

the 2000 457

50376.
1999-
101

N° d'ordre : 2459

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

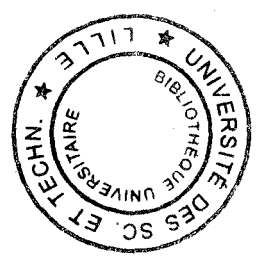
pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

en Productique : Automatique et Informatique Industrielle

par

Laurent LEFEVRE



DE L'INTRODUCTION D'ELEMENTS FONCTIONNELS
AU SEIN DE LA THEORIE DES BOND GRAPHS

Soutenu le 13 Janvier 1999 devant le jury d'examen

- | | | |
|------|-------------------|------------------------------------|
| M. | D. DOCHAIN | Rapporteur |
| M. | S. SCAVARDA | Rapporteur |
| M. | C. BREZINSKI | Examineur |
| M. | R. LOZANO | Examineur |
| M. | J.P. RICHARD | Examineur |
| M. | P. VANHEEGHE | Examineur |
| Mme. | G. DAUPHIN-TANGUY | Examineur et
Directeur de thèse |

Avant Propos

Ce rapport est le fruit d'un travail de recherche réalisé au sein du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille (L.A.I.L).

Madame Geneviève Dauphin-Tanguy, professeur à l'Ecole Centrale de Lille, a dirigé ces recherches, et a su leur insuffler la rigueur nécessaire, remédiant ainsi efficacement à ma tendance naturelle à la dispersion, tout en préservant une salutaire ouverture aux méthodes et concepts nouveaux dans le cadre de la méthodologie bond graph. Je tiens à lui témoigner mon admiration pour avoir su créer cette vivante collaboration, ainsi que ma reconnaissance pour son soutien précieux.

Mon père, Monsieur Jacques Lefèvre, professeur PAST à l'Ecole Centrale de Lille et senior lecturer à la Sherrington School of Physiology, King's College, qui pour d'évidentes raisons ne figure pas dans l'encadrement officiel de cette thèse, en est néanmoins à l'origine. C'est en effet sur les résultats d'une collaboration étroite, et à partir de ses idées originales, que nous avons pu formuler la problématique traitée ici de manière précise, en percevoir l'utilité et la complexité. Outre ses importantes contributions, sa reconnaissance est, pour moi, une grande joie.

J'adresse mes remerciements à l'ensemble des membres du jury de cette thèse :

Monsieur Denis Dochain, Directeur de Recherche FNRS, en poste au CESAME (Louvain-la-Neuve, Belgique), pour l'attention qu'il porte à ce travail en tant que rapporteur, ainsi que pour la compétence et les grandes qualités humaines dont j'ai bénéficié lors de notre collaboration passée et qui ne manqueront pas de rendre fructueuse et enrichissante notre collaboration future.

Monsieur Rogelio Lozano, Directeur de Recherche CNRS, en poste à l'Université des Technologies de Compiègne, dont les compétences sur la passivité, un des thèmes centraux de ce travail, sont reconnues de toute la communauté des automaticiens, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être rapporteur de cette thèse.

Monsieur Serge Scavarda, Professeur à l'INSA de Lyon, qui a accepté d'être rapporteur de cette thèse, dont les remarques ouvrent de fructueuses perspectives à ce travail, et dont les compétences, ainsi que le sentiment que j'ai que nous partageons une conception commune de la collaboration, me font espérer de futurs contacts suivis.

Monsieur Claude Brezinski, Professeur à l'Université Lille I, pour avoir accepté d'examiner ce travail et de guider mes premiers pas dans le domaine des approximations de Padé. J'ai retrouvé, au sein du laboratoire Analyse Numérique et Optimisation (ANO) qu'il dirige, un accueil et un état d'esprit qui m'était familier ...

Monsieur Jean-Pierre Richard, professeur à l'Ecole Centrale de Lille, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'examiner ce travail et pour les stimulantes discussions que j'ai eues avec lui et les membres de son équipe ces trois dernières années.

Monsieur Philippe Vanheeghe, pour l'intérêt qu'il porte à mes travaux, pour avoir accepté d'examiner cette thèse, et pour les suggestions intéressantes d'applications qu'il propose, malheureusement reportées quelque peu suite à un incident technique.

L'ensemble du personnel administratif et technique et les doctorants du laboratoire ont grandement contribué à égayer et à enrichir les trois années que j'y ai passées. Je souhaite à chacun la réalisation de leurs nombreux projets. J'emporterai avec moi le souvenir de nombreuses discussions passionnées, de la disponibilité de chacun, et de l'esprit d'entraide et de solidarité. Merci donc à Jean-Marc, Stéphane, David, Jalal, Abdelrahim, Moncef, Philippe, Janette, William, Nicolas, Fatime, Philippe, Khaled, Bernard, Gilles, Hilaire, Jacques, Catherine, Nathalie, Christian, Samir, Pascal, Agnès, Wilfrid, Michel, et aux autres.

Ce travail a été supporté financièrement par les Communautés Européennes, dans le cadre d'un contrat Capital Humain et Mobilité (bourse Marie Curie de catégorie 20, contrat N° ERBMICT 950582).

La réalisation de ce contrat, et sa gestion au quotidien, ont été effectuées par Monsieur Jean-Luc Bellouin, Chef du Service Financier de l'Ecole Centrale de Lille, et par son équipe. Je tiens à saluer leur travail, ainsi que leur volonté de mettre en avant l'aspect humain dans ce travail.

Marie-Françoise du secrétariat, Max à l'imprimerie, Patrick pour l'informatique et Régine, à la bibliothèque, ont largement contribué à rendre mon séjour au laboratoire agréable, mais aussi à la réalisation de ce travail, chacun dans leur fonctions respectives. Je les remercie aussi pour cette contribution importante, et pour le plaisir que j'ai eu à travailler avec eux.

Ce rapport marque une étape importante de ma formation. Les enseignants du département de mathématiques appliquées de l'Université de Louvain ont de manière importante contribué à celle-ci. Ils ont su me communiquer l'enthousiasme, l'indépendance et le bagage mathématique, qui me sont devenus indispensables par la suite.

Tout travail de ce genre génère de nombreux instants de découragement, de tension, ou de « frénésie ». J'ai pu faire face et surmonter toutes ces périodes critiques grâce au soutien et à la compréhension de mes proches, et particulièrement à celui de ma compagne.

Lille, le 7 décembre 1998.

Table des matières

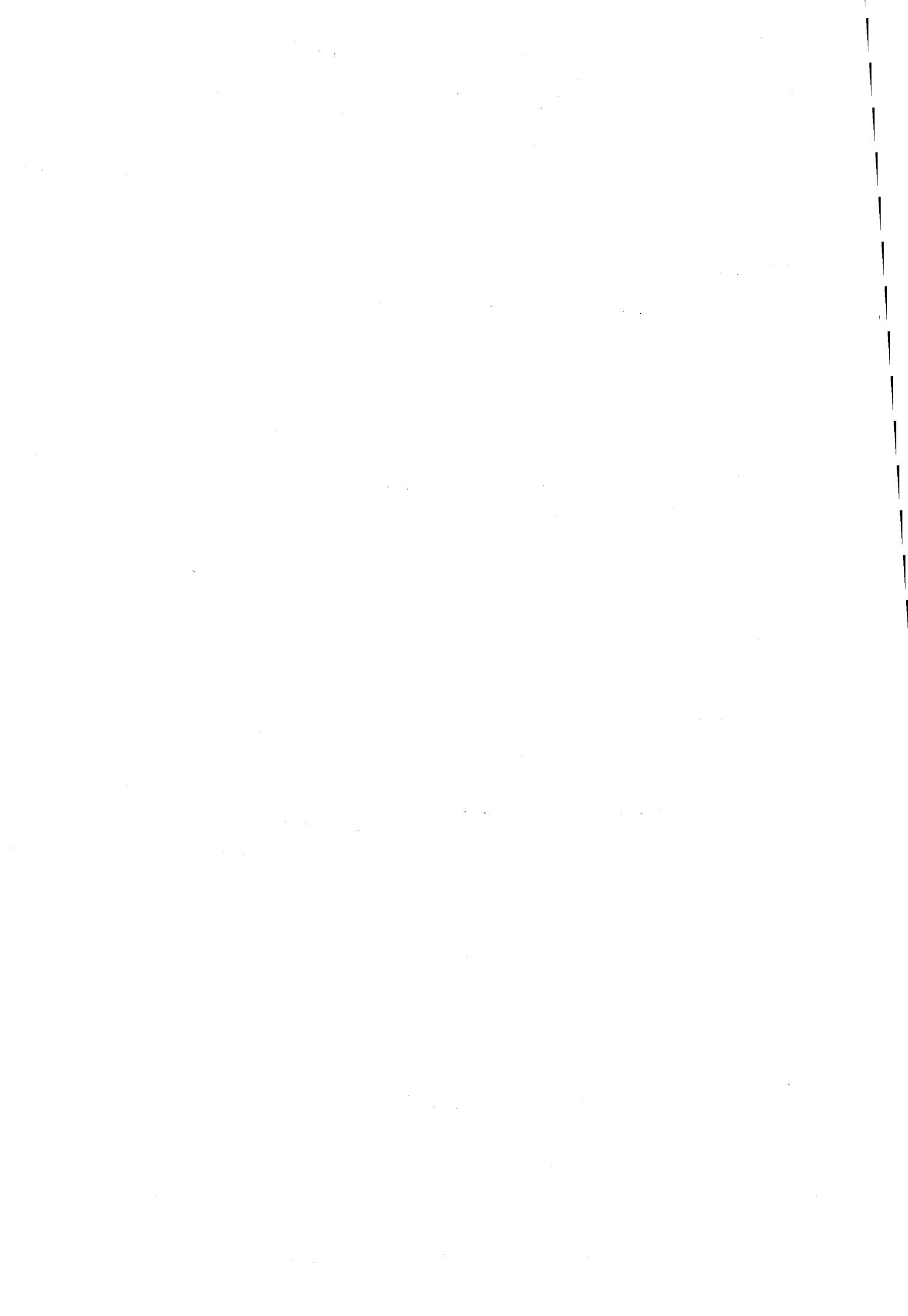
Introduction	1
1 Modélisation récursive et éléments fonctionnels	5
1.1 Méthodologie bond graph	5
1.2 Réticulation	8
1.2.1 Procédure de modélisation récursive	8
1.2.2 Variables de scattering et variables conjuguées	10
1.2.3 Les jonctions	13
1.2.4 Les éléments	17
1.2.5 Mémoire évanescence	23
1.3 Exemples	35
1.3.1 Éléments modulés	35
1.3.2 Éléments dynamiques d'ordre supérieur	39
1.3.3 Modèles linéaires de dimension infinie	41
1.4 Propos d'étape	51
2 Réduction des opérateurs linéaires	55
2.1 Réduction formelle	56
2.1.1 Approximants de Padé	57
2.1.2 Relations entre approximant de Padé et fractions continues	58
2.1.3 Réalisation bond graph	61
2.2 Filtres passifs, convergence, et Séries de Stieltjes	67
2.2.1 Séries de Stieltjes	68
2.2.2 Convergence de l'approximation	69
2.2.3 Approximation de la réponse en fréquence	73
2.3 Application à l'intégrateur d'ordre non entier	75
2.3.1 Conditions nécessaires à l'existence d'une représentation de Stieltjes.	76
2.3.2 Mesure de Stieltjes associée à $(1 + \tau s)^{-p}$	77
2.3.3 Réalisation de l'intégrateur implicite	78

2.4	Remarques	81
2.4.1	Interfaces fractales: cas d'une distribution continue des caractéristiques	81
2.4.2	Intégrales de Stieltjes et circuits de relaxation.	83
2.5	Propos d'étape	85
3	Passivité des systèmes linéaires de dimension infinie.	89
3.1	Passivité des systèmes dynamiques de dimension finie	90
3.1.1	Représentation d'état	91
3.1.2	Passivité et énergie disponible	94
3.1.3	Exemples	95
3.1.4	Remarques	98
3.2	Systèmes dynamiques linéaires de dimension infinie	100
3.2.1	Définitions et résultats élémentaires	102
3.2.2	Equations constitutives linéaires de dimension infinie	105
3.3	Exemples	106
3.3.1	Intégrateur implicite d'ordre non entier	107
3.3.2	Equations différentielles linéaires à retards	111
3.3.3	Un exemple d'équation aux dérivées partielles	113
3.4	Passivité des systèmes de dimension infinie	123
3.4.1	Définition	123
3.4.2	Equivalence avec l'existence d'une fonction d'énergie interne	124
3.4.3	A propos des représentations d'état équivalentes	127
3.4.4	Interconnexions de N -ports passifs	129
3.4.5	A propos de la généralisation au cas semi-linéaire	131
3.5	Caractérisation des systèmes passifs	132
3.5.1	Préliminaires	133
3.5.2	Conditions nécessaires et suffisantes de passivité	134
3.5.3	Condition suffisante de passivité	139
3.6	Exemples	142
3.6.1	Passivité de l'opérateur d'intégration implicite	142
3.6.2	Systèmes linéaires à retard	144
3.6.3	Exemple de la poutre vibrante	146
3.7	Propos d'étape	149
	Conclusion	151
	Bibliographie	155

TABLE DES MATIÈRES

vii

Annexes	169
A.1 Présentation intuitive de la méthodologie bond graph	169
A.1.1 Analogie électromécanique	169
A.1.2 Les éléments des bond graphs. approche énergétique . .	174
A.1.3 Méthodes et algorithmes associés à la représentation par bond graphs	186
A.2 Réduction des opérateurs à mémoire évanescence	195
A.2.1 Espaces de Fock et polynômes de Hilbert-Schmidt	195
A.2.2 Application aux séries de Volterra	198
A.2.3 Approximation par projection orthogonale	201
A.3 Modélisation d'interfaces fractales	206



Introduction

L'objet de ce travail est d'étudier les possibilités de couplage entre modèles bond graphs (donc à paramètres localisés) et modèles plus généraux, pour la plupart, à paramètres distribués, ou encore, de dimension infinie.

L'approche choisie est de considérer ces modèles "plus généraux" comme des sous-systèmes indécomposables, autrement dit, des éléments à part entière, bien que leurs équations constitutives puissent être bien plus générales que celles des éléments "classiques" rencontrés dans la représentation bond graph.

La question à l'origine de ce travail, était d'étudier les propriétés des circuits dont certains éléments sont décrits, soit par des systèmes dynamiques d'ordre supérieur à un (higher order element), soit par des fonctions non linéaires d'un produit de convolution. Les premiers sont utilisés fréquemment en électronique de puissance, et les seconds constituent une représentation simple de phénomènes de mémoire, qui a rencontré un certain succès dans la modélisation mathématique en biologie.

Très vite, il est apparu que même ces exemples simples nécessitaient la formalisation et la généralisation de notions qui, dans l'utilisation quotidienne de la méthodologie bond graph, ne font l'objet que d'une acceptation intuitive, et souvent implicite. Il a fallu préciser les formes de représentation d'état qui autorisent la définition cohérente de propriétés énergétiques, puis, il a été nécessaire de définir ces notions énergétiques elles-mêmes - passivité, caractère conservatif, énergie stockée - dans ce cadre formel.

Ce faisant, il est apparu que les formalismes introduits permettaient d'envisager et d'étudier, de manière unifiée, des classes de modèles, bien plus générales que les deux familles d'exemples originales. Plus précisément, il devenait possible de considérer des éléments, dont les équations constitutives sont définies par des opérateurs causaux, et que nous avons baptisés *éléments fonctionnels*.

Le champ d'application du sujet devenait infini, mais ce qu'il était possible d'en dire devenait infinitésimal. Après avoir considéré une généralisation considérable de la problématique posée, il nous fallait désormais nous

concentrer sur des cas particuliers. Finalement, ce sont les éléments fonctionnels décrits par des systèmes linéaires de dimension infinie qui ont, pour l'essentiel, retenu notre attention. Les applications possibles restent néanmoins variées, et incluent, notamment, l'étude des propriétés énergétiques des systèmes modélisés par des opérateurs de convolution, par des équations aux dérivées partielles linéaires, ou par des systèmes d'équations différentielles linéaires à retard.

Le premier chapitre de ce rapport a pour objet de préciser et de motiver le problème que nous nous sommes proposé d'étudier. La première motivation est de nature théorique, et prend appui sur l'étude du processus de modélisation récurrente (reticulation process) des systèmes énergétiques, utilisé notamment par la méthodologie bond graph. Cette étude révèle que le modèle réticulé obtenu peut inclure des éléments fonctionnels. Ensuite, de nombreux exemples sont passés en revue, ils illustrent l'intérêt de la problématique de couplage discutée, et constituent la seconde motivation de ce travail.

Le deuxième chapitre traite d'une méthode de réduction des systèmes linéaires. Il s'agit d'approcher un système de dimension infinie par un bond graph classique. Le couplage entre le modèle réduit et un circuit à paramètres localisés devient alors un problème de connexion standard. La méthode proposée repose sur l'approximation de la réponse en fréquence par des fractions rationnelles (approximants de Padé), puis sur la réalisation de ces fractions rationnelles. Cependant, cette technique d'approximation ne s'applique avec sens que pour une classe particulière de fonctions de transfert : les séries de Stieltjes. Les implications de la définition de ces séries sur la convergence, la passivité et la dynamique du système réduit sont alors discutées.

Le troisième chapitre s'attache à définir et à caractériser les systèmes pour lesquels il est permis d'espérer des résultats analogues à ceux du chapitre II. La théorie des semigroupes est utilisée à cet effet. La notion de passivité est étendue, de manière à s'appliquer aux systèmes linéaires de dimension infinie, puis caractérisée par les propriétés qu'elle induit sur les fonctions de transfert. Quelques exemples classiques de modèles linéaires de dimension infinie sont développés et illustrent deux avantages importants de l'approche choisie : d'une part, le caractère unifié de la représentation par semigroupe, et de la description des notions énergétiques associées, et d'autre part, le fait que cette représentation permet la généralisation naturelle de résultats sur les systèmes linéaires de dimension finie.

Le texte est augmenté de trois annexes. La première constitue un rappel très succinct des quelques notions élémentaires de la méthodologie bond graph qui sont nécessaires pour comprendre la suite du travail. La seconde expose une méthode de réduction/approximation d'une classe particulière

d'opérateurs non linéaires de dimension infinie et illustre ainsi un des aspects importants de la notion de mémoire évanescence discutée au chapitre I. La troisième annexe présente quelques principes de modélisation d'impédance de milieux à géométrie fractale. De telles impédances sont utilisées au chapitre II, pour illustrer la méthode de réduction qui y est discutée.

Chaque chapitre est clos par un propos d'étape. Ils ont plusieurs objectifs : synthétiser les problèmes adressés en cours de chapitre, la démarche adoptée pour tenter de les résoudre et les résultats obtenus, exposer les nouvelles questions ouvertes par les divers développements, et préciser ce qui constitue, à notre connaissance, une contribution personnelle à l'étude des questions posées.

Chapitre 1

Modélisation récursive et éléments fonctionnels

Face à ses étudiants qui préconisaient d'apprendre tout ce qui avait déjà été élaboré avant de se lancer dans la recherche, Carl Gustav Jacobi (Postdam 1804 - Berlin 1851) répondait : *"Si votre père avait pensé qu'il devait connaître toutes les filles avant d'en épouser une, il ne se serait jamais marié et vous ne seriez jamais né."* [56]

1.1 Méthodologie bond graph

La théorie des bond graphs a été initiée, dans le début des années soixante (1959-60), par Henry M. Paynter, alors professeur de mécanique au M.I.T., actuellement émérite et conservateur du parc national du Vermont (voir, par exemple, les prémisses de cette théorie dans [103]). Initialement fondée sur la formalisation des analogies entre circuits électriques et mécaniques, la méthodologie bond graph s'est rapidement développée comme un puissant outil de modélisation, permettant de représenter par un formalisme intuitif, des systèmes complexes impliquant de nombreux échanges de puissance, de natures très différentes. Nous renvoyons le lecteur intéressé, et néophyte en matière de bond graph, à l'annexe A.1 où cette méthodologie de modélisation est présentée succinctement, de manière heuristique, faisant la part belle aux exemples, en tentant néanmoins de faire ressortir les notions énergétiques fondamentales, souvent implicitement admises, nécessaires pour définir les contraintes et les buts de ce travail.

Aux premiers exemples électromécaniques, se sont rapidement ajoutés les représentations de phénomènes thermiques (dissipation et stockage de cha-

leur), les couplages avec des circuits hydrauliques (turbines, pertes de charges, bassins, etc.), les interactions avec des circuits acoustiques (fluides compressibles), les phénomènes magnétiques, puis, plus tardivement, l'influence de mécanismes réactionnels sur les modèles considérés et les interactions avec des processus chimiques. Incontestablement, l'un des ingrédients qui ont fait de la méthodologie bond graph une approche de plus en plus populaire dans la communauté scientifique est précisément cette possibilité de représenter de manière unifiée, des systèmes complexes mettant en "interaction" des phénomènes physiques analysés traditionnellement dans des disciplines scientifiques cloisonnées. Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de synthèse [67], [19] et [126] pour une vue d'ensemble de la méthodologie bond graph, aux études bibliographiques [18] et [99], ou au site *Internet* [25] pour des listes de références sur les travaux bond graphs parmi les plus complètes, à [72] pour l'intégration des réactions chimiques dans le formalisme bond graph, et à [16] pour une étude des propriétés thermodynamiques associées aux modèles bond graph.

Représentation de "type réseau", les bond graphs constituent l'étape courante d'un processus évolutif de recherche d'une représentation simple des échanges d'énergie par l'intermédiaire de graphes orientés. Les branches y représentent des échanges instantanés, et sans perte, tandis que les noeuds y modélisent des manipulations élémentaires opérées sur l'énergie : redistribution sans pertes aux différents accès ("ports") de l'élément, sans transformation (*jonctions*), avec transformation du rapport effort-flux (*transformateurs*, *gyrateurs*) ou de la nature physique de cette énergie (*transducteurs*), stockage (*capacités* et *inductances généralisées*), dissipation (*résistances généralisées*) et échange avec l'"environnement" (*sources* et *puits*). Il en résulte un modèle graphique d'une grande simplicité, qui permet une identification "transparente" et aisée des principaux phénomènes énergétiques en présence, ainsi qu'une lecture causale et immédiate des différentes interactions au sein du modèle, qu'il soit linéaire ou non. C'est là très certainement un deuxième atout majeur qui explique aussi, pour une large part, le succès croissant de la méthodologie bond graph.

Par le choix même d'une représentation de type "graphe orienté", le bond graph constitue un modèle fortement structuré : la "topologie" du système, c'est-à-dire la structure de l'ensemble des échanges, y est décrite en détail. Il est donc légitime d'espérer obtenir davantage de résultats de son analyse spécifique, qu'on ne peut en tirer de l'étude du modèle global de type "représentation d'état" qui lui est associé. De fait, de très nombreuses études fondées sur l'analyse de cette structure et des répercussions de causalité qu'elle engendre, ont apporté des réponses spécifiques aux questions traditionnelles de l'automatique, appliquées aux systèmes dynamiques dérivés des modèles

bond graphs. C'est précisément une des particularités de l'équipe du L.A.I.L. que de fonder son étude des modèles dynamiques dérivés des bond graphs, sur les propriétés "structurelles" de ceux-ci (dédites de la structure de la connexion des éléments et, en conséquence, indépendantes des valeurs spécifiques de ces paramètres, pour l'essentiel). Cette approche a conduit à de nombreux résultats qui permettent de déduire, à partir d'algorithmes simples (essentiellement des parcours de graphes "judicieusement" choisis), des propriétés de stabilité structurelle et de commandabilité structurelle [119] et [120], de générer des modèles de surveillance [123], ainsi que des solutions au problème de découplage entrées-sorties [8].

Enfin, mentionnons encore comme un de ses facteurs importants de succès l'aspect "modulaire" de la méthodologie bond graph. Les implications de cette modularité dépassent largement les possibilités de constitution de bibliothèques informatiques de modèles bond graphs, et le caractère réutilisable de celles-ci. La structure de graphe de ces modèles, et le fait qu'elle dégage de manière claire des "sous-modèles" dont les interactions avec le reste du modèle sont clairement identifiées et visualisées grâce à la notion de causalité, permet aisément de localiser les causes éventuelles de déficience de rang, perte de commandabilité, perte d'observabilité, génération de modes fixes, etc. Ainsi, cette méthodologie de modélisation permet de tenir compte, durant la phase de conception, des futurs problèmes de commande et de surveillance qui se poseront inmanquablement par la suite. Dans ce sens, la méthodologie bond graph, y compris ses outils d'analyse et de commande structurelles, semble parfaitement répondre aux exigences de voir intégrer les problématiques de contrôle et de surveillance, dès la phase de conception des produits, plutôt que comme palliatifs aux défauts de conception [108].

Au vu de ce qui précède, on comprendra aisément le succès de la méthodologie bond graph au sein d'entreprises développant des projets de grande envergure, nécessitant la mise en oeuvre de l'ingénierie simultanée ("concurrent engineering"), rassemblant de nombreux projets de recherche souvent consacrés à des parties du produit fini faisant intervenir des échanges énergétiques de différentes natures. C'est particulièrement le cas de l'industrie automobile (P.S.A., Daimler-Benz, General Motors, Renault, Toyota), mais aussi de nombreuses autres industries, notamment celles où les phénomènes thermiques sont d'une importance cruciale (I.B.M. Manufacturing New-York, C.E.A., E.D.F.-G.D.F.). Souvent aussi les bond graphs sont utilisés pour construire des modèles dynamiques de structure, afin de tenir compte des modes souples de cette structure et de leurs interactions avec les modes propres des actionneurs (Aérospatiale, par exemple, développe des modèles bond graph de la structure de la fusée Ariane 5). Bien entendu, cette liste d'industries, ayant recours à la méthodologie bond graph, est loin d'être exhaustive.

1.2 Réticulation

"...Il serait préférable pour la physique véritable qu'il n'y ait pas de mathématiciens..." Daniel Bernouilli (Groninguen 1700 - Bâle 1782) cité dans [95].

L'objet de cette section est de montrer comment le problème de l'élargissement des équations constitutives des éléments utilisés en bond graph se pose de manière naturelle lorsque les principes de modélisation à la base de cette méthodologie sont posés de manière formelle. Dans un premier temps, le procédé de modélisation par réticulation qui conduit à la définition de modèles à paramètres localisés sera brièvement présenté. Il conduit à deux formes de représentations des échanges d'énergie au sein des modèles obtenus. La première de ces représentations, utilisant les variables de "scattering" (voir infra) sera utilisée pour classer l'ensemble des jonctions du modèle, c'est-à-dire les lois de répartition de la puissance entre les sous-modèles les plus fins. Cette classification nous permettra de n'envisager la généralisation nécessaire des bond graphs que comme une généralisation des équations constitutives des éléments (et non des jonctions). Pour définir cette généralisation des éléments, nous utiliserons la deuxième représentation des échanges d'énergie au sein du modèle : celle qui fait appel aux variables physiques conjuguées (voir infra). Ces dernières variables sont les variables effort et flux utilisées le plus fréquemment dans les modèles bond graphs. Enfin, dans la dernière partie de cette section, nous discuterons de différentes classes d'équations constitutives généralisées.

1.2.1 Procédure de modélisation récursive

Le terme "réticulation" a été introduit par H.M. Paynter et I.J. Busch-Vischniac dans [104], pour désigner une méthodologie récursive de modélisation qui conduit à l'élaboration d'un modèle de type réseau. Comme nous allons le voir, les hypothèses de modélisation retenues, lors de ce processus, ne restreignent pas la classe des modèles obtenus aux seuls réseaux "classiques", à paramètres localisés. Ils définissent seulement une structure de jonction classique, parfois appelée "topologie" du réseau.

Il existe des approches de la théorie des bond graphs qui tentent de définir ceux-ci comme des objets mathématiques, de manière formelle. C'est, notamment, le sujet des travaux de Birkett et Roe qui définissent ceux-ci à l'aide de la théorie des matroïdes (voir [9], [10], [11], et [12]), approche qui ouvre des perspectives intéressantes en terme d'analyse et de commande (voir [54]). Toutefois, ce qui nous intéresse ici est plutôt de mettre en évidence les

hypothèses qui sont utilisées souvent implicitement lors du processus de modélisation, et qui conduisent à un modèle de type réseau, plus général qu'un modèle à paramètres localisés.

Lorsque l'on parle de système, on considère implicitement deux milieux distincts: le système et son environnement. Ces deux milieux sont aussi supposés en interaction. On formule alors quelques postulats qui ont pour but de préciser la nature de ces interactions.

Postulat 1 *Le système et l'environnement sont deux milieux distincts, séparés dans l'espace par une surface (frontière).*

Postulat 2 *Le processus d'interaction entre le système et l'environnement est bidirectionnel. (Il implique, en fait, un échange d'énergie).*

Ce postulat est similaire au principe d'action-réaction, en mécanique.

Postulat 3 *Le processus d'interaction peut être décomposé en l'échange d'un nombre fini de "quantités" mesurables.*

Dans la suite de cet exposé, nous considérerons que les quantités échangées sont différentes formes d'énergie¹. Le postulat 3 revient alors à définir les "éléments" (c'est-à-dire les sous-modèles indécomposables) du modèle comme étant à paramètres localisés. Dans le cas où les échanges se font à travers une surface frontière, les quantités considérées dans le postulat 3 sont les énergies totales correspondant aux intégrales de surface des puissances échangées.

L'ensemble des échanges est donc caractérisé par m variables (formes d'énergie), dont on notera la variation par unité de temps (formes de puissance):

$$P_i = \frac{dE_i}{dt}, i = 1, \dots, m \quad (1.1)$$

Cependant, pour que les échanges puissent se représenter, à tout moment, par ces m variables exclusivement, il faut encore qu'ils se fassent à une vitesse infinie. C'est là un postulat supplémentaire à formuler.

Postulat 4 *La propagation de toutes les formes d'énergie échangées dans le système se fait à vitesse infinie.*

¹Les postulats et la méthodologie de simulation qui en découle s'appliquent cependant aussi aux échanges de quantités qui ne sont pas directement de l'énergie: argent, matière, information.

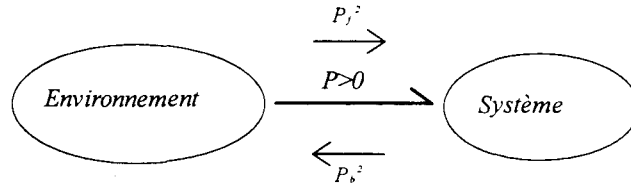


Figure 1.1: Conventions de signes dans l'échange $P := \frac{P_f^2}{2} - \frac{P_b^2}{2}$.

On peut toujours décomposer les puissances échangées sous la forme d'une différence de deux quantités positives, que l'on appellera "backward" et "forward" :

$$P_i := \frac{P_{f_i}^2}{2} - \frac{P_{b_i}^2}{2} \quad (1.2)$$

Remarquons que cette décomposition ("wave-scattering approach") est naturelle au vu du postulat d'interaction bidirectionnelle. On représentera donc l'échange d'énergie entre l'environnement et le système, par exemple, comme illustré à la figure 1.1.

Fort de cette définition du système, nous pouvons ensuite détailler sa structure interne d'une manière récursive, et définir ainsi des sous-systèmes, dont l'environnement est constitué du reste du système global et de l'environnement extérieur. Toutefois, pour les sous-systèmes, on distingue les échanges qu'ils ont avec les autres sous-systèmes, de ceux qu'ils ont avec l'environnement extérieur. On formule de plus le postulat suivant :

Postulat 5 *Hormis les sous-systèmes, il n'y a rien dans le système . Donc, toutes les interactions impliquent au moins un sous-système.*

Après un nombre fini d'étapes récursives, on obtient ainsi, comme représentation du système, une famille d'hypergraphes (un par type d'énergie échangée) dont les noeuds sont les sous-systèmes "les plus fins" et l'environnement, et dont les branches représentent les interactions. Le résultat de l'ensemble de cette procédure de réticulation est un modèle structuré de l'ensemble des échanges d'énergie pris en compte, tel celui représenté à la figure 1.2.

1.2.2 Variables de scattering et variables conjuguées

Les variables conjuguées sont définies à partir des variables des puissances backward et forward de manière à décomposer la forme quadratique diagonale

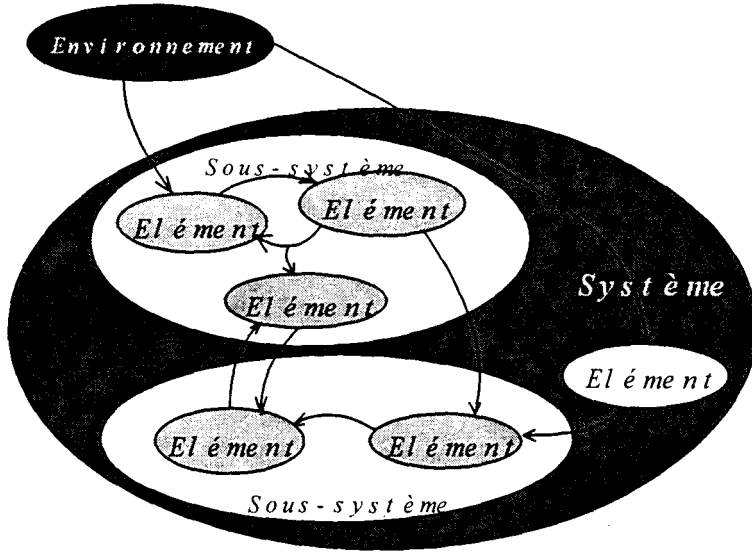


Figure 1.2: Structure des échanges de puissance au sein du modèle réticulé.

(1.2) en un produit de la forme

$$P_i := \frac{P_{f_i}^2}{2} - \frac{P_{b_i}^2}{2} = e_i \cdot f_i \quad (1.3)$$

Elles correspondent aux variables efforts et flux utilisés dans les bond graphs. C'est pourquoi nous les notons directement e et f . La décomposition (1.3) définit (e, f) comme une image du couple (P_{f_i}, P_{b_i}) par une rotation du plan de 45 degrés, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_{f_i} \\ P_{b_i} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Les variables conjuguées (e, f) ne sont donc plus orientées. Pour définir les variables de scattering, il nous faut formuler un postulat supplémentaire.

Postulat 6 *Les échanges de puissance dans une branche se font sans pertes. A tout instant, la somme des puissances entrantes et sortantes de chaque branche est nulle. Ce sixième postulat est appelé principe de continuité.*

Les variables de scattering associées à un échange d'énergie entre deux éléments A et B (r pour "rentrant", et s pour "sortant") sont alors définies,

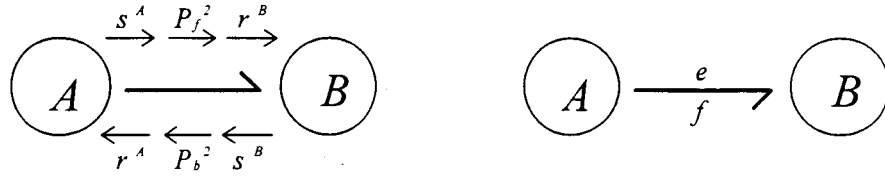


Figure 1.3: Variables "scattering" associées à l'échange $A \rightarrow B$ et variables conjuguées associées.

sans ambiguïté, comme indiqué à la figure 1.3, par :

$$\begin{aligned} r^A &:= P_b^2; s^A := P_f^2 \\ r^B &:= -P_b^2; s^B := -P_f^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

et le principe de continuité se formule de manière matricielle, dans ce cas très élémentaire (branche simple) :

$$\begin{pmatrix} r^B \\ s^B \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} r^A \\ s^A \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

avec S , appelée *matrice de scattering*, définie par :

$$S := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Nous allons maintenant généraliser ces définitions dans les cas où les simples branches de la figure 1.3 sont remplacées par les branchements multiples entre éléments multiports tels ceux représentés à la figure 1.4. Les puissances s^J qui sortent des jonctions sont les puissances qui entrent dans les éléments connectés à ces jonctions. Aussi, l'opération de connexion entre une branche de la jonction J et une branche de l'élément A (voir figure 1.4) se traduira donc par une assignation du type

$$\begin{aligned} r_k^J &:= s_l^A \\ s_k^J &:= r_l^A \end{aligned} \quad (1.8)$$

La distinction entre les noeuds représentant les éléments et les noeuds représentant la distribution de la puissance au sein des connexions, introduite par le postulat 6, conduit naturellement à la définition de deux familles

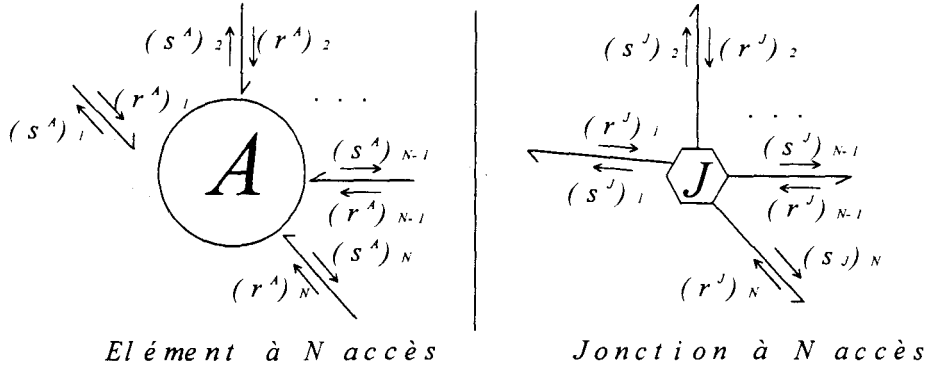


Figure 1.4: Variables de scattering r_i et s_i associées à un élément et à une jonction à N accès

distinctes d'équations constitutives: celles des éléments et celles des jonctions. Nous commencerons par classer l'ensemble des jonctions, avant de définir, de la manière la plus générale possible, les équations constitutives des éléments.

1.2.3 Les jonctions

L'expression du principe de continuité amène à une caractérisation élégante, et très satisfaisante d'un point de vue pratique, des équations constitutives des jonctions élémentaires. Cette expression a été mentionnée dans [104]. Cependant, les hypothèses formulées dans cet article étaient insuffisantes pour obtenir le résultat de classification des jonctions présenté ci-après (voir infra, proposition 1.1). L'hypothèse manquante essentielle est celle concernant le caractère stationnaire (ou autonome) des équations constitutives définissant les jonctions élémentaires (voir postulat 7, ci-après).

La transmission instantanée (postulat 4) et l'absence de pertes (postulat 6) peuvent se reformuler, dans le cas d'une jonction à m accès :

$$\text{Puissance entrante} = \text{puissance sortante}$$

en tout instant, c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^m (r^J)_j^2 = \sum_{j=1}^m (s^J)_j^2 \tag{1.9}$$

Ou encore $\|r^J\|_{\mathbb{R}^m}^2 = \|s^J\|_{\mathbb{R}^m}^2$, si $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}^2$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^m . A ce stade, un choix conventionnel supplémentaire s'avère nécessaire.

Postulat 7 *Les jonctions sont définies par des équations constitutives autonomes, de la forme*

$$s^J = \vartheta(r^J) \quad (1.10)$$

où $\vartheta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Dans ce travail, nous considérerons donc que les jonctions sont définies par des équations autonomes et algébriques liant les puissances entrantes et sortantes. Lorsqu'un ensemble donné d'équations constitutives ne vérifiera pas cette condition, il définira alors un élément. Si cet ensemble d'équations constitutives vérifie néanmoins les postulats 4 et 6, alors il définira un élément *conservatif de puissance*. Ce choix conventionnel revient, dans le cas des éléments classiques des bond graphs, à considérer que les transformateurs et les gyrateurs sont des éléments, et non des jonctions, ce qui est bien l'idée la plus répandue. Cependant, on parle parfois de structure de jonction, pour désigner un ensemble de jonctions et d'éléments conservatifs de puissance connectés entre eux. Cette hypothèse des jonctions autonomes conduit à exclure dans les jonctions tout phénomène de mémoire, ou simplement de variation de leur comportement entrées-sorties, et à rejeter sur les éléments de tels comportements non autonomes.

On déduit alors du principe de continuité (1.9) que la fonction vectorielle ϑ est une isométrie de \mathbb{R}^m et, par conséquent, que (1.10) peut se réécrire sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\begin{cases} s^J = S(r^J) \cdot r^J \\ S^T(r^J) \cdot S(r^J) = I_m, \forall s \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (1.11)$$

A ce stade, nous introduisons la notion de jonction élémentaire, c'est-à-dire une hypothèse supplémentaire de modélisation qui permet de particulariser davantage la matrice de scattering $S(r^J)$.

Postulat 8 *Une jonction élémentaire est une jonction symétrique, au sens où aucune sortie ne peut distinguer la provenance des quantités qu'elle "évacue" et où chacune de ses entrées agit de la même façon sur toutes ses sorties.*

Les jonctions élémentaires sont donc caractérisées par des matrices S symétriques et circulantes de la forme :

$$S(r^J) := \begin{bmatrix} a(r^J) & b(r^J) & \dots & b(r^J) \\ b(r^J) & a(r^J) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b(r^J) \\ b(r^J) & \dots & b(r^J) & a(r^J) \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

où a et b sont deux applications de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R} . En tenant compte de la condition (1.11) qui exprime le fait que S doit être une isométrie (matrice unitaire), on aboutit alors à deux équations scalaires indépendantes :

$$\begin{aligned} (m-1)b^2(r^J) + a^2(r^J) &= 1 \\ (m-2)b^2(r^J) + a(r^J) \cdot b(r^J) &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Ces deux équations admettent quatre solutions :

- (α) $a(r^J) = 1$ et $b(r^J) = 0$
- (β) $a(r^J) = -1$ et $b(r^J) = 0$
- (γ) $a(r^J) = -\frac{m-2}{m}$ et $b(r^J) = \frac{2}{m}$
- (δ) $a(r^J) = +\frac{m-2}{m}$ et $b(r^J) = -\frac{2}{m}$

Remarquons que les jonctions élémentaires sont donc représentées par des isométries constantes. C'est ce résultat remarquable qui nous permet d'examiner ce que deviennent ces quatre solutions en variables conjuguées. Pour cela, il faut reformuler le problème de la décomposition de la forme quadratique (1.3) dans le cas d'une jonction à m branches. Cette décomposition peut s'exprimer de manière matricielle sous la forme :

$$P := \sum_{j=1}^m \left(\frac{P_{f_j}^2}{2} - \frac{P_{b_j}^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \omega^T \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \omega \quad (1.14)$$

où I_m est la matrice identité de dimension m et $\omega^T := ((r^J)^T \ (s^J)^T)$. On cherche donc, pour obtenir l'expression des variables conjuguées en fonction des variables de scattering, un changement de variables matriciel du type $\omega = C \cdot \xi$, où C est une matrice carrée inversible d'ordre $2m \times 2m$ telle que la forme quadratique P dans (1.14) s'écrive comme somme des produits deux à deux des variables conjuguées e_i et f_i , pour tout i allant de 1 à m , c'est-à-dire telle que :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \omega^T \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \omega \\ &= \frac{1}{2} \xi^T C^T \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} C \xi \\ &= \xi^T \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix} \xi \end{aligned} \quad (1.15)$$

où $\xi^T := \begin{pmatrix} e^T & f^T \end{pmatrix}$. Une des solutions de cette équation matricielle est donnée par :

$$C := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_m & -I_m \\ I_m & I_m \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

En appliquant le changement de variables $\xi = C^{-1}\omega$ aux quatre solutions (α), (β), (γ) et (δ) (voir plus haut) des équations qui caractérisent les jonctions élémentaires, on trouve par élimination gaussienne les expressions correspondantes de ces jonctions en variables conjuguées, à savoir :

- (i) $f = 0$
- (ii) $e = 0$
- (iii) $e_1 = e_2 = \dots = e_m$ et $\sum_{i=1}^m f_i = 0$
- (iv) $f_1 = f_2 = \dots = f_m$ et $\sum_{i=1}^m e_i = 0$

Les résultats obtenus concernant la classification des jonctions élémentaires sont résumés dans la proposition suivante.

Propriété 1.1 *Avec les définitions et les postulats qui précèdent, il existe quatre types fondamentaux de jonctions élémentaires. Ce sont celles dont la matrice de scattering S est de la forme (1.12) (c'est-à-dire symétrique et circulante) et dont les éléments diagonaux et hors diagonaux sont donnés par l'une des solutions (α) à (δ). De plus, à l'aide des variables conjuguées (plus précisément à l'aide du changement de variable (1.16)), ces quatre types fondamentaux de jonctions élémentaires sont définies par les équations (i) à (iv).*

Il est intéressant de remarquer ces quatre équations constitutives des jonctions élémentaires découlent des postulats généraux 4, 6, 7 et 8. Ainsi, les équations (iii) et (iv), analogues aux lois de Kirchoff bien connues en électricité, s'appliquent également à des domaines qui ne font pas "traditionnellement" l'objet de modèles à paramètres localisés : thermique et chimique, par exemple. Pour ces domaines, les développements qui précèdent établissent les conditions de validité des lois de Kirchoff, et sont en ce sens plus satisfaisants que de supposer ces lois a priori, sous forme de postulat.

Cependant, pour pouvoir attribuer une interprétation physique précise, en termes de circuits à paramètres localisés, aux quatre jonctions élémentaires calculées, il est nécessaire de définir de manière plus précise les variables physiques conjuguées e et f . Cette définition fait l'objet d'un postulat supplémentaire.

Postulat 9 *A chaque forme de puissance $P_i(t)$ est associée une variable extensive $q_i(t)$, appelée charge ou déplacement généralisé, telle que la variable physique conjuguée $f_i(t)$ satisfait*

$$f_i = \frac{dq_i}{dt}$$

La variable f_i est alors, dans le cas des bond graphs, appelée flux. La variable conjuguée e_i correspondante, définie par

$$P_i(t) = e_i(t)f_i(t) \quad (1.17)$$

reçoit le nom d'effort. Les quatre jonctions élémentaires deviennent avec cette définition des variables conjuguées : la jonction 0 (équations (iii) ou (γ)), la jonction 1 (équations (iv) ou (δ)), la jonction "effort nul" (équations (ii) ou (β)), et la jonction "flux nul" (équations (i) ou (α)). Dans le cas des circuits électriques, ces quatre jonctions sont, dans l'ordre, la connexion parallèle, la connexion série, le court-circuit et le circuit ouvert.

1.2.4 Les éléments

L'objet de cette section est de définir les équations constitutives des éléments représentés à la figure 1.4 de manière la plus générale possible, au vu des postulats de modélisation formulés dans les sections précédentes, afin de ne pas restreindre, a priori, les possibilités offertes par l'élargissement de la théorie bond graph que nous voulons proposer.

1.2.4.1 Eléments fonctionnels

H.M. Paynter, dans [104] a formulé les équations constitutives des éléments en termes de variables de scattering. Nous reprendrons son idée, et la reformulerons à l'aide d'opérateurs qui définiront les équations constitutives des éléments en variables physiques conjuguées efforts et flux, reprenant en cela la formulation classique de la théorie des bond graphs, de manière à rendre plus transparentes les généralisations de la notion d'élément que nous proposons². Ensuite, nous restreindrons notre étude aux cas des opérateurs stationnaires jouissant de la propriété de mémoire évanescence (voir infra).

²L'expression en variables scattering pour les éléments non linéaires nous condamnerait à abandonner des éléments que nous ne pouvons modéliser qu'en variables conjuguées (les réactions chimiques, par exemple). Par contre, la modélisation, en tant qu'élément d'un modèle réticulé, d'un phénomène physique décrit par une équation d'onde, par exemple, peut sembler plus naturelle en termes de variables scattering (puissances réfléchies en fonction des puissances incidentes). Il y a donc un choix à faire quant à l'adoption des variables scattering ou des variables conjuguées comme variables fondamentales du bond graph.

En général, dans la description par modèle bond graph, seuls les éléments capacitifs et inductifs introduisent une dépendance par rapport à l'évolution passée du système. Dans ce cas, l'histoire de leurs signaux d'entrée est résumée dans un nombre fini de variables d'état - déplacements et charges généralisées - qui sont simplement les intégrales de ces signaux d'entrée. Nous envisageons, au contraire, des lois constitutives telles que les sorties peuvent être calculées à l'aide de toutes les informations reçues par le système, au cours de toute son histoire passée.

Avant de définir ces équations constitutives générales, il est indispensable de préciser les notions de variables d'entrée et de sortie. Dans le cas d'un élément 1-port, choisir le flux comme entrée implique que l'effort soit la sortie. Cependant, dans le cas des éléments multiports, le choix peut se faire port par port. C'est pourquoi nous introduisons la notion de *paire hybride de variables de puissance* associée à un élément.

Définition 1.2 *Le couple (u, y) , de fonctions d'une variable réelle t à valeur dans \mathbb{R}^m , constitue une paire hybride de variables de puissance associée à un élément m -port si, à tout instant t , la puissance entrante dans l'élément à l'accès i s'écrit*

$$P_i(t) = u_i(t) \cdot y_i(t), \forall i = 1 \dots m$$

et si, soit $u_i(t) = e_i(t)$ et $y_i(t) = f_i(t)$, soit $u_i(t) = f_i(t)$ et $y_i(t) = e_i(t)$, pour tout $i = 1 \dots m$

La puissance totale entrante dans l'élément s'écrit donc dans ce cas :

$$P(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) \cdot y_i(t) = \sum_{i=1}^m e_i(t) \cdot f_i(t) \quad (1.18)$$

L'équation constitutive d'un élément général se définit à l'aide de *fonctionnelles causales* (dites aussi fonctionnelles de *Volterra*) liant les variables u_i et y_i d'une paire hybride de variables de puissance. Elle peut être notée :

$$y(t) = G|_{-\infty}^t(u), \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.19)$$

où $G|_{-\infty}^t : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}\}$ est l'espace des fonctions du temps admissibles comme entrée. Le symbole $G|_{-\infty}^t$ exprime explicitement le caractère causal de la fonctionnelle, c'est-à-dire le fait qu'elle ne peut "utiliser" que les valeurs passées des entrées (et non les valeurs futures!) pour calculer les sorties au temps t .

Soit G , l'opérateur liant les entrées et les sorties (vues comme des fonctions définie sur \mathbb{R}), défini par :

$$\begin{aligned} G : \mathcal{U} &\rightarrow \mathcal{Y} \\ u &\mapsto G(u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto G(u)(t) := G|_{-\infty}^t(u) \end{aligned} \quad (1.20)$$

où $\mathcal{Y} := \{y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}\}$ l'espace des fonctions du temps admissibles comme sortie³. Alors cet opérateur G est causal au sens de la définition suivante.

Définition 1.3 *Un opérateur G défini sur un sous espace de l'ensemble des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans \mathbb{R}^m est causal si :*

$$\begin{aligned} \forall u_1, u_2 \in \text{dom}(G), \forall t \in \mathbb{R} \\ u_1(\tau) = u_2(\tau), \forall \tau \leq t \Rightarrow G(u_1)(t) = G(u_2)(t) \end{aligned}$$

où $\text{dom}(G)$ désigne le domaine de l'opérateur G .

Nous appellerons élément fonctionnel tout élément dont l'équation constitutive à la forme

$$y = G(u) \quad (1.21)$$

où $G : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}$ est un opérateur causal et où (u, y) constitue une *paire hybride de variables de puissance* associée à l'élément.

1.2.4.2 Opérateurs stationnaires

A ce stade, les éléments définis par l'équation constitutive (1.21) demeurent très généraux, puisque, dans cette équation, l'opérateur G peut être non linéaire, non stationnaire ou même discontinu, pour autant que des topologies aient été définies sur les sous-espaces de fonctions entrées et sorties admissibles. La seule restriction fondamentale que nous lui avons imposée, par "nécessité physique absolue", est sa causalité, en tant qu'opérateur. Cependant, dans la suite de cet exposé, nous allons restreindre considérablement la classe d'opérateurs admissibles pour représenter les équations constitutives de ces éléments fonctionnels. La deuxième des restrictions sera que nous ne considérerons que des opérateurs stationnaires.

³En général, on choisira $\mathcal{U} = \mathcal{Y}$. En effet, l'élément fonctionnel défini par l'opérateur G est le plus souvent une partie d'un réseau plus complexe. Les entrées admissibles aux accès d'un élément doivent donc fournir des sorties admissibles aux accès des autres éléments.

Définition 1.4 Soient $\mathcal{U} \subset \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ et $\mathcal{Y} \subset \{y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ les ensembles de variables physiques conjuguées admissibles. Supposons que l'opérateur

$$G : \text{dom}(G) \subseteq \mathcal{U} \rightarrow \text{Im}(G) \subseteq \mathcal{Y}$$

soit causal ($\text{dom}(G)$ et $\text{Im}(G)$ sont respectivement le domaine et l'image de l'opérateur G). Supposons que, pour tout $\tau > 0$, l'opérateur de translation ("time-shift")

$$\begin{aligned} S_\tau : \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m\} &\rightarrow \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m\} \\ h &\mapsto S_\tau(h) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto S_\tau(h)(t) := h(t - \tau) \end{aligned}$$

soit partout défini sur $\text{dom}(G)$, et tel que

$$S_\tau(\text{dom}(G)) \subseteq \text{dom}(G)$$

Alors, l'opérateur G est stationnaire si S_τ et G commutent sur $\text{dom}(G)$, c'est-à-dire si

$$(S_\tau \circ G)(u) = (G \circ S_\tau)(u), \forall u \in \text{dom}(G), \forall \tau > 0$$

Par extension, un élément défini par l'équation constitutive (1.21) sera dit stationnaire si l'opérateur G qui le définit est stationnaire, autrement dit si :

$$y(t - \tau) := (G(u))(t - \tau) = G(u(t - \tau)), \forall \tau > 0, \forall u \in \text{dom}(G) \quad (1.22)$$

Cette restriction aux opérateurs stationnaires n'a, à notre sens, pas de motivation basée sur un de nos postulats de modélisation. Elle ne reflète alors qu'une recherche de simplification des modèles étudiés. Cependant, d'autres opinions existent sur cette question. Ainsi P.C. Breedveld, dans la postface de sa thèse de doctorat (voir [16]) écrit :

[...] In this study an emphasis has been laid on the (dynamic) behaviour of macroscopic physical systems with respect to power, because power continuity is derived from the most general principle of physics, the "law" of energy conservation. In turn, energy conservation is in correspondence with the principle of "time-translation symmetry", which means in mathematical terms that time does not have an absolute zero-point (t can be replaced with $t + \tau$ in all equations without changing their character) and in every-day-life it means that everything which "consists of energy"

(in a general sense) obeys a conservation principle. i.e. it makes sense to construct (physical) theories. because what is valid today. will be valid (more or less) tomorrow. If this principle is scrutinized. one will find imperfections too: everything changes continuously in "real life". However, most human beings go to sleep in the conviction that this world will be generally the same when they awake the next morning. [...]

Mais, même cette manière d'aborder la question n'est pas satisfaisante d'un point de vue pratique. Il va de soi que le processus de modélisation d'un système physique doit s'arrêter à un niveau "arbitraire" de raffinement, et aboutir à un ensemble de phénomènes énergétiques "fondamentaux" que nous avons baptisés éléments. Ce niveau arbitraire est arrêté tant par un choix subjectif des interactions qui seront prises en compte, que par les limitations propres de notre connaissance du système étudié. Par la même, il s'ensuit que le modèle de ce système que nous produisons est basé sur des informations et des observations partielles, tant dans la durée, qu'en ce qui concerne la qualité de ces observations. Donc, un certain nombre de dynamiques auront été négligées, des paramètres du modèles, supposés constants, varieront, et il se peut que nous nous réveillions demain dans un monde profondément transformé, ou, à tout le moins, il est permis de l'espérer! De telles considérations sont précisément à la base des méthodes d'identification et de régulation adaptatives, puisque ces méthodes s'appliquent à des modèles dont on sait, a priori, qu'ils sont une simplification outrageuse du phénomène étudié.

1.2.4.3 Représentation d'état approchée

Une troisième restriction souhaitable de la classe des opérateurs admissibles pour représenter l'équation constitutive des éléments est qu'ils possèdent une représentation d'état approchée sous la forme d'un système d'état fini-dimensionnel. Autrement dit, il faut qu'à tout instant t , la valeur de la sortie $y(t)$ ne dépende que de la valeur $u(t)$, et d'un nombre fini de grandeurs, baptisées états, qui évoluent dans le temps, et résument l'histoire passée du système.

Dans ce travail, nous considérerons une définition de représentation d'état associée à un élément "dynamique" empruntée à [34] et [143], qui est la plus rencontrée en théorie des circuits. Cette définition sera rappelée et commentée au chapitre III. Sommairement, il s'agit d'une représentation d'état, notée (Σ, f, g) , de la forme :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned}y &= g(x, u) \\x(0) &= x_0 \in \Sigma\end{aligned}$$

où $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ (n , entier positif) est appelé espace d'état, et où f et g sont deux applications de $\Sigma \times X$ dans \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m , suffisamment régulières pour qu'il existe une et une seule solution $x(t) \in \Sigma$ et pour que la puissance entrante dans l'élément $P(t) := \sum_{i=1}^m u_i(t) \cdot y_i(t)$ soit localement intégrable sur $[0, \infty)$.

Une telle représentation d'état définit la classe générique la plus large d'éléments pour lesquels les algorithmes de construction de modèle d'état à partir d'un bond graph demeurent applicables (voir annexe A.1.4). En termes de causalité, et d'un point de vue purement algébrique, l'introduction d'éléments définis par la représentation d'état (1.23) ne pose alors aucun problème. Cependant, la classe des éléments représentés par les équations constitutives (1.23) ne constituent qu'une petite partie des éléments "fonctionnels" qui sont représentés par des opérateurs G causaux stationnaires dans l'équation constitutive (1.21). Par ailleurs, de très nombreux phénomènes physiques, d'un grand intérêt pratique (voir infra, section 1.3), ne possèdent pas de modèles sous la forme d'un telle représentation d'état, ou alors uniquement sous la forme d'un modèle d'état de dimension infinie (modèles à paramètres distribués, voir chapitre III).

En conséquence, la restriction la plus faible que nous puissions appliquer à l'opérateur G , définissant l'équation constitutive d'un élément fonctionnel, est qu'il possède une représentation d'état approchée de la forme (1.23). A son tour, la façon la plus naturelle de satisfaire cette contrainte est d'exiger l'existence d'une suite de représentations d'état approchées $\{(\Sigma_k, f_k, g_k)\}_{k \geq 1}$ dont l'application entrée-sortie converge vers l'opérateur G , en un sens à définir⁴.

Cependant, les manipulations algébriques qui aboutissent à la construction du modèle d'état ne sont pas significatives de la complexité du problème. Encore faut-il s'assurer que les échanges d'énergie entre un élément défini par les équations (1.23) et un réseau classique, ainsi que les manipulations internes de l'énergie au sein d'un tel élément, ont un sens, et en particulier préservent les bilans d'énergie. En effet, il faut se rappeler qu'aucune forme d'énergie ne peut être créée au sein d'un élément, puisque, par la définition de notre modèle réticulé, les apports d'énergie proviennent de l'environnement, et sortent donc des phénomènes modélisés. Les seules opérations internes sur l'énergie autorisées au sein d'un élément sont donc le transfert direct, la

⁴Notons déjà que, dans de nombreux exemples, l'opérateur G ne peut se réaliser de manière exacte par un système d'état de dimension finie, et que la simple convergence ponctuelle de la sortie de (Σ_k, f_k, g_k) vers la sortie $y(t) = G(u)(t)$ implique $n_k \rightarrow \infty$, où n_k est la dimension de l'espace d'état Σ_k .

dissipation, le stockage et la restauration.

La question de savoir si une représentation d'état de la forme (1.23) satisfait cette contrainte énergétique sera étudiée au chapitre III. A ce stade, il nous faut seulement remarquer qu'il est indispensable que chaque représentation d'état de la suite $\{(\Sigma_k, f_k, g_k)\}_{k \geq 1}$ ait un comportement énergétique qualitativement équivalent à celui de l'élément fonctionnel approché. C'est seulement sous cette condition supplémentaire que nous pourrons utiliser, dans un modèle bond graph, une des approximations de la suite, à la place de l'élément fonctionnel lui-même.

1.2.5 Mémoire évanescence

Nous avons, pour une classe restreinte d'opérateurs causaux stationnaires, étudié plus avant la question de l'existence d'une suite convergente de représentation d'état approchée de dimension finie : les opérateurs possédant une mémoire évanescence⁵ de l'histoire passée des signaux d'entrées. Cette étude est basée sur les travaux S. Boyd et L.O. Chua concernant l'approximation des opérateurs par les séries de Volterra-Fréchet-Riesz (voir [15]) et ceux de R.J. De Figueiredo et T.A. Dwyer concernant l'identification de ces séries (voir [41]). Seules la définition de mémoire évanescence, son interprétation, et son application seront étudiées en détail dans cette section. La discussion du résultat général d'approximation, très "technique", est reportée en annexe A.2.

La propriété de mémoire évanescence est en fait une notion plus forte que la simple continuité de l'opérateur G . Il est donc nécessaire pour la définir de disposer d'un minimum de structure sur les espaces de signaux admissibles, afin de pouvoir y définir une topologie. Dans cette section, nous supposons

$$G : \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \quad (1.24)$$

où $\mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ dénote l'espace des fonctions continues et bornées. Cet espace est muni de sa norme usuelle (norme uniforme), à savoir

$$\forall u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) : \|u\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\max_{i \in \{1 \dots m\}} |u_i(t)| \right) \quad (1.25)$$

et de la topologie métrique correspondante. Pour rappel, l'opérateur G défini par (1.24) sera dit *continu* si

$$\begin{aligned} \forall \text{ suite } \{u_n\}_{n \geq 1}, u_n \in \mathcal{BC} : \\ \|u_n - u\|_\infty \rightarrow 0 \Rightarrow \|G(u_n) - G(u)\|_\infty \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

⁵"fading memory", traduction libre.

Ou encore

$$\forall u \in \mathcal{BC}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall v \in \mathcal{BC} : \quad (1.27)$$

$$\|u - v\|_\infty < \delta \Rightarrow \|G(u) - G(v)\|_\infty < \varepsilon$$

Dans le cas d'un opérateur G *stationnaire* et *causal*, la continuité peut se définir à partir de la valeur du signal de sortie en un instant fixé, par exemple $t = 0$. En effet, la définition (1.27) ci-dessus est dans ce cas équivalente à :

$$\forall u \in \mathcal{BC}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall v \in \mathcal{BC} : \quad (1.28)$$

$$\sup_{t \leq 0} \left(\max_{i \in \{1 \dots m\}} |u_i(t) - v_i(t)| \right) < \delta \Rightarrow \|G(u)(0) - G(v)(0)\|_\infty < \varepsilon$$

La continuité des opérateurs stationnaires et causaux se ramène donc à l'étude de l'effet de l'écart passé ($t \leq 0$) maximal des signaux d'entrée sur la valeur présente des sorties (la définition (1.28) ci-dessus s'applique à n'importe quel instant fixé $t \neq 0$).

La propriété de mémoire évanescente peut être définie comme une condition de continuité renforcée, à partir de la définition (1.28). En fait, il s'agit d'une propriété de continuité par rapport à une norme pondérée, dont la pondération jouit de propriétés particulières.

Définition 1.5 *L'opérateur stationnaire $G : \mathcal{BC} \rightarrow \mathcal{BC}$ possède une mémoire évanescente sur une partie $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{BC}$ des signaux d'entrées s'il existe une pondération $w : \mathbb{R} \rightarrow [0, K]$, $K > 0$ qui soit :*

- (i) *monotone décroissante*
- (ii) *telle que $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$*
- (iii) *telle que $\forall u \in \mathcal{P}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall v \in \mathcal{P} :$*

$$\sup_{t \leq 0} \left(\max_{i \in \{1 \dots m\}} |u_i(t) - v_i(t)| \cdot w(-t) \right) < \delta \Rightarrow \|G(u)(0) - G(v)(0)\|_\infty < \varepsilon$$

En particulier, G est alors un opérateur causal. En effet les valeurs des signaux d'entrées pour $t > 0$ ne peuvent avoir d'influence sur la valeur de la sortie en $t = 0$.

La pondération $w(t)$ est telle que, dans la définition de la continuité, les déviations des signaux u et v , l'un par rapport à l'autre, dans un lointain passé ont moins d'importance que celles dans un passé proche. L'incidence sur les sorties des valeurs passées des entrées se réduira sans cesse au fur et à mesure que le temps s'écoule. Comme le montre la définition 1.5, dans

le cas stationnaire, la propriété de mémoire évanescence est équivalente à la continuité de l'opérateur G par rapport à la norme pondérée

$$\|u\|_w := \sup_{t \leq 0} \left(\max_{i \in \{1, \dots, m\}} |u_i(t)| \right) \quad (1.29)$$

Comme $w(t) \leq K$, la propriété de mémoire évanescence implique la continuité usuelle de la restriction à la partie \mathcal{P} de l'opérateur G , pour les opérateurs stationnaires.

L'intérêt "mathématique" des opérateurs possédant une mémoire évanescence réside en un certain nombre de propriétés que celle-ci confère à ces opérateurs. Les deux plus importantes pour nous sont, d'une part l'existence d'une représentation sous forme de produit de convolution pour les opérateurs linéaires stationnaires, et d'autre part, un théorème d'approximation par des systèmes dynamiques de dimension finie, similaire au théorème d'approximation de Stone-Weierstrass (approximation de fonction continue par des fonctions polynomiales), qui s'applique uniquement aux opérateurs continus par rapport à la norme pondérée $\|\cdot\|_w$ (voir ci-après, théorème 1.12).

1.2.5.1 Représentation par produit de convolution

L'idée très répandue, que les opérateurs causaux, linéaires et stationnaires ont une représentation sous forme d'intégrale de Duhamel (produit de convolution, voir [14]), est de manière générale fautive. Il existe même des contre-exemples de tels opérateurs qui sont de plus continus (par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$), et ne possèdent pas une telle représentation⁶. Cependant, ces opérateurs ne possèdent pas de mémoire évanescence, comme permet de le conclure la propriété suivante.

Propriété 1.6 (Boyd, Chua - 1985) Soit $G : \mathcal{BC} \rightarrow \mathcal{BC}$ un opérateur linéaire stationnaire. Alors G possède une représentation sous forme de produit de convolution :

$$Gu(t) = \int_0^\infty u(t - \tau) \mu(d\tau)$$

avec μ une mesure bornée sur \mathbb{R}^+ si et seulement si G possède une mémoire évanescence.

⁶Par exemple, l'opérateur $G_{pk} : \mathcal{BC} \rightarrow \mathcal{BC}$ défini par $G_{pk}u(t) := \sup_{\tau < t} u(\tau)$ ("peak-hold operator") est continu, mais n'a pas la propriété de mémoire évanescence. Par ailleurs, il ne possède pas de représentation sous forme de produit de convolution, au sens de la proposition 1.6. (voir, [65], pour les développements détaillés).

Démonstration. Voir [15], annexe A4. ■

Cette représentation est plus familière sous la forme

$$Gu(t) = \int_0^{\infty} u(t-\tau) dg(\tau) \quad (1.30)$$

où $g(\tau)$ est une fonction à variation bornée sur \mathbb{R}^+ . Dans ce cas, la représentation (1.30) est à comprendre au sens d'une intégrale de Stieltjes et

$$dg(\tau) = h(\tau)d\tau \quad (1.31)$$

où $h(\tau)d\tau$ doit être interprétée comme une mesure bornée, et peut, par exemple, inclure des impulsions de Dirac. La fonction $h(\tau)$, si elle existe, reçoit une interprétation en tant que réponse impulsionnelle. En effet, si le signal u est un signal causal, c'est-à-dire si $u(t) = 0$ pour $t < 0$, on a :

$$\begin{aligned} Gu(t) &= \int_0^{\infty} u(t-\tau) h(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.32)$$

Lorsque nous étudierons dans la suite les systèmes linéaires stationnaires, à l'aide de leur représentation par intégrale de Duhamel, ou de leur représentation correspondante par fonction de transfert dans le domaine de Laplace⁷ adéquat, il faudra donc garder à l'esprit que nous ne considérons que le cas des opérateurs à mémoire évanescence. Toutefois, la plupart des modèles linéaires que peut construire l'ingénieur lorsqu'il étudie un phénomène physique sur base des échanges d'énergie qui y ont lieu devraient partager cette propriété, comme l'indique de manière évidente son interprétation intuitive. Malheureusement, il n'en va pas de même pour les modèles "fondamentalement" non linéaires. Par exemple, un système d'équations différentielles ordinaires qui évoluerait vers différents équilibres suivant l'histoire passée de ses signaux d'entrée, ou, ce qui revient au même, suivant ses conditions initiales, ne peut pas avoir une mémoire évanescence. Il conserve une mémoire inaltérable de son passé, représenté par les conditions initiales d'intégration. La proposition qui suit formalise ce rapport entre la propriété de mémoire évanescence et l'existence d'un point d'équilibre unique, pour les systèmes dynamiques de dimension finie.

⁷La transformée de Laplace d'un opérateur linéaire stationnaire à mémoire évanescence n'est pas nécessairement une fraction rationnelle. Ce n'est le cas que pour un opérateur qui possède une réalisation sous forme d'un système d'état de dimension finie.

Propriété 1.7 *Soit une représentation d'état de la forme*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ x(0) &= 0\end{aligned}\tag{1.33}$$

avec $u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que (1.33) définisse un opérateur

$$\begin{aligned}G : \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) &\rightarrow \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \\ u &\mapsto G(u) := x\end{aligned}$$

Soit X l'ensemble des états atteignables depuis l'état initial $x(0) = 0$, c'est-à-dire :

$$X := \{Gu(t) \mid t \geq 0, u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)\}$$

Soient x_0, \tilde{x}_0 deux vecteurs de conditions initiales dans X , et $x(t), \tilde{x}(t)$ les trajectoires correspondantes pour une même entrée $u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. Si G a une mémoire évanescence sur $\mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ Alors,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \tilde{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} = 0$$

Autrement dit, le système dynamique (1.33) a un état d'équilibre attractif unique, quelle que soit l'entrée $u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ et l'état initial $x_0 \in X$.

Démonstration. Voir [15], annexe A5. ■

A l'inverse, les conditions sous lesquelles l'opérateur entrée-état d'un système dynamique, possédant un état d'équilibre, a une mémoire évanescence, peuvent également être caractérisées. Par exemple, si le système dynamique (1.33) possède un point d'équilibre autour duquel le champ de vecteur f est continûment différentiable, et pour lequel le système linéarisé tangent est exponentiellement stable et commandable, alors l'opérateur entrée-état a une mémoire évanescence, sur une partie suffisamment restreinte de $\mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ (voir [32], pour plus de détails).

Une représentation simple et fréquente des phénomènes de mémoire au sein d'un modèle est la représentation à l'aide d'une convolution de l'entrée par un noyau "de mémoire" $h(t)$, combinée à une fonction algébrique non linéaire de la manière suivante :

$$y(t) = F \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau \right)\tag{1.34}$$

où, dans le cas scalaire, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Il convient de formuler plusieurs restrictions sur le noyau "h".

- Tout d'abord, il faut que l'intégrale ait un sens et donc que le noyau h soit intégrable sur \mathbb{R} (on suppose toujours, ici, que $u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$).
- On n'accorde pas de sens à une pondération négative des valeurs passées du signal u , l'importance relative de ces valeurs passées est caractérisée par une fonction de pondération h à valeurs réelles positives (ou nulles)
- Il faut que l'opérateur entrée/sortie soit causal, ce qui revient à imposer que la fonction h soit causale.
- Enfin, dans les systèmes modélisés, on suppose habituellement que le noyau h décroît suffisamment vite pour que l'évaluation numérique de l'opérateur (1.34) puisse être faite, avec une précision "raisonnable", à l'aide d'un nombre "raisonnable" d'échantillons des valeurs passées de l'entrée. L'élément "fonctionnel" défini par (1.34) peut être au sein d'un système complexe, donc ses entrées seront les sorties d'autres éléments et ne sont pas connues a priori. L'évaluation de la convolution doit donc se faire dans le domaine temporel (et non fréquentiel), au fur et à mesure de l'intégration itérative des équations d'état du modèle.

Propriété 1.8 Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction globalement Lipschitzienne, c'est-à-dire,

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R} : |F(r_1) - F(r_2)| \leq K |r_1 - r_2|$$

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction causale absolument intégrable sur \mathbb{R} et telle que

$$\exists T > 0, \exists \lambda > 0 : t \geq T \Rightarrow h(t) \leq e^{-\lambda t}$$

Alors l'opérateur

$$G : \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$$

$$u \mapsto G(u) := F \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau \right)$$

a une mémoire évanescence sur $\mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$.

Démonstration. Soit $\|h\|_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_0^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$. Considérons la définition de mémoire évanescence (1.5), appliquée avec la pondération $w(t) := e^{-\frac{\lambda t}{2}}$. Cette fonction est bien monotone décroissante, à valeurs bornées et positives, et tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Soient $u_1, u_2 \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ et $\varepsilon > 0$. supposons :

$$\|u_1 - u_2\|_w := \sup_{t \leq 0} (|u_1(t) - u_2(t)| w(-t)) < \delta \quad (1.35)$$

où δ est un nombre positif à rechercher. La fonction F étant Lipschitzienne. on a :

$$|Gu_1(0) - Gu_2(0)| \leq K \left| \int_{-\infty}^0 h(-\tau) (u_1(\tau) - u_2(\tau)) d\tau \right| \quad (1.36)$$

$$\leq K \int_{-\infty}^0 h(-\tau) |u_1(\tau) - u_2(\tau)| d\tau \quad (1.37)$$

En décomposant l'intégrale sur $(-\infty, 0]$, on obtient :

$$|Gu_1(0) - Gu_2(0)| \leq K \left(\int_{-\infty}^{-T} e^{\lambda\tau} |u_1(\tau) - u_2(\tau)| d\tau \right. \quad (1.38)$$

$$\left. + \int_{-T}^0 h(-\tau) |u_1(\tau) - u_2(\tau)| d\tau \right)$$

$$\leq K \left(\int_{-\infty}^{-T} e^{+\frac{\lambda\tau}{2}} e^{+\frac{\lambda\tau}{2}} |u_1(\tau) - u_2(\tau)| d\tau \right. \quad (1.39)$$

$$\left. + \int_{-T}^0 h(-\tau) e^{-\frac{\lambda\tau}{2}} e^{+\frac{\lambda\tau}{2}} |u_1(\tau) - u_2(\tau)| d\tau \right)$$

Par l'hypothèse (1.35), nous pouvons conclure :

$$|Gu_1(0) - Gu_2(0)| \leq K\delta \left(\int_{-\infty}^{-T} e^{+\frac{\lambda\tau}{2}} d\tau + \int_{-T}^0 e^{-\frac{\lambda\tau}{2}} h(-\tau) d\tau \right) \quad (1.40)$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_{-T}^0 e^{-\frac{\lambda\tau}{2}} h(-\tau) d\tau &\leq \int_{-\infty}^0 h(-\tau) d\tau \cdot \int_{-T}^0 e^{-\frac{\lambda\tau}{2}} d\tau \quad (1.41) \\ &= \|h\|_1 \cdot \frac{2}{\lambda} \left(e^{\frac{\lambda T}{2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

et

$$\int_{-\infty}^{-T} e^{+\frac{\lambda\tau}{2}} d\tau = \frac{2}{\lambda} e^{-\frac{\lambda T}{2}} \quad (1.42)$$

Donc,

$$|Gx_1(0) - Gx_2(0)| \leq \frac{2K\delta}{\lambda} \left(e^{-\frac{\lambda T}{2}} + \|h\|_1 \left(e^{\frac{\lambda T}{2}} - 1 \right) \right) \quad (1.43)$$

Soit $\delta > 0$ défini par

$$\delta := \varepsilon \left(\frac{2K}{\lambda} \left(e^{\frac{\lambda T}{2}} + \|h\|_1 \left(e^{\frac{\lambda T}{2}} - 1 \right) \right) \right)^{-1} \quad (1.44)$$

On a alors, quelque soit $\varepsilon > 0$, $|Gx_1(0) - Gx_2(0)| < \varepsilon$, ce qui conclut la démonstration. ■

Remarque 1 *La condition de décroissance exponentielle peut être élargie, sans modifier la démonstration, aux conditions suivantes :*

Il existe un temps $T > 0$, une fonction $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ monotone décroissante avec

$$(i) \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$$

$$(ii) w(t) \neq 0, \forall t \in [0, T]$$

$$(iii) \frac{1}{w(t)} \in L_1([0, T])$$

et une fonction $\bar{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \in L_1([T, \infty))$ telles que

$$(iv) t \geq T \Rightarrow h(t) \leq \bar{h}(t) \cdot w(t).$$

En particulier, à la place de la décroissance exponentielle à l'infini, on peut se contenter d'une condition de décroissance :

$$\exists T > 0, \exists C > 0, \exists \eta > 0 : t \geq T \Rightarrow h(t) \leq \frac{C}{(1+t)^{1+\eta}} \quad (1.45)$$

Dans ce cas, on choisira pour démontrer la propriété de mémoire évanescence, une pondération de la forme $w(t) := C(1+t)^{-\eta/2}$ et une fonction $\bar{h}(t) := (1+t)^{-(1+\eta/2)}$. Nous venons donc de démontrer de la même manière la proposition suivante.

Propriété 1.9 *Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction globalement Lipschitzienne, et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction causale telle que*

$$\exists \eta > 0 : h(t)(1+t)^{-(1+\eta)} \in L_1(0, \infty)$$

Alors l'opérateur $G : x \mapsto G(x) := F\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau\right)$ a une mémoire évanescence sur \mathcal{BC} .

Ce cas de figure couvre déjà un large spectre de noyaux de mémoire, comme l'illustre la figure 1.5.

1.2.5.2 Approximation des opérateurs à mémoire évanescence

S. Boyd et L.O. Chua ont formulé (voir [15]) un théorème d'approximation des opérateurs stationnaires à mémoire évanescence, similaire au théorème de Weierstrass, concernant l'approximation de fonction continue par des polynômes. A l'instar de ce dernier, il ne s'agit que d'un résultat d'existence d'une meilleure approximation en norme uniforme, et non d'un algorithme de construction d'une telle meilleure approximation. Par contre, R.J. de Figueiredo et T.A. Dwyer (voir [41]) ont, eux, développé un algorithme de projection orthogonale, similaire aux algorithmes d'approximation de fonctions continues par des polynômes orthogonaux, qui après analyse, se révèle être

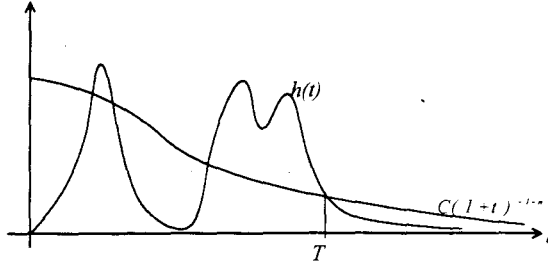


Figure 1.5: Exemple de noyau de convolution $h(t)$ à décroissance en $(1+t)^{-(1+\eta)}$ pour $t \rightarrow \infty$.

applicable à la même classe d'opérateurs non linéaires. C'est cette double démarche que nous suivrons dans cette section. La représentation des opérateurs par séries de Riesz-Volterra-Fréchet y jouera un rôle central.

Définition 1.10 Une série finie de Volterra définie sur l'espace des fonctions scalaires bornées et continues est un opérateur :

$$\mathcal{V}_K : \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$u \mapsto \mathcal{V}_K u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \mathcal{V}_K u(t)$$

où $\mathcal{V}_K u(t)$ est la somme

$$h_0 + \sum_{n=1}^K \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n$$

avec $K \in \mathbb{N}_0$, $h_0 \in \mathbb{R}$ et $h_n \in L^1(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R})$, $\forall n \geq 1$.

Cette forme de représentation entrée-sortie des opérateurs non linéaires est due à Fréchet [46], elle a été appliquée une première fois par Volterra dans son étude de l'élasticité non linéaire [130] et des ouvrages entiers sont consacrés à son étude théorique [131], dans le cadre de la théorie des systèmes [112], ou à ses applications en mécanique des milieux continus [51].

En particulier, l'opérateur \mathcal{V}_K est stationnaire et causal. Il est aussi continu par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$ dans $\mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car

$$\left| \int_0^\infty \dots \int_0^\infty h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \right| \quad (1.46)$$

$$\leq \|h_n\|_{L^1(\mathbb{R}_+^n)} \cdot \|u\|_\infty^n$$

et donc chaque terme de la somme définit un opérateur continu. Le théorème qui suit est un résultat classique d'approximation des opérateurs par série de Volterra, démontré dans [112]. Il s'applique à la classe des opérateurs causaux, stationnaires et continus, de manière "naturelle", puisque, au vu de ce qui précède, les séries de Volterra partagent ces trois propriétés.

Théorème 1.11 (Rugh - 1981) *Soit \mathcal{K} un compact de $\mathcal{BC}([0, T], \mathbb{R})$, $G : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{BC}([0, T])$ un opérateur causal, stationnaire et continu, et $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Il existe une série finie de Volterra $\mathcal{V}_K : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{BC}([0, T])$ telle que*

$$\forall u \in \mathcal{K}, \forall t \in [0, T] : |Gu(t) - \mathcal{V}_K u(t)| < \varepsilon$$

Remarquons que l'opérateur de convolution dans chaque terme de la série de Volterra (voir définition 1.10) est bien défini, comme opérateur de \mathcal{K} dans $\mathcal{BC}([0, T])$, si $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \in L^1(\mathbb{R}_+)$, pour tout $n \geq 1$. On a alors (voir [117], théorème 6.4.7) :

$$\|\mathcal{V}_K u\|_\infty \leq \|h_n\|_{L^1} \|u\|_\infty$$

La restriction majeure à l'application de ce théorème concerne la dépendance par rapport au temps t du résultat de convergence. En effet, bien que la convergence uniforme en norme soit garantie $\forall u \in \mathcal{K}$, rien ne dit que l'ordre de la série de Volterra, nécessaire pour garantir la précision ε donnée, n'augmente pas indéfiniment lorsque $T \rightarrow \infty$. Cependant, pour une classe d'opérateurs et pour un ensemble de signaux d'entrée plus restreints, le résultat d'approximation uniforme demeure valable sur tout le demi axe réel positif. C'est l'objet du théorème qui suit, dont la démonstration complète fait l'objet de [15].

Théorème 1.12 (Boyd, Chua - 1985) *Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathcal{P} := \{u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \|u\|_\infty \leq M_1 \text{ et } \|S_\tau u - u\|_\infty \leq M_2 \tau, \forall \tau \geq 0\}$ où M_1 et M_2 sont deux constantes positives réelles arbitrairement choisies $G : \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ un opérateur stationnaire qui possède une mémoire évanescence sur \mathcal{P} .*

Alors, il existe une série finie de Volterra \mathcal{V}_K telle que :

$$\forall u \in \mathcal{P} : \|Gu - \mathcal{V}_K u\|_\infty < \varepsilon$$

Démonstration. Voir [15], section IV. ■

Ce théorème est donc une version "fonctionnelle" du théorème de Weierstrass d'approximation des fonctions continues par des polynômes. C'est un résultat uniforme en ce qui concerne l'argument de l'opérateur (fonction u), qui,

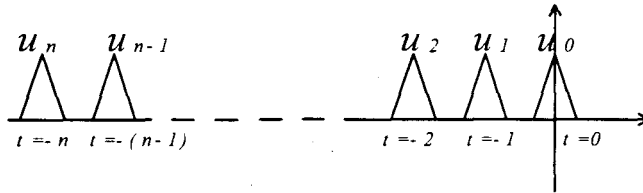


Figure 1.6: Une suite de fonctions u_n convergeant vers 0, au sens de la norme pondérée $\|\cdot\|_w$.

de plus, est valable sur l'intervalle de temps $[0, \infty)$. Les fonctions admissibles comme entrées sont restreintes aux fonctions globalement lipschitziennes (à variation bornée sur \mathbb{R}). De plus, on ne considère qu'un sous-ensemble \mathcal{P} uniformément borné de ces entrées admissibles. D'un point de vue pratique, ces restrictions demeurent "raisonnables". Remarquons que ce résultat d'approximation est valable indépendamment de la réalisation spécifique de l'opérateur G : comme système d'équations différentielles ordinaires, aux dérivées partielles, ou sous forme d'opérateurs intégro-différentiels, etc.

L'argument central de la démonstration repose sur la compacité de \mathcal{P} , pour la norme pondérée $\|\cdot\|_w$ induite par la mémoire évanescence. Ainsi, la figure 1.6 illustre le cas d'une suite de fonctions de \mathcal{P} qui ne contient aucune sous-suite convergente au sens de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, mais qui converge telle quelle vers 0 au sens de la norme pondérée $\|\cdot\|_w$.

Le théorème 1.12 est un résultat d'existence qui n'indique d'aucune manière comment construire la suite d'approximation $\mathcal{V}_K u$. Toutefois, l'existence d'une représentation sous forme de série infinie de Volterra, est une hypothèse fréquemment rencontrée dans les travaux concernant l'identification et la réduction de systèmes non linéaires. Considérée dès 1958 par N. Wiener (voir [137]), elle est reprise dans la plupart des travaux concernant ce sujet, notamment dans les ouvrages de synthèse parus dans les années 80 sur les systèmes non linéaires (voir [112], [113] et [115], entre autres). Or, un corollaire immédiat du théorème 1.12 est que tout opérateur stationnaire à mémoire évanescence possède une représentation exacte sous forme de série de Volterra convergente. Cependant, d'autres classe d'opérateurs possèdent aussi une telle représentation, sans pour autant avoir une mémoire évanescence. C'est le cas, par exemple, des opérateurs entrée-sortie des systèmes de dimension finie décrits par des équations d'état analytiques (voir [113]).

L'annexe A.2 a pour objet la définition constructive d'une méthode de projection orthogonale qui aboutit à l'approximation d'opérateurs à mémoire évanescence par des systèmes d'état de dimension finie (au sens de la représentation (1.23)). Il s'agit d'une adaptation d'un algorithme proposé dans [41], pour la réduction de systèmes dynamiques non linéaires d'ordre élevé (mais fini). Il aboutit à la construction d'une représentation d'état approchée de la forme (cas des systèmes scalaires)

$$\begin{aligned}x(t) &= f(t) \cdot u(t) \\y(t) &= c^T(t) q(x(t))\end{aligned}\tag{1.47}$$

où $c(t)$ et $f(t)$ sont des vecteurs de coefficients variables de \mathbb{R}^m , q est un polynôme d'ordre fini p , et, m et p sont des entiers d'autant plus grands que le sous-espace de projection désiré est large. Les coefficients $c(t)$ et $f(t)$ sont identifiés à l'aide de mesures d'un "échantillonnage" de sorties correspondant à des entrées successives, choisies dans une base hilbertienne de l'espace des entrées admissibles. L'approximation réalisée par l'opérateur entrée-sortie de (1.47), possède les propriétés suivantes (voir annexe A.2) :

- C'est une approximation optimale au sens des projections orthogonales dans les espaces de Hilbert.
- C'est une approximation globale, en ce sens qu'elle est valable pour tout temps t dans un intervalle donné, et ne dégénère pas avec le temps, comme le font les séries tronquées de Volterra.
- Elle est réalisée au moyen d'un système dynamique linéaire et d'une sortie polynomiale (sans "effet de mémoire", puisqu'algébrique), ou, ce qui est strictement équivalent, d'un système dynamique bilinéaire à sortie linéaire.
- Cette approximation est construite uniquement à l'aide de mesures des sorties correspondant à une sélection d'entrées précisée par l' "opérateur" et que ce dernier estime représentatives des conditions de fonctionnement "normal" du système.

Ce dernier point est évidemment une des faiblesses de la méthode. Il est souvent malaisé de préciser un sous-espace de fonctions admissibles comme entrées en "fonctionnement normal", en particulier si l'opérateur approché n'est qu'un des éléments constitutifs d'un modèle complexe.

1.3 Exemples

“Il y a deux sortes de mécaniciens des fluides : les théoriciens qui expliquent l'inobservable et les appliqués qui observent l'inexplorable.” George Birkhoff (Overisel, Michigan 1884 - Cambridge, Massasuchets 1944) [56].

1.3.1 Eléments modulés

Un élément modulé est un élément “classique” (voir annexe A.1) dont les équations constitutives dépendent d'un certain nombre de paramètres, eux-mêmes évalués, en tout instant, par un algorithme de calcul dont les entrées sont des valeurs effort ou flux, mesurées quelque part dans le bond graph. La modulation par le paramètre temps, c'est-à-dire la dépendance explicite par rapport au temps de la valeur des paramètres du modèle, est également autorisée.

L'algorithme de calcul qui intervient dans l'évaluation de la valeur des paramètres modulés peut comprendre des systèmes différentiels, et même, d'une manière plus générale, toute fonctionnelle causale. Habituellement, les circulations d'informations nécessaires au calcul des modulations sont représentées par des liens de type signal (flèches à deux tranchants, voir figure 1.7).

La modulation, très fréquemment utilisée dans les bond graphs, fournit de nombreux exemples d'éléments fonctionnels. Si l'évaluation des paramètres modulés des éléments ne nécessite l'utilisation que d'opérateurs causaux, qui peuvent être approchés par des systèmes d'état de dimension finie, la modulation peut souvent être introduite telle quelle, sans modification ni de la cohérence énergétique de la représentation, ni des algorithmes de construction des modèles d'état. C'est le cas notamment des sources modulées qui, par définition, apporte au système une contribution énergétique extérieure dont la nature n'a pas d'importance, par le choix même de la définition de l'environnement. Il en est de même pour les transformateurs et les gyrateurs dont le coefficient de transformation est l'objet d'une modulation (voir figure 1.7). Par exemple, un transformateur à deux accès dont l'équation constitutive est :

$$\begin{cases} e_1 = n(x) e_2 \\ f_2 = n(x) f_1 \end{cases} \quad (1.48)$$

demeure “isénergique” (conservatif de puissance), c'est-à-dire transmet instantanément et intégralement la puissance d'un port à l'autre. En effet la

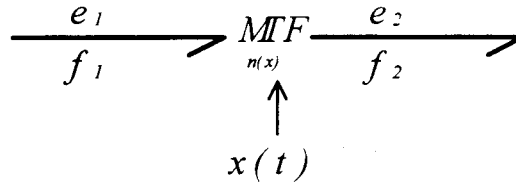


Figure 1.7: Représentation bond graph d'un transformateur modulé. Le rapport de transformation $n(x)$ est déterminé par le signal x .

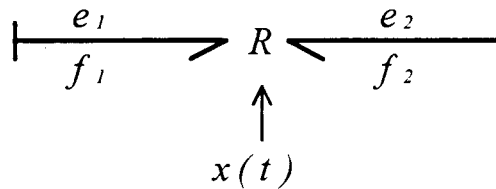


Figure 1.8: Représentation bond graph d'une résistance non linéaire 2-port dont l'équation constitutive est (1.50). Le signal de modulation est $x(t)$.

puissance totale entrant dans ce transformateur

$$P(t) := e_1 f_1 - e_2 f_2 = n(x) e_2 f_1 - e_2 n(x) f_1 \quad (1.49)$$

est nulle, quelle que soit la valeur instantanée de x .

Le cas des résistances modulées est lui aussi d'une grande simplicité. Considérons le cas d'une résistance modulée à deux accès (représentée figure 1.8) dont l'équation constitutive serait

$$\begin{cases} e_1 = F_1(f_1, f_2, x) \\ e_2 = F_2(f_1, f_2, x) \end{cases} \quad (1.50)$$

avec $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que

$$f_1 F_1(f_1, f_2, x) + f_2 F_2(f_1, f_2, x) \geq 0, \forall (f_1, f_2, x) \in \mathbb{R}^3 \quad (1.51)$$

Dans ce cas, la valeur de la puissance totale entrant dans l'élément vaut

$$P(t) = f_1 e_1 + f_2 e_2 = T \cdot \frac{dS}{dt} \geq 0$$

où T est la température absolue et $\frac{dS}{dt}$ le taux de production d'entropie. Donc, quelle que soit la valeur de la fonctionnelle causale qui détermine le paramètre x , l'élément modulé considéré est bien purement dissipatif.

Le cas des éléments dynamiques classiques (capacités et inductances) est plus délicat. Cette modulation entraîne, en général, la perte du caractère conservatif ("losslessness") des représentations correspondantes. Considérons le cas simple d'une "capacité linéaire" modulée d'équation

$$\begin{aligned} q(t) &= C(x(t))e & (1.52) \\ \frac{dq}{dt} &= f \\ q(0) &= 0 \end{aligned}$$

et peut être, par exemple, un modèle de condensateur à armature mobile. En un temps t , l'énergie stockée dans l'élément vaut :

$$E_{st}(t) := \int_0^{q(t)} \frac{q}{C(x(t))} dq = \frac{q^2}{2C(x(t))} \quad (1.53)$$

tandis que l'énergie fournie à l'élément, depuis le temps $t = 0$, vaut :

$$E(t) := \int_0^t e(\tau) f(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^{\tau=t} \frac{q(\tau)}{C(x(\tau))} dq(\tau) \quad (1.54)$$

Il y a donc, en général, création ou disparition d'énergie au sein de l'élément d'une valeur totale

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_{st}(t) - E(t) & (1.55) \\ &= \frac{q^2}{2C(x(t))} - \int_0^t \frac{q(\tau)}{C(x(\tau))} dq(\tau) \end{aligned}$$

Le chemin suivi entre deux états du système influe sur la quantité d'énergie nécessaire à cette évolution, et il n'existe pas de fonction de potentiel conservatif, ne dépendant que de la charge, pour cet élément. C'est pourquoi les auteurs de [5] conseillent d'éviter, voire proscrivent, la modulation des éléments dynamiques dans les bond graphs et suggèrent de les remplacer par une description énergétique détaillée des processus physiques qui les créent. Mais, de telles descriptions ne sont pas toujours disponibles (par manque de connaissance sur la "physique interne" du processus) ou souhaitables (par soucis de simplification de la représentation). Plutôt que le rejet catégorique d'éléments dynamiques modulés, la recherche d'une représentation énergétiquement cohérente de ceux-ci apparaît comme une démarche plus constructive et "réaliste", d'un point de vue pratique. La solution à ce problème est

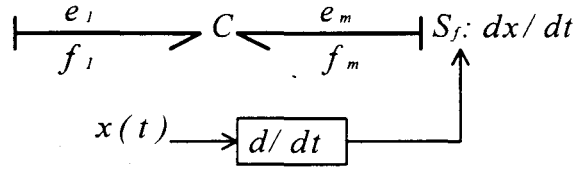


Figure 1.9: Représentation explicite et cohérente d'un élément dynamique modulé.

exposée dans [74], [76], et consiste, essentiellement, à augmenter la dimension de l'espace des états de la représentation de l'élément, et à inclure, dans le bond graph, des sources représentant explicitement les transferts d'énergie associés. Dans l'exemple ci-dessus, cette solution revient à considérer l'élément comme une capacité à deux accès, dont l'un des deux est connecté à une source de flux qui, elle, est modulée. Cette solution est illustrée à la figure 1.9. La fonction de potentiel conservatif de la capacité modulée à deux accès peut alors être définie par :

$$E(q, x) := \frac{q^2}{2C(x)} \quad (1.56)$$

Tandis que les efforts aux deux accès sont définis par :

$$\begin{aligned} e(q, x) &:= \frac{\partial E}{\partial q} = \frac{q}{C(x)} \\ e_m(q, x) &:= \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{C(x)} \end{aligned} \quad (1.57)$$

où e_m est l'effort de modulation. Encore faut-il que la fonction $E(q, x)$ soit bien une fonction de potentiel conservatif. Comme nous le verrons au chapitre III, c'est le cas si elle est continûment différentiable et bornée inférieurement, c'est-à-dire, dans notre cas, si $\frac{1}{C(x)}$ est continûment différentiable et bornée inférieurement. La puissance de modulation est représentée explicitement et vaut :

$$P_m(t) := f_m(t)e_m(t) = \frac{q^2}{2} \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{C(x)} \quad (1.58)$$

où $f_m := \frac{dx}{dt}$ est le flux de modulation. Cette technique de représentation énergétiquement cohérente de la modulation d'un processus conservatif peut, bien sûr, se généraliser à des éléments à plusieurs accès, et au cas où plusieurs variables de modulation interviennent.

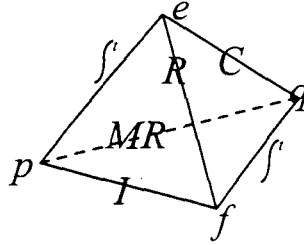


Figure 1.10: Tétrahédre des relations fondamentales entre les quatre variables effort, flux, charge et moment ("Paynter Tetrahedron").

1.3.2 Eléments dynamiques d'ordre supérieur

Au début des années 70, L. Chua a introduit le concept de memristor (voir [29]) en théorie des circuits. Celui-ci a immédiatement été repris dans le cadre plus général de la théorie des bond graphs (voir [100]). On parle parfois de l'élément "manquant" de la théorie des circuits car son équation constitutive complète l'ensemble des relations possibles deux à deux entre les quatre variables effort, flux, charge et moment, comme l'illustre la figure 1.10. L'équation constitutive (explicite) générale du memristor (MR) est donc du type :

$$p = F(q) \quad (1.59)$$

avec $q(t) := q_0 + \int_0^t f(\tau) d\tau$ une "pseudo-charge" et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continûment différentiable. En bond graph, on le rencontre essentiellement sous sa forme dérivée :

$$e = G(q) f \quad (1.60)$$

avec $G := \frac{dF}{dq}$, d'où est issu le nom de memristor⁸ (contraction de memory resistor) et qui ne fait intervenir qu'un seul domaine énergétique. Comme précédemment, l'équation constitutive (1.60) ne peut recevoir une interprétation de résistance modulée par la pseudo-charge, ou de résistance à mémoire (la mémoire des flux passé est alors concentrée dans l'intégrale du flux) que dans le cas où $G(q) \geq 0, \forall q \in \mathbb{R}$. La figure 1.11 illustre un exemple d'élément décrit par une équation constitutive de type (1.60), dans le domaine de la mécanique de translation.

Le memristor est un exemple d'élément dont l'équation constitutive met en relation algébrique, non seulement les variables effort et flux, mais aussi une de leur intégrale. De tels éléments ont été utilisés depuis les années 80

⁸Le memristor est alors une simple résistance modulée par l'intégrale du flux.

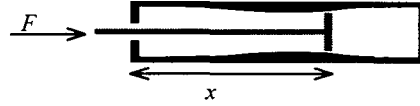


Figure 1.11: Memristor en mécanique de translation : le profil variable du cylindre offre une résistance variable au piston.

en théorie des circuits non linéaires (voir [34], pour la première étude sur le sujet) et ont fait l'objet d'études et de généralisations successives. Celles-ci ont conduit à la notion d'élément d'ordre supérieur. Nous utiliserons pour les définir les notations qui suivent, applicables indifféremment aux variables effort et flux.

$$e^{(0)}(t) := e(t) \quad (1.61)$$

$$e^{(-k)}(t) := e^{(-k)}(0) + \int_0^t e^{(-k+1)}(\tau) d\tau \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Définition 1.13 (Chua - 1980) *Un élément d'ordre $n \in \mathbb{Z}$ est un élément dont l'équation constitutive la plus générale est du type*

$$F(e^{(k)}, f^{(l)}) = 0$$

avec $n = |k - l|$, $k, l \in \mathbb{Z}$, et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Afin d'obtenir une description explicitement causale de ces éléments, et d'éviter de se référer au théorème des fonctions implicites (et donc de supposer F continûment différentiable, entre autres), on préférera une description plus restreinte, mais explicite, du type :

$$e = F_e (f^{(l)})^{(-k)} \quad (1.62)$$

avec $F_e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. De plus, afin d'éviter l'apparition de dérivées explicites du signal d'entrée (ici, le flux), on supposera $l \leq 0$ et $k \geq l$. Bien entendu, pour l'élément dual de (1.62), à savoir celui décrit par l'équation constitutive

$$f = F_f (e^{(k)})^{(-l)} \quad (1.63)$$

où $F_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on supposera cette fois $k \leq 0$ et $l \geq k$. On peut par ailleurs étendre, sans difficulté supplémentaire, la définition des éléments d'ordre supérieur aux éléments multiports, dont les équations constitutives

dépendent de plusieurs intégrales successives des entrées. Ces éléments n'ont, à notre connaissance, pas encore été considérés dans leur ensemble, par les travaux sur la théorie des bond graphs. Pourtant, leur utilité est très grande, et ceci à deux points de vue :

1. Ils permettent de considérer comme élément d'un modèle de type réseau, de nombreux dispositifs électroniques ou électromagnétiques non linéaires, notamment la plupart des modèles à paramètres localisés de diodes et de transistors non idéaux ([31], [33], [47] et [59]) et certains modèles à paramètres localisés d'hystérésis, valides pour le fonctionnement en courant continu et alternatif ([28], [30] et [132]).
2. Ce sont les seuls éléments qui permettent, par leur introduction dans un modèle, de lever d'éventuels *points d'impasse*⁹ de la dynamique de circuits non linéaires.

1.3.3 Modèles linéaires de dimension infinie

Les exemples d'éléments généralisés que nous avons abordés jusqu'à présent sont soit des éléments classiques modulés par des fonctionnelles causales, soit des éléments dont les équations constitutives ont la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires de dimension finie. Ce dernier cas n'est qu'une première étape dans la généralisation des éléments dynamiques classiques des bond graphs (capacités et inductances). L'étape suivante consiste à englober dans la définition d'élément ceux dont les équations constitutives sont décrites par des opérateurs entrée-sortie qui ne peuvent se réduire à un système de dimension finie. Dans de nombreux modèles, la dépendance de la réponse à une sollicitation par rapport à l'histoire passée du système, ne peut être résumée en un nombre fini de variables réelles (vecteur d'état). C'est le cas, notamment, pour les représentations par produit de convolution où la transformée de Laplace du noyau de convolution (réponse impulsionnelle) n'est pas une fraction rationnelle. C'est aussi le cas des modèles à paramètres distribués décrits par un système d'équations aux dérivées partielles. Dans cette section, nous passons brièvement en revue quelques-uns de ces modèles, à titre d'illustration.

⁹Les points d'impasse sont des points du diagramme de phase atteints en un temps fini, et pour lesquels l'évolution dynamique du système s'interrompt instantanément. Ils apparaissent avec l'introduction dans les circuits d'éléments non linéaires en causalité dérivée ou de discontinuités dans les équations constitutives. Voir à ce sujet [34] et [78].

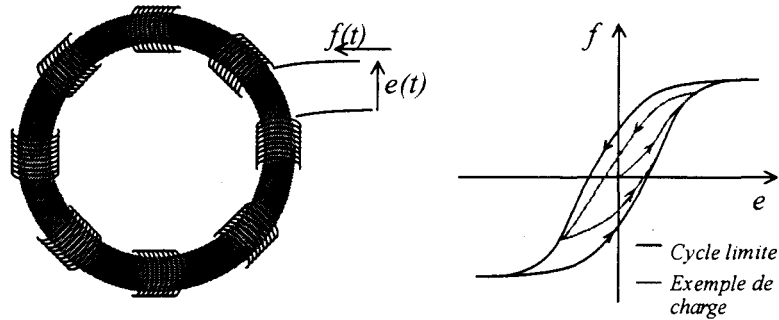


Figure 1.12: Phénomène d'hystérèse au sein d'un anneau ferromagnétique.

1.3.3.1 Phénomènes d'hystérèsis et visco-élasticité

Les phénomènes d'hystérèsis peuvent être définis de manière très générale à partir de phénomènes de branchements dans les équations constitutives des éléments. Par exemple, en suivant [97], la définition suivante peut être adoptée.

Définition 1.14 *Un transducteur avec hystérèsis est un élément dont l'équation entrée-sortie est caractérisée par plusieurs branches, généralement non linéaires, et pour lequel la branche de fonctionnement est déterminée à partir des valeurs passées du signal d'entrée. Il faut de plus que les branchements n'aient lieu qu'aux valeurs extrémales du signal d'entrée. Si, à ces valeurs, la branche de fonctionnement n'est déterminée que par les valeurs extrémales du signal d'entrée (par l'ensemble de ses extrémas locaux), on parle de modèle statique, sinon de modèles dynamiques.*

Une telle définition caractérise des phénomènes très divers : hystérèsis au sein des circuits électromagnétiques (voir [28], [27], et [132], par exemple), hystérèsis au sein des milieux mécanique (viscoélasticité, notamment, voir [107] et [97]), mais aussi phénomènes d'adsorption et phénomènes d'hystérèsis en optique et en physique des supraconducteurs (voir [97]). L'exemple classique de l'hystérèsis au sein des matériaux ferromagnétique est illustré à la figure 1.12.

On suppose dans cet exemple que le circuit magnétique (anneau) est progressivement chargé à l'aide d'une source de potentiel ($e(t)$ est l'entrée) alternative. A chaque extréma de l'effort, correspond un point de branchement dans l'équation constitutive du circuit électromagnétique vu, dans son ensemble, comme un élément. La charge peut se poursuivre ainsi jusqu'à ce

que la valeur de saturation du champ d'induction dans l'anneau soit atteinte. Pour des valeurs extrémales du potentiel alternatif supérieures, le cycle limite est parcouru dans le sens indiqué. En général, à haute fréquence, la connaissance du profil complet des transitions entre branches est nécessaire à la détermination de la branche de fonctionnement et de sa forme. C'est un cas de modèle dynamique d'hystérésis. Par contre, à fréquence moins élevée, la connaissance des extrêmes successifs du signal d'entrée suffit à cette détermination. Dans ce cas, le modèle d'hystérésis de Preisach (voir [97] et [132]) est le modèle statique le plus utilisé. Quoiqu'il en soit, dans un cas, comme dans l'autre, il s'agit d'une équation constitutive qui détermine la sortie comme image du signal d'entrée par un opérateur causal (et stationnaire, dans la plupart des modèles).

Quoique répondant formellement à la définition 1.14, les phénomènes analogues à l'hystérésis, en mécanique des milieux continus, sont en général désignés sous le nom de viscoélasticité ou de propriété d'hérédité. Dans ce cas, ce sont les équations constitutives des matériaux qui définissent explicitement la relation contrainte (effort généralisé) / déformation (charge généralisée) en terme d'opérateurs, en général stationnaires. En conséquence, les processus capacitifs que constituent ces matériaux, lorsqu'il sont considérés comme des ressorts mécaniques, seront décrits par des éléments fonctionnels au sens où nous l'avons défini plus haut. C. Truesdell (voir [127]) est probablement l'auteur le plus connu des mécaniciens des fluides qui a fixé ce cadre très général pour les équations constitutives des milieux continus. Cependant, déjà en 1909, dans son étude de l'élasticité non linéaire (voir [130]), Volterra définissait ces équations constitutives à l'aide des séries qui portent son nom. Suivant Y. Rabotnov (voir [107]), nous présenterons ces équations constitutives par ordre croissant de généralité, mais dans le cas unidimensionnel, afin d'éviter l'introduction de notations tensorielles.

1. Le modèle le plus simple de viscoélasticité est un système dynamique du premier ordre de la forme

$$e = Eq + \eta f \quad (1.64)$$

où e désigne la contrainte, q la déformation, f la vitesse de déformation, E le module d'élasticité et η la viscosité dynamique. Lorsque la viscosité est nulle, cette équation se ramène à la loi de Hooke, et donc à la définition d'un ressort linéaire classique (capacité). Lorsque l'élasticité est nulle, l'équation (1.64) se ramène à la définition d'une résistance. Dans le cas général, (1.64) définit la relation effort-flux aux bornes d'un

circuit $R - C$ et peut s'écrire de manière équivalente

$$q(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t \exp\left(-\frac{E}{\eta}(t-\tau)\right) e(\tau) d\tau \quad (1.65)$$

2. Le plus souvent, la convolution par une fonction de la famille des exponentielles décroissantes est une description très grossière de la dépendance de la relation contrainte-déformation par rapport au passé du matériau. C'est pourquoi, l'équation constitutive (1.65) est souvent généralisée au cas d'un noyau de mémoire quelconque et prend alors la forme

$$q(t) = \int_0^t J(t-\tau) de(\tau) \quad (1.66)$$

où e est considéré comme une fonction à variations bornées et donc $de(\tau)$ est une mesure de signe quelconque sur \mathbb{R} . Les variations bornées instantanées de charge sont donc admises. Le noyau J est en général appelé *creep-function*.

3. L'extension de (1.66) au cas non linéaire a été proposé par Volterra (voir [130]) sous la forme

$$q(t) = \int_{-\infty}^t J_1(t-\tau_1) de(\tau_1) + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t J_1(t-\tau_1) J_2(t-\tau_2) de(\tau_1) de(\tau_2) + \dots \quad (1.67)$$

et décrit, comme nous l'avons vu à la section 1.2.5, la relation déformation / contrainte à l'aide d'un opérateur stationnaire à mémoire évanescence. Les travaux de Volterra ont été remis au goût du jour dans les années 50 par A. Green et R. Rivlin (voir [51]), et font depuis l'objet de nombreuses applications, notamment à l'étude des matériaux composés de P.V.C., de polyéthylène, de polypropylène, de fibres de verre, de graphite, d'aciers à faible teneur en carbone, etc. Une étude bibliographique complète (mais datant de 1980) est disponible dans [107]. Par ailleurs, la propriété de mémoire évanescence a été utilisée pour démontrer l'existence de solutions globales aux équations (unidimensionnelles) de la mécanique des milieux continus, dans le cas des milieux viscoélastiques dont les équations constitutives sont données par (1.66). Les développements complets sont donnés dans [68].

Remarquons en passant que l'étude de la porosité, ainsi que de nombreuses interfaces à géométrie fractales se fonde largement sur des équations constitutives du type (1.66). Nous reviendrons en détail sur ce sujet au chapitre II.

1.3.3.2 Mémoire, fatigue et retards

Les représentations entrée-sortie du type

$$y(t) = F \left(\int_{-\infty}^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau \right) \quad (1.68)$$

couvrent un large spectre d'applications. Par exemple, les phénomènes de fatigue dans les matériaux linéaires soumis à de nombreuses déformations répétées peuvent se représenter par une équation résistive du type (1.66) où la "creep function" $J(t)$ tiendrait compte d'une détérioration progressive des performances du matériau. L'identification du noyau de mémoire $J(t)$ est d'ailleurs, la plupart du temps, une tâche plus facile que la construction d'un modèle précis des effets de la température, de la vitesse et de l'ampleur des déformations, ainsi que de leur fréquence sur l'élasticité et la viscosité du matériau considéré.

Ce type d'argumentation est particulièrement adapté au cas de la modélisation en biologie, et plus particulièrement encore lorsqu'il s'agit de développer des modèles énergétiques en physiologie. En effet, dans ces disciplines, l'étude quantitative des échanges énergétiques ne s'est développée que fort tardivement, en comparaison des développements similaires qu'ont connus la physique et la chimie. De plus, l'objet d'étude en lui-même est infiniment plus complexe, dans le cas de la "théorie du vivant". Bien que de nombreux problèmes en biologie mathématique ne concernent que des systèmes non énergétiques, ou des systèmes où les échanges d'énergie ne sont pas pris en compte (dynamique des populations, génétique, par exemple), beaucoup de systèmes biologiques sont mieux compris et plus exactement représentés (au vu des objectifs fixés) à l'aide d'une représentation précise et structurée des échanges énergétiques les plus importants en leur sein. C'est notamment le cas en physiologie (mais souvent aussi en écologie) où le fonctionnement des différentes cellules et des organes qu'elles constituent ne peut se représenter de manière significative sans prendre en compte l'énergie nécessaire à son fonctionnement, et en particulier les limites des réserves et de l'approvisionnement en énergie. La description des mécanismes réactifs à la base du fonctionnement de la cellule jouera alors un rôle capital dans l'élaboration d'un modèle énergétique du fonctionnement, même des organes les plus

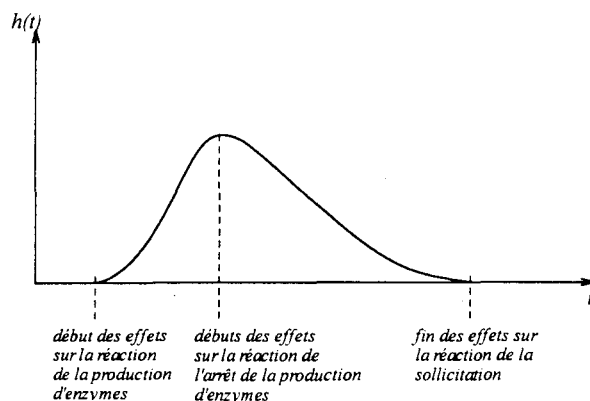


Figure 1.13: Noyau de mémoire formalisant l'effet de la production éloignée d'enzymes sur la réponse d'une réaction enzymatique à une sollicitation.

complexes. C'est ici qu'interviennent à profusion les phénomènes de retards distribués, c'est-à-dire de représentations par produit de convolution.

En effet, la plupart des réactions biochimiques intervenant dans le fonctionnement des organismes sont des réactions enzymatiques. Leur évolution est donc limitée par la présence d'enzyme! Or, la production de ces enzymes ne se fait pas sur le site de la réaction, mais est commandée à une "unité de production" distante, via un mécanisme de commande hormonale. L'ensemble complexe de réactions complexes, qui caractérise la réponse de l'organisme étudié à une sollicitation, donne donc naissance à de nombreux phénomènes de retards. Ces retards sont distribués du fait du caractère non instantané de la production d'enzyme, du fait de nombreux phénomènes de diffusion intervenant dans le transport de ces enzymes, ainsi que du nombre d'enzymes variés devant rejoindre le site de la réaction et du nombre d'hormones nécessaires à commander les diverses productions. Ainsi, la réponse entrée-sortie d'un organe (ou d'une seule cellule) à une sollicitation (manque de glucose, commande d'un produit, influx nerveux, etc.) se définira naturellement à l'aide d'opérateurs à mémoire évanescence (les retards ne sont pas éternels). La dynamique de cette réponse impliquera un opérateur de convolution (voir proposition 1.6). La figure 1.13 illustre l'allure typique des noyaux utilisés.

De très nombreux exemples concernant l'utilisation de retard dans la description de modèles biologiques (dépassant largement le cadre physiologique abordé ici) sont commentés et discutés dans [91]. Nous avons par ailleurs proposé dans [76] l'application à la modélisation par bond graph du coeur, des effets de "mémoire" tel celui de la figure 1.13 observé

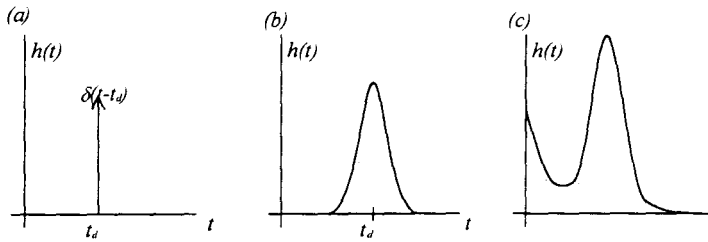


Figure 1.14: Différents noyaux de convolution. (a) retard pur d'amplitude $\tau_d > 0$. (b) retard distribué centré en τ_d . (c) noyau quelconque.

expérimentalement sur un coeur de lapin, et commenté dans [141].

Un "cas particulier" de représentation par produit de convolution est celui des retards purs. Dans ce cas, l'opérateur convolution défini dans (1.68) est remplacé par :

$$y(t) = F \left(\int_0^{\infty} u(t - \tau) \delta(\tau - \tau_d) d\tau \right) \quad (1.69)$$

où $\delta(\tau - \tau_d)$ désigne la distribution¹⁰ de Dirac centrée en $t = \tau_d$ et $\tau_d > 0$ le retard pur considéré. Plus généralement, les systèmes à retards seront définis comme des systèmes d'équations différentielles ordinaires combinés avec un ensemble de retards purs agissant sur les entrées, les sorties, l'état, ou même les dérivées de l'état. Les retards purs sont très fréquemment rencontrés comme première approximation de phénomènes de transport de matière (par déplacement ou même diffusion), de phénomènes hybrides combinant des évolutions continues et discrète (par exemple l'existence de générations), de retards dans le fonctionnement de capteurs et d'actionneurs, de retards de transmission d'informations, etc. Une bonne présentation générale des problématiques liées aux systèmes à retard est [92], tandis que de nombreux résultats récents sont développés dans [109]. Nous avons, pour notre part, discuté les conditions nécessaires d'intégration des systèmes à retards dans les bond graphs dans [81] et [83].

La figure 1.14 représente différents noyaux de convolution associés aux retards purs, aux retards distribués, et aux phénomènes de mémoire généraux (fatigue, par exemple).

¹⁰On peut alternativement considérer cette représentation, soit comme un cas particulier de convolution avec une mesure $\delta(\tau - \tau_d) d\tau$ si les entrées sont continues et à support compact dans $[0, \infty)$ (Dans ce cas, la distribution de Dirac $\delta(\tau - \tau_d)$ définit une mesure de Radon sur $[0, \infty)$), soit comme une distribution appliquée directement aux entrées si celles-ci sont restreintes aux fonctions déclinantes sur $[0, \infty)$. Voir à ce sujet [138] (mesures de Lebesgue et mesures de Radon) et [116] (théorie des distributions)

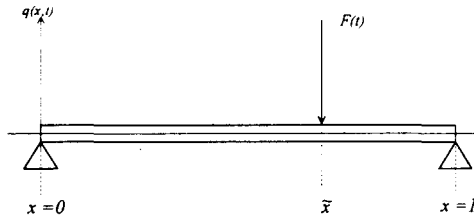


Figure 1.15: Poutre flexible reposant sur deux appuis et soumise à une force extérieure $F(t)$.

1.3.3.3 Equations aux dérivées partielles et modèles à paramètres distribués.

Dans de nombreux modèles, la répartition spatiale de la valeur des variables intensive ne peut pas être considérée comme uniforme. On parle dans ce cas de modèles à paramètres distribués. Leur représentation mathématique la plus courante prend alors la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles. Considérons l'exemple d'une poutre flexible, de longueur unitaire, soumise à un effort ponctuel $F(t)$, et reposant sur deux appuis, tel qu'illustré à la figure 1.15. Supposant de petites déformations $q(x, t)$ et des pertes par frottements proportionnelles à la vitesse de déformation $\frac{\partial q(x, t)}{\partial t}$, un modèle classique de description de la dynamique des déformations est (voir [70])

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{IE}{\rho S} \frac{\partial^4 q(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\alpha}{\rho S} \frac{\partial^3 q(x, t)}{\partial t \partial x^2} + F(t) \\ v(t) = \frac{\partial q(\tilde{x}, t)}{\partial t} \\ q(0, t) = q(1, t) = \frac{\partial^2 q(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 q(1, t)}{\partial x^2} = 0 \\ q(x, 0) = q_0(x) ; \frac{\partial q(x, 0)}{\partial t} = q_1(x) \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (1.70)$$

où $q(x, t)$ désigne le déplacement transversal, E le module de Young, I le moment d'inertie, S la section de la poutre, ρ la masse volumique de la poutre, α un coefficient de frottement et \tilde{x} le point d'application de la force extérieure $F(t)$. Bien que ce modèle soit à paramètres distribués, l'entrée $F(t)$ et la sortie $v(t)$ sont, vues de l'extérieur, deux grandeurs accessibles à la connexion avec un circuit mécanique de translation, puisque ces grandeurs sont respectivement l'effort et le flux dans ce domaine énergétique. Par contre, la connaissance complète du profil des déformations $q(x, t)$ est nécessaire à la détermination de la sortie $v(t)$. On peut dire que l'histoire passée du système, à un instant t donné, est toute entière caractérisée par

la donnée du profil $q(x, t)$ pour $x \in [0, 1]$. C'est pourquoi on parle aussi de modèle d'état de dimension infinie. Nous reviendrons largement sur ce genre d'exemple au chapitre III. Pour l'instant, retenons que cette poutre flexible, et son modèle d'état (1.70) associé, constituent un exemple d'élément dont la relation entrée-sortie est définie par un opérateur causal et stationnaire. En fait, nous verrons que cet opérateur possède aussi la propriété de mémoire évanescence car il est linéaire et possède une représentation sous forme de produit de convolution. La puissance entrant dans cet élément est donnée sous forme classique (mécanique de translation) par

$$P(t) := F(t) \cdot \frac{\partial q(\tilde{x}, t)}{\partial t} \quad (1.71)$$

De plus, nous savons a priori que cet "élément" d'une part dissipe de l'énergie sous forme de frottement, et d'autre part emmagasine de l'énergie sous forme d'énergie cinétique et potentielle. Cette énergie stockée vaut

$$\begin{aligned} E_{st}(t) &:= E_{cin}(t) + E_{pot}(t) \\ &= \frac{\rho S}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} \right|^2 dx + IE \int_0^1 \frac{\partial^4 q(x,t)}{\partial x^4} q(x,t) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\rho S}{2} \left| \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} \right|^2 + IE \left| \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} \right|^2 \right) dx \end{aligned} \quad (1.72)$$

A priori, aucun problème de cohérence énergétique ne s'oppose à l'introduction telle quelle d'un tel élément au sein d'un bond graph, puisque, par ailleurs, son équation constitutive a une causalité explicite. Il ne reste qu'à fournir un schéma de réduction des équations (1.70) qui préserve les propriétés énergétiques fondamentales de la poutre. Avant cela, il faut bien entendu définir ces propriétés, ce sera l'objet, entre autres, du chapitre III.

Les équations (1.70) sont un exemple de la famille des équations d'onde. Les équations de la chaleur, décrivant l'évolution des profils de température dans les matériaux soumis à des contraintes thermiques fournissent elles aussi une famille d'exemples de modèles à paramètres distribués, que l'on peut souhaiter "connecter" à un circuit thermique à paramètres localisés. Nous renvoyons le lecteur intéressé par plus de détails sur ces modèles linéaires à paramètres distribués (équations des ondes et équations de la chaleur) à n'importe quel traité introductif ou général de physique mathématique ou de "mathématiques pour l'ingénieur", où ils sont traités en détail (voir, par exemple [36]). Le point crucial ici est l'intérêt de la connexion entre les deux types de modèles, présente dans de nombreuses applications : vibrations des essieux et de la caisse dans les systèmes de suspension, système de refroidissement des circuits en électronique de puissance, en micro-électronique, dans

les systèmes mécaniques. électromécaniques. interférence dans les systèmes de transmission électromagnétique....

Dans la famille des modèles à paramètres distribués non linéaires. mentionnons les équations de réaction-diffusion. D'une manière générale. ces équations décrivent l'évolution des concentrations et des températures de milieux hétérogènes, au sein desquels ont lieu des phénomènes de transport (déplacement et diffusion) et des phénomènes réactifs impliquant éventuellement plusieurs phases (solide, liquide et gazeuse). Pour un réacteur tubulaire tel celui représenté à la figure 1.16, où les effets de dispersion radiale sont négligés, les équations d'état générales obtenues à partir des bilans massique et thermique sur une portion de réacteur dz sont de la forme (x désigne la coordonnée longitudinale) :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -u \frac{\partial z}{\partial x} + D_a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \tilde{K}r(z) + U \quad (1.73)$$

où $z(x, t)$ est un vecteur d'état comprenant les concentrations en les différents produit ainsi que la température (qui dépendent de la variable spatiale et du temps), D_a représente une matrice de coefficients de dispersion, u la vitesse de déplacement du fluide au sein du réacteur, \tilde{K} une matrice de coefficients stoechiométriques, $r(z)$ un vecteur de taux de réaction et U les échanges thermiques avec l'extérieur. Le modèle (1.73) est complété par des conditions aux limites, souvent les conditions de Danckwerts (voir [38]) :

$$D_a \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=0} = -u (z_{in} - z(x=0^+, t)) \quad (1.74)$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{z=1} = 0 \quad (1.75)$$

où z_{in} désigne le vecteur des valeurs de z caractéristiques de l'alimentation extérieure. Pour plus de détail sur la dérivation du modèle (1.73) et sur la modélisation des réacteurs chimiques en général, nous renvoyons à [42] et [45].

Dans les installations de laboratoire ou industrielles, les réacteurs chimiques ne sont jamais seuls. Ils sont couplés au minimum, d'une part avec un circuit hydraulique qui assure l'alimentation en réactifs et l'évacuation des produits, et, d'autre part, avec un circuit de refroidissement (ou de chauffage) qui assure des conditions optimales (ou simplement raisonnables) aux réactions chimiques au sein du réacteur (qui sont endo- ou exothermiques). L'intérêt d'un couplage avec ces dispositifs auxiliaires, généralement décrits par des circuits à paramètres localisés, est donc immédiat.

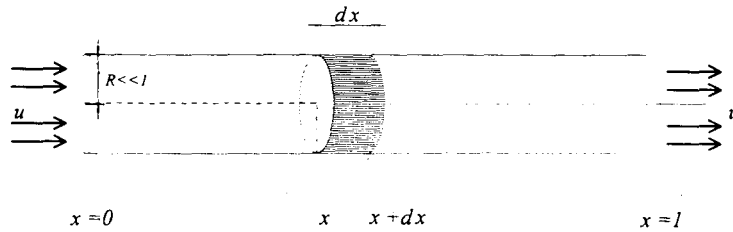


Figure 1.16: Vue schématique d'un réacteur à lit fixe

Enfin, mentionnons encore comme exemple intéressant de 2-port, le cas des lignes de transmissions, dont la description la plus simple (sans dissipation, capacitance et inductance linéiques uniformes) et la plus répandue est l'équation des télégraphistes (voir [70]) :

$$\begin{aligned} L \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial x} &= 0 \\ C \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (1.76)$$

où L représente l'inductance linéique (uniforme) et C la capacitance linéique (uniforme) de la ligne, tandis que $f(x, t)$ et $e(x, t)$ désignent respectivement le flux et l'effort en un instant t , à un point de coordonnée x le long de la ligne. Pour être intégrées, les équations (1.76) doivent être complétées par des conditions aux limites, exprimées aux deux extrémités de la ligne de transmission. Ce sont ces conditions aux limites qui complètent la définition de l'élément "ligne de transmission" comme un "2-port infini-dimensionnel".

1.4 Propos d'étape

Gauss (Brunswick 1777 - Göttingen 1855) répliqua, alors qu'on l'interrogeait sur le temps qui lui serait nécessaire à découvrir certains résultats mathématiques : *"J'ai ces résultats depuis longtemps déjà, la seule chose qui me préoccupe est de savoir comment les atteindre"*. Cité dans [50].

Dans ce chapitre, après avoir brièvement rappelé les spécificités et les atouts des bond graphs, nous avons mis en lumière les postulats physiques fondamentaux de cette méthodologie de modélisation.

Ces postulats, qui caractérisent la modélisation par réticulation, nous ont conduit à l'élaboration de modèles d'une bien plus grande généralité que

ceux généralement considérés par les différentes approches "réseaux", et par l'approche bond graph en particulier. Après avoir étudié la classification des jonctions élémentaires qui découle des axiomes de modélisation, nous avons décidé de reporter toute dépendance non autonome, ou, plus généralement, tout phénomène de dépendance dynamique, sur les éléments.

Après avoir posé le problème en ses termes les plus généraux, et avoir défini les "éléments fonctionnels" comme ceux dont les équations entrées-sorties sont représentées par des opérateurs causaux, nous avons restreint la classe d'opérateurs, considérés dans ce travail, à celle des opérateurs stationnaires à mémoire évanescence. Le sens "physique" et les implications mathématiques de ces restrictions ont été précisés alors, mais, d'une manière générale, il s'agit bien là d'une particularisation, après les considérables abstractions auxquelles nous avaient conduit les premiers développements de ce chapitre.

Nous avons ensuite conclu l'exposé du sujet général de notre travail par une série d'exemples illustratifs. Cette énumération avait pour but principal de faire ressortir les énormes potentialités que contient l'introduction éventuelle d'éléments fonctionnels au sein de réseaux à paramètres localisés, et plus encore au sein de la théorie des bond graphs. Elle a de plus, nous l'espérons, aidé à faire ressortir la complexité des problèmes engendrés par une telle introduction, essentiellement liés, d'une part à la réduction et à l'approximation des équations constitutives, et d'autre part à la caractérisation de leurs propriétés énergétiques.

L'essentiel de notre contribution à ce chapitre est la définition du sujet en lui-même, et la mise en rapport, dans cette perspective, des différentes notions nécessaires à cette tâche. Si nous parcourons le détails des différentes sections, nos contributions spécifiques sont, à notre connaissance : la correction du résultat de classification des jonctions élémentaires et les questions qui en découlent (section 1.2.3, proposition 1.1), la définition des éléments fonctionnels en variables conjuguées et les problèmes de causalité, de représentations d'état approchées et de mémoire évanescence qui en découlent (sections 1.2.4 et 1.2.5), la caractérisation des opérateurs de convolution à mémoire évanescence (propositions 1.8 et 1.9), et, enfin, la mise en rapport des résultats de [15] et de [41] afin de construire un algorithme d'approximation par systèmes d'état de dimension finie, pour les opérateurs à mémoire évanescence (section 1.2.5 et annexe A.2). Les discussions de ce chapitre ont fait l'objet de diverses publications : sur la présentation générale de la problématique [79] et [80], concernant l'existence de dépendances fonctionnelles des éléments d'un modèle de coeur (phénomène de désactivation des muscles cardiaques [76]), à propos de l'utilisation générale de ces dépendances fonctionnelles en bio-ingénierie et en génie biomédical [75], sur la modulation des éléments dynamiques [76], et concernant la prise en compte de retards purs

et distribués dans les réseaux [81].

Chapitre 2

Réduction des opérateurs linéaires

"...the source of all great mathematics is the special case, the concrete example. It is frequent in mathematics that every instance of a concept of seemingly great generality is in essence the same as a small and concrete special case..." P.R. Halmos (Budapest 1916 -), dans [55].

Dans ce chapitre, nous allons aborder le problème de la réduction des équations constitutives d'un élément linéaire stationnaire à mémoire évanescence.

Nous avons vu au chapitre précédent que de tels éléments sont aussi décrits par un opérateur de convolution du type :

$$y(t) = Gu(t) = \int_0^{\infty} u(t - \tau) dg(\tau) \quad (2.1)$$

où $g(\tau)$ est une fonction à variation bornée sur \mathbb{R}^+ et où (u, y) est une paire hybride de variables de puissance associée à l'élément. A son tour, l'équation constitutive (2.1) peut être représentée dans le plan complexe par le transfert

$$\hat{y}(s) = G(s)\hat{u}(s) \quad (2.2)$$

où $G(s)$, $\hat{u}(s)$ et $\hat{y}(s)$ sont respectivement les transformées de Laplace de la mesure¹ $dg(\tau)$, du signal $u(t)$ et du signal $y(t)$.

¹La limite

$$\mathcal{L}(dg)(s) := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{+R} e^{-st} dg(t) \quad (2.3)$$

où $g(t)$ est une fonction à variation bornée sur $[0, R]$, $\forall R > 0$, si elle existe pour $s \in \mathbb{C}$ donné, est appelée *transformée de Laplace* de la mesure dg évaluée en s . (voir [135])

Dès lors, le problème de la réduction de l'opérateur linéaire défini par (2.1), c'est-à-dire de son approximation par l'opérateur entrée-sortie d'un système d'état de dimension finie, peut se ramener au problème de l'approximation d'une fonction de transfert par une fraction rationnelle.

C'est pourquoi la première section de ce chapitre est consacrée aux approximants de Padé, et à leur réalisation en tant que fonction de transfert de modèles à paramètres localisés. Les résultats qui y sont exposés n'ont qu'un caractère formel. La question de la convergence de la suite d'approximants de Padé vers $G(s)$, ainsi que celle du sens physique du circuit de réalisation sont abordées à la deuxième section. Les développements de cette section seront l'occasion de constater que la méthode de réduction proposée n'a de sens que si la fonction de transfert $G(s)$ est une série de Stieltjes. A la troisième section, nous étudierons un exemple d'application qui satisfait cette condition : l'opérateur d'intégration implicite d'ordre non entier. Il s'agit d'un modèle fréquent d'impédance de milieu à géométrie fractale (voir annexe A.3), mais il a aussi des applications aux problèmes de contrôle (suspension et commande CRONE, voir [101]). Ensuite, à la quatrième section, nous présenterons brièvement l'interprétation physique des systèmes dont le transfert est une série de Stieltjes (circuits de relaxation), c'est-à-dire des systèmes pour lesquels la méthode de réduction s'applique.

2.1 Réduction formelle

"Le chemin le plus court entre deux vérités dans le domaine des réels passe par le plan complexe." Jacques Hadamard (Versailles 1865 - Paris 1963), cité dans [95].

La fonction de transfert (2.2), vue comme l'impédance d'un élément fonctionnel à connecter à un modèle à paramètres localisés, doit être réduite, c'est-à-dire approchée, par un système de dimension finie, ne fût-ce qu'à des fins d'évaluation numérique. Cependant, pour pouvoir appliquer tels quels les algorithmes bond graph (autres que les seuls algorithmes de simulation) à l'ensemble du modèle connecté, il faut que l'impédance approchée puisse elle même être réalisée par un modèle à paramètres localisés. C'est cette approximation, et sa réalisation qui sont discutées dans cette section.

En des termes généraux, le problème d'approximation se pose de la façon suivante : *étant donnée une fonction de transfert non rationnelle $G(s)$, calculer une suite de fraction rationnelles $\{G_K(s)\}_{K \geq 1}$ convergeant vers $G(s)$, au moins ponctuellement, pour $K \rightarrow \infty$, et pour $\text{Re}(s) > 0$* ².

²Si les signaux u et y sont bornés et continus, alors ils ont une transformée de Laplace

2.1.1 Approximants de Padé

Il existe de nombreuses approches à ce problème d'approximation en fractions rationnelles (ces approches sont d'ailleurs liées entre elles) : interpolations rationnelles, développements en série de Taylor, en fraction continue, et approximants de Padé. Nous avons choisi cette dernière approche, et rappellerons dans la suite qu'elle est équivalente à un développement spécifique en fractions continues. L'application des approximants de Padé à la réduction de systèmes linéaires de dimension finie (il s'agit alors de réduire l'ordre du système, et donc la complexité des problèmes de contrôle, d'identification et de surveillance qui lui sont associés) a fait l'objet de très nombreux travaux. Beaucoup de ces travaux sont passés en revue et reliés les uns aux autres dans l'article de A. Bultheel et M. Van Barel [23]. Pour une introduction rapide et moderne aux approximants de Padé en général, nous suggérons la lecture du chapitre de C. Brezinski et J. Van Iseghem, consacré à ce sujet, dans l'ouvrage collectif [20], tandis que le livre de G. Baker et P. Graves-Morris [1] est sans conteste un ouvrage de référence sur le sujet. Pour notre part, nous nous contenterons de rappeler les définitions et les résultats élémentaires qui nous sont nécessaires.

Définition 2.1 Soit $G(s)$ une série formelle à coefficients complexes de la forme $G(s) = c_0 + c_1s + c_2s^2 + c_3s^3 + \dots$. L'approximant de Padé d'ordre (p, q) , noté $[p/q]_G(s)$ de cette série est la fonction rationnelle $N(s)/D(s)$ telle que :

- (i) $\deg(N) \leq p$
- (ii) $\deg(D) \leq q$
- (iii) $N(s) - G(s) \cdot D(s) = O(s^{p+q+1})$ lorsque $s \rightarrow 0$

L'approximation peut être définie, de manière similaire, en n'importe quel point $s = \bar{s}$ du plan complexe, à l'aide d'une translation, comme

$$[p/q]_{G(s)}^{s=\bar{s}}(s) := [p/q]_{G(s+\bar{s})}^{s=0}(s) \quad (2.4)$$

Un simple calcul d'identification des coefficients de même puissance, entre la série $G(s)$ et la série de Taylor de l'approximant de Padé écrit sous la forme

$$[p/q]_G(s) = \frac{n_0 + n_1s + n_2s^2 + \dots + n_p s^p}{d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_q s^q} \quad (2.5)$$

conduit à un système d'équations linéaires d'ordre $(p + q + 2)$, dont les inconnues sont les coefficients n_i et d_i , qui possède toujours une solution non triviale (voir [20]).

dans le demi-plan complexe $\operatorname{Re}(s) > 0$. La fonction de transfert $G(s)$ est donc aussi définie dans ce demi-plan.

Dans l'article [64], les auteurs ont développé une méthode permettant de réaliser les fonctions de transfert rationnelles de type (2.5) par des circuits ne comportant que des éléments classiques (résistances, capacités et transformateurs). Malheureusement, la réalisation proposée dans cet article est celle d'un transfert entre des grandeurs efforts et flux mesurées à différents points du circuit. Cette réalisation ne permet donc pas de considérer la fonction rationnelle donnée comme l'impédance d'un élément généralisé qui puisse être connecté tel quel à un port énergétique. Pour cela, il faut impérativement fournir la réalisation des fonctions rationnelles du type (2.5) comme fonction de transfert entre l'effort et le flux à un même accès énergétique extérieur, autrement dit comme impédance d'un circuit qui ne possède pas d'autres accès énergétiques extérieurs. Ceci permettra ensuite d'analyser le comportement énergétique de chacune des approximations successives (par exemple, leur passivité), et finalement de leur limite (qui doit être la fonction de transfert non rationnelle). C'est en vue de satisfaire cette contrainte, que nous allons étudier les relations qui lient les approximants de Padé et les développements en fractions continues. Ceci nous conduira à un développement des approximations successives de la fonction de transfert aisé à réaliser comme impédance d'un système à un accès énergétique.

2.1.2 Relations entre approximant de Padé et fractions continues

Nous renvoyons aux références [23] et [1] pour des développements complets des liens qui unissent les approximants de Padé et les développements en fractions continues. Pour notre part, nous utiliserons les notations qui suivent pour désigner les développements en fractions continues et leurs k^{e} -convergents :

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}} = \sum_{n \geq 1} \left\lceil \frac{a_n}{b_n} \right\rceil \quad (2.6)$$

$$\sum_{1 \leq n \leq k} \left\lceil \frac{a_n}{b_n} \right\rceil \quad (2.7)$$

Soit $G(s)$ une série formelle du type :

$$G(s) := \sum_{n \geq 0} g_n \cdot s^n \quad (2.8)$$

Il est connu (voir, par exemple, [57]) que, si $g_n \neq 0 \quad \forall n \geq 0$, à partir des itérations de l'algorithme quotient-différence de Rutishauser (QD), écrit sous

la forme des itérations :

$$\begin{aligned}
 e_k^{(n)} &:= \left(e_{k-1}^{(n+1)} + q_k^{(n+1)} \right) - q_k^{(n)} \quad n, k \geq 0 & (2.9) \\
 q_{k+1}^{(n)} &:= \frac{\left(e_k^{(n+1)} \cdot q_k^{(n+1)} \right)}{e_k^{(n)}} \quad n, k \geq 0 \\
 q_0^{(n)} &:= g_{n+1}/g_n \quad n \geq 0 \\
 e_0^{(n)} &:= 0 \quad n \geq 0
 \end{aligned}$$

on obtient un développement formel équivalent de (2.8) sous la forme :

$$G(s) = \left\lceil \frac{g_0}{1} \right\rceil + \sum_{n \geq 1} \left\lceil \frac{-\alpha_n \cdot s}{1} \right\rceil \quad (2.10)$$

où $\alpha_{2n+1} := q_n^{(0)}$ et $\alpha_{2n+2} := e_n^{(0)}$, pour tout $n \geq 0$). Toujours formellement, cet algorithme QD est réversible, et il existe donc une bijection entre les deux représentations formelles (2.8) et (2.10).

Remarque 2 *Ecrit sous la forme des itérations (2.9), l'algorithme QD est numériquement instable. Il convient donc, soit d'effectuer les opérations en calcul symbolique, soit de modifier ces itérations à l'aide de formules d'initialisation appropriées (voir, par exemple, les formules d'initialisation de Wronski dans [57]). Dans l'application de ces formules au cas de l'intégrateur d'ordre non entier, les calculs symboliques pourront s'effectuer sans difficultés majeures (voir section 2.3, ci-après). Si pour un $n \geq 0$, $g_n = 0$, des transformations élémentaires de la série (2.8) peuvent être effectuées, et conduisent à une autre fraction continue similaire (voir [1]).*

Définition 2.2 *Deux fractions continues sont dites équivalentes, si leurs convergents d'ordre k sont égaux, pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Il est alors facile de vérifier que la classe des fractions continues équivalentes à (2.6) est donnée par :

$$\left\{ \left\lceil \frac{k_1 \cdot a_1}{k_1 \cdot b_1} \right\rceil + \sum_{n \geq 2} \left\lceil \frac{k_{n-1} \cdot k_n \cdot a_n}{k_n \cdot b_n} \right\rceil \mid k_n \neq 0, \forall n \geq 0 \right\} \quad (2.11)$$

En conséquence, en définissant la suite $\{k_n\}_{n \geq 1}$ par les itérations :

$$\begin{aligned}
 k_1 &:= 1/h_0 & (2.12) \\
 k_n &:= 1/(\alpha_{n-1} \cdot k_{n-1})
 \end{aligned}$$

on observe que la fraction continue (2.10) est équivalente à :

$$G(s) = \left\lceil \frac{1}{b_1} \right\rceil + \sum_{n \geq 1} \left\lceil \frac{s}{b_n} \right\rceil \quad (2.13)$$

avec $b_1 := k_1$ et $b_n := -k_n$. Le développement (2.13) est appelé seconde forme de Cauey, et sera notre point de départ pour la synthèse de $G(s)$.

Remarque 3 Si la fonction de transfert $G(s)$ est donnée sous la forme d'un quotient, et qu'il est plus commode de la développer en série formelle sous la forme :

$$G(s) = \frac{\sum_{n \geq 0} n_n \cdot s^n}{\sum_{m \geq 0} d_m \cdot s^m} \quad (2.14)$$

il est possible d'utiliser une version modifiée de l'algorithme QD, appelée algorithme de division de Routh, qui établit de la même manière une correspondance entre la série formelle (2.14) et la seconde forme de Cauey (2.13) (voir [23], pour les détails). Les itérations de cet algorithme de Routh, qui donnent directement les coefficients b_i de (2.13), sont :

$$\begin{aligned} c_{n+1}^{(k)} &:= c_{n-1}^{(k+1)} - b_{n+1} \cdot c_n^{(k+1)}, k \geq 0, n \geq 0 \\ b_{n+1} &:= c_{n-1}^{(0)} / c_n^{(0)}, n \geq 0 \\ c_{-1}^{(k)} &:= d_k, k \geq 0 \\ c_0^{(k)} &:= n_k, k \geq 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Comparant les équations (2.8) et (2.13), il apparaît qu'il existe une équivalence formelle entre le développement en fraction continue de la seconde forme de Cauey à l'ordre $2k$, et le développement de l'approximant de Padé d'ordre $[k - 1/k]$. Cette équivalence est formalisée dans le théorème suivant, extrait de [23].

Théorème 2.3 *Le $2k^{\text{e}}$ ($k \geq 1$) convergent de la fraction continue (2.13) possède les propriétés suivantes :*

- (i) *Il est irréductible*
- (ii) *Le numérateur est de degré $k - 1$ et le dénominateur de degré k*
- (iii) *C'est l'approximant de Padé d'ordre $[k - 1/k]$ de $G(s)$, c'est-à-dire :*

$$G(s) - \left(\left\lceil \frac{1}{b_1} \right\rceil + \sum_{n=2}^{2k} \left\lceil \frac{s}{b_n} \right\rceil \right) = O(s^{2k}), s \rightarrow 0$$

Démonstration. Voir [23] ■

Il est naturel, si nous souhaitons réaliser la suite d'approximations de $G(s)$ par une suite de bond graphs similaires, que nous ne puissions pas sélectionner n'importe quelle suite d'approximants $\{[p_k/q_k]_{G(s)}\}_{k \geq 1}$. En plus des impératifs liés à la convergence, il est nécessaire que les approximations rationnelles partagent un certain nombre de propriétés structurelles en commun : stabilité, passivité et comportement dynamique similaire sur une large bande de fréquence. C'est pourquoi, nous nous restreignons, a priori, à l'étude de la suite d'approximants $\{[k - 1/k]_{G(s)}\}_{k \geq 1}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Les approximations seront donc chacune des fractions rationnelles strictement propres. La table 2.1 ci-dessous reprend la suite d'approximants de Padé $[p/q]$, qui correspondent aux ordres successifs du développement en fraction continue (2.13), et qui sont calculés par l'algorithme QD (ou l'algorithme de division de Routh). Dans cette table les approximants de Padé d'ordre $[k - 1/k]$, $k \in \mathbb{N}_0$ sont ceux de la sous-diagonale descendante.

p	1	2	3	4	...
q					
1	•				
2	•*	•			
3		•*	•		
4			•*	•	

Table 2.1: ordres des approximants de Padé successifs

• : suite des approximants de Padé d'ordre $[p_k/q_k]$, calculés par l'algorithme QD à partir du développement en série formelle de $G(s)$

* : suite sélectionnée des approximants de Padé de $G(s)$, d'ordre $[k - 1/k]$ (sous-diagonale descendante)

2.1.3 Réalisation bond graph

Considérons maintenant que la fonction de transfert $G(s)$ relie l'effort et le flux à l'accès d'un élément fonctionnel, comme dans le cas du modèle de digue poreuse de l'équation (6.279). Ceci est représenté schématiquement à la figure 2.1, où $Y(s)$ et $U(s)$ correspondent respectivement aux transformées de Laplace de l'effort et du flux.

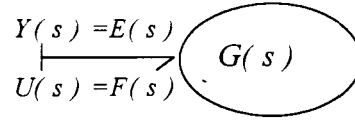


Figure 2.1: Vue schématique d'un élément fonctionnel dont l'effort est la sortie, le flux est l'entrée, et l'équation constitutive est spécifiée par la fonction de transfert $G(s)$.

Considérons de plus que la suite d'approximants de Padé d'ordre $[k-1/k]$ de $G(s)$ a été calculée, et que la seconde forme de Caueur correspondante est :

$$Y(s) = \left(\sum_{1 \leq n \leq r} \left\lceil \frac{a_n}{b_n} \right\rceil \right) \cdot U(s) \quad (2.16)$$

$$r = 2k, a_1 = 1, a_n = s, \forall n \geq 2$$

où les coefficients $b_n, n = 1, \dots, 2k$ sont donnés par (2.13). Nous allons dans un premier temps écrire la fraction continue (2.16) comme la limite d'une récurrence à trois termes. Il s'agit là d'une manipulation formelle classique (voir, par exemple, [102] pour une étude complète de ces récurrences). Le lemme qui suit est une adaptation d'un résultat de [23] auquel nous avons ajouté une condition de terminaison, afin qu'il s'applique à chaque convergent, et non seulement à leur limite.

Lemme 2.4 *Le schéma itératif :*

$$X_{i+2}(s) := a_i \cdot X_i(s) - b_i \cdot X_{i+1}(s), 1 \leq i \leq r-1 \quad (2.17)$$

muni de la condition terminale :

$$X_{r+2}(s) := a_r \cdot X_r(s) - b_r \cdot X_{r+1}(s) = 0 \quad (2.18)$$

conduit aux relations :

$$X_i(s) = \left(\sum_{i-1 \leq n \leq r} \left\lceil \frac{a_n}{b_n} \right\rceil \right) \cdot X_{i-1}(s) \quad (2.19)$$

valables pour $2 \leq i \leq r+1$.

Démonstration. La condition (2.18) peut s'écrire :

$$X_{r+1}(s) = \left[\frac{a_r}{b_r} \right] \cdot X_r(s) \quad (2.20)$$

qui est exactement la relation (2.19) pour $i = r+1$. Nous allons donc raisonner par induction, en supposant que l'équation (2.19) est vérifiée pour une valeur $i = \bar{i}$ fixée entre 3 et $r+1$, et en démontrant que, dans ce cas, elle est aussi satisfaite pour $i = \bar{i} - 1$.

En combinant cette hypothèse inductive à la $(\bar{i} - 2)^{\text{e}}$ équation de (2.17), on obtient :

$$a_{\bar{i}-2} \cdot X_{\bar{i}-2}(s) - b_{\bar{i}-2} \cdot X_{\bar{i}-1}(s) = \left(\sum_{\bar{i}-1 \leq n \leq r} \left[\frac{a_n}{b_n} \right] \right) \cdot \tilde{X}_{\bar{i}-1}(s) \quad (2.21)$$

Or cette dernière équation peut être écrite, de manière équivalente, sous la forme :

$$X_{\bar{i}-1}(s) = \left(\sum_{\bar{i}-2 \leq n \leq r} \left[\frac{a_n}{b_n} \right] \right) \cdot X_{\bar{i}-2}(s) \quad (2.22)$$

Ce qui est exactement l'hypothèse inductive pour $i = \bar{i} - 1$ et donc conclut la démonstration. ■

La récurrence à trois termes (2.17), qui définit la transformée $X_2(s) := Y(s)$ comme le résultat de la mise en cascade de systèmes dynamiques d'ordre 1 appliqués à l'entrée $X_1(s) := U(s)$, nous suggère que le r^{e} convergent de la seconde forme de Cauey peut être réalisé par la connexion de cellules comportant un seul élément dynamique, et présentant toutes la même structure. Quelques considérations supplémentaires peuvent nous aider à construire cette connexion qui réaliserait la fonction de transfert approchée :

- Comme le développement en fraction continue (2.16) est caractérisé par r coefficients, il semble indiqué d'utiliser r éléments linéaires pour le réaliser.
- Puisque le développement en fraction continue (2.16), une fois réduit à une fraction rationnelle, est l'approximant de Padé $[k - 1/k]_{G(s)}$, son dénominateur est donc de degré k . Donc il est naturel de prévoir k éléments dynamiques (ce seront k capacités linéaires indépendantes) dans le circuit de réalisation.
- Les variables $X_i(s)$, pour $k \geq 3$ n'ont pas encore reçu de signification physique. Cependant, comme elles devront être intégrées en cascade, pour réaliser les itérations (2.17), elles devront être proportionnelles au flux entrant dans les capacités.

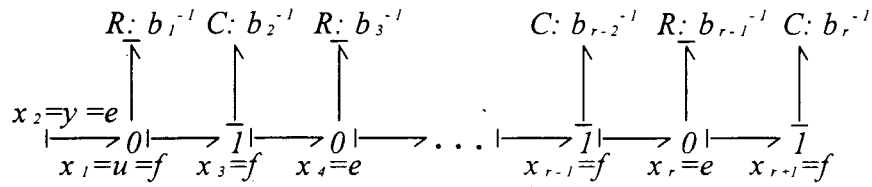


Figure 2.2: Filtre RC qui réalise l'ensemble des transferts (2.19) : représentation bond graph.

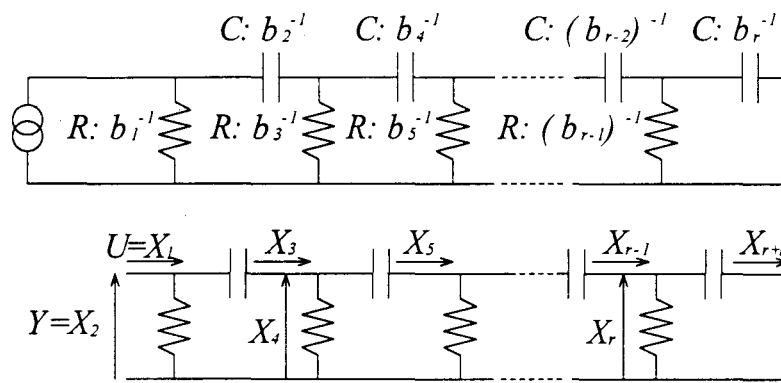


Figure 2.3: Filtre RC qui réalise l'ensemble des transferts (2.19) : représentation par circuit électrique

Toutes ces considérations, et des impératifs de simplicité, nous ont conduit à proposer, comme réalisation de $[k - 1/k]_{G(s)}$, le filtre RC dont le bond graph et le circuit électrique équivalent sont représentés respectivement à la figure (2.2) et à la figure (2.3).

Cette figure illustre le choix de la structure de jonction utilisée pour réaliser l'ensemble des itérations (2.19), ainsi que les choix des variables x_i et des valeurs des capacitances et des résistances.

Théorème 2.5 *La fonction de transfert entrée-sortie correspondant au bond graph de la figure (2.2) peut être écrite sous la forme du r^{e} convergent d'une fraction continue de la deuxième forme de Cauer, à savoir :*

$$Y(s) = \left(\left[\frac{1}{b_1} \right] + \sum_{2 \leq n \leq r} \left[\frac{s}{b_n} \right] \right) \cdot U(s) \quad (2.23)$$

Démonstration. L'équation constitutive de la capacité de valeur b_r^{-1} permet d'écrire :

$$X_r(s) = \left(\frac{b_r}{s} \right) \cdot X_{r+1}(s) \quad (2.24)$$

tandis que l'équation constitutive de toutes les résistances intermédiaires s'écrivent sous la forme :

$$X_{2i+1}(s) = X_{2i-1}(s) - b_{2i-1} \cdot X_{2i}(s), \quad 1 \leq i \leq k \quad (2.25)$$

En ce qui concerne les capacités intermédiaires, on a :

$$X_{2j-2}(s) = X_{2j}(s) + \frac{b_{2j-2}}{s} \cdot X_{2j-1}(s), \quad 2 \leq j \leq k \quad (2.26)$$

Les équations (2.25) et (2.26) définissent un schéma itératif muni de la condition de terminaison (2.24). A l'aide du lemme 2.4, on obtient donc le développement en fraction continue du transfert liant $X_2(s) = Y(s)$ et $X_1(s) = U(s)$:

$$Y(s) = \left(\sum_{1 \leq n \leq k} \left[\frac{1}{b_{2n-1}} \right] + \left[\frac{1}{\frac{b_{2n}}{s}} \right] \right) \cdot U(s) \quad (2.27)$$

Il suffit alors d'utiliser la caractérisation de la classe d'équivalence d'une fraction continue (équation (2.11)), avec un choix de paramètre :

$$\begin{aligned} k_{2n-1} &:= 1, \quad 1 \leq n \leq k \\ k_{2n} &:= s \end{aligned} \quad (2.28)$$

pour déduire que la fraction continue (2.27) est équivalente à la fraction continue apparaissant dans :

$$Y(s) = \left(\left[\frac{1}{b_1} \right] + \sum_{2 \leq n \leq r} \left[\frac{s}{b_n} \right] \right) \cdot U(s)$$

Cette remarque conclut la démonstration. ■

Remarque 4 Rappelons encore que le calcul des coefficients b_i utilisant l'algorithme QD (ou l'algorithme de division de Routh) n'est pas numériquement stable (sans un préconditionnement adéquat) et peut donc conduire à une explosion rapide des erreurs d'arrondis. Par ailleurs, lorsque les valeurs intermédiaires $X_i(s)$ sont nécessaires, il est préférable d'utiliser la récurrence à trois termes (2.17) pour les calculer, plutôt que l'évaluation explicite des convergents successifs qui demande un effort de calcul conséquent.

La parité de r est essentielle dans la démonstration du théorème de réalisation ci-dessus. Elle apparaît naturellement du fait que seule la sous-diagonale des approximants de Padé d'ordre $[k - 1/k]$, $k \in \mathbb{N}_0$ a été considérée, dans la table 2.1. Elle conduit à considérer des cellules RC parallèles comme blocs élémentaires de la réalisation et assure une propriété de permanence aux calculs itératifs. En effet, passer d'un approximant d'ordre $[k - 1/k]$ à un approximant d'ordre $[k/k + 1]$ ne nécessite que le calcul des coefficients b_{2k+1} et b_{2k+2} et préserve donc les acquis des calculs précédents. Les approximants de Padé à partir desquels sont calculés ces coefficients peuvent eux-mêmes être déterminés à l'aide de récurrences à trois termes (voir [20]). Il suffit alors, pour réaliser une élévation de l'ordre d'approximation, d'ajouter la cellule RC correspondante en queue du filtre. Cette propriété de permanence est bien sûr très utile quand l'ordre d'approximation n'a pas été fixé a priori, mais est déterminé par le respect d'une tolérance sur l'erreur, a posteriori. Enfin, notons que les approximations successives sont toutes des fonctions rationnelles strictement propres, et sont toutes réalisées par des circuits similaires, qui partagent les mêmes propriétés structurelles de causalité, de stabilité et de passivité. Nous montrerons dans la section suivante qu'une raison additionnelle de choisir les approximants de Padé d'ordre $[k - 1/k]$ est l'excellente propriété de convergence de cette suite d'approximation, pour le cas des systèmes que nous traitons dans la suite (ceux dont l'impédance est une série de Stieltjes).

Dans le cas où la fonction à approcher $G(s)$ a un gain statique nul, c'est-à-dire dans le cas où :

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 0 \quad (2.29)$$

il peut être souhaitable que l'approximation ait aussi un gain statique nul. Si, par chance, $G(s) = O(s)$ lorsque $s \rightarrow 0$, il suffit de calculer les approximants de Padé d'ordre $[k - 1/k]$ de la fonction $G(s)/s$. Le développement en fraction continue du transfert entrée-sortie donnera dans ce cas :

$$Y(s) = \left(r \frac{s}{b_1} \text{J} + \sum_{2 \leq n \leq r} r \frac{s}{b_n} \text{J} \right) \cdot U(s) \quad (2.30)$$

Cette fonction de transfert peut être réalisée en adjoignant une capacité en tête du filtre de la figure 2.2, et en décalant en conséquence les valeurs des paramètres de ce filtre. Bien entendu, la même remarque s'applique si un comportement $G(s) = O(1)$, lorsque $s \rightarrow \infty$, est requis.

Dans le cas où les spécifications du problème imposent un comportement en s^{-p} , avec $p \geq 2$ pour $s \rightarrow 0$ ou pour $s \rightarrow \infty$, il est nécessaire d'avoir recours à la sous-diagonale des approximants d'ordre $[k - p/k]$. Il existe d'autres

formes de développement en fractions continues pour ces sous-diagonales (voir [20]). Les récurrences qui les caractérisent sont alors d'un ordre p (voir [1]), et d'autres cellules élémentaires, comportant p éléments dynamiques, seront nécessaires pour les réaliser. Cependant, à notre connaissance, la réalisation par des filtres de ces itérations d'ordre supérieur (qui n'existe pas toujours) demeure un problème ouvert.

2.2 Filtres passifs, convergence, et Séries de Stieltjes

Critiqué pour son usage de manipulations formelles sur des séries divergentes sans en comprendre le sens "mathématique", Oliver Heaviside (Camden 1850 - Torquay 1925) répondit : Devrais-je refuser un bon déjeuner simplement parce que je ne comprends pas en profondeur le processus de digestion? [96]

Cette section est consacrée à l'étude de deux questions en rapport avec les résultats formels d'approximation de la section précédente : la question de la convergence de la suite des approximants $\{[k - 1/k]_{G(s)}\}_{k \geq 1}$ dans $\text{Re}(s) \geq 0$, et la question de la positivité des coefficients b_i .

Ces coefficients sont les valeurs des capacités et des résistances du circuit qui réalise le transfert approché. Une valeur b_i négative (strictement) impliquerait la création infinie d'énergie au sein de ce circuit. En effet, à titre d'exemple, si $b_i^{-1} < 0$ est la valeur d'une "résistance", alors en connectant cette résistance à une capacité unitaire avec charge initiale unitaire, on obtiendrait comme charge dans la capacité :

$$q(t) = e^{-b_i t}$$

et donc comme énergie stockée par le circuit

$$E(t) = \frac{1}{2} (e^{-2b_i t} - 1) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$

La résistance de valeur b_i^{-1} aurait alors un comportement énergétique similaire à celui d'une source, et il n'y aurait pas de sens à proposer un filtre RC comme réalisation de la fonction de transfert approchée.

Les fonctions de transfert, dont le développement en fractions continues de la seconde forme de Caer donne lieu à des coefficients b_i tous positifs, sont les séries de Stieltjes.

2.2.1 Séries de Stieltjes

Définition 2.6 Une série de Stieltjes est une série alternée de la forme :

$$G(s) := \sum_{i \geq 0} g_i \cdot (-s)^i \quad (2.31)$$

où les coefficients g_i sont les moments successifs d'une mesure positive, bornée $d\varphi(\xi)$ définie sur \mathbb{R}_+ , autrement dit :

$$g_i := \int_0^\infty \xi^i d\varphi(\xi) \quad (2.32)$$

La fonction de Stieltjes associée à cette mesure est définie par :

$$g(s) := \int_0^\infty \frac{d\varphi(\xi)}{1 + \xi \cdot s} \quad (2.33)$$

Formellement, la série $G(s)$ est donc le développement en série de la fonction $g(s)$, bien que cette série puisse ne converger nulle part, excepté en $s = 0$, alors que la fonction de Stieltjes associée (2.33) est analytique dans la coupure du plan complexe $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$. Il est possible de caractériser les suites de coefficients g_i qui définissent une série de Stieltjes. C'est l'objet du théorème suivant. Nous utiliserons cette caractérisation afin de déterminer si, a priori, une fonction de transfert donnée peut éventuellement (condition nécessaire) s'écrire comme série de Stieltjes.

Théorème 2.7 Si $G(s)$ est une série de Stieltjes, alors $D(i, j) > 0$, quels que soient $i, j \geq 0$, où les déterminants $D(i, j)$ sont définis par :

$$D(i, j) := \det \begin{pmatrix} g_i & g_{i+1} & \cdots & g_{i+j} \\ g_{i+1} & g_{i+2} & \cdots & g_{i+j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{i+j} & g_{i+j+1} & \cdots & g_{i+2j} \end{pmatrix} ; i, j \geq 0 \quad (2.34)$$

Démonstration. Voir [20] ■

Remarque 5 Cette condition nécessaire est en fait aussi suffisante, dans la mesure où $G(s)$ est déterminée de manière univoque par sa série de puissances. C'est le cas, par exemple, si $G(s)$ est analytique dans un voisinage de $s = 0$ (Voir [20]).

Un important corollaire de ce théorème est que tous les coefficients b_i du développement de $G(s)$ en fraction continue de la seconde forme de Caer sont positifs, si $G(s)$ est une série de Stieltjes.

Corollaire 2.8 *Pour toute série de Stieltjes, il existe un développement en fraction continue de la seconde forme de Caer :*

$$S(s) = \frac{1}{b_1} + \sum_{n \geq 2} \frac{s}{b_n} \quad (2.35)$$

pour lequel les coefficients b_i sont positifs, pour tout $i \geq 2$.

Démonstration. L'idée de la démonstration est élémentaire. Elle consiste à constater que l'algorithme QD (équations (2.9)) peut s'écrire matriciellement, faisant apparaître les déterminants $D(i, j)$ dans l'expression des coefficients de la fraction continue (2.35). On constate alors que tous les b_i sont positifs si les déterminants $D(i, j)$ le sont. Les calculs complets peuvent être trouvés dans [1], sections IV.3 et V.1 ■

La conséquence pour nous de ce corollaire est que l'ensemble des capacités et des résistances linéaires, utilisées pour la réalisation d'une fonction de transfert qui est, formellement, une série de Stieltjes, ont bien des valeurs positives. Le transfert est donc, dans ce cas, réalisé par un filtre passif.

2.2.2 Convergence de l'approximation

Dans cette section, nous allons établir la convergence des approximants de Padé pour le cas particulier des séries de Stieltjes de rayon de convergence non nul.

Considérons les fonctions de Stieltjes $g(s)$ pour lesquelles la mesure $d\varphi(\xi)$ est nulle sur $[R^{-1}, \infty)$, avec $R > 0$. Dans ce cas, on a :

$$g(s) = \int_0^{R^{-1}} \frac{d\varphi(\xi)}{1 + \xi \cdot s} \quad (2.36)$$

La fonction $g(s)$ est donc analytique dans tout ouvert de $\mathbb{C} \setminus [-\infty, -R]$. En conséquence, son développement en série de Stieltjes, défini par (2.31) et (2.32), est convergent dans le disque $|s| < R$. On a donc :

$$G(s) = \sum_{i \geq 0} g_i \cdot (-s)^i = g(s), \forall s \in \{s \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |s| < R\} \quad (2.37)$$

et non plus seulement une identité formelle. C'est ce rayon de convergence non nul qui conduit à une propriété de convergence "maximale", aisément

démontrée. de la suite des approximants de Padé d'ordre $[k-1/k]$. Par "maximale", il faut entendre sur le plus grand domaine possible du plan complexe. Les pôles de la fonction de Stieltjes résident tous sur le demi axe réel, dans l'intervalle $-\infty < \operatorname{Re}(s) < -R$. En fait, il en est de même pour les pôles de tous les approximants de Padé d'ordre $[q+k/q]$ de cette fonction, avec $k \geq -1$ (voir [1], section V.2), et le théorème qui suit est maximal en ce sens qu'il assure la convergence dans tout domaine ouvert de $\mathbb{C} \setminus [-\infty, -R]$. Pour l'essentiel, la démonstration de ce résultat est un cas particulier de la démonstration d'un résultat de convergence plus général qui peut être trouvée dans [20]. Nous la reprenons ici, à la fois à cause du caractère central de ce résultat, dans le cas qui nous occupe, et parce qu'elle introduit des notations qui nous seront nécessaires pour optimiser la convergence, dans le cas particulier où seule la réponse en fréquence nous intéresse ($G(s)$ sur le demi-axe $s = j\omega$).

Remarque 6 *L'étude de la suite des approximants de Padé d'ordre $[k-1/k]$ a également été réalisée dans le cas où la fonction approchée est une série de Stieltjes de rayon de convergence nul (cas des séries formelles). Certaines conditions supplémentaires sont alors requises pour assurer la convergence (critère de Carleman, voir [1], section V.5). Dans l'application de la méthode au cas de l'intégrateur implicite d'ordre non entier (section 2.3), nous n'aurons pas besoin de ces résultats.*

Théorème 2.9 *Soit $G(s)$ une série de Stieltjes de rayon de convergence $R > 0$, et $\{[k-1/k]_G\}_{k \geq 1}$ la suite correspondante d'approximants de Padé. Soit $0 < \Delta < R$ et $\rho := R - \Delta > 0$ (Δ est la distance entre le domaine d'approximation et le demi-axe réel $]-\infty, -R]$). Considérons le domaine d'approximation représenté figure(2.4), et défini par :*

$$D(\Delta) := \{s \in \mathbb{C} \mid |s| < R_{\max} \text{ et distance}(s,]-\infty, -R]) > \Delta\} \quad (2.38)$$

Alors, $\forall s \in D(\Delta)$, l'erreur d'approximation satisfait la majoration :

$$|[k-1/k](s) - h(s)| \leq C \cdot \left| \frac{\sqrt{\rho+s} - \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho+s} + \sqrt{\rho}} \right|^{2k} \quad (2.39)$$

où C est une constante réelle positive.

Le domaine $D(\Delta)$, représenté figure (2.4), est bien le plus large domaine de convergence auquel on puisse s'attendre, car R_{\max} peut être arbitrairement grand, et Δ , arbitrairement petit. Il existe donc toujours un domaine $D(\Delta)$ qui recouvre n'importe quel ouvert de $\mathbb{C} \setminus [-\infty, -R]$.

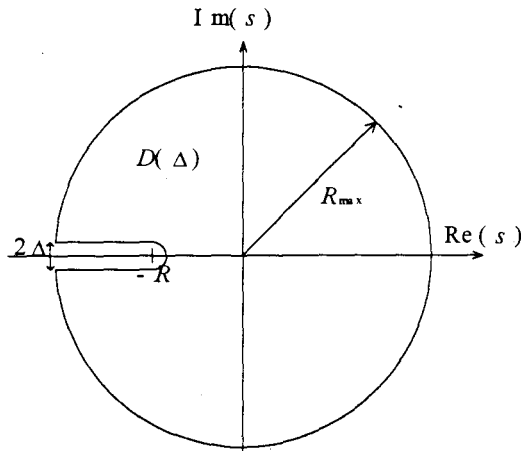


Figure 2.4: Le domaine de convergence du théorème 2.9.

Une conséquence directe du théorème 2.9 est donc la convergence uniforme de $[k - 1/k]_{k \geq 1}$ dans n'importe quel ouvert de $\mathbb{C} \setminus [-\infty, -R]$. Une autre conséquence sera son application à la réponse en fréquence, présentée après la démonstration. Cette démonstration nécessite l'utilisation du lemme de Schwarz, qui assure qu'une fonction analytique dans un disque du plan complexe atteint sa valeur maximale sur la frontière de ce disque.

Lemme 2.10 Soit $h(s)$ une fonction analytique dans $|s| < K$ et continue dans $|s| \leq K$. Si

$$h(0) = h'(0) = \dots = h^{(n-1)}(0) = h^{(n)}(0) = 0 \tag{2.40}$$

et

$$\max_{|s|=K} |h(s)| = M \tag{2.41}$$

alors

$$|h(s)| \leq M \cdot \left| \frac{s}{K} \right|^{n+1} \text{ if } |s| \leq K \tag{2.42}$$

Démonstration. (théorème 2.9) Considérons l'application conforme définie par

$$s \xrightarrow{\frac{\sqrt{\rho+s}-\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho+s}+\sqrt{\rho}}} w \tag{2.43}$$

$$\xleftarrow{\frac{4\rho w}{(1-w)^2}}$$

Elle applique le cercle unité dans le plan w , défini par $w = e^{j\theta}$, où $\theta \in [0, 2\pi[$, sur la courbe d'équation $s = -2\rho(1 - \cos\theta)^{-1}$. Cette équation est l'équation

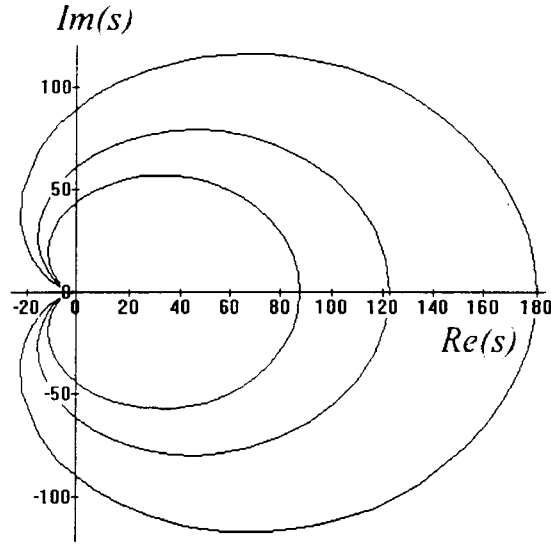


Figure 2.5: Domaines cardioïdes qui sont l'image de disques de différents rayons R_d par la transformation conforme (2.43). Les valeurs des paramètres sont $\rho = 1/2$, et $R_d = 0.86, 0.88$ ou 0.9 .

paramétrique du demi-axe réel $]-\infty, -\rho]$ dans le plan s . Par ailleurs, un disque défini comme l'intérieur d'un cercle d'équation $w = R_d \cdot e^{j\theta}$, avec $R_d < 1$, est appliqué sur l'intérieur d'une cardioïde. Trois de ces cardioïdes sont représentées à la figure (2.5). Elles correspondent aux trois valeurs $R_d = .86$, $R_d = .88$ et $R_d = .9$, et ont été calculées pour $\rho = 1/2$. Lorsque $R_d \rightarrow 1^-$, l'intérieur du domaine cardioïde correspondant s'élargit, jusqu'à atteindre l'entièreté de $\mathbb{C} \setminus [-\infty, -\rho]$.

Donc, tout domaine d'approximation $D(\Delta)$ tel celui de la figure (2.4), peut être inclus dans l'image, dans le plan s , d'un disque de rayon R_d suffisamment proche de 1 du plan w . Nous pouvons donc, en utilisant la transformation conforme (2.43), nous restreindre à l'étude de l'erreur d'approximation à l'intérieur d'un disque de rayon R_d . Définissons la fonction erreur par :

$$\delta_k(w) := |[k - 1/k](s(w)) - h(s(w))| \quad (2.44)$$

Comme w et s sont asymptotiquement équivalents lorsque $s \rightarrow 0$ (par la définition de l'application conforme(2.43)), la définition des approximants de Padé implique :

$$\delta_k(0) = \delta_k'(0) = \dots = \delta_k^{(2k-1)}(0) = 0 \quad (2.45)$$

Toujours par la conformité de l'application (2.43), nous savons que $\delta_k(w)$ est analytique et continue dans le disque $|w| \leq K$, où $K < 1$ est une constante choisie de telle manière que l'image inverse du disque de rayon K contienne le domaine d'approximation $D(\Delta)$. Donc en appliquant le lemme 2.10, nous pouvons déduire la majoration

$$\delta_k(w) \leq M \cdot \left| \frac{w}{K} \right|^{2k} \quad (2.46)$$

avec

$$M := \max_{|w|=K} |\delta_k(w)| \quad (2.47)$$

Pour conclure la démonstration, il suffit de remarquer que (2.46) peut être écrite de manière équivalente, dans le plan s :

$$\delta_k(s) \leq M \cdot \left| \frac{1}{K} \cdot \frac{\sqrt{\rho+s} - \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho+s} + \sqrt{\rho}} \right|^{2k} \quad (2.48)$$

et qui cette majoration est satisfaite dans un domaine cardioïde qui contient $D(\Delta)$. ■

2.2.3 Approximation de la réponse en fréquence

Si nous considérons le problème d'approximation de la réponse en fréquence d'un opérateur, c'est-à-dire l'approximation de la fonction de transfert $G(s)$ sur le demi-axe imaginaire $s = j\omega$, la majoration sur l'erreur (2.48) devient

$$\delta_k(j\omega) \leq M \cdot \left| \frac{1}{K} \cdot \frac{\sqrt{1+jx} - 1}{\sqrt{1+jx} + 1} \right|^{2k} \quad (2.49)$$

où $x := \omega/\rho$. Cette borne supérieure sur l'erreur sera minimale pour la plus petite valeur possible pour x , c'est-à-dire, à pulsation ω fixée, pour la plus grande valeur possible pour ρ . En effet, la fonction

$$f : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow]0, 1[: x \mapsto f(x) := \left| \frac{\sqrt{1+jx} - 1}{\sqrt{1+jx} + 1} \right| \quad (2.50)$$

qui est représentée à la figure (2.6) est monotone croissante.

Lorsque une bonne précision est souhaitée sur une bande de fréquence $[0, \frac{\Omega}{2\pi}] Hz$, il faut que l'erreur d'approximation reste "raisonnable" sur un domaine du plan complexe qui inclut le segment $[0, j\Omega]$ de l'axe imaginaire. Au vu de la définition de l'application conforme (2.43), cela implique que K soit choisi tel que

$$\frac{4\rho K(1+K^2)}{(1-K^2)^2} \geq \Omega \quad (2.51)$$

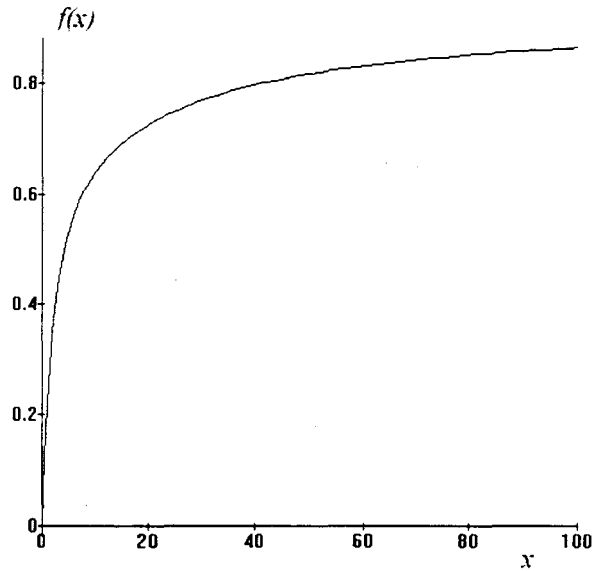


Figure 2.6: $f(x)$ définie par l'équation (2.50) est une fonction monotone croissante.

en respectant la contrainte additionnelle $K \in]0, 1[$. Ces inégalités peuvent encore être écrites sous la forme

$$\frac{1 + \sqrt{1 + (\Omega/\rho)^2} - \sqrt{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + (\Omega/\rho)^2}}}{(\Omega/\rho)} \leq K < 1 \quad (2.52)$$

La condition (2.52) est donc suffisante pour que la majoration sur l'erreur soit applicable sur le segment $s \in [0, j\Omega]$. La seule contrainte sur ρ est que sa valeur ne peut être supérieure à R , de manière à ce que la fonction erreur reste analytique à l'intérieur du domaine cardioïde. En utilisant cette valeur limite $\rho \rightarrow R$, la majoration de la fonction erreur devient :

$$\delta_k(j\omega) \leq M \cdot \left| \frac{1}{K} \cdot \frac{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{R}} - 1}{\sqrt{1 + j \cdot \frac{\omega}{R}} + 1} \right|^{2k} \quad (2.53)$$

Par contre le choix du rayon K , respectant les contraintes (2.52), est le résultat d'un compromis. En effet, lorsque $K \rightarrow 1^-$, $K^{-2k} \rightarrow 1^+$, mais M devient de plus en plus grand, puisque c'est la valeur maximale de la fonction erreur (continue et analytique) le long du cercle de rayon K . Si, à la fois la fonction de transfert $G(s)$ et son approximation $[k - 1/k]_G(s)$ sont connues, il

est possible de sélectionner la valeur optimale de K en fonction de ces deux effets contradictoires sur la majoration (2.53). Dans le cas contraire, il est toujours possible de choisir la valeur minimale de K telle que l'entièreté de la gamme de pulsation $[0, \Omega] \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ soit comprise dans l'intérieur du domaine d'approximation, c'est-à-dire :

$$K := \frac{1 + \sqrt{1 + (\Omega/R)^2} - \sqrt{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + (\Omega/R)^2}}}{(\Omega/R)} \quad (2.54)$$

Avec ce choix, on obtient la majoration uniforme sur l'erreur :

$$|\delta_k(j\omega)| \leq M \cdot \left| \frac{(\Omega/R)}{(b(\Omega) - \sqrt{2b(\Omega)})} \cdot \sqrt{\frac{a(\Omega, K) - \sqrt{2a(\Omega, K)K}}{a(\Omega, K) + \sqrt{2a(\Omega, K)K}}} \right|^{2k} \quad (2.55)$$

avec $a(\Omega, K) := \sqrt{K^2 + (\Omega/R)^2} + K$, $b(\Omega) := \sqrt{1 + (\Omega/R)^2} + 1$.

2.3 Application à l'intégrateur d'ordre non entier

[Pendant une conférence :] This has been done elegantly by Minkowski; but chalk is cheaper than grey matter, and we will do it as it comes. Attribué par George Pólya à Albert Einstein (Ulm 1879 - Princeton 1955), cité dans [86].

Nous allons maintenant appliquer l'ensemble des résultats des deux sections précédentes au cas de l'intégrateur implicite d'ordre non entier, dont le transfert est défini par :

$$Y(s) = \frac{1}{(1 + \tau s)^p} U(s) \quad (2.56)$$

avec $\tau > 0$ et $p \in]0, 1[$. L'exposant p de la variable opérationnelle s étant non entier, on parle pour l'opérateur défini par le transfert (2.56) dans le domaine de Laplace, d'*intégrateur implicite d'ordre non entier*. La constante $\tau > 0$ est baptisée constante de temps de relaxation.

La représentation (2.56) est aussi appelée modèle à pôle d'ordre fractionnaire ("*fractional power pole model*") d'un procès de type $1/f^3$, ou d'un système fractal.

³Le diagramme de Bode (log-log) correspondant se caractérise par une dépendance linéaire du module (dB) par rapport au logarithme de l'inverse de la fréquence.

Les développements de l'annexe A.3 montrent, de manière succincte, que la récursivité de la géométrie d'un milieu, c'est-à-dire son caractère fractal, conduit à l'introduction d'opérateurs du type (2.56) comme modèles d'impédances. Cette annexe discute également des différents domaines d'applications dans lesquels sont utilisés les intégrateurs d'ordre non entier, et établit la valeur de la réponse impulsionnelle associée à (2.56).

2.3.1 Conditions nécessaires à l'existence d'une représentation de Stieltjes.

Le développement de la fonction $(1 + \tau s)^{-p}$ en série de Taylor conduit à une série alternée définie par :

$$g(s) := \sum_{i \geq 0} g_i \cdot (-s)^i \quad (2.57)$$

où les coefficients g_i , tous positifs, ont pour valeur :

$$\begin{aligned} g_0 &:= 1 \\ g_1 &:= p\tau \\ g_k &:= \frac{p(p+1) \dots (p+k-1) \tau^k}{k!}, k \geq 2 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Ces valeurs de g_i peuvent être utilisées pour calculer les déterminants $D(i, j)$, conformément à la définition (2.34). Quelques valeurs⁴ de ces déterminants sont reportées à la table 2.2 ci-après, pour i et j allant de 1 à 3. On remarquera en particulier, dans cette table, le fait que tous les déterminants $D(i, j)$ sont positifs, si l'ordre d'intégration p appartient à $]0, 1[$. Cette propriété peut se généraliser à tous les indices (i, j) , par induction, et à l'aide de calculs laborieux. Cependant, nous n'en aurons pas besoin, car nous allons directement calculer la mesure $d\varphi(\xi)$ avec laquelle la fonction de transfert (2.56) peut être représentée comme une fonction de Stieltjes. Nous nous contentons donc du calcul des premiers déterminants $D(i, j)$, qui montre qu'ils sont tous positifs, et qu'il n'est pas absurde (en vertu du théorème 2.7), a priori, de rechercher la représentation de Stieltjes de la fonction de transfert $(1 + \tau s)^{-p}$.

⁴Les calculs ont été réalisés à l'aide du logiciel de traitement symbolique MAPLE[®].

$i \setminus j$	1	2	3
1	1	$\frac{-p(p-1)\tau^2}{2}$	$\frac{-(p-2)(p-1)^2 p^2 (p+1)\tau^6}{144}$
2	$p\tau$	$\frac{-(p-1)p^2(p+1)\tau^4}{12}$	$\frac{-(p-2)(p-1)^2 p^3 (p+1)^2 (p+2)\tau^9}{8640}$
3	$\frac{p(p+1)\tau^2}{2}$	$\frac{-(p-1)p^2(p+1)^2(p+2)\tau^6}{144}$	$\frac{-(p-2)(p-1)^2 p^3 (p+1)^3 (p+2)^2 (p+3)\tau^{12}}{1036800}$

Table 2.2: Valeurs des déterminants $D(i, j)$ pour $1 \leq i, j \leq 3$.

2.3.2 Mesure de Stieltjes associée à $(1 + \tau s)^{-p}$

Partons de la réponse impulsionnelle de l'opérateur $(1 + \tau s)^{-p}$, calculée à l'annexe A.3, et qui vaut

$$s_{imp}(t) = \frac{1}{\tau \Gamma(p)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{p-1} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot 1_+(t) \quad (2.59)$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler, et $1_+(t)$ la fonction échelon unité. Nous allons chercher pour $(1 + \tau s)^{-p}$ une représentation intégrale de Stieltjes, dont la mesure $d\varphi(\xi)$ est à support dans $[0, \tau]$. Ce choix est inspiré du fait que le pôle de $(1 + \tau s)^{-p}$ est $-\frac{1}{\tau}$ et est inclus au demi-axe réel $]-\infty, -\frac{1}{\tau}]$. Il est donc naturel de chercher une représentation intégrale de cette fonction de transfert, dont les pôles soient aussi sur ce demi-axe, et qui, par conséquent aura la forme :

$$\int_0^\tau \frac{d\varphi(\xi)}{1 + \xi \cdot s} \quad (2.60)$$

En invoquant le théorème de Fubini, pour permuter les ordres d'intégrations, et par définition de la réponse impulsionnelle, on obtient :

$$s_{imp}(t) = \int_0^\tau \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{1 + \xi s} \right) d\varphi(\xi) \quad (2.61)$$

C'est-à-dire :

$$s_{imp}(t) = \int_0^\tau \frac{e^{-t/\xi} d\varphi(\xi)}{\xi} \cdot 1_+(t) \quad (2.62)$$

En identifiant les expressions (2.59) et (2.62), on obtient pour la mesure $d\varphi(\xi)$ la valeur :

$$d\varphi(\xi) := \begin{cases} \frac{R(1+\xi(1-p))}{\Gamma(p)\xi^p} d\xi & \text{pour } \xi \in [0, \tau] \\ 0 & \text{pour } \xi > \tau \end{cases} \quad (2.63)$$

qui satisfait aux hypothèses sur la mesure des représentations intégrales de Stieltjes (mesure positive, bornée définie sur \mathbb{R}_+ , voir définition 2.6) et qui

conduit à la représentation intégrale :

$$\frac{1}{(1 + \tau s)^p} = \int_0^\tau \frac{d\varphi(\xi)}{1 + \xi \cdot s} \quad (2.64)$$

L'égalité n'est pas seulement formelle, puisque les développements en séries des deux membres de (2.64) convergent et coïncident exactement pour $\text{Re}(s) > -\frac{1}{\tau}$.

2.3.3 Réalisation de l'intégrateur implicite

En utilisant le développement en série (2.57) de l'intégrateur implicite, ainsi que le développement en fraction continue développé à la section 2.1.2 (équations (2.9) pour l'algorithme quotient-différence, et transformations d'équivalence (2.12) pour obtenir la seconde forme de Cauey), on obtient comme représentation en fraction continue de $(1 + \tau s)^{-p}$:

$$Y(s) = \left[\underset{b_1}{\overset{1}{\rceil}} \underset{+}{\rceil} \sum_{n \geq 2} \left[\underset{b_n}{\overset{s}{\rceil}} \underset{\rceil}{\rceil} \right] \cdot U(s) \quad (2.65)$$

avec les valeurs des coefficients b_i :

$$\begin{aligned} b_1 &:= 1; b_2 := R/p & (2.66) \\ b_{2k+1} &:= (-1)^k 2 \frac{p(p+1) \dots (p+k-1)}{(p-1)(p-2) \dots (p-k)}, k > 0 \\ b_{2k+2} &:= (-1)^k (2k+1) \frac{(p-1)(p-2) \dots (p-k)}{p(p+1) \dots (p+k)}, k > 0 \end{aligned}$$

Il s'agit ici d'une fraction continue convergente. En effet, les convergents d'ordre $2k$ sont les approximants de Padé d'ordre $[k - 1/k]$, et la suite des approximants converge vers $(1 + \tau s)^{-p}$ dans tout ouvert de $\mathbb{C} \setminus [-\infty, -R]$, en vertu du théorème 2.9.

Les coefficients b_i sont les valeurs inverses des capacités et des résistances du filtre RC qui réalise l'approximation. Il est intéressant de noter la manière dont la convergence de la suite d'approximation, c'est-à-dire de la fraction continue (2.65), se traduit sur la valeur asymptotique de ces coefficients. Pour cela, il suffit de remarquer que la fonction gamma peut être définie comme la limite :

$$\Gamma(p+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k! p^k}{(p+1) \dots (p+k)} \quad (2.67)$$

En substituant cette valeur dans la définition (2.66) des coefficients b_i , on obtient alors :

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k+1} &= \frac{2\Gamma(1-p)}{\Gamma(p)} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1-p} = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k+2} &= \frac{R\Gamma(p)}{\Gamma(1-p)} \lim_{k \rightarrow \infty} (2k+1) = \infty\end{aligned}\quad (2.68)$$

Donc, le comportement asymptotique des cellules RC, dans le filtre qui réalise les approximants de Padé d'ordre $[k - 1/k]$, tend vers celui d'un circuit ouvert. En effet, les valeurs des résistances étant données par l'inverse des coefficients d'ordre impair b_{2i+1} , et les valeurs des capacitances par l'inverse des coefficients d'ordre pair b_{2i} , la limite des résistances vaut :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k+1}^{-1} = \infty \quad (2.69)$$

et celle des capacitances :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k+2}^{-1} = 0 \quad (2.70)$$

Nous pouvons conclure de ces comportements asymptotiques que l'énergie échangée, tout au long du filtre, va en diminuant au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'entrée⁵.

Par ailleurs, il faut noter que la convergence très lente du développement en série de $(1 + \tau s)^{-p}$ (équation (2.57)) n'empêche pas la rapidité de la convergence de la suite des approximants de Padé. En effet, ce n'est pas parce que le développement en série de la fonction $(1 + \tau s)^{-p}$ et de l'approximant de Padé d'ordre $[k - 1/k]$ coïncident jusqu'à l'ordre $2k - 1$ que les deux séries ont la même vitesse de convergence. Le développement en série d'un approximant d'ordre $[k - 1/k]$ est en général infini. En fait, l'approximant "suppose" une certaine régularité, pour la suite du développement de la fonction à approcher (les termes d'ordre supérieur à $2k - 1$), et reproduit ce comportement. La majoration de l'erreur d'approximation donnée par le théorème 2.9 est d'ailleurs en général bien plus fine que dans le cas d'un développement en série d'ordre $2k - 1$. Pour plus de détails sur cette question, nous renvoyons à [20]. Dans le cas qui nous occupe, on observe effectivement une accélération spectaculaire de convergence, comme l'illustrent les figures 2.7 et 2.8.

⁵Il faut remarquer que ces mêmes propriétés asymptotiques ne peuvent être déduites dans le cas des méthodes fondées sur l'identification des coefficients de la fraction rationnelle d'approximation. Ces méthodes d'identification ne permettent pas non plus le calcul symbolique des coefficients de la fraction rationnelle, ce qui pose problème car l'évaluation explicite de cette fraction rationnelle est numériquement instable.

Sur ces figures sont tracées respectivement l'erreur relative sur la valeur du module, et l'erreur absolue sur la valeur de l'argument, correspondant à l'approximation de la fonction $(1 + \tau s)^{-p}$ pour $p = 1/2$ et $\tau = 1/5$. Un approximant de Padé d'ordre $[4/5]$ a été choisi, et calculé à partir du développement en série de $(1 + \tau s)^{-p}$ en $s = j \cdot 50$, de manière à assurer des précisions du même ordre à fréquence nulle et à 100 Hz . (c'est-à-dire $\omega = 200\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$). L'ordre $[4/5]$ est suffisant pour maintenir l'erreur relative sur le module au dessous de 0.5% , pour toute la bande de fréquence $0 - 100 \text{ Hz}$.

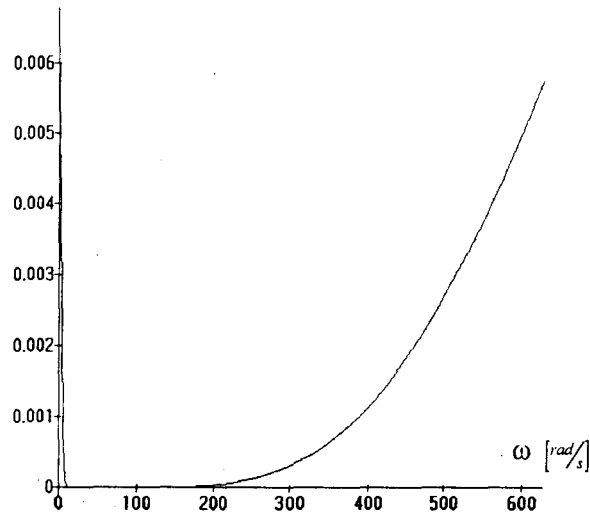


Figure 2.7: Erreur relative sur le module de $(1 + j\omega/5)^{-1/2}$ correspondant à l'approximant de Padé d'ordre $[4/5]$ calculé autour de $s = 50j$.

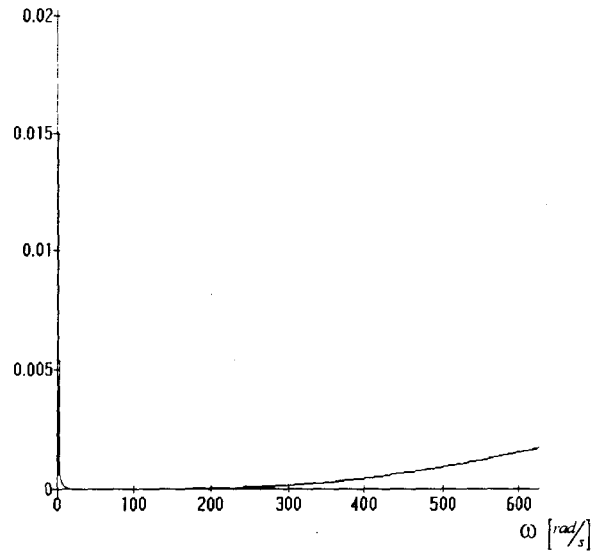


Figure 2.8: Erreur absolue sur l'argument de $(1 + j\omega/5)^{-1/2}$ correspondant à l'approximant de Padé d'ordre $[4/5]$ calculé autour de $s = 50j$.

2.4 Remarques

Mathematics consists of proving the most obvious thing in the least obvious way. George Polyá (Budapest 1887, Palo Alto 1985), cité dans [110].

2.4.1 Interfaces fractales : cas d'une distribution continue des caractéristiques

Le modèle hydraulique de matériau poreux développé à l'annexe A.3, qui aboutit à une impédance de valeur $(1 + \tau s)^{-p}$, se fonde sur une distribution discrète de capacités et de résistances, définies par la récurrence

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= \frac{1}{\alpha} R_i \\ C_{i+1} &= \frac{1}{\beta} C_i \end{aligned} \quad (2.71)$$

où $\alpha, \beta > 1$ et R_0, C_0 sont les plus grandes capacités et résistances de la distribution. Dans le cas de dimension finie, cette distribution donne lieu à

une impédance de la forme

$$G_N(s) = \sum_{i=1}^N \frac{C_i s}{1 + R_i C_i s} = C_0 s \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\alpha^i}{\alpha^i \beta^i + R_0 C_0 s} \quad (2.72)$$

Et, pour une infinité dénombrable de capacités et de résistances, on obtient :

$$G(s) := \lim_{N \rightarrow \infty} (G_N(s)) = (\tau s)^p \quad (2.73)$$

avec

$$p = \frac{1}{1 + \frac{\log \beta}{\log \alpha}} \quad (2.74)$$

$$\tau = R_0 C_0$$

Cependant, les interfaces à géométrie fractale peuvent aussi bien être définies par une distribution continue des propriétés des matériaux considérés, du moment que la propriété de proportionnalité des équations (2.71) est préservée (voir [93]). Considérons le cas de distributions continues de capacité $C(z)$ et de résistance $R(z)$, où $z \in [0, \infty)$ est une coordonnée inversement proportionnelle aux valeurs de $C(z)$ et de $R(z)$. En transposant l'hypothèse de proportionnalité (2.71) au cas continu, on obtient :

$$\frac{dR(z)}{dz} = -AR(z) \quad (2.75)$$

$$\frac{dC(z)}{dz} = -BC(z)$$

avec $A, B > 0$, ou encore $R(z) = R_0 e^{-Az}$ et $C(z) = C_0 e^{-Bz}$, expressions dans lesquelles R_0 et C_0 désignent les valeurs des résistances et de capacités de tailles maximales considérées. L'impédance de l'ensemble de la distribution est alors donnée par :

$$s \int_0^{\infty} \frac{C_0 e^{-Bz}}{1 + R_0 C_0 e^{-(A+B)z} s} dz \quad (2.76)$$

Considérons le changement de variable :

$$\xi := R_0 C_0 e^{-(A+B)z} \quad (2.77)$$

L'intégrale (2.76) devient :

$$\frac{s C_0}{(A+B)} \int_0^{R_0 C_0} \frac{\frac{1}{\xi} \left(\frac{\xi}{R_0 C_0} \right)^{\frac{B}{A+B}}}{1 + \xi s} d\xi \quad (2.78)$$

On obtient donc directement, dans le cas d'une distribution continue, l'expression de l'impédance comme une représentation intégrale de Stieltjes, à l'aide d'une mesure positive bornée :

$$d\varphi(\xi) = \frac{C_0}{(A+B)\xi} \left(\frac{\xi}{R_0 C_0} \right)^{\frac{B}{A+B}} \quad (2.79)$$

A titre d'exemple, une croissance fixée par $A = B$, donnera lieu à une impédance de la forme

$$\frac{sC_0}{2A(R_0C_0)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{R_0C_0} \frac{\xi^{-1/2}}{1+\xi s} d\xi = \frac{C_0}{A(R_0C_0)^{\frac{1}{2}}} \sqrt{s} \arctan \sqrt{R_0C_0 s} \quad (2.80)$$

On remarquera l'analogie avec le cas discret, en notant que l'impédance ci-dessus, en posant $\tau := R_0C_0$, est définie à une constante multiplicative près, par l'opérateur

$$\sqrt{\tau s} \arctan \sqrt{\tau s} \quad (2.81)$$

alors que dans le cas discret, cette impédance serait définie, à une constante multiplicative près, par $\sqrt{\tau s}$.

En considérant que les fonctions $C(z)$ et $R(z)$ sont les valeurs linéiques quelconques des capacités et résistances d'un milieu continu (à une dimension spatiale), on peut obtenir de manière similaire les représentation intégrales de Stieltjes des impédances correspondantes. Il est donc possible d'élargir le champ d'application de la méthode développée dans ce chapitre, largement au delà de la classe des opérateurs d'intégration (ou de différentiation) d'ordre non entier. Cette généralisation mériterait une étude détaillée, que nous n'avons pas encore conduite, mais dont nous développons les prémisses dans la section suivante.

2.4.2 Intégrales de Stieltjes et circuits de relaxation.

La méthode d'approximation développée dans ce chapitre s'applique à toute fonction de transfert qui possède une représentation intégrale de Stieltjes. Il est donc naturel de chercher à caractériser ces fonctions de transfert en termes intuitivement ("physiquement") interprétables.

Tout d'abord, il faut que la fonction de transfert donnée soit la transformée de Laplace d'une fonction d'une variable réelle à valeur réelle⁶. On parle alors de fonction de transfert "réelle". Les intégrales de Stieltjes satisfont trivialement cette propriété.

⁶C'est le cas si $G(s) \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}$, ou encore, si la fonction $G(s)$ est telle que $\overline{G(s)} = G(\bar{s})$, pour toute valeur s telle que $\text{Re}(s) > 0$ (voir, par exemple [136]).

Cela bien sûr ne suffit pas à caractériser la classe des intégrales de Stieltjes. Par contre, nous disposons du théorème de caractérisation suivant.

Théorème 2.11 *Supposons une fonction à variable réelle $G(\sigma)$. Alors, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elles possèdent une représentation de Stieltjes de la forme :*

$$G(\sigma) = \int_0^{\infty} \frac{d\phi(\eta)}{\sigma + \eta}$$

avec $\phi(\eta)$ fonction non décroissante et bornées, sont :

- (i) $G(\sigma) \geq 0, \forall \sigma \geq 0$
- (ii) $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} (\sigma G(\sigma))$ existe et est finie
- (iii) $(-1)^{k-1} \left(\frac{d}{d\sigma}\right)^{2k-1} (\sigma^k G(\sigma)) \geq 0, \forall \sigma > 0, k = 1, 2, \dots$

Démonstration. Voir [136], chapitre 8. ■

La représentation intégrale de ce théorème est équivalente à la représentation de Stieltjes que nous avons introduite plus haut, avec le changement de variable $\xi := \frac{1}{\eta}$ et la mesure $d\varphi(\xi) = -\xi d\phi(\frac{1}{\xi})$.

Si $G(\sigma)$ est la valeur d'une fonction de transfert réelle $G(s)$, calculée pour $s = \sigma \in \mathbb{R}^+$, les trois conditions de ce théorème peuvent recevoir une interprétation classique, formulée par des propriétés correspondantes de la réponse impulsionnelle d'un système linéaire stationnaire. Il suffit à cet effet de transposer ces propriétés à la réponse en fréquence, c'est-à-dire à la fonction $S(j\omega)$ où $\omega \in \mathbb{R}^+$ est la pulsation.

Si nous appelons $s(t)$ la réponse impulsionnelle correspondant au transfert $G(s)$, Alors :

- la condition (ii) revient à supposer que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (s(t)) \tag{2.82}$$

existe et est finie

- les conditions (i) et (iii) deviennent équivalentes aux *hypothèses de relaxation* de la théorie des circuits (voir [140]). Elles ne sont satisfaites, dans le cas fini-dimensionnel, que par certains circuits linéaires : ceux qui ne comportent qu'un seul type d'éléments dynamiques, soit des capacités, soit des inductances. Aucun comportement oscillant ne peut donc être observé dans la réponse impulsionnelle de ces circuits. En effet, en termes de réponse impulsionnelle, les hypothèses (i) et (iii) se traduisent par :

$$(-1)^k \left(\frac{d}{dt}\right)^k (s(t)) \geq 0, \forall t \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots \tag{2.83}$$

- la condition (i) prise séparément traduit la passivité de la fonction de transfert $G(s)$, comme nous le verrons au chapitre III.

La réalisation approchée proposée dans ce chapitre, pour les fonctions de transfert qui possèdent une représentation de Stieltjes, est bien un circuit qui ne comporte que des capacités, et pas d'inductance.

2.5 Propos d'étape

"What is the difference between method and device? A method is a device which you used twice." George Polyá (Budapest 1887, Palo Alto 1985), dans [106].

Dans ce chapitre, nous avons tenté de résoudre in extenso le problème posé par l'introduction d'un élément fonctionnel linéaire décrit par sa fonction de transfert entrée-sortie, comme élément à part entière d'un bond graph.

Nous avons choisi pour cela de considérer l'approximation d'une fonction de transfert non rationnelle $G(s)$ par une fraction rationnelle, c'est-à-dire par la fonction de transfert d'un système dynamique linéaire de dimension finie. Cette approximation a été calculée formellement à l'aide des approximants de Padé.

La question de la réalisation de l'approximation obtenue a été résolue en ayant recours aux développements en fractions continues, et aux récurrences qui les caractérisent. Nous avons ainsi construit un filtre RC infini dont la fonction de transfert correspond formellement à la fonction de transfert $G(s)$.

Nous avons ensuite introduit les séries de Stieltjes pour garantir la passivité du circuit approché, autrement dit, le fait que toutes les valeurs des résistances et des capacités du filtre soient positives. Par ailleurs, la représentation approchée de la fonction de transfert comme transformée de Stieltjes nous a garanti d'excellentes propriétés de convergence, qui ont été mises en évidence dans le cas de l'intégrateur implicite d'ordre non entier.

La question qui s'est alors posée était de savoir à quelle classe de fonctions de transfert peut s'appliquer le schéma d'approximation proposé. Dans un premier temps, il a été montré que cette classe comprend l'ensemble des fonctions de transfert associées à une distribution continue (linéique) de capacités et de résistances (car on aboutit alors à la définition de la fonction de transfert directement sous la forme d'une transformée de Stieltjes). Ensuite, nous avons observé que la classe des séries de Stieltjes, pour lesquelles la méthode s'applique, généralise la classe des fonctions de transfert des circuits

linéaires de dimension finie dits *de relaxation*. Cette observation est d'ailleurs confirmée par le fait que le filtre d'approximation ne comporte aucune inductance, mais uniquement des résistances et des capacités.

Cette observation relève une limitation fondamentale de la méthode, puisqu'elle ne pourra s'appliquer qu'à des modèles où n'auront pas été pris en compte, simultanément, des phénomènes inertiels et des phénomènes capacitifs. Par exemple, dans le cas de la digue poreuse développé à l'annexe A.3, la méthode ne s'appliquerait plus si l'inertie du liquide en déplacement n'avait pas été négligée.

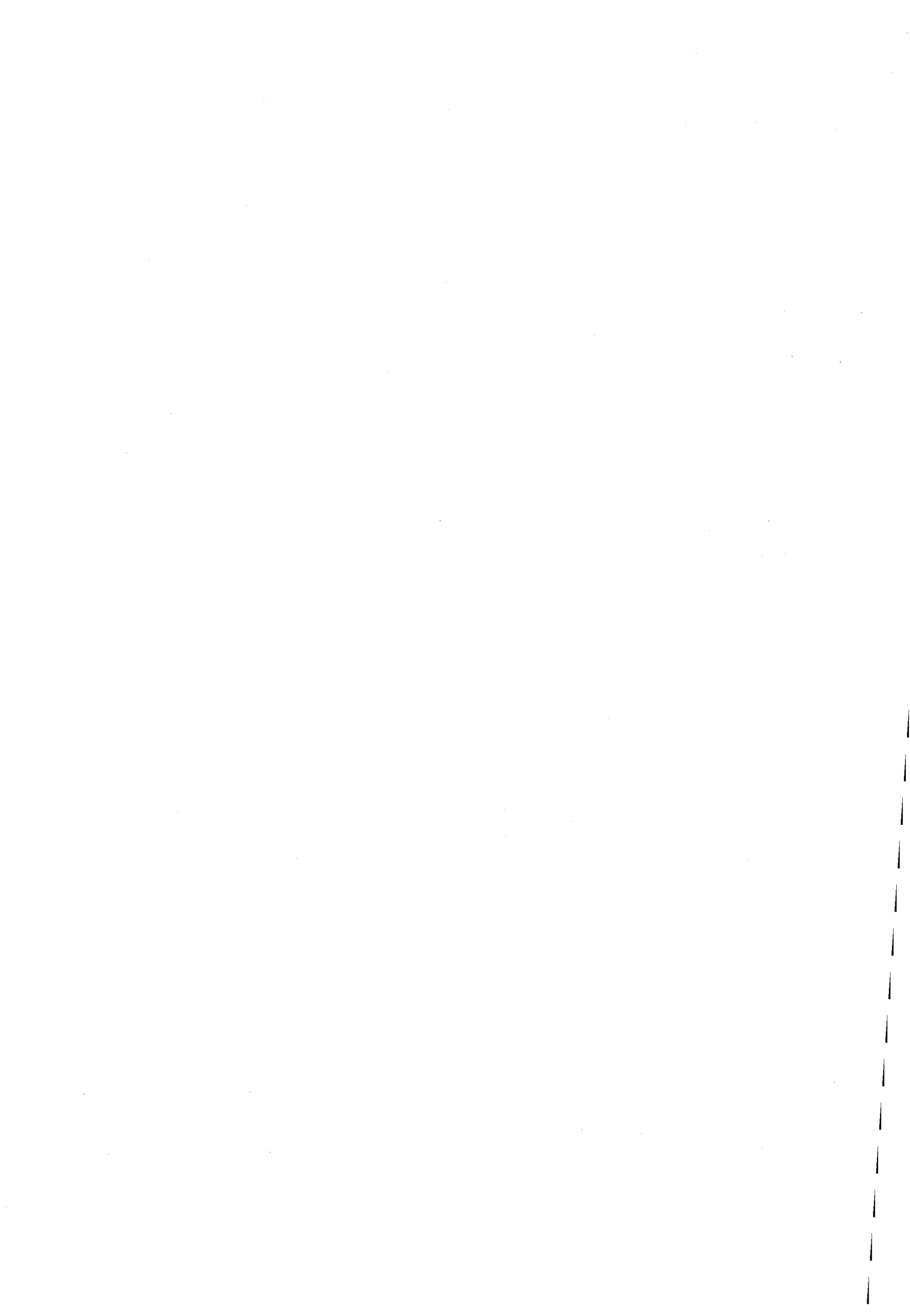
Mis à part pour le domaine thermique, pour lequel il n'existe pas d'inductance, nous ne pouvons donc nous contenter de la méthode d'approximation proposée⁷. Mais la caractérisation des fonctions de transfert qui possèdent une représentation intégrale de Stieltjes a soulevé un problème plus fondamental encore. Si nous sommes bien équipé pour l'analyse des propriétés énergétiques des circuits linéaires de dimension finie, il n'en va pas de même pour l'analyse des fonctions de transfert non rationnelles. Or, avant de rechercher un circuit de dimension finie dont le transfert approche une fonction non rationnelle donnée, et dont le comportement qualitatif (entre autres énergétique) lui est similaire, il faut pouvoir définir sur le modèle de dimension infinie les propriétés que l'on veut voir conserver par l'approximation.

Il est donc nécessaire de définir un cadre formel pour la représentation des éléments dont les équations constitutives sont définies par des opérateurs généraux de dimension infinie, et, dans ce cadre, de pouvoir définir et étudier les propriétés énergétiques de ces éléments. En ce qui nous concerne, la propriété fondamentale à étudier sera la passivité des éléments de dimension infinie, c'est-à-dire le fait que leurs équations constitutives, si compliquées soient elles, ne formalisent que des phénomènes de dissipation et de stockage d'énergie. Un élément fonctionnel passif ne pourra donc pas contenir de manière implicite une source d'énergie (qui est par définition idéale et donc inépuisable). Il y aura dès lors un sens à chercher, pour un tel élément, une approximation réalisée par un bond graph composés de résistances, de capacités et d'inductances uniquement.

L'essentiel de notre contribution, dans ce chapitre, consiste en la mise en rapport de différentes notions, et à la clarification des liens qui les unissent.

⁷Notons cependant que le fait de négliger les phénomènes inertiels est une hypothèse de première approximation raisonnable et souvent rencontrée dans les modèles d'impédance en hydraulique. En effet, ils sont souvent négligeables par rapport aux phénomènes potentiels. C'est le cas, par exemple, des modèles d'impédance fractale du réseau artériel ou veineux. Dans cet exemple, les phénomènes liés à l'élasticité des conduits sont négligés, hormis pour les premières ramifications de la structure arborescente qui ont un diamètre important (voir [77]).

Séparément, les intégrateurs implicites d'ordre non entier, les approximants de Padé et leur développement en fraction continue, les filtres RC et les intégrales de Stieltjes sont toutes des notions connues qui ont été étudiées en profondeur. Cependant les rapports entre les approximants de Padé et le filtre qui les réalise, la démonstration de la passivité de ce filtre par l'intermédiaire des séries de Stieltjes, et la relation entre les séries de Stieltjes et les circuits de relaxation, constituent, à notre connaissance, une contribution originale. Il en va de même en ce qui concerne l'application des résultats aux impédances d'interfaces fractales discrètes ou continues. L'ensemble de la méthode développée dans ce chapitre a fait l'objet d'une communication en congrès [82], et est l'objet d'une publication plus détaillée [84], actuellement en cours de soumission.



Chapitre 3

Passivité des systèmes linéaires de dimension infinie.

Le physicien moderne étudie la théorie des quantas le lundi, le mercredi et le vendredi, et la théorie de la gravité relativiste le mardi, le jeudi, et le samedi. Le dimanche il n'étudie rien, mais prie son Dieu pour que quelqu'un, de préférence lui-même, trouve la théorie qui unifie les deux points de vue. Norbert Wiener (Columbia 1894 - Stockholm 1964), cité dans [96].

L'objectif de ce chapitre est double. Tout d'abord, il s'agit de présenter brièvement la représentation des systèmes linéaires par semigroupes d'opérateurs, définis sur des espaces de Hilbert, et son application à la représentation des exemples d'équations constitutives linéaires que nous avons mentionnés jusqu'ici : représentation par convolution, systèmes à retards et équations aux dérivées partielles. Ensuite, la propriété de passivité sera étudiée dans ce cadre formel.

La première section est consacrée à des rappels sur la définition de passivité utilisée en théorie des circuits, qui s'applique aux éléments dont les équations constitutives ont la forme d'un système d'état de dimension finie.

La seconde section reprend les définitions et les résultats élémentaires de la théorie des semigroupes, qui sont illustrés, dans la troisième section, aux exemples de l'intégration non entière, de l'équation des ondes, et des systèmes linéaires à retards.

Dans la quatrième section, nous généraliserons la définition de passivité aux systèmes linéaires représentés par un semigroupe d'opérateurs. Cette définition sera brièvement commentée, avant que ne soient proposés dans la cinquième section, différents résultats de caractérisation des systèmes linéaires passifs. Enfin, dans la sixième section, ces résultats seront appliqués aux trois

exemples déjà mentionnés.

3.1 Passivité des systèmes dynamiques de dimension finie

A la fin de l'année 1972, le président Nixon annonça que le taux d'augmentation de l'inflation diminuait. Pour la première fois dans l'histoire, un président des Etats-Unis en exercice utilisait la dérivée troisième pour défendre sa candidature à sa propre succession. Rappelé par Hugo Rossi [111].

Dans le cadre de la théorie des circuits, en particulier des circuits linéaires, les études concernant la passivité ont une longue histoire. Elles s'inscrivent naturellement, comme nous l'avons mentionné au chapitre précédent, dans le contexte de la synthèse d'une impédance donnée, par un circuit ne comportant pas d'élément actif. En 1931, Otto Brune, poursuivant les travaux de Cauer, Foster et d'autres, proposait déjà une caractérisation des fonctions de transfert qui sont réalisables par un circuit passif: pour l'essentiel, les fonctions réelles positives (voir, à ce sujet, l'article de Brune [22], ou de nombreux ouvrages consacrés aux problèmes de synthèse, comme, par exemple [6] et [129]). Nous reviendrons en détail sur ce point dans la suite de cette section. Par la suite, les études concernant la passivité ont naturellement été généralisées afin de s'appliquer aux circuits non linéaires (voir [143], pour une synthèse et une étude détaillée des différentes définitions, dans le cadre de la théorie des circuits), à l'étude de leur stabilité [61], et enfin aux problèmes de stabilité et de contrôle formulés en termes de systèmes dynamiques (voir, notamment, les articles de Willems [139] et [140]). Enfin, aujourd'hui, ces travaux font l'objet d'un vif regain d'intérêt, particulièrement dans leur application aux problèmes de stabilité et de contrôle non linéaires. Il s'agit principalement de rendre un système dynamique passif, par retour d'état, et d'appliquer les résultats anciens de stabilité et de convergence aux systèmes passifs obtenus (voir, par exemple, [24], [118], [89] et [88]).

Pour notre part, nous étudierons la passivité de représentations d'état d'éléments fonctionnels, pour elle même, c'est-à-dire pour étudier les propriétés énergétiques de ces éléments.

Considérons l'exemple d'une capacité non linéaire d'équation constitutive:

$$\begin{aligned} e &= C(q) \\ q(0) &= q_0 \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.1}$$

où C est une fonction non linéaire à valeurs dans \mathbb{R} . Un tel élément possède une représentation d'état :

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = u \\ y = C(q) \\ q(0) = q_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

où u désigne ici le flux, et y l'effort. Sous quelles hypothèses, l'élément défini par l'équation constitutive (3.2) représente-t-il un processus qui stocke de l'énergie et est en mesure d'en restituer au moins une partie? Peut-on considérer de la même manière des équations constitutives dont la dynamique serait plus générale que celle d'un simple intégrateur? Qu'en est-il lorsqu'un système d'ordre plus élevé est considéré? C'est pour répondre à ce genre de questions qu'une présentation formelle des notions énergétiques (intuitives, dans le cas des circuits linéaires) a surgi de l'élargissement de la théorie des circuits, opéré fin des années 60 et dans le courant des années 70 essentiellement, et ayant pour but d'agrandir la "bibliothèque" des modèles qui pouvaient s'y incorporer.

3.1.1 Représentation d'état

Considérons un élément m -port dont les équations constitutives ont la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

où $x_0 \in \Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$, Σ est un sous-espace non vide de \mathbb{R}^n , appelé espace d'état, n est un entier positif, $u \in \mathcal{U}$ où \mathcal{U} est un sous-ensemble non vide de l'ensemble des fonctions de \mathbb{R}^+ dans U , appelé ensemble des fonctions d'entrée admissibles, $U \subset \mathbb{R}^m$ est l'ensemble non vide des valeurs des entrées admissibles, f est une application de $\Sigma \times U$ dans \mathbb{R}^n qui définit l'équation d'état, et g est une application de $\Sigma \times U$ dans \mathbb{R}^m qui définit l'équation de sortie.

Une définition alternative, parfois proposée dans la littérature (voir [143]) de la représentation d'état des éléments consiste à définir deux applications supplémentaires effort et flux :

$$\begin{aligned} \text{effort} &: \Sigma \times U \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \text{flux} &: \Sigma \times U \rightarrow \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dans ce cas, la représentation d'état complète est fournie par les équations (3.3) et (3.4). Ce type de représentation est utile pour représenter la modulation externe des éléments (voir annexe I) car les variables u et y peuvent y désigner des signaux ne correspondant à aucun transfert d'énergie. Pour notre part, nous considérerons le cas où ces deux applications ont été incorporées directement dans la représentation d'état (3.3), c'est-à-dire le cas où u et y forment une paire hybride de variables de puissance associée à l'élément (voir définition 1.2, au chapitre I, section 1.2.4). Les variables u_k et y_k désignent alors respectivement l'effort et le flux au port k de l'élément (ou réciproquement, le flux et l'effort à ce même port k), et la puissance entrant dans l'élément à un instant t vaut :

$$p(t) = \langle y(t), u(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} \quad (3.5)$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m}$, le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^m .

La définition formelle de la représentation d'état (3.3) doit être assortie d'hypothèses additionnelles, afin de donner un sens, non seulement à l'équation entrée - sortie qu'elle peut définir, mais aussi aux transferts d'énergie qui lui sont associés. Tout d'abord, il convient de définir la notion de solution, ensuite de s'assurer que l'énergie soutirée à l'élément en un temps fini soit bien définie et demeure finie. Ces considérations se traduisent naturellement par des restrictions sur l'espace \mathcal{U} des signaux admissibles comme entrées, et sur les applications f et g qui définissent la représentation d'état. On peut, par exemple, définir la solution $x(t)$ de (3.3) *au sens classique*.

Définition 3.1 Soit $u \in \mathcal{U}$, $x_0 \in \Sigma$. La fonction $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est solution dans \mathbb{R}^+ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

avec $f : \Sigma \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$, si

(i) $x(t) \in \Sigma, \forall t \geq 0$

(ii) x absolument continue sur $[0, T], \forall T \geq 0$

(iii) $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t))$ presque pour tout t dans $[0, \infty)$

Les auteurs de [143], utilisant cette définition classique de la notion de solution, et se basant sur les considérations ci-dessus, ont proposé les hypothèses suivantes sur la représentation d'état (3.3) :

1. L'espace des entrées admissibles \mathcal{U} est inclus à l'espace des fonctions mesurables sur \mathbb{R}^+ ; il est invariant par translation positive ($u(\cdot) \in \mathcal{U} \Rightarrow u(\cdot - \tau) \in \mathcal{U}, \forall \tau > 0$), et par concaténation.

2. Les fonctions f et g sont continues
3. Pour chaque $x_0 \in \Sigma$, et pour chaque $u \in \mathcal{U}$, il existe une seule solution de (3.3) dans \mathbb{R}^+
4. Pour chaque $x_0 \in \Sigma$, et pour chaque $u \in \mathcal{U}$, la puissance $p(t)$ est localement absolument intégrable sur \mathbb{R}^+ ($p \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^+)$).

L'invariance par translation résulte du fait que nous nous limitons à considérer des équations constitutives stationnaires, pour lesquelles l'origine des temps peut être fixée arbitrairement, et n'influence pas le comportement dynamique entrée-sortie. L'invariance par concaténation signifie que deux signaux d'entrées, qui peuvent être appliqués séparément, peuvent aussi être appliqués à la suite l'un de l'autre. Par ailleurs, la mesurabilité des signaux d'entrées est certainement une des hypothèses les plus faibles que nous puissions leur imposer.

La continuité des applications f et g n'est nécessaire que pour pouvoir appliquer certains résultats d'existence de solution (et n'est d'ailleurs pas suffisante, en général), et d'autre part pour assurer un gain de régularité de l'entrée vers l'état et un transfert de régularité de l'entrée vers la sortie (par exemple, si l'entrée est continue, l'état est continûment différentiable, et la sortie est continue).

L'existence d'une solution (unique) sur \mathbb{R}^+ , au sens de la définition 3.1, exclut la possibilité de divergence de la solution en un temps fini, et assure que l'opérateur entrée - sortie est bien défini par les équations constitutives (3.3).

L'intégrabilité locale de $p(t)$ assure que l'énergie fournie à l'élément sur un intervalle de temps $[0, T]$:

$$E|_{[0, T]} := \int_0^T P(\tau) d\tau \quad (3.6)$$

est bien définie et finie pour tout temps fini $T \geq 0$.

Bien que ces hypothèses sur la représentation d'état soient fondées, elles introduisent une difficulté majeure qui est la définition appropriée de l'espace \mathcal{U} des signaux admissibles comme entrée. Il doit en effet rester suffisamment large pour conserver un certain intérêt pratique. Dans le cas des systèmes linéaires, cependant, un choix tel que

$$\mathcal{U} := L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$$

est satisfaisant, puisqu'il vérifie les hypothèses ci-dessus et couvre la plupart des cas d'intérêt pratique, en incluant notamment tous les signaux d'entrées mesurables et bornés.

3.1.2 Passivité et énergie disponible

On dira d'un élément qu'il est passif si l'énergie qui peut en être extraite est finie, quelque soit le signal d'entrée qui lui est appliqué. et quel que soit son état initial. Cette définition se formalise aisément en définissant une application auxiliaire appelée énergie disponible.

Définition 3.2 Soit un élément m -port muni d'une représentation d'état de la forme (3.3). L'énergie disponible qui lui est associée est l'application :

$$E_A : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \quad (3.7)$$

$$\xi \mapsto E_A(\xi) := \sup_{\tau \geq 0, u \in \mathcal{U}} \left(- \int_0^\tau P(\theta) d\theta \right)$$

où la puissance sortante $-P(\theta) := -\langle g(x(\theta), u(\theta)), u(\theta) \rangle_{\mathbb{R}^m}$ est calculée pour $x(\theta)$ solution du problème différentiel $\frac{dx}{dt} = f(x, u)$ avec la condition initiale $x(0) = \xi$.

Les hypothèses formulées à la section précédente sur la représentation d'état des éléments garantissent que l'application "énergie disponible" est univoquement définie et non négative (elle vaut 0 pour $u = 0$). Elle est la solution d'un intéressant problème d'optimisation : trouver la sollicitation extérieure qui soutire d'un système donné un maximum d'énergie. C'est ce problème que nous étudierons en détail, dans le cas des systèmes linéaires de dimension infinie, à la section 3.4.

Définition 3.3 Un élément m -port muni d'une représentation d'état de la forme (3.3) est dit passif si

$$E_A(\xi) < \infty, \quad \forall \xi \in \Sigma \quad (3.8)$$

Dans le cas contraire, il est dit actif.

En d'autres termes, la passivité d'un élément assure qu'il ne peut que restituer une quantité finie d'énergie, qui y aurait été stockée lors de son histoire passée (résumée dans les conditions initiales). La passivité ne signifie pas l'absence de dissipation (le caractère conservatif), et donc la restitution intégrale de l'énergie fournie à l'élément par l'extérieur, mais par contre elle exclut la possibilité qu'une source idéale (c'est-à-dire un accès à l'environnement du modèle) soit dissimulée dans les équations constitutives. Même en l'absence de dissipation, l'énergie disponible n'est pas forcément l'énergie stockée dans l'élément. Ce n'est le cas que si il existe un *état de repos* (c'est-à-dire un état $\bar{\xi} \in \Sigma$ tel que $E_A(\bar{\xi}) = 0$) et que cet état est *atteignable* depuis l'état initial considéré. Un système passif qui possède un état de repos est dit *fortement passif*.

3.1.3 Exemples

Éléments de type conservatif

Considérons un élément m -port de type conservatif (voir annexe I) dont les équations constitutives peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(t) \\ y(t) = g(x_1, x_2, \dots, x_m), t > 0 \\ q(0) = q_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

où u et y forment une paire hybride de variables de puissance, $x \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur des charges ou des moments généralisés ($x(t) := \int_0^t u(\tau) d\tau$) et g est une application continue. Dans cet exemple, l'ensemble des hypothèses associées à la représentation d'état (voir section 3.1.1) sont satisfaites lorsque l'espace des signaux d'entrées admissibles \mathcal{U} est $L_1^{loc}(\mathbb{R}^+)$, et l'espace d'état Σ est \mathbb{R}^m .

Propriété 3.4 *Sous les hypothèses qui précèdent, l'élément dont les équations constitutives sont données par (3.9) est passif si, et seulement si, il existe une fonction continûment différentiable $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, bornée inférieurement, et telle que $g(x) = \text{grad}(\psi(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$.*

Démonstration. voir [143]. ■

Cette caractérisation coïncide pour l'essentiel avec la description des processus réversibles fondée sur une approche thermodynamique, pour lesquels la fonction ψ , à une constante près, n'est rien d'autre que l'énergie interne. En effet, considérons un élément (système thermodynamique) réversible. Le premier principe thermodynamique affirme que dans ce cas, l'énergie interne est une fonction d'état de la forme :

$$E_{interne} = E_{interne}(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (3.10)$$

où x_1, x_2, \dots, x_m sont les variables d'état extensives. Si la fonction $E_{interne}$ est continûment différentiable, la puissance entrant dans le système peut alors s'écrire :

$$P(t) = \frac{dE_{interne}}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial E_{interne}}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^m e_i \cdot f_i \quad (3.11)$$

Lorsque ce système est décrit par la représentation d'état (3.9), la proposition 3.4 ci-dessus garantit bien, dans le cas passif, l'existence d'une fonction d'énergie interne définie par :

$$E_{interne} := \psi(x) + C \quad (3.12)$$

où la constante réelle C telle que

$$C > -\inf_{x \in \mathbb{R}^m} \psi(x) \quad (3.13)$$

existe, car la fonction ψ doit être bornée inférieurement (proposition 3.4). Ainsi définie, cette fonction énergie interne satisfait

$$E_{interne}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^m \quad (3.14)$$

et est bien telle que (proposition 3.4) :

$$e_i = \frac{\partial E_{interne}}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad (3.15)$$

Éléments de type dissipatif

Les éléments m -ports dissipatifs peuvent être représentés à l'aide de la représentation d'état fictive :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ y = R(u) , t > 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

pour laquelle l'espace d'état se réduit à $\Sigma := \{0\}$. Les vecteurs y et u sont supposés former une paire hybride de variables de puissance, R est une application à valeur dans \mathbb{R}^m et l'espace des signaux d'entrées admissibles peut, dans ce cas, être défini par :

$$\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \langle u, R(u) \rangle_{\mathbb{R}^m} \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^+) \} \quad (3.17)$$

de manière à ce que toutes les hypothèses sur la représentation d'état soient satisfaites.

Propriété 3.5 *Sous les hypothèses qui précèdent, l'élément dont les équations constitutives sont données par (3.16) est passif si, et seulement si, la forme bilinéaire $\langle \cdot, R(\cdot) \rangle_{\mathbb{R}^m}$ est semi-définie positive sur \mathbb{R}^m , c'est-à-dire si*

$$\langle u, R(u) \rangle_{\mathbb{R}^m} \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^m$$

Démonstration. voir [78]. ■

Ici encore, cette condition nécessaire et suffisante a une interprétation directe qui peut être formulée à l'aide de considérations thermodynamiques.

En effet, dans le cas d'un processus non réversible, il y a création d'entropie (second principe de la thermodynamique), et la puissance fournie à l'extérieur par l'élément s'écrit :

$$P(t) := \langle u, R(u) \rangle_{\mathbb{R}^m} = T \frac{dS}{dt} \geq 0 \tag{3.18}$$

où T est la température absolue, et $\frac{dS}{dt}$ le taux de production d'entropie (variable flux dans le domaine thermique).

Éléments linéaires de dimension finie

Considérons un élément m -port dont les équations constitutives peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(0) = x_0 \end{cases}, t > 0 \tag{3.19}$$

avec $x_0 \in \Sigma := \mathbb{R}^n$, n entier positif, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, et $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$. En choisissant comme espace des signaux d'entrée admissibles :

$$\mathcal{U} := L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m) \tag{3.20}$$

l'ensemble des hypothèses liées à la représentation d'état sont satisfaites. Les conditions de passivité de systèmes linéaires représentés par une fonction de transfert sont connues depuis les travaux de Otto Brune [22], et ont été élargies aux représentations d'état linéaires à de multiples occasions. Il existe donc de nombreuses variantes du théorème de caractérisation 3.10 des systèmes passifs, présenté ci-après, et (presque) autant de démonstrations (voir, notamment, [146], [129], [98], [6], [48] et [143]). Quelques notions élémentaires sont nécessaires à son énoncé, en voici les définitions.

Définition 3.6 *L'état $x_1 \in \Sigma$ est atteignable depuis l'état $x_0 \in \Sigma$ s'il existe un signal d'entrée $u \in \mathcal{U}$ et un temps $T \geq 0$ tel que $x(T) = x_1$, où $x(T)$ est la solution en $t = T$ du problème de Cauchy $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$.*

Définition 3.7 *La représentation d'état (3.19) est complètement commandable si $\forall x_1 \in \Sigma$ est atteignable depuis x_0 , $\forall x_0 \in \Sigma$.*

C'est le cas si et seulement si la matrice de commandabilité

$$C := [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

est de rang plein.

Définition 3.8 Une application $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ est dite réelle si, $\forall s \in \mathbb{R}$, $H(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Dans ce cas, on a :

$$\overline{H(s)} = H(\bar{s}) \quad (3.21)$$

où \bar{s} désigne le complexe conjugué de s . De plus, les coefficients des puissances du développement en série (série de Taylor ou série de Laurent), si ce développement existe, sont réels.

Définition 3.9 Une application $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ est dite positive réelle si

- (i) H est réelle
- (ii) H est holomorphe dans $\text{Re}(s) > 0$
- (iii) La partie hermitienne de H est semi-définie positive dans $\text{Re}(s) > 0$, c'est-à-dire

$$\langle \hat{u}, H_H(s)\hat{u} \rangle_{\mathbb{C}^m} \geq 0, \forall \hat{u} \in \mathbb{C}^m, \forall s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \text{Re}(s) > 0$$

où $H_H(s) := \left(H(s) + \overline{H^T}(s) \right) / 2$ (partie hermitienne de $H(s)$).

Propriété 3.10 Soit un élément représenté par le système d'état (3.19) complètement commandable. L'élément est passif si, et seulement si, la matrice de transfert

$$G(s) := C(sI - A)^{-1}B + D$$

est positive réelle.

Démonstration. voir [98]. ■

Dans le cadre de l'application de la passivité au contrôle des systèmes linéaires, on introduit aussi les notions de fonction de transfert strictement positive réelle, et faiblement positive réelle. Elles sont utiles pour décider de l'existence de commandes sous forme de retour d'état qui stabilisent le système. On utilise alors la notion d'énergie disponible (et de commande optimale qui permet d'extraire toute l'énergie disponible) comme cas particulier de fonction de Lyapunov (voir à ce sujet [89]). Les définitions et les relations réciproques qui unissent ces différentes définitions de transfert positifs réels sont commentées et démontrées dans [88], [134].

3.1.4 Remarques

Les deux exemples des éléments de type conservatif et dissipatif ont montré que la définition 3.3 est une formalisation très satisfaisante de notions énergétiques intuitives utilisées (souvent implicitement) dans la méthodologie bond

graph. De plus, cette définition de passivité est stable par rapport à l'interconnexion d'éléments, et indépendante de la représentation d'état choisie pour représenter l'opérateur entrée-sortie. Nous développerons plus en détail ces deux propriétés, directement dans le cadre des représentations d'état de dimension infinie (voir section 3.4.3 et 3.4.4).

Le caractère conservatif (absence de dissipation) d'un élément défini par la représentation d'état (3.3) peut se définir comme le fait que l'énergie nécessaire à conduire le système entre deux états donnés est indépendante de la trajectoire spécifique empruntée entre ces deux états. Nous renvoyons à [144] pour une étude plus détaillée de cette notion (et à [78] pour les démonstrations correspondantes), mais nous tenons à mentionner ici les conditions nécessaires et suffisantes pour les trois exemples développés plus haut. Parmi les éléments de type dissipatif (équation (3.16)), seuls sont conservatifs ceux dont l'application entrée - sortie est l'application nulle. Les éléments de "type" conservatif (équation (3.9)), s'ils sont passifs, sont également "réellement" conservatifs. Par contre, pour les éléments linéaires complètement commandables (équations (3.19)), la condition de passivité (fonction de transfert positive réelle) ne suffit pas à garantir le caractère conservatif. En plus d'être semi-définie positive dans le demi-plan complexe de droite, la partie hermitienne de la fonction de transfert doit aussi être nulle sur l'axe imaginaire.

Nous montrerons à la section 3.4.2, directement pour le cas des représentation d'état de dimension infinie, que la définition de passivité 3.3 est équivalente à l'existence d'une fonction d'énergie interne, c'est-à-dire une fonction $E_I : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que, pour tout $0 < t_1 < t_2$, pour toute entrée admissible $u(t)$, et pour toute trajectoire $x(t)$ solution de (3.3), on ait :

$$E_I(x(t_2)) - E_I(x(t_1)) \leq \int_{t_1}^{t_2} P(x(\theta), u(\theta)) d\theta \quad (3.22)$$

L'existence d'une fonction d'énergie interne peut donc être utilisée comme définition alternative de passivité, et est à la base des applications de cette notion aux systèmes affines de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, t > 0 \quad (3.23)$$

avec $\Sigma = \mathbb{R}^n$, f , g et h des applications continûment différentiables et où \mathcal{U} , l'espace des signaux d'entrées admissibles, est l'espace des fonctions continues



par morceaux. Avec ces hypothèses, il est démontré (voir [60]) que la passivité est équivalente à la propriété de Kalman - Yacubovitch - Popov (KYP), à savoir :

Définition 3.11 *Le système dynamique (3.23) a la propriété KYP s'il existe une fonction $V : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, continûment différentiable, avec $V(0) = 0$, et telle que*

$$\begin{aligned} L_f V(x) &\leq 0 \\ L_g V(x) &= h^T(x) \end{aligned} \tag{3.24}$$

où L_f et L_g sont les dérivées de Lie de $V(x)$, respectivement le long des directions f et g .

A notre connaissance, cette équivalence est la caractérisation existante la plus générique de la passivité pour des éléments non linéaires de dimension finie. Elle est d'autre part à la source de méthodes de contrôle non linéaire par retour d'état visant à stabiliser un système donné, en le rendant passif (voir [24]).

Notons encore que, dans une perspective similaire à l'étude de la stabilité dérivée de la passivité d'un système, une notion de stabilité énergétique a été développée et appliquée aux équations d'état associées aux modèles bond graphs non linéaires ([53], [40]). La méthode développée par les auteurs se fonde sur l'étude des puissances échangées dans la structure de jonction et de l'énergie totale stockée dans le bond graph. Elle conduit à la construction naturelle d'un système de fonctions de Lyapunov, à partir du bond graph, et résout ainsi dans ce cas le problème ardu de la détermination de ces fonctions ([52], [39]).

3.2 Systèmes dynamiques linéaires de dimension infinie

Laurent Schwartz (Paris 1915) se promenant dans Varsovie, passe devant un arrêt d'autobus. Il lit machinalement la destination : Place Banach. "Je me dois d'y aller" se dit-il, et il attend avec quelques personnes. L'autobus arrive bondé. Laurent Schwartz s'avance vers la porte, mais le contrôleur lui dit : "Ne montez pas, c'est complet" ... Anecdote racontée dans [56].

La passivité au sens de la définition 3.3 est, fondamentalement, une propriété des équations constitutives entrées - sorties, qui pourrait être définie

indépendamment de la réalisation choisie. Cependant, la relation d'équivalence entre la passivité et l'existence d'une fonction d'énergie interne (qui permet l'application au problème de stabilité), les résultats de caractérisation des équations constitutives passives, et l'étude plus détaillée du cas des systèmes linéaires nécessitent l'existence d'une représentation d'état. Cette existence présuppose que les conséquences utiles des sollicitations passées, auxquelles a été soumis l'élément, puissent être "rassemblées", à n'importe quel moment, dans un vecteur d'état, de manière à ce que le comportement futur de cet élément puisse être déterminé de manière univoque par la donnée de cet état, et des sollicitations futures (signal d'entrée admissible).

Par ailleurs, dans le cas fini-dimensionnel, une restriction appropriée de l'espace \mathcal{U} des signaux d'entrées admissibles permet, à l'aide de la représentation d'état correspondante, de déterminer la quantité d'énergie disponible au sein de l'élément, et la manière de la lui arracher.

Dans ce travail, nous n'envisagerons dans le détail, que le cas des systèmes linéaires. Un bref parcours rétrospectif des exemples d'éléments linéaires évoqués dans ce texte fait entrevoir la diversité des représentations possibles : équations aux dérivées partielles, équations différentielles à retard, représentations par produit de convolution (avec ou sans impulsion), représentation par fonction de transfert.

De ces considérations, il apparaît, d'une part, que la définition de passivité peut se généraliser naturellement aux systèmes de dimensions infinies (car c'est, fondamentalement, une propriété entrée - sortie), et que, d'autre part, une représentation d'état unifiée pour ces systèmes faciliterait grandement son étude. Dans cette double perspective, la théorie, déjà bien établie, des semigroupes d'opérateurs linéaires semble être un outil approprié à la représentation des éléments linéaires, et à l'étude de leur passivité. Ce formalisme généralise la notion de représentation d'état, il étend les résultats de représentation des systèmes linéaires dans le domaine fréquentiel, et englobe les représentations mentionnées, comme cas particulier.

L'approche semigroupe a une histoire déjà longue en théorie des systèmes. Basée sur les travaux en mathématiques des années 50 (voir notamment [62], pour une première synthèse de ces travaux), elle a été appliquée à la théorie des systèmes dans le milieu des années 60. Dans les années 70, paraissaient déjà les premiers articles de synthèse à ce sujet, ainsi que les définitions formelles de systèmes linéaires de dimension infinie qui sont encore utilisées aujourd'hui (voir, notamment, [58]). Plus récent, l'ouvrage de R. Curtain et H. Zwart [37] expose de manière assez détaillée les principales applications (théoriques) de cette approche semigroupe à la théorie des systèmes linéaires, et plus particulièrement à l'étude de leur stabilité, de leur commandabilité, de leur observabilité, de leur représentation fréquentielle, et des relations entre

ces notions.

3.2.1 Définitions et résultats élémentaires

Considérons l'exemple d'une poutre vibrante, mentionné au chapitre I et étudié plus en détail ci-après (section 3.3.3). A un instant donné, l'évolution dynamique future de la poutre est entièrement caractérisée, d'une part par la connaissance du profil instantané des déformations, et d'autre part par les sollicitations extérieures. L'idée vient donc naturellement de considérer un ensemble de profils (espace de fonctions) comme espace d'état de ce système, et de voir l'équation aux dérivées partielles comme une dynamique imposée à l'évolution de ces profils. Il ne reste plus qu'à formaliser cette intuition très simple; c'est l'objet des quelques définitions qui suivent.

En ce qui concerne l'espace de fonctions - états, nous choisirons des espaces de Hilbert, parce que c'est le cas le plus simple¹, et qu'il nous suffira pour généraliser la définition de passivité et sa caractérisation. Dans la suite, Z désignera un espace de Hilbert complexe séparé (espace d'état), $\mathcal{L}(Z)$ l'espace des opérateurs linéaires et bornés de Z dans Z , et $I \in \mathcal{L}(Z)$ l'opérateur identité.

Définition 3.12 *Un semigroupe fortement continu d'opérateurs linéaires sur Z (souvent abrégé par la notation C_0 -semigroupe) est une application $T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(Z)$ telle que :*

(i) $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tout $t, s \geq 0$

(ii) $T(0) = I$

(iii) $\|T(t)z_0 - z_0\|_Z \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0^+$ pour tout $z_0 \in Z$, avec $\|\cdot\|_Z$, la norme associée au produit scalaire dans Z .

Dans son application aux systèmes d'état décrits par des équations aux dérivées partielles, $T(t)$ sera l'opérateur qui à la condition initiale z_0 fait correspondre l'état $z(t)$ solution du système dynamique de dimension infinie. Les propriétés qui font de la famille d'opérateurs $\{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ un semigroupe sont le caractère stationnaire des lois d'évolution dynamique du système d'état (propriété (i)) et le choix d'une origine des temps ($t = 0$, propriété (ii)). La continuité en norme est exprimée en $t = 0$, mais s'étend à toute valeur $t > 0$, par application triviale de la propriété (i).

La famille d'opérateur $T(t)$ généralise, au cas de dimension infinie, l'exponentielle matricielle utilisée pour exprimer les solutions d'équations différentielles ordinaires linéaires. Cependant, dans le cas des équations d'état

¹Il est possible de généraliser (en partie) l'approche à des espaces de Banach, mais contrairement à une affirmation très répandue, cela pose des problèmes et n'est pas le résultat d'un travail mécanique de transposition (voir notamment [7], pour cette approche).

de dimension infinie, les opérateurs de $\mathcal{L}(Z)$ n'ont plus de représentation matricielle, mais, éventuellement, un générateur infinitésimal.

Définition 3.13 *Le générateur infinitésimal A d'un C_0 -semigroupe, défini sur un espace de Hilbert Z , est l'opérateur*

$$Az := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (T(t) - I) z$$

dont le domaine (noté $D(A)$) est l'ensemble des éléments de Z pour lesquels la limite existe.

Le générateur infinitésimal n'est pas, en général, un opérateur borné. Dans le cas des équations aux dérivées partielles, il sera souvent défini comme un opérateur de différentiation par rapport à certaines variables, ou à une combinaison de tels opérateurs. Il permet de généraliser directement la notion de dérivée temporelle de l'état, et donc de préciser la loi d'évolution dynamique de cet état, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3.14 *Soit $T(t)$ un C_0 -semigroupe sur Z , de générateur infinitésimal A . On a alors les propriétés suivantes :*

- (i) $z_0 \in D(A), t \geq 0 \Rightarrow T(t) z_0 \in D(A)$
- (ii) $z_0 \in D(A^n), t > 0, n \geq 0 \Rightarrow \frac{d^n}{dt^n} (T(t) z_0) = A^n T(t) z_0 = T(t) A^n z_0$
- (iii) $z_0 \in D(A), t \geq 0 \Rightarrow T(t) z_0 - z_0 = \int_0^t T(s) A z_0 ds$
- (iv) A est un opérateur linéaire fermé² et $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ est dense dans Z

Proof. Voir [37], théorème 2.1.10. ■

De ce théorème, nous pouvons conclure que, si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $T(t)$ défini sur un espace de Hilbert Z , alors :

$$z(t) := T(t) z_0 \tag{3.25}$$

est la solution du problème homogène de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) \\ z(0) = z_0 \in D(A) \end{cases}, \quad t \geq 0 \tag{3.26}$$

²Un opérateur $A : D(A) \subseteq Z \rightarrow Z$ est fermé si son graphe $G(A) := \{(z, Az) | z \in D(A)\}$ est un fermé de $Z \times Z$.

Comme dans le cas de dimension finie, il est possible de généraliser ce résultat au problème non homogène

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + f(t) \\ z(0) = z_0 \in D(A) \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (3.27)$$

où $f \in C^1([0, \tau]; Z)$, et de montrer qu'une solution de (3.27) pour $t \in [0, \tau]$ est donnée par :

$$z(t) := T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s) ds, \quad t \in [0, \tau] \quad (3.28)$$

En fait, il s'agit de l'unique solution forte³ du problème (3.27) (voir [37], pour la démonstration). Cependant, l'hypothèse $f \in C^1([0, \tau]; Z)$ sur les signaux d'entrées est trop forte par rapport aux exigences de bien des applications (notamment, dans le cas de la définition, la plus large possible, de l'espace des signaux admissibles comme entrée, au regard des contraintes imposées par la définition de passivité). Il est possible d'élargir l'espace des termes forçants admissibles aux signaux L_p , à condition de considérer (3.28) comme une définition moins forte de solution du problème (3.27).

Définition 3.15 Si $f \in L_p([0, \tau]; Z)$ pour $p \geq 1$, et $z_0 \in Z$, alors (3.28) est appelée solution tempérée⁴ sur $[0, \tau]$ du problème de Cauchy non homogène (3.27).

Cette solution est continue sur $[0, \tau]$, et est en fait la solution faible du problème de Cauchy (3.27), au sens de la définition suivante.

Définition 3.16 Soit $f \in L_p([0, \tau]; Z)$ pour $p \geq 1$. Alors $z(t)$ est la solution faible de (3.27) si

- (i) $z(t)$ est continue sur $[0, \tau]$
- (ii) $\forall g \in C([0, \tau]; Z)$:

$$\int_0^\tau \langle z(t), g(t) \rangle_Z dt = \int_0^\tau \left\langle T(s)z_0 + \int_0^s T(s-t)f(t) dt, g(s) \right\rangle_Z ds$$

La raison pour laquelle le terme de solution tempérée (mild solution) a été introduite est liée à un développement en partie autonome de la théorie

³Une solution forte de (3.27) sur $[0, \tau]$ est une fonction $z(t)$, à valeurs dans Z , continûment différentiable sur $[0, \tau]$, qui satisfait l'équation (3.27) $\forall t \in [0, \tau]$.

⁴Traduction libre de l'anglais "mild solution"

des systèmes différentiels de dimension infinie, mais ce concept de solution est identique au concept de solution faible utilisé intensivement dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Nous avons présenté ci-dessus les quelques notions élémentaires qui nous sont nécessaires à définir la représentation des équations constitutives d'éléments linéaires stationnaires généraux, sous forme de système différentiel abstrait (de dimension infinie). Nous renvoyons à [37] pour une étude extensive de ces définitions et de leurs applications en théorie des systèmes. Pour notre part, nous nous contenterons de rappeler en cours de texte les résultats qui nous seront nécessaires.

3.2.2 Equations constitutives linéaires de dimension infinie

Considérons un élément m -port dont les entrées $u(t)$ et les sortie $y(t)$ sont des fonctions définies sur $[0, \infty[$ à valeurs dans \mathbb{R}^m , qui forment une paire hybride de variables de puissance (la puissance entrante s'écrit sous la forme $P(t) = \langle y(t), u(t) \rangle_{\mathbb{R}^m}$). Nous dirons dans la suite que ce m -port est un élément linéaire de dimension infinie si ces équations constitutives ont la forme

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cz(t) + Du(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (3.29)$$

où $z_0 \in Z$, Z est un espace de Hilbert séparé (réel) appelé espace d'état, $u \in \mathcal{U} := L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$, l'espace des signaux d'entrées admissibles, A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $T(t)$ défini sur Z , $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, Z)$, $C \in \mathcal{L}(Z, \mathbb{R}^m)$ et $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

Cette représentation d'état jouit des propriétés qui, dans le cas de dimension finie, permettent de définir sans ambiguïté les notions d'énergie disponible et de passivité (voir section 3.1.1).

Tout d'abord il existe une et une seule trajectoire $z(t)$ dans Z solution du problème différentiel non homogène. Le fait qu'il s'agisse d'une solution faible n'a pas d'importance particulière dans la définition d'un opérateur entrée-sortie qui représente les équations constitutives (3.29).

Ensuite, un m -port défini par les équations (3.29) peut être connecté à un réseau à paramètres localisés et échanger avec celui-ci, de manière instantanée, toutes les informations nécessaires à la détermination du comportement dynamique de l'ensemble connecté, du moment que les causalités du réseau et de l'élément n'entrent pas en conflit. C'est précisément pour que cette connexion soit trivialement réalisable que les espaces des valeurs des

entrées et sorties (inclus dans \mathbb{R}^m) sont de dimension finie. et qu'une représentation d'état a été choisie.

L'espace des entrées admissibles $L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$ est invariant par translation positive de l'échelle des temps. et par concaténation des signaux. Ces propriétés seront indispensables pour établir l'équivalence de la passivité et de l'existence d'une fonction d'énergie interne (voir section 3.4.2). comme dans le cas de dimension finie.

Enfin, ce choix de l'espace des signaux d'entrées admissibles garantit que la puissance fournie à l'élément soit localement intégrable sur \mathbb{R}^+ . En effet, cette puissance s'écrit

$$P(t) = \langle Cz(t) + Du(t), u(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} \quad (3.30)$$

où $z(t) := T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s) ds$ est la solution faible du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ z(0) = z_0 \in Z \end{cases} \quad (3.31)$$

Comme $u \in L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$, et $z \in C(\mathbb{R}^+, Z)$ (voir définition 3.16), la sortie $y(t) := Cz(t) + Du(t)$ est elle aussi dans $L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$. En conséquence, le produit scalaire réel $\langle u(t), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^m}$ appartient à $L_1^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Parmi les opérateurs de la représentation choisie, seul le générateur infinitésimal peut être non borné. Cette restriction peut, dans certain cas, poser problème, notamment lorsque les entrées et sorties du système linéaire sont définies par des conditions aux limites (problèmes de contrôle aux frontières). Dans ce cas, il est possible d'augmenter l'état et d'inclure les conditions aux limites dans les équations d'état en définissant un opérateur de condition aux limites (voir [37], chapitre III.3). Cependant, cette méthode impose des signaux d'entrées plus réguliers⁵. Une alternative à cette méthode consiste à élargir la classe des opérateurs B et C admissibles aux espaces de distributions, de manière à pouvoir substituer aux conditions aux limites des impulsions. Cette approche est celle utilisée dans [7].

3.3 Exemples

Quelqu'un croit-il que la différence entre l'intégrale de Lebesgue et celle de Riemann peut avoir une interprétation physique, et

⁵Plus précisément, cet artefact de calcul ne fonctionne que pour $u \in H^1(\mathbb{R}^+)$ où H^1 est l'espace de Sobolev défini par: $\{u \in C(\mathbb{R}^+) \text{ tel que } \exists v \in L_2(\mathbb{R}^+) \text{ avec } v = \frac{du}{dt} \text{ presque partout}\}$

que, par exemple, le fait qu'un avion vole ou ne vole pas pourrait dépendre de cette différence? Si c'est le cas, je prendrai soin de ne pas prendre cet avion. Richard Hamming, cité dans [110].

3.3.1 Intégrateur implicite d'ordre non entier

Considérons à nouveau l'exemple de l'intégrateur implicite, pour lequel nous avons proposé une réalisation passive au chapitre II et décrit dans le domaine de Laplace par le transfert :

$$Y(s) = \left(1 + \frac{s}{\tau}\right)^{-p} \cdot U(s) \quad (3.32)$$

avec $\tau > 0$, la constante de temps de relaxation et $p \in]0, 1[$, l'ordre d'intégration. La méthode que nous proposons, pour obtenir la réalisation ce transfert par un système d'état de dimension infinie, se définit en deux étapes. Dans un premier temps, la fonction de transfert est représentée sous une forme intégrale. Ensuite, cette forme intégrale est réalisée comme sortie d'un système d'équation aux dérivées partielles.

Nous avons montré au chapitre II que (3.32) peut être représenté sous la forme d'une intégrale de Stieltjes :

$$Y(s) = \int_0^{1/\tau} \frac{d\varphi(x)}{1 + xs} \cdot U(s) \quad (3.33)$$

où la mesure $d\varphi(x)$ est définie par

$$d\varphi(x) := \frac{\tau(1+x(1-p))}{\Gamma(p)x^p} dx \quad (3.34)$$

La transformée de Stieltjes fait apparaître un opérateur d'intégration (opérateur borné) d'une fonction définie sur l'intervalle $[0, 1/\tau]$. Nous choisisons donc pour espace d'état un espace de fonctions définies sur $[0, 1/\tau]$. Pour définir une représentation d'état de l'opérateur (3.33), nous allons le considérer comme l'opérateur entrée-sortie d'un système d'équations aux dérivées partielles de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = f(x)z(x,t) + g(x)u(t) \\ z(0,t) = 0 \\ y(t) := \int_0^{1/\tau} z(x,t) dx \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (3.35)$$

dont le transfert est

$$Y(s) = \int_0^{1/\tau} \frac{sg(x)}{s - f(x)} dx \cdot U(s) \quad (3.36)$$

En comparant (3.36) and (3.33), on trouve une réalisation d'état de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cz(t) \\ z(0) = 0 \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (3.37)$$

où $z(t)$ appartient à un espace d'état $Z := \{h : [0, 1/\tau] \rightarrow \mathbb{R}\}$ à préciser, et où les opérateurs A, B, C sont formellement définis par :

$$\begin{aligned} (Ah)(x) &:= -\frac{1}{x}h(x), \quad \forall x \in [0, 1/\tau] & (3.38) \\ (Bu)(x) &:= u \cdot \frac{\tau(1+x(1-p))}{\Gamma(p)x^{p+1}} \\ (Ch)(t) &:= \int_0^{1/\tau} h(x) dx \end{aligned}$$

Comme pour tout système linéaire, on choisit pour espace des entrées admissibles l'espace des fonctions de carré localement intégrable $L_2^{loc}(\mathbb{R}^+)$. La représentation formelle (3.38) fait apparaître un opérateur de multiplication par la fonction $-\frac{1}{x}$ de fonctions à valeurs dans $[0, 1/\tau]$. Si cet opérateur est considéré comme le générateur infinitésimal d'un semigroupe, il ne doit pas nécessairement être borné dans l'espace d'état choisi. C'est pourquoi un choix très simple $Z := L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R})$ suffit. L'objet de la proposition qui suit est de démontrer qu'avec ce choix, l'opérateur de multiplication par $-\frac{1}{x}$, défini sur $L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R})$, est bien le générateur infinitésimal d'un semigroupe fortement continu, et par conséquent, que la définition formelle (3.38) est bien celle d'un élément linéaire de dimension infinie telle que nous l'avons posée à la section précédente.

Propriété 3.17 *Soit T l'application à valeurs dans $\mathcal{L}(L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R}))$ qui à la condition initiale z_0 du problème*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = -\frac{1}{x} \cdot z(t) \\ z(0) = z_0 \in L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R}) \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (3.39)$$

fait correspondre sa solution au temps t , c'est-à-dire :

$$z(t) = T(t)z_0 := e^{-\frac{t}{x}}z_0(x) \quad (3.40)$$

Alors $T(t)$ est un semigroupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur $L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R})$.

Démonstration.

Pour tout $t \geq 0$, $T(t)$ est un opérateur linéaire borné de $L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R})$ dans $L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R})$. En effet $\forall h \in L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R})$:

$$\|T(t)h\|_{L_2}^2 := \int_0^{1/\tau} \left(e^{-\frac{t}{x}} h(x)\right)^2 dx \leq \int_0^{1/\tau} (h(x))^2 dx = \|h\|_{L_2}^2 \quad (3.41)$$

Donc, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(L_2, L_2)} \leq 1, \forall t \geq 0$. (on parle dans ce cas de semigroupe de contraction). Les propriétés élémentaires de la fonction exponentielle impliquent que $\forall t, s \geq 0, \forall h \in L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R})$:

$$T(t)T(s)h(x) = e^{-\frac{t}{x}} e^{-\frac{s}{x}} h(x) = e^{-\frac{t+s}{x}} h(x) = T(t+s)h(x) \quad (3.42)$$

et

$$T(0)h(x) = e^{-\frac{0}{x}} h(x) = h(x) \quad (3.43)$$

Il ne reste qu'à montrer la continuité en norme pour $t \rightarrow 0^+$. Pour cela, prenons $h \in L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R})$ quelconque et considérons la suite $\{f_k\}_{k \geq 1}$ de fonctions de $L_1([0, 1/\tau], \mathbb{R})$ définies par :

$$f_k(x) := \left(e^{\frac{-1}{kx}} - 1\right) h(x) \quad (3.44)$$

Puisque

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0 \text{ presque partout dans } [0, 1/\tau] \quad (3.45)$$

et comme, pour $g(x) := h^2(x) \in L_1([0, 1/\tau], \mathbb{R})$, on a la majoration

$$f_k(x) \leq g(x) \quad (3.46)$$

le théorème de convergence dominée de Lebesgue⁶ garantit la convergence et la valeur de la limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{1/\tau} (f_k(x))^2 dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{1/\tau} \left(T\left(\frac{1}{k}\right)h(x) - h(x)\right)^2 dx = 0 \quad (3.47)$$

Nous pouvons donc conclure que $\forall h \in L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R})$

$$\|T(t)h - h\|_{L_2} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \quad (3.48)$$

Ce qui conclut la démonstration. ■

⁶Le théorème de convergence dominée peut s'énoncer comme suit. Soit $\{f_k\}_{k \geq 1}$, une suite de fonctions de $L_1(\Omega)$ où $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ mesurable. Si $f_k(x) \rightarrow f(x), \forall x \in \Omega$, et si il existe $g \in L_1(\Omega)$ telle que $|f_k(x)| \leq g(x), \forall x \in \Omega$, Alors (i) $f \in L_1(\Omega)$ (ii) $\|f_k - g\|_{L_1} \rightarrow 0$ (iii) $\int_{\Omega} f_k \rightarrow \int_{\Omega} f$

Le générateur infinitésimal A du C_0 -semigroupe $T(t)$, est défini par

$$\begin{aligned} A : D(A) \subseteq L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R}) &\rightarrow L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R}) \\ h \mapsto Ah &:= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left(e^{-\frac{t}{x}} - 1 \right) h \end{aligned} \quad (3.49)$$

où $D(A)$ est l'ensemble des éléments de $L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R})$ pour lesquels la limite existe. Comme

$$\left\| \frac{1}{t} \left(e^{-\frac{t}{x}} - 1 \right) h(x) \right\|_{L_2}^2 := \int_0^{1/\tau} \left(\frac{1}{t} \left(e^{-\frac{t}{x}} - 1 \right) \right)^2 h(x)^2 dx \quad (3.50)$$

et parce que

$$\left(\frac{1}{t} \left(e^{-\frac{t}{x}} - 1 \right) \right)^2 = \left(-\frac{1}{x} + O(t) \right)^2 \quad (3.51)$$

ce domaine $D(A)$ est en fait défini par

$$D(A) = \left\{ h \in L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R}) \mid \frac{1}{x} h(x) \in L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R}) \right\} \quad (3.52)$$

Le point (iv) du théorème 3.14 nous permet donc de déduire en corollaire de la précédente proposition que l'opérateur A est un opérateur linéaire fermé et que son domaine $D(A)$ ainsi que l'intersection $\bigcap_{k=1}^{\infty} D(A^k)$ sont denses dans $L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R})$.

Pour conclure, les opérateurs B et C de la représentation abstraite (3.37) sont définis par :

$$\begin{aligned} B : \mathbb{R} &\rightarrow L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R}) \\ u \mapsto Bu &:= u \cdot \frac{\tau(1+x(1-p))}{\Gamma(p)x^{p+1}} \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} C : L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ h \mapsto Ch &:= \int_0^{1/\tau} h(x) dx \end{aligned} \quad (3.54)$$

Ces deux définitions ayant un sens de par le choix de l'espace d'état $Z = L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R})$.

Remarque 7 *Le même procédé de représentation par équations aux dérivées partielles peut être appliqué à de nombreux exemples d'opérateurs de convolution. Cependant, le choix de la représentation la mieux adaptée à l'opérateur considéré, par exemple, celle qui rend l'analyse des propriétés de stabilité et de passivité plus aisée que sur l'opérateur de convolution lui-même, est une opération délicate pour laquelle il n'existe pas, à notre connaissance, de recette systématique.*

3.3.2 Equations différentielles linéaires à retards

Nous ne présentons ici que très brièvement la formulation semigroupe des systèmes d'équations différentielles à retard. Notre propos est simplement d'illustrer la variété des systèmes qui possèdent une description en termes de semigroupes. Les démonstrations des résultats de cette section sont développées dans l'ouvrage de R. Curtain et H. Zwart [37] (pp. 53-68 et pp. 107-109), qui traite également en détails les applications aux problèmes de stabilité et de commandabilité des systèmes à retards.

Considérons le problème de Cauchy abstrait

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = A_0 w(t) + \sum_{i=1}^p A_i w(t - \tau_i) \\ w(0) = r \\ w(\theta) = f(\theta) \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (3.55)$$

$\theta \in [-\tau_p, 0[$

où $0 < \tau_1 < \dots < \tau_p$ sont des retards ponctuels, $w(t) \in \mathbb{R}^n$ est la valeur courante de l'"état", $A_i \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $i = 1 \dots p$, $r \in \mathbb{R}^n$ et $f \in L_2([-\tau_p, 0], \mathbb{R}^n)$. On peut pour ce problème définir un espace d'état "véritable" comme l'espace de Hilbert, noté M_2 , défini par :

$$M_2([-\tau_p, 0]; \mathbb{R}^n) := \mathbb{R}^n \oplus L_2([-\tau_p, 0], \mathbb{R}^n) \quad (3.56)$$

et par le produit scalaire

$$\left\langle \begin{pmatrix} r_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_2 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{M_2} := \langle r_1, r_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle f_1, f_2 \rangle_{L_2} \quad (3.57)$$

L'état du système contient donc la valeur courante $w(t)$ et les valeurs passées $w(t - \cdot)$ nécessaires à la détermination univoque de l'évolution dynamique ultérieure.

Pour toute condition initiale $(w(0), w(\cdot))^T = \begin{pmatrix} r & f(\cdot) \end{pmatrix}^T \in M_2$, il existe une seule fonction $w(\cdot)$ absolument continue sur $[0, \infty[$ qui satisfait les équations (3.55) presque partout (solution faible). Cette solution satisfait également l'équation intégrale

$$w(t) = e^{A_0 t} r + \sum_{i=1}^p \int_0^t e^{A_0(t-s)} A_i w(s - \tau_i) ds, \quad t \geq 0 \quad (3.58)$$

qui peut être utilisée pour démontrer les propriétés de semigroupe de l'application linéaire $T(t)$ à valeurs dans M_2 qui, à chaque état initial $z(0) :=$

$\begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix}^T \in M_2$, fait correspondre l'état au temps t :

$$z(t) := \begin{pmatrix} w(t) \\ w(t + \cdot) \end{pmatrix} \in M_2 \quad (3.59)$$

où $w(t)$ est la solution de (3.58) avec les conditions initiales $w(0) = r$ et $w(\theta) = f(\theta)$, $\theta \in [-\tau_p, 0[$.

On montre alors que le semigroupe $T(t)$ est fortement continu, et qu'il est engendré par le générateur infinitésimal A défini par :

$$A : D(A) \rightarrow M_2$$

$$\begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_0 r + \sum_{i=1}^p A_i f(-\tau_i) \\ \frac{df}{d\theta}(\cdot) \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

avec

$$D(A) := \left\{ \begin{pmatrix} r \\ f(\cdot) \end{pmatrix} \in M_2 \left| \begin{array}{l} f \text{ absolument continue} \\ \frac{df}{d\theta}(\cdot) \in L_2([-\tau_p, 0], \mathbb{R}^n) \\ f(0) = r \end{array} \right. \right\} \quad (3.61)$$

La représentation d'état d'un élément m -ports, dont les équations constitutives ont la forme d'un système différentiel à retard, peut alors être écrite sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cz(t) \\ z(0) = z_0 \in M_2 \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (3.62)$$

où A est le générateur défini par (3.60) et (3.61), $C \in \mathcal{L}(M_2, \mathbb{R}^m)$ et où l'opérateur B est défini par

$$B : \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$$

$$u \mapsto Bu := \begin{pmatrix} B_1 u \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

avec $B_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Il est possible d'envisager également des retards sur l'entrée, mais, dans ce cas, l'élément résultant ne sera pas passif, comme nous le montrerons à la section 3.6.2.

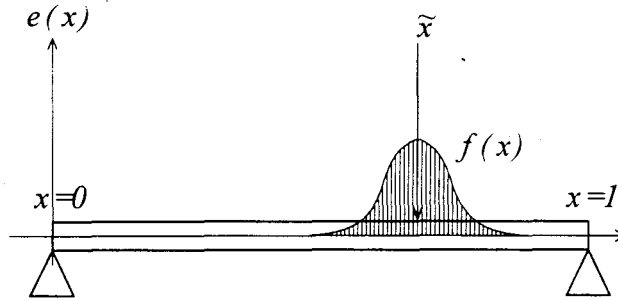


Figure 3.1: Exemple d'une poutre flexible de longueur unitaire soumise à une force $u(t) \cdot f(x)$ ($e(x)$ est le déplacement vertical et $f(x)$ la distribution des forces extérieures).

3.3.3 Un exemple d'équation aux dérivées partielles

Dans cette section, nous allons considérer l'exemple, déjà mentionné au chapitre I, de la poutre flexible, de longueur unitaire, soumise à un effort (force) mécanique extérieur appliqué en un point d'abscisse $x = \tilde{x} \in]0, 1[$ (voir figure 3.1).

Si la poutre est considérée comme un exemple d'élément de dimension infinie qui est connecté à un circuit mécanique à paramètres localisés (imposant l'effort), l'entrée doit être une grandeur scalaire (force ou vitesse), ne dépendant que du temps. C'est pourquoi la distribution de force extérieure appliquée à la poutre sera représentée par un produit de la forme

$$F_{ext}(t, x) := f(x) \cdot u(t) \quad (3.64)$$

où $f(x)$ est une fonction de densité (mesurable, non négative, sans unité, définie sur $[0, 1]$ et telle que $\int_0^1 f(x) dx = 1$). De cette manière, la variable $u(t)$ est un effort localisé. La sortie doit donc être le flux imposé par la poutre au système mécanique qui lui est connecté, c'est-à-dire la vitesse de déformation verticale aux points d'application des forces. On représente donc le flux localisé par

$$y(t) = - \int_0^1 f(x) \frac{\partial e(x, t)}{\partial t} dx \quad (3.65)$$

Un modèle classique d'une telle poutre vibrante, qui suppose de petites déformations, et des frottements linéaires proportionnels à la vitesse en chaque

point, est donné par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{IE}{\rho S} \frac{\partial^4 e(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\alpha}{\rho S} \frac{\partial^3 e(x,t)}{\partial t \partial x^2} + f(x)u(t) \\ y(t) = -\int_0^1 f(x) \frac{\partial e(\bar{x},t)}{\partial t} dx \\ e(0,t) = e(1,t) = \frac{\partial^2 e(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e(1,t)}{\partial x^2} = 0 \\ e(x,0) = e_0(x) ; \frac{\partial e(x,0)}{\partial t} = e_1(x) \end{cases}, \forall t \geq 0 \quad (3.66)$$

où $e(x)$ désigne le déplacement vertical de la poutre au point d'abscisse x , E le module de Young, I le moment d'inertie, S la section, ρ la densité et α , un coefficient de friction.

Ce modèle n'est pas l'exemple le plus simple de système d'état décrit par des équations aux dérivées partielles. Cependant, et d'un point de vue strictement théorique, il est intéressant à deux points de vue.

Premièrement, il s'agit d'un cas particulier de la famille des équations d'ondes, famille pour laquelle il existe une "certaine" uniformité dans la représentation par semigroupe. Malheureusement, comme dans le cas des éléments définis par des produit de convolution, il n'existe pas de machinerie qui produise des représentations semigroupes de systèmes d'équations aux dérivées partielles, simplement en "tournant la manivelle". Mais, dans le cas des équations d'ondes, les générateurs considérés, leurs domaines, et l'espace d'état choisi sont fort semblables. Ainsi, les développements que nous présentons ci-dessous sont pour une grande part inspiré d'un exemple plus élémentaire de [37] (voir pp.34-37, exemple 2.2.5 de cet ouvrage). Nous traitons cependant le problème en détail, car les choix des variables entrée et sortie que nous avons adoptés, ainsi que le fait de tenir compte du frottement, introduisent des difficultés supplémentaires, et, en conséquence, quelques résultats additionnels.

Deuxièmement, le comportement énergétique de la poutre est, pour l'essentiel connu. En effet, à tout moment, l'énergie stockée dans la poutre vaut :

$$\begin{aligned} E_{stockée}(t) &: = E_{cin}(t) + E_{pot}(t) & (3.67) \\ &= \frac{\rho S}{2} \int_0^1 \left| \frac{\partial e(x,t)}{\partial t} \right|^2 dx + IE \int_0^1 \frac{\partial^4 e(x,t)}{\partial x^4} e(x,t) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\rho S}{2} \left| \frac{\partial e(x,t)}{\partial t} \right|^2 + IE \left| \frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial x^2} \right|^2 \right) dx \end{aligned}$$

et se divise en énergie cinétique (E_{cin}) et en énergie potentielle des moments de flexion (E_{pot}). A défaut de la fonction énergie disponible, on en connaît au moins une borne supérieure ($E_{stockée}$) et la passivité de la poutre ne fait

donc aucun doute. Cet exemple sera donc particulièrement utile pour vérifier la cohérence d'éventuels critères de passivité.

Pour formuler la représentation semigroupe d'équations aux dérivées partielles du type (3.66), il est utile de les décomposer en équations d'état du premier ordre (dérivées partielles du premier ordre en la variable temps), et, ensuite, de définir le générateur infinitésimal du semigroupe comme l'opérateur différentiel qui regroupe les dérivées spatiales. En général, il est possible de définir ce générateur de manière "naturelle", en incluant les conditions aux limites dans la définition du domaine. Dans notre cas, les deux opérateurs $\frac{d^2}{dx^2}$ et $-\frac{d^4}{dx^4}$ apparaissent dans l'équation d'onde (3.66), lorsqu'elle a été ramenée à une équation du premier ordre (par rapport à la dérivation temporelle). Les domaines de ces opérateurs seront donc des espaces de fonctions satisfaisant les conditions aux limites de l'équation d'onde, et tels que les dérivées $\frac{d^2}{dx^2}$ et $\frac{d^4}{dx^4}$ aient un sens. Nous considérerons donc, dans la suite, les opérateurs :

$$A_0 := \frac{d^4}{dx^4} \quad (3.68)$$

$$D(A_0) := \left\{ h \in L_2(0,1) \left| \begin{array}{l} h, \frac{dh}{dx}, \frac{d^2h}{dx^2}, \frac{d^3h}{dx^3} \text{ absolument continue} \\ \frac{d^4h}{dx^4} \in L_2(0,1) \\ h(0) = h(1) = \frac{d^2h}{dx^2}(0) = \frac{d^2h}{dx^2}(1) = 0 \end{array} \right. \right\}$$

et

$$A_0^{1/2} := -\frac{d^2}{dx^2} \quad (3.69)$$

$$D(A_0^{1/2}) := \left\{ h \in L_2(0,1) \left| \begin{array}{l} h, \frac{dh}{dx} \text{ absolument continue} \\ \frac{d^2h}{dx^2} \in L_2(0,1) \\ h(0) = h(1) = 0 \end{array} \right. \right\}$$

Il faut remarquer que, pour toute fonction h dans $D(A_0^{1/2})$, on a :

$$\begin{aligned} \langle h, A_0^{1/2} h \rangle_{L_2} &= - \int_0^1 h \frac{d^2h}{dx^2} dx \\ &= + \int_0^1 \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

Et, par ailleurs, pour toute fonction h dans $D(A_0)$, on a :

$$\langle h, A_0 h \rangle_{L_2} = + \int_0^1 h \frac{d^4h}{dx^4} dx$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^1 \frac{dh}{dx} \frac{d^3h}{dx^3} dx \\
&= + \int_0^1 \left(\frac{d^2h}{dx^2} \right)^2 dx \geq 0
\end{aligned}$$

De plus, les opérateurs A_0 et $A_0^{1/2}$ sont autoadjoints. En effet :

$$\begin{aligned}
\langle h, A_0^{1/2} g \rangle_{L_2} &= \int_0^1 \frac{dh}{dx} \frac{dg}{dx} dx = \langle A_0^{1/2} h, g \rangle_{L_2}, \forall h, g \in D(A_0^{1/2}) \\
\langle h, A_0 g \rangle_{L_2} &= \int_0^1 \frac{d^2h}{dx^2} \frac{d^2g}{dx^2} dx = \langle A_0 h, g \rangle_{L_2}, \forall h, g \in D(A_0)
\end{aligned}$$

Les signes des opérateurs A_0 ($+\frac{d^4}{dx^4}$) et $A_0^{1/2}$ ($-\frac{d^2}{dx^2}$) ont donc été définis de manière à ce qu'ils soient tous deux des opérateurs positifs dans $L_2(0, 1)$, sur leurs domaines respectifs⁷. Comme on a trivialement $(A_0^{1/2})^2 h = A_0 h$, $\forall h \in D(A_0)$, l'opérateur $A_0^{1/2}$ est l'unique racine carrée positive de A_0 ⁸. Enfin, notons encore, pour la suite, que les opérateurs A_0 et $A_0^{1/2}$ sont inversibles, et que leurs inverses sont bornés dans $L_2(0, 1)$. Par exemple,

$$(A_0^{1/2})^{-1} h = \int_0^x \int_0^\xi h(\eta) d\eta d\xi, \forall h \in L_2(0, 1)$$

et

$$\begin{aligned}
\left\| (A_0^{1/2})^{-1} h \right\|_{L_2}^2 &= \int_0^1 \left(\int_0^x \int_0^\xi h(\eta) d\eta d\xi \right)^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 h^2(\eta) d\eta d\xi dx \\
&\leq \|h\|_{L_2}^2
\end{aligned}$$

La représentation d'état abstraite du premier ordre du problème de Cauchy homogène ($f(x) = 0$) associé aux équations (3.66), peut s'écrire, à l'aide des opérateurs $A_0^{1/2}$ et A_0 que nous venons de définir, sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) := \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\frac{IE}{\rho S} A_0 & -\frac{\alpha}{\rho S} A_0^{1/2} \end{bmatrix} z(t), t \geq 0 \\ z(0) = z_0 \in Z \end{cases} \quad (3.70)$$

⁷Un opérateur linéaire $N : D(N) \subseteq E \rightarrow E$ (E est un espace de Hilbert) est *positif* si (i) $\langle N(e), e \rangle_E \geq 0, \forall e \in E$ (ii) $N = N^*$ où N^* est l'opérateur adjoint de N .

⁸En effet, si $N : D(N) \rightarrow E$ est un opérateur positif, alors il existe *un seul* opérateur $P : D(P) \rightarrow E$ *positif* tel que $P^2 e = N e, \forall e \in D(N)$ (voir, par exemple, [21]). On appelle cet opérateur P l'unique racine carrée positive de N , et on le note souvent $N^{1/2}$.

avec $D(A) := D(A_0) \oplus D(A_0^{1/2})$. Il existe une grande variété de caractérisations des opérateurs A qui génèrent des C_0 -semigroupes. Le recours à ces théorèmes permet d'éviter le calcul explicite de la famille d'opérateurs $T(t)$, c'est-à-dire, dans notre cas, de la solution du problème aux limites (3.66). Nous utiliserons, pour le problème qui nous concerne, la caractérisation suivante.

Lemme 3.18 *Soit A un opérateur fermé, dont le domaine est dense dans un espace de Hilbert complexe Z . Alors, A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe qui satisfait $\|T(t)\|_{\mathcal{L}} \leq e^{\omega t}$ (avec $\omega \in \mathbb{R}$ fixé) si*

$$\operatorname{Re}(\langle Az, z \rangle_Z) \leq \omega \|z\|_Z^2, \quad \forall z \in D(A) \quad (3.71)$$

$$\operatorname{Re}(\langle z, A^*z \rangle_Z) \leq \omega \|z\|_Z^2, \quad \forall z \in D(A^*) \quad (3.72)$$

où A^* est l'adjoint⁹ de A .

Démonstration. Voir [37], corollaire 2.2.3. ■

Pour les besoins de la démonstration, nous aurons aussi besoin d'une condition suffisante de fermeture des opérateurs linéaires.

Lemme 3.19 *Soient X et Y deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire tel que $D(T) \subset X$ et $\operatorname{im}(T) = Y$. Si T est inversible et tel que $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$, alors T est un opérateur linéaire fermé.*

Démonstration. Voir [124], théorème 4.2. ■

Il reste à choisir un espace de Hilbert Z dans lequel l'opérateur A génère effectivement un semigroupe. L'approche la plus simple consiste à choisir un espace muni d'un produit scalaire qui satisfasse la condition suffisante du lemme 3.18. Ensuite, on montre qu'il s'agit bien d'un espace complet, et que le domaine $D(A)$ y est dense. Pour ce faire, nous partirons d'un espace de Hilbert classique : l'espace de Sobolev souvent noté $H_0^2(0, 1)$.

Lemme 3.20 *L'espace*

$$\left\{ h \in L_2(0, 1) \left| \begin{array}{l} h, \frac{dh}{dx} \text{ absolument continues} \\ \frac{d^2h}{dx^2} \in L_2(0, 1) \\ h(0) = h(1) = 0 \end{array} \right. \right\}$$

⁹Si A est un opérateur linéaire dont le domaine $D(A)$ est dense dans un espace de Hilbert Z , alors l'adjoint de A , noté A^* , est un opérateur dont le domaine est défini par : $D(A^*) := \{y \in Z \text{ t.q. } \exists y^* \in Z, \forall x \in Z : \langle Ax, y \rangle_Z = \langle x, y^* \rangle_Z\}$. Pour $y \in D(A^*)$, on définit $A^*y := y^*$. On montre que si A est de plus fermé, alors $D(A^*)$ est dense dans Z et A^* est aussi un opérateur fermé.

muni du produit scalaire

$$\langle h, g \rangle_{H_2} := \sum_{i=0}^2 \left\langle \frac{d^i h}{dx^i}, \frac{d^i g}{dx^i} \right\rangle_{L_2}$$

est un espace de Hilbert¹⁰.

Démonstration. Voir [145], section I.9. ■

Nous pouvons maintenant construire l'espace Z sur lequel nous allons définir le C_0 -semigroupe $T(t)$.

Propriété 3.21 *L'espace $D(A_0^{1/2})$, muni du produit scalaire*

$$\langle h, g \rangle_{D(A_0^{1/2})} := \frac{IE}{\rho S} \left\langle A_0^{1/2} h, A_0^{1/2} g \right\rangle_{L_2}$$

est un espace de Hilbert, et sa norme est équivalente à la norme dans H_0^2 , c'est-à-dire à la norme définie par :

$$\|h\|_{H_2} := \sqrt{\sum_{i=0}^2 \left\langle \frac{d^i h}{dx^i}, \frac{d^i h}{dx^i} \right\rangle_{L_2}}$$

En conséquence, l'espace $Z := D(A_0^{1/2}) \oplus L_2(0, 1)$, muni du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle h, g \rangle_Z &:= \langle h_1, g_1 \rangle_{D(A_0^{1/2})} + \langle h_2, g_2 \rangle_{L_2} \\ &:= \frac{IE}{\rho S} \left\langle A_0^{1/2} h_1, A_0^{1/2} g_1 \right\rangle_{L_2} + \langle h_2, g_2 \rangle_{L_2} \end{aligned}$$

est aussi un espace de Hilbert.

Démonstration. Il est suffisant de démontrer que les deux normes sont équivalentes. Le reste du résultat suit par le lemme 3.20. Éléments par éléments, les espaces $H_0^2(0, 1)$ et $D(A_0^{1/2})$ sont identiques. Ils sont globalement différents parce que leur produits scalaires sont différents. Pour montrer qu'ils sont équivalents, il suffit d'exhiber deux majorations $\|h\|_{H_2} \leq \alpha \|h\|_{D(A_0^{1/2})}$

¹⁰Pour être plus précis, les éléments des espaces de Sobolev sont en fait des classes d'équivalence de fonction dans $L_2(0, 1)$ (fonctions identiques au sens de la norme usuelle dans $L_2(0, 1)$). Cependant, dans la suite, les classes d'équivalence seront abusivement confondues avec un de leurs représentants.

et $\|h\|_{D(A_0^{1/2})} \leq \beta \|h\|_{H_2}$ avec $\alpha, \beta > 0$, valables pour toute fonction h dans $H_0^2(0, 1)$. On a :

$$\begin{aligned}
 \|h\|_{D(A_0^{1/2})}^2 &: = \frac{IE}{\rho S} \left\langle A_0^{1/2} h, A_0^{1/2} h \right\rangle_{L_2} & (3.73) \\
 &= \frac{IE}{\rho S} \left\langle \frac{d^2 h}{dx^2}, \frac{d^2 h}{dx^2} \right\rangle_{L_2} \\
 &\leq \frac{IE}{\rho S} \sum_{i=0}^2 \left\langle \frac{d^i h}{dx^i}, \frac{d^i h}{dx^i} \right\rangle_{L_2} \\
 &= : \frac{IE}{\rho S} \|h\|_{H_2}^2
 \end{aligned}$$

Ce qui établit la première majoration. D'autre part,

$$\begin{aligned}
 \langle h, h \rangle_{L_2} &= \int_0^1 h^2(x) dx & (3.74) \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{dh}{dx}(s) ds \right)^2 dx \\
 &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{dh}{dx}(s) \right)^2 ds \right) dx \\
 &\leq \left\langle \frac{dh}{dx}, \frac{dh}{dx} \right\rangle_{L_2}
 \end{aligned}$$

En intégrant par partie $\left\langle \frac{dh}{dx}, \frac{dh}{dx} \right\rangle_{L_2}$, et en tenant compte des conditions aux limites, on obtient :

$$\left| \left\langle \frac{dh}{dx}, \frac{dh}{dx} \right\rangle_{L_2} \right| = \left| - \int_0^1 h \frac{d^2 h}{dx^2} dx \right| \quad (3.75)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz dans L_2 :

$$\left| \left\langle \frac{dh}{dx}, \frac{dh}{dx} \right\rangle_{L_2} \right| \leq \|h\|_{L_2} \left\| \frac{d^2 h}{dx^2} \right\|_{L_2} \quad (3.76)$$

combinée à la majoration (3.74), implique

$$\|h\|_{L_2} \leq \left\| \frac{d^2 h}{dx^2} \right\|_{L_2}, \forall h \neq 0 \quad (3.77)$$

Et, finalement.

$$\langle h, h \rangle_{H_2} = \sum_{i=0}^2 \left\langle \frac{d^i h}{dx^i}, \frac{d^i h}{dx^i} \right\rangle_{L_2} \quad (3.78)$$

$$\leq 3 \left\| \frac{d^2 h}{dx^2} \right\|_{L_2}^2 \quad (3.79)$$

$$= 3 \frac{\rho S}{IE} \|h\|_{D(A_0^{1/2})}^2 \quad (3.80)$$

ce qui termine la démonstration. ■

A l'aide des résultats qui précèdent, nous pouvons maintenant établir que l'opérateur A génère un C_0 -semigroupe.

Propriété 3.22 *L'opérateur A de l'équation (3.70), considéré sur le domaine $D(A) := D(A_0) \oplus D(A_0^{1/2})$, est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe défini sur l'espace $Z := D(A_0^{1/2}) \oplus L_2(0, 1)$.*

Démonstration. La première étape consiste à montrer, à l'aide du lemme 3.19, que l'opérateur A est fermé. L'image de A est définie par :

$$\text{im}(A) := \left\{ w \in Z \left| \begin{array}{l} \exists \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in D(A_0) \oplus D(A_0^{1/2}) : \\ w = \begin{pmatrix} z_2 \\ -\frac{IE}{\rho S} A_0 z_1 + -\frac{\alpha}{\rho S} A_0^{1/2} z_2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \right\} \quad (3.81)$$

En conséquence :

$$\text{im}(A) \supseteq D(A_0^{1/2}) \oplus \left(D(A_0^{-1}) \cup D\left(\left(A_0^{1/2}\right)^{-1}\right) \right) \quad (3.82)$$

Comme $D(A_0^{-1}) = D(A_0^{-1/2}) = L_2(0, 1)$, l'opérateur A est bien surjectif, c'est-à-dire $\text{im}(A) = Z$.

Considérons l'opérateur linéaire Q (candidat inverse de A) défini par :

$$Qw := \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{IE} A_0^{-1/2} & -\frac{\rho S}{IE} A_0^{-1} \\ I & 0 \end{bmatrix} w \quad (3.83)$$

sur le domaine $D(Q) = Z$. L'image de Q est alors

$$\begin{aligned} \text{im}(Q) &\supseteq \left(D(A_0^{1/2}) \cup D(A_0) \right) \oplus D(A_0^{-1/2}) \\ &= D(A_0^{1/2}) \oplus L_2(0,1) \\ &= Z \end{aligned} \quad (3.84)$$

Cet opérateur Q est aussi défini de telle sorte que :

$$AQw = w, \quad \forall w \in Z \quad (3.85)$$

et est donc l'inverse de A . De plus, Q est trivialement borné puisque $A_0^{-1/2}$ et A_0^{-1} le sont. Toutes les hypothèses du lemme 3.19 sont satisfaites, et nous pouvons conclure que A est un opérateur fermé.

Notons encore que $D(A_0)$ est dense dans $L_2(0,1)$. Et comme $D(A_0) \subset D(A_0^{1/2})$, on a $D(A_0)$ dense dans $D(A_0^{1/2})$ et $D(A_0^{1/2})$ dense dans $L_2(0,1)$. Donc $D(A) := D(A_0) \oplus D(A_0^{1/2})$ est dense dans $Z := D(A_0^{1/2}) \oplus L_2(0,1)$.

Il ne reste plus qu'à vérifier les conditions (3.71) et (3.72) du lemme 3.18 pour démontrer le résultat. L'opérateur $A_0^{1/2}$ étant auto-adjoint et défini positif, on a :

$$\begin{aligned} \text{Re}(\langle Az, z \rangle_Z) &= \text{Re} \left(\begin{aligned} &\frac{IE}{\rho S} \langle A_0^{1/2} z_2, A_0^{1/2} z_1 \rangle_{L_2} \\ &- \langle \frac{IE}{\rho S} A_0 z_1 + \frac{\alpha}{\rho S} A_0^{1/2} z_2, z_2 \rangle_{L_2} \end{aligned} \right) \\ &= -\frac{\alpha}{\rho S} \langle A_0^{1/2} z_2, z_2 \rangle_{L_2} \\ &\leq 0, \quad \forall z \in D(A) \end{aligned} \quad (3.86)$$

L'opérateur adjoint de A , noté A^* est défini par

$$A^* z := \begin{bmatrix} 0 & -I \\ +\frac{IE}{\rho S} A_0 & -\frac{\alpha}{\rho S} A_0^{1/2} \end{bmatrix} z \quad (3.87)$$

sur le domaine $D(A^*) = D(A)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Re}(\langle z, A^* z \rangle_Z) &= \text{Re} \left(\begin{aligned} &\frac{IE}{\rho S} \langle A_0^{1/2} z_1, -A_0^{1/2} z_2 \rangle_{L_2} \\ &+ \langle z_2, \frac{IE}{\rho S} A_0 z_1 - \frac{\alpha}{\rho S} A_0^{1/2} z_2 \rangle_{L_2} \end{aligned} \right) \\ &= -\frac{\alpha}{\rho S} \langle A_0^{1/2} z_2, z_2 \rangle_{L_2} \\ &\leq 0, \quad \forall z \in D(A^*) \end{aligned} \quad (3.88)$$

Il suffit d'appliquer le lemme 3.18 pour conclure la démonstration. ■

Pour représenter le problème aux limites (3.66) sous la forme des équations constitutives abstraites que nous avons définies plus haut, à la section 3.2.2, c'est-à-dire ici sous la forme du système dynamique linéaire :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cz(t) \\ z(0) = 0 \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (3.89)$$

il reste encore à définir les opérateurs B et C . L'opérateur B peut être défini, comme un opérateur multiplicatif, par

$$\begin{aligned} B : \mathbb{R} &\rightarrow Z \\ u &\mapsto Bu := \begin{pmatrix} 0 \\ f(x)u \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.90)$$

à la condition que la distribution de force $f(x)$ soit une fonction de $L_2(0,1)$. En effet, dans ce cas, B est bien un opérateur linéaire borné (avec $\|B\| = \|f\|_{L_2}$). L'opérateur C , défini formellement par

$$\begin{aligned} C : Z &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto C_2 z_2 \end{aligned} \quad (3.91)$$

avec

$$\begin{aligned} C_2 : L_2(0,1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ z_2 &\mapsto C_2 z_2 := \int_0^1 f(x)z_2(x) dx \end{aligned} \quad (3.92)$$

est lui aussi borné. En effet, on a :

$$|Cz| = \left| \int_0^1 f(x)z_2(x) dx \right| = |\langle f, z_2 \rangle_{L_2}| \quad (3.93)$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans $L_2(0,1)$ assure que :

$$|Cz|^2 \leq \|f\|_{L_2} \|z_2\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2} \|z\|_Z \quad (3.94)$$

On a donc bien $\|C\|_{\mathcal{L}(Z, \mathbb{R})} \leq \|f\|_{L_2}$.

Le problème aux limites de la poutre vibrante (équation 1.70) a ainsi été représenté comme un élément fonctionnel décrit par un système d'état linéaire satisfaisant toutes les hypothèses requises à la section 3.2.2.

3.4 Passivité des systèmes de dimension infinie

Un mathématicien est une machine qui transforme le café en théorème. Cette citation est du mathématicien hongrois Pavel Erdős (Budapest 1913), qui a atteint un des meilleurs rendements dans ce processus de transformation. Ses collègues ont ainsi introduit le nombre de Erdős qui se définit comme suit : un mathématicien a un nombre de Erdős de 1 s'il a écrit un article avec Erdős (environ deux cents personnes) ; il a un nombre d'Erdős de 2 s'il a écrit un article avec quelqu'un qui a un nombre d'Erdős de 1. Les autres nombres de Erdős sont définis par récurrence, de la même manière. La conjecture selon laquelle Gauss a un nombre de Erdős est encore ouverte (extrait de [56]).

3.4.1 Définition

Nous avons défini à la section 3.2.2 une représentation d'état abstraite pour les éléments de dimension infinie dont les équations constitutives ont la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cz(t) + Du(t) \quad , t \geq 0 \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (3.95)$$

où $z_0 \in Z$, Z est un espace de Hilbert séparé (réel) appelé espace d'état, $u \in \mathcal{U} := L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$, l'espace des signaux d'entrées admissibles, A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $T(t)$ défini sur Z , $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, Z)$, $C \in \mathcal{L}(Z, \mathbb{R}^m)$ et $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$.

Cette famille d'équations constitutives autorise leur connexion avec un bond graph (réseau à paramètres localisés). En effet, la valeur courante de la sortie y est univoquement déterminée par la valeur courante de l'entrée, et celle de l'état, qui "résume" l'évolution passée. C'est précisément pour cette raison qu'une représentation semigroupe avec entrées et sorties à valeurs dans \mathbb{R}^m ("*finite rank inputs and outputs system*") a été choisie.

Les hypothèses sur l'espace des signaux d'entrées admissibles et le choix des sorties ($u \in L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$; (u, y) paire hybride de variables de puissance) suffisent à garantir que l'énergie fournie à (ou extraite de) l'élément, sur un intervalle de temps fini, est finie. Cependant, elles n'excluent pas la possibilité que l'élément "contienne" une quantité d'énergie infinie, qu'il soit

possible d'extraire en un temps infini. Cette question est l'objet, comme dans le cas de dimension finie, de la définition de passivité.

Définition 3.23 *L'énergie disponible associée à un élément m -port d'équation constitutive (3.95) est l'application :*

$$E_A : Z \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$$

$$z_0 \mapsto E_A(z_0) := \sup_{\tau \geq 0, u \in \mathcal{U}} \left(- \int_0^\tau P(\theta) d\theta \right)$$

où la puissance sortante $P(\theta)$ vaut $\langle y(\theta), u(\theta) \rangle_{\mathbb{R}^m}$, avec $y(\theta) = Cz(\theta) + Du(\theta)$ et $z(\theta)$ la solution faible du problème :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ z(0) = z_0 \in Z \end{cases}, t \geq 0$$

Définition 3.24 *Un élément m -port d'équation constitutive (3.95) est passif si*

$$E_A(z_0) < \infty, \forall z_0 \in Z$$

Dans le cas contraire, il est actif.

Dans le cas de dimension finie, $Z = \mathbb{R}^n$, nous retrouvons donc la même définition que précédemment (section 3.1.2). Nous utiliserons d'ailleurs une approche en fréquence (par fonction de transfert), similaire à celle du cas de dimension finie, pour établir des résultats de caractérisation des équations d'éléments passifs.

3.4.2 Equivalence avec l'existence d'une fonction d'énergie interne

Comme dans le cas de dimension finie, il existe une équivalence entre la notion de passivité et l'existence d'une fonction d'énergie interne. Cette équivalence est le point de départ de l'application de la passivité à l'étude de la stabilité des systèmes. L'application énergie interne devient alors un candidat naturel pour le critère de stabilité de Lyapunov (voir, par exemple, [118]).

Définition 3.25 *Soit un élément m -port d'équation constitutive (3.95). L'application $E_I : Z \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une énergie interne associée à l'élément si*

$$\forall 0 \leq t_1 \leq t_2; \forall u \in \mathcal{U}; \forall z_0 \in Z$$

$$E_I(z(t_2)) - E_I(z(t_1)) \leq \int_{t_1}^{t_2} P(z(\theta), u(\theta)) d\theta$$

où $z(\theta)$ est la solution faible de :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ z(0) = z_0 \in Z \end{cases}, t \geq 0$$

Dans le cas où l'application E_I est telle que :

$$\begin{aligned} \forall 0 \leq t_1 \leq t_2 ; \forall u \in \mathcal{U} ; \forall z_0 \in Z \\ E_I(z(t_2)) - E_I(z(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} P(z(\theta), u(\theta)) d\theta \end{aligned}$$

l'énergie nécessaire à conduire l'élément entre deux états est indépendante de la trajectoire particulière choisie. Autrement dit, l'évolution dynamique se caractérise par l'absence de dissipation au sein de l'élément (élément "lossless").

Propriété 3.26 *L'élément m -port défini par la représentation d'état (3.95) est passif si, et seulement si, il existe une application énergie interne associée.*

Démonstration. La condition nécessaire de passivité se démontre en établissant que l'application énergie disponible est une énergie interne. Soient $\tilde{u} \in \mathcal{U}$, $0 \leq t_1 \leq t_2$ et $\tilde{z}(t)$ la trajectoire dans Z associée à l'entrée \tilde{u} et à la condition initiale $\tilde{z}(0) = z_0$. L'énergie disponible à partir de l'état $\tilde{z}(t_1)$ vaut (définition 3.2) :

$$E_A(\tilde{z}(t_1)) := \sup_{\substack{T \geq 0 \\ u \in \mathcal{U} \\ z(0) = \tilde{z}(t_1)}} \left(- \int_0^T P(z(\theta), u(\theta)) d\theta \right) \quad (3.96)$$

où $z(t)$ est la trajectoire associée à l'entrée u et à la condition initiale $z(0) = \tilde{z}(t_1)$. Choisissons en particulier un signal d'entrée u tel que $u_{(0, t_2-t_1)}(\cdot) = \tilde{u}_{(t_1, t_2)}(\cdot - t_1)$, où $u_{(0, t)}$ désigne la restriction de u à l'intervalle $(0, t)$. On a alors

$$\begin{aligned} -E_A(\tilde{z}(t_1)) &= \inf_{\substack{T \geq 0 \\ u \in \mathcal{U} \\ z(0) = \tilde{z}(t_1)}} \left(\int_0^T P(z(\theta), u(\theta)) d\theta \right) \\ &\leq \int_0^{t_2-t_1} P(z(\theta), \tilde{u}(\theta)) d\theta + \inf_{\substack{T \geq t_2-t_1 \\ u \in \mathcal{U} \\ z(t_2-t_1) = \tilde{z}(t_2)}} \left(\int_{t_2-t_1}^T P(z(\theta), u(\theta)) d\theta \right) \end{aligned} \quad (3.97)$$

Du caractère stationnaire de l'opérateur entrée-sortie associé au système d'état (3.95), et par les choix $z(0) = \tilde{z}(t_1)$ et $z(t_2 - t_1) = \tilde{z}(t_2)$, la majoration (3.97) peut être écrite, de manière équivalente,

$$-E_A(\tilde{z}(t_1)) \leq \int_{t_1}^{t_2} P(\tilde{z}(\theta), \tilde{u}(\theta)) d\theta + \inf_{\substack{T \geq t_2 - t_1 \\ u \in \mathcal{U} \\ z(t_2 - t_1) = \tilde{z}(t_2)}} \left(\int_{t_2 - t_1}^T P(z(\theta), u(\theta)) d\theta \right) \quad (3.98)$$

Comme l'espace des signaux d'entrées admissibles $\mathcal{U} := L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$ est invariant par translation positive, et par concaténation, la majoration (3.98) est équivalente à

$$-E_A(\tilde{z}(t_1)) \leq \int_{t_1}^{t_2} P(\tilde{z}(\theta), \tilde{u}(\theta)) d\theta + \inf_{\substack{T \geq 0 \\ u \in \mathcal{U} \\ z(0) = \tilde{z}(t_2)}} \left(\int_0^T P(z(\theta), u(\theta)) d\theta \right) \quad (3.99)$$

ou encore

$$\sup_{\substack{T \geq 0 \\ u \in \mathcal{V} \\ z(0) = \tilde{z}(t_2)}} \left(- \int_0^T P(z(\theta), u(\theta)) d\theta \right) - E_A(\tilde{z}(t_1)) \leq \int_{t_1}^{t_2} P(\tilde{z}(\theta), \tilde{u}(\theta)) d\theta \quad (3.100)$$

Ce qui, par la définition de l'énergie disponible, signifie

$$E_A(\tilde{z}(t_2)) - E_A(\tilde{z}(t_1)) \leq \int_{t_1}^{t_2} P(\tilde{z}(\theta), \tilde{u}(\theta)) d\theta \quad (3.101)$$

L'inégalité (3.101) étant satisfaite pour tout choix $0 \leq t_1 \leq t_2$; $u \in \mathcal{U}$; $z_0 \in Z$ montre que l'énergie disponible est effectivement une énergie interne.

Pour démontrer la condition suffisante de passivité, considérons une application énergie interne $E_I : Z \rightarrow \mathbb{R}^+$ et un état initial quelconque $z_0 \in Z$. L'énergie disponible associée à l'état z_0 est définie par :

$$E_A(z_0) := \sup_{\substack{T \geq 0 \\ u \in \mathcal{U} \\ z(0) = z_0}} \left(- \int_0^T P(z(\theta), u(\theta)) d\theta \right) \quad (3.102)$$

Or, par définition de l'énergie interne, $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2$; $\forall u \in \mathcal{U}$; $\forall z_0 \in Z$:

$$E_I(z(t_2)) - E_I(z(t_1)) \leq \int_{t_1}^{t_2} P(z(\theta), u(\theta)) d\theta \quad (3.103)$$

En particulier, pour un choix $t_1 = 0$, $t_2 = T$ et $z(t_1) = z_0$,

$$E_A(z_0) \leq \sup_{\substack{T \geq 0 \\ u \in \mathcal{U}}} (E_I(z_0) - E_I(z(T))) \quad (3.104)$$

où $z(T)$ est l'état atteint au temps T , pour une entrée donnée u . On a donc

$$E_A(z_0) \leq \sup_{z \in Z} (E_I(z_0) - E_I(z)) \quad (3.105)$$

L'énergie interne étant une fonction à valeur non négative (ou, éventuellement, bornée inférieurement), on peut en conclure

$$E_A(z_0) \leq E_I(z_0) < \infty, \quad \forall z_0 \in Z \quad (3.106)$$

Ce qui établit le caractère passif de la représentation d'état. ■

Il est intéressant de remarquer que la démonstration ci-dessus s'applique sans modification aux systèmes d'état non linéaires de dimension finie, aussi bien qu'aux systèmes non linéaires de dimensions infinie, pour autant que ces derniers aient été défini de manière cohérente (voir section 3.4.5). Les hypothèses fondamentales utilisées sont, en effet, indépendantes du caractère linéaire de la représentation d'état. Ces hypothèses sont le caractère stationnaire de l'opérateur entrée-sortie, l'intégrabilité locale de la puissance, et la stabilité de l'espace des signaux d'entrées admissibles par rapport aux translations positives, et par rapport à la concaténation.

3.4.3 A propos des représentations d'état équivalentes

La passivité doit être une propriété caractéristique de l'équation constitutive entrée-sortie d'un élément, et, à ce titre, indépendante du choix spécifique de la représentation d'état. Cependant, dans la définition de passivité 3.24, le caractère borné de l'application énergie disponible fait intervenir la représentation d'état particulière choisie pour décrire l'élément. Il y a donc lieu de montrer que la propriété de passivité est commune à toutes les représentations d'état d'un même opérateur entrée-sortie. Ce problème a déjà été étudié dans le cas des représentations d'état de dimension finie. Nous proposons ci-après une généralisation directe au cas de dimension infinie qui nous préoccupe. Dans le cas linéaire, une représentation d'état sera notée par un triplet $S := \{Z, \mathcal{U}, \Sigma\}$ où Z est l'espace d'état, \mathcal{U} est l'espace des signaux d'entrées admissibles et $\Sigma := \{A, B, C, D\}$ est un quadruplet d'opérateurs linéaires tels que défini dans la représentation d'état (3.95).

Définition 3.27 Soit deux représentations d'état distinctes, S_1 et S_2 , d'un même élément m -port. Deux états, $z_1 \in Z_1$ et $z_2 \in Z_2$, sont dits équivalents (on note $z_1 \sim z_2$) si les deux ensembles

$$\{(u_1(\cdot), y_1(\cdot)) \subseteq L_2^{loc} \times L_2^{loc} \mid u_1 \in \mathcal{U}_1, z(0) = z_1\}$$

et

$$\{(u_2(\cdot), y_2(\cdot)) \subseteq L_2^{loc} \times L_2^{loc} \mid u_2 \in \mathcal{U}_2, z(0) = z_2\}$$

sont identiques¹¹. Les deux représentations d'état S_1 et S_2 sont dites équivalentes (au sens entrée-sortie) si, pour tout état $z_1 \in Z_1$ de l'une, il existe un état équivalent $z_2 \in Z_2$ de l'autre, et inversement.

Cette notion d'équivalence entre états est donc fondée uniquement sur les propriétés entrée-sortie des représentations d'état. Dès lors, la propriété suivante devient immédiate.

Propriété 3.28 Soient S_1 et S_2 deux représentations d'état équivalentes d'un même élément m -port (c'est-à-dire d'un même opérateur entrée-sortie). On a alors :

$$\forall z_1 \in Z_1, \forall z_2 \in Z_2 : z_1 \sim z_2 \Rightarrow E_{A_1}(z_1) = E_{A_2}(z_2)$$

où $E_{A_1}(z_1)$ et $E_{A_2}(z_2)$ sont les applications énergies disponibles définies, respectivement, pour les représentation d'état S_1 et S_2 .

Donc, si S_1 et S_2 sont deux représentations d'état équivalentes, elles sont simultanément soit passives, soit actives, au sens de la définition 3.24. Evidemment, toute la difficulté a été reportée sur la notion de représentations d'état équivalentes. Dans le cas où seuls sont considérés des changements de variables d'état linéaires inversibles, cela ne pose pas de problèmes supplémentaires. En effet, soit S_1 une représentation d'état linéaire de la forme

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = Az_1 + Bu \\ y_1 = Cz_1 + Du \\ z_1(0) = z_{10} \in Z_1 \end{cases} \quad (3.107)$$

¹¹L'égalité de deux fonctions dans $L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^N)$ doit être comprise au sens de la norme L_2 , sur tout intervalle compact de \mathbb{R}^+ . Il s'agit donc bien d'égalité presque partout (appartenance à la même classe d'équivalence) et non partout, comme indiqué dans [143].

et H un opérateur inversible de $\mathcal{L}(Z_1, Z_2)$ (Z_1, Z_2 sont deux espaces de Hilbert complexes séparés). L'opérateur H définit une nouvelle représentation d'état S_2

$$\begin{cases} z_2 = H^{-1}AH z_2 + H^{-1}Bu \\ y_2 = CH z_2 + Du \\ z_2(0) = H^{-1}z_{10} \in Z_2 \end{cases} \quad (3.108)$$

qui est heureusement équivalente à S_1 au sens de la définition 3.27 ci-dessus (car $\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}_2$ et pour toute entrée $u \in \mathcal{U}_1$, les sorties y_1 et y_2 sont identiques). Malheureusement, deux représentations d'état équivalentes peuvent être l'image l'une de l'autre par des opérateurs non linéaires et il est donc souvent malaisé de vérifier si deux représentations données sont équivalentes, au sens de la définition 3.27.

3.4.4 Interconnexions de N -ports passifs

La connexion des ports énergétiques de différents éléments, dans un bond graph, se réalise au moyen d'une structure de jonction, composée de jonctions élémentaires, et, éventuellement de transformateurs et de gyrateurs. Les structures de jonctions conservant la puissance, il est indispensable que la connexion d'éléments ne donne pas lieu à la création d'énergie. Il faut donc que la définition formelle de passivité proposée plus haut soit stable par rapport à l'opération de connexion définie sur les éléments.

Pour notre part, dans ce travail, nous avons écarté les problèmes d'attribution de causalité en imposant une causalité spécifique à chaque port de l'élément. Les éléments sont alors dits "à causalité préférentielle", et les connexions qui conduisent à des conflits de causalité sont, pour nous, interdites. Pour les lecteurs désireux de conduire plus loin la réflexion sur ce problème d'attribution de la causalité, nous suggérons la lecture de [105] et, plus spécifiquement pour les problèmes liés à la définition implicite des relations effort-flux, à celle de [3] et de [4].

Considérons l'exemple de la figure (3.2) où trois éléments sont connectés à l'aide d'une structure de jonction. Il peut y être observé que le nombre de ports libres après la connexion n'est pas déterminé par le nombre de ports de chaque éléments, pris séparément. Les ports libres peuvent en effet, être aussi bien des ports d'éléments laissés libres par la connexion, que des ports supplémentaires permettant d'éventuels apports d'énergie extérieure au sein de la structure de jonction. Dans l'exemple considéré, la connexion d'un élément 4-port et de deux élément 2-port donne lieu à une connexion

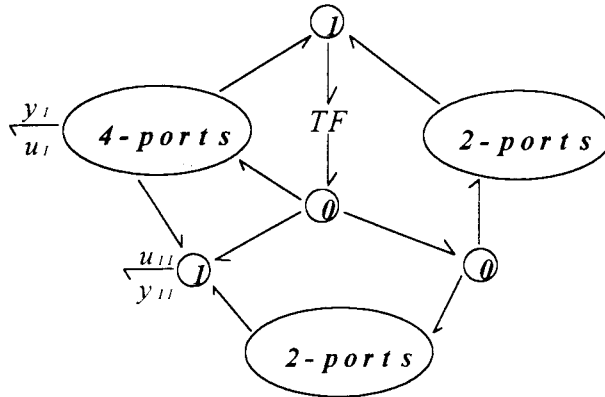


Figure 3.2: Connexion de trois éléments à l'aide d'une structure de jonction composée de deux jonctions 0, de deux jonctions 1 et d'un transformateur.

avec 2 ports extérieurs, définissant pour l'ensemble de la connexion la paire hybride de variables de puissance $[(u_I, u_{II})^T, (y_I, y_{II})^T]$.

Dans le cas de la connexion d'éléments linéaires, les signaux d'entrée, comme les signaux de sortie, sont des fonctions de carré localement intégrable. La structure de jonction ne fait donc, au pire, qu'introduire des contraintes supplémentaires sur certaines entrées. Le nombre d'entrées indépendantes, sur lesquelles il est possible d'agir afin d'extraire le maximum d'énergie de la connexion, ne peut donc être qu'inférieur à la somme du nombre des entrées de chaque élément pris séparément. C'est pourquoi la connexion d'éléments passifs donne lieu à un réseau passif.

Pour formaliser ce résultat, considérons les systèmes d'état S_1, \dots, S_k associées à k éléments possédant respectivement m_1, \dots, m_k ports. Soient Z_1, \dots, Z_k les espaces d'état associés, et $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ les quadruplets d'opérateurs linéaires définissant les équations constitutives de ces éléments. Quelle que soit la structure de jonction (linéaire et stationnaire) utilisée, l'ensemble de la connexion demeure un élément linéaire, stationnaire, de la forme générale (3.95), et son état au temps t est caractérisé par la valeur de $z(t) := (z_1(t), \dots, z_k(t)) \in \prod_{i=1}^k Z_i$. Si m est le nombre de ports libres de la connexion, l'espace des signaux d'entrées admissibles choisi est $\mathcal{U} := L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$, et les sorties correspondantes seront des fonctions $y \in L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$. La puissance entrant dans la connexion au temps t , $P(t) := \langle u(t), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^m}$, est toujours une fonction localement intégrable, et la définition de passivité s'applique sans modification. L'énergie disponible associée à un état initial

$z_0 = (z_1(0), \dots, z_k(0)) \in Z$ est encore définie par :

$$E_A : Z \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \quad (3.109)$$

$$z_0 \mapsto E_A(z_0) := \sup_{\tau \geq 0, u \in \mathcal{U}} \left(- \int_0^\tau P(\theta) d\theta \right)$$

Les contraintes dues à la connexion conduisent à l'inégalité

$$E_A(z) \leq \sum_{i=1}^k E_{A_i}(z_i), \forall z \in Z \quad (3.110)$$

Donc, si chaque élément est passif :

$$E_A(z) < \infty, \forall z \in Z$$

3.4.5 A propos de la généralisation au cas semi-linéaire

La représentation d'état, à l'aide des semigroupes, d'opérateurs entrée-sortie de dimension infinie, peut s'étendre au cas semi-linéaire, c'est-à-dire aux équations d'état du type

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + F(z(t), u(t)) \\ y(t) = G(z(t), u(t)) \\ z(0) = z_0 \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (3.111)$$

où A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $T(t)$ défini sur un espace de Hilbert Z , et où F et G sont deux applications non linéaires de $Z \times \mathbb{R}^m$, à valeurs, respectivement, dans Z et \mathbb{R}^m .

Cette famille de modèles a un intérêt particulier puisqu'elle inclut les équations dites de *réaction-diffusion*. Dans ce cas, l'opérateur A représente un ensemble de phénomènes de transport de matière (il inclut alors des opérateurs gradients et laplaciens), tandis que l'application non linéaire F modélise les cinétiques de phénomènes réactifs. Nous renvoyons à [45] et [42], pour une étude générale de l'application de tels modèles en génie des procédés (réacteurs chimiques et colonnes à distiller).

En généralisant des arguments de type "point fixe", il est possible de démontrer l'existence et l'unicité de solution faible de problème de Cauchy abstrait du type

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + f(z(t), t) \\ z(0) = z_0 \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (3.112)$$

si la fonction $f : Z \times [0, \infty[\rightarrow Z$ est continue et localement lipschitzienne en z (voir [142]). Cependant, l'application de ce résultat à la représentation d'état (3.111), conduit à restreindre l'espace des entrées admissibles à

$$\mathcal{U} \subset \{u : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^m \mid F(z, u(\cdot)) : [0, \infty[\rightarrow Z \text{ continue } \forall z \in Z\} \quad (3.113)$$

Cette restriction de l'espace des signaux d'entrées admissibles peut être ou non excessive, suivant la nature de l'application F . Il ne faut en effet pas perdre de vue que, dans le contexte où nous l'envisageons dans ce travail, les entrées de la représentation d'état (3.111) sont les sorties d'autres éléments, et, pour cette raison, ne peuvent être arbitrairement choisies.

3.5 Caractérisation des systèmes passifs

Il n'y a pas de théorèmes profonds - mais seulement des théorèmes que nous n'avons pas bien compris. Jacques Hadamard (Versailles 1865 - Paris 1963), cité dans [94].

A la section 3.1.3, des conditions nécessaires et suffisantes de passivité ont été dégagées, pour le cas des systèmes linéaires de dimension finie, complètement commandables. Mais, pour les systèmes de dimension infinie, supposer que l'espace d'état Z puisse être atteint à partir de n'importe quel état initial $z_0 \in Z$, en un temps fini, par un choix approprié de l'entrée u dans $L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$, nous semble être une restriction excessive. En effet, la trajectoire dans l'espace des états n'est conduite, en chaque instant que par m entrées, et, dans la plupart des cas, les solutions du problèmes de Cauchy abstrait

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ z(0) = z_0 \in Z \end{cases}, t \geq 0 \quad (3.114)$$

ne génèrent pas l'espace Z en entier. A défaut de complète commandabilité, nous supposons que le semigroupe $T(t)$ engendré par le générateur infinitésimal A est exponentiellement stable (voir infra). Nous nous concentrons donc, dans cette étude, sur les propriétés énergétiques des éléments, et non sur leur stabilité. Mais, ce faisant, nous excluons les applications éventuelles de la propriété de passivité à l'étude de la stabilité de (3.114). Quelques résultats préliminaires sur les semigroupes sont nécessaires à la démonstration du résultat central de caractérisation des éléments passifs, et sont rappelés section suivante.

3.5.1 Préliminaires

Définition 3.29 *Un C_0 -semigroupe $T(t)$ défini sur un espace de Hilbert Z est exponentiellement stable si il existe deux constantes réelles positives K et α telles que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(Z,Z)} \leq Ke^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

où $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(Z,Z)}$ est la norme induite des applications linéaires de Z dans Z , c'est-à-dire :

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(Z,Z)} := \sup_{\|z\| \leq 1} (\|T(t)z\|_Z)$$

Pour tout C_0 -semigroupe $T(t)$, il existe une constante minimale $\omega_0 < \infty$, appelée borne de croissance ("growth bound") telle que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(Z,Z)} \leq Ke^{\omega_0 t}, \forall t \geq 0$ (voir [37], théorème 2.1.6). La question de la stabilité exponentielle du semigroupe $T(t)$ se résume donc à la détermination du signe de ω_0 .

Propriété 3.30 *Soit $T(t)$ un C_0 -semigroupe de générateur infinitésimal A , et de borne de croissance ω_0 . Alors, la fonction de transfert du système linéaire (3.95) est*

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

et est définie pour $s \in \mathbb{C}_{\omega_0}^+$, avec

$$\mathbb{C}_{\omega_0}^+ := \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > \omega_0\}$$

Démonstration. Voir [37], lemme A.4.3.6. ■

Pour les besoins de la démonstration du critère de passivité, nous utiliserons le théorème de Paley-Wiener, qui établit une isométrie entre des espaces de signaux temporels, et leur image par transformée de Laplace. Ces transformées de Laplace appartiendront à des espaces particuliers qui ont reçu le nom d'espaces de Hardy.

Définition 3.31 *L'espace de Hardy noté $H_2(\mathbb{C}^m)$ est défini par*

$$H_2(\mathbb{C}^m) := \left\{ f : \mathbb{C}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}^m \left| \begin{array}{l} f \text{ est holomorphe} \\ \sup_{\xi > 0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|f(\xi + j\omega)\|_{\mathbb{C}^m}^2 d\omega \right) < \infty \end{array} \right. \right\}$$

L'espace $H_2(\mathbb{C}^m)$, muni de la norme

$$\|f\|_{H_2} := \left[\sup_{\xi > 0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|f(\xi + j\omega)\|_{\mathbb{C}^m}^2 d\omega \right) \right]^{1/2}$$

est un espace de Banach (voir [69]) et il existe une application linéaire injective préservant la norme de $H_2(\mathbb{C}^m)$ dans $L_2[(-j\infty, +j\infty), \mathbb{C}^m]$ (voir [69], théorème 6.5.1). En conséquence, $H_2(\mathbb{C}^m)$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{H_2} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f(j\omega), g(j\omega) \rangle_{\mathbb{C}^m} d\omega$$

est un espace de Hilbert. En utilisant ce produit scalaire dans $H_2(\mathbb{C}^m)$, le théorème de Paley-Wiener s'énonce comme suit.

Théorème 3.32 *Si Z est un espace de Hilbert séparé, alors la transformée de Laplace est un isomorphisme de $L_2[(0, \infty), \mathbb{C}^m]$ dans $H_2(\mathbb{C}^m)$, et préserve le produit scalaire (il s'agit donc d'une isométrie).*

Démonstration. Voir [37], théorème A.6.21. ■

3.5.2 Conditions nécessaires et suffisantes de passivité

Nous considérons un élément m -port défini par les équations constitutives

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cz(t) + Du(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (3.115)$$

où $z_0 \in Z$, un espace de Hilbert séparé, $u \in \mathcal{U} := L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$, A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe *exponentiellement stable*, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, Z)$, $C \in \mathcal{L}(Z, \mathbb{R}^m)$ et $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. La puissance entrant dans l'élément est donnée par $P(t) = \langle y(t), u(t) \rangle_{\mathbb{R}^m}$ et est localement absolument intégrable.

Théorème 3.33 *Soit $G_H(j\omega)$ la partie hermitienne de la fonction de transfert $G(s)$ du système linéaire (3.115), calculée pour $\text{Im}(s) = \omega$. Si, pour tout $z_0 \in Z$, il existe une fonction $v \in L_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$ telle que*

$$\text{Re}(C(j\omega I - A)^{-1}z_0 + 2G_H(j\omega)v(j\omega)) = 0$$

presque pour tout ω dans $(0, \infty)$, alors l'élément m -port défini par les équations (3.115) est passif (au sens de la définition 3.24) si, et seulement si, $G_H(j\omega)$ est semi-définie positive pour tout ω dans $(0, \infty)$.

Démonstration.

Condition nécessaire

Soit $z(0) = 0$. De la définition 3.24 de passivité et de celle d'énergie disponible (définition 3.23), nous pouvons conclure que

$$\sup_{u \in L_2} \left(- \int_0^\infty \left\langle u(t), C \int_0^t T(t-\tau) B u(\tau) d\tau + D u(t) \right\rangle_{\mathbb{C}^m} dt \right) < \infty \quad (3.116)$$

car $L_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{U} := L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$. Parce que $T(t)$ est un semigroupe exponentiellement stable, il existe $\alpha, K > 0$ tels que

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(Z, Z)} \leq K e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.117)$$

Donc, pour tout $u(t)$ dans $L_2[(0, \infty), \mathbb{R}^m]$, nous avons les majorations :

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left\| C \int_0^t T(t-s) B u(s) ds \right\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \\ & \leq \int_0^\infty \|C\|_{\mathcal{L}}^2 \left\| \int_0^t T(t-\tau) B u(\tau) d\tau \right\|_Z^2 dt \\ & \leq \int_0^\infty \|C\|_{\mathcal{L}}^2 \int_0^t K^2 e^{-2\alpha(t-\tau)} \|B\|_{\mathcal{L}}^2 |u(\tau)|^2 d\tau dt \\ & \leq \|C\|_{\mathcal{L}}^2 K^2 \|B\|_{\mathcal{L}}^2 \int_0^\infty \int_0^t e^{-2\alpha(t-\tau)} |u(\tau)|^2 d\tau dt \end{aligned} \quad (3.118)$$

La fonction $e^{-2\alpha t}$ appartient à $L_1[(0, \infty), \mathbb{R}^m]$ et sa norme vaut $\|e^{-2\alpha \cdot}\|_{L_1} = \frac{1}{2\alpha}$. D'autre part, $f, g \in L_1[(0, \infty), \mathbb{R}^m]$, et le produit de convolution $f * g$ est donc aussi dans $L_1[(0, \infty), \mathbb{R}^m]$ et sa norme est majorée par (voir [21], théorème IV.15) :

$$\|f * g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1} \quad (3.119)$$

En conséquence la majoration (3.118) entraîne

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left\| C \int_0^t T(t-\tau) B u(\tau) d\tau \right\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt & \leq \|C\|_{\mathcal{L}}^2 K^2 \|B\|_{\mathcal{L}}^2 \|e^{-2\alpha \cdot}\|_{L_1} \|u^2\|_{L_1} \\ & = \|C\|_{\mathcal{L}}^2 \left(\frac{K}{2\alpha} \right)^2 \|B\|_{\mathcal{L}}^2 \|u\|_{L_2}^2 \end{aligned} \quad (3.120)$$

Pour $z(0) = 0$, et $u(t) \in L_2[(0, \infty), \mathbb{R}^m]$ nous pouvons donc conclure que la fonction

$$y(t) = C \int_0^t T(t-\tau) B u(\tau) d\tau + D u(t) \quad (3.121)$$

est dans $L_2[(0, \infty), \mathbb{R}^m]$. En utilisant le théorème de Paley-Wiener, nous en déduisons que la transformée de Laplace $\hat{y}(s)$ existe presque pour tout s tel que $\operatorname{Re}(s) > 0$, et que

$$\langle u(t), y(t) \rangle_{L_2} = \langle \hat{u}(s), G(s) \hat{u}(s) \rangle_{H_2} \quad (3.122)$$

Par ailleurs, les fonctions $u(t)$ et $y(t)$ ayant des valeurs réelles (dans \mathbb{R}^m), leur transformées de Laplace sont des fonctions complexes réelles, c'est-à-dire que $\widehat{u}(\bar{s}) = \overline{\widehat{u}(s)}$ et $\widehat{y}(\bar{s}) = \overline{\widehat{y}(s)}$, pour tout s tel que $\operatorname{Re}(s) > 0$ (où \bar{s} est le complexe conjugué de s). La fonction de transfert associée à (3.121) est donc réelle, et $G(\bar{s}) = \overline{G(s)}$, pour tout s tel que $\operatorname{Re}(s) > 0$. La forme bilinéaire

$$\Psi : L_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^m) \times L_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^m) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.123)$$

$$u \mapsto \Psi(u, u) := \int_0^\infty \left\langle u(t), C \int_0^t T(t-\tau)Bu(\tau) d\tau + Du(t) \right\rangle_{\mathbb{C}^m} dt$$

peut donc être écrite

$$\begin{aligned} \Psi(u, u) &= \langle u, y \rangle_{L_2} = \langle \widehat{u}, \widehat{y} \rangle_{H_2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \widehat{u}(j\omega), \widehat{y}(j\omega) \rangle_{\mathbb{C}^m} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \widehat{u}(j\omega), G(j\omega)\widehat{u}(j\omega) \rangle_{\mathbb{C}^m} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} (\langle \widehat{u}(j\omega), G(j\omega)\widehat{u}(j\omega) \rangle_{\mathbb{C}^m}) d\omega \end{aligned} \quad (3.124)$$

Soit $G_H(s)$ la partie hermitienne de $G(s)$, c'est-à-dire

$$G_H(s) = (G(s) + G^*(s))/2 \quad (3.125)$$

où $G^*(s)$ est la matrice adjointe de $G(s)$. La partie réelle de la forme quadratique complexe apparaissant dans (3.124) s'écrit

$$\operatorname{Re} (\langle \widehat{u}(j\omega), G(j\omega)\widehat{u}(j\omega) \rangle_{\mathbb{C}^m}) = \langle \widehat{u}(j\omega), G_H(s)\widehat{u}(j\omega) \rangle_{\mathbb{C}^m} \quad (3.126)$$

Et la condition de passivité (3.116) devient

$$\sup_{u \in L_2} \left(\frac{-1}{\pi} \int_0^{+\infty} \langle \widehat{u}(j\omega), G_H(j\omega)\widehat{u}(j\omega) \rangle_{\mathbb{C}^m} d\omega \right) < \infty \quad (3.127)$$

Supposons, en raisonnant par l'absurde, qu'il existe une fonction $\tilde{u} \in L_2(\mathbb{R}^+)$ telle que $\langle \widehat{\tilde{u}}(j\omega), G_H(j\omega)\widehat{\tilde{u}}(j\omega) \rangle_{H_2} = c < 0$. Dans ce cas, $\lambda\tilde{u} \in L_2(\mathbb{R}^+)$ pour tout réel λ et

$$\sup_{u \in L_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)} (-\Psi(u, u)) \geq \sup_{\lambda > 0} -\lambda^2 c = \infty \quad (3.128)$$

ce qui contredit la condition de passivité. Nous pouvons donc conclure que

$$\langle \widehat{u}(j\omega), G_H(j\omega)\widehat{u}(j\omega) \rangle_{H_2} \geq 0; \forall \widehat{u} \in L_2(\mathbb{R}^+) \quad (3.129)$$

Supposons, en raisonnant à nouveau par l'absurde, qu'il existe un réel $\tilde{\omega} \in (0, \infty)$ et un vecteur $x \in \mathbb{C}^m$ tels que

$$\langle x, G_H(j\tilde{\omega})x \rangle_{\mathbb{C}^m} < 0 \quad (3.130)$$

On sait que toute fonction de $H_2(\mathbb{C}^m)$ est presque partout non nulle sur l'axe imaginaire (voir [37], lemme A.6.20). Or, $G_H(s)\hat{u}(s) \in H_2(\mathbb{C}^m)$ pour tout u dans $L_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$. Donc $G_H(s)$ est non nulle presque partout sur l'axe imaginaire, et il existe un intervalle ouvert I non vide de l'axe imaginaire, qui contient $j\tilde{\omega}$, et tel que $\langle x, G_H(s)x \rangle_{\mathbb{C}^m} < 0$, pour tout s dans I . Construisons la fonction auxiliaire

$$\hat{v}(s) := \left(e^{-\frac{(\omega-\tilde{\omega})^2}{a^2}} + e^{-\frac{(\omega+\tilde{\omega})^2}{a^2}} \right) (\operatorname{Re}(x) + \omega j \operatorname{Im}(x)) \quad (3.131)$$

avec $\omega = \operatorname{Im}(s)$, et a une constante réelle. C'est une fonction de $H_2(\mathbb{C}^m)$, et elle a la propriété d'être réelle, car $\overline{\hat{v}(s)} = \hat{v}(\bar{s})$. Elle est donc, par le théorème de Paley-Wiener, la transformée de Laplace d'une fonction $v(t)$ de $L_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$. D'autre part, en prenant la constante a suffisamment proche de 0, la condition (3.130) entraîne

$$\langle \hat{v}(j\omega), G_H(j\omega)\hat{v}(j\omega) \rangle_{H_2} < 0 \quad (3.132)$$

ce qui contredit (3.129). Nous pouvons donc conclure que $G_H(j\omega) \geq 0, \forall \omega \in (0, \infty)$

Condition suffisante

Soit z_0 un état initial quelconque dans Z . Nous allons en premier lieu montrer que

$$\sup_{u \in L_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)} \left(- \int_0^{+\infty} \langle u(t), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} dt \right) < \infty \quad (3.133)$$

où $y(t)$ est la solution de (3.115) pour $z(0) = z_0$. Dans un deuxième temps, nous étendrons le résultat à $L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$. Le semigroupe $T(t)$ étant exponentiellement stable, il existe deux constantes réelles $K, \alpha > 0$ telles que $\|CT(t)z_0\|_{L_2} \leq \|C\|_{\mathcal{L}} \frac{K}{\alpha} \|z_0\|_Z$. En conséquence, pour tout z_0 dans Z , et pour tout u dans $L_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$, la sortie

$$y(t) = CT(t)z_0 + C \int_0^t T(t-\tau)Bu(\tau) d\tau + Du(t) \quad (3.134)$$

est une fonction de $L_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$ (voir inégalité (3.120)). Sa transformée de Laplace

$$\hat{y}(s) = C(sI - A)^{-1}z_0 + G(s)\hat{u}(s) \quad (3.135)$$

est donc une fonction de $H_2(\mathbb{C}^m)$ (théorème de Paley-Wiener), et elle a la propriété d'être réelle. En utilisant le caractère isométrique de la transformée de Laplace de L_2 dans H_2 , on obtient, comme précédemment :

$$\begin{aligned}
 \langle u, y \rangle_{L_2} &= \langle \widehat{u}, \widehat{y} \rangle_{H_2} & (3.136) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \widehat{u}(j\omega), \widehat{y}(j\omega) \rangle_{\mathbb{C}^m} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \widehat{u}(j\omega), C(j\omega I - A)^{-1} z_0 + G(j\omega) \widehat{u}(j\omega) \rangle_{\mathbb{C}^m} d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} (\langle \widehat{u}(j\omega), C(j\omega I - A)^{-1} z_0 + G(j\omega) \widehat{u}(j\omega) \rangle_{\mathbb{C}^m}) d\omega
 \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, il existe une fonction $v(t)$ de $L_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$ telle que

$$\operatorname{Re} (C(j\omega I - A)^{-1} z_0 + 2G_H(j\omega)v(j\omega)) = 0 \quad (3.137)$$

presque pour tout ω dans $(0, \infty)$. Nous pouvons donc poser le changement de "variable" $u(t) = \widetilde{u}(t) + v(t)$ pour réduire la forme quadratique apparaissant dans (3.136) à sa forme diagonale

$$\begin{aligned}
 \langle u, y \rangle_{L_2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\langle \widehat{\widetilde{u}}(j\omega), G_H(j\omega) \widehat{\widetilde{u}}(j\omega) \rangle_{\mathbb{C}^m} \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{Re} (\langle \widehat{v}(j\omega), C(j\omega I - A)^{-1} z_0 \rangle_{\mathbb{C}^m}) \right] d\omega
 \end{aligned} \quad (3.138)$$

En utilisant cette réduction, le supremum de (3.133) peut s'écrire

$$\sup_{\widetilde{u} \in L_2} \left(- \int_0^{+\infty} \langle u(t), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} dt \right) \quad (3.139)$$

Comme, nous avons supposé $G_H(j\omega) \geq 0$, pour tout $\omega \in (0, \infty)$ (condition suffisante), ce supremum est atteint pour la solution $\widetilde{u} = 0$, et sa valeur est

$$\frac{-1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} (\langle \widehat{v}(j\omega), C(j\omega I - A)^{-1} z_0 \rangle_{\mathbb{C}^m}) d\omega \quad (3.140)$$

Etendons maintenant le résultat en montrant que

$$\begin{aligned}
 \sup_{u \in L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)} \left(- \int_0^T \langle u(t), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} dt \right) &< \infty & (3.141) \\
 T &\geq 0
 \end{aligned}$$

Pour ce faire, choisissons arbitrairement $T > 0$ et $u(t)$ un signal de $L_2([0, T])$. Nous pouvons définir l'extension triviale $u_e(t)$ de $u(t)$ à $L_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$, par

$$u_e(t) := \begin{cases} u(t) & \text{pour } t \in [0, T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.142)$$

Si nous notons y_e la solution de (3.115) correspondant à l'entrée u_e , c'est-à-dire

$$y_e(t) = CT(t)z_0 + C \int_0^t T(t-\tau)Bu_e(\tau) d\tau + Du_e(t) \quad (3.143)$$

alors, trivialement,

$$\begin{aligned} - \int_0^T \langle u(t), y(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} dt &= - \int_0^{+\infty} \langle u_e(t), y_e(t) \rangle_{\mathbb{R}^m} dt \\ &\leq \frac{-1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \langle \hat{v}(j\omega), C(j\omega I - A)^{-1} z_0 \rangle_{\mathbb{C}^m} d\omega \\ &< \infty \end{aligned} \quad (3.144)$$

Comme la borne supérieure de cette dernière majoration est indépendante de T et de $u(t)$, ceci complète la démonstration. ■

3.5.3 Condition suffisante de passivité

Dans le théorème de caractérisation précédent, (théorème 3.33), l'hypothèse de l'existence, pour tout z_0 dans Z , d'une fonction $v(t)$ de $L_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$ telle que

$$\operatorname{Re} (C(j\omega I - A)^{-1} z_0 + 2G_H(j\omega)\hat{v}(j\omega)) \stackrel{L_2(-\infty, +\infty)}{=} 0 \quad (3.145)$$

est utilisée pour démontrer la condition suffisante. Cet hypothèse peut sembler malaisée à vérifier en pratique, entre autres pour deux raisons : d'abord, l'évaluation de l'opérateur $C(j\omega I - A)^{-1}$ défini sur Z nécessite, en général, la connaissance de $(j\omega I - A)^{-1}$, ensuite, il peut être impossible ou compliqué de déterminer l'expression fermée de $G_H(j\omega)$. C'est pourquoi, dans cette section, nous allons établir une condition suffisante de passivité basée sur le caractère coercif (voir ci-dessous) de la fonction de transfert.

Supposons que G_H soit la partie hermitienne de la fonction de transfert d'un semigroupe exponentiellement stable, et notons π_{G_H} l'opérateur de multiplication

$$\begin{aligned} \pi_{G_H} &: H_2(\mathbb{C}^m) \rightarrow H_2(\mathbb{C}^m) \\ \hat{u} &\mapsto \pi_{G_H} \hat{u} := G_H \hat{u} \end{aligned} \quad (3.146)$$

Supposons également que la forme complexe $\langle \cdot, G_H(j\omega) \cdot \rangle_{\mathbb{C}^m}$ soit coercive presque partout, c'est-à-dire que, pour presque tout ω dans $(-\infty, +\infty)$

$$\exists \gamma > 0 : \langle x, G_H(j\omega)x \rangle_{\mathbb{C}^m} \geq \gamma \|x\|_{\mathbb{C}^m}^2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^m \quad (3.147)$$

Nous allons appliquer le théorème de Lax-Milgram à la forme

$$\begin{aligned} \Phi & : H_2(\mathbb{C}^m) \times H_2(\mathbb{C}^m) \rightarrow \mathbb{C} \\ (\hat{u}, \hat{w}) & \mapsto \Phi(\hat{u}, \hat{w}) := 2 \langle \hat{u}, \pi_{G_H} \hat{w} \rangle_{H_2} \end{aligned} \quad (3.148)$$

Théorème 3.34 (Lax-Milgram) *Soit $\Phi : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ avec H un espace de Hilbert complexe. Si Φ est une forme sesqui-linéaire¹² continue coercive, alors, pour toute application linéaire continue $T : H \rightarrow \mathbb{C}$, il existe un unique $\hat{v} \in H$ tel que*

$$T\hat{u} = \Phi(\hat{u}, \hat{v}), \quad \forall \hat{u} \in H$$

Démonstration. voir [21], corollaire V.8. ■

La forme Φ définie par (3.148) est trivialement sesqui-linéaire. Elle est coercive par hypothèse, et, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans $H_2(\mathbb{C}^m)$, est telle que

$$|\Phi(\hat{u}, \hat{w})| \leq 2 \|\hat{u}\|_{H_2} \|\pi_{G_H} \hat{w}\|_{H_2} \quad (3.149)$$

Or, dans le cas d'un semigroupe exponentiellement stable, l'opérateur linéaire π_{G_H} est borné et sa norme vaut

$$\|\pi_{G_H}\|_{\infty} := \sup_{\operatorname{Re}(s) > 0} \left(\|G_H(s)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m)} \right) < \infty \quad (3.150)$$

car la fonction de transfert n'a pas de pôle dans le demi-plan complexe $\operatorname{Re}(s) \geq 0$. On a donc

$$|\Phi(\hat{u}, \hat{w})| \leq 2 \|\hat{u}\|_{H_2} \|\hat{w}\|_{H_2} \|\pi_{G_H}\|_{\infty} \quad (3.151)$$

et la forme bilinéaire Φ est bien, par conséquent, continue.

Définissons l'opérateur linéaire

$$\begin{aligned} T & : H_2(\mathbb{C}^m) \rightarrow \mathbb{C} \\ \hat{u} & \mapsto T\hat{u} := -\frac{1}{2} \langle \hat{u}, C(sI - A)^{-1} z_0 \rangle_{H_2} \end{aligned} \quad (3.152)$$

¹²Une forme $\Phi : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ est sesquilinéaire si $\Phi(\cdot, h) : H \rightarrow \mathbb{C}$ est linéaire $\forall h \in H$ et si $\Phi(h_1, h_2) = \overline{\Phi(h_2, h_1)} \quad \forall h_1, h_2 \in H$.

Il est lui aussi borné, du fait de la stabilité exponentielle du semigroupe, et, nous pouvons déduire, du théorème de Lax-Milgram, l'existence d'une unique fonction $\widehat{v} \in H_2(\mathbb{C}^m)$ telle que $\forall \widehat{u} \in H_2(\mathbb{C}^m)$

$$0 = \langle \widehat{u}, C(sI - A)^{-1} z_0 \rangle_{H_2} + 2 \langle \widehat{u}, \pi_{G_H} \widehat{v} \rangle_{H_2} \quad (3.153)$$

Par le théorème de Paley-Wiener, nous savons que \widehat{v} est la transformée de Laplace d'un signal de $L_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$, et nous pouvons conclure que l'hypothèse (3.145), difficile à vérifier dans le cas général, est automatiquement vérifiée dans le cas où $\langle \cdot, G_H(j\omega) \cdot \rangle_{\mathbb{C}^m}$ est coercive, pour presque tout ω dans $(-\infty, +\infty)$.

D'autre part, cette coercivité implique trivialement le caractère semi-défini positif de $G_H(j\omega)$ presque pour tout ω dans $(-\infty, +\infty)$. Toutes les hypothèses du théorème 3.33 sont donc vérifiées, et nous venons d'en démontrer un important corollaire.

Théorème 3.35 *Soit $G(s)$ la fonction de transfert de l'élément m -port défini par les équations constitutives (3.115) (où A est le générateur infinitésimal d'un semigroupe exponentiellement stable). Si pour presque tout ω dans $(-\infty, \infty)$:*

$$\exists \gamma > 0 : \langle x, G_H(j\omega)x \rangle_{\mathbb{C}^m} \geq \gamma \|x\|_{\mathbb{C}^m}^2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^m$$

alors, l'élément est passif.

Par ailleurs, dans ce cas favorable, on peut facilement donner l'expression de la transformée de Laplace du signal d'entrée qui extrait le maximum d'énergie de l'élément. Pour cela, il faut remarquer que la coercivité de π_{G_H} implique l'existence d'un inverse borné $\pi_{G_H}^{-1}$.

En effet, si π_{G_H} est coercif, il doit être injectif. Il existe donc un inverse algébrique $\pi_{G_H}^{-1}$. Mais, d'autre part, la coercivité implique aussi

$$\|\pi_{G_H}^{-1} u\|_{H_2}^2 \leq \frac{1}{\gamma} \langle \pi_{G_H}^{-1} u, \pi_{G_H} \pi_{G_H}^{-1} u \rangle_{H_2} \quad (3.154)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans H_2 , on obtient :

$$\|\pi_{G_H}^{-1} u\|_{H_2}^2 \leq \frac{1}{\gamma} \|\pi_{G_H}^{-1} u\|_{H_2} \|u\|_{H_2}^2 \quad (3.155)$$

Et donc

$$\|\pi_{G_H}^{-1} u\|_{\mathcal{L}(H_2, H_2)} \leq \frac{1}{\gamma} \quad (3.156)$$

qui exprime le caractère borné de l'opérateur $\pi_{G_H}^{-1}$.

L'énergie disponible correspondant à un état initial z_0 vaut (voir équation (3.140))

$$\frac{-1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} (\langle \widehat{v}(j\omega), C(j\omega I - A)^{-1} z_0 \rangle_{\mathbb{C}^m}) d\omega \quad (3.157)$$

où le signal d'entrée $v(t) \in L_2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{U}$ a pour transformée de Laplace, sur l'axe imaginaire, la fonction

$$\begin{aligned} \widehat{v}(j\omega) &= -\frac{1}{2} (\pi_{G_H})^{-1} C(j\omega I - A)^{-1} z_0 \\ &= -\frac{1}{2} G_H^{-1}(j\omega) C(j\omega I - A)^{-1} z_0 \end{aligned} \quad (3.158)$$

En conclusion, l'énergie disponible associée à un état initial z_0 vaut

$$E_A(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \langle C(j\omega I - A)^{-1} z_0, G_H^{-1}(j\omega) C(j\omega I - A)^{-1} z_0 \rangle_{\mathbb{C}^m} d\omega \quad (3.159)$$

3.6 Exemples

Les mathématiques sont un sport intellectuel intéressant, mais elles ne devraient pas être utilisées en vue d'obtenir des informations sensibles sur des procédés physiques. Werner Heisenberg, cité dans [110].

3.6.1 Passivité de l'opérateur d'intégration implicite

Considérons à nouveau l'exemple de l'interface fractale du chapitre II, et représentée par le transfert :

$$Y(s) = \left(1 + \frac{s}{\tau}\right)^{-m} \cdot U(s) \quad (3.160)$$

où τ est la constante de temps de relaxation, et $m \in]0, 1[$ un exposant fractionnaire (ordre d'intégration). Notons tout d'abord que cette fonction de transfert peut s'écrire

$$h(s) = \left(\frac{\tau(\tau + \sigma) - j\omega\tau}{(\tau + \sigma)^2 + \omega^2} \right)^m \quad (3.161)$$

avec $\sigma = \operatorname{Re}(s)$ et $\omega = \operatorname{Im}(s)$. Elle est donc réelle ($h(s) \in \mathbb{R}, \forall s \in \mathbb{R}$), et nous pouvons, en conséquence, espérer une réalisation sous la forme d'un

opérateur entrée-sortie à valeurs réelles. Une telle réalisation, sous la forme d'un semigroupe d'opérateurs linéaires bornés, a été proposée à la section 3.3.1. Pour rappel, il s'agissait du semigroupe associé à la représentation d'état abstraite

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cz(t) \\ z(0) = z_0 \in Z \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (3.162)$$

où $Z := L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} A: D(A) \subset Z &\rightarrow Z \\ h &\mapsto Ah \text{ avec } (Ah)(x) := -\frac{1}{x}h(x), \quad \forall x \in]0, 1/\tau] \end{aligned} \quad (3.163)$$

$$\begin{aligned} B: \mathbb{R} &\rightarrow Z \\ u &\mapsto Bu := u \cdot \frac{\tau(1+x(1-m))}{\Gamma(m)x^{m+1}} \end{aligned} \quad (3.164)$$

$$\begin{aligned} C: Z &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto Ch := \int_0^{1/\tau} h(x) dx \end{aligned} \quad (3.165)$$

Il a également été établi à la section 3.3.1, que A est le générateur infinitésimal du semigroupe défini sur $L_2([0, 1/\tau], \mathbb{R})$ par

$$(T(t)h)(x) := e^{-\frac{t}{x}}h(x), \quad \forall x \in]0, 1/\tau], \quad \forall h \in Z \quad (3.166)$$

Ce semigroupe est bien exponentiellement stable car

$$\begin{aligned} \|T(t)h\|_{L_2}^2 &= \int_0^{1/\tau} \left(e^{-\frac{t}{x}}h(x) \right)^2 dx \\ &\leq e^{-2t\tau} \int_0^{1/\tau} h^2(x) dx \\ &= e^{-2t\tau} \|h\|_{L_2}^2 \end{aligned} \quad (3.167)$$

Donc, en définissant la marge de stabilité exponentielle $\alpha = 2\tau$, on a bien

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(Z)} \leq e^{-\alpha t} \quad (3.168)$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle x, G_H(j\omega)x \rangle_{\mathbb{C}} = \operatorname{Re} \left(\langle x, G(j\omega)x \rangle_{\mathbb{C}} \right) \quad (3.169)$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \left(\overline{G(j\omega)} \right) |x|^2 \\
&= \frac{\tau^m}{(\tau^2 + \omega^2)^m} \operatorname{Re} (\tau + j\omega)^{+m} |x|^2 \\
&= \frac{\tau^m}{(\tau^2 + \omega^2)^{m/2}} \cos (m \arg (\tau + j\omega)) |x|^2
\end{aligned}$$

Notons $\varphi(\tau, \omega) = \arg(\tau + j\omega)$. Pour tout ω dans $]0, \infty[$, comme $\tau > 0$, nous pouvons conclure que

$$\varphi(\tau, \omega) \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\quad (3.170)$$

Par ailleurs, puisque $m \in]0, 1[$, on a

$$\cos(m\varphi(\tau, \omega)) \geq \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) > 0 \quad (3.171)$$

Donc, pour tout ω dans $]0, \infty[$, il existe un réel

$$\gamma := \frac{\tau^m \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right)}{(\tau^2 + \omega^2)^{m/2}} > 0 \quad (3.172)$$

tel que,

$$\langle x, G_H(j\omega)x \rangle_{\mathbb{C}} > \alpha |x|^2 \quad (3.173)$$

En appliquant le théorème de caractérisation 3.35 (condition suffisante), on en déduit que l'élément défini par la représentation d'état abstraite (3.162) est passif.

3.6.2 Systèmes linéaires à retard

Si nous considérons le système d'équations différentielles à retard de la section 3.3.2, pour lequel la représentation semigroupe a été explicitée, on obtient alors comme fonction de transfert (voir [37], lemme 4.3.9) :

$$G(s) := C(sI - A_0 - \sum_{i=1}^p A_i e^{-s\tau_i})^{-1} B \quad (3.174)$$

Le semigroupe associé est exponentiellement stable si (voir [37], lemme 5.1.7) :

$$\det \left(sI - A_0 - \sum_{i=1}^p A_i e^{-sh_i} \right) \neq 0, \forall s \text{ tel que } \operatorname{Re}(s) \geq 0 \quad (3.175)$$

Pour de tels systèmes, une condition additionnelle garantissant la passivité est donc que la partie hermitienne de $G(s)$ soit coercive presque partout

sur l'axe imaginaire. Dans le cas général, on peut donc établir la passivité en évaluant numériquement la plus petite valeur propre de $G_H(j\omega)$ (dans le cas qui nous occupe, les valeurs propres de G_H sont isolées et bornées inférieurement, voir [37]), et en montrant qu'elle est presque partout positive pour $\omega \in (0, \infty)$.

Il est intéressant de remarquer que, dans le cas d'un système à retard du premier "ordre", la condition de coercivité du théorème 3.35, et la condition de stabilité exponentielle, permettent de caractériser les systèmes à retard passif.

Considérons à cet effet le cas d'un élément dont l'équation constitutive a la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a_0x(t) + a_1x(t - \tau) + u(t) \\ y(t) = cx(t) \\ x(0) = r \\ x(\theta) = f(\theta) \end{cases}, \quad t \geq 0 \quad (3.176)$$

$\theta \in [-\tau, 0[$

où τ, a_0, a_1, c, r sont des réels, $u \in L_2^{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, et $f \in L_2([-\tau, 0], \mathbb{R})$. La fonction de transfert est alors

$$g(s) = \frac{c}{s - a_1e^{-\tau s} - a_0} \quad (3.177)$$

et sa partie hermitienne (qui, dans ce cas scalaire, est aussi sa partie réelle), évaluée sur l'axe imaginaire, vaut :

$$g_H(j\omega) = \frac{-c(a_0 + a_1 \cos(\tau\omega))}{(a_0 + a_1 \cos(\tau\omega))^2 + (\omega + a_1 \sin(\tau\omega))^2} \quad (3.178)$$

Cette partie hermitienne est coercive si $|a_0| > |a_1|$ et $a_0c < 0$. L'élément décrit par (3.176) sera donc passif si, de plus, le semigroupe associé à (3.176) est exponentiellement stable, c'est-à-dire si les zéros de $s - a_1e^{-\tau s} - a_0$ ont une partie réelle négative. Ces parties réelles satisfont l'équation

$$\operatorname{Re}(s) = a_0 + a_1e^{-\tau \operatorname{Re}(s)} \cos(\tau \operatorname{Im}(s)) \quad (3.179)$$

Comme nous avons supposé (caractère coercif) $|a_0| > |a_1|$, la stabilité exponentielle est garantie si, de plus, $a_0 < 0$. Nous avons donc démontré le résultat suivant.

Propriété 3.36 *Un élément défini par l'équation constitutive (3.176) est passif si $a_0 < 0$, $c > 0$, et $|a_0| > |a_1|$.*

Le raisonnement qui précède montre, dans le cas scalaire, qu'il existe des systèmes retardés passifs. D'autre part, il indique aussi que ce n'est plus le cas dans les systèmes où l'opérateur retard agirait sur l'entrée. En effet, dans ce cas, une exponentielle de la forme $e^{-\tau s}$ apparaîtrait au numérateur de la fonction de transfert, et la partie hermitienne de cette fonction de transfert deviendrait :

$$g_H(j\omega) = \frac{-c(a_0 \cos(\tau\omega) + \omega \sin(\tau\omega))}{a_0^2 + \omega^2}$$

Le terme oscillant $\omega \sin(\tau\omega)$ devient prépondérant pour des valeurs suffisamment grandes de ω et il n'est plus possible de garantir la coercivité de $g_H(j\omega)$.

3.6.3 Exemple de la poutre vibrante

Reprenons l'exemple de la poutre vibrante d'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 e(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{IE}{\rho S} \frac{\partial^4 e(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\alpha}{\rho S} \frac{\partial^3 e(x,t)}{\partial t \partial x^2} + f(x)u(t) \\ y(t) = \int_0^1 \frac{\partial e(x,t)}{\partial t} f(x) dx \\ e(0,t) = e(1,t) = \frac{\partial^2 e(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e(1,t)}{\partial x^2} = 0 \\ e(x,0) = e_0(x) ; \frac{\partial e(x,0)}{\partial t} = e_1(x) \end{cases}, \forall t \geq 0 \quad (3.180)$$

défini à la section 3.3.3. Nous avons montré que le système d'équations aux dérivées partielles homogène ($f(x) = 0$) définissait un semigroupe d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert Z . Par ailleurs, nous avons également montré qu'il s'agit d'un semigroupe de contraction, c'est-à-dire tel que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\langle Az, z \rangle_Z) &= \operatorname{Re}(\langle z, A^* z \rangle_Z) \\ &= -\frac{\alpha}{\rho S} \left\langle A_0^{1/2} z_2, z_2 \right\rangle_{L_2} \\ &= -\frac{\alpha}{\rho S} \int_0^1 \left(\frac{dz_2}{dx} \right)^2 dx \\ &\leq \omega \|z\|_Z^2, \quad \forall z \in D(A) = D(A^*) \end{aligned} \quad (3.181)$$

où A est le générateur infinitésimal du semigroupe et A^* son adjoint. L'inégalité (3.181) est satisfaite pour toute valeur positive de ω . Dès lors, en appelant ω_0 la borne de croissance du semigroupe, et en invoquant le lemme de caractérisation 3.18 (section 3.3.3), on peut conclure que $\omega_0 \leq 0$. La proposition 3.30 (section 3.5.1) nous apprend alors la fonction de transfert $G(s)$ associée aux équations (3.180) existe pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 0$. Nous pouvons donc la calculer. Pour ce faire, il est plus facile de travailler directement

à partir des équations aux dérivées partielles (3.180), plutôt qu'en calculant l'opérateur résolvant $(sI - A)^{-1}$. L'unicité de la fonction de transfert garantit en effet l'identité des résultats obtenus par les deux méthodes.

Nous supposons donc des conditions initiales $e_0(x) = e_1(x) = 0$ et cherchons une solution de (3.180), après transformation de Laplace par rapport au temps, pour $\widehat{u}(s) = 1$. Afin de simplifier la formulation de la solution, nous supposerons dans la suite que $\frac{IE}{\rho S} = 1$ et que $\frac{\alpha}{\rho S} = 2\tilde{\alpha}$. Ceci ne réduit en rien la généralité des équations (3.180), car leur comportement dynamique est déterminée par le rapport entre les grandeurs $\frac{IE}{\rho S}$ et $\frac{\alpha}{\rho S}$. Avec ces notations, la fonction de transfert est donnée par :

$$G(s) = -s \int_0^1 \widehat{e}(x, s) f(x) dx$$

où $\widehat{e}(x, s)$ est la solution, pour s fixé (considéré comme paramètre) du problème aux limites :

$$\begin{cases} \frac{d^4 \widehat{e}(x, s)}{dx^4} - 2\tilde{\alpha} s \frac{d^2 \widehat{e}(x, s)}{dx^2} + s^2 \widehat{e}(x, s) = f(x) \\ \widehat{e}(0, s) = \widehat{e}(1, s) = \frac{d^2 \widehat{e}(0, s)}{dx^2} = \frac{d^2 \widehat{e}(1, s)}{dx^2} = 0 \end{cases} \quad (3.182)$$

La solution générale homogène du problème (3.182) est donnée par :

$$\widehat{e}_h = c_1 e^{\sqrt{\alpha_1} s x} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha_1} s x} + c_3 e^{+\sqrt{\alpha_2} s x} + c_4 e^{-\sqrt{\alpha_1} s x}$$

où c_i sont des constantes réelles arbitraires, et où les paramètres α_1 et α_2 sont définis par :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \tilde{\alpha} + \sqrt{\tilde{\alpha}^2 - 1} \\ \alpha_2 &= \tilde{\alpha} - \sqrt{\tilde{\alpha}^2 - 1} \end{aligned} \quad (3.183)$$

Une solution particulière non homogène du problème (3.182) peut être calculée par la méthode de variation des constantes. On obtient par cette méthode la solution particulière :

$$\widehat{e}_{nh} = \frac{1}{s(\alpha_1 - \alpha_2)} \int_0^x \left(\frac{\text{sh}(\sqrt{\alpha_1} s (x - \xi))}{\sqrt{\alpha_1} s} - \frac{\text{sh}(\sqrt{\alpha_2} s (x - \xi))}{\sqrt{\alpha_2} s} \right) f(\xi) d\xi \quad (3.184)$$

La solution complète du problème (3.182) est alors $\widehat{e}(x, s) = \widehat{e}_h + \widehat{e}_{nh}$, où les constantes c_i sont celles pour lesquelles les conditions aux limites sont satisfaites. Les calculs sont simplifiés si l'on considère une distribution $f(x)$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \quad (3.185)$$

On obtient dans ce cas la solution :

$$\begin{aligned} \widehat{e}(x, s) = & \frac{1}{s(\alpha_1 - \alpha_2)} \left[- \int_0^1 \operatorname{sh}(\sqrt{\alpha_1 s}(1 - \xi)) f(\xi) d\xi \cdot \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\alpha_1 s}x)}{\sqrt{\alpha_1 s} \operatorname{sh} \sqrt{\alpha_1 s}} \right. \\ & + \int_0^1 \operatorname{sh}(\sqrt{\alpha_2 s}(1 - \xi)) f(\xi) d\xi \cdot \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\alpha_2 s}x)}{\sqrt{\alpha_2 s} \operatorname{sh} \sqrt{\alpha_2 s}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 s}} \int_0^x \operatorname{sh}(\sqrt{\alpha_1 s}(x - \xi)) f(\xi) d\xi \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 s}} \int_0^x \operatorname{sh}(\sqrt{\alpha_2 s}(x - \xi)) f(\xi) d\xi \right] \end{aligned} \quad (3.186)$$

Pour appliquer le critère de passivité, on pourrait démontrer que la partie hermitienne de la fonction de transfert, évaluée sur l'axe imaginaire, est coercive presque pour tout $\omega \in (-\infty, +\infty)$. Cependant, la solution $\widehat{e}(x, s)$ définie par (3.186), montre que le semigroupe n'est pas exponentiellement stable. En effet, cette solution se comporte en $O\left(\frac{1}{s^2}\right)$ pour $s \rightarrow 0$. La présence d'un pôle sur l'axe imaginaire nous empêche d'appliquer les critères de passivité que nous avons développés.

Il est intéressant de noter que le fait que le semigroupe n'est pas exponentiellement stable n'est pas incompatible avec le fait que l'énergie stockée dans la poutre tend vers zéro. Il est par contre permis de conclure que cette énergie ne tend pas vers 0 comme une exponentielle décroissante.

3.7 Propos d'étape

Nous avons posé un principe fondamental de la généralisation par abstraction : l'existence d'analogies entre les traits centraux de différentes théories implique l'existence d'une théorie générale, qui englobe les théories particulières, et les unifie au regard de ces traits centraux. Eliakim Moore (Ohio 1862 - Chicago 1932), cité dans [44].

Dans ce chapitre, nous avons tenté de poser les bases théoriques nécessaires à l'étude de la passivité des systèmes linéaires de dimension infinie.

Fondée sur l'étude de la passivité des systèmes d'état de dimension finie, notre démarche a consisté à généraliser la notion de représentation d'état des équations constitutives d'éléments linéaires, en utilisant la théorie des semigroupes. Cette approche par semigroupe offre plusieurs avantages : elle unifie la représentation d'opérateurs linéaires entrée-sortie d'apparences très variées (convolution, système à retard, équations aux dérivées partielles), elle satisfait les hypothèses fondamentales sur la représentation d'état qui autorisent l'étude de ses propriétés énergétiques, et, enfin, elle autorise l'étude simultanée dans le domaine temporel, et dans le domaine fréquentiel.

La généralisation des notions de passivité, et d'énergie disponible, a été rendue immédiate par le choix de représenter les équations constitutives des éléments par des systèmes différentiels abstraits. Nous avons ensuite commenté les propriétés fondamentales de la notion de passivité ainsi généralisée, dans la perspective de l'introduction éventuelle d'éléments passifs linéaires de dimension infinie. Ces propriétés sont la stabilité par rapport à la connexion d'éléments, l'invariance par changement (équivalent) de représentation d'état, et l'équivalence de la passivité avec l'existence d'une fonction d'énergie interne.

Nous avons ensuite proposé une caractérisation des systèmes linéaires passifs qui se base sur leur description fréquentielle. En fait, la condition nécessaire et suffisante de passivité proposée à la section 3.5.2 ne s'applique qu'à une classe particulière d'éléments linéaires (ceux qui sont exponentiellement stables, et satisfont une hypothèse "technique" d'atteignabilité), et, à ce titre, doit plutôt être considérée comme une condition suffisante. Le second résultat de caractérisation (théorème 3.35), qui s'applique aux opérateurs de transfert exponentiellement stables et coercifs, a été proposé dans le but de fournir des conditions de passivité plus aisées à vérifier. Finalement, c'est ce dernier résultat qui a été appliqué à deux exemples étudiés au cours de ce chapitre : l'intégrateur implicite et le système différentiel du premier ordre à état retardé.

Il est intéressant de remarquer que la stabilité exponentielle du semigroupe, que nous avons supposé dans toute notre étude, exclut la possibilité de pôles de la fonction de transfert sur l'axe imaginaire. Cette remarque souligne le caractère non optimal de notre étude, car il existe des systèmes passifs dont certains pôles sont imaginaires purs. Le modèle de poutre vibrante étudié dans ce chapitre est un exemple d'un tel système.

Nos contributions personnelles au contenu de ce chapitre sont, pour l'essentiel, et à notre connaissance : la présentation de l'exemple de l'intégrateur implicite par semigroupe, la généralisation des définitions d'énergie disponible, de passivité et d'énergie interne au cas linéaire de dimension infinie, l'étude de la cohérence de cette généralisation (sections 3.4.2, 3.4.3 et 3.4.4), la généralisation des résultats de caractérisation des fonctions de transfert passives au cas de dimension infinie, et son application aux exemples. Ces travaux ont donné lieu à une communication [83] (application aux systèmes à retard) et à une publication plus générale ([85], en cours de soumission).

Conclusion

Dans ce travail, nous avons abordé le problème du couplage entre modèles bond graphs et sous-systèmes décrits par des équations constitutives plus générales que celles des éléments simples (résistances, capacités, inductances, transformateurs et gyrateurs).

La description détaillée du processus de modélisation des systèmes énergétiques par réticulation, sur laquelle se fonde la méthodologie bond graph, conduit naturellement à ce problème de couplage, et en précise le contenu : seuls sont concernés les sous-systèmes qui échangent de l'énergie avec l'extérieur (et entre eux), sous la forme d'un nombre fini de puissance agrégées (intégrales de frontière) et dont la loi de comportement dynamique peut être décrite par un opérateur causal, liant la puissance entrante à la puissance sortante, ou, alternativement, les efforts et les flux définis à partir de ces puissances. Si le nombre de formes de puissance échangées dans le système est fini, l'évolution dynamique interne de chaque sous-système n'est pas nécessairement caractérisée par un nombre fini de variables d'états.

Ainsi, les sous-systèmes concernés, que nous avons baptisés éléments fonctionnels, incluent donc une très grande variété d'applications, dont nous avons passé en revue quelques exemples au chapitre I, et qui répondent à elles seules par l'affirmative à la question de l'utilité de la démarche de généralisation entreprise.

Mais la méthodologie bond graph ne se limite pas à la représentation modulaire des systèmes énergétiques, elle s'attache aussi à dégager, de cette structure modulaire, des informations concernant la nature des manipulations effectuées sur les énergies échangées (dissipation stockage, transfert, transformation) et à représenter formellement l'évolution dynamique du modèle global. Ce faisant, il devient possible, d'une part, de déduire algorithmiquement les équations d'état du modèle, et, d'autre part, de traduire les propriétés énergétiques en propriétés structurelles du système dynamique obtenu (stabilité, commandabilité, observabilité, etc.). De ces considérations, sont nés deux problèmes spécifiques liés au couplage qui nous intéresse : le problème de la réduction des équations constitutives des éléments fonctionnels à des

systèmes d'état de dimension finie et le problème de l'analyse des propriétés énergétiques de ces éléments fonctionnels.

Nous avons étudié le problème de la réduction des opérateurs linéaires au chapitre II, et présenté, pour le cas des systèmes de relaxation, une méthode basée sur les approximants de Padé, qui conduit à une représentation approchée de ces opérateurs qui peut être réalisée par un filtre RC. Mais, en adressant le problème de la positivité des résistances et des capacités qui le composent, nous nous sommes confrontés à la nécessité d'une description des propriétés énergétiques des éléments qui s'applique directement au modèle de dimension infinie, et non seulement au modèle réduit. C'est ainsi que nous avons pu constater (ce qui était prévisible) que la méthode de réduction proposée ne s'appliquait qu'à des modèles négligeant soit les phénomènes inertiels, soit les phénomènes capacitifs. Cependant, ces modèles particuliers, dont les liens avec les séries de Stieltjes ont été discutés, comprennent néanmoins des exemples intéressants d'applications, notamment à la réduction d'impédances associées aux interfaces fractales.

Nous avons donc naturellement été conduit à étudier la propriété énergétique commune aux systèmes qui modélisent simultanément des phénomènes inertiels, capacitifs et dissipatifs, à savoir, la passivité. Pour cette étude, restreinte dans ce travail au cas linéaire, nous avons eu recours à la théorie des semigroupes afin de disposer d'un formalisme de description unifiée des éléments fonctionnels qui généralise la représentation des éléments linéaires de dimension finie. A partir de là, il a été montré que la définition de passivité, ses implications, et ses caractérisations se généralisent, en partie, du cas fini-dimensionnel, au cas des systèmes de dimension infinie. Toutefois, du fait de la dimension infinie de l'espace d'état, des difficultés supplémentaires ont dû être prises en compte, et les résultats obtenus ne s'appliquent, pour cette raison, qu'aux systèmes exponentiellement stables.

Ces derniers résultats représentent le point d'aboutissement de ce travail. Nous sommes donc loin d'avoir apporté une solution satisfaisante au problème de couplage, défini dans son cadre le plus général. Cependant, au vu des résultats obtenus, il est possible de dégager un certain nombre de voies de recherche susceptibles de nous faire progresser vers le but poursuivi.

Les généralisations à mener sont, à notre avis, de deux natures distinctes : celles concernant les méthodes de réduction, et celles concernant l'étude des propriétés énergétiques. Ensuite, se pose le problème de généralisation au cas non linéaire.

En ce qui concerne la généralisation de la méthode de réduction des systèmes linéaires, deux options se dessinent :

- Conserver l'utilisation des approximants de Padé (et leur généralisation

aux approximants de Padé-Tchébycheff et Padé multipoints) pour réduire les fonctions de transfert à des fractions rationnelles. Dans ce cas, il est nécessaire d'établir des équivalences entre la propriété de passivité de la fonction de transfert (essentiellement son caractère positif réel), et les propriétés de convergence et de passivité de la fraction rationnelle réduite, comme nous l'avons fait pour le cas particulier des intégrales de Stieltjes. Les travaux qui concernent la synthèse par circuit d'impédance réelle positive, entrepris au début du siècle et "conclus" par Otto Brüne en 1931, semblent une voie royale dans cette direction.

- Changer radicalement de méthodologie d'approximation. Nous sommes concernés par le problème d'approximation en fraction rationnelle, et, dans ce contexte, les approximants de Padé, les développements en fraction continues, et les approximations polynomiales sont étroitement liés (quand ils ne sont pas formellement équivalents). Il existe néanmoins des méthodes d'approximations alternatives, et, actuellement, nous en envisageons principalement deux. La première est la technique d'approximation en ondelettes de fonctions complexes, avec une ondelette "mère" choisie de telle manière que la famille des approximants obtenus soient des fractions rationnelles. Il est permis d'espérer que cette méthode soit particulièrement efficace dans le cas de fonction de transfert présentant des comportements plus ou moins lisses selon les domaines de fréquences considérés. La seconde consiste à appliquer des algorithmes de réduction d'ordre (ou d'identification) directement sur la description temporelle du système linéaire de dimension infinie. L'intérêt particulier de cette approche est sa généralisation possible au cas non linéaire. C'est d'ailleurs une méthode de ce type que nous avons présentée à l'annexe II, pour le cas des opérateurs non linéaires à mémoire évanescence.

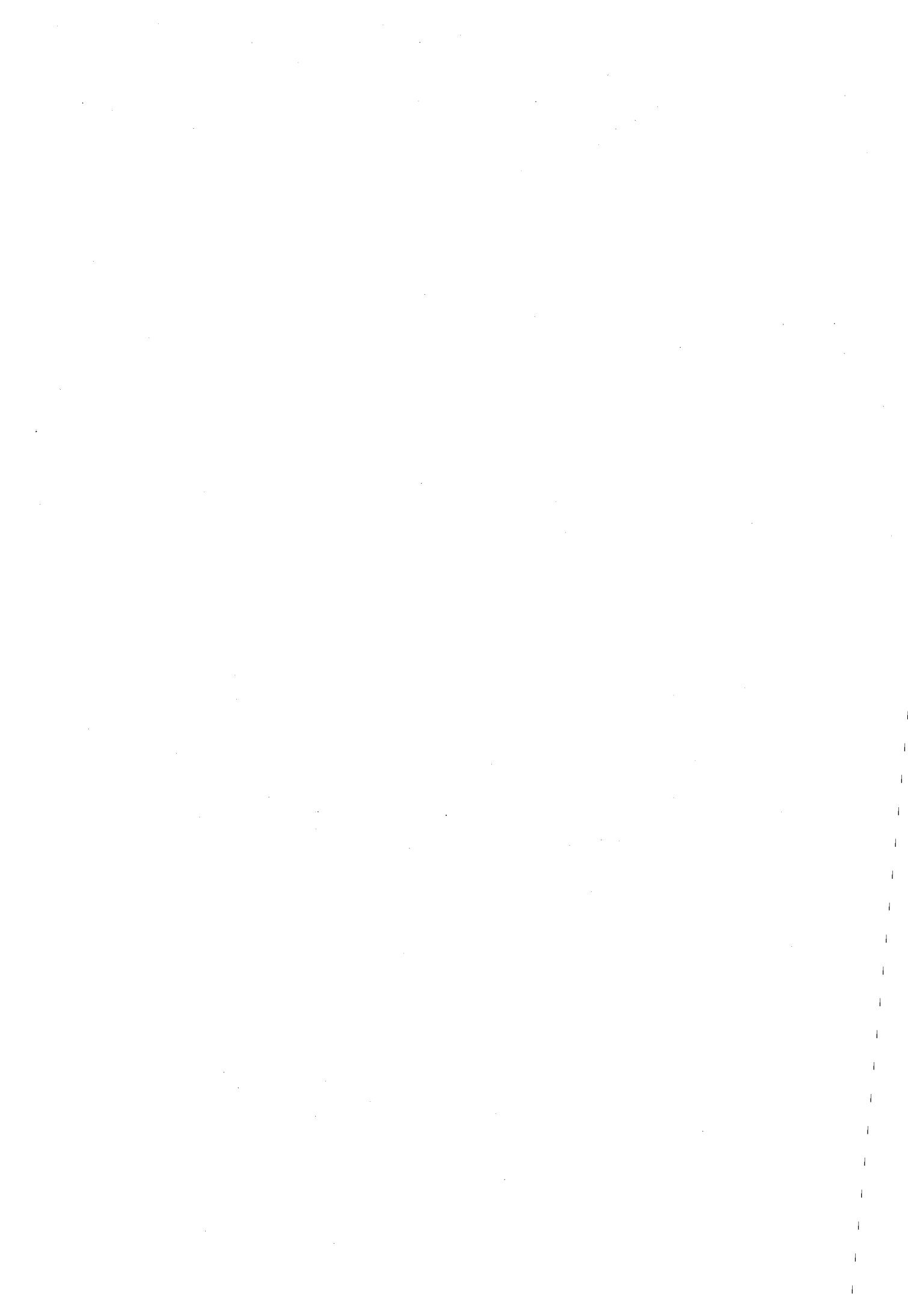
L'étude des propriétés énergétiques des systèmes linéaires peut, elle aussi, être raffinée. D'une part, il est souhaitable de dissocier la propriété de passivité, de celle de stabilité exponentielle, afin de pouvoir déduire la première de la seconde. L'application de cette éventuelle distinction aux problèmes de stabilité et de contrôle paraît évidente. Mais d'autre part, il peut être intéressant, voir utile, de définir et d'étudier des applications "dissipation", comme nous avons défini des applications énergie disponible, et énergie interne, afin de pouvoir mieux dissocier et structurer la représentation des échanges énergétiques au sein d'un modèle qui intégrerait des éléments fonctionnels. Les travaux originaux déjà mentionnés de J.C. Willems nous semblent être un point de départ intéressant dans cette perspective.

Dans le cas des éléments non linéaires, se pose le même problème de l'interaction entre méthode de réduction et étude des propriétés énergétiques, mais les éléments de réponse sont plus ténus. Actuellement, nous envisageons trois directions générales de recherche dans ce domaine.

- En premier lieu, nous sommes intéressés à la généralisation des études de passivité aux systèmes semi-linéaires. Cette étude va être conduite dans le cadre d'un séjour post-doctoral à l'université de Louvain, en collaboration avec Denis Dochain, et aura notamment pour objectif l'application à l'étude de la stabilité de modèles de réacteurs chimiques, et à la définition de stratégie de contrôle pour ces réacteurs. Le même cadre formel de la théorie des semigroupes, qui s'applique (en partie) aux systèmes semi-linéaires, sera utilisé à cet effet.
- En second lieu, il s'agit d'étudier le problème des réductions qui sont réalisables par des bond graphs non linéaires. Dans un premier temps, il serait donc utile de caractériser, comme dans le cas linéaire, la famille des opérateurs entrée-sortie qui peuvent être réalisés par la connexion d'éléments non linéaires simples (capacités, résistances, etc.), au moyen d'une structure de jonction linéaire. Une première étape dans cette direction a été franchie en définissant de manière formelle ce qui est, ou n'est pas, un élément simple non linéaire (voir chapitre III, section 3.1.3). Elle est bien entendue insuffisante pour répondre à la question posée.
- Enfin, se pose la question de la méthode de réduction en elle-même, de ses propriétés de convergence, et de sa stabilité par rapport à la propriété de passivité. Les seules méthodes que nous envisageons, à ce stade, pour le problème de réduction des opérateurs non linéaires, sont en fait des méthodes d'identification de la dynamique entrée-sortie, dans le domaine temporel, telle celle présentée à l'annexe II, qui pré-suppose une grande régularité du comportement entrée - sortie (propriété de mémoire évanescence). Seuls sont donc concernés des éléments qui, en l'absence de sollicitations extérieures, possèdent un état d'équilibre unique et attractif. Cette restriction exclut donc la possibilité de comportements chaotiques, de cycles limites, ou l'existence de plusieurs points d'équilibre, attractifs ou non. Cependant, il ne faut pas perdre de vue que de tels comportements peuvent apparaître avec la connexion de tels éléments entre eux, ou même avec des éléments simples (non linéaires).

Pour conclure, signalons que certaines des questions mentionnées ci-dessus

seront étudiées par Nicolas Guijarro, dans le cadre du travail de doctorat qu'il vient d'entreprendre au L.A.I.L., et que nous en sommes très heureux.



Bibliographie

- [1] Baker, G.A. and P. Graves-Morris (1996).. *Padé Approximants*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- [2] Barreto J. and J. Lefèvre (1983). *Model Structure in Physiology*, pp. 139-150 in *Modelling and Data Analysis in Biotechnology and Medical Engineering*, G.C. Van Steenkiste and P.C. Young editors, North Holland.
- [3] Barreto J. and J. Lefèvre (1984). *Bond Graph Fields and Implicit Equations*, pp. 102-105 in *Journ. of Mod. & Simul.*, Vol 4, N° 3.
- [4] Barreto J. and J. Lefèvre (1985). *R-Fields in the Solution of Implicit Equations*, pp. 227-236 in *Journ. of Frank. Inst.*, Vol. 319, N°1-2.
- [5] Beaman J.J. and R.C. Rosenberg (1988). *Constitutive and Modulation Structure in Bond Graph Modelling*, pp. 395-402 in *Journ. of System Dynamics, Measurement and Control*, Vol. 110.
- [6] Belevitch V. (1968). *Classical Network Synthesis*. Van Nostrand.
- [7] Bensoussan A., G. Da Prato, M.C. Delfour and S.K. Mitter (1992). *Representation and Control of Infinite Dimensional Systems: Vol. I*. Birkhäuser.
- [8] Bertrand J.-M. (1997). *Analyse Structurelle et Commande par Découplage Entrée-Sortie des Modèles Bond Graphs*. Thèse de doctorat. Université Lille I.
- [9] Birkett S.H. and P.H. Roe (1989). *The Mathematical Foundations of Bond Graphs - I: Algebraic Theory*, *Journ. of Frankl. Inst.*, Vol. 326, pp. 329-350.
- [10] Birkett S.H. and P.H. Roe (1989). *The Mathematical Foundations of Bond Graphs - II: Duality*, *Journ. of Frankl. Inst.*, Vol. 326, pp. 691-708.

- [11] Birkett S.H. and P.H. Roe (1990). *The Mathematical Foundations of Bond Graphs - III: Matroid Theory*, Journ. of Frankl. Inst., Vol. 327, pp. 87-108.
- [12] Birkett S.H. and P.H. Roe (1990). *The Mathematical Foundations of Bond Graphs - IV: Matrix Representation and Causality*, Journ. of Frankl. Inst., Vol. 327, pp. 109-128.
- [13] Blundell A. (1982). *Bond Graphs for Modelling Engineering Systems*, Wiley.
- [14] Borne P., G. Dauphin-Tanguy, J.-P. Richard, F. Rotella and I. Zambettakis (1993). *Analyse et régulation des processus industriels, tome 1: régulation continue*, Editions Technip.
- [15] Boyd S. and L.O. Chua (1985). *Fading Memory and the Problem of Approximating Nonlinear Operators with Volterra Series*, pp. 1150-1161 in IEEE trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-32, N°11.
- [16] Breedveld P.C. (1984). *Physical Systems Theory in Terms of Bond Graphs*, . Thèse de doctorat, Technische Hogeschool Twente, Twente, Pays-Bas.
- [17] Breedveld P.C. (1989). *Fundamentals of Bond Graphs*, pp. 7-12 in *Modelling and Simulation of Systems*, P.C. Breedveld et al. editors, Baltzer.
- [18] Breedveld P.C., R.C. Rosenberg and T. Zhou (1991). *Bibliography of Bond-Graph Theory and Application*, pp 1067-1109 in Journ. of Frankl. Inst., Vol. 328, N° 5-6.
- [19] Breedveld P.C. and G. Dauphin-Tanguy editors (1992). *Bond Graphs for Engineers*, North-Holland.
- [20] Brezinski, C. and J. Van Iseghem (1996). *Pade Approximations*, in *Handbook of Numerical Analysis*, (P. Ciarlet and J. Lions éditeurs), North-Holland.
- [21] Brezis H. (1983). *Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications*, Masson, Paris.
- [22] Brune O. (1931). *Synthesis of a finite two terminal network whose driving point impedance is a prescribed function of frequency*. pp 191-236 in Journal of Mathematics and Physics, N°10.

- [23] Bultheel, A. and M. Van Barel (1986). *Padé Techniques for Model Reduction in Linear System Theory: a Survey*. Journ. of Computational and Applied Mathematics, Vol. 14, N 3, pp. 401-438.
- [24] Byrnes C. I., A. Isidori and J.C. Willems (1991). *Feedback equivalence to passive nonlinear systems*, pp. 119-135 in Analysis of controlled dynamical systems, B. Bonnard, B. Bride, J. P. Gauthier and I. Kupka eds., Birkhäuser.
- [25] Cellier F. (1998). *The Bond Graph Compendium*, <http://www.ece.arizona.edu/~cellier/bg.html>
- [26] Charef, A., H.H. Sun, Y.Y. Tsao and B. Onaral, (1992). *Fractal System as Represented by Singularity Function*. IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. 37, N 9, pp. 1465-1470.
- [27] Chia-Lun J.H. (1986). *Self-Sustained Oscillations in R_H-C or R_H-L Circuit Containing a Hysteresis Resistor R_H* . pp. 636-641 in IEEE transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-33, N°6.
- [28] Chua L.O. and K.A. Stromsmoe (1970). *Lumped-Circuit Models for Nonlinear Inductors Exhibiting Hysteresis Loops*, pp. 564-574 in IEEE transactions on Circuits Theory, Vol. CT-17, N°4.
- [29] Chua L.O. (1971). *Memristor, the Missing Circuit Element*, pp. 507-519 in IEEE transactions on Circuits Theory, Vol. CT-18, N°9.
- [30] Chua L.O. and S.C. Bass (1972). *A Generalized Hysteresis Model*, pp. 36-48 in IEEE transactions on Circuits Theory, Vol. CT-19, N°1.
- [31] Chua L.O. and C.W. Tseng (1974). *A memristive circuit model for p-n junction diodes*, pp. 367-389 in Int. Journ. of Circuit Theory and Applications, Vol. 2.
- [32] Chua L.O. and D.N. Green (1976). *A qualitative Analysis of the Behavior of Dynamic Nonlinear Networks: Steady-State Solutions of Nonautonomous Networks*, pp. 530-550 in IEEE transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-23, N°9.
- [33] Chua L.O. and Y.W. Sing (1978). *A nonlinear lumped circuit model for Gunn diodes*, pp. 375-408 in Int. Journ. of Circuit Theory and Applications, Vol. 6.

- [34] Chua L.O. (1980). *Device Modelling Via Basic Non Linear Circuit Elements*, pp. 1014-1043 in IEEE transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-27, N°11, novembre.
- [35] Copson E.T. (1962). *An introduction to theory of functions of a complex variable*, Oxford University Press.
- [36] Courant R. and D. Hilbert (1953). *Methods of Mathematical Physics*. Interscience.
- [37] Curtain R.F. and H.J. Zwart (1995). *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*. Springer-Verlag.
- [38] Danckwerts P.V. (1953). *Continuous flow systems. Distribution of residence times*, pp. 1-13 in Chem. Eng. Sci., vol. 2 (1).
- [39] Dauphin-Tanguy G. and L.T. Grujić (1995). *Asymptotic Stability via Energy and Power. Part II: Bond Graph Bridging for Nonlinear Systems*. pp. 96-101 in Proc. IFAC Conf. System, Structure and Control, Nantes.
- [40] Dauphin-Tanguy G. and L.T. Grujić (1996). *Energetic Stability and Bond Graphs. Part II: Bond Graph Approach to Mechanical Systems*. pp. 732-735 in proc. of the IMACS multiconf. on Computational Engineering in Systems Applications, Lille, IEEE-SMC.
- [41] De Figueiredo R.J. and T.A. Dwyer (1980). *A Best Approximation Framework and Implementation for Simulation of Large-Scale Nonlinear Systems*, pp. 1005-1013 in IEEE trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-27, N°11.
- [42] Dochain D. (1994). *Contribution to the Analysis and Control of Distributed Parameter Systems with Application to (Bio)chemical Processes and Robotics*, Thèse d'Aggrégation de l'Enseignement Supérieur, Université Catholique de Louvain, Belgique.
- [43] Dwyer T.A. (1975). *Holomorphic Representation of Tempered Distribution and Weighted Fock Spaces*. In *Analyse Fonctionnelle et Applications*, L. Nachbin éditeur, Hermann.
- [44] Eves H. (1971). *Mathematical Circles Revisited*. Prindle, Weber and Schmidt.

- [45] Feyo de Azevedo S., M.A. Romero-Ogawa and A.P. Wardle (1990). *Modelling of Tubular Fixed-Bed Catalytic Reactors: a Brief Review*. pp. 2-8 in Trans. I.Chem.E., vol. 68
- [46] Fréchet M. (1910). *Sur les fonctionelles continues*. Annales de l'Ecole Normale Supérieure, Vol. 27.
- [47] Gannett J.W. and L.O. Chua (1978). *A nonlinear circuit model for IMPATT diodes*, in IEEE trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-25, N°5.
- [48] Gannett J.W. and L.O. Chua (1978). *Frequency Domain Passivity Conditions for Linear Time-Invariant Lumped Networks*. Electronic Research Laboratory, College of Engineering, University of California, Berkeley. Memo M78/21.
- [49] Goldberger A.L., V. Bhargava, B.J. West and A.J. Mandell (1985). *On the mechanism of cardiac electrical stability*. Biophysics Journal, Vol. 48.
- [50] Gordon I. S. and S. Sorkin éditeurs (1959). *Mechanisms of Discovery*. Simon and Schuster.
- [51] Green A.E. and R.S. Rivlin (1957). *The Mechanics of Nonlinear Materials with Memory*. pp. 1-21 in Arch. of Rational and Analytical Mechanics, N°1(1).
- [52] Grujić L.T. and G. Dauphin-Tanguy (1995). *Asymptotic Stability via Energy and Power. Part I: New Lyapunov Methodology for Nonlinear Systems*. pp. 548-553 in Proc. IFAC Conf. System, Structure and Control, Nantes.
- [53] Grujić L.T. and G. Dauphin-Tanguy (1996). *Energetic Stability and Bond Graphs. Part I: Theoretical Foundations*. pp. 729-731 in proc. of the IMACS multiconf. on Computational Engineering in Systems Applications, Lille, IEEE-SMC.
- [54] Haffaf H. et G. Dauphin-Tanguy (1997). *Matroïd Theory for Structural Analysis of Systems Modelled by Bond Graph*. in proc. of the XVth. IMACS World Congress on Scient. Comput. Mod. and Appl. Math., Berlin
- [55] Halmos P.R. (1985). *I Want to be a Mathematician*, MAA Spectrum, Washington.

- [56] Hauchecorne B. et D. Surratteau (1996). *Des mathématiciens de A à Z*. Ellipses.
- [57] Henrici, P. (1964). *Elements of Numerical Analysis*. Wiley.
- [58] Helton J.W. (1976). *Systems with Infinite-Dimensional State Space: the Hilbert Space Approach*. pp. 145-160 in Proc. IEEE. Vol. 64. 1.
- [59] Herskowitz G.J. and R.B. Schilling éditeurs (1972). *Semiconductor Device Modeling for Computer-Aided Design*. McGraw-Hill.
- [60] Hill D. and P. Moylan (1976). *The stability of nonlinear dissipative systems*. pp. 708-711 in IEEE Trans. Autom. Contr., Vol. TAC-21.
- [61] Hill D.J. (1978). *On the Stability of Nonlinear Networks*. pp. 941-943 in IEEE Trans. Circ. and Syst., Vol. CAS-25.
- [62] Hille E. and R.S. Phillips (1957). *Functional Analysis and Semigroups*, A.M.S. Colloq. Publ., Vol. 31.
- [63] Hogan N. (1987). *Modularity and Causality in Physical System Modeling*. pp. 384-391 in Journ. Dyn. Syst., Meas. & Contr., Vol. 109.
- [64] Kamel, A., C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy (1993). *How to Derive a Bond Graph Model from a Transfer Matrix*. Journ. of Franklin Institute, Vol. 330, N 5, pp. 787-798.
- [65] Kantorovitch L.V. and G.P. Akilov (1982). *Functional Analysis*, Pergamon Press.
- [66] Karnopp D.C. (1985). *Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems*, pp. 100-103 in Journ. Dyn. Syst., Meas. & Contr., Vol. 107.
- [67] Karnopp D.C., D.L. Margolis et R.C. Rosenberg (1990). *System dynamics: a unified approach*, Wiley.
- [68] Kawashima S. (1993). *Global Solutions to the Equation of Viscoelasticity with Fading Memory*, pp. 388-420 in Journ of Differential Equations, Vol. 101.
- [69] Kawata T. (1972). *Fourier Analysis in Probability Theory*, Academic Press.
- [70] Kolmanovskii V. and A. Myshkis (1992). *Applied Theory of Functional Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers.

- [71] Lefèvre J. (1983). *Teleonomical Representation of the Pulmonary Vascular Bed by a Fractal Symmetric Tree*. pp. 226-248 in Journ. of Theor. Biol., N° 102.
- [72] Lefèvre J. (1989). *An elementary Bond Graph Approach to Structured Biological Modelling*, pp. 11-39 in *Advanced Simulation in Biomedicine*. D. Möller editor, Springer-Verlag.
- [73] Lefèvre J. (1991). *A Didactic Presentation of Elementary Bond Graphs for Non-engineering Students*, Journ. of Frankl. Inst. spec. issue, Vol. 328, N° 5/6, pp. 547-563.
- [74] Lefèvre J. (1993). *Constrained Use of Modulated Energy Storing Processes With and Without Internal Modulation in Bond Graphs*. pp. 20-25 in proc. of the I.E.E.E. Int. Conf. on Man and Cybernetics, Le Touquet.
- [75] Lefèvre J., A. Tavernier, S. Durbaba and L. Lefèvre (1994). *Extended Block Bond Graph: a Unified Approach to Lumped System Modelling in Physiology and Bioengineering*. State of the Art talk of the World Congr. On Medical Physics and Bioengineering, Rio de Janeiro, Brazil.
- [76] Lefèvre J. and L. Lefèvre (1995). *The Chemo-Mechanical Energy-Storing Transducer: a New Bond Graph Element Representing Cardiac Muscle Dynamics in an Energy Coherent Way*. pp. 303-308 in proc. of the Vith. Int. Conf. on Bond Graph Modelling (Las Vegas), F.E. Cellier and J.J. Granda Editors, SCS San Diego.
- [77] Lefèvre J. and L. Lefèvre (1999). *Bond Graph Models of Blood Flow in Fractal Tree Arterial Beds*, à paraître dans SIMPRA (Simulation Practice), special issue on Bond Graph, J. Thoma éditeur.
- [78] Lefèvre L., *Introduction d'éléments fonctionnels au sein de la théorie des graphes de liaisons*, Master Dissertation, Department of Applied Mathematics, Faculty of Engineering, Catholic University of Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium, 1994.
- [79] Lefèvre L., J. LeFevre and J. Barreto (1995). *Introduction of Functional and Higher-Order Elements in Bond Graphs*, pp. 29-34 in proc. of the Vith. Int. Conf. on Bond Graph Modelling (Las Vegas), F.E. Cellier and J.J. Granda Editors, SCS San Diego.

- [80] Lefèvre L., J. LeFevre and G. Dauphin-Tanguy (1995). *Why should we introduce dynamic and functional nodes in Bond Graphs*, pp. 3017-3022 in proc. of the IEEE-SMC int. conf. Vancouver, Canada. Vol. 3. IEEE-SMC'95
- [81] Lefèvre L., J. Lefèvre and G. Dauphin-Tanguy (1996). *Power-Oriented Realisation of Nonlinear Delay Operators in Circuit Theory*, pp. 222-227 in proc. of the IMACS multiconf. on Computational Engineering in Systems Applications, Lille (France), IEEE-SMC.
- [82] Lefèvre, L., J. Lefèvre and G. Dauphin-Tanguy (1997). *Passive Network Approximation of Linear Systems: Application to Fractional Power Pole Models*. pp. 207-212 in proc. IFAC Symp. On Computer Aided Control Systems Design (CACSD'97), Gent Belgium.
- [83] Lefèvre L., J. Lefèvre and G. Dauphin-Tanguy (1998). *Passivity of Linear Delay Systems*. Vith. IEEE Mediterranean Conf on Control and Automation, Alghero, Italy, en cours de publication.
- [84] Lefèvre, L., J. LeFevre and G. Dauphin-Tanguy (1997). *Bond Graph Approximation of Linear Infinite-Dimensional Systems*. Submitted in Journ. Comp. & App. Math.
- [85] Lefèvre, L., J. LeFevre and G. Dauphin-Tanguy (1998). *Passivity for Infinite Dimensional Linear Systems*. Submitted in Int. Journ. of Contr.
- [86] Littlewood J.E. (1953). *A Mathematician's Miscellany*. Methuen and Co. Limited.
- [87] Liu S.S. (1988). *Fractal model of the AC response of a rough interface*. pp. 539-532 in Physical Review Letters, Vol. 55.
- [88] Lozano R. (1998). *Systèmes Passifs, Première Partie: Théorie Générale*. pp. 2-60 compte-rendu des Journées Thématiques du GdR Automatique, 25-26 mai - Compiègne, sous la responsabilité de D. Normand-Cyrot.
- [89] Lozano R. and I. Fantoni (1998). *Passivity-Based Control of the Inverted Pendulum*, pp. 83-95 in "Perspectives in Control, Theory and Applications, a Tribute to Ioan Doré Landau", Paris C.N.R.S., D. Normand-Cyrot ed., Springer-Verlag.

- [90] Le Méhauté A. and G. Grepy (1983). *Introduction to transfer and motion in fractal media: the geometry of kinetics*. North Holland.
- [91] Mac Donald N. (1989). *Biological Delay Systems: Linear Stability Theory*. Cambridge University Press.
- [92] M. Malek-Zavarei and M. Jamshidi (1987). *Time-Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications*, North-Holland. Systems and Control Series, Vol. 9.
- [93] Mandelbrot B. (1975). *Les fractals*. Flammarion.
- [94] The Mathematical Intelligencer (1983). v. 5, no. 3, Winter.
- [95] The Mathematical Intelligencer (1991). v. 13, no. 1, Winter.
- [96] Math. Dpt. - Furman University. (1998). *The Mathematical Quotation Server*. <http://math.furman.edu/~mwoodard/mquot.html>
- [97] Mayergoyz I.D. (1991). *The Mathematical Models of Hysteresis*. Springer Verlag.
- [98] Meixner J. (1964). *On the Theory of Linear Passive Systems*. pp. 278-296 in Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 17.
- [99] Montbrun - Di Filippo J. et M. Delgado (1991). *A survey of Bond Graphs: theory, applications and programs*, pp. 565-606 in Journ. of Franklin Institute, special issue, Vol. 319, N°1/2.
- [100] Oster G.F. and D.M. Auslander (1972). *Memristor: a New Bond Graph Element*. pp. 249-252 in Journ. of Dynamic Systems, Measurement & Control, Vol. 94.
- [101] Oustaloup, A. (1995). *La dérivation non entière: théorie, synthèse et applications*, Paris, Hermès.
- [102] Patry J. (1991). *Les fractions continues: théorie et applications*. Technip.
- [103] Paynter H.M. (1961). *Analysis and Design of Engineering Systems*. M.I.T. Press, Massasuchets.
- [104] Paynter and I.J. Busch-Vischniac (1988). *Wave Scattering Approaches to Conservation and Causality*, Journ. of Frankl. Inst., Vol. 325, N° 3, pp. 295-313.

- [105] Perelson A.S. and G.F. Oster (1976). *Bond Graphs and Linear Graphs*. pp.159-185 in Journ. of Franklin Inst.. Vol. 302, 2.
- [106] Polyá G. (1945). *How to Solve It*. Princeton University Press.
- [107] Rabotnov Y.N. (1980). *Elements of Hereditary Solid Mechanics*. MIR Publishers.
- [108] Rault A. and J. Descusse (1998). *Débat de clôture des journées: "Perspectives in Control, Theory and Applications, a Tribute to Ioan Doré Landau"*, Paris C.N.R.S., D. Normand-Cyrot ed., Springe-Verlag.
- [109] Richard P. and V. B. Kolmanovskii editors (1998). *Delay Systems*, Special Issue of Mathematics and Computers in Simulation Vol.45, N°3—4.
- [110] Rose N. (1988). *Mathematical Maxims and Minims*, Raleigh Rome Press Inc.
- [111] Rossi H. (1996). *Mathematics Is an Edifice, Not a Toolbox*. Notices of the AMS, v. 43, no. 10.
- [112] Rugh W.J. (1981). *Nonlinear System Theory, the Volterra-Wiener Approach*. John Hopkins University Press.
- [113] Sandberg, I.W. (1983). *Series Expansions for Nonlinear Systems*, pp. 77-87 in IEEE transactions on Circuits Systems and Signal Processing, Vol. 2, N°1.
- [114] Sapoval B. (1997). *Universalités et fractales: jeux d'enfants ou délits d'initiés?* Flammarion.
- [115] Schetzen M. (1980). *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*. Wiley.
- [116] Schwartz L. (1966). *Théorie des distributions*. Hermann.
- [117] Schwartz L. (1993). *Analyse IV: applications à la théorie de la mesure*. Hermann.
- [118] Sepulchre R., M. Jankovic and P. Kokotovic (1997). *Constructive Non-linear Control*. Springer.
- [119] Sueur, C. (1990). *Contribution à la modélisation et l'analyse des systèmes dynamiques par une approche bond-graph. Application aux systèmes polyarticulés plans à segments flexibles*. Thèse de doctorat. Université Lille I.

- [120] Sueur, C. et G. Dauphin-Tanguy (1991). *Bond-graph approach for structural analysis of MIMO linear systems*. Journ. of the Frankl. Inst., vol. 328, No. 1, pp. 55-70.
- [121] Sun, H.H., A.A. Abdelwahab and B. Onaral (1984). *Linear Approximation of Transfer Function with a Pole of Fractional Power*. IEEE Trans on Autom. Contr., vol. AC-29, pp.441-444.
- [122] Sun, H.H. and B. Onaral (1984). *A unified approach to represent metal electrode interface*. IEEE Trans. on Biomedical Engineering, Vol. BME-31, July.
- [123] Tagina M., C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy (1995). *Monitoring of Systems Modelled by Bond Graphs*, Proc. Int. Conf. Bond Graph Modelling and Simulation (F.E. Cellier and J.J. Granda Ed.), SCS.
- [124] Taylor A.E. (1958). *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley.
- [125] Thoma J.U. (1971). Bond Graphs for Thermal Energy Transport and Entropy Flow. pp. 109-120 in Journ. of the Franklin Institute, N°292.
- [126] Thoma J.U. (1975). *Introduction to Bond Graphs and their Applications*, Pergamon Press.
- [127] Truesdell C. (1966). *Six Lectures on Modern Natural Philosophy*. Springer Verlag.
- [128] U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station (1977). *Shore Protection Manual*, Vol. II, U.S. Army.
- [129] Van Valkenburg M.E. (1960). *Introduction to Modern Network Synthesis*. Wiley.
- [130] Volterra V. (1909). *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità*, pp. 295-300 in Atti Reale dell'Accademia Nazionale Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis., Mat. e Natur., Vol. 18, N°2.
- [131] Volterra V. (1959). *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equation*. Dover.
- [132] Wax N. (1990). *Nonlinear Circuits with Hysteresis*. Journ. of the Franklin Institute, vol. 327, No. 2, pp. 235-249.
- [133] Wang, J.C. (1987). *Realisations of Generalised Warburg Impedance with RC Ladder Networks and Transmission Lines*. J. Electrochem. Soc., Vol. 134, N 8, pp. 1915-1940.

- [134] Wen J.T. (198). *Time Domain and Frequency Domain Conditions for Strict Positive Realness*. pp. 988-992 in IEEE trans. Autom. Contr. Vol. 33. N°10.
- [135] Widder D.V. (1971). *An Introduction to Transform Theory*. Academic Press.
- [136] Widder D.V. (1972). *The Laplace Transform*, Princeton University Press.
- [137] Wiener N. (1954). *Nonlinear Problems in Random Theory*. M.I.T. Press.
- [138] Willem M. (1995). *Analyse harmonique réelle*. Hermann.
- [139] Willems J.C. (1972). *Dissipative Dynamical Systems. Part I: General Theory*, pp. 321-351 in Arch. Ration. Mech. Anal., Vol. 45, N°5.
- [140] Willems J.C. (1972). *Dissipative Dynamical Systems. Part II: Linear Systems with Quadratic Supply Rates*, pp. 352-393 in Arch. Ration. Mech. Anal., Vol. 45, N°5.
- [141] Wijkstra H. and H.B.K. Boom (1989). *Deactivation in the rabbit left ventricle induced by constant ejection flow*. pp. 1113-1123 in IEEE Trans. on Biomedical Engineering, Vol. 36.
- [142] Wu J. (1996). *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*. Springer.
- [143] Wyatt J.L., L.O. Chua, J.W. Gannett, I.C. Göknaar and D.N. Green (1981). *Energy Concepts in the State-Space Theory of Nonlinear N-Ports: Part I: Passivity*, IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. Cas-28, N° 1, pp. 48-61.
- [144] Wyatt J.L., L.O. Chua, J.W. Gannett, I.C. Göknaar and D.N. Green (1982). *Energy Concepts in the State-Space Theory of Nonlinear N-Ports: Part II: Losslessness*, IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. Cas-29, N° 7, pp. 417-430.
- [145] Yosida K. (1966). *Functional Analysis*. Springer-Verlag.
- [146] Youla D.C., L.J. Castriota and H.J. Carlin (1959). *Bounded Real Scattering Matrices and the Foundations of Linear Passive Network Theory*. pp. 102-104 in Trans. I.R.E. on Circuit Theory Vol. CT-4.

Annexes

A.1 Présentation intuitive de la méthodologie bond graph

Cet annexe vise à présenter l'outil bond graph de manière intuitive, ou encore, en adoptant une approche inductive. Partant de considérations sur les analogies entre circuits mécaniques et électriques, origine historique de la méthodologie, les variables fondamentales généralisées seront définies, puis les éléments, ainsi que la structure de leur connexion ("structure de jonction"). Une attention constante sera apportée aux notions énergétiques sous-jacentes à ces différentes définitions, de manière à mettre en évidence, à l'intention du lecteur, non familier à la méthodologie bond graph, les contraintes "physiques" qui se sont imposées dans notre travail de généralisation.

A.1.1 Analogie électromécanique

La figure 4.3 représente deux systèmes oscillants et forcés bien connus. Nous allons développer leurs modèles d'état, en le décrivant par des d'assignations placées dans un ordre procédural. Pour obtenir cette description, la démarche a été la suivante :

1. Les valeurs initiales des variables d'état (charge dans la capacité, flux dans la self, élongation du ressort et impulsion de la masse) sont supposées connues.
2. Les équations constitutives des éléments et les équations de Kirchhoff sont écrites dans un ordre "exécutable" afin d'aboutir à l'expression des dérivées des variables d'état.

Il est alors possible d'intégrer de manière itérative les équations obtenues et donc de calculer les valeurs des variables d'intérêt pour tout instant ultérieur. Dans la suite, la notation PS^3 (Procedural State Space Subroutine)

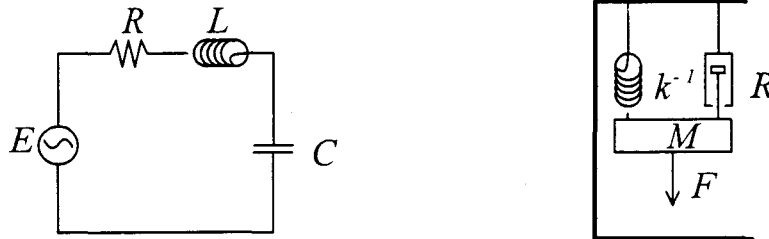


Figure 4.3: Deux circuits oscillants analogues.

désignera la séquence d'équations obtenues par la procédure sommairement décrite ci-dessus.

En général, les variables d'état sont définies comme les quantités stockées dans les éléments dynamiques. Dans l'exemple de la figure 4.3, notons $q(t)$ les *déplacements généralisés*, à savoir la charge électrique dans la capacité et l'élongation du ressort par rapport à sa position d'équilibre, et notons $p(t)$ les *moments généralisés*, à savoir le flux magnétique dans la self et le moment associé à la masse M (c'est-à-dire, en vertu du principe de Newton, la quantité de mouvement de cette masse).

En choisissant comme entrées la source de tension $E = E(t)$ et la force extérieure $F = F(t)$, le calcul du champ des dérivées des variables d'état peut se décrire par la séquence d'assignations :

$$\begin{array}{ll}
 E := E(t) & F := F(t) \\
 V_C := q(t)/C & F_k := q(t)/k^{-1} \\
 I_L := p(t)/L & v_M := p(t)/M \\
 I_R := I_L & v_R := v_M \\
 V_R := R \cdot I_R & F_R := R \cdot v_R \\
 V_L := E - V_C - V_R & F_M := F - F_k - F_R \\
 I_C := I_R & v_k := v_R \\
 \frac{dq}{dt} := I_C & \frac{dq}{dt} := v_k \\
 \frac{dp}{dt} := V_L & \frac{dp}{dt} := F_M
 \end{array}$$

Nous allons maintenant formuler quelques analogies supplémentaires et, de cette manière, introduire les prémisses de la syntaxe des bond graphs.

Les deux circuits comportent des éléments. Il s'agit de sous-systèmes indécomposables dans la théorie considérée. Ces éléments s'échangent entre eux de l'énergie, qu'elle soit cinétique, potentielle, électrique ou magnétique. Ces éléments sont, par choix, des modèles localisés de phénomènes physiques ayant, eux, une dimension spatiale. Par "localisés", il faut comprendre que ces éléments sont caractérisés par des équations constitutives et/ou des variables d'état qui ne dépendent que du seul paramètre temps. Autrement dit, le modèle d'un élément représente de manière agrégée l'ensemble des échanges énergétiques entre cet élément et les autres sous-systèmes, sans tenir compte de la dimension spatiale du dispositif physique modélisé. La conséquence de ce choix de travailler avec des éléments à paramètres "localisés" est que l'ensemble du modèle mathématique obtenu, en fin de parcours, est un système d'équations différentielles, et non d'équations aux dérivées partielles.

Dans les bond graphs, on travaillera avec quatre types de variables, qui porteront le même nom, quelque que soit le domaine énergétique considéré (électrique, mécanique ou autre). Il s'agit :

- du flux, analogue au courant (électricité) ou à la vitesse (mécanique de translation), et noté f
- de l'effort, analogue à la différence de potentiel (électricité) ou à la force (mécanique de translation), et noté e
- du déplacement généralisé, analogue à la charge ou au déplacement (mécanique de translation), et noté q
- du moment généralisé, analogue au flux magnétique (électricité) ou au moment (mécanique de translation), et noté p .

Les éléments des circuits sont reliés entre eux par des connexions idéales, en ce sens qu'elles transmettent, instantanément et sans pertes, la puissance. En l'occurrence, il s'agit ici des fils électriques idéaux et de barres parfaitement rigides et sans masse. En bond graphs, on représente les échanges de puissances entre deux éléments par une liaison ou "bond". Il est important de remarquer d'emblée que dans les circuits électriques ou mécaniques, deux fils (ou deux points d'attache) sont nécessaires pour définir un effort (différence de potentiel électrique ou différence de force) et donc, un transfert d'énergie; dans les bond graphs, par contre, c'est l'échange d'énergie que l'on représente. Deux fils correspondront donc à un bond. La figure 4.4 donne quelques premiers exemples de cette représentation. Cette définition nous permet, sans ambiguïté, d'associer un effort et un flux à chaque bond du circuit considéré.

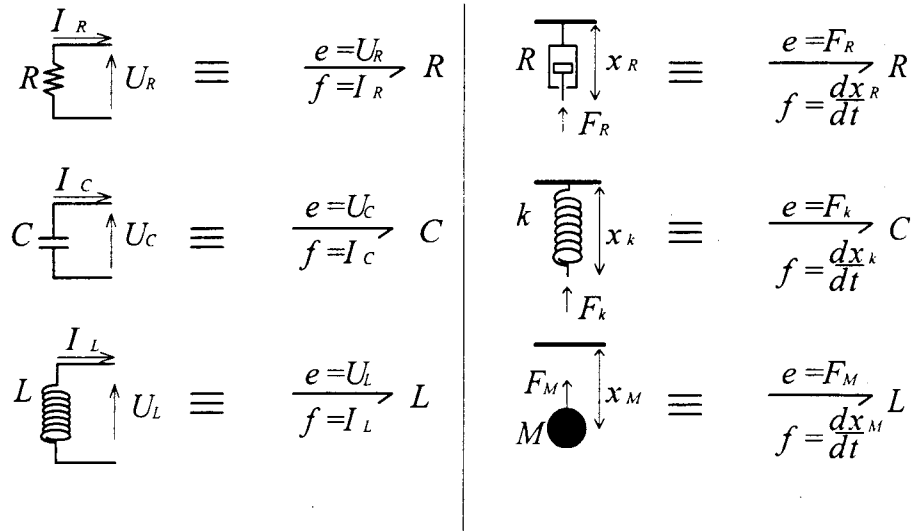


Figure 4.4: Élément R, C et L en électricité et en mécanique de translation.

Dans les circuits électriques ou mécaniques unidirectionnels, on considère qu'il y a deux types de connexions élémentaires : la connexion série et la connexion parallèle. Toutefois, en examinant attentivement les équations de telles connexions, on s'aperçoit que la connexion série en électricité a des équations analogues à la connexion parallèle en mécanique, et réciproquement. Ceci est bien sûr dû au choix des analogies tension-force et courant-vitesse qui ont été opérés. En conséquence, nous appellerons ces connexions :

- la jonction "0", analogue à la connexion parallèle en électricité. En définissant par e_i les efforts associés à chaque liens de la jonction, et par f_i les flux dans ces mêmes bonds, les équations d'une jonction "0" à N liens sont :

$$\begin{cases} e_1 = e_2 = \dots = e_N \\ \sum_{i=1}^N a_i f_i = 0 \end{cases} \quad (4.187)$$

où $a_i = +1$ si le lien i entre dans la jonction ($\rightarrow 0$) et $a_i = -1$ si le lien i sort de la jonction ($0 \rightarrow$).

- la jonction "1", analogue à la connexion série en électricité. Avec les mêmes conventions, les équations de la jonction "1" sont :

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = \dots = f_N \\ \sum_{i=1}^N a_i e_i = 0 \end{cases} \quad (4.188)$$

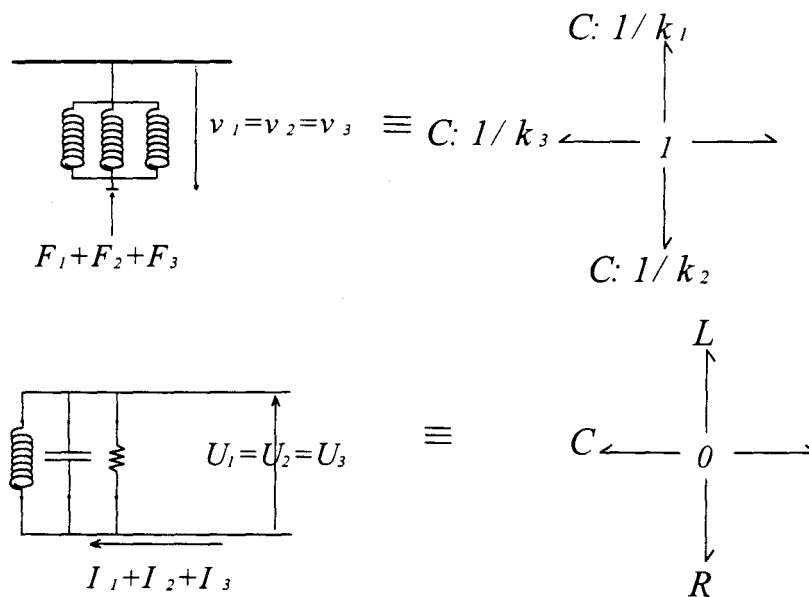


Figure 4.5: Exemples de jonction "0" et "1"

où $a_i = +1$ si le lien i entre dans la jonction ($\rightarrow 1$) et $a_i = -1$ si le lien i sort de la jonction ($1 \rightarrow$).

La jonction "0" impose le même effort à tous les éléments (ou jonctions) qui lui sont connectés, de même, la jonction "1" impose un flux commun. La figure 4.5 illustre des exemples de jonctions "0" et "1".

Nous avons, à ce stade, introduit une terminologie élémentaire des bond graphs qui résume quelques analogies formulées à partir des deux circuits de la figure 4.3. Nous n'avons cependant pas encore parlé des éléments composant ces circuits, ni de leurs équations constitutives. C'est pourtant un passage obligé si l'on veut aboutir à une formulation formelle unique de la PS^3 des deux circuits. Dans la section suivante, nous discuterons ces équations constitutives, en adoptant une démarche basée sur leur énergétique. Le but de cette démarche est de mettre en relief les similitudes "physiques" dans le comportement des circuits mécaniques, électriques, hydrauliques, ..., et non pas seulement le caractère formel de ces similitudes.

A.1.2 Les éléments des bond graphs, approche énergétique

Aussi bien les lois de Kirchhoff, que les équations constitutives d'une capacité, d'une self ou d'une résistance, peuvent être formulée en termes d'énergie échangée, d'énergie stockée ou d'énergie dissipée. Les équations d'un circuit peuvent alors être vues comme un "simple" bilan d'énergie (conservation de l'énergie totale) ou bilan de la puissance totale échangée dans le circuit. L'idée maîtresse des bond graphs est justement de partir de cette "observation" pour se doter d'un formalisme de type "circuit" qui, automatiquement, assure la conservation de l'énergie.

Remarquons qu'avec les notations introduites, la puissance échangée dans un lien entre deux éléments (ou entre un élément et une jonction), s'exprime toujours :

$$P(t) : = e(t) \cdot f(t) \quad (4.189)$$

$$\text{puissance} : = \text{effort} \cdot \text{flux}$$

Le flux (parfois appelé variable "through") est la dérivée d'une quantité extensive (charge ou déplacement) qui "coule" dans le lien, l'effort (parfois appelé variable "across") est une différence de "poussée" (c'est-à-dire une force ou une différence de potentiel) qui crée le flux. C'est cette expression de la puissance qui sert de point de départ à la généralisation des bond graphs à d'autres domaines énergétiques. Dans cette annexe, nous aborderons ainsi les circuits électriques, mécaniques, hydrauliques, et thermiques. Le choix des variables généralisées effort, flux, moment et déplacement, dans différents domaines énergétiques, imposé par le bilan de puissance (4.189), est explicité à la table 2.

Remarque 8 *La définition des variables efforts et flux dans le domaine thermique sont discutées en détail dans [125] et [67]. C'est la loi de Joule qui sert de point de départ pour les définir. Nous savons en effet que la puissance dissipée dans une résistance sous forme de chaleur est donnée par :*

$$P(t) = R \cdot I^2(t) = P_{\text{thermique}} \quad (4.190)$$

Par ailleurs, l'expression de la puissance thermique ("flux de chaleur") est donnée par :

$$\frac{dQ_{\text{cal}}}{dt} = T \frac{dS}{dt} \quad (4.191)$$

où Q_{cal} désigne la quantité de chaleur, T la température absolue et S l'entropie. Le bilan énergétique de la résistance et le formalisme prédéfini nous

conduisent donc à choisir comme effort, la température absolue, et comme flux, la variation d'entropie $\frac{dS}{dt}$. Notons que l'entropie S est bien une variable extensive au sens thermodynamique.

	effort $e(t)$	flux $f(t)$	moment généralisé $p(t)$	déplacement généralisé $q(t)$
mécanique translation	force	vitesse	moment	déplacement
mécanique rotation	couple	vitesse angulaire	moment angulaire	angle
hydraulique	pression	débit volumique	impulsion	volume
acoustique	pression	vitesse volumique	moment	volume
électrique	tension	courant	flux magnétique	charge
chimique	potentiel chimique	flux molaire	-	masse molaire
thermo- dynamique	température	flux entropique	-	entropie

Table 1: variables généralisées pour différents domaines énergétiques.

La résistance électrique peut donc aussi être vue comme un "convertisseur" énergétique *irréversible* entre les domaines électrique et thermique. De tels "convertisseurs" sont appelés, dans la terminologie bond graphs, des transducteurs ("transducers"). En fait, quelque soit le domaine énergétique considéré, une résistance est toujours un transducteur, mais, elle est caractérisée par le fait que l'on ne se préoccupe pas de savoir ce que devient l'énergie fournie au milieu "dissipateur". Ce dernier milieu fait donc partie, de fait, du monde extérieur au système modélisé, c'est-à-dire de l'environnement du modèle. C'est pourquoi il est indispensable de garder des résistances dans une

théorie de modélisation des circuits multi-énergétiques. Elles sont les "portes" entre le système et l'extérieur. La même remarque est d'application en ce qui concerne les sources.

Nous disposons maintenant de suffisamment de notions pour pouvoir introduire les différents éléments des bond graphs de manière naturelle. Nous allons subdiviser ces éléments en classes, et donner pour chacune de ces classes ses caractéristiques essentielles. Les différentes classes sont : les éléments conservatifs d'énergie, les éléments dissipatifs, les sources, les éléments conservatifs de puissance, et les éléments généraux multiports. Ce sont là les principaux éléments idéaux qui sont utilisés, dans les différents domaines énergétiques, pour modéliser les systèmes à paramètres localisés en termes de bond graphs.

A.1.2.1 Les éléments conservatif d'énergie

Ce sont les éléments capables de stocker et de restituer de l'énergie sans aucune perte. Il faut de plus que l'énergie stockée dans ces éléments soit, à tout moment, une fonction d'un nombre fini de variables d'état (au sens thermodynamique). Autrement dit, les éléments conservatifs sont des sous-systèmes auxquels, à l'équilibre, on peut appliquer le premier principe de la thermodynamique. Les exemples les plus simples de tels éléments sont les capacités électriques, les selfs, les ressorts idéaux, les masses en mouvement, les réservoirs,... Les équations constitutives de tels éléments découlent naturellement de leur définition. En effet, soient Q_1, Q_2, \dots, Q_N les variables d'énergie caractérisant l'état de l'élément (sous-système), évoluant dans le temps, mais uniforme dans l'espace (hypothèse de "localisation"). Soit $E_{stockée} := E(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$, la fonction d'énergie interne associée à cet élément. Supposons cette fonction continûment différentiable, on a alors :

$$P(t) = \frac{d}{dt} E_{stockée} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial E}{\partial Q_i} \cdot \frac{dQ_i}{dt} \quad (4.192)$$

Pour "coller" au formalisme précédemment introduit, il nous faut considérer que cet élément possède N accès énergétiques (il sera donc appelé " N -port"). Il suffit alors de définir les efforts et les flux correspondant à chacun de ces ports de la manière suivante :

$$\begin{aligned} e_i &:= \frac{\partial E}{\partial Q_i} = e_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_N) \\ f_i &:= \frac{dQ_i}{dt} \end{aligned} \quad (4.193)$$

pour $i = 1 \dots N$. De cette sorte, on a bien un effort, fonction de N grandeurs extensives, qui est la généralisation naturelle du potentiel unidimensionnel. De même chaque flux est, comme précédemment, la dérivée temporelle d'une grandeur extensive. De plus, la puissance totale entrante dans le système conservatif satisfait la relation fondamentale :

$$P(t) = \langle f_i(t), e_i(t) \rangle_{\mathbb{R}^N} = \sum_{i=1}^N f_i(t) \cdot e_i(t) \quad (4.194)$$

Il convient de remarquer que, formellement, chaque Q_i correspond à un mode distinct de stockage d'énergie mais qu'il se peut que plusieurs d'entre eux soient des charges électriques, des elongations de ressorts, ... On peut aussi directement définir l'équation constitutive d'un élément conservatif, sans passer par sa fonction d'énergie, par l'équation (4.193). Cependant, la définition même d'un élément conservatif implique l'existence d'une fonction d'énergie différentiable. Les fonctions e_i dans (4.193) doivent donc satisfaire les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'une fonction $E(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$, différentiable, et telle que $\frac{\partial E}{\partial Q_i} = e_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$ pour $i = 1 \dots N$. Ces conditions nécessaires et suffisantes connues en mathématique sous le nom de conditions de Cauchy-Schwartz, sont appelées, ici, relations de réciprocity de Maxwell. Elles s'expriment par les N^2 équations :

$$\frac{\partial e_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial e_j}{\partial Q_i} \quad (4.195)$$

pour $i, j = 1 \dots N$. Les équations (4.193) sont, en fait, les équations constitutives d'une capacité à N accès. Une inductance généralisée se définit par des équations "duales" à celles de la capacité (au sens de la dualité dans les réseaux de Kirchhoff). Une telle self a donc pour équations :

$$\begin{aligned} f_i &: = \frac{\partial E}{\partial p_i} = f_i(p_1, p_2, \dots, p_N) \\ e_i &: = \frac{dp_i}{dt} \end{aligned} \quad (4.196)$$

pour $i = 1 \dots N$. Les exemples les plus simples d'éléments conservatifs sont les capacités électriques, les ressorts, les réservoirs, ... La figure 4.6 donne, dans l'ordre : la représentation d'un élément capacitif général, un exemple de capacité à deux accès électriques et un exemple de capacité à deux accès, l'un mécanique, et l'autre électrique.

A.1.2.2 Les éléments purement dissipatifs

Les éléments dissipatifs sont des transducteurs dont seules les variables efforts et flux à un des accès nous intéressent, l'autre accès fournissant constam-

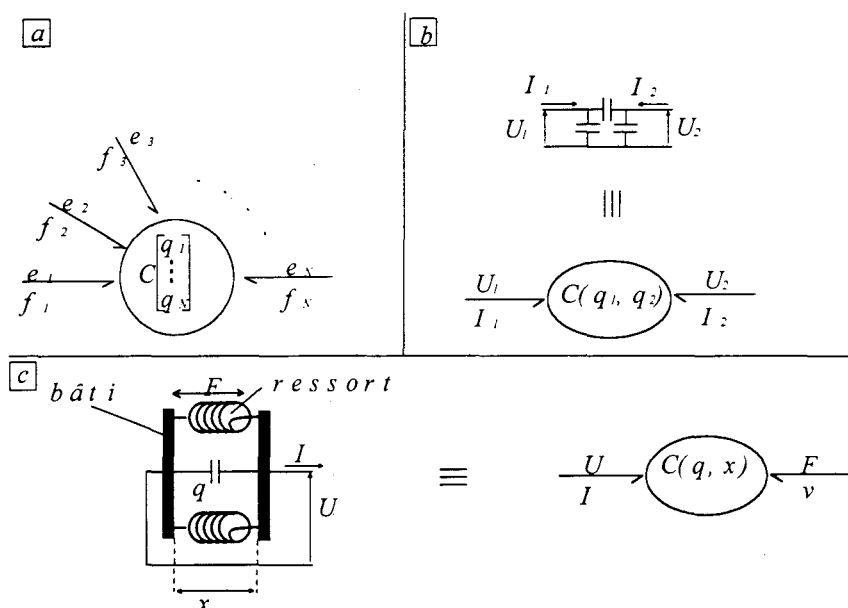


Figure 4.6: Exemples de capacités généralisées à N accès. (a) représentation générale (b) un quadripole en Π uniquement composé de capacité (c) une capacité électro-mécanique à 2 ports.

ment de l'énergie au monde extérieur au modèle, sous forme d'effet Joule. Ces éléments sont le siège de toute la production d'entropie dans le circuit. Leurs équations constitutives vont donc être une expression particulière du deuxième principe de la thermodynamique, tout comme celles des éléments conservatifs étaient une expression du premier.

Dans le cas de la résistance linéaire, les équations sont "classiques" et assurent le caractère irréversible des échanges énergétiques. En effet, les équations

$$\begin{aligned} P(t) &= e(t) \cdot f(t) \\ e(t) &= R \cdot f(t) \end{aligned} \quad (4.197)$$

assurent

$$P(t) = R \cdot f^2(t) = T \cdot \frac{dS}{dt} \geq 0 \quad (4.198)$$

La généralisation aux processus résistifs non linéaires à N accès est la suivante: on définit les équations constitutives des résistances généralisées par

$$e = R(f) \quad (4.199)$$

où $e := (e_1, \dots, e_N)^T \in \mathbb{R}^N$, $f := (f_1, \dots, f_N)^T \in \mathbb{R}^N$. l'application $R : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ étant supposée continue, doit de plus. afin de satisfaire la condition (4.198), être semi-définie positive, c'est-à-dire vérifier la condition

$$\langle f, R(f) \rangle_{\mathbb{R}^N} \geq 0 \quad (4.200)$$

pour tout $f \in \mathbb{R}^N$.

Remarque 9 La condition (4.200) garantit que l'élément ne peut que recevoir, globalement, de la puissance du reste du système, et, en aucun cas, lui en fournir. Cet élément est donc bien purement dissipatif (irréversible). La puissance totale dissipée est donnée par:

$$P(t) = \langle f, R(f) \rangle = T \cdot \frac{dS}{dt} \geq 0 \quad (4.201)$$

Remarque 10 La continuité de R et la condition (4.200) imposent qu'à des flux nuls à tous les accès, correspond un effort nul à tous les ports. C'est là une hypothèse "raisonnable" que l'on peut formuler sur le comportement des résistances. Cependant, elle exclut, par exemple, la friction de Coulomb dans le domaine mécanique. Pour de telles "résistances", il faudra donc avoir recours à des modèles approchés. La figure 4.7 fournit un exemple de tels modèles. Le lecteur, intéressé par un étude attentive de l'introduction des frictions de Coulomb dans la théorie des bond graphs, est invité à la lecture de [66].

Remarque 11 L'équation (4.199) définit les efforts en fonction des flux, ceci revient à imposer à l'élément ce que l'on appelle une causalité préférentielle. Il va de soi que l'on peut aussi définir les résistances à partir d'équations donnant les flux dans chaque branches, en fonction des efforts "entrants". De même, on peut définir les élément purement dissipatifs, de manière implicite, sous la forme

$$F(e, f) \quad (4.202)$$

où l'application R est définie sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, à valeur dans \mathbb{R}^N . Il faut alors, bien sûr, invoquer le théorème des fonctions implicites pour donner un sens à cette définition. Par exemple, pour que le vecteur des efforts soit défini univoquement en fonction des flux par les équations (2.13), et ceci quelque soient les valeurs des flux entrant, il faudra donc imposer les conditions:

$$F \text{ continûment différentiable sur } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \quad (4.203)$$

$$\det \left(\frac{\partial F}{\partial e} \right) \neq 0, \forall (e, f) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

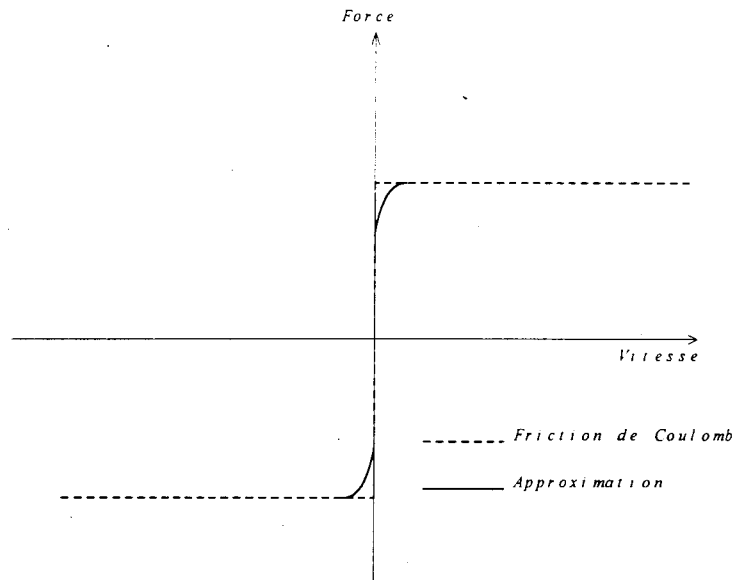


Figure 4.7: Exemple de processus résistif exclu par les conditions de continuité : les forces de friction de Coulomb.

Ce sont là des conditions très exigeantes, qui font de (4.202) un "cas particulier" de la formulation (4.199), puisque, ici, les fonctions R_i seront non seulement continues mais aussi différentiables. L'introduction de définitions implicites dans les éléments d'un bond graph amène à de grandes difficultés lorsqu'il s'agit d'établir l'algorithme donnant sa PS^3 . Le lecteur intéressé à ce type de problèmes est convié à la lecture de [3] et [4]. Signalons qu'une définition implicite des équations constitutives est aussi envisageable pour les éléments conservatifs, le même type de problèmes se posant pour ceux-ci.

La figure 4.8 illustre quelques exemples d'éléments résistifs à un accès, ou multiports, dans différent domaines énergétiques.

A.2.1.3 Les sources idéales

Les sources sont, le plus souvent, des transducteurs qui transforment l'énergie entre deux domaines différents (par exemple les piles usuelles transforment l'énergie chimique en énergie électrique). Un tel processus s'accompagne inmanquablement de dissipation et un modèle précis de source comportera, la

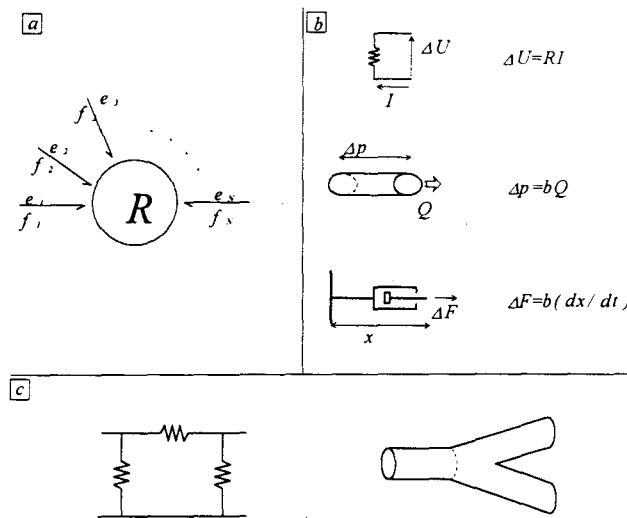


Figure 4.8: Exemples de résistances. (a) résistance à N accès, cas général (b) résistance à un accès : résistance électrique, capillaire de Poiseuille et "dash-pot" (c) résistance à deux accès : quadripôle résistif et embranchement idéal de capillaires de Poiseuille.

plupart du temps, un réseau complexe de résistances, de capacités parasites et de selfs. Néanmoins, quelque soit le détail avec lequel on modélise une source "réelle", on est invariablement amené à utiliser, au bout du processus, un élément que l'on a coutume d'appeler "la source idéale". Encore une fois, on peut voir celle-ci comme la frontière du modèle, c'est-à-dire voir la source comme un transducteur (donc, à deux accès), dont les variables effort et flux ne nous intéressent que dans l'un des deux domaines énergétiques et sont indépendantes de ce qui peut se passer dans l'autre domaine énergétique. On ne se préoccupe donc, ni de savoir comment le monde extérieur fournit l'énergie au système, ni du rendement ou des pertes associés à ce processus. Considérant le cas d'une source ayant un accès au système, celle-ci fournit à ce dernier une puissance :

$$P(t) = e(t) \cdot f(t) \tag{4.204}$$

Par hypothèse, le système n'a pas d'influence sur le processus qui fournit l'énergie. Les équations constitutives d'une source sont donc définies par la donnée de l'effort ou du flux en tout instant, c'est-à-dire par la donnée de :

$$\begin{aligned} e(t) &: = F_e(t) \text{ pour une source d'effort} \\ f(t) &: = F_f(t) \text{ pour une source de flux} \end{aligned} \tag{4.205}$$

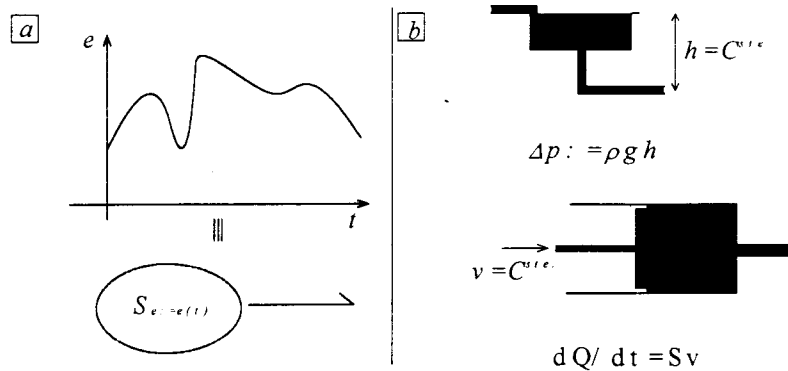


Figure 4.9: Sources idéales (a) source générale d'effort et représentation Bond Graph (b) exemples de sources d'effort et de flux constants en hydraulique.

où les fonctions du temps $F_e(t)$ et $F_f(t)$ peuvent être choisies arbitrairement (indépendamment de la valeur de l'autre variable). La figure 4.9 illustre les équations constitutives des sources.

A.1.2.4 Éléments conservatifs de puissances

Un élément à N -accès est dit *conservatif de puissance* s'il ne stocke, ni ne dissipe aucune énergie, à aucun moment. En d'autres termes, la somme des puissances totales entrante et sortante est nulle, à tout instant. Ceci s'exprime par une équation dite "de continuité" :

$$P_{totale}(t) := \sum_{i=1}^N e_i(t) \cdot f_i(t) = 0, \forall t \geq 0 \quad (4.206)$$

Pour faciliter l'expression des équations constitutives de tels éléments, j'introduis, ici, la notion de paire "hybride" de variables. Soit, $u, y \in \mathbb{R}^N$, ces deux vecteurs seront appelés paire hybrides de variables associée à un élément N -port ssi.

$$\forall i = 1..N : u_i = f_i \text{ ou } u_i = e_i \text{ et } \begin{cases} u_i = f_i \Rightarrow y_i = e_i \\ u_i = e_i \Rightarrow y_i = f_i \end{cases} \quad (4.207)$$

En conséquence, la puissance totale aux accès de l'élément vaut

$$P_{totale}(t) := \sum_{i=1}^N e_i(t) \cdot f_i(t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) \cdot y_i(t) = 0, \forall t \geq 0 \quad (4.208)$$

On peut donc, d'une manière générale, définir les équations constitutives d'un élément conservatif de puissance à N -port par une équation algébrique liant les deux vecteurs d'une paire hybride de variables associée à cet élément. Cette équation peut être formulée :

$$y = F(u) \text{ où } F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ t.q. } \sum_{i=1}^N u_i \cdot F_i(u) = 0, \forall u \quad (4.209)$$

Les jonctions "0" (effort commun) et "1" (flux commun) sont donc des exemples d'éléments conservatifs de puissance. Outre les jonctions, les éléments conservatifs de puissance les plus courants sont les transformateurs et les gyrateurs.

- *Transformateurs et transducteurs à deux accès* : Les équations constitutives de tels éléments sont :

$$\begin{cases} e_1 = m \cdot e_2 \\ f_2 = -m \cdot f_1 \end{cases} \quad (4.210)$$

Le coefficient m est le rapport de transformation ; rien ne l'oblige à être constant au cours du processus. S'il varie, on parle alors de transformateur ou de transducteur modulés. On parle de transformateur si les deux accès appartiennent à un même domaine énergétique "physique" (électricité, mécanique,...), dans le cas contraire, on parle de transducteur. La figure 4.10 montre la représentation bond graph des transformateurs et quelques exemples de leur réalisation physiques. La figure 4.11 illustre un exemple de transformateur modulé. On remarquera que la modulation se représente par une flèche "à deux tranchants" représentant une circulation d' "information", sans transfert d'énergie.

- *Gyrateurs et gyrotransducteurs à deux accès* : Les équations constitutives de ces éléments sont :

$$\begin{cases} e_1 = r \cdot f_2 \\ e_2 = -r \cdot f_1 \end{cases} \quad (4.211)$$

La figure 4.12 donne la représentation bond graph des gyrateurs et des exemples mécanique (couple gyrostatique), électrique et électromécanique (gyrotransducteur).

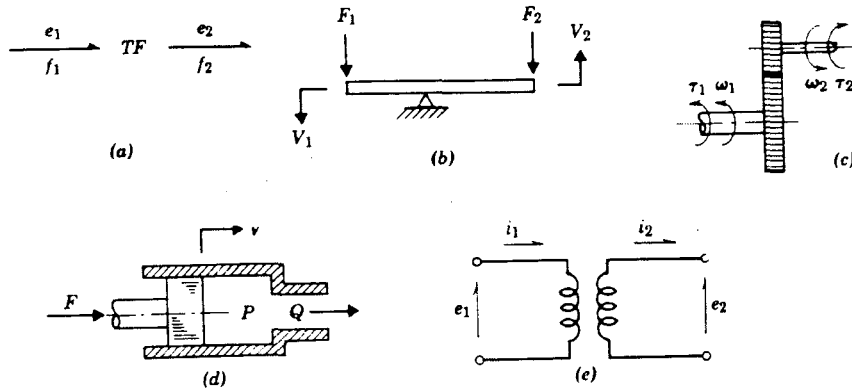


Figure 4.10: Transformateurs. (a) représentation Bond Graph (b) mécanique de translation (c) mécanique de rotation (d) hydraulique (e) électrique.

A.1.2.5 Eléments multiports "mixtes"

Rien n'empêche, a priori, de considérer le cas d'éléments à plusieurs accès ayant des équations constitutives "mixtes". On peut penser à introduire dans un circuit des éléments tels celui représenté à la figure 4.13 qui aurait comme équation constitutive, par exemple :

$$\begin{cases} e_1 = R(f_2, e_3) f_1 \\ e_2 = C(q_2) \\ f_3 = G(f_1, f_2) \cdot e_3 \\ q_2(0) = q_{20} \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.212)$$

avec $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues, ainsi que $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, et où le déplacement généralisé $q_2(t)$ est défini par $q_2(t) := q_2(0) + \int_0^t q_2(\tau) d\tau$. En effet, les hypothèses imposées dans (4.212) assurent le caractère conservatif de la porte "2", et le caractère purement dissipatif des portes "1" et "3". Il convient cependant de mettre en garde contre les "catastrophes" qui peuvent survenir lors de l'utilisation "aveugle" de tels éléments. Supposons donc, à cette fin, que la porte "2" soit une "capacité" de la forme :

$$e_2 = C^{-1}(e_1) q_2 \quad (4.213)$$

avec $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ continue et inversible. Sous des apparences bonhomme de capacité linéaire en q_2 , cet élément n'est plus conservatif et n'est plus, de fait,

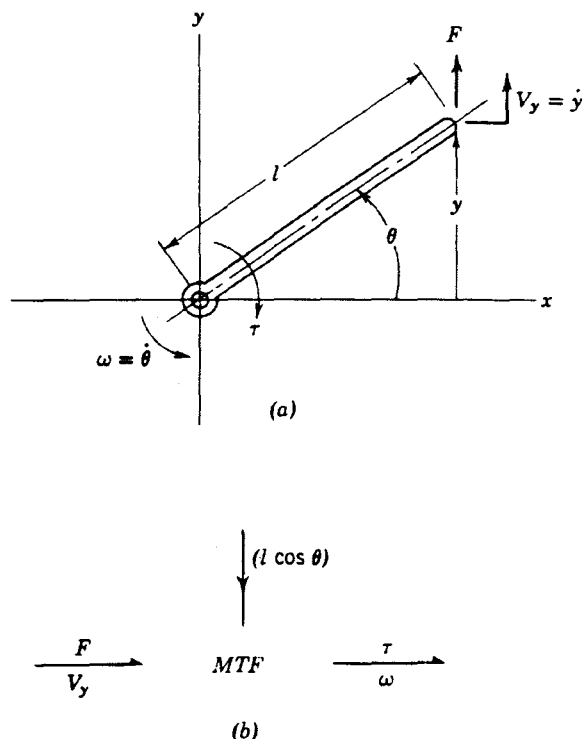


Figure 4.11: Transducteur modulé. (a) mécanique de rotation - mécanique de rotation (b) représentation Bond Graph.

une capacité. En effet, après un intervalle de temps $[0, t]$, l'énergie stockée par cet élément, peut se mesurer par :

$$E_{st.} = \frac{q_2^2(t)}{2C(e_1(t))} - \frac{q_2^2(0)}{2C(e_1(0))} \tag{4.214}$$

Par contre, l'énergie fournie au système par le port "2" est donnée par :

$$E_{ext.} = \int_0^t e_2(\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau = \int_0^t C^{-1}(e_1(\tau)) q_2(\tau) \frac{dq_2(\tau)}{d\tau} d\tau \neq E_{st.} \tag{4.215}$$

De l'énergie a été perdue ou créée par l'élément. Il faut choisir avec le plus grand soin les équations constitutives des éléments afin de ne pas introduire d'incohérences énergétiques dans les bond graphs. C'est aussi le sens de la remarque suivante.

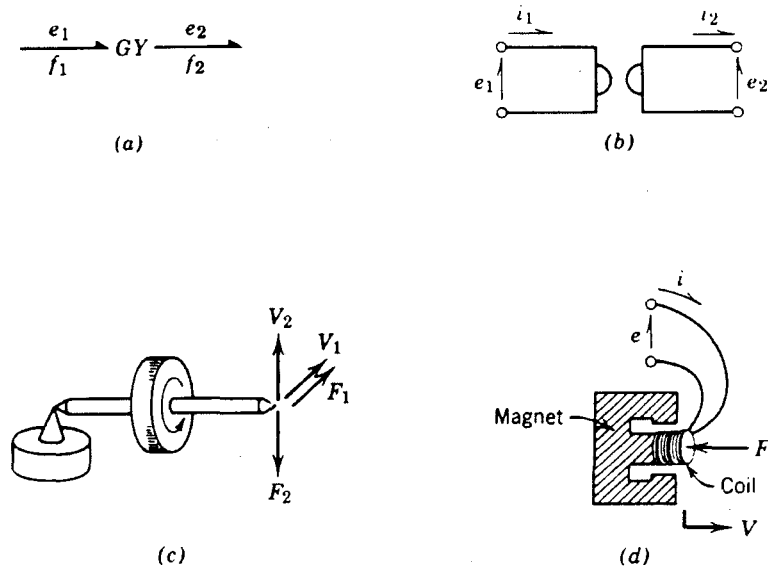


Figure 4.12: Gyrateurs (a) représentation Bond Graph (b) représentation électrique (c) domaine mécanique (d) gyro-transducteur électromécanique.

Remarque 12 *Les hypothèses que nous avons formulées, sur les fonctions qui définissent les éléments, sont fort générales et peu nombreuses. En fait, elles ne suffisent pas. Pour assurer aux éléments définis un comportement énergétique cohérent avec ce que l'on en attend a priori, il faudra se plonger dans l'étude des notions de passivité et de caractère conservatif, généralisées aux éléments non linéaires. Ces notions seront abordées au chapitre III, section 3.1.3, et sont traitées en détail dans [78].*

A.1.3 Méthodes et algorithmes associés à la représentation par bond graphs

En plus d'une vision synthétique et clarifiante des systèmes dynamiques "multi-énergétiques", les bond graphs offrent un autre avantage fondamental. Ils constituent, à la base, un formalisme suffisamment précis pour permettre l'introduction d'algorithmes de calcul. Ces algorithmes permettent de construire, à partir des diverses représentations circuit classiques, les graphes de liens correspondants, et, de là, de générer automatiquement les équations d'état du système considéré, sous forme d'assignations procédurales directement "exécutables" en machine. Ils sont de plus indépendants du domaine énergé-

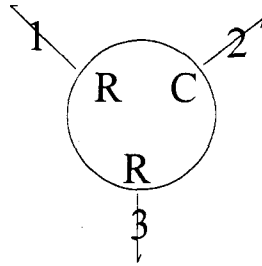


Figure 4.13: Élément multiport défini par les équations constitutives 4.212.

tique spécifique considéré. De plus, la traduction en bond graph, de la plupart des formalismes graphiques utilisés pour la représentation des systèmes à paramètres localisés en électricité, magnétisme, mécanique, hydraulique et thermique est elle aussi l'objet de méthodes algorithmiques. Ainsi, depuis le couplage de différents sous-modèles de natures énergétiques différentes, jusqu'à la formulation et l'intégration numérique du système d'équations différentielles ordinaires représentant la dynamique de l'ensemble du modèle couplé, aucune opération ne nécessite l'intervention du modélisateur. Le lecteur intéressé trouvera dans [67] et [72] les algorithmes de traduction en langage bond graph des principaux domaines énergétiques. Par ailleurs, d'autres méthodes algorithmiques de parcours de graphes permettent d'obtenir des informations supplémentaires sur le modèle global : sa commandabilité, son observabilité, le gain entre efforts et flux à différents points du modèle, par exemple, mais ne s'appliquent à l'heure actuelle, qu'aux modèles linéaires. Il s'agit notamment des résultats d'analyse structurelle déjà mentionnés au chapitre I, section 1.1, entre autres, [119], [120], [123] et [8].

Les idées essentielles des algorithmes de simulation basés sur les bond graphs sont brièvement présentées ci-après, en ce qui concerne la génération des équations d'état, dans le but d'en faire ressortir deux contraintes essentielles que nous aurons à imposer aux éléments nouveaux que nous voulons introduire dans ce travail : la structure causale de la représentation des éléments, et la nécessité de la réalisation de leurs équations constitutives sous forme de système d'état. On pourra trouver dans la section 5 de [19], ainsi que dans l'article [2] des discussions générales sur cet aspect algorithmique des Bond Graphs. Une version détaillée des algorithmes présentés, avec pseudo-codes, se trouve dans [67].

A.1.3.1 La notion de causalité

Afin de pouvoir, à partir d'un bond graph, construire une PS^3 , il est indispensable d'introduire une notion supplémentaire : la causalité. La causalité d'un élément consiste en la donnée de la liste des variables efforts ou flux qu'il impose, en chacune de ses sorties, aux systèmes qui lui sont connectés. Pour savoir si un élément impose à une de ses sorties soit l'effort, soit le flux, il suffit d'examiner ses équations constitutives. Par exemple, une source de tension (à un accès) a pour équation $e := e(t)$. Il est donc clair qu'elle impose l'effort au système qui lui est connecté.

Considérons maintenant une résistance non linéaire (un accès) d'équation constitutive $f := F(e)$ où la fonction F n'est pas globalement inversible. La PS^3 est une procédure qui calcule les dérivées des variables d'état à partir des entrées du système (les sources, par exemple) et des valeurs courantes de ces variables d'états. Cette procédure sera donc une liste d'assignations, qui évalueront, à partir des équations constitutives, les valeurs des courants et des flux dans chaque lien jusqu'à être en mesure d'évaluer les expressions donnant les dérivées cherchées. Donc, dans la PS^3 d'un système comprenant la résistance ci-dessus, pour autant qu'elle ne soit ni court-circuitée, ni connectée à un circuit ouvert, il apparaîtra obligatoirement une assignation donnant l'effort aux bornes de la résistance en fonction du flux qui y coule, ou l'inverse. Au vu du fait que la fonction F n'est pas inversible, cette assignation sera certainement $f := F(e)$. Cette résistance "impose" donc le flux au système qui lui est connecté (en terme de relation entrée-sortie, et non physiquement), elle en reçoit la valeur de l'effort qui lui est "imposé". On dira que cette résistance a une "*causalité préférentielle*", en l'occurrence, elle impose le flux.

Il existe une convention qui définit les causalités associées à chaque éléments des bond graphs. Cette convention est reprise à la table 4, ci-après. La barre verticale attachée à la bond ("*causal stroke*") représente le côté du lien qui impose l'effort, et se voit imposer le flux.

Les résistances sont souvent considérées sans causalité préférentielle, ce qui revient à supposer leur équation constitutive inversible. Dans ce cas, elles constituent les éléments déterminants pour résoudre les problèmes de causalité (voir infra). Il en est de même pour les transformateurs et les gyrateurs. Cependant, résistances, transformateurs et gyrateurs peuvent être caractérisés par des équations constitutives non inversibles, imposant une causalité préférentielle.

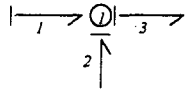
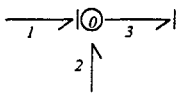
Elément	Forme causale	Equation constitutive
Source de flux	$S_f \quad \longrightarrow$	$f := f(t)$
Source d'effort	$S_e \quad \longrightarrow $	$e := e(t)$
Résistance	$ \longrightarrow R$	$e := \Phi_R(f)$
	$\longrightarrow R$	$f := \Phi_R^{-1}(e)$
Capacité	$ \longrightarrow C$	$e := \Phi_C \left(\int^t f(\tau) d\tau \right)$
	$\longrightarrow C$	$f := \frac{d}{dt} \Phi_C^{-1}(e)$
Inductance	$\longrightarrow I$	$f := \Phi_I \left(\int^t e(\tau) d\tau \right)$
	$ \longrightarrow I$	$e := \frac{d}{dt} \Phi_I^{-1}(f)$
Transformateur	$ \longrightarrow TF \quad \longrightarrow$	$\begin{cases} e_1 := m e_2 \\ f_2 := m f_1 \end{cases}$
	$\longrightarrow TF \quad \longrightarrow $	$\begin{cases} f_1 := f_2 / m \\ e_2 := e_1 / m \end{cases}$
Gyrateur	$ \longrightarrow GY \quad \longrightarrow $	$\begin{cases} e_1 := n f_2 \\ e_2 := n f_1 \end{cases}$
	$\longrightarrow GY \quad \longrightarrow$	$\begin{cases} f_1 := e_2 / n \\ f_2 := e_1 / n \end{cases}$
Jonction 1		$\begin{cases} f_1 = f_2 = f_3 \\ e_1 + e_2 - e_3 = 0 \end{cases}$
Jonction 0		$\begin{cases} e_1 = e_2 = e_3 \\ f_1 + f_2 - f_3 = 0 \end{cases}$

Table 2: représentation causale des éléments et jonctions.

En ce qui concerne les jonctions 0 et 1, l'affectation de la causalité est

univoque puisque, par définition, ces jonctions imposent respectivement un même effort, ou un même flux, à tous les éléments qui y sont connectés. Il en va de même pour les sources d'effort et de flux.

Les éléments dynamiques (capacités et inductances), peuvent être représentés en *causalité intégrale*, ou *dérivée*, c'est-à-dire avec une dépendance de la sortie en fonction, respectivement, de l'intégrale ou de la dérivée de l'entrée. D'une manière générale, on préférera la causalité intégrale afin d'éviter, lors des phases de mesure ou de simulation numérique, les "bruits" ou les erreurs de calcul générés par l'évaluation des dérivées.

Cependant, la causalité dérivée des éléments dynamiques est utilisée dans de nombreuses méthodes d'analyse des modèles, qui reposent sur le parcours des chemins "causaux" du Bond Graphs et le traitement en calcul symbolique des gains correspondants, et qui aboutissent, soit à des expressions symboliques (gains, représentation d'état) ou à des propriétés structurelles (observabilité, commandabilité, etc., voir, par exemple [120]).

Remarque 13 *Il est important de remarquer que l'attribution des causalités aux différents liens d'un bond graph peut s'avérer impossible. Par exemple, une capacité électrique peut tout aussi bien être connectée à une source de courant, qu'à une source de tension. Toutefois, la connexion à une source de tension se traduit, en bond graph, par un "conflit de causalité". En effet, en adoptant pour les capacités la causalité intégrale, cette connexion se représente*

$$S_e | \longrightarrow | C$$

En fait, le conflit vient de l'absence de dissipation dans le circuit considéré. En ajoutant une résistance, sans causalité préférentielle, on lève le conflit de causalité. Evidemment, en choisissant une résistance de très faible valeur, on se confronte à un problème numériquement mal posé (plus précisément, un problème "stiff" ou "raide") qui requerra une attention particulière. Mais l'absence de résistance est pire, outre qu'elle n'a pas de sens physique, elle amène à des impulsions infinies de courant au moment où on connecte la source et la capacité (ou à tout autre moment de déséquilibre). Très souvent, les conflits de causalité naissent ainsi d'une modélisation inadéquate d'un phénomène physique. Ils peuvent toujours être "résolus" en introduisant de légères dissipations dans les transferts d'énergie¹³. La question des conflits de causalité est traitée avec soin dans [3] et [16]. Les restrictions à apporter aux

¹³Les problèmes de conflits de causalité peuvent également être résolus par l'introduction d'éléments dynamiques. C'est le cas en mécanique, par exemple, où il est possible de relaxer des contraintes cinématiques (faisant apparaître des causalités dérivées) par l'introduction de petites raideurs négligées (voir [67]).

éléments des bond graphs de manière à ce qu'ils aient la même propriété de "modularité" que leur correspondants physiques sont étudiées dans [63]. Par modularité, l'auteur de ce papier entend désigner la propriété de ces éléments à pouvoir être connectés entre eux, sans restrictions dans les connexions permises.

L'affectation de la causalité à tous les éléments d'un bond graph est l'objet d'un algorithme très simples dont voici les étapes successives :

1. La causalité des sources d'effort et de flux est affectée
2. La causalité préférentielle intégrale est affectée aux éléments dynamiques
3. Les causalités déjà affectées sont reportées sur les jonctions et les résistances
4. Si des conflits de causalité surviennent, le modélisateur doit intervenir pour les résoudre, en incluant un phénomène dissipatif ou capacitif négligé jusque là.
5. Si des éléments sans causalité préférentielle demeurent sans affectation de causalité, le modélisateur doit en "forcer" une.

La résolution automatique des conflits de causalité est délicate, en ce sens qu'elle implique une modification du modèle de départ.

A.1.3.2 Algorithme de génération de la PS^3

Partant d'un bond graph, avec sa structure de causalité, il est désormais facile d'établir une liste d'instructions, exécutable, qui calcule les dérivées des variables d'état. Une fois ces dérivées calculées, on les intégrera par les méthodes numériques "appropriées". Voici, résumées sur l'exemple de la figure 4.14, les étapes essentielles de l'algorithme permettant d'établir le modèle d'état d'un bond graph. Il comporte un nombre fini d'étapes, et se termine certainement, si chaque bond possède une causalité univoquement définie.

- *Initialisation*: on définit pour chaque bond une variable effort et une variable flux. Pour chaque élément conservatif d'énergie, on définit autant de variables d'état qu'apparaissant dans l'équation constitutive de cet élément. Il va de soi que les équations constitutives de chaque élément (y compris les jonctions et les sources) doivent être disponibles

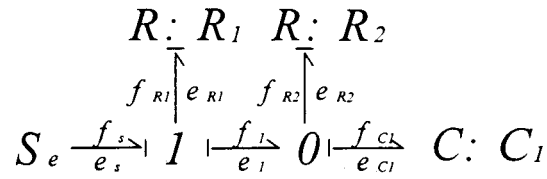


Figure 4.14: Bond Graph élémentaire correspondant à une équation d'état du premier ordre (un seul élément dynamique).

dans les données. Il faut aussi choisir les valeurs courantes des variables d'état (conditions initiales, lorsque l'on débute l'intégration des variables d'états, valeurs courantes, après cette initialisation).

- *Première étape*: on assigne aux dérivées des variables d'état les valeurs flux ou effort entrant dans la porte de l'élément leur correspondant. Ensuite, on recherche la valeur de ces variables en fonction des données (variables d'états et grandeurs efforts/flux imposées par les sources), par l'intermédiaire des équations constitutives des éléments du bond graph, et en suivant les relations de causalité. Avec l'exemple de la figure, on obtient ainsi les assignations 4.14:

$$q_C := f_C \quad (4.216)$$

$$f_C := f_1 - f_{R2} \quad (4.217)$$

$$f_1 := f_{R1} \quad (4.218)$$

$$f_{R2} := \Phi_{R2}(e_{R2}) \quad (4.219)$$

$$f_{R1} := \Phi_{R1}^{-1}(e_{R1}) \quad (4.220)$$

$$e_{R2} := e_C \quad (4.221)$$

$$e_{R1} := e_s(t) - e_1 \quad (4.222)$$

$$e_C := \Phi_C(q_C) \quad (4.223)$$

$$e_1 := e_C \quad (4.224)$$

où Φ_{R2} , Φ_{R1} et Φ_C sont les fonctions qui définissent les équations constitutives de la résistance $R2$, de la résistance $R1$ et de la capacité C .

- *Deuxième étape*: on appelle variables internes les efforts et les flux qui relient entre elles deux jonctions. On aura pris soin de les dénommer de manière à pouvoir les distinguer des autres variables. Elles n'apparaîtront pas dans les équations d'état finales du système considéré car il est toujours possible de les éliminer à partir des autres équations.

Dans l'exemple traité, les variables internes sont définies par $e_1 := e_C$ et $f_1 := f_{R1}$. Il suffit donc d'opérer à la substitution symbolique indiquée par ces assignations, dans les formules (4.216) à (4.224), puis de supprimer ces assignations qui évaluent les variables internes.

- *Troisième étape*: on affiche les équations restantes dans l'ordre inverse de leur apparition. Le résultat est une "procédure exécutable". Dans l'exemple, on obtient :

	t
Données	$e_s(t)$ $q_C(t)$
Instructions	$e_C := \Phi_C(q_C)$ $e_{R1} := e_s(t) - e_C$ $e_{R2} := e_C$ $f_{R1} := \Phi_{R1}(e_{R1})$ $f_{R2} := \Phi_{R2}(e_{R2})$ $f_C := f_{R1} - f_{R2}$ $\dot{q}_C := f_C$
Sortie	q_C

On procède alors à l'intégration pour obtenir les nouvelles valeurs des entrées en $(t + dt)$.

Remarque 14 *Lorsqu'il y a plusieurs variables d'état, on obtient plusieurs blocs d'instructions. On peut montrer qu'il existe toujours une permutation de ces blocs telle que leur concaténation soit un code exécutable. Evidemment, pour les systèmes d'état de très grandes dimensions, il est indispensable d'adopter des stratégies de "tri" de ces blocs, afin que leur réorganisation ne prenne qu'un temps raisonnable.*

Au vu de ce qui précède, on comprendra aisément que des éléments aux équations constitutives plus complexes, que de simples résistances, capacités et inductances, peuvent être utilisés sans poser de nouveaux problèmes, d'un point de vue purement algébrique, à la construction des équations d'état du

modèle. Les deux conditions fondamentales pour que les méthodes abordées ci-dessus demeurent applicables sont, d'une part, la possibilité d'affecter une causalité à chaque élément du modèle, d'autre part, que chacun de ces éléments possède une représentation d'état lui-même, fût-elle triviale (résistances, jonctions, transformateurs), équivalente à un intégrateur du premier ordre (capacité et inductances), ou beaucoup plus sophistiquée.

A.2 Réduction des opérateurs à mémoire évanescence

L'objet de cette annexe est de présenter brièvement une méthode de réduction qui s'applique aux opérateurs non linéaires à mémoire évanescence. Il s'agit, pour l'essentiel, d'une adaptation d'une méthode de réduction de systèmes non linéaires de grande dimension, publiée dans [41]. Pour adapter cette dernière méthode à notre problème, il faut constater qu'elle s'applique aussi aux systèmes dynamiques de dimension infinie qui possèdent une représentation par série infinie de Volterra-Fréchet, moyennant une reformulation adéquate. Dès lors, par le théorème 1.12 du chapitre I, elle s'applique à la réduction d'opérateurs non linéaires à mémoire évanescence.

L'idée maîtresse de la technique d'approximation proposée est de définir la série infinie de Volterra dans un espace de Hilbert approprié, puis, par une technique classique de projection orthogonale, de l'approcher dans un sous-espace finiment engendré. L'espace adéquat considéré est un espace de Fock pondéré. Une étude approfondie de ces espaces peut être trouvée dans [43]. Enfin, la mise en oeuvre d'une méthode d'approximation de fonctions par polynômes, que nous n'aborderons pas, est nécessaire pour réduire à son tour la projection orthogonale obtenue à un système dynamique linéaire à sortie polynomiale de dimension finie.

Le résultat de ces développements est une méthode qui permet de construire l'approximation dont le théorème 1.12 du chapitre I ne faisait que garantir l'existence.

A.2.1 Espaces de Fock et polynômes de Hilbert-Schmidt

Définition 5.37 Soit E un espace de Hilbert séparé réel. La forme $p_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ est un polynôme de Hilbert-Schmidt de degré n en les éléments de E si il existe une base orthonormale de E , notée $\{\varphi_i\}_{i \geq 0}$, telle que, pour tout $e \in E$:

$$p_n(e) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_n} \langle \varphi_{i_1}, e \rangle_E \cdots \langle \varphi_{i_n}, e \rangle_E$$

où les constantes réelles c_{i_1, \dots, i_n} sont symétriques par rapport aux permutations d'indices, et telles que

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} |c_{i_1, \dots, i_n}|^2 < \infty \quad (5.225)$$

L'espace des polynômes de Hilbert-Schmidt de degré n peut être muni du produit scalaire

$$\langle p_n, q_n \rangle_n := \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_n} d_{i_1, \dots, i_n} \quad (5.226)$$

où c_{i_1, \dots, i_n} et d_{i_1, \dots, i_n} sont, respectivement, les constantes associées au développement infini de p_n et de q_n dans la base $\{\varphi_i\}_{i \geq 0}$. Avec ce produit scalaire, et la norme associée

$$\|p_n\|_n := \sqrt{\langle p_n, p_n \rangle_n} \quad (5.227)$$

l'espace des polynômes de Hilbert-Schmidt devient un espace de Hilbert, car il est isomorphe à l'espace des suites réelles à n indices, de carré sommable. Il est parfois noté E^n (à ne pas confondre avec le produit cartésien de E).

Les espaces de Fock, et les espaces de Fock pondérés, sont des espaces particuliers de polynômes de Hilbert-Schmidt d'ordre "infini".

Définition 5.38 *L'espace de Fock associé à E est l'ensemble des formes*

$$F(E) := \left\{ p : E \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} p_n \in E^n, \forall n \geq 1 \text{ et} \\ e \mapsto p(e) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p_n(e) \quad \left| \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|p_n\|_n^2 < \infty \right. \right. \right\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle p, q \rangle_{F(E)} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle p, q \rangle_n$$

et de la norme associée $\|p\|_{F(E)} := \sqrt{\langle p, p \rangle_{F(E)}}$

Propriété 5.39 *L'application $K : E \times E \rightarrow \mathbb{R} : (e_1, e_2) \mapsto K(e_1, e_2) := e^{\langle e_1, e_2 \rangle_E}$ est un noyau reproduisant de l'espace pré-hilbertien $F(E)$, c'est-à-dire :*

$$\forall p \in F(E), \forall e \in E : p(e) = \langle K(e, \cdot), p \rangle_{\bar{F}(E)}$$

On appelle $K(e, \cdot)$ le représentant de l'évaluation en e des formes de $F(E)$.

Démonstration. Appliquer la démonstration de la propriété 5.43, ci-après, avec la suite constante $\{\rho_k = 1\}_{k \geq 0}$. ■

Corollaire 5.40 *Toutes les formes de $F(E)$ sont continues.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que le noyau reproduisant K est continu (par continuité du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ et de la fonction exponentielle). ■

Corollaire 5.41 *L'espace de Fock $F(E)$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. C'est une propriété commune aux espaces pré-hilbertien à noyau reproduisant (voir [43]). ■

Les espaces de Fock pondérés sont introduits pour assouplir la condition de convergence $\sum_{n=0}^{\infty} \|p_n\|_n^2 < \infty$. Ce sont des espaces de formes non linéaires auxquels appartiendront naturellement les séries de Volterra (évaluées en un instant t donné).

Définition 5.42 *Soit $\{\rho_n\}_{n \geq 0}$ une suite bornée de nombres réels positifs. L'espace de Fock associé à E et pondéré par la suite $\{\rho_n\}_{n \geq 0}$, que nous noterons $F_\rho(E)$, est défini par :*

$$F_\rho(E) := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p_n \mid \begin{array}{l} p_n \in E^n, \forall n \geq 1 \text{ et} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{n!} \|p_n\|_n^2 < \infty \end{array} \right\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle p, q \rangle_{F_\rho(E)} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{n!} \langle p, q \rangle_n$$

et de la norme associée $\|p\|_{F_\rho(E)} := \sqrt{\langle p, p \rangle_{F_\rho(E)}}$.

Propriété 5.43 *Soit $\{\rho_n\}_{n \geq 0}$ une suite bornée de nombres réels positifs et $q(\lambda)$ la fonction définie par*

$$q(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n! \rho_n}$$

Alors, K_ρ , la forme définie par :

$$K_\rho : E \times E \rightarrow \mathbb{R} : (e_1, e_2) \mapsto K_\rho(e_1, e_2) := q(\langle e_1, e_2 \rangle_E)$$

est un noyau reproduisant de $F_\rho(E)$. L'espace $F_\rho(E)$ est donc un espace de Hilbert.

Démonstration. Soit $p \in F_\rho(E)$. $e \in E$ et $\{\varphi_i\}_{i \geq 1}$ la base orthonormale de E telle que $p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p_n$ soit définie par

$$p_n(e) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_n} \langle \varphi_{i_1}, e \rangle_E \cdots \langle \varphi_{i_n}, e \rangle_E \quad (5.228)$$

En décomposant e dans la base orthonormale $\{\varphi_i\}_{i \geq 1}$, on obtient :

$$\langle e, \cdot \rangle_E^n = \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} \langle \varphi_{i_1}, e \rangle_E \cdots \langle \varphi_{i_n}, e \rangle_E \langle \varphi_{i_1}, \cdot \rangle_E \cdots \langle \varphi_{i_n}, \cdot \rangle_E \quad (5.229)$$

Le noyau K_ρ peut donc se décomposer en polynômes de Hilbert-Schmidt de la forme :

$$\begin{aligned} K_\rho(e, \cdot) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle e, \cdot \rangle_E^n}{n! \rho_n} \quad (5.230) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \rho_n} \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} \langle \varphi_{i_1}, e \rangle_E \cdots \langle \varphi_{i_n}, e \rangle_E \langle \varphi_{i_1}, \cdot \rangle_E \cdots \langle \varphi_{i_n}, \cdot \rangle_E \end{aligned}$$

On a donc :

$$\langle K_\rho(e, \cdot), p \rangle_{F_\rho(E)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_n} \langle \varphi_{i_1}, e \rangle_E \cdots \langle \varphi_{i_n}, e \rangle_E \quad (5.231)$$

qui, par définition des formes de $F_\rho(E)$ est bien la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p_n(e) = p(e)$. ■

A.2.2 Application aux séries de Volterra

Considérons l'opérateur causal entrée-sortie défini par la série de Volterra $y_t = V_t(u)$ où V_t est la famille de formes réelles, indexée par t , et définie sur $L_2([0, T])$ par :

$$\begin{aligned} V_t(u) &= h_0(t) \quad (5.232) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^t \cdots \int_0^t h_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) u(\tau_1) \cdots u(\tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n \\ \text{avec } \begin{cases} h_0(t) \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ h_n(t, \cdot) \in L_1([0, T]^n, \mathbb{R}), n \geq 1, t \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



telle qu'il existe une suite bornée de nombre réels positifs $\{\rho_n\}_{n \geq 0}$ qui vérifie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{n!} \|h_n(t, \cdot)\|_{L_1([0, T]^n)}^2 < \infty, \forall t \geq 0 \quad (5.233)$$

Si nous restreignons notre étude aux opérateurs causaux, la forme V_t peut se définir de manière équivalente :

$$\begin{aligned} V_t &: L_2([0, T]) \rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto V_t(u) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p_n(u) \end{aligned} \quad (5.234)$$

avec

$$p_n(u) := \int_{[0, T]^n} h_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) u(\tau_1) \dots u(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (5.235)$$

Propriété 5.44 Avec les hypothèses qui précèdent, les formes définies par (5.235) sont des polynômes de Hilbert-Schmidt de degré n en les éléments de $L_2([0, T])$.

Démonstration. Soit $\{\varphi_i\}_{i \geq 0}$ une base de $L_2([0, T])$ On a alors, en utilisant le théorème de Fubini dans $L_1([0, T]^n)$

$$p_n(u) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \langle \varphi_{i_1}, u \rangle_{L_2([0, T])} \int_{[0, T]^{n-1}} c_{i_1}(t, \tau_2, \dots, \tau_n) u(\tau_2) \dots u(\tau_n) d\tau_2 \dots d\tau_n \quad (5.236)$$

avec

$$c_{i_1}(t, \tau_2, \dots, \tau_n) := \int_{[0, T]} h_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) \varphi_{i_1}(\tau_1) d\tau_1 \quad (5.237)$$

En itérant ce procédé, on obtient finalement

$$p_n(u) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_n}(t) \langle \varphi_{i_1}, u \rangle_{L_2} \dots \langle \varphi_{i_n}, u \rangle_{L_2} \quad (5.238)$$

avec

$$c_{i_1, \dots, i_n}(t) := \int_{[0, T]^n} h_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) \varphi_{i_1}(\tau_1) \dots \varphi_{i_n}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (5.239)$$

■

Corollaire 5.45 *Les formes réelles V_t définies par (5.234) et (5.235), qui satisfont la condition de convergence (5.233), appartiennent à l'espace de Fock $F_\rho(L_2([0, T]))$, $\forall t \geq 0$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'on a bien, dans ce cas. :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{n!} \|p_n\|_n^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_n}^2(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} \left(\int_{[0, T]^n} [h_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) \cdot \right. \\ &\quad \left. \varphi_{i_1}(\tau_1) \dots \varphi_{i_n}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n] \right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{n!} \|h_n(t, \cdot)\|_{L_1([0, T]^n)}^2 < \infty \end{aligned} \quad (5.240)$$

car $\{\varphi_i\}_{i \geq 0}$ une base orthonormale de $L_2([0, T])$ ■

Au chapitre I, nous avons mentionné un résultat d'existence pour l'approximation d'opérateurs à mémoire évanescence (théorème 1.12). Ce résultat conduisait à l'existence, pour de tels opérateurs, d'une représentation ayant la forme :

$$y_t = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} g_n(\tau_1, \dots, \tau_n) u(t - \tau_1) \dots u(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (5.241)$$

avec $g_0 \in \mathbb{R}$ et $g_n \in L_1(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R})$, $\forall n \geq 1$, si les signaux d'entrées admissibles u sont bornés et continus.

Notons que si les signaux d'entrées u sont bornés et continus sur $[0, \infty)$, ils sont aussi dans $L_2([0, T])$, $\forall T > 0$. La méthode d'approximation que nous allons développer ci-après, et qui s'applique au cas $u \in L_2([0, T])$, n'introduit donc pas de contrainte supplémentaire sur les signaux d'entrées admissibles.

D'autre part, la forme (5.241) peut encore s'écrire

$$y_t = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t g_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) u(\tau_1) \dots u(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (5.242)$$

qui est la formulation stationnaire des formes (5.232) avec

$$h_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) = n! g_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \text{ pour } n \geq 1 \quad (5.243)$$

Le développement en polynômes de Hilbert-Schmidt des formes (5.232) s'applique donc, en particulier, au cas stationnaire (5.241).

La propriété de mémoire évanescence garantit la convergence de (5.241), et en particulier le caractère borné de la suite de normes $\|g_n\|_{L_1}^2$. Ainsi, en notant

$$M_g := \max_{n \geq 0} \|g_n\|_{L_1(\mathbb{R}_+^n)}^2 \quad (5.244)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{n!} \|h_n(t, \cdot)\|_{L_1([0, T]^n)}^2 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \|g_n\|_{L_1(\mathbb{R}_+^n)}^2 \\ &\leq M_g \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \end{aligned} \quad (5.245)$$

Il suffit donc de choisir une suite de poids $\{\rho_n\}_{n \geq 0}$ telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n$ converge, pour que la condition de convergence

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{n!} \|h_n(t, \cdot)\|_{L_1([0, T]^n)}^2 < \infty \quad (5.246)$$

soit satisfaite. En particulier, un choix

$$\begin{aligned} \rho_n &= \alpha \rho_{n-1} \\ \rho_0 &> 0 \end{aligned} \quad (5.247)$$

avec $0 < \alpha < 1$ satisfait cette exigence, et donne lieu à un noyau reproduisant défini à l'aide de la fonction

$$q(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n! \rho_n} = \frac{1}{\rho_0} e^{\frac{\lambda}{\alpha}} \quad (5.248)$$

En conclusion des différentes remarques qui précèdent, nous pouvons déduire que tout opérateur stationnaire à mémoire évanescence (qui satisfait les hypothèses du théorème 1.12) peut se représenter, sur un intervalle de temps $[0, T]$, par une famille de formes V_t qui appartiennent à l'espace de Fock $F_\rho(L_2([0, T]))$, $\forall t \geq 0$.

A.2.3 Approximation par projection orthogonale

Pour obtenir une approximation de la série de Volterra V_t , il est donc possible d'en chercher une projection orthogonale dans un sous-espace vectoriel de $F_\rho(L_2([0, T]))$. La construction du sous-espace d'approximation, dans la méthode proposée dans [41], repose sur la mesure d'un nombre fini de comportements entrée-sortie.

On suppose donc connu un ensemble d'entrées tests $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m$, et les sorties correspondantes $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m$, sur un intervalle de temps $[0, T]$. Les fonctions \tilde{u}_i et \tilde{y}_i sont également supposées nulles en dehors de $[0, T]$. Afin de pouvoir approcher la sortie y en tout temps $t \in [0, T]$, et d'obtenir une solution causale à ce problème d'approximation, il est nécessaire de définir l'opérateur

$$\begin{aligned} P_t : L_2([0, T]) &\rightarrow L_2([0, T]) \\ u &\mapsto P_t u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \\ \tau &\mapsto P_t u(\tau) = \begin{cases} u(\tau) & \text{si } 0 \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.249)$$

Par hypothèse, on a:

$$\begin{cases} V_t(P_t \tilde{u}_1) = \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ V_t(P_t \tilde{u}_m) = \tilde{y}_m \end{cases} \quad (5.250)$$

Comme l'application

$$\begin{aligned} K_\rho : L_2([0, T]) \times L_2([0, T]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (e_1, e_2) &\mapsto K_\rho(e_1, e_2) := q(\langle e_1, e_2 \rangle_{L_2}) \end{aligned} \quad (5.251)$$

avec

$$q(\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n! \rho_n} \quad (5.252)$$

est un noyau reproduisant de $F_\rho(E)$, on a donc:

$$\begin{cases} \langle K_\rho(P_t \tilde{u}_1, \cdot), V_t \rangle_{F_\rho(E)} = \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \langle K_\rho(P_t \tilde{u}_m, \cdot), V_t \rangle_{F_\rho(E)} = \tilde{y}_m \end{cases} \quad (5.253)$$

On choisit alors, comme espace d'approximation, l'espace engendré par les combinaisons linéaires finies, à coefficients réels, des formes $K_\rho(P_t \tilde{u}_i, \cdot)$. La meilleure approximation \widehat{V}_t de V_t , au sens de la norme $\|\cdot\|_{F_\rho(E)}$, dans le sous-espace $\text{span}(K_\rho(P_t \tilde{u}_1, \cdot), \dots, K_\rho(P_t \tilde{u}_m, \cdot))$, est alors la projection orthogonale dans ce sous-espace. Elle vaut:

$$\widehat{V}_t(\cdot) = \sum_{i=1}^m v_i(t) K_\rho(P_t \tilde{u}_i, \cdot) \quad (5.254)$$

avec $(v_1(t), \dots, v_m(t))^T = G^{-1}(t) (\tilde{y}_1(t), \dots, \tilde{y}_m(t))^T$, où $G(t)$ est la matrice de Gram définie par :

$$G_{i,j}(t) = \langle K_\rho(P_t \tilde{u}_i, \cdot), K_\rho(P_t \tilde{u}_j, \cdot) \rangle_{F_\rho(E)}; i, j = 1 \dots m \quad (5.255)$$

Remarque 15 Le calcul de la matrice de Gram est simplifié parce que l'application K_ρ est noyau reproduisant. En effet, on a :

$$\begin{aligned} G_{i,j}(t) &= \langle K_\rho(P_t \tilde{u}_i, \cdot), K_\rho(P_t \tilde{u}_j, \cdot) \rangle_{F_\rho(E)} & (5.256) \\ &= K_\rho(P_t \tilde{u}_i, P_t \tilde{u}_j) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \rho_n} \left(\int_0^T P_t \tilde{u}_i(\tau) P_t \tilde{u}_j(\tau) d\tau \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \rho_n} \left(\int_0^t \tilde{u}_i(\tau) \tilde{u}_j(\tau) d\tau \right)^n \\ &= q \left(\int_0^t \tilde{u}_i(\tau) \tilde{u}_j(\tau) d\tau \right) \end{aligned}$$

De plus, dans le cas particulier où la suite de pondération $\{\rho_n\}_{n \geq 0}$ est définie par la progression géométrique (5.247), et si les fonctions $\tilde{u}_i(t)$ sont suffisamment régulières, les coefficients de la matrice de Gram satisfont l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G_{i,j}(t) &= (\tilde{u}_i(t) \tilde{u}_j(t)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)! \rho_n} \left(\int_0^t \tilde{u}_i(\tau) \tilde{u}_j(\tau) d\tau \right)^{n-1} & (5.257) \\ &= (\tilde{u}_i(t) \tilde{u}_j(t)) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l! \rho_{l+1}} \left(\int_0^t \tilde{u}_i(\tau) \tilde{u}_j(\tau) d\tau \right)^l \\ &= \frac{1}{\alpha} (\tilde{u}_i(t) \tilde{u}_j(t)) G_{i,j}(t) \end{aligned}$$

Dès lors, la matrice $G^{-1}(t)$ s'obtient comme solution d'une équation différentielle matricielle non linéaire. En effet, en différentiant

$$G(t) G^{-1}(t) = I \quad (5.258)$$

on obtient

$$\frac{d}{dt} G^{-1}(t) = -G^{-1}(t) G(t) G^{-1}(t) \quad (5.259)$$

Cette dernière équation permet de substituer au calcul des inverses de $G(t)$ en chaque instant t , le calcul d'une seule inversion de $G(\bar{t})$, en \bar{t} fixé, et de la solution du systèmes d'équations différentielles matricielles non linéaires défini par (5.257) et (5.259).

La sélection de la suite $\{\rho_n\}_{n \geq 0}$ force une connaissance, a priori, de l'opérateur approché \widehat{V}_t . En effet, on a :

$$\begin{aligned}
 \widehat{y}(t) &= \widehat{V}_t(u) = \sum_{i=1}^m v_i(t) K_\rho(P_t \tilde{u}_i, u) & (5.260) \\
 &= \sum_{i=1}^m v_i(t) q \left(\int_0^t \tilde{u}_i(\tau) u(\tau) d\tau \right) \\
 &= \left[\frac{1}{\rho_0} \sum_{i=1}^m v_i(t) \right] + \int_0^t \left[\sum_{i=1}^m \frac{v_i(t) \tilde{u}_i(\tau_1)}{\rho_1} \right] u(\tau_1) d\tau_1 \\
 &\quad + \int_0^t \int_0^t \left[\sum_{i=1}^m \frac{v_i(t) \tilde{u}_i(\tau_1) \tilde{u}_i(\tau_2)}{2\rho_2} \right] u(\tau_1) u(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

L'approximation par projection orthogonale résulte donc en un développement en série infinie de Volterra, dont les noyaux successifs sont

$$h(t, \tau_1, \dots, \tau_k) = \begin{cases} \sum_{i=1}^m \frac{v_i(t) \tilde{u}_i(\tau_1) \dots \tilde{u}_i(\tau_k)}{k! \rho_k} & \text{si } 0 \leq \tau_1, \dots, \tau_k \leq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.261)$$

et les coefficients ρ_k sont une caractérisation de l'importance relative des termes d'ordre k de ce développement en série.

Telle quelle, l'approximation \widehat{V}_t correspond à l'opérateur entrée-sortie du système dynamique

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \tilde{u}_i(\tau) u(\tau) \\ x_i(0) = 0 \\ \widehat{y}(t) = \sum_{i=1}^m v_i(t) q(x_i(t)) \end{cases}, i = 1, \dots, m \quad (5.262)$$

Il ne s'agit effectivement d'un système linéaire à sortie polynomiale que si le développement de $q(x)$ est limité à un ordre fini. Pour obtenir une telle réalisation, il convient donc d'appliquer une méthode d'approximation polynomiale à la fonction $q(x)$. L'erreur d'approximation est alors liée, d'une part à l'erreur de projection orthogonale définie par

$$e_\perp^2(t) = \left\| V_t - \widehat{V}_t \right\|_{F_\rho(E)}^2 = \|V_t\|_{F_\rho(E)}^2 - (\tilde{y}^T G^{-1} \tilde{y})(t) \quad (5.263)$$

et d'autre part à l'erreur d'approximation polynomiale choisie. Ainsi, pour obtenir un résultat d'approximation uniforme sur $[0, T]$, il sera nécessaire

de choisir une méthode d'approximation polynomiale de $q(x)$ uniforme sur l'intervalle

$$x \in \left[\min_u \int_0^T \tilde{u}_i(\tau) u(\tau) d\tau, \max_u \int_0^T \tilde{u}_i(\tau) u(\tau) d\tau \right] \quad (5.264)$$

Or, le résultat d'existence du théorème (1.12) restreint les signaux d'entrées u à l'ensemble

$$\left\{ u \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \left| \begin{array}{l} \|u\|_\infty \leq M_1 \\ \text{et } \|S_\tau u - u\|_\infty \leq M_2 \tau, \forall \tau \geq 0 \end{array} \right. \right\} \quad (5.265)$$

Cette restriction définit l'intervalle (5.264) comme un intervalle compact, pour peu que les signaux tests d'entrée \tilde{u}_i soient eux aussi bornés et continus. Le problème d'approximation polynomiale uniforme de $q(x)$ ne pose donc aucun problème spécifique.

Dans la perspective de l'introduction d'éléments fonctionnels au sein des bond graphs, le problème qui se pose est la réduction des opérateurs à des systèmes dynamiques de dimension finie. La phase d'approximation polynomiale discutée ci-dessus n'est donc pas nécessaire, puisque le système dynamique (5.262) a la forme voulue.

A.3 Modélisation d'interfaces fractales

L'objet de cette annexe est d'illustrer, par l'étude d'un exemple, comment à partir des propriétés géométriques fractales d'une interface, il est possible de dériver son impédance sous la forme d'une fonction de transfert irrationnelle. L'exemple considéré sera celui de l'interface eau-digue poreuse, étudiée dans [101] et représentée à la figure 6.15 (a). Le milieu poreux (digue) y est représenté comme une multitude d'alvéoles de différentes tailles, reliées par des canaux de longueurs diverses, à une même pression extérieure.

Considérons le cas simple où les canaux sont modélisés par des capillaires de Poiseuille, de résistance :

$$R_i := \frac{8\mu l_i}{\pi r^4} \quad (6.266)$$

avec μ la viscosité dynamique du fluide, r le rayon des capillaires, et l_i leur longueur (variable), tandis que les alvéoles sont considérées comme des réservoirs idéaux soumis à une même pression atmosphérique p_{atm} , de hauteur h commune, mais de section S_i variable, comme représenté à la figure 6.15 (b). Ces alvéoles sont donc modélisées par des capacités linéaires de valeur :

$$C_i := \frac{V_i}{p_i - p_{atm}} = \frac{S_i h}{\rho g h} = \frac{S_i}{\rho g} \quad (6.267)$$

où ρ désigne la masse volumique du fluide, g l'accélération gravitationnelle, V_i le volume de fluide dans l'alvéole i , et $p_i - p_{atm}$ la différence de pression générée par la hauteur de liquide dans l'alvéole. Chaque capillaire se voit traversé par le même débit volumique que l'alvéole à laquelle il est connecté (jonction 1), et, bien sûr, le débit volumique global dans la digue est la somme des débits volumiques dans chaque capillaire (jonction 0). La représentation bond graph équivalente de la digue est donnée à la figure 6.16.

Considérant que la distribution des alvéoles au sein de la paroi poreuse correspond à une géométrie fractale, ce qui, en première approximation, semble un modèle raisonnable de la géométrie réelle de l'interface eau-digue, et eu égard à la dépendance des coefficients R et C par rapport à cette géométrie, il faut conclure à la récursivité des valeurs numériques de ces coefficients (Voir [90] et [93] pour des développements détaillés à ce sujet). Ceci conduit à définir les longueurs des capillaires, et les surfaces à l'air libre des

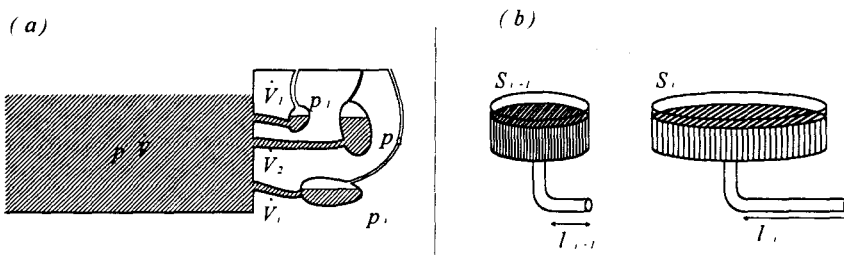


Figure 6.15: (a) Interface eau-digue poreuse représentée comme une distribution de cavités soumises à une pression (extérieure) commune. (b) Capacités linéaires idéales et capillaires de Poiseuille qui modélisent les cavités poreuses.

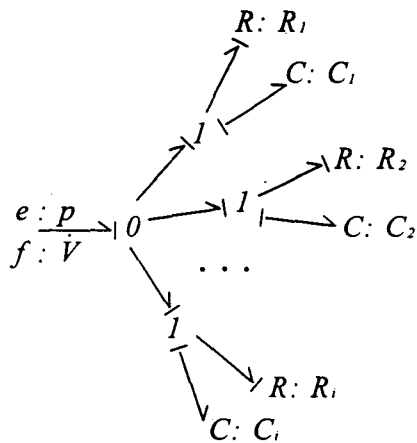


Figure 6.16: Représentation bond graph du modèle à paramètres localisés de la digue poreuse.

alvéoles par les deux itérations¹⁴ :

$$\begin{aligned} l_{i+1} &= \frac{1}{\alpha} l_i \\ S_{i+1} &= \frac{1}{\beta} S_i \end{aligned} \quad (6.268)$$

avec $\alpha, \beta > 1$ et l_0, S_0 les plus grandes longueur et surface de la distribution. Si les caractéristiques de la géométrie fractale de l'interface, ainsi que les propriétés mécaniques du fluide sont supposées constantes. le modèle pression-débit construit sera stationnaire et linéaire. Considérant que l'influence de la pression passée sur la digue (variable entrée) va en s'amenuisant avec le temps, on impose au modèle pression-débit de jouir de la propriété de mémoire évanescence. Dans ce cas, et si les signaux pression et débit sont supposés bornés et continus, en vertu du théorème 1.6, l'opérateur G qui lie le débit (sortie $y(t) = \dot{V}(t)$) à la pression (entrée $u(t) = p(t)$) possède une représentation sous forme de produit de convolution :

$$y(t) = Gu(t) = \int_0^{\infty} u(t - \tau) dg(\tau) \quad (6.269)$$

où $g(\tau)$ est une fonction à variation bornée sur \mathbb{R}^+ .

Dans la suite, nous utiliserons les transformées de Laplace des signaux entrée et sortie, ainsi que la notion de fonction de transfert liant ces signaux. Nous leur accorderons la signification précisée dans les définitions qui suivent (voir [135]).

Définition 6.46 *La limite*

$$G = \mathcal{L}(dg)(s) := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{+R} e^{-st} dg(t) \quad (6.270)$$

où $g(t)$ est une fonction à variation bornée sur $[0, R]$, $\forall R > 0$, si elle existe pour $s \in \mathbb{C}$ donné, est appelée transformée de Laplace de la mesure dg évaluée en s .

Cette définition se réduit à la définition usuelle (pour les automaticiens), dans le cas où la fonction $g(t)$ est absolument continue sur \mathbb{R}^+ .

¹⁴Une distribution continue de longueurs et de surfaces peut sembler une description plus naturelle. Cette distribution continue peut être approchée en choisissant des coefficients α et β proches de 1. Cependant, les calculs qui donnent directement (sans passer par cette approximation) l'impédance d'une distribution continue de longueurs et de capacités sont plus simples et sont exposés à la section 2.4.1.

Définition 6.47 Une fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ est dite absolument continue sur \mathbb{R}^+ si il existe une fonction $h \in L_1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^N)$ telle que

$$g(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$$

Dans ce cas, elle est dérivable presque partout sur \mathbb{R}^+ , et

$$\frac{dg}{dt} = h \quad (6.271)$$

presque partout. L'expression de la transformée de Laplace de $dg(t)$ devient

$$\widehat{h}(s) := \mathcal{L}(dg)(s) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{+R} e^{-st} h(t) dt \quad (6.272)$$

et on appelle \widehat{h} la transformée de Laplace de h . En particulier, la fonction $h(t)$ est alors aussi dite transformable au sens de la définition suivante (voir [37]).

Définition 6.48 Une fonction $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$ est transformable au sens de Laplace si il existe un réel β tel que $e^{-\beta t} h(t) \in L_1[\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^N]$.

Sa transformée de Laplace est alors trivialement bien définie (la limite 6.270 existe) au moins pour $s \in \overline{\mathbb{C}}_\beta^+ := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) \geq \beta\}$. En conséquence, on peut introduire sans soucis la notion de fonction de transfert associée à l'opérateur G défini par (6.269).

Définition 6.49 Si pour un signal $u(t)$ causal ($u(t) = 0, \forall t < 0$), il existe un réel γ tel que $\widehat{y}(s) = G(s)\widehat{u}(s)$, pour tout s tel que $\operatorname{Re}(s) > \gamma$, où $\widehat{y}(s)$ et $\widehat{u}(s)$ sont les transformées de Laplace respectives de $y(t)$ et de $u(t)$ dans (6.269), et si $G(s)$ est une fonction de s à valeur dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ définie dans \mathbb{C}_γ^+ , alors $G(s)$ est appelée fonction de transfert associée à la relation (6.269).

Il est évident que si nous restreignons l'étude de (6.269) aux signaux continus et bornés, la fonction de transfert existe au moins pour $\operatorname{Re}(s) > 0$. Il ne nous reste plus qu'à la calculer, par exemple comme limite de l'impédance du bond graph représenté figure 6.16. Pour N échelles de tailles des capacités et des capillaires, cette impédance s'écrit :

$$G_N(s) = \sum_{i=1}^N \frac{C_i s}{1 + R_i C_i s} = C_0 s \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\alpha^i}{\alpha^i \beta^i + R_0 C_0 s} \quad (6.273)$$

Les calculs complets donnant la valeur limite

$$G(s) := \lim_{N \rightarrow \infty} (G_N(s))$$

sont assez laborieux, et peuvent être trouvés dans [101], chapitre V et VI. Ils aboutissent à la valeur

$$G(s) = (\tau s)^p \quad (6.274)$$

avec

$$p = \frac{1}{1 + \frac{\log \beta}{\log \alpha}} \quad (6.275)$$

$$\tau = R_0 C_0$$

L'exposant de la variable opérationnelle s étant non entier, on parle pour l'opérateur défini par le transfert (6.274), dans le domaine de Laplace, de dérivateur d'ordre non entier. Les développements qui précèdent nous ont montré de manière succincte que la récursivité de la géométrie du milieu (ici le caractère poreux de la digue), c'est-à-dire le caractère fractal de ce milieu, conduit à l'introduction de tels opérateurs. Comme dans le cas de la différentiation d'ordre entier, et pour les mêmes raisons de stabilité numérique, on préférera généralement la forme intégrale :

$$\widehat{p}(s) = \frac{1}{(\tau s)^p} \widehat{V}(s) \quad (6.276)$$

où $\widehat{p}(s)$ et $\widehat{V}(s)$ désignent les transformées de Laplace de $p(t)$ et $V(t)$, plutôt que la version dérivée. Un système caractérisé par une équation constitutive du type (6.276) reçoit généralement le nom de procès de type $1/f$ (f désigne alors la fréquence) ou de système fractal. Le diagramme de Bode (log-log) correspondant se caractérise par une dépendance linéaire du module (dB)

$$\log(|G(j\omega)|) = -p(\log(\omega) + \log(\tau)) \quad (6.277)$$

de pente non entière p , et par un argument de valeur

$$\arg(G(j\omega)) = -\frac{\pi p}{2} \quad (6.278)$$

constant. On comprendra aisément que ce type de modèle, du fait de son caractère générique (les équations (6.268) traduisent simplement le caractère fractal du milieu géométrique) qui ont servi à le définir, se rencontre dans des applications très variées : études d'interfaces poreuses solide-liquide (voir

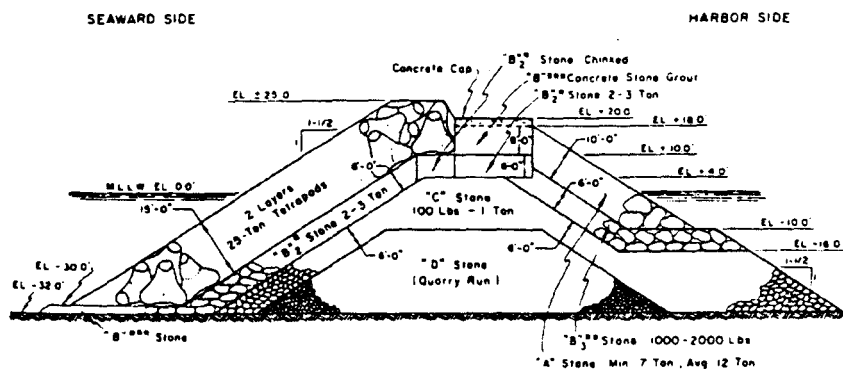


Figure 6.17: Schéma de construction d'une digue modèle proposé aux ingénieurs de l'armée américaine. On notera la distribution de taille des matériaux constitutifs, depuis les Gravillons, jusqu'aux tetrapodes de béton armé de plusieurs tonnes. Figure extraite de [114].

[87] et [90] pour un traitement plus détaillé que celui ci-dessus), études des propriétés résistives à la surface de matériaux rugueux (voir [122] et [101]), études d'impédance hydraulique de systèmes veineux pulmonaire (voir [71]), et du comportement correspondant du muscle cardiaque ([49]), ou même étude des fonctions de transfert associées à certaines équations aux dérivées partielles, et qui mettent en évidence une dépendance fractionnaire par rapport à la variable s (voir [101] et chapitre III). A titre d'illustration, la figure 6.17 reproduit une page d'un manuel à l'usage des ingénieurs de l'armée américaine (voir [128]), indiquant la meilleure façon de construire une digue maritime qui absorbe au mieux les vagues du grand large. On constatera, à l'examen minutieux de la structure de cette digue, que les développements qui précèdent ne sont pas que le fruit d'une pure affabulation théorique.

Bien que les caractéristiques de l'impédance (6.276) soient observées pour ces exemples, sur une large bande de fréquence, le comportement à basse fréquence n'est en général pas satisfaisant. En effet, que ce soit sur l'exemple de la digue de la figure 6.17, dans le cas de l'impédance d'un milieu conducteur rugueux, ou d'un circuit sanguin arborescent, le comportement pour de basses fréquences conduit en général à des impédances de magnitude finie. C'est pourquoi on préfère en général des modèles à intégration d'ordre non entier dit implicite. Dans le cas de la digue ci-dessus, cela revient à définir le transfert par :

$$\hat{p}(s) = \frac{\gamma}{(1 + \tau s)^p} \hat{V}(s) \tag{6.279}$$

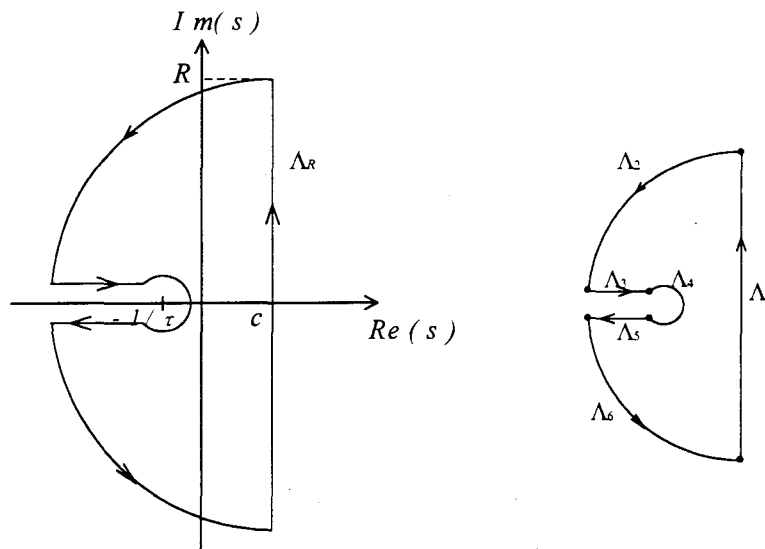


Figure 6.18: Contour Λ_R ne contenant pas le pôle $s = -1/\tau$ de la fonction $\gamma e^{+st} (1 + \tau s)^{-p}$.

avec $\gamma > 0$. De tels modèles sont aussi appelé modèles à pôles d'ordre fractionnaire (fractional power pole model); $\tau > 0$ est baptisée constante de temps de relaxation, et l'exposant non entier p est compris entre 0 et 1 strictement (voir équation (6.275)).

Nous pouvons calculer la réponse impulsionnelle correspondant au transfert $G(s) = \gamma (1 + \tau s)^{-p}$ et exprimer l'équation constitutive (6.279) au moyen d'une convolution dans le domaine temporel. Cette réponse impulsionnelle est donnée, en vertu de la formule d'inversion de la transformée de Laplace (voir par exemple [135], chapitre V.7), par

$$h(t) := \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} e^{+st} \frac{\gamma}{(1 + \tau s)^p} ds \quad (6.280)$$

pour $c > \frac{-1}{\tau}$. Pour évaluer cette intégrale, il suffit d'appliquer le théorème des résidus (voir par exemple [35], chapitre VI) à l'intégrale sur le contour Λ_R représenté à la figure 6.18, pour $R \rightarrow \infty$.

Comme ce contour ne contient aucun pôle, cette intégrale vaut

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_R} e^{+st} \frac{\gamma}{(1 + \tau s)^p} ds = 0 \quad (6.281)$$

En conséquence, la réponse impulsionnelle cherchée vaut

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi j} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_1} e^{+st} \frac{\gamma}{(1 + \tau s)^p} ds \\ &= \frac{-1}{2\pi j} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4 \cup \Lambda_5 \cup \Lambda_6} e^{+st} \frac{\gamma}{(1 + \tau s)^p} ds \end{aligned} \quad (6.282)$$

Les calculs complets de cette intégrale, fort laborieux, sont reproduits intégralement dans [101], chapitre IV.7. Leur résultat donne :

$$h(t) = \frac{1}{\tau \Gamma(p)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^p e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6.283)$$

où $\Gamma(p)$ désigne l'extension de la fonction factorielle aux arguments non entiers (fonction gamma d'Euler), à savoir :

$$\Gamma(p) := \int_0^{\infty} \xi^{-p-1} e^{-\xi} d\xi \quad (6.284)$$

