

Université des Sciences et Technologies de Lille I

 N° d'ordre : 2470

-the 20 000

402

Calcul des forts subis par les éoliennes de moy et forte puissance

THÈSE



présentée le 22 janvier 1999

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille I (spécialité mécanique)

par

Pascal BERLU

030 173645 8

Composition	du	jury	

Président :

Rapporteurs :

M. D. BUISINE	Université des Sciences et Technologies de Lille I
M. L. JÉZÉQUEL	École Centrale de Lyon

Examinateurs :	Mme S. DEGALLAIX
	M. F. ARMAND
	M. G. CAIGNAERT
	M. B. PALUCH
	M. E. SZÉCHÉNYI

M. R. OHAYON

Conservatoire National des Arts et Métiers

École Centrale de Lille, directeur de thèse Agence De l'Environnement et de la Maîtrise des Énergies École Nationale des Arts et Métiers Office National des Études et Recherches Aérospatiales Conservatoire National des Arts et Métiers

Mis en page avec la classe thloria.

.

Remerciements

Les travaux de thèse ont été réalisés à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille et financés à hauteur égale par l'Agence De l'Environnement et De la Maîtrise de l'Énergie et par la Région Nord - Pas de Calais. A ce titre, je tiens à remercier:

- M. Bernard Paluch, responsable scientifique de la thèse et à l'origine du sujet. Il fut donc à ce chef un intervenant privilégié dans la bonne conduite de mes travaux ainsi qu'un interlocuteur précieux. Je le remercie également pour les méthodes de travail ainsi que les connaissances qu'il a su me communiquer et le naturel de nos rapports qui m'ont permis de passer ces trois années dans une ambiance tout à fait agréable,
- Mme Degallaix, directeur de thèse, pour la confiance et le soutien qu'elle a bien voulu m'accorder,
- M. Francis Dupriez, directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille, pour avoir mis à ma disposition tous les moyens nécessaires à la bonne conduite de mes travaux,
- M. Francis Armand, ingénieur de l'Agence de L'Environnement et De la Maîtrise de l'Énergie, pour sa confiance et son action en faveur de la poursuite de ma carrière professionnelle dans le secteur éolien pour lequel je ressens une réelle passion,
- Mme Maigrot et Mme Lesne, respectivement du service de documentation de l'Agence de L'Environnement et De la Maîtrise de l'Énergie (centre de Valbonne) et de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille, pour les recherches documentaires précieuses qu'elles ont effectuées et qui ont contribué à la réussite de ce travail,
- le service informatique de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille, pour avoir répondu aux problèmes techniques auxquels j'ai pu être confronté,
- tout le personnel de l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille pour leur accueil particulièrement chaleureux,
- et enfin, les personnes qui sont devenues plus que des collègues de travail et qui ont contribué de près, comme de loin, à me laisser un très bon souvenir de ces trois années passées dans le ch'Nord en leur compagnie.

A mes grands-parents, A mes parents.

Well, she's walking through the clouds with a circus mind that's running wild.

Butterflies and zebras and moonbeams and fairy tales (talking) That's all she ever thinks about ... Riding with the wind.

When I'm sad she comes to me with thousand smiles she gives to me free.

It's alright, she says, it's alright, take anything you want from me, anything.

Fly on little wing.

"Little wing" Words by Jimi HENDRIX © Bella Godiva Music

•

Résumé

Les éoliennes de grande taille sont des systèmes mécaniques complexes composés de corps flexibles soumis à des efforts en grande partie aléatoires. Ces machines peuvent être classées dans la catégorie des systèmes souples polyarticulés. La majorité des codes de calcul des efforts subis par les éoliennes développés jusqu'alors, se sont surtout focalisés sur la prédiction des efforts aérodynamiques s'exerçant sur le rotor. En outre, ils adoptent très souvent des hypothèses trop simplificatrices sur le comportement dynamique de ce type de machine. Cette thèse s'efforce de combler cette lacune, en proposant une démarche de calcul principalement fondée sur les formalismes récents, relatifs à l'étude dynamique des systèmes souples polyarticulés. L'application du formalisme de Kane et d'un schéma topologique arborescent débouche sur une écriture récursive des équations de la dynamique. adaptée à une transposition algorithmique du problème. Les souplesses des différents corps sont introduites par le biais de leur représentation modale. Les pales constituant la partie principale de la machine, leur représentation modale doit refléter leur comportement réel. Par conséquent, elle découle d'une modélisation éléments finis de type poutre, prenant en compte leur géométrie complexe ainsi que l'anisotropie des matériaux qui les composent. Les efforts aérodynamiques sont, quant à eux, déterminés par l'application de la théorie combinée ou tourbillonnaire (type sillage prescrit). La résolution du système d'équations est fondée sur un schéma d'intégration temporelle. Un code de calcul a été écrit sur la base de ces développements, permettant un calcul des efforts en régime de vent stationnaire.

Abstract

Large size horizontal axis wind turbines are complex mechanical systems composed of flexible bodies mainly working under random loads. These systems can be classified among flexible multibody systems. Most of the computer codes concerning wind turbines prediction loads have been focused on rotor blade aerodynamics. However they are too often based on simplified dynamic modelisations. This thesis achieves to brigde this gap by proposing a dynamic modelisation based on recent formalisms developed for dynamical studies on flexible multibody systems. The use of Kane's formalism and tree topology leads to a recursive formulation of the dynamic equations, more suitable for a computer oriented approach of the problem. Flexibilities of different bodies are introduced through their modal representation. Since blades are the most important part of the wind turbine, their modal basis have to be representative of their real behaviour. So their modal basis is obtained by a finite beam element model taking into account their complex shape and the material anisotropy which they are made of. Aerodynamic loads are determined from the application of the combined or the vortex theory (prescribed wake analysis). The system resolution is based on a direct time integration method. Finally a computer code has been written on the basis of those developments and is able to compute loads for a steady wind.

Table des matières

Τa	able	e des	figures	xv
Li	ste	des	tableaux	xix
N	ota	tions	générales	xxi
In	tro	duct	ion générale	1
Ι	Iı	ntro	duction	3
	1	Éta	t de l'art	5
		1.1	Introduction	5
		1.2	Modélisation aérodynamique	7
		1.3	Modélisation structurale	12
		1.4	Analyse des codes existants	14
	2	Ob	jectifs du travail de thèse	19
		2.1	Introduction	19
		2.2	Définition des objectifs	19
		2.3	Démarche adoptée au niveau des modélisations	21
		2.4	Résumé des différentes phases du travail	22
	3	Que	elques repères sur l'énergie éolienne	25
		3.1	Terminologie	25
			3.1.1 Constitution	25

.

		3.1.2	Modes de fonctionnement - Pilotage	27
	3.2	Éolien	nes destinées à la production d'électricité : les précurseurs \ldots .	29
	3.3	Évolut	ion des éoliennes de moyenne et forte puissance	30
		3.3.1	Danemark	32
		3.3.2	Suède	33
	•	3.3.3	États-Unis	33
		3.3.4	France	35
		3.3.5	Grande-Bretagne	36
		3.3.6	Allemagne	36
	3.4	Spécifi	cités de la production d'énergie éolienne	38
Bibl	iograf	hio		41
DINI.	iograf	me		41
II	Mod	élisati	ion mécanique de l'éolienne à axe horizontal	45
II	Mod Jotati	élisati	ion mécanique de l'éolienne à axe horizontal	45 47
II N	Mod Iotati	élisat ons	ion mécanique de l'éolienne à axe horizontal	45 47
II N 1	Mod Jotati Mod	élisati ons délisati	ion mécanique de l'éolienne à axe horizontal on des systèmes multicorps	45 47 55
II N 1	Mod Jotati Mo 1.1	élisati ons délisati Introdu	ion mécanique de l'éolienne à axe horizontal on des systèmes multicorps	 45 47 55
II N 1	Mod Notati Mo 1.1 1.2	élisat i ons délisati Introdu Revue	ion mécanique de l'éolienne à axe horizontal on des systèmes multicorps action	 45 47 55 55 55
II N 1	Mod Jotati Mod 1.1 1.2 1.3	élisati ons délisati Introdu Revue Modéli	ion mécanique de l'éolienne à axe horizontal on des systèmes multicorps action	 45 47 55 55 57
II N 1	Mod Jotati Mod 1.1 1.2 1.3	élisati ons délisati Introdu Revue Modéli 1.3.1	ion mécanique de l'éolienne à axe horizontal on des systèmes multicorps action	 45 47 55 55 57 58
II N 1	Mod Notati Mo 1.1 1.2 1.3	élisati ons délisati Introdu Revue Modéli 1.3.1 1.3.2	ion mécanique de l'éolienne à axe horizontal on des systèmes multicorps action	 45 47 55 55 57 58 60
II N 1	Mod Notati Mod 1.1 1.2 1.3	élisati ons délisati Introdu Revue Modéli 1.3.1 1.3.2 Dévelo	ion mécanique de l'éolienne à axe horizontal on des systèmes multicorps action	 45 47 55 55 57 58 60 61
II N 1	Mod Jotati Mo 1.1 1.2 1.3	élisati ons délisati Introdu Revue Modéli 1.3.1 1.3.2 Dévelo 1.4.1	ion mécanique de l'éolienne à axe horizontal on des systèmes multicorps action	 45 47 55 55 57 58 60 61 61
II N 1	Mod Notati Mo 1.1 1.2 1.3	élisati ons délisati Introdu Revue Modéli 1.3.1 1.3.2 Dévelo 1.4.1 1.4.2	ion mécanique de l'éolienne à axe horizontal on des systèmes multicorps action	 45 47 55 55 57 58 60 61 61 62
II N	Mod Notati Mod 1.1 1.2 1.3 1.4	élisati ons délisati Introdu Revue Modéli 1.3.1 1.3.2 Dévelo 1.4.1 1.4.2 Équati	ion mécanique de l'éolienne à axe horizontal on des systèmes multicorps action	 45 47 55 55 57 58 60 61 61 62 73
II N 1	Mod Jotati Mo 1.1 1.2 1.3 1.4	élisati ons délisati Introdu Revue Modéli 1.3.1 1.3.2 Dévelo 1.4.1 1.4.2 Équati 1.5.1	ion mécanique de l'éolienne à axe horizontal on des systèmes multicorps action des formulations dynamiques sation des systèmes multicorps systèmes multicorps rigides Systèmes multicorps rigides ppement des équations de mouvement des systèmes multicorps souples Généralités Développement des équations de mouvement ons de mouvement du système complet Forces d'inertie généralisées	 45 47 55 55 57 58 60 61 61 61 62 73 74
II N 1	Mod Notati Mo 1.1 1.2 1.3 1.4	élisati ons délisati Introdu Revue Modéli 1.3.1 1.3.2 Dévelo 1.4.1 1.4.2 Équati- 1.5.1 1.5.2	ion mécanique de l'éolienne à axe horizontal on des systèmes multicorps action des formulations dynamiques sation des systèmes multicorps Systèmes multicorps rigides Systèmes multicorps souples Systèmes multicorps souples perment des équations de mouvement des systèmes multicorps souples Généralités Développement des équations de mouvement ons de mouvement du système complet Forces d'inertie généralisées	 45 47 55 55 57 58 60 61 61 62 73 74 74

2	Moo	délisati	ion structurale des pales	79
	2.1	Introduction		
	2.2	Définition des repères liés à la pale		
	2.3	Formulation éléments finis classique des poutres		85
		2.3.1	Formulation générale	85
		2.3.2	Formulation de l'élément de poutre	88
		2.3.3	Prise en compte de l'anisotropie des sections	93
		2.3.4	Prise en compte de la variation en envergure des caractéristiques mécaniques équivalentes des sections	95
	2.4	Formu	lation éléments finis de poutre spécifique aux pales	99
		2.4.1	Position du problème	100
		2.4.2	Détermination des centres et description des modes de couplage .	100
2.4.3 Calcul de la matrice de rigidité élémentaire partielle relative couplage membrane/flexion - Application du principe de Hellin Reissner		Calcul de la matrice de rigidité élémentaire partielle relative au couplage membrane/flexion - Application du principe de Hellinger- Reissner	106	
		2.4.4	Calcul de la matrice de rigidité élémentaire partielle relative au couplage torsion/flexion	115
		2.4.5	Calcul de la matrice de rigidité élémentaire totale	118
		2.4.6	Calcul de la matrice de masse	121
		2.4.7	Synthèse relative à la méthode de calcul des différentes matrices .	124
	2.5	Calcul	des modes et vecteurs propres de vibration	124
	2.6	Détern	nination des vecteurs de déplacements modaux	128
		2.6.1	Expression à l'aide des fonctions d'interpolation no dales \ldots .	128
		2.6.2	Approximation polynômiale des fonctions de forme modales	133
3	Moo	délisati	ion structurale des autres sous-ensembles	139
	3.1	Introd	uction	139
	3.2	Pylône	e	139
	3.3	Modél	isation de la ligne d'arbre	140
		3.3.1	Principe de calcul d'une ligne d'arbre équivalente	141

-	-
	٩.
-	_

Bibliographie

III		Mo	délisat	ion aérodynamique du rotor	147
	Nc	otati	ons		149
	1	Car	actérist	iques du vent	153
		1.1	Introdu	lction	153
		1.2	Mise er	situation de l'éolienne	153
		1.3	Régime	e de vent quasi-stationnaire	155
			1.3.1	Caractéristiques temporelles	155
			1.3.2	Gradient vertical de vent	157
		1.4	Régime	de vent instationnaire	160
			1.4.1	Rafales de vent	160
			1.4.2	Turbulence	162
		1.5	Perturb	pations de l'écoulement générées par la présence de l'éolienne	163
	2	Dét	erminat	tion des efforts aérodynamiques	167
		2.1	Introdu	ction	167
		2.2	Descrip	tion du rotor	167
		2.3	Théorie	de l'élément de pale	169
			2.3.1	Diagramme des vitesses	169
			2.3.2	Diagramme des efforts	170
			2.3.3	Extension de la théorie de l'élément de pale	171
e e	3	Dét	erminat	tion des vitesses induites	175
		3.1	Introdu	ction	175
		3.2	Applica	tion de la théorie combinée	176
			3.2.1	Relation entre la vitesse induite axiale dans la plan rotor et dans le sillage lointain	177

		3.2.2	Calcul des vitesses induites par la méthode de Glauert	179
		3.2.3	Facteur de pertes en extrémité	181
		3.2.4	Prise en compte d'un désalignement du vent amont	182
		3.2.5	Prise en compte des effets tridimensionnels	186
		3.2.6	Modèle de post-décrochage	188
		3.2.7	Algorithme de calcul des vitesses induites	189
	3.3	Analys	se par sillage prescrit	190
		3.3.1	Principe de l'analyse	191
		3.3.2	Description du sillage	191
		3.3.3	Hypothèses	193
		3.3.4	Application de la loi de Biot et Savart sur un segment tourbillon- naire rectiligne	194
		3.3.5	Décomposition du sillage	197
		3.3.6	Algorithme de la méthode	199
Bibli	ograp	ohie		203
IV	Mis	e en é	équation du système éolien	
App	licat	ion à	l'éolienne tripale	207
Ν	otati	ons		209
1	Des	criptic	on du système éolien	211
	1.1	Introd	uction	211
	1.2	Descri	ption de la topologie	211
	1.3	Défini	tion des repères liés à l'éolienne tripale	213
	1.4	Défini	tion des transformations	216
2	Équ	ations	de mouvement	223
	2.1	Introd	luction	223
	2.2	Défini	tion des vitesses généralisées	224

	۲		
	2.3	Expression des vitesses partielles	226
	2.4	Relations dynamiques	229
	2.5	Expression des dyadiques	232
	2.6	Forces d'inertie généralisées	236
	2.7	Forces actives généralisées	236
		2.7.1 Forces actives généralisées s'exerçant sur les pales	238
		2.7.2 Forces actives généralisées s'exerçant sur la ligne d'arbre \ldots	240
		2.7.3 Forces actives généralisées s'exerçant sur la nacelle	241
	3 Mo	de de fonctionnement et mécanisme de régulation	243
	3.1	Introduction	243
	3.2	Mode de fonctionnement normal	244
	3.3	Mode de fonctionnement par conditions extrêmes $\ldots \ldots \ldots \ldots$	247
	3.4	Disfonctionnement	247
	3.5	Processus d'arrêt	247
	3.6	Principe de régulation du calage et de la puissance	248
		3.6.1 Régulation du calage des pales	248
		3.6.2 Régulation de la puissance de sortie	249
	3.7	Intégration de la régulation dans le système d'équations différentielles	249
	4 Tec	hnique de résolution numérique	251
	4.1	Introduction	251
	4.2	Établissement et résolution numérique du système d'équations \ldots	252
Bib	oliograp	phie	259
\mathbf{V}	Le c	ode $\mathcal{EOL}1$	261
	1 Pré	esentation du code $\mathcal{EOL1}$	263
	1.1	Introduction	263

.

	1.2	Structure et écriture du code de calcul éolien	264
	1.3	Pré-traitement	265
		1.3.1 Corps de commandes	266
		1.3.2 Fichiers de données élémentaires	267
	1.4	Menus de pré-traitement du code $\mathcal{EOL1}$	268
	1.5	Corps de calcul	269
	1.6	Post-traitement	271
Concl	usio	n générale	273
Anne	exes		277
Α	Ter	mes relatifs aux forces d'inertie généralisées	279
В	Dév	veloppement des termes d'index 3 du tableau A.1 de l'annexe A	283
C cir	Con cula	nparaison de la flèche d'une poutre rectiligne conique de sectio ire pleine suivant différentes méthodes	n 287
C cir D mo	Con cula Dév embr	nparaison de la flèche d'une poutre rectiligne conique de sectio ire pleine suivant différentes méthodes veloppement du principe de Hellinger-Reissner pour le couplag rane/flexion dans le plan (XOZ)	n 287 e 289
C cir D mo E	Con cula Dév embr Mis	nparaison de la flèche d'une poutre rectiligne conique de sectio ire pleine suivant différentes méthodes veloppement du principe de Hellinger-Reissner pour le couplag rane/flexion dans le plan (XOZ) se en évidence de la rigidité équivalente $\widehat{H}_{f_{YZ}}$ de la relation (2.98)	n 287 e 289 295
C cir D m E F	Con cula Dév embr Mis Intr	nparaison de la flèche d'une poutre rectiligne conique de sectio ire pleine suivant différentes méthodes veloppement du principe de Hellinger-Reissner pour le couplag rane/flexion dans le plan (XOZ) se en évidence de la rigidité équivalente \widehat{H}_{fYZ} de la relation (2.98) roduction aux équations de la dynamique de Kane	n 287 e 289 295 295
C cir D m E F G	Con cula Dév embr Mis Intr Prés	nparaison de la flèche d'une poutre rectiligne conique de sectio ire pleine suivant différentes méthodes veloppement du principe de Hellinger-Reissner pour le couplag rane/flexion dans le plan (XOZ) se en évidence de la rigidité équivalente $\widehat{H}_{f_{YZ}}$ de la relation (2.98) roduction aux équations de la dynamique de Kane sentation des dyadiques	n 287 289 295 295 297 305
C cir D m E F G H	Con cula Dév embr Mis Intr Pré: Exe	nparaison de la flèche d'une poutre rectiligne conique de sectio ire pleine suivant différentes méthodes veloppement du principe de Hellinger-Reissner pour le couplag rane/flexion dans le plan (XOZ) se en évidence de la rigidité équivalente $\hat{H}_{f_{YZ}}$ de la relation (2.98) roduction aux équations de la dynamique de Kane sentation des dyadiques emple d'un fichier de commandes	n 287 289 295 295 297 305 311
C cir D m E F G H I	Con cula Dév embr Mis Intr Prés Exe Exe	nparaison de la flèche d'une poutre rectiligne conique de sectio ire pleine suivant différentes méthodes veloppement du principe de Hellinger-Reissner pour le couplag rane/flexion dans le plan (XOZ) de en évidence de la rigidité équivalente \hat{H}_{fYZ} de la relation (2.98) roduction aux équations de la dynamique de Kane sentation des dyadiques emple d'un fichier de commandes emple d'un fichier de site	n 287 289 295 297 305 311 315
C cir D m E F G H I J	Con cula Dév embr Mis Intr Prés Exe Exe	nparaison de la flèche d'une poutre rectiligne conique de sectio ire pleine suivant différentes méthodes veloppement du principe de Hellinger-Reissner pour le couplag rane/flexion dans le plan (XQZ) se en évidence de la rigidité équivalente \hat{H}_{fYZ} de la relation (2.98) roduction aux équations de la dynamique de Kane sentation des dyadiques emple d'un fichier de commandes emple d'un fichier de site emple d'un fichier de machine	n 287 289 295 295 297 305 311 315 317

\mathbf{L}	Exemple d'un fichier de polaires	323
Μ	Exemple d'un fichier de profil	325
Ν	Exemple d'un fichier de rigidités	327
0	Exemple d'un fichier de nacelle	329
Р	Exemple d'un fichier de maillage	331
Q	Exemple d'un fichier de résultats	333

Table des figures

1.1	Visualisation du sillage d'un rotor (clichés FFA [14], Suède)	9
1.2	Présentation des modèles aérodynamiques $(1/2)$	11
1.3	Présentation des modèles aérodynamiques $(2/2)$	12
1.4	Classification des codes éoliens	18
2.1	Trajectoire des travaux de la thèse	21
3.1	Eolienne bipale dans le vent (a) et sous le vent (b) [35]	26
3.2	Moyeu articulé [35]	26
3.3	Agencement d'une ligne d'arbre $Mod-5B/3, 2MW$ [35] \ldots \ldots \ldots	27
3.4	Composants d'une nacelle (Vestas V27/225 kW) [35] $\ldots \ldots \ldots \ldots$	28
3.5	Éolienne de F. Brush, USA, 1888 [35]	31
3.6	Éolienne de Paul la Cour à l'école de Askov, Danemark 1890 [36]	31
3.7	Éolienne Balaclava de 100 kW implantée en Russie, 1931 [35]	31
3.8	Éolienne de Putman, USA 1939 [35]	31
3.9	Éolienne FLS bipale, Danemark [36]	31
3.10	Éolienne FLS tripale, Danemark [36]	31
3.11	Éolienne Gedser de 200 kW , Danemark [36] \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots	34
3.12	Éoliennes Nibe-A et B de 630 kW , Danemark [35]	34
3.13	L'éolienne WTS-4, la plus puissante : 4 MW (Woyming)	34
3.14	Mod-O à pales articulées, USA [35]	34
3.15	Éoliennes Mod-2 pour l'étude des intéractions de sillages, USA [35]	34
3.16	Eolienne Neyrpic, France [35]	37
3.17	Eolienne John Brown & Co, Grande-Bretagne [35]	37
3.18	Eolienne de l'Andreau, Grande-Bretagne [35]	37
3.19	Eolienne Growian, la plus grande : 100 m de haut (Allemagne)	37
3.20	Eolienne de Ulrich Allgaier : innovante sur bien des points, Allemagne [35] .	37

1.1	Configuration arborescente ouverte	58
1.2	Configuration arborescente fermée	58
1.3	Topologie arborescente	63
1.4	Définition d'une articulation	64
1.5	Configuration de deux corps adjacents	65
1.6	Position du centre de gravité après déformation du corps k	68
1.7	Définition de \underline{D}^{p_k}	70
1.8	Définition des vecteurs \underline{z}^{jk} et \underline{x}^{jk}	72
2.1	Passage du repère R_{Pl} au repère local R_{Nv}	83
2.2	Passage du repère local R_{Nv} au repère local R_{Tr}	83
2.3	Passage du repère local R_{Tr} au repère local R_{Ba}	84
2.4	Passage du repère local R_{Ba} au repère local R_{Se}	84
2.5	Description des centres et des repères d'une section S_e de pale $\ldots \ldots$	85
2.6	Configuration du solide B	86
2.7	Géométrie d'une poutre à axes confondus	88
2.8	Représentation d'un élément de type poutre	88
2.9	Élément de référence	89
2.10	Rotation d'une section de poutre selon le modèle de Navier-Bernoulli	91
2.11	Définition des axes principaux d'inertie de la section S	93
2.12	Définition des phases d'une section donnée	94
2.13	Définition de la cellule i d'une section multiplement connexe à parois minces	95
2.14	Évolution des sections d'une pale d'éolienne (RIVA-12m) [18]	96
2.15	Variation discontinue des rigidités équivalentes [18]	96
2.16	Représentation des " $^{"}$ en échelle $lin - log$	99
2.17	Vue en plan de la pale $Tjareborg \ 2 \ MW$	101
2.18	Exemple de définition des phases d'un profil	101
2.19	Position des repères liés à la section S	102
2.20	Position du centre de torsion C	103
2.21	Rotation d'une section selon le modèle de Timoshenko/Mindlin $\ldots \ldots \ldots$	104
2.22	Ligne de noeuds	105
2.23	Représentation des couplages	105
2.24	Synoptique de le formulation éléments finis pour traiter le couplage mem- brane/flexion	107
2.25	Définition des positions des repères R_{Se} et R_{Pi}	109

Charges d'un élément de poutre épaisse de longueur L	110
Déplacement virtuel d'une section de poutre en flexion dans le plan (XOZ) .	111
Cinématique d'un point q de la section S	116
Ligne de noeuds d'une pale ($Tjareborg \ 2 \ MW$)	119
Élément de poutre dans le repère de pale R_{Pl}	120
Diverses formes en plan de l'extrémité d'une pale	121
Réduction de la ligne d'arbre réelle à une ligne équivalente	141
Décomposition de la vitesse instantanée du vent en un point de l'espace	155
Distribution de Weibull des occurences du vent pour $k = 2,29$ et $C = 7,07 m/s$	156
Illustration d'une distribution des occurrences et de la persistance \ldots .	157
Représentation du gradient de vent	157
Rafale de type sinusoïdale, $\Delta v = 2 m/s, \tau = 5 s \dots \dots \dots \dots \dots$	161
Effet d'ombre du pylône	163
Composantes perturbatrices de l'effet d'ombre	164
Définition géométrique d'un rotor	168
Définition d'un profil	169
Diagramme des vitesses d'un profil	170
Diagramme des efforts	171
Création d'un tourbillon libre	172
Vitesse induite par un tourbillon libre	172
Modification du triangle des vitesses par les vitesses induites	173
Écoulement idéal à travers un disque actif sans rotation	177
Représentation du coefficient de puissance C_p	179
Effet du désalignement du vent sur la géométrie du sillage	184
Variation des coefficients C_l et C_d en fonction du rapport de forme de l'aile - Définition des régimes d'écoulement - NACA 4415, $R_e = 0, 5.10^6$ [1]	186
Décollement de la couche limite	187
Discrétisation d'une pale pour le calcul des composantes de la vitesse induite au rayon r	189
Représentation d'une aile et de sa nappe tourbillonnaire par la méthode de la ligne portante	192
	100
Discretisation du sillage (une seule nappe représentée)	193
	Charges d'un élément de poutre épaisse de longueur L Déplacement virtuel d'une section de poutre en flexion dans le plan (XOZ) . Cinématique d'un point q de la section S

3.10	Représentation d'un segment tourbillonnaire	195
3.11	Rayon de singularité	197
3.12	Représentation de l'enroulement marginal	198
3.13	Algorithme de calcul des vitesses induites par l'analyse par sillage prescrit . $\ .$	201
11	Topologie arborescente d'une éplienne bipale	213
1.1	Topologie arborescente d'une éplienne tripale	210
1.2	Renères mobiles liés à l'éclienne tripale	213
1.0	Définition des renères $R_{\rm p}$ et $R_{\rm re}$	214
1.4	Définition des repères R_{Y} et R_{H_0}	219
1.0	Définition des repères R_{H_0} et R_{L_a}	219
1.0	Définition des repères R_{La} et R_{N_a}	219
1.7	Définition des repères R_{Na} et R_{Pr}	219
1.0	Définition des repères R_{P_r} et R_{T_o}	219
1.9	Définition des repères R_{T_0} et R_{C_0}	221
1.10	Definition des reperes R_{Co} et R_{Dp}	221
1.11	Definition des reperes R_{Dp} et R_{Pl}	221
2.1	Définition d'un tronçon de pale pour le calcul de son dyadique	234
3.1	Agencement des modes de fonctionnement	244
3.2	Définition des plages de fonctionnement	246
3.3	Schéma bloc d'un système de régulation	248
		.
4.1	Algorithme général $(1/2)$: conditionnement des données	255
4.2	Algorithme général $(2/2)$: construction et résolution du système d'équations	257
1.1	Structure générale du code $\mathcal{EOL1}$	265
1.2	Ecran principal	269
1.3	Menu général du pré-traitement	270
1.4	Menu de création de la base de données	270
1.5	Menu de visualisation de la base de données	270
1.6	Visualisation de la modélisation géométrique d'une pale	270
1.7	Visualisation de la configuration étudiée	270
1.8	Variation azimutale des efforts et des moments	271
1.9	Cartographie du plan rotor pour la visualisation de la répartition des efforts et des moments	271
		-,1
C.1	Comparaison de l'erreur commise sur la flèche en extrémité	287
F.1	Configuration du système S	299

Liste des tableaux

1.1	Synthèse des codes éoliens	17
3.1	Recensement des éoliennes à axe horizontal dans le vent de plus de 500 kW [35	39
1.1	Relations topologiques de l'arborescence de la figure 1.3	63
2.1	Définition des repères liés à la pale	82
2.2	Définitions des fonctions d'interpolation nodales	90
2.3	Les différentes formulations E.F. en mécanique des structures	106
2.4	Synthèse des différentes matrices de rigidité	125
2.5	Synthèse des différentes matrices de masse	125
2.6	Décomposition de la matrice de rigidité élémentaire partielle	126
2.7	Décomposition de la matrice de transformation	126
2.8	Décomposition de la matrice de passage	127
2.9	Relations entre degrés de liberté et coordonnées modales	130
1.1	Définition des classes à partir de la densité moyenne annuelle de puissance à	
	50 m d'élévation [1]	154
1.2	Valeurs usuelles de $\alpha = 0.24 + 0.096 \log A_0 + 0.016 (\log A_0)^2 [5] \dots$	159
1.1	Définition de la topologie d'une éolienne bipale d'après la <i>figure 1.1</i>	212
1.2	Définition de la topologie d'une éolienne tripale d'après la figure 1.2	212
1.3	Description des repères cinématiques de l'éolienne tripale	214
1.4	Description de l'ensemble des repères liés à l'éolienne tripale	215
1.5	Définition des distances caractéristiques	215
1.6	Définition des angles de construction	215
1.7	Définition des angles de pilotage et de position	215
2.1	Définition des vitesses généralisées de mouvement de corps rigides	224
2.2	Vecteur colonne des vitesses généralisées - Eolienne tripale	225

2.3	Définition des vecteurs de base des articulations	225
2.4	Définition des vecteurs	225
A. 1	Termes de l'équation (II-1.24) déterminant les M_{pl}	280
B. 1	Décomposition du terme d'index 3	284

Notations générales

Numérotation

- Les parties sont numérotées par des chiffres romains.
- Les chapitres d'une même partie sont numérotés par des chiffres arabes.
- Les équations, figures et tableaux d'une *même* partie sont référencés par deux chiffres séparés d'un point (Ex.: équation (2.96)). Le premier chiffre représente le numéro du chapitre et le second le numéro d'ordre dans lequel la référence est créée.
- La référence à un chapitre, une section, une équation, une figure ou un tableau *n'appartenant pas* à la partie sera précédée du chiffre de la partie dans laquelle elle/il a été créé (Ex.: (III-2.9)).
- Les annexes sont numérotées par une lettre majuscule de l'alphabet latin.

Conventions

- \triangleq une égalité à valeur de définition (Ex.: $I_{yy} \triangleq \int z^2 dS$)
- une barre inférieure désigne un vecteur $(Ex.: \underline{v})$
- une double barre inférieure désigne un dyadique $(Ex.: \underline{I})$
- [] une matrice de dimension quelconque (Ex.: [M])
- $\{ \}$ une matrice colonne ou un vecteur colonne (Ex.: $\{V\}$)
- $\langle \rangle$ une matrice ligne ou un vecteur ligne (Ex.: $\langle U \rangle$)
- $\{V\}^T$ la transposé du vecteur colonne $\{V\}$ telle que $\{V\}^T = \langle V \rangle$
- un vecteur <u>u</u> de composantes (u, v, w) dans un repère donné pourra également se mettre sous la forme matricielle $\langle u \rangle = \langle u v w \rangle$
- (O XYZ) le repère de centre 0 et d'axes (OX), (OY) et (OZ)
- (X_p, Y_p, Z_p) les coordonnées d'un point p dans un repère (O XYZ)
- t la variable temporelle

- $\underline{\mathring{u}}$ la dérivée première par rapport au temps d'un vecteur $\underline{u} = \underline{u}(x, y, \dots, t)$ dans le repère local attaché à un corps mobile du système
- $u_{,x}$ ou u' la dérivée première par rapport à une variable d'espace x de la fonction $u = u(x, y, \ldots, t)$ telle que $u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}$
- $u_{,xx}$ la dérivée seconde par rapport à la variable d'espace x de la fonction $u = u(x, y, \dots, t)$ telle que $u_{,xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$
- \dot{u} la dérivée première par rapport à la variable de temps t de la fonction $u = u(x, y, \dots, t)$ telle que $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$
- \ddot{u} la dérivée seconde par rapport à la variable de temps t de la fonction $u = u(x, y, \dots, t)$ telle que $\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
- ${}^{A}\underline{\omega}^{B}$ la vitesse angulaire du corps B par rapport (dans) au corps A (le repère A)
- $\underline{\omega}^B \equiv {}^A \underline{\omega}^B$ si A désigne le repère galiléen
- ${}^{A}\underline{v}^{P}$ la vitesse du P appartenant au corps B dans le repère A
- ${}^{A}\underline{\alpha}^{B}$ et ${}^{A}\underline{a}^{B}$ respectivement l'accélération angulaire et l'accélération

Introduction générale

Les dispositifs de conversion de l'énergie du vent en énergie mécanique remontent bien au-delà des traditionnels moulins à vent qui caractérisèrent longtemps le paysage du nord de l'Europe. En effet, au $X^{\text{ème}}$ siècle, des écrits rapportent déjà qu'à l'est de la Perse, le vent entraînait des moulins à axe vertical destinés à l'irrigation. Par contre, le passage à une exploitation de cette technologie à des fins de production d'électricité ne date que de la fin du $XIX^{\text{ème}}$ siècle. Suite à l'ensemble des travaux menés essentiellement en Europe durant ces trois dernières décennies, la technologie éolienne commence à atteindre son niveau de maturité dans la mesure où des industriels sont maintenant capables de proposer des systèmes fiables.

Parmi les solutions techniques avancées en vue d'une exploitation à grande échelle, les constructeurs ont retenu la configuration des éoliennes à axe horizontal dans le vent¹, avec une puissance nominale située autour des 630 kW. Cependant, l'étendue des ressources éoliennes en Europe poussent ces mêmes constructeurs à développer des machines dépassant le mégawatt. Cette évolution vers des éoliennes de grande taille, dont les composants doivent être de mieux en mieux adaptés, remet en cause lors de leur conception, la réduction de ces machines à des mécanismes simples. A cela, ajoutons que les textes de réglementations deviennent de plus en plus précis, obligeant les constructeurs à affiner les méthodes avec lesquelles ils doivent justifier la fiabilité de leurs produits. Dans ce contexte, le lien entre les nombreux travaux de recherche et les préoccupations industrielles doit se renforcer. Néanmoins, un écart encore important subsiste entre ces deux points de vue. En effet, la plupart des laboratoires n'ont essentiellement abordé, de façon fort compréhensible, le problème éolien que sous son aspect aérodynamique, tant il est vrai que la partie active de la machine est constituée par son rotor. Cependant, réduire la totalité de la machine uniquement à son rotor est aujourd'hui d'autant plus excessif que de nouvelles installations montrent que l'introduction de corps plus souples joue un rôle important sur les performances des éoliennes.

Notre travail va d'abord s'efforcer de montrer que très peu de codes de calcul des efforts se proposent d'intégrer une modélisation structurale complète de la machine (rotor, nacelle et pylône). De plus, quand cela est le cas, les modèles adoptés pour représenter la dynamique des pales ne reflètent souvent pas leur comportement réel. En effet, la nécessité de ramener le nombre de degrés de liberté à un niveau acceptable pour déterminer les équations de mouvement du système, contraint souvent les auteurs à une trop grande simplification de leur comportement dynamique. C'est par conséquent l'un des premiers points sur lequel nous nous proposons d'intervenir. En outre, la complexité cinématique de ces machines décourage vite ceux qui souhaitent obtenir, à l'aide des théories classiques de la dynamique du

^{1.} Le plan rotor est situé en avant du pylône en fonctionnement

solide, les équations de mouvement. Cet obstacle constitue le second point d'investigation de nos travaux. Nous montrerons qu'il existe aujourd'hui des moyens bien plus adaptés pour déterminer les équations de mouvement des systèmes multicorps souples, dont les éoliennes font partie. Enfin, il n'est guère envisageable de ne pas présenter les modélisations aérodynamiques qu'il conviendra de mettre en oeuvre pour aboutir à une approche complète du problème. Ce travail débouchera finalement sur l'écriture d'un code qui viendra concrétiser et affirmer l'orientation des choix théoriques.

 $\mathbf{2}$

Première partie Introduction

• L L

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Introduction

Le calcul des efforts sur une éolienne fait appel à des connaissances multidisciplinaires telles que la météorologie, l'aérodynamique, la dynamique des structures, les systèmes de commande et enfin le génie électrique. De plus, la tendance des machines actuelles à prendre des dimensions de plus en plus importantes remet en cause la démarche de réduction de ce type de machines à des systèmes mécaniques simples, sans compter qu'elles sont soumises à des chargements aléatoires. Par conséquent, des efforts importants visant à améliorer les méthodes de calcul de ces systèmes ont été consentis durant ces vingts dernières années. Ils sont maintenant d'autant plus accrus que des facteurs déterminants viennent accélérer ce processus :

- une amélioration graduelle des connaissances sur la technologie propre à l'éolien. Un plus large échange des travaux de recherche au niveau national et international permet d'accroître la fiabilité de la technologie éolienne,
- la volonté d'abaisser les coûts tout en allant vers des machines de plus en plus puissantes. Les industriels remettent en cause leurs façons de concevoir en essayant d'optimiser les machines, tentant de mettre de côté un certain conservatisme en matière de conception,
- l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs. Ce phénomène touche de près les industriels qui peuvent d'ores et déjà exploiter sur de simples ordinateurs individuels, des codes de calcul performants jusqu'alors réservés à des installations coûteuses,
- et enfin, les contraintes liées à l'émergence de règles de certification et de normalisation [1]. Dans les pays du nord de l'Europe (et en particulier au Danemark, en Allemagne et en Hollande), des normes de certification sont imposées aux constructeurs. De plus, la création récente d'une norme internationale [2] spécifie que la phase de validation de conception de machine doit nécessairement intégrer la représentation d'un certain nombre de phénomènes physiques tels que le traitement réaliste de la turbulence et de l'aérodynamique instationnaire (au niveau des pales).

L'analyse du contexte dans lequel s'est effectué ce travail va bien entendu à la fois guider et justifier nos travaux, puisqu'il s'agit dans un premier temps de modéliser correctement le comportement mécanique de la machine et dans un second temps, d'écrire un code de calcul pouvant répondre aux préoccupations actuelles et à venir des industriels. Un bilan des recherches actuelles doit donc être dressé et si nous voulions être tout à fait complet, il devrait se composer de quatres parties : la représentation des phénomènes météorologiques, l'aérodynamique des rotors, la dynamique des structures et enfin la transmission de puissance avec le système de contrôle de la machine. Cependant, l'aérodynamique et le comportement structural de la machine sont de loin les problèmes les plus importants. Par conséquent, nous ne ferons un bilan que de ces deux aspects fondamentaux : l'aérodynamique et le dynamique des structures. Cependant, l'analyse des codes de calcul éolien recensés nous montrera que ceux-ci sont surtout axés sur la modélisation aérodynamique des phénomènes plutôt que sur celle du comportement dynamique. Or, les codes basés sur la modélisation d'ensembles relativement rigides se voient aujourd'hui remis en cause par l'introduction de souplesses sous deux formes : l'une est discrète et correspond à l'utilisation d'un moyeu articulé et/ou d'un rotor à vitesse variable, la seconde se traduit par une souplesse accrue des pales, du moyeu, de la ligne d'arbre et du pylône. Par conséquent, l'impact de la dynamique de la structure sur le fonctionnement de la machine prend une place de plus en plus importante, d'autant que des relevés expérimentaux s'accordent à montrer que les charges dynamiques peuvent être réduites de façon significative grâce à l'introduction de ces souplesses.

La tendance naturelle des auteurs qui se sont penchés sur la modélisation des éoliennes, a d'abord été d'apporter des réponses sur l'aérodynamique du rotor, puisque le but de ce dispositif est bien de convertir l'énergie cinétique du fluide (le vent) en énergie mécanique (puis électrique). Ceci explique en grande partie pourquoi la plupart des avancées majeures sur le thème éolien se situent au niveau des modèles aérodynamiques. Ce n'est qu'ensuite que l'influence du comportement structural du rotor, caractérisé par les déformations des pales, a été intégrée dans les calculs de performances des rotors. Cette étape correspond à la phase de modélisation aérostructurale du rotor, c'est-à-dire au couplage fluide-structure. Cependant, la dynamique de l'éolienne ne se limite pas simplement à celle de son rotor, car pour être complète la modélisation doit maintenant intégrer le comportement dynamique de la machine tout entière, incluant par conséquent le rotor, le mécanisme de transmission de puissance (ligne d'arbre) et le pylône.

En outre, on distingue nettement deux types de code éolien : les premiers s'adressent aux industriels alors que les seconds sont plutôt des outils de recherche. Ces derniers mettent en oeuvre des modèles très poussés d'un point de vue aérodynamique, mais font appel soit à une modélisation structurale trop simplificatrice, soit à des codes structuraux puissants (éléments finis) mais exogènes, c'est-à-dire non spécifiquement dédiés à l'éolien, et donc pas nécessairement adéquats pour traiter efficacement les problèmes de couplages fluidestructure. L'existence de ces deux types de code n'est bien entendu pas incompatible, car il y a un échange continu entre les souhaits des industriels et les retombés des avancées du domaine de la recherche. C'est dans ce cadre que nous souhaitons présenter un état de l'art : comment, à partir des théories existantes, sont aujourd'hui structurés ces codes de calcul, et quelle voie doit on prendre pour leurs futurs développements.

Signalons enfin que cette présentation ne constitue pas tout à fait une étude bibliographique au sens propre du terme, car dans un souci de clarté, nous avons préféré reprendre

Partie I. Introduction

les éléments bibliographiques appropriés dans les chapitres qui le nécessitent.

1.2 Modélisation aérodynamique

Les conditions générales de l'écoulement sur un rotor éolien sont instationnaires dans un repère lié au rotor (repère tournant). Les causes en sont naturellement les turbulences atmosphériques (rafales, topologie du terrain), mais également la simple présence de l'éolienne dans l'écoulement. La prise en compte de la totalité des phénomènes instationnaires se révèle délicate, et une approche par étape successive, de complexité croissante, s'avère indispensable.

Remarquons tout de suite que, quelle que soit la nature d'écoulement, la plupart des modèles admettent comme hypothèses de base que le fluide est parfait et incompressible. Elles sont liés aux premières modélisations proposées sur les hélices marines par Rankine (1865) [3] et Froude (1885) [4], car dans cette configuration, l'analyse de l'écoulement à travers le rotor peut être établie sur la base des lois de conservation (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie). L'écoulement sur ce type d'hélices est d'autre part idéal, puisqu'il est uniforme (même vitesse en tout point du fluide), stationnaire et perpendiculaire au plan du rotor. Ces modèles, qualifiés de monodimensionnels, ont été les premiers à apporter des informations sur les performances aérodynamiques des rotors éoliens malgré les hypothèses fortes sur la nature de l'écoulement ainsi que la réduction du rotor à un disque sans épaisseur et uniformément chargé (ce qui équivaut à supposer un nombre infini de pales). Les lois de conservation permettent d'établir d'une part, des relations entre la vitesse du fluide prise en divers points de l'écoulement (notamment au niveau du plan rotor et loin en aval du plan rotor) et d'autre part, de calculer le rendement maximal d'un rotor (cf. § III-3.2.1).

Malheureusement, ces applications souffrent d'un manque de prise en compte de la géométrie réelle du rotor, puisque celui-ci est constitué d'un nombre fini de pales. C'est pourquoi, sous l'impulsion des travaux de Stefan Drzewiecki [5] entre 1892 et 1920, la théorie de la quantité de mouvement appliquée aux hélices a été agrémentée de la théorie de l'élément de pale (Blade Element Theory), pour prendre le nom de théorie combinée de la quantité de mouvement et de l'élément de pale vers 1920 (Combined Blade Element and Momentum Theory). L'analyse de l'écoulement autour des profils des pales, en supposant que ceux-ci fonctionnent uniquement dans un plan, permet alors d'une part, d'introduire les effets de viscosité (viscosité locale) par l'intermédiaire des coefficients aérodynamiques (portance et traînée) et d'autre part, de raisonner sur des tubes de courant concentriques indépendants les uns des autres, offrant alors la possibilité d'avoir un écoulement non uniforme sur le disque rotor. De ce fait, pour le rotor éolien, la théorie combinée permet d'introduire les variations de l'intensité du vent amont suivant l'altitude (cisaillement du vent) due à trois paramètres : l'effet de couche limite du sol (vitesse nulle au niveau du sol), la topologie du terrain (inégalités du sol), et enfin la nature du sol (gradient de température). Une mise en oeuvre simple et maintenant quasi-standard de la théorie combinée est celle proposée sur la base de la méthode de Glauert (1935) [6]. Cette théorie a connu un grand succès et a très souvent été considérée comme la meilleure méthode pour la prédiction des efforts aérodynamiques et la conception des machines. Facile à coder, rapide, son utilisation est encore à l'heure actuelle celle qui prévaut dans les codes industriels.

Cependant, dans sa formulation de base, la théorie combinée comporte des lacunes importantes, c'est pourquoi l'état de l'art correspond maintenant aux améliorations suivantes. Le rotor est modélisé par un disque sans épaisseur, constitué d'un nombre infini de pales: cette représentation est modifiée par l'application d'un facteur de correction, appelé facteur de perte en extrémités (Tip Loss Factor) de Prandtl [8], et issu de la théorie tourbillonnaire que nous allons aborder par la suite. D'autre part, l'écoulement autour des pales se caractérise par trois régimes : régime laminaire, régime au voisinage de la portance maximale et enfin régime détaché ou de post-décrochage (l'étendue de ces régimes est définie sur la courbe caractéristique de portance du profil en fonction de son incidence). Or, la géométrie des pales et le système de pilotage (lorsqu'il s'agit d'une éolienne à vitesse constante, cf. § 3.1.2) sont conçus pour que la résultante des efforts aérodynamiques délivre un couple moteur maximal. Par conséquent, ceci nécessite d'exploiter la courbe de portance du profil dans la zone où les phénomènes instationnaires liés au décollement de la couche limite risquent d'apparaître : ce comportement est défini comme le décrochage dynamique des pales (variation dans le temps de l'incidence des profils) dont les conséquences sur les performances et la dynamique du rotor sont importantes. La complexité du mécanisme de décrochage ne permet pas encore à l'heure actuelle de proposer des modélisations qui donnent toute satisfaction. Parmi les plus employées, on peut notamment citer les modèles bidimensionnels de l'Onera [9], Leishman et Beddoes [10]. De plus, l'écoulement autour des pales est fondamentalement tridimensionnel (induit par la rotation des pales): quelques modèles [11] proposent maintenant de corriger les polaires des profils pour obtenir des prédictions d'efforts plus conformes aux données expérimentales. Rajoutons à cette liste que le désalignement du vent avec l'axe de rotation du rotor est un cas de fonctionnement courant. Les études sur les hélicoptères en vol avançant peuvent alors utilement compléter le modèle de base [12]. Enfin, le caractère instationnaire de l'écoulement amont est traité comme une succession d'états stationnaires tant que les variations de la vitesse du vent et la vitesse de rotation du rotor sont assez lentes pour être traitées comme un écoulement quasi-stationnaire. De nombreux efforts [13] sont faits, à l'heure actuelle, pour introduire de façon plus rigoureuse les termes d'instationnarité dans la théorie combinée. Cette liste d'améliorations est actuellement intégrée dans les codes à vocation industrielle.

L'autre voie pour la détermination des performances des rotors éoliens, reconnue comme plus physique mais aussi plus précise, est basée sur la théorie tourbillonnaire. La visualisation de l'écoulement en aval du plan rotor montre clairement qu'il est composé d'une structure complexe à base d'enroulements tourbillonnaires (figure 1.1): c'est le sillage du rotor. Cette théorie a pour objet de modéliser la structure tourbillonnaire de l'écoulement en aval du plan rotor à l'aide de singularités tourbillonnaires, et de déterminer les caractéristiques de l'écoulement en tout point de l'espace et plus particulièrement au niveau du plan rotor. Les lois de la dynamique des fluides qui gouvernent l'action et l'influence d'un tourbillon s'énoncent par : la loi de Biot et Savart, le théorème de la circulation de Kelvin et les lois de Helmholtz. N.E. Joukowski [15] posa les fondements de la théorie tourbillonnaire entre 1912 et 1929. Afin de simplifier les formulations mathématiques, les premiers calculs furent effectués avec l'hypothèse de disque rotor possédant un nombre infini de pales, à l'image de la théorie de la quantité de mouvement.

Puis, en 1929 S. Goldstein [16] développa une théorie tourbillonnaire pour les hélices avec un nombre fini de pales, dans le cas d'un écoulement purement axial. Le sillage était alors représenté par une nappe tourbillonnaire hélicoïdale s'étirant axialement à une vitesse

Partie I. Introduction





FIG. 1.1 Visualisation du sillage d'un rotor (clichés FFA [14], Suède)

constante et considérée comme une surface rigide (pas de distorsion du sillage). Par la suite, d'autres auteurs tels que Lock (1930), Yeatman (1934) et Kaman (1943) reprirent le modèle de Goldstein afin de l'adapter notamment au cas du vol vertical des hélicoptères. Les solutions proposées par ces auteurs sont des formes analytiques des équations de l'écoulement, car le sillage est suffisamment simplifié dans sa géométrie pour rendre ces calculs possibles. Cependant, la structure du sillage et l'instationnarité de l'écoulement ne permettent pas d'utiliser plus longtemps cette analyse, et le sillage doit être représenté sous une forme discrète. Les inconnues du problèmes doivent alors être obtenues par des procédures numériques.

La définition des éléments de la structure discrétisée du sillage dépend de la géométrie des pales et plus particulièrement de leur allongement². Pour des allongements importants. les pales sont modélisées par un tourbillon unique, d'intensité variable en envergure. Ce modèle est directement issu de la théorie de ligne portante [17], dérivé de la méthode de Prandtl pour les ailes. Le sillage formé par l'ensemble des nappes tourbillonnaires qui se développent en bord de fuite de chaque pale est alors discrétisé par un réseau de mailles tourbillonnaires. Si, au contraire, l'allongement des pales est faible, on se tourne alors vers une modélisation par des surfaces portantes, qui sont ni plus ni moins que l'extension bidimensionnelle de la méthode de la ligne portante. Il faut cependant ajouter deux remarques sur la théorie de la ligne portante dans le cas de son utilisation sur les pales. On peut, dans le cas des ailes, donner une solution analytique de l'écoulement par cette théorie, alors que pour une pale, la complexité de la géométrie (hélicoïde) de sa nappe tourbillonnaire ne nous le permet pas. D'autre part, l'hypothèse selon laquelle il ne doit pas y avoir de changement rapide de l'environnement aérodynamique de la pale n'est pas toujours valable: la pale est rarement uniformément chargée et la nappe tourbillonnaire de la pale précédente peut modifier sensiblement l'écoulement de la pale suivante. Ces problèmes peuvent être palliés par l'utilisation d'une modélisation par surface portante. Depuis peu, et parallèlement avec l'accroissement des capacités de calcul des ordinateurs, certains auteurs [18] proposent de modéliser les pales par des panneaux (Panel Method). Cette assemblage permet de tenir compte de l'épaisseur du profil et s'affiche donc à l'heure actuelle comme la méthode de modélisation la plus fine. Le sillage, que ce soit par la méthode de la surface portante ou des panneaux, est discrétisée bien entendu par des surfaces sur lesquelles sont disposées des singularités (sources, tourbillons, doublets, etc).

^{2.} Quotient de l'envergure au carré de la pale sur sa surface portante

Quelle que soit la méthode adoptée pour modéliser les pales, la détermination du sillage peut être implémentée de deux manières. La plus complète repose sur une analyse par sillage libre (Free Wake Analysis) et une dégénérescence de celle-ci est celle par sillage prescrit (Prescribed Wake Analysis). Le principe de l'analyse par sillage libre est le suivant : celui-ci est construit par incrémentation successive de la géométrie discrétisée de la nappe hélicoïdale attachée à chaque pale, et la convergence simultanée des composantes de la vitesse de l'écoulement en des points choisis du sillage et du plan rotor doivent conduire à un positionnement unique des éléments discrets (lignes, surfaces tourbillonnaires) du sillage. Par conséquent, le sillage évolue librement au cours du temps, en fonction des conditions de l'écoulement en amont du plan rotor, et peut donc être parfaitement instationnaire. Sa mise en oeuvre lourde ainsi que les temps de calcul importants limitent l'utilisation de cette méthode à des travaux de recherche ou des études spécifiques : pour dix minutes de simulation d'écoulement, il faut compter plusieurs jours de calcul [19]. Dans le but de réduire ces facteurs pénalisant en vue de multiplier les études de cas de charge, des développements récents se proposent d'alléger la procédure de calcul en imposant (ou encore en prescrivant) la géométrie du sillage : quelques heures de calcul sont alors suffisantes. Le calcul des composantes de la vitesse de l'écoulement sera réduit à celles prises au niveau du plan rotor et non dans le sillage, car celui-ci est déjà imposé. La géométrie globale du sillage est réactualisée jusqu'à ce que les caractéristiques de l'écoulement au plan rotor convergent, puisqu'au départ, ces valeurs sont initialisées par une méthode de type théorie combinée (plus rarement avec un calcul par sillage libre), et ne correspondent donc pas à la géométrie du sillage initialement imposée. Comme nous le voyons, la particularité de cette analyse est qu'elle demande d'être initialisée, et le gain potentiel en temps de calcul par rapport à une analyse par sillage libre sera fonction de la qualité avec laquelle on initialise la géométrie du sillage. Une conséquence importante liée à cette méthode réside sur sa capacité restreinte à traiter le cas d'un écoulement instationnaire. Si l'on considère que celui-ci peut être pris comme quasi-stationnaire (rafales "lentes"), le calcul instationnaire interviendra après avoir déterminé le sillage en régime permanent. Si nous souhaitons par contre introduire les turbulences atmosphériques, on ne peut avoir recours qu'à une analyse par sillage libre, qui par principe positionne le sillage au fur et à mesure des conditions instantanées de l'écoulement. La tendance actuelle voudrait que les analyses par sillage prescrit viennent peu à peu intégrer les codes industriels. Mais, leur apparition relativement récente et la restriction sur la nature de l'écoulement ne les positionnent pas encore en tête des applications industrielles.

Soulignons également que des développements récents sont menés sur le support d'une analyse par sillage libre afin de reproduire le mécanisme tridimensionnel du décrochage dynamique intervenant surtout lorsque le vent est désaligné. Cette modélisation (de façon extrêmement simplifiée) introduit en plus du sillage principal, un second sillage, généré à partir du bord d'attaque de la pale: c'est le concept du double sillage [20].

Le but des méthodes d'analyse par sillage basées sur la théorie tourbillonnaire est d'offrir un compromis entre le temps de calcul, le nombre et la précision des informations que l'on souhaite obtenir sur l'écoulement. Le modèle le plus complet que l'on pourrait envisager d'implémenter, consisterait à résoudre les équations de Navier-Stokes pour un écoulement visqueux instationnaire. Malheureusement, et malgré les capacités déjà importantes des ordinateurs, cet objectif est encore loin d'être atteint. Malgré tout, les hypothèses du fluide (parfait, incompressible) permettent d'apporter des réponses assez satisfaisantes aux problèmes les plus courants rencontrés dans la conception des rotors éoliens par l'adoption

Partie I. Introduction

des méthodes potentielles: l'écoulement est régi par l'équation de Laplace. Par conséquent, même si les modèles par sillage libre ne tiennent pas compte des effets de viscosité, avec la méthode des panneaux il est toujours possible d'introduire ces effets grâce à l'intégration de l'équation de la couche limite. Dans ce cas, il n'y a pas besoin de donner les valeurs des coefficients aérodynamiques (portance, traînée) des profils, seule la description géométrique de ces derniers suffit.

Enfin, l'importance des charges dues à la turbulence atmosphérique est maintenant universellement reconnue. Par conséquent, un modèle de vent adapté pour les calculs de conception est nécessaire et doit être capable de représenter correctement les variations spatiales et temporelles de la turbulence. Parmi ces modèles, deux s'en détachent. Le premier est dû à Veers [21] et le second à Mann [22]. Ce dernier est un modèle à trois composantes qu fut récemment étendu aux terrains accidentés. D'un autre côté, le modèle de Veers est, en principe, également capable de modéliser trois composantes ce qui n'a jamais encore été vérifié, à cause principalement du manque d'informations sur les corrélations croisées. Pour les terrains plats, l'application de l'un ou l'autre des modèles se révèle être fiable. Pour des terrains accidentés par contre, il n'y a pas de réponse définitive et les recherches sont toujours en cours. Pour être tout à fait complet sur la simulation de la turbulence, il faut citer également les travaux entrepris pour modéliser les perturbations engendrées par le sillage d'une éolienne sur les performances d'une autre éolienne implantée à proximité, cas typique d'une ferme éolienne³.



FIG. 1.2 Présentation des modèles aérodynamiques (1/2)

^{3.} Terme définissant une exploitation sur un même site d'un certain nombre d'éoliennes



Les figures 1.2 et 1.3 se proposent de résumer l'ensemble des modèles et leurs spécificités, faisant ainsi la synthèse dans ce domaine.

FIG. 1.3 Présentation des modèles aérodynamiques (2/2)

1.3 Modélisation structurale

Dans un premier temps, les calculs de prédiction ignoraient purement et simplement les effets structuraux. Ils se contentaient d'utiliser un modèle aérodynamique quasi-stationnaire, en introduisant des coefficients de sécurité élevés. Dans les années 1970, les chercheurs prirent conscience de l'importance d'intégrer la dynamique de la structure. Ce retard par rapport aux modèles aérodynamiques expliquent aussi le peu de références sur lesquelles nous pouvons nous appuyer pour faire une synthèse des modèles structuraux.

Dès lors que l'on souhaite introduire la souplesse des corps, deux méthodes sont envisageables: une approximation par éléments finis ou une représentation modale. Ensuite, il existe deux niveaux d'analyse: le premier a pour objet de restreindre l'étude à celle du rotor et le seconde d'étudier l'ensemble de la machine. De plus, il nous faut encore introduire une distinction sur le dernier niveau d'analyse qui conditionne cette fois la technique de mise en équation du système. Si l'on se limite à une configuration de machine unique, il n'est pas nécessaire d'obtenir les équations de mouvement sous forme explicite [23]. Dans
le cas contraire, les équations de mouvement sont obtenues sur la base de la formulation Lagrangienne de la dynamique des solides. Enfin, dans une analyse comme dans l'autre, la technique de résolution dépendra du type de d'équations différentielles obtenues précédemment (linéaires, non linéaires) et fera appel soit à la méthode de superposition modale, soit à un schéma d'intégration temporelle directe.

Les calculs de conception effectués avec une modélisation éléments finis et une intégration temporelle directe de l'ensemble de la machine n'existent pas encore à l'heure actuelle. Ils se limitent pour l'instant au rotor [24]. Malheureusement, l'emploi de codes éléments finis commerciaux est inadapté. En effet, les formulations implantées dans ces codes considèrent que le solide étudié se déforme autour d'une position d'équilibre attachée à un repère fixe. et ne peut pas, par conséquent, posséder un mouvement de corps rigide, à l'image de celui du rotor. C'est pourquoi, des modèles spécifiques à l'architecture et au comportement structural d'une éolienne doivent être développés dans ce but. Les recherches se focalisent donc sur la modélisation du rotor avec l'intention d'introduire d'une part, le comportement non linéaire des pales (grands déplacements, petites déformations), et d'autre part, l'anisotropie des matériaux (composites). Des modèles basés sur des éléments de type plaque ont d'abord été proposés, mais ils ne constituent pas la solution idéale. En effet, le couplage avec une modélisation aérodynamique (théorie combinée, analyse par sillage, cf. § 1.2) va très vite déboucher sur des temps de calcul prohibitifs (nombre de degrés de liberté à résoudre trop élevé). Suite à leurs travaux, certains auteurs [19] préconisent alors de calibrer les modèles éléments finis avec des éléments de type poutre à partir de calculs préliminaires utilisant des éléments de type plaque. La calibration s'effectuera en procédant à des recoupements de résultats donnés suite à l'application de charges statiques et dynamiques. La comparaison des flèches entre les deux modèles permettant, dans le cas statique, d'accorder les rigidités de la poutre, et dans le cas dynamique, d'accorder la répartition des masses.

Une modélisation complète de la machine par éléments finis n'étant pas envisageable pour l'instant, ses différents composants (pales, ligne d'arbre et pylône) sont approximés par des poutres, avec des degrés de raffinement divers. Le problème commun à ses modèles reste leur capacité à représenter judicieusement et correctement le comportement vibratoire de ces sous-ensembles, et en particulier celui des pales (couplage entre les modes dû à l'emploi de matériaux composites). Finalement, il existe trois modèles pour approximer le comportement structural des pales. Le plus simple est de les représenter par un assemblage de poutres rigides [25], articulées entres elles avec des raideurs et des amortissements à chaque articulation. Pour le seconde d'entre-eux, des poutres élastiques continues [23], [26] (au sens Résistance des Matériaux) peuvent modéliser les pales. Le dernier modèle est celui évoqué précédemment et qui s'appuie sur des éléments finis. Ces méthodes offrent généralement une représentation des modes de déformation des pales dans deux directions (battement et traînée), la torsion de la ligne d'arbre, le fléchissement du pylône dans deux directions ainsi que la torsion de celuici. Ces modes s'obtiennent via un modèle éléments finis, la mécanique des milieux continus et également des mesures expérimentales.

Néanmoins, la représentation modale véhicule un handicap important : son incapacité à modéliser le comportement non linéaire des corps souples, et tout particulièrement celui des pales (grands déplacements, petites déformations) qui peut survenir dans certains cas de fonctionnement (vents forts). De plus, la mise en forme des équations de mouvement du système complet (rotor, ligne d'arbre, nacelle et pylône) en vue d'une résolution par super-

position modale, nécessite des traitements mathématiques laborieux (séries de Fourier). Qui plus est, les études de cas de fonctionnement se limiteront à celle de la stabilité du système ; il sera très difficile de déterminer le comportement du système sur des régimes transitoires. L'héritage des modélisations adoptées dans le passé pour les rotors d'hélicoptères [27] explique que bon nombre de codes ont reposé sur une résolution des équations de la dynamique dans le domaine fréquentiel. Mais à l'image de l'évolution actuelle des modélisations des rotors d'hélicoptères [28], notamment aux Etat-Unis, la résolution par intégration temporelle devient majoritairement privilégiée, car elle constitue une approche plus naturelle. Cependant, en contrepartie d'un temps de calcul raisonnable, les modèles structuraux choisissent de conserver une représentation modale de la souplesse des corps (diminution du nombre de degrés de liberté), tout en adoptant un schéma d'intégration temporelle pour l'étude du comportement dynamique du système complet. Ceci va nous être confirmé par le passage en revue des codes existants.

1.4 Analyse des codes existants

L'essentiel des modèles développés pendant ces dernières années sont le fruit des travaux de nombreux laboratoires universitaires et industriels : DEWI (Allemagne), ECN (Hollande), FFA (Suède), Garrad & Hassan (UK), RISØ (Danemark) et NWTC-NREL (USA). La plupart des modèles sont basés sur le modèle aérodynamique classique de l'élément de pale couplé avec un modèle structural de poutre. Remarquons tout de suite que les analyses par sillage libre remportent la ferveur des laboratoires universitaires alors que les applications industrielles s'orientent toujours vers une utilisation de la théorie de l'élément de pale. Les paragraphes suivants détaillent la partie aérodynamique et la partie structurale de certains codes développés dans ces pays.

Le NTUA (National Technical University of Athens) s'est fortement engagé dans le développement de modèles aérostructuraux avec la collaboration du CRES (Center of Renewable Energy Sources en Grèce), de l'Université de Patras (Grèce) et notamment de l'Université du Havre (France). Il propose un modèle de sillage libre connue sous le nom de **GE-NUVP** (GENeral Unsteady Vortex Particle model) [24]. Ce modèle numérique complexe est à la base de nombreux travaux qu'ils ont effectués sur les études des effets de désalignement en lacet de la nacelle. **GENUVP** est, à notre connaissance, le modèle aérostructural le plus complet du moment (limité au rotor), car il travaille avec un modèle de sillage libre (permettant d'étudier les régimes instationnaires) couplé avec un modèle de décrochage basé sur le concept du double sillage (cf. § 1.2) et un modèle structural éléments finis de type poutre tridimensionnelle. D'un point de vue purement aérodynamique, **GENUVP** modélise les pales par des surfaces portantes, alors que le pylône et la nacelle sont implémentés par des solides non portants. Pour les pales, le NTUA a développé le code **Probeam** [29] qui effectue une harmonisation entre le modèle poutre et le modèle plaque, sensé représenter la structure tridimensionnelle à parois minces de la pale.

A partir des résultats obtenus par **GENUVP**, le NTUA a développé deux autres codes. Le premier, **Lsurf** [30], est un modèle de type sillage semi-prescrit utilisant la théorie de la ligne portante. Le terme de semi-prescrit vient du fait que les calculs sont initialisés grâce aux prédictions du modèle de sillage libre, ce qui en limite l'intérêt.

Suite aux résultats de **GENUVP**, le second modèle, **RAFT** [31] (Rotor Advanced Fast Tool), un modèle amélioré de l'élément de pale, fut imaginé par l'ajout d'une part, d'un terme d'instationnarité dans les équations de la quantité de mouvement et d'autre part, par la correction de la vitesse axiale au niveau du plan rotor dans le cas d'un désaligement en lacet de la nacelle. Soulignons que ce code modélise, à l'égale de **GENUVP**, les pales par des éléments finis de type poutre améliorée.

En Allemagne, l'IAG (Institut für Aerodynamik und Gasdynamik) présente depuis 1993 un modèle aérodynamique pur de sillage libre/sillage hybride (dénomination des auteurs) nommé **ROVLM** [32] (ROtor Vortex Lattice Method) basé sur la méthode des panneaux [18]. La pale est donc discrétisée par un ensemble de panneaux dotés d'un doublet d'intensité constante à leur centre.

L'Université de Glasgow (UK) développe, sur la base des travaux effectués sur les éoliennes à axe vertical, un modèle de sillage prescrit depuis 1993 [33], sans couplage structural. L'originalité du modèle est de morceler axialement le sillage en zones dans lesquelles des polynômes (obtenus par des mesures expérimentales) fixent la géométrie du sillage. D'autre part, la longueur du sillage proche (cf. § III-3.3.5) est fixé par un critère de coupure adimensionné, donc en théorie valable pour tous les rotors, et celle du sillage lointain par une fonction de décroissance de la vitesse axiale variable en envergure.

L'ECN (Energieonderzoek Centrum Nederland) en association avec le programme de recherche TWIN (acronyme allemand de Application of Wind Energy in Netherlands) et du NOVEM (Netherlands Agency for Energy and the Environment) proposent, quant à eux, un code de calcul, PHATAS [23] (Program for Horizontal Axis wind Turbine Analysis and Simulation), dont le modèle aérodynamique est basé sur la théorie tourbillonnaire avec une analyse par sillage cylindrique (réduction du sillage à son tourbillon marginal). Il permet de traiter les écoulements instationnaires et intègre également un modèle de décrochage et des effets tridimensionnels sur les polaires. D'autre part, ce code est l'un des rares offrant la possibilité de modéliser la totalité de la structure d'une éolienne à axe horizontal. La déformation des pales en flexion (suivant deux plans), de la ligne d'arbre (en torsion) et du pylône (flexion et torsion) est basée sur une représentation modale. Les équations de mouvement de chaque sous ensemble font naturellement apparaître trois types d'inconnues : le déplacement, la vitesse et l'accélération de points de la structure. Afin d'obtenir qu'une seule inconnue, les dérivées de chaque degré de liberté sont approximées par une différence finie décentrée à gauche. Il s'agit donc d'une technique de résolution par intégration temporelle directe. Remarquons que cette méthode permet de traiter uniquement une configuration de machine précise, puisque Phatas ne se propose pas d'établir le système d'équations de mouvement de la machine entière, mais raisonne sur les équations des sous ensembles. Ce code, dans sa dernière version, date de 1995.

Aux Etats-Unis, le laboratoire du NREL (National Renewable Energy Laboratory), qui fait partie des laboratoires nationaux de développement de l'énergie aux USA, mène depuis 1976 des travaux sur le développement de codes de calcul éoliens. Parmi les codes aérodynamiques purs, nous pouvons citer le premier d'entres eux, **PROP** (PROpeller Prediction), suivie de **PROP-PC** (1985), qui est une version réactualisée pour PC. Ce code est basé sur la

théorie combinée (méthode de Glauert) avec facteurs de correction de Prandtl. Puis le NREL donna naissance à une nouvelle version (1996), WT Perf (Wind Turbine Performance). Cette version est maintenant capable de traiter les rotors à vitesse variable, et possède un modèle de post-décrochage ainsi qu'une correction des polaires pour tenir compte des effets tridimensionnels de l'écoulement autour des pales. On peut également citer leurs travaux sur le développement d'un code pour le post-traitement de résultats issus de codes de calcul ou de campagnes d'essais (GPP: General-Purpose Postprocessor for horizontal axis wind turbine data analysis). Entièrement dévoué à l'analyse aérodynamique, YawDyn/AeroDyn, sont deux autres codes basés sur la théorie de la quantité de mouvement et de l'élément de pale modifiée de façon à tenir compte des effets instationnaires de l'écoulement amont. Ces codes fonctionnent avec le programme d'analyse structurale des systèmes multicorps ADAMS (Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems, distribué par Mechanical Dynamics, Inc). Il permet d'étudier des systèmes mécaniques à n degrés de liberté et la détermination des équations de mouvement est basée sur une formulation Lagrangienne (cf. § II-4.3.1). Ce code commercial utilisé pour la technologie éolienne se base sur les plus récents développements effectués sur les systèmes multicorps articulés rencontrés dans l'industrie de la robotique et des systèmes spatiaux.

16

Enfin, le code FAST [26] (Fatigue, Aerodynamic, Structures and Turbulence) est le résultat de leurs récents travaux. Ce code utilise toujours une aérodynamique basée sur la théorie combinée avec la particularité très intéressante qu'il permet de résoudre les équations de mouvement de toute la machine, à l'opposé de Phatas. La formulation des équations de mouvement utilise le formalisme des équations de la dynamique de Kane [34]. Cependant, le niveau de développement de cette formulation ne permet pas de traiter une configuration quelconque de machine, sans avoir à reformuler certaines parties des équations. Depuis juin 1997, la version modifiée de ce code, Fast-Ad, travaille avec le logiciel AeroDyn (développé plus exactement par l'université de Utah). Cette version se veut être, en quelque sorte, l'égale de Phatas.

Le bureau d'études Stentec B.V. au Danemark propose un code dénommé Twister [25]. La modélisation aérodynamique est basée sur la théorie combinée. Quant au modèle structural, les pales sont représentées par le chaînage de poutres rigides articulées. Enfin, la ligne d'arbre est infiniment rigide et le pylône est caractérisé en déformation par ses deux modes de vibration naturel au maximum. Nous ne possédons pas de détail sur la mise en équation de la machine, simplement on note que ce code utilise une technique d'intégration temporelle directe.

Le tableau 1.1 et la figure 1.4⁴ dressent la liste des codes de calcul dont nous venons de détailler les caractéristiques principales. Cette présentation est loin d'être exhaustive et ne prétend pas restituer l'ensemble des codes existant sur le sujet, car les laboratoires et les industriels ne divulguent pas toujours l'existence de leurs codes. L'intérêt de cette présentation est de positionner les codes en fonction du degré de complexité adopté pour les différentes modélisations.

^{4.} RAFT apparaît deux fois car la formulation dynamique utilisée n'est pas précisée par ses auteurs.

Nom	Modèle	Approx.	Modèle	Modèle de	Pays
	aéro.	des pales	structural	décrochage	
ADAMS/WT	BEM	-	Poutre	NC	USA
FAST-AD	BEM	-	Poutre	Beddoes	USA
GENUVP	FWA	SP	Poutre	Sillage double	Grèce
LSURF	Semi-PWA	SP	NC	NC	Grèce
PHATAS	BEM		Poutre	NC	Hollande
PROP-PC	BEM	-	-	-	USA
RAFT	BEM	_	Poutre	ONERA	Grèce
ROVLM	FWA/hybride	PM	NC	NC	Allemagne
TWISTER	BEM	-	Poutre	-	Danemark
WT-PERF	BEM	-	-	Th. plaques	USA
YawDyn/	BEM	-	-	Beddoes	USA
AeroDyn					
sans nom	PWA	LP	NC	NC	UK

TAB. 1.1 Synthèse des codes éoliens

FWA : analyse par sillage libre (Free Wake Analysis)

- PWA : analyse par sillage prescrit (Prescribed Wake Analysis)
- LP : Ligne Portante
- SP : Surfaces Portantes
- PM : Panneaux (Panel Method)
- NC : Non Communiqué
- BEM : méthode de l'élément de pale (Blade Element Method)
- : sans objet

D'autre part, les développeurs de codes doivent maintenant répondre à des critères de qualité sur leurs produits. Pour une utilisation à vocation industrielle plutôt que de recherche, les logiciels doivent intégrer les caractéristiques suivantes :

- recherche d'un maximum d'intéractivité, passant par l'emploi de pré et post-traitements des données,
- capacités à effectuer des calculs de conception sur des ordinateurs standards,
- production de résultats directement utilisables pour la conception et la certification,
- documentation exhaustive du code et de son utilisation.

La synthèse de ces connaissances actuelles sur les modèles aérodynamiques et structuraux va maintenant nous permettre de poser les bases de développement de notre travail.



FIG. 1.4 Classification des codes éoliens

Chapitre 2

Objectifs du travail de thèse

2.1 Introduction

La revue des codes effectuée au chapitre précédent souligne trois points fondamentaux. En premier lieu, une modélisation éléments finis complète de l'ensemble de l'éolienne, bien que théoriquement possible, serait beaucoup trop lourde à mettre en oeuvre et l'alternative semble, à l'heure actuelle, se situer au niveau d'une représentation modale adéquate de la souplesse des différents corps. Cependant, dans cette approche, les pales souffrent d'un traitement souvent trop réducteur de leur comportement structural réel auquel il est nécessaire de remédier. En second lieu, l'écriture des équations de mouvement du système complet intégrant ces souplesses, reste très laborieux, si bien que très peu de chercheurs se sont lancés dans un tel travail. En troisième lieu, les codes basés sur la résolution des équations de mouvement dans le domaine fréquentiel ne satisfont plus aux objectifs d'analyse du comportement des éoliennes de grande taille où les phénomènes sont essentiellement instationnaires. Tous les auteurs utilisent désormais un schéma d'intégration temporelle. Ces limitations importantes dans la modélisation du comportement dynamique des éoliennes, sont le résultat de la focalisation des recherches sur l'étude, presque exclusive, du comportement aérodynamique. Cependant, sans sous estimer l'importance et la complexité des phénomènes aérodynamiques, la volonté d'aller vers des machines de plus en plus puissantes (donc de grande taille), avec des principes de fonctionnement quelquefois novateurs font que leur comportement structural jouera un rôle de plus en plus déterminant. Les lacunes principales dont souffrent les modèles structuraux actuels se situent donc au niveau de la modélisation du comportement dynamique des pales et de la mise en équation du système complet.

2.2 Définition des objectifs

Face à ce constat, il est maintenant urgent de remédier aux points faibles des modèles structuraux actuellement implémentés dans les codes de calcul en se basant sur une représentation réaliste du comportement des pales et la mise en équation du système complet, qui sera ensuite résolu par une technique d'intégration temporelle directe. En outre, une modélisation aérodynamique du rotor s'inspirant de la théorie tourbillonnaire, tendant à être de plus en plus utilisée, sera inclue dans le code mais ne fera pas de notre part l'objet de développements spécifiques. Les modèles majoritairement employés pour représenter la déformation des pales reposent sur des poutres élastiques continues, dont la déformée est très souvent calculée à l'aide des relations analytiques de la Résistance des Matériaux. Or les pales ont une géométrie complexe et sont réalisées avec des matériaux composites, marquées par une forte anisotropie de leur comportement mécanique. Par conséquent, les modes de déformations sont couplés. De plus, dans leur forme classique les formulations des équations de la dynamique des solides ne sont pas par nature, appropriées pour une mise en équation simple du système complet qui puisse être facilement transposable dans un langage de programmation.

Les objectifs de ce travail sont donc :

- de proposer un modèle éléments finis de type poutre pour représenter de façon la plus réaliste possible le comportement des pales. En particulier, ce modèle doit être capable de tenir compte de l'anisotropie des matériaux, de la géométrie réelle de la pale et de rendre compte du couplage des déformations,
- d'intégrer de façon simple les termes de couplage aérostructural dans les équations de mouvement par le biais d'une modélisation aérodynamique basée sur les développements récents, en employant toutefois les modèles déjà existants,
- d'établir une procédure rapide et systématique de mise en équation de la machine complète et de la rendre facilement transposable dans un code de calcul,
- d'avoir la capacité d'étudier les réponses de l'éolienne aux sollicitations instationnaires par une technique de résolution basée sur un schéma d'intégration temporelle, qui constitue la démarche la plus naturelle,
- et enfin d'écrire le noyau d'un code de prédiction des efforts sur les éoliennes à axe horizontal de moyenne et forte puissance. Il sera développé en respectant un certain nombre d'impératifs tels que la convivialité, la rapidité de mise en oeuvre, un bon compromis entre précision des résultats et temps de calcul, ainsi que la transportabilité sur différents types de plates-formes informatiques.

La seule restriction imposée par le formalisme utilisé pour établir nos équations de mouvement se situe cependant au niveau de la représentation de la déformation des corps souples qui doit apparaître explicitement dans les équations. Nous allons donc recourir à une représentation modale des déformées, en supposant que les corps souples subissent des déplacements et des déformations modérés (domaine de l'élasticité linéaire).

En revenant sur la *figure 1.4*, on peut alors aisément situer les objectifs de ce travail par rapport aux codes existants *(figure 2.1)*.



FIG. 2.1 Trajectoire des travaux de la thèse

2.3 Démarche adoptée au niveau des modélisations

Dans ce travail, nous ne nous intéresserons qu'à une éolienne à axe horizontal dans le vent prise isolément, c'est-à-dire que l'on ne considérera pas les perturbations éventuelles engendrées par les machines voisines telles qu'elles peuvent survenir dans une ferme éolienne.

L'éolienne est un système mécanique constituée de corps souples articulés entre eux par des liaisons de type pivot. La démarche naturelle pour déterminer le système d'équations gouvernant le mouvement du système serait d'appliquer le théorème classique de la résultante dynamique couplé avec les équations de liaisons. Malheureusement, ce type de développement est fastidieux et nous opterons pour l'utilisation du formalisme de Kane des équations de la dynamique, écriture plus systématique et adaptée à la mise sous forme algorithmique du problème. Les déformations des corps souples seront introduites par l'intermédiaire des fonctions de forme modales. Cependant, parmi tous les corps souples (pylône, ligne d'arbre, etc), on doit principalement se soucier d'introduire la souplesse des pales de la façon la plus réaliste possible, puisque le rotor constitue le coeur de la machine. Une attention toute particulière sera donc apportée à la modélisation du comportement vibratoire des pales grâce à l'utilisation d'une méthode éléments finis. Une pale sera considérée comme une poutre tridimensionnelle anisotrope que l'on modélisera par des éléments de poutres en leurs incluant les effets dus à la variation en envergure des caractéristiques géométriques (sections de forme complexe) et mécaniques (anisotropie). Cela nous permettra de bâtir une base modale correcte du rotor. Le comportement dynamique de la ligne d'arbre sera ramenée à une ligne d'arbre dynamiquement équivalente également grâce à une analyse modale. Enfin, la souplesse du pylône sera également intégrée par le biais de ses premiers modes vibratoires de flexion et de torsion. Les équations de mouvement pourront alors être écrites en se basant, d'une part, sur une description unique de la cinématique du système (topologie arborescente) et, d'autre part, sur le formalisme de Kane des équations de la dynamique permettant un traitement récursif des relations cinématiques. Ainsi que nous le verrons, cette formulation sera d'autant plus adaptée à une transposition algorithmique que le nombre de degrés de liberté (mouvements de corps rigides et de corps souples) sera important. Le couplage aérostructural sera, quant à lui, introduit par l'intermédiaire des forces actives généralisées dues à l'écoulement du vent amont à travers le plan rotor.

Dans le code, la modélisation aérodynamique du rotor sera basée sur la théorie combinée de la quantité de mouvement et de l'élément de pale et pourra dans un second temps reposer sur l'application de la théorie tourbillonnaire (analyse par sillage prescrit).

Bien que les cas de fonctionnement du rotor en régime instationnaire dus aux rafales et à la turbulence soient des cas dimensionnants, ils ne seront pas abordés dans ce travail, le but étant ici de poser les bases d'une modélisation aérostructurale complète de la machine. Ne seront donc considérés que les cas du régime de vent stationnaire. Toutefois ce code étant basé sur une méthode d'intégration temporelle, l'étude des régimes instationnaires et transitoires ne posera pas, dans le futur, de problème particulier dans la mesure où le schéma d'intégration temporelle les traite de façon naturelle.

2.4 Résumé des différentes phases du travail

Avant d'aborder les différentes phases de modélisation, le lecteur pourra acquérir rapidement, dans le chapitre suivant, les notions essentielles relatives à la technologie éolienne, aux terminologies employées ainsi qu'aux modes de fonctionnement des éoliennes à axe horizontal. Cette présentation sera suivie d'une analyse de l'évolution des concepts, des précurseurs jusqu'à nos jours. Le lecteur pourra ainsi voir que les objectifs de ce travail trouvent leurs sources dans les préoccupations issues du contexte actuel.

Ce travail se décompose ensuite en trois parties, dans chacune desquelles (pour les deux premières), une courte étude bibliographique exposera les approches possibles et permettra de justifier celles qui ont été choisies:

1. La première commencera par exposer la modélisation structurale des systèmes multicorps souples disposés en arborescence. L'objectif est d'établir les équations de mouvement d'un système quelconque, constitué de corps souples ou rigides et articulés entre eux. L'intérêt de la démarche adoptée repose sur l'emploi du formalisme de Kane des équations de la dynamique et d'une procédure de comptage des corps du système permettant d'aboutir à des relations cinématiques récursives. Nous introduirons pour cela les notions de vitesses généralisées, de vitesses partielles, ainsi que celles de forces actives et d'inertie généralisées. Nous relierons ensuite ces éléments à ceux intervenant spécifiquement sur la dynamique d'un système constitué de corps souples, en particulier les forces actives généralisées dues à la restitution élastique et l'amortissement structural.

Le second chapitre exposera, quant à lui, la modélisation éléments finis développée pour représenter le comportement vibratoire des pales. Leur géométrie impose d'abord de définir un certain nombre de repères qui nous permettront d'évoluer vers un modèle aussi proche que possible de la réalité. Les développements commenceront par un bref rappel de la formulation classique des poutres, en ayant soin de préciser les hypothèses sur lesquelles elle repose, pour ensuite prendre en compte l'anisotropie des sections et le traitement de la variation en envergure des caractéristiques mécaniques. L'analyse des modèles éléments finis classiques de poutres nous conduira à employer une formulation plus adaptée aux structures des pales permettant de déterminer leurs matrices de rigidité et de masse. L'anisotropie et la géométrie des sections induisent des phénomènes de couplage des déformations qui, après avoir été identifiés, nous permettront de développer un nouvel élément de poutre en appliquant le principe de Hellinger-Reissner combiné à des relations cinématiques entre les différents centres de référence d'une même section et des changements de base appropriés pour exprimer les déplacements nodaux dans un repère de référence quelconque. Ce modèle éléments finis permettra de calculer les fonctions de forme modales des pales.

- 2. La seconde partie abordera la modélisation aérodynamique du rotor en commençant par définir les grandeurs qui caractérisent le vent. L'analyse de l'écoulement autour des pales conduira à des méthodes permettant d'évaluer les composantes de la vitesse induite conditionnant la valeur des efforts aérodynamiques s'exerçant sur les pales. La première de ces méthodes est basée sur l'application de la théorie de l'élément de pale et de la quantité de mouvement, à laquelle nous adjoindrons quelques modifications issues des derniers travaux effectués dans le domaine. La seconde est basée sur l'application de la théorie tourbillonnaire et se propose de modéliser l'écoulement par une analyse par sillage prescrit.
- 3. Dans la troisième partie, la formulation des équations de mouvement développées dans la première partie sera appliquée à l'éolienne tripale avec mécanisme de régulation du pas des pales. On introduira en premier lieu les différents repères nécessaires à la description de la configuration de la machine et on présentera une méthode de calcul qui permet de passer d'un repère à un autre à l'aide de chaînes de transformation exprimées sous une forme matricielle appropriée. Les équations de mouvement seront ensuite développées afin d'exprimer les forces actives et d'inertie généralisées du système complet. Puisque l'éolienne est un système piloté avec boucle de régulation active, nous identifierons clairement les éléments en liaison directe avec la loi de pilotage qui interviendrons dans les équations de mouvement. Cette partie se terminera par une synthèse des différentes étapes mises en jeu dans la modélisation complète de la machine, partant des données initiales pour aboutir à la modélisation du problème par un schéma d'intégration temporelle.

Avant de conclure, nous présenterons le noyau du code de calcul développé sur la base de ces travaux, qui nous a permis d'appliquer une partie des théories exposées.

Chapitre 3

Quelques repères sur l'énergie éolienne

La technologie des éoliennes à axe horizontal que nous connaissons actuellement est le fruit de travaux multiples menés séparément dans divers pays. Les réalisations d'éoliennes de moyenne ou forte puissance (classement que nous définirons) restent toujours limitées dans leur nombre car elles sont le plus souvent l'occasion de valider une conception nouvelle et rarement de démontrer que l'énergie éolienne pourrait s'avérer fiable et économiquement viable. Ce chapitre retrace donc les principales avancées des technologies employées sur les machines à axe horizontal afin de mieux comprendre l'environnement éolien que nous connaissons actuellement. Cette présentation, que l'on pourrait encore intituler "historique des éoliennes à axe horizontal de moyenne et forte puissance", se fera sur l'analyse des principaux travaux effectués dans les pays moteur de cette technologie. La terminologie propre aux éoliennes sera d'autre part d'abord introduite afin de faciliter la correspondance entre l'apparition du concept et sa mise en application sur les éoliennes actuelles. Cette présentation ne se veut pas exhaustive, car elle laisse certainement de côté des travaux de moindre importance et qui sont, sans doute, à la base de solutions technologiques notables.

3.1 Terminologie

Avant d'aborder la partie historique des développements sur les éoliennes à axe horizontal de moyenne et forte puissance, il est indispensable de posséder un minimum de vocabulaire propre à cette technologie. Nous pouvons, sans réserve, définir la terminologie éolienne à partir des machines actuelles car elles restent très proches des concepts de base élaborés dès l'apparition de celles-ci à des fins de productions d'énergie électrique.

3.1.1 Constitution

La figure 3.1 présente deux éoliennes à axe horizontal, l'une en configuration dite dans le vent (upwind) et l'autre sous le vent (downwind).



FIG. 3.1 Eolienne bipale dans le vent (a) et sous le vent (b) [35]

Les éoliennes à axe horizontal se décomposent simplement en trois sous-ensembles comprenant :

- le rotor. C'est l'ensemble des *pales* (deux ou trois, pour les concepts modernes), et du *moyeu*.

Les matériaux utilisés pour la fabrication des pales dépendent de la maîtrise de leurs concepteurs. On trouve donc du métal, du bois, mais surtout et de plus en plus des matériaux composites.

Le moyeu est la liaison entre les pales et la ligne d'arbre. Dans la cas des rotors bipales, celles-ci peuvent parfois pivoter autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de rotation du moyeu. On parlera alors d'un moyeu articulé (teetered hub, figure 3.2).



FIG. 3.2 Moyeu articulé [35]

L'autorisation de ce mouvement de rotation résulte de la nécessité d'amortir le phénomène de chargement cyclique dû au passage de la pale devant le pylône alors que la seconde est en position verticale, position durant laquelle celle-ci est la plus chargée aérodynamiquement

- la nacelle. Elle supporte tout le mécanisme de transmission de puissance et les dispositifs de pilotage. Typiquement, l'ensemble du mécanisme de transmission, désigné sous le nom de *ligne d'arbre*, est constitué du moyeu, d'un *arbre lent*, d'une *boîte de vitesses* (multiplicateur), d'un *arbre rapide* et d'une *génératrice*.



FIG. 3.3 Agencement d'une ligne d'arbre Mod-5B/3,2MW [35]

Un dispositif de *freinage mécanique* est souvent assuré par un frein à disque pour compléter le dispositif de *freinage aérodynamique*. Ces composants sont montés sur un bâti mobile en rotation qui supporte donc également le mécanisme d'orientation de la nacelle.

 le pylône. Les deux types de pylône que l'on rencontre fréquemment pour les éoliennes de moyenne et forte puissance, peuvent être réalisés à l'aide d'un treillis métallique, cette solution étant de plus en plus abandonnée au profit des pylônes tubulaires (métal et plus rarement en béton).

3.1.2 Modes de fonctionnement - Pilotage

Pour distinguer les dispositions constructives d'une éolienne à axe horizontal, il est d'abord nécessaire de se pencher sur son mode de fonctionnement. On distingue essentiellement les machines tournant à vitesse fixe et celles tournant à vitesse variable:

- rotor à vitesse fixe. Un grand nombre d'éoliennes possède une ou des génératrices asynchrones conçues pour délivrer un maximum de puissance électrique dans une plage



FIG. 3.4 Composants d'une nacelle (Vestas V27/225 kW) [35]

étroite de vitesse de rotation. Avec ce type de génératrice il est donc nécessaire de disposer, d'un moyen de régulation de la vitesse de rotation de ligne d'arbre. Les pales sont alors pilotées en *calage* sur toute leur envergure ou partiellement,

rotor à vitesse variable. D'une technologie plus récente, certaines génératrices fonctionnent avec une vitesse de rotation variable. Cependant, la fréquence du courant délivrée par ces génératrices varie en fonction de la vitesse de rotation et il est donc nécessaire de reconditionner ce courant avant de l'envoyer sur le réseau. Le rotor est alors muni de pales à calage fixe.

D'autre part, le pilotage d'une éolienne est constitué de deux dispositifs bien distincts :

- pour les éoliennes dans le vent, la nacelle doit être pilotée en lacet pour orienter en permanence le rotor face au vent; la nacelle est donc mobile en rotation autour d'un axe parallèle à l'axe du pylône. Les éoliennes sous le vent n'ont pas besoin de ce système d'orientation car elle fonctionne comme une girouette,
- pilotage de la vitesse de rotation du rotor; qu'il soit à vitesse variable ou fixe, il faut pouvoir stopper le rotor en cas d'urgence ou dans des conditions météorologiques en dehors de la plage de fonctionnement de l'éolienne. Dans le cas de pale à calage variable, l'action de freinage se traduira par un positionnement des pales où la composante d'entraînement aérodynamique s'annule (mise en drapeau) et dans le cas d'un rotor à vitesse variable, les pales sont conçues pour que cette même composante s'annule à partir d'une certain vitesse de rotation (décrochage). Des freins aérodynamiques déclenchés mécaniquement peuvent venir compléter ces dispositifs. Soulignons ici un point particulier aux éoliennes sous le vent: le rotor est incapable de démarrer seul dans cette configuration et il faut alors utiliser la génératrice comme moteur pour y parvenir.

Pour finir cette brève présentation des termes spécifiques aux éoliennes, on a l'habitude de classer celles-ci suivant trois catégories de puissance:

- les petites éoliennes, d'une puissance inférieure à 40 kW (diamètre rotor inférieur à 12 m),
- les éoliennes moyennes, d'une puissance comprise entre 40 et 1000 kW (diamètre rotor comprise entre 12 et 45 m),
- et enfin, les grandes éoliennes, d'une puissance supérieure à 1 MW (diamètre rotor de 46 m et plus).

3.2 Éoliennes destinées à la production d'électricité : les précurseurs

Bien que l'utilisation de l'énergie éolienne à des fins utiles ne soit pas récente, l'apparition des premières éoliennes destinées à la production d'énergie électrique date de la fin du $XIX^{\text{ème}}$ siècle. Deux inventeurs sont les précurseurs de cette technologie et, bien qu'éloignées géographiquement, leurs expériences furent menées avec succès sur des machines de configuration assez proche des éoliennes modernes.

C'est en 1888, à Cleveland (USA), dans l'état de l'Ohio que F. Brush, industriel dans le génie électrique, conçut et construisit pour la première fois une machine capable de produire 12 kW en courant continu. Cette éolienne possédait un rotor de 17 m de diamètre muni de 144 pales, érigé sur un pylône de 18 m de hauteur (figure 3.5). Le rotor fonctionnait dans le vent, c'est-à-dire que le plan rotor se situait devant le pylône. L'orientation de l'ensemble était assurée pour un gouvernail rectangulaire de 18 m sur 6 m rendant ainsi l'installation entièrement autonome, la maintenance était réduite à son minimum. Cette machine fonctionna pendant 20 ans jusqu'à ce que le rotor soit démonté en 1908.

Presque simultanément, en 1890, le Danois Paul La Cour (1846-1908), météorologiste, inventeur et directeur d'une école publique, débuta ses expériences de conversion des moulins à vent traditionnels en système de production d'énergie électrique. Paul La Cour utilisait l'énergie électrique produite par ses éoliennes pour réaliser une électrolyse de l'hydrogène qui alimentait ainsi les lampes à gaz de son école. Malheureusement, il eut quelques désagréments avec ce procédé, car des petites quantités d'oxygène arrivaient à se mélanger avec l'hydrogène et quelques factures du vitrier témoignent des risques liés à ses expériences... Fidèle au concept danois des moulins à vent, il conserva un rotor muni de quatre pales, vrillées, de forme rectangulaire, mais pressentit également l'intérêt d'utiliser des pales possédant un bord d'attaque cambré et une faible traînée.

La Cour fut alors capable d'énoncer quelques règles fondamentales afin d'optimiser les performances d'un rotor et réussit à mettre au point des machines adaptées à la production d'électricité. Il conçu donc les premières centrales éoliennes d'une puissance de 5 à 25 kWpour les besoins de l'agriculture et des installations urbaines. Vers 1910 plusieurs centaines de ces éoliennes fonctionnaient au Danemark. Paul La Cour donna des cours sur l'énergie

éolienne à l'école publique de Askov (Danemark) et plusieurs de ses anciens élèves construisirent par la suite des éoliennes bipales et tripales avec régulation par calage ou décrochage, principalement durant la seconde guerre mondiale.

Paul La Cour publia également le premier journal au monde traitant de l'énergie éolienne à des fins de production d'électricité. En 1918 quelques 120 communes danoises possédaient des éoliennes, d'une puissance allant typiquement de 20 à 35 kW, soit un total d'environ 3 MW installé.

Fort de cette tradition, le Danemark est aujourd'hui devenu le premier producteur par le pourcentage de sa production d'énergie électrique par voie éolienne. Malgré leur potentiel industriel et la capacité d'innovation, le développement de l'énergie éolienne aux Etats-Unis a fluctué au gré du cours mondial des autres ressources d'énergie. Face aux problèmes des futurs approvisionnements en énergie et à cause de la pollution générée par les sources d'énergie fossile, l'Europe s'est lancée dans une ambitieuse politique de développement de l'énergie éolienne et vise d'ici l'horizon 2020, 10 % de sa production d'électricité par énergie éolienne.

3.3 Évolution des éoliennes de moyenne et forte puissance

Sans schématiser de façon excessive, le nombre grandissant des travaux ainsi que l'intérêt que suscite à nouveau l'énergie éolienne répondent principalement à l'heure actuelle à des préoccupations (diminution de l'effet de serre) environnementales. Bien que ne répondant pas essentiellement à des préoccupations de cette nature les travaux du Danois Paul la Cour, à la fin du XIX^{ème}, et les quelques réalisations Américaines et Russes de ce début de siècle vont être suivies jusqu'au début de la seconde guerre mondiale par des projets qui resteront modestes. Dans la période allant de 1945 à 1970, les projets centrés essentiellement en Europe de l'ouest vont par contre asseoir les concepts encore employés à l'heure actuelle. Cependant, dans les années 60 - 70, les sources d'énergie fossile envahissent le marché de la production d'énergie, laissant les travaux de réalisation d'éoliennes au point mort. Toutefois, en 1974 date du premier choc pétrolier, les travaux en Europe de l'ouest redémarrent et seront suivis par un vaste programme de recherche en Amérique sur les éoliennes de moyenne et forte puissance. La seconde impulsion va être donnée par les problèmes environnementaux que suscitent la production d'énergie par les combustibles fossiles (rejets de gaz à effet de serre) ou le problème à long terme de stockage des déchets nucléaires. Après cette introduction au contexte économique et social, revenons maintenant sur l'évolution proprement dite des éoliennes de moyenne et forte puissance.

C'est en Russie, en 1931, que le premier pas vers les éoliennes de grande taille fut franchi. L'éolienne *Balaclava (figure 3.7)* de 30 m de diamètre et d'une puissance de 100 kW, implantée sur les bords la Mer Noire, fonctionna pendant deux ans avec une production de 200000 kWh en courant alternatif. Cette éolienne était assez rudimentaire puisque, par exemple, certains pignons étaient fabriqués en bois.

En 1939, l'ingénieur américain Palmer C. Putman, se lança dans la conception, la réalisation et l'expérimentation de la première éolienne de la classe du mégawatt. C'est en



FIG. 3.5 Éolienne de F. Brush, USA, 1888 [35]



FIG. 3.7 Éolienne Balaclava de 100 kW implantée en Russie, 1931 [35]



FIG. 3.9 Éolienne FLS bipale, Danemark [36]



FIG. 3.6 Éolienne de Paul la Cour à l'école de Askov, Danemark 1890 [36]



FIG. 3.8 Éolienne de Putman, USA 1939 [35]



FIG. 3.10 Éolienne FLS tripale, Danemark [36]

collaboration avec l'entreprise S. Morgan Smith implantée en Pennsylvanie, qu'une équipe de spécialistes recrutés à travers tout le pays, comprenant le célèbre aérodynamicien Theodore van Karman et des ingénieurs en génie électrique, que la conception et la réalisation de cette éolienne fut menée. Ainsi, le 10 octobre 1941 sur une colline du Vermont, ont pu avoir lieu les premiers tours du rotor bipale d'un diamètre de 53,3 m (figure 3.8). Ce rotor entraînait une génératrice synchrone d'un puissance nominale de 1,25 MW et les avancés technologiques portaient essentiellement sur le contrôle du calage des pales ainsi que l'orientation de la nacelle par des servos-moteurs. Après plusieurs centaines d'heures de fonctionnement, une rupture d'un arbre de transmission en 1943 et en raison de la seconde guerre mondiale, la poursuite des essais fut retardée de deux ans. On découvrit à cette occasion que le pied de pale était sous-dimensionné et des plaques de renfort durent être soudées. Lors de la reprise des essais en 1945, une fissure se déclara au niveau d'un point de soudure des plaques de renfort. Dans l'incapacité de trouver un financement pour remplacer le rotor, les dirigeants du projet prirent alors le risque de continuer le programme de tests en espérant qu'il puisse être terminé avant rupture du rotor. L'éolienne fonctionna donc encore pendant plusieurs semaines avec d'excellents taux de production, mais le danger était trop important. Le 26 mars 1945, la pale défectueuse se sépara du rotor et le projet ne fut pas reconduit. On doit retenir de cette expérience que Putman voulait avant tout démontrer que les éoliennes pouvaient complémenter la production des centrales électriques. Au delà des avancées technologiques, cette équipe mit en avant l'intérêt de fédérer autour d'un projet éolien une équipe d'industriels et d'universitaires afin de mieux répondre aux spécificités technologiques propres à une éolienne.

Le développement de la technologie éolienne pris place essentiellement en Europe de l'ouest, sous forme d'installations très modestes. Les paragraphes suivants se proposent de passer en revue les pays où les avancées furent les plus significatives.

3.3.1 Danemark

Le développement des éoliennes d'avant la seconde guerre mondiale eut principalement lieu au Danemark sous l'impulsion de Paul la Cour.

Durant la seconde guerre, la cimenterie F.L. Smidth (FLS) construisit une série d'éoliennes bipales (figure 3.9) et tripales (figure 3.10) de 45 kW dont le pylône était bien naturellement en ciment ce qui explique que par la suite, un grand nombre d'éoliennes danoises furent équipées sur des pylônes de ce type.

De plus, le concept tripale, parfois reconnu comme le concept danois, fut adopté pour limiter les phénomènes vibratoires au niveau du pylône. Le courant délivré était du courant continu, car les installations électriques de ce type étaient les plus répandues dans ce pays et en 1951, sous l'impulsion de Johannes Juul, les génératrices furent remplacées par des génératrices asynchrones de 35 kW, annonçant les machines de la seconde génération.

Fort de ce succès et en collaboration avec Johannes Juul, la firme FLS érigea en 1956 - 57, sur l'île de Gedser, dans le sud-est du Danemark, une éolienne de 200 kW munie d'un rotor tripale de 24 m de diamètre. Comme ses prédécesseurs le pylône était en ciment. Cette éolienne fut exploitée par la compagnie SEAS (Sydostsjaellands Elektricitets Aktieselskab) de 1958 à 1967 sans intervention majeure et cessa de tourner fin 1960 suite à une rupture d'arbre de transmission. Cependant, en 1970 la NASA, qui avait besoin d'effectuer des relevés

expérimentaux pour un de ses nouveaux programmes de développement sur les éoliennes de grande taille, remis en état cette machine qui fonctionna pendant trois ans.

La véritable entrée des Danois dans le secteur des éoliennes de grande taille se serait effectuée par l'installation de deux machines de $630 \ kW$, munies d'un rotor tripale de $40 \ m$ de diamètre. Deux technologies vont être testées sur ces rotors: l'un possède des pales à calages variables sur toute leur envergure et l'autre un calage partiel. Fidèle à la tradition des éoliennes *Gedser*, le pylône est en ciment.

L'implantation de ces deux éoliennes situées côte à côte (figure 3.12) sur le site de Nibe, près de Alborg au nord du Jutland, a permis entre autre d'étudier les interactions de sillage. Avec plus de 13 années de fonctionnement et de nombreux tests sur le choix des pales, elles ont également délivré de précieuses informations sur les coûts de maintenance ainsi que la fiabilité des concepts.

3.3.2 Suède

L'expérience suèduoise dans le domaine des éoliennes de grande taille va s'affirmer rapidement grâce à deux réalisations majeures. Le consortium danois KaMeWa développa tout d'abord une machine de 2,5 MW équipée d'un rotor bipale de 75 m de diamètre. Le moyeu est de type rigide dans le vent. Installée à Näsudden, sur l'île de Gotland, elle intégra des concepts assez inhabituels comme une boîte de vitesses à entrée-sortie perpendiculaire du fait du placement de la génératrice dans le pylône, éliminant ainsi toute la connectique tournante entre la génératrice et les câbles du réseau. On note également la présence d'un rail le long du pylône en béton afin de permettre la mise en place de la nacelle et des pales sans avoir recours à une grue.

La seconde réalisation sera le fruit de la coopération entre le Danois Karlskronavarvet et Hamilton Standard aux Etats-Unis. D'une puissance de 3 MW pour un rotor bipale sous le vent de 78 m de diamètre, cette éolienne est conçue de façon plus traditionnelle que la première, mais comporte des avancées technologiques telles que des pales en fibre de verre, le montage de la boîte de vitesses sur des amortisseurs pour absorber le couple dynamique, d'un moyeu articulé *(teetered hub)*.

Une version améliorée (figure 3.13) de cette dernière machine sera commandée par le centre de recherches de la NASA basé à Lewis avec une puissance portée à 4MW, ce qui en fait la machine *la plus puissance* jamais construite. L'objectif de cette réalisation était de démontrer la faisabilité d'une connection avec un système de production hydroélectrique.

3.3.3 États-Unis

Il faudra attendre l'année 1975 pour qu'une série de programmes sur les éoliennes de moyenne et grande taille voit le jour. Sous l'impulsion du secteur fédéral, une équipe de la NASA du centre de recherches de Lewis réalise pour le compte de la NSF *(National Science Foundation)* une série de tests sur une éolienne à concept modulaire baptisée *Mod*.

De 1975 à 1987 l'éolienne Mod-0 d'une puissance de 100 kW avec un rotor de 38,1 m de diamètre, permit d'évaluer de nombreuses configurations envisageables pour une éolienne à axe horizontal : pylône en treillis ou tubulaire, rotor dans le vent ou sous le vent, monopale



Danemark [36]



FIG. 3.12 Éoliennes Nibe-A et B de FIG. 3.11 Éolienne Gedser de 200 kW, 630 kW, Danemark [35]



FIG. 3.13 L'éolienne WTS-4, la plus puissante: 4 MW (Woyming)



FIG. 3.14 Mod-O à pales articulées, USA [35]



FIG. 3.15 Éoliennes Mod-2 pour l'étude des intéractions de sillages, USA [35]

ou bipale avec moyeu rigide ou articulé, pales avec ailerons *(figure 3.14)* ou en deux parties articulées.

Le programme *Mod-0A*, qui lança la construction de quatre éoliennes installées de 1977 à 1979 sur des sites différents devait permettre d'identifier et de résoudre les problèmes d'interconnection sur un réseau en activité.

Le programme Mod-1 débuta en parallèle avec l'installation des machines Mod-0A. D'une puissance de 2 MW pour un diamètre rotor de 61 m, elle fut la première éolienne de la classe du mégawatt à fonctionner de nouveau sur un réseau depuis celle de Putman en 1939. Cette éolienne permit notamment d'identifier l'impact environnemental d'une machine de cette taille : le bruit, les interférences électromagnétiques et l'acceptation de la part du public de ces machines dans le paysage.

Le programme Mod-2, qui débuta avant la première génération des Mod-1, mettait en oeuvre trois éoliennes de 2,5 MW et d'un diamètre rotor de 91,4 m (figure 3.15). Le rotor dont la conception était inspirée par les séries Mod-0 et Mod-1 fut néanmoins muni de pales à calage variable sur un portion d'envergure et était de type articulé pour des raisons de coût et de comportement structural meilleur. Disposées en triangle ayant pour côté respectif 5, 7 et 10 fois le diamètre du rotor, elles fournirent de précieux renseignements sur les phénomènes d'interactions (effet du sillage) entre des éoliennes installées proches l'une de l'autre.

Enfin, l'éolienne Mod-5B est la dernière et la plus impressionnante des machines issues de ce vaste programme. En effet, elle possède un diamètre rotor de 97,5 m et une puissance de 3,2 MW, ce qui la classe comme la plus grande éolienne fonctionnant à ce jour. L'avancée technologique majeur de la Mod-5B est son fonctionnement, avec succès, d'un rotor à vitesse variable. De plus, elle fut conçue à l'aide d'un code de calcul avancé de dynamique des structures baptisé Dylosat. Elle fut mise en route pour la première fois le 1^{er} juillet 1987 pour un série de deux tests de 500 heures chacun où elle put démontrer ses performances et sa fiabilité. Après cette période, elle fut vendue afin d'opérer sur le réseau courant exploité par l'Hawaiian Electric Industrie en même temps que quinze autres éoliennes de 600 kW(Westinghouse WWG-0600).

3.3.4 France

De 1958 à 1964, l'EDF en collaboration avec deux sociétés, **BEST** et **Neyrpic** construisit également trois éoliennes de grande taille. La première, baptisée *Best-Romani*, fut érigée à Nogent-le-Roi, près de Paris et possédait un rotor tripale de 30 m pour une puissance annoncée de 800 kW pour un vent de 16 m/s. Elle fonctionna sur le réseau EDF pendant cinq ans, entre 1958 et 1963, avec quelques problèmes de lubrification de la boîte de vitesses, d'embrayage de la ligne d'arbre et sur le freinage mécanique. Cependant, la connection au réseau du générateur fonctionnait correctement.

La seconde éolienne, dénommée type Neyrpic, avait un diamètre de seulement 21 m et une puissance de 132 kW pour un vent de 13,5 m/s (figure 3.16). Installée à Saint Rémy des Landes, elle tourna correctement pendant trois ans avec seulement 60 jours d'arrêt pour de multiples raisons techniques.

La troisième enfin, fut la plus puissante construite en France car elle délivrait 1, 1 MW. C'était également une éolienne de type Neyrpic implantée sur le même site que la première du lot. Dotée d'un rotor tripale de 35 m de diamètre, elle délivra sa production sur le réseau pendant seulement sept mois en 1963 et 1964. Durant le mois de novembre 1963, elle produisit un total de 200000 kWh et pendant la période des ses sept mois de fonctionnement, elle capta 28 % de l'énergie du vent disponible sur le site, ce qui est une performance encore rarement atteinte par les éoliennes modernes de nos jours.

Bien que ces trois prototypes aient démontré la faisabilité de coupler ce type de machines sur un réseau, les expériences et la recherche sur l'éolien furent arrêtées en 1964.

3.3.5 Grande-Bretagne

De 1948 aux débuts de 1960, on retiendra trois prototypes d'éolienne, d'une puissance de 100kW chacun et d'une conception totalement différente à chaque fois, destinés à être connectés au réseau.

Le premier, installé sur l'île de Orkney en 1950 fut construit par **John Brown & Co**. Son rotor tripale sous le vent, d'un diamètre initial de 18 m fut porté à 15 m à la suite d'un choc avec le pylône survenu par vent fort *(figure 3.17)*. Il connut également des problèmes structuraux au niveau du moyeu et de vibrations du pylône. Son activité cessa en 1956.

Egalement en 1950, animée d'un rotor de 25 m, une seconde éolienne fonctionnait avec un concept tout à fait nouveau appelé concept de **Andreau**: il permettait de supprimer tout couplage mécanique entre la rotor et la génératrice puisque celle-ci était alors entraînée pneumatiquement. En effet, des évents radiaux, pratiqués sur la périphérie du pylône totalement creux, permettait un écoulement d'air qui entraînait alors une turbine à air couplée au générateur. De plus, cet air était accéléré par la rotation des pales creuses et ouvertes à leur extrémité qui jouaient ainsi le rôle d'une pompe centrifuge. Bien que fonctionnant correctement, le rendement global de cette éolienne était faible.

La dernière enfin, fabriquée par Smith (Horley) Ltd. était installée sur l'île de Man, fin 1950 et fonctionna jusqu'en 1963. Les innovations technologiques portaient cette fois sur le contrôle des pics de puissance par un système de décrochage aérodynamique pour des pales fixes en calage et l'utilisation d'aluminium extrudé pour la réalisation des pales afin d'en abaisser le coût. Elle fut arrêtée en 1963 après une sévère tempête qui endommagea les pales.

Bien que reconnue comme active dans les recherches sur l'éolien, la Grande-Bretagne opte pour des réalisations plus modestes. En 1982, une éolienne de 250 kW, baptisée MS-1, fut réalisée, suivie d'un prototype privé de 300 kW, appelé Howden. Vint ensuite un prototype de 3 MW (LS-1), installé à Orkneys, dont les essais commencèrent en 1987.

3.3.6 Allemagne

Sous l'impulsion des travaux de professeur Ulrich Hütter entre 1950 et 1960, une éolienne de 100 kW avec un rotor de 34m de diamètre concentrait les principales avancées



FIG. 3.16 Eolienne Neyrpic, France [35]



FIG. 3.18 Eolienne de l'Andreau, Grande-Bretagne [35]



FIG. 3.17 Eolienne John Brown & Co, Grande-Bretagne [35]



FIG. 3.19 Eolienne Growian, la plus grande: 100 m de haut (Allemagne)



FIG. 3.20 Eolienne de Ulrich Allgaier: innovante sur bien des points, Allemagne [35]

technologiques de cette fin des années soixante sur l'énergie éolienne en Allemagne et seront reconduites dans les décennies à venir. En effet, l'éolienne de Hütter-Allgaier innovait sur plusieurs points : l'introduction de pales souples en fibre de verre, de grand allongement, à calage variable sur toute l'envergure et montées sur un moyeu articulé *(figure 3.20)*. En raison des moyens financiers limités et des problèmes de flottement *(flutter)* des pales, quelques essais seulement purent avoir lieu durant l'année 1960.

Ce n'est qu'en 1982 que le pas vers les éoliennes de grande taille est franchi. Le développement de l'éolienne Growian (figure 3.19) fut l'un des défis les plus ambitieux et les plus risqués pris sur cette technologie. En effet, d'une puissance de 3 MW avec un rotor bipale dans le vent de 100 m de diamètre elle est *la plus grande jamais* réalisée. D'autre part, le rotor est muni de pale en fibre de carbone à calage variable sur toute l'envergure et montée avec un fort degré de conicité. Le pylône est tubulaire, de faible diamètre, stabilisé par un haubanage, et est conçu pour permettre l'élévation de la nacelle sans l'aide d'une grue. On notera également que ce fut l'un des premières à fonctionner avec un rotor à vitesse variable. Malheureusement, le nombre d'inconnues imputables à cette technologie non pas permis de mener à bien tous les essais escomptés.

3.4 Spécificités de la production d'énergie éolienne

La production d'énergie électrique par l'éolien ne peut être considérée que comme un complément et non une substitution des moyens "classiques" de production du fait de son caractère fluctuant de production. Les avantages des installations éoliennes par rapport aux autres moyens de production sont :

- aucune pollution atmosphérique (zéro rejet),
- faible occupation de la surface des sols,
- aucune pollution des sols (pas de rejet d'hydrocarbure, métaux lourds, etc),
- revalorisation à 100 % des sites après arrêt et démentellement d'une centrale éoliennes,
- très faible coût des interventions de maintenance,
- facilité de remplacement d'une machine usée ou défaillante.

Les inconvénients des installations éoliennes sont :

- production fluctuante,
- choix restreints des sites d'implantation à grosse échelle,
- seuil de rentabilité éloigné dans le temps (à justifier avec des chiffres de coûts de production et d'installation et du prix du kW),
- impacte visuelle et sonore, bien que les grandes installations soient dégagées des habitations.

Le tableau 3.1 présente une liste non exhaustive des éoliennes à axe horizontal dans le vent de moyenne et forte puissance. Les rotors munis de deux ou trois pales sont encore employés de façon équitable. Les pales en matériaux composites à base de fibres (verre et carbone) prennent par contre le dessus sur les matériaux plus classiques comme le bois et le métal.

Pays	Machine		Spécifications du rotor				
Membre	Fabricant	Modèle	Pales	Matériaux	D[m]	H[m]	$A[m^2]$
Belgique	Windmaster		2	GRP	46,0	63,0	1,662
Danemark	Groupement	Nibe-A	3	Bois	40,0	45,0	1,256
Danemark	Groupement	Nibe-B	3	Bois	40,0	45,0	$1,\!256$
Danemark	DWT	Windane 40	3	$\mathrm{GRP}/\mathrm{Bois}$	40,0	45,0	1,257
Danemark		Tjæreborg	3	GRP	60,0	60,0	2,827
Allemagne	M.A.N.	WKA 60	3	GRP	60,0	50,0	2,827
Allemagne	M.A.N.	WKA 60 Land	3	GRP	60,0	60,0	2,827
Allemagne	MBB	Aeolus II	2	CRP	80,0	77,0	5,077
Allemagne	Husumer Sch.	HSW 750	3	$\mathrm{GRP}/\mathrm{Bois}$	40,0	45,0	1,257
Allemagne	Tacke	TW 500	3	GRP	36,0	35,0	1,018
Italie	Aeritalia	Gamma 60	2	GRP	66,0	60,0	2,827
Hollande	Holec	Holec 500	3		35,0		0,962
Hollande	Stork-FDO	NEWECS-45	2	GRP	$45,\!0$	60,0	1,590
Hollande	Windmaster	NL 500	2	GRP	33,0	Î	0,885
Hollande	Windmaster	Windmast750	2	Bois/Epoxy	$40,\!0$	50,0	1,257
Hollande	Newinco	Newinco 500	2	Métal	$_{34,0}$		0,908
Espagne	Asinel, M.A.N.	AWEC 60	3	GRP	60,0	46,0	2,827
Suède	KMW AB	WTS-75	2	GRP/Métal	75,0	77,0	4,418
Suède	Kvaerner-MBB	Näsudden I	2	Métal	75,0		4,418
Suède	Kvaerner-MBB	Näsudden II	2	CRP	80,0	77,0	5,027
Angleterre	WEG	LS-1	2	$\mathrm{GRP}/\mathrm{M\acute{e}tal}$	60,0	45,0	2,827
Angleterre	WEG	LS-2					
Angleterre	Howden	$750 \mathrm{kW}$	3	Bois/Epoxy	$45,\!0$	35,0	1,590
Angleterre	Howden	$1 \mathrm{MW}$	3	$\operatorname{Bois}/\operatorname{Epoxy}$	$55,\!0$	$45,\!0$	$2,\!376$
Angleterre		HSW	3	$\mathrm{GRP}/\mathrm{Bois}$	40,0	45,0	$1,\!257$
Etats-Unis	Boeing	Mod-5B	2	Métal	97,5	61,0	7,472
Etats-Unis	Westinghouse	WWWG-0600	2	$\operatorname{Bois}/\operatorname{Epoxy}$	$43,\!0$	$31,\!0$	$1,\!452$

TAB. 3.1 Recensement des éoliennes à axe horizontal dans le vent de plus de 500 kW [35]

GRP : fibres de verre renforcées

 ${\rm CRP}: {\rm carbone} \ {\rm renforc}\acute{\rm e}$

A: surface mouillée du rotor

D: diamètre du rotor

H: hauteur du moyeu

Bibliographie

- Germanischer Lloyd, Rules and Regulation, IV Non-Marine Technology, Part 1 Wind Energy Regulation for the Certification of Wind Energy Conversion Energy Systems, 1993.
- [2] IEC International Standard, Wind Turbune Generator Systems, Part 1: Safety Requirements (CEI/IEC 1400-1, Geneva, Switzerland, 1994).
- [3] RANKINE, W.J.M.: "On the mechanical principe of the action of propellers"; Transaction of the Institute of Naval Architects, vol. 6, 1865.
- [4] FROUDE, W.: On the elementary relation between pitch, slip and propulsive efficiency"; Transaction of the Institute of Naval Architects, vol. 19, 1978.
- [5] DRZEWIECKY, S.: Sur une méthode pour la détermination des éléments mécaniques des propulseurs hélicoïdaux; comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris 114:p. 820-822, 1892.
- [6] GLAUERT, H.: Aerodynamic theory; vol. 6, Div. L, W.F. Durant, ed., Berlin, Julius Springer, p. 324, 1935.
- [7] BETZ, A.: Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust; Göttinger Nachrichten. Mathematisch-physikatische Klasse, pp. 193-213, 1919.
- [8] PRANDTL, L.: Appendix to [7], pp. 213-217.
- [9] PETOT, D., Recherche Aérospatiale, papier No. 5, 1989.
- [10] LEISHMAN, J.G. and BEDDOES, T.S., Proc. 42th Annual Forum of the American Helicopter society, Washington D.C., pp. 243-265, 1986.
- [11] BOSSCHERS, J., MONTGOMERIE, B., BRAND, A.J. and R.P.J.O.M. van ROOY: Influence of Blade Rotation on the Sectionla Aerodynamics of Rotational Blades; NLR Technical Publication, TP 96523 U, 1996.
- [12] H. GLAUERT: A General Theory of the Autogyro; ARC R&M 1111, november 1926.
- [13] H., SNEL, J.G. SCHEPPERS: Joint Investigation of Dynamic Inflow Effects and Implementation of an Engineering Method; ECN-C-94-107, avril 1995.
- [14] [http://www.ffa/se]
- [15] JOUKOWSKI, N.E.: Théorie Tourbillonnaire de l'Hélice Propulsive; Soc. Math. Moscou, Paris, 1912.

- [16] GOLDSTEIN, S.: "On the Vortex Theory of Screw Propellers"; Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol. 123, pp. 440-465, 1929.
- [17] A. BONNET, J. LUNEAU: Théories de la dynamique des fluides; CEPADUES-EDITIONS - 111, rue Nicolas Vauquelin - 31100 Toulouse, 1989.
- [18] PLOTKIN, A., KATZ, J.: Low-Speed Aerodynamics From Wing Theory to Panel Methods"; McGraw-Hill, Inc, 1991.
- [19] CHASSAPOYIANNIS, P.I., PHILIPPIDIS, T.P. and S.G. VOUTSINAS: Advanced Aeroelastic Modelling of Wind Turbine Blades; National Technical University of Athens, [http://www.fluid.mech.ntua.gr/wind/].
- [20] VASILIS, A.R., VOUTSINAS, S.G. and A. ZERVOS: Investigation of the Yaw Induced Stall and its Impact to the Design of Wind Turbines - Evaluation of Results and Recommandations"; EUWEC, Göteborg Sweden, pp. 718-721, 20-24 may 1996.
- [21] VEERS P.S.: "Three Dimensional Wind Simulation"; Sandia Report SAND880152, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico, 1988.
- [22] MANN J., Ris-R-727(EN), 1994.
- [23] C. LINDENBURG, J.G. SHEPERS: PHATAS-III AEROELASTIC MODELLING -Program for Horizontal Axis Wind Turbine Analysis and Simulation version III; ECN-C-96-025, july 1996.
- [24] VOUTSINAS, S.G., BELESSIS, M.A. and S. HUBERSON: Investigation of the Yawed Operation of Wind Turbines by Means of a Vortex Particule Method; European Community Wind Energy Conference, pp. 428-431, 8-12 March, 1993.
- [25] LUIJENDIJK, R.P.: Reference manual TWISTER_12; Raadgevend Ingenieursburreau Stentec B.V., Heeg, The Netherlands, 1996.
- [26] WILSON, R.E., FREEMAN, L.N., WALKER, S.N. and C.R. HARMAN: Fast Advanced Dynamics Code; OSU/NREL Report 96-01, March 1996.
- [27] W. JOHNSON: Helicopter Theory; Dover Publications, Inc., New York, 1980.
- [28] S.R. TURNOUR: Flight Dynamics Simulation Modeling for Hingeless and Bearingless Rotor Helicopters; PhD. Dissertation, University of Maryland, 1996.
- [29] PHILIPPIDIS, T.P., VASSILOPOULOS, A., KATOPIS, K.G., VOUTSINAS, S.G.: "PROBEAM: a sofware for fatigue design and analysis of rotor blades "; 2nd National Congress on Computational Mechanics, Conference Proc., Chania, Hellas, 1996.
- [30] CHASSAPOYANNIS, P., HUBERSON, S. and S.G. VOUTSINAS: Advanced Design Tools for Wind Turbines - Evaluation of Results and Recommandations"; EUWEC, Göteborg Sweden, 20-24 may 1996.
- [31] KATOPIS, K.G. and S.G. VOUTSINAS: RAFT: A Rotor Analysis Fast Tool; National Technical University of Athens Report, 1996.

- [32] BAREISS, R. and S. WAGNER: "The Free Wake/Hybrid Wake Code ROVLM A Tool for Aerodynamic Analysis of Wind Turbines"; European Community Wind Energy Conference, pp. 424-427, 8-12 March, 1993.
- [33] ROBINSON, D.J., COTON, F.N., McD GALBRAITH, R.A. and M. VEZZA: The Developpement of a Prescribed Wake Model for the Prediction of the Aerodynamic Performance of Horizontal Axis Wind Turbines in Steady Axial Flow; University of Glasgow, Department of Aerospace Engineering, Report No. 9403, 1994.
- [34] KANE, T.R., LEVINSON, D.A.: "Dynamics, Theory and Applications"; McGraw-Hill Book Co., New-York, 1985.
- [35] <u>Wind Turbine Technology</u> Fundamental Concepts of Wind Turbine Engineering; David A. Sepra, Ph.D Editor, ASME PRESS, 1994.
- [36] Danish Wind Turbine Manufacturers Association web site [http://www.windpower.dk].

-• • -

.

Deuxième partie

Modélisation mécanique de l'éolienne à axe horizontal

45

.

Notations

Conventions

- [$]_e$ la matrice relative à l'élément fini d'indice e. Ex. : $[Q]_e$
- $\widehat{}$ une rigidité équivalente. Ex. : \widehat{ES}
- (O xyz) le repère principal d'inertie de centre O d'une section quelconque de poutre
- ()* pour signaler une variable relative à la cinématique virtuelle d'un solide (Ex.: u^*).
- Grad $\{\underline{u}\}$ le gradient du vecteur \underline{u} tel que, si $\{u\}^T = \langle u v w \rangle$, alors

$$Grad\left\{\underline{(}u)\right\} = \left[\begin{array}{ccc} u_{,x} & u_{,y} & u_{,z} \\ v_{,x} & v_{,y} & v_{,z} \\ w_{,x} & w_{,y} & w_{,z} \end{array}\right]$$

• $Div[\sigma]$ la divergence du tenseur des contraintes telle que

$$Div[\sigma] = (\langle Div \rangle [\sigma])^T \text{ avec } \langle Div \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$

Latines

Majuscules

A	: centre aérodynamique d'un profil d'une section de pale
\mathcal{A}	: aire de la surface de la section S
В	: solide considéré
$\{\mathcal{B}\}$: vecteur colonne du second membre de l'équation matricielle permettant de
B_k	: corps d'index k
	déterminer les coefficients a_m
C	: centre de torsion
\mathcal{D}^k	: fonction de dissipation du corps B_k
$< D^{*} >$: vecteur ligne des déformations virtuelles extrait du tenseur $[\epsilon^*]$ des
	déformations
E	: module de Young. Centre élastique d'une section de pale
EI_{yy}	: rigidité de flexion autour de l'axe (Ey)

EI_{zz}	: rigidité de flexion autour de l'axe (Ez)
F^{k}	: résultante des forces travaillantes agissant sur le corps B_k
$\overline{\{F\}}$: vecteur colonne des conditions aux limites
$\{F_n\}$: vecteur colonne des efforts nodaux dans le repère de pale R_{Pl}
G	: module de cisaillement - centre de gravité d'une section de pale
H^{h_k}	: moment angulaire du corps B_k par rapport au point h_k
$\frac{1}{I^k}$: dvadique d'inertie du corps B_k non déformé par rapport au point h_k
= I	: moment d'inertie principal autour de l'axe (Eu)
- yy I_~~	: moment d'inertie principal autour de l'axe (Ez)
$\{I, J, K\}$: base orthonormée liée au repère de pale $R_{Pl} \equiv (O_{Pl} XYZ)$
<u>.</u>]	: inertie de torsion
L	: longueur de l'élément fini $e: L = L_2 - L_1$
L_1	: abscisse du noeud 1 dans le repère associé à l'élément fini e
L_2	: abscisse du noeud 2 dans le repère associé à l'élément fini e
M^{k/h_k}	: moment résultant par rapport au point h_{L} des forces travaillantes agissant
<u></u>	sur le corps B_k
М	: moment de flexion par rapport à (OZ)
Ν	: effort normal à la section S
NB	: nombre de corps du système
N_d	: degré du polynôme approximant ϕ_{il}
N_{ddl}	: nombre total de degrés de liberté de la pale
N_e	: nombre total d'éléments finis discrétisant la pale
N_i^t	: i^{ieme} fonction de forme nodales en traction-compression et en torsion
$N_i^{f_y}$: $i^{i \hat{e} m e}$ fonction de forme nodales en flexion suivant l'axe (Oy)
$N_{i}^{f_{z}}$: $i^{\text{ième}}$ fonction de forme nodales en flexion suivant l'axe (Oz)
N_n^i	: nombre total de noeuds de la pale discrétisée par N_e éléments de poutre
NM_k	: nombre de modes de vibration libre du corps souple B_k
$\{N^{f_y}\}$: vecteur colonne des fonctions de forme nodales en flexion suivant (Oy)
$\{N^{f_z}\}$: vecteur colonne des fonctions de forme nodales en flexion suivant Oz
$\{N^t\}$: vecteur colonne des fonctions de forme nodales en traction-compression
NS	: nombre de degrés de liberté du système
0	: centre de référence d'un repère de section ; le lieu des points O défini l'axe
	longitudinal de la pale
O_i	: noeud $i, i = 1, 2$, de l'élément de poutre e de coordonnées (X_i, Y_i, Z_i) dans
	le repère pale R_{Pl}
O_{Pl}	: centre du repère de pale R_{Pl}
\underline{R}^{k}	: vecteur position par rapport au centre du repère galiléen du point p appar-
	tenant au corps B_k
\underline{R}^{h_k}	: vecteur position par rapport au centre du repère galiléen du point h_k
R_{Ba}	: repère de battement
R_E	: repère élastique de centre E
R_{Nv}	: repère non vrillé
R_{Pi}	: repère principal d'inertie de centre E
R _{Pl}	: repère de pale de centre O_{Pl}
R_{Se}	: repère de section de centre O
R_{Tr}	: repère de traînée
S	: frontière du solide B ; section d'une poutre
S_u	: frontière du solide B sujette à des conditions aux limites cinématiques
----------------	---
S_f	: frontière du solide B sujette à des forces surfaciques f_s
S_{Γ_i}	: surface délimitée par la courbe moyenne Γ_i
Т	: effort tranchant à la section S
U_f	: composante suivant $(O_{Pl}X)$ du vecteur \underline{u} due à la fléchissement de la pale
U_t	: composante suivant $(O_{Pl}X)$ du vecteur <u>u</u> due à l'allongement de la pale
$\{U\}$: vecteur colonne des coordonnées du vecteur \underline{u} dals le repère de pale R_{Pl} ; $\{U\}^T = \langle U V W \rangle$
$\{U_n\}$: vecteur colonne des déplacements nodaux dans le repère de pale R_{Pl}
< U V W >	: composantes du vecteur \underline{u} dans le repère de pale R_{Pl}
V^k	: énergie potentielle de déformation du corps B_k
\mathcal{V}	: volume du solide B

Minuscules

<u>a</u>	: accélération d'un élément de masse dm
a_m	: $m^{ extsf{ième}}$ coefficient du polynôme approximant ϕ_{il}
$\{a\}$: vecteur colonne des coefficients a_m
$\langle b \rangle$: vecteur colonne des vecteurs de base $\underline{I}, \underline{J}$ et \underline{K}
b^k	: repère local de centre h_k attaché au corps B_k
$\{\underline{b}_1^k, \underline{b}_2^k, \underline{b}_3^k\}$: base orthonormée attachée au corps B_k
с	: coefficient intervenant dans la définition de $[\widehat{H}]$
dm	: masse élémentaire
e	: numéro de l'élément fini considéré
df	: résultante des efforts de contact et de distance agissant sur l'élément dm
$\{\overline{f}\}$: vecteur colonne des forces de volume et de surface
f_r	: force active généralisée associée à la $r^{\mathtt{eme}}$ vitesse partielle
f_r^*	: force d'inertie généralisée associée à la r^{ime} vitesse partielle
f_{s}	: forces surfaciques agissant sur le solide B
\overline{f}_{ν}	: forces volumiques agissant sur le solide B
$\frac{g}{g}$: vecteur d'accélération de la pesanteur
\overline{h}_k	: centre du repère local b^k
$\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$: base orthonormée liée au repère $(O xyz)$ dont les axes dont les axes sont parallèles à ceux du repère R_{Fi} et déduite de la base $\{\underline{t}, \underline{j}', \underline{k}'\}$ par la rotation d'angle $\varphi = \alpha + \varphi_{Se}(S)$ autour de (O_1, O_2)
<u>j'</u>	: vecteur directeur unitaire contenu dans le plan de la section S et perpen- diculaire à <u>t</u> . j' est porté par la ligne dr référence du profil de la section S
<u>k'</u>	: vecteur directeur unitaire tel que $\underline{k}' = \underline{t} \wedge j'$
k_{Z_i}	: facteur de correction de cisaillement de la section S_i de la phase i de la section S
l^k	: vecteur position par rapport au point h_k du centre de gravité du corps B_k après déformation
m_{ii}	: élément de la ligne i, colonne j de la matrice de masse élémentaire $[m]$
$\widehat{m_l}$: masse linéique équivalente de membrane
$\widehat{m}_{mf_{m}}$: masse linéique équivalente membrane/flexion suivant (OY)
\widehat{m}_{mf}	: masse linéique équivalente membrane/flexion suivant OZ
\widehat{m}_{f_y}	: masse linéique équivalente en flexion pure suivant (OY)

\widehat{m}_{f_z}	: masse linéique équivalente en flexion pure suivant (OZ)
<u>n</u>	: vecteur normal à la surface S
n_{ddl}	: numéro du degré de liberté pris dans l'intervalle $[1, N_{ddl}]$
n_{arphi}	: nombre de phases d'une section S de poutre
p	: point quelconque appartenant au solide B
p_k	: point d'articulation appartenant au corps $B_{c(k)}$
q_i	: $i^{\text{ème}}$ coordonnée généralisée du système
q_{ij}	: élément de la ligne i, colonne j de la matrice $[Q]$
r	: nombre de points d'intégration de Gauss
r^k	: vecteur position d'un point p du corps B_k avant déformation par rapport au
_	point h_k
t	: variable temporelle
t	: vecteur directeur unitaire de l'axe (OX)
$\{t, j', k'\}$: base orthonormée liée au repère de centre $O, O \in [O_1, O_2]$, point de la ligne
(_/ <u>5</u> / _)	de noeuds, telle que <u>j</u> soit perpendiculaire au plan contenant $[O_1, O_2]$, ce
	plan étant lui-même parallèle à $(O_{Pl}Z)$; <u>t</u> est porté par (O_1O_2)
\underline{u}	: vecteur position d'un point p du solide B après déformation élastique
\underline{u}^*	: déplacement virtuel d'un point p du solide B
u^*	: composante suivant \underline{i} du vecteur \underline{u}^*
u_i	: déplacement du noeud i de l'élément fini e suivant \underline{i}
< u >	: vecteur colonne des coordonnées du vecteur \underline{u} dans le repère ($O \; xyz$)
\underline{u}^k	: vecteur position d'un point p du corps B_k après déformation par rapport à sa
	position initiale $\frac{1}{2}$
$\langle u_n \rangle$: vecteur des deplacements nodaux dans le repere R_{P_i}
$\{u_n\}_{loc}$: vecteur des deplacements nodaux dans le repere de section K_{Se}
u_r	: r ^{eme} vitesse généralisée
$\langle u v w \rangle$: composantes du vecteur \underline{u} dans le repère principal d'inertie R_{Pi}
v^{\star}	: composante suivant \underline{j} du vecteur \underline{u}^*
v_i	: déplacement du noeud i de l'élément fini e suivant \underline{j}
$A \underline{v}_r^p$: vitesse partielle du point p appartenant à un solide B par rapport au repère A associée à la vitesse généralisée u_r
$^{A}\underline{v}_{t}^{p}$: terme ne dépendant que du temps t et des coordonnées généralisées q_i
$\{\overrightarrow{w}\}$: vecteur colonne des vitesses généralisées
w^*	: composante suivant k du vecteur u^*
w_i	: déplacement du noeud i de l'élément fini e suivant k. $i^{\text{ème}}$ vitesse généralisée
	extraite de $\{w\}$
w_k	: poids d'intégration de Gauss
\underline{u}_{S_u}	: condition cinématique sur la surface S_u du solide B
x	: abscisse courante d'une section de poutre dans le repère lié à l'élément de poutre e
$\{x^l\}$: vecteur colonne des coordonnées du vecteur propre associé au $l^{i me}$ mode
	de vibration libre du corps souple B_k ; $\{x^l\}^T = \langle x_1^l \cdots x_{N+1}^l \rangle$
$c^{(k)}y^k$: vecteur directeur de l'articulation joignant les corps $B_{c(k)}$ et B_k
\hat{y}_n^k	: vitesse relative de translation de la $k^{\text{ème}}$ articulation suivant la $n^{\text{ème}}$ direction

Grecques

Majuscules

Λ	: allongement de la pale
Γ_i	: courbe moyenne de la cellule i
Π	: fonctionnelle (énergie potentielle complémentaire ou total)
Φ_i	: flux de contraintes traversant la cellule i

Minuscules

α	: angle principal d'inertie d'une section S de centre O
$lpha_i$: angle principal d'inertie d'une section S de centre O_i
δ_i	: coefficient unitaire pair lorsque $i = 1$, impaire sinon
η_l^k	: $l^{\text{ème}}$ coordonnée modale du corps B_k
$<\epsilon>$: vecteur ligne des déformations extrait du tenseur des déformations $[\epsilon]$
$\{\eta\}$: vecteur colonne des coordonnées modales ; $\{\eta\}^T = <\eta_1 \cdots \eta_{NM_k} >$
γ_{ij}	: déformation en cisaillement suivant les directions i et j $(i = x, y, z$ de
	même pour j) extraite du tenseur des déformations $[\epsilon]$; $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$
λ	: coefficient de Lamé
μ	: coefficient de Lamé
ν	: coefficient de Poisson
ω	: fonction de gauchissement
$\underline{\omega}^k$: vitesse angulaire du repère local b^k par rapport au repère galiléen
ϕ_{i}	: vecteur de fonction de forme modale associé au l^{ime} mode de vibration
	libre
$\phi'^{c(k)}_{l}(\underline{r}^{c(k)})$: l^{ime} vecteur de rotation modale au point p_k
$\frac{1}{\phi_{il}}$: i^{ieme} coordonnée du vecteur de forme modale associé au l^{ieme} mode de
,	vibration libre
ϕ_{ilp}	: composante i de ϕ_i associée au déplacement du noeud p au $l^{ième}$ mode de
•	vibration libre
φ	: angle entre le repère de base $\{\underline{t}, \underline{j}', \underline{k}'\}$ et le repère principal R_{Pi} de la
	section S
φ_{Se}	: angle de vrillage de la section S de la pale
$\hat{\rho}_{f_{z}}$: masse linéique équivalente en flexion suivant (Oz) de la section S
ρ_i	: masse linéique de la phase i de la section S
$\widehat{ ho}_m$: masse linéique équivalente en traction-compression de la section S
$\{\sigma\}$: vecteur colonne des contraintes extrait du tenseur des contraintes de
	Cauchy $[\sigma]$
σ_{ij}	: élément de la ligne i de la colonne j du tenseur des contraintes de
·	Cauchy $[\sigma]$
$\dot{\theta}_m^k$: vitesse relative de rotation de la $k^{\text{ème}}$ articulation suivant le $m^{\text{ème}}$ axe de rota
	tion
$ heta_{xi}$: rotation du noeud i de l'élément fini e autour de l'axe (Ox)
θ_{Xi}	: rotation du noeud <i>i</i> de l'élément fini <i>e</i> autour de l'axe $(O_{pl}X)$
θ_{vi}	: rotation du noeud i de l'élément fini e autour de l'axe Oy
3	

Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance

θ_{Yi}	: rotation du noeud i de l'élément fini e autour de l'axe $(O_{pl}Y)$
θ_{zi}	: rotation du noeud i de l'élément fini e autour de l'axe (Oz)
θ_{Zi}	: rotation du noeud i de l'élément fini e autour de l'axe $(O_{Pl}Z)$
ξ	: variable d'espace adimensionnée
ξ_i	: abscisse du point d'intégration i dans l'intégration numérique de Gauss
ξ_p	: abscisse du noeud numéro p
$<\zeta>$: vecteur ligne des efforts ; $\langle \zeta \rangle \triangleq \langle N M T \rangle$

Matrices

Majuscules

[A]	: sous-matrice de $[\overline{k}]$ (3,6)
$[\mathcal{A}]$: matrice $(N_d + 1, N_d + 1)$
[B]	: sous-matrice de $[\overline{k}]$ (3,3)
$[\mathcal{C}^k]$: matrice d'amortissement généralisée du corps B_k
[H]	: matrice d'élasticité (81,81)
$[\widehat{H}]$: matrice des rigidités équivalentes $(3,3)$
$[\mathcal{K}^k]$: matrice de raideur généralisée du corps B_k
[K]	: matrice de rigidité totale de la pale (N_{ddl}, N_{ddl})
[L]	: gradient des déformations; $[L] = Grad\{\underline{u}\}$. Second membre du système différentiel
[M]	: matrice de masse totale de la pale (N_{ddl}, N_{ddl})
$[\mathcal{M}]$: matrice de masse du système multicorps
[P]	: matrice de passage $(3,3)$
[Q]	: matrice de transformation du repère R_{Pi} au repère R_{Pl}
$[Q_O]$: matrice de transformation du repère pale R_{Pl} au repère de base $\{\underline{t}, \underline{j}'; \underline{k}'\}$
$[Q_i]$: sous-matrice de $[T]$
[T]	: matrice de transformation élémentaire du repère principal d'inertie R_{Pi} au repère pale R_{Pl} (12, 12)
$[T_C]$: matrice de transformation élémentaire du centre C au centre $O(12, 12)$
[V]	: matrice modale dont les colonnes sont les NM_k vecteurs propres $\{x^l\}$; $[V] = [\{x^1\} \cdots \{x^{NM_k}\}]$

Minuscules

[k]	: matrice de rigidité élémentaire $(12, 12)$
$[\overline{k}]$: matrice de rigidité élémentaire obtenue par application du principe de
	Hellinger-Reissner (9,9)
$[k_{f_y}]$: matrice de rigidité élémentaire de flexion suivant l'axe (Oy) (4,4)
$[k_{f_z}]$: matrice de rigidité élémentaire de flexion suivant l'axe (Oz) $(4,4)$
$[k]_{glob}$: matrice de rigidité élémentaire associée aux déplacements nodaux
	$< U_n > (12, 12)$
$[k]_{loc}$: matrice de rigidité élémentaire associée aux déplacements nodaux $\{u_n\}_{loc}$
$[k_m]$: matrice de rigidité élémentaire de traction-compression $(2,2)$

 $[k_t]$: matrice de rigidité élémentaire de torsion (2,2): matrice de rigidité élémentaire de membrane/flexion suivant (OZ) $[k_{XZ}]$: matrice de masse élémentaire (12, 12)[m]: matrice de masse élémentaire partielle en membrane/flexion suivant (OY) $[m_{mf_y}]$: matrice de masse élémentaire partielle en membrane/flexion suivant (OZ) $[m_{mf_z}]$ $[m]_{glob}$: matrice de masse élémentaire associées aux déplacements nodaux $\langle U_n \rangle$: matrice de masse élémentaire partielle en torsion (2,2) $[m_t]$: matrice de masse élémentaire en traction-compression (2,2) $[m_u]$: matrice d'inertie en translation suivant (Oz) $[m_w]$: matrice de transformation du repère de base $\{\underline{t}, \underline{j}'; \underline{k}'\}$ au repère principal $[q_i]$ d'inertie R_{Pi} de la section [t]: sous-matrice de $[T_C]$

.. •

Chapitre 1

Modélisation des systèmes multicorps

1.1 Introduction

Les éoliennes, d'un point de vue mécanique, se classent parmi les systèmes multicorps souples, c'est-à-dire un ensemble de corps déformables reliés entre eux par des articulations. Par conséquent, nous sommes confrontés au choix d'une formulation dynamique pour modéliser le comportement de ces systèmes. Peut-on raisonnablement envisager d'employer les formulations classiques (Newton-Euler, Lagrangienne, Hamiltonienne) pour des systèmes aussi complexes? Ces préoccupations ne datent pas d'aujourd'hui et de les progrès récents, autant théoriques que pratiques sur les systèmes multicorps, vont nous permettre d'exploiter les avancées de ces dix dernières années dans ce domaine. Ce chapitre est donc divisé en deux parties : la première fait le bilan des formulations dynamiques classiques afin d'introduire la méthode de Kane utilisée pour le développement des équations de mouvement. Elle se poursuit par une analyse des méthodes de modélisation des systèmes multicorps composés de solides rigides ou souples. La seconde partie présente ensuite le développement d'une modélisation des systèmes multicorps souples en arborescence topologique s'appuyant sur la méthode de Kane.

1.2 Revue des formulations dynamiques

Les formulations dynamiques classiques datent du XVIII^{ème} siècle et découlent toutes de la conjonction des trois lois de Newton et du principe des travaux virtuels. Les différences entre ces formulations résident dans leur formalisme mathématique. Les formulations dynamiques les plus connues sont au nombre de quatre:

- le principe de d'Alembert,

- les équations de Lagrange,
- les équations de Hamilton,
- le principe d'Hamilton.

A cette liste, nous pouvons maintenant ajouter les équations de Kane.

Les premières études dynamiques portaient sur des systèmes "simples" tels que le problème de la toupie, du pendule double, etc. Une ingénuité considérable et des connaissance mathématiques approfondies sont nécessaires pour traiter ce genre de problème, si bien que l'aspect mathématique reste prédominant. En conséquence de quoi la formulation des équations de mouvement se trouve reléguée au second plan. Or, l'incapacité à formuler simplement et de façon systématique les équations de mouvement et leur résolution est un obstacle important à l'étude de la dynamique des systèmes complexes. C'est à la suite de cette constatation que Kane publia, en 1961, un premier article sur sa méthode sans pour autant lui attribuer son nom. Dans les années 70, les études dynamiques entreprises sur les structures spatiales et les robots (bras polyarticulés) mirent en lumière l'inaptitude des formulations classiques à répondre aux impératifs techniques et économiques de ce type d'études. Aussi, certains dynamiciens comme Huston et al., Likins et al. utilisèrent les équations de Kane, en les présentant comme la forme Lagrangienne du principe de d'Alembert [1]. D'autres applications suivirent qui, cette fois, faisaient explicitement référence aux équations ou à la méthode de Kane. Ce formalisme se veut supérieur à ses homologues classiques dans le sens où il demande moins d'effort d'écriture pour obtenir les équations de mouvement. D'une manipulation très systématique, cette formulation se concentre sur le mouvement plutôt que sur la configuration du système, permettant ainsi aux dynamiciens d'avoir une perception plus physique du problème. De plus, et contrairement au principe des travaux virtuels, elle ne fait pas appel au calcul variationnel, se limitant ainsi à l'emploi d'outils mathématiques d'un niveau plus élémentaire. Une autre de ses caractéristiques remarquables porte sur le traitement des systèmes non-holonomes, sans pour cela introduire les multiplicateurs de Lagrange.

L'élément principal, dans la formulation des équations de mouvement des solides par la méthode de Kane, réside dans l'introduction des vitesses partielles. Considérons pour cela le système holonome S, possédant p degrés de liberté dans un référentiel A. Si q_1, \ldots, q_{NS} et u_1, \ldots, u_{NS} sont respectivement les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées de S, alors Kane [4] montre que la vitesse du point p du solide B appartenant au système holonome S par rapport au repère A, peut s'écrire avantageusement sous la forme:

$${}^{A}\underline{v}^{p} = \sum_{r=1}^{NS} {}^{A}\underline{v}^{p}_{r} u_{r} + {}^{A}\underline{v}^{p}_{t}$$
(1.1)

où :

- ${}^{A}\underline{v}_{r}^{p}$ est la vitesse partielle du point p appartenant au solide B par rapport au repère A associée à la vitesse généralisée u_{r} ,
- u_r est la $r^{\text{ème}}$ vitesse généralisée,
- $A \underline{v}_t^p$ est un terme ne dépendant que du temps t et des coordonnées généralisées q_i du système S.

Par conséquent, la seconde loi de Newton, appliquée à l'élément de masse dm du solide *B* occupant le domaine \mathcal{D} peut maintenant s'écrire :

$$\int_{\mathcal{D}} \left[\underline{v}_r \cdot d\underline{f} + \underline{v}_r \cdot (-\underline{a} \, dm) \right] = 0 \quad \text{pour } r = 1 \text{ à } NS \tag{1.2}$$

avec:

-df résultante des efforts de contact et de distance agissant sur l'élément dm,

 $- \underline{a}$ accélération de l'élément dm par rapport au repère galiléen.

Par suite, les équations de Kane de la dynamique prennent la forme suivante :

$$f_r + f_r^* = 0 \quad \text{pour } r = 1 \text{ à } NS$$
 (1.3)

Les f_r sont appelées forces actives généralisées holonomes :

$$f_r = \int_{\mathcal{D}} \underline{v}_r \cdot d\underline{f} \tag{1.4}$$

et les f_r^* , forces d'inertie généralisées holonomes:

$$f_r^* = -\int_{\mathcal{D}} \underline{v}_r \cdot \underline{a} \, dm \tag{1.5}$$

On trouvera en annexe F une synthèse des éléments de la méthode de Kane et un complément d'informations est fourni par les références [1], [2], [3] et [4].

Les différents formalismes de la dynamique classique ont été utilisés sous diverses formes dans les premiers travaux de modélisations des systèmes multicorps. Les paragraphes suivants se proposent donc de brosser un tableau succinct de ces modélisations avant d'introduire la formulation dynamique développée dans cette thèse.

1.3 Modélisation des systèmes multicorps

Sous le terme système multicorps, on entend tout système constitué de solides reliés entre eux par des articulations. Par conséquent ces solides, qui dans l'espace possèdent six degrés de libertés, sont maintenant soumis à des restrictions de configuration et peuvent également être assujettis à des restrictions de mouvement. Ces restrictions se traduisent par des forces et des couples appelés *forces et couples de restriction* (de configuration et/ou de mouvement). De plus, une distinction importante entre les différents systèmes multicorps porte sur l'hypothèse de comportement des corps constitutifs du système. On distinguera donc les systèmes multicorps composés de corps supposés rigides de ceux composés de corps élastiques. Une seconde distinction se fera sur des considérations de conformation de la configuration du système à un modèle générique ou non.

1.3.1 Systèmes multicorps rigides

La formulation des équations de mouvement d'un système mécanique, qu'il contienne ou non des corps déformables, peut se décomposer en deux étapes :

- 1. formulation des équations de mouvement relatives à chaque solide pris isolément dans le système,
- 2. assemblage des équations de mouvement de tous les solides du système mécanique afin d'obtenir le système complet des équations de mouvement.

La première étape, lorsqu'il s'agit de solides indéformables, ne pose pas trop de problème grâce à la formulation dynamique largement répandue de Newton-Euler. La véritable difficulté survient lors de l'assemblage final des équations de mouvement du système multicorps complet. Les recherches sur le sujet nous permettent de distinguer deux méthodes, basées sur la configuration du système :

1. la configuration du système multicorps est conforme à un modèle générique. Les solides sont reliés entre eux par des articulations suivant une arborescence dotée d'une topologie. Les dynamiciens ont d'abord considéré les arborescences de type ouverte, c'est-à-dire ne possédant pas de boucle fermée dans le système (figures 4.1 et 4.2), car ils représentent une large gamme des structures aéronautiques et mécaniques et sont relativement simples à analyser.





FIG. 1.1 Configuration arborescente ouverte

FIG. 1.2 Configuration arborescente fermée

L'introduction de la topologie du système est motivée par la nécessité de décrire de façon univoque le cheminement des liaisons entre les solides et donc d'obtenir des équations cinématiques uniques du système. Inspirés par les travaux de Fletcher *et*

al. [5](1963), Hooker et Margulies (1965) [6] furent à la base du développement de ces configurations en posant les équations de mouvement à l'aide du formalisme de Newton-Euler et raisonnèrent en termes de couples et de forces externes de restriction qu'ils introduisirent sur des sous-ensembles judicieusement choisis. Ces couples étaient ensuite éliminés par l'ajout d'une équation traduisant l'orthogonalité des vecteurs couples par rapport à l'axe de rotation de l'articulation⁵ (les systèmes considérés sont alors plans et les solides ne possèdent que des mouvements de rotation). Wittenburg (1977) [7], dans son ouvrage, reprend cette mise en équation (Newton-Euler et couples de restriction) ainsi que le concept de Hooker basé sur la description arborescente des systèmes multicorps et propose, le premier, l'utilisation de la théorie des graphes. De plus, par l'emploi du principe de d'Alembert, il étend l'étude des systèmes uniquement animés en rotation à ceux possédant des degrés de liberté en translation ainsi que des boucles fermées. L'introduction du principe de d'Alembert permet ainsi de ne pas engendrer d'équations supplémentaires dues aux forces et couples de restriction dans les équations de mouvement.

Huston et Passerello (1979) [8] prolongèrent ces développements aux systèmes arborescents topologiques sans boucle fermée. Les équations de mouvement sont ici établies par la méthode de Kane, évitant ainsi l'introduction des couples de restriction. En effet, l'un des atouts de cette méthode est de supprimer l'écriture des équations de restriction pour peu que les vitesses angulaires relatives des articulations soient identifiées aux vitesses généralisées. Cette suppression des couples de restriction associée à une formulation récursive des vitesses angulaires débouche sur une méthode extrêmement performante par rapport à celles utilisées jusqu'ici. Cependant, beaucoup de systèmes mécaniques rencontrés dans la pratique possèdent des boucles fermées dans leur arborescence. Une manière d'analyser de telles configurations est de reprendre la formulation pour les systèmes arborescents topologiques et d'y introduire des restrictions supplémentaires pour assurer la fermeture des boucles. Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre ce nouveau système d'équations. L'une d'entre elles introduit les équations de restriction dans le système complet par l'emploi des multiplicateurs de Lagrange (Lanczos [9], 1970), alors que d'autres suggèrent de réduire les équations par une transformation obtenue par décomposition matricielle des équations de restriction (Unda [10], 1986). L'efficacité de l'une des deux méthodes est hautement dépendante du problème traité.

2. la configuration du système multicorps est quelconque. On abandonne cette fois toute idée de conformer le système à un modèle générique, les équations de mouvement sont donc écrites sur une configuration quelconque du système. Par conséquent, en absence d'un cheminement entre les solides articulés on doit formuler, pour chaque corps rigide pris isolément dans le système, ses équations de mouvement en termes de translations et de rotations absolues, et non plus relatives comme dans le cas des systèmes à arborescence topologique. Le formalisme est alors celui des équations de Lagrange et les équations de restriction représentant les interconnexions entre solides sont ajoutées au système d'équations par l'emploi de multiplicateurs de Lagrange. Parmi les codes de simulation des systèmes multicorps basés sur cette méthode, on peut citer ADAMS (1981, Automatic Dynamic Analysis of Mechanical) qui est la mise en application des résultats de recherche d'Orlandea (1973) [11].

^{5.} Les liaisons sont considérées comme parfaites.

1.3.2 Systèmes multicorps souples

Dans les systèmes multicorps souples, les déformations élastiques et les mouvements de grande amplitude des corps vont être couplés. L'introduction des déformations des solides composant le système a débouché sur deux méthodes d'analyse de ces systèmes, qui se distinguent par l'écriture de la cinématique:

- 1. la première traite le mouvement global de chaque corps déformable comme résultant de la superposition d'un mouvement de grande amplitude du repère attaché au corps supposé rigide (mouvement que l'on qualifiera de mouvement de corps rigide) et de ses petites déformations élastiques dans ce même repère. Cette méthode, développée par Likins (1970) [12], permet d'appliquer le large éventail des formulations éléments finis élaborées dans le cadre de la théorie linéarisée de l'élasticité des petits déplacements et des petites déformations, mais peut considérablement compliquer le processus d'assemblage des équations de mouvement. Par conséquent, la méthode de Huston et Passerello [8] fondée sur la description arborescente topologique (cf. § 4.3.1) fut étendue aux systèmes multicorps souples par Singh, Vandervoort et Likins (1985) [13]. Un certain nombre de codes se base sur cette méthode, parmi lesquels on peut citer DIS-COS (1978, Dynamic Interaction and Simulation of Controls and Structures), Treetops (1985) et Contops (1987). Une extension du code Adams, Dads (1986) permet de traiter des corps souples (formulation Lagrangienne).
- 2. la seconde est basée sur une formulation non linéaire géométrique par éléments finis. Les translations et les rotations des corps sont de grande amplitude, mais les déformations restent petites. Dans ce cas, on utilise soit une formulation éléments finis dite du Lagrangien total s'appuyant sur l'utilisation du second tenseur des contraintes de Piola-Kirshoff ou du tenseur des déformations de Green-Lagrange, soit une formulation éléments finis dite du Lagrangien réactualisé utilisant le tenseur des contraintes de Cauchy ou le tenseur des déformations de Almansi [14]. Ainsi, chaque élément est assimilé à un corps et la connectivité des éléments permet de mettre en évidence le couplage de différents corps souples. Le code Latdyn (1989) utilise cette formulation.

On doit cependant souligner que les codes développés à partir de ces méthodes supposent souvent que les corps souples ont un comportement élastique linéaire et qu'il ne peut pas y avoir d'éléments sujets à de grandes déformations élastiques. Cette approche a été motivée et élaborée dans le cadre des approximations faites sur les systèmes aérospatiaux pour lesquels on ne considère pas les effets dus aux rigidités géométriques (non linéarité du comportement induite par les variations importantes de la géométrie du solide).

Récemment, au cours des années 90, une nouvelle génération de méthodes adaptées au traitement de la dynamique des systèmes multicorps, connues sous le nom de *méthodes récursives*, a été activement développée. Ces méthodes améliorent de façon appréciable les implémentations informatiques par rapport à celles que nous venons de détailler et sont particulièrement bien adaptées aux calculs numériques utilisant des processeurs à architecture parallèle. Elles sont également basées sur une conformation de la configuration du système mécanique à une arborescence topologique avec ou sans boucle fermée. Le système d'équations global d'un problème multicorps, sous forme matricielle, se présente alors de façon générale:

$$\begin{cases} [\mathcal{M}]\{\dot{w}\} &= \{L\}\\ \{\dot{q}\} &= \{w\} \end{cases}$$
(1.6)

où $[\mathcal{M}]$ est la matrice de "masse" du système, $\{w\}$ est le vecteur d'état du système (de dimension égale aux nombre de degrés de liberté du système), $\{\dot{w}\}$ et $\{q\}$ sont, respectivement, les dérivées premières et l'intégrale du vecteur d'état. Ces méthodes utilisent alors les propriétés de récursivité de la relation $\{\dot{w}\} = [\mathcal{M}]^{-1}\{F\}$. Donc, au pas de temps donné, la matrice $[\mathcal{M}]$ à l'étape n se déduit de celle évaluée à l'étape (n-1) par la relation de récursivité $[\mathcal{M}]_{(n)} = f([\mathcal{M}]_{(n-1)})$. Cette récursivité élimine ainsi la manipulation des matrices pleines et de grande dimension, qui sont la cause principale de l'augmentation des temps de calcul.

1.4 Développement des équations de mouvement des systèmes multicorps souples

1.4.1 Généralités

Durant ces vingt dernières années, nous avons mentionné (cf. § 4.3.1) que des efforts importants ont été consacrés à la formulation et à la résolution des équations dynamiques des systèmes multicorps, sous la demande des industries aérospatiales, de la robotique, des biosystèmes, etc. Les équations de mouvement de ces systèmes peuvent être développées par les formulations dynamiques classiques déjà évoquées (Newton-Euler, Lagrangienne, Hamiltonnienne canonique), mais en pratique elles posent toutes des difficultés sur les points particuliers suivants:

- le choix des variables (cinématiques) indépendantes,
- l'organisation rigoureuse de la géométrique du système et sur la procédure de comptage afin d'obtenir une description cinématique unique du problème,
- la souplesse de programmation des équations et leur résolution.

Or, certains auteurs (Singh [13], Amirouche [15]) suggèrent que la méthode de Kane des vitesses généralisées (ou encore la forme Lagrangienne du principe de d'Alembert ou des puissances virtuelles) semble apporter une réponse aux faiblesses des formulations habituelles. En effet, celle ci évite d'introduire les forces et couples non travaillant de restriction exprimés par des fonctions scalaires d'énergie toujours fastidieuses à différencier. Ces forces et ces couples s'éliminent d'eux-mêmes [4] grâce à la formulation des équations de Kane, en conséquence de quoi, le système global d'équations possède une dimension minimum.

Le développement des équations qui va suivre est donc basé sur la méthode de Kane, et la configuration du système sera supposée conforme à une arborescence topologique ouverte. Les formulations sont celles exposées par Singh et VanderVoort [13] et appliquées dans le code Treetops. Les caractéristiques remarquables de ce type de développement résident dans le fait que :

- les corps peuvent être rigides ou souples,
- des boucles fermées sont permises si les restrictions sont cinétiques (mouvement guidé par des forces) plutôt que cinématiques (mouvement guidé par des liaisons mécaniques),
- les articulations peuvent avoir de 0 à 6 degrés de liberté et les rotations des articulations peuvent être de grande amplitude,
- la dimension du problème est égale au nombre de degrés de liberté du système (les forces et couples de restriction n'apparaissent pas dans la formulation),
- les déformations de chaque corps peuvent être décrites par n'importe quel ensemble de vecteurs modaux.

1.4.2 Développement des équations de mouvement

Avant de détailler la formulation des équations, précisons d'abord les notations utilisées :

- l'indice k du vecteur noté \underline{v}^k se rapporte au corps numéro k,
- l'indice h_k du vecteur noté \underline{v}^{h_k} se rapporte au point h_k centre du repère local b^k lié au corps B_k ,
- la dérivée première par rapport au temps dans le repère galiléen est notée (`),
- la dérivée seconde par rapport temps dans le repère galiléen est notée ("),
- la dérivée première par rapport au temps dans le repère b^k lié au corps B_k est notée (\circ) ,
- la dérivée seconde par rapport au temps dans le repère b^k est notée ($\circ\circ$),
- la dérivée première par rapport à la variable d'espace ξ est notée ()'.

Définition de la topologie du système

L'élaboration d'une procédure de comptage pour une description cinématique unique nécessite d'établir un cheminement direct du repère fixe (attaché au corps no. 0) vers n'importe quel autre corps du système mécanique. La procédure retenue est celle donnée par [13]. La règle de comptage est donc la suivante: pour n'importe quel corps k, on assigne un nombre c(k) qui est le numéro du corps adjacent menant au corps no. 0. Par conséquent, chaque corps k possède un chemin unique dont les éléments sont k, 0, et tous les corps sur le chemin menant du corps k au corps 0. L'ensemble $P^{(k)}$ peut être alors construit d'après la connaissance de k et de c(k) comme étant l'ensemble de tous les corps sortant de k, c'est-àdire s'éloignant du corps 0, en incluant k. Et de façon similaire, $E^{(k)}$ peut être défini comme étant l'ensemble possédant tous les éléments de $P^{(k)}$ à l'exclusion de k.



FIG. 1.3 Topologie arborescente

D'après la figure 4.3, on définit :

- les corps feuilles comme les corps de l'arborescence ne possédant plus de corps sortant,
- les corps de niveaux comme les corps supportant plusieurs corps sortants,
- un branche comme une chaîne de corps émergeant d'un corps de niveau.

Les relations topologiques de cet exemple sont données par le tableau 4.1.

TAB. 1.1 Relations topologiques de l'arborescence de la figure 4.3

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathbf{c}(\mathbf{j})$	0	5	1	8	3	5	9	9	3

Définition d'une articulation

Une articulation, schématisée par la figure 4.4, est définie par deux points matériels, de l'un et l'autre des corps adjacents. Les degrés de liberté discret du $k^{\text{ème}}$ corps dans l'arborescence sont caractérisés par les translations et/ou les rotations relatives des deux repères locaux positionnés respectivement au point p_k du corps c(k) et h_k du corps k. Les points p_k , h_k et les repères locaux en ces deux points constituent la $k^{\text{ème}}$ articulation. Une articulation fictive est assignée au corps de référence en supposant p_0 comme un point appartenant au repère galiléen. Ainsi, le nombre d'articulations est égal au nombre de corps du système.



FIG. 1.4 Définition d'une articulation

Relations sur la configuration du système

Les équations de mouvement sont décrites via la méthode de Kane [4] (annexe F). Cette approche s'exprime en termes de coordonnées généralisées et de "quasi-coordonnées" (c'est-à-dire en composantes scalaires des vecteurs vitesses angulaires). La figure 4.5 montre B_k , le $k^{\text{ème}}$ corps de l'arborescence, à l'état déformé.

Le vecteur position, \underline{R}^k , de l'élément de masse dm du solide B_k par rapport au repère galiléen est défini par :

$$\underline{R}^{k} = \underline{R}^{h_{k}} + \underline{r}^{k} + \underline{u}^{k} \tag{1.7}$$

où \underline{r}^k est fixe dans le repère local b^k lié au point h_k et le vecteur \underline{u}^k représente la déformation élastique du corps B_k . \underline{R}^{h_k} représente le mouvement de corps rigide de B_k . Un ensemble de NM_k vecteurs modaux $\underline{\phi}_l^k$, pour $l = 1, \ldots, NM_k$, ainsi qu'un nombre fini de variables cinématiques η_l^k (coordonnées modales) sont choisies pour approximer la déformation élastique de B_k telle que :

$$\underline{u}^{k}(\underline{r}^{k},t) = \sum_{l=1}^{NM_{k}} \underline{\phi}_{l}^{k}(\underline{r}^{k}) \eta_{l}^{k}(t)$$
(1.8)

Ainsi, le vecteur \underline{u}^k représentant le déplacement de l'élément dm dû aux déformations élastiques est la combinaison de fonctions d'espace $\underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k)$ et de temps $\eta_l^k(t)$.



FIG. 1.5 Configuration de deux corps adjacents

Relations cinématiques

La dérivation par rapport au temps de la relation (4.7), dans le repère galiléen mène à :

$$\underline{\dot{R}}^{k} = \underline{\dot{R}}^{h_{k}} + \underline{\omega}^{k} \wedge \left(\underline{r}^{k} + \underline{u}^{k}\right) + \underline{\overset{\circ}{u}}^{k}$$
(1.9)

 $\underline{\omega}^k$ étant le vecteur vitesse angulaire du repère b^k . Puisque les vecteurs modaux de l'équation (4.8) sont indépendants du temps dans le repère b^k , la vitesse de déformation relative est alors donnée par:

$$\overset{\circ}{\underline{u}}^{k} = \sum_{l=1}^{NM_{k}} \underline{\phi}_{l}^{k} \left(\underline{r}^{k} \right) \, \dot{\eta}_{l}^{k} \tag{1.10}$$

Considérons l'ensemble des vitesses généralisées w_1, \ldots, w_{NS} (dérivées par rapport au temps des coordonnées généralisées caractérisant la configuration, c'est-à-dire $w_p = \dot{q}_p$, pour $p = 1, \ldots, NS$) représentatif des degrés de liberté du système. Alors, \underline{R}^k peut toujours se mettre sous la forme [4]:

$$\underline{\dot{R}}^{k} = \sum_{p=1}^{NS} \underline{v}_{p}^{k} w_{p} + \underline{v}_{t}^{k}$$

$$(1.11)$$

où \underline{v}_p^k et \underline{v}_t^k , appelées vitesses partielles, sont fonction des coordonnées généralisées et du temps. De façon semblable, on peut exprimer $\underline{\dot{R}}^{h_k}$, $\underline{\omega}^k$ et $\underline{\ddot{u}}^k$ par :

Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance

$$\underline{\dot{R}}^{h_k} = \sum_{p=1}^{NS} \underline{v}_p^{h_k} w_p + \underline{v}_t^{h_k}$$
(1.12)

$$\underline{\omega}^{k} = \sum_{p=1}^{NS} \underline{\omega}_{p}^{k} w_{p} + \underline{\omega}_{t}^{k}$$
(1.13)

$$\underbrace{\overset{\circ}{u}}{}^{k} = \sum_{p=1}^{NS} \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} w_{p} \qquad (1.14)$$

Reportons maintenant ces expressions dans l'équation (4.9), alors :

$$\underline{\dot{R}}^{k} = \sum_{p=1}^{NS} \underline{v}_{p}^{h_{k}} w_{p} + \underline{v}_{t}^{h_{k}} + \left[\sum_{p=1}^{NS} \underline{\omega}_{p}^{k} w_{p} + \underline{\omega}_{t}^{k}\right] \wedge \left[\underline{r}^{k} + \sum_{l=1}^{NM_{k}} \underline{\phi}_{l}^{k} \left(\underline{r}^{k}\right) \eta_{l}^{k}\right] + \sum_{p=1}^{NS} \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} w_{p} \qquad (1.15)$$

Remarquons que $\underline{v}_p^{\dot{\eta}_k}$ est égale à zéro, à moins que la vitesse généralisée w_p corresponde à l'une des vitesses modales η_l^k du corps B_k . Si l'on compare les équations (4.11) et (4.15) alors il vient:

$$\underline{v}_{p}^{k} = \underline{v}_{p}^{h_{k}} + \underline{\omega}_{p}^{k} \wedge \left[\underline{r}^{k} + \sum_{l=1}^{NM_{k}} \underline{\phi}_{l}^{k} \left(\underline{r}^{k} \right) \eta_{l}^{k} \right] + \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}}$$
(1.16)

et:

$$\underline{v}_{t}^{k} = \underline{v}_{t}^{h_{k}} + \underline{\omega}_{t}^{k} \wedge \left[\underline{r}^{k} + \sum_{l=1}^{NM_{k}} \underline{\phi}_{l}^{k} \left(\underline{r}^{k} \right) \eta_{l}^{k} \right]$$
(1.17)

Relations dynamiques

Les équations de mouvement de la structure arborescente vont maintenant être formulées par la seconde loi de Newton sur l'élément de masse dm, repéré par le vecteur \underline{R}^k (figure 4.5):

$$d\underline{f}^k - \underline{\ddot{R}}^k dm = \underline{0} \tag{1.18}$$

où $d\underline{f}^k$ est le vecteur force s'exerçant sur l'élément dm et $\underline{\ddot{R}}^k$ le vecteur accélération de dm dans le repère galiléen. Par conséquent, la relation (4.9) mène à :

$$\underline{\ddot{R}}^{k} = \underline{\ddot{R}}^{h_{k}} + \underline{\overset{\circ\circ}{u}}^{k} + 2\,\underline{\omega}^{k}\wedge\underline{\overset{\circ}{u}}^{k} + \underline{\dot{\omega}}^{k}\wedge(\underline{r}^{k} + \underline{u}^{k}) + \underline{\omega}^{k}\wedge[\underline{\omega}^{k}\wedge(\underline{r}^{k} + \underline{u}^{k})]$$
(1.19)

Notons que le terme $2(\underline{\omega}^k \wedge \underline{u}^k)$ représente l'accélération de Coriolis et une partie des autres termes celle de l'accélération d'entraînement. Les équations de mouvement de la structure arborescente peuvent alors se mettent sous la forme :

$$\sum_{k=1}^{NB} \int_{B_k} \underline{v}_p^k \cdot \left(d\underline{f}^k - \underline{\ddot{R}}^k dm \right) = 0, \quad p = 1, \dots, NS$$
(1.20)

Soit encore:

$$\sum_{k=1}^{NB} \int_{B_k} \underline{v}_p^k \cdot d\underline{f}^k - \sum_{k=1}^{NB} \int_{B_k} \underline{v}_p^k \cdot \underline{\ddot{R}}^k \, dm = 0, \quad p = 1, \dots, NS \tag{1.21}$$

Par conséquent, on peut construire un système à NS équations de la forme :

$$f_p + f_p^* = 0, \quad p = 1, \dots, NS$$
 (1.22)

où f_p et f_p^* représentent respectivement, les forces actives généralisées et les forces d'inertie généralisées du système. La $p^{\text{ème}}$ force active généralisée s'exprime par :

$$f_{p} = \sum_{k=1}^{NB} \int_{B_{k}} \underline{v}_{p}^{k} \cdot d\underline{f}^{k}$$
$$= \sum_{k=1}^{NB} \left(\underline{M}^{h_{k}} \cdot \underline{\omega}_{p}^{k} + \underline{F}^{k} \cdot \underline{v}_{p}^{h_{k}} + \int_{B_{k}} \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} \cdot d\underline{f}^{k} \right)$$
(1.23)

où \underline{M}^{h_k} est le moment résultant agissant sur B_k par rapport au point d'articulation h_k des forces travaillantes (éliminant ainsi les forces non travaillantes de restriction de mouvement⁶) et \underline{F}^k est la force résultante agissant sur B_k obtenue par sommation des forces travaillantes (éliminant ainsi les forces de restriction de mouvement non travaillantes). Le dernier terme de l'équation (4.23) rend compte de la contribution des forces élastiques internes (dernier terme de droite de (4.23)) agissant sur le corps B_k ainsi que toutes les forces externes agissant sur B_k (cf. § 4.5.2). Pour chaque valeur de p correspondant à l'une des vitesses modales de B_k , l'intégrale représente la partie négative du produit d'une colonne de la matrice de rigidité (et d'amortissement) généralisée par la colonne des coordonnées modales (et des vitesses modales). De manière similaire, l'expression de la $p^{\text{ème}}$ force d'inertie généralisée vaut :

^{6.} Liaisons supposées parfaites.

$$-f_{p}^{*} = \sum_{k=1}^{NB} \int_{B_{k}} \underline{\underline{v}}_{p}^{k} \cdot \underline{\underline{R}}^{k} dm$$

$$= \sum_{k=1}^{NB} \left[m_{k} \left(\underline{\underline{R}}^{h_{k}} + \underline{\underline{l}}^{k} \right) \cdot \underline{\underline{v}}_{p}^{h_{k}} + \left(\underline{\underline{H}}^{h_{k}} + m_{k} \underline{\underline{l}}^{k} \wedge \underline{\underline{R}}^{h_{k}} \right) \cdot \underline{\underline{\omega}}_{p}^{k} + \\ \underline{\underline{R}}^{h_{k}} \cdot \int_{B_{k}} \underline{\underline{v}}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} dm + \underline{\underline{\dot{\omega}}}^{k} \cdot \int_{B_{k}} \left(\underline{\underline{r}}^{k} + \underline{\underline{u}}^{k} \right) \wedge \underline{\underline{v}}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} dm + \\ 2\underline{\underline{\omega}}^{k} \cdot \int_{B_{k}} \underline{\underline{\hat{u}}}^{k} \wedge \underline{\underline{v}}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} dm + \int_{B_{k}} \underline{\underline{\hat{u}}}^{\circ\circ k} \cdot \underline{\underline{v}}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} dm + \underline{\underline{\omega}}^{k} \cdot \underline{\underline{D}}_{p}^{k} \cdot \underline{\underline{\omega}}^{k} \right]$$
(1.24)

où m_k est la masse du corps B_k , \underline{l}^k définit la position du centre de gravité du corps déformé B_k par rapport au point h_k (figure 4.6), tandis que \underline{u}^k est donné par l'équation (4.8).



FIG. 1.6 Position du centre de gravité après déformation du corps k

 $\underline{\dot{H}}^{h_k}$ et $\underline{\underline{D}}_p^k$ (la double barre inférieure désigne un dyadique (Annexe G)) sont donnés comme suit. $\underline{\underline{H}}^{h_k}$ est le moment angulaire de B_k par rapport à h_k :

$$\underline{H}^{h_k} = \int_{B_k} \left(\underline{u}^k + \underline{r}^k \right) \wedge \left(\underline{\dot{u}}^k + \underline{\dot{r}}^k \right) dm \tag{1.25}$$

et la dérivée par rapport au temps de \underline{H}^{h_k} dans le repère galiléen mène à :

$$\underline{\dot{H}}^{h_{k}} = \underline{\underline{I}}^{h_{k}} \cdot \underline{\dot{\omega}}^{k} + \underline{\omega}^{k} \wedge (\underline{\underline{I}}^{h_{k}} \cdot \underline{\omega}^{k}) + \sum_{l=1}^{NM_{k}} \left[\underline{h}_{l}^{k} \ddot{\eta}_{l}^{k} + \left[\left(\underline{\underline{N}}_{l}^{k} + \underline{\underline{M}}_{l}^{k} \right) \cdot \underline{\dot{\omega}}^{k} \right] \eta_{l}^{k} + 2\underline{\underline{N}}_{l}^{k} \cdot \underline{\omega}^{k} \dot{\eta}_{l}^{k} + \underline{\omega}^{k} \wedge \left[\left(\underline{\underline{N}}_{l}^{k} + \underline{\underline{M}}_{l}^{k} \right) \cdot \underline{\omega}^{k} \eta_{l}^{k} \right] \right] + \int_{B_{k}} \left[\underline{\underline{u}}^{k} \wedge \underline{\overset{ook}{\underline{u}}}^{k} + \underline{\underline{u}}^{k} \wedge (\underline{\dot{\omega}}^{k} \wedge \underline{\underline{u}}^{k}) + 2\underline{\underline{u}}^{k} \wedge (\underline{\underline{\omega}}^{k} \wedge \underline{\overset{ook}{\underline{u}}}^{k}) + \underline{\underline{u}}^{k} \wedge (\underline{\underline{\omega}}^{k} \wedge (\underline{\underline{\omega}}^{k} \wedge \underline{\underline{u}}^{k})] \right] dm \qquad (1.26)$$

où $\underline{\underline{I}}^{h_k}$ est le dyadique d'inertie de B_k (non déformé) par rapport à h_k . Le vecteur $\underline{\underline{h}}_l^k$ et les dyadiques $\underline{\underline{N}}_l^k$ et $\underline{\underline{M}}_l^k$ sont définis quant à eux par:

$$\underline{h}_{l}^{k} = \int_{B_{k}} \underline{r}^{k} \wedge \underline{\phi}_{l}^{k}(\underline{r}^{k}) \, dm \tag{1.27}$$

$$\underline{\underline{N}}_{l}^{k} = \int_{B_{k}} \left[\left(\underline{\underline{r}}^{k} \cdot \underline{\phi}_{l}^{k}(\underline{\underline{r}}^{k}) \right) \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{r}}^{k} \underline{\phi}_{l}^{k}(\underline{\underline{r}}^{k}) \right] dm$$
(1.28)

$$\underline{\underline{M}}_{l}^{k} = \int_{B_{k}} \left[\left(\underline{\phi}_{l}^{k}(\underline{\underline{r}}^{k}) \cdot \underline{\underline{r}}^{k} \right) \underline{\underline{U}} - \underline{\phi}_{l}^{k}(\underline{\underline{r}}^{k}) \underline{\underline{r}}^{k} \right] dm$$
(1.29)

où $\underline{\underline{U}}$ est le dyadique unitaire. Le dyadique $\underline{\underline{D}}_{p}^{k}$, de l'équation (4.24) est défini par :

$$\underline{\underline{D}}_{p}^{k} = \int_{B_{k}} \left[\left(\underline{\underline{r}}^{k} + \underline{\underline{u}}^{k} \right) \cdot \underline{\underline{v}}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} \, \underline{\underline{U}} - \left(\underline{\underline{r}}^{k} + \underline{\underline{u}}^{k} \right) \, \underline{\underline{v}}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} \right] \, dm \tag{1.30}$$

La position du centre de gravité de B_k à l'état déformé peut s'exprimer par :

$$\underline{l}^{k} = \frac{1}{m_{k}} \int_{B_{k}} \left[\underline{r}^{k} + \sum_{l=1}^{NM_{k}} \underline{\phi}_{l}^{k} (\underline{r}^{k}) \eta_{l}^{k} \right] dm$$
(1.31)

La substitution des équations (4.23) et (4.24) dans l'équation (4.22) mène aux équations fondamentales du mouvement du système composé de NB corps souples. D'après la figure 4.7:

$$\underline{R}^{h_k} = \underline{R}^{h_{c(k)}} + \underline{D}^{p_k} + {}^{c(k)}y^k \tag{1.32}$$

Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance



FIG. 1.7 Définition de \underline{D}^{p_k}

où :

$$\underline{D}^{p_{k}} = {}^{h_{c(k)}} \underline{d}^{p_{k}} + \underbrace{\sum_{l=1}^{NM_{c(k)}} \underline{\phi}_{l}^{c(k)}(\underline{r}^{c(k)}) \eta_{l}^{c(k)}}_{=\underline{u}^{p_{k}}}$$
(1.33)

avec ${}^{h_{c(k)}}\underline{d}^{p_k}$ le vecteur d'origine $h_{c(k)}$ et d'extrémité p_k avant déformation du corps $B_{c(k)}$, et $\underline{\phi}_l^{c(k)}(\underline{r}^{c(k)} = \underline{p}^k)$ déplacements modaux (fixes dans le repère lié à $B_{c(k)}$) du point p_k . La dérivée par rapport au temps de \underline{R}^{h_k} dans le repère galiléen est alors donnée par:

$$\frac{\underline{\dot{R}}^{h_{k}}}{\underline{\dot{R}}^{c(k)}} = \frac{\underline{\dot{R}}^{h_{c(k)}}}{\underline{\dot{R}}^{c(k)}} + \sum_{l=1}^{NM_{c(k)}} \underline{\phi}_{l}^{c(k)}(\underline{r}^{c(k)})\dot{\eta}_{l}^{c(k)} + \sum_{l=1}^{NM_{c(k)}} \underline{\phi}_{l}^{\prime c(k)}(\underline{r}^{c(k)})\dot{\eta}_{l}^{c(k)} \right] \wedge \frac{c(k)}{\underline{y}^{k}} \qquad (1.34)$$

où $c^{(k)} \underbrace{y}^{k}$ est la dérivée par rapport au temps de $c^{(k)} \underline{y}^{k}$ dans le repère $b^{p_{k}}$ d'origine p_{k} (figure 4.5), $\underline{\omega}^{c(k)}$ la vitesse angulaire du repère $b^{c(k)}$. Les vecteurs $\underline{\phi}_{l}^{c(k)}(\underline{r}^{c(k)})$ sont les rotations modales au point p_{k} définies par la dérivée par rapport à la variable d'espace ξ dans le repère $b^{c(k)}$ de $\underline{\phi}_{l}^{c(k)}(\underline{r}^{c(k)})$:

$$\underline{\phi}_{l}^{\prime c(k)}(\underline{r}^{c(k)}) = \frac{b^{c(k)}d}{d\xi} \left[\underline{\phi}_{l}^{c(k)}(\underline{r}^{c(k)}) \right].$$
(1.35)

La vitesse angulaire du repère b^k peut s'exprimer par:

$$\underline{\omega}^{k} = \underline{\omega}^{c(k)} + \underbrace{\sum_{l=1}^{NM_{c(k)}} \underline{\phi}_{l}^{\prime c(k)}(\underline{r}^{c(k)}) \dot{\eta}_{l}^{c(k)}}_{=^{c(k)} \underline{\omega}^{p_{k}}} + \overset{p_{k}}{\underbrace{\omega}^{k}}$$
(1.36)

où ${}^{p_k}\underline{\omega}^k$ représente la vitesse angulaire du repère de b^k par rapport à b^{p_k} .

Remarquons que $\underline{\dot{R}}^{h_k}$ (4.34) et $\underline{\omega}^k$ (4.36) ont été écrits de manière *récursive* (comme on pourrait également le faire pour $\underline{\ddot{R}}^{h_k}$ et $\underline{\dot{\omega}}^k$). En effet, si nous examinons par exemple $\underline{\dot{R}}^{h_k}$, ce vecteur se déduit de $\underline{\dot{R}}^{h_{c(k)}}$ puisqu'il existe une relation topologique entre h_k et $h_{c(k)}$. Par conséquent, l'accélération du point h_k du corps B_k est fonction de l'accélération du corps $B_{c(k)}$. Ainsi, on peut exprimer $\underline{\dot{R}}^{h_k}$, $\underline{\omega}^k$, $\underline{\ddot{R}}^{h_k}$ et $\underline{\dot{\omega}}^k$ pour $k = 1, \ldots, NB$ simplement par la connaissance de k et c(k).

Définition des vitesses généralisées

Pour la $k^{\text{ème}}$ articulation, le choix des *vitesses généralisées* est fait de la manière suivante :

 $-\dot{\theta}_m^k$ pour la vitesse relative de rotation

$${}^{p_k}\underline{\omega}^k = \sum_{m=1}^{NR_k} \dot{\theta}^k_m \underline{l}^k_m \tag{1.37}$$

où \underline{l}_m^k est le vecteur unitaire le long du $m^{\text{ème}}$ axe de rotation.

- $\overset{\circ}{y}_{n}^{k}$ pour la vitesse relative de translation de la $k^{\text{ème}}$ articulation

$$\underbrace{\overset{\circ}{\underline{y}}}{}^{k} = \sum_{n=1}^{NT_{k}} \overset{\circ}{\underline{y}}_{n}^{k} \underline{g}_{n}^{k}$$
(1.38)

où \underline{g}_n^k est un vecteur unitaire, fixe dans b^{p_k} , le long du degré de liberté en translation. - $\dot{\eta}_1^k, \cdots, \dot{\eta}_{NM_k}^k$ les taux de déformation du $k^{\text{ème}}$ corps.

Définition des vitesses partielles

Les coefficients des vitesses généralisées w_p , donnés par $\underline{v}_p^{h_k}$, $\underline{\omega}_p^k$ et $\underline{v}_p^{\dot{\eta}_k}$, peuvent être obtenus grâce aux équations (4.34) et (4.36). Considérons la $j^{\text{ème}}$ articulation:

- lorsque w_p coïncide avec $\dot{\theta}_m^j$, alors

 $\begin{cases} \underline{v}_{p}^{h_{k}} = \underline{l}_{m}^{j} \wedge \underline{z}^{jk} \text{ pour le corps } k \text{ sortant de l'articulation } j, \text{ incluant le corps } j \\ = \underline{0} \text{ sinon} \\ \underline{\omega}_{p}^{k} = \underline{l}_{m}^{j} \text{ pour le corps } k \text{ sortant de l'articulation } j, \text{ incluant le corps } j \end{cases}$ (1.39)

où le vecteur \underline{z}^{jk} est défini par la figure 4.8.



FIG. 1.8 Définition des vecteurs \underline{z}^{jk} et \underline{x}^{jk}

Ces relations traduisent le fait que la vitesse partielle \underline{v}_p^k du point h_k dépend des déplacements des articulations en *amont* du corps k considéré (c'est-à-dire entre le corps racine et lui même). De même que la vitesse angulaire partielle $\underline{\omega}_p^k$ du corps k dépend de la rotation de l'articulation j correspondant à la vitesse généralisée w_p considérée.

- lorsque w_p coïncide avec $\overset{o^j}{y}_n$, alors

$$\begin{cases} \underline{v}_{p}^{h_{k}} = \underline{g}_{n}^{j} \text{ pour le corps } k \text{ sortant de l'articulation } j, \text{ incluant le corps } j \\ = \underline{0} \text{ sinon} \\ \underline{\omega}_{p}^{k} = \underline{0} \text{ pour tout corps } k \end{cases}$$
(1.40)

La remarque sur la signification de ces relations est la même que précédemment.

Considérons maintenant le $j^{\text{ème}}$ corps, alors:

- lorsque w_p coïncide avec $\dot{\eta}_l^j$

$$\begin{cases} \underline{v}_{p}^{h_{k}} = \underline{\phi}_{l}^{j}(\underline{p}_{m}) + \underline{\phi}_{l}^{\prime j}(\underline{p}_{m}) \wedge \underline{x}^{jk} \text{ pour le corps } k \text{ sortant } \text{du corps } j \\ = \underline{0} \text{ sinon} \\ \underline{\omega}_{p}^{k} = \underline{\phi}_{l}^{\prime j}(\underline{p}_{m}) \text{ pour le corps } k \text{ sortant } \text{du corps } j \\ = \underline{0} \text{ sinon} \end{cases}$$
(1.41)

où le vecteur \underline{x}^{jk} est défini par la figure 4.8. La vitesse partielle $\underline{v}_p^{h_k}$ du point h_k , du corps B_k considéré, dépend de la vitesse de déformation modale $\underline{\phi}_l^j(\underline{p}_m)$ du point d'articulation p_m (menant au corps k) et de la vitesse de déformation angulaire modale $\underline{\phi}_l^{\prime j}(\underline{p}_m)$ du point d'articulation p_m , lorsque w_p coïncide avec le $l^{\text{ème}}$ mode de déformation du corps B_j . La vitesse partielle angulaire $\underline{\omega}_p^k$ dépend de la vitesse de déformation angulaire modale $\underline{\phi}_l^{\prime j}(\underline{p}_m)$ du point d'articulation p_m .

1.5 Équations de mouvement du système complet

Les expressions (4.39), (4.40) et (4.41) définissent les coefficients des vitesses généralisées d'indice p, ces vitesses étant les coordonnées cinématiques associées à la configuration arborescente. La substitution de ces équations dans (4.23) et (4.24), mène au système complet des équations du mouvement du système topologique arborescent. La forme matricielle associée à ces équations va être définie par la matrice de masse $[\mathcal{M}]$ dont les coefficients résultent des différents termes de (4.24). Les coefficients du vecteur $\{L\}$ proviennent quant à eux des termes de (4.24) et (4.23). Par suite, le système matriciel complet des équations de mouvement pourra se mettre sous la forme:

$$\begin{cases} [\mathcal{M}]\{\dot{w}\} = \{L\} \\ \{\dot{q}\} = \{w\} \end{cases}$$
(1.42)

avec: $\{w\}^T = [w_1 \cdots w_{NS}]$. Ce système est composé d'équations différentielles du premier ordre avec second membre. Les paragraphes suivants vont s'attacher à développer les expressions générales des forces d'inertie et actives généralisées afin d'en extraire les termes du système matriciel (4.42) avant de détailler sa méthode de résolution.

Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance

1.5.1 Forces d'inertie généralisées

Les forces d'inertie généralisées sont données par l'équation (4.24) dans le cas général. Par conséquent, pour chaque corps k et pour la coordonnée généralisée p donnée, les coefficients M_{pl} de la matrice de masse du système et la contribution des forces d'inertie généralisées aux coefficients L_p du vecteur colonne $\{L\}$ se déduisent des 9 termes regroupés dans le tableau A.1 de l'annexe A. De plus, l'un des termes (celui d'index 3) est lui même décomposé en 10 termes (301 à 310) donnés dans le tableau B.1 de l'annexe B.

1.5.2 Forces actives généralisées

Les forces actives généralisées sont définies par l'équation (4.23) dont la formulation pour le corps B_k est issu de la définition suivante:

$$f_p^k \triangleq \int_{B_k} \underline{v}_p^k \cdot d\underline{f}^k \tag{1.43}$$

où $d\underline{f}^k$ est la résultante de toutes les *forces travaillantes* agissant sur l'élément de masse dm du corps B_k . Par suite, et à l'aide de l'équation (4.16), nous avons :

$$f_p^k = \int_{B_k} \underline{v}_p^{h_k} \cdot d\underline{f}^k + \int_{B_k} \underline{\omega}_p^k \cdot \left[(\underline{r}^k + \underline{u}^k) \wedge d\underline{f}^k \right] + \int_{B_k} \underline{v}_p^{\dot{\eta}_k} \cdot d\underline{f}^k \tag{1.44}$$

Comme $\underline{v}_p^{h_k}$, $\underline{\omega}_p^k$ et $\underline{v}_p^{\dot{\eta}_k}$ sont indépendants du point m du corps k considéré, alors :

$$f_p^k = \underline{v}_p^{h_k} \cdot \underline{F}^k + \underline{\omega}_p^k \cdot \underline{M}^{k/h_k} + \int_{B_k} \underline{v}_p^{\dot{\eta}_k} \cdot d\underline{f}^k$$
(1.45)

où \underline{F}^k est la résultante de toutes les forces travaillantes agissant sur le corps B_k :

$$\underline{F}^{k} = \int_{B_{k}} d\underline{f}^{k} \tag{1.46}$$

et \underline{M}^{k/h_k} le moment résultant par rapport au point h_k des forces travaillantes agissant sur le corps B_k :

$$\underline{M}^{k/h_k} = \int_{B_k} (\underline{r}^k + \underline{u}^k) \wedge d\underline{f}^k \tag{1.47}$$

Enfin, le dernier terme, $\int_{B_k} \underline{v}_p^{\eta_k} \cdot d\underline{f}^k$, de l'expression (4.45) spécifique à la souplesse du corps k, s'exprime par :

$$\begin{cases} \int_{B_k} \underline{v}_p^{\dot{\eta}_k} \cdot d\underline{f}^k &= \int_{B_k} \underline{\phi}_l^k \cdot d\underline{f}^k \quad \text{pour } w_p \text{ correspondant à } \dot{\eta}_l^k \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$
(1.48)

Ce terme inclus, parmi d'autres, les termes de rigidité et d'amortissement du corps souple B_k . En particulier:

- le $l^{\text{ème}}$ terme de la matrice colonne

$$-[\mathcal{K}^{k}]\{\eta^{k}\} - [\mathcal{C}^{k}]\{\dot{\eta}^{k}\}$$
(1.49)

où $[\mathcal{K}^k]$ et $[\mathcal{C}^k]$ représentent respectivement, la matrice de raideur généralisée (diagonale) et la matrice d'amortissement visqueux généralisée du corps B_k (voir détails ci-dessous). Dans ce cas $d\underline{f}^k$ sont les forces internes élastiques et d'amortissement visqueux agissant sur B_k .

– les termes de la forme

$$[\phi_{il}^k]^T \{F^k\}_{b^k} + [\phi_{il}'^k]^T \{M^{k/h_k}\}_{b^k}$$
(1.50)

où $[\phi_{il}^k]$ et $[\phi_{il}^{\prime k}]$ représentent respectivement, les matrices $(3 \times NM_k)$ des coordonnées des fonctions de formes modales en rotation. $d\underline{f}$ définit une force ou un couple externe ponctuel agissant au point m.

Parmi les forces actives généralisées agissant sur un corps souple, les plus courantes sont :

- les forces actives généralisées découlant du champ de gravité. Pour tout corps B_k , les efforts dus à la gravité s'expriment simplement par

$$d\underline{f}_{q}^{k} = -\underline{g}\,dm\tag{1.51}$$

où \underline{g} est le vecteur d'accélération de la pesanteur. A l'aide de l'expression générale (4.45) et de celles des $\underline{v}_p^{h_k}$, $\underline{\omega}_p^k$ et $\underline{v}_p^{\dot{\eta}_k}$, on en déduit les forces actives généralisées $f_{p|\text{Gravité}}$ dues à la gravité sur les différents corps du système.

- les forces actives généralisées de restitution élastique. Le fléchissement du tout corps souple B_k donne naissance à des forces élastiques internes qui tendent à repositionner le corps sur son état non déformé. Par conséquent, les forces élastiques internes sont déduites de l'énergie potentielle V^k de déformation élastique

$$f_{p|\text{Elas}}^{k} = -\frac{\partial V^{k}}{\partial \eta_{p}}$$
 pour *p* correspondant à η_{l}^{k} (1.52)

L'énergie potentielle de déformation d'un corps B_k s'exprime par :

$$V^{k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NM_{k}} \sum_{j=1}^{NM_{k}} \overline{k}_{ij}^{k} \eta_{i}^{k} \eta_{j}^{k}$$
(1.53)

où \overline{k}_{ij}^k est le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de raideur généralisée $[\mathcal{K}^k] = [\overline{k}_{ij}^k] = [V^k]^T [K^k] [V^k]$, $[V^k]$ et $[K^k]$ étant respectivement la matrice modale et la matrice de raideur (obtenue par approximation éléments finis, § 5.6) du corps B_k .

- les forces actives généralisées d'amortissement structural. Dans tout corps souple, une partie de l'énergie de déformation élastique est dissipée par le comportement visco-élastique des matériaux constitutifs du corps. Les termes de dissipation qui caractérisent l'amortissement structural, sont délicats voire impossibles, à déterminer dans le cas des corps anisotropes. On définit les forces actives généralisées de dissipation à l'aide de la fonction de dissipation \mathcal{D}^k telle que

$$f_{p|Amort}^{k} = -\frac{\partial \mathcal{D}^{k}}{\partial w_{p}} \quad \text{pour } w_{p} \text{ correspondant à } \dot{\eta}_{l}^{k}$$
(1.54)

La fonction \mathcal{D}^k , dans le cas d'une approximation par éléments finis du corps B_k , s'exprime par

$$\mathcal{D}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NM_{k}} \sum_{j=1}^{NM_{k}} \bar{c}_{ij}^{k} \dot{\eta}_{i}^{k} \dot{\eta}_{j}^{k}$$
(1.55)

où \overline{c}_{ij^k} est le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice d'amortissement généralisée $[\mathcal{C}^k] = [\overline{c}_{ij}^k] = [V^k]^T [C^k] [V^k]$, $[V^k]$ et $[C^k]$ étant respectivement la matrice modale et la matrice d'amortissement (obtenue par approximation éléments finis) du corps B_k .

Rappelons que nous avons pris soin (cf. § 4.3.1) d'identifier les vitesses de translation et angulaires relatives des articulations aux vitesses généralisées (cf. § 4.4.2 - Définition des vitesses généralisées). Ainsi, il est inutile de déterminer les équations de restriction de mouvement (définies à partir des forces de liaison) entre les différents corps du système, car la définition des forces actives généralisées (4.43) à partir des vitesses partielles mène à des forces actives généralisées de liaison nulles.

1.6 Choix des fonctions de forme modales

N'importe quel ensemble de vecteurs de déplacement modal $\underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k)$ ($l^{\text{ème}}$ mode du $k^{\text{ème}}$ corps) peut être choisi afin de satisfaire les conditions suivantes:

$$\phi_{I}^{k}(h_{k}) = \phi_{I}^{\prime k}(h_{k}) = \underline{0}$$
(1.56)

où le point h_k est le point de référence du $k^{\text{ème}}$ corps comme le montre la figure 4.5. Cette équation traduit le fait que le point h_k est désigné (arbitrairement) comme le seul point du corps B_k ne subissant ni déplacement ni rotation, dû à sa souplesse. Ces conditions sont nécessaires pour appliquer la méthode de Likins exposée au paragraphe 4.3.2, à savoir que le mouvement de chaque corps est la superposition d'un mouvement de corps rigide et des petites déformations dans un repère lié au corps considéré.

Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance

.

Chapitre 2

Modélisation structurale des pales

2.1 Introduction

A priori, la modélisation du comportement structural des pales ne constitue guère un obstacle pour son étude dynamique, car les moyens dont nous pouvons disposer à l'heure actuelle nous permettent de restituer correctement leur comportement mécanique. Cependant, ce serait mal considérer le sujet que de se lancer dans l'utilisation de codes de calcul commerciaux, dont l'investissement en moyens informatiques et en temps de mise en oeuvre seraient inadaptés à répondre aux critères que nous nous sommes proposés de respecter. Rappelons que le comportement des pales est introduit dans la formulation des équations de mouvement (cf. § 4.4) par le biais des fonctions de forme modales ϕ_l^k (l = 1 à NM_k nombre de modes de la pale k). Cela signifie que la détermination de ces fonctions fait partie de la phase de conditionnement des données et non de la résolution des inconnues du système (degrés de liberté).

Plusieurs modélisations peuvent être adoptées pour aboutir aux fonctions de forme modales des pales (modes propres et déformées modales associées). La plus simple est de considérer les pales comme une suite de poutres rigides articulées entre elles et la plus complexe d'utiliser une approximation éléments finis avec des éléments de type volumique. Or, il est certain que la modélisation la plus simple (réduction des pales à des poutres articulées entre elles) ainsi que celle basée sur la résistance des matériaux (méthode analytique), se montrent impuissantes à traiter le cas des poutres de sections quelconques constituées essentiellement de matériaux anisotropes (composites) pouvant être de surcroît soumises à de grands déplacements (comportement non linéaire). De fait, le choix d'une méthode de type éléments finis reste la plus appropriée.

Utiliser une méthode éléments finis revient à discrétiser les solides étudiés en fonction de leur géométrie et de l'erreur maximale que l'on désire ne pas dépasser sur la détermination des inconnues du système. Dans le cas de solides massifs, il est nécessaire d'employer des éléments volumiques, alors qu'à l'inverse, pour des solides de type poutre, on n'emploie que des éléments linéiques. En ce qui concerne les pales d'éoliennes, il est toujours possible de les discrétiser à l'aide d'éléments volumiques et de coques de manière à obtenir un maillage s'approchant le plus possible de la structure réelle de la pale. La difficulté majeure avec ce type de maillage ne réside pas tant dans la résolution du problème correspondant (déplacements sous l'action de forces extérieures, recherche des modes propres de vibrations, etc...),

puisque des codes industriels permettant de le faire existent depuis un certain nombre d'années (Ansys, Patran, Nastran, ...), que dans le conditionnement proprement dit des données. En effet, réaliser le maillage d'une pale d'éolienne, de forme complexe, constituée de matériaux composites, nécessite un temps très important, sans compter le volume des données à manipuler, d'autant plus qu'il s'agit d'une opération réalisée manuellement et ceci malgré la convivialité sans cesse croissante des codes commerciaux. En outre, la pale étudiée ne peut encore en être qu'au stade de la conception, c'est-à-dire qu'on désire déterminer ses caractéristiques vibratoires afin de calculer de manière prévisionnelle les efforts subis par l'éolienne. Dans ce cas, tout changement de disposition des matériaux au sein de la pale (que l'on désirerait effectuer de manière itérative pour diminuer les efforts qu'elle subit et tendre ainsi vers une pale optimale) entraînerait un remaniement conséquent du maillage. avec des temps de conditionnement loin d'être négligeables. En observant attentivement les pales d'éoliennes, on peut noter que leur envergure est comprise entre 10 à 20 fois la dimension caractéristique (en général la corde) de leur plus grande section. On peut alors considérer les pales comme des poutres (suivant la définition de la résistance des matériaux) modérément épaisses et n'utiliser alors qu'un maillage basé sur des d'éléments linéiques (appelés éléments de poutre). Le maillage est alors réduit à sa plus simple expression, mais nécessite la détermination préalable des caractéristiques mécaniques d'un certain nombre de sections de la pale. On pourrait être tenté de croire que cette étape reste aussi fastidieuse que dans le cas d'un maillage volumique, mais la détermination de ces caractéristiques n'a recours qu'à des principes physiques simples (calcul d'intégrales) même lorsque les formes des sections sont complexes. Dès lors, il suffit, pour un certain nombre de sections choisies en fonction du maillage effectué, de ne décrire que la disposition des matériaux dans chacune d'elles avant d'effectuer le calcul de ces caractéristiques. Des logiciels permettant d'exécuter ce type de calcul ont déjà été développés par ailleurs [18]. Ce conditionnement des données s'avère alors bien moins fastidieux que la construction d'un maillage volumique. Le temps de conditionnement et le volume des données s'en trouvent significativement réduits. Il est toujours possible de reprocher au modèle poutre sa trop grande simplicité (apparente), mais nous allons en fait montrer que l'on peut raffiner considérablement ce modèle afin de restituer le plus fidèlement possible le comportement dynamique des pales. Nous nous placerons dans le cas des pales souples anisotropes soumises à de petits déplacements et de petites déformations.

Ce chapitre est principalement centré autour de deux formulations éléments finis. La première porte sur la modélisation des poutres rectilignes, isotropes et de sections constantes par des éléments finis de type poutre qui est largement répandue et dont nous rappellerons les points principaux. Cependant, les pales étant des structures constituées de matériaux anisotropes, non rectilignes de section et de constitution variable en envergure, il faut faire appel à la notion de rigidité équivalente ainsi qu'à des relations cinématiques entre les différents points caractéristiques (centres élastiques, de torsion, ...) d'une même section pour décrire de façon la plus réaliste possible les déplacements de la poutre tridimensionnelle. Ces points seront repris dans la seconde partie à travers le développement d'un modèle éléments finis de poutre basé sur la formulation variationnelle de Hellinger-Reissner, plus apte à répondre aux spécificités des pales, que celle utilisée dans les modèles classiques. De plus, comme nous l'avons mentionné en début de cette introduction, le but de cette modélisation est de déterminer les fonctions de formes modales par l'intermédiaire des caractéristiques vibratoires de la pale. Par conséquent, le calcul de la matrice de rigidité sera complété par celui de la

matrice de masse. Les fréquences propres de la pale ainsi que les déformées modales sont alors déterminées par la résolution de l'équation aux valeurs propres:

$$([K] - \omega_i^2[M])\{X_i\} = 0$$
(2.1)

où :

- [K] matrice de rigidité de la pale,
- [M] matrice de masse de la pale,
- $-\omega_i i^{\text{ème}}$ mode de pulsation,
- $\{X_i\}$ vecteur propre associé au $i^{\text{ème}}$ mode de pulsation.

Enfin, nous clôturerons ce chapitre par la détermination des fonctions de forme modales associées aux pales suivant deux procédés :

- à l'aide des fonctions d'interpolation nodales,
- par une approximation par des polynômes.

2.2 Définition des repères liés à la pale

Pour définir les caractéristiques géométriques et mécaniques d'une pale, il nous faut introduire un certain nombre de repères (*tableau 5.1*).

Afin de rendre les notations de ces repères plus explicites, nous utilisons une notation distincte pour les repères utilisés pour modéliser la pale de celle intervenant dans la mise en équation du système multicorps (§ 4.4). De plus, parmi les repères liés à la pale, on distinguera nettement:

- le repère de Pale R_{Pl} . Il sert à décrire la position de la pale prise comme un solide isolé. On notera $R_{Pl} \equiv (O_{Pl} XYZ)$ tel que le centre O_{Pl} correspond à l'intersection de l'axe longitudinal de la pale (qui n'est pas nécessairement rectiligne) avec le plan de section du pied de pale. Ce repère est doté de la base orthonormée $\{\underline{I}, \underline{J}, \underline{K}\}$. L'axe $(O_{Pl}X)$ correspond à l'axe de calage de la pale,
- le repère de Section R_{Se} . Il est lié à une section donnée de la pale et son centre de référence O est un point de l'axe longitudinal de la pale. On définit cet axe longitudinal comme le lieu des points O pris comme points de référence des sections et positionnés à 25 % du bord d'attaque du profil (par convention). Un repère de section sera noté (O XYZ) tel que les axes (OY) et (OZ) soient compris dans le plan passant par O et perpendiculaire à l'axe longitudinal de la pale. De plus, l'axe (OY) sera confondu avec l'axe de référence du profil.

L'axe longitudinal de la pale n'étant pas nécessairement rectiligne, une série de transformations doivent être effectuées pour passer du repère de pale R_{Pl} à un repère de section R_{Se} . L'enchaînement de ces transformations est le suivant :

- passage du repère Pale R_{Pl} au repère Non Vrillé R_{Nv} par la translation de vecteur $(X_O \underline{I} + Y_O \underline{J} + Z_O \underline{K}),$
- passage du repère Non Vrillé R_{Nv} au **repère Traînée** R_{Tr} par la rotation d'angle ψ_{Tr} autour de l'axe (OZ_{Nv}) ,
- passage du repère R_{Tr} au repère **Battement** R_{Ba} par la rotation d'angle θ_{Ba} autour de l'axe (OY_{Tr}) ,
- passage du repère R_{Ba} au repère de Section R_{Se} par la rotation d'angle φ_{Se} autour de l'axe (OX_{Ba}) .

TAB. 2.1 Definition des reperes nes a la pale							
Repère	Centre	Base	Axes	Transformation			
R_{Pl}	O_{Pl}	$\{\underline{I}, \underline{J}, \underline{K}\}$	$(O_{Pl}X), (O_{Pl}Y), (O_{Pl}Z)$				
				Translation			
R_{Nv}	0	Non définie	Non précisés				
_				Rotation ψ_{Tr}			
R_{Tr}	0	Non définie	Non précisés				
Ð	0			Rotation θ_{Ba}			
R_{Ba}	0	Non définie	Non Précisés				
D	0	(4 4 1/)	$(\mathbf{O}\mathbf{Y})$ $(\mathbf{O}\mathbf{Y})$ $(\mathbf{O}\mathbf{Z})$	Rotation φ_{Se}			
n_{Se}	U	$\{\underline{\iota},\underline{j},\underline{\kappa}\}$	(OX), (OY), (OZ)	Translation			
R_{π}	F	J: 1 1/2	(EX') (EV') (EZ')	Translation			
n_E	Ľ	$\lfloor \underline{\iota}, \underline{J}, \underline{\kappa} \rfloor$	(DX), (DY), (DZ)	Botation α			
R _n :	E	$\{i \ i \ k\}$	(Ex) (Eu) (Ez)	notation a			
10191	Ľ	$\left[\underline{v}, \underline{J}, \underline{v}\right]$	(Dw), (Dy), (Dv)	Translation			
R_C	C	Non définie	(Cx'), (Cy'), (Cz')				

Pour une section donnée de pale, on est amené à distinguer 5 centres caractéristiques (figure 5.5):

- le centre de référence O souvent situé, par convention, à 25% du bord d'attaque du profil,
- le centre de gravité G,
- le centre élastique E,
- le centre de torsion C,
- et enfin, le centre aérodynamique A, point de réduction des efforts aérodynamiques.



FIG. 2.1 Passage du repère R_{Pl} au repère local R_{Nv}



FIG. 2.2 Passage du repère local R_{Nv} au repère local R_{Tr}

Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance







FIG. 2.4 Passage du repère local R_{Ba} au repère local R_{Se}


FIG. 2.5 Description des centres et des repères d'une section S_e de pale

Dans la section Se dotée du repère de section R_{Se} , on définit maintenant figure 5.5):

- le repère Elastique R_E de centre E et de coordonnées $(0, Y_E, Z_E)$ dans le repère R_{Se} . Ce repère est déduit de R_{Se} par la translation de vecteur $(Y_E \underline{J}' + Z_E \underline{K}')$ et l'on notera $R_E \equiv (E X'Y'Z'),$
- le **repère Principal d'Inertie** R_{Pi} de centre E déduit de R_E par la rotation d'angle α , angle principal de la section, autour de l'axe (EX'). On notera $R_{Pi} \equiv (E xyz)$.

2.3 Formulation éléments finis classique des poutres

2.3.1 Formulation générale

Soit le solide B de volume \mathcal{V} et de frontière $S = S_u \cup S_f$ soumis à l'action :

- des forces volumiques $\underline{f}_{\mathcal{V}}(f_{vx}, f_{vy}, f_{vz})$ et d'inertie $\rho \underline{\ddot{u}}$,
- des forces surfaciques $f_{sx}(f_{sx}, f_{sy}, f_{sz})$ sur la surface S_f ,
- des contraintes initiales $\{\sigma_0\}$,

avec les conditions aux limites cinématiques $\underline{u} = \underline{u}_{S_u}$ sur la surface S_u , où \underline{u} est le vecteur position d'un point p après déformation élastique de B comme le montre la figure 5.6 $(\underline{u} = \underline{p_0 p}, p_0$ position initiale du point p considéré). Le vecteur \underline{u} se décompose, dans la base orthonormée $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ associée au repère galiléen (O xyz), comme suit :

$$\underline{u} = u\,\underline{i} + v\,j + w\,\underline{k} \tag{2.2}$$



FIG. 2.6 Configuration du solide B

Au point p, les équations d'équilibre sur \mathcal{V} s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + f_{vx} - \rho \ddot{u} = 0 \\ \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} + f_{vy} - \rho \ddot{v} = 0 \\ \sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} + \sigma_{zz,z} + f_{vz} - \rho \ddot{w} = 0 \end{cases}$$
(2.3)

où σ_{ij} est un élément du tenseur des contraintes de Cauchy au point p et $\sigma_{ij,k}$ la dérivée par rapport à la coordonnée d'espace k (k = x, y, z). En raison de la réciprocité des contraintes tangentielles, nous avons :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{2.4}$$

Par conséquent, les conditions aux limites sur S_f s'expriment par :

$$\begin{cases}
\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z = f_{sx} \\
\sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z = f_{sx} \\
\sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z = f_{sx}
\end{cases}$$
(2.5)

avec $\underline{n}(n_x, n_y, n_z)$ vecteur normal à la surface. Soit $\underline{u}^*(u^*, v^*, w^*)$ un déplacement cinématiquement admissible, c'est-à-dire tel que $\underline{u}^* = \underline{0}$ sur S_u . On démontre alors qu'il existe une formulation variationnelle associée aux équations d'équilibre obtenue par la méthode des résidus pondérés [16] telle que le bilan des différentes énergies mises en jeu soit nulle:

$$\mathcal{W} = \int_{\mathcal{V}} \left[u^* \left(\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + f_{vx} - \rho \ddot{u} \right) + v^* \left(\sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} + f_{vy} - \rho \ddot{v} \right) + w^* \left(\sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} + \sigma_{zz,z} + f_{vz} - \rho \ddot{w} \right) \right] d\mathcal{V} = 0$$

$$(2.6)$$

Après intégration de la relation (5.6) et en tenant compte de la réciprocité des contraintes (5.4) ainsi que de la condition aux limites $\underline{u}^* = \underline{0}$ sur S_u , alors :

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{int} - \mathcal{W}_{ext} \tag{2.7}$$

Avec, pour l'énergie de déformation du solide :

$$\mathcal{W}_{int} = \int_{\mathcal{V}} \langle D^* \rangle \{\sigma\} \, d\mathcal{V} \tag{2.8}$$

où le vecteur $\langle D^* \rangle$ est défini par :

$$\langle D^* \rangle = \langle u^*, x \quad v^*, y \quad w^*, z \quad u^*, y + v^*, x \quad u^*, z + w^*, x \quad v^*, z + w^*, y \rangle$$
(2.9)

Et, pour l'énergie associée aux termes de forces extérieures (surfaciques, volumiques):

$$\mathcal{W}_{ext} = \int_{\mathcal{V}} \langle u^* \rangle \{ f_{\mathcal{V}} \} \, d\mathcal{V} + \int_{S_f} \langle u^* \rangle \{ f_s \} \, dS - \int_{\mathcal{V}} \langle u^* \rangle \, \rho \{ \ddot{u} \} \, d\mathcal{V} \tag{2.10}$$

Le vecteur $\langle \sigma \rangle$ vaut, quant à lui :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \rangle$$
 (2.11)

Dans les méthodes classiques utilisant des éléments finis de type poutre, les hypothèses couramment retenues sont les suivantes :

- H1 la poutre est mince et peut donc être ramenée à des éléments linéiques de type poutre,
- H2 l'axe longitudinal de la poutre est rectiligne,
- H3 les matériaux constitutifs sont isotropes,
- H4 les centres caractéristiques des sections sont confondus (poutre symétrique suivant deux plans perpendiculaires),
- H5 la poutre est soumise à de petits déplacements et de petites déformations, on emploie alors la théorie linéarisée de l'élasticité.

Ces hypothèses entraînent donc que les axes principaux d'inertie sont confondus avec les axes de symétrie des sections (pris comme axes de référence du repère de la section considérée) et que l'axe neutre (lieu des centres élastiques E) est également confondu avec l'axe longitudinal de la poutre (figure 5.7).



FIG. 2.7 Géométrie d'une poutre à axes confondus

2.3.2 Formulation de l'élément de poutre

Les poutres sont discrétisées par des éléments à 2 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud (figure 5.8). D'après les hypothèses H3 et H4, les centres E et O sont confondus, et les axes (OX), (OY) et (OZ) du repère de section R_{Se} sont confondus avec les axes du repère principal d'inertie (Ex), (Ey) et (Ez). De plus, on choisit de confondre l'axe $(O_{Pl}X)$ avec l'axe longitudinal de la poutre et que les axes $(O_{Pl}Y)$ et $(O_{Pl}Z)$ sont respectivement parallèles aux axes (OY) et (OZ).



FIG. 2.8 Représentation d'un élément de type poutre

Pour le noeud i (i = 1 à 2) de l'élément de poutre, (u_i, v_i, w_i) et $(\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi})^7$ représentent respectivement les déplacements nodaux suivant les axes du repère de section R_{Se} et les rotations nodales autour des axes de ce même repère. L'élément de référence associé à l'élément de poutre réel est caractérisé par la figure 5.9.

La matrice de rigidité globale, [K], est le résultat de l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires de chaque élément. Les différents termes de ces matrices élémentaires

7. $\theta_{xi} = \theta_{Xi}, \ \theta_{yi} = \theta_{Yi}$ et $\theta_{zi} = \theta_{Zi}$



FIG. 2.9 Élément de référence

s'obtiennent par intégration de la relation (5.8) en prenant en compte la loi de comportement des matériaux constituant la poutre. Pour un comportement élastique linéaire de ceux-ci :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \tag{2.12}$$

avec C_{ijkl} composantes du tenseur d'élasticité. Dans le cas particulier des matériaux isotropes, ces composantes s'expriment à l'aide de deux constantes indépendantes (λ et μ ou E et ν) et les relations d'élasticité prennent alors la forme de la loi de Hooke:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_v \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \tag{2.13}$$

où $\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ et $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ sont les coefficients de Lamé, $\epsilon_v = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$ (δ_{ij} symbole de Kronecker). Sous forme matricielle, la relation (5.13) s'exprime par :

Les éléments de la matrice [H] font intervenir les caractéristiques élastiques du matériau (module d'élasticité E et coefficient de Poisson ν) et $\{\epsilon\}$ le vecteur des déformations qui, en théorie linéarisée de l'élasticité, est approximé par $\{D\}$ (équation (E.2)), permettant ainsi de formuler l'énergie de déformation de la poutre W_{int} par :

$$\mathcal{W}_{int} = \int_{\mathcal{V}} \langle D^* \rangle [H] \{D\} \, d\mathcal{V} \tag{2.15}$$

On a l'habitude de distinguer dans la contribution à W_{int} les parts respectives dues :

1. Aux déplacements de traction-compression (translation suivant l'axe (Ox), figure 5.8). Les vecteurs $< D^* > et < \sigma >$ se réduisent dans ce cas à

$$< D^* > = < u^*, x >$$
 (2.16)

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{xx} \rangle$$
 (2.17)

De plus, en introduisant la loi de comportement (5.13)

$$\sigma_{xx} = H_x \epsilon_{xx}$$

= $H_x u_{,x}$ (2.18)

où H_x , dans le cas d'une poutre isotrope (équation (5.14)), est pratiquement égale au module de Young E. La relation (5.15) devient alors

$$\mathcal{W}_{int|tr} = \int_{\mathcal{V}} \langle u^*, x \rangle H_x \{u, x\} d\mathcal{V}$$

= $\int_{L_1}^{L_2} \langle u^*, x \rangle ES \{u, x\} dx$ (2.19)

avec

$$ES \triangleq \int_{S} E \, dy dz \tag{2.20}$$

rigidité de traction-compression de la section S à l'abscisse courante x. Classiquement, on introduit alors les fonctions d'interpolation nodales N_i^t telles que

$$u^* = N_1^t u_1^* + N_2^t u_2^*$$
, de même pour u (2.21)

où les N_i^t sont définies dans le tableau 5.2.

	Flexion (xOz)		Flexion (xOy)		Traction	
i	$N_i^{f_z}$	w_i	$N_i^{f_y}$	v_i	N_i^t	u_i
1	$\frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi)$	w_1	$\frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi)$	v_1	$\frac{1-\xi}{2}$	u_1
2	$-\frac{L}{8}(1-\xi^2)(1-\xi)$	$w_2 = \theta_{y1}$	$\frac{L}{8}(1-\xi^2)(1-\xi)$	$v_2 = -\theta_{z1}$	$\frac{1+\xi}{2}$	u_2
3	$\frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi)$	w_3	$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} (1+\xi)^2 (2-\xi)$	v_3		
4	$-\frac{L}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi)$	$w_4 = \theta_{y2}$	$\frac{L}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi)$	$v_4 = - heta_{z2}$		

TAB. 2.2 Définitions des fonctions d'interpolation nodales

(ξ est une variable d'espace adimensionnée appartenant à l'intervalle [-1, 1])

De plus, si nous employons des éléments isoparamétriques [17] alors, non seulement le champ de déplacement s'exprime en fonction des N_i^t mais les coordonnées géométriques également avec

$$x = N_1 L_1 + N_2 L_2 \tag{2.22}$$

où L_1 et L_2 sont respectivement, les abscisses des noeuds 1 et 2 ($L = L_2 - L_1$) dans le repère de section R_{Se} . Par suite, la relation (5.19) devient

$$\mathcal{W}_{int|tr} = \langle u_i^* \rangle \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_{L_1}^{L_2} ES \, dx \{u_i\} \\ = \langle u_i^* \rangle [k_m] \{u_i\}$$
(2.23)

L'élément de poutre ayant une section constante sur l'intervalle $[L_1, L_2]$ et le matériau étant isotrope (de module d'élasticité E) nous retrouvons alors l'expression la plus usuelle de la matrice de rigidité élémentaire $[k_m]$ définie par

$$[k_m] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
(2.24)

Nous verrons par la suite (§ 5.3.3) comment exprimer $[k_m]$ lorsque la poutre est constituée de matériaux anisotropes avec sections variables en envergure.

2. Aux déplacements de flexion suivant deux plans perpendiculaires (xOy) et (xOz)(figure 5.8). Pour le cas de la flexion dans le plan (xOz), les fonctions d'interpolation nodales N_i^{fz} (fonctions cubiques de type Hermite) sont définies dans le tableau 5.2 telles que

$$w = N_1^{f_z} w_1 + N_2^{f_z} \theta_{y1} + N_3^{f_z} w_2 + N_4^{f_z} \theta_{y2}$$
(2.25)

où w_i et θ_{yi} sont respectivement, le déplacement suivant (Oz) et la rotation autour de l'axe (Oy) du noeud *i*.



FIG. 2.10 Rotation d'une section de poutre selon le modèle de Navier-Bernoulli

Si l'on néglige les effets de cisaillement transversal conformément au modèle de Navier-Bernoulli (*figure 5.10*) pour lequel les sections restent perpendiculaires à la fibre neutre

après déformation de la poutre, alors la relation (5.15), pour de la flexion dans le plan (xOz) devient

$$\mathcal{W}_{int|f_{z}} = \langle w_{i}^{*} \rangle \int_{L_{1}}^{L_{2}} \{N_{i}^{f_{z}}, xx\} EI_{yy} \langle N_{i}^{f_{z}}, xx \rangle dx\{w_{i}\}$$

$$= \langle w_{i}^{*} \rangle [k_{f_{z}}]\{w_{i}\}$$
(2.26)

où EI_{yy} est la rigidité de flexion définie par

$$EI_{yy} \triangleq \int_{S} Ez^2 \, dy dz \tag{2.27}$$

Finalement, la matrice de rigidité élémentaire en flexion dans le plan (xOz), $[k_{f_z}]$, se déduit de (5.26) en tenant compte des mêmes remarques formulées pour la détermination de $[k_m]$ (variation des sections et isotropie). Ainsi, l'expression la plus courante de $[k_{f_z}]$ est

$$[k_{f_z}] = \frac{EI_{yy}}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ & & 12 & 6L \\ Sym. & & 4L^2 \end{bmatrix}$$
flexion dans le plan (xOz) (2.28)

Un développement analogue au précédent permet d'exprimer la matrice de rigidité élémentaire de flexion dans le plan (xOy) par

$$\begin{bmatrix} k_{f_y} \end{bmatrix} = \frac{EI_{zz}}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Sym.} & & 4L^2 \end{bmatrix} \text{ flexion dans le plan } (xOy) \quad (2.29)$$

3. Aux déplacements de **torsion** (rotation autour de (Ox): figure 5.8). Le développement menant à la matrice de rigidité de torsion $[k_t]$ est moins immédiat que dans les autres sollicitations car elle fait intervenir la théorie de la torsion libre de Saint-Venant. C'est pourquoi nous nous bornons ici à ne donner que les formules, sans plus de détails. La relation (5.15), pour la torsion, prend la forme

$$\mathcal{W}_{int|to} = \langle \theta_{xi}^* \rangle \int_{L_1}^{L_2} \{N_i^t, x\} GJ \langle N_i^t, x \rangle dx \{\theta_{xi}\}$$

= $\langle \theta_{xi}^* \rangle [k_t] \{\theta_{xi}\}$ (2.30)

où les fonctions d'interpolation nodales N_i^t sont celles données dans le tableau 5.2 et θ_{xi} la rotation du noeud *i* autour de (Ox). GJ est la rigidité de torsion définie par

$$GJ \triangleq \int_{\mathcal{A}} G\left[(\omega_{,z} + y - y_C)(y - y_C) - (\omega_{,y} - z + z_C)(z - z_C)\right] dydz \qquad (2.31)$$

avec ω la fonction de gauchissement ou fonction de Saint-Venant, et (y_C, z_C) coordonnées du centre de torsion de la section courante dans le repère principal (cf. 5.4). Par conséquent, si GJ est constant sur l'intervalle $[L_1, L_2], [k_t]$ devient

$$[k_t] = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
(2.32)

où G et J représentent respectivement, le module de cisaillement et l'inertie de torsion.

On note ainsi que pour des sections constituées de matériaux isotropes, les modules de Young E, de cisaillement G et les inerties principales I_{yy} , I_{zz} ainsi que l'inertie de torsion J peuvent être séparées dans leurs définitions intégrales (5.20), (5.27) et (5.31).

2.3.3 Prise en compte de l'anisotropie des sections

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que le cas de la poutre dont les sections sont constituées de matériaux isotropes (hypothèse H3). Nous allons maintenant nous affranchir de cette hypothèse afin de tenir compte de la structure réelle des pales majoritairement fabriquées à partir de matériaux anisotropes (composites). Cela signifie entre autres, que le centre O et les axes du repère de section (O XYZ) n'est plus nécessairement confondu avec le repère principal d'inertie (E xyz) (cf. 5.4) de cette même section (figure 5.11).



FIG. 2.11 Définition des axes principaux d'inertie de la section S

Pour prendre en compte l'anisotropie nous ferons appel à la notion de *rigidité équiva*lente que nous notons "[~]".

Une section de pale étant constituée de n_{φ} phases *i* représentant chacune un matériau donné (*figure 5.12*), le centre élastique *E* d'une section donnée est alors défini comme le



FIG. 2.12 Définition des phases d'une section donnée

barycentre des modules d'Young E_i de chaque phase *i* pondérés par leurs surfaces respectives S_i (cf. 5.4). Les différentes rigidités équivalentes sont alors calculées de la façon suivante [18]:

1. En **traction-compression**, l'équation (5.20) nous permet de définir la rigidité équivalente de traction par

$$\widehat{ES} \triangleq \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} E_i \int_{S_i} dy_i dz_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} E_i S_i$$
(2.33)

2. En flexion, l'équation (5.27) donne la rigidité équivalente de flexion par

$$\widehat{EI}_{yy} \triangleq \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} E_i \int_{S_i} z^2 \, dy_i dz_i$$
(2.34)

$$\widehat{EI}_{zz} \triangleq \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} E_i \int_{S_i} y^2 \, dy_i dz_i \tag{2.35}$$

3. En **torsion**, l'équation (5.31) permet de définir la rigidité équivalente de torsion de surfaces multiplement connexes

$$\widehat{GJ} = \sum_{i=1}^{n} 2S_{\Gamma_i} \Phi_i \tag{2.36}$$



FIG. 2.13 Définition de la cellule i d'une section multiplement connexe à parois minces

où *n* est le nombre de cellules, S_{Γ_i} la surface délimitée par la courbe moyenne Γ_i de la cellule *i* et Φ_i le flux de contrainte traversant cette même cellule (*figure 5.13*).

Dans le cas de sections plus complexes (parois épaisses), la formulation de Saint-Venant (torsion libre) doit être employée, mais elle nécessite la détermination de la fonction de gauchissement ω que seul un calcul éléments finis permet de déterminer [19].

Le calcul des rigidités équivalentes \widehat{ES} , \widehat{EI}_{yy} , \widehat{EI}_{zz} et \widehat{GJ} est une étape coûteuse en temps car elle nécessite préalablement de décrire, pour une section de la pale, la disposition des différents matériaux (phases). Cependant, une application logicielle telle que [20] peut, par exemple, rendre ce calcul beaucoup plus rapide et fiable.

2.3.4 Prise en compte de la variation en envergure des caractéristiques mécaniques équivalentes des sections

De manière générale, les sections évoluent très fortement le long de l'envergure de la pale comme le montre la figure 5.14, à la fois dans leurs dimensions et leurs formes, mais également dans leur constitution.

Il n'est donc pas réaliste d'adopter une valeur moyenne pour les différentes rigidités équivalentes sur l'ensemble de la pale car certains d'entres elles peuvent varier dans un rapport de 1 à 1000. La méthode classique, pour prendre en compte la variation des caractéristiques mécaniques équivalentes en fonction de l'envergure est de prendre leurs valeurs moyennes sur chaque élément de poutre défini lors de la discrétisation de la pale. On a alors une variation discontinue (dite en escalier) des rigidités en fonction de l'envergure (figure 5.15).

Dès lors, pour rester proche de la réalité, il faut discrétiser la pale en un nombre d'éléments de poutre relativement important. Ceci a pour conséquence immédiate une augmentation non négligeable du temps de conditionnement des données (description de la répartition des matériaux dans chaque section) afin de déterminer les caractéristiques mécaniques équivalentes de chaque tronçon de pale. C'est pourquoi dans l'optique de réduire, d'une part, la taille des matrices de rigidité et de masse du système et, d'autre part, de



FIG. 2.14 Évolution des sections d'une pale d'éolienne (RIVA-12m) [18]



FIG. 2.15 Variation discontinue des rigidités équivalentes [18]

limiter le nombre de sections à analyser pour obtenir les grandeurs équivalentes, nous avons opté pour une méthode d'intégration de Gauss des éléments des matrices de rigidité et de masse élémentaires. Prenons pour exemple le cas de la traction-compression, l'énergie de déformation (équation (5.19)) associée est alors de la forme:

$$\mathcal{W}_{int} = \int_{L_1}^{L_2} \langle u^*, _x \rangle \widehat{ES} \{ u, _x \} dx$$
(2.37)

Si nous considérons la section constante sur la longueur L de l'élément de poutre, ce qui équivaut à appliquer la méthode d'approximation par variations discontinues, alors :

$$\mathcal{W}_{int} = \widehat{ES} \int_{L_1}^{L_2} \langle u^*, _x \rangle \{u, _x\} dx$$
(2.38)

où L_1 et L_2 sont respectivement, la position du noeud 1 et du noeud 2 de l'élément par rapport à l'origine O_{Pl} du repère lié à la poutre. Considérons maintenant une approximation de la forme intégrale W_{int} par une intégration numérique suivant la méthode de Gauss. Soit f, une fonction quelconque de la variable ξ ($\xi \in [-1,1]$), alors:

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{r} w_i f(\xi_i)$$
(2.39)

avec:

- $-w_i$ poids d'intégration,
- $-\xi_i$ abscisses des points d'intégration,
- -r nombre de points d'intégration.

On note que si f est un polynôme de degré d, alors il suffit que r vérifie la relation $d \leq 2r - 1$ pour intégrer exactement f sur l'intervalle [-1, 1]. Pour ramener \mathcal{W}_{int} sur l'intervalle [-1, 1], on effectue le changement de variable suivant :

$$x = \frac{1+\xi}{2}L_2 + \frac{1-\xi}{2}L_1 \tag{2.40}$$

Par suite, l'équation (5.23) devient :

$$\mathcal{W}_{int} = \langle u_i^* \rangle \frac{1}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_{-1}^1 \widehat{ES} d\xi \{u_i\}$$
$$= \langle u_i^* \rangle [k_m] \{u_i\}$$
(2.41)

Nous procédons maintenant à l'évaluation des éléments de cette matrice par une intégration numérique de Gauss (relation (5.39)) pour finalement nous mener à la nouvelle expression de $[k_m]$:

$$[k_m] \approx \frac{1}{2L} \sum_{k=1}^r w_k \widehat{ES}(\xi_k) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
(2.42)

Cette expression est analogue à la relation (5.24), sauf qu'elle tient compte de la variation des rigidités équivalentes des sections sur la longueur L de l'élément. On formule de la même façon les matrices élémentaires de flexion et de torsion avec :

- pour la matrice de rigidité élémentaire en flexion dans le plan (xOz)

$$[k_{f_z}] \approx \frac{8}{L^3} \sum_{k=1}^r w_k \{ N_i^{f_z},_{\xi\xi} (\xi_k) \} \widehat{EI}_{yy}(\xi_k) < N_i^{f_z},_{\xi\xi} (\xi_k) >$$
(2.43)

où les $N_i^{f_z}$ sont données dans le tableau 5.2,

- pour la matrice de rigidité élémentaire en flexion dans le plan (xOy)

$$[k_{f_y}] \approx \frac{8}{L^3} \sum_{k=1}^r w_k \{ N_i^{f_y},_{\xi\xi}(\xi_k) \} \widehat{EI}_{zz}(\xi_k) < N_i^{f_y},_{\xi\xi}(\xi_k) >$$
(2.44)

où les $N_i^{f_y}$ sont données dans le tableau 5.2,

- pour la matrice de rigidité élémentaire en torsion

$$[k_t] \approx \frac{1}{2L} \sum_{k=1}^r w_k \widehat{GJ}(\xi_k) \begin{bmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
(2.45)

Un calcul comparatif effectué sur une poutre conique de section circulaire pleine $(annexe \ C)$ entre la méthode classique (approximation en marches d'escaliers, c'est-à-dire r = 0) et la méthode d'intégration de Gauss que nous venons d'exprimer montre que, dans le cas de l'approximation par variation discontinue (valeur moyenne sur la longueur de l'élément), l'erreur par rapport au modèle analytique (solution donnée par la R.D.M.) est de 0,164% pour 40 éléments alors que pour environ la même erreur, il suffit de 8 éléments par la méthode d'intégration de Gauss. Ceci montre bien l'intérêt de cette méthode dans la mesure où elle ne nécessite que la connaissance d'un nombre limités de caractéristiques mécaniques équivalentes (entraînant une économie substantielle dans le conditionnement des données relatives aux dispositions internes des matériaux de chaque de sections).

Le choix du nombre de points d'intégration de Gauss va déterminer le nombre de sections par élément de poutre où l'on devra déterminer toutes les rigidités équivalentes. Par exemple, pour une pale discrétisée en 10 éléments, avec un calcul des termes des matrices de rigidité élémentaires sur 3 points d'intégration, il faudra déterminer, pour chaque rigidité équivalente, $3 \times 10 = 30$ valeurs de chaque! C'est pourquoi, dans le but de limiter le nombre de caractéristiques équivalentes des sections à déterminer, nous définirons pour la pale un certain nombre de sections de références (figure 5.14). A partir de ces dernières, toutes les rigidités équivalentes seront déterminées par interpolation parabolique dans un diagramme (figure 5.16) où les rigidités équivalentes seront reportées sur une échelle logarithmique en fonction de l'envergure (échelle linéaire).



FIG. 2.16 Représentation des "^ " en échelle lin – log

Le choix d'une échelle logarithmique en ordonnée est conditionné par le fait que (comme nous l'avons souligné précédemment) les rigidités équivalentes peuvent le long de la pale, évoluer d'un facteur 1 à 1000, suggérant une variation par une loi en puissance. Il est alors plus judicieux d'interpoler de telles quantités sur une échelle logarithmique que sur une échelle linéaire.

2.4 Formulation éléments finis de poutre spécifique aux pales

Nous nous proposons maintenant de prendre en compte la différenciation des centres dans le cas de poutres de sections quelconques et anisotropes. Pour cela, nous allons utiliser une formulation qui s'appuie sur le principe de Reissner-Hellinger afin de déterminer la

matrice de rigidité élémentaire de traction-flexion combinée (prise en compte des couplages des déplacements). Par contre, pour la torsion, nous conservons la formulation éléments finis classique (cf. § 5.3.2). Bien entendu, la méthode d'intégration de Gauss qui vient d'être présentée reste valable pour les deux formulations.

2.4.1 Position du problème

Les pales ont des sections de forme quelconque (figure 5.14), dans la mesure où elles ne possèdent pas systématiquement au moins un plan de symétrie. Or, les formulations éléments finis classiques que nous venons de voir (cf. § 5.3.1) basées sur des éléments de type poutre considèrent, en majorité, l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires (sections circulaires, rectangulaires, en 'I', etc...). Elle ne permettent donc pas de traiter les problèmes de couplages des déplacements liés à la différenciation des centres des sections. Nous nous proposons donc de restituer ces couplages intervenant dans le cas des poutres de sections quelconques constituées de matériaux anisotropes, tout en conservant des éléments de type poutre linéique à 2 noeuds, mais dont le traitement s'appuie sur une formulation éléments finis originale. Dans un premier temps, nous décrirons les centres caractéristiques d'une section de pale et, dans un second temps, l'application d'une forme variationnelle mixte/hybride nous conduira aux nouvelles expressions des matrices de rigidité élémentaires partielles.

2.4.2 Détermination des centres et description des modes de couplage

Si les dimensions des sections sont faibles par rapport à l'envergure la pale possède alors un fort allongement⁸, $\Lambda > 50$, et même si les centres sont différenciés, l'erreur qu'entraîne la non prise en compte de cette différenciation est négligeable. Cependant, on ne peut pas laisser de côté le cas des pales modérément épaisses, $10 \leq \Lambda \leq 30$, dans lequel rentre les pales d'éolienne (exemple de celle de l'éolienne *Tjæreborg 2 MW*, figure 5.17: 30 m d'envergure, 2 m de corde moyenne donnant un allongement de 15), et pour lequel cette différenciation est à la base de la spécificité du comportement structural des pales.

Examinons la section S comportant n_{φ} phases (figure 5.18), alors:

- les coordonnées du centre de gravité G dans le repère de section R_{Se} (figure 5.19) sont données par

$$\begin{cases}
Y_G = \frac{1}{\widehat{m}_l} \sum_{\substack{i=1\\ n_{\varphi}}}^{n_{\varphi}} \widehat{m}_{li} Y_{G_i} \\
Z_G = \frac{1}{\widehat{m}_l} \sum_{\substack{i=1\\ i=1}}^{n_{\varphi}} \widehat{m}_{li} Z_{G_i}
\end{cases}$$
(2.46)

avec $\widehat{m}_l = \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} \widehat{m}_{li}$ masse linéique équivalente de la section [18], et (Y_{G_i}, Z_{G_i}) coordonnées du centre de gravité de la phase *i* dans le repère R_{Se} .

^{8.} Rapport de carré de l'envergure sur la surface portante de la pale -



FIG. 2.17 Vue en plan de la pale Tjæreborg 2 MW



FIG. 2.18 Exemple de définition des phases d'un profil



FIG. 2.19 Position des repères liés à la section S

- soit $(E X'Y'Z') \equiv R_E$ le repère lié au **centre élastique** E (figure 5.19). L'axe (EX') est axe neutre si

$$\begin{cases} \sum_{\substack{i=1\\n\varphi}}^{n\varphi} E_i \int_{S_i} Z' \, dS_i = 0\\ \sum_{\substack{i=1\\i=1}}^{n\varphi} E_i \int_{S_i} Y' \, dS_i = 0 \end{cases}$$
(2.47)

Soit encore

$$\sum_{i=1}^{n_{\varphi}} E_i \int_{S_i} Y' \, dS_i = \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} E_i \int_{S_i} (Y_E - Y) \, dS_i = 0 \tag{2.48}$$

de même pour Z_E . Par suite, les coordonnées de E dans le repère de section R_{Se} sont données par

$$\begin{cases} Y_E = \frac{1}{\widehat{ES}} \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} E_i \int_{S_i} Y \, dS_i \\ Z_E = \frac{1}{\widehat{ES}} \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} E_i \int_{S_i} Z \, dS_i \end{cases}$$
(2.49)

Connaissant les rigidités équivalentes \widehat{EI}_{YY} , \widehat{EI}_{ZZ} et \widehat{EI}_{YZ} , l'annulation du déterminant associé au tenseur des inerties

$$\begin{vmatrix} \widehat{EI}_{YY} - \beta_1 & \widehat{EI}_{YZ} \\ \text{Sym.} & \widehat{EI}_{ZZ} - \beta_2 \end{vmatrix} = 0$$
(2.50)

donne les valeurs propres β_1 et β_2 qui représentent les rigidités principales équivalentes de la section S

$$\begin{cases} \beta_1 = \widehat{EI}_{yy} \\ \beta_2 = \widehat{EI}_{zz} \end{cases}$$
(2.51)

L'angle α du repère principale $(E X'yz) \equiv (E xyz)$ par rapport au repère R_E est donné par (figure 5.19)

$$\tan(2\alpha) = \frac{-\widehat{E}I_{YZ}}{\widehat{E}I_{YY} - \widehat{E}I_{ZZ}}$$
(2.52)

- le centre de torsion C d'une section S (figure 5.20) est, par définition, le seul point de la section qui reste invariant en rotation sous l'action d'un moment de torsion pure.



FIG. 2.20 Position du centre de torsion C

Les coordonnées de C dans le repère principal (E xyz) sont données par

$$\begin{cases} y_C = \frac{1}{\widehat{EI}_{yy}} \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} E_i \int_{S_i} \Phi z \, dS_i \\ z_C = \frac{1}{\widehat{EI}_{zz}} \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} E_i \int_{S_i} \Phi y \, dS_i \end{cases}$$
(2.53)

avec

$$\Phi(y', z') = \omega(y, z) + y' z_C - z' y_C \tag{2.54}$$

où ω est la fonction de gauchissement, encore appelée fonction de Saint-Venant. On trouvera les détails du calcul de la position du centre de torsion dans [19].

La matrice de rigidité élémentaire d'un élément de poutre va maintenant être déterminée en tenant compte des couplages dus à la différenciation des centres. Pour cela, les hypothèses retenues dans l'écriture des équations sont :

- H1 les effets de couplages propres aux matériaux sont négligés,
- H2 la théorie linéarisée de l'élasticité est employée (petits déplacements, petites déformations),
- H3 les sections sont infiniment rigides dans leur plan et ne subissent, par conséquent, que des translations ou des rotations (modèle de Timoshenko/Mindlin, figure 5.21),



FIG. 2.21 Rotation d'une section selon le modèle de Timoshenko/Mindlin

H4 - dans une section, le déplacement axial du au gauchissement (théorie de la torsion libre de Saint Venant) est négligé.

Rappelons que la pale est modélisée par des éléments de type poutre (à 2 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud). La ligne de noeuds est donc la succession des N_e segments de longueur L, relative à l'élément e, comme le montre la figure 5.22.

Les déplacements nodaux résultent de la combinaison des différentes déplacements dûs aux sollicitations de traction, flexion et torsion. Mais, du fait que les centres E et O sont distincts, une sollicitation de flexion pure (ligne d'action des efforts tranchants passant par E) sera accompagnée d'un déplacement axial de la ligne de noeuds : il y a un couplage de type membrane/flexion. De même, les centres E et C étant distincts, cela entraîne un couplage de type torsion/flexion. Enfin, les axes principaux d'inertie n'étant pas confondus avec ceux



FIG. 2.22 Ligne de noeuds

du repère de référence (O XYZ), il existe un troisième couplage de type flexion/flexion. Pour résumer, 3 types de couplage sont donc susceptibles d'intervenir sur la déformation de la pale (figure 5.23):

- le couplage membrane/flexion lorsque O est distinct du centre élastique E,
- le couplage torsion/flexion lorsque le centre élastique E est distinct du centre de torsion C,
- le **couplage flexion**/flexion lorsque les axes principaux d'inertie sont distincts des axes du repère de référence de la section considérée.



FIG. 2.23 Représentation des couplages

Par une prise en compte de l'ensemble de ces couplages nous pouvons maintenant remonter le plus fidèlement possible au champ de déplacement d'un point quelconque de la pale. De nouveaux termes, que nous allons déterminer, vont alors apparaître dans la matrice de rigidité:

- en premier lieu, nous résoudrons le cas du couplage membrane/flexion en utilisant le principe de Hellinger-Reissner (§ 5.4.3),
- en second lieu, nous aborderons le couplage torsion/flexion par le biais des relations cinématiques entre les points O et C d'une section (§ 5.4.4),

- et enfin, l'ensemble des couplages sera intégré dans la matrice de rigidité exprimée dans le repère global (R_{Pl}) par l'application de différentes transformations (matrices de passage) mettant en jeu le couplage flexion/flexion (rotation des plans principaux d'inertie, § 5.4.5).

2.4.3 Calcul de la matrice de rigidité élémentaire partielle relative au couplage membrane/flexion - Application du principe de Hellinger-Reissner

Le couplage membrane/flexion nécessite maintenant d'introduire trois déplacements pour chaque noeud *i* d'un élément : celui de membrane u_i , de fléchissement w_i et de rotation de la section $w_{i,x}$. Or, la dimension des bases polynômiales utilisées pour approximer les déplacements de membrane (dimension 2, N_1^t et N_2^t) et de flexion (dimension 4, N_1^f à N_4^f , $f = f_y$ ou f_z) est différente (tableau 5.2). Par suite, il nous est impossible d'avoir recours à des fonctions d'interpolation. La démarche consiste donc à utiliser une formulation qui permet d'introduire une ou des grandeurs physiques supplémentaires (déplacements, contraintes) au niveau du vecteur des inconnues nodales. C'est pourquoi une formulation mixte/hybride est utilisée à cette fin. L'introduction du champs des contraintes sur le premier noeud de l'élément et des déplacements de membrane permet, après une opération de condensation statique, de passer d'un total de 9 inconnues nodales $(u_1, w_1, \theta_{Y1}, u_2, w_2, \theta_{Y2}, N_1, M_1$ et T_1 en flexion (XOZ), de même pour la flexion (XOY)) à celui de 6. Cette étape mène à une matrice de rigidité élémentaire partielle de dimension (6,6) pour chaque plan de flexion. Cette nouvelle formulation éléments finis est basée sur la fonctionnelle de Hellinger-Reissner.

Avant de développer le principe de Hellinger-Reissner pour traiter le couplage de membrane/flexion, il est intéressant d'établir une courte synthèse des différentes formulations éléments finis en mécanique des structures afin de définir les raisons qui nous ont menées à l'utilisation de ce principe. Les formulations éléments finis se divisent en quatre catégories exposées dans le *tableau 5.3*.

Formulations	Champs approximés	Fonctionnelle Π	
Aux déplacements	Déplacements	Energie potentielle totale	
		$\Pi(\underline{u})$	
Aux contraintes	Contraintes	Energie potentielle	
		complémentaire $\Pi(\underline{\sigma})$	
Hybrides	Contraintes internes et	Variante de l'énergie	
	déplacements à la frontière	potentielle complémentaire	
Mixtes	Déplacements	fonctionnelle de Reissner	
	et contraintes	$\Pi(\underline{u}, \underline{\sigma})$	

TAB. 2.3 Les différentes formulations E.F. en mécanique des struc-

La distinction entre formulations mixtes et hybrides repose, dans le cas hybride, sur l'élimination d'un des champs au niveau de l'élément de façon à exprimer la fonctionnelle Π à partir des déplacements nodaux. Pour introduire le déplacement axial des noeuds de

Partie II. Modélisation mécanique de l'éolienne à axe horizontal

tarmon

l'élément de poutre lors d'une sollicitation en flexion, nous allons donc utiliser une formulation mixte/hybride : l'ajout d'un champ de contrainte à celui des déplacements permettra de déterminer le déplacement axial du noeud, mais ce champ sera ensuite éliminé afin de conserver une méthode des déplacements (figure 5.24).



FIG. 2.24 Synoptique de le formulation éléments finis pour traiter le couplage membrane/flexion

Reconsidérons la forme variationnelle générale W donnée en introduction par la relation (5.6). Le bilan des équations d'équilibre du solide élastique B (figure 5.6) sous forme matricielle est le suivant :

– équations d'équilibre sur $\mathcal V$

$$\{Div[\sigma]\} + \{f_{\mathcal{V}}\} - \rho\{\ddot{u}\} = \{0\}$$
(2.55)

- conditions aux limites mécaniques sur S_f

$$[\sigma]\{n\} - \{f_S\} = \{0\}$$
(2.56)

où $< n > = < n_x n_y n_z >$ est la normale à S_f ,

- relations déformations-déplacements sur ${\cal V}$

$$[\epsilon] - \frac{1}{2}([L] + [L]^T) = \{0\}$$
(2.57)

avec $[L] = Grad(\underline{u})$ et $[\epsilon]$ tenseur des déformations au point p,

- conditions aux limites géométriques sur S_u

$$\{u\} - \{u_{S_u}\} = \{0\} \tag{2.58}$$

– loi de comportement sur \mathcal{V}

$$[\sigma] - [H]\{\epsilon\} = \{0\}$$
(2.59)

avec [H] matrice des constantes élastiques et $\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} \gamma_{xy} \gamma_{xz} \gamma_{yz} \rangle$ vecteur ligne des déformations extrait du tenseur [ϵ].

Par conséquent, on peut exprimer W sous la forme générale :

$$\mathcal{W} = -\int_{\mathcal{V}} (\langle u^* \rangle (\{Div[\sigma]\} + \{f_{\mathcal{V}}\} - \rho\{\ddot{u}\}) + \langle \sigma^* \rangle ([\epsilon] - \frac{1}{2}([L] + [L]^T)) + \langle \epsilon^* \rangle ([\sigma] - [H]\{\epsilon\})) d\mathcal{V}$$

$$-\int_{S_f} \langle u^* \rangle ([\sigma]\{n\} - \{f_S\}) dS - \int_{S_u} \langle \sigma^*(\underline{n}) \rangle (\{u\} - \{u_{S_u}\}) = 0$$
(2.60)

avec:

$$egin{array}{rcl} < u^* > &= & < u^* & v^* & w^* > \ < \sigma^* > &= & < \sigma^*_{xx} & \sigma^*_{yy} & \sigma^*_{zz} & \sigma^*_{xy} & \sigma^*_{xz} & \sigma^*_{yz} > \ < \epsilon^* > &= & < \epsilon^*_{xx} & \epsilon^*_{yy} & \epsilon^*_{zz} & \gamma^*_{xy} & \gamma^*_{xz} & \gamma^*_{yz} > \end{array}$$

de même pour $\langle u \rangle$, $\langle \sigma \rangle$ et $\langle \epsilon \rangle$, et :

$$\{\sigma^*(\underline{n})\} = [\sigma^*]\{n\}$$

Après intégration par parties du premier terme de l'équation (5.60), nous en déduisons qu'il existe une fonctionnelle $\Pi(\underline{u}, \underline{\sigma}, \underline{\epsilon})$ telle que sa variation en $\langle u \rangle$, $\langle \sigma \rangle$ et $\langle \epsilon \rangle$ correspond à \mathcal{W} :

$$\Pi(\underline{u},\underline{\sigma},\underline{\epsilon}) = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{1}{2} < \epsilon > [H]\{\epsilon\} - \left(\sigma_x(\epsilon_x - u_{,x}) + \dots + \sigma_{yz}(\gamma_{yz} - w_{,y} - v_{,z})\right)\right) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} < u > \{f_{\mathcal{V}}\} d\mathcal{V} - \int_{S_f} < u > \{f_S\} dS - \int_{S_u} < \sigma(\underline{n}) > \left(\{u\} - \{u_{S_u}\}\right) dS$$

$$(2.61)$$

et:

$$\delta \Pi = \mathcal{W} = 0 \tag{2.62}$$

L'expression (5.61) est appelée fonctionnelle mixte générale (due à Hu-Washizu) et le principe mixte de type Hellinger-Reissner se déduit de celle-ci si les relations de comportement (5.59) sont satisfaites explicitement sur \mathcal{V} [16]. Alors les relations (5.59) et (5.61) permettent de définir une fonctionnelle mixte des variables $\langle u \rangle$ et $\langle \sigma \rangle$, la variable $\langle \epsilon \rangle$ s'exprimant en fonction de $\langle u \rangle$:

 $\Pi(\underline{u},\underline{\sigma}) = \Pi_{int} - \Pi_{ext} \tag{2.63}$

avec:

. . .*

$$\Pi_{int} = \int_{\mathcal{V}} \left(-\frac{1}{2} \langle \sigma \rangle \left[H \right]^{-1} \left\{ \sigma \right\} + \langle \sigma \rangle \left\{ \epsilon(\underline{u}) \right\} \right) d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \langle u \rangle \left\{ f_{\mathcal{V}} \right\} d\mathcal{V}$$
(2.64)

$$\Pi_{ext} = \int_{S_f} \langle u \rangle \{f_S\} \, dS \tag{2.65}$$

et:

$$<\epsilon(\underline{u})> = < u_{,x} \quad v_{,y} \quad w_{,z} \quad u_{,y}+v_{,x} \quad u_{,z}+w_{,x} \quad v_{,z}+w_{,y}>$$
(2.66)

On note que:

- Π_{int} est l'énergie potentielle interne faisant intervenir le tenseur des contraintes du solide B,
- Π_{ext} est l'énergie potentielle externe faisant intervenir les forces de surface f_S .

Considérons maintenant le cas de la poutre en flexion suivant l'axe (OZ). On choisit ici de positionner les axes du repère de section R_{Se} parallèlement à ceux du repère principal d'inertie R_{Pi} de la section (figure 5.25). Nous avons vu que si l'axe neutre (Ex) est distinct de l'axe de référence (OX), alors il y a un couplage de type membrane/flexion. Le vecteur $\langle u_n \rangle$ des déplacements nodaux de l'élément de poutre devient :

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1 \ w_1 \ \theta_{Y1} \ u_2 \ w_2 \ \theta_{Y2} \rangle$$
 (2.67)

où u_i , w_i et θ_{Yi} sont respectivement, les déplacement nodaux suivant l'axe (OX) et (OZ), et la rotation nodale autour de l'axe (OY).



FIG. 2.25 Définition des positions des repères R_{Se} et R_{Pi}



FIG. 2.26 Charges d'un élément de poutre épaisse de longueur L

L'utilisation de la formulation mixte/hybride permet, par rapport à la formulation éléments finis classique (cf. § 5.3.1), d'introduire les déplacements nodaux u_i , w_i et les rotations θ_{Yi} sans pour autant faire appel aux fonctions d'interpolation nodales N_i^j (tableau 5.2).

Pour le cas d'un élément de poutre épaisse schématisée par la figure 5.26, Π s'exprime par :

$$\Pi = \int_{L_1}^{L_2} \left(\langle \varsigma \rangle \{e\} - \frac{1}{2} \langle \varsigma \rangle [\widehat{H}]^{-1} \{\varsigma\} \right) dX - \int_{L_1}^{L_2} \langle u \rangle \{f\} \, dX - \langle u \rangle \{F\} \tag{2.68}$$

avec:

 $-\langle\varsigma\rangle$ vecteur des efforts défini par

$$\langle \varsigma \rangle = \left\langle \begin{array}{cc} N & M & T \end{array} \right\rangle \tag{2.69}$$

où

$$N = \int_{S} \sigma_{XX} \, dS \quad \text{effort normal} \tag{2.70}$$

$$M = \int_{S} Z\sigma_{XX} \, dS \quad \text{moment flechissant autour de } (OY) \tag{2.71}$$

$$T = \int_{S} \sigma_{XZ} \, dS \quad \text{effort tranchant suivant l'abscisse } X \tag{2.72}$$



FIG. 2.27 Déplacement virtuel d'une section de poutre en flexion dans le plan (XOZ)

- $\{\mathbf{e}\}$ vecteur des déplacements défini à partir du vecteur $\langle \epsilon^* \rangle$ des déformations virtuelles. Considérons en effet le déplacement virtuel de la section de poutre de la figure 5.27:

le vecteur de déplacement virtuel \underline{u}_q^* du point q est donné par

$$\underline{u}_{a}^{*}(X,Z) = \left(u^{*}(X) + Z\theta_{Y}^{*}(X)\right)\underline{I} + w^{*}(X)\underline{K}$$

$$(2.73)$$

Par conséquent, le vecteur ligne des déformations virtuelles (5.66) se limite à

$$<\epsilon^*> = < u^*, x \quad u^*, z + w^*, x >$$
 (2.74)

A l'aide de la relation (5.73) nous pouvons donc en déduire que le vecteur des déformations virtuelles vaut

$$<\epsilon^*> = < u^*, X + Z\theta^*_Y, X \quad \theta^*_Y + w^*, X >$$
 (2.75)

que l'on définit $\langle e \rangle$ par

$$\langle e \rangle = \left\langle \begin{array}{cc} u_{,X} & \theta_{Y,X} & \theta_{Y} + w_{,X} \end{array} \right\rangle \tag{2.76}$$

dans lequel on distingue la déformation de membrane u_{X} due à l'effort normal N, la déformation $\theta_{Y,X}$ (courbure) due au moment de flexion M, et la déformation de cisaillement $\theta_{Y} + w_{X}$ due à l'effort tranchant T. – $[\widehat{\mathbf{H}}]$ désigne la matrice de rigidité équivalente définie par

$$\begin{bmatrix} \widehat{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{H}_m & \widehat{H}_{mfz} & 0\\ & \widehat{H}_{fz} & 0\\ \text{Sym.} & & \widehat{H}_c \end{bmatrix}$$
(2.77)

donc la matrice $[\widehat{H}]^{-1}$ a pour expression

$$\begin{bmatrix} \widehat{H} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} \widehat{H}_{f_Z} & -\widehat{H}_{mf_Z} & 0\\ & \widehat{H}_m & 0\\ \text{Sym.} & \frac{c}{\widehat{H}_c} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad c = \widehat{H}_m \widehat{H}_{f_Z} - \widehat{H}_{mf_Z}^2 \tag{2.78}$$

 \mathbf{et}

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_{m} &= \sum_{\substack{i=1\\n_{\varphi}}}^{n_{\varphi}} E_{i} \int_{S_{i}} dS_{i} = \widehat{ES} \\
\widehat{H}_{f_{Z}} &= \sum_{\substack{i=1\\n_{\varphi}}}^{n_{\varphi}} E_{i} \int_{S_{i}} Z^{2} dS_{i} = \widehat{EI}_{YY} \\
\widehat{H}_{mf_{Z}} &= \sum_{\substack{i=1\\n_{\varphi}}}^{n_{\varphi}} E_{i} \int_{S_{i}} Z dS_{i} = \widehat{EM}_{Y} \\
\widehat{H}_{c} &= \sum_{\substack{i=1\\i=1}}^{n_{\varphi}} k_{Z_{i}} G_{i} \int_{S_{i}} dS_{i} = \widehat{GS}
\end{aligned}$$
(2.79)

où k_{Z_i} est le facteur de correction de cisaillement de la section de la phase *i* en flexion dans le plan (XOZ). On reconnaît ici les expressions des rigidités équivalentes de traction et de flexion introduites précédemment par les relations (5.33) et (5.34), ainsi que deux nouvelles quantités qui sont le moment statique équivalent, \widehat{EM}_Y , et la rigidité équivalente de cisaillement, \widehat{GS} .

 $- {\mathbf{f}}$ désigne le vecteur des efforts de volume et de surface défini par

$$\langle f \rangle = \langle f_X \ f_Z \ m \rangle$$
 (2.80)

avec

$$\begin{cases} f_X = \int_S f_{\mathcal{V}X} \, dS + \int_{\partial S} f_{SX}(X, Y(S), Z(S)) \, dS \\ f_Z = \int_S f_{\mathcal{V}Z} \, dS + \int_{\partial S} f_{SZ}(X, Y(S), Z(S)) \, dS \\ m = \int_S Z f_{\mathcal{V}X} \, dS + \int_{\partial S} Z(S) f_{SX}(X, Y(S), Z(S)) \, dS \end{cases}$$
(2.81)

 $- \{\mathbf{F}\}$ désigne le vecteur des conditions aux limites défini par

$$\langle F \rangle = \langle N_i \ T_i \ M_i \rangle$$
 (2.82)

tel qu'à l'extrémité $i = 1, 2 \ (X_i = L_i)$

$$\begin{cases} N_i = \delta_i N(L_i) \\ M_i = \delta_i M(L_i) \\ T_i = \delta_i T(L_i) \end{cases}$$
(2.83)

où δ_i prend les valeurs respectives, -1 au noeud 1 (i = 1) et 1 au noeud 2 (i = 2).

Si l'on pose maintenant Π_1 tel que :

$$\Pi_{1} = -\frac{1}{2} \int_{L_{1}}^{L_{2}} \langle \varsigma \rangle \left[\widehat{H} \right]^{-1} \{\varsigma\} dX$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{L_{1}}^{L_{2}} \frac{1}{c} \left[N^{2} \widehat{H}_{fz} - 2NM \widehat{H}_{mfz} + M^{2} \widehat{H}_{m} + \frac{T^{2}c}{\widehat{H}_{c}} \right] dX \qquad (2.84)$$

et Π_2 tel que:

$$\Pi_{2} = \int_{L_{1}}^{L_{2}} \langle \epsilon \rangle \{\varsigma\} dX$$

= $[uN + \theta_{Y}M + wT]_{L_{1}}^{L_{2}} + \int_{L_{1}}^{L_{2}} \langle u \rangle \{f\} dX$ (2.85)

alors:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \langle u \rangle \{F\}_{S_s}$$

$$= \Pi_{int} - \Pi_{ext}$$
(2.86)

où :

$$\Pi_{int} = \Pi_1 + \Pi_2 \tag{2.87}$$

$$\Pi_{ext} = -\langle u \rangle \{F\}_{S_s} \tag{2.88}$$

Par définition, $\mathcal{W}_{int} \triangleq \delta \Pi_{int}$ d'où nous allons extraire la nouvelle matrice de rigidité élémentaire. Afin d'appliquer le principe mixte/hybride sur l'élément e, on pose :

$$\langle \overline{u}_n \rangle = \langle u_1 \quad w_1 \quad \theta_{Y1} \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_{Y2} \quad \vdots \quad N_1 \quad M_1 \quad T_1 \rangle \tag{2.89}$$

Alors, le calcul de $\delta \Pi_{int}$ (annexe D) nous mène à l'équation suivante :

$$\delta \Pi_{int} = \langle \delta \overline{u}_n \rangle \left([\overline{k}] \{ \overline{u}_n \} - \{ \overline{f}_n \} \right)$$
(2.90)

avec:

– $[\overline{k}]$ matrice (9,9) définie par

$$[\overline{k}] = \begin{bmatrix} [0] & [A]^T \\ [A] & -[B] \end{bmatrix}$$
(2.91)

avec

$$[A] \triangleq \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & L \end{bmatrix}$$
(2.92)

$$[B] \triangleq \int_{L_1}^{L_2} [P]^T \left[\widehat{H}\right]^{-1} [P] dX \qquad (2.93)$$

où $[\widehat{H}]^{-1}$ est donnée par l'équation (5.78) et [P] par

$$[P] \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(2.94)

•

– $\{\overline{f}_n\}$ est le vecteur colonne défini par

$$\{\overline{f}_n\} \triangleq \left\{ \begin{array}{cccc} \{f_A\} &= & <0 & 0 & F_X(L) & F_Z(L) & FM(L) >^T \\ \{f_B\} &= -\int_{L_1}^{L_2} [P]^T [\widehat{H}]^{-1} & ^T dX \end{array} \right\}$$
(2.95)

avec

$$\begin{cases} F_X(X) = \int_{L_1}^X f_X \, dX \\ F_Z(X) = \int_{L_1}^X f_Z \, dX \\ FM(X) = \int_{L_1}^X F_Z(X) \, dX \end{cases} \text{ et en particulier } \begin{cases} F_X(L) = \int_{L_1}^{L_2} f_X \, dX \\ F_Z(L) = \int_{L_1}^{L_2} f_Z \, dX \\ FM(L) = \int_{L_1}^{L_2} F_Z(X) \, dX \end{cases}$$

$$(2.96)$$

Les variables N_1 , M_1 et T_1 sont des variables d'approximations locales que l'on élimine au niveau élémentaire par condensation statique [14]. Finalement, la matrice de rigidité élémentaire partielle de membrane/flexion se déduit de l'expression (5.91) de $[\overline{k}]$:

$$[k_{XZ}] = [A]^T [B] [A]$$
(2.97)

On remarque que cette formulation permet de prendre facilement en compte l'évolution des rigidités équivalentes sur la longueur de l'élément par l'intermédiaire de la matrice [B]. Cette matrice, définie à partir d'une intégrale sur l'intervalle $[L_1, L_2]$ peut être ramenée à l'intervalle [-1, 1] grâce au changement de variable (5.40) et ainsi être approximée par la méthode d'intégration de Gauss.

Bien entendu, la matrice de rigidité élémentaire partielle de membrane/flexion dans l'autre plan (XOY) conserve une expression semblable puisqu'elle est déterminée en suivant le même développement. On prend simplement soin de remplacer l'indice f_Z par f_Y . Notons que, dans la matrice de rigidité élémentaire complète (c'est-à-dire comportant les termes de rigidité relatifs à la traction, la flexion et la torsion), il ne faut pas oublier d'inclure le couplage des rotations autour des axes (OZ) et (OY) par l'intermédiaire de la rigidité équivalente $\hat{H}_{f_{YZ}}$ qui n'est plus nulle puisque (OX) n'est pas l'axe neutre :

$$\widehat{H}_{f_{YZ}} = \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} E_i \int_{S_i} YZ \, dS_i \tag{2.98}$$

La mise en évidence de ce terme est donnée en annexe E.

Nous venons ainsi d'établir la nouvelle matrice de rigidité élémentaire partielle sans faire appel aux fonctions d'interpolation nodales (*tableau 5.2*). Déterminons maintenant les expressions des autres matrices de rigidité élémentaires relatives aux deux autres couplages torsion/flexion et flexion/flexion.

2.4.4 Calcul de la matrice de rigidité élémentaire partielle relative au couplage torsion/flexion

Nous avons vu que la détermination de la matrice élémentaire de torsion, $[k_t]$, était basée sur la première formulation éléments finis, utilisant des fonctions d'interpolation nodales. Le

phénomène de couplage torsion/flexion peut être mis en évidence par l'application d'un effort tranchant dont la direction ne passe pas par le centre de torsion C (ou encore centre de cisaillement ou centre de flexion) de la section considérée; le lieu des centres de torsion est appelé axe de flexion ou axe élastique. Il se produit alors un effet de déversement de la poutre; elle fléchit tout en subissant de la torsion. Ce phénomène est typique des poutres tridimensionnnelles isotropes à parois minces telles que les profilés en "I", en "T", en "U" et en "L". Le couplage torsion/flexion va donc être introduit par l'examen de la cinématique d'un point q appartenant à une section quelconque d'une poutre épaisse. On démontre [17] en effet que le déplacement du point q de la section S est relié à celui du point C par les relations cinématiques (virtuelles et réelles) suivantes:

$$\begin{cases} \begin{array}{c} \text{Total} \\ u_q \\ v_q \\ w_q \end{array} \} = \begin{cases} \begin{array}{c} u_C \\ 0 \\ 0 \end{array} \} + \begin{cases} \begin{array}{c} \text{Flexion} (xEz) \\ (z-z_C)\theta_y \\ 0 \end{array} \} + \begin{cases} \begin{array}{c} \text{Flexion} (xEy) \\ -(y-y_C)\theta_z \\ 0 \end{array} \} + \begin{cases} \begin{array}{c} \omega\theta_{x,x} \\ -(z-z_C)\theta_x \\ (y-y_C)\theta_x \end{array} \} \quad (2.99) \end{cases}$$

où (y, z) et (y_C, z_C) représentent respectivement, les coordonnées de q et de C dans le repère principal d'inertie $(R_{Pi}, figure 5.28), \omega$ est la fonction de gauchissement de la section et θ_i la rotation de la section (plan yEz) autour des axes i = (Cx), (Ey), (Ez).



FIG. 2.28 Cinématique d'un point q de la section S

La relation (5.99) peut encore s'écrire, en remarquant que $u_C = u_O + z_C \theta_y - y_C \theta_z$:

$$\begin{cases} u_q \\ v_q \\ w_q \end{cases} = \begin{cases} u_O \\ 0 \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} z\theta_y \\ 0 \\ w_C \end{cases} + \begin{cases} -y\theta_z \\ v_C \\ 0 \end{cases} + \begin{cases} \omega\theta_{x,x} \\ -(z-z_C)\theta_x \\ (y-y_C)\theta_x \end{cases}$$
 (2.100)

Pour redéfinir toutes les variables nodales au point O, centre du repère de section R_{Se} , la relation (5.100) est simplifiée en suivant l'hypothèse que la déformation due au gauchissement $\omega \theta_{x,x}$, de la section S au point q est faible devant les autres déformations (nous conservons

ainsi le modèle de Timoshenko/Mindlin des sections planes, hypothèse H3). Ainsi, sous forme matricielle, nous avons :

$$\{u_n\} = [T_C] \{u_n\}_{loc} \tag{2.101}$$

avec:

 $- \{u_n\}_{loc}$ vecteur des déplacements nodaux dans le repère de section (O XYZ) tel que⁹

$$\langle u_n \rangle_{loc} = \langle u_{O1} \quad v_{O1} \quad w_{O1} \quad \theta_{X1} \quad \theta_{Y1} \quad \theta_{Z1} \quad u_{O2} \quad v_{O2} \quad w_{O2} \quad \theta_{X2} \quad \theta_{Y2} \quad \theta_{Z2} \rangle$$

$$(2.102)$$

 $-[T_C]$ matrice de transformation défini par

$$[T_C] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix}, \quad [t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(2.103)

 $- \langle u_n \rangle$ vecteur des déplacements nodaux dans le repère d'inertie principal (E xyz) tel que

$$\langle u_n \rangle = \langle u_{O1} \quad v_{C1} \quad w_{C1} \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{z1} \quad u_{O2} \quad v_{C2} \quad w_{C2} \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{z2} \rangle$$
(2.104)

La matrice de rigidité élémentaire [k], résultant de l'assemblage des matrices élémentaires partielles $[k_{XZ}]$, $[k_{XY}]$ (équation (5.97)) et $[k_t]$ (équation (5.45)), a maintenant pour expression :

$$[k]_{loc} = [T_C]^T [k] [T_C]$$
(2.105)

où $[k]_{loc}$ est la matrice de rigidité élémentaire locale relative aux degrés de liberté en traction-compression, flexion et torsion. Pour terminer ce paragraphe concernant la prise en compte des couplages, il ne nous reste plus qu'à considérer le couplage intervenant lorsque les efforts tranchants ont une ligne d'action non parallèle à l'un des deux axes principaux d'inertie; il apparaît alors une flexion combinée, que l'on désigne sous le terme de couplage flexion/flexion.

^{9.} Les axes des repères R_{Se} et R_{Pi} étant parallèles $\theta_{Xi} = \theta_{xi}$, $\theta_{Yi} = \theta_{yi}$ et $\theta_{Zi} = \theta_{zi}$ (i = 1, 2).

2.4.5 Calcul de la matrice de rigidité élémentaire totale

Il reste maintenant à intégrer dans notre formulation, en même temps que le couplage flexion/flexion, le fait que la ligne de noeud discrétisant la pale (figure 5.29) n'est pas rectiligne en raison :

- de la géométrie même de la pale, puisque sa forme en plan n'est pas nécessairement rectiligne,
- de la différenciation des centres. Par commodité, les noeuds seront souvent situés au centre élastique de chaque section.

Il faut donc, au moment de l'assemblage de la matrice de rigidité [K] du système, exprimer chaque matrice élémentaire (jusqu'alors calculée dans le repère de section R_{Se} , paragraphe 5.4.4, et dont les axes étaient choisis telles que les axes (OY) et (OZ) soient parallèles à (Ey) et (Ez) respectivement) dans le repère de pale R_{Pl} afin de déterminer les fonctions de forme modales dans ce même repère (cf. § 5.6). Les déplacements nodaux d'un élément de poutre dans le repère principal d'inertie R_{Pi} vont donc être exprimés dans le repère de pale R_{Pl} par l'intermédiaire de la matrice de changement de base [T].



FIG. 2.29 Ligne de noeuds d'une pale (Tjæreborg 2 MW)

La matrice de rigidité élémentaire, $[k]_{glob}$, dans le repère R_{Pl} , a alors pour expression :

$$[k]_{glob} = [T]^{T} [k]_{loc} [T]$$
(2.106)

avec [T], matrice de changement de base définie par :

$$[T]^{T} = \begin{bmatrix} [Q_{1}] & & \\ & [Q_{1}] & \\ & & [Q_{2}] \\ & & & [Q_{2}] \end{bmatrix}$$
(2.107)

et:

$$[Q_i] = [Q_0][q_i], \text{ pour le noeud } i \ (i = 1, 2) \tag{2.108}$$

où $[Q_O]$ est la matrice formée par les composantes des vecteurs de la base orthonormée ($\underline{t} \ \underline{j} \ \underline{k}$) attachée à l'élément e exprimées dans le repère de pale R_{Pl} et $[q_i]$ la matrice de transformation (rotation) du repère de base $\{\underline{t} \ \underline{j'} \ \underline{k'}\}$ au repère de base $(\underline{t} \ \underline{j} \ \underline{k})$:

$$[Q_{O}] = \begin{bmatrix} a & \frac{-ab}{\sqrt{a^{2} + c^{2}}} & \frac{-c}{\sqrt{a^{2} + c^{2}}} \\ b & \sqrt{a^{2} + c^{2}} & 0 \\ c & \frac{-bc}{\sqrt{a^{2} + c^{2}}} & \frac{a}{\sqrt{a^{2} + c^{2}}} \end{bmatrix}, \quad [q_{i}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{i} & -\sin\varphi_{i} \\ 0 & \sin\varphi_{i} & \cos\varphi_{i} \end{bmatrix}$$
(2.109)

avec:

- $\varphi_i = \alpha_i + \varphi_{Se}(S)$ l'angle entre les repères R_{Se} et R_{Pi} , $\varphi_{Se}(S)$ représentant l'angle de vrillage de la section S,
- (a, b, c) les coordonnées du vecteur directeur <u>t</u> de l'élément de poutre défini par la figure 5.30

$$\underline{t} = \frac{1}{L} \langle (X_2 - X_1) \ (Y_2 - Y_1) \ (Z_2 - Z_1) \rangle$$
(2.110)

 (X_1, Y_1, Z_1) et (X_2, Y_2, Z_2) étant respectivement, les coordonnées du noeud 1 et du noeud 2 de l'élément *e* dans le repère de pale R_{pl} .



FIG. 2.30 Élément de poutre dans le repère de pale R_{Pl}

Notons que, même pour une pale possédant un axe longitudinal rectiligne l'anisotropie des matériaux pourra induire que l'axe neutre, pris comme ligne de noeud, puisse être courbe. Cette dernière transformation est donc une nécessité si l'on désire modéliser correctement la pale. La précision de cette approximation dépend cependant du nombre d'éléments car ceux-ci sont à interpolation linéaire, donc peu adaptés dans le cas de fortes courbures. Bien entendu nous pourrions développer, au prix d'une complexité beaucoup plus importante, un modèle de poutre courbe mais, comme les pales possèdent des courbures de leur axe neutre généralement faibles sur la majeur partie de leur envergure, une discrétisation avec
des éléments de type poutre rectiligne semble suffisante. On peut néanmoins remarquer que, dans le but de réduire le niveau de bruit émis par les pales, certaines études [21] portent sur une modification de leur forme en extrémité (forme en "sabre", *figure 5.31*), pouvant présenter dans ce cas des courbures assez importantes. Il suffit alors de raffiner le maillage en extrémité.



FIG. 2.31 Diverses formes en plan de l'extrémité d'une pale

Pour finir, la modélisation éléments finis des pales va s'achever par le calcul de la matrice de masse [M] du système, dans lequel nous allons utiliser les transformations précédentes.

2.4.6 Calcul de la matrice de masse

La modélisation du comportement dynamique des pales est basée sur l'utilisation de fonctions de forme modales $\underline{\phi}_l$ intervenant dans la mise en équation du système éolien (cf. § 4.4, *partie II*). Ces fonctions de forme sont déterminées à partir des déformées modales obtenues par éléments finis. La matrice de rigidité [K] du système a été calculée au cours des paragraphes précédents et il ne nous reste donc plus qu'à déterminer l'expression de la matrice de masse élémentaire. Trois types de formulation existent dans ce domaine :

- la matrice de masse concentrée. La masse de l'élément de poutre est concentrée par deux masses ponctuelles M_1 et M_2 aux noeuds, ce qui mène à une matrice élémentaire diagonale non complète,
- la matrice de masse cohérente. Les fonctions d'interpolation nodales (*tableau 5.2*) sont celles utilisées pour établir [k] (cf. § 5.3.2). La matrice obtenue est définie positive, assurant l'existence de solutions à l'équation (5.127) appartenant à \mathbb{R}^{+*} ,
- la matrice de masse linéaire pour laquelle on utilise les mêmes fonctions d'interpolation linéaires $(N_i^t, tableau 5.2)$ pour tous les déplacements (translations et rotations), menant à une matrice creuse.

Nous avons retenu cette dernière formulation, car la prise en compte du couplage membrane/flexion dans la matrice de masse ne peut être conservée que si la dimension des bases polynômiales utilisées pour approximer les différents déplacements sont égales. En effet, dans le cas de la flexion (XOZ), par exemple, le couplage membrane/flexion introduit le déplacement de membrane u ainsi que ceux dûs à la flexion w et θ_Y . Or, lors de la

formulation classique ces déplacements sont donnés par $u = N_1^t u_1 + N_2^t u_2$ d'une part, et $w = N_1^{f_z} w_1 + N_2^{f_z} \theta_{Y1} + N_3^{f_z} w_2 + \theta_{Y2} N_4^{f_z}$ ainsi que $\theta_y = w_x d$ 'autre part. Par conséquent, il y a incompatibilité entre les dimensions des bases dans lesquelles sont exprimés u et θ_y car, si l'on conserve la cinématique d'une section de poutre épaisse suivant la relation (5.73), nous sommes incapables de tenir compte du couplage membrane/flexion. Précisons ceci par l'examen de l'énergie associée aux forces d'inertie (relation (5.10)):

$$\mathcal{W}_{ext|_{inert}} = -\int_{\mathcal{V}} \langle u^* \rangle \rho\{\ddot{u}\} d\mathcal{V}$$
(2.111)

Or, nous avons établi que la cinématique virtuelle d'une section de poutre épaisse en flexion dans le plan (XOZ) était définie par la relation (5.73). Par conséquent :

$$\mathcal{W}_{ext|_{inert}} = -\int_{\mathcal{V}} [(u^* + Z\theta_Y^*)\rho(\ddot{u} + Z\ddot{\theta}_Y) + w^*\rho\ddot{w}] d\mathcal{V}$$

$$= -\int_{L_1}^{L_2} [u^*\widehat{m}_l\ddot{u} + membrane \qquad (2.112)$$
$$u^*\widehat{m}_{mf_z}\ddot{\theta}_Y + \theta_Y^*\widehat{m}_{mf_z}\ddot{u} + membrane/flexion$$
$$\theta_Y^*\widehat{m}_{f_z}\ddot{\theta}_Y + w^*\widehat{m}_l\ddot{w}] dX$$
flexion

avec:

$$\begin{cases}
\widehat{m}_{l} = \sum_{i=1}^{r} \rho_{i} \int_{S_{i}} dS_{i} \\
\widehat{m}_{mf_{z}} = \sum_{i=1}^{r} \rho_{i} \int_{S_{i}} z \, dS_{i} \\
\widehat{m}_{f_{z}} = \sum_{i=1}^{r} \rho_{i} \int_{S_{i}} z^{2} \, dS_{i}
\end{cases}$$
(2.113)

Il apparaît donc clairement que les termes traduisant le couplage membrane/flexion dans l'équation (5.112) ne peuvent être mis sous forme matricielle que si les déplacements uet θ_Y sont exprimés dans une base polynômiale de même dimension. Par suite, nous retiendrons les fonctions d'interpolation nodales N_1^t et N_2^t (tableau 5.2) pour exprimer l'ensemble des déplacements virtuels et réels (translations et rotations) et conserver ainsi les termes de couplage.

La matrice de masse linéaire élémentaire est le résultat de l'assemblage des matrices de masse élémentaires partielles afférentes aux différents degrés de liberté. Puisque nous utilisons les mêmes polynômes d'interpolation pour l'ensemble de ceux-ci, alors un élément de la matrice de masse élémentaire peut seulement prendre l'une des 3 formes suivantes (après avoir effectué le changement de variable donné par la relation (5.40)):

$$m_{11}(\widehat{m}) = \frac{L}{2} \int_{-1}^{1} \widehat{m} N_1^{t^2}(\xi) d\xi \qquad (2.114)$$

$$m_{12}(\widehat{m}) = \frac{L}{2} \int_{-1}^{1} \widehat{m} N_1^t(\xi) N_2^t(\xi) d\xi \qquad (2.115)$$

$$m_{22}(\widehat{m}) = \frac{L}{2} \int_{-1}^{1} \widehat{m} N_2^{t^2}(\xi) d\xi \qquad (2.116)$$

où \hat{m} est la masse linéique équivalente dont l'expression est tirée d'une de celles définies par la relation (5.113), en fonction des déplacements à laquelle elle se rapporte (membrane, couplage membrane/flexion, flexion ou torsion). Soit, après intégration numérique de Gauss :

$$\begin{cases}
m_{11}(\widehat{m}) \approx \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{r} w_{i} \widehat{m}_{l}(\xi_{i}) \left[\frac{1-\xi_{i}}{2}\right]^{2} \\
m_{12}(\widehat{m}) \approx \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{r} w_{i} \widehat{m}_{l}(\xi_{i}) \frac{1-\xi_{i}^{2}}{4} \\
m_{22}(\widehat{m}) \approx \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{r} w_{i} \widehat{m}_{l}(\xi_{i}) \left[\frac{1+\xi_{i}}{2}\right]^{2}
\end{cases}$$
(2.117)

Nous pouvons maintenant donner les expressions des matrices élémentaires partielles :

- en membrane/flexion dans le plan (XOZ)

$$[m_{mf_z}] = \begin{bmatrix} m_{11}(\widehat{m}_l) & 0 & m_{11}(\widehat{m}_{mf_z}) & m_{12}(\widehat{m}_l) & 0 & m_{12}(\widehat{m}_{mf_z}) \\ m_{11}(\widehat{m}_l) & 0 & 0 & m_{12}(\widehat{m}_l) & 0 \\ & & m_{11}(\widehat{m}_{f_z}) & m_{12}(\widehat{m}_{mf_z}) & 0 & m_{12}(\widehat{m}_{f_z}) \\ & & & & m_{22}(\widehat{m}_l) & 0 & m_{22}(\widehat{m}_{mf_z}) \\ & & & & & & m_{22}(\widehat{m}_l) & 0 \\ & & & & & & & m_{22}(\widehat{m}_l) & 0 \\ & & & & & & & & m_{22}(\widehat{m}_l) & 0 \\ & & & & & & & & m_{22}(\widehat{m}_{f_z}) \end{bmatrix}$$

$$(2.118)$$

avec comme vecteur nodal associé

$$\langle u_n \rangle = \langle u_{O1} \ w_{C1} \ \theta_{Y1} \ u_{O2} \ w_{C2} \ \theta_{Y2} \rangle$$
 (2.119)

- en membrane/flexion dans le plan (XOY). Le traitement est analogue à celui de la matrice de masse élémentaire partielle en membrane/flexion dans le plan (XOZ), il suffit de remplacer l'index f_z par f_y et de prendre comme vecteur nodal associé

$$\langle u_n \rangle = \langle u_{O1} \ v_{C1} \ \theta_{Z1} \ u_{O2} \ v_{C2} \ \theta_{Z2} \rangle$$
 (2.120)

- en torsion

$$[m_t] = \begin{bmatrix} m_{11}(\widehat{\rho I}_p) & m_{12}(\widehat{\rho I}_p) \\ \text{Sym.} & m_{22}(\widehat{\rho I}_p) \end{bmatrix}$$
(2.121)

où ρI_p est l'inertie polaire équivalente de torsion définie par

$$\widehat{\rho I}_{p} = \int_{S_{i}} \rho \left[(Z - Z_{C})^{2} + (Y - Y_{C})^{2} \right] dS$$
(2.122)

et le vecteur nodal associé vaut

$$\langle u_n \rangle = \langle \theta_{X1} \ \theta_{X2} \rangle$$
 (2.123)

La matrice de masse élémentaire [m], dans le repère de section R_{Se} , est le résultat de l'assemblage des matrices élémentaires partielles $[m_{mf_z}]$, $[m_{mf_y}]$ et $[m_t]$. Pour se ramener au repère de pale $(O_{Pl} XYZ)$, on utilise les matrices $[T_C]$ et [T] définies par les équations (5.103) et (5.107) afin d'obtenir la matrice de masse élémentaire complète $[m]_{glob}$ telle que

$$[m]_{glob} = [T]^T [m]_{loc} [T]$$
(2.124)

avec:

$$[m]_{loc} = [T_C]^T [m] [T_C]$$
(2.125)

2.4.7 Synthèse relative à la méthode de calcul des différentes matrices

Les tableaux 5.4 et tableaux 5.5 présentent les différentes étapes de calcul de la matrice de rigidité totale [K] et de la matrice de masse totale [M]. Les tableaux 5.6, 5.7 et 5.8 donnent la décomposition des matrices élémentaires partielles, résultant des différents couplages établis dans ce chapitre.

2.5 Calcul des modes et vecteurs propres de vibration

Les algorithmes de recherche des valeurs propres λ_i et des vecteurs propres associés $\{x^i\}$ les plus employés sont :

- la méthode de l'itération inverse,

Matrice (Réf.)	Vecteur nodal associé	Commentaires
$[k_m]$ (5.24)	$< u_1 u_2 >$	Formulation
$[k_{f_z}]$ (5.28)	$< w_1 heta_{y1} w_2 heta_{y2} >$	classique
$[k_{f_y}]$ (5.29)	$< v_1 \hspace{0.1in} heta_{z1} \hspace{0.1in} v_2 \hspace{0.1in} heta_{z2} >$	§ 5.3.2
$[k_t]$ (5.32)	$< heta_{x1}$ $ heta_{x2}>$	
$[k_{XZ}]$ (5.97)	$< u_1 w_1 \overline{ heta}_{Y1} u_2 w_2 \overline{ heta}_{Y2} > $	Couplage membrane/flexion
$[k_{XY}]$	$< u_1 v_1 heta_{Z1} u_2 v_2 heta_{Z2} > \ \ ^a$	$[k_{XY-Z}] = [A]^T [B] [A]$
[k]	$< u_{O1} v_{C1} w_{C1} \theta_{x1} \theta_{y1} \theta_{z1}$	Assemblage élémentaire b
	$u_{O2} v_{C2} w_{C2} heta_{x2} heta_{y2} heta_{z2} >$	$[k_{XZ}]_e + [k_{XY}]_e + [k_t]_e$
$[k]_{loc} (5.105)$	$< u_{O1} v_{O1} w_{O1} \theta_{X1} \theta_{Y1} \theta_{Z1}$	Couplage torsion/flexion
	$u_{O2} v_{O2} w_{O2} \theta_{X2} \theta_{Y2} \theta_{Z2} >$	$[k]_{loc} = [T_C]^T [k] [T_C]$
$[k]_{glob} (5.106)$	$< U_{O1} V_{O1} W_{O1} \theta_{X1} \theta_{Y1} \theta_{Z1}$	Couplage flexion/flexion et
	$U_{O2} V_{O2} W_{O2} \theta_{X2} \theta_{Y2} \theta_{Z2} >$	ligne de noeud non rectiligne
		$[k]_{glob} = [T]^T [k]_{loc} [T]$
[K]	$\sum_{e=1}^{N_e} < U_{O1} V_{O1} W_{O1} \theta_{X1} \theta_{Y1} \theta_{Z1}$	Assemblage final
	$U_{O2} V_{O2} W_{O2} \theta_{X2} \theta_{Y2} \theta_{Z2} >_e$	$[K] = \sum_{e=1}^{N_e} [k]^e_{glob}$

Тав.	2.4	Synthèse	des	différentes	matrices	de	rigidité
------	------------	----------	-----	-------------	----------	----	----------

 ${}^{a}\theta_{Yi} = \theta_{yi}$ car les axes (OY) et (Ez) sont parallèles, de même que $\theta_{Zi} = \theta_{zi}$ b le signe '+' symbolise l'opération d'assemblage

Тав.	2.5	Synthèse	des	différentes	matrices	de	masse
------	------------	----------	-----	-------------	----------	----	-------

Matrice (Réf.)	Vecteur nodal associé	Commentaires
$\left[m_{mf_z}\right] (5.118)$	$< u_{O1} \ w_{C1} \ \theta_{Y1} \ u_{O2} \ w_{C2} \ \theta_{Y2} >$	Matrice de masse linéaire
$[m_{mf_y}]$	$< u_{O1} v_{C1} heta_{Z1} u_{O2} v_{C2} heta_{Z2} >$	conservant le couplage
$[m_t]$ (5.121)	$< heta_{X1}$ $ heta_{X2}>$	membrane/flexion § $5.4.6$
[<i>m</i>]	$< u_{O1} v_{C1} w_{C1} \theta_{X1} \theta_{Y1} \theta_{Z1}$	Assemblage élémentaire ^a
	$u_{O2} \;\; v_{C2} \;\; w_{C2} \;\; heta_{X2} \;\; heta_{Y2} \;\; heta_{Z2} >$	$[m_{mfy}]_e + [m_{mfz}]_e + [m_t]_e$
$[m]_{loc}$ (5.105)	$< u_{O1} v_{O1} w_{O1} \theta_{X1} \theta_{Y1} \theta_{Z1}$	Couplage torsion/flexion
	$u_{O2} \ v_{O2} \ w_{O2} \ heta_{X2} \ heta_{Y2} \ heta_{Z2} >$	$[m]_{loc} = [T_C]^T [m] [T_C]$
$[m]_{glob}$ (5.106)	$< U_{O1}$ V_{O1} W_{O1} θ_{X1} θ_{Y1} θ_{Z1}	Couplage flexion/flexion et
	$U_{O2} V_{O2} W_{O2} \theta_{X2} \theta_{Y2} \theta_{Z2} >$	ligne de noeud non rectiligne
		$[m]_{glob} = [T]^T [m]_{loc} [T]$
[<i>M</i>]	$\sum_{i=1}^{N_e} < U_{O1} V_{O1} W_{O1} \theta_{X1} \theta_{Y1} \theta_{Z1}$	Assemblage final
	$U_{O2} V_{O2} W_{O2} \theta_{X2} \theta_{Y2} \theta_{Z2} >_{e}$	$[M] = \sum_{e=1}^{N_e} [m]^e_{glob}$

^ale signe '+' symbolise l'opération d'assemblage

Matrice	Commentaires
$[A] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & L \end{bmatrix}$	Sous matrice (5.92) découlant de la condensation statique de $[\overline{k}]$ (5.91)
$[B] = \int_{L_1}^{L_2} [P]^T [\widehat{H}]^{-1} [P] dX$	Sous matrice (5.93) découlant de la condensation statique de $[\overline{k}]$
$[P] = \left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$	Matrice de position de la section (5.94)
$[\hat{H}] = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} \hat{H}_{f_z} & -\hat{H}_{mf_z} & 0\\ & \hat{H}_m & 0\\ \text{Sym.} & & \frac{c}{\hat{H}_c} \end{bmatrix}$	Matrice de rigidité équivalente (5.77)

TAB. 2.6 Décomposition de la matrice de rigidité élémentaire partielle $[k_{XZ}] = [A]^T [B] [A]$

TAB. 2.7 Décomposition de la matrice de transformation $[T_{c}]$

Matrice	Commentaires
$[T_C] = \left[\begin{array}{cc} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{array} \right]$	Matrice (5.103) de changement de coordonnées
$[t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Sous matrice (5.103) de $[T_C]$. $(y_C, -z_C)$ coordonnées de C dans le repère R_{Pi}

Matrice	Commentaires				
$[T]^{T} = \begin{bmatrix} [Q_{1}] & & \\ & [Q_{1}] & \\ & & [Q_{2}] \\ & & & [Q_{2}] \end{bmatrix}$	Matrice de passage				
$[Q_i] = [Q_O][q_i]$	Matrice de changement de base au noeud i				
$[Q_O] = \begin{bmatrix} a & \frac{-ab}{\sqrt{a^2 + c^2}} & \frac{-c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \\ b & \sqrt{a^2 + c^2} & 0 \\ c & \frac{-bc}{\sqrt{a^2 + c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \end{bmatrix}$	Matrice des coordonnées de la base locale dans le repère global (ligne de noeud non rectiligne)				
$[q_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i\\ 0 & \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{bmatrix}$	Matrice de rotation du repère d'inertie au repère local (couplage flexion/flexion)				

TAB.	2.8	Décomposition de	la	matrice	de	passage
		[T]				

- la méthode de Jacobi,
- la méthode de Ritz,
- la méthode du sous-espace.

Pour des systèmes de grande dimension (nombre de degrés de liberté important), la méthode du sous-espace est très largement répandue et par conséquent sera retenue pour notre code. Elle consiste à appliquer de façon itérative la méthode de Ritz en améliorant les vecteurs de Ritz par itération inverse [22]. La méthode du sous-espace se décompose principalement en quatre opérations:

- 1. Le choix de NM_k vecteurs propres initiaux.
- 2. L'exécution d'une itération inverse pour calculer simultanément les NM_k vecteurs de Ritz $\{q_i\}$ en résolvant :

$$[K] \{q_i\} = [M] \{x^i\} \quad i = 1, \dots, NM_k$$

[K] [Q] = [M] [V] (2.126)

3. L'application de la méthode de Ritz pour rechercher les vecteurs propres dans le sousespace de Ritz :

$$\left([\overline{K}] - \overline{\lambda}_i[\overline{M}]\right) \{A_i\} = 0 \quad (\text{Jacobi}) \tag{2.127}$$

où:

$$\begin{bmatrix} \overline{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \overline{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix}$$
$$\{x^i\} = \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix} \{A_i\} \qquad (2.128)$$

4. L'utilisation d'un test de convergence sur $\overline{\lambda}_i$ rendant nécessaire la répétition des opérations 2, 3, 4 si celui-ci n'est pas satisfait.

On démontre cependant que, lorsque les vecteurs de départ sont correctement choisis, les matrices $[\overline{K}]$ et $[\overline{M}]$ tendent vers des matrices diagonales, ce qui a pour effet d'accélérer la convergence, augmentant ainsi l'efficacité de la méthode de Jacobi.

La méthode converge effectivement vers les NM_k plus petites valeurs propres à condition qu'aucun vecteur propre de départ ne soit orthogonal aux vecteurs propres recherchés. Les NM_k valeurs propres trouvées sont bien les NM_k plus petites valeurs d'après la propriété des suites de Sturm (séparation des valeurs propres). Pour cela, il faut décomposer la matrice $[K] - (\lambda_{NM_k} + \epsilon)[M]$ et vérifier qu'il existe NM_k pivots négatifs dans cette décomposition (ϵ est de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-3}). Remarquons que l'algorithme est nettement amélioré si, au lieu de calculer NM_k vecteurs propres, on utilise un sous-espace de dimension p supérieure à NM_k , en ne vérifiant que la convergence des NM_k plus petites valeurs propres. Bathe [14] propose d'utiliser $p = Min(NM_k + 8, 2NM_k)$.

2.6 Détermination des vecteurs de déplacements modaux

La formulation des équations de la dynamique exposée dans le *chapitre* 4 approxime les déformations des corps flexibles à l'aide de NM_k vecteurs de déplacements modaux ϕ_l , l = 1 à NM_k . Cette approximation est retenue de manière à appliquer la méthode de superposition des déplacements de corps rigide et des déformations élastiques dans un repère local lié au corps considéré (cf. 4.3.2). Par conséquent, nous présentons dans cette section deux méthodes pour déterminer ces fonctions de forme modales. La première est basée sur l'emploi des fonctions de forme nodales alors que la seconde utilise des polynômes. Cette dernière technique est recommandée [23] pour le cas des poutres de section complexe, cadrant ainsi parfaitement au cas des pales. En effet, les vecteurs propres sont déterminés de façon discrète grâce à la formulation éléments finis et ils sont ensuite convertis en des fonctions continues par l'intermédiaire de fonctions de formes exprimées par des polynômes. La première technique est plus réservée au cas des poutres dans lesquelles on négligerait les contraintes de cisaillement (hypothèse des poutres minces).

2.6.1 Expression à l'aide des fonctions d'interpolation nodales

Pour exprimer les fonctions $\underline{\phi}_i$ en fonction des fonctions d'interpolation nodales N_i^j , il faut être en mesure d'utiliser les relations d'approximation nodales de type $u = \langle N_i^j \rangle \{u_i\}$.

Toutefois, ceci implique que la ligne de noeuds (centres des repères R_{Se}) doit être confondue avec l'axe élastique de la pale afin de ne pas introduire de couplage membrane/flexion. En effet, nous avons vu au *paragraphe 5.4.3* que ce type de couplage ne peut pas être traité grâce aux formulations éléments finis classiques utilisant les N_i^j (cf. § 5.3.1).

Le vecteur \underline{u} s'exprime dans les différentes repères par :

$$\underline{u} = u\underline{i} + v\underline{j} + w\underline{k} \tag{2.129}$$

$$= U\underline{I} + V\underline{J} + W\underline{K} \tag{2.130}$$

La relation (5.130) est équivalente à (4.8), partie II. Nous souhaitons exprimer les composantes U, V et W à l'aide des fonctions d'interpolation nodales N_i^j (tableau 5.2) et des coordonnées modales $\eta_l, l = 1$ à NM_k . L'approximation par superposition modale permet d'exprimer les déplacements nodaux de la pale en fonction des NM_k coordonnées modales η_l :

$$\langle U_n \rangle = [V] \{\eta\}$$
 (2.131)

avec:

- $\langle U_n \rangle$ vecteur des déplacements nodaux dans le repère de pale $(O_{Pl} XYZ)$,
- [V] matrice modale dont la $l^{\text{ème}}$ colonne est composée des coordonnées du vecteur propre associé au $l^{\text{ème}}$ mode de vibration

$$[V] = [\{x^1\} \cdots \{x^l\} \cdots \{x^{NM_k}\}]$$
(2.132)

 \mathbf{et}

$$\{x^l\}^T = < x_1^l \cdots x_{N_{ddl}}^l > \tag{2.133}$$

où N_{ddl} est le nombre total de degrés de liberté de la poutre,

- $\{\eta\}$ le vecteur colonne des NM_k coordonnées modales.

Par conséquent, pour le degré de liberté $n_{ddl} \in [1, N_{ddl}]$, que l'on note ici $U_{n_{ddl}}$:

$$U_{n_{ddl}} = \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{n_{ddl}}^{l} \eta_{l}$$
(2.134)

Numérotons de la manière suivante les degrés de liberté des noeuds 1 et 2 de l'élément e:

$$\langle U_n \rangle = \langle \cdots : U_1 \ V_1 \ W_1 \ \theta_{X1} \ \theta_{Y1} \ \theta_{Z1} \ : U_2 \ V_2 \ W_2 \ \theta_{X2} \ \theta_{Y2} \ \theta_{Z2} \ : \cdots >$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ : \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12$$

$$(2.135)$$

On peut alors dresser le tableau 5.9 qui résume les relations entre les degrés de liberté associés à l'élément e et les coordonnées modales η_l .

Traction	Flexion $(XO_{Pl}Y)$	Flexion $(XO_{Pl}Z)$	Torsion
NMk	NMk	NMk	NM _k
$U_1 = \sum x_1^l \eta_l$	$V_1=\sum x_2^l\eta_l$	$W_1 = \sum x_3^l \eta_l$	$ heta_{X1}=\sum x_4^l\eta_l$
$l=1 \\ NM_k$	$l=1 \\ NM_k$	$l=1 \\ NM_k$	l=1 NM_k
$U_2 = \sum x_7^l \eta_l$	$V_2 = \sum x_8^l \eta_l$	$W_2 = \sum x_9^l \eta_l$	$\theta_{X2} = \sum x_{10}^l \eta_l$
<i>l</i> =1	$l=1 \\ NM_k$	$l=1 \\ NM_k$	l=1
	$ heta_{Y1} = \sum x_5^l \eta_l$	$ heta_{Z1}=\sumx_6^l\eta_l$	
	$l=1 \\ NM_k$	$l=1 \\ NM_k$	
	$ heta_{Y2}=\sum x_{11}^l\eta_l$	$ heta_{Z2} = \sum x_{12}^l \eta_l$	
	l=1	l=1	

TAB. 2.9 Relations entre degrés de liberté et coordonnées modales

Soit [Q], la matrice de transformation (rotation) du repère local (O xyz) au repère de pale ($O_{Pl} XYZ$) définie de façon analogue à (5.108) en remplaçant simplement φ_i par φ (figure 5.30).

Alors:

$$\{U\} = [Q]\{u\} \tag{2.136}$$

où $\{U\}$ est le vecteur colonne des coordonnées de \underline{u} dans $(O_{Pl} XYZ)$, c'est-à-dire $< U \quad V \quad W >^T$ et $\{u\}$ le vecteur colonne des coordonnées de \underline{u} dans $(O \ xyz)$, $< u \quad v \quad w >^T$. La relation (5.130) s'exprime alors sous forme matricielle par:

$$\underline{u} = \langle b \rangle [Q]\{u\} \tag{2.137}$$

où < b > est défini par :

$$\langle b \rangle \triangleq \langle \underline{I} \ \underline{J} \ \underline{K} \rangle$$
 (2.138)

Examinons maintenant la composante U, suivant \underline{I} , du vecteur position \underline{u} . D'après (5.137):

$$U = uq_{11} + vq_{12} + wq_{13} (2.139)$$

$$= \langle N_i^t \rangle \{u_i\} q_{11} + \langle N_i^{fy} \rangle \{v_i\} q_{12} + \langle N_i^{fz} \rangle \{w_i\} q_{13}$$
(2.140)

Posons:

$$I_1 = \langle N_i^t \rangle \{u_i\} q_{11}$$
(2.141)

$$I_2 = \langle N_i^{f_y} \rangle \{v_i\} q_{12} + \langle N_i^{f_z} \rangle \{w_i\} q_{13}$$
(2.142)

où les N_i^j , u_i , v_i et w_i sont définis dans le *tableau 5.2* et les q_{ij} les éléments de la matrice [Q]. I_1 peut encore s'écrire à l'aide des relations (5.134) et (5.136):

$$I_{1} = (N_{1}^{t} < q_{11} \quad q_{21} \quad q_{31} > \left\{ \begin{array}{c} \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{1}^{l} \eta_{l} \\ \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{2}^{l} \eta_{l} \\ \sum_{l=1}^{l=1} x_{3}^{l} \eta_{l} \end{array} \right\}_{e} + N_{2}^{t} < q_{11} \quad q_{21} \quad q_{31} > \left\{ \begin{array}{c} \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{7}^{l} \eta_{l} \\ \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{8}^{l} \eta_{l} \\ \sum_{l=1}^{l=1} x_{3}^{l} \eta_{l} \end{array} \right\}_{e} \right\} (q_{11} \quad q_{21} \quad q_{31} > \left\{ \begin{array}{c} \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{7}^{l} \eta_{l} \\ \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{8}^{l} \eta_{l} \\ \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{9}^{l} \eta_{l} \end{array} \right\} (q_{11} \quad q_{22} \quad q_{33} > \left\{ \begin{array}{c} \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{8}^{l} \eta_{l} \\ \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{9}^{l} \eta_{l} \end{array} \right\} (q_{11} \quad q_{21} \quad q_{33} > \left\{ \begin{array}{c} \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{8}^{l} \eta_{l} \\ \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{9}^{l} \eta_{l} \end{array} \right\} (q_{11} \quad q_{22} \quad q_{23} > \left\{ \begin{array}{c} \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{8}^{l} \eta_{l} \\ \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{9}^{l} \eta_{l} \end{array} \right\} (q_{11} \quad q_{23} \quad q_{13} > \left\{ \begin{array}{c} \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{8}^{l} \eta_{l} \\ \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{9}^{l} \eta_{l} \end{array} \right\} (q_{11} \quad q_{23} \quad q_{13} > \left\{ \begin{array}{c} \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{8}^{l} \eta_{l} \\ \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{9}^{l} \eta_{l} \end{array} \right\} (q_{11} \quad q_{23} \quad q_{13} > \left\{ \begin{array}{c} \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{8}^{l} \eta_{l} \\ \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{9}^{l} \eta_{l} \end{array} \right\} (q_{11} \quad q_{12} \quad q_{13} > \left\{ \begin{array}{c} \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{8}^{l} \eta_{l} \\ \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{9}^{l} \eta_{l} \end{array} \right\} \right\} (q_{11} \quad q_{12} \quad q_{13} > \left\{ \begin{array}{c} \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{8}^{l} \eta_{l} \\ \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{9}^{l} \eta_{l} \end{array} \right\} \right\} (q_{11} \quad q_{12} \quad q_{13} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{8}^{l} \eta_{l} \\ \sum_{l=1}^{NM_{k}} x_{9}^{l} \eta_{l} \end{array} \right\}$$

que l'on exprime de façon plus condensée par:

$$I_{1} = \sum_{l=1}^{NM_{k}} (\langle q_{11} \ q_{21} \ q_{31} \rangle \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} x_{1}^{l} \ x_{4}^{l} \ x_{7}^{l} \ x_{10}^{l} \\ x_{2}^{l} \ x_{5}^{l} \ x_{8}^{l} \ x_{11}^{l} \\ x_{3}^{l} \ x_{6}^{l} \ x_{9}^{l} \ x_{12}^{l} \end{array} \right]_{\underline{e}} \left\{ \begin{array}{c} N_{1}^{t} \\ 0 \\ N_{2}^{t} \\ 0 \end{array} \right\} q_{11}) \eta_{l}$$
(2.144)
$$\underbrace{\triangleq [X^{l}]_{e}}$$

Exprimons maintenant I_2 :

$$I_{2} = \sum_{l=1}^{NM_{k}} \left(\left\langle q_{12} \quad q_{22} \quad q_{32} \right\rangle [X^{l}]_{e} \left\{ \begin{array}{c} N_{1}^{f_{y}} q_{12} \\ N_{2}^{f_{z}} q_{13} \\ N_{3}^{f_{y}} q_{12} \\ N_{4}^{f_{z}} q_{13} \end{array} \right\} + \left\langle q_{13} \quad q_{23} \quad q_{33} \right\rangle [X^{l}]_{e} \left\{ \begin{array}{c} N_{1}^{f_{z}} q_{13} \\ N_{2}^{f_{y}} q_{12} \\ N_{3}^{f_{z}} q_{13} \\ N_{4}^{f_{y}} q_{12} \end{array} \right\} \right) \eta_{l}$$

$$(2.145)$$

Par conséquent, la composante suivant \underline{I} du vecteur \underline{u} vient d'être mise sous la forme :

$$U = \sum_{l=1}^{NM_k} \phi_{1l} \eta_l$$
 (2.146)

Ainsi, la coordonnée ϕ_{1l} du vecteur de forme modale ϕ_{i} s'exprime à l'aide des différentes fonctions d'interpolation nodales N_i^j , des coefficients q_{ij} de la matrice de transformation [Q]

et des coordonnées x_i^l du vecteur propre associé au $l^{\text{ème}}$ mode de vibration de la pale. Un développement analogue à celui mené pour U nous permet d'en déduire que les composantes ϕ_{2l} et ϕ_{3l} s'expriment par :

$$\phi_{2l} = \left\langle \begin{array}{ccc} q_{11} & q_{21} & q_{31} \end{array} \right\rangle [X^{l}]_{e} \left\{ \begin{array}{c} N_{1}^{t} \\ 0 \\ N_{2}^{t} \\ 0 \end{array} \right\} q_{21} + \left\langle \begin{array}{ccc} q_{12} & q_{22} & q_{32} \end{array} \right\rangle [X^{l}]_{e} \left\{ \begin{array}{c} N_{1}^{fy} q_{22} \\ N_{2}^{fx} q_{23} \\ N_{3}^{fy} q_{22} \\ N_{4}^{fx} q_{23} \end{array} \right\} + \left\langle \begin{array}{ccc} q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{array} \right\rangle [X^{l}]_{e} \left\{ \begin{array}{c} N_{1}^{fx} q_{23} \\ N_{2}^{fy} q_{22} \\ N_{3}^{fx} q_{23} \\ N_{4}^{fy} q_{22} \end{array} \right\}$$

$$(2.147)$$

et:

$$\phi_{3l} = \left\langle \begin{array}{ccc} q_{11} & q_{21} & q_{31} \end{array} \right\rangle [X^{l}]_{e} \left\{ \begin{array}{c} N_{1}^{t} \\ 0 \\ N_{2}^{t} \\ 0 \end{array} \right\} q_{31} + \left\langle \begin{array}{ccc} q_{12} & q_{22} & q_{32} \end{array} \right\rangle [X^{l}]_{e} \left\{ \begin{array}{c} N_{1}^{fy} q_{32} \\ N_{2}^{fx} q_{33} \\ N_{3}^{fy} q_{32} \\ N_{4}^{fx} q_{33} \end{array} \right\} + \left\langle \begin{array}{ccc} q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{array} \right\rangle [X^{l}]_{e} \left\{ \begin{array}{c} N_{1}^{fx} q_{33} \\ N_{2}^{fy} q_{32} \\ N_{3}^{fx} q_{33} \\ N_{4}^{fy} q_{32} \end{array} \right\}$$

$$(2.148)$$

Remarquons que U(X, t) est la composante suivant <u>I</u> de la déformée de la pale résultant de la superposition deux phénomènes :

- $-U_f(X,t)$, le raccourcissement de la pale sous l'effet de son fléchissement,
- $-U_t(X,t)$, l'allongement de la pale sous l'effet de l'effort centrifuge et de la pesanteur.

Or, on peut raisonnablement négliger l'allongement de la pale devant les autres déformations, car les rigidités équivalentes de traction-compression (cf. § 5.3.3) des sections de la pale sont élevées. Donc, $U(X,t) \approx U_f(X,t)$. Ceci revient alors à supprimer les termes q_{i1} , i = 1 à 3, dans les expressions (5.146), (5.147) et (5.148) des coordonnées du vecteur ϕ_i .

De plus, les conditions aux limites à l'encastrement de la pale satisfont la relation (4.56) car, au pieds de pale $\underline{U}(X = 0) = \langle U_1 V_1 W_1 \rangle_{e=e_p}$ (e_p numéro de l'élément en pieds de pale):

$$\begin{array}{l} U_1 = 0\\ V_1 = 0\\ W_1 = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \phi_{il}(0) = 0 \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } 3 \end{array}$$

$$(2.149)$$

pour les translations et pour les rotations $\underline{\theta}(X=0) = \langle \theta_{X1} \theta_{Y1} \theta_{Z1} \rangle_{e=e_p}$:

$$\begin{cases} \theta_{X1} = 0 \\ \theta_{Y1} = 0 \\ \theta_{Z1} = 0 \end{cases} \right\} \iff \phi_{il}'(0) = 0 \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } 3$$

$$(2.150)$$

2.6.2 Approximation polynômiale des fonctions de forme modales

Les pales étant assimilables à des éléments de poutre unidimensionnelle (cette supposition peut être également reprise pour le pylône et la ligne d'arbre), les fonctions de forme modales ne dépendent que d'une seule variable d'espace, en l'occurrence l'abscisse curviligne notée ici ξ . On se propose donc d'approximer ces fonctions par des polynômes. Pour cela, on rappelle que le déplacement du point *p* après déformation élastique du corps B_k est donné par \underline{u}^k tel que:

$$\underline{u}^{k}(\underline{r}^{k}) = \sum_{l=1}^{NM_{k}} \underline{\phi}_{l}^{k}(\underline{r}^{k}) \eta_{l}^{k}$$

$$(2.151)$$

où \underline{r}^k est le vecteur position du point p avant déformation dans le repère local b^k (figure II-4.5). Dans ce même repère doté de la base orthonormée $\{\underline{b}_i^k\}$:

$$\underline{u}^{k}(\underline{r}^{k}) = \sum_{i=1}^{3} u_{i}^{k}(\underline{r}^{k}) \underline{b}_{i}^{k}$$

$$(2.152)$$

et:

$$\underline{\phi}_{l}^{k}(\underline{r}^{k}) = \sum_{i=1}^{3} \phi_{il}^{k}(\underline{r}^{k}) \, \underline{b}_{i}^{k} \tag{2.153}$$

D'où:

$$u_{i}^{k}(\underline{r}^{k}) = \sum_{l=1}^{NM_{k}} \phi_{il}^{k}(\underline{r}^{k}) \eta_{l}^{k} \text{ pour } i = 1 \text{ à } 3$$
$$= \phi_{i1}^{k} \eta_{1}^{k} + \dots + \phi_{il}^{k} \eta_{l}^{k} + \dots + \phi_{iNM_{k}}^{k} \eta_{NM_{k}}^{k}$$
(2.154)

On souhaite rechercher la composante $\phi_{il}^k(\underline{r}^k)$ sous la forme d'un polynôme :

$$\phi_{il}^k(\xi) = \sum_{m=0}^{N_d} a_m \xi^m \tag{2.155}$$

où N_d est le degré maximal du polynôme et ξ la variable d'espace. N_d est choisi suivant la composante *i* et le mode *l*. La détermination des a_m revient à minimiser \mathcal{E} définit par¹⁰:

$$\sum_{p=1}^{N_n} \left[\phi_{il}(\xi_p) - \phi_{ilp}\right]^2 \triangleq \mathcal{E}$$
(2.156)

avec:

 $- N_n$ nombre de noeuds de la pale discrétisée,

$$-\phi_{il}(\xi_p) = \sum_{m=0}^N a_m \xi_p^m,$$

- $-\xi_p$ abscisse du noeud p,
- ϕ_{ilp} composante i $(i \equiv u, v, w)$ associée au déplacement du noeud p au $l^{\text{ème}}$ mode de déformation.

On a en effet, pour le déplacement nodale $U_{n_{ddl}}$ du noeud p correspondant au degré de liberté n_{ddl} $(n_{ddl} \in [1, N_{ddl}])$ du vecteur $\langle U_n \rangle$ des déplacements nodaux :

$$< U_n > = < U_1 V_1 W_1 \theta_{X1} \theta_{Y1} \theta_{Z1} \vdots \cdots \vdots \underbrace{U_p V_p W_p \theta_{Xp} \theta_{Yp} \theta_{Zp}}_{\text{deplacements du noeud } p} \vdots \cdots \vdots U_{N_n} V_{N_n} W_{N_n} \theta_{XN_n} \theta_{YN_n} \theta_{ZN_n} >$$

(2.157)

la relation:

$$U_{n_{ddl}} = x_{n_{ddl}}^{1} \eta_{1} + \dots + \underbrace{x_{n_{ddl}}^{l}}_{=\phi_{ilp}} \eta_{l} + \dots + x_{n_{ddl}}^{NM_{k}} \eta_{NM_{k}}$$
(2.158)

où $x_{n_{ddl}}^l$ est un élément de la matrice modale [V] définie par la relation (5.131). Minimiser \mathcal{E} , c'est chercher les coefficients a_m tels que, $\forall m \in [0, N]$:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_m} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{p=1}^{N_n} \frac{\partial \phi_{il}(\xi_p)}{\partial a_m} (\phi_{il}(\xi_p) - \phi_{ilp}) = 0 \tag{2.159}$$

Or:

$$\frac{\partial \phi_{il}(\xi_p)}{\partial a_m} = \xi_p^m \quad \text{pour } m \in [1, N]; \qquad \frac{\partial \phi_{il}(\xi_p)}{\partial a_0} = 1 \quad \forall \xi_p \tag{2.160}$$

^{10.} L'indice k est sous entendu afin d'alléger les écritures

Par conséquent, pour m donné:

$$a_0 \sum_{p=1}^{N_n} \xi_p^m + \dots + a_m \sum_{p=1}^{N_n} \xi_p^{2m} + \dots + a_N \sum_{p=1}^{N_n} \xi_p^{N+m} = \sum_{p=1}^{N_n} \xi_p^m \phi_{ilp}$$
(2.161)

Par suite, les (N_d+1) coefficients a_m vont être déterminés par la résolution d'un système d'équations dont la forme matricielle est donné par:

$$\begin{bmatrix} N_{n} & \cdots & \sum_{p=1}^{N_{n}} \xi_{p}^{j} & \cdots & \sum_{p=1}^{N_{n}} \xi_{p}^{N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{p=1}^{N_{n}} \xi_{p}^{j} & \cdots & \sum_{p=1}^{N_{n}} \xi_{p}^{2j} & \cdots & \sum_{p=1}^{N_{n}} \xi_{p}^{j+N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_{p=1}^{N_{n}} \xi_{p}^{N} & \cdots & \sum_{p=1}^{N_{n}} \xi_{p}^{j+N} & \cdots & \sum_{p=1}^{N_{n}} \xi_{p}^{2N} \end{bmatrix} \underbrace{ \begin{bmatrix} a_{0} \\ \vdots \\ a_{j} \\ \vdots \\ a_{N} \end{bmatrix} }_{\triangleq \{a\}} = \underbrace{ \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^{N_{n}} \phi_{ilp} \\ \vdots \\ \sum_{p=1}^{N_{n}} \xi_{p}^{j} \phi_{ilp} \\ \vdots \\ \sum_{p=1}^{N_{n}} \xi_{p}^{N} \phi_{ilp} \end{bmatrix} }_{\triangleq \{B\}}$$
(2.162)

Soit encore, en introduisant $[\mathcal{A}], \{a\} \in \{\mathcal{B}\}$:

$$[\mathcal{A}]\{a\} = \{\mathcal{B}\} \tag{2.163}$$

Introduisons maintenant les conditions aux limites. Pour cela, distinguons les en deux catégories :

- conditions aux limites en $\xi = 0$. Dans le cas de la pale, l'abscisse $\xi = 0$ correspond au pied de pale (avec la notation du *chapitre* 4, ceci revient à poser $\underline{r}^k = \underline{0}$), c'est-à-dire en terme de liaison, à un encastrement. Par conséquent

$$\begin{cases} \underline{\phi}_{l}^{k}(\underline{0}) = \underline{0} \text{ translations bloquées} \\ \underline{\phi}_{l}^{k'}(\underline{0}) = \underline{0} \text{ rotations bloquées} \end{cases}$$
(2.164)

L'introduction de ces conditions aux limites se traduit par la suppression de la ligne et la colonne correspondant à a_0 et a_1 dans le système d'équations (5.162). Il est important de remarquer que nous satisfaisons par la même occasion les conditions imposées aux fonctions de formes modales (équation 4.56)) pour être compatibles avec la mise en équation d'un système multicorps souples suivant la méthode de superposition (cf. § 4.3.2) des déformées et des déplacements rigides, – conditions aux limites en $\xi \neq 0$. En particulier, en extrémité de pale, les chargements sont tels que

$$\begin{cases} \phi_{3l}^{k\,''}(1) = 0 & \text{moment de flexion autour } (O_{Pl}Y) \text{ nul} \\ \phi_{2l}^{k\,''}(1) = 0 & \text{moment de flexion autour } (O_{Pl}Z) \text{ nul} \\ \phi_{2l}^{k\,'''}(1) = 0 & \text{effort tranchant suivant } (O_{Pl}Y) \text{ nul} \\ \phi_{3l}^{k\,'''}(1) = 0 & \text{effort tranchant suivant } (O_{Pl}Z) \text{ nul} \\ \phi_{1l}^{k\,''}(1) = 0 & \text{torsion} \end{cases}$$
(2.165)

Il faut maintenant rajouter dans le système (5.162) les équations correspondant à ces conditions aux limites. De façon générale, si l'on a n_{CL} conditions aux limites en $\xi = \Xi$ telles que $\Phi = \phi_{il}(\Xi)$, et

$$a_0 + a_1 \Xi + \dots + a_k \Xi^k + \dots + a_N \Xi^N = \Phi$$

$$(2.166)$$

alors la nouvelle matrice $[\mathcal{A}']$ issue de $[\mathcal{A}]$ a pour dimension $(N_d + 1, N_d + 1 + n_{CL})$ et le nouveau vecteur $\{\mathcal{B}'\}$ pour dimension $(N_d + 1 + n_{CL})$. Mais, la dimension du vecteur des coefficients a_m , $\{a\}$, reste inchangée

$$\begin{bmatrix} N_{n} & \cdots & \sum_{p=1}^{N_{n}} \xi_{p}^{N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{p=1}^{N_{n}} \xi_{p}^{N} & \cdots & \sum_{p=1}^{N_{n}} \xi_{p}^{2N} \\ 1 & \cdots & \Xi^{N} \\ 0 & \cdots & N\Xi^{N-1} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0} \\ \vdots \\ a_{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^{N_{n}} \phi_{ilp} \\ \sum_{p=1}^{N_{n}} \xi_{p}^{N} \phi_{ilp} \\ \Phi \\ \Phi' \\ \vdots \end{bmatrix}$$
(2.168)

Pour retrouver un système carré, il suffit de multiplier le nouveau système matriciel par $[\mathcal{A}']^T$:

$$\underbrace{[\mathcal{A}']^T[\mathcal{A}']}_{\triangleq[\mathcal{A}'']} \{a\} = \underbrace{[\mathcal{A}']^T\{\mathcal{B}'\}}_{\{\triangleq\mathcal{B}''\}}$$
(2.169)

La solution $\{a\}$ sera celle qui minimise la norme

$$||\{\mathcal{B}''\} - [\mathcal{A}'']\{a\}|| \qquad (2.170)$$

Finalement, il faudra résoudre $3 \times NM_k$ le système d'équations (5.169) afin d'obtenir une approximation de $\underline{u}^k(\underline{r}^k)$ par des polynômes.

L'avantage de cette méthode est que l'on peut aussi mesurer les λ_i et les $\{x_i\}$ sur des pales réelles et les lisser ensuite sous forme de polynômes pour :

- les comparer aux résultats éléments finis,
- les inclure dans le calcul des efforts.

..

.

Chapitre 3

Modélisation structurale des autres sous-ensembles

3.1 Introduction

Nous venons d'achever la modélisation mécanique des pales et les deux sous-ensembles restant se composent de la nacelle et du pylône. Pour ce dernier, le traitement va être extrêmement simple puisqu'il s'agit d'une poutre élancée de section tubulaire (nous laissons de côté les pylônes en treillis et en béton). Par contre, la nacelle est beaucoup plus problématique. Dans cette nacelle figure la ligne d'arbre, chargée de transmettre la puissance mécanique générée par le couple aérodynamique vers le rotor de la génératrice. Plus que la nacelle en générale, c'est cette ligne d'arbre qu'un effort particulier de modélisation doit être entrepris. Malheureusement, la complexité, d'un point de vue constructif et dynamique, de ce sous-ensemble ne va pas nous permettre de proposer un modèle en tant que tel. Il faudrait en effet développer une volume d'investigations que nous ne pouvons pas prétendre intégrer dans cette démarche de recherche. C'est en conscience de cela que nous nous limitons ici à rappeler le lien qu'il conviendra de tisser entre une modélisation soignée de la dynamique de la ligne d'arbre et les éléments intervenant dans la mise en équation du système telle que nous la proposons.

3.2 Pylône

Nous excluons d'ores et déjà le cas des pylônes en béton ou en treillis métalliques, qui ne constituent plus le choix de la majeure partie des fabriquants d'éoliennes actuelles. Le pylône métallique de section tubulaire est maintenant considéré comme un standard et c'est celui que nous allons traiter. Par conséquent, cette solution technologique nous permet de classer le pylône comme une poutre encastrée de forme élancée et de section circulaire constituée d'un matériau isotrope qui est l'acier. Ces caractéristiques nous laisse le choix entre une modélisation par l'application de la résistance des matériaux, conduisant à des expressions analytiques, ou par une approximation par éléments finis, comme pour les pales. Nous allons privilégier cette dernière modélisation, car tous les éléments sont maintenant réunis pour traiter ce cas trivial de poutre que constitue le pylône. Il est donc inutile de revenir sur tout l'aspect modélisation et nous rappelons simplement que la finalité de cette modélisation éléments finis est de pouvoir déterminer les vecteurs de de déplacement modale ϕ_l^k du $l^{\text{ème}}$ mode de déformation $(l = 1 \text{ à } NM_k)$ tels que :

$$\underline{u}^{k} = \sum_{l=1}^{NM_{k}} \underline{\phi}_{l}^{k}(\underline{r}^{k}) \eta_{l}(t)$$

$$\sum_{l=1}^{NM_{k}} \underline{\phi}_{l}^{\prime k}(\underline{r}^{k}) \dot{\underline{r}}_{l}(t)$$

$$(3.1)$$

$${}^{c(k)}\underline{\omega}^{p_k} = \sum_{l=1} \underline{\phi}'^k_l(\underline{r}^k) \dot{\eta}_l(t)$$
(3.1)

où \underline{r}^k est le vecteur position d'un point quelconque du pylône dans le repère local b^k (confondu avec le repère galiléen dans ce cas puisque le pylône est encastré) et η_l^k la $l^{\text{ème}}$ coordonnée modale associée au $l^{\text{ème}}$ mode propre de déformation du pylône. Nous ne retiendrons qu'au maximum les deux premiers modes de déformations dans chaque direction, car les autres sont beaucoup trop élevés pour intervenir sur la dynamique de l'éolienne.

3.3 Modélisation de la ligne d'arbre

La multiplicité des configurations et des organes de la transmission de puissance rendent la modélisation de cette transmission complexe. Par quelle méthode tous les éléments mécaniques de la ligne d'arbre vont pouvoir être intégrés dans la dynamique de l'éolienne? La réponse tient au vaste domaine des études des machines tournantes pour lesquelles le souci principal reste la détermination des vibrations et des vitesses dangereuses de la ligne d'arbre. Sous l'appellation ligne d'arbre, on entend l'ensemble des organes en rotation (arbres de transmission, engrenages, accouplements, etc) qui constituent la transmission de puissance. Par conséquent, une description complète d'une ligne d'arbre nécessite de connaître parfaitement les caractéristiques telles que l'inertie et la raideur de chaque organe tournant. D'autre part, une ligne d'arbre peut fort bien posséder plusieurs arbres secondaires en parallèles (sorties multiples d'un multiplicateur attaquant plusieurs génératrices par exemple) et donc ne pas systématiquement former une ligne en tant que telle. Nous excluons de notre étude ces configurations, car elles restent limitées dans les agencements actuelles de nacelles pour des raisons d'encombrement (l'avantage étant de savoir si une grosse génératrice est plus lourde que plusieurs génératrices pour la même puissance). La dynamique d'une ligne d'arbre d'éolienne est influencée par les mouvements de balancement du pylône (d'avant en arrière et de côté), par la déformation des pales, le moyeu et l'arbre lent (lorsqu'il est présent), le multiplicateur (type d'engrènement, souplesse du montage sur le bâti) l'arbre rapide et le rotor de la génératrice ainsi que son comportement électrodynamique. Nous voyons donc que l'incorporation de la dynamique de le ligne d'arbre demande un traitement spécifique. Nous souhaitons simplement apporter ici les quelques éléments sur la modélisation d'une ligne d'arbre qui viendront s'inscrire dans les équations de la dynamique de l'éolienne tripale présentées dans le chapitre IV-2. En effet, nous rappelons encore une fois que l'incorporation des déformations des solides se fait par l'intermédiaire des vecteurs de déplacement modale ϕ_l^k .

3.3.1 Principe de calcul d'une ligne d'arbre équivalente

La modélisation d'une ligne d'arbre s'articule en deux étapes. La première consiste à substituer les organes d'une ligne d'arbre qui se résument à des arbres épaulés, des accouplements, des réducteurs, par des modèles équivalents constitués de disques d'inertie I_i reliés entre eux par des ressorts de torsion sans masse, de rigidité torsionnelle k_i . L'agencement de ces modèles selon la disposition constructive réelle de la ligne d'arbre, doit au final ramener celle-ci à une ligne dynamiquement équivalente formée des n disques d'inertie I_i et des rigidités de torsion k_i précédemment déterminées (figure 6.1).



FIG. 3.1 Réduction de la ligne d'arbre réelle à une ligne équivalente

La seconde étape consiste à rechercher les pulsations propres de ce système mécanique sachant que sa mise en équation suit les hypothèses suivantes :

- le système obéit à la loi de Hooke (élasticité linéaire),
- seules les déformations de torsion sont prises en compte,
- le système est conservatif (pas d'amortissement),

- l'axe de rotation est un axe du référentiel fixe,
- les centres de gravité des disques appartiennent à l'axe de rotation,
- l'axe de rotation est l'axe principal d'inertie.

Soulignons que la quatrième hypothèse ne nous permet pas de tenir compte de l'effet de balancement du mât, puisque dans ce cas, l'axe de rotation de la ligne d'arbre n'est plus un axe fixe. Les équations de mouvement des n disques d'inertie reliés par (n-1) rigidités de torsion et repérés en rotation par l'angle θ_i est de la forme:

$$[M]\{\hat{\theta}\} + [L]\{\theta\} = 0 \tag{3.2}$$

avec [M] matrice de masse des inerties :

$$[M] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I_n \end{bmatrix}$$
(3.3)

et [L] matrice carrée des rigidités:

$$[L] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & & \\ & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -k_{n-1} & k_{n-1} \end{bmatrix}$$
(3.4)

et enfin:

$$\langle \theta \rangle = \langle \theta_1 \cdots \theta_n \rangle$$
 (3.5)

La résolution numérique de ce type de système d'équations différentielles du second ordre sans second membre ne présente aucune difficulté. Néanmoins, lorsque le nombre de degrés de liberté devient important, il faut se concentrer sur une méthode qui puisse répondre à ce type de problème. C'est pourquoi, pour la catégorie de ligne d'arbre que nous devons traiter, l'algorithme de Rutishauser [24] peut-être adopté. Cette méthode permet de calculer toutes les pulsations propres de torsion d'un système conservatif. Notre objectif est de déterminer les vecteurs de déplacement modale ϕ_l^k qui interviennent dans la mise en équation de l'éolienne; on rappelle que, si la ligne d'arbre est repérée par l'indice k, alors:

$$\underline{u}^{k} = \sum_{l=1}^{NM_{k}} \underline{\phi}_{l}^{k}(\underline{r}^{k}) \eta_{l}(t)$$

$$\underline{\omega}^{k} = \sum_{l=1}^{NM_{k}} \underline{\phi}_{l}^{\prime k}(\underline{r}^{k}) \dot{\eta}_{l}(t)$$
(3.6)

où \underline{r}^k est le vecteur position du point appartenant à la ligne d'arbre. Or, nous avons supposé que les déformations de la ligne d'arbre se limitaient à de la torsion pure. Par conséquent, si dans le repère local b^k l'axe de vecteur directeur \underline{b}_1^k correspond à l'axe de rotation de la ligne d'arbre, alors:

$$\underline{\omega}^{k} = \sum_{l=1}^{NM_{k}} \phi_{l}^{\prime k} \dot{\eta}_{l}(t) \underline{b}_{1}^{k}$$

$$= \omega_{1}^{k} \underline{b}_{1}^{k} \qquad (3.7)$$

Le calcul des vecteurs propres et des modes propres de l'équation (6.2) nous permet d'en déduire l'expression de $\omega_1^k(p_k)$. Si θ_n représente l'angle de déformation au point p_k (p_k est en bout de ligne et appartient au moyeu, cf. § IV-2), alors:

$$\theta_n = \sum_{l=1}^{NM_k} x_n^l \eta_l^k \tag{3.8}$$

où les x_n^l sont extraits de la matrice modale [V] définie de façon analogue à la relation (5.132) et telle que:

$$\langle \theta \rangle = [V]\{\eta\} \tag{3.9}$$

D'où:

$$\omega_1^k = \sum_{l=1}^{NM_k} x_n^l \dot{\eta}_l^k \tag{3.10}$$

Par suite:

$$\phi_l^{\prime k} = x_n^l \quad \text{pour } l = 1 \text{ à } NM_k \tag{3.11}$$

Ensuite, les $\phi_l^k(p_k)$ associés à la ligne d'arbre peuvent être déduites des déformations angulaires grâce à la proportionnalité entre déformations et déplacements.

Une seconde méthode de détermination des vecteurs de déformation modale consisterait à traiter la ligne d'arbre équivalente comme une poutre épaisse axisymétrique et à utiliser alors les développements éléments finis exposés sur les pales.

· · · · ·

Bibliographie

- KANE, T. R. and WANG, C. F.: "On the Derivation of Equations of Motion"; Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 13, No. 2, June 1965, pp. 487-492.
- [2] KANE, T. R. and LEVINSON, D. A.: "Formulation of Equations of Motion for Complex Spacecraft"; Journal of Guidance and Control, Vol. 3, March-April 1980, pp. 99-112.
- [3] KANE, T. R. and LEVINSON, D. A.: "Multibody Dynamics"; ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, 1983, pp. 1071-1078.
- [4] KANE, T. R. and LEVINSON, D. A.: "Dynamics: Theory and Applications"; McGraw Hill Book Compagny, 1985.
- [5] FLETCHER, H. J., RONGVED, L., and YU, E. Y.: "Dynamics Analysis of a Two-Body Gravitationally Oriented Satellite"; Bell System Technical Journal, Vol. 42, 1963.
- [6] HOOKER, W.W. and MARGULIES, G.: "Dynamical Attitude Equations for n-Body Satellite"; Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 12, Winter 1965, pp. 123-128.
- [7] WITTENBURG, J.: "Dynamics of Systems of Rigid Bodies"; B. G. Teubner Stuttgart, 1977.
- [8] HUSTON, R. L. and PASSERELLO, C. E.: "On Multi-Rigid-Body System Dynamics"; Computer and Structures, Vol.10, 1979.
- [9] LANCZOS, C. L.: "The Variational Principles of Mechanics"; 4th edition, Dover Publications, 1970.
- [10] UNDA, J., et. al: "A Comparative Study on Some Different Formulations of the Dynamic Equations of Constrainted Mechanical Systems"; ASME paper No. 86-DET-138, 1986.
- [11] ORLANDEA, N.: Node-Analogous, Sparsity-Oriented Methods for Simulation of Mechanical Systems"; Ph. Dissertation, University of Michigan, 1973.
- [12] LIKINS, P. W.: "Dynamics and Control of Flexible Space Vehicles"; Jet Propulsion Laboratory Technical Report 32-1329, January 1970.
- [13] SINGH, R. P., VANDERVOORT, R. J. and LIKINS, P. W.: "Dynamics of flexible Bodies in Tree Topology - A Computer-Oriented Approach"; Journal of Guidance Control and Dynamics, Vol. 8 No. 5, 1985.

- [14] BATHE, Klaus-Jürgen: "Finite Element Procedures in Engineering Analysis"; Prenticehall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [15] FARID. M. L. AMIROUCHE: "Computational Methods in Multibody Dynamics"; Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1992.
- [16] BATOZ, J.-L., DHATT, G.: "Modélisation des structures par éléments finis solides élastiques"; Vol.1, éditions Hermes, Paris, 1990.
- [17] BATOZ, J.-L., DHATT, G.: "Modélisation des structures par éléments finis Poutres et plaques"; Vol.2, éditions Hermes, Paris, 1990.
- [18] PALUCH, B.: "Logiciel de dimensionnement des pales d'éoliennes"; ONERA/IMFL, DMSE/RCS, Rapport no. 92/28, Avril 1992.
- [19] PALUCH, B.: "Calcul des caractéristiques mécaniques de torsion des sections de pales d'hélicoptères"; Opération "Orphée", Rapport IMFL 92/34, octobre 1992.
- [20] PALUCH, B.: "A Software for Design and Calculation of Wind Turbine Composite Rotor Blades"; pp. 559-562, EUCWEC, Proceeding of an International Conference held at Lübeck-Travemünde, Germany, 8-12 March, 1993.
- [21] BRAUN, K.A. et al.: "Some Blade Tip Modifications and their Influence on Aeroacoutics"; pp.792-795, EUCWEC, Proceeding of an International Conference held at Göteborg, Sweden, 20-24 May, 1996.
- [22] DHATT, G., TOUZOT, G.: "Une présentation de la méthode des éléments finis; Collection Université de Compiègne, deuxième édition, Maloine S.A. éditeur Paris, 1984.
- [23] T.R. KANE, R.R. RYAN and A.K. BANERJEE: Dynamics of a Cantilever Beam Attached to a Moving Base; Journal of Guidance, Vol. 10, No. 2, pp. 139-151, March-April 1987.
- [24] B. GIRONNET, G. LOURADOUR: Vibrations et vitesses dangereuses de torsion des lignes d'arbre; Collection Technique de l'Ingénieur, B 5770, 1984.

Troisième partie

Modélisation aérodynamique du rotor

..

Notations

Latines

Majuscules

- A_0 : altitude des rugosités du sol
- A : foyer aérodynamique. Aire du disque rotor
- A_{moy} : altitude de l'axe du moyeu
- ${\cal A}_{Pyl}\,$: altitude du sommet du pylône
- A_r : surface mouillée du rotor
- A_{ref} : altitude de référence
- C: facteur d'échelle de la fonction de Weibull
- C_d : coefficient de traînée
- C_{f_X} : projection des coefficients aérodynamiques suivant l'axe (OX)
- C_{f_Y} : projection des coefficients aérodynamiques suivant l'axe (OY)
- C_l : coefficient de portance
- $C_{l,2D}$: coefficient de portance pour une envergure d'aile infinie
- $C_{l,3D}$: coefficient de portance corrigé par les effets tridimensionnels de l'écoulement
- C_m : coefficient de tangage
- C_P : coefficient de puissance
- F: fonction de distribution cumulative des occurrences. Facteur de pertes en extrémité
- K_c : coefficient d'obliquité du sillage
- L_s : longueur de stabilité de Monin-Obukhov
- \dot{M} : débit massique
- \mathcal{M}^P_a : moment des forces aérodynamiques par rapport au point P
- N_p : nombre de pales
- N_{Seg} : nombre de segments discrétisant la pale suivant son envergure
- N_{TL} : nombre de tourbillons libres
- P : puissance du rotor
- P_V : densité de puissance du vent
- \overline{P}_V : densité annuelle de puissance
- U_0 : vitesse d'entraînement non corrigée
- V : vitesse instantanée du vent
- V_* : vitesse de friction
- V_h : intensité de la composante horizontale du vent perturbé
- $V_{moy}\,$: intensité de la composante horizontale du vent amont à l'altitude du moyeu
- V_{ref} : vitesse du vent à l'altitude de référence A_{ref}
- V_{sup} : intensité de la composante horizontale du vent amont à l'altitude maximale d'une

extrémité de pale

- V_0 : intensité de la composante horizontale du vent amont stationnaire
- V_1 : vitesse du vent à l'infini aval du plan rotor
- R : envergure de la pale
- R_0 : rayon du moyeu
- R_{aval} : rayon du sillage à l'infini aval du plan rotor
- R_{da} : envergure du début de la zone aérodynamique
- R_{fa} : envergure de la fin de la zone aérodynamique
- S : surface portante de la pale
- T : effort axiale s'exerçant sur le disque rotor
- W : vitesse relative du vent incident
- W_0 : vitesse relative du vent incident non corrigée
- Z : altitude courante

Minuscules

a	: facteur d'induction axial $(a = v/V_0)$
с	: direction $c = X, Y$ ou Z
coh_c	: cohérence entre deux positions séparées dans la direction c
dC	: couple élémentaire s'exerçant sur le rotor
$d\underline{f}_{a}$: force aérodynamique résultante élémentaire
df_d	: force élémentaire de traînée
$d\overline{f}_{i}^{a}$: force élémentaire de portance
$d\overline{f}_{Y}$: projection sur l'axe (OX) des forces aérodynamiques élémentaires
$d\overline{f}_{V}^{\Lambda}$: projection sur l'axe (OY) des forces aérodynamiques élémentaires
d_c^{-1}	: coefficient d'atténuation dans la direction c
$d\underline{l}$: abscisse curviligne le long du profil
$d\dot{M}$: débit massique élémentaire
$d{\cal M}^P_a$: moment par rapport à P des forces aérodynamiques élémentaires
d_{Pr}	: distance suivant l'axe (OX) d'un point P à l'axe vertical du pylône
d_r	: envergure élémentaire
dw	: vitesse induite par un tourbillon d'intensité $d\Gamma$
f_V	: fonction de distribution des occurrences de la vitesse du vent stationnaire
g	: fluctuation horizontale de la vitesse du vent amont
k	: facteur de forme de la fonction de Weibull
l	: corde du profil à l'envergure <i>r</i>
p_{amont}	: pression au voisinage amont du plan rotor
p_{atm}	: pression atmosphérique
p_{aval}	: pression au voisinage aval du plan rotor
p_s	: pression sur l'enveloppe du sillage
r_m	: rayon de singularité
r_{Pyl}	: rayon du pylône à l'altitude Z
r_{TL}	: position en envergure d'un tourbillon libre
\boldsymbol{u}	: composante tangentielle de la vitesse induite w (au niveau du plan rotor)
u, v, w	: composantes du vent dues à la présence du pylône
v	: composante axiale de la vitesse induite w (au niveau du plan rotor)
v_0	: composante axiale moyennée sur le disque rotor

w : vitesse induite (au niveau du plan rotor)

Grecques

Majuscules

- Δl_c : distance entre deux positions séparées dans la direction c
- $\Delta \Psi$: pas azimutal du sillage
- Δt : intervalle de temps moyen
- Γ : circulation
- $\Gamma_\infty\,$: circulation associée au rotor pour un nombre de pales infini dont la corde tend vers zéro
- Λ : allongement de la pale
- Ω : vitesse de rotation du rotor
- $\Psi_s\;$: fonction de stabilité atmosphérique

Minuscules

- α : exposant de la loi en puissance du modèle de gradient de vent. Angle d'incidence
- α_0 : incidence non corrigée
- α_i : angle d'incidence induit
- β : angle de calage
- χ : angle d'obliquité du sillage
- η : rendement du rotor
- γ : coefficient de solidité locale du rotor
- κ : constante de Von Karman
- μ : ratio de la pale (envergure/corde moyenne)
- ϕ : angle apparent
- ϕ_0 : angle apparent non corrigé
- $\phi_{r,b}$: position azimutale de la pale b
- ϕ_y : angle de désalignement du vent amont avec l'axe du rotor
- ρ : masse volumique de l'air
- au : durée d'une rafale

Chapitre 1

Caractéristiques du vent

1.1 Introduction

Par définition, le vent est l'air en mouvement relatif par rapport à la surface de la terre. La première cause de ce mouvement est le réchauffement inégal de la terre (rotondité) par les radiations solaires. Pour une large part, l'air n'est pas directement réchauffé, car les radiations sont d'abord absorbées par la surface terrestre puis transférées sous diverses formes dans l'atmosphère environnante. Comme la surface terrestre est non homogène (terres, mers, déserts, forêts, etc) la proportion d'énergie qui est absorbée varie à la fois dans l'espace et dans le temps. Ceci crée des différences de température, de densité et de pression au sein de l'atmosphère qui, au final, génèrent les mouvements de l'air. La seconde cause importante du mouvement de l'air sur de grandes échelles est due à la rotation de la terre donnant lieu à deux effets. Le premier d'entre eux est la création de forces appelées forces de Coriolis qui accélèrent chaque particule d'air en mouvement. Lorsque les mouvements de l'air atteignent un état stationnaire, les forces de Coriolis équilibrent les forces dues au gradient de pression, menant alors à un déplacement de l'air approximativement le long des isobares: il s'agit du vent géostrophique. Le second effet de la rotation de la terre sur le mouvement de l'air est une accélération du vent de l'ouest vers l'est au niveau des latitudes moyennes. Comme les particules d'air sont en rotation, elles possèdent un moment angulaire. Or, les particules d'air migrent vers les pôles (à une altitude presque constante) en se rapprochant de l'axe de rotation de la terre. Par conséquent, la conservation de ce moment impose une accélération des particules fluides. L'échelle de cette description est planétaire et nous allons au cours de ce chapitre glisser progressivement vers les dimensions dans lesquelles une éolienne est mise en action. Ensuite, nous nous attarderons sur la manière dont on peut classer les origines des efforts aérodynamiques en distinguant, d'une part, les régimes de vent stationnaire à l'origine de chargements aérodynamiques cycliques et d'autre part, les turbulences à l'origine des chargements dynamiques.

1.2 Mise en situation de l'éolienne

La fonction de l'éolienne est de capturer l'énergie du vent pour la transformer en énergie électrique. L'unité de mesure fondamentale est *la densité de puissance du vent*, P_V , en W/m^2 donnée par :

$$P_V = \frac{1}{2}\rho V^3 \tag{1.1}$$

avec ρ densité de l'air (kg/m^3) et V intensité de la composante horizontale de la vitesse du vent [m/s]. Le critère de choix pour installer des éoliennes sur un site est donné par *la* densité moyenne annuelle de puissance en $[W/m^2]$:

$$\overline{P}_V = \frac{0,5\rho}{8760} \int_{an} V^3 dt \tag{1.2}$$

avec t en heure. A partir de \overline{P}_V , on définit alors des classes de puissance du vent (tableau 1.1). On considère que pour une classe d'un niveau supérieur ou égal à 3, l'exploitation de l'énergie éolienne devient potentiellement intéressante.

TAB. 1.1 Définition des classes à partir de la densité moyenne annuelle de puissance à 50 m d'élévation [1]

Classe	$\overline{\mathbf{P}}_{\mathbf{V}}$	Vitesse du vent équivalente (m/s)
1	0-200	0,0-5,6
2	200-300	$5,\!6-\!6,\!4$
3	300-400	6,4-7,0
4	400-500	7,0-7,5
5	500-600	7,5-8,0
6	600-800	8,0-8,8
7	800-2000	8,8-11,9

D'autre part, les mouvements atmosphériques se produisent selon plusieurs échelles d'espace (du mètre aux milliers de kilomètres) et de temps (de la seconde à une dizaine d'années). Les éoliennes s'intègrent dans une échelle de vent d'environ 100 mètres en espace et 7 à 10 heures en temps. L'échelle la plus large (échelle climatique) inclue les variations saisonnières et les fluctuations annuelles du vent qui est alors utilisée pour définir les ressources potentielles d'une région. Un site d'implantation, en plus de sa classe, est choisi en fonction des fluctuations du vent sur une échelle s'étendant d'environ 80 m à 100 km et de 40 min à 4 ans.

Si nous descendons maintenant à l'échelle de l'éolienne, c'est-à-dire une centaine de mètres, nous devons distinguer deux catégories de régime de vent qui donnent naissance aux charges aérodynamiques. Le premier est le régime de vent quasi-stationnaire associé à la composante principale du vent moyennée par rapport au temps, le second est le régime de vent instationnaire associé aux rafales ainsi qu'à la turbulence du vent. D'autre part, la vitesse instantanée V du vent en un point P(X, Y, Z) de l'espace présente trois composantes (figure 1.1) que nous allons préciser dans les paragraphes suivants. Le plan (XPZ) contient l'axe du pylône.

Partie III. Modélisation aérodynamique du rotor



FIG. 1.1 Décomposition de la vitesse instantanée du vent en un point de l'espace

1.3 Régime de vent quasi-stationnaire

Des périodes de 10 minutes à 1 heure ont été définies comme acceptables pour qualifier un régime de vent dit stationnaire [2]. Dans le but de préciser la succession dans le temps de ces périodes, nous allons introduire plusieurs définitions. Ensuite, nous préciserons le profil du vent stationnaire qui agit sur l'éolienne.

1.3.1 Caractéristiques temporelles

Le caractère quasi-stationnaire du vent est donné par des études statistiques où apparaissent deux notions importantes :

- la distribution des occurrences qui est la durée cumulée d'une intensité donnée de la vitesse du vent pendant un an. Cette distribution peut être définie en transformant la relation (1.2)

$$\frac{0,5\rho}{8,760} \int_{an} V^3 dt = \frac{0,5\rho}{8,760} \int_0^\infty V^3 f_V \, dV \tag{1.3}$$

avec

$$f_V = \left. \frac{dt}{dV} \right|_{an} = \frac{d}{dV} \left[F(V_1 \ge V) \right] \tag{1.4}$$

où f_V est la fonction de distribution des occurrences de la vitesse du vent stationnaire en [(h/an)/(m/s)], F la fonction de distribution cumulative des occurrences en [h/an], et enfin V_1 une valeur arbitraire de V en [m/s]. Plusieurs modèles ont été proposés pour f_V [1]. Néanmoins, la distribution de Weibull semble faire l'unanimité et définit l'équation de la courbe de durée F par

$$F(V_1 \ge V) = 8,760 \, e^{-\left(\frac{V}{C}\right)^k} \tag{1.5}$$

où C est le facteur d'échelle en [m/s] et k le facteur de forme. Par conséquent, la fonction de Weibull de distribution des occurrences vaut :



$$f_V = \frac{8,760}{C} k \left(\frac{V}{C}\right)^{k-1} e^{-(\frac{V}{C})^k}$$
(1.6)

FIG. 1.2 Distribution de Weibull des occurences du vent pour k = 2,29 et C = 7,07 m/s

La détermination de ces facteurs peut être réalisée suivant différentes méthodes dépendant des données dont on dispose et de la précision souhaitée [3],

 la persistance qui est la durée pendant laquelle la vitesse du vent a une intensité comprise dans un certain intervalle. Notons que certains auteurs [4] on définit un modèle mathématique pour estimer la fonction de distribution de la persistance.

Ces deux définitions sont complémentaires et l'exemple suivant permet de s'en convaincre : une distribution des occurrences peut indiquer que le vent d'été souffle pendant 25 % du temps en dessous de le plage de démarrage (cf. § IV-3.2) de l'éolienne, tandis qu'une analyse de la persistance montre comment les périodes de non fonctionnement sont distribuées en terme d'étalement dans le temps (figure 1.3).

Partie III. Modélisation aérodynamique du rotor


FIG. 1.3 Illustration d'une distribution des occurrences et de la persistance

D'autre part, il existe une corrélation entre l'intensité du vent stationnaire et celle des turbulences. Par conséquent, la distribution des occurrences se positionne comme un facteur significatif pour la durée de vie en fatigue de l'éolienne et de ses composants. La persistance quant à elle fournit une information sur la production énergétique potentielle d'un site. Plus elle est élevé, plus la production sera uniforme et sûre.

1.3.2 Gradient vertical de vent

Pour un vent parfaitement stationnaire, si l'on mesure suivant l'altitude Z la composante horizontale V_0 de la vitesse du vent (pour Y fixé, figure 1.1), on constate que celle-ci évolue verticalement comme le montre la figure 1.4.



FIG. 1.4 Représentation du gradient de vent

Ce profil de vitesse nous montre qu'en raison de ce gradient (également appelé cisaillement) et même pour un régime de vent stationnaire, le rotor subit des charges cycliques qui vont affecter la durée de vie de la machine. Plus l'altitude augmente, moins cet effet

de gradient est sensible, d'où l'intérêt évident d'adopter des pylônes de grande dimension. Cette contrainte n'est bien sûr pas sans conséquence sur l'installation et le comportement dynamique de la machine. Le gradient de vent dépend essentiellement de la nature du terrain et peut être modélisé de plusieurs façons, pour lesquelles on suppose que la nature du terrain est invariante suivant Y (figure 1.1), à l'exception de la première description:

- 1. Description expérimentale. A partir de relevés sur le site, on établit un fichier de données relatif au cisaillement du vent. Les données sont alors directement intégrées au niveau de la simulation numérique des charges aérodynamique sur l'aérogénérateur.
- 2. Description linéaire par morceaux. Elle est définie pour la partie au-dessus de l'axe du moyeu par

$$V_0(Z) = V_{moy} \left[1 + \left(\frac{V_{sup} - V_{moy}}{V_{moy}} \right) \left(\frac{Z - A_{moy}}{R} \right) \right]$$
(1.7)

avec

- $V_0(Z)$: vitesse du vent à l'altitude courante Z
- V_{moy} : vitesse du vent amont mesurée à l'altitude de l'axe du moyeu [m/s]
- V_{sup} : vitesse du vent amont mesurée à l'altitude maximale d'une extrémité de pale [m/s]
- A_{moy} : altitude de l'axe du moyeu [m]

et pour la partie en dessous de l'axe du moyeu par

$$V_0(Z) = V_{moy} \frac{Z}{A_{moy}} \tag{1.8}$$

3. Description en loi puissance. Cette loi est définie par

$$V_0(Z) = V_{moy} \left(\frac{Z}{A_{moy}}\right)^{\alpha} \tag{1.9}$$

où l'exposant α caractérise la nature du terrain. Le *tableau 1.2* donne les valeurs usuelles de α [5].

4. Description logarithmique. La loi de distribution du vent est donnée par [6]

$$V_0(Z) = V_{moy} \left[\frac{\ln\left(\frac{Z}{A_0}\right)}{\ln\left(\frac{A_{moy}}{A_0}\right)} \right]$$
(1.10)

Nature du terrain	Inégalité du sol A ₀ en cm	Exposant α
Plat : glace, neige, mer, marécages, herbes courtes	0 à 20	0.08 à 0.12
Peu accidenté : champs et pâturages, cultures	20 à 200	0.13 à 0.16
Accidenté : bois, zones peu habitées	1000 à 1500	0.20 à 0.23

TAB. 1.2 Valeurs usuelles de $\alpha = 0.24 + 0.096 \log A_0 + 0.016 (\log A_0)^2$ [5]

5. Description logarithmique/linéaire. Elle est semblable à celle précédemment décrite, sauf qu'elle intègre une fonction de stabilité atmosphérique Ψ_s dépendant de Z/L_s

$$V_0(Z) = \frac{V_*}{\kappa} \left[\ln\left(\frac{Z}{A_0}\right) + \Psi_s\left(\frac{Z}{L_s}\right) \right] \quad \text{pour} \quad Z >> A_0 \tag{1.11}$$

où L_s est la longueur de stabilité de Monin-Obukhov [8] en [m] et κ la constante de Von Karman, approximativement égale à 0,4 et V_* la vitesse de friction [m/s]. Cette vitesse étant difficile à évaluer, on détermine plutôt le rapport V_*/κ par

$$\frac{V_*}{\kappa} = \frac{V_{ref}}{\ln\left(\frac{A_{ref}}{A_0}\right) + \Psi_s\left(\frac{A_{ref}}{L_s}\right)} \quad \text{pour} \quad Z >> A_0 \tag{1.12}$$

avec V_{ref} vitesse du vent à l'altitude de référence A_{ref} . Le terme Ψ_s est fonction de la distribution verticale de la température qui est modifiée par la nature du sol et l'alternance du jour et de la nuit [9]. Trois états de stabilité sont possibles: stable, stabilité neutre et instable. Pour les applications éoliennes, la littérature propose alors

 $\begin{aligned}
\Psi_s &= 0 & \text{atmosphère neutre} \\
\Psi_s &= 4,5 \frac{Z}{L_s} & \text{pour } Z \leq L_s & \text{atmosphère stable} \\
\Psi_s &= 4,5 \left[1 + \ln \left(\frac{Z}{L_s} \right) \right] & \text{pour } Z > L_s & (1.13) \\
\Psi_s &= -0,5 \frac{Z}{L_s} & \text{pour } Z \leq L_s & \text{atmosphère instable} \\
\Psi_s &= -0,5 \left[1 + \ln \left(\frac{Z}{L_s} \right) \right] & \text{pour } Z > L_s
\end{aligned}$

le rapport Z/L_s est généralement pris sur des tables définies empiriquement.

1.4 Régime de vent instationnaire

Une variation de la vitesse et de l'orientation du vent pendant une période inférieure à 1/10 d'heure est considérée comme un régime de vent instationnaire. Ces fluctuations provoquent des charges dynamiques sur les éoliennes qui sont considérées comme dimensionnantes pour sa durée de vie. La vitesse instantannée du vent est la superposition des régimes de vent quasi-stationnaires (moyennés sur le temps) et des variations instantanées du vent en temps et en espace (turbulences) autour du régime quasi-stationnaire:

$$V_h(X, Y, Z, t) = V_0(Y, Z) + g(X, Y, Z, t)$$
(1.14)

Avec:

$$\int_{A_r} \int_0^{\Delta t} g(X = d_{P_r}, Y, Z, t) \, dt dA_r = 0 \tag{1.15}$$

où :

- d_{Pr} la distance suivant l'axe (PX) (figure 1.1) du point P à l'axe vertical du pylône $(O_{Py}Z)$,
- $(X = d_{Pr}, Y, Z)$ les coordonnées d'un point P contenu dans la surface balayée par le rotor [m],
- $-V_h(X, Y, Z, t)$ composante horizontale instantanée du vent amont [m/s],
- $V_0(Y,Z)$ composante horizontale stationnaire du vent amont [m/s],
- -g(X, Y, Z, t) fluctuations horizontales de la vitesse du vent [m/s],
- $-A_r$ surface mouillée du rotor¹¹,
- Δt intervalle de temps moyen [h].

On suppose couramment que la turbulence intervenant sur un rotor éolien est homogène, c'est-à-dire qu'elle possède la même structure sur tout le disque rotor. De plus, la turbulence prend plusieurs formes, parmi lesquelles on n'en retient que deux fondamentales : les rafales de vent et la turbulence proprement dite.

1.4.1 Rafales de vent

Les rafales se caractérisent par une vitesse de vent V_h uniforme, instationnaire, telles que l'on puisse définir la fonction g de la relation (1.14) par :

$$g = g(X = d_{Pr}, t) \quad \forall (Y, Z) \tag{1.16}$$

Une rafale discrète se définit par trois paramètres: sa durée τ , son amplitude Δv et sa forme. Pour ce dernier, certains auteurs [6] suggèrent plusieurs modèles dont celui de base est constitué par la rafale de type sinusoïdale (figure 1.5).

^{11.} Aire du disque balayé par les pales



FIG. 1.5 Rafale de type sinusoïdale, $\Delta v = 2 m/s$, $\tau = 5 s$

Ce régime de vent s'identifie à un front plan de rafale ou encore un modèle de rafale discrète. En effet, cette fluctuation du vent est uniforme si elle englobe la totalité de la surface mouillée du rotor. Bien sûr cette hypothèse devient de moins en moins réaliste lorsque les dimensions du rotor deviennent importantes, par conséquent des précautions supplémentaires doivent être prises pour traiter les rafales sur les rotors de grande taille. La dimension d'une rafale est généralement reliée à sa durée τ : plus celle-ci est importante, plus la dimension de la rafale l'est. Pour estimer la durée de la rafale qui va englober tout le rotor, il convient d'introduire la fonction de cohérence [7]. La cohérence est un coefficient adimensionné compris entre zéro et un qui représente le degré avec lequel deux évènements, séparés en espace, sont semblables dans leurs chronologies. Si elles sont identiques, la cohérence vaut un, sinon, elle tend vers zéro. On peut alors définir la cohérence de la vitesse du vent prise en deux points séparés en espace au moment de la rafale, par la formule empirique:

$$coh_c = e^{-\frac{d_c \Delta l_c}{V_0.\tau}} \tag{1.17}$$

avec:

- coh_c cohérence entre deux positions séparées dans la direction c,
- c coordonnée longitudinale (X), latérale (Y) ou verticale (Z),
- d_c coefficient d'atténuation dans la direction c,
- Δl_c distance entre les deux positions séparées dans le direction c.

La relation (1.17) est établie afin que pour des durées longues ou des positions en espace voisines, la cohérence approche l'unité. La littérature rapporte des calculs effectués avec

 $d_x = 4,5$ et $d_y = d_z = 7,5$. Une application particulièrement intéressante de l'équation (1.17) est celle du calcul de la durée minimum des rafales qui sont susceptibles d'englober la totalité du rotor :

$$\tau = -\frac{d_c \Delta l_c}{V_0 \ln\left(coh_c\right)} \tag{1.18}$$

Considérons un rotor de 30 m de diamètre (Δl_c) , sous un vent V_0 de 15 m/s à 10 m de hauteur. Si l'on suppose une cohérence coh_c de 0,5 et un coefficient d'atténuation d_c de 7,5, alors la durée minimum de la rafale pouvant être considérée comme constante sur la totalité du plan rotor est de 22 s.

1.4.2 Turbulence

La turbulence peut être traitée de deux façons :

1. La turbulence dans le plan d'équation $X = d_{Pr}$ (figure 1.1) est non uniforme et instationnaire. La fonction g de la relation (1.14) est alors de la forme

$$g = g(Y, Z, t) \quad \forall (Y, Z) \tag{1.19}$$

L'écoulement réel sur une éolienne est de ce type et représente sous cette forme la partie la plus complexe de la modélisation du vent. Une vigilance particulière doit être apportée pour les éoliennes de grande taille : l'échelle¹² de la turbulence comparée à la dimension du rotor va fortement conditionner le choix d'un modèle et sa représentativité réaliste du phénomène. C'est pourquoi, on classe tous les modèles de turbulence suivant trois catégories (mono, bi ou tridimensionnels), dépendants du nombre de coordonnées spatiales qu'ils intègrent (x, y et z). Les modèles monodimensionnels (ou de "large échelle") supposent que le rotor est entièrement englobé par la turbulence, alors que les autres (donc de "petite échelle") modélisent les fluctuations de la vitesse du vent sur une échelle de longueur plus petite que le diamètre du rotor. A la limite, pour des éoliennes de taille modeste, on pourrait simplement se contenter des modèles précédents. La façon la plus rigoureuse pour fixer le choix du modèle, serait d'effectuer des mesures des caractéristiques du vent sur le site même d'implantation. Rappelons (cf. § I-1.2) que parmi les modèles développés, ceux de Veers [21] et Mann [22] semblent être privilégiés dans leur utilisation [10], [26].

2. Représentation stochastique (spectre de puissance en fonction des paramètres discrets de rafale) de la turbulence. Ce modèle est basé sur le fait que la turbulence est constituée d'ondes sinusoïdales possédants plusieurs périodes et des amplitudes aléatoires. On peut citer la méthode des cases [11] (method of bins) comme application de ces modèles stochastiques ou bien celle qui représente les variations dans le temps du "front" de vent avec des formulations probabilistes.

^{12.} Taille caractéristique des plus grosses structures turbulentes

La turbulence représente un obstacle important dans la maîtrise du comportement à long terme de l'éolienne. Elle fait par conséquent l'objet à l'heure actuelle de nombreux travaux et nous ne prétendons pas ici développer les modèles de turbulence car pour le moment, nos objectifs sont tout autre (cf. § I-2.2).

1.5 Perturbations de l'écoulement générées par la présence de l'éolienne

La simple présence de l'éolienne dans le lit du vent provoque des perturbations de celuici. Elles s'identifient en premier lieu à *l'effet d'ombre du pylône*: l'écoulement au voisinage du mât est alors modifié comme le montre la *figure 1.6*. La seconde perturbation est celle générée par le sillage du rotor (cf. § I-1.1) et qui s'étend du plan rotor jusqu'à une certaine distance en aval de celui-ci. Le traitement détaillé de cette perturbation fait l'objet du *chapitre 3*.



FIG. 1.6 Effet d'ombre du pylône

On peut proposer deux modèles pour rendre compte de l'effet d'ombre. Le premier suppose que la perturbation est bidimensionnelle (on néglige la composante verticale du vent). L'hypothèse de fluide parfait permet alors d'assimiler le pylône à une singularité de type source et déterminer le vecteur vitesse $\underline{V}_0 = -\underline{Grad}\phi$ de l'écoulement revient à connaître le potentiel ϕ tel que

$$\nabla^2 \phi = 0$$
 (équation de Laplace) (1.20)

On montre alors que le vecteur vitesse \underline{V}_0 au point de coordonnées (X, Y, Z) est donnée par

$$\underline{V}_{0} \begin{vmatrix} V_{0} \left[1 - \frac{r_{Pyl}^{2}}{(X^{2} + Y^{2})^{2}} (X^{2} - Y^{2}) \right] \\ -V_{0} \frac{2r_{Pyl}^{2}}{(X^{2} + Y^{2})^{2}} XY \end{vmatrix}$$
(1.21)

avec r_{Pyl} rayon du pylône à l'altitude Z ($0 \le Z \le A_{Pyl}$, A_{Pyl} altitude du pylône). Le second modèle [10], plus complet, repose sur l'évaluation composantes u, v, w au point P(X, Y, Z) des perturbations dues au pylône par l'utilisation d'un champ d'écoulement potentiel tridimensionnel crée par un dipôle semi-infini

$$\begin{cases} u = K \left[\frac{X_P^2 - Y_P^2}{X_p^2 + Y_P^2} \left(1 - \frac{Z_P}{r_P} \right) - \frac{X_P^2 Z_P}{r_P^3} \right] \\ v = K \left[\frac{2 \left(1 - \frac{Z_P}{r_P} \right)}{X_p^2 + Y_P^2} - \frac{Z_P}{r_P^3} \right] X_p Y_P \\ w = K \frac{\left(X_p^2 + Y_P^2 \right) X_P}{r_P^3} \end{cases}$$
(1.22)

Avec $K = \frac{V_0 r_{Pyl}^2}{2 (X_P^2 + Y_P^2)}$, $r_P = \sqrt{X_P^2 + Y_P^2 + Z_P^2}$ la distance du point P au sommet du pylône *(figure 1.7)*.



FIG. 1.7 Composantes perturbatrices de l'effet d'ombre

En complément de ces modèles, nous devons signaler que depuis 1977, des expériences ont été menées pour obtenir une description Lagrangienne de la turbulence, c'est-à-dire dans un repère tournant (par opposition à la description Eulérienne qui est effectuée dans un repère fixe, lié à la particule fluide). Elle consiste à mesurer et à reconstituer en différents points du rotor les variations en espace et en temps de la vitesse du vent. Plusieurs modèles mathématiques accompagnent ces travaux [12].

Terminons enfin par le vent oblique. Il est difficile de le classer parmi les deux types de régimes que nous avons définis, puisqu'il résulte uniquement de l'inadéquation entre la position du plan rotor et la direction principale du vent pendant une certaine période de fonctionnement. On caractérise le vent oblique par son angle de désalignement ϕ_y (Yaw Angle)

avec l'axe de la nacelle (figure 1.1). La présence de cet angle intervient de façon permanente lorsque celui-ci est inférieur en valeur à la consigne d'orientation de la nacelle dans le lit du vent. Notons que l'effet d'ombre peut être assimilé dans une certaine mesure à un vent oblique, puisque même lorsque le désalignement est nul l'effet d'ombre dévie localement la direction de la composante horizontale V_0 . La conséquence de ces deux phénomènes est un chargement cyclique du rotor affectant encore une fois sa durée de vie.

Chapitre 2

Détermination des efforts aérodynamiques

2.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent que l'éolienne est soumise à un vent dont les caractéristiques moyennes peuvent être considérées, dans un certain intervalle de temps, comme stationnaire, régime auquel vient se superposer la turbulence ou des rafales de vent. En outre, au cours de leur révolution, les pales ont à subir l'effet d'ombre du pylône. Connaissant la nature de l'écoulement en amont du plan rotor, nous allons maintenant nous attacher à déterminer les efforts aérodynamiques s'exerçant sur les pales. Cependant, l'écoulement de l'air autour d'une pale est un phénomène complexe, rendant délicate une détermination correcte de ces efforts. Par sa présence même, le rotor modifie localement cet écoulement et il est nécessaire de faire des corrections en termes de vitesses induites, ce que nous allons finalement faire au chapitre suivant en faisant appel aux modèles aérodynamiques décrits dans le *paragraphe I-1.2*: l'application de la théorie combinée et l'analyse par sillage prescrit.

2.2 Description du rotor

Un rotor est caractérisé par sa géométrie et les caractéristiques aérodynamique de ses pales. La connaissance des paramètres suivants est nécessaire pour définir complètement la géométrie d'un rotor *(figure 2.1)*:

- le type de profils (NACA, EPPLER, ...) des pales,
- le rayon extérieur du rotor R,
- le rayon du moyeu R_0 ,
- l'évolution de la corde l et du vrillage suivant l'envergure d'une pale,
- le calage des pales β ,
- le nombre de pales N_P du rotor,

- la présence d'appareils divers tels qu'ailerons, volets, etc (non représentés sur la fi-gure 2.1).



FIG. 2.1 Définition géométrique d'un rotor

De plus, on construit un repère orthonormé lié au rotor de façon à définir :

- (OX) l'axe de rotation du rotor,
- (OZ) l'axe autour duquel une pale tourne pour prendre son angle de calage β ,
- le plan (II) défini par les axes (OY) et (OZ); c'est le plan de rotation du rotor dans lequel l'hélice aéromotrice tourne à la vitesse de rotation Ω autour de (OX),
- le plan (P) plan de section de la pale au rayon r, perpendiculaire à l'axe (OZ) permettant de définir le calage β et la corde l d'une section droite de pale (supposée quasi-rectiligne).

La figure 2.2 définit les éléments d'un profil et leurs terminologies. L'incidence α du profil est positive sur cette figure.



FIG. 2.2 Définition d'un profil

Les caractéristiques aérodynamiques d'un rotor sont définies par :

- les polaires des profils qui sont les courbes définissant l'évolution des coefficients aérodynamiques C_l (portance), C_d (traînée) et C_m (moment de tangage) en fonction de l'incidence α du profil,
- le début, R_{da} , et la fin, R_{fa} , de la zone aérodynamique d'une pale qui est comprise dans l'intervalle $[R_0, R]$,
- l'évolution en envergure du foyer aérodynamique A (point où le moment des forces aérodynamiques $\underline{\mathcal{M}}_{a}^{A}$ est nul).

2.3 Théorie de l'élément de pale

Cette théorie trouve ses origines dans les travaux de William Froude en 1878, son développement complet est dû à Stefan Drzewiecki entre 1892 et 1920. Dans cette description l'écoulement autour des profils est supposé bidimensionnel, c'est-à-dire que l'écoulement de l'air est compris dans le plan du profil. Ainsi, les différents profils sont considérés comme ayant un comportement aérodynamique indépendant des profils voisins. Cette hypothèse revient à considérer une pale d'envergure infinie et que nous allons bien entendu être amenés à revoir dans un prochain paragraphe.

2.3.1 Diagramme des vitesses

Considérons le profil de pale défini dans le plan (P) situé au rayon r. Si la vitesse du vent infini amont est égale à V_0 et la vitesse de rotation du rotor est égale à Ω , alors le diagramme des vitesses de l'écoulement autour du profil est donné par la figure 2.3.

On définit alors au rayon r les grandeurs suivantes :

 $-W_0$ la vitesse relative de l'écoulement telle que

$$W_0 = \sqrt{V_0^2 + U_0^2}$$
 avec $U_0 = -\Omega r$ (2.1)



FIG. 2.3 Diagramme des vitesses d'un profil

- $-\beta$ le calage du profil,
- ϕ_0 l'angle apparent du vent d'intensité W_0 par rapport à (Π) ,
- α_0 l'incidence du profil.

2.3.2 Diagramme des efforts

L'analyse du champ des pressions sur un profil quelconque montre que, pour un angle d'incidence α supérieur à l'angle d'incidence de portance nulle, l'intradros du profil est soumis à une surpression, alors que l'extradros du profil est soumis à une dépression. Ce champ de pression sur l'élément de pale d'envergure dr donne naissance à une force aérodynamique élémentaire df_a qui se décompose en deux forces élémentaires de portance et de traînée respectivement notées df_l et df_d (figure 2.4).

 df_l et df_d s'expriment à l'aide des coefficients de portance C_l et de traînée C_d adimensionnés tels que:

$$\begin{cases} C_{l} = \frac{df_{l}}{\frac{1}{2}\rho \ l \ W_{0}^{2}dr} \\ C_{d} = \frac{df_{d}}{\frac{1}{2}\rho \ l \ W_{0}^{2}dr} \end{cases}$$
(2.2)

où ρ est la masse volumique de l'air. Ces forces s'exercent au foyer aérodynamique A du profil, point pour lequel le moment de tangage élémentaire $d\mathcal{M}_a^P$ défini à l'aide du coefficient de tangage C_m est nul:

$$d\mathcal{M}_a^P = \frac{1}{2} C_m \rho \ l \ W_0^2 \ dr \tag{2.3}$$



FIG. 2.4 Diagramme des efforts

De plus, on définit Γ la circulation autour du profil telle que :

$$\Gamma = \int_{(\mathcal{C})} \underline{W}_0.d\underline{l} \tag{2.4}$$

mesurée dans le champ des vitesses \underline{W}_0 sur toute courbe fermée (\mathcal{C}) extérieure au profil et contenue dans son plan. La formule de Kutta-Joukowsky relie la circulation Γ à la vitesse relative W_0 [13]:

$$df_l = \rho W_0 \Gamma dr \tag{2.5}$$

2.3.3 Extension de la théorie de l'élément de pale

Les modèles précédents postulent que l'envergure de la pale est infinie. Nous allons maintenant réviser cette hypothèse en rappelant tout d'abord la physique de l'écoulement autour d'une aile d'envergure finie pour ensuite l'étendre à celle de la pale.

Soit une aile de demi-envergure R, attaquée par un vent amont \underline{V}_0 sous l'incidence α (α supérieur à l'incidence de portance nulle). L'intradros du profil est alors en surpression et l'extradros en dépression. Par conséquent, du fait de l'envergure limitée de l'aile, son extrémité va être le lieu d'une recirculation des filets d'air de l'intradros vers l'extradros (figure 2.5).

Si l'on suit maintenant la trajectoire d'une particule fluide sur l'extradros de l'aile, celle-ci ne sera pas parallèle à la direction du vent amont \underline{V}_0 du fait de la déviation du fluide des hautes pressions vers les basses pressions initiée en bord marginal. Il en est de même pour la trajectoire d'une particule fluide sur l'intradros de l'aile. Par conséquent, le cisaillement des trajectoires des particules fluides au bord de fuite de l'aile donne naissance à des tourbillons appelés *tourbillons libres*.



FIG. 2.5 Création d'un tourbillon libre

Finalement, l'ensemble des tourbillons libres émanant du bord de fuite définit une nappe de tourbillonnaire qui s'étire du bord de fuite vers l'infini aval de l'écoulement. Cette nappe crée, en un point M de l'aile, un champ de vitesse *(figure 2.6)* qui, pour un tourbillon libre d'intensité $d\Gamma$ issu de l'envergure r, s'exprime par la loi de Biot et Savart [13]:

$$dw = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma(r)}{z-r}$$
(2.6)

Par suite, au droit de l'aile, la vitesse relative W_0 de l'écoulement autour d'un profil doit être corrigée par la composante w de la vitesse induite par la présence de la nappe tourbillonnaire:

$$w(z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{d\Gamma(r)}{z-r}$$
 (2.7)



FIG. 2.6 Vitesse induite par un tourbillon libre

Considérons maintenant le cas de la pale: par rapport à l'aile, son mouvement de rotation va légèrement compliquer la détermination de la vitesse induite w. En effet, le triangle des vitesses de la *figure 2.3* est modifié par la prise en compte de l'enroulement de la nappe tourbillonnaire attachée à chaque pale. Deux composantes u et v vont alors être introduites: u pour la composante tangentielle ou d'entraînement et v pour la composante axiale de la vitesse induite \underline{w} au niveau du profil comme le montre la *figure 2.7*.

La théorie de l'élément de pale, telle qu'on la nomme aujourd'hui, prend maintenant systématiquement en compte les composantes v et u des vitesses induites. On notera que vse retranche à V car la fonction d'un rotor éolien est de prélever de l'énergie cinétique au fluide qui le traverse. Pour la même raison, le fluide est entraîné dans le sens de rotation



FIG. 2.7 Modification du triangle des vitesses par les vitesses induites

inverse de celui de l'hélice aéromotrice. D'où l'addition à U de la composante u. La vitesse relative W_0 de la relation (2.1) devient alors :

$$W = \sqrt{(V_0 - v)^2 + (U_0 + u)^2}$$
(2.8)

L'incidence α_0 prend maintenant la valeur $\alpha = \alpha_0 + \alpha_i$, α_i étant l'angle d'incidence induit. Par conséquent, le diagramme des efforts aérodynamiques se trouve modifié et il est nécessaire de pouvoir calculer les composantes de la vitesse induite en chaque point du rotor aérodynamiquement actif. L'une des principales difficultés réside dans la détermination précise de ces composantes et il existe plusieurs méthodes pour y parvenir. Parmi celles-ci, nous allons examiner deux méthodes de calcul de ces vitesses induites.

Chapitre 3

Détermination des vitesses induites

3.1 Introduction

L'étude de l'écoulement autour d'une pale (cf. § 2.3.3) nous montre la présence d'une nappe tourbillonnaire hélicoïdale s'étirant du bord de fuite de la pale vers l'infini aval de l'écoulement. L'existence de cette nappe est due à l'envergure finie de la pale et l'ensemble des nappes attachées à chaque pale forme le sillage du rotor. Par suite, l'écoulement en aval du plan rotor est perturbé et cette région est délimitée par l'enveloppe du sillage. Pour déterminer les efforts aérodynamiques sur les pales, nous devons étudier les caractéristiques de l'écoulement au niveau du plan rotor. En effet, nous avons vu au paragraphe 2.3.2 que les composantes des efforts élémentaires agissant sur une pale d'envergure dr sont liés aux coefficients aérodynamiques par la relation (2.2). Or ces coefficients sont fonctions de l'incidence α et de la vitesse relative de l'écoulement W dont leur valeur va être respectivement modifiée par l'angle d'incidence induit α_i et par la composante tangentielle u et axiale v de la vitesse induite par la présence du sillage (cf. § 2.3.3). Cependant, dans l'objectif de déterminer ces composantes induites, l'analyse de l'écoulement sur un rotor peut être envisagée suivant deux approches. La première consiste à réduire le rotor à un disque de discontinuité de pression sans épaisseur et d'appliquer les lois de conservation (masse, quantité de mouvement et énergie) en des points judicieusement choisis de l'écoulement : la description du sillage se réduit alors à son enveloppe et à une relation entre la vitesse induite axiale au niveau du plan rotor à celle en infini aval du sillage. La seconde approche est basée sur une détermination complète du sillage par l'application de la théorie tourbillonnaire : les nappes hélicoïdales sont discrétisées par des singularités de type tourbillon et les caractéristiques géométriques du sillage permettent alors d'évaluer la vitesse de l'écoulement en tout point du sillage. Notons que cette dernière description est celle qui se rapproche le plus de la réalité physique de l'écoulement en aval du plan rotor et est donc privilégiée dans les codes de calcul destinés à la recherche (cf. § I-1.2). Malgré tout, l'historique et la facilité de mise en oeuvre des théories basées sur les lois de conservation leur laissent encore une large place dans de nombreux codes éoliens. Cependant, les limitations de cette théorie et les capacités de calcul grandissantes des ordinateurs actuels poussent de nombreux auteurs vers la mise en oeuvre de la théorie tourbillonnaire. Dans le but de porter la prédiction des efforts aérodynamiques à hauteur des applications de cette théorie, nous proposons également une mise en oeuvre d'une analyse de l'écoulement par une méthode dite de sillage prescrit dans la seconde partie du chapitre.

3.2 Application de la théorie combinée de la quantité de mouvement et de l'élément de pale

L'application des lois de conservation sur les rotors date de l'étude des hélices marines par Rankine (1865) [14] et Froude (1885). Vers 1920, la théorie de l'élément de pale (cf. § 2.3) fut combinée à la théorie de la quantité de mouvement. D'une mise en oeuvre très simple, elle est encore largement utilisée dans les codes éoliens (cf. § I-1.4). Il nous a donc paru utile de mettre en oeuvre cette théorie combinée en ayant cependant soin d'y apporter les améliorations suivantes, correspondant à l'état de l'art¹³:

- la prise en compte du désalignement du vent amont avec l'axe de la nacelle (Yawing effect). Une correction de la composante axiale v sera alors introduite,
- l'introduction des effets tridimensionnels sur l'écoulement autour de la pale qui se traduit par une correction des coefficients aérodynamiques C_l , C_d et C_m donnés par les polaires des profils (bidimensionnelles),
- l'application d'un modèle de post-décrochage.

Les hypothèses retenues dans l'application de la théorie combinée sous sa forme la plus simple sont les suivantes :

- le rotor est modélisé par un disque actif (Actuator Disk) qui est une surface circulaire sans épaisseur, siège d'une discontinuité de pression et qui par conséquent soumet le fluide qui le traverse à une décélération,
- le chargement du disque rotor est supposé stationnaire, mais peut varier sur la surface du disque,
- le disque actif supporte un couple qui communique au fluide qui le traverse un moment angulaire,
- l'écoulement est stationnaire et perpendiculaire au plan rotor,
- le fluide est parfait, incompressible,
- les effets de viscosité n'interviennent qu'au niveau du fonctionnement des profils et le coefficient de portance C_l d'un profil est égal au C_l de ce même profil attaqué en allongement infini avec l'incidence α (hypothèse de Prandtl),
- l'effet de la pesanteur sur l'écoulement est négligé.

On remarque que supposer une distribution des charges sur la *totalité* du disque équivaut à considérer une infinité de pales. Cette hypothèse sera néanmoins reconsidérée dans nos développements.

^{13.} A l'exception de la prise en compte des régimes de vent instationnaires

3.2.1 Relation entre la vitesse induite axiale dans la plan rotor et dans le sillage lointain

La théorie de Rankine-Froude établit une relation importante entre la vitesse induite axiale v au niveau du disque rotor et la vitesse induite axiale dans le sillage lointain (région de l'écoulement aval où le sillage est en équilibre). D'après le théorème de la quantité de mouvement (théorème d'Euler), la force axiale T s'exerçant sur le disque rotor est donnée par:

$$T = M(V_0 - V_1) = \rho A(V_0 - v)(V_0 - V_1)$$
(3.1)



FIG. 3.1 Écoulement idéal à travers un disque actif sans rotation

avec:

- \dot{M} débit massique de l'air traversant le disque rotor [kg/s],
- ρ masse volumique de l'air $[kg/m^3]$,
- A surface du disque rotor $[m^2]$,
- V_0 vitesse du vent infini amont [m/s],
- v vitesse induite axiale au niveau du disque rotor [m/s],
- V_1 vitesse du vent infini aval [m/s].

On note que l'enveloppe du sillage se dilate nécessairement en aval du plan rotor, car celui ci prélève de l'énergie cinétique au fluide qui le traverse et la loi de conservation de la masse implique une augmentation de la section de l'enveloppe du sillage. En outre, au voisinage immédiat du disque rotor *(figure 3.1)*, la chute de pression causée par la traversée du fluide nous permet d'écrire:

$$T = A(p_{amont} - p_{aval}) \tag{3.2}$$

L'application successive du théorème de Bernoulli sur une ligne de courant partant de l'infini amont jusqu'au voisinage amont du disque rotor et ensuite sur une ligne de courant partant du voisinage aval du disque rotor jusqu'à l'infini aval de l'écoulement nous donne $(p_{atm} \text{ pression atmosphérique})$:

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 + p_{atm} = \frac{1}{2}\rho (V_0 - v)^2 + p_{amont}$$
(3.3)

$$\frac{1}{2}\rho(V_0 - v)^2 + p_{aval} = \frac{1}{2}\rho V_1^2 + p_{atm}$$
(3.4)

En sommant ces deux égalités et en introduisant T à l'aide de la relation (3.2), alors :

$$T = \frac{1}{2}\rho A[V_0^2 - V_1^2]$$
(3.5)

Par suite, en identifiant les équations (3.1) et (3.5), nous obtenons :

$$V_1 = V_0 - 2v (3.6)$$

Autrement dit, l'intensité de la composante axiale de la vitesse induite dans le sillage lointain est le double de celle dans le plan du rotor. Par conséquent, la puissance P du rotor est donnée par :

$$P = \frac{1}{2}\rho A(V_0^2 - V_1^2)(V_0 - v)$$
(3.7)

Si l'on pose $a = v/V_0$, alors le coefficient de puissance C_P du rotor est le quotient de *P* par $A P_V$ défini par l'équation (1.1):

$$C_P = \frac{P}{0, 5\rho V_0^3 A} = 4a(1-a)^2 \tag{3.8}$$

Ce coefficient de puissance est maximal lorsque $\frac{dC_P}{da} = 0$, c'est-à-dire a = 1/3 (figure 3.2). Dans ce cas:

$$C_{P,Max} = \frac{16}{27} = 0,593 \tag{3.9}$$



FIG. 3.2 Représentation du coefficient de puissance C_p

Il s'agit du rendement théorique maximal que l'on pourrait obtenir pour une éolienne idéale, appelé aussi limite de Betz. Mais, elle ne représente pas le rendement maximum du rotor puisqu'en fait $P_V = \frac{1}{2}\rho V_0^2(V_0 - v)$ au plan rotor. Le rendement η du rotor vaut:

$$\eta = \frac{P}{0,5\rho V_0^2(V_0 - v)} = 4a(1 - a)$$
(3.10)

Le but étant de tendre vers les conditions idéales, c'est-à-dire lorsque le coefficient de puissance C_p est maximal ($C_{P,Max} = 0,593$), le rendement maximal du rotor est alors égal à 88,8 % pour a = 1/3. On ne pourra jamais dépasser cette valeur pour aller jusqu'à a = 1/2 pour laquelle $\eta = 100$ %.

3.2.2 Calcul des vitesses induites par la méthode de Glauert

Glauert [15] proposa en 1935 une méthode simple de détermination des composantes des vitesses induites u et v sur la base d'un disque actif en rotation et de la théorie de l'élément de pale afin d'introduire les effets de viscosité de l'écoulement autour des profils. La résultante élémentaire des forces aérodynamiques df_a se décompose en un effort axial df_X et un effort tangentiel df_Y dans un repère (OXYZ) en fonction de df_d et df_l (figure 2.4, l'angle ϕ_0 étant remplacé par ϕ défini sur la figure 2.7):

$$\begin{cases} df_X = df_l \cos \phi + df_d \sin \phi \\ df_Y = df_l \sin \phi - df_d \cos \phi \end{cases}$$
(3.11)

Les efforts sur un élément de pale d'envergure dr et de corde l s'expriment quant à eux par :

$$\begin{cases} df_{l} = \frac{1}{2}\rho W^{2} \ l \ C_{l} \ dr \\ df_{d} = \frac{1}{2}\rho W^{2} \ l \ C_{d} \ dr \end{cases}$$
(3.12)

De plus les coefficients liés au repère de l'hélice peuvent également se décomposer de la façon suivante:

$$\begin{cases} C_{f_X} = C_l \cos \phi + C_d \sin \phi \\ C_{f_Y} = C_l \sin \phi - C_d \cos \phi \end{cases}$$
(3.13)

Par suite:

$$\frac{df_X}{dr} = \frac{1}{2}\rho W^2 \, l \, C_{f_X} \tag{3.14a}$$

$$\frac{dC}{dr} = N_P \cdot r \frac{df_Y}{dr} = \frac{1}{2} N_P \rho \, l \, r \, W^2 C_{f_Y}$$
(3.14b)

où dC est le couple élémentaire s'exerçant sur le rotor. Le débit massique du fluide qui traverse le disque éolien entre les cercles de rayon r et r + dr, s'exprime par :

$$d\dot{M} = \rho(V_0 - v)2\pi r \, dr \tag{3.15}$$

En projection dans le plan de rotation (Π) et en supposant égale à 2u la composante tangentielle de la vitesse induite à l'infini aval:

$$Fr[U_0 - (U_0 + 2u)]dM = -dC$$
(3.16)

où F est le facteur de pertes en extrémité donné par Prandtl, qui permet de tenir compte du nombre fini de pales N_p du rotor et que nous exposerons au paragraphe suivant. En remarquant que (figure 2.7):

$$W = \frac{U_0 + u}{\cos\phi} \tag{3.17}$$

et:

$$V_0 - v = W \sin \phi = (U_0 + u) \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$$
(3.18)

alors, les relations (3.14b), (3.15) et (3.16) nous donnent:

$$\frac{dC}{dr} = 4\pi F r^2 \rho (U_0 + u) \frac{\sin \phi}{\cos \phi} u = \frac{1}{2} N_P \rho \, l \, r \frac{(U_0 + u)^2}{\cos^2 \phi} C_{f_Y}$$
(3.19)

Si l'on pose $\gamma = \frac{N_P l}{2\pi r}$ (défini comme le coefficient de solidité local du rotor), alors :

$$u = U_0 \frac{\gamma C_{f_Y}}{4F \sin \phi \cos \phi - \gamma C_{f_Y}}$$
(3.20)

En projection sur (OX):

$$F[(V_0 - 2v) - V_0]d\dot{M} = -N_P \, df_X + \sum p_s \, dS \tag{3.21}$$

Si l'on admet que, quelle que soit la ligne de courant empruntée, le fluide subit la même variation de pression en amont et en aval du disque $\sum p_s dS = 0$ et en remarquant que $W = \frac{V_0 - v}{\sin \phi}$, alors :

$$N_P \frac{df_X}{dr} = 4\pi F r \rho (V_0 - v) v = \frac{1}{2} N_P \rho \, l \, \frac{(V_0 - v)^2}{\sin^2 \phi} C_{f_X}$$
(3.22)

Soit, après résolution:

$$v = V_0 \frac{\gamma C_{f_V}}{\gamma C_{f_V} + 4F \sin^2 \phi} \tag{3.23}$$

3.2.3 Facteur de pertes en extrémité

L'hypothèse initiale du nombre infini de pales peut être corrigée en employant un facteur de correction F appelé facteur de pertes en extrémité (*Tip-Loss Factor*). Par définition :

$$F = \frac{\Gamma}{\Gamma_{\infty}} \tag{3.24}$$

où Γ_{∞} est la circulation associée au rotor lorsque le nombre de pales N_p tend vers l'infini et que la corde des profils tend vers zéro (modèle du disque actif). Un facteur de correction F a été proposé par Betz [16] et Prandtl [17]. Cependant, pour les éoliennes et en l'absence de mesures sur les pertes en extrémités de pales, le modèle de Prandtl est le plus recommandé puisqu'il se base sur les arguments suivants [1]:

- il prédit une variation continue de la circulation ce qui est qualitativement en accord avec le comportement des rotors éoliens,

- le calcul de la force axiale et de la puissance effectué avec ce modèle recoupe les mesures expérimentales,
- ce modèle est facile à programmer.

Dans la pratique, le facteur de pertes en extrémité proposé par Prandtl vaut :

$$F = \frac{2}{\pi} \arccos\left[e^{-\frac{N_p(R-r)}{2r\sin\phi}}\right]$$
(3.25)

où r est la position courante en envergure et ϕ l'angle défini par la figure 2.7.

3.2.4 Prise en compte d'un désalignement du vent amont

La configuration de fonctionnement du rotor éolien sous un vent amont désaligné par rapport à son axe de rotation est comparable au cas du vol avançant *(foward flight)* d'un hélicoptère. Par conséquent, les modèles proposant de corriger la composante axiale de la vitesse induite découlent directement des développements avancés sur les rotors d'hélicoptères. Bien entendu, nous retrouverons les deux approches déjà évoquées pour l'analyse de l'écoulement sur le rotor : l'application de la théorie de la quantité de mouvement et la théorie tourbillonnaire. C'est pourquoi nous en présentons, dans un premier temps, les éléments essentiels et dans un second temps, nous faisons une synthèse des formulations qui sont appliquées par les laboratoires de recherche.

Les points suivants doivent être précisés lorsque l'on souhaite déterminer la composante axiale de la vitesse induite au niveau du plan rotor :

- sa valeur moyennée sur le disque rotor, v_0 ,
- sa distribution sur la surface du disque rotor, fonction de l'azimut et de la position radiale où elle est évaluée.

Commençons par déterminer la valeur moyennée, v_0 , de la composante axiale de la vitesse induite sur le disque rotor. Il s'agit en fait d'étendre la relation (3.1) en écrivant :

$$T = \rho A | \underline{V} + \underline{v} | 2v \tag{3.26}$$

"||" représentant la norme du vecteur. Glauert [18] suppose alors que cette nouvelle expression reste valide pour le cas d'un angle ϕ_y compris entre 0 et 90 degrés. On notera que la force axiale T et la vitesse induite v restent perpendiculaires au plan rotor. Par conséquent, en réintroduisant la relation (3.26) dans l'égalité (3.21), nous pouvons en déduire v:

$$df_X = 2a\rho V_0 V' dA$$
 avec $V' = \sqrt{(V_0 \cos \phi_y - aV_0)^2 + (V_0 \sin \phi_y)^2}$ (3.27)

avec $a = v/V_0$, facteur de correction de la composante axiale de la vitesse induite. Les valeurs de v sont déterminées sur des anneaux de largeur dr et sa valeur moyennée v_0 sur le disque rotor est égale à :

$$v_0 = \frac{1}{R - R_0} \int_{R_0}^R v(r) \, dr \tag{3.28}$$

Nous pouvons maintenant aborder la distribution de cette composante axiale sur la surface du disque en remarquant que l'azimut d'une pale est une fonction périodique (2π) et que v peut alors être développée en série de Fourier telle que, pour une position radiale r donnée :

$$v = v_0 f_0(r/R) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(v_{c,n}(r/R, \phi_y) \cos(n\phi_y) + v_{s,n}(r/R, \phi_y) \sin(n\phi_y) \right)$$
(3.29)

où la moyenne sur le disque de la fonction $f_0(r/R)$ doit être égale à 1, soit :

$$\frac{2}{R^2} \int_0^R r f_0(r/R) \, dr = 1 \tag{3.30}$$

Glauert ne retient de l'équation (3.29) que les termes du 1^{er} ordre (n = 1), d'où:

$$v = v_0 \left[1 - K_c \frac{r}{R} \sin \phi_{r,b} \right] \tag{3.31}$$

où $\phi_{r,b}$ est le déphasage de la pale *b* avec la verticale et v_0 la valeur moyennée de la composante axiale selon la relation (3.28). Coleman, Feingold et Stempin [19] trouvèrent une relation simple entre le coefficient K_c de l'expression de Glauert et l'inclinaison du sillage par rapport à l'axe du rotor (figure 3.3):

$$K_c = \tan(\chi/2) \tag{3.32}$$

Puis d'autres auteurs, toujours dans le domaine des hélicoptères, proposèrent différentes expressions de K_c . Néanmoins, ces formulations dépendent toutes de l'angle d'obliquité χ (skew angle) du sillage qui s'exprime par sa tangente:

$$\tan \chi = \frac{V \sin \phi_y}{V \cos \phi_y - v} \tag{3.33}$$



FIG. 3.3 Effet du désalignement du vent sur la géométrie du sillage

Bien qu'il existe également une vitesse induite tangentielle u, sa modification induite par l'obliquité du sillage est estimée comme ayant un effet négligeable devant v. Le désalignement se traduit par la modification de l'angle ϕ (figure 2.3) et de la vitesse relative Wde l'écoulement sur le profil au rayon r et pour la position azimutale $\phi_{r,b}$ de la pale b:

$$\tan \phi = \frac{V \cos \phi_y - v}{\Omega r + V \sin \phi_y \cos \phi_{r,b} + u}$$
(3.34)

et:

$$W = \sqrt{(V\cos\phi_y - v)^2 + (\Omega r + V\sin\phi_y\cos\phi_{r,b} + u)^2}$$
(3.35)

En terme d'efforts, et à cause de la présence du $\cos \phi_{r,b}$, le désalignement crée un moment aérodynamique de tangage (rotation autour de (OY)). Cependant, lorsqu'on moyenne celui-ci sur une révolution de pale, il ne correspond pas à un moment de lacet (rotation autour de (OZ)) comme on le mesurerait dans la réalité et qui tend à restituer un désalignement nul. On notera que les travaux de Schepers [20] constituent une excellente synthèse qu'il conviendra de consulter si l'on souhaite aller plus avant dans le développement de ces modèles. En première approche, les modèles que nous venons d'exposer semblent suffire et des améliorations peuvent toujours être apportées à la lumière des développements les plus récents. Cependant, dans le souci de les mettre rapidement en oeuvre, nous profitons des recherches récentes effectuées par certains centres. Parmi les laboratoires [21] qui ont travaillé sur ces modèles de correction, nous en avons retenu trois :

1. Modèle de correction de l'ECN (Energieonderzoek Centrum Nederland)

$$v = v_0 \left[1 - f\left(\frac{r}{R}\right) \tan\frac{\chi}{2} \sin\phi_{r,b} \right]$$
(3.36)

avec $f\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{15\pi}{64} \frac{r}{R}$ (d'après le modèle statique de Pitt and Peters). Il faut souligner que v_0 est déterminée sur des anneaux de largeur dr selon l'expression (3.27) et n'est donc pas sa valeur moyennée sur le disque rotor. L'ECN remarque par ailleurs que $f\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{r}{R} \left(\frac{15\pi}{64}\right)^{2.5}$ donne de meilleurs corrélations avec les relevés expérimentaux auxquels ils ont pu procéder.

2. Modèle de correction TUD (Technical University of Denmark). Très similaire au précédent, il se présente sous la forme

$$v = v_0 \left[1 - f\left(\frac{r}{R}\right) \tan\frac{\chi}{2} \sin\phi_{r,b} \right]$$
(3.37)

Avec $f\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{r}{R} + 0.4\left(\frac{r}{R}\right)^3 + 0.4\left(\frac{r}{R}\right)^5$ et v_0 selon le relation (3.28).

3. Modèle de correction de TA (Tecknikgruppen AB). Ce modèle porte sur la correction du coefficient a de la vitesse induite axiale (v = aV)

$$a = a_0 \left[1 - f\left(\frac{r}{R}\right) \sin \phi_{r,b} \right]$$
(3.38)

avec

-
$$f\left(\frac{r}{R}\right) = \eta C_b \chi$$
 et χ en degré,
- $\eta = 0.63 \left(\frac{r}{R}\right) \left[1 + 1.56 \left(\frac{r}{R}\right)^2\right],$
- $C_b = C_1 + C_2 \lambda + C_3 \lambda^2 + C_4 \lambda^3$, où
• $\lambda = \frac{\Omega R}{V_0}$ rapport de vitesse d'extrémité de pale
• $C_1 = 2.6296.10^{-3}$

- $C_2 = 1.6222.10^{-3}$
- $C_3 = -1.11111.10^{-5}$
- $C_4 = -3.7037.10^{-6}$

Nous remarquons que ces modèles ont comme point commun l'utilisation de l'angle d'obliquité χ , de l'angle azimutal $\phi_{r,b}$ et d'une fonction f du quotient (r/R). Ces trois corrections ont été implantées dans notre code de calcul sous forme d'options. Notons que le choix d'un modèle par rapport à un autre est très délicat tant que des recoupements entre les résultats obtenus par le calcul avec ceux des mesures expérimentales n'ont pas été effectués. Un modèle peut s'avérer correct dans une configuration donnée et décevant dans une autre pour une même machine. En effet, les modèles aérodynamiques des rotors sont souvent établis dans le cas d'un fonctionnement nominal et l'approche des cas particuliers et/ou extrêmes ne permet plus de les appliquer directement. La preuve en est que les laboratoires ne proposent pas de modèle unique.

3.2.5 Prise en compte des effets tridimensionnels

L'écoulement autour des pales est en réalité tridimensionnel pour deux raisons majeures:

- 1. Ces dernières ont une envergure limitée provoquant une recirculation des particules fluides en extrémité et par conséquent, dévie l'écoulement principal (cf. § 2.3.3).
- 2. La rotation de la pale induit, d'un part, un gradient suivant l'envergure de la pression dynamique, et d'autre part, des forces centrifuges sur la couche limite de l'écoulement autour des profils.

Or, les polaires d'un profil sont déterminées expérimentalement sur une aile en supposant que l'écoulement est parfaitement bidimensionnel dans le plan du profil. Afin de réajuster les valeurs des coefficients C_l et C_d en fonction des conditions d'écoulement tridimensionnel, des travaux complémentaires ont été menés sur ces deux effets.



FIG. 3.4 Variation des coefficients C_l et C_d en fonction du rapport de forme de l'aile - Définition des régimes d'écoulement - NACA 4415, $R_e = 0, 5.10^6$ [1]

Pour les effets d'envergure limitée, clairement mis en évidence sur la *figure 3.4*, notamment pour des incidences supérieures à 30 degrés, on utilise, mais de façon inverse, les corrections proposées [22] pour les essais en soufflerie où les coefficients aérodynamiques sont ajustés pour tenir compte des effets de parois de la veine d'essai:

$$C_{l} = C'_{l}$$

$$C_{d} = C'_{d} + \frac{C^{2}_{l}}{\pi \mu}$$

$$\alpha = \alpha' + \frac{57, 3C_{l}}{\pi \mu}$$
(3.39)

où C'_l , C'_d et α' sont respectivement les coefficients aérodynamiques et l'angle d'incidence pour une aile d'envergure infinie. $\mu = 2R/l$ est le rapport de forme de l'aile (avec Rdemi-envergure et l corde moyenne).

Examinons maintenant, les effets dûs à la rotation. Puisque la vitesse de rotation de la pale Ωr est proportionnelle au rayon r, les forces centrifuges déplacent la couche limite et les points de décollement en direction de l'extrémité de la pale. D'autre part, la couche limite va se séparer de la pale dans la région du bord de fuite. Ce mécanisme est à la base du retardement du décollement de l'écoulement vers des angles d'incidence plus grands que ceux escomptés. Ce phénomène a un effet significatif sur le coefficient de portance C_l et Snel *et al.* [24] proposent une loi empirique pour prendre en compte cet effet :



FIG. 3.5 Décollement de la couche limite

$$C_{l,3D} = C_{l,2D} + 3, 1 \left(\frac{l}{r}\right)^2 (C_{l,inv} - C_{l,2D})$$
(3.40)

où $C_{l,inv}$ est le coefficient de portance pour un fluide non visqueux sans décollement. L'utilisation de ce modèle doit cependant suivre quelques recommandations:

- le terme $3, 1(l/r)^2$ prend la valeur maximale 1,0 car des coefficients de portance plus importants que ceux donnés pour des fluides non visqueux sont irréalistes,
- la correction s'applique depuis la partie linéaire de la courbe de portance (écoulement laminaire) jusqu'à un angle d'incidence d'environ 30 degrés. Pour des angles supérieurs, C_l est linéaire entre les valeurs 2D à 30 degrés et 45 degrés,
- pour une position en envergure supérieure à 80% du rayon d'extrémité R, aucune correction ne doit être appliquée.

Malgré tout, leurs auteurs notent l'imprécision de ce modèle après le décrochage [10] et tentent d'y apporter des raffinements. D'autre part, Montgomerie [23] propose un modèle de correction faisant intervenir l'épaisseur relative du profil (quotient de sa corde par son épaisseur maximale) et des coefficients issus de mesures que nous avons repris dans notre code $\mathcal{EOL}1$. D'une programmation très simple, ce modèle semble convenir lorsque la vitesse de rotation des pales devient élevée, correspondant à un effet tridimensionnel par rotation important.

3.2.6 Modèle de post-décrochage

Classiquement, les polaires des profils sont tirées de catalogues diffusés dans les bureaux d'études des avionneurs. Malheureusement, l'étendue en incidence de ces polaires se limite à un intervalle de $[-15^\circ, +15^\circ]$, ce qui est largement insuffisant pour des applications sur les pales d'éoliennes. En effet, il n'est pas rare que leurs profils travaillent au-delà de ces valeurs pour deux raisons : la première est liée au type de rotor et la seconde aux conditions d'écoulement. Pour des rotors de type à *calage fixe* (cf. § I-3.1.2), les profils sont amenés à travailler dans trois zones distinctes de leurs polaires (figure 3.4):

- le régime attaché (partie linéaire de la polaire correspondant à un régime d'écoulement laminaire autour du profil),
- le régime à portance maximale au voisinage du décrochage (séparation de la couche limite avec la paroi du profil au point de décollement),
- le régime dit de plaque plane correspondant à un décrochage complet de la couche limite (point de décollement localisé au bord d'attaque du profil) pour lequel le profil se comporte de façon similaire à une simple plaque plane.

D'autre part, même pour un rotor à calage variable, les pales doivent être orientées de façon à récupérer une portance maximale et donc travaillent au voisinage du décrochage. Or, les variations des conditions de l'écoulement comme le désalignement ou simplement le cisaillement de vent peuvent engendrer un décrochage d'une portion ou de la totalité de la pale dans certains secteurs azimutaux. Par conséquent, il est nécessaire de proposer des coefficients aérodynamiques pour des incidences supérieures à 15 degrés si l'on ne possède pas de polaires qui ont été spécifiquement tracées pour une application éolienne. En pratique, les polaires complètes sont rarement disponibles dans le domaine public. Un modèle empirique pour compléter les données bidimensionnelles sur des profils a été développé par Viterna et Corrigan [25] avec les trois hypothèses suivantes:

- 1. en régime attaché, la relation (3.39) modélise correctement les effets d'extrémités et aucun facteur de correction F(3.25) n'est nécessaire,
- 2. en régime à portance maximale, la force de succion (force qui tend à recoller la couche limite) ne diminue pas avec une incidence croissante,
- 3. en régime dit de plaque plane, le paramètre dominant est la valeur maximale du coefficient de traînée et il est déterminé par le rapport de forme μ de la pale.

Ce modèle de post-décrochage a été mis en place dans le code $\mathcal{EOL}1$:

- pour $\alpha \geq \alpha_s$, α_s angle de décrochage (stall)

$$C_{l} = \frac{C_{d,Max}}{2} \sin(2\alpha) + K_{l} \frac{\cos^{2} \alpha}{\sin \alpha}$$

$$C_{d} = C_{d,Max} \sin^{2} \alpha + K_{d} \cos \alpha$$

$$K_{l} = (C_{l,s} - C_{d,Max} \sin \alpha_{s} \cos \alpha_{s}) \frac{\sin \alpha}{\cos^{2} \alpha}$$

$$K_{d} = \frac{C_{d,s} - C_{d,Max} \sin^{2} \alpha_{s}}{\cos \alpha_{s}}$$
(3.41)

- pour $\mu \leq 50$

$$C_{d,Max} = 1,11+0,018\mu \tag{3.42}$$

- pour $\mu > 50$

$$C_{d,Max} = 2,01 \tag{3.43}$$

où $C_{d,Max}$ est le coefficient de traînée maximale, $C_{l,s}$ et $C_{d,s}$ sont respectivement le coefficient de portance et de traînée à l'incidence de décrochage α_s .

3.2.7 Algorithme de calcul des vitesses induites

Suite à ces développements, nous sommes maintenant en mesure d'établir l'algorithme de calcul des composantes de la vitesse induite en tout point d'une pale. La zone aérodynamique de celle-ci, définie par R_{da} et R_{fa} , est discrétisée par N_{Seg} segments de longueur Δr (figure 3.6).



FIG. 3.6 Discrétisation d'une pale pour le calcul des composantes de la vitesse induite au rayon r

Les composantes u et v de la vitesse induite sont alors calculées au centre de chaque segment que nous appellerons rayon de contrôle R_{Ctrl} . Les différentes étapes pour le calcul de u et v se résument par l'enchaînement des opérations suivantes (sans désalignement du vent amont):

1. Initialisation v = 0 et u = 0Pour le $i^{\text{ème}}$ pas

- 2. calcul de ϕ par $\tan\phi=\frac{V_0-v}{U_0+u}$
- 3. calcul de α avec $\alpha = \phi \beta$
- 4. calcul de C_d et C_l (expérimentalement connus en fonction de α)
- 5. Correction de C_d et C_l
- 6. calcul de C_{f_X} et C_{f_Y} (3.13)
- 7. calcul de γ

8. calcul de
$$F = \frac{2}{\pi} \arccos\left[e^{-\frac{N_p}{2}\frac{R-r}{r\sin\phi}}\right]$$

9. calcul de u et v par les formules (3.20) et (3.23)

10. Si $|u_i - u_{i-1}| < \epsilon$ et $|v_i - v_{i-1}| < \epsilon$, arrêt du processus sinon, retour à l'étape No. 2.

Les composantes u et v calculées vont nous permettre de déduire les efforts élémentaires Δf_l et Δf_d sur chaque segment grâce à la relation (3.12). Cette discrétisation nous donne une répartition en "marches d'escaliers" de la distribution des efforts aérodynamiques puisque l'on suppose qu'au rayon r, Δf_l et Δf_d sont constants sur l'intervalle $[r - \Delta r/2, r + \Delta r/2]$. L'erreur introduite par cette approximation diminuera avec un nombre croissant de segment N_{Seg} qu'il conviendra donc de fixer correctement en fonction de la précision et de la rapidité d'exécution des calculs souhaitées.

3.3 Analyse par sillage prescrit

Parmi les applications de la théorie tourbillonnaire, l'analyse du sillage du rotor par une méthode dite de sillage prescrit semble être un compromis intéressant (cf. §I-1.2) entre l'analyse par sillage libre et celle par sillage rigide pour laquelle le sillage est réduit à des surfaces hélicoïdales tourbillonnaires de diamètre et de pas constant, se déplaçant à une vitesse constante du plan rotor vers l'infini aval de l'écoulement. Notre motivation pour la modélisation du sillage par l'application de la théorie tourbillonnaire réside dans sa capacité à intégrer la géométrie réelle de l'écoulement en aval du plan rotor. D'autre part, il n'est plus question ici de raisonner avec un nombre infini de pales qui serait ensuite corrigé par un facteur ni même, à la limite, de considérer un rotor plan. Par conséquent, nous pouvons préserver la géométrie exacte du rotor. Il faut souligner également que le triangle respectif des vitesses de chaque profil est tributaire de l'ensemble du sillage. La théorie combinée ne raisonnait, quant à elle, que sur des tubes de courant concentriques, de rayon r et d'épaisseur dr totalement indépendants les uns des autres. Au final, une description plus fine du sillage que celle proposée par la théorie combinée (cf. § 3.2) doit nous permettre de prédire les efforts aérodynamiques de façon plus réaliste et surtout d'introduire à terme, les effets de la turbulence sous la condition que l'on puisse les considérer comme une succession d'états stationnaires. Dans le cas contraire, une analyse par sillage libre s'impose.

3.3.1 Principe de l'analyse

Le sillage du rotor se caractérise par sa géométrie. Celle-ci est fixée par le pas des nappes hélicoïdales ainsi que leur rayon intérieur R_0 et extérieur R variables suivant l'axe d'enroulement des nappes. L'objectif de toute analyse de sillage est donc de déterminer cette géométrie afin de calculer en n'importe quel point de l'espace, et plus particulièrement aux points de contrôle des pales, les vitesses induites par ce sillage. Le principe de cette analyse est de *prescrire* la géométrie du sillage en fonction des vitesses induites sur les pales. Cela signifie que le développement complet de la structure du sillage est établi sans tenir compte des vitesses induites par le sillage en des points appartenant à celui-ci (vitesses autoinduites) comme cela est le cas avec les analyses par sillage libre. Le résultat escompté est bien sûr une accélération substantielle de la procédure de calcul. La géométrie du sillage est obtenue de façon itérative, en partant d'une initialisation effectuée par la théorie combinée (cf. § 3.2). Sur la base de ce calcul, un sillage initial est généré. Une fois que la structure de ce sillage est connue, on assigne à chacun de ses éléments la valeur des intensités tourbillonnaires correspondant à la variation en envergure et en azimut de la circulation Γ attachée aux pales. Une nouvelle estimation des vitesses induites sur les pales dues au sillage est alors calculée à l'aide de la théorie tourbillonnaire. Cette estimation diffère du calcul initial effectué par la théorie combinée, et par suite, une procédure itérative est employée pour obtenir une solution convergente correspondant à la géométrie du sillage. Une fois que cette étape est accomplie, une géométrie réactualisée et la procédure de réactualisation est répétée jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit satisfait. Nous sommes donc en présence d'une procédure de calcul basée sur l'implémentation de deux processus itératifs imbriqués : le plus externe est gouverné par la géométrie du sillage et le second concerne la détermination des vitesses induites sur les pales. Le critère de convergence de ce dernier est en fait basé sur la convergence de la composante axiale de la vitesse induite car elle est prédominante sur l'écoulement, et le critère de convergence de la géométrie est reporté à la convergence de la circulation sur les pales. La structure du sillage est construite par l'agencement de singularités [26] de type tourbillon sur des lignes ou des surfaces. La complexité de la structure du sillage et par conséquent, la rapidité de la procédure, va dépendre du choix de la répartition des singularités, permettant ainsi de différencier les méthodes basées sur la ligne portante, la surface portante ou celle des panneaux [28].

3.3.2 Description du sillage

La description du sillage est guidée par la modélisation aérodynamique des pales. Les modèles ont été exposés avec leurs spécificités que la figure I-1.3 résume, et nous rappelons simplement qu'il en existe principalement trois : la méthode de la ligne portante, de la surface portante et des panneaux. Notre choix est guidé par la géométrie des pales et le compromis entre la précision de la méthode et sa rapidité de mise en oeuvre. Une pale d'éolienne de moyenne ou forte puissance possède un allongement $\Lambda = (R - R_0)^2/S$ important¹⁴, typiquement $10 \leq \Lambda \leq 30$. On peut alors modéliser celle-ci par un tourbillon unique d'intensité Γ variable en envergure : cette méthode constitue la plus simple des méthodes des singularités [26] et porte le nom de théorie de la ligne portante. Ce tourbillon d'intensité Γ , appelé tourbillon lié, est placé au quart avant de la corde de chaque profil, et Prandtl suggère que la variation de la circulation Γ est à rapprocher avec l'existence de tourbillons libres d'intensité

^{14.} S est la surface portante de la pale



 $d\Gamma$ en bord de fuite de l'aile qui forment la nappe tourbillonnaire *(figure 3.7)* ou encore le sillage de l'aile.

FIG. 3.7 Représentation d'une aile et de sa nappe tourbillonnaire par la méthode de la ligne portante

Il faut toutefois signaler que, dans le cas d'une application de la théorie de la ligne portante à celle des pales, une de ses hypothèses n'est plus vérifiée: la vitesse de l'écoulement amont non perturbée n'est pas uniforme puisque la vitesse relative d'attaque des profils de la pale est donnée par $W_0 = \sqrt{V_0^2 + (\Omega r)^2}$. Chaque profil est cependant considéré comme fonctionnant "isolé" dans un écoulement plan.

Le sillage est, quant à lui, constitué par les nappes tourbillonnaires hélicoïdales attachées à chaque pale. Une nappe va être discrétisée par un "maillage" suivant deux directions. La première direction est définie par un nombre N_{TL} de tourbillons libres issus de la jonction des segments du tourbillon lié *(figure 3.8)* qui représentent la variation en envergure de la circulation Γ attachée à la pale : ces tourbillons libres sont encore appelés tourbillons de bord de fuite *(trailed vorticity)*. La seconde direction est définie par une succession de tourbillons orthogonaux aux tourbillons libres et qui représentent la variation de la circulation Γ suivant la position azimutale de la pale : ces tourbillons sont encore appelés tourbillons d'étirement *(shed vorticity)*. D'autre part, l'enroulement continu d'un tourbillon libre va être ramené à une succession de segments rectilignes par une discrétisation azimutale de pas $\Delta \Psi$. La *figure 3.8* montre l'ensemble des éléments constituant le sillage discrétisé du rotor.

La vitesse induite par une ligne tourbillonnaire en un point de l'espace est donnée par la formule de Biot et Savart. Elle se présente sous la forme d'une intégrale généralisée qu'il va falloir expliciter. Cette tâche est nettement simplifiée si l'on approxime une ligne tourbillonnaire par une succession de segments rectilignes. Cela justifie la discrétisation des nappes par des segments rectilignes.


(*): existent si l'écoulement est non uniforme et/ou instationnaire

FIG. 3.8 Discrétisation du sillage (une seule nappe représentée)

3.3.3 Hypothèses

L'énoncé des hypothèses, dans le cadre où nous avons développé cette analyse par sillage prescrit, peut sembler très restrictif. Il se justifie en fait pleinement par le sens de la démarche que nous avons adoptée, et l'élaboration d'une analyse complète ne vient pas s'inscrire comme une priorité dans nos travaux (cf. § I-2.2). Cependant, cette analyse nous a permis, d'une part, de faire le point sur les différents travaux entrepris dans les laboratoires, et d'autre part, de mettre à jour les difficultés des concepts utilisés par cette méthode. Par conséquent, nos développements constituent la première phase d'élaboration d'une analyse par sillage prescrit avec les hypothèses suivantes:

- le fluide est parfait, incompressible (hypothèse générale de la théorie tourbillonnaire),
- le vent est perpendiculaire au plan rotor,
- l'écoulement amont est stationnaire dans un référentiel lié à la pale. Cela signifie que le rotor tourne à vitesse constante et qu'aucun effet de turbulences spatiales telles que le cisaillement de vent et l'effet d'ombre du pylône ainsi que temporelles (rafales) n'intervient,
- le rotor est contenu dans un plan,
- les nappes tourbillonnaires formant le sillage ont un pas constant,
- les effets de dissipation du sillage sont négligés,
- les pales sont rectilignes pour rester dans le cadre d'une application de la théorie de la ligne portante droite¹⁵,
- 15. Dans la théorie de la ligne portante courbe, il faut inclure les vitesses induites par le tourbillon lié

- les profils fonctionnent "isolés" dans un écoulement plan (hypothèse de Prandtl).

Soulignons que l'hypothèse de stationnarité et/ou d'uniformité de l'écoulement ainsi que la non prise en compte de la dissipation impliquent qu'il n'existe pas de variation azimutale de la circulation sur les pales. Par suite, la discrétisation du sillage se limite à des nappes tourbillonnaires représentées uniquement par des tourbillons libres d'intensité constante suivant l'axe d'enroulement.

3.3.4 Application de la loi de Biot et Savart sur un segment tourbillonnaire rectiligne

Les vitesses induites sont évaluées en des points particuliers de l'écoulement. En effet, dans l'introduction du principe de cette analyse (cf. § 3.3.1), nous avons souligné que la géométrie du sillage était actualisée en fonction des vitesses induites sur les pales. Par suite, des points dits de contrôle situés entre deux départs de tourbillons libres et positionnés sur le tourbillon lié à chaque pale vont être choisis comme points d'évaluation. Comme nous avons défini N_{TL} tourbillons libres, il y a $(N_{TL} - 1)$ points de contrôle. De plus, nous savons d'ores et déjà que la circulation varie fortement en extrémité de pale. C'est pourquoi une répartition linéaire des points de contrôle n'est pas forcément très adaptée à cette variation, et un resserrement des points de contrôle en extrémité de pale semble plus approprié. Ceci peut être mis en oeuvre par une répartition dite de Gauss des tourbillons libres en introduisant la variable θ telle que, pour le tourbillon libre situé à l'envergure r:

$$r_{TL} = \frac{R_{da} - R_{fa}}{2} \cos\theta + \frac{R_{da} + R_{fa}}{2}$$
(3.44)

avec $\theta \in [0, \pi]$. D'autre part, l'intensité $d\Gamma$ des tourbillons libres est déduite d'une simple différence finie, et des travaux montrent [29], [30] qu'une dizaine de tourbillons libres suffisent pour obtenir une précision satisfaisante sur les vitesses induites :

$$d\Gamma_i = \Gamma_{i+1} - \Gamma_i \tag{3.45}$$

où i est l'index du tourbillon libre (figure 3.9).

Par conséquent, la structure du sillage est maintenant définie et il ne nous reste plus qu'à appliquer un des lois de la théorie tourbillonnaire pour déterminer les vitesses induites par le sillage en chaque point de contrôle de chaque pale. Soit une ligne tourbillonnaire C semi-infinie, d'intensité $d\Gamma$. La vitesse induite en un point P de l'espace par cette ligne tourbillonnaire est donnée par la formule de Biot et Savart :

$$d\underline{w}_i = -\frac{d\Gamma}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{(\underline{r}_0 - \underline{r}_1) \wedge d\underline{l}}{|\underline{r}_0 - \underline{r}_1|^3}$$
(3.46)

où \underline{r}_0 et \underline{r}_1 sont respectivement, le vecteur position du point P et de l'élément $d\underline{l}$ par rapport à l'origine du repère. Nous avons choisi de discrétiser les lignes tourbillonnaires

Partie III. Modélisation aérodynamique du rotor



FIG. 3.9 Caractéristiques de la nappe tourbillonnaire d'une pale

continues par une succession de segments rectilignes, car la formule de Biot et Savart (3.46) prend alors une expression analytique simple. Nous allons donc appliquer cette formule pour un segment tourbillonnaire rectiligne. Il est clair qu'une ligne tourbillonnaire ne peut pas débuter ou se terminer dans un écoulement, donc, les expressions suivantes ont pour but d'exprimer la contribution d'un segment appartenant à une ligne tourbillonnaire continue. Considérons le segment tourbillonnaire de longueur s et d'intensité constante $d\Gamma$ (figure 3.10).



FIG. 3.10 Représentation d'un segment tourbillonnaire

La vitesse induite en un point A, défini par les vecteurs positions \underline{r}_1 et \underline{r}_2 est alors donnée par la relation:

$$d\underline{w}_{i} = -\frac{d\Gamma}{4\pi} \int_{s} \frac{\underline{r} \wedge d\underline{\sigma}}{r^{3}}$$
(3.47)

où <u>r</u> est le vecteur allant de l'élément $d\underline{\sigma}$ appartenant au segment tourbillonnaire au

point A et $r = |\underline{r}|$. On montre alors [28] que la vitesse induite au point A par ce segment tourbillonnaire est égale à:

$$d\underline{w}_i = -\frac{d\Gamma}{4\pi} \frac{\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2|^2} \underline{r}_0 \cdot \left(\frac{\underline{r}_1}{\underline{r}_1} - \frac{\underline{r}_2}{\underline{r}_2}\right)$$
(3.48)

avec $\underline{r}_0 = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$. Dans un repère cartésien, si les coordonnées des points A, B et C sont respectivement $(X_A, Y_A, Z_A), (X_B, Y_B, Z_B)$ et (X_C, Y_C, Z_C) , alors les composantes de la vitesse induite au point A s'expriment par [29]:

$$\begin{cases} dw_{iX} = C \left[(Y_A - Y_C) (Z_C - Z_B) - (Z_A - Z_C) (Y_C - Y_B) \right] \\ dw_{iY} = C \left[(Z_A - Z_C) (X_C - X_B) - (X_A - X_C) (Z_C - Z_B) \right] \\ dw_{iZ} = C \left[(X_A - X_C) (Y_C - Y_B) - (Y_A - Y_C) (X_C - X_B) \right] \end{cases}$$
(3.49)

où:

$$C = \frac{d\Gamma(r_1 + r_2)}{2\pi r_1 r_2 [(r_1 + r_2)^2 - l^2]}$$

$$r_1 = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(X_A - X_C)^2 + (Y_A - Y_C)^2 + (Z_A - Z_C)^2}$$

$$l = \sqrt{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2 + (Z_C - Z_B)^2}$$
(3.50)

La formule (3.47) introduit une singularité: lorsque r tend vers zéro, la vitesse induite tend alors vers l'infini. Il faut en effet noter qu'un ligne tourbillonnaire est une idéalisation dans laquelle une quantité finie de tourbillons est concentrée sur une ligne de section infinitésimale. En réalité, la viscosité du fluide élimine cette singularité en diffusant les tourbillons dans un tube de section finie, mais de faible rayon, appelé rayon de singularité tourbillonnaire. Or, le traitement de celui-ci est très brièvement abordé dans la littérature. Cette singularité apparaît nettement lorsque certains tourbillons libres formant le sillage sont trop proches des rayons de contrôle (figure 3.9) où l'on souhaite déterminer les composantes de la vitesse induite. Ce cas de figure est rencontré, pour une pale donnée, en début d'incrémentation azimutale du sillage: soit par la nappe tourbillonnaire attachée à la pale elle-même, soit par la nappe de la pale précédente. Les études du sillage sur les rotors éoliens basées sur l'emploi de la loi de Biot et Savart n'apportent pratiquement aucune information sur la dimension du rayon de singularité à adopter. Nous avons donc traité cette singularité en se référant aux méthodes utilisées pour les rotors d'hélicoptères. Le tourbillon d'extrémité de pale (tip vortex) est celui qui possède la plus grande intensité, du fait du fort gradient de circulation dans cette zone. Il aura donc une influence prépondérante sur les valeurs des composantes de la vitesse induite en un point du plan rotor. Les autres tourbillons possèdent une intensité moindre, car la circulation dans la partie centrale de la pale varie plus faiblement. Ils auront donc une influence nettement plus faible sur la valeur des composantes de la vitesse induite. Par conséquent, la nappe tourbillonnaire attachée à une pale est décomposée en deux zones dans le sens de son envergure : la partie extrême de la pale, siège du tourbillon extremum, et

Partie III. Modélisation aérodynamique du rotor



FIG. 3.11 Rayon de singularité

la partie restante, que l'on qualifiera de zone interne de la nappe tourbillonnaire. Le traitement de la singularité sera différenciée dans ces deux zones. Nous allons donc introduire le rayon de singularité pour lever la singularité dans la formule de Biot et Savart.

Il est défini comme la distance minimum entre la point A et la droite (BC) supportant le segment tourbillonnaire rectiligne d'extrémités B et C:

$$r_m = \frac{|\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2|}{|\underline{r}_0|} \tag{3.51}$$

Les composantes de la vitesse induite, au point A du plan rotor, engendrées par un segment tourbillonnaire [BC] trop proche du point A, c'est-à-dire si la hauteur du triangle (BAP) est inférieure à r_m , seront prises nulles *(figure 3.11)*. La décomposition de la répartition de la circulation en envergure nous permet d'appliquer un rayon de singularité propre au tourbillon extremum et un autre propre à la zone interne de la nappe. Cette démarche suit les quelques recommandations faites sur les rotors d'hélicoptères qui préconisent également de choisir un rayon de singularité extremum "suffisamment important" pour atténuer la singularité d'une ligne tourbillonnaire dans la zone interne sans pour autant préciser les paramètres qui permettent concrètement de fixer ce rayon. W. Johnson [31] stipule que le rayon de singularité est pris typiquement à environ 10 % de la corde de la pale. Pour pallier ce manque de précision, il nous a fallu mener une étude de sensibilité des rayons de singularité sur les vitesses induites [32]. La conclusion de cette étude nous a permis de fixer le rayon de singularité extremum à 5 % de la corde moyenne pour la géométrie de pale provenant de l'éolienne danoise Frisia 4800/750 kW que nous pouvons considérer comme représentative des éoliennes de moyenne puissance de conception actuelle (tripale, dans le vent, à pas variable).

3.3.5 Décomposition du sillage

La décomposition du sillage suivant son axe d'enroulement (OX) permet d'inclure de façon pratique à la fois l'expansion et l'enroulement marginal des nappes tourbillonnaires



(Roll-up): en extrémité de pale, la nappe s'enroule sur elle-même en plus de décrire une surface hélicoïdale (figure 3.12).

FIG. 3.12 Représentation de l'enroulement marginal

Nous avons donc procédé à une décomposition du sillage en deux parties en utilisant les paramètres de définition de Afjeh [29]. Le sillage proche (near wake) est défini lorsque celui-ci a effectué une rotation d'angle π . Dans cette partie du sillage, seul l'effet d'expansion est notable. Le sillage lointain (far wake) est le prolongement du sillage proche. Il est caractérisé par le fait, qu'en régime quasi-stationnaire, il a acquis un certain équilibre et donc que sa géométrie n'évolue pas dans le temps et dans l'espace si l'on suppose de plus que l'on ne tient pas compte des effets de dissipation (grâce auxquels le sillage va progressivement se confondre avec l'atmosphère environnante). Ce sillage lointain est nettement affecté par l'enroulement marginal des nappes tourbillonnaires hélicoïdales attachées à chaque pale. Il faut noter que ce phénomène est complexe et qu'il n'est pas dans notre propos de rentrer dans le détail de sa modélisation. Nous reléguons donc celui-ci à des études complémentaires qu'il conviendra d'intégrer par la suite. Par contre, l'expansion du sillage est simple à mettre en oeuvre, puisqu'il est implicitement introduit par la théorie de la quantité de mouvement développée au paragraphe 3.2. L'enveloppe du sillage est définie par le rapport entre le rayon du rotor R et le rayon du sillage à l'infini aval R_{aval} (figure 3.1). L'équation de conservation de la masse, appliquée entre le plan rotor et l'infini aval nous donne:

$$\rho \pi R^2 (V_0 - v) = \rho \pi R_{aval}^2 (V_0 - 2v)$$
(3.52)

Par suite:

$$\frac{R_{aval}}{R} = \sqrt{\frac{V_0 - v}{V_0 - 2v}}$$
(3.53)

Partie III. Modélisation aérodynamique du rotor

Le contour de la section longitudinale de l'enveloppe (figure 3.1) peut être approximé par différentes courbes (linéaire, hyperbolique, conique, etc), mais une expression en exponentielle [29] semble plus adéquate (continuité du raccordement):

$$R(X) = R_{aval} - (R_{aval} - R)e^{-\beta X}$$

$$(3.54)$$

où

$$\beta = \frac{1}{R_{aval} - R} \left. \frac{dR}{dX} \right|_{X=0} \tag{3.55}$$

En théorie, le facteur d'expansion β peut être calculé en chaque point de contrôle de chaque pale, en utilisant les composantes radiales et axiales de la vitesse induite :

$$\left. \frac{dR}{dX} \right|_{X=0} = \lim_{\substack{\Delta r \to 0 \\ \Delta X \to 0}} \left. \frac{\Delta r}{\Delta X} = \left. \frac{v_r}{V_0 - v} \right|_{X=0}$$
(3.56)

où v_r est la composante radiale de la vitesse induite au point de contrôle. v est facilement obtenu par l'application de la théorie combinée (cf. § 3.2), mais v_r est plus délicate à déterminer. En pratique, le coefficient β est déterminé en considérant la position axiale X^* , lieu où l'on observe la demi-expansion du sillage. Cette position est fixée expérimentalement et β se déduit de l'équation :

$$R(X^*) = \frac{1}{2}(R + R_{aval}) = R_{aval} - (R_{aval} - R) e^{-\beta X^*}$$
(3.57)

Soit:

$$\beta = \frac{0,6931}{X^*} \tag{3.58}$$

Bien sûr, l'accès à X^* étant sujet à des mesures, cette valeur est fixée arbitrairement pour effectuer des calculs de sillage et sera éventuellement corrigée suivant les données dont on disposera.

3.3.6 Algorithme de la méthode

L'algorithme présenté par *la figure 3.13* généralise la méthode par sillage prescrit, dans le sens où il est valable pour un écoulement non uniforme et/ou instationnaire. Néanmoins, on suppose que les turbulences intervenant sur le rotor évoluent "assez lentement" pour être assimilées à un régime quasi-stationnaire (succession d'états stationnaire). D'autre part, on remarquera que le nombre, et donc la position en envergure, des points de contrôle diffèrent

pour le calcul des vitesses induites par la théorie combinée et la méthode par sillage prescrit. Typiquement, une quarantaine de points de contrôle sont définis pour le premier calcul alors qu'une douzaine de points suffisent à déterminer correctement le sillage. Ceci implique qu'il faut avoir recours à une interpolation (parabolique) des caractéristiques de l'écoulement pour fixer ces valeurs aux points de contrôle utilisés par l'analyse par sillage. Il en est de même pour les polaires : lors de la description de la géométrie de la pale, seuls les profils caractéristiques de celle-ci sont connus. Par conséquent, il faut également interpoler les polaires, à la fois aux points de contrôle de la théorie combinée, et à la fois aux points associés à la méthode de sillage prescrit.

Dans le cas d'un régime non uniforme et/ou instationnaire, les nappes tourbillonnaires attachées à chaque pale sont discrétisées suivant deux directions. C'est pourquoi, en plus du double processus itératif, l'un sur les vitesses induites et l'autre sur la géométrie du sillage, une incrémentation azimutale du rotor apparaît dans cet algorithme.

Partie III. Modélisation aérodynamique du rotor



FIG. 3.13 Algorithme de calcul des vitesses induites par l'analyse par sillage prescrit

..

Bibliographie

- [1] Wind Turbine Technology Fundamental concepts of wind turbine engineering; David A. Spera, Ph.D. Editor, ASME PRESS, New-York, 1994.
- [2] PANOFSKY, H.A. and J.A. DUTTON: Atmospheric Turbulence; New York, John Wiley & Sons Ed., 1984.
- [3] JUSTUS, C.G.: Winds and Wind System Performance; Philadelphia, Franklin Institute Press, 1978.
- [4] SIGL, A.B., R.B. COROTIS and D.J. Won: Run Duration Analysis of Surface Wind Speeds for Wind Energy Application; Journal of Applied Meteorology, Vol. 18, pp.156-166, 1979.
- [5] Guy CUNTY: Eoliennes et aérogénérateurs guide de l'énergie éolienne; 2^{ème} édition, Edisud, 1982.
- [6] H. SNEL, C. LINDENBURG: PHATAS II: Program for Horizontal Axis wind Turbine Analysis and Simulation; Version I.
- [7] FROST, W., B.H. LONG and R.E. TURNER: Engineering Handbook on the Atmospheric Environmental Guidelines for Use in Wind Turbine Generator Development; NASA TP-1359, Cleveland Ohio, NASA Lewis Research Center, 1978.
- [8] MIKHAIL, A.: Height Extrapolation of Wind Data; PNL 4367, Richland, Washington, Battelle Pacific Northwest Laboratory, 1984.
- [9] FROST, W. and C.F. SHIEH: Wind Turbine Generator Siting Guidelines Relative to Terrain Features; Final Report, DOE Contract AC06076ET20242, Tullahoma, Tennessee, FWG Associates, Inc., 1981.
- [10] C. LINDENBURG, J.G. SCHEPERS: PHATAS-III: Aeroelastic Modelling Program for Horizontal Axis wind Turbine Analysis and Simulation version III; ECN-C-96-025, July 1996.
- [11] AKINS, R.E.: Performance Evaluation of Wind Energy Conversion Systems Using the Method of Bins-Current Status; SAND 77-1375, Albuquerque, New Mexico, Sandia National Laboritories, 1978.
- [12] CONNELL, J.R.: The Spectrum of Wind Speed Fluctuations Encountered by a Rotating Blade of a Wind Energy Conversion System: Observations and Theory; PNL-4083, Richland, Washington, Battelle Pacific Northwest Laboratory, 1981.

- [13] SCHLICHTING, H. and E. TRUCKENBRODT: <u>Aerodynamics of the Airplane</u>; Mc-Graw Hill Inc., 1979.
- [14] RANKINE, W.J.M.: On the Mechanical Principles of the Action of Propellers; Transactions, Institute of Naval Architects, Vol. 6, pp. 13-30, 1865.
- [15] GLAUERT, H.: Aerodynamic theory; Airplane propellers, Vol. 4, Div. I, W.F. Durand, Ed., Berlin, Julius Springer, pp. 169-360, 1935.
- [16] BETZ, A.: Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust; Göttinger Nachrichten, Mathematisch-physikatische Klasse, pp. 193-213, 1919.
- [17] PRANDTL, L.: Appendix to [7], pp. 213-217.
- [18] GLAUERT, H.: Aerodynamic theory; vol. 6, Div. L, W.F. Durant, ed., Berlin, Julius Springer, p. 324, 1935.
- [19] COLEMAN, R.P., FEINGOLD, A.M. and STEMPIN, C.W.: Evaluation of the Induced Velocity Field of an Idealized Helicopter Rotor; NACA ARR L5E10, june 1945.
- [20] SCHEPERS, J.G.: Minutes of the fifth plenary meeting of the Joule project Joint investigations of dynamic inflow effects; held at Garrad & Hassan (UK) on April 22nd, 1992, Technical report, ECN, April 1992.
- [21] H., SNEL, J.G. SCHEPPERS: Joint Investigation of Dynamic Inflow Effects and Implementation of an Engineering Method; ECN-C-94-107, avril 1995.
- [22] JACOBS, E.M. and I.H. ABBOT: The NACA Variable-Density Wind Tunnel; NACA TR 416, Hampton, Virginia, NASA Langley Research Center, 1932.
- [23] MONTGOMERIE B.: The Influence of 3D Effects in Lift and Drag on the Performance of a Stalled Horizontal Axis Wind Rotor; ECN-C-95-060, Petten, January 1996.
- [24] SNEL, H., HOUWINK, R. and J. BOSSCHERS: Sectional Prediction of Lift Coefficients on Rotating Wind Turbine Blades in Stall; ECN-C-93-052, Petten, December 1994.
- [25] VITERNA, L.A. and R.D. CORRIGAN: Fixed Pitch Rotor Performance of Large Horizontal Axis Wind Turbines; Proceedings, Workshop on Large Horizontal Axis Wind Turbines, NASA CP-2230, DOE Publication CONF-810752, Cleveland, OH NASA Lewis Research Center, pp. 69-85, 1981.
- [26] J.M. BOUSQUET: <u>Méthode des singularités</u> Tome 1: théorie; ENSAE, 10, Avenue Edouard-Belin - B.P. 4032 - 31055 Toulouse Cedex, 1988.
- [27] A. BONNET, J. LUNEAU: Théories de la dynamique des fluides; CEPADUES-EDITIONS - 111, rue Nicolas Vauquelin - 31100 Toulouse, 1989.
- [28] KATZ, J. and PLOTKIN, A.: Low Speed Aerodynamics From Wing Theory to Panel Methods; McGraw-Hill Series in Aeronautical and Aerospace Engineering, ISBN 0-07-050446-6, 1991.

Partie III. Modélisation aérodynamique du rotor

- [29] AFJEH, A.A.: Wake Effects on the Aerodynamic Performance of Horizontal Axis Wind Turbines; PhD Dissertation, Mech. Engr., University of Toledo, Ohio, August 1984.
- [30] J.M. BOUSQUET: Introduction à l'aérodynamique des hélices; Edition provisoire, EN-SAE, 10, Avenue Edouard-Belin - B.P. 4032 - 31055 Toulouse Cedex, 1989.
- [31] JOHNSON, W.: <u>Helicopter Theory</u>; ISBN 0-486-68230-7, Dover Publications, Inc., New-York, 1980.
- [32] B. CUGNET: Etablissement d'un code de calcul des efforts aérodynamiques sur un rotor éolien à axe horizontal par une méthode de sillage prescrit; rapport de DEA, Département Mécanique du Solide et de l'Endommagement, ONERA/IMFL - 5, Bd P. Painlevé, 59045 Lille, septembre 1998.

I I I I Т T T I. L 1 L

I

1

Quatrième partie

Mise en équation du système éolien Application à l'éolienne tripale

..

Notations

La plupart des notations adoptées dans cette partie sont celles définies dans les *parties II* et *III* auxquelles il conviendra de se reporter.

Latines

Majuscules

- A_{Ho} : altitude au sommet du pylône $(A_{Ho} = A_{Pyl})$
- A_{Pr} : distance entre l'axe du moyeu et la sommet du pylône
- L_a : longueur de la ligne d'arbre équivalente
- M_3 : masse de la ligne d'arbre équivalente
- P_{Pr} : distance du plan rotor à l'axe de rotation de la nacelle
- R_{Co} : repère de conicité
- R_{Dp} : repère de déport
- R_{Ho} : repère d'horizon
- R_{La} : repère de lacet
- R_{Moy} : rayon du moyeu
- R_{Na} : repère de nacelle
- R_{Pr} : repère du plan rotor
- R_{To} : repère tournant
- **T** : chaîne de transformations

Minuscules

 \overline{d}_2 : mesure algébrique de la distance séparant les points d'articulation h_2 et p_3 \widehat{m}_l : masse linéique équivalente

Grecques

Minuscules

 ϵ : variable de position du point d'articulation p_3 par rapport au point h_3 ($\epsilon = \pm 1$) ψ_{La} : angle d'orientation de la nacelle ψ_{Pl} : angle de calage des pales ($\psi_{Pl} = \beta$)

- φ_{Se} : angle de vrillage de la pale à l'envergure r
- φ_{To} : angle azimutal des pales
- θ_{Co} : angle de conicité
- θ_{Na} : angle d'inclinaison de la nacelle

Matrices

Majuscules

- [R] : matrice de rotation
- [T] : matrice de transformation associée à la chaîne ${\bf T}$

Minuscules

[t]: matrice de translation

Chapitre 1

Description du système éolien

1.1 Introduction

Le chapitre II-1.4 a présenté le cadre formel permettant de modéliser le comportement dynamique des systèmes multicorps souples reposant sur le formalisme de Kane et l'agencement des corps suivant une arborescence topologique. L'association de ces deux éléments permet de déterminer de manière récursive les paramètres constituant les équations de mouvement. Celles-ci sont d'autant plus aisées à établir qu'elles ne font pas intervenir les équations de liaison. De plus, l'intérêt de cette méthode est d'accéder rapidement et de façon très orientée vers la programmation au système d'équations différentielles régissant le mouvement du système mécanique. C'est pourquoi, nous pouvons maintenant appliquer cette méthode à la modélisation des éoliennes en prenant en compte leurs spécificités. Bien que nous soyons en mesure de modéliser un large éventail de configurations des machines à axe horizontal, nous concentrerons notre démarche (sachant qu'elle est en tout point transposable aux autres types de machines) essentiellement sur le type de machine le plus utilisé de nos jours à savoir (cf. I-3.3):

- l'éolienne tripale dans le vent,
- avec mécanisme de régulation du pas.

Ceci n'est pas du tout restrictif, car le principe de la démarche reste tout à fait valable dans le cas d'une configuration bipale.

1.2 Description de la topologie

L'éolienne est un système multicorps dont la configuration topologique arborescente est donnée par la *figure 1.1* dans le cas d'une éolienne bipale, et par la *figure 1.2* dans le cas d'une éolienne tripale. Le pylône, choisi comme corps de référence, est connecté au corps No.0 représentant la terre (repère galiléen). La procédure retenue est celle exposée dans [1] et présentée au *chapitre II-1.4.2.0*. Le cheminement direct, ainsi que les modes de comptage pour les deux configurations, sont donnés respectivement dans les *tableaux 1.1* et *1.2*.

Corps	k	c (k)	Cheminement	$\mathbf{P}^{(\mathbf{k})}$	$E^{(k)}$
Pylône	1	0	$\{1, 0\}$	$\{6, 5, 4, 3, 2, 1\}$	$\{6, 5, 4, 3, 2\}$
Nacelle	2	1	$\{2, 1, 0\}$	$\{6, 5, 4, 3, 2\}$	$\{6, 5, 4, 3\}$
Ligne d'arbre	3	2	$\{3, 2, 1, 0\}$	$\{ar{6},5,4,3\}$	$\{6, 5, 4\}$
Moyeu articulé	4	3	$\{4,3,2,1,0\}$	$\{6, 5, 4\}$	$\{6,5\}$
Pale no.1	5	4	$\{5, 4, 3, 2, 1, 0\}$	{5}	ϕ
Pale no.2	6	4	$\{6,4,3,2,1,0\}$	$\{6\}$	ϕ

TAB. 1.1 Définition de la topologie d'une éolienne bipale d'après la figure 1.1

TAB. 1.2 Définition de la topologie d'une éolienne tripale d'après la figure 1.2

Corps	k	$\mathbf{c}(\mathbf{k})$	Cheminement	$\mathbf{P}^{(\mathbf{k})}$	$\mathbf{E}^{(\mathbf{k})}$
Pylône	1	0	$\{1, 0\}$	$\{6, 5, 4, 3, 2, 1\}$	{2}
Nacelle	2	1	$\{2, 1, 0\}$	$\{6, 5, 4, 3, 2\}$	$\{3\}$
Ligne d'arbre+moyeu	3	2	$\{3, 2, 1, 0\}$	$\{6, 5, 4, 3\}$	$\{6, 5, 4\}$
Pale no.1	4	3	$\{4,3,2,1,0\}$	{4}	ϕ
Pale no.2	5	4	$\{5,3,2,1,0\}$	$\{5\}$	ϕ
Pale no.3	6	4	$\{6,3,2,1,0\}$	{6}	ϕ



FIG. 1.1 Topologie arborescente d'une éolienne bipale

FIG. 1.2 Topologie arborescente d'une éolienne tripale

Soulignons que pour l'éolienne bipale, il peut parfois exister un degré de liberté en rotation d'une partie du moyeu par rapport à la ligne d'arbre (moyeu articulé cf. § I-3.1.1). Par suite, deux moyens sont à notre disposition pour tenir compte de ce degré de liberté supplémentaire. Le premier consiste à distinguer le moyeu de la ligne d'arbre équivalente et le second à introduire ce degré de liberté au moment de l'identification des vitesses généralisées du système. Le *tableau 1.1* reprend la première méthode.

1.3 Définition des repères liés à l'éolienne tripale

A cette description topologique il convient d'ajouter celle des repères mobiles (figure 1.3) et de leurs bases respectives (tableau 1.3) ainsi que les grandeurs caractéristiques (tableaux 1.5 et 1.6).

A ce stade, il faut distinguer les angles dits de construction $(tableau \ 1.6)$ (fixes) des angles dits de pilotage $(tableau \ 1.7)$ (variables et nécessaires au fonctionnement de la machine) ou de position (repérage azimutal du rotor).

Base	Corps	Description	
(i = 1 a 3)	attaché		
$\left\{\underline{b}_{i}^{1}\right\}$	1	Repère galiléen, centré au pied du pylône	
$\{\underline{b}_i^{p_2}\}$	1	Repère lié au pylône, centré à son sommet	
$\left\{\underline{b}_{i}^{2}\right\}$	2	Repère lié à la nacelle, centré sur l'axe de rotation	
$\{\underline{b}_i^{p_3}\}$	2	Repère lié à la liaison pivot de la ligne d'arbre	
$\left\{\underline{b}_{i}^{3}\right\}$	3	Repère lié à la ligne d'arbre, centré sur son axe de rotation	
$\{\underline{b}_i^{p_4}\}$	3	Repère lié au moyeu	
$\left\{\underline{b}_{i}^{4}\right\}$	4	Repère lié à la pale no.1, centré au pied de pale	
$\{\underline{b}_{i}^{p_{5}}\}$	4	Repère lié au moyeu	
$\left\{\underline{b}_{i}^{5}\right\}$	5	Repère lié a la pale no.2, centré au pied de pale	
$\{\underline{b}_i^{p_6}\}$	4	Repère lié au moyeu	
$\left\{ \underline{b}_{i}^{6} \right\}$	6	Repère lié a la pale no.24 centré au pied de pale	

TAB. 1.3 Description des repères cinématiques de l'éolienne tripale



FIG. 1.3 Repères mobiles liés à l'éolienne tripale

Nom	Centre	Base	Commentaires
R_{Py}	O_{Py}		Repère Pylône
R_{Ho}	O_{Ho}		Repère Horizon parallèle au sol
R_{La}	O_{La}		Repère de Lacet
R_{Na}	O_{Na}		Repère Nacelle
R_{Pr}	O_{Pr}		Repère Plan Rotor
R _{To}	O_{To}		Repère Tournant
R_{Co}	O_{Co}		Repère de Conicité
R_{Dp}	O_{Dp}		Repère de Déport
R_{Pl}	O_{Pl}		Repère de pale
R_{Nv}	O_{Nv}		Repère Non Vrillé
R_{Tr}	O_{Tr}		Repère de Traînée
R_{Ba}	O_{Ba}		Repère de Battement
R_{Se}	O_{Se}		Repère de section

TAB. 1.4 Description de l'ensemble des repères liés à l'éolienne tripale

TAB. 1.5 Définition des distances caractéristiques

Distance	Description
A_{Ho}	Distance entre la base et le sommet du pylône
P_{Pr}	Distance du plan rotor à l'axe de rotation de la nacelle
A_{Pr}	Distance entre l'axe du moyeu et le sommet du pylône
R_{Moy}	Distance entre l'axe du moyeu et le pied de pale

TAB. 1.6 Définition des angles de construction

Angle	Description
θ_{Na}	Angle d'inclinaison de la nacelle ("Tilt angle")
θ_{Co}	Angle de conicité du plan des pales
φ_{Se}	Angle de vrillage de la pale, fonction de l'envergure

TAB. 1.7 Définition des angles de pilotage et de position

Angle	Description
ψ_{La}	Angle d'orientation de la nacelle en lacet
ψ_{Pl}	Angle de calage des pales
φ_{To}	Angle azimutal des pales (position)

1.4 Définition des transformations

Pour finir, énumérons les différents changements de base qui vont servir à définir complètement la position des solides composant l'éolienne. Les transformations d'une base à une autre se calculent grâce à l'emploi de matrices de dimension (3,4) pour lesquelles on définit l'opérateur "•" [2].

Soit R_{Py} , le repère galiléen et R_q un repère quelconque. Un point P de coordonnées (X_P, Y_P, Z_P) dans R_q s'exprime dans R_{Py} par l'application d'une translation [t] et/ou d'une rotation [R] définie respectivement par :

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}_{(R_{Py})} = \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{[t]} + \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}_{(R_q)}$$
translation (1.1)

et:

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}_{(R_{Py})} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}}_{[R]} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}_{(R_q)}$$
rotation (1.2)

Pour condenser les notations, il est commode de regrouper les deux transformations élémentaires précédentes en une matrice [T] telle que :

$$[T] = \left[[t] \vdots [R] \right] \tag{1.3}$$

avec [t], vecteur colonne de translation et [R] matrice de rotation définies respectivement par les relations (1.1) et (1.2). Par suite, le produit de deux transformations T_1 et T_2 est défini par l'opération suivante:

$$[T] = [T_1 \bullet T_2]$$

= $\left[[t_1] \vdots [R_1] \right] \bullet \left[[t_2] \vdots [R_2] \right]$
= $\left[\underbrace{[t_1] + [R_1][t_2]}_{\text{Translation}} \vdots \underbrace{[R_1][R_2]}_{\text{Rotation}} \right]$ (1.4)

Pour une translation pure, la transformation T associée s'écrit :

Partie IV. Mise en équation du système éolien - Application à l'éolienne tripale

$$[T] = \begin{bmatrix} u & 1 & 0 & 0 \\ v & 0 & 1 & 0 \\ w & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(1.5)

Pour une rotation pure, la transformation T associée s'écrit:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$
(1.6)

Par conséquent, la position d'un point $P(X_P, Y_P, Z_P)$ dans R_q s'exprime, dans le repère galiléen R_{Py} , par le produit de n chaînes de transformations :

$$[P]_{(R_{Py})} = \begin{bmatrix} X_P & 1 & 0 & 0 \\ Y_P & 0 & 1 & 0 \\ Z_P & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(R_{Py})}$$
(1.7)

et:

 $[P]_{(R_q)} = \begin{bmatrix} X_P & 1 & 0 & 0\\ Y_P & 0 & 1 & 0\\ Z_P & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(R_q)}$ (1.9)

(1.8)

On désigne maintenant par (r_1, r_2, r_3) les coordonnées d'un point P de vecteur position \underline{r} . La liste des transformations élémentaires [t] et [R] qui vont intervenir dans les chaînes de transformations sont:

 $P_{(R_{Py})} = \prod_{i=1}^{n} T_i \bullet P_{(R_q)}$

Pour les repères liés au pylône, le passage du repère pylône de base {<u>b</u>_i¹} au repère horizon de base {<u>b</u>_i^{p2}}

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -A_{Ho} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{P_2})}$$
(1.10)

le passage du repère horizon de base $\{\underline{b}_i^{p_2}\}$ au repère lacet de base $\{\underline{b}_i^{2}\}$

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^2)} = \begin{bmatrix} \cos\psi_{La} & \sin\psi_{La} & 0 \\ -\sin\psi_{La} & \cos\psi_{La} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{p_2})}$$
(1.11)

Pour les repères liés à la nacelle, le passage du repère lacet de base {<u>b</u>²_i} au repère nacelle de base {<u>b</u>^{p₃}_i}

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{p_3})} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{Na} & 0 & \sin \theta_{Na} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{Na} & 0 & \cos \theta_{Na} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^2)}$$
(1.12)

le passage du repère **nacelle** de base $\{\underline{b}_i^{p_3}\}$ au repère **rotor** de base $\{\underline{b}_i^{Pr}\}$

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{Pr})} = \begin{bmatrix} -P_{Pr} \\ 0 \\ -A_{Pr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{Na})}$$
(1.13)

• Pour les repères liés au moyeu, le passage du repère rotor de base $\{\underline{b}_i^{Pr}\}$ au repère tournant de base $\{\underline{b}_i^3\}$

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{To} & \sin\varphi_{To} \\ 0 & -\sin\varphi_{To} & \cos\varphi_{To} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{Pr})}$$
(1.14)

le passage du repère **tournant** de base $\{\underline{b}_i^3\}$ au repère **conicité** de base $\{\underline{b}_i^{4,5,6}\}$

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{4,5,6})} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{Co} & 0 & \sin\theta_{Co} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_{Co} & 0 & \cos\theta_{Co} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^3)}$$
(1.15)

le passage du repère **conicité** de base $\{\underline{b}_i^{4,5,6}\}$ au repère **déport** de base $\{\underline{b}_i^{Dp}\}$

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{D_p})} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_{Moy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{4,5,6})}$$
(1.16)

• Pour les repères liés à la pale, le passage du repère déport de base $\left\{\underline{b}_{i}^{Dp}\right\}$ au repère pale de base $\left\{\underline{b}_{i}^{4,5,6}\right\}$

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{4,5,6})} = \begin{bmatrix} \cos \psi_{Pl} & \sin \psi_{Pl} & 0 \\ -\sin \psi_{Pl} & \cos \psi_{Pl} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{D_P})}$$
(1.17)

Partie IV. Mise en équation du système éolien - Application à l'éolienne tripale





FIG. 1.4 Définition des repères R_{Py} et R_{Ho}



FIG. 1.5 Définition des repères R_{Ho} et R_{La}



FIG. 1.6 Définition des repères R_{La} et R_{Na}





FIG. 1.7 Définition des repères R_{Na} et R_{Pr} **FIG. 1.8** Définition des repères R_{Pr} et R_{To}

• Pour les repères locaux lié à la pale, le passage du repère local pale au repère local non vrillé

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{N_v})} = \begin{bmatrix} -X_{Se} \\ -Y_O \\ -Z_O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{4,5,6})}$$
(1.18)

le passage du repère local non vrillé au repère local traînée

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{T_r})} = \begin{bmatrix} \cos \psi_{T_r} & \sin \psi_{T_r} & 0 \\ -\sin \psi_{T_r} & \cos \psi_{T_r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{N_v})}$$
(1.19)

le passage du repère local traînée au repère local battement

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{B_a})} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{B_a} & 0 & \sin\theta_{B_a} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_{B_a} & 0 & \cos\theta_{B_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{T_r})}$$
(1.20)

le passage du repère local **battement** au repère local **section**

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{Se})} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{Se} & \sin\varphi_{Se} \\ 0 & -\sin\varphi_{Se} & \cos\varphi_{Se} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}_{(b^{Ba})}$$
(1.21)



FIG. 1.9 Définition des repères R_{To} et R_{Co}

FIG. 1.10 Définition des repères R_{Co} et R_{Dp}



FIG. 1.11 Définition des repères R_{Dp} et R_{Pl}

La description détaillée des repères liés à la pale a été abordée lors de la modélisation mécanique de celle-ci au *paragraphe II-2.2* et nous rappelons simplement que, par convention, la section de pale Se est décrite dans le plan $(Y_{Se}OZ_{Se})$, avec :

- O: centre de vrillage,
- A: centre aérodynamique ou foyer aérodynamique,
- G: centre de gravité,
- E: centre élastique,

- C: centre de torsion.

Chapitre 2

Équations de mouvement

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la mise en équation de l'éolienne tripale à axe horizontal. Les équations de mouvement, dans cette configuration, sont établies par l'application du formalisme de Kane associé au comptage des corps disposés en arborescence (cf.§ II-1.4). Cette modélisation va nous permettre de déterminer, dans un premier temps, les vitesses partielles des différents corps grâce à la propriété de récursivité des relations cinématiques et, dans un second temps, d'en déduire les forces d'inertie et actives généralisées du système. L'enchaînement des différentes étapes permettant de construire le système d'équations différentielles (II-1.42) peut alors se résumer comme suit :

- 1. Parcours de l'arborescence des corps feuilles (pales) vers le corps racine (pylône), afin de déterminer les vitesses partielles $\underline{\omega}_p^k$ et \underline{v}_p^k de chaque corps B_k pour tous les degrés de liberté p (cf. § 2.3).
- 2. Déduction des accélérations angulaires des corps B_k et des accélérations des points h_k , centres des repères locaux attachés à ces corps (cf. § 2.4).
- 3. Détermination des dyadiques d'inertie des corps B_k (cf. § 2.5).
- 4. Déduction des forces d'inerties généralisées f_p^{*k} et des forces actives généralisées f_p^k agissant sur tous les corps B_k , pour tous les degrés de liberté p.
- 5. Construction de la matrice de masse $[\mathcal{M}]$ du système complet et du second membre [L] telle que

$$\begin{cases} [\mathcal{M}]\{\dot{w}\} = [L] \\ \{\dot{q}\} = \{w\} \end{cases}$$

$$(2.1)$$

Nous allons appliquer de façon détaillée les relations développées dans le *chapitre II-*1. Les hypothèses retenues pour l'écriture des relations cinématiques et dynamiques d'une éolienne tripale à axe horizontal sont les suivantes:

 tous les corps constituant l'éolienne sont considérés comme souples à l'exception de la nacelle supposée infiniment rigide, - on ne retient que le premier mode de déformation pour le pylône d'index k = 1 et tel que

$$\underline{u}^{1}(\underline{r}^{1}) = \phi_{1}^{1}(\underline{r}^{1}) \eta_{1}^{k}$$

$$(2.2)$$

$${}^{1}\underline{\omega}_{1}^{p_{2}} = \underline{\phi}_{1}^{\prime 1}(p_{2})\,\dot{\eta}_{1}^{k} \tag{2.3}$$

où $\underline{u}^1(\underline{r}^1)$ est le vecteur position d'un point P repéré par \underline{r}^1 dans le repère local b^1 après déformation du pylône et ${}^1\underline{\omega}_1^{p_2}$ le vecteur vitesse de déformation angulaire du sommet du pylône (point d'articulation p_2 , figure 1.3) incluant donc le 1^{er} mode de flexion dans les deux plans (bases $\{\underline{b}_1^1, \underline{b}_3^1\}$ et $\{\underline{b}_2^1, \underline{b}_3^1\}$) et de torsion (base $\{\underline{b}_1^1, \underline{b}_2^1\}$).

Soulignons que cette restriction au premier mode n'est justifiée, d'une part, que parce que ce mode domine majoritairement le comportement dynamique du pylône et, d'autre part, à une volonté d'orienter cette présentation sur le principe d'établissement des équations de mouvement et non d'en donner un développement exhaustif. Dans l'hypothèse de l'utilisation de pylônes plus souples, il faudrait envisager de tenir compte de deux modes au moins, mais cela ne changerait bien entendu en rien le principe d'écriture.

2.2 Définition des vitesses généralisées

Puisque nous souhaitons appliquer les développements exposés dans le paragraphe II-1.4, il faut prendre soin de définir les vitesses généralisées en accord avec le choix émis dans ce même paragraphe. Dans ce cas, nous pouvons dresser le tableau 2.1 relatif aux vitesses généralisées de mouvement de corps rigides.

rigiaes			
Vitesse	Vitesses	Vecteur	Commentaires
angulaire relative	généralisées $\dot{ heta}^k$	directeur \underline{l}^k	
$p_2 \underline{\omega}^2$	ψ_{La}	$\underline{b_3^2}$	Orientation de la nacelle
$p_3 \underline{\omega}^3$	\dot{arphi}_{To}	\underline{b}_1^3	Rotation de la ligne d'arbre
$p_k \underline{\omega}^k$	$\dot{\psi}_{Pl}$	\underline{b}_{3}^{k}	Calage de la pale B_k

TAB. 2.1 Définition des vitesses généralisées de mouvement de corps

Le tableau 2.2 présente le vecteur colonne des vitesses généralisées w_p pour l'éolienne tripale (p = 1 à NS, nombre de degrés de liberté d'une éolienne tripale) qui constituent les inconnues du système à résoudre dans le système d'équations différentielles. Ce vecteur colonne est partitionné de manière à faire apparaître dans sa partie supérieure les vitesses généralisées associées aux mouvements de corps rigides et dans sa partie inférieure les vitesses généralisées associées aux mouvements de corps souples.

De plus, pour déterminer l'ensemble des vitesses partielles, nous nous référerons aux tableaux 2.3 et 2.4.

$\vec{\psi}_{La}$	Orientation de la nacelle	1 Donce in pare
\dot{arphi}_{To}	Rotation de l'arbre	Mouvements de corps rigides
$\dot{\psi}_{Pl}$	Calage des pales	Ļ
$\dot{\eta}_1^1$		
$\dot{\eta}^1_{NM_1}$	Déformation du pylône	Mouvements
$\dot{\eta}_1^3 \ dots \ \dot{\eta}_{NM_3}^3 \ \dots$	Déformation de la ligne d'arbre	de
$\dot{\eta}_1^4 \ dots \ \dot{\eta}_{NM_4}^4 \ dots \ \ dots \ \ dots \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \$	Déformation de la pale No. 1	corps
$\dot{\eta}_1^5\ dots\ \eta_1^5\ dots\ \eta_{NM_5}^5\ \dots$	Déformation de la pale No. 2	souples
$\dot{\eta}_{1}^{6} \ dots \ \dot{\eta}_{NM_{6}}^{6} \ _$	Déformation de la pale No. 3	Ļ

TAB. 2.2 Vecteur colonne des vitesses généralisées - Eolienne tringle

TAB. 2.3 Définition des vecteurs de base des articulations

$\mathbf{c}^{(\mathbf{k})} \mathbf{\underline{y}}^{\mathbf{k}}$	Vecteur de base	Commentaires
$1 \overline{y^2}$	\underline{b}_3^1	Liaison pivot (pylône-nacelle)
$2\overline{y}^3$	$\epsilon \underline{b}_1^2$	Liaison pivot (nacelle-ligne)
$3\overline{y^k}$	\underline{b}_3^k	Liaison pivot (moyeu-pale B_k)

TAB. 2.4 Définition des vecteurs

\underline{D}^{p_k}				
$\underline{\mathbf{D}}^{\mathbf{p_k}}$	Expression	Commentaires		
\underline{D}^{p_2}	$A_{Ho} \underline{b}_3^1 + \underline{\phi}_1^1(\underline{p}_2) \eta_1$	Pylône		
\underline{D}^{p_3}	$\overline{d}_2 \underline{b}_1^2$	Nacelle		
\underline{D}^{p_k}	$L_a \underline{b}_1^3 + \sum_{l=1}^{NM_k} \underline{\phi}_l^k(\underline{p}_k) \eta_l$	Ligne d'arbre (pale B_k)		

2.3 Expression des vitesses partielles

Nous abordons dans ce paragraphe, la première étape du processus décrit en introduction, consistant à déterminer les vitesses partielles $\underline{v}_p^{h_k}$ et $\underline{\omega}_p^k$ de la façon suivante:

- 1. Parcours de l'arborescence corps par corps (incrémentation sur B_k) dans le sens corps racine B_1 (pylône) vers les corps feuilles B_k , avec k = 4, 6 (pales).
- 2. Pour p = 1 à NS, parcours de l'arborescence de l'articulation j ou le corps j vers le corps courant B_k . Le mouvement de corps rigide ou souple correspondant au degré de liberté p permet alors d'en déduire la nature de la vitesse généralisée w_p (rotation ou translation de corps rigide ou déformation de corps souple).
- 3. Suivant la nature de w_p , calcul des vitesses partielles (angulaires et linéaires) à l'aide des équations (II-1.39), (II-1.40) et (II-1.41).

Ceci permettra alors de dissocier plus tard les différents éléments de la matrice de masse $[\mathcal{M}]$ du système.

Pour une éolienne, les articulations se limitent à des liaisons pivots. Ceci implique qu'il n'y a qu'une direction (m = 1) pour les vitesses relatives $\dot{\theta}_m^{j}$ ¹⁶ de l'articulation j (relation (II-1.37)). Les vitesses partielles ne sont donc définies qu'à partir de deux équations :

- pour l'articulation j, lorsque w_p coïncide avec $\dot{\theta}^j$, alors

$$\underline{\omega}_p^k = \underline{l}^j \tag{2.4}$$

pour le corps k sortant de l'articulation j, incluant le corps j,

- pour le corps j, lorsque w_p coïncide avec $\dot{\eta}_l^j$, nous avons

$$\begin{cases} \underline{\omega}_{p}^{k} = \underline{\phi}_{l}^{\prime j}(\underline{p}_{m}) \text{ pour le corps } k \text{ sortant } \text{du corps } j \\ = \underline{0} \text{ sinon} \end{cases}$$
(2.5)

avec p_m point d'articulation du corps j menant au corps k (figure II-1.8)

Nous pouvons donc déduire :

- les vitesses angulaires partielles $\underline{\omega}_{p}^{2}$ associées à la nacelle

$$\begin{cases} \underline{\omega}_{1}^{2} = \underline{b}_{3}^{2} \\ \underline{\omega}_{4}^{2} = \underline{\phi}_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2}) \\ \underline{\omega}_{p}^{2} = 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$
(2.6)

Partie IV. Mise en équation du système éolien - Application à l'éolienne tripale

^{16.} On notera alors plus simplement $\dot{\theta}^{j}$

Soit, sous forme matricielle

$$\underline{\omega}^2 = \left\langle \underline{b}_3^2 \quad 0 \quad 0 \quad \underline{\phi'}_1(\underline{p}_2) \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right\rangle \{w_p\}$$

$$(2.7)$$

où $\{w_p\}$ est le vecteur colonne des vitesses généralisées défini par le tableau 2.2, - les vitesses angulaires partielles $\underline{\omega}_p^3$ associées à la ligne d'arbre équivalente

$$\begin{cases} \frac{\omega_1^3}{\omega_2^3} = \frac{b_3^3}{b_1^3} \\ \frac{\omega_4^3}{\omega_p^3} = \frac{\phi_1'^1}{p_2} \\ \frac{\omega_p^3}{\omega_p^3} = 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$
(2.8)

Soit, sous forme matricielle

$$\underline{\omega}^3 = \left\langle \underline{b}_3^2 \ \underline{b}_1^3 \ 0 \ \underline{\phi}_1^{\prime 1}(\underline{p}_2) \ 0 \ \dots \ 0 \right\rangle \{w_p\}$$
(2.9)

– les vitesses angulaires partielles $\underline{\omega}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{k}}$ associées à la pale $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}$ $(k = 4 \ge 6)$

$$\begin{cases}
\frac{\omega_{1}^{k}}{\omega_{2}^{k}} = \frac{b_{3}^{2}}{b_{1}^{3}} \\
\frac{\omega_{2}^{k}}{\omega_{2}^{k}} = \frac{b_{1}^{k}}{b_{3}^{k}} \\
\frac{\omega_{4}^{k}}{\omega_{p}^{k}} = \frac{\phi_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2})}{\phi_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2})} \\
\frac{\omega_{p}^{k}}{\omega_{p}^{k}} = \frac{\phi_{1}^{\prime 3}(\underline{p}_{k})}{0} \text{ pour } p = 4 + l, l = 1 \text{ à } NM_{3}
\end{cases}$$
(2.10)

Soit, sous forme matricielle

$$\underline{\omega}^{k} = \left\langle \underline{b}_{3}^{2} \ \underline{b}_{1}^{3} \ \underline{b}_{3}^{k} \ \underline{\phi}_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2}) \ \underline{\phi}_{1}^{\prime 3}(\underline{p}_{k}) \ \dots \ \underline{\phi}_{NM_{3}}^{\prime 3}(\underline{p}_{k}) \ 0 \ \dots \ 0 \right\rangle \{w_{p}\}$$
(2.11)

Comme précédemment, les vitesses partielles \underline{v}_p^k peuvent être définies à partir de deux équations :

– pour l'articulation j, lorsque w_p coïncide avec $\dot{ heta}^j,$ alors

$$\begin{cases} \underline{v}_{p}^{h_{k}} = \underline{l}^{j} \wedge \underline{z}^{jk} \text{ pour le corps } k \text{ sortant de l'articulation } j, \text{ incluant le corps } j \\ = \underline{0} \text{ sinon} \end{cases}$$

$$(2.12)$$

où le vecteur \underline{z}^{jk} est défini par la figure II-1.8,

- pour le corps j, lorsque w_p coïncide avec $\dot{\eta}_l^j$

$$\begin{cases} \underline{v}_{p}^{h_{k}} = \underline{\phi}_{l}^{j}(\underline{p}_{m}) + \underline{\phi}_{l}^{j}(\underline{p}_{m}) \wedge \underline{x}^{jk} \text{ pour le corps } k \text{ sortant du corps } j \\ = \underline{0} \text{ sinon} \end{cases}$$
(2.13)

où le vecteur \underline{x}^{jk} est défini par la figure II-1.8.

On en déduit alors:

– les vitesses partielles $\underline{v}_p^{h_2}$ associées à la nacelle

$$\begin{cases} \underline{v}_{4}^{h_{2}} = \underline{\phi}_{1}^{1}(\underline{p}_{2}) + \underline{\phi}_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{3}^{2} \\ \underline{v}_{p}^{h_{2}} = \underline{0} \quad \text{sinon} \\ \underline{v}_{t}^{h_{2}} = \underline{0} \quad \forall t \end{cases}$$

$$(2.14)$$

Soit, sous forme matricielle

$$\underline{\dot{R}}^{h_2} = \left\langle \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \vdots & \underline{\phi}_1^1(\underline{p}_2) + \underline{\phi}_1^{\prime 1}(\underline{p}_2) \wedge \underline{b}_3^2 & \vdots & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\rangle \{w_p\}$$
(2.15)

- les vitesses partielles $\underline{\mathbf{v}}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{h}_{\mathbf{s}}}$ associées à la ligne d'arbre équivalente. D'après la figure 1.3, ${}^{2}\underline{y}^{3} = \epsilon \underline{b}_{1}^{2}$ (on notera que: $\underline{b}_{1}^{2} = \underline{b}_{1}^{3} = \underline{b}_{1}^{p_{4}}$), avec $\epsilon = \pm 1$ suivant la position du point d'articulation p_{3} par rapport au point h_{3} ($\epsilon = 1$ si $\underline{p}_{3}h_{3}$ est dans le même sens que \underline{b}_{1}^{3}). Par suite

$$\begin{cases} \underline{v}_{1}^{h_{3}} = (\epsilon + \overline{d}_{2}) \underline{b}_{2}^{2} \\ \underline{v}_{4}^{h_{3}} = \underline{\phi}_{1}^{1}(\underline{p}_{2}) + \underline{\phi}_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge [\underline{b}_{3}^{2} + (\epsilon + \overline{d}_{2})\underline{b}_{1}^{2}] \\ \underline{v}_{p}^{h_{3}} = \underline{0} \quad \text{sinon} \\ \underline{v}_{t}^{h_{3}} = \underline{0} \quad \forall t \end{cases}$$

$$(2.16)$$

où \overline{d}_2 est la mesure algébrique de la distance séparant les points d'articulation h_2 et p_3 $(\overline{d}_2 > 0$ si $\underline{h_2p_3}$ est dans le même sens que \underline{b}_1^3 , figure 1.3). Soit, sous forme matricielle

$$\underline{\dot{R}}^{h_3} = \left\langle \begin{array}{cccc} (\epsilon + \overline{d}_2) \, \underline{b}_2^2 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \underline{\phi}_1^1(\underline{p}_2) + \underline{\phi}_1^{\prime 1}(\underline{p}_2) \wedge \left[\underline{b}_3^2 + (\epsilon + \overline{d}_2) \underline{b}_1^2\right] & \vdots & 0 & \dots & 0 \right\rangle \{w_p\}$$

$$(2.17)$$

- les vitesses partielles $\underline{\mathbf{v}}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{h}_{\mathbf{k}}}$ de la pale $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}$ $(k = 4 \ge 6)$

Partie IV. Mise en équation du système éolien - Application à l'éolienne tripale
Soit, sous forme matricielle:

$$\underline{\dot{R}}^{h_{k}} = \left\langle \left(\epsilon + \overline{d}_{2} + L_{a}\right)\underline{b}_{2}^{2} + \underline{b}_{3}^{2} \wedge \left(\sum_{l=1}^{NM_{3}} \underline{\phi}_{l}^{3}(\underline{p}_{k})\eta_{l}^{3} + \underline{b}_{3}^{k}\right) \vdots \underline{b}_{1}^{3} \wedge \left(\sum_{l=1}^{NM_{3}} \underline{\phi}_{l}^{3}(\underline{p}_{k})\eta_{l}^{3} + \underline{b}_{3}^{k}\right) \vdots \right. \\ \left. 0 \vdots \underline{\phi}_{1}^{1}(\underline{p}_{2}) + \underline{\phi}_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge (\underline{b}_{3}^{2} + (\epsilon + \overline{d}_{2})\underline{b}_{2}^{2} + L_{e}\underline{b}_{1}^{3} + \sum_{l=1}^{NM_{3}} \underline{\phi}_{l}^{3}(\underline{p}_{k})\eta_{l}^{3} + \underline{b}_{3}^{k}\right) \vdots$$

$$\left. \underline{\phi}_{1}^{3}(\underline{p}_{k}) + \underline{\phi}_{1}^{\prime 3}(\underline{p}_{k}) \wedge \underline{b}_{3}^{k} \vdots \dots \vdots \underline{\phi}_{NM_{3}}^{3}(\underline{p}_{k}) + \underline{\phi}_{NM_{3}}^{\prime 3}(\underline{p}_{k}) \wedge \underline{b}_{3}^{k} \vdots 0 \dots 0 \right\rangle \{w_{p}\}$$

$$\left. \left. \frac{\dot{\mu}_{1}^{3}(\underline{p}_{k}) + \underline{\phi}_{1}^{\prime 3}(\underline{p}_{k}) \wedge \underline{b}_{3}^{k} \vdots \dots \vdots \underline{\phi}_{NM_{3}}^{3}(\underline{p}_{k}) + \underline{\phi}_{NM_{3}}^{\prime 3}(\underline{p}_{k}) \wedge \underline{b}_{3}^{k} \vdots 0 \dots 0 \right\rangle \{w_{p}\}$$

On constate aisément que cette étape est très rapide et permet de déterminer de façon systématique les vitesses partielles $\underline{\omega}_p^k$ et \underline{v}_p^k . L'effort de calcul est réduit comparativement à celui qu'il faudrait fournir si l'on procédait d'une manière plus classique. On reconnaît dans ces grandeurs cinématiques deux choses :

- les expressions des vitesses partielles s'enrichissent du passage du corps B_1 jusqu'aux corps feuilles B_4 à B_6 ; on retrouve la composition vectorielle des vitesses,
- les vitesses partielles découlent naturellement les unes des autres d'après la propriété de récursivité.

2.4 Relations dynamiques

Nous abordons maintenant la deuxième étape. Les relations dynamiques se déduisent directement des expressions des vitesses partielles que nous venons d'établir. Les accélérations partielles sont calculées par simple dérivation par rapport au temps des vitesses angulaires $\underline{\omega}^k$ et linéaires \underline{v}^k exprimées comme combinaison linéaire des vitesses partielles angulaires $\underline{\omega}_p^k$ et linéaires \underline{v}_p^k . Le vecteur accélération angulaire d'un corps B_k fait intervenir les accélérations des vitesses partielles $\underline{\omega}_p^k$ et les accélérations généralisées w_p suivant l'expression:

$$\underline{\dot{\omega}}^{k} = \frac{b^{0}d}{dt}(\underline{\omega}^{k})$$

$$= \sum_{p=1}^{NS} \underline{\omega}_{p}^{k} \dot{w}_{p} + \sum_{p=1}^{NS} \underline{\dot{\omega}}_{p}^{k} w_{p} + \frac{b^{0}d}{dt}(\underline{\omega}_{t}^{k})$$
(2.20)

Par conséquent, nous pouvons en déduire:

- l'accélération angulaire $\dot{\omega}^2$ de la nacelle résultant de l'équation (2.7). En particulier, les accélérations angulaires partielles sont données par

$$\begin{cases} \underline{\dot{\omega}}_{1}^{2} = (\underline{\phi}_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{3}^{2}) w_{4} \\ \underline{\dot{\omega}}_{p}^{2} = \underline{0} \quad \text{pour } p \ge 2 \\ \underline{\dot{\omega}}_{t}^{2} = \underline{0} \quad \forall t \end{cases}$$

$$(2.21)$$

- l'accélération angulaire $\underline{\dot{\omega}}^3$ de la ligne d'arbre équivalente résultant de l'équation (2.9). En particulier, les accélérations angulaires partielles sont données par

$$\begin{cases} \underline{\dot{\omega}}_{1}^{3} = (\underline{\phi}_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{3}^{2}) w_{4} \\ \underline{\dot{\omega}}_{2}^{3} = \underline{b}_{2}^{2} w_{1} + (\underline{\phi}_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{1}^{3}) w_{4} \\ \underline{\dot{\omega}}_{p}^{3} = \underline{0} \quad \text{pour } p \geq 3 \\ \underline{\dot{\omega}}_{t}^{3} = \underline{0} \quad \forall t \end{cases}$$

$$(2.22)$$

- l'accélération angulaire $\underline{\dot{\omega}}^k$ de la pale \mathbf{B}_k (k = 4 à 6). L'expression de $\underline{\dot{\omega}}^k$ résulte de l'équation (2.11). Les accélérations angulaires partielles sont alors données par

$$\begin{cases} \frac{\dot{\omega}_{1}^{k}}{\omega_{2}^{k}} = (\frac{\phi_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{3}^{2}) w_{4}}{(\underline{\dot{\omega}}_{2}^{k})} = (\underline{b}_{2}^{2} w_{1} + (\underline{\phi}_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{1}^{3}) w_{4}} \\ \frac{\dot{\omega}_{3}^{k}}{\omega_{3}^{k}} = (\underline{b}_{3}^{2} \wedge \underline{b}_{3}^{k}) w_{1} + (\underline{b}_{1}^{3} \wedge \underline{b}_{3}^{k}) w_{2} + (\underline{\phi}_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{3}^{k}) w_{4} + \\ (\underline{\phi}_{1}^{\prime 3}(\underline{p}_{k}) \wedge \underline{b}_{3}^{k}) w_{(4+1)} + \dots + (\underline{\phi}_{NM_{3}}^{\prime 3}(\underline{p}_{k}) \wedge \underline{b}_{3}^{k}) w_{(4+NM_{3})} \\ \frac{\dot{\omega}_{p}^{k}}{\omega_{p}^{k}} = \underline{0} \quad \text{pour } p \geq 4 \\ \frac{\dot{\omega}_{k}^{k}}{\omega_{k}^{k}} = \underline{0} \quad \forall t \end{cases}$$

$$(2.23)$$

L'accélération du point h_k , centre du repère local du corps B_k est donnée par :

$$\frac{\ddot{R}^{h_{k}}}{=} \frac{b_{0}d}{dt}(\underline{\dot{R}}^{h_{k}})$$

$$= \sum_{p=1}^{NS} \underline{v}_{p}^{h_{k}} \dot{w}_{p} + \sum_{p=1}^{NS} \underline{\dot{v}}_{p}^{h_{k}} w_{p} + \frac{b_{0}d}{dt}(\underline{v}_{t}^{h_{k}})$$
(2.24)

Par conséquent, nous pouvons en déduire :

- l'accélération $\underline{\ddot{\mathbf{R}}}^{\mathbf{h_2}}$ de la nacelle résultant de l'équation (2.15). En particulier, les accélérations partielles s'expriment par

$$\begin{cases} \underline{\dot{v}}_{4}^{h_2} = \left[\underline{\phi}_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge (\underline{\phi}_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{3}^{2})\right] w_{4} \\ \underline{\dot{v}}_{p}^{h_2} = 0 \quad \text{pour } p \neq 4 \\ \underline{\dot{v}}_{t}^{h_2} = 0 \quad \forall t \end{cases}$$

$$(2.25)$$

- l'accélération $\underline{\ddot{\mathbf{R}}}^{\mathbf{h}_{\mathbf{s}}}$ de la ligne d'arbre équivalente résultant de l'équation (2.17). En particulier, les accélérations partielles s'expriment par

$$\begin{cases} \frac{\dot{v}_{1}^{h_{3}}}{\dot{v}_{4}^{h_{3}}} = (\epsilon + \overline{d}_{2}) \left[-\underline{b}_{1}^{2} w_{1} + (\underline{\phi}_{1}^{'1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{2}^{2}) w_{4} \right] \\ \frac{\dot{v}_{4}^{h_{3}}}{\dot{v}_{4}^{h_{3}}} = (\epsilon + \overline{d}_{2}) (\underline{\phi}_{1}^{'1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{2}^{2}) w_{1} + \\ & \underline{\phi}_{1}^{'1}(\underline{p}_{2}) \wedge \left[\underline{\phi}_{1}^{'1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{3}^{2} + (\epsilon + \overline{d}_{2}) (\underline{\phi}_{1}^{'1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{1}^{3}) \right] w_{4} \qquad (2.26) \\ \frac{\dot{v}_{p}^{h_{2}}}{\dot{v}_{p}^{h_{2}}} = \underline{0} \quad \text{sinon} \\ \underline{\dot{v}_{t}^{h_{2}}} = \underline{0} \quad \forall t \end{cases}$$

- l'accélération $\underline{\ddot{\mathbf{R}}}^{\mathbf{h}_{\mathbf{k}}}$ de la pale $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}$ $(k = 4 \ge 6)$ résultant de l'équation (2.19) et en particulier, les accélérations partielles sont données par

$$\begin{split} \dot{\underline{v}}_{1}^{h_{k}} &= \left[-(\epsilon + \overline{d}_{2} + L_{a}) \underline{b}_{1}^{2} + \underline{b}_{3}^{2} \wedge \underline{t}^{k} \right] w_{1} - \left[\underline{b}_{3}^{2} \wedge \underline{b}_{2}^{k} \right] w_{2} + \\ & \left[(\epsilon + \overline{d}_{2} + L_{a}) (\underline{\phi}_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{2}^{2}) + (\underline{\phi}_{1}^{\prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{3}^{2}) \wedge (\sum_{l=1}^{NM_{3}} \underline{\phi}_{1}^{3}(\underline{p}_{k}) \eta_{l}^{3} + \underline{b}_{3}^{k}) + \\ & \underline{b}_{3}^{2} \wedge (\underline{\phi}_{1}^{\prime \prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{3}^{k}) \right] w_{4} + \\ & \left[\underline{b}_{3}^{2} \wedge (\sum_{l=1}^{NM_{3}} \underline{\phi}_{1}^{3}(\underline{p}_{k}) + \underline{\phi}_{1}^{\prime 3}(\underline{p}_{k}) \wedge \underline{b}_{3}^{k}) \right] w_{(4+l)} \\ & \underline{b}_{2}^{2} \wedge (\sum_{l=1}^{NM_{3}} \underline{\phi}_{1}^{3}(\underline{p}_{k}) \eta_{l}^{3} + \underline{b}_{3}^{k}) + \underline{b}_{1}^{3} \wedge \underline{t}^{k} \right] w_{1} - \underline{b}_{3}^{p_{k}} w_{2} + \\ & \left[(\underline{\phi}_{1}^{\prime \prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{1}^{3}) \wedge (\sum_{l=1}^{NM_{3}} \underline{\phi}_{1}^{3}(\underline{p}_{k}) \eta_{l}^{3} + \underline{b}_{3}^{k}) + \underline{b}_{1}^{3} \wedge (\underline{\phi}_{1}^{\prime \prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge \underline{b}_{3}^{k}) \right] w_{4} + \\ & \left[\underline{b}_{1}^{3} \wedge (\sum_{l=1}^{NM_{3}} (\underline{\phi}_{1}^{3}(\underline{p}_{k}) + \underline{\phi}_{1}^{\prime \prime 3}(\underline{p}_{k}) \wedge \underline{b}_{3}^{k}) \right] w_{(4+l)} \\ & \underline{b}_{3}^{h_{k}} = 0 \\ & \underline{b}_{4}^{h_{k}} = \underline{\phi}_{1}^{\prime \prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge \left[\left[-(\epsilon + \overline{d}_{2}) \underline{b}_{1}^{2} + L_{a} \underline{b}_{2}^{2} + \underline{t}^{k} \right] w_{1} - \underline{b}_{2}^{p_{k}} w_{2} + \\ & \underline{\phi}_{1}^{\prime \prime \prime 1}(\underline{p}_{2}) \wedge \left[\underline{b}_{3}^{2} + (\epsilon + \overline{d}_{2}) \underline{b}_{2}^{2} + L_{a} \underline{b}_{1}^{3} + \underline{b}_{3}^{k} \right] w_{4} + \\ & \left[\sum_{l=1}^{M_{4}} (\underline{\phi}_{1}^{\prime \prime 3}(\underline{p}_{k}) + \underline{\phi}_{1}^{\prime \prime 3}(\underline{p}_{k}) \wedge \underline{b}_{3}^{k} \right] w_{(4+l)} \right] \\ & \underline{b}_{p}^{h_{k}} = 0 \\ & \underline{b}_{1}^{h_{k}} = \sum_{l=1}^{NM_{3}} \underline{\phi}_{1}^{\prime \prime 3}(\underline{p}_{k}) \wedge \underline{b}_{3}^{k} \right] w_{(4+l)} \\ & \underline{b}_{p}^{h_{k}} = 0 \quad \text{pour } p = 4 + l, l = 1 \& NM_{3} \\ & \underline{b}_{q}^{h_{k}} = 0 \quad \forall t \end{aligned}$$

Le vecteur \underline{t}^k étant défini par

$$\underline{t}^k = \underline{b}_3^2 \wedge \underline{b}_3^k \tag{2.28}$$

On peut remarquer que le vecteur \underline{b}_3^k peut s'exprimer dans le repère local b^2 de base $\{\underline{b}_i^2\}$ (i = 1 à 3), à l'aide de la chaîne de transformation **T** (cf. § 1.4) telle que

$$\underline{b}_{\mathbf{3}_{(b^2)}}^k = \mathbf{T} \bullet \underline{b}_{\mathbf{3}_{(b^k)}}^k \tag{2.29}$$

2.5 Expression des dyadiques

Les forces d'inertie généralisées f_p^* font intervenir les dyadiques d'inertie $\underline{\underline{I}}^{h_k}$ des corps du système (cf.§ II-1.5.1). Nous devons donc établir corps par corps l'expression de leurs

dyadiques respectifs. Pour cela, nous allons utiliser la relation liant les inerties scalaires $I_{ij}^{h_k}$ (définissant la matrice d'inertie du corps B_k par rapport au point h_k) au dyadique \underline{I}^{h_k} :

$$\underline{\underline{I}}^{h_k} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} I_{ij}^{h_k} \underline{b}_i^k \underline{b}_j^k$$
(2.30)

où \underline{b}_i^k $(i = 1 \ge 3)$ sont les vecteurs de base du repère local b^k de centre h_k lié au corps B_k . La forme matricielle associée au dyadique \underline{I}^{h_k} est alors donnée par:

$$\underline{I}_{\underline{i}}^{h_{k}} = \begin{bmatrix} I_{11}^{h_{k}} \underline{b}_{1}^{k} & I_{12}^{h_{k}} \underline{b}_{1}^{k} & b_{1}^{k} & b_{2}^{k} & I_{13}^{h_{k}} \underline{b}_{1}^{k} & b_{3}^{k} \\ I_{21}^{h_{k}} \underline{b}_{2}^{k} & b_{1}^{h_{k}} & I_{22}^{h_{k}} \underline{b}_{2}^{k} & I_{23}^{h_{k}} \underline{b}_{2}^{k} & b_{3}^{k} \\ I_{31}^{h_{k}} \underline{b}_{3}^{k} & b_{1}^{k} & I_{32}^{h_{k}} \underline{b}_{3}^{k} & J_{33}^{h_{k}} \underline{b}_{3}^{k} & J_{33}^{h_{k}} \underline{b}_{3}^{k} \end{bmatrix}$$

$$(2.31)$$

On souligne bien qu'il n'existe aucun opérateur mathématique entre \underline{b}_i^k et \underline{b}_j^k . La matrice d'inertie $[I^{h_k}]$ d'un corps B_k par rapport au point h_k est définie par:

$$[I^{h_k}] = \begin{bmatrix} \int_{B_k} (r_2^2 + r_3^2) \, dm & -\int_{B_k} r_1 r_2 \, dm & -\int_{B_k} r_1 r_3 \, dm \\ & \int_{B_k} (\dot{r}_1^2 + r_3^2) \, dm & -\int_{B_k} r_2 r_3 \, dm \\ & & \int_{B_k} (r_1^2 + r_2^2) \, dm \end{bmatrix}$$
(2.32)

où les r_i , i = 1 à 3, sont les coordonnées du point courant p appartenant au solide B_k dans le repère local b^k de centre h_k . D'une manière générale, deux méthodes pourraient nous permettre de déterminer les inerties de chaque corps du système :

- expérimentalement. Elles peuvent être mesurées sur un montage,
- par le calcul. Les outils CAO (Conceptions Assistées par Ordinateurs) sont maintenant largement répandus dans les bureaux d'études et rares sont ces logiciels qui ne possèdent pas de module de calcul d'inertie.

Nous supposerons donc que les éléments de la matrice d'inertie $[I^{h_k}]_{(b^k)}$ associées au corps B_k sont des données du constructeur, qu'il nous suffira d'intégrer dans la base de données. Néanmoins, nous pouvons proposer dans certains cas, une première approximation de ces matrices en raisonnant sur des corps dynamiquement équivalents : le centre de gravité et les axes principaux d'inertie sont aussi proches que possible du solide réel.

La géométrie de la pale est *a priori* quelconque et par conséquent il est difficile de calculer directement sa matrice d'inertie par rapport à h_k (k = 4, 6). Pour pallier cette difficulté, nous allons procéder à un calcul par tronçon de cette matrice afin d'utiliser les masses linéiques équivalentes qui ont déjà été introduites pour le calcul de la matrice de



FIG. 2.1 Définition d'un tronçon de pale pour le calcul de son dyadique

masse [M] de la pale (cf. § II-2.4.6). On suppose que pour un tronçon de pale de longueur L, le solide équivalent est une barre de masse linéique équivalente \widehat{m}_l définie par la relation (II-2.113). Nous pouvons donc déterminer la matrice d'inertie $[I^G]_{(R_G)}$ de cette barre par rapport au point G, centre du repère local R_G défini par la figure 2.1.

Dans ce cas cette matrice d'inertie a pour expression :

$$[I^G]_{(R_G)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 \\ \text{Sym.} & I \end{bmatrix}$$
(2.33)

où l'inertie locale I est directement obtenue à partir de :

$$I = \int_0^L X^2 \widehat{m}_l \, dX \tag{2.34}$$

I peut être intégré numériquement par la méthode de Gauss dont la forme générale est définie par l'équation (II-2.39). Par suite, et à l'aide du changement de variable $X = \frac{1+\xi}{2}L$:

$$I = \frac{L^3}{8} \int_{-1}^{1} (1+\xi)^2 \widehat{m}_l(\xi) d\xi$$

$$\approx \frac{L^3}{8} \sum_{i=1}^{r} w_i (1+\xi_i)^2 \widehat{m}_l(\xi_i)$$
(2.35)

où les w_i et ξ_i sont respectivement les poids et les abscisses d'intégration de Gauss. La détermination de la matrice d'inertie de ce tronçon dans le repère local b^k de la pale B_k (équivalent au repère pale R_{Pl} défini au *paragraphe II-2.2*) par rapport au point h_k va alors s'effectuer en 2 étapes:

1. expression de $[I^G]$ dans le repère local b^k par la formule de changement de base

$$[I^G]_{(b^k)} = [D]^{-1} [I^G]_{(R_G)} [D]$$
(2.36)

où [D] est la matrice de changement de base permettant de passer de R_G à b^k . Par conséquent, on a

$$[I^G]_{(b^k)} = \begin{bmatrix} A^* & -F^* & -E^* \\ B^* & -D^* \\ \text{Sym.} & C^* \end{bmatrix}$$
(2.37)

2. application du théorème de Huyghens pour ramener la matrice d'inertie $[I^G]_{(b^k)}$ au point h_k . Sachant que $\underline{h_k G} = a \underline{b}_1^k + b \underline{b}_2^k + c \underline{b}_3^k$, alors

$$[I^{h_k}]_{(b^k)} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ B & -D \\ \text{Sym.} & C \end{bmatrix}$$
(2.38)

avec

$$\begin{cases}
A = A^* + m(b^2 + c^2) \\
B = B^* + m(c^2 + a^2) \\
C = C^* + m(a^2 + b^2) \\
F = F^* + mab \\
E = E^* + mac \\
D = D^* + mbc
\end{cases}$$
(2.39)

où m est la masse du tronçon de pale de longueur L.

La matrice d'inertie totale de la pale sera obtenue par sommation des matrices d'inertie élémentaires $[I^{h_k}]_{(b^k)}$, ce qui nous permet d'en déduire le dyadique \underline{I}^{h_k} de la pale B_k .

La détermination du dyadique de la nacelle est délicate en raison du nombre de composants qu'elle intègre *(figure I-3.4)* et de leurs dispositions respectives. Les inerties de la nacelle doivent être déterminées en y *excluant* la ligne d'arbre (ensemble des éléments tournants de la transmission de puissance), car celle-ci est un solide à part entière tel que nous l'avons défini dans la topologie du système (cf. § 1.2). On suppose que ce sont des données constructeurs (CAO ou mesures).

D'après le paragraphe II-3.3, la ligne d'arbre réelle est réduite à une ligne d'arbre dynamiquement équivalente de diamètre D_e , de longueur L_a et de masse M_3 . D'autre part, le point d'articulation h_3 est considéré comme confondu avec le centre de gravité de cet arbre équivalent. Par conséquent, la matrice d'inertie $[I^{h_3}]_{(b^3)}$ de la nacelle dans le repère local b^3 par rapport au point h_3 s'exprime par:

$$[I^{h_3}]_{(b^3)} = \frac{M_3}{12} \begin{bmatrix} \frac{6D_e^2}{4} & 0 & 0\\ & \frac{3D_e^2}{4} + L_a^2 & 0\\ Sym. & \frac{3D_e^2}{4} + L_a^2 \end{bmatrix}$$
(2.40)

2.6 Forces d'inertie généralisées

Les forces d'inertie généralisées f_p^* se déduisent de l'équation (II-1.24). Il n'est pas question ici de développer ces différents termes, car leurs expressions littérales ne présentent pas d'intérêt particulier puisque nous procédons à une résolution numérique du problème. Simplement, nous sommes capables de construire la matrice de masse $[\mathcal{M}]$ du système, ainsi que les termes du vecteur colonne $\{L\}$ provenant des f_p^* suivant les développements donnés par les appendices A et B du paragraphe II-1.5.1. Cependant, comme la majorité des corps du système sont souples, les coefficients \mathcal{M}_{pl} de la matrice de masse $[\mathcal{M}]$ dépendent des coordonnées généralisées q_p , p = 1 à NS. Nous avons donc à traiter un système d'équations différentielles du premier ordre non-linéaire, car les \mathcal{M}_{pl} représentent également les coefficients des accélérations généralisées \dot{w}_p qui doivent être réactualisés à chaque pas de temps (cf. § 4). La technique de résolution de ce type de système fait l'objet du chapitre suivant.

2.7 Forces actives généralisées

Le principal intérêt d'introduire les forces actives généralisées par le biais des vitesses partielles réside dans le fait qu'aucune des forces de liaison (forces de contact) ne va contribuer aux forces actives généralisées agissant sur le système [4]. Par conséquent, pour chaque corps, on décompose les forces actives généralisées par :

$$f_p^k = f_{p|\text{Gravit\acute{e}}}^k + f_{p|\text{A\acute{e}ro}}^k + f_{p|\text{Elas}}^k + f_{p|\text{Amort}}^k + f_{p|\text{M\acute{e}ca}}^k$$
(2.41)

avec:

- $f_{p|\text{Gravité}}^k$ active généralisée due au champ de pesanteur, dont l'expression générale est donnée par l'équation (II-1.51),
- $f_{p|A\acute{e}ro}^k$ active généralisée due aux efforts aérodynamiques (cf. § III-2),
- $f_{p|\text{Elas}}^k$ active généralisée due à la restitution élastique des corps souples, dont l'équation générale est donnée par la relation (II-1.52),
- $f_{p|\text{Amort}}^k$ active généralisée due aux effets d'amortissement structural, dont l'équation générale est donnée par la relation (II-1.54),

- $f_{p|Meca}^k$ active généralisée due aux efforts d'origine mécanique tels que les couples d'entraînement, résistant, de freinage, etc.

La sommation sur k de ces forces, pour le degré de liberté p, viendra s'additionner aux termes du vecteur $\{L_p\}$ issus des forces d'inertie généralisées. Cette étape est donc la dernière dans la construction du système d'équations différentielles donné par la relation (II-1.42). Les forces actives généralisées dues à la pesanteur, à la restitution élastique ainsi qu'aux effets d'amortissement structuraux peuvent être considérées indépendamment de la spécificité du corps k, c'est pourquoi nous les traiterons en premier. Nous développerons ensuite les forces actives généralisées.

Pour l'ensemble des corps du système, les forces actives généralisées dues au champ de pesanteur se déduisent du torseur, au point h_k , des efforts élémentaires de gravité s'exerçant sur l'élément de masse dm du corps B_k :

$$\begin{cases} d\underline{f}_{g}^{k} = g \, dm \, \underline{b}_{3}^{1} \\ d\underline{m}_{g}^{h_{k}} = (\underline{r}^{k} + \underline{u}^{k}) \wedge d\underline{f}_{g} \end{cases}$$
(2.42)

où $(\underline{r}^k + \underline{u}^k)$ est le vecteur position du centre de gravité G de l'élément de masse dm. Par conséquent, pour l'ensemble du système, les forces actives généralisées dues à l'action de la pesanteur s'expriment par:

$$f_{p|\text{Gravit\acute{e}}} = \sum_{\substack{k=1\\NB}\\NB}}^{NB} (\underline{v}_{p}^{h_{k}} \cdot \underline{F}_{g}^{k} + \underline{\omega}_{p}^{k} \cdot \underline{M}_{g}^{h_{k}} + \int_{B_{k}} \underline{\phi}_{l}^{k} (\underline{r}^{k}) \cdot d\underline{f}_{g}^{k}) \quad \left| \begin{array}{c} \text{lorsque } w_{p} \\ \text{correspond à } \eta_{l}^{k} \\ \end{array} \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{NB} (\underline{v}_{p}^{h_{k}} \cdot \underline{F}_{g}^{k} + \underline{\omega}_{p}^{k} \cdot \underline{M}_{g}^{h_{k}}) \quad \text{sinon}$$

$$(2.43)$$

avec:

- \underline{F}_{a}^{k} la résultante des forces de gravité agissant sur le corps B_{k}

$$\underline{F}_{g}^{k} = \int_{B_{k}} d\underline{f}_{g}^{k} \tag{2.44}$$

 $- \underline{M}_{q}^{h_{k}}$ le moment résultant par rapport à h_{k} des forces de gravité

$$\underline{M}_{g}^{h_{k}} = \int_{B_{k}} d\underline{m}_{g}^{h_{k}} \tag{2.45}$$

- et enfin le terme de restitution élastique sous l'effet de la pesanteur

$$\int_{B_k} \underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k) \cdot d\underline{f}_g^k \tag{2.46}$$

Pour les corps souples du système, c'est-à-dire le pylône, la ligne d'arbre et les pales, la détermination des forces actives généralisées de restitution élastique et d'amortissement structural s'identifient respectivement aux relations (II-1.52) et (II-1.54). Celles-ci font intervenir les matrices de rigidité généralisées $[\mathcal{K}^k]$ et d'amortissement $[\mathcal{C}^k]$ du corps B_k . La modélisation par éléments finis des pales peut être étendue sans difficulté (modèle de poutre axisymétrique) au pylône et à la ligne d'arbre équivalente pour déterminer leurs matrices de rigidité généralisées respectives. La réelle difficulté, comme nous l'avons déjà mentionné lors du développement des expressions des forces actives généralisées d'amortissement structural, réside dans la détermination de la matrice d'amortissement. Une méthode simple, connue sous le nom d'amortissement proportionnel ou de Rayleigh [14], permet d'évaluer cette matrice par une combinaison linéaire des matrices de rigidité [K] et de masse [M]:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \tag{2.47}$$

où α et β sont des constantes qui seront déterminées à partir de deux facteurs d'amortissement correspondants à deux fréquences de vibration distinctes [14]. Cependant, certains auteurs [3] signalent que cette méthode tend plus à amortir les hautes fréquences. Il est important de noter qu'elle est largement utilisée, mais qu'il n'existe pas de critère permettant de justifier sa validité.

Nous allons maintenant examiner les forces actives généralisées spécifiques à chaque corps de l'éolienne tripale. On négligera pour cela les efforts aérodynamiques agissant sur le pylône et la nacelle car on considère que ceux-ci sont très faibles au regard des autres efforts. Par conséquent, les développements spécifiques ne concernent que les pales, la ligne d'arbre équivalente et la nacelle.

2.7.1 Forces actives généralisées s'exerçant sur les pales

Les forces actives généralisées spécifiques aux pales ont deux origines :

- une origine mécanique due au couple d'entraînement en rotation de la pale autour de son axe longitudinal et qui détermine le calage des pales en accord avec la loi de pilotage,
- et bien entendu, une origine aérodynamique.

Examinons dans cet ordre les forces actives généralisées qui en découlent.

Soit $\underline{M}_{Cal} = M_{Cal} \underline{b}_3^k$ le couple d'entraînement en rotation de la pale B_k autour de son axe longitudinal, alors :

$$f_{p|\text{Calage}}^{k} = \underline{\omega}_{p}^{k} \cdot \underline{M}_{Cal} \tag{2.48}$$

La détermination des efforts aérodynamiques découle de l'étude du fonctionnement du rotor éolien présentée au *paragraphe III-2*. Nous nous servons de ces résultats pour en déduire les forces actives généralisées dues aux efforts aérodynamiques $f_{p|A\acute{e}ro}$.

Pour l'élément de pale d'envergure dr, les composantes élémentaires du torseur des efforts aérodynamiques (figure III-2.4) au point A (foyer aérodynamique) sont données par :

$$\begin{cases}
df_l = \frac{1}{2}\rho \, lC_l W^2 dr \quad \text{(portance)} \\
df_d = \frac{1}{2}\rho \, lC_d W^2 dr \quad \text{(traînée)} \\
dm_a = \frac{1}{2}\rho \, lC_m W^2 dr \quad \text{(moment de tangage)}
\end{cases}$$
(2.49)

avec:

- $-\rho$ masse volumique de l'air,
- C_l , C_d et C_m respectivement, le coefficient de portance (lift), le coefficient de traînée (drag) et le coefficient de tangage (pitch) à l'incidence α du profil,
- l corde du profil à l'envergure r,
- W vitesse relative du vent incident au profil.

Les caractéristiques de l'écoulement au niveau du plan rotor, représentées par W et les angles d'incidence respectifs des profils, sont déterminées par l'application d'un modèle aérodynamique du rotor (théorie combinée ou analyse par sillage prescrit) que nous avons présentée au *chapitre III-3*.

Afin de mieux mettre en évidence l'action de ces efforts, supposons que l'axe longitudinal de la pale soit rectiligne. La réduction au point h_k du torseur des efforts élémentaires dans le repère local b^{p_k} s'exprime alors par:

$$\begin{cases} d\underline{f}_{a}^{k} = -\left[df_{l}\cos(\phi) + df_{d}\sin(\phi)\right] \underline{b}_{1}^{p_{k}} + \left[df_{l}\sin(\phi) - df_{d}\cos(\phi)\right] \underline{b}_{2}^{p_{k}} \\ d\underline{m}_{a}^{h_{k}} = \left[\frac{1}{2}\rho \, lC_{m}W^{2}dr\right] \underline{b}_{3}^{p_{k}} + \left(\underline{r}^{k} + \underline{u}^{k}\right) \wedge d\underline{f}_{a}^{k} \end{cases}$$
(2.50)

Où ϕ est l'angle entre la vitesse relative W (cf. § III-2.3.2) et le vecteur de base $\underline{b}_2^{p_k}$ et ($\underline{r}^k + \underline{u}^k$) le vecteur position du foyer aérodynamique A dans le repère local b^k . On remarquera que :

- $- [df_l \cos(\phi) + df_d \sin(\phi)]$ est la force axiale élémentaire s'exerçant sur l'axe du rotor,
- $[df_l \sin(\phi) df_d \cos(\phi)]$ est la force d'entraînement élémentaire en rotation du rotor,
- $-\frac{1}{2}\rho lC_m W^2 dr$ est la moment de torsion élémentaire s'exerçant sur une pale,

 $(\underline{r}^k + \underline{u}^k) \wedge d\underline{f}_a^k$ sont les moments fléchissants élémentaires s'exerçant en pied de pale. Les forces actives généralisées dues aux efforts aérodynamiques s'expriment donc par:

$$f_{p|\text{A\acute{e}ro}} = \sum_{k=4}^{6} (\underline{v}_{p}^{h_{k}} \cdot \underline{F}_{a}^{k} + \underline{\omega}_{p}^{k} \cdot \underline{M}_{a}^{h_{k}} + \int_{R_{da}}^{R_{fa}} \underline{\phi}_{l}^{k} (\underline{r}^{k}) \cdot d\underline{f}_{a}^{k}) \quad \left| \begin{array}{c} \text{lorsque } w_{p} \\ \text{correspond à } \eta_{l}^{k} \end{array} \right|$$
(2.51)

$$= \sum_{k=4} (\underline{v}_p^{h_k} \cdot \underline{F}_a^k + \underline{\omega}_p^k \cdot \underline{M}_a^{h_k}) \quad \text{sinon}$$
(2.52)

avec:

 $- \underline{F}_a^k$ la résultante des forces aérodynamiques agissant sur la pale B_k

$$\underline{F}_{a}^{k} = \int_{R_{da}}^{R_{fa}} d\underline{f}_{a}^{k} \tag{2.53}$$

 $-\underline{M}_{a}^{h_{k}}$ le moment résultant par rapport à h_{k} des forces aérodynamiques

$$\underline{M}_{a}^{h_{k}} = \int_{R_{da}}^{R_{fa}} d\underline{m}_{a}^{h_{k}} \tag{2.54}$$

- et enfin, les termes du couplage aéroélastique

$$\int_{R_{da}}^{R_{fa}} \underline{\phi}_l^k(\underline{r}^k) \cdot d\underline{f}_a^k \tag{2.55}$$

 R_{da} et R_{fa} désignent respectivement, le début et la fin de la zone aérodynamique définis au paragraphe III-2.2. Soulignons que nous venons d'introduire "naturellement" le couplage entre les efforts aérodynamiques $d\underline{f}_a^k$ et les déformations des corps souples représentées par leurs vecteurs de fonctions de forme modales $\phi_i^k(\underline{r}^k)$.

2.7.2 Forces actives généralisées s'exerçant sur la ligne d'arbre

La ligne d'arbre réelle possède un comportement mécanique complexe qui, en raison du nombre de degrés de liberté qu'elle nécessiterait pour une modélisation fine, nous amènerait à augmenter considérablement le nombre de degrés de liberté du système. On ne peut pallier cette difficulté qu'en utilisant un modèle de ligne d'arbre dynamiquement équivalente (cf. § II-3.3). Les forces actives généralisées y afférant sont alors dues :

– au couple d'entraînement en rotation $\underline{M}_{A\acute{e}ro}^{h_3} = -\underline{M}_{A\acute{e}ro}$ si le couple aérodynamique s'exerçant sur le rotor éolien est $\underline{M}_{A\acute{e}ro} = M_{A\acute{e}ro} \underline{b}_1^3$

$$f_{p|Q_{\text{Aéro}}}^3 = \underline{\omega}_p^3 \cdot \underline{M}_{\text{Aéro}}^{h_3} \tag{2.56}$$

- au couple d'entraînement en rotation $\underline{M}_{Cal}^{h_3} = -\underline{M}_{Cal}$ de la pale autour de son axe longitudinal (pilotage du calage)

$$f_{p|\text{Calage}}^3 = \underline{\omega}_p^3 \cdot \underline{M}_{\text{Cal}}^{h_3} \tag{2.57}$$

– au couple de freinage spécifique sur la ligne d'arbre $\underline{M}_{\text{Frein}} = M_{\text{Frein}} \underline{b}_1^3$ lorsque celui-ci est appliqué

$$f_{p|\text{Frein}}^3 = \underline{\omega}_p^3 \cdot \underline{M}_{\text{Frein}} \tag{2.58}$$

- au couple résistant de la génératrice $\underline{M}_{\text{Géné}} = M_{\text{Géné}} \underline{b}_1^3$ qui se décompose en un couple magnétique $\underline{M}_{\text{Elec}}$ et un couple dû aux pertes $\underline{M}_{\text{Pertes}}$ (électriques et mécaniques)

$$f_{p|\text{Géné}}^3 = \underline{\omega}_p^3 \cdot \underline{M}_{\text{Géné}} \tag{2.59}$$

Par suite:

$$f_{p|\text{Méca}}^{3} = f_{p|Q_{\text{Aéro}}}^{3} + f_{p|Q_{\text{Cal}}}^{3} + f_{p|\text{Frein}}^{3} + f_{p|\text{Géné}}^{3}$$
(2.60)

2.7.3 Forces actives généralisées s'exerçant sur la nacelle

Sous l'appellation de nacelle rappelons (cf. § 2.5) que l'on y inclus tous les éléments se trouvant à l'intérieur de celle-ci à l'exception des éléments tournants associés à la transmission et à la conversion de puissance tels que les arbres de transmission, les organes mobiles en rotation du dispositif de freinage, les pignons d'engrenages de la boîte de vitesses, le rotor de(s) la génératrice(s), etc. Chaque nacelle possède une disposition constructive propre et la multiplicité de ses organes rendent l'évaluation des grandeurs mécaniques de celle-ci très problématique. De plus, nous supposons que celle-ci est rigide. Par conséquent, les forces actives généralisées spécifiques à la nacelle sont dues:

- au couple d'entraînement en rotation de la nacelle $\underline{M}_e = M_e \, \underline{b}_3^2$, lorsqu'il est appliqué

$$f_{p|\text{Pilot}}^2 = \underline{\omega}_p^2 \cdot \underline{M}_e \tag{2.61}$$

– au couple de freinage spécifique sur la ligne d'arbre $\underline{M}_{\text{Frein}}^{h_2} = -\underline{M}_{\text{Frein}}$ lorsque celui-ci est appliqué

$$f_{p|\text{Frein}}^2 = \underline{\omega}_p^2 \cdot \underline{M}_{\text{Frein}}^{h_2} \tag{2.62}$$

– au couple de freinage spécifique sur la nacelle $\underline{M}_{\text{Ralent}} = M_{\text{Ralent}} \underline{b}_3^2$ lorsque celui-ci est appliqué

$$f_{p|\text{Ralent}}^2 = \underline{\omega}_p^2 \cdot \underline{M}_{\text{Ralent}} \tag{2.63}$$

– au couple résistant de la génératrice $\underline{M}_{\text{Géné}}^{h_2} = -\underline{M}_{\text{Géné}}$

$$f_{p|\text{Géné}}^2 = \underline{\omega}_p^2 \cdot \underline{M}_{\text{Géné}}^{h_2} \tag{2.64}$$

Par suite:

$$f_{p|\text{Méca}}^2 = f_{p|\text{Pilot}}^2 + f_{p|\text{Frein}}^2 + f_{p|\text{Ralent}}^2 + f_{p|\text{Géné}}^2$$
(2.65)

Avec ce chapitre, nous venons de clore la détermination des éléments de la matrice de masse $[\mathcal{M}]$ du système ainsi que celle de son second membre $\{L_p\}$. A la lumière de ces développements, deux remarques importantes doivent être formulées :

- 1. Le système d'équations différentielles du premier ordre est non linéaire car les coefficients \mathcal{M}_{pl} dépendent des coordonnées généralisées q_p (p = 1 à NS).
- 2. Nous n'avons effectué aucune linéarisation des relations dynamiques (comme c'est généralement le cas en mécanique classique) et donc le mouvement du système mécanique est donc parfaitement représenté par ce système d'équations différentielles.

La chapitre 4 présente la technique de résolution numérique qu'il conviendra de mettre en oeuvre afin de déterminer les inconnues du problème. Mais auparavant, nous allons nous attarder sur le traitement spécifique qu'il convient d'adopter pour le mécanisme de régulation, car il doit être mis en relation avec les inconnues du système avant d'aborder la résolution numérique proprement dite.

Chapitre 3

Mode de fonctionnement et mécanisme de régulation

3.1 Introduction

Un certain nombre de degrés de liberté (liés à certains mouvements de corps rigides) de l'éolienne sont régulés par le système de pilotage. Ce système se divise en deux parties : l'orientation de la nacelle dans le lit du vent et la régulation conjointe du calage des pales avec la vitesse de rotation de la génératrice. Les mécanismes de régulation régissant l'orientation de la nacelle, le calage des pales (lorsqu'il s'agit d'une éolienne équipée d'une génératrice asynchrone, cf. § I-3.1.2), l'application du couple de freinage sur la ligne d'arbre sont gérés suivant une loi de pilotage propre à chaque type de machine. Cependant, tous les systèmes de pilotage doivent répondre à un nombre clairement défini de cas de fonctionnement. En effet, ces systèmes vérifient différents paramètres dont les principaux sont la vitesse de rotation du rotor, l'orientation et la vitesse du vent amont. Indépendamment de l'orientation du vent, on peut définir les modes de fonctionnement suivants:

- le mode normal qui se décompose en

- arrêt par calme plat
- rotation lente
- rotation rapide
- charge partielle
- pleine charge

- le mode lié aux conditions extrêmes avec

• arrêt par tempête

- le mode de disfonctionnement

• disfonctionnement suite à une panne



FIG. 3.1 Agencement des modes de fonctionnement

A cette liste, il faut également ajouter le processus d'arrêt de la machine, qui, suivant la nature de son déclenchement, ne s'effectue pas toujours suivant la même loi.

Nous allons donc préciser ces modes afin de les hiérarchiser (en accord avec la distribution des occurrences et la persistance du site, cf. § III-1.3.1) afin qu'ils puissent être correctement pris en compte lorsqu'on désire établir un spectre de force réaliste sur l'éolienne (figure 3.1). L'application de ce spectre permettra alors de calculer les efforts subis par la machine en des points jugés critiques (moyeu, pieds de pale, etc) et de les utiliser comme base de données pour des calculs de fatigue. Ensuite, nous présenterons un principe de régulation des modes de fonctionnement normaux et extrêmes dont les paramètres les plus couramment utilisés sont la vitesse, l'accélération en rotation du rotor et la puissance de sortie de la génératrice. Cette description du mécanisme de régulation nous permettra enfin de préciser l'intervention de celui-ci dans la boucle d'intégration temporelle (cf. § 4) du système complet. Le principe de pilotage de l'orientation de la nacelle ne fait pas l'objet d'un développement particulier, car il est simplement basé sur la comparaison entre une consigne et une grandeur mesurée. Nous ne traitons pas non plus le cas des modes de disfonctionnement, car ils relèvent d'une étude spécifique. Sa transposition en terme de régulation n'est donc pas accessible spontanément.

3.2 Mode de fonctionnement normal

La décomposition de ce mode de fonctionnement nous amène à distinguer cinq cas, qui s'enchaînent de façon naturelle suivant les variations des conditions du vent amont (figure 3.2).

- Arrêt par calme plat. La machine se trouve dans cette plage d'arrêt par calme plat si le nombre de tours du rotor serait inférieure à une vitesse Ω_{inf} et quand la vitesse du vent est inférieure à une vitesse V_{inf} sur une courte période. Elle quitte cette plage si la vitesse du vent pendant une période donnée dépasse la valeur prédéfinie V_{inf} . En période de calme plat, les pales sont en drapeau¹⁷, le frein sur la ligne d'arbre est serré et le mécanisme d'orientation de la nacelle n'agit pas. En effet, ces paramètres de coupure évitent que l'éolienne fonctionne dans une plage ou les phénomènes d'usure et de fatigue par démarrage sont prépondérants et limitent également le cas d'un fonctionnement intermittent.

- Rotation lente. Cette plage intervient si la machine quitte la plage par calme plat ou à partir de la plage de rotation rapide. Le démarrage de la rotation lente s'effectue en positionnant les pales sur un calage donné. Les freins sont libres et le mécanisme d'orientation de la nacelle est opérationnel. Lorsque la vitesse de rotation reste dans un intervalle dont la borne inférieure est supérieure à celle définie pour la rotation lente pendant un temps donné, on se trouve alors dans le cas d'une plage de rotation rapide. Cette borne inférieure est normalement choisie de façon à pouvoir utiliser le moteur asynchrone en tant que génératrice (dépassement de la vitesse de synchronisation¹⁸). La borne supérieure peut aussi constituer la vitesse de rotation lors d'un fonctionnement par tempête.
- Rotation rapide. La plage de rotation rapide intervient lorsque la machine sort de la plage de rotation lente ou de la plage de charge partielle. Cette plage correspond à la transition entre un fonctionnement en dessous de la vitesse de synchronisation de la génératrice et la passage à cette vitesse. Ceci correspond donc à la montée progressive de la puissance de la génératrice par une variation continue du calage des pales pour rejoindre son point de fonctionnement nominal. Si ce passage n'est pas atteint au bout d'un certain temps, on retombe sur une plage de rotation lente.
- Charge partielle. La machine se trouve dans la plage de charge partielle soit à partir de la plage de rotation rapide par dépassement de la vitesse de synchronisation, soit à partir de la zone de pleine charge. Le nombre de tours de la génératrice est fixé par la courbe caractéristique de celle-ci (nombre de tours - Puissance). Le calage demeure constant dans cette plage et c'est la vitesse du vent qui guide le passage au régime pleine charge ou non.
- Pleine charge. On se trouve en régime pleine charge lorsque la génératrice est au voisinage de son point de fonctionnement nominal. A ce moment, le mécanisme de régulation agit de façon à atteindre ce point en portant la vitesse de la génératrice à une valeur très légèrement supérieure à celle théoriquement déterminée de manière à rester le plus longtemps possible dans la plage de pleine charge. Si la vitesse limite Ω_{max} du rotor est atteinte pendant une courte période de temps ou alors si la vitesse critique Ω_{crit} du rotor est atteinte instantanément, la machine est découplée et se trouve en régime disfonctionnement. Un arrêt rapide intervient alors, puis un redémarrage.

^{17.} $\psi_{Pl} = 90^{\circ}$ pour un rotor à vitesse constante.

^{18.} Un "moteur" asynchrone peut fonctionner suivant deux modes : moteur ou génératrice en fonction de la vitesse de rotation de son rotor.



FIG. 3.2 Définition des plages de fonctionnement

3.3 Mode de fonctionnement par conditions extrêmes

Les conditions extrêmes peuvent être consécutives, soit au cas de vents sortant de la plage supérieure de fonctionnement de la machine pour aller jusqu'à la tempête, soit au cas d'une accumulation de glace sur le bord d'attaque des pales résultant de basses températures. Cette dernière configuration est plus difficile à gérer car la surcharge sur le rotor est progressive et les profils des pales se trouvent modifiées par cette accumulation, pouvant alors aboutir sur une déroute du système de pilotage (plus d'adéquation entre calage des pales et vitesse de rotation). Nous laissons donc cette situation de coté et nous nous consacrons plutôt au cas de l'arrêt par tempête.

Cette situation a lieu lorsque le vent atteint une valeur prédéfinie pendant un certain laps de temps. Les pales sont alors positionnées en drapeau pour un arrêt normal, les freins restent déserrés et l'orientation de la nacelle reste active. Si le vent retombe en dessous d'un certain seuil pendant une période assez longue, la machine se remet en fonctionnement rotation lente.

3.4 Disfonctionnement

Lorsqu'une avarie est décelée, la machine se met en position panne : elle est normalement déconnectée, les pales sont en drapeau et les freins serrés. L'orientation reste active si la panne ne touche pas ce système.

3.5 Processus d'arrêt

Le processus d'arrêt n'est pas unique. En effet, celui-ci est guidé par la cause de son déclenchement et l'on distingue généralement 3 types d'arrêt :

- l'arrêt normal. Les pales sont mises en drapeau à une vitesse de calage modérée, la génératrice fournit de la puissance jusqu'à ce qu'elle tombe en dessous de sa vitesse de synchronisation. Les freins sont ensuite actionnés,
- l'arrêt rapide. Il intervient lors du dépassement de la vitesse limite U_{max} et la procédure est identique à celle de l'arrêt normal mis à part que la vitesse de calage des pales est supérieure,
- l'arrêt d'urgence. Les pales sont mises en drapeau rapidement, les freins sont serrés immédiatement et la charge de la génératrice est supprimée sans délai. Cet arrêt est causé par l'atteinte de U_{crit} , une perte de charge du réseau ou pour toute autre anomalie non identifiée.

Pour tous ces modes, le fonctionnement de base de l'éolienne peut être considéré comme une machine animée par des régimes de vent stationnaire. Les charges sur les différents composants sont alors périodiques. Les autres états peuvent être traités, au niveau du calcul, soit comme un évènement venant perturber cet état d'équilibre (rafales, disfonctionnement, changement d'orientation de la nacelle), soit comme des perturbations autour de cet état

d'équilibre (turbulence). Ceci a une incidence directe sur la façon dont seront dressés les différents cas de calcul.

Quel que soit le cas de fonctionnement, il faudra toujours déterminer la solution périodique en régime de vent stationnaire (et il faudra s'arrêter là pour le fonctionnement normal) et entrer cette solution périodique comme état initial pour le traitement des autres cas (turbulence, rafale, disfonctionnement, etc).

3.6 Principe de régulation du calage et de la puissance

L'élément central conditionnant le fonctionnement correct et garantissant le rendement optimal d'une machine réside bien entendu dans son mécanisme de régulation. Le schéma bloc d'un régulateur du nombre de tours par minute et d'un régulateur de puissance est donné par la *figure 3.3*.



FIG. 3.3 Schéma bloc d'un système de régulation

La régulation du calage des pales est basée sur le filtrage à la fois, de la vitesse de rotation $\Omega = \dot{\varphi}_{To}$ et l'accélération $\dot{\Omega} = \ddot{\varphi}_{To}$ du rotor, alors que la régulation de la puissance de sortie n'est basée que sur l'accélération.

3.6.1 Régulation du calage des pales

Le calage des pales influence directement la vitesse et l'accélération du rotor et réguler ce calage revient à réguler ces deux paramètres. Pour définir la loi de pilotage du calage en degré par seconde, on régule donc la vitesse de rotation du rotor, Ω , qui est déterminée par la différence entre la vitesse de rotation réelle filtrée et sa consigne théorique. Plus exactement, le critère de régulation est basé sur la variation de l'énergie cinétique du rotor : $\Delta E_{rot} = \frac{1}{2}J(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)$ (J moment d'inertie du rotor). Quant à l'accélération, celle-ci est définie par la valeur de Ω filtrée et dérivée (opérateur d/dt), le critère de régulation reposant alors sur la puissance instantanée $\mathcal{P} = J\dot{\Omega}$. Cette accélération peut ainsi être ramenée en kW sur la génératrice pour définir la vitesse de calage qui amène la génératrice vers son point de fonctionnement nominal.

3.6.2 Régulation de la puissance de sortie

La puissance de sortie est régulée à partir de l'accélération (Acc) et de la puissance instantanée du rotor (D-Acc) d'une part, et de la courbe caractéristique de la puissance de la génératrice d'autre part. La comparaison de ces paramètres permet alors de réguler la puissance de sortie de la génératrice.

3.7 Intégration de la régulation dans le système d'équations différentielles

On rappelle que le système d'équations différentielles du système est donné par la relation (2.1), système dans lequel les éléments L_p du vecteur colonne $\{L\}$ font intervenir les vitesses et plus particulièrement les accélérations partielles *(annexes II-A et II-B)*. Or, pour chaque pas de temps, les paramètres de régulation sont : ψ_{La} , l'angle d'orientation de la nacelle, ψ_{Pl} , l'angle de calage et enfin $\dot{\varphi}_{To}$ la vitesse de rotation du rotor. Par conséquent, ces paramètres et leurs dérivées par rapport au temps vont intervenir directement dans les expressions des accélérations partielles déterminées dans le paragraphe 2.4 et par suite conditionner les éléments L_p du système d'équations différentielles. En particulier, on remarque que les accélérations partielles affectées par les paramètres de pilotage sont :

- pour les accélérations angulaires

•
$$\underline{\dot{\omega}}_{2}^{3} = \underline{\dot{\omega}}_{2}^{3}(w_{1}, w_{4})$$
, équation (2.22)

• $\underline{\dot{\omega}}_{2}^{k} = \underline{\dot{\omega}}_{2}^{k}(w_{1}, w_{4})$ $\underline{\dot{\omega}}_{3}^{k} = \underline{\dot{\omega}}_{3}^{k}(w_{1}, w_{2}, w_{4}, w_{(4+1)}, \dots, w_{(4+NM_{3})}), \text{ équation } (2.23)$

- pour les accélérations linéaires

•
$$\underline{\dot{v}}_{1}^{h_{3}} = \underline{\dot{v}}_{1}^{h_{3}}(w_{1}, w_{4})$$

 $\underline{\dot{v}}_{4}^{h_{3}} = \underline{\dot{v}}_{4}^{h_{3}}(w_{1}, w_{4})$, équation (2.26)
• $\underline{\dot{v}}_{1}^{h_{k}} = \underline{\dot{v}}_{1}^{h_{k}}(w_{1}, w_{2}, w_{4}, w_{(4+l)})$
 $\underline{\dot{v}}_{2}^{h_{k}} = \underline{\dot{v}}_{2}^{h_{k}}(w_{1}, w_{2}, w_{4}, w_{(4+l)})$
 $\underline{\dot{v}}_{4}^{h_{k}} = \underline{\dot{v}}_{4}^{h_{k}}(w_{1}, w_{2}, w_{4}, w_{(4+l)})$
 $\underline{\dot{v}}_{p}^{h_{k}} = \underline{\dot{v}}_{p}^{h_{k}}(w_{1}, w_{2}, w_{4}, w_{(4+l)})$, pour $p = 4 + l$, $l = 1, NM_{3}$, équation (2.27)

avec, pour mémoire, $w_1 = \psi_{La}$, $w_2 = \dot{\varphi}_{To}$ (tableau 2.2). On note que ψ_{Pl} n'intervient pas dans les expressions des accélérations partielles. Ceci justifie a posteriori le fait que la loi de pilotage du calage présentée au paragaphe 3.6 est basée sur la vitesse de rotation et d'accélération du rotor, soit w_2 et \dot{w}_2 respectivement. Par contre, l'angle de calage ψ_{Pl} (β_0 sur la figure III-2.4) va conditionner les forces actives généralisées dues aux forces aérodynamiques, puisque l'angle ϕ , dans la relation (2.50) est fonction de cet angle de calage.

Par conséquent, la boucle de pilotage va s'insérer dans le schéma d'intégration temporelle directe et reconditionner, à chaque pas de temps, les caractéristiques (vitesses, accélérations) des mouvements de corps rigides en fonction de la réponse globale de la machine face à son environnement. Ainsi, la boucle de pilotage s'incorpore de façon naturelle dans le schéma d'intégration temporelle. A l'opposé, un schéma de résolution par superposition modale nous obligerait à chaque pas de temps à linéariser les degrés de liberté q_p (p = 1 à NS) ainsi que leurs dérivées autour d'une position d'équilibre et à étudier la stabilité de la machine autour de cette position d'équilibre. Le contrôle s'effectuerait alors au travers de la base modale.

Chapitre 4

Technique de résolution numérique

4.1 Introduction

La modélisation dynamique du système débouche naturellement sur un système d'équations différentielles du second ordre qu'une transformation simple nous a permis de ramener à un système du premier ordre. En outre, ce système possède deux caractéristiques notables : il est couplé puisque les dérivés premières des fonctions w_p recherchées se combinent linéairement avec les coefficients \mathcal{M}_{lp} , et les équations différentielles sont non linéaires puisque ces mêmes coefficients \mathcal{M}_{lp} sont fonction des degrés de liberté q_p (p = 1, NS). Les équations étant couplées, elles ne peuvent donc pas être directement résolues par les techniques numériques employées classiquement pour les systèmes du premier ordre. En effet, ceux-ci se présentent normalement sous la forme générale :

$$\begin{cases} y'_{1} = h_{1}(y_{1}, \dots, y_{n}, t) \\ \vdots & \vdots \\ y'_{n} = h_{n}(y_{1}, \dots, y_{n}, t) \end{cases}$$
(4.1)

Par conséquent, une opération de découplage de ces équations à l'aide d'une technique d'élimination (pivot de Gauss) devra précéder la résolution du système proprement dit afin de retomber sur la forme (4.1). Pour cette dernière, deux types de schéma d'intégration s'offrent alors à nous: les schémas à pas de temps unique et ceux de prédiction-correction basés sur des pas de temps multiples. Le schéma à pas unique de Runge-Kutta est le plus répandu en raison de sa simplicité de mise en oeuvre, tandis qu'un des schémas multi-pas gagnant la faveur de nombreux auteurs [4], est celui de prédiction-correction de Adams-Bashforth-Moulton. Le choix de l'un d'entre eux peut sembler délicat. Cependant, on peut avancer les arguments suivants, permettant de départager les deux méthodes:

- si l'évaluation des fonctions h_p du système (4.1) est coûteuse en temps de calcul, un schéma de Adams est préférable, par contre, si l'évaluation des fonctions h_p du système (4.1) est rapide, et si une précision moyenne sur le résultat est suffisante au problème, le schéma de Runge-Kutta est à conseiller,
- si les capacités de stockage en mémoire sont limitées, le schéma de Runge-Kutta l'emporte. Cependant, avec les machines actuelles, cet argument est de moins en moins justifiable.

Il faut également signaler que dans le cas d'un système d'équations différentielles "raide" pour lequel les solutions varient fortement en amplitude entre deux pas de temps, l'emploi d'un schéma de Runge-Kutta peut mener à des résultats incorrects [5]. Notons que les ouvrages sur les techniques numériques laissent peu de place aux schémas multi-pas, car ils répondent généralement à des applications spécifiques. Néanmoins, pour le traitement de la dynamique des rotors (hélicoptères et éoliens), deux auteurs ([7], [6]) utilisent avec satisfaction le schéma de prédiction de Adams-Bashforth avec pour le second d'entre eux, également le schéma de correction de Adams-Moulton. Dans notre cas, les spécificités suivantes doivent être prises en compte:

- les expressions des fonctions h_p sont complexes et donc longues à évaluer,
- il est nécessaire de stocker les résultats des pas de calcul précédents afin de retracer l'historique de système,
- la limitation du stockage des données en mémoire ne constitue pas un problème du fait des capacités du matériel actuellement disponible sur le marché.

Suite à l'ensemble de ces considérations, nous suggérons donc d'utiliser un schéma d'intégration temporelle directe de Adams-Bashforth-Moulton. Cependant, un schéma de prédiction-correction ne pouvant démarrer seul, il est nécessaire d'amorcer les n premiers pas de temps (n correspondant à l'ordre du schéma) par une méthode de Runge-Kutta.

4.2 Établissement et résolution numérique du système d'équations

L'ensemble des équations différentielles régissant le comportement dynamique du système a été établi à l'aide de la formulation des équations de mouvement des systèmes multicorps souples à arborescence topologique (cf. II-1.4). Le formalisme de Kane ainsi que l'introduction du comptage des corps permettent de présenter les équations différentielles, pour l'ensemble des p degrés de liberté par:

$$f_p + f_p^* = 0$$
 $(p = 1, \cdots, NS)$ (4.2)

où f_p et f_p^* sont respectivement, les forces actives généralisées et les forces d'inertie généralisées du système, développées dans le cas d'une éolienne tripale à axe horizontal dans le *chapitre 2*. Les relations de type (4.2) nous permettent alors de construire le système d'équations différentielles du premier ordre non linéaire couplé (cf. § 4.1) tel que:

$$\begin{cases} [\mathcal{M}]\{\dot{w}\} &= \{L\}\\ \{\dot{q}\} &= \{w\} \end{cases}$$

$$(4.3)$$

ou encore, sous forme développée:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & \cdots & \mathcal{M}_{1NS} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{M}_{NS1} & \cdots & \mathcal{M}_{NSNS} \end{bmatrix} \begin{cases} \dot{w}_1 \\ \vdots \\ \dot{w}_{NS} \end{cases} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{NS} \end{bmatrix}$$
(4.4)

Coefficients des accélérations Accélérations généralisées généralisées

Or:

$$\mathcal{M}_{pl} = \mathcal{M}_{pl}(q_1, \dots, q_{NS}, t) \tag{4.5}$$

et:

$$L_p = L_p(q_1, \dots, q_{NS}, w_1, \dots, w_{NS}, t)$$
(4.6)

Ainsi, pour obtenir les solutions w_p du système (4.4), il faut nécessairement résoudre celui-ci par rapport aux \dot{w}_p et ensuite résoudre numériquement le système d'équations différentielles du type:

$$\dot{w}_p = h_p(w_1, \dots, w_{NS}, t) \quad \text{pour } p = 1 \text{ à } NS \tag{4.7}$$

L'ensemble des phases de calcul est résumé sur les figures 4.1 et 4.2. La figure 4.1 regroupe toutes les phases visant à conditionner les données du système mécanique avant d'appliquer le schéma d'intégration temporelle. Pour une configuration de machine donnée, ces données sont calculées une fois pour toute. La figure 4.2 décrit, quant à elle, les différentes étapes nécessaires à la mise en oeuvre du schéma d'intégration temporelle que nous allons maintenant détailler.

Rappelons qu'il est, dans tous les cas, nécessaire de rechercher une solution périodique du système, car l'éolienne est d'abord conditionnée par un régime de vent stationnaire. Lorsque ce n'est plus le cas (introduction d'une rafale, de la turbulence), il faut de toute façon rechercher, avant d'effectuer le calcul transitoire, la solution périodique correspondant au fonctionnement du rotor à l'équilibre dans le cas de régime de vent stationnaire moyen avant l'application de la rafale ou de la turbulence.

La résolution numérique du système (4.3) s'articule en deux étapes principales :

la recherche des accélérations généralisées w_p

1. Initialisation des matrices $[\mathcal{M}]$ et [L] du système (4.4) à l'aide des valeurs du pas de temps précédent (ou suivant les conditions à $t_0 = t_{init}$).

2. Résolution par rapport aux \dot{w}_p (p = 1 à NS) du système d'équations (4.4) à l'aide, par exemple, d'une méthode par élimination de Gauss.

- l'intégration temporelle proprement dite

1. Si $t = t_0$ alors initialisation des quatres premiers pas de temps par un schéma de Runge-Kutta du 4^{ème} ordre. On considère le système (4.7) (p = 1 à NS), sur l'intervalle [t_{init}, t_{fin}], avec $w_p(a) = A_p$. Soit le pas de temps $\Delta t = \frac{t_{fin} - t_{init}}{n}$, alors

$$w_p^{i+1} = w_p^i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, 3$$
(4.8)

avec

$$\begin{cases}
k_{1} = h_{p}(t_{i}, w_{p}^{i}) \\
k_{2} = h_{p}(t_{i} + \frac{\Delta t}{2}, w_{p}^{i} + \frac{\Delta t}{2}k_{1}) \\
k_{3} = h_{p}(t_{i} + \frac{\Delta t}{2}, w_{p}^{i} + \frac{\Delta t}{2}k_{2}) \\
k_{4} = h_{p}(t_{i} + \Delta t, w_{p}^{i} + \Delta t k_{3})
\end{cases}$$
(4.9)

et $t_0 = t_{init}, w_p^0 = A_p$, sinon passage à l'étape suivante.

2. Application du prédicteur du 4^{ème} ordre de Adams-Bashforth (méthode multi-pas) pour résoudre l'ensemble des équations différentielles du type (4.7) (p = 1 à NS)

$$w_p^{i+4} = w_p^{i+3} + \frac{\Delta t}{24} (55h_p^{i+3} - 59h_p^{i+2} + 37h_p^{i+1} - 9h_p^i)$$
(4.10)

Les nouvelles valeurs des w_p obtenues au pas courant sont alors utilisées pour réactualiser les coefficients \mathcal{M}_{lp} et L_p du système (4.4).

- 3. Résolution par rapport aux \dot{w}_p $(p = 1 \ge NS)$ à l'aide d'une méthode par élimination du système d'équations (4.4) réactualisé.
- Après quelques itérations sur les étapes 4 et 5, application du correcteur du 4^{ème} ordre de Adams-Moulton

$$w_p^{i+4} = w_p^{i+3} + \frac{\Delta t}{24} (9h_p^{i+4} + 19h_p^{i+3} - 5h_p^{i+2} + h_p^{i+1})$$
(4.11)

puis dernière réactualisation des coefficients \mathcal{M}_{lp} et L_p du système (4.4).

- 5. Résolution finale par rapport aux \dot{w}_p (p = 1 à NS) du système d'équations (4.4) à l'aide d'une méthode par élimination.
- 6. Incrémentation du pas de temps et retour à l'étape 1.



FIG. 4.1 Algorithme général (1/2): conditionnement des données

La valeur du pas de temps Δt doit être déterminé en fonction d'un certain nombre de contraintes [26]. Dans le cas de l'application de la turbulence (cf. III-1.4), le nombre de pas de temps pour une révolution du rotor doit être pris comme un multiple de deux de celui utilisé pour échantillonner cette même turbulence. De plus, la plus haute fréquence naturelle du système que l'on désire prendre en compte, (habituellement le 1^{er} mode de flexion en traînée ou le second mode de flexion en battement), conditionne la borne supérieure de la valeur du pas de temps à ne pas dépasser afin d'intégrer les modes à haute fréquence. 128 à 256 pas de temps par tour sont des chiffres typiquement avancés par Wilson *et al* [26].

On discerne bien sur la *figure 4.2* l'interaction entre la partie fluide et la partie structure. En effet, la position courante du système déformé va modifier le triangle des vitesses sur les profils respectifs des pales et inversement, la modification des conditions d'écoulement sur celles-ci vont agir sur la nouvelle position des corps souples du système. Cette description est souvent rapportée comme l'effet de "pompage" aérodynamique : la pale en se déformant modifie les caractéristiques locales de l'écoulement amont et ces dernières redirigent la structure vers une nouvelle position déformée.

D'autre part, nous avons précédemment mentionné le fait qu'il faut, quel que soit le résultat recherché, d'abord déterminer la solution périodique du système en régime de vent stationnaire. Pour cela, il faut remplir les deux conditions suivantes pour un tour complet du rotor :

- le sillage doit évoluer périodiquement,
- les vitesses généralisées w_p représentant les déformations des corps souples doivent également évoluer périodiquement,
- et enfin, les vitesses généralisées w_p représentant les mouvements de corps rigides tels que le calage des pales et l'orientation de la nacelle doivent être nulles, alors que la vitesse moyenne de rotation du rotor doit être constante (la vitesse instantanée peut quant à elle légèrement fluctuer, mais toujours périodiquement).

Cela n'est possible qu'en employant dans le schéma de résolution numérique (figure 4.2) un critère de convergence sur l'égalisation à une valeur ϵ près des w_p entre deux tours consécutifs du rotor. On pourrait également imposer un critère de convergence sur le sillage pour s'assurer de l'adéquation entre la géométrie du sillage et celle des déformées des corps souples. Celle-ci serait néanmoins redondante, puisqu'en toute rigueur, les positions des corps souples sont directement associées à une géométrie du sillage.



FIG. 4.2 Algorithme général (2/2): construction et résolution du système d'équations

..

Bibliographie

- SINGH, R. P., VANDERVOORT, R. J. and LIKINS, P. W.: "Dynamics of flexible Bodies in Tree Topology - A Computer-Oriented Approach"; Journal of Guidance Control and Dynamics, Vol. 8 No. 5, 1985.
- [2] D. PETOT: La stabilité des pales d'hélicoptères Le code "Rotor"; rapport technique No. 5/4372 RY 006 R, ONERA, avril 1991.
- [3] COOK, R.D., MALKUS, D.S. and PELSHA, M.E.: <u>Concepts and Applications of Finite Element Analysis</u>; John Wiley and Sons, New-York, pp. 376-377, 19xx.
- [4] W.H. PPRESS, B.P., FLANNERY, S.A. TEUKOLSKY and W.T., VETTERLING: <u>Numerical Recipes</u> - The Art of Scientific Computing; Cambridge University Press, 1986.
- [5] P. RAPIN, P. GERMAIN LACOUR : Téchniques numériques Equations différentielles; Collection Technique de l'Ingénieur, Vol. ASF-2, p.(652-5).
- [6] R.E., WILSON et al: Fast Advanced Dynamics Code; OSU/NREL Report 96-01, March 1996.
- [7] S.R. TURNOUR: Flight Dynamics Simulation Modeling for Hingeless and Bearingless Rotor Helicopters; PhD. Dissertation, University of Maryland, 1996.

Cinquième partie

••,.

Le code $\mathcal{EOL1}$

•

...

Chapitre 1

Présentation du code $\mathcal{EOL}1$

1.1 Introduction

Le noyau d'un code de calcul, baptisé $\mathcal{EOL1}$, a été écrit afin de mettre en oeuvre les théories exposées dans la partie modélisation aérodynamique (partie III), ainsi que celles de la modélisation éléments finis du chapitre II-2. Malheureusement, les parties relatives à la mise en équation et à l'étude de la dynamique d'une machine complète n'ont pu être implantées dans le code à ce jour, faute de temps. De plus, le calcul éléments finis n'est pas totalement opérationnel puisqu'il ne permet pas de déterminer les fonctions de forme modales $\underline{\phi}_i$ (cf. § II-2.6). Cependant, la partie modélisation aérodynamique a été codée de façon suffisamment avancée pour nous permettre d'effectuer des premiers calculs d'efforts sur n'importe qu'elle configuration d'éolienne à axe horizontal dans le vent. Un calcul de contre-vérification sur une éolienne de 750 kW (Frisia 4800/750 fabriquée par l'entreprise Danoise Wind World) a d'ailleurs été effectué avec ce code. A cette date, les caractéristiques de celui-ci sont les suivantes:

- les pales sont considérées comme rigides,
- les efforts aérodynamiques sont déterminés par l'application de la méthode de l'élément de pale et de la quantité de mouvement (cf. § III-3.2.2) modifiée,
- les effets de gradient de vent (cf. § III-1.3.2), d'ombre du pylône (cf. § III-1.5) et de désalignement du vent (cf. § III-3.2.4) amont sont prises en compte,.
- les polaires prennent en compte les effets du à la rotation de la pale (effets 3D, cf. § III-3.2.5),
- la gravité et les forces centrifuges sont additionnés aux efforts aérodynamiques.

Signalons également qu'une analyse par sillage prescrit (cf. § III-3.3) est en phase d'implémentation.

Une attention toute particulière a été portée sur l'architecture et l'écriture (langage FORTRAN77) de ce code suivant des normes de qualité logiciel, en partie définies par l'Onera. L'objectif, à terme, étant de garantir la portabilité du code sur différents types de supports

informatiques (PC, stations de travail). En plus de cet objectif, les critères suivants ont été pris en compte:

- convivialité (pré et un post-traitement des données),
- capacité de calcul pour des conceptions rapides sur des supports informatiques standards,
- production de résultats directement utilisables pour la conception et la certification,
- documentation complète du code.

Le souci de réaliser un code interactif nous a mené à employer la norme graphique *PHIGS*.

1.2 Structure et écriture du code de calcul éolien

La structuration d'un code de calcul, quel qu'il soit, est une nécessité et nous faisons ici la synthèse de l'architecture adoptée. On peut clairement découper le code $\mathcal{EOL1}$ en trois blocs (figure 1.1):

- le pré-traitement,
- le corps de calcul,
- le post-traitement.

Le pré-traitement a pour tâche de mettre en forme les données initiales (géométrie de l'éolienne, des pales, etc ...) pour que le corps de calcul puisse les reconnaître comme des entrées universelles, c'est-à-dire indépendantes de leur mode d'évaluation (expérimentales, calculatoires, documentaires). Le corps de calcul est une boîte noire pour l'utilisateur, qui laisse un minimum d'initiative à celui-ci, en contre partie de laquelle le code doit fournir des messages d'avancement des procédures exploitables et surtout des messages d'erreurs succincts, mais donnant suffisamment d'informations pour permettre de corriger ces erreurs sans ambiguïté. Cette dernière capacité du corps de calcul est de loin la plus difficile à réaliser. Le post-traitement analyse, de façon la plus explicite possible, les différents résultats donnés par le corps du calcul. Les sorties graphiques étant un moyen sûr de synthétiser les résultats, elles ont donc été privilégié.

Partie V. Le code EOL1


FIG. 1.1 Structure générale du code EOL1

1.3 Pré-traitement

La phase de mise en forme des données du calcul peut s'avérer fastidieuse si les moyens d'écriture et surtout de vérification de la base de données ne sont pas adaptés ou mal élaborés. Celle-ci se décompose en trois parties, destinée à:

1. La modélisation éléments finis des pales pour laquelle il faut définir

- la géométrie de la pale,
- les caractéristiques mécaniques $(\widehat{ES}, \widehat{EI}_{yy}, \text{etc})$ d'un certain nombre de sections,
- le maillage.

2. Le calcul des efforts aérodynamiques qui demande de connaître

- la définition géométrique et les polaires des profils,

Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance

- les caractéristiques topologiques et aérologiques du site.
- 3. La définition des sous ensembles de l'éolienne telle que
 - le rotor (nombre de pale, etc),
 - la géométrie du pylône,
 - les caractéristiques de la ligne d'arbre (composants et mécaniques).

D'autre part, des codes élaborés par le NWTC-NREL (**Prop-PC**, **WT-Perf**, **Fast-Ad**) et l'Ecn (**Phatas**) distinguent nettement les données relatives à la conduite du calcul lui même de celles destinées à alimenter le calcul. Cette technique introduit une souplesse indéniable sur :

- le traitement répétitif des cas de charges d'une étude, puisqu'il suffit de jouer sur une partie des données de calcul qui sont regroupées dans un fichier et non attachées au corps de calcul,
- l'accès à l'historique d'un calcul. On peut clairement faire correspondre les résultats obtenus avec les paramètres calculatoires qui ont été définis; il s'agit en somme d'une démarche documentaire.

1.3.1 Corps de commandes

Ce fichier est le chef d'orchestre du code. En effet, il rassemble les ordres et les paramètres clés de l'exécution du programme (*annexe H*). La structure du corps de commande se résume ainsi:

1. Le support d'impression des messages de procédures

Il existe deux types de supports : l'écran ou des fichiers de différents formats (ASCII pour le texte, Postscript pour les graphiques). L'écran est réservé au mode d'exécution interactif alors que des fichiers sont réservés au mode d'exécution en arrière plan (mode *Batch*).

2. Les bascules d'entrées/sorties

Introduisons d'abord la notion d'auto-documentation. L'auto-documentation d'un calcul est toujours nécessaire pour archiver et recouper les cas d'études entre eux. En effet, une étude est un assemblage logique de données d'entrées, de résultats intermédiaires et de résultats finaux. Il est donc indispensable que le code donne la trace des exécutions de procédures dans les documents générés par celui-ci. Concrètement, pour un fichier d'entrée ou de sortie, les écritures d'en-tête de celui-ci doivent communiquer à l'utilisateur l'identification de l'étude, la date d'exécution, ainsi que les éléments avec lesquels ce fichier a été élaboré. Le niveau de documentation des entrées/sorties est contrôlé par un ensemble de bascules (commutateur logique [oui/non]). Ainsi, une partie des données d'entrées (géométrie de l'éolienne, du rotor, des composantes de la nacelle, etc) pourront être résumées dans un fichier de résultats. Parmi l'étendue des données de sorties (vitesses induites, efforts, moments, couples, puissances, etc) l'utilisateur sélectionnera ensuite celles qu'il souhaite exploiter.

Partie V. Le code EOL1

3. Liste des fichiers de données

Elle regroupe l'ensemble des fichiers de données qui ont été créés par l'utilisateur grâce au pré-traitement ou par écriture directe à l'aide d'un éditeur de texte. Cette liste apporte en plus une grande souplesse dans les études de dimensionnement, car les configurations de machines, ainsi que leurs conditions de fonctionnement, peuvent être modifiées à volonté.

4. Sélection des algorithmes

Pour une même configuration, il est intéressant de comparer les résultats finaux suivant les algorithmes sélectionnés. En effet, nous avons décrit dans le *chapitre III-3.2.4* qu'un certain nombre de modèles, relatifs à un même phénomène, sont disponibles. Cette sélection constitue un critère de souplesse supplémentaire du code.

5. Paramètres de calcul

Ces paramètres fixent le passage du modèle physique continu au modèle numérique discrétisé (répartition des points de contrôle sur les pales, nombre de segments pour les pales, nombre d'incrémentations azimutales, etc) ainsi que les critères de précision sur la convergence des algorithmes (nombre maximum d'itérations, précision souhaitées sur les vitesses induites, etc).

Par rapport aux autres fichiers de données, le corps de commandes est documenté manuellement par l'utilisateur. Les contraintes liées à ce mode d'écriture se traduisent par un respect *impératif* de l'ordre et de la syntaxe dans lesquels les commandes doivent figurer.

1.3.2 Fichiers de données élémentaires

L'utilisateur a le choix entre deux modes d'écriture des fichiers de données élémentaires. Le premier a recours à une application de mise en forme des données, tandis que le second est constitué d'un simple éditeur de texte. Le logiciel de mise en format permet d'élaborer des bases de données fiables, car l'utilisateur résume son intervention à répondre à des questions ou à rentrer des valeurs. De plus, si cette application est bien conçue, toute valeur rentrée doit être analysée : est-elle compatible avec la grandeur à laquelle elle s'accorde (par exemple son signe)? est-elle cohérente avec le groupe de données dont elle fait partie (par exemple la hauteur du pylône par rapport à l'envergure des pales)? Par opposition, l'écriture directe d'une base de données laisse trop de latitude à l'utilisateur. En conséquence, les erreurs d'écriture peuvent être nombreuses, surtout s'il s'agit de créer entièrement cette base. Par contre, une modification minime d'une base de données justifie pleinement ce second mode d'écriture. Dans les deux cas, une transcription graphique des données de ces différentes bases est un atout non négligeable dans la visualisation immédiate de leur cohérence pour, d'une part, éviter les échecs d'exécution du code suite à une donnée erronée, et d'autre part, documenter l'étude. La liste suivante énumère les fichiers de données utilisés :

- fichier de site. Il regroupe les caractéristiques topologiques et aérologiques du site d'implémentation de la machine (annexe I),
- fichier de machine. Y sont regroupées les dimensions (hauteur, rayon de base du pylône, etc) et les angles (inclinaison de l'axe de la ligne d'arbre, etc) caractéristiques de la machine ainsi que le nombre de pales du rotor (annexe J),

- fichier de pale. La géométrie de la pale est décrite sous forme de polynômes pour chaque grandeur caractéristique (corde, angle de vrillage, axe de vrillage, centrage, profils, envergure, zone aérodynamique). Ce fichier de donnée fait référence aux profils sous deux formes : leurs polaires et leurs définitions géométriques (annexe K),
- fichiers de polaires. Tableaux des coefficients aérodynamiques C_x , C_z et C_m en fonction de l'incidence. On trouve également des informations sur l'étendue de la partie linéaire du C_z et la position du foyer aérodynamique A, en pourcentage de corde (annexe L),
- fichiers de profils. Ce sont des tableaux de points de définition des profils (annexe M),
- fichier de rigidités. Quatre tableaux synthétisent les différentes rigidités et masses équivalentes de la pale, ainsi qu'une description de l'évolution du centre élastique et de torsion en fonction de l'envergure (annexe N),
- fichier de nacelle. La nacelle referme trois composants principaux. Le premier est le multiplicateur, le second la génératrice et le troisième le système de freinage. La transmission de puissance s'effectue bien sûr par des arbres dont il faut donner les caractéristiques pour ramener l'ensemble composants-arbres de transmission à un système dynamique équivalent (annexe O),
- fichier de maillage. Les pales sont modélisées par éléments finis. Ce fichier fixe donc le nombre de noeuds et les degrés de liberté sur les pales. Notons que les coordonnées des noeuds sont celles des centres élastiques des sections correspondantes, donc, le fichier de maillage réellement utilisé par le code est issue d'une phase de pré-traitement (mailleur "automatique"). Celui-ci utilise le fichier de rigidités (annexe P).

1.4 Menus de pré-traitement du code $\mathcal{EOL1}$

Le code $\mathcal{EOL1}$ possède un interface graphique *(figure 1.2)* pour l'écriture de toute la base de données qui vient d'être détaillée.

۰.



FIG. 1.2 Ecran principal

Le menu principal (figure 1.3), en plus de la création d'une base de données (figure 1.4), permet d'une part d'accéder à une application spécifique pour l'élaboration du fichier de pale, (annexe K) et d'autre part, de visualiser la majeure partie des données (figure 1.5). Parmi celles-ci, on retiendra:

- l'évolution des rigidités équivalentes (figure II-2.16), et des centres (élastique et torsion),
- l'évolution des coefficients aérodynamiques $(C_l, C_d \text{ et } C_m)$,
- la géométrie de la pale (figure 1.6),
- la configuration générale de la machine (figure 1.7),
- le maillage de la pale (figure II-2.29).

1.5 Corps de calcul

Le corps du calcul regroupe toutes les procédures de calcul. Il appelle, dans un premier temps le corps de commande, et suite à l'analyse de celui-ci, le corps de calcul va ouvrir et lire la base de données qui a été consignée dans le corps de commande. Les résultats sont écrits au fur et à mesure de l'avancement des différentes procédures (calcul des composantes du vent amont, calcul des vitesses induites, etc) pour être, soit analysés par l'opérateur, soit traités par des applications de post-traitement. L'annexe Q présente un fichier de résultats type que l'opérateur pourra directement exploiter, sans avoir recours à une application particulière.

FIG. 1.3 Menu général du pré-traitement

CHDICE	
CHDICE	
Fichier de site	(file.sit)
Fichier de géometrie	(file.geo)
Fichier de nacelle	(file.nac)
Fichier de géometrie de pale	(file,pal)
Fichier de profil	(file.prf)
Fichier de polaires	(file.pol)
Fichier de données matériaux	(file.mat)
Fichier de maillage	(file.nod)
RETOUR	

FIG. 1.4 Menu de création de la base de données

CHOICE
CHOICE
Visualisation d'un site
Visualisation d'une éclienne
Visualisation d'une pale
Visualisation d'un maillage
Tracé d'une polaire
Tracé d'un profil
Tracé d'une caractéristique mécanique
RETOUR

FIG. 1.5 Menu de visualisation de la base de données



FIG. 1.6 Visualisation de la modélisation géométrique d'une pale

FIG. 1.7 Visualisation de la configuration étudiée

1.6 Post-traitement

Le post-traitement est la partie la plus difficile (voir impossible) à présenter de façon formelle tant la complexité des systèmes étudiés donne un large choix dans l'exploitation des résultats finaux. De plus, les méthodes employées pour cette usage souffrent d'un manque d'harmonisation évident. Dans une première étape, on a veillé à ne présenter que les grandeurs qui présentent une signification universelle dans la conception de la machine.



FIG. 1.8 Variation azimutale des efforts et des moments

Parmi celles-ci, nous pouvons citer la courbe de puissance en fonction de la vitesse nominale du vent, les différents efforts et moments fléchissants (figure 1.8, 1.9) sur les pales.



FIG. 1.9 Cartographie du plan rotor pour la visualisation de la répartition des efforts et des moments

Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance

La seconde étape qui n'a pas été implémentée dans ce travail, sera le traitement en fatigue des différents composants et en particulier des pieds de pales. Le post-traitement prendra ici toute son importance puisqu'il s'agira de construire des spectres de charges qui formeront la base de données de codes de fatigue spécifiques. Rappelons que le but de ce type de code est bien de valider les concepts de machines, de certifier (tenue aux efforts) et sans aucun doute d'optimiser.

Conclusion générale

Deux points fondamentaux ont été abordés dans nos travaux. Le premier touche la détermination des équations de mouvement de l'éolienne à axe horizontal et le second la modélisation structurale des pales.

A priori, la mise en équation du système complet pouvait sembler problématique, car la cinématique des corps est composée d'un mouvement de grande amplitude et de déformations de ces mêmes corps. De plus, le couplage fluide structure apportait une difficulté supplémentaire quant à sa prise en compte dans les équations de mouvement. Or, l'application du formalisme de Kane, développé pour pallier aux difficultés liées à la détermination des équations de la dynamique des systèmes multicorps (robots, antennes déployables, etc), nous permet maintenant d'accéder rapidement et efficacement à ces équations de mouvement. En effet, l'association de ce formalisme avec un comptage des corps de l'éolienne, dont la configuration est conforme à une disposition arborescente ouverte, nous a conduit à:

- des relations dynamiques du système dans lesquelles les effets dus à la déformation de tous les corps souples sont pris en compte,
- une formulation des relations cinématiques récursives, adaptée à une transposition algorithmique,
- une formulation des relations dynamiques dont les éléments peuvent être exploités sans une réécriture complète de ceux-ci si la configuration de l'éolienne venait à changer (bipale, tripale),
- l'intégration du couplage fluide structure de façon simple,
- l'introduction des paramètres de la boucle de pilotage dans le système d'équations et la possibilité d'intervenir sur ceux-ci au fur et à mesure de l'évolution du système,
- une résolution numérique du système d'équations de mouvement par pas de temps, permettant d'étudier les phénomènes transitoires.

D'autre part, une représentation modale des déformations des corps souples s'avère commode, car elle permet de conserver un nombre de degrés de liberté encore raisonnable. Mais, afin de ne pas retomber sur les positions adoptées par de nombreux auteurs sur la modélisation des pales (utilisation de codes commerciaux, simplification du comportement structurale) et d'apporter une réponse mieux adaptée au problème posé, nous avons développé un modèle éléments finis de type poutre pour déterminer les caractéristiques vibratoires de celles-ci.

Ajoutons à cela que le développement d'un code de calcul nous permet maintenant d'envisager une mise en oeuvre de l'ensemble des modèles, aussi bien structuraux qu'aérodynamiques. Le noyau d'un code a été écrit afin de dégager dans un premier temps, les concepts indispensables à l'organisation d'un code dévolu à la modélisation des éoliennes à axe horizontal, et dans un second temps, de support d'application des théories développées. Même si nous n'avons pas été en mesure de transcrire la mise en équations du système, sa présence et ses capacités potentielles ne peuvent que nous encourager à poursuivre son développement. Dans cet objectif, nous ferons désormais clairement la distinction entre la partie aérodynamique et structurale. Pour cette première partie, dont certains éléments sont déjà opérationnels, son développement futur devra porter sur le caractère instationnaire des forces aérodynamiques. Cela signifie qu'il faudra:

- introduire un modèle de décrochage dynamique,
- implémenter un modèle de turbulence atmosphérique.

On peut conserver ou combiner les deux niveaux d'approche qui ont été exposés pour le calcul des efforts aérodynamiques, c'est-à-dire, soit par la théorie combinée, soit par un analyse par sillage prescrit/libre. On remarquera que le modèle de décrochage dynamique, dans le cas de la théorie combinée, sera de type semi-empirique (modèle de Petot, par exemple), alors que pour une analyse par sillage libre, il s'agira de mettre en oeuvre le concept du double sillage.

La partie structurale est, quant à elle, largement conditionnée par la modélisation du comportement mécanique des pales. Deux approches sont envisageables, avec des spécifications particulières :

- on peut souhaiter, dans un premier temps, conserver une représentation modale des déformations des corps, et donc se restreindre au domaine des déplacements et des déformations modérées pour les pales,
- puis dans un second temps, il peut être souhaitable d'introduire les non linéarités au niveau du comportement élastique des pales liées aux grands déplacements (les déformations restent modérées) et aux effets de raidissement géométrique¹⁹. Dans ce cas, la représentation modale devra être abandonnée. On se tournera alors vers une modélisation éléments finis complète de l'éolienne *et* l'utilisation des formalismes des systèmes multicorps souples pour la détermination des équations de mouvement.

Remarquons que cette dernière démarche est actuellement mise en oeuvre pour la modélisation des rotors d'hélicoptères et de nombreux développements théoriques émergent sur ce thème. En effet, certains auteurs à l'origine de développements des formalismes des systèmes multicorps souples, se sont déjà investis dans ce type de recherches et elles constituent certainement une voie prometteuse. Cependant, la complexité mathématique de ces formalismes ainsi que les quantités de calcul auxquelles il faut faire face, limitent encore leurs

^{19.} Action des forces centrifuges qui rigidifient les pales

applications à des systèmes simples (poutre en rotation attachée à une base fixe).

Au-delà de ces aspects théoriques, il faut prendre conscience de l'enjeu de posséder un code de calcul dédié au dimensionnement des éoliennes. En effet, les points sur lesquels il est potentiellement capable d'intervenir sont les suivants:

- évaluation précise des performances,
- détermination réaliste des spectres de charges dimensionnants (fonctionnement par grand vent, fortes rafales) qui vont donc permettre de corriger les dimensions des éléments les plus importants et de satisfaire ainsi aux impératifs fixés par la réglementation en terme de fiabilité et de sécurité des composants,
- compréhension des phénomènes de fatigue pour d'une part, améliorer la planification des interventions de maintenance prévisionnelle et d'autre part, détecter les zones les plus sollicitées qui peuvent mener à terme à la destruction de la machine,
- aide logicielle à la certification de la machine,
- l'étude de nouveaux concepts (lois de régulation, pales particulières) sans passer dans un premier temps par une réalisation de la machine,
- la simulation du potentiel de production d'une machine sur site donné.

Le but de ces efforts est bien sûr d'amener le coût de production du kilowatt-heure à un niveau concurrentiel par rapport aux moyens de production classiques ou, à défaut, au niveau le plus bas possible. Même si les recherches et développements sur l'éolien menées ces dernières années en Europe semblent réveiller de multiples intérêts pour ce moyen de production d'énergie, il n'en reste pas moins que son succès passera par une coopération étroite entre industriels et laboratoires. A l'image des pays moteurs dans ce secteur, il est maintenant indispensable de posséder une base de données issues de l'instrumentation de machines afin d'être en mesure de confronter les résultats théoriques avec la réalité et ainsi d'aller plus loin dans la maîtrise de la technologie éolienne.

۰.

.

Annexes

••...

.

Annexe A

Développement des termes de l'équation relative à la force d'inertie généralisée f_p^{*k}

La force d'inertie généralisée p du corps k est définie par (II-4.24):

$$-f_{p}^{*k} = \int_{B_{k}} \underline{v}_{p}^{k} \cdot \underline{\ddot{R}}^{k} dm$$

$$= m_{k} \left(\underline{\ddot{R}}^{h_{k}} + \underline{\ddot{l}}^{k} \right) \cdot \underline{v}_{p}^{h_{k}} + \left(\underline{\dot{H}}^{h_{k}} + m_{k} \underline{l}^{k} \wedge \underline{\ddot{R}}^{h_{k}} \right) \cdot \underline{\omega}_{p}^{k} +$$

$$\underline{\ddot{R}}^{h_{k}} \cdot \int_{B_{k}} \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} dm + \underline{\dot{\omega}}^{k} \cdot \int_{B_{k}} \left(\underline{r}^{k} + \underline{u}^{k} \right) \wedge \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} dm +$$

$$2\underline{\omega}^{k} \cdot \int_{B_{k}} \underline{\overset{o}{u}}^{k} \wedge \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} dm + \int_{B_{k}} \underline{\overset{ook}{u}} \cdot \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} dm + \underline{\omega}^{k} \cdot \underline{\underline{D}}_{p}^{k} \cdot \underline{\omega}^{k}$$

On rappelle que les accélérations sont de la forme (pour tout corps k):

$$\frac{\ddot{R}^{h_k}}{\underline{w}^k} = \sum_{l=1}^{NS} \underline{w}_l^{h_k} \dot{w}_l + \sum_{l=1}^{NS} \underline{\dot{v}}_l^{h_k} w_l + \underline{\dot{v}}_t^{h_k}$$

$$\frac{\dot{\omega}^k}{\underline{w}^k} = \sum_{l=1}^{NS} \underline{\omega}_l^k \dot{w}_l + \sum_{l=1}^{NS} \underline{\dot{\omega}}_l^k w_l + \underline{\dot{\omega}}_t^k$$

$$\frac{\overset{ook}{\underline{u}}}{\underline{w}^k} = \sum_{l=1}^{NS} \underline{\phi}_l^k (\underline{r}^k) \dot{w}_l$$
(A.1)

où les termes non nuls de $\underline{\overset{oo}{u}}^k$ sont ceux correspondant à $w_l = \dot{\eta}_q^k$:

$$1 \cdots l \cdots NS$$

$$1 \cdots q \cdots NM_{k} \qquad (A.2)$$

$$< w_{l} > = < w_{1} \cdots < \dot{\eta}_{1}^{k} \cdots \dot{\eta}_{q}^{k} \cdots \dot{\eta}_{NM_{k}} > \cdots w_{NS} >$$

Index	Expression
1	$m_k \underline{\ddot{R}}^{h_k} \cdot \underline{v}_p^{h_k}$
2	$m_k \underline{\dot{l}}^k \cdot \underline{v}_p^{h_k}$
3	$\underline{\dot{H}}^{h_{k}}\cdot\underline{\omega}_{p}^{k}$
4	$m_k(\underline{l}^k\wedge \underline{\ddot{R}}^{h_k})\cdot \underline{\omega}_p^k$
5	$\underline{\ddot{R}}^{h_k}\cdot\int_{B_k}\underline{v}_p^{\dot{\eta}_k}dm$
6	$\underline{\dot{\omega}}^k \cdot \int_{B_k} \left(\underline{r}^k + \underline{u}^k ight) \wedge \underline{v}_p^{\dot{\eta}_k} dm$
7	$2\underline{\omega}^k\cdot\int_{B_k}\overset{\mathrm{o}^k}{\underline{u}}\wedge\underline{v}_p^{\dot{\eta}_k}dm$
8	$\int_{B_k} \underbrace{\overset{\circ o^k}{\underline{u}}} \cdot \underline{v}_p^{\dot{\eta}_k} dm$
9	$\underline{\omega}^k \cdot \underline{\underline{D}}_p^k \cdot \underline{\omega}^k$

TAB. A.1 Termes de l'équation (II-4.24) déterminant les M_{pl}

Les différents termes de l'équation (II-4.24) sont donnés dans le tableau A.1.

Chaque terme va contribuer à la construction de la matrice de masse $[\mathcal{M}]$ du système ainsi qu'au vecteur $\{L\}$, examinons par conséquent les coefficients \mathcal{M}_{pl} et L_p en supposant que $\underline{v}_t^{h_k}$ et $\underline{\omega}_t^k$ soient tous nuls:

• Terme d'index 1 : accélération du point h_k

$$\mathcal{M}_{pl} = m_k \, \underline{v}_p^{h_k} \cdot \underline{v}_l^{h_k} \quad \text{pour } l = 1 \text{ à } NS \tag{A.3a}$$

$$L_p = -m_k (\underline{v}_p^{h_k} \cdot \sum_{l=1}^{NS} \underline{\dot{v}}_l^{h_k} w_l) \quad \text{pour } p = 1 \text{ à } NS \tag{A.3b}$$

• Terme d'index 2: accélération du centre de gravité. Le vecteur position \underline{l}^k du centre de gravité du corps B_k après déformation est donné par

$$\underline{l}^{k} = \frac{1}{m_{k}} \int_{B_{k}} (\underline{r}_{k} + \underline{u}_{k}) \ dm \tag{A.4}$$

Donc, l'accélération du centre de gravité du corps B_k de masse m_k dans le repère galiléen b^0 s'exprime par

$$m_k \underline{\ddot{l}}^k = \int_{B_k} \left[\underline{\dot{\omega}}^k \wedge \left(\underline{r}^k + \underline{u}^k \right) + \underline{\omega}^k \wedge \left[\underline{\omega}^k \wedge \left(\underline{r}^k + \underline{u}^k \right) \right] + \underline{\ddot{u}}^{ook} + 2 \underline{\omega}^k \wedge \underline{\ddot{u}}^k \right] dm \qquad (A.5)$$

Par conséquent, l'équation (A.5) entraîne que :

$$\mathcal{M}_{pl} = \underline{v}_{p}^{h_{k}} \cdot \int_{B_{k}} \left[\underline{\omega}_{l}^{k} \wedge (\underline{r}^{k} + \underline{u}^{k}) + \underline{\phi}_{q}^{k}(\underline{r}^{k}) \right] dm$$

pour \dot{w}_{l} correspondant à $\ddot{\eta}_{q}^{k}, q \in [1, NM_{k}]$
$$= \underline{v}_{p}^{h_{k}} \cdot \int_{B_{k}} \left[\underline{\omega}_{l}^{k} \wedge (\underline{r}^{k} + \underline{u}^{k}) \right] dm \quad \text{sinon}$$
(A.6a)

$$-L_{p} = \underline{w}_{p}^{h_{k}} \cdot \left(\sum_{l=1}^{NS} \int_{B_{k}} \underline{\dot{\omega}}_{l}^{k} \wedge \left(\underline{r}^{k} + \underline{u}^{k}\right) dm w_{l} + \sum_{l=1}^{NS} \sum_{n=1}^{NS} \int_{B_{k}} \left(\underline{\omega}_{l}^{k} \wedge \left[\underline{\omega}_{n}^{k} \wedge \left(\underline{r}^{k} + \underline{u}^{k}\right)\right] + 2\underline{\omega}_{l}^{k} \wedge \underline{\phi}_{n}^{k}(\underline{r}^{k}) dm w_{n} w_{l} \text{ pour } w_{n} \text{ correspondant à } \dot{\eta}_{q}^{k}, q \in [1, NM_{k}]$$

$$= \underline{w}_{p}^{h_{k}} \cdot \left(\sum_{l=1}^{NS} \int_{B_{k}} \underline{\dot{\omega}}_{l}^{k} \wedge \left(\underline{r}^{k} + \underline{u}^{k}\right) dm w_{l} + \sum_{l=1}^{NS} \sum_{n=1}^{NS} \int_{B_{k}} \underline{\omega}_{l}^{k} \wedge \left[\underline{\omega}_{n}^{k} \wedge \left(\underline{r}^{k} + \underline{u}^{k}\right)\right] dm w_{n} w_{l} \text{ sinon} \qquad (A.6b)$$

- Terme d'index 3: accélération du moment angulaire $\underline{\dot{H}}^{h_k}$. Ce terme, défini par l'équation (II-4.26), se décompose en 10 facteurs tels que le présente le *tableau B.1* donné dans l'appendice B.
- Terme d'index 4

$$\mathcal{M}_{pl} = m_k \left(\underline{l}^k \wedge \underline{v}_l^k \right) \cdot \underline{\omega}_p^k \quad \text{pour } l = 1 \text{ à } NS \tag{A.7a}$$

$$L_p = -m_k \left(\sum_{l=1}^{NS} (\underline{l}^k \wedge \underline{\dot{v}}_l^k) \cdot \underline{\omega}_p^k \right) w_l$$
(A.7b)

• Terme d'index 5

$$\mathcal{M}_{pl} = \underline{v}_{l}^{k} \cdot \int_{B_{k}} \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} dm \left| \begin{array}{c} \text{pour } l = 1 \text{ à } NS \\ \text{pour } \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} \text{ correspondant à } \underline{\phi}_{q}^{k}, q \in [1, NM_{k}] \\ = 0 \quad \text{sinon} \qquad (A.8a) \\ L_{p} = -\sum_{l=1}^{NS} (\underline{\dot{v}}_{l}^{k} \cdot \int_{B_{k}} \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} dm) w_{l} \quad \text{pour } \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} \text{ correspondant à } \underline{\phi}_{q}^{k}, q \in [1, NM_{k}] \\ = 0 \quad \text{sinon} \qquad (A.8b)$$

• Terme d'index 6

Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance

$$\mathcal{M}_{pl} = \underline{\omega}_{l}^{k} \cdot \int_{B_{k}} (\underline{r}^{k} + \underline{u}^{k}) \wedge \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} dm \quad \left| \begin{array}{c} \text{pour } l = 1 \text{ à } NS \\ \text{pour } \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} \text{ correspondant à } \underline{\phi}_{q}^{k}, q \in [1, NM_{k}] \\ = 0 \quad \text{sinon} \\ L_{p} = -\sum_{l=1}^{NS} (\underline{\omega}_{l}^{k} \cdot \int_{B_{k}} (\underline{r}^{k} + \underline{u}^{k}) \wedge \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} dm) w_{l} \quad \text{pour } \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} \text{ correspondant à } \underline{\phi}_{q}^{k}, q \in [1, NM_{k}] \\ = 0 \quad \text{sinon} \end{array}$$

$$(A.9a)$$

$$(A.9b)$$

$$\mathcal{M}_{pl} = 0 \quad \text{pour } l = 1 \text{ à } NS \tag{A.10a}$$

$$L_{p} = -2 \sum_{l=1}^{NS} \sum_{n=1}^{NS} (\underline{\omega}_{l}^{k} \cdot \int_{B_{k}} (\underline{v}_{n}^{\dot{\eta}_{k}} \wedge \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}}) dm) w_{l} w_{n} \quad \begin{vmatrix} \text{pour } \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} \text{ et } \underline{v}_{n}^{\dot{\eta}_{k}} \text{ correspondent} \\ \text{respectivement } \dot{a} \ \underline{\phi}_{q}^{k}, q \in [1, NM_{k}] \\ \text{et } \ \underline{\phi}_{r}^{k}, r \in [1, NM_{k}] \end{aligned}$$

$$(A.10b)$$

• Terme d'index 8

$$\mathcal{M}_{pl} = \int_{B_{k}} (\underline{\phi}_{q}^{k}(\underline{r}^{k}) \cdot \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}}) dm \quad \begin{vmatrix} \text{pour } \dot{w}_{l} \text{ correspondant à } \ddot{\eta}_{q}, q \in [1, NM_{k}] \\ \text{et pour } \underline{v}_{p}^{\dot{\eta}_{k}} \text{ correspondant à } \underline{\phi}_{r}^{k}, r \in [1, NM_{k}] \\ = 0 \quad \text{sinon} \qquad (A.11a) \\ L_{p} = 0 \qquad (A.11b)$$

• Terme d'index 9

.

$$\mathcal{M}_{pl} = 0 \quad \text{pour } l = 1 \text{ à } NS \tag{A.12a}$$

$$L_p = -\sum_{l=1}^{NS} \sum_{n=1}^{NS} (\underline{\omega}_l^k \cdot \underline{\underline{D}}_p^k \cdot \underline{\omega}_n^k) w_l w_n$$
(A.12b)

Annexe B

·• ,.

Développement des termes d'index 3 du tableau A.1 de l'annexe A

On rappel que, d'après la relation (II-4.26):

 $\underline{\underline{N}}_{l}^{k}$

$$\underline{\dot{H}}^{h_{k}} = \underline{\underline{I}}^{h_{k}} \cdot \underline{\dot{\omega}}^{k} + \underline{\omega}^{k} \wedge (\underline{\underline{I}}^{h_{k}} \cdot \underline{\omega}^{k}) + \sum_{l=1}^{NM_{k}} \left[\underline{h}_{l}^{k} \ddot{\eta}_{l}^{k} + \left[\left(\underline{\underline{N}}_{l}^{k} + \underline{\underline{M}}_{l}^{k} \right) \cdot \underline{\dot{\omega}}^{k} \right] \eta_{l}^{k} + 2 \underline{\underline{N}}_{l}^{k} \cdot \underline{\omega}^{k} \dot{\eta}_{l}^{k} + \underline{\omega}^{k} \wedge \left[\left(\underline{\underline{N}}_{l}^{k} + \underline{\underline{M}}_{l}^{k} \right) \cdot \underline{\omega}^{k} \eta_{l}^{k} \right] \right] + \int_{B_{k}} \left[\underline{u}^{k} \wedge \underline{\overset{\circ}{u}}^{k} + \underline{u}^{k} \wedge (\underline{\dot{\omega}}^{k} \wedge \underline{u}^{k}) + 2 \underline{\underline{u}}^{k} \wedge (\underline{\omega}^{k} \wedge \underline{\overset{\circ}{u}}^{k}) + \underline{u}^{k} \wedge [\underline{\omega}^{k} \wedge (\underline{\omega}^{k} \wedge \underline{u}^{k})] \right] dm \qquad (B.1)$$

dm

Nous allons expliciter les différents termes intervenant dans l'expression de $\underline{H}^{h_k} \cdot \omega_p^k$ (tableau B.1).

Avec

$$\underline{h}_{l}^{k} = \int_{B_{k}} \underline{r}^{k} \wedge \underline{\phi}_{l}^{k}(\underline{r}^{k}) \, dm$$
$$= \int_{B_{k}} \left[\left(\underline{r}^{k} \cdot \underline{\phi}_{l}^{k}(\underline{r}^{k}) \right) \, \underline{\underline{U}} - \underline{r}^{k} \, \underline{\phi}_{l}^{k}(\underline{r}^{k}) \right]$$

$$\underline{\underline{M}}_{l}^{k} = \int_{B_{k}} \left[\left(\underline{\phi}_{l}^{k}(\underline{\underline{r}}^{k}) \cdot \underline{\underline{r}}^{k} \right) \underline{\underline{U}} - \underline{\phi}_{l}^{k}(\underline{\underline{r}}^{k}) \underline{\underline{r}}^{k} \right] dm$$

• Terme d'index 301

Index	Expression
301	$(\underline{I}^{h_k} \cdot \underline{\dot{\omega}}^k) \cdot \underline{\omega}_p^k$
3 02	$(\underline{\omega}^k \wedge (\underline{\underline{I}}^{h_k} \cdot \underline{\omega}^k)) \cdot \underline{\omega}_p^k$
3 03	$(\sum_{l=1}^{NM_k} \underline{h}_l^k \ddot{\eta}_l^k) \cdot \underline{\omega}_p^k$
3 04	$(\sum_{l=1}^{NM_k} \left[\left(\underline{\underline{N}}_l^k + \underline{\underline{M}}_l^k ight) \cdot \underline{\dot{\omega}}^k ight] \eta_l^k) \cdot \underline{\omega}_p^k$
3 05	$2(\sum_{l=1}^{NM_k} \underline{\underline{N}}_l^k \cdot \underline{\omega}^k \dot{\eta}_l^k) \cdot \underline{\omega}_p^k$
3 06	$\sum_{l=1}^{NM_k} \left[\underline{\omega}^k \wedge \left[\left(\underline{\underline{N}}_l^k + \underline{\underline{M}}_l^k \right) \cdot \underline{\omega}^k \eta_l^k \right] \right] \cdot \underline{\omega}_p^k$
3 07	$\int_{B_k} \underline{u}^k \wedge \underline{\overset{\circ\circ}{u}}^k \ dm \cdot \underline{\omega}_p^k$
3 08	$\int_{B_k} \underline{u}^k \wedge (\underline{\dot{\omega}}^k \wedge \underline{u}^k) dm \cdot \underline{\omega}_p^k$
3 09	$2\int_{B_k} \underline{u}^k \wedge (\underline{\omega}^k \wedge \underline{u}^k) dm \cdot \underline{\omega}_p^k$
310	$\int_{oldsymbol{B}_k} \overline{\underline{u}^k} \wedge \left[\underline{\omega}^k \wedge \left(\underline{\omega}^k \wedge \underline{u}^k ight) ight] dm \cdot \underline{\omega}_p^k$

TAB. B.1 Décomposition du terme d'inder 3

$$\mathcal{M}_{pl} = (\underline{\underline{I}}^{h_k} \cdot \underline{\underline{\omega}}_p^k) \cdot \underline{\underline{\omega}}_l^k \quad \text{pour } l = 1 \text{ à } NS \tag{B.2a}$$

$$L_p = -((\underline{\underline{I}}^{h_k} \cdot \sum_{l=1}^{NS} \underline{\dot{\omega}}_l^k) \cdot \underline{\omega}_p^k) w_l$$
(B.2b)

$$\mathcal{M}_{pl} = 0 \quad \text{pour } l = 1 \text{ à } NS \tag{B.3a}$$

$$L_p = -\left(\sum_{l=1}^{NS} \sum_{n=1}^{NS} (\underline{\omega}_l^k \wedge \left[\underline{I}^{h_k} \cdot \underline{\omega}_n^k\right]\right) \cdot \underline{\dot{\omega}}_p^k w_n w_l$$
(B.3b)

• Terme d'index 303

$$\mathcal{M}_{pl} = \underline{h}_{q}^{k} \cdot \underline{\omega}_{p}^{k} \text{ pour } \dot{w}_{l} \text{ correspondant à } \ddot{\eta}_{q}^{k}, q \in [1, NM_{k}]$$

= 0 sinon (B.4a)

$$L_p = 0 \tag{B.4b}$$

$$\mathcal{M}_{pl} = \left(\sum_{n=1}^{NM_k} \left(\underline{\underline{N}}_n^k + \underline{\underline{M}}_n^k\right) \cdot \underline{\underline{\omega}}_l^k \eta_n^k\right) \cdot \underline{\underline{\omega}}_p^k \quad \text{pour } l = 1 \text{ à } NS \tag{B.5a}$$

$$L_p = -\left(\sum_{l=1}^{NS} \left(\sum_{n=1}^{NM_k} \left(\underline{\underline{N}}_n^k + \underline{\underline{M}}_n^k\right) \cdot \underline{\dot{\omega}}_l^k \eta_n^k\right) \cdot \underline{\omega}_p^k\right) w_l$$
(B.5b)

• Terme d'index 305

 $\mathcal{M}_{pl} = 0 \quad \text{pour } l = 1 \text{ à } NS \tag{B.6a}$

$$L_p = -2\left(\sum_{l=1}^{NS} \left(\sum_{n=1}^{NM_k} \underline{N}_n^k \cdot \underline{\omega}_l^k \, \dot{\eta}_n^k\right) \cdot \underline{\omega}_p^k\right) w_l \tag{B.6b}$$

• Terme d'index 306

$$\mathcal{M}_{pl} = 0 \quad \text{pour } l = 1 \text{ à } NS \tag{B.7a}$$

$$L_{p} = -\left(\sum_{l=1}^{NS} \left(\sum_{n=1}^{NM_{k}} \left(\sum_{m=1}^{NS} \underline{\omega}_{l}^{k} \wedge \left[\left(\underline{\underline{N}}_{n}^{k} + \underline{\underline{M}}_{n}^{k}\right) \cdot \underline{\omega}_{m}^{k}\right]\right) \cdot \underline{\omega}_{p}^{k} w_{m}\right) \eta_{n}^{k}\right) w_{l}$$
(B.7b)

• Terme d'index 307

$$\mathcal{M}_{pl} = \left(\left(\sum_{n=1}^{NM_k} \underline{\phi}_n^k(\underline{r}^k) \eta_n^k \right) \wedge \underline{\phi}_q^k(\underline{r}^k) \right) \cdot \underline{\omega}_p^k \quad \text{pour } \dot{w}_l \text{ correspondant à } \ddot{\eta}_q^k, q \in [1, NM_k] \\ = 0 \quad \text{sinon}$$
(B.8a)

 $L_p = 0 \tag{B.8b}$

• Terme d'index 308

$$\mathcal{M}_{pl} = \sum_{n=1}^{NM_k} \sum_{m=1}^{NM_k} \int_{B_k} \underline{\phi}_n^k \wedge (\underline{\omega}_l^k \wedge \underline{\phi}_m^k) \eta_n^k \eta_m^k \, dm \cdot \underline{\omega}_p^k \quad \text{pour } l = 1 \text{ à } NS \tag{B.9a}$$

$$L_p = -\sum_{n=1}^{NM_k} \sum_{l=1}^{NS} \sum_{m=1}^{NM_k} \int_{B_k} \underline{\phi}_n^k \wedge (\underline{\dot{\omega}}_l^k \wedge \underline{\phi}_m^k) \eta_n^k \eta_m^k \, dm \cdot \underline{\omega}_p^k) \, w_l \tag{B.9b}$$

Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance

$$\mathcal{M}_{pl} = 0 \quad \text{pour } l = 1 \text{ à } NS$$
 (B.10a)

$$L_{p} = -\sum_{n=1}^{NM_{k}} \sum_{l=1}^{NS} \sum_{m=1}^{NS} \left(\int_{B_{k}} \underline{\phi}_{n}^{k} \wedge (\underline{\omega}_{l}^{k} \wedge \underline{\phi}_{m}^{k}) \eta_{n}^{k} w_{m} w_{l} dm \right) \cdot \underline{\omega}_{p}^{k}$$

pour w_{m} correspondant à $\dot{\eta}_{q}^{k}, q \in [1, NM_{k}]$
= 0 sinon (B.10b)

• Terme d'index 310

•

$$\mathcal{M}_{pl} = 0 \quad \text{pour } l = 1 \text{ à } NS \tag{B.11a}$$

$$L_p = -\sum_{n=1}^{NM_k} \sum_{l=1}^{NS} \sum_{m=1}^{NS} \sum_{r=1}^{NM_k} \left(\int_{B_k} \underline{\phi}_n^k \wedge \left[\underline{\omega}_l^k \wedge \left(\underline{\omega}_m^k \wedge \underline{\phi}_r^k \right) \right] \eta_n^k w_l w_m \eta_r^k \, dm \right) \cdot \underline{\omega}_p^k \tag{B.11b}$$

Annexe C

Comparaison de la flèche d'une poutre rectiligne conique de section circulaire pleine suivant différentes méthodes

On se propose de comparer l'erreur commise, lors d'un calcul éléments finis, sur la flèche en extrémité d'une poutre rectiligne conique de section circulaire pleine en prenant dans un premier temps, une variation discontinue des rigidités EI_{yy} (r = 0: rigidité constante sur la longueur de l'élément) et dans un second temps, une intégration de Gauss de celle-ci avec deux abscisses (r = 2) de Gauss par élément.



FIG. C.1 Comparaison de l'erreur commise sur la flèche en extrémité

L'erreur (en pourcentage) est calculée par rapport à la flèche obtenue par la formule analytique déduite des relations de la résistance des matériaux. Avec les caractéristiques suivantes:

-R = 5 cm, rayon de la partie encastrée,

- -r = 1 cm, rayon en extrémité,
- -L = 1 m, longueur de la poutre,
- $E = 2.10^{11} N/m^2$, qui correspond à un acier,

la flèche de référence est de 1.697 mm sous un effort tranchant de $10^3 N$.

La figure C.1 nous montre clairement l'intérêt de prendre une méthode d'intégration de Gauss pour déterminer les termes de la matrice de rigidité de la poutre car, pour un nombre d'éléments nettement plus réduit, l'erreur par rapport à la méthode en "marches d'escaliers" est beaucoup plus faible. La conséquence importante de ce résultat est de permettre l'utilisation d'un nombre d'éléments plus faible et donc de diminuer la taille de la matrice de rigidité globale tout en conservant une bonne précision.

Annexe D

Développement du principe de Hellinger-Reissner pour déterminer la matrice de rigidité élémentaire en couplage membrane/flexion dans le plan (XOZ)

La fonctionnelle Π d'un élément de poutre de longueur L $(L = L_2 - L_1)$ telle que $\delta \Pi = W = 0$ est définie par :

$$\Pi = \int_{L_1}^{L_2} \left(\langle \varsigma \rangle \{e\} - \frac{1}{2} \langle \varsigma \rangle [\widehat{H}]^{-1} \{\varsigma\} \right) dX - \int_{L_1}^{L_2} \langle u \rangle \{f\} dX - \langle u \rangle \{F\}$$
(D.1)

Posons:

$$\Pi_2 = \int_{L_1}^{L_2} \langle \varsigma \rangle \{e\} \, dX \tag{D.2}$$

avec:

$$\langle \varsigma \rangle = \left\langle \begin{array}{cc} N & M & T \end{array} \right\rangle \tag{D.3}$$

N, M et T sont définis par la relation (5.70). D'autre part, l'équation (5.76) donne:

$$\langle e \rangle = \left\langle \begin{array}{cc} u_{,X} & \theta_{Y}, & \theta_{Y} + w_{,X} \end{array} \right\rangle$$
 (D.4)

Alors:

$$\Pi_2 = \int_{L_1}^{L_2} (u_X N + \theta_Y X M + (\theta_Y + w_X) T) dX$$
(D.5)

Intégrons par parties l'équation (D.5) telle que :

$$\int_{L_{1}}^{L_{2}} u_{X} N \, dX = [uN]_{L_{1}}^{L_{2}} - \int_{L_{1}}^{L_{2}} uN_{X} \, dX$$

$$\int_{L_{1}}^{L_{2}} \theta_{Y,X} M \, dX = [\theta_{Y}M]_{L_{1}}^{L_{2}} - \int_{L_{1}}^{L_{2}} \theta_{Y}M_{X} \, dX$$

$$\int_{L_{1}}^{L_{2}} w_{X} T \, dX = [wT]_{L_{1}}^{L_{2}} - \int_{L_{1}}^{L_{2}} wT_{X} \, dX$$
(D.6)

Les équations d'équilibre de la poutre en flexion (XOZ) sont $(\ddot{u} = 0)$:

$$\begin{cases} N, x + f_X = 0 \\ M, x - T + m = 0 \\ T, x + f_Z = 0 \end{cases}$$
(D.7)

D'où :

$$\int_{L_1}^{L_2} uN_{,X} \, dX + \int_{L_1}^{L_2} \theta M_{,X} \, dX + \int_{L_1}^{L_2} wT_{,X} \, dX = -\int_{L_1}^{L_2} uf_X \, dX + \int_{L_1}^{L_2} \theta (T-m) \, dX - \int_{L_1}^{L_2} wf_Z \, dX$$
(D.8)

Par suite:

$$\Pi_2 = [uN + \theta M + wT]_{L_1}^{L_2} + \int_{L_1}^{L_2} < u > \{f\} dX$$
(D.9)

avec:

$$\langle u \rangle = \langle u w \theta_Y \rangle$$
 (D.10)

De plus:

$$\Pi_{1} = -\frac{1}{2} \int_{L_{1}}^{L_{2}} \langle\varsigma\rangle \left[\widehat{H}\right]^{-1} \{\varsigma\} dX$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{L_{1}}^{L_{2}} \frac{1}{c} \left[N^{2} \widehat{H}_{f_{z}} - 2NM \widehat{H}_{mf_{z}} + M^{2} \widehat{H}_{m} + \frac{T^{2}c}{\widehat{H}_{c}} \right] dX \qquad (D.11)$$

Donc, avec l'expression de Π_2 , on en déduit que Π_{int} vaut :

$$\Pi_{int} = -\frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} \frac{1}{c} \left[N^2 \widehat{H}_{f_Z} - 2NM \widehat{H}_{mf_Z} + M^2 \widehat{H}_m + \frac{T^2 c}{\widehat{H}_c} \right] dX + [uN + \theta M + wT]_{L_1}^{L_2}$$
(D.12)

et $\Pi_{ext} = \langle u \rangle \{F\}$. On définit le vecteur nodale $\langle \overline{u}_n \rangle$ tel que :

$$\langle \overline{u}_n \rangle = \left\langle \begin{array}{cccc} u_1 & w_1 & \theta_{Y1} & u_2 & w_2 & \theta_{Y2} \end{array} \right\rangle \quad (D.13)$$

afin d'appliquer le principe mixte $\delta \Pi(\underline{u}, \underline{\sigma}) = 0$. D'après les équations d'équilibre d'un point de la section d'abscisse X:

$$\begin{cases} N = N_1 - \int_{L_1}^{X} f_X \, dX = N_1 - F_X(X) \\ M = M_1 + XT_1 - \int_{L_1}^{X} F_Z \, dX \\ T = T_1 - \int_{L_1}^{X} f_Z \, dX = T_1 - F_Z(X) \end{cases}$$
(D.14)

Soit, sous forme matricielle:

$$\{\sigma\} = \left\{\begin{array}{c} N\\ M\\ T\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & X\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} N_1\\ M_1\\ T_1\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{c} F_X(X)\\ \int_{L_1}^X F_Z \, dX\\ F_Z(X)\end{array}\right\} = [P]\{\sigma_1\} - \{\sigma_X\} \quad (D.15)$$

En particulier, au noeud 2 de l'élément :

$$\begin{cases} N_2 = N_1 - \int_{L_1}^{L_2} f_X \, dX = N_1 - F_X(L_2) \\ M_2 = M_1 + XT_1 - \int_{L_1}^{L_2} F_Z \, dX \\ T_2 = T_1 - \int_{L_1}^{L_2} f_Z \, dX = T_1 - F_Z(L_2) \end{cases}$$
(D.16)

et sous forme matricielle:

$$\{\sigma_2\} = [P_{L_2}]\{\sigma_1\} - \{\sigma_{L_2}\}$$
(D.17)

Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance

292

Par définition, $\delta \Pi = W$, avec $\langle \delta \overline{u}_n \rangle \equiv \langle \overline{u}_n^* \rangle$. Donc, on peut évaluer les différents termes de $\delta \Pi_{int}$ avec:

$$\begin{cases} \delta N = \delta N_1 \\ \delta M = \delta M_1 + X \delta T_1 \\ \delta T = \delta T_1 \end{cases}$$
(D.18)

en supposant que F_X et F_Z ne sont pas fonction de l'état de déformation (hypothèse toujours vérifiée dans la cas des pales puisqu'on ne travaille que dans le domaine élastique). Par suite:

$$\delta\Pi_{int} = -\frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} \frac{1}{c} \left[2N\delta N \widehat{H}_{f_Z} - 2\widehat{H}_{mf_Z} (M\delta N + N\delta M) + 2M\delta M \widehat{H}_m + 2T\delta T \frac{c}{\widehat{H}_c} \right] dX + \delta \left[uN + \theta M + wT \right]_{L_1}^{L_2}$$
(D.19)

 $\delta \left[uN + \theta M + wT \right]_{L_1}^{L_2}$ se développe par :

$$\delta \left[uN + \theta M + wT \right]_{L_1}^{L_2} = \delta \left[u_2 N_2 + \theta_{Y2} M_2 + w_2 T_2 - u_1 N_1 + \theta_{Y1} M_1 + w_1 T_1 \right]$$
(D.20)

L'étape suivante consiste à remplacer N, M et T ainsi que N_2 , M_2 et T_2 en fonction de N_1 , M_1 et T_1 à l'aide des équations (D.14) et (D.16) puis d'appliquer l'opérateur " δ " sur l'ensemble des variables. Après développement, $\delta \Pi_{int}$ peut se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\delta \Pi_{int} = \langle \delta \overline{u}_n \rangle \left([\overline{k}] \{ \overline{u}_n \} - \{ \overline{f}_n \} \right) \equiv W_{int} \tag{D.21}$$

La matrice $[\overline{k}]$ a pour dimension (9,9) qui peut se décomposer en trois matrices :

$$[\overline{k}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$$
(D.22)

avec:

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & L \end{bmatrix}, \quad [B] = \int_{L_1}^{L_2} [P]^T \left[\widehat{H}\right]^{-1} [P] \, dX \tag{D.23}$$

où:

$$[P] \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[\widehat{H}\right]^{-1} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} \widehat{H}_{f_Z} & -\widehat{H}_{mf_Z} & 0 \\ & \widehat{H}_m & 0 \\ & & & \\ \text{Sym.} & & \frac{c}{\widehat{H}_c} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad c = \widehat{H}_m \widehat{H}_{f_Z} - \widehat{H}_{mf_Z}^2$$
(D.24)

Enfin, les variables N_1 , M_1 et T_1 sont des variables d'approximation locales qu'il convient d'éliminer au niveau élémentaire par condensation statique. Par suite:

$$[k] = [A]^{T}[B]^{-1}[A]$$
(D.25)

•

i

·• ..

Annexe E

Mise en évidence de la rigidité équivalente $\hat{H}_{f_{YZ}}$ de la relation (2.98)

D'après le principe des travaux virtuels, l'énergie de déformation d'un solide est donnée par la relation (5.8):

$$\mathcal{W}_{int} = \int_{\mathcal{V}} \langle D^* \rangle \left\{ \sigma \right\} \, d\mathcal{V} \tag{E.1}$$

où le vecteur $\langle D^* \rangle$ est défini par :

Déterminons maintenant \mathcal{W}_{int} d'un élément de poutre de longueur $L = L_2 - L_1$:

$$\mathcal{W}_{int} = \int_{L_1}^{L_2} (u^*, N + \theta^*_y, M_y + \theta^*_z, M_z + (w^*, N + \theta^*_y)T_z + (v^*, N + \theta^*_z)T_y + \theta^*_x, M_z) dx \quad (E.3)$$

avec:

$$N = \int_{S} \sigma_{x} dS$$

$$M_{x} = \int_{S} [(y - y_{C})\sigma_{xz} - (z - z_{C})\sigma_{xy}] dS$$

$$M_{y} = \int_{S} z\sigma_{x} dS$$

$$M_{z} = -\int_{S} y\sigma_{x} dS$$

$$T_{y} = \int_{S} \sigma_{xy} dS$$

$$T_{z} = \int_{S} \sigma_{xz} dS$$
(E.4)

De plus, les relations cinématiques (5.100) entre deux points d'une même section nous permettent d'écrire que :

$$\begin{cases} u_{q,x}^{*} = u_{O,x}^{*} + z\theta_{y,x}^{*} - y\theta_{z,x}^{*} \\ v_{q,x}^{*} = v_{C,x}^{*} - (z - z_{C})\theta_{x,x}^{*} \\ w_{q,x}^{*} = w_{C,x}^{*} + (y - y_{C})\theta_{x,x}^{*} \end{cases}$$
(E.5)

où (y_C, z_C) sont les coordonnées de centre de torsion C dans le repère principal d'inertie de la section *(figure 5.28)* et (y, z) les coordonnées dans ce même repère d'un point q de la section. Introduisons la loi de comportement (loi de Hooke (5.13)):

$$\begin{cases} \sigma_x = E\epsilon_x \\ \sigma_{xy} = 2G\epsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} = 2G\epsilon_{xz} \end{cases}$$
(E.6)

où $G (= \mu)$ est le module de cisaillement. De plus, l'hypothèse des petites déformations nous permet d'établir que $u_{O,x} = \epsilon_x$ (de même pour les variables virtuelles "()*"), donc :

$$\epsilon_x^* = u_O^*, x + z\theta_y^*, x - y\theta_z^*, x \tag{E.7}$$

Par suite, l'équation (E.3) devient :

$$\mathcal{W}_{int} = \int_{L_1}^{L_2} u_O^*(x) \int_S E(u_O(x) + z\theta_y(x) - y\theta_z(x)) \, dS \, dx + \int_{L_1}^{L_2} \theta_y^*(x) \int_S zE(u_O(x) + z\theta_y(x) - y\theta_z(x)) \, dS \, dx + \dots$$
(E.8)

Soit encore:

$$\mathcal{W}_{int} = \int_{L_{1}}^{L_{2}} u_{O,x}^{*} \underbrace{\int_{S} E \, dS}_{\hat{H}_{m}} u_{O,x} \, dx + \int_{L_{1}}^{L_{2}} u_{O,x}^{*} \underbrace{\int_{S} Ez \, dS}_{\hat{H}_{mfy}} \theta_{y,x} \, dx - \int_{L_{1}}^{L_{2}} u_{O,x}^{*} \underbrace{\int_{S} Ey \, dS}_{\hat{H}_{mfy}} \theta_{z,x} \, dx + \int_{L_{1}}^{L_{2}} \theta_{y,x}^{*} \underbrace{\int_{S} Ez \, dS}_{\hat{H}_{mfy}} u_{O,x} \, dx + \int_{\hat{H}_{mfy}}^{L_{2}} \theta_{y,x}^{*} \underbrace{\int_{S} Ez \, dS}_{\hat{H}_{mfy}} \theta_{z,x} \, dx + \int_{L_{1}}^{L_{2}} \theta_{y,x}^{*} \underbrace{\int_{S} Ez \, dS}_{\hat{H}_{mfy}} \theta_{z,x} \, dx + \dots$$

$$\int_{L_{1}}^{L_{2}} \theta_{y,x}^{*} \underbrace{\int_{S} Ez^{2} \, dS}_{\hat{H}_{fy}} \theta_{y,x} \, dx - \int_{L_{1}}^{L_{2}} \theta_{y,x}^{*} \underbrace{\int_{S} Eyz \, dS}_{\hat{H}_{fyz}} \theta_{z,x} \, dx + \dots$$

$$(E.9)$$

Par conséquent, la rigidité $\hat{H}_{fyz} = \sum_{i=1}^{n_{\varphi}} E_i \int_{S_i} yz \, dS_i$ traduit le couplage entre les rotations autour des axes (OY) et (OZ) $((OY) \equiv (Oy)$ et $(OZ) \equiv (Oz)$ car ces axes sont parallèles) qui doit être inclue lors de l'assemblage des matrices élémentaires $[k_Y]$ et $[k_Z]$.

Annexe F

Introduction aux équations de la dynamique de Kane

Rappels

$$- {}^{A}\underline{\omega}^{B} \triangleq \underline{b}_{1} \cdot \frac{{}^{A}d\underline{b}_{2}}{dt} \cdot \underline{b}_{3} + \underline{b}_{2} \cdot \frac{{}^{A}d\underline{b}_{3}}{dt} \cdot \underline{b}_{1} + \underline{b}_{3} \cdot \frac{{}^{A}d\underline{b}_{1}}{dt} \cdot \underline{b}_{2},$$
$$- {}^{A}\underline{v}^{P} \triangleq \frac{{}^{A}d\underline{OP}}{dt},$$
$$- {}^{A}\underline{a}^{P} \triangleq \frac{{}^{A}d^{A}\underline{v}^{P}}{dt} = \frac{{}^{A}d}{dt} \left(\frac{{}^{A}\underline{OP}}{dt}\right).$$

Relation entre dérivés et repères

Soient A et B deux repères quelconques et \underline{v} un vecteur, alors :

$$\frac{{}^{A} d\underline{v}}{dt} = \frac{{}^{B} d\underline{v}}{dt} + {}^{A} \underline{\omega}^{B} \wedge \underline{v}$$

Composition des vitesses

a) Considérons n repères auxiliaires B_1, B_2, \ldots, B_n , alors:

$${}^{A}\underline{\omega}^{B} = {}^{A}\underline{\omega}^{B_{1}} + {}^{B_{1}}\underline{\omega}^{B_{2}} + \ldots + {}^{B_{n}}\underline{\omega}^{B}$$

b) Si P et Q sont deux points fixes appartenant au corps B ayant pour vitesse angulaire ${}^{A}\underline{\omega}^{B}$ dans A, alors:

a.
$${}^{A}\underline{v}^{P} = {}^{A}\underline{v}^{Q} + {}^{A}\underline{\omega}^{B} \wedge \underline{r}_{QP}$$

b. ${}^{A}\underline{a}^{P} = {}^{A}\underline{v}^{Q} + {}^{A}\underline{\omega}^{B} \wedge ({}^{A}\underline{\omega}^{B} \wedge \underline{r}_{QP}) + {}^{A}\underline{\alpha}^{B} \wedge \underline{r}_{QP}$

 \underline{r}_{QP} est le vecteur d'origine Q et d'extrémité P.

c) Si un point P est mobile dans un corps B alors que B est en mouvement dans le repère de référence A, alors la vitesse ${}^{A}\underline{v}^{P}$ du point P dans A est reliée à la vitesse ${}^{B}\underline{v}^{P}$ du point P dans B par:

$${}^{A}\underline{v}^{P} = {}^{A}\underline{v}^{\overline{B}} + {}^{B}\underline{v}^{P}$$

où ${}^{A}\underline{v}^{\overline{B}}$ est la vitesse dans A du point \overline{B} de B qui coïncide ave P à l'instant considéré. De même pour l'accélération ${}^{A}\underline{a}^{P}$:

$${}^{A}\underline{a}^{P} = {}^{A}\underline{a}^{\overline{B}} + {}^{B}\underline{a}^{P} + 2^{A}\underline{\omega}^{B} \wedge {}^{B}\underline{v}^{P}$$

le terme $(2^A \underline{\omega}^B \wedge {}^B \underline{v}^P)$ est appelé accélération de Coriolis.

Configuration d'un système

La configuration d'un ensemble S de v particules P_1, \ldots, P_v dans un référentiel A est supposée connue dès que le vecteur position de chaque particule par rapport à un point fixe dans A est connue. Par conséquent v quantités vectorielles ou, de façon équivalente 3v quantités scalaires, sont nécessaires pour spécifier la configuration de S dans A. Si le mouvement de S est affecté par la présence de corps venant en contact avec une ou plusieurs particules parmi les P_i , des restrictions sont imposées sur les positions que pourraient occuper les particules de S. On dit alors que S est sujet à des restrictions de configuration ou des contraintes de configuration. Une équation exprimant une telle restriction est appelée équation de restriction de mouvement holonomique et est de la forme:

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_v, y_v, z_v, t) = 0$$

où (x_i, y_i, z_i) désigne les coordonnées de la particule P_i dans A et t est la variable de temps. Les équations de restriction de mouvement holonomiques sont dites *rhéonomiques* ou *scléronomiques* selon que t apparaît explicitement ou non dans la fonction f.

Exemple

Considérons le système S formé de deux particules $P_1(x_1, y_1, z_1)$ et $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (x_i, y_i, z_i) coordonnées dans le repère fixe A des P_i , i = 1, 2) reliées entre elles par une barre sans masse de longueur constante L. Le système est libre de se mouvoir entre deux plaques parallèles (figure F.1).





FIG. F.1 Configuration du système S

La distance L séparant P_1 et P_2 se traduit par:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - L^2 = 0 = f(x_i, y_i, z_i)$$

Par conséquent, f = 0 est une équation de restriction de mouvement holonomique scléronomique. Si maintenant on désigne par ωt la vitesse angulaire du système S dans A. Soit $\{\underline{b}_x, \underline{b}_y, \underline{b}_z\}$ la base liée aux plaques. La restriction du mouvement imposée par la présence des deux plaques se résume alors par:

$$p_{i} \cdot \underline{b}_{z} = 0 \quad \forall p_{i}$$

Or $\underline{b}_z = \cos(\omega t)\underline{a}_z + \sin(\omega t)\underline{a}_x$. Donc:

$$p_i \cdot \underline{b}_z = x_i \sin(\omega t) + z_i \cos(\omega t) = 0 = f(x_i, z_i, t) \quad (i = 1, 2)$$

f = 0 est une équation de restriction de mouvement holonomique rhéonomique.

Coordonnées généralisées

Lorsqu'un ensemble de v particules P_1, \ldots, P_v est sujet à des restrictions de mouvement représentées par M équations holonomiques, alors seulement n = 3v - M des 3v coordonnées cartésiennes x_i, y_i, z_i $(i = 1, \ldots, v)$ du corps S dans le référentiel A sont indépendantes l'une de l'autre. Dans ce cas de figure, on peut exprimer chacune des coordonnées x_i, y_i, z_i comme une fonction simple de la variable temporelle t et des n variables dépendantes de t, $q_1(t), \ldots, q_n(t)$, afin que les équations de restriction de mouvement soient satisfaites pour toute valeur de t et de q_1, \ldots, q_n dans un domaine donné. Les variables q_1, \ldots, q_n sont appelées coordonnées généralisées du corps S dans A.

Exemple

Reprenons le système S formé des deux particules P_1 et P_2 , reliées entre-elles par un barre sans masse de longueur L. Nous avons v = 2 et M = 3 équations holonomiques:

- i. $\underline{p}_1 \cdot \underline{b}_z = 0$
- ii. $\underline{p}_2 \cdot \underline{b}_z = 0$
- iii. $|\underline{p}_1 \underline{p}_2| L = 0$

Par suite, n = 3v - M = 3 des 6 coordonnées cartésiennes de P_1 et P_2 sont indépendantes l'une de l'autre. Choisissons par exemple pour coordonnées généralisées q_1 , q_2 et q_3 telles que:

$$\begin{cases} x_1 = q_1 \cos(\omega t) \\ y_1 = q_2 \\ z_1 = -q_1 \sin(\omega t) \\ x_2 = [q_1 + L \cos(q_3)] \cos(\omega t) \\ y_2 = q_2 + L \sin(q_3) \\ z_2 = -[q_1 + L \cos(q_3)] \sin(\omega t) \end{cases}$$

 q_1 , q_3 et q_3 sont des coordonnées généralisées du système S car elles vérifient les équations de restriction de mouvement et définissent complètement la configuration de S à tout instant t.

D'autres choix peuvent être faits pour définir les q_i . Ce choix judicieux constitue une des difficultés de la mise en équations d'un système mécanique. De façon plus générale, le nombre n de coordonnées généralisées d'un ensemble S de v particules dans un référentiel Aest le plus petit nombre de quantités scalaires telles qu'à chaque valeur du temps t correspond une configuration admissible de S dans A.

Vitesses généralisées

Les expressions des vitesses angulaires des solides et les vitesses des points d'un système S dont la configuration dans un référentiel A est caractérisée par n coordonnées généralisées q_1, \ldots, q_n peuvent être mises sous une forme particulièrement avantageuse grâce à l'introduction de n quantités scalaires u_1, \ldots, u_n appelées vitesses généralisées telles que :
$$u_r = \sum_{s=1}^{n} Y_{rs} \dot{q}_s + Z_r \quad r = 1, \dots, n$$
 (F.1)

où Y_{rs} et Z_s sont des fonctions de q_1, \ldots, q_n et du temps t. Ces fonctions sont choisies de telle sorte que les u_r pour $r = 1, \ldots, n$ puissent être résolues uniquement pour $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$. Les équations (F.1) sont alors appelées équations différentielles cinématiques de S dans A.

Remarque

On est souvent amené à définir $u_r = \dot{q}_r$ pour r = 1, ..., n.

Vitesses angulaires partielles, vitesses partielles

Si q_1, \ldots, q_n et u_1, \ldots, u_n sont respectivement les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées du système S possédant p degrés de liberté dans un référentiel A, alors la vitesse angulaire ${}^A\underline{\omega}{}^B$ du solide B appartenant à S et la vitesse ${}^A\underline{v}{}^P$ du point P dans Aappartenant à S peuvent s'exprimer de façon unique par:

$${}^{A}\underline{\omega}^{B} = \sum_{r=1}^{n} {}^{A}\underline{\omega}^{B}_{r} \ u_{r} + {}^{A}\underline{\omega}^{B}_{t}$$

et,

$${}^{A}\underline{v}^{P} = \sum_{r=1}^{n} {}^{A}\underline{v}^{P}_{r} u_{r} + {}^{A}\underline{v}^{P}_{t}$$

où ${}^{A}\underline{\omega}_{r}^{B}$, ${}^{A}\underline{v}_{r}^{P}$ ainsi que ${}^{A}\underline{\omega}_{t}^{B}$ et ${}^{A}\underline{v}_{t}^{P}$, (r = 1, ..., n), sont des fonctions de $q_{1}, ..., q_{n}$ et du temps t. Le vecteur ${}^{A}\underline{\omega}_{r}^{B}$ est la $r^{\text{ème}}$ vitesse angulaire partielle holonomique de B dans A et ${}^{A}\underline{v}_{r}^{P}$ est la $r^{\text{ème}}$ vitesse partielle holonomique de P dans A.

 ${}^{A}\underline{\omega}^{B}$ et ${}^{A}\underline{v}^{P}$ peuvent également s'exprimer de façon unique par :

$${}^{A}\underline{\omega}^{B} = \sum_{r=1}^{p} {}^{A}\underline{\widetilde{\omega}}_{r}^{B} u_{r} + {}^{A}\underline{\widetilde{\omega}}_{t}^{E}$$

et,

$${}^{A}\underline{v}^{P} = \sum_{r=1}^{p} {}^{A}\underline{\widetilde{v}}_{r}^{P} u_{r} + {}^{A}\underline{\widetilde{v}}_{t}^{P}$$

Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance

où ${}^{A}\widetilde{\omega}_{r}^{B}$, ${}^{A}\widetilde{v}_{r}^{P}$ ainsi que ${}^{A}\widetilde{\omega}_{t}^{B}$ et ${}^{A}\widetilde{v}_{t}^{P}$, (r = 1, ..., p), sont des fonctions de $q_{1}, ..., q_{n}$ et du temps t. Le vecteur ${}^{A}\widetilde{\omega}_{r}^{B}$ est la $r^{\text{ème}}$ vitesse angulaire partielle non holonomique de B dans A et ${}^{A}\widetilde{v}_{r}^{P}$ est la $r^{\text{ème}}$ vitesse partielle non holonomique de P dans A.

Lorsque p = n, c'est-à-dire, lorsque S est un système holonome possédant n degrés de liberté dans A, alors ${}^{A}\widetilde{\underline{\omega}}_{r}^{B} = {}^{A}\underline{\omega}_{r}^{B}$ et ${}^{A}\widetilde{\underline{v}}_{r}^{P} = {}^{A}\underline{v}_{r}^{P}$.

Accélérations et vitesses partielles

Si q_1, \ldots, q_n sont les coordonnées généralisées caractérisant la configuration du système S dans le référentiel A, alors \underline{v}^2 , le carré de la vitesse dans A d'une particule générique P de S, peut être envisagé comme une fonction scalaire des (2n + 1) variables indépendantes $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ et t (les \dot{q}_i sont les dérivés premières par rapport à t des coordonnées généralisées). Si de plus, les vitesses généralisées sont définies par:

$$u_r = \dot{q}_r$$
 pour $r = 1, \ldots, n$

et \underline{v}_r est la $r^{\text{ème}}$ vitesse partielle holonomique de P dans A, alors nous avons la relation suivante :

$${}^{A}\underline{v}_{r}^{P} \cdot {}^{A}\underline{a}^{P} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \underline{v}^{2}}{\partial \dot{q}_{r}} - \frac{\partial \underline{v}^{2}}{\partial q_{r}} \right] \quad (r = 1, \dots, n)$$

Forces actives généralisées - Forces d'inerties généralisées

Soit un système S occupant le domaine \mathcal{F} . Considérons l'élément différentiel de masse dm de S, alors le théorème de la résultante dynamique (seconde loi de Newton) appliqué à dm s'écrit :

$$df = dm \underline{a}$$
 ou encore $df - dm \underline{a} = \underline{0}$ (F.2)

La formulation proposée par Kane consiste à introduire dans l'équation (F.2) les vitesses partielles \underline{v}_r associées aux *n* vitesses généralisées u_r . Si $d\underline{f}$ est la résultante de toutes les forces de contact et de distance agissant sur l'élément différentiel dm du solide *S* occupant le domaine \mathcal{F} et si \underline{a} est l'accélération de l'élément dm dans un repère galiléen *N*, alors:

$$\int_{\mathcal{F}} \left[\underline{v}_r \cdot d\underline{f} + \underline{v}_r \cdot (-dm \, \underline{a}) \right] = 0 \quad \text{pour} \quad r = 1, \dots, n$$

Posons par conséquent :

$$f_r = \int_{\mathcal{F}} \underline{v}_r \cdot d\underline{f}$$

et,

$$f_r^* = -\int_{\mathcal{F}} (\underline{v}_r \cdot \underline{a}) \, dm$$

Les f_r sont appelés forces actives généralisées holonomiques et les f_r^* forces d'inerties généralisées holonomiques.

Equations de Kane de la dynamique

D'après ce qui précède, les équations de Kane de la dynamique s'expriment par :

 $f_r + f_r^* = 0$ pour r = 1, ..., n

. . 1 1 •• , ţ

Annexe G

Présentation des dyadiques

Vecteur d'inertie - Inertie scalaire

Soit S un ensemble de particules P_1, \ldots, P_v de masses m_1, \ldots, m_v respectivement, \underline{p}_i désigne le vecteur position par rapport au point O des P_i particules et \underline{n}_a est un vecteur unitaire, alors le vecteur \underline{I}_a , appelé vecteur d'inertie de S par rapport à O suivant \underline{n}_a est défini par:

$$\underline{I}_{a} \triangleq \sum_{i=1}^{\nu} m_{i} \underline{\underline{p}}_{i} \wedge (\underline{n}_{a} \wedge \underline{\underline{p}}_{i})$$
(G.1)

La quantité scalaire I_{ab} , appelée inertie scalaire de S par rapport à O suivant \underline{n}_a et \underline{n}_b où \underline{n}_b et \underline{n}_a sont des vecteurs unitaires, est définie par:

$$I_{ab} \triangleq \underline{I}_a \cdot \underline{n}_b \tag{G.2}$$

Conséquences : produit d'inertie - moment d'inertie

a)
$$I_{ab} = \sum_{i=1}^{v} m_i (\underline{p}_i \wedge \underline{n}_a) \cdot (\underline{p}_i \wedge \underline{n}_b)$$

b)
$$I_{ab} = I_{ba}$$

c) $- \sin \underline{n}_a \neq \underline{n}_b$, I_{ab} est appelé le produit d'inertie de S par rapport à O suivant \underline{n}_a et \underline{n}_b , $- \sin \underline{n}_a = \underline{n}_b$, I_a (notation condensée de I_{aa}) est le moment d'inertie de S par rapport à la droite (L_a) passant par O et parallèle à \underline{n}_a :

$$I_a = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \, l_i^2$$

 l_i distance de P_i à (L_a) ,

$$I_a = mk_a^2$$

m masse totale de S et $k_a \in \mathbb{R}_+^*$ est le rayon de gyration de S par rapport à la droite (L_a) ,

$$I_a = \sum_{i=1}^{\nu} m_i \left(\underline{p}_i \wedge \underline{n}_a\right)^2$$

d) Pour un corps B quelconque, modélisé par une courbe, une surface ou une enveloppe et si ρ représente la masse par unité de longueur, d'aire ou de volume de B en un point générique P de B, si p est le vecteur position de P par rapport à O, dτ l'élément différentiel de longueur, d'aire ou de volume du domaine F (courbe, surface ou enveloppe) occupé par B et n_a et n_b sont des vecteurs unitaires, alors:

$$\underline{I}_{ab} = \int_{\mathcal{F}} \rho \, \underline{n}_a \wedge (\underline{p} \wedge \underline{p}) \, d\tau$$

Et:

$$I_{ab} = \underline{I}_a \cdot \underline{n}_a = \int_{\mathcal{F}} \rho\left(\underline{p} \wedge \underline{n}_a\right) \cdot \left(\underline{p} \wedge \underline{n}_b\right) d\tau$$

Matrice d'inertie - Introduction des dyadiques

Les inerties scalaires I_{jk} d'un ensemble S de particules par rapport à un point O dans la base normée $\{\underline{n}_i\}$, (i = 1, 2, 3) peuvent être utilisées pour définir la matrice carrée I, appelée la matrice d'inertie de S par rapport à O dans la base $\{\underline{n}_i\}$ de la manière suivante:

$$I \triangleq \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{22} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$
(G.3)

La matrice d'inertie d'un ensemble S de particules par rapport à O peut avoir autant d'expression qu'il existe de bases $\{\underline{n}_i\}$. En contraste, l'utilisation de dyadiques nous permet de décrire certaines problèmes mettant en jeux les vecteurs d'inertie et/ou les inerties scalaires dans une base indépendante de la configuration.

Notions sur les dyadiques - Dyadique unitaire

Afin de nous accoutumer avec les dyadiques, nous commencerons par concentrer notre attention sur 2 vecteurs \underline{u} et \underline{v} définis par:

$$\underline{u} = (\underline{w} \cdot \underline{a}) \underline{b} + (\underline{w} \cdot \underline{c}) \underline{d} + \dots$$

Et:

 $\underline{v} = \underline{a} (\underline{b} \cdot \underline{w}) + \underline{c} (\underline{d} \cdot \underline{w}) + \dots$

Où $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \ldots$ et \underline{w} sont des vecteurs quelconques. On peut encore écrire que :

$$\underline{u} = \underline{w} \cdot (\underline{a} \ \underline{b} + \underline{c} \ \underline{d} + \dots) \tag{G.4}$$

De même:

$$\underline{v} = (\underline{a} \ \underline{b} + \underline{c} \ \underline{d} + \dots) \cdot \underline{w} \tag{G.5}$$

Introduisons alors:

$$\underline{Q} \triangleq \underline{a} \ \underline{b} + \underline{c} \ \underline{d} + \dots \tag{G.6}$$

Par conséquent, les équations (G.4) et (G.5) peuvent se mettre sous la forme :

$$\underline{u} = \underline{w} \cdot \underline{\underline{Q}}
 \underline{v} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{w}
 (G.7)$$

 $\underline{\underline{Q}}$ est appelé dyadique.

En somme, un dyadique est la juxtaposition de vecteurs comme le montre l'équation (G.6) et le produit scalaire (pré- ou post) d'un dyadique avec un vecteur donne un vecteur. Le dyadique unitaire \underline{U} est défini par:

$$\underline{\underline{U}} \triangleq \underline{\underline{a}}_1 \, \underline{\underline{a}}_1 + \underline{\underline{a}}_2 \, \underline{\underline{a}}_2 + \underline{\underline{a}}_3 \, \underline{\underline{a}}_3 \tag{G.8}$$

Où $\{\underline{a}_i\}$ est une base orthonormale. On a donc $\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}} \cdot \underline{\underline{Q}}$.

Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance

Dyadique d'un ensemble S de particules

Considérons le vecteur d'inertie \underline{I}_a , alors d'après (G.1):

$$\underline{I}_{a} = \sum_{i=1}^{\nu} m_{i} \left(\underline{n}_{a} \underline{p}_{i}^{2} - \underline{n}_{a} \cdot \underline{p}_{i} \underline{p}_{i} \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\nu} m_{i} \left(\underline{n}_{a} \cdot \underline{\underline{U}} \underline{p}_{i}^{2} - \underline{n}_{a} \cdot \underline{p}_{i} \underline{p}_{i} \right)$$
(G.9)

Par suite, le dyadique d'un ensemble S de v particules est défini par :

$$\underline{\underline{I}} \triangleq \sum_{i}^{v} m_{i} \left(\underline{\underline{U}} \underline{\underline{p}}_{i}^{2} - \underline{\underline{p}}_{i} \underline{\underline{p}}_{i} \right)$$
(G.10)

 \underline{I} est le dyadique de S par rapport à O.

De façon plus générale, si le corps B est modélisé comme occupant le domaine \mathcal{F} (courbe, surface ou volume) et si un point générique de B est repéré par rapport à O par le vecteur position p, alors :

$$\underline{\underline{I}} \triangleq \int_{\mathcal{F}} \rho \left(\underline{\underline{U}} \, \underline{\underline{p}}^{\, 2} - \underline{\underline{p}} \, \underline{\underline{p}} \right) d\tau \tag{G.11}$$

Où ρ est la masse linéique, surfacique ou volumique, $d\tau$ est l'élément différentiel de courbe, de surface ou d'enveloppe.

Conséquences

a) $\underline{I}_a = \underline{n}_a \cdot \underline{\underline{I}}$

b)
$$\underline{I}_a \cdot \underline{n}_b = (\underline{n}_a \cdot \underline{I}) \cdot \underline{n}_b = \underline{n}_a \cdot (\underline{I} \cdot \underline{n}_b)$$

c)
$$I_{ab} = \underline{n}_a \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{n}}_b$$

d) Le dyadique \underline{I} est dit indépendant du repère car sa définition (G.10) ne fait intervenir aucun vecteur de base. Cependant, il peut être exprimé sous différentes formes ou apparaissent les éléments de la base. Par exemple, si $\{\underline{n}_i\}$ est une base orthonormale, \underline{I}_j est le vecteur d'inertie de S par rapport à O suivant \underline{n}_j , (j = 1, 2, 3), et I_{jk} est l'inertie scalaire de S par rapport à O suivant \underline{n}_j et \underline{n}_k , (j, k = 1, 2, 3), alors le dyadique \underline{I} peut s'écrire:

$$\underline{\underline{I}} = \sum_{i=1}^{3} \underline{I}_{j} \, \underline{\underline{n}}_{j}$$

Ou encore:

$$\underline{\underline{I}} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} I_{jk} \, \underline{\underline{n}}_{j} \, \underline{\underline{n}}_{k}$$

Moment angulaire - Moment angulaire central

Si S est un ensemble de v particules $P_1 \ldots, P_v$ de masses m_1, \ldots, m_v respectivement, en mouvement dans un référentiel A et ayant comme vitesses dans $A \stackrel{A}{\underline{v}} \stackrel{P_1}{\ldots}, \stackrel{A}{\underline{v}} \stackrel{P_v}{\ldots}$, alors le vecteur $\stackrel{A}{\underline{H}} \stackrel{S/O}{\ldots}$, appelé moment angulaire de S par rapport à O dans le référentiel A est défini par:

$${}^{A}\underline{H}^{S/O} \triangleq \sum_{i=1}^{\nu} m_{i} \underline{p}_{i} \wedge {}^{A}\underline{v}^{P_{i}}$$
(G.12)

Où \underline{p}_i est le vecteur position de la particule P_i par rapport à O. Le point O n'est pas nécessairement fixe dans le référentiel A.

Si $O \equiv S^*$ où S^* désigne le centre des masses de S, alors ${}^{A}\underline{H}^{S/O}$ devient ${}^{A}\underline{H}^{S^*/O}$ et est appelé moment angulaire central de S dans le référentiel A

Relation entre moment angulaire central et dyadique

Si les particules de S forment un solide B, alors <u>H</u> le moment angulaire central de B dans le référentiel A est défini par:

$$\underline{H} = \underline{I} \cdot \underline{\omega} \tag{G.13}$$

Où $\underline{\omega}$ est la vitesse angulaire de *B* par rapport à *A*. \underline{I} , appelé dyadique d'inertie central de *B* est le dyadique d'inertie de *B* par rapport au centre des masses S^* du solide *B*.

Théorèmes

a) Soient $\underline{\underline{I}}^{S/O}$ le dyadique d'inertie de S par rapport à $O, \underline{\underline{\underline{I}}}^{S/S^*}$ le dyadique d'inertie central de S par rapport à S^* centre des masses et enfin $\underline{\underline{I}}^{S^*/O}$ le dyadique d'inertie par rapport à O d'une particule située en S^* et ayant une masse égale à la masse totale de S, alors:

$$\underline{I}^{S/O} = \underline{I}^{S/S^*} + \underline{I}^{S^*/O}$$

Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance

b) de même:

$$\underline{I}_{ab}^{S/O} = \underline{I}_{ab}^{S/S^*} + \underline{I}_{ab}^{S^*/O}$$

c) avec I_{ab}^{S/S^*} scalaire d'inertie centrale

$$I_{ab}^{S/O} = I_{ab}^{S/S^*} + I_{ab}^{S^*/O}$$

d) avec I_a^{S/S^*} scalaire d'inertie centrale

$$I_a^{S/O} = I_a^{S/S^{\bullet}} + I_a^{S^{\bullet}/O}$$

Moments d'inerties principaux

Si \underline{n}_z est un vecteur unitaire tel que \underline{I}_z soit parallèle à \underline{n}_z , alors la droite (L_z) passant par O et parallèle à \underline{n}_z est appelée axe principal de S par rapport à O, le plan (P_z) contenant O et normal à \underline{n}_z est appelé plan principal de S par rapport à O, le moment d'inertie I_z de Spar rapport à (L_z) est appelé moment d'inertie principal de S par rapport à O et le rayon de gyration de S par rapport à (L_z) est appelé rayon de gyration principal de S par rapport à O. Lorsque le point O est le centre de gravité de S, on parlera d'axes principaux centraux, de plans principaux centraux, de moments d'inertie principaux centraux et de rayon de gyration principal central.

Lorsque \underline{n}_z est parallèle à un axe principal de S par rapport à O, le vecteur d'inertie \underline{I}_z de S par rapport à O suivant \underline{n}_z peut s'exprimer par :

$$\underline{I}_z = I_z \,\underline{n}_z \tag{G.14}$$

Et si \underline{n}_y est un vecteur unitaire tel que $\underline{n}_y \cdot \underline{n}_z = 0$, alors le produit d'inertie de S par rapport à O suivant \underline{n}_y et \underline{n}_z est nul: $I_{yz} = 0$

Annexe H

Exemple d'un fichier de commandes

```
CALCUL DES EFFORTS SUR LES EOLIENNES DE MOYENNE ET FORTE PUISSANCE
*
           A.D.E.M.E.- Nord Pas-de-Calais
             O.N.E.R.A. - I.M.F.L.
            FICHIER DE COMMANDES
* NOM DU FICHIER : frisia
* ETUDE
         : FRISIA 4800/750kWh
* AUTEUR
         : BERLU P. 9528
* DATE
         : 01/98
*/use/MDS/berlu/eolienne : chemin du repertoire racine
***********
* GENERALITES
FRISIA_4800/750kWh : identification de l'etude
* Support d'impression :
Ecran
      : messages de procedures (E=Ecran, F=Fichier)
* Resumé des donnees d'entrees-sorties :
*-----
      : nom du fichier de résumé
etalon
                                     (.syn)
                                     ('sit')
OUI
      : caracteristiques du site
OUI
      : géometrie de la machine
                                     ('geo')
OUI
      : géometrie de la pale
                                     ('pal')
OUI
      : éléments de la nacelle
                                     ('nac')
OUI
      : algorithmes selectionnes et parametres du calcul
                                     ('par')
```

```
: discrétisation de la pale
                                          ('Dis')
OUI
       : composantes du vent incident
                                          ('Vam')
OUI
       : composantes des vitesses relatives des profils
OUI
                                          ('uvi')
       : composantes des efforts linéiques
                                          ('f_1')
NON
NON
        : composantes des efforts résultants
                                          ('EFF')
* Impression des sorties :
*------
   fichier (.xv)
*ON
              Commentaires
    _____
              ______
*--
OUI
   v_i
            : vitesses induites axiales (v)
OUI
            : vitesses induites tangentielles (u)
   u_i
OUI
            : vitesses relatives (W)
   W
OUI
   G
            : circulation (Gamma)
NON
   fx_N42b
            : forces lineiques de battement (Thurst)
NON
            : forces lineiques de trainee (Drag)
   fy_N42b
NON
            : Moments lineiques de torsion (Torsion)
   mz_N42b
NON
   my_N42b
            : Moments lineiques de battement (Flap bending mt)
NON
   mx_N42b
            : Moments lineiques de trainee (Torque)
   pow_N42b
NON
            : Puissances lineiques
* DESCRIPTION DU SITE
frisia
       : nom du fichier de donnees du site
                                  (.sit)
************
* DESCRIPTION DE LA GEOMETRIE (PYLONE+ROTOR+PALE)
frisia
       : nom du fichier de donnees machine
                                  (.geo)
*frisia
       : nom du fichier de geometrie de pale
                                   (.pal)
etalon
       : nom du fichier de geometrie de pale
                                  (.pal)
*******
* DESCRIPTION DE LA NACELLE (GENERATEUR+MULTIPLICATEUR+FREINAGE)
: nom du fichier de donnees de la nacelle (.nac)
frisia
* DESCRIPTION DES CARACTERISTIQUES MECANIQUES DE LA PALE
***********
frisia
       : nom du fichier des caracteristiques mecaniques (.mat)
* SELECTION DES ALGORITHMES DE CALCUL DES VITESSES INDUITES
: effets de pertes en bord marginal prise en compte ?
OUI
OUI
       : effets de pertes au niveau du moyeu prise en compte ?
OUI
       : Vitesse tangentielle induite ("swirl") prise en compte ?
OUI
       : utilisation du modele de freinage complexe ?
      * Modele de gradient de vent : 0 = neglige
                    1 = lineaire
```

```
2 = puissance => exposant a donner
                     3 = logarithmique
                     4 = experimental
                  2
        : modele de gradient de vent
0.16 [-] : exposant du modele en puissance
Ombre du pylone :
                    0 = neglige
                    1 = modele 2D
*
*
                    2 = modele 3D
            1
        : effets d'ombre du pylone
* Modele de correction de la vitesse induite axiale dans le cas d'un
* desaligement du vent incident ('Yawing') avec la nacelle :
*
                    10 = ECN, d.e version initiale
                    11 = ECN, d.e version courante
                    20 = TUDk version initiale
                    21 = TUDk version corrigee
                    30 = TA
11
        : modele de correction de la vitesse induite axiale 'Yawing'
NON
        : modele de post-decrochage de Viterna implemente ?
        : effets 3D sur les coefficients aerodynamiques ?
NON
***********
* PARAMETRES DE CALCUL DES EFFORTS AERODYNAMIQUES
(Equirepartis=1, Gauss=2)
*
2
        : type de repartition des points de controle
40
        : nombre de segments (50 Maxi.)
        : nombre d'incrementations azimutales
36
        : precision souhaitee sur les vitesses induites
0.0001
100
        : nbre d'iter. maxi. sur les vitesses induites ( <200 )
4.13
    [deg] : calage des pales au niveau du moyeu
* MODELISATION E.F. DES PALES
************
frisia
       : nom du fichier de maillage (.nod)
* Nombre de points d'integration pour le calcul de [kij]
          _____
        : points appliqués à <ES>, <EIyy>, <EIzz>, ky<GS> et kz<GS>
3
3
        : points appliqués à <GJ>
3
        : points appliqués à <Rom>, <RoIp>, <Rofy> et <Rofz>
************
```

Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance

Annexe I

Exemple d'un fichier de site

```
CALCUL DES EFFORTS SUR LES EOLIENNES DE MOYENNE ET FORTE PUISSANCE
*
            A.D.E.M.E. - Nord - Pas de Calais
*
                O.N.E.R.A. - I.M.F.L.
                 ------
                  FICHIER DE SITE
* NOM DU FICHIER : frisia
          : FRISIA 4800/750kWh
* ETUDE
* AUTEUR
          : BERLU
* DATE
           : Wed Jan 14 17:12:32 1998
**************
* CARACTERISTIQUES DU VENT
inconnu
            : identification du site
15.0
      [m/s]
            : intensite du vent de reference
64.5
      [m]
            : altitude du vent de reference
17.
      [m/s]
           : intensite du vent au dessus du moyeu
80.
      [m]
            : altitude du vent au dessus du moyeu
.79
      [m]
            : altitude moyenne des rugosités du sol
0.00
            : direction principale du vent
      [deg]
1.225
      [kg/m3]
            : masse volumique de l'air
* FIN DU FICHIER
```

۰.

.

Annexe J

Exemple d'un fichier de machine

```
CALCUL DES EFFORTS SUR LES EOLIENNES DE MOYENNE ET FORTE PUISSANCE
*
             A.D.E.M.E. - Nord - Pas de Calais
                 O.N.E.R.A. - I.M.F.L.
                  _____
                  FICHIER DE MACHINE
* NOM DU FICHIER : frisia
* ETUDE
           : FRISIA 4800/750kWh
* AUTEUR
           : BERLU
* DATE
            : Wed Jan 14 17:16:11 1998
******
* GEOMETRIE DU ROTOR
***************
FRISIA
           : identification de la machine
48.
       [m]
             : diamètre du rotor
64.5
       [m]
             : altitude du moyeu
5.
       [deg]
             : inclinaison de l'arbre rotor
2.73
       [m]
             : distance du plan rotor à l'axe du pylône
3
       [-]
             : nombre de pales
0.
       [deg]
             : angle de conicité du rotor
0.75
       [m]
             : rayon du moyeu
* GEOMETRIE DU PYLONE
*************************
62.7
       [m]
             : altitude du pylône
3.6
       [m]
             : diamètre de base
1.
             : demi-angle de conicité
       [deg]
***********
* FIN DU FICHIER
*********
```

·..

Annexe K

Exemple d'un fichier de pale

```
CALCUL DES EFFORTS SUR LES EOLIENNES DE MOYENNE ET FORTE PUISSANCE
           A.D.E.M.E. - Nord - Pas de Calais
*
               O.N.E.R.A. - I.M.F.L.
                 FICHIER DE PALE
* NOM DU FICHIER : frisia
* ETUDE
         : FRISIA W4800/750KW
* AUTEUR
         : BERLU
* DATE
          : Fri Jan 30 13:40:32 1998
: identification de la pale
APX 48
* Description en CORDE
*----
5
 : nombre de troncons
*No Nc
       Coef 1-5-9
                Coef 2-6-10
                            Coef 3-7
                                      Coef 4-8
1 1 0.15000000D+01
 2 1 0.129999995D+01
 3 2 0.129999995D+01 0.331111166D+00
 4 9 0.204444971D+01 -.497139075D-01 -.179327967D-01 -.696462827D-02
    0.388989112D-02 -.671130693D-03 0.552803268D-04 -.222422225D-05
    0.351433328D-07
 5 2 0.606999993D+00 -.795999991D+00
 ______
*No Xd [m] Xf [m]
```

Q	ዓ	n
ο	4	υ

*						
1		0.000	0.125			
2		0.125	3.750			
З		3.750	6.000			
4		6.000	22.500			
5		22.500	23.250			
·				·		
:						
r D€	esci	ription (en VRILLAGE	E		
¢		-				
×						
	: r	nombre de	e troncons			
No	Nc	Со	 ef 1-5-9	Coef 2-6-10	 Coef 3-7	Coef 4-8
۰ ــــ ^م						
1	2	0.00000	0000D+00 0.	287226664D+01		
2	1	0.10770	9999D+02	4000000000000	0 44070000000.00	0 4050404040 04
3	9	0.107724	4223D+02	1832669660+01	0.149790658D+00	0.425918404D-01
		190380	5694D-01 0.	300369113D-02	236862710D-03	0.934514169D-05
1	2	14085	1615D-06	140000000 01		
4	2	0.10999	99990-01	14666666600-01		
No		Xd [m]	Xf [m]		· .	
1	-	0.000	3.750			
2		3.750	6.000			
З		6.000	22.500			
4		22.500	23.250			
De	scr	iption e	en VRILLAGE	SUIVANT Y		
÷						
_	: n	lombre de	troncons			
No	Nc	Coe	ef 1-5-9	Coef 2-6-10	Coef 3-7	Coef 4-8
1	1	0.00000)000D+00		*******	
· ·No		Xd [m]	Xf [m]			
	-					
1		0.000	23.250			
:						
De	scr	iption e	en VRILLAGE	SUIVANT Z		
1						
	: n	ombre de	e troncons			

,

_____ _____ Coef 1-5-9 Coef 2-6-10 Coef 3-7 Coef 4-8 *No Nc 1 1 0.0000000D+00 *------Xd [m] Xf [m] *No *------------0.000 23.250 1 Description du CENTRAGE *_____ 2 : nombre de troncons Coef 2-6-10 Coef 3-7 *No Nc Coef 1-5-9 Coef 4-8 2 0.5000000D+02 -.666666667D+01 1 2 1 0.25000000D+02 *-----Xd [m] Xf [m] *No *--_____ -----0.000 3.750 1 2 3.750 23.250 * Description des POLAIRES 13 : nombre de troncons _____ *No L1 [m] L2 [m] No1 No2 - ----- ----- ---0.000 0.125 1 1 1 2 0.125 1 4.500 1 3 4.500 6.500 2 3 4 6.500 8.500 3 4 5 8.500 10.500 4 5 6 10.500 12.500 5 6 7 7 12.500 14.500 6 8 14.500 16.500 7 8 9 16.500 18.500 9 8 10 18.500 20.500 9 10 11 20.500 21.500 10 11 12 21.500 22.500 12 11 12 13 22.500 23.250 12

 $\mathbf{322}$

```
* Fichiers de POLAIRES
*No Nom du fichier
*-- -----------
 1 CYLINDRE
 2 R0450
 3 R0650
 4 R0850
 5 R1050
 6 R1250
 7 R1450
 8 R1650
 9 R1850
10 R2050
11 R2150
12 R2250
*----
      * Caracteristiques GENERALES
23.25
    [m]
      : envergure de la pale
6.
    [m]
       : début de la zone aéro.
    [m]
22.5
       : fin de la zone aéro.
*************
* Fin du Fichier
************
```

Annexe L

Exemple d'un fichier de polaires

```
*
  CALCUL DES EFFORTS SUR LES EOLIENNES DE MOYENNE ET FORTE PUISSANCE
*
*
             A.D.E.M.E. - Nord - Pas de Calais
*
*
                 O.N.E.R.A. - I.M.F.L.
*
                   _____
                  FICHIER DE POLAIRE
* NOM DU FICHIER : R2050
* ETUDE
           : FRISIA 4800/750kWh
           : BERLU
* AUTEUR
* DATE
           : Wed Jan 14 14:09:30 1998
* GENERALITE
R2050
             : identification de la polaire
6.E+06
      [-]
            : nombre de Reynolds
25.
       [\%]
             : position du foyer aérodynamique
10.
       [deg]
             : angle de décrochage
20
       [-]
             : index du point de début de non linéarité du Cz
-3.27
       [deg]
            : incidence de portance nulle
* TABLEAU DES COEFFICIENTS AERODYNAMIQUES
*********************
*No i [deg]
          Cz
               Cx
                    Cm
*-- ----- ----- ----- -----
 1 -180.00 0.0000 0.0150 0.0000
 2 -90.00 0.1000 1.3000 0.4581
 3 -70.00 -0.5400 1.2400 0.4265
 4 -40.00 -0.9000 0.7700 0.3370
 5 -30.00 -0.8300 0.5500 0.2733
 6 -20.00 -0.6000 0.3000 0.1517
```

```
7
   -14.00 -1.0000 0.0250 -0.0580
   -10.00 -0.6700 0.0140 -0.0618
 8
 9
    -8.00 -0.4800 0.0110 -0.0655
10
     0.20 0.3533 0.0078 -0.0896
     1.16
          0.4666 0.0078 -0.0920
11
12
     2.24
          0.5923
                0.0078 -0.0944
13
     3.44
          0.7329
                0.0082 -0.0971
14
     4.78
                0.0086 -0.0998
          0.8883
15
     6.00
          1.0401
                0.0091 -0.1021
--- liste coupée - liste coupée ---
                0.4951 -0.2186
42
    33.34
          1.0389
43
    34.10
         1.0358
                0.5144 -0.2224
44
    34.84
                0.5339 -0.2261
         1.0327
45
    35.57
          1.0295 0.5530 -0.2297
46
    36.29
          1.0263 0.5720 -0.2333
47
    37.00
         1.0229 0.5908 -0.2368
48
          0.6000 1.3000 -0.4484
    70.00
49
    90.00 0.0600 1.4000 -0.4581
   110.00 -0.5400 1.2400 -0.4365
50
   130.00 -0.8600 0.9500 -0.3764
51
52
   150.00 -0.8300 0.5500 -0.2933
53
   180.00 0.0000 0.0000 0.0000
*-----
* FIN DU FICHIER
```

Annexe M

Exemple d'un fichier de profil

```
*
  CALCUL DES EFFORTS SUR LES EOLIENNES DE MOYENNE ET FORTE PUISSANCE
*
            A.D.E.M.E. - Nord - Pas de Calais
                O.N.E.R.A. - I.M.F.L.
                  -----
                  FICHIER DE PROFIL
* NOM DU FICHIER : R2050
* ETUDE
          : FRISIA 4800/750kWh
* AUTEUR
          : BERLU
* DATE
           : Thu Jan 15 09:01:43 1998
GENERALITE
NACA 63(2)-215 MOD B : identification du profil
      [\%] : épaisseur relative
10.
************
* TABLEAU DES COORDONNEES DES POINTS DE DEFINITION DU PROFIL
*******************
*-----
*No Xe [-] Ye [-] Xi [-] Yi [-]
*-- ----- ----- ----- -----
 1 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
 2 0.0002 0.0034 0.0002 -0.0011
 3 0.0004 0.0051 0.0004 -0.0022
 4 0.0006 0.0064 0.0006 -0.0031
 5 0.0008 0.0075 0.0008 -0.0037
 6 0.0010 0.0085 0.0010 -0.0042
 7 0.0020 0.0125 0.0020 -0.0063
 8 0.0030 0.0156 0.0030 -0.0079
 9 0.0040 0.0182 0.0040 -0.0093
```

0.0050 0.0100 0.0200 0.0300 0.0400	0.0205 0.0293 0.0408 0.0489 0.0550	0.0050 0.0100 0.0200 0.0300	-0.0104 -0.0150 -0.0211 -0.0256
0.0100 0.0200 0.0300 0.0400	0.0293 0.0408 0.0489 0.0550	0.0100 0.0200 0.0300	-0.0150 -0.0211 -0.0256
0.0200 0.0300 0.0400	0.0408 0.0489 0.0550	0.0200 0.0300	-0.0211 -0.0256
0.0300	0.0489 0.0550	0.0300	-0.0256
0.0400	0.0550		
0 0500		0.0400	-0.0294
0.0500	0.0599	0.0500	-0.0328
0.0600	0.0640	0.0600	-0.0357
iste co	upée – l	iste com	upée
0.6750	0.0534	0.6750	-0.0332
0.7000	0.0491	0.7000	-0.0295
0.7250	0.0447	0.7250	-0.0258
0.7500	0.0402	0.7500	-0.0221
0.7750	0.0357	0.7750	-0.0185
0.8000	0.0311	0.8000	-0.0150
0.8250	0.0266	0.8250	-0.0117
0.8500	0.0222	0.8500	-0.0086
0.8750	0.0179	0.8750	-0.0058
0.9000	0.0137	0.9000	-0.0033
0.9250	0.0098	0.9250	-0.0013
0.9500	0.0062	0.9500	0.0001
0.9600	0.0048	0.9600	0.0005
0.9700	0.0036	0.9700	0.0007
0.9800	0.0023	0.9800	0.0008
0.9900	0.0012	0.9900	0.0006
0.9950	0.0006	0.9950	0.0003
1 0000	0.0000	1.0000	0.0000
	iste co 0.6750 0.7250 0.7250 0.7500 0.7750 0.8000 0.8250 0.8500 0.8500 0.9250 0.9250 0.9500 0.9600 0.9600 0.9600 0.9800 0.9900 0.9950	iste coupée - 1 0.6750 0.0534 0.7000 0.0491 0.7250 0.0447 0.7500 0.0402 0.7750 0.0357 0.8000 0.0311 0.8250 0.0266 0.8500 0.0222 0.8750 0.0179 0.9000 0.0137 0.9250 0.0098 0.9500 0.0048 0.9500 0.0048 0.9700 0.0036 0.9800 0.0023 0.9900 0.0012	iste coupée - liste con 0.6750 0.0534 0.6750 0.7000 0.0491 0.7000 0.7250 0.0447 0.7250 0.7500 0.0402 0.7500 0.7750 0.0357 0.7750 0.8000 0.0311 0.8000 0.8250 0.0266 0.8250 0.8500 0.0222 0.8500 0.8750 0.0179 0.8750 0.9000 0.0137 0.9000 0.9250 0.0098 0.9250 0.9500 0.0062 0.9500 0.9600 0.0048 0.9600 0.9700 0.0036 0.9700 0.9800 0.0023 0.9800 0.9900 0.0012 0.9900 0.9950 0.0006 0.9950

Annexe N

Exemple d'un fichier de rigidités

```
CALCUL DES EFFORTS SUR LES EOLIENNES DE MOYENNE ET FORTE PUISSANCE
              A.D.E.M.E. - Nord - Pas de Calais
                   O.N.E.R.A. - I.M.F.L.
                    -----
                    FICHIER DE MATERIAUX
* NOM DU FICHIER : frisia
* ETUDE
            : FRISIA 4800/750kWh
            : BERLU
* AUTEUR
* DATE
            : Wed Jan 14 17:28:14 1998
: identification de la nacelle
frisia
* TABLEAU I : INERTIES EQUIVALENTES
*No Xse
           <ES>
                  <EIyy>
                          <EIzz>
                                  <GJ>
                                          <kyGS>
                                                 <kzGS>
                          [N.m2]
   [m]
            [N]
                 [N.m2]
                                  [N.m2]
                                           [N]
                                                   [N]
       _ _____ ___
   0.000 0.460E+11 0.150E+11 0.150E+11 0.100E+11 0.000E+00 0.000E+00
 1
 2
   0.740 0.460E+11 0.150E+11 0.150E+11 0.100E+11 0.000E+00 0.000E+00
 3 1.500 0.755E+10 0.220E+10 0.220E+10 0.500E+09 0.000E+00 0.000E+00
   5.000 0.479E+10 0.586E+09 0.140E+10 0.207E+09 0.000E+00 0.000E+00
 4
   8.000 0.381E+10 0.240E+09 0.851E+09 0.928E+08 0.000E+00 0.000E+00
 5
 6 11.000 0.313E+10 0.121E+09 0.524E+09 0.477E+08 0.000E+00 0.000E+00
   14.000 0.259E+10 0.609E+08 0.328E+09 0.247E+08 0.000E+00 0.000E+00
 7
   17.000 0.219E+10 0.305E+08 0.208E+09 0.129E+08 0.000E+00 0.000E+00
 8
 9 20.000 0.172E+10 0.143E+08 0.123E+09 0.623E+07 0.000E+00 0.000E+00
10 23.000 0.114E+10 0.568E+07 0.618E+08 0.257E+07 0.000E+00 0.000E+00
   26.000 0.590E+09 0.171E+07 0.264E+08 0.840E+06 0.000E+00 0.000E+00
11
```

12 29.000 0.200E+09 0.300E+06 0.893E+07 0.180E+06 0.000E+00 0.000E+00 * TABLEAU II : MASSES LINEIQUES EQUIVALENTES *No Xse <Rom> <RoIp> <Rofy> <Rofz> [m] [kg/m] [kg.m] [kg.m] [kg.m] *--_____ 1 0.000 14.62E+01 0.140E+04 0.000E+00 0.000E+00 2 2.000 13.44E+01 0.140E+04 0.000E+00 0.000E+00 3 4.000 12.26E+01 0.300E+03 0.000E+00 0.000E+00 4 6.000 11.08E+01 0.207E+03 0.000E+00 0.000E+00 5 8.000 9.902E+01 0.128E+03 0.000E+00 0.000E+00 10.000 8.723E+01 0.810E+02 0.000E+00 0.000E+00 6 7 12.000 7.544E+01 0.500E+02 0.000E+00 0.000E+00 8 14.000 6.364E+01 0.320E+02 0.000E+00 0.000E+00 16.000 5.185E+01 0.190E+02 0.000E+00 0.000E+00 9 18.000 4.006E+01 0.960E+01 0.000E+00 0.000E+00 10 20.000 2.826E+01 0.430E+01 0.000E+00 0.000E+00 11 12 22.000 1.647E+01 0.160E+01 0.000E+00 0.000E+00 23.200 9.400E+00 0.160E+01 0.000E+00 0.000E+00 12 * TABLEAU III : CENTRES E, C ET ANGLE _____ Ye [m] Ze [m] *No Xse [m] Yc [m] Zc [m] A [deg] *-- -----_ _ _ _ _ _ _ _ _ _____ _____ 1 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 2 0.740 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 3 1.500 0.000 0.000 0.000 0.000 0.000 4 5.000 0.059 0.000 0.013 0.000 1.300 5 8.000 0.063 0.000 0.018 0.000 1.090 0.058 0.015 0.000 0.860 6 11.000 0.000 7 14.000 0.051 0.015 0.000 0.860 0.000 17.000 0.045 0.000 0.910 8 0.000 0.016 9 20.000 0.041 0.000 0.017 0.000 0.830 10 23.000 0.040 0.000 0.016 0.000 0.630 11 26.000 0.047 0.000 0.014 0.000 0.160 0.000 -0.520 12 29.000 0.082 0.000 0.010 * FIN DU FICHIER

Annexe O

Exemple d'un fichier de nacelle

```
*****
 CALCUL DES EFFORTS SUR LES EOLIENNES DE MOYENNE ET FORTE PUISSANCE
*
          A.D.E.M.E. - Nord - Pas de Calais
*
             O.N.E.R.A. - I.M.F.L.
               ____
              FICHIER DE NACELLE
* NOM DU FICHIER : frisia
        : FRISIA 4800/750kWh
* ETUDE
* AUTEUR
        : BERLU
* DATE
         : Wed Jan 14 17:28:14 1998
***********
* CARACTERISTIQUES DU GENERATEUR
frisia
          : identification de la nacelle
     [-]
1
          : modèle de la génératrice
1690.0
     [tr/min] : vitesse de rotation nominale
1.
     [-]
          : rendement de la génératrice
* CARACTERISTIQUES DU MULTIPLICATEUR
60.4
     [-]
          : rapport de multiplication
     [-]
1.
          : rendement du multiplicateur
* FIN DU FICHIER
```

· ·

Annexe P

Exemple d'un fichier de maillage

***	****	****	****	****	****	****	**	****	**	***:	***	***	****	***:	****	***	**	**	***	***	***
*																	-				-
* (CALCU	JL DE	ES E	FFOR	TS SU	R LE	SI	EOLI	ENI	NES	DE	MOY	(ENNE	ΕT	FORT	ΓE	Ρ	דטי	SSA	INC	E
*						– F	IC	HIEF	R DI	E M/	AILI	LAGI	Ξ								
*																					
* N(DM DU	FIC	CHIE	R : '	tjb																
* E.	ΓUDE			: .	tjaer	ebor	g														
* Al	JTEUR	2		:]	BERLU																
* D#	ATE			: 1	Mon S	ep 2	2	14:5	53:0	00											
*																					
****	F 주 주 주 주	****	****	****	++++ ; don+	****	**	****		***	***: :]] .	***'	****	***	* * * * *	F F 7	* *	***	***	**	***
****	k sk sk sk sk	i she she she s	ic siz siz siz :	• •	*****	****	a	****	uu ***	ща. ***	L (k = = = :	age ****	k sk sk sk sk	ata ata ata	ie sie sie sie si	***	ik ik	a she she s	***	a ske ake a	***
* T/	RLEA		ES NI		S ET	DES	CO	דדמא	יידי			T.TN	TTES	* * *			T T			• • •	***
****	*****	****	****	****	*****	****	**:	****	***	***:	***	****	*****	***:	****	***	**	**	***	**	***
*													• • • •								
*No	Xse	[m]	Ynd	[m]	Znd	[m]	u	v	W	Rx	Ry	Rz									
*																					• .
1	0.	000	-0	.450	Ο.	000	1	1	1	1	1	1									
2	1.	000	-0	.386	0.	000	0	0	0	0	0	0									
З	2.	000	-0	.278	0.	002	0	0	0	0	0	0									
4	З.	000	-0	.129	0.	006	0	0	0	0	0	0									
5	4.	000	-0	.016	0.	010	0	0	0	0	0	0									
6	5.	000	0	.059	0.	015	0	0	0	0	0	0									
7	8.	000	0	.063	0.	030	0	0	0	0	0	0									
8	11.	000	0	. 058	0.	044	0	0	0	0	0	0									
9	15.	000	0	. 049	0.	063	0	0	0	0	0	0									
10	18.	000	0	.043	0.	077	0	0	0	0	0	0									
11	21.	000	0	.040	0.	092	0	0	0	0	0	0									
12	24.	000	0	.041	0.	106	0	0	0	0	0	0									
13	27.	000	0	.055	0.	123	0	0	0	0	0	0									
14	28.	000	0	.066	0.	130	0	0	0	0	0	0									
15	29.	000	0	.081	0.	137	0	0	0	0	0	0									
*																					

2	2	ົ
ο	o	4

****	****	***	******
* CO	NNEC	TIV	ITES DE
****	****	***	*****
*			
*No	N 1	N2	Barre
*			
1	1	2	1 1
2	2	с л	1
د ۵	<u>ح</u>	+ 5	⊥ 1
ד ג	т Б	5 6	⊥ 1
5 6	6	7	⊥ 1
7	7	ر م	⊥ 1
8	8	9	- 1
9	9	10	1
10	10	11	1
11	11	12	1
12	12	13	- 1
13	13	14	1
14	14	15	1
*			
****	****	***	******
* LI	STE	DES	FICHIE
****	****	***	******
*			
*No	Nom	du 1	fichier
*			
1	tjae	rebo	org
*			
****	****	***	******
* FI	N DU	FIC	CHIER
****	****	***	******

.

۰.

•• ..

Annexe Q

Exemple d'un fichier de résultats

***	***************************************	**
*		*
*	CALCUL DES EFFORTS SUR LES EOLIENNES DE MOYENNE ET FORTE PUISSANCE	*
*		*
*	A.D.E.M.E Nord - Pas de Calais	*
*		*
*	0.N.E.R.A I.M.F.L.	*
*		*
*	FICHIER DE RESULTATS	*
*		*
*	Exécuté le Tue Feb 17 11:22:47	*
*	Fichier de commandes: frisia	
*		*
***	***************************************	**
	SYNTHESE DES DONNEES DU SITE	
Fic Ide	hier source: [/use/MDS/berlu/eolienne/f_site/frisia.sit] ntification du site inconnu	
Int	ensité du vent incident non perturbé: 15.000 [m/s]	
Alt	itude de référence du vent incident: 64.500 [m]	
Int	ensité du vent au dessus du moyeu: 17.000 [m/s]	
Alt	itude du vent au dessus du moyeu: 80.000 [m]	
Alt	itude moyenne des rugosités du sol: 0.790 [m]	
Dir	ection du vent incident35.00 [deg]	
Mas	se volumique de l'air 1.225 [kg/m3]	
	SYNTHESE DE LA GEOMETRIE DE LA PALE	
Fic	hier source: [/use/MDS/berlu/eolienne/f_pale/frisia.pal]	
Ide	ntification de la pale APX 48	
Env	ergure des pales 23.250 [m]	
Déb	ut de la zone aérodynamique 6.000 [m]	
Fin	de la zone aérodynamique 22.500 [m]	

Fichier source...: [/use/MDS/berlu/eolienne/f_inert/frisia.mat] Identification des materiaux.....: frisia Masse de la pale..... 1804.554 [kg] Mt statique de la pale/au pied de pale....: 14796.884 [kg.m] Mt statique de la pale/au centre du rotor..: 16150.300 [kg.m] --- SYNTHESE DES ELEMENTS DE LA NACELLE -----Fichier source...: [/use/MDS/berlu/eolienne/f_nacel/frisia.nac] Identification de la nacelle.....: frisia 1 [-] Type de générateur..... Vitesse de rotation du générateur..... 1690.000 [tr/min] Rendement du générateur..... 1.000 [-] Rapport de multiplication..... 60.400 [-] Rendement du multiplicateur..... 1.000 [-] --- SYNTHESE DES PARAMETRES DE CALCUL -----Point de controle equirepartis Nombre de segments de discretisation de la zone aerodynamique...: 40 [-] Nombre d'incrementations azimutales.....: 36 [-] Precision sur les vitesses induites......: 0.00010 [-] Nombre d'iterations maximum sur les vitesses induites...: 100 [-] --- SYNTHESE DES ALGORITHMES UTILISES -----Prise en compte des pertes en bord marginal.....: OUI Prise en compte des pertes au niveau du moyeu.....: OUI Prise en compte de la vitesse induite tangentielle...: OUI Utilisation du modele de freinage complexe.....: OUI Modele de cisaillement du vent..... Puissance, 0.160 Prise en compte de l'ombre du pylone..... Modèle 2D Modèle de correction "Yawing" des vit. ind. ax.....: ECN, d. e version corrigee Utilisation du modele de decrochage de Viterna.....: NON Correction de Cx et Cz par les effets aero. 3D.....: NON

--- SYNTHESE DES EFFORTS, PUISSANCES RESULTANTES ------Vitesse instantanée du rotor...: 2.930 [rad/s]

Calage des pales/moyeu..... 4.250

4.250 [deg]

Résultantes dans le repère pale Rpl :

 +	Azimut [deg]	Fx [kN]	Fy [kN]	Fz [kN]	Mx [kN.m]	My [kN.m]	Mz [kN.m]	Couple [kN.m]	Puissanc [kW]
I	0.0	-23.05	6.01	67.03	-84.78	-341.96	-2.56	89.29	261.6
I	-10.0	-23.30	9.11	67.30	-110.45	-345.57	-2.60	117.29	343.6
Ì	-20.0	-23.68	12.12	68.10	-135.30	-350.86	-2.66	144.39	423.(
	-30.0	-24.17	14.95	69.40	-158.52	-357.51	-2.75	169.73	497.3
1	-40.0	-24.74	17.50	71.16	-179.32	-365.07	-2.86	192.45	563.8
I	-50.0	-25.35	19.68	73.33	-196.87	-372.96	-2.99	211.63	620.0
1	-60.0	-25.95	21.41	75.85	-210.35	-380.46	-3.15	226.41	663.3
I	-70.0	-26.51	22.62	78.64	-219.28	-387.18	-3.32	236.25	692.2
I	-80.0	-27.01	23.27	81.61	-223.46	-393.23	-3.52	240.91	705.9
I	-90.0	-27.38	23.35	84.67	-223.03	-397.65	-3.72	240.54	704.8
1	-100.0	-27.64	22.89	87.73	-218.32	-400.89	-3.94	235.49	690.0
I	-110.0	-27.73	21.90	90.70	-209.04	-401.54	-4.14	225.47	660.6
1	-120.0	-27.64	20.39	93.49	-195.46	-400.17	-4.33	210.75	617.5
I	-130.0	-27.48	18.42	96.01	-178.29	-397.74	-4.50	192.11	562.8
I	-140.0	-27.29	16.08	98.18	-158.20	-395.04	-4.63	170.26	498.8
I	-150.0	-27.15	13.45	99.94	-135.95	-392.92	-4.73	146.03	427.8
I	-160.0	-27.02	10.58	101.24	-112.20	-391.55	-4.76	120.14	352.0
ł	-170.0	-26.20	7.37	102.04	-85.10	-381.57	-4.70	90.63	265.5
1	-180.0	-23.15	3.46	102.30	-48.08	-336.56	-4.58	50.68	148.4
I	-190.0	-23.67	0.48	102.04	-24.60	-346.00	-4.67	24.97	73.1
I	-200.0	-24.86	-2.10	101.24	-5.39	-362.47	-4.64	3.82	11.1
	-210.0	-25.19	-4.70	99.94	15.13	-366.09	-4.53	-18.65	-54.6
I	-220.0	-25.30	-7.06	98.18	33.92	-366.98	-4.36	-39.22	-114.9
	-230.0	-25.36	-9.07	96.01	49.69	-367.42	-4.18	-56.50	-165.5
I	-240.0	-25.40	-10.65	93.49	61.76	-367.72	-3.98	-69.74	-204.3
I	-250.0	-25.41	-11.74	90.70	69.69	-367.67	-3.77	-78.50	-230.0
I	-260.0	-25.33	-12.31	87.73	73.31	-366.74	-3.56	-82.55	-241.8
I	-270.0	-25.10	-12.37	84.67	72.72	-364.11	-3.36	-81.99	-240.2
I	-280.0	-24.80	-11.90	81.61	67.71	-360.68	-3.18	-76.63	-224.5
I	-290.0	-24.41	-10.96	78.64	58.81	-356.23	-3.02	-67.03	-196.4
I	-300.0	-24.02	-9.55	75.85	46.13	-352.00	-2.88	-53.30	-156.1
I	-310.0	-23.66	-7.72	73.33	30.11	-348.07	-2.76	-35.89	-105.1
1	-320.0	-23.35	-5.49	71.16	11.12	-344.51	-2.67	-15.23	-44.6
1	-330.0	-23.10	-2.93	69.40	-10.44	-341.73	-2.61	8.25	24.1
l	-340.0	-22.96	-0.10	68.10	-34.05	-340.16	-2.56	33.97	99.5
1	-350.0	-22.94	2.91	67.30	-59.06	-340.17	-2.55	61.24	179.4

Valeurs extrêmes et moyennes des résultantes :

| Composante | min. | Mean | Max. |

Calcul des efforts subis par les éoliennes de moyenne et forte puissance

+			-+	+	+	+					
I	Fx	[kN]	I	-27.73	-25.20	-22.94					
I	Fy	[kN]	I	-12.37	5.26	23.35					
1	Fz	[kN]	1	67.03	84.67	102.30					
I	Mx	[kN.m]	1	-223.46	-72.93	73.31					
I	My	[kN.m]	1	-401.54	-368.03	-336.56					
I	Mz	[kN.m]	1	-4.76	-3.60	-2.55					
+-			-+-	+.	+.	+					
*>	*******************************										
*	* FIN DU FICHIER DE SYNTHESE *										
<u>ـ</u> ـــ											



•