N⁰ d'ordre : 2480

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Désiré SEU

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE DIFFUSIONS INFINI-DIMENSIONNELLES LIÉES À LA MÉCANIQUE STATISTIQUE

Soutenue le 4 février 1999 devant la Commission d'Examen :

Président	:	G. ROYER ,	Université d'Orléans
Directeur de Thèse	:	S. RŒLLY ,	CNRS, Université de Lille I
Rapporteurs	:	P. DAI PRA ,	Université Polytechnique de Milan (Italie)
		G. ROYER ,	Université d'Orléans
Examinateurs	:	A. DERMOUNE ,	Université de Lille I
		M. FRADON ,	Université de Lille I

à mes parents

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier ma directrice de thèse Sylvie Rœlly pour son accueil, sa patience, sa disponibilité et ses encouragements.

En juin 1995, Peter Imkeller en cette date Professeur à l'Université de Franche Comté et dirigeant la première année de ma thèse, pour cause de départ, me charga de prendre contact avec Sylvie Rœlly ou Hans Zessin à l'Université de Lille 1 pour qu'ils puissent assurer la suite de ma recherche, s'ils le veulent. Il a suffi un seul mot pour que Sylvie Rœlly me réponde, sans conditions, en me définissant son champ de recherche. C'est ainsi que le 27 septembre 1995 je débarqua à Lille. Ils m'ont accueilli chaleureusement. Ensuite, elle me proposa un sujet lié à la Mécanique Statistique qui est honnêtement nouveau pour moi. En tout cas, j'ai beaucoup appris auprès d'elle : le domaine de la théorie des probabilités liée à la Mécanique Statistique et aussi la rigueur dans la manière d'écrire les mathématiques. Je ne cesserai de la remercier ainsi que Hans Zessin pour ses remarques qui ont été enrichissantes.

Je dois aussi beaucoup à Gilles Royer. Je le remercie pour de nombreuses discussions que j'ai eues avec lui après les différents colloques à Lille 1, nécessaires à l'avancement de ce travail. Il répondait toujours présent au moment où j'ai besoin de son point de vue. En plus, il a accepté avec Paolo Dai Pra de juger ce travail et d'en être les rapporteurs. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma sincère reconnaissance.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Azzouz Dermoune et Myriam Fradon qui ont accepté de faire part du jury de ma thèse.

De la même manière, je remercie Pascal Grandin pour ses perpétuels encouragements.

Je remercie Arlette Lengaigne et ses collèges de bureau, ainsi que tous les personnels de la reprographie pour tous les services qu'ils me rendent. De plus, leur sourir me sert souvent de reconfort.

Je remercie également tous les membres du laboratoire de Statistiques et Probabilités ainsi que tous les amis de "gat" pour le petit café matinal, ceux de Lille, Paris et Besançon.

Je remercie spécialement mes parents à Siably qui ont toujours cru en moi, et deux sympatiques familles françaises : Barbe et Carlier, en particulier Christelle pour tout.

Un merci spécial aussi à Amrick, Flora, Stéphane et Priscilla Mc Intyre Audrey.

Je termine en rendant grâce à Dieu pour le courage, la santé et le reconfort qu'il m'apporte dans mon quotidien.

Résumé :

Cette thèse est consacrée à l'étude de propriétés telles que existence, unicité ou ergodicité des solutions de trois types d'équations différentielles stochastiques liées à la Mécanique Statistique ; il s'agit de l'analyse de modélisations par une dynamique aléatoire de systèmes finis ou infinis de particules en interaction sur le réseau $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$.

Dans un premier temps, nous traitons l'ergodicité de diffusions browniennes fini - dimensionnelles dont la dérive est le gradient d'une fonction h appelée hamiltonien. Grâce à leur propriété de récurrence au sens de Harris, ces processus sont ergodiques, *i.e* la loi du système dynamique aléatoire converge en temps infini vers un état d'équilibre qui ne dépend pas des conditions initiales. De plus, la limite est identifiée comme l'unique mesure de Gibbs associée au hamiltonien h.

Dans le chapitre suivant, nous généralisons cette problématique à des diffusions browniennes de type gradient à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, donc infini-dimensionnelles. Celles-ci n'étant plus récurrentes, nous exhibons des conditions suffisantes que doit satisfaire le hamiltonien de la dérive pour qu'il y ait ergodicité du système, que l'interaction entre les coordonnées soit à portée finie ou infinie. Notre méthode consiste à démontrer que le semi-groupe de la diffusion est un opérateur exponentiellement contractant sur l'ensemble des fonctions lipschitziennes. Quand elle existe, la limite ergodique est l'unique mesure de Gibbs, à support régulier, associée au hamiltonien. Nous illustrons nos résultats théoriques par des exemples issus de modèles importants en Mécanique Statistique.

Dans le dernier chapitre, nous considérons la classe de diffusions à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ dites de Ginzburg-Landau. Elles modélisent, en chaque site du réseau $\mathbb{Z}^d$, l'évolution d'un flux de courants aléatoires créés le long des arêtes orientées ayant pour origine ce site. C'est un type de modèle conservatif pour lequel nous prouvons existence et unicité des solutions dans certaines conditions de régularité des coefficients. Enfin, nous exhibons une famille (paramétrée par les fonctions harmoniques sur $\mathbb{Z}^d$) de mesures de Gibbs invariantes pour un exemple classique de dynamique de Ginzburg-Landau.

Mots clés : diffusion brownienne infini-dimensionnelle, ergodicité, modèle de Ginzburg-Landau, mesure invariante, mesure de Gibbs.

Classification AMS : 60H10, 60G60, 60K35, 60K60, 60J60

Title :

Some properties of infinite-dimensional diffusions related to Statistical Mechanics

Summary :

This thesis is devoted to the study of some properties (like existence, uniqueness or ergodicity) of the solutions of stochastic differential equations related to Statistical Mechanics ; they are modelization of random dynamics of infinite particle systems on the lattice $\mathbb{Z}^d$.

We first state the ergodicity of finite-dimensional Brownian diffusions when the drift is the gradient of a Hamilton function, denoted by h. Thanks to their Harris recurrence property, these processes are ergodic, that is the law of the dynamical system converges for infinite time to an equilibrium state which does not depend of the initial conditions. Moreover this limit distribution is identified as the Gibbs measure associated to the Hamiltonien h.

In the next chapter, we study the ergodicity of gradient diffusions but now in an infinite-dimensional situation, i.e when the configuration space is $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Usually, they are no more recurrent, then we have to state conditions on the Hamilton function h in order to obtain the convergence to equilibrium. Since the limit distribution is the unique invariant measure for the dynamics, we deduce that the set of regular Gibbs measures associated to h contains at most one element (in other words, this is no phase transition). We illustrate our results with some examples.

In the last chapter, we consider the class of infinite-dimensional Ginzburg-Landau diffusions. These processes modelize at each site of the lattice $\mathbb{Z}^d$ the sum of the currents of magnetization with neighbour sites. We prove existence and uniqueness of these conservative diffusions under regularity conditions of the coefficients. Then, we present a family of Gibbs measures - indexed by harmonic sequences on $\mathbb{Z}^d$ - which are invariant for a typical examples of Ginzburg-Landau dynamics.

Keys words :

Infinite-dimensional Brownian diffusion, ergodicity, Ginzburg-Landau dynamics, invariant measure, Gibbs state.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction générale

1 Introduction générale

Ce travail est consacré à l'étude de certaines propriétés de solutions d'équations différentielles stochastiques infini-dimensionnelles ayant un lien avec la Mécanique Statistique. Plus précisément, il s'agit de diffusions dont le terme martingale est brownien et dont le terme de dérive est le gradient d'une fonctionnelle d'énergie appelée hamiltonien. Les solutions de telles équations différentielles stochastiques modélisent l'évolution aléatoire de systèmes infinis de particules en interaction forte.

La Mécanique Statistique est un domaine à la frontière entre la Physique théorique et la théorie des Probabilités. Elle est fondée au début du 19^e siècle, suite au contraste entre la grande complexité de la structure microscopique de certains systèmes physiques et la relative simplicité de leur structure macroscopique, décrite à l'aide de certaines fonctionnelles (énergie, entropie ...). Ce contraste, point de départ des travaux de Maxwell, Boltzmann et Gibbs, va conduire ceux-ci à poser la question :

Étant donné un système infini de particules soumises à un potentiel d'interaction, quelle est la (ou les) mesure(s) de probabilité sur l'espace des configurations appropriée(s) pour décrire le phénomène physique d'équilibre?

Le postulat de Boltzmann-Gibbs y répond :

Une fois fixé un volume fini Λ et connaissant parfaitement l'état du système à l'extérieur de Λ, la probabilité d'un état dans le volume Λ est proportionnelle à la fonction $\exp(-h_\Lambda)$, *où h_Λ est la fonction hamiltonien sur Λ définie par l'interaction.*

La Mécanique Statistique s'est donc fixé pour objectif d'expliquer le comportement macroscopique ou global de systèmes infinis de particules en interaction à partir de leur structure microscopique.

L'étude mathématique rigoureuse des systèmes gibbsiens, description mathématique naturelle de l'état d'équilibre d'un système physique constitué d'un grand nombre de composants en interaction, a débuté dans les années 1960 avec les travaux de Dobrushin (1968), Landford et Ruelle (1969) qui introduisent les concepts de base. Donnons un aperçu de ce formalisme. On note S l'ensemble au plus dénombrable permettant d'étiqueter les composants du système, ou encore l'ensemble des sites. On note E l'ensemble décrivant les états possibles de chaque composant, i.e. l'espace dans lequel les spins prennent leurs valeurs. Une configuration du système est la donnée de la valeur du spin en chaque site de S, c'est-à-dire qu'un état particulier du système est décrit par un élément $\omega = (\omega_i)_{i \in S}$ de l'espace produit $\Omega = E^S$, appelé espace des configurations.
Un état typique d'équilibre ne correspond pas à des configurations équiprobables puisque les spins interagissent entre eux. D'où la nécessité d'introduire une fonction quantifiant l'énergie potentielle et la fonction hamiltonien h, somme de toutes les contributions énergétiques. Intuitivement, à l'équilibre, pour un volume fini Λ et une configuration extérieure $\eta \in E^{\Lambda^c}$ fixée, une configuration de E^Λ apparaît avec une probabilité qui est une fonction (exponentiellement) décroissante de son hamiltonien. On est donc amené à définir une famille cohérente $\Pi_\Lambda^h(d\zeta/\eta)$ de noyaux de probabilité indexée par l'ensemble des parties finies Λ de S et par les configurations extérieures $\eta \in E^{\Lambda^c}$. Elle est appelée spécification de Gibbs associée à l'hamiltonien h et vaut :

$$\Pi_\Lambda^h(d\zeta/\eta) := Z_\Lambda^h(\eta)^{-1} exp\Big(-\beta h_\Lambda(\zeta\eta)\Big) m(d\zeta), \quad \zeta \in E^\Lambda, \quad \eta \in E^{\Lambda^c}$$

où l'on a supposé que

$$Z_\Lambda^h(\eta) := \int_{E^\Lambda} exp(-\beta h_\Lambda(\bar{\zeta}\eta) m(d\bar{\zeta}) < +\infty.$$

β est l'inverse de la température du système, $\zeta\eta$ est la concaténation des états $\zeta \in E^\Lambda$ et $\eta \in E^{\Lambda^c}$, et m est une mesure de référence sur E.

Une mesure de Gibbs est alors une solution du problème suivant, dit de D-L-R : *Existe-t-il une mesure μ sur Ω admettant comme lois conditionnelles par rapport à la tribu canonique la famille de spécifications introduite ci-dessus; Ou encore satisfaisant le système d'équations : $\mu\Pi_\Lambda^h = \mu$, pour toute partie Λ finie de S?*

Dans cette thèse, $E = \mathbb{R}$ et $S = \mathbb{Z}^d$. Nous adoptons une approche "dynamique" de certains types de mesures de Gibbs, c'est-à-dire que nous exhibons celles-ci comme mesures d'équilibre - limites ergodiques ou mesures invariantes -

Voici le propos du deuxième chapitre de la thèse : nous partons d'une équation différentielle gradient stochastique fini-dimensionnelle pour laquelle nous montrons existence et unicité de la mesure d'équilibre, qui est une mesure de Gibbs. Pour ce faire, nous utilisons la propriété de récurrence au sens de Harris de la diffusion. La méthode que nous utilisons pour montrer l'unicité de la mesure d'équilibre s'appuie sur les travaux d'auteurs tels que Khas'minskii (1960), Revuz-Duflo (1969), Ichihara-Kunita (1974) et Varadhan (1980).

Le troisième chapitre de cette thèse est l'étude du comportement asymptotique en temps d'un système infini-dimensionnel, limite spatiale de ceux introduits au chapitre 2. On considère donc une équation différentielle gradient stochastique infini-dimensionnelle admettant une unique solution à valeurs dans un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Nous exhibons des conditions suffisantes satisfaites par l'interaction, supposée à portée quelconque, pour obtenir l'ergodicité c'est-à-dire la convergence de la loi au temps t de la diffusion vers une unique mesure d'équilibre, indépendamment de la configuration initiale. Dans la littérature récente, l'ergodicité (dans L^2) de processus de diffusion découle de l'hypercontractivité du semi-groupe associé. Par opposition, le critère d'ergodicité que nous utilisons est particulièrement simple : il se base sur la contractivité du semi-groupe quand il agit sur l'espace des fonctions lipschitziennes.
Nous concluons ce chapitre en constatant que nous avons en fait obtenu des conditions suffisantes sur une classe d'interactions pour qu'il y ait unicité des mesures de Gibbs associées, ainsi construites comme limites ergodiqe diffusions à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$.

Dans tout ce qui précède, les spins sont définis sur les nœuds du réseau $\mathbb{Z}^d$. Le modèle de Ginzburg-Landau étudié dans le quatrième chapitre est défini en chaque site de $\mathbb{Z}^d$ comme la résultante de variables aléatoires dites courants aléatoires, définis le long des arêtes ayant pour sommet ce site. La dynamique stochastique de ce modèle est plus complexe que les précédentes car elle fait intervenir à la fois des opérateurs discrets et continus.
Notons qu'il existe plusieurs modèles dits de Ginzburg-Landau, dont la particularité est la dépendance entre les arêtes. Celui que nous considérons généralise le modèle utilisé par Fritz (1987a, 1987b, 1989).
Nous démontrons - ce qui semble être absent de la littérature existante - existence et

unicité de la solution, qui est obtenue comme divergence discrétisée de la solution d'une équation auxiliaire.

Puisque le modèle de Ginzburg-Landau est conservatif, il ne peut y avoir unicité des mesures d'équilibre. Dans un cas particulier important, nous donnons explicitement une famille de mesures de Gibbs, paramétrées par l'ensemble des suites harmoniques de $\mathbb{Z}^d$, qui sont toutes des mesures invariantes pour un même processus de Ginzburg-Landau.

Malheureusement, la question de savoir si toutes les mesures invariantes sont de Gibbs reste, entre autres, un problème ouvert.

Chapitre 2

Limite ergodique d'un système gradient fini-dimensionnel

2 Limite ergodique d'un système gradient fini-dimensionne

2.1 Introduction

Dans les années 50, l'étude de la limite ergodique de processus de diffusion fini-dimensionnels a attiré l'attention de nombreux auteurs.
En effet, avant 1955 les travaux de Fortet et Mourier font état de théorèmes limites des chaînes de Markov (cf. Fortet & Mourier (1953)).
Puis, ces résultats sont étendus aux chaînes de Markov récurrentes au sens de Harris et à valeurs dans un espace mesurable quelconque par certains auteurs notamment Harris (1956), Orey (1959) et Khas'minskii (1960).
Revuz et Duflo (1969) ou Ichihara et Kunita (1974) vont à nouveau utiliser les résultats précédents afin d'étudier les propriétés ergodiques de processus de Markov à temps continu.
D'autre part, Varadhan (1980), en utilisant le générateur infinitésimal du processus solution d'une équation différentielle stochastique, obtient des résultats de type ergodicité. Cette dernière approche est à la base de ce chapitre, même si la démarche que nous empruntons n'est pas tout à fait identique à celle de Varadhan.
Notons que certains auteurs, notamment Fritz utilisent les techniques entropiques pour montrer l'ergodicité de diffusions gradient puisque l'entropie relative de la loi de la diffusion au temps t par rapport à une mesure de référence est une bonne fonction de Liapounov; plus précisement le carré de la distance en variations entre deux mesures est majoré par deux fois l'entropie le l'une par rapport à l'autre (majoration due à Pinsker).

Donc dans ce chapitre, après avoir fait quelques rappels sur les équations différentielles stochastiques, nous décrivons l'évolution aléatoire d'un système fini de particules, puis nous montrons que cette diffusion admet une mesure invariante et qu'elle est récurrente au sens de Harris. Et enfin, nous démontrons son ergodicité. La méthode que nous utilisons est une compilation de différents résultats déjà connus.
Cette exposition a pour but de montrer la spécificité des techniques fini-dimensionnelles que nous ne pourrons pas généraliser aux équations différentielles stochastiques de dimension infinie.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé complet sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de ce chapitre.

Notations

Sur un espace $\mathcal{X}$ normé on définit :

- $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathcal{X}$.
- $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathcal{X}$.
- $\mathcal{C}_b(\mathcal{X})$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathcal{X}$.
- $\mathcal{C}^n(\mathcal{X})$ l'ensemble des fonctions n fois continûment différentiables sur $\mathcal{X}$.
- $\mathcal{C}_b^n(\mathcal{X})$ l'ensemble des fonctions n fois continûment différentiables et bornées ainsi que toutes ses dérivées sur $\mathcal{X}$.
- $\mathcal{C}_c^n(\mathcal{X})$ l'ensemble des fonctions n fois continûment différentiables et à support compact ainsi que toutes ses dérivées sur $\mathcal{X}$.
- Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ on note $x.y$ leur produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$,
- On désigne par $|\cdot|$ la norme $\ell^1(\mathbb{R}^n)$ c'est-à-dire pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$,
$$|x| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$
- on note $\|\cdot\|$ la norme $\ell^2(\mathbb{R}^n)$ c'est-à-dire
$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$
- et pour $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ on note $\langle f, g\rangle$ leur produit scalaire habituel dans $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$.

2.2 Equations différentielles stochastiques fini-dimensionnelles

Dans cette partie, nous donnons des conditions suffisantes assez faibles pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution forte d'une équation différentielle stochastique.

Soient $T > 0$ et
$$\begin{aligned} b \quad &: \quad [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \sigma \quad &: \quad [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned}$$

des fonctions mesurables.
Soient $B = \Big(B(t)\Big)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien n-dimensionnel, $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, la tribu engendrée par les $\Big(B(s)\Big)_{s\leq t}$ et ζ une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, indépendante de B.
On considérera des équations différentielles stochastiques n-dimensionnelles de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dX(t) & = & \sigma(t, X(t))dB(t) + b(t, X(t))dt \\ X(0) & = & x \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Le vecteur b est **la dérive** et la matrice σ est le **coefficient de diffusion** et $x \in \mathbb{R}^n$ est la condition initiale déterministe de $(X(t))_t$.

Définition 2.2.1

Sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, B)$, un processus $Y = (Y(t))_{t\geq 0}$ est dit **solution forte** *de l'équation différentielle stochastique (2.1) s'il satisfait :*
1) Y est $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté;
2) $Y(0) = x$ p.s.
3) $\int_0^t \|\sigma(s, Y(s))\|^2 ds + \int_0^t \|b(s, Y(s))\|^2 ds < \infty$ où $\|\sigma\|^2 = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^2$;
4) $Y(t) = x + \int_0^t \sigma(s, Y(s)).dB(s) + \int_0^t b(s, Y(s))ds$
soit encore pour $i = 1, \ldots, n$
$Y_i(t) = x_i + \int_0^t \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(s, Y(s))dB_j(s) + \int_0^t b_i(s, Y(s))ds$

Quand b et σ ne dépendent pas du temps on dit que l'équation différentielle stochastique (2.1) est homogène en temps.
Le théorème suivant nous donne des conditions suffisantes d'existence et d'unicité de la solution forte d'une équation différentielle stochastique. Nous l'énonçons dans le cas homogène en temps puisque dans la suite c'est le seul cas qui nous intéresse.

Théorème 2.2.2

Soient

$$\begin{array}{lcl} b & : & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \sigma & : & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n} \end{array}$$

des fonctions mesurables telles que :

(i) il existe des constantes $a \neq 0,\ c \in \mathbb{R}$ pour lesquelles pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x.b(x) \leq a\|x\|^2 + c, \tag{2.2}$$

(ii) les fonctions b et σ sont localement lipschitziennes; c'est-à-dire, pour tout $R > 0$, il existe une constante K_R telle que pour tout $\|x\| < R$ et $\|y\| < R$

$$\|\sigma(x) - \sigma(y)\| + \|b(x) - b(y)\| \leq K_R(1 + \|x - y\|). \tag{2.3}$$

Alors l'équation différentielle stochastique (2.1) admet une unique solution forte à trajectoires continues .

Exemple 2.2.3 *(Processus d'Ornstein-Uhlenbeck)*
Le processus vectoriel d'Ornstein-Uhlenbeck (O.U) est la solution de l'équation différentielle stochastique linéaire de Langevin

$$\begin{cases} dX(t) &= dB(t) - L.X(t)dt \\ X(0) &= x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.4}$$

avec L une matrice carrée d'ordre n. Il est donné par : pour tout $t \geq 0$,

$$X(t) = e^{-Lt}x + e^{-Lt}\int_0^t e^{Ls}.dB(s)$$

On verra dans le chapitre 3 une généralisation infini-dimensionnelle de l'équation (2.4).

On rappelle maintenant le caractère markovien des solutions.
Notons Q^x la loi du processus $(X(t))_{t\geq 0}$, solution forte de l'équation différentielle stochastique (2.1) où σ et b satisfont les hypothèses (2.2) et (2.3).
Les propriétés suivantes montrent la régularité de la solution forte par rapport à son état initial. Cela va jouer un grand rôle dans le paragraphe suivant.

Proposition 2.2.4
Soit $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Alors, pour $t \geq 0$, l'application

$$x \mapsto T_t f(x) \stackrel{\text{def}}{=} Q^x[f(X_t)] \stackrel{\text{def}}{=} E[f(X_t)/X_0 = x]$$

est continue (Continuité de Feller).
De plus, pour tout τ temps d'arrêt fini $Q^x - p.s$, et pour tout $t \geq 0$,

$$Q^x[f(X_{t+\tau})/\mathcal{F}_\tau] = Q^{X_\tau}[f(X_t)].$$

(Propriété forte de Markov).

Dans le cas gradient étudié par la suite, le processus vérifie une propriété plus forte que la continuité de Feller, que nous définissons ci-dessous.

Définition 2.2.5
On dit que le semi-groupe $(T_t)_t$ satisfait la propriété forte de Feller si pour toute fonction f mesurable bornée, l'application $x \mapsto T_t f(x)$ est continue.

Nous allons maintenant décrire le système gradient qui nous intéresse dans ce chapitre.

2.3 Description de la dynamique gradient

On se fixe comme espace d'états $\Omega = C([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$, l'espace canonique des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ la σ-algèbre canonique associée. Soit B un mouvement brownien n-dimensionnel. On considère l'équation différentielle stochastique suivante, appelée équation différentielle stochastique gradient ,

$$(2.5) \qquad \begin{cases} dX(t) &= dB(t) - \frac{1}{2}\nabla h(X(t))dt \;, t > 0 \\ X(0) &= x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où ∇ désigne l'opérateur gradient et h une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^n$, continûment différentiable.
Coordonnées par coordonnées le système (2.5) s'écrit :

$$(2.6) \qquad \begin{cases} dX_i(t) &= dB_i(t) - \frac{1}{2}\nabla_i h(X(t))dt \;, t > 0,\; i = 1, ..., n \\ X_i(0) &= x_i \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Dans le cas où la fonction h vaut $h(x) = L\|x\|^2$, on reconnait l'équation différentielle stochastique (2.4) dont la solution est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Dans tout ce chapitre, on se place sous les hypothèses suivantes.

Hypothèses

$\mathbf{H_1}$) il existe des constantes $a > 0$ et $c \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$x.\nabla h(x) \geq a\|x\|^2 + c$$

$\mathbf{H_2}$) la fonction ∇h est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$.

Sous les hypothèses ($\mathbf{H_1}$) et ($\mathbf{H_2}$) il est clair que les conditions (2.2), (2.3) du théorème 2.2.2 sont satisfaites; ainsi le système gradient stochastique (2.5) admet une unique solution forte fellerienne $(X(t))_{t\geq 0}$ à trajectoires continues. La loi de ce processus de diffusion est notée Q^x.

Dans le reste de ce chapitre, on notera $(X(t))_{t\geq 0}$ la solution de l'équation différentielle stochastique (2.5) sous les hypothèses ($\mathbf{H_1}$) et ($\mathbf{H_2}$).

Après avoir introduit la dynamique, nous allons aborder la propriété de récurrence du processus $(X(t))_{t\geq 0}$, entrainant la grossièreté de la tribu asymptotique, puis l'ergodicité du processus vers l'unique mesure invariante.

2.4 Existence d'une mesure invariante et propriété de récurrence au sens de Harris

Définition 2.4.1
Une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^n$ est dite **invariante** *sous l'action d'un semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ si et seulement si pour tout $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $t \geq 0$,*

$$\mu(T_t f) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} T_t f(x)\ \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ \mu(dx) \stackrel{\text{déf}}{=} \mu(f)\ .$$

On s'intéresse au semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ associé au processus de diffusion $(X(t))_{t\geq 0}$ solution du système gradient stochastique (2.5), défini pour $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$T_t f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} E[f(X(t))/X(0) = x] \stackrel{\text{déf}}{=} Q^x\Big(f(X(t))\Big).$$

Remarque 2.4.2

Pour $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$ la fonction $(x,t) \mapsto T_t f(x)$ est deux fois continûment différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$ et continûment différentiable en $t \geq 0$; de plus,

$$\frac{\partial}{\partial t} T_t f(x) = A T_t f(x) = T_t A f(x) ,$$

où A est le générateur infinitésimal de la diffusion $(X(t))_{t\geq 0}$. Donc une mesure de probabilité μ sera invariante sous l'action du semi-groupe $(T_t)_t$ si et seulement si pour tout $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$ et $t \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_t A f(x)\, \mu(dx) = 0,$$

ou encore

$$\int_{\mathbb{R}^n} A f(x)\, \mu(dx) = 0.$$

Soit μ la mesure sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\mu(dx) = \frac{1}{Z} \exp(-h(x)) dx, \tag{2.7}$$

où la constante de renormalisation $Z = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-h(x)) dx$.

On se place de plus sous l'hypothèse suivante :

$\mathbf{H}_3$) La constante de renormalisation $\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-h(x)) dx$ est finie.

Les mesures de probabilité de la forme de μ sont dites de Gibbs.
Remarquons que dans le cas où $n = 1$, l'hypothèse $(\mathbf{H}_1)$ entraine $(\mathbf{H}_3)$, ce qui n'est plus vrai pour $n \geq 2$.

Nous montrons dans le théorème suivant que cette mesure μ est invariante sous l'action du semi-groupe $(T_t)_t$.

Théorème 2.4.3

Soit μ la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ définie par $\mu(dx) = \frac{1}{Z} \exp(-h(x)) dx$. Alors, μ est invariante sous l'action du semi-groupe $(T_t)_t$ associé au processus de diffusion $(X(t))_{t\geq 0}$.

Démonstration :

Le générateur infinitésimal A du processus de diffusion $(X(t))_{t\geq 0}$ est donné par :

pour tout $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$,

$$Af = \frac{1}{2}\Big(\Delta f - \nabla f.\nabla h\Big)$$

où Δ est l'opérateur laplacien. En intégrant par parties, pour $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta f(x) \exp(-h(x))dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f(x).\nabla h(x) \exp(-h(x))dx \tag{2.8}$$

Puisque μ est une probabilité et que f ainsi que ses dérivées sont à support compact, chaque membre de l'égalité (2.8) est finie. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} Af(x)\, \mu(dx) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\Delta f(x) - \nabla f(x).\nabla h(x)\Big) Z^{-1} \exp(-h(x))dx = 0.$$

Par la densité de $C_c^2(\mathbb{R}^n)$ dans $C_b^2(\mathbb{R}^n)$, cette dernière égalité reste vraie pour tout $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$.

Ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Analysons maintenant la propriété de récurrence au sens de Harris du processus $(X(t))_{t\geq 0}$. Celle-ci présente un caractère crucial pour l'étude de l'ergodicité de $(X(t))_{t\geq 0}$ puisqu'elle entraine la trivialité de la tribu asymptotique comme on le verra à la section 2.5.

Définition 2.4.4

1) Le processus $(X(t))_{t\geq 0}$ est dit **récurrent au sens de Harris** *s'il existe une mesure finie ν telle que pour tout borélien F de $\mathbb{R}^n$, le fait que $\nu(F) > 0$ entraine que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$Q^x\Big(\int_0^\infty 1\!\!1_F\, (X(t))dt = \infty\Big) = 1;$$

c'est-à-dire que le processus $(X(t))_{t\geq 0}$, issu de x, passe un temps infini dans F avec une probabilité 1.

2) Une mesure de probabilité invariante ν est dite **extrémale** *si elle ne peut se décomposer en combinaison linéaire non triviale de deux différentes mesures de probabilité invariantes, c'est-à-dire*

$$\Big(\nu = (1-t)\nu_1 + t\nu_2\ ,\ 0 < t < 1 \text{ et } \nu_1, \nu_2 \text{des probabilités invariantes}\Big) \Rightarrow (\nu = \nu_1 = \nu_2).$$

Proposition 2.4.5

Le processus $(X(t))_{t\geq 0}$, solution de l'équation différentielle gradient stochastique (2.5), est récurrent au sens de Harris.

Preuve : (inspirée de Duflo & Revuz (1969) et Ichihara & Kunita (1974))
L'ensemble des mesures de probabilité invariantes sous l'action du semi-groupe (T_t) forme un convexe non vide noté M_I car il contient la mesure de probabilité μ définie en (2.7) . Il existe dans ce convexe M_I une mesure ν qui est extrémale, car d'après le théorème de Krein et Milman (cf. Dunford et Schwartz (1958), p.440) M_I coïncide avec l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux. Pour cette mesure extrémale ν, on montrera d'abord

(i) $\quad Q^x\Big(\int_0^\infty 1_F\ (X(t))dt = \infty\Big) = 1$, pour tout $x \in\ supp(\nu)$; puis,

(ii) $\quad$ que (i) reste vrai pour tout x de $\mathbb{R}^n$ par la technique de densité du support dans $\mathbb{R}^n$.

Puisque la mesure ν est extrémale, par le théorème ergodique de *Birkhoff-Khintchine* (cf. Cramér-Leadbetter (1967), p.151), on a la convergence de la fonction $\frac{1}{T}\int_0^T 1\!\!1_F(X(t))\ dt$ vers $\nu(F) > 0$ quand T tend vers l'infini et ceci Q^ν- presque sûrement, où

$$Q^\nu \overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} Q^x \nu(dx).$$

Puisque le borélien F est de mesure ν strictement positive, cette convergence est possible si et seulement si

$$Q^\nu(\int_0^\infty 1\!\!1_F\ (X(t))dt = \infty) = 1,$$

sinon on aurait $\nu(F) = 0$.
La mesure ν admet une densité ϕ, continûment différentiable, par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$\nu(dx) = \phi(x)dx$$

(cf. Azéma et al. (1967)); donc $supp(\nu) = supp(\phi)$.
Posons $u(x) = Q^x\Big(\int_0^\infty 1\!\!1_F\ (X(t))dt = \infty\Big)$, pour tout $x \in supp(\nu)$. La fonction u est mesurable et bornée.
Puisque

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q^x\Big(\int_0^\infty 1\!\!1_F\ (X(t))dt = \infty\Big)\nu(dx) = 1,$$

alors on a la fonction $u(x) = 1$ pour ν-presque tout x.

Montrons ensuite que la fonction u est invariante sous l'action du semi-groupe $(T_t)_t$:

$$\begin{aligned} T_t u(x) &= Q^x(u(X(t))) \\ &= Q^x\Big(Q^{X(t)}\big(\textstyle\int_0^\infty \mathbb{1}_F\,(X(s))ds = \infty\big)\Big) \\ &= Q^x\Big(\textstyle\int_t^\infty \mathbb{1}_F\,(X(s))ds = \infty\Big) \\ &= Q^x\Big(\textstyle\int_0^\infty \mathbb{1}_F\,(X(t))dt = \infty\Big) = u(x). \end{aligned}$$

Puisque le coefficient de diffusion de la dynamique que nous considérons est une matrice identité, alors $(T_t)_t$ satisfait la propriété forte de Feller, c'est-à-dire l'application $T_t u(x)$ est continue en x, (cf. Ichihara & Kunita (1974) Lemme 5.1). Donc la fonction u l'est de même. Ainsi, $u(x) = 1$ pour tout $x \in supp(\phi)$ car $u(x) = 1$ pour ν-presque tout x et u est continue.

On va maintenant montrer que (i) reste vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Le générateur infinitésimal A de $(X(t))_{t\geq 0}$ est elliptique du fait que le coefficient de diffusion du système (2.5) est une matrice identité. On utilise donc le principe du maximum pour le processus de diffusion $(X(t))_t$ (cf. Khas'minskii (1960)).
Pour tout $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$, puisque ν est invariante, on a :

$$\langle Af, \phi\rangle = 0.$$

Soit A^* le dual de A dans $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, alors $\langle f, A^*\phi\rangle = 0$ pour tout $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, on obtient que $A^*\phi = 0$ au sens des distributions (cf. Ichihara et Kunita (1974)).
Supposons que $-\phi$ prenne la valeur maximale 0 en un point de $\mathbb{R}^n$. Alors, d'après le principe du maximum, $-\phi$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^n$, ce qui est contradictoire car ϕ est une densité de probabilité. Donc la fonction ϕ est strictement positive sur $\mathbb{R}^n$. Par suite, le support de ϕ est dense dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi, $u(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. ■

2.5 La limite ergodique

Dans cette section, nous montrons la convergence de la diffusion $(X(t))_{t\geq 0}$ vers la mesure invariante μ qui devient ainsi une mesure d'équilibre .

Définition 2.5.1

Le processus $(X(t))_{t\geq 0}$ est dit **ergodique** *dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe une (unique) mesure de probabilité m sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$,*

$$\lim_{t\to\infty} T_t f(x) = m(f) \ .$$

La mesure de probabilité m est unique et appelée **limite ergodique** *du processus* $(X(t))_{t\geq 0}$.

Remarquons que si m est la limite ergodique du processus $(X(t))_{t\geq 0}$ alors elle est invariante sous l'action du semi-groupe $(T_t)_t$.

Soient θ la famille de translations sur Ω définie par : pour $\omega \in \Omega$ et $s \geq 0$,

$$\theta_s \omega_. = \omega_{.-s}$$

et $\mathcal{G}_t := \sigma(X(s)\ ; s \leq t)$ la σ-algèbre engendrée par les $\{X_s;\ s \leq t\}$.
Notons $\mathcal{F}_\infty$ la complétée de $\mathcal{G}_\infty$ par rapport à toutes les mesures de probabilité Q^ν, ν mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$.
Soit,

$$\mathcal{A} := \bigcap_{t\in\mathbb{R}_+} \theta_t^{-1}(\mathcal{F}_\infty) = \bigcap_{t\in\mathbb{R}_+} \overline{\sigma}(X(s)\ ; s \geq t) \ ,$$

la tribu asymptotique de $(X(t))_{t\geq 0}$, où $\overline{\sigma}$ désigne la completée de σ par rapport à toute les mesures de probabilité Q^ν, ν mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$. Elle est caractérisée par : $A \in \mathcal{A}$ si et seulement si pour tout $t \geq 0$, il existe $A_t \in \mathcal{F}_\infty$ tel que :

$$\mathbb{I}_A = \theta_t^{-1} \circ \mathbb{I}_{A_t}$$

On pose

$$\mathcal{K}_t := \theta_t^{-1}(\mathcal{F}_\infty).$$

D'après Duflo & Revuz (1969, Proposition II-1), puisque le processus $(X(t))_{t\geq 0}$ est récurrent au sens de Harris, la tribu $\mathcal{A}$ est grossière Q^ν- presque sûrement, quelle que soit la mesure de probabilité ν, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $Q^\nu(A)$ prend la valeur 0 ou 1 .

Enonçons dès lors le théorème principal de cette partie qui assure que le processus $(X(t))_{t\geq 0}$ converge vers la mesure de Gibbs μ quand t tend vers l'infini (cf Duflo & Revuz (1969), Théorème II-4).

Théorème 2.5.2
Soient m_1 et m_2 deux mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\lim_{t\to\infty} \|m_1 T_t - m_2 T_t\|_{var} = 0,$$

où $||.||_{var}$ désigne la norme de la variation totale sur l'espace des mesures signées.
En particulier, pour $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t\to\infty} T_t f(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f(y) exp(-h(y))dy}{\int_{\mathbb{R}^n} exp(-h(y))dy} = \mu(f) .$$

Démonstration

Puisque la tribu $\mathcal{A}$ est grossière Q^ν- presque sûrement quelle que soit la mesure de probabilité ν alors, pour tout $B \in \mathcal{F}_\infty$,

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{K}_t} |Q^\nu(A \cap B) - Q^\nu(A).Q^\nu(B)| = 0.$$

En appliquant ce résultat à $A := \{X(t) \in \Gamma\}$, $B := \{X(0) = x\}$ et $\nu := \frac{1}{2}(\delta_x + \delta_y)$, on obtient que pour tout $\Gamma \in \mathcal{F}_\infty$,

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\Gamma\in\mathcal{F}_\infty} |P_t(x,\Gamma) - P_t(y,\Gamma)| = 0 ;$$

où $P_t(x, A) \overset{\text{déf}}{=} T_t \mathbb{I}_A(x)$. En effet,

$$\begin{aligned} Q^\nu(A \cap B) &= \tfrac{1}{2}\Big[Q^x(A/B).Q^x(B) + Q^y(A/B).Q^y(B)\Big] \\ &= \tfrac{1}{2}Q^x\Big(X(t) \in \Gamma/X(0) = x\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}P_t(x,\Gamma), \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} Q^\nu(A)Q^\nu(B) &= \tfrac{1}{4}[Q^x(A) + Q^y(A)][Q^x(B) + Q^y(B)] \\ &= \tfrac{1}{4}\Big[Q^x\Big(X(t) \in \Gamma\Big) + Q^y\Big(X(t) \in \Gamma\Big)\Big] \\ &= \tfrac{1}{4}[P_t(x,\Gamma) + P_t(y,\Gamma)]. \end{aligned}$$

Cela s'interprète comme si le processus perdait la mémoire de son état initial.
Soit $\mathcal{N}_t$ l'ensemble des points pour lesquels la mesure $m_t := m_1T_t - m_2T_t$, dans sa décomposition de Jordan-Hahn, est positive ; alors on a :

$$\begin{aligned} m_t(\mathbb{I}_{\mathcal{N}_t}) &= \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x,\mathcal{N}_t)\, m_1(dx) - \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y,\mathcal{N}_t)\, m_2(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \Big[P_t(x,\mathcal{N}_t) - P_t(y,\mathcal{N}_t)\Big] m_1(dx)m_2(dy) \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand t tend vers l'infini, par le Lemme de Fatou; on a donc

$$\lim_{t\to\infty} ||m_t||_{var} = 0,$$

car $\|m_t\|_{var} \stackrel{\text{déf}}{=} m_t^+ + m_t^-$, avec pour tout $B \in \mathcal{F}$,

$$\begin{cases} m_t^+(B) & \stackrel{\text{déf}}{=} & \sup\limits_{C \subset B} m_t(C) \\ m_t^-(B) & \stackrel{\text{déf}}{=} & -\inf\limits_{C \subset B} m_t(C). \end{cases}$$

Le cas particulier s'obtient en choisissant $m_1 = \delta_x$ pour $x \in \mathbb{R}^n$, et $m_2 = \mu$. ∎

Proposition 2.5.3

La mesure de probabilité $\mu(dx) = \frac{1}{Z}\exp(-h(x))dx$ est l'unique mesure de probabilité invariante sous l'action du semi-groupe de transition $(T_t)_{t \geq 0}$.

Preuve

S'il existait une autre mesure de probabilité μ_0 invariante sous l'action de $(T_t)_{t \geq 0}$, on aurait toujours $T_t f(x)$ qui converge vers $\mu_0(f)$, pour $x \in \mathbb{R}^n$, quand t tend vers l'infini. Par unicité de la limite, on a $\mu = \mu_0$. ∎

Exemple

Nous présentons une application dans le domaine de la finance, plus précisément sur les marchés financiers.

L'incertitude subie par les mouvements futurs des taux d'intérêt constitue un point important en théorie de la décision financière. On constate que la plupart des agents qui interviennent sur les marchés financiers sont adverses au risque, et ce risque est en partie lié aux taux d'intérêt. Les décisions d'investissement, les problèmes liés à la gestion actif-passif sont très sensibles aux pertubations de la courbe des taux. Pour se couvrir contre le risque de taux, les marchés utilisent les produits financiers de plus en plus complexes tels que les contrats "forward", "futures", options sur contrats constituant l'activité du Marché à Terme International de France (MATIF). Pour ces intruments financiers, les spécialistes des marchés et les universitaires du domaine de la Finance utilisent des techniques mathématiques relativement poussées et sophistiquées tels que la théorie de la modélisation des courbes de taux et l'étude de son comportement asymptotique. Ils cherchent à analyser des évolutions à long terme et ceci dans le cadre de la valorisation de la plupart des titres financiers ayant pour support le taux d'intérêt court : par exemple, les emprunts obligataires (une obligation étant un emprunt généralement de très longue durée) ou les options sur contrats.

On va supposer donc que le taux d'intérêt court se comporte comme un processus d'Ornstein-Uhlenbeck donné par :

$$(2.9) \qquad \begin{cases} dR(t) &= \sigma dB(t) + a(b - R(t))dt \ , t > 0, \\ R(0) &= r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où a, b et σ sont des paramètres strictement positifs.
Ce modèle est dit de Vasicek. Cette dynamique s'interprète de la manière suivante :
Le paramètre σ est la volatilité. Le paramètre b désigne la moyenne des taux courts; une force d'intensité $a(b - R)$ tend à rappeler $R(t)$ vers cette moyenne avec une amplitude a. Quand le taux court $R(t)$ s'éloigne de b l'espérance conditionnelle de l'accroissement instantanée de $R(t)$, égale à $a(b - R(t))$, est positive si $R(t) < b$ (sous l'effet d'un choc aléatoire σdB) et dans ces conditions le taux court aura tendance à croître dans le temps vers b. Dans le cas contraire si $R(t) > b$ l'espérance conditionnelle de l'accroissement instantanée de $R(t)$ devient négative, dans ce cas $R(t)$ décroit vers b. Donc la trajectoire du taux court R fluctue autour du paramètre b de manière aléatoire.

Pour retrouver un système de la forme (2.5), c'est-à-dire avec un coefficient de diffusion identité, il suffit de se ramener à un autre processus $R^*(t) = \frac{R(t)}{\sigma}$.
Le générateur infinitésimal A du processus taux $R(t)$ est donné par :

$$Af(x) = a(b - x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x)$$

et l'unique mesure de probabilité invariante, qui est la limite ergodique est donnée par :

$$(2.10) \qquad \mu(dx) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\frac{\pi}{a}}} \exp\Big(- \frac{a(x-b)^2}{\sigma^2}\Big) dx.$$

En effet, par intégration par parties,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) \exp\Big(- \frac{a(x-b)^2}{\sigma^2}\Big) dx = \int_{\mathbb{R}} a(x-b)f'(x) \exp\Big(- \frac{a(x-b)^2}{\sigma^2}\Big) dx$$

On conclut donc que dans un horizon lointain, le taux court se comporte uniquement comme une variable aléatoire normale de moyenne b et de variance $\frac{\sigma^2}{2a}$.

Remarque 2.5.4

Quand la mesure invariante $\mu(dx) = \exp(-h(x))dx$ *n'est pas finie, c'est-à-dire si l'hypothèse* $\mathbf{H_3}$) *n'est pas satisfaite, alors pour tout compact* K *de* $\mathbb{R}^n$, $P_t(x, K)$ *tend vers* 0 *pour* $x \in \mathbb{R}^n$*, quand* t *tend vers l'infini.*

Il en est de même pour les processus de diffusion $(Y(t))_t$ *qui sont transients.*

Et donc dans ces deux cas, on a la convergence de $T_t f$ *vers* 0*, pour toute fonction* f *à support compact, et non pas vers* $\mu(f)$ (*cf. Khas'minskii* (1960)).

On voit là donc l'importance de la récurrence et aussi de l'hypothèse de finitude de la mesure μ dans l'existence de la limite ergodique.

Chapitre 3

Limite ergodique d'un système gradient infini-dimensionnel

3 Limite ergodique d'un système gradient infini-dimensionnel

3.1 Introduction

Au cours de ces dernières décennies, des progrès majeurs ont été faits sur l'étude du comportement asymptotique en temps de processus de diffusion sur un réseau, qui sont solutions d'équations différentielles stochastiques à valeurs dans M^S où M est un espace métrique complet et S un ensemble dénombrable (infini).

En 1981, Holley et Stroock étudient le comportement asymptotique des processus de diffusion infini-dimensionnels sur le tore T par des techniques utilisant comme fonction de Lyapounov la fonctionnelle d'énergie spécifique définie sur l'espace des mesures de probabilité sur $T^{\mathbb{Z}^d}$. Une des difficultés de cette méthode réside dans le fait que l'existence de cette fonctionnelle dépend de l'existence de densités lisses pour les marginales fini-dimensionnelles de familles de mesures sur $T^{\mathbb{Z}^d}$.

Une technique fréquemment utilisée pour décrire le comportement asymptotique des processus de diffusion est d'étudier le trou spectral et les inégalités de Log-Sobolev, respectivement équivalentes à l'étude de la convergence exponentielle dans L^2 et à l'hypercontractivité du semi-groupe associé. Ces méthodes permettent de comprendre les applications des semi-groupes hypercontractants dans la théorie des champs et de la Mécanique statistique.
À cet effet, Stroock et Zegarlinski (1992) ont donné un critère plus général pour obtenir l'hypercontractivité sur les systèmes de spins à valeurs dans une variété Riemannienne compacte de dimension finie : ils mettent en évidence une propriété de mélange spatial des mesures de Gibbs, appelée par eux propriété de Dobrushin-Shlosman-Mixing, qui permet d'assurer la dépendance analytique de la mesure de Gibbs par rapport au potentiel d'interaction.
À partir de ces travaux Laroche (1993), dans sa thèse, montre l'ergodicité de systèmes de spins à valeurs dans un espace fini ($\{-1;1\}$ pour le modèle d'Ising) et ensuite à valeurs dans une variété riemannienne compacte de dimension finie.
Aussi, parmi les résultats les plus récents, on peut citer quand $M = \mathbb{R}$ et $S = \mathbb{Z}^d$, Zegarlinski (1996) qui a montré l'ergodicité à vitesse exponentielle de processus de diffusion vers

une mesure de Gibbs par les méthodes de semi-groupes hypercontractants et les inégalités de Log-Sobolev.
Da Prato et Zabczyk (1995) utilisent dans le cas où $M = \mathbb{R}^d$, ou un espace de Hilbert à poids, ou un espace de Banach, des propriétés de dissipativité d'opérateurs pour obtenir l'ergodicité du processus. Ou encore Albeverio et al. (1997a) montrent la convergence ergodique (dans L^2) de solutions d'équations différentielles stochastiques de type anharmonique grâce aux techniques de convergence des formes de Dirichlet associées.

Dans tous ces travaux les interactions intervenant dans la dynamique sont à portée finie, c'est-à-dire l'équation différentielle stochastique satisfaite par chaque coordonnée de la diffusion (à valeurs dans M) ne fait intervenir qu'un nombre fini d'autres coordonnées. Ou bien la portée d'nteraction est infinie mais l'espace des spins est une variété Riemannienne compacte fini-dimensionnelle (Laroche (1993)).

Nous présentons ici, un premier exemple d'ergodicité pour des diffusions **à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ avec interaction à portée infinie** et la technique que nous utilisons (plutôt plus simple que les autres techniques précédemment citées) fait appel à une idée de Sunyach, développée élégamment par Royer (1979). En effet, Sunyach (1975) exhibe un critère d'ergodicité dans un cadre général en considérant des processus dont le semi-groupe de transition associé a une action exponentiellement contractante sur l'espace des fonctions lipschitziennes.

Introduisons quelques notations avant la description de la dynamique.

Notations

- $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ $(d \geq 1)$ est l'espace de configurations muni de sa filtration canonique $(\mathcal{F}_\Lambda)$, où Λ décrit l'ensemble des parties finies de $\mathbb{Z}^d$. $\mathcal{F}_\Lambda$ est donc engendrée par les projections spatiales $(pr_i)_{i\in\Lambda}$ où :

$$\begin{array}{rcl} pr_i : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}^d} & \longmapsto & x_i \end{array}$$

- $\mathcal{S}$ est l'espace des fonctions à décroissance rapide sur $\mathbb{Z}^d$. Son dual $\mathcal{S}'$ est l'espace des fonctions à croissance lente ; autrement dit à croissance moins rapide que celle d'un polynôme.

Si l'on note, pour tout $r \in \mathbb{R}, |\,.\,|_r$ la norme dans l'espace de Hilbert à poids $\ell^2(\gamma^{(r)})$ définie par : pour $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$,

$$|x|_r^2 = \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i^{(r)} x_i^2 ,$$

où les $\gamma_i^{(r)}$ sont les poids (dits polynomiaux si $r \in \mathbb{N}^*$) donnés par :

$$\gamma_i^{(r)} = (1 + |i|)^{2r}.$$

Remarquons que $|\,.\,|_0 = \|.\|$.
On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \bigcap_{r\in\mathbf{N}^*} \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}\,;\ |x|_r < \infty\right\} \quad \text{et} \\ \mathcal{S}' &= \bigcup_{r\in\mathbf{Z}\setminus\mathbf{N}} \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}\,;\ |x|_r < \infty\right\} . \end{aligned}$$

À partir de maintenant on prend $r < 0$, et on note :

$$E_r = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}\,;\ |x|_r < \infty\right\} \tag{3.1}$$

qui est un espace de Hilbert séparable. Remarquons que les E_r sont des espaces décroissants en r.

3.2 Equations différentielles infini-dimensionnelles

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé complet. Pour tout $t \geq 0$, soit $B(t) = \left(B_i(t)\right)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ une famille de mouvements browniens ν-dimensionnels indépendants; notons $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par les $\left(B(s)\right)_{s\leq t}$. Soit $\sigma = (\sigma_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ une famille de fonctions mesurables de $(\mathbb{R}^\nu)^{\mathbb{Z}^d}$ $(d, \nu \geq 1)$ vers l'espace des matrices carrées d'ordre ν et $b = (b_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ une famille de fonctions mesurables de $(\mathbb{R}^\nu)^{\mathbb{Z}^d}$ vers $\mathbb{R}^\nu$.

On considère les équations différentielles stochastiques infini-dimensionnelles de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dX(t) &=& \sigma(X(t)).dB(t) + b(X(t))dt, t > 0 \\ X(0) &=& x \in (\mathbb{R}^\nu)^{\mathbb{Z}^d} \end{array} \right. \tag{3.2}$$

ou coordonnées par coordonnées,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dX_i(t) &=& \sigma_i(X(t)).dB_i(t) + b_i(X(t))dt, t > 0\ , i \in \mathbb{Z}^d \\ X(0) &=& x \in (\mathbb{R}^\nu)^{\mathbb{Z}^d} \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Définition 3.2.1

Un processus $Y = (Y(t))_{t\geq 0}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est dit **solution** *de l'équation différentielle stochastique (3.2) si et seulement s'il satisfait :*

1) $Y = (Y(t))_{t\geq 0}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adapté ;

2) $Y(0) = x$ P-p.s. ;

3)$\forall i \in \mathbb{Z}^d$, $\int_0^t \|\sigma_i(Y(s))\|^2 ds + \int_0^t \|b_i(Y(s))\|^2 ds < \infty$, où $\|\sigma_i\|^2 = \sum_{m,n}(\sigma_i^{m\,n})^2$;

4) et $Y = (Y_i(t))_{\substack{t\geq 0\\ i\in\mathbb{Z}^d}}$ satisfait l'équation différentielle stochastique (3.2) p.s.

3.3 Description de la dynamique

Soient $\phi_i, i \in \mathbb{Z}^d$, des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et pour $i \neq j$, $\phi_{i,j}$ des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ satisfaisant $\phi_{i,j} = \phi_{j,i}$. Les fonctions ϕ_i sont appelées potentiels d'interaction propre et pour $i \neq j$, les fonctions $\phi_{i,j}$ sont appelées potentiels d'interaction par paires. Pour $i \in \mathbb{Z}^d$ et $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, on pose

$$h_i(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \phi_i(x_i) + \sum_{j\neq i} \phi_{i,j}(x_i, x_j) \ , \tag{3.4}$$

qui n'est défini que sous certaines hypothèses sur $\phi_{i,j}$, ou sur x.

Dans ce chapitre, nous considérons le système gradient stochastique suivant à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ avec $d \geq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dX_i(t) & = & dB_i(t) - \frac{1}{2}\nabla_i h_i(X(t))dt, t > 0 \ , i \in \mathbb{Z}^d \\ X(0) & = & x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \end{array} \right. \tag{3.5}$$

ou encore,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dX_i(t) & = & dB_i(t) - \frac{1}{2}\Big(\phi_i'(X_i(t)) \\ & & \quad + \sum_{j\neq i} \phi_{i,j}'(X_i(t), X_j(t))\Big)dt, t > 0 \ , \forall i \in \mathbb{Z}^d \\ X(0) & = & x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \end{array} \right. \tag{3.6}$$

avec pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{i,j}'(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\phi_{i,j}(x,y) \, .$$

L'existence et l'unicité de la solution de (3.6) dans E_r, $r < 0$, ont été montrées sous certaines hypothèses sur les fonctions d'interaction et sur la condition initiale. Le théorème qui suit rappelle ce résultat : (cf. Doss & Royer(1978), Shiga & Shimizu(1980)).

Théorème 3.3.1

Supposons satisfaites les hypothèses suivantes :

$$
(\mathbf{H}_4) \qquad \left\{ \begin{array}{l}
\alpha) \quad \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} |\phi_i'(0)| < \infty \quad \textit{et} \quad \exists M \in \mathbb{R},\ \forall i \in \mathbb{Z}^d \ \phi_i'' \geq M \\[2ex]
\beta) \quad \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \neq i} |\phi_{i,j}'(0,0)| < \infty \quad \textit{et} \ \exists (q_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}^d} \ \textit{positive} \\[1ex]
\qquad \textit{avec} \ \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \neq i} q_{ij} < \infty \ \textit{telle que} \ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_{i,j} \geq -q_{ij} \\[2ex]
\gamma) \quad \exists (c_i)_i \in \mathcal{S} \ \textit{telle que} \ \sup_{\substack{i,j \in \mathbb{Z}^d \\ i \neq j}} |\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \phi_{i,j}(x,y)| \leq c_{i-j}.
\end{array} \right.
$$

Alors, pour tout $r < 0$ fixé, et pour tout $x \in E_r$, l'équation différentielle stochastique gradient (3.6) admet une unique solution à trajectoires continues dans E_r.

Remarque :
L'hypothèse $(\mathbf{H}_4)$ entraine la convergence normale de la série qui apparait dans la dérive du système gradient stochastique (3.6).

Dans le paragraphe suivant, le théorème principal 3.4.2 montre que sous certaines hypothèses sur ϕ_i et $\phi_{i,j}$, le processus $(X(t))_{t \geq 0}$ solution de (3.6) est ergodique dans E_r pour une certaine valeur de r, que l'interaction soit à portée finie ou infinie.

Dans le paragraphe 3.5, on donnera deux exemples de potentiels d'interaction satisfaisant les hypothèses du théorème 3.4.2 : pour le premier, l'interaction est à portée finie et pour l'autre la portée est infinie.

On définit comme usuellement le semi-groupe de transition $(T_t)_{t \geq 0}$ associée à la solution $(X(t))_{t \geq 0}$ de (3.6) par : $\forall t \geq 0,\ x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} \in E_r$ et $f \in C_b(E_r)$,

$$
T_t f(x) = E\big(f(X(t)) \ / \ X(0) = x\big) \tag{3.7}
$$

3.4 Propriétés ergodiques de la diffusion infini-dimensionnelle

On ne peut généraliser directement au cas infini-dimensionnel la démarche empruntée dans le chapitre 2 (cas fini-dimensionnel) pour montrer l'ergodicité, et ceci pour plusieurs raisons telles que :

- la propriété de récurrence au sens de Harris n'est plus respectée ;
- le hamiltonien n'est pas globalement défini mais peut-être localement ;
- les problèmes liés à l'existence de mesures invariantes sous l'action d'une diffusion infini-dimensionnelle, voire l'existence des mesures de Gibbs associées à un hamiltonien, sont des problèmes particulièrement ardus ;
- le problème de convergence vers un état d'équilibre et surtout lorsque l'espace de spins est non borné n'est pas un problème facile à élucider en se fiant aux techniques du chapitre précédent.

Ainsi, nous sommes amenés dans le cas infini-dimensionnel à utiliser des méthodes différentes et à prendre des hypothèses plus restrictives pour montrer l'ergodicité de systèmes infinis aléatoires.

Nous rappelons d'abord la notion d'ergodicité d'un processus, cette définition ne dépendant pas de la dimension de l'espace de configurations du processus, et ensuite le critère de Sunyach.

Définition 3.4.1
Le processus de diffusion $(X(t))_{t\geq 0}$ *solution de (3.6) est dit ergodique dans* E_r *s'il existe une (unique) mesure de probabilité* μ_0 *sur* E_r *(invariante sous l'action du semi-groupe de transition* T_t*) telle que :* $\forall x \in E_r$ *et* $f \in C_b(E_r)$*,*

$$\lim_{t\to\infty} T_t f(x) = \int_{E_r} f \, d\mu_0 \, .$$

Soit $(Y(t))_{t\geq 0}$ un processus de diffusion à valeurs dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{X}$ et $(P_t)_{t\geq 0}$ son semi-groupe de transition associé.
On rappelle (dans un contexte plus général) le critère de Sunyach (Sunyach (1975) Théorème 1) adapté au cas où le temps est continu assurant l'ergodicité du processus de diffusion $(Y(t))_{t\geq 0}$ dès que son semi-groupe de transition associé $(P_t)_t$ est exponentiellement contractant sur l'espace des fonctions lipschitziennes, avec en plus une condition de non explosion.

Soit Lip($\mathcal{X}$) l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $\mathcal{X}$ à valeurs réelles.
Pour tout $f \in$ Lip($\mathcal{X}$), on désigne par $[f]$ la constante de Lipschitz de f sur $\mathcal{X}$.

Proposition 3.4.1
Si le processus $(Y(t))_{t\geq 0}$ satisfait aux hypothèses suivantes :

i) Il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $f \in Lip(\mathcal{X})$

$$[P_t f] \leq e^{-\lambda t}[f] \quad \forall t \geq 0$$

(On dit que $(P_t)_t$ est exponentiellement contractant sur $Lip(\mathcal{X})$)

ii) $\exists y_0 \in \mathcal{X}$ tel que $\forall t \geq 0$

$$E(\|Y(t) - y_0\|_{\mathcal{X}}) < +\infty \ ,$$

alors il existe une unique probabilité μ_0 (invariante sous l'action de P_t) telle que pour tout $f \in Lip(\mathcal{X})$ et $x \in \mathcal{X}$,

$$\lim_{t\to\infty} P_t f(x) = \int_{\mathcal{X}} f \, d\mu_o \ .$$

Remarque 3.4.2
L'ergodicité se teste sur l'ensemble des fonctions continues et bornées alors que, dans le critère de Sunyach ci-dessus, les fonctions tests sont les fonctions lipschitziennes. Pour cette raison nous avons recours à une métrique adaptée, celle de Vasserstein.

Nous allons montrer que le processus de diffusion $(X(t))_{t\geq 0}$ solution de l'équation infini-dimensionnelle (3.6) satisfait le critère de Sunyach dans E_r (défini par (3.1)) et ensuite qu'elle est ergodique (pour cela on introduira la métrique de Vasserstein).
Le théorème 3.4.2 suivant est le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.4.2
Considérons le système gradient stochastique (3.6) dans lequel l'interaction satisfait, en plus des hypothèses β) et γ) de $(\mathbf{H}_4)$, les hypothèses

α') Uniformément en i, les ϕ_i sont strictement convexes, i.e.
$\exists M > 0 \ \forall i \in \mathbb{Z}^d$, $\phi_i'' > M$ et $\sup_i |\phi_i'(0)| < +\infty$;

δ) $\exists a = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}^d} \in \mathcal{S}$, *positive telle que* $a_0 = 0$ *et pour tous* $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ *et* $i, j \in \mathbb{Z}^d$,

$$(x-y)(\phi'_{i,j}(x,z) - \phi'_{i,j}(y,t)) \geq a_{i-j}((x-y)^2 - (z-t)^2) \; ;$$

η) $\exists r_0 < 0$ *tel que :*

$$K(r_0) = \sup_{i\in\mathbb{Z}^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \frac{\gamma_j^{(r_0)}}{\gamma_i^{(r_0)}} a_{i-j} < M + N \; ,$$

où $N = \sum_{k\neq 0} a_k < \infty$.

Alors, $(X(t))_{t\geq 0}$ *solution de (3.6) est ergodique dans* E_{r_0}.

Démonstration du théorème 3.4.2 :

Étape 1

Étant donné $x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}^d} \in E_r$, $r < 0$, (respectivement $y = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}^d} \in E_r$), notons $X^x(t)$ (respectivement $X^y(t)$) la solution de (3.6) d'état initial x (respectivement y) dans E_r. Nous montrons la non explosion dans E_r de la fonction $u(t) := (X_i^x(t) - X_i^y(t))_{i\in\mathbb{Z}^d}$, et plus précisement,

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i^{(r)} \Big(X_i^x(t) - X_i^y(t)\Big)^2 \leq \exp\Big((K(r) - M - N)t\Big) \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i^{(r)} (x_i - y_i)^2 \; :$$

On a : $\forall t \geq 0$, $i \in \mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned} X_i^x(t) - X_i^y(t) &= (x_i - y_i) - \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\phi'_i\big(X_i^x(s)\big) - \phi'_i\big(X_i^y(s)\big)\Big) ds \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{j\neq i} \Big(\phi'_{i,j}\big(X_i^x(s), X_j^x(s)\big) - \phi'_{i,j}\big(X_i^y(s), (X_j^y(s))\big)\Big) ds \end{aligned}$$

En dérivant $(X_i^x(t) - X_i^y(t))^2$ par rapport à t, on a :

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\Big(X_i^x(t) - X_i^y(t)\Big)^2 &= -\Big(X_i^x(t) - X_i^y(t)\Big)\Big(\phi'_i\big(X_i^x(t) - \phi'_i\big(X_i^y(t)\big)\Big) \\ &\quad - \sum_{j\neq i}\Big(X_i^x(t) - X_i^y(t)\Big)\Big(\phi'_{i,j}\big(X_i^x(t), X_j^x(t)\big) - \phi'_{i,j}\big(X_i^y(t), X_j^y(t)\big)\Big) \end{aligned}$$

D'après les assertions (α') et (δ) , $\forall t \geq 0$, $i \in \mathbb{Z}^d$

$$\frac{d}{dt}\Big(X_i^x(t) - X_i^y(t)\Big)^2 \leq -(M+N)\Big(X_i^x(t) - X_i^y(t)\Big)^2 + \sum_{j\neq i} a_{i-j}\Big(X_j^x(t) - X_j^y(t)\Big)^2$$

Posons : $\forall i, j \in \mathbb{Z}^d$,

$$Q_{i,j} := \begin{cases} -(M+N), \text{ si } i = j \\ a_{i-j}, \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Remarquons que $\phi_{i,j} = \phi_{j,i}$ et donc pour tout $i \in \mathbb{Z}^d, a_i = a_{-i}$; on a donc $\forall i \in \mathbb{Z}^d$ et $t \geq 0$,

$$(3.8) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\Big(X_i^x(t) - X_i^y(t)\Big)^2 & \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} Q_{i,j}\Big(X_j^x(t) - X_j^y(t)\Big)^2 \\ \Big(X_i^x(0) - X_i^y(0)\Big)^2 & = (x_i - y_i)^2 \end{cases}$$

On a besoin maintenant d'un lemme de Gronwall infini-dimensionnel, valable pour des constantes Q_{ij} de signe quelconque (la diagonale $(Q_{ii})_{i \in \mathbb{Z}^d}$ est négative).

Lemme 3.4.3

Soient $\gamma = (\gamma_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ et $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ des suites positives sur $\mathbb{Z}^d$ et $Q = (Q_{i,j})_{i,j}$ une matrice sur $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$, symétrique. Soit $u(t) = (u_i(t))_{i \in \mathbb{Z}^d, t \geq 0}$ une suite de fonctions positives dérivables sur $\mathbb{R}_+$. Supposons que :

(1) $a \in \ell^1(\gamma)$ et $\forall t \geq 0$, $\sup_{s \leq t} u(s)$ et $\sup_{s \leq t} u'(s) \in \ell^1(\gamma)$, c'est-à-dire

$$(3.9) \qquad \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \gamma_i a_i < \infty \text{ et } \forall t \geq 0, \ \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \gamma_i \sup_{s \leq t} u_i(s) \text{ et } \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \gamma_i \sup_{s \leq t} u'_i(s) \text{ sont finies;}$$

(2) $\exists K \in \mathbb{R}$, $\forall j \in \mathbb{Z}^d$

$$(3.10) \qquad \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \gamma_i Q_{i,j} \leq K \gamma_j \, .$$

Alors si

$$(3.11) \qquad \begin{cases} u_i'(t) & \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} Q_{i,j} u_j(t) \\ u_i(0) & = a_i \, . \end{cases} ,$$

on a:

$$(3.12) \qquad \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \gamma_i u_i(t) \leq e^{Kt} \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \gamma_i a_i \, .$$

Si, de plus, $K \geq 0$, on peut affaiblir l'hypothèse (3.11) en : $\forall i \in \mathbb{Z}^d, t \geq 0$,

$$(3.13) \qquad u_i(t) \leq a_i + \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} Q_{i,j} \int_0^t u_j(s) ds \, ,$$

et (3.12) reste satisfait.

Démonstration du lemme 3.4.3

De l'inégalité (3.11) et par la symétrie de $Q_{i,j}$ on a : $\forall t \geq 0$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i u_i'(t) & \leq & K \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i u_i(t) \\ \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i u_i(0) & = & \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i a_i \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{Posons} & m(t) & = & \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i u_i(t) \text{ et } g(t) = e^{-Kt} m(t)\,; \\ \text{on a :} & g'(t) & = & (m'(t) - Km(t))e^{-Kt} \\ & & \leq & 0 \end{array}$$

La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc $\forall t \geq 0$,

$$g(t) \leq \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i a_i = g(0)\ .$$

D'où l'inégalité (3.12) pour K quelconque.

Maintenant si $K \geq 0$, on affaiblit les hypothèses :
par les inégalités (3.13) et (3.9) on a : $\forall t \geq 0$,

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i u_i(t) \leq \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i a_i + \int_0^t \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} Q_{i,j} \gamma_i u_j(s) ds$$

Par l'inégalité (3.10) et du fait que $Q_{i,j}$ est symétrique on a : $\forall t \geq 0$,

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i u_i(t) \leq \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i a_i + K \int_0^t \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i u_i(s) ds\,.$$

Posons, $v(t) = e^{-Kt} \int_0^t \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i u_i(s) ds$. La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car l'application $t \mapsto \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i u_i(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Sa dérivée vaut :

$$\begin{array}{rrcl} & v'(t) & = & \Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i u_i(t) - K \int_0^t \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i u_i(s) ds \Big) e^{-Kt} \\ & & \leq & e^{-Kt} \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i a_i \\ \text{alors} & v(t) & \leq & \dfrac{1}{K} \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i a_i (1 - e^{-Kt})\,; \end{array}$$

or $\int_0^t \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i u_i(s)ds = e^{Kt}v(t)$ donc,

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i u_i(t) &\leq \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i a_i + \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i a_i e^{Kt}(1-e^{-Kt}) \\ &= e^{Kt} \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i a_i\end{aligned}$$

ce qui nous donne l'inégalité (3.12) pour $K \geq 0$.

■

Remarque 3.4.3

Le choix optimal de la constante K du lemme 3.4.3 est donné par

$$\begin{aligned}K &= \sup_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \frac{\gamma_i}{\gamma_j} Q_{i,j} \\ &= \sup_{i\in\mathbb{Z}^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \frac{\gamma_j}{\gamma_i} Q_{i,j}\ .\end{aligned}$$

Suite de la démonstration du théorème 3.4.2

La suite de fonctions $u_i(t) = \left(X_i^x(t) - X_i^y(t)\right)^2$ satisfait les hypothèses du lemme 3.4.3. En particulier, par construction même de la solution de (3.6), $(\sup_{s\leq t} u_i(s))_i \in \ell^1(\gamma^{(r)})$ (cf Shiga & Shimizu (1980)). D'où, grâce au lemme 3.4.3,

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i^{(r)}\left(X_i^x(t) - X_i^y(t)\right)^2 \leq \exp\Big((K(r) - M - N)t\Big) \sum_{i\in\mathbb{Z}^d} \gamma_i^{(r)}(x_i - y_i)^2 \tag{3.14}$$

ce qui clot la première étape.

Étape 2 :

Montrons que le semi-groupe T_t satisfait le $i)$ de la proposition 3.4.1 sur $Lip(E_r)$.

Soient $f \in \text{Lip}(E_r)$ et $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}|T_t f(x) - T_t f(y)| &= |E(f(X^x(t)) - f(X_t^y))| \\ &\leq E|f(X^x(t)) - f(X^y(t))| \\ &\leq \left(E|f(X^x(t)) - f(X^y(t))|^2\right)^{1/2} \\ &\leq [f]\left(E|X^x(t) - X^y(t)|_r^2\right)^{1/2} \qquad (3.15)\end{aligned}$$

En combinant les inégalités (3.14) et (3.15), on a : $\forall t \geq 0$,

$$|T_t f(x) - T_t f(y)| \leq [f] \exp\Big(\frac{K(r) - M - N}{2} t\Big) |x - y|_r$$

Puisque, par l'hypothèse (η), il existe $r_0 < 0$ tel que $K(r_0) - M - N < 0$, la diffusion $(X(t))_{t \geq 0}$ perd avec une vitesse exponentielle, la mémoire de son état initial. On a donc : $\forall t \geq 0$ et $f \in \mathrm{Lip}(E_{r_0})$,

$$[T_t f] \leq [f] \exp\Big(\frac{K(r_0) - M - N}{2} t\Big) .$$

Donc l'hypothèse $i)$ de la proposition 3.4.1 est satisfaite.

Étape 3 :

D'autre part, par construction (cf Shiga & Shimizu (1980)), le processus de diffusion $(X(t))_{t \geq 0}$ satisfait pour tout $t \geq 0\,, r < 0\,, E\Big(|X(t)|_r\Big) < +\infty$. Donc l'hypothèse (ii) de la proposition 3.4.1 est satisfaite et cela prouve que la diffusion $(X(t))_{t \geq 0}$ admet une unique probabilité μ_0, invariante sous l'action de T_t, telle que : $\forall f \in \mathrm{Lip}(E_{r_0})$ et $x \in E_{r_0}$,

$$\lim_{t \to \infty} T_t f(x) = \int_{E_{r_0}} f \, d\mu_0 .$$

Nous allons montrer que cette convergence reste vraie pour les fonctions f continues, bornées sur E_{r_0}.

Soit

$$\mathcal{P}_1(E_r) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{ P \in \mathcal{P}(E_r)\,;\ \exists x_o \in E_r \text{ pour lequel, } \int_{E_r} |x - x_0|_r dP(x) < +\infty \Big\}$$

Munissons l'espace $\mathcal{P}_1(E_r)$ de la métrique de Vasserstein, notée $\mathbf{R}$, définie par :
$\forall$P, Q $\in \mathcal{P}(E_r)$,

$$\mathbf{R}(P, Q) := \inf_{X,Y} E|X - Y|_r ,$$

où X (respectivement Y) parcourt l'ensemble des variables aléatoires à valeurs dans E_r de loi P (respectivement Q).
Cette définition de $\mathbf{R}$ est équivalente à la relation duale de Kantorovich : plus précisément, pour $P, Q \in \mathcal{P}_1(E_r)$,

$$\mathbf{R}(P, Q) = \sup_{[f] \leq 1} \Big| \int_{E_r} f d(P - Q) \Big| .$$

L'espace $(\mathcal{P}_1(E_r), \mathbf{R})$ est un espace métrique complet séparable; la convergence d'une suite $(P_n)_n$ de $\mathcal{P}_1(E_r)$ au sens de la métrique $\mathbf{R}$ entraine la convergence étroite de $(P_n)_n$ (cf.Dudley (1976), Théorème 8.3).

On sait, par définition, que :

$$T_t f(x) = \int_\Omega f(X(t))dQ^x = \int_{E_r} f(y)dQ_t^x(y).$$

Ainsi, il existe $r_0 < 0$ tel que pour tout $f \in C_b(E_{r_0})$ et $x \in E_{r_0}$,

$$\lim_{t \to \infty} T_t f(x) = \int_{E_{r_0}} f \, d\mu_0,$$

où μ_0 est la probabilité invariante sous l'action de T_t. D'où l'ergodicité de la diffusion $(X(t))_{t \geq 0}$ solution de (3.6). ∎

Remarque 3.4.4

1- Dans la preuve du théorème 3.4.2, la forme spécifique du poids $\gamma^{(r)}$ ne joue aucun rôle. On aurait donc les mêmes résultats dans n'importe quel espace $l^2(\gamma)$ pour lequel on aurait existence et unicité de la solution. C'est seulement dans les exemples qui suivent que l'on utilise la forme explicite de $\gamma^{(r)}$ pour calculer la valeur exacte de la constante $K(r)$.

2- Dans le cas où la portée de l'interaction est finie la suite $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ définie dans l'hypothèse (δ) a au plus un nombre fini de termes non nuls.

Corollaire 3.4.5

L'ensemble des mesures de Gibbs à support dans E_{r_0} et associées au hamiltonien défini en (3.4) est au plus réduit à un singleton.

Preuve

Quand elles existent, ces mesures de Gibbs sont des mesures invariantes du système différentiel stochastique (3.5). Donc, s'il existe deux mesures de Gibbs, par ergodicité de la diffusion infini-dimensionnelle solution de (3.5), c'est-à-dire par unicité de la mesure d'équilibre, elles sont identiques. ∎

Ainsi, on a obtenu un critère d'unicité des mesures de Gibbs, à support dans E_{r_0}, associées au hamiltonien (3.4), en l'interprètant comme l'unique mesure invariante d'un système gradient ergodique. Cela résoud le problème d'unicité dans un certain cadre, qui en général n'est pas une tâche facile car l'espace des spins (ici $\mathbb{R}$) n'est pas borné (cf. Georgii, chapitre 8).

3.5 Exemples

Les modèles que nous allons présenter proviennent de la mécanique statistique anharmonique c'est-à-dire que l'hamiltonien $h = (h_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ considéré est composé d'un potentiel par paires quadratique et d'un potentiel propre non quadratique. On peut aussi considérer l'équation différentielle stochastique comme résultant d'une pertubation linéaire d'un système sans interaction, stationnaire en espace.

3.5.1 Un cas d'interaction à portée finie

Définissons les fonctions d'interaction ϕ_i et $\phi_{i,j}$ par :

$$\phi_i \equiv V \in C^2(\mathbb{R}) \text{ et } \phi_{i,j}(x_i, x_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_i - x_j)^2 & \text{si } |i-j| \leq \rho \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\rho \in]0, +\infty[$ étant la portée de l'interaction. L'interaction par paires $\phi_{i,j}$ est quadratique. L'hamiltonien $h = (h_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ est donc donné au site $i \in \mathbb{Z}^d$ par

$$h_i(x) = V(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{|i-j|\leq\rho} (x_i - x_j)^2 \ , \tag{3.16}$$

(cf. (3.4)) où $x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}^d} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Remarquons que h_i est défini sur tout l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Nous considérons le système gradient stochastique associé :

$$\begin{cases} dX_i^{(1)}(t) &= dB_i(t) - \frac{1}{2}\Big(V'(X_i^{(1)}(t)) \\ & \quad + \sum\limits_{|i-j|\leq\rho} (X_i^{(1)}(t) - X_j^{(1)}(t))\Big)dt, t > 0 \ , i \in \mathbb{Z}^d \\ X^{(1)}(0) &= x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} . \end{cases} \tag{3.17}$$

Proposition 3.5.1
Si le potentiel d'interaction propre V est strictement convexe alors il existe $r_0 < 0$ tel que, pour tout $x \in E_{r_0}$, l'équation (3.17) admet une unique solution, notée $(X^{(1)}(t))_{t\geq 0}$, qui est ergodique dans l'espace de Banach E_{r_0}.

Démonstration :
Puisque V est strictement convexe et que $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\phi_{i,j} \equiv -1$, alors les hypothèses α, β, γ de $(\mathbf{H}_4)$ sont satisfaites. Par la stricte convexité de V, il existe $M > 0$ tel que l'hypothèse (α')

du théorème 3.4.2 soit satisfaite. D'autre part, pour tous réels x, y, z, t et pour $i, j \in \mathbb{Z}^d$, on a :

$$\begin{aligned}(x-y)(\phi'_{i,j}(x,z)-\phi'_{i,j}(y,t)) &= (x-y)^2-(x-y)(z-t)\\ &\geq \frac{1}{2}\Big((x-y)^2-(z-t)^2\Big)\end{aligned}$$

Ainsi l'hypothèse (δ) du théorème 3.4.2 est vérifiée avec

$$a_i = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } |i| \leq \rho \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc :

$$N = \sum_{0<|k|\leq\rho} a_k = \sum_{k\in B_\rho(0)\setminus\{0\}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(|B_\rho(0)|-1)\ ,$$

où $B_\rho(i) = \{j \in \mathbb{Z}^d\ ;\ |i-j| \leq \rho\}$ est la boule de $\mathbb{Z}^d$ centrée en i et de rayon ρ, et $|B_\rho(0)|$ est le cardinal de $B_\rho(0)$. Il nous reste à montrer l'existence de $r \in \mathbb{Q}^*_-$ tel que l'hypothèse (η) du théorème 3.4.2 soit satisfaite.

$$\begin{aligned}K(r) &= \sup_{i\in\mathbb{Z}^d} \sum_{0<|j-i|\leq\rho} \Big(\frac{1+|i|}{1+|j|}\Big)^{-2r}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \sup_{i\in\mathbb{Z}^d} \sum_{0<|k|\leq\rho} \Big(\frac{1+|i|}{1+|i+k|}\Big)^{-2r}\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Par l'inégalité élémentaire : $|i|-|k| \leq |i+k|$, on a :

$$\begin{aligned}K(r) &= \sup_{i\in\mathbb{Z}^d} \sum_{k\in B_\rho(0)\setminus\{0\}} \Big(\frac{1+|i+k|+|k|}{1+|i+k|}\Big)^{-2r}\cdot\frac{1}{2}\\ &\leq \sum_{k\in B_\rho(0)\setminus\{0\}} (1+|k|)^{-2r}\cdot\frac{1}{2}\\ &\leq (1+\rho)^{-2r}\cdot\frac{1}{2}(|B_\rho(0)|-1)\ .\end{aligned}$$

On peut toujours choisir $r_0 < 0$ suffisamment grand (proche de 0) pour que :

$$1 < (1+\rho)^{-2r_0} < 1 + \frac{2M}{|B_\rho(0)|-1}\ .$$

Donc l'hypothèse (η) du théorème 3.4.2 est satisfaite.
Puisque l'espace E_r est décroissant en r, pour tout $r_0 < r < 0$ on a ergodicité du processus $(X^{(1)}(t))_{t\geq 0}$ dans E_r. ■

Le système gradient stochastique (3.17) au cas où $\rho = 1$ (interaction uniquement avec les plus proches voisins) a été étudié par Royer (cf Royer (1979)). Il a montré l'existence d'une unique mesure de probabilité (de Gibbs) invariante mais n'a pas explicité la convergence vers cette mesure de Gibbs.

3.5.2 Un exemple typique d'interaction à portée infinie

Ce deuxième exemple, dans lequel la portée de l'interaction est infinie, souligne l'originalité de ce chapitre.

Soient donnés $b = (b_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ une suite positive de $\mathcal{S}$, avec $b_0 = 0$ et $N' = \sum_{k\neq 0} b_k < \infty$, et soit V une fonction de $C^2(\mathbb{R})$. Définissons les potentiels d'interaction propre (resp. par paires) ϕ_i (resp. $\phi_{i,j}$) par :

$$\phi_i \equiv V \text{ et } \phi_{i,j}(x_i, x_j) = b_{i-j}(x_i - x_j)^2, x_i, x_j \in \mathbb{R}\ , i, j \in \mathbb{Z}^d.$$

Ainsi l'hamiltonien $h = (h_j)_{j\in\mathbb{Z}^d}$ est donné formellement au site $i \in \mathbb{Z}^d$ par :

$$h_i(x) = V(x_i) + \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} b_{i-j}(x_i - x_j)^2, \quad x = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}\ . \tag{3.18}$$

On constate que h n'est pas défini sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ mais, du fait que la suite $b = (b_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ est à décroissance rapide sur $\mathbb{Z}^d$, il est bien défini sur E_r, pour tout $r < 0$. Nous considérons le système gradient stochastique associé suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} dX_i^{(2)}(t) & = & dB_i(t) - \frac{1}{2}\Big(V'(X_i^{(2)}(t)) \\ & & + \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} 2b_{i-j}(X_i^{(2)}(t) - X_j^{(2)}(t))\Big)dt, t > 0\ , i \in \mathbb{Z}^d \\ X^{(2)}(0) & = & x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}\ . \end{array}\right. \tag{3.19}$$

La portée de l'interaction n'est pas à priori finie, c'est-à-dire que l'équation différentielle stochastique satisfaite par chaque coordonnée du processus de diffusion $X^{(2)}(t)$ fait intervenir un nombre infini d'autres coordonnées.

Proposition 3.5.2

Si le potentiel d'interaction propre V est strictement convexe alors il existe $r_0 < 0$ tel que, pout tout $x \in E_{r_0}$, la solution $(X^{(2)}(t))_{t\geq 0}$ de l'équation (3.19) est ergodique dans E_{r_0}.

Démonstration :

Puisque la fonction V est strictement convexe et la suite positive $b = (b_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ appartient à $\mathcal{S}$, les hypothèses α, β et γ de $(\mathbf{H_4})$ sont bien satisfaites en prenant $q_{ij} = 2b_{i-j}$ et $c \equiv 2b$. Par la stricte convexité de V, il existe $M > 0$ tel que l'hypothèse (α') du théorème 3.4.2 soit vérifiée. L'assertion (δ) est aussi satisfaite en prenant pour suite a la suite b. Il nous reste à vérifier (η). On sait que $K(r) = \sup_{i\in\mathbb{Z}^d} \sum_{j\neq i} (\frac{1+|i|}{1+|j|})^{-2r} b_{i-j}$. En utilisant l'inégalité élémentaire : $|i| - |j| \leq |i-j|$ on a :

$$\begin{aligned} K(r) &\leq \sup_{i\in\mathbb{Z}^d} \sum_{j\neq i} (\frac{1+|j|+|i-j|}{1+|j|})^{-2r} b_{i-j} \\ &\leq \sum_{k\neq 0} (1+|k|)^{-2r} b_k = \overline{K}(r) \end{aligned}$$

Puisque $b = (b_i)_{i\in\mathbb{Z}^d} \in \mathcal{S}$, elle décroît plus vite que l'inverse de tout polynôme, en particulier que $(1+|i|)^{-2(-r+p)}$ avec $p > \frac{d}{2}$. Ce qui fait de $\overline{K}(r)$ une somme de série de fonctions normalement convergentes. Donc la fonction $\overline{K}$ est continue en $r \leq 0$ avec $\overline{K}(0) = N' = N$. On peut donc toujours choisir $r_0 < 0$ (suffisamment grand, c'est-à-dire proche de 0) pour lequel $K(r_0) < M + N$. L'hypothèse (η) du théorème 3.4.2 est ainsi satisfaite. D'où l'ergodicité dans E_{r_0}. Par la décroissance en r de E_r, l'ergodicité reste vraie dans E_r, pour tout $r > r_0$. ∎

Chapitre 4

Un modèle de Ginzburg-Landau

4 Un modèle de Ginzburg-Landau

4.1 Introduction

Les modèles de Ginzburg-Landau sur le réseau $\mathbb{Z}^d$ sont caractérisés par la donnée d'une dépendance entre les arêtes du réseau, par opposition aux systèmes précédents où on ne s'intéresse qu'aux interactions entre les points du réseau $\mathbb{Z}^d$.

Dans ces dernières décennies, l'étude du comportement de tels modèles a attiré plusieurs auteurs notamment Fritz qui, en 1987, étudie la loi des grands nombres dans le cas non-stationnaire d'une dynamique de Ginzburg-Landau. En 1989, il montre l'existence de la limite hydrodynamique, en d'autres termes, la convergence en probabilité du champ de spins renormalisés en temps vers la solution déterministe d'une équation non-linéaire, par la loi des grands nombres en dimension quelconque. Zhu (1990) s'intéresse au problème de fluctuation autour de l'équilibre d'un modèle de Ginzburg-Landau sur le réseau unidimensionnel $\mathbb{Z}$. On peut aussi citer Funaki (1990) qui examine un modèle de Ginzburg-Landau de type "continu", c'est-à-dire où le réseau $\mathbb{Z}^d$ est remplacé par l'espace continu $\mathbb{R}^d$. Il construit et caractérise alors l'unique mesure réversible pour ce modèle.

Il n'existe cependant pas de référence dans laquelle l'existence du modèle est montrée de façon claire et explicite.

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle de dynamique stochastique de Ginzburg-Landau qui est une généralisation du modèle considéré par Fritz pour lequel le potentiel par paires est de type convexe; ce dernier étant déjà plus général que celui de Zhu où le potentiel par paires est nul. Nous montrons existence et unicité de ce processus de diffusion associé grâce à une équation différentielle stochastique auxiliaire de type gradient. Et nous exhibons ensuite une famille de mesures de probabilité paramétrées invariantes sous l'action du semi-groupe de transition associé au modèle de Ginzburg-Landau pour les interactions paires de type convexe.

4.2 Le modèle de Ginzburg-Landau considéré

4.2.1 Notations et préliminaires

Nous commençons par introduire les opérateurs utilisés dans ce chapitre.

Soient ∇, ∇^* et Δ les opérateurs discrétisés appelés respectivement gradient, divergence et laplacien, définis par : pour $(e_1, e_2, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$,

- $$\begin{array}{cccc} \nabla : & \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^d} \\ & x = (x_k) & \longmapsto & \nabla x = \Big(\nabla_\eta x_k\Big)_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d \\ \eta=1,\dots,d}} \end{array}$$

  où

  $$\nabla_\eta x_k \overset{\text{déf}}{=} x_{k+e_\eta} - x_k \in \mathbb{R}$$

- $$\begin{array}{cccc} \nabla^* : & (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^d} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \\ & y = (y_{k,\eta})_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d \\ \eta=1,\dots,d}} & \longmapsto & \nabla^* y = \Big(\nabla^* y_k\Big)_{k\in\mathbb{Z}^d} \end{array}$$

  où

  $$\nabla^* y_k \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\eta=1}^{d} (y_{k,\eta} - y_{k-e_\eta,\eta}).$$

- $$\begin{array}{cccccc} \Delta = \nabla^*\nabla : & \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} & \overset{\nabla}{\longrightarrow} & (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^d} & \overset{\nabla^*}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \\ & x = (x_k) & \longmapsto & \nabla x & \longmapsto & \Delta x = \Big(\Delta x_k\Big)_{k\in\mathbb{Z}^d} \end{array}$$

  avec

  $$\begin{aligned} \Delta x_k \overset{\text{déf}}{=} & \sum_{\eta=1}^{d} (\nabla_\eta x_k - \nabla_\eta x_{k-e_\eta}) \\ & = \sum_{\eta=1}^{d} (x_{k+e_\eta} - 2x_k + x_{k-e_\eta}) = \sum_{j,|j-k|=1} (x_j - x_k). \end{aligned}$$

On rappelle que $|.|$ est la norme l^1, c'est-à-dire pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$|x| = \sum_{\eta=1}^{d} |x_\eta|$$

et $||.||$ désigne la norme l^2 c'est-à-dire

$$||x||^2 = \sum_{\eta=1}^{d} x_\eta^2.$$

On défini l'espace de Hilbert $\mathbf{E_r}$, $r < 0$, (sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$) de la façon suivante :

$$\mathbf{E_r} \overset{\text{déf}}{=} \Big\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}; \quad |x|_r^2 \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_r(k) x_k^2 < \infty \Big\},$$

où $\gamma_r(k) = e^{r|k|}$,$r < 0$.
(On remarque que $\mathbf{E_r}$ est un espace l^2 à poids comme l'espace E_r défini dans le chapitre 3 mais avec un poids exponentiel et non plus polynômial).
On note $\mathbb{E}_r$, avec $r < 0$, l'espace de Hilbert séparable à poids exponentiel, sous-espace de $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^d}$ défini par:

$$\mathbb{E}_r \stackrel{\text{déf}}{=} \Big\{ y = (y_{k,\eta})_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d \\ \eta=1,\dots,d}} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^d}; \quad \|y\|_r^2 \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_r(k)\|y_k\|^2 < \infty \Big\},$$

Les opérateurs définis ci-dessus possèdent des propriétés de régularité que l'on utilisera dans la suite. On exploitera aussi certaines propriétés élémentaires de la fonction exponentielle. Cela fait l'objet des lemmes suivants :

Lemme 4.2.1
Pour tous k, j plus proches voisins dans $\mathbb{Z}^d$, et pour tout $r < 0$,

$\alpha)$ $\gamma_r(k) \le e^{-r}\gamma_r(j)$;

$\beta)$ $|\gamma_r(k) - \gamma_r(j)| \le e^{\frac{-r}{2}}(e^{-r} - 1)\gamma_{\frac{r}{2}}(k)\gamma_{\frac{r}{2}}(j)$.

Preuve :
La démonstration de ce lemme est simple.

$$\begin{aligned} \gamma_r(k)\,\gamma_{-r}(j) &= e^{-r(|j|-|k|)} \\ &\le e^{-r(|j-k|)} \\ &\le e^{-r} ; \end{aligned}$$

d'où α).
De plus,

$$\begin{aligned} |\gamma_r(k) - \gamma_r(j)| &= \gamma_r(k)|1 - \gamma_r(j)\gamma_{-r}(k)| \\ &\le (e^{-r} - 1)\gamma_r(k). \end{aligned}$$

D'après $\alpha), ona, \gamma_r(k) \le e^{\frac{-r}{2}}\ \gamma_{\frac{r}{2}}(k)\ \gamma_{\frac{r}{2}}(j)$. On a ainsi montré β). ∎

Lemme 4.2.2
L'opérateur linéaire divergence ∇^* est continu de $\mathbb{E}_r$ dans $\mathbf{E_r}$ de norme $2d\,(e^{-r}+1)$, c'est-à-dire :

$$|\nabla^* y|_r^2 \le 2d(e^{-r} + 1)\|y\|_r^2 .$$

De plus, on a l'inégalité suivante :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_r(k)\Big(\sum_{j,|j-k|=1}(\nabla^* y_j)^2\Big)\leq 4d^2e^{-r}(e^{-r}+1)\|y\|_r^2\ .$$

Preuve :
La preuve découle de calculs simples, s'appuyant sur le Lemme 4.2.1.

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_r(k)\Big(\sum_{\eta=1}^d(y_{k,\eta}-y_{k-e_\eta,\eta})\Big)^2 &\leq d\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_r(k)\sum_{\eta=1}^d(y_{k,\eta}-y_{k-e_\eta,\eta})^2\\ &\leq 2d\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_r(k)\sum_{\eta=1}^d(y_{k,\eta}^2+y_{k-e_\eta,\eta}^2)\ .\end{aligned}$$

Or, d'après α) du Lemme 4.2.1,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_r(k)\sum_{\eta=1}^d y_{k-e_\eta,\eta}^2 &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}e^{-r}\sum_{\eta=1}^d\gamma_r(k-e_\eta)y_{k-e_\eta,\eta}^2\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}e^{-r}\sum_{\eta=1}^d\gamma_r(k)y_{k,\eta}^2\\ &= e^{-r}\|y\|_r^2\ .\end{aligned}$$

Et donc on a : $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_r(k)\sum_{\eta=1}^d(y_{k,\eta}^2+y_{k-e_\eta,\eta}^2)\leq(e^{-r}+1)\|y\|_r^2$.

De plus, on a de la même manière,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_r(k)\Big(\sum_{j,|j-k|=1}(\nabla^* y_j)^2\Big) &\leq e^{-r}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{j,|j-k|=1}\gamma_r(j)(\nabla^* y_j)^2\\ &\leq (2d)^2(e^{-r}+1)e^r\|y\|_r^2\ .\end{aligned}$$

■

Décrivons maintenant le modèle de Ginzburg-Landau qui nous intéresse dans ce chapitre.

4.2.2 Description de la dynamique

On considère $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, avec $d\geq 1$, comme l'espace des configurations. Soit $h=(h_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ l'hamiltonien défini par : pour $x=(x_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}\in\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ et $k\in\mathbb{Z}^d$,

$$h_k(x)=V(x_k)+\sum_{j,|j-k|=1}U(x_k,x_j)\ ,$$

où U et V sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ respectivement. V est le potentiel d'interaction propre et U le potentiel par paires qui est par hypothèse une fonction symétrique en ses deux variables.
Pour $k \in \mathbb{Z}^d$ et $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, notons $\partial_k h_k$ le gradient dans la $k^{ème}$ direction de h_k :

$$\partial_k h_k(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial}{\partial x_k} h_k(x) = V'(x_k) + \sum_{j,|j-k|=1} U'(x_k, x_j),$$

où $U'(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} U(x,y)$.
Entre deux voisins de $\mathbb{Z}^d$, on définit un lien orienté. À cet effet, pour k et j deux sites voisins de $\mathbb{Z}^d$, c'est-à-dire vérifiant $|k-j| = 1$, on notera $\vec{kj}$ le lien orienté positif ayant pour origine k et pour extrémité j, c'est-à-dire $j = k + e_\eta$, $\eta = 1, \ldots, d$.
Soit $(W_{\vec{kj}})_{\substack{j=k+e_\eta,\\ k\in\mathbb{Z}^d,\\ \eta=1,\ldots,d}}$ une famille de mouvements browniens réels indépendants indexée par les liens orientés positifs de $\mathbb{Z}^d$. Pour les liens orientés négatifs, c'est-à-dire de la forme $j = k - e_\eta$, $\eta = 1, \ldots, d$, on adopte la convention $W_{\vec{kj}} + W_{\vec{jk}} = 0$.
Le long de chaque lien orienté $\vec{kj}$ (qu'il soit positif ou négatif), on définit le courant aléatoire $J_{\vec{kj}}(x)$ de la configuration $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ satisfaisant l'équation différentielle stochastique suivante : pour $t \geq 0$,

$$dJ_{\vec{kj}}(X(t)) = \frac{1}{2}[\partial_k h_k(X(t)) - \partial_j h_j(X(t))]dt - dW_{\vec{kj}}(t), \tag{4.1}$$

Le modèle de Ginzburg-Landau (noté G-L) est obtenu en sommant, en chaque site, les courants créés le long des liens orientés ayant pour origine ce site.

Définition 4.2.3
On appelle modèle de Ginzburg-Landau le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ solution (quand il existe) de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dS_k(t) & = & - \sum_{j,|j-k|=1} dJ_{\vec{kj}}(S(t)) \ , t > 0 \ , k \in \mathbb{Z}^d \\ S(0) & = & \sigma \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}. \end{array} \right. \tag{4.2}$$

En remplaçant le courant J par son expression donnée en (4.1), on a :

$$
(4.3) \qquad \begin{cases} dS_k(t) &= \frac{1}{2} \sum\limits_{j,|j-k|=1} [\partial_j h_j(S(t)) - \partial_k h_k(S(t))]dt \\ & \quad + \sum\limits_{j,|j-k|=1} dW_{\vec{kj}}(t), \quad t > 0 \,, k \in \mathbb{Z}^d \\ S(0) &= \sigma \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}. \end{cases}
$$

Pour $k \in \mathbb{Z}^d$ et $\eta = 1, \ldots, d$, posons :

$$
B_{k,\eta} := W_{\overrightarrow{k\,k+e_\eta}}.
$$

On remarque que pour k fixé, $B_k = (B_{k,\eta})_{\eta=1,\ldots,d}$ est un mouvement brownien $d-$dimensionnel (ses d coordonnées sont indépendantes entre elles). On obtient :

$$
\begin{aligned}
\sum_{j,|j-k|=1} W_{\vec{kj}} &= \sum_{\eta=1}^{d} (W_{\overrightarrow{k\,k+e_\eta}} + W_{\overrightarrow{k\,k-e_\eta}}) \\
&= \sum_{\eta=1}^{d} (W_{\overrightarrow{k\,k+e_\eta}} - W_{\overrightarrow{k-e_\eta\,k}}) \\
&= \sum_{\eta=1}^{d} (B_{k,\eta} - B_{k-e_\eta,\eta}) \\
&= \nabla^* B_k.
\end{aligned}
$$

En utilisant les opérateurs discrétisés définis dans la sous section 4.2.1, on arrive à une forme simplifiée du système (4.3) :

$$
(4.4) \qquad \begin{cases} dS_k(t) &= \nabla^*[\frac{1}{2}\nabla\, \partial_k h_k(S(t))dt + dB_k(t)], \quad t > 0 \,, k \in \mathbb{Z}^d \\ S(0) &= \sigma \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \end{cases}
$$

ou encore en remplaçant h par son expression, on a:

$$
(4.5) \qquad \begin{cases} dS_k(t) &= \nabla^* \Big[\frac{1}{2}\nabla \Big(V'(S_k(t)) \\ & \quad + \sum\limits_{j,|j-k|=1} U'(S_k(t), S_j(t))\Big)dt + dB_k(t)\Big], \quad t > 0 \,, k \in \mathbb{Z}^d \\ S(0) &= \sigma \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}. \end{cases}
$$

Notre but est donc d'étudier l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique (4.4).

4.3 Une équation différentielle stochastique auxiliaire

La dérive du système dynamique (4.4) est de la forme laplacien discrétisé du gradient de l'hamiltonien h et le terme pertubateur est du type divergence discrétisée du mouvement brownien. Ce mélange d'opérateurs montre la complexité de tels modèles. De ce fait, nous décomposons les difficultés en considérant la dynamique auxiliaire suivante définie pour un processus à valeurs dans $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^d}$:

$$(4.6) \quad \begin{cases} dY_k(t) &= \frac{1}{2}\nabla\left(V'(\nabla^* Y_k(t)) + \sum_{j,|j-k|=1} U'(\nabla^* Y_k(t), \nabla^* Y_j(t))\right)dt \\ & \quad +dB_k(t),\ t>0\ ,k\in\mathbb{Z}^d \\ Y_k(0) &= y_k \in (\mathbb{R}^d),\ \ k\in\mathbb{Z}^d \end{cases}$$

soit encore pour tout $\eta = 1,\ldots,d$

$$(4.7) \quad \begin{cases} dY_{k,\eta}(t) &= \frac{1}{2}\nabla_\eta\left(V'(\nabla^* Y_k(t)) + \sum_{j,|j-k|=1} U'(\nabla^* Y_k(t), \nabla^* Y_j(t))\right)dt \\ & \quad +dB_{k,\eta}(t),\ t>0\ ,k\in\mathbb{Z}^d \\ Y_{k,\eta}(0) &= y_{k,\eta} \in \mathbb{R}\ ,\ \ k\in\mathbb{Z}^d. \end{cases}$$

Le terme dérive de l'équation différentielle stochastique (4.6) -où le gradient discrétisé s'applique à une fonction de la divergence discrétisée du processus- ne satisfait pas les hypothèses introduites par Shiga & Shimizu (1980), rappelées au théorème 3.3.1, hypothèse ($\mathbf{H}_4$); d'où la nécessité d'exploiter quelques propriétés élémentaires des opérateurs discrétisés.

Nous allons alors montrer dans ce paragraphe l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (4.6), puis dans le paragraphe 4.4 nous prouvons que si $Y = (Y_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est la solution de (4.6) dans $\mathbb{E}_r$ alors $\nabla^* Y$ est une solution du système (4.4) dans $\mathbf{E}_r$; et pour finir, nous montrons que $\nabla^* Y$ est l'unique solution de (4.4).

Le principal théorème de cette section est le théorème d'existence et d'unicité des solutions de l'équation différentielle stochastique (4.6).

Théorème 4.3.1

Considérons des fonctions d'interaction U et V de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ respectivement, satisfaisant les hypothèses suivantes :

i) $V'(0)=0$ *et il existe* $K_1>0$ *tel que :*

$$|V''|\leq K_1\ ; \tag{4.8}$$

ii) $U'(0,0)=0$ *et il existe* $K_2\in\mathbb{R}$ *,* $K_3\geq 0$ *tel que pour* $x,y,z,t\in\mathbb{R}$ *:*

$$(x-y)\Big(\,U'(x,z)-U'(y,t)\,\Big)\geq K_2(x-y)^2-K_3(z-t)^2\ ; \tag{4.9}$$

iii) U' *est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable uniformément en la première, c'est-à-dire qu'il existe* $K_4\geq 0$ *tel que pour* $x,y,z\in\mathbb{R}$ *:*

$$|U'(x,y)-U'(x,z)|\leq K_4|y-z|\ .$$

Alors, si $y\in\mathbb{E}_r$*, le système (4.6) admet une unique solution* Y *à valeurs dans* $\mathbb{E}_r$ *tel que:*

$$P(Y(0)=y)=1.$$

Démonstration du théorème 4.3.1 :

• $1^{ère}$ *étape : " non-explosion des approximations de la solution".*

Nous allons construire une suite d'approximations fini-dimensionnelles $(Y^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ dont on va montrer qu'elle n'explose pas dans $\mathbb{E}_r$.

La suite d'approximations $(Y^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} dY_k^{(m)}(t) &=& \frac{1}{2}\nabla\Big(V'(\ \nabla^*Y_k^{(m)}(t)\ )+\displaystyle\sum_{j,|j-k|=1}U'(\nabla^*Y_k^{(m)}(t)\ ,\ \nabla^*Y_j^{(m)}(t))\Big)dt \\ & & +dB_k(t),\ \text{si } t>0\ ,\ k\in\Lambda_m \\ Y^{(m)}(0) &=& y\in\mathbb{E}_r \\ Y_k^{(m)}(t) &\equiv& y_k \text{ si } k\notin\Lambda_m \end{cases}$$

où $(\Lambda_m)_m$ est une suite de volumes finis croissants vers $\mathbb{Z}^d$.

Pour montrer la non-explosion on va prouver que pour tout $T>0$,

$$N_T\overset{\text{déf}}{=}\sup_{m\in\mathbb{N}}E\|\ |Y^{(m)}|_{(T)}\ \|_r^2=\sup_{m\in\mathbb{N}}E\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\gamma_r(k)\sup_{0\leq t<T}\|Y_k^{(m)}(t)\|^2\Big)<\infty\ ,$$

avec $|Y|_{(T)}\overset{\text{déf}}{=}\Big(\sup_{0\leq t<T}\|Y_k(t)\|\Big)_{k\in\mathbb{Z}^d}$, $Y\in(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^d}$.

Par la formule d'Itô uni-dimensionnelle, on a : pour $k\in\mathbb{Z}^d$ et $\eta=1,\ldots,d$

$$\Big(Y_{k,\eta}^{(m)}(t)\Big)^2=y_{k,\eta}^2+2\int_0^t Y_{k,\eta}^{(m)}(s)dY_{k,\eta}^{(m)}(s)+t\ .$$

En utilisant le système (4.7) on a :

$$\begin{aligned}\left(Y_{k,\eta}^{(m)}(t)\right)^2 &= y_{k,\eta}^2 + \int_0^t Y_{k,\eta}^{(m)}(s)\nabla_\eta\Big(V'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)) \\ &+ \sum_{j,|j-k|=1} U'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s), \nabla^* Y_j^{(m)}(s))\Big)ds \\ &+2\int_0^t Y_{k,\eta}^{(m)}(s)dB_{k,\eta}(s) + t\ .\end{aligned}$$

Cette égalité nous montre une fois de plus que les hypothèses de Shiga et Shimizu ne s'appliquent pas dans ce modèle que nous considérons.

Par suite on a :

$$\begin{aligned}||Y_k^{(m)}(t)||^2 &= ||y_k||^2 + \int_0^t \sum_{\eta=1}^d Y_{k,\eta}^{(m)}(s)\nabla_\eta\Big(V'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)) \\ &+ \sum_{j,|j-k|=1} U'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)\ ,\ \nabla^* Y_j^{(m)}(s))\Big)ds \\ &+2\int_0^t \sum_{\eta=1}^d Y_{k,\eta}^{(m)}(s)\, dB_{k,\eta}(s) + d\ t\ .\end{aligned}$$

Soit encore, en notant " . " le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{aligned}||Y_k^{(m)}(t)||^2 &= ||y_k||^2 + \int_0^t Y_k^{(m)}(s).\nabla\ \Big(V'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)) \\ &+ \sum_{j,|j-k|=1} U'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)\ ,\ \nabla^* Y_j^{(m)}(s))\Big)ds \\ &+2\int_0^t \sum_{\eta=1}^d Y_{k,\eta}^{(m)}(s)\, dB_{k,\eta}(s) + d\ t\ .\end{aligned}$$

Le contrôle du terme martingale est classique. En effet, si l'on pose

$$M_{k,\eta}^{(m)}(t) \overset{\text{déf}}{=} \int_0^t Y_{k,\eta}^{(m)}(s)\, dB_{k,\eta}(s)\ ,$$

en utilisant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwartz, de Doob et le fait que pour $x \in \mathbb{R}, 2x \leq x^2 + 1$, on a :

$$\begin{aligned}E(\sup_{0\leq u\leq t}|M_{k,\eta}^{(m)}(u)|) &\leq (E\sup_{0\leq u\leq t}|M_{k,\eta}^{(m)}(u)|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2[E(\int_0^t Y_{k,\eta}^{(m)}(s)\, dB_{k,\eta}(s))^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2(E\int_0^t (Y_{k,\eta}^{(m)})^2(s)\, ds)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 1 + E[\int_0^t (Y_{k,\eta}^{(m)})^2(s)\, ds].\end{aligned}$$

Ainsi, on aboutit à l'inégalité suivante : pour $t \in [0,T]$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_r(k) E \sup_{0\le u\le t} ||Y_k^{(m)}(u)||^2 \quad \le \quad & ||y||_r^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} E \sup_{0\le u\le t} \int_0^u \gamma_r(k) Y_k^{(m)}(s) \\
& .\nabla \Big(V'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)) \\
(4.10) \qquad\qquad\qquad\qquad & + \sum_{j,|j-k|=1} U'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s), \nabla^* Y_j^{(m)}(s)) \Big) ds \\
& +2 \int_0^t \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_r(k) E \sup_{0\le u\le s} ||Y_k^{(m)}(u)||^2 \, ds \\
& +(2+T)||\mathbf{1}||_r^2
\end{aligned}
$$

où $\mathbf{1}$ est le vecteur dont la $k^{ème}$ coordonnée $\mathbf{1_k}$ est le vecteur $e_1 + e_2 + \ldots + e_d$.

On va énoncer et démontrer un certain nombre de lemmes utiles pour la suite de la démonstration du théorème 4.3.1.

Lemme 4.3.2
Soient U et V des fonctions d'interaction satisfaisant les hypothèses i), ii) et iii) du théorème 4.3.1. Alors :

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$-K_1(x-y)^2 \le (x-y)(V'(x) - V'(y)) \le K_1(x-y)^2 \; ;$$

b) et d'autre part, $\forall m \ge 1$, $\forall x, y, t \in \mathbb{R}$ et $\forall (x_\nu), (y_\nu), (z_\nu) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on a :

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{m} (U'(t, y_\nu) - U'(t, z_\nu))\Big)^2 \le m K_4^2 \sum_{\nu=1}^{m} (y_\nu - z_\nu)^2 \; ;$$

et

$$
\begin{aligned}
\Big(V'(x) - V'(y) + \sum_{\nu=1}^{m} (U'(x, x_\nu) - U'(y, y_\nu))\Big)^2 \quad \le \quad & (4K_1^2 + 4m^2 K_4^2)(x-y)^2 \\
& +2m K_4^2 \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - y_\nu)^2 \, .
\end{aligned}
$$

(4.11)

Preuve :
La démonstration du $a)$ ne pose aucun problème. Elle est basée sur l'inégalité (4.8), c'est-à-dire le fait que $|V''|$ soit borné par la constante K_1 .

Le premier volet du $b)$ est obtenu en utilisant l'hypothèse $iii)$ du théorème 4.3.1. Du fait de la bornitude de V'' et par l'inégalité simple $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$, on a :

$$\begin{aligned}
& \Big(V'(x) - V'(y) + \sum_{\nu=1}^{m}(U'(x,x_\nu) - U'(y,y_\nu))\Big)^2 \\
= \; & \Big(V'(x) - V'(y) + \sum_{\nu=1}^{m}(U'(x,x_\nu) - U'(y,x_\nu) + U'(y,x_\nu) - U'(y,y_\nu))\Big)^2 \\
\leq \; & 2\Big(V'(x) - V'(y) + \sum_{\nu=1}^{m}(U'(x,x_\nu) - U'(y,x_\nu))\Big)^2 + 2\Big(\sum_{\nu=1}^{m}(U'(y,x_\nu) - U'(y,y_\nu))\Big)^2 \\
\leq \; & 4\Big(V'(x) - V'(y)\Big)^2 + 4\Big(\sum_{\nu=1}^{m}(U'(x,x_\nu) - U'(y,x_\nu))\Big)^2 + 2\Big(\sum_{\nu=1}^{m}(U'(y,x_\nu) - U'(y,y_\nu))\Big)^2 \\
\leq \; & (4K_1^2 + 4m^2K_4^2)(x-y)^2 + 2mK_4^2\sum_{\nu=1}^{m}(x_\nu - y_\nu)^2 \, ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve $b)$. ■

Lemme 4.3.3

Il existe une constante ne dépendant que de d, K_1, K_4 :

$$C(r) = 8d^2(e^{-r}+1)(K_1^2 + 2d^2K_4^2(e^{-r}+2)) + \frac{e^{-r}}{4}(e^{-r}-1)^2$$

telle que pour tout $Y = (Y(t))_{t\in[0,T]} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^d}$,

$$\begin{aligned}
A_t(Y) \;& \stackrel{\text{déf}}{=} \; \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\eta=1}^{d}\int_0^t \Big(\gamma_r(k-e_\eta) - \gamma_r(k)\Big)Y_{k-e_\eta,\eta}(s)\Big(V'(\nabla^*Y_k(s)) \\
& \qquad + \sum_{j,|j-k|=1} U'(\nabla^*Y_k(s), \nabla^*Y_j(s))\Big)ds \\
& \leq \; C(r)\int_0^t \|Y(s)\|_r^2\, ds
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Preuve :

D'après le $\beta)$ du lemme 4.2.1 on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
A_t(Y) \; \leq \; & e^{\frac{-r}{2}}(e^{-r}-1)\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\eta=1}^{d}\int_0^t \gamma_{\frac{r}{2}}(k)\Big|V'(\nabla^*Y_k(s)) \\
& + \sum_{j,|j-k|=1} U'(\,\nabla^*Y_k(s), \nabla^*Y_j(s)\,)\Big|\gamma_{\frac{r}{2}}(k-e_\eta)\Big|Y_{k-e_\eta,\eta}(s)\Big|\, ds.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité élémentaire $xy \leq \frac{1}{2}(2x^2 + \frac{1}{2}y^2)$ on a :

$$A_t(Y) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} d \int_0^t \gamma_r(k)\Big(V'(\nabla^* Y_k(s)) + \sum_{j,|j-k|=1} U'(\ \nabla^* Y_k(s), \nabla^* Y_j(s)\ )\Big)^2 ds$$
$$+\tfrac{e^{-r}}{4}(e^{-r}-1)^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\eta=1}^d \int_0^t \gamma_r(k-e_\eta)(Y_{k-e_\eta,\eta}(s))^2\, ds.$$

Par (4.11) du lemme 4.3.2 on a :

$$A_t(Y) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \Big[\gamma_r(k)\ d \int_0^t \Big((4K_1^2 + 4(2d)^2 K_4^2)(\nabla^* Y_k(s))^2$$
$$+4dK_4^2 \sum_{j,|j-k|=1} (\nabla^* Y_j(s))^2\Big)\, ds\Big] + \frac{e^{-r}}{4}(e^{-r}-1)^2 \int_0^t \|Y(s)\|_r^2\, ds.$$

En utilisant le lemme 4.2.2, on a :

$$A_t(Y) \leq \Big(8d^2(e^{-r}+1)(K_1^2 + 2d^2K_4^2(e^{-r}+2)) + \frac{e^{-r}}{4}(e^{-r}-1)^2\Big)\int_0^t \|Y(s)\|_r^2\, ds.$$

■

Corollaire 4.3.4

On déduit du lemme 4.3.3 :

$$A'_t(Y) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\eta=1}^d E \sup_{0\leq u\leq t} \int_0^u \Big(\gamma_r(k-e_\eta) - \gamma_r(k)\Big) Y_{k-e_\eta,\eta}(s)\Big(V'(\nabla^* Y_k(s))$$
$$(4.13) \qquad + \sum_{j,|j-k|=1} U'(\nabla^* Y_k(s), \nabla^* Y_j(s))\Big)ds$$
$$\leq C(r)\int_0^t E \sup_{0\leq u<\leq s} \|Y(u)\|_r^2\, ds$$

Lemme 4.3.5

Il existe une constante ne dépendant que de d, K_1, K_2, K_3, K_4 :

$$D(r) = 2d(e^{-r}+1)(2dK_3e^{-r} + 2d\ \max(0,-K_2) + K_1) + C(r)$$

telle que pour $t \in [0,T]$ et $m \in \mathbb{N}$,

$$G_t^{(m)} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} E \sup_{0\leq u\leq t} \int_0^u \gamma_r(k) Y_k^{(m)}(s).\nabla\Big(\ V'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s))$$
$$(4.14) \qquad + \sum_{j,|j-k|=1} U'(\ \nabla^* Y_k^{(m)}(s), \nabla^* Y_j^{(m)}(s)\ )\ \Big)\, ds$$
$$\leq D(r)\int_0^t E\|Y^{(m)}(s)\|_r^2\, ds\ ;$$

Preuve :
La démonstration de ce lemme est basée sur la dualité entre ∇ et ∇^*. En effet, on a :

$$\begin{aligned} G_t^{(m)} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} E \sup_{0\le u\le t} \Big[-\int_0^u \nabla^*\Big(\gamma_r(k)Y_k^{(m)}(s)\Big)\Big(V'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)) \\ &\quad + \sum_{j,|j-k|=1} (\, U'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s), \nabla^* Y_j^{(m)}(s))\Big)\, ds\Big]. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} G_t^{(m)} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} E \sup_{0\le u\le t} \Big[-\int_0^u \sum_{\eta=1}^d \Big(\gamma_r(k)Y_{k,\eta}^{(m)}(s) - \gamma_r(k-e_\eta)Y_{k-e_\eta,\eta}^{(m)}(s)\Big)\Big)\Big(V'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)) \\ &\quad + \sum_{j,|j-k|=1} (\, U'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s), \nabla^* Y_j^{(m)}(s)) - U'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s), \nabla^* Y_j^{(n)}(s))\,)\Big)\, ds\Big], \end{aligned}$$

donc ,

$$\begin{aligned} G_t^{(m)} &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} E \sup_{0\le u\le t} \Big[-\int_0^u \gamma_r(k)\nabla^* Y_k^{(m)}(s)\Big(V'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)) \\ &\quad + \sum_{j,|j-k|=1} (\, U'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s), \nabla^* Y_j^{(m)}(s))\,)\Big)\, ds\Big] \\ &\quad + \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} E \sup_{0\le u\le t} \int_0^u \sum_{\eta=1}^d \Big(\gamma_r(k-e_\eta) - \gamma_r(k)\Big) Y_{k-e_\eta,\eta}^m(s) \\ &\quad \Big(V'(\nabla^* Y_k^m(s)) + \sum_{j,|j-k|=1} U'(\, \nabla^* Y_k^{(m)}(s), \nabla^* Y_j^{(m)}(s)\,)\Big)\, ds. \end{aligned}$$

En plus de l'inégalité (4.9) , si on utilise le $a)$ du lemme 4.3.2, c'est-à dire
$-xU'(x,z) \le \max(0,-K_2)x^2 + K_3 z^2$
$-xV'(x) \le K_1 x^2$
et la remarque 4.3.4 appliquée à $Y \equiv Y^{(m)}$, on a :

$$\begin{aligned} G_t^{(m)} &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_0^t E\gamma_r(k)\Big((K_1 + 2d\, \max(0,-K_2)(\nabla^* Y_k^{(m)}(s))^2 \\ &\quad + K_3 \sum_{j,|j-k|=1} (\nabla^* Y_j^{(m)}(s))^2\Big)\, ds + C(r)\int_0^t E\|Y^{(m)}(s)\|_r^2\, ds. \end{aligned}$$

Par le lemme 4.2.2, on obtient donc :

$$\begin{aligned} G_t^{(m)} &\le \Big(2d(e^{-r}+1)(2dK_3e^{-r} + 2d\, \max(0,-K_2) + K_1) \\ &\quad + C(r)\Big)\int_0^t E\|Y^{(m)}(s)\|_r^2\, ds. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Suite de la démonstration du théorème 4.3.1

L' inégalité (4.10) et le lemme 4.3.5 nous fournissent le résultat suivant : $\forall t \leq T$,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_r(k) E \sup_{0\leq u\leq t} ||Y_k^{(m)}(u)||^2 &\leq \left(\|y\|_r^2 + (2+T)\,\|\mathbf{1}\|_r^2\right) \\ &+ \left(D(r)+2\right)\int_0^t E \sup_{0\leq u\leq s} \|Y^{(m)}(u)\|_r^2\, ds.\end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall, on a : pour m fixé et $t \leq T$,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_r(k) E \sup_{0\leq u\leq t} ||Y_k^{(m)}(u)||^2 &\leq \left(\|y\|_r^2 + (2+T)\,\|\mathbf{1}\|_r^2\right) \exp\left((D(r)+2)\; t\right) \\ &\leq \left(\|y\|_r^2 + (2+T)\,\|\mathbf{1}\|_r^2\right) \exp\left((D(r)+2)\; T\right)\end{aligned}$$

où le majorant est indépendant de m. Par suite,

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_r(k) E \sup_{0\leq t\leq T} ||Y_k^{(m)}(t)||^2 < \infty \tag{4.15}$$

On conclut la première étape de la démonstration.

• $2^{ème}$ *étape : "Les approximations forment une suite de Cauchy dans* $\mathbb{E}_r$*"*

Pour cela, considérons la suite d'approximations $(Y^{(n)})_{n\geq 0}$ et montrons qu'elle est de Cauchy dans $\mathbb{E}_r$; autrement dit, pour $Z^{(m,n)} \overset{\text{déf}}{=} Y^{(m)} - Y^{(n)}$, montrons que : $\forall T > 0$,

$$\lim_{m,n\to\infty} E\Big(\sup_{0\leq t\leq T} \|Z^{(m,n)}(t)\|_r^2\Big) = 0.$$

On va supposer que $m > n$. Remarquons que $Z_k^{(m,n)}(0) = 0$. Soit $(\Lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-ensembles finis de $\mathbb{Z}^d$ telle que Λ_n converge en croissant vers $\mathbb{Z}^d$ lorsque n tend vers l'infini. Remarquons que , si $k \notin \Lambda_m$, alors $Z_k^{(m,n)} \equiv 0$. Dans le cas où $k \in \Lambda_n$, on a : pour $\eta = 1, \ldots, d$

$$\begin{aligned}(Z_{k,\eta}^{(m,n)}(t))^2 &= 2\int_0^t Z_{k,\eta}^{(m,n)}(s))dZ_{k,\eta}^{(m,n)}(s) \\ &= \int_0^t Z_{k,\eta}^{(m,n)}(s)\nabla_\eta\Big[V'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)) - V'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s)) \\ &\quad + \sum_{j,|j-k|=1} \Big(U'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s), \nabla^* Y_j^{(m)}(s)) \\ &\quad - U'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s), \nabla^* Y_j^{(n)}(s)) \Big)\Big]\, ds.\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\|Z_k^{(m,n)}(t)\|^2 &= \int_0^t Z_k^{(m,n)}(s).\nabla\Big[V'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)) - V'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s)) \\
&+ \sum_{j,|j-k|=1} \Big(U'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s), \nabla^* Y_j^{(m)}(s)) - U'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s), \nabla^* Y_j^{(n)}(s)) \Big)\Big]\, ds.
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\Lambda_n} \gamma_r(k)\|Z^{(m,n)}(t)\|^2 &= \sum_{k\in\Lambda_n} \gamma_r(k) \int_0^t Z_k^{(m,n)}(s).\nabla\Big[V'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)) \\
&- V'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s)) \\
&+ \sum_{j,|j-k|=1} \Big(U'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s), \nabla^* Y_j^{(m)}(s)) \\
&- U'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s), \nabla^* Y_j^{(n)}(s)) \Big)\Big]\, ds
\end{aligned} \tag{4.16}$$

On a donc besoin de quelques lemmes analogues aux lemmes 4.3.3 et 4.3.5 afin d'obtenir une inégalité pouvant nous conduire au lemme de Gronwall :

Lemme 4.3.6

Pour tout $t \in [0,T]$ et $m,n \in \mathbb{N}$, et pour $Z^{(m,n)} \stackrel{\text{déf}}{=} Y^{(m)} - Y^{(n)}$, on a :

$$\begin{aligned}
A_t^{(m,n)} &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k\in\Lambda_n}\sum_{\eta=1}^{d} \int_0^t \Big(\gamma_r(k-e_\eta) - \gamma_r(k)\Big) Z_{k-e_\eta,\eta}^{(m,n)}(s)\Big(V'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)) \\
&-V'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s)) \\
&+ \sum_{j,|j-k|=1} \big(U'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s), \nabla^* Y_j^{(m)}(s)) - U'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s), \nabla^* Y_j^{(n)}(s)) \big)\Big) ds \\
&\leq C(r) \int_0^t \|Z^{(m,n)}(s)\|_r^2\, ds\ ;
\end{aligned} \tag{4.17}$$

où la constante $C(r)$ est donnée dans le lemme 4.3.3

Preuve :

D'après le β) du lemme 4.2.1 et du fait que Λ_n est un volume fini de $\mathbb{Z}^d$, on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
A_t^{(m,n)} &\leq e^{\frac{-r}{2}}(e^{-r}-1) \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{\eta=1}^{d} \int_0^t \gamma_{\frac{r}{2}}(k)\Big|V'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)) - V'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s)) \\
&+ \sum_{j,|j-k|=1} \Big(U'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s), \nabla^* Y_j^{(m)}(s)) - U'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s), \nabla^* Y_j^{(n)}(s)) \Big)\Big| \\
&\gamma_{\frac{r}{2}}(k-e_\eta)|Z_{k-e_\eta,\eta}^{(m,n)}(s)|\, ds.
\end{aligned}$$

De la même manière que dans le lemme 4.3.3, on a :

$$\begin{aligned} A_t^{(m,n)} &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_r(k)\ d \int_0^t \Big((4K_1^2 + 4(2d)^2 K_4^2)(\nabla^* Z_k^{(m,n)}(s))^2 \\ &+4dK_4^2 \sum_{j,|j-k|=1} (\nabla^* Z_j^{(m,n)}(s))^2 \Big)\ ds + \frac{e^{-r}}{4}(e^{-r}-1)^2 \int_0^t \|Z^{(m,n)}(s)\|_r^2\ ds. \end{aligned}$$

D'où

$$A_t^{(m,n)} \leq C(r) \int_0^t \|Z^{(m,n)}(s)\|_r^2\ ds.$$

■

Lemme 4.3.7

Pour tout $t \in [0,T]$ et $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} G_t^{(m,n)} &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{k\in\Lambda_n} \int_0^t \gamma_r(k) Z_k^{(m,n)}(s).\nabla\Big(V'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)) - V'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s)) \\ &+ \sum_{j,|j-k|=1} \big(\ U'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s), \nabla^* Y_j^{(m)}(s)) - U'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s), \nabla^* Y_j^{(n)}(s))\ \big)\Big)\ ds \\ &\leq D(r) \int_0^t \|Z^{(m,n)}(s)\|_r^2\ ds\ ; \end{aligned} \tag{4.18}$$

où $D(r)$ est la constante donnée dans le lemme 4.3.5.

Preuve :

La démonstration de ce lemme est basée sur la dualité entre ∇ et ∇^* comme dans le lemme 4.3.5. En effet, on a :

$$\begin{aligned} G_t^{(m,n)} &= -\sum_{k\in\Lambda_n} \int_0^t \nabla^*\Big(\gamma_r(k) Z_k^{(m,n)}(s)\Big)\Big(V'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)) - V'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s)) \\ &+ \sum_{j,|j-k|=1} \big(\ U'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s), \nabla^* Y_j^{(m)}(s)) - U'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s), \nabla^* Y_j^{(n)}(s))\ \big)\Big)\ ds. \end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned} G_t^{(m,n)} &= -\sum_{k\in\Lambda_n} \int_0^t \sum_{\eta=1}^d \Big(\gamma_r(k) Z_{k,\eta}^{(m,n)}(s) - \gamma_r(k-e_\eta) Z_{k-e_\eta,\eta}^{(m,n)}(s))\Big) \\ &\Big(V'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s)) - V'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s)) \\ &+ \sum_{j,|j-k|=1} \big(\ U'(\nabla^* Y_k^{(m)}(s), \nabla^* Y_j^{(m)}(s)) - U'(\nabla^* Y_k^{(n)}(s), \nabla^* Y_j^{(n)}(s))\ \big)\Big)\ ds. \end{aligned}$$

De façon similaire au lemme 4.3.5 on a :

$$\begin{aligned} G_t^{(m,n)} &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_0^t \gamma_r(k)\Big((K_1 + 2d\max(0,-K_2)(\nabla^* Z_k^{(m,n)}(s))^2 \\ &\quad + K_3 \sum_{j,|j-k|=1} (\nabla^* Z_j^{(m,n)}(s))^2\Big)\, ds + C(r)\int_0^t \|Z^{(m,n)}(s)\|_r^2\, ds. \end{aligned}$$

Donc,

$$G_t^{(m,n)} \leq D(r)\int_0^t \|Z^{(m,n)}(s)\|_r^2\, ds.$$

■

suite de la démonstration du théorème 4.3.1

Par l'inégalité (4.16) et le lemme 4.3.7, on obtient : pour $t \in [0,T]$

$$\sum_{k\in\Lambda_n} \gamma_r(k)||Z_k^{(m,n)}(t)||^2 \leq D(r)\int_0^t \|Z^{(m,n)}(s)\|_r^2\, ds.$$

On a donc : $\forall t \leq T$,

$$\begin{aligned} E\Big(\sup_{0\leq u\leq t} ||Z^{(m,n)}(u)||_r^2\Big) &\leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{\Lambda_m\setminus\Lambda_n}(k)\gamma_r(k)\, \Big(E\sup_{0\leq u\leq t} ||Y_k^{(m)}(u) - y_k||^2\Big) \\ &\quad + D(r)\int_0^t E\Big(\sup_{0\leq u\leq s} \|Z^{(m,n)}(u)\|_r^2\Big)\, ds. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on a :

$$E\Big(\sup_{0\leq t\leq T} ||Z^{(m,n)}(t)||_r^2\Big) \leq \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\Lambda_m\setminus\Lambda_n} \gamma_r(k)\, \Big(E\sup_{0\leq t\leq T} ||Y_k^{(m)}(t) - y_k||^2\Big)\, e^{D(r)\,T}.$$

Grâce à l'inégalité (4.15) on aboutit à :

$$\lim_{m,n\to\infty} E\Big(\sup_{0\leq t\leq T} ||Z^{(m,n)}(t)||_r^2\Big) = 0.$$

Par suite, il existe un processus $(Y(t))_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{E}_r$ et continu pour la topologie de $\mathbb{E}_r$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} E\Big(\sup_{0\leq t\leq T} ||Y^{(n)}(t) - Y(t)||_r^2\Big) = 0.$$

Ainsi, il existe une sous-suite $(n_\nu)_{\nu\geq 0}$ telle que, uniformément sur $[0,T]$,

$||Y^{(n_\nu)}(t) - Y(t)||_r$ converge vers 0 en probabilité.
Le processus $(Y(t))_{t\geq 0}$ est donc solution de l'équation différentielle stochastique (4.6), à valeurs dans $\mathbb{E}_r$ et continu presque sûrement.

• $3^{ème}$ *étape: "Unicité de la solution"*
On prouve enfin l'unicité de la solution. Soient $(X(t))_{t\geq 0}$ et $(Y(t))_{t\geq 0}$ deux solutions du système (4.6) à trajectoires continues telles que :

$$P\Big(Y(0) = X(0) = y \in \mathbb{E}_r\Big) = 1 .$$

On va montrer que $P\Big(\ X(t) = Y(t)\ , \forall\, t \geq 0\Big) = 1$.
Soient Θ_n une boule de rayon n de $\mathbb{E}_r$ et τ_n le premier temps de sortie de Θ_n de l'un des processus X et Y. Par la continuité p.s. de X et Y, on a : $P(\tau_n > 0) = 1$. par les mêmes procédés que précédemment, on a : pour $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$E||Y(t \wedge \tau_n) - X(t \wedge \tau_n)||_r^2 \leq D(r) \int_0^t E||Y(s \wedge \tau_n) - X(s \wedge \tau_n)||_r^2\, ds,$$

et par le lemme de Gronwall, on a : pour $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$E||Y(t \wedge \tau_n) - X(t \wedge \tau_n)||_r = 0;$$

ainsi $P(\ X(t) = Y(t)\ , \forall\ t \geq 0) = 1$. Ce qui achève la démonstration du théorème 4.3.1. ■

On va maintenant examiner l'existence et l'unicité de la solution du système (4.4).

4.4 Retour au modèle de Ginzburg-Landau

4.4.1 Existence et unicité

Nous montrons tout d'abord l'existence de la solution dans $\mathbf{E}_r$ par l'intermédiaire du système auxiliaire (4.6) puis nous finirons en prouvant son unicité.
Énonçons dès lors le lemme de la surjectivité de l'opérateur linéaire divergence, nécessaire dans cette section.

Lemme 4.4.1
L'opérateur linéaire ∇^* est surjectif de $\mathbb{E}_r$ dans $\mathbf{E}_r$.

Preuve :
On introduit une marche aléatoire (cf. Fritz (1989)). Soit $(X_n)_n$ la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, définie en tant que chaîne de Markov par :

$$P(X_{n+1} = j/X_n = k) = \frac{1}{d} \; si \; j = k + e_\eta, \; pour \; \eta = 1, \ldots, d \, .$$

Tous les autres sauts sont exclus. Pour $i, k \in \mathbb{Z}^d$ et $j = k + e_\eta$ avec $\eta = 1, \ldots, d$ notons par $P_i(k,j)$ la probabilité que la marche aléatoire, partant du site i, visite en un temps positif les deux sites k et j. Si le lien $\vec{kj}$ est négativement orienté, c'est-à-dire que $j = k - e_\eta$, alors on prend par convention $P_i(k,j) = -P_i(j,k)$. Ainsi on observe que :

$$\sum_{j;|j-k|=1} P_i(k,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases} .$$

Pour $\sigma \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, on peut donc définir $y \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^d}$ de la manière suivante : pour $k \in \mathbb{Z}^d$,

$$y_k = \sum_{\eta=1}^{d} e_\eta \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \sigma_i P_i(k, k + e_\eta) \; ;$$

c'est-à-dire que y_k est le vecteur d-dimensionnel dont la $\eta^{ième}$ composante est

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \sigma_i P_i(k, k + e_\eta), \tag{4.19}$$

finie grâce à la convention et du fait de l'exclusion de certains sauts. De plus, par (4.19) et du fait que $\sigma \in \mathbf{E_r}$, on a $y \in \mathbb{E}_r$. Le vecteur y étant ainsi défini, on vérifie que $\nabla^* y = \sigma$:
pour $k \in \mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned}
\nabla^* y_k &= \sum_{\eta=1}^{d} \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \sigma_i [P_i(k, k + e_\eta) - P_i(k - e_\eta, k)] \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \sigma_i \sum_{\eta=1}^{d} [P_i(k, k + e_\eta) + P_i(k, k - e_\eta)] \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \sigma_i \sum_{j;|j-k|=1} P_i(k,j) \\
&= \sigma_k \sum_{j;|j-k|=1} P_k(k,j) + \sum_{i \in \mathbb{Z}^d - \{k\}} \sigma_i \sum_{j;|j-k|=1} P_i(k,j) \\
&= \sigma_k
\end{aligned}$$

■

Théorème 4.4.2

Si le processus Y d'état initial y est la solution de l'équation différentielle stochastique (4.6) dans l'espace de Banach $\mathbb{E}_r$, alors $\nabla^* Y$ est une solution de (4.4) dans l'espace de Banach $\mathbf{E_r}$ d'état initial $\nabla^* y$.

Démonstration

Pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, $t \geq 0$, on a $d(\nabla^* Y_k(t)) = \nabla^* d(Y_k(t))$. Donc,

$$\begin{cases} d(\nabla^* Y_k(t)) & = \nabla^* [\frac{1}{2} \nabla \Big(V'(\nabla^* Y_k(t)) \\ & \quad + \sum\limits_{j, |j-k|=1} U'(\nabla^* Y_k(t), \nabla^* Y_j(t)) \Big) dt + dB_k(t)], \quad t \geq 0 \, , k \in \mathbb{Z}^d \\ \nabla^* Y(0) & = \nabla^* y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \end{cases}$$

Ainsi, $\nabla^* Y$ satisfait l'équation différentielle stochastique (4.4). De plus, si Y est dans $\mathbb{E}_r$ alors $\nabla^* Y$ est dans $\mathbf{E_r}$ et ceci du fait de la continuité de l'opérateur divergence. ■

On va maintenant énoncer le théorème d'unicité de la solution du système de Ginzburg-Landau (4.4) .

Théorème 4.4.3

Si σ, condition initiale du système (4.4), est dans l'espace de Banach $\mathbf{E_r}$ alors l'équation différentielle stochastique (4.4) admet une unique solution à trajectoires continues dans $\mathbf{E_r}$. Cette unique solution s'écrit comme divergence discrétisée de la solution de l'équation auxiliaire (4.6) dont l'état initial y est donné par :

$$\sigma = \nabla^* y$$

Démonstration

Soient $(S(t))_{t \geq 0}$ et $(\tilde{S}(t))_{t \geq 0}$ deux solutions à trajectoires continues de (4.4) telles que :

$$P\Big(\, S(0) = \tilde{S}(0) = \sigma \, \Big) = 1 \, .$$

Soit $(Y(t))_{t \geq 0}$ la solution de (4.6). On va montrer que

$$P\Big(S(t) = \tilde{S}(t) = \nabla^* Y \, , \forall \, t \geq 0\Big) = 1.$$

On sait que :

$$\begin{aligned} d\Big(S_k(t) - \tilde{S}_k(t)\Big) &= \nabla^*\Big(\tfrac{1}{2}\nabla\Big(\ V'(S_k(t)) - V'(\tilde{S}_k(t)) \\ &+ \sum_{j,|j-k|=1} (\ U'(S_k(t), S_j(t)) - U'(\tilde{S}_k(t), \tilde{S}_j(t))\ )\Big)\ \Big)dt\ . \end{aligned}$$

Posons $Z_k(t) = S_k(t) - \tilde{S}_k(t)$. En faisant les mêmes calculs que dans la démonstration du théorème 4.3.1, il existe une constante $G(r) > 0$ telle que :

$$E|Z(t \wedge \tilde{\tau}_n)|_r^2 \leq G(r) \int_0^t E|Z(s \wedge \tilde{\tau}_n)|_r^2\, ds,$$

avec $\tilde{\tau}_n$ le premier temps de sortie d'un ouvert de $\mathbf{E_r}$ par l'un des processus $(S(t))_{t\geq 0}$ et $(\tilde{S}(t))_{t\geq 0}$. Ainsi, par le lemme de Gronwall, on a :

$$E|Z(t \wedge \tilde{\tau}_n)|_r^2 = 0.$$

On obtient donc $P\Big(S(t) = \tilde{S}(t); \forall t \geq 0\Big) = 1$. Puisque $\nabla^* Y$ est une solution à trajectoires continues de (4.4), alors :

$$P\Big(S(t) = \tilde{S}(t) = \nabla^* Y\ , \forall\, t \geq 0\Big) = 1.$$

Par la surjectivité de l'opérateur divergence, il existe $y \in \mathbb{E}_r$ telle que $\sigma = \nabla^* y$; on prend en particulier y comme l'état initial de la solution de l'équation différentielle stochastique (4.6) puisque $S(t) = \nabla^* Y(t)$ P. p.s .

■

4.4.2 Exemple

Dans le cas où le potentiel par paires est une fonction de la différence des potentiels, c'est-à-dire : pour $x, y \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue,

$$\begin{cases} U(x,y) &= f(x-y) \\ U(0,0) &= 0 \end{cases},$$

les hypothèses $ii)$ et $iii)$ du théorème 4.3.1 se résument aux faits que f'' soit bornée c'est-à-dire qu'il existe $M_1 \in \mathbb{R}$ et $M_2 \geq 0$ tels que : $M_1 \leq f'' \leq M_2$; et f paire c'est-à-dire que pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$. En effet, d'une part

$$\begin{aligned} (x-y)(\ f'(x-z) - f'(y-t)\ ) &= (x-y)^2(z-t)\Big(\tfrac{f'(x-z)-f'(y-z)}{(x-y)(z-t)} + \tfrac{f'(y-z)-f'(y-t)}{(x-y)(z-t)}\Big) \\ &\geq M_1(x-y)^2 - M|x-y||z-t| \\ &\geq (M_1 - \tfrac{M}{2})(x-y)^2 - \tfrac{M}{2}(z-t)^2. \end{aligned}$$

où $M = \max(|M_1|; M_2)$.

D'autre part,

$$|f'(x-y) - f'(x-z)| \leq M|y-z|.$$

On en déduit donc les différentes constantes du théorème 4.3.1 :
K_1 est la borne supérieure de $|V''|$, $K_2 = M_1 - \frac{M}{2}$, $K_3 = \frac{M}{2}$ et $K_4 = M$

Cas particuliers

L'exemple classique de fonction f est :

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2,$$

c'est-à-dire le système dynamique considéré est une pertubation par le potentiel propre V d'un système linéaire :

$$(4.20)\begin{cases} dS_k(t) &= \frac{1}{2}\Delta\left(V'(S_k(t)) + \Delta S_k(t)\right)dt + \nabla^* dB_k(t), \quad t > 0 \,, k \in \mathbb{Z}^d \\ S(0) &= \sigma \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \end{cases}$$

Dans ce cas, $M_1 = M_2 = 1$, donc $K_2 = K_3 = \frac{1}{2}$, $K_4 = 1$

Fritz (1987 , 1989) a étudié la limite hydrodynamique de ce cas particulier.

Le cas où le potentiel par paires U est nul et les spins sont définis sur le réseau uni-dimensionnel $\mathbb{Z}$ a été examiné par Zhu (1990) dans le cadre de l'étude de la fluctuation d'équilibre. Plus précisement, il considère le système suivant :

$$(4.21) \qquad \begin{cases} dS_k(t) &= \left(V'(S_{k+1}(t)) - 2V'(S_k(t)) + V'(S_{k-1}(t))\right)dt \\ & \quad +\sqrt{2}\nabla dB_k(t), \quad t > 0 \,, k \in \mathbb{Z} \\ S(0) &= \sigma \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \end{cases}$$

On voit là que, bien que l'interaction par paires $U \equiv 0$, il existe une interaction entre les potentiels propres définis en des sites voisins.

4.5 Une classe de mesures invariantes

Dans cette section, nous montrons qu'un ensemble de mesures de Gibbs paramétrées par les suites harmoniques de $\mathbb{Z}^d$ sont des mesures de probabilité invariantes pour le modèle de Ginzburg-Landau (4.20).

Soit $\lambda = (\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Notons $(\mu_\lambda)_\lambda$ la famille de mesures de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ paramétrées par λ ayant pour hamiltonien h_λ, défini au site k par

$$h_{k,\lambda}(x) = h_k(x) - \lambda_k x_k,$$

et donnée par : pour $k \in \mathbb{Z}^d$ et $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$,

$$\mu_\lambda(dx_k | x_{\{k\}^c}) = \frac{1}{Z(\lambda_k, x_{\{k\}^c})} \exp(-h_k(x) + \lambda_k x_k) dx_k$$

où $x_{\{k\}^c} = (x_j)_{j \neq k}$ et

$$Z(y, x_{\{k\}^c}) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-h_k(x) + y x_k) dx_k \tag{4.22}$$

est la constante de renormalisation.
Le paramètre λ est déterminé en intégrant par parties (4.22) :

$$Z(y, x_{\{k\}^c}) = \frac{1}{y} \int_{\mathbb{R}} \partial_k h_k(x) \exp(-h_k(x) + y x_k) dx_k$$

donc $\lambda_k = \int \partial_k h_k(x) \mu_\lambda(dx)$. Il s'interprète donc comme la valeur moyenne de la fonction $\partial_k h_k$. Cette dernière est appelée potentiel chimique.

Le théorème suivant assure l'invariance de la famille de mesures de Gibbs $(\mu_\lambda)_\lambda$ pour la dynamique de Ginzburg-Landau donnée dans l'exemple (4.20) correspondant à une interaction par paires U quadratique entre les particules.(cf. Fritz (1987a) , p79 ou (1987b), p295).

Théorème 4.5.1
La mesure de Gibbs μ_λ est invariante sous l'action de la dynamique associé au modèle de Ginzburg-Landau (4.20) si la suite λ est harmonique, c'est-à-dire si elle vérifie : $\forall k \in \mathbb{Z}^d$, $\Delta \lambda_k = 0$.

Preuve:
Soit $f \in C_b^2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$. Le générateur infinitésimal A du processus de Ginzburg-Landau est donné formellement par:

$$Af = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j, |j-k|=1} \Big(\partial_j h_j (\partial_k f - \partial_j f) + (\partial_j \partial_k f - \partial_j^2 f) \Big)$$

c'est-à-dire, pour $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$,

$$Af(x) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j,|j-k|=1} \exp(h_j(x))\partial_j\Big(\exp(-h_j(x))(\partial_k f(x) - \partial_j f(x))\Big).$$

où dans cet exemple

$$h_k(x) = V(x_k) + \frac{1}{2} \sum_{j,|j-k|=1} \Big(x_j - x_k\Big)^2$$

(cf. Daleckii et Fomin (1983) ou Fritz (1982)).
Par une intégration par parties,

$$\int Af(x)d\mu_\lambda(x) = -\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int \Big(\sum_{j,|j-k|=1} (\lambda_j - \lambda_k)\Big)\partial_k f(x) d\mu_\lambda(x).$$

Ainsi, si pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, $\sum_{j,|j-k|=1} (\lambda_j - \lambda_k) = 0$ alors $\int Af d\mu_\lambda = 0$ ∎

Pour la dynamique (4.20), il existe donc toute une famille de mesures de Gibbs invariantes.

- Remarquons que sur un réseau unidimensionnel le paramètre λ en chaque site est linéaire en ce site : $\forall k \in \mathbb{Z}^d$

$$\lambda_k = a + b\, k,$$

où a, b sont des constantes.

- Notons que la question de savoir si toute mesure invariante est une mesure de Gibbs demeure jusqu'à présent un problème ouvert particulièrement ardu.
- Aussi, on peut se poser la question à savoir vers laquelle de ces mesures invariantes converge le système de Ginzburg-Landau ? Ceci reste un problème ouvert.

Bibliographie

[1] Aernout C.D. Van E., Roberto F. & Alan D. S. (1993), Regularity properties and pathologies of position space renormalization group transformations: scope and limitations of gibbsian theory. *Journ. of Statistical Physics* vol. 72, $n^o 5/6$.

[2] Albeverio S., Kondratiev Yu. G. & Röckner M. (1997a), Ergodicity of L^2- semi-groups and extremality of Gibbs states. *Journ. of Funct. Anal.* 144, p. 395-423.

[3] Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Röckner M. & Tsikalenko T. V. (1997b), Uniqueness of Gibbs states for quantum lattice systems. *Probab. Theory Relat. Fields* 108, p. 193-218.

[4] Azéma J. , Duflo M. & Revuz D. (1967), Mesure invariante sur les classes récurrentes de processus de Markov. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb.* 8, p. 157-181.

[5] Bony J. M. (1969), Principe du maximum, unicité du problème de Cauchy et inégalité de Harnack des opérateurs elliptiques dégénérés. *Ann. Inst. Fourier* 19, I,p. 277-304.

[6] Billingsley P. (1968), Convergence of probability measures. *Wiley.*

[7] Cattiaux P., Roelly S. & Zessin H. (1996), Une approche gibbsienne des diffusions browniennes infini-dimensionnelles. *Probab. Theory Relat. Fields* 104, p. 147-179.

[8] Chung K. L. (1960), Markov chains with stationary transition probabilities. *Springer Verlag.*

[9] Chung K. L. & Williams R. J. (1990), Introduction to stochastic integration. *Birkhäuser*, second edition.

[10] Cramér H. & Leadbetter M. R. (1967), Stationary and related stochastic processes. *Wiley.*

[11] Da Prato G. & Zabczyk J. (1995), Convergence to equilibrium for classical and quantum spin systems, *Probab. Theory Relat. Fields.* 103, p. 529-552.

[12] Daleckii Yu. L. & Fomin S. V. (1983), Measures and differential equations in infinite dimensional spaces . *Nauka.*

[13] Demange G. & Rochet J.C. (1997), Méthodes mathématiques de la finance. *Economica*, 2^e édition.

[14] Doss H. & Royer G. (1978), Processus de diffusion associés aux mesures de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb.* 46, p. 125-158.

[15] Dobrushin R. L. (1968), The description of random fields by mean of conditional probabilities and conditions of its regularity. *Theory of probab. and its applications* 13, p. 197-224

[16] Dudley R. (1976), Probabilities and metrics. *Aarhus lecture notes.*

[17] Duflo M. & Revuz D. (1969), Propriétés asymptotiques des probabilités de transition des processus de Markov récurrents. *Ann. inst. Henri Poincaré* vol.V, *n°*3 p. 233-244.

[18] Dunford N. & Schwartz J. T. (1958), Linear operators : Part 1. *Interscience Publishers.*

[19] Fortet R. & Mourier E. (1953), Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 3.70, p. 266-285.

[20] Fritz J. (1982), Stationary measures of stochastic gradient systems - infinite lattice models. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb.* 59, p. 479-490.

[21] Fritz J. (1987a), On the hydrodynamic limit of a scalar Ginzburg-Landau lattice model: the resolvent approach. In: *IMA volumes in mathematics* vol. 9. Hydrodynamic behaviour and interacting particle systems.*Springer Verlag.*

[22] Fritz J. (1987b), On the hydrodynamic limit of a one-dimensional Ginzburg-Landau model: the priori bounds. *Journ. Statistical Physics* 47, p. 551-572.

[23] Fritz J. (1989), On the hydrodynamic limit of a Ginzburg-Landau lattice model - the law of large numbers in arbitrary dimensions. *Probab. Theory Relat. Fields* 81, p. 291-318.

[24] Funaki T. (1991), The reversible measures of multi-dimensional Ginzburg-Landau type continuum model. *Osaka Journ. Math.* 28, p. 463-494.

[25] Funaki T. (1991), Regularity property for stochastic partial differential equations of parabolic type. *Osaka Journ. Math.* 28, p. 495-516.

[26] Funaki T. & Spohn H. (1997), Motion by mean curvature from the Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ interface model. *Commun. Math. Physics* 185, p. 1-36.

[27] Georgii H. O. (1988), Gibbs measures and phase transitions, *Studies in mathematics 9. De Gruyter.*

[28] Holley R. & Stroock (1981), Diffusions on an infinite dimensional torus. *Journ. of Funct. Anal.* 42, p. 29-63.

[29] Ichihara K. & Kunita H. (1974), A classification of the second order degenerate elliptic operators and its probabilistic characterization. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb.* 30, p. 235-254.

[30] Jain N. C. (1966), Some limit theorems for a general Markov process. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb.* 6, p. 206-223.

[31] Khas'minskii R. Z. (1960), Ergodic properties of recurrent diffusion processes and stabilization of the solution to the Cauchy problem for parabolic equations. *Theory of Prob. and its Applications* vol.V, n^o2, p. 179-196.

[32] Kondratiev Yu. G. & Sokol T. A. (1994), Gaussian measures and stochastic quantification. *Selecta Mathematica Formerly Sovietica* Vol. 13, n^o3.

[33] Landford O. E. & Ruelle D. (1969), Observables at infinity and states with short range correlation in statistical mechanics. *Commun. Math. Physics* 13, p. 194-215.

[34] Laroche E. (1993), Sur des inégalités de corrélation et sur les inégalités de Sobolev logarithmiques en Mécanique Statistique. *Thèse, Université Paul Sabatier de Toulouse.*

[35] Leha G. & Ritter G. (1985), On solution to stochastic differential equations with discontinuous drift in Hilbert space. *Math. Ann.* 270, p. 109-123.

[36] Maruyama G. & Tanaka H. (1957), Some properties of one-dimensional diffusion processes. *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University* Ser. A, Vol. 11,n^o2.

[37] Maruyama G. & Tanaka H. (1959), Ergodic property of N-dimensional recurrent Markov processes. *Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University* Ser. A, Vol. 13, n^o2.

[38] Millet A. , Nualart D. & Sanz M. (1989), Time reversal for infinite-dimensional diffusions. *Probab. Theory Relat. Fields* 82, p. 315-347.

[39] Öksendal B. (1985), Stochastic differential equations- An introduction with applications. *Springer-Verlag*, Third edition.

[40] Prum B. (1986), Processus sur un réseau et mesures de Gibbs- Applications. *Masson*

[41] Revuz D. & Yor M. (1991), Continuous martingales and brownian motion. *Springer-Verlag.*

[42] Roelly S. & Seu D. (1998), Limite ergodique de processus de diffusion infinidimensionnels. à paraître dans *Publicacions Matemàtiques.*

[43] Roger P. (1991), Les outils de la modélisation financière. *Puf*

[44] Royer G. (1979), Processus de diffusion associés à certains modèles d'Ising à spins continus. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb.* 46, p. 165-176.

[45] Shiga T. & Shimizu A. (1980), Infinite dimensional stochastic differential equations and their applications. *Journ. Math. Kyoto Univ.* 20-3, p. 395-416.

[46] Simon Y. (1997), Encyclopédie des marchés financiers, Tome 1 et 2. *Economica.*

[47] Stoock D. W. & Zegarlinski B. (1992), The logarithmic Sobolev inequality for continuous spins systems on a lattice. *Journ. of Funct. Anal.* 104, p. 299-326.

[48] Sunyach C. (1975), Une classe de chaînes de Markov récurrentes sur un espace métrique complet. *Ann. Inst. Henri Poincaré* Vol. XI, $n^o 4$, p. 325-343.

[49] Varadhan S. R.S. (1980), Diffusion problems and partial differential equations. *Springer Verlag.*

[50] Zegarlinski B. (1996), The strong decay to equilibrium for the stochastic dynamics of unbounded spin systems on a lattice. *Commun. Math. Phys.* 145 p. 401-432.

[51] Zhu M. (1990), Equilibrium fluctuations for one-dimensional Ginzburg-Landau lattice model. *Nagoya Math. Journ.* vol.178, p. 63-92.