T z \exp(i(\xi x - \omega t))$$

ce qui permet de dire que l'onde est principalement longitudinale puisque $|\gamma_T z| \langle \langle 1 \rangle \rangle$

On peut aussi écrire une approximation du déplacement :

(4-23)
$$u_x = (i\xi C1 - \gamma_T D2) \exp(i(\xi x - \omega t))$$
$$u_z = (-\gamma_L C1 \gamma_L z + i\xi D2 \gamma_T z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

On remplace D2, p et ξ par leurs valeurs déduite à l'aide de (4-13 a), (4-3) et (4-21) et on obtient:

(4-24)
$$u_x = iC1 (k_T^2 - k_L^2)^{1/2} \exp(i(\xi x - \omega t))$$

$$u_z = C1 \frac{(k_T^2 - 2k_L^2)}{2} z \exp(i(\xi x - \omega t))$$

Ces expressions pour le déplacement permettent d'écrire $|u_z| \langle \langle |u_x| |$. Les déplacements sont donc principalement suivant x et sont quasi constants dans l'épaisseur de la plaque. Dans ce cas on voit qu'on peut pratiquement attribuer à l'onde longitudinale la direction ox.

Cette onde est souvent appelée onde longitudinale de Young et se propage sans dispersion. Cela correspond au mode S0 pour des valeurs suffisamment faibles de ω (figure 4-2), on constate en effet que la pente $\frac{\partial C}{\partial \omega}$ est nulle pour S0 en $2h\omega = 0$, et reste très faible jusqu'à

 $2h\omega/2\pi \approx 1.5$ MHz.mm qui fixe en quelque sorte la limite en fréquence de l'analyse plaque mince.

Si on s'intéresse maintenant au comportement du mode antisymétrique dans les mêmes conditions. On utilise un développement limité de tangente et on garde les deux premiers termes. On obtient alors une approximation de l'équation de dispersion pour les modes antisymétriques :

(4-25)
$$\sigma_t^2 + p^2h^2(1 + (\sigma_1^2 - \sigma_t^2)/3) = 0$$

On trouve des solutions mais pour ot imaginaire pur. Dans ce cas l'onde transverse et l'onde longitudinale sont donc inhomogènes.

On peut alors déterminer ξ^2 :

(4-26)
$$\xi^2 = \pm (\sqrt{3}/2h) \frac{k_T^2}{(k_T^2 - k_I^2)^{1/2}}$$

Seul ξ^2 positif nous intéresse puisque ξ^2 négatif ne correspond pas à un mode de propagation.

L'approximation pour les déplacements (4-10) donne :

$$u_x = (i\xi C2 \gamma_L z + \gamma_T D1 \gamma_T z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

$$u_z = (\gamma_L C2 + i\xi D1) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

On s'aperçoit que dans ce cas les déplacements ont lieu principalement dans la direction oz et sont indépendants de z.

Comme on le voit sur la figure 4-2 même pour ω très petit, $\frac{\partial C}{\partial \omega}$ est différent de zéro pour l'onde A0. Cette onde reste dispersive et on la nomme souvent onde de flexion.

4-2.4.2. Existence d'ondes quasi-Rayleigh

Dans les paragraphes précédents on a vu que les modes d'indice zéro ont des fréquences de coupure nulles. De plus, $C(n,\omega)$ est croissante avec n à ω fixé. Par conséquent, pour les modes d'ordre zéro, toujours pour ω fixé, $C(0,\omega)$ est inférieure à $C(n,\omega)$ avec n > 0; ceci est visible sur la figure 2. On peut en déduire qu'à une fréquence donnée, les racines des équations de dispersion (4-8) et (4-9) qui correspondent aux modes zéros sont les valeurs maximales trouvées pour ξ .

Si on considère le cas homogène, $\xi < k_T$. Les plus grandes valeurs de ξ sont proches de k_T . De ce fait, γ_L et γ_T sont petits et il y a donc peu de longueurs d'onde spatiale suivant oz. Le nombre d'oscillations dans l'épaisseur de la plaque sera minimal.

Dans le cas inhomogène, pour ξ grand on a de grands modules pour γ_L et γ_T alors imaginaires purs.

On peut alors écrire les équations de dispersion en remplaçant l'expression de la tangente par :

$$\begin{aligned} \tan \sigma_t &= i \, \tanh \! \left| \sigma_t \right| = i \, \frac{(1 - \exp(-2 \left| \sigma_t \right|))}{(1 + \exp(-2 \left| \sigma_t \right|))} \approx i (1 - 2 \exp(-2 \left| \sigma_t \right|)) \\ \tan \sigma_1 &= i \, \tanh \! \left| \sigma_1 \right| = i \, \frac{(1 - \exp(-2 \left| \sigma_1 \right|))}{(1 + \exp(-2 \left| \sigma_1 \right|))} \approx i (1 - 2 \exp(-2 \left| \sigma_1 \right|)) \end{aligned}$$

Les relations de dispersion s'explicitent conformément à l'approximation :

$$\begin{split} -\left|\sigma_{t}\right\|\sigma_{l}\right| + p^{2}h^{2} &\approx 2(-\left|\sigma_{t}\right\|\sigma_{l}\right| \exp(-2\left|\sigma_{l}\right|) + p^{2}h^{2} \exp(-2\left|\sigma_{t}\right|)) \\ \text{(4-28) et} &\qquad -\left|\sigma_{t}\right\|\sigma_{l}\right| + p^{2}h^{2} &\approx 2(p^{2}h^{2} \exp(-2\left|\sigma_{l}\right|) - \left|\sigma_{t}\right\|\sigma_{l}\right| \exp(-2\left|\sigma_{t}\right|)) \end{split}$$

On voit donc que lorsque γ_L et γ_T ont de grands modules, les seconds membres de (4-28) sont petits par rapport aux premiers. Les solutions sont donc proches des solutions de Rayleigh puisqu'on retrouve justement l'équation de Rayleigh en négligeant les seconds membres.

Ainsi, pour des hautes fréquences, les modes d'ordre zéro ont des vitesses proches de celle de l'onde de Rayleigh.

4-2.5.CAS DE LA PLAQUE EN CONTACT AVEC UN FLUIDE

La plaque étudiée jusqu'à présent était dans le vide. Examinons maintenant ce qui se passe si on remplace le vide par un fluide d'un ou des deux côtés de la plaque.

C'est le cas le plus souvent rencontré en pratique.

4-2.5.1. Equations de Lamb

En pratique, les structures étudiées sont surtout des plaques et des coques immergées dans un liquide. On va donc exposer ici, la question relative aux plaques élastiques dans un liquide. Les effets dans les gaz sont très faibles et s'assimilent au cas du vide.

On cherche à identifier les ondes engendrées par la diffraction sur une plaque élastique plane d'épaisseur finie immergée dans un liquide. On verra notamment de quelle façon le liquide modifie les caractéristiques des ondes de Lamb.

On choisit z comme axe normal aux parois de la plaque. Les parois se situent à z = -h, z = h et donc l'épaisseur de la plaque est 2h. (figure 4-4)

On traite le cas plus intéressant des ondes polarisées verticalement. En effet, les ondes polarisées horizontalement obéissent aux lois de la réflexion classique comme on l'a vu pour le demi espace plan. On étudie donc des déplacements dans le plan vertical formé par la normale à la plaque et la direction de propagation. Les potentiels sont alors indépendants de y.

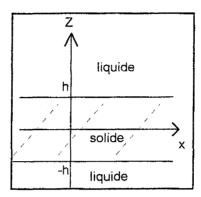


figure 4-4 : plaque plane d'épaisseur 2h

On peut garder les mêmes expressions (4-2) pour les potentiels en ce qui concerne le solide :

(4-29)
$$\Psi = (C1 \cos \gamma_L z + C2 \sin \gamma_L z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$

$$A_v = (D1 \cos \gamma_T z + D2 \sin \gamma_T z) \exp(i(\xi x - \omega t))$$
pour -h < z < h

où C1, C2, D1, D2 sont des constantes complexes et

(4-30)
$$\gamma_L = \sqrt{(k_L^2 - \xi^2)}$$
 avec $k_L = \omega / C_L$ et $\xi = \omega / C$

$$\gamma_T = \sqrt{(k_T^2 - \xi^2)}$$
 avec $k_T = \omega / C_T$

Il nous faut maintenant écrire la forme générale du potentiel dans le liquide. Pour cela, il est possible de reprendre l'expression (1-58a) utilisée pour décrire le potentiel dans le liquide pour le cas d'une interface demi espace-liquide. Cela permet d'écrire :

$$\begin{split} \Phi_1 &= A_1 \exp(-\gamma_1 z) \exp(i(\xi x - \omega t) \text{ pour } z \ge h \end{split}$$
 (4-31)
$$\Phi_2 &= A_2 \exp(\gamma_1 z) \exp(i(\xi x - \omega t) \text{ pour } z \le -h \\ &\text{avec } \gamma_1^2 = \omega^2 / C^2 - \omega^2 / C_1^2 = \xi^2 - k_1^2 \end{split}$$

Les solutions physiques sont telles que $\text{Re}(\gamma_1) > 0$ et l'atténuation des ondes par diffusion dans le liquide doit se traduire par la possibilité pour ξ d'être complexe. Les conditions aux frontières s'écrivent en -h et h mais sont les mêmes que pour une interface demi espace-liquide (1-59). La présence du liquide modifie donc les conditions aux parois. Désormais les contraintes normales n'y sont plus nulles. La vitesse normale est continue et seules les contraintes tangentielles sont nulles car le fluide est idéal.

On a donc:

$$-i\omega u_z = v_z$$
(4-32) $\sigma_{xz} = 0$
 $\sigma_{zz} = -p$
en $z = -h$ et $z = +h$

Ceci équivaut à :

$$\begin{split} -i\omega\big(\frac{\partial\Psi}{\partial z}+i\xi A_Y\big) &= \frac{\partial\Phi}{\partial z}\\ \text{(4-33)} & 2i\xi\partial\Psi/\partial z - (2\xi^2-k_T^2)A_Y = 0\\ & \rho\,C_T^2\big((2\xi^2-k_T^2)\Psi + 2i\xi\frac{\partial A_Y}{\partial z}\big) = -i\omega\rho_I\Phi \end{split}$$

On remplace les potentiels par leur expression dans les conditions aux parois et on obtient en posant $\sigma_e = \gamma_t h$, $\sigma_t = \gamma_T h$ et $\sigma_i = \gamma_L h$ et avec $p = (2\xi^2 - k_T^2)/(2\xi)$:

iσ _i sin σ _i	-iσ _l cos σ _l	$\xi h \cos \sigma_t$	$\xi \; h \; sin \; \sigma_t$	σ₀/ω e ^{-σ} •	0	
-iσ _i sin σ _i	$-i\sigma_i\cos\sigma_i$	$\xi h \; cos \; \sigma_\iota$	$-\xi \; h \; sin \; \sigma_t$	0	–α₀/ω e-σ₀	
$-\sigma_i \sin \sigma_i$	$\sigma_i \cos \sigma_l$	$iph\;cos\;\sigma_t$	iph sin σ_t	0	0	
$\sigma_l \sin \sigma_l$	$\sigma_i\cos\sigma_i$	iph $\cos \sigma_t$	-iph sin σ_t	0	0	
-iph cos σι	-iph sin σ_l	$-\sigma_t \sin \sigma_t$	$\sigma_t \cos \sigma_t$	$ωhρ_I/(2ρξc_t^2) e^{-G_e}$	0	
-iph cos σ _i	iph sin σ_i	$\sigma_t \sin \sigma_t$	$\sigma_t \cos \sigma_t$	0	ωhρI/(2ρξ ct2) e-σe	

Il existe des solutions non triviales si de déterminant de cette matrice est nulle. Les solutions sont les ondes de Lamb et il convient de traiter séparément le cas des ondes antisymétriques et symétriques.

Ondes de Lamb antisymétriques :

Pour le cas antisymétrique, on doit ajouter une relation entre les coefficients A1 et A2 des expressions des potentiels des ondes dans le fluide. En prenant A1 = - A2 on se place dans le cas d'ondes en opposition de phase et de même amplitude entre le fluide situé au dessus de la plaque et le fluide situé en dessous de la plaque. Cela correspond bien à l'antisymétrie des ondes dans le solide.

Par la suite des transformations suivantes : addition les lignes (1) et (2) ainsi que les lignes (3) et (4), puis soustraction de la ligne (6) à la ligne (5), on obtient un système de trois équations à trois inconnues.

Ce système d'équations s'écrit sous la forme :

$$\begin{vmatrix} -i\sigma_{1}\cos\sigma_{1} & \xi h\cos\sigma_{t} & \sigma e/\omega & e^{-\sigma e} \\ \sigma_{1}\cos\sigma_{1} & iph\cos\sigma_{t} & 0 \\ -iph\sin\sigma_{t} & -\sigma_{t}\sin\sigma_{t} & \omega h\rho_{1}/\left(2\rho\xi c_{t}^{2}\right)e^{-\sigma e} \end{vmatrix} = 0$$

Il existe une solution non triviale si le déterminant de cette matrice est nul . Ceci équivaut à :

$$(4-34) - \gamma_1(\sigma_1 \sigma_t \sin \sigma_t \cos \sigma_1 + p^2 h^2 \cos \sigma_t \sin \sigma_1) - \frac{k_T^4}{4\xi^2} \frac{\rho_1}{\rho} \sigma_1 h(\cos \sigma_1 \cos \sigma_t) = 0$$

Les solutions de cette équation déterminent les modes antisymétriques pour une plaque dans un liquide.

On remarque que si on avait choisi A1= A2 la troisième colonne du système serait nulle. Le système se réduirait alors au système obtenu pour une plaque dans le vide.

Ondes de Lamb symétriques :

Pour le cas symétrique, on doit ajouter une relation entre les coefficients A1 et A2 des expressions des potentiels des ondes dans le fluide. En prenant A1 = A2 on se place dans le cas d'ondes en phase et de même amplitude entre le fluide situé au dessus de la plaque et le

fluide situé en dessous de la plaque. Cela correspond bien à la symétrie des ondes dans le solide

On effectue les transformations suivantes au système de départ : soustraction la ligne (1) à la ligne (2), ainsi que la ligne (4) à la ligne (3), puis addition des lignes (5) et (6). On obtient donc un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{vmatrix} i\sigma_l \sin \sigma_l & \xi h \sin \sigma_t & \sigma_e/\omega \ e^{-\sigma_e} \\ -\sigma_l \sin \sigma_l & iph \sin \sigma_t & 0 \\ -iph \cos \sigma_t & \sigma_l \cos \sigma_t & \omega h \rho_l / (2\rho \xi c_t^2) e^{-\sigma_e} \end{vmatrix} = 0$$

Il existe une solution non triviale si le déterminant de cette matrice est nul . Ceci équivaut à (4-35) :

$$-\gamma_1(\sigma_1\,\sigma_t\,\sin\,\sigma_1\,\cos\sigma_t\,+p^2h^2\cos\sigma_1\,\sin\,\sigma_t\,) + \frac{k_T^4}{4\xi^2}\frac{\rho_1}{\rho}\,\sigma_1\,h(\sin\sigma_1\sin\sigma_t\,) = 0$$

Les solutions de cette équation déterminent les modes symétriques pour une plaque dans un liquide.

On remarque que si on avait choisi A1=-A2 la troisième colonne du système serait nulle. Le système se réduirait alors au système obtenu pour une plaque dans le vide.

4-2.5.2. Résolution de l'équation

On n'expose pas ici le détail de la théorie qui est analogue au passage du cas du demi espace dans le vide au demi espace dans du fluide. On comprend que la principale modification aux ondes de Lamb sera l'apparition de l'équivalent de l'onde de Stoneley.

Bao, Poncelet, Raju et Uberall (1995) ont montré que si on place un fluide d'un seul côté de la plaque, un nouveau mode antisymétrique (A) appelé onde de Scholte-Stoneley existe de ce côté en plus des modes correspondant aux ondes de Lamb.

Ils ont également prouvé que si on met un même fluide de chaque côté de la plaque, un mode symétrique (S) de l'onde de Scholte-Stoneley apparaît alors en supplément du mode A.

L' onde A est dispersive et se propage le long de la plaque sans atténuation et avec des vitesses de phase inférieures à celle du son dans le liquide. L'onde S a une vitesse voisine de la vitesse du son dans le liquide et sa vitesse de groupe est égale à sa vitesse de phase, elle est non dispersive.

Enfin un cas intermédiaire correspond au cas où on n'a pas le même fluide des deux côtés. L'onde A est alors atténuée du côté où la vitesse du son dans le fluide est la plus élevée. L'onde S n'existe pas dans ce cas.

4-3. ANALYSES DES RESULTATS EXPERIMENTAUX SUR LES PLAQUES

4-3.1.<u>VISUALISATION DE LA DIFFRACTION DES ONDES PAR</u> <u>UNE PLAQUE DANS L'EAU</u>

On s'intéresse à l'interaction de l'onde impulsionnelle avec une plaque en acier inoxydable immergée dans l'eau (planche 4-1 a). La plaque sert ici de modèle à l'étude des coques. Elle a une épaisseur de 1 mm, une longueur de 30 cm et une largeur de 10 cm, elle est immergée dans l'eau à 2 cm des électrodes de la source. On identifie de suite le front d'onde incident et l'onde réfléchie spéculaire (planche 4-1 a). Les autres ondes rayonnées dans l'eau sont dues aux modes de vibration de la plaque : ce sont des ondes de Lamb. Comme on l'a vu dans la première partie de ce chapitre, ces ondes sont dispersives. Un mode de flexion de la plaque correspond à une onde de Lamb antisymétrique et un mode de dilatation de la plaque correspond à une onde de Lamb symétrique. La visualisation est ici faite en ombroscopie ce qui permet de conserver le caractère antisymétrique et symétrique des ondes (voir paragraphe 4-3.4.2.).

La planche 4-1 b représente les courbes de dispersion théoriques pour une plaque d'acier inoxydable dans le vide. Pour chaque mode, la courbe représente la vitesse de phase dans la plaque en fonction du produit du nombre d'onde k par l'épaisseur e. Le produit ke est un nombre sans dimension. Pour notre étude on se situe dans une gamme de ke allant de 1 à 5 environ étant donné la finesse de la plaque utilisée. On remarque que deux courbes apparaissent principalement dans cette tranche (planche 4-1 b). Il s'agit des modes d'ordre zéro symétrique et antisymétrique notés respectivement S0 et A0, le mode S0 ayant des vitesses de phase largement supérieures à celles du mode A0.

On observe également (planche 4-1 a) une série d'ondes très rapides et peu dispersives dont les vitesses de phase sont voisines de 5300 m/s et correspondent donc aux vitesses de phase de l'onde S0 pour de faibles produits Ke. L'angle de réémission que forme le tront d'onde avec la plaque est d'environ 16 degrés.

Une autre série d'ondes moins rapides et très dispersives se propage à des vitesses de phase de l'ordre de 2000 m / s qui peuvent uniquement correspondre à l'onde A0 si on se réfère aux courbes de dispersion théoriques (planche 4-1 b) pour des ke de cet ordre.

On va maintenant s'attacher à confirmer que l'on est bien en présence de l'onde A0 car, cette onde, très connue dans la théorie, est difficile à mettre en évidence expérimentalement du fait qu'elle rayonne fortement et donc perd son énergie très vite. L'avantage de notre méthode est à la fois de visualiser dès le début de l'interaction et d'avoir une source très puissante et large bande. Il s'agit donc ici d'une première visualisation de cette onde (Ahyi 1997). Il convient par conséquent de faire converger tous les éléments d'identification possibles.

4-3.2.SIMULATION DE L'ONDE A0

4-3.2.1.Introduction

Une manière sûre d'identifier les ondes est de pouvoir tracer leur courbe de dispersion. C'est pourquoi nous avons développé une méthode permettant de tracer les courbes de dispersion expérimentales à partir d'une photographie représentant la diffraction par une plaque. La comparaison avec les courbes théoriques servira d'identification.

Tout d'abord, pour bien comprendre cette méthode, il est important de savoir à quoi correspondent les fronts d'ondes visibles sur une photographie. Pour cela on fait une simulation en deux dimensions de l'onde A0.

4-3.2.2. Superposition d'ondes harmoniques

On sait que quand l'impulsion arrive sur la plaque elle génère une onde de Lamb A0 dispersive dans la plaque et provoque ainsi une réémission dans l'eau. L'impulsion est donc décomposée en ondes harmoniques.

Dans l'hypothèse simplificatrice d'une onde plane, on considère une onde harmonique dans la plaque. La fréquence est fixée et par conséquent la vitesse de phase est constante. La réémission dans le liquide se fait donc suivant une direction donnée θ et les fronts d'ondes sont des plans équiphases parallèles. Dans la direction normale au front, la distance qui sépare deux équiphases est λ la période spatiale (figure 4-5.a). En prenant une onde harmonique de vitesse de phase différente, les fronts d'ondes sont toujours parallèles mais l'inclinaison des fronts d'ondes par rapport à la plaque ainsi que la période spatiale ont changé (figure 4-5.b).

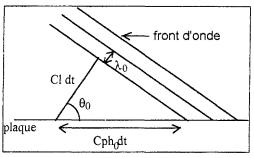
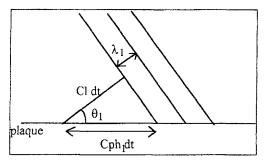


figure 4-5.a: onde harmonique de fréquence f_0



<u>figure 4-5.b</u>: onde harmonique de fréquence f_1

On peut déterminer les vitesses de phase dans la plaque pour chaque onde harmonique par les formules géométriques suivantes :

(4-36)
$$\cos \theta_0 = \frac{C_1}{Cph_0}$$
 et $\cos \theta_1 = \frac{C_1}{Cph_1}$

et en déduire leurs fréquences respectives en écrivant :

(4-37)
$$f_0 = \frac{Cph_0}{\lambda_0}$$
 et $f_1 = \frac{Cph_1}{\lambda_1}$

Une simulation numérique simple donnera le résultat spatial de la superposition de ces ondes harmoniques. Pour ce faire calculons le potentiel de ces ondes planes.

4-3.2.3. Potentiel de l'onde rayonnée

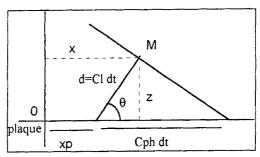


figure 4-6: Coordonnées de M point du front

On écrit les coordonnées de M (figure 4-6) :

$$(4-38) \frac{x = xp + d\cos\theta}{z = d\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{Cl}}{\text{Cph}(\omega)}$$

Pour une fréquence donnée, l'onde a mis un temps t1 pour parcourir dans le solide une distance xp à la vitesse Cph, et un temps t2 pour parcourir dans l'eau une distance d à la vitesse Cl. On peut donc écrire le potentiel en M pour une onde harmonique sous la forme :

$$\dot{\Phi} = A \sin \omega (t - t1 - t2)$$

ce qui équivaut à :

(4-39)
$$\phi = A \sin \omega \left(t - \frac{xp(\omega)}{Cph(\omega)} - \frac{d(\omega)}{Cl}\right)$$

On peut également arriver à ce résultat à partir du potentiel des ondes de Lamb dans l'eau (4-31). On peut donc écrire pour z > 0:

(4-40)
$$\phi = A \sin(\omega t - \sqrt{k_1^2 - \xi^2}z - \xi x)$$

d'où
$$\phi = A \sin \phi$$

avec
$$\varphi = \omega(t - \sqrt{\frac{1}{Cl^2} - \frac{1}{Cph^2(\omega)}}z - \frac{1}{Cph(\omega)}x)$$

Si on remplace x et z par leurs valeurs respectives trouvées :

$$x = xp + d\cos\theta$$

 $z = d\sin\theta$

on obtient bien l'expression (4-39).

La simulation de la visualisation s'obtient en écrivant le potentiel de l'onde A0 dans l'eau à t fixé en tout point (x, z) avec la condition $\phi > 0$. On somme ensuite sur toutes les fréquences en utilisant les couples de valeurs (ω, C_{ph}) de la courbe de dispersion théorique. Pour finir, on somme sur tous les points d'émission de la plaque, c'est à dire sur tous les points tels que $0 < xp < C_g$ t.

On peut dès lors comparer le résultat avec la visualisation en ombroscopie.

4-3.2.4.Comparaison simulation et observation en ombroscopie de la A0

Une photographie est une représentation spatiale avec le temps fixé. Nous rappelons que l'excitation est impulsionnelle, c'est à dire qu'elle contient une large gamme de fréquences.

On verra dans ce paragraphe et le paragraphe suivant qu'une série de fronts d'onde avec des alternances de noir et de blanc due à un phénomène de dispersion correspond à des équiphases.

Comme on l'a vu au chapitre 2 paragraphe 2-3.1., une visualisation est une vue en coupe qui doit être un plan de symétrie pour la plaque et qui doit être perpendiculaire à l'axe optique. Ainsi on a une compensation des gradients de chaque côté du plan de symétrie quand on intègre suivant la troisième composante (ici y). Cela permet d'être sûr de la position du front d'onde par rapport à la cible et d'obtenir un résultat comparable à la simulation en deux dimensions. La strioscopie représente alors les iso $\frac{\partial p}{\partial z}$ et l'omboscopie les iso $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$, la variation de pression étant liée à la variation d'indice (Ch 2, 2-1.6).

Le potentiel correspondant au rayonnement d'une onde A0 dans l'eau pour le cas harmonique s'écrit (4-31):

$$\begin{aligned} & \phi_1(z) = A_1 \exp i(\gamma_1 z + \xi x - \omega t) & \text{pour } z > h \\ & \phi_2(z) = -A_1 \exp i(-\gamma_1 z + \xi x - \omega t) & \text{pour } z < -h \end{aligned}$$

 $car A_1 = -A_2$

et donc le potentiel est antisymétrique :

(4-41)
$$\phi_1(-z) = -\phi_1(z)$$

On a alors:

$$p_1 = \rho \text{Re}(i\omega\phi_1(z)) = \rho\omega \text{Im}(\phi_1(z))$$

$$p_2 = \rho \text{Re}(i\omega\phi_2(z)) = \rho\omega \text{Im}(\phi_2(z))$$

On peut calculer les dérivées de la pression par rapport à z :

(4-42 a)
$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = \text{Re}(\rho i\omega \frac{\partial \phi_1}{\partial z}) = -\rho\omega \gamma_1 \text{Re}(\phi_1) \text{ où } \rho \text{ est la masse volumique du liquide}$$

(4-42 b)
$$\frac{\partial p_2}{\partial z} = \text{Re}(\rho i\omega \frac{\partial \phi_2}{\partial z}) = \rho \omega \gamma_1 \text{Re}(\phi_2)$$

On remarque alors que:

(4-42 c)
$$\frac{\partial p_1}{\partial z}(-z) = \frac{\partial p_2}{\partial z}(z)$$

en revanche on a :

(4-43 a)
$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} = -\text{Re}(\rho \omega i \gamma_1^2 \phi_1) = -\rho \omega \gamma_1^2 \text{ Im}(\phi_1)$$

(4-43 b)
$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial \tau^2} = -\text{Re}(\rho \omega i \gamma_1^2 \phi_2) = -\rho \omega \gamma_1^2 \text{ Im}(\phi_2)$$

et donc :

(4-43 c)
$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}(-z) = -\frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2}(z)$$

Les relations précédentes montrent que si $Im(\phi_1) = 0$, les isobares p = 0 se confondent avec les équipotentielles $Im(\phi_1) = 0$ quel que soit ω . L'enveloppe du réseau de plans de phase $\phi = 0$ pour ω variable à t constant est donc une isobare où la perturbation est nulle. Il en va de même d'après (4-43 a et b) de la dérivée seconde de p. Pour l'ombroscopie cela signifie que les rayons lumineux ne subissent pas de déviation sur cette isobare. Son éclairement doit donc correspondre à celui de la teinte sensible qui se situe nécessairement à la frontière entre les

zones suréclairées et les zones noires. Nous pourrons donc assimiler cette frontière à une isobare p=0 c'est à dire une équiphase $\phi=0$ pour toutes les valeurs de ω .

Les formules (4-42 a et b) montrent que les choses sont moins simples pour la strioscopie qui ne visualise correctement que des équiphases $\phi = \pi / 2$ telles que $\text{Re}(\phi_1) = 0$. La frontière blanche et noire correspondrait alors à des courbes de gradient de pression nul quelque soit ω .

On remarquera d'autre part que, comme $\gamma_1 = \omega$ / Cl et $\xi = \omega$ /Cph la sensibilité de l'ombroscopie décroît plus vite que la strioscopie aux basses fréquences. Cependant cela ne nous pénalise pas grâce aux performances de notre source à étincelle du côté des hautes fréquences.

Le potentiel de l'onde est antisymétrique mais sa dérivée est symétrique ce qui veut dire qu'en strioscopie la réémission des ondes A0 dans l'eau apparaît symétrique par rapport à la plaque sur la photographie. En ombroscopie, en revanche, ces mêmes ondes apparaîtront antisymétriques.

Nous avons choisi de comparer nos simulations avec des ombroscopies dont la qualité est meilleure que celles des strioscopies difficiles à régler et dont l'interprétation physique est plus complexe. De plus, au paragraphe suivant, le calcul des équiphases $\phi = 0$ s'avérera beaucoup plus aisé que celui d'équiphases $\phi = \pi/2$. On devra donc calculer les équipotentielles p = 0. Enfin il nous importe peu de perdre la sensibilité aux basses fréquences, puisque le spectre de la source est assez riche pour nous permettre de tirer toutes les informations désirées à l'aide des hautes fréquences.

Pour la simulation, on doit connaître la vitesse de groupe qui est la vitesse à laquelle se propage l'ensemble de la perturbation. On peut la mesurer en relevant sur deux visualisations ayant des temps différents le point le plus avancé de l'onde.

Une autre technique est de la mesurer comme on le fait pour les vitesses de phase en prenant ici la droite limite des lignes équiphases. La figure 4-7 suivante montre la façon d'obtenir la vitesse de groupe à partir de la visualisation à l'échelle 1.

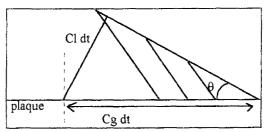


figure 4-7: vitesse de groupe Cg

Dans notre cas la vitesse de groupe est quasiment constante et telle que :

$$C_g = \frac{C_1}{\sin \theta} \approx 3100 \text{m/s}$$

La synchronisation entre la photographie et la simulation se fait à partir de l'instant où l'onde A0 est générée. On connaît cet instant sur les photographies. On peut donc savoir quelle doit être la position de l'onde incidente sur la plaque pour assurer cette émission.

Le temps utilisé pour la simulation est le temps de la photographie moins le temps écoulé avant la génération de l'onde :

$$t_A = t_{photo} - t_g = t_{photo} - \frac{D}{C_1 \cos \alpha_g} \approx 36 \mu s$$

On prend le temps à partir de l'émission de la source $t_{photo} = 50.6~\mu s$, Cl = 1480~m/s et la distance source-plaque D = 0.02~m. L'angle d'incidence à partir duquel l'onde est générée est noté α_g , il est pris égal à 30° et permet de calculer le temps t_g nécessaire à la génération de l'onde.

On a utilisé les valeurs de la courbe de dispersion théorique Cph(ω) déterminées par l'équation (4-34) dans le cas de l'acier inoxydable.

L'ombroscopie est sensible essentiellement autour du plan de symétrie de l'écoulement, le résultat est alors peu différent de la représentation en deux dimensions. En effet, l'ensemble est cohérent et la coïncidence des fronts entre la simulation (planche 4-2) et la photographie (planche 4-1 a) est excellente. Les amplitudes des basses fréquences sont bien atténuées ce qui est normale puisque l'ombroscopie privilégie les hautes fréquences. La similitude pour les quatre premiers fronts est acceptable mais en ce qui concerne les autres fronts l'atténuation des amplitudes est plus importante sur la photographie où les derniers fronts sont quasiment

invisibles. Une des causes vient certainement du caractère sphérique des ondes dont on n'a pas tenu compte pour la simulation.

4-3.3.LES EQUIPHASES

4-3.3.1. Calcul des enveloppes

On peut calculer l'équation des fronts d'onde en calculant les enveloppes des plans équipotentiels $i\phi_1 = 0$. Leur phase ϕ est égale à 0.

On calculera ici l'équation du premier front d'onde, elle est telle que :

(4-44 a)
$$\phi(x, z, t, \omega) = (\sqrt{\frac{1}{Cl^2} - \frac{1}{Cph^2(\omega)}}) z + \frac{1}{Cph(\omega)} x - t = 0$$

$$(4-44 b) \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = 0$$

où ϕ est la phase. Pour les raisons exposées en 4-3.2.4 on choisit, ici, la phase constante égale à zéro.

Ainsi, on établit une relation (4-44 a) entre x, z, et le paramètre ω , surface d'onde à t fixé et A constante. Le système (4-44 a) (4-44 b) est bien l'ensemble des points en phase à tout instant indépendamment de ω . La résolution de ce système permet d'obtenir la forme paramétrique de l'équation de la courbe équiphase.

On écrit z en fonction des autres paramètres :

$$\begin{split} z &= \frac{1}{\sqrt{\frac{Cph^2(\omega)}{Cl^2} - 1}} (Cph(\omega)t - x) \\ avec & \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{\frac{Cph^2(\omega)}{Cl^2} - 1}} avec \; \theta \; d\acute{e}fini \; sur \; la \; figure \; 4-6 \; pr\acute{e}c\acute{e}dente. \end{split}$$

L'équation (4-44 b) équivaut à :

$$\frac{dCph}{d\omega}\left(-\frac{Cph}{C_1^2(\frac{Cph^2}{C_1^2}-1)(\frac{Cph^2}{C_1^2}-1)^{1/2}}(Cph\ t-x)+\frac{1}{\sqrt{\frac{Cph^2(\omega)}{Cl^2}-1}}t\right)=0$$

avec
$$\frac{d \tan \theta}{d \omega} = -\frac{Cph}{C_1^2 \left(\frac{Cph^2}{C^2} - 1\right) \left(\frac{Cph^2}{C^2} - 1\right)^{t/2}} \frac{dCph}{d\omega}$$

or $\frac{dCph}{d\omega}$ est différent de zéro pour une onde dispersive.

On trouve donc facilement sous forme paramétrique à t fixé et ω paramètre :

(4-45 a)
$$x = \frac{C_1^2}{Cph}t$$

(4-45 b) $z = \sqrt{\frac{Cph^2(\omega)}{C_1^2} - 1} \left(\frac{C_1^2}{Cph}t\right)$

Cette équation représente la première enveloppe c'est à dire la première équiphase de l'onde A0.

En remplaçant Cph à t fixé, on obtient :

(4-46)
$$z = \sqrt{C_1^2 t - x^2}$$

D'autres fronts sont créés au cours du temps et sont dus au fait que la vitesse de groupe est supérieure à la vitesse de phase. Pour combler l'écart de vitesse, l'onde se propage dans la direction de propagation avec une période spatiale λ . λ est, à ω fixé, la distance qui sépare deux équiphases (de même éclairement). Il est donc facile de trouver les équations des autres enveloppes.

Ainsi, on peut par exemple calculer la deuxième équiphase. Il suffit d'ajouter une période à t et de procéder de la même façon. On remplace t par $(t + 2\pi/\omega)$ et on a :

(4-47 a)
$$z = \tan \theta (Cph(\omega)(t + \frac{2\pi}{\omega}) - x)$$

(4-47 b)
$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{d\tan\theta}{d\omega} \left(Cph \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) - x \right) + \tan\theta \left(\frac{dCph}{d\omega} \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) + Cph \frac{-2\pi}{\omega^2} \right) = 0$$

$$avec \quad \frac{d\tan\theta}{d\omega} = -\frac{Cph}{C_1^2(\frac{Cph^2}{C_1^2}-1)(\frac{Cph^2}{C_1^2}-1)^{1/2}}\frac{dCph}{d\omega}$$

et
$$\frac{dCph}{d\omega} = \frac{Cph}{\omega} \left(-\frac{Cph}{C_g} + 1\right)$$
 où C_g est la vitesse de groupe de Stokes $d\omega/dk$ (voir chapitre 2).

On peut déduire x en fonction de t fixé, ω , Cph(ω), Cg(ω) à partir de (4-47 b) :

(4-48 a)
$$x = \frac{C_1^2}{Cph} (t + \frac{2\pi}{\omega}) + \frac{C_g (Cph^2 - C_1^2)}{Cph(C_g - Cph)} \frac{2\pi}{\omega}$$

(4-48 b)
$$z = C_1 (1 - \frac{C_1^2}{Cph^2})^{1/2} (t - \frac{2\pi}{\omega} (\frac{Cph}{C_2 - Cph}))$$

Cette expression est l'équation paramétrique de la deuxième équiphase. On remarque qu'elle dépend de ω , de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe.

L'équation paramétrique de la n ième équiphase s'écrira donc :

(4-49 a)
$$x = \frac{C_1^2}{Cph} (t + \frac{2\pi n}{\omega}) + \frac{C_g (Cph^2 - C_1^2)}{Cph(C_g - Cph)} \frac{2\pi n}{\omega}$$

(4-49 b)
$$z = C_1 (1 - \frac{C_1^2}{Cph^2})^{1/2} (t - \frac{2\pi n}{\omega} (\frac{Cph}{C_e - Cph}))$$

4-3.3.2. Comparaison des enveloppes avec la photographie

On peut tracer les équiphases théoriques en programmant les équations précédentes. On a fixé la vitesse de groupe à 3100 m/s car elle est à peu près constante dans notre gamme de ke expérimental. On a pris le même temps que pour la simulation $t=36~\mu s$ ainsi que les valeurs théoriques pour la vitesse de phase Cph en fonction de ω pour une plaque d'acier inoxydable (4-34).

On constate une très bonne concordance entre les frontières noires blanches de la visualisation et les courbes équiphases théoriques (planche 4-3).

Fort de cette analyse, nous allons pouvoir tracer la courbe de dispersion tirée de l'expérience à partir d'une visualisation. Pour ce faire il suffit de mesurer la fréquence et la vitesse de phase en de nombreux points P d'un front d'onde de la photographie.

4-3.4.COURBES DE DISPERSION EXPERIMENTALES

4-3.4.1. Technique de mesure

1ère étape : mesure de la vitesse de phase au point Po.

La tangente à la courbe en P₀ correspond au front qui existerait en l'absence de dispersion. C'est à dire qu'elle représente une équiphase de l'onde harmonique associée.

La normale à cette tangente donne le point d'émission sur la plaque. La vitesse suivant cette direction normale au front d'onde est la vitesse du son dans l'eau.

D'après la construction géométrique (figure 4-8), on peut dire que :

$$\sin \theta_0 = \frac{C_1 \Delta t}{C_{ph} \Delta t}$$

avec θ_0 l'angle entre la tangente et la plaque.

On obtient alors la vitesse de phase en P₀:

(4-50)
$$C_{ph_0} = \frac{C_1}{\sin \theta_0}$$

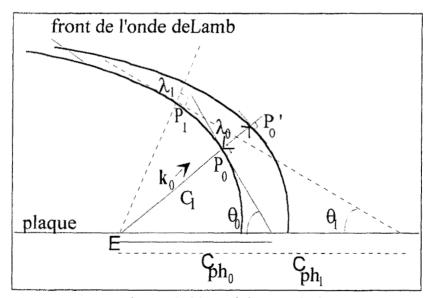


figure 4-8 : Mesure de la vitesse de phase.

On utilise les fronts de la photographie séparant le noir du blanc car ils correspondent aux équiphases $\phi = k \pi$.

2ème étape : mesure de la fréquence en Po.

Sur la photographie, il est aisé de mesurer la longueur d'onde dans l'eau puisqu'elle est caractérisée par la longueur dans la direction de propagation d'une période complète séparant des lignes d'équiphase λ . On en déduit que $f_0 = Cph_0 / \lambda_0$ (on néglige la variation d'inclinaison de la normale au front d'onde entre P_0 et P_0). Il est important de noter qu'il n'y a pas de dispersion dans l'eau, ce qui veut dire que les phases sont conservées au cours du temps.

On peut mesurer de la même façon la vitesse de phase et la fréquence en tout autre point du front. Comme cela correspond alors à une autre vitesse de phase, on obtient en balayant tous les points du front, les points permettant de tracer la courbe de dispersion.

Par exemple en P1 on a :

(4-51)
$$\sin \theta_1 = \frac{C_1 \Delta t}{C_{ph} \Delta t}$$
 et $f1 = Cph_1 / \lambda_1$

avec θ_1 l'angle entre la tangente et la plaque.

Une seule photographie et deux équiphases suffisent donc pour tracer la courbe de dispersion.

On peut ainsi comparer la courbe expérimentale obtenue aux courbes théoriques et identifier sans ambiguïté les ondes dispersives.

4-3.4.2. Identification de l'onde

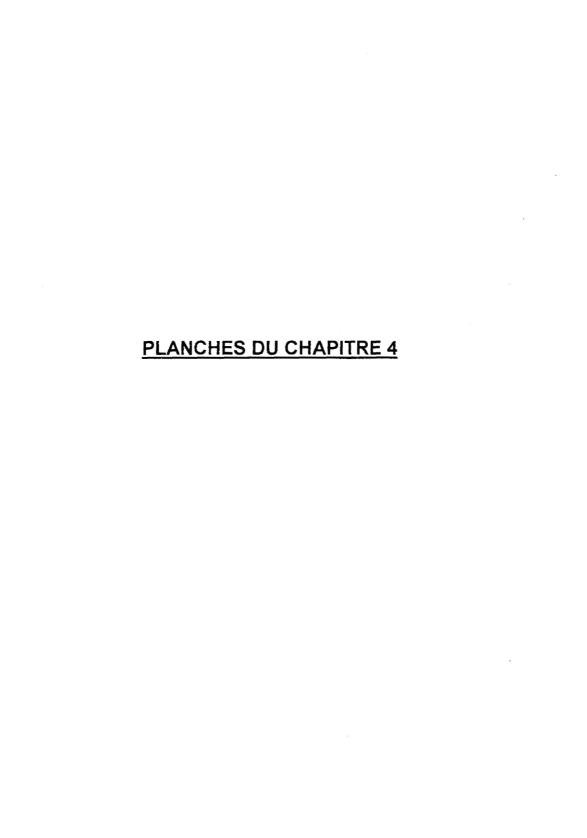
La première courbe (en * sur la planche 4-4) représente la courbe de dispersion expérimentale pour la plaque. Elle est comparée à la courbe de dispersion théorique pour l'onde A0 (en trait continu sur la planche 4-4) d'une plaque d'acier inoxydable d'épaisseur 1 mm et immergée dans l'eau.

Pour obtenir la courbe théorique, on a calculé les solutions de l'équation (4-34) avec les vitesses C_T, C_L et la densité ρ de l'acier. On a ensuite tracé la vitesse de phase en fonction de ke qu'on a choisi entre 1.5 à 6 afin de rester dans la gamme de ke expérimental. La deuxième courbe est le résultat de mesures expérimentales faites sur la photographie par la méthode décrite en 4-3.4.1. Afin d'accéder à une précision convenable, on réalise des mesures redondantes puis on effectue une moyenne. Comme on le constate sur la planche 4-4, la courbe de dispersion expérimentale est extrêmement proche de la courbe théorique et cela malgré des mesures soumises aux erreurs d'appréciation visuelles.

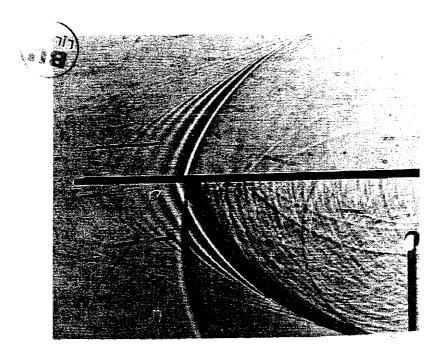
On peut alors affirmer sans ambiguïté que l'onde dispersive visible sur la photographie est bien l'onde de réémission liée à l'onde de Lamb A0.

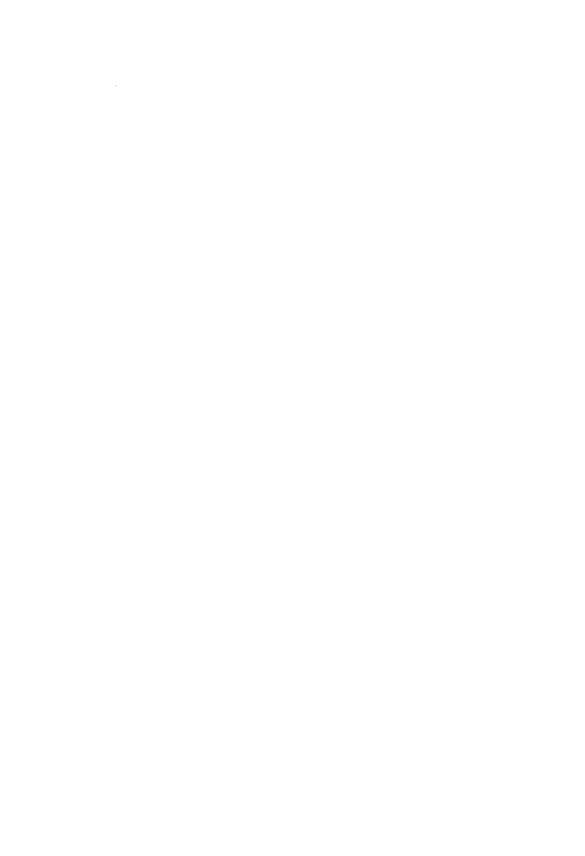
4-3.5.<u>CONCLUSION</u>:

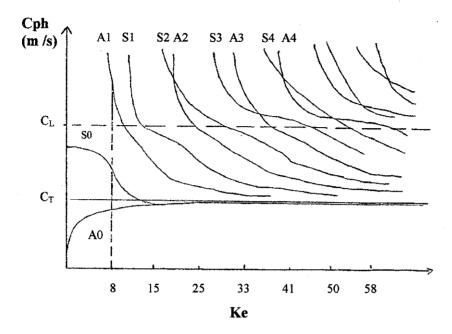
Trois techniques différentes confirment toutes que l'onde rayonnée par la plaque dans l'eau, observée par notre méthode, est bien due à l'onde A0 qui se propage dans la plaque. La première et seconde technique permettent d'obtenir la forme spatiale théorique de cette réémission et ainsi de comparer la position des fronts entre la visualisation et les simulations. Une fois assuré le fait que la visualisation donnait accès aux équiphases nulles, on a pu mettre en place la troisième technique qui permet d'obtenir une courbe de dispersion expérimentale et qui permet donc d'identifier l'onde sans ambiguïté.



VCORZIÓNE SUR UNE PLAQUE INOX PLACHERA : VISUALION DE LA DIFFRACTION

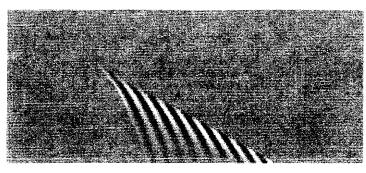






<u>PLANCHE 4-1 B</u>: Courbes de dispersion théoriques pour une plaque d'acier inoxydable.







<u>PLANCHE 4-2</u>: SIMULATION DE L'ONDE A0

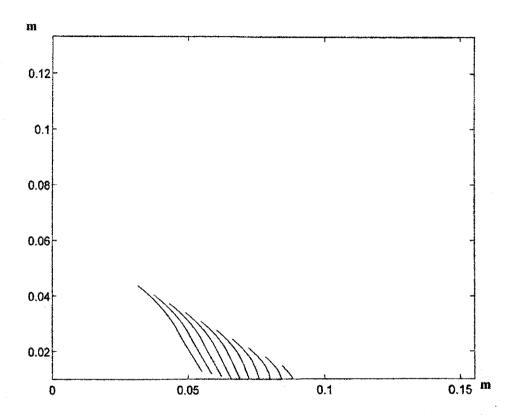
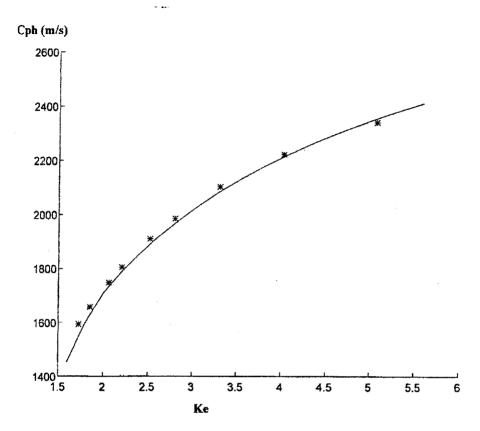


PLANCHE 4-3: LES COURBES EQUIPHASES



<u>PLANCHE 4-4</u>: COMPARAISON ENTRE LA COURBE DE DISPERSION THEORIQUE DE L'ONDE A0 ET LES POINTS EXPERIMENTAUX

CHAPITRE 5 DIFFRACTION SUR DES SURFACES COURBES



5-1.INTRODUCTION

Dans la première partie de ce chapitre, on se place d'un point de vue théorique.

Toujours dans le souci de mieux comprendre les phénomènes complexes qui ont lieu lors de la diffraction par des cibles tridimensionnelles, on indique les effets de plusieurs paramètres importants, comme la courbure et l'épaisseur des coques.

On fait ensuite une revue des différentes méthodes couramment employées pour l'identification des ondes que ce soit de façon théorique, numérique ou expérimentale.

Pour finir on détaille la méthode de Watson-Sommerfeld qui permet d'obtenir théoriquement les différents modes correspondant aux ondes de surface ainsi qu'une intégrale correspondant aux ondes homogènes qu'on peut évaluer par l'approximation géométrique. Cette méthode est appliquée au cas particulier de la diffraction d'ondes planes harmoniques par un cylindre. Ceci nous sert de base pour l'étude de la sphère.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous verrons de quelle manière la théorie des ondes mise en œuvre dans la première partie sera utilisée pour identifier les diverses ondes mises en évidence par ombroscopie ou strioscopie rapide lors de nos expérimentations en diffraction acoustique sur différents objets. On s'aidera aussi de diverses simulations pour confirmer nos hypothèses.

Tout d'abord on présente l'étude de la sphère.

On va ensuite se servir du modèle simple de la plaque vue au chapitre 4 pour l'étude des tubes et ainsi identifier une onde A0 sur une coque.

On s'intéressera pour finir à l'étude d'une cible complexe : la Line qui est un cylindre creux aux extrémités hémisphériques. Cela nous permettra entre autre de mettre en évidence une onde A qui est une onde évanescente se propageant le long de la paroi.

5-2.PARAMETRES MODIFIANT LA NATURE DES ONDES

5-2.1.INTRODUCTION

De nombreux paramètres entrent en jeu pour déterminer le comportement des ondes. Tout d'abord, le matériau choisi détermine l'élasticité, la densité et les vitesses des ondes longitudinales et transverses.

Ensuite, les dimensions dans chaque direction jouent un rôle important pour déterminer la nature des ondes et imposer les conditions aux limites. La forme de l'objet a également une influence, en particulier sa courbure dans les différentes directions.

Enfin, il faut tenir compte des milieux dans lesquels se trouve l'objet. Cela peut être le vide, un fluide caractérisé par sa densité, ou un matériau soit rigide soit élastique.

5-2.2.EFFETS DE LA COURBURE ET DE L'EPAISSEUR

On répertorie, ci-dessous dans un tableau synthétique les effets de la courbure et de l'épaisseur tels qu'on peut les trouver dans la littérature.

Les tableaux 5-1 et 5-2 sont composés de deux colonnes. La première colonne est la référence théorique, la deuxième est sa manifestation sur les surfaces courbes.

Cette synthèse a été établie à partir des articles de Izbicki, Rousselot, Gérard, Maze, Ripoche (1991) et de Frisk et Uberall (1976). On voit essentiellement que la courbure rend l'onde dispersive et que des modes d'ordre supérieur apparaissent lorsqu'il y a courbure. Cependant, plus l'ordre du mode est élevé plus il est atténué, on prend donc généralement en compte seulement les premiers modes.

SOLIDE ELASTIQUE PLAN-	SOLIDE ELASTIQUE COURBE-
LIQUIDE	LIQUIDE
FLUIDE:	FLUIDE:
-réflexion spéculaire	-réflexion spéculaire
-onde de Stoneley	-Stoneley atténuée avec plusieurs modes
	-Franz due à la courbure avec plusieurs modes
SOLIDE :	SOLIDE :
-onde de Rayleigh généralisée -ondes latérales	-Rayleigh généralisée avec plusieurs modes
	-ondes de galerie à écho avec plusieurs modes

<u>Tableau 5-1</u>: Influence de la courbure dans le cas d'une épaisseur importante (de l'ordre du centimètre ou supérieure au centimètre).

PLAQUE ELASTIQUE PLANE	COQUE ELASTIQUE COURBE
(avec d'un côté du LIQUIDE et de	(avec d'un côté du LIQUIDE et de
l'autre côté du VIDE)	l'autre du VIDE)
FLUIDE:	<u>FLUIDE :</u>
-réflexion spéculaire	-réflexion spéculaire
-onde de Scholte-Stoneley	-modes de Scholte-Stoneley
SOLIDE:	<u>SOLIDE</u> :
-ondes de Lamb	-ondes de Lamb généralisées

<u>Tableau 5-2</u>: Influence de la courbure pour une plaque de faible épaisseur (de l'ordre du millimètre).

(le milieu extérieur étant un
LIQUIDE et le milieu intérieur étant
duVIDE)
<u>FLUIDE :</u>
-réflexion spéculaire
-onde de Scholte-Stoneley (A)
SOLIDE:
-onde de Lamb Ao
-onde de Lamb So

<u>Tableau 5-3</u>: Rôle du paramètre b/a (rapport entre le rayon interne b et le rayon externe a de la coque). Pour une coque très fine le b/a tend vers 1.

Le troisième tableau 5-3 est basé sur l'article de **Talmant**, **Quentin et Rousselot** (1988). On compare cette fois de deux types de coques. On remarque que pour une coque très fine, on ne garde que les modes correspondant aux modes d'ordre zéro sur une plaque. Ces

modes ont une fréquence de coupure nulle et sont les seuls existant pour un produit fréquence épaisseur petit. On notera l'analogie avec les ondes de Young.

5-3.LES METHODES CLASSIQUES

Les méthodes habituellement employées pour identifier les ondes diffractées sont des méthodes harmoniques. En effet, les équations sont bien adaptées à un traitement harmonique et ces méthodes sont plus faciles à mettre en œuvre expérimentalement à grande échelle.

Derem (Derem 1986) propose une synthèse des méthodes de physique mathématique pour l'étude de la diffusion acoustique par des solides élastiques.

Ces théories sont basées sur le fait qu'on peut écrire la solution des ondes comme une série infinie de modes normaux de vibration (série de Rayleigh).

A partir de cette série de Rayleigh, on peut appliquer la transformation de Watson Sommerfeld qui fournit une décomposition de l'amplitude de la diffusion suivant le type d'onde et qui permet d'aborder, pour des fréquences élevées, l'étude temporelle des phénomènes de diffusion. Le principe consiste à remplacer la somme d'une série infinie de termes indicés par une intégrale de contour où l'indice devient une variable complexe.

Les pôles de l'intégrale conduisent alors aux ondes de surface qui sont soit des ondes de surface de type élastique, soit de type fluide externe. Il reste une intégrale qui correspond aux ondes dites géométriques. Elle est évaluée par la méthode du col ou, par une approximation géométrique si le produit du nombre d'onde par le rayon est élevé.

Le détail de cette méthode est traité au paragraphe suivant pour le cas des ondes sur un cylindre élastique.

On peut aussi, à partir de la série de Rayleigh, utiliser le formalisme de la matrice de diffusion notée S qui est issu de la physique nucléaire et nouvellement introduit en acoustique. La matrice S, se composant d'un fond non résonnant (matrice pour le cylindre rigide équivalent) superposée à une amplitude résonante acoustique, permet de dégager une description intéressante des résonances acoustiques. On peut ainsi déterminer la position et la largeur des pics de résonances.

Décultot (1992) décrit une méthode expérimentale en harmonique appelée la méthode MIIR (méthode d'isolation et d'identification des résonances). Cette méthode permet de tracer le spectre des résonances d'une cible (de forme géométrique simple) par mesure de

l'amplitude de la réémission libre après la fin de l'insonation forcée. Chaque pic de résonance est lié à un mode propre de vibration de la cible indicé n. En effet, chaque fois qu'une onde de surface, pour une certaine fréquence, entoure la cible avec exactement n longueurs d'onde, une résonance apparaît dans le mode normal de vibration d'indice n.

Il est possible expérimentalement de connaître ce mode en mesurant, à l'aide d'un transducteur-récepteur, tournant autour de la cible à une distance constante, la pression diffusée lors du régime de réémission libre pour une fréquence de résonance.

La figure angulaire est constituée de lobes réguliers. Les lobes sont liés aux ventres de vibration d'une onde stationnaire. L'indice n est pris égal à la moitié du nombre de lobes qui est pair. La connaissance expérimentale de ce mode permet d'identifier les résonances et de vérifier la théorie de la diffusion résonante (matrice S). Elle permet aussi d'avoir accès à la célérité et à l'amortissement des ondes de circonférence.

Hackman et Todoroff (1985) utilisent une méthode numérique pour la diffusion d'objets élastiques. Cette méthode est basée sur l'obtention de la T-matrice (matrice de transition obtenue à partir d'une représentation intégrale d'Helmholtz et de l'utilisation de la fonction de Green). Le premier à avoir employé cette méthode est Waterman en 1969.

Pour le détail de ces méthodes, le lecteur peut consulter les articles mentionnés.

5-4. THEORIE DES ONDES SUR UN SOLIDE ELASTIQUE (DEREM 1986 ; GERARD 1986)

5-4.1.INTRODUCTION

Cette section vise à mettre en place certains éléments utiles à la confrontation ultérieure des résultats d'études numériques et expérimentales relatives à la propagation d'ondes dans les milieux élastiques dont les frontières sont des surfaces coordonnées (plan, cylindre, sphère).

La solution du problème de diffraction par un corps élastique a été cherchée, en particulier dans le cas d'un cylindre élastique plein aux moyens de la transformation de Watson-Sommerfeld appliquée aux séries de modes normaux. Dans le cas général, on obtient à la fois des ondes de surface et des ondes progressives dans le solide dites « ondes géométriques ».

Les ondes de surface sont divisées en deux classes :

- Ondes de Rayleigh et "ondes de galerie à écho" qui se propagent avec des vitesses proches des vitesses du son dans le solide élastique.
- Onde de Stoneley et onde de Franz qui se propagent avec des vitesses proches de la vitesse du son dans le liquide.

Les ondes de "galerie à écho" et de Franz sont essentiellement dues à la courbure du cylindre.

Les ondes progressives dans le solide correspondent à des séries d'ondes transmises qui peuvent être traitées par la théorie géométrique pour le cas de nombres d'ondes K très grand devant 1 / a où a est la longueur caractéristique du cylindre (rayon du cylindre pour le cas d'une incidence normale).

5-4.2. SERIE MODALE OU SERIE DE RAYLEIGH

Dans ce paragraphe on rappelle les solutions élémentaires de l'équation des ondes et on en déduira la structure des solutions du problème canonique associé aux géométries sphériques que l'on pourra l'utiliser pour l'étude de la sphère à la section 5-5. De plus on pourra aisément adapter les solutions obtenues aux géométries cylindriques traitées dans le paragraphe suivant.

On étudie des ondes élastiques planes longitudinales et transversales sur une interface de forme arbitraire séparant deux milieux élastiques homogènes et isotropes. Nous supposons une dépendance purement harmonique du temps. On a indépendance des mouvements longitudinaux et transversaux et pour conserver cette décomposition des déplacements au niveau des équations du mouvement et des conditions limites, on utilise la théorie des potentiels d'Helmholtz (chapitre 1).

Dans le cas de géométries sphériques par exemple et dans le système de coordonnées adaptées de vecteur de base (e_r, e_o, e_o) , la relation (1-3) est remplacé par :

(5-1)
$$u = -grad\Phi + rot(rot(r\chi e_r)) + rot(r\Omega e_r)$$

Le potentiel Φ est associé à l'onde longitudinale. Nous séparons le champ transverse en deux potentiels scalaires χ de polarisation verticale et Ω de polarisation horizontale. Chacun de ces potentiels scalaires est solution de l'équation des ondes :

(5-2 a)
$$\frac{\nabla^2 F - 1/C^2 \partial^2 F/\partial t^2 = 0}{\text{avec } C = C_L \text{ pour } F = \Phi \text{ ou } C_T \text{ pour } F = \chi \text{ ou } \Omega }$$

En explicitant le laplacien scalaire en sphérique, on trouve :

$$(1/r^2.\partial/\partial r(r^2.\partial/\partial r) + 1/(r^2\sin\theta).\partial/\partial\theta(\sin\theta.\partial/\partial\theta) + 1/(r^2\sin\theta)\partial^2/\partial\phi^2 - 1/C^2)F = 0$$

Par séparation des variables sous la forme :

$$F = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Delta(\phi)$$

et en posant K = 1 / C, on en déduit :

$$(5-2 b)$$

$$[1/R.d/dr(r^2.dR/dr) + r^2K^2]\sin^2\theta + \sin\theta/\Theta.d/d\theta(\sin\theta.d\Theta/d\theta) + 1/\Delta.d^2\Delta/d\phi^2 = 0$$

Comme le troisième terme ne dépend que de \(\phi \), on pose :

$$1/\Delta.d^2\Delta/d\phi^2 = -m^2$$
 (5-3)
$$d'o\dot{u}:$$

 $\Delta(\varphi) = \Delta_0 \exp(\pm im\varphi)$

Si le problème possède une symétrie de révolution telle que φ n'intervient pas, on a m = 0. C'est le cas des géométries sphériques et cylindriques traitées par la suite.

Le premier terme divisé par $\sin^2\theta$ est indépendant de θ , on pose alors :

(5-4)
$$1/(\sin\theta\Theta) \cdot d/d\theta(\sin\theta \cdot d\Theta/d\theta) - m^2/\sin^2\theta = -n(n+1)$$
 (équation de type Legendre)

Nous réécrivons l'équation sous la forme appropriée pour les fonctions de Legendre associées:

$$(1-x^2).d^2\Theta/dx^2 - 2x.d\Theta/dx + n(n+1)\Theta - m^2/(1-x^2)\Theta = 0$$

où on a posé $x = \cos\theta$.

Les solutions fondamentales de cette équation sont les fonctions de Legendre du premier et du deuxième type :

(5-5)
$$\Theta = (P_n^m(\cos\theta); Q_n^m(\cos\theta))$$

Le « ; » signifie que la solution est une combinaison linéaire des deux fonctions.

Le choix du type est lié aux conditions limites et physiques du problème. Ces fonctions sont déterminées par les équations différentielles suivantes :

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{1/2m} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

$$Q_{\alpha}^{m}(x) = (1 - x^{2})^{1/2m} \frac{d^{m}Q_{\alpha}(x)}{dx^{m}}$$

Dans le cas traité ici où m = 0, on a:

$$P_{n}(x) = \frac{1}{2^{n} n!} \frac{d^{n}}{dx^{n}} (x^{2} - 1)^{n}$$

et

$$Q_n(x) = 1/2P_n(x) \ln \frac{1+x}{1-x} - Z_n$$

où

$$Z_{n} = \frac{2n-1}{1.n} P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3} + \dots$$

En remplaçant (5-4) dans l'équation de départ (5-2 b), on a :

$$1/(r^2R).d/dr(r^2dR/dr) - n(n+1)/r^2 + K^2 = 0$$

Pour obtenir une forme familière, on pose $R = \xi / \sqrt{z}$ avec z = Kr et on trouve :

$$d^{2}\xi/dz^{2} + 2/z.d\xi/dz + (1-n(n+1)/z^{2})\xi = 0$$

dont les solutions fondamentales sont les fonctions de Bessel sphériques du premier et du deuxième type:

(5-6)
$$\xi = (j_n(Kr); y_n(Kr))$$

Le « ; » signifie toujours que la solution est une combinaison linéaire des deux fonctions.

Les solutions (5-3), (5-5) et (5-6) nous donnent la forme générale des différents potentiels :

(5-7 a)
$$(Kr)F = \sum_{n=0}^{\infty} (j_n(Kr), h_n(Kr))(P_n(\cos\theta), Q_n(\cos\theta))\Delta(\phi) \exp(i\omega t)$$

avec, dans notre cas, $\varphi = 0$, $\Delta = constante$.

Le choix de deux solutions fondamentales indépendantes permettant de générer la solution générale est effectué de manière à satisfaire, d'une part aux exigences d'interprétation physique et d'autre part aux conditions physiques, autres que celles imposées par les interfaces, à savoir que les champs doivent rester finis à l'origine et à l'infini (condition de rayonnement de Sommerfeld).

Les relations entre les fonctions sphériques et cylindriques de Bessel, Ricatti et Hankel s'écrivent respectivement :

$$\begin{split} &(Kr)j_{n}(Kr) = \sqrt{\pi Kr/2} \ J_{n+12}(Kr) \\ &(Kr)y_{n}(Kr) = \sqrt{\pi Kr/2} \ Y_{n+1/2}(Kr) \\ &(Kr)h_{n}(Kr) = \sqrt{\pi Kr/2} \ H_{n+1/2}(Kr) \\ &h_{n}(Kr) = j_{n}(Kr) + iy_{n}(Kr) \end{split}$$

 $H^1_{n-1/2}(Kr)$ correspond à une onde sphérique sortante (réfléchie) centrée sur l'origine. Elle est finie à l'infini.

 $H_{n+1/2}^2(Kr)$ correspond à une onde sphérique entrante (incidente) centrée sur l'origine.

Seule la somme de ces deux fonctions (2 $J_{\alpha+1/2}(Kr)$) est finie à l'origine.

Pour le cas de la géométrie sphérique on obtient alors deux groupes de solutions fondamentales (Gérard 1986):

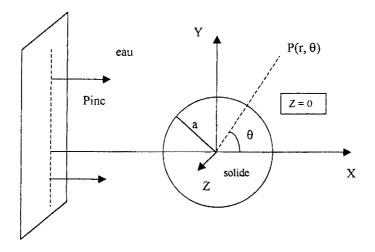
$$F(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n H^1_{n+1/2}(Kr) + b_n H^2_{n+1/2}(Kr)) P_n(\cos\theta) \exp(i\omega t) \operatorname{pour} r \rangle r_0 \rangle 0$$
(5-7 b)
$$F(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n J_{n+1/2}(Kr) P_n(\cos\theta) \exp(i\omega t) \operatorname{pour} 0 \le r \le r_0$$

 r_0 est le rayon de la sphère solide. On a une symétrie de révolution de sorte que ϕ n'intervient pas et à chaque valeur de l'entier n correspond le mode de propagation d'ordre n. Les constantes a_n , b_n , c_n sont déterminées de façon à satisfaire aux conditions limites imposées par les frontières des modèles étudiés.

Cette solution est appelée série modale ou série de Rayleigh.

5-4.3.<u>TRANSFORMATION DE WATSON-SOMMERFELD</u> POUR LE CYLINDRE

On considère maintenant une onde incidente plane sur un cylindre solide élastique immergé dans un liquide en régime permanent qui est le cas d'école traité dans la littérature (Derem 1986).



On considère que l'onde incidente est dirigée perpendiculairement à l'axe du cylindre comme le montre le schéma ci-dessus.

On a donc une symétrie cylindrique, on doit alors résoudre le problème en géométrie cylindrique dans le système de coordonnées adaptées de vecteur de base (e_r, e_θ, e_z) .

Pour cela on utilise la même méthode qu'au paragraphe 5-4.2. mais, dans les relations (5-7), les polynômes de Legendre sont alors remplacés par les fonctions trigonométriques $\sin n\theta$ ou $\cos n\theta$ selon le potentiel considéré et on obtient une équation de Neumann et non de

Bessel ce qui veut dire qu'on doit prendre les fonctions de Hankel et de Bessel d'ordre n au lieu d'ordre n+1/2.

On exprime alors la pression au point (r, θ , z = 0) (voir schéma ci-dessus), en présence du cylindre et dans le fluide où se situe l'observateur, sous la forme de la série de Rayleigh suivante (**Derem 1986**):

(5-8 a)
$$P = P_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n i^n \cos n\theta (J_n(Kr) + D_n^1/D_n.H_n^1(Kr)) \exp(-i\omega t) = Pinc + Pdiff$$

avec $\varepsilon_n = (2 - \delta_{n0})$ facteur de Neumann, et n un entier.

 D_n^1 et D_n sont des déterminants d'ordre 3 provenant des conditions à l'interface. On montrera leur origine et on les calculera pour l'application au cas de la sphère au paragraphe 5-5.1. Le propos ici est en effet d'expliquer sur ce cas de la littérature le principe de la transformation de Watson-Sommerfeld.

P₀ est un coefficient de normalisation qui a la dimension d'une pression. Pinc est la pression due à l'onde incidente et Pdiff à la diffusion acoustique.

La transformation de Watson-Sommerfeld est constituée d'opérations dont la plus délicate est la recherche du contour le mieux adapté au problème considéré.

Pour cela, on utilise tout d'abord le théorème de Cauchy qui permet d'écrire pour une fonction f holomorphe :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \int_{C} i/2 \frac{exp(-i\pi\upsilon)f(\upsilon)}{\sin(\pi\upsilon)} d\upsilon$$

où υ est la variable complexe correspondant à n qui est un entier. Le contour C est pris dans le sens des aiguilles de la montre et entoure le demi axe $Re(\upsilon) \ge 0$ de façon à éviter les singularité de $f(\upsilon)$ et à n'entourer que celles qui proviennent du dénominateur sin $\pi\upsilon$.

Il est facile de vérifier qu'en calculant les résidus aux pôles de la fonction située sous l'intégrale on obtient la somme discrète.

En effet, on peut écrire un développement limité du dénominateur de la fonction au voisinage de l'entier n

$$\sin \pi \upsilon \approx \sin \pi n + \pi (n - \upsilon) \cos \pi n + ... \approx (-1)^n \pi (n - \upsilon)$$

Les points tels que v = n sont donc des pôles simples de la fonction située sous l'intégrale.

Le théorème des résidus s'écrit :

$$\int_{C} f(z)/g(z)dz = 2i\pi f(z_0)/g'(z_0) \text{ si } g(z_0) = 0 \text{ et } f(z_0) \neq 0$$

avec f et g des fonctions analytiques et z_0 un pôle simple de la fonction f(z) / g(z).

En appliquant ce théorème et en tenant compte du développement limité au voisinage de l'entier n on obtient donc :

$$\int_{C} i/2 \frac{\exp(-i\pi \upsilon)f(\upsilon)}{(-1)^{n} \pi(n-\upsilon)} d\upsilon = \sum_{n=0}^{\infty} 2i\pi i/2 \frac{f(n)}{(-1)^{n} \pi(-1)} \exp(-i\pi n) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

en notant que $(-1)^n = \exp(in\pi)$.

C'est bien ce qu'on voulait montrer.

On peut donc remplacer la somme infinie par une intégrale de contour :

(5-8 b) P =
$$\frac{P_0 i P_t}{2} \int_C \frac{dv}{\sin(\pi v)} \exp(-iv\pi/2) \cos(v\theta) \left[J_v(Kr) + D_v^1 / D_v.H_v^1(Kr) \right] \exp(-iωt)$$

en notant que i $^n = \exp(in\pi/2)$.

On fait maintenant passer le contour C par l'origine (n = 0). P_r est alors induit par la valeur à l'origine.

Les singularités sont les pôles qui proviennent des zéros du dénominateur. Elles sont donc les zéros de $\sin \pi \upsilon$ et de $D(\upsilon,x)$ (où x=Ka, a rayon du cylindre) (**Derem 1986**). Les racines de ce dernier peuvent être déterminées par des méthodes numériques et les seules intéressantes sont celles situées dans le premier quadrant complexe. En effet, les pôles des autres quadrants conduiraient à des ondes de surface à croissance exponentielle qui sont, bien entendu, à exclure d'un point de vue physique. On remarque que leurs valeurs se trouvent sur les lignes anti-Stokes qui sont attachées à la représentation asymptotique des fonctions de Hankel h_1, h_{-1}, h_2, h_{-2} (**planche 5-1**). Cela peut se comprendre puisque les éléments de $D(\upsilon, x)$ dépendent des fonctions cylindriques d'argument x.

On substitue alors au contour C un contour composé des portions $\{C',\,C\infty$, C0, -C, $C\infty\}$

$$P_{\scriptscriptstyle C} = P \ = P_{\scriptscriptstyle C0} + P_{\scriptscriptstyle C'} + P_{\scriptscriptstyle C\infty}$$

On considère un rayonnement à hautes fréquences (Ka>>1). Pc' est une intégrale de fond, c'est à dire une intégrale résiduelle sans aucun sens physique, et il est possible de montrer que cette intégrale est petite, elle sera donc négligée. Pc_{∞} tend également vers zéro quand la valeur absolue de υ tend vers l'infini (**Derem 1986**).

Le contour C0 va subir des modifications nécessaires à la séparation des pôles en deux catégories différenciées par leurs gammes de vitesses. En effet, la partie réelle des pôles s'écrit $Re(v) = Ka = \omega a / c$ qui dépend de la vitesse c.

On nomme C1 le chemin qui entoure les pôles de la catégorie (R) et C2 le contour qui entoure les pôles de la catégorie (F) (planche 5-2). On obtient alors :

$$P_{C} = P_{tot} = P_{C0} = P_{C1} + P_{C2}$$

a- Ondes de surfaces élastiques (Rayleigh, galerie à écho)

Les pôles internes au contour C1 sont notés υ_{ml} et ont pour indice ml = 1, 2, ...En appliquant le théorème des résidus au contour C₁ on a pour le pôle υ_{ml} :

(5-9)
$$P_{m1} = -2\pi P_0 \exp(-i\upsilon_{m1}\pi/2)\cos(\upsilon_{m1}\theta)/\sin(\pi\upsilon_{m1})(\frac{D_\upsilon^1}{(\partial D_\upsilon/\partial \upsilon)})|_{\upsilon m1}.H^1_{\upsilon m1}(Kr))\exp(-i\omega t)$$

pour $Re(v_{ml}) < vg$

 $Re(\upsilon) = Ka$, ce qui implique que plus $Re(\upsilon)$ est petit plus l'onde est rapide. Or on sait que ce sont les ondes de surface élastiques qui sont les plus rapides puisqu'elles ont le solide comme support. C'est pourquoi elles correspondent au contour C1.

b- Ondes de surface externes (Franz, Stoneley)

En appliquant le théorème des résidus aux pôles (F) du contour C2, on est confronté à un problème de convergence de la somme des amplitudes obtenue.

Pour pallier ce problème de convergence lié aux valeurs prises par θ , on se sert de l'identité suivante :

(5-10)
$$\cos(\upsilon\theta) = \exp(i\upsilon\pi)\cos(\upsilon(\theta-\pi)) - i \cdot \exp(\upsilon(\pi-\theta))\sin(\pi\upsilon)$$

dès que l'observateur peut recevoir l'onde primaire.

On introduit ensuite l'identité (5-10) dans l'intégrale (5-8 b) ce qui constitue la transformation d'Imaï (Derem 1986). L'intégrale (5-8 b) se scinde alors en deux intégrales, l'une venant du premier terme de (5-10) qui conserve ses pôles réels, l'autre venant du deuxième terme qui voit les pôles réels disparaître.

En appliquant le théorème des résidus à la première intégrale ainsi obtenue, on obtient une somme convergente pour tout θ :

(5-11)

$$P_{m2} = -2\pi P_0 \exp(i\upsilon_{m2}\pi/2)\cos(\upsilon_{m2}(\pi-\theta))/\sin(\pi\upsilon_{m2})(\frac{D_\upsilon^1}{(\partial D_\upsilon/\partial \upsilon)})|_{\upsilon m2}.H^1_{\upsilon m2}(Kr))\exp(-i\omega t)$$

pour Re(υ)>υg

avec m2 = 1,2... un indice qui numérote les pôles (F) du contour C2.

Les ondes de surface externes sont les moins rapides car elles circulent autour du cylindre avec une faible pénétration dans le solide. Elles correspondent donc à ce contour C2.

c- Ondes géométriques

La deuxième intégrale obtenue à partir de (5-8 b) permet de calculer l'onde directe et l'onde réfléchie mais également toutes la série d'ondes transmises. Le terme $\sin \pi \nu$ disparaît lorsqu'on introduit le deuxième terme de (5-10) dans (5-8 b) ce qui explique la disparition des pôles réels et il reste uniquement les pôles du déterminant $D(\nu,x)$ qui correspondent aux vibrations libres du cylindre. On peut donc prendre n'importe quel contour Cs qui entoure les pôles de $D(\nu,x)$ au lieu de C2 (planche 5-2) ce qui donne :

$$(5-12)$$

$$Pc_s = P_0 \int_{C_s} d\upsilon / \sin(\pi\upsilon) \exp(i\upsilon(\pi/2 - \theta)) (J_{\upsilon}(Kr) + D_{\upsilon}^1/D_{\upsilon}.H_{\upsilon}^1(Kr)) \exp(-i\omega t)$$

On choisit de prendre un contour Cs qui coupe l'axe Re (v) (planche 5-2). Ce contour Cs permet de pouvoir évaluer cette intégrale par la méthode du col car la série des ondes transmises est associée à des points v=vg réels. Ces points appartenant au contour Cs ne sont pas des pôles mais des points de selle situés au sommet d'un col.

On peut aussi dans notre cas, faire appel à la théorie géométrique car on a supposé que Ka>>1.

5-4.4.<u>THEORIE GEOMETRIQUE POUR LE CYLINDRE</u> (QUENTIN 1986)

a- Introduction

Dans la limite où Ka est grand, Brill et Uberall (1970) ont montré en utilisant la méthode du col, que les ondes géométriques obéissent aux lois de l'optique géométrique et que les parcours des rayons sont déterminés par les positions des cols. De plus les amplitudes des ondes réfléchies et transmises sont déterminées par les coefficients de réflexion et de transmission sur un demi-espace élastique plan en contact avec le fluide. Cette théorie géométrique développée ici pour le cas du cylindre est tout à fait valable pour le cas de la sphère dont on va discuter ensuite.

b- Cheminement des rayons

Les émetteurs et les récepteurs sont dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre. Les rayons émanant de la source atteignent le cylindre avec des angles d'incidence α variant de 0 à 90 degrès (planche 5-4).

Lorsque l'angle d'incidence α est inférieur à θ_T angle critique pour les ondes transversales, l'onde incidente donne naissance à l'intérieur du cylindre à un ou deux rayons transmis selon l'angle d'incidence α . Lorsque l'angle d'incidence α est inférieur à θ_L angle critique pour les ondes longitudinales, l'onde incidente donne deux rayons transmis, un polarisé longitudinalement et l'autre transversalement. Pour le cas où l'angle α est supérieur à θ_L et inférieur à θ_T , l'onde incidente donne alors un seul rayon polarisé transversalement.

Au sein du cylindre, les rayons subissent plusieurs réflexions (au cours desquelles ils peuvent subir des conversions de modes, c'est à dire que la polarisation de l'onde change) avant de disparaître par atténuation car il réémettent dans le fluide à chaque réflexion. Chaque trajet du rayon est caractérisé par le type de polarisation de l'onde (longitudinale ou transversale) (planche 5-3).

c- Equation des modes

On appelle mode (n,m) un mode ayant subit un nombre n de réflexion dans le cylindre dont un nombre m de parcours polarisés transversalement. On considère deux demi-plans (région 1 et 2) séparés par la droite (S O) et θ l'angle d'observation (planche 5-4). Le transducteur émetteur se trouve à une distance r_0 du centre O du cylindre. Le recepteur (en configuration bistatique) se trouve au point P situé dans la région I et pointé vers O à une distance r de O.

Dans la région 1, en suivant le chemin 1, on peut écrire, avec les notations de la planche 5-4 :

(5-13 a)
$$\delta_0 + \gamma_1 + \gamma_T + \delta = \pi - \theta$$

Dans la région 2, en suivant le chemin 2 on obtient :

(5-13 b)
$$\delta_0 + \gamma_L + \gamma_T + \delta = \pi + \theta$$
 ici n = 2 et m = I

Dans le cas général d'un mode (n,m) correspondant à m parcours (T) et (n-m) parcours (L), on écrit en suivant le chemin 1 :

(5-14 a)
$$\delta_0 + (n-m)\gamma_L + m\gamma_T + \delta = \pi - \theta[2\pi]$$

et en suivant le chemin 2 :

(5-14 b)
$$\delta_0 + (n-m)\gamma_L + m\gamma_T + \delta = \pi + \theta[2\pi]$$

On remarque qu'on n'a plus d'égalités strictes mais plutôt deux congruences modulo 2π . Si n est grand, le rayon peut faire plusieurs tours.

On cherche à présent l'expression de l'équation des modes en fonction de α . Pour cela, on doit exprimer les angles δ_0 , δ , γ_T , γ_L en fonction de la variable α l'angle d'incidence.

Dans le triangle OBS on a la relation suivante :

$$\pi - \alpha + \delta_0 + \epsilon_0 = \pi$$
(5-15) d'où:
$$\delta = \alpha - \epsilon_0$$

On a également :

$$\sin \epsilon_0 = BB'' / SB$$

$$\sin \delta_0 = BB'' / a$$

$$\cos \epsilon_0 = SB'' / SB$$

$$\cos \delta_0 = OB'' / a$$

Les relations (5-15) et (5-16) permettent d'écrire :

$$\begin{split} &\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\sin(\delta_0+\epsilon_0)=\sin\epsilon_0.\cos\delta_0+\sin\delta_0.\cos\epsilon_0\\ &d'\ o\grave{u}\\ &\sin\alpha=BB''/(a.SB).(SB''+OB'')=r_0/a.\sin\epsilon_0 \end{split}$$

On en déduit que :

(5-17)
$$\varepsilon_0 = \sin^{-1}(\sin \alpha / R_0)$$
 et $\delta_0 = \alpha - \sin^{-1}(\sin \alpha / R_0)$

de même en considérant le triangle ODP on obtient :

(5-18)
$$\varepsilon = \sin^{-1}(\sin \alpha / R)$$
 et $\delta = \alpha - \sin^{-1}(\sin \alpha / R)$

où on a posé $R_0 = r_0/a$ et R = r/a.

Dans le triangle OBC et OCD on a les relations suivantes:

$$\gamma_L = \pi - 2\beta_L$$
$$\gamma_T = \pi - 2\beta_T$$

La loi de réfraction s'écrit :

$$\sin \alpha / C = \sin \beta_L / C_L = \sin \beta_T / C_T$$

On pose:

$$\xi_L = C / C_L < 1$$

 $\xi_T = C / C_T < 1$

par conséquent :

$$\beta_{L} = \sin^{-1}(\sin \alpha / \xi_{L})$$
$$\beta_{T} = \sin^{-1}(\sin \alpha / \xi_{T})$$

et on obtient les angles γ_T , γ_L en fonction de α :

(5-19)
$$\gamma_L = \pi - 2 \sin^{-1}(\sin \alpha / \xi_L)$$

$$\gamma_T = \pi - 2 \sin^{-1}(\sin \alpha / \xi_T)$$

On peut maintenant réécrire l'équation des modes en fonction de α en utilisant les relations (5-17), (5-18) et (5-19). On a alors :

$$\begin{split} (\textbf{5-20}) \\ \delta_0 + (n-m)\gamma_L + m\gamma_T + \delta &= (n-m)(\pi - 2\sin^{-1}(\sin\alpha/\xi_L)) + m(\pi - 2\sin^{-1}(\sin\alpha/\xi_T)) \\ &+ \alpha - \sin^{-1}(\sin\alpha/R) + \alpha - \sin^{-1}(\sin\alpha/R_0) \\ &= g(\alpha) \end{split}$$

d'où:

(5-21)
$$g(\alpha) - 2\pi i = \pi - \theta$$
$$g(\alpha) - 2\pi i = \pi + \theta$$

On obtient alors l'équation des modes :

(5-22)
$$fs(\alpha, \theta, 1) = g(\alpha) - (21+1)\pi + s\theta = 0$$

avec $s = 1$ pour le chemin 1 et $s = -1$ pour le chemin 2 (planche 5-4).
On peut la résoudre par la méthode de Newton en posant N=sin α .

d- Calcul du temps d'arrivée des échos

Il s'agit du temps d'arrivée d'un mode au niveau de l'observateur. On a :

(5-23)
$$t(n,m,\alpha) = SB/C + (n-m)BC/CL + mCD/CT + DP/C$$

Tout d'abord on calcule SB:

$$SB = BB'' / \sin \varepsilon_0 = a \cdot \sin \delta_0 / (a / r_0 \sin \alpha_i) = a \cdot \sin(\alpha_i - \varepsilon_0) / (a / r_0 \sin \alpha_i)$$

or:

$$\sin(\alpha_i - \varepsilon_0) = \sin\alpha_i \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon_0} - a / r_0 \sin\alpha_i \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_i}$$

donc:

(5-24) SB =
$$a(-\sqrt{1-\sin^2\alpha_i} + \sqrt{R_0^2-\sin^2\alpha_i})$$

de manière analogue on obtient :

(5-25) PD =
$$a(-\sqrt{1-\sin^2\alpha_i} + \sqrt{R^2-\sin^2\alpha_i})$$

On calcule ensuite BC:

$$(5-26)$$

BC/2 = a.cos(
$$\beta_L$$
) d'où BC = $2a\sqrt{1-(\sin\alpha_i/\xi_L)^2}$ et de même CD = $2a\sqrt{1-(\sin\alpha_i/\xi_T)^2}$

Enfin on aboutit à l'expression du temps d'arrivée des échos en remplaçant SB BC CD et DP par leurs expressions respectives données par (5-23), (5-24), (5-25), (5-26):

(5-27)
$$t(m,n,\alpha_{i}) = a / C(-2\sqrt{1-\sin^{2}\alpha_{i}} + \sqrt{R^{2}-\sin^{2}\alpha_{i}}) + \sqrt{R_{0}^{2}-\sin^{2}\alpha_{i}}) + 2a / C_{L}(n-m)\sqrt{1-(\sin\alpha_{i}/\xi_{L})^{2}} + 2a / C_{T}m\sqrt{1-(\sin\alpha_{i}/\xi_{T})^{2}}$$

5-4.5.ONDE STATIONNAIRE POUR UN CYLINDRE

Les ondes de circonférence de type Rayleigh ou "galerie à écho" sont générées à leur angle critique propre et se propagent dans les deux sens de rotation. Pour certaines fréquences, il existe un nombre entier de longueurs d'onde sur la circonférence. Une onde stationnaire se forme alors ce qui provoque une accumulation d'énergie dans le cylindre avec constitution d'une résonance. L'énergie sera rediffusée dans le liquide dans des directions privilégiées (planche 5-5)

En effet un mode normal peut s'écrire (uberall 1990 [2]):

(5-28)
$$\cos(n\theta) \exp(-i\omega t) = 1/2(\exp(n\theta - i\omega t) + \exp(n(-\theta) - i\omega t))$$

n est un entier sans dimension. Si on pose $n = aK_n$, K_n a la même dimension qu'un nombre d'onde. C'est pourquoi chacun des modes stationnaires à la surface d'un cylindre (r = a) peut être vu comme décrivant une onde stationnaire, qui est la superposition de deux ondes progressives se déplaçant dans des sens opposés. Les vitesses de phase de ces ondes progressives fictives sont les célérités modales $C_n = \omega/K_n$.

A chaque mode est attachée une célérité C_n et les différentes célérités constituent une suite discrète.

Remarque:

Les ondes transmises, n'étant pas associés à des zéros de D(v,x), ne donne en général pas lieu à des résonances sauf dans le cas où il y a une amplification du signal transmis.

5-4.6.CONCLUSION

En examinant le comportement à la limite de la solution complète pour une onde cylindrique diffractant sur un cylindre dont le rayon tend vers l'infini, et en utilisant les expressions analytiques pour les nombres d'onde de surface, nous pouvons calculer le comportement asymptotique de la somme des résidus correspondant aux différentes classes d'ondes de circonférence.

Lorsque le rayon du cylindre tend vers l'infini, l'expression pour l'onde de Rayleigh (amplitude et phase) tend vers celle de l'onde de Rayleigh sur un demi-espace plan élastique; tandis que les ondes de Franz et de Stoneley s'évanouissent de façon exponentielle. Dans la même limite, les ondes de "galerie à écho" se combinent pour former des ondes latérales pour un demi-espace élastique plan.

Il est aussi important de noter que si la source n'est plus en incidence normale par rapport à l'axe du cylindre, mais en incidence axiale, on a existence de nouveaux modes correspondant aux ondes guidées.

En incidence oblique, une dépendance axiale pour les solutions apparaît. En effet, Maze et Decultot (1992) ont montré que les modes sont alors hélicoïdaux.

5-5.APPLICATION AU CAS DE LA SPHERE

5-5.1.INTRODUCTION

Le cas simple de la sphère a été largement utilisé pour tester les performances de notre système (Ahyi 1997). En effet, elle présente l'intérêt de satisfaire les conditions de symétrie requises à la fiabilité des mesures citées au chapitre 2. On va ici en rappeler les principaux résultats et présenter une simulation des ondes rayonnées dans le liquide en se basant sur la théorie présentée à la section précédente.

Pour l'analyse des résultats expérimentaux, c'est la théorie géométrique du paragraphe 5-4.4 qui est appliquée au cas de la sphère.

Pour le calcul, c'est la série de Rayleigh pour une sphère élastique (5-7 b) qui est directement utilisée. On s'est donc limité à simuler uniquement l'onde incidente, l'onde réfléchie et les ondes géométriques qui sont les plus présentes et les moins atténuées sur les visualisations.

5-5.2.<u>SIMULATION NUMERIQUE POUR LA SPHERE ELASTIQUE</u>

On considère une sphère élastique de rayon r_0 immergée dans un liquide. La symétrie de révolution rend le problème indépendant de la troisième coordonnée ϕ .

On est dans le cas de géométries sphériques, on place donc toujours dans la base (e_r, e_o, e_ϕ) . On peut alors écrire le déplacement, toujours en respectant la décomposition de Helmholtz, sous la forme :

$$u = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot}(A)$$

où Φ est le potentiel scalaire longitudinal et A est le potentiel vecteur transverse pour le solide.

On choisit de prendre une onde incidente dans le liquide et on étudie la réflexion d'une onde sphérique polarisée dans le plan vertical.

La troisième composante du vecteur déplacement est donc nulle. Cela permet alors de poser les deux premières composantes du potentiel vecteur A nulles sans restreindre la généralité.

Ces hypothèses s'écrivent :

$$u_{\varphi} = 0$$
(5-30) $A_{\tau} = 0$
 $A_{\theta} = 0$

On a alors les deux expressions suivantes pour les équations des ondes concernant la sphère élastique :

(5-31)
$$A_{\varphi} = k_{L}^{2} \Delta \Phi$$

$$A_{\varphi} = k_{T}^{2} (\Delta A_{\varphi} - \frac{1}{r^{2} \sin^{2} \theta} A_{\varphi})$$

La première équation correspond aux ondes longitudinales et la deuxième aux ondes transverses.

D'après les solutions des équations des ondes en sphérique du paragraphe 5-4.2. (5-7 b), les solutions des équations des ondes peuvent s'écrire :

(5-32 a)
$$\Phi(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n j_n(k_L r) P_n(\cos\theta) \exp(-i\omega t) \operatorname{avec} 0 \le r \le r_0$$

(5-32 b)
$$A_{\varphi}(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n j_n (k_T r) P_n^1(\cos \theta) \exp(-i\omega t) \text{ avec } 0 \le r \le r_0$$

pour le côté solide (l'onde doit être définie à l'origine, on utilise donc la fonction de Bessel)

et

(5-32 c)
$$\Psi(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n h_n^1(k r) P_n(\cos\theta) \exp(-i\omega t) + \text{onde incidente}$$
 avec $r_0 < r < L$

pour le côté liquide (on doit avoir une onde sphérique sortante défini à l'infini, ce qui implique l'emploi de la fonction de Hankel).

L'onde incidente, étant sphérique et non centrée à l'origine, elle s'exprime de la façon suivante d'après Derem (Derem 1986) :

(5-33)
$$\Psi_{inc}(r, \theta, t) = Fik \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) h_n^1(k L) j_n(k r) P_n(\cos \theta) \exp(-i\omega t)$$

Dans les expressions précèdentes, on a :

 Φ, A_{ϕ} sont les potentiels longitudinal et transverse respectivement pour le solide

 Ψ , Ψ_{inc} sont les potentiels réfléchi et incident pour le liquide R_n, A_n, Q_n et F sont des constantes. Elles sont déterminées de façon à satisfaire aux conditions limites imposées par les frontières du modèle étudié.

 j_{α} , h_{α}^{1} , h_{α}^{2} sont les fonctions sphériques de Bessel et Hankel et P_{n} est un polynôme de Legendre

Pour accéder à la pression dans le fluide, on doit déterminer les conditions à l'interface et ensuite le coefficient Q_n

On écrit le vecteur déplacement :

(5-34)
$$u_{r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_{\varphi} \sin \theta)$$
$$u_{\theta} = \frac{1}{r} (\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (rA_{\varphi}))$$

Puis, on écrit les conditions à la paroi pour $r = r_0$:

$$\sigma_{rr} = -\rho c^{2} \Delta \Psi = -p$$
(5-35)
$$\sigma_{r\theta} = 0$$

$$u_{r} = \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

La contrainte normale et la vitesse normale sont continues à l'interface et la contrainte tangentielle est nulle.

Pour exprimer les contraintes, on utilise la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \, \delta_{ij} + \mu \left[\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i \right]$$

Les contraintes s'écrivent alors:

(5-36)
$$\sigma_{re} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_{r}}{\partial r}$$
$$\sigma_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_{r}}{\partial \theta} - u_{\theta}\right)\right)$$

avec:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{u}_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} (\mathbf{u}_r \sin \theta + \mathbf{u}_\theta \cos \theta)$$

On remplace les déplacements par leur expressions en fonction des potentiels et on trouve :

$$\sigma_{rr} = \lambda \Delta \Phi + 2\mu \frac{\partial^{2} \Phi}{\partial r^{2}} + 2\mu(\cot g\theta(\frac{1}{r}\frac{\partial A_{\phi}}{\partial r} - \frac{A_{\phi}}{r^{2}}) + \frac{1}{r}\frac{\partial^{2} A_{\phi}}{\partial r\partial \theta} - \frac{1}{r^{2}}\frac{\partial A_{\phi}}{\partial \theta})$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu(-\frac{2}{r^{2}}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\frac{\partial^{2} \Phi}{\partial r\partial \theta} + \frac{1}{r^{2}}(\frac{\partial^{2} A_{\phi}}{\partial \theta^{2}} - \frac{A_{\phi}}{r\sin \theta} + \cot g\theta\frac{\partial A_{\phi}}{\partial \theta}) - \frac{\partial^{2} A_{\phi}}{\partial r^{2}} + \frac{2}{r^{2}}A_{\phi}$$

On utilise maintenant les expressions des potentiels (5-32) et (5-33) dans (5-37) puis on remplace dans les conditions à la paroi (5-35).

La condition sur la vitesse s'écrit alors après calculs et simplifications :

(5-38 a)
$$R_{n}j_{n}'(\xi_{L}) + \frac{A_{1}}{\xi_{T}} \frac{c_{L}}{c_{T}} j_{n}(\xi_{T})(n(n+1)) - \frac{c_{L}}{c} Q_{n}h_{n}^{1'}(\xi) = Fi \frac{k^{2}}{k_{L}} (2n+1)h_{n}^{1}(kL)j_{n}'(\xi)$$

où
$$\xi_{L} = k_{L} r_{0}, \xi_{T} = k_{T} r_{0}, \xi = k r_{0}$$

La condition sur la contrainte normale devient après calculs et simplifications : (5-38 b)

$$\begin{split} &R_{n}((-\rho_{0}c_{L}^{2}+2\mu\frac{n(n+1)}{\xi_{L}^{2}})j_{n}(\xi_{L})-4\mu\frac{1}{\xi_{L}}j_{n}^{'}(\xi_{L}))+A_{n}2\mu\frac{n(n+1)}{\xi_{T}}(\frac{c_{L}}{c_{T}})^{2}(j_{n}^{'}(\xi_{T})-\frac{1}{\xi_{T}}j_{n}(\xi_{T}))\\ &+(\frac{c_{L}}{c})^{2}\rho c^{2}Q_{n}h_{n}^{1}(\xi)=-\rho c_{L}^{2}Fik(2n+1)h_{n}^{1}(kL)j_{n}(\xi) \end{split}$$

La condition sur la contrainte tangentielle devient après calculs et simplifications :

(5-38 c)
$$R_{n}k_{L}^{2}(\frac{-2}{\xi_{L}^{2}})j_{n}(\xi_{L}) + \frac{2}{\xi_{L}}j_{n}'(\xi_{L})) + A_{n}k_{T}^{2}(\frac{2(n(n+1)-1)}{\xi_{T}^{2}}j_{n}(\xi_{T}) - j_{n}(\xi_{T}) - \frac{2}{\xi_{T}}j_{n}'(\xi_{T})) = 0$$

Les conditions à la paroi (5-38) forment un sytème de trois équations à trois inconnues.

On calcule le déterminant du système précédent (5-38) et on obtient :

(5-39)
$$\det = \alpha_n(\omega)(-\frac{c_L}{c}h_n^{1'}(\xi)) + \beta_n(\omega)\rho c_L^2 h_n^1(\xi)$$

Ce déterminant correspond au déterminant D du paragraphe 5-4.3 (5-8) pour le cas particulier de la sphère.

Pour le calcul, on supposera que ce déterminant est non nul ce qui signifie qu'on élimine tous les pôles et donc toutes les ondes de surface pour ne conserver que les ondes homogènes.

On détermine ensuite le coefficient Q_n:

(5-40)
$$Q_n = Fik(2n+1)h_n^1(kL) - \frac{\alpha_n(\omega)(\frac{c_L}{c}j_n^{1'}(\xi)) - \beta_n(\omega)\rho c_L^2j_n^1(\xi)}{\alpha_n(\omega)(-\frac{c_L}{c}h_n^{1'}(\xi)) + \beta_n(\omega)\rho c_L^2h_n^1(\xi)}$$

où on a posé:

$$\begin{split} &\alpha_{n}\left(\omega\right) = ((\frac{-1}{\xi_{L}})j_{n}\left(\xi_{L}\right) + j_{n}^{'}(\xi_{L}))(2\mu\frac{n(n+1)}{\xi_{T}}(\frac{c_{L}}{c_{T}})^{2}(j_{n}^{'}(\xi_{T}) - \frac{1}{\xi_{T}}j_{n}(\xi_{T}))) \\ &+ \frac{c_{L}}{c_{T}}(\frac{(n(n+1)-1)}{\xi_{T}}j_{n}(\xi_{T}) - \frac{\xi_{T}}{2}j_{n}(\xi_{T}) - j_{n}^{'}(\xi_{T}))((-\rho_{0}c_{L}^{2} + 2\mu\frac{n(n+1)}{\xi_{L}^{2}})j_{n}(\xi_{L}) - 4\mu\frac{1}{\xi_{L}}j_{n}^{'}(\xi_{L})) \end{split}$$

et:

$$\begin{split} \beta_{\mathfrak{n}}(\omega) &= -\frac{c_{L}}{c_{T}} \frac{(n(n+1))}{\xi_{T}} j_{\mathfrak{n}}(\xi_{T}) ((\frac{-1}{\xi_{L}}) j_{\mathfrak{n}}(\xi_{L}) + j_{\mathfrak{n}}{'}(\xi_{L})) \\ &+ j_{\mathfrak{n}}{'}(\xi_{L}) \frac{c_{L}}{c_{T}} (\frac{(n(n+1)-1)}{\xi_{T}} j_{\mathfrak{n}}(\xi_{T}) - \frac{\xi_{T}}{2} j_{\mathfrak{n}}(\xi_{T}) - j_{\mathfrak{n}}{'}(\xi_{T})) \end{split}$$

Le potentiel total dans le liquide s'exprime alors par :

(5-41)
$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} (Fik(2n+1)j_{n}(kr)h_{n}(kL) + Q_{n}h_{n}(kr))P_{n}(\cos(\theta))) \exp(-i\omega t)$$

Si on considère une impulsion, on doit intégrer sur toutes les fréquences :

(5-42)
$$\Psi(r, \theta, t) = \int_{0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(Fik(2n+1)j_{n}(kr)h_{n}(kL) + Q_{n}h_{n}(kr) \right) P_{n}(\cos(\theta)) \right) \exp(-i\omega t) d\omega$$

On peut poser:

(5-43)
$$F(r, \theta, w) = \sum_{n=0}^{\infty} (Fik(2n+1)j_n(kr)h_n(kL) + Q_nh_n(kr))P_n(cos(\theta))$$

Le potentiel Ψ correspond alors à la transformée de Fourier inverse de F.

La pression dans le liquide s'écrit donc :

(5-44)
$$p(r, \theta, t) = -\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \rho \omega^2 \Psi$$

On peut dès lors faire une simulation de la pression autour de la cible à r fixé, θ variant de 0 à 360° et t s'étendant de 0 à une centaine de microsecondes, mais on va d'abord s'intéresser aux résultats expérimentaux.

5-5.3.RESULTATS EXPERIMENTAUX

On a immergé la sphere pleine en verre de 3,5 cm de diamètre et dont le centre est à 6.75 cm des électrodes de la source. On peut suivre l'évolution de la diffraction au cours du temps grâce à la cinématographie présentée sur la planche 5-6. Les photographies montrent clairement le front d'onde incident, le front d'onde correspondant à l'onde spéculaire réfléchie ainsi qu'un ensemble de fronts d'ondes rayonnées. Les ondes rayonnées dans l'eau peuvent être séparées en deux catégories, les ondes de surface d'une part et les ondes géométriques d'autre part.

Ces dernières qui rayonnent davantage et sont plus simples à identifier étant donné qu'elles satisfont à la loi de Snell-Descartes.

Cependant, on note la présence très marquée de l'onde de surface appelée onde de Franz qui est située dans l'ombre géométrique de la sphère. Elle est en fait le prolongement de l'onde incidente, elle est générée à une incidence rasante et se propage à la vitesse du son dans l'eau. Cette onde est caractéristique de l'effet de courbure. Elle correspond à un pôle de type (F).

Les onde géométriques observées ont traversé la sphère soit directement soit après de multiples réflexions sur la paroi de la sphère. Les trajets peuvent être effectués de façon transverse ou longitudinale avec ou sans conversion de mode.

L'ordre d'arrivée des echos est le suivant, le premier chiffre correspondant au nombre total de trajets effectués et le deuxième correspondant au nombre de trajets transverses : (1, 0); (n, 0); (n, m); (m, m) (planche 5-7).

L'onde la plus rapide (1, 0) est celle qui traverse directement la cible de manière longitudinale. Les ondes les moins rapides (m, m) sont celles qui ont effectuées de multiples trajets transverses à l'intérieur de la sphère.

Grâce à la théorie géométrique décrite au paragraphe 5-4.4., on a su identifier les ondes suivantes: (1, 0); (2, 1); (3, 1); (3, 2). Les autres fronts sont difficiles à suivre à cause de leurs nombreuses zones de recoupement et leur atténuation (Ahyi 1997).

La planche 5-8 nous montre le résultat des mesures de pression faites par hydrophone autour de la sphère à une distance constante de celle ci et par pas de deux degrés. L'expérience consiste à placer l'hydrophone à une valeur de θ puis à insonifier. On réitère la procédure pour chaque θ . Les signaux sont normalisés en amplitude pour tenir compte de dispersion liée aux légers défauts de reproductivité de l'énergie émise. On a codé les amplitudes des signaux en niveaux de gris et on a choisi une représentation en temps - direction. On obtient ainsi une image spatio-temporelle du phénomène sauf dans un angle de 40 ° autour de la source où il est impossible de relever les signaux à cause du problème d'encombrement des instruments. Sur ce type de représentation on peut faire le parallèle directement entre la visualisation et les signaux.

Les visualisations fixent la position des ondes à un instant précis, avec la possibilité de suivre l'évolution grâce à l'aspect ultra rapide de notre dispositif. L'analyse spatio-temporelle reproduit le même principe en permettant d'identifier les ondes non pas par leurs positions relatives à temps fixé mais par leur temps d'arrivée à une distance fixe du centre de la sphère. On reconnaît ainsi les ondes identifiées précédemment.

On va maintenant s'intéresser à une simulation de ces ondes géométriques et ainsi la comparer aux résultats expérimentaux.

5-5.4.COMPARAISON SIMULATION-EXPERIENCE

On a vu au paragraphe 5-5.2 que nos calculs partent de la série de Rayleigh et n'utilisent pas la transformation de Watson Sommerfeld. Cela revient à ne pas prendre en compte les pôles du déterminant de type D (5-8) et par suite à négliger les ondes de surfaces. On ne peut donc simuler que des ondes de type homogène.

La simulation est effectuée dans le cas d'une distance source bille de 3 cm. Les prises de pression sont faites à 2 cm de la sphère tous les deux degrés. On a simulé le spectre de la source en le représentant par sa bande de fréquences (100 kHz à 1.5 MHz). On a vérifié que le résultat reste le même pour une plus grande gamme de fréquences.

Dans les représentations des signaux, la planche 5-8 montre une représentation temps - angle de la mesure tandis que la figure qui se trouve en haut de la planche 5-9 représente le même codage en niveaux de gris mais les signaux sont placés en parallèles. Le résultat de la simulation se trouve sur la deuxième figure en bas de la planche 5-9.

La simulation présente la solution entre l'émission de l'onde (t = 0) à $t = 200 \,\mu s$ et des angles compris entre 0° et 360°. Elle comprend donc les signaux relatifs aux directions proches

de la source (0° à 20° et 340° à 360°) qui n'ont pas pu être relevés par l'expérience. De plus, la simulation est plus précise spatialement car le relevé des signaux à une distance constante de la cible est une opération délicate entachée d'imprécisions.

Sur la planche 5-9 on a sélectionné la partie de la simulation correspondant aux relevés expérimentaux en prenant la même échelle de temps et les mêmes distances source-cible et cible-point d'observation.

L'observation de ces deux figures permet d'identifier aisément l'onde incidente et l'onde réfléchie. Cependant, l'onde de Franz qui est le prolongement de l'onde incidente et qui est située dans l'ombre géométrique de la sphère (110° à 250°) n'est pas simulée. En effet, cette onde doit être classée parmi les ondes de surface car elle correspond à un pôle de type (F) du déterminant. L'onde qui apparaît lors de la simulation est donc simplement l'onde incidente qui existerait en l'absence de sphère. Par conséquent, on note une différence à ce niveau entre la simulation et l'expérience.

Les ondes géométriques identifiées expérimentalement sont présentes sur la simulation et on les repère par leur temps d'arrivée. L'onde la plus rapide (1, 0) arrive en premier, puis, dans l'ordre, les ondes longitudinales (n, 0) et les ondes ayant subies des conversions de modes (n, m) et enfin les ondes transverses.

On remarque que les ondes tournant dans un sens autour de la bille et les mêmes ondes tournant dans l'autre sens se croisent sous la cible au voisinage de 180°. On obtient ainsi une sorte de croix caractéristique des ondes rayonnées dans le líquide à partir d'un point d'émission tournant autour de la cible

La comparaison théorie expérience de la planche 5-9 conforte notre identification expérimentale des ondes géométriques à partir des décalages temporels de leurs réémissions dans le fluide. Elle confirme aussi que notre méthode permet d'obtenir la réponse impulsionnelle de la sphère.

Examinons maintenant ce que nos visualisations permettent sur les coques.

5-6.DIFFRACTION DES ONDES PAR UN TUBE

5-6.1.INTRODUCTION

On s'intéresse à l'interaction de l'onde impulsionnelle avec un tube. Les expériences ont été menées avec un tube en acier inoxydable immergé dans l'eau. D'après le chapitre 4, on peut s'attendre à retrouver les mêmes ondes A0 et S0 sur une plaque plane fine et sur une coque fine. Quelques paramètres tels que la courbure ou le milieu peuvent néanmoins modifier un peu les caractéristiques de ces ondes et en particulier leur vitesse. Nous verrons aussi que l'épaisseur de la coque intervient notamment dans la gamme de fréquences excitées.

Dans cette section, on va par conséquent vérifier qu'on a bien une onde A0 et S0 sur une coque et observer des modifications sur les courbes de dispersion expérimentales.

5-6.2. PREMIERE IDENTIFICATION DES ONDES

On observe sur la planche 5-10, le résultat de la diffraction acoustique par un tube de longueur L = 100mm. Cette expérience est faite en excitation normale, c'est à dire qu'on insonifie le tube de façon normale à son axe de symétrie. Comme pour le cas de la sphère pleine, les fronts d'ondes rayonnés sont courbes mais ici on a une dispersion due à la faible épaisseur de la coque dont le rapport b / a (rayon interne sur rayon externe) est de 0.94 avec a = 27 mm. On se rapproche donc davantage du cas de la diffraction sur une plaque. D'ailleurs, dans le cas où le tube cylindrique est excité parallèlement à son axe de symétrie ce qu'on appelle excitation axiale, on retrouve une forme similaire au cas de la plaque (planche 5-11).

Dans le cas de l'excitation normale, on repère (planche 5-10) en plus de l'onde incidente, de l'onde réfléchie et de l'onde de Franz, deux types d'ondes toutes deux dispersives mais ayant des vitesses différentes.

En premier lieu, l'onde la plus rapide se décompose en une série de fronts d'onde fins et serrés ce qui traduit une fréquence élevée. La vitesse de groupe de ce paquet d'ondes est de l'ordre de 5700 m / s ce qui permet de l'identifier à l'onde S0 d'après les résultats théoriques sur la plaque.

En second lieu, on s'intéresse à l'onde la moins rapide qu'on va comparer à l'onde A0 sur une plaque. On peut remarquer que les fronts constituant cette onde sont plus épais que

ceux obtenus pour la plaque étudiée au chapitre précédent. Ceci témoigne de fréquences nettement plus basses. Cependant, on évalue facilement une vitesse de groupe de 3300 m / s pour cette onde ce qui permet de l'attribuer à l'onde A0 si on s'en tient aux résultats théoriques relatifs à la plaque.

La planche 5-12 présente le signal relevé par l'hydrophone, celui ci étant placé sous la cible en vis à vis des électrodes de la source. Une série de pics très hautes fréquences est détectée en premier. Cela correspond donc à l'onde dispersive la plus rapide identifiée sur les visualisations comme étant la S0. Une deuxième série de pics moins denses est ensuite détectée et correspond à l'onde A0. Ces deux ondes ont bien entendu devancé l'onde de Franz.

5-6.3. IDENTIFICATION PAR LA COURBE DE DISPERSION

Afin de vérifier qu'on est bien en présence de l'onde A0, on va mesurer les vitesses de phase et les fréquences correspondantes pour tracer la courbe de dispersion expérimentale avec une méthode similaire à celle utilisée pour la plaque (chapître 4) mais adaptée à une surface courbe. La technique d'extraction des mesures est explicitée dans la thèse de A. Ahyi (1997, pp 107-115) mais la seule différence avec la plaque est le fait que la distance parcourue est mesurée sur un cercle et non sur une droite

La planche 5-13 permet de comparer la courbe de dispersion expérimentale de l'onde ainsi obtenue avec la courbe de dispersion théorique de l'onde A0 sur une plaque.

On a facilement fait correspondre le Ke et le Ka par la formule suivante :

$$Ke = (1 - \frac{b}{a})Ka$$

On constate alors que la position de la courbe interdit toute confusion avec une autre onde. On s'autorise donc à nommer cette onde par le même nom que celle obtenue sur une plaque, c'est à dire A0. Cette confirmation des conclusions du 5-6.2, montre que l'identification des ondes par leur vitesse, par comparaison avec le cas de la plaque, est tout à fait fiable sur cette coque simple.

Mais à quoi peut-on alors attribuer l'écart entre les deux courbes ?

Tout d'abord, la gamme de Ke pour le tube est plus basse. Cela rejoint le fait que les fronts composant l'onde sont plus épais et donc que les fréquences sont plus basses.

Ensuite, on note que la gamme de Ke pour le tube est plus restreinte et que la répartition des vitesses est un peu différente. Pour ce qui est de la plaque, l'élévation de la vitesse avec la fréquence se fait de façon moins brutale et plus étalée en fréquence. Cela induit alors que la courbe de dispersion pour la coque a la forme d'un arc, ce qui sans aucun doute est caractéristique de la courbure de la surface, c'est à dire du rapport b / a.

Pour finir, on constate pour la coque la présence d'une vitesse de phase égale à la vitesse du son dans le liquide Cl près de la paroi alors que pour la plaque les vitesses de phases sont nettement supérieures à Cl. En effet, une paroi courbe rend possible le rayonnement d'une onde ayant cette vitesse contrairement à une surface plane comme on l'a vu au chapitre 1.

On a maintenant la confirmation que la plaque peut servir de modèle à l'étude des coques. On a ainsi pu identifier les différentes ondes rayonnées sur une coque qui sont l'onde S0 et l'onde A0. Toutes les constatations faites dans ce paragraphe concernant les courbes de dispersion et notamment l'influence du b / a sur celle ci vont continuer d'être observées sur une cible plus complexe au paragraphe suivant.

5-7.DIFFRACTION ACOUSTIQUE PAR UNE CIBLE LINE

5-7.1.INTRODUCTION

On a étudié précédemment la diffraction acoustique par des cibles de géométrie simple. On aborde ici l'étude d'une dernière cible de forme plus complexe. Cette cible appelée cible Line est constituée d'un tube cylindrique fermé aux extrémités par des coques hémisphériques. Elle fait aussi l'objet d'une étude au Laboratoire d'Acoustique Ultrasonore et d'Electronique du Havre qui nous a prêté plusieurs cibles de ce type. Nous allons voir la puissance de l'association de la source à mini-étincelle et de notre système de visualisation qui permet d'observer, dans le temps, les ondes diffractées dès le début de l'interaction. Les résultats obtenus s'avèrent complémentaires de ceux issus des méthodes harmoniques utilisées au Havre. Les cibles Line étudiées ont un rapport b / a (rayon interne / rayon externe) de 0,97. On dispose d'une cible ayant un rayon extérieur a = 15 mm et de longueur L = 5a = 75 mm et d'une deuxième cible ayant un a = 27 mm et un L = 4a = 108 mm.

La cible et la source sont immergées dans l'eau à 5 cm l'une de l'autre. L'intérieur de la cible est rempli d'air à la pression atmosphérique. La progression de l'onde acoustique émise par la source à mini-étincelle ainsi que son interaction avec la cible sont observées. On peut ainsi voir sur toutes les visualisations (planche 5-14) le front d'onde incident, l'onde spéculaire réfléchie et l'onde de Franz se propageant à la surface de la cible. L'interaction génère également un ensemble d'ondes attribuées au rayonnement des ondes de Lamb et des ondes de surface dans le solide.

5-7.2.DESCRIPTION DES PHOTOGRAPHIES

La planche 5-16 montre un exemple d'enregistrement de pression dans le champ où l'origine des pics a pu être identifiée grâce à la visualisation.

La planche 5-14 représente la cible Line vue de face en excitation normale à son axe principal. On observe essentiellement sur ces photographies deux types d'ondes différents. Tout d'abord, on remarque une onde très rapide apparaissant sur la photographie comme un front d'onde épais et clair, à la fois caractéristique d'une onde dispersive et basse fréquence. Ensuite, on perçoit un train d'ondes ayant devancé l'onde incidente. Le nombre de fronts composant le train d'ondes va croissant au cours de la propagation sur la coque ; et plus on s'éloigne de l'onde incidente plus les fronts sont resserrés. Cela signifie que l'onde est dispersive

et que des hautes fréquences viennent s'ajouter à mesure que le temps passe. L'onde la plus rapide a une vitesse de groupe de l'ordre de 5700 m / s et correspond au mode S0 des ondes de Lamb. La moins rapide a une vitesse de groupe de l'ordre de 3300 m / s et correspond au mode A0 des ondes de Lamb. C'est en comparant ces vitesses à celle obtenues lors de la diffraction par des cibles à géométrie simple que nous avons réalisé la première identification.

Sur l'ensemble des visualisations, on remarque l'aspect circonférentiel des ondes engendrées. La propagation d'une onde de circonférence se fait dans les deux sens de rotation et donne lieu à une onde stationnaire. Cela produit une accumulation d'énergie et par suite une résonance. Ce sont ces résonances qui sont bien identifiées par l'approche harmonique (M.I.I.R.).

Grâce à ces visualisations, il est possible d'interpréter le signal de pression de la planche 5-16. On voit apparaître un premier pic assez large (basse fréquence) auquel sont superposés des petits pics (hautes fréquences). Cela correspond à l'onde S0 qui est la plus rapide. On distingue ensuite une série de pics correspondant à l'onde A0 qui est moins rapide. Et enfin, arrive le pic de l'onde incidente.

Les planches 5-15 et 5-17 présentent la cinématographie de la diffraction par la Line en position verticale avec une excitation suivant son axe principal.

Comme pour l'excitation normale de la cible, on a deux types d'ondes qui ont anticipé l'onde incidente. La plus rapide est identifiée comme étant le mode S0 des ondes de Lamb et la moins rapide comme étant le mode A0. Mais, en plus de ces ondes, la deuxième photographie de la planche 5-15 met bien en évidence une dispersion d'ondes au raccord entre le cylindre et la calotte sphérique qui n'avait jamais été identifiée par les méthodes classiques. Elles peuvent vraisemblablement s'expliquer par une rupture d'impédance à cet endroit, soit à cause de la discontinuité du rayon de courbure, soit par une influence de la soudure. On peut penser qu'une partie de l'onde A0 se réfléchit au niveau de la soudure. En effet, ces ondes semblent induites par le passage de l'onde A0 et conservent la même fréquence que celle ci.

La planche 5-18 représente la juxtaposition des signaux acoustiques pour le cas d'une excitation axiale. Ceci est obtenu en faisant tourner l'hydrophone par pas de deux degrés à une distance constante du centre de la cible selon la technique exposée au paragraphe 5-5.3. Les amplitudes des signaux sont codées en niveaux de gris et on obtient alors une image spatio-temporelle. Cette représentation est identique à la représentation en coordonnées polaires de la planche 5-8 pour le cas de la sphère. Avec l'aide des visualisations on reconnaît facilement les ondes par leur aspect dispersif et leurs temps d'arrivée respectifs (en µs).

On compare maintenant le résultat de la diffraction acoustique par un tube et par une cible Line. On remarque évidemment une différence de fréquence entre les ondes A0 et S0 pour le tube et pour la Line. Ceci est visible aussi bien sur les visualisations (planches 5-10 et 5-15) que sur les signaux (planches 5-12 et 5-16). L'onde A0 se situe dans une gamme de fréquences plus élevée pour la Line. Pour ce qui est de l'onde S0, son aspect est totalement différent sur la Line puisqu'on a alors une basse fréquence faisant presque oublier le caractère dispersif d'une telle onde.

On peut reporter sur un même graphique les courbes de dispersion expérimentales obtenues pour la cible Line et le tube en excitation normale (Ahyi 1997) et la courbe de dispersion théorique de l'onde A0 sur une plaque. On note alors, pour une représentation en fonction de Ke sur la planche 5-19 a, que si les vitesses de phase sont comparables la courbe de dispersion pour la Line se situe dans une gamme de Ke supérieure à celle obtenue dans le cas du tube. Cela corrobore les résultats obtenus lors de l'étude du tube.

Afin de déterminer les différents paramètres qui ont une influence sur la courbe de dispersion, on peut faire une étude par similitude.

On commence donc par faire l'inventaire des données constantes.

Les équations des ondes nous donnent trois constantes C₁, C_L, C_T qui sont les vitesses du son dans le liquide et le solide. Les conditions aux frontières et les paramètres de forme fournissent les constantes suivantes : L la longueur de l'objet, a son rayon externe, e son épaisseur et D la distance entre les électrodes et l'objet.

On doit également tenir compte des constantes données par les conditions initiales : la pression initiale de l'onde acoustique à sa source Pinit, la gamme des fréquences contenues initialement dans le spectre est caractérisée par la largeur de bande Kinit et deux angles positionnant la direction de la source par rapport à l'obstacle α et β ($\beta=0$ en symétrie cylindrique). En fait Cph pour ω donné ne dépend pas de Kinit car l'équation des ondes est linéaire donc Cph ne dépend que du nombre d'onde k. Si k < Kinit, il existe dans le signal mais c'est le seul rôle de Kinit sur Cph. Kinit joue sur l'amplitude du signal car là on intègre de 0 à Kinit.

Il s'agit maintenant d'appliquer le théorème de Vaschy. On exprime la vitesse de phase en fonction des constantes et des variables :

$$C_{nh} = f(C_1, C_T, C_L, \alpha, Pinit, L, a, e, D, \omega(x, t))$$

où ω (x, t) est la pulsation, seule variable dont dépend la vitesse de phase.

On choisit trois constantes indépendantes : C1, e, Pinit .

Ces constantes permettent d'adimensionner les autres grandeurs et ainsi d'écrire la nouvelle relation :

$$C_{vh}/C_1 = f^*(C_T/C_1, C_L/C_1, \alpha, L/e, a/e, D/e, \omega(x,t)e/C_1)$$

La fonction f' est universelle pour toute coque composée d'un cylindre fermé par deux hémisphères et insonifiée normalement à son axe.

La vitesse de phase dépend de k_1 e = $\omega(x,t)$ e / C_1 et, dans notre cas, elle est paramétrée uniquement par L / e et a / e , les autres paramètres de similitude étant quasiment identiques pour toutes les coques. Il faut aussi signaler que l'intensité de la source ne joue pas sur la courbe de dispersion, ce qui valide encore plus notre technique impulsionnelle.

On peut considérer la plaque et le cylindre comme étant des cas limites de ces coques.

Le paramètre L / e est infini pour le tube et la plaque et est fini pour la cible Line mais il n'est pas déterminant puisque les mesures sont prises sur la partie circulaire de l'objet.

Il reste donc la courbure de l'objet qui intervient par le biais du paramètre a / e et qui est lié au b /a de la cible. En effet, on a la relation suivante :

$$\frac{e}{a} = (1 - \frac{b}{a})$$

Par conséquent les différences observées sur les courbes de dispersion sont essentiellement dues au rapport b / a qui est de 0.94 pour le tube et de 0.97 pour la cible Line et qui tend vers 1 pour la plaque. De plus on remarque que l'ordre des courbes de dispersion est monotone avec b / a car la courbe de dispersion pour le tube est située au-dessus de celle pour la Line elle-même située au-dessus de celle pour la plaque (planche 5-19 a).

5-7.3. SIMULATION DE L'ONDE A0 ET DE L'ONDE A

On va s'intéresser plus particulièrement à la diffraction acoustique par une cible Line en excitation axiale. En effet dans cette configuration, un phénomène remarquable se produit au cours de la propagation de l'onde A0 à proximité de la paroi. L'onde A0 semble subir à cet endroit précis un léger décalage c'est à dire que la vitesse change brusquement mais que la longueur d'onde semble être conservée. Si on regarde attentivement sur une image

représentant cette même diffraction par la cible Line ayant un rayon plus grand (**planches 5-17** et **5-20**), on s'aperçoit que le phénomène est plus visible et qu'il s'agit probablement de l'interaction de l'onde A0 avec une autre onde qui serait de type évanescent. On a alors pensé à l'onde de Schote Stoneley encore appelée onde A car c'est une onde détectée par les méthodes harmoniques dont la vitesse de propagation correspond bien à nos résultats.

L'onde évanescente citée correspond à l'onde de Stoneley qui existe dans le cas d'un demi-espace en présence d'un liquide. On a vu au chapitre 1 que cette onde se propage parallèlement à la paroi du côté liquide avec une vitesse du son proche de la vitesse du son dans le liquide. On sait aussi qu'elle ne réémet pas dans le liquide quand elle se propage sur une surface plane et qu'elle est générée avec une incidence rasante et donc qu'elle peut être générée dans le cas de la cible Line en excitation axiale (figure 5-1). Ceci explique l'absence de ce phénomène sur le tube cylindrique.

Selon Maze (1995), l'onde A est une onde d'interface dont les fréquences de résonances ne sont détectables que dans une fenêtre fréquentielle qui dépend du rapport b/a. La fenêtre se déplace vers les hautes fréquences quand b / a tend vers 1. ce phénomène est également lié à la condition de contact sur l'interface coque liquide c'est à dire au rapport des densités. Le rapport des densités est ici fixé à 7,9 et le rapport b / a à 0,97 avec une épaisseur de 0.8 mm.

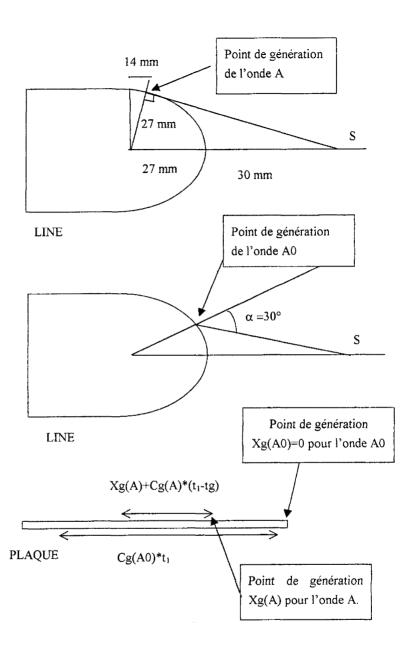


Figure 5-1 : L'onde A est générée sur la Line avec une incidence rasante.

L'onde A0 est générée avant avec une incidence d'environ 30°.

L'écart entre les points de génération de ces deux ondes se mesure grâce aux visualisations.

Il en est de même pour l'écart entre les temps de propagation tg.

Une simulation va nous permettre de nous assurer de la pertinence de l'hypothèse émise. Ajoutons à la simulation de l'onde A0 sur une plaque faite au chapitre 4 un potentiel correspondant à l'onde A (Stoneley pur) pour une plaque qui s'écrit de la façon suivante :

$$\phi = A \exp(-\omega \sqrt{\frac{1}{Cph(\omega)^2} - \frac{1}{Cl^2}} z) \sin \omega (t - \frac{1}{Cph(\omega)} x)$$

où on a pris les valeurs théoriques (Cph, ω) de la courbe de dispersion de l'onde A sur une plaque.

La simulation de la visualisation s'obtient en tout point (x, z), en sommant sur toutes les fréquences le potentiel de l'onde de Lamb A et A0 dans l'eau à t fixé. On somme aussi sur tous les points d'émission de la plaque car la condition de réflexion de l'onde sur la plaque est simulée par une émission ponctuelle en tout point où elle se produit.

Pour cela, on s'efforce de respecter le point de génération de chaque onde. En effet, l'onde A est générée après l'onde A0 sur la cible Line et on simule l'écart de distance sur la plaque en ne commençant pas à générer l'onde A sur le bord de la plaque. De même la durée de propagation qui représente l'intervalle de temps entre le moment où l'onde est générée tg et le moment où on fige le phénomène t1 ne sera pas le même pour les deux ondes (figure 5-1). Tous les points d'émission sont donc situés entre le point de génération tg et le dernier point d'émission tg +tg (tt - tg) de chaque onde.

Bien sûr la vitesse de groupe est différente pour les deux ondes. On prend une vitesse de groupe de 3300 m / s pour l'onde A0 et de 2000 m / s pour l'onde A (**Décultot 1997**). Les valeurs de Xg(A), tg et t1 se mesurent grâce aux visualisations.

Il est à noter qu'on a pris les valeurs théoriques de la courbe de dispersion pour une plaque aussi bien pour l'onde A et l'onde A0. Cependant on est resté dans la gamme de Ke expérimental en prenant une plaque de l'épaisseur de la cible Line qui est de 0,8 mm.

Uberall (1996), Maze (1995) ont montré qu'il existe une interaction entre l'onde de type A et une onde de type A0 pour une coque cylindrique mince (b/a > 0.8) immergée dans un fluide, et que cette interaction augmente avec le rapport b/a. L'article de Talmant (1988) présente les courbes de dispersion obtenues pour une coque cylindrique (en utilisant la R.S.T.) lorsque le rapport b/a varie. On constate que les courbes de dispersion des ondes de type A0 tendent vers la courbe de dispersion d'une onde A0 sur une plaque lorsque b/a s'approche de l. De même, les courbes de dispersion des ondes de type A tendent vers la courbe de dispersion d'une onde A sur une plaque lorsque b/a s'approche de I.

On illustre cela en traçant sur la planche 5-19 b les courbes de dispersion pour une coque cylindrique de b /a = 0.85 et pour une plaque immergée dans l'eau. Pour des b / a > 0.85 les courbes de dispersion pour la coque se situent entre les deux tracés et pour un b / a = 0.99 elles sont quasiment confondues avec celles de la plaque. On peut aussi citer la thèse de **Decultot (1993)** qui obtient des résultats similaires concernant l'onde A0.

Comme notre coque a un b / a de 0.97, il est donc justifié de prendre en approximation les courbes de dispersion sur une plaque.

Lors de la simulation, on s'est aperçu que pour que le phénomène soit suffisamment visible il fallait prendre une amplitude au moins deux fois plus grande pour l'onde A que pour l'onde A0. Le résultat est présenté sur la planche 5-21 et il montre bien les différents cas de figure de cette interaction et est remarquablement similaire à la visualisation (planche 5-20). L'évolution chronologique du phénomène s'obtient en changeant les temps de propagation des deux ondes en corrélation avec le temps des visualisations.

Il semble donc très plausible que le phénomène visible près de la paroi soit bien dû à l'onde A, la présence de celle-ci étant révélée sur la visualisation par l'interaction entre cette onde évanescente et l'onde A0. Par abus de langage, on appellera cette manifestation de l'onde A dans le liquide onde A.

Remarque:

- Si l'épaisseur de la plaque est supérieure ou égale à 1 mm, l'onde A ne se fait apparemment pas sentir. Tout au moins, on ne la détecte ni pour la simulation ni pour la visualisation de la diffraction sur une plaque courbe d'épaisseur 1 mm (planche 5-22). C'est certainement dû à la fenêtre fréquentielle de cette onde qui dépend du rapport b / a comme l'a souligné G. Maze (1995).

5-7.4. EFFETS DE LA COURBURE ET SIMULATION

On sait que la courbure intervient dans la forme des ondes rayonnées. Ainsi si une onde passe d'une surface courbe à une surface plane les ondes rayonnées vont changer de forme.

Le fait de passer d'une surface courbe à une surface plane entraîne également un changement de vitesse de phase pour les ondes qui ont tendance à être plus rapides sur une

surface courbe. En effet, comme on l'a vu lorsqu'on a fait l'étude par similitude, le changement de b / a entraîne un changement pour la courbe de dispersion.

Pour le cas d'un objet cylindrique l'incidence qui peut être normale, axiale ou oblique joue un rôle dans la forme des ondes rayonnées et cela suivant le type d'ondes.

Dans le cas du cylindre, si l'incidence est normale à l'axe les ondes de surface génèrent des ondes de circonférence qui tournent autour de l'objet. En incidence axiale, les ondes de surface se propagent le long du cylindre sans réémettre et sont appelées ondes guidées. En incidence oblique on comprend que ces deux modes de propagation se combinent pour former des ondes hélicoïdales.

Pour les ondes homogènes, en incidence normale les ondes formeront des trajectoires hélicoïdales. Il suffit pour s'en rendre compte de comparer une vue de face et une vue de profil du phénomène (figure 5-2) (Ahyi 1997).

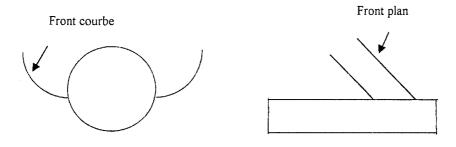


Figure 5-2: Forme des fronts d'ondes suivant si on visualise de face ou de profil.

Pour illustrer cet aspect on présente quelques résultats expérimentaux : sur la planche 5-22, il s'agit de la diffraction sur une plaque courbée, sur la planche 5-23 de celle par la cible Line en excitation normale vue de profil et sur la planche 5-24 de celle de la Line en excitation oblique.

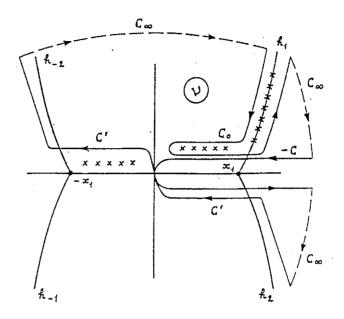
Le cas de la cible Line en excitation normale vue de profil (planche 5-23) montre d'une part l'influence des extrémités hémisphériques qui n'est pas visible sur une vue de face et d'autre part les ondes circulaires situées dans l'axe des électrodes qui sont celles visibles sur la vue de face (planche 5-14). Cependant à ces ondes s'ajoutent des ondes hélicoïdales qui sont dues à la combinaison entre les propagations le long de la cible et celles sur sa circonférence.

Comparons maintenant les visualisations (planche 5-22) avec une simulation de l'onde A0 sur une surface courbe. On choisit pour fixer les idées une surface courbe ayant la forme d'un quart de cercle de rayon 27 mm prolongée par une surface plane. On reprend la simulation du chapitre 4 mais en prenant pour la partie cylindrique les valeurs expérimentales des courbes de dispersion pour le tube en excitation normale, et les valeurs obtenues dans le cas d'une plaque de même épaisseur que le tube pour la surface plane. Le résultat de cette simulation est donné en haut de la planche 5-25. On voit clairement la différence avec la simulation sur une plaque plane placée juste au-dessous (planche 5-25).

De plus, on remarque tant sur les visualisations planche 5-24 que sur la simulation planche 5-25 que le front de l'onde qui a une forme courbée sur la surface courbe, devient plan sur la surface plane ou le tronc du cylindre.

PLANCHES DU CHAPITRE 5

Contour d'intégration C, dans le plan complexe v, pour le problème du cylindre élastique.



Disposition schématique finale des contours d'intégration

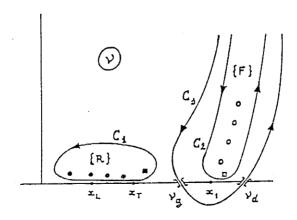
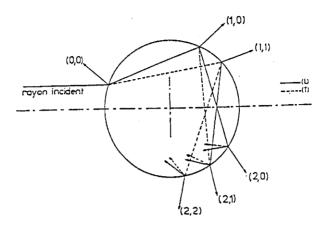


Planche 5-1 et Planche 5-2

Mode (n, m)



Géométrie du problème. Parcours des rayons.

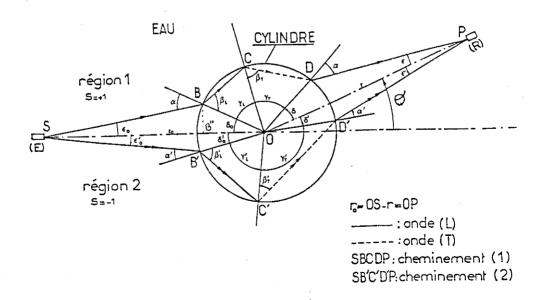


Planche 5-3 et Planche 5-4

Onde de surface élastique excitée aux points E1 et E2 sous un angle critique.

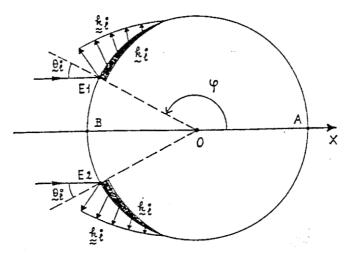




Planche 5-5



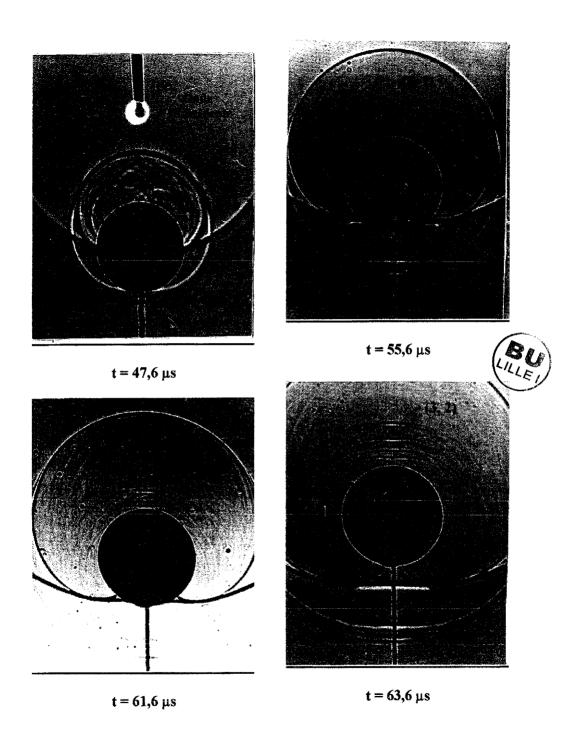
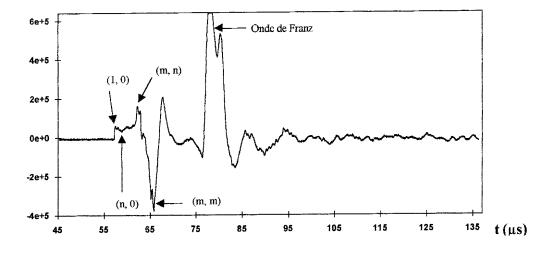


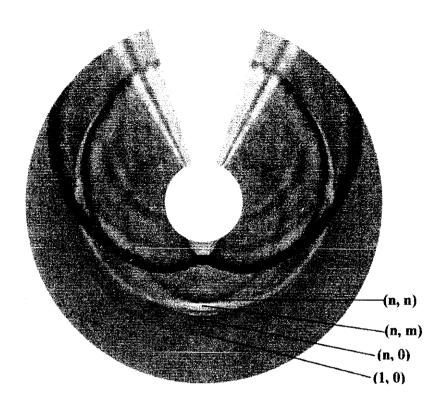
Planche 5-6 : Diffusion par une sphère de verre de diamètre 3,5 cm

P(Pa)



<u>Planche 5-7</u>: Identification des ondes sur les signaux de pression Distance cible - hydrophone: 5cm

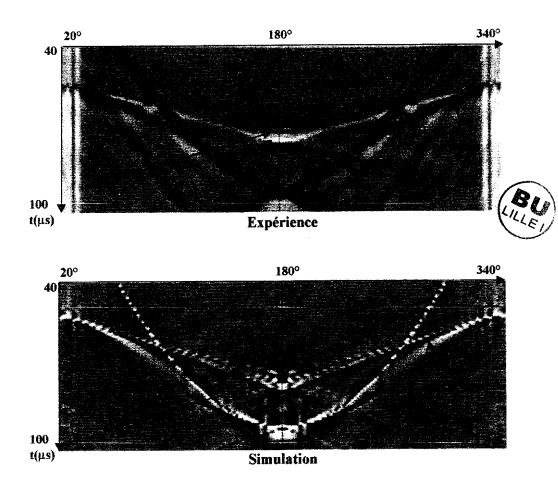






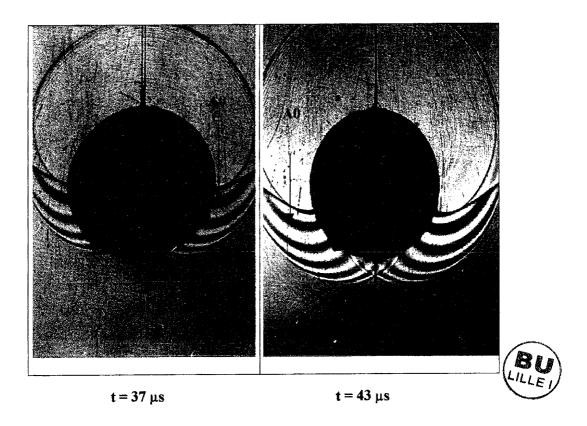
<u>Planche 5-8</u>: Résultat des mesures à l'hydrophone effectuées autour de la sphère par pas de 2 degrés.

Les amplitudes sont codées en niveaux de gris.



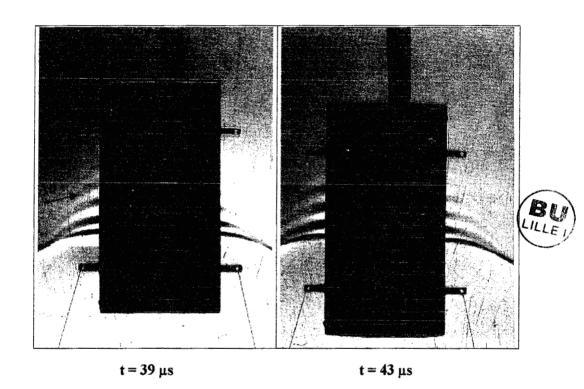
<u>Planche 5-9</u>: Comparaison entre les relevés expérimentaux effectués par l'hydrophone et la simulation de la diffraction acoustique par la sphère.





<u>Planche 5-10</u>: Diffraction de l'onde impulsionnelle sur un tube cylindrique de rapport b / a = 0.94.





<u>Planche 5-11</u>: Diffraction de l'onde impulsionnelle sur un tube cylindrique de rapport b / a = 0.94. L'excitation est axiale.

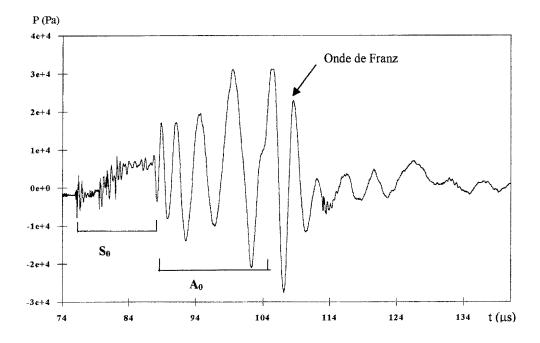
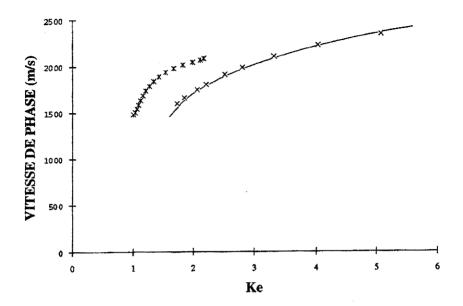


Planche 5-12 : Signal relevé par l'hydrophone positionné au dessous de la cible en vis à vis de la source pour un tube de rapport b / a = 0.94 en excitation normale.

Distance cible – hydrophone : 5 cm

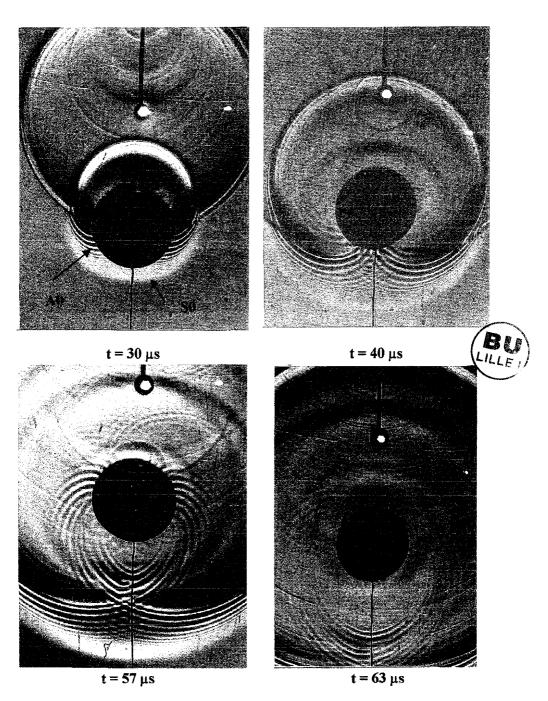


Courbes de dispersion de l'onde A0



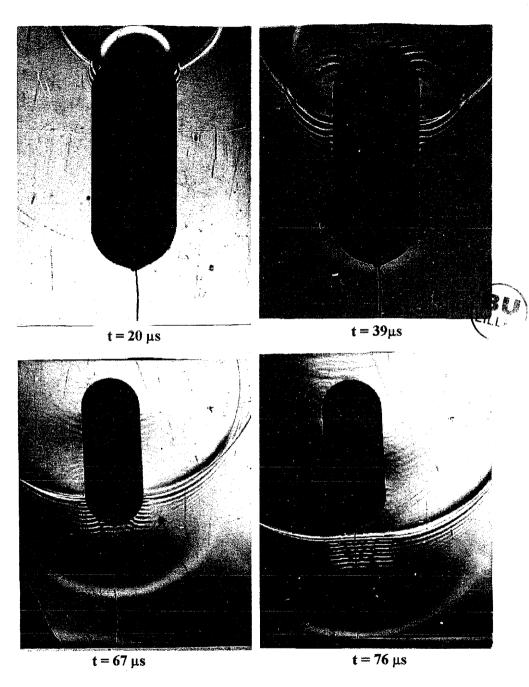
<u>Planche 5-13</u>: Courbe de dispersion expérimentale pour un tube en excitation normale ayant un b / a de 0.94 et une épaisseur de 1,62 mm (*). Comparaison avec les résultats obtenus sur une plaque plane d'épaisseur 1 mm.





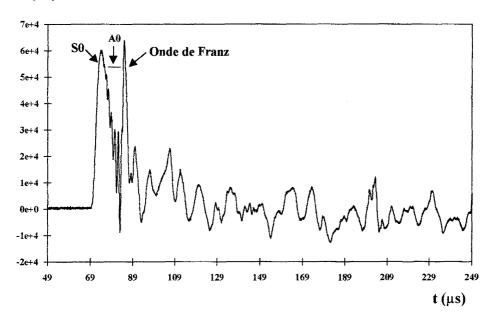
<u>Planche 5-14</u>: Diffraction acoustique par la cible Line de rayon a = 15 mm en excitation normale. La dernière photographie montre bien l'aspect circonférentiel des ondes.





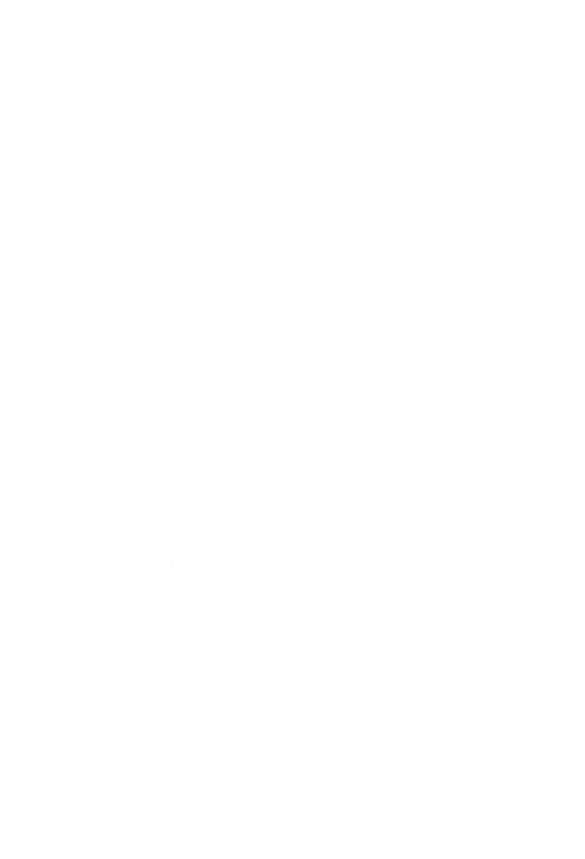
<u>Planche 5-15</u>: Diffraction acoustique par la cible Line de rayon a = 15 mm en excitation axiale. La deuxième photographie montre bien la réémission au niveau de la soudure.

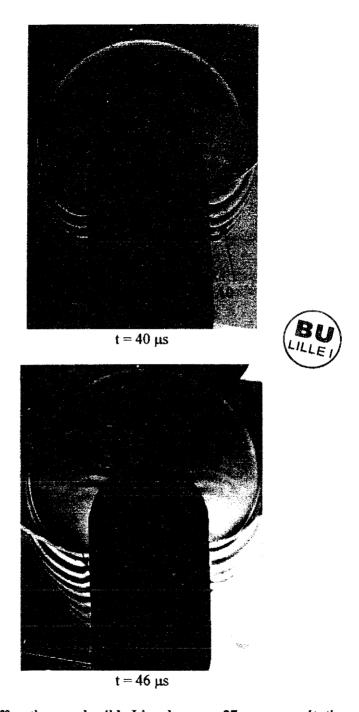




<u>Planche 5-16</u>: Signal relevé par l'hydrophone celui-ci étant placé sous la cible Line qui est en excitation normale.

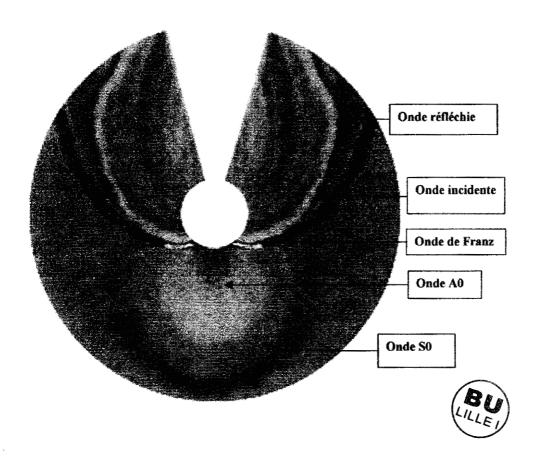
Distance cible – hydrophone : 5 cm





<u>Planche 5-17</u>: Diffraction par la cible Line de rayon 27 mm en excitation axiale. Sur la deuxième image on remarque un décalage de l'onde A0 près de la paroi. Ceci est attribué à l'interaction de l'onde A0 avec l'onde A (Scholte-Stoneley).





<u>Planche 5-18</u>: Image spatio-temporelle représentant les mesures de pression prises par un hydrophone dans le cas de la cible Line en excitation axiale.



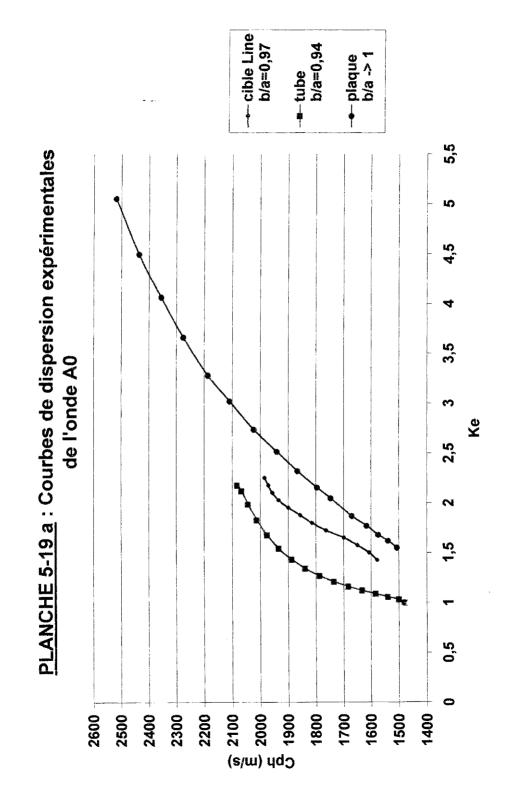
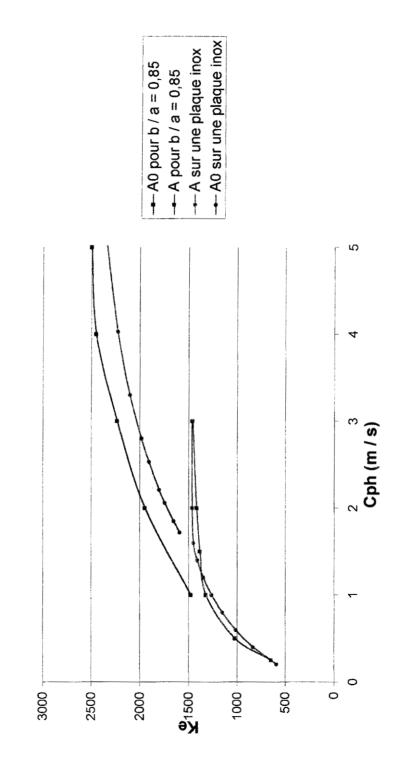
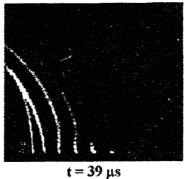


Planche 5-19 b: Evolution des courbes de dispersion avec b / a





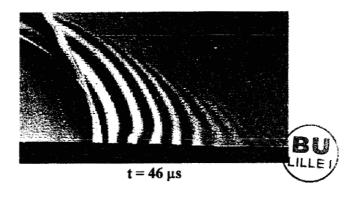
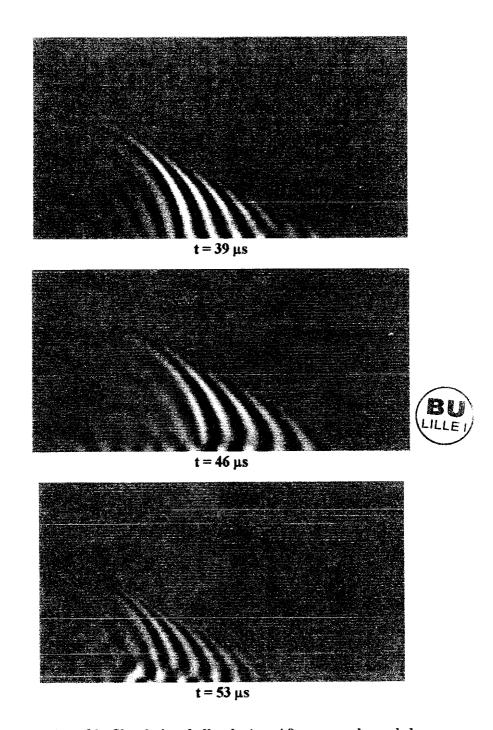




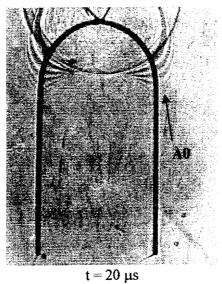
Planche 5-20: Diffraction acoustique sur la cible Line de rayon a =27 mm en excitation axiale. Résultats expérimentaux grossis de l'interaction entre l'onde A0 et l'onde A.



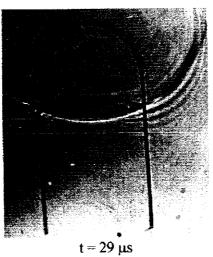


<u>Planche 5-21:</u> Simulation de l'onde A et A0 sur une plaque à des temps de génération chronologiques permettant de retrouver les différentes configurations obtenues expérimentalement sur la planche 5-20.









<u>Planche 5-22:</u> Diffraction acoustique sur une plaque courbe.

Les fronts d'ondes courbes se redressent progressivement pour devenir plans.



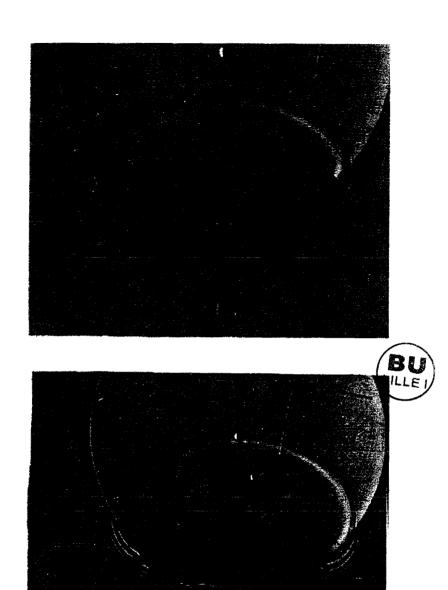


Planche 5-23 : Diffraction acoustique par la Line en excitation normale vue de profil à $t=34~\mu s$ et $t=43~\mu s$. Les ondes hélicoïdales révèlent l'aspect tridimensionnel car il n'y a pas ici de symétrie dans toutes les directions.



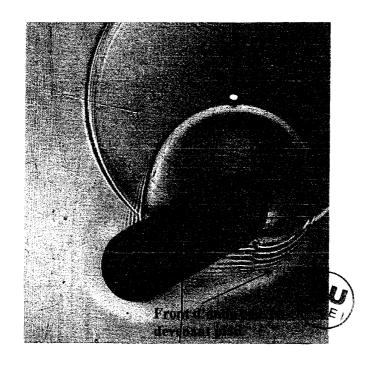
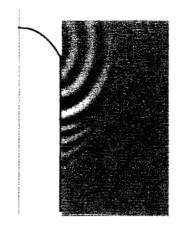


Planche 5-24 : Diffraction acoustique sur la cible Line avec une incidence oblique.

L'incidence oblique induit des ondes hélicoïdales et le changement de courbure modifie la forme du front.



a



BU

b

<u>Planche 5-25</u>: Comparaison de la simulation de la A0 sur une surface initialement courbe devenant plane (a) et sur une surface plane infinie (b) de même épaisseur.

CHAPITRE 6 : TUNNEL HYDRODYNAMIQUE

6-1. VISUALISATION PAR ADAPTATION D'INDICE

6-1.1.INTRODUCTION

Pour utiliser la visualisation en milieu hétérogène, on est confronté à deux problèmes : l'opacité des milieux (exemple :milieux granulaires, solides) et la diffusion de la lumière par les obstacles 3D même transparents. L'adaptation d'indice joue alors un rôle essentiel que ce soit pour voir à l'intérieur d'un obstacle ou pour voir à travers l'obstacle. Cependant, la très grande précision exigée sur l'indice conduit à de nombreuses difficultés techniques pour réaliser cette adaptation.

Nous présentons dans cette section des expériences de faisabilité qui consistent à immerger une bille de pyrex (borosilicate) dans un mélange de deux huiles dont le dosage est effectué de façon à rendre le milieu optiquement homogène.

6-1.2.MISE AU POINT DE L'ADAPTATION D'INDICE

Les moyens expérimentaux employés pour la visualisation sont le montage en Z décrit dans le deuxième chapitre, une source lumineuse continue qui est dans notre cas une diode luminescente rouge et une caméra avec récepteur.

Ce système permet d'obtenir une visualisation en ombroscopie ou strioscopie nous indiquant en permanence l'évolution de l'indice de réfraction. L'indice dépend de la longueur d'onde utilisée ce qui nous a conduit à prendre une diode de couleur rouge pour réduire le spectre.

On dispose de deux huiles qui permettent en les mélangeant dans de bonnes proportions d'atteindre l'indice du pyrex. L'huile Esso Marcol 82 a une masse volumique de 850 kg/m³ à 20°C, une viscosité dynamique de 22 mPa.s à 25°C et un indice de réfraction de 1.465 à 20°C.

L'huile Esso Primol 352 a une masse volumique de 860 kg / m³ à 20°C, une viscosité dynamique de 140 mPa.s à 25°C et un indice de réfraction de 1.475 à 20°C.

D'après Saleh - Platten et al. (1992), pour obtenir l'indice du borosilicate qui est de 1.472, il faut mélanger un tiers de Esso Marcol 82 et deux tiers de Esso Primol 352 (en volume) à 23°C.

Cependant on n'a pas la possibilité de thermostater notre expérience et la strioscopie nous révèle que l'adaptation n'est que très approximative, la température de la pièce étant de 21°C.

Les tableaux de la **planche 6-1** nous donnent respectivement l'évolution de l'indice du mélange en fonction de la température et l'évolution de la viscosité du mélange en fonction de la température. On remarque une décroissance en fonction de la température tant pour l'indice que pour la viscosité.

L'observation de la planche 6-2 montre que le milieu est encore optiquement hétérogène : le côté droit de la bille est sombre tandis que le côté gauche est suréclairé par rapport à la teinte sensible, il s'agit donc d'un effet d'indice couplé à l'inclinaison des faisceaux lumineux (parallaxe ou léger manque de parallélisme des rayons).

A 21°C, l'indice du mélange est supérieur à celui du pyrex on obtient donc une meilleure adaptation en ajoutant progressivement de l'huile Esso Marcol 82 qui a l'indice le plus faible (**planches 6-3, 6-4, 6-5**). On constate alors que la teinte de la bille devient uniforme et identique à celle du mélange des huiles. Seuls les contours de la bille indiquent encore sa présence.

Suite à la l'obtention de l'adaptation d'indice on se propose dans un premier temps de faire de la diffraction acoustique sur la bille de pyrex dans l'espoir de voir les ondes se propager à l'intérieur de celle-ci.

Le résultat de ce test n'est pas très probant. Une fois résolu le problème du spectre lumineux, on s'aperçoit qu'il est possible de voir à travers la bille (planche 6-6) mais pas à l'intérieur de la bille. Le problème vient du fait que notre méthode n'est pas assez sensible pour détecter les petites perturbations induites par l'onde acoustique étant donné la forte résistance du pyrex à la déformation. Le résultat n'est pas vraiment surprenant puisque notre méthode ne permettait pas de visualiser ces ondes à l'intérieur d'un cylindre de verre en excitation normale vue de face. Dans ce cas l'adaptation d'indice n'était pas nécessaire puisque les faces du cylindre étaient perpendiculaires au faisceau.

Une autre tentative a été réalisée sur une couche de bille de pyrex de diamètre trois millimètres au fond d'une petite cuve (10*6*10 cm³). Dans ce cas la visualisation en ombroscopie indique que l'indice est adapté pour la majorité des billes. Cependant on est confronté à des problèmes d'indices pour certaines billes et de défaut de surface pour d'autres ce qui rend l'ensemble assez opaque. D'autres problèmes techniques nous ont fait abandonner cette voie.

Cependant en dehors de la technique ombroscopique, l'adaptation d'indice peut servir en cinématographie par lumière réfléchie. On se tourne alors vers une application aux milieux granulaires en trois dimensions où l'adaptation d'indice obtenue précédemment est suffisante. En effet en jouant un peu sur la luminosité et le contraste on obtient la transparence du milieu.

Si on s'intéresse au mouvement des billes il faut mettre des traceurs mais on est limité au cas où le fluide et les billes ont une forte interaction à cause du choix des huiles imposées par l'indice. Cela ne peut donc pas servir aux milieux granulaires secs.

6-2.ECOULEMENTS DIPHASIQUES TRIDIMENSIONNELS

6-2.1.INTRODUCTION

La mise en place d'un tunnel «hydrodynamique» associé à un système de visualisation par caméra vidéo s'inscrit dans le cadre de l'étude du comportement des matériaux granulaires en couplage avec le fluide environnant.

Pour ce type d'étude, l'adaptation d'indice est essentielle. En effet, cela permettra de rendre la veine transparente et par conséquent d'accéder en trois dimensions aux fluctuations de vitesse des particules marquées.

Les recherches sur le milieu granulaire sont en plein essor et les domaines d'applications sont nombreux, on note parmi eux la sédimentation, le transport pneumatique en bouchon, le stockage en silos et le génie des procédés. Fréquemment rencontrés, les milieux granulaires sont par exemple du sable, des graviers, du sucre ou encore des graines, et sont couramment transportés, stockés et utilisés dans les activités industrielles. Par ailleurs, dans certaines conditions, les phénomènes d'avalanche appartiennent également à cette famille

Cependant les comportements des milieux granulaires sont difficiles à modéliser en particulier en termes de loi de comportement de milieux continus.

En général, le contact entre les grains est soumis à des lois de frottement sec, c'est à dire que le fluide environnant peut être négligé. Dans ce cas le matériau granulaire est modélisé à deux échelles distinctes : l'échelle macroscopique qui fait intervenir les lois de la mécanique des milieux continus et l'échelle microscopique qui traduit l'interaction entre les grains (Cambou -Sidoroff 1985).

Dans notre cas, on a un couplage fluide-grains qui peut entraîner des comportements de type « fluide non newtonien ».

On se rapproche donc davantage de la théorie classique des mouvements Browniens s'appliquant aux suspensions diluées c'est à dire que chaque particule est considérée comme une seule dans un fluide infini à condition de modifier cette théorie quand des particules sphériques et rigides sont assez rapprochées pour interagir hydrodynamiquement (Batchelor 1976).

Une autre approche est possible en utilisant la thermodynamique des phénomènes irréversibles qui traite du transport de masse, d'énergie et d'entropie pour des suspensions. Cette théorie met en évidence un couplage entre les mouvements barycentriques et relatifs qui met en jeu les forces d'inertie et de viscosité (Lhuillier 1986). Le problème est que certaines fonctions, qui apparaissent dans l'entropie de complexion entre autre, ne sont plus connues si la densité augmente. De plus cela ne dispense pas de modéliser les interactions billes-billes.

D'une façon générale, ce sont les milieux granulaires denses en forte interaction avec le fluide environnant qui sont les plus mal connus. Ils interviennent pourtant dans de nombreux processus industriels (raffinage, ...). C'est justement ce type de milieu que notre technique permet d'aborder le plus facilement.

Dans cette section, on présente le dispositif expérimental conçu pour cette première étude ainsi que les premiers résultats. Dans un premier temps, le traitement des résultats s'effectue par une méthode de suivi des particules de type P.T.V. et par une interprétation statistique.

6-2.2.DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Notre système comprend un tunnel hydrodynamique par gravité basé sur le principe du sablier (**planche 6-7**). Le corps du tunnel se compose de deux réservoirs ayant une capacité de 3 litres séparés par un canal de longueur 1 m et de section carrée 6*6 cm². Le réservoir du haut est suivi d'un convergent et d'une vanne à commande pneumatique dont le temps d'ouverture est de 0.5 secondes. Le corps est fixé sur un support permettant différentes inclinaisons du canal avec un réglage fin de 0 à 45°.

Il est à noter que la veine d'obervation, à parois lisses pour le moment, peut être changée.

Le principe de fonctionnement du tunnel est simple. Le tunnel est entièrement rempli d'un mélange de deux huiles décrit dans la section précédente occupant un volume environ 9 litres et de billes de borosilicate de diamètre 3 mm occupant un volume total de 2 litres qui sont stockées dans le réservoir haut. L'écoulement se fait par gravité après ouverture de la vanne et on récupère les billes dans le réservoir bas.

Comme on l'a vu dans la section précédente, le mélange est transparent. Certains grains colorés servent de marqueurs, une caméra vidéo permet alors de suivre le comportement des marqueurs qui sont relativement dispersés et en quantité réglable. Un miroir plan métallique faisant un angle de 45° avec le canal permet d'observer l'écoulement suivant deux axes de visée et cela de façon simultanée. On a ainsi des résultats tridimensionnels.

Le tunnel peut être retourné tête en bas pour le rechargement des billes dans le premier réservoir. Une fois le transvasement des billes terminé, la vanne est refermée et le tunnel remis en position normale pour l'expérience suivante.

Il s'en suit un traitement qui s'assimile à une méthode de suivi de particules (P.T.V.) (Blanchard 1997).

La technique de « particle Tracking Velocimetry » (P.T.V.) consiste à traiter les traces présentes sur deux ou plusieurs images successives réalisées avec un temps d'exposition très court (de l'ordre de la vitesse d'obturation d'une caméra) permettant ainsi d'avoir des taches plus ou moins ponctuelles désignant chacune des particules. L'intervalle de temps séparant deux images consécutives doit tenir compte de l'évolution temporelle de l'écoulement. On obtient alors, en utilisant un algorithme de prédiction, les vecteurs vitesses locaux.

L'intérêt est d'obtenir rapidement un champ de vecteurs vitesse de l'écoulement étudié et de pouvoir ensuite accéder à des portions de trajectoires parcourues par les particules au cours de leur mouvement.

Un autre avantage de la P.T.V. est d'être adaptée à l'étude des écoulements tridimensionnels

D'après nos premiers résultats, le nombre de Reynolds moyen de l'écoulement autour des billes s'écrit :

$$Re = \frac{V_{rel} * D}{v} \approx 3$$

où D = 3mm est le diamètre des billes, v = 100 centistokes = 10^{-4} m² / s est la viscosité dynamique du mélange des huiles (**planche 6-1**) et $V_{rel} = 11$ cm / s est la vitesse relative.

Cette vitesse relative est la vitesse longitudinale moyenne des billes à laquelle on ajoute la vitesse locale moyenne de l'huile entre les billes. Elle a pu être estimée de la façon suivante :

En observant l'écoulement on estime un temps caractéristique de 113 secondes entre le moment où le milieu granulaire entre dans le champ d'expérience (zone de visualisation) et le moment où il le quitte. Le nombre de billes est de 112 000, elles occupent donc un volume de 2 litres. On peut ainsi en déduire le débit volumique : $Ov = V / dt = 19 \text{ cm}^3 / \text{s}$.

On peut aussi approximer la vitesse locale moyenne de l'huile entre les billes en considérant que les billes se touchent et donc que l'obstruction due aux billes occupe une surface S_b de 28 cm2 sur une section totale S_b de 36 cm2. On trouve : $V_{huile} = Qv / (S - S_b) = 2.4$ cm / s.

En considérant que la vitesse longitudinale moyenne des billes mesurée en P.T.V. est de 7.7 cm/s, on obtient : $V_{rel} = V_{huile} + V_{billes} = 11.1$ cm/s.

6-2.3. ENREGISTREMENTS ET TRAITEMENTS DES IMAGES

Notre toute première expérience est l'observation de l'écoulement des billes quand le canal est en position verticale. Pour les premiers essais qualitatifs les marqueurs sont au nombre de 1 pour 1000 mais leur nombre sera réduit par la suite pour faciliter les problèmes d'identification des particules sœurs dans un traitement quantitatif automatique des clichés P.T.V..

Le déroulement du phénomène est filmé à l'aide d'une caméra vidéo numérique et l'enregistrement de la bande vidéo est transféré directement à l'ordinateur qui possède pour ce faire une carte d'acquisition vidéo de type « Matrox » et un logiciel de capture vidéo (« vidéo capture »). Il est ensuite possible de décomposer le film en une séquence d'images grâce à un autre logiciel de traitement d'images (« vidéo Editor ») et ainsi d'obtenir jusqu'à vingt cinq images par seconde.

On a alors une série d'images qui sont numérotées afin de conserver la chronologie du phénomène. Elles sont traitées par lot à l'aide du logiciel Adobe Photoshop de façon à réduire les images à la taille du canal (352 pixels*288 pixels) et à obtenir des images en noir et blanc où apparaissent uniquement les particules marquées.

On utilise ensuite un programme en langage C (Annexe 1) développé au L.M.L. pour obtenir les coordonnées moyennes (en pixels) des particules marquées pour chaque image (figure 6-1), et le résultat est stocké dans un fichier portant le même numéro que l'image. On traite ainsi toutes les images dans le plan X, Y puis dans le plan X, Z. L'assemblage des deux fichiers est établi en comparant les X et nous donne finalement les coordonnées X, Y, Z de toutes les particules marquées à t fixé.

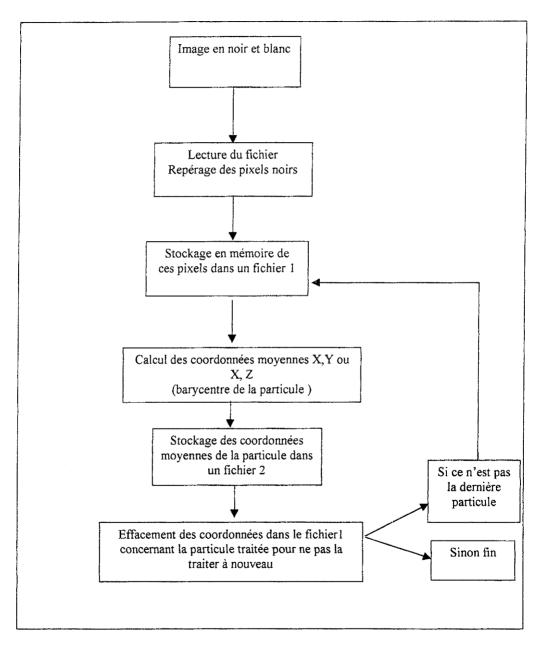


Figure 6-1 : Organigramme de recherche des coordonnées moyennes

6-2.4.EXPLOITATION DES IMAGES TRAITEES

On présente ici le cas de l'écoulement des billes dans le canal en position verticale. Le temps caractéristique est de 113 secondes entre le moment où les billes entrent dans le champ d'expérience (zone de visualisation) et le moment où elles le quittent.

Pour cette première expérience, après avoir exécuter le programme qui nous donne les coordonnées moyennes des particules pour chaque image prise dans le plan X, Y, on procède à l'appariement des particules de façon manuelle afin d'obtenir quelques trajectoires caractéristiques en deux dimensions (planche 6-8, 6-9, 6-10). La planche 6-8 nous révèle les trajectoires les plus régulières qui sont également les plus caractéristiques. On constate que les vitesses sont plus élevées au centre du canal. La planche 6-10 montre cependant qu'on peut observer des évolutions très complexes.

On peut ainsi calculer les vitesses extrêmes et moyennes des billes. La vitesse longitudinale maximale est de 25 cm/s, la vitesse longitudinale minimale est de -24 cm/s et la vitesse moyenne longitudinale est de 7.7 cm/s. La vitesse transversale extrémale est de 9 cm/s en valeur absolue et la vitesse moyenne transversale est quasiment nulle.

Dès lors, on a accès aux éléments qui vont permettre d'automatiser la suite du traitement c'est à dire d'avoir la carte des vitesses et le suivi des billes.

Pour faire l'appariement des particules de façon automatique, on utilise un programme (Annexe 2) qui recherche, à partir de deux fichiers de coordonnées consécutifs dans le temps, la correspondance d'une particule du premier fichier avec une particule du deuxième fichier. La recherche se fait par prédiction de mouvement. Les vitesses maximales calculées précédemment servent à définir le secteur (ou «boîte ») autour d'une particule du premier fichier. Le programme cherche dans le deuxième fichier la particule sœur dans cette boîte centrée sur la particule sélectionnée. Il calcule alors le vecteur vitesse instantané et passe à la particule suivante (figure 6-2).

Dans le cas où il ne trouve pas la particule dans le secteur défini, il passe à la particule suivante. La mesure est annulée quand il y a deux particules dans la boîte de prédiction. Pour éviter cela, il faut travailler à faible densité de marqueurs. Cependant, l'augmentation du nombre des marqueurs est possible par un traitement en couleur et l'usage de marqueurs de teintes différentes.

La partie finale du traitement actuel est de tracer des trajectoires en trois dimensions. La figure 6-3 présente l'organigramme qui correspond au programme de l'annexe 3 construisant les trajectoires des particules. Ainsi on a accès à des trajectoires caractéristiques de particules en trois dimensions.

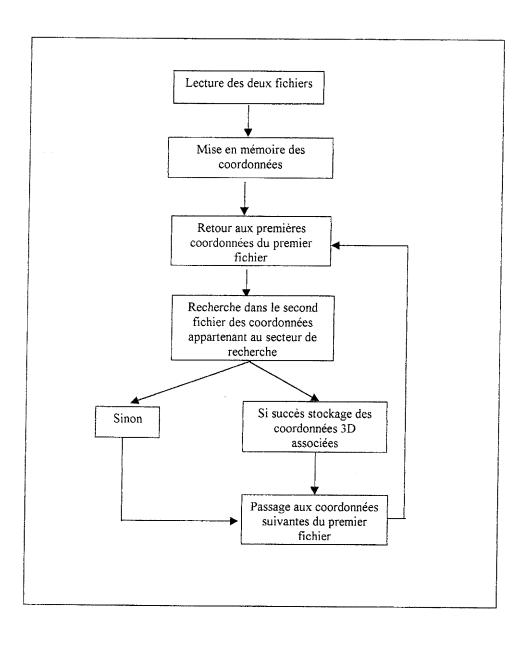


Figure 6-2: Organigramme de la méthode d'appariement de particules

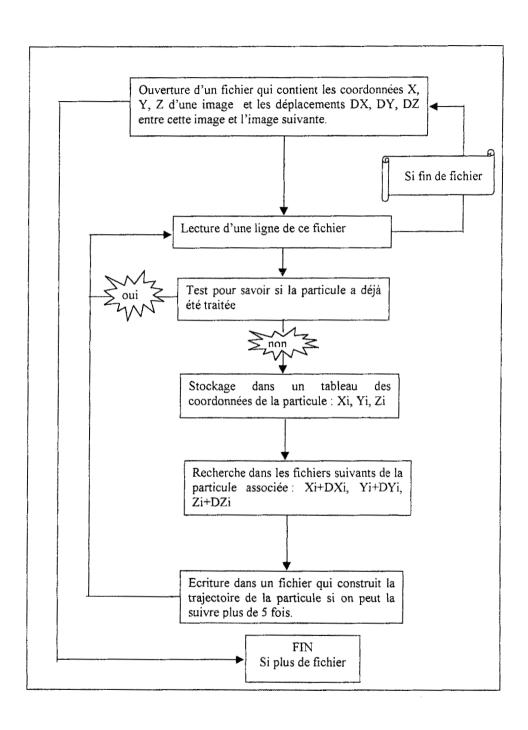
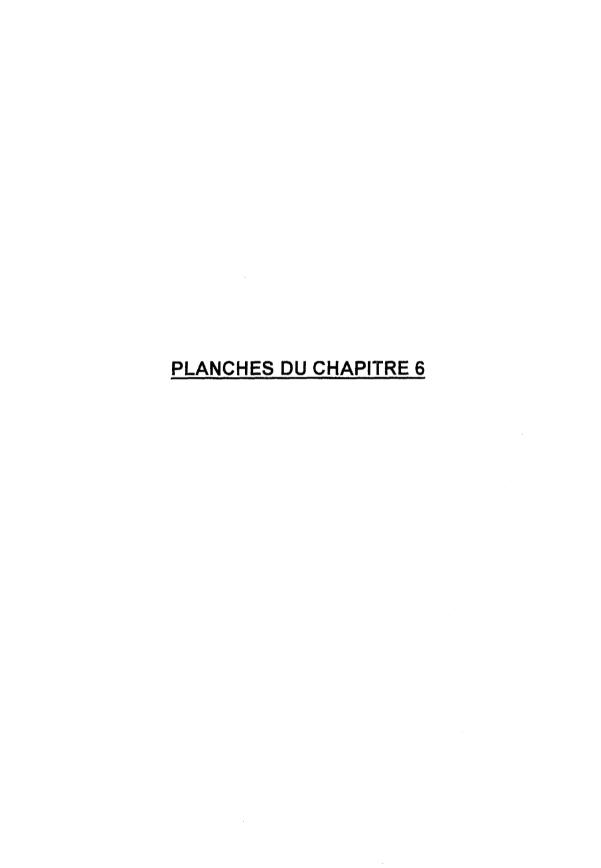
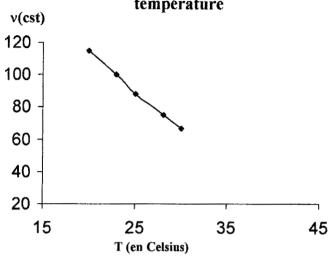


Figure 6-3: Organigramme de la recherche de trajectoire



		÷

La viscosité en fonction de la température



Indice de réfraction en fonction de la température

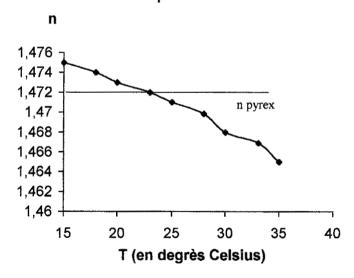
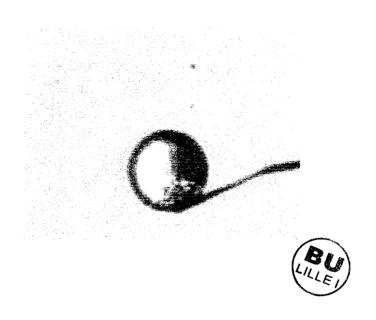
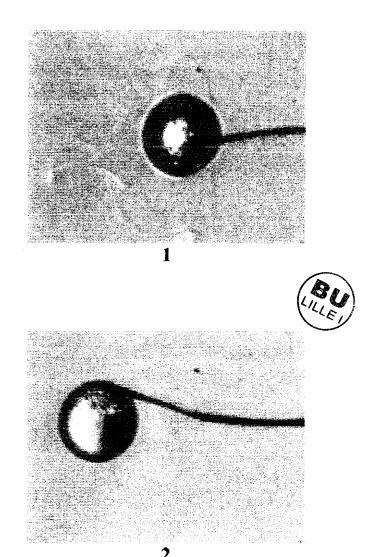


Planche 6-1

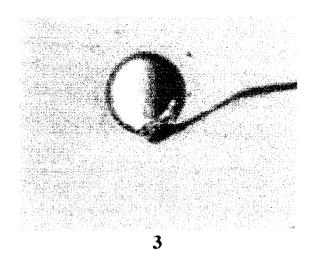


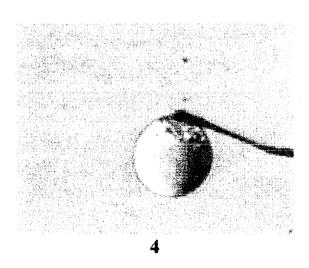
<u>Planche 6-2</u>: Visualisation en strioscopie d'une bille de Pyrex dans un mélange d'huile quand l'indice de réfraction de celui-ci n'est pas bien adapté.



<u>Planche 6-3</u>: Evolution de l'adaptation d'indice. Visualisation par strioscopie.

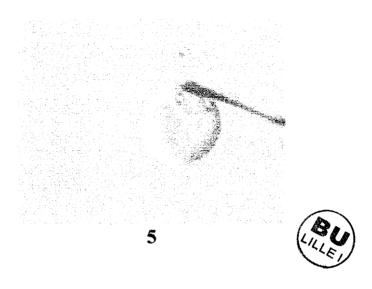




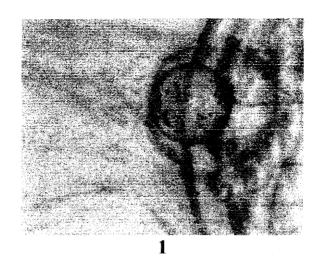


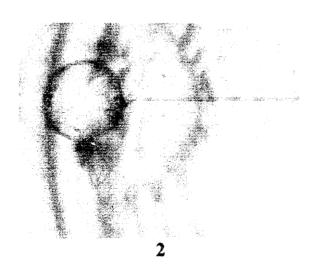
<u>Planche 6-4</u>: Evolution de l'adaptation d'indice. Visualisation par strioscopie.





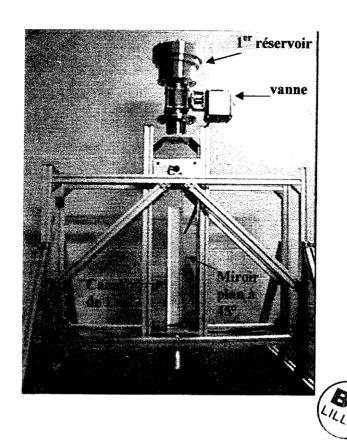
<u>Planche 6-5</u>: Evolution de l'adaptation d'indice.
Visualisation par strioscopie.
Ici, l'indice de réfraction du mélange est le même que celui de la bille de pyrex.





<u>Planche 6-6</u>: Diffraction acoustique par une bille de Pyrex. Visualisation en strioscopie.





<u>Planche 6-7</u>: Tunnel Hydrodynamique

Planche 6-8 : Exemples de trajectoires de billes descendantes

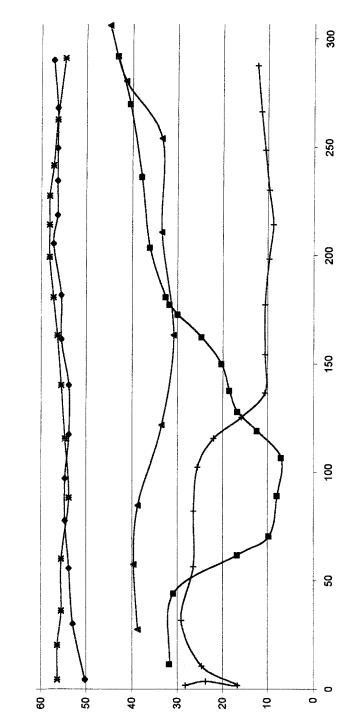


Planche 6-9 : Exemples de trajectoires de billes ascendantes

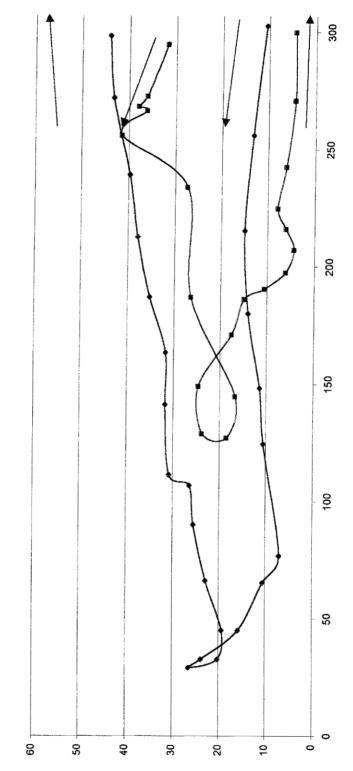
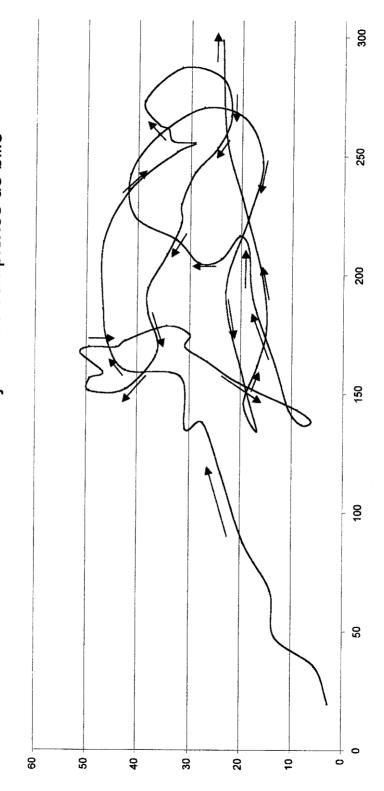




Planche 6-10 : Une des trajectoires complexes de bille



CONCLUSION GENERALE

Deux méthodes de visualisation originales ont été abordées au cours de cette étude avec diverses applications en milieux non homogènes.

La première méthode est un système de visualisation ultra rapide par ombroscopie ou strioscopie associé à une source acoustique impulsionnelle de type mini-étincelle. Cette technique est appliquée à la diffraction acoustique sur des objets immergés dans l'eau.

Au cours de cette thèse, nous avons montré les performances et l'originalité de cette méthode qui a permis la visualisation et l'identification d'ondes telles que les ondes de Lamb A0, S0, A et les ondes de Rayleigh, Franz... Nous avons su, entre autres, déterminer l'origine physique des ondes, mesurer leurs vitesses, leurs temps d'arrivée en un point du champ.

Des images spatio-temporelles ont été réalisées à partir des signaux relevés par un hydrophone, les amplitudes étant codées en niveaux de gris. Ces images qui permettent d'identifier les ondes par leur temps d'arrivée à une distance fixée du centre de la cible, ont été comparées à la simulation numérique des ondes géométriques dans le cas de la sphère, et ont ainsi conforté l'identification faites à partir des décalages temporels mesurés sur les photographies. De plus cela valide la méthode puisque nous obtenons la réponse impulsionnelle de la sphère.

Des simulations numériques de l'onde A0 sur une plaque nous ont aidés dans l'interprétation de ce que révèle une visualisation en ombroscopie, et par suite des phénomènes mis en jeu. Une première avancée vers un traitement quantitatif a été effectuée, notamment par l'obtention des courbes de dispersion d'ondes A0, sur une plaque puis sur une coque. Ce succès est propre à la technique impulsionnelle d'excitation dont nous confirmons ainsi l'intérêt. Le mode de dépouillement n'exige qu'un seul cliché et s'appuie sur la connaissance théorique du phénomène et sa validation par les simulations. Ceci a permis d'identifier formellement une onde A0 sur une coque insonifiée normalement à son axe.

Grâce à ce pas en avant et avec la même combinaison de moyens théoriques et expérimentaux, nous avons pu également faire la simulation d'une onde A superposée à une onde A0 et interpréter les phénomènes pariétaux visualisés lors de la diffraction acoustique sur une cible Line en excitation axiale.

L'étude impulsionnelle de la diffraction acoustique est donc désormais possible avec un support de visualisation et jusqu'à de très hautes fréquences. Elle s'avère complémentaire des méthodes harmoniques. En effet elle permet entre autres, d'avoir accès à l'évolution temporelle et d'observer l'onde A0.

Selon le regard que l'on porte, on pourra dire que le chemin parcouru est considérable ou qu'il reste encore beaucoup à parcourir. Bien sûr les perspectives restent nombreuses au niveau des applications et en particulier nous pouvons envisager d'étudier la propagation dans divers milieux liquides ou solides et même dans l'air. Mais pour ouvrir encore davantage les champs d'investigation (par exemple en industrie) il faut améliorer le système. Ceci est en passe d'être réalisé avec le remplacement des sources lumineuses de type éclateur par des diodes électroluminescentes ou lasers, et les plaques photographiques par une réception CCD. Le but sera de minimiser la parallaxe, de réduire l'encombrement et d'augmenter encore la sensibilité de la prise d'images. Cette évolution ouvrira par ailleurs la voie à des mesures quantitatives. (un dépôt de brevet a été déposé en ce sens en marge de cette thèse...)

La seconde méthode de visualisation est constituée d'un tunnel hydrodynamique et d'une caméra numérique permettant l'acquisition directe des images par un ordinateur. La particularité réside ici dans le fait que nous sommes capables de visualiser un écoulement granulaire en trois dimensions puisque nous utilisons une adaptation d'indice pour rendre le milieu optiquement homogène.

Pour ce qui est cette deuxième méthode nous avons maintenant posé des bases solides qui permettront d'aller plus loin. En effet le système fonctionne en trois dimensions grâce à l'adaptation d'indice et le traitement des images par P.T.V. est quasiment automatisé.

Le tunnel hydrodynamique est désormais près à recevoir d'autres configurations et d'autres méthodes optiques (plan laser...). Il reste à bien qualifier ce type d'écoulement et à proposer des modèles de comportement. Nous pouvons également envisager d'étudier des problèmes de nature industrielle comme les écoulements dans les silos, le transport pneumatique en bouchon ou certains processus de raffinage, ou de nature environnementale (transport sédimentaire, pollution, ...).

REFERENCES

Ahyi - Pernod - Latard - Merlen - Uberall (1998) First experimental demonstration of the pseudo-Rayleigh (A0) wave acoustically excited on water-immersed cylindrical shells. J. Acous. Soc. Am. (accepté).

Ahyi (1997) Développement d'un système d'imagerie ultra-rapide : Application aux études de rayonnement et de diffusion acoustique. Thèse en électronique à l'Université de Lille 1.

Bao - Franklin - Raju - Uberall (1997) The splitting of dispersion curves for plates fluid loaded on both sides. J. Acous. Soc. Am., vol. 102 (1), pp1-3.

Batchelor (1976) Brownian diffusion of particles with hydrodynamic interaction. J. Fluid Mech., vol.74 (1), pp1-29.

Blanchard (1997) Etude d'une interaction d'un jet bidimensionnel avec un écoulement transversal perpendiculaire et confiné. Thèse de doctorat en mécanique des fuides à l'université de Lille I.

Brekhovskikv (1980) Waves in layered media. Academic Press

Brill -Uberall (1971) Acoustic waves transmitted through solid elastic cylinder. J. Acous. Soc. Am. Vol. 50 (3), pp921-939.

Cambou – Sidoroff (1985) Description de l'état d'un matériau granulaire par variable interne statique à partir d'une approche discrète. Journal de Méca. Th. et Appl., vol.4 (2), pp233-242.

Davies (1981) Schlieren photography: Short bibliography and review. Opt. Laser Technol. Vol. 13, pp37-43.

Décultot - Maze - Chiumia - Touraine (1997) Diffraction acoustique par Line 2. Rapport D.R.E.T Nº94/108.

Décultot (1993) Diffraction par des objets axysymétriques immergés. Cas du cylindre limité par des hémisphères. Thèse de doctorat 3^{ème} cycle à l'université du Havre.

Derbesse (1997) Caracterisation d'une source acoustique impulsionelle. Application à l'etude d'ondes dans un milieu multicouches liquide. D.E.A. obtenu à U.V.H.C..

Derem (1986) La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple. Théories et expériences. N. GESPA (Théorie de la matrice S et transformation de Sommerfeld-Watson dans la diffusion acoustique. Ch. 9).

Duclos - Ripoche (1972) Visualisation stroboscopique des ondes ultrasonores en milieu liquide. C.R. Acad. Sci (Paris), B275, p.525.

Frisk - dickey - Uberall (1975) Surface wave modes on elastic cylinders. J. Acous. Soc. Am. Vol. 58 (5), pp996-1008.

Frisk - Uberall (1976) Creeping waves and lateral waves in acoustic scattering by large elastic cylinder. J. Acous. Soc. Am. Vol. 59 (1), pp46-54.

Gatti (1996) Dispositif de visualisation ultra rapide sur base de CCD. D.E.A. en électronique à l' U.V.H.C..

Gerard (1986) La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple. Théories et expériences. N. GESPA (Formalime modal : interprétation. Ch. 8).

Goncharov - Brekhovskikv (1993) Mechanics of continua and waves dynamics. Springer-Verlag.

Hackman - Todoroff (1985) An application of the spheroidal coordinate-based transition matrix: the acoustic scattering from high aspect ratio solids. J. Acous. Soc. Am., vol. 78 (3), pp1058-1071.

Hayman - Quentin - Doucet (1979) Schlieren observations of scattering of short ultrasonic pulses from elastic cylinders. Revue du Cethedec (60), pp 13-20.

Hayman - Quentin - Duclos - Maze (1986) La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple. Théories et expériences. N. GESPA (Visualisation de la diffraction des ondes ultrasonores. Ch. 24).

Izbicki - Rousselot - Gerard - Maze - Ripoche (1991) Analysis of resonances related to Scholte-Stoneley waves around circular cylindrical shells. J. Acous. Soc. Am., vol. 90, pp2602-2608.

Kemmou (1996) Source acoustique pour la mesure de réponses impulsionnelles. Thèse en électronique à U.V.H.C. (Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis).

Kogelschatz - Schneider (1972) Quantitative Schlieren techniques. Applied to high current arc investigations. Appl. Opt. (vol. 11), pp1822-1831.

Landau - Lifchitz (1971) Théorie de l'élasticité. Ed. de MIR.

Latard – Merlen – Ahyi - Perned (1997) Analyse impulsionnelle de la diffraction acoustique sur une coque. Actes de l'A.U.M. (Association Universitaire de Mécanique), vol 1, pp15-19.

Leander (1996) On the relation between the wavefront speed and the group velocity concept. J. Acous. Soc. Am. Vol. 100 (6) pp3503-3507.

Léon - Lecroq - Décultot - Maze (1992) Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite hollow cylindrical shell. J. Acous. Soc. Am., vol.91 (3), pp1388-1397.

Lhuillier (1986) Mass and entropy transport in a suspension of rigid particles. *Journal phys.*, vol. 47, pp1687-1696.

- Mason Thurston (1976) Physical acoustics. Academic press.
 - [1] Uberall Surface waves in acoustics, Vol. 10. Ch. 1.
- [2] Uberall Huang Acoustical response of submerged elastic structures obtained through integral transform. Vol. 12, Ch. 4.
- [3] Neubauer Observation of acoustic radiation from plane and curved surfaces. Vol. 10,Ch. 2.
- Maze Leon Ripoche Klauson Metsaveer Uberall (1995) Nature de l'onde d'interface de Scholte sur une coque cylindrique. Acoustica Vol. 81 (3), pp201-290.

Merzkirch (1987) Flow visualisation. Second edition Academic press, pp 115-159.

Nakamura - Otani (1992) Frequency response of a piezoelectric polymer film hydrophone and an elastic wave induced on the backing surface. *Japenese Journal of Applied Physics*, vol. 31, supplément 31-1, pp266-268.

Neubauer - Dragonette (1970) Observation of waves radiated from circular cylinders caused by an incident pulse. J. Acous. Soc. Am. (vol. 48) pp1135-1149.

Neubauer (1969) Pulsed circumferential waves on aluminium cylinders in water. J. Acous. Soc. Am. (vol. 45) pp1134-1144.

Pernod - Merlen - Ahyi - Bégue (1998) Procédé d'acquisition d'images ultra-rapide à base d'un capteur matriciel à semi-conducteurs, type CCD, et dispositif pour la mise en œuvre de ce procédé.

Pernod - Merlen - Ahyi (1996) Transient acoustic scattering by elastic objects: high speed visualization and large banded pressure measurements. *Acustica* (vol. 82), supplément 1, pp 247-253.

Pernod - Merlen - Kemmou - Ahyi - Delannoy (1994) [1] Ponotual transient acoustic source for experimental impulse response measurements. *IMACS, IEEE-SMC, SPRANN'94, pp689-692.*

Pernod - Merlen - Kemmou - Ahyi (1994) [2] Etude par visualisation ultra-rapide et mesure de pression d'une source impulsionnelle large bande non directive. Acte du congrès SFA, Journal de physique 4, colloque C5, supplément au Journal de Physique 3 (vol. 4), pp729-732.

Pernod (1989) Sismique haute résolution de subsurface : modélisation physique. Thèse à l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis (U.V.H.C.).

Pernod (1996) Etude et développement de nouvelles techniques de caractérisation ultrasonore. Habilitation à diriger des recherches, U.V.H.C.

Pernod (1998) 3D physical modeling for high resolution sismic: prospection of diffracting targets. Acta-Acustica (Vol. 81).

Quentin (1986) La diffusion acoustique par des cibles élastiques de forme géométrique simple. Théories et expériences. N. GESPA (Approximation de l'optique géométrique. Ch. 10).

Saleh - Larrea - Thovert - Platten - Adler (1992) Thermal convection in a model porous medium. Acte of the 6th International Symposium on Appl. of Laser Techniques to fluid Mechanics, Portugal.

Sessarego - Sageloli (1990) Analyse temps fréquence de signaux en milieux dispersifs. Application à l'étude des ondes de Lamb. J. Acoustique (vol.3), pp273-280.

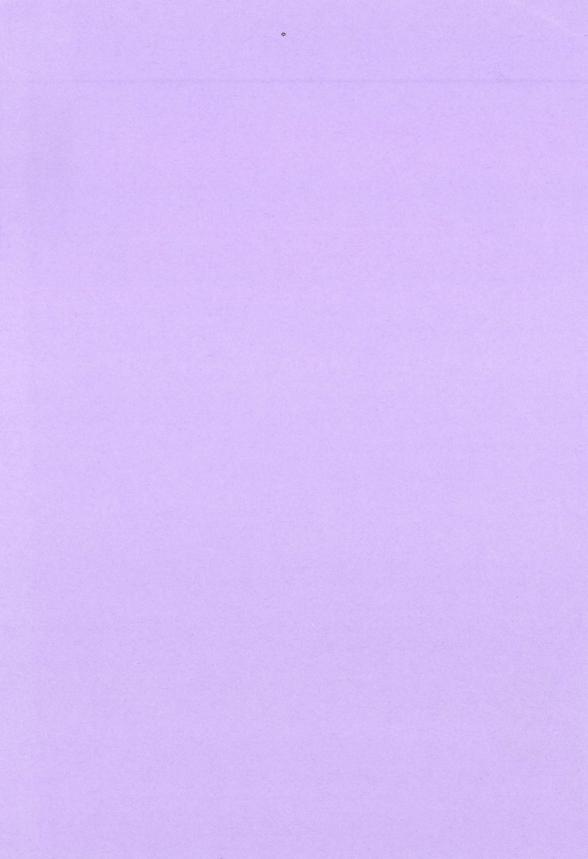
Talmant - Quentin - Rousselot - Subrahmanyam - Uberall (1988) Acoustic resonances of thin cylindrical shells and the resonance scattering theory. J. Acous. Soc. Am., Vol. 84 (2), pp681-687.

Uberall - Gérard - Guran - Duclos - Bao - Raju (1996) Acoustic scattering resonances Relation to external and internal surface waves. Appl. Mech. Rev. (49).

Weight - Hayman (1978) Observation of the propagation of very short ultrasonic pulses and their reflection by small targets. J. Acous. Soc. Am. (vol. 63), pp396-404.

Welton - de Billy - Hayman - Quentin (1980) Back scattering of short ultrasonic pulses by solid elastic cylinders at large ka. J. Acous. Soc. Am., Vol. 67 (2) pp-470-476.





METHODES DE VISUALISATION PAR GRADIENT D'INDICE EN MECANIQUE DES MILIEUX NON-HOMOGENES

APPLICATION

A LA DIFFUSION ACOUSTIQUE ET AUX ECOULEMENTS DIPHASIQUES

RESUME

Deux méthodes de visualisation par gradient d'indice ont été abordées au cours de cette thèse avec des applications différentes en milieux non homogènes.

Un système de visualisation ultra rapide, basé sur la technique Cranz Schardin, permet de prendre une série de 24 images ombroscopiques ou strioscopiques successives espacées par des intervalles de temps ajustables indépendamment de 100 ns à 2 s. Ce système de visualisation grand champ est associé à une source acoustique de type mini-étinceleur pour l'étude de la réponse impulsionnelle de cibles élastiques immergées. On montre ainsi les performances et l'originalité de cette méthode qui a permis la visualisation et l'identification d'ondes telles que les ondes de Lamb A0, S0, A et les ondes de Rayleigh, Franz... On a su, entre autres, déterminer l'origine physique des ondes, mesurer les vitesses des différentes ondes, et tracer les courbes de dispersion expérimentales de l'onde A0.

Une technique d'adaptation d'indice est mise en œuvre puis utilisée pour une deuxième méthode de visualisation. Il s'agit d'un tunnel hydrodynamique associé à une caméra numérique permettant l'étude par P.T.V. (Particle Tracking Velocity) d'écoulements granulaires tridimensionnels. Le milieu granulaire et le fluide environnant sont de même indice de réfraction et le mélange est optiquement transparent. Des grains teintés servent de marqueurs pour la P.T.V. Les premiers résultats sont présentés, notamment les répartitions de vitesses et les trajectoires.

MOTS CLES: Méthodes optiques - Visualisation - Ombroscopie - Strioscopie

- Diffraction acoustique Impulsion Ondes de Lamb Onde de Rayleigh
- Ondes latérales Adaptation d'indice Milieu granulaire P.T.V. Tridimensionnel.