

Université des Sciences et Technologies de Lille

2

**THESE DE DOCTORAT**

Préparée au

**Laboratoire de Mécanique de Lille (U. R. A. 1441)**

Spécialité

**GENIE CIVIL**

Titre

**ETUDE DU COMPORTEMENT EN FLEXION DE POUTRES EN BETON  
ARME CORRODE: MODELISATION MOMENT-COURBURE  
MODIFIEE PRENANT EN COMPTE LE RAIDISSEMENT EN  
TRACTION DU BETON FISSURE**

Par

**Freydoon REZAIE**

**Soutenue le 29 Juin 1999 devant la commission d'examen composé de**

**Messieurs**

**SHAHROUR Isam  
PETIT Christophe  
FRANÇOIS Raoul  
GERARD Bruno  
BUYLE-BODIN François**

**USTL  
Université de Limoges  
INSA de Toulouse  
EDF  
USTL**

**Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examinateur  
Directeur de thèse**



D 030 179246 1



*A ma mère et mes frères  
en témoignage de tout mon amour*

*et*

*ma famille  
Mahin, Sarah et Sina  
pour tout le bonheur et le réconfort qu'ils m'apportent*

*A la mémoire de  
mon père*

## **REMERCIEMENTS**

Le travail qui fait l'objet du présent mémoire a été effectué au sein du Laboratoire de Mécanique de Lille. Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont apporté une aide tant scientifique que morale pour un bon aboutissement de cette étude.

Je remercie tout d'abord Monsieur François BUYLE-BODIN, professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, pour m'avoir accueilli et permis de réaliser ce travail sous sa direction. L'aide qu'il m'a apportée, les conseils qu'il m'a formulés ont été précieux. Je le remercie vivement et l'assure de ma reconnaissance.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Isam SHAHROUR, responsable de la formation doctorale et directeur du département Sols-Structures à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, pour m'avoir fait l'honneur d'examiner mon travail et d'accepter la présidence du jury.

Mes sincères remerciements vont à Monsieur Christophe PETIT, professeur à l'Université de Limoges, et Monsieur Raoul FRANÇOIS, professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail.

Je souhaite exprimer mes remerciements respectueux à Monsieur Bruno GERARD, ingénieur à la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité De France, pour avoir accepté d'être examinateur de mon travail.

Ma gratitude va également à tous les enseignants et au personnel technique et administratif du Département Génie Civil de l'IUT de Béthune, de l'INSA de Toulouse et de l'Ecole Centrale de Lille pour leur aide et leur soutien.

J'adresse par ailleurs mes remerciements à Monsieur Frédéric SKOCZYLAS, professeur à l'Ecole Centrale de Lille, pour m'avoir accueilli et Messieurs Alain LEBLANC, Thierry CHARTIER, Eric WIRQUIN, Morteza MADHKHAN pour le temps qu'ils m'ont accordé.

Enfin, j'adresse un message particulier à ma mère et mon épouse, sans l'aide desquelles ma présence ici n'aurait pu avoir lieu. Je les remercie pour tout.

<b>RESUME.....</b>	<b>1</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>2</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE.....</b>	<b>3</b>

## **CHAPITRE I**

### **ANALYSE PAR LA METHODE MOMENT-COURBURE DU COMPORTEMENT EN FLEXION DE POUTRES EN BETON ARME**

<b>I.1. INTRODUCTION.....</b>	<b>7</b>
<b>I.2. LA COURBURE.....</b>	<b>7</b>
<b>I.2.1. Définition de la courbure.....</b>	<b>7</b>
<b>I.2.2. Détermination expérimentale de la courbure .....</b>	<b>8</b>
<b>I.2.3. Evaluation des courbures à partir des flèches.....</b>	<b>9</b>
<b><u>I.2.3.1. A PARTIR DES FLECHES AU MILIEU DE LA POUTRE.....</u></b>	<b>9</b>
<b><u>I.2.3.2. A PARTIR DES FLECHES MESUREES LE LONG DE LA POUTRE.....</u></b>	<b>9</b>
<b>I.2.4. Courbure dans l'état fissuré.....</b>	<b>9</b>
<b>I.2.5. Recherche de la courbure de flexion.....</b>	<b>10</b>
<b><u>I.2.5.1. LES EQUATIONS MECANIQUES: EXPRESSION             DE L'EFFORT NORMAL.....</u></b>	<b>10</b>
<b><u>I.2.5.2. LES EQUATIONS MECANIQUES: EXPRESSION             DU MOMENT FLECHISSANT.....</u></b>	<b>11</b>
<b><u>I.2.5.3. EQUATIONS D'EQUILIBRE.....</u></b>	<b>11</b>
<b>I.3. PROPOSITION D'UNE METHODE RAPIDE DE CALCUL DE LA HAUTEUR COMPRIMEE.....</b>	<b>12</b>
<b>I.3.1. Méthode 1 (procédure itérative classique).....</b>	<b>14</b>
<b>I.3.2. Méthode 2 (méthode des cas possibles).....</b>	<b>14</b>

---

<b>I.4. RESOLUTION DU SYSTEME NON-LINEAIRE.....</b>	<b>16</b>
<b>I.4.1. Recherche indirecte: méthode pas à pas.....</b>	<b>17</b>
<b>I.4.2. Recherche directe.....</b>	<b>19</b>
<b>I.4.3. Exemples numériques et étude paramétrique.....</b>	<b>21</b>
<b>I.4.3.1. <u>COURBE CLASSIQUE MOMENT-COURBURE</u>.....</b>	<b>24</b>
<b>I.4.3.2. <u>ETUDE PARAMETRIQUE</u>.....</b>	<b>25</b>
<b>I.5. CONCLUSION.....</b>	<b>30</b>

## **CHAPITRE II**

### **SIMULATION DU RAIDISSEMENT EN TRACTION PAR UN TIRANT MODELES MOMENT-COURBURE MODIFIES**

<b>II.1. INTRODUCTION.....</b>	<b>32</b>
<b>II.2. RAIDISSEMENT ET FISSURATION.....</b>	<b>33</b>
<b>II.2.1. Rigidité d'une zone de béton armé tendue.....</b>	<b>33</b>
<b>II.2.2. Fissuration d'une zone tendue.....</b>	<b>35</b>
<b>II.2.2.1. <u>CONTRAINTES ET MICROFISSURATION INITIALE</u>.....</b>	<b>35</b>
<b>II.2.2.2. <u>EFFETS THERMIQUES ET HYGROMETRIQUES</u>.....</b>	<b>36</b>
<b>II.2.2.3. <u>EFFETS DES SOLLICITATIONS MECANIQUES</u>.....</b>	<b>37</b>
<b>II.2.3. Développement des fissures dans un tirant.....</b>	<b>37</b>
<b>II.2.4. Courbe caractéristique d'un tirant.....</b>	<b>39</b>
<b>II.2.5. Résistance effective en traction du béton.....</b>	<b>41</b>
<b>II.3. MODELISATION DU RAIDISSEMENT EN TRACTION PAR UN TIRANT.....</b>	<b>43</b>
<b>II.3.1. Introduction.....</b>	<b>43</b>
<b>II.3.2. Lois du tirant simplifiées proposées dans la littérature.....</b>	<b>44</b>

<b>II.4. PROPOSITION D'UNE ANALYSE DE L'ASSEMBLAGE POUTRE-TIRANT: SIMULATION DE LA CONTRIBUTION DU BETON TENDU PAR LE TIRANT</b>	<b>49</b>
<b>II.4.1. Etapes de l'analyse</b> .....	49
<b>II.4.2. Questions importantes: quelles sont les valeurs de         la hauteur et de la déformation du tirant?</b> .....	50
<b>II.4.2.1. CHOIX DE LA HAUTEUR DU TIRANT</b> .....	50
<b>II.4.2.2. CHOIX DE LA DEFORMATION DU TIRANT</b> .....	51
<b>II.4.3. Méthode de résolution</b> .....	52
<b>II.4.4. Exemples et étude paramétrique</b> .....	55
<b>II.4.4.1. EFFET DES DIFFERENTES VALEURS DE LA HAUTEUR DU TIRANT</b>	55
<b>II.4.4.2. ETUDE PARAMETRIQUE</b> .....	57
<b>II.5. TIRANT EXCENTRE; PROPOSITION DE LA LOI DE COMPORTEMENT....</b>	<b>61</b>
<b>II.5.1. Principe</b> .....	61
<b>II.5.2. Comportement élastique</b> .....	62
<b>II.5.3. Relation entre force et fissuration</b> .....	63
<b>II.5.4. Comportement post fissuration</b> .....	64
<b>II.5.5. Critère et modes de rupture</b> .....	67
<b>II.5.6. Proposition pour le choix de la hauteur du tirant</b> .....	68
<b>II.5.7. Exemple et comparaison</b> .....	70
<b>II.6. PROPOSITION DU COMPORTEMENT DU TIRANT DANS LE CAS DE LA CORROSION</b> .....	<b>71</b>
<b>II.6.1. Introduction</b> .....	71
<b>II.6.2. Modèle multilinéaire de BRUGGELING 1991         et VAN DER VEEN 1990</b> .....	72
<b>II.6.3. Modèle multilinéaire CEB-FIP 1993</b> .....	73
<b>II.6.4. Modèle de l'Eurocode 2-1991 (EC2-91)</b> .....	74

II.6.5. Modèle multilinéaire proposé d'un tirant corrodé (BUYLE-BODIN et REZAIÉ 1999) .....	75
II.7 MODIFICATION DU COMPORTEMENT DU BETON COMPRIME DANS LE CAS DE LA CORROSION.....	77
II.8. CONCLUSION .....	78

### CHAPITRE III

#### ETUDES EXPERIMENTALES ANALYSE DE L'ENDOMMAGEMENT DE STRUCTURES EN BETON ARME CORRODE FLECHIES

III.1. INTRODUCTION.....	81
III.2. PRESENTATION DES CORPS D'ESSAI.....	81
III.2.1. Corps d'épreuve.....	82
III.2.2. Matériaux; béton.....	83
III.2.3. Matériaux; acier.....	84
III.3. DISPOSITIF DE MISE EN CHARGE.....	84
III.3.1. Type de chargement.....	84
III.3.2. Comportement charge-flèche en flexion 3 points à 28 jours.....	85
III.3.3. Ambiances agressives; brouillard salin.....	86
III.3.4. Ambiances agressives; atmosphère carbonique.....	86
III.4. SERIE D'ESSAIS N°1 DES POUTRES VIEILLIES EN AMBIANCE SALINE.....	87
III.4.1. Projet GEO "Fatigue et vieillissement des géocomposites" .....	87
III.4.2. Objectifs principaux.....	87
III.4.3. Nature des fissurations.....	87
III.4.3.1. <u>FISSURATION DUE AUX SOLLICITATIONS</u> .....	87

<b>III.4.3.2. <u>FISSURATION DUE A LA CORROSION</u></b> .....	89
<b>III.4.4. Description des essais</b> .....	89
<b>III.4.5. Résultats et analyse</b> .....	92
<b>III.4.5.1. <u>DEGRE D'IRREVERSIBILITE</u></b> .....	92
<b>III.4.5.2. <u>ANALYSE DES RESULTATS CHARGE-FLECHE</u></b> .....	93
<b>III.4.5.3. <u>ANALYSE DES RESULTATS MOMENT-COURBURE</u></b> .....	101
<b>III.5. SERIE D'ESSAIS N°2 DES POUTRES VIEILLIES EN AMBIANCE SALINE...</b>	105
<b>III.5.1. Cartes de fissuration</b> .....	105
<b>III.5.2. Objectif principal</b> .....	106
<b>III.5.3. Description de l'essai</b> .....	106
<b>III.6. ESTIMATION DE LA VALEUR D'ENDOMMAGEMENT DE LA STRUCTURE A PARTIR DES DONNEES EXPERIMENTALES</b> .....	109
<b>III.6.1. Mesure de l'endommagement d'un matériau</b> .....	109
<b>III.6.2. Mesure de l'endommagement d'une structure</b> .....	110
<b>III.7. VARIATIONS DES VALEURS D'ENDOMMAGEMENT DE LA STRUCTURE VIS A VIS DU MODE D'APPLICATION DE LA CHARGE</b> .....	112
<b>III.7.1. Endommagement obtenu dans le cas du chargement centré</b> .....	112
<b>III.7.2. Changement de la référence de calcul de la valeur d'endommagement de la structure</b> .....	115
<b>III.7.3. Ecart moyen relatif de la courbure le long de la poutre</b> .....	117
<b>III.7.4. Influence du choix des références sur la valeur d'endommagement</b> .....	119
<b>III.7.5. Vérification de linéarité de la loi de comportement le long de la poutre</b> .....	119
<b>III.8. CHARGEMENT JUSQU'A RUPTURE DE LA POUTRE B1CL</b> .....	121
<b>III.8.1. Introduction</b> .....	121
<b>III.8.2. Mode opératoire</b> .....	121
<b>III.8.3. Comportement à rupture</b> .....	122

III.9. COURBURE ADMISSIBLE..... 124

III.10. CONCLUSION..... 124

**CHAPITRE IV**

**ETUDE DIAGNOSTIC ET VALIDATION DU MODELE  
MOMENT-COURBURE MODIFIE**

IV.1. INTRODUCTION..... 127

IV.2. HYPOTHESE POUR LA VARIATION DE LA HAUTEUR DU  
TIRANT LE LONG DE LA POUTRE..... 127

IV.2.1. Variations linéaires et symétriques de la hauteur  
du tirant..... 127

IV.2.2. Variations non linéaires et asymétriques de la hauteur  
du tirant..... 128

IV.2.2.1. VARIATIONS SELON LES SOLLICITATIONS 1 ET 2..... 128

IV.2.2.2. VARIATIONS SELON LES ESSAIS N°2 POUR LA POUTRE B1CL.. 129

IV.3. COMPORTEMENT CHARGE-FLECHE A PARTIR DU MODELE..... 131

IV.3.1. Introduction..... 131

IV.3.2. Courbes charge-flèche obtenues par le modèle à partir de  
la carte de fissuration et du cas conventionnel..... 132

IV.3.3. Comparaison avec les résultats d'essais à 28 jours,  
à 1,5 an et à 5 ans..... 133

IV.3.4. Variation des capacités portantes par rapport aux  
variations de la hauteur du tirant..... 134

IV.3.5. Comparaison avec les résultats de la série d'essais N°1..... 135

IV.3.6. Comparaison avec les résultats de la série d'essais N°2..... 137

IV.3.7. Comparaison avec les résultats de la série d'essais à rupture.... 137

<b>IV.4. COMPORTEMENT MOMENT-COURBURE A PARTIR DU MODELE.....</b>	<b>139</b>
<b>IV.4.1. Courbes moment-courbure obtenues à partir de différentes hauteurs du tirant excentré.....</b>	<b>139</b>
<b>IV.4.2. Comparaison avec les résultats de la série d'essais N°1.....</b>	<b>140</b>
<b>IV. 4.3. Utilisation de la valeur d'endommagement de la structure.....</b>	<b>142</b>
<b>IV. 4.4. Comparaison avec les résultats de la série d'essais N°2.....</b>	<b>143</b>
<b>IV.4.5. Comparaison avec les résultats de la série d'essais à rupture....</b>	<b>144</b>
<b>IV.5. APPLICATION DU MODELE A L'ANALYSE DU COMPORTEMENT ET AU DIAGNOSTIC DES STRUCTURES EXISTANTES.....</b>	<b>144</b>
<b>IV.6. CONCLUSION.....</b>	<b>146</b>
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>148</b>
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>151</b>
<b>ANNEXE I: METHODE DIRECTE DU CALCUL DE LA COURBURE .....</b>	<b>156</b>
<b>ANNEXE II: RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE D'ADHERENCE.....</b>	<b>159</b>
<b>ANNEXE III: VALEURS DE LA COURBURE LE LONG DE LA POUTRE BICL....</b>	<b>170</b>
<b>ANNEXE IV: PHOTOS DES POUTRES CORRODEE ET DES ARMATURES TENDUES DE LA POUTRE BICL.....</b>	<b>175</b>

## RESUME

Le travail de thèse porte sur l'étude du comportement en flexion simple de poutres rectangulaires en béton armé corrodé à l'aide d'une modélisation moment-courbure modifiée prenant en compte le raidissement en traction du béton fissuré. Il est divisé en quatre chapitres:

Le premier chapitre est consacré à la résolution du système non linéaire des équations d'équilibre d'une poutre en béton armé par la méthode moment-courbure. Il est composé de trois parties. Dans la première, on présente la définition de la courbure et sa détermination expérimentale. La seconde partie est consacrée à la proposition d'une méthode rapide de calcul de la hauteur comprimée d'une section fléchie en béton armé dite des cas possibles. Enfin, on présente la recherche de la courbure par deux méthodes, directe et indirecte, accompagnée d'études paramétriques.

Le deuxième chapitre se compose de trois parties. Dans la première, on présente la fissuration et la rigidité d'une zone de béton armé tendue et en conséquence le phénomène de raidissement en traction " Tension Stiffness Model ". Dans la seconde partie, proposant un modèle d'assemblage poutre-tirant, nous modélisons la partie tendue par un tirant centré et nous modifions le comportement moment-courbure. Nous proposons ensuite la loi de comportement du tirant excentré, en phase élastique et post fissuration, et celui du tirant corrodé pour modifier notre modèle.

Le troisième chapitre présente des essais menés dans le cadre du projet GEO "Fatigue et vieillissement des géocomposites" sur des poutres conservées au L.M.D.C. (Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions) de Toulouse. Elles ont été fabriquées en 1984 dans le cadre d'une étude sur la maîtrise de la fissuration. L'irréversibilité de déformations de la première série d'essais est étudiée. Puis nous calculons les déformées et les valeurs d'endommagement de la structure le long de la poutre B1CL à partir des résultats de la deuxième série d'essais. Enfin dans la troisième série d'essais, cette poutre est chargée jusqu'à rupture.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude diagnostic et à la validation du modèle moment-courbure modifié par la prise en considération d'un assemblage poutre-tirant excentré, par comparaison avec les essais menés dans le cadre du projet GEO sur les poutres conservées au L.M.D.C de Toulouse. L'application des valeurs d'endommagement de la structure sur le modèle a été étudiée.

**Mots clés:** Béton armé, modélisation, corrosion, chargement monotone, flexion simple, moment, courbure, analyse non linéaire, endommagement, raidissement en traction, diagnostic, tirant.

## **ABSTRACT**

This research leads on the study of corroded reinforced concrete beams under flexural loading and the modelling of the behaviour by modified moment-curvature method considering the effect of the tension stiffening of the cracked concrete. It includes four chapters:

In the first one, we present the resolution of the non-linear system of equilibrium equations of reinforced concrete beams by the moment-curvature method. It composes three parts. In the first, the definition of the curvature and its experimental determination is presented. The second part presents the proposal of a rapid calculation method of the compressed height by the method of possible cases. Finally, the research of the curvature by two methods is introduced, direct and indirect, accompanied by parametric studies.

The second chapter composes three parts. In the first one, we present the cracking and the stiffness of a tension zone of reinforced concrete and consequently the phenomenon of the tension stiffening. In the second part, proposing a model of assemblage tie-beam, we simulate the tension part by centred tie behaviour and modify of the moment-curvature behaviour. Thereafter, we propose then ex-centred tie behaviour, including elastic and post-cracking behaviour, and corroded tie behaviour to modify our model.

Third chapter includes the tests of the GEO project on beams preserved to the L.M.D.C. (Material Laboratory and Durability of Constructions) of Toulouse. They have been manufactured in 1984 for studies on cracking. Three series of tests have been undertaken. The irreversibility of deformation in the first series is studied. Then we calculate the deformation and damage it the long of the beam B1CL from second series. Finally in the third series, this beam is examined in rupture.

Fourth chapter includes the diagnosis study and the validation of the modified moment-curvature model considering a beam-excentred tie assemblage by comparison with tests. The application of the damage values of the structure on the model has been studied.

**Key words:** reinforced concrete, modelling, monotonous loading, flexural behaviour, moment, curvature, non linear analysis, damage, tension stiffening, diagnosis, tie.

## INTRODUCTION GENERALE

Les méthodes analytiques de calcul des réponses des poutres en béton armé, comme par exemple les modélisations non linéaires par éléments finis et les méthodes de type moment-courbure ou charge-flèche, consistent le plus souvent à prévoir le comportement d'une poutre saine jusqu'à sa ruine complète. Ces méthodes aident à la conception des structures neuves. Mais par ailleurs, il existe de nombreuses structures plus ou moins dégradées. Les dégradations commencent juste après le premier chargement et se développent au fur et à mesure du temps. Une deuxième catégorie d'études consiste donc à évaluer le comportement actuel de ces structures dégradées et à modéliser leur comportement. Parmi les diverses pathologies, la corrosion des armatures est la plus fréquente et nécessite de coûteux travaux de réparation. L'objet de ce travail porte sur la modélisation des structures corrodées. Leur modélisation par une méthode non linéaire de type moment-courbure est le but de notre étude.

L'analyse non linéaire des poutres en béton armé par la méthode moment-courbure est une méthode qui permet de déterminer la courbure d'une section soumise à une sollicitation de flexion. Les équations d'équilibre de la section conduisent à résoudre un système d'équation non linéaire et la solution s'obtient de manière itérative.

La modélisation de la partie tendue fissurée d'une poutre fléchie est toujours délicate. Dans le calcul classique, le diagramme contrainte-déformation en traction est supposé être linéaire jusqu'à la valeur de résistance puis descend brusquement à zéro, ce qui signifie qu'on néglige totalement la partie tendue du béton. Le comportement réel diffère du modèle élastique linéaire.

En effet, après fissuration, le béton tendu situé entre les fissures est encore capable de reprendre les efforts de traction en raison de l'adhérence du béton avec l'armature. De cette manière, le raidissement de la pièce croît. Cet effet est appelé le **raidissement en traction (*tension stiffness*)**. En fait quand le béton tendu est négligé, nous ne prenons pas en considération les effets du raidissement en traction, qui traduit le comportement réel des armatures enrobées de béton tendu et fissuré. Le modèle physique le plus simple qui correspond à l'étude théorique du raidissement en traction des structures uni-dimensionnelles en béton armé est celui du tirant en béton armé soumis à traction pure.

Dans la littérature, on trouve de nombreuses recherches sur le comportement d'un tirant en béton armé, mais peu d'entre elles sont utilisées pour déduire le comportement d'une pièce fléchie. Cela peut se faire soit dans un calcul par éléments finis comme par exemple un élément de barre soit dans un calcul non linéaire du type moment-courbure en considérant un *assemblage poutre-tirant*. Dans notre travail qui utilise cette seconde approche, nous supposerons que la relation contrainte-déformation d'un tirant peut être utilisée comme une propriété constitutive pour une section de poutre.

Le B.A.E.L. 93 [1], prend en compte l'effet du raidissement en traction en diminuant l'allongement des aciers tendus. Le pourcentage de la diminution dépend de l'aire du tirant qui est considéré constante alors que la hauteur de la partie tendue évolue pendant le chargement. Nous proposons d'appliquer le tirant au cas d'une poutre fléchie et étudions l'influence de plusieurs paramètres comme l'effet de l'aire du tirant et le pourcentage d'acier.

La déformation sur l'élément du tirant centré est constante. Pour mieux travailler l'assemblage poutre-tirant qui est un élément fléchi, nous proposons d'utiliser le comportement d'un tirant excentré au lieu de celui du tirant centré. Dans le cas où la dégradation de la partie tendue est due à la corrosion, nous avons également besoin d'une approche prenant en compte le comportement d'un tirant corrodé.

Le présent travail a pour objectif l'étude du comportement en flexion des poutres en béton armé et l'extension de l'étude théorique du raidissement en traction par la considération du comportement d'un tirant, centré ou excentré, sain ou corrodé. Il s'appuie sur l'évaluation du comportement de poutres corrodées et testées dans le cadre du projet GEO "Fatigue et vieillissement des géocomposites" à Toulouse, à l'aide du modèle moment-courbure modifié par l'assemblage poutre-tirant prenant en compte la contribution du béton fissuré. Il est divisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à l'analyse non linéaire de poutres en béton armé par la méthode moment-courbure. Ceci nous permet de déterminer la courbure d'une section soumise à une sollicitation de flexion. Les équations d'équilibre de la section conduisent à résoudre un système d'équation non linéaire et la solution s'obtient de manière itérative. Pour déterminer directement la valeur de la hauteur comprimée, nous proposons une méthode rapide dite des cas possibles.

Le deuxième chapitre se compose de trois parties. Dans la première, on présente la fissuration et la rigidité d'une zone de béton armé tendue et en conséquence le phénomène du raidissement en traction " Tension Stiffness Model ". Dans la seconde partie, considérant un

assemblage poutre-tirant, nous modélisons la partie tendue par un tirant centré et nous modifions le comportement moment-courbure. Nous proposons ensuite la loi de comportement du tirant excentré, en phase élastique et post fissuration, et celui du tirant corrodé pour modifier notre modèle.

Le troisième chapitre présente des essais menés dans le cadre du projet GEO "Fatigue et vieillissement des géocomposites" sur des poutres conservées au L.M.D.C. (Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions) de Toulouse. Elles ont été fabriquées en 1984 dans le cadre d'une étude sur la maîtrise de la fissuration et ont été conservées dans deux types d'ambiance. L'une est un brouillard salin, l'autre est un mélange de CO<sub>2</sub> et d'air. Par ailleurs, quelques poutres sont conservées à l'air libre en milieu couvert et servent de témoins. Trois séries d'essais ont été effectuées et nous avons réalisé ces essais en collaboration avec ce laboratoire. L'irréversibilité des déformations est étudiée dans la première série d'essais. Puis nous calculons les déformées et les valeurs d'endommagement de la structure le long d'une poutre à faible enrobage et conservée dans une ambiance en brouillard salin pendant 15 ans (poutre *BICL*) à partir des résultats expérimentaux de la deuxième série d'essais. Enfin, dans la troisième série d'essais, cette poutre est chargée jusqu'à rupture.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude diagnostic et à la validation du modèle moment-courbure modifié par la prise en considération d'un assemblage poutre-tirant excentré, par comparaison aux essais menés dans le cadre du projet GEO sur les poutres conservées au L.M.D.C. de Toulouse. L'application des valeurs d'endommagement de la structure au modèle a été étudiée.

## CHAPITRE I

### **ANALYSE PAR LA METHODE MOMENT-COURBURE DU COMPORTEMENT EN FLEXION DE POUTRES EN BETON ARME**

*Dans ce chapitre, on présente la résolution du système non linéaire des équations d'équilibre d'une section rectangulaire de poutre en béton armé par la méthode moment-courbure. Il est composé de trois parties. Dans la première, on présente la définition de la courbure et sa détermination expérimentale. La seconde partie est consacrée à la proposition d'une méthode rapide de calcul de la hauteur comprimée d'une section fléchie en béton armé dite des cas possibles. Enfin, on présente la recherche de la courbure par deux méthodes, directe et indirecte, accompagnée d'études paramétriques.*

## I.1. INTRODUCTION

L'analyse non linéaire de poutres en béton armé par la méthode moment-courbure permet de déterminer la courbure d'une section soumise à une sollicitation de flexion. Les équations d'équilibre de la section conduisent à résoudre un système d'équation non linéaire et la solution s'obtient de manière itérative.

La résolution des équations d'équilibre des efforts internes conduit à une difficulté spécifique introduite par l'état de contrainte dans les armatures et le béton. Deux méthodes peuvent être utilisées pour la résolution du problème. On trouve toujours dans la littérature une méthode classique itérative par estimation de la hauteur de la zone comprimée de la poutre fléchie. Nous proposons une nouvelle méthode rapide sans itération sur les valeurs de la hauteur de la zone comprimée pour la détermination du diagramme moment-courbure.

## I.2. LA COURBURE

### I.2.1. Définition de la courbure

Pour deux sections droites, infiniment voisines distantes de  $dx$  et soumises à l'action d'un moment fléchissant  $M_Z$  (figure I-1), la loi de HOOKE et l'hypothèse des petites déformations

conduisent à partir de la déformation de la fibre d'ordonnée  $y$  à:  $\epsilon_x(y) = \frac{dl(y)}{dx} = \frac{\sigma(y)}{E} = \frac{M_Z y}{E I_Z}$ .

La rotation relative  $d\omega$  entre les deux sections est:  $d\omega = d\theta_Z = \frac{dl}{y} = \frac{M_Z}{E I_Z} dx = \frac{dx}{r}$  d'où la

valeur de la courbure de la ligne neutre:  $\chi = \frac{1}{r} = \frac{d\theta_Z}{dx} = \frac{\epsilon_x(y)}{y} = \frac{M_Z}{E I_Z}$ .

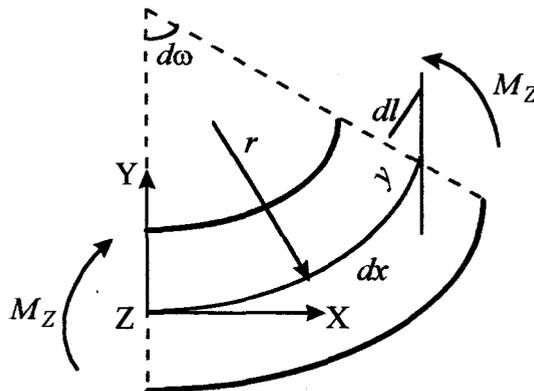


Figure I-1: Représentation géométrique de la courbure

### I.2.2. Détermination expérimentale de la courbure

Dans un essai de poutre, on peut mesurer la déformation d'une fibre par exemple en collant une jauge ou en utilisant un déformètre à bille. La figure I-2 montre les notations utilisées et les variations de déformation et de contrainte dues à un chargement en flexion simple  $M$  pour une section en béton armé. En supposant que la section droite est plane après déformation et que les déformations de l'acier et du béton sont égales à une même hauteur (adhérence parfaite), on peut

écrire les relations suivantes:  $\frac{l}{r} = \frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_s + \epsilon'_s}{d - d'}$  ou  $\frac{l}{r} = \frac{\epsilon_c}{x} = \frac{\epsilon_c + \epsilon_s}{d}$ .

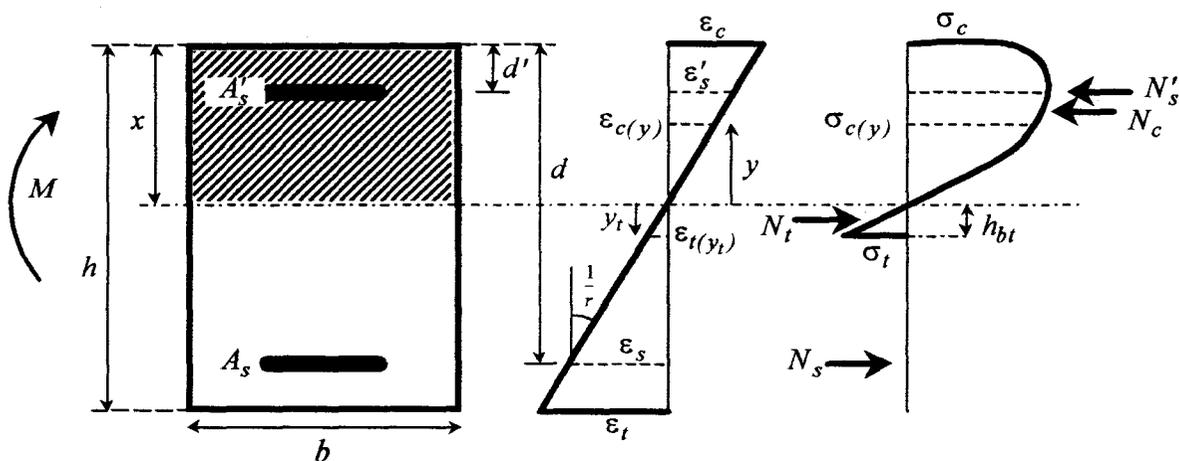


Figure I-2: Etude d'une section en béton armé (notations utilisées)

Les relations montrent que, connaissant  $\epsilon_s$  et  $\epsilon'_s$  en cours d'essai, on peut calculer la courbure. Connaissant  $\epsilon_c$  et  $\epsilon_s$ , on peut aussi déduire la courbure d'une section expérimentalement. Dans le cas général, en mesurant la déformation de deux fibres  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ , par exemple une comprimée et une autre tendue, on pourra déduire la courbure expérimentalement  $\chi_{exp}$  comme suite:

$$\chi_{exp} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{x_{\epsilon 1} + x_{\epsilon 2}}$$

où  $x_{\epsilon 1}$  et  $x_{\epsilon 2}$  sont les distances de deux fibres à l'axe neutre. La position de l'axe neutre peut se déterminer en connaissant les déformations de deux fibres sur la section.

### I.2.3. Evaluation des courbures à partir des flèches

#### I.2.3.1. A PARTIR DES FLECHES AU MILIEU DE LA POUTRE

Si on a mesuré uniquement les flèches au milieu d'une poutre  $f_{milieu}$  au cours des essais, il est possible d'en déduire les courbures correspondantes  $\chi_{milieu}$  en utilisant l'expression approchée ci-dessous dans l'hypothèse où le comportement de la poutre reste élastique pendant le chargement.

$$f_{milieu} = \frac{pL^3}{48EI} ; M = \frac{pL}{4} \Rightarrow \chi_{milieu} = \frac{12f_{milieu}}{L^2} \quad \text{pour flexion 3 points}$$

$$f_{milieu} = \frac{23pL^3}{1296EI} ; \chi = \frac{M}{EI} \Rightarrow \chi_{milieu} = \frac{9,39f_{milieu}}{L^2} \quad \text{pour flexion 4 points dans le cas d'une répartition au tiers de la portée}$$

où  $p$  est la charge totale et  $L$  est la portée entre nus d'appuis.

#### I.2.3.2. A PARTIR DES FLECHES MESUREES LE LONG DE LA POUTRE

Si on a mesuré les flèches le long de la poutre  $f(x)$ , on peut classiquement déduire la courbure par double dérivation de la flèche. Par exemple pour une poutre ayant une portée égale à  $L$ , sollicitée par un moment constant et des flèches nulles au niveau des appuis, on obtient la valeur constante de la courbure, dans l'hypothèse des petites déformations et que le comportement de la poutre reste élastique, par l'expression ci-dessous:

$$\chi = \frac{f(x)}{(x^2/2 - Lx/2)} = \text{const.}$$

### I.2.4. Courbure dans l'état fissuré

Avant fissuration, une poutre en béton armé se comporte comme si son inertie était constante et égale à celle de la section totale rendue homogène. Après fissuration, son inertie est variable. Il est cependant possible de prendre en compte une inertie moyenne constante, comprise entre l'inertie de la section totale homogène et celle de la section réduite homogène (béton tendu négligé à l'emplacement des fissures). Le BAEL 1993 [1] définit un moment d'inertie fictif comme suit:

$$I_f = I_0 \frac{I_0}{I_0 + \lambda \mu}$$

où  $I_0$  est le moment d'inertie de la section homogène non fissurée et les expressions de  $\lambda$  et  $\mu$  sont définies pour les déformations instantanées ou de longue durée. Donc suivant que la charge est de courte  $(EI_f)_i$  ou de longue durée d'application  $(EI_f)_v$ , on peut déduire la courbure d'une section fissurée  $\chi_f$  comme suit:

$$\chi_f = \frac{M}{(EI_f)_{i \text{ ou } v}}$$

## I.2.5. Recherche de la courbure de flexion

### I.2.5.1. LES EQUATIONS MECANQUES: EXPRESSION DE L'EFFORT NORMAL

Par définition, l'expression de l'effort normal  $N$  dans une section donnée, de largeur différente selon la hauteur  $b(y)$  est donnée sous la forme suivante:

$$N = \int_v^{v'} \sigma(y) b(y) dy$$

où  $\sigma(y)$  est la contrainte dans une fibre située à une distance  $y$  de la fibre neutre de la section.  $v$  et  $v'$  sont respectivement les distances de la fibre neutre de la section à la fibre supérieure et inférieure de la section.

Nous ne travaillons par la suite que sur une section rectangulaire de largeur  $b$ :

$$b(y) = b \quad \text{constante}$$

La déformation d'une fibre, située à une distance  $y$  de la fibre neutre de la section droite, est calculée par la relation suivante:

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_0 + y \chi$$

où  $\varepsilon_0$  est la déformation axiale,  $\chi$  est la courbure qui est constante sur la section.

En différenciant cette expression par rapport à la variable  $y$ , nous avons:

$$d\varepsilon = \chi dy$$

Reportons ces deux relations dans l'expression de l'effort normal. Nous obtenons l'expression de l'effort normal en fonction des deux variables  $\varepsilon$  et  $\chi$  d'où:

$$N(\varepsilon, \chi) = \frac{b}{\chi} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

$\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont les déformations des fibres inférieure et supérieure de la section.

### I.2.5.2. LES EQUATIONS MECANQUES: EXPRESSION DU MOMENT FLECHISSANT

Nous partons de la définition générale du moment fléchissant dans une section de largeur variable selon la hauteur, mise sous la forme suivante:

$$M = \int_{v'}^v \sigma(y) y b(y) dy$$

Nous nous plaçons dans les mêmes conditions que précédemment: la section est rectangulaire droite, la distance  $y$  est mesurée par rapport à la fibre neutre de la section droite.  $v$  et  $v'$  sont les bornes supérieure et inférieure de la section mesurées par rapport au centre de gravité de la section.

Nous pouvons exprimer  $y$  en fonction des deux variables  $\varepsilon$  et  $\chi$  de la façon suivante:

$$y = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\chi}$$

L'expression du moment fléchissant pour une section rectangulaire droite est la suivante:

$$M(\varepsilon, \chi) = \frac{b}{\chi^2} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma(\varepsilon) (\varepsilon - \varepsilon_0) d\varepsilon$$

### I.2.5.3. EQUATIONS D'EQUILIBRE

Les équations d'équilibre statique d'une section droite de poutre, sollicitée en flexion, s'écrivent:

$$N = N_{int} = \int_A \sigma dA \quad ; \quad M = M_{int} = \int_A \sigma y dA \quad (I-1)$$

La connaissance des lois de comportement du béton et de l'acier nous permet de calculer la distribution des contraintes dans la section à partir de celle des déformations. Les hypothèses classiques suivantes sont utilisées pour le calcul:

- H1: Le comportement du béton tendu est élastique fragile;
- H2: Le principe de conservation des sections planes est vérifié, c'est-à-dire qu'il y a adhérence parfaite entre l'acier et le béton;
- H3: Le béton comprimé présente des lois contrainte-déformation définies pour des charges de faible durée d'application;
- H4: Les aciers employés sont des aciers naturels au sens du règlement.

### I.3. PROPOSITION D'UNE METHODE RAPIDE DE CALCUL DE LA HAUTEUR COMPRIMEE

Les équations d'équilibre I-1 sont fonctions de deux variables globales, soit une déformation et une hauteur comme par exemple  $\varepsilon_s$  et  $x$ , soit deux variables mixtes de déformation et de hauteur comme par exemple  $\varepsilon'_s$  et  $\chi = \frac{\varepsilon_c}{x}$ .

Quand on a choisi les deux variables globales, il faut en prendre une comme pivot, c'est à dire que l'on fixe la variable choisie comme pivot et on recherche la valeur de l'autre variable. Dans l'étape suivante, on donne un pas à la variable fixée et on réitère. Normalement on utilisera  $\varepsilon_c$  et  $x$  comme variables globales. *On choisit la déformation maximale du béton comprimé  $\varepsilon_c$  comme pivot.*

Soit  $f_c(\varepsilon_c) = \sigma_c$  la loi de comportement du béton comprimé et  $f_t(\varepsilon_t) = \sigma_t$  celle du béton tendu soit  $f_s(\varepsilon_s) = \sigma_s$ ,  $f'_s(\varepsilon'_s) = \sigma'_s$  respectivement celles des aciers tendus et des aciers comprimés. Les efforts normaux de compression et de traction dans le béton et dans les aciers tendus et comprimés, qui sont fonctions des deux variables globales  $\varepsilon_c$  et  $x$ , sont donnés respectivement par (pour les notations utilisées voir la figure I-2):

$$N_c(\varepsilon_c, x) = b \int_0^x \sigma_c(y) dy = b \int_0^x f_c[\varepsilon_c(y)] dy \quad (I-2)$$

$$N_t(\varepsilon_t, y_t) = b \int_0^{y_t} \sigma_t(y_t) dy_t = b \int_0^{y_t} f_t[\varepsilon_t(y_t)] dy_t \quad (I-3)$$

$$N_s(\varepsilon_s) = f_s(\varepsilon_s) A_s \quad (I-4)$$

$$N'_s(\varepsilon'_s) = f'_s(\varepsilon'_s) A'_s \quad (I-5)$$

Les équations d'équilibre des efforts normaux et des moments de la section respectivement s'écrivent:

$$N = N_c(\varepsilon_c, x) + N'_s(\varepsilon'_s) - N_t(\varepsilon_t, y_t) - N_s(\varepsilon_s) = 0 \quad (\text{I-6})$$

et

$$M = M_{int}(\varepsilon_c, x) \quad (\text{I-7})$$

avec:

$$M_{int}(\varepsilon_c, x) = b \int_0^x f_c[\varepsilon_c(y)](d-x+y) dy + N_s(d-d') - N_t(d-x-\frac{2}{3}y_t) \quad (\text{I-8})$$

$$\varepsilon_s = \left(\frac{d-x}{x}\right)\varepsilon_c \quad \varepsilon'_s = \left(\frac{x-d'}{x}\right)\varepsilon_c \quad \varepsilon_t = \frac{y_t}{x}\varepsilon_c \quad (\text{I-9})$$

Pour la prise en compte de l'effort normal  $N_t$  dû au béton tendu avant fissuration, la connaissance de  $x$  et  $\varepsilon_c$  permet d'écrire:  $y_t = h-x$  et  $\varepsilon_t = \frac{h-x}{x}\varepsilon_c$  donc:

$$N_t = N_t(\varepsilon_t, y_t) = N_t(\varepsilon_c, x) \quad (\text{I-10})$$

Après fissuration,  $\varepsilon_t$  est fixée à sa valeur maximale  $\varepsilon_{t\max}$ . Dans ce cas  $y_t = \left(\frac{\varepsilon_{t\max}}{\varepsilon_c}\right)x = h_{bt}$ .

En conséquence, il s'agit de trouver la déformation du béton  $\varepsilon_c$  et la hauteur  $x$  de la zone comprimée, satisfaisant les équations I-6 et I-7, pour en déduire la courbure  $\chi = 1/r$ . Ces équations conduisent à la résolution d'un système d'équations non linéaires.

La hauteur  $x$  du béton comprimé est déterminée par la résolution de la relation d'équilibre des efforts normaux I-6. Cependant cette résolution conduit à une difficulté spécifique introduite par l'état de contrainte dans les armatures, qui peuvent être par exemple plastifiées ou non, et par l'état de contrainte dans la partie tendue. Ces états dépendront de la valeur de  $x$  et la résolution du problème passe par une procédure itérative classiquement.

Deux méthodes peuvent être utilisées pour la résolution du problème. On trouve dans la littérature une méthode classique itérative par estimation de la hauteur de la zone comprimée. Nous proposons une nouvelle méthode (REZAIÉ 1995 [2]) pour la détermination de la valeur de la hauteur de la zone comprimée.

### I.3.1. Méthode 1 (procédure itérative classique)

Pour une valeur de  $x$  donnée, les équations de compatibilité des déformations I-9 permettent de déterminer les efforts normaux dans la section. L'introduction de ces valeurs dans l'équation d'équilibre des efforts normaux permet de valider ou de modifier la valeur initiale de  $x$  par un critère de précision (par exemple  $\frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}} \leq \varepsilon$ ). Néanmoins la méthode étant itérative, calculer la hauteur de la zone comprimée nécessite un temps de calcul important et ne donne pas la valeur exacte. Le pas de la hauteur de la zone comprimée  $x$  et la précision  $\varepsilon$  doivent être harmonieux. Pour des précisions plus importantes, il faut considérer des pas plus petits de la hauteur de la zone comprimée, ce qui augmente le temps de calcul. La simplicité de cette méthode est son principal avantage, mais le problème de divergence peut créer des difficultés.

### I.3.2. Méthode 2 (méthode des cas possibles)

La méthode que nous proposons (REZAIIE 1995 [2] et REZAIIE et BUYLE-BODIN 1997 [3]) consiste à déterminer directement la hauteur de la zone comprimée en utilisant des relations de définition de  $x$  induites par les cas de contraintes possibles dans les matériaux, armatures et béton. Quand on ne connaît pas la valeur de  $x$ , on ne peut pas déterminer les déformations sur la section et en conséquence l'état de contrainte. Pour la résolution de l'équation I-6 qui donne cette valeur de la hauteur comprimée  $x$ , on a besoin des équations définissant l'état de contrainte dans les aciers tendus et comprimés et dans le béton tendu.

L'état de contraintes dépend des lois de comportement des matériaux. Chaque courbe représentant une loi de comportement peut s'approcher par une composition de plusieurs éléments de courbes simples. Par exemple si on considère une loi élastique parfaitement plastique pour l'acier, cette loi a un point singulier au début de l'écoulement et se compose de deux éléments, l'un pour la partie élastique et l'autre pour la partie parfaitement plastique.

Soit le nombre d'éléments de courbes constituant la courbe de comportement des aciers tendus  $m$ , et  $n, p$  respectivement celles des aciers comprimés et du béton tendu. Le nombre de cas possibles de contraintes est égal à  $n \times m \times p$  et en utilisant l'équation I-6, on aura  $n \times m \times p$  réponses différentes. Or on sait que la solution du problème est unique. Un seul de ces cas pour une valeur  $\varepsilon_c$  donnée (qu'on utilise comme pivot) va vérifier la compatibilité de déformation sur la section.

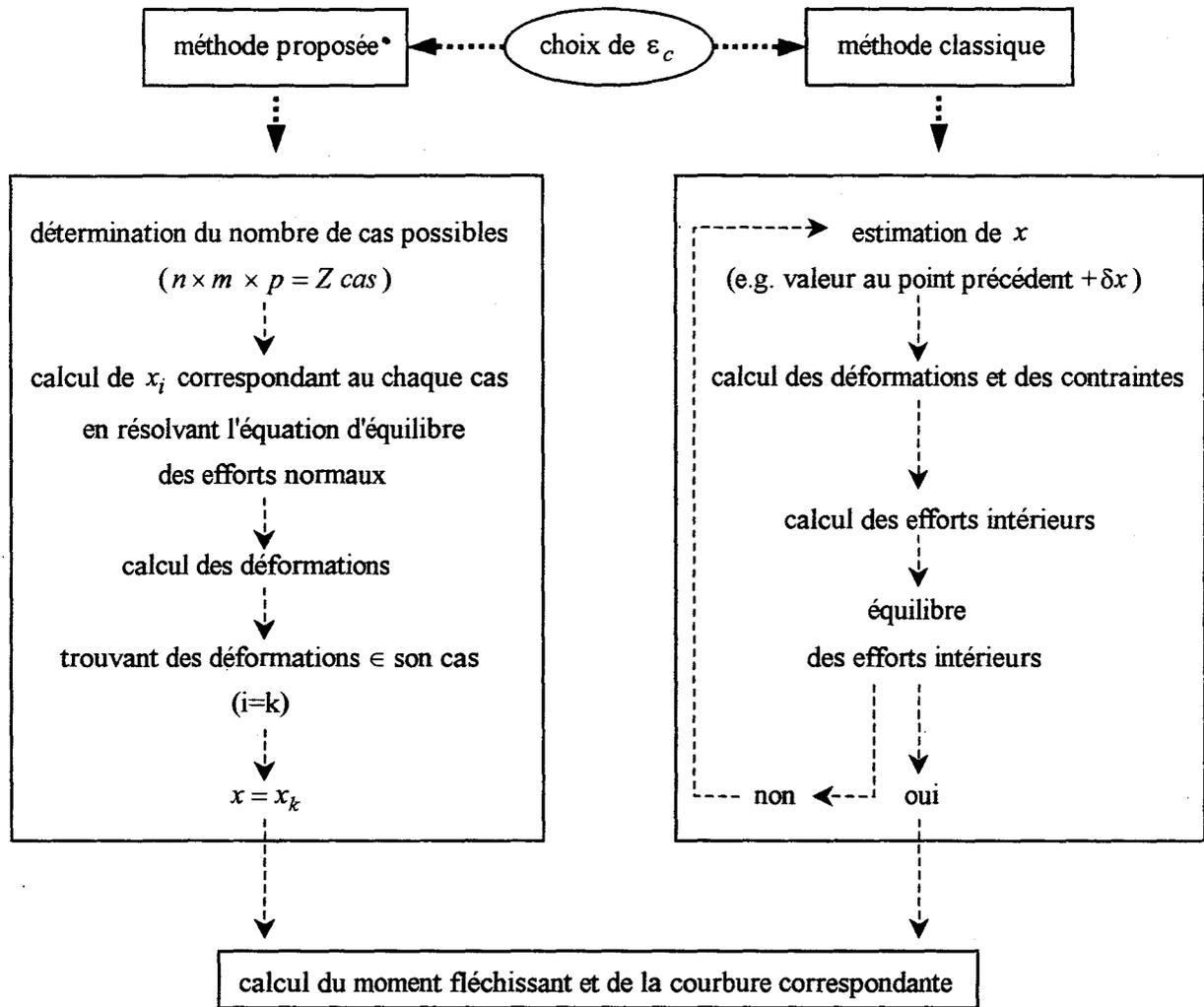


Figure I-3: Synthèse de la méthode des cas possibles en comparaison avec la méthode classique

Ces cas sont, par exemple pour une loi de comportement uniforme du béton tendu et un comportement élastique parfaitement plastique des aciers, au nombre de quatre ( $n=2, m=2, p=1$ ):

- Les aciers tendus et comprimés ne sont pas plastifiés ( $x_1$ );
- Seuls les aciers tendus sont plastifiés ( $x_2$ );
- Seuls les aciers comprimés sont plastifiés ( $x_3$ );
- Les aciers tendus et comprimés sont plastifiés ( $x_4$ ).

Pour une valeur de  $\varepsilon_c$  donnée, on détermine les  $x_i$  et pour chaque valeur de  $x_i$ , on calcule la valeur de la déformation dans les matériaux à partir des équations de compatibilité. Dans cet exemple  $p=1$  et on n'a pas besoin de vérifier l'état de déformation sur la partie tendue. Après, on vérifie quelles déformations calculées appartient au cas considéré, ce qui confirme la valeur de

$x = x_i$  pour la valeur de  $\varepsilon_c$  donnée. La démarche de cette méthode est précisée dans l'exemple présenté à la fin de ce chapitre.

Il faut noter que par cette méthode, on obtient la valeur exacte de  $x$ , sans faire d'itération, ce qui permet un gain de temps de calcul informatique très appréciable. L'organigramme de la figure I-3 présente la synthèse de la méthode en comparaison avec la méthode classique.

#### I.4. RESOLUTION DU SYSTEME NON LINEAIRE

Les équations d'équilibre I-6 et I-7 conduisent à résoudre un système non linéaire. La recherche de la solution s'obtient de manière itérative et on peut diviser la recherche de la courbure en deux parties: recherche directe et recherche indirecte.

**La recherche directe** consiste, connaissant le moment sollicitant  $M$ , à déterminer la courbure correspondante en trouvant la déformation maximale du béton comprimé  $\varepsilon_c$  (figure I-4).

**La recherche indirecte** nécessite dans un premier temps la détermination point par point du diagramme moment-courbure. La courbure correspondant à un moment sollicitant  $M$  peut dès lors être déterminée par interpolation linéaire sur ce diagramme moment-courbure (figure I-5). D'une façon générale, la forme de ces courbes est comparable à l'allure des courbes des lois de comportement des matériaux élastoplastiques avec une partie linéaire suivie d'une partie non linéaire.

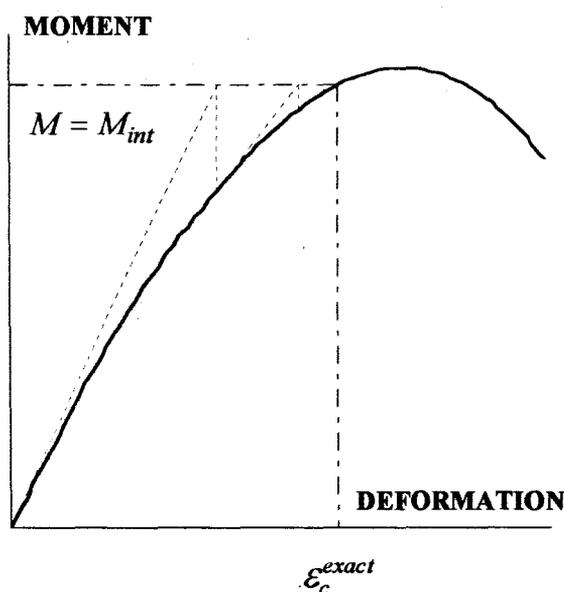


Figure I-4: Recherche de la courbure par la méthode directe

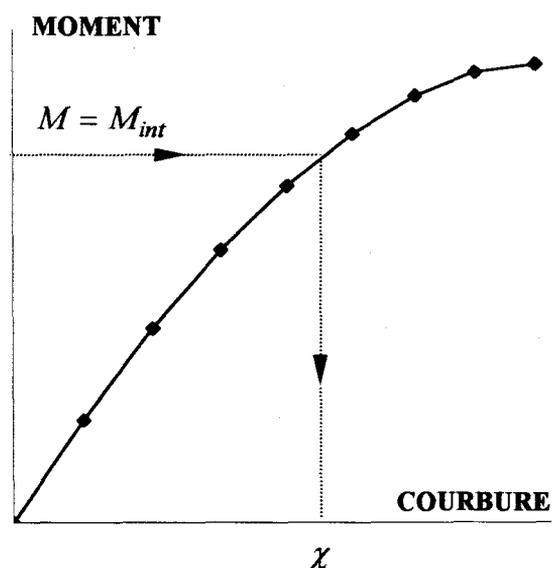


Figure I-5: Recherche de la courbure par la méthode indirecte

### I.4.1. Recherche indirecte: méthode pas à pas

Dans le cas où les comportements des matériaux (les fonctions  $f'_c$ ,  $f_s$  et  $f'_s$ ) sont linéaires, on peut exprimer directement la courbure d'une section en fonction du moment sollicitant  $M$ . Hormis ce cas, le calcul des valeurs des déformations ne peut se faire que pas à pas. Les hypothèses simplificatrices sont les suivantes:

- H1: La section n'a aucune courbure initiale;
- H2: Les déformations dans la section ont une répartition linéaire;
- H3: Nous négligeons la variation de la longueur de l'axe neutre;
- H4: Nous négligeons l'effet de l'effort tranchant sur les déformations.

Il est donc possible d'établir pas à pas le diagramme moment-courbure au moyen de la procédure suivante:

La déformation maximale du béton comprimé  $\varepsilon_c$  étant fixée, la hauteur  $x$  du béton comprimé est déterminée par la relation I-6 en utilisant l'une de deux méthodes signalées (la méthode classique ou la méthode des cas possibles). Enfin, le moment correspondant est calculé en utilisant l'équation I-8. De plus, en raison de l'hypothèse de la conservation de la planéité de la section droite, la courbure est liée par la relation  $\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_c}{x}$ .

Ce processus, répété pour des déformations croissantes  $\varepsilon_c$ , permet d'obtenir des points successifs du diagramme moment-courbure. La courbure correspondant à un moment  $M$  peut dès lors être déterminée par interpolation linéaire sur ce diagramme moment-courbure. Cette méthode peut être qualifiée d'indirecte, car elle nécessite dans un premier temps la détermination point par point du diagramme moment-courbure.

#### *Organigramme de la méthode indirecte*

L'organigramme de la figure I-6 présente les étapes de calcul:

1. Lecture des données géométriques et mécaniques des différents matériaux constitutifs de la section en béton armé;
2. Choix d'une loi de comportement du béton;
3. Choix d'une loi de comportement des aciers tendus et comprimés;
4. Choix du pas pour la déformation maximale du béton comprimé;

5. Détermination de la hauteur de la zone comprimée  $x$  et de l'état de contraintes dans les matériaux;
6. Comparaison de la déformation des matériaux et des déformations à la rupture. Si celles-ci ne sont pas atteintes, retour à l'étape 4 pour le pas suivant de la déformation;
7. Calcul du moment fléchissant et de la courbure correspondant à la déformation considérée;
8. Enregistrement des résultats obtenus  $(\frac{1}{r}, M_{int})$ ;
9. Interpolation linéaire sur cette loi moment-courbure pour obtenir la courbure correspondant à un moment  $M$ .

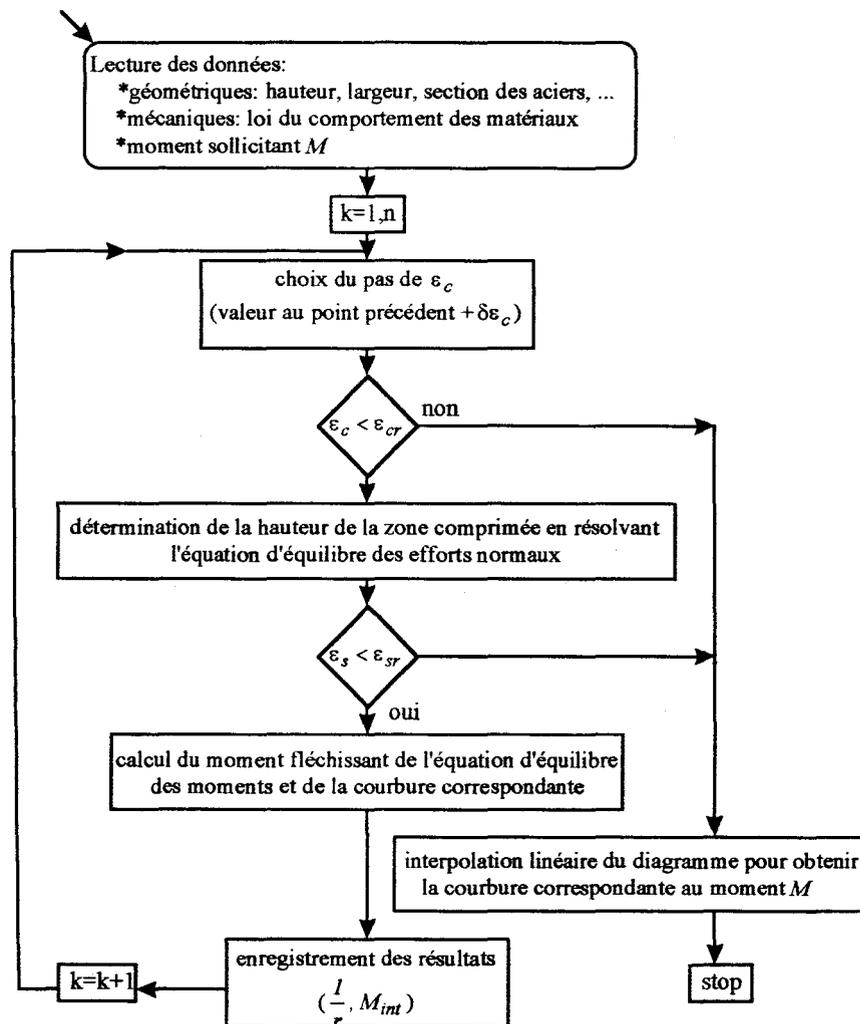


Figure I-6: Organigramme de la méthode indirecte

### I.4.2. Recherche directe

On peut aussi rechercher directement la courbure d'une section sollicitée par un moment de flexion  $M$ , en résolvant numériquement l'équation I-7. Pour cela, on utilise une méthode numérique par itérations successives. A partir de l'équation I-7 on écrit la formulation suivante:

$$K(\varepsilon_c, x) \varepsilon_c = M_{int}(\varepsilon_c, x) \quad (\text{I-11})$$

ou:

$$R(\varepsilon_c, x) = M_{int}(\varepsilon_c, x) - K(\varepsilon_c, x) \varepsilon_c = 0 \quad (\text{I-12})$$

Résoudre le système non linéaire (I-11), c'est chercher une valeur de  $\varepsilon_c$  qui rende le résidu  $R(\varepsilon_c, x)$  aussi proche que possible de zéro. La solution exacte rend  $R(\varepsilon_c, x)$  nul. La recherche de la solution  $\varepsilon_c$  se fait de manière itérative. Le choix de la raideur tangente  $K$  pour conduire la résolution incrémentale et itérative du problème détermine la nature de la méthode et par suite ses conséquences sur les temps de calcul.

La majorité des algorithmes conduit à résoudre un système d'équations linéaires à chaque itération. Le choix de l'algorithme doit tenir compte de plusieurs facteurs:

- le type de non-linéarité : localisée ou non , prépondérante ou non;
- l'existence d'une ou plusieurs solutions;
- la disponibilité d'une méthode de construction d'une solution approchée;
- la précision et la rapidité de convergence désirées;
- le risque de divergence.

En pratique, il n'existe pas de méthode générale valable pour tous les cas. En annexe I, on présente deux méthodes performantes et fréquemment utilisées; la méthode de SUBSTITUTION et la méthode de NEWTON-RAPHSON.

#### *Organigramme de la méthode directe*

L'organigramme de la figure I-7 présente les étapes de calcul sont résumées comme suit:

1. Lecture des données géométriques et mécaniques des différents matériaux constitutifs de la section béton armé;
2. Choix d'une loi de comportement du béton;
3. Choix d'une loi de comportement des aciers tendus et comprimés;

4. Choix d'une valeur du moment sollicitant;
5. Détermination des déformations de la fibre extrême comprimée de la section par la méthode directe comme NEWTON-RAPHSON ou NEWTON-RAPHSON MODIFIEE;
6. Détermination de la hauteur de la zone comprimée  $x$  et des contraintes dans les matériaux;
7. Calcul du moment fléchissant et de la courbure correspondante de la déformation calculée;
8. Vérification de convergence. Si la convergence n'est pas atteinte, retour à l'étape 4 pour modifier la valeur du moment sollicitant;
9. Enregistrement des résultats obtenus  $(\varepsilon_c, M_{int})$  ou  $(\frac{1}{r}, M_{int})$  ;
10. Calcul du résidu. S'il est proche de zéro, la solution est atteinte, sinon retour à l'étape 5 pour le pas suivant.

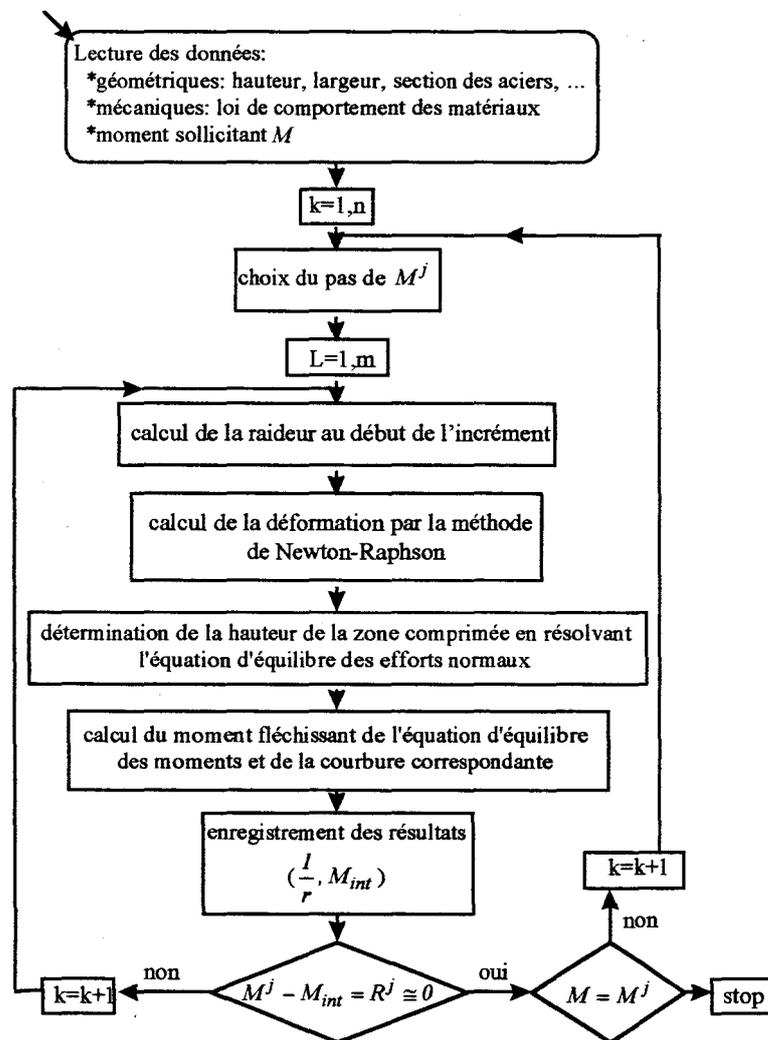


Figure I-7: Organigramme de la méthode de NEWTON-RAPHSON

### I.4.3. Exemples numériques et étude paramétrique

Pour comparer les méthodes proposées et mettre en évidence le comportement, d'une poutre, on va montrer quelques exemples numériques et une étude paramétrique sur des sections de dimensions constantes et discuter les résultats obtenus. On utilise les deux sections en béton armé des poutres de l'étude expérimentale (figure I-8). Les caractéristiques des sections considérées sont:

- ⇒ Largeur: 15 cm
- ⇒ Hauteur: 28 cm
- ⇒ Hauteur utile: 22,4 cm (type A) ; 25,8 cm (type B)
- ⇒ Hauteur de l'acier comprimé: 5,2 cm (type A) ; 1,9 cm (type B)
- ⇒ Enrobage: 4 cm (type A) ; 1 cm (type B)
- ⇒ Déformation maximale unitaire du béton: 0.002 m/m
- ⇒ Module de déformation du béton: 38000 MPa
- ⇒ Résistance du béton en compression  $f'_c$  et en traction  $f'_t$ : marquée sur chaque figure
- ⇒ Section d'acier tendu: 4,02 cm<sup>2</sup> (type A) ; 2,26 cm<sup>2</sup> (type B)
- ⇒ Section d'acier comprimé: 1 cm<sup>2</sup> (type A) ; 0,565 cm<sup>2</sup> (type B)
- ⇒ Module de déformation de l'acier: 210000 MPa
- ⇒ Limite élastique de l'acier : 400 MPa

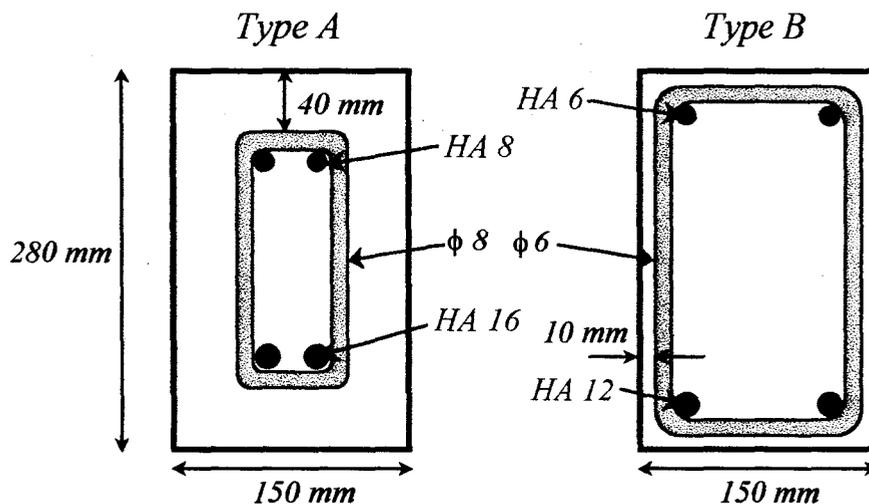


Figure I-8: Eléments en béton armé de type A et B

Pour le comportement des matériaux et en particulier celui du béton en compression, il existe une grande variété d'équations mathématiques décrivant la relation entre les contraintes et les déformations. On peut citer par exemple celles proposées par le CEB et l'ACI. La relation que propose l'ACI pour modéliser le comportement du béton en compression est la suivante:

$$\begin{aligned}\sigma_c(\varepsilon_c) &= f'_c \left( \frac{2 \varepsilon_c}{0,002} - \left( \frac{\varepsilon_c}{0,002} \right)^2 \right) && \text{pour } \varepsilon_c < \varepsilon_{c1} = 0,002 \\ \sigma_c(\varepsilon_c) &= f'_c (1 - 300 (\varepsilon_c - 0,002)) && \text{pour } \varepsilon_c \geq \varepsilon_{c1}\end{aligned}$$

L'effort normal de compression dans le béton pour chaque intervalle de  $\varepsilon_c$  (et de traction respectivement) sont:

$$N_c(\varepsilon_c, x) = \Gamma(\varepsilon_c) X(x) \text{ avec: } \begin{cases} \Gamma(\varepsilon_c) = b f'_c \left( \frac{\varepsilon_c}{0,002} - \frac{1}{3} \left( \frac{\varepsilon_c}{0,002} \right)^2 \right) \\ \Gamma(\varepsilon_c) = b f'_c \left( -150 \varepsilon_c + 1,6 - \frac{0,038}{30 \varepsilon_c} \right) \end{cases} ; X(x) = x$$

$$N_t(\varepsilon_c, x) = b E_c \frac{h_{bt}^2 \varepsilon_c}{2 x}$$

Les efforts normaux de traction et de compression dans l'acier, en supposant un comportement élastique parfaitement plastique, sont:

$$N_s[N'_s] = \begin{cases} A_s E_s \varepsilon_s [A'_s E'_s \varepsilon'_s] & \text{si } f_s \leq f_y [f'_s \leq f'_y] \\ A_s f_y [A'_s f'_y] & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour trouver la hauteur de la zone comprimée  $x$ , on utilise les deux méthodes.

### **Par la méthode classique**

Il suffit de satisfaire l'équation d'équilibre des efforts normaux, pour une déformation maximale du béton comprimé fixée  $\varepsilon_c$ , par changement progressif de la valeur de la hauteur de la zone comprimée (par exemple de zéro à  $h$ ). Le critère d'équilibre détermine la précision de la valeur.

$$\Gamma(\varepsilon_c) X(x) + \begin{cases} A'_s E'_s \varepsilon'_s & \text{si } f'_s \leq f'_y \\ A'_s f'_y & \text{sinon} \end{cases} = b E_c \frac{h_{bt}^2 \varepsilon_c}{2 x} + \begin{cases} A_s E_s \varepsilon_s & \text{si } f_s \leq f_y \\ A_s f_y & \text{sinon} \end{cases}$$

**Par la méthode des cas possibles**

Dans ce cas, on a 4 cas possibles ( $m \times n \times p = 4$ ) pour une déformation maximale du béton comprimé fixée  $\varepsilon_c$ . La valeur de la hauteur comprimée est choisie parmi les quatre valeurs calculées d'après l'équation I-6:

- ◆ Hypothèse: Les aciers tendus et comprimés ne sont pas plastifiés ( $\varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy}$ ,  $\varepsilon'_s \leq \varepsilon'_{sy}$ );

$$\text{radical}(\varepsilon_c) = \left[ \left( \varepsilon_c (A_s E_s + A'_s E'_s) \right)^2 + 4 \Gamma \varepsilon_c (A_s E_s d + A'_s E'_s d') \right]^{1/2}$$

$$x1 = \left( \text{radical} - \varepsilon_c (A_s E_s + A'_s E'_s) \right) / (2\Gamma)$$

$$\text{si } \varepsilon_s = \frac{d - x1}{x1} \varepsilon_c \leq \varepsilon_{sy} \text{ et } \varepsilon'_s = \frac{x1 - d'}{x1} \varepsilon_c \leq \varepsilon'_{sy} \Rightarrow x = x1$$

*sinon*  $\Rightarrow$  hypothèse suivante

- ◆ Hypothèse: Seuls les aciers tendus sont plastifiés ( $\varepsilon_s > \varepsilon_{sy}$ ,  $\varepsilon'_s \leq \varepsilon'_{sy}$ );

$$\text{radical}(\varepsilon_c) = \left[ \left( A'_s E'_s \varepsilon_c - A_s f_y \right)^2 + 4 \Gamma A'_s E'_s d' \varepsilon_c \right]^{1/2}$$

$$x2 = \left( \text{radical} - (A'_s E'_s \varepsilon_c - A_s f_y) \right) / (2\Gamma)$$

$$\text{si } \varepsilon_s = \frac{d - x2}{x2} \varepsilon_c > \varepsilon_{sy} \text{ et } \varepsilon'_s = \frac{x2 - d'}{x2} \varepsilon_c \leq \varepsilon'_{sy} \Rightarrow x = x2$$

*sinon*  $\Rightarrow$  hypothèse suivante

- ◆ Hypothèse: Seuls les aciers comprimés sont plastifiés ( $\varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy}$ ,  $\varepsilon'_s > \varepsilon'_{sy}$ );

$$\text{radical}(\varepsilon_c) = \left[ \left( A_s E_s \varepsilon_c + A'_s f'_y \right)^2 + 4 \Gamma A_s E_s d \varepsilon_c \right]^{1/2}$$

$$x3 = \left( \text{radical} - (A_s E_s \varepsilon_c + A'_s f'_y) \right) / (2\Gamma)$$

$$\text{si } \varepsilon_s = \frac{d - x3}{x3} \varepsilon_c \leq \varepsilon_{sy} \text{ et } \varepsilon'_s = \frac{x3 - d'}{x3} \varepsilon_c > \varepsilon'_{sy} \Rightarrow x = x3$$

*sinon*  $\Rightarrow$  hypothèse suivante

- ◆ Hypothèse: Les aciers tendus et comprimés sont plastifiés ( $\varepsilon_s > \varepsilon_{sy}$ ,  $\varepsilon'_s > \varepsilon'_{sy}$ ).

$$x4 = \left( A_s f_y - A'_s f'_y \right) / \Gamma$$

$$\text{vérifie } \varepsilon_s = \frac{d - x4}{x4} \varepsilon_c > \varepsilon_{sy} \text{ et } \varepsilon'_s = \frac{x4 - d'}{x4} \varepsilon_c > \varepsilon'_{sy} \Rightarrow x = x4$$

De cette manière, on obtient la valeur exacte de  $x$ , sans faire d'itération, ce qui permet un gain de temps de calcul informatique très appréciable. Le moment interne correspondant est calculé comme suit:

$$M_{int} \stackrel{\text{si } \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cl}}{=} b f'_c x^2 \left( \varepsilon_c / 0,003 - \varepsilon_c^2 / 1,6 \times 10^{-5} \right) + b f'_c x (d - x) \left( \varepsilon_c / 0,002 - (\varepsilon_c / 0,002)^2 / 3 \right) + N'_s (d - d') - N_t (d - x - 2h_{bt} / 3)$$

$$M_{int} \stackrel{\text{si } \varepsilon_c > \varepsilon_{cl}}{=} b f'_c \left( \frac{x}{\varepsilon_c} \right)^2 \left( -100 \varepsilon_c^3 + 0,8 \varepsilon_c^2 - 2,2 \times 10^{-5} / 30 \right) + b f'_c \frac{x}{\varepsilon_c} (d - x) \left( -150 \varepsilon_c^2 + 1,6 \varepsilon_c - 0,038 / 30 \right) + N'_s (d - d') - N_t (d - x - 2h_{bt} / 3)$$

Enfin, la courbure est calculée par la relation  $\frac{1}{r}(\varepsilon_c, x) = \frac{\varepsilon_c}{x}$ .

**Les critères de rupture:** Les critères de rupture sont soit la rupture de la zone comprimée du béton ( $\varepsilon_c \geq 0,003$ ) soit la rupture de l'acier ( $\varepsilon_s \geq 10\%$ ).

#### I.4.3.1. COURBE CLASSIQUE MOMENT-COURBURE

La figure I-9 montre un exemple classique d'une courbe moment-courbure en déformation contrôlée. Les points correspondants aux changements du comportement et l'influence de la prise en considération de l'effort normal induit par le béton tendu sur la courbe moment-courbure sont montrés. Les points 1 à 4 montrent des singularités non dérivables de la courbe moment-courbure, ce qui ne nous permet pas d'utiliser la méthode de NEWTON-RAPHSON.

Deux calculs ont été effectués. Le premier calcul est basé sur une hypothèse qui ne considère aucun rôle pour le béton tendu. Le deuxième calcul, qu'on appelle calcul classique, considère un comportement élastique fragile pour le béton tendu.

Le diagramme montre que l'effet du béton tendu est important pour les valeurs de courbures faibles surtout au moment de la fissuration du béton tendu. Cet effet est négligeable après la fissuration.

Le point 1 est la fin de la phase élastique et la fissuration commence. La raideur de la phase élastique dépend des valeurs des modules du béton et de l'acier. L'augmentation de ces valeurs amène l'augmentation de la raideur. La fissuration fait apparaître des non linéarités localisées très importantes (point 1) et une chute du comportement.

Le point 2 est la fin du processus de fissuration du béton tendu. Il faut noter que, en cas de contrôle de la courbe de comportement par le moment appliqué, le point 2 disparaîtra et la courbe de comportement suit un palier horizontal après le début de la fissuration.

La raideur de la courbe entre les points 2 et 3 ne dépend que des comportements du béton en compression et des aciers, car l'effet du raidissement en traction n'est pas considéré ici. Le point 3 correspond au début de la plastification des aciers tendus.

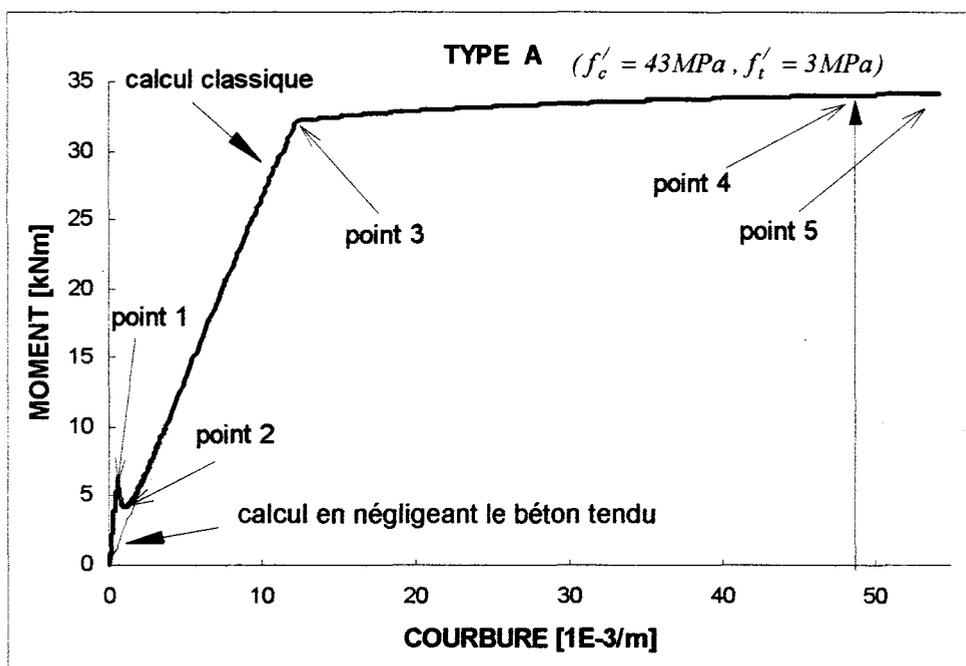


Figure I-9: Diagramme moment-courbure et l'effet du béton tendu en calcul classique

Le point 4 correspond au début du deuxième palier de la courbe de comportement du béton comprimé selon le règlement ACI. Dans le cas général, ce point peut se situer avant ou après la plastification des aciers. Enfin, le point 5 correspond à la rupture.

#### I.4.3.2. ETUDE PARAMETRIQUE

On effectue une étude paramétrique sur la résistance en traction et en compression du béton, l'enrobage (inférieur et latéral) et la section d'acier tendu.

$f'_c$  et  $f'_t$  peuvent varier dans le temps. L'étude paramétrique (par exemple pour la section de type A) montre que la résistance en traction du béton ne joue pas un rôle important sur le

(figure I-10a). L'accroissement de la valeur de  $f_t'$  est cause de la continuation de la phase élastique et évidemment du retard de la fissuration.

La figure I-10b montre que la résistance en compression du béton n'a également pas d'influence importante. L'augmentation de la valeur de  $f_c'$  augmente légèrement la raideur du comportement post fissuration.

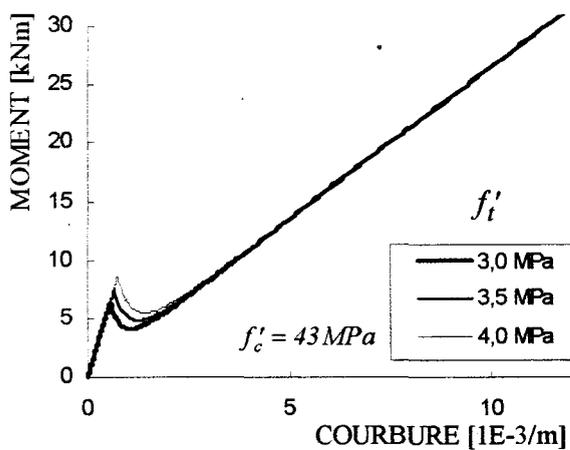
L'effet de l'enrobage des armatures tendues C et des armatures comprimées et l'enrobage latéral sont présentés figure I-10c,d,e. L'enrobage inférieur, supérieur ou latéral d'une section en béton armé peut diminuer par exemple en raison de l'éclatement du béton causé par la corrosion ou le gel. En figure I-10c, on considère un enrobage supérieur moins important pour le type A ( $d' = 2,2\text{ cm}$ ) et donc une hauteur utile de  $d=19,4\text{ cm}$  au lieu de la hauteur utile du type A qui est égale à  $d=22,4\text{ cm}$ . La diminution de l'enrobage supérieur amène la diminution de la résistance et la capacité portante de la section. Cette augmentation est causée par la diminution du moment d'inertie de la section.

La figure I-10d présente un autre effet de l'enrobage. On considère encore un enrobage inférieur C de  $1\text{ cm}$  en supposant un éclatement du béton tendu égal à  $3\text{ cm}$ , par exemple à cause de la corrosion. La hauteur utile ne change donc pas. Cette fois on observe une diminution de la rigidité dans la phase élastique, mais on n'observe aucun changement après fissuration car on n'a pas considéré l'effet du raidissement en traction, qui dépendra de la hauteur du béton tendu (voir le chapitre II, la figure II-16).

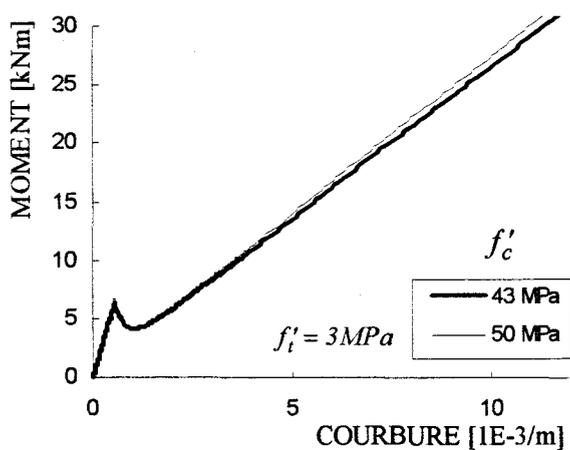
L'effet de l'enrobage latéral est montré figure I-10e. On a considéré comme pour le cas de l'enrobage inférieur, une diminution latérale de la couche de béton égale à  $3\text{ cm}$  pour chaque côté. Elle montre que la perte latérale de béton, par exemple par la corrosion ou l'effet du gel, peut diminuer la résistance dans chaque phase et avancer la fissuration.

La figure I-10f donne un exemple pour différentes valeurs des sections des aciers. Elle montre l'influence de la diminution de  $A_s$  sur la résistance de la section. On considère une valeur moins importante de  $A_s$  pour le type A ( $A_s=2,26\text{ cm}^2$ ). La diminution de  $A_s$  affecte considérablement la résistance dans la phase post fissuration. Dans la phase élastique, l'accroissement de  $A_s$  n'a pas influence, car alors la raideur de la courbe de comportement et le début de la fissuration ne dépendent que des modules d'élasticité et de la géométrie de la section et la section de l'acier est négligeable devant la section totale.

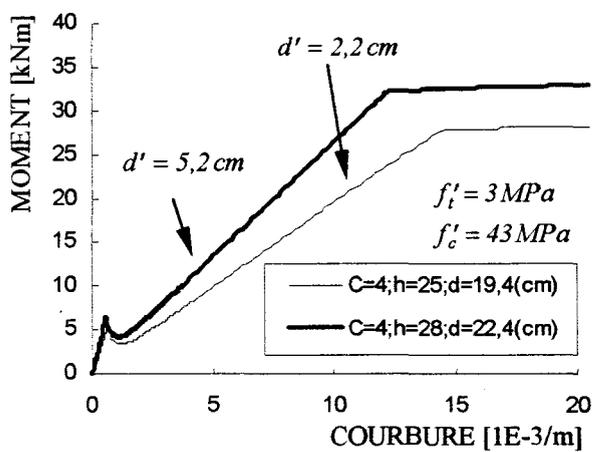
**TYPE A**



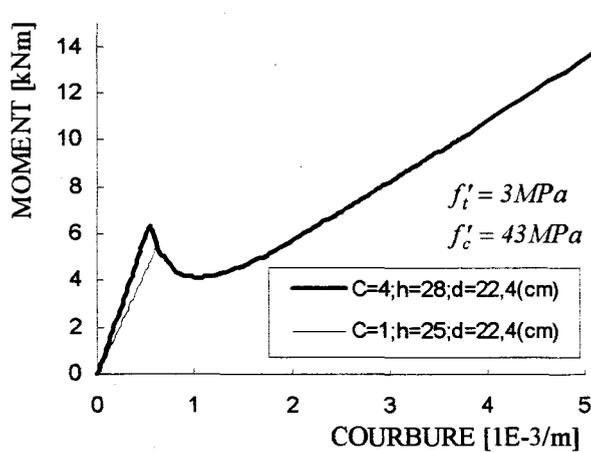
(a)



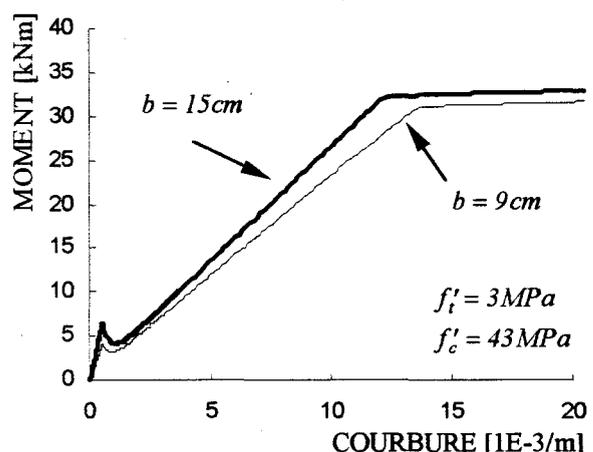
(b)



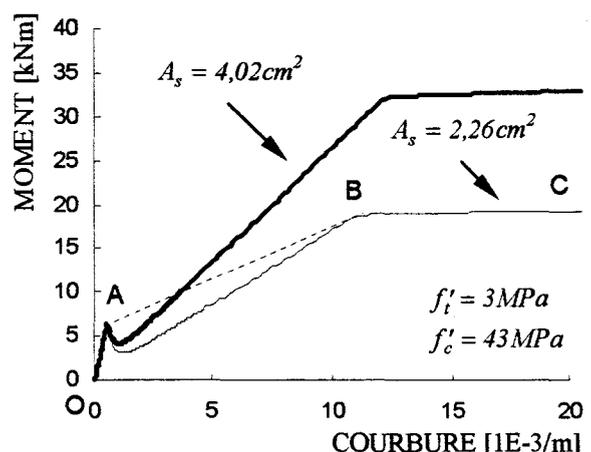
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure I-10: Diagramme moment-courbure pour les sections de type A et: (a) l'effet de  $f'_t$  (b) l'effet de  $f'_c$  (c) l'effet de l'enrobage supérieur (d) l'effet de l'enrobage inférieur (e) l'effet de l'enrobage latéral (f) l'effet de  $A_s$

ALWIS 1990 [4] a proposé un diagramme tri-linéaire définissable à partir de la connaissance des points  $(\chi_{cr}, M_{cr})$  et  $(\chi_y, M_y)$ , correspondant respectivement à la première fissuration et à l'état limite de plastification des armatures. La figure I-10f montre aussi que cette modélisation moment-courbure par trois segments de droite, ne donne pas une bonne approximation pour le comportement post fissuration (segment  $AB$ ).

Les variations de la hauteur de la zone comprimée  $x$  pour les poutres de type  $A$  et  $B$  et l'influence des deux calculs, classique et béton tendu négligé, sur  $x$  est présentée figure I-11. Elle montre que la hauteur comprimée est souvent constante pendant le chargement pour les deux calculs. Dans le cas du calcul classique, nous observons seulement une chute importante pendant un moment bref, ce qui confirme que la propagation des fissures est très rapide.

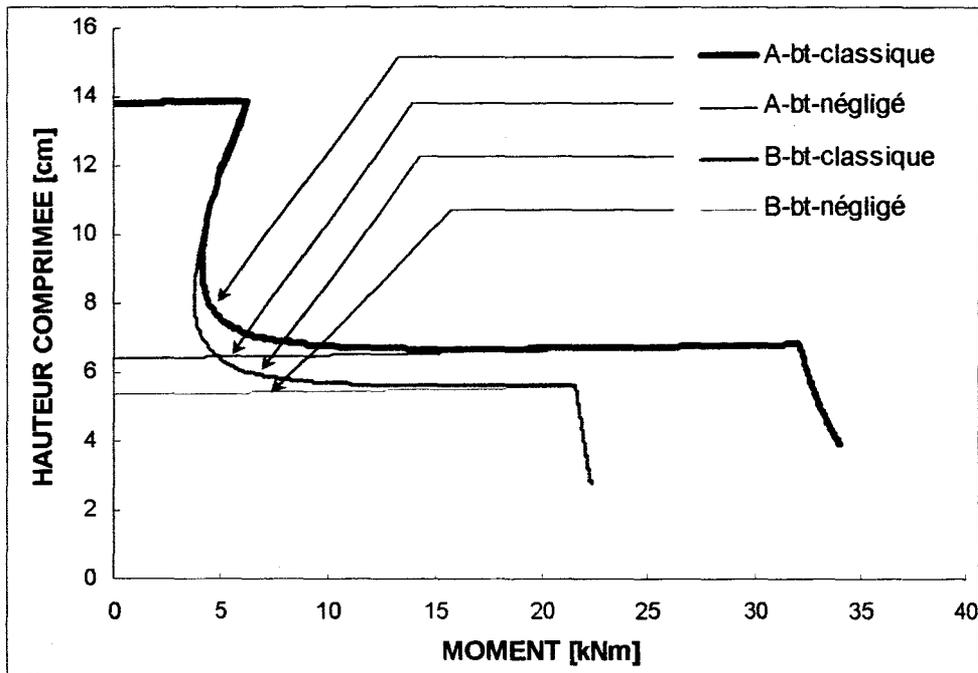


Figure I-11: Variations de la hauteur de la zone comprimée

Quand on néglige totalement le béton tendu, on a des valeurs plus faibles de  $x$  qui restent presque constantes jusqu'à la plastification des aciers tendus. Deux chutes s'observent. L'une correspond au début de la fissuration pour le calcul classique et l'autre correspond à la plastification des aciers tendus, ce qui aboutit à la rupture.

L'évaluation des efforts normaux dans le cas du calcul classique est présentée figure I-12.  $N_c$  et  $N_t$  sont respectivement les efforts en compression et en traction du béton,  $N_s$  et  $N'_s$  sont

respectivement les efforts en compression et en traction des aciers. On voit que les efforts  $N_c$  et  $N_s$  sont en concurrence pour reprendre l'effort de la section, mais ce sont les aciers tendus qui perdent à la fin à cause de leur plastification. Jusqu'au début de la fissuration, la participation de  $N_t$  est comparable à  $N_c$ . Par contre la participation de  $N_s$  est faible dans cette phase et  $N'_s$  n'a presque jamais participé pendant tout le chargement.

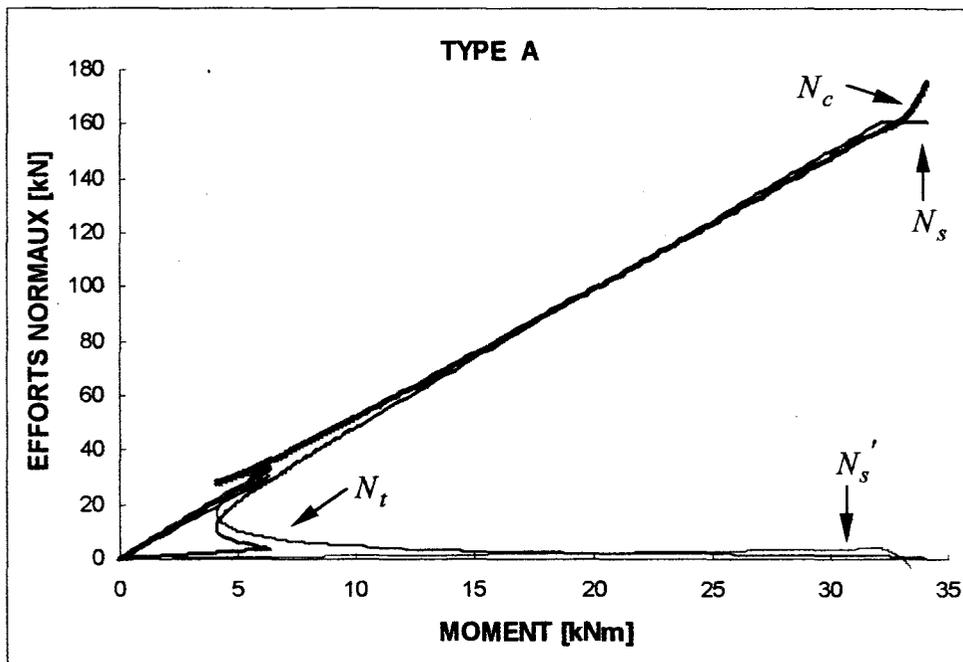


Figure I-12: Participation des efforts normaux sur la section

Pour montrer la performance, la précision et la validation numérique des méthodes utilisées, directe et indirecte, on a construit un exemple numérique pour trouver la courbure correspondante à un moment ( $30 \text{ kNm}$ ), avec le modèle ACI en prenant les caractéristiques de la section de type *A* et en considérant le béton tendu.

On peut voir qu'on aboutit au même résultat que ce soit par une recherche directe ou indirecte. En utilisant la méthode indirecte avec 55 points la courbure correspondant au moment  $30 \text{ kNm}$  est  $11,36 \times 10^{-3} / \text{m}$  (pas de déformation:  $5E-5 \text{ m/m}$ ) tandis qu'avec la méthode NEWTON-RAPHSON on obtient le même résultat avec 3 itérations et avec la méthode NEWTON-RAPHSON MODIFIEE avec 10 itérations. Le temps de calcul est donc optimisé avec la méthode NEWTON-RAPHSON.

## I.5. CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons proposé deux méthodes numériques permettant de déterminer la courbure d'une section rectangulaire en béton armé soumis à une sollicitation de flexion simple. La méthode des cas possibles a été proposée pour trouver exactement la valeur de la hauteur comprimée  $x$ . Cette méthode supprime l'itération sur  $x$  et donne la valeur exacte de  $x$ . En conséquence elle optimise le temps de calcul.

Nous avons vu que si la détermination de la courbure de flexion par la méthode indirecte exige une modélisation du diagramme moment-courbure par un nombre de points qui est supérieur au nombre d'itérations nécessaires avec la méthode directe, celle-ci, par contre, évite le problème de divergence au voisinage du moment maximum.

Dans ce chapitre, on a présenté l'utilisation de la méthode classique de moment-courbure dans le cas où on suppose pour le béton tendu un comportement élastique fragile. Les exemples présentés ne prennent pas en considération la contribution du béton tendu après fissuration. Cette contribution rigidifie le comportement à cause de l'adhérence acier-béton. Pour prendre en compte cet effet de raidissement, nous modifions dans la suite de notre travail la méthode moment-courbure en simulant la partie tendue par un tirant.

## **CHAPITRE II**

### **SIMULATION DU RAIDISSEMENT EN TRACTION PAR UN TIRANT MODELES MOMENT-COURBURE MODIFIES**

*Ce chapitre se compose de trois parties. Dans la première, on présente la fissuration et la rigidité d'une zone de béton armé tendue et en conséquence le phénomène de raidissement en traction " Tension Stiffness Model ". Dans la seconde partie, considérant un assemblage poutre-tirant nous modélisons la partie tendue d'une poutre par un tirant centré et nous modifions le comportement moment-courbure. Nous proposons ensuite la loi de comportement du tirant excentré, en phase élastique et post fissuration, et celui du tirant corrodé pour modifier notre modèle.*

## II.1. INTRODUCTION

Dans le calcul classique du comportement en flexion des pièces en béton armé, le diagramme contrainte-déformation en traction est supposé être linéaire jusqu'à la valeur de résistance puis descendre brusquement à zéro, ce qui signifie qu'on néglige totalement la partie tendue du béton après fissuration. Le comportement réel diffère du modèle élastique linéaire. Après fissuration, le béton tendu situé entre les fissures est encore capable de reprendre une partie des efforts de traction en raison de l'adhérence du béton avec l'armature. De cette manière, le raidissement de la pièce dû à la contribution du béton tendu est supérieur à ce qu'il est quand on la néglige. Cet effet est appelé *le raidissement en traction (tension stiffness)*.

L'étude théorique du raidissement en traction des structures uni-dimensionnelles en béton armé passe par l'utilisation du modèle physique du tirant en béton armé soumis à traction pure. Ce genre de corps d'épreuve est classiquement utilisé pour étudier l'adhérence des armatures de même que la fissuration induite par cette adhérence.

Au chapitre I, on a expliqué que connaissant les lois de comportement des matériaux, on est capable de calculer avec une procédure pas à pas la courbe de moment-courbure pour une section droite en béton armé. En fait, quand le béton tendu est négligé après fissuration, nous ne prenons pas en considération l'effet du raidissement en traction, qui traduit le comportement réel des armatures enrobées de béton tendu et fissuré.

Dans ce qui suit, on appellera loi de comportement d'un tirant en béton armé soumis à traction pure la relation entre l'effort normal appliqué à la pièce et la déformation mesurée sur une grande base (recouvrant plusieurs fissures) de cette même pièce dans le sens de l'effort appliqué. Tous les modèles proposés dans la littérature qui étayaient cette conception utilisent comme relation fondamentale la liaison entre la déformation moyenne d'une armature enrobée de béton fissuré et la déformation de cette même armature considérée isolément.

Dans notre travail, nous supposerons que la relation contrainte-déformation pour un tirant peut être également utilisée comme une propriété constitutive pour la section étudiée.

## II.2. RAIDISSEMENT ET FISSURATION

### II.2.1. Rigidité d'une zone de béton armé tendue

En 1899, CONSIDERE [5], en essayant des petits prismes de mortier renforcé avec des fils d'acier, observe que les réponses charge de traction-déformation étaient presque parallèles à la réponse d'un acier seul mais nettement supérieures.

En 1909, MORSCH [6] explique que le béton fissuré a la capacité de diminuer la déformation dans le renforcement en raison de l'existence de la contrainte en traction du béton entre les fissures. Ce phénomène est ultérieurement nommé *le raidissement en traction*. Même après fissuration, le béton tendu situé entre les fissures est encore capable de résister et d'absorber des efforts de traction à cause de l'adhérence du béton avec l'armature. Cette rigidité totale peut être simulée par l'utilisation d'une courbe contrainte-déformation pour le béton tendu, qui comprend une branche graduellement descendante qui représente la diminution de la rigidité de la zone tendue et la progression de la fissure.

Trois sortes de courbes contrainte-déformation en traction sont montrées figure II-1. SCANLON et MURRAY 1974 [7] ont proposé une courbe contrainte-déformation pas à pas, montrée figure II-1a. LIN et SCORDELIS 1975 [8] ont utilisé une courbe à déchargement graduel, figure II-1b.

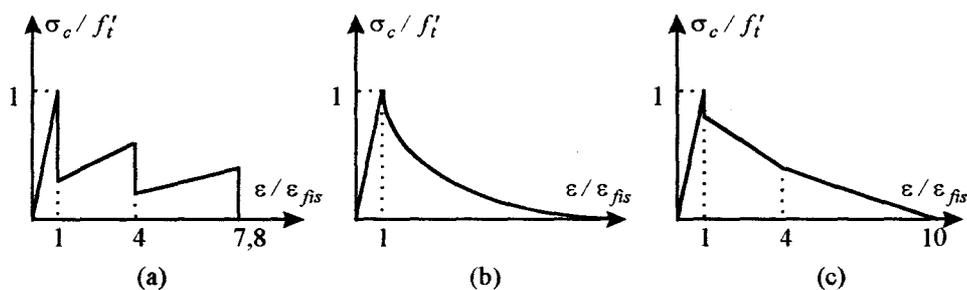


Figure II-1: Courbe déformation-contrainte en traction du béton tendu (a) Réponse pas à pas après fissuration; (b) Déchargement graduel après fissuration; et (c) Discontinuité au déchargement après fissuration

GILBERT et WARNER 1978 [9] ont essayé d'utiliser plusieurs variantes des courbes de SCANLON et LIN. Ils ont proposé une courbe nouvelle consistant en une petite chute de la résistance juste après fissuration, suivie par une branche de déchargement linéaire, qui est montrée figure II-1c.

D'autres modèles utilisant l'énergie de fissuration du béton avec l'approche de la mécanique de la rupture ont été développés et sont utilisés dans des analyses par éléments finis (DAERGA et al. 1989 [10]; BAZANT 1992 [11]). BAZANT, en considérant le raidissement en traction du béton comme une augmentation de la raideur de l'acier de renforcement, a calculé le raidissement en traction d'un groupe de fissures en fonction d'un rapport d'armature équivalente. L'approche de la mécanique de la rupture ne sera pas retenue dans notre étude. Nous étudions le comportement d'un élément en béton armé avant fissuration, à l'état homogène, et après fissuration quand une fissure est entièrement formée, sans analyser les étapes intermédiaires de propagation de la fissure.

Plusieurs approches basées sur des résultats expérimentaux sont proposées dans la littérature (CARREIRA et CHU 1986 [12], CREAZZA et DI MARCO 1991 [13], BELARBI et HSU 1994 [14]). CREAZZA et DI MARCO 1993 [15] ont proposé un modèle analytique pour un élément fissuré (figure II-2) de poutre en béton armé, basé sur quatre équations, l'équilibre des forces et des moments, le glissement et la compatibilité de déformations.

Après une description synthétique des phases caractéristiques du comportement structurel, qui est discontinue en raison de l'ouverture des fissures, ils présentent les formulations analytiques et les solutions qui permettent de déterminer la relation moment-courbure moyenne d'une poutre compte tenu de la contribution du béton tendu.

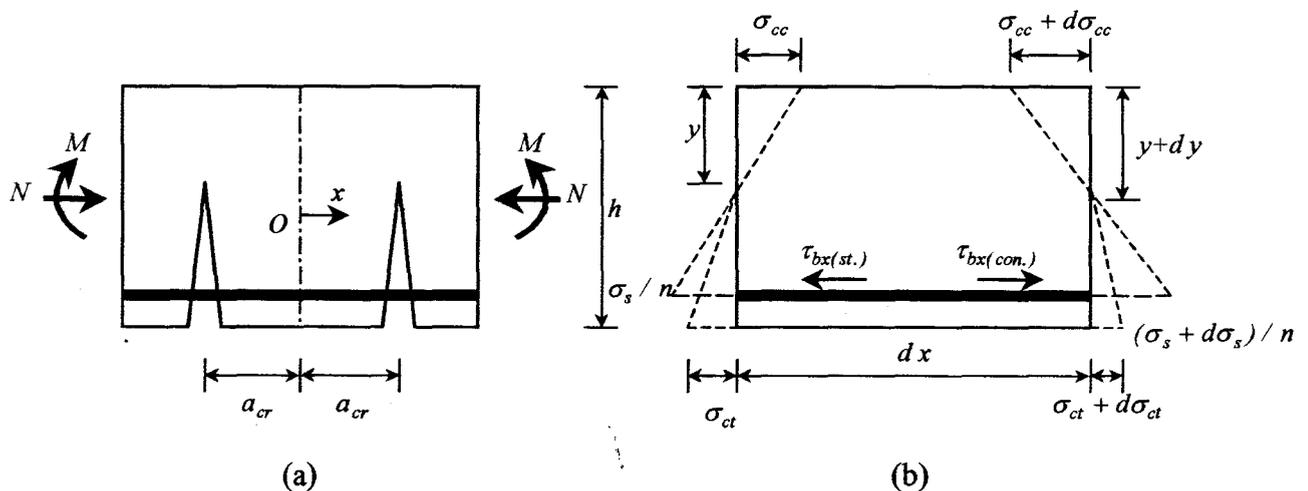


Figure II-2: (a) Partie d'une poutre fissurée en béton armé (b) état de contraintes sur un élément fissuré (CREAZZA et DI MARCO 1993[15])

Parmi ces modèles, le modèle physique le plus simple qui correspond au phénomène du raidissement en traction est celui du *tirant* en béton armé soumis à traction pure. Ce genre de corps d'épreuve est souvent utilisé pour étudier l'adhérence des armatures de même que la

fissuration. Les lois de comportement de tirant n'interviennent pas seulement dans le cas des calculs analytiques des déplacements des pièces fléchies. La modélisation réaliste du comportement non linéaire des structures par la méthode des éléments finis impose de tenir compte de la présence du béton tendu entre les fissures. Une loi simple par son approche macroscopique ou moyenne des déformations, se substitue avantageusement, dans certains cas, à l'approche microscopique traditionnelle. Enfin, on rencontre des situations où la connaissance de la loi de comportement de tirants en béton armé est utilisée par le calcul d'éléments structuraux dans des constructions hyperstatiques.

## **II.2.2. Fissuration d'une zone tendue**

### **II.2.2.1. CONTRAINTES ET MICROFISSURATION INITIALE**

Le retrait du béton n'est en général pas libre et le départ de l'eau va entraîner des contraintes internes. Cela induit dans le béton une microfissuration et des contraintes initiales. On peut résumer en disant que toute consommation d'une partie de l'eau présente dans le béton, due au séchage ou à la réaction d'hydratation du ciment, s'accompagne d'une diminution du volume apparent.

BUIL 1979 [16] a montré que les valeurs du retrait dû à la réaction d'hydratation du ciment, que l'on enregistre après prise, sont du même ordre que celles d'un retrait de dessiccation (dû au séchage) qui correspondrait à une diminution de teneur en eau égale à celle qui résulte de l'hydratation, d'où le nom de retrait d'auto-dessiccation. Le retrait d'auto-dessiccation provoque une mise en contraintes du squelette granulaire et le retrait de dessiccation induit un champ de contraintes hétérogènes ainsi qu'une fissuration de peau. D'autre part, pour des raisons physico-chimiques, les zones autour des grains (granulats, gravillons, sables) apparaissent en général comme des zones de plus faible résistance, sauf dans le cas des granulats poreux comme par exemple les granulats légers.

Enfin, il faut ajouter aux défauts décrits ci-dessus, ceux apparaissant lors de la mise en place du béton dans les moules (ou les coffrages). En effet, lors du coulage, le ressuage tend à augmenter la teneur en eau sous les plus gros granulats. Ce phénomène a donc pour conséquence de diminuer l'adhérence de l'interface sous les granulats. Il existe également un risque de ségrégation quand le béton est mal composé. Nous voyons donc que le béton en dehors de toute action extérieure (mécanique, thermique ou hygrométrique), possède une structure hétérogène et discontinue. L'existence de contraintes initiales autoéquilibrées dans le béton est un facteur très important pour la compréhension du comportement mécanique ultérieur du matériau. Ainsi, si l'on

considère une structure quelconque contenant des contraintes initiales avant tout chargement et que l'on charge cette structure dans son domaine non élastique, il va en résulter le phénomène suivant: la structure va se fissurer sous ce chargement ce qui va avoir pour conséquence de libérer les contraintes initiales et provoquer ainsi des déformations résiduelles.

### **II.2.2.2. EFFETS THERMIQUES ET HYGROMETRIQUES**

Lorsque l'on étudie les problèmes de fissuration d'une structure quelconque, on est obligé de tenir compte des conditions thermiques et hygrométriques extérieures à la structure, dans la mesure où elles jouent un rôle très important dans l'initialisation de l'endommagement. ACKER et EYMARD 1992 [17] ont montré que les coefficients de diffusivité de la chaleur et de diffusion de l'eau, qui sont relativement faibles dans le béton, provoquent dans le cas de pièces massives (grandes épaisseurs) des champs de température et d'hygrométrie non uniformes. Les gradients ainsi introduits ont généralement pour conséquence d'induire des contraintes de traction en surface de la structure, ce qui crée une microfissuration de peau répartie sur toute cette surface. Dans notre étude, nos éprouvettes ne sont pas massives et l'effet thermique peut donc être négligé.

### **II.2.2.3. EFFETS DES SOLLICITATIONS MECANIQUES**

Il existe dans la littérature un grand nombre de modélisations qui tentent de rendre compte de l'évolution structurale d'un matériau microfissuré ou présentant un défaut lorsqu'il subit une sollicitation mécanique. Certaines de ces modélisations s'appliquent à des milieux homogènes (pâte de ciment), d'autres à des milieux hétérogènes (pâte de ciment+granulats) sous sollicitations uniaxiales ou biaxiales. MAZARS 1984 [18] a fait une synthèse de ces modèles existants et a établi un tableau récapitulatif dans lequel il relie deux types différents de sollicitations (traction et compression uniaxiale) à des modes de propagation de la microfissuration (mode I, II ou mixte).

Nous avons expliqué que toute pièce en béton est le siège de contraintes initiales liées au retrait d'auto-dessiccation. Par conséquent, si, à partir d'un tel état initial nous appliquons un champ de contrainte local non homogène (ce qui est toujours le cas pour le béton) résultant de sollicitations mécaniques quelconques, plusieurs processus de fissuration sont envisageables:

- Les concentrations de contrainte aux interfaces granulats-pâte qui sont des zones de moindre résistance vont provoquer une initiation des microfissures dans ces zones.

- Les microfissures initiales présentes dans la pâte sont également susceptibles de se propager en fonction de leur longueur (longueur critique) et de leur orientation par rapport au champ de contrainte local.
- Il y a possibilité de création et de propagation de nouvelles microfissures par superposition aux contraintes initiales du champ de contrainte local induit, car des critères locaux en extension maximale ou en cisaillement peuvent être atteints.

### II.2.3. Développement des fissures dans un tirant

La figure II-3 montre un élément de tirant, renforcée par une seule armature en acier, avant fissuration. La force appliquée en traction est transférée dans les zones d'extrémité du tirant de l'acier au béton par la contrainte d'adhérence. Cette zone est notée D, région dans laquelle il y a une distribution complexe des contraintes. Au-delà de la région D, la contrainte d'adhérence est nulle et les déformations dans le béton et l'acier sont égales avant fissuration le long du tirant. Cette zone est nommée B.

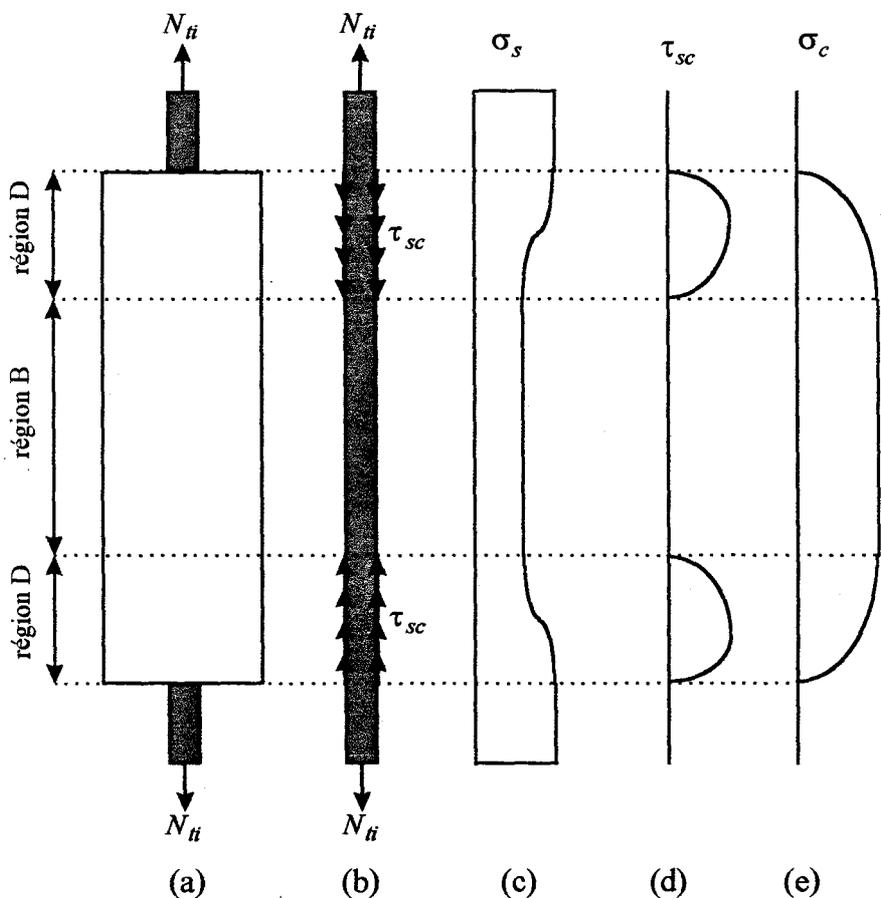


Figure II-3: Contraintes actives sur le béton et l'acier avant fissuration: (a) tirant en béton armé (b) efforts sur la barre (c) contrainte dans l'acier (d) contrainte d'adhérence (e) contrainte dans le béton

La première fissure transversale apparaît sous l'effort de fissuration  $N_{fis}$  dès que la contrainte de traction dans le béton  $\sigma_c$  atteint la valeur de résistance en traction  $f'_t$ , dans la section où cette résistance est la plus faible.

Une deuxième fissure transversale peut se produire n'importe où, en principe à la suite d'une augmentation légère de l'effort de traction, mais elle ne peut toutefois pas apparaître à une distance de la première fissure qui soit inférieure à la longueur de transmission  $l_{trans}$ ; ceci, car cette distance est indispensable pour permettre la diffusion complète de l'effort de traction au sein du béton. La nouvelle fissuration ne peut donc se produire sur la longueur de transmission, mais entre deux ancrages disjoints.

Plus le nombre de fissures transversales augmente et plus leur espacement diminue. Le nombre de fissures tend toutefois à se stabiliser car il n'est en principe plus possible de faire apparaître une nouvelle fissure intermédiaire entre deux fissures voisines dès que l'espacement entre ces dernières est inférieur au double de la longueur de transmission.

HOMAYOUN et DENIS 1996 [19] ont étudié expérimentalement l'influence de différents types de fissures d'un tirant en béton armé sur la contribution du béton tendu. Ils observent qu'en général, il existe deux types de fissuration dans un tirant (figure II-4), les fissures transversales et les fissures d'éclatement. Les fissures d'éclatement du béton ont lieu dans les régions D et les fissures transversales ont lieu dans la région B où l'adhérence est parfaite. La position des fissures est aléatoire, du fait de l'hétérogénéité du béton, et de la qualité variable de la liaison acier-béton le long de la barre d'acier.

Lorsque les fissures d'éclatement du béton ont lieu, les contraintes d'adhérence diminuent et les fissures d'éclatement se prolongent dans la région B (figure II-4b). En augmentant le niveau de chargement, la réponse tend vers celle d'un acier seul et la longueur de la région B diminue. Les fissures transversales se produisent lorsque la contrainte maximale en traction du béton arrive au niveau de la contrainte de fissuration.

Après que de nouvelles fissures transversales se soient formées, de nouvelles régions de type D se forment près de l'emplacement des nouvelles fissures (figure II-4c). L'évolution de la fissuration dépend de l'adhérence acier-béton et de la résistance du béton en traction. En région de type B, la contrainte d'adhérence est nulle (figure II-3d) avant fissuration et la contrainte de traction du béton est maximum (figure II-3e). Les fissures transversales se forment donc dans les régions de type B.

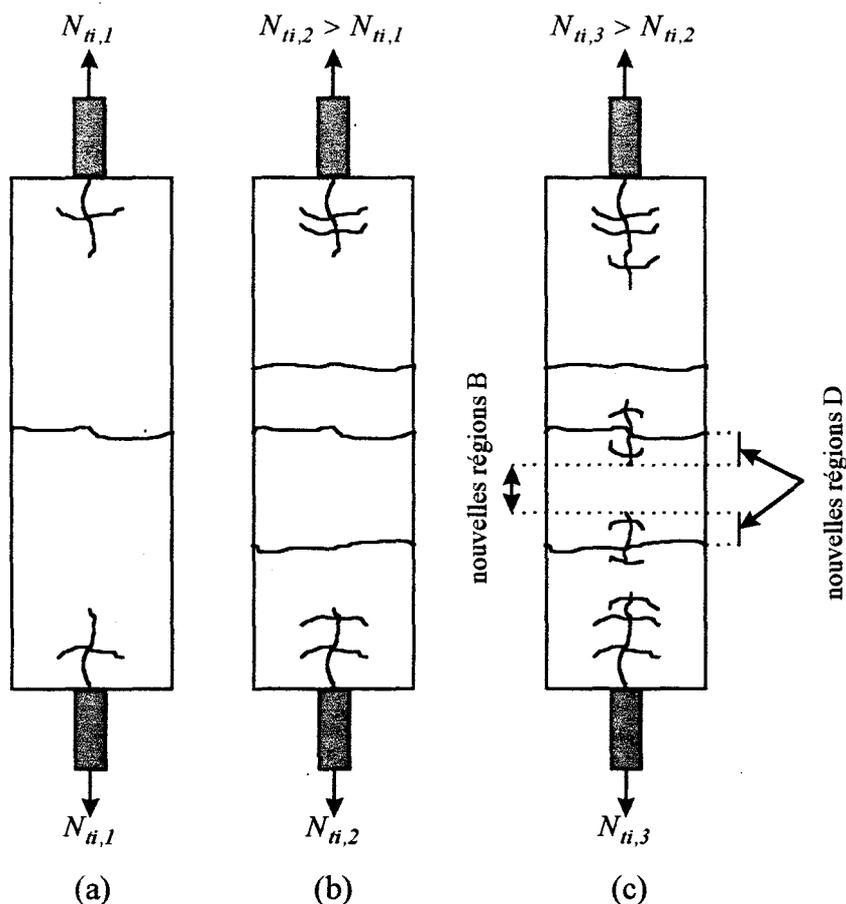


Figure II-4: Propagation des fissures transversales et d'éclatement dans un tirant

#### II.2.4. Courbe caractéristique d'un tirant

Lorsque l'on applique, lors d'un premier chargement, un effort de traction à un tirant en béton armé, on obtient une loi de comportement qui passe par différents stades, comme l'illustre la figure II-5.

Dans la phase non fissurée (le stade I), les contraintes de traction du béton sont inférieures à la résistance en traction et l'élément non fissuré se comporte de manière homogène et linéaire. Son comportement peut donc être analysé à l'aide de la théorie de l'élasticité, moyennant une prise en compte correcte des effets différés. Sur la figure II-5 la ligne  $OA$  présente ce comportement. En  $A$ , le béton atteint sa résistance en traction et la fissuration commence à s'établir.

Dès ce point  $A$  où la sollicitation dépasse l'effort  $N_{fis}$  correspondant à la valeur minimale de la résistance en traction du béton, le stade II commence. L'élément se fissure et son comportement se modifie. L'allongement relatif moyen sous lequel apparaît la première fissure vaut environ  $0,01\%$  dans les cas courants. Après la première fissure d'autres apparaissent. Les

essais montrent que le comportement réel en stade fissuré est situé entre les deux extrêmes que constituent le stade I et le cas de l'acier seul. Le cas de l'acier seul correspond à un cas fissuré idéalisé dans lequel le béton tendu est totalement négligé; l'armature est donc considérée comme seule à reprendre les sollicitations.

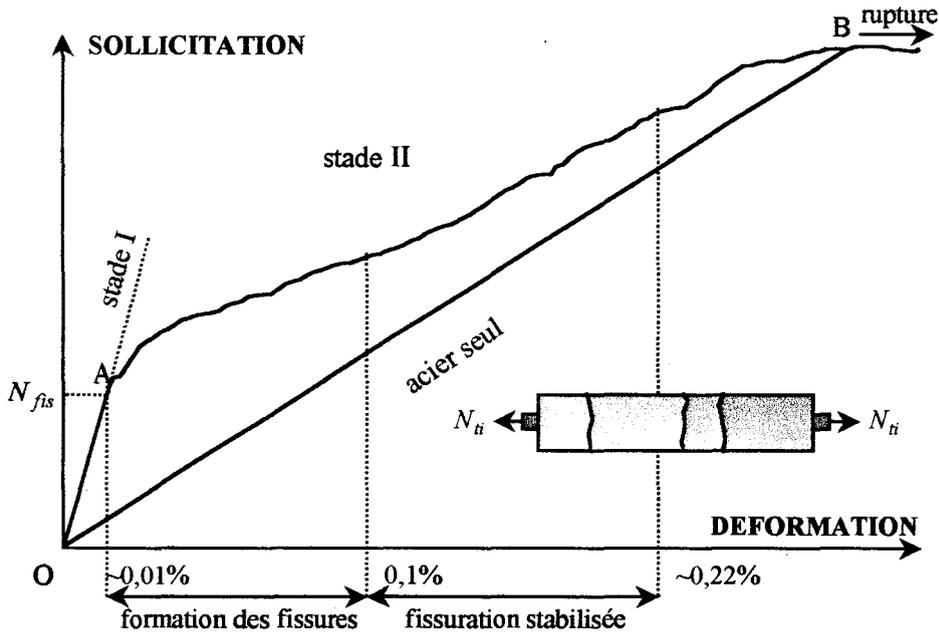


Figure II-5: Diagramme sollicitation-déformation caractéristique d'un tirant en béton armé d'après GHALI et FAVRE 1994 [20]

La droite  $OB$  représente le diagramme de traction des aciers considérés isolément. En  $B$ , les armatures atteignent leur limite d'élasticité. Entre  $A$  et  $B$ , la fissuration du tirant, caractérisée par le nombre de fissures et par leur ouverture, s'installe progressivement. Le stade fissuré peut être dissocié en deux phases, la phase de formation des fissures et la phase de fissuration stabilisée.

Au fur et à mesure de l'apparition de nouvelles fissures, la rigidité de l'élément diminue progressivement. A la fin de la phase de fissuration, le motif de la dernière fissure a été établi. L'allongement relatif moyen est de l'ordre de  $0,1\%$ .

Après l'apparition de la dernière fissure, en phase de fissuration stabilisée, l'augmentation de la charge ou d'une déformation imposée va entraîner une augmentation de l'ouverture des fissures. Mais aucune fissure nouvelle ne va apparaître et l'élément se comporte de façon quasi linéaire, selon une loi à peu près parallèle à celle de l'acier seul. L'effort de traction dans le béton est trop faible pour créer de nouvelles fissures, sauf peut être quelques fissures secondaires sporadiques.

Le comportement redevient non linéaire à l'approche de la rupture, à savoir dès que l'allongement relatif de l'armature dépasse la valeur correspondant à la limite apparente d'élasticité ou limite d'écoulement de l'acier utilisé. La rupture proprement dite ne se produit que lorsque l'on atteint l'allongement de rupture de l'acier qui vaut environ 6 à 8% pour les aciers d'armature couramment utilisés.

Le diagramme sollicitation-déformation de la figure II-5 représente le résultat d'un essai conduit en imposant l'effort de traction  $N_{ti}$ . Dans le cas d'un essai piloté en force, on observe en effet après chaque nouvelle fissure une augmentation de la déformation sous la force  $N_{ti}$  maintenue constante (figure II-6). Il s'agit d'une analogie avec un phénomène de fluage.

Dans le cas d'un essai piloté en déformation, on observe au contraire après chaque nouvelle fissure une brusque diminution de l'effort  $N_{ti}$  sous une déformation maintenue constante (analogie avec un phénomène de relaxation). La valeur de cette diminution dépend essentiellement de la rigidité de tirant et de celle de la machine d'essai. Elle est d'autant plus importante que le tirant est court et/ou la machine d'essai est peu rigide (FARRA 1995 [21]).

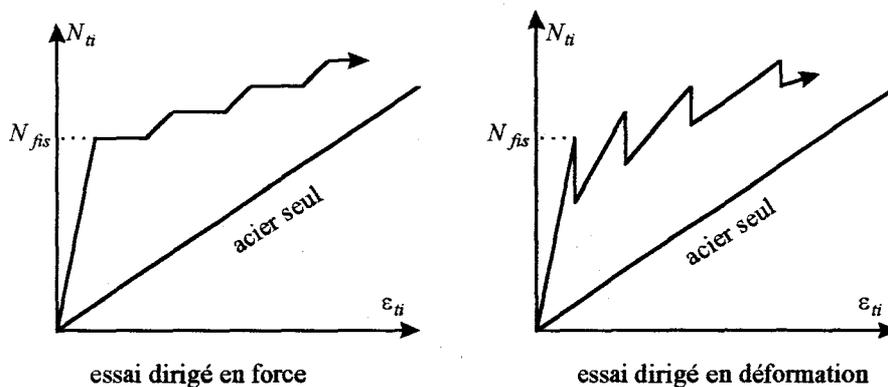


Figure II-6: *Manifestation différenciée des fissures selon que l'essai est piloté en force ou en déformation (FARRA 1995 [21])*

## II.2.5. Résistance effective en traction du béton

Une question importante pour la fissuration et que nous n'avons pas abordée jusqu'à présent est celle de la résistance en traction du béton. Sa connaissance est nécessaire au calcul de l'effort de fissuration  $N_{fis}$ . La résistance effective ou apparente en traction du béton dans un ouvrage  $f'_{t,ef}$  peut différer sensiblement de sa valeur conventionnelle  $f'_{t,m}$  définie dans les règlements.

Les raisons de cette différence sont nombreuses. Elles proviennent d'une part des conditions de mise en œuvre et de cure du béton ainsi que du milieu ambiant (conditions climatiques) qui sont très variées. La résistance en traction d'un élément d'ouvrage est généralement inférieure à celle d'une éprouvette confectionnée avec le même béton, ceci à cause de l'affaiblissement résultant des nombreuses microfissures au sein du béton et de l'apparition d'amorces de fissures superficielles. Ces fissures proviennent de l'hétérogénéité du matériau (granulats, pâte de ciment, armatures) et d'états de contraintes auto équilibré par suite des gradients thermiques et du retrait de dessiccation. Cet effet et la réduction de la résistance qui en découle sont d'autant plus marqués que la dimension de l'élément d'ouvrage considéré est importante.

Une autre raison de cette différence est due à l'effet du temps. La résistance du béton en traction dépend, tout comme celle de compression, de la durée de l'application de la charge et de l'âge du béton. On peut relever que ces deux effets agissent en sens contraire et se neutralisent généralement pour des âges supérieurs à 28 jours.

La résistance en traction du béton présente, pour une classe ou une composition de béton donnée, une grande variabilité. Les valeurs extrêmes peuvent différer de plus ou moins 30% par rapport à la valeur moyenne  $f'_{i,m}$ . Les variations de la résistance en traction du béton peuvent être décomposées entre celles se produisant au sein d'un même élément d'ouvrage d'une part, et celles se produisant entre différents éléments réalisés avec le même béton, d'autre part.

La résistance effective en traction du béton dans un tirant augmente pendant la phase de formation des fissures. Ainsi, le rapport entre la résistance effective en traction du béton à l'apparition de dernière fissure et celle correspondant à l'apparition de la première fissure peut aller de 1,2 d'après VAN DER VEEN 1990 [22] à 2 d'après ESPION 1984 [23].

JACCOUD 1987 [24] a proposé une relation empirique décrivant l'augmentation de la résistance effective en traction du béton correspondant à l'apparition des fissures successives en phase de formation des fissures, en fonction de la déformation imposée  $\varepsilon$  dans le cas d'un tirant.

$$\frac{f'_{i,i}}{f'_{i,1}} = 1 + 350 \varepsilon$$

où  $f'_{i,i}$  est la résistance effective en traction du béton correspondant à l'apparition de la ième fissure.

## II.3. MODELISATION DU RAIDISSEMENT EN TRACTION PAR UN TIRANT

### II.3.1. Introduction

La modélisation du phénomène de raidissement en traction (souvent mentionné par sa dénomination anglaise *tension stiffness*) est importante pour étudier les caractéristiques des courbes charge-déformation d'une pièce en béton armé dans le domaine post fissuration. Le comportement de l'adhérence acier-béton est un aspect important pour la contribution du béton tendu car il contrôle l'aptitude du renforcement à transférer les contraintes de traction au béton. Les distributions de contrainte dans l'acier  $\sigma_s$ , de contrainte d'adhérence  $\tau_{sc}$  et de contrainte dans le béton  $\sigma_c$  dans un tirant sont montrées figure II-7.

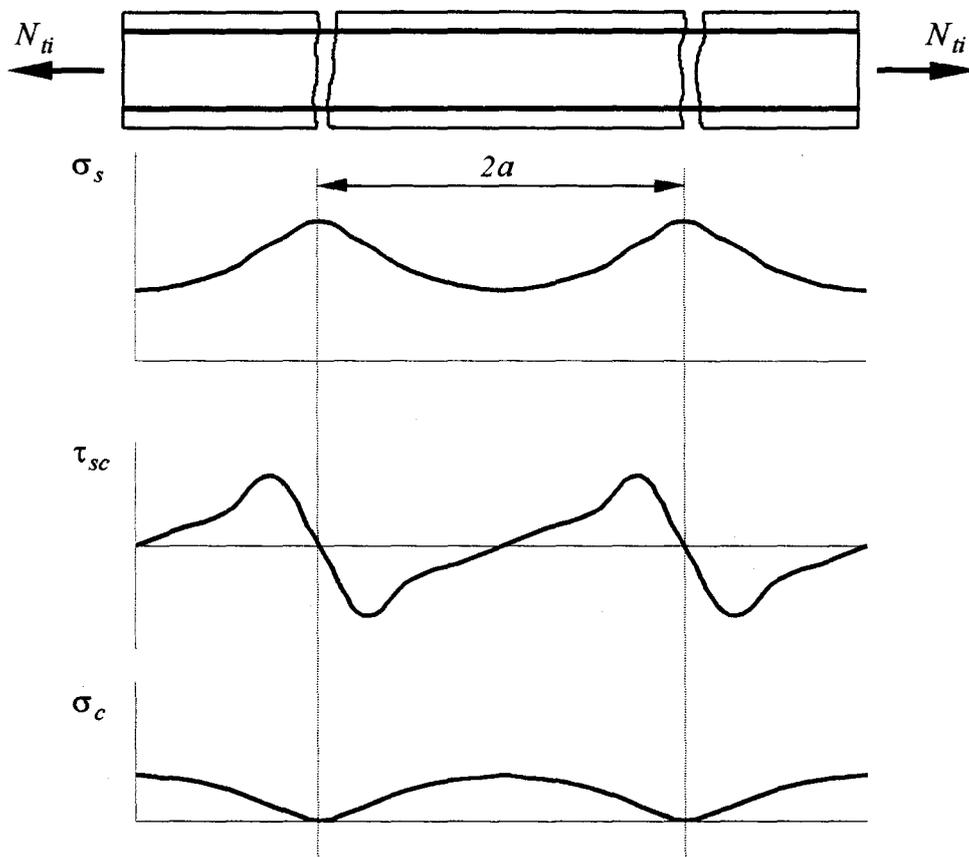


Figure II-7: Distribution des contraintes dans l'acier, contrainte d'adhérence et contrainte dans le béton dans un tirant d'après CEB 1985 [25]

La contrainte d'adhérence entre la barre d'armature et le béton avoisinant en fonction du déplacement relatif appelé "glissement" est généralement obtenue à partir d'essais comme l'essai d'arrachement "Pull-out Test" ou l'essai par flexion "Beam Test" (RILEM 1978 [26,27]). En plus

de ces deux essais existe l'essai tirant (MIRZA et HOUDE 1979 [28], LAHNERT et al. 1986 [29], GUNTHER et MEHLHORN 1991 [30], HOMAYOUN et DENIS 1996 [19]). L'essai d'arrachement "Pull-out Test" est le plus pratique car le plus simple à réaliser.

En annexe II, on présente la courbe de contrainte d'adhérence-glissement, l'équation différentielle du glissement et les solutions proposées par GUPTA et MAESTRINI 1990 [31] pour illustrer la complexité du problème et donner les raisons d'utiliser les courbes simplifiées du tirant obtenues selon les observations expérimentales. Pour un comportement non linéaire d'adhérence et pour différentes conditions aux limites, nous renvoyons à la méthode proposée par BALAZS 1987 [32].

### II.3.2. Lois du tirant simplifiées proposées dans la littérature

Pour caractériser simplement la loi de comportement du tirant dans sa phase fissurée, il suffit d'établir une relation utilisant la déformation moyenne du tirant.

$$\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_s - \Delta\varepsilon$$

où  $\varepsilon_{s,m} = \frac{\Delta L}{L}$  est la déformation moyenne du tirant ou de l'armature, et  $\varepsilon_s$  la déformation des armatures au droit des sections fissurées.

Les diverses lois proposées dans la littérature se différencient uniquement par l'expression de  $\Delta\varepsilon$  qui représente la réduction de déformation due au béton tendu entre les fissures.

Dans les propositions les plus anciennes,  $\Delta\varepsilon$  est une constante traduisant une distribution d'adhérence parfaitement plastique en phase fissurée. Une telle loi est représentée figure II-8a. Cette forme de loi apparaît pour la première fois chez JOHNSON 1951 [33].

$$\varepsilon_{s,m} = \frac{I}{E_s} \left( \sigma_s - k \frac{f'_t}{\Omega} \right) \Leftrightarrow \Delta\varepsilon = k \frac{f'_t}{E_s \Omega}$$

avec  $1/3 \leq k \leq 2/3$ ;  $k=0,5$  en moyenne.  $\Omega = A_s / A_c$  est le pourcentage géométrique d'armature.

PALOTAS 1966 [34], par un raisonnement identique à celui de JOHNSON, mais en prenant une valeur conventionnelle pour  $k / (1 + n\Omega) = 0,7$  (valeur déduite des règlements soviétiques de l'époque) était arrivé à:

$$\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_s - 0,7\varepsilon_{s,fis} \Leftrightarrow \Delta\varepsilon = 0,7\varepsilon_{s,fis}$$

où  $\varepsilon_{s,fis}$  est la valeur de  $\varepsilon_s$  correspondant à l'apparition de la fissuration macroscopique du tirant.

On trouve dans les anciennes propositions du CEB 1973 [35] et CEB-FIP 1978 [36],

$$\varepsilon_{s,m} = \frac{l}{E_s} \left( \sigma_s - \frac{k_3}{\Omega} \right) \Leftrightarrow \Delta\varepsilon = \frac{k_3}{E_s \Omega}$$

avec  $k_3=30 \text{ kg/m}^3$ , valeur recommandée pour des barres à adhérence améliorée.

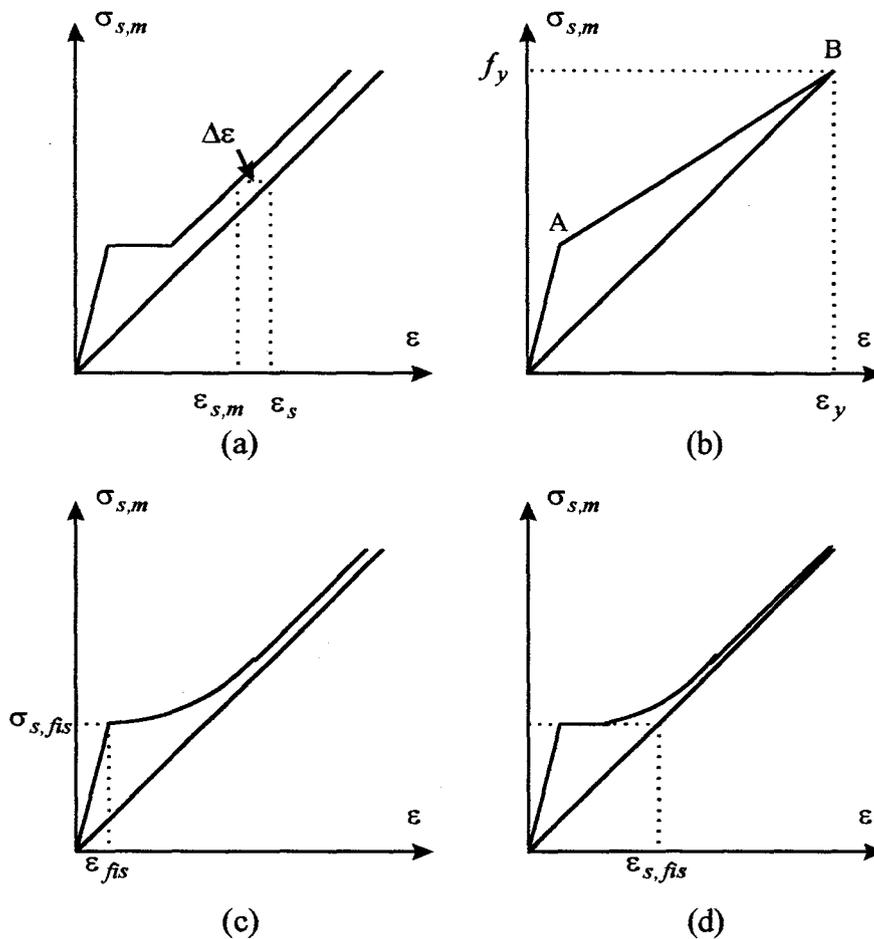


Figure II-8: Modélisations de la loi de comportement d'un tirant en béton armé

RABICH 1969 [37], a proposé d'approcher la loi de comportement de l'armature enrobée en phase fissurée par la droite joignant A à B (figure II-8b). Ceci conduit à une variation linéaire de  $\Delta\varepsilon$  avec la charge, ce que l'on peut traduire mathématiquement par:

$$\varepsilon_{s,m} = \left( \varepsilon_{fis} - \varepsilon_{s,fis} \right) \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_y}{\varepsilon_{s,fis} - \varepsilon_y} + \varepsilon_s \Leftrightarrow \Delta\varepsilon = \left( \varepsilon_{fis} - \varepsilon_{s,fis} \right) \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_s}{\varepsilon_y - \varepsilon_{s,fis}}$$

où  $\varepsilon_{fis}$  est la déformation qui correspond à la résistance effective en traction du béton. Cette expression traduit un modèle purement géométrique fondé sur l'observation de la tendance générale entre  $A$  et  $B$ . Il rend compte, d'une certaine manière, de l'installation progressive de la fissuration au prix d'une hypothèse illogique qui fait dépendre la loi de comportement en phase fissurée de la limite d'élasticité des aciers.

RAO 1976 [38] est le premier à avoir proposé une loi de variation de  $\Delta\varepsilon$  en raison inverse de  $\sigma_s$  (figure II-8c), mais sa formulation était spécifiquement adaptée à la détermination de la part reprise par le béton fissuré dans la rigidité flexionnelle de poutres en phase fissurée. ROSTASY et ALDA 1977 [39] ont étendu ce modèle au cas de tirants en béton armé et proposent:

$$\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_s - \frac{f_t'^2 (1+n\Omega)}{\Omega^2 E_s \sigma_s} \Leftrightarrow \Delta\varepsilon = \frac{f_t'^2 (1+n\Omega)}{\Omega^2 E_s \sigma_s}$$

Il est facile de montrer que la formule ci-dessus est identique à celle qui a été proposée par FAVRE et al. 1981 [40] et la loi retenue dans le manuel "Fissuration et Déformation" du CEB 1983 [41]. Ce modèle est similaire à la loi moment-courbure d'une poutre fléchie, adoptée par le CEB-FIP 1993 [42]. La contribution à la rigidité du béton tendu entre les fissures est donnée par l'expression ci-dessous ( $\Delta\varepsilon$  devant tendre vers zéro lorsque  $\sigma_s$  tend vers l'infini).

$$\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_s - \frac{(\varepsilon_{s,fis} - \varepsilon_{fis})}{\sigma_s} \sigma_{s,fis} \Leftrightarrow \Delta\varepsilon = \frac{(\varepsilon_{s,fis} - \varepsilon_{fis})}{\sigma_s} \sigma_{s,fis}$$

L'intérêt de cette formule réside dans le fait qu'elle est directement transposable au cas de la flexion, car ne faisant plus explicitement appel à  $\Omega$ , elle n'exige plus de connaître la surface de béton tendu participant à l'accroissement de rigidité. Des essais en laboratoire de ESPION 1984 [43] ont montré que cette loi représente assez bien l'évolution de la force en fonction de la déformation relative du tirant sous sollicitation de courte durée. Cependant, ce modèle a le désavantage de ne pas définir les différentes phases de fissuration du tirant à l'état fissuré. De plus il est non linéaire, ce qui complique son utilisation.

NOAKOWSKI et KUPFER 1981 [44] ont également proposé une formule légèrement différente, représentée figure II-8d où  $\Delta\varepsilon$  varie en hyperbolique avec  $\sigma_s$ :

$$\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_s \left[ 1 - 0,6(1 - n\Omega) \frac{\varepsilon_{s,fis}^2}{\varepsilon_s^2} \right] \Leftrightarrow \Delta\varepsilon = 0,6(1 - n\Omega) \frac{\varepsilon_{s,fis}^2}{\varepsilon_s}$$

Dans cette formule, issue comme les autres d'un raisonnement théorique sur la distribution d'adhérence, les auteurs ont posé que  $n^2\Omega^2$  est petit devant l'unité. Si tel n'était pas le cas, il serait plus rigoureux d'écrire:

$$\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_s - \frac{0,6 \sigma_{s,fis}^2}{(1 + n\Omega) E_s \sigma_s} \Leftrightarrow \Delta\varepsilon = \frac{0,6 \sigma_{s,fis}^2}{(1 + n\Omega) E_s \sigma_s}$$

Une approche pour calculer les effets du raidissement en traction est proposée par le code du CEB-FIP 1978 [36]. L'effet du raidissement en traction est simulé en multipliant la déformation du renforcement au niveau d'une fissure par un facteur inférieur à 1. La déformation moyenne du renforcement est donnée par:

$$\varepsilon_{s,m} = \frac{\sigma_s}{E_s} \left[ 1 - \alpha_1 \alpha_2 \left( \frac{\sigma_{s,fis}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \geq 0,4 \frac{\sigma_s}{E_s} \Leftrightarrow \Delta\varepsilon = \alpha_1 \alpha_2 \varepsilon_s \left( \frac{\sigma_{s,fis}}{\sigma_s} \right)^2 \leq 0,6 \varepsilon_s$$

$\sigma_s$  est la contrainte dans le renforcement au niveau de la fissure causée par la charge appliquée;

$\sigma_{s,fis}$  est la contrainte dans le renforcement correspondant à la charge de fissuration;

$\alpha_1$  est un facteur qui prend en considération le phénomène d'adhérence du renforcement (1,0 pour les aciers à haute adhérence, et 0,5 pour les aciers lisses);

$\alpha_2$  est un facteur qui prend en considération le type de chargement, répété ou soutenu (égal à 1,0 pour un chargement monotone à court terme et 0,5 pour un chargement soutenu et/ou répété).

Parmi les formules qui présentent une variation importante de  $\Delta\varepsilon$  pour des charges légèrement supérieures à la charge de fissuration, il y a lieu de signaler la formule purement empirique de HOLMBERG dans CEB 1973 [35] que l'on écrira sous la forme:

$$\varepsilon_{s,m} = \varepsilon_s - \frac{\varepsilon_s \beta_1 \beta_2 f_t'}{\Omega(\Omega\sigma_s - \beta_2 f_t') + f_t' \beta_1 \beta_2} \Leftrightarrow \Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon_s \beta_1 \beta_2 f_t'}{\Omega(\Omega\sigma_s - \beta_2 f_t') + f_t' \beta_1 \beta_2}$$

avec  $0,001 \leq \beta_1 \leq 0,002$  et  $1,0 \leq \beta_2 \leq 1,1$ .

Enfin, parmi les modèles existants, le modèle simple de ESPION et al. 1985 [45], intéressant dans le cas de calculs analytiques a été choisi comme base dans notre étude. La figure II-9 montre cette modélisation bilinéaire de la loi de comportement en phase de plastification d'un tirant en béton armé. L'auteur s'est livré à une recherche expérimentale ayant spécifiquement pour but de mettre en évidence l'influence du pourcentage géométrique d'acier tendu sur le phénomène de rigidification dû au béton tendu entre les fissures.

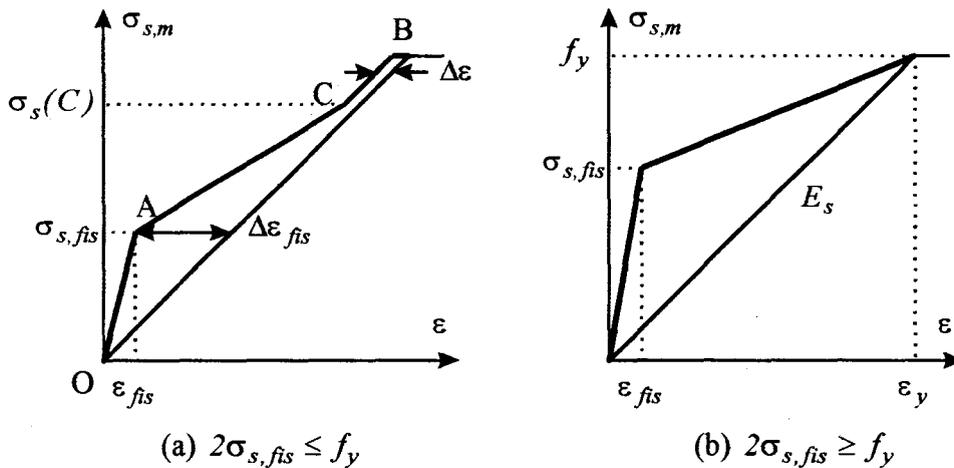


Figure II-9: Modèle bilinéaire de la loi de comportement en phase de la plastification d'un tirant en béton armé (a)  $\Omega \geq 1\%$  (b)  $\Omega \leq 1\%$ , ESPION et al. 1985 [45]

Il a énoncé que le comportement des tirants à faible pourcentage d'armature ( $\Omega \leq 1\%$ ) est différent de celui de ceux à pourcentage important.  $\Delta\epsilon$ , caractérisant la part constante de rigidité reprise par le béton tendu entre les fissures en phase de stabilisation des fissures, pour  $\Omega \geq 1\%$ , est égal à:

$$\Delta\epsilon = \left(18 + 3,55 \frac{1}{\Omega}\right) 10^{-6} \quad \text{ou} \quad \Delta\epsilon = 0,5 \Delta\epsilon_{fis}$$

Le niveau  $\sigma_s$  du point C, noté  $\sigma_s(C)$ , correspondant à la fin de la phase de stabilisation des fissures est donné par l'expression suivante:

$$\sigma_s(C) = 2\sigma_{s,fis}$$

Pour les tirants faiblement armé ( $\Omega \leq 1\%$ ), ESPION et al. 1985 [45] admet que la contribution du béton tendu est nulle au moment de la plastification de l'acier et que la droite correspondante à la phase de fissuration stabilisée n'existe pas (figure II-9b). Il observe que dans ce cas  $2\sigma_{s,fis} \geq f_y$ .

## II.4. PROPOSITION D'UNE ANALYSE DE L'ASSEMBLAGE POUTRE-TIRANT: SIMULATION DE LA CONTRIBUTION DU BETON TENDU PAR LE TIRANT

D'abord, il faut noter que l'étude d'un assemblage poutre-tirant (figure II-11) en flexion est en fait l'étude de la combinaison d'un élément fléchi avec un élément de tirant. La déformation de la poutre change sur la section et peut se diviser en deux parties: la partie comprimée et la partie tendue. Au contraire, la valeur de déformation en traction est constante sur la section pour un tirant en béton armé. Théoriquement la superposition des deux systèmes dans un élément fléchi n'est pas possible. Dans l'hypothèse des petites déformations, on peut néanmoins le faire avec une bonne approximation.

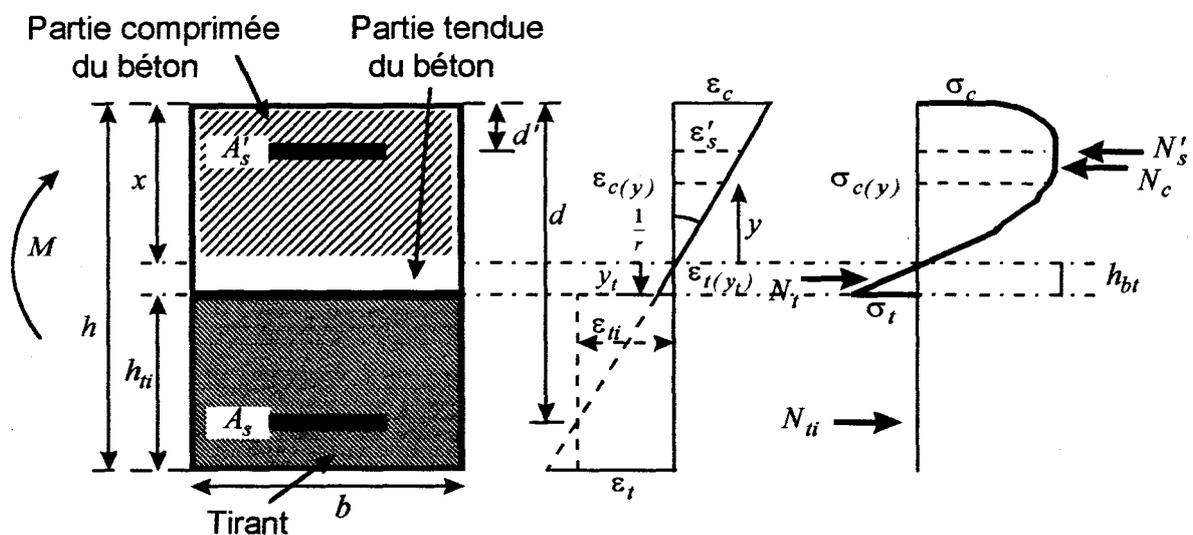


Figure II-11: Etude d'une section assemblage de poutre-tirant

### II.4.1. Etapes de l'analyse

On fait varier la déformation maximale de la zone comprimée du béton  $\varepsilon_c$  de zéro jusqu'à sa valeur finale qui dépend de la loi de comportement du béton comprimé. Le moment interne correspondant s'obtient par le calcul. Pour mieux comprendre la démarche, on a divisé le comportement en plusieurs étapes:

**Etape 1:** Avant fissuration de la fibre extrême tendue ( $\varepsilon_t \leq \varepsilon_{tmax}$ ): Dans ce cas la hauteur de la fissure est zéro  $h_{fis} = 0$ . La fibre extrême de béton peut supporter une certaine déformation en traction. La déformation maximale du béton en traction dépend de la valeur de  $f'_t$ , résistance en traction du béton.  $\varepsilon_{tmax} = f'_t / E_b$  est de l'ordre de  $10^{-4}$ . A ce moment, la déformation de la fibre extrême du béton en compression sera environ de la même valeur en considérant que la fibre

neutre est aux alentours de la fibre médiane. On peut supposer qu'on est dans une phase élastique linéaire. Avec cette hypothèse, l'analyse de cette phase est simple. Les contraintes sur la section pour un moment donné s'obtiennent par la relation classique suivante:

$$\sigma = \frac{M Y}{I}$$

Dans ce cas, le calcul de la hauteur comprimée est également simple et elle ne dépend pas de la valeur du moment appliqué. Elle ne dépend que de la géométrie de la section.

**Etape 2:** La hauteur de la fissure ne dépasse pas le niveau des armatures tendues ( $h_{fis} \leq h - d$ ): La hauteur de la zone comprimée dépend de la géométrie de la section et du moment appliqué. La section du tirant sera un rectangle de dimension  $b \times h_{fis}$  et le pourcentage d'armature du tirant est zéro. Notre simulation n'est pas applicable à cette étape. Il faut remarquer que la progression de la fissure est très rapide. On peut raisonnablement passer directement de l'étape 1 à l'étape 3.

**Etape 3:** La hauteur de la fissure est passée au delà du niveau des armatures tendues ( $h_{fis} > h - d$ ): Les questions importantes dans ce cas sont la valeur de la hauteur du tirant  $h_{ti}$  et le choix du niveau de sa déformation. Sur la poutre la déformation change selon la hauteur du tirant alors que la déformation d'un tirant est supposée uniforme sur sa section.

## II.4.2. Questions importantes: quelles sont les valeurs de la hauteur et de la déformation du tirant?

### II.4.2.1. CHOIX DE LA HAUTEUR DU TIRANT

La hauteur de la fissure est calculée en étape 3 par la relation suivante:

$$h_{fis} = h - (x + h_{bt}) \quad \text{où} \quad h_{bt} = \frac{\varepsilon_{tmax}}{\varepsilon_c} x$$

On peut estimer la hauteur du tirant de différentes façons. Nous en proposons deux.

**En premier**, on peut supposer que la hauteur du tirant est une fonction de la hauteur de la fissure affectée d'un coefficient. Si on suppose que  $h_{ti} = h_{fis}$ , on aura une surestimation qui sera

importante lorsque le moment appliqué est élevé. La déformation de la section du tirant doit être supposée uniforme tandis que la section est soumise à un moment de flexion. La déformation varie sur la section du tirant de  $\varepsilon_{tmax}$ , valeur ultime de la déformation en traction du béton à  $\varepsilon_t$ , déformation de la fibre inférieure:

La deuxième estimation consiste à prévoir la hauteur du tirant comme une certaine proportion de la géométrie de la section (la hauteur  $h$ , l'enrobage  $C$  ou la hauteur utile  $d$ ). Dans ce cas, la hauteur du tirant ne dépend pas de la hauteur de la zone comprimée et elle reste constante pendant l'accroissement du moment appliqué. Dans ce cas, pour les moments les plus élevés, l'hypothèse d'une déformation constante n'a pas de sens. On suppose que la déformation du tirant est égale à  $\varepsilon_s$ . La figure II-12 montre les différentes définitions de la hauteur du tirant.

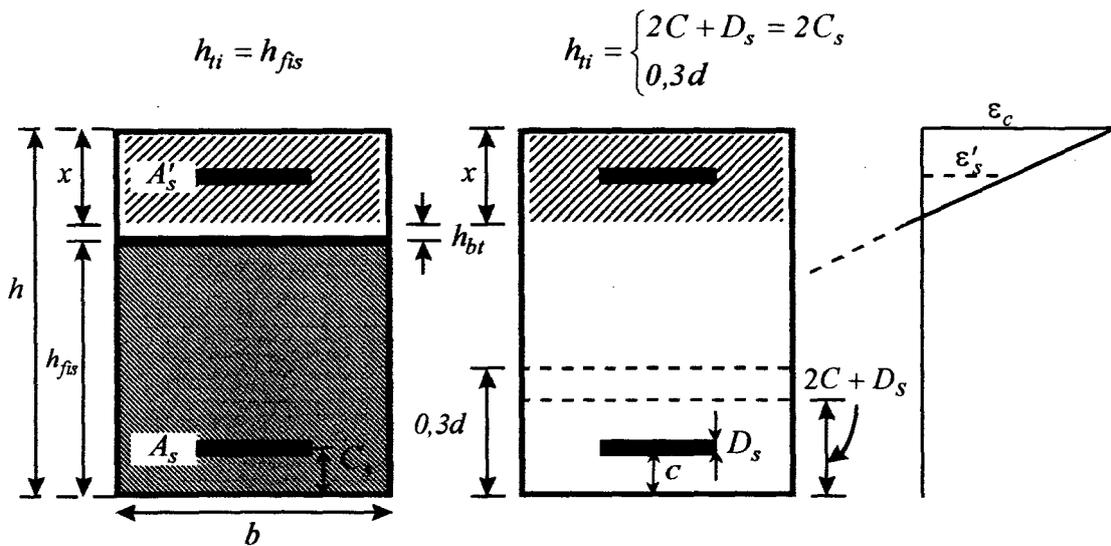


Figure II-12: Différentes définitions de la hauteur du tirant

#### II.4.2.2. CHOIX DE LA DEFORMATION DU TIRANT

Le choix de la déformation du tirant est complexe. Elle peut être considérée égale à n'importe quelle valeur entre deux extrémités  $\varepsilon_{tmax} < \varepsilon_{ti} < \varepsilon_t$  (figure II-13). En raison de la constance de déformation du tirant sur toute sa section, une distribution rectangulaire comme  $C'D'FG$  de la déformation est utilisée au lieu de la distribution trapézoïdale  $BEFG$ .

Si le point  $A'$  passe au niveau des aciers tendus et en utilisant le rectangle  $CDFG$ , comme le cas le plus utilisé en pratique, la déformation du tirant est égale à la déformation au niveau des barres d'acier  $\varepsilon_{ti} = \varepsilon_s$ . L'avantage essentiel de cette estimation est que la position de  $\varepsilon_{ti}$  est toujours constante. La différence entre les triangles  $BAC$  et  $ADE$  représentent l'erreur dans cette hypothèse. En augmentant le moment appliqué, la hauteur de la fissure  $h_{fis}$  augmente et la

différence entre les triangles  $BAC$  et  $ADE$  devient plus importante, ce qui traduit une surestimation plus importante.

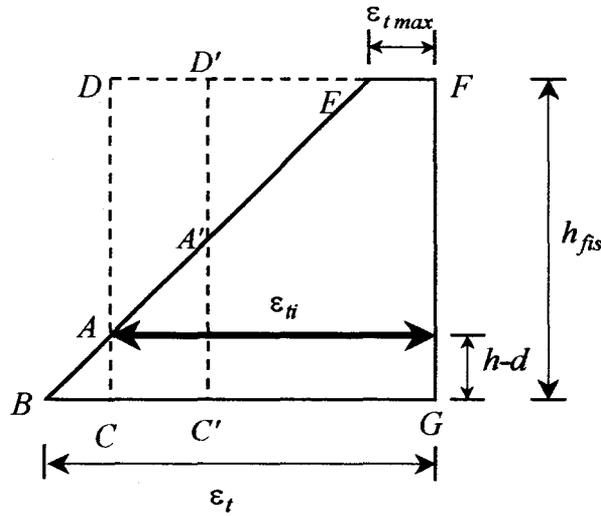


Figure II-13: Choix de la position des barres d'armature du tirant

Par contre si on égalise les triangles en passant par le point  $A'$ , la valeur de la déformation du tirant et sa position sont calculées comme suit:

$$\frac{\epsilon_t^{max} + \epsilon_t}{2h_{fis}} = h_{fis} \epsilon_{ti} \Rightarrow \epsilon_{ti} = \frac{\epsilon_t^{max} + \epsilon_t}{2h_{fis}^2} \quad \text{et} \quad A'C' = \frac{h_{fis}}{2}$$

### II.4.3. Méthode de résolution

On choisit la déformation du tirant  $\epsilon_{ti}$  comme un pivot. Les efforts normaux de compression dans le béton et les aciers comprimés et de traction dans le tirant peuvent s'écrire en fonction de deux variables globales  $\epsilon_{ti}$  et  $x$ . Les équations d'équilibre de la section s'écrivent:

$$N = N_c(\epsilon_{ti}, x) + N'_s(\epsilon'_s) - N_{ti}(\epsilon_{ti}) = 0$$

et

$$M = M_{int}(\epsilon_{ti}, x)$$

avec:

$$M_{int}(\epsilon_c, x) = b \int_0^x f_c[\epsilon_c(y)](d - x + y) dy + N'_s(d - d')$$

$$\epsilon_c = \left(\frac{x}{d-x}\right)\epsilon_{ti} \quad \epsilon'_s = \left(\frac{x-d'}{d-x}\right)\epsilon_{ti}$$

On utilise la relation que propose le CEB-FIP 1979 [47] pour modéliser le comportement du béton en compression simple:

$$\sigma_c(\eta) = f'_c \left( \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \right) \quad \text{avec:} \quad k = \frac{E_c}{f'_c} \varepsilon_{cl} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}}$$

L'effort normal de compression dans le béton est:

$$N_c(\varepsilon_{ii}, x) = \Phi(\varepsilon_{ii}) X(x)$$

où:

$$\Phi(\varepsilon_{ii}) = \frac{b \varepsilon_{cl}}{(k-2) \varepsilon_{ii}} \left[ \frac{-\beta}{2} \gamma^2 + (\alpha + 2\beta)\gamma - (\alpha + \beta) \log(\gamma) - \alpha - \frac{3}{2}\beta \right]$$

$$X(x) = \frac{d-x}{x}$$

avec:

$$\alpha = f'_c \frac{k}{k-2} \quad \beta = f'_c \frac{1}{(k-2)^2} \quad \gamma = 1 + (k-2)\eta$$

L'effort normal dans l'acier de compression en supposant un comportement élastique parfaitement plastique est:

$$N'_s = \begin{cases} A'_s E'_s \frac{x-d'}{d-x} \varepsilon_{ii} & \text{si } f'_s \leq f'_y \\ A'_s f'_y & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour calculer l'effort normal du tirant, on utilise le modèle de ESPION et al. 1985 [45] (figure II-14). L'effort normal de traction du tirant après la fissuration est:

$$N_{ii}(\varepsilon_{ii}) = \begin{cases} A_s \left[ E_{II} (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{tif}) + \sigma_{tif} \right] & \text{si } \varepsilon_{ii} \leq \varepsilon_b = \varepsilon_{tif} + \frac{\sigma_{tif}}{E_{II}} \\ A_s \left[ E_{III} (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_b) + 2\sigma_{tif} \right] & \text{si } \varepsilon_b < \varepsilon_{ii} \leq \varepsilon_c = \varepsilon_b + \frac{f_y - 2\sigma_{tif}}{E_s} \\ A_s f_y & \text{si } \varepsilon_{ii} > \varepsilon_c \end{cases}$$

$$N_{ii}(\varepsilon_{ii}) = \begin{cases} A_s \left[ E_{IV} (\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{tif}) + \sigma_{tif} \right] & \text{si } \varepsilon_{ii} \leq \varepsilon_y \\ A_s f_y & \text{si } \varepsilon_{ii} > \varepsilon_y \end{cases}$$

où;

$$E_{II} = \frac{E_s}{E_I} \left( 2E_I - \frac{E_s \Delta}{\varepsilon_{tif}} - E_s \right); \quad E_{III} = E_s; \quad E_{IV} = \frac{f_y - \sigma_{tif}}{\varepsilon_y - \varepsilon_{tif}}$$

$$\sigma_{tif} = E_I \varepsilon_{tif} \Rightarrow E_I = E_c \left( n + \frac{1}{\Omega} \right) \quad \varepsilon_{tif} = \frac{f'_t}{E_c} \quad \Delta = \left( 18 + \frac{3,55}{\Omega} \right) 10^{-6}$$

$\sigma_{tif}$  et  $\varepsilon_{tif}$  sont respectivement la contrainte et la déformation du tirant au moment de fissuration.

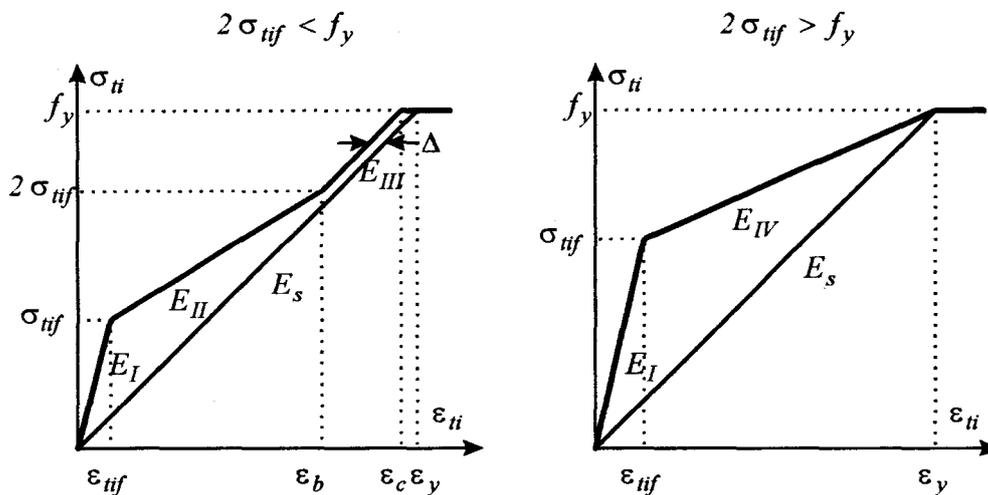


Figure II-14: Loi de comportement du tirant considéré, ESPION et al. 1985 [45]

**Par la méthode classique:** Il suffit de satisfaire l'équation d'équilibre des efforts normaux, pour une déformation du tirant fixée  $\varepsilon_{ti}$ , par changement progressif de la valeur de la hauteur de la zone comprimée (par exemple de zéro à  $h$ ). Le critère d'équilibre détermine la précision de la valeur.

$$\Phi(\varepsilon_{ti})X(x) + \begin{cases} A'_s E'_s \frac{x-d'}{d-x} \varepsilon_{ti} & \text{si } f'_s \leq f'_y \\ A'_s f'_y & \text{si } f'_s > f'_y \end{cases} = N_{ti}(\varepsilon_{ti})$$

**Par la méthode des cas possibles:** Dans ce cas, on a 2 cas possibles ( $m \times n \times p = 2$ ) pour une déformation du tirant fixée  $\varepsilon_{ti}$ . La valeur de la hauteur comprimée est choisie parmi les deux valeurs qui sont calculées comme suit:

- ◆ Hypothèse: Les aciers comprimés ne sont pas plastifiés ( $\varepsilon'_s \leq \varepsilon'_{sy}$ );

$$\text{radical}(\varepsilon_{ti}) = \left[ (d(2\Phi + N_{ti}) + A'_s E'_s d' \varepsilon_{ti})^2 - 4d^2(\Phi + N_{ti} + A'_s E'_s \varepsilon_{ti}) \right]^{1/2}$$

$$x_1 = \left[ \text{radical} + (A'_s E'_s + d(2\Phi + N_{ti})) \right] / (2(\Phi + N_{ti} + A'_s E'_s \varepsilon_{ti}))$$

$$\text{si } \varepsilon_s = \frac{d - x_1}{x_1} \varepsilon_c \leq \varepsilon_{sy} \Rightarrow x = x_1$$

sinon  $\Rightarrow$  hypothèse suivante

- ◆ Hypothèse: les aciers comprimés sont plastifiés ( $\varepsilon_s > \varepsilon_{sy}$ );

$$x_2 = \frac{\Phi d}{\Phi + N_{ti} - A'_s f'_y} = x$$

De cette manière, on obtient la valeur exacte de  $x$ , sans faire d'itération. Par ce type d'analyse, on voit un autre exemple pratique de la méthode des cas possibles, qui illustre sa simplicité et son efficacité.

## II.4.4. Exemples et étude paramétrique

### II.4.4.1. EFFET DES DIFFERENTES VALEURS DE LA HAUTEUR DU TIRANT

La figure II-15 montre les courbes moment-courbure en déformation contrôlée en considérant l'effet du raidissement en traction pour les poutres  $A$  et  $B$  (figure I-8), pour différentes valeurs de la hauteur du tirant. Elles sont à comparer avec le cas où l'effet de raidissement en traction est négligé.

Elles se composent d'une phase élastique et d'une phase plastique avec diminution de la rigidité à cause de la plastification de l'un de deux matériaux constitutifs, et une phase de rupture à cause de la plastification des deux matériaux. Elles montrent que le fait de prendre la valeur de la hauteur du tirant égale à la hauteur de la fissure donne une surestimation visible du comportement. Les courbes ressemblent au comportement du tirant, sachant que le comportement d'un tirant à faible pourcentage d'acier est différent de celui avec pourcentage important.

En comparant les résultats des deux types de poutres, on voit l'effet induit par la prise en considération d'une hauteur du tirant égale à  $h_{ti} = 2C + D_s$  (2 fois l'enrobage) ou  $h_{ti} = 0,3d$ . Pour les poutres qui ont un enrobage important, le type  $A$ , la première expression ( $h_{ti} = 2C + D_s$ ) donne les valeurs les plus importantes du moment résistant. Par contre, pour les poutres qui ont

une hauteur utile importante, comme les poutres de type B, c'est la deuxième expression ( $h_{ti} = 0,3d$ ) qui donne les valeurs les plus grandes du moment résistant. Dans le cas  $h_{ti} = h_{fis}$ , on observe une surestimation très importante. Les courbes qui représentent le cas classique de prise en considération de l'effet du béton tendu par un comportement élastique fragile sous-estiment le moment résistant de la section au cours du chargement, et la plastification des aciers se produit pour la courbure la plus importante.

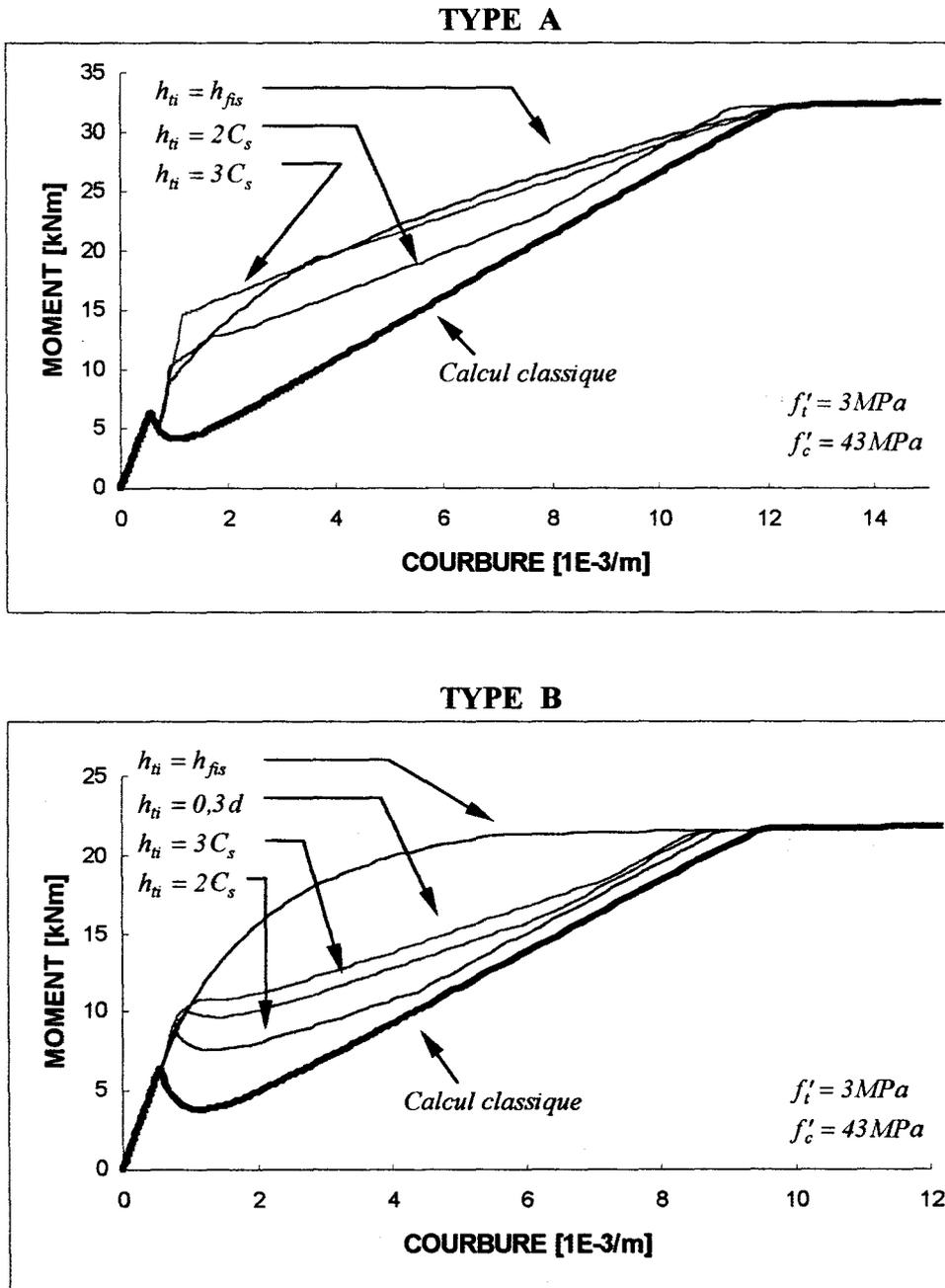


Figure II-15: Diagrammes moment-courbure des poutres de type A et de type B; effet de différentes valeurs de la hauteur du tirant

#### II.4.4.2. ETUDE PARAMETRIQUE.

On effectue comme au chapitre I (voir figure I-10) une étude paramétrique sur les résistances en traction et en compression du béton, l'enrobage (inférieur et latéral) et la section d'acier tendu pour la poutre de type A (figure II-16).

On voit figure II-16a que la résistance en traction du béton  $f_t'$  joue un rôle important sur le comportement. Dans le cas du calcul classique, la résistance en traction du béton influe seulement sur la phase élastique (figure I-10a) et modifie le début de la phase post fissuration, tandis que dans notre cas elle influe sur la phase élastique et sur la phase post fissuration, surtout avant la stabilisation des fissures.

Il faut noter que le béton en place dans les poutres ne possède plus la même réserve de résistance en traction que celle qu'auraient des éprouvettes non armées de même composition. Il est notamment le siège de contraintes résiduelles d'origine diverse. La résistance en traction effective du béton en place est notablement plus basse que celle mesurée sur éprouvettes. Lorsque celle-ci est correctement estimée, le modèle donne de meilleurs résultats.

La résistance en compression du béton  $f_c'$ , comme dans le cas classique (figure I-10b), n'influe que légèrement sur la courbe de comportement (figure II-16b). On peut donc négliger l'effet de l'augmentation de  $f_c'$  avec le temps. Les résultats expérimentaux effectués par LORRAIN et MESUREUR 1998 [48] sur des éprouvettes  $10 \times 10 \times 200$  de tirant centré montrent que l'allure générale de la courbe de comportement du tirant est la même pour les tirants en béton ordinaire ( $f_c' = 42 \text{ MPa}$ ) et en béton à haute performance ( $f_c' = 101 \text{ MPa}$ ), ce qui traduit que les mêmes phénomènes physiques sont en jeu dans le processus de fissuration et de ruine de ce type de pièce, indépendamment de la résistance de leurs constituants. Ils ont montré également que le comportement des poutres en béton à haute performance ne diffère pas de celui des poutres en béton ordinaire.

L'effet de l'enrobage des armatures tendues C, des armatures comprimées et de l'enrobage latéral sont présentés figure II-16c,d,e. D'abord en figure II-16c, on considère un enrobage supérieur moins important pour le type A ( $d' = 2,2 \text{ cm}$ ) et donc une hauteur utile de  $d = 19,4 \text{ cm}$  au lieu de la hauteur utile du type A qui est égale à  $d = 22,4 \text{ cm}$ . Comme dans le cas classique (figure I-10c), la diminution de l'enrobage supérieur affecte considérablement la résistance et la capacité portante de la section en raison de la baisse du moment d'inertie.

**TYPE A ( $h_{ti} = 2C + D_s$ )**

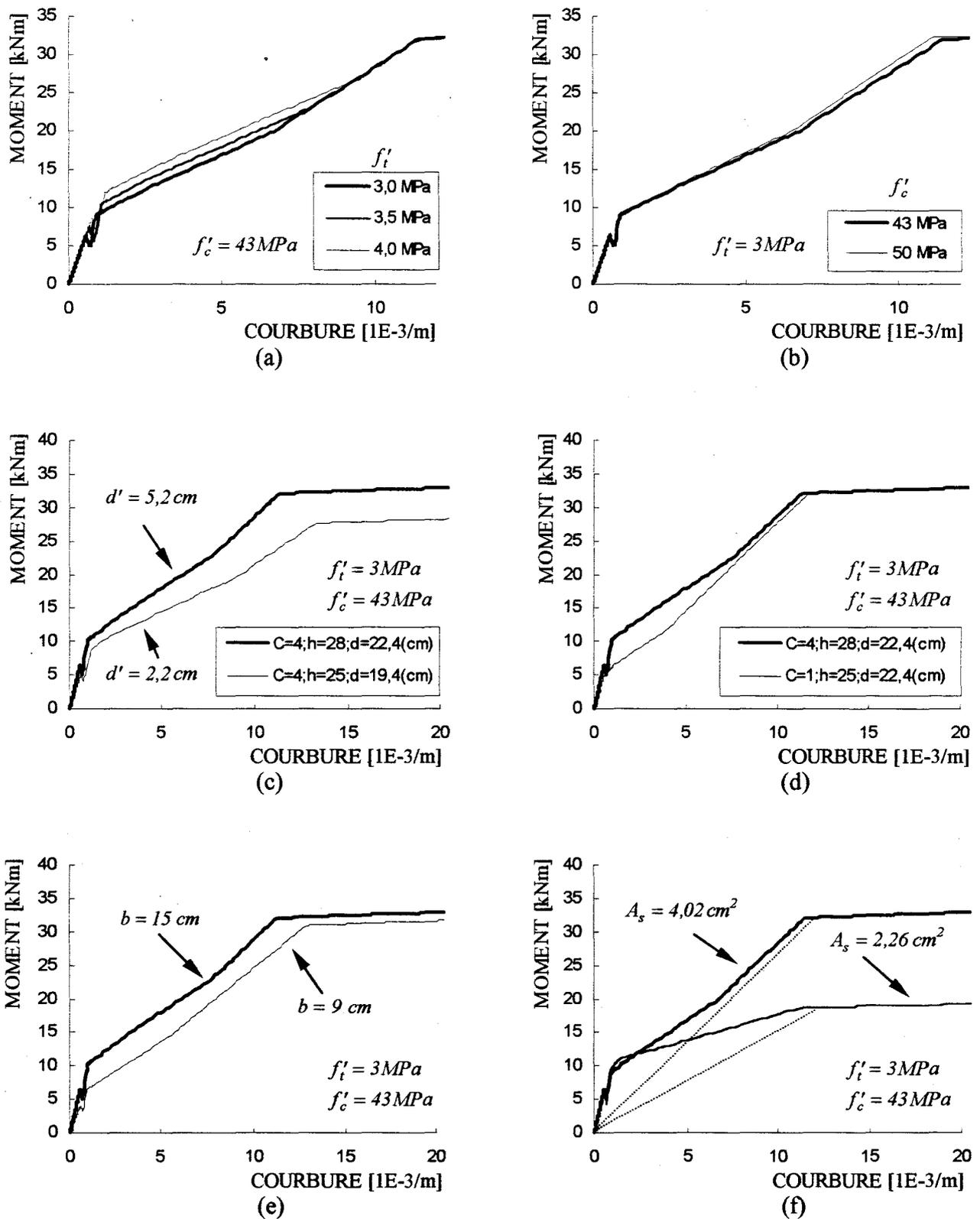


Figure II-16: Diagramme moment-courbure pour les poutre de type A dans le cas du calcul par le tirant ( $h_{ti} = 2C + D_s$ ) et (a) l'effet de  $f_t'$  (b) l'effet de  $f_c'$  (c) l'effet de l'enrobage supérieur (d) l'effet de l'enrobage inférieur (e) l'effet de l'enrobage latéral (f) l'effet de  $A_s$

La figure II-16d présente un autre effet de l'enrobage C. On considère encore un enrobage de 1 cm mais en supposant avoir un éclatement du béton tendu égal à 3 cm, par exemple à cause de la corrosion ou du gel. La hauteur utile ne change donc pas. On observe que la diminution de l'enrobage inférieur affecte la résistance mais la capacité portante ne change pas. Les comportements convergent lorsque la charge augmente au contraire au cas de l'enrobage supérieur.

En comparant les figures II-16c et d, on constate que l'effet de l'enrobage supérieur est plus important que celui inférieur. Ces figures illustrent la nécessité d'être vigilant dans le cas d'une poutre corrodée.

L'effet de l'enrobage latéral est montré figure II-16e. On considère, comme dans le cas de l'enrobage inférieur, une diminution latérale de couche du béton égale à 3 cm pour chaque côté. Elle montre que la perte latérale du béton due par exemple à la corrosion ou à l'effet du gel peut diminuer la résistance dans chaque phase et avancer la fissuration. Cet effet est notablement important en comparaison avec le cas classique (figure I-10e).

L'effet de la réduction de la section d'armature est également important (figure II-16f) comme dans le cas classique (figure I-10f). Dans le cas d'une poutre corrodée, cette étude paramétrique montre l'importance de la prise en considération de la réduction de la section d'armature dans le calcul. L'effet du raidissement en traction est plus important lorsque la section d'armature est moins importante.

La figure II-17 montre les variations de la hauteur comprimée, de la hauteur du tirant, de la hauteur de la fissure et de la hauteur du béton tendu en phase élastique par rapport au moment appliqué pour les cas  $h_{ti} = 0,3 d$ ,  $h_{ti} = 2C + D_s$  et  $h_{ti} = h_{fis}$ .

Les trois phases élastiques, de plastification et de rupture sont visibles. Les hauteurs sont constantes dans la phase élastique et le changement commence après la fissuration. Les courbes II-17a à II-17d ont une partie stabilisée pendant la phase de plastification. La hauteur du tirant dans le cas  $h_{ti} = 2C + D_s$  (2 fois l'enrobage) est plus importante que dans le cas  $h_{ti} = 0,3 d$  pour le type A et le contraire pour le type B. La zone stabilisée est plus importante lorsque la valeur de la hauteur du tirant est moins importante.

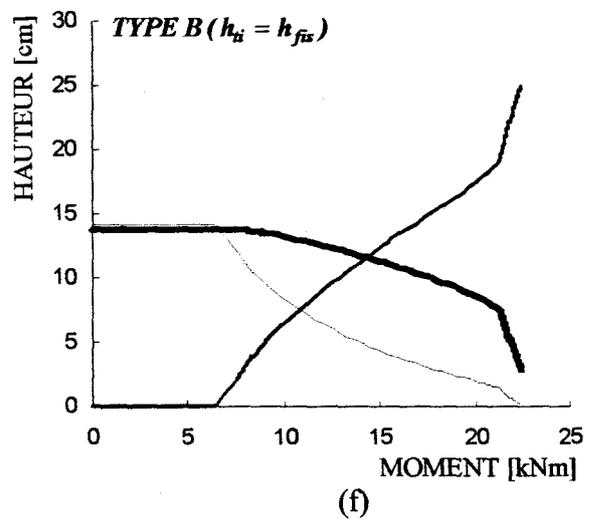
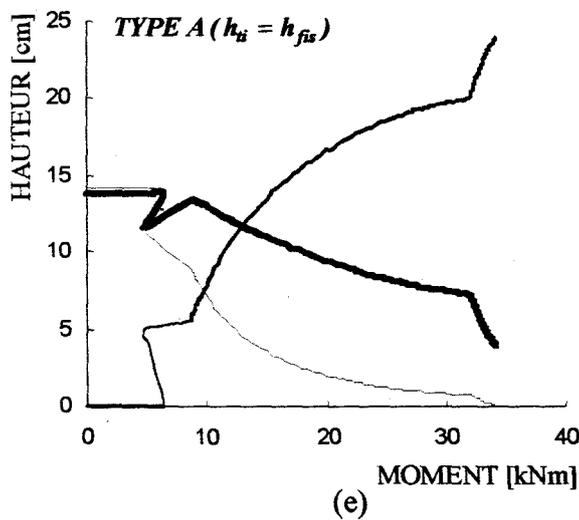
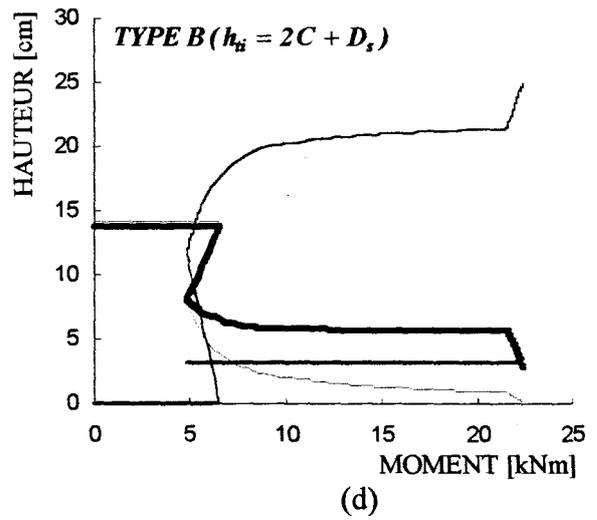
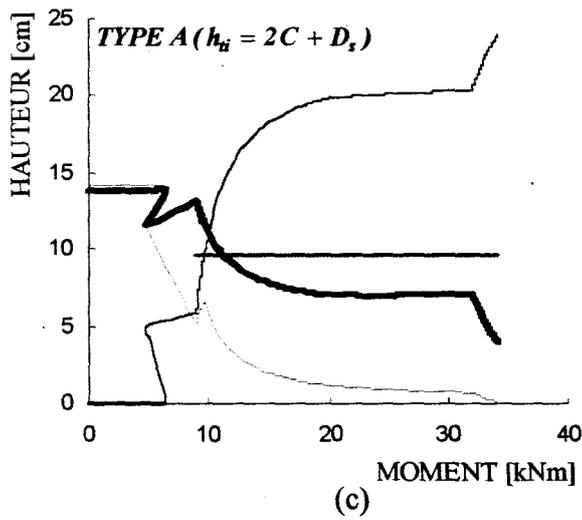
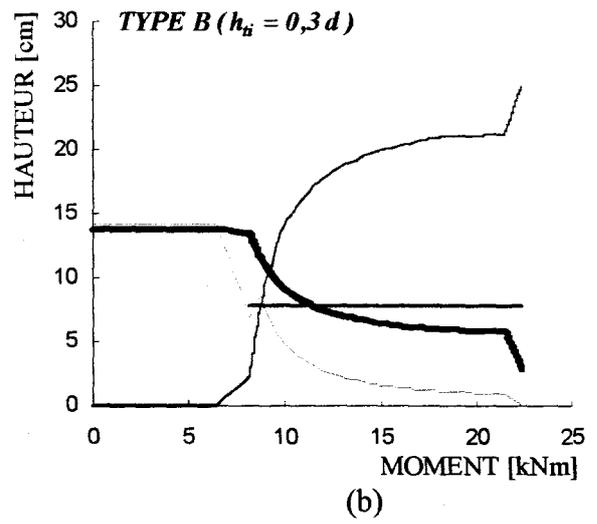
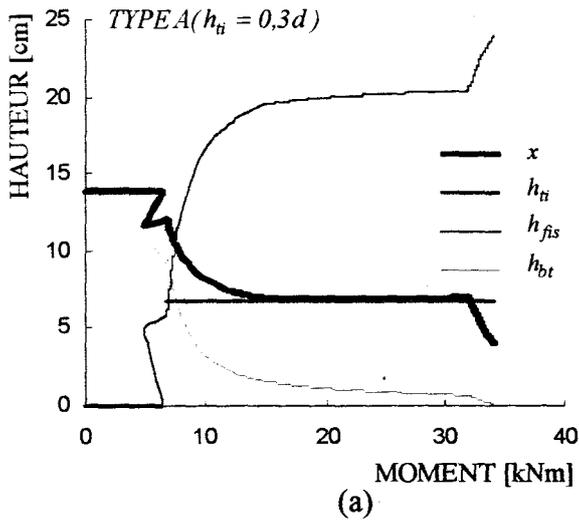


Figure II-17: Variations de  $x$ ,  $h_{ti}$ ,  $h_{fis}$  et  $h_{bt}$  en fonction du moment fléchissant dans les cas  $h_{ti} = 0,3 d$ ,  $h_{ti} = 2C + D_s$  et  $h_{ti} = h_{fis}$  pour les poutre de type A et de type B

## II.5. TIRANT EXCENTRE; PROPOSITION DE LA LOI DE COMPORTEMENT

### II.5.1. Principe

Il est intéressant de rechercher un comportement du tirant bien adapté au cas de la flexion simple. On sait que la distribution de la déformation et de la contrainte dans la section d'un tirant centré est uniforme. Dans le cas du tirant excentré, la forme de la distribution change, ce qui est compatible avec le cas d'une poutre en flexion. L'excentricité  $e$  due à la disposition non uniforme des armatures dans la section d'un tirant excentré induit un moment sur le système (figure II-18). La charge se décompose en deux sollicitations, l'effort normal  $N$  et le moment fléchissant égal à  $M = N \times e$ .

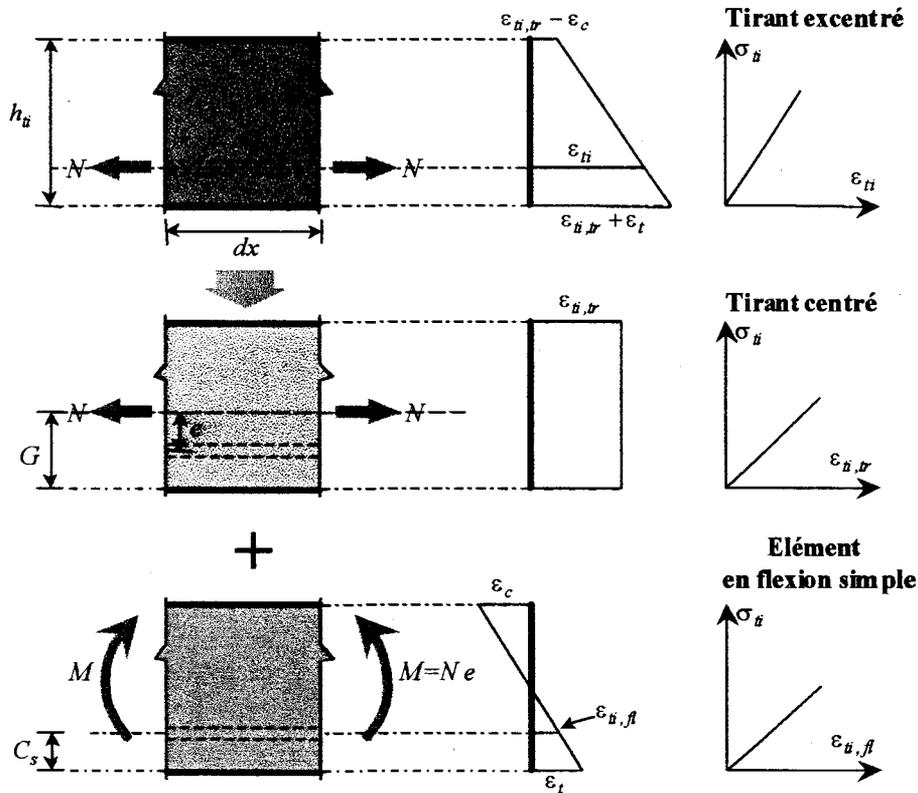


Figure II-18: Comportement élastique; hypothèses considérées

On recherche, comme dans le cas du tirant centré, la relation entre la force appliquée et la déformation du tirant excentré. Nous appelons la déformation du tirant excentré la déformation au niveau des armatures. La déformation et la contrainte de traction d'un tirant excentré se définit comme suit:

$$\epsilon_{ti} = \epsilon_s \quad \text{et} \quad \sigma_{ti} = \frac{N}{A_s}$$

L'objectif est de remplacer le comportement du tirant centré par celui du tirant excentré dans notre modèle. On cherche dans la suite, le comportement d'un tirant excentré dans les phases élastique et post fissuration.

## II.5.2. Comportement élastique

L'excentricité de la force appliquée aux armatures amène un moment fléchissant. Dans le système équivalent, la force  $N$  induit au centre de gravité de l'élément un moment égal à:

$$M = N (G - C_s) = N e$$

La force  $N$  amène une déformation constante  $\varepsilon_{tr}$  sur toute la section du système en traction pure (figure II-18). Le moment amène une déformation qui varie linéairement sur la section d'une déformation en compression  $\varepsilon_c$  pour la fibre la plus éloignée des armatures (fibre extérieure) à une déformation en traction  $\varepsilon_t$  pour la fibre située à l'extrémité de la zone tendue (fibre inférieure).

En phase élastique le comportement s'écrit de la forme suivante:

$$\sigma_{ti,el} = \tilde{E}_{ti,el} \varepsilon_{ti,el}$$

L'emplacement de la fibre neutre et de la fibre correspondant au centre de gravité sont donnés par les relations suivantes:

$$x_{el} = \frac{bh_{ti}^2 / 2 + A_s d (n-1)}{A_h} = cste; \quad G = \frac{bh_{ti}^2 / 2 + A_s C_s (n-1)}{A_h} \quad \text{où } A_h = bh_{ti} + A_s (n-1)$$

La valeur de la déformation du tirant excentré est la somme de la déformation constante  $\varepsilon_{ti,tr}$  due à la traction pure et de la déformation de l'acier  $\varepsilon_{ti,fl}$  due à la flexion pure, c'est-à-dire:

$$\varepsilon_{ti} = \varepsilon_{ti,tr} + \varepsilon_{ti,fl}$$

Les deux termes de cette relation sont exprimés par les relations suivantes:

$$\varepsilon_{ti,tr} = \frac{N}{E_c A_h}; \quad \varepsilon_{ti,fl} = \frac{N e (G - C_s)}{E_c I_h}$$

avec: 
$$I_h = \frac{bh_{ti}^3}{12} + bh_{ti} \left( \frac{h_{ti}}{2} - G \right)^2 + A_s(n-1) e^2$$

Reportons ces deux termes dans l'expression étant donné qu'en phase élastique la loi de superposition est valable, ce qui donne:

$$\varepsilon_{ti} = \frac{N}{A_s} \left[ \frac{A_s}{E_c A_h} + \frac{A_s e (h_{ti} - G)}{E_c I_h} \right]$$

L'expression de la pente de la loi de comportement dans la phase élastique est alors:

$$\tilde{E}_{ti,el} = \left[ \frac{A_s}{E_c A_h} + \frac{A_s e^2}{E_c I_h} \right]^{-1}$$

### II.5.3. Relation entre force et fissuration

Au moment de la fissuration, la déformation de la fibre inférieure atteint sa valeur maximale et on peut écrire:

$$\varepsilon_{ti,tr,fis} + \varepsilon_{ti,t,fis} = \frac{f'_t}{E_c} \Rightarrow \varepsilon_{ti,t,fis} = \frac{f'_t}{E_c} - \varepsilon_{ti,tr,fis}$$

Au moment de la fissuration les composantes de la déformation sont donc connues et la déformation du tirant s'obtient comme suit:

$$\varepsilon_{s,fis} = \frac{e}{h_{ti} - x_{el}} \left( \frac{f'_t}{E_c} - \frac{N_{fis}}{E_c A_h} \right)$$

$$\varepsilon_{ti,fis} = \varepsilon_{ti,tr,fis} + \varepsilon_{s,fis} = \frac{N_{fis}}{A_s \tilde{E}_{ti,el}} \Rightarrow \frac{N_{fis}}{A_s \tilde{E}_{ti,el}} = \frac{N_{fis}}{E_c A_h} + \frac{e}{h_{ti} - x_{el}} \left( \frac{f'_t}{E_c} - \frac{N_{fis}}{E_c A_h} \right)$$

Donc:

$$N_{fis} = \frac{f'_t}{E_c} \left[ \frac{l}{\frac{l}{E_c A_h} + \frac{(h_{ti} - x_{el}) e}{E_c I_h}} \right]$$

### II.5.4. Comportement post fissuration

Dans ce cas, le comportement est plus difficile à modéliser, car la loi de superposition n'est plus valable et on revient au problème initial. L'élément est fléchi et le raidissement en traction pose problème. Mais il y a une différence avec le cas général d'une poutre fléchie, car la section est soumise à une force de traction.

Pour résoudre le problème, notre approche consiste à considérer deux comportements différents pour deux systèmes séparés définis figure II-19.

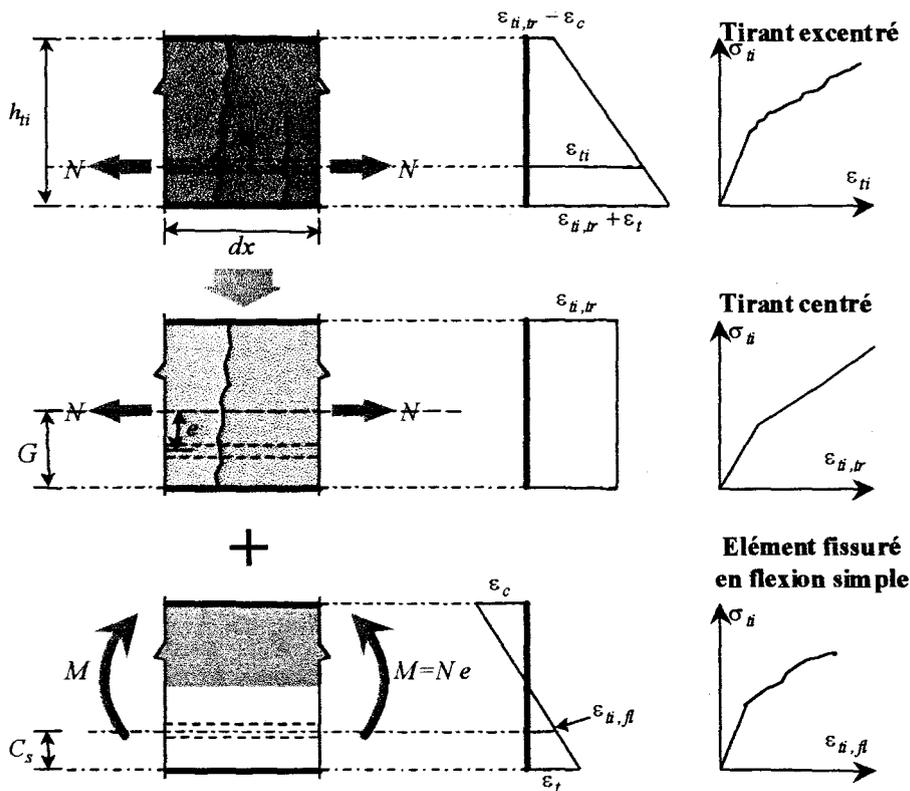


Figure II-19: Comportement post fissuration d'un tirant excentré; hypothèses considérées

Le premier système présente un élément totalement tendu de béton armé que la force de traction  $N$  applique au centre de gravité de l'élément. La déformation sur la section  $\epsilon_{ti,tr}$  est donc uniforme et nous considérons pour ce système le comportement post fissuration d'un tirant centré.

Nous considérons pour le deuxième système, le comportement d'un élément fissuré de béton armé soumis à un moment fléchissant pur  $M = N e$  en négligeant le raidissement en traction. La déformation au niveau de l'acier est considérée comme une partie de la déformation du tirant excentré dans ce système.

Comme dans le cas élastique, on recherche toujours la relation entre la force appliquée et la déformation du tirant excentré (au niveau des armatures).

Pour la résolution du problème, on commence par le système fléchi. On prend, par exemple, la relation de l'ACI pour le comportement du béton comprimé et un comportement élastique parfaitement plastique pour l'acier. On considère une déformation arbitraire  $\epsilon_c$ . Par la méthode des cas possibles on calcule la hauteur de la zone comprimée comme suit:

- ◆ Hypothèse: Les aciers ne sont pas plastifiés ( $\epsilon_s \leq \epsilon_{sy}$ );

$$radical(\epsilon_c) = \left[ (\epsilon_c A_s E_s)^2 + 4 \Gamma \epsilon_c (A_s E_s d) \right]^{1/2}$$

$$x1 = (radical - \epsilon_c A_s E_s) / (2\Gamma)$$

$$si \ \epsilon_s = \frac{d - x1}{x1} \epsilon_c \leq \epsilon_{sy} \Rightarrow x = x1$$

sinon  $\Rightarrow$  hypothèse suivante

- ◆ Hypothèse: Les aciers sont plastifiés ( $\epsilon_s > \epsilon_{sy}$ );

$$radical(\epsilon_c) = A_s f_y$$

$$x2 = (radical + A_s f_y) / (2\Gamma) \Rightarrow x = x2$$

En connaissant la hauteur de la zone comprimée, on peut calculer la déformation au niveau des armatures et l'effort normal dans l'acier:

$$\epsilon_{ti,fl} = \frac{d - x}{x} \epsilon_c \text{ avec } d = h_u - C_s$$

$$N_s = \begin{cases} A_s E_s \epsilon_{ti,fl} & si \ \epsilon_{ti,fl} \leq \epsilon_y \\ A_s f_y & sinon \end{cases}$$

L'excentricité  $e$  est constante, on peut donc aboutir au moment correspondant:  $M = N_{fl} e$ .

La force  $N_{fl}$  correspondante à la déformation arbitraire de  $\epsilon_c$  du système fléchi est calculée par la relation suivante:

$$N_{fl} = N_s = \Gamma X(x) \text{ avec: } \begin{cases} \Gamma = b f_c' \left( \frac{\epsilon_c}{0,002} - \frac{1}{3} \left( \frac{\epsilon_c}{0,002} \right)^2 \right) & si \ \epsilon_c < 0,002 \\ \Gamma = b f_c' \left( -150 \epsilon_c + 1,6 - \frac{0,038}{30 \epsilon_c} \right) & sinon \end{cases} ; X(x) = x$$

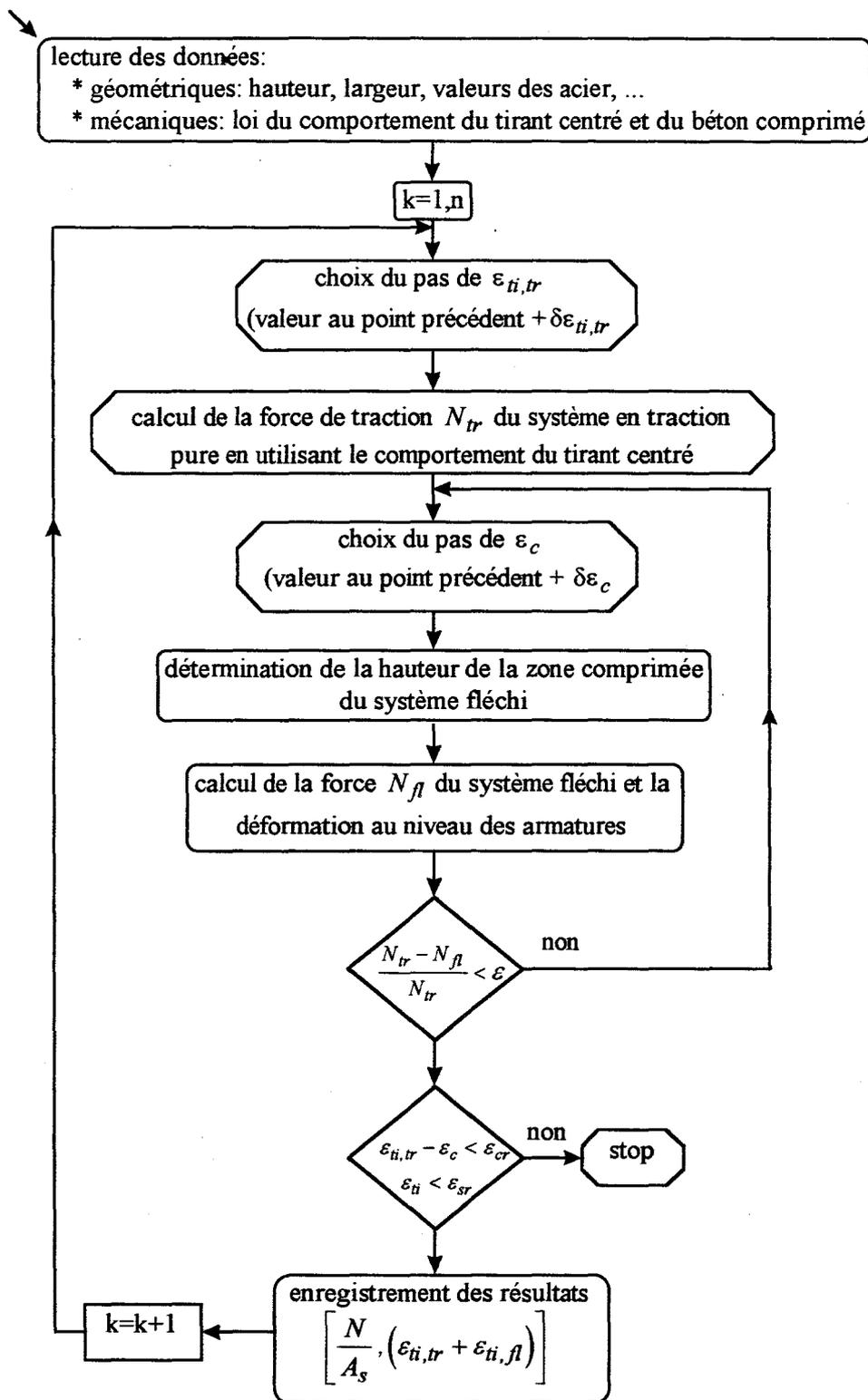


Figure II-20: Organigramme du calcul du comportement d'un tirant excentré

On va sur le système du tirant centré. En connaissant le comportement du tirant centré, par exemple la relation proposée par ESPION et al. 1985 [45], on peut aboutir à la force de traction  $N_{tr}$  correspondante à une déformation donnée  $\varepsilon_{ti,tr}$ . Cette force est égale à la force appliquée  $N$  au système global.

En observant les deux systèmes, il faut que la relation suivante soit vérifiée:

$$N = N_{tr} \cong N_{fl}$$

Si la relation ci-dessus n'est pas vérifiée, on change la déformation arbitraire  $\varepsilon_{ti,tr}$  jusqu'à ce que l'on ait atteint une précision acceptable comme ci-dessus:

$$\left| \frac{N_{tr} - N_{fl}}{N_{tr}} \right| < \varepsilon$$

Enfin, la relation entre  $N / A_s$  et  $(\varepsilon_{ti,tr} + \varepsilon_{ti,fl})$  donne le comportement du tirant excentré. L'organigramme de la figure II-20 présente la synthèse du calcul.

### II.5.5. Critères et modes de rupture

Il est important de souligner qu'il est préférable que toutes les fibres du tirant excentré soient tendues, car on veut modéliser la partie tendue d'une poutre. Pour cela les relations ci-dessous doivent toujours être vérifiées:

$$\varepsilon_c - \varepsilon_{tr} \leq 0$$

$$h_{ti} \geq 2 C_s$$

La satisfaction de ces relations dépend des matériaux et de la géométrie. Puisqu'on ne peut changer les matériaux, le seul paramètre sur lequel il est possible de jouer est la hauteur du tirant  $h_{ti}$ .

La première relation contrôle la hauteur maximum du tirant. Lorsque la hauteur du tirant est égale à  $2 C_s$ , la section est soumise à une traction constante,  $\varepsilon_c = 0$  et la relation ci-dessus est vérifiée. Si  $h_{ti} < 2 C_s$  dans ce cas, la fibre inférieure est en compression ce qui n'est pas compatible avec la flexion positive d'une poutre en béton armé. Les limites du pourcentage géométrique déterminent celles de la hauteur du tirant. Si  $h_{ti} = 2 C_s$ , on peut donc aboutir à la relation suivante:

$$h_{ti,min} = 2C_s \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_{max} = \frac{A_s}{2bC_s - A_s}$$

D'après les résultats numériques, puisque la relation  $\varepsilon_c - \varepsilon_{tr} \leq 0$  est vérifiée, on en déduit la relation approximative suivante:

$$h_{ti,max} \cong 1,5 h_{ti,min} \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_{min} \cong 0,666 \Omega_{max}$$

### **Modes de rupture**

Deux modes de rupture peuvent survenir. Si  $\varepsilon_{tr} - \varepsilon_c > 0$ , la fibre supérieure est comprimée. On aura la rupture du béton comprimé.

Par contre, si  $\varepsilon_{tr} - \varepsilon_c < 0$ , la fibre supérieure est tendue et le béton est donc fissuré sur toute la section. Dans ce cas, seules les barres d'acier résistent et on aura donc la rupture de l'acier tendu.

### **II.5.6. Proposition pour le choix de la hauteur du tirant**

Pour prendre en compte l'effet de l'excentricité des aciers dans un tirant, nous proposons les expressions suivantes en ajoutant le terme  $3C_s$  pour calculer la hauteur du tirant en plus de ceux proposés par le B.A.E.L. 1993 [1]:

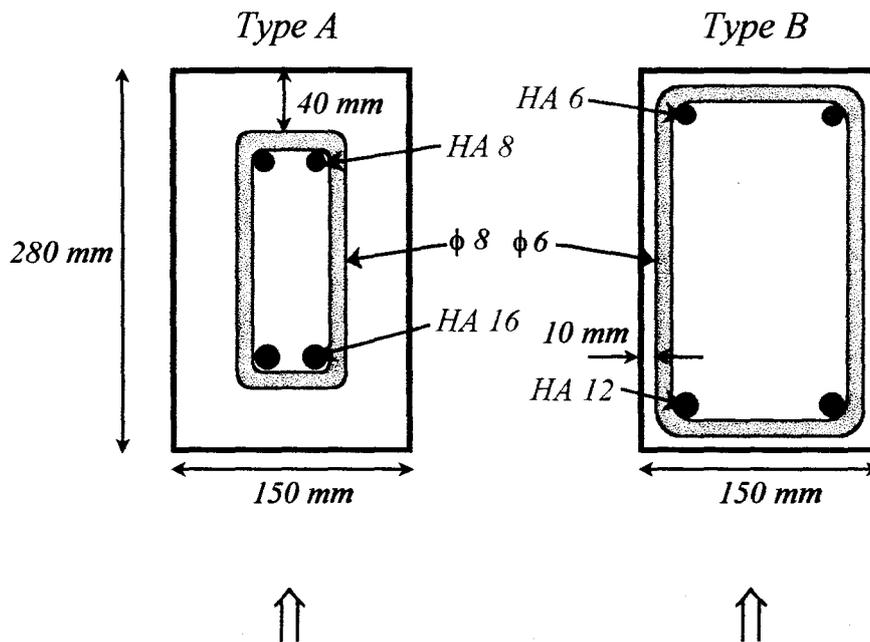
$$\text{expression du B.A.E.L. :} \quad h_{ti} = \begin{cases} 2C_s \\ 0,3d \end{cases}$$

$$\text{notre expression :} \quad h_{ti} = \begin{cases} 2C_s \\ 3C_s \\ 0,3d \end{cases}$$

Notons que le B.A.E.L. considère la valeur maximale de la hauteur du tirant pour l'analyse. Nous utilisons le maximum et le minimum. On verra au chapitre IV que l'on aura besoin aussi la valeur minimale de la hauteur du tirant pour analyser une poutre sur sa longueur. Le maximum et le minimum des expressions ci-dessous déterminent la variation de la hauteur du tirant le long de la poutre. Dans le cas d'une poutre saine, le minimum de  $h_{ti}$  est égal à deux fois l'enrobage. Au contraire, dans le cas d'une poutre fissurée où nous modélisons la partie tendue par le comportement d'un tirant excentré fissuré, l'expression de  $h_{ti} = 2C_s$  ne peut pas représenter l'excentricité des aciers tendus.

Nous comparons les différentes définitions de la hauteur du tirant (figure II-21) pour les deux poutres de types A et B. Observons que dans le cas du type A, d'après le B.A.E.L., la valeur maximale de la hauteur du tirant est  $2 C_s = 11,2 \text{ cm}$  ce qui est le cas d'un tirant centré, et n'est pas compatible avec la réalité. On sait que juste après fissuration, les fissures montent rapidement et dépassent la hauteur de  $2 C_s$ . Notre formulation considère  $3 C_s = 16,8 \text{ cm}$ . La valeur minimum de  $0,3 d = 6,72$  est moins de deux fois l'enrobage et ne peut pas retenue.

D'après le B.A.E.L. dans le cas du type B, la valeur maximale de la hauteur du tirant est  $0,3 d = 7,74 \text{ cm}$  qui est la même avec notre expression. Par contre pour la valeur minimum, on considère  $h_{ti} = 6,6 \text{ cm}$  dans l'état fissuré et  $h_{ti} = 4,4 \text{ cm}$  dans l'état non fissuré.



formulations  
du B.A.E.L.

$$\begin{cases} h_{ti,min} = 0,3 d = 6,72 \text{ cm} \\ h_{ti,max} = 2 C_s = 11,2 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_{ti,min} = 2 C_s = 4,4 \text{ cm} \\ h_{ti,max} = 0,3 d = 7,74 \text{ cm} \end{cases}$$

nos formulations:

$$\begin{cases} h_{ti,min} = 2 C_s = 11,2 \text{ cm} \\ h_{ti,max} = 3 C_s = 16,8 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_{ti,min} = 2 C_s = 4,4 \text{ cm} \quad (\text{état non fissuré}) \\ h_{ti,min} = 3 C_s = 6,6 \text{ cm} \quad (\text{état fissuré}) \\ h_{ti,max} = 0,3 d = 7,74 \text{ cm} \end{cases}$$

Figure II-21: Comparaison des différentes définitions de la hauteur du tirant entre les formulations du B.A.E.L. et nos formulations pour les poutres de types A et de type B

### II.5.7. Exemple et comparaison

La figure II-22 montre les courbes contrainte-déformation du tirant excentré et les compare avec le cas du tirant centré. La largeur, la section de l'armature et l'enrobage sont considérés constants. La hauteur du tirant excentré varie pour donner des pourcentages d'acier différents ( $\frac{A_s}{bh_{ti} - A_s}$ ). Plus le pourcentage est important, moins la hauteur du tirant est importante.

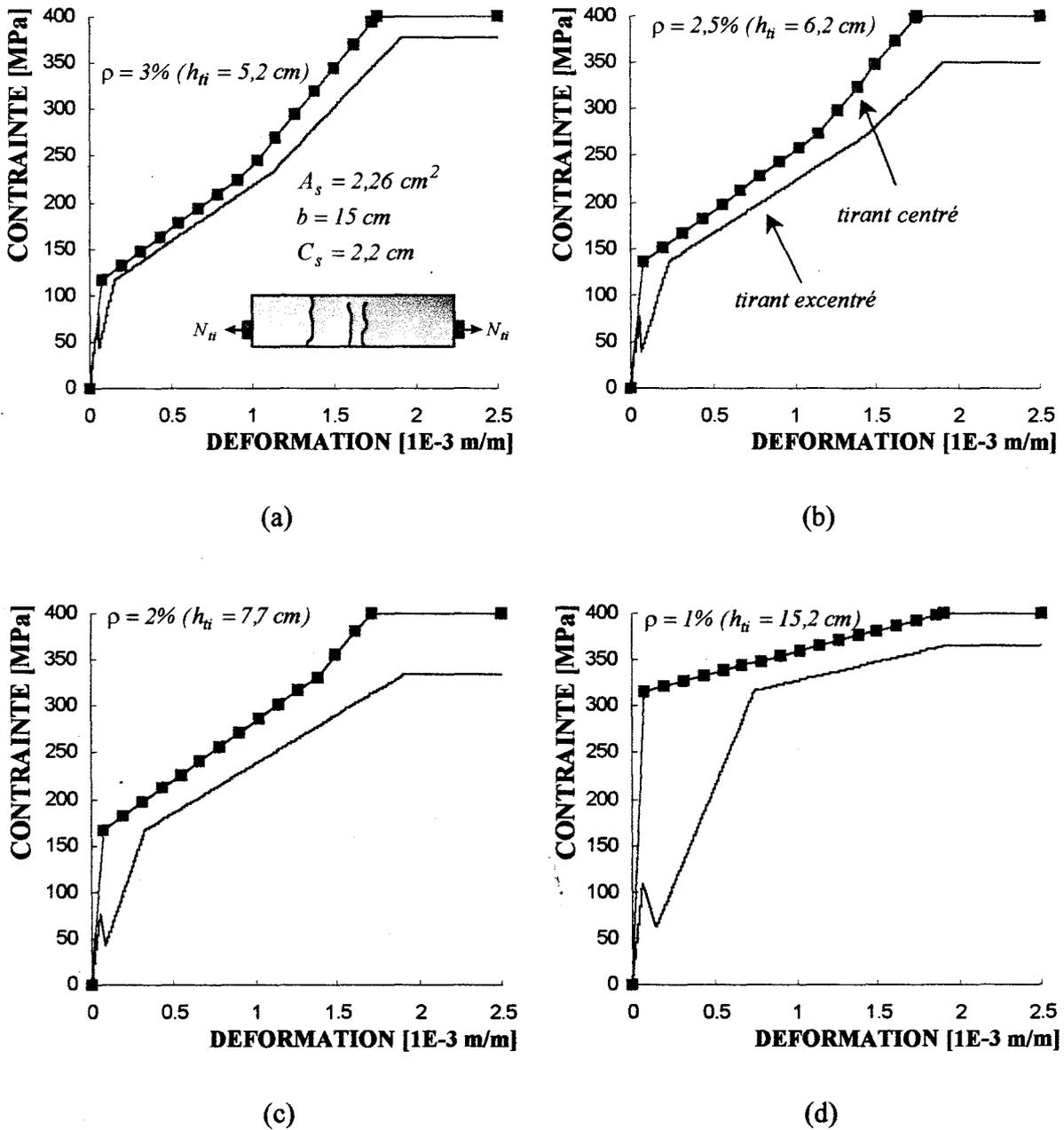


Figure II-22: Comportement du tirant excentré; comparaison avec le cas du tirant centré

Toutes les courbes du comportement du tirant excentré, présentées figure II-22, sont inférieures aux courbes du comportement du tirant centré. Cette observation permet de dire que la prise en considération d'un tirant centré surestime les valeurs de la contrainte et donc l'effet du raidissement en traction.

Le tirant excentré se fissure avant le tirant centré et la différence est plus importante quand sa hauteur est plus importante. Puisque la déformation du tirant excentré est la somme de deux systèmes, la déformation supplémentaire du second système (système fléchi) aide la fissuration.

En augmentant le pourcentage d'acier, le comportement du tirant excentré s'approche du cas centré. Dans ce cas la hauteur du tirant est égale à  $2C_s = 2C + D_s = 4,4 \text{ cm}$ .

La plastification du tirant excentré survient aussi plus tôt. Mais la différence entre les capacités portantes du tirant centré et excentré ne suivent pas la même règle. La figure II-22b montre que la capacité portante dans le cas où le pourcentage de l'acier est égal à 2,5% est moins importante que pour 3%. Par contre celle de 1,5% est plus importante que pour 2,5%.

On peut en déduire que l'augmentation ou la diminution de la hauteur du tirant n'induit pas forcément l'augmentation ou la diminution de la capacité portante. Quand on augmente la hauteur du tirant excentré de 2 fois l'enrobage à une valeur supérieure, la capacité portante diminue jusqu'à certain seuil car le système fléchi impose sa déformation. A partir de ce seuil la capacité portante augmente et approche le niveau de la capacité portante du tirant centré car le système de traction pure devient plus important (dans ce cas la hauteur du tirant est plus importante).

## **II.6. PROPOSITION DU COMPORTEMENT DU TIRANT DANS LE CAS DE LA CORROSION**

### **II.6.1. Introduction**

Dans le cas d'un tirant corrodé, l'adhérence acier-béton joue un rôle particulièrement important. Plus l'adhérence diminue, plus le comportement du tirant tend vers celui de l'acier seul. On peut supposer la corrosion uniformément répartie et on considère alors un pourcentage de corrosion global pour le tirant. Ce pourcentage peut être obtenu par plusieurs méthodes, comme la visualisation, les mesures de potentiel et les ultra sons.

Un des effets de la corrosion est la diminution de l'adhérence acier-béton. Le glissement acier-béton augmente et change le comportement. Nous proposons représenter les effets de la

corrosion par des paliers horizontaux (figure II-23). L'emplacement du palier horizontal peut être n'importe où sur la courbe de comportement, avant fissuration ou dans la phase post fissuration. Pour que ce glissement apparaisse, il faut une corrosion assez importante des aciers, mais on ne sait pas estimer cela précisément pour l'instant. Nous considérons dans cette figure que la structure est chargée et que le glissement a lieu après fissuration, ce qui correspond à la réalité pour la majorité des structures.

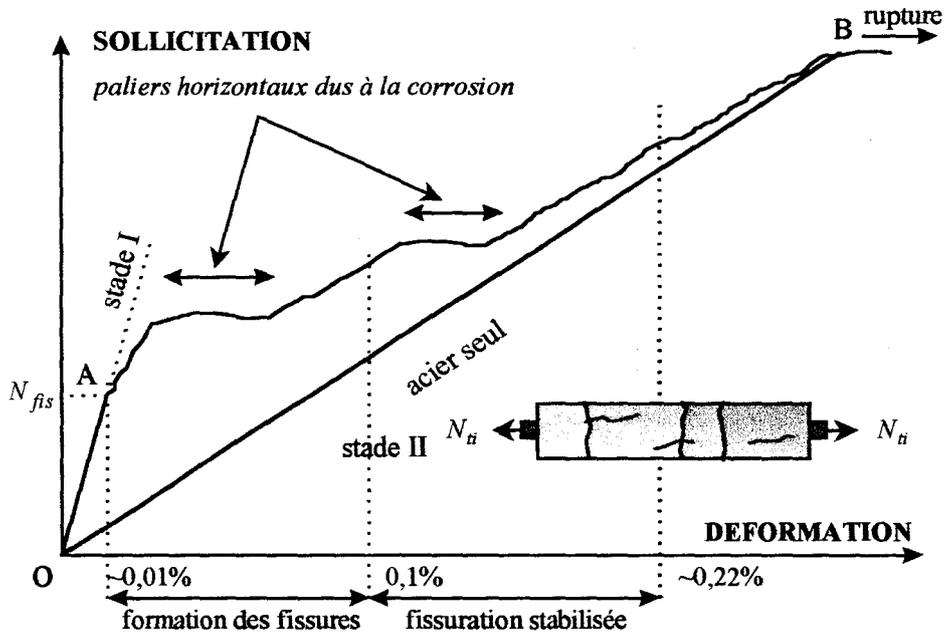


Figure II-23: Diagramme proposé sollicitation-déformation d'un tirant corrodé en béton armé

On présente dans la suite des modèles simplifiés qui permettent de prendre en compte l'évolution de l'adhérence par un palier horizontal ou rectiligne quasi horizontal.

### II.6.2. Modèle multilinéaire de BRUGGELING 1991 [46] et VAN DER VEEN 1990 [22]

Dans ce modèle simplifié les auteurs ont choisi une loi de comportement du tirant (centré) avec un palier horizontal au niveau de la force  $N_m$  correspondant à la stabilisation de la fissuration, c'est à dire à l'apparition de la dernière fissure. Cette force est supposée égale à 1,2 fois la limite élastique. La contribution du béton tendu, considérée constante en phase de fissuration stabilisée, est exprimée en fonction de l'exposant  $b$  dans la relation d'adhérence

( $\tau = a s^b$ ). La stabilisation de la fissuration a lieu au niveau de la contrainte dans l'acier  $\sigma_{ti, rn} = 1,2 \sigma_{ti, r1} = 1,2 \sigma_{ti, fis}$ , où la contribution du béton tendu est donnée par:

$$\Delta \varepsilon_n = \frac{(1+b)(5+b)}{12} (\varepsilon_{s, r1} - \varepsilon_{ti, rn})$$

Pour  $b=0,18$  et  $\sigma_{ti, rn} = 1,2 \sigma_{ti, r1}$ , on obtient:

$$\Delta \varepsilon_n = 0,61 (\varepsilon_{s, r1} - \varepsilon_{ti, r1})$$

Cette loi de comportement est illustrée figure II-24.

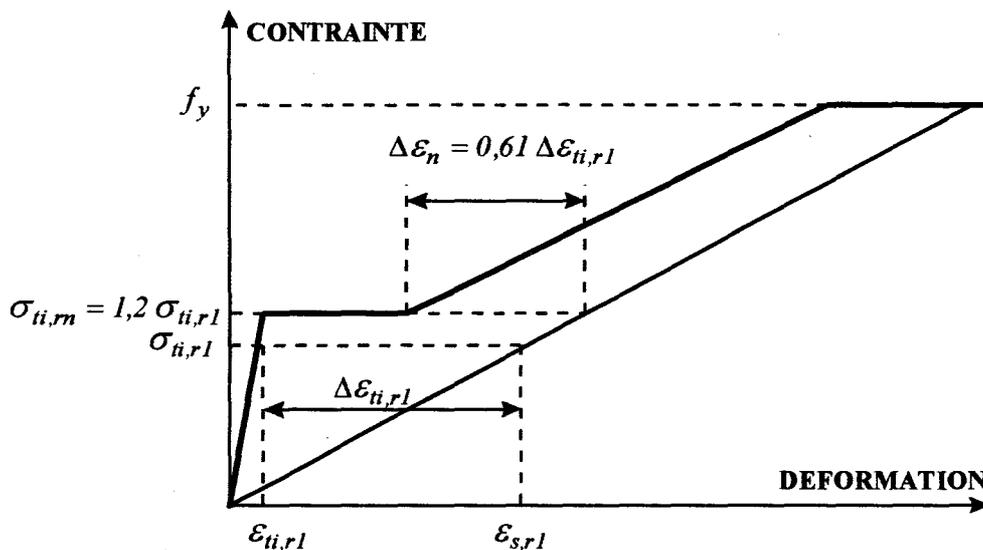


Figure II-24: Modèle multilinéaire d'après BRUGGELING 1991 [46] et VAN DER VEEN 1990 [22]

### II.6.3. Modèle multilinéaire du CEB-FIP 1993 [42]

Le point de stabilisation de la fissuration est défini par la contrainte dans l'acier au moment de l'apparition de la dernière fissure ( $\sigma_{ti, rn} = 1,3 \sigma_{ti, r1}$ ) et par la contribution du béton tendu, admis constante en phase de fissuration stabilisée.

$$\Delta \varepsilon_n = \beta_n (\varepsilon_{s, r1} - \varepsilon_{ti, r1})$$

$\beta_n = 0,4$  .....pour une charge instantanée et des barres d'armature nervurées;

$\beta_n = 0,25$  ..... pour une charge de longue durée ou cyclique et des barres d'armature nervurées.

Ce modèle est illustré à la figure II-25.

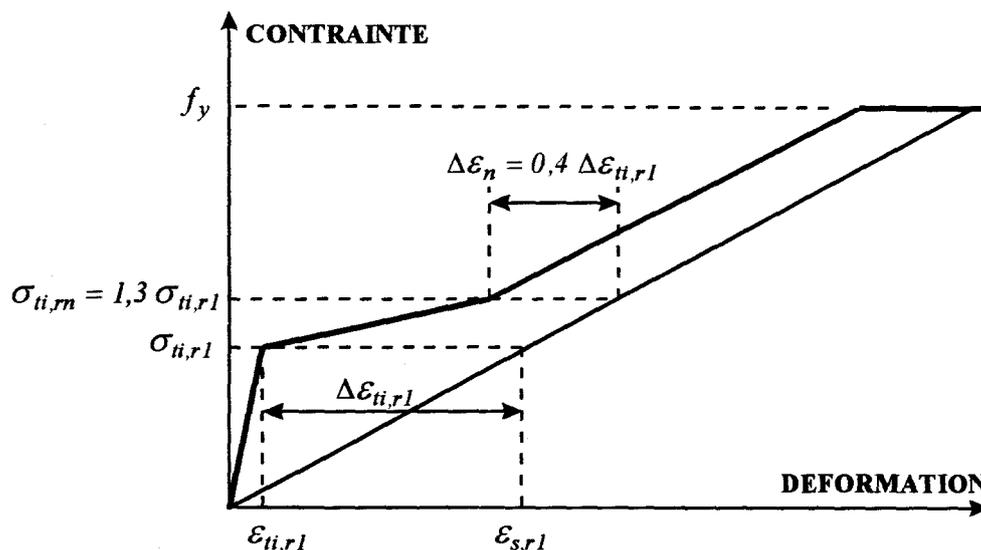


Figure II-25: Modèle du comportement du tirant d'après le CEB-FIP [42]

#### II.6.4. Modèle de l'Eurocode 2-1991 (EC2-91) [49]

La contribution du béton tendu  $\Delta \epsilon$ , qui présente la différence entre la déformation moyenne de l'acier ou du corps du tirant et celle du cas de l'acier seul (figure II-26), est donnée par la relation suivante:

$$\Delta \epsilon = (1 - \zeta)(\epsilon_{s2} - \epsilon_{s1})$$

où  $\epsilon_{s2} = \frac{N_{ti}}{E_s A_s}$  est la déformation d'un acier seul;  $\epsilon_{s1} = \frac{N_{ti}}{E_c A_h}$  est la déformation du tirant en cas de comportement homogène et  $\zeta$  est un coefficient sans dimension, entre 0 et 1, représentant l'extension de la fissuration.  $\zeta = 0$  pour une section non fissurée ( $N_{ti} < N_{ti, fis}$ ), et  $0 < \zeta < 1$  pour une section fissurée. La valeur de  $\zeta$  est donné par la relation suivante:

$$\zeta = 1 - \left( \frac{N_{ti, fis}}{N_{ti}} \right)^2 \quad \text{avec } N_{ti} > N_{ti, fis}$$

où  $N_{ti}$  est la force appliquée au tirant et  $N_{ti, fis}$  celle au moment de fissuration.

Afin de prendre en compte l'effet de l'adhérence acier-béton et le type de chargement, l'Eurocode 2-1991 introduit les coefficients  $\beta_1$  et  $\beta_2$  dans l'équation ci-dessous.

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left( \frac{N_{ti, fis}}{N_{ti}} \right)^2$$

où  $\beta_1 = 1$  ou  $0,5$  respectivement pour les barres à haute adhérence et pour les barres lisses.  $\beta_2 = 1$  ou  $0,5$  respectivement pour le premier chargement et pour une charge de longue durée ou cyclique. Avec cette modification, la figure II-26 présente un palier horizontal au niveau de fissuration.

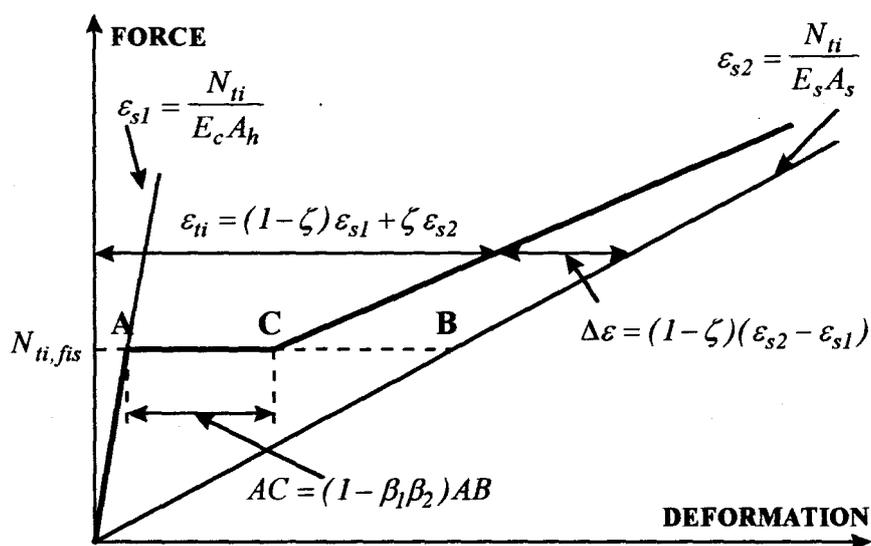


Figure II-26: Modèle du comportement du tirant d'après EC 2-91 [49]

### II.6.5. Modèle multilinéaire proposé d'un tirant corrodé (BUYLE-BODIN et REZAIÉ 1999 [50])

L'effet du raidissement en traction ou la contribution du béton tendu peuvent être affectés par la corrosion. Dans le cas où il n'y a pas de corrosion, la contribution du béton tendu ne change pas. Par contre dans le cas où le corps du tirant est entièrement corrodé, l'effet du raidissement en traction disparaît et le comportement du tirant tend vers le comportement d'un acier seul. Dans le cas où on est entre les deux, la contribution du béton tendu sera supposée proportionnellement positionnée entre le cas du comportement d'un acier seul et celui du tirant sain.

En utilisant ce principe et en regardant le modèle proposé par EC2-1991 [48], nous proposons l'introduction d'un troisième coefficient  $\beta$ , que nous appelons  $\beta_{corr}$  :

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \beta_{corr} \left( \frac{N_{ti, fis}}{N_{ti}} \right)^2$$

où:

$\beta_{corr} = 1$  pour un tirant sain, non corrodé

$\beta_{corr} = 0$  pour un tirant totalement corrodé de façon uniforme

Le modèle proposé par EC 2-91 [49] a considéré une variation hyperbolique pour l'effet du raidissement en traction. Par souci de simplicité nous préférons utiliser un modèle multilinéaire et pour cette raison rester sur le modèle d'ESPION et al. 1985 [45].

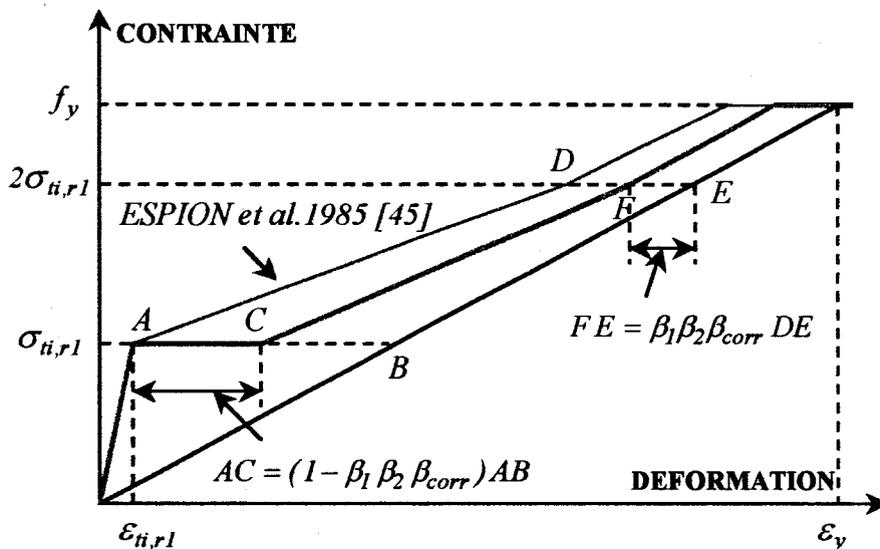


Figure II-27: Proposition de la contribution du béton tendu d'un tirant corrodé ( $2\sigma_{ti,r1} < f_y$ )

La figure II-27 montre notre proposition pour la modélisation d'un tirant corrodé dans le cas où  $2\sigma_{ti,r1} < f_y$ . En fait le glissement a été placé juste au début de la phase de fissuration, où l'effet du raidissement en traction est le plus important. La longueur du palier horizontal dépend du pourcentage de corrosion et des coefficients  $\beta_1$  et  $\beta_2$  et peut se définir par la relation suivante:

$$AC = (1 - \beta_1 \beta_2 \beta_{corr}) AB$$

La contribution du béton tendu dans la phase de stabilisation des fissures est donnée par la relation suivante:

$$FE = \beta_1 \beta_2 \beta_{corr} DE$$

L'apparition de la dernière fissure d'après ESPION et al. 1985 [45] a lieu quand la force appliquée est 2 fois la force correspondant à l'apparition de la première fissure, ce qui se situe plus loin par rapport aux autres modèles.

FARRA 1995 [21] d'après ses propres résultats expérimentaux explique qu'il est extrêmement difficile de définir de façon précise le point correspondant à la stabilisation de la fissuration à partir des essais sur tirants, étant donné que la fissuration stabilisée n'est pas atteinte systématiquement dans tous les essais et que la transition entre la phase de formation des fissures et celle de fissuration stabilisée s'effectue en réalité plutôt progressivement que brusquement en un point donné.

Signalons qu'il est possible que les aciers se plastifient avant la stabilisation des fissures. Ce cas a lieu quand la section de béton est beaucoup plus importante que la section d'acier, et donc que le pourcentage d'acier est moins important. Dans ce cas, d'après ESPION et al. 1985 [45], la force de fissuration est supérieure à la moitié de la limite de plasticité de l'acier et la déformation au point  $F$  correspond à la déformation de plastification de l'acier.

## **II.7 MODIFICATION DU COMPORTEMENT DU BETON COMPRIME DANS LE CAS DE LA CORROSION**

La prédiction du comportement de poutres endommagées par la corrosion nécessite de connaître en particulier le comportement de la partie comprimé. Les résultats expérimentaux indiquent en effet que la détérioration des structures en béton armé corrodé n'est pas liée uniquement à la réduction de la section des armatures. On observe également la détérioration par éclatement de la partie comprimée.

Les produits dus à la corrosion de l'armature de la partie comprimée créent une expansion volumique de l'armature causant des contraintes importantes dans le béton. La fissuration qui s'en suit crée un effet adoucissant sur le comportement du béton comprimé. Ce phénomène influe sur la capacité portante et la ductilité de la réponse charge-déformation d'une poutre.

La réduction de la ductilité de la section peut être évaluée expérimentalement en comparant le comportement des poutres endommagées et saines. L'endommagement du béton comprimé est la cause principale de la réduction de la ductilité CAPOZUCCA 1996 [51].

La figure II-28 montre le comportement du béton comprimé corrodé proposé par VECCHIO et COLLINS 1993 [52] qui introduisent un paramètre  $\lambda$ . Lorsque ce paramètre est égal à 1, le béton est sain.

$$\sigma_c = f'_c \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) - \lambda \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad \varepsilon_c \leq \varepsilon_0 / \lambda$$

$$\sigma_c = (f'_c / \lambda) \left[ 1 - \left( (\varepsilon_c - \varepsilon_0 / \lambda) / (2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 / \lambda) \right)^2 \right] \quad \varepsilon_c > \varepsilon_0 / \lambda$$

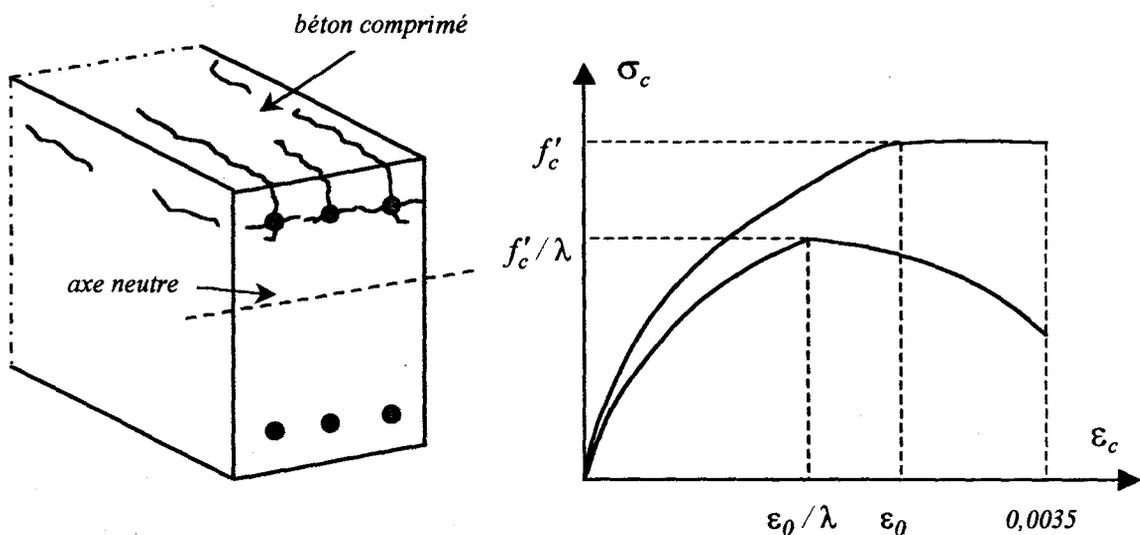


Figure II-28: Section comprimée endommagée par la corrosion et comportement de la partie comprimée selon VECCHIO et COLLINS 1993 [52]

## II.8. CONCLUSION

Dans ce chapitre, on a montré que le béton tendu situé entre les fissures dans une poutre en béton armé est capable de reprendre une partie des efforts de traction en raison de l'adhérence du béton avec l'armature. Le modèle physique du tirant est le modèle le plus simple pour représenter l'effet du raidissement en traction.

On a montré que la relation contrainte-déformation pour un tirant peut être également utilisée comme une propriété constitutive pour une poutre en béton armé. Nous avons modélisé le

comportement d'une poutre par un assemblage poutre-tirant. Le comportement d'un tirant centré a d'abord été conduit. L'effet de la corrosion a été considéré soit comme une diminution de la section d'acier, soit comme un éclatement du béton. La hauteur du tirant est le paramètre le plus important. On a considéré soit 2 fois l'enrobage, soit 0,3 fois la hauteur utile (en accord avec le B.A.E.L. 93). D'autres valeurs comme la hauteur tendue ( $h-x$ ) ont été considérées pour éviter d'avoir une hauteur constante pendant le chargement. Nous constatons que les courbes de comportement représentant le cas classique de prise en considération de l'effet du béton tendu par un comportement élastique fragile sous-estiment le moment résistant.

Les études paramétriques montrent que la résistance en traction joue un rôle important sur le comportement surtout avant la phase de stabilisation des fissures et que la résistance en compression influe légèrement sur la courbe de comportement. La diminution des enrobages supérieurs comme latéraux affecte considérablement la résistance et la capacité portante. L'enrobage inférieur affecte seulement la résistance. La réduction de la section d'armature affecte également la résistance et la capacité portante. L'effet du raidissement en traction est plus important lorsque la section d'armature est moins importante. Ces études soulignent la nécessité de prendre des précautions dans le cas d'une poutre corrodée.

Nous avons étudié l'intérêt de prendre en considération le comportement d'un tirant excentré plutôt que centré. La modélisation du raidissement en traction par le tirant excentré a été proposée et comparée au cas du tirant centré. La comparaison montre que le tirant excentré se fissure avant le tirant centré car la déformation du système fléchi causée par l'excentricité des armatures aide la fissuration. La prise en considération du comportement d'un tirant centré dans l'assemblage poutre-tirant surestime l'effet de la contribution du béton tendu dans une poutre fléchie. Nous avons proposé des expressions pour calculer la hauteur du tirant complémentaires de celles de B.A.E.L. 93 pour prendre en compte l'effet de l'excentricité du tirant.

Nous avons supposé que l'effet du raidissement en traction peut être affecté par la corrosion. Dans le cas où il n'y a pas de corrosion, la contribution du béton tendu ne change pas. Par contre dans le cas où le corps du tirant est entièrement corrodé, l'effet du raidissement en traction disparaît et le comportement du tirant tend vers le comportement d'un acier seul. Dans le cas où on est entre les deux, la contribution du béton tendu peut être supposée proportionnelle en utilisant le paramètre  $\beta_{corr}$ . En utilisant ce principe et en regardant le modèle proposé par EC 2-91, nous avons proposé un modèle tri linéaire d'un tirant corrodé s'appuyant sur le modèle du tirant sain d'ESPION et al. 1985. Enfin, on a étudié le comportement du béton en zone comprimée qui est affecté par la corrosion et que l'on fait dépendre d'un paramètre  $\lambda$ . La détermination de ces deux paramètres  $\beta_{corr}$  et  $\lambda$  est particulièrement pertinente pour pouvoir approcher par le calcul le comportement en flexion des structures en béton armé atteintes par la corrosion.

## **CHAPITRE III**

### **ETUDES EXPERIMENTALES ANALYSE DE L'ENDOMMAGEMENT DES STRUCTURES EN BETON ARME CORRODE FLECHIES**

*Le troisième chapitre présente des essais menés dans le cadre du projet GEO "Fatigue et vieillissement des géocomposites" sur des poutres conservées au L.M.D.C. (Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions) de Toulouse. Elles ont été fabriquées en 1984 dans le cadre d'une étude sur la maîtrise de la fissuration. Trois séries d'essais ont été effectuées. L'irréversibilité des déformations de la première série d'essais est étudiée. Puis nous calculons les déformées et les valeurs d'endommagement de la structure le long de la poutre BICL à partir des résultats de la deuxième série d'essais. Enfin dans la troisième série d'essais, cette poutre est chargée jusqu'à rupture.*

### **III.1. INTRODUCTION**

Le L.M.D.C. (Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions) de Toulouse a fabriqué en 1984 des poutres en béton armé pour l'étude de la maîtrise de la fissuration. Ce travail faisait initialement partie d'une étude contractuelle sur la maîtrise de la fissuration menée par plusieurs laboratoires dans le cadre de l'A.F.R.E.M. (Association Française de Recherches et d'Essais sur les Matériaux et les Constructions). En effet, à cette époque, le groupe "fissuration" créé sur l'initiative du L.C.P.C. (Laboratoire Central des Ponts et Chaussées) pour atteindre la maîtrise de la fissuration, s'interrogeait sur l'insuffisance et les contradictions des bases expérimentales sur lesquelles reposent les dispositions réglementaires visant à assurer la durabilité des structures en béton.

Pour acquérir les données qualitatives et quantitatives permettant de justifier ces dispositions ou d'en proposer éventuellement des modifications, un programme de recherche inter laboratoires L.C.P.C., L.M.D.C. et C.E.B.T.P. a été lancé. La compilation des données expérimentales existantes a été réalisée par TACHE 1985 [53] et la synthèse des diverses réglementations internationales par BREVET 1985 [54]. Il se dégageait nettement de ces études que, premièrement les données expérimentales dont on disposait étaient loin de constituer un ensemble cohérent et deuxièmement que les dispositions adoptées par différents pays étaient assez diverses. A l'évidence, l'ensemble des données collectées confirmait l'intérêt et la nécessité de développer un programme d'expérimentation sur la corrélation entre fissuration et corrosion.

Les poutres de type *A* et *B* qui servent de base à la validation de notre modèle sont issues de ce programme. L'objectif principal est de décrire le comportement mécanique et comprendre les phénomènes d'évolution de la dégradation tout particulièrement par la corrosion des armatures longitudinales.

### **III.2. PRESENTATION DES CORPS D'ESSAI**

Le rapport de synthèse fait par FRANCOIS et al. 1994 [55] présente les corps d'essais de Toulouse, les caractéristiques des matériaux, leur fabrication, les ambiances de conservation et les essais menés à l'époque.

### III.2.1. Corps d'épreuve

Les éléments fabriqués sont des poutres en béton armé de section  $150 \times 280$  mm et de longueur 3000 mm. Ces poutres sont de deux groupes distincts *A* et *B* (figure III-1). Elles se différencient par leur cage d'armatures et l'épaisseur d'enrobage.

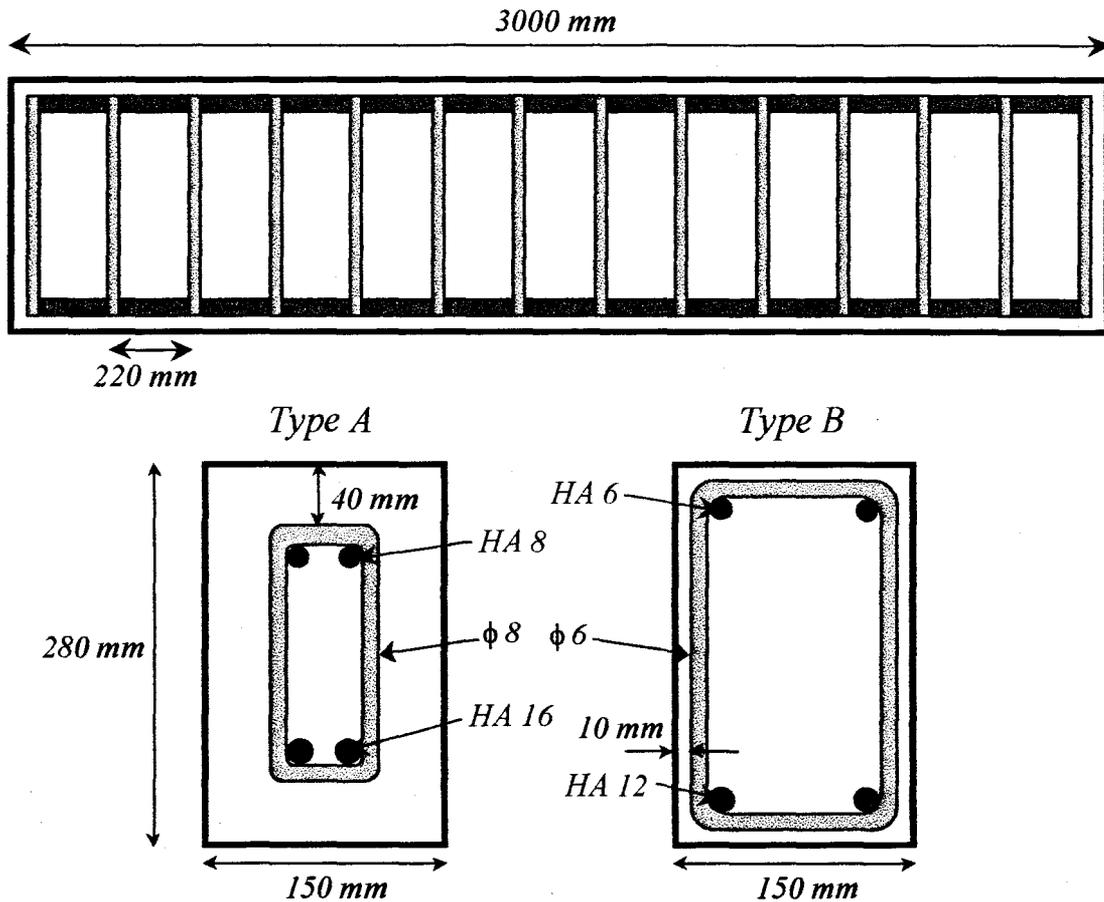


Figure III-1: Plan de ferrailage des poutres de type A et B (FRANCOIS et al. 1994 [55])

**Premier groupe de poutres de type A:** Ces poutres étaient conformes à la réglementation française en vigueur au moment de la fabrication [B.A.E.L. 83] vis à vis des états limites de service en fissuration très préjudiciable. Les principaux critères étaient:

- $\Phi$  armatures  $\geq 8$  mm
- enrobage  $\geq 40$  mm
- contrainte de l'acier  $< \min 0,5f_e$  ou  $110 \eta$  ( $f_e$  étant la limite élastique de l'acier et  $\eta$  le coefficient d'adhérence)

**Second groupe de poutres de type B:** Ces poutres sont conformes à la réglementation française vis à vis des états limites de service en fissuration non préjudiciable. Les principaux critères étant:

- $\Phi$  armatures  $\geq 6$  mm
- enrobage  $\geq 10$  mm

Les enrobages requis, 10 mm et 40 mm, étaient respectivement la valeur minimale et maximale imposées par le règlement français.

### III.2.2. Matériaux; béton

Pour chaque échantillon, la composition du béton était la suivante:

TABLEAU III-1: Composition du béton

Granulats roulés silico-calcaires 5/15 mm	1220 kg / m <sup>3</sup>
Sable	820 kg / m <sup>3</sup>
Ciment CPA 55R	400 kg / m <sup>3</sup>
Eau	200 kg / m <sup>3</sup>

La quantité d'eau a été ajustée à chaque gâchée pour obtenir une ouvrabilité constante au cône d'Abrams de 7 cm.

Il a été procédé à des essais de traction par fendage et de compression sur les éprouvettes de contrôle âgées de 28 jours. La résistance moyenne de traction par fendage à 28 jours est  $f_{t28} = 4,7$  MPa. La moyenne de la contrainte de rupture en compression à 28 jours est:

$$f_m = 45,4 \text{ MPa} \quad \text{avec un écart type de} \quad s = 2,4 \text{ MPa}$$

d'où la contrainte caractéristique:  $f_{c28} = f_m - 1,28s = 42,3$  MPa qui a été la valeur utilisée pour la mise en œuvre des calculs réglementaires de béton armé.

### III.2.3. Matériaux; acier

Des aciers naturellement mi-durs de type Fe40 de limite élastique  $f_e = 400 \text{ MPa}$  et  $\eta = 1,6$  ont été utilisés.

### III.3. DISPOSITIF DE MISE EN CHARGE

Les poutres sont sollicitées en flexion simple, en associant une poutre de type *A* à une poutre de type *B* (figure III-2). La poutre de type *A* se retrouve ainsi à l'envers par rapport à une utilisation normale. Le dispositif de mise en charge est constitué de deux tiges filetées  $\Phi 16 \text{ mm}$  en Fe40 et de deux profilés UAP80 renforcés en Fe24. Chaque système est instrumenté à l'aide de quatre jauges extensométriques (FRANCOIS et RINGOT 1988 [56]). L'ensemble constitue ainsi un capteur de force permettant de charger les poutres de béton armé mais aussi théoriquement de contrôler et de réajuster la charge au cours du temps.

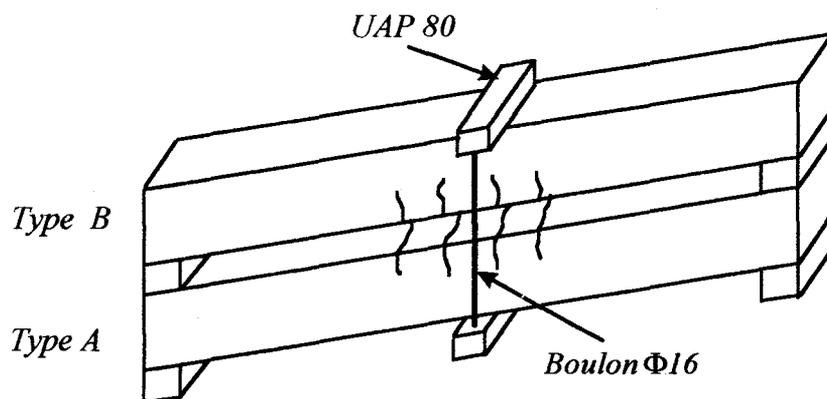


Figure III-2: Dispositif de mise en charge (FRANCOIS et al. 1994 [55])

#### III.3.1. Type de chargement

Les charges correspondant aux valeurs réglementaires ont été appliquées aux corps d'épreuve. Les deux sollicitations retenues sont les charges de service correspondant à un dimensionnement:

- aux ELU (Etat Limite Ultime) qui correspond à la charge de dimensionnement la plus courante.

- aux ELS (Etat Limite de Service) fissuration préjudiciable, qui est la charge de service la plus faible applicable à un élément de béton armé (uniquement pour les poutres de type *A* qui respectent les prescriptions réglementaires).

Les poutres étant chargées par couple (une poutre de type *A* associée à une poutre de type *B*), les sections d'armatures ont été déterminées de sorte que:

⇒ la sollicitation 1 correspond pour la poutre de type *A* à la charge de service déterminée aux ELS fissuration très préjudiciable, et pour la poutre de type *B* à la charge de service déterminée par un dimensionnement aux ELU. On obtient  $M_{ser1} = 13,5 \text{ kNm}$ . La charge appliquée correspondante est égale à  $19,3 \text{ kN}$ .

⇒ la sollicitation 2 correspond pour la poutre de type *A* à la charge de service déterminée par un dimensionnement aux ELU. On peut alors caractériser cette charge pour la poutre de type *B* comme imposant aux aciers tendus une contrainte normale double de celle autorisée aux ELS fissuration très préjudiciable. On obtient  $M_{ser2} = 21,2 \text{ kNm}$ . La charge appliquée correspondante est égale à  $30,3 \text{ kN}$ .

### III.3.2. Comportement charge-flèche en flexion 3 points à 28 jours

Les résultats des essais de flexion simple sur quatre poutres de type *A* et *B* âgées de 28 jours sont présentés figure III-3. Ils rendent compte d'un coefficient de sécurité important entre la charge de ruine et la charge de service déterminée par un dimensionnement aux ELU. Le coefficient obtenu est 1,65 pour les poutres de type *A* et 2 pour les poutres de type *B*.

Les poutres de type *A* ont un pourcentage d'acier ( $\Omega = \frac{A_s}{b d} = 1,2\%$ ) deux fois plus élevé que celles des poutres de type *B* ( $\Omega = \frac{A_s}{b d} = 0,6\%$ ). Le moment d'inertie (par rapport au centre gravité) des poutres de type *A* ( $I_G = 27799 \text{ cm}^4$ ) est presque le même que celui des poutres de type *B* ( $I_G = 27836 \text{ cm}^4$ ). On a donc une résistance plus élevée pour le type *A* (presque 1,3 fois).

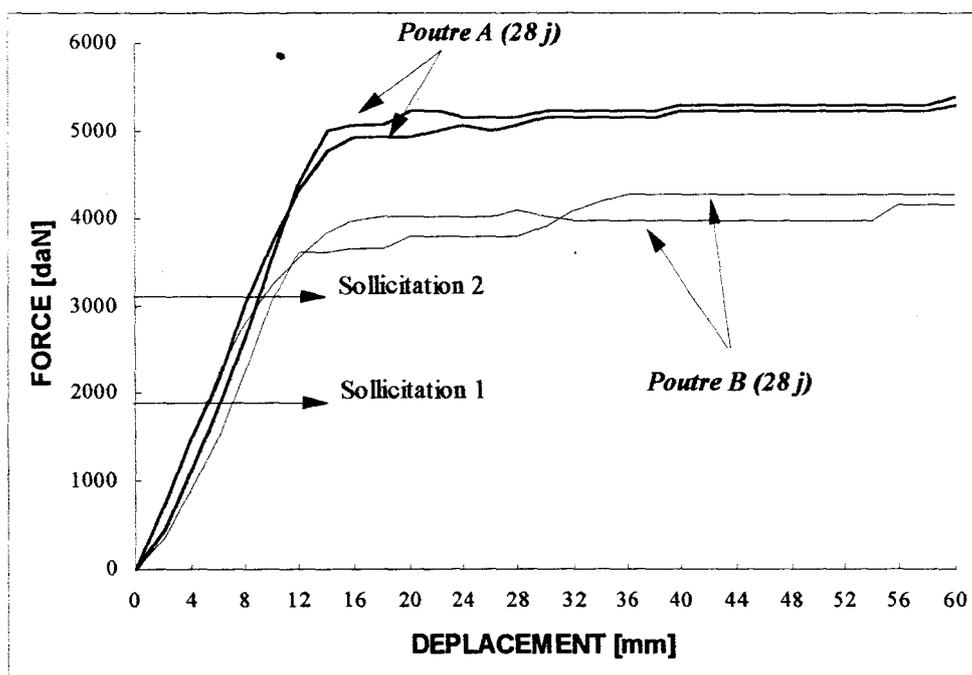


Figure III-3: Comportement en flexion 3 points des deux poutres de type A et des deux poutres de type B âgées de 28 jours (FRANCOIS et al. 1994 [55])

### III.3.3. Ambiances agressives; brouillard salin

Les poutres sont conservées dans deux types d'ambiance. L'une est un brouillard salin (poutres référencées CL), l'autre est un mélange de  $CO_2$  et d'air. Par ailleurs, quelques poutres sont conservées à l'air libre en milieu couvert et servent de témoin (poutres référencées T1).

Le brouillard salin est généré par des pulvérisateurs alimentés en air comprimé à 0,1 MPa et en eau salée à 35g de  $NaCl$  par litre. Cette concentration en sel est équivalente en masse à celle de l'eau de mer.

### III.3.4. Ambiances agressives; atmosphère carbonique

Les poutres sont conservées dans une enceinte comme les précédentes. Le mélange gazeux y régnant est composé de 50% de gaz carbonique et de 50% d'air. L'humidité relative est maintenue entre 40% et 70% à l'aide d'un humidificateur.

### III.4. SERIE D'ESSAIS N°1 DES POUTRES VIEILLIES EN AMBIANCE SALINE

#### III.4.1. Projet GEO "Fatigue et vieillissement des géocomposites"

Le projet GEO "Fatigue et vieillissement des géocomposites" a pour objectif une meilleure compréhension du comportement des structures corrodées. L'enjeu est une réduction des coûts d'exploitation liés aux opérations de maintenance par une optimisation de la gestion des planning de suivi, une réduction des temps de prise de décision et par une prédiction, sur le moyen terme, des programmes futurs de réparation (PETIT et GERARD 1997 [57]).

Dans le cadre du projet GEO, six poutres sont reprises pour une première campagne d'essais destinée à approcher leur comportement en terme de réversibilité, qui a été menée en 1996. Elles sont soumises à des cycles de chargement alternant avec des déchargements et croissant progressivement jusqu'à la valeur correspondant *au chargement maintenu dans le temps*. Les six poutres essayées sont trois de type *A* et trois de type *B*. Deux sont des témoins ayant été maintenus en chargement de type 2 (solicitation 2) en ambiance normale (*A2T1* et *B2T1*). Deux ont été maintenues sous chargement de type 1 (solicitation 1) en ambiance saline (*A1CL* et *B1CL*). Deux ont été maintenues sous chargement de type 2 en ambiance saline (*A2CL* et *B2CL*). L'ensemble des résultats et les données sur les essais sont présentés dans le rapport d'essai N°1 fait par BUYLE-BODIN et REZAIE 1996 [58].

#### III.4.2. Objectifs principaux

L'objectif principal est d'observer par une montée en charge jusqu'à la valeur maintenue dans le temps, suivie d'un déchargement et d'un rechargement, si les poutres sont entrées dans une phase d'irréversibilité. Une comparaison sera menée avec la rigidité d'origine pour apprécier le degré de dégradation du béton armé. Cette première série a également pour but de valider le processus expérimental et de mesure, dans l'attente d'une définition plus précise, par les équipes ayant en charge la modélisation des paramètres à mesurer.

#### III.4.3. Nature des fissurations

##### III.4.3.1. FISSURATION DUE AUX SOLLICITATIONS

*Poutres de type A*: Dans la zone centrale de la poutre, chaque fissure est en regard d'un cadre (figure III-4). Les ouvertures de fissure sont exprimées en 1/100 de millimètre.

L'augmentation de la charge entre les deux sollicitations 1 et 2 (ELS, ELU) ne se traduit pas par une augmentation de la densité de fissuration, une fissure restant associée à un cadre, mais par une extension de la longueur de poutre fissurée et par une augmentation de la largeur des fissures. Dans le cas de la sollicitation 1 (ELS fissuration très préjudiciable) la largeur maximale est de 0,2 mm. On mesure plus du double (0,5 mm) dans le cas de la sollicitation 2.

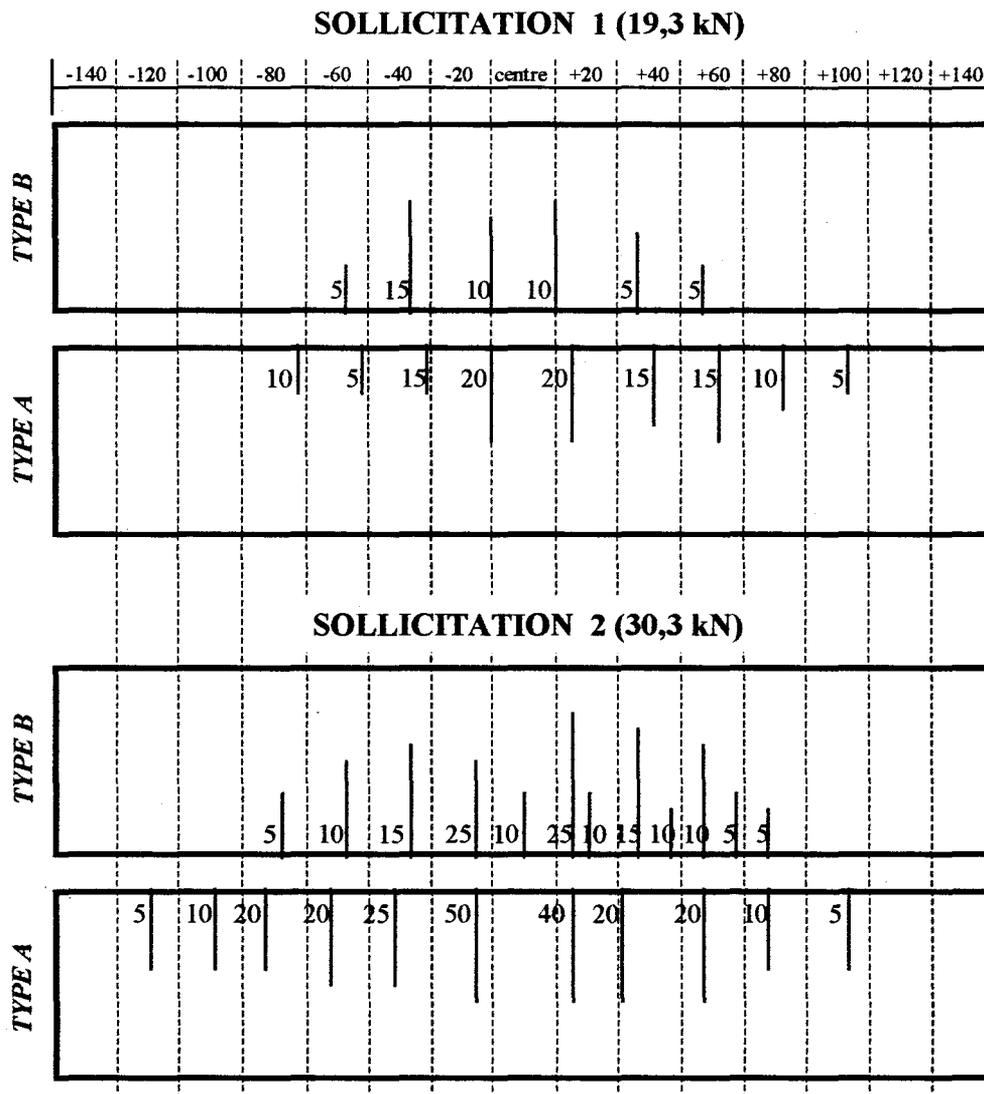


Figure III-4: Fissuration typique des poutres de type A et B après application des sollicitations 1 et 2 (FRANCOIS et al. 1994 [55])

**Poutres de type B:** Les poutres mises en charge aux ELU présentent une fissuration voisine de la disposition des cadres mais sur une zone de longueur plus faible que pour les poutres de type A. L'augmentation de la sollicitation se traduit à la fois par une extension de la longueur de poutre fissurée, par un accroissement de la densité de fissuration et par une augmentation de l'ouverture

des fissures. On a alors couramment une fissure située entre deux cadres en plus de celles déjà citées. Dans le cas de la sollicitation 1 (ELS) l'ouverture maximale est de 0,15 mm. On mesure presque le double (0,25 mm) dans le cas de la sollicitation 2. On observe que les poutres de type *A* ont des fissures plus ouvertes que les poutres de type *B* alors que leur capacité de résistance est plus élevée. Le rôle de l'enrobage est donc manifeste.

#### III.4.3.2. FISSURATION DUE A LA CORROSION

On note l'apparition de fissures spécifiques à la corrosion. Ces fissures dites *secondaires* sont dues à l'expansion de la rouille. Elles partent de l'armature pour atteindre la surface (figure III-5a). C'est une propagation tout à fait différente de celle des *fissures primaires*, qui sont les fissures fonctionnelles du béton armé et qui partent de la surface pour être couturées par l'armature. La phase de propagation de la corrosion conduit à une fissuration secondaire ramifiée (figure III-5b), aggravant de plus le processus. Cette fissuration secondaire augmente avec le niveau de sollicitation. Elle est plus importante en zone tendue que dans les autres zones.

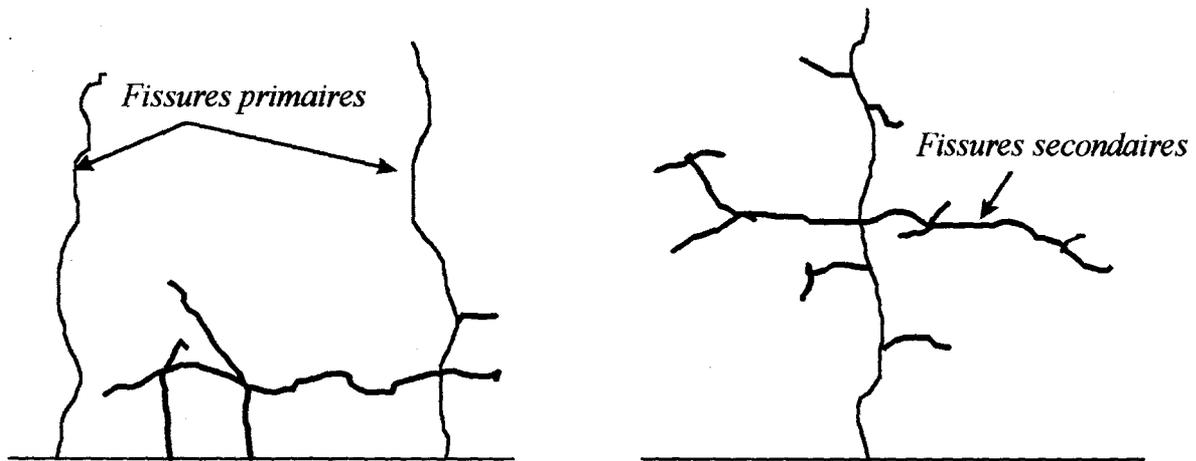


Figure III-5: Fissures secondaires: (a) longitudinales et transversales; (b) ramifiées (FRANCOIS et al. 1994 [55])

#### III.4.4. Description des essais

On mesure la charge appliquée au milieu des poutres et la flèche en continue pour trois endroits (sauf *A2T1* uniquement au milieu). Les déformations sont mesurées à l'extensomètre à billes sur 5 bases en vertical (1, 2, 3, 4 et 5) et 6 sections en horizontal (*A, B, C, D, E* et *F*) soit 30 mesures de déformation au déformètre à billes, plus trois mesures par jauges au centre aux niveaux 1, 2 et 3 (sauf *A2T1* sans jauges). Le détail est donné en figure III-6.

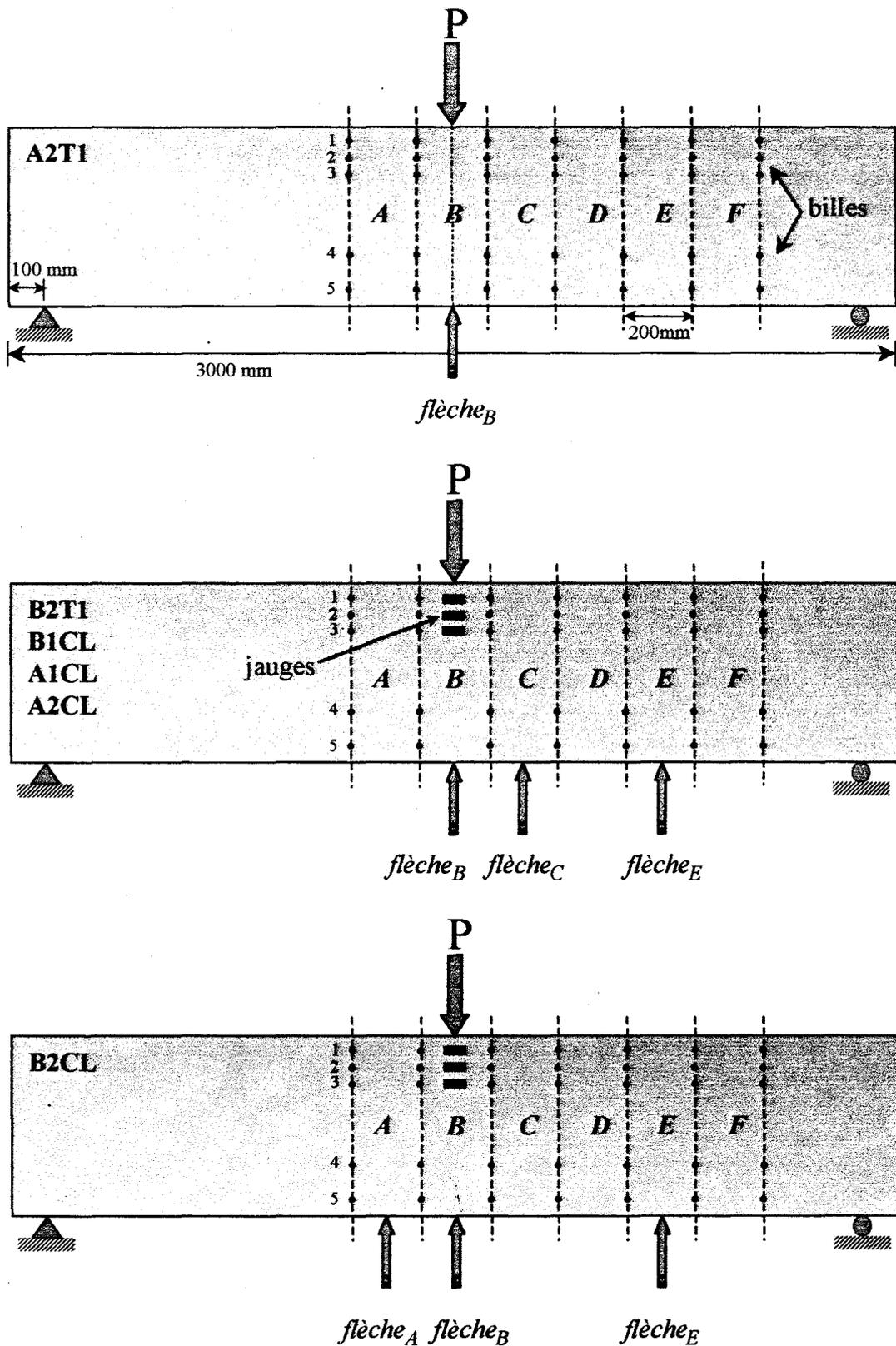


Figure III-6: Emplacement des capteurs de déplacement, des billes et des jauges; localisation du point de chargement des poutres

Les différents types de chargement appliqué aux poutres en pourcentage de la charge maintenue dans le temps sont détaillés en figure III-7.

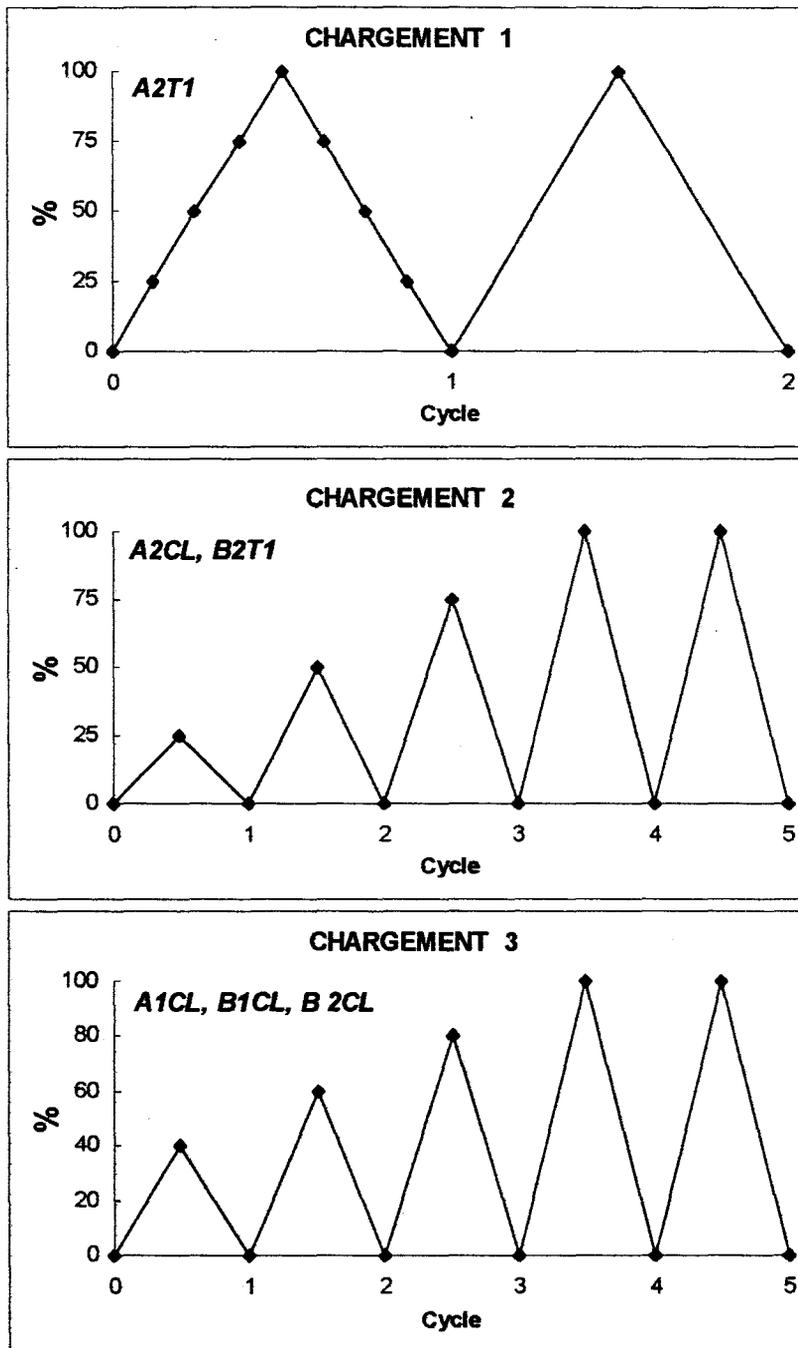


Figure III-7: Différents types de chargement appliqué exprimé en pourcentage de la charge maintenue dans le temps

La poutre A2T1 a été essayée en premier. Dix paliers de charge pendant deux cycles (chargement 1) a été appliqués. Comme aucune déformation résiduelle n'a pas été observée, on a décidé de passer à cinq cycles pour les poutres A2CL et B2T1 (chargement 2), en respectant le

même nombre de paliers de charge (dix fois). Les irréversibilités observées pour ces poutres étaient également faibles. Les chargements des premiers cycles ont été augmentés (70 et 85% au lieu de 60 et 80%) pour les poutres *A1CL*, *B1CL* et *B2CL* (chargement 3) dans le but d'observer d'éventuelles déformations résiduelles. La vitesse de chargement a été choisie selon l'amplitude de chaque cycle, en considérant que la période de tous les cycles était maintenue constante, égale à 2,5 minutes.

### III.4.5. Résultats et analyse

#### III.4.5.1. DEGRE D'IRREVERSIBILITE

Le comportement mécanique de tous les matériaux présente, à des degrés divers, la propriété d'élasticité, mais, même pour des charges très faibles, les déformations ne sont jamais totalement réversibles. Une limite d'élasticité est en conséquence toujours conventionnelle. Notons, en outre, que la courbe effort-déformation (ou moment-courbure) de premier chargement ne donne aucun renseignement sur cette irréversibilité. Pour connaître cette dernière, il faut mesurer les déformations (ou les courbures) résiduelles après déchargement.

Le degré d'irréversibilité pour une série de résultats, par exemple moment-courbure ( $M - \chi$ ), est défini par la relation suivante (figure III-8):

$$IR_{M-\chi} = \frac{\chi_{résiduelle}}{\chi_{totale}} = 1 - \frac{\chi_{réversible}}{\chi_{totale}} \quad \text{où} \quad \chi_{totale} = \chi_{résiduelle} + \chi_{réversible}$$

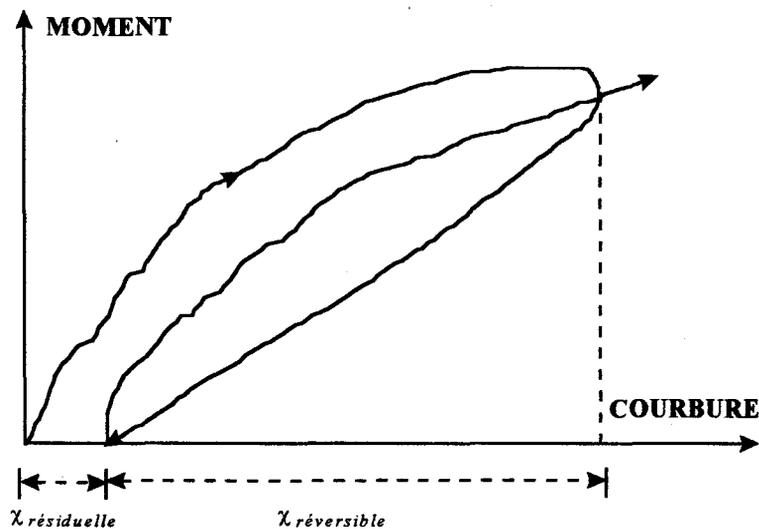


Figure III-8: Mesure du degré d'irréversibilité

Si on mesure les courbures pour le deuxième chargement-déchargement, à condition de ne pas dépasser le niveau du premier chargement, ce qui est le cas de nos essais, les courbures ne sont jamais totalement réversibles. La fissuration évolue également après chaque chargement.

### III.4.5.2. ANALYSE DES RESULTATS CHARGE-FLECHE

Une première étude est faite sur les courbes charge-flèche qui traduisent le comportement global de la poutre. La flèche a été à l'exception de *A2T1* mesurée en trois points (figure III-6), au milieu (*flèche<sub>B</sub>*), à 20 cm du milieu (*flèche<sub>C</sub>*, à droite vu de face sauf *B2CL* à gauche *flèche<sub>A</sub>*) et à 60 cm du milieu (*flèche<sub>E</sub>*, à droite vu de face).

Les poutres de type *A* montrent une évolution correcte, qui traduit une déformée régulière de la poutre (figures III-9-11).

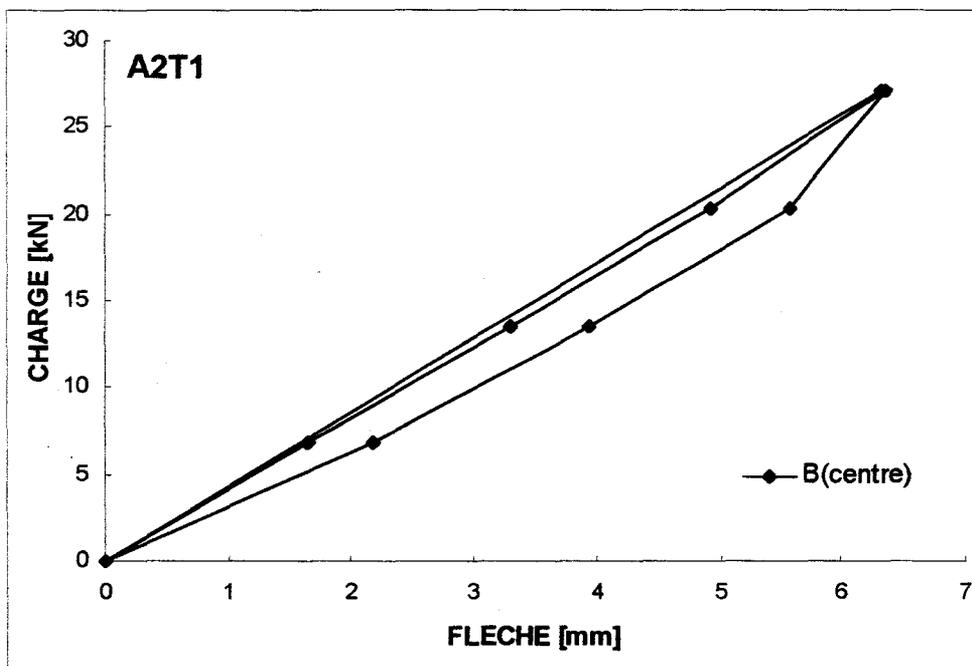


Figure III-9: Courbes charge-flèche de la poutre A2T1

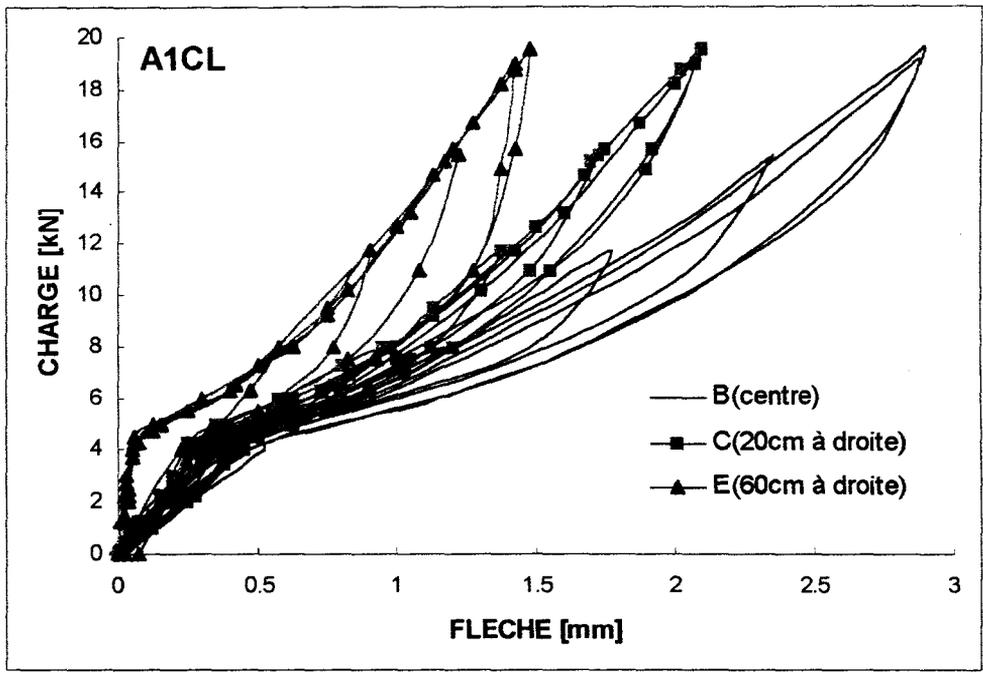


Figure III-10: Courbes charge-flèche de la poutre A1CL

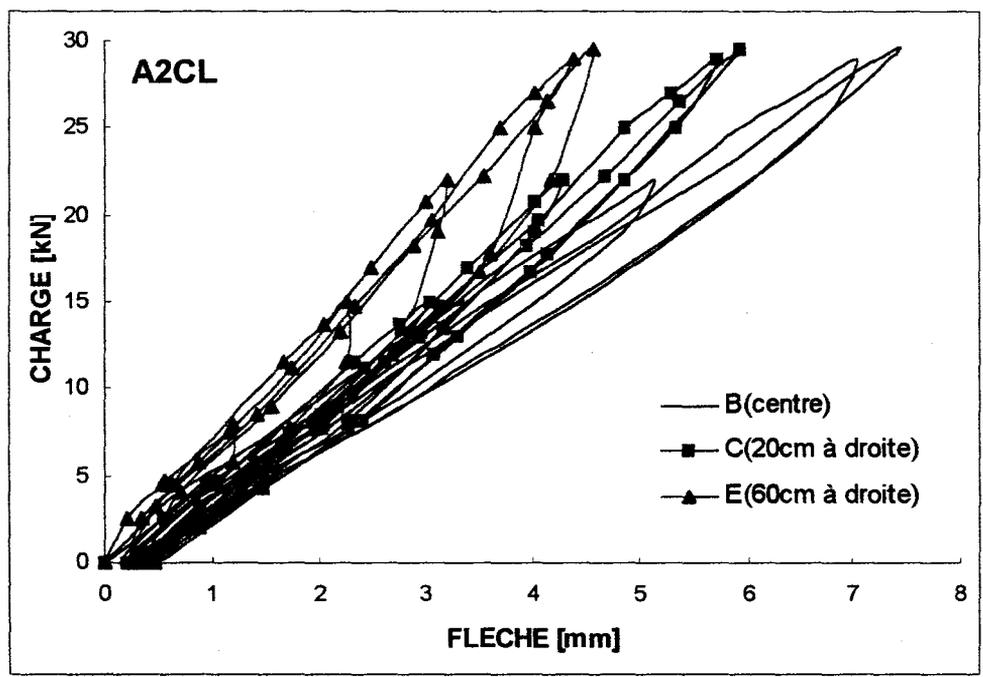


Figure III-11: Courbes charge-flèche de la poutre A2CL

Pour les poutres de type B, la déformée n'est plus symétrique. Pour B2TI, on observe  $flèche_B = flèche_C$  (figure III-12), pour B1CL et B2CL la flèche maximale est respectivement la  $flèche_A$  et la  $flèche_C$  (figures III-13-14).

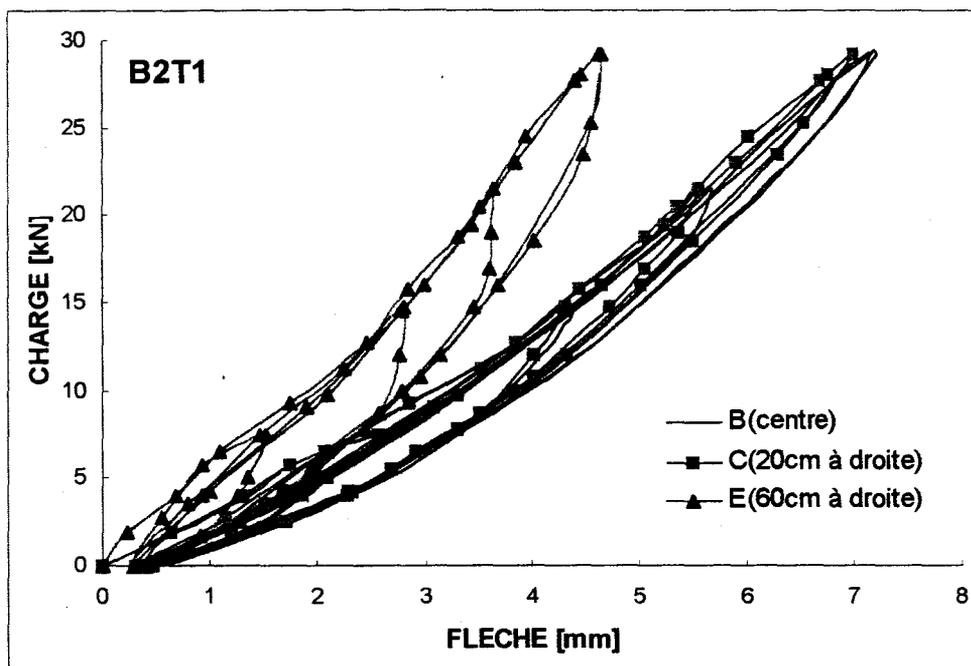


Figure III-12: Courbes charge-flèche de la poutre B2T1

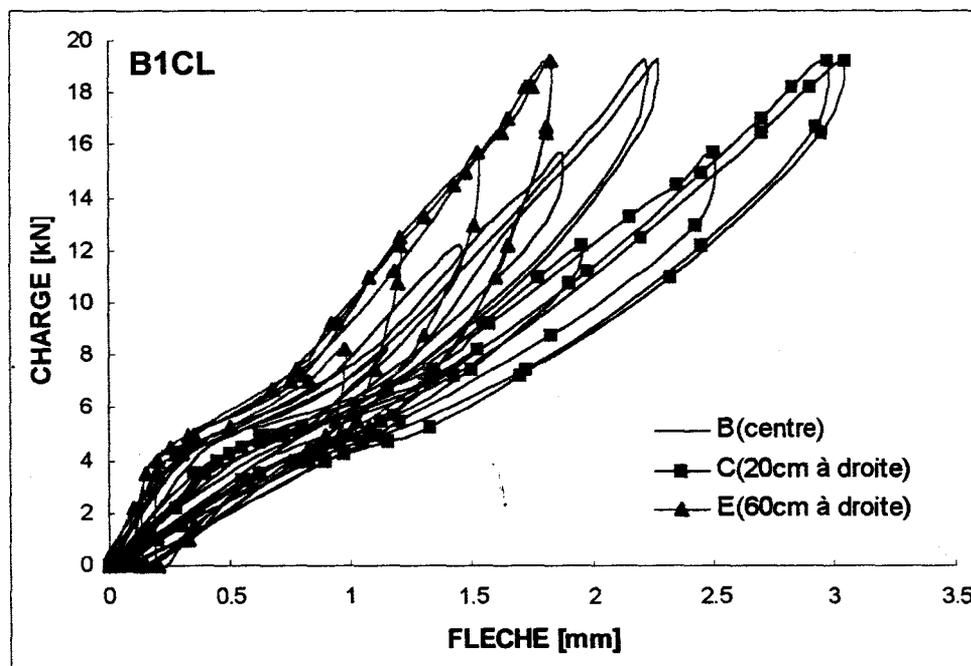


Figure III-13: Courbes charge-flèche de la poutre B1CL

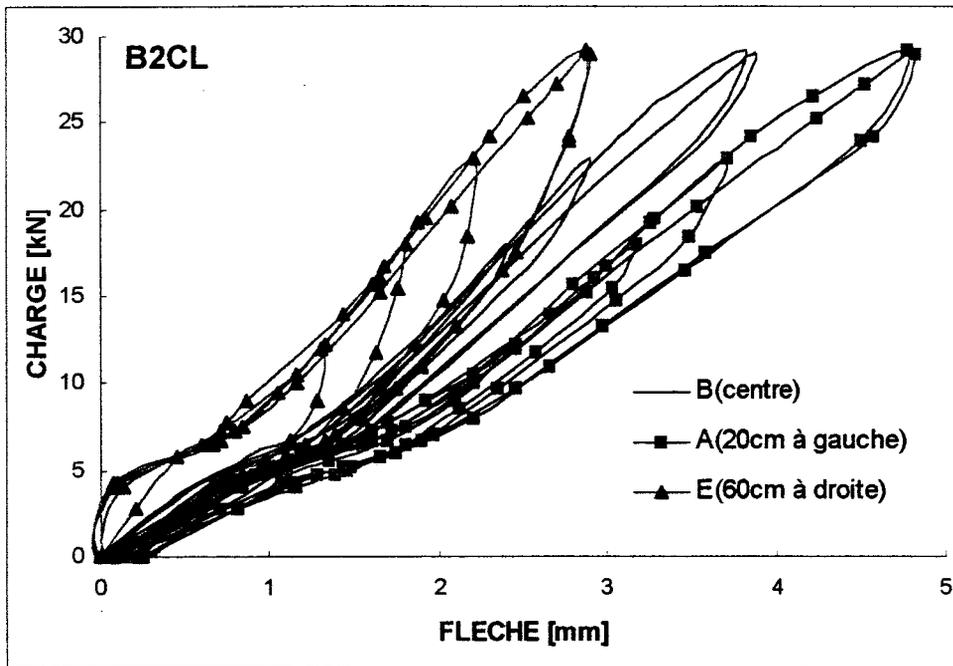


Figure III-14: Courbes charge-flèche de la poutre B2CL

La déformée non symétrique de ces poutres, privilégiant les flèches  $A$  et  $C$  sur la  $flèche_B$ , peut s'expliquer par le fait que le chargement maintenu dans le temps n'a pas toujours été central (excentrement pouvant aller jusqu'à 13 cm pour un lot, mais nul pour les témoins). Cependant le même phénomène aurait du être observé sur les poutres de type  $A$  qui étaient montées en parité avec les poutres de type  $B$ .

Les cycles chargement-déchargement présentent une hystérésis apparemment forte, qui est une conséquence de la difficulté à maintenir un chargement constant pendant la durée non négligeable de prise des mesures au déformètre à billes avec une presse non asservie en déplacement. Le temps d'essai pour chaque poutre a duré presque cinq heures.

Si l'on compare les courbes charge-flèche maximale (figure III-15) des trois poutres de type  $A$ , on observe une bonne similitude de  $A2TI$  et  $A2CL$ . Le comportement de la poutre  $A1CL$  montre un palier entre 5 et 7 kN puis un retour à la rigidité de la phase initiale.

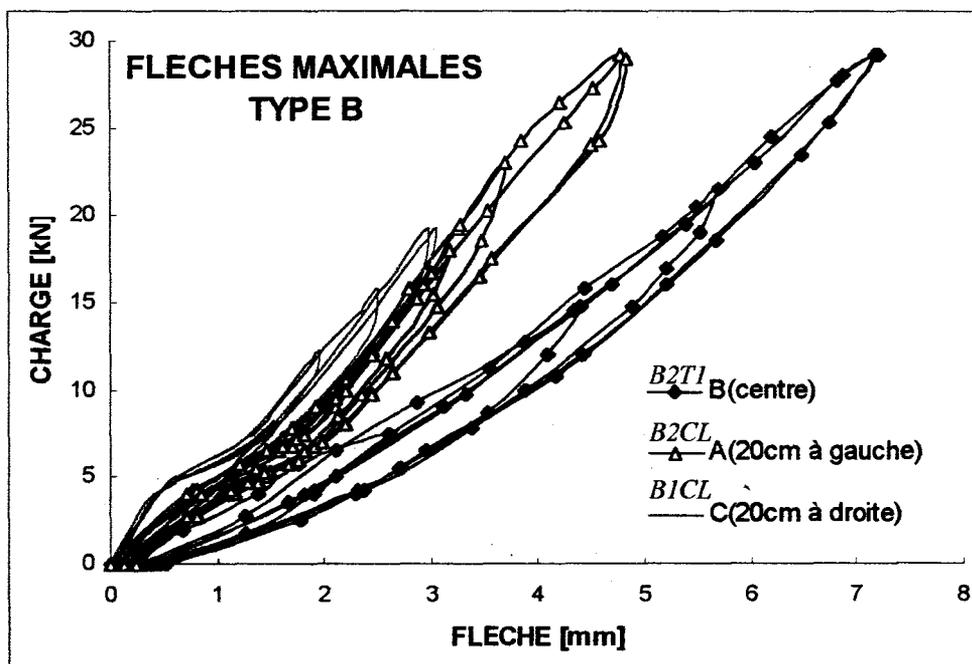
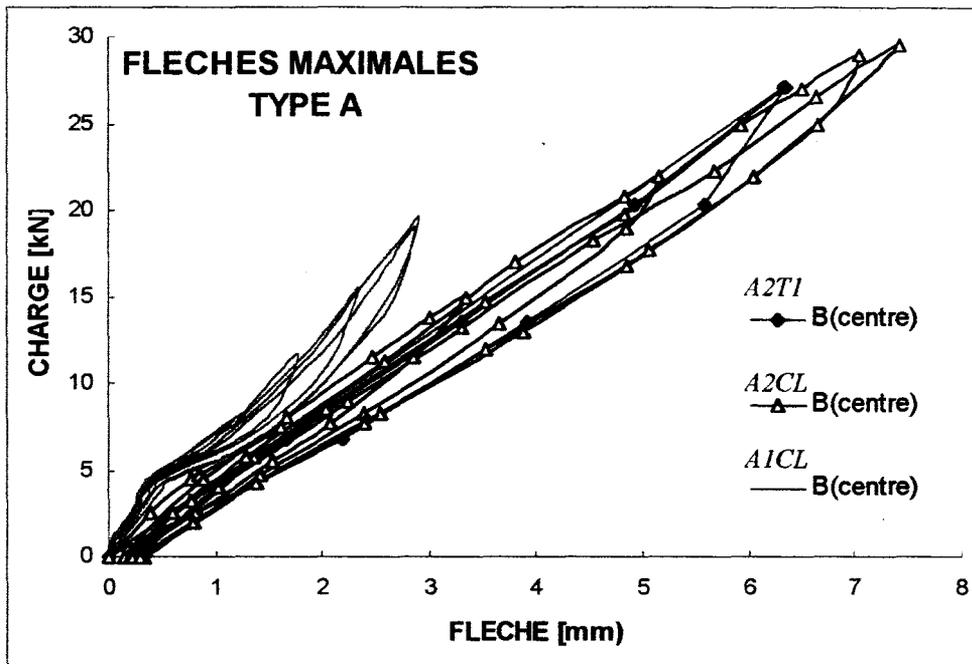


Figure III-15: Courbes de comportement pour les flèches maximales

Ce phénomène, qui s'observe également sur *B1CL* et *B2CL*, peut avoir deux explications.

La première serait due au non retour des poutres à leur position rectiligne d'origine avant l'essai et après relâchement du chargement permanent. Un réajustement se produirait alors pour une charge de l'ordre de 5 kN.

La deuxième serait due à l'apparition de fissures à cette charge de 5 kN, et la poutre retrouve un équilibre vers 7 kN. Mais la rigidité observée à partir de là devrait être plus faible, et de nouvelles fissures devraient apparaître, ce qui n'est pas le cas. Cette deuxième explication "matériau" ne peut donc être retenue.

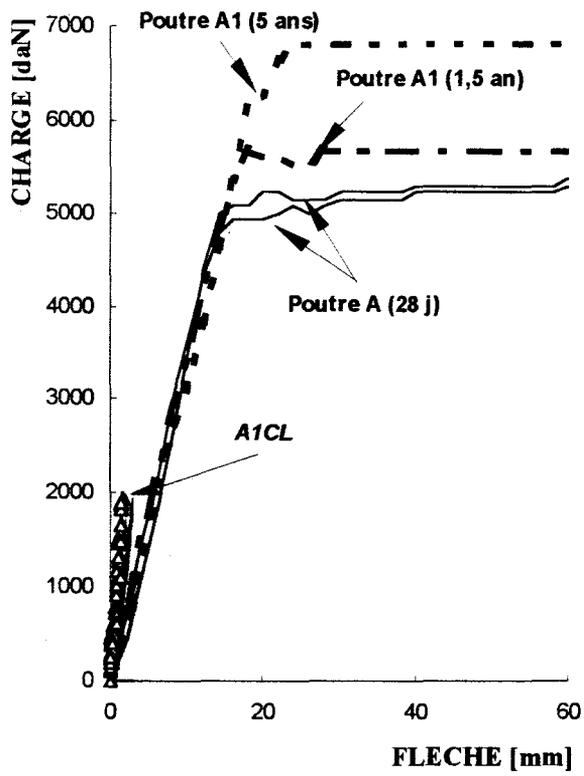
*A2T1* et *A2CL* ont le même comportement linéaire et la même raideur. Une légère irréversibilité est notée pour *A2CL* à 30 kN. Pour *A1CL*, le comportement est également linéaire malgré le rattrapage évoqué plus haut. La raideur est par contre plus forte et il n'y a pas d'irréversibilité à noter. Nous reportons sur le tableau suivant les rigidités mesurées à partir des essais charge-flèche menées par le L.M.D.C. à 28 jours, 1,5 an et 5 ans en ambiance saline sur des poutres *A1* et *A2* menées à rupture et à partir de nos essais (figures III-16a et III-16b).

TABLEAU III-2: Différentes mesures de rigidité pour les poutres *A1* et *A2*

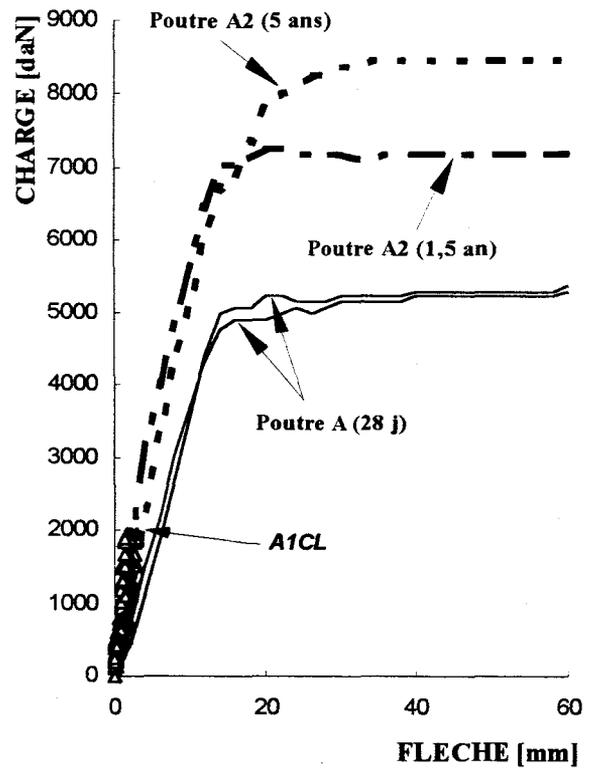
Poutre	L.M.D.C. 28 jours	L.M.D.C. 1,5 an	L.M.D.C. 5 ans	<i>A2T1</i>	<i>A2CL</i>	<i>A1CL</i>
Rigidité [kN/mm] poutres <i>A1</i>	3,5	3,5	3,5	—	—	9,1
Rigidité [kN/mm] poutres <i>A2</i>	3,6	8,0	5,3	4,4	4,4	—

Il faut noter que les rigidités présentées ci-dessus sont celles mesurées au niveau du chargement nominal (19,3 kN pour la sollicitation 1 et 30,3 kN pour la sollicitation 2).

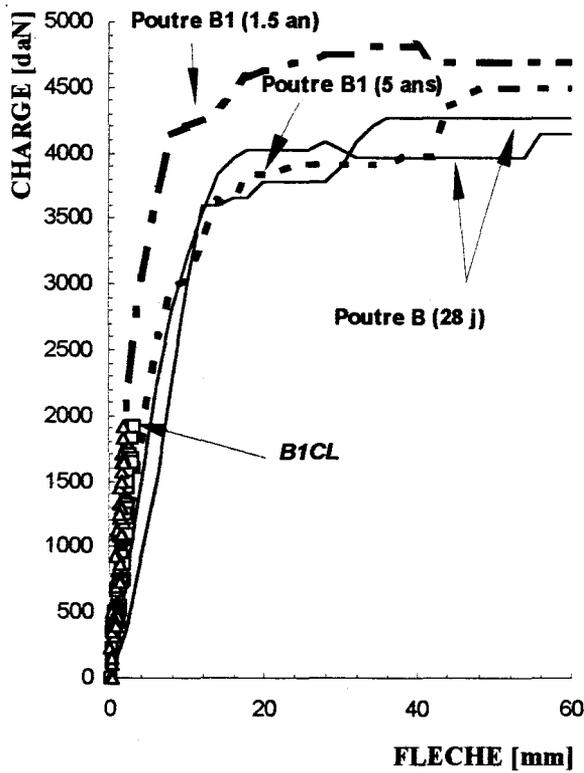
Si on compare les courbes charge-flèche maximale des trois poutres de type *B*, on observe une bonne similitude de *B1CL* et *B2CL*, avec le rattrapage déjà évoqué. La raideur est la même, la linéarité correcte, et peu d'irréversibilité est notée. Le comportement de *B2T1* est par contre raidissant, et la rigidité finit par approcher celle de *B1CL* et *B2CL*, mais pour une flèche très importante.



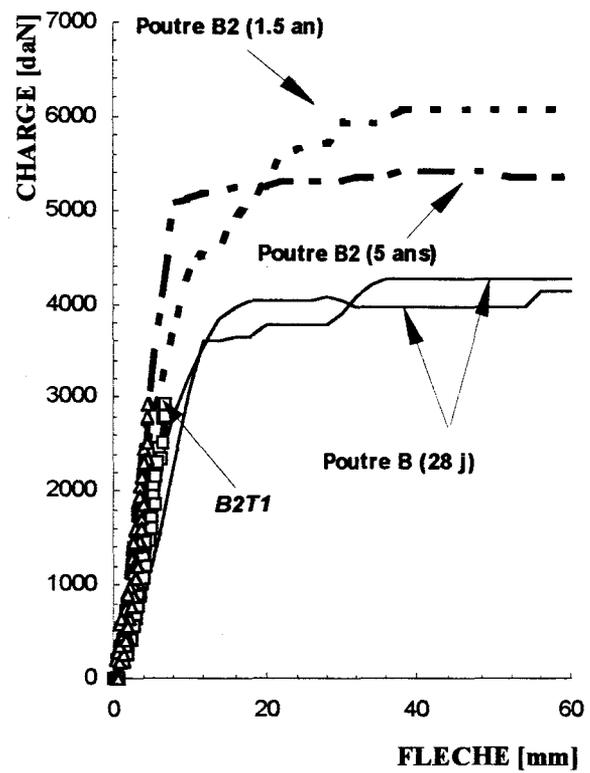
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure III-16: Courbes charge-flèche; comparaison des rigidités

Nous reportons sur le tableau suivant les rigidités mesurées au niveau de chargement nominal à partir des essais menés par le L.M.D.C. à 28 jours, 1,5 an et 5 ans en ambiance saline sur des poutres *B1* et *B2* menées à rupture et à partir de nos essais (figures III-16c et III-16d).

TABLEAU III-3: Différentes mesures de rigidité pour les poutres *B1* et *B2*

Poutre	L.M.D.C. 28 jours	L.M.D.C. 1,5 an	L.M.D.C. 5 ans	<i>B2TI</i>	<i>B2CL</i>	<i>B1CL</i>
Rigidité [kN/mm] poutres <i>B1</i>	3,5 & 4,0	11,0	4,4	—	—	7,6
Rigidité [kN/mm] poutres <i>B2</i>	3,8	6,2	4,8	6,3	7,5	—

Il est intéressant de voir que les évolutions de raideur sont souvent très correctement linéaires (*A1* et *A2*), parfois raidissantes (certaines *B* à 28 jours et *B2TI*), quelquefois adoucissantes.

Un démarrage de courbe charge-flèche aussi raide a déjà été constaté sur *B1* et *A2* à 1,5 an. Les poutres de niveau de sollicitation 1 devraient donc être essayées à un niveau de chargement plus élevé pour mieux appréhender leur comportement dans la zone de réversibilité (ARLIGUIE et al. 1996 [59]).

Les valeurs de rigidité de *A2TI* et *A2CL* montrent une légère diminution par rapport à *A2* à 5 ans, ce qui est cohérent. La valeur élevée de rigidité de *B1CL* relève des mêmes explications que *A1CL*. Les valeurs de *B2TI* et *B2CL* sont comparables à *B2* à 1,5 an. *B2* à 5 ans est plus faible, sans explication apparente. Ici aussi, il faut noter que la charge maximale appliquée de 30,3 kN est de l'ordre de la moitié de la charge maximale que peuvent supporter les poutres de type *B*.

En conclusion, il faut retenir l'incertitude importante apportée par le fait que les déformées des poutres ne sont pas toujours symétriques. Cela peut s'expliquer par une application légèrement excentrée de la charge maintenue, et par une éventuelle dégradation non symétrique des poutres au cours du temps. Il faudra donc dans la deuxième campagne d'essais mesurer la flèche en un nombre de points suffisants en sous-face pour avoir une bonne approche de la courbure générale des poutres et extrapoler la vraie valeur maximale de flèche.

Les poutres de type *A*, ayant un fort enrobage des armatures, semblent avoir un comportement assez cohérent, à l'exception de celle avec sollicitation 1. Il est plus difficile de se prononcer sur les poutres de type *B*. De toute façon, quasiment aucune irréversibilité n'a été relevée entre le premier et le deuxième chargement. Il faudra donc travailler à des niveaux de chargement plus élevés pour relever des irréversibilités. Nous étions ici entre 25% pour la sollicitation 1 et 50% pour la sollicitation 2 de la charge de rupture prévisible au vu des essais du L.M.D.C. à 28 jours, 1,5 an et 5 ans.

### III.4.5.3. ANALYSE DES RESULTATS MOMENT-COURBURE

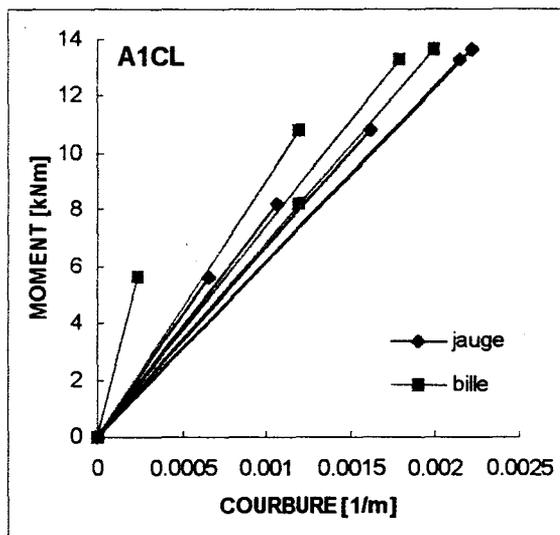
Une première comparaison est faite entre courbures mesurées soit par les jauges soit par les billes pour la moyenne de trois bases centrales hautes (figure III-14).

Pour *A1CL* (figure III-14a) les courbures mesurées par billes sont voisines de celles données par les jauges compte tenu des incertitudes. L'irréversibilité notée avec les billes n'est donc pas significative. Les mesures par les jauges seront considérées comme valides. Il en va de même pour *A2CL* (figure III-14c), où les courbures mesurées par billes sont supérieures à celles mesurées par jauges.

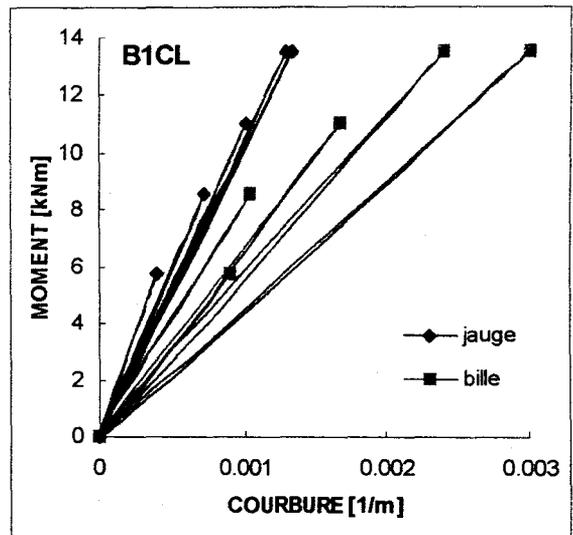
Pour *B1CL* (figure III-14b) et *B2CL* (figure III-14d), on peut faire des observations comparables. *A2T1* et *B2T1* ne seront pas étudiés dans ce premier dépouillement, la première poutre n'ayant pas suivi un cycle de chargement comparable aux autres et la deuxième présentant de multiples difficultés d'interprétation.

Les valeurs de courbure exploitées dans ce dépouillement peuvent être déduites par différence de deux valeurs de déformation. On a donc en 5 sections 10 possibilités de mesure de courbure, et pour celle du milieu de la poutre il faut ajouter les trois possibilités offertes par les jauges. Un long travail de dépouillement des mesures a en conséquence été mené.

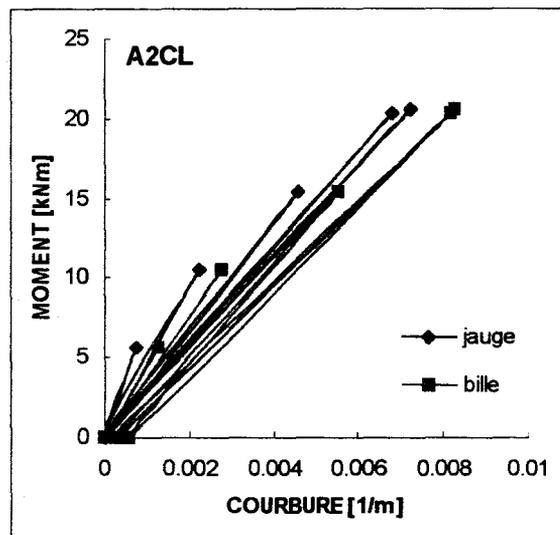
Il faut noter qu'en joignant les valeurs de chaque cycle de chargement, on peut tracer la courbe de l'enveloppe du comportement. Nous présentons par exemple pour la poutre *A2CL* (figure III-14e), les courbes enveloppes des mesures moyennes sur la base des billes le long de la poutre pour les 6 bases *A* à *F*, et les mesures 1-3, 1-4, 1-5 des billes pour la base *A* (figure III-14f), qui confirment par leur variété qu'un dépouillement plus approfondi est nécessaire.



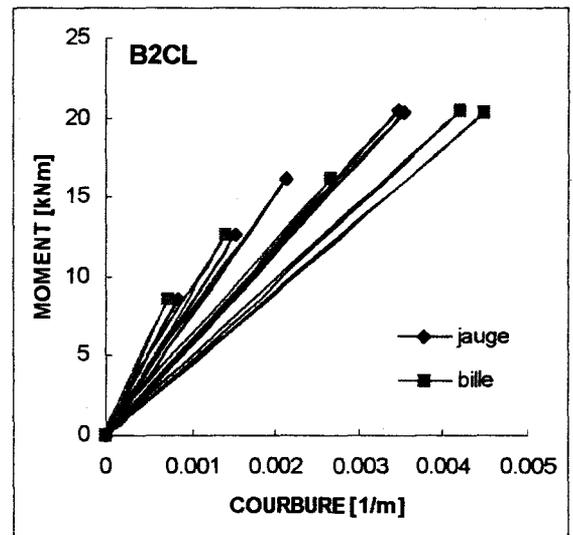
(a)



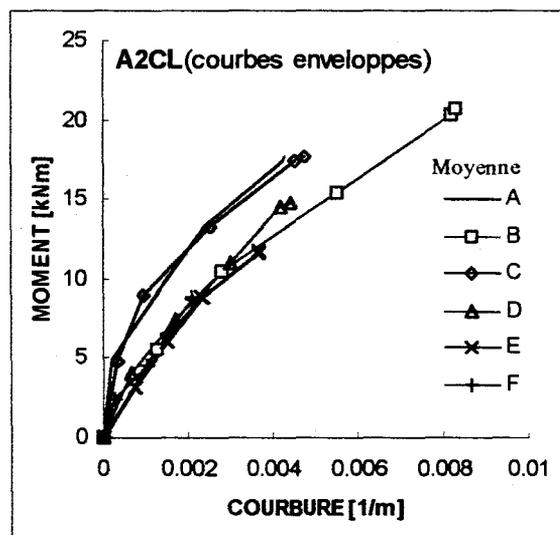
(b)



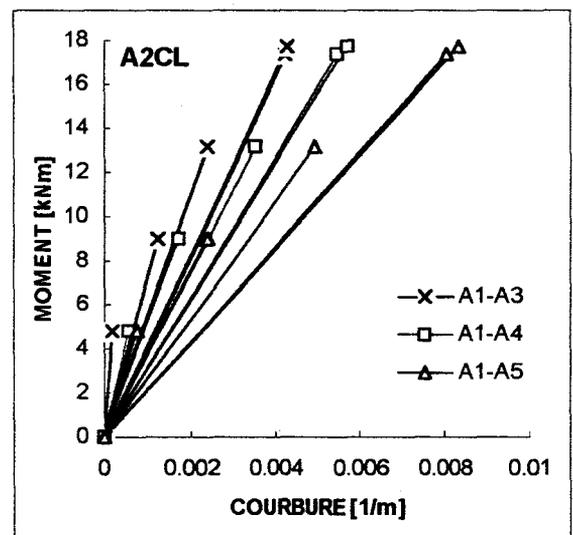
(c)



(d)



(e)



(f)

Figure III-14: Courbures mesurées par les jauges et les billes

La figure III-14f confirme que le comportement de la partie comprimée (A1-A3) est plus raide que celui de la partie tendue (A1-A5). En fait le comportement traduit par A1-A5 est plus global que celui traduit par A1-A3 car A1 est dans la zone comprimée et A5 est dans la zone de présence des fissures. Il faut noter que la planéité des déformations est l'une des hypothèses de notre modèle qui considère l'effet du raidissement en traction, c'est-à-dire la présence des fissures. Cette hypothèse marque bien le décalage de notre modèle par rapport à un modèle local. La figure III-15 montre que dans une section fissurée, la courbure sur la section n'est pas constante et la planéité des déformations au dessus et au droit des fissures ont des pentes différentes. Il faut donc mieux considérer une moyenne de courbures mesurées.

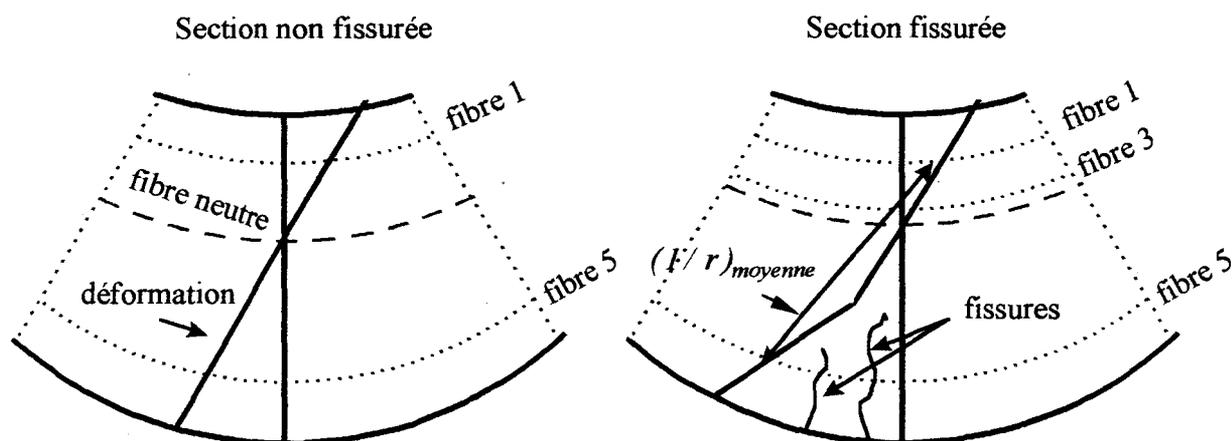
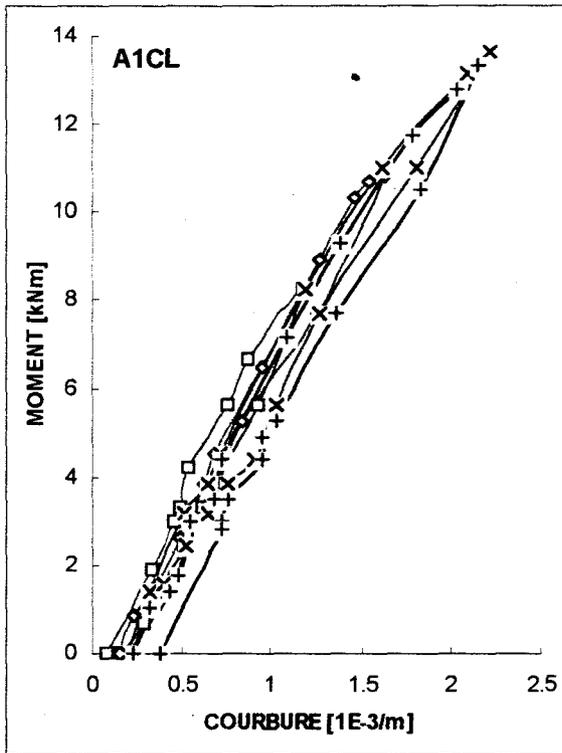


Figure III-15: Forme de courbure sur une section non fissurée et une section fissurée

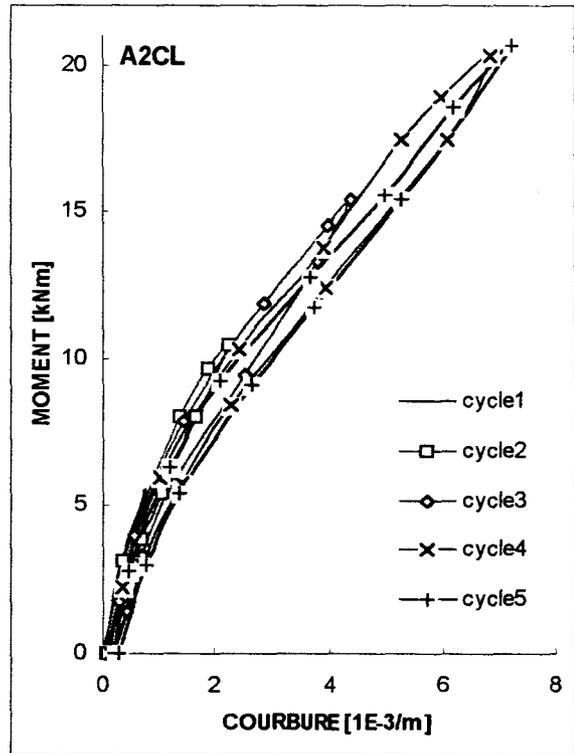
Si nous observons les résultats donnés par les jauges et transcrits en moment-courbure, pour *A1CL* (figure III-16a), *A2CL* (figure III-16b), *B1CL* (figure III-16c) et *B2CL* (figure III-16d); nous ne notons pas d'irréversibilité.

Les poutres *A1CL* et *B1CL* présentent un comportement élastique linéaire jusqu'à la sollicitation 1 qui est faible. Au contraire les poutres *A2CL* et *B2CL* présentent un comportement élastique non linéaire pour la sollicitation 2.

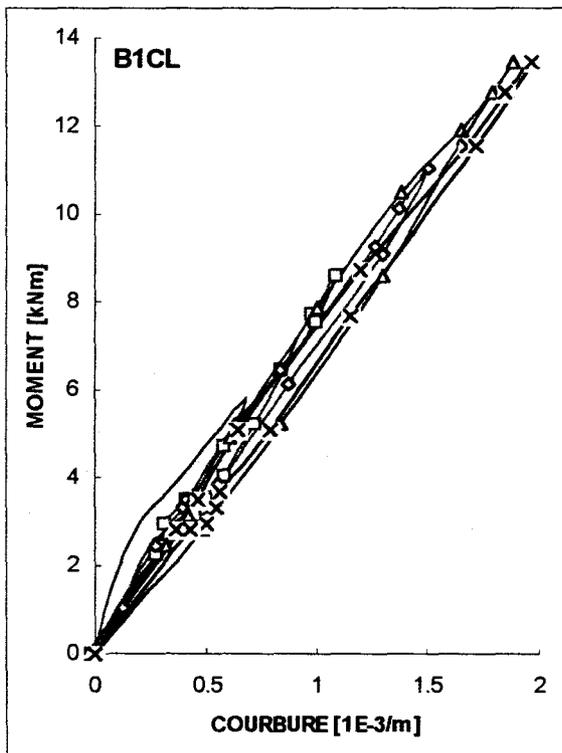
En figure III-17, seul le dernier cycle est représenté pour ces 4 poutres. On constate en partie centrale de poutre et localement un comportement similaire entre *A1CL* et *B1CL*.



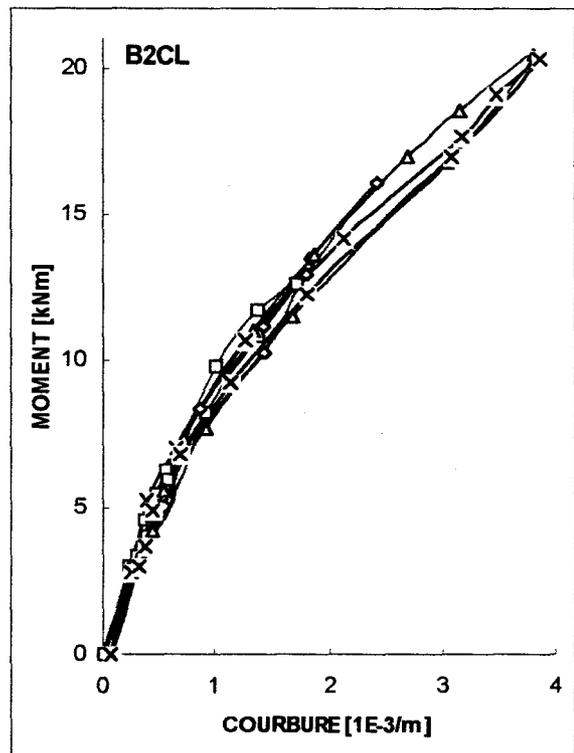
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure III-16: Courbes moment-courbure; résultats donnés par les jauges

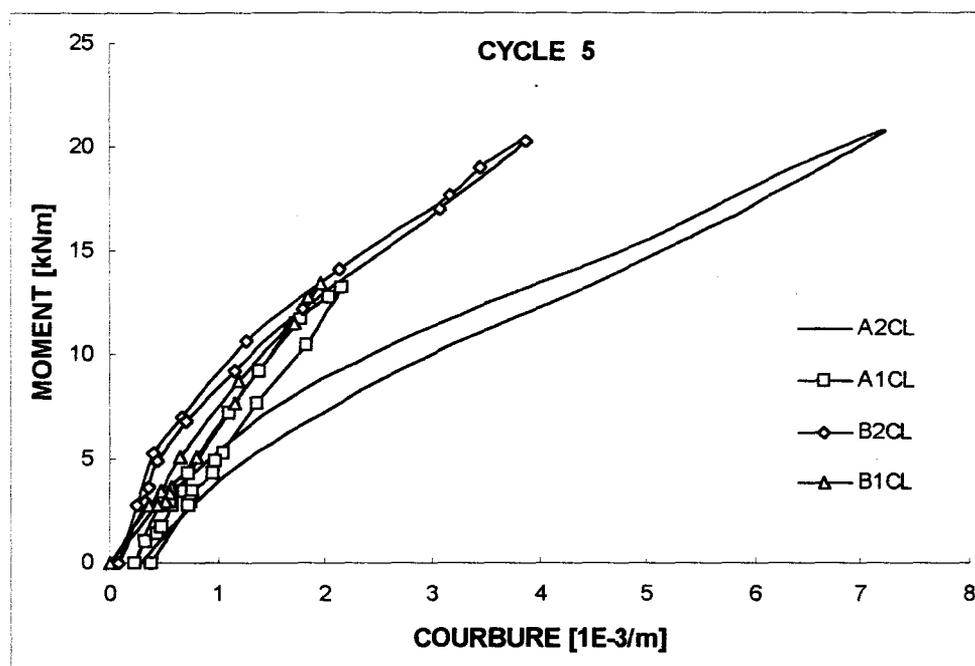


Figure III-17: Dernier cycle de chargement-déchargement; résultats donnés par les jauges

### III.5. SERIE D'ESSAIS N°2 DES POUTRES VIEILLIES EN AMBIANCE SALINE

Dans le cadre de la deuxième phase d'essais entrant dans le cadre du projet GEO "Fatigue et vieillissement des géocomposites", la poutre *B1CL* a été reprise pour une deuxième campagne d'essais. Nous nous intéressons ici aux variations de courbure le long de la poutre. D'autres résultats, comme les variations de flèches ou de fissures, sont présentés dans le rapport intermédiaire de la deuxième phase (GEO 1997 [60]).

#### III.5.1. Cartes de fissuration

Nous présentons figure III-18, la carte de fissuration de la poutre *B1CL*, dans son état actuel. Les ouvertures de fissure sont en millimètre. D'importants signes extérieurs de corrosion apparaissent. Elle possède notamment une fissure longitudinale d'ouverture atteignant 1,2 mm le long des armatures tendues. Toute la zone centrale devrait donc présenter une faiblesse de l'adhérence acier-béton. Elle présente également une fissure longitudinale le long de l'armature comprimée dans la zone centrale, où le béton est le plus mis à contribution.

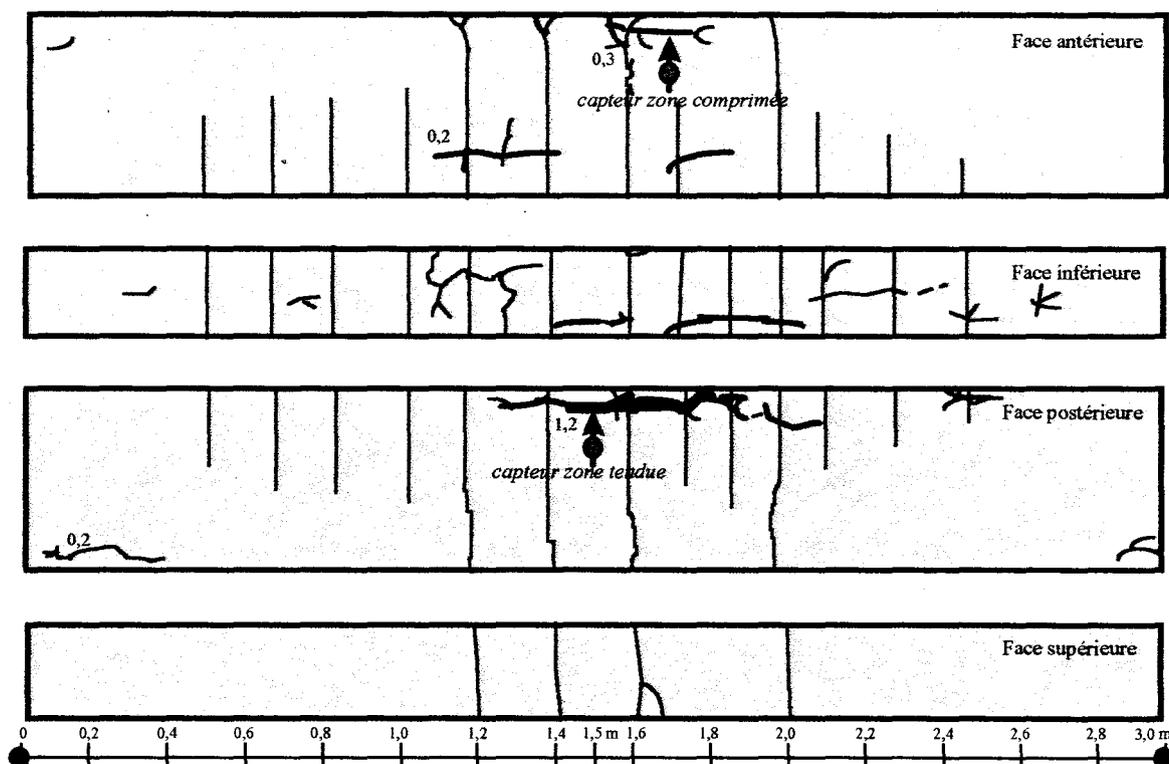


Figure III-18: Carte de fissuration de la poutre B1CL en 1997; localisation des capteurs de mesure de l'ouverture des fissures GEO 1997 [60]

### III.5.2. Objectif principal

L'objectif principal est d'observer la réponse et la dissymétrie éventuelle le long de la poutre sous divers chargements centrés et excentrés, en flexion trois points. Les variations de courbure, mesurées expérimentalement le long de la poutre, seront comparées avec les courbes théoriques de type moment-courbure obtenues par notre modèle.

### III.5.3. Description de l'essai

Cette poutre a été soumise à un chargement monotone en flexion trois points (centré et excentré), jusqu'au chargement historique. L'instrumentation a consisté à:

- ◆ établir précisément le déplacement vertical de la poutre (flèche) en multipliant les points de mesure (figure III-19);
- ◆ relever l'état de fissuration et son évolution au cours du chargement, en suivant l'ouverture des fissures longitudinales secondaires;

- ♦ mesurer le déplacement horizontal d'un certain nombre de sections droites réparties tout le long de la poutre à l'aide d'un déformètre à bille. Nous avons ainsi pu déterminer la courbure le long de la poutre.

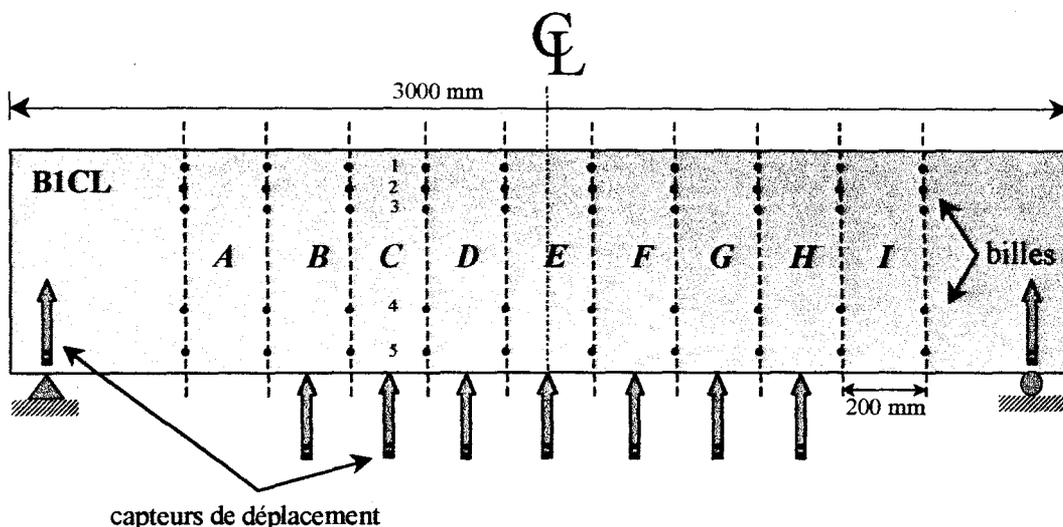


Figure III-19: Emplacement des capteurs de champs de déplacement et des billes

Afin de pouvoir évaluer une dissymétrie éventuelle de la réponse de la poutre corrodée, sept positions différentes de la charge ont été choisies sans changer la position des appuis (figure III-20). La force maximale appliquée n'a pas dépassé: 20 kN, 17,5 kN, 16 kN et enfin 15 kN respectivement dans le cas du chargement centré et décalé de 20, 40 et 60 cm par rapport au centre de la poutre. Le niveau de sollicitation a été tel qu'aucun dépassement en moment et en effort tranchant n'a été généré par rapport au chargement historique (figure III-21).

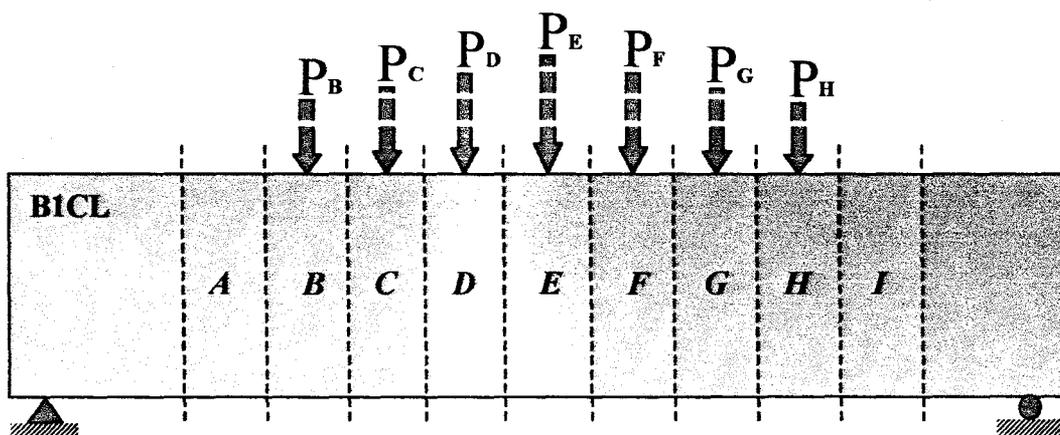


Figure III-20: Localisation de point de chargement sur la poutre B1CL

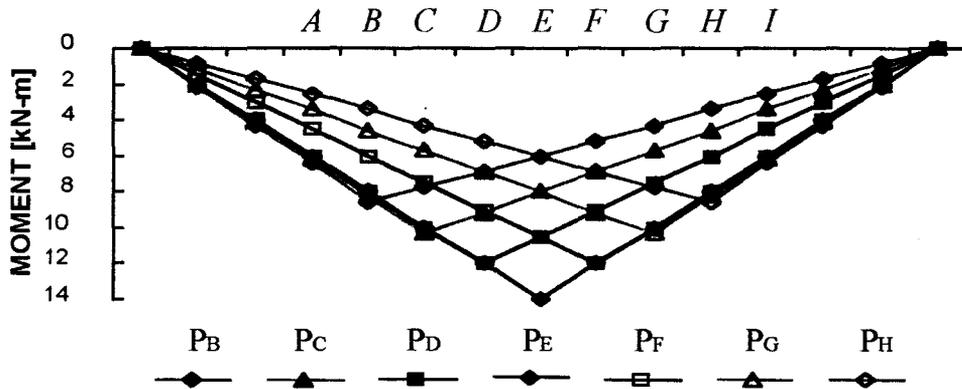


Figure III-21: Variations du moment interne de chaque section et tous les chargements

Pour cette deuxième phase d'essais, nous avons modifié le chargement 3 (figure III-7). Le nombre de cycles a été réduit à quatre cycles. Le chemin de chargement (figure III-22) a été choisi tel qu'on puisse mieux observer des irréversibilités. Le pourcentage de charge appliquée, pour les cycles 2 et 3, a été augmenté (70 et 85% au lieu de 60 et 80%). Les valeurs des charges pour chaque section et chaque cycle sont indiquées dans le tableau III-5.

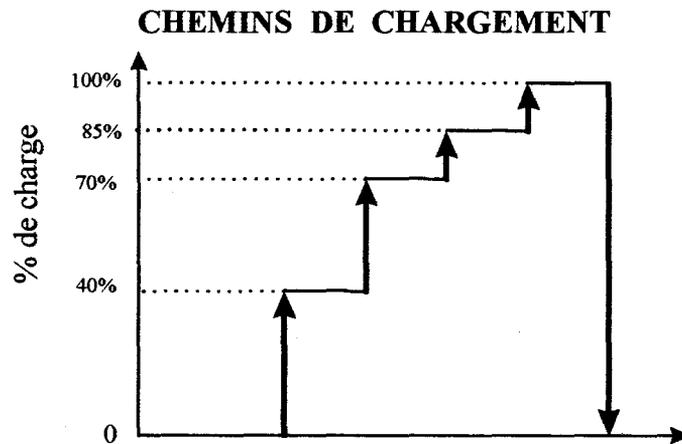


Figure III-22: Pourcentages de chargement de paliers de chargement par rapport à la charge historique

Sept capteurs fixés au moyen de supports magnétiques solidaires du banc d'essai ont été positionnés sur la face inférieure des poutres sous les différents points possibles de chargement. On a ainsi procédé à une acquisition en continu des déplacements sur une longueur de 1,20 m tous les 20 cm. Le suivi de l'évolution de l'ouverture des fissures longitudinales le long des armatures de la poutre a été réalisé par l'intermédiaire de deux autres capteurs. La localisation exacte de ces capteurs ainsi que les deux fissures suivies sont indiquées sur la carte de fissuration (figure III-18).

TABLEAU III-5: Valeurs de charge en kN pour chaque section

% de charge	section <b>B</b> (-60cm)	section <b>C</b> (-40cm)	section <b>D</b> (-20cm)	section <b>E</b> (milieu)	section <b>F</b> (+20cm)	section <b>G</b> (+40cm)	section <b>H</b> (+60cm)
<b>40</b>	6	6,4	7	8	7	6,4	6
<b>70</b>	10,5	11,5	12,25	14	12,25	11,5	10,5
<b>85</b>	12,75	13,5	15	17	15	13,5	12,75
<b>100</b>	15	16	17,5	20	17,5	16	15

Les tassements éventuels des appuis ont pu être évalués à l'aide de quatre capteurs de déplacement également solidaires du banc d'essai et placés en regard des appuis de chaque côté des corps d'épreuves (figure III-19), ceci afin d'éliminer une rotation possible de l'élément au cours de la mise en charge. Pour déterminer les courbures, nous utilisons un déformètre à bille. Pour cela nous avons collé plusieurs billes sur la face antérieure de la poutre de manière à avoir 9 sections désignés de A à I. Sur chaque section, 5 rangées de billes sont réparties de la manière suivante: 3 en zone comprimée et 2 en zone tendue.

### III.6. ESTIMATION DE LA VALEUR D'ENDOMMAGEMENT DE LA STRUCTURE A PARTIR DES DONNEES EXPERIMENTALES

Avant de présenter les courbes expérimentales obtenues (nous nous intéresserons aux variations de courbure le long de la poutre) et d'effectuer le calcul des valeurs d'endommagement de la structure le long de la poutre, nous allons préciser cette notion d'endommagement.

#### III.6.1. Mesure de l'endommagement d'un matériau

Les phénomènes de plasticité et d'endommagement sont causés d'une forte non linéarité dans le comportement d'un matériau. Celui-ci peut être décrit en utilisant le concept de contrainte effective et l'hypothèse de l'équivalence en déformations. Soit  $D$  la variable scalaire caractérisant l'état d'endommagement isotrope. La contrainte effective est définie par:  $\tilde{\sigma} \equiv \frac{\sigma}{1-D}$  avec  $\sigma = \tilde{E}\varepsilon$  pour le matériau endommagé et  $\tilde{\sigma} = E\varepsilon$  pour le matériau sain équivalent.  $E$  est le module sécant qui peut être calculé soit comme égal au module initial ou par exemple à celui correspondant à 0,45 fois la contrainte au pic.

On peut constater que la variable  $D$  est liée à la rigidité par la relation:  $D = l - \frac{\tilde{E}}{E}$ ;  $\tilde{E}$  est le module effectif du matériau endommagé. Ce module peut être calculé à partir de la branche de déchargement, de la branche de rechargement ou de la moyenne des deux branches (figure III-23).

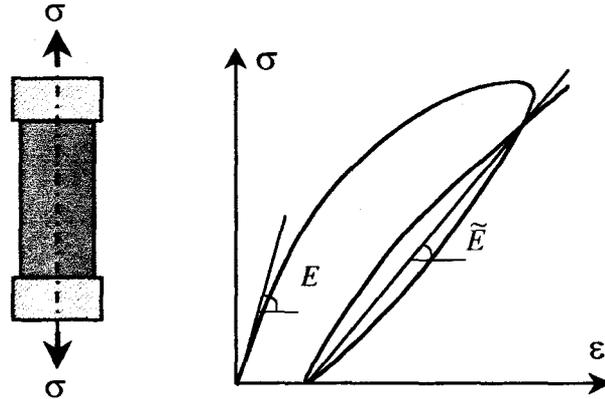


Figure III-23: Principe de mesure de l'endommagement d'un matériau par variation de la rigidité

### III.6.2. Mesure de l'endommagement d'une structure

A l'aide de cycles de chargement-déchargement de la poutre, on peut calculer la valeur d'endommagement de la structure le long de la poutre  $D_{st,x} = l - \frac{\tilde{E}_{st,x}}{E_{st,x}}$ . La figure III-24 présente le principe du calcul. On rappelle que la poutre avait certainement une flèche et une courbure résiduelle sous le chargement maintenu, mais leur valeurs ne sont pas accessibles. Les valeurs expérimentales sont présentées par rapport à un nouveau repère. En plus, après rechargement et redéchargement, les résultats ont montré que l'irréversibilité de la flèche ou de la courbure sont négligeables.

On obtient donc le module  $\tilde{E}_{st}$  en rapportant la valeur de la charge appliquée à la valeur de la déformation mesurée. On calcul le module  $E_{st}$  à partir du modèle. La valeur de la pente initiale de la courbe moment-courbure pour les poutres de type A et B est égale à 10600 kNm<sup>2</sup>. Ce module peut être légèrement différent le long de la poutre à cause de l'hétérogénéité de l'élément en béton armé. On suppose néanmoins  $E_{st}$  constant le long de la poutre.

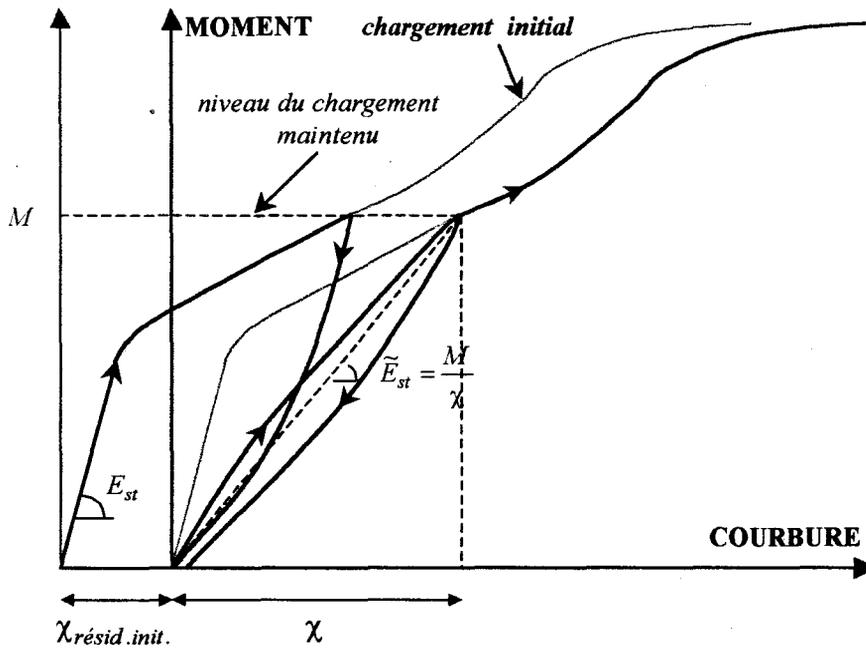


Figure III-24: Principe de la mesure de l'endommagement de la structure avec une courbure résiduelle initiale correspondant au chargement maintenu

Le tableau III-6 présente les calculs des valeurs d'endommagement de la structure le long de la poutre B1CL dans le cas du chargement centré.

TABLEAU III-6: Valeurs d'endommagement de la structure le long de la poutre obtenues dans le cas du chargement centré (section E)

Section	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Moment $M_x$ [kNm]	6	8	10	12	14	12	10	8	6
Courbure $\chi_x$ [ $10^{-3} m^{-1}$ ]	0,682	1,804	2,112	2,604	3,200	1,234	3,120	0,778	0,935
$\tilde{E}_{st,x}$ [kNm <sup>2</sup> ]	8797	4434	4734	4608	4375	9724	3205	10282	6417
$D_{st,x}$	0,170	0,581	0,553	0,565	0,587	0,082	0,697	0,03	0,394

Signalons que ce module d'endommagement n'est pas le même que celui qui caractérise un matériau et qui a comme unité  $= \frac{MPa}{m/m} = MPa \left[ \frac{\text{contrainte}}{\text{déformation}} \right]$ . L'unité de ce module  $\tilde{E}_{st}$  est égale à:

$$\text{unité de } \tilde{E}_{st} = \frac{kNm}{1/m} = kNm^2 \left[ \frac{\text{moment}}{\text{courbure}} = E I \right]$$

### III.7. VARIATIONS DES VALEURS D'ENDOMMAGEMENT DE LA STRUCTURE VIS A VIS DU MODE D'APPLICATION DE LA CHARGE

Afin de pouvoir évaluer une éventuelle dissymétrie de la réponse de la poutre corrodée, sept positions différentes du point d'application de la charge ont été choisies (figure III-20). Notre calcul des valeurs d'endommagement le long de la poutre dépend de la réponse de la structure qui dépend elle-même de la position de la charge.

#### III.7.1. Endommagement obtenu dans le cas du chargement centré

La figure III-25 montre les variations de courbures le long de la poutre dans le cas du chargement centré. On observe que la section G est la plus faible par rapport à l'état normal d'une poutre symétrique. En revanche les sections F et H présentent le phénomène inverse. Ces cas sont fréquents pour tous les chargements et montrent que la faiblesse d'une section entraîne un déchargement des voisines, qui se déforment donc moins.

Les valeurs d'endommagement obtenues dans le cas du chargement centré sont indiquées dans le tableau III-6. La figure III-25 montre la comparaison avec un modèle qui considère une valeur d'endommagement de la structure fixée de manière à se caler au milieu de la poutre (section E) pour le chargement le plus important (E-20kN) et gardée constante le long de la poutre. On suppose donc une valeur d'endommagement constante égale à **0,587** (voir tableau III-6) pour toutes les sections. On calcule les courbures le long de la poutre comme suit:

$$\chi_x = \frac{M_x}{(1 - 0,587) \times 10600} = \frac{M_x}{4375}$$

où  $M_x$  est le moment fléchissant maximum de chaque section qui est indiqué le tableau III-6.

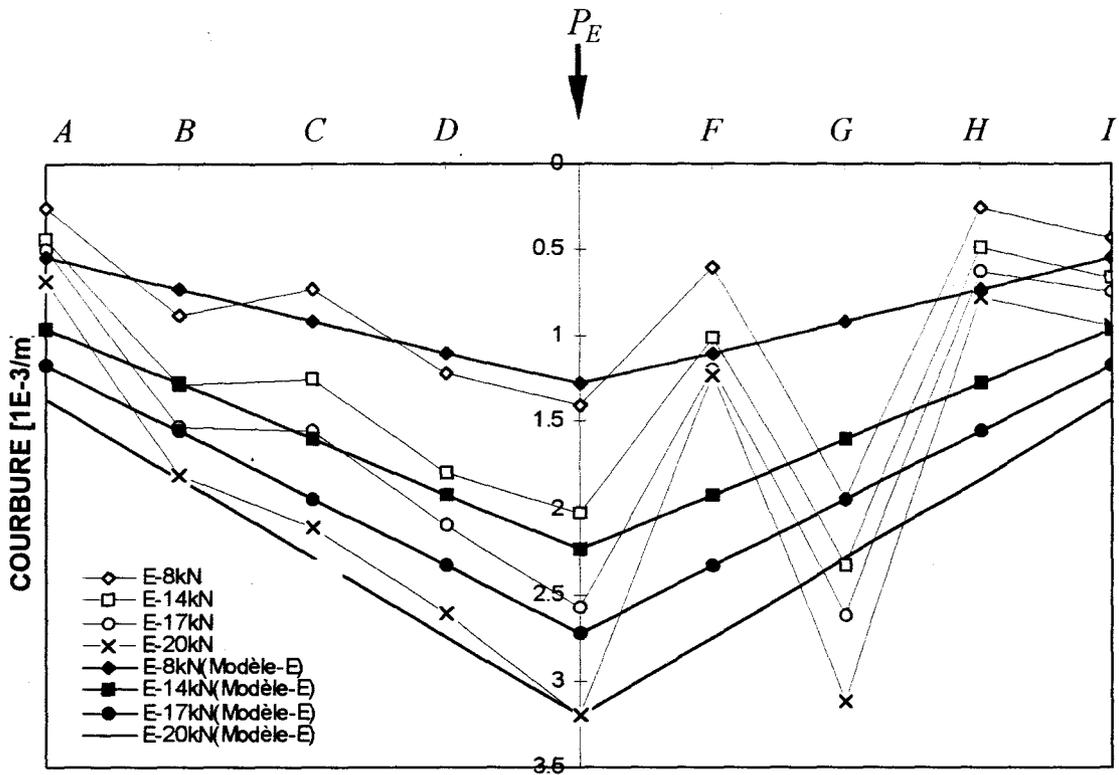


Figure III-25: Paramètre d'endommagement de la structure fixé (au milieu)

On observe des comparaisons acceptables au milieu de la poutre pour tous les chargements tandis que, au contraire, des écarts importants sont observés pour le côté droit. La section G est plus souple et les sections F et H sont plus rigides par rapport au modèle supposé. On observe une concordance assez régulière pour le côté gauche. On peut donc en déduire que les différentes sections n'ont pas les mêmes valeurs d'endommagement à cause de l'asymétrie de la dégradation.

On conserve cette idée et l'exploite tout le long de la poutre pour le chargement centré en considérant une variable d'endommagement de la structure  $D_{st,x} = 1 - \frac{\tilde{E}_{st,x}}{E_{st,x}}$  qui varie le long de la poutre (voir le tableau III-6). On calcule les courbures le long de la poutre comme suite:

$$\chi_x = \frac{M_x}{(1 - D_{st,x})E_{st}} = \frac{M_x}{\tilde{E}_{st,x}}$$

La figure III-26 montre la comparaison. Les courbures de l'essai et du modèle sont bien sûr confondues pour le chargement maximal. On observe des concordances assez correctes pour les chargements moins importants. Ensuite, on garde les valeurs de  $D_{st,x}$  obtenues par ce calage sur le cas de chargement centré et on l'applique pour divers chargements excentrés (figure 27). Rappelons que les valeurs des chargements excentrés sont toujours inférieures à celles de chaque section dans le cas du chargement centré.

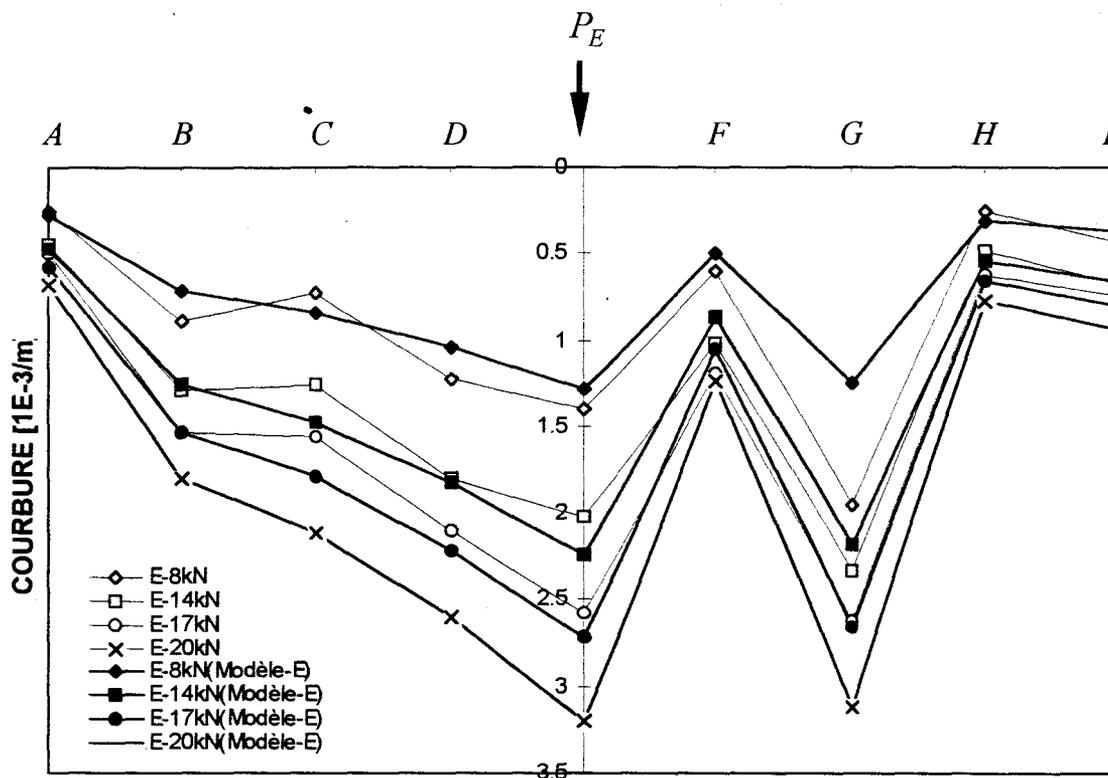


Figure III-26: Valeurs de la courbure le long de la poutre, paramètre d'endommagement de la structure variable le long de la poutre obtenu dans le cas du chargement centré

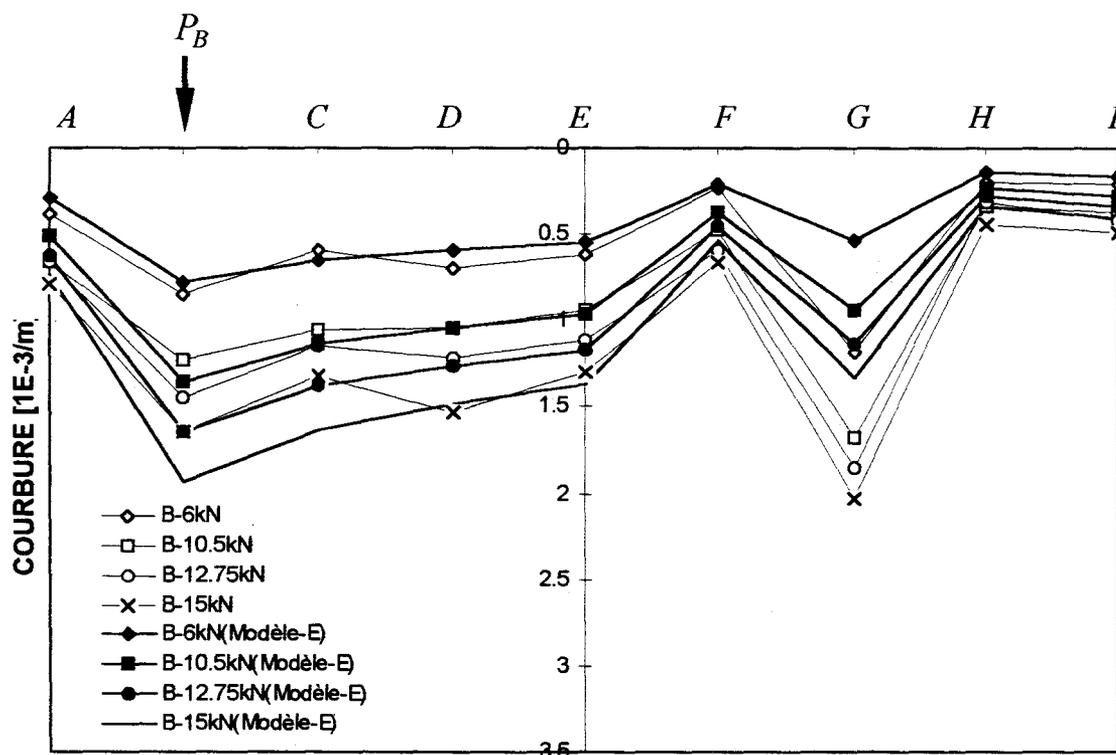


Figure III-27: Valeurs de la courbure le long de la poutre; chargement excentré -60 cm à gauche ( $D_{st,x}$  obtenues dans le cas du chargement centré)

La figure III-27 montre la réponse du modèle pour un chargement excentré à -60 cm à gauche (section B) jusqu'à 15 kN. La charge appliquée n'est pas forte et en conséquence le moment, surtout pour le côté droit, est faible. L'incertitude est alors prépondérante. La section G présente le maximum de différences. Mais quand on déplace la charge vers le côté droit, les valeurs de l'essai et du modèle pour la section G se rapprochent. En annexe III, on présente cette comparaison avec les autres chargements.

### III.7.2. Changement de la référence de calcul de la valeur d'endommagement de la structure

Rappelons que la référence de calcul des valeurs d'endommagement de la structure le long de la poutre dans les figures III-25-27 est l'essai avec chargement au milieu à 20 kN. Quand on regarde les figures III-26 et III-27, on observe que lorsque le point d'application de la charge est sur la section B, les résultats ne sont plus les mêmes. Chaque essai peut donc conduire à une valeur différente de l'endommagement de la structure.

L'essai avec chargement au niveau de la section F a été choisi pour une deuxième analyse comme référence de calcul des valeurs d'endommagement de la structure. Le chargement maximal  $y$  est de 17.5 kN. Il existe le risque de perdre en précision dans le calcul des  $D_{st,x}$  si on choisit les autres sections (G,H,I) comme référence, parce que les niveaux de chargement  $y$  sont plus faibles. Le tableau III-9 présente les nouvelles valeurs de  $D_{st,x}$ .

TABLEAU III-9: Valeurs d'endommagement de la structure le long de la poutre obtenues dans le cas du chargement excentré 20 cm à droite (section F)

Section	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Moment [kNm]	4,5	6	7,5	9	10,5	12	10	8	6
Courbure [ $10^{-3}m^{-1}$ ]	0,397	1,439	1,456	1,961	2,715	1,618	3,189	1,163	1,022
$\tilde{E}$ [kNm <sup>2</sup> ]	11335	4169	5151	4589	3867	7416	3135	6878	5870
$D_{st,x}$	0,0	0,606	0,514	0,567	0,635	0,300	0,704	0,350	0,446

La valeur  $D_{st,x}$  correspondant à la section A est prise égal à zéro car son module  $\tilde{E}_{st,x}$  est supérieur de 7% par rapport au module initial ( $10600 \text{ kNm}^2$ ). Cette section est peu sollicitée. D'autre part, les résultats expérimentaux (figure III-16) montrent que les poutres du même type ont des modules initiaux différents tandis que le modèle donne toujours une réponse unique pour une série donnée de paramètres.

Les figures III-28-29 montrent les variations de courbure le long de la poutre avec les nouvelles valeurs d'endommagement de la structure. En annexe III, on présente ces comparaisons avec les autres chargements.

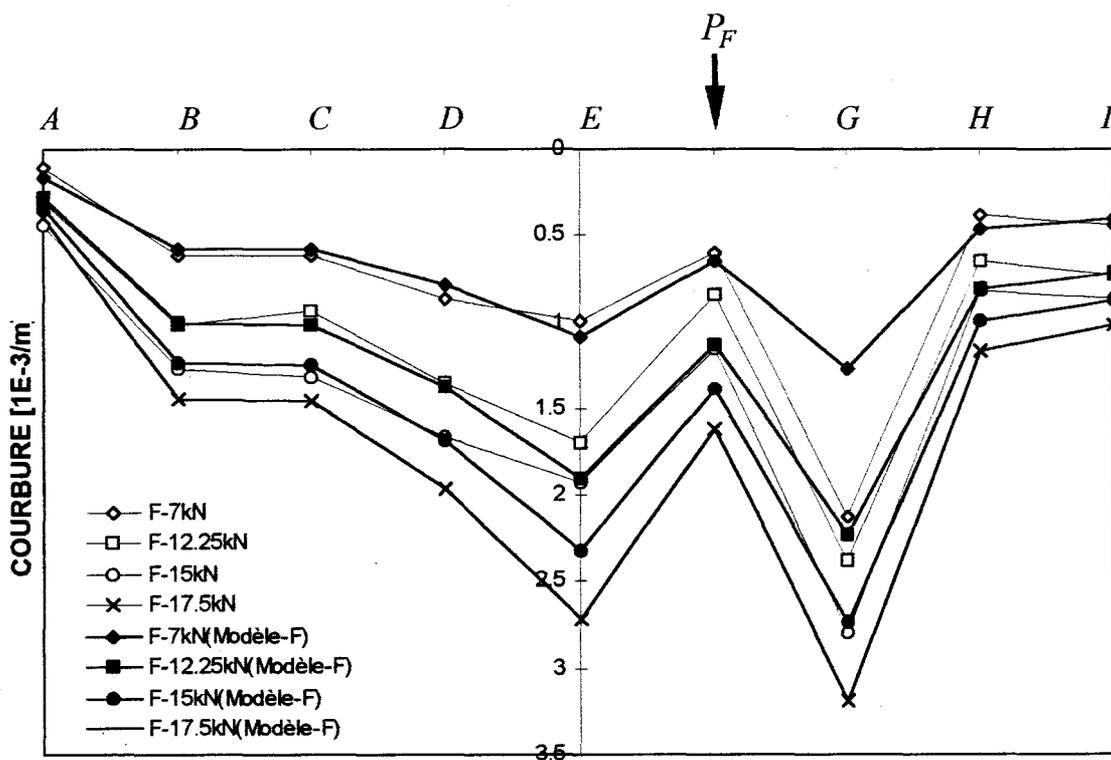


Figure III-28: Valeurs de la courbure le long de la poutre,  $D_{st,x}$  obtenues dans le cas du chargement excentré 20 cm à droite

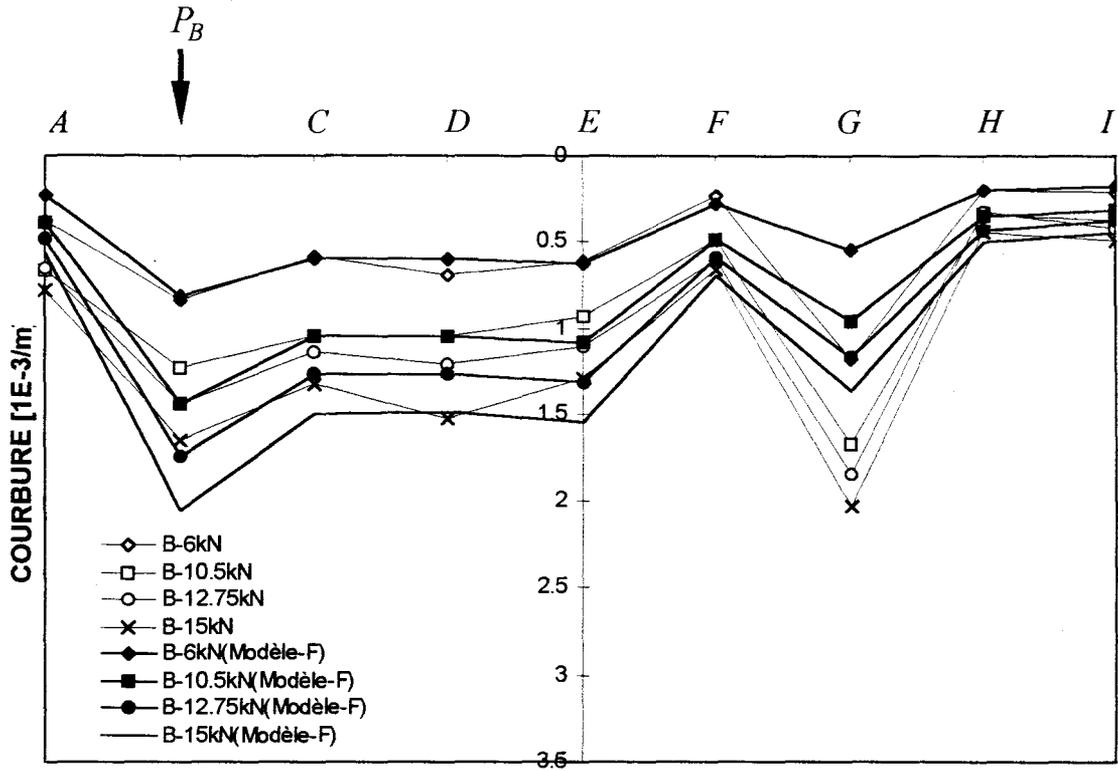


Figure III-29: Valeurs de la courbure le long de la poutre; chargement excentré -60 cm à gauche ( $D_{st,x}$  obtenues dans le cas du chargement excentré 20 cm à droite)

### III.7.3. Ecart moyen relatif de la courbure le long de la poutre

Les figures III-26-29 et les figures renvoyées en annexe III présentent les écarts entre les résultats d'essais et le modèle. Un critère de comparaison nous permet de vérifier l'écart entre les valeurs de la courbure du modèle  $\chi_m$  et celles obtenues par les essais  $\chi_{essai}$ . Chaque figure est liée à un chargement et présente les 36 points correspondant aux neuf sections et aux quatre paliers de chargement. On choisit comme critère la moyenne des rapports des différences absolues entre les valeurs de courbure de l'essai et celles issues du modèle, aux valeurs de l'essai pour chacun des sept chargements. Cela correspond à un écart moyen relatif. Quand ces valeurs sont près de zéro, nous sommes en moyenne proches de la réalité.

$$rapport = \sum_{j=1}^9 \sum_{i=1}^4 \left| \frac{\chi_m - \chi_{essai}}{\chi_{essai}} \right| \quad \text{Moyenne des écarts} = \frac{rapport}{36}$$

Le tableau III-10 donne les écarts moyens relatifs et leur moyenne pour chaque chargement. Il montre qu'en prenant la référence en E on obtient globalement de meilleurs résultats, car la moyenne correspondant à la référence en E (0,1779) est plus petite de celle de la référence en F (0,2191).

TABLEAU III-10: Ecart moyens relatifs entre les valeurs de courbure du modèle et celles obtenues par les essais pour deux références

Chargement	B	C	D	E	F	G	H	Moyenne
Référence-E (moyenne des écarts)	0,1792	0,4116	0,1403	0,0825	0,1347	0,141	0,1561	0,1779
Référence-F (moyenne des écarts)	0,1682	0,5641	0,2076	0,1715	0,0979	0,1411	0,1833	0,2191

La figure III-30 présente ces écarts moyens relatifs qui représentent la précision du modèle le long de la poutre. Elle montre que l'estimation de  $D_{st,x}$  dans les deux cas est assez acceptable, car les valeurs ne sont pas éloignées de zéro sauf pour le chargement en section C. Cette différence vient peut être de la difficulté de mesure des déformations avec les billes.

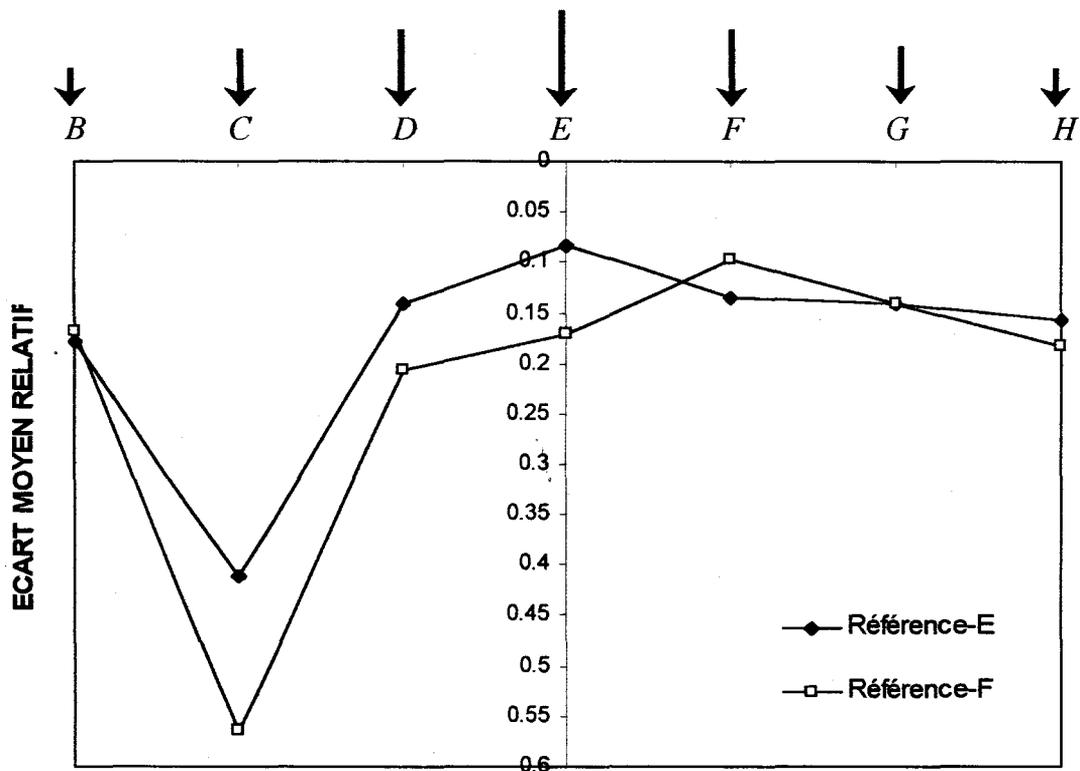


Figure III-30: Ecart moyen relatif de chaque essai pour les deux références

### III.7.4. Influence du choix des références sur la valeur d'endommagement

Dans les analyses précédentes, le calcul de la valeur d'endommagement de la structure le long de la poutre *BICL* a été établi en prenant les essais en chargement centré (référence E) et en chargement excentré 20 cm à droite (référence F). On calcule maintenant la valeur d'endommagement de la structure pour chaque section en prenant comme référence l'essai avec chargement à cette section. La figure III-31 présente la comparaison entre ce calcul et les précédents selon les deux références E et F. On constate une similitude assez correcte. Nous en déduisons qu'un seul essai peut donc donner des valeurs d'endommagement de la structure assez fiables tout le long de la poutre.

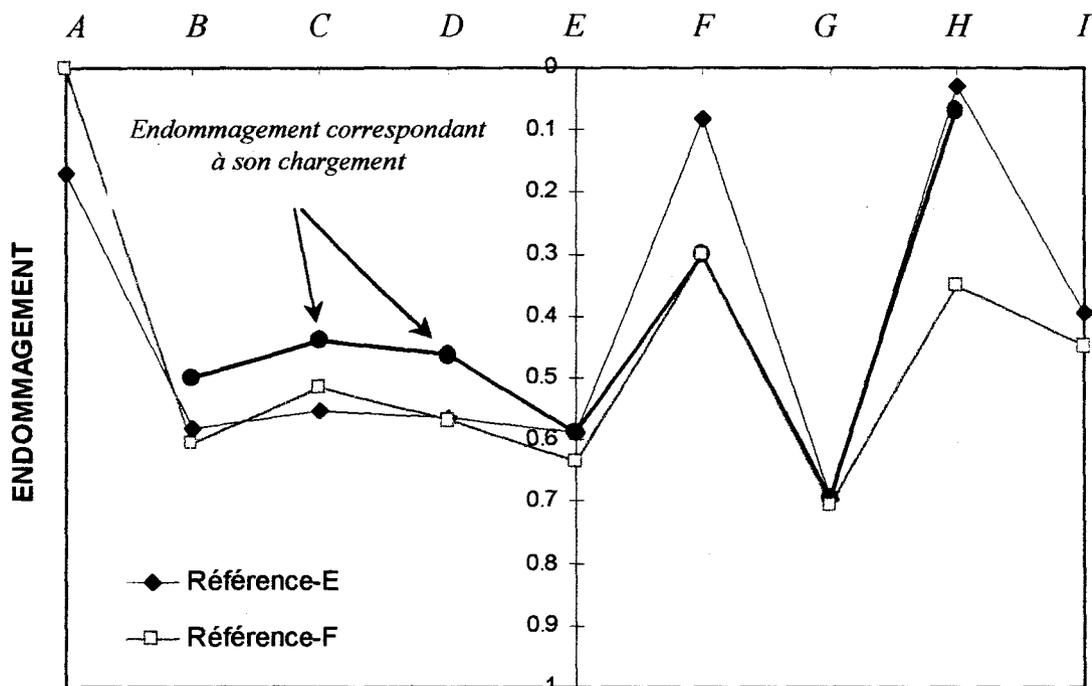


Figure III-31: Variations de la valeur d'endommagement de la structure le long de la poutre pour les deux références E et F et dans le cas du calcul correspondant au chargement dans la même section

### III.7.5. Vérification de linéarité de la loi de comportement le long de la poutre

Les figures III-32 et III-33 montrent les droites passant par les cinq points expérimentaux correspondant aux paliers du chargement pour toutes les sections et dans le cas du chargement centré et 20 cm à droite en F.

Le passage à l'origine des droites montre que l'hypothèse de linéarité est correctement vérifiée le long de la poutre. La section G présente le plus grand écart.

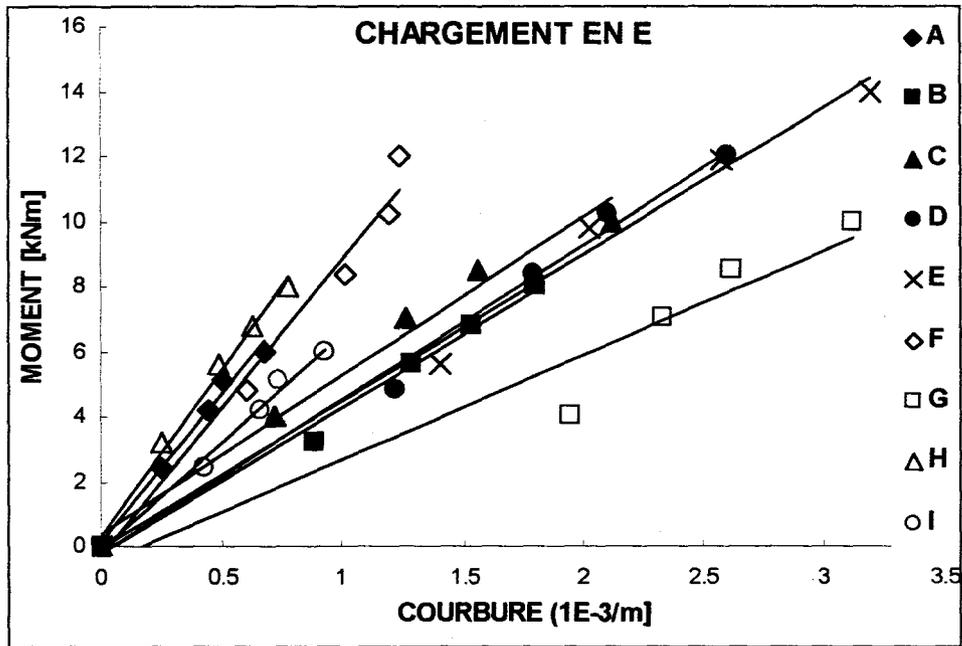


Figure III-32: Vérification de la linéarité; chargement centré

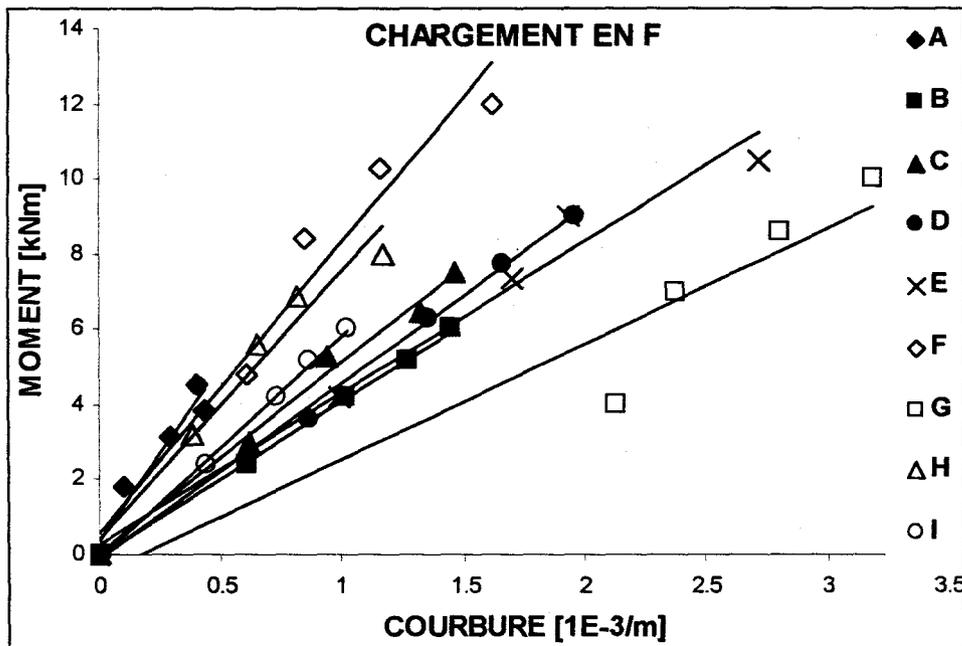


Figure III-33: Vérification de la linéarité; chargement excentré 20 cm à droite

Cet écart peut être l'effet de l'incertitude pour les chargements faibles mais le fait que cela se présente pour la section la plus endommagée est certainement révélateur d'un comportement local complexe.

### **III.8. CHARGEMENT JUSQU'A RUPTURE DE LA POUTRE BICL (GEO 1999[61])**

#### **III.8.1. Introduction**

La poutre *BICL* a été sollicitée jusqu'à 20 kN lors de la série d'essais N°2. Afin de compléter les résultats acquis dans le cadre du projet GEO, une troisième campagne d'essais a été réalisée sur la poutre *BICL* en flexion 3 points au L.M.D.C de Toulouse. L'objectif est d'obtenir des renseignements sur le comportement mécanique de la poutre au-delà de son chargement de service puis jusqu'à rupture, en utilisant les mêmes dispositifs et méthodes expérimentales que pour la deuxième campagne d'essais, la poutre étant soumise à des cycles de chargement-déchargement par paliers. Enfin la mise à nu de la cage d'armatures a permis de connaître l'état réel de corrosion des aciers. L'annexe IV présente les photos des poutres corrodées et celles avec mise à nu de la cage d'armature.

#### **III.8.2. Mode opératoire**

Dans une première phase, la poutre a été soumise à un chargement centré jusqu'à la valeur de 30 kN. Dans une deuxième phase des cycles de chargement- déchargement ont été appliqués avec des paliers de 1kN, ceci jusqu'aux premiers signes de perte de linéarité du comportement de la poutre (38 kN), après quoi la montée en charge a été continue jusqu'à rupture.

Au-delà de 30kN, le déformètre à billes a été abandonné au profit de capteurs numériques. Ceci a permis d'obtenir les valeurs des déformations en continu jusqu'à rupture, ce qui n'était pas possible en utilisant le déformètre à billes qui nécessite des pauses dans le chargement. Trois rangées de trois capteurs numériques ont été placées à la surface de la poutre en regard des trois capteurs utilisés pour la mesure des champs de déplacements. La position exacte des capteurs numériques est donnée figure III-34.

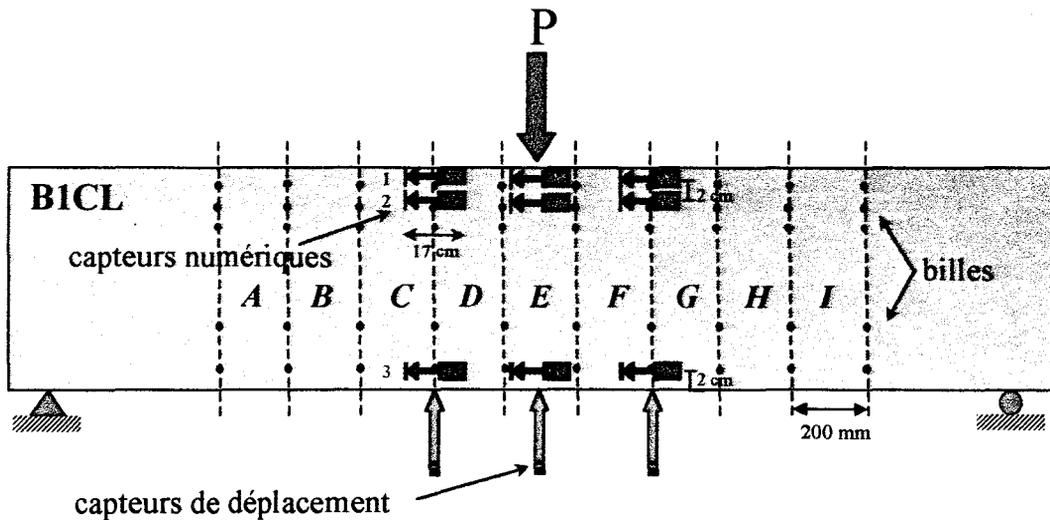


Figure III-34: Emplacement des capteurs sur la poutre B1CL

### III.8.3. Comportement à rupture

Le comportement de la poutre est resté parfaitement linéaire jusqu'à 37 kN, qui est équivalent au moment fléchissant 25,9 kNm (soit sept cycles) et aucune irréversibilité n'a pu être détectée (figures III-35 et III-36). Les modifications ont été observées lors du dernier cycle (soit le huitième). La montée en charge a ensuite été continue jusqu'à rupture.

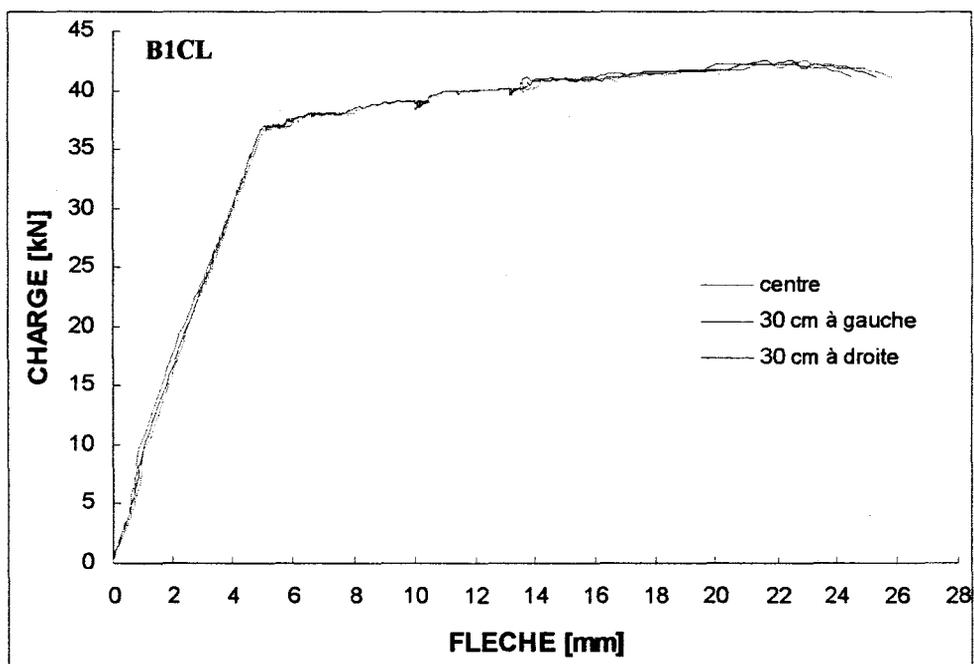


Figure III-35: Comportement charge-flèche jusqu'à rupture (GEO 1999 [61])

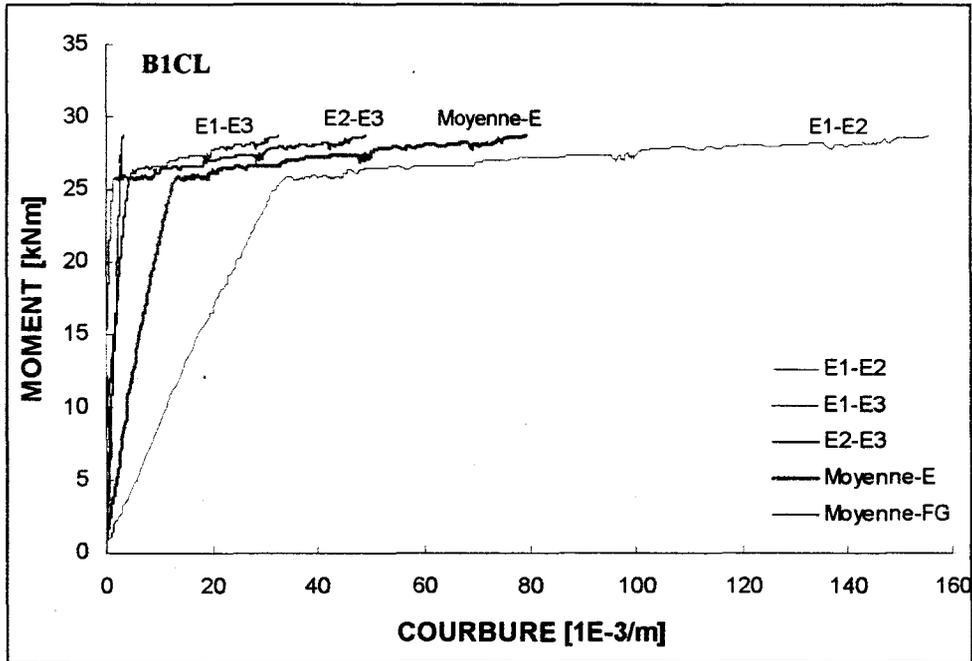


Figure III-36: Comportement moment-courbure jusqu'à rupture du centre de la poutre

La plastification a débuté pour un chargement de 38 kN (26,6 kNm), la rupture est survenue à 42 kN (29,4 kNm) environ, ceci en partie centrale du corps d'épreuve, où le taux de corrosion des armatures est maximal. En partie centrale les déformations longitudinales de traction augmentent subitement pour une charge de 38 kN (26,6 kNm), alors que dans les deux autres secteurs (F-G et C-D), cette augmentation n'apparaît pas. La dissymétrie du comportement de la poutre tend à s'estomper avec l'augmentation de la charge.

La figure III-36 présente la difficulté du calcul de la courbure d'après les résultats des capteurs numériques. On a trois capteurs pour chaque section et donc la possibilité du calcul de trois courbures différentes. Par exemple pour la section médiane de la poutre (section E), on obtient une courbure d'après les capteurs E1 et E2 (voir figure III-34), une autre d'après les capteurs E1 et E3 et une troisième d'après les capteurs E2 et E3. E1-E2 sont dans la partie comprimée. On observe un écart important entre le calcul d'après E1-E2 et les deux autres.

Il faut noter que chaque fibre sur la section a sa propre courbure (voir figure II-15). La figure III-37 confirme la variation de la courbure sur la hauteur d'une section. Nous retiendrons la moyenne des trois valeurs pour mener la comparaison avec notre modèle.

### III.9. COURBURE ADMISSIBLE

Pour des conditions normales de service, on vérifie les flèches d'une structure en fonction de la portée  $L$ . Le B.A.E.L. 93 [1] considère pour les éléments de planchers de moins de cinq mètres une flèche admissible maximale de  $f_{adm} = \frac{L}{500}$ . Dans notre travail, nous nous intéressons à une variable locale, la courbure. Il est donc intéressant d'avoir une idée sur la valeur de courbure admissible. En chapitre I, on a présenté des expressions simples pour la mesure de la courbure au milieu d'une poutre en flexion 3 points et 4 points (section I.2.3.1). Nous proposons d'utiliser ces expressions pour définir l'expression de la courbure admissible comme suit:

$$\chi_{adm} = \frac{12f_{adm}}{L^2} = \frac{12}{L^2} \frac{L}{500} \Rightarrow \chi_{adm} = \frac{3}{125L} \quad \text{en flexion 3 points}$$

$$\chi_{adm} = \frac{9,39f_{adm}}{L^2} = \frac{9,39}{L^2} \frac{L}{500} \Rightarrow \chi_{adm} = \frac{1}{53,2L} \quad \text{en flexion 4 points dans le cas d'une répartition au tiers de la portée}$$

En utilisant l'expression de la courbure admissible en flexion 3 points avec une portée de 2,8 mètres, nous obtenons :

$$\chi_{adm} = \frac{3}{125 \times 2,8} = 8,6 \times 10^{-3} \text{ 1/m}$$

La flèche admissible est 5,6 mm. Les figures III-35 et III-36 montrent que la flèche et la courbure induites par la charge maintenue de 30 kN sont dans le domaine admissible.

### III.10. CONCLUSION

On observe que les courbes charge-flèche, qui traduisent le comportement global de la poutre, présentent pour des chargements moyens une grande imprécision, encore augmentée par la déformation non symétrique induite essentiellement par la dégradation. L'étude des diagrammes moment-courbure nous renseigne sur le comportement local, mais réclame un dépouillement approfondi.

En ce qui concerne la première série d'essais, la réversibilité du comportement charge-flèche et moment-courbure des poutres sous chargement historique a été étudiée. Malgré l'application de la charge sur plusieurs cycles, les irréversibilités observées sont faibles. Nous avons constaté que la déformée n'est plus symétrique et les poutres ne présentent pas, à l'issue des essais, une

déformation résiduelle parce qu'elles ont déjà été sollicitées pendant une longue période et que nous n'avons pas dépassé cette valeur de charge lors de nos essais.

Pour avoir une bonne approche de la déformée (la flèche et la courbure) des poutres, la deuxième série d'essais a été effectuée sur la poutre *BICL*, variant la position de la charge et en mesurant la déformée en un nombre de points suffisant. Nous ne notons pas d'irréversibilité importante comme pour la première série d'essais. Nous constatons que la section G (40 cm à droite) est la plus faible par rapport à l'état normal d'une poutre symétrique. En revanche les sections F (20 cm à droite) et H (60 cm à droite) présentent le phénomène inverse.

On a calculé la valeur de l'endommagement de la structure le long de la poutre d'après les résultats moment-courbure. Nous constatons que les différentes sections n'ont pas les mêmes valeurs d'endommagement à cause de l'asymétrie de la dégradation. En prenant deux essais comme référence du calcul d'endommagement de la structure, nous avons calculé les variations de courbure le long de la poutre. Nous notons des écarts entre les résultats d'essais et le calcul. Les écarts relatifs moyens entre les valeurs de courbure calculées et expérimentales montrent qu'en prenant la référence en E (chargement le plus élevé) nous obtenons les meilleurs résultats. En comparant les résultats de ces deux références avec le cas où nous calculons les valeurs d'endommagement à chaque section correspondant au chargement à son niveau, nous notons une bonne similitude. Nous pouvons conclure qu'un seul essai (de préférence l'essai avec le chargement le plus élevé) suffit pour donner des valeurs d'endommagement fiables le long de la poutre.

La troisième campagne d'essais a été réalisée sur la poutre *BICL* pour obtenir des renseignements sur le comportement à rupture. Le comportement de la poutre est resté parfaitement linéaire jusqu'à 88% de la charge de la rupture (42 kN).

## **CHAPITRE IV**

### **ETUDE DIAGNOSTIC ET VALIDATION DU MODELE MOMENT-COURBURE MODIFIE**

*Le quatrième chapitre est consacré à l'étude diagnostic et à la validation du modèle moment-courbure modifié par la prise en considération d'un assemblage poutre-tirant excentré, par comparaison avec les essais menés dans le cadre du projet GEO sur les poutres conservées au L.M.D.C. (Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions) de Toulouse. L'application des valeurs d'endommagement de la structure sur le modèle a été également étudiée.*

## IV.1. INTRODUCTION

L'étude diagnostic et la validation du modèle moment-courbure modifié par la prise en considération du comportement d'un assemblage poutre-tirant excentré, par comparaison avec les résultats expérimentaux est le but de ce chapitre. Nous sommes confrontés à de nombreux paramètres qui sont mal connus.

En ce qui concerne les poutres au moment des essais, on ne connaît pas par exemple les résistances en compression et en traction du béton. En plus, la vraie valeur de la section des aciers tendus et leur limite élastique peuvent fortement influencer sur la capacité portante. A défaut, on prendra les valeurs à 28 jours pour le béton. L'étude paramétrique du chapitre II (voir figure II-16) peut renseigner sur l'influence de chaque variable.

Du point de vue du modèle, le choix de la hauteur du tirant joue le rôle le plus important. Pour les poutres de type *A*, les hauteurs du tirant sont considérées égale à 2 fois ou 3 fois l'enrobage. La hauteur égale à  $0,3 d = 6,72 \text{ cm}$  correspondant à moins de 2 fois l'enrobage n'est pas retenue. Pour les poutres de type *B*, les hauteurs du tirant sont considérées égale à 2 fois et 3 fois l'enrobage et 0,3 fois la hauteur utile.

Le comportement de l'acier est considéré élastique parfaitement plastique avec une limite élastique prise égale à 500 MPa. Les aciers de l'époque de la fabrication des poutres étaient alors systématiquement meilleurs que les recommandations. Le comportement du béton en compression est considéré selon le code B.A.E.L. 93.

## IV.2. HYPOTHESE POUR LA VARIATION DE LA HAUTEUR DU TIRANT LE LONG DE LA POUTRE

### IV.2.1. Variations linéaires et symétriques de la hauteur du tirant

La variation de la hauteur du tirant peut être supposée fonction de la variation de l'axe neutre ou de la profondeur de la fissure le long de la poutre, qui ne sont pas linéaires et symétriques. La figure IV-1 montre une hypothèse primaire simplifiée de la valeur de  $h_{ti}$  le long de la poutre. La variation est linéaire, symétrique et limitée aux trois valeurs proposées ( $2C_s$ ,  $3C_s$ ,  $0,3d$ ). Elle reste constante pendant le chargement. Nous appelons ce cas le cas conventionnel.

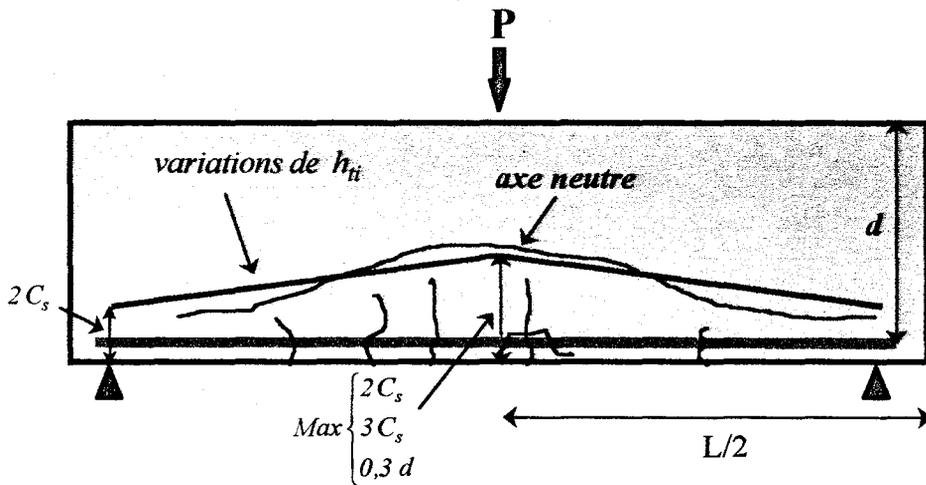


Figure IV-1: Hypothèse linéaire et symétrique de la variation de la hauteur du tirant

## IV.2.2. Variations non linéaires et asymétriques de la hauteur du tirant

### IV.2.2.1. VARIATIONS SELON LES SOLLICITATIONS 1 ET 2

Les histogrammes de la position et de la longueur apparente des fissures après les sollicitations 1 et 2 des poutres de type A et B (figure III-4) et la comparaison avec l'hypothèse linéaire et symétrique de la variation de la hauteur du tirant le long de la poutre sont représentés figures IV-2 et IV-3. Les histogrammes montrent des variations non linéaires et asymétriques des profondeurs des fissures en comparaison avec la variation conventionnelle de la hauteur du tirant.

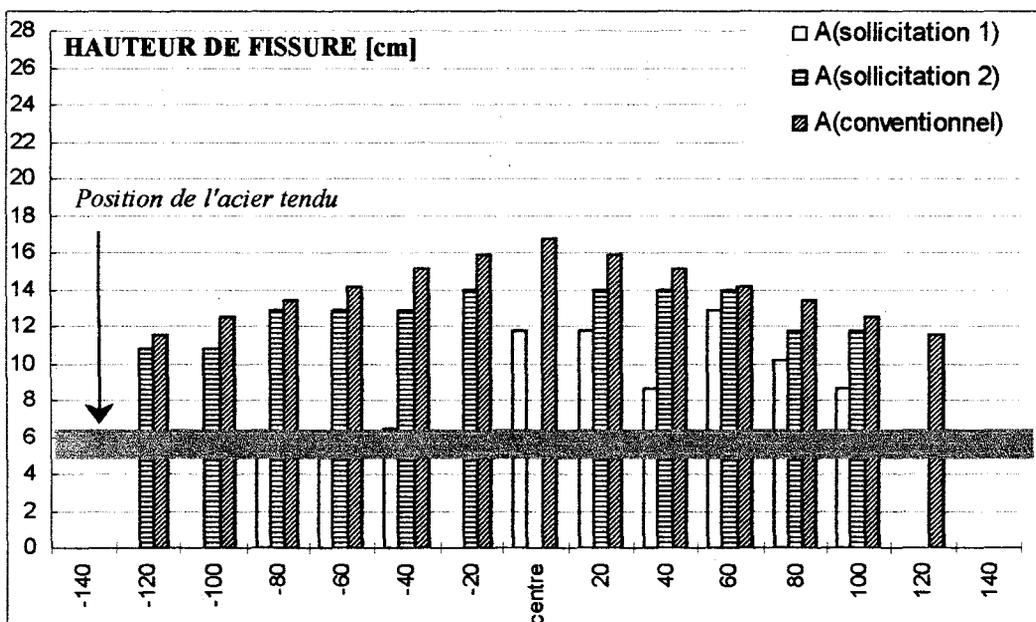


Figure IV-2: Fissuration typique des poutres de type A après sollicitation 1 et 2; comparaison avec la variation conventionnelle de la hauteur du tirant

Pour les poutres de type *A*, le cas conventionnel est assez comparable avec le cas de la sollicitation 2. La sollicitation 2 correspond à 58% de la charge de rupture théorique. Dans le cas de la sollicitation 1, seul un côté est assez comparable. La sollicitation 1 correspond à 37% de la charge de rupture. Par contre pour les poutres de type *B*, le cas conventionnel n'est pas représentatif des fissures. Les hauteurs du tirant dans ce cas sont en général moins importantes (presque de moitié) que pour les sollicitations 1 et 2 qui correspondent à 48% et 76% de la charge de rupture.

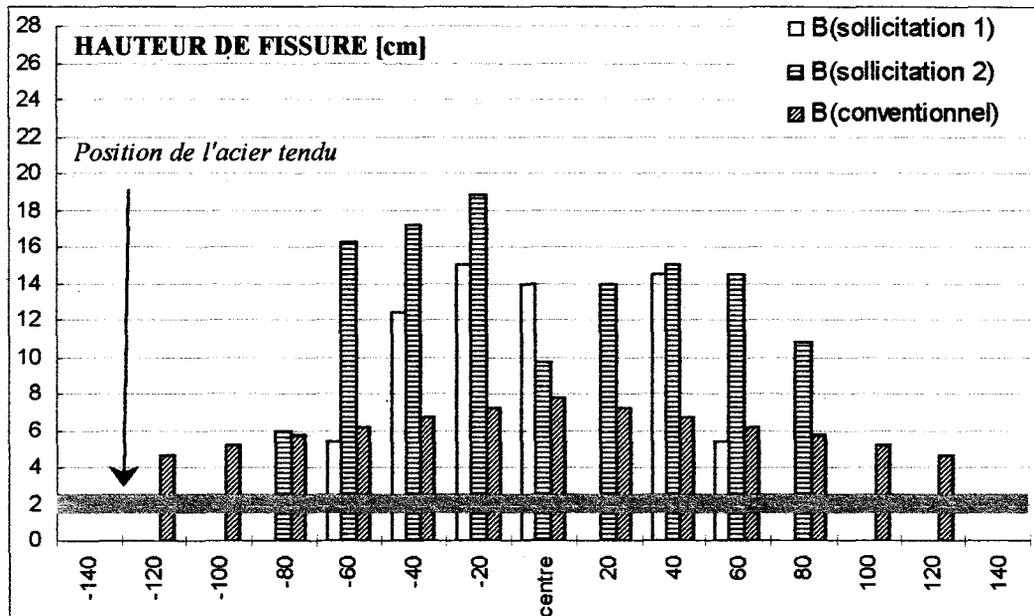


Figure IV-3: Fissuration typique des poutres de type *B* après sollicitation 1 et 2; comparaison avec la variation conventionnelle de la hauteur du tirant

En conclusion pour les poutres de type *A* qui ont l'enrobage le plus important, le cas conventionnel peut donner une estimation de la hauteur du tirant assez fiable. Mais pour les poutres de type *B*, le maximum des trois valeurs  $2C_s = 4,4\text{ cm}$ ,  $3C_s = 6,6\text{ cm}$  et  $0,3d = 7,74\text{ cm}$  n'est pas bien représentatif à cause du faible enrobage et du faible coefficient de la hauteur utile. D'autres paramètres comme  $h/2 = 14\text{ cm}$  ou un coefficient plus important pour l'enrobage pourraient être utilisés. Les écarts entre les profondeurs des fissures des poutres de type *A* et de type *B* sont la conséquence du faible enrobage pour les poutres de type *B*.

#### IV.2.2.2. VARIATIONS SELON LES ESSAIS N°2 POUR LA POUTRE B1CL

Au regard de la carte de fissuration de la poutre *B1CL* au moment des essais (figure IV-4), on observe que les fissures sont plus profondes. Les valeurs de  $h_i$  sont calculées en reliant les extrémités des fissures par des droites. La figure IV-5 présente la comparaison.

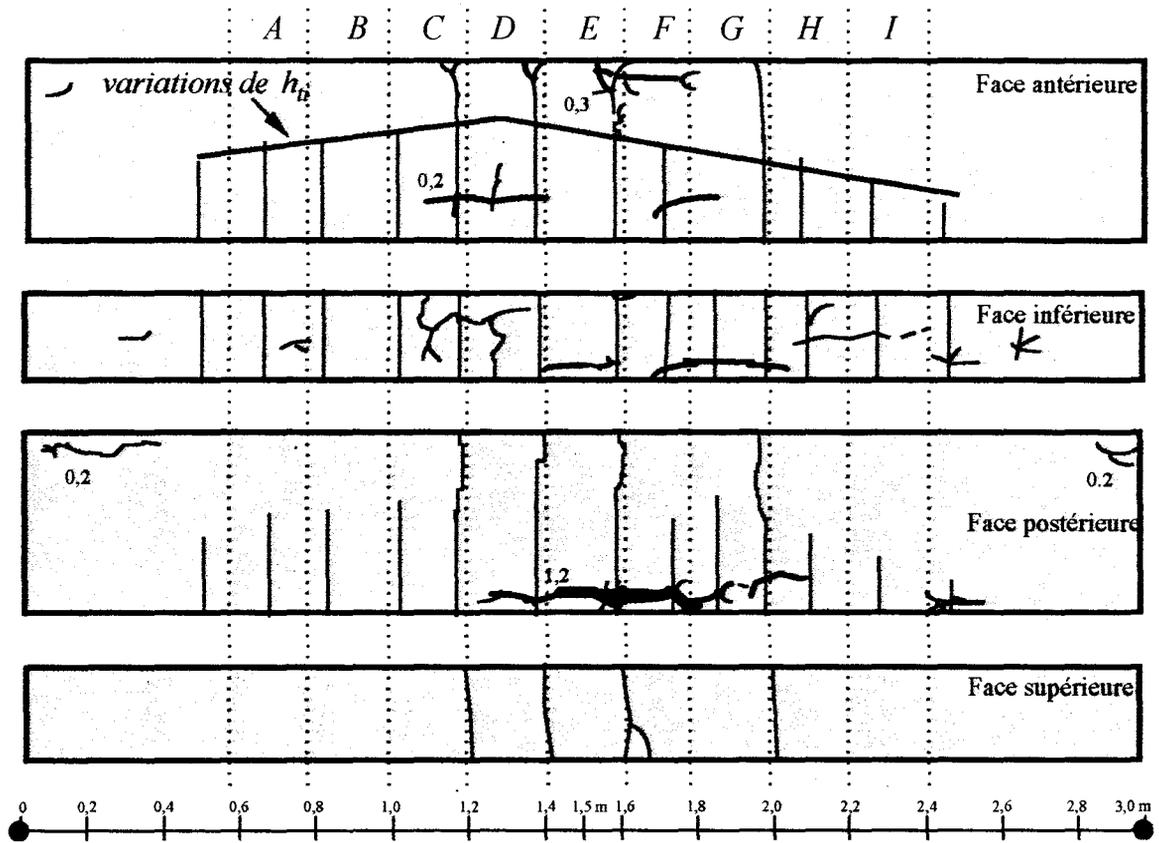


Figure IV-4: Hypothèse linéaire et asymétrique de  $h_{eff}$  selon la carte de fissuration de la poutre BICL faite au moment série d'essais N°2

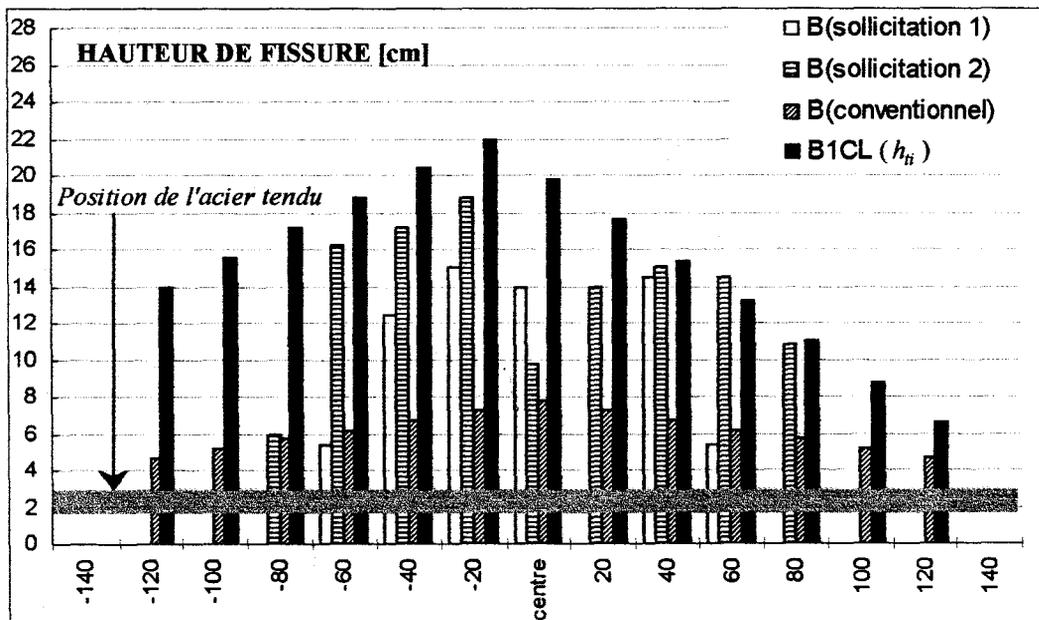


Figure IV-5: Fissuration de la poutre BICL après les essais N°2; comparaison avec le cas conventionnel et les sollicitations 1 et 2

La poutre *BICL* présente des profondeurs de fissures plus importantes que les poutres de type *B* après les sollicitations de type 1 et 2. La différence est la conséquence de la longue période de chargement maintenu et l'influence de la corrosion.

### IV.3. COMPORTEMENT CHARGE-FLECHE A PARTIR DU MODELE

#### IV.3.1. Introduction

On observe que la validation d'un modèle pour une poutre fléchie en béton armé se fait globalement sur la réponse charge-flèche. La réponse charge-flèche est plus facile à mesurer que le moment-courbure. La première est une réponse globale et la deuxième locale. Le passage de l'une à l'autre n'est pas évident. Mais il est toujours intéressant d'avoir une approche de la réponse globale d'après la réponse locale et vice versa. Nous présentons ici le calcul de la flèche à partir des données de la courbure.

On a présenté les variations de profondeur des fissures le long des poutres. On suppose que la hauteur du tirant est égale à la profondeur des fissures. A partir de notre modèle, nous calculons la valeur de la courbure de chaque section  $\chi_x$  (chaque 20 cm) correspondant au moment fléchissant. Connaissant la distribution de courbure le long de la poutre, par double intégration de cette distribution, on peut déterminer la flèche pour chaque section en fonction de la charge appliquée. Les constantes d'intégration sont déterminées par les conditions aux limites à savoir que les flèches sur les appuis sont nulles. La relation suivante donne la flèche  $f_x$  au niveau de la section située à la distance  $x$  de l'appui.

$$f_x = (\iint \chi_x dx)_x - \frac{(\iint \chi_x dx)_L}{L} x$$

où  $(\iint \chi_x dx)_x$  est le résultat de la double intégration de la courbure (sans considérer les constantes) jusqu'à la distance  $x$  et  $(\iint \chi_x dx)_L$  celui sur toute la longueur de la poutre.

On augmente la charge au fur et à mesure. Comme le moment fléchissant de chaque section est différent, chacune a ainsi un comportement dépendant de la valeur de la hauteur du tirant à son niveau. La plastification des aciers ne se produit donc pas pour une charge donnée au même instant pour des sections différentes. Dans le cas où le chargement est centré, la plastification commence par la section centrale. A la charge de plastification, la première rotule plastique est créée. Dans le cas général, en augmentant la charge, d'autres sections se plastifient au fur et à mesure à cause de la redistribution des contraintes. Mais comme notre structure est isostatique, après la création de la première rotule plastique, elle devient une structure non stable et la rupture survient sans création de nouvelle rotule.

### IV.3.2. Courbes charge-flèche obtenues par le modèle à partir de la carte de fissuration et du cas conventionnel

Les figures IV-6 présentent les courbes charge-flèche obtenues à partir de notre modèle en utilisant les différentes cartes de fissuration des poutres de type A et B correspondant aux sollicitations 1 et 2 au moment des essais et au cas conventionnel, qu'on obtient entre le maximum et le minimum des paramètres  $2C_s$ ,  $3C_s$  et  $0,3d$  pour le tirant excentré.

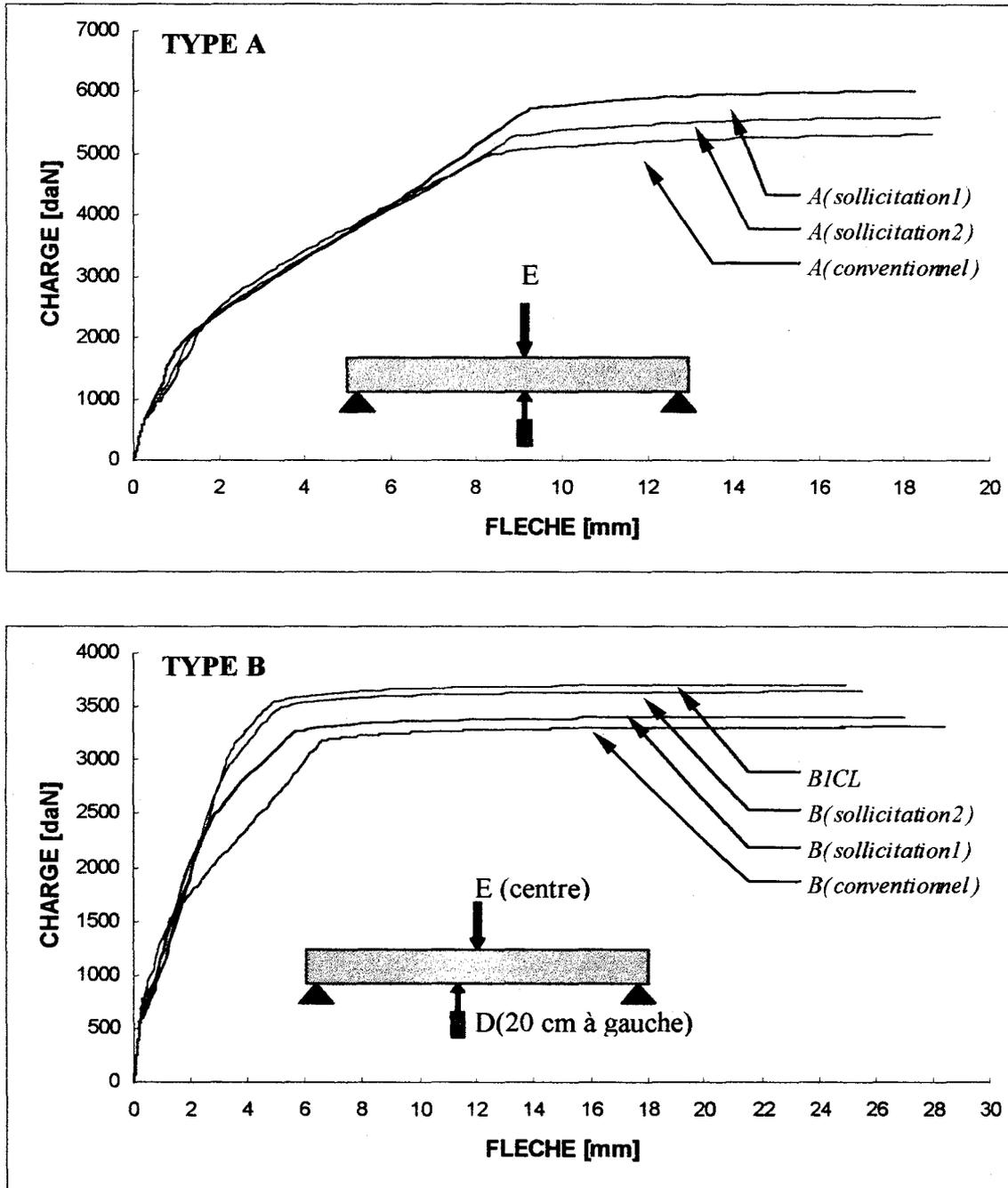


Figure IV-6: Courbes charge-flèche obtenues à partir du modèle en chargement centré pour les poutres de type A et B

Si la profondeur de fissure sur la carte de fissuration est moins de 2 fois l'enrobage, on considère une hauteur du tirant excentré égale à 2 fois l'enrobage. Le chargement est centré. Pour les poutres de type *A*, la flèche est calculée pour la section centrale. On a calculé également les flèches à 20cm à gauche pour les poutres de type *B* car les cartes de fissuration de *BICL* présentent les fissures les plus profondes à ce niveau. On constate sur la figure IV-6 des concordances acceptables avant plastification pour les différentes valeurs de la hauteur du tirant, mais la différence commence après la plastification. On note que dans le cas de la prise en considération des valeurs conventionnelles pour la hauteur du tirant, la capacité portante est moins importante que pour celles issues des cartes de fissuration. Pour les poutres de type *B*, les cas ayant les fissures les plus profondes n'ont pas forcément une capacité portante moindre. C'est le cas par exemple de la poutre *BICL*.

#### IV.3.3. Comparaison avec les résultats d'essais à 28 jours, à 1,5 an et à 5 ans

La figure IV-7 présente la comparaison entre les résultats expérimentaux à 28 jours, à 1,5 an et à 5 ans des poutres de type *A* avec les courbes obtenues à partir de notre modèle. Le modèle présente presque la même rigidité que les résultats à 1,5 an et à 5 ans. Les essais montrent que la plastification commence après une flèche de l'ordre de 14 mm tandis que celle du modèle est de l'ordre de 9 mm. Les essais donnent des flèches beaucoup plus importantes que le modèle au moment de la rupture.

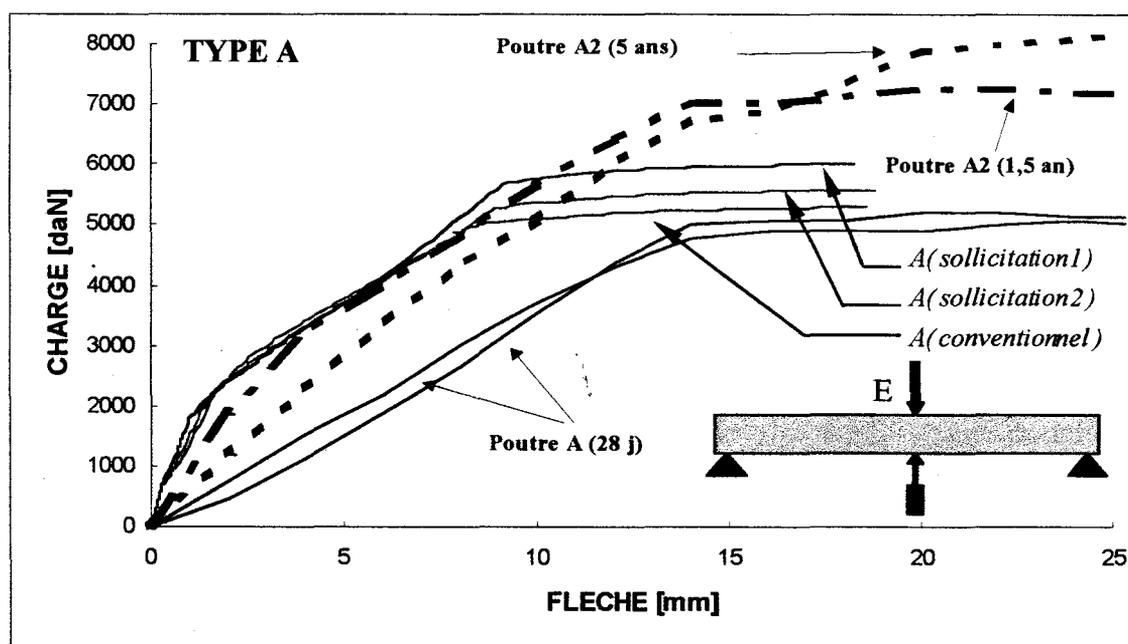


Figure IV-7: Courbes charge-flèche: Comparaison entre les résultats expérimentaux et le modèle des poutres de type *A*

### IV.3.4. Variation des capacités portantes par rapport aux variations de la hauteur du tirant \*

Afin d'établir plus clairement les relations entre les deux paramètres, on a tracé les variations de capacité portante par rapport aux variations de la hauteur du tirant excentré pour les poutres de type A et B (figure IV-8).

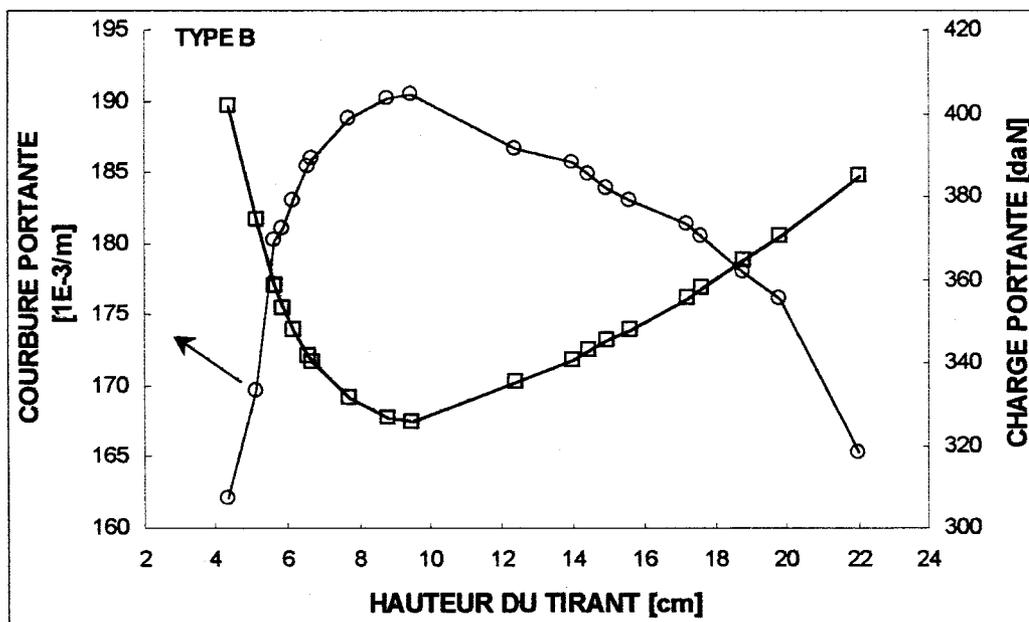
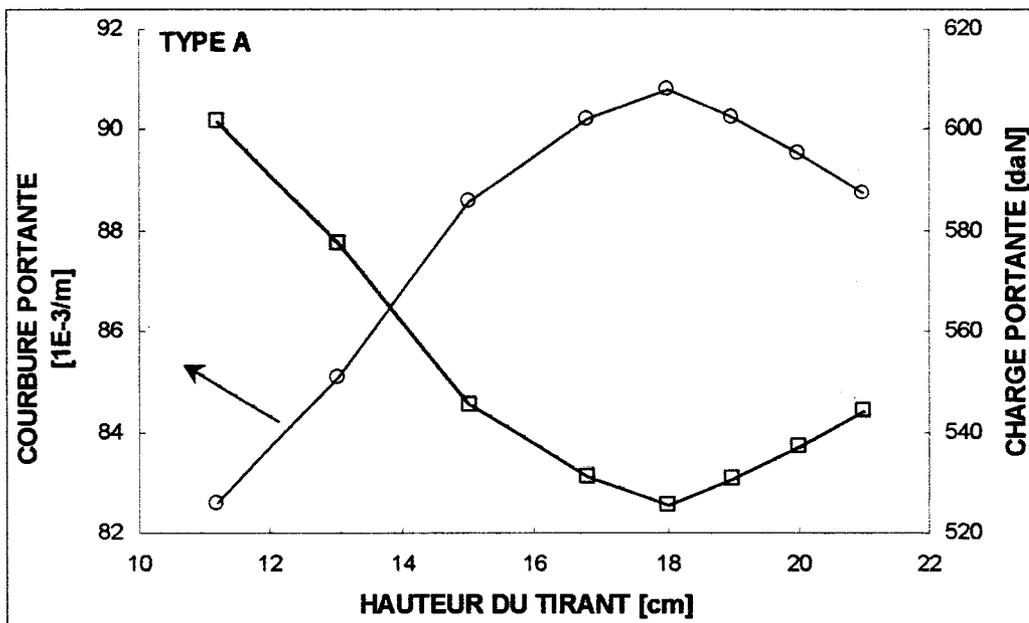


Figure IV-8: Variations des capacités portantes vis à vis des variations de la hauteur du tirant excentré

On constate que la capacité portante dépend de la hauteur du tirant excentré considéré, mais dans une amplitude de variation qui n'est pas énorme. Pour les poutres de type *A*, cette amplitude pour la courbure portante est de l'ordre de 9% et pour la charge portante de l'ordre de 15%. Pour les poutres de type *B* elle est respectivement de 15% et 23%.

On constate que l'augmentation de la hauteur du tirant n'induit pas toujours l'augmentation de la charge portante (ou la courbure portante) et réciproquement. Les courbes se composent de deux phases, une phase croissante et une phase descendante. Le seuil est lorsque la hauteur du tirant est égale à 18 cm pour le type *A* et 9,5 cm pour le type *B*, ce qui est presque la moitié par rapport au type *A*.

Il faut noter que dans le cas d'un modèle avec un tirant centré, la capacité portante reste toujours constante et égale à la capacité portante correspondant à  $h_{ti} = 2C_s$ , c'est-à-dire 11,2 cm pour le type *A* et 4,4 cm pour le type *B*.

#### IV.3.5. Comparaison avec les résultats de la série d'essais N°1

La figure IV-9 présente la comparaison des résultats expérimentaux charge-flèche pour les poutres de la série d'essais N°1 avec le modèle dans le cas de la prise en considération de la hauteur conventionnelle pour le tirant excentré. La flèche calculée à partir du modèle correspond à la section médiane de la poutre pour les poutres de type *A* et à celle située 20 cm à droite du centre pour les poutres de type *B*, car c'est à ce niveau que l'on observe une importante fissuration secondaire. Notons que les réponses de notre modèle correspondent aux valeurs des paramètres à 28 jours tandis que les poutres ont conservé la mémoire de leur chargement et ont vieilli.

Les droites avec flèches dans la figure IV-9 présentent le rechargement linéaire des poutres après un déchargement élastique. On observe que la réponse du modèle est assez comparable à celle des essais pour la plupart d'entre eux. *A2T1* qui était le premier essai de la série N°1 présente la plus mauvaise adaptation avec le modèle.

Les poutres de type *A* présentent une rigidité moins importante que celle du modèle. Nous pouvons en déduire, d'après nos études paramétriques, qu'une diminution de la section d'armature ou de la résistance en traction du béton est probable (voir figure II-16). Par contre, les poutres de type *B* présentent des concordances assez acceptables avec le modèle.

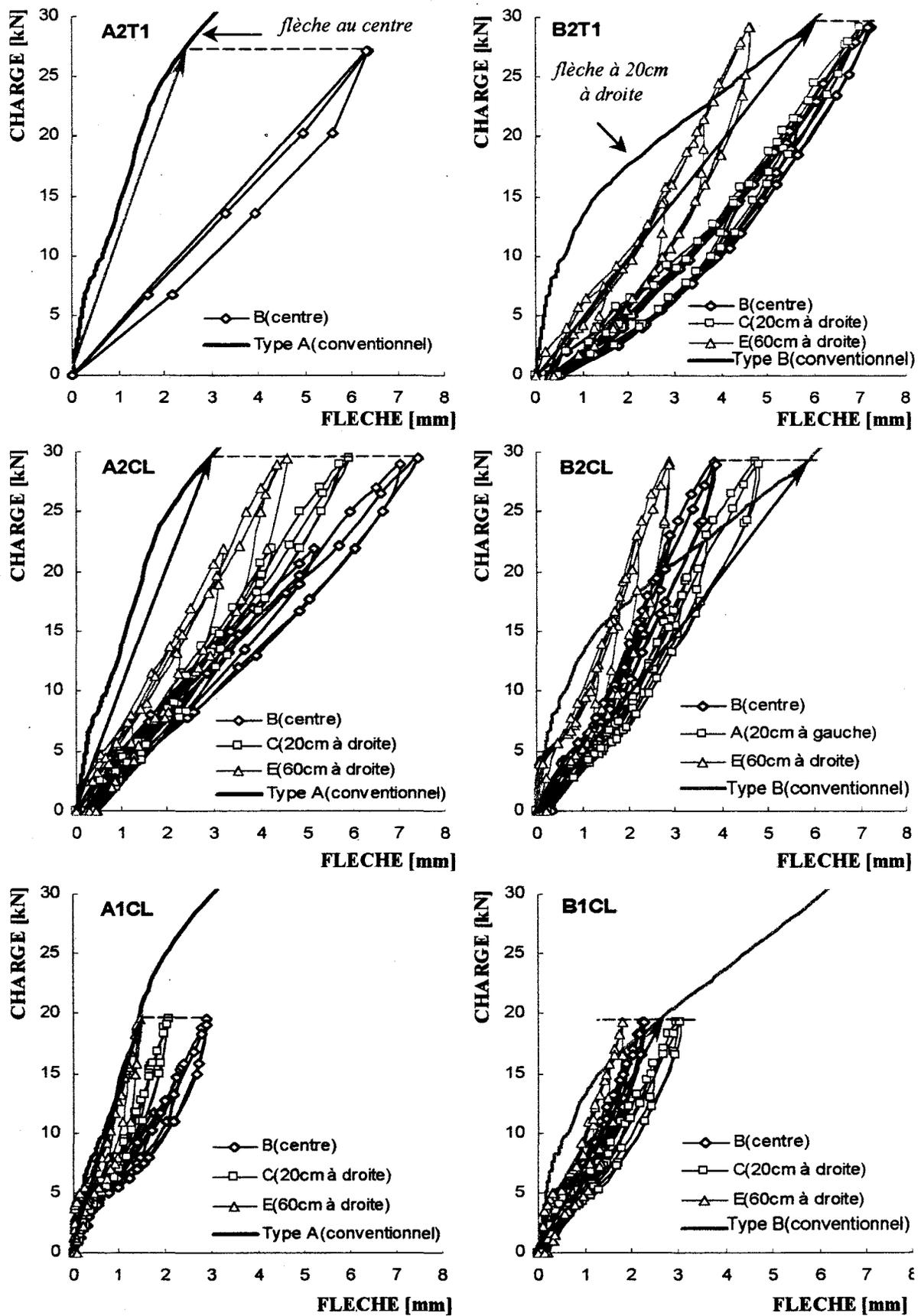


Figure IV-9: Comparaison des résultats expérimentaux charge-flèche avec le modèle dans le cas de prise en considération de la hauteur conventionnelle pour le tirant excentré

### IV.3.6. Comparaison avec les résultats de la série d'essais N°2

La figure IV-10 présente les variations de la flèche le long de la poutre *BICL* pour un chargement de 20 kN (sollicitation 1). Le résultat de l'essai reste entre les deux cas du modèle, à savoir le cas avec  $h_{fi}$  déduit de la carte de fissuration (voir figure IV-4) et le cas de la hauteur conventionnelle. On note que pour la sollicitation de 20 kN, le cas conventionnel donne la flèche la plus importante (voir figure IV-6).

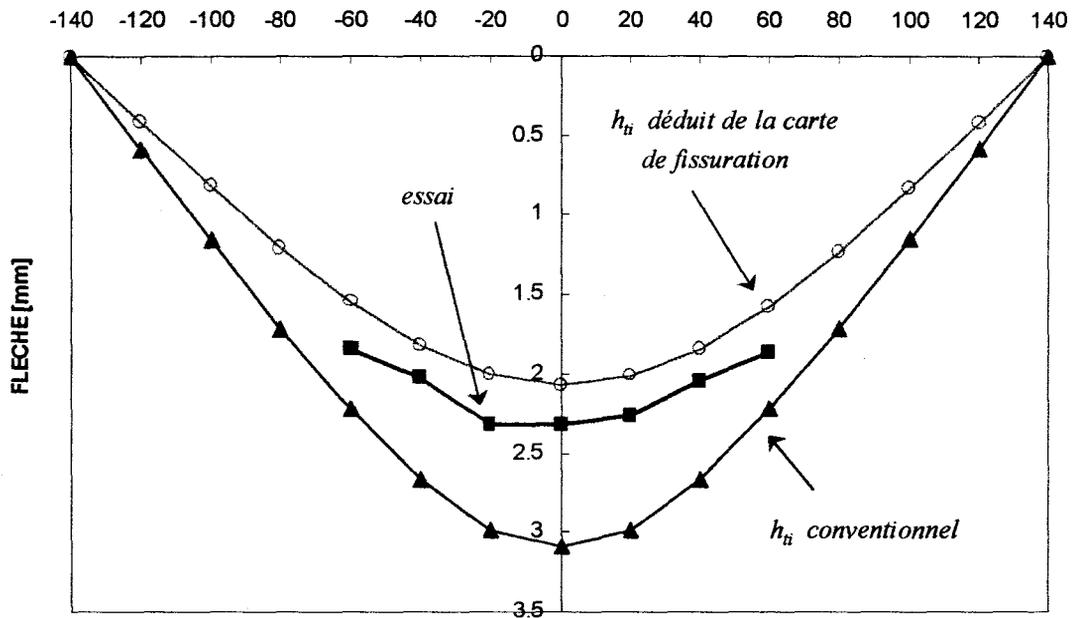


Figure IV-10 : Distribution de la flèche de la poutre *BICL* pour un chargement centré de 20 kN et comparaison avec le cas  $h_{fi}$  conventionnel et le cas  $h_{fi}$  déduit de la carte de fissuration

### IV.3.7. Comparaison avec les résultats de la série d'essais à rupture

La rupture survient toujours par le dépassement de la déformation limite conventionnelle de rupture du béton comprimé. La figure IV-11 présente la flèche et la courbure le long de la poutre au moment de la rupture pour le cas de prise en considération des hauteurs conventionnelles pour le tirant excentré. Une forte courbure causée par la plastification des aciers tendus est observée. La valeur maximale de la flèche est proche de celle de l'essai à rupture (voir figures IV-12). Pour la courbure maximale, c'est également le cas mais seulement pour la courbure mesurée de la partie comprimée.

Notons que pour calculer la flèche le long de la poutre un intervalle de 20 cm a été considéré, égal aux distances entre les capteurs de déplacement. Nous avons vérifié que quand les

aciers ne sont pas plastifiés ou peu plastifiés, l'effet de la valeur de cet intervalle sur le calcul de la flèche est négligeable. Par contre lorsque les aciers se plastifient et que la plastification est importante, cet effet devient plus important. Le triangle observé pour la courbure au centre au moment de la rupture a pour origine cela.

En outre, il semble que la prise en considération d'un intervalle moins important n'est pas correcte. En réalité lorsqu'une section fissure, les deux parties autour de la fissure sont influencées par la fissure et se comportent comme des parties rigides. Cette rigidification revient à augmenter la dimension du triangle.

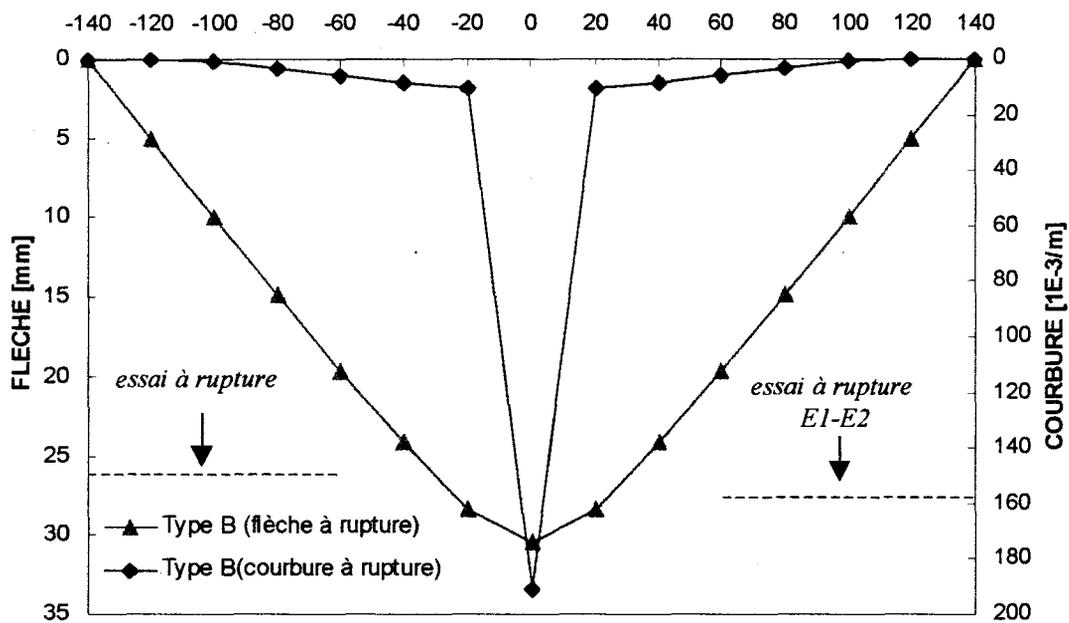


Figure IV-11: Variations de la flèche et de la courbure au moment de la rupture par le béton comprimé pour les poutres de type B dans le cas  $h_{fi}$  conventionnel

La figure IV-12 présente la comparaison des courbes charge-flèche avec les résultats d'essais à rupture. Elle présente une bonne concordance entre l'essai et le modèle pour le cas des valeurs de  $h_{fi}$  déduites de la carte de fissuration faite au moment de la série d'essais N°2. Dans ce cas, on a presque la même flèche au moment de la rupture. Les résultats de l'essai présentent un écrouissage après la plastification. Nous avons supposé un comportement élastique parfaitement plastique pour l'acier dans notre modèle. Si on considérait un comportement avec écrouissage, on s'approcherait certainement du cas réel.

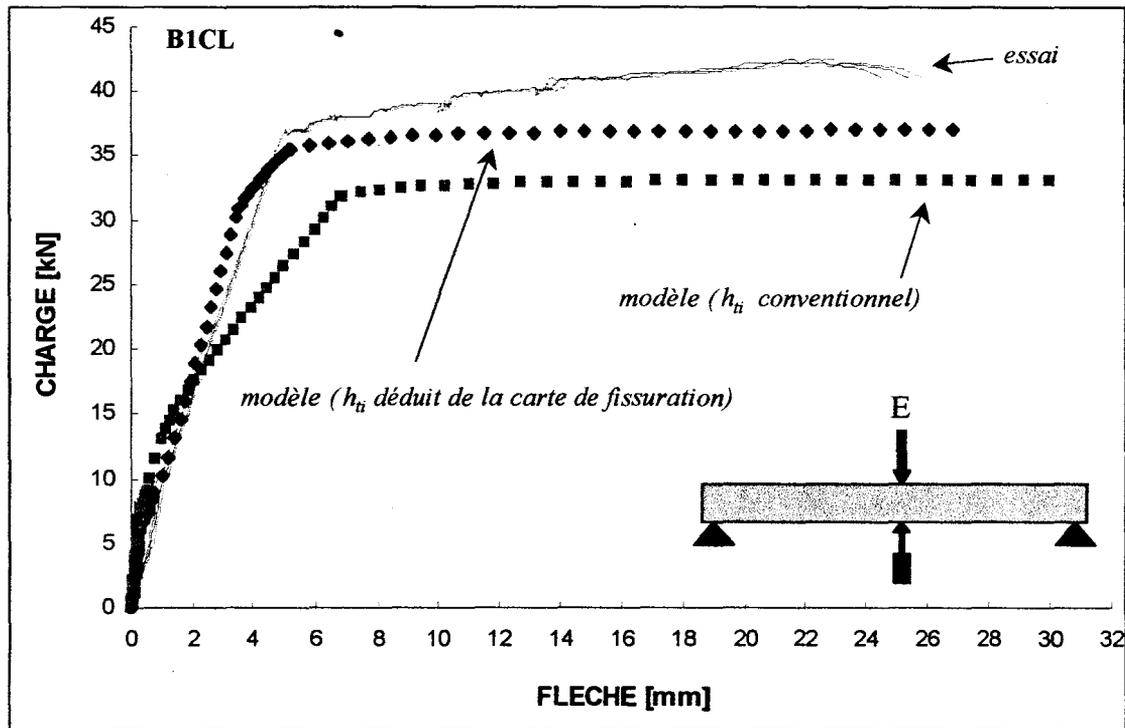


Figure IV-12 : Courbes charge-flèche à rupture; comparaison entre le modèle et l'essai

#### IV.4. COMPORTEMENT MOMENT-COURBURE A PARTIR DU MODELE

##### IV.4.1. Courbes moment-courbure obtenues à partir de différentes hauteurs du tirant excentré

La figure IV-13 présente le comportement moment-courbure des poutres de type *A* et *B* à partir du modèle. Pour le type *A*, quatre courbes sont montrées pour les cas  $h_{ti} = 2C_s$ ,  $h_{ti} = 3C_s$ ,  $h_{ti} = 3C_s$  ( $f_s = 400\text{MPa}$ ) en utilisant le modèle tirant excentré et le cas  $h_{ti} = 3C_s$  en utilisant le modèle tirant centré. Pour le type *B*, le cas  $h_{ti} = 0,3d$  est également pris en considération et cinq courbes différentes sont donc présentées.

On constate que lorsqu'on considère un assemblage poutre-tirant centré (cas du B.A.E.L), la capacité portante est maximale. La différence devient plus importante lorsque la plastification commence. Pour le type *B*, cette différence entre les capacités portantes est plus importante, car la fibre correspondant au niveau des aciers tendus est plus éloignée du centre gravité de la section et donc l'excentricité est plus importante. L'effet de la limite élastique sur le comportement est aussi clairement mis en évidence.  $f_s$  plus petit induit un avancement de la plastification.

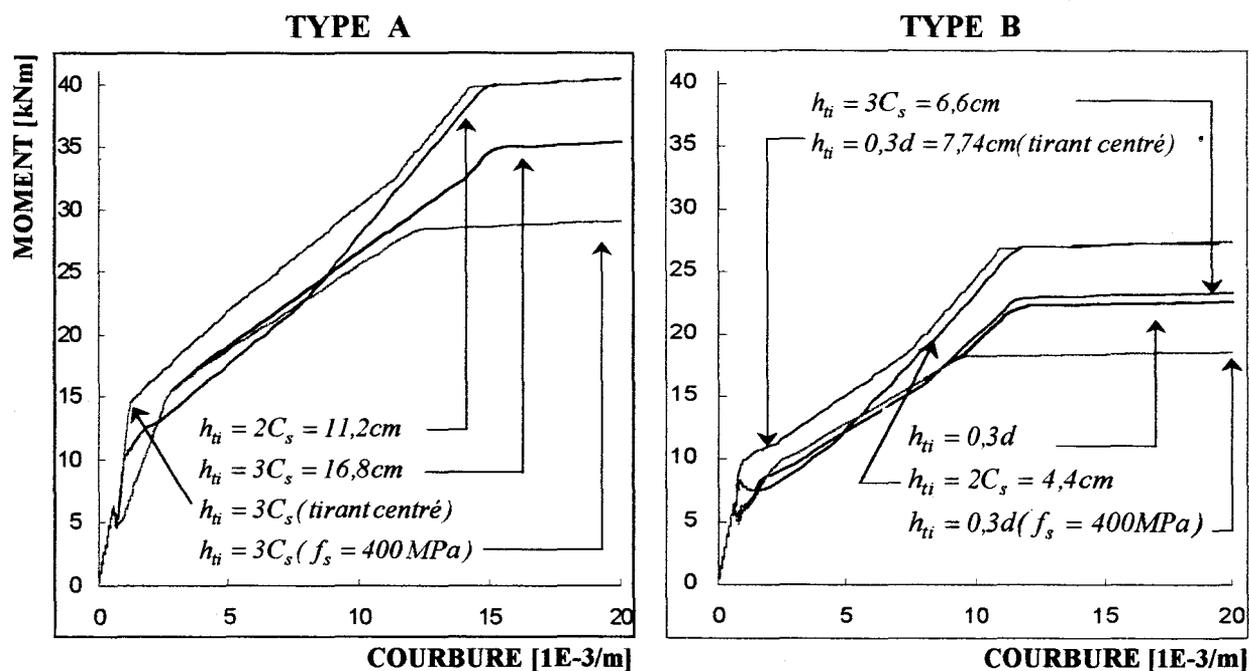


Figure IV-13: Comportement moment-courbure pour différents cas de la hauteur du tirant

#### IV.4.2. Comparaison avec les résultats de la série d'essais N°1

La figure IV-14 présente la comparaison entre les courbes moment-courbure moyennes expérimentales pour la section la plus sollicitée (section E) obtenues par les jauges pour les poutres *A1CL*, *A2CL*, *B1CL* et *B2CL* lors de la série d'essais N°1 et le modèle. On a utilisé les résultats obtenus par les jauges qui présentent plusieurs avantages par rapport aux mesures avec les billes (voir figure III-14). En effet les mesures de déformation à partir des billes sont discontinues et effectuées sur une base plus grande que les jauges. On constate que le comportement moment-courbure pour les poutres de type *A* sont plus en accord avec le modèle que pour les poutres de type *B*. Celles-ci présentent un raidissement plus important après fissuration. Par contre la raideur de la courbe de comportement des poutres de type *A* converge vers la raideur de comportement du modèle après fissuration.

Le comportement expérimental très raide des poutres de type *B* est difficile à expliquer. Il est plus raide que même le calcul avec tirant centré et évidemment le calcul classique. Comme on l'a déjà montré figure III-15 et comme on va le remontrer figure IV-16, la détermination de la courbure expérimentale est difficile car elle varie sur la hauteur de la section, au contraire du calcul global de la flèche. Le comportement moment-courbure de la partie comprimée est considérablement moins rigide que celui de la partie tendue.

Lorsqu'on regarde la comparaison du modèle avec les courbes expérimentales de comportement charge-flèche (figure IV-9), on constate de grandes similitudes.

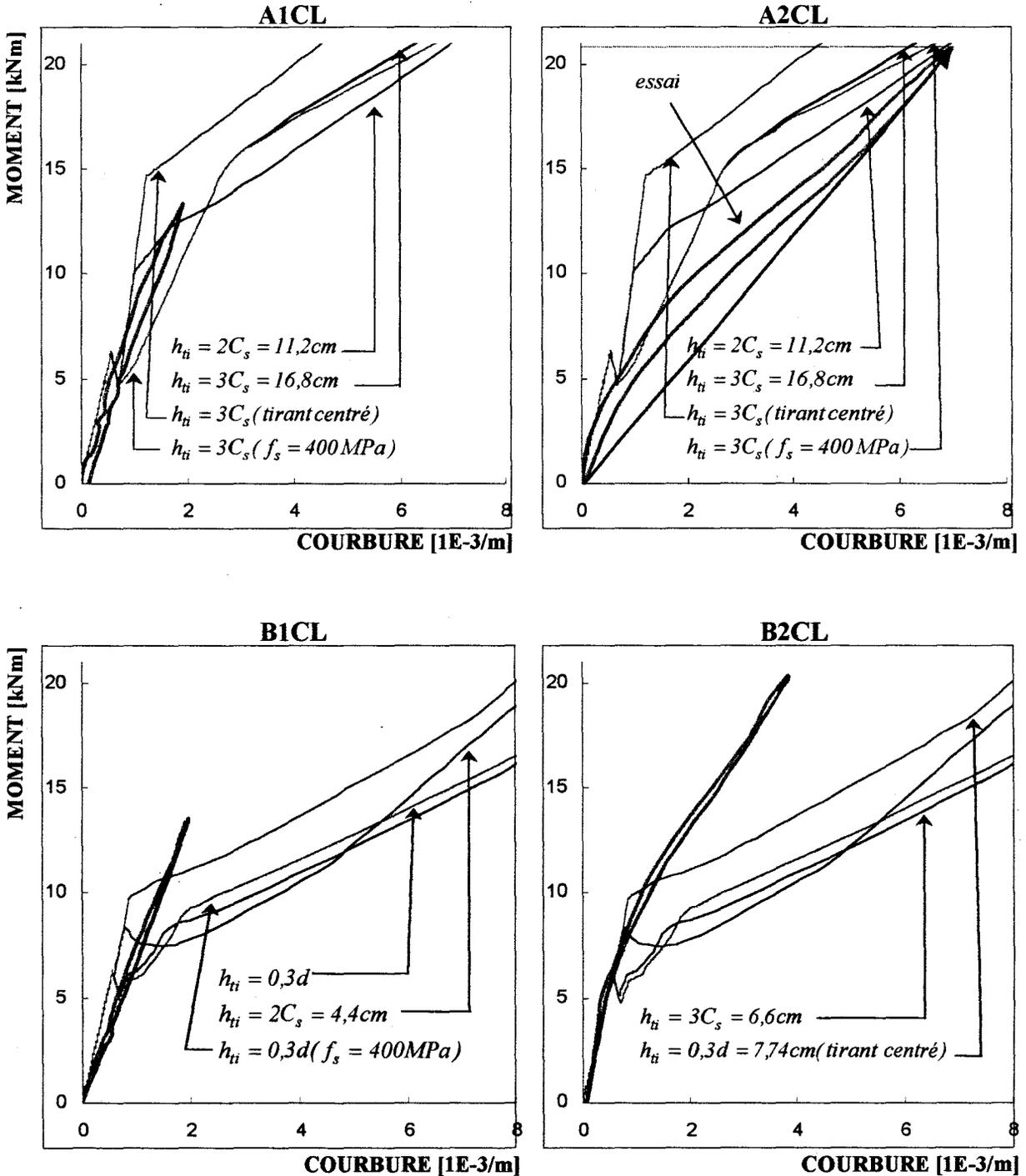


Figure IV-14: Courbes moment-courbure: comparaison entre les résultats expérimentaux obtenus par les jauges et les différents cas du modèle

#### IV. 4.3. Utilisation de la valeur d'endommagement de la structure

En chapitre III (section III.6.2.), on a présenté le calcul de la valeur d'endommagement de la structure. Cette valeur nous renseigne sur la faiblesse de chaque section de la structure. En guise d'approche, on utilise cette valeur d'endommagement de la structure pour obtenir la valeur de la résistance effective en traction. Nous nommons résistance effective en traction du béton la grandeur obtenue comme suit:

$$\tilde{f}'_{t,x} = (1 - D_{st,x}) f'_t$$

L'endommagement de la structure est la conséquence de l'endommagement des parties tendues et comprimées. N'affectant que la résistance en traction du facteur d'endommagement de la structure, nous ne prenons en compte le phénomène que partiellement. C'est pour cette raison que cette étude est une simple approche. Le tableau ci-dessous présente l'utilisation de la valeur d'endommagement de la structure dans le cas de la référence E pour déterminer la valeur de la résistance effective en traction le long de la poutre *BICL*.

*TABLEAU: Utilisation de la valeur d'endommagement de la structure (référence E) sur la valeur de la résistance en traction du béton le long de la poutre BICL*

Section	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Moment [kNm]	6	8	10	12	14	12	10	8	6
$D_{st,x}$	0,170	0,581	0,553	0,565	0,587	0,082	0,697	0,03	0,394
$\tilde{f}'_{t,x}$ [MPa]	2,49	1,26	1,34	1,31	1,24	2,75	0,91	2,91	1,82

#### IV. 4.4. Comparaison avec les résultats de la série d'essais N°2

Nous reprenons les valeurs effectives de la résistance en traction du béton déterminées ci-dessus et nous recalculons la distribution de la courbure le long de la poutre *BICL* donnée par le modèle. La figure IV-15 présente la distribution de la courbure pour un chargement centré de 20 kN (sollicitation 1) et la comparaison avec le cas  $h_{ti}$  conventionnel et  $h_{ti}$  déduit de la carte de fissuration.

On constate que le résultat de l'essai est le plus faible. Nous constatons bien évidemment une forme d'évolution assez en accord avec l'essai lorsque nous considérons l'effet des paramètres d'endommagement. Le cas où la hauteur du tirant est déduite de la carte de fissuration et avec  $f'_t = 3\text{MPa}$  est la plus proche des résultats expérimentaux mais avec une évolution rectiligne ignorant les détails. On s'éloigne du cas réel lorsqu'on considère la résistance effective en traction du béton mais on conserve la même forme d'évolution. Par contre s'éloigner des valeurs expérimentales n'est pas nécessairement une conséquence de cette approche, car comme on l'a déjà expliqué, la valeur de la courbure varie fortement sur la hauteur d'une section et la partie comprimée donne les valeurs les plus élevées (voit figure IV-16).

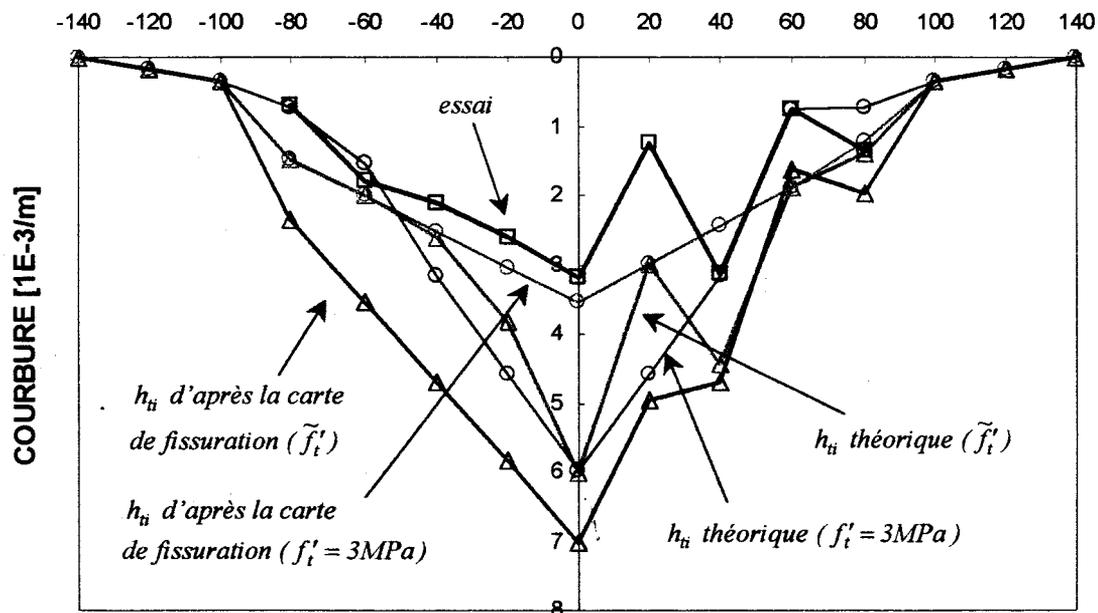


Figure IV-15 : Distribution de la courbure de la poutre *BICL* à un chargement centré de 20 kN et la comparaison avec le cas  $h_{ti}$  conventionnel et  $h_{ti}$  déduit de la carte de fissuration au moment série d'essais N°2

#### IV.4.5. Comparaison avec les résultats de la série d'essais à rupture

La figure IV-16 présente la comparaison entre le modèle et les résultats de la série d'essais à rupture. On constate un bon accord entre la courbure moyenne de la section et le modèle. La courbe expérimentale présente comme pour les courbes charge-flèche un écrouissage après plastification. On constate que le cas avec hauteur du tirant égale à 2 fois l'enrobage (tirant centré) donne le moment de plastification le plus élevé. Le cas avec la hauteur du tirant excentré serait plus proche du cas réel si on considérait le phénomène d'écrouissage. Le niveau de plastification dépend évidemment fortement de la limite élastique de l'acier.

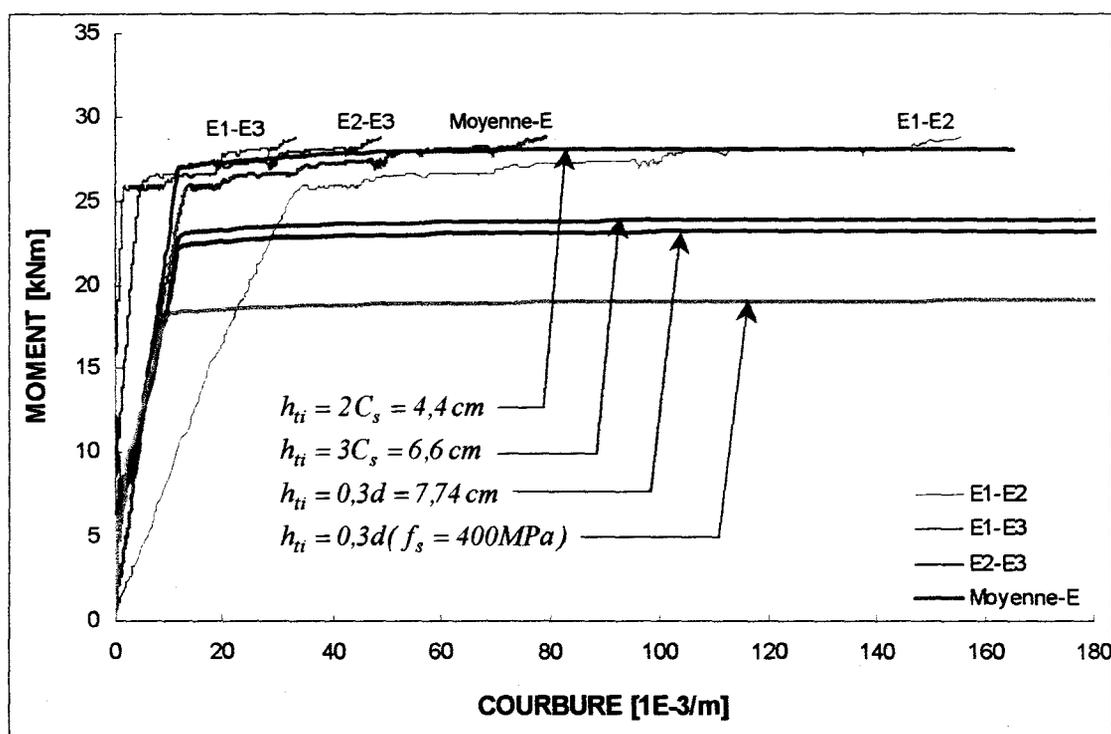


Figure IV-16: Courbes moment-courbure à rupture; comparaison entre le modèle et l'essai

#### IV.5. APPLICATION DU MODELE A L'ANALYSE DU COMPORTEMENT ET AU DIAGNOSTIC DES STRUCTURES EXISTANTES

Dans ce chapitre nous avons présenté une analyse permettant d'évaluer le comportement actuel des poutres dégradées à l'aide de notre modèle poutre-tirant. L'analyse se base d'une part sur les observations in situ et d'autre part sur les essais expérimentaux chargement-déchargement.

Les essais chargement-déchargement nous permettent de calculer les valeurs d'endommagement de la structures par exemple à partir des résultats moment-courbure. Ces valeurs d'endommagement nous renseignent sur la faiblesse de la structure et donc permettent de modifier des paramètres comme la résistance effective en traction du béton. En appliquant ces modifications des paramètres dans le modèle poutre-tirant, nous pouvons obtenir le comportement actuel de la structure.

Les observations in situ nécessitent des analyses sur les dégradations apparentes de la structure. Les dégradations peuvent être quantifiées à partir de la carte de fissuration, de la carte d'éclatement ou de la carte de coloration. A partir de la carte de fissuration transversale nous pouvons estimer la hauteur du tirant. Les fissures longitudinales dues à la corrosion peuvent donner des renseignements sur le paramètre  $\beta_{corr}$  que nous avons proposé pour le comportement du tirant corrodé. La dégradation de la partie comprimée modifie également le paramètre  $\lambda$  représentatif du comportement du béton en compression. Ces informations peuvent être entrées dans le modèle et nous permettent d'aboutir à la connaissance du comportement actuel de la structure.

### ETUDE DIAGNOSTIC

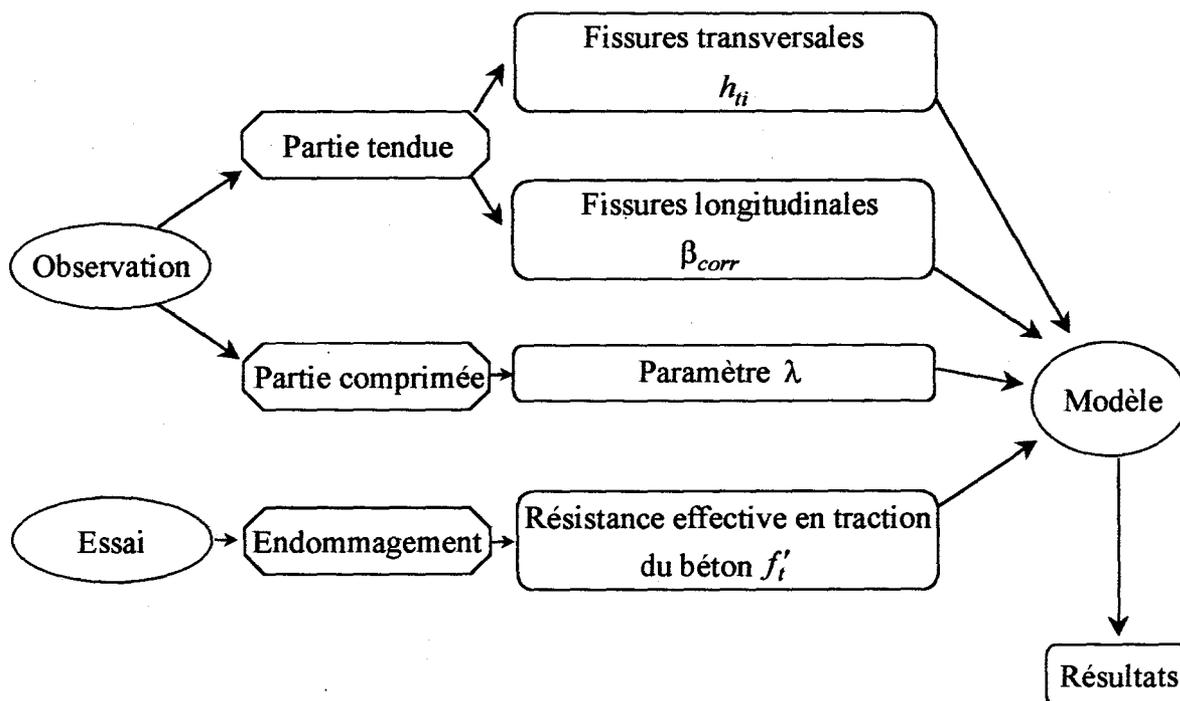


Figure IV-17: Synthèse proposée pour une étude diagnostic des structures dégradées

## IV.6. CONCLUSION

Pour la comparaison de notre modèle poutre-tirant avec les résultats expérimentaux, nous sommes confrontés à de nombreux paramètres représentatifs de l'état des poutres au moment des essais qui sont mal connus et du point de vue du modèle aux choix de la hauteur du tirant.

Nous avons constaté que le modèle est sensible aux changements de la hauteur du tirant. Pour évaluer le comportement d'une poutre dégradée, nous avons proposé deux méthodes de calcul de la hauteur du tirant  $h_{ti}$  le long de la poutre, l'une conventionnelle, qui n'évolue pas avec la variation du chargement ou pendant le temps et l'autre selon les cartes de fissuration. Cette dernière évolue avec le chargement ou pendant le temps et donne une idée plus nette de l'emplacement de l'axe neutre. Après calcul de la hauteur du tirant des deux façons, nous avons calculé indirectement la flèche en fonction de la charge appliquée. Nous avons constaté un accord acceptable avant plastification pour les deux méthodes de calcul de  $h_{ti}$ , mais une différence nette apparaît après la plastification.

Nous avons constaté que le moment fléchissant portant dépend de la hauteur du tirant excentré mais l'amplitude de variation n'est pas énorme (jusqu'à 23%). L'augmentation de la hauteur du tirant n'induit pas toujours une augmentation de la capacité portante et inversement.

Nous avons constaté que lorsque nous considérons un assemblage poutre-tirant centré (cas du B.A.E.L.), la capacité portante est maximale. Pour le type *B*, cette différence entre les capacités portantes est plus importante car la fibre correspondant au niveau des aciers tendus est plus éloignée du centre de gravité de la section et donc l'excentricité est plus importante. Nous avons constaté que les courbes du comportement charge-flèche vis à vis du modèle se comportent comme les courbes du comportement moment-courbure.

En guise d'approche, nous avons proposé d'utiliser la valeur d'endommagement de la structure pour obtenir la valeur de la résistance effective en traction du béton. Nous constatons une forme d'évolution assez en accord avec l'essai lorsque nous considérons l'effet des paramètres d'endommagement, mais avec des valeurs éloignées. Le fait de s'éloigner des valeurs expérimentales n'est pas nécessairement une conséquence de cette approche, car la valeur de la courbure est fortement variable sur la hauteur d'une section.

La rupture survient toujours par le dépassement de la limite conventionnelle de déformation du béton comprimé. Nous avons constaté pour l'essai jusqu'à rupture un bon accord du comportement charge-flèche entre l'essai et le modèle dans le cas où  $h_{ti}$  est déduit de la carte de fissuration. Dans ce cas, la flèche au moment de la rupture est presque la même que celle de

l'essai. Il serait intéressant de considérer un écrouissage après la plastification de l'acier tendu, car nous avons noté ce phénomène pour les courbes d'essais charge-flèche à rupture. Nous constatons également un bon accord entre la courbure moyenne de la section et le modèle. Le cas avec tirant excentré serait alors plus proche du cas réel en considérant le phénomène d'écrouissage. Le niveau de plastification dépend fortement de la limite élastique de l'acier.

Enfin nous avons présenté une synthèse pour l'étude diagnostic des structures dégradées à partir des observations expérimentales ou des essais mécaniques chargement-déchargement en utilisant notre modèle poutre-tirant.

## **CONCLUSION GENERALE**

Dans ce travail, nous avons présenté une étude du comportement en flexion simple de poutres rectangulaires en béton armé corrodé à l'aide d'une modélisation moment-courbure modifiée prenant en compte le raidissement en traction du béton fissuré.

La détermination de la courbure nécessite de connaître la valeur de la hauteur comprimée  $x$ . Dans la méthode classique, la solution se trouve de manière itérative. La méthode des cas possibles que nous avons proposé permet de trouver exactement la position de l'axe neutre. Cette méthode supprime l'itération sur  $x$  et en conséquence optimise le temps de calcul.

La contribution du béton tendu fissuré dans une poutre rigidifie le comportement à cause de l'adhérence acier-béton. Le modèle physique du tirant est le modèle le plus simple pour représenter l'influence de ce raidissement en traction. Nous utilisons la relation contrainte-déformation d'un tirant comme une propriété constitutive de la partie fissurée de la poutre. Pour prendre en compte l'effet de raidissement, nous avons donc modélisé la poutre par un assemblage poutre-tirant.

La modélisation du comportement de l'assemblage poutre-tirant centré a été d'abord conduite, accompagnée d'études paramétriques. L'effet de la corrosion a été considéré soit comme une diminution de la section d'acier, soit comme un éclatement du béton. La hauteur du tirant est le paramètre le plus important. Nous avons considéré soit 2 fois l'enrobage, soit 0,3 fois la hauteur utile (en accord avec le B.A.E.L. 93). D'autres valeurs comme la hauteur tendue ( $h-x$ ) ont été considérées pour éviter d'avoir une hauteur constante pendant le chargement. Nous avons constaté que les courbes de comportement représentant le cas classique de prise en considération de l'effet du béton tendu par un comportement élastique fragile sous-estiment le moment résistant.

Les études paramétriques montrent que la résistance en traction joue un rôle important, que la résistance en compression influe légèrement, que l'éclatement du béton tendu diminue le raidissement, que l'éclatement de l'enrobage latéral diminue la capacité portante et avance la fissuration et que la réduction de la section d'armature diminue la rigidité et le moment résistant.

Nous avons étudié l'intérêt de prendre en considération le comportement d'un tirant excentré plutôt que centré. La modélisation du raidissement en traction par le tirant excentré a été effectuée en superposant le comportement du tirant centré avec celui d'une poutre sans raidissement en traction. La comparaison entre les comportements des tirants centré et excentré montre que le tirant excentré se fissure avant le tirant centré car la déformation du système fléchi causée par l'excentricité des armatures aide la fissuration. Nous avons développé les expressions conventionnelles pour le calcul de la hauteur du tirant afin de prendre en compte l'effet de l'excentricité des armatures du tirant excentré. Ensuite, nous avons supposé que l'effet du

raidissement en traction peut être affecté par la corrosion. Nous avons proposé un modèle tri-linaire du tirant corrodé s'appuyant sur le modèle du tirant sain d'ESPION.

L'étude expérimentale a été faite dans le cadre du projet GEO. Elle comprend trois séries d'essais sur les poutres corrodées de Toulouse. Nous avons observé que les courbes charge-flèche, qui traduisent le comportement global de la poutre, présentent une grande imprécision, encore augmentée par la déformation non symétrique induite essentiellement par la dégradation. L'étude des diagrammes moment-courbure nous renseigne sur le comportement local, mais réclame un dépouillement approfondi. En ce qui concerne la première série d'essais, la réversibilité du comportement charge-flèche et moment-courbure des poutres sous chargement historique a été étudiée. Pour avoir une bonne approche de la déformée (la flèche et la courbure) des poutres, la deuxième série d'essais a été effectuée sur la poutre *BICL*, variant la position de la charge et en mesurant la déformée en un nombre de points suffisant. Malgré l'application de la charge sur plusieurs cycles, les irréversibilités observées sont faibles. Nous avons constaté que la déformée n'est plus symétrique et les poutres ne présentent pas à l'issue des essais une déformation résiduelle parce qu'elles ont déjà été sollicitées pendant une longue période et que l'on n'a pas dépassé cette valeur de charge lors de nos essais. Nous avons calculé la valeur d'endommagement de la structure le long de la poutre selon les résultats moment-courbure. Nous avons constaté que les différentes sections n'ont pas les mêmes valeurs à cause de l'asymétrie de la dégradation et qu'un seul essai (de préférence l'essai avec le chargement le plus élevé) suffit pour donner des valeurs d'endommagement fiables le long de la poutre. La troisième campagne d'essais a été réalisée sur la poutre *BICL* pour obtenir des renseignements sur le comportement à rupture. Le comportement de la poutre est resté parfaitement linéaire jusqu'à 88% de la charge de la rupture.

Pour la comparaison de notre modèle poutre-tirant avec les résultats expérimentaux, nous sommes confrontés à de nombreux paramètres mal connus, représentatifs de l'état des poutres au moment des essais, et du point de vue du modèle aux choix de la hauteur du tirant. Nous avons constaté que le modèle est sensible aux changements de la hauteur du tirant. Pour évaluer le comportement d'une poutre dégradée, nous avons proposé deux méthodes de calcul de  $h_{ii}$  le long de la poutre, l'une conventionnelle, qui n'évolue pas avec la variation du chargement ou pendant le temps et l'autre selon les cartes de fissuration. Cette dernière évolue avec le chargement ou pendant le temps et donne une idée plus nette de l'emplacement de l'axe neutre. Après calcul de la hauteur du tirant des deux façons, nous avons calculé indirectement la flèche en fonction de la charge appliquée. Nous avons constaté un accord acceptable avant plastification pour les deux méthodes de calcul de  $h_{ii}$ , mais une différence nette apparaît après la plastification.

Nous avons constaté que le moment fléchissant portant dépend de la hauteur du tirant excentré mais l'amplitude de variation n'est pas énorme (jusqu'à 23%) et l'augmentation de la hauteur du tirant n'induit pas toujours une augmentation de la capacité portante et inversement.

Nous avons constaté que lorsque nous considérons un assemblage poutre-tirant centré (cas du B.A.E.L.), la capacité portante est maximale et les courbes du comportement charge-flèche vis à vis du modèle se comportent comme les courbes du comportement moment-courbure.

En guise d'approche, nous avons utilisé la valeur d'endommagement de la structure pour obtenir la valeur de la résistance effective en traction du béton. Nous avons constaté une forme d'évolution assez en accord avec l'essai lorsque nous considérons l'effet des paramètres d'endommagement, mais avec des valeurs éloignées. Le fait de s'éloigner des valeurs expérimentales n'est pas nécessairement une conséquence de cette approche car la valeur de la courbure varie fortement sur la hauteur d'une section et la partie comprimée donne toujours les valeurs les plus élevées.

La rupture survient toujours par le dépassement de la limite conventionnelle de déformation du béton comprimé. Nous avons constaté pour l'essai poussé jusqu'à rupture un bon accord du comportement charge-flèche entre l'essai et le modèle dans le cas où  $h_{ii}$  est déduit de la carte de fissuration faite au moment des essais. Dans ce cas, la flèche au moment de la rupture est presque la même que celle de l'essai. Il serait intéressant de considérer un écrouissage après la plastification de l'acier tendu, car nous avons noté ce phénomène pour les courbes d'essais charge-flèche à rupture. Nous avons constaté également un bon accord entre la courbure moyenne de la section et le modèle. Le cas avec tirant excentré serait alors plus proche du cas réel en considérant le phénomène d'écrouissage. Le niveau de plastification dépend fortement de la limite élastique de l'acier. Dans la suite, nous avons présenté une synthèse pour l'étude diagnostic des structures dégradées à partir des observations expérimentales ou des essais mécaniques chargement-déchargement en utilisant notre modèle poutre-tirant.

Enfin, l'intégration du modèle dans le logiciel LEO développé par EDF est en cours. Le logiciel LEO est développé dans le but d'apporter une aide aux opérations de maintenance des ouvrages en béton. En perspectives, il serait souhaitable d'étudier les points ci-dessous:

- ◆ Valider notre modèle sur plusieurs autres poutres, en plus de la poutre *BICL*;
- ◆ Etudier expérimentalement le comportement d'un tirant excentré, sain et corrodé pour valider le comportement que nous avons proposé;
- ◆ Mener une étude sur les paramètres  $\beta$  et  $\lambda$  correspondant aux modèles du tirant corrodé et du béton comprimé corrodé;
- ◆ Valider le calcul d'endommagement présenté par comparaison avec d'autres méthodes;
- ◆ Considérer des variations non linéaires de la hauteur du tirant le long de la poutre au lieu des variations linéaires ou multilinéaires.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **B.A.E.L. 1993** " *Béton armé aux états limites* " DTU, 1993.
- [2] **REZAIÉ F., 1995** " *Détermination de la courbure de flexion statique d'une section en béton armé en recherche directe et indirecte* " Mémoire de DEA -Groupe de Formation Doctorale, Université de Lille- Université d'Artois- Ecole Centrale de Lille.
- [3] **REZAIÉ F., BUYLE-BODIN F., 1997** " *Recherche de la courbure de poutres en flexion; simulation par des modèles de type tirant* " 4<sup>ème</sup> réunion annuelle du réseau GEO, Aussois, France, 1997.
- [4] **ALWIS W.A.M., 1990** " *Tri linear moment-curvature relationship for reinforced concrete beams* " ACI Structural. Journal., Vol. 87, No. 4.,1990.
- [5] **CONSIDERE, 1899** " *Influence des armatures métalliques sur les propriétés des mortiers et bétons (Influence of metal reinforcement on the properties of mortar and concrete)* " Le Génie Civil, Vol. 34, No. 15, 1899, pp. 229-233.
- [6] **MORSCH E, 1909** " *Concrete-steel Construction* " McGraw-Hill, New York, 1909, 368 p.
- [7] **SCANLON A., MURRAY D. W., 1974** " *Time dependent reinforced concrete slab deflections* " Journal. Structural. Division., ASCE, Vol. 100(9), pp. 1911-1924.
- [8] **LIN C. S., SCORDELIS A. C., 1975** " *Non-linear analysis of RC shells of general forms* " Journal. Structural. Division., ASCE, Vol. 111(3), pp. 523-538.
- [9] **GILBERT R. L, WARNER R. F., 1978** " *Tension stiffening in reinforced concrete slabs* " Journal. Structural. Division., ASCE, Vol. 104(12), pp. 1885-1900.
- [10] **DAERGA P.A., PETTERSSON P., PONTINEN P., 1989** " *Fracture properties in tension of a high performance concrete* " RILEM, Report of the technical committee 90, Edited by L. Elfyren, Chapman and Hall, 1989.
- [11] **BAZANT Z. P., 1992** " *Fracture mechanics of concrete structures* " Proceeding of the International Conference on Fracture Mechanics of Concrete Structures, Breckenridge, Colorado, USA, 1992.
- [12] **CARREIRA D.J., CHU K., 1986** " *Stress-Strain Relationship of Reinforced Concrete in Tension* " ACI Journal, Vol. 83, No. 1, 1986, pp. 21-28.

- [13] **CREAZZA G., DI MARCO R., 1991** " *Tension stiffening in reinforced concrete elements* " IABSE Colloquium "Structural Concrete", Stuttgart, 1991, pp. 147-152.
- [14] **BELARBI A., HSU T.T.C., 1994** " *Constitutive laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete* " ACI Structural Journal, Vol. 91, No. 4, 1994, pp. 465-474.
- [15] **CREAZZA G., DI MARCO R., 1993** " *Bending moment-mean curvature relationship with constant axial load in the presence of tension stiffening* " Materials and Structures, Vol. 26, No. 158, 1993, pp. 196-206.
- [16] **BUIL M., 1979** " *Contribution à l'étude du retrait de la pâte de ciment durcissante* " Rapport de recherche, LPC, No. 92, Paris, 1979, 72 p.
- [17] **ACKER P., EYMARD R., 1992** " *Thermal and hygral effects in concrete structures: how to account for creep* " Third international workshop on behaviour of concrete elements under thermal and hygral gradients, Weimar, 1992.
- [18] **MAZARS J., 1984** " *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure* " Thèse d'Etat, Paris 6., 1984.
- [19] **HOMAYOUN H.A., DENIS M., 1996** " *Influence of splitting cracks on tension stiffening* " ACI Structural Journal, Vol. 93, No. 6, 1996, pp. 703-710.
- [20] **GHALI A., FAVRE R., 1994** " *Concrete structures: stresses and deformations* " Published by E & FN Spon, Second edition, London, 1994, 443 p.
- [21] **FARRA B., 1995** " *Influence de la résistance du béton et de son adhérence avec l'armature sur la fissuration* " Thèse de doctorat EPF Lausanne, No. 1359., 1995.
- [22] **VAN DER VEEN C. 1990** " *Cryogenic Bond Stress-Slip Relationship* " Ph.D. thesis, Delft University of Technology, 1990.
- [23] **ESPION B., 1984** " *Lois de comportement de tirant en béton armé* " Bulletin 84-1 du service Génie Civil, Université Libre de Bruxelles, Laboratoire des constructions Civiles, 1984.
- [24] **JACCOUD J.P., 1987** " *Armature minimale pour le contrôle de la fissuration des structures en béton armé* " Thèse de doctorat EPF Lausanne, No. 666., 1987.

- [25] **CEB Manual, 1985** " *Design manual on cracking and deformations* " Comité Euro-International du Béton, EPF Lausanne, 1985.
- [26] **RILEM, 1978** " *Essais portant sur l'adhérence des armatures du béton: essai par flexion* " Materials and Structures, Recommandation RILEM/CEB/FIP-RC6, Vol. 6, No. 32, 1978.
- [27] **RILEM, 1978** " *Essais portant sur l'adhérence des armatures du béton: essai par traction* " Materials and Structures, Recommandation RILEM/CEB/FIP-RC6, Vol. 6, No. 32, 1978.
- [28] **MIRZA S. M., HOUDE J., 1979** " *Study of bond stress-slip relationships in reinforced concrete* " ACI Journal, Vol. 76, No. 1, 1979, pp. 19-46.
- [29] **LAHNERT B.J., HOUDE J., GERSTLE H., 1986** " *Direct measurement of slip between steel and concrete* " ACI Journal, Vol. 83, No. 86, 1986, pp. 974-982.
- [30] **GUNTHER G., MEHLHORN G., 1991** " *Local bond between reinforcing steel and concrete* " IABSE Colloquium "Structural Concrete", Stuttgart, 1991, pp. 141-146.
- [31] **GUPTA A.K., MAESTRINI S.R., 1990** " *Tension-Stiffness model for reinforced concrete bars* " Journal of Structural Engineering, Vol. 116, No. 3, 1990, pp. 769-790.
- [32] **BALAZS G.L., 1987** " *Bond model with non-linear bond slip law* " Politecnico di Milano, Studi e ricerche No. 66, 1987.
- [33] **JOHNSON A.L., 1951** " *Deformations of reinforced concrete* " Mém. Ass. Int. Ponts Charp., Zurich, Vol. 11, 1951, pp. 253-290.
- [34] **PALOTAS L., 1966** " *Beitrage zur Berechnung der Rissicherheit* " Mém. Ass. Int. Ponts Charp., Zurich, Vol. 26, 1966, pp. 365-397.
- [35] **CEB, 1973** " *Fissuration* " Bulletin d'information, No. 89, Paris, 1973.
- [36] **CEB-FIP, 1978** " *CEB-FIP model code for concrete structures* " Third Edition, Paris, 348 p.
- [37] **RABICH R. 1969** " *Beitrag zur Berechnung der Formänderungen von Stahlbetonbauteilen unter Berücksichtigung der Rissbildung* " Bauplan. Bautech, Heft 4, 1969, pp. 184-187.
- [38] **RAO P.S., 1976** " *Die Grundlagen zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte* " DAfStb., Berlin, Heft 177, 1976.

- [39] **ROSTASY F.S., ALDA W., 1977** " *Rissbreitenbeschränkung bei zentrischem Zwang von Stäben aus Stahlbeton und Stahlleichtbeton* " *Beton Stahlbetonb*, Heft 6, 1977, pp. 149-156.
- [40] **FAVRE R., KOPRNA M., PUTALLAZ J.C., 1981** " *Deformation of concrete structures. Theoretical Basis for the Calculation* " *AIPC periodica*, Zurich, S-16/81, 1981.
- [41] **CEB, 1983** " *Fissuration et Déformation* " *Bulletin d'information*, No. 158, EPF Lausanne, 1983.
- [42] **CEB-FIP, 1993** " *CEB-FIP Model Code 1990* " Edition Thomas Telford, London, 1993.
- [43] **ESPION B., 1984** " *Lois de comportement de tirant en béton armé* " *Bulletin 84-1* du Service Génie Civil, Université Libre de Bruxelles, Laboratoire des Constructions Civiles, 1984.
- [44] **NOAKOWSKI P., KUPFER H., 1981** " *Versteifende Mitwirkung des betons im Zugbereich von turmatigen Bauwerken* " *Beton Stahlbetonb*, Heft 10, 1981, pp. 241-246.
- [45] **ESPION B., PROVOST M., HALLEUX P., 1985** " *Rigidité d'une zone tendue de béton armé* " *Materials and Structures*, Vol. 18, No. 105, 1985, pp. 185-191.
- [46] **BRUGGELING A.S.G., 1991** " *Structural Concrete-Theory and its application* " Published by A.A. Balkema, Rotterdam, 1991.
- [47] **CEB-FIP, 1979** " *Code modèle CEB-FIP pour les structures en béton* " *Bulletins d'information* No. 124-125, Paris, 1979.
- [48] **LORRAIN M., MESUREUR B., 1998** " *Fissuration et adhérence BHP-ARMATURES HP* " *Projet national BHP 2000- Rapport*, 1998.
- [49] **EUROCODE 2, 1991** " *Design of Concrete Structures, Part 1: General Rules and Rules for Building* " *European Prestandard, ENV 1992-1:1991E*, European Committee for Standardization, rue de Stassart 36, B-1050 Brussels, Belgium, 1991.
- [50] **BUYLE-BODIN F., REZAIIE F., 1997** " *Approche de l'évolution de l'adhérence acier-béton dans les structures en béton armé dégradées par corrosion* " 5<sup>ème</sup> réunion annuelle du réseau GEO, Aussois, France, 1999.

- [51] **CAPOZUCCA R., 1996** " *Statical and dynamical behaviour of reinforced concrete beams subjected to reinforcement corrosion* " 2<sup>nd</sup> RILEM International Conference "Diagnosis of Concrete Structures" Strbske Pleso Slovaquie, 7-11 Octobre 1996, edite par T. Javor, pp. 189-194.
- [52] **VECCHIO F. J., COLLINS M. P., 1993** " *Compression response of cracked reinforced concrete* " Journal of Structural Engineering, Vol. 119, No. 12, 1993, pp. 3590-3610.
- [53] **TACHE G., 1985** " *Progrès dans la construction par la maîtrise de la fissuration des bétons hydrauliques. Thème 2: corrélation entre fissuration et corrosion* " Rapport final du programme de recherche MRT-MULT, Chapitre II- étude bibliographique, 1985.
- [54] **BREVET P., 1985** " *Progrès dans la construction par la maîtrise de la fissuration des bétons hydrauliques. Thème 2: corrélation entre fissuration et corrosion* " Rapport final du programme de recherche MRT-MULT, Chapitre III- réglementation internationale, 1985.
- [55] **FRANCOIS R., ARLIGUIE G., MASO J.C., 1994** " *Durabilité du béton armé; Rapport de synthèse* " Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions, I.N.S.A. de Toulouse, France, 1994.
- [56] **FRANCOIS R., RINGOT E. , 1988** " *Capteur de force sur chevêtre de charge pour poutre en béton armé* " GAMAC INFO, No. 2-3, 1988.
- [57] **PETIT C., GERARD B., 1997** " *Modélisation pour l'aide à l'expertise des structures en béton armé corrodées* " 4<sup>ème</sup> réunion annuelle du réseau GEO, Aussois, France, 1997.
- [58] **BUYLE-BODIN F., REZAIIE F., 1996** " *Etude du comportement des poutres vieilles et corrodées en ambiance saline: rapport d'essai N°1* " Projet GEO, Fatigue et vieillissement des géocomposites, Rapport recherche, 1996, 32 pages.
- [59] **ARLIGUIE G., BUYLE-BODIN F., FRANCOIS R., REZAIIE F., 1996** " *Etude du comportement en flexion de poutres en béton armé dégradé par corrosion des armatures* " 3<sup>ème</sup> réunion annuelle du réseau GEO, Aussois, France, 1996.
- [60] **GEO, 1997** " *Poutres vieilles en ambiance saline au LMDC de Toulouse: Deuxième phase expérimentale-1<sup>er</sup> rapport intermédiaire* " Projet GEO, Fatigue et vieillissement des géocomposites, Rapport de recherche LMDC Toulouse/EDF, France, 1997.
- [61] **GEO, 1999** " *Poutres vieilles en ambiance saline au LMDC de Toulouse: troisième phase expérimentale-1<sup>er</sup> rapport intermédiaire* " Projet GEO, Fatigue et vieillissement des géocomposites, Rapport de recherche LMDC Toulouse/EDF, France, 1999.

# ANNEXE I

## METHODE DIRECTE DU CALCUL DE LA COURBURE

### 1. METHODE DE SUBSTITUTION

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions  $\varepsilon_c^0, \varepsilon_c^1, \dots, \varepsilon_c^i$ ;  $\varepsilon_c^i$  calculées à partir de  $\varepsilon_c^{i-1}$  en résolvant le système linéaire:

$$K(\varepsilon_c^{i-1}, x^{i-1}) \varepsilon_c^i = M \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

ce qui peut s'écrire sous forme incrémentale en introduisant le résidu  $R^i$  :

$$R^i = R(\varepsilon_c^{i-1}, x^{i-1}) = M - K(\varepsilon_c^{i-1}, x^{i-1}) \varepsilon_c^{i-1} = M - M_{int}^{i-1} \quad (2)$$

$$K(\varepsilon_c^{i-1}, x^{i-1}) \Delta \varepsilon_c^i = R^i \quad (3)$$

$$\varepsilon_c^i = \varepsilon_c^{i-1} + \Delta \varepsilon_c^i \quad (4)$$

La valeur  $\varepsilon_c^{i-1}$  étant connue, nous pouvons construire les raideurs tangentes  $K(\varepsilon_c^{i-1}, x^{i-1})$ , puis résoudre le système linéaire en  $\Delta \varepsilon_c^i$ .  $x^{i-1}$  est déterminé pour une valeur donnée de  $\varepsilon_c^{i-1}$  en résolvant l'équation I-6 (voir chapitre I). L'algorithme est présenté graphiquement sur la figure 1, de manière à souligner les possibilités de divergence.

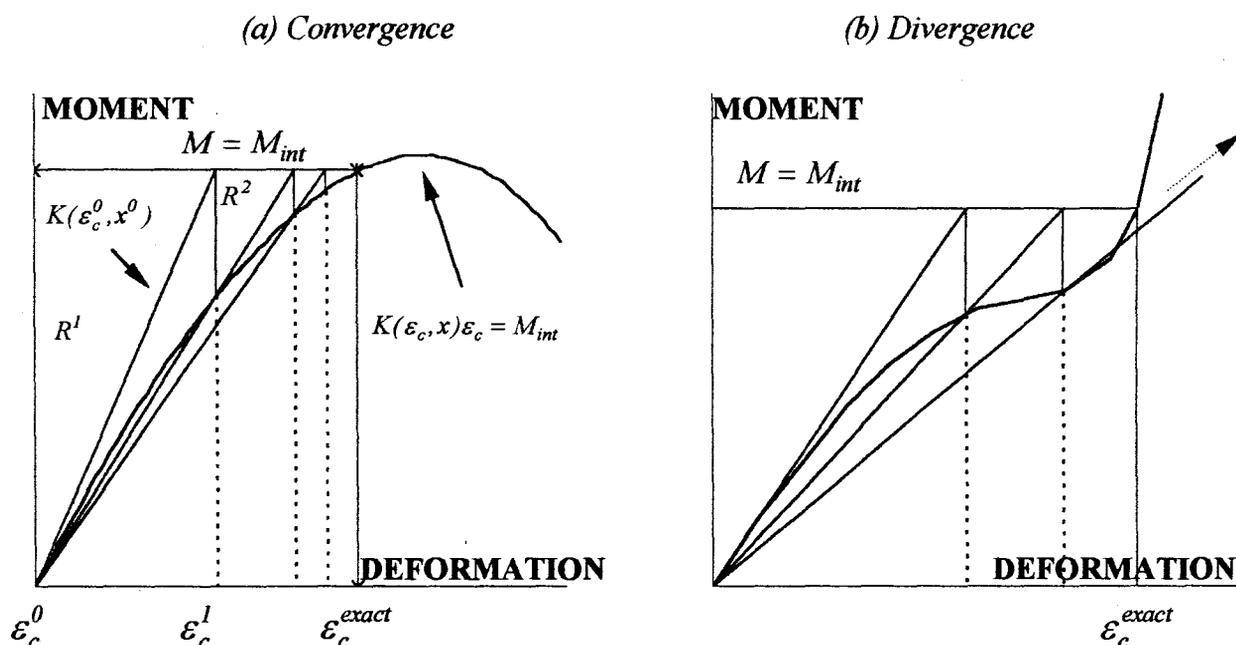


Figure 1: Méthode de SUBSTITUTION

## 2. METHODE DE NEWTON-RAPHSON

Supposons qu'à l'itération  $i-1$  nous avons obtenu une approximation  $\varepsilon_c^{i-1}$  de la solution telle que le résidu ne soit pas nul.

$$R(\varepsilon_c^{i-1}, x^{i-1}) = M - K(\varepsilon_c^{i-1}, x^{i-1}) \varepsilon_c^{i-1} \neq 0 \quad (7)$$

A l'itération  $i$  nous cherchons une approximation  $\varepsilon_c^i$  de la solution telle que;

$$R(\varepsilon_c^i, x^i) = R(\varepsilon_c^{i-1} + \Delta \varepsilon_c^i, x^i) \approx 0 \quad (8)$$

L'algorithme est obtenu en développant ce résidu en série de Taylor à deux variables au voisinage de  $\varepsilon_c^{i-1}$  et  $x^{i-1}$ .

$$\begin{aligned} R(\varepsilon_c^i, x^i) = R(\varepsilon_c^{i-1} + \Delta \varepsilon_c^i, x^i) &= R(\varepsilon_c^{i-1}, x^{i-1}) + \left[ \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_c} \right]_{\substack{\varepsilon_c = \varepsilon_c^{i-1} \\ x = x^{i-1}}} \Delta \varepsilon_c^i \\ &+ \left[ \frac{\partial R}{\partial x} \right]_{\substack{\varepsilon_c = \varepsilon_c^{i-1} \\ x = x^{i-1}}} \Delta x^i + \dots = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

D'où, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1;

$$R(\varepsilon_c^i, x^i) = - \left[ \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_c} \right]_{\substack{\varepsilon_c = \varepsilon_c^{i-1} \\ x = x^{i-1}}} \Delta \varepsilon_c^i - \left[ \frac{\partial R}{\partial x} \right]_{\substack{\varepsilon_c = \varepsilon_c^{i-1} \\ x = x^{i-1}}} \Delta x^i \quad (10)$$

$$\text{ou: } K_t(\varepsilon_c^{i-1}, x^{i-1}) \Delta \varepsilon_c^i = R(\varepsilon_c^{i-1}, x^{i-1}) \quad (11)$$

L'expression de la raideur tangente  $K_t(\varepsilon_c^{i-1}, x^{i-1})$  s'obtient en dérivant l'expression I-14 du résidu:

$$K_t(\varepsilon_c, x) = - \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_c} - \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta \varepsilon_c} \quad (12)$$

ou:

$$K_t(\varepsilon_c, x) = K(\varepsilon_c, x) + \frac{\partial K}{\partial \varepsilon_c} \varepsilon_c + \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon_c} \varepsilon_c = \frac{\delta M_{int}}{\delta \varepsilon_c} \quad (13)$$

L'algorithme correspondant est semblable à l'algorithme précédent, cependant  $K$  est remplacée par  $K_t$ . Il est représenté graphiquement sur la figure 2. La convergence est rapide et une précision convenable est en général obtenue par un petit nombre d'itérations mais cet avantage est en partie perdu par le temps nécessaire à construire la raideur tangente et les problèmes de divergence au voisinage du moment maximum. Dans certains cas le calcul différentiel de l'équation 13 est difficile. Pour calculer  $K_t$  simplement, on peut alors utiliser le concept de dérivation (équation 14) mais ceci augmente le temps de calcul:

$$K_t = \frac{\Delta M_{int}}{\Delta \varepsilon_c} \quad (14)$$

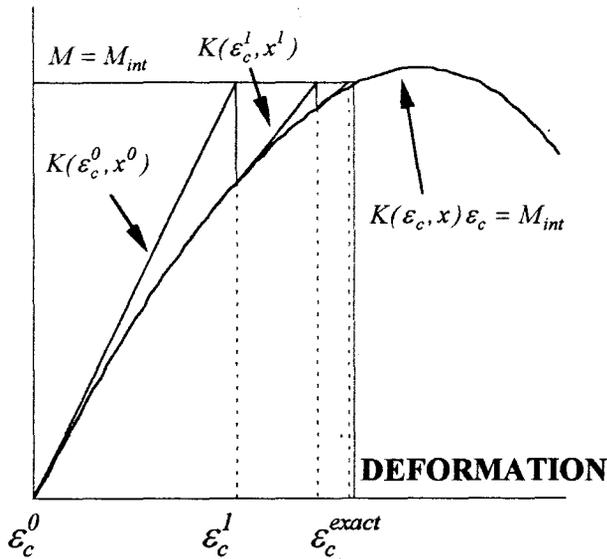


Fig. 2. Méthode de NEWTON-RAPHSON

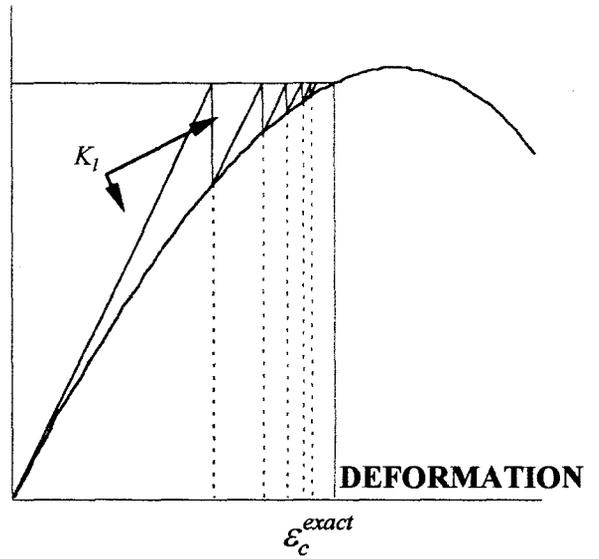


Fig. 3. Méthode de NEWTON-RAPHSON MODIFIEE

Une variante illustrée à la figure 3, appelée méthode de NEWTON-RAPHSON MODIFIEE, consiste à actualiser la raideur tangente  $K_1$  simplement en début d'incrément de charge et à la conserver constante pendant les itérations d'équilibre. Dans chaque itération, il suffit de calculer  $R^i$  puis d'évaluer  $\Delta \varepsilon_c^i$  à partir de  $K_1$ . Elle constitue un bon compromis. On peut aussi utiliser une méthode incrémentale. Chaque étape constitue alors un problème non linéaire qui se résout avec une ou plusieurs itérations selon la méthode de NEWTON-RAPHSON ou de NEWTON-RAPHSON MODIFIEE. Par ailleurs, ces méthodes, même si elles peuvent s'appliquer, ne permettent pas toujours de résoudre le problème posé. Dans certains cas, il existe plusieurs solutions correspondant à une valeur de sollicitation donnée. Tel est le cas des lois de comportement qui, au-delà d'un certain seuil, prennent en compte un écouissage négatif. Les méthodes de résolution présentées jusqu'ici ne sont plus adaptées, car elles ne peuvent pas résoudre le problème au-delà du "pic" et donc suivre le comportement du matériau (figure 4). Pour obtenir la solution dans le domaine au-delà du pic, nous pouvons considérer une composante  $\varepsilon_c$  comme connu et le niveau de sollicitation comme inconnu en utilisant la méthode pas à pas avec un petit pas de déformation (figure 5).

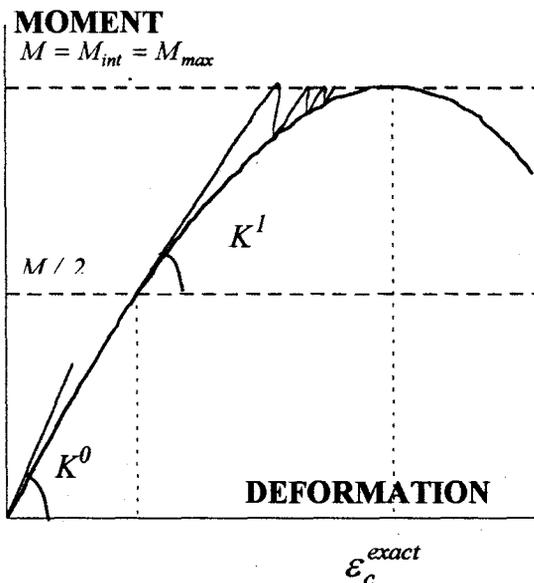


Fig. 4: Arrêt de la méthode

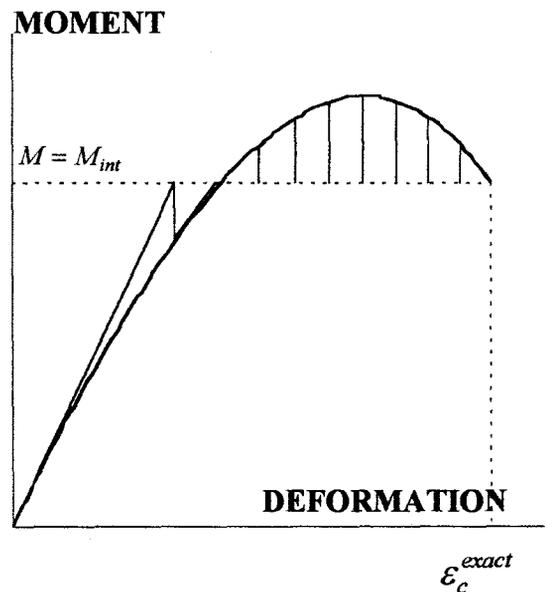


Fig. 5: La solution pour passer le pic

## ANNEXE II

### RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE LINEAIRE D'ADHERENCE

#### 1. RELATION CONTRAINTE D'ADHERENCE-GLISSEMENT

Une courbe typique de contrainte d'adhérence-glissement est montrée figure 1. La courbe commence par une contrainte d'adhérence non nulle à l'origine du glissement ( $\Delta = 0$ ), qui correspond à la liaison physico-chimique d'adhésion entre le béton et l'armature. La pente de la courbe au début est élevée.

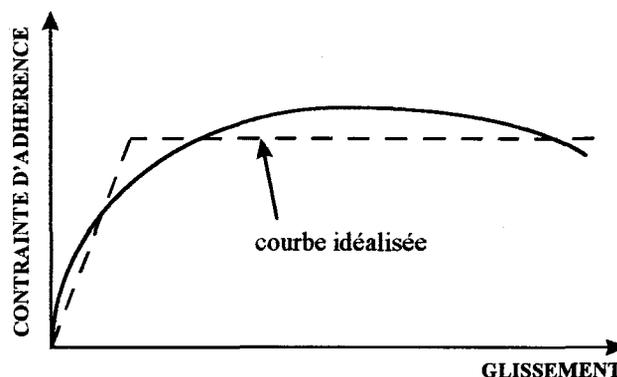


Figure 1: Courbe contrainte d'adhérence-glissement et la courbe idéalisée

La nette réduction de la pente de la courbe ( $\tau - \Delta$ ) commence par l'augmentation du cisaillement partiel des bielles de béton entre les nervures de l'armature. Enfin, on atteint la contrainte maximale d'adhérence, suivie d'une branche descendante où la contrainte résiduelle correspond au frottement le long de la zone de béton cisailée (CEB 1983 [41]).

La courbe expérimentale peut être approchée par une courbe bilinéaire, montrée figure 6 par des lignes pointillées (GUPTA et MAESTRINI 1990 [31]). La pente de la ligne inclinée et la contrainte d'adhérence maximale associée à la ligne horizontale varient avec les paramètres géométriques du matériau. Selon cette courbe idéalisée, la contrainte d'adhérence varie linéairement avec le glissement au début du processus de fissuration. Le comportement du tirant à ce stade peut être obtenu par l'utilisation d'une courbe contrainte d'adhérence-glissement linéaire. D'autre part, lorsqu'une fissuration importante se produit, nous pouvons supposer que la contrainte d'adhérence est uniforme le long de la barre. Les cas intermédiaires sont représentés par la courbe bilinéaire.

Trois formes idéalisées de cette relation peuvent donc être considérées, linéaire, bilinéaire, et avec contrainte d'adhérence constante. Les équations d'équilibre et de compatibilité en conjonction avec les propriétés constitutives donnent l'équation différentielle du problème. La solution de cette équation donne la distribution des contraintes, des déformations et des déplacements. L'équation a été ainsi utilisée pour obtenir la relation contrainte de traction effective-déformation.

Pour résoudre l'équation différentielle linéaire d'adhérence, on présente la méthode proposée par GUPTA et MAESTRINI 1990 [31]. Pour un comportement non linéaire d'adhérence et pour différentes conditions aux limites, nous nous référons à la méthode proposée par BALAZS 1987 [32].

## 2. EQUATION DIFFERENTIELLE DU GLISSEMENT

La figure 2 montre une partie de tirant entre deux fissures. La longueur de cette partie est  $2a$ , qui est identique à l'espacement des fissures. L'origine de la coordonnée axiale  $x$  est prise entre deux fissures, au point  $0$  montré figure 2a. La barre est soumise à une force de traction  $N$ . Nous considérons une section à la distance  $x$  de l'origine. Le diagramme est montré figure 2b. Nous avons suivant l'équation d'équilibre pour ce diagramme.

$$N_s + N_c = N \quad (1)$$

où  $N_s$  et  $N_c$  sont les efforts axiaux dans l'acier et le béton, respectivement.

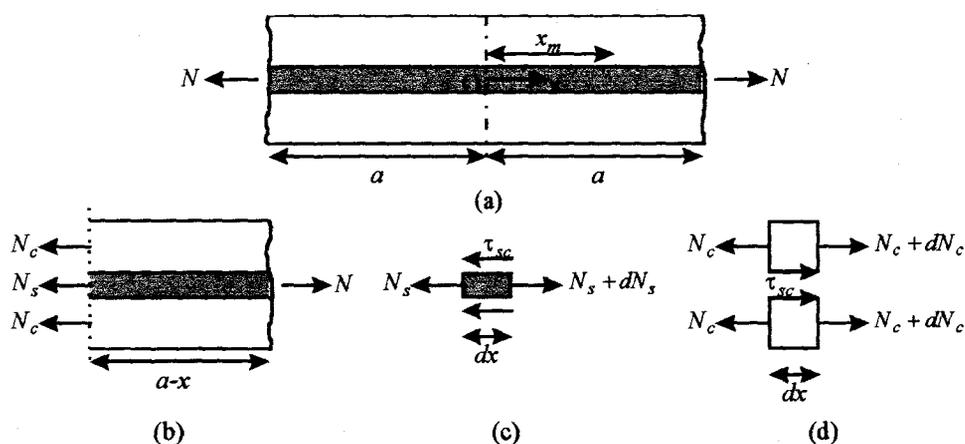


Figure 2: Diagramme pour un tirant fissuré en béton armé de: (a) la barre entre les fissures; (b) une section arbitraire; (c) l'interface de l'acier; et (d) l'interface du béton

Un élément de longueur  $dx$  est choisi. Les contributions des contraintes sont représentées figure 2c et 9d. Nous pouvons obtenir les équations d'équilibres suivantes pour les deux composantes.

$$\frac{dN_s}{dx} = p \tau_{sc} ; \frac{dN_c}{dx} = -p \tau_{sc} \quad (2)$$

où  $\tau_{sc}$  est la contrainte d'adhérence à l'interface acier-béton, et  $p$  représente le périmètre de l'acier. Les relations effort-déformation sont:

$$N_s = A_s E_s \varepsilon_s = A_s E_s \frac{du_s}{dx} \quad N_c = A_c E_c \varepsilon_c = A_c E_c \frac{du_c}{dx} \quad (3)$$

où les indices  $s$  et  $c$  réfèrent à l'acier et au béton;  $A$  est l'aire de la section;  $E$  est le module de Young;  $\varepsilon$  est la déformation axiale;  $u$  représente le déplacement axial. Le glissement à l'interface acier-béton est défini par:

$$\Delta = u_s - u_c \quad (4)$$

Les équations 2-4 donnent:

$$\frac{d^2 \Delta}{dx^2} = \frac{p \tau_{sc}}{A_s E_s} (1 + n\Omega), \quad n = \frac{E_s}{E_c}, \quad \Omega = \frac{A_s}{A_c} \quad (5)$$

Dans l'équation dérivée 5, l'acier et le béton sont supposés avoir un comportement élastique linéaire. Plus loin, il est supposé que l'effort  $N_c$  est distribué uniformément sur la section du béton, et que  $\varepsilon_c$  et  $u_c$  ne varient pas le long de section. L'équation 4 est générale en ce qui concerne la relation contrainte d'adhérence-glissement. Elle va être appliquée pour les trois sortes de relation contrainte d'adhérence-glissement dans la suite.

### 3. SOLUTION DU PROBLEME

#### 3.1. Solution pour le cas d'un comportement linéaire glissement-contrainte d'adhérence

La relation linéaire glissement-contrainte d'adhérence peut être écrit comme:

$$\tau_{sc} = A\Delta \quad (6)$$

où  $A$  est la pente de la courbe glissement-contrainte d'adhérence. Les unités de  $\tau_{sc}$  et  $\Delta$  sont  $FL^{-2}$  et  $L$ . L'unité de  $A$  est donc  $FL^{-3}$ . Les équations 5 et 6 donnent:

$$\frac{d^2 \Delta}{dx^2} - k^2 \Delta = 0. \quad ; \quad k^2 = \frac{A p}{A_s E_s} (1 + n\Omega) \quad (7)$$

L'unité de  $k$  dans l'équation 7 est  $L^{-1}$ .

La solution de l'équation 7 est donnée par  $\Delta = C_1 \sinh kx + C_2 \cosh kx$  où  $C_1$  et  $C_2$  sont les constantes de l'intégration. Considérant la condition symétrique du problème,  $\Delta(-x) = -\Delta(x)$ , par conséquent  $C_2 = 0$ , et nous obtenons:

$$\Delta = C_1 \sinh kx \quad (8)$$

La constante  $C_1$  sera déterminée plus tard. Les équations 2,3,6, et 8 donnent:

$$N_s = T - \frac{A p C_1}{k} (\cosh ka - \cosh kx);$$

$$u_s = \frac{T x}{A_s E_s} - \frac{C_1}{1+n\Omega} (kx \cos ka - \sinh kx)$$
(9)

et

$$N_c = \frac{A p C_1}{k} (\cosh ka - \cosh kx); \quad u_c = \frac{n\Omega C_1}{1+n\Omega} (kx \cos ka - \sinh kx)$$
(10)

Dans les dérivations des équations 9 et 10, les conditions aux limites suivantes ont été utilisées:  $N_s = N$  et  $N_c = 0$  à  $x=a$ ;  $u_s$  et  $u_c = 0$  à  $x=0$ . Les équations 4,8,9, et 10 donnent:

$$C_1 = \frac{N}{A_s E_s} \frac{I}{k \cosh ka}$$
(11)

### Contribution du béton tendu

Pour obtenir une relation contrainte-déformation du béton du genre présenté figure 1, nous écrivons:

$$N = A_s E_s \varepsilon + A_c \sigma_c \quad \sigma_c \geq 0$$
(12)

où  $\sigma_c$  est la contrainte de traction effective du béton. La déformation moyenne de l'acier de renforcement est donnée par  $\varepsilon$  et peut être obtenue à partir des équations 9 et 11.

$$\varepsilon = \frac{u_s(x=a)}{a} = \frac{N}{A_s E_s (1+n\Omega)} \left( n\Omega + \frac{\tanh ka}{ka} \right)$$
(13)

Les équations 12 et 13 donnent:

$$\sigma_c = \frac{N}{A_c (1+n\Omega)} \left( 1 - \frac{\tanh ka}{ka} \right)$$
(14)

L'effort maximum en traction du béton est pour  $x=0$ . Cet effort maximum et la contrainte du béton correspondant peuvent être obtenus à partir des équations 10 et 11:

$$N_{c \max} = \frac{N}{(1+n\Omega)} (1 - \operatorname{sech} ka) ;$$

$$\sigma_{c \max} = \frac{N_{c \max}}{A_c} = \frac{N}{A_c (1+n\Omega)} (1 - \operatorname{sech} ka)$$
(15)

La contrainte maximale en traction du béton  $\sigma_{c \max}$  est directement proportionnelle à la charge de traction appliquée  $N$ . (Le terme  $\sigma_{c \max}$  de l'équation 15 indique le maximum de la contrainte réelle du béton. Le terme  $\sigma_c$ , d'autre part, est défini à l'équation 12, et est utilisé pour la représentation de la contrainte effective du béton.) Lorsque la charge appliquée  $N$  augmente,  $\sigma_{c \max}$  augmente également. A certaines valeurs de  $N$ ,  $\sigma_{c \max}$  va devenir égal à la résistance du

béton en traction  $f'_t$ . A ce point, une nouvelle fissure va se former à  $x=0$ . L'équation 15 donne la valeur maximale de  $N$  pour un espacement de fissures  $2a$ .

$$N = A_c(1 + n\Omega) \frac{f'_t}{(1 - \operatorname{sech} ka)} \quad (16)$$

Nous pouvons maintenant supprimer  $N$  des équations 13 et 14 et les récrire de façon adimensionnelle.

$$\frac{\sigma_c}{f'_t} = \frac{1 - \frac{\tanh ka}{ka}}{1 - \operatorname{sech} ka} \quad ; \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{fis}} = \frac{1 + \frac{\tanh ka}{n\Omega ka}}{1 - \operatorname{sech} ka} \quad ; \quad \varepsilon_{fis} = \frac{f'_t}{E_c} \quad (17)$$

L'espacement réel des fissures  $2a$  va varier distinctement. La valeur initiale de  $2a$  peut être considérée égale à la longueur  $L$  du tirant, c'est-à-dire  $2a = L$ . Les valeurs suivantes de  $2a$  vont être  $L/2, L/4, L/8, \dots$ , etc. Comme nous allons voir plus tard, la limite inférieure de  $a$  va être déterminée par la valeur maximale de la contrainte d'adhérence,  $\tau_{sc,m}$ , et la limite d'écoulement de l'acier  $f_y$ . Ainsi, l'équation 17 représente une relation paramétrique entre  $\sigma_c / f'_t$  et  $\varepsilon / \varepsilon_{fis}$ , où  $ka$  est le paramètre commun.

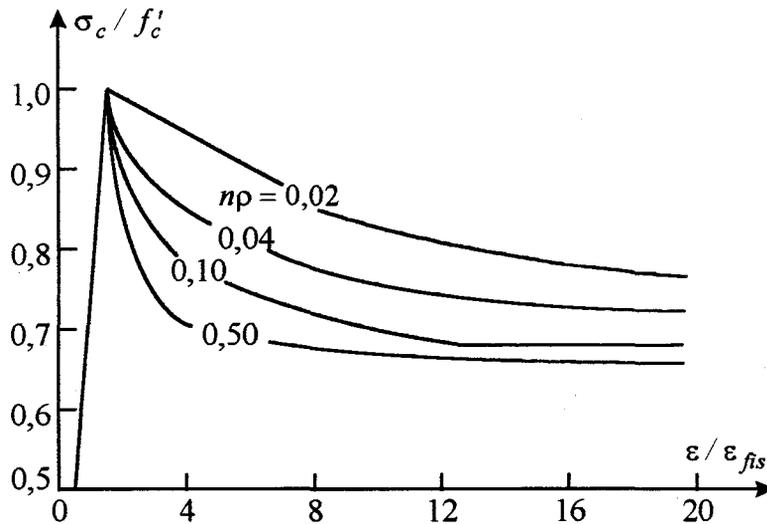


Figure 3: Courbe contrainte de traction effective-déformation du béton, dans le cas du comportement linéaire de la contrainte d'adhérence en fonction du glissement

La relation  $\sigma_c / f'_t - \varepsilon / \varepsilon_{fis}$  obtenue à partir de la relation 17 est tracée figure 3 pour quatre valeurs du paramètre  $n\Omega$  ( $n\Omega=0,02, 0,04, 0,1$  et  $0,5$ ). Pour  $ka=\infty$ , l'équation 17 donne  $\sigma_c / f'_t = 1, \varepsilon / \varepsilon_{fis} = 1$ , définissant le cas où les fissures commencent. S'il n'existe aucune limite sur les valeurs de contrainte d'adhérence et de contrainte de l'acier de renforcement, nous pouvons comprendre que pour  $ka=0$ ,  $\sigma_c / f'_t = 0,67$  et  $\varepsilon / \varepsilon_{fis} = \infty$ . La valeur 0.67 est la borne inférieure du rapport  $\sigma_c / f'_t$ . Nous observons figure 3 que l'effet du raidissement en traction devient prédominant lorsque  $n\Omega$  est relativement petit. Cet effet diminue quand  $n\Omega$  s'accroît.

### 3.2. Solution dans l'hypothèse d'une contrainte d'adhérence constante

Dans ce cas la contrainte d'adhérence est indépendante du glissement,  $\tau_{sc} = \tau_{sc,m}$ . L'équation 2 avec les conditions aux limites appropriées donne:

$$N_s = N - p \tau_{sc,m} (a - x) \quad ; \quad N_c = p \tau_{sc,m} (a - x) \quad (18)$$

La première expression de l'équation 3 donne:

$$u_s = \frac{x}{A_s E_s} \left[ N - p \tau_{sc,m} \left( a - \frac{x}{2} \right) \right] ; \quad \varepsilon = \frac{l}{A_s E_s} \left( N - \frac{p \tau_{sc,m} a}{2} \right) \quad (19)$$

Les équations 12 et 19 donnent:

$$\sigma_c = \frac{p \tau_{sc,m} a}{2 A_c} \quad (20)$$

Entrant  $\sigma_{cmax}$  dans l'équation 18 et le posant égal à  $f'_t$ , nous obtenons:

$$f'_t = \frac{p \tau_{sc,m} a}{A_c} \quad (21)$$

Pour les valeurs données de  $A_c$ ,  $p$ ,  $f'_t$ , et  $\tau_{sc,m}$ , l'équation 21 donne une valeur constante de  $a$ . Les équations 19-21 peuvent être écrites sous la forme adimensionnelle suivante:

$$\frac{\sigma_c}{f'_t} = \frac{l}{2} \quad ; \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{fis}} = \frac{l}{2n\Omega} \left( \frac{2N}{p \tau_{sc,m} a} - 1 \right) \quad (22)$$

L'équation 22 montre que  $\sigma_c / f'_t$  reste constant et égal à 0,5, lorsque  $\varepsilon / \varepsilon_{fis}$  varie linéairement avec l'augmentation de la valeur de  $N$ . L'équation 22 est valide seulement après que les fissures sont formées. Comme nous allons voir plus tard,  $\sigma_c / f'_t = 0,5$  constitue la valeur de la borne la plus inférieure dans le cas de la relation bilinéaire glissement-contrainte d'adhérence.

### 3.3. Solution dans le cas d'une relation bilinéaire glissement-contrainte d'adhérence

Nous allons considérer la relation contrainte d'adhérence bilinéaire:

$$\begin{aligned} \tau_{sc} &= A\Delta \quad \text{si} \quad \tau_{sc} \leq \tau_{sc,m} \quad \text{et} \quad \Delta \geq \Delta_m \\ \tau_{sc} &= \tau_{sc,m} \quad \text{si} \quad \Delta \geq \Delta_m \end{aligned} \quad (23)$$

Au stade initial de fissuration, le glissement devrait demeurer inférieur à  $\Delta_m$  d'un bout à l'autre de la barre du tirant. Le comportement est décrit par le premier cas, celui d'une relation linéaire glissement-contrainte d'adhérence. Lorsque l'effort appliqué  $N$  augmente,  $\Delta$  atteint

d'abord  $\Delta_m$  à  $x=a$ , et après à  $x = x_m$ ,  $0 \leq x_m \leq a$ . Appliquant à l'équation 8 la condition  $\Delta = \Delta_m = \tau_{sc,m} / A$  à  $x = x_m$ , nous obtenons:

$$C_I = \frac{\tau_{sc,m}}{A \sinh kx_m}, \quad \Delta = \frac{\tau_{sc,m} \sinh kx}{A \sinh kx_m}, \quad 0 \leq x \leq x_m \quad (24)$$

Pour  $x_m \leq x \leq a$ , nous pouvons substituer  $\tau_{sc} = \tau_{sc,m}$  à l'équation 2. L'intégration de ces équations, en introduisant les conditions aux limites appropriées donne:

$$N_s = N - p \tau_{sc,m} (a - x) \quad ; \quad N_c = p \tau_{sc,m} (a - x) \quad x_m \leq x \leq a \quad (25)$$

Pour  $0 \leq x_m \leq a$ ,  $\tau_{sc} = A\Delta$ ,  $\Delta$  étant donné par l'équation 24. Substituant ces équations à l'équation 2, intégrant les équations en satisfaisant l'équilibre à  $x = x_m$  (équation 25), nous obtenons:

$$N_s = N - \frac{p \tau_{sc,m}}{k} \left( ka - kx_m - \frac{\cosh kx - \cosh kx_m}{\sinh kx_m} \right) \quad (26a)$$

$$N_c = \frac{p \tau_{sc,m}}{k} \left( ka - kx_m - \frac{\cosh kx - \cosh kx_m}{\sinh kx_m} \right) \quad 0 \leq x \leq x_m \quad (26b)$$

Les équations 3 et 26 avec les conditions aux limites appropriées donnent les déplacements correspondants:

$$u_s = \frac{Nx}{A_s E_s} - \frac{p \tau_{sc,m}}{k^2 A_s E_s} \left[ kx(ka - kx_m) + \frac{kx \cosh kx_m - \sinh kx}{\sinh kx_m} \right] \quad (27a)$$

$$u_c = \frac{p \tau_{sc,m}}{k^2 A_c E_c} \left[ kx(ka - kx_m) + \frac{kx \cosh kx_m - \sinh kx}{\sinh kx_m} \right] \quad 0 \leq x \leq x_m \quad (27b)$$

$$u_s = \frac{Nx}{A_s E_s} + \frac{p \tau_{sc,m}}{k^2 A_s E_s} \left[ \frac{k^2 x_m^2 - kx(2ka - kx)}{2} - \frac{kx_m \cosh kx_m - \sinh kx_m}{\sinh kx_m} \right] \quad (27c)$$

$$u_c = \frac{p \tau_{sc,m}}{k^2 A_c E_c} \left[ \frac{kx(2ka - kx) - k^2 x_m^2}{2} + \frac{kx_m \cosh kx_m - \sinh kx_m}{\sinh kx_m} \right] \quad x_m \leq x \leq a \quad (27d)$$

Les équations 4, 24, 27 donnent:

$$N = \frac{p \tau_{sc,m}}{k} (1 + n\Omega) \left[ (ka - kx_m) + \coth kx_m \right] \quad (28)$$

La déformation moyenne dans l'acier est obtenue en divisant  $u_s$  à  $x=a$  par la moitié de l'espacement entre fissures  $a$ . Des équations 27 a-d nous obtenons:

$$\varepsilon = \frac{N}{A_s E_s} - \frac{p \tau_{sc,m}}{k^2 a A_s E_s} \left[ \frac{k^2 (a^2 - x_m^2)}{2} + kx_m \coth kx_m - 1 \right] \quad (29)$$

Les équations 12 et 29 donnent:

$$\sigma_c = \frac{p \tau_{sc,m}}{k^2 a A_c} \left[ (kx_m \coth kx_m - 1) + \frac{k^2 (a^2 - x_m^2)}{2} \right] \quad (30)$$

La contrainte maximale du béton est calculée à partir des équations 26. Posant la contrainte maximale du béton égale à  $f'_t$  nous obtenons:

$$f'_t = \frac{p \tau_{sc,m}}{k A_c} \left( \frac{\cosh kx_m - 1}{\sinh kx_m} + ka - kx_m \right) \quad (31)$$

Les équations 28-31 donnent les équations paramétriques adimensionnelles pour les rapports  $\sigma_c / f'_t$  et  $\varepsilon / \varepsilon_{fis}$ :

$$\frac{\sigma_c}{f'_t} = \frac{1}{2ka} \frac{2kx_m + (k^2 a^2 - k^2 x_m^2 - 2) \tanh kx_m}{1 - \operatorname{sech} kx_m + (ka - kx_m) \tanh kx_m} \quad (32-a)$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{fis}} = \frac{[2ka(ka - kx_m)(1 + n\Omega) - (k^2 a^2 - k^2 x_m^2 - 2)] \tanh kx_m + 2[ka(1 + n\Omega) - kx_m]}{2ka n\Omega [1 - \operatorname{sech} kx_m + (ka - kx_m) \tanh kx_m]} \quad (32-b)$$

Comme cela a été fait dans le cas de la relation linéaire glissement-contrainte d'adhérence, l'équation 32 peut être utilisé pour obtenir la relation  $\sigma_c / f'_t - \varepsilon / \varepsilon_{fis}$  en faisant varier continûment la valeur  $ka$  de  $\infty$  jusqu'à 0. Dans ce cas, toutefois, nous avons une autre inconnue,  $kx_m$ . Pour évaluer  $kx_m$ , nous utilisons la forme modifiée de l'équation 31 comme suit:

$$kx_m = ka + \frac{\cosh kx_m - 1}{\sinh kx_m} - f, \quad f = \frac{k A_c f'_t}{p \tau_{sc,m}} \quad (33)$$

où le terme  $f$  est un paramètre du problème. Il représente le rapport de l'effort de fissuration du béton ( $A_c f'_t$ ) à la force d'adhérence ( $k^{-1} p \tau_{sc,m}$ ) transférée à l'interface béton-acier sur la longueur caractéristique ( $k^{-1}$ ). GUPTA et MAESTRINI 1990 [31] a nommé ce paramètre  $f$  le "paramètre d'adhérence".

La figure 4 montre la relation entre  $kx_m$  et  $ka - f$  en accord avec l'équation 33. Lorsque  $kx_m$  est grand,  $(\cosh kx_m - 1) / \sinh kx_m \cong 1$ , et l'équation 33 devient:

$$kx_m = ka - f + 1 \quad (34)$$

D'autre part, lorsque  $kx_m$  est petit,  $(\cosh kx_m - 1) / \sinh kx_m \cong kx_m / 2$ , Donc:

$$kx_m = 2(ka - f) \quad (35)$$

Deux lignes  $x_m = a$  sont montrées figure 4, l'un pour  $f = 0$  et l'autre pour  $f = 1$ . Les valeurs admissibles de  $x_m$  se placent en dessous de la ligne  $x_m = a$  pour la valeur appropriée de  $f$ . Pour  $f = 1$ , l'équation 33 est bonne pour toutes les valeurs de  $a$ , ainsi que lorsque  $f > 1$ . En plaçant  $x_m = a$  dans l'équation 32, on retrouve l'équation 17, qui correspond à la relation glissement-contrainte d'adhérence linéaire.

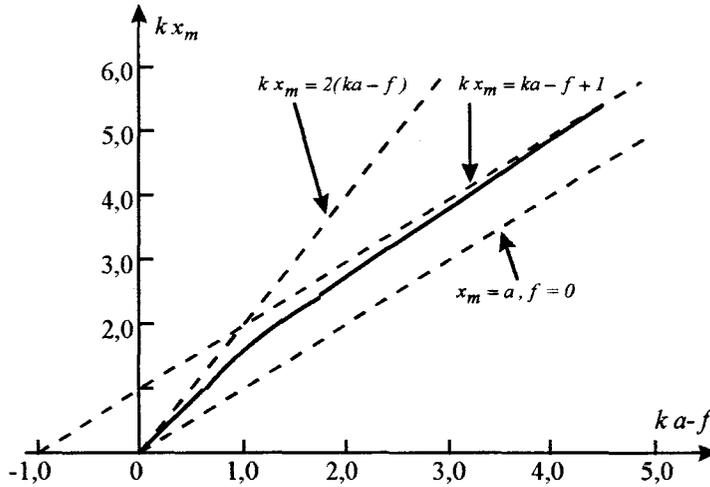


Figure 4: Variation de  $x_m$  avec  $a$

La plus petite valeur possible de  $x_m$  est zéro, qui est associée avec l'espacement minimum de fissure. Les équations 33 et 35 donnent:

$$a_{min} = \frac{f}{k} = \frac{A_c f_t'}{p \tau_{sc,m}} \quad (36)$$

La valeur de  $a_{min}$  donnée par l'équation 36 est identique à la valeur  $a$  donnée par l'équation 21, qui a été dérivée dans le cas de la contrainte d'adhérence constante. Lorsque  $a < a_{min}$ , la valeur de  $x_m$  donnée par l'équation 33 ou 35 doit être négative, ce qui est impossible. Dans de tels cas, nous devons supposer  $x_m = 0$ . Cela signifie qu'une contrainte d'adhérence constante doit être supposée sur la barre à une valeur appropriée de  $T$  sans aucune fissure. Les courbes montrant la relation  $\sigma_c / f_t' - \varepsilon / \varepsilon_{fis}$  basées sur les équations 32 et 33 ont été obtenues pour plusieurs groupes de  $(n\Omega, f)$ . Les courbes faisant varier pour  $n\Omega = 0,002$  et  $0,5$  et  $f$  entre 0 et 5,0 sont montrées figure 5. Lorsque  $f = 0$ , la relation linéaire de glissement-contrainte d'adhérence s'applique. Ce cas constitue une borne supérieure pour les valeurs  $\sigma_c / f_t'$ . Dans le cas de la contrainte d'adhérence constante,  $\sigma_c / f_t' = 0,5$ . Les courbes avec paramètre d'adhérence plus élevé ( $f = 5$ ) approchent cette borne inférieure ( $\sigma_c / f_t' = 0,5$ ) peu après la première fissure.

Il est aussi montré que la relation contrainte de traction effective-déformation du béton au stade post fissuration est une fonction de deux paramètres, le paramètre  $n\Omega$  et le paramètre d'adhérence ( $f$ ). Le paramètre  $n\Omega$  est connu exactement mais le paramètre  $f$  ne l'est pas. Le module de glissement ( $A$ ) et la contrainte d'adhérence maximale sont les propriétés constitutives idéalisées, mais elles sont aussi largement variables et difficiles à déterminer expérimentalement.

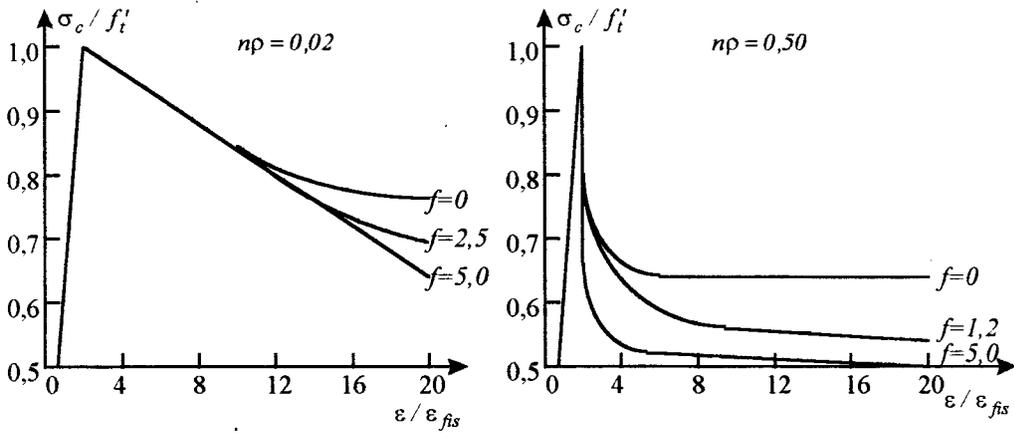


Figure 5: Courbes contrainte de traction effective-déformation du béton, dans le cas d'une relation bilinéaire entre glissement et contrainte d'adhérence

### 3.4. Relation simplifiée selon GUPTA et MAESTRINI 1990 [31]

Comme nous l'avons déjà dit, la valeur réelle du paramètre d'adhérence ( $f$ ) est vraisemblablement fortement variable. Les expressions fonctionnelles d'une relation décrivant ces variations ne sont pas connues. Il est donc souhaitable d'avoir une relation charge-déformation approximative qui n'inclue pas ce paramètre d'adhérence.

La courbe simplifiée charge-déformation est montrée schématiquement figure 6. On définit les coordonnées  $\varepsilon/\varepsilon_y$  pour X et  $N/A_s f_y$  pour Y. Les coordonnées du point A sont déterminées par la déformation à la fissuration du béton.

$$X_A = \frac{nf_t'}{f_y} ; \quad Y_A = \frac{nf_t'}{f_y} \frac{1+n\Omega}{n\Omega} \quad (37)$$

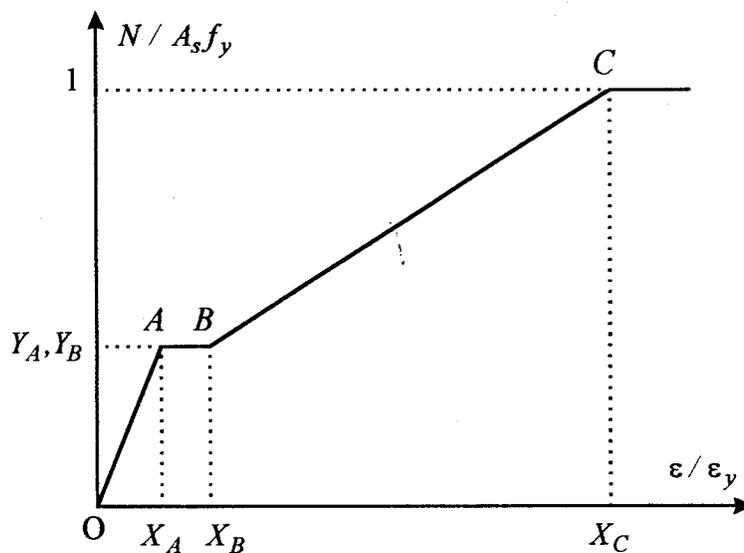


Figure 4: Courbe simplifiée charge-déformation

Le point  $B$  est défini:

$$X_B = \frac{nf_t'}{f_y} \left( 1 + \frac{1+n\Omega}{10n\Omega} \right) ; \quad Y_B = \frac{nf_t'}{f_y} \frac{1+n\Omega}{n\Omega} \quad (38)$$

Le point  $C$  est déterminé en posant  $N / A_s f_y = 1$  dans l'équation 36, ce qui donne:

$$X_C = 1 - \frac{1}{2} \frac{nf_t'}{n\Omega f_y} ; \quad Y_C = 1 \quad (39)$$

La courbe contrainte de traction effective-déformation du béton correspondant est montrée la figure 7, où :

$$\begin{aligned} X_A &= \frac{nf_t'}{f_y} ; \quad Y_A = 1 \\ X_B &= \frac{nf_t'}{f_y} \left( 1 + \frac{1+n\Omega}{10n\Omega} \right) ; \quad Y_B = 1 - \frac{1+n\Omega}{10} \\ X_C &= 1 - \frac{1}{2} \frac{nf_t'}{n\Omega f_y} ; \quad Y_C = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (40)$$

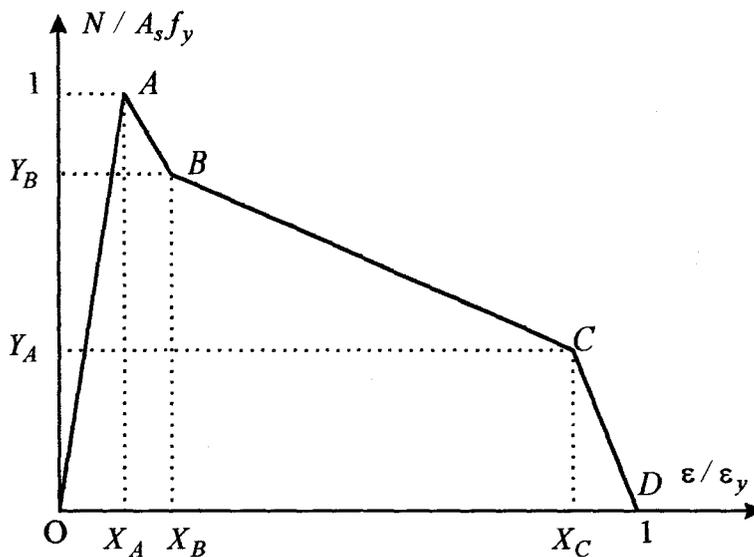
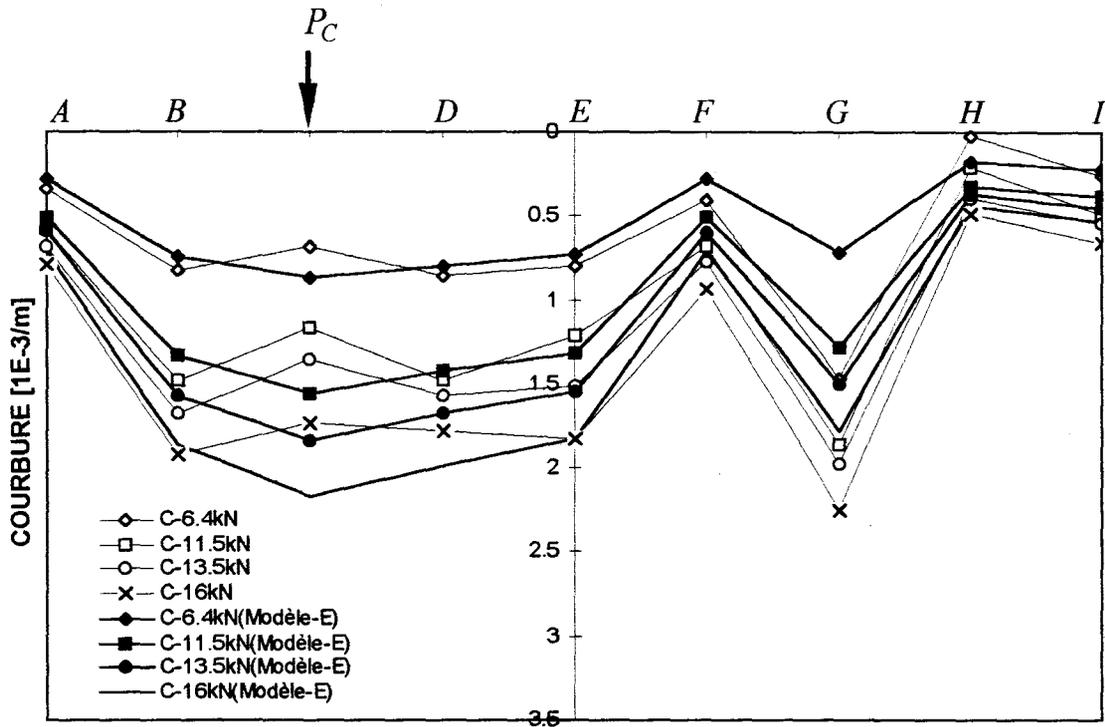


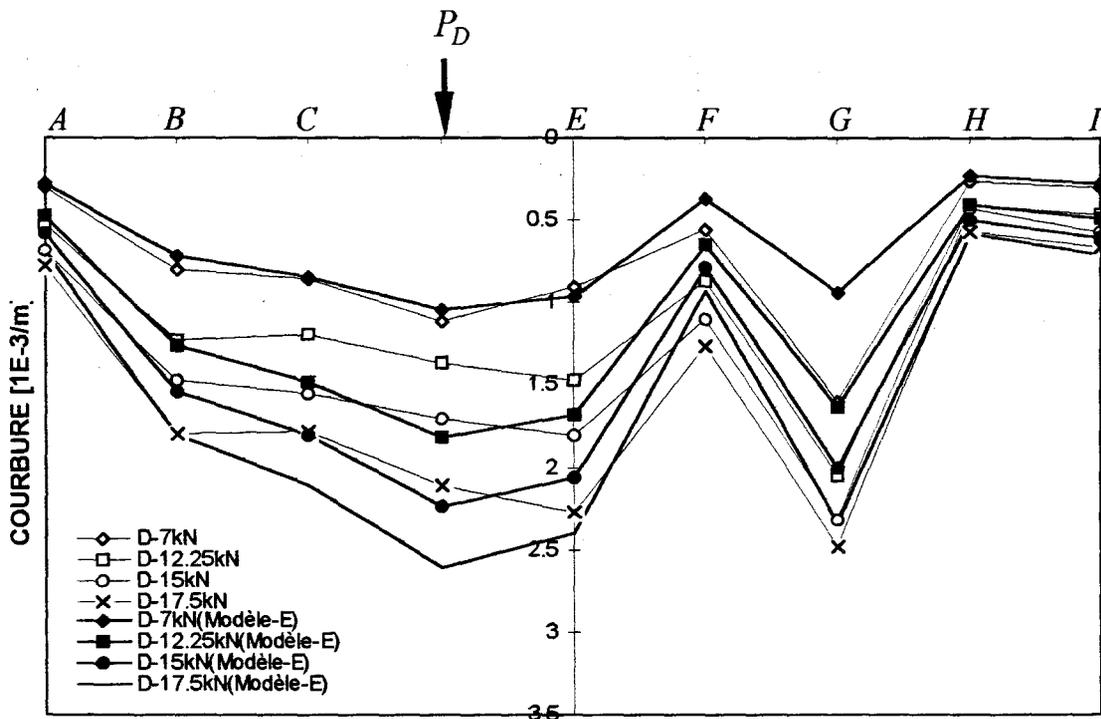
Figure 7: Courbe simplifiée contrainte de traction effective-déformation du béton

## ANNEXE III

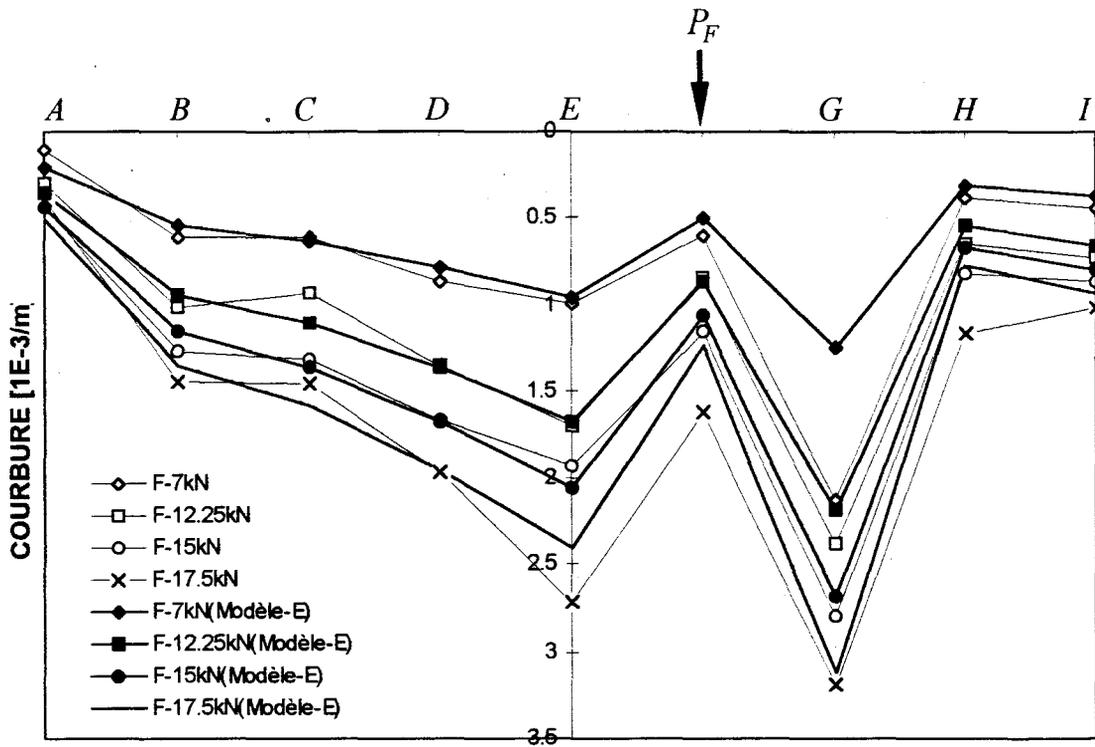
VALEURS DE LA COURBURE LE LONG DE LA POUTRE BICL  
 ( $D_{st,x}$  obtenues dans le cas du chargement centré et du chargement excentré 20 cm à droite)



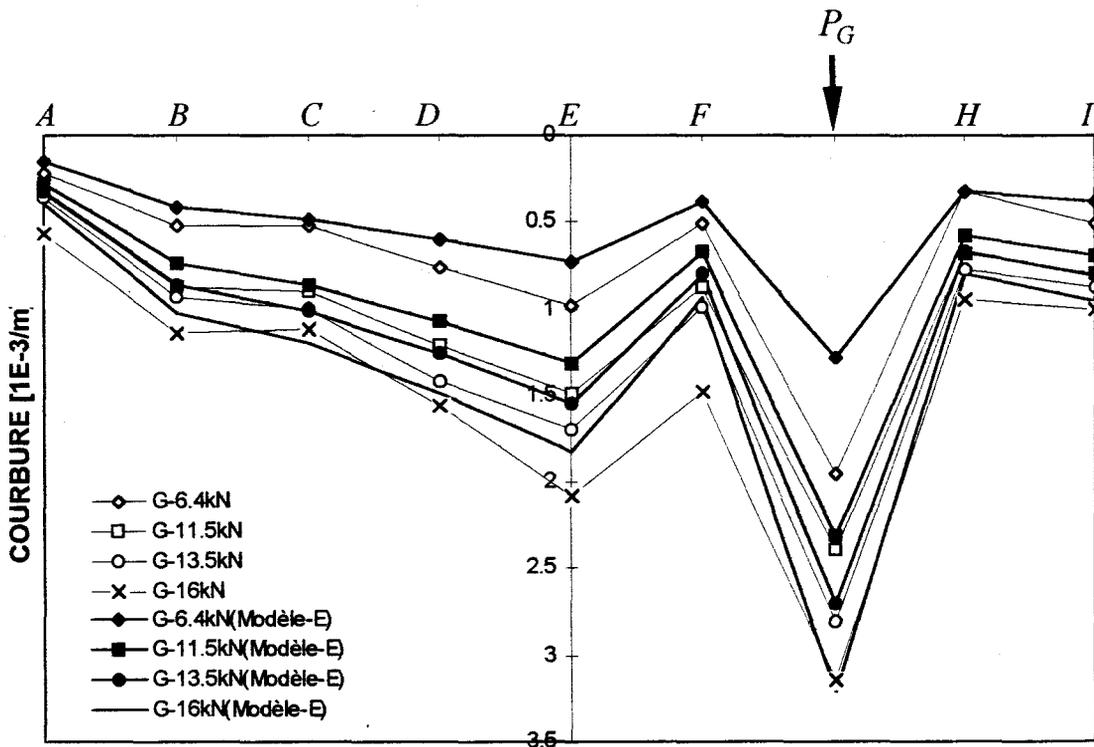
Valeurs de la courbure le long de la poutre; chargement excentré -40 cm à gauche  
 ( $D_{st,x}$  obtenues dans le cas du chargement centré)



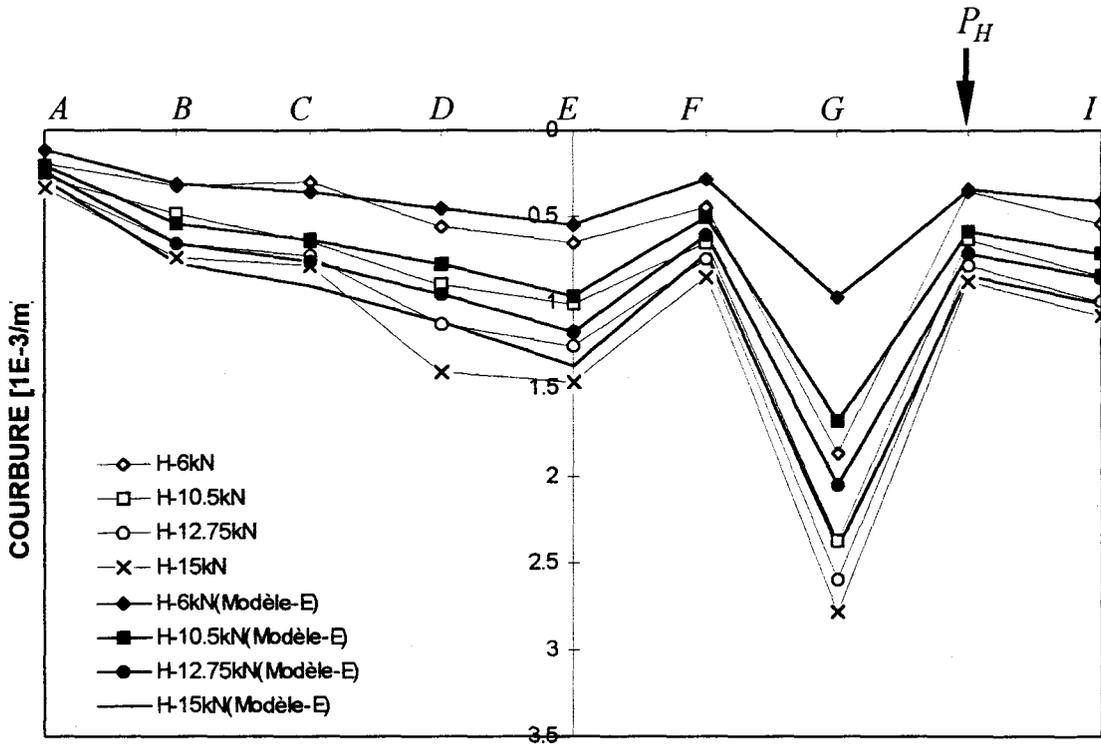
Valeurs de la courbure le long de la poutre; chargement excentré -20 cm à gauche  
 ( $D_{st,x}$  obtenues dans le cas du chargement centré)



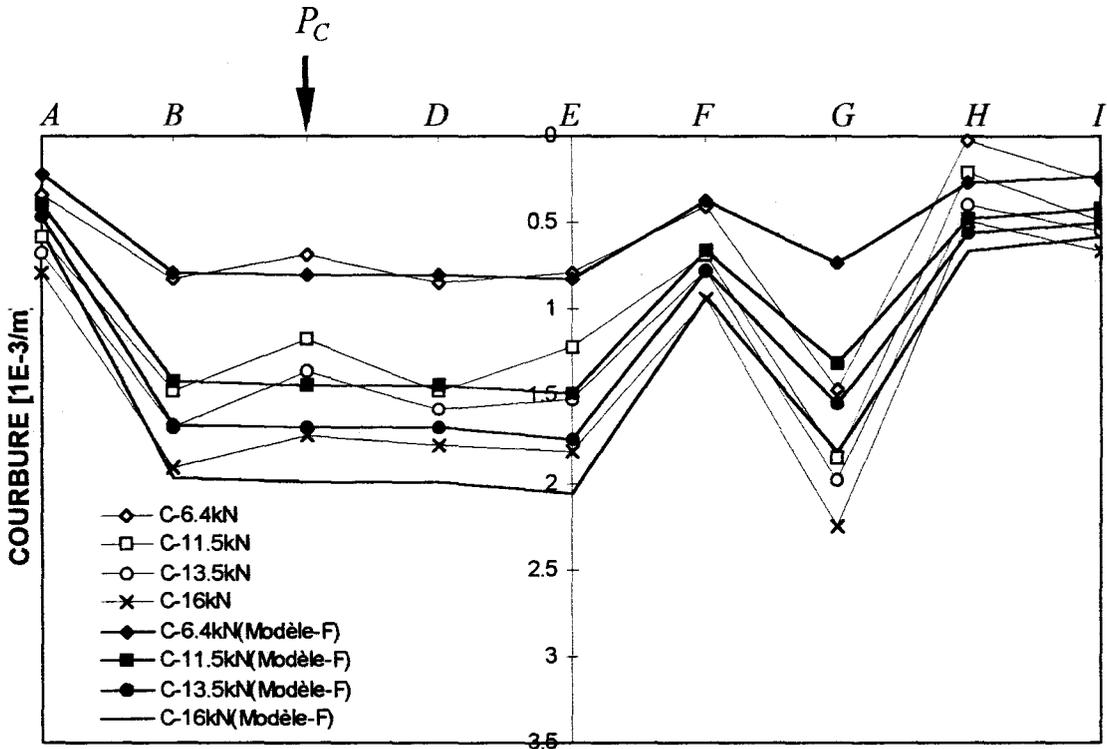
Valeurs de la courbure le long de la poutre; chargement excentré 20 cm à droite  
( $D_{st,x}$  obtenues dans le cas du chargement centré)



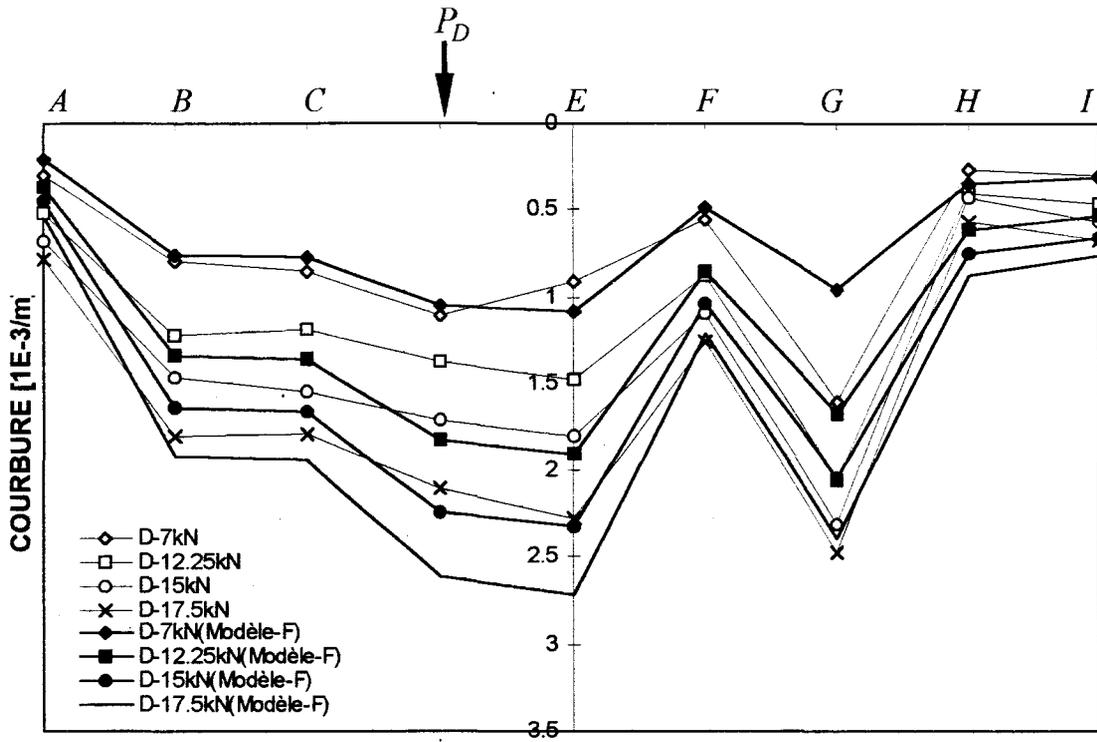
Valeurs de la courbure le long de la poutre; chargement excentré 40 cm à droite  
( $D_{st,x}$  obtenues dans le cas du chargement centré)



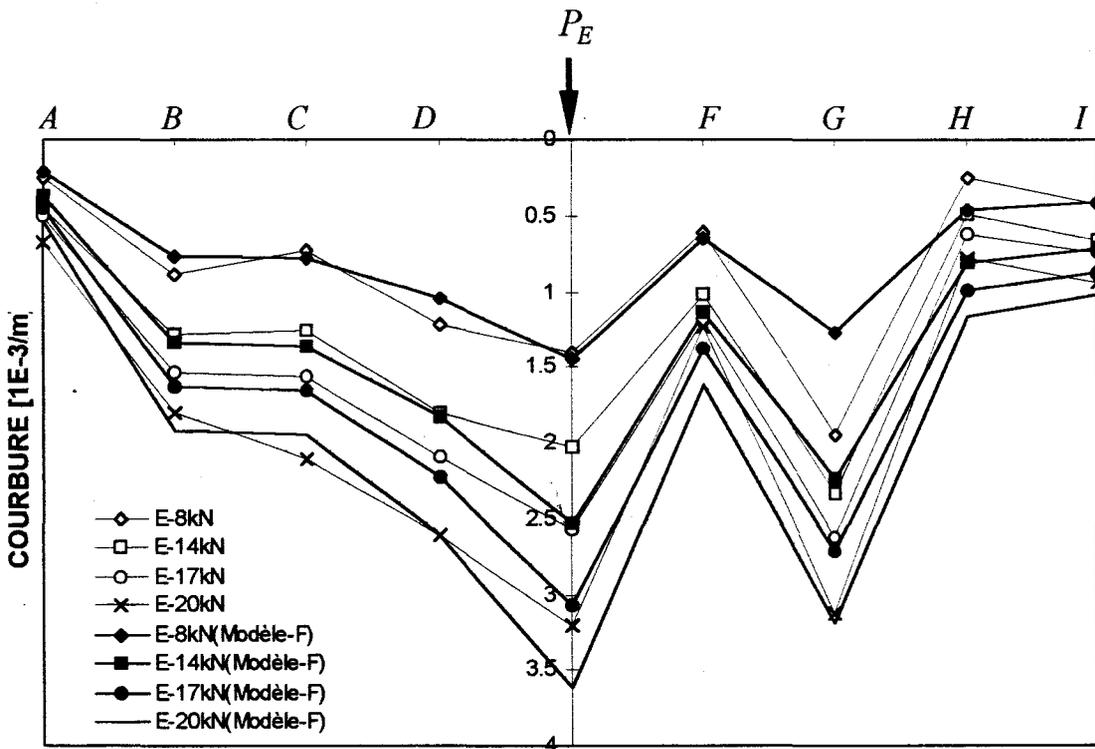
Valeurs de la courbure le long de la poutre; chargement excentré 60 cm à droite  
 ( $D_{st,x}$  obtenues dans le cas du chargement centré)



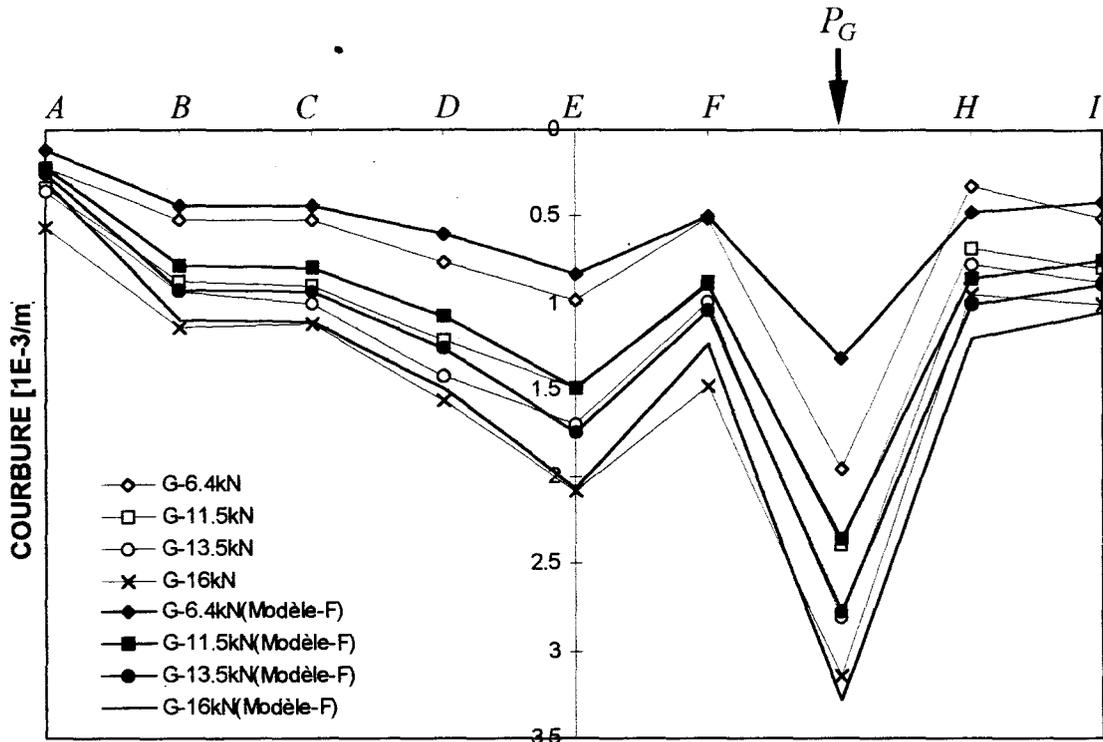
Valeurs de la courbure le long de la poutre; chargement excentré 40 cm à gauche  
 ( $D_{st,x}$  obtenues dans le cas du chargement excentré 20 cm à droite)



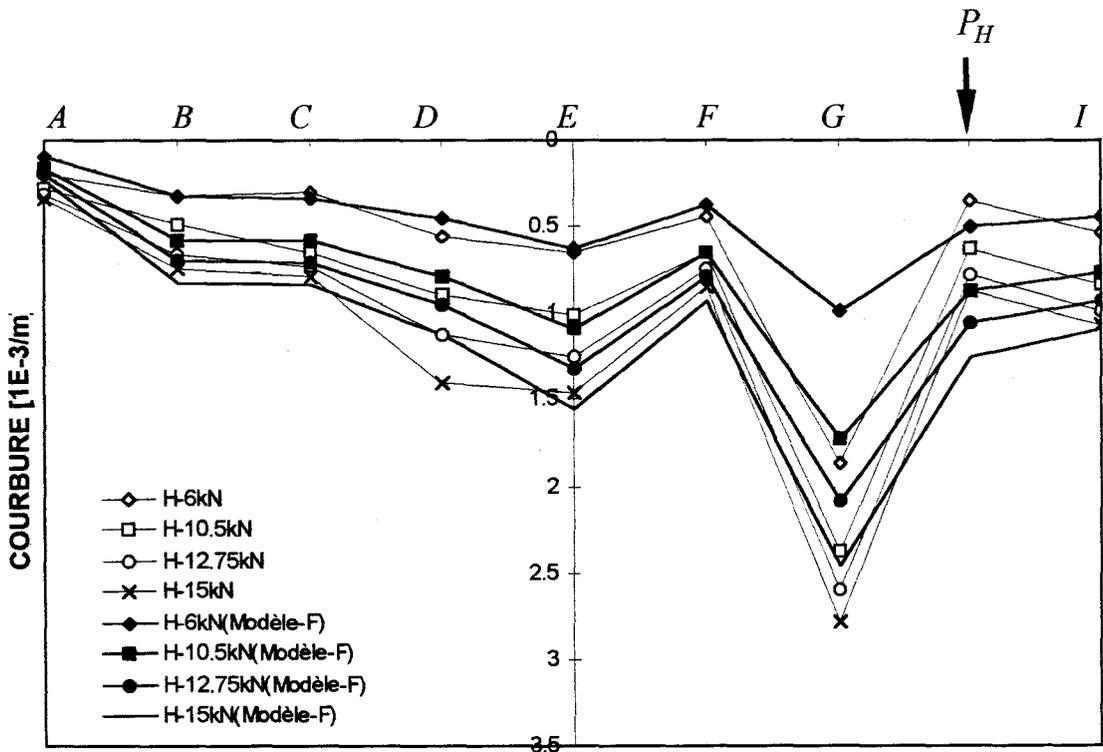
Valeurs de la courbure le long de la poutre; chargement excentré 20 cm à gauche  
 ( $D_{st,x}$  obtenues dans le cas du chargement excentré 20 cm à droite)



Valeurs de la courbure le long de la poutre; chargement centré  
 ( $D_{st,x}$  obtenues dans le cas du chargement excentré 20 cm à droite)



Valeurs de la courbure le long de la poutre; chargement excentré 40 cm à droite  
 ( $D_{st,x}$  obtenues dans le cas du chargement excentré 20 cm à droite)



Valeurs de la courbure le long de la poutre; chargement excentré 60 cm à droite  
 ( $D_{st,x}$  obtenues dans le cas du chargement excentré 20 cm à droite)

## ANNEXE IV

### **PHOTOS DES POUTRES CORRODEE ET DES ARMATURES TENDUES DE LA POUTRE B1CL**

Les figures 1 à 3 présentent le dispositif d'essais et l'état des poutres corrodées. Les figures 4 à 8 présentent l'état général de corrosion des armatures tendues de la poutre *B1CL* (GEO 1999 [61]).



*Figure 1: Dispositif d'essai*



*Figure 2: Etat des poutres corrodées*



*Figure 3: Etat des poutres corrodées*



Figure 4: Etat de corrosion des armatures tendues en extrémité de poutre (GEO 1999 [61])



Figure 5: Etat de corrosion des armatures tendues en zone I (GEO 1999 [61])



Figure 6: Etat de corrosion des armatures tendues en zone G (GEO 1999 [61])



Figure 7: Etat de corrosion des armatures tendues en zone F (GEO 1999 [61])

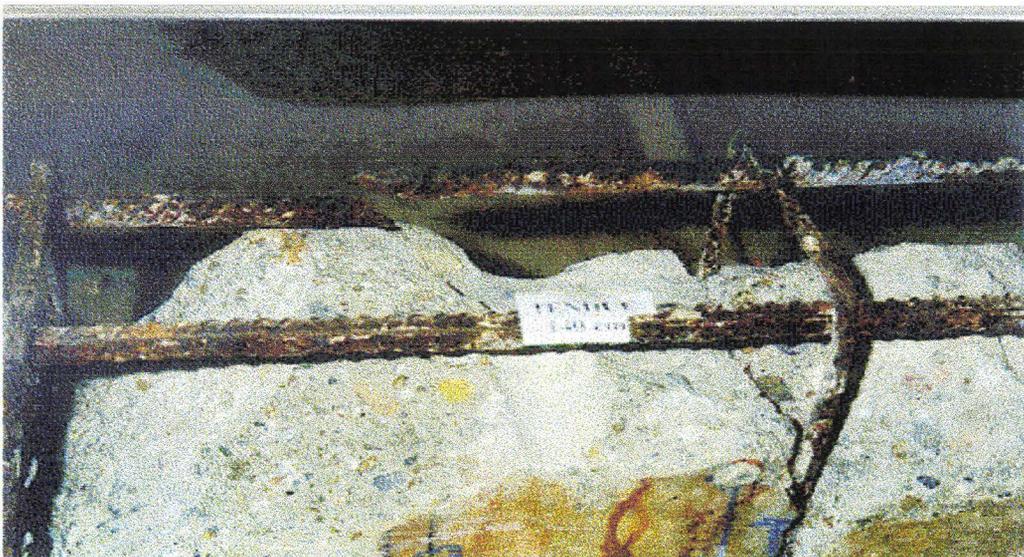


Figure 8: Etat de corrosion des armatures tendues en Zone E (GEO 1999 [61])

