

Université des Sciences et Technologies de Lille

THESE

Spécialité :
Génie Electrique

Présentée par :

Yvonnick LE MENACH

En vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'Université des Sciences et Technologies de Lille

CONTRIBUTION À LA MODÉLISATION NUMÉRIQUE TRIDIMENSIONNELLE DES SYSTÈMES ELECTROTECHNIQUES : PRISE EN COMPTE DES INDUCTEURS

Soutenue le 1 février 1999
devant le Jury composé de :

Messieurs :	A. Razek	Président
	G. Meunier	Rapporteur
	A. Nicolet	Rapporteur
	S. Clénet	Examineur
	F. Piriou	Examineur
	P. Viarouge	Examineur





REMERCIEMENTS

Les présents travaux ont été réalisés au Laboratoire d'Electrotechnique et Electronique de Puissance de Lille (L2EP), au sein de l'équipe "modélisation numérique des systèmes électromagnétiques". Je tiens à remercier Monsieur le Professeur C. Rombaut, Directeur du laboratoire, pour son accueil et sa confiance.

Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur F. Piriou, qui a encadré cette thèse, pour la confiance qu'il ma témoigné dès ma licence. Je lui suis très reconnaissant de l'aide qu'il m'a apportée tout au long de ce travail.

J'adresse mes remerciements à :

Monsieur G. Meunier, Directeur de recherche au CNRS, pour l'honneur qu'il m'a fait de juger cette thèse en tant que rapporteur du jury.

Monsieur A. Nicolet, Professeur à l'Université Aix-Marseille, de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être rapporteur de mes travaux.

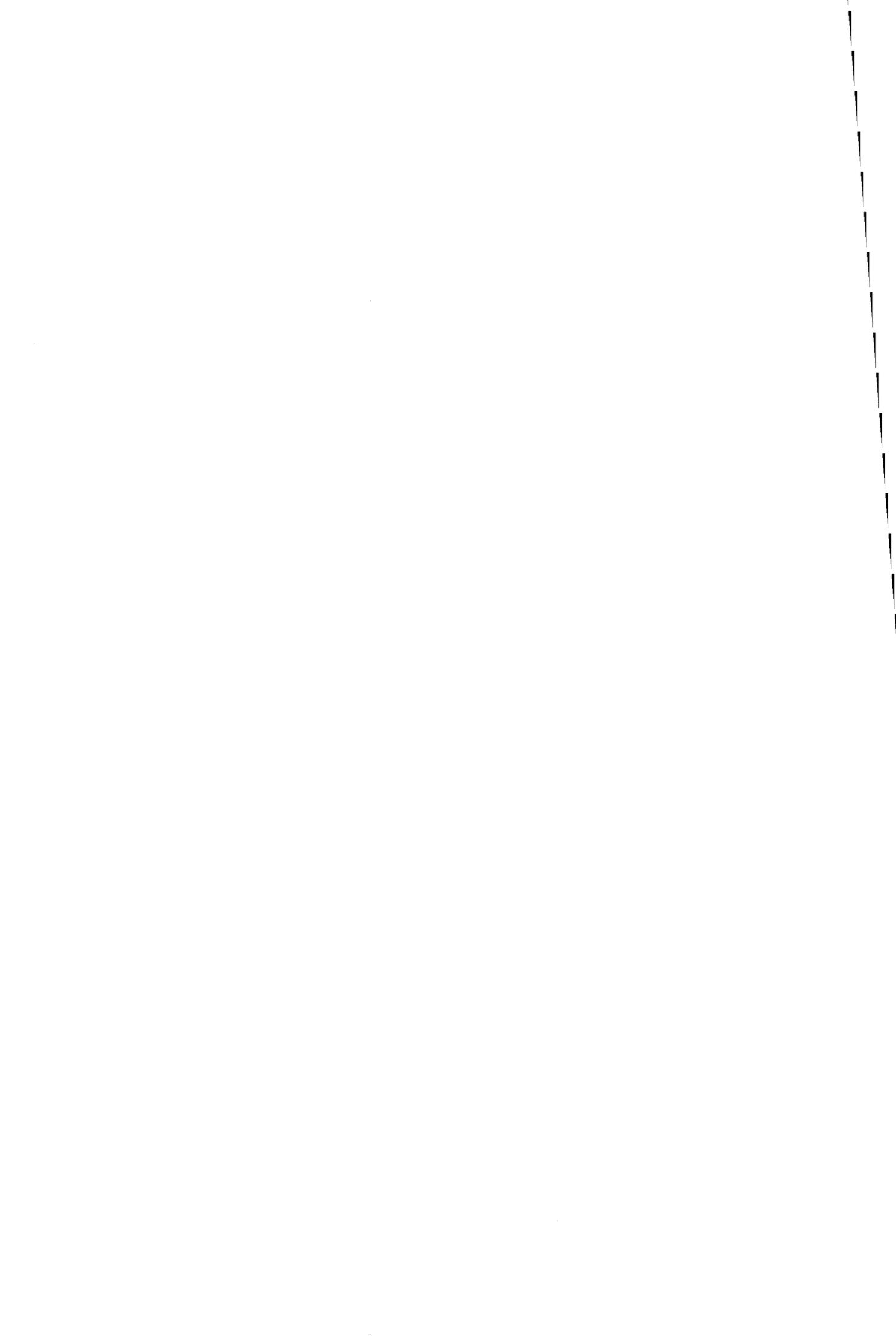
Monsieur, A. Razek, Directeur de recherche au CNRS, d'avoir accepté de siéger dans mon jury et de le présider.

Monsieur, P Viarouge, Professeur à l'Université Laval de Québec, pour avoir accepté de participer à mon jury ainsi que pour la confiance qu'il nous a témoignés en acceptant une collaboration avec son laboratoire.

J'adresse également mes grands remerciements à Monsieur S. Clenet, Maître de Conférences à U.S.T.L, pour le soutien et les nombreuses idées qu'il m'a apportés durant ma thèse me permettant d'avancer mes travaux.

Je remercie aussi l'ensemble des enseignants chercheurs du L2EP pour les nombreuses discussions constructives.

Enfin, je tiens à remercier tous les thésards et particulièrement I. Haouara, F. Marmin, C. Desombre-Vasseur, O. Barré, B. Boualem, A. Briffaut, S. Brulé, P. Dziwniel, G. Marques, J. Pierquin, S. Taïbi, J-L. Ranson et B. Vulturescu pour la bonne ambiance qu'ils ont su créer au sien du laboratoire ainsi que Mme Del Vitto pour sa gentillesse et son aide appréciable pour les services administratifs.



Sommaire

INTRODUCTION GÉNÉRALE	5
CHAPITRE I : DOMAINE CONTINU	7
I.1 INTRODUCTION.....	7
I.2 PROBLÈME INITIAL	8
I.2.1 Equations de Maxwell	8
I.2.2 Lois de comportement	8
I.2.3 Conditions aux limites spatiales et temporelles	9
I.3. ESPACES FONCTIONNELS.....	10
I.3.1 Définition des espaces fonctionnels.....	10
I.3.2 Le complexe de De Rham.....	11
I.3.4 Diagramme de Tonti	13
I.4 LES FORMULATIONS DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE.....	15
I.4.1 La formulation en potentiel scalaire électrique.....	16
I.4.2 La formulation en potentiel vecteur électrique	17
I.4.3 Diagramme de Tonti	18
I.5 LES FORMULATIONS DE LA MAGNÉTOSTATIQUE	18
I.5.1 La formulation en potentiel scalaire magnétique.....	20

I.5.2 La formulation en potentiel vecteur magnétique	21
I.5.3 Diagramme de Tonti	22
I.6 LES FORMULATIONS DE LA MAGNÉTODYNAMIQUE	22
I.6.1 Les formulations électriques	23
I.6.1.1 Formulation en champ électrique E	23
I.6.1.2 Formulation électrique en potentiels A - ϕ	23
I.6.2 Les formulations magnétiques	24
I.6.2.1 Formulation en champ magnétique H	24
I.6.2.2 Formulation magnétique en potentiels T - Ω	24
I.6.3 Diagramme de Tonti	25
I.7 LE COUPLAGE AVEC LES ÉQUATIONS DU CIRCUIT ÉLECTRIQUE	26
I.7.1 Introduction des champs de vecteur K et N	26
I.7.2 Les formulations à courant imposé	28
I.7.2.1 Cas de l'électrocinétique	28
I.7.2.2 Cas de la magnéto-statique	28
I.7.2.3 Cas de la magnéto-dynamique	29
I.7.3 Formulation à tension imposée	30
I.7.3.1 Couplage avec la formulation en potentiel vecteur A	30
I.7.3.2 Couplage avec la formulation en potentiel scalaire Ω	31
I.8 CONCLUSION	32
CHAPITRE II : DOMAINE DISCRET	33
II.1 INTRODUCTION	33
II.2 LE COMPLEXE DE WHITNEY	34
II.2.1 Les fonctions de formes	35
II.2.1.1 Fonction nodale	35
II.2.1.2 Fonction d'arête	35
II.2.1.3 Fonction de facette	36
II.2.1.4 Fonction de volume	37
II.2.2 Propriétés des espaces discrets	37
II.3 CONDITIONS DE JAUGE	41
II.3.1 Construction d'un arbre de facettes	43
II.4 DISCRÉTISATION DES INDUCTEURS	46
II.4.1 Discrétisation de la densité de courant	46
II.4.2 Détermination du champ source	48
II.5 FORMULATIONS DISCRÈTES	50
II.5.1 Formulations intégrales	50
II.5.2 Les formulations de l'électrocinétique	51

II.5.2.1	<i>La formulation en potentiel scalaire électrique</i>	51
II.5.2.2	<i>La formulation en potentiel vecteur électrique</i>	52
II.5.3	Les formulations de la magnétostatique	53
II.5.3.1	<i>La formulation en potentiel scalaire magnétique</i>	53
II.5.3.2	<i>La formulation en potentiel vecteur magnétique</i>	53
II.5.4	Les formulations de la magnétodynamique	54
II.5.4.1	<i>Formulation $A-\varphi$</i>	54
II.5.4.2	<i>Formulation $T-\Omega$</i>	55
II.6	COUPLAGE AVEC LES ÉQUATIONS DE CIRCUITS	56
II.6.1	Discrétisation de K et N	56
II.6.2	Systèmes à tension imposée	57
II.7	APPLICATIONS ET VALIDATIONS	58
II.7.1	Etude en électrocinétique	58
II.7.2	Etude en magnétostatique	59
II.7.2.1	<i>Cube conducteur</i>	59
II.7.2.2	<i>Influence du champ source</i>	61
II.7.2.3	<i>Influence de l'arbre de facettes</i>	63
II.7.2.4	<i>Convergence du gradient conjugué</i>	65
II.7.3	Etude en magnétodynamique	68
II.8	CONCLUSION	70

CHAPITRE III : MODÉLISATION DES SYSTÈMES ÉLECTROTECHNIQUES 72

III.1	INTRODUCTION	72
III.2	MODÉLISATION DE SYSTÈMES STATIQUES	73
III.2.1	Modélisation d'une bobine entre deux plaques	73
III.2.1.1	<i>Etude en magnétostatique</i>	74
III.2.1.2	<i>Etude en magnétodynamique</i>	75
III.2.2	Modélisation d'un transformateur triphasé	77
III.2.2.1	<i>Présentation du problème</i>	77
III.2.2.2	<i>Méthodes de résolution des problèmes non-linéaires</i>	78
III.2.3	Etude du transformateur	81
III.2.3.1	<i>Simulation d'un essai à vide</i>	83
III.2.3.2	<i>Simulation d'un essai en court-circuit</i>	84
III.3	ETUDE D'UNE MACHINE SYNCHRONE À GRIFFES	86
III.3.1	Description de la machine	86
III.3.2	Modèle numérique	88
III.3.2.1	<i>Prise en compte du mouvement</i>	88
III.3.2.2	<i>Calcul des forces et du couple</i>	89
III.3.2.3	<i>Le maillage</i>	90

III.3.2.4 Choix de la formulation	92
III.3.3 Répartition de l'induction dans l'entrefer.....	93
III.3.4 Calcul de l'inductance entre phases.....	95
III.3.5 Calcul du couple.....	98
III.3.6 Essai à vide.....	99
III.4 CONCLUSION	99
CONCLUSION GÉNÉRALE	101
ANNEXES.....	103
A.1 Condition de Jauge $U.w$	104
A.2 Compatibilité de la formulation en potentiel vecteur électrique	105
A.3 Influence du champ source dans la formulation Ω	106
RÉFÉRENCES.....	107

Introduction générale

La modélisation consiste à établir une structure mathématique qui décrit les phénomènes physiques. En électromagnétisme la réunion du théorème d'Ampère et de la loi de Faraday forme le système d'équations de Maxwell qui est un modèle aux dérivées partielles locales. La résolution de ces équations associées aux lois de comportement électrique et magnétique des matériaux permet de déterminer les grandeurs locales (champs magnétique et électrique, densité de courant...) et d'en déduire des grandeurs globales (flux, intensité du courant...). Or, du fait de la complexité des systèmes électrotechniques (géométrie 3D, non linéarité, phénomènes couplés), les équations de Maxwell ne présentent généralement pas de solution analytique. Il est donc nécessaire d'avoir recours aux méthodes numériques en discrétisant l'espace et les grandeurs locales. La méthode des éléments finis apparaît la plus adaptée à résoudre ce type de problème. Cependant la discrétisation de la structure mathématique engendrée par les équations aux dérivées partielles reste difficile [1][2]. En effet, les termes sources des équations à résoudre (connues analytiquement) qui sont, généralement, la densité de courant ou le champ source présentent une difficulté majeure, leur discrétisation [1-12]. De plus, la qualité de la solution dépend directement de la prise en compte de ces termes sources. On notera enfin, qu'en électrotechnique, les termes sources sont généralement des inducteurs.

Ce travail concerne, plus particulièrement, l'élaboration d'un modèle pour la prise en

compte des inducteurs dans les formulations 3D. Il se décompose en trois chapitres.

Le premier a pour objet la description des phénomènes électromagnétiques dans le cadre des hypothèses de l'électrotechnique. Le modèle mathématique, que nous allons présenter, comprendra les équations de Maxwell, les lois de comportement des matériaux et les conditions aux limites. Puis, nous donnons les formulations de l'électrocinétique, de la magnétostatique et de la magnétodynamique en introduisant des potentiels scalaires et vecteurs (magnétique et électrique) qui s'intègrent dans la structure préalablement définie. Nous verrons enfin comment introduire dans les formulations des grandeurs globales telles que la tension ou l'intensité du courant [13].

Dans le deuxième chapitre, nous discrétisons, à l'aide des éléments de Whitney, le modèle mathématique défini au chapitre I. Ces éléments forment quatre espaces discrets qui sont les espaces des éléments nodaux, d'arêtes, de facettes et de volumes. Les variables locales cherchées seront projetées dans ces quatre espaces discrets. Afin d'obtenir des formulations 'conformes', les termes sources doivent être aussi décomposés dans ces espaces [10]. On montre que la densité de courant J_0 et le champ source H_s ($rot H_s = J_0$) appartiennent respectivement à l'espace des éléments de facettes et d'arêtes. Pour la discrétisation de la densité de courant, nous utiliserons une technique basée sur un arbre de facettes. Puis, à partir de la densité de courant discrétisée, nous proposons de déterminer le champ source par un arbre d'arêtes [1-4]. Enfin, la méthode est validée sur des exemples de l'électrocinétique, de la magnétostatique et de la magnétodynamique. Nous étudierons également l'influence du choix du champ source, de l'arbre d'arêtes et de facettes sur la qualité de la solution.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de dispositifs électrotechniques. Trois structures sont concernées : une bobine entre deux plaques conductrices, un transformateur triphasé et une machine à griffes à aimants permanents. Cette dernière a été conçue et réalisée au LEEPCI (Université Laval à Québec). Elle est modélisée avec la formulation en potentiel scalaire magnétique. Le mouvement est pris en compte par la surface de glissement et le calcul du couple est effectué par la méthode des travaux virtuels. Une comparaison sera effectuée entre les résultats des calculs par éléments finis et des mesures expérimentales sur les grandeurs locales (induction magnétique) et les grandeurs globales telles que le couple statique, l'inductance et les forces électromotrices à vide.

Chapitre I : Domaine continu

I.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord présenter le problème initial que constituent les équations de Maxwell avec les lois de comportement et les conditions aux limites associées. Nous aborderons ensuite la présentation des espaces fonctionnels qui permettent d'accueillir le modèle aux dérivées partielles.

Puis, sur la base des équations de Maxwell, nous définirons des formulations en électrocinétique, en magnétostatique et en magnétodynamique. Pour ce faire, nous introduirons les potentiels scalaires et vecteurs qui s'intégreront dans la structure mathématique formée par les espaces fonctionnels.

Enfin nous verrons comment coupler les équations de Maxwell avec celles du circuit extérieur qui imposent généralement le terme source.

I.2 PROBLEME INITIAL

I.2.1 Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell constituent un système d'équations aux dérivées partielles qui régit l'ensemble des phénomènes électromagnétiques [14][15] soit:

$$\mathit{rot}E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{I.1})$$

$$\mathit{rot}H = \frac{\partial D}{\partial t} + J \quad (\text{I.2})$$

avec :

E: Champ électrique (V/m)

H: Champ magnétique (A/m)

J: Densité de courant (A/m²)

B: Induction magnétique (T)

D: Induction électrique (C/m²)

Ces deux équations I.1 et I.2 relient les grandeurs magnétiques (H, B) et électriques (E, D). Une variation temporelle de l'induction magnétique B entraîne une variation de la répartition spatiale du champ électrique E et respectivement pour l'induction électrique D et le champ magnétique H .

En général, en électrotechnique, le terme $\partial_t D$ qui représente les courants de déplacement est négligé. On trouve alors pour l'équation I.2 la forme locale du théorème d'Ampère:

$$\mathit{rot}H = J \quad (\text{I.3})$$

I.2.2 Lois de comportement

Les équations I.1 et I.3 ont un caractère purement géométrique et sont indépendantes des caractéristiques des milieux. Pour modéliser le comportement des matériaux, des relations entre les champs B et H ainsi que J et E sont introduites.

Le champ électrique E est lié à la densité de courant J par la loi d'Ohm :

$$J = \sigma E \quad (\text{I.4})$$

où σ représente la conductivité électrique ($\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$)

Pour les grandeurs magnétiques, si on néglige le phénomène d'hystérésis, il est possible de représenter la relation $B=f(H)$ par une fonction univoque de la forme :

$$\mathbf{B} = \mu(H)\mathbf{H} \quad (I.5)$$

avec μ la perméabilité magnétique (Vs/Am)

Dans le cas des aimants permanents, on ne considère que la partie utile du cycle d'hystérésis qui peut être modélisée par la relation suivante :

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (I.6)$$

où \mathbf{B}_r représente l'induction rémanente (T). Pour la plupart des aimants (SmCo, NeFeB, ferrites...) la perméabilité est considérée comme constante et proche de μ_0 .

Remarque :

Dans la suite de notre étude pour ne pas alourdir les développements, on utilisera la loi de comportement I.5. Cependant, dans certains cas, nous aurons recours à la relation I.6.

I.2.3 Conditions aux limites spatiales et temporelles

Pour assurer l'unicité de la solution du système d'équations I.1 et I.3, en tenant compte des lois de comportement I.4 et I.5, il est nécessaire d'imposer des conditions aux limites sur les champs.

Pour les conditions aux limites temporelles, compte tenu des relations liant \mathbf{H} et \mathbf{B} , il suffit de connaître la répartition initiale de l'induction ou du champ magnétique. En général, on prend \mathbf{H} égal à zéro à l'instant initial.

Pour les conditions aux limites spatiales, on utilise la frontière Γ du domaine \mathcal{D} . Cette frontière peut se décomposer en deux parties, l'une notée Γ_b avec des conditions aux limites sur l'induction magnétique et l'autre Γ_h relative au champ magnétique. On a : $\Gamma = \Gamma_b \cup \Gamma_h$ et $\Gamma_b \cap \Gamma_h = \emptyset$. Dans le cas général, les conditions aux limites sont homogènes et s'énoncent sous les formes suivantes, pour les champs magnétiques :

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_h} = 0 \quad (I.7)$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_b} = 0 \quad (I.8)$$

Les relations I.3 et I.7 impliquent:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_b} = 0 \quad (\text{I.9})$$

et le même raisonnement appliqué à I.1 et I.8 entraîne :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_b} = 0 \quad (\text{I.10})$$

I.3. ESPACES FONCTIONNELS

Afin de résoudre les équations de Maxwell dans un domaine \mathcal{D} , que l'on prendra simplement connexe et ayant une frontière Γ connexe, nous allons introduire des suites d'espaces fonctionnels qui constituent les domaines de définition des champs électriques et magnétiques [1][2][16][17].

I.3.1 Définition des espaces fonctionnels.

Nous considérons l'espace fonctionnel L^2 qui est l'espace des fonctions scalaires de carré intégrable sur \mathcal{D} . Nous lui associons le produit scalaire de deux grandeurs $u(\mathbf{x})$ et $v(\mathbf{x})$:

$$\int_{\mathcal{D}} u(\mathbf{x}) \cdot v(\mathbf{x}) dx \quad u, v \in L^2 \quad (\text{I.11})$$

De la même façon, nous considérons l'espace fonctionnel $L^2(\mathcal{D})$ qui représente l'espace des champs de vecteur dont le carré est intégrable sur \mathcal{D} et nous lui associons le produit scalaire :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) dx \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2 \quad (\text{I.12})$$

Ces deux espaces fonctionnels vont nous servir à construire des sous-espaces dans lesquels nous allons rechercher la solution des équations de Maxwell.

I.3.2 Le complexe de De Rham

En électromagnétisme, comme dans de nombreux domaines de la physique, on distingue principalement trois opérateurs différentiels qui sont le gradient d'une fonction scalaire ainsi que le rotationnel et la divergence d'un vecteur.

Les domaines de définition de ces opérateurs sont des sous-espaces de L^2 et L^2 :

$$E^0 = \{f \in L^2; \mathbf{grad} f \in L^2\} \quad (I.13)$$

$$E^1 = \{\mathbf{u} \in L^2; \mathbf{rot} \mathbf{u} \in L^2\} \quad (I.14)$$

$$E^2 = \{\mathbf{v} \in L^2; \mathbf{div} \mathbf{v} \in L^2\} \quad (I.15)$$

Pour prendre en compte les conditions aux limites sur Γ_h et Γ_b , on définit deux ensembles de sous-espaces qui sont des restrictions de E^0 , E^1 et E^2 . Pour la frontière Γ_h on introduit les sous-espaces suivants :

$$E^0_h = \{f \in E^0; f = 0|_{\Gamma_h}\} \quad (I.16)$$

$$E^1_h = \{\mathbf{u} \in E^1; \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0|_{\Gamma_h}\} \quad (I.17)$$

$$E^2_h = \{\mathbf{v} \in E^2; \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0|_{\Gamma_h}\} \quad (I.18)$$

et pour la frontière Γ_b :

$$E^0_b = \{f \in E^0; f = 0|_{\Gamma_b}\} \quad (I.19)$$

$$E^1_b = \{\mathbf{u} \in E^1; \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0|_{\Gamma_b}\} \quad (I.20)$$

$$E^2_b = \{\mathbf{v} \in E^2; \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0|_{\Gamma_b}\} \quad (I.21)$$

Pour compléter l'ensemble des espaces, définis précédemment, on introduit deux sous-espaces E^3_h et E^3_b qui sont les images de E^2_h et E^2_b par l'opérateur divergence.

On notera que le champ magnétique \mathbf{H} appartient à l'espace E^1_h et le champ électrique \mathbf{E} à E^1_b . En effet, ils doivent vérifier les équations de Maxwell (i.e leur rotationnel doit être défini) et les conditions aux limites I.7 et I.9.

Comme le domaine \mathcal{D} est simplement connexe et Γ connexe, l'image de l'espace E^0_k (où $k=h,b$) par le gradient est égale au noyau du rotationnel dans l'espace E^1_k . De même, l'image de E^1_k par le rotationnel est égale au noyau de la divergence dans E^2_k . Ceci peut s'écrire sous la forme :

$$\text{Im}[\mathbf{grad}(E^0_k)] = \text{Ker}[\mathbf{rot}(E^1_k)] \tag{I.22}$$

$$\text{Im}[\mathbf{rot}(E^1_k)] = \text{Ker}[\mathbf{div}(E^2_k)] \tag{I.23}$$

Avec $\text{Im}[\mathcal{L}(X)]$: l'image pour l'opérateur \mathcal{L} de l'espace X

$\text{Ker}[\mathcal{L}(X)]$: le noyau de l'opérateur \mathcal{L} de l'espace X

On vérifie ainsi les relations classiques $\mathbf{rot}(\mathbf{grad} f)=0$ et $\mathbf{div}(\mathbf{rot} u)=0$.

Remarque :

Dans le cas de domaines non simplement connexes et à frontières non connexes, les égalités précédentes ne sont plus vraies, on a alors [2][16][18] :

$$\text{Im}[\mathbf{grad}(E^0_k)] \subset \text{Ker}[\mathbf{rot}(E^1_k)] \tag{I.24}$$

$$\text{Im}[\mathbf{rot}(E^1_k)] \subset \text{Ker}[\mathbf{div}(E^2_k)] \tag{I.25}$$

Pour étudier de tels domaines, une solution consiste à introduire des coupures qui rendent le domaine \mathcal{D} simplement connexe et la surface Γ connexe [2][19][20].

Dans le cas des domaines simplement connexes, les propriétés énoncées précédemment peuvent être représentées par le diagramme de la figure I.1 qui montre que les espaces fonctionnels, reliés par les trois opérateurs, forment une suite [21].

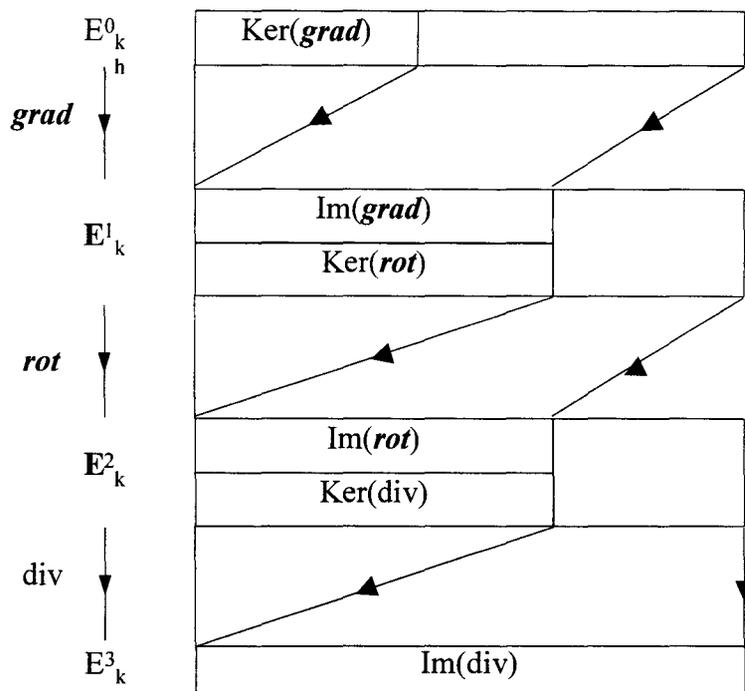


Figure I.1 : Complexe de De Rham

Compte tenu des propriétés précédentes et d'après les relations I.3 et I.10, la densité

de courant J appartient à E^2_h . De même, le champ de vecteur représenté par la dérivée partielle par rapport au temps de l'induction magnétique appartient à E^2_b .

I.3.4 Diagramme de Tonti

Dans le paragraphe précédent nous avons défini deux suites d'espaces (E^1_h et E^1_b) auxquels appartiennent les vecteurs E, H, B et J . Nous allons maintenant introduire la notion d'opérateurs adjoints qui va permettre d'établir un lien entre ces suites d'espaces.

Soit \mathcal{L} un opérateur vectoriel défini sur l'espace E^d . \mathcal{L}_d , l'opérateur adjoint de \mathcal{L} sur l'espace E^d_d , est défini par la relation :

$$\int_{\mathcal{D}} w \cdot \mathcal{L}u \, d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} u \cdot \mathcal{L}_d w \, d\mathcal{D} + \int_{\Gamma} w \cdot \mathcal{S}_L u \, d\gamma \quad \forall u \in E^d \quad \forall w \in E^d_d \quad (I.26)$$

où E^d_d est appelé espace dual de E^d . On notera que l'opérateur \mathcal{S}_L introduit les conditions aux limites de u sur la frontière Γ . Les propriétés sur les opérateurs vectoriels (*grad*, *div*, *rot*) nous donnent les deux relations suivantes :

$$\int_{\mathcal{D}} u \cdot \mathbf{grad} f \, d\mathcal{D} = - \int_{\mathcal{D}} f \mathbf{div} u \, d\mathcal{D} + \int_{\Gamma} (u \cdot n) f \, d\gamma \quad (I.27)$$

$$\int_{\mathcal{D}} u \cdot \mathbf{rot} v \, d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} v \cdot \mathbf{rot} u \, d\mathcal{D} + \int_{\Gamma} (u \times n) \cdot v \, d\gamma \quad (I.28)$$

L'opérateur adjoint du gradient est donc l'opposé de la divergence. L'opérateur adjoint du rotationnel est lui-même, seul le domaine de définition change (cf. I.26). Compte tenu de la définition des espaces E^i_k avec les conditions aux limites associées, à partir des relations I.27 et I.28 nous pouvons écrire les égalités suivantes :

$$\int_{\mathcal{D}} u \cdot \mathbf{grad} f \, d\mathcal{D} = - \int_{\mathcal{D}} f \mathbf{div} u \, d\mathcal{D} \quad f \in E^0_h \quad \text{et} \quad u \in E^2_b \quad (I.29)$$

$$\int_{\mathcal{D}} u \cdot \mathbf{rot} v \, d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} v \cdot \mathbf{rot} u \, d\mathcal{D} \quad u \in E^1_h \quad \text{et} \quad v \in E^1_b \quad (I.30)$$

Dans ces conditions à partir de I.29, on constate qu'il y a dualité entre les espaces E^0_h et E^2_b [2]. Le même raisonnement peut être appliqué aux espaces E^1_h et E^1_b , ainsi qu'à E^2_h et E^0_b . La structure mathématique, définie par ces espaces, peut accueillir un grand nombre de systèmes d'équations aux dérivées partielles et peut être représentée par le diagramme de la figure I.2 [22].

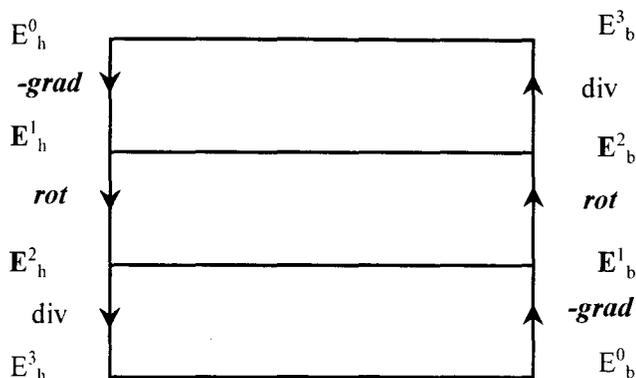


Figure I.2: diagramme de Tonti

Pour prendre en compte la dérivée par rapport au temps on introduit communément une troisième dimension au diagramme de la figure I.2 [1][16]. Le problème défini par les équations de Maxwell, dans le cas où l'on néglige les courants de déplacement, peut être alors représenté par le diagramme de la figure I.3. Les lois de comportement notées μ et σ , liant les champs magnétiques (B et H) et électriques (E et J), permettent de passer d'une suite d'espaces dans une autre suite d'espaces, duale de la première. On rappelle que les conditions aux limites sur les champs sont prises en compte implicitement dans les définitions des espaces $E_{i,k}$.

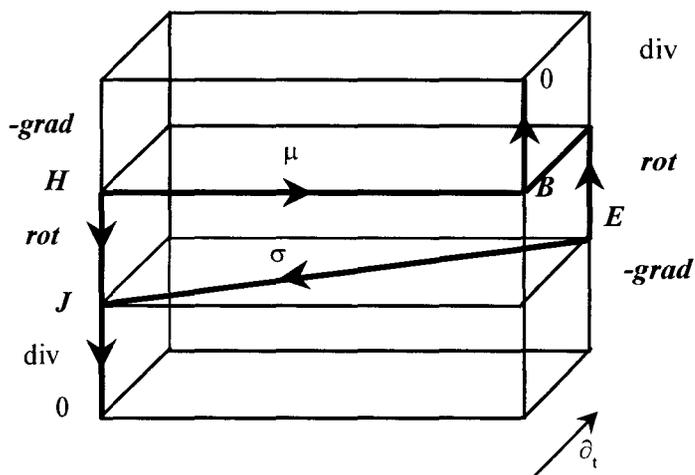


Figure I.3: Diagramme de Tonti appliqué à l'électromagnétisme.

Il existe différentes formulations pour résoudre le problème mathématique défini par les équations de Maxwell. Certaines d'entre elles sont basées sur l'introduction de potentiels vecteurs ou scalaires. Ces potentiels s'intègrent d'ailleurs naturellement dans le diagramme de Tonti. Dans la suite, nous détaillerons les principales formulations utilisées pour étudier les problèmes électrotechniques. Pour cela, nous distinguerons le cas de l'électrocinétique, de la magnétostatique et de la magnétodynamique.

I.4 LES FORMULATIONS DE L'ELECTROCINETIQUE

Dans le cas de l'électrocinétique, le domaine étudié est constitué de matériaux conducteurs et les grandeurs électriques sont indépendantes du temps. On trouvera figure I.4 un exemple de structure que nous désirons étudier. On notera que, dans notre étude, nous nous limitons au cas où la section S_c du conducteur est constante.

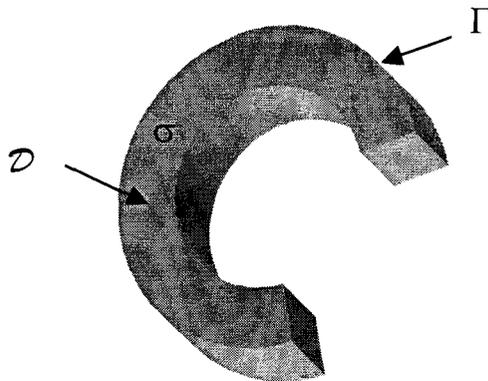


Figure I.4 : Dispositif électrocinétique

Le système d'équations à résoudre s'écrit alors :

$$\text{rot}E = 0 \tag{I.31}$$

$$\text{div}J = 0 \tag{I.32}$$

avec les conditions aux limites I.9 et I.10. A ce système, la loi de comportement des matériaux électriques I.4 est ajoutée. Le diagramme de Tonti présenté au paragraphe précédent prend alors la forme donnée sur la figure I.5.

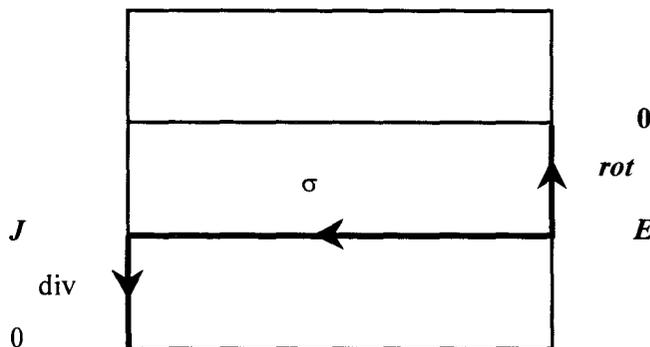


Figure I.5: Diagramme de Tonti appliqué à l'électrocinétique

On résout rarement ce système d'équations directement. En fait, on introduit des potentiels qui assurent naturellement la vérification de l'une ou l'autre des équations différentielles I.31 ou I.32 avec les conditions limites associées I.9 ou I.10. On distingue ainsi la formulation en potentiel scalaire électrique ϕ et en potentiel vecteur électrique T .

I.4.1 La formulation en potentiel scalaire électrique

Comme le domaine est simplement connexe d'après I.22, on peut introduire un potentiel scalaire électrique φ_e tel que :

$$\mathbf{E} = -\mathit{grad}\varphi_e \quad (\text{I.33})$$

Dans le cas de la figure I.6, la surface du conducteur se décompose en trois parties : $\Gamma = \Gamma_b \cup \Gamma_h$ et $\Gamma_b = \Gamma_{b1} \cup \Gamma_{b2}$. Les conditions aux limites I.10 s'écrivent alors:

$$\varphi_e|_{\Gamma_{b1}} = \varphi_{e1} \quad \text{et} \quad \varphi_e|_{\Gamma_{b2}} = \varphi_{e2} \quad (\text{I.34})$$

On notera que $\varphi_{12} = \varphi_{e1} - \varphi_{e2}$ représente la différence de potentiel imposée au conducteur. Le potentiel scalaire étant défini à une constante près, on peut choisir arbitrairement $\varphi_{e2} = 0$ et $\varphi_{e1} = \varphi_{12}$. On introduit maintenant un potentiel scalaire source φ_s défini de la façon suivante (voir figure I.6) :

$$\varphi_s|_{\Gamma_{b2}} = 0 ; \quad \varphi_s|_{\Gamma_{b1}} = \varphi_{12} \quad \text{et} \quad \varphi_s = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D} - \mathcal{D}_\varepsilon \quad (\text{I.35})$$

et φ_s varie linéairement sur l'épaisseur ε qui peut être quelconque. Le potentiel φ_e peut donc s'écrire en introduisant un potentiel φ appartenant à E_b^0 :

$$\varphi_e = \varphi + \varphi_s \quad \text{avec} \quad \varphi|_{\Gamma_b} = 0 \quad (\text{I.36})$$

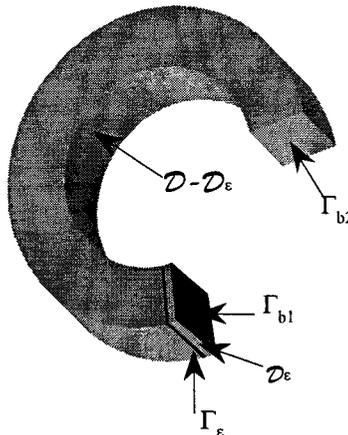


Figure I.6 : Définition des conditions aux limites.

Le problème initial se réduit alors au problème équivalent suivant :

$$\begin{cases} \text{div} \mathbf{J} = 0 & \mathbf{J} \in \mathbf{E}_h^2 \\ \mathbf{J} = -\sigma \mathit{grad}(\varphi + \varphi_s) & \varphi \in E_b^0 \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

1.4.2 La formulation en potentiel vecteur électrique

Comme la densité de courant J est, d'après I.32, un champ de vecteur à divergence nulle, elle dérive d'un potentiel vecteur électrique T_e tel que :

$$J = \text{rot}T_e \quad (\text{I.38})$$

Par ailleurs, la densité de courant J est normale aux surfaces Γ_{b1} et Γ_{b2} . Par conséquent, le flux de J à travers ces surfaces qui représente l'intensité du courant I_0 , peut servir de terme source pour le problème en potentiel vecteur électrique. En effet, si on note J_0 une densité de courant répartie uniformément dans le conducteur de section S_c et n la normale à S_c , on a :

$$I_0 = J_0 \cdot n S_c \quad (\text{I.39})$$

La densité de courant J peut alors s'écrire comme la superposition de J_0 plus une densité de courant J_m , on a alors [23]:

$$J = J_0 + J_m \quad (\text{I.40})$$

De part sa définition, J_0 est à divergence nulle on peut donc écrire :

$$J_0 = \text{rot}H_s \quad (\text{I.41})$$

où H_s représente un champ source appartenant à E^1 . On notera que H_s n'est pas unique et qu'il existe une infinité de champs sources tels que leur rotationnel donne la densité de courant J_0 . A partir des relations I.38, I.40 et I.41 on déduit que J_m est à divergence nulle. J_m peut donc également, s'exprimer à partir d'un potentiel vecteur électrique T . On aura alors :

$$J = \text{rot}(T + H_s) \quad (\text{I.42})$$

Comme la composante normale de J_m est nulle sur Γ_h , on prendra alors pour T :

$$T \times n|_{\Gamma_h} = 0 \quad (\text{I.43})$$

En effet, contrairement à T_e défini en I.38, la circulation de T sur une courbe \mathcal{C} de Γ , entourant le conducteur, est égale à zéro puisque le flux de J_m est nul à travers toute section. Par contre, la circulation de H_s sur ce contour \mathcal{C} est égale à I_0 .

D'après I.42 et I.43, le potentiel vecteur T appartient à E^1_h . De la même façon que pour la formulation en potentiel scalaire électrique, le problème initial est équivalent à résoudre :

$$\begin{cases} \text{rot}E = 0 & E \in E^1_b \\ E = \frac{1}{\sigma} \text{rot}(T + H_s) & T \in E^1_h \end{cases} \quad (\text{I.44})$$

Cependant, on notera que le potentiel vecteur T est défini à un gradient près. L'équation I.44

admet donc une infinité de solutions. Pour assurer l'unicité de la solution, nous devons imposer une condition de jauge. Il en existe plusieurs, notamment la jauge de Coulomb $\text{div}T=0$ [14][15]. Une autre jauge consiste à imposer le produit scalaire $U \cdot w=f(r)$ [24] (cf. annexe I).

I.4.3 Diagramme de Tonti

Le diagramme de Tonti appliqué à l'électrocinétique (cf. figure I.5) peut être complété en ajoutant les potentiels scalaire et vecteur électriques. Comme on a vu que $\varphi \in E^0_b$ et $T \in E^1_h$, on obtient alors le diagramme de la figure suivante :

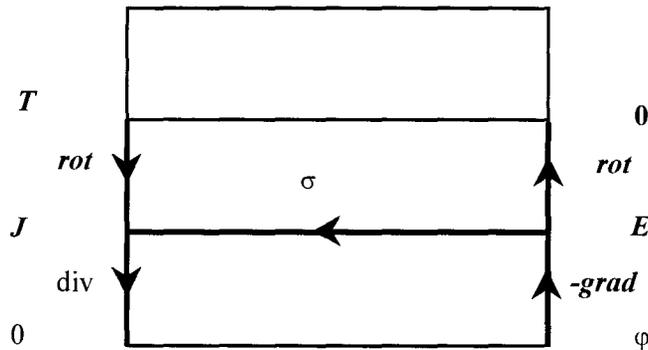


Figure I.7 : Introduction des potentiels dans le diagramme de Tonti appliqué à l'électrocinétique.

I.5 LES FORMULATIONS DE LA MAGNETOSTATIQUE

Dans le cas de la magnétostatique, la répartition spatiale de la densité de courant J est supposée connue. Pour ne pas alourdir les notations et les développements, nous prendrons J à répartition uniforme égale à J_0 . Le domaine étudié peut être constitué d'inducteurs filaires, de matériaux ferromagnétiques ayant une conductivité supposée nulle (tôles), d'aimants permanents, etc... A titre indicatif, on présente sur la figure I.8 un exemple de structure.

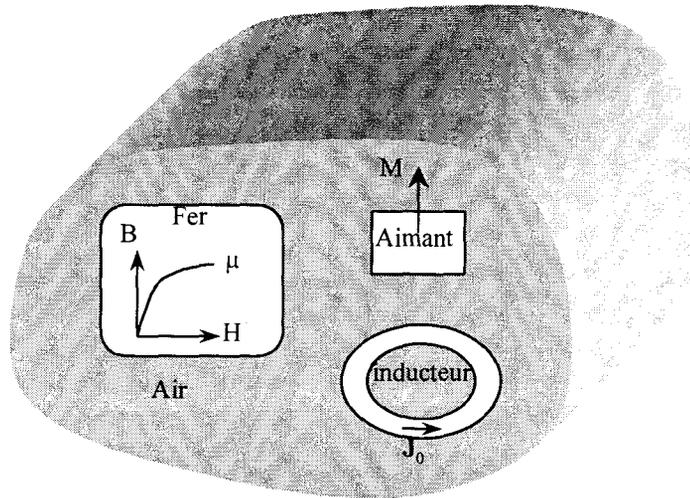


Figure I.8 : Dispositif magnétostatique

Le système d'équations à résoudre s'écrit alors :

$$\text{rot}H = J_0 \tag{I.45}$$

$$\text{div}B = 0 \tag{I.46}$$

avec les conditions aux limites données par les équations I.7 et I.8. A ce système, on peut ajouter les lois de comportement des matériaux magnétiques I.5 et I.6. Le diagramme de Tonti introduit à la figure I.2 prend alors, dans le cas de la magnétostatique, la forme donnée sur la figure I.9.

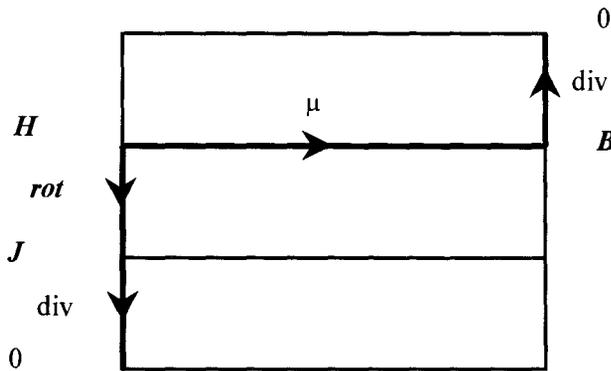


Figure I.9 : Diagramme de Tonti appliqué à la magnétostatique

Comme dans le cas de l'électrocinétique, on résout rarement ce système d'équations directement. On introduit, généralement, des potentiels avec les conditions aux limites associées. On distingue ainsi la formulation en potentiel scalaire magnétique Ω et en potentiel vecteur magnétique A .

I.5.1 La formulation en potentiel scalaire magnétique

Pour prendre en compte les inducteurs, où la densité de courant J_0 est connue, on introduit, comme dans le cas de l'électrocinétique, un champ magnétique source H_s défini par les équations I.41. Le domaine étant simplement connexe, d'après I.22, on peut introduire un potentiel scalaire magnétique Ω tel que :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s - \mathbf{grad}\Omega \quad (I.47)$$

Contrairement aux problèmes d'électrocinétique, on peut avoir H_s tel que $H_s \times n = 0$ sur Γ_h . En effet, la frontière Γ_h n'est pas entièrement en contact avec les inducteurs. Avec les conditions aux limites sur \mathbf{H} , on a :

$$-\mathbf{grad}\Omega \times \mathbf{n}|_{\Gamma_h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega|_{\Gamma_h} = K_\Omega \quad (I.48)$$

où K_Ω est une constante. Il est possible d'introduire une différence de potentiel magnétique entre deux surfaces disjointes de Γ_h en ajoutant un potentiel scalaire source comme nous l'avons proposé dans le cas de l'électrocinétique. Dans nos applications en magnétostatique, seuls des inducteurs seront considérés comme sources de champ magnétique. En conséquence, dans la suite, nous prendrons K_Ω nul. Dans ces conditions, le potentiel scalaire Ω appartient donc au sous-espace E_h^0 . Le problème initial se réduit alors au problème équivalent suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 & \mathbf{B} \in \mathbf{E}_b^2 \\ \mathbf{B} = \mu(\mathbf{H}_s - \mathbf{grad}\Omega) & \Omega \in E_h^0 \end{cases} \quad (I.49)$$

On obtient ainsi la formulation en potentiel scalaire [7][9][25][26]. Il existe différentes méthodes pour calculer le champ source analytiquement [14][15]. On verra au deuxième chapitre qu'il est possible de calculer le champ source par des techniques numériques.

I.5.2 La formulation en potentiel vecteur magnétique

Comme \mathbf{B} est un champ de vecteur à divergence nulle, d'après I.23, l'induction magnétique dérive d'un potentiel vecteur magnétique tel que:

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (I.50)$$

La composante normale de \mathbf{B} étant nulle sur Γ_b , on a alors pour le potentiel vecteur les conditions aux limites suivantes :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_b} = \mathbf{K}_A \quad (I.51)$$

Comme pour la formulation en potentiel scalaire, le terme source est, généralement, la densité de courant. Sans modifier l'aspect général du problème, on prendra \mathbf{K}_A égal à zéro sur Γ_b . Cependant, si l'on désire imposer un flux, on peut superposer au potentiel vecteur \mathbf{A} , un potentiel vecteur source \mathbf{A}_s sur tout ou une partie du domaine \mathcal{D} (cf. § I.4.2).

D'après I.50 et I.51, le potentiel vecteur \mathbf{A} appartient au sous espace \mathbf{E}_b^1 . De la même façon que pour la formulation en potentiel scalaire, le problème initial est équivalent à résoudre :

$$\begin{cases} \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 & \mathbf{H} \in \mathbf{E}_h^1 \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} & \mathbf{A} \in \mathbf{E}_b^1 \end{cases} \quad (I.52)$$

Il est intéressant de noter que l'on peut obtenir un deuxième système d'équations en introduisant dans cette formulation le champ source \mathbf{H}_s défini au paragraphe précédent :

$$\begin{cases} \text{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_s) = 0 & \mathbf{H} \in \mathbf{E}_h^1 \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} & \mathbf{A} \in \mathbf{E}_b^1 \end{cases} \quad (I.53)$$

On montre, à partir de I.22, qu'il existe une infinité de solutions pour le potentiel vecteur \mathbf{A} . L'unicité de la solution peut être obtenue, comme pour le potentiel vecteur électrique (cf. § 1.4.2), en imposant une condition de jauge [24].

I.5.3 Diagramme de Tonti

Le diagramme de Tonti appliqué à la magnétostatique (cf. figure I.9) peut être complété en ajoutant les potentiels magnétiques et le champ source. Comme on a vu que : $\Omega \in E^0_h$, $H_s \in E^1_h$ et $A \in E^1_b$, on obtient alors le diagramme de la figure I.10 :

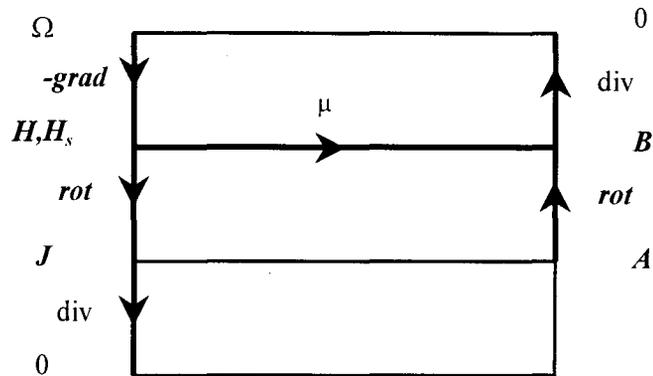


Figure I.10 : Introduction des potentiels dans le diagramme de Tonti appliqué à la magnétostatique

I.6 LES FORMULATIONS DE LA MAGNETODYNAMIQUE

Dans le cas de la magnétodynamique, on doit résoudre les équations de Maxwell qui en l'absence des courants de déplacement s'écrivent :

$$\text{rot}E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (I.54)$$

$$\text{rot}H = J \quad (I.55)$$

avec les conditions aux limites I.7 à I.10. Dans ce cas, les champs magnétiques et électriques sont couplés. Il faut ajouter à ce système les lois de comportement des matériaux électriques I.4 et magnétiques I.5. Le diagramme de Tonti appliqué à la magnétodynamique a déjà été étudié et est représenté sur la figure I.3. Pour résoudre ces équations, on peut utiliser les formulations en champs E , H ou en potentiels. On obtient alors deux familles de formulations :

- les formulations électriques : elles ont pour variable principale le champ électrique.
- les formulations magnétiques : elles ont pour variable principale le champ magnétique.

I.6.1 Les formulations électriques

I.6.1.1 Formulation en champ électrique E

Pour obtenir la formulation en champ électrique on dérive l'équation I.55 par rapport au temps. Ainsi, on fait apparaître un terme en $\partial_t \mathbf{H}$ [2]. En faisant l'hypothèse que la perméabilité μ est invariante par rapport au temps (cas des matériaux linéaires) le terme en $\partial_t \mathbf{H}$ peut être transformé en $\mu^{-1} \partial_t \mathbf{B}$. Cette opération permet d'introduire l'expression I.54 dans l'équation I.55 dérivée par rapport au temps. En remplaçant \mathbf{J} par $\sigma \mathbf{E}$ on obtient alors :

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{E}\right) + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad \mathbf{E} \in \mathbf{E}_b^1 \quad (\text{I.56})$$

L'hypothèse de l'invariance de la perméabilité en fonction du temps ne permet pas d'appliquer cette formulation aux matériaux non-linéaires. Cette formulation est rarement utilisée au profit des formulations en potentiel.

I.6.1.2 Formulation électrique en potentiels A-φ

Comme nous l'avons vu précédemment, l'induction magnétique peut être exprimée à partir du potentiel vecteur \mathbf{A} (§ 1.5.2). En regroupant I.50 et I.54, on obtient une forme de la loi de Faraday [27]:

$$\mathbf{E} = -\left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad}(\varphi + \varphi_s)\right] \quad (\text{I.57})$$

où φ représente le potentiel scalaire électrique défini au paragraphe I.4.1. Si on considère seulement des conducteurs en court circuit le potentiel φ_s est nul. On rappelle que $\varphi \in \mathbf{E}_b^0$ et $\mathbf{A} \in \mathbf{E}_b^1$. A partir de la relation constitutive des milieux I.4, on obtient l'expression de la densité de courant :

$$\mathbf{J} = -\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \varphi\right) \quad (\text{I.58})$$

En introduisant dans I.55 la relation I.50, à l'aide de la loi de comportement I.5 et en remplaçant \mathbf{J} par I.58, on obtient:

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A}\right) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \varphi\right) = 0 \quad \varphi \in \mathbf{E}_b^0 \quad \text{et} \quad \mathbf{A} \in \mathbf{E}_b^1 \quad (\text{I.59})$$

On notera que I.59 vérifie implicitement la relation $\text{div} \mathbf{J} = 0$. Comme dans le cas de la

magnétostatique, pour assurer l'unicité de la solution, il est nécessaire d'imposer une condition de jauge sur le potentiel vecteur.

I.6.2 Les formulations magnétiques

I.6.2.1 Formulation en champ magnétique H

Comme pour la formulation en champ électrique, la formulation en champ magnétique H est obtenue directement à partir des équations de Maxwell I.54, I.55 et des lois de comportement I.4 et I.5. Elle s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\text{rot}H\right) + \frac{\partial(\mu H)}{\partial t} = 0 \quad H \in \mathbf{E}_h^1 \quad (\text{I.60})$$

avec les conditions aux limites sur le champ magnétique H telles que $\mathbf{n} \times H|_{\Gamma_h} = 0$

Afin de traiter les domaines non conducteurs, cette formulation doit être couplée avec une formulation en potentiel scalaire [28].

I.6.2.2 Formulation magnétique en potentiels T - Ω

Comme le champ électrique, le champ magnétique H peut être exprimé à partir de potentiels. Dans le cas de l'électrocinétique, nous avons déjà défini le potentiel vecteur électrique T . On considère maintenant le cas où l'on a uniquement des courants induits (absence de terme source $H_s=0$) l'équation I.42 s'écrit alors [25]:

$$\text{rot}T = J \quad T \in \mathbf{E}_h^1 \quad (\text{I.61})$$

Le domaine étant simplement connexe, en regroupant I.55 et I.61 le champ magnétique peut être exprimé avec la relation :

$$H = T - \text{grad } \Omega \quad (\text{I.62})$$

où Ω représente le potentiel scalaire magnétique défini au paragraphe I.5.1. En introduisant cette équation dans la formulation en H (cf. équation I.60), on obtient la formulation magnétique en potentiels :

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\text{rot}T\right) + \mu\left(\frac{\partial T}{\partial t} - \text{grad}\Omega\right) = 0 \quad \Omega \in \mathbf{E}_h^0 \quad \text{et} \quad T \in \mathbf{E}_h^1 \quad (\text{I.63})$$

On notera que cette expression vérifie implicitement $\text{div } B = 0$.

Les formulations $T-\Omega$ et $A-\phi$ présentent des similitudes. Elles n'admettent pas une solution unique. Il faut donc aussi imposer une condition de jauge.

I.6.3 Diagramme de Tonti

Les formulations de la magnétodynamique utilisent quatre potentiels : les deux potentiels scalaires électrique et magnétique ainsi que les deux potentiels vecteurs électrique et magnétique. Nous avons vu que : $\Omega \in E^0_h$, $\phi \in E^0_b$, $T \in E^1_h$ et $A \in E^1_b$. Le diagramme de Tonti relatif à la magnétodynamique est représenté sur la figure I.11.

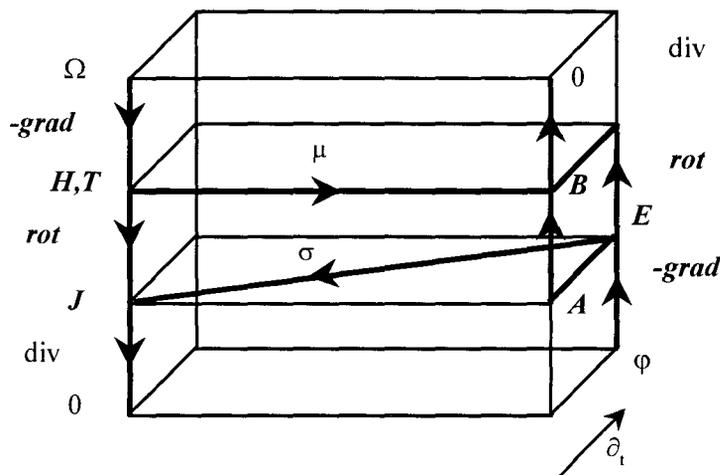


Figure I.11 : Introduction des potentiels dans le diagramme de Tonti appliqué à la magnétodynamique.

Les formulations présentées précédemment s'appliquent seulement au domaine conducteur. Or, un dispositif électrotechnique comprend des régions dépourvues de conductivité (figure I.12). Pour prendre en compte tout le domaine, on est amené à modéliser des sous-domaines ayant une conductivité nulle. Lorsque l'on utilise des potentiels, le couplage entre les formulations s'effectue naturellement.

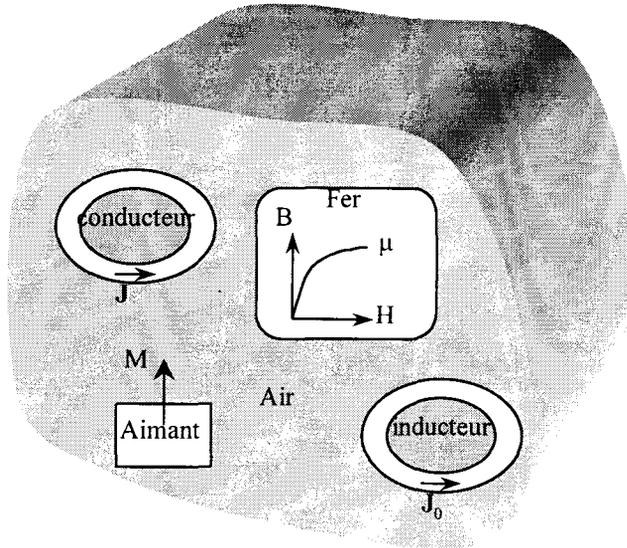


Figure I.12 : Dispositif électrotechnique

I.7 LE COUPLAGE AVEC LES EQUATIONS DU CIRCUIT ELECTRIQUE

Pour résoudre les équations différentielles développées précédemment, il est nécessaire de connaître les termes sources. Dans la plupart des cas, on impose soit l'intensité du courant soit la tension aux bornes de l'inducteur. Dans ce paragraphe, nous allons étudier le couplage entre les grandeurs globales (différence de potentiel ou intensité du courant) et les formulations proposées.

I.7.1 Introduction des champs de vecteur \mathbf{K} et \mathbf{N}

Considérons le dispositif, compris dans le domaine \mathcal{D} de frontière Γ , représenté sur la figure I.13. Il est constitué d'un inducteur (\mathcal{D}_c de frontière Γ_c) et du domaine \mathcal{D}_{nc} . On impose sur les surfaces Γ_{b1} et Γ_{b2} soit un flux de densité de courant i_0 soit une différence de potentiel $\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$.

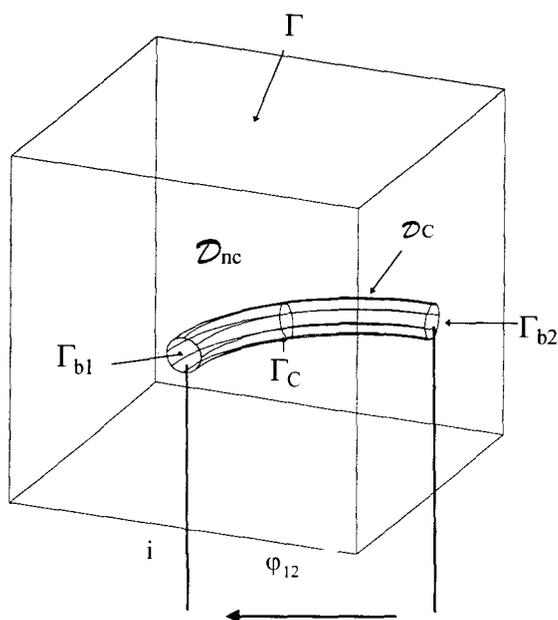


Figure I.13 : Définition des grandeurs globales et des conditions aux limites du problème étudié

On suppose que la densité de courant J_0 , dans l'inducteur est répartie uniformément. De plus, la section S_c de l'inducteur est supposée constante. Si on note \mathbf{n} la normale à S_c , on peut définir un champ de vecteur N tel que :

$$N = \frac{1}{S_c} \cdot \mathbf{n} \quad \text{dans } \mathcal{D}_c \quad (\text{I.64})$$

$$N = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}_{nc} \quad (\text{I.65})$$

La composante normale de N est nulle sur $\Gamma_c - (\Gamma_{b1} \cup \Gamma_{b2})$. En outre, de part sa définition, N est un champ de vecteur à divergence nulle et il permet de définir la géométrie de l'inducteur. Sur la base des propriétés de N , on peut introduire un vecteur K tel que :

$$\text{rot}K = N \quad (\text{I.66})$$

Si la surface du conducteur n'est pas entièrement en contact avec la surface Γ_h , on prendra :

$$K \times \mathbf{n}|_{\Gamma_h} = 0 \quad (\text{I.67})$$

Dans ces conditions, les vecteurs N et K appartiennent respectivement à E^2_h et à E^1_h . Si $\Gamma_c - (\Gamma_{b1} \cup \Gamma_{b2})$ est compris dans Γ_h (problème d'électrocinétique), alors N appartient toujours à E^2_h . Par contre, K appartient alors à E^1 car la circulation de K sur Γ_h n'est pas nulle. Il est important de remarquer qu'il existe une infinité de vecteurs K dont le rotationnel est égal à N .

Pour les conducteurs massifs, il n'existe pas de lien direct entre la distribution de la densité de courant J et le vecteur N . Par contre, dans le cas des conducteurs

multifilamentaires, on peut supposer que la densité de courant est répartie uniformément, on a :

$$i_0 = \int_{S_c} \mathbf{J}_0 \cdot d\mathbf{s} = |\mathbf{J}_0| \cdot S_c \quad (I.68)$$

où i_0 représente alors le courant qui circule dans l'inducteur. La densité de courant \mathbf{J}_0 peut alors s'exprimer en fonction du vecteur \mathbf{N} par la relation :

$$\mathbf{J}_0 = N \mathbf{i}_0 \quad (I.69)$$

De plus , à partir des relations I.41, I.66 et I.69 on a :

$$\mathbf{H}_s = K \mathbf{i}_0 \quad (I.70)$$

Les vecteurs \mathbf{N} et \mathbf{K} , qui sont les supports des vecteurs \mathbf{J}_0 et \mathbf{H}_s , vont nous permettre de réaliser le couplage entre les équations de l'électromagnétisme et celles du circuit électrique.

I.7.2 Les formulations à courant imposé

I.7.2.1 Cas de l'électrocinétique

Dans le cas de l'électrocinétique, la densité de courant \mathbf{J} peut s'écrire à l'aide du potentiel vecteur électrique et du champ source sous la forme I.42. En remplaçant \mathbf{H}_s par son expression I.70, on obtient la formulation en électrocinétique à courant imposé qui s'écrit :

$$\begin{cases} \text{rot} \mathbf{E} = 0 & \mathbf{E} \in \mathbf{E}_b^1 \\ \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \text{rot}(\mathbf{T} + K \mathbf{i}_0) & \mathbf{T} \in \mathbf{E}_h^1 \end{cases} \quad (I.71)$$

Le problème se ramène à calculer d'une part le vecteur \mathbf{K} et d'autre part, à résoudre le système I.71

I.7.2.2 Cas de la magnétostatique

En magnétostatique, dans le cas où i_0 est imposé, le couplage s'effectue naturellement par l'intermédiaire du vecteur \mathbf{N} . Si l'inducteur possède n_s spires nous pouvons écrire :

$$\mathbf{N} = \frac{n_s}{S_c} \mathbf{n} \quad (I.72)$$

Pour les formulations utilisant le champ source \mathbf{H}_s le couplage est basé sur le vecteur \mathbf{K} (cf.

équation I.70). Il suffit donc de remplacer dans les deux formulations de la magnétostatique présentées au paragraphe I.5 la densité de courant J_0 ou le champ source H_s par leur expression en fonction de N (I.69) et de K (I.70)

I.7.2.3 Cas de la magnétodynamique

Pour les conducteurs massifs contrairement aux conducteurs filaires, la distribution de la densité de courant est inconnue. Dans ce cas, pour imposer le courant source i_0 , il est possible de décomposer la densité de courant en deux termes [23]:

- Une densité de courant uniforme, à divergence nulle, définie sur \mathcal{D}_c et telle que :

$$i_0 = \int_{\mathcal{D}_c} J_0 ds \quad (I.73)$$

que l'on pourra exprimer à partir du vecteur N tel que $J_0 = N i_0$

- Une densité de courant J_m définie par la relation I.40. Par définition, ce terme est à divergence nulle, de plus :

$$\int_{\mathcal{D}_c} J_m ds = 0 \quad (I.74)$$

Pour la formulation en T - Ω , en faisant apparaître le champ source H_s dans l'expression I.62, on obtient [23][26] :

$$H = T + H_s - \mathbf{grad}\Omega \quad T \text{ et } H_s \in \mathbf{E}_h^1, \Omega \in \mathbf{E}_h^0 \quad (I.75)$$

La densité de courant J s'écrit alors :

$$J = \mathbf{rot}(T + H_s) \quad (I.76)$$

où H_s peut s'exprimer en fonction du vecteur K et de l'intensité imposée i_0 (cf. équation I.70).

Dans ces conditions, l'expression de I.63 s'écrit :

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot}T\right) + \mu\left(\frac{\partial T}{\partial t} - \mathbf{grad}\Omega\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu K i_0) - \mathbf{rot}\left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot}K i_0\right) \quad (I.77)$$

où le terme source apparaît localement sous la forme du vecteur K qu'il faudra déterminer pour résoudre l'équation aux dérivées partielles.

En conclusion, pour imposer un courant en magnétodynamique, nous avons modifié la formulation T - Ω en introduisant le vecteur K . Dans le cas de la formulation A - φ , il est possible d'imposer un courant à l'aide des conditions aux limites sur la surface externe du conducteur (cf. Γ_{b1} et Γ_{b2} de la figure I.13) [9][29].

I.7.3 Formulation à tension imposée

Dans le paragraphe I.6.2, nous avons vu qu'il était possible d'introduire dans les équations locales l'intensité du courant. Cela a été réalisé par l'intermédiaire des vecteurs N et K . Pour le couplage, entre les équations de circuit et les équations magnétiques locales, nous nous limiterons au cas des conducteurs multifilamentaires. Dans ces conditions, l'intensité du courant notée i est inconnue. Le couplage sera réalisé à l'aide du flux de l'induction magnétique que l'on notera Φ . En utilisant le vecteur K , le flux Φ a pour expression [9][30][31][32][33]:

$$\Phi = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} dv \quad (\text{I.78})$$

L'intérêt de cette expression devant la forme classique du flux $\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ est son intégrale de volume. En effet, si la géométrie de l'inducteur est complexe, il est délicat de déterminer en 3D la surface délimitée par l'inducteur. Dans ce cas, il est difficile de calculer le flux de \mathbf{B} à travers une telle surface. Comme le champ de vecteur \mathbf{K} doit être calculé pour déterminer le champ source, cela n'engendre aucune difficulté supplémentaire. Sa forme générale facilite le couplage avec les formulations. Pour cela, on introduit la relation I.78 dans la loi de Faraday et on obtient ainsi :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} dv = V - Ri \quad (\text{I.79})$$

où V représente la différence de potentiel et R la résistance de l'inducteur.

I.7.3.1 Couplage avec la formulation en potentiel vecteur \mathbf{A} .

Dans l'équation I.78, l'induction magnétique peut être remplacée par le rotationnel de \mathbf{A} . On obtient alors une expression de la forme $(\text{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{K})$ qui peut être transformée en utilisant les propriétés des opérateurs vectoriels. Compte tenu des conditions aux limites sur \mathcal{A} et \mathbf{K} , on obtient :

$$\Phi = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{A} \cdot \text{rot} \mathbf{K} dv \quad (\text{I.80})$$

En utilisant la relation I.66, le flux de l'induction magnétique dans un enroulement composé d'inducteurs filaires s'écrit alors :

$$\Phi = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} dv \quad (\text{I.81})$$

Le vecteur \mathbf{N} étant défini uniquement dans le domaine \mathcal{D}_c , cette expression permet de

réduire le domaine d'intégration. Dans le cas du couplage à tension imposée, le système à résoudre peut donc se présenter sous deux formes. La première en utilisant le vecteur K :

$$\begin{cases} \text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot}A\right) - \text{rot}K\bar{i} = 0 & A \in E_b^1 \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \text{rot}A \cdot K dv + Ri = V \end{cases} \quad (\text{I.82})$$

et la seconde à l'aide du vecteur N :

$$\begin{cases} \text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot}A\right) - N\bar{i} = 0 & A \in E_b^1 \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_c} A \cdot N dv + Ri = V \end{cases} \quad (\text{I.83})$$

où pour ces deux systèmes on rappelle que $N \in E_h^2$ et $K \in E_h^1$.

1.7.3.2 Couplage avec la formulation en potentiel scalaire Ω

En exprimant l'induction magnétique B en fonction du champ magnétique H donné par la relation I.47, l'équation I.78 s'écrit alors, pour la formulation en potentiel scalaire :

$$\Phi = \int_{\mathcal{D}} \mu(H_s - \text{grad}\Omega) \cdot K dv \quad (\text{I.84})$$

En regroupant les équations I.84 et I.49 et, en y introduisant l'équation I.70, on obtient le système à résoudre :

$$\begin{cases} \text{div}\mu(K\bar{i} - \text{grad}\Omega) = 0 & \Omega \in E_h^0 \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \mu(K\bar{i} - \text{grad}\Omega) \cdot K dv + Ri = V \end{cases} \quad (\text{I.85})$$

On remarque que le couplage avec le circuit électrique est plus facile à mettre en oeuvre pour des formulations utilisant le potentiel vecteur magnétique. En effet, comme le flux s'écrit en fonction de l'induction, il est simple d'introduire le rotationnel de A . Par contre, le champ magnétique s'écrit à partir d'une somme de champs de vecteur. En effet, si le domaine \mathcal{D} contient plusieurs enroulements, on aura à traiter la superposition de plusieurs vecteurs K . Le couplage avec le circuit électrique sera alors plus délicat.

I.8 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les domaines de définition des champs de vecteurs intervenant dans les équations de Maxwell. Nous avons ensuite donné les différentes formulations qui permettent de calculer les champs dans le cas de l'électrocinétique, de la magnétostatique et de la magnétodynamique. Il est nécessaire, en général, pour résoudre ces équations d'utiliser des méthodes numériques car la solution analytique n'est pas accessible. Dans le chapitre suivant, nous allons voir comment il est possible de discrétiser les espaces de définition introduits.

Chapitre II : Domaine discret

II.1 INTRODUCTION

Les formulations développées au chapitre I ne peuvent être résolues de manière analytique du fait des géométries complexes des dispositifs. Pour résoudre ces équations nous avons recours aux méthodes numériques. Le problème doit donc être discrétisé. Les grandeurs locales de l'électromagnétisme, qui sont en fait les inconnues du problème, sont définies dans des suites d'espaces fonctionnels. Nous serons donc amenés à discrétiser les suites d'espaces fonctionnels ainsi que les opérateurs différentiels. Pour ce faire, nous allons définir une structure discrète analogue à celle du domaine continu présentée dans le chapitre précédent [1][2].

Pour cela, on a recours à la Méthode des Eléments Finis qui engendre une double discrétisation. La première consiste à décomposer le domaine d'étude (discrétisation spatiale) en petits éléments de formes simples (tétraèdres, prismes ou hexaèdres). La deuxième discrétisation est celle des inconnues. En effet, nous projeterons les différentes grandeurs dans les espaces fonctionnels discrets à l'aide de fonctions d'interpolations simples.

Dans notre étude, la dérivation temporelle que l'on rencontre dans les équations de la magnétodynamique et dans le couplage circuit sera discrétisée avec la méthode d'Euler implicite.

II.2 LE COMPLEXE DE WHITNEY

Pour résoudre les équations de Maxwell, nous sommes amenés à remplacer les espaces fonctionnels continus par des espaces fonctionnels discrets. Cela nécessite tout d'abord une discrétisation spatiale du domaine d'étude \mathcal{D} en le découpant en éléments de formes géométriques simples. Pour des raisons pratiques ces éléments sont des tétraèdres, des prismes, des hexaèdres et plus rarement des pyramides [34]. Ils sont reliés par des facettes, des arêtes ou des nœuds. Si on note respectivement N , A , F et E le nombre de nœuds d'arêtes, de facettes et d'éléments du maillage conforme, il existe une relation (Euler-Poincaré) entre ces nombres qui s'écrit [1]:

$$N - A + F - E = \chi. \quad (\text{II.1})$$

où χ représente le nombre de Betti qui est égal à 1 plus le nombre de boucle moins le nombre de trou du domaine maillé. A titre d'exemple, le maillage de la figure II.1 est constitué de 6 éléments (2 tétraèdres, 3 prismes, et un hexaèdre), 14 nœuds, 29 arêtes et de 22 facettes. On peut donc vérifier que la relation II.1 est respectée.

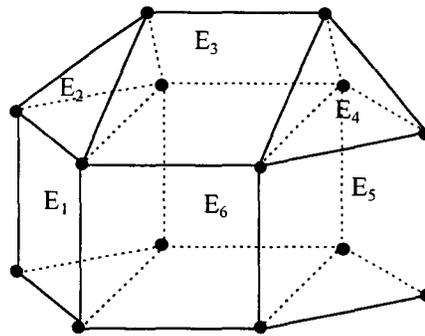


Figure II.1 : Exemple de maillage avec différents types d'éléments.

A chaque nœud ' n ', arête ' a ', facette ' f ' et élément ' v ' est associée une fonction de forme que l'on notera respectivement w_n , w_a , w_f et w_v .

II.2.1 Les fonctions de formes

II.2.1.1 Fonction nodale

A chaque nœud 'n', on associe une fonction nodale w_n qui est continue et égale à 1 au nœud 'n' et égale à 0 aux autres nœuds du maillage. Son expression dépend du type d'élément utilisé [35]. Avec les fonctions nodales, on peut vérifier la relation en chaque point du domaine:

$$\sum_{n \in N} w_n = 1 \quad (\text{II.2})$$

L'ensemble des fonctions w_n du maillage engendre un espace de dimension finie noté W^0 . Si une fonction scalaire U appartient à W^0 , on a alors :

$$U = \sum_{n \in N} w_n u_n \quad (\text{II.3})$$

u_n représente la valeur au nœud 'n' de la fonction U . Si on note U_n le vecteur $(u_n)_{n \in N}$ et W_n le vecteur contenant les fonctions d'interpolations aux nœuds, l'équation II.3 s'exprime sous la forme suivante :

$$U = W_n U_n \quad (\text{II.4})$$

Les propriétés des fonctions d'interpolation w_n imposent que la fonction U est continue sur tout le domaine \mathcal{D} .

II.1.1.2 Fonction d'arête

Soit, comme le montre la figure II.2 une arête A_{nm} formée par les nœuds N_n et N_m à laquelle on associe la fonction d'arête w_a . Dans le cas des tétraèdres, on a [1]:

$$w_a = w_n \mathbf{grad} w_m - w_m \mathbf{grad} w_n \quad (\text{II.5})$$

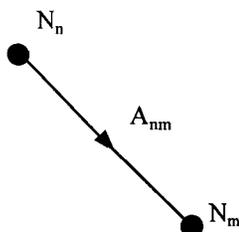


Figure II.2 : Définition de l'arête A_{nm} .

où w_n et w_m sont les fonctions nodales associées aux nœuds N_n et N_m . La circulation de w_a

est égale à 1 le long de l'arête A_{nm} et nulle sur les autres arêtes. L'ensemble de ces fonctions w_a engendre l'espace des éléments d'arêtes de dimension finie W^1 . Soit un vecteur U appartenant à W^1 , on a alors

$$U = \sum_{a \in A} w_a u_a \tag{II.6}$$

u_a représente la circulation de U le long de l'arête 'a' définie par :

$$u_a = \int_a U dl \quad a \in A \tag{II.7}$$

Enfin, à l'interface entre deux éléments, la composante tangentielle de la grandeur discrétisée par les éléments d'arêtes, est conservée.

II.2.1.3 Fonction de facette

Selon le type d'élément du maillage, une facette peut être triangulaire ou quadrangulaire. A titre d'exemple, nous avons représenté sur la figure II.3 une facette triangulaire.

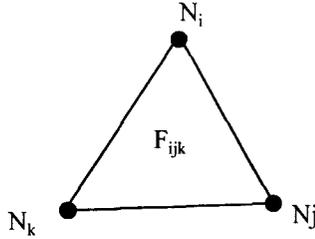


Figure II.3 : Facette triangulaire F_{ijk} .

La fonction w_f associée à une facette triangulaire s'écrit [1]:

$$w_f = 2 (w_k \mathbf{grad} w_i \times \mathbf{grad} w_j + w_j \mathbf{grad} w_k \times \mathbf{grad} w_i + w_i \mathbf{grad} w_j \times \mathbf{grad} w_k) \tag{II.8}$$

où w_i , w_j et w_k sont, respectivement, les fonctions d'interpolations aux nœuds N_i , N_j et N_k . On notera W^2 l'espace des éléments de facettes engendré par les fonctions w_f . Du fait de sa définition, le flux de la fonction w_f est égal à l'unité à travers la facette 'f' et est égal à zéro sur les autres facettes de maillage. Si on considère une fonction U appartenant à W^2 , elle a pour expression :

$$U = \sum_{f \in F} w_f u_f \tag{II.9}$$

où u_f représente le flux du vecteur U à travers la facette 'f', soit :

$$u_f = \int_f \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad f \in F \quad (\text{II.10})$$

Comme la composante normale des fonctions w_f est continue à travers chaque facette, par conséquent, la composante normale d'une fonction appartenant à W^2 est aussi continue.

II.2.1.4 Fonction de volume

Pour chaque élément v appartenant au maillage, on associe une fonction de volume w_v telle que :

$$w_v(x) = \frac{1}{\text{vol}(v)} \quad \text{si } x \in v \quad (\text{II.11})$$

$$w_v(x) = 0 \quad \text{si } x \notin v \quad (\text{II.12})$$

où x est un point de \mathcal{D} et $\text{vol}(v)$ est le volume de l'élément considéré. L'espace engendré par les fonctions w_v sera noté W^3 . Une fonction U appartient à W^3 si :

$$U = \sum_{v \in V} w_v u_v \quad (\text{II.13})$$

dans cette expression, u_v représente l'intégrale de volume de la fonction U sur l'élément v .

II.2.2 Propriétés des espaces discrets

Dans la suite, nous allons définir les matrices d'incidence qui permettent de calculer le gradient, le rotationnel et la divergence de fonctions appartenant respectivement aux espaces W^0 , W^1 et W^2 [1]. Cette étude ne concerne que les tétraèdres mais peut être étendue aux autres types éléments.

L'incidence $i(a,n)$ d'un nœud sur une arête est égale à 1 si le nœud est à l'extrémité de l'arête et égale à -1 s'il est à l'origine de l'arête. L'incidence $i(a,n)=0$ si le nœud n'appartient pas à l'arête. Cette incidence peut être représentée sous forme de matrices rectangulaires que l'on note G_{an} . Pour un tétraèdre respectant la numérotation de la figure II.4, la matrice d'incidence G_{an} est donnée par le tableau II.1.

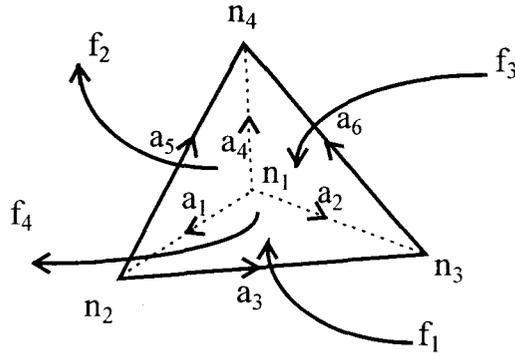


Figure II.4 : Numérotation d'un tétraèdre.

$i(a,n)$	n_1	n_2	n_3	n_4
a_1	-1	1	0	0
a_2	-1	0	1	0
a_3	-1	0	0	1
a_4	0	-1	1	0
a_5	0	-1	0	1
a_6	0	0	-1	1

Tableau II.1 : Matrice d'incidence noeud-arête G_{an} .

Soit une fonction scalaire U appartenant à W^0 on a alors (cf. équation II.4) :

$$U = \sum_{n \in N} w_n u_n = W_n U_n \tag{II.14}$$

Le gradient de la fonction U s'écrit :

$$\mathbf{grad}U = \sum_{n \in N} (\mathbf{grad}w_n) \cdot u_n \tag{II.15}$$

or comme cela a été montré dans les références [1] et [2] on a :

$$\mathbf{grad}w_n = \sum_{a \in A} i(a,n) w_a \tag{II.16}$$

en regroupant II.15 et II.16 on obtient :

$$\mathbf{grad}U = \sum_{a \in A} \left(\sum_{n \in N} i(a,n) u_n \right) w_a = W_a U_a \tag{II.17}$$

On a donc $U_a = G_{an} U_n$ où G_{an} est la matrice d'incidence du maillage. Cette matrice permet donc de calculer les circulations le long des arêtes, à partir de la différence des valeurs présentes aux nœuds. La matrice G_{an} représente donc l'opérateur gradient discrétisé. De plus, on constate que le gradient d'une fonction de W^0 est inclus dans W^1 . Soit :

$$\text{Im}(\mathbf{gradW}^0) \subset \mathbf{W}^1 \quad (\text{II.18})$$

Donc on a :

$$\text{Im}(\mathbf{gradW}^0) \subset \text{Ker}(\mathbf{rotW}^1) \quad (\text{II.19})$$

Dans le cas d'un domaine simplement connexe, on retrouve l'égalité définie dans le domaine continu :

$$\text{Im}(\mathbf{gradW}^0) = \text{Ker}(\mathbf{rotW}^1) \quad (\text{II.20})$$

De la même façon, l'incidence $i(f,a)$ arête-facette est égale à 1 ou -1 pour les arêtes appartenant à la facette (le signe dépend de l'orientation de l'arête sur la facette). On appelle R_{fa} la matrice d'incidence définie sur tout le maillage dont les coefficients sont $i(f,a)$. Le tableau II.2 donne cette matrice dans le cas du tétraèdre de la figure II.4.

$i(f,a)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
f_1	1	-1	1	0	0	0
f_2	1	0	0	-1	1	0
f_3	0	1	0	-1	0	-1
f_4	0	0	1	0	-1	1

Tableau II.2 : Matrice d'incidence arête-facette R_{fa} .

On montre [1][2], en effectuant une démarche équivalente à la précédente que si U est une fonction appartenant à W^1 , on a la relation :

$$U = \sum_{a \in A} w_a u_a = W_a U_a \quad (\text{II.21})$$

Dans ces conditions, pour une fonction $U \in W^1$, la fonction $\mathbf{rot}U$ s'écrit :

$$\mathbf{rot}U = W_f R_{fa} U_a = \sum_{f \in F} w_f u_f = W_f U_f \quad (\text{II.22})$$

on a donc $\mathbf{rot}U \in W^2$. La matrice R_{fa} peut être considérée comme l'opérateur rotationnel discret. De plus, si le domaine \mathcal{D} est simplement connexe avec une surface Γ connexe, on a l'égalité suivante:

$$\text{Im}(\mathbf{rotW}^1) = \text{Ker}(\mathbf{divW}^2) \quad (\text{II.23})$$

Enfin, l'incidence $i(v,f)$ facette-élément est égale à 1 ou -1 selon l'orientation de la normale à la facette. L'incidence $i(v,f)=0$ si la facette n'appartient pas à l'élément. On définit

la matrice D_{vf} sur tout le maillage contenant les coefficients $i(v,f)$. Le tableau II.3 donne cette matrice pour le tétraèdre de la figure II.4.

$i(v,f)$	f_1	f_2	f_3	f_4
v	1	-1	1	-1

Tableau II.3 : Matrice d'incidence volume-facette D_{vf} .

Si U est une fonction de \mathbf{W}^2 alors :

$$U = \sum_{f \in F} w_f u_f = \mathbf{W}_f U_f \tag{II.24}$$

Dans ces conditions, si on calcule $\text{div}U$, on a:

$$\text{div}U = \mathbf{W}_v D_{vf} U_f = \sum_{v \in V} w_v u_v = \mathbf{W}_v U_v \tag{II.25}$$

on a alors: $\text{div}U \in W^3$. D_{vf} est donc l'opérateur divergence discrétisé et on a :

$$\text{Im}(\text{div}\mathbf{W}^2) = W^3 \tag{II.26}$$

Les propriétés énoncées précédemment peuvent se mettre sous la forme d'une suite d'espaces discrets comme le montre la figure II.5 :

$$W^0 \xrightarrow{\text{grad}} W^1 \xrightarrow{\text{rot}} W^2 \xrightarrow{\text{div}} W^3$$

Figure II.5 : Suite des espaces discrets W^i .

Comme dans le cas des domaines continus, on peut introduire, dans les espaces W^i , des restrictions liées aux conditions aux limites. Sur Γ_h on a :

$$W_h^0 = \{u \in W^0, u|_{\Gamma_h} = 0\} \tag{II.27}$$

$$W_h^1 = \{u \in W^1, u \times n|_{\Gamma_h} = 0\} \tag{II.28}$$

$$W_h^2 = \{u \in W^2, u \cdot n|_{\Gamma_h} = 0\} \tag{II.29}$$

et sur Γ_b :

$$W_b^0 = \{u \in W^0, u|_{\Gamma_b} = 0\} \tag{II.30}$$

$$W_b^1 = \{u \in W^1, u \times n|_{\Gamma_b} = 0\} \tag{II.31}$$

$$W_b^2 = \{u \in W^2, u \cdot n|_{\Gamma_b} = 0\} \tag{II.32}$$

On construit alors deux suites d'espaces discrets qui sont représentées sur la figure II.6.

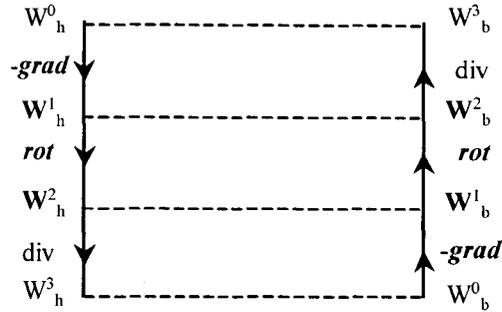


Figure II 6 : Diagramme de Tonti discret.

On retrouve ainsi une structure semblable à celle établie dans le domaine continu. On peut donc, définir naturellement les espaces d'interpolations des champs et des potentiels introduits au chapitre I. On a ainsi :

les potentiels scalaires : $\Omega \in W_h^0, \varphi \in W_b^0$.

les champs E et H et les potentiels vecteurs : $H \in W_h^1, E \in W_b^1, A \in W_b^1$ et $T \in W_h^1$.

la densité de courant et l'induction magnétique : $J \in W_h^2, B \in W_b^2$.

II.3 CONDITIONS DE JAUGE

Comme nous l'avons vu au chapitre I, pour obtenir l'unicité d'un champ de vecteur, il est nécessaire d'imposer une condition de jauge. Dans le cas du rotationnel, comme le montre la relation I.22, il faut fixer un gradient. Pour la divergence c'est une condition sur le rotationnel qu'il faut imposer. Nous allons voir maintenant comment imposer ces conditions dans le domaine discret.

Pour assurer l'unicité d'un vecteur U appartenant à W^1 tel que $rotU=V$, il suffit de fixer les circulations de U sur les arêtes d'un arbre. Un arbre étant composé d'un ensemble d'arêtes qui relie tous les nœuds du maillage sans former de boucles (on retrouve au niveau discret la jauge $U.w=f(r)$ introduite dans le domaine continu).

En effet, prenons deux vecteurs U_1 et U_2 appartenant à W^1 tels que $rotU_i=V$ et tels que les circulations de U_1 et U_2 sur les arêtes de l'arbre soient fixées. On note $\Delta U=U_1-U_2$. On a alors :

$$rot(\Delta U) = 0 \quad \text{avec} \quad U \in W^1 \tag{II.33}$$

Le domaine étant simplement connexe, il existe un scalaire $\lambda \in W^0$ tel que :

$$\Delta U = \mathbf{grad}\lambda \tag{II.34}$$

De plus, la circulation de ΔU sur les arêtes de l'arbre est égale à zéro. Si n_1 et n_2 sont deux nœuds du maillage on a :

$$\lambda_{n_1} - \lambda_{n_2} = \int_{x_{n_1}}^{x_{n_2}} \mathbf{grad}\lambda dl = \int_{x_{n_1}}^{x_{n_2}} \Delta U dl \tag{II.35}$$

où λ_{n_1} et λ_{n_2} sont les valeurs nodales de λ en n_1 et n_2 et, x_{n_1} et x_{n_2} les coordonnées de ces nœuds. Pour joindre n_2 à partir de n_1 , on peut donc prendre n'importe quel chemin le long des arêtes du maillage. Dans ce cas, on peut le choisir sur un arbre d'arêtes où la circulation de ΔU est nulle. Dans ces conditions :

$$\lambda_{n_1} - \lambda_{n_2} = 0 \tag{II.36}$$

ce qui impose $\mathbf{grad}\lambda=0$. On a donc bien $U_1=U_2$

Considérons maintenant U_1 et U_2 appartenant à W^2 tels que $\text{div}U_i=V$ avec $V \in W^3$, on a alors :

$$U_1 = U_2 + \mathbf{rot}A \text{ avec } A \in W^1 \tag{II.37}$$

On pose : $U_1-U_2=\Delta U=\mathbf{rot} A$ et $\text{div}(\Delta U)=0$ (cf. I.23).

Par analogie avec le cas précédent, il faut construire un arbre de facettes sur lequel on fixe les valeurs du flux de ΔU .

Les techniques de construction des arbres d'arêtes sont largement exposées dans la littérature [24][36][37]. C'est pourquoi, dans la suite, nous détaillerons uniquement la méthode que nous avons développée pour construire un arbre de facettes. Cependant, à titre d'exemple, nous avons représenté sur la figure II.7 un arbre d'arêtes relatif au maillage de la figure II.1.

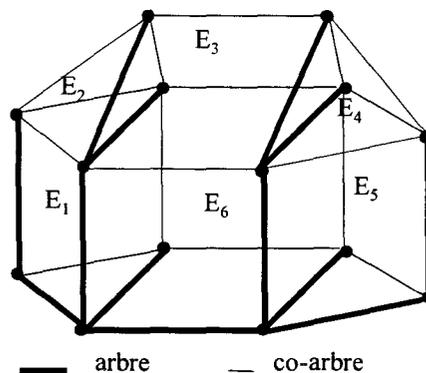


Figure II.7 : Exemple d'un arbre d'arêtes.

II.3.1 Construction d'un arbre de facettes

Pour élaborer un arbre de facettes, nous allons nous appuyer sur l'algorithme de construction de l'arbre d'arêtes [24]. Cet algorithme est basé sur les propriétés des graphes.

Dans la construction d'un arbre d'arêtes, comme une arête relie deux nœuds, on peut obtenir un graphe arête-nœud d'un maillage. Or, il existe une relation semblable entre les facettes et les éléments puisqu'une facette relie deux éléments [38].

Tout d'abord on définit un nouvel élément E_Γ qui symbolise l'extérieur du domaine. On notera que toutes les facettes appartenant à la frontière extérieure Γ font partie de E_Γ .

A titre d'exemple, on trouvera figure II.8 la transposition de deux éléments et une facette en une arête et deux nœuds. Sur cette figure, deux cas sont considérés une liaison entre deux éléments (figure II.8.a) et une liaison entre un élément et la frontière extérieure (figure II.8.b).

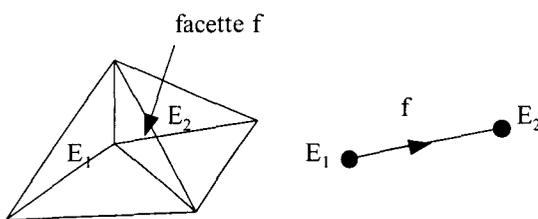


Figure II.8.a

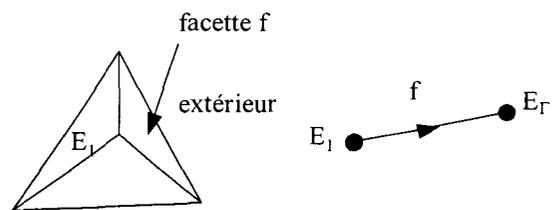


Figure II.8.b

Figure II.8 : Transposition des liaisons facette-élément en arête-nœud.

Prenons à nouveau le maillage de la figure II.1 en numérotant les facettes comme le montre la figure II.9.

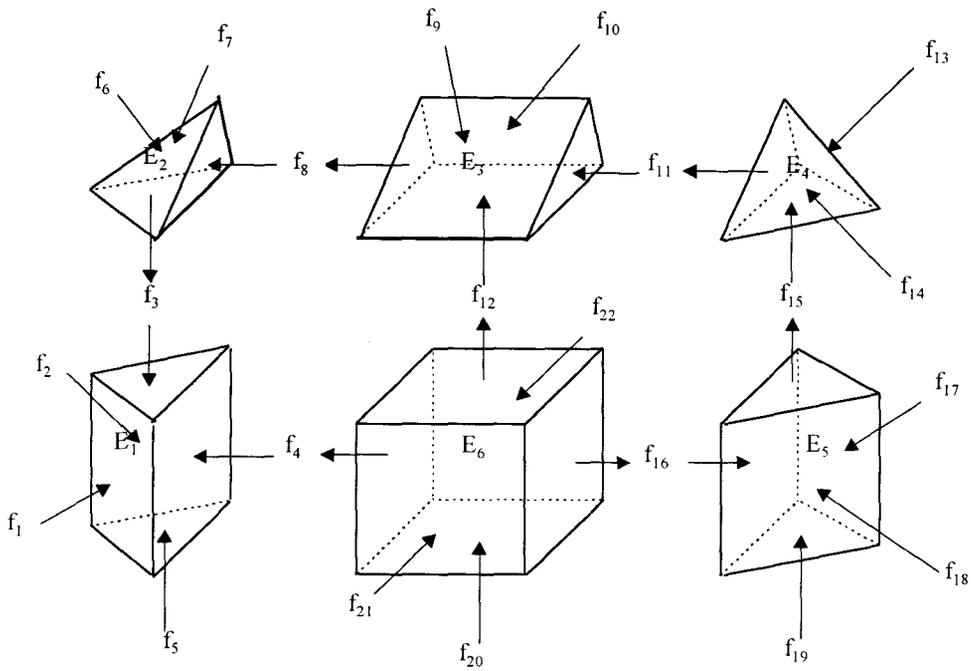


Figure II.9 : Définition des facettes du maillage de la figure II.1.

Nous pouvons maintenant réaliser le graphe facette-élément de ce maillage (voir figure II.10). L'élément frontière E_Γ est placé au centre du graphe vers lequel toutes les arêtes représentant les facettes appartenant à Γ , convergent. L'orientation des facettes correspond à la direction des normales des facettes définies sur la figure II.9.

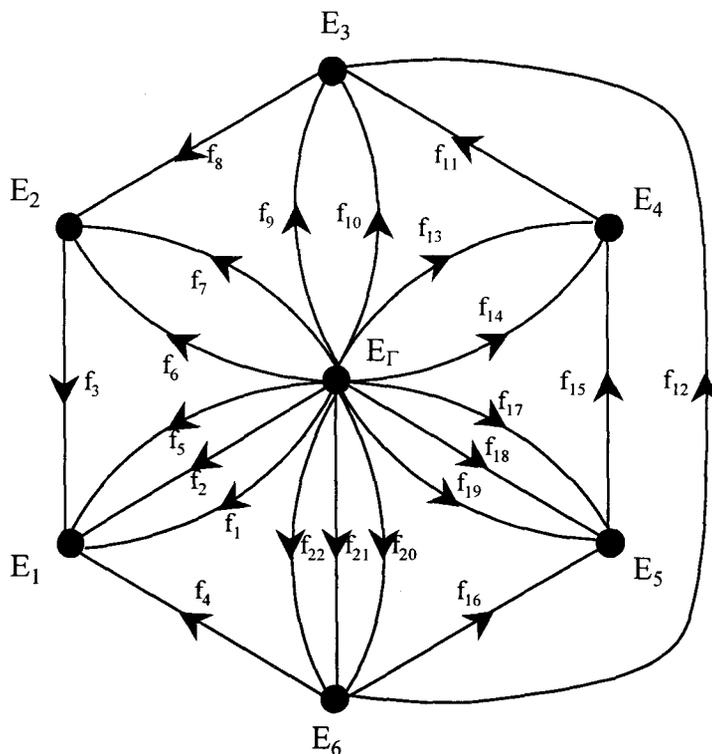


Figure II.10 : Graphe de liaisons facette-élément du maillage de la figure II.9.

Considérons un vecteur U appartenant à W^2 tel que $\text{div}U=V$ avec $V \in W^3$. Le vecteur U et la fonction V peuvent s'exprimer par les relations :

$$U = \sum_{f \in F} u_f w_f \tag{II.38}$$

$$V = \sum_{v \in V} v_v w_v \tag{II.39}$$

où v_v représente l'intégrale de la fonction V sur l'élément considéré. Du fait de la relation qui lie U et V on a, sur chaque élément ' e ', la propriété suivante :

$$\sum_{f \in \nu} i(v, f) u_f = v_v \tag{II.40}$$

Dans ces conditions, construire un arbre de facettes revient à rechercher les facettes dont on peut fixer arbitrairement les valeurs de flux tout en satisfaisant la relation II.40 pour tous les éléments. On montre alors que les facettes, sur lesquelles on déduit les valeurs de flux, appartiennent à un 'co-arbre'. Par exemple, si on considère un tétraèdre, on peut fixer le flux sur trois de ces facettes. Comme nous l'avons indiqué le flux est imposé sur la quatrième facette afin de vérifier l'équation II.40. A partir de la représentation arête-noeud, on peut construire un arbre \mathcal{A} reliant tous les noeuds représentant les éléments, sans former de boucle fermée. On montre alors que les facettes, qui correspondent aux arêtes n'appartenant pas à \mathcal{A} , forment un arbre de facettes. A titre indicatif, on trouvera sur la figure II.11, un co-arbre de facettes correspondant au maillage de la figure II.9 et sur la figure II.12 un arbre de facettes.

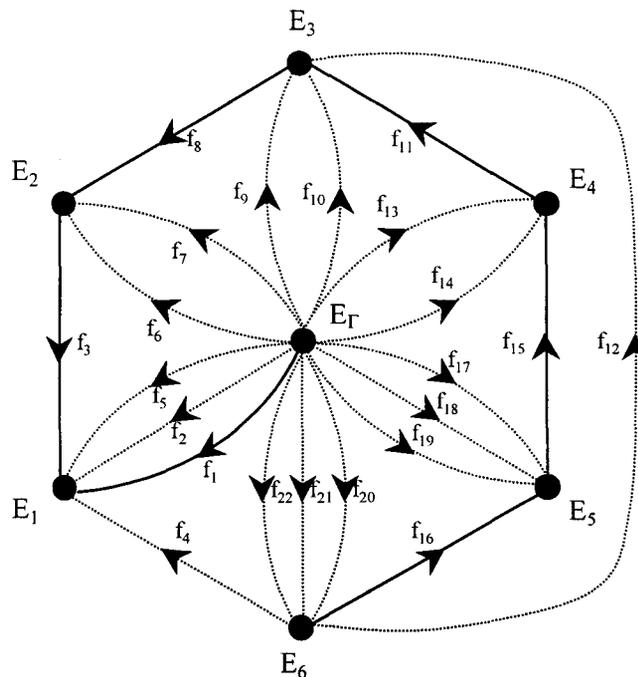


Figure II.11 : co-arbre de facettes (traits pleins).

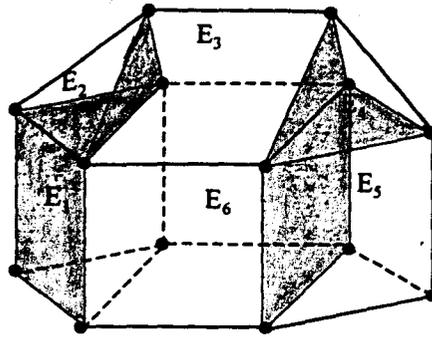


Figure II.12 : Représentation d'un arbre de facettes (facettes non grisées).

II.4 DISCRÉTISATION DES INDUCTEURS

Avant de résoudre, avec la méthode des éléments finis, les équations développées au chapitre I il faut tout d'abord discrétiser les termes sources représentés par les inducteurs. Dans le domaine continu, ils sont, généralement, définis en tout point de l'espace par des formules analytiques.

Nous avons montré précédemment que la densité de courant J_0 , terme source de la formulation en potentiel vecteur magnétique, appartient à l'espace des éléments de facettes. Dans le cas des inducteurs de forme complexe, à cause de la limitation des maillages, la densité de courant J_0 , définie dans le domaine continu est difficilement décomposable dans l'espace des éléments de facettes. Aussi, nous proposons dans la suite, une méthode simple et systématique pour calculer une densité de courant discrétisée, notée J_0^d , dans W^2 à divergence nulle et proche de J_0 .

II.4.1 Discrétisation de la densité de courant

Pour obtenir une divergence de J égale à zéro, plusieurs méthodes peuvent être envisagées. Certaines expriment la densité de courant à partir d'un potentiel vecteur électrique source [10][12] ce qui permet d'assurer naturellement la conservation de la densité de courant. Ce potentiel est obtenu soit analytiquement pour les inducteurs de forme simple, soit par la minimisation d'une fonctionnelle qui nécessite un calcul par éléments finis. Le rotationnel du potentiel est alors introduit dans les formulations en tant que terme source.

D'autres méthodes consistent à rechercher une densité de courant à divergence nulle

sans utiliser l'artifice d'un potentiel vecteur électrique. A l'aide d'une conductivité tensorielle et d'un calcul en électrocinétique, on peut obtenir une densité de courant uniforme à divergence nulle [8]. Une autre technique consiste à introduire deux potentiels scalaires définis sur les surfaces d'inducteurs. Le produit vectoriel des gradients des potentiels indique la direction de la densité de courant [5].

Aussi, nous proposons une autre méthode ne nécessitant pas de calcul par éléments finis qui s'applique aux inducteurs filaires ayant une section constante.

Pour discrétiser la densité de courant J_0 , il faut respecter quatre conditions :

- la densité de courant discrétisée doit être la plus proche possible de la densité de courant réelle.
- elle doit être décomposée dans l'espace des éléments de facettes.
- les conditions aux limites sont : $J.n = 0$ sur l'enveloppe externe de l'inducteur et $J.n = J$ sur Γ_b .
- sa divergence doit être nulle sur tous les éléments du maillage.

Considérons l'inducteur de la figure II.13 maillé avec des tétraèdres. Comme on peut le voir le maillage n'épouse pas exactement la forme de l'inducteur dans les angles. Ainsi si on projette directement J_0 dans W^2 , $j_f^{d'}$ le flux à travers une facette 'f' de l'inducteur s'écrit :

$$j_f^{d'} = \int_{S_f} J_0 \cdot n dS \quad (II.41)$$

où S_f est la surface de la facette et n sa normale. Le flux des facettes n'appartenant pas à l'inducteur sont nuls. La densité de courant $J^{d'}$ ainsi décomposée a pour expression :

$$J_0^{d'} = \sum_{f \in F} j_f^{d'} w_f \quad (II.42)$$

Dans ces conditions, si on considère un élément 'v' extérieur à l'inducteur dont une de ces facettes est en contact avec l'angle de la bobine. Du fait de la discrétisation, le flux $j_f^{d'}$ n'est pas nul à travers cette facette. Par contre, il est nul sur les autres facettes de l'élément 'v' car elles n'appartiennent pas à l'inducteur. Par conséquent, non seulement la divergence de $J_0^{d'}$ n'est pas nulle mais en plus, une densité de courant apparaît dans cet élément.

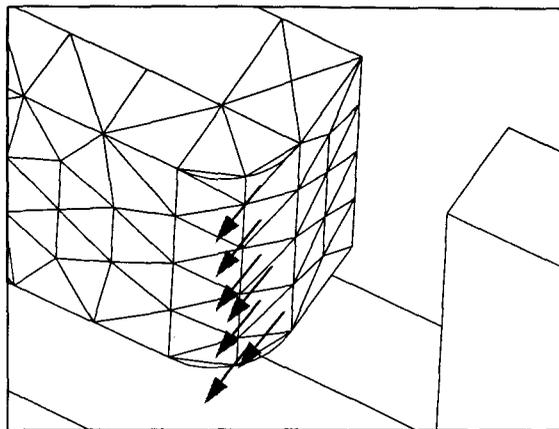


Figure II.13 : Erreur de discrétisation spatiale entraînant une densité de courant sortante.

Pour construire un champ J_0^d à divergence nulle dans W^2 et proche de J_0 , nous proposons une méthode basée sur l'utilisation d'un arbre de facettes. On désigne par F_{ext} l'ensemble des facettes qui appartiennent à la surface externe de l'inducteur et F_b l'ensemble des facettes du conducteur en contact avec Γ_b . L'arbre est construit en incluant toutes les facettes de F_{ext} et de F_b sauf une (sinon on réalise une surface fermée). Sur les facettes de F_{ext} , on impose un flux nul ($J \cdot n = 0$). Sur les facettes de F_b et sur les autres facettes de l'arbre, on impose :

$$j_f^{d'} = \int_{S_f} J_0 \cdot n dS \quad (\text{II.43})$$

Comme on impose fortement le flux $j_f^{d'}$ égale à zéro sur les facettes externes de l'inducteur, on aura donc aucun courant sortant à travers les facettes F_{ext} . A l'intérieur de l'inducteur, on calcule le flux sur les facettes du co-arbre en imposant la divergence nulle sur chaque élément soit:

$$\sum_{f \in \text{ev}} j_f^{d'} = 0 \quad (\text{II.44})$$

Le vecteur densité de courant dans W^2 ainsi obtenu est proche de J_0 tout en ayant une divergence nulle. On peut donc à partir de ce vecteur calculer un champ source H_s appartenant à W^1 tel que $\text{rot} H_s = J_0^d$.

II.4.2 Détermination du champ source

Plusieurs méthodes permettent de déterminer le champ source H_s . Pour des inducteurs de forme simple, il peut être calculé analytiquement [7][9][25]. Par exemple, pour l'inducteur présenté sur la figure II.14.a, le champ que l'on notera T_0 peut être exprimé

analytiquement. A titre d'exemple nous avons représenté figure II.14.b sa distribution dans le plan Oyz .

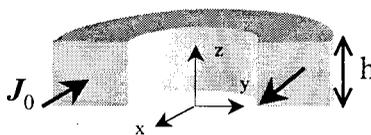


Figure II.14.a

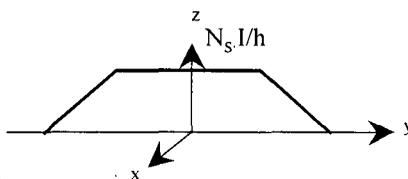


Figure II.14.b :

Figure II.14: Distribution de T_0 dans le plan Oyz .

Le champ H_s peut être déterminé en minimisant l'écart entre $rotH_s$ et la densité de courant J_0 circulant dans l'inducteur [12]. Ce calcul peut être mené sur un sous-domaine de \mathcal{D} contenant l'inducteur. Il est alors possible de choisir H_s dans W^1 . Enfin, si on dispose d'une densité de courant J_0^d appartenant à l'espace des éléments de facettes, il est possible de déterminer, par une méthode itérative, le champ source [3-4][38]. En effet, H_s doit vérifier deux conditions :

$$\begin{cases} rotH_s = J_0^d \\ H_s \in W^1 \end{cases}$$

Il existe une infinité de champs vérifiant ces conditions. Pour assurer l'unicité on utilise un arbre d'arêtes (cf. conditions de jauge). Sur les arêtes de cet arbre on impose les circulations de H_s à des valeurs arbitraires (nulles par exemple). Les circulations de H_s sur les arêtes du co-arbre sont calculées de manière itérative en vérifiant le théorème d'Ampère sur chaque facette du maillage. La figure II.15 illustre l'application de ce théorème pour une facette triangulaire.

Dans le cas de la magnétostatique ou de la magnétodynamique il est intéressant d'imposer un champ H_s ayant une composante tangentielle nulle sur Γ_h . Afin d'assurer cette condition, la construction de l'arbre commence d'abord sur cette surface puis, se propage ensuite à tout le domaine.

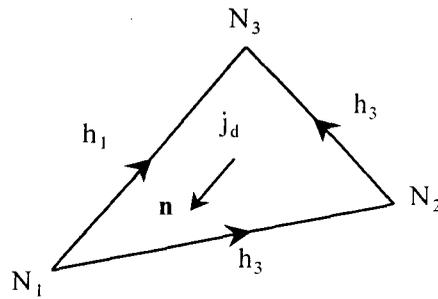


Figure II.15 : Facette traversée par un courant \$j_d\$ et définition des circulations de \$\mathbf{H}_s\$.

II.5 FORMULATIONS DISCRETES

Nous allons donner maintenant la méthode qui permet de résoudre, dans les espaces discrets \$W_i\$, les équations présentées dans le chapitre I. Pour cela on utilise la méthode des résidus pondérés qui consiste à résoudre une forme intégrale des équations différentielles.

II.5.1 Formulations intégrales

Les formulations peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}(U) + f = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D} \quad (\text{II.45})$$

$$\mathcal{C}(U) + f_s = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{II.46})$$

où \$\mathcal{L}\$ et \$\mathcal{C}\$ sont des opérateurs quant à \$f\$ et \$f_s\$ ils représentent des termes sources généralement connus.

En appliquant la méthode des résidus pondérés [35], on obtient la forme intégrale suivante:

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \cdot (\mathcal{L}(U) + f) d\mathcal{D} = 0 \quad (\text{II.47})$$

Si \$U\$ est solution de II.47 et vérifie les conditions aux limites définies par II.46 pour toutes les fonctions tests \$\mathcal{U}\$ alors, \$U\$ est aussi solution de II.45. Toutefois, afin de diminuer l'ordre de dérivation, on effectue souvent une intégration par parties. On obtient ainsi la forme intégrale faible que nous sommes généralement amenés à résoudre :

$$\int_{\mathcal{D}} U \cdot \mathcal{L}_d(\mathcal{U}) d\mathcal{D} + \int_{\Gamma} \mathcal{U} \cdot \mathcal{S}_L U dy + \int_{\mathcal{D}} \mathcal{U} \cdot f d\mathcal{D} = 0 \quad (\text{II.48})$$

Où \$\mathcal{L}_d\$ et \$\mathcal{S}_L\$ sont des opérateurs définis au paragraphe I.3.4.

Pour résoudre les formulations sous leur forme faible dans les espaces W^i , on prendra les fonctions tests \mathcal{N} égales aux fonctions d'interpolations (méthode de Galerkin). Ces fonctions peuvent être w_n, w_a, w_f ou w_v suivant le type d'inconnues considérées. Si l'inconnue U appartient à un espace de dimension fini W^i avec $i=(0, 1, 2, 3)$, alors son interpolation dans l'espace des éléments de Whitney est :

$$U = \sum_{k \in K} w_k u_k \quad \text{avec } k=\{n, a, f, v\} \text{ et } K=\{N, A, F, V\} \quad (\text{II.49})$$

L'application de cette relation pour chacune des fonctions w_j associées à chaque entité discrète K ($K=\{N, A, F, V\}$), conduit à résoudre un système d'équations de la forme [35] :

$$[S][U] = [F] \quad (\text{II.50})$$

où U représente le vecteur contenant les inconnues u_k . Dans la suite, cette méthode est appliquée aux formulations présentées dans le chapitre I.

II.5.2 Les formulations de l'électrocinétique.

II.5.2.1 La formulation en potentiel scalaire électrique

Le potentiel scalaire électrique φ appartient à l'espace des éléments nodaux W_b^0 . Il peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\varphi = \sum_{n \in N} w_n \varphi_n \quad \text{et } \varphi \in W_b^0$$

où φ_n est la valeur du potentiel scalaire électrique au nœud 'n'.

La fonction test est alors égale à w_n . La formulation en potentiel scalaire devient sous sa forme intégrale :

$$\int_{\mathcal{D}} w_n \cdot [\text{div} \sigma(-\mathbf{grad}(\varphi + \varphi_s))] d\mathcal{D} = 0 \quad \forall w_n \in W_b^0 \quad (\text{II.51})$$

où φ_s représente le potentiel scalaire source. La forme faible de l'équation II.51 a pour expression :

$$\int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{grad} w_n \cdot \mathbf{grad} \varphi d\mathcal{D} + \int_{\Gamma} w_n (\sigma \mathbf{grad} \varphi) \cdot \mathbf{n} d\gamma = - \int_{\mathcal{D}_\varepsilon} \sigma \mathbf{grad} w_n \cdot \mathbf{grad} \varphi_s d\mathcal{D}_\varepsilon \quad \forall w_n \in W_b^0 \quad (\text{II.52})$$

On rappelle que $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_b$. Du fait de sa définition dans W_b^0 , le potentiel φ est nul sur Γ_b . On impose donc naturellement au sens fort $E \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_b . De plus, en annulant le calcul de l'intégrale de surface sur Γ_h on impose $J \cdot \mathbf{n} = 0$ au sens faible. La forme intégrale s'écrit alors :

$$\int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{grad} w_n \cdot \mathbf{grad} \varphi \, d\mathcal{D} = - \int_{\mathcal{D}_\varepsilon} \sigma \mathbf{grad} w_n \cdot \mathbf{grad} \varphi_s \, d\mathcal{D}_\varepsilon \quad \forall w_n \in W_b^0 \quad (\text{II.53})$$

II.5.2.2 La formulation en potentiel vecteur électrique

Nous avons vu que le potentiel vecteur électrique T est compris dans l'espace des éléments d'arêtes, on a donc :

$$T = \sum_{a \in A} w_a t_a \quad T \in W_h^1$$

La forme intégrale de la formulation à résoudre est:

$$\int_{\mathcal{D}} w_a \cdot \left[\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} (T + H_s) \right) \right] d\mathcal{D} = 0 \quad \forall w_a \in W_h^1 \quad (\text{II.54})$$

avec $H_s = \sum_{a \in A} w_a h_{sa}$ où h_{sa} est la circulation de H_s calculée sur les arêtes du maillage avec la technique de l'arbre. En effectuant une intégration par parties, on obtient la forme faible :

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} w_a \cdot \mathbf{rot} (T + H_s) \right) d\mathcal{D} - \int_{\Gamma} w_a (n \times E) \, d\gamma = 0 \quad \forall w_a \in W_h^1 \quad (\text{II.55})$$

avec $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_b$. Sur Γ_h , $w_a = 0$ on impose donc fortement $J \cdot n|_{\Gamma_b} = 0$. Inversement, en annulant l'intégrale de surface sur Γ_b , on assure $E \times n = 0$ au sens faible. L'équation II.55 devient:

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} w_a \cdot \mathbf{rot} T \, d\mathcal{D} = - \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} w_a \cdot \mathbf{rot} H_s \, d\mathcal{D} \quad \forall w_a \in W_h^1 \quad (\text{II.56})$$

Pour avoir l'unicité de la solution il est nécessaire d'imposer une condition de jauge. Cependant, si on utilise la méthode du gradient conjugué pour résoudre le système d'équations, le problème est automatiquement 'jaugé' comme dans le cas de la formulation en potentiel vecteur magnétique [10][18]. A titre indicatif en annexe II, nous avons repris la même démarche que celle de Z. Ren en l'appliquant à cette formulation.

II.5.3 Les formulations de la magnétostatique

II.5.3.1 La formulation en potentiel scalaire magnétique

Le potentiel scalaire Ω appartient à l'espace des éléments nodaux W_h^0 , il peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\Omega = \sum_{n \in N} w_n \Omega_n \quad \text{et} \quad \Omega \in W_h^0$$

où Ω_n est la valeur du potentiel scalaire magnétique au nœud 'n'.

La forme intégrale de la formulation en potentiel scalaire magnétique s'écrit à partir de l'équation I.49 :

$$\int_{\mathcal{D}} w_n \cdot [\text{div} \mu (H_s - \text{grad} \Omega)] d\mathcal{D} = 0 \quad \forall w_n \in W_h^0 \quad (\text{II.57})$$

où, H_s qui représente le champ source, est calculé à partir de J^d_0 et décomposé dans l'espace W_h^1 . A l'aide de la formule de Green, on obtient la forme faible de l'expression II.57 :

$$\int_{\mathcal{D}} \mu (\text{grad} w_n \cdot \text{grad} \Omega - \text{grad} w_n \cdot H_s) d\mathcal{D} + \int_{\Gamma} w_n (\mu \text{grad} \Omega) \cdot n d\gamma = 0 \quad \forall w_n \in W_h^0 \quad (\text{II.58})$$

Pour l'intégrale de surface Γ , on a sur Γ_h $w_n=0$ ce qui impose $H \times n=0$ au sens fort. Par contre en annulant l'intégrale sur Γ_b , la condition $B \cdot n =0$ est imposée au sens faible. Dans ces conditions II.58 s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}} \mu (\text{grad} w_n \cdot \text{grad} \Omega) d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \mu \text{grad} w_n \cdot H_s d\mathcal{D} \quad \forall w_n \in W_h^0 \quad (\text{II.59})$$

En annexe III, cette équation est donnée sous une forme matricielle et est exprimée en fonction de la matrice d'incidence G_{an} [39].

II.5.3.2 La formulation en potentiel vecteur magnétique

Nous avons vu que le potentiel vecteur magnétique A appartient à l'espace des éléments d'arêtes. Sa forme discrète s'écrit donc :

$$A = \sum_{a \in A} w_a a_a \quad A \in W_b^1$$

où a_a est la circulation du potentiel vecteur A sur l'arête 'a'. La forme intégrale de la formulation à résoudre est donc (cf. équation I.52) :

$$\int_{\mathcal{D}} w_a [\text{rot} (\frac{1}{\mu} \text{rot} A - J^d_0)] d\mathcal{D} = 0 \quad \forall w_a \in W_b^1 \quad (\text{II.60})$$

avec $J_0^d = \sum_{f \in F} w_f j_0^d$. La densité de courant est discrétisée dans l'espace des éléments de facettes. En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} w_a \cdot \text{rot} A - w_a J_0^d \right) d\mathcal{D} - \int_{\Gamma} w_a \left(\mathbf{n} \times \frac{1}{\mu} \text{rot} A \right) d\gamma = 0 \quad \forall w_a \in \mathbf{W}_b^1 \quad (\text{II.61})$$

L'intégrale sur Γ se décompose comme précédemment en deux termes. Le premier sur Γ_b s'élimine naturellement ce qui entraîne $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ imposé au sens fort. En annulant le second (sur Γ_h) on impose $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$ au sens faible. L'équation II.61 devient alors :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \text{rot} w_a \cdot \text{rot} A d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} w_a J_0^d d\mathcal{D} \quad \forall w_a \in \mathbf{W}_b^1 \quad (\text{II.62})$$

En exprimant la densité de courant à l'aide du champ source, la formulation se transforme de la même manière :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \text{rot} w_a \cdot \text{rot} A d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} w_a \text{rot} H_s d\mathcal{D} \quad \forall w_a \in \mathbf{W}_b^1 \quad (\text{II.63})$$

En effectuant une intégration par parties du second membre, l'équation II.63 s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \text{rot} w_a \cdot \text{rot} A d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} H_s \text{rot} w_a d\mathcal{D} + \int_{\Gamma} w_a (\mathbf{n} \times H_s) d\gamma \quad \forall w_a \in \mathbf{W}_b^1 \quad (\text{II.64})$$

L'intégrale de surface s'annule car sur Γ_b les fonctions d'interpolations w_a sont égales à zéro et sur Γ_h $(H_s \times \mathbf{n}) = 0$. Dans ce cas, une résolution par la méthode gradient conjugué conduit à un système automatiquement jaugé [18]. Dans ces conditions, l'utilisation d'une jauge de type $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w}$ n'est donc plus nécessaire.

II.5.4 Les formulations de la magnétodynamique

II.5.4.1 Formulation A-φ

Cette formulation possède deux inconnues : le potentiel vecteur magnétique A et le potentiel scalaire électrique φ définis dans l'espace des éléments de Whitney de la manière suivante :

$$\varphi = \sum_{n \in N} w_n \varphi_n \quad \varphi \in W_b^0 \quad \text{et} \quad A = \sum_{a \in A} w_a a_a \quad A \in W_b^1$$

La fonction test \mathcal{U} de la formulation est égale à $w_a + \text{grad} w_n$. La formulation A-φ s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\int_{\mathcal{D}} (\mathbf{w}_a + \mathbf{grad} w_n) \cdot \left[\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} A \right) + \sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \right] d\mathcal{D} - \int_{\Gamma} (\mathbf{w}_a + \mathbf{grad} w_n) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) d\gamma = 0 \quad (\text{II.65})$$

Cette équation peut se décomposer en deux parties. On obtient alors le système suivant :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} w_a \cdot \mathbf{rot} A + \sigma w_a \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) d\mathcal{D} - \int_{\Gamma} w_a (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) d\gamma = 0$$

$$\int_{\mathcal{D}} \sigma \mathbf{grad} w_n \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) d\mathcal{D} - \int_{\Gamma} \mathbf{grad} w_n \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}) d\gamma = 0 \quad (\text{II.66})$$

où $\forall w_a \in \mathbf{W}_b^1$ et $\forall w_n \in W_b^0$

La première équation correspond au théorème d'Ampère et la deuxième à la conservation du flux de la densité de courant.

Comme nous l'avons montré dans les paragraphes II.5.2.1. et II.5.3.2 les intégrales de surfaces disparaissent. Cela revient à imposer fortement les conditions aux limites sur Γ_b ($E \times n = 0$ et $B \cdot n = 0$) et faiblement celles sur Γ_h ($H \times n = 0$ et $J \cdot n = 0$).

II.5.4.2 Formulation T-Ω

Cette formulation possède également deux inconnues : le potentiel vecteur électrique T et le potentiel scalaire magnétique Ω définis dans l'espace des éléments de Whitney de la manière suivante :

$$\Omega = \sum_{n \in N} w_n \Omega_n \quad \Omega \in W_h^0 \quad \text{et} \quad T = \sum_{a \in A} w_a t_a \quad T \in \mathbf{W}_h^1$$

La fonction test \mathcal{Z} de la formulation est égale à $w_a - \mathbf{grad} w_n$. La formulation T-Ω s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\int_{\mathcal{D}} (\mathbf{w}_a - \mathbf{grad} w_n) \cdot \left[\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} T \right) + \mu \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \mathbf{grad} \Omega \right) \right] d\mathcal{D} - \int_{\Gamma} (\mathbf{w}_a - \mathbf{grad} w_n) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) d\gamma = 0 \quad (\text{II.67})$$

Comme pour la formulation A-φ, on obtient aussi deux équations à résoudre. La première est la loi de Faraday et la deuxième exprime la conservation de l'induction magnétique. Soit :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} w_a \cdot \mathbf{rot} T + \sigma w_a \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \mathbf{grad} \Omega \right) d\mathcal{D} - \int_{\Gamma} w_a \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) d\gamma = 0$$

$$- \int_{\mathcal{D}} \mu \mathbf{grad} w_n \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} - \mathbf{grad} \Omega \right) d\mathcal{D} - \int_{\Gamma} w_n \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) d\gamma = 0 \quad (\text{II.68})$$

où $\forall w_a \in \mathbf{W}_h^1$ et $\forall w_n \in W_h^0$

Pour cette formulation à partir des raisonnements menés aux paragraphes II.5.2.2 et II.5.3.1 les intégrales de surface sur Γ disparaissent. On impose alors au sens faible les conditions aux limites sur Γ_b ($E \times n = 0$ et $B \cdot n = 0$) et au sens fort celles sur Γ_h ($H \times n = 0$ et $J \cdot n = 0$).

II.6 COUPLAGE AVEC LES EQUATIONS DE CIRCUITS

Dans ce paragraphe, nous ne considérerons que le cas où la tension est imposée à un circuit électrique constitué de conducteurs multifilamentaires. Le cas où l'on impose l'intensité du courant ne pose à priori aucun problème. Auparavant, nous allons présenter la discrétisation des vecteurs K et N qui permettent d'effectuer le couplage.

II.6.1 Discrétisation de K et N

Nous avons développé dans le premier chapitre, en introduisant deux champs de vecteurs N et K , le couplage des formulations en potentiel avec les équations électriques des circuits. Nous devons déterminer à quels espaces discrets appartiennent ces deux vecteurs. Pour ce faire nous rappelons ci-dessous leurs définitions :

$$J_0 = Ni \quad (\text{II.69})$$

$$H_s = Ki \quad (\text{II.70})$$

Dans le domaine discret, on introduit donc deux vecteurs N^d et K^d :

$$J_0^d = N^d i \quad (\text{II.71})$$

$$\text{rot} K^d = N^d \quad (\text{II.72})$$

d'où les appartenances suivantes :

$$N^d \in \mathbf{W}_h^2$$

$$K^d \in \mathbf{W}^1$$

Pour déterminer K^d et N^d , on utilise la même approche que pour respectivement H_s et J (cf. paragraphe II.4).

II.6.2 Systèmes à tension imposée

Si on appelle m l'indice d'une maille d'un circuit électrique comportant M mailles, l'équation du circuit électrique (cf. figure II.16) s'écrit alors sous la forme suivante :

$$U_m = R_m i_m + \frac{d\Phi_m}{dt} \quad m = \{1, \dots, M\} \quad (\text{II.73})$$

Dans ce cas, M champs de vecteurs K^d et N^d doivent être calculés.

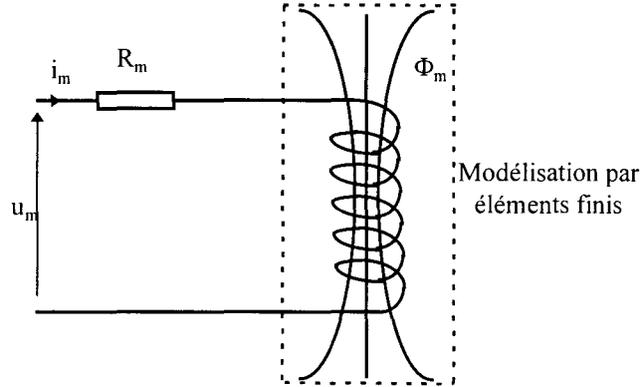


Figure II.16 : Exemple d'une maille du circuit électrique.

Maintenant, nous allons discrétiser les systèmes d'équations I.82 et I.85. Pour le couplage avec la formulation en potentiel vecteur, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} w_a \left(\text{rot} \frac{1}{\mu} \text{rot} A - N_m^d i_m \right) d\mathcal{D} &= 0 \quad \forall w_a \in \mathbf{W}_b^1 \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_{im}} w_a (A \cdot N_m^d) d\mathcal{D}_{im} + R_m i_m &= V_m \quad m = \{1, \dots, M\} \end{aligned} \quad (\text{II.74})$$

Comme le vecteur N^d est nul à l'extérieur de la bobine, le domaine d'intégration de la seconde équation est limitée aux domaines inducteurs \mathcal{D}_{im} .

Le couplage avec la formulation en potentiel scalaire magnétique est donné par le système suivant :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} w_n [\text{div} \mu (K_m^d i_m - \text{grad} \Omega)] d\mathcal{D} &= 0 \quad \forall w_n \in W_h^0 \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} w_n [\mu (K_m^d i_m - \text{grad} \Omega) \cdot K_m^d] d\mathcal{D} + R_m i_m &= V_m \quad m = \{1, \dots, M\} \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

Le domaine d'intégration est identique pour les deux équations car le vecteur K^d existe a priori dans tout le domaine.

II.7 APPLICATIONS ET VALIDATIONS

A l'exception du couplage avec les équations du circuit électrique qui est traité dans le dernier chapitre, les formulations développées précédemment vont être validées sur des exemples simples. Dans la mesure du possible, les résultats seront comparés avec une solution analytique. Cette comparaison sera faite sur les grandeurs globales ou locales. Le premier exemple concerne une application en électrocinétique. Ensuite, sont traités des dispositifs magnéto-statiques sur lesquelles nous allons observer l'influence, sur la qualité de la solution, des arbres de facettes et d'arêtes. Nous nous intéresserons ensuite à la convergence de gradient conjugué. Les formulations de la magnétodynamique seront validées sur un exemple académique concernant une sphère conductrice soumise à une induction magnétique uniforme variable en fonction du temps.

II.7.1 Etude en électrocinétique

A titre d'exemple, pour les formulations en électrocinétique, nous avons étudié un demi-anneau de cuivre à section carré de 4 cm^2 ayant un rayon intérieur de 50 mm . La conductivité électrique est $\sigma = 58.10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$. Compte tenu de la distribution non uniforme de la densité de courant la résistance du demi-anneau, calculée analytiquement, est égale à $8.049 \mu\Omega$.

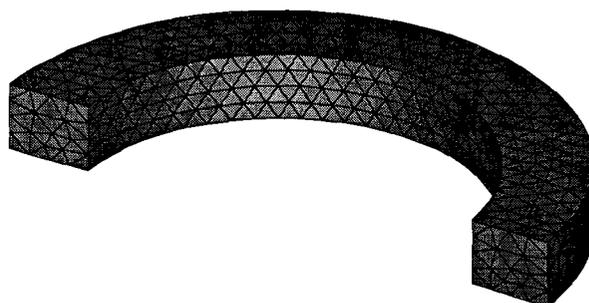


Figure II.17 : Maillage du demi-anneau de cuivre.

Pour la formulation en potentiel scalaire électrique, on impose une tension 1 mV . On obtient ainsi une puissance de 124.59 mW soit une résistance de $8.026 \mu\Omega$.

Dans le cas de la formulation en potentiel vecteur électrique, nous avons imposé, à l'aide du

champ source, une intensité de courant de 124.24 A. Sur les surfaces extérieures du conducteur afin d'assurer $J.n=0$, le potentiel vecteur électrique est égal à zéro. Dans ce cas, on obtient une puissance de 124.27 mW soit une résistance égale à $8.051 \mu\Omega$.

A titre indicatif, nous avons représenté sur la figure II.18 la distribution de la densité de courant obtenue par la formulation en potentiel vecteur électrique.

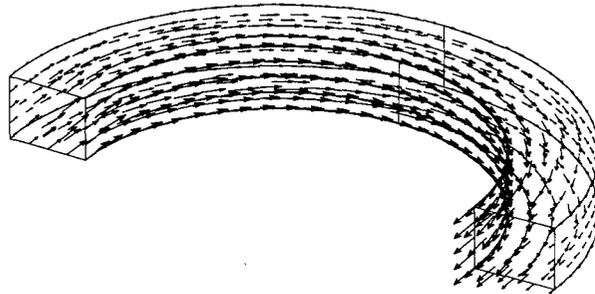


Figure II.18 : Distribution de la densité de courant dans le demi- anneau.

Si on compare la valeur de la résistance, calculée par les deux formulations, à celle obtenue analytiquement, on constate qu'il y a encadrement de la solution [40-41]. Cette propriété d'encadrement est reprise et commentée plus en détail dans le paragraphe suivant.

II.7.2 Etude en magnétostatique

II.7.2.1 Cube conducteur

Le second exemple concerne un cube d'un mètre de côté traversé par une densité de courant uniforme $J_z=10\text{MA}/\text{m}^2$. Les conditions aux limites sont telles que le flux magnétique ne sort pas du domaine ($B.n=0$). Ce problème a une solution analytique pour l'énergie magnétique emmagasinée ($w=2.208 \text{ MJ}$) [24].

Pour cet exemple la densité de courant J_0 se projette sans difficulté dans \mathbf{W}^2 , il n'est donc pas nécessaire d'avoir recours à l'arbre de facette ($J_0 = J_0^d$). Nous avons calculé la distribution de l'induction magnétique à l'aide des deux formulations en potentiel (A et Ω) et comparé les énergies magnétiques obtenues. Deux maillages, M_1 et M_2 constitués respectivement de 1045 éléments et 7031 éléments, ont été utilisés. La figure II.19 représente le maillage M_2 .

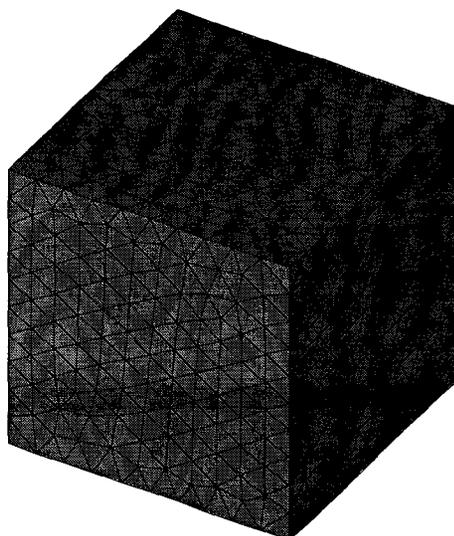


Figure II.19 : Maillage M_2 du cube.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau II.4. On retrouve les propriétés d'encadrement de l'énergie pour les formulations en potentiel A et Ω [24][40][42]. Quand on raffine le maillage, la formulation en A tend vers la solution exacte par valeurs inférieures. Par contre la formulation en Ω approche la solution par des valeurs supérieures.

		A	Hs- Ω
Maillage 1	Energie (MJ)	2.082	2.302
	Inconnues	1007	275
Maillage 2	Energie (MJ)	2.173	2.238
	Inconnues	7495	1585

Tableau II.4 : Exemple du cube ; énergies calculées avec les formulations A et Ω .

Pour le maillage M_2 , la figure II.20 présente la distribution de l'induction magnétique calculée pour les deux formulations dans un plan normal à la densité de courant. Les principales différences se situent aux frontières du domaine. En effet, on remarque que les conditions aux limites sur Γ_b (i.e $B.n=0$) sont respectées par la formulation en A car elles sont imposées fortement par $A \times n=0$ (figure II.20.a). Par contre, on constate que la formulation en Ω impose faiblement les conditions aux limites sur Γ_b (figure II.20.b).

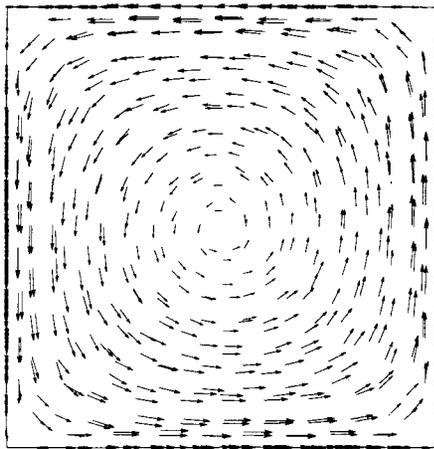


Figure II.20.a

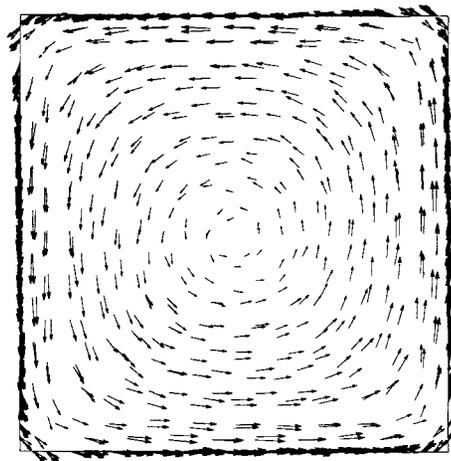
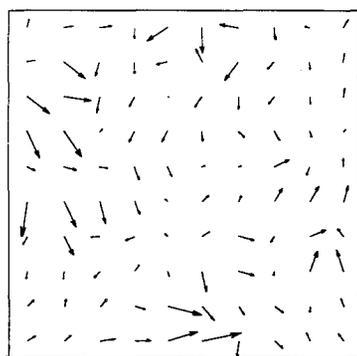


Figure II.20.b

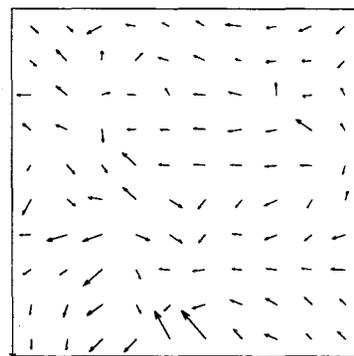
Figure II.20 : Distribution de l'induction magnétique; II.20.a formulation A, II.20.b formulation $H_s \cdot \Omega$.

II.7.2.2 Influence du champ source

Comme il existe une infinité de champ source H_s tel que $\text{rot } H_s = J_0$, nous avons étudié son influence sur la distribution du champ magnétique H . Nous avons donc effectué un calcul en utilisant deux champs sources H_s et H_s' (figure II.21). On constate alors, que l'on obtient un champ magnétique H identique (figure II.22). Ce résultat peut être généralisé et on montre (cf. annexe I) que le champ magnétique H ne dépend pas du choix du champ source dans la mesure où celui-ci appartient à W^1 . Un autre calcul a été effectué en utilisant un champ source analytique T_0 présenté sur la figure II.23.a [9]. Ce champ à variation linéaire n'est pas décomposable dans l'espace des éléments d'arêtes. Nous avons représenté sur la figure II.23.b la distribution du champ magnétique obtenue à partir de T_0 . En comparant les figures II.22 et II.23.b, on note une meilleure répartition du champ magnétique dans le cas où l'on utilise H_s .



II.21. a



II.21.b

Figure II.21 : Distribution des champs sources H_s (II.21.a) et H_s' (II.21 b) dans une section du cube.

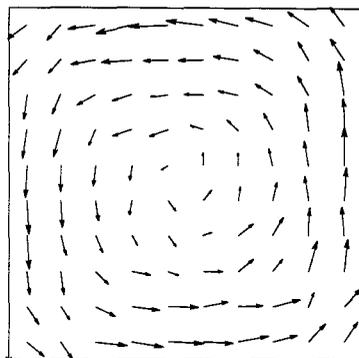


Figure II.22 : Distribution du champ magnétique à partir de H_s et H'_s dans une section du cube.

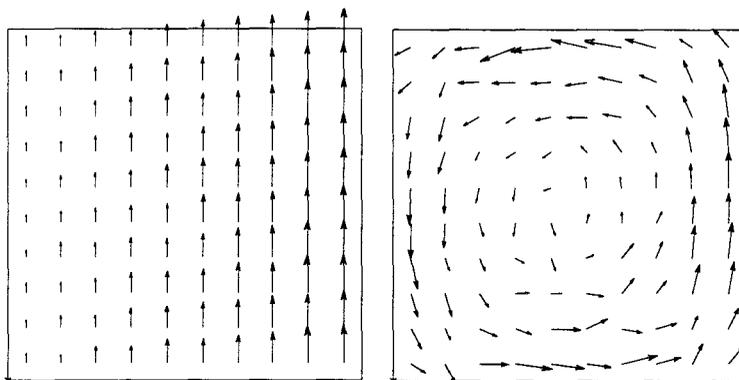


Figure II.23-a

Figure II.23-b

Figure II 23: Distribution du champ source T_0 (II.23-a) et du champ magnétique H (II.23.b) dans une section un cube.

Par ailleurs, pour différents maillages, nous avons comparé les énergies magnétiques calculées avec les deux champs (tableau II.5). On remarque que l'utilisation du champ source H_s permet d'obtenir une énergie plus proche de la solution exacte et donc un champ de meilleure qualité.

Pour quantifier les écarts sur les solutions obtenues à partir des deux champs sources, nous avons utilisé un estimateur d'erreur basé sur le théorème de l'hypercerce [41][42]. L'utilisation d'un tel estimateur nécessite la connaissance d'une solution admissible pour l'induction magnétique B et le champ magnétique H soit :

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \text{et} \quad B \cdot n|_{\Gamma_b} = 0 \quad (\text{II.76})$$

$$\operatorname{rot} H = J \quad \text{et} \quad H \times n|_{\Gamma_h} = 0 \quad (\text{II.77})$$

L'induction magnétique B (respectivement le champ magnétique H) est obtenue en résolvant le problème en potentiel vecteur (respectivement en potentiel scalaire). L'intérêt de cet estimateur est qu'il permet d'établir un lien direct avec la solution exacte par la relation suivante :

$$\|H - \mu^{-1}B\| = 2 \cdot \left\| H_{\text{ex}} - \frac{H + \mu^{-1}B}{2} \right\| \text{ avec } \|X\| = \int_{\mathcal{D}} \mu X \cdot X dv \quad (\text{II.78})$$

où H_{ex} représente la solution exacte. Le terme $\|H - \mu^{-1}B\|$ permet alors de mesurer la qualité du couple (B, H) . Nous définissons ainsi l'erreur relative ε_r :

$$\varepsilon_r = \frac{\|H - \mu^{-1}B\|}{\|H\| + \|\mu^{-1}B\|} \quad (\text{II.79})$$

L'erreur relative calculée pour les deux formulations en potentiel scalaire est présentée pour les deux maillages dans le tableau II.5.

		$H_{S-\Omega}$	$T_{O-\Omega}$	$\varepsilon_{A-H_{S-\Omega}}$	$\varepsilon_{A-T_{O-\Omega}}$
Maillage 1	Energie (MJ)	2.302	2.425	10%	14%
	275 Inconnues				
Maillage 2	Energie (MJ)	2.238	2.271	3,06%	4,51%
	1585 Inconnues				

Tableau II.5 : Influence du champ source sur la qualité de la solution.

Ces résultats montrent que la formulation $H_S-\Omega$ est plus précise que la formulation $T_O-\Omega$.

II.7.2.3 Influence de l'arbre de facettes

Dans l'exemple précédent nous avons validé le calcul du champ source et étudié son influence sur la qualité de la solution. Dans la suite, nous abordons l'influence de la discrétisation de la densité de courant. Dans le cas d'un inducteur de forme complexe, nous avons proposé une méthode basée sur l'arbre de facettes pour discrétiser la densité de courant dans l'espace W^2_h . Pour un inducteur donné, il est possible de construire un grand nombre d'arbres différents. Nous nous proposons donc d'étudier l'influence du choix de l'arbre de facettes sur la solution discrète obtenue.

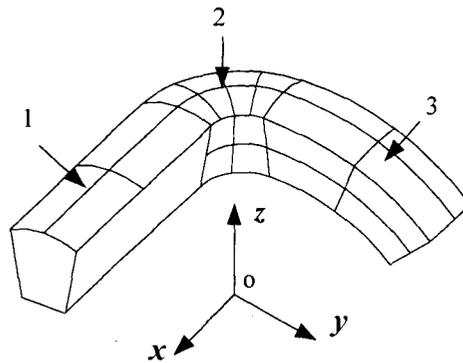


Figure II.24 : Elément d'un bobinage à géométrie complexe.

On considère la structure présentée sur la figure II.24. Il s'agit d'une bobine multifilamentaire à section constante qui peut se décomposer en trois parties distinctes :

1. une partie droite orientée suivant l'axe ox de longueur 100 mm.
2. un coude de 90° autour de l'axe oz suivant un rayon de 20 mm.
3. une rotation de 45° autour de l'axe ox suivant un rayon de 75 mm.

La bobine est comprise dans une boîte d'air dont les conditions aux limites sur Γ sont $B.n=0$. Une densité de courant de distribution uniforme correspondant à une intensité de 1A est imposée dans la bobine (figure II.25).

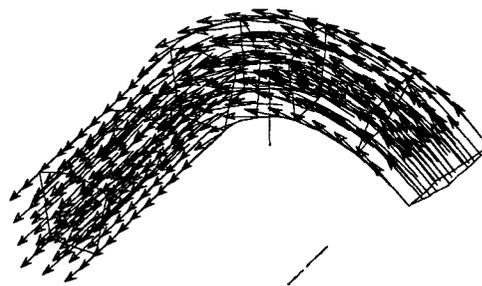


Figure II.25 : Distribution de la densité de courant dans la bobine
(résultat obtenu à partir de l'arbre de facettes).

Nous avons calculé, à partir de deux arbres différents, deux densités de courant J_1^d et J_2^d . On détermine ensuite deux champs sources H_{s1} et H_{s2} . En utilisant les deux formulations magnétiques A et Ω , nous avons calculé respectivement, la distribution de B et H dans le domaine pour les deux termes sources (arbre 1 et 2). Afin de comparer les résultats, nous avons calculé l'énergie emmagasinée dans le domaine puis l'inductance de la bobine. Les résultats sont présentés dans le tableau II.3.

Formulations	A	H _s -Ω
Arbre de facette 1	L ₁ ^A =48.217 nH	L ₁ ^Ω =56.256 nH
Arbre de facette 2	L ₂ ^A =48.258 nH	L ₁ ^Ω =56.221 nH

Tableau II.6 : Valeur de l'inductance.

A partir de ce tableau, il est intéressant de constater que l'erreur introduite par les discrétisations numériques, 16% pour l'arbre 1, est beaucoup plus importante que l'erreur due au choix de l'arbre, 0.085% pour la formulation en A.

II.7.2.4 Convergence du gradient conjugué

Les formulations en potentiel vecteur conduisent à un système matriciel possédant une infinité de solutions. Il est donc indispensable d'imposer une condition de jauge pour garantir l'unicité du problème. Comme nous l'avons déjà indiqué, il existe différents moyens d'obtenir l'unicité de la solution. On les rappelle brièvement ci-dessous :

- la jauge de Coulomb qui introduit un terme de pénalité pour imposer $\text{div } \mathbf{A}=0$.
- la jauge de type arbre ($\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega}$) qui consiste à créer un arbre d'arêtes sur lequel on impose les circulations de \mathbf{A} . Ceci a pour conséquence de diminuer le nombre d'inconnues. Par contre, si on utilise un solveur itératif, la convergence de ce dernier peut être ralentie.
- une autre approche [18] montre que le fait d'utiliser l'algorithme du gradient conjugué, pour résoudre le système, impose implicitement au sens faible la divergence du potentiel vecteur si le terme source de la formulation est exprimé par un rotationnel.

Dans la suite, nous allons étudier l'influence du terme source sur la convergence du gradient conjugué et comparer à un système utilisant la jauge $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega}$.

L'exemple sur lequel l'étude va être menée est une bobine à noyau de fer sans entrefer. Pour des raisons de symétrie seulement $\frac{1}{4}$ du dispositif est modélisé (figure II.26). La section de fer est de 1520 mm² (38mm × 40 mm) et la section du cuivre est de 1400 mm² (100mm × 14mm). Les conditions aux limites sont telles que $\mathbf{H} \times \mathbf{n}=0$ sur la surface supérieure du dispositif et $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}=0$ sur les autres surfaces. La perméabilité relative du fer est de 3500. L'intensité du courant dans le bobinage ($n_s=186$) est égale à un 1A.

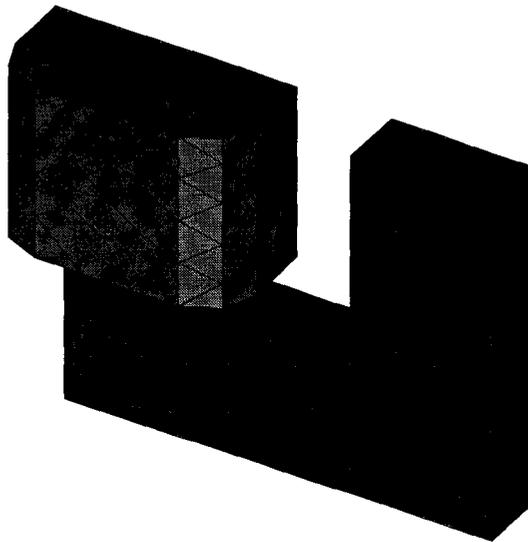


Figure II.26 : Maillage de la bobine à noyau de fer.

La distribution de la densité de courant a été calculée en utilisant trois approches [6]. Pour quantifier la valeur de la divergence de J , un critère ϵ_d est introduit en calculant la valeur absolue de la somme de la divergence de J sur chaque élément. Soit :

$$\epsilon_d = \sum_{\text{tous les éléments}} |\text{div}J| \tag{II.80}$$

La première approche consiste à imposer dans les éléments une direction de J constante [9]. Pour la seconde, à partir de l'expression analytique de J , on calcule le flux sur chaque facette de l'inducteur. Enfin la troisième approche est celle développée au paragraphe II.4.1. Sur la figure II.27 nous avons représenté schématiquement les différentes distributions de J et indiqué la valeur de ϵ_d .

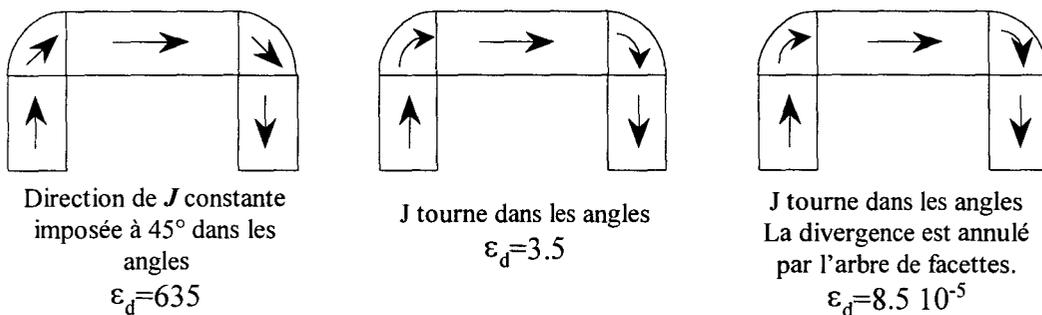


Figure II.27 : Différentes distributions de J .

On obtient ainsi trois valeurs de ϵ_d . En utilisant ces densités de courant, nous avons résolu le problème avec la formulation en A . Pour chacune d'elles nous avons représenté sur

la figure II.28 l'évolution du critère d'erreur du gradient conjugué en fonction du nombre d'itérations. On constate que la convergence du solveur est d'autant meilleure que le critère est petit (i.e la divergence est faible). On remarque que quelque soit la valeur de ε_d , les premières itérations du gradient sont identiques.

Sur la figure II.28 nous avons également placé la caractéristique de convergence obtenue avec la jauge $A.w$ en utilisant la meilleure distribution de J ($\varepsilon_d=8.10^{-5}$). Pour cette jauge, le critère de convergence atteint la valeur de 10^{-15} aux alentours de la millième itération, soit une 'vitesse de convergence' 10 fois plus lente que pour le système auto-jaugé.

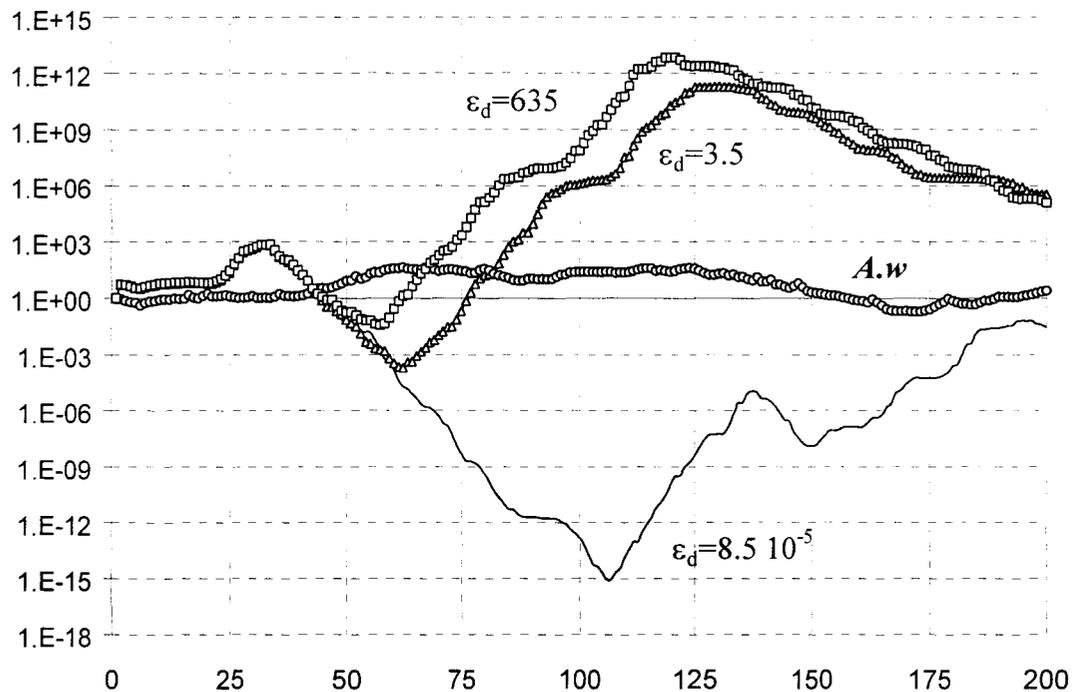


Figure II.28 : Caractéristiques de convergence du gradient conjugué.

Pour cet exemple, il est possible de déterminer un champ source analytique T_0 . Nous avons donc comparé une nouvelle fois les écarts entre la formulation en potentiel vecteur et celles en potentiel scalaire ($H_s-\Omega$ et $T_0-\Omega$) en utilisant l'estimateur présenté au paragraphe II.7.2.2. Les écarts obtenus regroupés dans le tableau II.7 confirment que la formulation $H_s-\Omega$ est plus précise que la formulation $T_0-\Omega$.

Formulations	A- $H_s-\Omega$	A- $T_0-\Omega$
M1 4277 éléments	2.96%	4.46%
M2 23595 éléments	0.6%	2.37%

Tableau II.7 : Comparaison des résultats pour les formulations en potentiel scalaire.

II.7.3 Etude en magnétodynamique

Pour valider les deux formulations de la magnétodynamique, nous avons modélisé une sphère creuse conductrice dont le rayon intérieur est de 35 mm et son épaisseur de 15 mm. Sa conductivité électrique est $\sigma = 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ et sa perméabilité magnétique est celle de l'air. Elle est plongée dans un champ d'induction variant sinusoïdalement dans le temps dont la valeur maximale est 1 Tesla. Dans ce cas, il est possible de calculer analytiquement la densité de courant et donc les pertes joules dissipées dans la sphère. Du fait des plans de symétrie du système, on peut modéliser une section. Dans notre application, nous avons considéré 1/8 de la sphère. Les conditions aux limites sur la boîte d'air et sur la sphère sont représentées sur la figure II.29.

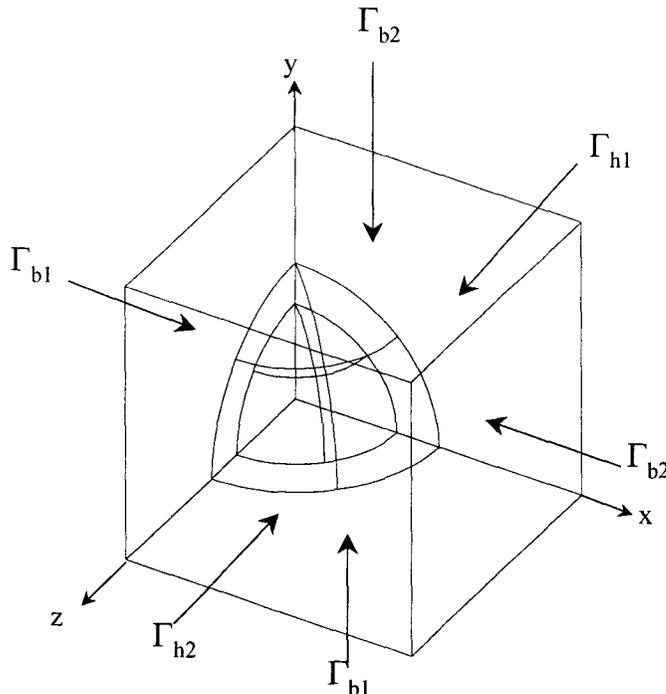


Figure II.29 : Modélisation de la sphère creuse: domaine d'étude et conditions aux limites.

Sur les surfaces Γ_b où $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$:

- le potentiel vecteur magnétique est imposé à zéro sur Γ_{b1} .
- sur Γ_{b2} , on impose un potentiel vecteur magnétique source A_s dont les circulations sur les arêtes sont définies par l'équation :

$$A_s = -0.5 \cdot [x_1 \cdot (y_1 - y_2) + y_1 \cdot (x_2 - x_1)] \cdot B \cdot \sin(\omega t) \quad (\text{II. 81})$$

où (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont les coordonnées des nœuds formant l'arête.

- le potentiel scalaire électrique est imposé à zéro pour avoir $E \times n = 0$ sur Γ_{b1} .

Sur les surfaces Γ_h où $H \times n = 0$:

- le potentiel scalaire magnétique est imposé à zéro sur Γ_{h1} .
- sur Γ_{h2} , un potentiel scalaire magnétique source est imposé :

$$\Omega_s = \frac{B}{\mu_0} * h \quad (\text{II. 82})$$

où h est la hauteur la boîte d'air.

- le potentiel vecteur électrique est imposé à zéro sur Γ_{h1} et sur les surfaces de la sphère pour assurer $J \cdot n = 0$.

Le maillage que nous avons utilisé comporte 1591 nœuds et 7917 éléments tétraédriques. Sur la figure II.30, seul le maillage de la sphère est représenté. Nous avons donc pour la formulation électrique 9130 inconnues soit : 8501 inconnues en potentiel vecteur magnétique et 629 en potentiel scalaire électrique. Pour la formulation $T-\Omega$, le nombre d'inconnues est de 3302 dont 2849 pour le potentiel vecteur électrique et 1453 pour le potentiel scalaire magnétique.

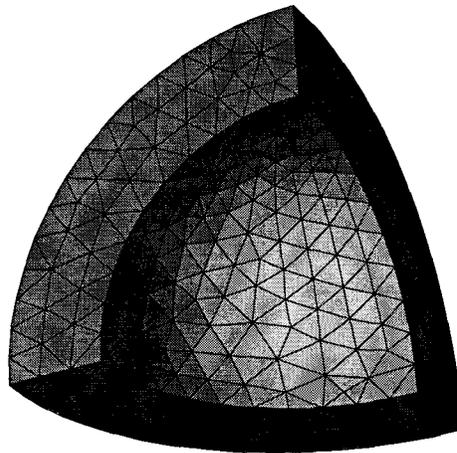


Figure II.30 : Maillage du huitième de la sphère.

A titre indicatif, sur la figure II.31, nous avons représenté la distribution de l'induction magnétique et celle de la densité de courant. Les calculs ont été effectués avec la formulation $A-\phi$ pour une fréquence de 1 Hz .

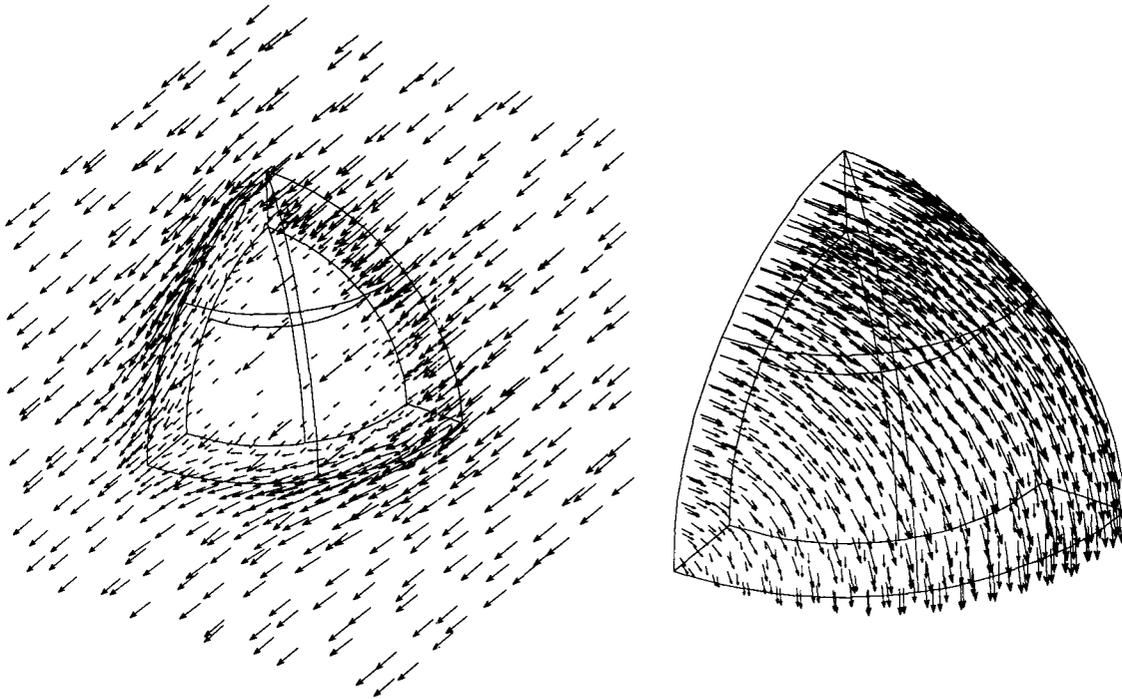


Figure II.31 : Distribution de l'induction magnétique et de la densité de courant (formulation $A-\varphi$).

Pour cette même fréquence, les pertes joules dans la sphère, calculées analytiquement, valent 21.4 W. Pour les formulations $A-\varphi$ et $T-\Omega$ nous avons obtenu respectivement 20.38 W et 19.6 W.

Pour cette application, nous aurions pu calculer un potentiel vecteur magnétique source sur toutes les arêtes du maillage à partir du flux de l'induction magnétique à travers les facettes.

II.8. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons discrétisé, à l'aide des éléments de Whitney, le modèle présenté au chapitre I. Pour obtenir des formulations conformes, nous proposons une méthode de calcul de la densité de courant dans l'espace des éléments de facettes. A partir de cette densité, nous avons calculé les circulations du champ source sur toutes les arêtes du maillage. Ces deux discrétisations sont basées sur des techniques d'arbres de facettes (densité de courant) et d'arêtes (champ source). Cette méthode utilise une procédure itérative qui converge systématiquement. On obtient ainsi les deux termes sources des formulations en potentiel.

Cette méthode a été validée sur des applications simples de l'électrocinétique et de la

magnétostatique. Cela a permis de constater que le choix de l'arbre de facettes influe peu sur la solution. De plus, pour la formulation en potentiel scalaire magnétique, nous avons montré que la solution ne dépend pas du choix de l'arbre si le champ source appartient à l'espace des éléments d'arêtes. Enfin, pour la formulation en potentiel vecteur magnétique, nous avons constaté que l'utilisation de la densité de courant discrétisée avec les éléments de facettes facilite la convergence du gradient conjugué.

Dans le chapitre suivant, nous appliquerons les méthodes proposées, à des dispositifs électrotechniques, en tenant compte du couplage avec les équations du circuit, de la saturation des matériaux magnétiques et du mouvement.

Chapitre III : Modélisation des systèmes électrotechniques

III.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous proposons d'utiliser, pour l'étude des systèmes électrotechniques, les outils de calcul de champs présentés précédemment. Nous étudierons ainsi deux dispositifs statiques, une bobine multifilamentaire située entre deux plaques conductrices et un transformateur triphasé. Ensuite, nous déterminerons les différentes caractéristiques d'une machine à griffes à aimants permanents. Pour ce dernier exemple, les résultats obtenus seront comparés avec l'expérience.

III.2 MODELISATION DE SYSTEMES STATIQUES

III.2.1 Modélisation d'une bobine entre deux plaques

Nous avons modélisé une bobine multifilamentaire de forme torique placée entre deux plaques rectangulaires en aluminium [43][44]. Cette structure a déjà été étudiée à plusieurs reprises au L2EP [32][45]. On trouvera sur la figure III.1 la structure étudiée. La bobine est constituée d'un enroulement de 700 spires et sa résistance est égale à 12.4Ω . Comme il existe des symétries selon les 3 axes ox , oy et oz , le domaine d'étude est ramené à $1/8$ de la structure.

Les plans $x=0$ et $y=0$ sont des surfaces de type Γ_b ($\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}=0$). Le plan $z=0$ représente une surface de type Γ_h ($\mathbf{H}\times\mathbf{n}=0$). Enfin, le dispositif est compris dans une boîte d'air avec des conditions $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}=0$ sur la surface extérieure. Le maillage utilisé est composé de 2740 éléments, 617 nœuds, 3614 arêtes et 5738 facettes. Il est présenté sans l'air environnant sur la figure III.2. Pour cette structure, nous avons calculé l'évolution du courant dans la bobine lorsque l'on impose un échelon de tension de 20 V.

Deux cas sont étudiés. Dans le premier, la conductivité des plaques est considérée comme nulle. Pour calculer l'évolution du courant, nous avons utilisé les formulations en potentiel vecteur \mathbf{A} et scalaire magnétique Ω (cf. § II.5.3). Dans le deuxième cas, la conductivité des plaques est prise en compte, nous avons donc un problème de magnétodynamique. L'étude a été menée à l'aide des formulations magnétique et électrique en potentiels (cf. § II 5.4).

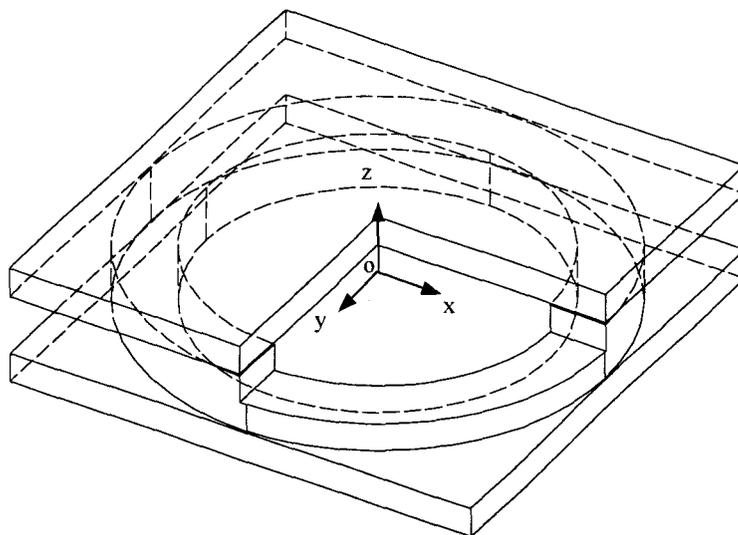


Figure III.1 : Dispositif étudié (la partie manquante correspond à celle modélisée)

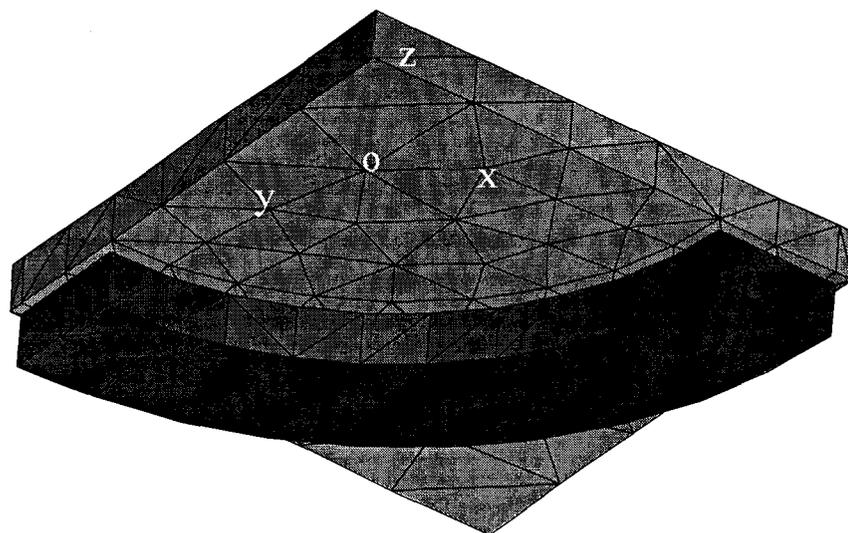


Figure III.2 : 1/8 de la structure étudiée : bobine entre deux plaques d'aluminium.

III.2.1.1 Etude en magnétostatique

Nous allons dans un premier temps, pour valider le couplage électrique, modéliser le dispositif avec les formulations H_s - Ω et A . Pour réaliser ce couplage, avec le circuit extérieur, les vecteurs N^d et K^d ont été calculés par les méthodes présentées dans le chapitre II en utilisant respectivement un arbre de facettes et d'arêtes. Sur la figure III.3, nous avons représenté la distribution du vecteur N^d (III.3.a) et du vecteur K^d (III.3.b). A titre indicatif on trouvera sur la figure III.4 la distribution de l'induction magnétique obtenue avec la formulation en potentiel vecteur A .

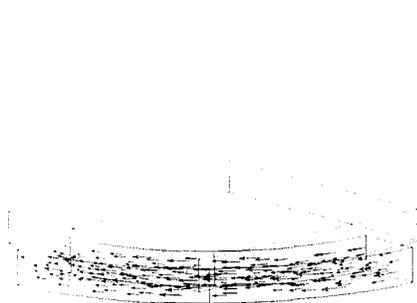


Figure III.3.a

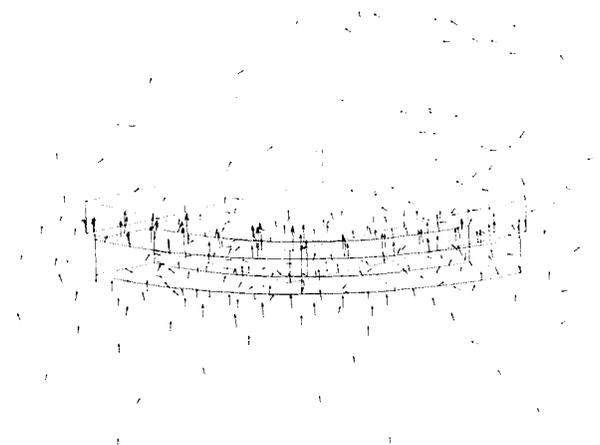


Figure III.3.b

Figure III.3: Distribution des vecteurs N^d (III.3.a) et K^d (III.3.b).

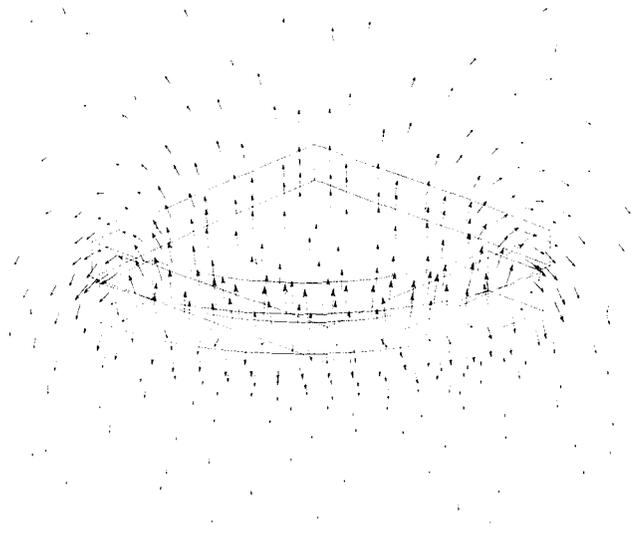


Figure III.4 : Distribution de l'induction magnétique (formulation en A).

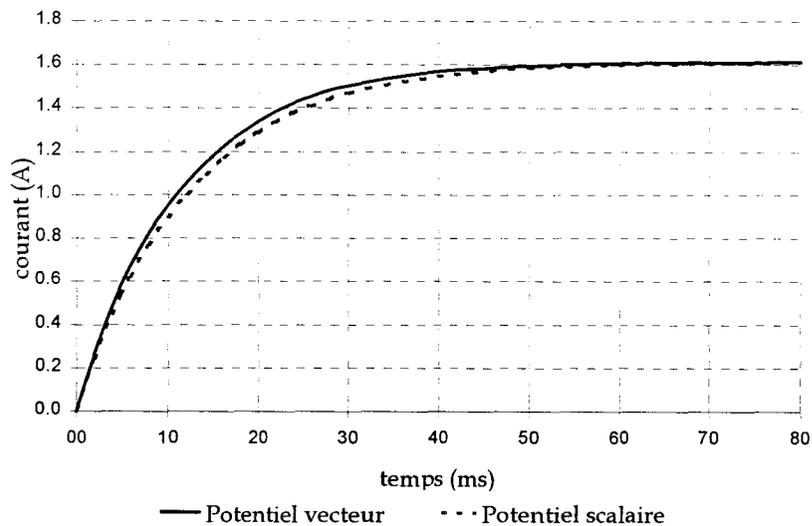


Figure III.5 : Evolution du courant dans la bobine obtenue avec les deux formulations.

Lorsqu'on impose un échelon de tension, l'évolution du courant calculé à partir des deux formulations est représentée sur la figure III.5. On retrouve ainsi, une réponse de type exponentielle avec, en régime permanent le courant dans la bobine est égal à 1.61 A.

III.2.1.2 Etude en magnétodynamique

Maintenant, on considère, dans le modèle, les plaques d'aluminium. Des courants induits apparaissent alors dans celles-ci créant un flux qui s'oppose à celui produit par la bobine. Dans ce cas, le dispositif est modélisé par les formulations électrique et magnétique en potentiels ($A-\phi$ et $T-\Omega$). Pour les potentiels magnétiques, les conditions aux limites sont

les mêmes que dans le cas précédent. Pour les potentiels électriques, elles sont définies par :

$$\varphi=0 \text{ sur } \Gamma_b \text{ (plans } x=0 \text{ et } y=0).$$

$$T \times n=0 \text{ sur toutes les surfaces extérieures de la plaque sauf sur les plans } x=0 \text{ et } y=0.$$

Sur la figure III.6, on présente la répartition de la densité de courant dans les plaques. Le calcul a été effectué avec la formulation $A-\varphi$. Pour les deux formulations, la figure III.7 donne l'évolution, en fonction du temps, du courant dans la bobine lorsque celle-ci est soumise à un échelon de tension de 20 V. On notera que, comme dans le cas de la magnétostatique les résultats donnés par les formulations sont sensiblement équivalents.

Enfin, à titre indicatif, on compare sur la figure III.8, pour les formulations en A et $A-\varphi$, l'évolution du courant avec et sans les plaques. Avec les plaques, on note initialement une croissance plus forte. Par contre, le régime permanent est atteint moins rapidement.

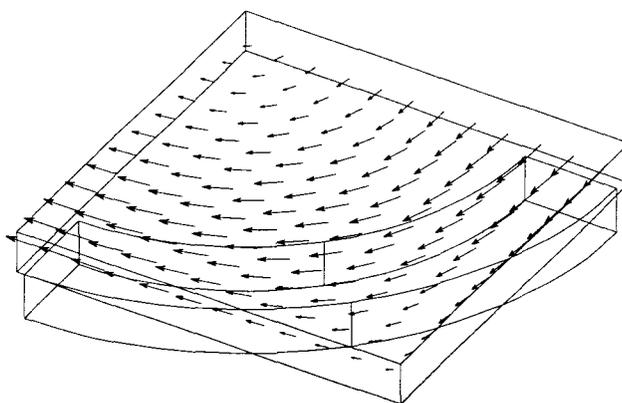


Figure III.6 : Distribution de la densité de courant dans la plaque (formulation $A-\varphi$).

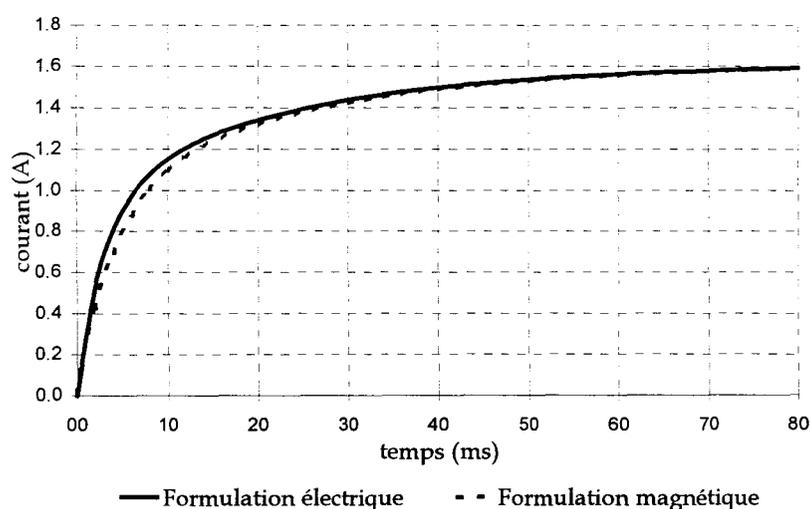


Figure III.7 : Evolution du courant dans la bobine obtenue avec les deux formulations.

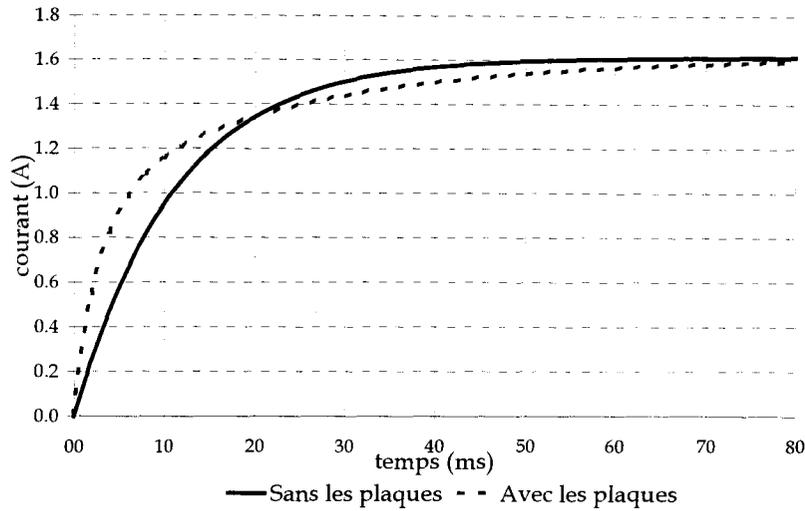


Figure III.8 : Comparaison de l'évolution du courant avec et sans les plaques (formulations A et A-φ).

III.2.2 Modélisation d'un transformateur triphasé

III.2.2.1 Présentation du problème

Nous avons modélisé un transformateur triphasé d'une puissance de 3kVA, 50Hz présenté sur la figure III.9. Les tensions nominales du primaire et du secondaire sont respectivement 220V et 110V.

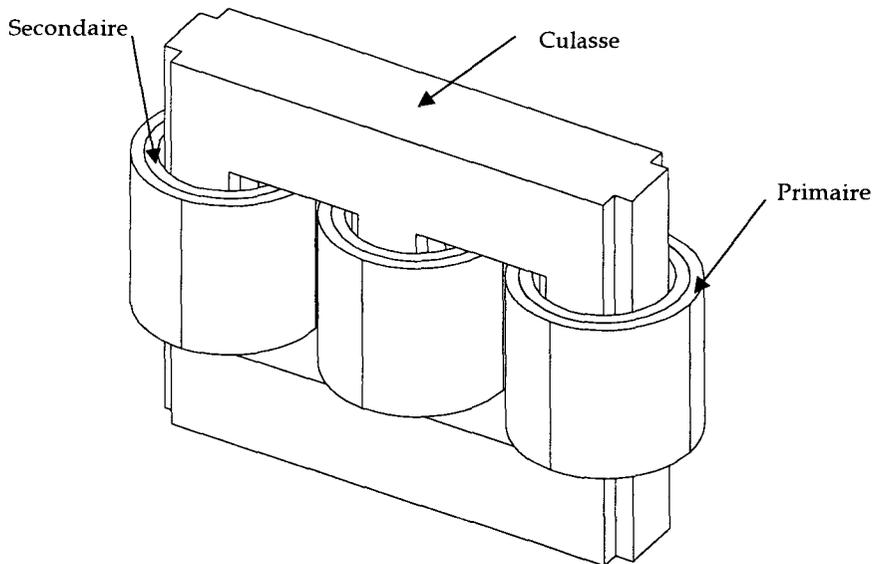


Figure III.9 : Transformateur triphasé étudié.

Afin de prendre en compte la caractéristique non-linéaire des matériaux magnétiques, nous avons utilisé une courbe de type $v(B^2)$ [46] :

$$v(B^2) = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{B^{2\alpha}}{B^{2\alpha} + \tau} (c - \varepsilon) + \varepsilon \right] \quad (\text{III.1})$$

où $\alpha, \tau, \varepsilon$ et c sont des coefficients calculés à partir de la caractéristique magnétique.

La culasse du transformateur étant feuilletée, la conductivité est négligée. De plus, les bobinages primaires et secondaires sont des conducteurs multifilamentaires. Dans ces conditions, on est confronté à un problème de type magnétostatique. La discrétisation par la méthode des éléments finis nous conduit à un système matriciel de la forme (cf. II. 5.1) :

$$[S(U)][U] = [F] \quad (\text{III.2})$$

où U représente la valeur du potentiel scalaire aux nœuds ou la circulation du potentiel vecteur le long des arêtes. Comme la caractéristique magnétique n'est pas linéaire, la matrice S dépend de U .

Pour résoudre ce système d'équations, nous avons utilisé des méthodes itératives. Les performances (précision et rapidité) des algorithmes dépendent de la formulation et du niveau de saturation. Nous avons donc étudié plusieurs algorithmes (substitution, Newton-Raphson, point fixe) que l'on utilisera suivant le type de problème à résoudre.

III.2.2.2 Méthodes de résolution des problèmes non-linéaires

III.2.2.2.1 Algorithme de substitution

Cette méthode consiste à calculer un vecteur u_n à partir du vecteur u_{n-1} obtenu à l'itération précédente en utilisant les relations suivantes [35] :

$$[S(U_{n-1})][\Delta U_n] = [F] - [S(U_{n-1})][U_{n-1}] \quad (\text{III.3})$$

$$[U_n] = [U_{n-1}] + [\Delta U_n] \quad (\text{III.4})$$

avec, U_n la solution de la $n^{\text{ième}}$ itération, F le terme source du système. A chaque itération, cette méthode nécessite le calcul d'une nouvelle matrice $S(U)$.

L'algorithme s'arrête quand $U_n \cong U_{n-1}$. Si l'algorithme diverge, on peut introduire un coefficient de relaxation λ compris entre 0 et 1 (sous-relaxation). Si l'algorithme présente une bonne convergence, ce coefficient peut être supérieur à 1 pour l'accélérer (surelaxation). Cette méthode est simple à implanter et présente une bonne robustesse si elle est sous-relaxée.

III.2.2.2 Algorithme de Newton-Raphson

Cette méthode est similaire à la précédente mais on ajoute une matrice tangente $\partial_U S(U)$ à la matrice de raideur $S(U)$. On obtient alors l'expression suivante [35] :

$$[S(U_{n-1}) + \partial_U S(U_{n-1})]_n [\Delta U_n] = [F] - [S(U_{n-1})][U_{n-1}] \quad (\text{III.5})$$

avec :

$$[U_n] = [U_{n-1}] + \lambda [\Delta U_n] \quad (\text{III.6})$$

Dans ces conditions, comme pour l'algorithme de substitution, on peut introduire un coefficient de relaxation λ . En général, cette méthode converge plus rapidement que la méthode de substitution, mais elle est très sensible aux fortes variations de la loi de comportement et peut donc diverger.

III.2.2.3 Algorithme du point fixe

Avec la méthode du point fixe, on recherche la solution du problème non-linéaire en ajustant le terme source. Dans notre cas, considérons une caractéristique non linéaire $\mu(H)$ comme le montre la figure III.10 où la solution au problème est donnée par H_{sol} . Avec cette méthode, on choisit arbitrairement une valeur μ_{pf} quelconque mais cohérente [47-49]. Ensuite, le problème consiste à rechercher la valeur de μ_e définie sur la figure III.10. Cela revient en fait à modifier la loi de comportement du matériau magnétique en introduisant une aimantation R , soit :

$$B = \mu(H)H = \mu_{\text{pf}}H + R(H) \quad (\text{III.7})$$

avec $R(H) = \mu_e(H)H$

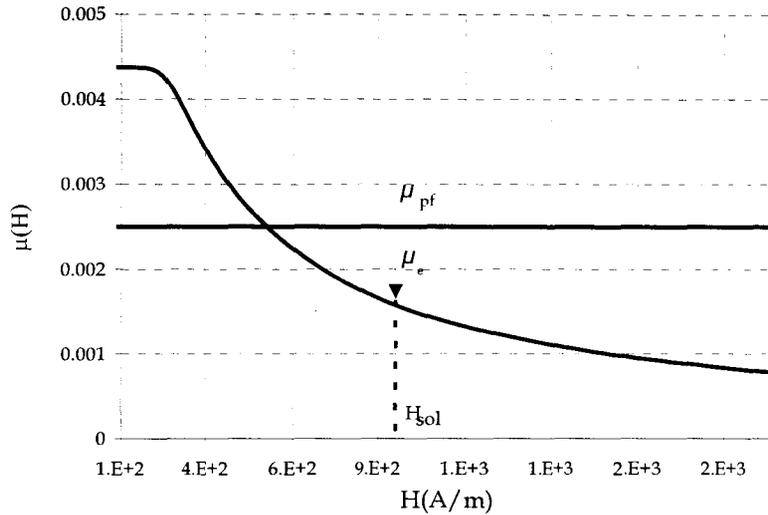


Figure III.10 : Présentation graphique de la méthode du point fixe.

L'utilisation de cette méthode conduit à résoudre le système suivant :

$$[S(\mu_{pf})][\Delta U_n] = [F] - [R(U_{n-1})] - [S(\mu_{pf})][U_{n-1}] \quad (\text{III.8})$$

avec :

$$U_n = U_{n-1} + \Delta U_n \quad (\text{III.9})$$

On rappelle que U_n désigne soit le potentiel vecteur soit le potentiel scalaire. Dans la formulation, le terme $R(H)$ de la relation III.7 est introduit par le vecteur $R(U_{n-1})$. Avec cette méthode, il n'est plus nécessaire de reconstruire à chaque itération la matrice $S(\mu_{pf})$ puisqu'elle ne dépend plus de U_n (μ_{pf} est constant). Pour optimiser la convergence, il est préférable de prendre pour les valeurs de μ_{pf} ou v_{pf} [47] :

$$\mu_{pf} = \frac{\mu_{\max} + \mu_{\min}}{2} \quad v_{pf} = \frac{v_{\max} + v_{\min}}{2} \quad (\text{III.10})$$

où μ_{\max} et μ_{\min} sont les valeurs extrêmes de la perméabilité, v_{\max} et v_{\min} celles de la réductivité.

Pour le type de non-linéarité que nous avons à traiter, cette méthode converge sans relaxation. Lors des premières itérations, on constate que l'erreur diminue rapidement puis, la convergence est beaucoup plus lente. Il est donc intéressant de coupler cette technique avec la méthode de substitution ou de Newton-Raphson.

III.2.3 Etude du transformateur

Pour le transformateur considéré, nous avons modélisé l'essai à vide et en court-circuit en utilisant les formulations en potentiels vecteur et scalaire [60]. Compte tenu des propriétés de symétrie, seulement $\frac{1}{4}$ du transformateur a été modélisé. Il est entouré d'une boîte d'air comme le montre la figure III.11. Pour des raisons de symétrie, sur la surface supérieure, on impose $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$ (Γ_h) et sur les autres surfaces, on a $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ (Γ_b). Le maillage utilisé contient 29695 tétraèdres, 5739 nœuds, 36699 arêtes et 60656 facettes. Il est représenté sur la figure III.12. Nous avons ainsi avec ce maillage 33731 inconnues pour la formulation en potentiel vecteur et 5344 pour la formulation en potentiel scalaire.

Le bobinage de ce transformateur est constitué de six enroulements multifilamentaires de forme cylindrique soit deux bobines concentriques par colonne. Au primaire, elles contiennent 168 spires et ont une résistance de 2.1Ω . Au secondaire, nous avons 84 spires et une résistance de 2Ω . Les enroulements primaires et secondaires sont couplés en triangle. Comme les essais sont effectués à tension imposée, les courants dans les bobines primaires et secondaires sont inconnus. Pour cet exemple nous avons calculé, avec les méthodes proposées au chapitre précédent, six champs de vecteurs \mathbf{N}^d et \mathbf{K}^d . Les figures III.13 et III.14 représentent les distributions de \mathbf{N}^d et \mathbf{K}^d de la colonne centrale pour le bobinage primaire.

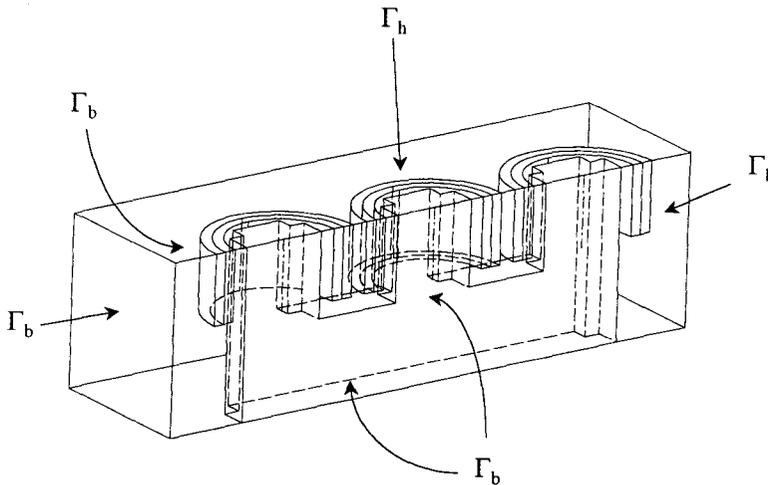


Figure III.11 : Transformateur triphasé : domaine d'étude et conditions aux limites

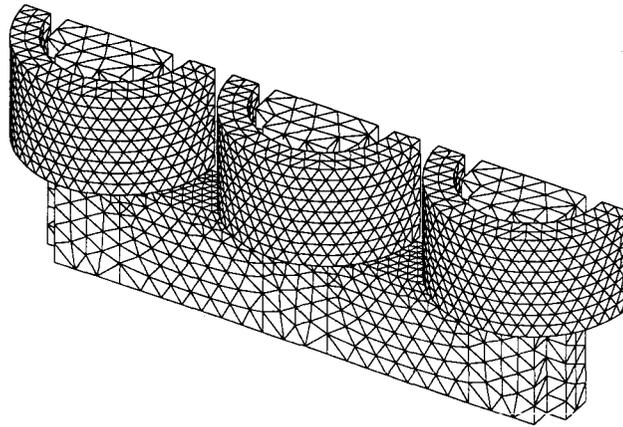


Figure III.12 : Maillage d'un transformateur.

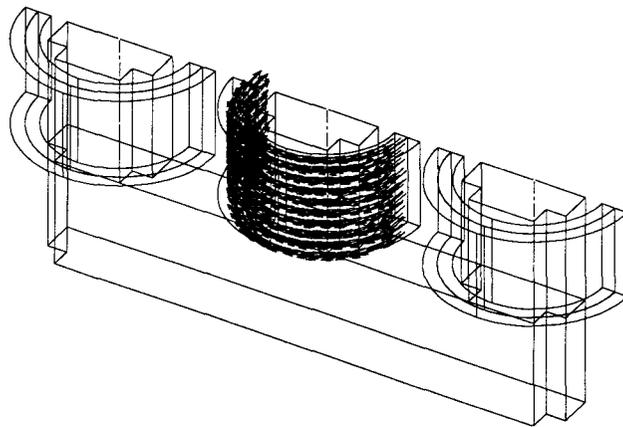


Figure III.13 : Distribution du vecteur N^d de l'enroulement primaire de la colonne centrale.

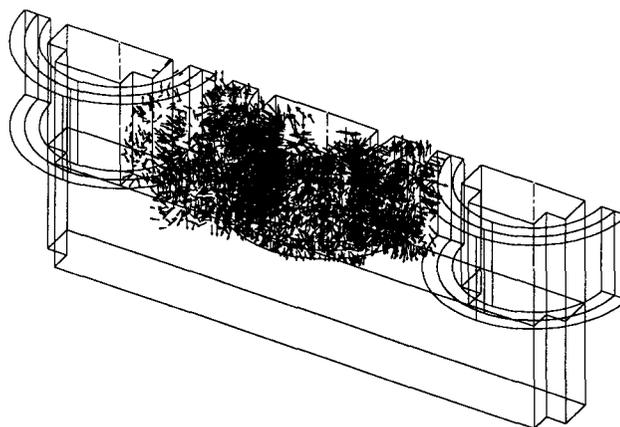


Figure III.14 : Distribution du vecteur K^d de l'enroulement primaire de la colonne centrale.

III.2.3.1 Simulation d'un essai à vide

A la mise sous tension à vide, le transformateur a un comportement fortement non-linéaire. Pour prendre en compte ce phénomène nous avons utilisé, pour la formulation en potentiel vecteur, la méthode de Newton-Raphson. La saturation étant importante nous avons eu recours à un coefficient de sous-relaxation de 0.7. Par contre, pour la formulation en potentiel scalaire, en raison des grandes variations de la dérivée de la caractéristique $\mu(H)$, la méthode de Newton-Raphson peut diverger. Dans ce cas, il faut relaxer fortement l'algorithme ce qui ralentit d'autant la convergence. De plus, le choix de la valeur de ce coefficient de relaxation peut s'avérer délicat [50].

Pour éviter ces problèmes, nous avons couplé la méthode du point fixe avec la méthode de substitution. Comme indiqué précédemment, la méthode du point fixe présente une convergence rapide pour les premières itérations et devient très lente lorsque l'on se rapproche de la solution. Un compromis est obtenu en changeant de méthode après quelques itérations quand le critère d'erreur ε_{nl} est inférieur à $5 \cdot 10^{-2}$. La méthode de substitution prend alors le relais pour aboutir au résultat plus rapidement. Dans notre application la convergence est obtenue sans coefficient de relaxation.

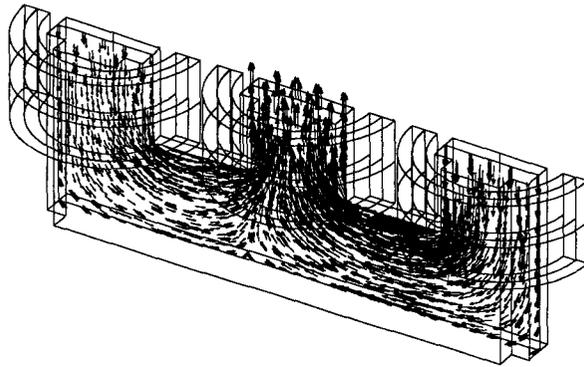


Figure III.15 : Distribution de l'induction magnétique à vide.

L'évolution des courants primaires à vide, calculée à l'aide des deux formulations, est présentée sur la figure III.16. On remarque la présence de pics de courant caractéristique du phénomène de saturation à la mise sous tension. On peut également noter que les deux formulations donnent des résultats relativement proches.

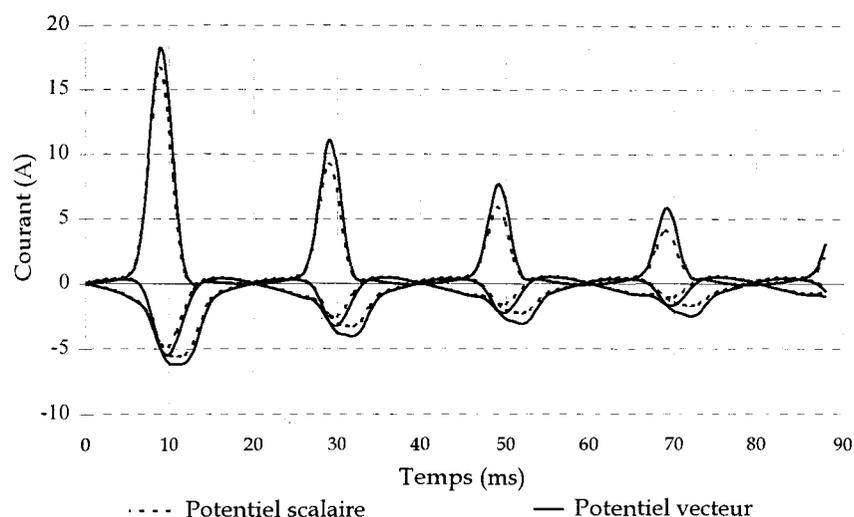


Figure III.16 : Evolution des courants à vide dans les trois enroulements du primaire.

Lors de cette simulation, la formulation en potentiel vecteur magnétique associée avec l'algorithme de Newton-Raphson, a convergée (sur un pas de temps) au maximum avec dix itérations. Par contre, pour la formulation en potentiel scalaire et la méthode du point fixe, couplée à l'algorithme de substitution, la convergence est atteinte au maximum en trente itérations. Dans ces conditions, pour cet essai nous avons constaté que, malgré un nombre plus faible d'inconnues, la formulation en Ω est plus lente que l'approche en A . On trouvera sur la figure III.15, la distribution de l'induction magnétique dans la culasse calculée avec la formulation en potentiel scalaire.

III.2.3.2 Simulation d'un essai en court-circuit

Toujours avec les deux formulations, nous avons modélisé le transformateur lorsque les enroulements du secondaire sont en court-circuit. Pour ce faire le primaire est alimenté sous une tension réduite dont la valeur efficace est de 3.6 V. Dans ces conditions, les matériaux magnétiques sont faiblement saturés. Comme le montrent les figures III.17 et III.18, les résultats obtenus sont quasiment identiques pour les deux formulations. Si on compare les temps de calcul nécessaires à cette simulation, on constate que la formulation en potentiel scalaire magnétique est beaucoup plus rapide.

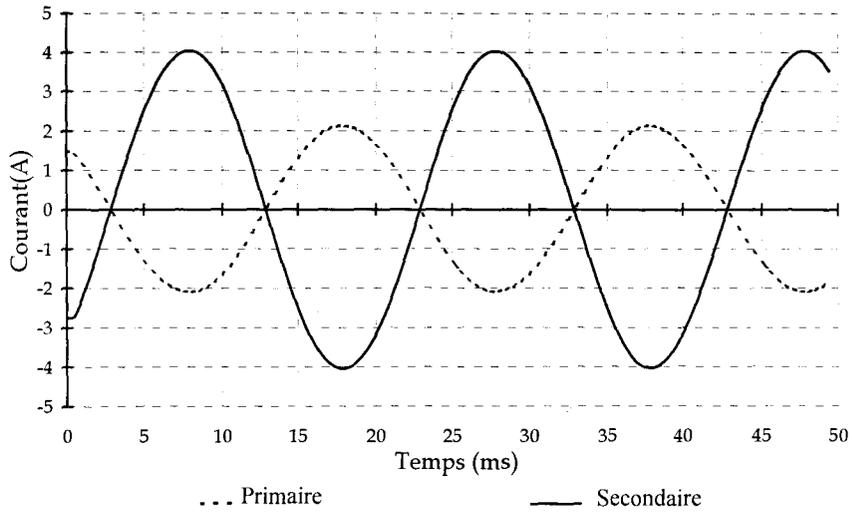


Figure III.17 : Essai en court-circuit : évolution des courants primaire et secondaire d'une phase (formulation en A).

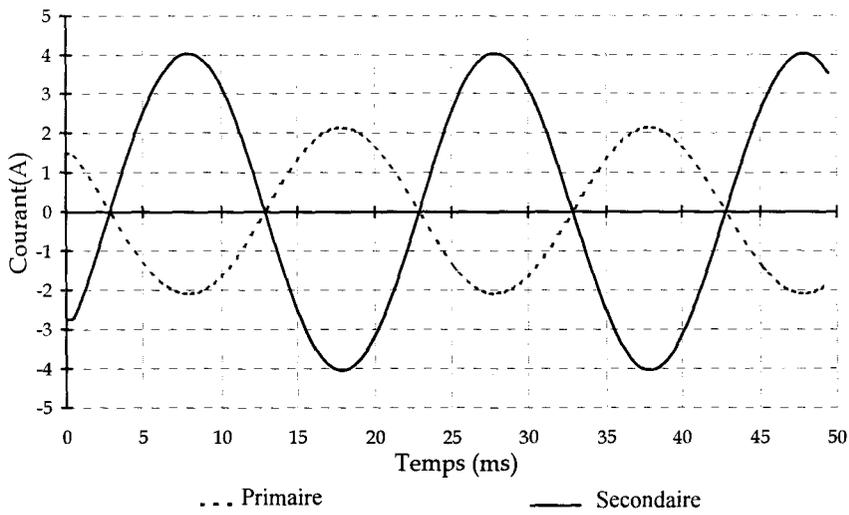


Figure III.18 : Essai en court-circuit : évolution des courants primaire et secondaire d'une phase (formulation en Ω).

III.3 ETUDE D'UNE MACHINE SYNCHRONE A GRIFFES.

Nous allons maintenant étudier une machine synchrone à griffes à aimants permanents. Ce prototype a été conçu et réalisé au Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance et de Commande Industrielle de l'Université Laval de Québec (LEEPCI). En raison de sa structure, l'étude de cette machine nécessite l'utilisation d'un code de calcul 3D. Après avoir présenté la machine, nous détaillerons le modèle numérique et en particulier la méthode utilisée pour prendre en compte le mouvement. Enfin, nous comparerons différentes caractéristiques électromagnétiques (couple, forces électromotrices, inductances) obtenues par la méthode des éléments finis avec les résultats des mesures effectuées au LEEPCI [51].

III.3.1 Description de la machine

Le rotor est constitué de six aimants en NeFeB, de deux pièces polaires identiques en acier massif et d'un axe amagnétique. Comme le montre la figure III.19, les aimants sont insérés entre les deux pièces polaires montées sur l'arbre et décalées d'un angle de $\pi/2$. Ce montage permet d'obtenir un champ d'excitation radial dans l'entrefer à partir d'une aimantation axiale dite homopolaire. Les pièces polaires servent ainsi à guider l'induction magnétique du rotor vers l'entrefer. Les griffes sont au nombre de quatre, nous avons ainsi deux paires de pôles. Afin de bien répartir le flux dans l'entrefer, on peut remarquer sur la figure III.20 que le rotor est plus long que le stator.

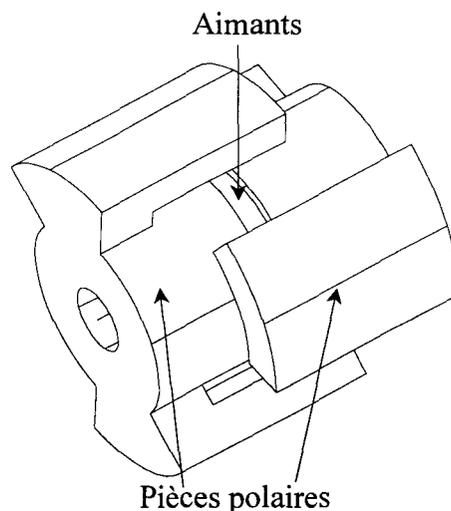


Figure III.19 : Représentation du rotor.

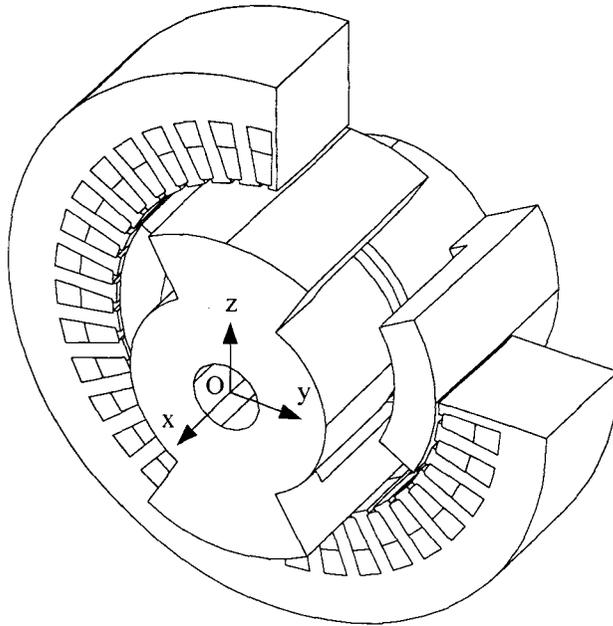


Figure III.20 : Représentation partielle de la machine étudiée.

Le stator est constitué de 36 encoches qui accueillent un bobinage triphasé à pas raccourci (1 à 8 sur 2 couches) formant deux paires de pôles. Ce type de bobinage est présenté sur la figure III.21. Une bobine est formée de 43 spires par demi encoches soit 516 spires au total.

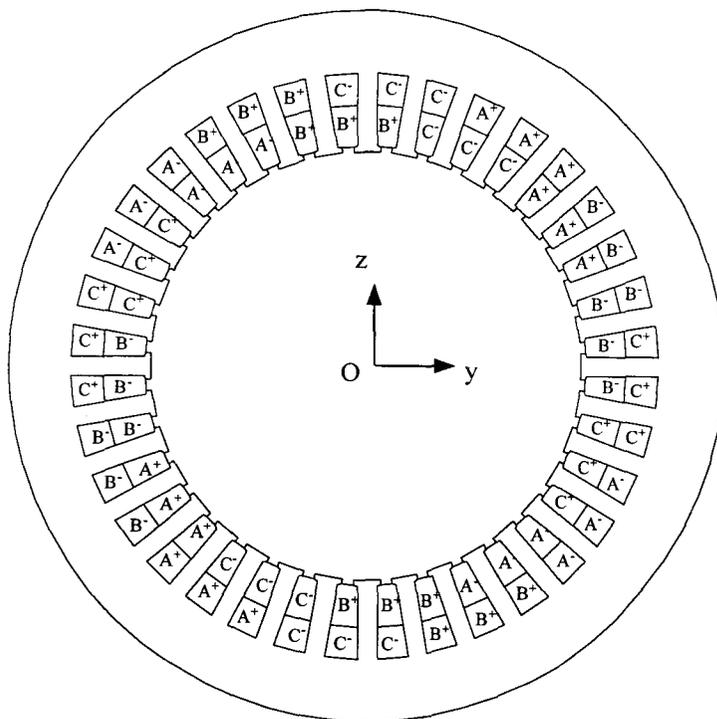


Figure III.21 : Bobinage du stator.

III.3.2 Modèle numérique

III.3.2.1 Prise en compte du mouvement

Pour déterminer précisément les caractéristiques (couple, f.e.m., inductances), il est nécessaire de prendre en compte le mouvement. En 3D plusieurs approches peuvent être envisagées [12][52-55]. Au L2EP [32][45], nous avons retenu, pour sa simplicité de mise en œuvre la surface de glissement qui est une extension en 3D de la ligne de glissement utilisée en 2D [56]. Cette méthode nécessite que le maillage soit conforme pour toutes les positions. Un maillage est dit conforme si aucune facette ne se chevauche [54]. Cela est assuré par un maillage régulier de la surface. Cette contrainte représente un des inconvénients majeurs de cette méthode.

Pour expliquer le principe de la méthode, considérons la ligne de glissement en 2D présentée sur la figure III.22 dans le cas des inconnues nodales. Le premier maillage correspond à la position initiale. Les nœuds impairs sont fixés et les nœuds pairs sont mobiles. En déplaçant les nœuds pairs d'un pas de maillage, sans changer la connectivité des éléments, on obtient un maillage déformé. Pour éviter cette déformation, les inconnues liées aux nœuds sont permutées. La connectivité élément-inconnue est ainsi modifiée entre chaque déplacement. Des conditions de périodicité ou d'antipériodicité sont appliquées pour les inconnues situées aux extrémités de la surface de glissement.

Comme le maillage de la surface de glissement est régulier, le pas de discrétisation spatiale $\Delta\theta$ est constant. La vitesse de rotation Ω_r de la machine est liée à la discrétisation temporelle par la relation :

$$\Delta\theta = \Omega_r \Delta t \quad (\text{III.11})$$

Pour un maillage donné, si on fixe la vitesse de rotation Ω_r on fixe alors le pas de temps Δt .

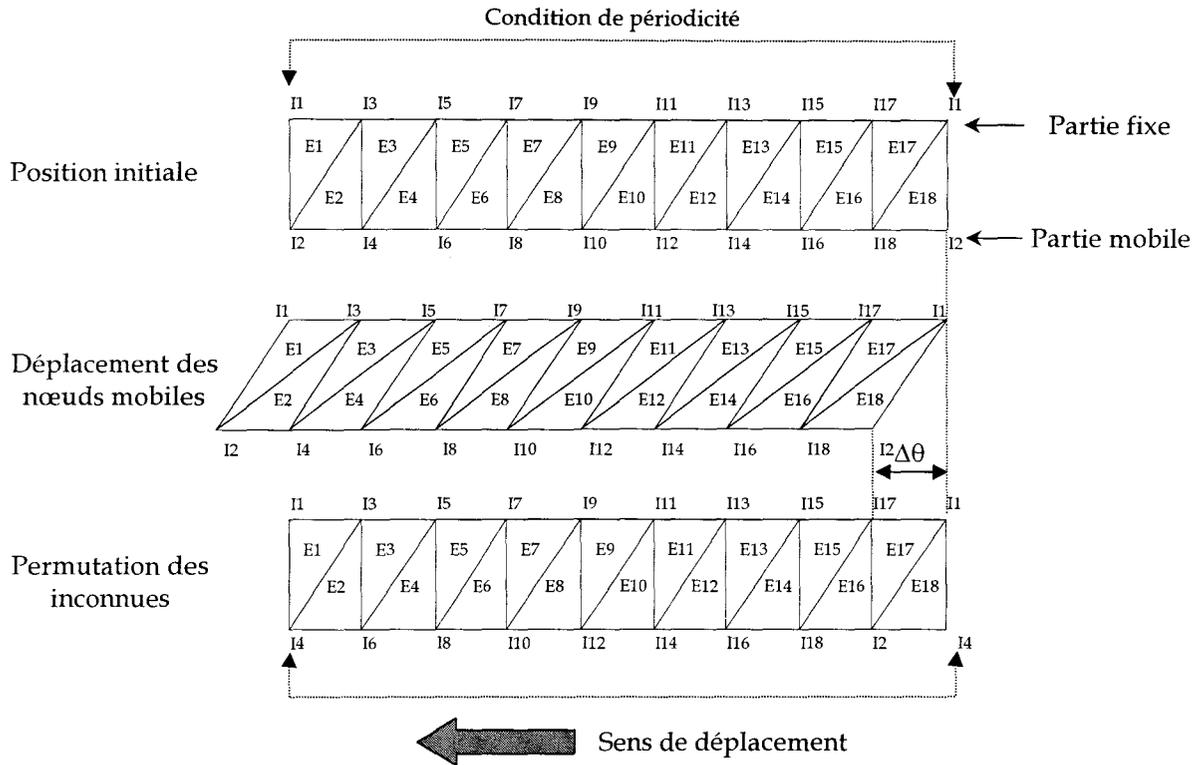


Figure III. 22. : connectivité éléments-inconnues nodales (formulation en potentiel scalaire).

III.3.2.2 Calcul des forces et du couple

Pour le calcul du couple électromagnétique, nous avons utilisé la méthode des travaux virtuels [57][58]. Elle consiste à dériver, par rapport à l'angle de rotation, l'énergie ou la co-énergie magnétique, avec respectivement B ou H constant.

$$C = \partial_{\theta} w|_{b=cte} \quad C = \partial_{\theta} w'|_{h=cte} \quad (III.12)$$

où w et w' représentent l'énergie et la co-énergie magnétique.

Dans le cas de l'analyse numérique, la discrétisation peut être obtenue en effectuant le calcul pour deux positions. Cette méthode engendre des erreurs sur le calcul des forces et nécessite deux solutions éléments finis [59]. Pour éviter ces problèmes, on utilise une méthode basée sur la dérivation locale de l'énergie ou de la co-énergie. Cela consiste à déformer les éléments d'une couche en déplaçant virtuellement les nœuds de ces derniers qui sont placés sur une surface Γ_s .

Pour une machine tournante, la couche d'éléments, sur laquelle le couple est calculé, est placée dans l'entrefer comme le montre la figure III.23. Toutefois, il faut éviter d'appliquer sur les mêmes nœuds le mouvement et le calcul du couple. En effet, les

irrégularités du maillage de la surface de glissement peuvent engendrer des erreurs numériques importantes lors de la déformation virtuelle des éléments. Pour illustrer ces propos, nous présentons sur la figure III.23 les éléments d'un entrefer maillé. La surface de glissement est placée côté stator. Les éléments déformés où l'on calcule le couple correspondent à tous les éléments de l'entrefer. Les nœuds virtuellement déplacés sont alors sur la surface du rotor.

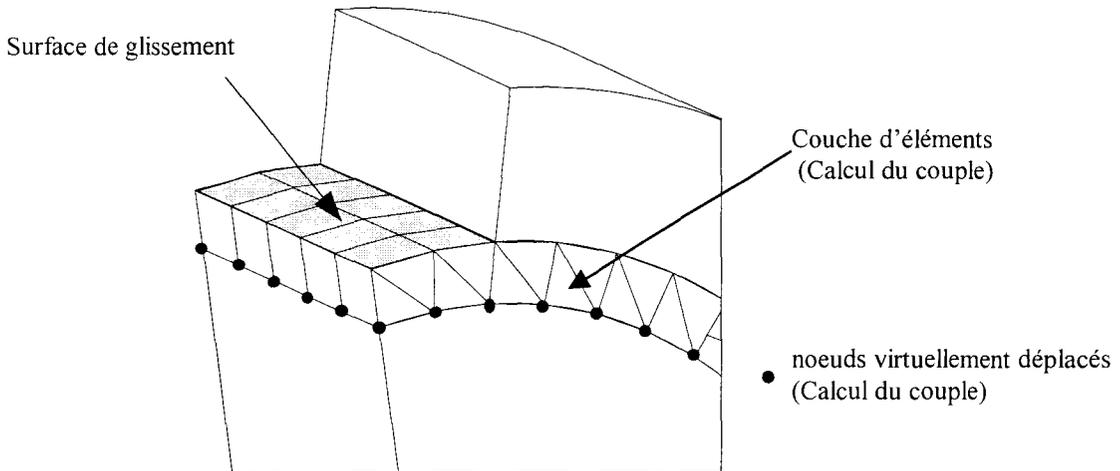


Figure III.23 : Mouvement et calcul du couple dans l'entrefer.

III.3.2.3 Le maillage

Le maillage a été réalisé à l'aide de prismes. En effet, ce type d'élément permet d'obtenir des facettes rectangulaires sur la surface de glissement. Dans ce cas, il n'y a aucune arête oblique sur la surface ce qui facilite la réalisation du maillage. Sur la figure III.24, nous présentons un détail du maillage de l'entrefer. On remarque la régularité du maillage sur la périphérie du rotor où se situe la surface de glissement. L'entrefer est maillé avec 6380 éléments sur 22 couches dans la direction axiale ce qui conduit à un pas angulaire $\Delta\theta=1.25^\circ$. A partir de la relation III.11, pour une vitesse donnée, on déduit le pas de temps de la discrétisation temporelle.

Les têtes de bobines ne sont pas prises en compte. Cependant, les enroulements du stator sont prolongés à l'extérieur et s'appuient sur la frontière Γ_b du maillage. Pour cet exemple, comme dans le cas du cube (cf. chapitre II), la détermination du vecteur N^d ne pose aucune difficulté, il est normal à la surface des bobines en contact avec la surface Γ_b (cf. figure III.25). Pour faciliter le maillage les six pastilles d'aimants ont été remplacées par un seul aimant présentant le même volume et la même épaisseur comme le montre la figure III.26. Il existe une symétrie mécanique et électrique selon le plan Oxy qui passe aux milieux

des griffes et des dents statoriques. Ainsi, seulement la moitié de la machine est modélisée avec des conditions d'antipériodicité. Le maillage est constitué de 116776 prismes sur 22 couches, 62606 nœuds 244551 arêtes et 298722 facettes. Une vue du maillage de la machine est représentée sur la figure III.27.

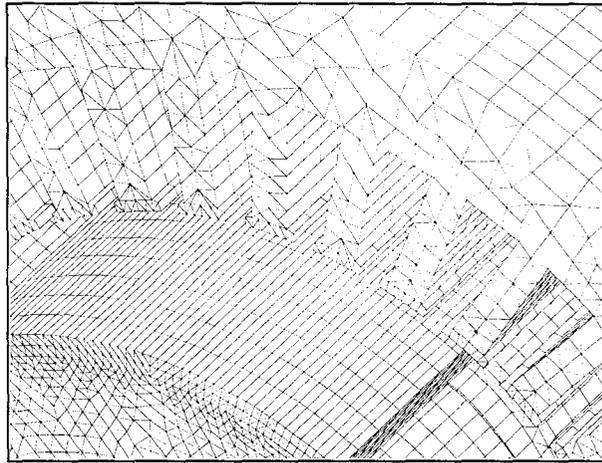


Figure III.24 : Détail du maillage (maillage régulier de la surface de glissement).

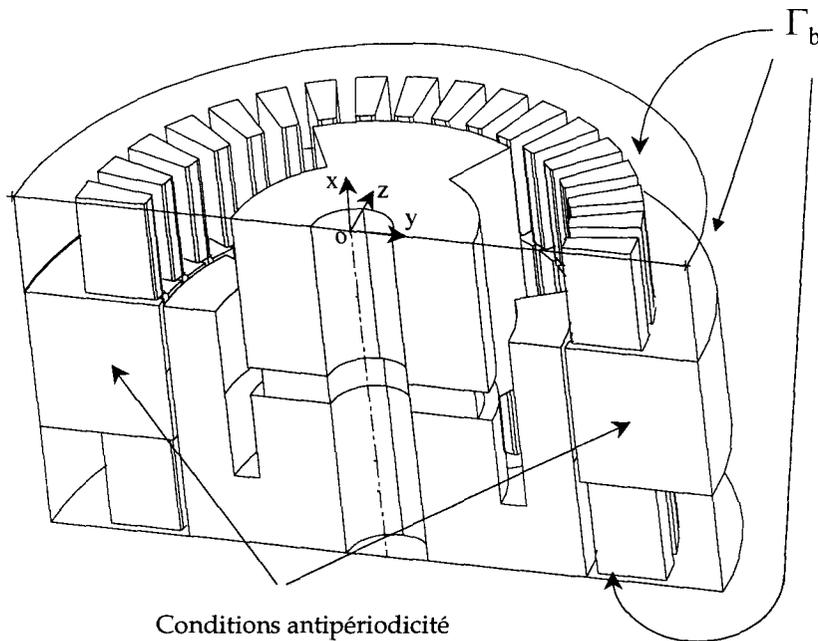


Figure III.25: Conditions aux limites.

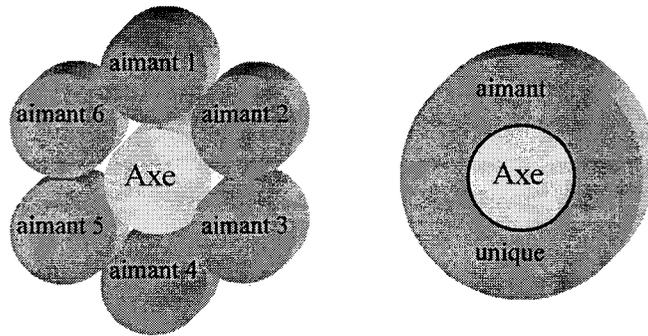


Figure III.26 : Modèle équivalent pour les aimants permanents.

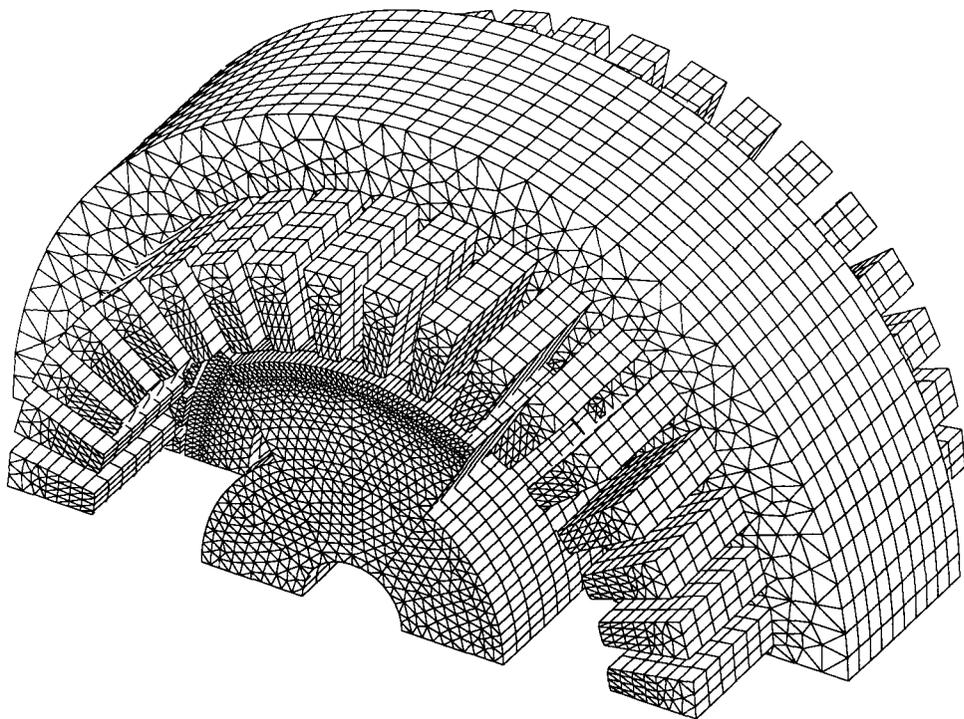


Figure III.27 : Maillage de la machine étudiée.

III.3.2.4 Choix de la formulation

Dans cette étude, les courants induits sont négligés dans les pièces polaires du rotor ainsi que dans les tôles du stator. Le choix de la formulation se limite donc aux formulations magnétostatiques en potentiels scalaire ou vecteur. Comme, pour les applications effectuées, les matériaux magnétiques saturent peu, nous avons opté pour la formulation en potentiel scalaire H_s - Ω . L'intérêt principal de cette formulation porte sur son faible nombre

d'inconnues 61870 contre environ 242000 dans le cas de la formulation en potentiel vecteur magnétique.

III.3.3 Répartition de l'induction dans l'entrefer

Nous avons d'abord étudié la distribution de l'induction normale dans l'entrefer. Afin de mesurer cette induction, une sonde à effet Hall a été placée sous une dent qui a été préalablement usinée comme le montre le détail de la figure III.28.a. La mesure a été effectuée quand la sonde est en face du milieu d'une griffe (figure III.28.b). Pour cette position, la valeur de l'induction mesurée est égale à 148 mT.

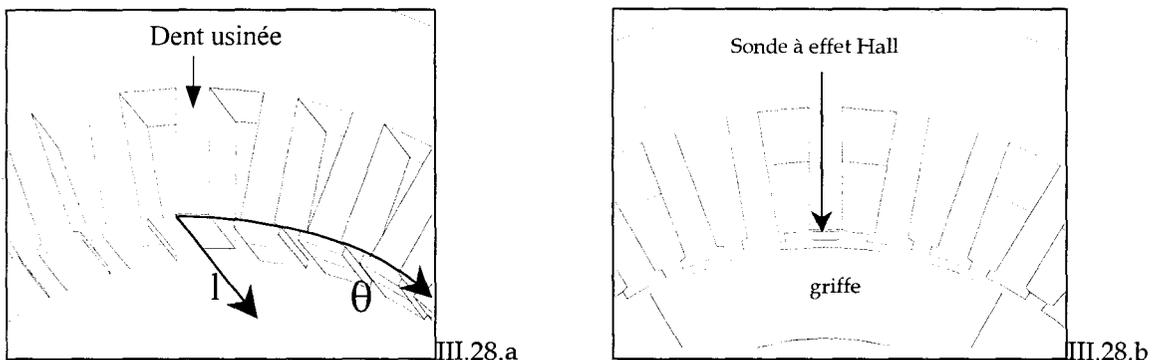


Figure III.28 : Dent usinée pour la mesure de l'induction dans l'entrefer et, position de la sonde à effet Hall

Nous avons calculé la distribution de l'induction normale dans l'entrefer en fonction de l'angle mécanique θ et de la profondeur du stator l (θ et l sont définis sur la figure III.28.a). Les résultats obtenus sont présentés sur la figure III.29. On peut remarquer la chute de la valeur de l'induction en face des encoches. De plus, pour un angle donné on constate une décroissance de la valeur de l'induction le long de la dent.

Sous la dent en $\theta=0$, la valeur mesurée par la sonde à effet Hall (148mT) ne correspond pas à la valeur calculée (250mT). Cela est dû à l'usinage de la dent qui double l'épaisseur de l'entrefer pour cette position. Un deuxième calcul a été effectué en prenant en compte l'usinage de la dent. Dans ces conditions, la distribution de l'induction est représentée sur la figure III.30. On constate alors, pour $\theta=0$, une forte diminution de l'induction (125 mT), plus proche de la valeur mesurée.

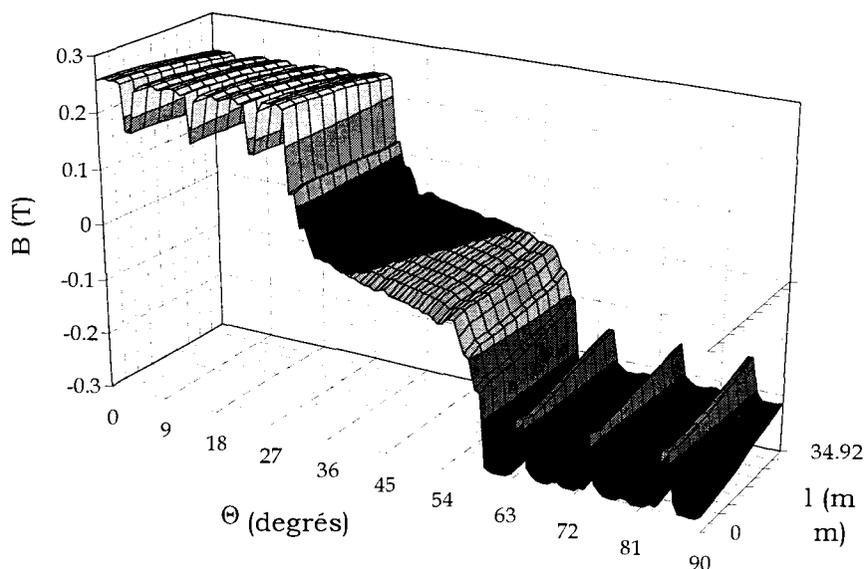


Figure III.29 : Répartition de la composante normale de l'induction dans l'entrefer en fonction de θ et l .

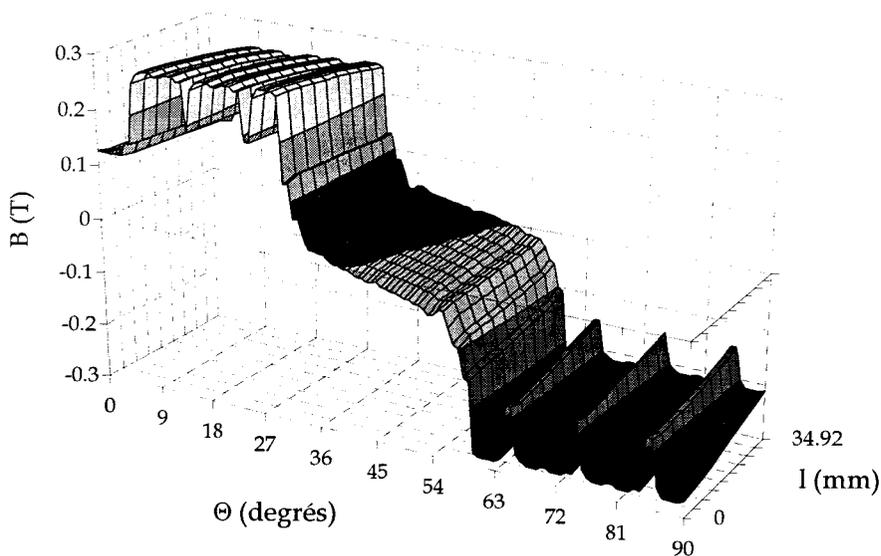


Figure III.30 : Répartition de la composante normale de l'induction dans l'entrefer en fonction de θ et l (dent usinée).

A titre indicatif, nous présentons trois tracés de champs (vue en 2D) qui permettent de mieux comprendre la circulation du champ magnétique dans la machine. La figure III.31.a montre le flux suivant le plan Oxz ($Oxyz$ est défini sur la figure III.25). Le retour du flux est présenté sur la figure III.31.b (plan Oxy). On remarque sur ces figures que le flux de fuite n'est pas négligeable. En effet, le flux produit par les aimants (2.13 mWb) est plus important que le flux sous un pôle (0.955 mWb). Les différentes fuites que l'on peut voir sur la figure III.31 font que la moitié du flux produit par les aimants est perdu.

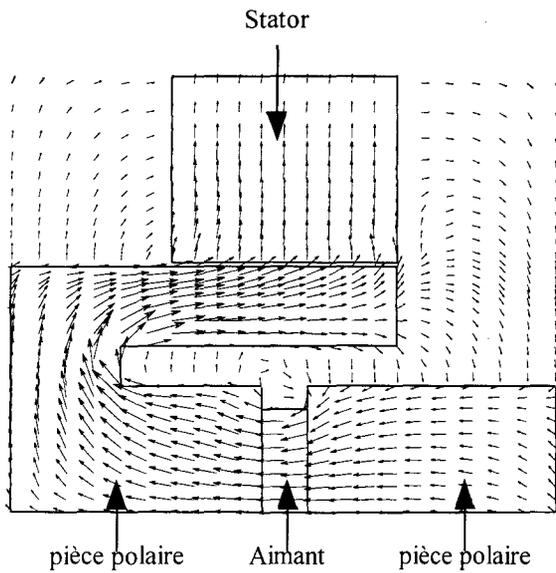


Figure III.31.a

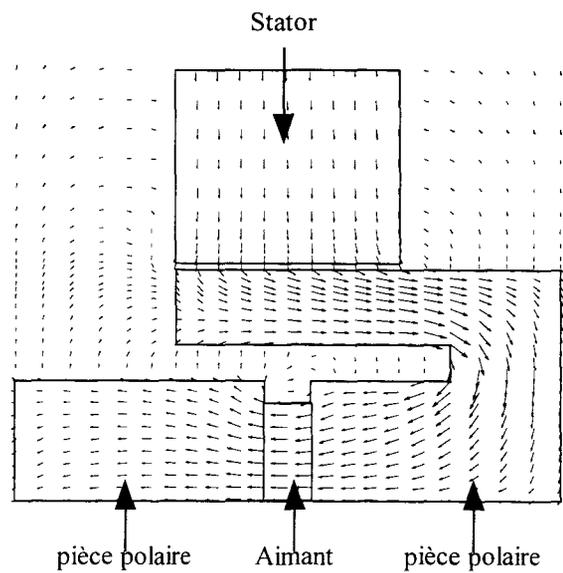


Figure III.31b

Figure III.31 : Distribution de l'induction magnétique dans les plans axiaux Oxz et Oxy au milieu de griffes.

La figure III.32 montre la distribution de l'induction dans la machine dans un plan radial Oyz situé à la frontière du stator ($l=0$ cf. figure III.28).

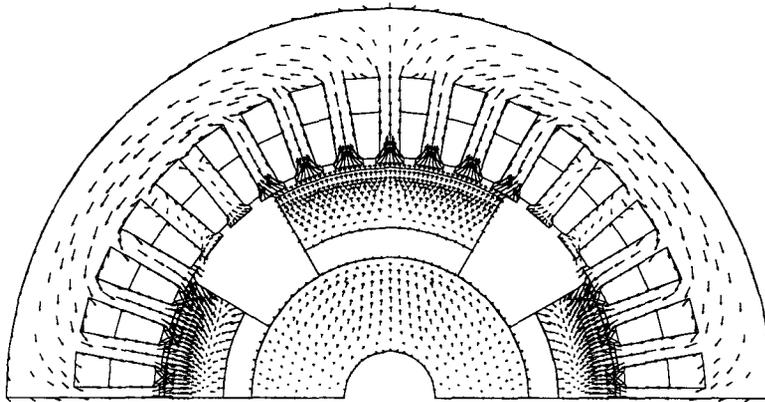
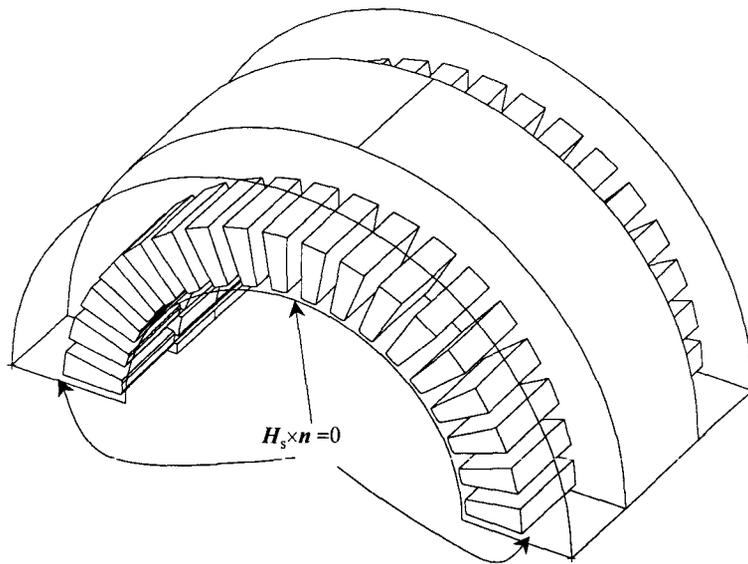
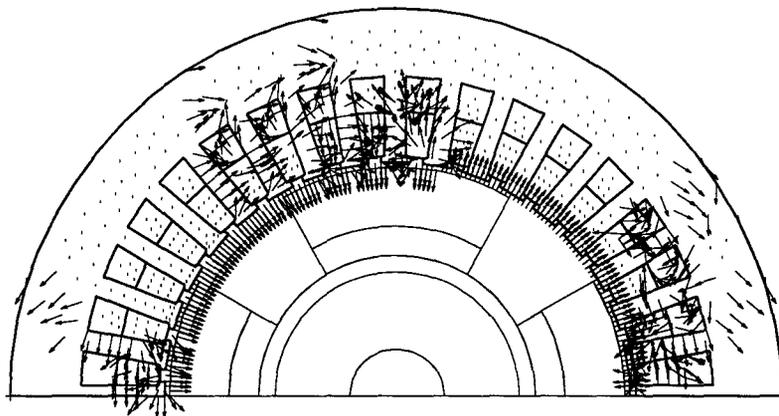


Figure III.32 : Distribution de l'induction magnétique dans les parties ferromagnétiques suivant le plan Oyz.

III.3.4 Calcul de l'inductance entre phases

Nous nous proposons de calculer la valeur l'inductance entre deux phases en fonction de la position du rotor. Pour ce faire il faut d'une part, déterminer la densité de courant via le vecteur N^d et, d'autre part, calculer le flux à l'aide du vecteur K^d . Dans notre

problème, les têtes de bobines n'étant pas prises en compte, les inducteurs sont rectilignes. Dans ce cas, le calcul du vecteur N^d est élémentaire. Il est inclus naturellement dans l'espace des éléments de facettes. Pour le vecteur K^d , il est possible de limiter son domaine à la partie de la machine située au-dessus de l'entrefer car le rotor est dépourvu de courant. En empêchant sa pénétration dans l'entrefer, on facilite la prise en compte du mouvement. En effet, dans le cas contraire, la prise en compte de la rotation nécessiterait un calcul du vecteur K^d pour chaque position. Le domaine d'étude, ainsi défini pour le vecteur K^d , est représenté sur la figure III.33. De plus, pour faciliter la prise en compte des conditions d'antipériodicité sur le plan oxy , la circulation de K^d sera nulle sur les arêtes appartenant à ce plan. Nous avons calculé de cette manière trois champs de vecteurs (un par phase). Nous présentons sur la figure III.34 la distribution du vecteur K^d correspondant à la phase B.

Figure III.33 : Domaine de calcul pour le vecteur K^d .Figure III.34 : Distribution du vecteur K^d pour la phase B.

Une fois les vecteurs K^d et N^d déterminés, nous pouvons imposer des courants dans les bobines (cf. formulation à courant imposé § 1.6.3). Pour calculer l'inductance entre phases, les bobines A et B sont montées en série et alimentées par un courant continu 'I' de 0.6A ($i_a = -i_b$). Dans ce cas la valeur de l'inductance 'L' entre phases est donnée par la relation :

$$L = \frac{\Phi_a - \Phi_b}{2I} \quad (\text{III.13})$$

où Φ_a et Φ_b représentent les flux magnétiques à travers les phases A et B. Ces flux sont calculés à l'aide de la relation I.78. Un premier calcul a été effectué sans le rotor. Dans ces conditions, la valeur de l'inductance est égale à 27.6 mH.

Du point de vue expérimentale, la machine a été alimentée par un courant sinusoïdal ($I = 0.6$ A). Un wattmètre numérique a permis de mesurer la puissance réactive. Dans ces conditions, la valeur de l'inductance obtenue est alors 31 mH. L'écart de 3.4 mH entre l'inductance mesurée et calculée est tout à fait acceptable d'autant plus que, dans le modèle, nous n'avons pas pris en compte les têtes de bobines.

En présence du rotor, l'inductance a été calculée en fonction de l'angle θ (cf. figure III.28). Des mesures ont également été effectuées en fonction θ dans les mêmes conditions que précédemment avec une faible fréquence pour limiter les courants induits. La figure III.35 permet de comparer les résultats expérimentaux à ceux obtenus par le calcul. On constate que l'inductance varie avec la position du fait de l'anisotropie magnétique du rotor. On peut noter aussi que les résultats obtenus par le calcul sont proches des résultats expérimentaux.

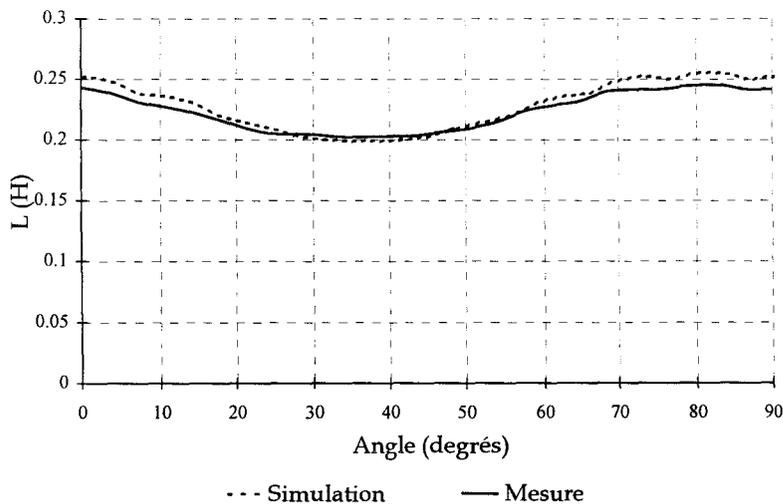


Figure III.35 : Evolution de $L(\theta)$ comparaison calcul, mesure.

III.3.5 Calcul du couple

Pour caractériser les machines qu'ils développent, les chercheurs du LEEPCI possèdent un banc de mesure de couple. Il comprend un ensemble moteur réducteur afin de pouvoir obtenir de faibles vitesses constantes d'entraînement. Le stator de la machine étudiée est monté en balance. Une jauge de contrainte, solidaire du bâti et du stator, permet de mesurer le couple par l'intermédiaire de la force de réaction qui s'oppose à la rotation du stator. La position angulaire du rotor est fournie par un codeur incrémental. Une carte d'acquisition analogique numérique permet de mesurer simultanément le couple et la position.

Pour la mesure du couple, la machine est alimentée par un courant continu de 1 A entre deux phases montées en série. Pour mesurer un couple statique elle est entraînée à faible vitesse (0.4 tr/min). Dans les mêmes conditions, le couple a été calculé en fonction de la position du rotor. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure III.36.

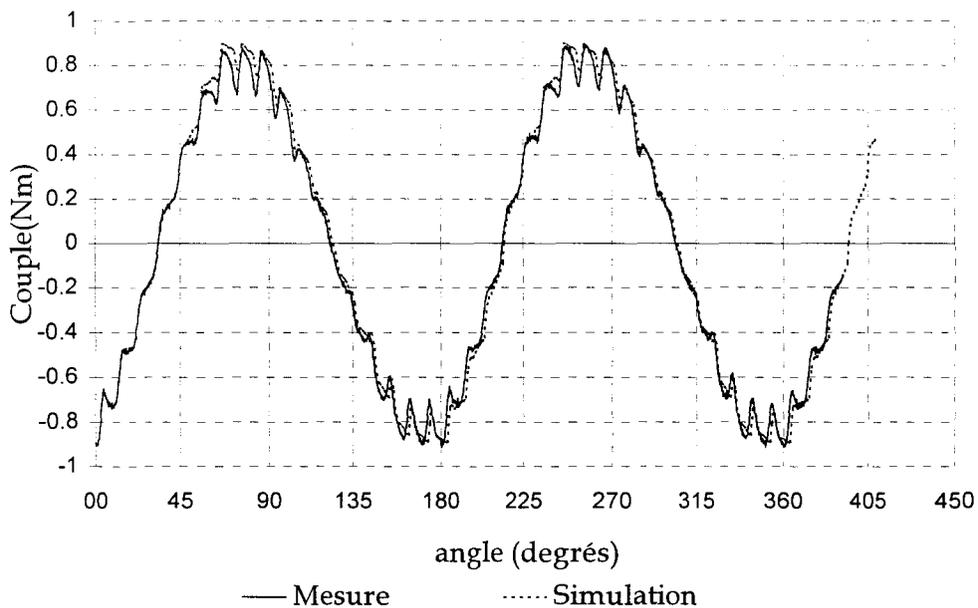


Figure III.36 : Evolution du couple statique en fonction θ , comparaison mesure et calcul.

A partir de cette figure, on peut noter une bonne concordance entre le calcul par éléments finis et l'expérience.

III.3.6 Essai à vide

Afin de valider le calcul de la force électromotrice (f.e.m.) entre phases, un essai à vide a été simulé pour une vitesse de rotation de 1000 tr/min. Les résultats des calculs sont comparés aux mesures sur la figure III.37.

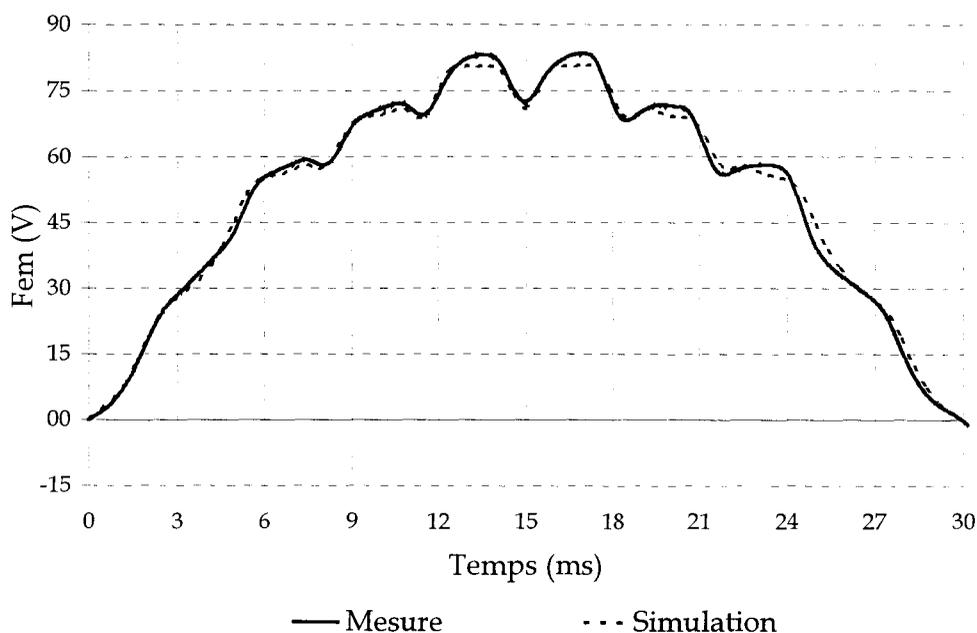


Figure III.37 : Evolution de la f.e.m. aux bornes d'une phase, comparaison mesure et calcul.

A partir des résultats présentés, on notera également la bonne concordance entre le calcul et l'expérience. Comme pour le couple (cf. figure III.36), on remarque l'importance des harmoniques des encoches du stator.

III.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre les modèles proposés ont été validés sur différents dispositifs électrotechniques. Pour la modélisation des inducteurs, l'exemple du transformateur triphasé montre que les méthodes de discrétisation de la densité de courant et du champ source sont robustes pour des structures complexes constituées de plusieurs enroulements. De plus, la comparaison entre les courants obtenus par les deux formulations en potentiels montre que la superposition de plusieurs champs sources n'influence pas la qualité de la

solution, et ceci quelque soit le comportement des matériaux magnétiques (linéaire ou non linéaire).

La modélisation de la machine à griffes à aimants permanents a permis de montrer l'intérêt et la fiabilité du calcul de champ. Comparés avec l'expérience, les résultats obtenus sur les grandeurs globales telles que le couple, les inductances et la f.e.m. sont tout à fait corrects. L'écart le plus important entre les mesures et les calculs apparaît sur l'inductance entre phases en l'absence du rotor. Enfin, on peut cependant noter, que du fait de l'importance de l'entrefer, les erreurs de modélisation, qui portent généralement sur les caractéristiques des matériaux ont pour cet exemple des conséquences réduites.

Conclusion générale

Dans cette étude, outre la modélisation de systèmes électrotechniques, nous nous sommes intéressés à la prise en compte des termes sources inducteurs.

Pour mener à bien ce travail, nous avons étudié, dans le domaine continu, la structure du modèle mathématique que constituent les équations de Maxwell associées aux lois de comportement des matériaux et aux conditions limites. Nous avons présenté une synthèse des formulations en potentiels. Une fois la structure ainsi définie, nous avons discrétisé les grandeurs locales et les opérateurs en utilisant les éléments de Whitney qui représentent une copie discrète du diagramme de Tonti. Il ressort de cette discrétisation que les grandeurs locales appartiennent à des espaces bien définis. A titre d'exemple, les termes sources tels que le champ et la densité de courant se décomposent respectivement dans l'espace des éléments d'arêtes et de facettes.

Nous avons ensuite, développé une méthode permettant de décomposer la densité de courant dans l'espace des éléments de facettes. Cette méthode est basée sur un 'arbre de facettes' dont on a présenté les similitudes de construction avec l'arbre d'arêtes. En effet, en ajoutant un élément qui symbolise l'extérieur du maillage, nous avons montré qu'il est possible d'établir un graphe élément-facette et de construire un 'arbre de facettes'. Nous avons ainsi discrétisé la densité de courant, avec une procédure itérative qui converge systématiquement, sans avoir recours à un calcul par la méthode des éléments finis. De plus, à partir de cette densité de courant discrétisée, il est possible de calculer un champ source dans l'espace des éléments d'arêtes, à l'aide d'une technique basée également sur la construction d'un arbre.

Dans la plupart des exemples que nous avons traités, le domaine du champ source

n'est pas limité. Toutefois cela est envisageable en introduisant des conditions aux limites judicieuses permettant de vérifier le théorème d'Ampère. Nous avons aussi déterminé avec cette technique les vecteurs N^d et K^d permettant le couplage des formulations avec les grandeurs globales.

La méthode proposée pour la prise en compte des inducteurs a été utilisée dans le cas de l'électrocinétique, de la magnétostatique et de la magnétodynamique. Outre, le fait que cette méthode soit robuste, nous avons montré que le choix de l'arbre de facettes influe peu sur la qualité de la solution. Dans les cas statiques, nous avons vérifié que les formulations en potentiel vecteur étaient 'auto-jaugées' puisque la densité de courant dans les inducteurs est à divergence nulle.

Par ailleurs, pour la formulation en potentiel scalaire magnétique, nous avons montré que la solution ne dépend pas du choix de l'arbre utilisé pour déterminer le champ source dans l'espace des éléments d'arêtes. De plus, pour un maillage donné, lorsque l'on utilise ce champ source, les résultats obtenus avec la formulation en potentiel scalaire sont comparables avec ceux de la formulation en A . Enfin, la méthode systématique proposée rend utilisable la formulation en Ω pour des dispositifs dont les inducteurs présentent des géométries complexes. Cependant, la prise en compte de la non-linéarité des matériaux magnétiques reste le point faible de cette formulation. Afin de faciliter la convergence, nous avons proposé une méthode en couplant l'algorithme du point fixe avec celui de la substitution. Toutefois, il serait intéressant de coupler la méthode du point fixe à celle de Newton-Raphson afin d'obtenir un gain sur le nombre d'itérations.

La modélisation d'une machine à griffes à aimants permanents avec la formulation en potentiel scalaire magnétique a été effectuée. Les résultats du calcul portant sur les grandeurs locales (induction dans l'entrefer) et globales (couple, f.e.m., inductances) qui sont proches des résultats expérimentaux, montrent les bonnes performances du modèle. Cependant, les têtes de bobines n'ont pas été modélisées. La prochaine étape consistera à prendre en compte la géométrie de ces têtes de bobines, cela semble possible avec la méthode de discrétisation proposée pour les inducteurs.

Annexes

A.1 Condition de Jauge $\mathbf{U} \cdot \mathbf{w}$

Soit un champ de vecteur \mathbf{V} défini par $\text{div}\mathbf{V}=0$, on a alors \mathbf{V} qui dérive d'un potentiel vecteur \mathbf{U} tel que $\text{rot}\mathbf{U}=\mathbf{V}$ (cf. équation I.23). Cependant si on définit \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 tels que leurs rotationnels soient égales à \mathbf{V} , on a alors d'après I.22

$$\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2 = \text{grad}\lambda \quad (\text{A1.1})$$

Cette relation montre que \mathbf{U} est défini à un gradient près. Pour avoir l'unicité de la solution il est donc nécessaire de fixer le potentiel scalaire λ .

Considérons maintenant un champ de vecteur \mathbf{w} dont les lignes de champs ne se referment pas et sont telles qu'elles relient tous les points du domaine \mathcal{D} . Posons la condition :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{w} &= f(\mathbf{r}) \\ \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{w} &= f(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{A1.2})$$

Les relations A1.1 et A1.2 nous montrent que

$$\text{grad}\lambda \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (\text{A1.3})$$

Cette condition revient à fixer λ . En effet si on calcule la circulation le long du chemin $\Gamma_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}}$ qui s'écrit

$$\Gamma_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}} = \int_{\mathbf{P}}^{\mathbf{Q}} \text{grad}\lambda \cdot d\mathbf{l} = \lambda_{\mathbf{Q}} - \lambda_{\mathbf{P}} \quad (\text{A1.4})$$

comme le champ \mathbf{w} peut relier tous les points du maillage, il est possible de choisir la circulation $\Gamma_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}}$ le long de \mathbf{w} . Or l'équation A1.3 entraîne que cette circulation est nulle donc , $\Gamma_{\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}}=0$ ce qui impose $\lambda_{\mathbf{P}}=\lambda_{\mathbf{Q}}$ et par conséquent fixe λ et jauge \mathbf{U} .

A.2 Compatibilité de la formulation en potentiel vecteur électrique

La forme faible de la formulation en potentiel vecteur électrique s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \text{rot} w_a \cdot \text{rot} T \, d\mathcal{D} = - \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \text{rot} w_a \cdot \text{rot} H_s \, d\mathcal{D} \quad \forall w_a \in W^1 \quad (\text{A3.1})$$

Si on exprime le terme source à partir de la densité de courant discrétisée J_0^d

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \text{rot} w_a \cdot \text{rot} T \, d\mathcal{D} = - \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\sigma} \text{rot} w_a \cdot J_0^d \, d\mathcal{D} \quad \forall w_a \in W^1 \quad (\text{A3.2})$$

On peut écrire cette équation à partir des matrices d'incidences R_{fa} arête-facette présentées au paragraphe II.2.2.

$$R_{fa}^t M R_{fa} T = R_{fa}^t M J_0^d \quad (\text{A3.3})$$

avec la matrice de masse M de dimensions $F \times F$, dont les termes vérifient la relation suivante :

$$m_{i,j} = \int_{\mathcal{D}} \sigma^{-1} w_{fi} w_{fk} \, d\mathcal{D} \quad (\text{A3.4})$$

Dans ce cas, en utilisant le méthode du gradient conjugué pour résoudre le système A3.3, la condition de jauge apparaît implicitement 'jaugée' sous la forme de la conservation de la divergence de T [10].

A.3 Influence du champ source dans la formulation Ω .

Nous pouvons reformuler l'équation II.58 en utilisant les matrices d'incidence :

$$\mathbf{G}_{an}^t \mathbf{M}_a \mathbf{G}_{an} \Omega = \mathbf{G}_{an}^t \mathbf{M}_a \mathbf{H}_s \quad (\text{A2.1})$$

\mathbf{G} est la matrice d'incidence arête-noeud.

\mathbf{M}_a est la matrice de masse qui comprend la géométrie et les caractéristiques magnétiques du problème. Cette matrice est carré ($n_a \times n_a$) et ces termes ont pour expression :

$$m_{i,j} = \int_{\mathcal{D}} \mu w_{ai} w_{aj} d\mathcal{D} \quad (\text{A2.2})$$

w_{ai} et w_{aj} étant les fonctions d'interpolations sur les arêtes i,j .

Nous pouvons écrire la formulation en potentiel scalaire sous cette forme si $\mathbf{H}_s \in W^1$ sinon on ne peut faire apparaître naturellement la matrice de masse dans le terme de droite.

Considérons deux champs sources \mathbf{H}_s et \mathbf{H}_s' appartenant à l'espace des éléments d'arêtes, alors il existe une fonction α appartenant à l'espace des éléments nodaux telle que :

$$\mathbf{H}_s - \mathbf{H}_s' = \mathbf{G}_{an} \alpha \quad (\text{A2.3})$$

On appelle Ω et Ω' (resp. \mathbf{H} et \mathbf{H}') les deux potentiels scalaires (resp. champs magnétiques) solutions relatives à \mathbf{H}_s et \mathbf{H}_s' . Alors, en utilisant la relation, on obtient :

$$\mathbf{G}_{an}^t \mathbf{M}_a \mathbf{G}_{an} (\Omega - \Omega' - \alpha) = 0 \quad (\text{A2.4})$$

ce qui conduit à :

$$(\Omega - \Omega' - \alpha) = C^{ste} \quad (\text{A2.5})$$

d'où :

$$\mathbf{H} - \mathbf{H}' = \mathbf{H}_s - \mathbf{G}_{an} \Omega - (\mathbf{H}_s' - \mathbf{G}_{an} \Omega') \quad (\text{A2.6})$$

comme :

$$\mathbf{G}_{an} (\Omega - \Omega' + \alpha) = 0 \quad (\text{A2.7})$$

donc

$$\mathbf{H} - \mathbf{H}' = 0 \quad (\text{A2.8})$$

ce qui montre que le champ magnétique solution du problème est indépendant du choix du champ source \mathbf{H}_s appartenant à l'espace des éléments d'arêtes.

Références

- [1] **A.Bossavit**, "Electromagnétisme en vue de la modélisation", édition *Springer-Verlag*, 1993.
- [2] **P.Dular**, "Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans les systèmes tridimensionnels non linéaires", *Thèse de doctorat*, Université de Liège, Mai 1994.
- [3] **J.P.Webb and B.Forghani**, "A single scalar potential method for 3D magnetostatics using edge elements", *IEEE Trans. Mag.*, vol 25, no 5, pp 4126-4128, 1989.
- [4] **O.Biro, K.Preis, G.Vrisk, K.R.Richter, I.Ticar**, "Computation of 3D magnetostatic fields using a reduced scalar potential", *IEEE Trans. Mag.*, vol.29, no.2, pp 1329-1332, 1993.
- [5] **A.Kameari, K.Koganezawa**, "Convergence of ICCG method in FEM using edge elements without gauge condition", *IEEE Trans. Mag.*, vol 33, pp 1223-1226, 1997.
- [6] **K. Fujiwara, T. Nakata, N. Takahashi, H. Ohashi**, "On the continuity of the magnetizing current density in 3D magnetic field analysis with edge element", *IEEE Trans. Mag.*, vol 31, pp 1364-1367, 1995.
- [7] **A.G. Kladas and J.A. Tegopoulos**, "A new potential formulation for 3D magnetostatic necessitating no source field computation", *IEEE Trans. Mag.*, vol 28, no 2, pp 1103-1106, 1992.
- [8] **P. Dular, F. Robert, J.F. Remacle, M. Umé, W. Legros**, "Computation of the source current density in inductors of any shape using a mixed formulation", *Third International Workshop on Electric and Magnetic Fields*, pp 107-112, Liège 1996.
- [9] **S. Bouissou**, "Comparaison des formulations en potentiel, pour la résolution numérique en 3D des équations magnétiques couplées aux équations du circuit électrique", *Thèse de doctorat*, Université de Paris VI, Juillet 1994.
- [10] **Z. Ren**, "Influence of R.H.S on the convergence behaviour of curl-curl equation", *IEEE Trans. Mag.*, vol 32, pp 655-658, 1996.
- [11] **T. Dreher, G. Meunier** "3D modelling of electromagnetic coil fed by alternating voltage sources", *IEEE Trans. Mag.*, vol 29, no 2, pp 1341-1344, March 1993.
- [12] **C. Golovanov**, "Développement de formulations éléments finis 3D en potentiel vecteur magnétique : application à la simulation de dispositifs électromagnétiques en mouvement", *These de doctorat*, INPG, 1997.
- [13] **P.Dular and W Legros, A. Nicolet**, "Coupling of local and global quantities in various finite element formulations and its application to electrostatics, magnetostatics and magnetodynamics", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 34, pp 3078-381, 1998.

- [14] **E.Durand**, "Magnétostatique", *Edition Masson et Cie*, 1968.
- [15] **F.Fournet**, "Electromagnétisme à partir des équations locales", *Edition Masson*, 1985.
- [16] **Z.Ren**, "Contribution à la modélisation des systèmes électromagnétiques tridimensionnels. Etude des formulations duales. Modélisation des systèmes électromagnétique-mécanique couplés", *Habilitation à diriger des recherches*, Université Paris XI, Orsay, Mars 1997.
- [17] **A.Nicolet**, "Contribution à la modélisation des systèmes électromagnétiques", *Habilitation à diriger des recherches*, Université d'Aix Marseille, Janvier 1996.
- [18] **Z.Ren**, "Auto-gauging of vector potential by iterative solver numerical evidence", *International workshop on electric and magnetic fields*, pp 119-124, Liège 1996.
- [19] **P.J. Leonard and D.Rodger**, "A new method for cutting the magnetic scalar potential in multiplying connected eddy current problem", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 25, no 5, pp 471-474, 1989.
- [20] **A.Voudras and K.J Binns**, "Magnetostatics with scalar potentials in multiply connected regions", *IEE Proceedings*, vol. 136, pt A, no 2, pp 49-54, 1989.
- [21] **A.Bossavit**, "Whitney's forms : a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism" *IEE Proceedings*, Vol 135, Part A, No 8, pp 493-499, November 1988.
- [22] **A.Bossavit**, "A rationale for edge elements in 3D fields computations" *IEEE Trans. Mag.*, vol. 24, no 1, pp 74-79, January 1988.
- [23] **O. Biro, K. Preis, W. Renhart, G. Vrisk, K. R. Richter**, "Computation of a 3D current driven skin effect problems using a current vector potential", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 29, pp 1325-1328, 1993.
- [24] **A. Albanese and G. Rubinacci**, "Magnetostatic field computations in terms of two components vector potentials", *International journal for the numerical methods in engineering*, vol 29, pp 515-532, 1990.
- [25] **T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara and Y. Okada**, "Improvement of T- Ω method for 3D eddy currents analysis", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 24, no 1, pp 274-277, 1988.
- [26] **H. T. Luong**, "Amélioration de la formulation en potentiel scalaire magnétique et généralisation au couplage entre équations de champ et de circuit électrique", *Thèse de doctorat*, INPG, Septembre 1997.
- [27] **O.Biro and K.Preis**, "On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three dimensional eddy currents" *IEEE Trans. Mag.*, vol.25, no 4, pp 3145-3159, 1989.

- [28] **F.Bouillault**, "Contribution à la modélisation numérique des systèmes électromagnétiques régis par les équations de la magnétodynamique" *Habilitation à diriger les recherches*, Université de Paris XI Orsay, Juin 1991.
- [29] **D. Rodger and P.J Leonard**, "Modelling voltage forced using the reduced scalar potential method", *IEEE Trans Mag*, vol. 28, no .2 ,pp 1615-1618, March 1992.
- [30] **S.Bouissou, F.Piriou**, "Study 3D formulations in potential for coupling magnetic and electric circuit equations" *Internationnal workshop on electric and magnetic fields*, pp 6.1-6.5 Liège, Septembre 1992.
- [31] **T.Dreher, G Meunier**, "3D line current model of coils and external circuits", *IEEE Trans Mag*, vol. 31, pp 1853-1856, May 1995.
- [32] **B.Boualem**, "Contribution à la modélisation des systèmes électrotechnique à l'aide des formulations en potentiels: Application la machine asynchrone", *Thèse de doctorat*, Université de Lille, Juillet 1997.
- [33] **F. Piriou, A. Razek**, "Finite element analysis in electromagnetic systems accounting for electrical circuit", *IEEE Trans Mag*, vol. 29, pp 1669-1675, 1993.
- [34] **J.L.Coulomb, F.X.Zgainski, Y. Maréchal**, "A pyramidal element to link hexahedral, prismatic and tetrahedral edge finite elements", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 33, pp 1362-1365, 1997.
- [35] **G. Dhatt, G. Touzot**, "Une présentation de la méthode des éléments finis ", *Collection Universitaire de Compiègne*, Editeur Maloine, 1984.
- [36] **N.A.Golias, T.D. Tsiboukis** "Magnetostatics with edge element : a numerical investigation in the choice of the tree", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 30, no .5,pp 2877-2880, 1994.
- [37] **M. Gondran, M. Minoux**, "Graphes et algorithmes", *Collection des études et recherches de EDF*, Editions Eyrolles,1995.
- [38] **Y.Le Menach, S.Clénet, F.Piriou**, "Determination and utilization of the source field in 3D magnetostatic problems", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 34, pp 2509-2512, 1998.
- [39] **Y. Le Ménach, S. Clénet, F. Piriou**, "Influence du champ source dans la formulation en potentiel scalaire", *NUMELEC'97*, pp 272-273, Lyon 1997.
- [40] **C.Li**, "Modélisation 3D des systèmes électromagnétiques à l'aide des formulations duales et complémentaires: application au maillage auto-adaptatif", *Thèse de doctorat*, Université de Paris VI, 1993.
- [41] **F.Marmin**, "Contribution à l'étude des erreurs numériques due à la méthode des éléments finis: application aux problèmes statiques d'électromagnétisme 2D", *Thèse de*

- doctorat*, Université de Lille, Mai 1998.
- [42] **A.R. Pimchick, P.P Silvester**, "Error estimation for automatic adaptative element mesh generation", *IEEE Trans Mag.*, vol. 21 ,pp 2551-2554, 1985.
- [43] **P.J Leonard et D.Rodger**, "Voltage forced coils for 3D finite element method electromagnetic model", *IEEE Trans. Mag.*, vol 24, pp 2579-2581, 1988.
- [44] **S.Bouissou et F.Piriou**, "Study of 3D formulations to model electromagnetic devices", *IEEE Trans. Mag*, vol 30, pp 3228-3231, 1994.
- [45] **P. Dziwniel**, "Etude des structures électromagnétiques présentant des directions d'invariance géométrique : application à la machine asynchrone à encoches inclinées" *Thèse de doctorat* ,Université de Lille, Juin 1998.
- [46] **A. Marrocco**, "Analyse numérique des problèmes en électrotechniques", *Ann. Sc. Math, Québec*, vol. 1, pp271-296, 1977.
- [47] **V. Ionita, B. Cranganu-Cretu, B. Iona**, "Quasi-stationary magnetic field computation in Hysteretic Media", *IEEE Trans. Mag.*, vol 32, no 3, pp 1128-1131, May. 1996
- [48] **M. Chiampi, D. Chiarabaglio, V Ionita**, "Non-linear field solutions through the fixed point method", *IASTED Int. Symposium. Modelling. Identification and control*, Innsbruck, pp 87-90, 1993.
- [49] **M. Chiampi, D. Chiarabaglio**, "A hysteretic periodic magnetic field solution using Preisach model and fixed point technique", *IEEE Trans. Mag.*, vol 31, no 6, pp 3548-3350, 1995.
- [50] **N. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara, T. Nakata, N. Okamoto and K. Muramastu.**, "Improvement of the convergence characteristics of Newton-Raphson method for non linear magnetic field analysis", *IEEE Trans. Mag.*, vol 28, pp 1048-1051, 1992.
- [51] **S. Clénet**, "Compte rendu de la visite au LEEPCI", *rapport interne au L2EP*, septembre 1998.
- [52] **D.Rodger, H. C. Lai and P.J Leonard**, "Coupled elements for problems involving movement", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 26, no 2, pp 548-550, 1990.
- [53] **Y. Kawase, T. Yamaguchi, and Y. Hayashi**, "Analysis of cogging torque of permanent magnet motor by 3D finite element method", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 31, no 3, pp 2044-2047, 1995.
- [54] **N. Gasmî**, " Contribution à la modélisation des phénomènes électriques-magnétiques couplés et du mouvement pour les systèmes électromagnétiques en 3D", *Thèse de doctorat*, Université de Paris VI, 1996.
- [55] **B.Boualem and F.Piriou**, "Numerical models for rotor cage induction machines using

- finite elements methods", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 34, no 5, pp 3202-3205, 1998.
- [56] **T.W.Preston, A.B.J Reece, P.S. Sangha**, "Induction motor analysis by time stepping techniques", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 24, pp 471-474, 1988.
- [57] **J-L Coulomb**, "A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetics forces, torques and stiffnes", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 19, pp 2514-2519, 1983.
- [58] **Z.Ren and A.Razek**, "Local force computation in deformable bodies using edge elements", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 20, pp 1212-1215, 1992.
- [59] **J-L Coulomb and G Meunier**, "Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation", *IEEE Trans. Mag.*, vol. 20, pp 1894-1896, 1984.
- [60] **Y. Le Ménach, S. Clénet, F. Piriou**, "3D Compatible potential formulatios coupled to electrical circuits", *Proceedings of XV EPNC*, pp 14-17, Liège, Sept. 1998.

